UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Jeremias Stein Rodriguês

UMA INTRODUÇÃO ÀS ÁLGEBRAS DE CAMINHOS DE LEAVITT

Florianópolis

2015

Jeremias Stein Rodriguês

UMA INTRODUÇÃO ÀS ÁLGEBRAS DE CAMINHOS DE LEAVITT

Dissertação submetida ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Eliezer Batista (UFSC)

Florianópolis

2015

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

RODRIGUÊS, JEREMIAS S.
UMA INTRODUÇÃO ÀS ÁLGEBRAS DE CAMINHOS DE LEAVITT / JEREMIAS S. RODRIGUÊS ; orientador, ELIEZER BATISTA - Florianópolis, SC, 2015.
99 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas. Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Inclui referências

1. Matemática. 2. ÁLGEBRAS. 3. ISOMORFISMOS. 4. GRAFOS. I. BATISTA, ELIEZER. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

Jeremias Stein Rodriguês

UMA INTRODUÇÃO ÀS ÁLGEBRAS DE CAMINHOS DE LEAVITT

Esta Dissertação foi julgada aprovada para a obtenção do Título de "Mestre em Matemática", e aprovada em sua forma final pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT.

Florianópolis, 21 de Dezembro 2015.

Prof. Chefe, Dr. Celso Melchiades Doria
Coordenador do Curso

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Eliezer Batista (UFSC)
Orientador

Prof. Dra. Alda Dayana Mattos Mortari (UFSC)
Presidente

Prof. Dr. Fabiano Carlos Cidral (IFSC)

Prof. Dr. Fernando de Lacerda Mortari (UFSC)

AGRADECIMENTOS

Durante todos os meus anos de estudo contei com o apoio de muitas pessoas, as quais fizeram grande diferença na minha vida dentro e fora do ambiente acadêmico. Assim, não posso esquecer de agradecer a estas pessoas quando possuo a oportunidade de deixar isto aqui.

Primeiramente gostaria de agradecer a minha mãe, dona Frida, que sempre me incentivou e me deu forças nos momentos em que mais precisava. Ela que sempre foi um exemplo do esforço que devo ter em todos os aspectos da minha vida, deve ser a pessoa a quem mais devo gratidão. Não posso esquecer minhas irmãs, Carla e Manoela, que mesmo com a minha distância (devida aos estudos e trabalho) sempre buscam contato para saber como estou, assim como não deixar me abater pelos tombos que a vida proporciona.

Também devo muita gratidão ao Cleber, que nos últimos dois anos têm tido toda a paciência do mundo comigo e, mesmo quando brigava, só queria o meu bem. A ele devo meus momentos mais alegres e felizes, que me permitiram passar por essa etapa acadêmica de forma mais fácil.

Não posso esquecer dos meus queridos amigos, que, mesmo longe em alguns momentos, são pessoas que carrego no coração. Deles devo citar Bruna, Douglas (vulgo Jeff), Emanuela, Jean, Laura, Luís, Marina e Mayson. Obrigado por todos os momentos que passamos juntos, os felizes e os tristes, todos foram muito importantes. Alguns amigos se vão e outros surgem, como a Cristiane e a Janaí, que apareceram como simples colegas de trabalho e hoje são boas amigas, as quais devo muitas risadas e momentos divertidos no IFSC.

Aos meus colegas de curso e de estudos, Ana, Eliane, Lisie, Paulo e Ranúzy, que fizeram parte dos meus finais de semana nestes dois anos. Desejo a vocês todo o sucesso e felicidade.

Por último, mas não menos importante, aos meus queridos professores Dra. Alda Dayana Mattos Mortari e Dr. Fernando de Lacerda Mortari, que, além de um belo casal, são ótimos professores e um exemplo de como cada um nessa profissão devia ser, e ao Dr. Eliezer Batista, por ser um ótimo orientador e pelo entusiamos com que ensina tópicos tão complexos.

RESUMO

Dados um corpo $\mathbb{K}$ e o grafo dirigido E, definido por (E^0, E^1, r, s), em que r e s são funções aplicadas nas arestas de E, vamos definir as $\mathbb{K}$-Álgebras de Caminhos e as $\mathbb{K}$-Álgebras de Caminhos de Leavitt do grafo E, que denotaremos respectivamente por $A(E)$ e $L_K(E)$, como as $\mathbb{K}$-álgebras geradas a partir dos conjuntos de arestas e vértices do grafo E, e com relações que serão definidas neste trabalho. Iremos mostrar exemplos de grafos que geram Álgebras de Caminhos e Álgebras de Caminhos de Leavitt isomorfas a estruturas matemáticas já conhecidas, de forma a entender melhor como se comportam estas álgebras. Além disso, iremos provar resultados destas álgebras que são obtidos através de informações do grafo E. O principal resultado que iremos verificar neste trabalho diz como o grafo E pode implicar nas Álgebras de Caminhos de Leavitt serem simples, ou não.
Palavras-chave: Grafos dirigidos, Álgebras de Caminhos de Leavitt, Isomorfismos de Álgebras, Álgebra Simples.

ABSTRACT

Given $\mathbb{K}$ a field and the directed graph E, defined by (E^0, E^1, r, s), such that r and s are functions applied to the edges of E, we'll define the Path $\mathbb{K}$-Algebras and the Leavitt Path $\mathbb{K}$-Algebras of the graph E, that we are going to respectively call $A(E)$ and $L_K(E)$, as the $\mathbb{K}$-algebras generated by the sets of edges and vertices of E, with relations that will be defined in this work. We'll be seeing examples of graphs that generate Path Algebras and Leavitt Path Algebras that are isomorphic to mathematical structures already known, as a way of better understanding how these algebras work. Furthermore, we'll be proving results of these algebras based on informations obtained from the graph E. The main result that we are going to prove here show us how the graph E can make the Leavitt Path Algebra be simple or not.
Keywords: Directed Graph, Leavitt Path Algebras, Algebra Isomorphisms, Simple Algebra.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

As Álgebras de Caminhos de Leavitt foram introduzidas por Gene Abrams e Gonzalo Aranda Pino, em (ABRAMS; PINO, 2005) como uma nova Álgebra de caminhos definida sobre um grafo estendido, em que também são adicionadas novas relações, conhecidas como as relações de $Cuntz - Krieger$.

Então, dado um grafo dirigido E, em que $E = (E^0, E^1, r, s)$, com E^0 e E^1 conjuntos enumeráveis de vértices e arestas, respectivamente, r e s funções aplicadas aos vértices de E, queremos construir estruturas algébricas a partir dos elementos deste grafo dirigido. Assim, com relações definidas nos vértices e arestas iremos definir às Álgebras de caminhos como estruturas geradas a partir do grafo dirigido e das relações que serão estabelecidas. Para a definição as Álgebras de Caminhos de Leavitt, primeiro é criada uma versão mais completa do grafo dirigido E, que denotaremos por $\widehat{E}$, em que são criadas as arestas "inversas"das arestas originais do grafo. Aqui, assim como nas Álgebras de caminhos, serão estabelecidas novas relações que serão aplicas aos elementos do novo grafo dirigido. Para compreender melhor como são e como se comportam estas duas estruturas, também iremos buscar grafos que geram Álgebras de caminhos ou Álgebras de Caminhos de Leavitt que sejam isomorfas a estruturas que já conhecemos da Álgebra Abstrata. O texto será estruturado da seguinte forma:

No primeiro capítulo começamos com uma abordagem inicial sobre grafos dirigidos, apresentando definições e elementos básicos da teoria, e em seguida são definidas as funções *source* e *range* que possibilitam a definição de grafos dirigidos. Aqui também é abordado a transposição da informação do grafo para uma forma matricial, em que dependendo de quais informações queremos carregar, temos um tipo de matriz diferente a ser construída. Além disso, também definimos o que é um caminho em um grafo dirigido, operações entre caminhos em um grafo, o que são caminhos fechados e ciclos.

No segundo capítulo definimos o que são $\mathbb{K}$-Álgebras de caminhos, que denotamos por $A(E)$, e as relações entre os elementos do grafo para esta estrutura. Apresentamos também exemplos de grafos em que a álgebra gerada seja uma estrutura já conhecida, mostrando isto através de um isomorfismo construído entre as duas. Com estes isomorfismos observamos que é mais simples de entender como são os elementos de $A(E)$ e como esta álgebra se comporta.

No terceiro capítulo são definidas as $\mathbb{K}$-Álgebras de caminhos de Leavitt, denotadas por $L_K(E)$, criando antes um novo grafo, estendido do grafo E original, e adicionando as duas relações de $Cuntz-Krieger$ a definição das Álgebras de Caminhos. Assim como no capítulo anterior, também apresentamos exemplos de grafos que geram Álgebras de caminhos de Leavitt que sejam isomorfas a estruturas já conhecidas.

No último capítulo definiremos o que é um subconjunto hereditário e saturado nos vértices de E. Com isto, verificamos quais características do grafo dirigido E que fazem com que a Álgebra de Caminhos de Leavitt seja uma álgebra simples ou não.

Aqui, será necessário que o leitor tenha conhecimentos de conceitos de Álgebra Linear, como espaço vetorial, base de um espaço vetorial, dimensão e combinação linear, que podem ser encontrados em (HEFEZ; FERNANDES, 2010), assim como conceitos de Álgebra Abstrata, como unidades locais, álgebra, álgebra livre, homomorfismo de álgebras e isomorfismos de álgebras, quem o leitor encontra em (ROTMAN, 2003).

Durante todo o trabalho nossa principal referência será o artigo de Abrams e Pino (ABRAMS; PINO, 2005). Quando formos utilizar de alguma outra referência, isto será indicado.

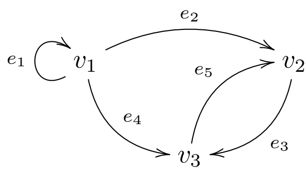
1 TEORIA DE GRAFOS

Neste capítulo apresentaremos os conceitos iniciais para o desenvolvimento deste trabalho. Para isto começaremos com as definições dos elementos básicos que compõem um grafo, ou seja, vértices e arestas. Quando orientamos às arestas de um grafo, temos um tipo de grafo que chamamos de grafo dirigido e que será a base de estudo de todo o nosso trabalho.

Por último, vamos definir o que é um caminho em um grafo dirigido e definir uma operação que possa ser aplicada em caminhos adjacentes.

1.1 GRAFOS DIRIGIDOS

Para definirmos o que é um grafo dirigido e quais são os elementos que o compõem, primeiro vamos ver um exemplo de uma representação de um grafo dirigido:



Vamos chamar de vértices os elementos v_1, v_2 e v_3, no grafo acima, e de arestas os segmentos que conectam dois vértices e possuem uma direção, neste caso e_1, e_2, e_3, e_4 e e_5.

Definição 1.1.1. *Um* ***grafo dirigido*** *consiste de uma quádrupla ordenada $E = (E^0, E^1, r, s)$, em que:*

- *E^0 é um conjunto, cujos elementos são chamados de vértices;*
- *E^1 é um conjunto, cujos elementos são chamados de arestas;*
- *$r, s : E^1 \to E^0$ são funções.*

A função s é chamada de *source*, mas vamos denominá-la por *origem* aqui, e a função r é chamada de *range*, que vamos chamar de *destino* neste trabalho.

Note que dada uma aresta $e \in E^1$, $s(e)$ e $r(e)$ são os vértices que são ligados pela aresta e. Como a aresta possui uma direção, temos que $s(e)$ é o vértice de onde parte a aresta e e $r(e)$ é o vértice em que a aresta chega.

Exemplo 1.1.2. *Dados* $E^0 = \{v\}$ *e* $E^1 = \{e\}$*, com* $s(e) = v = r(e)$*, então* $E = (E^0, E^1, r, s)$ *é um grafo dirigido.*

A partir deste momento vamos nos referir aos grafos dirigidos apenas por grafos, para facilitar a leitura deste trabalho.

Definição 1.1.3. *A **representação** de um grafo é o esboço visual dos elementos e informações fornecidas pela quádrupla* (E^0, E^1, r, s)*.*

Se os conjuntos $E^0 = \{v_1, v_2\}$ e $E^1 = \{e\}$, de forma que a representação do grafo formado por estes conjuntos é dado por:

$$v_1 \xrightarrow{e} v_2$$

Podemos observar que as funções r e s são aplicadas da seguinte forma:

$$r(e) = v_2$$

e

$$s(e) = v_1.$$

Com isto, sempre que tivermos um grafo podemos fazer uma representação dele na forma visual como é feita no início desta seção e neste caso dizemos que o grafo é representado pelo seu esboço. Com isto, podemos fazer uma representação do grafo que foi apresentado no exemplo anterior.

Exemplo 1.1.4. *Dado o grafo do exemplo (1.1.2), podemos construir a representação do grafo da forma:*

$$\begin{tikzcd} v \arrow[loop right, "e"] \end{tikzcd}$$

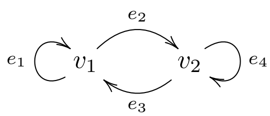
Este exemplo de grafo é um dos mais simples que podemos apresentar, os únicos grafos mais simples que este é o grafo que não contém vértices ou arestas, ou o grafo que contém apenas um vértice, mas como nestes casos os exemplos são triviais, deixemos estes exemplos de lado.

Exemplo 1.1.5. *Dados os conjuntos* $E^0 = \{v_1, v_2\}$ *e* $E^1 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$*, em que são satisfeitos:*

- $v_1 = r(e_1) = r(e_3);$
- $v_1 = s(e_1) = s(e_2);$

- $v_2 = r(e_2) = r(e_4)$;
- $v_2 = s(e_3) = s(e_4)$.

O grafo $E = (E^0, E^1, r, s)$ *pode ser representado por:*



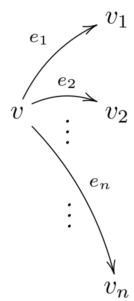
Exemplo 1.1.6. *Dado o grafo* $E = (E^0, E^1, r, s)$ *em que* $E^0 = \{v, v_i; i \in \mathbb{N}^*\}$, $E^1 = \{e_i; i \in \mathbb{N}^*\}$ *e,* $\forall k \in \mathbb{N}^*$, *são satisfeitas:*

$$s(e_k) = v$$

e

$$r(e_k) = v_k.$$

Então, o grafo tem a seguinte representação:



Do exemplo acima podemos definir o conjunto $s^{-1}(v)$ tal que dado $v \in E^0$ temos que $s^{-1}(v) = e$, em que $e \in E^1$ e $s(e) = v$, ou seja, $s^{-1}(v)$ é o conjunto de arestas $\{e \in E^1; s(e) = v\}$.

Definição 1.1.7. *Se* $s^{-1}(v)$ *é um conjunto finito, para todo* $v \in E^0$, *dizemos que* E *é um* ***grafo de linhas finitas****.*

No exemplo anterior temos que v é a origem de infinitas arestas, ou seja,

$$s^{-1}(v) = \{e_1, e_1, ..., e_n, ...\},$$

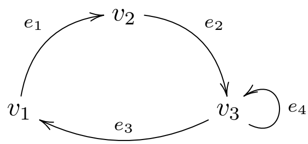
assim o grafo não é um grafo de linhas finitas.

Definição 1.1.8. *Se* E^0 *ou* E^1 *são conjuntos infinitos, dizemos que o grafo* $E = (E^0, E^1, r, s)$ *é um* ***grafo infinito****. Se* E^0 *e* E^1 *forem conjuntos finitos, dizemos que o grafo é* ***finito****.*

Exemplo 1.1.9. *Sejam $E^0 = \{v_1, v_1, v_3\}$ e $E^1 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, tal que:*

- $v_1 = s(e_1) = r(e_3)$;
- $v_2 = r(e_1) = s(e_2)$;
- $v_3 = r(e_2) = s(e_3) = s(e_4) = r(e_4)$.

Conseguimos construir a representação do grafo E:



Note que no exemplo anterior temos que:

- $s^{-1}(v_1) = \{e_1\}$;
- $s^{-1}(v_2) = \{e_2\}$;
- $s^{-1}(v_3) = \{e_3, e_4\}$.

Desta forma temos um grafo de linhas finitas.

Definição 1.1.10. *Sejam E um grafo e $v \in E^0$. Dizemos que:*

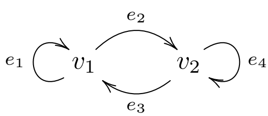
*i) v é uma **fonte** se não existir $e \in E^1$ tal que $r(e) = v$;*

*ii) v é um **sorvedouro** se não existir $e \in E^1$ tal que $s(e) = v$;*

*iii) v é um **emissor infinito** se $s^{-1}(v)$ é um conjunto infinito.*

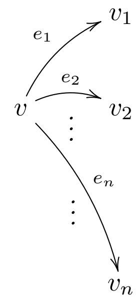
Intuitivamente, uma fonte é um vértice que não recebe arestas, ou seja, um vértice que só é origem de arestas do grafo; um sorvedouro é um vértice que é ponto de chegada de arestas do grafo, mas não é origem de nenhuma aresta do grafo; um emissor infinito é um vértice que é origem de infinitas arestas do grafo. Note que um vértice não tem que obrigatóriamente ser uma fonte ou um sorvedouro de um grafo, isto pode ser observado no exemplo abaixo.

Exemplo 1.1.11. *Se $E = (E^0, E^1, r, s)$ é representado da forma:*



nenhum vértice do grafo é uma fonte, sorvedouro ou emissor infinito, pois $s^{-1}(v_1) = \{e_1, e_2\}$ e $s^{-1}(v_2) = \{e_3, e_4\}$.

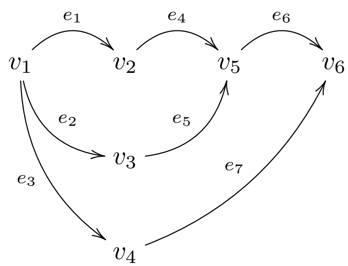
Exemplo 1.1.12. *Se $E = (E^0, E^1, r, s)$ é um grafo que possui a representação:*



Temos que v_k é um sorvedouro do grafo, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, e v é uma fonte do grafo. Também podemos notar que o vértice v é um emissor infinito, pois $s^{-1}(v) = \{e_1, e_2, ..., e_n, ...\}$.

Segue dos exemplos anteriores que um grafo pode, ou não, ter um ou mais vértices que são uma fonte, um sorvedouro ou um emissor infinito.

Exemplo 1.1.13. *Sejam $E^0 = \{v_1, ..., v_6\}$ e $E^1 = \{e_1, ..., e_7\}$ tal que o grafo $E = (E^0, E^1, r, s)$ tem a seguinte representação:*



Neste caso, temos que v_1 é uma fonte e v_6 é um sorvedouro.

Definição 1.1.14. *Se $v \in E^0$ é um sorvedouro ou um emissor infinito, dizemos que v é um **vértice singular**. Caso contrário dizemos que v é um **vértice regular**.*

Vértices regulares serão muito importantes quando estivermos falando das Álgebras de caminhos de Leavitt, por isso ja deixamos definido.

1.2 CAMINHOS EM UM GRAFO

Uma outra forma de interpretar informações em um grafo é a ideia dos caminhos em um grafo, que basicamente são as possíveis sequências de arestas adjacentes, ou seja, conectadas por um vértice. Neste caso a informação sobre os vértices do grafo fica subentendida pelos caminhos formados. O conceito de caminhos em um grafo será utilizado quando falarmos das álgebras de caminhos de Leavitt.

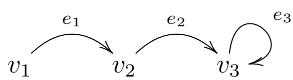
Definição 1.2.1. *Dado um grafo $E = (E^0, E^1, r, s)$, um caminho neste grafo é uma sequência $(e_{i_j})_{j \in \mathbb{N}^*}$, em que $i \in I \subseteq \mathbb{N}$, tal que, para todo $j \in \mathbb{N}^*$, temos*

$$r(e_{i_j}) = s(e_{i_{j+1}}).$$

Assim, um caminho é uma sequência de arestas que estão conectadas e que seguem uma mesma direção. Os caminhos de um grafo são todas as sequências de arestas que podem ser formadas no grafo e, como podemos notar, a definição anterior não exclui o caso de caminhos formados por infinitas arestas.

Para tornar a notação mais simples, no desenvolvimento deste trabalho, iremos denotar um caminho finito no grafo por $\xi = e_1 e_2 ... e_n$ tal que $e_i \in E$, no entanto note que não é necessário que as arestas de um caminho estejam em ordem numérica.

Exemplo 1.2.2. *Sejam $E^0 = \{v_1, v_2, v_3\}$ e $E^1 = \{e_1, e_2, e_3\}$ tal que E é representado da seguinte forma:*



Um caminho possível em E é

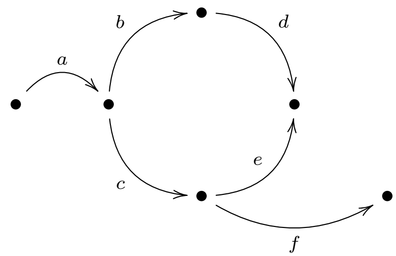
$$\xi = e_1 e_2 e_3 e_3 ... e_3 ...,$$

que é um caminho infinito no grafo, pois passa infinitas vezes pela aresta e_3.

No exemplo anterior também temos que um caminho possível é $e_2 e_3$ e, quando dizemos que a informação dos vértices do grafo fica subentendida pelo caminho, queremos dizer que se $e_2 e_3$ é um caminho do grafo, sabemos que existe um vértice v que conecta as arestas e_2 e e_3, assim $r(e_2) = v$ e que $s(e_3) = v$. Também podemos dizer que se $e_2 e_3$ é um caminho do grafo E, então dizemos que as arestas e_2 e e_3 são adjacentes, ou conectadas.

Também podemos pensar no conjunto E^1 como sendo um alfabeto e assim os caminhos do grafo $E = (E^0, E^1, r, s)$ seriam as possíveis palavras que podem ser formadas pelas letras (conectadas) de E.

