

Victor Antonio Paludetto Magri

**Pré-Condicionador Multiescala
Algébrico Aplicado à Simulação de
Reservatórios de Petróleo**

**Brasil
2015, Setembro**

Victor Antonio Paludetto Magri

**Pré-Condicionador Multiescala Algébrico
Aplicado à Simulação de Reservatórios de
Petróleo**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do Grau de Mestre em Engenharia Mecânica.

Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC
Departamento de Engenharia Mecânica
Programa de Pós-Graduação

Orientador: Clovis R. Maliska
Coorientador: Mário C. Zambaldi

Brasil
2015, Setembro

Victor Antonio Paludetto Magri

Pré-Condicionador Multiescala Algébrico Aplicado à Simulação de Reservatórios de Petróleo/ Victor Antonio Paludetto Magri. – Brasil, 2015, Setembro-
224 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Clovis R. Maliska

Coorientador: Mário C. Zambaldi

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC
Departamento de Engenharia Mecânica
Programa de Pós-Graduação, 2015, Setembro.

1. Simulação de Reservatórios. 2. Métodos Multiescala. 3. MsFVM. 4. Pré-condicionadores. I. Clóvis R. Maliska. II. Universidade Federal de Santa Catarina. III. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. IV. Mestrado.

Victor Antonio Paludetto Magri

**Pré-Condicionador Multiescala Algébrico
Aplicado à Simulação de Reservatórios de
Petróleo**

Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Mecânica e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

Brasil, 14 de Setembro de 2015.

Prof. Armando Albertazzi, Dr.
Coordenador do Curso

Clovis R. Maliska, PhD. - Orientador
Universidade Federal de Santa Catarina

Mário C. Zambaldi, Dr. - Coorientador
Universidade Federal de Santa Catarina

Banca Examinadora:

Prof. Daniel Norberto Kozakevich, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Juliano de Bem Francisco, PhD.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Sérgio Peters, Dr. Eng.
Universidade Federal de Santa Catarina

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a Deus pela graça que viabilizou a realização desse trabalho; aos meus pais Marcos e Márcia, os quais se esforçaram para que eu pudesse conduzir meus estudos longe de minha cidade natal; aos meus companheiros do grupo de pesquisa SINMEC, cada qual com seu papel especial no desenvolvimento desse trabalho. Agradeço em especial aos companheiros de sala Edão e Giovani e também ao Gustavo pelas discussões sobre métodos de solução de sistemas lineares e pela grande ajuda concedida em relação à organização do tempo dedicado às atividades de pesquisa. Nesse âmbito, outra pessoal fundamental foi a Tatiane, que esteve sempre atenta para me lembrar das datas de entregas de trabalhos e demais prazos estipulados pelo programa de pós-graduação além de conceder várias dicas fundamentais para a apresentação oral do trabalho. Incluo nessa última observação os amigos Mariele, Vitão e Taísa, cujas dicas foram essenciais para que eu conseguisse enquadrar os aspectos mais relevantes do trabalho dentro do tempo estipulado para sua apresentação.

Agradeço muito aos meus orientadores Clovis Maliska e Mário Zambaldi. Ao primeiro, pela oportunidade de trabalhar ao longo dos últimos 6 anos no laboratório SINMEC e por se preocupar em manter sempre nosso ambiente de pesquisa antenado com as tendências em simulação numérica do escoamento em reservatórios de petróleo; ao segundo, agradeço pelas aulas de álgebra linear que despertaram a paixão pela pesquisa em análise numérica e também pelas várias conversas e conselhos obtidos.

Estendo minha gratidão também aos amigos que não participaram diretamente na realização do trabalho mas que proporcionaram bons momentos de convívio, essenciais para o descanso da mente e seu preparo para o dia seguinte. Aos amigos e também professores Marcos e Léo pelas boas conversas e também em especial aos irmãos de morada: Henrique Martin, Edão, Serginho, Renanzão, além dos vários hóspedes que passaram pelo apartamento A202 do Vivenda das Verbenas ao longo desses dois anos e meio de existência. Ótimas recordações ficam desse período.

Por último agradeço à Universidade Federal de Santa Ca-

tarina e ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica pela excelência do curso oferecido. Ao Programa de Recursos Humanos da ANP pela estrutura disponibilizada e pelo apoio financeiro bem como ao Conselho Nacional de Pesquisa e Desenvolvimento Científico CNPq.

“Senhor, tudo para a tua glória e por Amor.”
(Caminho - 788)

RESUMO

Um dos grandes desafios presentes na simulação numérica de reservatórios de petróleo diz respeito à resolução dos sistemas lineares obtidos pela discretização de equações elípticas. Essa tarefa torna-se ainda mais complexa quando campos de permeabilidade altamente heterogêneos são considerados. Diversas estratégias de solução diretas e iterativas foram desenvolvidas ao longo dos últimos anos e empregadas nesse contexto, restringindo-se às últimas, nota-se que os métodos iterativos construídos a partir de pré-condicionadores do tipo *multigrid* são os mais utilizados devido a sua robustez e eficiência. Nesse trabalho avaliam-se as propriedades matemáticas e o desempenho computacional de uma subclasse de pré-condicionadores desse último tipo conhecida como “multiescala”. As alternativas estudadas são implementadas computacionalmente e empregadas em conjunto com diversos métodos iterativos para a resolução precisa e também aproximada de problemas elípticos desafiadores. Dentre os problemas testados, verifica-se que a melhor estratégia de configuração para o pré-condicionador multiescala é constituída por um operador de restrição do tipo *galerkin*, suavizador baseado em fatoração incompleta e razões de engrossamento ao redor de 10 ao longo de cada direção do reservatório. Diversas outras estratégias de solução direta e iterativa disponíveis no pacote científico PETSc são testadas para a resolução dos problemas em questão, da onde conclui-se que o pré-condicionador BoomerAMG associado ao método do gradiente conjugado e também o método direto Cholesky-UMFPACK são as mais eficientes em ambos quesitos matemático e computacional, inclusive em relação ao método multiescala de referência quando se deseja encontrar soluções com elevadas precisões.

Palavras-chave: simulação de reservatórios. Pré-condicionadores multiescala. Método dos volumes finitos multiescala.

ABSTRACT

One of the major challenges faced by reservoir simulation is about the solution of the linear systems obtained by the discretization of elliptic equations. This task turns out to be even more complex when highly heterogeneous permeability fields are present. Different strategies of direct and iterative methods have been developed in the last years and employed in this context. Considering the last ones, it's possible to note that iterative methods built by multigrid preconditioners are the most employed because of their robustness and efficiency. In this work, the mathematical properties and the computational performance of multigrid-like preconditioners called "multiscale preconditioners" are evaluated. The studied alternatives are implemented computationally and employed in conjunction of iterative methods for the precise and approximate solution of challenging elliptic problems. Given the tested problems, it was possible to verify that the best configuration properties for a multiscale preconditioner are composed by a galerkin restriction operator, smoothers based on incomplete factorization and coarsening ratios around of ten for each direction of the grid. Several others solutions strategies available in the scientific package PETSc were evaluated using the same set of problems as before and it was possible to conclude that the BoomerAMG preconditioner associated with the conjugate gradient method as well as the direct method Cholesky-UMFPACK are the most efficient ones in both mathematical and computational evaluation points and are even better than the multiscale preconditioner when the intention is to get a precise solution.

Keywords: reservoir simulation. Multiscale preconditioners. Multiscale finite volume method.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Stencil de sete pontos.	56
Figura 2 – Ilustração da matriz de coeficientes.	56
Figura 3 – Fluxograma para resolução do escoamento bi- fásico.	66
Figura 4 – Ilustração da ideia central do <i>upscaling</i>	71
Figura 5 – Decomposição LDU da matriz \mathbf{A}	83
Figura 6 – Problema teste: logaritmo do campo de perme- abilidade absoluta - $\log_{10}(K[mD])$	99
Figura 7 – Problema teste: malhas envolvidas no MsFVM.	100
Figura 8 – Problema teste: funções base duais.	103
Figura 9 – Problema teste: campo de pressão referente à malha grosseira.	105
Figura 10 – Problema teste: solução para o campo de pressão.	105
Figura 11 – Problema teste: linhas de corrente (MsFVM).	107
Figura 12 – Problema teste: comparação entre linhas de corrente.	108
Figura 13 – Problema teste: funções de correção.	110
Figura 14 – Problema teste: particionamento <i>wirebasket</i>	114
Figura 15 – Problema teste: estrutura da matriz de coefi- cientes original, à esquerda, e reordenada, à direita.	116
Figura 16 – Problema teste: estrutura da matriz de coefi- cientes reordenada, à esquerda, e da matriz que gera o pré-condicionador multiescala com funções de correção, à direita.	117
Figura 17 – Problema teste: estrutura da matriz \mathbf{A}_{ii}	118
Figura 18 – Problema teste: estrutura da matriz \mathbf{M}_{ee}	118
Figura 19 – Problema teste: estrutura da matriz $\tilde{\mathbf{M}}_{vv}$	119
Figura 20 – Problema teste: interpretação para as colunas da matriz \mathbf{P}	122
Figura 21 – Problema teste: formato do operador de corre- ção \mathbf{C}	123
Figura 22 – Problema teste: operador de restrição \mathbf{R}_{FV}	124
Figura 23 – Problema teste: estrutura da matriz $\hat{\mathbf{A}}$	131
Figura 24 – Caso 1: campo de permeabilidade.	137

Figura 25 – Caso 1: solução MsFVM-16x16.	138
Figura 26 – Caso 1: solução MsFVM-32x32.	139
Figura 27 – Caso 1: solução MsFVM-64x64.	139
Figura 28 – Caso 1: linhas de corrente para a solução MsFVM- 64x64.	141
Figura 29 – Caso 1: solução MsFEM-16x16.	141
Figura 30 – Caso 1: solução MsFEM-32x32.	142
Figura 31 – Caso 1: solução MsFEM-64x64.	142
Figura 32 – Caso 1: campo de pressão.	144
Figura 33 – Caso 1: tempo dos <i>solvers</i> diretos.	145
Figura 34 – Caso 1: etapas dos <i>solvers</i> diretos.	145
Figura 35 – Caso 1: uso de memória pelos <i>solvers</i> diretos.	146
Figura 36 – Caso 1: convergência dos métodos iterativos de referência.	147
Figura 37 – Caso 1: convergência dos métodos iterativos de referência.	148
Figura 38 – Caso 1: autovalores aproximados do operador pré-condicionado com BoomerAMG.	149
Figura 39 – Caso 1: autovalores aproximados do operador pré-condicionado com GAMG.	150
Figura 40 – Caso 1: autovalores aproximados do operador pré-condicionado com ILU(0).	150
Figura 41 – Caso 1: autovalores aproximados do operador pré-condicionado com ParaSails.	150
Figura 42 – Caso 1: tempos dos métodos iterativos de refe- rência.	151
Figura 43 – Caso 1: memória dos métodos iterativos de referência.	152
Figura 44 – Caso 1: norma do resíduo pré-condicionado - MSilu.	153
Figura 45 – Caso 1: norma do resíduo real - MSilu.	154
Figura 46 – Caso 1: tempos das estratégias MSilu.	154
Figura 47 – Caso 1: norma do resíduo pré-condicionado - MSsor.	155
Figura 48 – Caso 1: norma do resíduo real - MSsor.	156
Figura 49 – Caso 1: tempos das estratégias - MSsor.	156

Figura 50 – Caso 1: norma do resíduo pré-condicionado - MShs.	157
Figura 51 – Caso 1: norma do resíduo real - MShs.	158
Figura 52 – Caso 1: tempos das estratégias - MShs.	158
Figura 53 – Caso 1: norma do resíduo pré-condicionado.	159
Figura 54 – Caso 1: norma do resíduo real.	159
Figura 55 – Caso 1: tempos das estratégias multiescala.	160
Figura 56 – Caso 1: uso de memória de diferentes estratégias de solução.	160
Figura 57 – Caso 1: norma do resíduo pré-condicionado da estratégia MsFEilu1sym variando-se o tamanho do problema global.	161
Figura 58 – Caso 1: norma do resíduo real da estratégia MsFEilu1sym variando-se o tamanho do problema global.	162
Figura 59 – Caso 1: tempos obtidos variando-se o tamanho do problema global.	163
Figura 60 – Caso 1: espectro do operador pré-condicionado por MsFEilu1sym-64x64.	163
Figura 61 – Caso 1: picos de memória obtidos variando-se o tamanho do problema global.	164
Figura 62 – Caso 2: campo de permeabilidade.	165
Figura 63 – Caso 2: campo de pressão.	166
Figura 64 – Caso 2: linhas de corrente de referência.	166
Figura 65 – Caso 2: campo de pressão MsFVM-100x100.	167
Figura 66 – Caso 2: campo de pressão MsFEM-100x100.	168
Figura 67 – Caso 2: campo de pressão MsFVM-160x160.	169
Figura 68 – Caso 2: campo de pressão MsFEM-160x160.	169
Figura 69 – Caso 2: resíduo real obtido pelo método MsFEilu1sym-CG.	170
Figura 70 – Caso 2: resíduo real pelo método MsFEessor2sym-CG.	171
Figura 71 – Caso 2: tempo computacional pela estratégia MsFEilu1sym-CG.	172
Figura 72 – Caso 2: resíduo real para as estratégias de referência.	172

Figura 73 – Caso 2: espectro aproximado do operador original pré-condicionado com BoomerAMG.	173
Figura 74 – Caso 2: espectro aproximado do operador original pré-condicionado com MsFEilu1sym-40x40.	173
Figura 75 – Caso 2: Tempos computacionais das estratégias de referência.	174
Figura 76 – Caso 2: pico de memória da estratégia MsFEilu1sym-CG.	175
Figura 77 – Caso 3: curvas de permeabilidade relativa.	175
Figura 78 – Caso 3: campo de permeabilidade absoluta.	176
Figura 79 – Caso 3: tempo de solução de acordo com diferentes tamanhos para o problema na malha grossa.	179
Figura 80 – Caso 3: número de iterações da estratégia MsFEilu1sym3x9-CG em função do passo de tempo.	180
Figura 81 – Caso 3: tempo de execução da estratégia MsFEilu1sym3x9-CG em função do passo de tempo.	180
Figura 82 – Caso 3: tempo computacional total associado à execução das estratégias de referência.	181
Figura 83 – Caso 3: tempo de execução da estratégia MsFEilu1sym3x9-CG em função do passo de tempo.	182
Figura 84 – Caso 3: campos de pressão.	183
Figura 85 – Caso 3: campos de saturação da fase óleo.	184
Figura 86 – Caso 4: campo de permeabilidade absoluta na direção “x”.	185
Figura 87 – Caso 4: tempos computacionais de acordo com a estratégia de solução.	187
Figura 88 – Caso 4: campo de pressão no instante final.	188
Figura 89 – Caso 4: campo de saturação de água no instante final.	188
Figura 90 – Caso 4: campo de saturação de óleo no instante final.	189
Figura 91 – Caso 4: campo de saturação de gás no instante final.	189
Figura 92 – Caso 4: produções totais acumuladas de gás, óleo e água, respectivamente.	190

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Métodos de solução diretos.	134
Tabela 2 – Pré-condicionadores padrão.	134
Tabela 3 – Pré-condicionadores do tipo multiescala.	136
Tabela 4 – Caso 3: propriedades dos poços.	176
Tabela 5 – Caso 3: passos de tempo.	177

LISTA DE ALGORITMOS

1	Aplicação da fatoração LU.	75
2	GMRes pré-condicionado à esquerda.	78
3	CG pré-condicionado à esquerda.	79
4	Aplicação de \mathbf{M}_{SSOR}^{-1} sobre um vetor.	84
5	Aplicação da fatoração ILU.	85
6	Pré-condicionador CPR	87
7	<i>Multigrid</i> de dois níveis.	90

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AIM	<i>Adaptive Implicit Method.</i>
ABF	<i>Alternate Block Factorization.</i>
AMG	<i>Algebraic Multigrid.</i>
AMS	<i>Algebraic Multiscale Solver.</i>
AMD	<i>Approximate Minimal Degree.</i>
ASPIN	<i>Additive Schwartz Preconditioned Inexact Newton.</i>
BiCGStab	<i>Biconjugate Gradient Stabilized.</i>
BLAS	<i>Basic Linear Algebra Subprograms.</i>
CG	<i>Conjugate Gradient.</i>
CGS	<i>Conjugate Gradient Squared.</i>
CPU	<i>Central Processing Unit.</i>
CPR	<i>Constrained Pressure Residual.</i>
DD	<i>Domain Decomposition.</i>
DRS	<i>Dynamic Row Sum.</i>
FDM	<i>Finite Difference Method.</i>
FEM	<i>Finite Element Method.</i>
FIM	<i>Fully Implicit Method.</i>
FVM	<i>Finite Volume Method.</i>
GMRes	<i>Generalized Minimal Residual.</i>
GPU	<i>Graphics Processing Unit.</i>
HYPRE	<i>High Performance Preconditioners.</i>

ILU	<i>Incomplete Lower Upper Factorization.</i>
ILUT	<i>Incomplete Lower Upper Threshold Factorization.</i>
ILUTP	<i>Incomplete Lower Upper Threshold Factorization with Pivoting.</i>
IMPES	<i>Implicit Pressure Explicit Saturation.</i>
LGR	<i>Local Grid Refinement.</i>
MMsFEM	<i>Mixed Multiscale Finite Element Method.</i>
MMsFVM	<i>Mixed Multiscale Finite Volume Method.</i>
MsFEM	<i>Multiscale Finite Element Method.</i>
MsFVM	<i>Multiscale Finite Volume Method.</i>
MPI	<i>Message Parsing Interface.</i>
MRST	<i>Matlab Reservoir Simulation Toolkit</i>
ND	<i>Nested Dissection.</i>
NNC	<i>Non-Neighbour Connection.</i>
ORTHOMIN	<i>Orthogonal Minimum Residual.</i>
PETSc	<i>Portable Extensible Toolkit for Scientific Computing.</i>
RAM	<i>Random Access Memory.</i>
RCM	<i>Reverse Cuthill-McKee.</i>
TPFA	<i>Two Point Flux Approximation.</i>
SFI	<i>Sequential Fully Implicit.</i>
SPD	<i>Symmetric Positive Definite.</i>
SSOR	<i>Symmetric Successive Overrelaxation.</i>
WDRS	<i>Weighted Dynamic Row Sum.</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

SÍMBOLOS GREGOS MAIÚSCULOS

Ω	Domínio	[—]
Ω^C	Domínio referente à malha primal	[—]
Ω^D	Domínio referente à malha dual	[—]

SÍMBOLOS GREGOS MINÚSCULOS

λ_α	Mobilidade referente à fase α	[1/(Pa s)]
ϕ	Porosidade	[—]
ϕ_i^j	função base j referente ao volume de controle i	[—]
ρ_α	Densidade da fase α	[kg/m ³]
μ_α	Viscosidade da fase α	[Pa s]
ω	Fator de relaxação	[—]
τ	Tolerância absoluta para a fatoração incompleta LU	[—]

SÍMBOLOS ROMANOS MAIÚSCULOS

A	Área	[m ²]
\mathbf{A}	Matriz de coeficientes	[—]
B_α	Fator volume de formação da fase α	[m ³ /stdm ³]
B_{ob}	Fator volume de formação da fase óleo na pressão de ponto de bolha	[m ³ /stdm ³]
\mathbf{C}	Operador de correção	[—]

C_A	Complexidade do operador algébrico	$[-]$
C_G	Complexidade geométrica	$[-]$
\mathbf{G}	Matriz de iteração	$[-]$
\mathbf{K}	Tensor permeabilidade absoluta	$[\text{m}^2]$
K_m	Espaço de Krylov de dimensão m	$[-]$
\mathbf{L}	Matriz triangular inferior	$[-]$
\mathbf{M}^{-1}	Inversa da matriz de pré-condicionamento.	$[-]$
M_{wn}	Número de zonas perfuradas do poço n	$[-]$
N_w	Número de poços	$[-]$
P	Operador de prolongação	$[-]$
\mathbf{P}_η	Operador de projeção na direção η	$[-]$
\mathbf{Q}	Matriz de permutação wirebasket	$[-]$
R	Operador de restrição	$[-]$
R^l	Resíduo referente à iteração l do método de Newton	$[-]$
R_{so}	Razão de solubilidade do componente gás na fase óleo	$[\text{stdm}^3/\text{stdm}^3]$
\mathbf{S}	Matriz de suavização	$[-]$
S_α	Saturação da fase α	$[-]$
\mathbf{T}_α	Tensor transmissibilidade da fase α	$[\text{m d}]$
$\tilde{T}_{\alpha d}$	Transmissibilidade da fase α na direção d	$[\text{stdm}^3/(\text{Pa d})]$
\mathbf{U}	Matriz triangular superior	$[-]$
V	Volume	$[\text{m}^3]$

SÍMBOLOS ROMANOS MINÚSCULOS

b	lado direito do sistema linear	[—]
c_α	Compressibilidade da fase α	[Pa ⁻¹]
d	Direção (1,2 ou 3)	[—]
f_α	Função fluxo fracionário da fase α	[—]
$k_{r\alpha}$	Permeabilidade relativa da fase α	[—]
p	Pressão	[Pa]
p_{cow}	Pressão capilar água/óleo	[Pa]
p_{cgo}	Pressão capilar gás/óleo	[Pa]
q_α	Fonte/sumidouro de massa da fase α	[kg/(m ³ s)]
\tilde{q}_α	Fonte/sumidouro de massa da fase α	[1/s]
r	resíduo referente à solução aproximada do sistema linear	[—]
r_w	Raio do poço	[m]
r_e	Raio equivalente do poço	[m]
x	solução aproximada do sistema linear	[—]
x^*	solução exata do sistema linear	[—]
z	Profundidade	[m]

SUBSCRITOS

b	Ponto de bolha	[—]
bh	Fundo de poço	[—]
c	Nível grosso de malha	[—]

<i>o</i>	Componente/fase óleo	[-]
<i>f</i>	Nível fino de malha	[-]
<i>g</i>	Componente/fase gás	[-]
<i>l</i>	Nível de iteração	[-]
<i>n</i>	Instante de tempo	[-]
<i>w</i>	Componente/fase água	[-]
<i>s</i>	Condições padrão de temperatura e pressão	[-]

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	31
1.1	Motivação	34
1.2	Objetivo Geral	36
1.3	Objetivos Específicos	36
1.4	Organização do Trabalho	37
2	MODELAGEM MATEMÁTICA E NUMÉRICA	39
2.1	Escoamento Trifásico	40
2.1.1	Discretização das Equações	44
2.1.2	Determinação do Ponto de Bolha	58
2.2	Escoamento Bifásico	60
2.2.1	Discretização das Equações	61
2.3	Escoamento Monofásico	65
3	SOLUÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO .	69
3.1	Upscaling	70
3.2	Solvers Lineares	72
3.2.1	Fatoração LU completa	74
3.2.2	Método de Richardson	75
3.2.3	Método do Resíduo Generalizado Mínimo . .	76
3.2.4	Método do Gradiente Conjugado	79
3.3	Pré-Condicionadores	80
3.3.1	Método da Sobre-Relaxação Sucessiva	82
3.3.2	Fatoração LU Incompleta	84
3.3.3	<i>Constrained Pressure Residual</i>	86
3.3.4	Multigrid Algébrico	88
3.3.5	Decomposição de Domínio	92
4	MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS MUL- TIESCALA - MSFVM	97
4.1	Funções Base Duais	101
4.2	Problema na Malha Grossa	103
4.3	Reconstrução do Campo de Velocidade	106
4.4	Funções de Correção	108

4.5	Desenvolvimentos Recentes	109
5	PRÉ-CONDICIONADOR MULTIESCALA AL- GÉBRICO	113
5.1	Operadores de Transferência	120
5.2	Problema na Malha Grossa	125
5.3	Definição do Pré-Condicionador	126
5.4	Reconstrução do Campo de Velocidades	129
6	RESULTADOS	133
6.1	Caso 1: monofásico 2D	135
6.1.1	Solução aproximada	137
6.1.2	Métodos diretos	143
6.1.3	Métodos iterativos	146
6.2	Caso 2: escoamento canalizado	164
6.2.1	Solução aproximada	167
6.2.2	Solução precisa	168
6.3	Caso 3: bifásico incompressível 2D	175
6.3.1	Solução aproximada	177
6.3.2	Solução precisa	178
6.4	Caso 4: teste comparativo SPE 9	182
7	CONCLUSÕES	191
7.1	Sugestões para trabalhos futuros	192
	 Referências	 195
	 APÊNDICES	 219
	APÊNDICE A – PARÂMETROS DO MODELO <i>BLACK-OIL</i>	 221
A.1	Fase Água	221
A.2	Fase Óleo	221
A.2.1	Estado subsaturado	221
A.2.2	Estado saturado	222

A.3 Fase Gás 222

APÊNDICE B – PRÉ-CONDICIONADOR MULTIESCALA ALGÉBRICO 3D 223

1 INTRODUÇÃO

Reservatórios de petróleo são constituídos por formações rochosas repletas de espaços vazios interconectados entre si através dos quais fluidos derivados principalmente de hidrocarbonetos escoam mediante um diferencial de pressão. A exploração desses reservatórios envolve diversas etapas entre as quais a de produção representa uma das fundamentais. Nessa fase, os fluidos são retirados dos reservatórios através de poços que conectam estes últimos até a superfície¹. Devido a limitações físicas, não é possível recuperar todo o fluido contido no reservatório, no entanto, é possível maximizar tal quantidade desde que estratégias eficientes de exploração sejam implementadas. Uma ferramenta fundamental para a avaliação dessas técnicas é a simulação do escoamento em reservatórios. A partir dela, é possível prever o volume dos fluidos recuperado em cada um dos poços, bem como sua taxa de produção, entre outros parâmetros ao longo do tempo. Estes dados, por sua vez, podem ser utilizados no cálculo do fator de recuperação, parâmetro fundamental para a análise da eficiência associada à estratégia de produção adotada.

Nesse contexto, o reservatório costuma ser modelado fisicamente como um meio poroso através do qual fluidos escoam a baixas velocidades (hipótese de Stokes). Isso permite que tal variável seja escrita em função da pressão através da lei de Darcy (KAVIANY, 1995). Esta e outras equações baseadas em princípios básicos da mecânica dos fluidos como a conservação da massa e da energia constituem o modelo matemático que representa o escoamento em reservatórios.

Do ponto de vista matemático, tais equações são classificadas como diferenciais parciais e podem acoplar mais de uma incógnita referente ao escoamento como pressão, velocidade e saturação. Existem situações básicas em que é possível de se encontrar a solução analítica dessas equações, porém, na maioria dos casos, isso não é possível devido à geometria complexa

¹ Na nomenclatura de engenharia de reservatórios, diz-se que o fluido foi recuperado ou produzido do reservatório.

dos reservatórios bem como aos processos físicos complexos que sucedem durante o escoamento. Portanto, é comum resolver tais equações numericamente, isto é, de forma aproximada segundo algum método numérico como volumes finitos ou elementos finitos. Por sua vez, a aplicação do método numérico gera um ou mais sistemas de equações discretizadas possivelmente não-lineares que são de grande porte e esparsos².

Na simulação de reservatórios, assim como na maioria das aplicações envolvendo simulação numérica, a resolução desses sistemas algébricos representa a maior parte do tempo associado à execução do código computacional. Em especial, a etapa de resolução de equações elípticas³, como a empregada para o cálculo da variável pressão, é a que se mais destaca nessa última parcela. De fato, uma área muito ativa na simulação de reservatórios, bem como em outras áreas de engenharia que apresentam problemas de caráter elíptico, busca propor métodos mais eficientes para a sua resolução em termos do uso de recursos computacionais e também de precisão na solução, já que esta pode ser obtida apenas aproximadamente além de exatamente.

No âmbito de estratégias de solução eficientes, um considerável avanço foi obtido com o advento dos métodos *multigrid*. Basicamente, estes são pré-condicionadores utilizados em conjunto com métodos iterativos responsáveis por empregar cálculos em vários níveis de malhas com o intuito de eliminar erros de solução associados a diferentes frequências e acelerar a taxa de convergência dos métodos iterativos (HACKBUSCH, 1985). Podem-se citar também os métodos baseados em decomposição de domínio, cuja ideia fundamental é dividir um problema original em diversos subproblemas locais de menor tamanho que podem ser resolvidos paralelamente e cuja solução é empregada para o cálculo da solução do problema original (SANDVIN, 2012). Ambas estratégias mencionadas apresentam diversos parâmetros de configuração que dão origem a diferentes pré-condicionadores para serem utilizados

² O número de elementos não nulos da matriz é relativamente baixo.

³ Do ponto de vista físico, quando uma variável de caráter elíptico sofre uma perturbação em determinada posição do domínio, esta propaga-se em todas as direções de modo possivelmente irregular.

em conjunto com *solvers* iterativos.

Uma outra maneira de se melhorar a eficiência computacional consiste em reduzir a precisão da solução calculada, porém de modo que esta possa ainda ser considerada confiável. Dessa forma, uma quantidade menor de recursos computacionais necessita ser alocada durante o processo de resolução dos sistemas algébricos lineares ou possivelmente não-lineares. Essa é justamente a abordagem das técnicas de *upscaling*, que buscam a construção de um problema de menor tamanho em relação ao original⁴(CHRISTIE, 1996). Esse processo é realizado numa etapa anterior à simulação do escoamento propriamente dita, nele assume-se um comportamento prévio para o escoamento com o intuito de se calcular, para a malha grosseira, as propriedades físicas da rocha bem como alguns parâmetros relativos à interação entre rocha e fluido como pressão capilar e permeabilidade relativa. Devido a tal hipótese sobre o escoamento, a solução do problema obtido a partir do *upscaling* apresenta certo grau de imprecisão em relação àquela que seria obtida caso o problema original fosse resolvido com alta precisão.

Reservatórios altamente heterogêneos como os de formação carbonática, cujo campo de permeabilidade apresenta elevada variação ao longo do espaço, levam a uma dificuldade adicional na resolução da equação da pressão. Isso se dá porque tais reservatórios exigem o uso de técnicas ainda mais complexas de *upscaling* para a obtenção de soluções confiáveis ou ainda *solvers* mais robustos, já que o número de condicionamento da matriz obtida no processo de discretização da equação da pressão é elevado nesses casos, o que prejudica a performance de *solvers* iterativos. Além dessa dificuldade, a solução do escoamento nesses casos pode demandar malhas computacionais com altíssimo número de incógnitas a ponto de inviabilizá-la devido a limitações de recursos computacionais.

Uma possível solução para a simulação eficiente do ponto

⁴ O problema original é normalmente referido como refinado e descrito de acordo com um modelo geológico, enquanto o problema de menor tamanho é referido como grosseiro e descrito de acordo com um modelo de reservatório.

de vista computacional e, ao mesmo tempo, que conduz a uma solução com grau de precisão adequado consiste no uso de métodos multiescala. Estes podem ser vistos como tipos especiais de pré-condicionadores *multigrid* que tentam capturar a variação do campo de permeabilidade em nível refinado e utilizá-la no cálculo de um campo de pressão nessa mesma escala a partir de um campo de pressão calculado em malha grosseira. Por outro lado, os métodos multiescala também apresentam uma semelhança forte com as técnicas de *upscaling*, uma vez que propõem a resolução aproximada do problema original a partir da resolução de um sistema linear em nível grosseiro. No entanto, eles contam com a vantagem de promover uma captura do campo de permeabilidade mais fidedigna à física do problema, especialmente nos casos de simulação transiente, bem como permitir o cálculo de um campo de pressão e velocidade em nível refinado ao invés de grosseiro somente, como é o caso no *upscaling* (KIPPE; AARNES; LIE, 2008).

1.1 MOTIVAÇÃO

Dentre os métodos multiescala, é de especial interesse o método dos volumes finitos multiescala - *Multiscale Finite Volume Method* (MsFVM) - o qual foi desenvolvido recentemente por Jenny, Lee e Tchelepi (2003). Apesar do nome sugerir que se trata de uma nova alternativa para a discretização de equações diferenciais, assim como o método dos volumes finitos ou elementos finitos, este consiste numa estratégia para a solução aproximada das equações discretizadas com o método dos volumes finitos, especialmente da equação da pressão.

O MsFVM pode ser visto como um desenvolvimento na linha das técnicas de *upscaling*, uma vez que busca uma solução aproximada para o problema discretizado através da resolução de um problema grosseiro. As vantagens observadas nesse método sobre técnicas usuais de *upscaling* são basicamente duas:

- a) o campo de pressão calculado a partir desse método conduz a um campo de velocidades conservativo na malha original do problema, isto é, tal campo obedece

à lei da conservação da massa nesse mesmo nível de malha. Esta característica é fundamental para a resolução apropriada das equações de transporte como aquelas destinadas ao cálculo do campo de saturações em escoamentos multifásicos. Além disso, o sistema linear referente ao nível grosseiro é atualizado em problemas transientes, tornando o método bastante robusto especialmente em problemas altamente heterogêneos;

- b) assim como métodos de decomposição de domínio, o MsFVM divide o problema original em subproblemas locais que são independentes entre si e podem ser resolvidos paralelamente. Isso torna seu algoritmo altamente susceptível ao processamento paralelo. Mesmo que seja empregado processamento sequencial, o custo computacional envolvido na resolução desses subproblemas é menor que aquele referente ao problema original.

Nos últimos anos, produziram-se vários trabalhos com o intuito de estender a aplicação do MsFVM a problemas de simulação de reservatórios que apresentam fenômenos físicos diversificados. Nesse sentido, nota-se que a aplicação desse método em simuladores comerciais bem como seu uso para o tratamento de reservatórios reais tornam-se cada vez mais em pauta ([MANEA; SEWALL; TCHELEPI, 2015](#)). Um dos aperfeiçoamentos mais significativos deu-se com a concepção da formulação algébrica do método, assim como sua extensão para a esfera de métodos iterativos voltados à solução do problema de acordo com o nível de precisão que se queira. Nesse último contexto, o MsFVM dá origem aos pré-condicionadores multiescala algébricos, que possuem diversos parâmetros de configuração e são empregados para a resolução de sistemas lineares elípticos através de métodos iterativos.

1.2 OBJETIVO GERAL

Dadas as vantagens e a relevância observada pelo MsFVM bem como pela sua formulação algébrica como um pré-condicionador voltado à resolução de problemas elípticos, o presente trabalho apresenta como objetivo principal a implementação computacional de ambas estratégias para a resolução da equação da pressão em simulação de reservatórios altamente heterogêneos.

1.3 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Dado o foco de estudo, os seguintes objetivos particulares são determinados:

- a) Avaliar o desempenho computacional do código desenvolvido para a resolução de escoamentos monofásicos, bifásico e também trifásicos em malhas estruturadas. Considera-se aqui tanto a formulação original do MsFVM para a obtenção de soluções aproximadas assim como o seu uso como um pré-condicionador aliado à métodos iterativos para a obtenção de soluções precisas.
- b) Considerando-se o uso dos métodos multiescala como pré-condicionadores de *solvers* iterativos empregados na resolução precisa de problemas lineares elípticos, avalia-se também seu desempenho matemático, isto é, em termos da taxa de convergência observada pelo método iterativo resultante.
- c) Aferir o melhor uso que pode ser feito dos métodos multiescala: como um pré-condicionador associado a métodos iterativos ou como uma técnica de *upscaling* para a obtenção de uma solução aproximada do problema.
- d) Encontrar a melhor combinação possível de parâmetros para a definição de pré-condicionadores multiescala eficientes.

- e) Prover uma plataforma unificada para testar diferentes estratégias de pré-condicionamento e avaliar a melhor opção em termos de taxa de convergência, exatidão dos resultados, tempo computacional e uso de memória.

1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O primeiro capítulo desse trabalho buscou contextualizá-lo na área de simulação de reservatórios e apresentar seu objetivo. No segundo capítulo, as equações responsáveis pela modelagem do escoamento em reservatórios serão apresentadas, bem como seu formato discretizado de acordo com o método dos volumes finitos tradicional⁵. No terceiro capítulo serão discutidos os métodos comumente empregados para a solução das equações discretizadas. No quarto capítulo apresenta-se a formulação original do método dos volumes finitos multiescala, que é baseada em argumentos de caráter físico. No quinto capítulo, discute-se a formulação algébrica desse método bem como os pré-condicionadores que podem ser construídos a partir de sua ideia básica. No sexto capítulo, tais estratégias de solução serão testadas em problemas sintéticos, assim como em um problema padrão bastante desafiador, o qual é comumente empregado no *benchmarking* de novas técnicas de solução. Por fim, no último capítulo serão apresentadas as conclusões do presente trabalho e sugestões para pesquisas futuras.

⁵ A malha empregada é estruturada e o cálculo dos fluxos nas fronteiras dos volumes de controle é feito de acordo com um esquema de dois pontos (TPFA).

2 MODELAGEM MATEMÁTICA E NUMÉRICA

A modelagem matemática do escoamento em reservatórios de petróleo é realizada por um conjunto de equações diferenciais parciais baseadas nas leis de conservação de massa, espécie, quantidade de movimento e energia além de relações de fechamento, necessárias para que o número de incógnitas do modelo se iguale ao número de equações. De modo geral, tais equações descrevem as relações existentes entre variáveis do escoamento como pressão, temperatura, saturação e composição das fases em função das propriedades físicas da rocha-reservatório, dos fluidos e das propriedades físicas relativas à interação entre a rocha e os fluidos.

Duas grandes classes de modelos podem ser empregadas de acordo com o tipo de escoamento presente no reservatório: composicional e *black-oil*. Em ambos os modelos, o escoamento pode apresentar até três fases sendo elas: aquosa, oleosa e gasosa. A diferença básica entre essas duas escolhas consiste no número de informações que se deseja obter do escoamento, sendo que os modelos composicionais são mais minuciosos.

Nos modelos composicionais (ACS; DOLESCHALL; FARKAS, 1986; TRANGENSTEIN; BELL, 1989; COATS; THOMAS; PIERSON, 1998; QIN; EWING; CHEN, 2000), as fases oleosa e gasosa contém diversos hidrocarbonetos de diferentes massas moleculares. É de interesse a descrição detalhada do escoamento desses componentes, isto é, como eles se propagam ao longo do reservatório bem como o cálculo de sua fração volumétrica presente nessas fases, realizado através de modelos baseados em equilíbrio termodinâmico. Os modelos composicionais são largamente empregados quando a produção de óleo envolve métodos de recuperação avançada (LAKE, 2010), um exemplo é a injeção de gás carbônico em determinadas áreas do reservatório com o intuito de armazenar o gás e também deslocar o óleo em direção a poços produtores.

Quando o grau de volatilidade do óleo é baixo, o comportamento das fases torna-se menos complexo e o uso do modelo composicional completo deixa de ser necessário para a modelagem

precisa do escoamento. Nesse caso, o sistema pode ser representado em termos do componente água mais dois pseudo-componentes com característica de hidrocarbonetos, designados por óleo e gás, o que dá origem ao modelo *black-oil* (AZIZ; SETTARI, 1979).

Na sua forma mais geral, esse modelo permite que todos os componentes estejam presentes em qualquer uma das fases aquosa, oleosa ou gasosa. No entanto, aplicações usuais geralmente não requerem um grau de mobilidade tão elevado para os componentes, portanto os simuladores de reservatórios costumam empregar duas variantes simplificadas do modelo *black-oil*: padrão e volátil.

No *black-oil* padrão, permite-se que somente o componente gás mude de fase e tal mudança pode ser apenas entre as fases oleica e gasosa. Naturalmente, as fases aquosa, oleica e gasosa são formadas pelos componentes água, óleo e gás. Já no modelo *black-oil* volátil, o componente óleo pode estar presente na fase gasosa, além de estar naturalmente presente na fase oleica.

Nesse trabalho, emprega-se o modelo *black-oil* padrão para a simulação do escoamento em reservatórios de petróleo. No presente capítulo, serão apresentadas as equações que compõem tal modelo bem como simplificações que podem ser obtidas no caso de escoamentos bifásico e monofásico. Informações mais detalhadas a respeito da modelagem do escoamento em reservatórios e sua resolução podem ser encontradas nos trabalhos de (AZIZ; SETTARI, 1979; PEACEMAN, 1983; CHEN, 2007).

2.1 ESCOAMENTO TRIFÁSICO

No modelo *black-oil* padrão, as equações que governam o escoamento em reservatórios são obtidas, basicamente, a partir do princípio da conservação da quantidade de massa aplicada a cada um dos componentes verificados no escoamento. É importante observar que a massa é conservada na fase aquosa, porém o mesmo não pode ser afirmado para as fases oleosa e gasosa, uma vez que o componente gás pode transitar entre elas (CHEN, 2007). Considerando que a temperatura do reservatório é constante, o

conjunto de equações que formam o modelo é dado a seguir:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho_w S_w) = \nabla \cdot (\rho_w \vec{u}_w) + q_w, \quad (2.1a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho_{oo} S_o) = \nabla \cdot (\rho_{oo} \vec{u}_o) + q_o, \quad (2.1b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi (\rho_{go} S_o + \rho_g S_g)) = \nabla \cdot (\rho_{go} \vec{u}_o + \rho_g \vec{u}_g) + q_g, \quad (2.1c)$$

$$p_{cow} (S_w) = p_o - p_w, \quad (2.1d)$$

$$p_{cgo} (S_g) = p_g - p_o, \quad (2.1e)$$

$$S_w + S_o + S_g = 1. \quad (2.1f)$$

Ao todo, tem-se seis equações para o cálculo da pressão e saturação referentes às fases água, óleo e gás, isto é: P_w ; P_o ; P_g ; S_w ; S_o ; S_g . Nas equações (2.1a) a (2.1c), a variável ρ_α representa a massa específica do componente α pertencente à fase α , enquanto $\rho_{\alpha\beta}$ refere-se à massa específica do componente α pertencente à fase β . Já a variável ϕ denota a porosidade da rocha, a qual pode variar ao longo da simulação de acordo com a relação

$$\phi = \phi^o (1 + c_R (p - p^o)), \quad (2.2)$$

em que ϕ^o é a porosidade medida na pressão de referência p^o e c_R é o fator de compressibilidade da rocha. Na presença de efeitos capilares, as fases podem apresentar diferentes valores para pressão no equilíbrio termodinâmico, tal efeito é modelado pelas pressões capilares água/óleo e gás/óleo, de acordo com as funções (2.1d) e (2.1e), as quais são informadas através de tabelas em função das saturações. Por fim, a equação (2.1f) realiza o fechamento do problema ao impor uma restrição para o cálculo das saturações.

O primeiro termo do lado direito das equações (2.1a) a (2.1c) modela o transporte de massa no reservatório por advecção, isso envolve a velocidade da fase que é transportada: \vec{u}_α . Em escoamentos ao longo de meios porosos, esse termo é usualmente

escrito como

$$\vec{u}_\alpha = \frac{k_\alpha}{\mu_\alpha} (\nabla p_\alpha - \rho_\alpha g \nabla z), \quad \alpha = w, o, g. \quad (2.3)$$

Esta é chamada por lei de Darcy (DAKE, 1978), a qual pode ser obtida simplificando-se a lei da conservação da quantidade de movimento para o caso de escoamentos a baixas velocidades em meios porosos (hipótese de Stokes) (WHITAKER, 1986).

O modelo *black-oil* padrão pode ser também escrito em termos de conservação volumétrica, nesse caso as equações (2.1a) a (2.1c) são substituídas por:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi S_w}{B_w} \right) = \nabla \cdot (\mathbf{K} \lambda_w [\nabla p_w - \gamma_w \nabla z]) + \frac{q_{ws}}{B_w}, \quad (2.4a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi S_o}{B_o} \right) = \nabla \cdot (\mathbf{K} \lambda_o [\nabla p_o - \gamma_o \nabla z]) + \frac{q_{os}}{B_w}, \quad (2.4b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \left(\frac{S_g}{B_g} + \frac{R_{so} S_o}{B_o} \right) \right] &= \frac{q_{gs}}{B_g} + \frac{R_{so} q_{os}}{B_o} \\ &+ \nabla \cdot (\mathbf{K} \lambda_g [\nabla p_g - \gamma_g \nabla z] + R_{so} \mathbf{K} \lambda_o [\nabla p_o - \gamma_o \nabla z]), \end{aligned} \quad (2.4c)$$

em que o tensor \mathbf{K} é a permeabilidade absoluta da rocha-reservatório e a variável B_α é denominada fator volume de formação da fase α , sendo dada por:

$$B_w = \frac{\rho_{ws}}{\rho_w}, \quad \rho_{ws} = \rho_w (1 \text{ atm}, 20^\circ \text{C}), \quad (2.5a)$$

$$B_g = \frac{\rho_{gs}}{\rho_g}, \quad \rho_{gs} = \rho_g (1 \text{ atm}, 20^\circ \text{C}), \quad (2.5b)$$

$$B_o = \frac{R_{so} \rho_{gs} + \rho_{os}}{\rho_o}, \quad \rho_{os} = \rho_o (1 \text{ atm}, 20^\circ \text{C}). \quad (2.5c)$$

Na equação (2.5c), R_{so} representa a razão de solubilidade do componente gás na fase óleo. Esta variável é função da pressão. Tal variável é definida como o volume do gás, medido nas condições padrão de temperatura e pressão ($P = 1 \text{ atm}, T = 20^\circ \text{C}$),

dissolvido em uma unidade volumétrica de óleo nas condições de temperatura e pressão do reservatório.

$$R_{so} = \frac{V_{gs}}{V_{os}}. \quad (2.6)$$

Presente no lado direito das equações (2.4a) a (2.4c), o termo λ_α é chamado de mobilidade da fase α . Este é responsável por medir a facilidade com que a fase α escoar no reservatório, sendo definido a seguir:

$$\lambda_\alpha = \frac{k_{r\alpha}}{\mu_\alpha B_\alpha}, \quad (2.7)$$

em que $k_{r\alpha}$ é a permeabilidade relativa à fase α e μ_α sua viscosidade dinâmica. Expressões típicas para as permeabilidades relativas $k_{r\alpha}$ como função da saturação podem ser encontradas em [Chen \(2007\)](#). No presente trabalho, utiliza-se o modelo de Stone II, descrito no apêndice A.

Por último, as taxas volumétricas nas condições padrão de cada fase são relacionadas com as taxas nas condições de reservatório da seguinte forma:

$$q_{ws} = \frac{B_w q_w}{\rho_{ws}}, \quad (2.8a)$$

$$q_{os} = \frac{B_o q_o}{\rho_{os}}, \quad (2.8b)$$

$$q_{gs} = \frac{B_g q_g}{\rho_{gs}} - \frac{B_g R_{so} q_o}{\rho_{os}}. \quad (2.8c)$$

Através desses termos, é possível modelar a ação de poços injetores e produtores em reservatórios conforme a seguinte equação:

$$q_{\alpha s} = \sum_{n=1}^{Nw} \sum_{m=1}^{M_{wn}} W I_m^n \frac{k_{r\alpha}}{\mu_\alpha} \left[p_{bh}^n - p_\alpha - \gamma_\alpha (z_{bh}^n - z) \right] \delta(\vec{x} - \vec{x}_m^n),$$

$$\alpha = w, o, g, \quad (2.9)$$

em que, o índice de poço é dado por

$$WI_m^n = \frac{2\pi\bar{k}\Delta h}{\ln(r_e/r_w)} \Bigg|_m^n; \quad (2.10)$$

$\delta(\vec{x})$ é a função delta de Dirac; N_w é o número total de poços; M_{wn} é o número total de volumes de controle que o n -ésimo poço atravessa; Δh_m^n e \bar{x}_m^n são o comprimento e a posição central do segmento do poço que atravessa o volume de controle m ; a quantidade \bar{k}_m é a permeabilidade absoluta média do volume m ; r_w^n é o raio do n -ésimo poço; $r_{e,m}^n$ é o raio de drenagem e p_{bh}^n é a pressão de fundo de poço.

De acordo com o modelo de Peaceman (1983), a permeabilidade média \bar{k}_m é dada por $\sqrt{k_{11}k_{22}}$, em que 1 e 2 são as direções perpendiculares ao poço. Além disso, o raio de drenagem $r_{e,m}^n$ é dado por:

$$r_{e,m}^n = \frac{0.14 \sqrt{\left(\frac{k_{22}}{k_{11}}\right) h_1^2 + \left(\frac{k_{11}}{k_{22}}\right) h_2^2}}{0.5 \left[\left(\frac{k_{22}}{k_{11}}\right)^{1/4} + \left(\frac{k_{11}}{k_{22}}\right)^{1/4} \right]}, \quad (2.11)$$

onde considera-se que as completações do poço interceptam o centro do volume de controle do reservatório.

Por fim, o fechamento do modelo é realizado através da especificação das condições de contorno e inicial. As primeiras dizem respeito ao valor da pressão e das saturações nas fronteiras do reservatório, enquanto a segunda diz respeito à distribuição dessas variáveis no instante inicial da simulação. Em geral, adotou-se nesse trabalho que as fronteiras do reservatório são impermeáveis, isto é, a componente normal das derivadas da pressão e saturações são nulas. Além disso, adotou-se que a distribuição inicial dos campos de pressão e saturação é especificada como parâmetro de entrada na simulação.

2.1.1 Discretização das Equações

Conforme mostrado anteriormente, a modelagem matemática do escoamento em reservatórios envolve a resolução de

equações baseadas em princípios de conservação. Tais equações são do tipo diferencial, isto é, envolvem derivadas das próprias incógnitas que se deseja encontrar. Em geral, elas não podem ser resolvidas analiticamente, portanto recorre-se a métodos numéricos para a obtenção da sua solução aproximada.

Diversos métodos numéricos podem ser empregados na simulação de reservatórios, o mais antigo e primeiro a ser utilizado na construção de simuladores foi o método das diferenças finitas - *Finite Difference Method* (FDM) (AZIZ; SETTARI, 1979; PEACEMAN, 1977). Este propõe aproximações para as derivadas de primeira e segunda ordem das incógnitas presentes no modelo em função de seus valores em determinados pontos ao longo da malha. Sua grande vantagem está na versatilidade em apresentar aproximações com diferentes graus de precisão, o que é realizado de acordo com o número de pontos utilizados no cálculo das derivadas. No entanto, o método carece de um apelo físico, pois a solução que é proposta por ele não atende, em geral, aos princípios de conservação, característica altamente desejável para a solução de problemas de caráter hiperbólico como é o caso das equações envolvendo saturação. Além disso, sua aplicação se restringe a malhas estruturadas e de geometrias simples.

Largamente aplicado em problemas estruturais como na geomecânica, os métodos baseados em elementos finitos - *Finite Element Method* (FEM) - também podem ser empregados na simulação do escoamento em reservatórios (CHEN; HUAN; MA, 2006). Na sua formulação mais comum, baseada em Galerkin, as equações diferenciais são reescritas na forma fraca e sua solução é aproximada segundo um conjunto de funções bases contínuas no espaço. Em relação ao FDM, o FEM apresenta maior versatilidade a respeito dos tipos de malhas e geometria do reservatório que são suportados, o que estimula seu uso em casos de reservatórios complexos. No entanto, assim como o FDM, o método não observa os princípios de conservação. Outras formulações do FEM como a mista - *Mixed Finite Element Method* (MixedFEM) (ARNOLD, 1990) - ou a baseada em Galerkin descontínuo - *Discontinuous Galerkin* (ARNOLD et al., 2002) - atendem ao princípio da conservação local, no entanto isso é alcançado às custas de maior

número e complexidade de equações referentes ao modelo discreto.

Métodos baseados em volumes finitos - *Finite Volume Method* (FVM) - receberam bastante atenção e hoje são utilizados pela maioria dos simuladores comerciais de reservatórios. Essa classe de métodos tem como característica fundamental a observância dos princípios de conservação em nível discreto, os quais são atendido através do cálculo apropriado de fluxos de massa, quantidade de movimento e energia através das interfaces dos volumes de controle que compõem a malha computacional. Além disso, tais métodos permitem a resolução do escoamento em reservatórios com geometrias complexas. Em sua formulação tradicional, o método dos volumes finitos é restrito a malhas de topologia estruturada ou semi-estruturada¹, nesse sentido é comum o emprego de malhas do tipo *corner-point* (POINTING, 1989). Recentemente, o FVM foi estendido para malhas não-estruturadas através da sua formulação baseada em elementos (FORSYTH, 1990; MALISKA, 2004) - *Element Based Finite Volume Method* (EbFVM) - o que conferiu ainda maior versatilidade à essa classe de métodos para o tratamento de reservatórios que exibam aspectos físicos mais avançados como aqueles apresentando falhas ou fraturas.

