e $\frac{\partial F(x)}{\partial x} = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial f}{\partial x}\, dy + f[x, \varphi_2(x)]\,\varphi_2'(x) -$

$- f[x, \varphi_1(x)]\,\varphi_1'(x)$

Se os dois extremos for constantes, anulam-se os dois ultimos termos.

2) Integral de uma integral.

$$\int_\alpha^\beta F(x)\,dx = \int_\alpha^\beta dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$$

Não confundir c/ integral dupla nem produto de duas integrais.

Exercicio do Vivanti pg. 157.

$\varphi(y) = \int_0^1 \log(x^2+y^2)\,dx \qquad 1 \le y \le 2$

$\varphi'(y) = ?$

Integremos para dep. derivar —

$u = \lg(x^2+y^2) \qquad du = \frac{2x}{x^2+y^2}\,dx$

$dv = dx \qquad v = x$

$\varphi(x) = \left[x \lg(x^2+y^2)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{x^2+y^2}\,dx$

Ora, $\frac{x^2}{x^2+y^2} = 1 - \frac{y^2}{x^2+y^2}$

$\int \frac{x^2}{x^2+y^2}\,dx = \int dx - y \int \frac{\frac{1}{y}}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}\,dx =$

$= x - y \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y}$

$\varphi(x) = \left[x\, l(x^2+y^2) - 2x + 2y \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y}\right]_0^1 =$

$= \boxed{l(1+y^2) - 2 + 2y \operatorname{arctg} \frac{1}{y}}$

$\varphi'(y) = \frac{2y}{1+y^2} + \frac{-1}{y^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{y^2}}\, 2y + 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{y} =$

$= 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{y}$

2º caso:
A função integranda é $l(x^2+y^2)$

$F'_x = \frac{2x}{x^2+y^2} \qquad F'_y = \frac{2y}{x^2+y^2}$

$\varphi'(y) = \int_0^1 \frac{2y}{x^2+y^2}\,dy = 2y \frac{1}{y} \int_0^1 \frac{dx \frac{1}{y}}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1} =$

$= \left[2 \operatorname{arctg} \frac{x}{y}\right]_0^1 = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{y}$

Calcular —

$I(y) = \int_0^\alpha \frac{\operatorname{arctg} xy}{x(1+x^2)}\,dx$

Aplicando a regra de derivação sobre o sinal.

$$\frac{dz}{dy} = \int_0^{\infty} \frac{\frac{x}{1+x^2y^2}}{x(1+x^2)}\, dx$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{1}{1+}$$

Refazer. Só é válido ... det. $I(y)$

Calcular $I = \int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$ derivando sobre o final de integral.

Introduzamos um parametro y.

$I_3 = \int \frac{dx}{(x^2+y^2)^3}$ derivemos

$$\frac{dI_3}{dy} = \int \frac{-6y}{(x^2+y^2)^6}\, dx$$

Ora:

$$I_3 = -\frac{1}{4y} \int \frac{\partial}{\partial y} \frac{dx}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{-1}{4y} \frac{d}{dy} \int \frac{dx}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{1}{4y} \frac{d}{dy} I_2$$

mas $I_2 = -\frac{1}{2y} \frac{d}{dy} \int \frac{dx}{x^2+y^2} = -\frac{1}{2y} \frac{d}{dy} \frac{1}{y} \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$

$$I_2 = -\frac{1}{2y} \left[-\frac{1}{y^2} \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + \frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} \right]$$

$$= -\frac{1}{2y} \left[-\frac{1}{y^2} \operatorname{arctg} \frac{x}{y} - \frac{x}{y} \frac{y^2}{y^2+x^2} \right] =$$

Refazer.

$$= \frac{1}{2y^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + \frac{x}{2(x^2+y^2)}$$

$$I_3 = -\frac{1}{4y}\frac{d}{dy}\left[\frac{1}{2y^2}\left(\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{1}{y}\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{4y}\left[-\frac{1}{y^3}\left(\;''\;\right)+\frac{1}{2y^2}\left(-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}-\frac{1}{y^2}\operatorname{arc}\ldots\right.\right.$$

$$\left.+\frac{1}{y}\,\frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\frac{x^2}{y^2}}\right]$$

então:

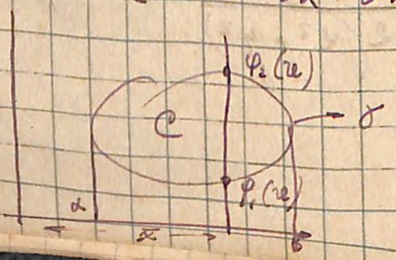
$I_n = \frac{1}{2(1-n)}\frac{d}{dy}I_{n-1}$ formula de recorrencia.

Integrais duplas.

$$\iint_C f(x,y)\,dx\,dy = \int_C f(x,y)\,dC =$$

$$= \lim_{\substack{d_m\to 0\\ n\to\infty}} \sum_1^n R_i a_i = \lim \sum_1^n r_i a_i$$

Propriedades importantes são as da aditividade e da distributividade (?



$$\iint_C f(x,y)\,dx\,dy = \int_\alpha^\beta dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$$

Caímos no caso das integrais dependentes de um parâmetro

— * —

8/4/46.

Temos $f(x,y)$, definida num domínio C, com fronteira regular.

Por definição $\iint_C f\cdot dC = \iint_C f(x,y)\,dx\,dy =$

$$= \lim_{\substack{\delta_m\to 0\\ n\to\infty}} \sum_1^n R_i a_i = \lim_{\substack{\delta_m\to 0\\ n\to\infty}} \sum_1^n r_i a_i$$

Sendo $dx.dy$ a área de um elemento infinitesimo.
O significado da integral dupla é o volume do cilindróide cuja base é a região e o domínio que temos e cuja base se é tal que $z = f(x,y)$

Mudança de variáveis —
Traz a vantagem —
1) para simplificar a função integranda
2) para melhorar a feição do campo.

Regras — Não há → $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v)\end{cases}$ de mudança de variáveis

Estudar o teorema da mudança de variáveis!

Entra neste problema

$$J = \frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$ que é o jacob.

e vem —

$$I = \iint_{C'} f[x(u,v); y(u,v)] \cdot |J| \, du \, dv$$

Como se calcula a integral dupla por meio das integrais repetidas.

Escolhe-se uma ordem de integração — tomamos um certo x, que corta o campo em dois pontos $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$

$$I = \int dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\, dy = \int dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\, dx$$

é lógico que os extremos em que x varia são as abcissas que dão retas tangentes ao campo.

Exemplo — (do Patron)

Calcular:

$$I = \iint_C \frac{y\, dx\, dy}{(x+1)^{3/2}(x^2+y^2)^{1/2}}$$ o campo C sendo o domínio limitado pelas parábolas

$P_1) \equiv y^2 - 4x - 4 = 0$

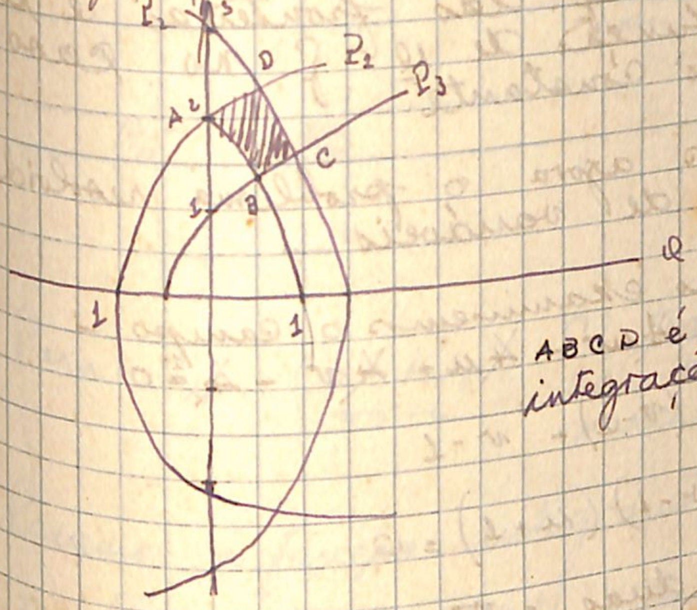
$P_2) \equiv y^2 + 6x - 9 = 0$

$P_3) \equiv y^2 - 2x - 1 = 0$

$P_4) \equiv y^2 + 4x - 4 = 0$

1) Sem mudança de variáveis

2) Com mudança de variáveis, sugerindo-se $\begin{cases} x = u - v \\ y = 2\sqrt{uv} \end{cases}$ sendo u e v positivos.