Exemplo 1.2.3. *Dado o grafo $E = (E^0, E^1, r, s)$ que é representado da seguinte forma:*



Os possíveis caminhos, ou palavras, deste grafo são

- Palavras com três letras: abd, ace, acf;

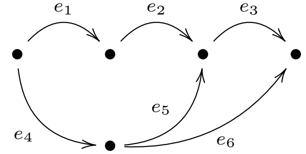
- Palavras com duas letras: ab, ac, bd, ce, cf;

- Palavras com uma letra:a, b, c, d, e, f.

Com isto também surge a ideia de verificar quantas arestas um caminho possui, ou seja, verificar o comprimento desse caminho.

Definição 1.2.4. *Seja $E = (E^0, E^1, r, s)$ um grafo e $\xi \in E$ um caminho. Se ξ é um caminho do grafo E, formado por n arestas, dizemos que o comprimento de ξ é n e escrevemos $n = |\xi|$. Vamos denotar por E^n o conjunto de caminhos de $E = (E^0, E^1, r, s)$ com comprimento n, ou seja, $E^n = \{\xi$ é um caminho de $E; |\xi| = n\}$.*

Exemplo 1.2.5. *Se o grafo $E = (E^0, E^1, r, s)$ é representado da seguinte forma:*



temos que

$$E^1 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$$
$$E^2 = \{e_1e_2, e_2e_3, e_4e_5, e_4e_6, e_5e_3\}$$
$$E^3 = \{e_1e_2e_3, e_4e_5e_3\}$$

Assim como é feito em (ABRAMS; PINO, 2006), vamos denotar o conjunto de todos os caminhos de comprimento finito por

$$E^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} E^n.$$

Note que, neste caso, E^0 também é considerado como o conjunto de caminhos de comprimento nulo, pois não existem arestas.

Agora, precisaremos aplicar as nossas funções r e s não só em elementos de E^1, mas também nos caminhos do grafo.

Definição 1.2.6. *Se ξ é um caminho do grafo E, com $\xi = e_1 e_2 ... e_n$, definimos $s', r' : E^* \to E^0$ da seguinte forma*

$$s'(\xi) = s(e_1)$$

e

$$r'(\xi) = r(e_n).$$

Se $E = (E^0, E^1, r, s)$ é um grafo, representado abaixo, e $\xi = e_1 ... e_n$ é um caminho de E, então a definição indica que:

$$\begin{tikzcd} s(e_1) \arrow[r, bend left, "e_1"] \arrow[rr, bend right, "\xi"'] & ... \arrow[r, bend left, "e_n"] & r(e_n) \end{tikzcd}$$

Desta forma, temos que as funções r e s podem ser estendidas e aplicadas aos caminhos de um grafo.

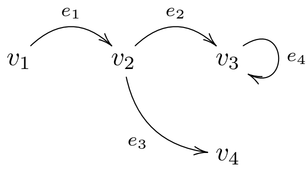
Definição 1.2.7. *Se ξ é um caminho do grafo $E = (E^0, E^1, r, s)$, com $\xi = e_1 ... e_n$, então:*

i) Chamamos de ξ^0 o conjunto dos vértices, da origem e imagem, das arestas que compõem o caminho ξ, assim $\xi^0 = \{s(e_i), r(e_i)\}$ com $i \in \{1, ..., n\}$;

*ii) Dizemos que uma aresta f é uma **saída** do caminho ξ se $\exists i \in \{1, .., n\}$ tal que $s(f) = s(e_i)$ e $f \neq e_i$.*

No exemplo a seguir podemos observar como a definição anterior é aplicada ao grafo.

Exemplo 1.2.8. *Seja* $\xi = e_1e_2e_4$ *um caminho do grafo* $E = (E^0, E^1, r, s)$ *que possui a seguinte representação:*



Assim, $\xi^0 = \{v_1, v_2, v_3\}$ *e a aresta* e_3 *é uma saída do caminho* ξ*.*

Uma das formas de termos um caminho infinito no nosso grafo é quando podemos passar por uma mesma aresta mais de uma vez, ou por um grupo de arestas, e com isto podemos definir caminhos específicos que serão utilizados no decorrer do trabalho.

Definição 1.2.9. *Se* $\xi = e_1...e_n$ *é um caminho do grafo* $E = (E^0, E^1, r, s)$*, temos que:*

i) ξ *é um* ***caminho fechado*** *em* v *se* $v = s(\xi) = r(\xi)$*;*

ii) ξ *é um* ***ciclo*** *se* $s(\xi) = r(\xi)$ *e* $s(e_i) \neq s(e_j), \forall i \neq j$*.*

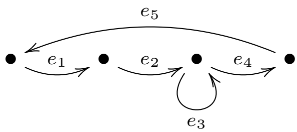
Assim, um caminho fechado é um caminho que começa e termina no mesmo vértice. Já um ciclo, é um caminho que começa e termina no mesmo vértice, mas que no seu "trajeto"ele não passa por um mesmo vértice mais de uma vez. Desta forma, da definição temos que todo ciclo é um caminho fechado, mas o contrário não é válido, como veremos nos exemplos abaixo.

Com isto, assim como é feito em (ABRAMS; PINO, 2008), nos dois tipos de caminhos se $\xi \in E^1$ então ξ é um *loop* do grafo.

Exemplo 1.2.10. *Se* $E^0 = \{v\}$ *e* $E^1 = \{e, f\}$ *tal que* $E = (E^0, E^1, r, s)$ *é representado da forma:*

temos que todo caminho de E *é um caminho fechado, pois todo caminho começa e termina em* v*. No entanto, nem todo caminho do grafo é um ciclo, por exemplo no caminho* $\xi = ef$ *temos que* $s(e) = s(f) = v$*, neste caso os únicos ciclos no grafo são* $\xi = e$ *e* $\xi = f$*, que são os loops do grafo.*

Exemplo 1.2.11. *Se $E = (E^0, E^1, r, s)$ é um grafo que é representado por:*



O caminho $\xi_1 = e_1e_2e_4e_5$ é um ciclo, mas $\xi_2 = e_1e_2e_3e_4e_5$ é apenas um caminho fechado, pois $s(e_3) = s(e_4)$.

Definição 1.2.12. *Dizemos que um grafo $E = (E^0, E^1, r, s)$ satisfaz a **Condição L**, como é definido em (ABRAMS; PINO, 2008), se todo ciclo em E tem pelo menos uma saída.*

No exemplo anterior, o grafo satisfaz a condição L, pois o ciclo ξ_1 possui uma saída, a aresta e_3.

No final deste trabalho esta condição será utilizada novamente, quando formos verificar quando às álgebras de caminhos de Leavitt serão simples.

2 ÁLGEBRAS DE CAMINHOS

Neste capítulo vamos apresentar a definição das álgebras de caminhos, que serão a base para o nosso estudo sobre as álgebras de caminhos de Leavitt, e as operações que precisam ser definidas no grafo para obtermos esta estrutura algébrica.

A seguir, partindo de exemplos, mostraremos como essas álgebras se comportam e qual é a forma dos seus elementos, verificando isomorfismos com outras estruturas algébricas conhecidas.

2.1 $\mathbb{K}$-ÁLGEBRAS DE CAMINHOS

Queremos construir uma estrutura algébrica, sobre o corpo $\mathbb{K}$, a partir dos caminhos de um grafo $E = (E^0, E^1, r, s)$. Para isto, é necessário que esta estrutura possua uma operação que será aplicada nos caminhos de qualquer comprimento de E.

Definição 2.1.1. *Dados dois caminhos $\xi = e_1...e_n$ e $\eta = f_1...f_m$, vamos definir o* ***produto por concatenação*** *dos dois caminhos da seguinte forma:*

- *Se $r(\xi) = s(\eta)$, temos que*

$$\xi \cdot \eta = e_1...e_n f_1...f_m;$$

- *Se $r(\xi) \neq s(\eta)$, temos que*

$$\xi \cdot \eta = 0 \in \mathbb{K}.$$

Intuitivamente, dizemos que o produto de dos caminhos ξ e η é a justa posição deles, $\xi\eta$, se $r(\xi) = s(\eta)$. Da mesma forma, se $r(\xi) \neq s(\eta)$ não temos como fazer a justa posição dos dois caminhos, então $\xi.\eta = 0 \in \mathbb{K}$.

No entanto, este produto por concatenação não deixa claro como se dá a operação entre um caminho ξ, com $|\xi| > 0$, com um vértice v do grafo, visto como um caminho de comprimento nulo. Se $r(\xi) = v$ temos que $\xi.v$ é um caminho de E^*, por ser a concatenação de dois caminhos, no entanto temos que $|\xi.v| = |\xi|$, já que $|v| = 0$.

Definição 2.1.2. *Dados um caminho qualquer $\xi = e_1...e_n$ e $v \in E^0$, vamos definir o produto desses elementos como:*

- *Se $r(\xi) = v$, temos que*
$$\xi.v = \xi;$$

- *Se $r(\xi) \neq v$, então temos*
$$\xi.v = 0 \in \mathbb{K}.$$

Desta definição também podemos perceber como será a operação entre vértices, que até agora não havia sido mencionada. Basta tomar os dois elementos como caminhos de comprimento nulo, fazendo com que se $v, w \in E^0$ temos que da definição

$$w.v = \begin{cases} w & , \text{ se } w = v \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}. \tag{2.1}$$

Com isto, podemos então definir o que será a nossa álgebras de caminhos sobre o corpo $\mathbb{K}$, usando as operações mencionadas anteriormente.

Definição 2.1.3. *Seja $\mathbb{K}$ um corpo e $E = (E^0, E^1, r, s)$ um grafo. A $\mathbb{K}$-**álgebra de caminhos** de E é definida como a $\mathbb{K}$-álgebra livre gerada por E^0 e E^1, quocientada pelo ideal gerado pelas relações abaixo:*

i) $v_i.v_j = \delta_{i,j} v_i, \forall v_i, v_j \in E^0$;

ii) $e_i.r(e_i) = s(e_i).e_i = e_i, \forall e_i \in E^1$.

Vamos denotar a $\mathbb{K}$-álgebra de caminhos de um grafo E por $A(E)$ e, por simplicidade, usaremos v_i e e_i para representar as classes dos elementos v_i e e_i em $A(E)$.

Então, o ideal mencionado na definição é da forma

$$J = \{v_i.v_j - \delta_{i,j} v_i, e_i.r(e_i) - e_i, s(e_i)e_i - e_i\},$$

para quaisquer $v_i, v_j \in E^0$ e $e_i \in E^1$, e assim podemos escrever

$$A(E) = \mathbb{K}\{E^0 \cup E^1\}/J.$$

Na definição temos que chamar atenção para a função Delta de Kronecker, em que

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases},$$

fazendo com que o produto de vértices fique definido como foi mencionado em (2.1).

Dessa forma

$$\delta_{i,j}\delta_{i,k}v_i = \begin{cases} \delta_{i,k}v_i & , \text{ se } i = j \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} v_i & , \text{ se } i = j = k \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases} \tag{2.2}$$

e

$$\delta_{j,k}\delta_{i,j}v_i = \begin{cases} \delta_{i,j}v_i & , \text{ se } j = k \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} v_i & , \text{ se } i = j = k \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}. \tag{2.3}$$

Portanto,

$$\delta_{i,j}\delta_{i,k}v_i = \delta_{j,k}\delta_{i,j}v_i. \tag{2.4}$$

Proposição 2.1.4. *Operações de arestas com arestas, e de arestas com vértices, estão bem definidas a partir das relações definidas na $\mathbb{K}$-álgebra de caminhos de E.*

Demonstração: Sejam $e, f \in E^1$ e $v \in E^0$. Pelas relações definidas temos que $e = e.r(e)$ e $f = s(f).f$.
1) Produto entre arestas:

$$\begin{aligned} e.f &= e.r(e).s(f).f \\ &= e.(r(e).s(f)).f \\ &= e.(\delta_{r(e),s(f)}r(e)).f \\ &= \begin{cases} e.r(e).f = ef, & \text{se } r(e) = s(f) \\ e.0.f = 0, & \text{se } r(e) \neq s(f) \end{cases} \end{aligned}$$

2) Produto entre aresta e vértice:

$$\begin{aligned} e.v &= e.r(e).v \\ &= e.(\delta_{r(e),v}v) \\ &= \begin{cases} e.v = e, & \text{se } v = r(e) \\ e.0 = 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v.f &= v.s(f).f \\ &= (\delta_{v,s(f)}v).f \\ &= \begin{cases} v.f = f, & \text{se } v = s(f) \\ 0.f = 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \end{aligned}$$

Assim o produto de aresta e vértice também está definido, de forma generalizada, pelas relações definidas.

■

Observação 2.1.5. *A $\mathbb{K}$-álgebra de caminhos gerada por E^0 e E^1 pode ser vista como um $\mathbb{K}$-espaço vetorial com base $\beta = E^*$.*

Exemplo 2.1.6. *Se tomarmos o grafo que possui representação*

temos que as relações definidas de $A(E)$ aplicadas aos elementos do grafo resultam:

- $v.v = \delta_{v,v}v = v$, desta forma temos $\underbrace{v.v.....v}_{n-vezes} = v^n = v$, ou seja, v é idempotente;
- Se considerarmos que caminhos do tipo $\xi_1 = \underbrace{ee...e}_{n-vezes} = e^n$, assumindo que $e^0 = s(e) = v$ e $e^1 = e$, temos que para $\xi_1 = e^n$ e $\xi_2 = e^m$, com $n, m \geq 0$ vale

$$\xi_1\xi_2 = e^n e^m = \underbrace{(e...e)}_{n-vezes}\overbrace{(e...e)}^{m-vezes} = \underbrace{(e...e)}_{n+m-vezes} = e^{n+m};$$

- Se $n \geq 0$ temos
$$v.e^n = s(e).e^n = e^n$$
e
$$e^n.v = e^n.r(e) = e^n.$$

Portanto, nesta álgebra de caminhos temos as possíveis combinações lineares dos múltiplos do vértice v e de potências da aresta e, o que já era esperado dada a observação (2.1.5).

2.2 ISOMORFISMOS E RESULTADOS DE ÁLGEBRAS DE CAMINHOS

Nesta seção iremos verificar como são as álgebras de caminhos, e os seus elementos, geradas a partir de exemplos de grafos que resultem em estruturas algébricas conhecidas. Vamos começar com o exemplo apresentado na seção anterior.

Proposição 2.2.1. *A $\mathbb{K}$-álgebra de caminhos do grafo que é representado por:*

$$\begin{tikzcd} v \arrow[loop right, "e"] \end{tikzcd}$$

é isomorfa à $\mathbb{K}[x]$, a álgebra dos polinômios com grau maior, ou igual, a zero e constantes em $\mathbb{K}$.

Demonstração: Dado o grafo acima e sua álgebra de caminhos $A(E)$, defina

$$f : \mathbb{K} \to A(E)$$

em que

$$f(k) = k.v, \forall k \in \mathbb{K}.$$

Sendo assim, dados $k_1, k_2 \in \mathbb{K}$ temos que

$$\begin{aligned} f(k_1 + k_2) &= (k_1 + k_2).v \\ &= k_1.v + k_2.v \\ &= f(k_1) + f(k_2) \end{aligned} \tag{2.5}$$

e

$$\begin{aligned} f(k_1.k_2) &= k_1.k_2.v \\ &= k_1.k_2.v.v \\ &= k_1.v.k_2.v \\ &= f(k_1).f(k_2). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Desta forma, f é um homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras e assim, pela propriedade universal (BIAZOTTO, 2012) da álgebra de polinômios $\mathbb{K}[x]$, temos que existe um único homomorfismo

$$\begin{aligned} \overline{f} : \mathbb{K}[x] &\to A(E) \\ 1 &\mapsto v \\ x &\mapsto e \end{aligned}$$

em que $\overline{f}$ é estendido de f, ou seja, $\overline{f}$ faz com que o diagrama abaixo comute:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{K}[x] \arrow[d, "\overline{f}"] \\ \mathbb{K} \arrow[ur] \arrow[r, "f"'] & A(E) \end{tikzcd}$$

Agora vamos verificar que $\overline{f}$ é uma bijeção observando a sua inversa. Seja $\widehat{g}$ a função que vai do conjunto $\{v, e\}$ em $\mathbb{K}[x]$ da forma

$$\begin{aligned} \widehat{g} : \{v, e\} &\to \mathbb{K}[x] \\ v &\mapsto 1 \\ e &\mapsto x \end{aligned}$$

Desta forma, dados $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $x, y \in \{v, e\}$, se definirmos $\overline{g}(\alpha.x + \beta.y) = \alpha.\widehat{g}(x) + \beta.\widehat{g}(y)$ temos que $\overline{g} : \mathbb{K}\{v, e\} \to \mathbb{K}[x]$ é um homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras, que estende g e satisfaz:

$$\begin{aligned} \overline{g}(v.v) &= \overline{g}(v).\overline{g}(v) \\ &= 1.1 \\ &= 1 = \overline{g}(v); \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} \overline{g}(e.v) &= \overline{g}(e).\overline{g}(v) \\ &= x.1 \\ &= x = \overline{g}(e); \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}\overline{g}(v.e) &= \overline{g}(v).\overline{g}(e)\\ &= 1.x\\ &= x = \overline{g}(e).\end{aligned} \tag{2.9}$$

De agora em diante, sempre que formos estender a função para um homomorfismo, vamos apenas dizer que existe um homomorfismo, mas a ideia será a mesma.

Assim, se definirmos o ideal $J = \{v.v - v, v.e - e, e.v - e\}$ temos que $\overline{g}|_J = 0$, fazendo com que $A(E) = \mathbb{K}\{v, e\}/J$ e o que garante a existência de um homomorfismo, pelo teorema do homomorfismo (DOMINGUES, 2003)

$$\begin{aligned} g : A(E) &\to \mathbb{K}[x]\\ v &\mapsto 1\\ e &\mapsto x\end{aligned}$$

Pela construção temos que $g = f^{-1}$ e com isto $A(E) \simeq \mathbb{K}[x]$.

■

Observação 2.2.2. *Podemos perceber que v é a unidade de $A(E)$ no exemplo anterior, assim f é um isomorfismo unital de $A(E)$ para $\mathbb{K}[x]$.*

Exemplo 2.2.3. *O grafo que é representado por:*

$$\begin{tikzcd} v_1 \arrow[r, bend left, "e"] & v_2 \end{tikzcd}$$

gera a $\mathbb{K}$-álgebra de caminhos que satisfaz:

- $v_i.v_j = \begin{cases} v_i, & \text{se } i = j\\ 0, & \text{se } i \neq j\end{cases}$;
- $v_1.e = s(e).e = e$ e $e.v_2 = e.r(e) = e$;
- $e.v_1 = 0$, pois $r(e) \neq v_1$, e $v_2.e = 0$, pois $s(e) \neq v_2$;
- $e.e = (e.r(e)).(s(e).e) = e.(v_2.v_1).e = e.0.e = 0$;
- Do item acima temos que $e^n = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Portanto, isto nos confirma que os elementos da $\mathbb{K}$-álgebra $A(E)$ sejam da forma

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma e, \text{para } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K},$$

como é dito na observação (2.1.5).

Proposição 2.2.4. *A $\mathbb{K}$-álgebra de caminhos do grafo representado por:*

$$\begin{tikzcd} v_1 \arrow[r, bend left, "e"] & v_2 \end{tikzcd}$$

é isomorfa à $T_2(\mathbb{K})$, a $\mathbb{K}$-álgebra das matrizes triangulares superiores de ordem 2×2.

Demonstração: Temos que $T_2(\mathbb{K})$ tem como base o conjunto

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

e vamos chamar

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_1, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_2, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3.$$

Se denotarmos $0_{2\times 2} = 0$, a matriz nula de ordem 2×2, temos que:

$$\begin{aligned} E_1.E_1 = E_1, &\quad E_1.E_2 = E_2, \quad E_1.E_3 = 0, \\ E_2.E_1 = 0, &\quad E_2.E_2 = 0, \quad E_2.E_3 = E_2, \\ E_3.E_1 = 0, &\quad E_3.E_2 = 0, \quad E_3.E_3 = E_3. \end{aligned}$$

Vamos construir uma homomorfismo de $A(E)$ para $T_2(\mathbb{K})$. Considere

$$\begin{aligned} \widehat{f} : \{v_1, v_2, e\} &\to T_2(\mathbb{K}) \\ v_1 &\mapsto E_1 \\ v_2 &\mapsto E_3 \\ e &\mapsto E_2. \end{aligned}$$

Assim, existe um único homomorfismo $\overline{f} : \mathbb{K}\{v_1, v_2, e\} \to T_2(\mathbb{K})$ de $\mathbb{K}$-álgebras, que é estendido de $\widehat{f}$, satisfazendo:

- O produto entre vértices:

$$\begin{aligned}\overline{f}(v_1.v_1) &= \overline{f}(v_1).\overline{f}(v_1)\\ &= E_1.E_1\\ &= E_1 = \overline{f}(v_1);\end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}\overline{f}(v_1.v_2) &= \overline{f}(v_1).\overline{f}(v_2)\\ &= E_1.E_3\\ &= 0;\end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}\overline{f}(v_2.v_2) &= \overline{f}(v_2).\overline{f}(v_2)\\ &= E_3.E_3\\ &= E_3 = \overline{f}(v_2);\end{aligned} \tag{2.12}$$

- O produto de aresta e vértice:

$$\begin{aligned}\overline{f}(v_1.e) &= \overline{f}(v_1).\overline{f}(e)\\ &= E_1.E_2\\ &= E_2 = \overline{f}(e);\end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}\overline{f}(e.v_2) &= \overline{f}(e).\overline{f}(v_2)\\ &= E_2.E_3\\ &= E_2 = \overline{f}(e);\end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}\overline{f}(e.v_1) &= \overline{f}(e).\overline{f}(v_1)\\ &= E_2.E_1\\ &= 0;\end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}\overline{f}(v_2.e) &= \overline{f}(v_2).\overline{f}(e)\\ &= E_3.E_2\\ &= 0; \end{aligned} \tag{2.16}$$

- Produto entre arestas:

$$\begin{aligned}\overline{f}(e.e) &= \overline{f}(e).\overline{f}(e)\\ &= E_2.E_2\\ &= 0; \end{aligned} \tag{2.17}$$

Assim, definindo o ideal $J = \{v_i.v_j - \delta_{i,j}v_i, e.r(e) - e, s(e).e - e\}$, para todos $v_i, v_j \in E^0$, temos que $\overline{f}|_J = 0$. Logo, pelo teorema do homomorfismo, existe um único homomorfismo de álgebras $f : A(E) \to T_2(\mathbb{K})$, estendido de $\widehat{f}$.