Pelo fato de ser o método mais difundido em simulação de reservatórios e também atender ao princípio da conservação de massa em nível local, emprega-se nesse trabalho o método dos volumes finitos tradicional no processo de discretização das equações diferenciais. Para tanto, será utilizada a implementação numérica contida no pacote MRST - *Matlab Reservoir Simulation Toolkit* - cuja validação computacional pode ser verificada nos trabalhos escritos por Lie et al. (2012) e Krogstad et al. (2015).

Considerando-se que o tensor permeabilidade é diagonal, isto é $\mathbf{K} = \text{diag}(K_{11}, K_{22}, K_{33})$, as equações (2.4a) a (2.4c)

¹ Quando há ligações com não-vizinhos - *Non-Neighbour Connections* (NNC); refinamento local da malha - *Local Grid Refinement* (LGR) - e células de volume nulo (*pinch-outs*).

podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi S_w}{B_w} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left[K_{11} \lambda_w \left(\frac{\partial p_w}{\partial x_1} - \gamma_w \frac{\partial z}{\partial x_1} \right) \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_2} \left[K_{22} \lambda_w \left(\frac{\partial p_w}{\partial x_2} - \gamma_w \frac{\partial z}{\partial x_2} \right) \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_3} \left[K_{33} \lambda_w \left(\frac{\partial p_w}{\partial x_3} - \gamma_w \frac{\partial z}{\partial x_3} \right) \right] + \tilde{q}_{ws}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi S_o}{B_o} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left[K_{11} \lambda_o \left(\frac{\partial p_o}{\partial x_1} - \gamma_o \frac{\partial z}{\partial x_1} \right) \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_2} \left[K_{22} \lambda_o \left(\frac{\partial p_o}{\partial x_2} - \gamma_o \frac{\partial z}{\partial x_2} \right) \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_3} \left[K_{33} \lambda_o \left(\frac{\partial p_o}{\partial x_3} - \gamma_o \frac{\partial z}{\partial x_3} \right) \right] + \tilde{q}_{os}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \left(\frac{S_g}{B_g} + \frac{R_{so} S_o}{B_o} \right) \right] &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left[K_{11} \lambda_g \left(\frac{\partial p_g}{\partial x_1} - \gamma_g \frac{\partial z}{\partial x_1} \right) \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_2} \left[K_{22} \lambda_g \left(\frac{\partial p_g}{\partial x_2} - \gamma_g \frac{\partial z}{\partial x_2} \right) \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_3} \left[K_{33} \lambda_g \left(\frac{\partial p_g}{\partial x_3} - \gamma_g \frac{\partial z}{\partial x_3} \right) \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[K_{11} R_{so} \lambda_o \left(\frac{\partial p_o}{\partial x_1} - \gamma_o \frac{\partial z}{\partial x_1} \right) \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_2} \left[K_{22} R_{so} \lambda_o \left(\frac{\partial p_o}{\partial x_2} - \gamma_o \frac{\partial z}{\partial x_2} \right) \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_3} \left[K_{33} R_{so} \lambda_o \left(\frac{\partial p_o}{\partial x_3} - \gamma_o \frac{\partial z}{\partial x_3} \right) \right] + \tilde{q}_{gs}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

As variáveis presentes nas equações anteriores são funções do tempo e espaço, portanto é necessário que esquemas de discretização nessas dimensões sejam empregados. Com relação à discretização no tempo, diversas formulações numéricas estão disponíveis, entre as mais empregadas estão a formulação totalmente

implícita (FIM), implícita na pressão e explícita na saturação (IMPES) e adaptativa implícita (AIM).

Na formulação totalmente implícita - *Fully Implicit Method* (FIM) (DOUGLAS; PEACEMAN; JR., 1959) - as propriedades da rocha e dos fluidos são avaliadas no tempo atual e o sistema de equações discretizadas são resolvidas simultaneamente. As variáveis obtidas diretamente através da solução dessas equações são denominadas como primárias. Esta é uma formulação bastante robusta e sua estabilidade depende fundamentalmente do controle das não-linearidades presentes no sistema, no entanto, ela requer o uso de pré-condicionadores projetados de acordo com o problema resolvido para que a solução das equações possa ser encontrada de modo eficiente em termos computacionais.

A formulação implícita na pressão e explícita na saturação - *Implicit Pressure Explicit Saturation* (IMPES) (AZIZ; SETTARI, 1979) - é baseada no desacoplamento entre as variáveis pressão e saturação. A variável pressão é resolvida através da solução de um sistema linear, assumindo-se que as propriedades dos fluidos dependentes da saturação são avaliadas de acordo com a saturação relativa ao passo de tempo anterior, enquanto que as propriedades que são função da pressão são avaliadas de acordo com o valor referente à última iteração do método de Newton. Em seguida, a variável saturação é atualizada explicitamente, isto é, através da simples multiplicação de uma matriz por um vetor. Esse procedimento é repetido a cada passo de tempo e também a cada iteração do método de Newton conforme um critério de convergência.

Por último, a formulação adaptativa implícita - *Adaptive Implicit Method* (AIM) (THOMAS; THURNAU, 1983) - é uma mistura das duas últimas. A motivação fundamental dessa abordagem consiste no fato de que as variáveis referentes a diferentes volumes de controle da malha estão sujeitas a variações distintas ao longo do tempo. Caso tais variações sejam menores que uma dada tolerância, que é função da variável primária em consideração, o cálculo de saturações ou composições pode ser realizado explicitamente. As vantagens dessa formulação consistem na redução do tamanho do sistema algébrico a ser resolvido em relação

à formulação totalmente implícita e também no aumento de estabilidade em relação à formulação IMPES (FUNG; COLLINS; NGHIEM, 1989; WATTS; SHAW, 2005; BO; WHEELER, 2009).

É importante observar que em qualquer uma das formulações discutidas, é necessário que se resolva uma equação de caráter elíptico. Isso é válido até mesmo no caso da formulação totalmente implícita, porque nesse caso é comum o emprego de pré-condicionadores que desacoplam os diferentes fenômenos físicos modelados pelo sistema linear obtido no processo de discretização. Os problemas tratados no capítulo de resultados são resolvidos a partir das formulações implícita e IMPES. Nessa seção, apresenta-se somente a discretização espacial e temporal das equações discretizadas pela primeira formulação. O segundo caso pode ser obtido a partir do primeiro, porém, se o leitor deseja obter mais informações a respeito desse caso, este é referido para o trabalho de Chen (2007).

Se há presença de gás livre no reservatório, isto é $S_g \neq 0$, diz-se que o reservatório encontra-se em estado saturado, caso contrário, todo gás encontra-se dissolvido na fase óleo e o reservatório encontra-se em estado subsaturado. As variáveis primárias que serão resolvidas através das equações (2.12) a (2.14) são distintas de acordo com o estado do reservatório. Variáveis secundárias são obtidas sem a necessidade de resolução de sistemas algébricos e diretamente a partir das variáveis primárias.

No caso de estado saturado, as variáveis primárias são ($p = p_o, S_w, S_o$), enquanto as variáveis secundárias são obtidas da seguinte maneira:

$$S_g = 1 - S_w - S_o, \quad (2.15a)$$

$$p_w = p_o - p_{cow}(S_w), \quad (2.15b)$$

$$p_g = p_o + p_{cgo}(S_g). \quad (2.15c)$$

A título de simplificar a expressão discreta, define-se a transmissibilidade da seguinte maneira:

$$\tilde{T}_{\alpha d} = \frac{A_d K_{dd} \lambda_{\alpha}}{h_d}, \quad d = 1, 2, 3; \quad \alpha = w, o, g. \quad (2.16)$$

Considerando aproximação de segunda ordem no espaço e primeira ordem no tempo, a discretização das equações (2.12) a (2.14) é dada por:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta V_P}{\Delta t} \left[\left(\frac{\phi S_w}{B_w} \right)^{n+1} - \left(\frac{\phi S_w}{B_w} \right)^n \right]_P = & \\
& \tilde{T}_{w1,e}^{n+1} \left(p_E^{n+1} - p_P^{n+1} \right) - \tilde{T}_{w1,w}^{n+1} \left(p_P^{n+1} - p_W^{n+1} \right) \\
& + \tilde{T}_{w2,n}^{n+1} \left(p_N^{n+1} - p_P^{n+1} \right) - \tilde{T}_{w2,s}^{n+1} \left(p_P^{n+1} - p_S^{n+1} \right) \\
& + \tilde{T}_{w3,t}^{n+1} \left(p_T^{n+1} - p_P^{n+1} \right) - \tilde{T}_{w3,b}^{n+1} \left(p_P^{n+1} - p_B^{n+1} \right) \\
& - \tilde{T}_{w1,e}^{n+1} \left(p_{cow,E}^{n+1} - p_{cow,P}^{n+1} \right) + \tilde{T}_{w1,w}^{n+1} \left(p_{cow,P}^{n+1} - p_{cow,W}^{n+1} \right) \\
& - \tilde{T}_{w2,n}^{n+1} \left(p_{cow,N}^{n+1} - p_{cow,P}^{n+1} \right) + \tilde{T}_{w2,s}^{n+1} \left(p_{cow,P}^{n+1} - p_{cow,S}^{n+1} \right) \\
& - \tilde{T}_{w3,t}^{n+1} \left(p_{cow,T}^{n+1} - p_{cow,P}^{n+1} \right) + \tilde{T}_{w3,b}^{n+1} \left(p_{cow,P}^{n+1} - p_{cow,B}^{n+1} \right) \\
& - \left(\tilde{T}_{w1}\gamma_w \right)_e^{n+1} (z_E - z_P) + \left(\tilde{T}_{w1}\gamma_w \right)_w^{n+1} (z_P - z_W) \\
& - \left(\tilde{T}_{w2}\gamma_w \right)_n^{n+1} (z_N - z_P) + \left(\tilde{T}_{w2}\gamma_w \right)_s^{n+1} (z_P - z_S) \\
& - \left(\tilde{T}_{w3}\gamma_w \right)_t^{n+1} (z_T - z_P) + \left(\tilde{T}_{w3}\gamma_w \right)_b^{n+1} (z_P - z_B) + \tilde{q}_{w,P}^{n+1} \Delta V_P;
\end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta V_P}{\Delta t} \left[\left(\frac{\phi S_o}{B_o} \right)^{n+1} - \left(\frac{\phi S_o}{B_o} \right)^n \right]_P = & \\
& \tilde{T}_{o1,e}^{n+1} \left(p_E^{n+1} - p_P^{n+1} \right) - \tilde{T}_{o1,w}^{n+1} \left(p_P^{n+1} - p_W^{n+1} \right) \\
& + \tilde{T}_{o2,n}^{n+1} \left(p_N^{n+1} - p_P^{n+1} \right) - \tilde{T}_{o2,s}^{n+1} \left(p_P^{n+1} - p_S^{n+1} \right) \\
& + \tilde{T}_{o3,t}^{n+1} \left(p_T^{n+1} - p_P^{n+1} \right) - \tilde{T}_{o3,b}^{n+1} \left(p_P^{n+1} - p_B^{n+1} \right) \\
& - \left(\tilde{T}_{o1}\gamma_o \right)_e^{n+1} (z_E - z_P) + \left(\tilde{T}_{o1}\gamma_o \right)_w^{n+1} (z_P - z_W) \\
& - \left(\tilde{T}_{o2}\gamma_o \right)_n^{n+1} (z_N - z_P) + \left(\tilde{T}_{o2}\gamma_o \right)_s^{n+1} (z_P - z_S) \\
& - \left(\tilde{T}_{o3}\gamma_o \right)_t^{n+1} (z_T - z_P) + \left(\tilde{T}_{o3}\gamma_o \right)_b^{n+1} (z_P - z_B) + \tilde{q}_{o,P}^{n+1} \Delta V_P;
\end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\Delta V_P}{\Delta t} \left[\left(\frac{\phi S_g}{B_g} + \frac{\phi R_{so} S_o}{B_o} \right)^{n+1} - \left(\frac{\phi S_g}{B_g} + \frac{\phi R_{so} S_o}{B_o} \right)^n \right]_P = \\
& \quad \tilde{T}_{g1,e}^{n+1} (p_E^{n+1} - p_P^{n+1}) - \tilde{T}_{g1,w}^{n+1} (p_P^{n+1} - p_W^{n+1}) \\
& \quad + \tilde{T}_{g2,n}^{n+1} (p_N^{n+1} - p_P^{n+1}) - \tilde{T}_{g2,s}^{n+1} (p_P^{n+1} - p_S^{n+1}) \\
& \quad + \tilde{T}_{g3,t}^{n+1} (p_T^{n+1} - p_P^{n+1}) - \tilde{T}_{g3,b}^{n+1} (p_P^{n+1} - p_B^{n+1}) \\
& \quad + \tilde{T}_{g1,e}^{n+1} (p_{cgo,E}^{n+1} - p_{cgo,P}^{n+1}) - \tilde{T}_{g1,w}^{n+1} (p_{cgo,P}^{n+1} - p_{cgo,W}^{n+1}) \\
& \quad + \tilde{T}_{g2,n}^{n+1} (p_{cgo,N}^{n+1} - p_{cgo,P}^{n+1}) - \tilde{T}_{g2,s}^{n+1} (p_{cgo,P}^{n+1} - p_{cgo,S}^{n+1}) \\
& \quad + \tilde{T}_{g3,t}^{n+1} (p_{cgo,T}^{n+1} - p_{cgo,P}^{n+1}) - \tilde{T}_{g3,b}^{n+1} (p_{cgo,P}^{n+1} - p_{cgo,B}^{n+1}) \\
& \quad + \left(R_{so} \tilde{T}_{o1} \right)_e^{n+1} (p_E^{n+1} - p_P^{n+1}) - \left(R_{so} \tilde{T}_{g1} \right)_w^{n+1} (p_P^{n+1} - p_W^{n+1}) \\
& \quad + \left(R_{so} \tilde{T}_{o2} \right)_n^{n+1} (p_N^{n+1} - p_P^{n+1}) - \left(R_{so} \tilde{T}_{g2} \right)_s^{n+1} (p_P^{n+1} - p_S^{n+1}) \\
& \quad + \left(R_{so} \tilde{T}_{o3} \right)_t^{n+1} (p_T^{n+1} - p_P^{n+1}) - \left(R_{so} \tilde{T}_{g3} \right)_b^{n+1} (p_P^{n+1} - p_B^{n+1}) \\
& \quad - \left(\tilde{T}_{g1} \gamma_g + R_{so} \tilde{T}_{o1} \gamma_o \right)_e^{n+1} (z_E - z_P) \\
& \quad + \left(\tilde{T}_{g1} \gamma_g + R_{so} \tilde{T}_{o1} \gamma_o \right)_w^{n+1} (z_P - z_W) \\
& \quad - \left(\tilde{T}_{g2} \gamma_g + R_{so} \tilde{T}_{o2} \gamma_o \right)_n^{n+1} (z_N - z_P) \\
& \quad + \left(\tilde{T}_{g2} \gamma_g + R_{so} \tilde{T}_{o2} \gamma_o \right)_s^{n+1} (z_P - z_S) \\
& \quad - \left(\tilde{T}_{g3} \gamma_g + R_{so} \tilde{T}_{o3} \gamma_o \right)_t^{n+1} (z_T - z_P) \\
& \quad + \left(\tilde{T}_{g3} \gamma_g + R_{so} \tilde{T}_{o3} \gamma_o \right)_b^{n+1} (z_P - z_B) \\
& \quad + \tilde{q}_{g,P}^{n+1} \Delta V_P.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

No cálculo das transmissibilidades nas faces dos volumes de controle, é necessário o uso de algum esquema de interpolação, uma vez que os valores das incógnitas do sistema representam valores médios ao longo desses volumes. Cada termo que compõe a transmissibilidade é calculada de maneira distinta: a perme-

abilidade absoluta da rocha e as propriedades dos fluidos são calculadas a partir das média harmônica e aritmética, respectivamente, entre os valores relativos aos volumes que compartilham a mesma face. Enquanto isso, a permeabilidade relativa é calculada a partir do esquema *upwind*.

As equações (2.17) a (2.19) são não-lineares, pois seus coeficientes dependem das próprias incógnitas que se deseja encontrar. Tais equações são comumente resolvidas através de um processo de linearização, conforme proposto pelo método de Newton-Raphson². Em cada iteração do método, as variáveis primárias referentes ao passo de tempo $n + 1$ do volume de controle P são escritas como

$$p_P^{l+1} = p_P^l + \delta p_P^{l+1}; \quad (2.20a)$$

$$S_{w,P}^{l+1} = S_{w,P}^l + \delta S_{w,P}^{l+1}; \quad (2.20b)$$

$$S_{o,P}^{l+1} = S_{o,P}^l + \delta S_{o,P}^{l+1}, \quad (2.20c)$$

em que o índice $n + 1$ foi omitido propositalmente, a título de economia de notação. Os resíduos das equações (2.17) a (2.19)

² Recentemente, o *multigrid* não-linear - *Full Approximation Scheme* (FAS) - (HENSON, 2003) e o método de Newton inexato preconditionado com o método Schwarz aditivo (ASPIN) (SUN; KEYES; LIU, 2013) têm recebido bastante atenção como alternativas para o método de Newton tradicional.

são escritos como:

$$\begin{aligned}
R_{w,P}^l &= \frac{\Delta V_P}{\Delta t} \left[\left(\frac{\phi S_w}{B_w} \right)^l - \left(\frac{\phi S_w}{B_w} \right)^n \right]_P \\
&\quad - \tilde{T}_{w1,e}^l (p_E^l - p_P^l) + \tilde{T}_{w1,w}^l (p_P^l - p_W^l) \\
&\quad - \tilde{T}_{w2,n}^l (p_N^l - p_P^l) + \tilde{T}_{w2,s}^l (p_P^l - p_S^l) \\
&\quad - \tilde{T}_{w3,t}^l (p_T^l - p_P^l) + \tilde{T}_{w3,b}^l (p_P^l - p_B^l) \\
&\quad + \tilde{T}_{w1,e}^{n+1} (p_{cow,E}^{n+1} - p_{cow,P}^{n+1}) - \tilde{T}_{w1,w}^{n+1} (p_{cow,P}^{n+1} - p_{cow,W}^{n+1}) \\
&\quad + \tilde{T}_{w2,n}^{n+1} (p_{cow,N}^{n+1} - p_{cow,P}^{n+1}) - \tilde{T}_{w2,s}^{n+1} (p_{cow,P}^{n+1} - p_{cow,S}^{n+1}) \\
&\quad + \tilde{T}_{w3,t}^{n+1} (p_{cow,T}^{n+1} - p_{cow,P}^{n+1}) - \tilde{T}_{w3,b}^{n+1} (p_{cow,P}^{n+1} - p_{cow,B}^{n+1}) \\
&\quad + \left(\tilde{T}_{w1}\gamma_w \right)_e^{n+1} (z_E - z_P) - \left(\tilde{T}_{w1}\gamma_w \right)_w^{n+1} (z_P - z_W) \\
&\quad + \left(\tilde{T}_{w2}\gamma_w \right)_n^{n+1} (z_N - z_P) - \left(\tilde{T}_{w2}\gamma_w \right)_s^{n+1} (z_P - z_S) \\
&\quad + \left(\tilde{T}_{w3}\gamma_w \right)_t^{n+1} (z_T - z_P) - \left(\tilde{T}_{w3}\gamma_w \right)_b^{n+1} (z_P - z_B) \\
&\quad - \tilde{q}_{w,P}^{n+1} \Delta V_P;
\end{aligned} \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned}
R_{o,P}^l &= \frac{\Delta V_P}{\Delta t} \left[\left(\frac{\phi S_o}{B_o} \right)^l - \left(\frac{\phi S_o}{B_o} \right)^n \right]_P \\
&\quad - \tilde{T}_{o1,e}^l (p_E^{n+1} - p_P^{n+1}) + \tilde{T}_{o1,w}^{n+1} (p_P^l - p_W^{n+1}) \\
&\quad - \tilde{T}_{o2,n}^l (p_N^{n+1} - p_P^{n+1}) + \tilde{T}_{o2,s}^{n+1} (p_P^l - p_S^{n+1}) \\
&\quad - \tilde{T}_{o3,t}^l (p_T^{n+1} - p_P^{n+1}) + \tilde{T}_{o3,b}^{n+1} (p_P^l - p_B^{n+1}) \\
&\quad + \left(\tilde{T}_{o1}\gamma_o \right)_e^l (z_E - z_P) - \left(\tilde{T}_{o1}\gamma_o \right)_w^l (z_P - z_W) \\
&\quad + \left(\tilde{T}_{o2}\gamma_o \right)_n^l (z_N - z_P) - \left(\tilde{T}_{o2}\gamma_o \right)_s^l (z_P - z_S) \\
&\quad + \left(\tilde{T}_{o3}\gamma_o \right)_t^l (z_T - z_P) - \left(\tilde{T}_{o3}\gamma_o \right)_b^l (z_P - z_B) - \tilde{q}_{o,P}^{n+1} \Delta V_P;
\end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned}
R_{g,P}^l = & \frac{\Delta V_P}{\Delta t} \left[\left(\frac{\phi S_g}{B_g} + \frac{\phi R_{so} S_o}{B_o} \right)^l - \left(\frac{\phi S_g}{B_g} + \frac{\phi R_{so} S_o}{B_o} \right)^n \right]_P \\
& - \left(\tilde{T}_{g1} + R_{so} \tilde{T}_{o1} \right)_e^l \left(p_E^l - p_P^l \right) + \left(\tilde{T}_{g1} + R_{so} \tilde{T}_{o1} \right)_w^l \left(p_P^l - p_W^l \right) \\
& - \left(\tilde{T}_{g1} + R_{so} \tilde{T}_{o1} \right)_n^l \left(p_N^l - p_P^l \right) + \left(\tilde{T}_{g1} + R_{so} \tilde{T}_{o1} \right)_s^l \left(p_P^l - p_S^l \right) \\
& - \left(\tilde{T}_{g1} + R_{so} \tilde{T}_{o1} \right)_t^l \left(p_T^l - p_P^l \right) + \left(\tilde{T}_{g1} + R_{so} \tilde{T}_{o1} \right)_b^l \left(p_P^l - p_B^l \right) \\
& - \tilde{T}_{g1,e}^l \left(p_{cgo,E}^{n+1} - p_{cgo,P}^l \right) + \tilde{T}_{g1,w}^l \left(p_{cgo,P}^l - p_{cgo,W}^l \right) \\
& - \tilde{T}_{g2,n}^l \left(p_{cgo,N}^{n+1} - p_{cgo,P}^l \right) + \tilde{T}_{g2,s}^l \left(p_{cgo,P}^l - p_{cgo,S}^l \right) \\
& - \tilde{T}_{g3,t}^l \left(p_{cgo,T}^{n+1} - p_{cgo,P}^l \right) + \tilde{T}_{g3,b}^l \left(p_{cgo,P}^l - p_{cgo,B}^l \right) \\
& + \left(\tilde{T}_{g1} \gamma_g + R_{so} \tilde{T}_{o1} \gamma_o \right)_e^l \left(z_E - z_P \right) \\
& - \left(\tilde{T}_{g1} \gamma_g + R_{so} \tilde{T}_{o1} \gamma_o \right)_w^l \left(z_P - z_W \right) \\
& + \left(\tilde{T}_{g2} \gamma_g + R_{so} \tilde{T}_{o2} \gamma_o \right)_n^l \left(z_N - z_P \right) \\
& - \left(\tilde{T}_{g2} \gamma_g + R_{so} \tilde{T}_{o2} \gamma_o \right)_s^l \left(z_P - z_S \right) \\
& + \left(\tilde{T}_{g3} \gamma_g + R_{so} \tilde{T}_{o3} \gamma_o \right)_t^l \left(z_T - z_P \right) \\
& - \left(\tilde{T}_{g3} \gamma_g + R_{so} \tilde{T}_{o3} \gamma_o \right)_b^l \left(z_P - z_B \right) \\
& - \tilde{q}_{g,P}^l \Delta V_P,
\end{aligned} \tag{2.23}$$

os quais são agrupados no vetor de resíduos referente ao volume de controle P como:

$$\vec{R}_P^l = \begin{bmatrix} R_{w,P}^l \\ R_{o,P}^l \\ R_{g,P}^l \end{bmatrix}. \tag{2.24}$$

Agrupando-se as variáveis p_P , $S_{w,P}$ e $S_{o,P}$ no vetor

$$\vec{x}_P = \begin{bmatrix} p_P \\ S_{w,P} \\ S_{o,P} \end{bmatrix}, \tag{2.25}$$

segue que a aplicação de uma iteração do método de Newton-Raphson no sistema de equações (2.17) a (2.19) gera um sistema linear em termos da variável $\delta\vec{x}^{l+1}$ cuja equação referente ao volume de controle P é dada por:

$$\begin{aligned}
 -\vec{R}_P^l &= \frac{\partial \vec{R}_P^l}{\partial \vec{x}_W} \delta\vec{x}_W^{l+1} + \frac{\partial \vec{R}_P^l}{\partial \vec{x}_S} \delta\vec{x}_S^{l+1} \\
 &+ \frac{\partial \vec{R}_P^l}{\partial \vec{x}_B} \delta\vec{x}_B^{l+1} + \frac{\partial \vec{R}_P^l}{\partial \vec{x}_P} \delta\vec{x}_P^{l+1} \\
 &+ \frac{\partial \vec{R}_P^l}{\partial \vec{x}_E} \delta\vec{x}_E^{l+1} + \frac{\partial \vec{R}_P^l}{\partial \vec{x}_N} \delta\vec{x}_N^{l+1} + \frac{\partial \vec{R}_P^l}{\partial \vec{x}_T} \delta\vec{x}_T^{l+1},
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

em que

$$\frac{\partial \vec{R}_P^l}{\partial \vec{x}_P} = \begin{pmatrix} \frac{\partial R_w}{\partial p} & \frac{\partial R_w}{\partial S_o} & \frac{\partial R_w}{\partial S_w} \\ \frac{\partial R_o}{\partial p} & \frac{\partial R_o}{\partial S_o} & \frac{\partial R_o}{\partial S_w} \\ \frac{\partial R_g}{\partial p} & \frac{\partial R_g}{\partial S_o} & \frac{\partial R_g}{\partial S_w} \end{pmatrix}_P. \tag{2.27}$$

No caso $3D$, a matriz de coeficientes gerada por (2.26) tem *stencil* de sete pontos conforme mostrado na figura³ 1, enquanto que no caso $2D$, o *stencil* é de cinco pontos.

Escrevendo-se a equação (2.26) para todos os volumes de controle, obtém-se a matriz jacobiana \mathbf{J} , ilustrada na figura 2. É importante observar que essa matriz é composta por blocos de tamanho 3×3 , referentes às variáveis pressão e saturações das fases água e óleo.

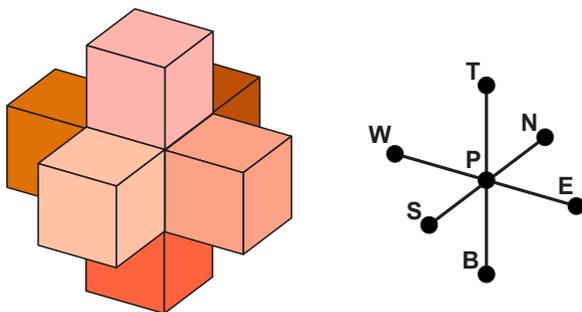
Resolvendo-se o sistema linear induzido pela matriz jacobiana

$$\mathbf{J} \delta\vec{x}^{l+1} = -\vec{R}^l, \tag{2.28}$$

obtém-se o vetor de correções $\delta\vec{x}^{l+1}$, o qual é utilizado para atualizar o valor das variáveis primárias em relação à última

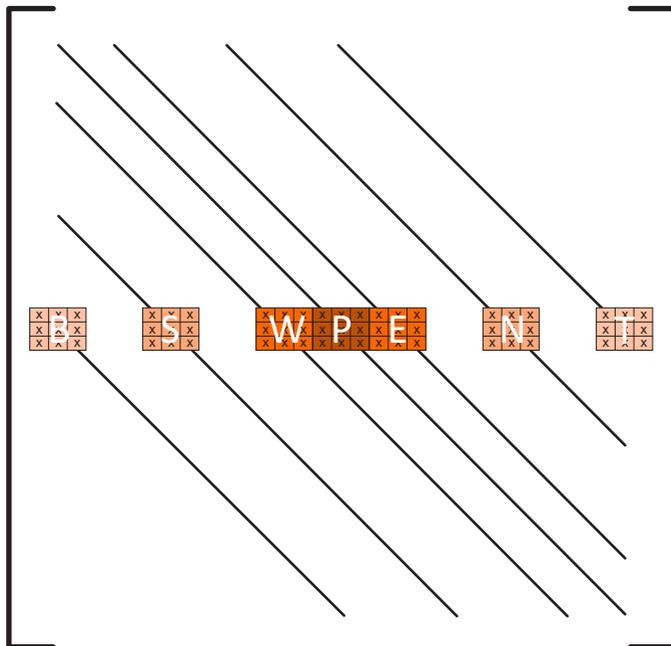
³ As figuras elaboradas pelo próprio autor não receberão legenda daqui em diante.

Figura 1 – Stencil de sete pontos.



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 2 – Ilustração da matriz de coeficientes.



iteração do método de Newton da seguinte maneira:

$$\vec{x}^{l+1} = \vec{x}^l + \delta\vec{x}^{l+1}, \quad (2.29)$$

até que algum critério de convergência seja satisfeito. Os termos fonte são atualizados de acordo com:

$$q_{\alpha s}^{l+1} = \sum_{n=1}^{N_w} \sum_{m=1}^{M_{wn}} \frac{W I_m^n k_{r\alpha}^{l+1}}{\mu_\alpha} \left[p_{bh}^{n,l+1} - p_\alpha^{l+1} - \gamma_\alpha^{l+1} (z_{bh}^n - z) \right] \delta(\vec{x} - \vec{x}_m^n). \quad (2.30)$$

Quando a pressão de fundo de poço p_{bh} é desconhecida, a equação (2.30) é acoplada às equações (2.21) a (2.23) para o cálculo das incógnitas $(\delta p, \delta S_w, \delta S_o, \delta p_{bh})$. Quando a pressão de fundo de poço é conhecida, as variáveis primárias se restringem às do escoamento no reservatório.

No estado subsaturado, sabe-se que $S_g = 0$, porém a quantidade do componente gás dissolvido na fase óleo não é conhecida a priori. Assim, as variáveis primárias do modelo são modificadas para (p, S_w, p_b) , em que p_b é a pressão de saturação da fase óleo em relação ao componente gás. Nesse caso, as equações de conservação discretizadas referentes às fases água e óleo são as mesmas que (2.21) e (2.22), no entanto, a equação referente à

fase gás é substituída por:

$$\begin{aligned}
 R_{g,P}^l = & \frac{\Delta V_P}{\Delta t} \left[\left(\frac{\phi R_{so} S_o}{B_o} \right)^l - \left(\frac{\phi R_{so} S_o}{B_o} \right)^n \right]_P \\
 & - \left(R_{so} \tilde{T}_{o1} \right)_e^l (p_E^l - p_P^l) + \left(R_{so} \tilde{T}_{o1} \right)_w^l (p_P^l - p_W^l) \\
 & - \left(R_{so} \tilde{T}_{o1} \right)_n^l (p_N^l - p_P^l) + \left(R_{so} \tilde{T}_{o1} \right)_s^l (p_P^l - p_S^l) \\
 & - \left(R_{so} \tilde{T}_{o1} \right)_t^l (p_T^l - p_P^l) + \left(R_{so} \tilde{T}_{o1} \right)_b^l (p_P^l - p_B^l) \quad (2.31) \\
 & + \left(R_{so} \tilde{T}_{o1} \gamma_o \right)_e^l (z_E - z_P) - \left(R_{so} \tilde{T}_{o1} \gamma_o \right)_w^l (z_P - z_W) \\
 & + \left(R_{so} \tilde{T}_{o2} \gamma_o \right)_n^l (z_N - z_P) - \left(R_{so} \tilde{T}_{o2} \gamma_o \right)_s^l (z_P - z_S) \\
 & + \left(R_{so} \tilde{T}_{o3} \gamma_o \right)_t^l (z_T - z_P) - \left(R_{so} \tilde{T}_{o3} \gamma_o \right)_b^l (z_P - z_B) \\
 & - \left(\frac{\tilde{q}_{os} R_{so}}{B_o} \right)^l \Delta V_P.
 \end{aligned}$$

Como uma das variáveis primárias é modificada, a matriz jacobiana é substituída por:

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial R_w}{\partial p} & \frac{\partial R_w}{\partial S_w} & \frac{\partial R_w}{\partial p_b} \\ \frac{\partial R_o}{\partial p} & \frac{\partial R_o}{\partial S_w} & \frac{\partial R_o}{\partial p_b} \\ \frac{\partial R_g}{\partial p} & \frac{\partial R_g}{\partial S_w} & \frac{\partial R_g}{\partial p_b} \end{pmatrix}, \quad (2.32)$$

a qual é empregada para a construção de um sistema linear conforme descrito no caso de escoamento em estado saturado.

2.1.2 Determinação do Ponto de Bolha

Dado um volume de controle, o estado em que a fase óleo se encontra pode alterar de saturado para subsaturado ou vice-versa durante uma simulação. Se a transição entre esses dois estados for reconhecida corretamente, a taxa de convergência do

método de Newton-Raphson pode ser aumentada. Esse problema é denominado como ponto de bolha.

A transição do estado saturado para subsaturado ocorre quando a seguinte condição é atendida:

$$p_b^{n+1,l+1} + \delta p_b > p^{n+1,l+1}, \quad (2.33)$$

enquanto que, a transição inversa ocorre quando

$$S_g^{n+1,l+1} < 0. \quad (2.34)$$

Além disso, as condições de restrição para o estado saturado são dadas por:

$$S_w^{n+1,l} + S_o^{n+1,l} + S_g^{n+1,l} = 1, \quad (2.35)$$

$$p^{n+1,l} = p_b^{n+1,l}. \quad (2.36)$$

Enquanto que, para o estado subsaturado:

$$S_w^{n+1,l} + S_o^{n+1,l} = 1, \quad (2.37)$$

$$p^{n+1,l} > p_b^{n+1,l}, \quad (2.38)$$

Com o intuito de tratar o problema do ponto de bolha apropriadamente, é necessário checar as condições de mudança de estado (2.33) e (2.34). Quando a pressão no reservatório diminui para um valor menor que a pressão do ponto de bolha, o componente gás escapa da fase óleo e forma uma fase própria. Nesse caso há transferência do estado subsaturado para saturado. Para tanto, é necessário que a saturação da fase óleo diminua. Quando o reservatório encontra-se no estado saturado, as variáveis respeitam as restrições (2.35) e (2.36).

Quando a pressão em um determinado local do reservatório aumenta de modo que todo gás se dissolve na fase óleo, tem-se que $S_g^{n+1,l+1} < 0$, acarretando em transferência para o estado subsaturado. Com o intuito de garantir que a pressão da fase óleo p_o seja maior que a pressão do ponto de bolha p_b no novo estado, δp_b é configurado com um valor pequeno. Assim que ocorre a transferência de estado, assegura-se que as variáveis sejam atualizadas de modo a obedecer as condições de restrição (2.37) e (2.38).

2.2 ESCOAMENTO BIFÁSICO

Considerando-se escoamento bifásico imiscível do tipo água/óleo, a saturação da fase gás e a pressão capilar gás/óleo são nulas, portanto, as equações governantes do modelo *black-oil* podem ser simplificadas da seguinte maneira:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi S_w}{B_w} \right) = \nabla \cdot (\mathbf{K} \lambda_w [\nabla p_w - \gamma_w \nabla z]) + \frac{\tilde{q}_{ws}}{B_w}, \quad (2.39a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi S_o}{B_o} \right) = \nabla \cdot (\mathbf{K} \lambda_o [\nabla p_o - \gamma_o \nabla z]) + \frac{\tilde{q}_{os}}{B_o}, \quad (2.39b)$$

$$S_w + S_o = 1, \quad (2.39c)$$

$$p_{cow}(S_w) = p_o - p_w. \quad (2.39d)$$

Fazendo-se ainda as seguintes hipóteses:

a) pressão capilar água/óleo desprezível;

b) rocha e fluidos são incompressíveis, isto é, $\phi \equiv cte$ e $B_\alpha = 1$,

as equações (2.39a) a (2.39d) podem ser reescritas da seguinte forma:

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{K} \lambda_w [\nabla p - \rho_w g \nabla z]) + \tilde{q}_w, \quad (2.40a)$$

$$\phi \frac{\partial S_o}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{K} \lambda_o [\nabla p - \rho_o g \nabla z]) + \tilde{q}_o, \quad (2.40b)$$

$$S_w + S_o = 1. \quad (2.40c)$$

Definindo-se a mobilidade total como:

$$\lambda_t(S_w) = \lambda_w + \lambda_o = \frac{k_{rw}}{\mu_w} + \frac{k_{ro}}{\mu_o}, \quad (2.41)$$

segue que a soma das equações (2.40a) e (2.40b) dá origem à seguinte expressão:

$$\nabla \cdot (\mathbf{K} \lambda_t \nabla p) = \nabla \cdot (\mathbf{K} (\lambda_w \rho_w + \lambda_o \rho_o) g \nabla z) - (\tilde{q}_w + \tilde{q}_o), \quad (2.42)$$

a qual é conhecida como a “equação da pressão”, uma vez que é empregada para o cálculo dessa mesma variável. Ela caráter elíptico e sua resolução envolve a maior parte do tempo computacional da simulação (KILLOUGH; WANG, 2013). Usando-se ainda o conceito de mobilidade total, a velocidade total pode ser expressa como:

$$\begin{aligned}\vec{u}_t &= \vec{u}_w + \vec{u}_o \\ &= \mathbf{K} [\lambda_t \nabla P - (\lambda_w \rho_w + \lambda_o \rho_o) g \nabla z],\end{aligned}\tag{2.43}$$

de modo que a relação entre as velocidades das fases água e óleo com a velocidade total é dada por:

$$\vec{u}_w = f_w \vec{u}_t + \mathbf{K} \lambda_o f_w (\rho_w - \rho_o) g \nabla z,\tag{2.44}$$

$$\vec{u}_o = f_o \vec{u}_t + \mathbf{K} \lambda_w f_o (\rho_o - \rho_w) g \nabla z,\tag{2.45}$$

em que f_α é a função fluxo fracionário da fase α , dada por:

$$f_\alpha = \frac{\lambda_\alpha}{\lambda_t}, \quad \alpha = [w, o].\tag{2.46}$$

Substituindo-se as expressões (2.41) e (2.44) em (2.40a), segue que esta última pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \nabla \cdot (f_w \vec{u}_t) - \nabla \cdot (\mathbf{K} \lambda_o f_w (\rho_o - \rho_w) g \nabla z) = \tilde{q}_w,\tag{2.47}$$

a qual é conhecida como equação de Buckley-Leverett ou simplesmente como equação da saturação. Esta possui caráter hiperbólico e pode ser resolvida implicitamente ou explicitamente ao longo do tempo, de acordo com a formulação numérica empregada.

Em síntese, o modelo de escoamento bifásico imiscível é composto pelas equações (2.40c), (2.42), (2.43) e (2.47), as quais estão acopladas através da saturação da fase água e formam um sistema não-linear.

2.2.1 Discretização das Equações

A discretização das equações (2.42) e (2.47) é realizada da mesma maneira que no caso de escoamento trifásico, isto é,

através do método dos volumes finitos tradicional empregando-se o esquema de dois pontos (TPFA). Para a aproximação no tempo das equações já discretizadas, emprega-se a formulação totalmente implícita sequencial - *Sequential Fully Implicit* (SFI) (SPILLETE; HILLESTAD; STONE, 1973; JENNY; LEE; TCHELEPI, 2006) em que as equações são resolvidas de modo implícito e sequencial.

A equação da pressão no formato discretizado é dada por:

$$\begin{aligned}
 (\tilde{q}_{w,P}^{n+1} + \tilde{q}_{o,P}^{n+1}) \Delta V_P = & \tilde{T}_{t1,e}^{n+1} (p_E^{n+1} - p_P^{n+1}) - \tilde{T}_{t1,w}^{n+1} (p_P^{n+1} - p_W^{n+1}) \\
 & + \tilde{T}_{t2,n}^{n+1} (p_N^{n+1} - p_P^{n+1}) - \tilde{T}_{t2,s}^{n+1} (p_P^{n+1} - p_S^{n+1}) \\
 & + \tilde{T}_{t3,t}^{n+1} (p_T^{n+1} - p_P^{n+1}) - \tilde{T}_{t3,b}^{n+1} (p_P^{n+1} - p_B^{n+1}) \\
 & - \left(\tilde{T}_{w1}\gamma_w + \tilde{T}_{o1}\gamma_o \right)_e^{n+1} (z_E - z_P) \\
 & + \left(\tilde{T}_{w1}\gamma_w + \tilde{T}_{o1}\gamma_o \right)_w^{n+1} (z_P - z_W) \\
 & - \left(\tilde{T}_{w2}\gamma_w + \tilde{T}_{o2}\gamma_o \right)_n^{n+1} (z_N - z_P) \\
 & + \left(\tilde{T}_{w2}\gamma_w + \tilde{T}_{o2}\gamma_o \right)_s^{n+1} (z_P - z_S) \\
 & - \left(\tilde{T}_{w3}\gamma_w + \tilde{T}_{o3}\gamma_o \right)_t^{n+1} (z_T - z_P) \\
 & + \left(\tilde{T}_{w3}\gamma_w + \tilde{T}_{o3}\gamma_o \right)_b^{n+1} (z_P - z_B),
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

em que $\tilde{T}_{\alpha d}$ é a transmissibilidade na direção d referente à fase α , já apresentada na equação (2.16). A permeabilidade absoluta nas interfaces dos volumes de controle são avaliadas de acordo com a média harmônica dos valores referentes aos volumes que compartilham a mesma face, enquanto que a permeabilidade relativa nas fronteiras é calculada a partir de um esquema de interpolação *upwind* de primeira ordem.

A forma discreta da equação da saturação é dada por:

$$\begin{aligned}
\frac{\phi \Delta V_P}{\Delta t} (S_{w,P}^{n+1} - S_{w,P}^n) = & - \left(f_w^{n+1} \bar{u}_t^{n+1} A \right)_e + \left(f_w^{n+1} \bar{u}_t^{n+1} A \right)_w \\
& - \left(f_w^{n+1} \bar{u}_t^{n+1} A \right)_n + \left(f_w^{n+1} \bar{u}_t^{n+1} A \right)_s \\
& - \left(f_w^{n+1} \bar{u}_t^{n+1} A \right)_t + \left(f_w^{n+1} \bar{u}_t^{n+1} A \right)_b \\
& - \left[\tilde{T}_{o1} f_w (\gamma_o - \gamma_w) \right]_e^{n+1} (z_E - z_P) \\
& + \left[\tilde{T}_{o1} f_w (\gamma_o - \gamma_w) \right]_w^{n+1} (z_P - z_W) \\
& - \left[\tilde{T}_{o2} f_w (\gamma_o - \gamma_w) \right]_n^{n+1} (z_N - z_P) \\
& + \left[\tilde{T}_{o2} f_w (\gamma_o - \gamma_w) \right]_s^{n+1} (z_P - z_S) \\
& - \left[\tilde{T}_{o3} f_w (\gamma_o - \gamma_w) \right]_t^{n+1} (z_T - z_P) \\
& + \left[\tilde{T}_{o3} f_w (\gamma_o - \gamma_w) \right]_b^{n+1} (z_P - z_B) \\
& + \tilde{q}_{w,P}^{n+1} \Delta V_P,
\end{aligned} \tag{2.49}$$

em que A_i é a área da interface i . Tal equação é não-linear, uma vez que o fluxo fracionário da fase água é função da saturação, portanto emprega-se o método de Newton-Raphson para sua resolução.

É possível observar que as equações (2.48) e (2.49) estão acopladas devido à permeabilidade relativa, que é função da saturação, e também à velocidade total do escoamento, que é função do campo de pressão. Por conta desse acoplamento, estabelece-se um procedimento iterativo para a resolução sequencial dessas equações até que um critério de convergência baseado na variação da saturação seja satisfeito. Denotando por $l+1$ a iteração recente e l , a antiga e suprimindo o índice $n+1$, as equações (2.48) e

(2.49) podem ser reescritas como:

$$\begin{aligned}
(\tilde{q}_{w,P}^l + \tilde{q}_{o,P}^l) \Delta V_P = & \tilde{T}_{t1,e}^l (p_E^{l+1} - p_P^{l+1}) - \tilde{T}_{t1,w}^l (p_P^{l+1} - p_W^{l+1}) \\
& + \tilde{T}_{t2,n}^l (p_N^{l+1} - p_P^{l+1}) - \tilde{T}_{t2,s}^l (p_P^{l+1} - p_S^{l+1}) \\
& + \tilde{T}_{t3,t}^l (p_T^{l+1} - p_P^{l+1}) - \tilde{T}_{t3,b}^l (p_P^{l+1} - p_B^{l+1}) \\
& - (\tilde{T}_{w1}\rho_w + \tilde{T}_{o1}\rho_o)_e^l (z_E - z_P) \\
& + (\tilde{T}_{w1}\rho_w + \tilde{T}_{o1}\rho_o)_w^l (z_P - z_W) \\
& - (\tilde{T}_{w2}\rho_w + \tilde{T}_{o2}\rho_o)_n^l (z_N - z_P) \\
& + (\tilde{T}_{w2}\rho_w + \tilde{T}_{o2}\rho_o)_s^l (z_P - z_S) \\
& - (\tilde{T}_{w3}\rho_w + \tilde{T}_{o3}\rho_o)_t^l (z_T - z_P) \\
& + (\tilde{T}_{w3}\rho_w + \tilde{T}_{o3}\rho_o)_b^l (z_P - z_B);
\end{aligned} \tag{2.50}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\phi \Delta V_P}{\Delta t} (S_w^{l+1} - S_w^n) = & - \left(f_w^{n+1} \bar{u}_t^{l+1} A \right)_e + \left(f_w^{n+1} \bar{u}_t^{l+1} A \right)_w \\
& - \left(f_w^{n+1} \bar{u}_t^{l+1} A \right)_n + \left(f_w^{n+1} \bar{u}_t^{l+1} A \right)_s \\
& - \left(f_w^{n+1} \bar{u}_t^{l+1} A \right)_t + \left(f_w^{n+1} \bar{u}_t^{l+1} A \right)_b \\
& - \left[\tilde{T}_{o1} f_w (\gamma_o - \gamma_w) \right]_e^l (z_E - z_P) \\
& + \left[\tilde{T}_{o1} f_w (\gamma_o - \gamma_w) \right]_w^l (z_P - z_W) \\
& - \left[\tilde{T}_{o2} f_w (\gamma_o - \gamma_w) \right]_n^l (z_N - z_P) \\
& + \left[\tilde{T}_{o2} f_w (\gamma_o - \gamma_w) \right]_s^l (z_P - z_S) \\
& - \left[\tilde{T}_{o3} f_w (\gamma_o - \gamma_w) \right]_t^l (z_T - z_P) \\
& + \left[\tilde{T}_{o3} f_w (\gamma_o - \gamma_w) \right]_b^l (z_P - z_B) \\
& + \bar{q}_{w,P}^l \Delta V_P,
\end{aligned} \tag{2.51}$$

as quais são resolvidas de acordo com a Figura 3.

É importante observar que o algoritmo apresentado envolve a resolução de sistemas lineares, isso é válido também para a equação da saturação, uma vez que ela é resolvida através do método de Newton. Os métodos empregados para a resolução de problemas lineares é discutida no capítulo 3.

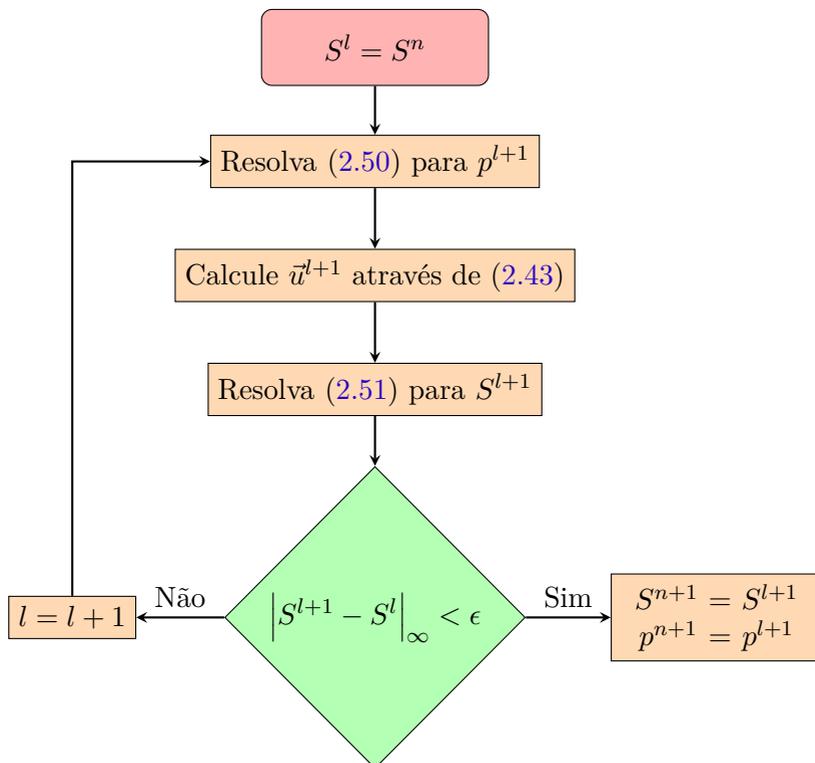
2.3 ESCOAMENTO MONOFÁSICO

No caso de escoamento de uma única fase α , o sistema de equações (2.1a) a (2.1f) referentes ao modelo *black-oil* trifásico reduz-se a uma única equação, de caráter elíptico, que é utilizada para o cálculo da pressão conforme:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi}{B} \right) = \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{K}}{\mu} (\nabla p - \rho g \nabla z) \right) + \frac{q_s}{B}. \tag{2.52}$$

Enquanto que o campo de velocidades pode ser calculado explicitamente pela lei de Darcy, equação (2.3).

Figura 3 – Fluxograma para resolução do escoamento bifásico.



Considerando ainda que o fluido encontra-se no estado líquido (água ou óleo), pode-se assumir que o escoamento é incompressível. Além disso, desprezando-se a compressibilidade da rocha, que pode fazer a porosidade variar, a equação (2.52) reduz-se à equação diferencial ordinária de segunda ordem:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{K}}{\mu} (\nabla p - \rho g \nabla z) \right) + q_s = 0, \quad (2.53)$$

cujas condições de contorno podem ser de pressão ou fluxo prescrito.

A discretização da equação (2.53) é realizada através do método dos volumes finitos, empregando-se o esquema de dois

pontos para o cálculo dos fluxos nas interfaces, conduzindo a

$$\begin{aligned}
 q_s \Delta V_P = & \tilde{T}_{1,e} (p_E - p_P) - \tilde{T}_{1,w} (p_P - p_W) \\
 & + \tilde{T}_{1,n} (p_N - p_P) - \tilde{T}_{1,s} (p_P - p_S) \\
 & + \tilde{T}_{1,t} (p_T - p_P) - \tilde{T}_{1,b} (p_P - p_B)
 \end{aligned} \tag{2.54}$$

em que a transmissibilidade na direção d é dada pela equação (2.16).