ABCD é o campo de integração.

Coordenadas dos vértices — (só abcissas)

$A \equiv (0;$ $\quad B \equiv (1/2;$

$C \equiv (1;$ $\quad D \equiv (1/2$

Dividiremos o campo em dois, o primeiro com abcissa variando de 0 a 1/2 e o segundo " " de 1/2 a 1

Aplicamos o teorema da aditividade

Ordem de integração — em geral é independente o resultado da ordem. Convém no entretanto fixar antes o valor de x que dão os extremos do campo.

$$I = \int_0^{1/2} \frac{dx}{(x+1)^{3/2}} \int_{\sqrt{4-4x}}^{\sqrt{4+4x}} \frac{y\, dy}{(x^2+y^2)^{1/2}} + \int_{1/2}^{1} \frac{dx}{(x+1)^{3/2}} \int_{\sqrt{1+2x}}^{\sqrt{9-6x}} \frac{y\, dy}{(x^2+y^2)^{1/2}}$$

A variável que se fixa é a que aparece logo depois do 1º sinal de int. no nosso caso $\int dx \int \ldots$

Os extremos $\sqrt{4-4x}$, $\sqrt{4+4x}$, etc são tirados das eq. das fronteiras e são dados em função de u q. no caso é parametro constante.

Vejamos agora o problema resolvido p. mudança de variáveis —

Primeiro examinemos o campo —

$P_1) \rightarrow \quad \cancel{4}uv - \cancel{4}u + \cancel{4}v - \cancel{4} = 0$

$u(v-1) + v - 1$

$(v-1)(u+1) = 0$

São duas retas $v = 1$, $u = -1$

$P_3) \quad 4uv - 2u + 2v - 1 = 0$

$2u(2v-1) + 2v - 1 = 0$

$(2u+1)(2v-1) = 0$ Duas retas

$v = \frac{1}{2} \qquad u = -\frac{1}{2}$.

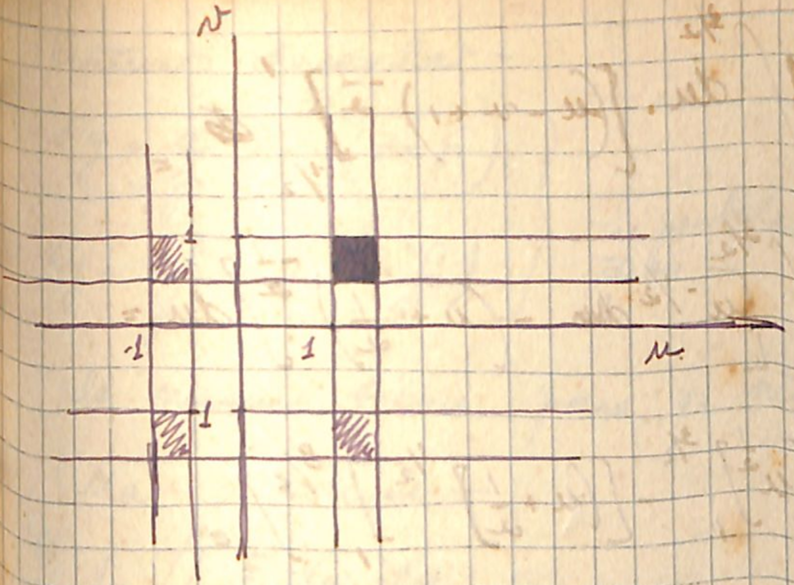
Obteremos quatro ~~quadrantes~~ retangulos, um em cada quadrante

só o do 1º quadr. é que nos serve.

$P_2) \quad 4uv + 6u - 6v - 9 = 0$

$2u(2v+3) - 3(2v+3) = 0$

$(2u-3)(2v+3) = 0 \qquad u = 3/2 \qquad v = -3/2$



Para $P_4 \begin{cases} u = 1 \\ v = -1 \end{cases}$ Só trabalharemos com o retangulo marcado.

Passemos à função integranda —

$$I = \iint_{C'} \frac{2\sqrt{uv}\,(u+v)}{(u-v+1)^{3/2}(u+v)\sqrt{uv}}\,du\,dv$$

sendo

$$J = \begin{vmatrix} 1 & \frac{v}{\sqrt{uv}} \\ -1 & \frac{u}{\sqrt{uv}} \end{vmatrix} = \frac{u+v}{\sqrt{u\cdot v}}$$ e ficamos com

$$I = \iint_{C'} \frac{2\,du\,dv}{(u-v+1)^{3/2}}$$ fixemos u →

$$I = 2\int_1^{3/2} du \int_{1/2}^{1} \frac{dv}{(u-v+1)^{3/2}}$$

houve, como vemos, grande vantagem na mudança de variável.

$$I = 4\int_1^{3/2} du \cdot \left[(u-v+1)^{-\frac{1}{2}}\right]_{1/2}^{1} =$$

$$= 4\int_1^{3/2}\left[u^{-1/2}\, du - \left(u+\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] du =$$

$$= 8\left\{\left[u^{\frac{1}{2}}\right]_1^{3/2} - \left[\left(u+\frac{1}{2}\right)^{1/2}\right]_1^{3/2}\right\} =$$

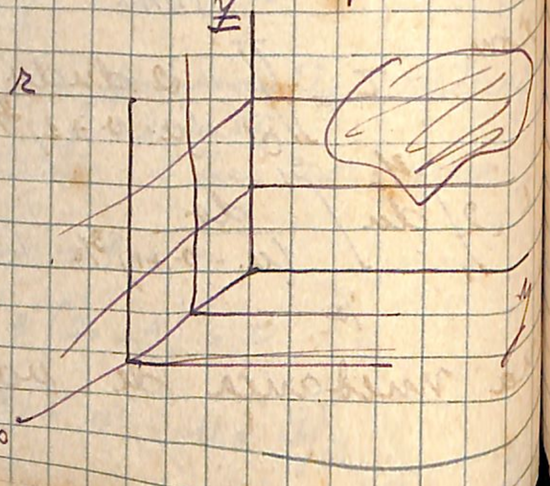
$$= 8\left\{\left[\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-1\right] - \left[\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\right\} =$$

$$= 8\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}-1\right)$$ e temos um volume.

Resultado errado!

Calcular o vol. compreendido entre a parte da superficie $xyz = a^3$ delimitada pelos planos $\begin{cases} z = p \\ z = q \end{cases}$ $\begin{cases} x = r \\ x = s \end{cases}$, a projeção da mesma porção sobre o plano xy é a superficie cilíndrica projetante do contorno.

Sup. $q > p$ e $s > r$



Tentemos desenhar -

$$\left.\begin{aligned} xy &= \frac{a^3}{p} \quad (z = p) \\ xy &= \frac{a^3}{q} \quad (z = q) \end{aligned}\right\}$$ hiperboles equiláteras.

da mesma forma para os outros planos.

Mas o volume -

$$V = \iint_C z\, dx\, dy$$

Há duas front. do campo $x = r$ e $x = s$ e as outras são ~~cilindros~~ hiperboles que se projetam sobre xy.

$$z = \frac{a^3}{xy}$$ e

$$V = \iint_C \frac{a^3}{xy}\, dx\, dy = a^3\int_s^r \frac{dx}{x}\int_{a^3/px}^{a^3/qx}\frac{dy}{y}$$

das equações das hiperboles.