Vamos verificar que f é um isomorfismo de álgebras. Seja $M \in T_2(\mathbb{K})$, então existem $a, b, c \in \mathbb{K}$ tais que

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}.$$

Então, vamos tomar $x = (a.v_1 + b.e + c.v_2) \in A(E)$ e assim

$$\begin{aligned}f(x) &= f(a.v_1 + b.e + c.v_2)\\ &= a.f(v_1) + b.f(e) + c.f(v_2)\\ &= a.E_1 + b.E_2 + c.E_3 = M. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Desta forma, f é uma função sobrejetora.

Agora, seja $x = (a.v_1 + b.e + c.v_2) \in Ker(f) \subseteq A(E)$, com isto

$$\begin{aligned}0_{2\times 2} &= f(x)\\ &= f(a.v_1 + b.e + c.v_2)\\ &= a.f(v_1) + b.f(e) + c.f(v_2)\\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} && (2.19)\\ &\Rightarrow a = b = c = 0 \in \mathbb{K}\\ &\Rightarrow x = 0 \in \mathbb{K} && (2.20)\end{aligned}$$

Portanto, f é injetora e assim f é um isomorfismo, o que garante $A(E) \simeq T_2(\mathbb{K})$.

$\blacksquare$

Observação 2.2.5. *Note que $E_1 + E_3$ é a unidade de $T_2(\mathbb{K})$ e assim, dado um termo geral de $A(E)$, da forma $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma e$, para $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$, e as operações obtidas pelo isomorfismo, temos que*

$$\begin{aligned}
(v_1 + v_2).(\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma e) &= \alpha(v_1 + v_2).v_1 + \beta(v_1 + v_2).v_2 + \gamma(v_1 + v_2).e \\
&= \alpha(v_1.v_1 + v_2.v_1) + \beta(v_1.v_2 + v_2.v_2) + \gamma(v_1.e + v_2.e) \\
&= \alpha(v_1 + 0) + \beta(0 + v_2) + \gamma(e + 0) \\
&= \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma e
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma e).(v_1 + v_2) &= \alpha v_1.(v_1 + v_2) + \beta v_2.(v_1 + v_2) + \gamma e.(v_1 + v_2) \\
&= \alpha(v_1.v_1 + v_1.v_2) + \beta(v_2.v_1 + v_2.v_2) + \gamma(e.v_1 + e.v_2) \\
&= \alpha(v_1 + 0) + \beta(0 + v_2) + \gamma(0 + e) \\
&= \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma e
\end{aligned}$$

Portanto $(v_1 + v_2)$ é a unidade de $A(E)$, com isto $A(E)$ é unital e o nosso isomorfismo também é unital.

Agora, vamos generalizar o que o resultado anterior apresentou para um grafo com n vértices e verificar que, neste caso, a álgebra de caminhos será isomorfa à álgebra das matrizes triangulares de ordem n.

Proposição 2.2.6. *Dado o grafo $E = (E^0, E^1, r, s)$, com $E^0 = \{v_1, ..., v_n\}$ e $E^1 = \{e_1, ..., e_{n-1}\}$, satisfazendo $s(e_i) = v_i$ e $r(e_i) = v_{i+1}$ para todo $i \in \{1, ..., n-1\}$, temos que sua representação é:*

$$\begin{tikzcd}
v_1 \arrow[r, bend left, "e_1"] & v_2 \arrow[r, bend left, "e_2"] & v_3 & \cdots & v_{n-1} \arrow[r, bend left, "e_{n-1}"] & v_n
\end{tikzcd}$$

temos que $A(E) \simeq T_n(\mathbb{K})$, em que $T_n(\mathbb{K})$ é a $\mathbb{K}$-álgebra das matrizes triangulares superiores de ordem $n \times n$.

Demonstração: Primeiro vamos notar que $T_n(\mathbb{K})$ tem como base o conjunto β formado pelas matrizes $E_{i,j}$ da forma

$$(E_{i,j})_{n\times n} = [a_{k,l}]_{n\times n} = \begin{cases} a_{k,l} = 1, & \text{se } i = k \text{ e } j = l \\ a_{k,l} = 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

para $i \leq j$. Desta forma, temos

$$E_{i,j}.E_{k,l} = \begin{cases} E_{i,l}, & \text{se } j = k \\ 0_{n\times n}, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{2.21}$$

$$\Rightarrow E_{i,j}.E_{k,l} = \delta_{j,k} E_{i,l} \tag{2.22}$$

Vamos definir a função

$$\begin{aligned} \widehat{f} : \{E^0 \cup E^1\} &\to T_n(\mathbb{K}) \\ v_i &\mapsto E_{i,i} \\ e_j &\mapsto E_{j,j+1} \\ e_j e_{j+1} ... e_k &\mapsto E_{j,k+1}, \end{aligned}$$

com $i \in= \{1, ..., n\}$, $j \in \{1, .., n_1\}$ e $j \leq k \leq n-1$.

Então, existe um único homomorfismo $\overline{f} : \mathbb{K}\{E^0 \cup E^1\} \to T_n(\mathbb{K})$ estendida da função $\widehat{f}$. Assim, usando (2.22) temos:

• Produto entre vértices:

$$\begin{aligned} \overline{f}(v_i.v_j) &= \overline{f}(v_i).\overline{f}(v_j) \\ &= E_{i,i}.E_{j,j} \\ &= \delta_{i,j} E_{i,i} \\ &= \delta_{i,j} \overline{f}(v_i). \end{aligned} \tag{2.23}$$

• Produto de vértices e arestas:

$$\begin{aligned} \overline{f}(v_i.e_i) &= \overline{f}(v_i).\overline{f}(e_i) \\ &= E_{i,i}.E_{i,i+1} \\ &= E_{i,i+1} \\ &= \overline{f}(e_i); \end{aligned} \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned}\overline{f}(v_i.e_i...e_j) &= \overline{f}(v_i).\overline{f}(e_i...e_j)\\ &= E_{i,i}.E_{i,j+1}\\ &= E_{i,j+1}\\ &= \overline{f}(e_i...e_j);\end{aligned} \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned}\overline{f}(e_i.v_{i+1}) &= \overline{f}(e_i).\overline{f}(v_{i+1})\\ &= E_{i,i+1}.E_{i+1,i+1}\\ &= E_{i,i+1}\\ &= \overline{f}(e_i);\end{aligned} \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned}\overline{f}(e_i...e_j.v_j) &= \overline{f}(e_i...e_j).\overline{f}(v_{j+1})\\ &= E_{i,j+1}.E_{j+1,j+1}\\ &= E_{i,j+1}\\ &= \overline{f}(e_i...e_j).\end{aligned} \tag{2.27}$$

- Produto entre arestas:

$$\begin{aligned}\overline{f}(e_i...e_j.e_k...e_l) &= \overline{f}(e_i...e_j).\overline{f}(e_k...e_l)\\ &= E_{i,j+1}.E_{k,l+1}\\ &= 0\\ &= \begin{cases} E_{i,l+1} & , \text{ se } k = j+1\\ 0_{n\times n} & , \text{ caso contrário}\end{cases}\\ &= \begin{cases} \overline{f}(e_i...e_l) & , \text{ se } k = j+1\\ 0_{n\times n} & , \text{ caso contrário}\end{cases}\end{aligned} \tag{2.28}$$

Desta forma, definindo

$$J = \left\{v_i.v_j - \delta_{i,j}v_i, e_i.r(e_i) - e_i, s(e_i).e_i - e_i; \forall v_i, v_j \in E^0 \text{ e } \forall e_i \in E^1\right\},$$

um ideal, temos que $\overline{f}|_J = 0$ e, pelo teorema do homomorfismo, existe

uma única função
$$f : A(E) \to T_n(\mathbb{K})$$
que é um homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras.

Para verificarmos que f é sobrejetora basta observar que dado $E_{i,j}$ e $E_{i,i}$ são elementos da base de $T_n(\mathbb{K})$, com $i \leq j$ e $i, j \in \{1, ..., n\}$, temos que $(e_i...e_{j-1}), v_i \in A(E)$ são tais que

$$f(e_i...e_{j-1}) = E_{i,j} \text{ e } f(v_i) = E_{i,i},$$

ou seja, todos os elementos da base de $T_n(\mathbb{K})$ são imagens da função f e como f é um homomorfismo, temos que a função é sobrejetora.

Agora, seja

$$x = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,i} v_i + \sum_{i<j\leq n} \alpha_{i,j} e_i...e_{j-1} \right) \in Ker(f)$$

temos então

$$\begin{aligned}
0_{n\times n} &= f(x) \\
&= f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,i} v_i + \sum_{i<j\leq n} \alpha_{i,j} e_i...e_{j-1} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,i} f(v_i) + \sum_{i<j\leq n} \alpha_{i,j} f(e_i...e_{j-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,i} E_{i,i} + \sum_{i<j\leq n} \alpha_{i,j} E_{i,j} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_{2,2} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{n,n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ 0 & \alpha_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{n,n} \end{pmatrix}. \qquad (2.29)
\end{aligned}$$

Assim $\alpha_{i,j} = 0, \forall i \leq j$, o que faz com que $x = 0$ e f seja injetora.

Logo, f é um isomorfismo e com isto $A(E) \simeq T_n(\mathbb{K})$.

■

Em alguns dos resultados anteriores vimos que existe um elemento na álgebra de caminhos que é a unidade da estrutura. O próximo resultado garante quando existe unidade.

Teorema 2.2.7. *Dado o grafo $E = (E^0, E^1, r, s)$ temos que se E^0 é finito então $A(E)$ possui unidade.*

Demonstração: Primeiramente, note que para um elemento ser a unidade de uma álgebra de caminhos ele deve ser formado apenas por vértices, pois o produto é feito por concatenação, ou seja, se $e \in E^1$ temos que $e.e = ee$ ou $e.e = 0$, o que faz com que as arestas não possam fazer parte da unidade.

Sejam $E^0 = \{v_1, ..., v_n\}$ e $E^1 = \{e_1, ..., e_m, ...\}$, note que E^1 pode ser infinito. Vamos mostrar $v = \sum_{i=1}^{n} v_i$ é a unidade de $A(E)$.

Notemos que dados $v_k \in E^0$ e $e_l \in E^1$ então

$$\begin{aligned} v.v_k &= \left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right).v_k \\ &= \sum_{i=1}^{n} v_i.v_k \\ &= \sum_{i=1}^{n} \delta_{i,k} v_k \\ &= v_k; \end{aligned} \tag{2.30}$$

$$\begin{aligned} v_k.v &= v_k.\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} v_k.v_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \delta_{i,k} v_k \\ &= v_k; \end{aligned} \tag{2.31}$$

$$
\begin{aligned}
v.e_l &= \left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right).e_l \\
&= \sum_{i=1}^{n} v_i.e_l \\
&= \sum_{i=1}^{n} v_i.s(e_l).e_l \\
&= \sum_{i=1}^{n} \delta_{v_i,s(e_l)} e_l \\
&= e_l; \qquad (2.32)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e_l.v &= e_l.\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} e_l.v_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \delta_{r(e_l),v_i} e_l \\
&= e_l. \qquad (2.33)
\end{aligned}
$$

Como todo elemento α de $A(E)$ é uma combinação linear dos elementos de E^*, temos que $\alpha.v = \alpha$ e $v.\alpha = \alpha$.

Portanto, $v = v_1 + ... + v_n$ é a unidade de $A(E)$.

■

Assim, para garantir a existência da unidade precisamos que o grafo E seja finito, mas a partir de $A(E)$ também podemos garantir a existência da unidade se mostramos que existe uma relação entre E ser finito, ou não, e a dimensão de $A(E)$.

Teorema 2.2.8. *Se $E = (E^0, E^1, r, s)$ é um grafo, $A(E)$ tem dimensão finita se e somente se E é finito e não possui caminhos fechados.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Se $E = (E^0, E^1, r, s)$ é um grafo infinito, temos que E^0 ou E^1 são conjuntos infinitos. Como a base de $A(E)$ é formada a partir dos elementos dos conjuntos E^0 e E^1, temos infinitos elementos nesta base, assim $A(E)$ tem dimensão infinita.

Agora, se $E = (E^0, E^1, r, s)$ possui um caminho fechado $\xi = e_1...e_n$, ou seja, $r(\xi) = s(\xi)$, então para qualquer $m \geq 1$ podemos escrever

$$\xi^m = \underbrace{(e_1...e_n)...(e_1...e_n)}_{m-vezes} = (e_1...e_n)^m.$$

Assim, existem infinitos caminhos na forma ξ^m que são linearmente independentes (HEFEZ; FERNANDES, 2010) e portanto fazem parte da base de $A(E)$, com isto $A(E)$ tem dimensão infinita.

($\Leftarrow$) Como $E = (E^0, E^1, r, s)$ é um grafo finito que não possui caminhos fechados, temos que E^0 e E^1 também são finitos por definição. Assim, temos que E^*, o conjunto dos caminhos finitos de E também é finito, pois, como não existem caminhos fechado, os possíveis caminhos que podem ser criados a partir de concatenação de arestas é finito se não pode haver repetição.

Como E^* é finito, temos que a álgebra de caminhos gerada a partir de E^0 e E^1 também é finita, pois E^* é a base desta álgebra vista como um espaço vetorial. Desta forma, $dim(A(E))$ tem dimensão finita.

3 ÁLGEBRAS DE CAMINHOS DE LEAVITT

Para construir a álgebra de caminhos de Leavitt necessitamos que o grafo $E = (E^0, E^1, r, s)$ seja um pouco mais “completo”. Para isto definiremos elementos inversos das arestas já existentes no grafo. Além disso será necessário definir também novas operações entre as arestas inversas do grafo e elementos já existentes do grafo.

Com a álgebra de caminhos de Leavitt definida, vamos verificar quais são os isomorfismos obtidos a partir da nova estrutura obtida utilizando os mesmos grafos que apresentamos na unidade anterior.

3.1 ÁLGEBRAS DE CAMINHOS DE LEAVITT

Para fazer com que nosso grafo tenha mais objetos, vamos definir novas arestas que podem ser compreendidas como “inversas”das arestas originais.

Definição 3.1.1. *Seja $E = (E^0, E^1, r, s)$ um grafo dirigido. Dada uma aresta $e \in E^1$ definimos a sua **aresta inversa** no grafo como sendo a aresta e^* tal que $s(e) = r(e^*)$ e $r(e) = s(e^*)$, com $e^* \notin E^1$.*

Desta forma, temos uma nova aresta com o sentido inverso, como pode ser observado na representação abaixo:

$$\begin{tikzcd} v_1 \arrow[r, bend left, "e"] & v_2 \arrow[l, bend left, dotted, "e^*"] \end{tikzcd}$$

$$s(e) = v_1 = r(e^*)$$

$$r(e) = v_2 = s(e^*)$$

Definição 3.1.2. *Dado $E = (E^0, E^1, r, s)$ um grafo, se $\xi \in E^*$ é um caminho na forma $\xi = e_1...e_n$ definimos $\xi^* = e_n^*...e_1^*$.*

Graficamente temos que se

$$\begin{tikzcd} v_1 \arrow[r, bend left, "e_1"] \arrow[rrr, bend right, "\xi"'] & v_2 & \cdots & v_n \arrow[r, bend left, "e_n"] & v_{n+1} \end{tikzcd}$$

então

$$\begin{tikzcd}
v_1 & v_2 \arrow[l, bend right, dotted, "e_1^*"'] & \cdots & v_n & v_{n+1} \arrow[l, bend right, dotted, "e_n^*"'] \arrow[llll, bend left=15, dotted, "\xi^*"]
\end{tikzcd}$$

Desta forma, dados um grafo $E = (E^0, E^1, r, s)$ e $\xi, \eta \in E^*$, temos que

$$(\xi.\eta)^* = \eta^*.\xi^*.$$

Com isto, podemos definir o conjunto $(E^1)^* = \{e^*; e \in E\}$ e desta forma também é possível definir o conjunto $(E^n)^* = \{\xi^*; \xi \in E^n\}$.

Definição 3.1.3. *Dado $v \in E^0$ definimos $v^* = v$.*

Assim, o novo grafo obtido com os elementos de E^0, E^1 e $(E^1)^*$, será nosso objeto de estudo de agora em diante, por isso definiremos ele a seguir.

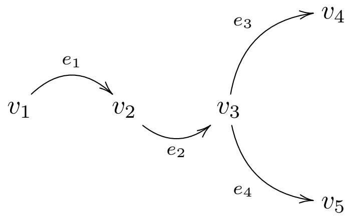
Definição 3.1.4. *Dado um grafo $E = (E^0, E^1, r, s)$, definimos o **grafo dirigido estendido** de E como sendo um novo grafo $\widehat{E}$, tal que $\widehat{E} = (E^0, E^1 \cup (E^1)^*, r', s')$ em que:*

- *E^0 é um conjunto, cujos elementos são chamados de vértices;*
- *E^1 é um conjunto, cujos elementos são chamados de arestas;*
- *$(E^1)^*$ é um conjunto, cujos elementos são chamados de arestas inversas;*
- *$r, s : \big(E^1 \cup (E^1)^*\big) \to E^0$ são funções.*

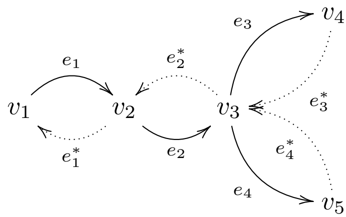
Dadas $e \in E^1$ e $f^* \in (E^1)^*$, como já havíamos definido, $r(e)$, $s(e)$, $r(f^*)$ e $s(f^*)$ são vértices do grafo que são ligados pelas arestas e e f, respectivamente. Desta forma, $r(e)$ e $s(e)$ são respectivamente os vértices onde chega a aresta e e de onde sai a aresta e, com isto $r(f^*) = s(e)$ e $s(f^*) = r(e)$.

Vamos nos referir ao grafo dirigido $\widehat{E}$ apenas como grafo, como foi feito anteriormente.

Exemplo 3.1.5. *Seja $E = (E^0, E^1, r, s)$ um grafo que é representado da forma:*



Podemos formar o grafo $\widehat{E}$ que tem a seguinte representação:



Vamos nos referir as arestas de E^1 como *arestas reais* e as de $(E^1)^*$ como *arestas fantasmas* (gosth edges). Também poderíamos denotar as arestas e^* por e^{-1}.

Agora, com o grafo $\widehat{E}$ definido, podemos nos questionar se nele podem existir vértices especiais, como os definidos em (1.1.10), disto segue o resultado.

Lema 3.1.6. *Dado um grafo $E = (E^0, E^1, r, s)$ o grafo $\widehat{E} = (E^0, E^1 \cup (E^1)^*, r, s)$ não possui vértices que sejam fontes ou sorvedouros.*

Demonstração: Suponha que exista v, um vértice de $\widehat{E}$, que é uma fonte do grafo.

Como v é uma fonte, $\exists e \in E^1$ tal que $s(e) = v$ ou $\exists e^* \in (E^1)^*$ tal que $s(e^*) = v$. Portanto, temos que $r(e^*) = s(e) = v$ ou $r(e) = s(e^*) = v$, respectivamente, desta forma v não é uma fonte.

Logo, $\widehat{E}$ não possui fonte e de forma análoga mostramos que também não possui sorvedouros.

$\blacksquare$

Com o conjunto $(E^1)^*$ apresentado temos como definir o que é uma álgebra de caminhos de Leavitt, que surge das álgebras de caminhos definidas anteriormente e que possui algumas novas relações.

Definição 3.1.7. *Sejam $E = (E^0, E^1, r, s)$ um grafo e $\mathbb{K}$ um corpo. A **álgebra de caminhos de Leavitt** de E, com coeficientes em $\mathbb{K}$, é a $\mathbb{K}$-álgebra livre gerada pelos conjuntos $\{v; v \in E^0\}$ e $\{e, e^*; e \in E^1\}$ e quocientada pelo ideal gerado pelas relações abaixo:*
i) $v_i.v_j = \delta_{i,j} v_i, \forall v_i, v_j \in E^0$;
ii) $s(e).e = e.r(e) = e$, para todo $e \in E^1$;
iii) $r(e).e^* = e^*.s(e) = e^*$, para todo $e \in E^1$;
iv) Para todo $e, f \in E^1$ temos que $e^*.f = \delta_{e,f} r(f)$ e que $e.f^* = \delta_{e^*,f^*} r(f^*)$, ;
v) $v = \sum_{\{e \in E^1; s(e)=v\}} e.e^*$, para todo $v \in E^0$ regular.

Denotaremos a $\mathbb{K}$-álgebra de caminhos de Leavitt do grafo E por $L_K(E)$.