Quando escrita para cada um dos volumes de controle da malha, a equação (2.54) forma um sistema linear de caráter elíptico cuja variável é a pressão. Os métodos comumente empregados para a resolução desse sistema linear são descritos no capítulo 3.

3 SOLUÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO

A discretização das equações diferenciais que modelam o escoamento em reservatórios pode conduzir a sistemas de equações não-lineares ou lineares, de acordo com o caráter das equações governantes do escoamento. Conforme descrito no capítulo anterior, os modelos de escoamento que envolvem sistemas de equações não-lineares são resolvidos através de vários sistemas lineares em sequência, cujas respostas convergem para a solução do problema não-linear. Além disso, os modelos de escoamento lineares são resolvidos, naturalmente, pela solução de sistemas de equações também lineares. Desse modo, nota-se que os esforços numéricos presentes na simulação do escoamento em reservatórios resumem-se à solução de sistemas do tipo

$$\mathbf{A}x = b, \quad (3.1)$$

em que $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é conhecida como a matriz de coeficientes, responsável por descrever a ação do operador diferencial em formato discreto; $x \in \mathbb{R}^n$, o vetor solução, que abrange as incógnitas do modelo discretizado e $b \in \mathbb{R}^n$, um vetor cujos valores são conhecidos responsável por modelar fenômenos externos como a entrada ou saída de massa no reservatório, bem como a ação das condições de contorno.

Modelos geológicos de reservatórios podem apresentar mais de 1.0×10^8 incógnitas, o que dá origem a sistemas lineares de grande porte (CHRISTIE, 1996). Além disso, devido ao fato de representarem fenômenos físicos complexos, tais sistemas são, em geral, mal condicionados do ponto de vista da álgebra linear. Isso é verificado especialmente no caso em que o campo de permeabilidade absoluta da rocha é altamente heterogêneo, isto é, com grande variabilidade ao longo do espaço.

A resolução eficiente dos sistemas lineares representa um grande desafio em termos de recursos computacionais, sendo que até 90% do tempo de simulação pode ser consumido na resolução de sistemas lineares esparsos (DOGRU et al., 2011; KILLOUGH; WANG, 2013). Considerando-se a necessidade de rapidez em se tomar decisões a cerca de estratégias de exploração do reservatório

e a complexidade do modelo de escoamento, essa tarefa tende a ser proibitiva nos computadores disponíveis atualmente devido a limitações de memória RAM e também de poder de processamento. Duas estratégias são comumente empregadas no tratamento desse desafio: redução do tamanho do modelo discretizado e uso de *solvers* e pré-condicionadores eficientes. Esse capítulo apresenta de modo resumido o estado da arte de cada uma dessas técnicas com enfoque nas suas respectivas vantagens e desvantagens, bem como em qual posição o presente trabalho se situa.

3.1 UPSCALING

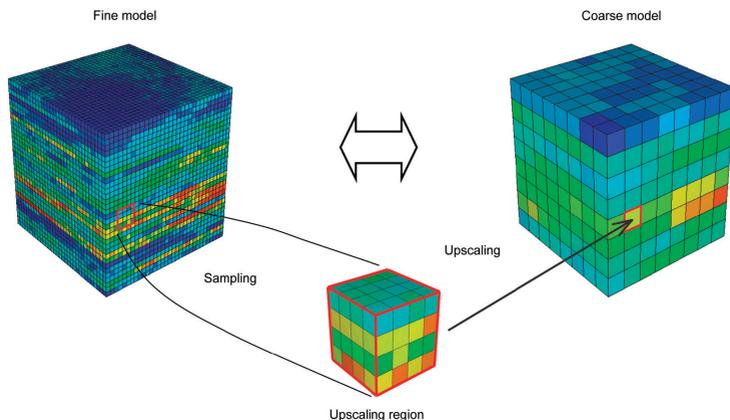
A primeira estratégia, conhecida como *upscaling*, consiste em reduzir o número de informações presentes nos modelos para as propriedades da rocha-reservatório e sua interação com os fluidos que escoam através dela de modo que suas características fundamentais sejam preservadas. Em métodos eficazes, isto faz com que a solução obtida para o escoamento em reservatórios segundo tais campos seja muito próxima àquela que seria obtida caso o problema original fosse resolvido.

Do ponto de vista algébrico, a aplicação de técnicas de *upscaling* faz com que o número de incógnitas do modelo discretizado de escoamento também reduza. Isto quer dizer que, ao invés de se resolver o problema original 3.1, resolve-se um sistema do tipo

$$\mathbf{A}_c x_c = b_c, \quad (3.2)$$

com c referindo-se ao modelo novo de escoamento e sendo que a dimensão da matriz de coeficientes \mathbf{A}_c é bem menor que a dimensão de \mathbf{A}_f . Uma consequência direta disso é a redução do esforço computacional necessário para se resolver o escoamento em reservatórios.

A figura 4 ilustra o campo de permeabilidade absoluta obtido com a aplicação do *upscaling* em um modelo heterogêneo, bem como a redução do número de volumes de controle envolvidos no modelo grosseiro.

Figura 4 – Ilustração da ideia central do *upscaling*.

É importante observar que as técnicas de *upscaling* inserem uma aproximação no modelo do escoamento, já que informações locais são ponderadas, em geral, de maneira inexata no processo de obtenção do modelo grosseiro. Desse modo, os campos de pressão, saturação ou temperatura calculados com o novo modelo, apesar de bastante próximos, não são equivalentes àqueles que seriam obtidos caso o problema original 3.1 fosse resolvido.

Existem diversas técnicas de *upscaling*, sendo que elas são usualmente classificadas em termos dos parâmetros que serão calculados em nível grosseiro. Porosidade e permeabilidade absoluta das rochas são denotados como parâmetros monofásicos, pois são recalculados em qualquer técnica de *upscaling*, já a permeabilidade relativa e as curvas de pressão capilar são denotados como parâmetros multifásicos por serem dependentes das saturações relativas às fases que escoam no reservatório. Em geral, estes últimos parâmetros precisam ser recalculados em escoamentos multifásicos, porém, quando esquemas de redução moderada no número de incógnitas são empregados, é suficiente recalculá-los apenas a porosidade e a permeabilidade absoluta (SANDVIN, 2012).

O desenvolvimento de novas técnicas de *upscaling* cada

vez mais fiéis ao problema original é uma área ativa de pesquisa (FARMER, 2002; DURLOFSKY, 2003; CHEN; DENG; YE, 2005; CHEN, 2006). Essa é uma tarefa complexa, em especial para problemas de escoamento multifásico, os quais são comuns em casos reais de aplicação e podem envolver permeabilidades relativas e pressões capilares variáveis ao longo da simulação, cujo efeito em escala global é de difícil representação.

Dadas as vantagens e desvantagens do *upscaling*, nota-se que existem situações em que estas técnicas não representam uma solução viável para a economia de recursos computacionais investidos na simulação. Nesses casos, torna-se imprescindível o uso de métodos eficientes para a solução do problema inicial. Essa é justamente a abordagem do presente trabalho e também o assunto da seção seguinte.

3.2 SOLVERS LINEARES

Na segunda abordagem empregada para a resolução do escoamento em reservatórios, busca-se o desenvolvimento de algoritmos eficientes do ponto de vista algébrico, isto é, que envolvam o menor número de operações aritméticas possível e também do ponto de vista computacional, ou seja, que utilizem a máxima capacidade de computação disponível¹ (WILLIAMS; WATERMAN; PATTERSON, 2009) e que também sejam escaláveis tanto no sentido forte como fraco². Essa última característica é essencial para a resolução dos sistemas lineares através de máquinas paralelas (BALAY et al., 2015).

¹ Essa característica é bastante dependente da arquitetura apresentada pela unidade de processamento em questão, CPUs são as mais utilizadas, enquanto que GPUs têm recebido interesse crescente. Em geral, a performance de pico em cada arquitetura é raramente alcançada por limitações devidas à transferência de dados entre memória RAM e processador.

² A escalabilidade forte de um algoritmo é função do esforço numérico empregado na resolução de um problema a medida que seu tamanho aumenta, enquanto que a escalabilidade fraca mede a variação desse esforço numérico a medida que a resolução do problema é distribuída para diferentes unidades de processamento.

Os algoritmos empregados na resolução de sistemas lineares são comumente referidos como *solvers* e divididos em métodos diretos e iterativos. Na primeira classe, os sistemas lineares são resolvidos exatamente segundo a precisão da máquina empregada. Já na segunda, estima-se uma solução x_0 para o sistema linear e forma-se uma sequência de vetores x^k , segundo alguma heurística, que convergem para a solução exata do problema. Tal sequência é truncada de acordo com algum critério baseado na proximidade entre os vetores que a compõem ou então baseado na norma dos resíduos calculados segundo tais vetores.

Os métodos diretos são reconhecidos por sua robustez e agilidade na resolução de problemas lineares até um determinado tamanho. Suas complexidades com relação ao uso de memória e poder de processamento são funções, basicamente, do tamanho N do sistema linear e da dimensão do problema a qual se refere. Existem técnicas, por exemplo, que resolvem problemas 2D de acordo com $O(N^{3/2})$ operações de ponto flutuante e $O(N \log N)$ de uso de memória (BANGERTH, 2013).

Já métodos iterativos são conhecidos por seu baixo custo computacional em termos de poder de processamento e uso de memória RAM, desde que pré-condicionadores apropriados sejam empregados na resolução dos sistemas lineares, assunto que será discutido na seção 3.3. Em determinadas ocasiões, é possível observar que a complexidade de tais métodos pode ser até de ordem linear $O(N)$, o qual representa o melhor cenário possível. Apesar de bastante promissores, em especial na solução paralela de sistemas lineares, dados os computadores atualmente disponíveis, *solvers* iterativos são competitivos em relação aos diretos somente em problemas com ao menos 10^5 incógnitas (BANGERTH, 2013).

Apresentam-se nessa seção os métodos comumente empregados para a solução de problemas lineares provenientes da simulação de escoamentos em reservatórios, suas vantagens e desvantagens particulares serão abordadas com o intuito de delinear o estado da arte na escolha de métodos para a resolução dos problemas referidos. Uma descrição mais detalhada matematicamente desses métodos pode ser verificada nos trabalhos de Saad (2003) e Kelley (1995).

3.2.1 Fatoração LU completa

A fatoração LU completa é um dos métodos mais conhecidos para a resolução direta de sistemas lineares, sua ideia básica consiste em encontrar duas matrizes \mathbf{L} , triangular inferior, e \mathbf{U} , triangular superior, de modo que $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$. Em seguida, resolve-se o problema

$$\mathbf{LU}x = b, \quad (3.3)$$

o qual é matematicamente equivalente ao sistema linear (3.1), porém de manipulação simplificada.

O método em questão pode ser implementado computacionalmente de diversas maneiras de acordo com a estratégia empregada para o cálculo dos fatores \mathbf{L} e \mathbf{U} (SAAD, 2003). Tipicamente, tais procedimentos consistem de quatro passos:

1. Reordena-se o grafo referente à matriz de coeficientes com o intuito de se reduzir a geração de novos elementos não-nulos durante o cálculo dos fatores \mathbf{L} e \mathbf{U} . Para tanto, estratégias comumente empregadas são *Nested Dissection* (ND) (GEORGE, 1976); *Reverse Cuthill-McKee* (RCM) (LIU; SHERMAN, 1976) e *Approximate Minimal Degree* (AMD) (AMESTOY; DAVIS; DUFF, 1996).
2. Realiza-se uma fatoração simbólica da matriz, isto é, sem que os valores numéricos das entradas sejam considerados. Aqui é importante o uso de algoritmos que levem em conta a esparsidade da matriz. O intuito dessa etapa é calcular como será o preenchimento dos fatores triangulares, ou seja, quantos elementos não-nulos serão adicionados e suas respectivas posições.
3. Realiza-se a fatoração numérica da matriz, a qual leva em conta os valores de seus coeficientes. Dessa forma, os fatores triangulares são completamente definidos.
4. Por último, utilizam-se os fatores \mathbf{L} e \mathbf{U} para a resolução do sistema linear (3.3) conforme apresentado no Algoritmo 1.

Algoritmo 1: Aplicação da fatoração LU.

Data: $\mathbf{A}x = b$, $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$.**Result:** $x = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{L}^{-1}b$.

- 1 Resolva $\mathbf{L}y = b$ por substituição direta.
 - 2 Resolva $\mathbf{U}x = y$ por substituição reversa.
-

É importante notar que a resolução dos sistemas triangulares por substituição direta e reversa é uma tarefa barata computacionalmente, enquanto que a etapa de obtenção dos fatores triangulares, conhecida como *setup* ou configuração do algoritmo, apresenta a maior demanda de recursos computacionais envolvidos em seu emprego. Isso é válido especialmente para o uso de memória RAM, a medida que o número de elementos não-nulos da matriz de coeficientes é maior.

A fatoração LU é conhecida por ser um método de solução robusto, pois não impõe restrições quanto ao número de condicionamento da matriz de coeficientes e sua simetria. Além disso, a solução proposta é exata, a menos dos erros de arredondamento da máquina que surgem devido a sua precisão limitada na representação de números. Esta é uma técnica bastante atraente quando se deseja resolver múltiplos sistemas lineares com a mesma matriz de coeficientes \mathbf{A} . No entanto, seu uso pode ser proibitivo em computadores que apresentam limitações de memória RAM ou pode ser não-aconselhável quando se deseja resolver o sistema linear de modo aproximado somente. Nesse último caso, é comum o uso de métodos iterativos.

3.2.2 Método de Richardson

Dentre os *solvers* iterativos, um dos mais básicos e primeiros a serem utilizados é o método de Richardson (RICHARDSON, 1911). Nele, uma série de soluções x^k são obtidas com k variando entre zero e o número máximo de iterações segundo a equação:

$$x^{k+1} = x^k + \omega \mathbf{M}^{-1} (b - \mathbf{A}x^k), \quad (3.4)$$

em que ω é um escalar não-negativo usualmente igual à unidade e \mathbf{M}^{-1} , uma matriz denominada de "pré-condicionador". Ambos elementos têm como finalidade aumentar a taxa de convergência do método iterativo, papel que desempenhado especialmente pela matriz de pré-condicionamento. A definição de pré-condicionadores eficientes é uma tarefa complexa e altamente dependente do tipo de problema que se esteja resolvendo, isto é discutido com mais detalhes na seção 3.3, em que também se apresenta os pré-condicionadores comumente utilizados na simulação de reservatórios.

A equação 3.4 também pode ser escrita em termos de iteração em torno do ponto fixo x^k da seguinte maneira:

$$x^{k+1} = (\mathbf{I} - \omega\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}) x^k + \omega\mathbf{M}^{-1}b, \quad (3.5)$$

em que $\mathbf{G} = \mathbf{I} - \omega\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}$ é denominada como matriz de iteração. Pode-se provar que a convergência desse método é garantida quando o raio espectral³ dessa matriz, denotado por $\rho(\mathbf{G})$, é menor que a unidade (SAAD, 2003). Quando tal condição não é atendida, torna-se necessário o emprego de *solvers* iterativos mais robustos conforme exposto nas seções seguintes.

3.2.3 Método do Resíduo Generalizado Mínimo

O método do resíduo mínimo generalizado - *Generalized Minimal Residual* (GMRes) - é um *solver* iterativo baseado em espaços de Krylov desenvolvido inicialmente por Saad e Schultz (1986). Esse método é voltado para a solução de problemas não-simétricos, sendo normalmente empregado na sua versão pré-condicionada, e apresenta larga aplicação em diversas áreas da engenharia.

Sejam \mathbf{M}^{-1} , matriz de pré-condicionamento; x_0 , uma estimativa inicial e r_0 , o resíduo inicial dado por $r_0 = \mathbf{M}^{-1}(b - \mathbf{A}x_0)$. O algoritmo GMRes procura uma solução x_m para o problema

³ Supremo do conjunto formado pelo valor absoluto dos autovalores que constituem o espectro de uma matriz.

(3.1) no subespaço $x_0 + K_m$ de dimensão $m \ll n$, em que

$$K_m = \text{span} \left\{ r_0, \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} r_0, \dots, \left(\mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} \right)^{m-1} r_0 \right\}. \quad (3.6)$$

Para tanto, empregam-se m restrições de acordo com a condição de Petrov-Galerkin, dada por

$$b - \mathbf{A} u_m \perp L_m, \quad (3.7)$$

em que L_m é o subespaço de restrições, o qual varia de acordo com o método iterativo escolhido. Para o GMRes, escolhe-se $L_m = \mathbf{A} K_m$, fazendo com que a norma do resíduo pré-condicionado

$$r = \left\| \mathbf{M}^{-1} (b - \mathbf{A} x) \right\|_2 \quad (3.8)$$

seja minimizada para os candidatos x pertencentes ao subespaço K_m .

O pseudocódigo da versão pré-condicionada à esquerda desse método é dado pelo algoritmo 2. Os passos 1 a 12 tem como finalidade encontrar uma base ortonormal de vetores para o subespaço de Krylov K_m , enquanto que nos passos posteriores encontra-se a melhor combinação linear desses vetores de modo a minimizar o valor do resíduo pré-condicionado 3.8.

É importante citar que existem outras implementações do algoritmo GMRes que propõem pequenas mudanças na maneira como a matriz de Hessenberg H_m é construída e também no modo como o problema de minimização especificado no passo 13 é resolvido. Exemplos comuns são o *Flexible Generalized Minimal Residual* (FMGRes) e o *Direct Quasi Generalized Minimal Residual* (DQGMRes) (SAAD, 2003). Além disso, podem também existir variantes do GMRes que são matematicamente equivalentes entre si, porém que apresentam diferentes custos computacionais, como é o caso do *Pipeline Generalized Minimal Residual* (PGMRes), versão do GMRes tradicional especializada na resolução em paralelo de problemas de larga escala (BALAY et al., 2015). Nota-se que a solução iterativa de um problema pode envolver parâmetros que vão muito além da simples escolha do método iterativo base.

Algoritmo 2: GMRes pré-condicionado à esquerda.

Data: $r_0 = \mathbf{M}^{-1}(b - \mathbf{A}x_0)$, $\beta = \|r_0\|_2$, $v_1 = r_0/\beta$.

Result:

$$\arg \min_{x \in K_m} \left\| \mathbf{M}^{-1}(b - \mathbf{A}x) \right\|_2.$$

```

1 for j = 1 to m do
2   Calcule  $w = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}v_j$ 
3   for i = 1 to j do
4     Calcule  $h_{i,j} = (w, v_i)$ 
5     Atualize  $w = w - h_{i,j}v_i$ 
6   end
7   Calcule  $h_{j+1,j} = \|w\|_2$ 
8   if  $h_{j+1,j} < htol$  then
9     m = j, vá para 13.
10  end
11  Calcule  $v_{j+1} = w/h_{j+1,j}$ 
12 end
13 Defina  $V = [v_1, \dots, v_m]$ .
14 Defina  $H_m = h_{i,j}$  com  $1 \leq i \leq (j + 1)$  ;  $1 \leq j \leq m$ .
15 Resolva  $y_m = \operatorname{argmin}_y \|\beta e_1 - H_m y\|_2$ .
16 Calcule  $x_m = x_0 + V_m y_m$ .
17 Calcule  $r = \mathbf{M}^{-1}(b - \mathbf{A}x_m)$ .
18 if  $\|r\|_2 / \|\mathbf{M}^{-1}b\|_2 \leq tol$  then
19   Atualize  $x_0 = x_m$  e volte para o passo 1.
20 else
21   Fim
22 end

```

3.2.4 Método do Gradiente Conjugado

O método do gradiente conjugado - *Conjugate Gradient* (CG) - é um *solver* iterativo baseado em espaços de Krylov, assim como o GMRes, em que o subespaço de restrições escolhido é o próprio K_m . Esse método foi desenvolvido inicialmente por Hestenes e Stiefel (1952) como uma alternativa à fatoração LU completa para a resolução direta de sistemas lineares simétricos. Hoje em dia, no entanto, é comumente empregado como um método iterativo para a resolução aproximada desses problemas de acordo com a precisão que se queira.

O objetivo do método do gradiente conjugado consiste em minimizar a norma energia do erro entre a solução calculada e aquela que seria obtida caso o problema fosse resolvido diretamente. Definindo-se como x^* a solução exata do sistema linear 3.1, tal condição pode ser expressa da seguinte maneira:

$$\arg \min_{x \in K_m} \|x - x^*\|_{\mathbf{A}}. \quad (3.9)$$

O passo-a-passo da versão pré-condicionada à esquerda desse método é dado pelo algoritmo 3.

Algoritmo 3: CG pré-condicionado à esquerda.

Data: $r_0 = (b - \mathbf{A}x_0)$, $z_0 = \mathbf{M}^{-1}r_0$, $p_0 = z_0$.

Result:

$$\arg \min_{x \in K_m} \|x - x^*\|_{\mathbf{A}}.$$

```

1 for  $j = 0$  to  $m - 1$  do
2    $\alpha_j = (r_j, z_j) / (\mathbf{A}p_j, p_j)$ .
3    $x_{j+1} = x_j + \alpha_j p_j$ .
4    $r_{j+1} = r_j - \alpha_j \mathbf{A}p_j$ .
5    $z_{j+1} = \mathbf{M}^{-1}r_{j+1}$ .
6    $\beta_j = (r_{j+1}, z_{j+1}) / (r_j, z_j)$ .
7    $p_{j+1} = z_{j+1} + \beta_j p_j$ .
8 end
```

Assim como o GMRes, o método do gradiente conjugado baseia-se em operações algébricas envolvendo somente vetores

bem como em produtos entre matrizes esparsas e vetores, as quais não envolvem tanto esforço computacional quanto operações envolvendo somente matrizes, presentes em métodos de solução direta como 3.2.1. Por outro lado, o CG envolve quantia menor de operações que o GMRes para a resolução do problema linear, o que é permitido graças ao aproveitamento da simetria do problema, além de requerer menor espaço para armazenamento dos vetores que compõem seu algoritmo. Tais características tornam o CG um método iterativo bastante atraente.

A fim de que o método descrito apresente uma taxa de convergência elevada, é necessário o uso de um pré-condicionador eficiente de acordo com o problema, observação válida inclusive para qualquer outro método iterativo. Na próxima seção, as técnicas de pré-condicionamento usualmente empregadas são discutidas.

3.3 PRÉ-CONDICIONADORES

De modo simplificado, técnicas de pré-condicionamento são responsáveis por modificarem o sistema linear inicial com o intuito de facilitar seu processo de resolução através de métodos iterativos (BENZI, 2002; GAMBOLATI; FERRONATO; JANNA, 2011). Nesse processo, diminui-se o raio espectral da matriz de iteração referente à aplicação desse método, o que acarreta no aumento de sua taxa de convergência para a obtenção da solução. De fato, a busca por métodos iterativos eficientes resume-se à definição de pré-condicionadores apropriados.

O novo problema obtido com a aplicação dessas técnicas é referido como “pré-condicionado”, enquanto que o operador responsável por tal modificação é referido como “pré-condicionador”, sendo normalmente representado pela matriz \mathbf{M}^{-1} .

Existem, basicamente, três maneiras de se aplicar um pré-condicionador ao sistema linear original (3.1). A primeira e mais comum, conhecida como “pré-condicionamento à esquerda” é dada por

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}x = \mathbf{M}^{-1}b; \quad (3.10)$$

a segunda é conhecida como “pré-condicionamento à direita”, sendo dada por:

$$\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M}x = b; \quad (3.11)$$

por fim, a última é referida como “pré-condicionamento misto”, a qual combina as duas últimas estratégias para obter:

$$\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}_2^{-1}y = \mathbf{M}_1^{-1}b, \quad x = \mathbf{M}_2^{-1}y. \quad (3.12)$$

Pode-se mostrar que as matrizes $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}$, $\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}$ e $\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}_2^{-1}$ são similares e portanto possuem os mesmos autovalores. No caso em que \mathbf{A} e \mathbf{M}^{-1} são matrizes simétricas e positivo definidas (SPD), *solvers* voltados para problemas simétricos como o gradiente conjugado apresentam a mesma taxa de convergência em qualquer uma dessas estratégias. No entanto, quando alguma dessas matrizes é não-simétrica, torna-se necessário o uso de *solvers* específicos como o GMRes ou o método do gradiente biconjugado estabilizado - *BiConjugate Gradient Stabilized*. (BiCGStab) - apresentam taxas de convergência diferentes de acordo com a estratégia de pré-condicionamento empregada (BENZI, 2002). Nesse trabalho, adota-se o pré-condicionamento à esquerda (3.10).

As técnicas de pré-condicionamento podem também ser classificadas em explícitas ou implícitas de acordo com a maneira com que a multiplicação entre as matrizes \mathbf{A} e \mathbf{M}^{-1} é avaliada. Conforme o nome sugere, na primeira estratégia, a matriz formada pelo produto das outras duas é calculada explicitamente. Já na segunda, o que é calculado é a ação do produto dessas matrizes sobre um vetor arbitrário, uma vez que a aplicação de pré-condicionadores em métodos iterativos resume-se a esse tipo de operação matemática, ou seja

$$\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{A}x = \mathbf{M}_1^{-1}y = z. \quad (3.13)$$

Esta última estratégia é a mais comum, uma vez que proporciona maior economia de recursos computacionais, e os pré-condicionadores discutidos nesse capítulo se enquadram nesse caso.

Duas características são fundamentais para a construção de um pré-condicionador eficiente, elas são

1. O produto $\mathbf{M}^{-1}v$ deve ser próximo a $\mathbf{A}^{-1}v$ com v um vetor arbitrário. Diz-se nesse caso que a ação da matriz de pré-condicionamento é próxima à ação da matriz inversa do sistema original.
2. A construção e aplicação do pré-condicionador deve ser barata em termos de recursos computacionais.

A primeira característica assegura que o *solver* iterativo convergirá em poucas iterações (eficiência algébrica), enquanto que a segunda condição proporciona que o custo computacional por iteração seja baixo (eficiência computacional). É importante observar que essas condições competem entre si e portanto busca-se obter um balanço entre elas. De fato, encontrar um bom pré-condicionador para a resolução de um determinado sistema linear é visto como uma combinação entre arte e ciência (SAAD, 2003). Isso ocorre também porque seu uso eficiente é altamente dependente do problema em questão: existem pré-condicionadores cujo desempenho é atraente para determinadas classes de problemas enquanto que para outras, pode se mostrar insatisfatório.

Nessa seção, apresentam-se as técnicas de pré-condicionamento comumente utilizadas na simulação de reservatórios, suas vantagens e desvantagens, bem como o tipo de problema linear que cada técnica é especializada em resolver. Destaca-se aqui um dos objetivos fundamentais desse trabalho: a análise de um pré-condicionador concebido para problemas elípticos.

3.3.1 Método da Sobre-Relaxação Sucessiva

O método da sobre-relaxação sucessiva - *Successive Over-Relaxation (SOR)* - foi um dos primeiros pré-condicionadores a ser empregado na resolução dos sistemas lineares presentes em simulação de reservatórios. No início, esse método era normalmente utilizado em conjunto com o *solver* Richardson 3.2.2, sendo muitas vezes denominado diretamente como o *solver* do problema. Com o desenvolvimento de *solvers* baseados em espaços de Krylov, fica claro que tais métodos podem ser denominados apropriadamente como pré-condicionadores ao invés de *solvers*.

O SOR tem como motivação fundamental o desmembramento da matriz de coeficientes em três partes: triangular inferior, \mathbf{L} ; diagonal, \mathbf{D} e triangular superior \mathbf{U} , conforme mostrado na figura 5.

Figura 5 – Decomposição LDU da matriz \mathbf{A} .

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc} & & \mathbf{U} \\ & \mathbf{D} & \\ \mathbf{L} & & \end{array} \right]$$

Inserindo-se um escalar ω , denominado de fator de relaxação, tal desmembramento pode ser escrito algebricamente da seguinte maneira:

$$\mathbf{A} = \frac{(\mathbf{D} + \omega\mathbf{L})}{\omega} + \frac{(\omega\mathbf{U} + (\omega - 1)\mathbf{D})}{\omega}. \quad (3.14)$$

Desse modo, o pré-condicionador de sobre-relaxação sucessiva pode ser escrito como:

$$\mathbf{M}_{SOR}^{-1} = \omega (\mathbf{D} + \omega\mathbf{L})^{-1}, \quad (3.15)$$

sendo que sua ação sobre um vetor arbitrário r pode ser calculada a partir de substituição direta.

Hoje em dia, o algoritmo SOR deixou de ser empregado diretamente para a solução do sistema linear 3.1. Ao invés disso, este método é bastante utilizado no âmbito de pré-condicionadores *multigrid* algébricos, desempenhando o papel de suavizador para a redução das componentes de frequências elevadas do erro associado à solução proposta pelo *solver* iterativo. Isso é descrito detalhadamente na seção 3.3.4.

No caso de problemas simétricos, uma variante do método SOR denominada SSOR - *Symmetric Successive Over Relaxation* é comumente empregada a fim de preservar a simetria do problema inicial e permitir o uso de *solvers* simétricos como o gradiente

conjugado. Esse pré-condicionador pode ser escrito algebricamente da seguinte maneira:

$$\mathbf{M}_{SSOR}^{-1} = \omega(2 - \omega)(\mathbf{D} + \omega\mathbf{U})^{-1}\mathbf{D}(\mathbf{D} + \omega\mathbf{L})^{-1}, \quad (3.16)$$

sendo que sua ação sobre um vetor arbitrário é dada de acordo com o algoritmo 4.

Algoritmo 4: Aplicação de \mathbf{M}_{SSOR}^{-1} sobre um vetor.

Data: \mathbf{L} , \mathbf{U} , r , ω .

Result: $z = \mathbf{M}_{SSOR}^{-1}r$.

- 1 Resolva $(\mathbf{D} + \omega\mathbf{L})x_1 = \omega(2 - \omega)r$ por substituição direta.
 - 2 Calcule $x_2 = \mathbf{D}x_1$.
 - 3 Resolva $(\mathbf{D} + \omega\mathbf{U})z = x_2$ por substituição reversa.
-

3.3.2 Fatoração LU Incompleta

Fatoração LU incompleta - *Incomplete LU Factorization* (ILU) - consiste em uma classe de pré-condicionadores baseados na fatoração aproximada da matriz original \mathbf{A} , isto é, desprezando-se os elementos não-nulos adicionais que formariam os fatores triangulares \mathbf{L} e \mathbf{U} exatos caso a fatoração LU 3.2.1 fosse empregada. Desse modo, a matriz de pré-condicionamento \mathbf{M}_{ILU}^{-1} é dada por:

$$\mathbf{M}_{ILU}^{-1} = \tilde{\mathbf{U}}^{-1}\tilde{\mathbf{L}}^{-1}. \quad (3.17)$$

Estes pré-condicionadores foram um dos primeiros aplicados na simulação de reservatórios para a resolução de ambas equações elípticas e hiperbólicas presentes no modelo do escoamento (BEHIE; VINSOME, 1982; BEHIE; COLLINS; JR., 1984). Hoje em dia, são comumente utilizados para a resolução das equações hiperbólicas do modelo apenas. Seu algoritmo é apresentado

No pré-condicionador ILU mais simples, denominado de ILU(0), os fatores $\tilde{\mathbf{L}}$ e $\tilde{\mathbf{U}}$ são calculados de modo que a soma do

Algoritmo 5: Aplicação da fatoração ILU.

Data: $\mathbf{A} \approx \tilde{\mathbf{L}}\tilde{\mathbf{U}}$.

Result: $z = \mathbf{M}_{ILU}^{-1}r = \tilde{\mathbf{U}}^{-1}\tilde{\mathbf{L}}^{-1}r$.

- 1 Resolva $\tilde{\mathbf{L}}y = r$ por substituição direta.
 - 2 Resolva $\tilde{\mathbf{U}}z = y$ por substituição reversa.
-

número de elementos não nulos de cada fator seja igual àquele referente à matriz original \mathbf{A} . Diz-se nesse caso que o grau de preenchimento do algoritmo é nulo. A demanda computacional associada à construção desse pré-condicionador é baixa, sendo que tal estratégia se mostra eficiente em muitos problemas simplificados. No entanto, em casos complexos, torna-se necessário o uso de estratégias mais robustas.

Nesse sentido, um pré-condicionador baseado em fatoração LU incompleta mais robusto que o anterior é o $\text{ILUTP}(\rho, \tau)$ (SAAD, 1994a; SAAD, 1994b). Esse obtém fatores triangulares $\tilde{\mathbf{L}}$ e $\tilde{\mathbf{U}}$ aproximados ao desprezar entradas da matriz \mathbf{A} cujo valor desobedece a um determinado critério definido pela tolerância absoluta τ . Além disso, dada uma linha da matriz \mathbf{A} , somente as ρ maiores entradas são retidas na formação dos fatores triangulares. O objetivo da primeira aproximação consiste em reduzir o custo computacional referente ao cálculo do pré-condicionador, enquanto a segunda consiste em controlar o uso de memória (SAAD, 2003). Por último, uma diferença notável desse algoritmo em relação ao anterior consiste na adição de um passo para o pivotamento das linhas da matriz \mathbf{A} . Esta operação tem como finalidade a estabilização do algoritmo, dando origem a fatores triangulares cuja inversa tem norma controlada, o que melhora a convergência do *solver* iterativo.

As estratégias discutidas anteriormente são aplicáveis tanto para problemas não-simétricos como simétricos. Sabe-se que a fatoração exata destes últimos conduz a matrizes \mathbf{L} e \mathbf{U} que são transpostas uma em relação a outra. Esse fato pode ser levado em consideração para o desenvolvimento de outras estratégias de fatoração incompleta que reduzem o espaço de memória RAM

utilizado pelo algoritmo. Um exemplo largamente empregado é a fatoração Cholesky incompleta (KERSHAW, 1978).

Desenvolvimentos recentes em fatoração incompleta têm sido no sentido de aumentar a eficiência no cálculo dos fatores triangulares a partir de algoritmos multifrontais (SAAD, 1996; OSEI-KUFFUOUR; SAAD, 2015) e também de reordenamento da matriz de coeficientes original conforme descrito na seção 3.2.1, os quais também alteram a própria qualidade dos fatores triangulares aproximados e a convergência do método iterativo.

3.3.3 *Constrained Pressure Residual*

O pré-condicionador CPR foi desenvolvido inicialmente por Wallis (1983) e Wallis, Kendall e Little (1985) para a solução de sistemas lineares provenientes da discretização acoplada de problemas multifásicos. A ideia fundamental desse pré-condicionador é desacoplar o problema inicial segundo os diferentes fenômenos físicos que este modela, desse modo, os subproblemas obtidos podem ser resolvidos de acordo com pré-condicionadores apropriados.

Na simulação de reservatórios isotérmicos, o sistema original pode ser dividido em dois subsistemas. O primeiro é definido em função da incógnita pressão. Do ponto de vista da álgebra linear, este é classificado como semipositivo definido e apresenta caráter aproximadamente elíptico sendo comumente resolvido através de pré-condicionadores do tipo *multigrid*. Já o segundo o sistema linear refere-se à incógnita saturação, é não-simétrico e apresenta caráter hiperbólico sendo comumente resolvido através de pré-condicionadores baseados em fatoração LU incompleta. A algoritmo 6 descreve a ação do pré-condicionador CPR tradicional (CAO et al., 2005), representado por \mathbf{M}_{CPR}^{-1} sobre um vetor arbitrário r .

A etapa inicial dos pré-condicionadores CPR consiste na obtenção de um sistema linear envolvendo somente a variável pressão. Este é formado a partir da multiplicação de uma determinada matriz pelo sistema linear original, que envolve as variáveis primárias. A escolha dessa matriz de desacoplamento representa

Algoritmo 6: Pré-condicionador CPR

Data:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{pp} & \mathbf{A}_{ps} \\ \mathbf{A}_{sp} & \mathbf{A}_{ss} \end{bmatrix}; r = b - \mathbf{A}x.$$

Result: $z = \mathbf{M}_{CPR}^{-1}r$.

1 Defina:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{pp} \\ \mathbf{0}_{sp} \end{bmatrix}; \mathbf{R} = \mathbf{P}^T \therefore \mathbf{A}_{pp} = \mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{P}.$$

- 2 Restrinja o resíduo global para a parcela referente à pressão: $r_p = \mathbf{R}r$.
 - 3 Resolva o problema elíptico: $(\mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{P})x_p = r_p$.
 - 4 Prolongue x_p para obter a solução global: $u = \mathbf{P}x_p$.
 - 5 Corrija o resíduo global: $v = r - \mathbf{A}u$.
 - 6 Aplique o pré-condicionador ILU no sistema global para obter: $w = \text{ILU}(\mathbf{A})v$.
 - 7 Combine os resíduos obtidos no primeiro e segundo estágios: $z = u + w$.
-

uma área ativa de pesquisa, de modo que diversas escolhas já foram desenvolvidas, as mais conhecidas são: *Alternate Block Factorization* (ABF) (LACROIX et al., 2003; MASSON et al., 2004), quasi-IMPES (SCHEICHL; MASSON; WENDEBOURG, 2003), reflexões de Householder (SCHEICHL; MASSON; WENDEBOURG, 2003), *Dynamic Row Sum* (DRS) (GRIES et al., 2014) e *Weighted Dynamic Row Sum* (WDRS) (BROWN; COLLINS; CHEN, 2015). O sistema obtido para a pressão é resolvido aproximadamente através de pré-condicionadores AMG, em que costuma-se aplicar apenas uma iteração do método. Por sua vez, tal solução é utilizada para atualizar o resíduo referente à pressão e, em seguida, o resíduo do sistema completo. Por fim, aplica-se um pré-condicionador baseado em fatoraçoão incompleta, como descrito na seção 3.3.2, no vetor resíduo atual conduzindo a uma nova solução para os campos das variáveis pressão e saturação.

Do ponto de vista algébrico, a aplicação do pré-condicionador CPR pode ser escrita na seguinte forma compacta:

$$\mathbf{M}_{CPR}^{-1} = \mathbf{P} (\mathbf{RAP})^{-1} \mathbf{R} + \text{ILLU}(\mathbf{A}) \left[\mathbf{I} - \mathbf{AP} (\mathbf{RAP})^{-1} \mathbf{R} \right]. \quad (3.18)$$

3.3.4 Multigrid Algébrico

Métodos *multigrid* foram desenvolvidos inicialmente na década de 70 para a resolução eficiente de equações diferenciais parciais escalares com caráter elíptico (STUBEN, 2001). Sua ideia fundamental consiste na resolução aproximada da equação 3.1 através da aplicação de um método iterativo simples nesse sistema em conjunto com uma correção proveniente da resolução exata de um problema com menor número de incógnitas e relacionado com o original. Esta ideia pode ser estendida recursivamente, dando origem a diversos níveis de malha, daí o nome do método. A título de simplificação, a abordagem descrita nessa seção considera métodos *multigrid* de dois níveis, porém também apresenta-se, devido a sua vasta aplicação, o operador algébrico referente ao pré-condicionador *multigrid* algébrico de vários níveis.

Na nomenclatura do *multigrid*, o método iterativo empregado em todos os níveis de malha, exceto o grosseiro, é denominado como “suavizador”, sendo responsável por eliminar as componentes de alta frequência do erro⁴ tornando-as suaves em relação à malha adotada. O suavizador é denotado por \mathbf{S} , sendo que sua ação pode ser expressa por:

$$x^{k+1} = \mathbf{S}x^k + (\mathbf{I} - \mathbf{S}) \mathbf{A}^{-1}b, \quad \mathbf{S} = \mathbf{I} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}. \quad (3.19)$$

Escolhas comuns podem ser representadas por $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}_{SOR}^{-1}$, conforme definido pela equação (3.15), ou $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}_{SSOR}^{-1}$, conforme (3.16). Já a correção obtida a partir do sistema grosseiro é calculada através de um *solver* direto, de modo que esta é responsável por eliminar as componentes suaves ou de baixa frequência

⁴ Aquelas cujo comprimento de onda é da ordem do espaçamento observado entre as incógnitas da malha em questão, segundo análise de Fourier.

do erro em malha refinada que passam a ser classificadas como de alta frequência na malha grosseira.

O “nível refinado” refere-se ao conjunto de incógnitas que compõem o sistema linear original (ou a malha computacional original, no caso de métodos *multigrid* geométricos) de tamanho N_1 , enquanto que o “nível grosseiro” refere-se àquelas selecionadas para compor um sistema de menor de tamanho $N_0 \ll N_1$ que aproxima, de alguma maneira, o primeiro. O operador que realiza a transferência de informações do nível grosseiro para o nível refinado é denominado como \mathbf{P} , de formato retangular e ordem $N_1 \times N_0$. Já a transferência de informações no sentido oposto é feita segundo o operador \mathbf{R} , de ordem $N_0 \times N_1$. Usualmente considera-se que $\mathbf{R} = \mathbf{P}^T$, conhecida como formulação de Galerkin, a qual preserva a simetria do problema inicial, caso exista. Definidos tais operadores, pode-se construir o sistema linear em nível grosseiro \mathbf{A}_c da seguinte maneira:

$$\mathbf{A}_c = \mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{P}. \quad (3.20)$$

É importante observar que esse processo faz com que o número de elementos não-nulos por linha da matriz \mathbf{A}_c seja maior que aquele referente à matriz \mathbf{A} . Nesse sentido, medidas do uso de memória associado aos métodos *multigrid* podem ser estabelecidas de acordo com as complexidades referentes à malha C_G e ao operador C_A , dadas por:

$$C_G = \sum_l \left(\frac{N_l}{N_{n-1}} \right), \quad C_A = \sum_l \left(\frac{m_l}{m_{n-1}} \right), \quad (3.21)$$

em que N_l e m_l denotam o número de variáveis e de elementos não-nulos referentes ao nível l , respectivamente, com $n - 1$ sendo o nível mais refinado, no caso em que há mais de dois níveis.

De modo semelhante à fatoração LU incompleta, o uso de um pré-condicionador *multigrid* é marcado por duas fases: configuração ou *setup* e aplicação do pré-condicionador. A primeira fase é constituída essencialmente por duas outras: a de engrossamento, do inglês *coarsening*, e a de interpolação, do inglês *interpolation*. Na etapa de engrossamento, determinam-se recursivamente as variáveis que serão mantidas a cada nível de malha empregada pelo

método, enquanto que na etapa de interpolação, determinam-se os operadores de restrição \mathbf{R} e prolongação \mathbf{P} .

Existem diversas maneiras de se definir as etapas de engrossamento e interpolação. No *multigrid* geométrico, o engrossamento é determinado de acordo com a malha empregada no processo de discretização, enquanto que a interpolação é construída de modo constante por partes. Já na implementação BoomerAMG do *multigrid* algébrico, o engrossamento pode ser realizado principalmente de acordo com os algoritmos RS, RS3, CLJP e Falgout; enquanto que para a interpolação, podem ser empregados os algoritmos clássico, direto, padrão ou multi-passe (HENSON; YANG, 2002).

Considerando $S^{(1,\nu)}$, um suavizador com ν iterações e \mathbf{M}_1^{-1} , sua representação no formato de pré-condicionador conforme (3.19); \mathbf{S}_0 , um *solver* direto para o cálculo da ação de $(\mathbf{A}_c)^{-1}$ sobre um vetor arbitrário e x_0 , uma estimativa inicial para a solução do problema 3.1, a aplicação de um pré-condicionador *multigrid* de dois níveis em um vetor arbitrário pode ser descrita algebricamente conforme o algoritmo 7.

Algoritmo 7: *Multigrid* de dois níveis.

Data: \mathbf{A} , b , x_0 , $r_0 = b - \mathbf{A}x_0$, \mathbf{P} , \mathbf{R} , \mathbf{S}^0 .

Result: $z = \mathbf{M}_{AMG}^{-1}r_0$.

- 1 $x^{1/3} = x_0 + \mathbf{M}_1^{-1}(b - \mathbf{A}x_0)$
 - 2 $x^{2/3} = x^{1/3} + \mathbf{P} \mathbf{S}^0 \mathbf{R} (b - \mathbf{A}x^{1/3})$
 - 3 $x^1 = x^{2/3} + \mathbf{M}_1^{-1}(b - \mathbf{A}x^{2/3})$
 - 4 $z = x^1 - x_0$
-

É importante observar que tal algoritmo pode ser estendido para múltiplos níveis quando aplicado recursivamente no lugar de \mathbf{S}^0 . Além disso, sua etapa de aplicação costuma demandar menor quantidade de recursos computacionais que a etapa de configuração do método.

Como realizado para os outros pré-condicionadores, a matriz que representa a ação do *multigrid* sobre um vetor arbitrário

pode ser representada da seguinte maneira:

$$\mathbf{M}_{AMG}^{-1} = \left[\mathbf{I} - \left(\mathbf{I} - \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{A} \right) \left(\mathbf{I} - \mathbf{P} \mathbf{S}^0 \mathbf{R} \mathbf{A} \right) \left(\mathbf{I} - \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{A} \right) \right] \mathbf{A}^{-1}, \quad (3.22)$$

ou também, de modo expandido, como:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{AMG}^{-1} = & \mathbf{M}_1^{-1} + \\ & \mathbf{P} \mathbf{S}^0 \mathbf{R} \left(\mathbf{I} - \mathbf{A} \mathbf{M}_1^{-1} \right) + \\ & \mathbf{M}_1^{-1} \left(\mathbf{I} - \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{S}^0 \mathbf{R} \right) \left(\mathbf{I} - \mathbf{A} \mathbf{M}_1^{-1} \right). \end{aligned} \quad (3.23)$$

No caso genérico em que o método *multigrid* apresenta n níveis com \mathbf{M}_l^{-1} , pré-suavizador e \mathbf{N}_l^{-1} , pós-suavizador relativos ao nível l , ambos no formato de pré-condicionador. Considerando também que \mathbf{R}_l e \mathbf{P}_l são os operadores de restrição e prolongação referentes ao nível l , sendo que $\mathbf{R}_{n-1} = \mathbf{P}_{n-1} = \mathbf{I}$, a ação de um ciclo V do *multigrid* pode ser expressa algebricamente da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{AMG}^{-1} = & \left[\mathbf{I} - \prod_{l=1}^{n-1} \left(\mathbf{I} - \left(\mathbf{P} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{R} \right)_{(n-l)} \mathbf{A} \right) \times \right. \\ & \left. \left(\mathbf{I} - \left(\mathbf{P}_0 \mathbf{S}^0 \mathbf{R}_0 \right) \mathbf{A} \right) \times \right. \\ & \left. \prod_{l=1}^{n-1} \left(\mathbf{I} - \left(\mathbf{P} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{R} \right)_l \mathbf{A} \right) \right] \mathbf{A}^{-1} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Nos métodos *multigrid*, estratégias adequadas de construção dos operadores de interpolação bem como de seleção das variáveis que irão compor o sistema grosseiro são cruciais para a obtenção de taxas de convergência elevadas e pouco dependentes do número de incógnitas. Via de regra, quanto maior é o esforço computacional para a construção de interpoladores eficientes, maior é a taxa de convergência numérica do pré-condicionador⁵,

⁵ Os autovalores da matriz de iteração $\mathbf{S}_{AMG} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{M}_{AMG}^{-1} \mathbf{A} \right)$ estão agrupados em torno de zero.

no entanto a redução do número de iterações necessárias para a convergência pode ser insuficiente para pagar tal esforço adicional. Por outro lado, quanto mais simples forem os algoritmos de interpolação e engrossamento, maiores são as restrições quanto à qualidade dos suavizadores empregados, isto é, eles precisam ser ainda mais eficientes na redução das componentes de diversas frequências do erro. Segue que a definição de algoritmos AMG eficientes recai em encontrar um balanço ótimo entre estratégias de interpolação e engrossamento em relação a estratégias de suavização (TROTTEMBERG; OOSTERLEE; SCHÜLLER, 2001).

No âmbito da simulação do escoamento em reservatórios, métodos *multigrid* foram empregados inicialmente por Behie e Forsyth (1983) para a resolução da equação da conservação da massa, a qual apresenta caráter aproximadamente elíptico⁶. Desde então, essa classe de métodos vem sendo largamente aplicada, especialmente sua variante algébrica, e também aperfeiçoada para o tratamento de problemas apresentando novas técnicas de discretização numérica referentes a malhas cada vez mais complexas, além de fenômenos físicos desafiadores (STUBEN, 2007; KLIE et al., 2007; CLEES; GANZER, 2010; KILLOUGH; WANG, 2013; GRIES et al., 2014; GRIES; PLUM, 2015; BROWN; COLLINS; CHEN, 2015; BARKER et al., 2015). Descrições mais detalhadas da teoria por trás dos métodos *multigrid* podem ser encontradas nos trabalhos de Hackbusch (1985) e Trottenberg, Oosterlee e Schüller (2001), enquanto que boas revisões sobre avanços referentes aos métodos *multigrid* algébricos podem ser verificadas em Stuben (2001), Henson e Yang (2002) e Yang (2006).

3.3.5 Decomposição de Domínio

Métodos de decomposição de domínio, do inglês *Domain Decomposition* (DD), foram introduzidos inicialmente em 1870 por Schwarz para a resolução de problemas elípticos em domínios

⁶ A presença de poços bem como falhas ou fraturas no reservatório pode degradar o caráter elíptico do operador de Poisson, por isso diz-se “aproximadamente elíptico”.

construídos pela sobreposição de formas geométricas bem estabelecidas como retângulos e círculos. Desde então, esses métodos receberam vários aperfeiçoamentos e suas ideias foram propagadas para diversas áreas de conhecimento envolvendo a resolução de equações diferenciais parciais.

Do ponto de vista da álgebra linear computacional, tais métodos podem ser vistos como pré-condicionadores destinados à resolução de problemas lineares elípticos através de uma estratégia baseada em “divisão e conquista”. Isto é, dado um sistema linear referente ao tipo (3.1), este é decomposto em diversos sistemas de menor tamanho e desacoplados entre si; tais sistemas são resolvidos por meio de algum *solver* e suas soluções são combinadas de alguma maneira para a construção da resposta do problema inicial. É interessante observar que a resolução desses subproblemas apresenta elevado grau de paralelização, uma vez que eles são desacoplados entre si.

Os pré-condicionadores baseados em decomposição de domínios envolvem a especificação de um conjunto de parâmetros, que são resumidos a seguir:

- a) método de particionamento da malha, o qual é responsável por determinar a maneira como o problema inicial é dividido em subproblemas menores. Aqui inclui-se a possibilidade da construção de subdomínios sobrepostos. Essa é uma tarefa simples em malhas estruturadas, mas pode ser complexa no caso de malhas não-estruturadas e demandar o uso de algoritmos complexos de particionamento da malha. Estratégias bem estabelecidas para tanto estão implementadas nas bibliotecas METIS (KARYPIS; KUMAR, 1998) e PT-Scotch (CHEVALIER; PELLEGRINI, 2008). Um bom algoritmo de particionamento conduz à subproblemas de tamanhos semelhantes, diz-se nesse caso que o balanço de carga é bom;
- b) estratégia de solução dos subproblemas, que podem ser resolvidos diretamente nos pré-condicionadores DD exatos ou iterativamente nos inexatos de acordo com al-

um *solver* iterativo associado a um pré-condicionador, conforme apresentados nas seções 3.2 e 3.3, respectivamente;

- c) maneira como as soluções dos subproblemas são combinadas, aqui existem duas estratégias. Na primeira categoria denominada de aditiva, os subproblemas são resolvidos separadamente de modo que a soluções de subproblemas acoplados entre si (caso de subdomínios vizinhos na malha) não interferem entre si. Já na segunda categoria, denominada de multiplicativa, tal acoplamento é levado em consideração de modo semelhante ao realizado no método de Gauss-Seidel. Observa-se que a primeira alternativa conduz a pré-condicionadores menos eficientes do ponto de vista algébrico, porém que podem ser facilmente implementados em máquinas paralelas.