10/4/46

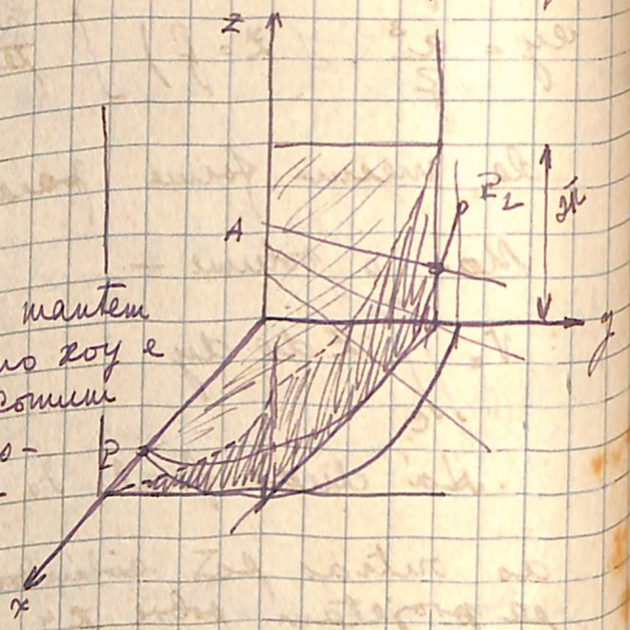
Dado o elicoide $z = 4\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}$

Achar o volume delimitado pelos planos

$$\begin{cases} xOy & z = 0 \\ yOz & x = 0 \\ x = 4 \\ y = 4 \end{cases}$$

Helicoide -

Uma reta que se mantem paralela ao plano xoy e tem um ponto comum com a helice, descreve uma superficie heliocoidal.



$V = \iint_C z\,dx\,dy = \iint_C 4\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{y}\,dx\,dy$

$C.\begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases}$

Façamos mudança de variável -

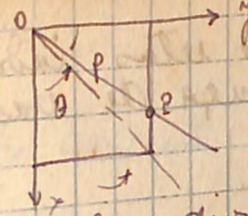
$x = \rho\cos\theta \qquad y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta$

$J = \begin{vmatrix} \cos\theta & \mathrm{sen}\,\theta \\ -\rho\,\mathrm{sen}\,\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho$

$V = \iint_{C'} 4\theta.\rho.\,d\rho.\,d\theta$

Examinemos o campo -

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ Fixemos θ -



$V = \int_0^{\pi/2} \theta\,d\theta \int \rho\,d\rho$?

em relação a ρ temos que dividir o campo -

$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta\,d\theta \int_0^{4/\cos\theta} \rho\,d\rho + 4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi/2} \theta\,d\theta \int_0^{4/\mathrm{sen}\,\theta} \rho\,d\rho =$

$= 4\int_0^{\pi/4} \theta\,d\theta \left[\frac{4^2/\cos^2\theta}{2}\right] + 4\int_{\pi/4}^{\pi/2} \theta\,d\theta \left(\frac{4^2}{2\,\mathrm{sen}^2\theta}\right) =$

$= 32\int_0^{\pi/4} \frac{\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta + 32\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\theta}{\mathrm{sen}^2\theta}\,d\theta$

Integremos por partes.

Resposta - $V = 16\pi$.

mud. de Sempre que a equação da fronteira tem um ponto de descontinuidade (Patron)

$I = \iint_R \frac{y}{\sqrt{x}}\, l(1 - x - y)\,dx\,dy$

$x \geq 0$

$y \geq 0$

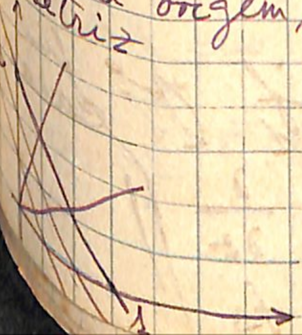
$x + y \leq 1$

Decompondo a região por duas séries de retas umas passando pela origem, outras paralelas à segunda bissetriz -

Primeira série de retas -

$y = ux$

2ª série - $x + y = v$



Estas retas indicam que se deve fazer mudança de variáveis.

$J =$

$x = \frac{v}{\mu + 1}$

$y = \frac{\mu v}{\mu + 1}$

23/4/46

Formas diferenciáis

① $f_1\,dx - f_2\,dy + f_3\,dz$ é uma forma diferencial linear sendo

$f_1, f_2, f_3\,(x, y, z)$

Uma f ① é exata quando existir $\mathcal{U}(x, y, z)$ tal que

$d\mathcal{U} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}dx + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y}dy + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial z}dz$ seja igual a ①.

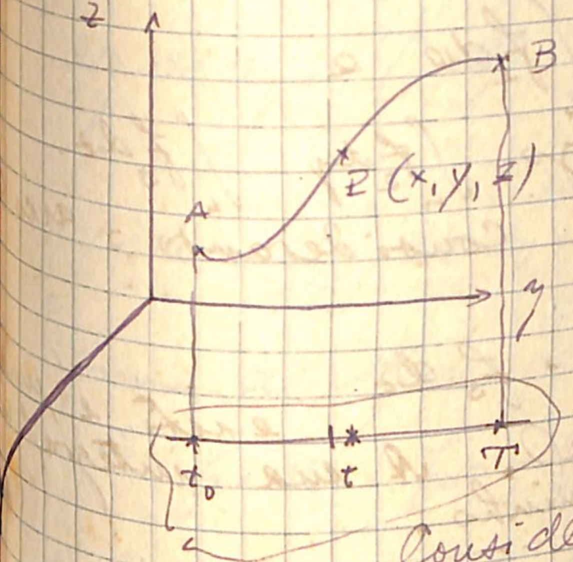
A cond. nec. e suf. p.ª que exista $\mathcal{U}$, é que seja 1 a caract. da matriz simbolica

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{matrix} \right\|$$

Integrais de linha —

É uma extensão do conceito de integral definida.

Considera-se uma linha L



$$\begin{cases} x = \varphi_1(t) \\ y = \varphi_2(t) \\ z = \varphi_3(t) \end{cases}$$

Consideremos duas funções continuas

$f(x, y, z)$
$\varphi(x, y, z)$

Suponhamos q. as variaveis de f e φ sejam as coordenadas dos pontos da linha $\underline{L}$, teremos $f(P)$ e $\varphi(P)$ ou

$f[\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)]$ e $\varphi[\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)]$

$F(t)$ $\qquad \Phi(t)$

Por definição integral de linha, extendida ao arco $\underline{AB}$ é

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_1^n F(\bar{t}_i)\, \Phi'_t(\bar{t}) . h$$

(teorema medio) do valor

e este limite existe

sendo representado por

$$= \int_L F(t) \cdot \varphi(t) \cdot dt = \int_L f \, d\varphi$$

Casos particulares –

$\varphi(P) = x \rightarrow \int_L f_1 dx$ e

de modo analogo $\int_L f_2 dy$ $\int_L f_3 dz$.

Somando-as e considerando o arco um –

$\int f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$ e isto é uma forma diferencial. A sua integral depende do caminho.

Consideremos uma função

$f(x, y)$ e das derivadas –

$\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ definidas e cont. no campo de definição da função

$$\iint_C \frac{\partial f}{\partial x} dx \, dy$$

$\iint_C \frac{\partial f}{\partial x} dx \, dy$ representam dois volumes. Se considerarmos a fronteira regular do campo $C \rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} \iint_C \frac{\partial f}{\partial x} dx \, dy &= \int_L f \, dy \quad (1) \\ \iint_C \frac{\partial f}{\partial y} dx \, dy &= -\int_L f \, dx \quad (2) \end{aligned}\right\} \text{forma de Gauss}$$

Consideremos $f_1(x, y)$ e $f_2(x, y)$ definidas num mesmo campo –

$$\iint_C \frac{\partial f_1}{\partial x} dx \, dy = \int_L f_1 \, dy$$

$$\iint_C \frac{\partial f_2}{\partial y} dx \, dy = -\int_L f_2 \, dx \quad \text{(Somando)} –$$

$$\iint_C \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) dx \, dy = \int_L f_1 \, dy + \int f_2 \, dx \quad (3)$$

forma de Green.