Desta forma, se J é o ideal da álgebra de caminhos de Leavitt gerado por

$$\begin{aligned}
v_i.v_j - \delta_{i,j} v_i & \quad , \forall v_i, v_j \in E^0; \\
e_i.r(e_i) - e_i & \quad , \forall e_i \in E^1; \\
s(e_i).e_i - e_i, & \quad , \forall e_i \in E^1; \\
e_i^*.s(e_i^*) - e_i^* & \quad , \forall e_i \in E^1; \\
r(e_i^*)e_i^* - e_i^* & \quad , \forall e_i \in E^1; \\
e^*.f - \delta_{e,f} r(f) & \quad , \forall e, f \in E^1; \\
e.f^* - \delta_{e^*,f^*} r(f^*) & \quad , \forall e, f \in E^1; \\
v - \sum_{\{e \in E^1; s(e)=v\}} e.e^* & \quad , \forall v \in E^0 \text{ regular.}
\end{aligned}$$

podemos definir a álgebra de caminhos de Leavitt por

$$L_{\mathbb{K}}(E) = \mathbb{K}\{E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^*\}/J.$$

Por simplicidade, continuaremos a denotar as classes dos geradores $v \in E^0$ e $e \in E^1$ pelas mesmas letras, assim como para $e^* \in (E^1)^*$.

Também é importante notar que se v é regular então v não é um emissor infinito, desta forma existem finitas arestas $e \in E^1$ tais que $s(e) = v$. Logo, quando escrevemos $v = \sum_{\{e \in E^1; s(e)=v\}} e.e^*$, devemos perceber que essa soma é finita pois temos finitas arestas partindo de v.

As novas relações (iv) e (v), que são conhecidas como as relações de **Cuntz-Krieger**. Da relação (iv) temos que o produto de dois caminhos de do grafo $\widehat{E}$, ou seja, dois caminhos do conjunto de caminhos finitos E^*, satisfaz o resultado a seguir.

Lema 3.1.8. *Seja $E = (E^0, E^1, r, s)$ um grafo e $\xi, \eta \in E^*$. Se $|\xi| \neq |\eta|$ então, em $L_K(E)$, vale*

$$\xi^*.\eta = \begin{cases} \xi_1^*, & se\ \xi = \eta.\xi_1,\ com\ \xi_1 \in E^* \\ \eta_1, & se\ \eta = \xi.\eta_1,\ com\ \eta_1 \in E^* \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$

Demonstração:
• Se $\xi = \eta.\xi_1$ temos que $r(\eta) = s(\xi_1) = r(\xi_1^*)$ e assim

$$\begin{aligned} \xi^*.\eta &= (\eta.\xi_1)^*.\eta \\ &= (\xi_1^*.\eta^*).\eta \\ &= \xi_1^*.(\eta^*.\eta) \\ &= \xi_1^*.(\delta_{\eta,\eta} r(\eta)) \\ &= \xi_1^*.r(\eta) \\ &= \xi_1^*. \end{aligned} \tag{3.1}$$

• Se $\eta = \xi.\eta_1$ temos que $r(\xi) = s(\eta_1)$ e então

$$\begin{aligned} \xi^*.\eta &= \xi^*.(\xi.\eta_1) \\ &= (\xi^*.\xi).\eta_1 \\ &= (\delta_{\xi,\xi} r(\xi)).\eta_1 \\ &= r(\xi).\eta_1 \\ &= \eta_1. \end{aligned} \tag{3.2}$$

• Se estes casos não ocorrem, temos que $r(\xi^*) \neq s(\eta)$, ou seja, $s(\xi) \neq s(\eta)$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} \xi^*.\eta &= (\xi^*.s(\xi)).(s(\eta).\eta) \\ &= \xi^*.(s(\xi).s(\eta)).\eta \\ &= \xi^* \delta_{s(\xi),s(\eta)} s(\xi).\eta \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

como foi visto anteriormente.

Logo, do que foi visto em (3.1), (3.2) e (3.3), temos que o resultado é verdadeiro.

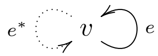
■

3.2 ISOMORFISMOS E RESULTADOS DE ÁLGEBRAS DE CAMINHOS DE LEAVITT

Vamos começar com o primeiro exemplo apresentado no capítulo anterior, em que mostramos um isomorfismo de $A(E)$ com $\mathbb{K}[x]$.

Exemplo 3.2.1. *Dado o grafo E representado por:*

O seu grafo estendido $\widehat{E}$ tem a seguinte representação:



Assim como é feito no exemplo (2.1.6), as operações com os elementos de $\widehat{E}$ satisfazem:

- $v.v = v$;
- $v.e = s(e).e = e$;
  $e.v = e.r(e) = e$;
  $v.e^* = r(e).e^* = e^*$;
  $e^*.v = e^*.s(e) = e^*$;
- $e.e = e^2$;
  $e.e^* = \delta_{e^*,e^*}r(e^*) = r(e^*) = v$;
  $e^*.e = \delta_{e,e}r(e) = r(e) = v$;
  $e^*.e^* = (e^*)^2 = (e^2)^*$;
- Se $m > n$, existe $k \in \mathbb{N}^*$ tal que $m = k + n$ e então

$$\begin{aligned} e^m.(e^*)^n &= e^(k+n).(e^*)^n \\ &= e^k.e^n.(e^n)^* \\ &= e^k.\delta_{(e^n)^*,(e^n)^*}r((e^n)^*) \\ &= e^k.v \\ &= e^k; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^n.(e^*)^m &= e^n.(e^*)^{(}n+k) \\
&= e^n.(e^*)^n.(e^*)^k \\
&= e^n.(e^n)^*.(e^*)^k \\
&= \delta_{(e^n)^*,(e^n)^*} r((e^n)^*).(e^*)^k \\
&= v.e^k \\
&= e^k;
\end{aligned}$$

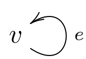
$$\begin{aligned}
(e^*)^m.e^n &= (e^*)^{(}k+n).e^n \\
&= (e^*)^k.(e^*)^n.e^n \\
&= (e^*)^k.(e^n)^*.e^n \\
&= (e^*)^k.\delta_{e^n,e^n} r(e^n) \\
&= (e^*)^k.v \\
&= (e^*)^k;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(e^*)^n.e^m &= (e^*)^n.e^{(}n+k) \\
&= (e^*)^n.e^n.e^k \\
&= (e^n)^*.e^n.e^k \\
&= (\delta_{e^n,e^n} r(e^n).e^k \\
&= v.(e^*)^k \\
&= (e^*)^k.
\end{aligned}$$

Dos cálculos apresentados, temos que os elementos da álgebra de caminhos de Leavitt neste caso serão compostos somente pela combinação linear do vértice, arestas e potências de arestas, arestas inversas e suas potências. Isto nos leva a conclusão de que em $L_K(E)$ temos elementos da forma

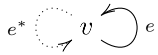
$$\alpha v + \beta_1 e + ... + \beta_n e^n + \eta_1 e^* + ... + \eta_m (e^*)^m.$$

O resultado abaixo será utilizado para mostrar o isomorfismo da álgebra dos polinômios de grau positivo e negativo, $\mathbb{K}[x, x^{-1}]$, com a álgebra de caminhos de Leavitt do grafo representado por



Proposição 3.2.2. $\mathbb{K}[x, x^{-1}]$ *é isomorfo à* $\mathbb{K}[x, y]/J$*, em que* J *é o ideal da forma* $J = \{xy - 1\}$.

Proposição 3.2.3. *Se* $\widehat{E} = (E^0, E^1 \cup (E^1)^*, r, s)$ *é o grafo que possui representação:*



temos que $L_K(E)$ *é isomorfo à* $\mathbb{K}[x, x^{-1}]$.

Demonstração: Seja $\widetilde{f} : \mathbb{K} \to L_K(E)$ tal que $\widetilde{f}(k) = k.v, \forall k \in \mathbb{K}$. Vimos anteriormente, na demonstração da proposição (2.2.1), que a função $f : \mathbb{K} \to A(E)$ é um homomorfismo e de forma análoga temos que $\widetilde{f}$ também é. Assim, pela propriedade universal da álgebra $\mathbb{K}[x, y]$, temos que existe um único homomorfismo

$$\begin{aligned} \overline{f} : \mathbb{K}[x, y] &\to L_K(E) \\ x &\mapsto e \\ y &\mapsto e^* \\ 1 &\mapsto v \end{aligned}$$

em que $\overline{f}$ é estendido de f, ou seja, $\overline{f}$ faz com que o diagrama abaixo comute:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{K}[x, y] \arrow[d, "\overline{f}"] \\ \mathbb{K} \arrow[ur] \arrow[r, "\widetilde{f}"'] & L_k(E) \end{tikzcd}$$

Agora, usando os resultados do exemplo (3.2.1) podemos notar que

$$\begin{aligned} \overline{f}(x.y) &= \overline{f}(x).\overline{f}(y) \\ &= e.e^* \\ &= v = \overline{f}(1) \end{aligned} \tag{3.4}$$

e que

$$\begin{aligned} \overline{f}(y.x) &= \overline{f}(y).\overline{f}(x) \\ &= e^*.e \\ &= v = \overline{f}(1). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Então, se definirmos o ideal $J = \{xy - 1\}$ temos que $\overline{f}|_J = 0$. Assim, pelo teorema do homomorfismo, existe uma única função $f : \mathbb{K}[x,y]/J \to L_K(E)$ que é um homomorfismo de álgebras, ou seja, pela proposição anterior existe um isomorfismo $h : \mathbb{K}[x,x^{-1}] \to \mathbb{K}[x,y]/J$ e assim temos que existe o homomorfismo

$$\begin{aligned} f \circ h : \mathbb{K}[x,x^{-1}] &\to L_K(E) \\ x &\mapsto e \\ x^{-1} &\mapsto e^* \\ 1 &\mapsto v \end{aligned}$$

Temos que determinar a inversa da função f, para isto vamos definir

$$\begin{aligned} \widetilde{g} : \{v,e,e^*\} &\to \mathbb{K}[x,x^{-1}] \\ e &\mapsto x \\ e^* &\mapsto x^{-1} \\ v &\mapsto 1 \end{aligned}$$

Assim, podemos estender a função em um homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras $\overline{g} : \mathbb{K}\{v,e,e^*\} \to \mathbb{K}[x,x^{-1}]$, estendido de $\widetilde{g}$, que satisfaz as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} \overline{g}(v.v) &= \overline{g}(v).\overline{g}(v) \\ &= 1.1 \\ &= 1 = \overline{g}(v); \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned} \overline{g}(e.v) &= \overline{g}(e).\overline{g}(v) \\ &= x.1 \\ &= x = \overline{g}(e); \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} \overline{g}(v.e) &= \overline{g}(v).\overline{g}(e) \\ &= 1.x \\ &= x = \overline{g}(e); \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}\overline{g}(e^*.v) &= \overline{g}(e^*).\overline{g}(v)\\ &= x^{-1}.1\\ &= x^{-1} = \overline{g}(e^*);\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}\overline{g}(v.e^*) &= \overline{g}(v).\overline{g}(e^*)\\ &= 1.x^{-1}\\ &= x = \overline{g}(e^*).\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}\overline{g}(e^*.e) &= \overline{g}(e^*).\overline{g}(e)\\ &= x^{-1}.x\\ &= 1 = \overline{g}(v);\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}\overline{g}(e.e^*) &= \overline{g}(e).\overline{g}(e^*)\\ &= x.x^{-1}\\ &= 1 = \overline{g}(v).\end{aligned} \tag{3.12}$$

Disto, dado o ideal $I = \{v.v - v, e.v - e, v.e - e, e^*.v - e^*, v.e^* - e^*, e^*.e - v, e.e^* - v\}$ temos que $\overline{g}|_I = 0$. Então, pelo teorema do homomorfismo, existe um único homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras

$$\begin{aligned} g : L_K(E) &\to \mathbb{K}[x, x^{-1}]\\ e &\mapsto x\\ e^* &\mapsto x^{-1}\\ v &\mapsto 1\end{aligned}$$

Agora, vamos verificar que f e g são inversas. Dados $a, b_i, \beta_i, c_j, \eta_j \in \mathbb{K}$, com $i \in \{1, ..., n\}$ e $j \in \{1, ..., m\}$, vamos tomar

$$X = (a + b_1x + ... + b_nx^n + c_1x^{-1} + ... + c_m(x^{-1})^m) \in \mathbb{K}[x, x^{-1}]$$

e

$$Y = (\alpha v + \beta_1 e + ... + \beta_n e^n + \eta_1 e^* + ... + \eta_m (e^*)^m) \in L_K(E),$$

em que podemos escrever

$$X = a + \sum_{i=1}^{n} b_i x^i + \sum_{k=1}^{m} c_k (x^{-1})^k$$

e

$$Y = \alpha v + \sum_{i=1}^{n} \beta_i e^i + \sum_{k=1}^{m} \eta_k (e^*)^k.$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}
g(f(X)) &= g\left(f\left(a + \sum_{i=1}^{n} b_i x^i + \sum_{k=1}^{m} c_k (x^{-1})^k\right)\right) \\
&= g\left(af(1) + \sum_{i=1}^{n} b_i (f(x))^i + \sum_{k=1}^{m} c_k (f(x^{-1}))^k\right) \\
&= g\left(av + \sum_{i=1}^{n} b_i e^i + \sum_{k=1}^{m} c_k (e^*)^k\right) \\
&= ag(v) + \sum_{i=1}^{n} b_i (g(e))^i + \sum_{k=1}^{m} c_k (g(e^*))^k \\
&= a.1 + \sum_{i=1}^{n} b_i x^i + \sum_{k=1}^{m} c_k (x^{-1})^k \\
&= X
\end{aligned} \tag{3.13}$$

e

$$\begin{aligned}
f(g(Y)) &= f\left(g\left(\alpha v + \sum_{i=1}^{n} \beta_i e^i + \sum_{k=1}^{m} \eta_k (e^*)^k\right)\right) \\
&= f\left(\alpha g(v) + \sum_{i=1}^{n} \beta_i (g(e))^i + \sum_{k=1}^{m} \eta_k (g(e^*))^k\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= f\left(\alpha.1 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i x^i + \sum_{k=1}^{m} \eta_k (x^{-1})^k\right) \\
&= \alpha.f(1) + \sum_{i=1}^{n} \beta_i (f(x))^i + \sum_{k=1}^{m} \eta_k (f(x^{-1}))^k \\
&= \alpha v + \sum_{i=1}^{n} \beta_i e^i + \sum_{k=1}^{m} \eta_k (e^*)^k \\
&= Y. \qquad (3.14)
\end{aligned}
$$

Desta forma, g é inversa de f e assim f é um isomorfismo, fazendo com que neste caso $L_K(E) \simeq \mathbb{K}[x, x^{-1}]$.

■

Proposição 3.2.4. *A álgebra de caminhos de Leavitt do grafo E representado por:*

$$
\begin{tikzcd}
v_1 \arrow[r, bend left, "e"] & v_2
\end{tikzcd}
$$

é isomorfa à $M_2(\mathbb{K})$, a álgebra das matrizes de ordem 2×2.

Demonstração: Primeiro vamos notar que o grafo estendido $\widehat{E} = (E^0, E^1 \cup (E^1)^*, r, s)$ é representado da sequinte forma

$$
\begin{tikzcd}
v_1 \arrow[r, bend left, "e"] & v_2 \arrow[l, bend left, dotted, "e^*"]
\end{tikzcd}
$$

e que os elementos de $L_K(E)$ neste caso são da forma

$$a.v_1 + b.e + c.e^* + d.v_2,$$

com a, b, c e d constantes, pois

$$
\begin{gathered}
e.e = 0 \quad , \quad e^*.e^* = 0 \quad , \quad e^*.e = v_2 \quad , \quad e.e^* = v_1, \\
e.v_1 = 0 \quad , \quad v_1.e = e \quad , \quad e.v_2 = e \quad , \quad v_2.e = 0, \\
e^*.v_1 = e^* \quad , \quad v_1.e^* = 0 \quad , \quad e^*.v_2 = 0 \quad , \quad v_2.e^* = e^*, \\
v_1.v_1 = v_1 \quad , \quad v_1.v_2 = 0 = v_2.v_1 \quad , \quad v_2.v_2 = v_2.
\end{gathered}
$$

Note que

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

é uma base de $M_2(\mathbb{K})$, vamos chamar $\beta = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ respectivamente, e que são satisfeitas as igualdades:

$$E_1.E_i = \begin{cases} E_1, & \text{se } i = 1 \\ E_2, & \text{se } i = 2 \\ 0, & \text{se } i = 3, 4 \end{cases}, \qquad E_2.E_i = \begin{cases} E_1, & \text{se } i = 3 \\ E_2, & \text{se } i = 4 \\ 0, & \text{se } i = 1, 2 \end{cases},$$

$$E_3.E_i = \begin{cases} E_3, & \text{se } i = 1 \\ E_4, & \text{se } i = 2 \\ 0, & \text{se } i = 3, 4 \end{cases} \quad \text{e} \quad E_4.E_i = \begin{cases} E_3, & \text{se } i = 3 \\ E_4, & \text{se } i = 4 \\ 0, & \text{se } i = 1, 2 \end{cases},$$

Considere a função

$$\begin{aligned} \widetilde{f} : \{v_1, v_2, e, e^*\} &\to M_2(\mathbb{K}) \\ v_1 &\mapsto E_1 \\ v_2 &\mapsto E_4 \\ e &\mapsto E_2 \\ e^* &\mapsto E_3. \end{aligned}$$

Portanto, existe um homomorfismo $\overline{f} : \mathbb{K}\{v_1, v_2, e, e^*\} \to M_2(\mathbb{K})$ de $\mathbb{K}$-álgebras, que é estendido de $\widetilde{f}$, e que satisfaz:

- O produto entre vértices:

$$\begin{aligned} \overline{f}(v_1.v_1) &= \overline{f}(v_1).\overline{f}(v_1) \\ &= E_1.E_1 \\ &= E_1 = \overline{f}(v_1); \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned} \overline{f}(v_1.v_2) &= \overline{f}(v_1).\overline{f}(v_2) \\ &= E_1.E_4 \\ &= 0; \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}\overline{f}(v_2.v_1) &= \overline{f}(v_2).\overline{f}(v_1)\\ &= E_4.E_1\\ &= 0;\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}\overline{f}(v_2.v_2) &= \overline{f}(v_2).\overline{f}(v_2)\\ &= E_4.E_4\\ &= E_4 = \overline{f}(v_2).\end{aligned} \tag{3.18}$$

- O produto de aresta e vértice:

$$\begin{aligned}\overline{f}(v_1.e) &= \overline{f}(v_1).\overline{f}(e)\\ &= E_1.E_2\\ &= E_2 = \overline{f}(e);\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}\overline{f}(e.v_2) &= \overline{f}(e).\overline{f}(v_2)\\ &= E_2.E_4\\ &= E_2 = \overline{f}(e);\end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}\overline{f}(e^*.v_1) &= \overline{f}(e^*).\overline{f}(v_1)\\ &= E_3.E_1\\ &= E_3 = \overline{f}(e^*);\end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}\overline{f}(v_2.e^*) &= \overline{f}(v_2).\overline{f}(e^*)\\ &= E_4.E_3\\ &= E_3 = \overline{f}(e^*);\end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned}\overline{f}(e.v_1) &= \overline{f}(e).\overline{f}(v_1)\\ &= E_2.E_1\\ &= 0;\end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}\overline{f}(v_2.e) &= \overline{f}(v_2).\overline{f}(e)\\ &= E_4.E_2\\ &= 0;\end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned}\overline{f}(v_1.e^*) &= \overline{f}(v_1).\overline{f}(e^*)\\ &= E_1.E_3\\ &= 0;\end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}\overline{f}(e^*.v_2) &= \overline{f}(e^*).\overline{f}(v_2)\\ &= E_3.E_4\\ &= 0.\end{aligned} \tag{3.26}$$

- Produto entre arestas:

$$\begin{aligned}\overline{f}(e.e) &= \overline{f}(e).\overline{f}(e)\\ &= E_2.E_2\\ &= 0;\end{aligned} \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned}\overline{f}(e^*.e^*) &= \overline{f}(e^*).\overline{f}(e^*)\\ &= E_3.E_3\\ &= 0;\end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned}\overline{f}(e^*.e) &= \overline{f}(e^*).\overline{f}(e)\\ &= E_3.E_2\\ &= E_4 = \overline{f}(v_2); \end{aligned} \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned}\overline{f}(e.e^*) &= \overline{f}(e).\overline{f}(e^*)\\ &= E_2.E_3\\ &= E_1 = \overline{f}(v_1). \end{aligned} \tag{3.30}$$

Definindo o ideal

$$J = \{v_i.v_j - \delta_{i,j}v_i, e.v_2 - e, v_1.e - e, e^*.v_1 - e^*, v_2.e^* - e^*, e^*.e - v_2, e.e^* - v_1\},$$

com $v_i, v_j \in E^0$ quaisquer, temos que $\overline{f}|_J = 0$ e assim, pelo teorema do homomorfismo, existe um único homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras $f : L_K(E) \to M_2(\mathbb{K})$, que estende $\overline{f}$.

Agora, vamos verificar que f é uma bijeção. Para isto, seja

$$y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a.E_1 + b.E_2 + c.E_3 + d.E_4) \in M_2(\mathbb{K}),$$

vamos tomar $x = (a.v_1 + b.e + c.e^* + d.v_2) \in L_K(E)$ e assim temos

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a.v_1 + b.e + c.e^* + d.v_2)\\ &= a.f(v_1) + b.f(e) + c.f(e^*) + d.f(v_2)\\ &= a.E_1 + b.E_2 + c.E_3 + d.E_4\\ &= y. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Agora, vamos supor que $x = (a_1.v_1 + a_2.e + a_3.e^* + a_4.v_2) \in Ker(f)$, então

$$\begin{aligned}
0 &= f(x) \\
&= f(a_1.v_1 + a_2.e + a_3.e^* + a_4.v_2) \\
&= a_1.f(v_1) + a_2.f(e) + a_3.f(e^*) + a_4.f(v_2) \\
&= a_1.E_1 + a_2.E_2 + a_3.E_3 + a_4.E_4 \\
&= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

De (3.32) temos $0 = a_i$, para $i = 1, 2, 3, 4$. Desta forma temos que $x = 0$, logo $Ker(f) = \{0\}$ e com isto f é uma função bijetora.