Consideremos que a malha computacional referente ao sistema linear (3.1) seja dividida em N_C subdomínios possivelmente sobrepostos entre si. Seja \mathbf{R}_i o operador composto de 0 e 1 que restringe tal sistema linear ao subsistema $i \in [1 N_C]$, referente ao subdomínio de mesmo índice. Tal subsistema pode ser representado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_i \mathbf{A} x &= \mathbf{R}_i b \\ \rightarrow \mathbf{R}_i \mathbf{A} \mathbf{R}_i^T \mathbf{R}_i x &= \mathbf{R}_i b \\ \therefore \mathbf{A}_i x_i &= b_i. \end{aligned} \quad (3.25)$$

A resolução independente dos subsistemas gerados com “ i ” variando de 1 a N_C dá origem ao pré-condicionador Schwarz aditivo de um nível, definido a seguir:

$$\mathbf{M}_{AS1}^{-1} = \sum_{i=1}^{N_C} \left(\mathbf{R}_i^T \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{R}_i \right). \quad (3.26)$$

A taxa de convergência desse pré-condicionador é bastante dependente do grau de sobreposição especificado entre os

subdomínios. Quanto maior esse grau, mais rápido se dá a transferência de informações de um subdomínio para seus vizinhos e maior será a taxa de convergência do método iterativo empregado para a resolução do problema original. Por outro lado, graus de sobreposição elevados podem conduzir a subsistemas de dimensões elevadas, cuja resolução requer um tempo adicional maior que aquele poupado por conta do aumento da taxa de convergência. Portanto, segue que existe um grau de sobreposição ótimo na definição desse pré-condicionador.

Uma outra estratégia comumente empregada para aumentar a taxa de convergência dos pré-condicionadores DD consiste em adicionar a resolução de um problema global em sua formulação. Tal problema é responsável por acoplar os subproblemas num mesmo sistema linear, o qual é definido num espaço grosseiro de dimensão N_g muito menor que a do problema inicial N_f e que costuma ser igual ao número de subdomínios tratados. Seja \mathbf{R}_0 o operador de dimensão $N_g \times N_f$, responsável por realizar a transferência entre os níveis refinada e grosseiro, o pré-condicionador Schwarz aditivo de dois níveis, pode ser definido da seguinte maneira:

$$\mathbf{M}_{AS2}^{-1} = \sum_{i=0}^{N_C} \left(\mathbf{R}_i^T \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{R}_i \right). \quad (3.27)$$

A solução do problema grosseiro pode ainda ser combinada de modo multiplicativo com as soluções dos subproblemas locais. Isso dá origem ao pré-condicionador Schwarz híbrido de dois níveis, exposto a seguir:

$$\mathbf{M}_{HS2}^{-1} = \left[\sum_{i=0}^{N_C} \left(\mathbf{R}_i^T \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{R}_i \right) \right] - \left[\sum_{i=1}^{N_C} \left(\mathbf{R}_i^T \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{R}_i \right) \right] \mathbf{A} \left(\mathbf{R}_0^T \mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{R}_0 \right). \quad (3.28)$$

A qualidade do espaço grosseiro Ω_0 é determinada pela sua estratégia de construção e também pelas características do problema em questão, como a distribuição do campo de permeabilidade em problemas de simulação de reservatórios. Boas técnicas são fundamentais para a construção de pré-condicionadores escaláveis. Esta tarefa é, de fato, uma área ativa de pesquisa. Nesse

âmbito, é importante citar os recentes trabalhos de [Dolean et al. \(2012\)](#) e [Dolean et al. \(2014\)](#), que desenvolveram um método para a construção de espaços grosseiros bastante robustos, sendo gerados por um número pequeno e bem selecionado de auto-vetores provenientes de problemas de autovalores generalizados definidos nos subdomínio locais. Conforme será apresentado em capítulo posterior, o método multiescala pode ser visto como uma metodologia para a construção de um espaço grosseiro específico.

Pré-condicionadores DD apresentam bastante semelhança com pré-condicionadores *multigrid* pois ambos são classificados como métodos de correção em subespaço ([XU, 2001](#)). Por um lado, métodos *multigrid* são técnicas multiníveis conhecidas por empregar graus de refino moderado e métodos de relaxação simples. Por outro, métodos de decomposição de domínio são normalmente restritos a dois níveis e conhecidos por empregar graus de refino elevados, além de métodos de relaxação mais robustos para a resolução dos sistemas lineares em nível refinado.

Por fim, descrições mais detalhadas dos pré-condicionadores baseados em decomposição de domínio podem ser encontradas nos trabalhos ([SMITH; BJØRSTAD; GROPP, 1996](#); [TOSELLI; WIDLUND, 2005](#); [MATHEW, 2008](#); [DOLEAN; JOLIVET; NATAF, 2015](#)).

4 MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS MULTIESCALA - MSFVM

Métodos multiescala são técnicas computacionais desenvolvidas para a resolução eficiente e aproximada de equações elípticas na forma (2.53) envolvendo tensores de permeabilidade heterogêneos. Tais equações podem ser encontradas em diversas aplicações na engenharia, desde a simulação de reservatórios carbonáticos até a transferência de calor em materiais compósitos.

Nesses métodos verifica-se algo parecido com o *upscaling*, pois propõem uma solução aproximada para o escoamento em reservatórios a partir de um modelo em nível grosseiro, isto é, com menor número de incógnitas em relação ao original. A construção desse modelo é realizada de acordo com a solução de problemas locais definidos em subdomínios da malha original. Isso é realizado dentro de uma etapa de configuração do método, anterior à etapa de solução, em que o problema na malha grossa é resolvido.

No caso de escoamento multifásico, o problema grosseiro pode ainda ser dinâmico, isto é, atualizado ao longo da simulação a medida que variações locais no campo de mobilidade dos fluidos são observadas. Isso confere uma grande vantagem aos métodos multiescala em relação às técnicas de *upscaling*, uma vez que o modelo grosseiro pode se adequar às peculiaridades do escoamento ao longo da simulação, conduzindo a soluções que representam melhor o modelo geológico tratado. Além disso, as soluções obtidas por esses métodos podem ser projetadas na malha original do problema, o que não é permitido por técnicas de *upscaling* tradicionais.

Diversos métodos multiescala foram propostos nos últimos 20 anos, todos eles baseados em uma abordagem envolvendo dois níveis de malhas, no entanto, apresentando diferenças na metodologia empregada para a construção do problema em nível grosso. Entre os mais conhecidos é possível citar:

- a) método dos elementos finitos multiescala (MsFEM), do inglês *Multiscale Finite Element Method*, o qual é baseado no método dos elementos finitos e foi o primeiro método multiescala desenvolvido de acordo

com os trabalhos de Hou e Wu (1997) e Hou, Wu e Cai (1999). Uma descrição detalhada desse método contendo os últimos avanços pode ser verificada no trabalho de Efendiev e Hou (2009);

- b) método dos elementos finitos multiescala misto (MMsFEM), *Mixed Multiscale Finite Element Method*, que expandiu as ideias dos métodos multiescala presentes no MsFEM para ambas resoluções do escoamento (pressão) e do transporte (saturação) (CHEN; HOU, 2003; AARNES; KIPPE; LIE, 2005; ALPAK; PAL; LIE, 2012; PAL et al., 2014) no contexto dos métodos de elementos finitos mistos (ARNOLD, 1990; ARBOGAST; WHEELER; YOTOV, 1997);
- c) método dos volumes finitos multiescala (MsFVM) - *Multiscale Finite Volume Method* - (JENNY; LEE; TCHELEPI, 2003), que adéqua as ideias dos métodos multiescala ao contexto do método dos volumes finitos;
- d) método dos elementos finitos multiescala generalizado (GMsFEM) - *Generalized Multiscale Finite Element Method*, o qual deriva do MsFEM e propõe uma metodologia baseada em decomposição espectral para a construção de operadores em nível grosseiro de melhor qualidade (BUSH; GINTING; PRESHO, 2013; CHUNG; EFENDIEV; LI, 2014; PRESHO; GALVIS, 2015).

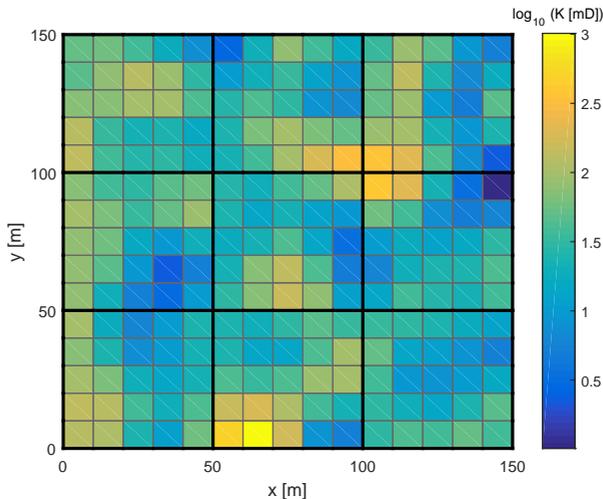
Na simulação de reservatórios, os métodos multiescala que mais se destacam entre os citados são o MsFVM e o MMsFEM. Isso se dá pelo fato de conduzirem a soluções conservativas para o campo de pressão em malha refinada, isto é, que geram campos de velocidade satisfazendo o princípio de conservação da massa na malha original do problema. Conforme discutido no capítulo 2, isto é essencial para a resolução apropriada de equações hiperbólicas como a referente à saturação. No MMsFEM, tal característica é atendida às custas de maior empenho computacional em relação ao MsFVM, já que ambas variáveis pressão e velocidade são resolvidas implicitamente, isto é, a partir de um sistema de equações

algébricas. Por conta disso e também pelo fato do MsFVM trabalhar com malhas estruturadas, largamente aplicadas na simulação de reservatórios, tal estratégia é estudada no presente trabalho.

Nesse capítulo, descreve-se a formulação matemática do método dos volumes finitos multiescala. A título de exemplificação, considera-se um problema bidimensional, pois isso facilita a visualização dos conceitos básicos do método em relação ao caso 3D, o qual pode ser obtido por extensão das ideias aqui descritas. A apresentação descrita será de grande ajuda para a compreensão do pré-condicionador multiescala algébrico, discutido no capítulo seguinte, segundo um ponto de vista físico, uma vez que ambas estratégias compartilham das mesmas estruturas básicas.

O problema tratado consiste no escoamento monofásico, incompressível e sujeito a efeitos gravitacionais através de um meio poroso de dimensões $150\text{ m} \times 150\text{ m}$ com fronteiras impermeáveis, cujo campo de permeabilidade é isotrópico e altamente heterogêneo sendo dado pela figura 6.

Figura 6 – Problema teste: logaritmo do campo de permeabilidade absoluta - $\log_{10}(K[mD])$.



Considera-se que água escoar nesse reservatório nas con-

dições padrão de pressão e temperatura. Por fim, há um poço injetor com pressão prescrita de 300 MPa e um poço produtor com pressão prescrita de 10 MPa no reservatório conforme ilustrado na figura 7 de acordo com os índices **I** e **P**, respectivamente.

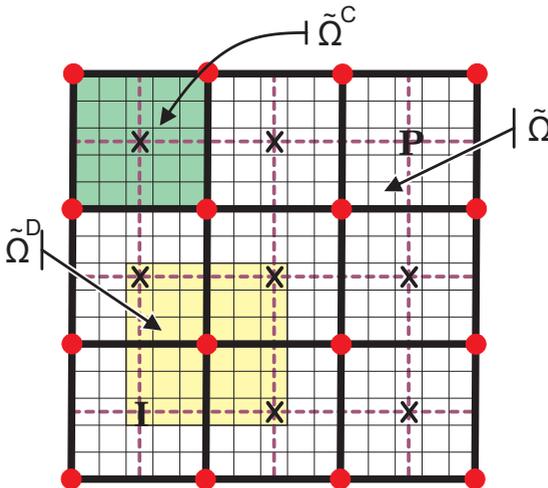
Apesar de já apresentada na seção 2.3, reescreve-se a seguir a equação que modela o escoamento incompressível monofásico:

$$\nabla \cdot (\lambda \nabla p) = \nabla \cdot (\lambda \rho g \nabla z) - q_s, \quad (4.1)$$

em que o lado esquerdo descreve a variação do campo de pressão enquanto o lado direito refere-se a efeitos gravitacionais e de entrada ou saída de massa através dos poços.

Ao invés de utilizar a malha refinada $\tilde{\Omega}$ diretamente para a solução do escoamento, o MsFVM emprega duas malhas grosseiras relacionadas entre si. Estas são ilustradas na figura 7 e definidas em seguida.

Figura 7 – Problema teste: malhas envolvidas no MsFVM.



- a) $\tilde{\Omega}$ refere-se a uma discretização em nível refinado para o domínio Ω totalizando N_f volumes de controle. Nesse exemplo, tal malha é composta por 15×15 volumes de controle cujo interior é colorido em branco;

- b) $\tilde{\Omega}^C$ é chamada de malha primal, sendo uma discretização em nível grosseiro para o domínio Ω formada por N_C volumes de controle, que por sua vez são construídos a partir de um conjunto de subvolumes pertencentes à malha refinada $\tilde{\Omega}$. Na figura 7, a malha grosseira primal é definida por 3×3 volumes totalizando $N_C = 9$ sendo que um exemplo de volume pertencente a essa malha é ilustrado em verde. Esta malha é empregada para o cálculo, na malha refinada, de um campo de velocidade conservativo;
- c) $\tilde{\Omega}^D$ é denominada de malha dual, sendo uma discretização em nível grosseiro para o domínio Ω deslocada em relação à malha primal, de modo que os volumes de controle em malha refinada que constituem o centro dos volumes de controle primais formam os vértices dos volumes duais. O número desses últimos é igual a N_D , sendo que, no problema considerado, eles são delimitados de acordo com as linhas pontilhadas e $N_D = 16$. Os volumes de controle da malha refinada associadas com o sexto volume dual são coloridos em amarelo na figura 7. Esta malha é empregada para o cálculo de uma solução aproximada para o campo de pressão.

4.1 FUNÇÕES BASE DUAIS

Na formulação original do MsFVM (JENNY; LEE; TCHELEPI, 2003), definem-se problemas locais e independentes na malha dual conforme apresentado pela equação 4.2, isto é, em cada um dos subdomínios de Ω definidos por $\tilde{\Omega}_j^D$, para $j = 1, 2, \dots, N_D$.

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\lambda \nabla \phi_i^j) = 0, & \text{em } \tilde{\Omega}_j^D; \\ \nabla_t \cdot (\lambda \nabla \phi_i^j) = 0, & \text{em } \partial \tilde{\Omega}_j^D; \\ \phi_i^j(\mathbf{x}_k) = \delta_{ki}, & \mathbf{x}_k \in \Psi. \end{cases} \quad (4.2)$$

As incógnitas ϕ_i^j , denominadas como funções base duais, são responsáveis por captar variações locais do campo de permeabilidade. Com a discretização da equação diferencial presente no problema (4.2), as funções base ϕ_i^j são calculadas ao longo dos volumes internos associados ao subdomínio “ j ” da malha dual. O conjunto Ψ é formado pelas coordenadas relativas aos vértices dos volumes de controle duais denotados por “ \mathbf{x} ” na figura 7, ou seja, as mesmas referentes ao centro dos volumes de controle da malha primal.

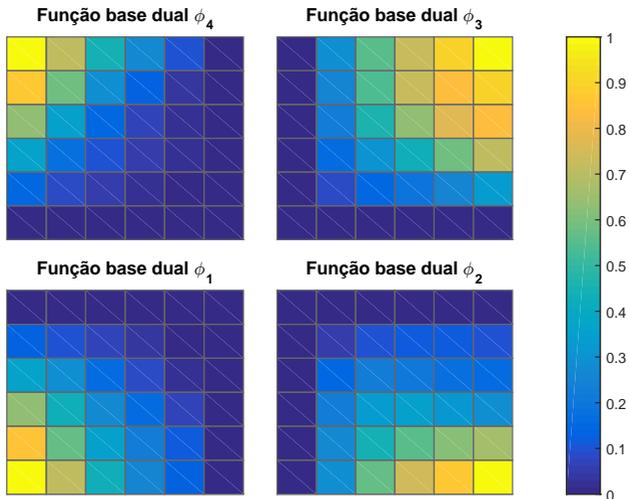
A condição de contorno empregada nesse problema é denominada como “reduzida”. Proposta inicialmente por Hou e Wu (1997) e também utilizada pelo método dos elementos finitos multiescala, esta é obtida a partir da solução homogênea da equação diferencial (4.1), ou seja, desconsiderando-se os termos presentes em seu lado direito. Além disso, considera-se que não há escoamento na direção “ \vec{n} ”, que é normal à fronteira $\partial\tilde{\Omega}_j^D$, restando somente os termos na direção tangencial, denotada por “ t ”, sendo que o operador ∇_t pode ser expresso da seguinte forma:

$$\nabla_t = (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\vec{n}}) \nabla = (\mathbf{I} - \vec{n}\vec{n}^T) \nabla. \quad (4.3)$$

Através da última relação apresentada na equação (4.2), especifica-se que ϕ_i^j assume valor nulo nos vértices do volume dual exceto em um deles, cujo valor é igual à unidade. O processo é repetido até que todos os vértices sejam varridos, por isso o subíndice “ i ”. Desse modo, calculam-se quatro funções base para cada volume dual no caso 2D ou oito, no caso 3D. É importante notar que o suporte das funções base referentes ao volume dual “ j ” é restrito à região desse mesmo volume. As funções base duais referentes ao volume de controle dual indicado na figura 7 são dadas pela figura 8.

A condição de contorno reduzida estabelece uma maneira de se calcular a distribuição de ϕ_i^j em $\partial\tilde{\Omega}_j^D$. Esta é justamente a aproximação adicionada pelo MsFVM durante a solução do problema (4.1) em escala refinada. É importante notar que, se tal condição de contorno pudesse ser escolhida como a própria solução do problema em escala refinada, o esquema proposto conduziria à

Figura 8 – Problema teste: funções base duais.



mesma solução encontrada pela aplicação do método dos volumes finitos nesse nível e não haveria aproximação do MsFVM em relação à solução do problema original em malha refinada.

Construídas as funções base duais, uma solução aproximada para o campo de pressão em escala refinada pode ser escrita pela superposição dessas funções com um campo de pressão p_i^C conforme a equação:

$$p \approx p' = \sum_{j=1}^{N_D} \left(\sum_{i=1}^{N_C} \phi_i^j p_i^C \right). \quad (4.4)$$

4.2 PROBLEMA NA MALHA GROSSA

O campo de pressão em escala grosseira p_i^C presente na equação 4.4 é calculado a partir da resolução do escoamento na malha primal $\tilde{\Omega}^C$. Substituindo-se (4.4) na equação (4.1), obtém-se

$$\nabla \cdot \left[\lambda \nabla \sum_{j=1}^{N_D} \left(\sum_{i=1}^{N_C} \phi_i^j p_i^C \right) \right] = \nabla \cdot (\rho g \lambda \nabla z) - q_s. \quad (4.5)$$

Integrando-se a equação (4.5) no volume de controle “ i ” da malha grosseira primal $\tilde{\Omega}_i^C$:

$$\int_{\tilde{\Omega}_i^C} \nabla \cdot \left[\lambda \nabla \sum_{j=1}^{N_D} \left(\sum_{k=1}^{N_C} \phi_k^j p_k^C \right) \right] d\Omega = \int_{\tilde{\Omega}_i^C} [\nabla \cdot (\rho g \lambda \nabla z) - q_s] d\Omega, \quad (4.6)$$

$$\rightarrow \sum_{k=i}^{\Theta_i} \left[\int_{\partial \tilde{\Omega}_i^C} \left(\lambda \sum_{j=1}^{N_D} \nabla \phi_k^j p_k^C \right) \vec{n} d\sigma \right] = \int_{\tilde{\Omega}_i^C} r d\Omega, \quad (4.7)$$

em que o conjunto Θ_i agrupa os volumes de controle da malha primal que influenciam na equação referente ao volume Ω_i^C , enquanto o termo r representa o lado direito da equação (4.1). Prosseguindo a dedução:

$$\sum_{k=i}^{\Theta_i} \left[\sum_{j=1}^{N_D} \int_{\partial \tilde{\Omega}_i^C \cap \tilde{\Omega}_j^D} \left(\lambda \nabla \phi_k^j \right) \vec{n} d\sigma \right] p_k^C = \int_{\tilde{\Omega}_i^C} r d\Omega \quad (4.8)$$

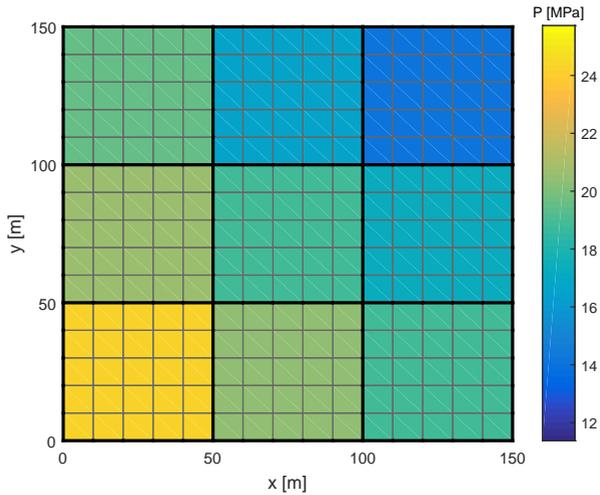
$$\rightarrow \sum_{k=i}^{\Theta_i} T_{ik} p_k^C = \hat{q}_i \quad (4.9)$$

$$\therefore \mathbf{T} p^C = \hat{q}. \quad (4.10)$$

A equação (4.10) define o sistema linear para o campo de pressão na malha grossa, o qual é ilustrado na figura 9 para o problema teste. É importante observar que tal solução conduz a um campo de velocidade conservativo nesse nível de malha, já que foi obtida através da aplicação do método dos volumes finitos.

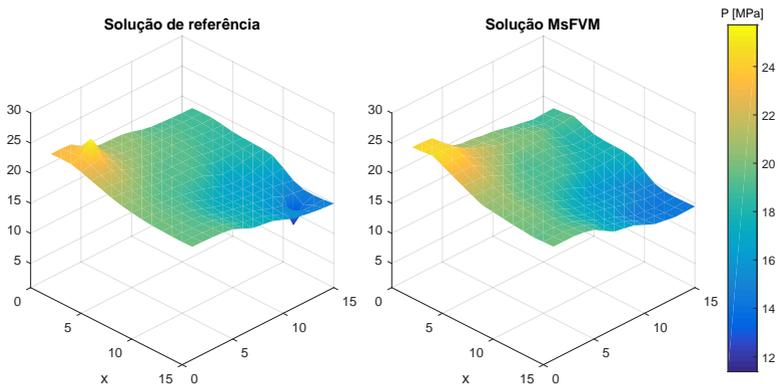
Após a obtenção do campo de pressão na malha grossa, o campo de pressão na malha refinada $\tilde{\Omega}$ pode ser calculado a partir da equação (4.4), mediante o uso das funções base duais. A figura 10 ilustra à direita esse campo para o problema teste, bem como o campo de pressão de referência, à esquerda, calculado através de um método de solução direto. Uma vez que as funções base duais

Figura 9 – Problema teste: campo de pressão referente à malha grosseira.



apenas aproximam as variações do campo de permeabilidade em nível refinado (local) ao invés de as reproduzirem fielmente, tem-se que o campo de pressão obtido em nível refinado pelo MsFVM não é equivalente ao de referência, apesar de bastante próximo.

Figura 10 – Problema teste: solução para o campo de pressão.



Vários autores descrevem que a vantagem do uso de métodos multiescala consiste na qualidade da solução obtida, que apesar de inexata é considerada boa, dadas as incertezas de engenharia presentes no campo de permeabilidade que a determina. Além disso, defende-se que o tempo computacional associado a tal estratégia tende a ser baixo em comparação com outras estratégias comumente empregadas (MOYNER; LIE, 2014a).

4.3 RECONSTRUÇÃO DO CAMPO DE VELOCIDADE

O campo de pressão em escala refinada calculado pela equação (4.4) é contínuo nas regiões ocupadas pelas interfaces dos volumes de controle duais, porém o gradiente desse campo é descontínuo nessas regiões (JENNY; LEE; TCHELEPI, 2006; MOYNER, 2012). Desse modo, se for empregado para o cálculo de um campo de velocidades em malha refinada conforme a equação (??), esse não garantirá a conservação da massa localmente. A fim de que isso seja alcançado, o MsFVM propõe uma metodologia para a reconstrução do campo de velocidade segundo um campo de pressão atualizado.

As fronteiras dos volumes de controle da malha primal são contidas pelos volumes de controle duais. Por construção do MsFVM, sabe-se que o campo de velocidade calculado nessas regiões é contínuo. Tais fatos motivam a especificação das condições de contorno para problemas locais definidos nos volumes de controle da malha primal $\tilde{\Omega}_i^C$, em que $i = 1, 2, \dots, N_C$, conforme

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\lambda \nabla p'') = f'_i, & \text{em } \tilde{\Omega}_i^C. \\ (\lambda \nabla p'') \cdot \vec{n}_i = (\lambda \nabla p') \cdot \vec{n}_i, & \text{em } \partial \tilde{\Omega}_i^C. \\ p''(\mathbf{x}_k) = p'(\mathbf{x}_k), & \mathbf{x}_k \in \Psi, \end{cases} \quad (4.11)$$

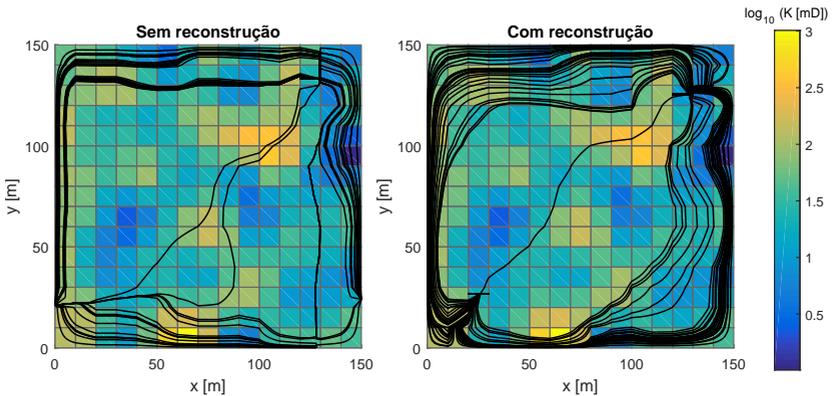
em que p' representa o campo de pressão local obtido a partir da equação (4.4) conforme descrito na seção passada; p'' , o campo de pressão corrigido que conduz à solução conservativa para a velocidade; \vec{n}_i , o vetor normal à fronteira $\partial \tilde{\Omega}_i^C$ e, por fim, f'_i pode ser visto como um termo fonte associado à entrada/saída de massa

no volume de controle $\tilde{\Omega}_i^C$, responsável também pela modelagem de efeitos gravitacionais, dado por

$$f'_i = -\frac{\int \lambda \nabla p' d\sigma}{\int_{\tilde{\Omega}_i^C} d\tau}. \quad (4.12)$$

Após a reconstrução do campo de pressão, o campo de velocidade pode ser calculado explicitamente pela equação (2.3). As linhas de corrente obtidas a partir dos campos de velocidades original (calculado a partir de p') e reconstruído (calculado a partir de p'') para o problema teste são ilustradas na figura 11.

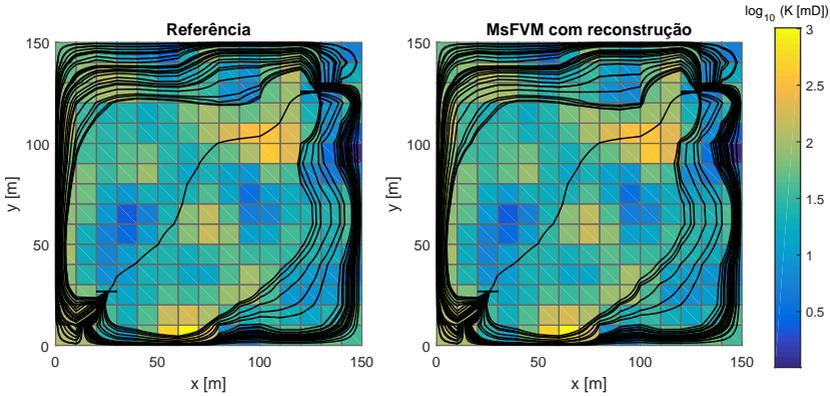
Figura 11 – Problema teste: linhas de corrente (MsFVM).



Dessa figura conclui-se que o campo de velocidade calculado pelo MsFVM sem haver o processo de reconstrução é inconsistente do ponto de vista físico, enquanto que o novo campo aproxima-se mais da solução real. De fato, calculando-se o campo de velocidade a partir da solução exata do escoamento, esta última observação é confirmada. Uma comparação entre os campos de velocidade de referência e obtido pelo MsFVM empregando-se a estratégia de reconstrução pode ser verificada na figura 12.

É importante lembrar que os problemas locais definidos pela equação (4.11) para os diferentes volumes $\tilde{\Omega}_i^C$ são independen-

Figura 12 – Problema teste: comparação entre linhas de corrente.



tes entre si, portanto sua solução pode ser facilmente paralelizada. A mesma observação é válida para o problema que define as funções base duais (4.2). Esse é justamente um dos pontos positivos mais relevantes do MsFVM: o alto grau de paralelização de seu algoritmo.

4.4 FUNÇÕES DE CORREÇÃO

Um aperfeiçoamento no MsFVM foi proposto pelas formulações apresentadas por Lunati e Jenny (2008), Lunati e Lee (2009), em que além das funções base duais, definem-se também funções de correção responsáveis por captar os efeitos causados pelos termos independentes da equação (4.1) sobre o campo de pressão em nível refinado.

Assim como no caso das funções base duais, as funções de correção são encontradas através da resolução de problemas independentes definidos nos volumes de controle da malha dual. Tomando-se um volume dual $\partial\tilde{\Omega}_j^D$ genérico, a função de correção ϕ_j^* associada a esse volume é encontrada resolvendo-se o seguinte

problema:

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\lambda \nabla \phi_j^*) = \nabla \cdot (\rho g \lambda \nabla z) + q, & \text{em } \tilde{\Omega}_j^D. \\ \nabla_t \cdot (\lambda \nabla \phi_j^*) = \nabla_t \cdot (\rho g \lambda \nabla z), & \text{em } \partial \tilde{\Omega}_j^D. \\ \phi_j^*(\mathbf{x}_k) = 0, & x_k \in \Psi, \end{cases} \quad (4.13)$$

Nota-se que este é bastante similar ao problema dado por (4.2), as diferenças fundamentais entre eles consistem nas condições de contorno para os vértices dos volumes $\partial \tilde{\Omega}_j^D$, as quais são nulas no presente caso e ao fato de (4.13) considerar fenômenos físicos modelados pelo lado direito da equação (4.1). Além disso é importante notar que, dado um volume dual arbitrário, calcula-se uma única função de correção associada a ele independentemente do problema ser bidimensional ou tridimensional.

Quando as funções de correção são consideradas, a expressão para o cálculo do campo de pressão em escala refinada a partir do campo em escala grossa é modificada para a seguinte equação

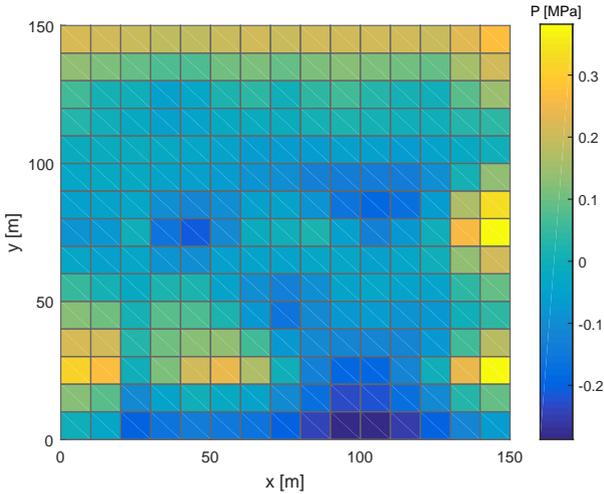
$$p \approx p' = \sum_{j=1}^{N_D} \left(\sum_{i=1}^{N_C} \phi_i^j p_i^C + \phi_j^* \right). \quad (4.14)$$

No problema teste, os poços estão localizados nos próprios centróides dos volumes de controle da malha primal, isso permite que seu efeito sobre o escoamento possa ser devidamente considerado pelo lado direito do sistema linear em nível grosso (4.10), logo a parcela das funções de correção referente à ação dos poços é nula. No entanto, efeitos gravitacionais estão presentes no sentido oposto do eixo “y”, logo as funções de correção devem ser diferentes de zero. Com efeito, a correção no campo de pressão gerada por tais funções é ilustrada na figura 13.

4.5 DESENVOLVIMENTOS RECENTES

O método dos volumes finitos multiescala foi inicialmente proposto para a resolução de problemas elípticos homogêneos (JENNY; LEE; TCHELEPI, 2003), que correspondem ao caso

Figura 13 – Problema teste: funções de correção.



de escoamento monofásico e incompressível. Posteriormente, este foi estendido para a resolução de problemas hiperbólicos como a equação do transporte (saturação) (LEE; ZHOU; TCHELEPI, 2009; KUNZE, 2014). Desde sua criação, tal método recebeu constantes aprimoramentos de modo a adaptá-lo para a resolução de problemas cada vez mais realísticos em simulação de reservatórios. Nesse sentido, os avanços mais significativos são sintetizados a seguir

- Escoamentos compressíveis monofásicos e multifásicos (JENNY; LEE; TCHELEPI, 2005; JENNY; LEE; TCHELEPI, 2006; LUNATI; JENNY, 2006b; LUNATI; JENNY, 2006a; ZHOU, 2006; ZHOU; TCHELEPI, 2008; HAJIBEYGI; JENNY, 2009).
- Reservatórios anisotrópicos (LUNATI; JENNY, 2007; HESSE; MALLISON; TCHELEPI, 2008; HAJIBEYGI; WANG; TCHELEPI, 2014; MOYNER; LIE, 2014b).
- Modelagem de poços com trajetória complexa através das funções de correção (WOLFSTEINER; LEE; TCHELEPI,

2006; JENNY; LUNATI, 2009).

- Escoamento em reservatórios com falhas geológicas (HAJIBEYGI; DEB; JENNY, 2011).
- Escoamento em reservatórios fraturados (HAJIBEYGI; KARVOUNIS; JENNY, 2011; SANDVE; KEILEGAVLEN; NORDBOTTEN, 2014).
- Escoamento multifásico black-oil (LEE; WOLFSTEINER; TCHELEPI, 2008).
- Escoamento multifásico composicional (HAJIBEYGI; TCHELEPI, 2014; CUSINI et al., 2014).
- Malhas estratigráficas e não-estruturadas (MOYNER, 2014; MOYNER; LIE, 2014a; MOYNER; LIE, 2015).

Uma frente de pesquisa bastante ativa propõe mudanças na formulação dos métodos multiescala que conduzam a soluções de melhor qualidade, isto é, mais próximas àquelas calculadas exatamente na malha refinada, e de baixo custo computacional. Nesse sentido, um caminho bastante explorado consiste na definição de novas condições de contorno que sejam mais próximas à solução exata para os problemas que definem as funções base duais (4.2), este é justamente o objeto de estudo dos trabalhos escritos por Nordbotten e Bjorstad (2008); Moyner e Lie (2014a) e Keilegavlen e Nordbotten (2014). Outra tática consiste na aplicação iterativa do MsFVM de modo que as condições de contorno dos problemas duais sejam atualizadas com as soluções antigas do campo de pressão. Isso foi proposto inicialmente por Hajibeygi et al. (2008) através do método dos volumes finitos multiescala iterativo - *iterative Multiscale Finite Volume Method* (iMsFVM) - desde então, diversos aperfeiçoamentos foram desenvolvidos para esse método (BONFIGLI; JENNY, 2010; ZHOU, 2010; LUNATI; TYAGI; LEE, 2011; HAJIBEYGI; JENNY, 2011), dando origem à interpretação do MsFVM como um pré-condicionador voltado para a solução de problemas elípticos. Essa abordagem é detalhada no capítulo seguinte.

5 PRÉ-CONDICIONADOR MULTIESCALA ALGÉBRICO

Ambos métodos dos volumes finitos multiescala original (MsFVM) e iterativo (iMsFVM) podem ser formulados algebricamente, ou seja, por meio de operações envolvendo matrizes e vetores (ZHOU, 2006; ZHOU; TCHELEPI, 2008). Isso é atraente por diversos motivos, entre os quais destacam-se a melhor compreensão da qualidade da solução obtida por esses métodos bem como das propriedades de convergência de sua formulação iterativa e a viabilização de sua extensão natural a malhas *corner-point* e não-estruturadas, apesar de ainda atrelada a aspectos geométricos. Em especial no caso do iMsFVM, sua formulação matricial dá origem ao pré-condicionador multiescala algébrico, classificado como uma variante do *multigrid* de dois níveis cujo operador de prolongação é construído através da resolução direta de subproblemas independentes definidos em malha refinada (ZHOU, 2010; ZHOU; TCHELEPI, 2012; WANG, 2012; WANG; HAJIBEYGI; TCHELEPI, 2014). Tal pré-condicionador é voltado para a resolução de problemas elípticos e apresenta como parâmetros de configuração os itens citados a seguir.

- a) o tipo do operador de restrição empregado para a construção do problema em nível global.
- b) a razão de engrossamento utilizada para a determinação do tamanho do problema na malha grossa.
- c) o tipo de estratégia, denominada como suavizador, para a resolução aproximada do sistema linear original.

Apresenta-se nesse capítulo os conceitos envolvidos na definição do pré-condicionador multiescala algébrico bem como seu formato matricial. Com o intuito de ilustrar claramente tais conceitos, considera-se o mesmo problema teste bidimensional empregado no capítulo 4. As mudanças associadas à extensão para o caso 3D consistem basicamente na redefinição dos operadores de interpolação (prolongação e restrição) utilizados pelo método conforme exposto no apêndice B.

Considerando-se a malha refinada $\tilde{\Omega}$ ilustrada na figura 7, a discretização do problema elíptico (4.1) através do método dos

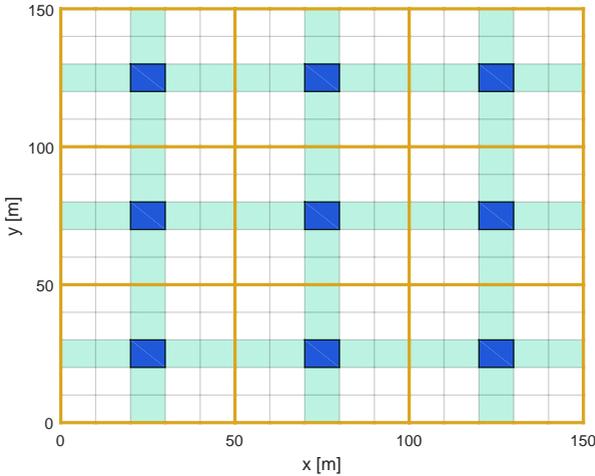
volumes finitos tradicional¹ conduz a um sistema linear do tipo (3.1), o qual é reescrito a seguir como:

$$\mathbf{A}p = q, \quad (5.1)$$

em que a variável desconhecida pressão é definida num conjunto finito de pontos $I_f = \{x_j\}_{j \in [1, n_f]}$, enquanto a matriz \mathbf{A} é esparsa com estrutura pentadiagonal.

A divisão do domínio Ω conforme volumes primais, $\tilde{\Omega}_i^C$, e duais, $\tilde{\Omega}_j^D$, induz um particionamento da malha refinada denominado como *wirebasket* e ilustrado na figura 14. Nesse ordenamento, os volumes da malha refinada $\tilde{\Omega}$ podem ser divididos em três categorias², conforme:

Figura 14 – Problema teste: particionamento *wirebasket*.



- a) interior (branco), formando um conjunto de “ N_i ” volumes denotado por $I_i = \{x_j\}_{j \in [1, N_i]}$;

¹ Com aproximação de dois pontos para o fluxo (TPFA).

² No caso de escoamento tridimensional, adiciona-se uma nova categoria: os volumes de face, que constituem as superfícies dos volumes de controle da malha dual.

- b) aresta (verde claro), formando um conjunto de “ N_e ” volumes denotado por $I_e = \{x_j\}_{j \in [1, N_e]}$;
- c) vértice (azul escuro), formando um conjunto de “ N_v ” volumes denotado por $I_v = \{x_j\}_{j \in [1, N_v]}$.

A união desses agrupamentos formam o conjunto dos volumes pertencentes à malha refinada $\tilde{\Omega}$:

$$I_f = I_i \cup I_e \cup I_v, \quad (5.2)$$

sendo que $N_f = N_i + N_e + N_v$.

Definindo-se como $\tilde{\mathbf{Q}}$ a matriz de permutação que realiza a transferência entre os ordenamentos lexicográfico (natural) e *wire-basket*, a variável pressão pode ser escrita nesse novo ordenamento como

$$\tilde{p} = \tilde{\mathbf{Q}}p = \begin{bmatrix} \tilde{p}_i \\ \tilde{p}_e \\ \tilde{p}_v \end{bmatrix}, \quad (5.3)$$

e a matriz $\tilde{\mathbf{A}}$ como

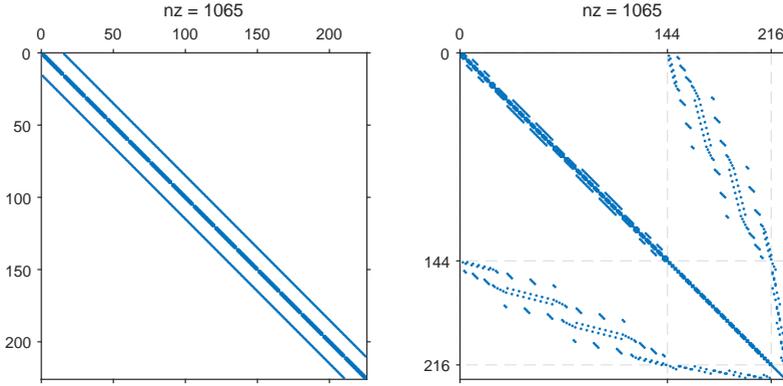
$$\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{A}\tilde{\mathbf{Q}}^T = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{ii} & \tilde{\mathbf{A}}_{ie} & \mathbf{0}_{iv} \\ \tilde{\mathbf{A}}_{ei} & \tilde{\mathbf{A}}_{ee} & \tilde{\mathbf{A}}_{ev} \\ \mathbf{0}_{vi} & \tilde{\mathbf{A}}_{ve} & \tilde{\mathbf{A}}_{vv} \end{bmatrix}, \quad (5.4)$$

em que a submatriz genérica $\tilde{\mathbf{A}}_{ab}$ tem dimensão $N_a \times N_b$ e denota a contribuição dos volumes de controle da categoria “ b ” sobre a equação de conservação da massa referente aos volumes da categoria “ a ”. Como o esquema de interpolação adotado no processo de discretização da equação diferencial é de dois pontos, segue que os volumes interiores não influenciam os volumes de vértice e vice-versa, portanto $\tilde{\mathbf{A}}_{vi} = \tilde{\mathbf{A}}_{iv}^T = \mathbf{0}_{vi}$. A figura 15 ilustra a estrutura das matrizes original \mathbf{A} (à esquerda) e reordenada $\tilde{\mathbf{A}}$ (à direita).

Uma vez que as matrizes de permutação são ortogonais, tem-se que $\tilde{\mathbf{Q}}^T = \tilde{\mathbf{Q}}^{-1}$ e $\tilde{\mathbf{Q}}^T \tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{I}$. Logo, o sistema linear (5.1) pode ser reescrito na forma reordenada como:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{A}\tilde{\mathbf{Q}}^T\tilde{\mathbf{Q}}p &= \tilde{\mathbf{Q}}q \\ \rightarrow \tilde{\mathbf{A}}\tilde{p} &= \tilde{q}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Figura 15 – Problema teste: estrutura da matriz de coeficientes original, à esquerda, e reordenada, à direita.



O sistema linear resolvido pelo MsFVM usando-se as funções de correção, apresentadas na seção 4.4, consiste numa aproximação desse último e pode ser escrito como

$$\mathbf{M}_{mswc} \tilde{\mathbf{p}}' = \tilde{\mathbf{q}}', \quad (5.6)$$

em que \mathbf{M}_{mswc} representa o operador multiescala considerando-se as funções de correção, o qual é dado por

$$\mathbf{M}_{mswc} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{ii} & \tilde{\mathbf{A}}_{ie} & \mathbf{0}_{iv} \\ \mathbf{0}_{ei} & \mathbf{M}_{ee} & \tilde{\mathbf{A}}_{ev} \\ \mathbf{0}_{vi} & \mathbf{0}_{ve} & \mathbf{M}_{vv} \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

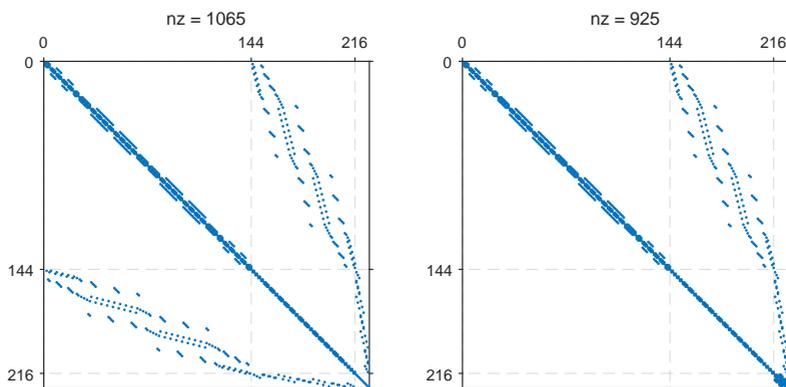
Já o lado direito $\tilde{\mathbf{q}}'$ da equação (5.6) é denominado como vetor independente modificado, sendo dado por:

$$\tilde{\mathbf{q}}' = \begin{bmatrix} \tilde{q}_i \\ \tilde{q}'_e \\ \tilde{q}'_v \end{bmatrix}. \quad (5.8)$$

A matriz \mathbf{M}_{mswc} é obtida a partir de $\tilde{\mathbf{A}}$ ao desconsiderar-se a contribuição dos volumes de interior “i” sobre a equação

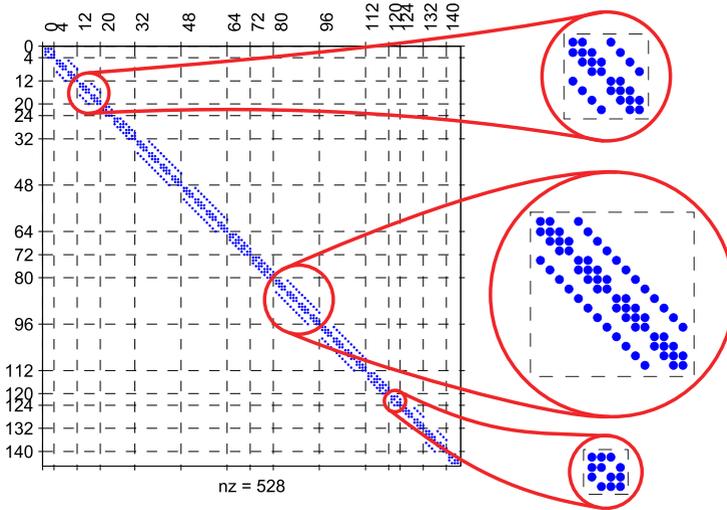
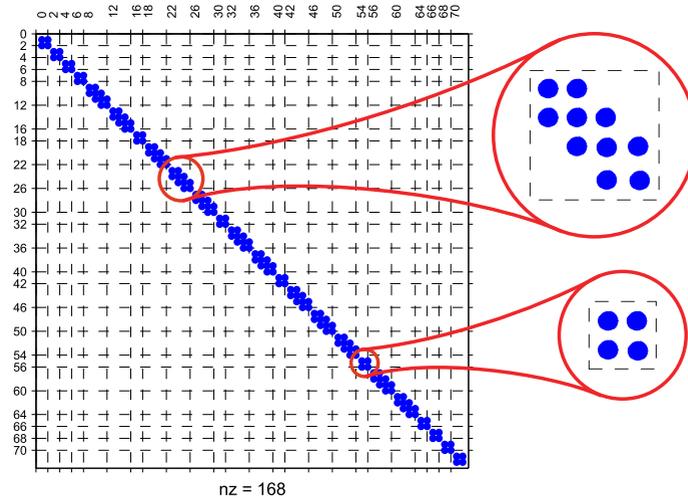
da conservação da massa referente aos volumes de aresta “e”, bem como a contribuição desses últimos à equação relativa aos volumes de vértice “v”, ou seja, $\tilde{\mathbf{A}}_{ei} = \mathbf{0}_{ei}$ e $\tilde{\mathbf{A}}_{ve} = \mathbf{0}_{ve}$. Na figura 16 verifica-se uma comparação entre as estruturas das matrizes $\tilde{\mathbf{A}}$ (à esquerda) e \mathbf{M}_{mswc} (à direita) exibidas pelo problema teste.

Figura 16 – Problema teste: estrutura da matriz de coeficientes reordenada, à esquerda, e da matriz que gera o pré-condicionador multiescala com funções de correção, à direita.



Nota-se que o número de elementos não nulos é reduzido para o segundo operador (de 1065 para 925, nesse caso). Além disso, a quebra das conexões provenientes dos volumes de interior em sentido aos de aresta, $\tilde{\mathbf{A}}_{ei}$, bem como desses últimos em sentido aos volumes de vértice, $\tilde{\mathbf{A}}_{ve}$, faz com que os problemas locais definidos em volumes duais distintos tornem-se desacoplados entre si. Isso pode ser visualizado claramente nas figuras 17 e 18 que mostram as estruturas das submatrizes $\tilde{\mathbf{A}}_{ii}$ e \mathbf{M}_{ee} , respectivamente.

Tal desacoplamento entre os problemas locais permite que sua resolução possa ser realizada de acordo com estratégias paralelas ou então que haja menor grau de preenchimento quando algum método de solução direto, como fatoração LU 3.2.1, é empregado.

Figura 17 – Problema teste: estrutura da matriz \mathbf{A}_{ij} .Figura 18 – Problema teste: estrutura da matriz \mathbf{M}_{ee} .

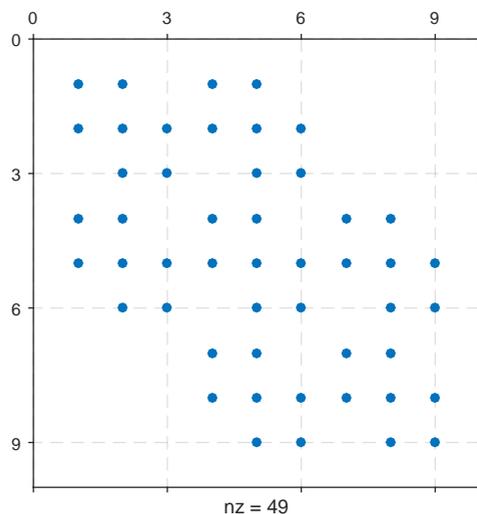
Como consequência da consideração $\tilde{\mathbf{A}}_{ei} = \mathbf{0}_{ei}$, a matriz $\tilde{\mathbf{A}}_{ee}$ precisa ser atualizada de modo que contribuições provenientes de volumes interiores sejam descartadas. Isso é realizado com a definição do operador de “problema reduzido”:

$$\mathbf{M}_{ee} = \tilde{\mathbf{A}}_{ee} + \text{diag} \left(\sum_i \tilde{\mathbf{A}}_{ie}^T \right), \quad (5.9)$$

em que o operador $\text{diag}()$ transforma um vetor em uma matriz diagonal.

A submatriz \mathbf{M}_{vv} , de dimensão $N_v \times N_v$, refere-se ao problema definido na malha primal ou grossa, já descrito na seção 4.2. Tal matriz também é referida como operador grosseiro ou global e pode ser construída algebricamente, o que será apresentado na seção 5.2. Como sua dimensão é muito menor que a dimensão de \mathbf{M}_{msuc} , é difícil de se visualizar claramente a estrutura dessa matriz na figura 16, portanto, ela é apresentada isoladamente na figura 19.