Se $f_1 = x$ $f_2 = -y$

$$2 A_C = \int_L x \, dy - \int y \, dx \quad (4)$$

Em (1) e (2) $\rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} f &= x \\ f &= y \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} A_C &= \int_L x \, dy \\ A_C &= -\int y \, dx \end{aligned}\right\} (5)$$

Se numa função considerarmos o parâmetro $\frac{x}{y} = t$

$$dt = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} \longrightarrow$$

$$A_C = \frac{1}{2} \int_L x^2 \, dt \quad (6), \text{ de } (5)$$

Podemos tomar o arco como parâmetro:

Calcular $I = \int_L z\, ds$ ao longo de

$x = 8 \cos \frac{t}{2}$

$y = \cos t$

$z = \operatorname{sen} t$ entre os pontos $t = 0$, $t = \pi$

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

então:

$$ds = \sqrt{\left(-4 \operatorname{sen} \frac{t}{2}\right)^2 + \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}\, dt =$$

$$= \sqrt{16 \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2} + \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}\, dt =$$

$$= \sqrt{16 \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2} + 1}\, dt$$

$$I = \int_L \operatorname{sen} t \sqrt{16 \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2} + 1}\, dt =$$

$$= \int_0^\pi \operatorname{sen} t \sqrt{16 \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2} + 1}\, dt$$

fazendo $\operatorname{sen}^2 \frac{t}{2} = u$

$$= \int_0^1 \frac{2\, du \sqrt{16u + 1}}{\cancel{2} \operatorname{sen} \frac{t}{2} \cos t/2} =$$

$$= 2 \int_0^1 \sqrt{16u + 1}\, du$$

27.4.46 Dr. Breves

$$I_{A,B} = \int_{L = AB} f\, d\varphi = \int_{t_0}^{T} F(t)\, \varphi'(t)\, dt$$

Formulas de Gauss:

$$\iint_C \frac{\partial f}{\partial x}\, dx\, dy = \int_L f\, dy$$

$$\iint_C \frac{\partial f}{\partial y}\, dx\, dy = -\int_L f\, dx$$

Como consequência obtem-se as formulas de Green

$$\iint_C \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial f_2}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_L f_1\, dy + f_2\, dx$$

Em casos particulares das formula de green obtem-se formulas que permitem calcular áreas planas

Fazendo $f_1 = x$ $f_2 = -y$

$$2 \iint dx\, dy = \int_L (x\, dy - y\, dx)$$

$$a = \frac{1}{2} \int_L (x\, dy - y\, dx)$$

Podemos fazer tambem $f_1 = x$ $f_2 = 0$, $f_1 = 0$ $f_2 = -y$

obtendo — $A = \int_L x\,dy$ $\quad A = -\int_L y\,dx$

Muitas vezes é interessante considerar o parametro $\frac{y}{x} = t$ →

$$dt = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}$$

$$A = \frac{1}{2}\int_L x^2\,dt$$

Exercícios:—

Calcular: $I = \int_L z\,ds$

ao longo da curva

$x = 8\cos\frac{t}{2}$

$y = \cos t$

$z = \text{sen}\,t$ entre os pontos

$0 \le t \le \pi$

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt$$

$$ds = \sqrt{(4\,\text{sen}\,t/2)^2 + 1}\,dt$$

$$I = \int_0^\pi \sqrt{(4\,\text{sen}\,t/2)^2 + 1}\;\text{sen}\,t\,dt$$

Façamos $4\,\text{sen}\,t/2 = u$

$$\text{sen}\,t = 2\,\text{sen}\frac{t}{2}\sqrt{1 - \text{sen}^2\frac{t}{2}} =$$

$$= 2\,\text{sen}\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}$$

$$\frac{4}{2}\cos\frac{t}{2}\,dt = du$$

$$dt = \frac{1}{2}\,\frac{du}{\cos t/2}$$

$$I = \frac{1}{4}\int_0^4 \sqrt{1+u^2}\;u\,du =$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^4 \sqrt{1+u^2}\;d(u^2)$$

$$= \left[\frac{1}{8}\,\frac{2}{3}\,(1+u^2)^{3/2}\right]_0^4 =$$

$$= \frac{1}{12}\left(17^{3/2} - 1\right)$$

Calcular

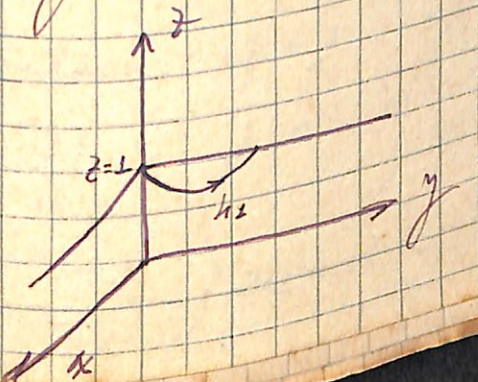
$$I = \int_L (xy\,dx + z^2\,dz)$$

a) ao longo do arco de circunferência $x^2 + (y-1)^2 = 1$ entre os pontos $x \ge 0$ e o plano $z = 1$

b) ao longo da curva

$x = \text{sen}\,t \quad y = \frac{t}{\pi} \quad z = \cos t$

entre os pontos $t_0 = 0 \quad T = 2\pi$



$I = \int_{\ell_1} x\,y\,dx$

$x^2 = 1 - (y-1)^2$

$x\,dx = -2(y-1)\,dy$

$x\,y\,dx = -y(y-1)\,dy$

$I = \int_0^2 y(1-y)\,dy = \int_0^2 y\,dy - \int_0^2 y^2\,dy =$

$= \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2 - \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^2 = 2 - \frac{8}{3} = -\frac{2}{3}$

Vejamos a segunda parte

$I = \int_0^{2\pi} \left(\frac{t}{\pi} \operatorname{sen} t \cos t - \cos^2 t \operatorname{sen} t\right) dt$

$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} t \operatorname{sen} 2t\,dt + \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, d(\cos t)$

$\int t \operatorname{sen} 2t\,dt = -\frac{1}{2} t \cos 2t$

$I = -\frac{1}{4\pi}\left[t \cos 2t\right]_0^{2\pi} - \left[\frac{1}{3}\cos^3 t\right]_0^{2\pi}$

$I = -\frac{1}{2}$

Sendo $\vec{F} = \alpha z (x\vec{i} - y\vec{j}) + (x^2 + \beta y^2)\vec{k}$

e $P - O = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$,

calcular

$I = \int_{AB} \vec{F} \times dP$ entre os pontos

$A = (0,0,0)$ e $B = (a, b, c)$ depois de

determinar os valores de $\underline{\alpha}$ e $\underline{\beta}$ que

tornam a integral independente do

caminho de integração.

$\vec{F} \times dP = \alpha z x\,dx - \alpha z y\,dy +$

$+ (x^2 + \beta y^2)\,dz$

Suponhamos a condição de $\vec{F} \times dP$

ser uma diferencial exata, ou seja –

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{matrix} \right\|$$ (1) ter para

característica $\rho = 1$

$\left.\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial y}\right\} 0 = 0$

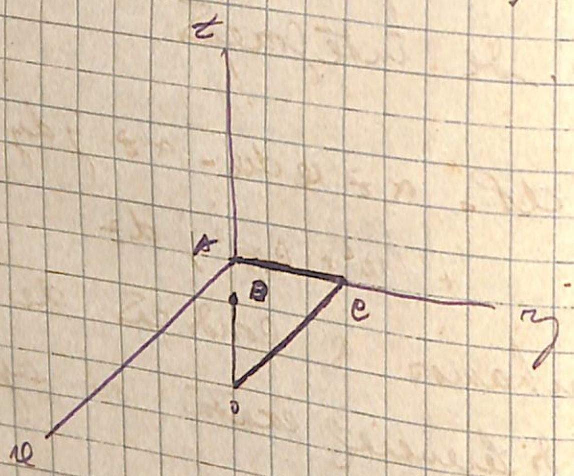
$\left.\frac{\partial f_3}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial z}\right\} 2x = \alpha x \rightarrow \alpha = 2$

$$\frac{\partial f_3}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial z} \quad \{ 2\beta y = -\alpha y \to \beta = 1$$

$$I = \int_{AB} 2zx\,dx - 2zy\,dy + (x^2 - y^2)\,dz$$

$$I = \int_0^a 2a$$

$$\int_0^c (a^2 - b^2)\,dz = (a^2 - b^2)c$$



Dh. 4. 4 6 — De Cerruti!

$$Q_c = \frac{1}{2}\int_L x\,dy - y\,dx$$

a linha L é em geral dada em função de um parametro.