Portanto, f é um isomorfismo e $L_K(E) \simeq M_2(\mathbb{K})$.

■

Podemos generalizar este resultado para as matrizes de ordem $n \times n$ de $M_n(\mathbb{K})$.

Proposição 3.2.5. *Dado o grafo $\widehat{E}$ representado da seguinte forma*

$$\begin{tikzcd}
v_1 \arrow[r, bend left, "e_1"] & v_2 \arrow[l, dotted, bend left, "e_1^*"] \arrow[r, bend left, "e_2"] & v_3 \arrow[l, dotted, bend left, "e_2^*"] & \cdots & v_{n-1} \arrow[r, bend left, "e_{n-1}"] & v_n \arrow[l, dotted, bend left, "e_{n-1}^*"]
\end{tikzcd}$$

então $L_K(E)$ é isomorfo à $M_n(\mathbb{K})$.

Demonstração: Primeiro vamos notar que $M_n(\mathbb{K})$ é gerado pelas matrizes elementares

$$(E_{i,j})_{n\times n} = [a_{k,l}]_{n\times n} = \begin{cases} a_{k,l} = 1, & \text{se } i = k \text{ e } j = l \\ a_{k,l} = 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Desta forma, temos então que

$$E_{i,k}.E_{l,j} = \begin{cases} E_{i,j}, & \text{se } k = l \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{3.33}$$

Vamos definir a função

$$\begin{aligned}\widetilde{f}:\{v_1,...,v_n,e_1,...,e_{n-1},e_1^*,...,e_{n-1}^*\} &\to M_n(\mathbb{K})\\ v_i &\mapsto E_{i,i}\\ e_j &\mapsto E_{j,j+1}\\ e_j^* &\mapsto E_{j+1,j}.\end{aligned}$$

Desta forma, existe um único homomorfismo

$$\overline{f}:\mathbb{K}\{v_1,...,v_n,e_1,...,e_{n-1},e_1^*,...,e_{n-1}^*\} \to M_n(\mathbb{K})$$

de $\mathbb{K}$-álgebras que é estendido de $\widetilde{f}$.

Note que se $i<j$ temos

$$\begin{aligned}\overline{f}(e_i.e_{i+1}...e_{j-1}) &= \overline{f}(e_i).\overline{f}(e_{i+1})...\overline{f}(e_{j-1})\\ &= E_{i,i+1}.E_{i+1,i+2}...E_{j-1,j}\\ &= E_{i,j}\end{aligned} \tag{3.34}$$

e

$$\begin{aligned}\overline{f}(e_{j-1}^*...e_{i+1}^*.e_i^*) &= \overline{f}(e_{j-1}^*)...\overline{f}(e_{i+1}^*).\overline{f}(e_i^*)\\ &= E_{j,j-1}...E_{i+2,i+1}.E_{i+1,i}\\ &= E_{j,i}.\end{aligned} \tag{3.35}$$

Temos ainda que $\overline{f}$ satisfaz as seguintes propriedades:

- O produto entre vértices:

$$\begin{aligned}\overline{f}(v_i.v_j) &= \overline{f}(v_i).\overline{f}(v_j)\\ &= E_{i,i}.E_{j,j}\\ &= \begin{cases} E_{i,i}, & \text{se } i=j\\ 0, & \text{caso contrário}\end{cases}\\ &= \begin{cases} \overline{f}(v_i), & \text{se } i=j\\ 0, & \text{caso contrário}\end{cases}.\end{aligned} \tag{3.36}$$

- O produto de aresta e vértice:

$$\begin{aligned}\overline{f}(v_i.e_j) &= \overline{f}(v_i).\overline{f}(e_j)\\ &= E_{i,i}.E_{j,j+1}\\ &= \begin{cases} E_{i,i+1}, & \text{se } i=j\\ 0, & \text{caso contrário}\end{cases}\\ &= \begin{cases} \overline{f}(e_i), & \text{se } i=j\\ 0, & \text{caso contrário}\end{cases};\end{aligned} \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned}\overline{f}(e_j.v_i) &= \overline{f}(e_j).\overline{f}(v_i)\\ &= E_{j,j+1}.E_{i,i}\\ &= \begin{cases} E_{j,j+1}, & \text{se } i=j+1\\ 0, & \text{caso contrário}\end{cases}\\ &= \begin{cases} \overline{f}(e_j), & \text{se } i=j+1\\ 0, & \text{caso contrário}\end{cases};\end{aligned} \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned}\overline{f}(e_j^*.v_i) &= \overline{f}(e_j^*).\overline{f}(v_i)\\ &= E_{j+1,j}.E_{i,i}\\ &= \begin{cases} E_{i+1,i}, & \text{se } i=j\\ 0, & \text{caso contrário}\end{cases}\\ &= \begin{cases} \overline{f}(e_i^*), & \text{se } i=j\\ 0, & \text{caso contrário}\end{cases};\end{aligned} \tag{3.39}$$

$$\begin{aligned}\overline{f}(v_i.e_j^*) &= \overline{f}(v_i).\overline{f}(e_j^*)\\ &= E_{i,i}.E_{j+1,j}\\ &= \begin{cases} E_{j+1,j}, & \text{se } i=j+1\\ 0, & \text{caso contrário}\end{cases}\\ &= \begin{cases} \overline{f}(e_j^*), & \text{se } i=j+1\\ 0, & \text{caso contrário}\end{cases}.\end{aligned} \tag{3.40}$$

- Produto entre arestas:

$$\begin{aligned}
\overline{f}(e_i^*.e_j) &= \overline{f}(e_i^*).\overline{f}(e_j) \\
&= E_{i+1,i}.E_{j,j+1} \\
&= \begin{cases} E_{i+1,i+1}, & \text{se } i=j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \overline{f}(v_{i+1}), & \text{se } i=j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases};
\end{aligned} \tag{3.41}$$

$$\begin{aligned}
\overline{f}(e_j.e_i^*) &= \overline{f}(e_j).\overline{f}(e_i^*) \\
&= E_{j,j+1}.E_{i+1,i} \\
&= \begin{cases} E_{i,i}, & \text{se } i=j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \overline{f}(v_i), & \text{se } i=j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Se definirmos o ideal

$$J = \left\{ \begin{matrix} v_i.v_j - \delta_{i,j}v_i, \quad e_i.r(e_i) - e_i, \quad s(e_i).e_i - e_i, \quad e_i^*.s(e_i) - e_i^*, \\ r(e_i).e_i^* - e_i^*, \quad e_i^*.e_j - \delta_{e_i,e_j}r(e_j), \quad e_i.e_i^* - v_i \end{matrix} \right\},$$

para quaiquer $v_i, v_j \in E^0$ e quaiquer $e_i, e_j \in E^1$. Com isto, temos que $\overline{f}|_J = 0$ e, pelo teorema do homomorfismo, existe um único homomorfismo f de $\mathbb{K}$-álgebras, que é estendido de $\overline{f}$, com

$$f : L_K(E) \to M_n(\mathbb{K}).$$

Vamos verificar que f é uma bijeção. Para isto, se $i < j$, basta observar que para qualquer matriz elementar $E_{i,j}$ temos que

$$\begin{aligned}
E_{i,i} &= f(v_i), \\
E_{i,j} &= f(e_i ... e_{j-1}), \\
E_{j,i} &= f(e_{j-1}^* ... e_i^*),
\end{aligned}$$

assim todo elemento da base de $M_n(\mathbb{K})$ faz parte do conjunto imagem da função f, que é um homomorfismo, portanto f é sobrejetora.

Para verificarmos que f é injetora, vamos determinar como são os termos de $L_K(E)$ neste caso. Primeiro, se ξ é um caminho no grafo, vamos verificar que ξ não pode conter arestas consecutivas iguais. Se existem $e_i, e_i^* \in E^1$ e $\eta, \lambda \in E^*$ de forma que $\xi = \eta.e_i.e_i.\lambda$ ou $\xi = \eta.e_i^*.e_i^*\lambda$ então da concatenação de caminhos temos

$$\begin{aligned} \xi &= \eta.e_i.e_i.\lambda \\ &= \eta.0.\lambda \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.43}$$

e

$$\begin{aligned} \xi &= \eta.e_i^*.e_i^*.\lambda \\ &= \eta.0.\lambda \\ &= 0, \end{aligned} \tag{3.44}$$

ou seja, se um caminho é composto por duas arestas (reais ou fantasmas) consecutivas iguais, então esse caminhos é nulo. De forma mais geral, dado $\xi \in E^*$ se existirem $\eta, \gamma, \lambda \in E^*$ de forma que $\xi = \eta.\gamma.\gamma.\lambda$ então $\xi = 0$.

Agora, se $\xi \in E^*$ é um caminho de forma que existem $\eta, \lambda \in E^*$ e $e_i, e_j \in E^1$, com $i + 1 \neq j$, tais que $\xi = \eta.e_i.e_j.\lambda$ ou $\xi = \eta.e_j^*.e_i^*.\lambda$ então da concatenação de caminhos temos

$$\begin{aligned} \xi &= \eta.e_i.e_j.\lambda \\ &= \eta.0.\lambda \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.45}$$

e

$$\begin{aligned} \xi &= \eta.e_j^*.e_i^*.\lambda \\ &= \eta.0.\lambda \\ &= 0, \end{aligned} \tag{3.46}$$

ou seja, palavras que possuem uma sequência de letras $e_i.e_j$ ou $e_j^*.e_i^*$, de forma que as arestas dessas letras não são consecutivas, $r(e_i) \neq s(e_j)$, são nulas.

Com estes fatos, se supusermos que $\xi \in E^*$ é tal que $\xi \neq 0$ então não pode ocorrer $\xi = \eta.e_i.e_i.\lambda$ e $\xi = \eta.e_i^*.e_i^*.\lambda$. Desta forma, se existe a repetição do termo e_i ou e_i^*, em ξ temos que esses termos não são consecutivos.

Assim, existe $\gamma \in E^*$ tal que $\xi = \eta.e_i.\gamma.e_i.\lambda$ ou $\xi = \eta.e_i^*\gamma.e_i^*.\lambda$, e com isto γ é um caminho que começa na imagem de e_i e termina na sua fonte, ou seja, podemos escrever por exemplo

$$\begin{aligned}\gamma =& e_{i+1}...e_{i+k}.e_{i+k}^*...e_{i+1}^*e_i^*.e_{i-1}^*...e_{i-l}^*.e_{i-l}...e_{i-1}\\ =& e_i^*.\end{aligned} \tag{3.47}$$

Então,

$$\begin{aligned}\xi &= \eta.e_i.\gamma.e_i.\lambda\\ &= \eta.e_i.e_i^*.e_i.\lambda\\ &= \eta.e_i.\delta_{e_i.e_i}r(e_i).\lambda\\ &= \eta.e_i.r(e_i).\lambda\\ &= \eta.e_i.\lambda,\end{aligned} \tag{3.48}$$

o que nos garante que no caminho ξ não existe a repetição de e_i, $\forall i \in \{1,...,n\}$. De forma análoga se verifica que não existem repetidos e_i^*, $\forall i \in \{1,...,n\}$, em ξ.

Como temos apenas as arestas $e_1, e_2, ..., e_{n-1}$, podemos notar que se existir um caminho ξ, tal que $|\xi| > n-1$, então, pelo princípio da casa dos pombos, temos que existe a repetição de arestas nesse caminho e assim, como vimos anteriormente, este caminho é nulo.

Se $\xi \neq 0$ temos que $|\xi| \leq n-1$ como foi visto.

Portanto, podemos afirmar que os termos de $L_K(E)$ são da forma

$$\begin{aligned}x =& \sum_{i=1}^{n} \alpha_{1_i}.v_i + \sum_{j=1}^{n-1}(\beta_{1_j}.e_j + \gamma_{1_j}.e_j^*)\\ &+ \sum_{k=1}^{n-2} \beta_{2_k}.e_k.e_{k+1} + ... + \sum_{l=1}^{2} \beta_{3_l}.e_l...e_{n+l-3} + \beta_4.e_1.e_2...e_{n-1}\\ &+ \sum_{p=1}^{n-2} \gamma_{2_p}.e_{p+1}^*.e_p^* + ... + \sum_{q=1}^{2} \gamma_{3_q}.e_{n+q-3}^*...e_q^* + \gamma_4.e_{n-1}^*...e_2^*.e_1^*\end{aligned} \tag{3.49}$$

em que $\alpha_{1_s}, \beta_{t_u}, \gamma_{w_z} \in \mathbb{K}$.

Agora, seja $x \in Ker(f) \subseteq L_K(E)$, da forma apresentada em (3.49), então

$$
\begin{aligned}
f(x) = & \sum_{i=1}^{n} \alpha_{1_i}.E_{i,i} + \sum_{j=1}^{n-1}(\beta_{1_j}.E_{j,j+1} + \gamma_{1_j}.E_{j+1,j}) \\
& + \sum_{k=1}^{n-2} \beta_{2_k}.E_{k,k+2} + ... + \sum_{l=1}^{2} \beta_{3_l}.E_{l,n+l-2} + \beta_4.E_{1,n} \\
& + \sum_{p=1}^{n-2} \gamma_{2_p}.E_{p+2,p} + ... + \sum_{q=1}^{2} \gamma_{3_q}.E_{n+q-2,q} + \gamma_4.E_{n,1}
\end{aligned}
$$

$$
= \begin{pmatrix}
\alpha_{1_1} & \beta_{1_1} & \beta_{2_1} & \ddots & \beta_{3_1} & \beta_4 \\
\gamma_{1_1} & \alpha_{1_2} & \beta_{1_2} & \beta_{2_2} & \ddots & \beta_{3_2} \\
\gamma_{2_1} & \gamma_{1_2} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\
\ddots & \gamma_{2_2} & \ddots & \ddots & \ddots & \beta_{2_{n-2}} \\
\gamma_{3_1} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \beta_{1_{n-1}} \\
\gamma_4 & \gamma_{3_2} & \ddots & \gamma_{2_{n-2}} & \gamma_{1_{n-1}} & \alpha_{1_n}
\end{pmatrix} = 0
$$

Como a matriz é igual a zero, temos que $\alpha_{1_s} = \beta_{t_u} = \gamma_{w_z} = 0$. Assim, $x = 0$ e portanto a função f é injetora.

Logo, f é um isomorfismo e então $L_K(E) \simeq M_n(\mathbb{K})$.

■

Agora, queremos generalizar a forma como podem ser escritos os termos de uma álgebra de caminhos de Leavitt. Para isto, vamos demonstrar o seguinte lema.

Lema 3.2.6. *Se $E = (E^0, E^1, r, s)$ é um grafo e $L_K(E)$ é a $\mathbb{K}$-álgebra de caminhos de Leavitt associada a ele, então*

$$L_K(E) = span\{\xi.\eta^*; \xi, \eta \in E^* \text{ e } r(\xi) = r(\eta)\}.$$

Demonstração: Queremos mostrar que todo elemento em $L_K(E)$ é formado por combinações lineares de monômios na forma $k.\xi.\eta^*$, em que $\xi, \eta \in E^*$ e $k \in \mathbb{K}$. Para isto vamos mostrar por indução que cada monômio em $\alpha = k.\alpha_1...\alpha_n \in L_K(E)$, com $\alpha_i \in E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^*$, pode ser escrito na forma $\alpha = k.\xi.\eta^*$.

$i)$ Se $\alpha = k.\alpha_1$ temos que $\alpha_1 \in E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^*$, assim

se $\alpha_1 = v \in E^0$, $\exists e \in E^1$ tal que $s(e) = v$ e com isto

$$\begin{aligned} k.e.e^* &= k.\delta_{e^*,e^*} r(e^*) \\ &= k.r(e^*) \\ &= k.s(e) \\ &= k.v = \alpha; \end{aligned}$$

se $\alpha_1 \in E^1$, temos que $\alpha_1 = e \in E^1$ e assim

$$\begin{aligned} k.e.(e^*.e)^* &= k.e.(e^*.e) \\ &= k.e.\delta_{e,e} r(e) \\ &= k.e.r(e) \\ &= k.e = \alpha; \end{aligned}$$

se $\alpha_1 \in (E^1)^*$, temos $\alpha_1 = e^* \in (E^1)^*$ e com isto

$$\begin{aligned} k.e^*.(e.e^*)^* &= k.e^*.(e.e^*) \\ &= k.\delta_{e^*,e^*} r(e^*) \\ &= k.e^*.r(e^*) \\ &= k.e^*.s(e) \\ &= k.e^* = \alpha. \end{aligned}$$

Desta forma, os elementos de E^0, E^1 e $(E^1)^*$ podem ser escritos na forma $k.\xi.\eta^*$.
$ii)$ Vamos mostrar que isto sempre vale por indução. Assim, suponhamos que $\alpha = k\alpha_1 ... \alpha_n$ pode ser escrito na forma $\alpha = k.\xi.\eta^*$ ou $\alpha = k.v$. Assim, vamos mostrar que isto vale para $(n+1)$ verificando os casos de $\alpha.\beta = k.\alpha_1 ... \alpha_n.\beta$ e $\alpha.\beta = k.v.\beta$, para $\beta = \alpha_{n+1}$. Assim

1. se $\alpha = kv$, com $v \in E^0$ e $v = ee^*$, para algum $e \in E^1$, e se $\beta = w \in E^0$ então

$$\begin{aligned} \alpha.\beta &= k.v.w \\ &= k.\delta_{v,w} v \\ &= \begin{cases} k.v, & \text{se } v = w \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} k.e.e^*, & \text{se } v = w \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}; \tag{3.50}$$

2. se $\beta = f \in E^1$, temos que

$$\begin{aligned} \alpha.\beta &= k.v.f \\ &= k.\delta_{v,s(f)} f \\ &= \begin{cases} k.f, & \text{se } v = s(f) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}; \end{aligned} \tag{3.51}$$

3. se $\beta = f^* \in (E^1)^*$, temos

$$\begin{aligned} \alpha.\beta &= k.v.f^* \\ &= k.\delta_{v,s(f^*)} f^* \\ &= \begin{cases} k.f^*, & \text{se } v = s(f^*) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}; \end{aligned} \tag{3.52}$$

4. se $\alpha = k.\xi.\eta^*$ e $\beta = w \in E^0$ temos que

$$\begin{aligned} \alpha.\beta &= k.\xi.\eta^* w \\ &= k.\xi.\eta^*.s(\eta).w \\ &= k.\xi.\eta^*.\delta_{s(\eta),w} w \\ &= \begin{cases} k.\xi.\eta^*, & \text{se } s(\eta) = w \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}; \end{aligned} \tag{3.53}$$

5. se $\alpha = k.\xi.\eta^*$ e $\beta = f \in E^1$ temos que

$$\begin{aligned} \alpha.\beta &= k.\xi.\eta^*.f \\ &= k.\xi.\delta_{\eta,f} r(f) \\ &= \begin{cases} k.\xi.r(f), & \text{se } \eta = f \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} k.\delta_{r(\xi),r(f)}\xi, & \text{se } \eta = f \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} k.\xi, & \text{se } \eta = f \text{ e } r(\xi) = r(f) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}; \tag{3.54}$$

6. se $\alpha = k.\xi.\eta^*$ e $\beta = f^* \in (E^1)^*$ temos

$$\begin{aligned} \alpha.\beta &= k.\xi.\eta^*.f^* \\ &= k.\delta_{\xi^*,\eta^*} r(\eta^*).f^* \\ &= \begin{cases} k.r(\eta^*).f^*, & \text{se } \xi^* = \eta^* \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \\ &= \begin{cases} k.\delta_{r(\eta^*),s(f^*)} f^*, & \text{se } \xi^* = \eta^* \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \\ &= \begin{cases} k.f^*, & \text{se } \xi^* = \eta^* \text{ e } r(\eta^*) = s(f^*) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}. \end{aligned} \tag{3.55}$$

Note que não consideramos o caso trivial em que $\alpha.\beta = 0$, pois este já é contemplado quando $k = 0$. Temos ainda que nos casos em que $\alpha.\beta = k.e$ ou $\alpha.\beta = k.e^*$, para $e \in E^1$, existe $f \in E^*$ tal que $r(e) = s(f)$ e assim $e = (e.f).f^*$ ou $e^* = f.(e.f)^*$, fazendo com que $\alpha.\beta = k\alpha_1...\alpha_n\beta = k.\xi.\eta^*$.

Logo, $\alpha = k\xi\eta^*$, ou seja, todo elemento de $L_K(E)$ pode ser escrito como soma de monômios dessa forma e assim $L_K(E) = span\{\xi\eta^*; \xi, \eta \in E^* e r(\xi) = r(\eta)\}$.

■

Esta demonstração está feita de forma parecida em (DANGERFIELD, 2011). Deste resultado temos que os elementos de $L_K(E)$ podem ser escritos da forma

$$\sum_{\{v \in E^0\}} \alpha.v + \sum_{\{e,f \in E^*\}} \beta.e.f^*. \tag{3.56}$$

Agora, queremos saber se o grafo infinito também possui unidades, ou o que chamamos de unidades locais.

Definição 3.2.7. *Um conjunto de* ***unidades locais*** *de uma álgebra R é um conjunto $U \subset R$ com elementos idempotentes e que comutam,* *tal que para qualquer número finito de elementos* $x_1, ..., x_n \in R$ *existe* $u \in U$ *tal que*

$$ux_i = x_i u = x_i, i = 1, ..., n.$$

Teorema 3.2.8. *Dado o grafo* $\widehat{E} = (E^0, E^1 \cup (E^1)^*, r, s)$ *temos que se* E^0 *é um conjunto infinito então* $L_K(E)$ *é uma álgebra com unidades locais.*

Demonstração: Seja $\{x_i\}_{i=1}^n$ um subconjunto finito de $L_K(E)$, de (3.56) temos que, $\forall i \in \{1, ..., n\}$, x_i pode ser representado como somas finitas de vértices e de caminhos (com caminhos fantasmas) do grafo.