Figura 19 – Problema teste: estrutura da matriz $\tilde{\mathbf{M}}_{vv}$.



Aqui fica claro que o *stencil* do operador grosseiro no caso 2D é de 9 pontos, portanto, o cálculo da incógnita referente a um determinado volume de controle envolve as informações de seus vizinhos nas direções vertical, horizontal e também diagonal. Isso é semelhante ao observado para uma discretização através do método dos volumes finitos cujo cálculo dos fluxos através das fronteiras é realizado segundo um esquema baseado em múltiplos pontos - *Multipoint Flux Approximation* (MPFA) (AAVATSMARK, 2002; AMBRUS, 2009).

Por último, o vetor \tilde{q}' é obtido de \tilde{q} mediante as seguintes considerações:

- a) a componente \tilde{q}'_i é igual à \tilde{q}_i ;
- b) a componente \tilde{q}'_e é calculada a partir de \tilde{q}_e ao desprezar-se a componente normal de sua parcela gravitacional. Isso é induzido pela hipótese de localização empregada na definição das condições de contorno dos problemas duais (4.2);
- c) a componente \tilde{q}'_v é definida como o vetor independente do problema em nível grosseiro, apresentado na seção 4.2. A definição algébrica dessa componente é realizada na seção a seguir.

5.1 OPERADORES DE TRANSFERÊNCIA

A matriz \mathbf{M}_{msvc} tem formato bloco e triangular superior, isso permite que o sistema linear (5.6) possa ser resolvido através de um processo de substituição reversa em blocos, conduzindo à seguinte solução:

$$\tilde{p}'_v = \mathbf{M}_{vv}^{-1} \tilde{q}'_v; \quad (5.10a)$$

$$\tilde{p}'_e = -\mathbf{M}_{ee} \left(\tilde{\mathbf{A}}_{ev} \tilde{p}'_v - \tilde{q}'_e \right); \quad (5.10b)$$

$$\begin{aligned} \tilde{p}'_i &= -\tilde{\mathbf{A}}_{ii}^{-1} \left(\tilde{\mathbf{A}}_{ie} \tilde{p}'_e - \tilde{q}'_i \right) \\ &= \tilde{\mathbf{A}}_{ii}^{-1} \left[\tilde{\mathbf{A}}_{ie} \mathbf{M}_{ee}^{-1} \left(\tilde{\mathbf{A}}_{ev} \tilde{p}'_v - \tilde{q}'_e \right) - \tilde{q}'_i \right], \end{aligned} \quad (5.10c)$$

a qual pode ser expressa em formato matricial conforme:

$$\begin{bmatrix} \tilde{p}'_i \\ \tilde{p}'_e \\ \tilde{p}'_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{ii}^{-1} \tilde{\mathbf{A}}_{ie} \mathbf{M}_{ee}^{-1} \tilde{\mathbf{A}}_{ev} \\ -\mathbf{M}_{ee}^{-1} \tilde{\mathbf{A}}_{ev} \\ \mathbf{I}_{vv} \end{bmatrix} \tilde{p}'_v + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{ii}^{-1} & -\tilde{\mathbf{A}}_{ii}^{-1} \tilde{\mathbf{A}}_{ie} \mathbf{M}_{ee}^{-1} & \mathbf{0}_{iv} \\ \mathbf{0}_{ei} & \mathbf{M}_{ee}^{-1} & \mathbf{0}_{ev} \\ \mathbf{0}_{vi} & \mathbf{0}_{ve} & \mathbf{0}_{vv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{q}_i \\ \tilde{q}_e \\ \tilde{q}_v \end{bmatrix}. \quad (5.11)$$

Esta resposta motiva a definição de operadores lineares cuja combinação produz o pré-condicionador multiescala algébrico com funções de correção \mathbf{M}_{mswc}^{-1} . O primeiro deles é o operador de prolongação, dado por:

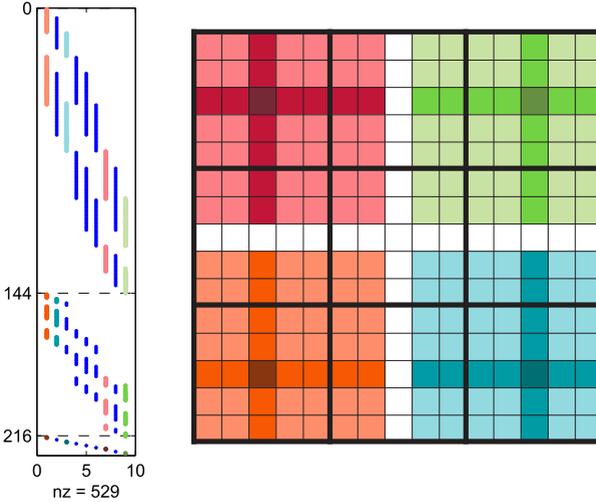
$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{ii}^{-1} \tilde{\mathbf{A}}_{ie} \mathbf{M}_{ee}^{-1} \tilde{\mathbf{A}}_{ev} \\ -\mathbf{M}_{ee}^{-1} \tilde{\mathbf{A}}_{ev} \\ \mathbf{I}_{vv} \end{bmatrix}. \quad (5.12)$$

Este é retangular de ordem igual a $N_f \times N_v$ e tem como objetivo a transferência de informações do nível grosso para o nível refinado. É interessante notar que as colunas dessa matriz possuem uma interpretação especial: a de índice “ i ” é formada pelo somatório das funções base duais que assumem valor unitário no centro do volume de mesmo índice referente à malha primal, ou seja:

$$\mathbf{P}e_i = \bigcup_j \phi_i^j. \quad (5.13)$$

O formato do operador de prolongação para o problema teste é apresentado à esquerda da figura 20. À sua direita ilustram-se os volumes da malha refinada que são abrangidos pelo processo de prolongação quando a informação considerada é proveniente dos volumes primais 1 (laranja), 3 (azul), 7 (vermelho) e 9 (verde).

Figura 20 – Problema teste: interpretação para as colunas da matriz \mathbf{P} .



A matriz quadrada de ordem $N_f \times N_f$ presente no segundo termo da equação (5.11) leva à definição do operador de correção

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{ii}^{-1} & -\tilde{\mathbf{A}}_{ii}^{-1} \tilde{\mathbf{A}}_{ie} \mathbf{M}_{ee}^{-1} & \mathbf{0}_{iv} \\ \mathbf{0}_{ei} & \mathbf{M}_{ee}^{-1} & \mathbf{0}_{ev} \\ \mathbf{0}_{vi} & \mathbf{0}_{ve} & \mathbf{0}_{vv} \end{bmatrix}, \quad (5.14)$$

o qual desempenha o papel das funções de correção apresentadas na seção 4.4. De fato, o termo $\mathbf{C}\tilde{\mathbf{q}}'$ é igual ao somatório das funções de correção referentes a cada um dos volumes de controle que formam a malha dual $\tilde{\Omega}^D$, isto é:

$$\mathbf{C}\tilde{\mathbf{q}}' = \sum_{j=1}^{N_D} \phi_j^*. \quad (5.15)$$

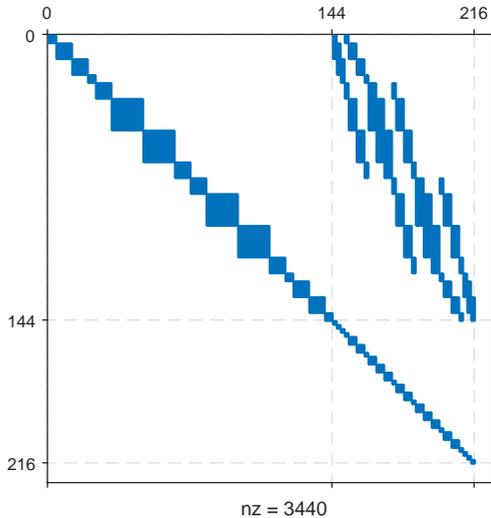
Ao contrário do operador de prolongação, o operador de correção não é formado explicitamente, pois isso envolveria o cálculo explícito de matrizes inversas, o que é muito caro computacionalmente e deve ser evitado. No pré-condicionador multiescala,

a matriz \mathbf{C} é empregada somente em operações matemáticas do tipo produto matriz/vetor, portanto, é suficiente o cálculo de sua ação sobre um vetor arbitrário, conforme:

$$\mathbf{C}\tilde{q}' = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{ii}^{-1} \left(\tilde{q}_i - \tilde{\mathbf{A}}_{ie} \mathbf{M}_{ee}^{-1} \tilde{q}'_e \right) \\ \mathbf{M}_{ee}^{-1} \tilde{q}'_e \\ \mathbf{0}_{vv} \end{bmatrix}. \quad (5.16)$$

A título de exemplificação, o formato do operador \mathbf{C} para o problema teste é mostrado na figura 21, em que é possível observar as incógnitas afetadas pela aplicação desse operador. Somente as submatrizes que se referem aos volumes de vértice são nulas, portanto, as incógnitas referentes a tais volumes são as únicas que não são afetadas pelo operador em questão.

Figura 21 – Problema teste: formato do operador de correção \mathbf{C} .



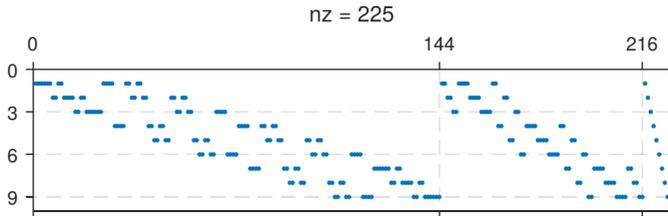
Por fim, define-se o operador de restrição \mathbf{R} , cujo objetivo consiste na transferência de informações do nível refinado para o grosseiro. Ou seja, este apresenta o papel inverso do operador de prolongação \mathbf{P} . O operador \mathbf{R} é representado por uma matriz retangular de ordem $N_v \times N_f$, a qual pode ser construída a partir

de duas estratégias distintas: a primeira é baseada em volumes finitos sendo que a matriz obtida é chamada de \mathbf{R}_{FV} , enquanto a segunda é baseada em elementos finitos, conduzindo à matriz \mathbf{R}_{FE} .

A primeira escolha traduz algebricamente o processo de restrição presente no método dos volumes finitos multiescala (MsFVM). Nesse caso, os volumes de controle da malha refinada que formam o mesmo volume de controle da malha primal contribuem de modo equivalente para a transferência de informação entre as duas malhas. Sua definição algébrica é dada pela equação (5.17), enquanto que seu formato para o problema teste é ilustrado na figura 22

$$(\mathbf{R}_{FV})_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o volume } j \text{ está contido em } \Omega_i; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5.17)$$

Figura 22 – Problema teste: operador de restrição \mathbf{R}_{FV} .



Enquanto o operador \mathbf{R}_{FV} está para o método dos volumes finitos multiescala, o operador \mathbf{R}_{FE} está para o método dos elementos finitos multiescala (MsFEM). Nesse caso, diz-se que o operador de restrição é do tipo *Galerkin* sendo dado pelo transposto do operador de prolongação, ou seja:

$$\mathbf{R}_{FE} = \mathbf{P}^T. \quad (5.18)$$

No operador \mathbf{R}_{FE} , pondera-se a contribuição de diferentes volumes de controle durante o processo de transferência de informação entre as malhas refinada e grosseira. Essa escolha conduz a pré-condicionadores multiescala eficientes em termos de

convergência numérica, no entanto, a propriedade de conservação da massa em ambos níveis grosseiro e refinado deixa de ser atendida.

Quando o operador \mathbf{R}_{FE} é utilizado para a construção do problema em nível grosso, uma estratégia comumente empregada para preservar a propriedade conservativa do campo de pressão em escala grosseira consiste em aplicar uma iteração do pré-condicionador multiescala algébrico baseado em volumes finitos na etapa de pós-processamento da solução. Desse modo, é possível também aplicar a estratégia de reconstrução do campo de velocidade a fim de obter um campo conservativo em escala refinada.

5.2 PROBLEMA NA MALHA GROSSA

Definidos os operadores de prolongação e correção, segue que a solução proposta pelo pré-condicionador multiescala com funções de correção \mathbf{M}_{msw}^{-1} (5.11) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\tilde{p} = \mathbf{P}\tilde{p}'_v + \mathbf{C}\tilde{q}' \quad (5.19)$$

Substituindo-se a equação (5.19) para \tilde{p} no sistema linear original reordenado (5.5), obtém-se o seguinte sistema para a variável \tilde{p}'_v :

$$\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{P}\tilde{p}'_v = (\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{C})\tilde{q}. \quad (5.20)$$

Como esse é um sistema retangular, multiplica-se ambos os lados pelo operador de restrição \mathbf{R} , gerando o seguinte problema de dimensão $N_v \times N_v$ em nível grosseiro:

$$\mathbf{M}_{vv}\tilde{p}'_v = \tilde{q}'_v, \quad (5.21)$$

sendo que

$$\mathbf{M}_{vv} = \mathbf{R}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{P} \quad (5.22)$$

denota a matriz de coeficientes e

$$\tilde{q}'_v = \mathbf{R}(\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{C})\tilde{q} \quad (5.23)$$

denota o vetor independente referente ao problema grosseiro.

5.3 DEFINIÇÃO DO PRÉ-CONDICIONADOR

Combinando-se as equações (5.19), (5.21), (5.22) e (5.23), o pré-condicionador multiescala algébrico com funções de correção \mathbf{M}_{mswc}^{-1} pode ser representado na seguinte forma compacta:

$$\mathbf{M}_{mswc}^{-1} = \mathbf{P} \left(\mathbf{R} \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{P} \right)^{-1} \mathbf{R} (\mathbf{I} - \mathbf{A} \mathbf{C}) + \mathbf{C}, \quad (5.24)$$

o qual após algumas manipulações algébricas pode ser reescrito como:

$$\mathbf{M}_{mswc}^{-1} = \mathbf{M}_{ms}^{-1} + \mathbf{C} - \mathbf{M}_{ms}^{-1} \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{C}, \quad (5.25)$$

em que \mathbf{M}_{ms}^{-1} é denominado simplesmente como pré-condicionador multiescala, sendo dado por:

$$\mathbf{M}_{ms}^{-1} = \mathbf{P} \left(\mathbf{R} \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{P} \right)^{-1} \mathbf{R}. \quad (5.26)$$

Quando o operador de restrição baseado em volumes finitos, \mathbf{R}_{FV} , é empregado para a construção pré-condicionador multiescala, obtém-se o pré-condicionador multiescala baseado em volumes finitos:

$$\mathbf{M}_{msfv}^{-1} = \mathbf{P} \left(\mathbf{R}_{FV} \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{P} \right)^{-1} \mathbf{R}_{FV}. \quad (5.27)$$

Por outro lado, quando o operador de restrição do tipo galerkin, \mathbf{R}_{FE} , é utilizado, obtém-se o pré-condicionador multiescala baseado em elementos finitos:

$$\mathbf{M}_{msfe}^{-1} = \mathbf{P} \left(\mathbf{P}^T \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{P} \right)^{-1} \mathbf{P}^T. \quad (5.28)$$

Ambos operadores \mathbf{M}_{ms}^{-1} e \mathbf{M}_{mswc}^{-1} não são formados explicitamente, pois, da mesma forma como explicado para o operador \mathbf{C} , é de interesse somente o cálculo de sua ação sobre um vetor arbitrário. Esse processo envolve claramente o cálculo da inversa da matriz \mathbf{M}_{vv} , o que é realizado diretamente através de fatoração LU 3.2.1, já que o tamanho desse sistema linear costuma ser pequeno. Além disso, a aplicação do operador de correção \mathbf{C} , presente no pré-condicionador \mathbf{M}_{mswc}^{-1} , envolve a resolução de

sistemas lineares definidos pelas matrizes $\tilde{\mathbf{A}}_{ii}$ e $\tilde{\mathbf{M}}_{ee}$, o que também é feito de modo direto. O código computacional desenvolvido no presente trabalho permite a resolução desses sistemas através de algum método iterativo, no entanto, foi verificado que para os problemas testados, a estratégia de solução direta mostrou-se mais eficiente.

Quando o pré-condicionador \mathbf{M}_{msw}^{-1} é utilizado em conjunto com o método iterativo de Richardson, o processo iterativo

$$\tilde{p}^{k+1} = \tilde{p}^k + \mathbf{M}_{msw}^{-1} (\tilde{q} - \tilde{\mathbf{A}}\tilde{p}^k) \quad (5.29)$$

pode ser dividido em dois estágios e visto da seguinte maneira:

$$\tilde{p}^{k+1/2} = \tilde{p}^k + \mathbf{C} (\tilde{q} - \tilde{\mathbf{A}}\tilde{p}^k); \quad (5.30a)$$

$$\tilde{p}^{k+1} = \tilde{p}^{k+1/2} + \mathbf{M}_{ms}^{-1} (\tilde{q} - \tilde{\mathbf{A}}\tilde{p}^{k+1/2}), \quad (5.30b)$$

em que o primeiro estágio é denominado como local e encarrega-se de atualizar a solução através das funções de correção, enquanto o segundo é denominado como global e tem como objetivo a atualização da solução por meio do operador multiescala. Nessa divisão fica claro que o pré-condicionador multiescala algébrico com funções de correção pode ser visto como uma combinação do tipo multiplicativa dos pré-condicionadores de correção \mathbf{C} e multiescala \mathbf{M}_{ms}^{-1} . Adiciona-se ainda que o primeiro estágio trabalha no nível refinado da malha e reduz as componentes do erro de alta frequência enquanto o segundo trabalha no nível grosseiro e reduz as componentes de baixa frequência.

Em problemas complexos, como aqueles que apresentam campos de permeabilidade anisotrópicos ou fortemente canalizados, [Hajibeygi, Karvounis e Jenny \(2011\)](#), [Wang \(2012\)](#) e [Wang, Hajibeygi e Tchelepi \(2014\)](#) descreveram em seus trabalhos que torna-se necessário a adição de um novo estágio local, também denominado como suavizador, ao pré-condicionador multiescala a fim de que este seja convergente. O trabalho pioneiro de [Hajibeygi, Karvounis e Jenny \(2011\)](#) avaliou estratégias de relaxação em linha (LR), enquanto que [Wang \(2012\)](#) empregou fatoração LU

incompleta em blocos (BILU)³, além da fatoração ILU tradicional em trabalho posterior, dando origem ao pré-condicionador AMS (WANG; HAJIBEYGI; TCHELEPI, 2014). O presente trabalho considera as duas últimas alternativas além de empregar também suavizadores simples baseados em sobre-relaxação sucessiva (SOR), bem como suavizadores mais robustos como aqueles baseados em Schwarz aditivo com resolução exata dos subproblemas locais.

Seja \mathbf{M}_l^{-1} a matriz de pré-condicionamento referente à estratégia de suavização considerada, conhecida também como a matriz de pré-condicionamento referente ao estágio local ou então simplesmente como pré-condicionador local. De modo geral, o pré-condicionador multiescala construído a partir dessa alternativa pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\tilde{p}^{k+1/2} &= \tilde{p}^k + \mathbf{M}_l^{-1} (\tilde{q} - \tilde{\mathbf{A}}\tilde{p}^k); \\ \tilde{p}^{k+1} &= \tilde{p}^{k+1/2} + \mathbf{M}_{ms}^{-1} (\tilde{q} - \tilde{\mathbf{A}}\tilde{p}^{k+1/2}),\end{aligned}\quad (5.31a)$$

em que o primeiro estágio é de suavização, enquanto o segundo refere-se à correção em nível global. Este último é identificado de modo genérico pelo operador \mathbf{M}_{ms}^{-1} , o qual deve ser substituído por \mathbf{M}_{msfv}^{-1} ou \mathbf{M}_{msfe}^{-1} , de acordo com a estratégia empregada para o operador de restrição.

Quando dois ou mais suavizadores são utilizados, aumenta-se proporcionalmente o número de estágios locais sendo que estes são combinados de modo multiplicativo, ou seja, a solução obtida no primeiro estágio é utilizada para o cálculo da solução referente ao segundo. A título de exemplo, considerando os suavizadores baseados em fatoração incompleta e funções de correção, obtém-se

³ Tal estratégia é equivalente ao uso do pré-condicionador Schwarz aditivo (AS) sem nenhuma sobreposição entre os problemas locais, os quais são resolvidos por uma única iteração do pré-condicionador baseado em fatoração LU incompleta.

o seguinte pré-condicionador:

$$\begin{aligned}\tilde{p}^{k+1/3} &= \tilde{p}^k + ILU(\tilde{\mathbf{A}}) \left(\tilde{q} - \tilde{\mathbf{A}}\tilde{p}^k \right); \\ \tilde{p}^{k+1/2} &= \tilde{p}^{k+1/3} + \mathbf{C} \left(\tilde{q} - \tilde{\mathbf{A}}\tilde{p}^{k+1/3} \right); \\ \tilde{p}^{k+1} &= \tilde{p}^{k+1/2} + \mathbf{M}_{ms}^{-1} \left(\tilde{q} - \tilde{\mathbf{A}}\tilde{p}^{k+1/2} \right),\end{aligned}\quad (5.32a)$$

que também pode ser representado compactamente da seguinte maneira:

$$\mathbf{M}_{mshs}^{-1} = \left[\mathbf{I} - \left(\mathbf{I} - ILU(\tilde{\mathbf{A}})\tilde{\mathbf{A}} \right) \left(\mathbf{I} - \mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}} \right) \left(\mathbf{I} - \mathbf{M}_{ms}^{-1}\tilde{\mathbf{A}} \right) \right] \tilde{\mathbf{A}}^{-1}. \quad (5.33)$$

Nota-se que os diferentes parâmetros discutidos até agora para a definição do pré-condicionador multiescala não conduzem à estratégias simétricas, já que os estágios do pré-condicionador são executados num único sentido. No entanto, durante a resolução de problemas simétricos, como os considerados nesse trabalho, é desejável o uso de pré-condicionadores que apresentem também tal característica. Isso viabiliza o uso de *solvers* iterativos voltados para tal classe de problemas como o método do gradiente conjugado, o qual apresenta a vantagem de requerer menor quantidade de espaço para o armazenamento dos vetores e matrizes envolvidos em seu algoritmo em relação a outros métodos comumente utilizados para problemas não-simétricos como o GMRes.

Com o intuito de tornar simétrico o pré-condicionador multiescala, faz-se com que seus estágios locais sejam executados antes e após a aplicação de seu estágio global. Essa ideia é justamente a empregada pelos pré-condicionadores *multigrid* com ciclo V. Uma segunda consideração necessária para que a característica de simetria seja observada consiste no fato de empregarem-se suavizadores simétricos em conjunto com o operador global \mathbf{M}_{msfe}^{-1} , já que o \mathbf{M}_{msfv}^{-1} não atende a característica desejada.

5.4 RECONSTRUÇÃO DO CAMPO DE VELOCIDADES

A reconstrução do campo de velocidades apresentada para o método dos volumes finitos multiescala na seção 4.3 também

está presente no pré-condicionador multiescala algébrico. A justificativa para esse processo é a mesma de antes: o campo de velocidades calculado a partir do campo de pressão resolvido por tal pré-condicionador é descontínuo nas fronteiras dos volumes de controle duais, portanto deseja-se encontrar uma correção para o campo de pressão que conduza a um campo de velocidade contínuo e que, por conseguinte, represente uma solução conservativa para o balanço de massa no nível refinado de malha.

Como as fronteiras dos volumes de controle primais estão contidas no interior dos volumes de controle da malha dual, segue que o campo de velocidade já é contínuo através nessas regiões. Tal informação pode ser empregada para a especificação de condições de contorno de fluxo prescrito (*Neumann*) em problemas locais definidos nos volumes de controle da malha primal. O único pré-requisito para tanto é que o campo de pressão obtido em malha grosseira seja conservativo, o que pode ser alcançado desde que o pré-condicionador multiescala empregue o operador \mathbf{R}_{FV} no último passo do processo iterativo.

Para a reconstrução do campo de velocidades, define-se um novo operador de permutação $\hat{\mathbf{Q}}$ que substitui o ordenamento lexicográfico observado na malha refinada por um ordenamento do mesmo tipo, porém, definido localmente de acordo com os volumes de controle da malha primal. Desse modo, o sistema linear (5.1) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\hat{\mathbf{A}}\hat{p} = \hat{q}, \quad (5.34)$$

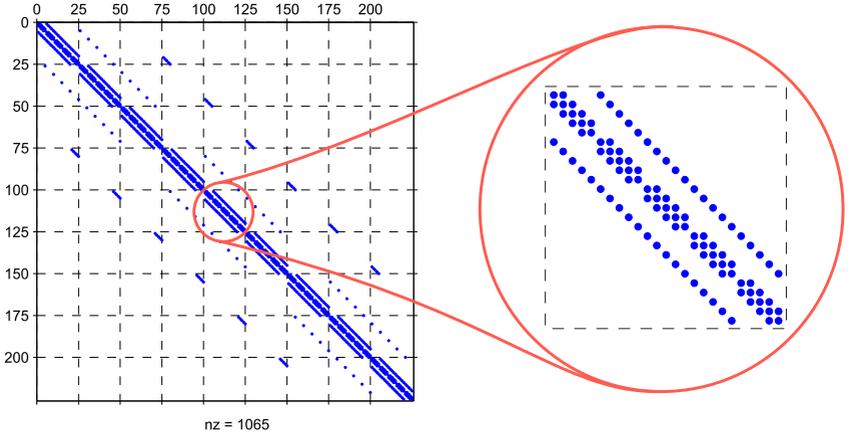
em que $\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{Q}}\mathbf{A}\hat{\mathbf{Q}}^T$ denota a matriz de coeficientes reordenada, a qual pode ser verificada na figura 23 para o problema teste.

Tal matriz pode ser decomposta da seguinte forma:

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U}, \quad (5.35)$$

em que \mathbf{D} é uma matriz diagonal composta por “ N_C ” blocos⁴ contendo as transmissibilidades relativas aos volumes da malha

⁴ Estes apresentam estrutura pentadiagonal no caso de problemas bidimensionais ou heptadiagonal no caso de problemas tridimensionais.

Figura 23 – Problema teste: estrutura da matriz $\hat{\mathbf{A}}$.

refinada que os compõem, enquanto que \mathbf{L} e \mathbf{U} são matrizes triangulares inferior e superior, respectivamente, que incluem as conexões entre volumes da malha refinada pertencentes a volumes primais distintos.

Desse modo, os problemas locais definidos nos volumes de controle da malha primal podem ser expressos da seguinte maneira:

$$\mathbf{D}'\hat{p} = \hat{q} - (\hat{\mathbf{A}} - \mathbf{D}')\hat{\mathbf{Q}}\tilde{\mathbf{Q}}^T p', \quad (5.36)$$

em que o segundo termo do lado direito representa o fluxo através das fronteiras dos volumes de controle da malha primal. Nesse termo, p' é a pressão obtida pela aplicação do método iterativo associado ao pré-condicionador multiescala. Como tal variável é expressa no ordenamento *wirebasket*, ela precisa ser multiplicada pelas matrizes de permutação $\hat{\mathbf{Q}}$ e $\tilde{\mathbf{Q}}^T$ a fim de que seja representada no novo ordenamento. Por fim, a matriz \mathbf{D}' consiste em uma correção da matriz \mathbf{D} necessária por conta da especificação desses fluxos, a qual é dada por:

$$\mathbf{D}' = \mathbf{D} + \text{diag} \left[\sum_i (L_{ij} + U_{ij}) \right]. \quad (5.37)$$

Após o cálculo do novo campo de pressão \hat{p} , o campo de velocidades reconstruído pode ser encontrado pela aplicação da equação de Darcy (2.3).

6 RESULTADOS

Nesse capítulo, apresentam-se aspectos matemáticos e computacionais referentes a diferentes estratégias para a solução de problemas elípticos presentes na simulação de reservatórios. Enfoque maior é dado às estratégias de pré-condicionamento para métodos iterativos visando a obtenção de soluções precisas e também aproximadas dos problemas tratados. Considera-se, em especial, como os parâmetros de configuração relativos ao pré-condicionador multiescala influenciam na qualidade dessa estratégia. Desse modo busca-se a melhor combinação possível em termos de eficiência e robustez do pré-condicionador.

Consideram-se quatro problemas teste comumente empregados para a avaliação de novas estratégias de solução. Os campos de permeabilidade da rocha-reservatório empregados por tais casos são altamente heterogêneos, ou seja, apresentam variações de cinco ou mais ordens de grandeza ao longo do espaço. Tal característica conduz a sistemas lineares com elevados graus de mal condicionamento, o que consiste em um grande desafio para a resolução eficiente desses sistemas através de métodos iterativos bem como para a resolução exata através de métodos diretos, devido à resolução limitada apresentada pela máquina na representação dos números.

Do ponto de vista matemático, serão mostradas a variação dos resíduos preconditionado e real ao longo das iterações, bem como o espectro aproximado do operador pré-condicionado $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}$ quando o método de solução adotado for iterativo. Já do ponto de vista computacional, serão apresentadas informações detalhadas a respeito do tempo e da quantidade de memória RAM necessárias para a resolução de sistemas lineares. Em conjunto, tais resultados permitem avaliar a qualidade da estratégia de solução.

Os métodos de solução diretos abordados nesse trabalho são apresentados na tabela 1.

Considerando-se os métodos iterativos, estes são formados

¹ Pacote descrito por [Davis \(2004\)](#).

² Pacote descrito por [Li e Demmel \(2003\)](#).

³ Pacote descrito por [Agullo et al. \(2015\)](#).

Tabela 1 – Métodos de solução diretos.

<i>Solver</i>	Pacote
LU	UMFPACK ¹
LU	SUPERLU ²
LU	MUMPS ³
Cholesky	UMFPACK
Cholesky	MUMPS

Tabela 2 – Pré-condicionadores padrão.

Pré-condicionador	Pacote
BoomerAMG (Multigrid)	HYPRE ⁴
GAMG (Multigrid)	PETSc
ILU	PETSc
ParaSails	HYPRE
SSOR	PETSc
SOR	PETSc

pela combinação de um *solver* iterativo com um pré-condicionador. Consideram-se duas opções para o *solver*: método do gradiente conjugado 3.2.4, empregado quando o operador pré-condicionado é simétrico, ou método dos resíduos mínimos generalizados 3.2.3, voltado para o caso não-simétrico. Com relação aos pré-condicionadores, as escolhas utilizadas a título de comparação são mostradas na tabela 2.

Os pré-condicionadores da classe multiescala avaliados nesse trabalho são compostos por dois estágios, global ou local, que podem ser combinados de modo multiplicativo não-simétrico ou simétrico. Sejam \mathbf{M}_g^{-1} a parcela do pré-condicionador referente ao estágio global e \mathbf{M}_l^{-1} a parcela referente ao estágio local.

⁴ Pacote descrito por [Falgout e Yang \(2002\)](#).

Quando combinadas de modo multiplicativo não-simétrico, o seguinte pré-condicionador é obtido

$$\mathbf{M}_{NS}^{-1} = \mathbf{M}_l^{-1} + \mathbf{M}_g^{-1} - \mathbf{M}_g^{-1} \mathbf{A} \mathbf{M}_l^{-1}. \quad (6.1)$$

Por outro lado, quando os estágios local e global são combinados de modo multiplicativo simétrico, o seguinte pré-condicionador é obtido

$$\mathbf{M}_S^{-1} = \mathbf{M}_l^{-1} + \left[\mathbf{M}_l^{-1} \left(\mathbf{I} - \mathbf{A} \mathbf{M}_g^{-1} \right) + \mathbf{M}_g^{-1} \right] \left(\mathbf{I} - \mathbf{A} \mathbf{M}_l^{-1} \right). \quad (6.2)$$

As escolhas avaliadas para a configuração do pré-condicionador multiescala algébrico são listadas na tabela 3.

6.1 CASO 1: MONOFÁSICO 2D

O primeiro problema teste consiste no escoamento monofásico de água através de um reservatório com geometria quadrada de dimensões $4096 \text{ m} \times 4096 \text{ m}$ e discretizado por uma malha cartesiana de dimensões 512×512 , totalizando 262144 incógnitas. O reservatório é impermeável e contém dois poços de raio $r_w = 0.1 \text{ m}$ dispostos de acordo com o padrão clássico: um quarto de *five-spot*. O primeiro deles é injetor, opera na condição de pressão prescrita igual a 300 bar e está localizado na posição $(x, y) = (268, 268) [\text{m}]$; enquanto que o segundo é produtor, opera na condição de pressão prescrita igual a 10 bar e está localizado na posição $(x, y) = (3828, 3828) [\text{m}]$.

O campo de permeabilidade da rocha-reservatório é bastante heterogêneo variando em seis ordens de grandeza entre $1.0 \times 10^{-1} \text{ mD}$ até $1.0 \times 10^5 \text{ mD}$. Assim como os demais campos de permeabilidade utilizados nesse trabalho, este foi obtido a partir de um software de geostatística fornecido pela universidade de *Maryland* (KOZINTSEV; KEDEM, 1999) de acordo com uma

⁵ Os problemas definidos nos subdomínios são resolvidos aproximadamente com uma única iteração de ILU(0)-Richardson.

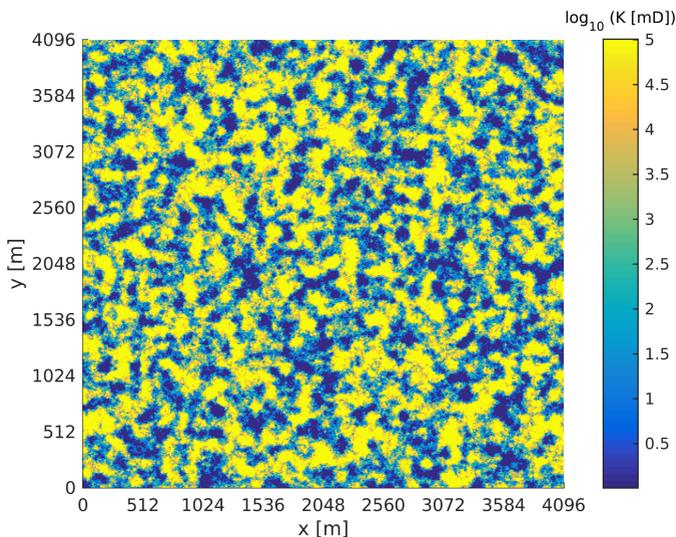
⁶ Os problemas definidos nos subdomínios são resolvidos exatamente pelo *solver* Cholesky-UMFPACK.

Tabela 3 – Pré-condicionadores do tipo multiescala.

Nome	Estágio global	Estágio local	Comb.
MsFVwc	\mathbf{M}_{msfv}^{-1} (5.27)	\mathbf{C} (5.14)	NS
MsFVsor1	\mathbf{M}_{msfv}^{-1} (5.27)	\mathbf{M}_{sor}^{-1} (3.15) (1 it.)	NS
MsFVsor2	\mathbf{M}_{msfv}^{-1} (5.27)	\mathbf{M}_{sor}^{-1} (3.15) (2 it.)	NS
MsFVilu0	\mathbf{M}_{msfv}^{-1} (5.27)	\mathbf{M}_{ilu0}^{-1}	NS
MsFVilu1	\mathbf{M}_{msfv}^{-1} (5.27)	\mathbf{M}_{ilu1}^{-1}	NS
MsFV3	\mathbf{M}_{msfv}^{-1} (5.27)	$\mathbf{C} + \mathbf{M}_{sor}^{-1} - \mathbf{CAM}_{sor}^{-1}$	NS
MsFV3sym	\mathbf{M}_{msfv}^{-1} (5.27)	$\mathbf{C} + \mathbf{M}_{sor}^{-1} - \mathbf{CAM}_{sor}^{-1}$	S
MsFVHS	\mathbf{M}_{msfv}^{-1} (5.27)	\mathbf{M}_{AS1}^{-1} ⁵ (3.26)	NS
MsFVHSe	\mathbf{M}_{msfv}^{-1} (5.27)	\mathbf{M}_{AS1}^{-1} ⁶ (3.26)	NS
MsFEwc	\mathbf{M}_{msfe}^{-1} (5.28)	\mathbf{C} (5.14)	NS
MsFEsor1	\mathbf{M}_{msfe}^{-1} (5.28)	\mathbf{M}_{sor}^{-1} (3.15) (1 it.)	NS
MsFEsor1sym	\mathbf{M}_{msfe}^{-1} (5.28)	\mathbf{M}_{ssor}^{-1} (3.16) (1 it.)	S
MsFEsor2	\mathbf{M}_{msfe}^{-1} (5.28)	\mathbf{M}_{sor}^{-1} (3.15) (2 it.)	NS
MsFEsor2sym	\mathbf{M}_{msfe}^{-1} (5.28)	\mathbf{M}_{ssor}^{-1} (3.16) (2 it.)	S
MsFEilu0	\mathbf{M}_{msfe}^{-1} (5.28)	\mathbf{M}_{ilu0}^{-1}	NS
MsFEilu1	\mathbf{M}_{msfe}^{-1} (5.28)	\mathbf{M}_{ilu1}^{-1}	NS
MsFE3	\mathbf{M}_{msfe}^{-1} (5.28)	$\mathbf{C} + \mathbf{M}_{sor}^{-1} - \mathbf{CAM}_{sor}^{-1}$	NS
MsFE3sym	\mathbf{M}_{msfe}^{-1} (5.28)	$\mathbf{C} + \mathbf{M}_{sor}^{-1} - \mathbf{CAM}_{sor}^{-1}$	S
MsFEHS	\mathbf{M}_{msfe}^{-1} (5.28)	\mathbf{M}_{AS1}^{-1} (3.26)	NS
MsFEHSe	\mathbf{M}_{msfe}^{-1} (5.28)	\mathbf{M}_{AS1}^{-1} (3.26)	NS
MsFEHSesym	\mathbf{M}_{msfe}^{-1} (5.28)	\mathbf{M}_{AS1}^{-1} (3.26)	S
MsFEHS3e	\mathbf{M}_{msfe}^{-1} (5.28)	$\mathbf{C} + \mathbf{M}_{AS1}^{-1} - \mathbf{CAM}_{AS1}^{-1}$	NS

função de covariância esférica. O resultado obtido é ilustrado na figura 24.

Figura 24 – Caso 1: campo de permeabilidade.



6.1.1 Solução aproximada

Avalia-se primeiramente o uso do pré-condicionador multiescala conforme o papel de técnica de *upscaling*. Isto é, a solução do problema original é obtida aproximadamente através da resolução do sistema linear induzido pela simples aplicação do pré-condicionador multiescala. Nesse âmbito, consideram-se as estratégias para a configuração do problema global do pré-condicionador.

- a) MsFVM;
- b) MsFEM;

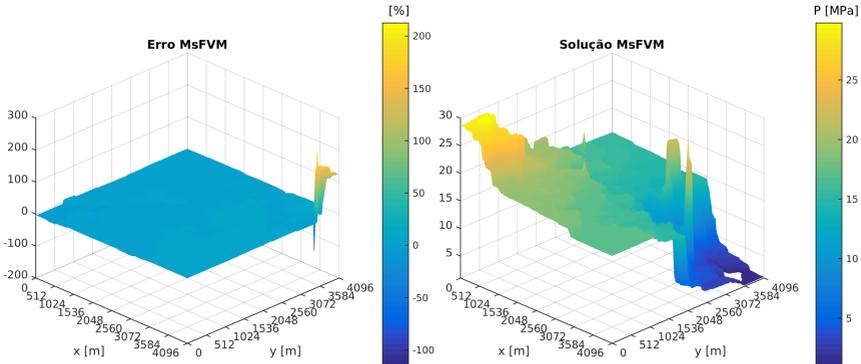
Em cada uma das alternativas apresentadas é necessário a especificação do tamanho do problema grosseiro, sendo que, no caso teste em questão, empregam-se os tamanhos 16×16 , 32×32 e 64×64 . Estes são referentes às razões de engrossamento iguais

a 32×32 , 16×16 e 8×8 . Chamando-se de “ x ” a solução exata para o campo de pressão e “ x^{ms} ”, a solução aproximada através do método multiescala, define-se o error relativo entre essas duas soluções como o vetor “ e ” de componentes:

$$e_i = 100 \times \frac{(x_i - x_i^{ms})}{x_i}. \quad (6.3)$$

Considerando-se inicialmente a estratégia MsFVM, conhecida na literatura como o método dos volumes finitos multiescala, apresentam-se nas figuras 25 até 27 os gráficos do erro, à esquerda, e da solução aproximada, à direita, ao longo do reservatório de acordo com as escolhas citadas para o tamanho do problema global.

Figura 25 – Caso 1: solução MsFVM-16x16.



Em todos os três casos apresentados, nota-se que a solução proposta pelo MsFVM apresenta certa semelhança em relação a solução de referência uma vez que o gráfico do erro relativo é próximo à zero, exceto nas regiões do poço produtor e em outras pequenas ao longo do domínio. Observa-se também que a qualidade da solução aproximada aumenta conforme o tamanho do problema global cresce. No entanto, a solução aproximada exhibe oscilações que não representam corretamente a física do problema.

Figura 26 – Caso 1: solução MsFVM-32x32.

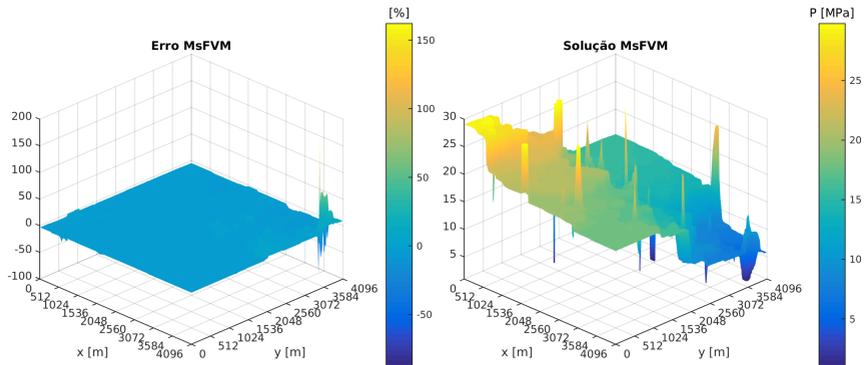
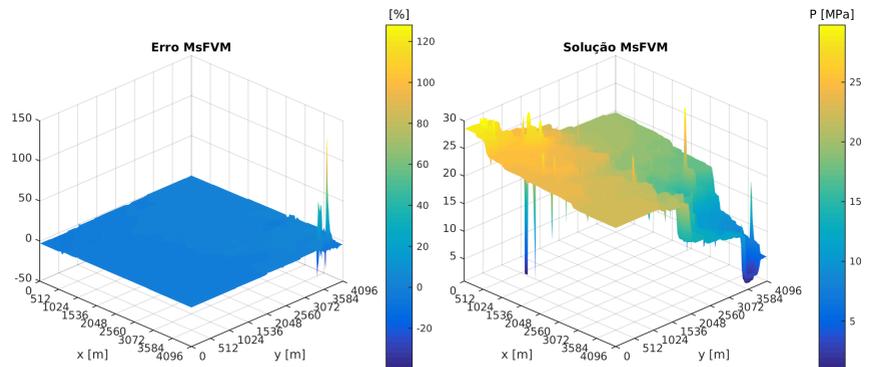


Figura 27 – Caso 1: solução MsFVM-64x64.



Tais anomalias são pontos de máximo e mínimo locais⁷ no campo de pressão desrespeitando o critério de monotonicidade, que deveria ser verificado já que o problema em questão é modelado por uma equação de caráter elíptico. Isso acontece porque, do ponto de vista matemático, a matriz que define o problema global é indefinida. Trabalhos desenvolvidos recentemente buscaram corrigir tal matriz de modo a torná-la positivo definida e fazer com que o critério de monotonicidade seja atendido, pode-se citar como exemplo disso o método dos volumes multiescala monotônico (WANG; HAJIBEYGI; TCHELEPI, 2014).

Uma característica importante do MsFVM consiste na obtenção de campos de velocidade conservativos, isto é, que satisfazem a equação da conservação da massa. As linhas de corrente calculadas através do algoritmo de Pollock (POLLOCK, 1988) de acordo com o campo de velocidade aproximado pela alternativa MsFVM-64x64 são ilustradas em roxo na figura 28. Nota-se que o resultado obtido faz sentido fisicamente, pois as linhas ligam os poços injetor e produtor através dos caminhos de alta permeabilidade, representados em amarelo na figura.

Considera-se agora a estratégia do tipo *galerkin* denominada MsFEM. Do mesmo modo que anteriormente, analisa-se como o tamanho do problema global afeta a qualidade da solução obtida. Para tanto, as figuras 29 a 31 ilustram o erro entre as soluções exata e aproximada bem como a própria solução aproximada obtida pelo MsFEM variando-se o tamanho do problema global de acordo com as mesmas alternativas anteriores.

Assim como no caso anterior, a qualidade da solução aproximada pelo MsFEM aumenta a medida que o tamanho do problema em nível grosseiro cresce. As soluções em questão tem qualidade superior às obtidas pelo MsFVM uma vez que não há pontos de máximo ou mínimo locais espalhados ao longo do domínio em regiões não previstas. Segue que o MsFEM conduz a respostas que obedecem ao critério de monotonicidade, o que representa uma vantagem em relação ao MsFVM, no entanto,

⁷ As únicas posições do domínio onde isso é previsto de ocorrer são aquelas ocupadas pelos poços.

Figura 28 – Caso 1: linhas de corrente para a solução MsFVM-64x64.

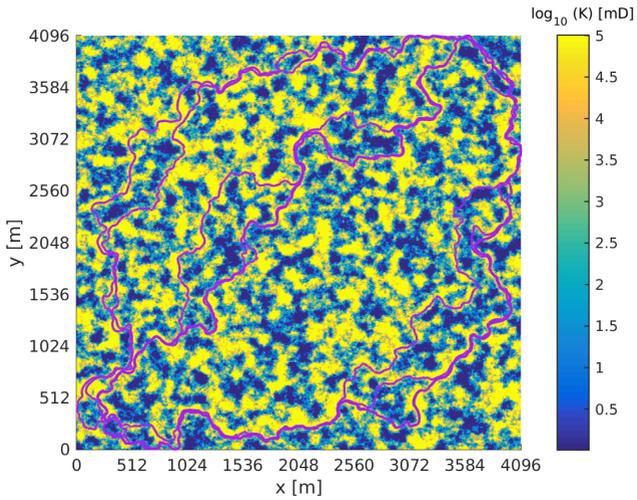


Figura 29 – Caso 1: solução MsFEM-16x16.

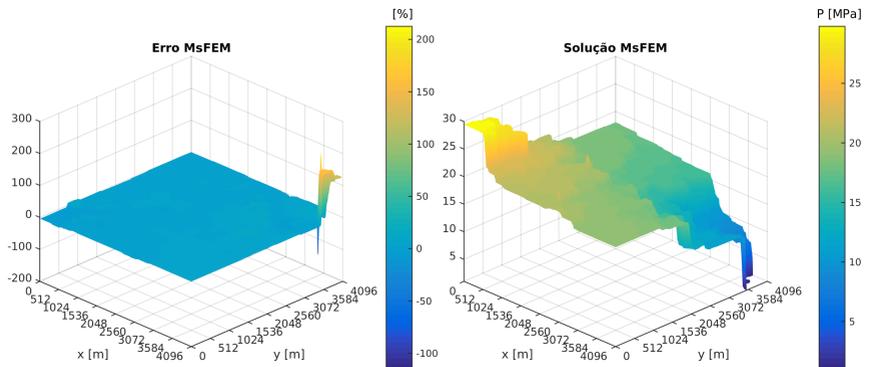


Figura 30 – Caso 1: solução MsFEM-32x32.

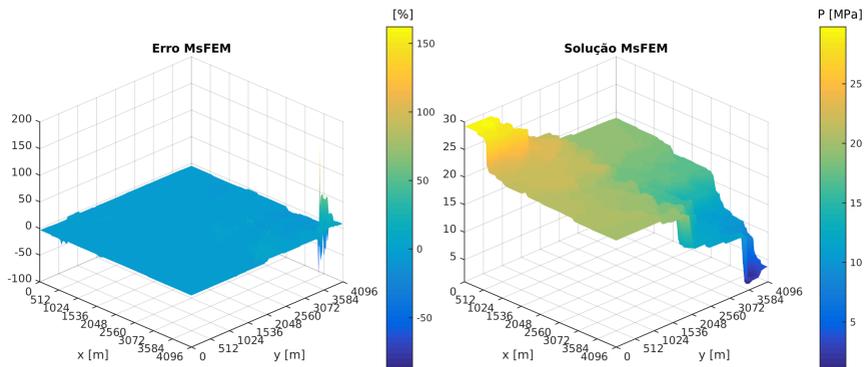
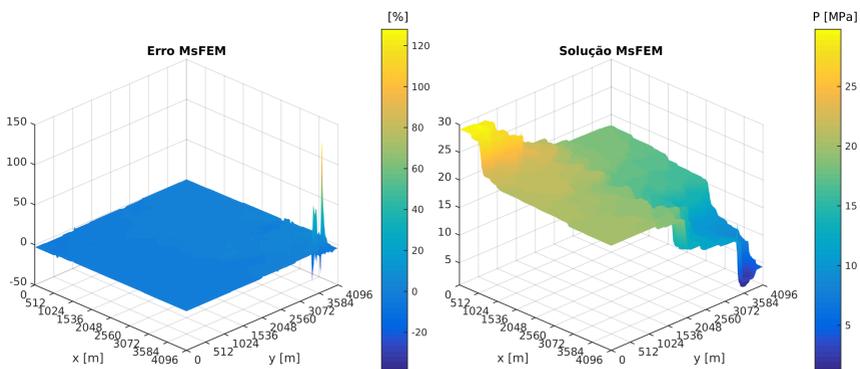


Figura 31 – Caso 1: solução MsFEM-64x64.



o campo de velocidade obtido não é conservativo, o que dificulta a resolução de equações hiperbólicas no caso de escoamento multifásico.

Como o problema tratado não apresenta efeitos gravitacionais e os poços estão localizados em volumes de controle do tipo de vértice, segue que os resultados obtidos pelos pré-condicionadores MsFVMwc e MsFEMwc são exatamente iguais aos obtidos pelas escolhas MsFVM e MsFEM. Ou seja, as funções de correção não desempenham função alguma nesse caso, portanto, seus resultados são omitidos.

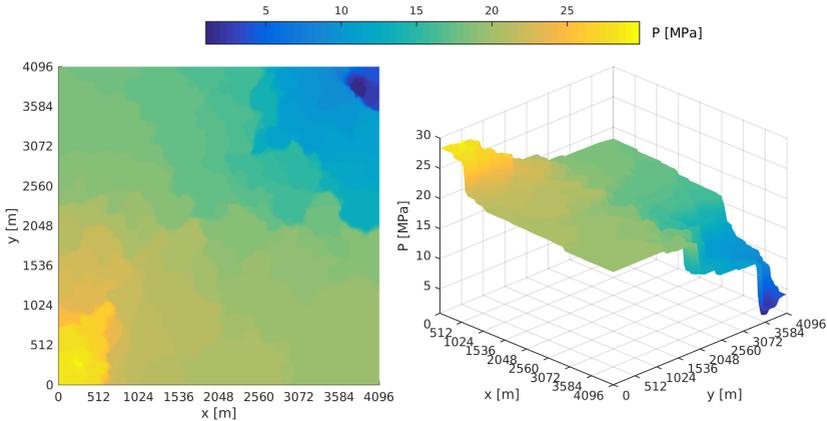
Quando soluções para o campo de pressão com maior grau de precisão são exigidas, é necessário modificar o método de resolução do sistema linear original. Para tanto pode-se recorrer a métodos de solução diretos ou iterativos. Nesse último caso, especialmente, diversas escolhas de parâmetros para a configuração do pré-condicionador multiescala podem ser formadas de modo que o operador resultante auxilie no processo de convergência dos métodos iterativos. Esta abordagem é considerada nas duas seções a seguir.