Podemos ter $\frac{y}{x} = t$ como parametro.

$$dt = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} \to$$

$$Q_c = \frac{1}{2}\int x^2\,dt \quad \text{sendo} \begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \end{cases}$$

São dadas três funções

$$P = e^x(x^a y^a + x^a + y^a) + z^b$$

$$Q = 2y e^x (x^a - 2x + 3) + z^c$$

$$R = 3xz^2 + y$$

calcular $I = \int_A^B P\,dx + Q\,dy + R\,dz$

entre os pontos $A(1,0,0)$ $B(0,1,1)$ depois de determinar os números naturais que tornam esta integral independente do caminho — $M(a,b,c)$

ora:

$$\begin{Vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{Vmatrix} \qquad \boxed{f=1}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2y\left[e^x(x^a - 2x + 3) + e^x(a x^{a-1} - 2)\right]$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^x(a x^a y^{a-1} + a y^{a-1})$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$2y\left[(x^a - 2x + 3) + (a x^{a-1} - 2)\right] =$$

$$= \{a\cancel{x}\; y^{a-1}(x^a + 1)$$

$$2yx^a - 4xy + 6y + 2yax^{a-1} - 4y =$$

$$= a y^{a-1}(x^a + 1)$$

$x^a: \quad 2y = ay^{a-1} \quad \longrightarrow a = 2$

$\cancel{y^{a-1}\; 2ya = ax^a + a}$

os outros termos independem de a.

Para os outros

$b = 3$

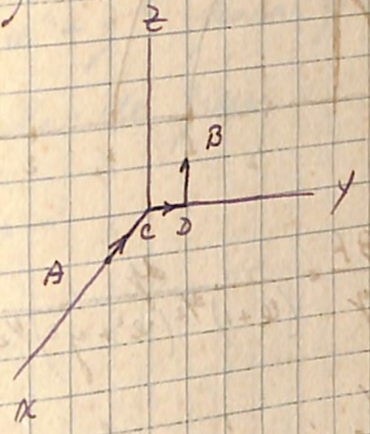
$c = 1$

Nesse caso:

$$P = e^x(x^2y^2 + x^2 + y^2) + z^3$$

$$Q = 2ye^x(x^2 - 2x + 3) - z$$

$$R = 3xz^2 + y$$



$$I = \underbrace{\int_A^C}_{\substack{y=z=0 \\ dy=dz=0 \\ I_1}} + \underbrace{\int_C^D}_{\substack{x=z=0 \\ dx=dz=0 \\ I_2}} + \underbrace{\int_D^B}_{\substack{x=y=0 \\ dx=dy=0}}$$

$$I_1 = \int_1^0 e^x x^2\, dx$$

$$I_2 = \int_0^1 6y^*\, dy$$

$$I_3 = \int_0^1 dz$$

$$\boxed{I = (2-e) + 3 + 1 = 6 - e}$$

Aplicação da fórmula de Gauss.

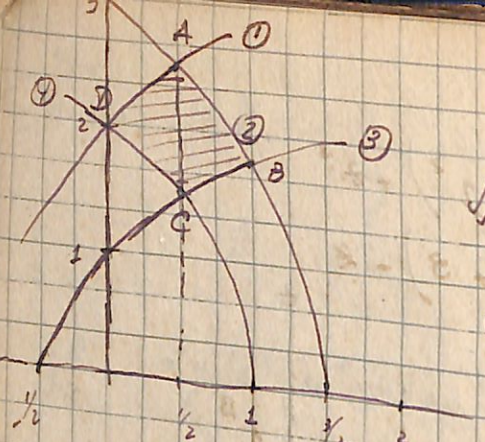
2ª. das parabolas:

$$I = \iint_C \frac{y\,dx\,dy}{(x+1)^{3/2}(x^2+y^2)^{1/2}}$$

$y^2 - 4x + 4 = 0$

$y^2 + 6x - 9 = 0$

$y^2 - 2x - 1 = 0 \qquad y^2 + 4x - 4 = 0$



① →

$$\iint_C \frac{\partial f}{\partial x}\,dx\,dy = \int_L f\,dy$$

② →

$$\iint_C \frac{\partial f}{\partial y}\,dx\,dy = -\int f\,dx$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{(x+1)^{3/2}(x^2+y^2)^{1/2}}$$

$$f = \frac{1}{2}\,\frac{1}{(x+1)^{3/2}}\int (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\,d(y^2) =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{(x+1)^{3/2}} = (x^2+y^2)^{1/2}(x+1)^{-\frac{3}{2}}$$

$$-\int_{ADCBA} f\,dx = -\int_{ADCBA} (x^2+y^2)^{1/2}(x+1)^{-\frac{3}{2}}\,dx =$$

$$= I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

$$I_1 = \int_{3/2}^{0} (x^2+y^2)^{1/2}(x+1)^{-3/2}\,dx.$$

tiramos para colocar nesta integral, o valor de y dado pela parábola ①.

29.4.46.

Calcular $I = \int_L xy(dx + dy)$ ao longo da lemniscata $(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$ para $y > 0$

Aplicamos a formula de Green:

$$\iint_C \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial f_2}{\partial y}\right) dx\,dy =$$

$$= \int_L f_1\,dy + f_2\,dx$$

em que L é a lemniscata.

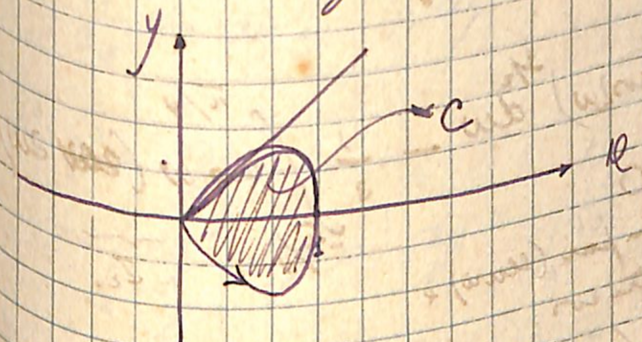
No caso:

$f_1 = xy$ $\quad f_2 = xy$

$f'_{1_x} = y$ $\quad f'_{2_y} = x$

portanto $I = \iint_C (y - x)\,dx\,dy$

em q. C é a região limitada pela lemniscata



Estudamos a linha em coord. pol.:

$x = \rho\cos\omega$ $\quad y = \rho\,\mathrm{sen}\,\omega$

$(x^2+y^2)^2 = \rho^4$ donde $\rho^2 = \cos^2\omega - \mathrm{sen}^2\omega$

e $\rho^2 = \cos 2\omega$ (eq. polar da lemniscata)

$\rho = \sqrt{\cos 2\omega}$

max.º de $\rho \rightarrow$ max.º $\cos 2\omega$ $\therefore \begin{cases} 2\omega = 0 \\ \omega = 0 \end{cases}$

min.º de $\rho \rightarrow$ min.º $\cos 2\omega$: $\begin{cases} 2\omega = \frac{\pi}{2} \\ \omega = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