Para cada termo x_i temos que a representação em soma não precisa conter todos os elementos do grafo, ou seja, escrevemos x_i como uma soma de alguns vértices e alguns caminhos do grafo. Desta forma, para escrever x_i usando todos os vértices e caminhos do grafo precisamos de uma notação que indique que essa representação em soma depende do elemento x_i, ou seja, depende diretamente do índice $i \in \{1, ..., n\}$.

Desta forma, vamos escrever

$$x_i = \sum_{j=1}^{o_i} \alpha_j^{(i)}.v_j^{(i)} + \sum_{k=1}^{p_i} \beta_k^{(i)}.\xi_k^{(i)}.(\eta_k^*)^{(i)},$$

em que a notação $\alpha_j^{(i)}$ e $\beta_k^{(i)}$ indica que as constantes, α_j e β_k, utilizadas na soma dependem do elemento x_i (assim, algumas dessas constantes podem ser zero, dependendo de i).

Considerando

$$V = \bigcup_{i=1}^{n} \left\{ v_j^{(i)}, s\left(\xi_k^{(i)}(\eta_k^*)^{(i)}\right), r\left(\xi_k^{(i)}(\eta_k^*)^{(i)}\right); j \in \{1, ..., o_i\} \text{ e } k \in \{1, .., p_i\} \right\}$$

como nosso possível conjunto de unidades locais. Vamos ver que estes são idempotentes, ou seja, para $v_j^{(i)}, s\left(\xi_k^{(i)}(\eta_k^*)^{(i)}\right), r\left(\xi_k^{(i)}(\eta_k^*)^{(i)}\right) \in V$ quaisquer temos

$$\begin{aligned} v_j^{(i)}.v_j^{(i)} &= \delta_{v_j^{(i)}, v_j^{(i)}} v_j^{(i)} \\ &= v_j^{(i)}; \end{aligned} \tag{3.57}$$

$$s\left(\xi_k^{(i)}(\eta_k^*)^{(i)}\right).s\left(\xi_k^{(i)}(\eta_k^*)^{(i)}\right) = \delta_{s\left(\xi_k^{(i)}(\eta_k^*)^{(i)}\right),s\left(\xi_k^{(i)}(\eta_k^*)^{(i)}\right)} s\left(\xi_k^{(i)}(\eta_k^*)^{(i)}\right)$$
$$= s\left(\xi_k^{(i)}(\eta_k^*)^{(i)}\right); \tag{3.58}$$

$$r\left(\xi_k^{(i)}(\eta_k^*)^{(i)}\right).r\left(\xi_k^{(i)}(\eta_k^*)^{(i)}\right) = \delta_{r\left(\xi_k^{(i)}(\eta_k^*)^{(i)}\right),r\left(\xi_k^{(i)}(\eta_k^*)^{(i)}\right)} r\left(\xi_k^{(i)}(\eta_k^*)^{(i)}\right)$$
$$= r\left(\xi_k^{(i)}(\eta_k^*)^{(i)}\right). \tag{3.59}$$

Os elementos de V comutam pois, da definição, a operação de vértices é comutativa, ou seja, $v.w = \delta_{v,w}v = \delta_{w,v}w = w.v$ para todo $v, w \in E^0$.

Agora, tome
$$\mu = \sum_{v \in V} v.$$
Como as somas aqui são finitas, temos que $\forall i \in \{1, ..., n\}$ vale

$$\begin{aligned}
\mu.x_i &= \sum_{v\in V} v.\left(\sum_{j=1}^{o_i} \alpha_j^{(i)}.v_j^{(i)} + \sum_{k=1}^{p_i} \beta_k^{(i)}.\xi_k^{(i)}.(\eta_k^*)^{(i)}\right) \\
&= \sum_{v\in V}\sum_{j=1}^{o_i} v.\alpha_j^{(i)}.v_j^{(i)} + \sum_{v\in V}\sum_{k=1}^{p_i} v.\beta_k^{(i)}.\xi_k^{(i)}.(\eta_k^*)^{(i)} \\
&= \sum_{v\in V}\sum_{j=1}^{o_i} \alpha_j^{(i)}.\delta_{v,v_j^{(i)}}.v_j^{(i)} + \sum_{v\in V}\sum_{k=1}^{p_i} \beta_k^{(i)}.\delta_{v,s(\xi_k^{(i)}.(\eta_k^*)^{(i)})}\xi_k^{(i)}.(\eta_k^*)^{(i)} \\
&= \sum_{v\in V}\sum_{j=1}^{o_i} \alpha_j^{(i)}.v_j^{(i)} + \sum_{v\in V}\sum_{k=1}^{p_i} \beta_k^{(i)}.\xi_k^{(i)}.(\eta_k^*)^{(i)} \\
&= \sum_{j=1}^{o_i} \alpha_j^{(i)}.v_j^{(i)} + \sum_{k=1}^{p_i} \beta_k^{(i)}.\xi_k^{(i)}.(\eta_k^*)^{(i)} \\
&= x_i
\end{aligned} \tag{3.60}$$

e

$$
\begin{aligned}
x_i, \mu &= \left(\sum_{j=1}^{o_i} \alpha_j^{(i)}.v_j^{(i)} + \sum_{k=1}^{p_i} \beta_k^{(i)}.\xi_k^{(i)}.(\eta_k^*)^{(i)} \right) . \sum_{v \in V} v \\
&= \sum_{j=1}^{o_i} \sum_{v \in V} \alpha_j^{(i)}.v_j^{(i)}.v + \sum_{k=1}^{p_i} \sum_{v \in V} \beta_k^{(i)}.\xi_k^{(i)}.(\eta_k^*)^{(i)}.v \\
&= \sum_{j=1}^{o_i} \sum_{v \in V} \alpha_j^{(i)}.\delta_{v_j^{(i)},v}.v_j^{(i)} + \sum_{k=1}^{p_i} \sum_{v \in V} \beta_k^{(i)}.\delta_{r(\xi_k^{(i)}.(\eta_k^*)^{(i)}),v}\xi_k^{(i)}.(\eta_k^*)^{(i)} \\
&= \sum_{j=1}^{o_i} \sum_{v \in V} \alpha_j^{(i)}.v_j^{(i)} + \sum_{k=1}^{p_i} \sum_{v \in V} \beta_k^{(i)}.\xi_k^{(i)}.(\eta_k^*)^{(i)} \\
&= \sum_{j=1}^{o_i} \alpha_j^{(i)}.v_j^{(i)} + \sum_{k=1}^{p_i} \beta_k^{(i)}.\xi_k^{(i)}.(\eta_k^*)^{(i)} \\
&= x_i. \qquad (3.61)
\end{aligned}
$$

Desta forma, μ é a unidade de $\{x_i\}_{i=1}^n$ e assim $V \subseteq E^0$ é o conjunto de unidades locais da álgebra.

■

Vale lembrar que se E^0 é finito, então $L_K(E)$ é uma álgebra com unidade e sua unidade é

$$\sum_{v \in E^0} v.$$

4 ÁLGEBRA DE CAMINHOS DE LEAVITT SIMPLES

Neste capítulo queremos verificar quando uma álgebra de caminhos de Leavitt será simples. Desta forma, introduziremos o conceito de álgebra simples e, após isto, estudaremos quais são as condições necessárias e suficiente, no grafo $E = (E^0, E^1, r, s)$ para que sua Álgebra de Caminhos de Leavitt seja simples. Para isto, necessitamos de algumas propriedades e resultados a respeito de caminhos fechados, ciclos e da definição de caminhos fechados simples.

4.1 PROPRIEDADES ENVOLVENDO CAMINHOS FECHADOS

Da definição (1.2.9), lembremos que um caminho $\xi = e_1...e_n$ é dito ser *fechado* em v se $s(\xi) = r(\xi) = v$ e é dito ser um *ciclo* se, além disso, tivermos $s(e_i) \neq s(e_j), \forall i \neq j$. Com isto claro, também podemos definir o que chamamos de caminho fechado simples em um vértice v e perceber a diferença entre as definições.

Definição 4.1.1. *Se $\xi = e_1...e_n$ tal que $r(\xi) = s(\xi) = v$ com $s(e_i) \neq v$, para $i > 1$, dizemos que o caminho ξ é um* ***caminho fechado simples*** *em v.*

De forma simples, um caminho fechado simples em um vértice v é um caminho que começa e termina em v, e além disso, só passa pelo vértice v uma vez.

Assim, um ciclo nada mais é do que um caminho fechado simples em todos os seus vértices. Utilizaremos as notações $CF(v)$ e $CFS(v)$ para os conjuntos dos caminhos fechados em v e os caminhos fechados simples em v, respectivamente.

Também podemos verificar como se dá o produto de dois caminhos fechados simples em v e o que resulta desta operação.

Lema 4.1.2. *Seja v um vértice de um grafo e $\xi, \eta \in CFS(v)$, então $\xi^*\eta = \delta_{\xi,\eta} v$.*

Demonstração: Vamos supor que $\xi = e_1...e_n \in E^*$ e que $\eta = f_1...f_m \in E^*$.

Se $m = n$, mas $\xi \neq \eta$, temos que existe pelo menos um índice $k \in \{1, ..., n\}$ tal que $e_k \neq f_k$. Vamos supor que $e_i = f_i$, $\forall i < k$, desta forma

$$
\begin{aligned}
\xi^*\eta =& e_n^*...e_1^*.f_1...f_n \\
=& e_n^*....e_2^*.\delta_{e_1,f_1} r(f_1).f_2...f_n \\
=& e_n^*....e_2^*.r(f_1).f_2...f_n \\
=& e_n^*....e_2^*.f_2...f_n \\
=& ... \\
=& e_n^*....e_k^* f_k...f_n \\
=& e_n^*....\delta_{e_k,f_k} r(f_k)...f_n \\
=& 0. \qquad (4.1)
\end{aligned}
$$

Se $\xi = \eta$ temos que

$$
\begin{aligned}
\xi^*.\eta =& e_n^*...e_1^*.f_1...f_n \\
=& e_n^*....e_2^*.\delta_{e_1,f_1} r(f_1).f_2...f_n \\
=& e_n^*....e_2^*.r(f_1).f_2...f_n \\
=& e_n^*....e_2^*.f_2...f_n \\
=& ... \\
=& e_n^*.f_n \\
=& \delta_{e_n,f_n} r(f_n) \\
=& r(f_n) \\
=& v. \qquad (4.2)
\end{aligned}
$$

Se $n < m$, $\exists k \in \mathbb{N}^*$ tal que $m = n + k$, desta forma podemos escrever $\eta = f_1...f_n f_{n+1}...f_k$. Neste caso, se $f_1...f_n = \xi$ temos que

$$v = r(\xi) = r(f_1...f_n) \Rightarrow s(f_{n+1}...f_k) = v$$

um absurdo, pois η passaria pelo menos duas vezes pelo vértice v e assim $\eta \notin CFS(v)$. Assim, $f_1...f_n \neq \xi$ e com isto voltamos ao primeiro caso analisado aqui.

Se $n > m$, $\exists k \in \mathbb{N}^*$ tal que $n = m + k$, desta forma podemos escrever $\xi = e_1...e_m e_{m+1}...e_k$. Desta forma, se $e_1...e_m = \eta$ temos que

$$v = r(\eta) = r(e_1...e_m) \Rightarrow s(e_{m+1}...e_k) = v$$

o que também é um absurdo, pois ξ é um caminho simples em v e então não pode passar mais de uma vez nesse vértice. Portanto, $e_1...e_m \neq \eta$ e com isto voltamos ao primeiro caso.

Portanto, dos casos analisados temos que $\xi^*\eta = \delta_{\xi,\eta}v$.

$\blacksquare$

Com este resultado podemos mostrar como podemos escrever um caminho fechado em v usando apenas caminhos fechados simples, o que é feito a seguir.

Lema 4.1.3. *Se v é um vértice de um grafo e $\xi \in CF(v)$, existem únicos $\eta_1, ..., \eta_m \in CFS(v)$ tais que $\xi = \eta_1...\eta_m$.*

Demonstração: Seja $\xi = e_{i_1}...e_{i_n}$ e vamos tomar $T = \{t \in \{1, ..., n\}; r(e_{i_t}) = v\}$. Desta forma, os elementos de T podem ser listados em ordem fazendo $1 \leq t_1 < ... < t_m = n$. Note que se $r(e_{i_t}) = v$ temos que $s(e_{i_{t+1}}) = v$, pois $e_{i_{t+1}}$ é a aresta que vem após e_{i_t}.

Agora, se $1 < t_1$ vamos tomar $\eta_1 = e_{i_1}...e_{i_{t_1}}$ e $\eta_j = e_{i_{1+t_{j-1}}}...e_{i_{t_j}}$, para $j > 1$. Assim, como $t_1 \in T$ é o primeiro índice em que $r(e_t) = v$, temos que η_1 é um caminho fechado simples em v e, como $t_j \in T$ e $s(e_{1+i_{j-1}}) = v$, temos que η_j também são caminhos fechados simples em v.

No caso contrário, em que $1 = t_1$, temos que $s(e_{i_{t_1}}) = s(e_{i_1}) = v$ e assim basta tomar $\eta_1 = e_{i_{t_1}}...e_{i_{t_2}}$ e $\eta_j = e_{i_{1+t_j}}...e_{i_{t_{j+1}}}$, com $1 < j < m$. Neste caso, η_1 é um caminho fechado simples em v, pois não existem termos k entre t_1 e t_2 tais que $r(e_{i_k}) = v$, e com o mesmo raciocínio temos que η_j também são caminhos fechados simples em v.

Assim, temos que

$$\eta_1...\eta_m = \xi$$

ou

$$\eta_1...\eta_{m-1} = \xi.$$

Agora vamos supor que $\xi = \eta_1...\eta_n = \gamma_1...\gamma_m$ com $\eta_i, \gamma_j \in CFS(v)$. Multiplicando os dois lados da igualdade anterior por η_1^* temos

$$\begin{aligned} \eta_1^*\eta_1...\eta_n &= \eta_1^*\gamma_1...\gamma_m \\ \delta_{\eta_1,\eta_1}r(\eta_1).\eta_2...\eta_n &= \delta_{\eta_1,\gamma_1}r(\gamma_1).\gamma_2...\gamma_m \\ v.\eta_2...\eta_n &= \delta_{\eta_1,\gamma_1}v.\gamma_2...\gamma_m. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Como $0 \neq v.\eta_2...\eta_n$, pois $\eta_2 \in CFS(v)$, temos que $\delta_{\eta_1,\gamma_1} = 1$, ou seja, $\eta_1 = \gamma_1$. Assim,

$$\eta_2...\eta_n = \gamma_2...\gamma_m.$$

Vamos supor por indução que $\eta_i = \gamma_i$ para $i \in \{1, ..., k\}$, queremos mostrar que $\eta_{k+1} = \gamma_{k+1}$. Assim,

$$\eta_{k+1}...\eta_n = \gamma_{k+1}...\gamma_m.$$

Multiplicando por η_{k+1}^* na igualdade anterior temos

$$\begin{aligned} \eta_{k+1}^*\eta_{k+1}...\eta_n =& \eta_{k+1}^*\gamma_{k+1}...\gamma_m \\ \delta_{\eta_{k+1},\eta_{k+1}}.r(\eta_{k+1}).\eta_{k+2}...\eta_n =& \delta_{\eta_{k+1},\gamma_{k+1}}.r(\gamma_{k+1}).\gamma_{k+2}...\gamma_m \\ v.\eta_{k+2}...\eta_n =& \delta_{\eta_{k+1},\gamma_{k+1}}.v.\gamma_{k+2}...\gamma_m. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Como $0 \neq v.\eta_{k+2}...\eta_n$, pois $\eta_{k+2} \in CFS(v)$, temos que $\delta_{\eta_{k+1},\gamma_{k+1}} = 1$ e assim

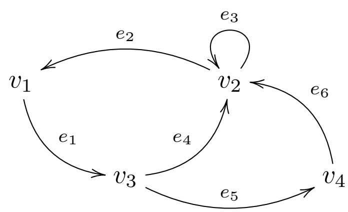
$$\eta_{k+1} = \gamma_{k+1}.$$

Logo, por indução temos $\eta_i = \gamma_i$ o que indica que $\xi = \eta_1...\eta_n$ é único.

■

Vamos chamar de **grau de retorno** de ξ, em v, como sendo o valor n, na decomposição $\xi = \eta_1...\eta_n$ do lema anterior, e escreveremos $GR_v(\xi) = n$.

Exemplo 4.1.4. *No grafo representado abaixo:*



o caminho $\xi = e_2e_1e_5e_6e_3e_2e_1e_4$ é um caminho fechado no vértice v_2 e, assim como é afirmado no lema anterior, dados os caminhos $\eta = e_2e_1e_5e_6$, $\theta = e_3$ e $\lambda = e_2e_1e_4$ fechados simples em v_2, temos que $\xi = \eta\theta\lambda$.

Temos ainda que, no exemplo anterior, o grau de retorno de ξ em v_2 é $GR_{v_2}(\xi) = 3$.

Vamos relembrar a definição de saída apresentada em (1.2.7). Dado um caminho $\xi = e_1...e_n$, dizemos que uma aresta e_k é uma saída do caminho ξ se $\exists i \in \{1, .., n\}$ tal que $s(e_k) = s(e_i)$ e $e_k \neq e_i$. Com isto, podemos verificar as seguintes equivalências.

Lema 4.1.5. *Seja $E = (E^0, E^1, r, s)$ um grafo, são equivalentes:*
(i) Todo ciclo tem uma saída;
(ii) Todo caminho fechado tem uma saída;
(iii) Todo caminho fechado simples tem uma saída;
(iv) Para todo $v \in E^0$, se $CFS(v) \neq \emptyset$ então $\exists \xi \in CFS(v)$ que possui uma saída.

Demonstração:
$(ii) \Rightarrow (iii)$: É direto das definições de caminho fechado simples e caminho fechado.
$(iii) \Rightarrow (i)$: É direto das definições de ciclo e caminho fechado simples.
$(i) \Rightarrow (ii)$: Tome $\xi \in CF(v)$. Pelo lema anterior temos que existem $\eta_1, ..., \eta_n \in CFS(v)$ tais que $\xi = \eta_1 ... \eta_n$.

Se η_i é um ciclo, para algum i, temos que η_i tem uma saída e assim ξ também tem uma saída. Se η_i não é um ciclo, para todo i, temos que $\eta_i = e_{i_1} ... e_{i_m}$, com $e_{i_j} \in E^1$, com $j \in \{1, ..., m\}$, e que existem $j, k \neq 1$ tais que $s(e_{i_j}) = s(e_{i_k}) = w \neq v$.

Suponhamos que e_{i_k} seja a última aresta do caminho η_i em que ocorre a repetição de vértice na origem. Se $e_{i_j} = e_{i_k}$ temos que $r(e_{i_j}) = r(e_{i_k}) = v$ e então $s(e_{i_{j+1}}) = v$, um absurdo, pois $\eta_i \in CFS(v)$. Caso $r(e_{i_j}) = r(e_{i_k}) = v_1$ temos que $s(e_{i_{j+1}}) = s(e_{i_{k+1}})$, o que contradiz o fato de que e_{i_k} é a última aresta em que ocorre repetição de vértice na origem.

Se $e_{i_j} \neq e_{i_k}$, temos que e_{i_j} é uma saída do caminho η_i e assim uma saída de ξ.
$(iii) \Rightarrow (iv)$: É direto da definição de caminho fechado simples.
$(iv) \Rightarrow (iii)$: Seja $\xi \in CFS(v)$. Por hipótese temos que $\exists \eta \in CFS(v)$ tal que η possui uma saída.

Se $\xi = \eta$ temos que ξ tem uma saída. Se $\xi \neq \eta$ vamos escrever $\xi = e_1 ... e_n$ e $\eta = f_1 ... f_m$ e assim:

- Se $e_i \neq f_i$, com $e_{k-1} = f_{k-1}$ para $k \in \{1, ..., i\}$, como $r(e_{i-1}) = r(f_{i-1})$ temos que $s(e_i) = s(f_i)$. Desta forma, f_i é uma saída de ξ;

- Se $e_i = f_i, \forall i \in \{1, ..., n\}$, como $\xi \neq \eta$ temos que existem $g_1, ..., g_p$ tais que $\xi = \eta . g_1 ... g_p$ ou $\eta = \xi . g_1 .... g_p$. Assim,

$$s(g_1) = r(\eta) = v \Rightarrow \xi \notin CFS(v)$$

ou

$$s(g_1) = r(\xi) = v \Rightarrow \eta \notin CFS(v).$$

Logo, existe uma saída do caminho ξ.

■

Podemos notar que, das equivalências do resultado anterior, todas as propriedades listadas ocorrem se o grafo satisfaz que todo ciclo possui pelo menos uma saída.

4.2 ÁLGEBRA SIMPLES

Aqui queremos verificar quais são as condições necessárias e suficientes, em um grafo, para que a álgebra de caminhos de Leavitt seja uma álgebra simples. Para isto, precisamos ver algumas definições e verificar alguns resultados que servirão de base.

Definição 4.2.1. *Um* ***polinômio formado por arestas reais (ou fantasmas)*** *é uma combinação linear de caminhos formados apenas por arestas reais (ou fantasmas). Deste modo, dizemos que o grau de um polinômio formados apenas por arestas reais (ou fantasmas) α é o comprimento do maior caminho que compõe α e escrevemos $deg(\alpha)$ para o grau do polinômio α.*

A partir deste momento, sempre que nos referirmos a um polinômio, estamos falando de um polinômio de arestas reais ou fantasmas. Também é importante notar que um polinômio pode ter dois graus, se ele for formado por arestas reais e arestas fantasmas, ou seja, terá um grau nas arestas reais e um grau nas arestas fantasmas.