6.1.2 Métodos diretos

Considera-se nessa seção o uso dos métodos diretos listados na tabela 1 na resolução do problema em questão. A opção mais eficiente será escolhida como o método direto de referência a ser comparado com as estratégias iterativas. É importante lembrar que as soluções obtidas pelos métodos diretos são todas semelhantes sendo que a diferença observada entre elas é da ordem da precisão da máquina. A figura 32 ilustra o campo de pressão obtido com a resolução exata do problema. Nota-se que o campo de pressão varia de modo não-uniforme ao longo do domínio, o que era esperado já que o campo de permeabilidade da rocha é heterogêneo

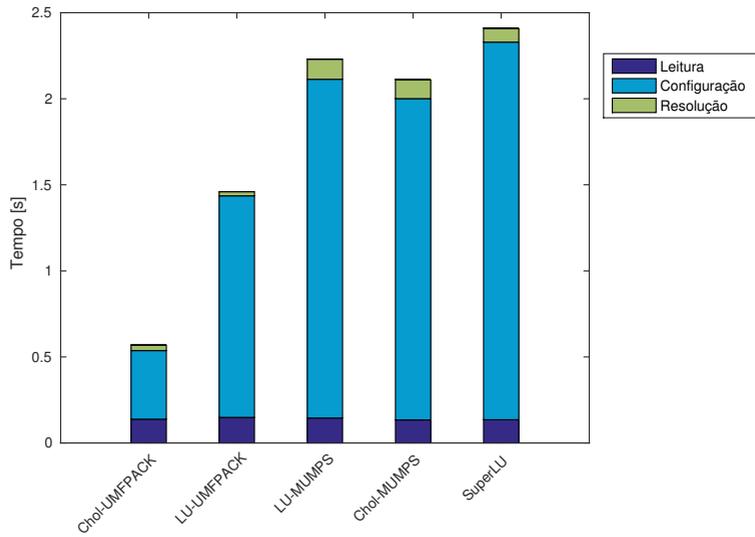
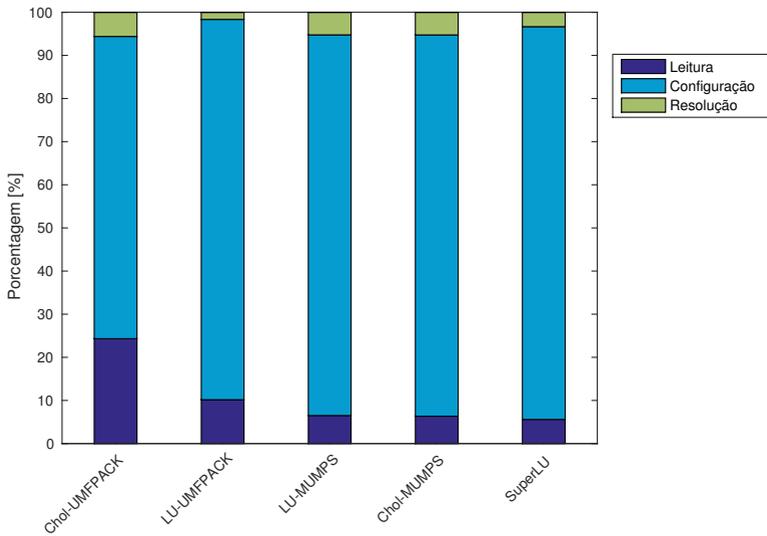
A figura 33 mostra o tempo de computação necessário para a execução de cada um dos métodos diretos listados na tabela 1. A porção de cada barra em azul escuro refere-se ao tempo de leitura do sistema linear; em azul claro tem-se o tempo de configuração

Figura 32 – Caso 1: campo de pressão.



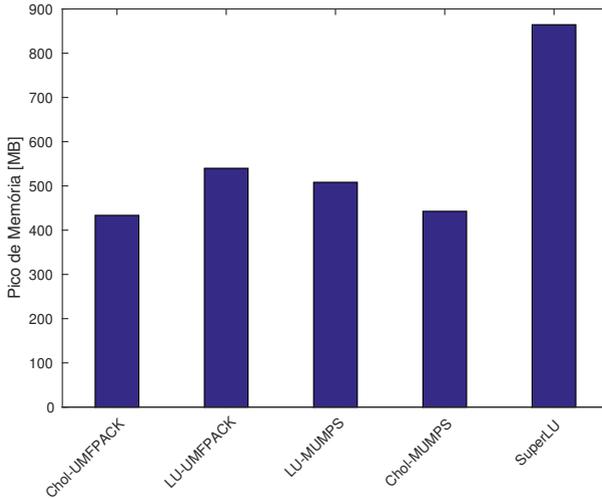
do método direto (obtenção dos fatores L e U) e em verde tem-se o tempo de resolução dos sistemas lineares conforme descrito pelo algoritmo 1. A figura 34 mostra essas mesmas informações normalizadas em relação ao tempo de execução total. Observa-se que a fatoração Cholesky realizada pelo pacote UMFPACK apresenta o menor tempo de computação, portanto esta é tomada como a estratégia de referência para a solução do problema em questão. Nota-se também que a maior parcela de tempo para a execução desses métodos refere-se à parcela de configuração, o que já era esperado uma vez que a etapa de resolução envolve apenas sistemas triangulares e portanto toma pouco tempo.

A figura 35 mostra o pico de memória RAM utilizado durante a execução de cada um dos métodos diretos listados na tabela 1. Esta informação foi obtida através da ferramenta *massif* contida no programa de instrumentação de códigos computacionais chamado Valgrind (NETHERCOTE; SEWARD, 2007). Observa-se novamente que a fatoração Cholesky realizada pelo pacote UMFPACK apresenta o menor uso de memória, praticamente empatado com a mesma fatoração implementada pelo pacote MUMPS. Isso confirma o uso de Cholesky-UMFPACK

Figura 33 – Caso 1: tempo dos *solvers* diretos.Figura 34 – Caso 1: etapas dos *solvers* diretos.

como o método de referência.

Figura 35 – Caso 1: uso de memória pelos *solvers* diretos.



6.1.3 Métodos iterativos

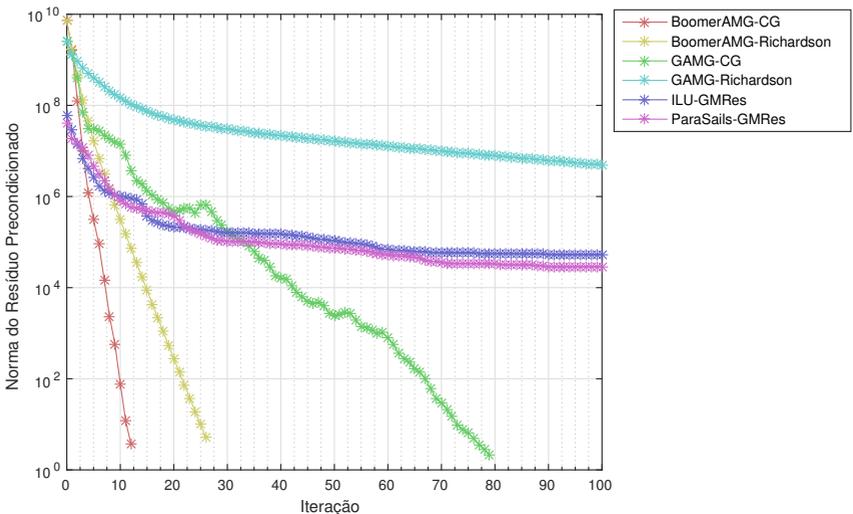
Considera-se agora o desempenho dos métodos de solução iterativos. Estes são compostos pela escolha de um *solver* iterativo e um pré-condicionador. O critério de convergência adotado consiste em dois parâmetros: o primeiro é o número máximo de iterações que não deve exceder 100; o segundo critério consiste na relação entre as normas do resíduo pré-condicionado avaliada nas iterações k e inicial, tal parâmetro deve ser igual a $1E - 9$, fazendo com que a solução convergida seja suficientemente próxima à solução obtido pelos métodos diretos.

Três opções são consideradas para os *solvers* iterativos:

1. Método de Richardson [3.2.2](#).
2. Método dos gradientes conjugados [3.2.4](#);
3. Método do resíduo mínimo generalizado [3.2.3](#).

Já as alternativas possíveis de pré-condicionadores são bem mais vastas, conforme listadas nas tabelas 2 e 3. Considerando-se inicialmente as estratégias de referência, que são descritas na primeira tabela, os gráficos da variação do resíduo pré-condicionado $r^k = b - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}x^k$ e do resíduo real $r^k = b - \mathbf{A}x^k$ são apresentados nas figuras 36 e 37.

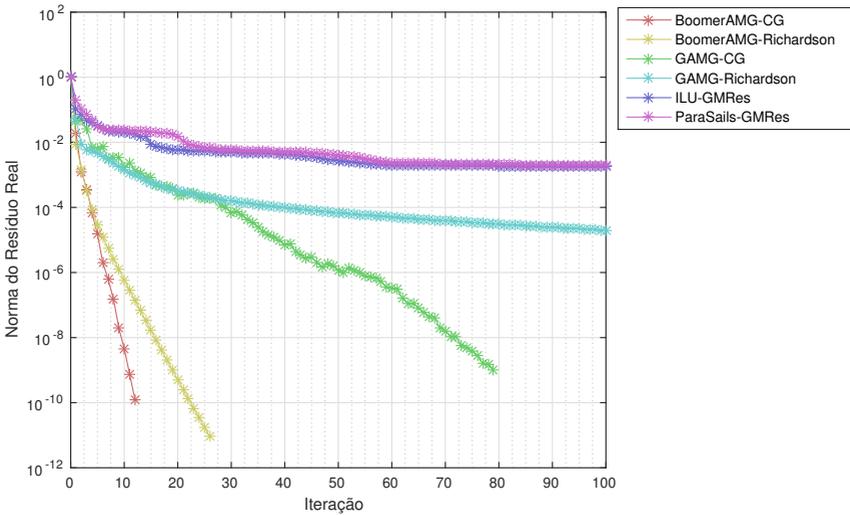
Figura 36 – Caso 1: convergência dos métodos iterativos de referência.



Nota-se que o método iterativo de melhor desempenho matemático é o BoomerAMG-CG pois converge em apenas 11 iterações. É interessante observar também que se o mesmo pré-condicionador (BoomerAMG) é utilizado em conjunto com o solver Richardson⁸, a taxa de convergência do método iterativo resultante é praticamente a metade daquela referente à estratégia BoomerAMG-CG. O pré-condicionador multigrid baseado em aglomeração suavizada GAMG conduz a métodos iterativos menos

⁸ No jargão de métodos numéricos, diz-se nesse caso que o pré-condicionador multigrid BoomerAMG está sendo utilizado como o *solver* iterativo do problema.

Figura 37 – Caso 1: convergência dos métodos iterativos de referência.



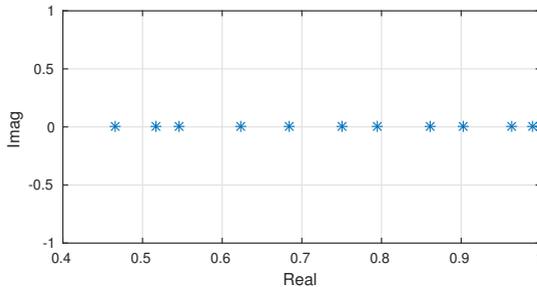
eficientes que os anteriores. Nos métodos construídos por esses pré-condicionadores é ainda mais evidente a diferença entre o desempenho dos *solvers* Richardson e CG, sendo que, no primeiro caso, o método resultante é praticamente estagnado após 50 iterações. Por último, observa-se que os pré-condicionadores ILU e ParaSails conduzem à métodos iterativos bastante ineficientes que estagnam após poucas iterações, isso já era previsível pois apesar de serem robustos, tais pré-condicionadores não são muito aconselháveis para a resolução de problemas elípticos.

Considerando ainda as figuras 36 e 37, é interessante observar os valores usuais das normas dos resíduos pré-condicionado e real: apesar de elevados para o primeiro caso, são pequenos para o segundo. Outro detalhe importante desses gráficos diz respeito à taxa de convergência induzida por cada um deles. A convergência real é mostrada na figura 37, porém tal informação não é naturalmente calculada pelos métodos iterativos. Ao invés disso, o resíduo pré-condicionado, mostrado na figura 36, é calculado naturalmente por tais métodos com o intuito de avaliar

a convergência. Isso pode gerar falhas de interpretação sobre a convergência do método em questão, um exemplo claro disso é visualizado quando considera-se o método GAMG-Richardson: o resíduo referente a esse método aparenta ser maior que aquele referente ao ILU-GMRes de acordo com a figura 36, no entanto, seu resíduo real é duas ordens de grandeza menor que esse último.

Uma informação que ajuda a entender bem a qualidade do ponto de vista matemático de um pré-condicionador é o espectro do operador pré-condicionado $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}$. Quanto mais aglutinados e próximos da unidade os autovalores dessa matriz, maior é a taxa de convergência do método iterativo. O cálculo dos autovalores exatos dessa matriz é de alta demanda computacional, no entanto, pode-se calcular uma aproximação de boa qualidade para os autovalores, incluindo-se aqueles localizados no extremo do espectro, a partir do método de Lanczos. As figuras 38 a 41 ilustram os autovalores aproximados para o problema em questão quando se consideram os pré-condicionadores BoomerAMG, GAMG, ILU e ParaSails, respectivamente.

Figura 38 – Caso 1: autovalores aproximados do operador pré-condicionado com BoomerAMG.



Nota-se dessas figuras que o operador pré-condicionado apresenta autovalores reais e agrupados em torno da unidade, exceto no caso do pré-condicionador ParaSails, que dá origem a autovalores imaginários. Verifica-se que a melhor estratégia entre as mostradas é dada pelo pré-condicionador BoomerAMG, uma vez que seus autovalores são os mais próximos da unidade, fazendo com que a taxa de convergência do método iterativo

Figura 39 – Caso 1: autovalores aproximados do operador pré-condicionado com GAMG.

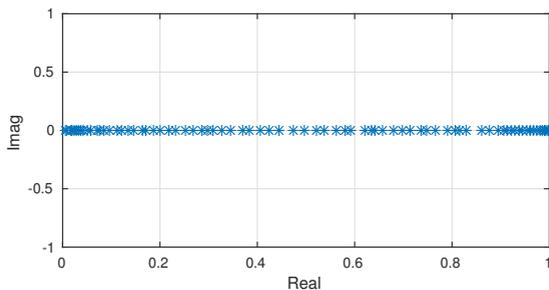


Figura 40 – Caso 1: autovalores aproximados do operador pré-condicionado com ILU(0).

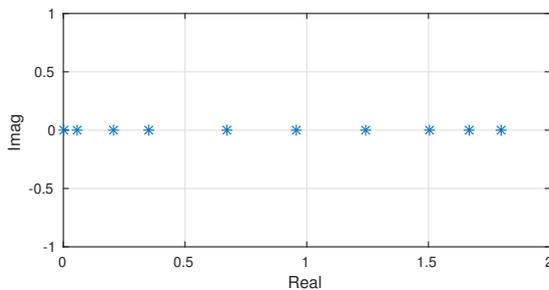
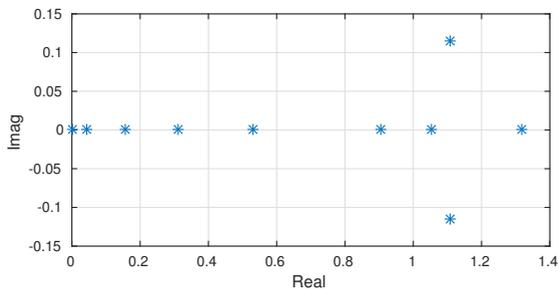
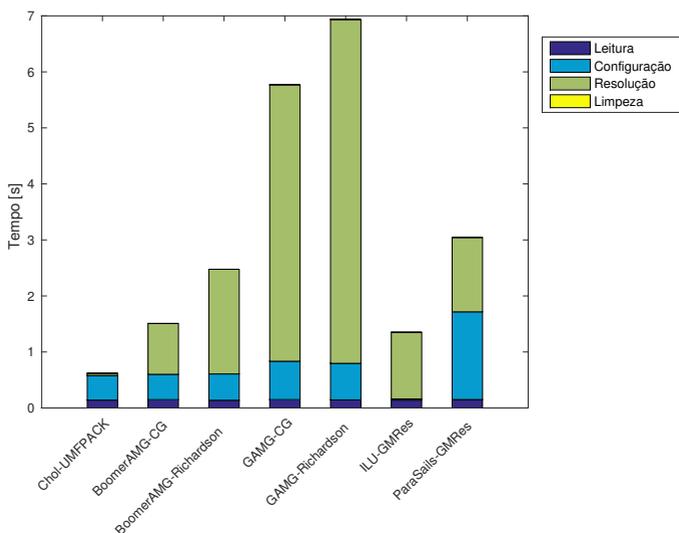


Figura 41 – Caso 1: autovalores aproximados do operador pré-condicionado com ParaSails.



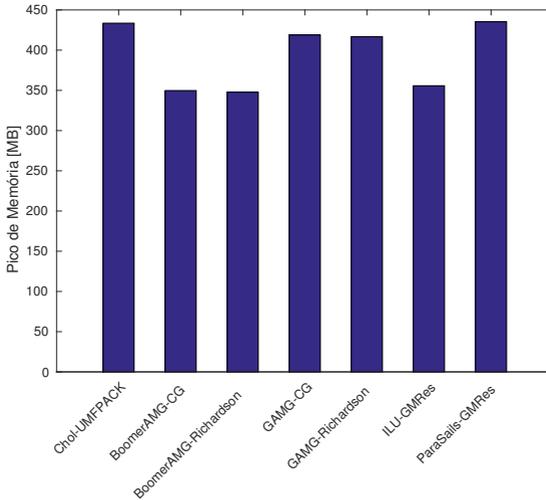
seja a mais elevada. Resta verificar se esta estratégia é também eficiente do ponto de vista computacional. Para tanto, o tempo e a memória RAM associados à execução dos métodos iterativos de referência são calculados e apresentados nas figuras 42 e 43, a título de comparação com as estratégias de solução diretas, apresentam-se nessas mesmas figuras as informações referentes ao *solver* Cholesky-UMFPACK.

Figura 42 – Caso 1: tempos dos métodos iterativos de referência.



Entre os métodos iterativos, duas alternativas apresentam desempenhos semelhantes em termos do tempo computacional e uso de memória, elas são BoomerAMG-CG e ILU(0)-GMRES. Apesar disso, a primeira escolha é preferível em relação à segunda, uma vez que conduz a um método iterativo convergente, enquanto que nessa última observa-se uma estagnação no processo de solução. Desse modo, o BoomerAMG-CG é tomado como o método iterativo de referência para a comparação com os pré-condicionadores multiescala. Comparando-se o desempenho das estratégias de referência Cholesky-UMFPACK e BoomerAMG-CG nota-se que, apesar da primeira estratégia utilizar maior quantidade de memória que a segunda, seu tempo computacio-

Figura 43 – Caso 1: memória dos métodos iterativos de referência.



nal é praticamente igual a metade, da onde se conclui que tal estratégia é a melhor disponível das apresentadas até o momento.

Consideram-se agora os métodos iterativos construídos a partir do *solver* GMRes e dos pré-condicionadores do tipo multi-escala, que são listados na tabela 3. Com o intuito de facilitar a apresentação de seus resultados, tais pré-condicionadores são divididos em quatro grupos conforme o tipo do suavizador empregado no estágio local:

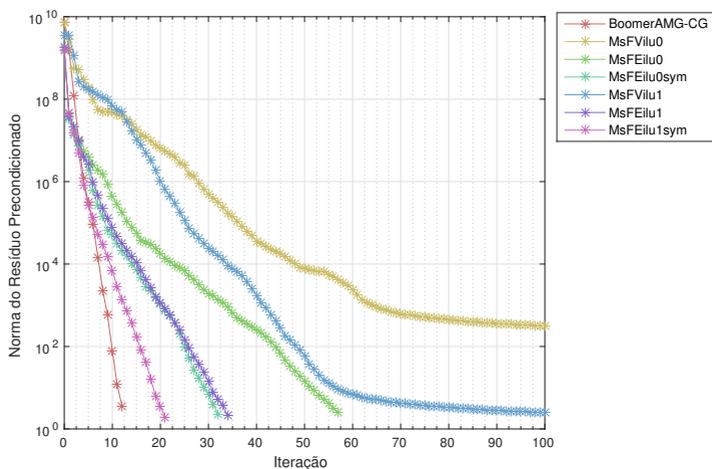
- a) ILU;
- b) SOR;
- c) AS;
- d) Funções de correção.

A razão de engrossamento escolhida inicialmente para a apresentação dos resultados é de 8×8 , a qual resulta num problema grosseiro de tamanho 64×64 , que por sua vez é resolvido diretamente através do método Cholesky-UMFPACK. Posteriormente, a influência da razão de engrossamento sobre o desempenho desses pré-condicionadores será avaliada.

As figuras 44 e 45 ilustram os valores dos resíduos pré-

condicionado e real, respectivamente, quando os pré-condicionadores multiescala com suavizador local do tipo ILU são empregados. Verifica-se em cada estratégia multiescala cujo operador global é do tipo MsFV que sua taxa de convergência é menor em relação à estratégia semelhante do tipo MsFE, desse modo segue que o operador global MsFE é de melhor qualidade que o operador MsFV. A estratégia de maior taxa de convergência entre aquelas do tipo multiescala é a MsFEilu1sym, porém esta ainda não é superior à estratégia iterativa de referência BoomerAMG-CG.

Figura 44 – Caso 1: norma do resíduo pré-condicionado - MSilu.



A figura 46 mostra o tempo associado à execução das estratégias em questão. Nota-se que o tempo de configuração de todas elas é bastante semelhante, sendo ligeiramente maior para os casos em que o operador global MsFV é construído. Os três melhores tempos são encontrados para as estratégias MsFEilu1sym, MsFEilu0sym e MsFEilu1, que justamente são as que possuem as três melhores taxas de convergência, respectivamente, o que faz com que o tempo de resolução dessas estratégias seja menor em relação aos demais. Devido ao fato de apresentar a melhor taxa de convergência e o menor tempo computacional, a estratégia MsFEilu1sym é escolhida como a de referência entre os pré-condicionadores multiescala baseados na fatoração ILU.

Figura 45 – Caso 1: norma do resíduo real - MSilu.

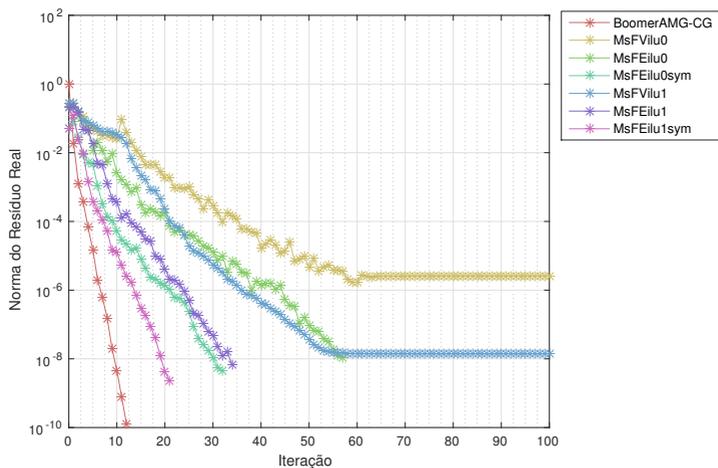
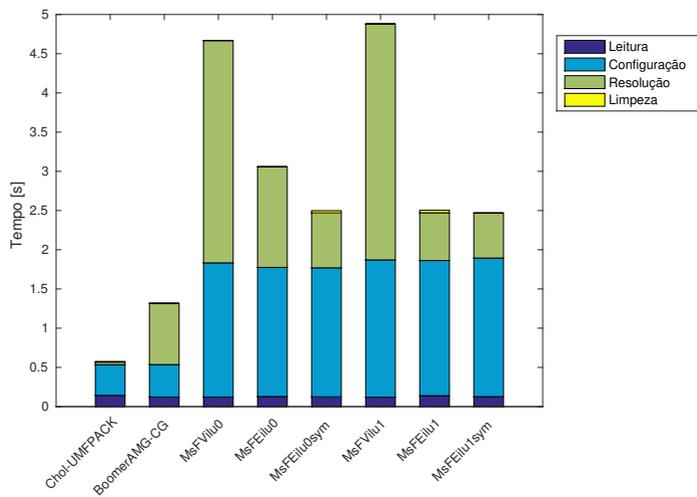
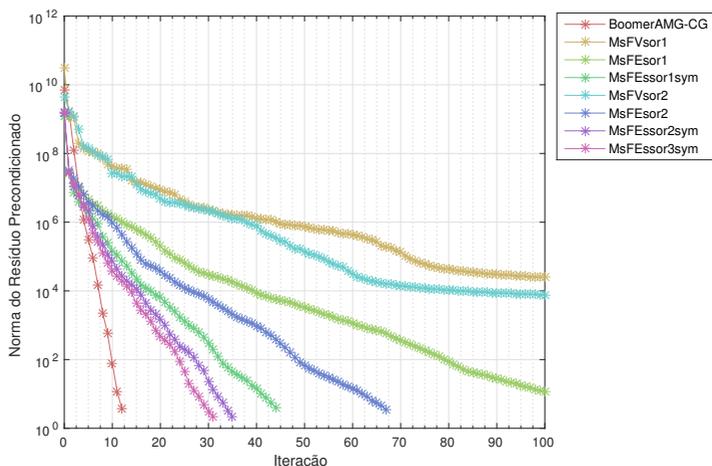


Figura 46 – Caso 1: tempos das estratégias MSilu.



Consideram-se agora os pré-condicionadores multiescala com suavizador local do tipo SOR. Os gráficos das normas dos resíduos pré-condicionado e real são dados pelas figuras 47 e 48. Como anteriormente, o operador global do tipo MsFE conduz a métodos de maior taxa de convergência, a melhor estratégia nesse sentido é a MsFEssor3sym, pois converge para a tolerância requisitada em 31 iterações.

Figura 47 – Caso 1: norma do resíduo pré-condicionado - MSsor.



A figura 49 mostra o tempo necessário para a execução de cada uma das estratégias. Nota-se que apesar de MsFEssor3sym apresentar maior taxa de convergência, esta não é a estratégia de menor tempo computacional. Ao invés dela, a alternativa representada por MsFEssor2sym mostra-se ligeiramente mais rápida, portanto, esta é tomada como a estratégia de referência entre os pré-condicionadores multiescala baseados na fatoração SOR.

Com relação aos pré-condicionadores multiescala com suavização do tipo schwarz aditivo, as normas dos resíduos pré-condicionado e real são dadas pelas figuras 50 e 51, enquanto que o tempo computacional de cada estratégia é dado pela figura 52. Observa-se que a melhor estratégia multiescala é a MsFEHSe, de modo que essa é tomada como referência para os

Figura 48 – Caso 1: norma do resíduo real - MSsor.

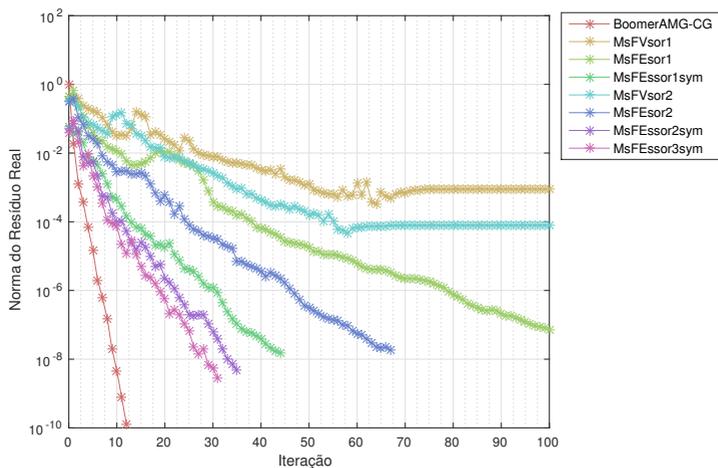
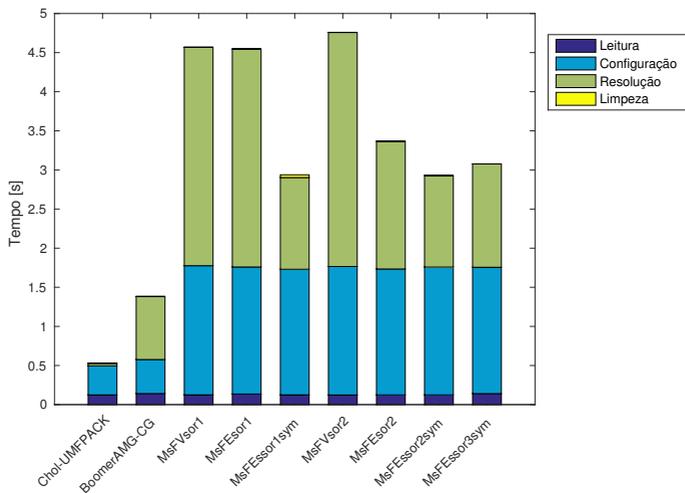
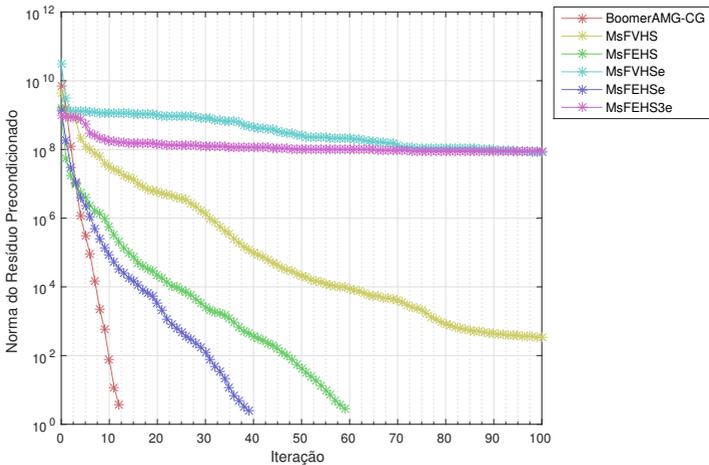


Figura 49 – Caso 1: tempos das estratégias - MSsor.



pré-condicionadores multiescala dessa classe. No entanto, assim como as anteriores, a taxa de convergência ainda é pior que aquela observada na estratégia iterativa de referência BoomerAMG-CG, enquanto que o tempo computacional é também bem mais elevado. É interessante observar que a parcela do tempo gasto com a configuração do pré-condicionador é praticamente o dobro em relação aos casos anteriores.

Figura 50 – Caso 1: norma do resíduo pré-condicionado - MShs.



Por último, compara-se o desempenho dos pré-condicionadores multiescala de acordo com o suavizador empregado, para tanto, as estratégias de referência para cada tipo de suavizador são levadas em consideração bem como os métodos MsFVwc e MsFEwc, que são construídos com o suavizador baseado nas funções de correção. As normas dos resíduos pré-condicionado e real obtidas são mostradas nas figuras 53 e 54. É interessante observar que apesar de as estratégias baseadas em funções de correção parecerem ser convergentes quando se olha o resíduo pré-condicionado, elas de fato não o são, conforme apresentado pelo gráfico da variação do resíduo real.

As figuras 55 e 56 ilustram o tempo computacional e o máximo uso de memória RAM associados à execução das estratégias em questão. Das figuras 53 a 54, segue que a estratégia

Figura 51 – Caso 1: norma do resíduo real - MShs.

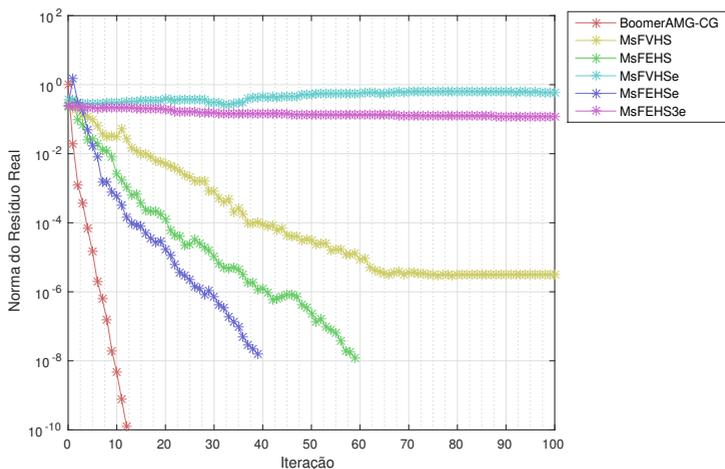


Figura 52 – Caso 1: tempos das estratégias - MShs.

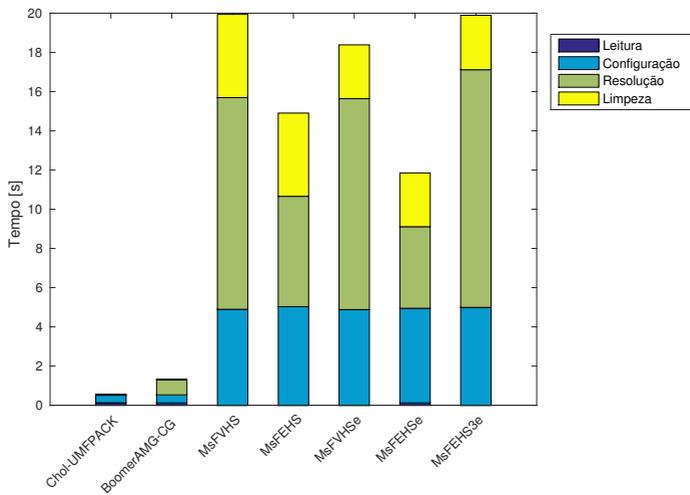


Figura 53 – Caso 1: norma do resíduo pré-condicionado.

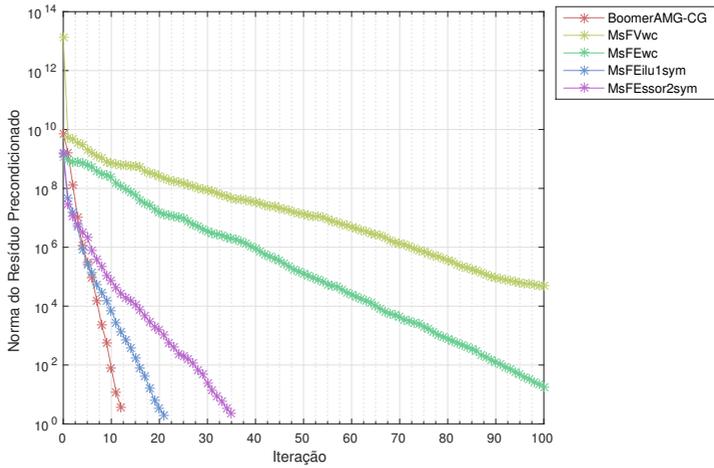
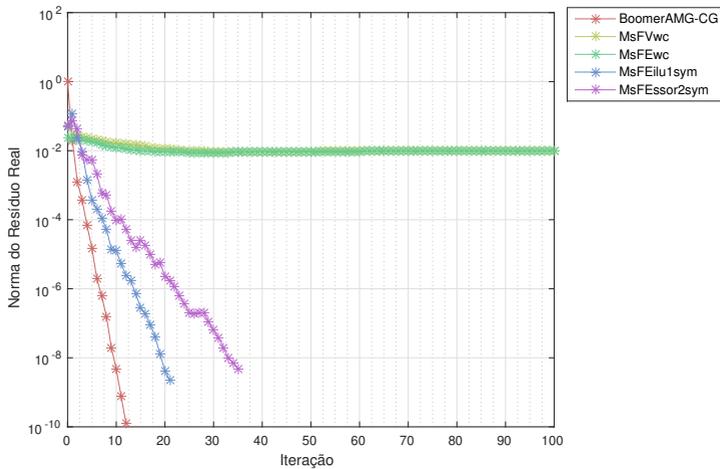


Figura 54 – Caso 1: norma do resíduo real.



MsFEilu1sym é a mais eficiente dos pontos de vista matemático e computacional entre os métodos multiescala.

Figura 55 – Caso 1: tempos das estratégias multiescala.

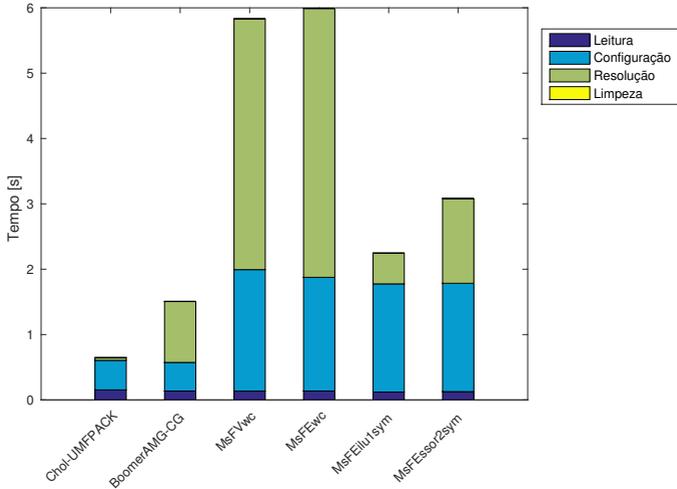
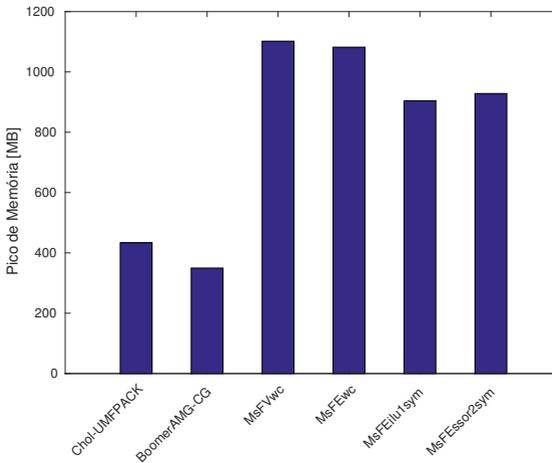


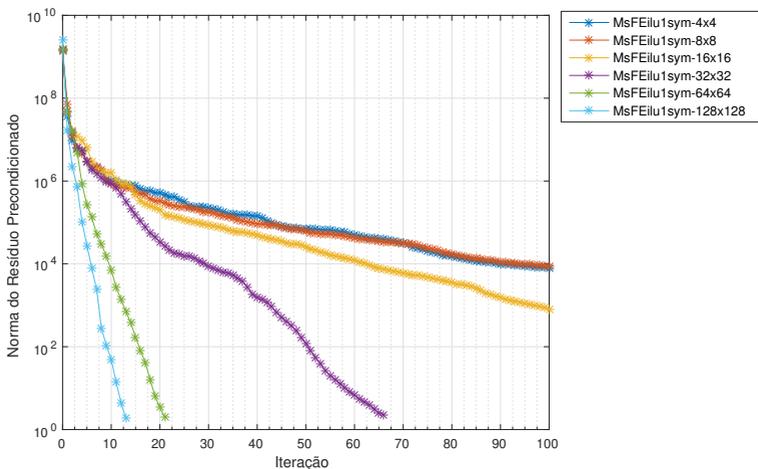
Figura 56 – Caso 1: uso de memória de diferentes estratégias de solução.



Os resultados mostrados até agora a respeito do uso dos

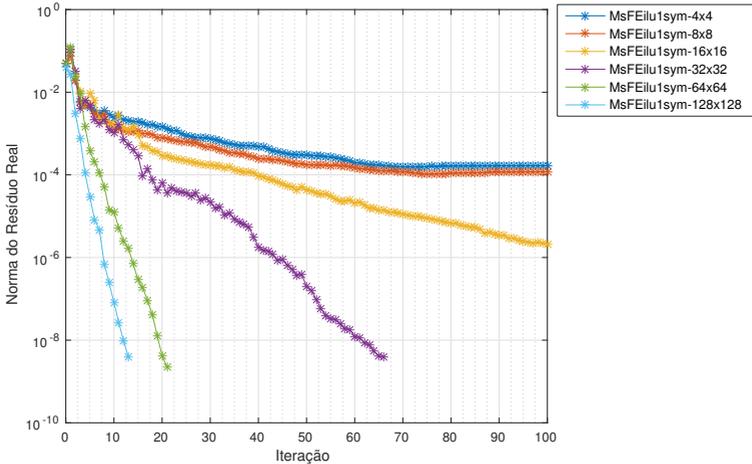
métodos multiescala como pré-condicionadores para a obtenção de soluções precisas de sistemas lineares elípticos considerou que o tamanho do problema em nível grosseiro (estágio global) é de 64×64 volumes de controle, que resulta num sistema linear de dimensão 4096×4096 . Estuda-se agora como a variação desse parâmetro influencia nas propriedades do pré-condicionador. Considerou-se para tanto os seguintes tamanhos: 4×4 ; 8×8 ; 16×16 ; 32×32 ; 64×64 e 128×128 . As figuras 57 e 58 mostram os resíduos pré-condicionado e real, respectivamente. Nota-se que a taxa de convergência do *solver* iterativo é diretamente proporcional ao tamanho do problema grosseiro, além disso, o ganho de performance que se observa entre as opções 64×64 e 32×32 é bem maior que o observado variando-se entre 128×128 e 64×64 .

Figura 57 – Caso 1: norma do resíduo pré-condicionado da estratégia MsFEilu1sym variando-se o tamanho do problema global.



O tempo computacional verificado para a estratégia MsFEilu1sym é dado pela figura 59. Segue que a alternativa mais eficiente do ponto de vista computacional consiste naquela cujo problema global é de tamanho 64×64 , referente à razão de engrossamento igual a 8×8 . Adiciona-se que o tamanho máximo dos sistemas lineares locais resolvidos para a construção do operador

Figura 58 – Caso 1: norma do resíduo real da estratégia MsFEilu1sym variando-se o tamanho do problema global.



de prolongação é 64×64 , permitindo facilmente o uso de métodos diretos nesses cálculos.

O espectro aproximado do operador pré-condicionado através da estratégia MsFEilu1sym-64x64 é dado pela figura 60. Observa-se que os autovalores são todos reais e localizados no intervalo $[0, 1]$, exceto um par de autovalores cuja parcela imaginária é diferente de zero, apesar de pequena. Isso não era esperado já que tanto a matriz \mathbf{A} como o pré-condicionador empregado são simétricos, no entanto, pode ser causado pela precisão finita na representação dos números pela máquina.

O uso máximo de memória é dado pela figura 61, em que nota-se que esta quantidade aumenta de modo exagerado a medida que a razão de engrossamento decresce. Isso se deve ao fato de que a implementação computacional do operador de prolongação não considera a reutilização de espaços na memória RAM já alocados durante a execução do programa. Conclui-se que o código computacional construído no presente trabalho pode ser refatorado a fim de utilizar a memória RAM de modo mais eficiente, isso acarretaria também numa diminuição do tempo computacional

Figura 59 – Caso 1: tempos obtidos variando-se o tamanho do problema global.

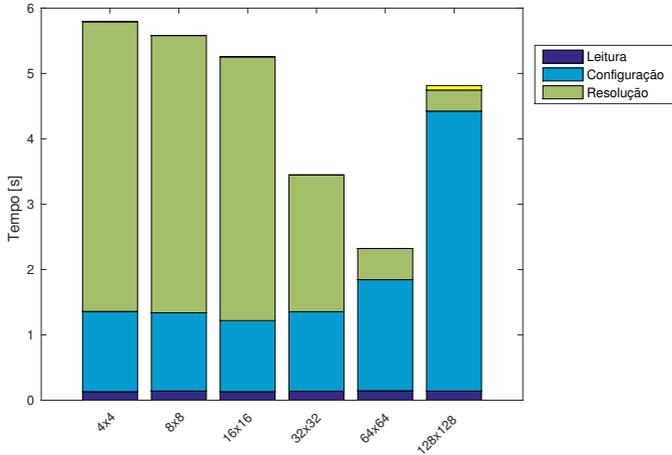
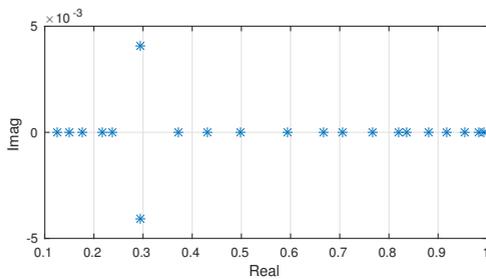
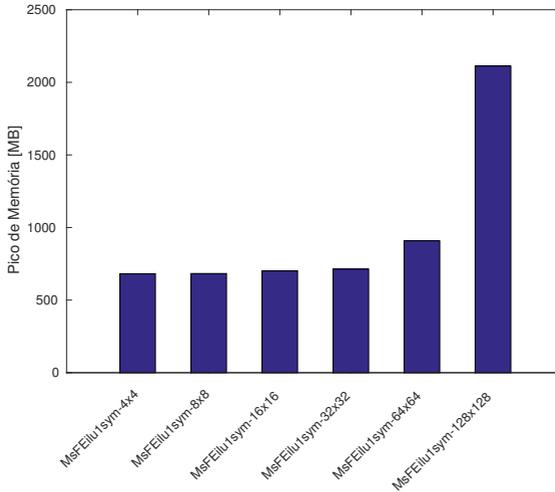


Figura 60 – Caso 1: espectro do operador pré-condicionado por MsFEilu1sym-64x64.



necessário a sua execução tornando o pré-condicionador em questão mais competitivo em relação ao pré-condicionador *multigrid* de referência (BoomerAMG).

Figura 61 – Caso 1: picos de memória obtidos variando-se o tamanho do problema global.

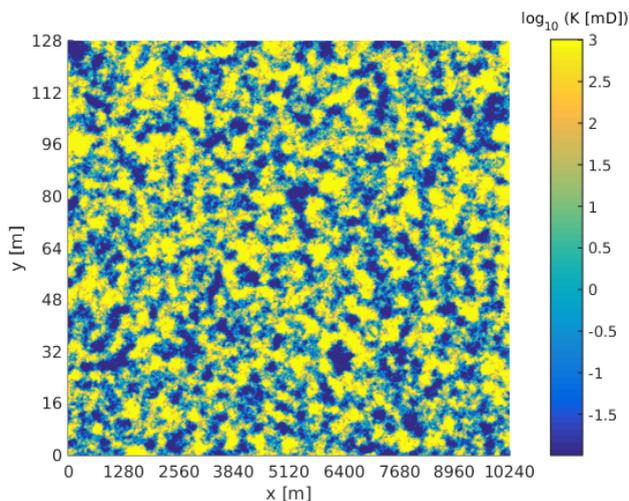


6.2 CASO 2: ESCOAMENTO CANALIZADO

O segundo problema teste consiste no escoamento monofásico de óleo com densidade de 800 kg/m^3 e viscosidade 10 cP através de um reservatório bidimensional de tamanho $10\,240 \text{ m} \times 128 \text{ m}$ ao longo do plano “xy” e sujeito a efeitos gravitacionais na direção “y”. As condições de contorno do problema são de pressão prescrita nas fronteiras laterais e inferior e de fluxo nulo na superior. As primeiras representam a ação de poços verticais ao longo do eixo “y” de modo que a pressão na fronteira à esquerda é de 25 MPa , enquanto à direita é de 2 MPa . Já a fronteira inferior do reservatório está em contato com outra formação rochosa submetida à pressão uniforme de 5 MPa . A malha empregada no processo de discretização do domínio é de 1280×1280 volumes de controle, totalizando 1638400 incógnitas.

O campo de permeabilidade da rocha-reservatório é altamente heterogêneo e apresenta valores variando em cinco ordens de grandeza entre 1.0×10^{-2} mD até 1.0×10^3 mD. Este foi construído da mesma forma como no problema anterior, sendo ilustrado na figura 62.

Figura 62 – Caso 2: campo de permeabilidade.



O campo de pressão de referência obtido através da aplicação do método direto Cholesky-UMFPACK é mostrado na figura 63, enquanto as linhas de corrente são ilustradas na figura 64. Observa-se na primeira que o campo de pressão varia de modo não uniforme, uma vez que o campo de permeabilidade é heterogêneo, ao longo do domínio entre os valores de pressão mínimo e máximo pertencentes às faces laterais. Na segunda figura, mostra-se os caminhos preferenciais de escoamento através do reservatório. É interessante observar como a força gravitacional atua fortemente no escoamento, fazendo com que atravesse também regiões de baixa permeabilidade.

Figura 63 – Caso 2: campo de pressão.

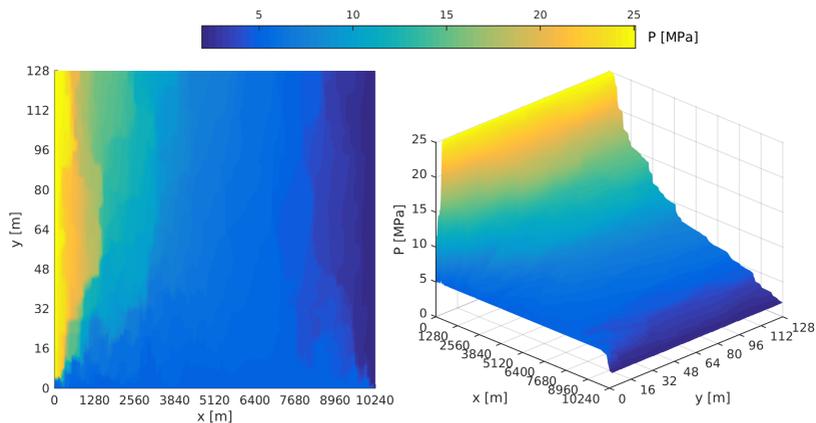
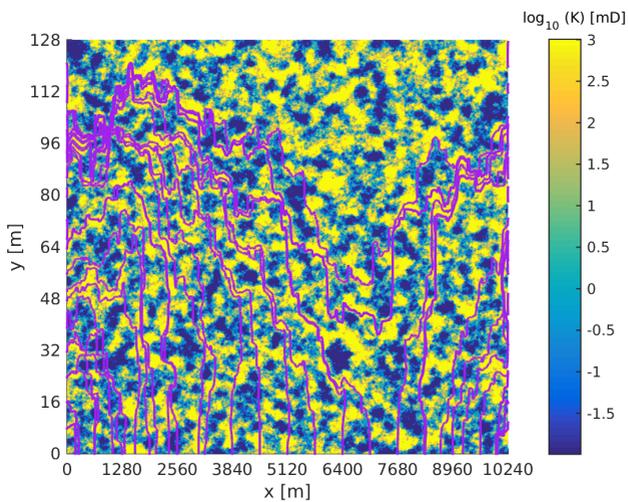


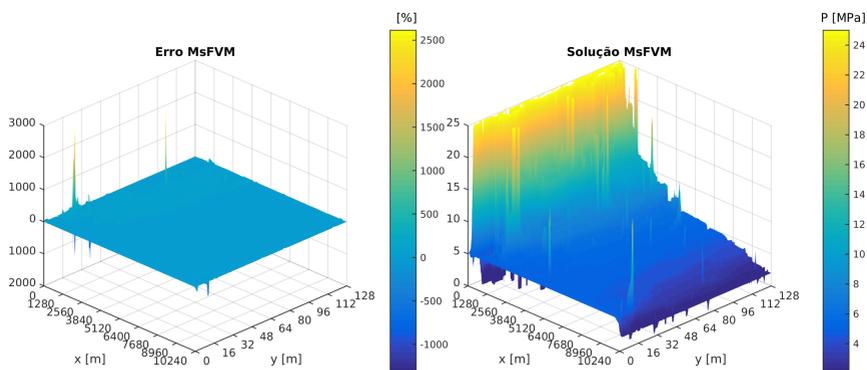
Figura 64 – Caso 2: linhas de corrente de referência.