$\rho = 0$

Agora temos:

$$I = \iint_c \rho(\operatorname{sen}\omega - \cos\omega)\,|J|\,d\rho\,d\omega =$$

$$= \iint_c \rho^2(\operatorname{sen}\omega - \cos\omega)\,d\rho\,d\omega$$

$$-\pi/4 \le \omega \le \pi/4$$

então

$$I = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\operatorname{sen}\omega - \cos\omega)\,d\omega \int_0^{\sqrt{\cos 2\omega}} \rho^2\,d\rho =$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \operatorname{sen}\omega\,(\cos 2\omega)^{3/2}\,d\omega - \underbrace{\frac{1}{3}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos\omega\,(\cos 2\omega)^{3/2}\,d\omega}_{I_2}$$

$= 0$

f.ç. impar ($\operatorname{sen}\omega$) e extr.os simetricos.

$$I_2 = \frac{1}{3}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos\omega\,(\cos 2\omega)^{3/2}\,d\omega$$

fazendo $\operatorname{sen}\omega = u$
$\cos\omega\,d\omega = du$ $\rightarrow$ $\cos 2\omega = 1 - u^2 - u^2 = 1 - 2u^2$

$$I_2 = \frac{1}{3}\int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} (1 - 2u^2)^{3/2}\,du$$

façamos agora: $\sqrt{2}\,u = \operatorname{sen}\varphi$

$$du = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{2}}\,d\varphi$$

$$I_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\varphi \cdot \cos\varphi\,d\varphi = \frac{\sqrt{2}}{6}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{\pi\sqrt{2}}{16}$$

Podemos observar que houve grande simplificação na aplicação da form.ª de Green.

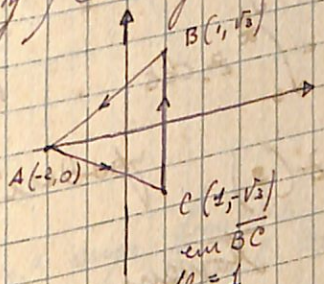
— x —

Cad.º n.º 3

Calcular $\iint_R (x^2 + y^2)\,dx\,dy$

Extendida ao Δ

pela form.ª de Gauss.



em $\overline{BC}$
$x = 1$
$dx = 0$

$$\iint_c \frac{\partial f_1}{\partial x}\,dx\,dy = \int_L f_1\,dy$$

$$x^2 + y^2 = \frac{\partial f_1}{\partial x}$$

$$I = \int_L \left(\frac{x^3}{3} + y^2 x\right) dy = \int_{\overline{BC}} \left(\frac{1}{3} + y^2\right) dy =$$

$$\left[\frac{y}{3} + \frac{y^3}{3}\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\left(2\sqrt{3} + 6\sqrt{3}\right) = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

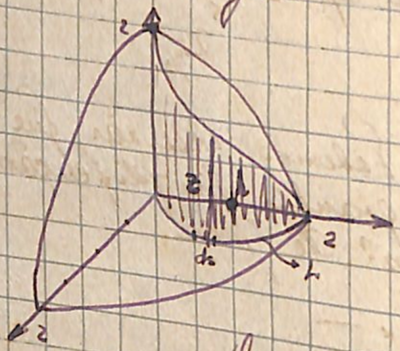
Calculo da área da superfície lateral de cilindros por meio de integrais de linha

Calc. a área da sup. cil.

① $(x-1)^2 + y^2 = 1$ delimitada pela esfera

② $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

$z \geq 0 \quad y \geq 0$



Devemos det. z.ds

$A = \int_L z.ds =$ sendo z considerados para pontos da linha.

$= \int_0^{\pi} z.ds$

$z = z(s)$ poderíamos expressar

Tomemos x como param.

$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dx = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$

$y' = \frac{-(x-1)}{\sqrt{1-(x-1)^2}} \qquad y'^2 = \frac{(x-1)^2}{1-(x-1)^2}$

$1 - y'^2 = \frac{1}{1-(x-1)^2}$

$ds = \sqrt{\frac{1}{2x - x^2}}\, dx$

De ② tiramos z:

$z^2 = 4 - x^2 - y^2 = 4 - x^2 - (1 - x^2 - \cancel{1} + 2x)$

$z^2 = 4 - 2x$

$z = \sqrt{4-2x}$ e

$A = \int_0^2 \frac{\sqrt{4-2x}}{\sqrt{2x - x^2}}\, dx = \int_0^2 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\, dx =$

$= 2\sqrt{2} \left[x^{1/2}\right]_0^2 = \underline{\underline{4}}$

30.4.46

Aplicação de int. duplas ao cál. de áreas planas.

Cissoide

OP = AB.

Achar a área da fig.ª cuja fronteira é a cissoide e sua assintota, por integral de linha.

Equação da cissoide: $\rho = \overline{OP} = \overline{AB} = \overline{AC}\, tg\,\theta = 2r\, sen\,\theta\, tg\,\theta$

então ① $\rho = 2r \frac{sen^2\theta}{cos\,\theta}$ para coordenadas cartes.ª:

$y^2 = \frac{x^3}{2r - x}$ ②

$A = \frac{1}{2} \int_L x\,dy - y\,dx$

façamos $\frac{y}{x} = t$ ③ $\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = dt$ equivale a termos cor-

donde $A = \frac{1}{2} \int_L x^2\, dt$

dados a circunferencias por retas passando p/ origem.

em (2) e (3) obtemos

$$x = 2r\frac{t^2}{1+t^2} \qquad y = 2r\frac{t^3}{1+t^2}$$

Aplicando a formula

$$A = \frac{1}{2}\int_{OMNO} x^2\,dt = \frac{1}{2}\int_{OM} + \frac{1}{2}\int_{MN} + \frac{1}{2}\int_{NO}.$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{-t} \underbrace{4r^2\frac{t^4}{(1+t^2)^2}\,dt}_{I_1} + \frac{1}{2}\int_{-t}^{+t}\underbrace{x^2\,dt}_{I_2} + \frac{1}{2}\int_t^0 \underbrace{4r^2\frac{t^4}{(1+t^2)^2}\,dt}_{I_2}$$

[ao longo de MN a abcissa é constante igual a x!]

$$= \frac{4r^2}{3}(\ldots) + \int_0^t 4r^2\frac{t^4}{(1+t^2)^2}\,dt + 4r^2\frac{t^5}{(1+t^2)^2}$$

(pois $\int_0^{-t} + \int_t^0 = \int_0^{-t} - \int_0^{t} = \int_0^{-t} + \int_0^{-t}$

$$= I_2 = \frac{1}{2}x^2\int_{-t}^{t} dt = \left[\frac{1}{2}x^2 t\right]_{-t}^{t} = x^2 t = 4r^2\frac{t^5}{(1+t^2)^2}$$

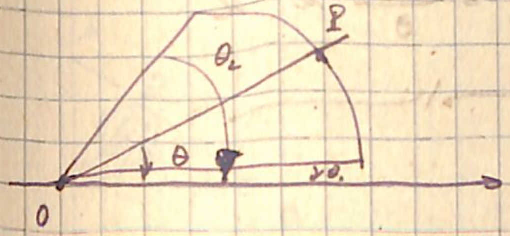
$$A = 4r^2\frac{t^5}{(1+t^2)^2} + 4r^2\left[t - 2\,\mathrm{arctg}\,t + \frac{1}{2}\,\mathrm{arc}[illegible] + \frac{1}{2}\frac{t}{1+t^2}\right]$$

$$A = 6r^2\,\mathrm{arctg}\,t - \frac{2r^2 t(3+5t^2)}{(1+t^2)^2}$$ lim [illegible]

$$\lim_{t\to\infty} A = 6r^2\frac{\pi}{2} = A_{\text{cissoide}} = 3\pi r^2$$

A área é o triplo da área do círculo de definição.