Proposição 4.2.2. *Seja $E = (E^0, E^1, r, s)$ um grafo em que todo ciclo possui uma saída. Se $\alpha \in L_K(E)$ é um polinômio formado apenas por arestas reais com $deg(\alpha) > 0$, então existem $a, b \in L_K(E)$ tal que $a.\alpha.b \neq 0$ é um polinômio formado apenas por arestas reais e $deg(a.\alpha.b) < deg(\alpha)$.*

Demonstração: A demonstração está feita passo a passo em (ABRAMS; PINO, 2005) na proposição (3.1).

■

Note que no resultado acima o polinômio não pode ser formado apenas por vértices, pois neste caso o grau do polinômio seria zero.

Exemplo 4.2.3. *Dado o grafo representado por:*

$$\begin{tikzcd} v_1 \arrow[r, bend left, "e_1"] & v_2 \arrow[r, bend left, "e_2"] & v_3 \arrow[r, bend left, "e_3"] & v_4 \end{tikzcd}$$

sabemos que $L_K(E) \simeq M_4(\mathbb{K})$ *e que* $\alpha = e_1e_2e_3 + e_2e_3$ *é um polinômio de* $L_K(E)$ *formado por arestas reais. Podemos notar que* $deg(\alpha) = 3$ *e que, se* $a = e_2^*$ *e* $b = e_3^*$*, temos*

$$\begin{aligned} a.\alpha &= e_2^*.(e_1e_2e_3 + e_2e_3) \\ &= e_2^*.e_1e_2e_3 + e_2^*.e_2e_3 \\ &= \delta_{e_2,e_1} r(e_1).e_2e_3 + \delta_{e_2,e_2} r(e_2).e_3 \\ &= r(e_2).e_3 \\ &= e_3 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \alpha.b &= (e_1e_2e_3 + e_2e_3).e_3^* \\ &= e_1e_2e_3.e_3^* + e_2e_3e_3^* \\ &= e_1e_2.\delta_{e_3^*,e_3^*} r(e_3^*) + e_2.\delta_{e_3^*,e_3^*} r(e_3^*) \\ &= e_1e_2.s(e_3) + e_2.s(e_3) \\ &= e_1e_2 + e_2 \end{aligned}$$

e desta forma, temos que

$$deg(a.\alpha) < deg(\alpha)$$

e

$$deg(\alpha.b) < deg(\alpha).$$

O resultado anterior nos leva a pensar se $\exists a, b \in L_K(E)$ tais que $deg(a.\alpha.b) = 0$, ou seja, de forma que $a.\alpha.b$ seja uma combinação linear de vértices.

Corolário 4.2.4. *Seja* $E = (E^0, E^1, r, s)$ *um grafo em que todo ciclo possui uma saída. Se* $\alpha \in L_K(E)$ *é formado por apenas arestas reais, com* $\alpha \neq 0$*, temos que existem* $a, b \in L_K(E)$ *tais que* $a.\alpha.b \in E^0$*.*

Demonstração: Aplicando a proposição anterior repetidamente podemos criar um novo polinômio a partir de α que tenha grau reduzido a zero, ou seja, um polinômio formado apenas por vértices. Desta forma, temos que existem $c, d \in L_K(E)$ tais que $deg(c.\alpha.d) = 0$. Assim,

$$c.\alpha.d = \sum_{i=1}^{n} k_i v_i \neq 0.$$

Portanto, existe $k_j \neq 0$, para algum $j \in \{1, ..., n\}$, tal que se tomarmos $a = k_j^{-1}.c$ e $b = d.v_j$, temos que

$$\begin{aligned} a.\alpha.b &= k_j^{-1}.c.\alpha.d.v_j \\ &= k_j^{-1}(c.\alpha.d)v_j \\ &= k_j^{-1}.\left(\sum_{i=1}^{n} k_i.v_i\right) v_j \\ &= k_j^{-1}.\left(\sum_{i=1}^{n} k_i \delta_{i,j} v_i\right) \\ &= k_j^{-1}.k_j.v_j \\ &= v_j \in E^0. \end{aligned} \tag{4.5}$$

■

Corolário 4.2.5. *Seja $E = (E^0, E^1, r, s)$ um grafo em que todo ciclo possui uma saída. Se J é um ideal de $L_K(E)$ e contém um polinômio formado por arestas reais, então $J \cap E^0 \neq \emptyset$.*

Demonstração: Se α é um polinômio de arestas reais, tal que $\alpha \in J$, do corolário anterior temos que existem $a, b \in L_K(E)$ tal que $a.\alpha.b \in E^0$.

Como J é um ideal, temos que $a.\alpha.b \in J$ e assim

$$a.\alpha.b \in \left(J \cap E^0\right).$$

■

Estes três resultados também valem para polinômios formados apenas por arestas fantasmas.

Agora, vamos definir uma relação entre vértices em um grafo.

Definição 4.2.6. *Dado um grafo $E = (E^0, E^1, r, s)$ vamos definir a relação $\leq$, em E^0, tal que dados $v, w \in E^0$ temos*

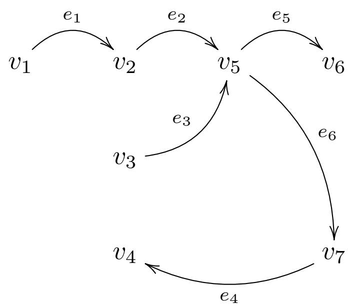
$$v \leq w \Leftrightarrow v = w \text{ ou } \exists \xi \in E^* \text{ tal que } s(\xi) = v \text{ e } r(\xi) = w.$$

Com esta relação podemos definir as seguintes características em E^0.

Definição 4.2.7. *Se $H \subseteq E^0$ dizemos que:*
i) H é ***hereditário*** *se $w \in H$ e $w \leq v$, com $v \in E^0$, então temos que $v \in H$;*
ii) H é ***saturado*** *se dado $v \in E^0$ regular, com $\{r(\xi); s(\xi) = v \text{ e } \xi \in E^*\} \subseteq H$, então $v \in H$.*

De forma mais simples, um subconjunto H dos vértices de um grafo é dito ser hereditário se dado um vértice $w \in H$ e se existe um caminho de w para v, então $v \in H$. Da mesma forma, H é dito ser saturado se dado $v \in E^0$ regular e se para todo caminho ξ, partindo de v, tivermos $r(\xi) \in H$ então $v \in H$. Da definição temos ainda que se $H = \emptyset$ então H é hereditário e saturado.

Exemplo 4.2.8. *Dado o grafo*



temos

$$v_1 \leq v_7 \text{ e } v_5 \leq v_4,$$

pois dados $\xi = e_1e_2e_6$ e $\eta = e_6e_4$ temos que $v_1 = s(\xi)$ e $v_7 = r(\xi)$, $v_5 = s(\eta)$ e $v_4 = r(\eta)$.

Além disso, considere os conjuntos $H_1, H_2 \subseteq E^0$, com $H_1 = \{v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ e $H_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$. Note que H_1 é um conjunto hereditário,pois

- $v_3 \leq v_5$, $v_3 \leq v_7$, $v_3 \leq v_4$, $v_3 \leq v_6$ e $v_4, v_5, v_6, v_7 \in H_1$;
- $v_5 \leq v_6$, $v_5 \leq v_7$, $v_5 \leq v_4$ e $v_4, v_6, v_7 \in H_1$;
- $v_7 \leq v_4$ e $v_4 \in H_1$.

e H_2 é um conjunto saturado, pois

- $v_1 \leq v_2, v_1 \leq v_5, v_1 \leq v_6, v_1 \leq v_7, v_1 \leq v_4$ e $v_2, v_4, v_5, v_6, v_6 \in H_2$;
- $v_2 \leq v_5$, $v_2 \leq v_6$, $v_2 \leq v_7$, $v_2 \leq v_4$ e $v_4, v_5, v_6, v_7 \in H_2$;

- $v_5 \leq v_6$, $v_5 \leq v_7$, $v_5 \leq v_4$ e $v_4, v_6, v_7 \in H_2$;
- $v_7 \leq v_4$ e $v_4 \in H_2$.

Teorema 4.2.9. *Se J é um ideal de $L_K(E)$, então $J \cap E^0$ é um subconjunto hereditário e saturado de E^0.*

Demonstração: Sejam $v, w \in E^0$ tais que $v \in J$ e $v \leq w$. Se $w = v$ é direto que $w \in J$ e assim J é hereditário.

Caso contrário, da definição (4.2.6) temos que $\exists \xi \in E^*$ tal que $s(\xi) = v$ e $r(\xi) = w$. Se $\xi = e_1 ... e_n$ então $s(e_1) = v$ e $r(e_n) = w$.

Como J é um ideal temos que

$$\begin{aligned} e_1^*.v.e_1 &= e_1^*.s(e_1).e_1 \\ &= e_1^*.e_1 \\ &= \delta_{e_1,e_1} r(e_1) \\ &= r(e_1) \\ &= s(e_2) \in J. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Vamos supor por indução que para $k \in \{2, ..., n\}$ temos

$$\begin{aligned} e_k^*.s(e_k).e_k &= r(e_k) \\ &= s(e_{k+1}) \in J. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Assim,

$$\begin{aligned} e_{k+1}^*.s(e_{k+1}).e_{k+1} &= e_{k+1}^*.e_{k+1} \\ &= \delta_{e_{k+1},e_{k+1}} r(e_{k+1}) \\ &= r(e_{k+1}) \\ &= s(e_{k+2}) \in J. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Desta forma, $s(e_k) \in J$ para todo $k \in \{1, ..., n\}$ e com isto, como J é um ideal, temos

$$\begin{aligned} e_n^*.s(e_n).e_n &= e_n^*.e_n \\ &= \delta_{e_n,e_n} r(e_n) \\ &= r(e_n) \\ &= w \in J. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Portanto, J é hereditário.

Agora, seja $v \in E^0$, regular, tal que $\{r(\xi); s(\xi) = v \text{ e } \xi \in E^*\} \subseteq J$. Como v é um vértice regular temos, da definição da álgebra de caminhos de Leavitt, que

$$v = \sum_{\{e \in E^1; s(e)=v\}} e.e^*.$$

Como $v = s(e)$ temos que $r(e) \in J$ pela hipótese acima, com isto $e = e.r(e) \in J$ e assim $e.r(e).e^* \in J$, então

$$\begin{aligned} v &= \sum_{\{e \in E^1; s(e)=v\}} e.e^* \\ &= \sum_{\{e \in E^1; s(e)=v\}} e.r(e).e^* \in J \end{aligned} \tag{4.10}$$

Logo, J é saturado.

Caso $E^0 \cap J = \emptyset$ temos que $E^0 \cap J$ é hereditário e saturado, pois não existem vértices nesse subconjunto.

■

Corolário 4.2.10. *Seja $E = (E^0, E^1, r, s)$ um grafo em que os únicos subconjuntos hereditários e saturados de E^0 são $\emptyset$ e E^0, e todo ciclo possui saída. Se J é um ideal não nulo de $L_K(E)$ que contém um polinômio formado por apenas arestas reais (ou fantasmas), então $J = L_K(E)$.*

Demonstração: Do corolário (4.2.5), e de sua versão para arestas fantasmas, temos que $J \cap E^0 \neq \emptyset$.

Agora, do teorema (4.2.9) temos que $J \cap E^0$ é hereditário e saturado, então por hipótese $J \cap E^0 = E^0$ o que indica que $E^0 \subseteq J$.

Caso E^0 seja um conjunto finito, temos que

$$\beta = \sum_{v \in E^0} v \in J$$

é a unidade de $L_K(E)$. Desta forma, dado $\alpha \in L_K(E)$, como J é um ideal, temos que

$$\alpha = \alpha.\beta \in J,$$

e assim $L_K(E) \subseteq J$.

Caso E^0 seja infinito, pelo teorema (3.2.8), temos que $E^0 \subseteq J$ contém um conjunto de unidades locais de $L_K(E)$. Assim, dado $\alpha \in$

$L_K(E)$, existe β no conjunto de unidades locais de $L_K(E)$, tais que

$$\alpha.\beta = \beta.\alpha = \alpha.$$

Como J é um ideal temos que

$$\alpha = \alpha.\beta \in J$$

e assim $L_K(E) \subseteq J$.

Logo, em ambos os casos temos que $J = L_K(E)$.

■

Definição 4.2.11. *Uma álgebra é dita simples se ela possui apenas ideais triviais.*

Teorema 4.2.12. *Seja E um grafo de linhas finitas (1.1.7), então $L_K(E)$ é uma álgebra simples se, e somente se, E satisfaz as seguintes condições.*
(i) Os únicos subconjuntos hereditários e saturados de E^0 são $\emptyset$ e E^0;
(ii) Se todo ciclo possui pelo menos uma saída.

Demonstração: ($\Leftarrow$) Vamos supor que J é um ideal não nulo de $L_K(E)$. Seja $\alpha \in J$ não nulo de forma que α é o polinômio que possui menor grau nas suas arestas reais. Se este grau nas arestas reais for zero temos que α é um polinômio sem arestas reais, ou seja, um polinômio somente em arestas fantasmas ou em vértices.

Pelo corolário (4.2.10) temos então que $J = L_K(E)$ é um ideal trivial, ou seja, $L_K(E)$ é simples.

Assim, vamos supor que o grau de α nas arestas reais é maior ou igual a 1. Desta forma, se chamarmos de β o polinômio, em arestas fantasmas, que é parte de α e de π o polinômio em arestas reais que compõe α. Desta forma podemos escrever $\pi = \left(e_{i_n}.\alpha_{e_{i_n}}\right)$, em que $e_{i_n} \in E^1$ e $\alpha_{e_{i_n}}$ são polinômios em arestas reais. Para $m \geq 1$ podemos escrever

$$\alpha = \sum_{n=1}^{m} e_{i_n}.\alpha_{e_{i_n}} + \beta. \tag{4.11}$$

Note que o grau de $\alpha_{e_{i_n}}$ é obrigatoriamente menor que o grau de α, pois dividimos o polinômio em arestas reais em um produto e assim o grau das partes é menor que o grau do polinômio original, e que $e_{i_n}.\alpha_{e_{i_n}} \neq 0$, para todo $1 \leq n \leq m$.

Agora, vamos supor que $v \in E^0$ é um sorvedouro em E, então $v.e_{i_n} = 0$ para $1 \leq n \leq m$. Assim, se multiplicarmos a equação (4.11) à esquerda por v temos

$$\begin{aligned} v.\alpha =& v.\sum_{n=1}^{m} e_{i_n}.\alpha_{e_{i_n}} + v.\beta \\ =& v.\beta \in J. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Se $v.\beta \neq 0$ temos que $v.\alpha$ é um polinômio de J formado apenas por arestas fantasmas. Novamente, pelo corolário (4.2.10) teríamos que $J = L_K(E)$.

Se $v.\beta = 0$, vamos tomar $e_j \in E^1$ e com isto temos dois casos:

1. Se $j \notin \{i_1, ..., i_m\}$, temos que

$$\begin{aligned} e_j^*.\alpha &= e_j^*.\sum_{n=1}^{m} e_{i_n}.\alpha_{e_{i_n}} + e_j^*.\beta \\ &= e_j^*.\beta \in J. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Novamente, se $e_j^*.\beta \neq 0$ temos, pelo corolário (4.2.10), que $J = L_K(E)$. Desta forma, se $e_j^*.\beta = 0$ temos que

$$-e_j.e_j^*.\beta = 0$$

e como o grafo é de linhas finitas, E^1 é finito e assim a soma a seguir é finita

$$0 = -\left(\sum_{j \notin \{i_1, \ldots, i_m\}} e_j.e_j^*\right).\beta.$$

2. Se $j \in \{i_1, ..., i_m\}$, então temos que

$$\begin{aligned} e_j^*.\alpha &= e_j^*.\sum_{n=1}^{m} e_{i_n}.\alpha_{e_{i_n}} + e_j^*.\beta \\ &= r(e_j)\alpha_{e_j} + e_j^*.\beta \\ &= \alpha_{e_j} + e_j^*.\beta \in J \end{aligned} \tag{4.14}$$

Se $e_j^*.\alpha \neq 0$ temos um termo com grau menor que o de α nas arestas reais, o que é absurdo pois α é o termo que possui o menor grau por hipótese. Assim, $e_j^*.\alpha = \alpha_{e_{i_n}} + e_j^*.\beta = 0$, ou seja,

$$\begin{aligned} \alpha_{e_{i_n}} &= -\, e_j^*.\beta \\ \Rightarrow e_j.\alpha_{e_{i_n}} &= -\, e_j.e_j^*.\beta. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Agora, vamos chamar

$$S_1 = \{v_j \in E^0; v_j = s(e_{i_n}) \text{ para algum } 1 \leq n \leq m\}.$$

Se E^0 é um conjunto infinito, vamos tomar $S_2 = \{v_{k_1}, ..., v_{k_t}\}$, tal que S_2 é um conjunto de unidades locais, que existe pelo teorema (3.2.8), tal que

$$\left(\sum_{s=1}^{t} v_{k_s}\right).\beta = \beta.$$

Se E^0 é finito, tomamos $S_2 = E^0$ e desta forma temos

$$\left(\sum_{v \in S_2} v\right).\beta = \beta.\left(\sum_{v \in S_2} v\right) = \beta.$$

Como S_1 é formado por vértices que são origem de alguma arestas, podemos observar que não existem sorvedouros em S_1. Temos ainda que para todo $w \in (E^0 - S_2)$ temos que $w \neq v_{k_s} \in S_2$, com $s \in \{1, ..., t\}$, e assim

$$\begin{aligned} w.\beta &= w.\left(\sum_{s=1}^{t} v_{k_s}\right).\beta \\ &= \left(\sum_{s=1}^{t} \delta_{w, v_{k_s}} v_{k_s}\right).\beta = 0. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Assim, se $S = S_1 \cup S_2$ então

$$\begin{aligned} \left(\sum_{v \in S} v\right).\beta &= \left(\sum_{v \in S_2} v\right).\beta + \left(\sum_{v \in E^0 - S_2} v\right).\beta \\ &= \left(\sum_{v \in S_2} v\right).\beta + 0 \\ &= \beta. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Desta forma, do caso (1) temos

$$0 = -\left(\sum_{j \notin \{i_1, \ldots, i_m\}, s(e_j) \in S} e_j.e_j^* \right).\beta = -\left(\sum_{j \in \{k_1, \ldots, k_t\}} e_j.e_j^* \right).\beta. \tag{4.18}$$

Com isto, do fato que não existem sorvedouros no grafo temos que todo vértice é regular e assim podemos usar a última relação da álgebra de caminhos de Leavitt. Com isto, dos casos (1) e (2) temos

$$\begin{aligned}
\alpha &= \sum_{n=1}^{m} e_{i_n}.\alpha_{e_{i_n}} + \beta \\
&= \sum_{n=1}^{m} -e_{i_n}.e_{i_n}^*.\beta + \beta \\
&= \sum_{n=1}^{m} -e_{i_n}.e_{i_n}^*.\beta - \left(\sum_{j \notin \{i_1, \ldots, i_m\}, s(e_j) \in S} e_j.e_j^* \right).\beta + \beta \\
&= -\sum_{n=1}^{m} s(e_{i_n}).\beta - \left(\sum_{j \in \{k_1, \ldots, k_t\}} v_j \right).\beta + \beta \\
&= -\left(\sum_{v \in S_1} v \right).\beta - \left(\sum_{v \in S_2} v \right).\beta + \beta \\
&= -\left(\sum_{v \in S} v \right).\beta + \beta \\
&= -\beta + \beta = 0.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Uma contradição, portanto $J = L_K(E)$ é um ideal trivial e assim $L_K(E)$ é uma álgebra simples.

($\Rightarrow$) Primeiro vamos supor por absurdo que existe um ciclo μ, que é um caminho do grafo, que não possui saída. Se v é a base do ciclo, ou seja $v = r(\mu) = s(\mu)$, vamos definir $\alpha = v + \mu$.

Escrevendo $\mu = e_{i_1}...e_{i_m}$, como μ é um ciclo então $s(e_{i_j}) \neq s(e_{i_k})$ para $j \neq k$. Desta forma, pela definição da álgebra de caminhos de

Leavitt, podemos escrever $s(e_{i_j}) = e_{i_j}.e^*_{i_j}$ e assim

$$\begin{array}{rcl} \mu.\mu^* & = & e_{i_1}...e_{i_{m-1}}.e_{i_m}.e^*_{i_m}.e^*_{i_{m-1}}...e^*_{i_1} \\ & = & e_{i_1}...e_{i_{m-1}}.s(e_{i_m}).e^*_{i_{m-1}}...e^*_{i_1} \\ & = & e_{i_1}...e_{i_{m-1}}.e^*_{i_{m-1}}...e^*_{i_1} \\ & \vdots & \\ & = & e_{i_1}.e^*_{i_1} \\ & = & s(e_{i_1}) = v. \end{array}$$

Como μ é um ciclo temos que todos os vértices do ciclo são diferente de v, com isto temos que $CFS(v) = \{\mu\}$.

Agora, seja $\{\alpha\}$ um ideal de $L_K(E)$. Se $v \in \{\alpha\}$ então existem monômios mônicos $a_n, b_n \in L_K(E)$ e $c_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$v = \sum_{n=1}^{m} c_n.a_n.\alpha.b_n. \tag{4.20}$$

Como

$$\begin{aligned} v.\alpha.v &= v.(v+\mu).v \\ &= (v.v + v.\mu).v \\ &= (v+\mu).v \\ &= v.v + \mu.v \\ &= v + \mu = \alpha \end{aligned} \tag{4.21}$$

podemos assumir que $v.a_n.v = a_n$ e $v.b_n.v = b_n$, para todo $1 \leq n \leq m$, pois caso contrário a soma em (4.20) seria nula. Disto, os caminhos que a_n e b_n representam têm começo e fim em v, o que implica que podemos escrever

$$a_1 = e_{k_1}...e_{k_c}.e^*_{j_1}...e^*_{j_d},$$

com $c, d \geq 1$.