6.2.1 Solução aproximada

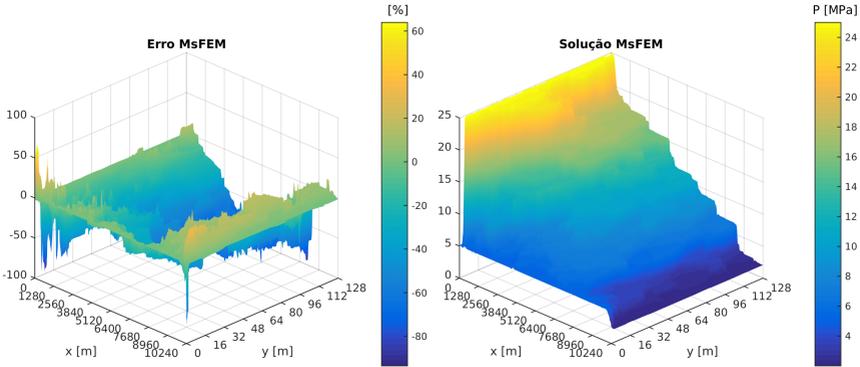
As figuras 65 e 66 mostram os campos de pressão obtidos empregando-se apenas uma iteração dos pré-condicionadores multiescala baseados em volumes finitos e elementos finitos (MsFVM e MsFEM), respectivamente, para a solução aproximada do problema. A razão de engrossamento utilizada é de 12.8×12.8 , gerando um problema global de tamanho 100×100 . Considerando-se primeiramente a solução obtida pelo MsFVM, nota-se a presença ainda maior em relação ao caso 1 de pontos de máximo e mínimo locais de pressão ao longo do reservatório, não atendendo portanto ao critério de monotonicidade. Já a solução obtida pelo MsFEM apresenta maior semelhança em relação à solução de referência e respeita esse último critério, no entanto, não conduz a campos de velocidade conservativos assim como o MsFVM.

Figura 65 – Caso 2: campo de pressão MsFVM-100x100.



Considerando-se agora uma razão de engrossamento igual a 8×8 , obtém-se um problema global de tamanho 160×160 . Nesse caso, os campos de pressão aproximados pelas estratégias MsFVM e MsFEM são dados pelas figuras 67 e 68, respectivamente. Em ambas estratégias, especialmente quando se considera o MsFVM-160x160, nota-se uma melhora considerável na qualidade da solução aproximada, uma vez que o gráfico do erro relativo

Figura 66 – Caso 2: campo de pressão MsFEM-100x100.



ao longo do domínio apresenta menores valores em comparação com os observados nas figuras 65 e 66 referentes aos métodos MsFVM-100x100 e MsFEM-100x100. Tal observação corrobora o fato apresentado no caso 1 de que razões de engrossamento inferiores a 10 conduzem a aproximações satisfatórias para o campo de pressão. É importante observar também que a estratégia MsFVM-160x160 apresenta problemas de monotonicidade, assim como anteriormente, porém conduz a campos de velocidade conservativos.

6.2.2 Solução precisa

Considera-se agora a resolução precisa do campo de pressão empregando-se os pré-condicionadores BoomerAMG, MsFEilu1sym e MsFEssor2sym. Estes últimos foram escolhidos entre os listados na tabela 3 pelo fato de apresentarem os melhores desempenhos, conforme discutido no caso 1. Como os pré-condicionadores em questão são todos simétricos, bem como o próprio problema resolvido, utiliza-se o método dos gradientes conjugados como *solver* iterativo. O critério de convergência adotado é o mesmo que anteriormente, isto é, a razão entre as normas dos resíduos pré-condicionados atual e inicial deve ser menor que

Figura 67 – Caso 2: campo de pressão MsFVM-160x160.

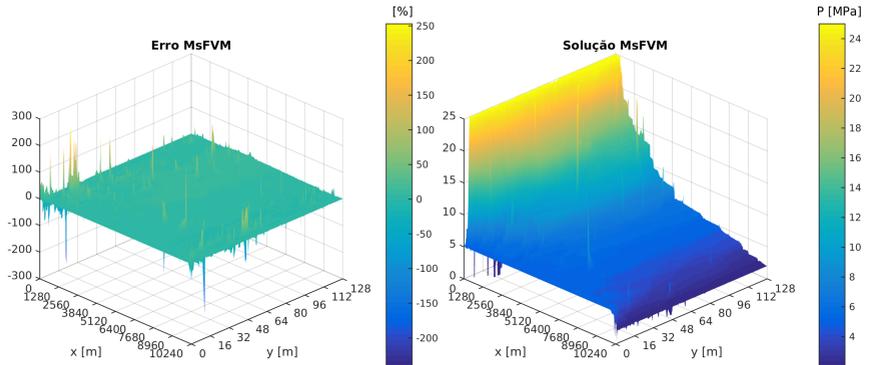
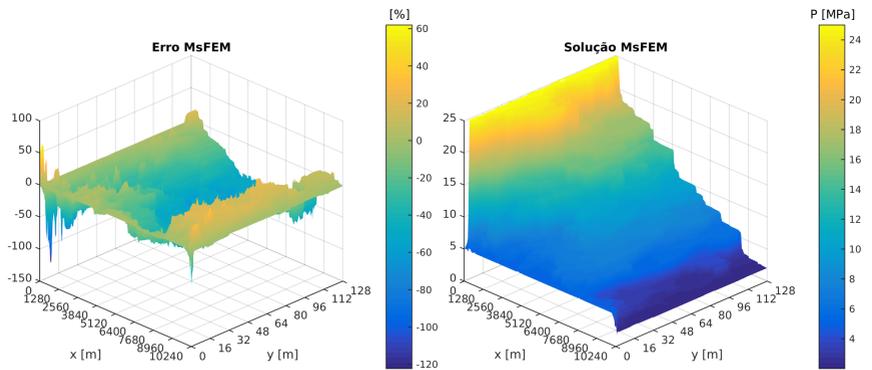


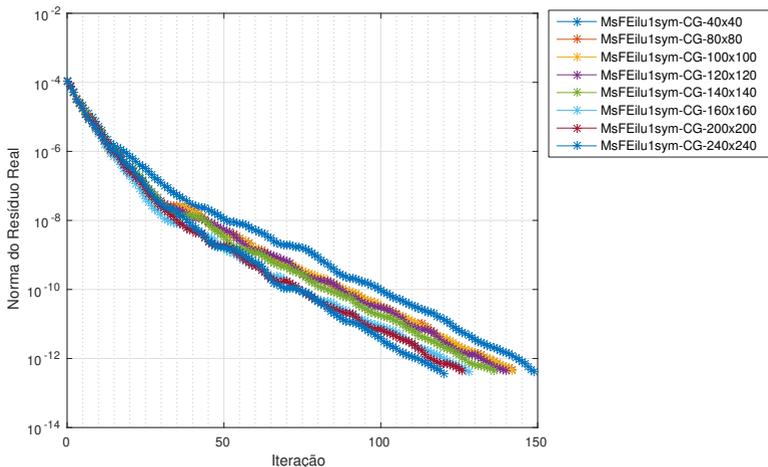
Figura 68 – Caso 2: campo de pressão MsFEM-160x160.



1.0×10^{-9} , além disso, considera-se que o número máximo de iterações é igual a 150.

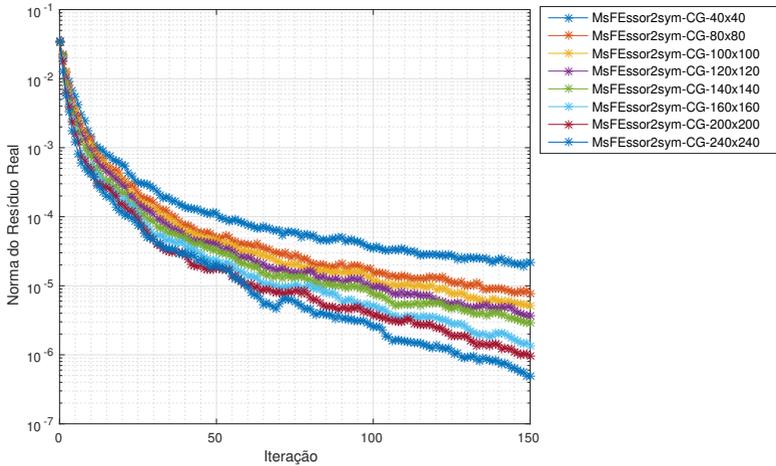
Analisa-se inicialmente o desempenho dos pré-condicionadores multiescala. Para tanto, apresentam-se nas figuras 69 e 70 os gráficos das normas dos resíduos reais obtidos pelos métodos iterativos MsFEilu1sym-CG e MsFEessor2sym-CG de acordo com diferentes tamanhos para o problema global. Da primeira figura, conclui-se que o número de iterações necessárias para a convergência é maior que no problema anterior sendo que esta varia pouco quando a razão de engrossamento empregada é em torno de 10×10 . Da segunda figura, nota-se que o método MsFEessor2sym-CG não é convergente sendo que ele o resíduo real se estagna em diferentes valores de acordo com o tamanho do problema global considerado. Assim como concluído anteriormente, segue que o pré-condicionador MsFEilu1sym é mais eficiente que MsFEessor2sym.

Figura 69 – Caso 2: resíduo real obtido pelo método MsFEilu1sym-CG.



Os tempos computacionais referentes aos métodos numéricos formados pelos pré-condicionadores do tipo MsFEilu1sym variando-se o tamanho do problema global são dados pela figura 71. Segue que o tempo computacional é mínimo na alternativa

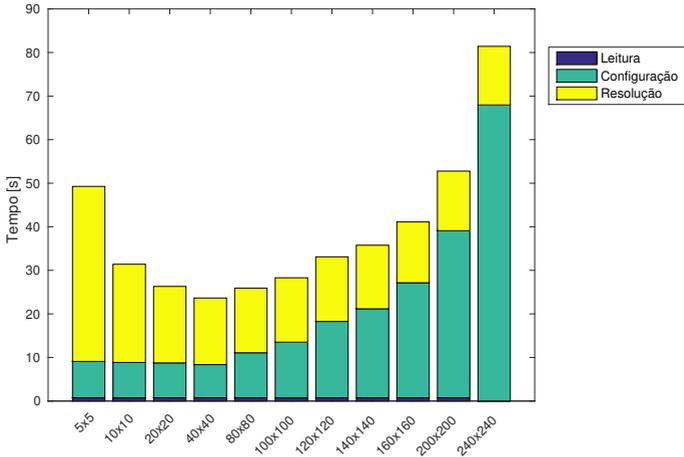
Figura 70 – Caso 2: resíduo real pelo método MsFEssor2sym-CG.



MsFEilulsym-40x40, de modo que esta é tomada como a escolha de referência de pré-condicionador multiescala. Nota-se que para problemas globais de menor tamanho, a taxa de convergência é muito pequena, o que causa um aumento considerável no tempo relativo à etapa de resolução do método iterativo. Já para problemas globais de tamanhos maiores que 40×40 , o ganho que se tem com o aumento da taxa de convergência é insuficiente para se contrapor com a maior quantidade de tempo necessária para a configuração do pré-condicionador.

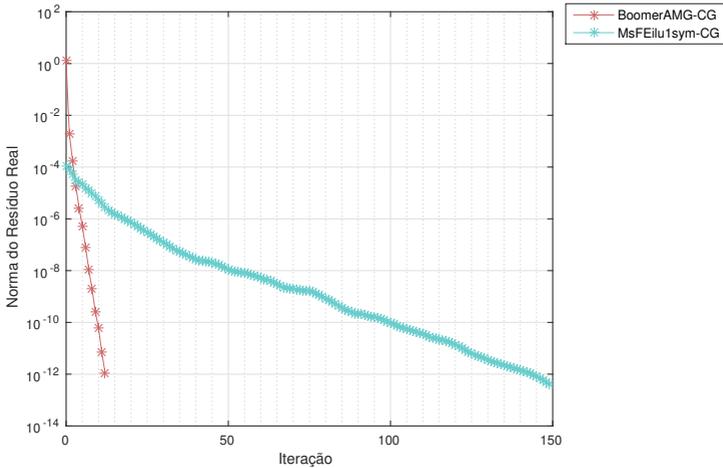
Comparam-se agora os desempenhos do *solver* direto de referência (Cholesky-UMFPACK) e dos *solvers* iterativos baseados no método dos gradientes conjugados pré-condicionado com as estratégias multiescala de referência (MsFEilulsym-40x40) e *multigríd* de referência (BoomerAMG). A figura 72 ilustra o gráfico dos resíduos reais obtidos pelos métodos iterativos em consideração. Nota-se que o pré-condicionador BoomerAMG apresenta desempenho ótimo, convergindo no mesmo número de iterações em relação ao problema anterior, apesar do presente caso ser mais complexo e ainda possuir cerca de seis vezes mais incógnitas. Segue que o BoomerAMG apresenta melhor escalabilidade que as estratégias multiescala estudadas, além de melhor desempenho

Figura 71 – Caso 2: tempo computacional pela estratégia MsFEilu1sym-CG.



em termos de taxa de convergência.

Figura 72 – Caso 2: resíduo real para as estratégias de referência.



As figuras 73 e 74 mostram o espectro aproximado da matriz original \mathbf{A} pré-condicionada com as estratégias BoomerAMG e MsFEilu1sym-40x40, respectivamente. É nítido que os

autovalores da primeira alternativa estão mais próximos da unidade que aqueles referentes à segunda, conduzindo portanto a métodos iterativos de maior taxa de convergência.

Figura 73 – Caso 2: espectro aproximado do operador original pré-condicionado com BoomerAMG.

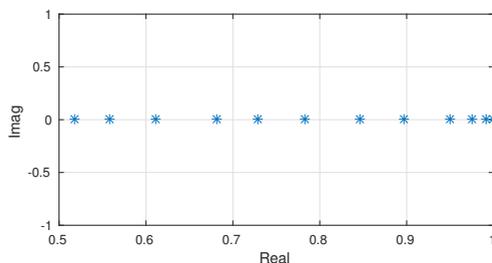
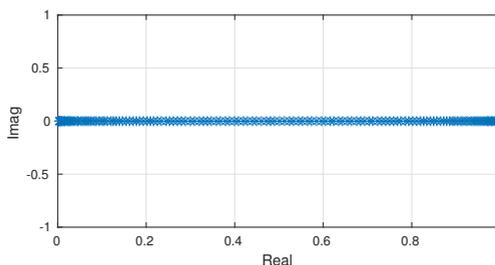


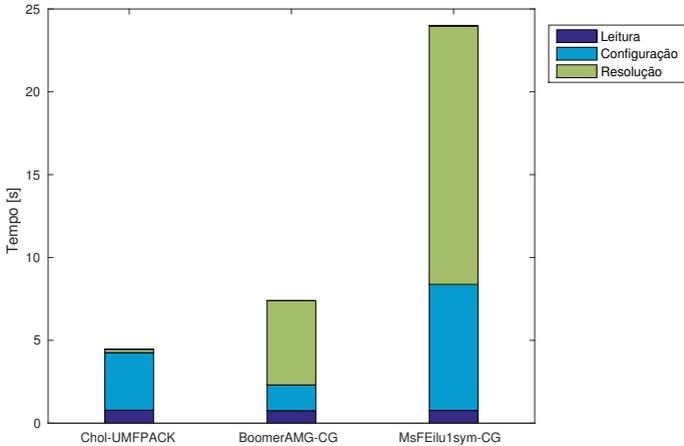
Figura 74 – Caso 2: espectro aproximado do operador original pré-condicionado com MsFEilu1sym-40x40.



Na figura 75 mostram-se os tempos necessários para a execução dos mesmos métodos iterativos e direto discutidos acima. O tempo necessário para a execução da etapa de resolução do pré-condicionador MsFEilu1sym-40x40 é cerca de três vezes maior que aquele referente ao BoomerAMG-CG, enquanto que a etapa de configuração do pré-condicionador multiescala é aproximadamente cinco vezes maior. Segue que apesar do custo por iteração do método BoomerAMG-CG ser maior, este converge muito mais rapidamente e, portanto, tal escolha é muito mais eficiente que a primeira. Apesar do pré-condicionador BoomerAMG ser muito

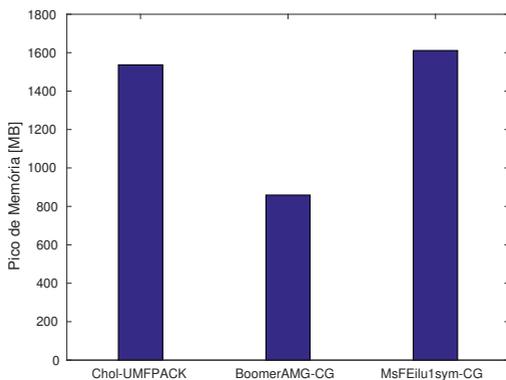
eficiente, tem-se que, assim como no caso 1, a estratégia Cholesky-UMFPACK é a mais rápida das avaliadas.

Figura 75 – Caso 2: Tempos computacionais das estratégias de referência.



Na figura 76 mostra-se o uso máximo de memória RAM pelas estratégias de referência. Nesse caso, nota-se que o método iterativo construído com o pré-condicionador multiescala não apresenta um uso muito elevado de memória, como mostrado para o caso 1. No entanto, tal quantidade deveria ser ainda menor que aquela observada para o método direto Cholesky-UMFPACK, uma vez que o grafo referente à matriz multiescala apresenta menor número de conexões que o da matriz original e, portanto, conduziria a um menor grau de preenchimento durante sua resolução por algum método direto. Este último fato não é atendido devido à maneira com que a construção do operador de prolongação foi implementada computacionalmente, isto é, alocando-se novos espaços na memória RAM que poderiam ser reutilizados. Segue que o código computacional desenvolvido pode ainda ser refatorado a fim de que utilize menos memória e, por conseguinte, execute mais rapidamente, uma vez que o reaproveitamento de espaços pré-alocados na memória diminui o tempo de acesso dessas informações.

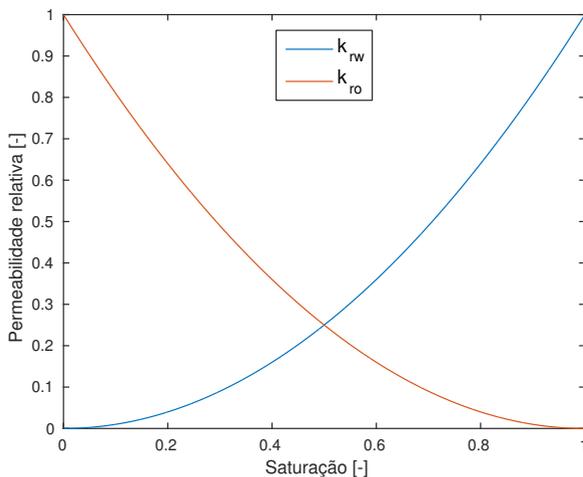
Figura 76 – Caso 2: pico de memória da estratégia MsFEilu1sym-CG.



6.3 CASO 3: BIFÁSICO INCOMPRESSÍVEL 2D

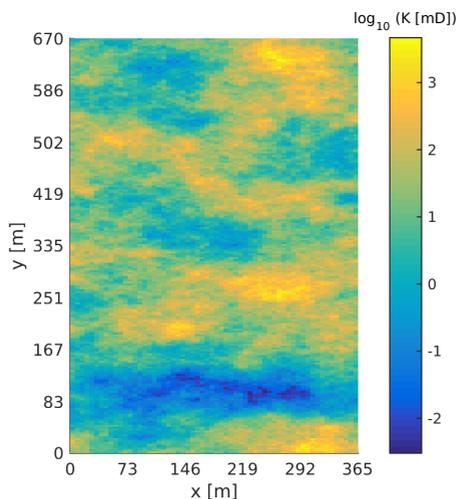
Esse caso é baseado no escoamento bifásico e incompressível de água com densidade e viscosidade iguais a 1000 kg/m^3 e 1 cP , além de óleo com densidade e viscosidade iguais a 800 kg/m^3 e 10 cP , respectivamente. As curvas de permeabilidade relativa desses fluidos são dadas pela figura 77.

Figura 77 – Caso 3: curvas de permeabilidade relativa.



O reservatório tem dimensões $365m \times 670m$ e a malha empregada na sua discretização tem tamanho 60×220 , totalizando 13200 incógnitas. O campo de permeabilidade absoluta é isotrópico e representado pela figura 78.

Figura 78 – Caso 3: campo de permeabilidade absoluta.



Há quatro poços produtores e um poço injetor dispostos no padrão *five-spot*, sendo que suas propriedades são dadas pela tabela 4.

Tabela 4 – Caso 3: propriedades dos poços.

Poço	Raio [m]	Volume	Posição [m]	BHP ⁹ [MPa]
P1	0.125	1	(3.048, 1.524)	5
P2	0.125	60	(362.712, 1.524)	5
P3	0.125	13141	(3.048, 669.036)	5
P4	0.125	13200	(362.712, 669.036)	5
I1	0.125	6570	(179.832, 333.756)	80

⁹ Pressão de fundo de poço.

O tempo de simulação é igual a 30 000 dias, enquanto o passo de tempo é variável, conforme apresentado na tabela 5. Empregarem-se ambas estratégias IMPES e SFI para a solução ao longo do tempo, descritas na seção 2.2. Verificou-se que a última estratégia é mais estável que a primeira e, portanto, permite o uso de maiores passos de tempo. Portanto, esta foi tomada como a alternativa de referência para a solução do presente problema.

Tabela 5 – Caso 3: passos de tempo.

Duração [d]	Veze	Período [d]
50	20	0 – 1000
100	20	1001 – 3000
150	100	3001 – 18000
200	60	18001 – 30000

6.3.1 Solução aproximada

Empregando-se o MsFVM como técnica de *upscaling* para a obtenção de campos de pressão aproximados, isto é, aplicando-se uma única iteração do estágio global do pré-condicionador multi-escala para a resolução do problema linear da pressão, verificou-se que as soluções referentes aos primeiros passos de tempo são satisfatórias, porém logo a qualidade do campo de pressão é degradada causando problemas no cálculo do campo de saturação.

Passos de tempo menores que os listados na tabela 5 bem como razões de engrossamento menores que 10 foram empregados, o que deveria resolver melhorar a qualidade do campo de pressão e tornar o cálculo do campo de pressão convergente. No entanto, notou-se que o problema citado não é extinto, mas apenas atrasado para passos de tempo posteriores. Desse modo, conclui-se que, ao menos para o problema testado, o uso do pré-condicionador multiescala como técnica de *upscaling* não é recomendado.

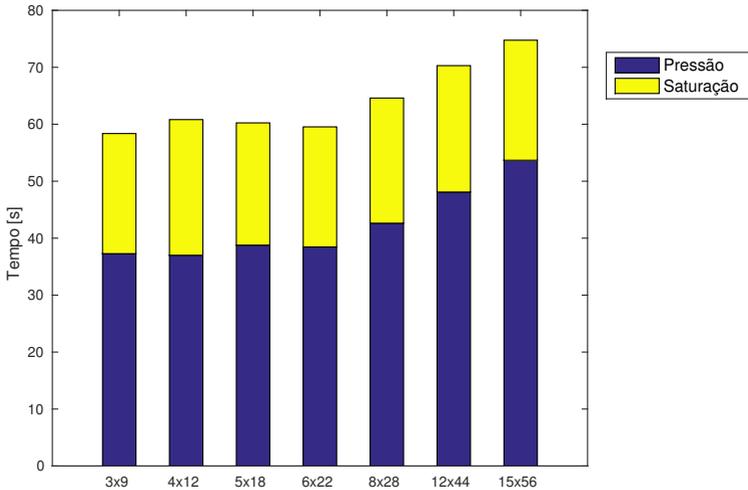
6.3.2 Solução precisa

Considera-se agora o uso do pré-condicionador multiescala de referência, MsFEilu1sym, em conjunto com o método do gradiente conjugado para a obtenção de soluções precisas para o campo de pressão ao longo dos instantes de tempo considerados na simulação. Primeiramente, avaliam-se diversas alternativas para a razão de engrossamento empregada pelo pré-condicionador multiescala com o intuito de verificar a estratégia mais eficiente do ponto de vista computacional.

A figura 79 ilustra as parcelas de tempo associadas à solução das equações para a pressão, em que se emprega a estratégia MsFEilu1sym-CG, e também aquelas associadas à solução das equações para as saturações das fases água e óleo, que são não-lineares e resolvidas através do método de Newton exato. Observa-se uma diferença de aproximadamente 15 s entre as estratégias baseadas na maior e menor razões de engrossamento consideradas (malhas grossas com tamanhos 3×9 e 15×56 , respectivamente). Logo, a estratégia cujo problema global é de tamanho 3×9 é tomada como a estratégia multiescala de referência para a comparação com as estratégias BoomerAMG-CG e Cholesky-UMFPACK.

O número de iterações e os tempos de execução da estratégia MsFEilu1sym3x9-CG em função do passo de tempo são dados pelas figuras 80. Na primeira figura observa-se que todos os problemas elípticos foram resolvidos dentro do número máximo de iterações permitido, além disso nota-se que a quantia de iterações necessárias à convergência é maior no início da simulação, mas logo após os primeiros 40 passos de tempo, tal parâmetro estabiliza-se em torno de 35 iterações. Esse último comportamento se deve ao fato de que a solução referente ao passo de tempo anterior é utilizada como estimativa inicial para o cálculo da solução atual. Já na segunda figura é possível observar que a maioria dos sistemas lineares são resolvidos em menos de 0.1 s sendo que as etapas de leitura e limpeza de dados se dão em uma parcela insignificante do tempo total enquanto a etapa de configuração do pré-condicionador é a que toma a maior parcela. Por fim,

Figura 79 – Caso 3: tempo de solução de acordo com diferentes tamanhos para o problema na malha grossa.



adiciona-se que o tempo de configuração do pré-condicionador multiescala poderia ser reduzido caso o operador de prolongação fosse reconstruído somente nas regiões em que há mudança significativa no campo de saturação a medida que o passo de tempo avança.

Compara-se agora o desempenho computacional da estratégia multiescala de referência, MsFEilu1sym3x9-CG, em relação aos métodos direto e iterativo de referência, Cholesky-UMFPACK e BoomerAMG-CG, respectivamente. A figura 82 mostra o somatório, ao longo dos passos de tempo da simulação, do tempo computacional associado à execução das estratégias citadas. Nota-se que a estratégia mais eficiente para a resolução da variável pressão é dada pelo método direto, sendo que esta leva apenas 6s para a resolução de todos os sistemas lineares elípticos obtidos no decorrer da simulação. É interessante observar também que a aplicação do pré-condicionador multiescala algébrico leva um tempo menor que o método iterativo de referência BoomerAMG-CG, porém o tempo gasto durante sua configuração é bastante superior, fazendo com que seu tempo total de execução também

Figura 80 – Caso 3: número de iterações da estratégia MsFEilu1sym3x9-CG em função do passo de tempo.

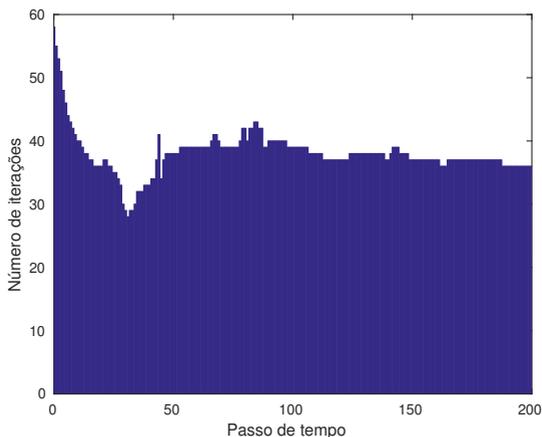
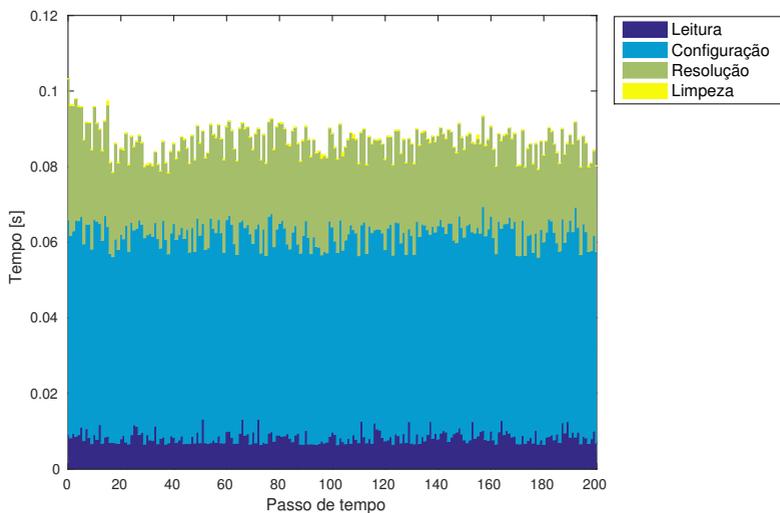
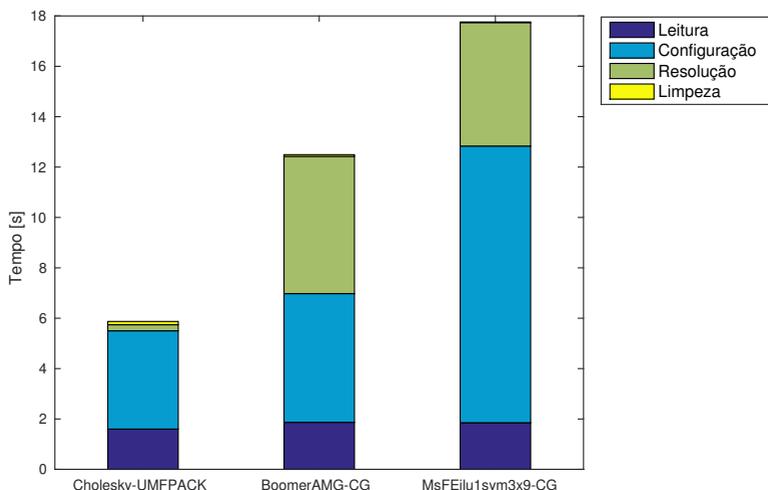


Figura 81 – Caso 3: tempo de execução da estratégia MsFEilu1sym3x9-CG em função do passo de tempo.



o seja.

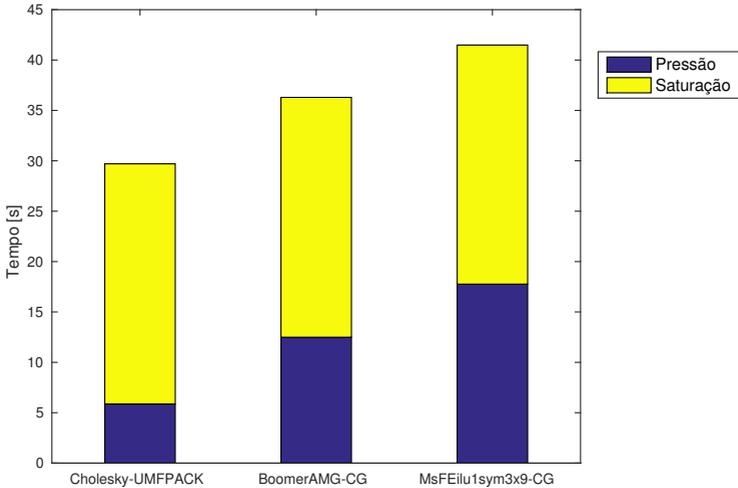
Figura 82 – Caso 3: tempo computacional total associado à execução das estratégias de referência.



A figura 83 mostra o tempo computacional total necessário para a resolução das variáveis primárias pressão e saturação quando se empregam as estratégias de referência no cálculo da pressão. Verifica-se que a parcela de tempo associada ao cálculo da saturação é semelhante em todos os casos, o que era esperado já que essa tarefa é realizada a partir de campos de pressão obtidos com níveis de precisão elevados. Além disso, nota-se que tal parcela de tempo representa ao redor de 80%, 70% e 60%, do tempo total de simulação associado às estratégias Cholesky-UMFPACK, BoomerAMG-CG e MsFEilu1sym-CG, respectivamente.

Por fim, apresentam-se na figura 84 os campos de pressão obtidos diretamente pelas estratégias Cholesky-UMFPACK, à esquerda, e iterativamente através da estratégia MsFEilu1sym-CG, à direita, nos instantes de tempo iguais a 9900, 20000 e 30000 dias, respectivamente. Além disso, os campos de saturação da fase óleo segundos os mesmos parâmetros citados são expostos na figura 85. Naturalmente, verifica-se nas figuras apresentadas que as soluções propostas por ambas estratégias coincidem entre

Figura 83 – Caso 3: tempo de execução da estratégia MsFEilu1sym3x9-CG em função do passo de tempo.



si. É interessante notar na figura 85 a maneira com que as heterogeneidades presentes no campo de permeabilidade da rocha influenciam no escoamento: as frentes de saturação apresentam alta irregularidade ao longo do domínio.

6.4 CASO 4: TESTE COMPARATIVO SPE 9

Esse caso faz parte do conjunto de testes comparativos da Sociedade dos Engenheiros de Petróleo Internacional (SPE) e tem o intuito de avaliar a qualidade da solução obtida por simuladores comerciais de reservatórios bem como o desempenho das estratégias de solução de sistemas algébricos que são empregadas por tais códigos computacionais.

O problema trata-se de um reservatório com inclinação igual a 10° em relação ao plano “xy” e com dimensões $2194m \times 2286m \times 109m$. A malha utilizada na discretização desse domínio é do tipo *corner-point* possuindo $24 \times 25 \times 15$ volumes de controle. O campo de permeabilidade da rocha-reservatório é bastante

Figura 84 – Caso 3: campos de pressão.

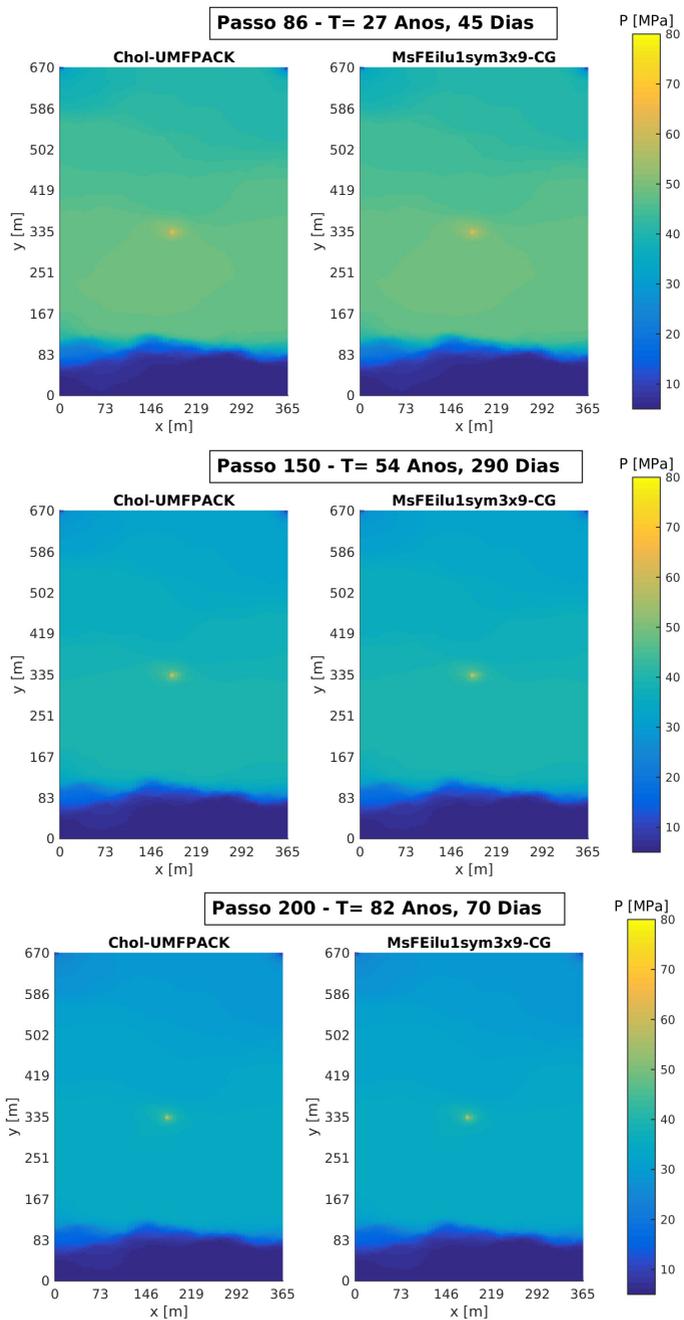
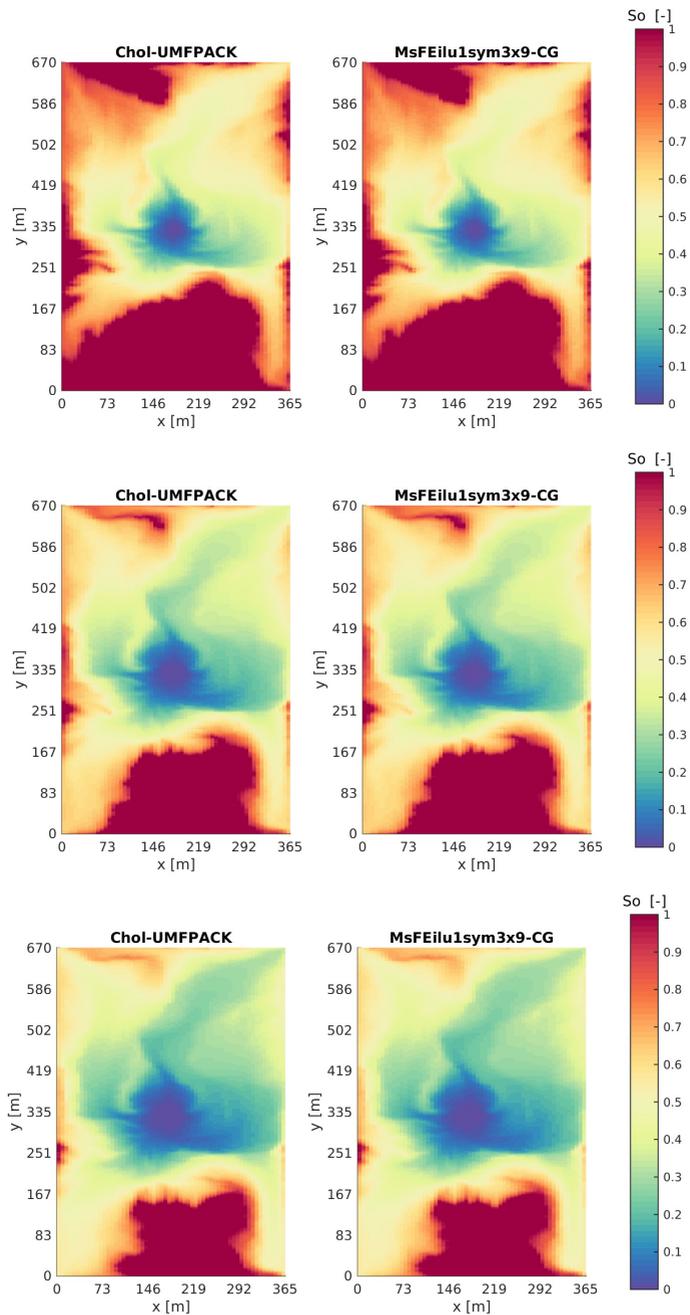


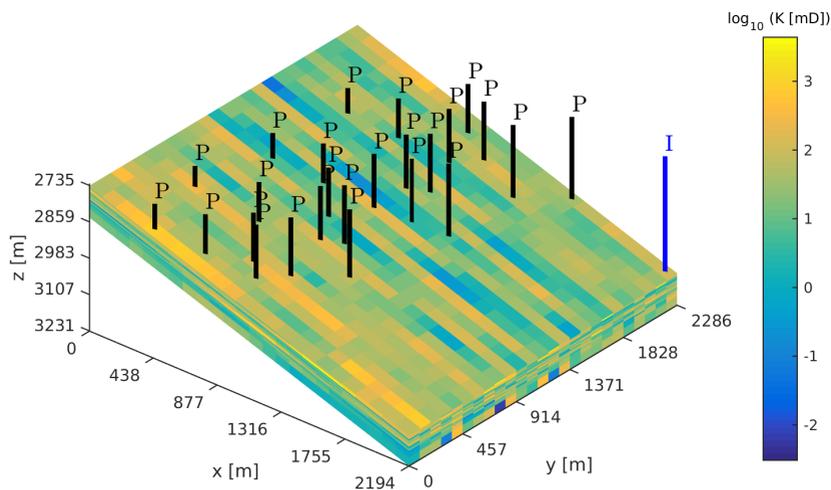
Figura 85 – Caso 3: campos de saturação da fase óleo.



heterogêneo e também isotrópico nas direções “x” e “y”, porém, quatro ordens de grandeza menor na direção “z”. Há 26 poços verticais sendo 25 produtores e um injetor. O poço injetor opera na condição de pressão prescrita igual a 27.58 MPa, enquanto os produtores operam em condições variáveis ao longo da simulação entre fluxo prescrito e pressão prescrita. Os instantes de tempo em que há troca dessas condições são descritos detalhadamente no trabalho Killough (1995). O tempo final de simulação é igual a 900 dias divididos ao longo de 36 passos de tempo.

O campo de permeabilidade na direção “x” bem como a disposição dos poços ao longo do reservatório são mostrados na figura 86, em que nota-se que o campo de permeabilidade apresenta variações ao longo de cinco ordens de grandeza.

Figura 86 – Caso 4: campo de permeabilidade absoluta na direção “x”.



O reservatório apresenta escoamento trifásico das fases água, óleo e gás, de modo que o fluido que compõe a fase gás pode

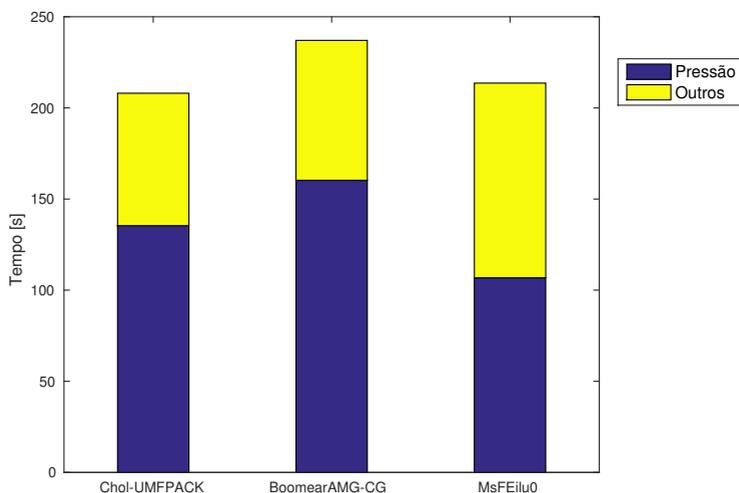
se dissolver na fase óleo, logo, o escoamento é representado pelo modelo *black-oil* padrão. Como as equações desse modelo são não-lineares, escolhe-se o método de Newton exato para resolvê-las. Em cada iteração desse método, é necessária a resolução de um problema linear determinado pela matriz jacobiana e o vetor de resíduos. Essa tarefa é realizada empregando-se o pré-condicionador CPR, apresentado na seção 3.3.3, em conjunto com o método iterativo GMRes. Tal pré-condicionador divide as parcelas da matriz jacobiana referentes às variáveis pressão e saturações, conduzindo à definição de subproblemas independentes para tais variáveis. Desse modo, é possível empregar uma estratégia de solução voltada para problemas elípticos para a solução do campo de pressão. Nesse momento, empregam-se as estratégias de referência utilizadas nos casos anteriores além do pré-condicionador multiescala com razão de engrossamento igual a $6 \times 5 \times 5$ (malha grossa $4 \times 5 \times 3$), operador de restrição do tipo *galerkin* e suavizador baseado em fatoração incompleta sem nenhum grau de preenchimento, sendo denominado como MsFEilu0-4x5x3.

O somatório do número de iterações não-lineares ao longo dos passos de tempo necessárias para a convergência do problema é igual a 230. Observa-se que isso é válido para todas as estratégias em consideração, uma vez que o problema linear elíptico é resolvido com elevada precisão em cada uma dessas estratégias. O mesmo pode se dizer a respeito do número de iterações observadas para o pré-condicionador CPR, que é igual a 2226, uma vez que tal pré-condicionador é identificado como o nível iterativo logo acima da resolução dos problemas elípticos. Isto significa que ao todo são resolvidos 2226 sistemas lineares elípticos para a resolução do problema não-linear em questão ao longo do tempo.

Como a estratégia Chol-UMFPACK é direta e resolve o problema linear numa única iteração, segue que o número de iterações totais para essa estratégia é igual a 2226. O número total de iterações necessárias para a convergência da estratégia BoomerAMG-CG foi igual a 12642, conduzindo a uma média de 6 iterações para a resolução de cada problema linear. Por último, a estratégia multiescala MsFEilu0-CG necessitou de 61225 iterações para a convergência, conduzindo a uma média de 27 iterações

por cada problema linear. Este é um número bem maior que o apresentado pela estratégia *multigrid* de referência, no entanto, o custo das iterações do pré-condicionador BoomerAMG é maior. De fato, nota-se para o presente problema que a estratégia MsFEilu0-CG acaba sendo mais eficiente que a anterior e tão eficiente quanto a estratégia direta. Esse fato é ilustrado pela figura 87, que destaca a parcela do tempo computacional utilizada para a solução dos problemas lineares elípticos durante a execução da simulação.

Figura 87 – Caso 4: tempos computacionais de acordo com a estratégia de solução.



Por fim, a título de ilustração, as soluções no instante de tempo final para os campos de pressão e saturação das fases água, óleo e gás são apresentadas nas figuras 88 a 91, enquanto que os volumes totais nas condições padrão de água, óleo e gás recuperados do reservatório são dados pela figura 92.

Figura 88 – Caso 4: campo de pressão no instante final.

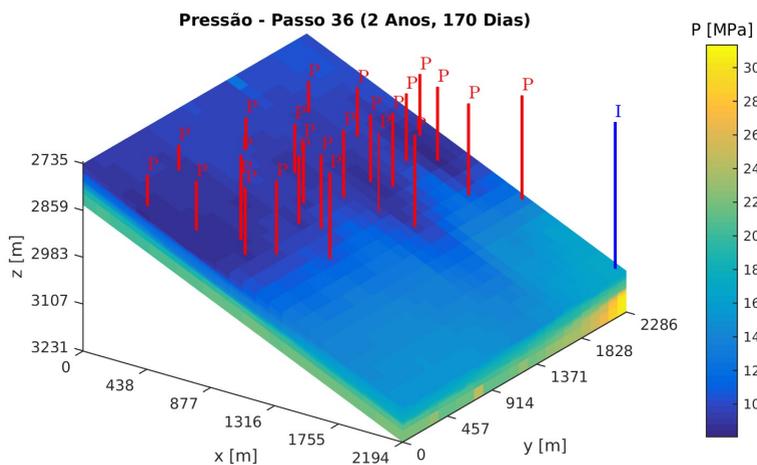


Figura 89 – Caso 4: campo de saturação de água no instante final.

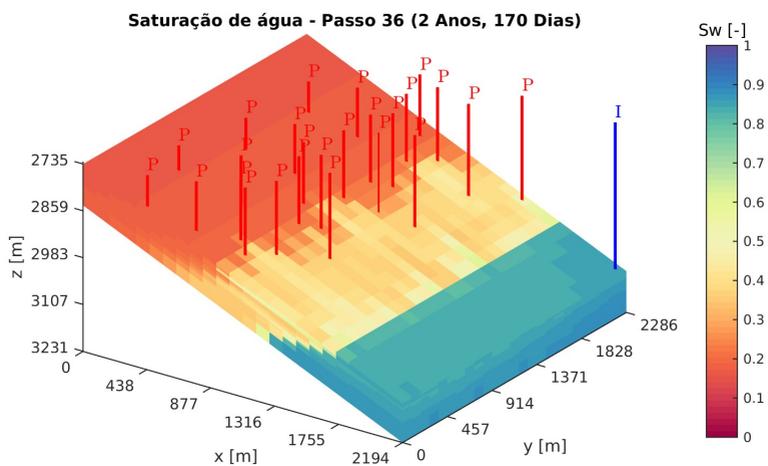


Figura 90 – Caso 4: campo de saturação de óleo no instante final.

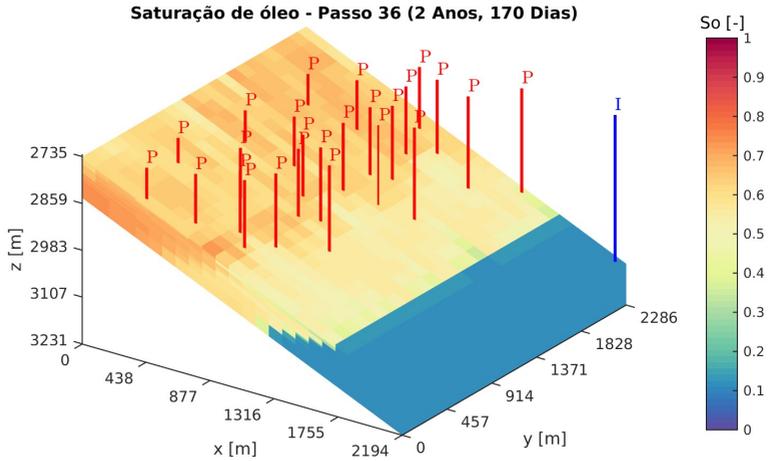


Figura 91 – Caso 4: campo de saturação de gás no instante final.

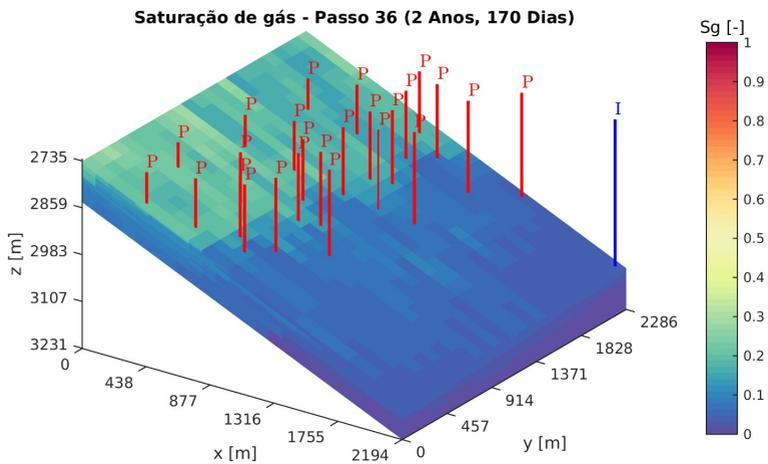
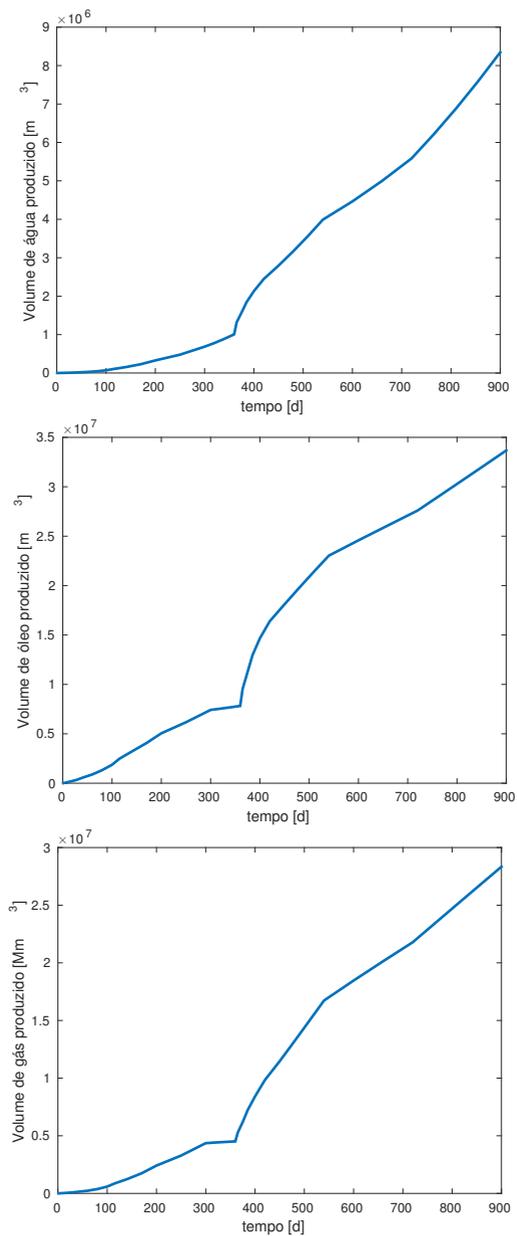


Figura 92 – Caso 4: produções totais acumuladas de gás, óleo e água, respectivamente.