Expressão de áreas em coordenadas polares, basta fazer uma mudança de variáveis



Calcular a área tendo-se $\rho = \rho(\theta)$

$$A = \frac{1}{2}\int_L x\,dy - y\,dx \,.$$

$x = \rho\cos\theta \qquad y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta$

$dx = -\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta + \cos\theta\,d\rho \qquad dy = \mathrm{sen}\,\theta\,d\rho + \rho\cos\theta\,d\theta$

então $A = \frac{1}{2}\int_{L\,(\text{coord. polares})} \rho\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\rho + \rho^2\cos^2\theta\,d\theta -$

$- \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\,d\rho + \rho^2\,\mathrm{sen}^2\theta\,d\theta =$

$$= \frac{1}{2}\int_L \rho^2\,d\theta \quad \text{sendo } \rho = \rho(\theta)$$

Caso da espiral de Arquimedes:

$\rho = k\theta \qquad \theta = 0 \rightarrow \rho = 0$

Calc. a área achurada.

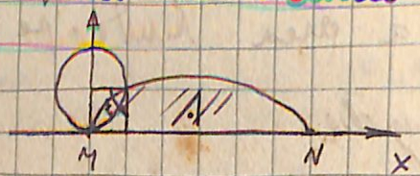
$$A = \frac{1}{2}\int k^2\theta^2\, d\theta$$

sendo $\rho^2 = k^2\theta^2$

$$A = \frac{k^2}{2}\left[\frac{\theta^3}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{4}{3}k^2\pi^3$$

6.V.46

Área da cicloide

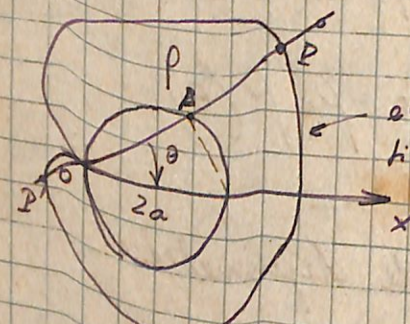


Equação polar $\begin{cases} x = r(t-\operatorname{sen} t)\\ y = r(1-\cos t)\end{cases}$

a linha será $\overline{MN}$ e depois $\overline{NM}$

— x —

Cardioides - area em coord. polares



L.g. dos pts P e P' tais que $\overline{AP} = \overline{AP'} = 2a$

ela é simetrica.

$\overline{OA} = 2a \cos\theta$

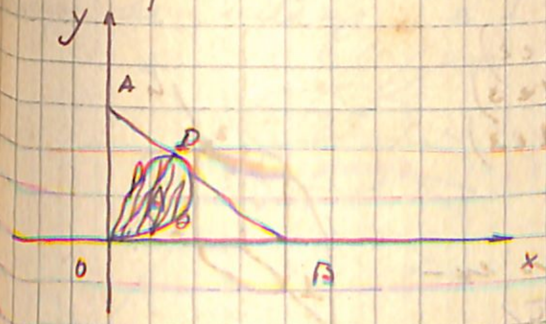
$\rho = 2a(\cos\theta + 1)$

$$A = \frac{1}{2}\int \rho^2\, d\theta = 6\pi a^2$$

— x —

Rosácea - (estudar)

Calc. a área delimitada por uma rosácea de 4 folhas.



$\overline{AB} = 2a$

A rosácea é o lugar dos pontos P, sendo $\overline{OP} \perp \overline{AB}$

A eq. (deduza) é $\rho = a\operatorname{sen}2\theta$

Calcula-se A e multipl. por 4.

Sobre areas

① $\int_a^b f(x)\,dx$ (simples - 1º ano)

② $\iint_C dx\,dy$

③ $A = \frac{1}{2}\int_L x\,dy - y\,dx$ $\left[\begin{array}{l} y = tx \rightarrow \\ \int x^2 dt \end{array}\right]$

④ coord. pol. $A = \frac{1}{2}\int \rho^2\, d\theta$

— x —

Calc. $I = \int_L f\, d\varphi$ para $f = x^2 + y^2$ ao $\varphi = x + y + z$

longo da linha ③ $\begin{cases} x = \cos t & (\pm \text{ ou nulo}) \\ y = \operatorname{sen} t & (\text{"}) \\ z = \sqrt{4-\cos^2 t} & (\text{"}) \end{cases}$

Subst. os val. de ② em f: $f = 1$

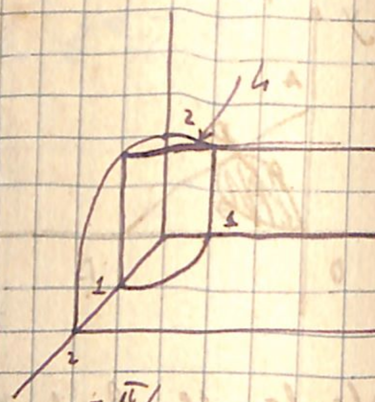
$$d\varphi = dx + dy + dz = -\operatorname{sen}t\,dt + \cos t\,dt + \frac{2\cos t\operatorname{sen}t\,dt}{2\sqrt{4-\cos^2 t}}$$

$$= \left(\cos t - \operatorname{sen}t + \frac{\cos t \operatorname{sen} t}{\sqrt{4-\cos^2 t}}\right)dt$$

Port.º $I = \int_0^{\pi/2} \left(\cos t - \sin t + \frac{\cos t \sin t}{\sqrt{4-\cos^2 t}}\right) dt$

Em coord. cart. a linha é:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & (1 \text{ e } 2) \\ x^2 + z^2 = 4 & (1 \text{ e } 3) \\ \cancel{y^2 - z^2 = 4} & (2 \text{ e } 3) \end{cases}$$



logo a variação dos extremos é de 0 a $\pi/2$

$$I = \left[\sin t + \cos t + \sqrt{4-\cos^2 t}\right]_0^{\pi/2} =$$

$$(1 + 0 + 2) - (0 + 1 + \sqrt{3}) = \underline{\underline{2 - \sqrt{3}}}$$

Consideremos agora, nesse exercício x como parâmetro.

$$f = x^2 + 1 - x^2 = 1$$

$$\varphi = x + \sqrt{1-x^2} + \sqrt{4-x^2}$$

$$d\varphi = dx + \frac{-2x\,dx}{2\sqrt{1-x^2}} - \frac{2x\,dx}{2\sqrt{4-x^2}} = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\right) dx$$

$$I = \int_1^0 \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\right) dx =$$

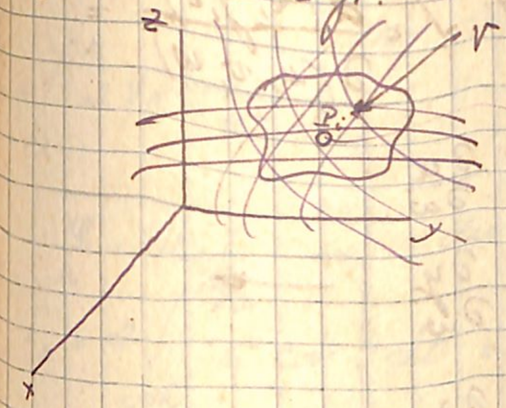
$$\left[x + \sqrt{1-x^2} + \sqrt{4-x^2}\right]_1^0 = (0 + 1 + 2) - (1 + 0 + \ldots$$

$2 - \sqrt{3}$ cqd

7.5.46

Integrais triplas.

Idênticas em tudo às duplas, sendo que o campo de integr. é 1 volume



v_i $I = \iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_V f\,dV$

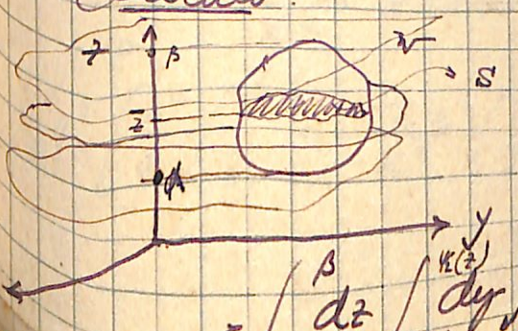
Cortemos o vol. por tres famílias de superfícies; teremos volumes elementares v_i em pontos P_i

$$I = \lim_{\substack{\delta_n \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_1^n R_i v_i = \lim_{\substack{\delta_n \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_1^n r_i v_i$$ e ela exprime o vol. do campo, como facil.te podemos observar.

se $f(x,y,z) = 1$ $\quad I = \iiint_V dx\,dy\,dz = V$

se $f \neq 1 = \rho$ $\quad I = \iiint_V \rho\,dV = M$ (massa do solido) sendo ρ massa específica.