Considere $f = max\{z; s(e_{k_z}) = v,\ \text{com } 1 \leq z \leq c\}$ e $g = min\{y; r(e^*_{j_y}) = v,\ \text{com } 1 \leq y \leq d\}$, com isto podemos definir

$$a_1' = e_{k_f}...e_{k_c}.e^*_{j_1}...e^*_{j_g}.$$

Como μ é um ciclo fechado, a única aresta que sai de v é e_{i_1} e $s(e_{k_f}) = v$ temos então que $e_{k_f} = e_{i_1}$. Note que

$$s(e_{k_{f+1}}) = r(e_{k_f}) = r(e_{i_1}) = s(e_{i_2})$$

e assim $e_{k_{f+1}} = e_{i_2}$. Prosseguindo com este processo, temos que ele deve terminar antes que acabem as arestas de μ, pois da forma que definimos f temos que $v \notin \{s(e_{k_z}); z > f\}$, então existe $\lambda < m$ tal que

$$e_{k_f}...e_{k_c} = e_{i_1}...e_{i_\lambda}.$$

Da mesma forma, como $r(e^*_{j_g}) = s(e_{j_g}) = v$ temos então que $e_{i_1} = e_{j_g}$. Agora,

$$s(e_{j_{g-1}}) = r(e^*_{j_{g-1}}) = s(e^*_{j_g}) = r(e_{j_g}) = r(e_{i_1}) = s(e_{i_2})$$

e então de forma análoga temos que $e_{j_{g-1}} = e_{i_2}$. O processo também tem de terminar antes que acabem as arestas de μ, pois da forma que definimos g temos que $v \notin \{r(e^*_{j_z}); z < g\}$, então existe $\gamma < m$ tal que

$$e^*_{j_1}...e^*_{j_g} = e^*_{i_\gamma}...e^*_{i_1}.$$

Portanto, $a'_1 = e_{i_1}...e_{i_\lambda}.e^*_{i_\gamma}...e^*_{i_1}$ e assim temos dois casos:

1. Se $\lambda \neq \gamma$ temos $r(e_{i_\lambda}) \neq r(e_{i_\gamma}) = s(e^*_{i_\gamma})$, pois μ é um ciclo, então

   $$e_{i_\lambda}.e^*_{i_\gamma} = 0$$

   o que implica que $a'_1 = 0$ e como $a_1 = e_{k_1}...e_{k_{f-1}}.a'_1.e^*_{j_{g+1}}...e^*_{j_d}$, temos que $a_1 = 0$, um absurdo;

2. Se $\lambda = \gamma$, para $\mu_0 = e_{i_1}...e_{i_\lambda}$ temos $a'_1 = \mu_0.\mu^*_o$. Pela definição da álgebra de caminhos de Leavitt e de μ ser um ciclo, temos que

   $$\mu_0.\mu^*_0 = \delta_{\mu^*_0,\mu^*_0} r(\mu^*_0) = s(\mu^*_0) = v.$$

Note que $r(e_{i_{f-1}}) = s(e_{i_f}) = v$ e $s(e^*_{i_{g+1}}) = r(e^*_{i_g}) = v$, desta forma temos

$$a_1 = e_{i_1}...e_{i_{f-1}}.e^*_{i_{g+1}}...e^*_{i_1} = x.y^*,$$

com $x, y \in CF(v)$. Do lema (4.1.3) temos que $x = \xi_1...\xi_\theta$, com $\xi_1, ..., \xi_\theta \in CFS(v) = \{\mu\}$, e então

$$x = \mu^\theta.$$

O mesmo vale para y, ou seja,

$$y = \mu^\vartheta.$$

Com isto, para $\theta, \vartheta \geq 0$ temos

$$a_1 = \mu^{\theta}.(\mu^*)^{\vartheta},$$

mas como $\mu.\mu^* = v$ existe um índice $u(a_1)$ tal que $|\theta - \vartheta| = u(a_1)$, e assim

$$a_1 = \mu^{u(a_1)} \quad \text{ou} \quad a_1 = (\mu^*)^{u(a_1)}. \tag{4.22}$$

Assim, usando um argumento análogo, a_n e b_n representam caminhos fechados em v no grafo E e como μ é um ciclo que não possui saída, a_n e b_n são formados a partir de μ, ou seja, existem índices $u(a_n) \geq 0$ e $u(b_n) \geq 0$ tais que

$$a_n = \mu^{u(a_n)} \quad \text{ou} \quad a_n = (\mu^*)^{u(a_n)} \tag{4.23}$$

e

$$b_n = \mu^{u(b_n)} \quad \text{ou} \quad b_n = (\mu^*)^{u(b_n)}. \tag{4.24}$$

Agora, como $\mu.\mu^* = v = \mu^*.\mu$, vamos observar que μ e μ^* comutam com α:

$$\begin{aligned}
\mu.\alpha &= \mu(v + \mu) \\
&= \mu.v + \mu.\mu \\
&= v.\mu + \mu.\mu \\
&= (v + \mu).\mu \\
&= \alpha.\mu
\end{aligned} \tag{4.25}$$

e

$$\begin{aligned}
\mu^*.\alpha &= \mu^*(v + \mu) \\
&= \mu^*.v + \mu^*.\mu \\
&= \mu^*.\delta_{s(\mu),v}v + \delta_{\mu.\mu}r(\mu) \\
&= \mu^* + v \\
&= v.\mu^* + \mu.\mu^* \\
&= (v + \mu).\mu^* \\
&= \alpha.\mu^*.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Desta forma, temos

$$\begin{aligned} v =& \sum_{n=1}^{m} c_n.a_n.\alpha.b_n \\ =&\alpha.\sum_{n=1}^{m} c_n.a_n.b_n \\ =&\alpha.P(\mu,\mu^*), \end{aligned} \tag{4.27}$$

em que $P(\mu,\mu^*)$ é um polinômio nas variáveis μ e μ^*, com coeficientes em $\mathbb{K}$. Note que podemos escrever este polinômio da forma

$$k_{-m_1}.(\mu^*)^{m_1} + ... + k_{-1}.\mu^* + k_0.v + k_1.\mu + ... + k_{n_1}.\mu^{n_1},$$

para $m, n \geq 0$.

Vamos supor que $k_{-i} \neq 0$ para $0 < i \leq m_0$. Então,

$$\begin{aligned} v =&\alpha.P(\mu,\mu^*) \\ =&\alpha.[k_{-m_1}.(\mu^*)^{m_1} + ... + k_{-1}.\mu^* + k_0.v + k_1.\mu + ... + k_{n_1}.\mu^{n_1}] \\ =&(v+\mu).[k_{-m_1}.(\mu^*)^{m_1} + ... + k_{-1}.\mu^* + k_0.v + k_1.\mu + ... + k_{n_1}.\mu^{n_1}] \\ =&k_{-m_1}.(\mu^*)^{m_1} + ... + k_{-1}.\mu^* + k_0.v + k_1.\mu + ... + k_{n_1}.\mu^{n_1} \\ &+k_{-m_1}.(\mu^*)^{m_1-1} + ... + k_{-1}.v + k_0.\mu + k_1.\mu^2 + ... + k_{n_1}.\mu^{n_1+1} \\ =&k_{-m_1}.(\mu^*)^{m_1} + P_1(\mu,\mu^*) \end{aligned} \tag{4.28}$$

em que o grau dos termos de $P_1(\mu,\mu^*)$ são maiores que m_1. Portanto, como $m_1 > 0$, para que a igualdade seja válida temos que $k_{-m_1} = 0$, o que contradiz nossa suposição. Logo $k_{-i} = 0$, para $i > 0$, e de forma análoga temos que $k_i = 0$ para $i > 0$. Assim, $P(\mu,\mu^*) = k_0.v$ e então

$$\begin{aligned} v =&\alpha.P(\mu,\mu^*) \\ =&\alpha.k_0.v \\ =&k_0.\alpha, \end{aligned} \tag{4.29}$$

mas isto é um absurdo, pois o polinômio α possui grau maior que zero.

Agora vamos supor por absurdo que existe $H \subseteq E^0$ saturado e hereditário, tal que H não é um subconjunto trivial. Vamos usar H para construir um novo grafo

$$F = (F^0, F^1, r|_{F^1}, s|_{F^1}),$$

em que

- $F^0 = E^0 - H$ é nosso novo conjunto de vértices que não estão em H;

- $F^1 = r^{-1}(E^0 - H)$ é o conjunto das arestas que chegam nos vértices de F^0;

- $r|_{F^1}$ e $s|_{F^1}$ são nossas funções r e s restritas a $E^0 - H$.

Então, podemos notar que este grafo é de fato um grafo dirigido, pois quando aplicadas as funções $r|_{F^1}$ e $s|_{F^1}$, que vamos denominar as por r_F e s_F, nas arestas do grafo F o resultado é um vértice de F^0.

Se $\xi \in F^1$ então existe $v \in F^0$ tal que $r(\xi) = v \in F^0$. Se $s(\xi) \in H$, como H é hereditário e $s(\xi) \leq r(\xi)$ temos que $r(\xi) \in H$, o implica que $r(\xi) \notin F^0$, uma contradição. Portanto, $s(\xi) \notin H$ o que implica que $s(\xi) \in F^0$.

Dada a função característica $\chi_A : X \to \{0,1\}$, com X e A conjuntos, da forma

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases} \tag{4.30}$$

podemos definir a função $\phi : [E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^*] \to L_K(F)$ que é aplicada aos geradores da seguinte forma

$$\begin{aligned} \phi(v_i) &= \chi_{F^0}(v_i).v_i; \\ \phi(e_i) &= \chi_{F^1}(e_i).e_i; \\ \phi(e_i^*) &= \chi_{(F^1)^*}(e_i^*).e_i^*. \end{aligned}$$

Estendendo a função, fazendo com que ela preserve soma, produto e produto por escalar, obtemos o homomorfismo

$$\varphi : \mathbb{K}[E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^*] \to L_K(F).$$

Vamos verificar que a função φ preserva as operações de $L_K(E)$, ou seja, preserva as relações definidas em (3.1.7). Para isto, é necessário lembrar que se $\xi \in F^1$ então $s(\xi) \in F^0$ e $r(\xi) \in F^0$.

- O produto entre vértices:

$$\begin{aligned}
\varphi(v_i.v_j) &= \varphi(v_i).\varphi(v_j)\\
&= \chi_{F^0}(v_i).v_i.\chi_{F^0}(v_j).v_j\\
&= \chi_{F^0}(v_i).\chi_{F^0}(v_j).\delta_{i,j}v_i\\
&= \begin{cases} \chi_{F^0}(v_i).\chi_{F^0}(v_i).v_i, & \text{se } i=j\\ 0, & \text{caso contrário}\end{cases}\\
&= \begin{cases} \chi_{F^0}(v_i).v_i, & \text{se } i=j\\ 0, & \text{caso contrário}\end{cases}\\
&= \delta_{i,j}\chi_{F^0}(v_i).v_i\\
&= \delta_{i,j}\varphi(v_i). \qquad (4.31)
\end{aligned}$$

- O produto de aresta e vértice:

$$\begin{aligned}
\varphi(s(e_i).e_i) &= \varphi(s(e_i)).\varphi(e_i)\\
&= \chi_{F^0}(s(e_i)).s(e_i).\chi_{F^1}(e_i).e_i\\
&= \chi_{F^1}(e_i).e_i\\
&= \varphi(e_i); \qquad (4.32)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi(e_i.r(e_i)) &= \varphi(e_i).\varphi(r(e_i))\\
&= \chi_{F^1}(e_i).e_i.\chi_{F^0}(r(e_i)).r(e_i)\\
&= \chi_{F^1}(e_i).e_i\\
&= \varphi(e_i); \qquad (4.33)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi(r(e_i).e_i^*) &= \varphi(r(e_i)).\varphi(e_i^*)\\
&= \chi_{F^0}(r(e_i)).r(e_i).\chi_{(F^1)^*}(e_i^*).e_i^*\\
&= \chi_{(F^1)^*}(e_i^*).e_i^*\\
&= \varphi(e_i^*); \qquad (4.34)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\varphi(e_i^*.s(e_i)) &= \varphi(e_i^*).\varphi(s(e_i)) \\
&= \chi_{(F^1)^*}(e_i^*).e_i^*.\chi_{F^0}(s(e_i)).s(e_i) \\
&= \chi_{(F^1)^*}(e_i^*).e_i^* \\
&= \varphi(e_i^*). \qquad (4.35)
\end{aligned}
$$

• Produto entre arestas:

$$
\begin{aligned}
\varphi(e_i^*.e_j) &= \varphi(e_i^*).\varphi(e_j) \\
&= \chi_{(F^1)^*}(e_i^*).e_i^*.\chi_{F^1}(e_j).e_j \\
&= \chi_{(F^1)^*}(e_i^*).\chi_{F^1}(e_j).\delta_{i,j}r(e_j) \\
&= \begin{cases} \chi_{(F^1)^*}(e_j^*).\chi_{F^1}(e_j).r(e_j), & \text{se } i = j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \chi_{F^1}(e_j).r(e_j), & \text{se } i = j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \\
&= \delta_{i,j}\chi_{F^1}(e_j).r(e_j) \\
&= \delta_{i,j}\chi_{F^0}(r(e_j)).r(e_j) \\
&= \delta_{i,j}\varphi(r(e_j)). \qquad (4.36)
\end{aligned}
$$

• Somatório: Como a relação só se aplica a vértices regulares, vamos tomar $v_i \in s(E^0)$, ou seja, v_i não é um sorvedouro, e temos que v_i não é um emissor infinito pois o grafo é de linhas finitas, então temos três casos

1. Se $v_i \in H$, vamos supor que para todo $e_j \in E^1$, tal que $s(e_j) = v_i$, temos $e_j \in F^1$. Neste caso, $r(e_j) \notin H$ e como H é hereditário temos $v_i = s(e_j) \notin H$. Portanto, $e_j \notin F^1$ e então $e_j^* \notin (F^1)^*$, assim

$$
\begin{aligned}
\varphi\left(\sum_{e_j \in E^1; s(e_j) = v_i} e_j.e_j^*\right) &= \sum_{e_j \in E^1; s(e_j) = v_i} \varphi\left(e_j.e_j^*\right) \\
&= \sum_{e_j \in E^1; s(e_j) = v_i} \varphi(e_j).\varphi(e_j^*) \\
&= \sum_{e_j \in E^1; s(e_j) = v_i} 0.0 \\
&= 0 = \varphi(v_i). \qquad (4.37)
\end{aligned}
$$

2. Se $v_i \in F^0$ e v_i não é origem de uma aresta de F^1, então existe $e_j \in E^1$ tal que $s(e_j) = v_i$ e como $v_i \notin s(f^1)$, temos que $e_j \notin F^1$, ou seja, $r(e_j) \in H$. Assim, como H é saturado temos então que $v_i \in H$, uma contradição ao fato de que $v_i \in F^0$. Portanto este caso não pode ocorrer.

3. Se $v_i \in F^0$ e $v_i \in s(F^1)$. Como v_i é regular, pela definição de $L_K(E)$, existem finitos $e_k \in F^1$ tal que $s(e_k) = v_i$ e

$$v_i = \sum_{e_k \in F^1; s(e_k) = v_i} e_k.e_k^*.$$

Vamos tomar $e_j \in E^1$. Se $e_j \in F^1$ temos

$$\varphi(e_j.e_j^*) = \varphi(e_j).\varphi(e_j^*) = e_j.e_j^*.$$

Se $e_j \notin F^1$ então

$$\varphi(e_j.e_j^*) = \varphi(e_j).\varphi(e_j^*) = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\varphi\left(\sum_{e_j \in E^1; s(e_j) = v_i} e_j.e_j^*\right) &= \sum_{e_j \in E^1; s(e_j) = v_i} \varphi(e_j.e_j^*) \\ &= \sum_{e_j \in F^1; s(e_j) = v_i} \varphi(e_j.e_j^*) \\ &= \sum_{e_j \in F^1; s(e_j) = v_i} e_j.e_j^* \\ &= v_i. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Desta forma, se tomarmos o ideal

$$J = \left\{ \begin{array}{c} v_i.v_j - \delta_{i,j} v_i, \quad e_i.r(e_i) - e_i, \quad s(e_i).e_i - e_i, \quad e_i^*.s(e_i) - e_i^*, \\ r(e_i).e_i^* - e_i^*, \quad e_i^*.e_j - \delta_{e_i,e_j} r(e_j), \quad v_i - \displaystyle\sum_{e_j \in E^1; s(e_j) = v_i} e_j.e_j^* \end{array} \right\},$$

para quaisquer $v_i, v_j \in E^0$ e quaisquer $e_i, e_j \in E^1$, temos que $\varphi|_J = 0$. Pelo teorema do homomorfismo, existe um $\mathbb{K}$-homomorfismo de álgebras $\psi : L_K(E) \to L_K(F)$ que é estendido de φ.

Antes de prosseguirmos, devemos notar que dado $x \in L_K(E)$ e

$y \in Ker(\psi)$ vale que

$$\begin{aligned} \psi(x.y) &= \psi(x).\psi(y) \\ &= \psi(x).0 = 0 \end{aligned} \tag{4.39}$$

e

$$\begin{aligned} \psi(y.x) &= \psi(y).\psi(x) \\ &= 0.\psi(x) = 0. \end{aligned} \tag{4.40}$$

Isto nos garante que $x.y$ e $y.x$ são elementos de $Ker(\psi)$, desta forma $Ker(\psi)$ é um ideal de $L_K(E)$.

Agora, tome $Ker(\psi) \subseteq L_K(E)$. Como H é não trivial temos $H \neq \emptyset$, então existe $v \in H$ tal que $v \neq 0$ e

$$\psi(v) = \chi_{(F^0)}(v) = 0.$$

Novamente, como H é não trivial temos $H \neq E^0$, assim existe $w \in (E^0 - H)$, ou seja, $w \in F_0$ e com isto $\psi(w) = w$. Portanto, $\emptyset \neq Ker(\psi) \neq L_K(E)$ e como $Ker(\psi)$ é um ideal de $L_K(E)$ temos que este não é uma álgebra simples, uma contradição.

Logo, temos que se $L_K(E)$ é uma álgebra simples então todo ciclo possui pelo menos uma saída e seus únicos conjuntos hereditários e saturados são os triviais.

■

Por mais que já seja conhecido que $M_2(\mathbb{K})$ seja simples e que isto possa ser provado de forma mais simples, vamos mostrar este fato no seguinte exemplo usando o teorema.

Exemplo 4.2.13. *Dado o grafo representado por:*

$$\begin{tikzcd} v_1 \arrow[r, bend left, "e"] & v_2 \end{tikzcd}$$

É direto que o grafo E não possui ciclos, então não é necessário se preocupar com a segunda condição do teorema.

Seja $H \subseteq E^0$ um conjunto hereditário e saturado. Vamos supor que $H \neq \emptyset$.

Com isto, existe $v \in H$.

- Se $v = v_1$, como $v_1 \leq v_2$ e H é hereditário, temos por definição que $v_2 \in H$;

- Se $v = v_2$, como v_1 é regular, $v_1 \leq v_2$ e $v_2 \in H$ saturado, temos por definição que $v_1 \in H$.

Portanto, $H = E^0$ e assim a álgebra de caminhos de Leavitt é simples, ou seja, $\mathbb{K}$-álgebra $M_2(\mathbb{K})$ é uma álgebra simples.

CONCLUSÃO

Neste trabalho vimos a teoria introdutória a respeito das Álgebras de Caminhos de Leavitt e a teoria necessária para a contrução dessas álgebras. Inicialmente, fizemos uma apresentação dos conceitos que envolvem grafos dirigidos e das Álgebras de Caminhos, para então poder focar no objeto de estudo deste trabalho e verificar alguns resultados importantes.

Levamos em consideração que para compreender melhor os novos conceitos, que foram apresentados aqui, a melhor forma seria por meio de exemplos que mostrassem na prática como a teoria funciona. Por isso, focamos em apresentar diversos exemplos que que exibissem como as relações das álgebras eram aplicadas, como são as álgebras geradas a partir de um grafo e também qual é a forma dos seus elementos dessas álgebras.

Finalmente, dos isomorfismos mostrados neste trabalho e dos resultados provados no último capítulo, podemos observar que as aplicações e relações das Álgebras de Caminhos de Leavitt podem ser muitas, um exemplo é a relação das álgebras de caminhos de Leavitt com ações parciais. Vimos que, em alguns casos, obtemos álgebras isomorfas à estruturas já conhecidas e que conseguimos determinar quando uma dessas álgebras é simples, apenas observando características do seu grafo gerador.

REFERÊNCIAS

ABRAMS, G.; PINO, G. A. The Leavitt path algebra of a graph. *Journal of Algebra*, v. 293, n. 02, p. 319 – 334, 2005.

ABRAMS, G.; PINO, G. A. Purely infinite simple Leavitt path algebras. *Journal of Algebra*, v. 207, n. 03, p. 553 – 563, 2006.

ABRAMS, G.; PINO, G. A. The Leavitt path algebras of arbitrary graphs. *Houston Journal of Mathematics*, v. 34, n. 02, p. 423 – 442, 2008.

BIAZOTTO, S. C. *C*-Álgebras de grafos com linhas finitas.* Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianopolis, 2012.

DANGERFIELD, I. *Leavitt Path Algebras.* Dissertação (Mestrado) — University of Otago, New Zealand, 2011.

DOMINGUES, H. *Álgebra Moderna.* 4. ed. [S.l.]: Atual, 2003. ISBN 8535704019.

HEFEZ, A.; FERNANDES, C. de S. *Introdução à Álgebra Linear.* 1. ed. [S.l.]: SBM, 2010. (Coleção PROFMAT). ISBN 9788585818616.

ROTMAN, J. J. *Advanced Modern Algebra.* 2. ed. [S.l.]: Prentice Hall, 2003. ISBN 0130878685.