7 CONCLUSÕES

As conclusões do presente trabalho são listadas a seguir:

- a) a aplicação de uma única iteração do estágio global do pré-condicionador multiescala construído a partir do operador de restrição baseado em volumes finitos associada à reconstrução do campo de velocidades é algebricamente equivalente ao emprego do métodos dos volumes finitos multiescala MsFVM. Essa estratégia conduz a campos de velocidade conservativos e campos aproximados de pressão em malha refinada, os quais exibem, no entanto, problemas de monotonicidade que podem ser amenizados mediante o emprego de razões de engrossamento menores. A qualidade da solução para o campo de pressão é satisfatória em problemas de escoamento monofásico, porém é de baixa qualidade em escoamentos multifásicos, já que degradam a taxa de convergência do problema não-linear que precisa ser resolvido nesses casos.
- b) a taxa de convergência bem como o desempenho computacional observado para o pré-condicionador multiescala quando utilizado para a obtenção de soluções precisas variam significativamente de acordo com o suavizador, a estratégia de construção do operador de restrição e a razão de engrossamento adotados. Para os problemas testados, observou-se que as alternativas mais eficientes para esses três parâmetros são representadas respectivamente por suavizadores baseados em fatoração incompleta, pelo operador de restrição igual ao transposto do operador de prolongação e por razões de engrossamento ao redor de 10;
- c) a etapa de configuração dos pré-condicionadores multiescala é a que demanda a maior parte dos recursos computacionais, portanto, o trecho de código responsável por implementar essa operação é o que deve ser otimizado a fim de que se reduza o esforço computaci-

- onal necessário para a execução do pré-condicionador;
- d) o suavizador baseado em funções de correção não é eficaz pois degrada o espectro do operador pré-condicionado e pode conduzir a métodos iterativos não convergentes;
 - e) em problemas bidimensionais, o método direto de referência Cholesky-UMFPACK mostrou-se como o mais eficiente dentre as estratégias avaliadas em termos do tempo computacional necessário para a resolução do problema. O ponto negativo dessa estratégia se dá pelo uso mais acentuado de memória RAM. Já em problemas tridimensionais de grande porte contendo ao menos 1.0×10^5 incógnitas, o método iterativo BoomerAMG-CG mostrou-se como o mais eficiente. Em todos os problemas testados, os métodos direto e iterativo de referência apresentaram melhor desempenho que a estratégia multiescala de referência.

7.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

As seguintes sugestões são indicadas para trabalhos futuros:

- a) implementar o algoritmo do preconditionador multiescala algébrico em paralelo empregando-se o padrão MPI, uma vez que as estruturas de matrizes e vetores disponíveis na biblioteca PETSc, utilizada na presente implementação desse pré-condicionador, apresentam suporte a esse padrão de comunicação para estruturas de dados armazenadas em máquinas distintas.
- b) otimizar a determinação do operador de prolongação em problemas que variam no tempo através de sua reconstrução apenas em determinadas áreas de interesse. Desse modo, os operadores construídos em passos de tempo anteriores ao atual podem ser corrigidos de modo a diminuir o tempo de configuração do pré-condicionador multiescala ao longo dos passos de

tempo e, portanto, o tempo de execução do método iterativo é reduzido;

- c) estender o algoritmo de particionamento do grafo referente à malha refinada do reservatório para malhas não-estruturadas e avaliar o desempenho do pré-condicionador multiescala para a resolução de problemas elípticos nessa classe de problemas.

REFERÊNCIAS

- AARNES, J. E.; KIPPE, V.; LIE, K.-A. Mixed multiscale finite elements and streamline methods for reservoir simulation of large geomodels. *Advances in Water Resources*, v. 28, p. 257–271, 2005. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.advwatres.2004.10.007>. Citado na página 98.
- AAVATSMARK, I. An introduction to multipoint flux approximations for quadrilateral grids. *Computational Geosciences*, v. 6, n. 3-4, p. 405–432, 2002. Disponível em: <http://doi.org/10.1023/A:1021291114475>. Citado na página 120.
- ACS, G.; DOLESCHALL, S.; FARKAS, E. General purpose compositional model. *SPE Journal*, v. 25, p. 543–553, 1986. SPE-10515-PA. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.2118/10515-PA>. Citado na página 39.
- AGULLO, E. et al. *MUltifrontal Massively Parallel Solver*. [S.l.], 2015. Disponível em: http://mumps.enseeiht.fr/doc/userguide_5.0.0.pdf. Citado na página 133.
- ALPAK, F. O.; PAL, M.; LIE, K. A. A multiscale adaptive local-global method for modeling flow in stratigraphically complex reservoirs. *SPE Journal*, v. 17, n. 4, p. 1056–1070, December 2012. SPE-140403-PA. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.2118/140403-PA>. Citado na página 98.
- AMBRUS, J. *Volumes Finitos Utilizando Aproximações de Múltiplos Pontos Aplicados à Simulação Numérica de Reservatórios de Petróleo*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2009. Disponível em: http://www.sinmec.ufsc.br/site/arquivos/u-ulfnaezdrl_2009_jaime_ambrus_dissertacao.pdf. Citado na página 120.
- AMESTOY, P. R.; DAVIS, T. A.; DUFF, I. S. An approximate minimum degree ordering algorithm. *SIAM Journal on Matrix*

Analysis & Applications, v. 14, p. 886–905, 1996. Disponível em: <<http://doi.org/10.1137/S0895479894278952>>. Citado na página 74.

ARBOGAST, T.; WHEELER, M. F.; YOTOV, I. Mixed finite elements for elliptic problems with tensor coefficients as cell-centered finite differences. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, v. 34, n. 2, p. 828–852, 1997. Disponível em: <<http://doi.org/10.1137/S0036142994262585>>. Citado na página 98.

ARNOLD, D. N. Mixed finite element methods for elliptic problems. *Computational Methods Applied to Mechanical Engineering*, v. 82, p. 281–300, 1990. Disponível em: <[http://doi.org/10.1016/0045-7825\(90\)90168-L](http://doi.org/10.1016/0045-7825(90)90168-L)>. Citado 2 vezes nas páginas 45 e 98.

ARNOLD, D. N. et al. Unified analysis of discontinuous galerkin methods for elliptic problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, v. 39, p. 1749–1779, 2002. Disponível em: <<http://doi.org/10.1137/S0036142901384162>>. Citado na página 45.

AZIZ, K.; SETTARI, A. *Petroleum Reservoir Simulation*. Applied Science Publishers, 1979. Disponível em: <https://books.google.com.br/books/about/Petroleum_reservoir_simulation.html?id=GJ5TAAAAMAAJ&hl=en>. Citado 3 vezes nas páginas 40, 45 e 48.

BALAY, S. et al. *PETSc Users Manual*. [S.l.], 2015. Disponível em: <<http://www.mcs.anl.gov/petsc>>. Citado 2 vezes nas páginas 72 e 77.

BANGERTH, W. *MATH 676: Finite Element Methods in Scientific Computing*. 2013. Disponível em: <<http://www.math.tamu.edu/~bangerth/videos.html>>. Citado na página 73.

BARKER, A. T. et al. Accurate coarse-scale AMG-based finite volume reservoir simulations in highly heterogeneous

media. In: *SPE 173277-MS*. Society of Petroleum Engineers, 2015. p. –. ISSN 978-1-61399-352-1. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.2118/173277-MS>. Citado na página 92.

BEHIE, A.; COLLINS, D.; JR., P. F. Incomplete factorization methods for three-dimensional non-symmetric problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 42, p. 287–299, 1984. Disponível em: [http://doi.org/10.1016/0045-7825\(84\)90010-0](http://doi.org/10.1016/0045-7825(84)90010-0). Citado na página 84.

BEHIE, A.; VINSOME, P. K. W. Block iterative methods for fully implicit reservoir simulation. *SPE Journal*, v. 22, p. 658–668, 1982. SPE-9303-PA. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.2118/9303-PA>. Citado na página 84.

BEHIE, G. A.; FORSYTH, P. A. Multigrid solution of the pressure equation in reservoir simulation. *SPE Journal*, v. 23, n. 04, p. 623–632, August 1983. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.2118/10492-PA>. Citado na página 92.

BENZI, M. Preconditioning techniques for large linear systems: A survey. *Journal of Computational Physics*, v. 182, p. 418–477, 2002. Disponível em: <http://doi.org/10.1006/jcph.2002.7176>. Citado 2 vezes nas páginas 80 e 81.

BO, L.; WHEELER, M. F. Iterative coupling reservoir simulation on high performance computers. *Petroleum Science and Technology*, v. 6, p. 43–50, 2009. Disponível em: <http://doi.org/10.1007/s12182-009-0008-x>. Citado na página 49.

BONFIGLI, G.; JENNY, P. Recent developments in the multiscale finite volume procedure. In: _____. Springer International Publishing, 2010. cap. III, p. 124–131. Disponível em: http://doi.org/10.1007/978-3-642-12535-5_13. Citado na página 111.

BROWN, G. L.; COLLINS, D. A.; CHEN, Z. Efficient preconditioning for algebraic multigrid and red-black ordering

in adaptive-implicit black-oil simulations. In: *SPE-173231-MS*. Society of Petroleum Engineers, 2015. p. –. ISSN 978-1-61399-352-1. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.2118/173231-MS>>. Citado 2 vezes nas páginas 87 e 92.

BUSH, L.; GINTING, V.; PRESCHO, M. Application of a conservative, generalized multiscale finite element method to flow models. ArXiv e-prints. 2013. Disponível em: <<http://doi.org/10.1016/j.cam.2013.10.006>>. Citado na página 98.

CAO, H. et al. Parallel scalable unstructured CPR-type linear solver for reservoir simulation. In: *SPE-96809-MS*. Society of Petroleum Engineers, 2005. p. –. ISSN 978-1-55563-150-5. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.2118/96809-MS>>. Citado na página 86.

CHEN, Z. Recent advances of upscaling methods for the simulation of flow transport through heterogeneous porous media. *Journal of Computational Mathematics*, v. 24, p. 393–400, 2006. Disponível em: <<http://lsec.cc.ac.cn/~zmchen/papers/jcm.pdf>>. Citado na página 72.

CHEN, Z. *Reservoir Simulation: Mathematical Techniques in Oil Recovery*. SIAM, 2007. Disponível em: <<http://bookstore.siam.org/cb77/>>. Citado 3 vezes nas páginas 40, 43 e 49.

CHEN, Z.; DENG, W.; YE, H. Upscaling of a class of nonlinear parabolic equations for the flow transport in heterogeneous porous media. *Communications in Mathematical Sciences*, v. 3, p. 493–515, 2005. Disponível em: <<http://projecteuclid.org/euclid.cms/1144429328>>. Citado na página 72.

CHEN, Z.; HOU, T. Y. A mixed multiscale finite element method for elliptic problems with oscillating coefficients. *Mathematics of Computation*, American Mathematical Society, v. 72, n. 242, p. 541–576, April 2003. ISSN 00255718. Disponível

em: <<http://www.jstor.org/stable/4099920>>. Citado na página 98.

CHEN, Z.; HUAN, G.; MA, Y. *Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media*. SIAM, 2006. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1137/1.9780898718942>>. Citado na página 45.

CHEVALIER, C.; PELLEGRINI, F. PT-Scotch: A tool for efficient parallel graph ordering. *Parallel Computing*, v. 34, n. 6-8, p. 318–331, July 2008. Disponível em: <<http://doi.org/10.1016/j.parco.2007.12.001>>. Citado na página 93.

CHRISTIE, M. A. Upscaling for reservoir simulation. *Journal of Petroleum Technology*, v. 48, n. 11, p. 1004–1010, 1996. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.2118/37324-JPT>>. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 69.

CHUNG, E. T.; EFENDIEV, Y.; LI, G. An adaptive gmsfem for high-contrast flow problems. *Journal of Computational Physics*, v. 273, p. 54–76, May 2014. Disponível em: <<http://doi.org/10.1016/j.jcp.2014.05.007>>. Citado na página 98.

CLEES, T.; GANZER, L. An efficient algebraic multigrid solver strategy for adaptive implicit methods in oil-reservoir simulation. *SPE Journal*, Society of Petroleum Engineers, v. 15, p. 670–681, 2010. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.2118/105789-PA>>. Citado na página 92.

COATS, K. H.; THOMAS, L. K.; PIERSON, R. G. Compositional and black oil reservoir simulation. *SPE Reservoir Evaluation & Engineering*, v. 1, p. 372–379, 1998. SPE-50990-PA. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.2118/50990-PA>>. Citado na página 39.

CUSINI, M. et al. A constrained pressure residual multiscale (CPR-MS) compositional solver. In: *ECMOR XIV-14th European*

conference on the mathematics of oil recovery. [s.n.], 2014.
Disponível em: <<http://doi.org/10.3997/2214-4609.20141778>>.
Citado na página 111.

DAKE, L. P. *Fundamentals of Reservoir Engineering*. Elsevier Scientific Publishing Company, 1978. 443 p. Disponível em: <http://store.elsevier.com/Fundamentals-of-Reservoir-Engineering/L_P_-Dake/isbn-9780080568980/>. Citado na página 42.

DAVIS, T. A. Algorithm 832: Umfpack v4.3—an unsymmetric-pattern multifrontal method. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, v. 30, n. 2, p. 196–199, June 2004. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1145/992200.992206>>. Citado na página 133.

DOGRU, A. H. et al. New frontiers in large scale reservoir simulation. In: *SPE Reservoir Simulation Symposium, 21-23 February, The Woodlands, Texas, USA*. [s.n.], 2011. SPE-142297-MS. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.2118/142297-MS>>. Citado na página 69.

DOLEAN, V.; JOLIVET, P.; NATAF, F. An introduction to domain decomposition methods: Algorithms, theory and parallel implementation. ArXiv e-prints. 2015. Disponível em: <<https://hal.archives-ouvertes.fr/cel-01100932>>. Citado na página 96.

DOLEAN, V. et al. Two-level domain decomposition methods for highly heterogeneous darcy equations. connections with multiscale methods. *Oil Gas Sci. Technol. – Rev. IFP Energies nouvelles*, v. 69, n. 4, p. 731–752, July 2014. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.2516/ogst/2013206>>. Citado na página 96.

DOLEAN, V. et al. Analysis of a two-level schwarz method with coarse spaces based on local dirichlet-to-neumann maps. *Computer Methods in Applied Mathematics*, v. 12, n. 4, p. 391–414, 2012. Disponível em: <<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00586246>>. Citado na página 96.

DOUGLAS, J.; PEACEMAN, D. W.; JR., H. H. R. A method for calculating multi-dimensional immiscible displacement. In: *American Institute of Mining, Metallurgical, and Petroleum Engineers, Inc. Society of Petroleum Engineers*, 1959. SPE-1327-G. Disponível em: <<https://www.onepetro.org/general/SPE-1327-G>>. Citado na página 48.

DURLOFSKY, L. J. Upscaling of geocellular models for reservoir flow simulation: A review of recent progress. In: *7th International Forum on Reservoir Simulation*. [s.n.], 2003. Disponível em: <<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.122.5524&rep=rep1&type=pdf>>. Citado na página 72.

EFENDIEV, Y.; HOU, T. Y. *Multiscale Finite Element Methods - Theory and Applications*. Springer, 2009. Disponível em: <<http://www.springer.com/br/book/9780387094953>>. Citado na página 98.

FALGOUT, R. D.; YANG, U. M. HYPRE: a library of high performance preconditioners. In: *Preconditioners - Lecture Notes in Computer Science*. [s.n.], 2002. p. 632–641. Disponível em: <<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.8.1202>>. Citado na página 134.

FARMER, C. L. Upscaling: a review. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 40, p. 63–78, 2002. Disponível em: <<http://doi.org/10.1002/flid.267>>. Citado na página 72.

FORSYTH, P. A. A control-volume, finite-element method for local mesh refinement in thermal reservoir simulation. *SPE Reservoir Evaluation & Engineering*, v. 5, p. 561–566, 1990. SPE-18415-PA. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.2118/18415-PA>>. Citado na página 46.

FUNG, L. S.-K.; COLLINS, D. A.; NGHIEM, L. X. An adaptive-implicit switching criterion based on numerical stability analysis. *SPE Reservoir Evaluation & Engineering*,

- v. 4, p. 45–51, 1989. SPE-16003-PA. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.2118/16003-PA>>. Citado na página 49.
- GAMBOLATI, G.; FERRONATO, M.; JANNA, C. Preconditioning for sparse linear systems at the dawn of the 21st century: History, current developments, and future perspectives. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, v. 35, p. 980–996, 2011. Article ID 127647. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.5402/2012/127647>>. Citado na página 80.
- GEORGE, A. Nested dissection of a regular finite element mesh. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, v. 10, p. 345–363, 1976. Disponível em: http://www.math.ucsb.edu/~hdc/teaching/Math206D/Nested_Dissection.pdf>. Citado na página 74.
- GRIES, S.; PLUM, H.-J. Status of system-AMG for reservoir simulation applications. In: *SPE Reservoir Simulation Symposium, 23-25 February, Houston, Texas, USA*. Society of Petroleum Engineers, 2015. ISSN 978-1-61399-352-1. SPE-173241-MS. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.2118/173241-MS>>. Citado na página 92.
- GRIES, S. et al. Preconditioning for efficiently applying algebraic multigrid in fully implicit reservoir simulations. *SPE Journal*, Society of Petroleum Engineers, v. 19, p. 726–736, 2014. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.2118/163608-MS>>. Citado 2 vezes nas páginas 87 e 92.
- HACKBUSCH, W. *Multi-Grid Methods and Applications*. Springer, 1985. Springer Series in Computational Mathematics. Disponível em: <http://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-02427-0>>. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 92.
- HAJIBEYGI, H. et al. Iterative multiscale finite-volume method. *J. Comput. Phys.*, Academic Press Professional, Inc., San Diego, CA, USA, v. 227, n. 19, p. 8604–8621, out. 2008. ISSN 0021-9991. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2008.06.013>>. Citado na página 111.

HAJIBEYGI, H.; DEB, R.; JENNY, P. Multiscale finite volume method for non-conformal coarse grids arising from faulted porous media. In: *SPE Reservoir Simulation Symposium, 21-23 February, The Woodlands, Texas, USA*. [s.n.], 2011. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.2118/142205-MS>>. Citado na página 111.

HAJIBEYGI, H.; JENNY, P. Multiscale finite-volume method for parabolic problems arising from compressible multiphase flow in porous media. *Journal of Computational Physics*, v. 228, n. 14, p. 5129 – 5147, 2009. ISSN 0021-9991. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999109001946>>. Citado na página 110.

HAJIBEYGI, H.; JENNY, P. Adaptive iterative multiscale finite volume method. *Journal of Computational Physics*, v. 230, n. 3, p. 628 – 643, 2011. ISSN 0021-9991. Disponível em: <<http://doi.org/10.1016/j.jcp.2010.10.009>>. Citado na página 111.

HAJIBEYGI, H.; KARVOUNIS, D.; JENNY, P. A hierarchical fracture model for the iterative multiscale finite volume method. *Journal of Computational Physics*, v. 230, n. 24, p. 8729–8743, 2011. Disponível em: <<http://doi.org/10.1016/j.jcp.2011.08.021>>. Citado 2 vezes nas páginas 111 e 127.

HAJIBEYGI, H.; TCHELEPI, H. Compositional multiscale finite-volume formulation. *SPE Journal*, v. 19, n. 02, p. 316–326, 2014. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.2118/163664-PA>>. Citado na página 111.

HAJIBEYGI, H.; WANG, Y.; TCHELEPI, H. A. Monotone multiscale finite volume method for flow in heterogeneous porous media. In: *ECMOR XIV - 14th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery*. [s.n.], 2014. Disponível em: <<http://doi.org/10.3997/2214-4609.20141777>>. Citado na página 110.

HENSON, V. E. Multigrid methods for nonlinear problems: An overview. In: *Proceedings of the SPIE*. [s.n.], 2003. Disponível em: <https://computation.llnl.gov/casc/people/henson/postscript/UCRL_JC_150259.pdf>. Citado na página 52.

HENSON, V. E.; YANG, U. M. BoomerAMG: A parallel algebraic multigrid solver and preconditioner. *Applied Numerical Mathematics*, v. 41, p. 155–177, 2002. Disponível em: <[http://doi.org/10.1016/S0168-9274\(01\)00115-5](http://doi.org/10.1016/S0168-9274(01)00115-5)>. Citado 2 vezes nas páginas 90 e 92.

HESSE, M. A.; MALLISON, B. T.; TCHELEPI, H. A. Compact multiscale finite volume method for heterogeneous anisotropic elliptic equations. *Multiscale Modeling & Simulation*, v. 7, n. 2, p. 934–962, 2008. Disponível em: <<http://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/070705015?journalCode=mmsubt>>. Citado na página 110.

HESTENES, M. R.; STIEFEL, E. Methods of conjugate gradients for solving linear systems. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, v. 49, p. 409–436, 1952. Disponível em: <http://nvlpubs.nist.gov/nistpubs/jres/049/jresv49n6p409_A1b.pdf>. Citado na página 79.

HOU, T. Y.; WU, X.-H. A multiscale finite element method for elliptic problems in composite materials and porous media. *Journal of Computational Physics*, v. 134, n. 134, p. 169–189, 1997. Disponível em: <<http://doi.org/10.1006/jcph.1997.5682>>. Citado 2 vezes nas páginas 98 e 102.

HOU, T. Y.; WU, X.-H.; CAI, Z. Convergence of a multiscale finite element method for elliptic problems with rapidly oscillating coefficients. *Mathematics of Computation*, v. 68, n. 227, p. 913–943, 1999. Disponível em: <<http://www.ams.org/journals/mcom/1999-68-227/S0025-5718-99-01077-7/S0025-5718-99-01077-7.pdf>>. Citado na página 98.

JENNY, P.; LEE, S.; TCHELEPI, H. Adaptive multiscale finite-volume method for multiphase flow and transport in porous media. *Multiscale Modeling & Simulation*, v. 3, n. 1, p. 50–64, 2005. Disponível em: <<http://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/030600795>>. Citado na página 110.

JENNY, P.; LEE, S.; TCHELEPI, H. Adaptive fully implicit multi-scale finite-volume method for multi-phase flow and transport in heterogeneous porous media. *Journal of Computational Physics*, v. 217, n. 2, p. 627 – 641, 2006. ISSN 0021-9991. Disponível em: <<http://doi.org/10.1016/j.jcp.2006.01.028>>. Citado 3 vezes nas páginas 62, 106 e 110.

JENNY, P.; LEE, S. H.; TCHELEPI, H. A. Multiscale finite-volume method for elliptic problems in subsurface flow simulation. *J. Comput. Phys.*, Academic Press Professional, Inc., San Diego, CA, USA, v. 187, n. 1, p. 47–67, Maio 2003. ISSN 0021-9991. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1016/S0021-9991\(03\)00075-5](http://dx.doi.org/10.1016/S0021-9991(03)00075-5)>. Citado 4 vezes nas páginas 34, 98, 101 e 109.

JENNY, P.; LUNATI, I. Modeling complex wells with the multi-scale finite-volume method. *Journal of Computational Physics*, v. 228, n. 3, p. 687–702, 2009. Disponível em: <<http://doi.org/10.1016/j.jcp.2008.09.026>>. Citado na página 111.

KARYPIS, G.; KUMAR, V. A fast and highly quality multilevel scheme for partitioning irregular graphs. *SIAM Journal on Scientific Computing*, v. 20, n. 1, p. 359–392, August 1998. Disponível em: <<http://doi.org/10.1137/S1064827595287997>>. Citado na página 93.

KAVIANY, M. *Principles of Heat Transfer in Porous Media*. Springer-Verlag, 1995. ISBN 9780387945507. Disponível em: <<http://link.springer.com/book/10.1007%2F978-1-4612-4254-3>>. Citado na página 31.

KEILEGAVLEN, E.; NORDBOTTEN, J. Inexact linear solvers for control volume discretizations in porous media. *Computational Geosciences*, Springer International Publishing, v. 19, p. 1–18, 2014. ISSN 1420-0597. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s10596-014-9453-8>>. Citado na página 111.

KELLEY, C. T. *Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations*. SIAM, 1995. Disponível em: <https://www.siam.org/books/textbooks/fr16_book.pdf>. Citado na página 73.

KERSHAW, D. S. The incomplete cholesky - conjugate gradient method for the iterative solution of systems of linear equations. *Journal of Computational Physics*, v. 26, p. 43–65, 1978. Disponível em: <[http://doi.org/10.1016/0021-9991\(78\)90098-0](http://doi.org/10.1016/0021-9991(78)90098-0)>. Citado na página 86.

KILLOUGH, J. Ninth spe comparative solution project: A reexamination of black-oil simulation. In: *SPE Reservoir Simulation Symposium, 12-15 February, San Antonio, Texas*. [s.n.], 1995. SPE-29110-MS. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.2118/29110-MS>>. Citado na página 185.

KILLOUGH, J.; WANG, Y. Solver preconditioning using the combinatorial multilevel method. In: *SPE Reservoir Simulation Symposium, 18-20 February, The Woodlands, Texas, USA*. [s.n.], 2013. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.2118/163589-MS>>. Citado 3 vezes nas páginas 61, 69 e 92.

KIPPE, V.; AARNES, J.; LIE, K.-A. A comparison of multiscale methods for elliptic problems in porous media flow. *Computational Geosciences*, Springer Netherlands, v. 12, n. 3, p. 377–398, 2008. ISSN 1420-0597. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s10596-007-9074-6>>. Citado na página 34.

KLIE, H. et al. Deflation AMG solvers for highly ill-conditioned reservoir simulation problems. In: *SPE Reservoir Simulation*

Symposium, 26-28 February, Houston, Texas, U.S.A. [s.n.], 2007. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.2118/105820-MS>>. Citado na página 92.

KOZINTSEV, B.; KEDEM, B. *Clipped Gaussian Random Fields*. 1999. Disponível em: <<http://math4411.math.umd.edu/cgi-bin/bak/generate.cgi/generate.cgi?4>>. Citado na página 135.

KROGSTAD, S. et al. MRST-AD - an open-source framework for rapid prototyping and evaluation of reservoir simulation problems. In: *SPE Reservoir Simulation Symposium, 23-25 February, Houston, Texas, USA*. [s.n.], 2015. SPE-173317-MS. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.2118/173317-MS>>. Citado na página 46.

KUNZE, R. *Multiscale Descriptions of Density-Driven Flow Instabilities in Porous Media*. Tese (Doutorado) — Université de Lausanne, 2014. Disponível em: <http://www.maflot.com/Site/INFO_files/thesis.pdf>. Citado na página 110.

LACROIX, S. et al. Iterative solution for modeling multiphase flow in porous media fully implicitly. *SIAM Journal on Scientific Computing*, v. 25, p. 905–926, 2003. Disponível em: <<http://doi.org/10.1137/S106482750240443X>>. Citado na página 87.

LAKE, L. W. *Enhanced Oil Recovery*. Society of Petroleum Engineers, 2010. Disponível em: <<http://store.spe.org/Enhanced-Oil-Recovery--P436.aspx>>. Citado na página 39.

LEE, S.; WOLFSTEINER, C.; TCHELEPI, H. Multiscale finite-volume formulation for multiphase flow in porous media: Black oil formulation of compressible, three-phase flow with gravity. *Computational Geosciences*, Springer Netherlands, v. 12, n. 3, p. 351–366, 2008. ISSN 1420-0597. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s10596-007-9069-3>>. Citado na página 111.

LEE, S. H.; ZHOU, H.; TCHELEPI, H. A. Adaptive multiscale finite volume method for nonlinear multiphase transport in heterogeneous formations. *Journal of Computational Physics*, v. 228, n. 4, p. 9036–9058, December 2009. Disponível em: <<http://doi.org/10.1016/j.jcp.2009.09.009>>. Citado na página 110.

LI, X. S.; DEMMEL, J. W. SuperLU_DIST - a scalable distributed memory sparse direct solver for unsymmetric linear systems. *ACM Transactions on Mathematical Software*, v. 29, n. 2, p. 110–140, June 2003. Disponível em: <<http://doi.org/10.1145/779359.779361>>. Citado na página 133.

LIE, K. A. et al. Open source MATLAB implementation of consistent discretisations on complex grids. *Computational Geosciences*, v. 16, p. 297–322, 2012. Disponível em: <<http://doi.org/10.1007/s10596-011-9244-4>>. Citado na página 46.

LIU, W.-H.; SHERMAN, A. H. Comparative analysis of the cuthill-mckee and the reverse cuthill-mckee ordering algorithms for sparse matrices. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, v. 13, p. 198–213, 1976. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/2156087>>. Citado na página 74.

LUNATI, I.; JENNY, P. The multiscale finite-volume method - a flexible tool to model physically complex flow in porous media. In: *10th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery — Amsterdam, The Netherlands, 4 – 7 September 2006*. [s.n.], 2006. Disponível em: <<http://www.researchgate.net/publication/37451134>>. Citado na página 110.

LUNATI, I.; JENNY, P. Multiscale finite-volume method for compressible multiphase flow in porous media. *Journal of Computational Physics*, v. 216, n. 2, p. 616 – 636, 2006. ISSN 0021-9991. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2006.01.001>>. Citado na página 110.

- LUNATI, I.; JENNY, P. Treating highly anisotropic subsurface flow with the multiscale finite volume method. *Multiscale Modeling & Simulation*, v. 6, p. 308–318, 2007. Disponível em: <<http://doi.org/10.1137/050638928>>. Citado na página 110.
- LUNATI, I.; JENNY, P. Multiscale finite-volume method for density-driven flow in porous media. *Computational Geosciences*, Springer, v. 12, n. 3, p. 337–350, 2008. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s10596-007-9071-9>>. Citado na página 108.
- LUNATI, I.; LEE, S. H. An operator formulation of the multiscale finite-volume method with correction function. *Multiscale Modeling & Simulation*, v. 8, n. 1, p. 96–109, 2009. Disponível em: <<http://dblp.uni-trier.de/db/journals/mmas/mmas8.html#LunatiL09>>. Citado na página 108.
- LUNATI, I.; TYAGI, M.; LEE, S. H. An iterative multiscale finite volume algorithm converging to the exact solution. *Journal of Computational Physics*, v. 230, n. 5, p. 1849 – 1864, 2011. ISSN 0021-9991. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999110006510>>. Citado na página 111.
- MALISKA, C. R. *Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional*. LTC, 2004. Disponível em: <http://www.researchgate.net/publication/233843056_Transferencia_de_Calor_e_Mecnica_dos_Fluidos_Computacional>. Citado na página 46.
- MANEA, A. M.; SEWALL, J.; TCHELEPI, H. A. Parallel multiscale linear solver for highly detailed reservoir models. In: *SPE Reservoir Simulation Symposium, 23-25 February, Houston, Texas, USA*. [s.n.], 2015. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.2118/173259-MS>>. Citado na página 35.
- MASSON, R. et al. Parallel preconditioning for sedimentary basin simulations. *Lecture Notes in Computer Science*, v. 2907, p. 93–102, 2004. Disponível em: <http://doi.org/10.1007/978-3-540-24588-9_9>. Citado na página 87.

MATHEW, T. P. *Domain Decomposition Methods for the Numerical Solution of Partial Differential Equations*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008. Disponível em: <<http://doi.org/10.1007/978-3-540-77209-5>>. Citado na página 96.

MOYNER, O. *Multiscale Finite Volume Methods - Extension to Unstructured Grids with Applications in Reservoir Simulation*. Dissertação (Master of Science in Physics and Mathematics) — NTNU - Norwegian University of Science and Technology, 2012. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/11250/259015>>. Citado na página 106.

MOYNER, O. Construction of multiscale preconditioners on stratigraphic grids. In: *ECMOR XIV - 14th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery*. [s.n.], 2014. Disponível em: <<http://doi.org/10.3997/2214-4609.20141775>>. Citado na página 111.

MOYNER, O.; LIE, K. A. The multiscale finite-volume method on stratigraphic grids. *SPE Journal*, v. 19, p. 816–831, 2014. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.2118/163649-PA>>. Citado 2 vezes nas páginas 106 e 111.

MOYNER, O.; LIE, K. A. A multiscale two-point flux-approximation method. *Journal of Computational Physics*, v. 275, p. 273–293, 2014. Disponível em: <<http://doi.org/10.1016/j.jcp.2014.07.003>>. Citado na página 110.

MOYNER, O.; LIE, K. A. A multiscale method based on restriction-smoothed basis functions suitable for general grids in high contrast media. In: *SPE Reservoir Simulation Symposium, 23-25 February, Houston, Texas, USA*. [s.n.], 2015. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.2118/173265-MS>>. Citado na página 111.

DESIGN 28th ACM SIGPLAN Conference on P. L.; IMPLEMENTATION (Ed.). *Valgrind: a framework for*

heavyweight dynamic binary instrumentation, v. 42, n. 6. [s.n.], 2007. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1145/1273442.1250746>>. Citado na página 144.

NORDBOTTEN, J.; BJORSTAD, P. On the relationship between the multiscale finite-volume method and domain decomposition preconditioners. *Computational Geosciences*, Springer Netherlands, v. 12, n. 3, p. 367–376, 2008. ISSN 1420-0597. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s10596-007-9066-6>>. Citado na página 111.

OSEI-KUFFUOUR, D.; SAAD, Y. Matrix reordering using multilevel graph coarsening for ilu preconditioning. *SIAM Journal on Scientific Computing*, v. 37, p. A319–A419, 2015. Disponível em: <<http://doi.org/10.1137/130936610>>. Citado na página 86.

PAL, M. et al. Validation of the multiscale mixed finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 77, n. 4, p. 206–223, November 2014. ISSN 1097-0363. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1002/flf.3978>>. Citado na página 98.

PEACEMAN, D. W. *Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation*. Elsevier Scientific Publishing Company, 1977. Disponível em: <<http://dl.acm.org/citation.cfm?id=531922>>. Citado na página 45.

PEACEMAN, D. W. Interpretation of well-block pressures in numerical reservoir simulation with nonsquare grid blocks and anisotropic permeability. *SPE Journal*, v. 23, n. 03, p. 531–543, June 1983. SPE-10528-PA. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.2118/10528-PA>>. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 44.

POINTING, D. K. Corner point grid in reservoir simulation. In: *ECMOR I - 1st European Conference on the Mathematics of Oil Recovery*. [s.n.], 1989. Disponível em:

<<http://doi.org/10.3997/2214-4609.201411305>>. Citado na página 46.

POLLOCK, D. W. Semianalytical computation of path lines for finite-difference models. *Groundwater*, v. 26, n. 6, p. 743–750, November 1988. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1111/j.1745-6584.1988.tb00425.x>>. Citado na página 140.

PRESHO, M.; GALVIS, J. A mass conservative generalized multiscale finite element method applied to two-phase flow in heterogeneous porous media. Preprint submitted to Journal of Computational and Applied Mathematics. 2015. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/1504.02033>>. Citado na página 98.

QIN, G.; EWING, R. E.; CHEN, Z. Analysis of a compositional model for fluid flow in porous media. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, v. 60, p. 747–777, 2000. Disponível em: <<http://doi.org/10.1137/S0036139998333427>>. Citado na página 39.

RICHARDSON, L. F. The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations, with an application to the stresses in a masonry dam. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, v. 210, p. 307–357, 1911. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/90994>>. Citado na página 75.

SAAD, Y. ILUT: A dual threshold incomplete LU factorization. *Numerical Linear Algebra with Applications*, v. 1, p. 387–402, 1994. Disponível em: <<http://doi.org/10.1002/nla.1680010405>>. Citado na página 85.

SAAD, Y. *Preconditioned Krylov Subspace Methods for CFD Application*. [S.l.], 1994. Disponível em: <<http://www-users.cs.umn.edu/~saad/PDF/umsi-94-171.pdf>>. Citado na página 85.

SAAD, Y. ILUM: A multi-elimination ILU preconditioner for general sparse matrices. *SIAM Journal on Scientific Computing*, v. 14, p. 830–847, 1996. Disponível em: <<http://doi.org/10.1137/0917054>>. Citado na página 86.

SAAD, Y. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003. ISBN 9780898715347. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1137/1.9780898718003>>. Citado 6 vezes nas páginas 73, 74, 76, 77, 82 e 85.

SAAD, Y.; SCHULTZ, M. H. GMRes: Generalized minimal residual algorithm for solving non-symmetric linear systems. *Scientific and Statistical Computing*, v. 7, n. 3, p. 856–869, Julho 1986. Disponível em: <<http://www.stat.uchicago.edu/~lekheng/courses/324/saad-schultz.pdf>>. Citado na página 76.

SANDVE, T. H.; KEILEGAVLEN, E.; NORDBOTTEN, J. M. Physics-based preconditioners for flow in fractured porous media. *Water Resources Research*, v. 50, n. 2, p. 1357–1373, 2014. ISSN 1944-7973. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1002/2012WR013034>>. Citado na página 111.

SANDVIN, A. *Robust Multiscale Control-volume Methods for Reservoir Simulation*. Tese (Doutorado) — University of Bergen, 2012. Disponível em: <<https://bora.uib.no/handle/1956/7416>>. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 71.

SCHEICHL, R.; MASSON, R.; WENDEBOURG, J. Decoupling and block preconditioning for sedimentary basin simulations. *Computational Geosciences*, v. 7, p. 295–318, 2003. Disponível em: <<http://doi.org/10.1023/B:COMG.0000005244.61636.4e>>. Citado na página 87.

SMITH, B. F.; BJØRSTAD, P. E.; GROPP, W. D. *Domain decomposition: parallel multilevel methods for elliptic partial differential equations*. Cambridge University Press, 1996. Disponível em: <<http://dl.acm.org/citation.cfm?id=238150>>. Citado na página 96.

SPILETE, A. G.; HILLESTAD, J. G.; STONE, H. L. A high-stability sequential solution approach to reservoir simulation. In: *Fall Meeting of the Society of Petroleum Engineers of AIME, 30 September-3 October, Las Vegas, Nevada*. [s.n.], 1973. SPE-4542-MS. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.2118/4542-MS>>. Citado na página 62.

STUBEN, K. A review of algebraic multigrid. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 128, p. 281–309, 2001. Disponível em: <[http://doi.org/10.1016/S0377-0427\(00\)00516-1](http://doi.org/10.1016/S0377-0427(00)00516-1)>. Citado 2 vezes nas páginas 88 e 92.

STUBEN, K. Solving reservoir simulation equations. In: *Ninth International Forum on Reservoir Simulation, Abu Dhabi, United Arab Emirates*. 9th International Forum on Reservoir Simulation, 2007. Disponível em: <https://www.scai.fraunhofer.de/fileadmin/download/publikationen/Paper_AD_040907.pdf>. Citado na página 92.

SUN, S.; KEYES, D. E.; LIU, L. Fully implicit two-phase reservoir simulation with the additive schwarz preconditioned inexact newton method. In: *SPE Reservoir Characterization and Simulation Conference and Exhibition, 16-18 September, Abu Dhabi, UAE*. [s.n.], 2013. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.2118/166062-MS>>. Citado na página 52.

THOMAS, G. W.; THURNAU, D. H. Reservoir simulation using an adaptive implicit method. *SPE Journal*, v. 23, p. 759–763, 1983. SPE-10120-PA. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.2118/10120-PA>>. Citado na página 48.

TOSELLI, A.; WIDLUND, O. *Domain Decomposition Methods - Algorithms and Theory*. Springer Berlin Heidelberg, 2005. v. 34. Disponível em: <<http://doi.org/10.1007/b137868>>. Citado na página 96.

TRANGENSTEIN, J. A.; BELL, J. B. Mathematical structure of compositional reservoir simulation. *SIAM Journal on Scientific*

and *Statistical Computing*, v. 10, p. 815–845, 1989. Disponível em: <<http://doi.org/10.1137/0910049>>. Citado na página 39.

TROTTEMBERG, U.; OOSTERLEE, C.; SCHÜLLER, A. *Multigrid*. Academic Press, 2001. ISBN 9780127010700. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=-og1wD-Nx_wC>. Citado na página 92.

WALLIS, J. R. Incomplete gaussian elimination as a preconditioning for generalized conjugate gradient acceleration. In: *SPE Reservoir Simulation Symposium, 15-18 November, San Francisco, California*. [s.n.], 1983. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.2118/12265-MS>>. Citado na página 86.

WALLIS, J. R.; KENDALL, R. P.; LITTLE, T. E. Constrained residual acceleration of conjugate residual methods. In: *SPE Reservoir Simulation Symposium, 10-13 February, Dallas, Texas*. [s.n.], 1985. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.2118/13536-MS>>. Citado na página 86.

WANG, Y. *Algebraic Multiscale Linear Solver for Heterogeneous Elliptic Problems*. Dissertação (Mestrado) — Resources Engineering Stanford University, 2012. Disponível em: <https://pangea.stanford.edu/ERE/pdf/pereports/MS/Wang_Yixuan2012.pdf>. Citado 2 vezes nas páginas 113 e 127.

WANG, Y.; HAJIBEYGI, H.; TCHELEPI, H. A. Algebraic multiscale solver for flow in heterogeneous porous media. *Journal of Computational Physics*, v. 259, n. 0, p. 284 – 303, 2014. ISSN 0021-9991. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2013.11.024>>. Citado 4 vezes nas páginas 113, 127, 128 e 140.

WATTS, J. W.; SHAW, J. S. A new method for solving the implicit reservoir simulation matrix equation. In: *SPE Reservoir Simulation Symposium, 31 January-2 February, The Woodlands, Texas*. [s.n.], 2005. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.2118/93068-MS>>. Citado na página 49.

WHITAKER, S. Flow in porous media i: A theoretical derivation of darcy's law. *Transport in Porous Media*, Kluwer Academic Publishers, v. 1, n. 1, p. 3–25, 1986. ISSN 0169-3913. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/BF01036523>>. Citado na página 42.

WILLIAMS, S.; WATERMAN, A.; PATTERSON, D. Roofline: An insightful visual performance model for multicore architectures. *Communications of the ACM*, v. 52, p. 65–76, 2009. Disponível em: <<http://doi.org/10.1145/1498765.1498785>>. Citado na página 72.

WOLFSTEINER, C.; LEE, S.; TCHELEPI, H. Well modeling in the multiscale finite volume method for subsurface flow simulation. *Multiscale Modeling & Simulation*, v. 5, n. 3, p. 900–917, 2006. Disponível em: <<http://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/050640771>>. Citado na página 111.

XU, J. The method of subspace corrections. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 128, p. 335–362, 2001. Disponível em: <[http://doi.org/10.1016/S0377-0427\(00\)00518-5](http://doi.org/10.1016/S0377-0427(00)00518-5)>. Citado na página 96.

YANG, U. M. Parallel algebraic multigrid methods high performance preconditioners. In: _____. Springer Berlin Heidelberg, 2006. cap. 2, p. 209–236. Disponível em: <http://doi.org/10.1007/3-540-31619-1_6>. Citado na página 92.

ZHOU, H. *Operator Based Multiscale Method for Compressible Flow*. Dissertação (Mestrado) — Stanford University, 2006. Disponível em: <<https://pangea.stanford.edu/ERE/pdf/pereports/MS/Zhou06.pdf>>. Citado 2 vezes nas páginas 110 e 113.

ZHOU, H. *Algebraic Multiscale Finite-Volume Methods for Reservoir Simulation*. Tese (Doutorado) — Stanford University, 2010. Disponível em: <<https://pangea.stanford.edu/ERE/pdf/>>

[pereports/PhD/Zhou-Hui10.pdf](#)>. Citado 2 vezes nas páginas 111 e 113.

ZHOU, H.; TCHELEPI, H. Operator based multiscale method for compressible flow. *SPE Journal*, v. 13, n. 2, p. 267–273, 2008. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.2118/106254-PA>>. Citado 2 vezes nas páginas 110 e 113.

ZHOU, H.; TCHELEPI, H. A. Two-stage algebraic multiscale linear solver for highly heterogeneous reservoir models. *SPE Journal*, Society of Petroleum Engineers, v. 17, n. 02, p. 523–539, 2012. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.2118/141473-PA>>. Citado na página 113.

Apêndices

APÊNDICE A – PARÂMETROS DO MODELO *BLACK-OIL*

Nesse capítulo, apresentam-se as relações para as propriedades dos fluidos do modelo *black-oil*.

A.1 FASE ÁGUA

O fator volume de formação da fase água B_w é dado por

$$B_w = B_w^i \left(1 + c_w (p - p^i) \right), \quad (\text{A.1})$$

em que B_w^i é o fator volume de formação da água avaliado na pressão de referência p^i e c_w é a razão de compressibilidade da fase água.

A viscosidade da fase água μ_w é dada por

$$\mu_w = \mu_w^i \left(1 + d_w (p - p^i) \right), \quad (\text{A.2})$$

em que μ_w^i é a viscosidade da água avaliada na pressão de referência e d_w é a viscosibilidade, parâmetro que mede a influência da pressão sobre a viscosidade.

A.2 FASE ÓLEO

As propriedades da fase óleo são definidas por duas maneiras, de acordo com o estado em consideração

A.2.1 Estado subsaturado

O fator volume de formação do óleo no estado subsaturado é dado por

$$B_o = B_o(p_b) (1 - c_o (p - p_b)), \quad (\text{A.3})$$

em que $B_o(p_b)$ é o fator volume de formação do óleo avaliado na pressão de bolha p_b e c_o , a razão de compressibilidade da fase óleo.

A viscosidade é dada por

$$\mu_o = \mu_{ob} (p_b) (1 + c_\mu (p - p_b)), \quad (\text{A.4})$$

em que μ_{ob} é a viscosidade da fase óleo avaliada na pressão de bolha p_b e c_μ , a viscosibilidade do óleo.

A.2.2 Estado saturado

No estado saturado, o fator volume de formação da fase óleo B_o é calculado através de uma tabela que lista seus valores como função da pressão. O mesmo é válido para a viscosidade μ_o .

A.3 FASE GÁS

A densidade da fase gás é dada por

$$\rho_g = \frac{\rho_{gs}}{B_g}, \quad (\text{A.5})$$

em que

$$\rho_{gs} = Y_g \rho_{ar}, \quad B_g = \frac{ZT}{p} \frac{p_s}{T_s}, \quad (\text{A.6})$$

com Y_g a densidade adimensional do gás; ρ_{ar} , a densidade do ar; T e T_s , as temperaturas do gás nas condições atual e de referência; p e p_s , sua pressão nas condições atual e de referência e Z , o fator de compressibilidade.

A viscosidade da fase gás μ_g é função da pressão, tal função é definida por valores discretos informados através de uma tabela.

APÊNDICE B – PRÉ-CONDICIONADOR MULTIESCALA ALGÉBRICO 3D

No caso de problemas tridimensionais, o particionamento *wirebasket* da malha refinada apresenta uma nova classe de entidades: os volumes de superfície. Atualizando o operador de permutação \mathbf{Q} de acordo com essa nova classificação, segue que a matriz do sistema linear (5.1) pode ser reescrita no formato reordenado da seguinte maneira:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{QAQ}^T = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{ii} & \tilde{\mathbf{A}}_{is} & \mathbf{0}_{ie} & \mathbf{0}_{iv} \\ \tilde{\mathbf{A}}_{si} & \tilde{\mathbf{A}}_{ss} & \tilde{\mathbf{A}}_{se} & \mathbf{0}_{sv} \\ \mathbf{0}_{ei} & \tilde{\mathbf{A}}_{es} & \mathbf{A}_{ee} & \tilde{\mathbf{A}}_{ev} \\ \mathbf{0}_{vi} & \mathbf{0}_{vs} & \tilde{\mathbf{A}}_{ve} & \tilde{\mathbf{A}}_{vv} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.1})$$

Para a obtenção do pré-condicionador multiescala algébrico com funções de correção \mathbf{M}_{mswc}^{-1} , as seguintes conexões presentes na matriz $\tilde{\mathbf{A}}$ são desconsideradas:

1. conexões que partem dos volumes de interior em sentido aos volumes de superfície, $(\tilde{\mathbf{A}}_{si})$;
2. conexões que partem dos volumes de superfície em sentido aos volumes de aresta, $(\tilde{\mathbf{A}}_{es})$;
3. conexões que partem dos volumes de aresta em sentido aos volumes de vértice, $(\tilde{\mathbf{A}}_{ve})$,

o que conduz ao seguinte operador:

$$\mathbf{M}_{mswc} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{ii} & \tilde{\mathbf{A}}_{is} & \mathbf{0}_{ie} & \mathbf{0}_{iv} \\ \mathbf{0}_{si} & \mathbf{M}_{ss} & \tilde{\mathbf{A}}_{se} & \mathbf{0}_{sv} \\ \mathbf{0}_{ei} & \mathbf{0}_{es} & \mathbf{M}_{ee} & \tilde{\mathbf{A}}_{ev} \\ \mathbf{0}_{vi} & \mathbf{0}_{vs} & \mathbf{0}_{ve} & \mathbf{M}_{vv} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.2})$$

em que as matrizes \mathbf{M}_{ss} e \mathbf{M}_{ee} são dadas por:

$$\mathbf{M}_{ss} = \tilde{\mathbf{A}}_{ss} + \text{diag} \left(\sum_i \tilde{\mathbf{A}}_{is}^T \right) \quad (\text{B.3})$$

$$\mathbf{M}_{ee} = \tilde{\mathbf{A}}_{ee} + \text{diag} \left(\sum_s \tilde{\mathbf{A}}_{se}^T \right) \quad (\text{B.4})$$

e a matriz referente ao problema grosseiro \mathbf{M}_{vv} é calculada da mesma forma como (5.23).

A adição dos volumes de superfície também provoca a redefinição dos operadores de prolongação e de correção. O primeiro passa a ser dado por:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{ii}^{-1} \tilde{\mathbf{A}}_{ie} \mathbf{M}_{ee}^{-1} \tilde{\mathbf{A}}_{es} \mathbf{M}_{ss}^{-1} \tilde{\mathbf{A}}_{sn} \\ -\mathbf{M}_{ee}^{-1} \tilde{\mathbf{A}}_{es} \mathbf{M}_{ss}^{-1} \tilde{\mathbf{A}}_{sn} \\ \mathbf{M}_{ss}^{-1} \tilde{\mathbf{A}}_{sn} \\ \mathbf{I}_{vv} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.5})$$

enquanto o segundo é dado por:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{ii}^{-1} & -\tilde{\mathbf{A}}_{ii}^{-1} \tilde{\mathbf{A}}_{is} \mathbf{M}_{ss}^{-1} & \tilde{\mathbf{A}}_{ii}^{-1} \tilde{\mathbf{A}}_{is} \mathbf{M}_{ss}^{-1} \tilde{\mathbf{A}}_{se} \mathbf{M}_{ee}^{-1} & \mathbf{0}_{iv} \\ \mathbf{0}_{si} & \mathbf{M}_{ss}^{-1} & -\mathbf{M}_{ss}^{-1} \tilde{\mathbf{A}}_{se} \mathbf{M}_{ee}^{-1} & \mathbf{0}_{sv} \\ \mathbf{0}_{ei} & \mathbf{0}_{es} & \mathbf{M}_{ee}^{-1} & \mathbf{0}_{ev} \\ \mathbf{0}_{vi} & \mathbf{0}_{vs} & \mathbf{0}_{ve} & \mathbf{0}_{vv} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.6})$$

O operador de restrição é definido como antes, o qual pode ser escrito segundo as estratégias baseadas em volumes finitos (\mathbf{R}_{FV}) ou elementos finitos (\mathbf{R}_{FE}).