Cálculo:



$$I = \iiint_V f\,dV = \int_\alpha^\beta dz \underbrace{\iint_S f(x,y,z)\,ds}_{F(z)}$$

$$= \int_\alpha^\beta dz \int_{\psi_1(z)}^{\psi_2(z)} dy \int_{\varphi_1(y,z)}^{\varphi_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx$$

A mudança de variáveis é idêntica às in[tegrais] duplas:

$$\left.\begin{array}{l} x = \varphi_1(u, v, w) \\ y = \varphi_2(u, v, w) \\ z = \varphi_3(u, v, w) \end{array}\right\} \quad J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} =$$

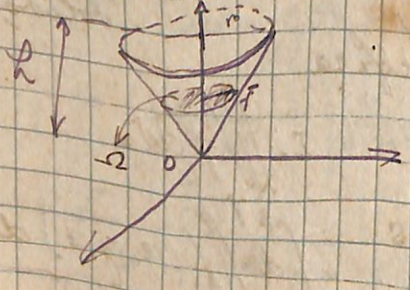
$$= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \longrightarrow$$

$$I = \iiint_{V'} f[\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3] \, |J| \, du \, dv \, dw$$

Podemos extender as definições para in[te]grais de ordem n.

Exercícios:

Calcular $I = \iiint_C z \, dx \, dy \, dz$ extendida ao cone



Seccionemos pe[lo] plano // a ...

$$I = \int_0^h z \, dz \iint_{\Omega} dy \, dx$$

$$I_1 = \iint_{\Omega} dy \, dx = \int_{-r}^{+r} dx \int_{-\sqrt{\bar{r}^2 - x^2}}^{\sqrt{\bar{r}^2 - x^2}} dy =$$

$$= \int_{-r}^{r} 2\sqrt{\bar{r}^2 - x^2} \, dx$$

$$\frac{x}{r} = \operatorname{sen} t \rightarrow dx = r \cos t \, dt$$

$$I_1 = 2\int_{3\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cos^2 t \, dt = 2r^2 \int_{3\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t \, dt$$

$$= 2r^2 \int_{3\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{dt}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t\right) dt =$$

$$= 2r^2 \left[\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4}\right]_{3\pi/2}^{\pi/2} =$$

$$= 2r^2 \left[\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4}\right] = -\pi r^2 \rightarrow$$

$$I = -\int_0^h \pi \bar{r}^2 z \, dz \qquad \text{Mas } \frac{r}{\bar{r}} = \frac{h}{z} \rightarrow$$

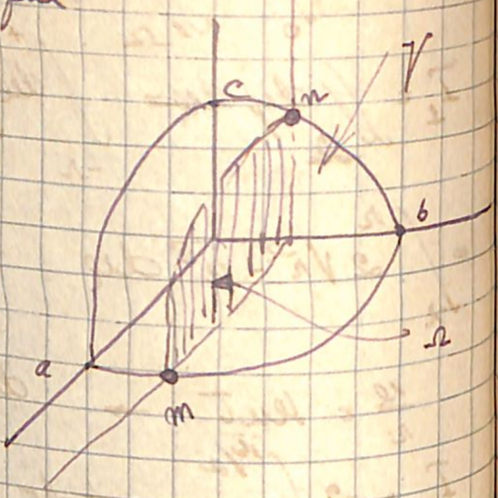
$$\bar{r} = \frac{z r}{h} \text{ logo,}$$

$$I = -\int_0^h \pi \frac{z^2 r^2}{h^2} z \, dz = -\frac{\pi r^2}{h^2} \int z^3 \, dz =$$

$$-\frac{\pi r^2}{h^2} \left[\frac{z^4}{4}\right]_0^h = -\frac{\pi r^2}{h^2} \left(\frac{h^4}{4}\right) = -\frac{\pi r^2 h^2}{2}$$

Suponhamos q. o campo é um helipsoide de eixos a, b, c, e que

$V = \iiint_V dx\,dy\,dz$



$\Omega = \frac{1}{4}\pi m n$

$V = \int dy \iint_\Omega dx\,dz =$

$= \frac{\pi}{4}\int_0^b m n \cdot dy$

Temos então as helipses:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $\quad \frac{z^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ para os pts m e n →

$\frac{m^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $\quad \frac{n^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ →

$m = a\sqrt{\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)}$ $\quad n = c\sqrt{\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)}$

portanto

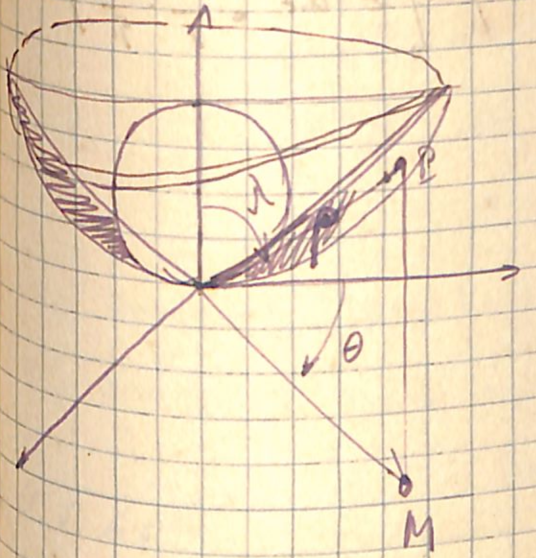
$V = \frac{\pi}{4}\int_0^b ac\sqrt{\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)^2}\,dy =$

$\frac{\pi}{4}\int_0^b ac\left(\frac{b^2-y^2}{b^2}\right)dy =$

$\frac{\pi ac}{4b^2}\int_0^b (b^2-y^2)\,dy = \frac{\pi ac}{4b^2}\left[b^2 y - \frac{b^2}{3}y^3\right]_0^b =$

$= \frac{\pi ac}{4}\left[y - \frac{y^3}{3}\right]_0^b = \frac{\pi ac}{2}\left[b - \frac{b^3}{3}\right]$

Consid. uma esfera c/ centro em Oz, um parab. de revol. ao redor de Oz, um cone inclinado de 45, com a altura coincidindo c/ Oz

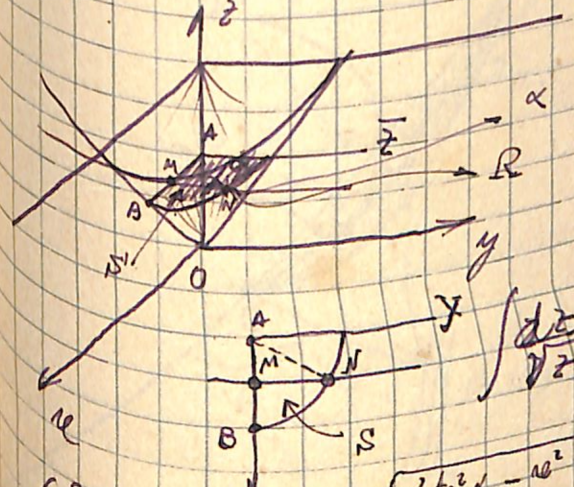


Det. o vol. entre estes 3 solidos.

Utilizai coord. polares no espaço.

14.5.46

Calcular: $\iiint \frac{xy}{\sqrt{z}}\,dx\,dy\,dz$ ext. à Região compreendida entre a sup. conica de rotação c/ eixo Oz, vertice na origem e para angulo de abertura no vertice α e os planos $x=0$ $y=0$ e $z=c$.



$0 \le \bar{z} \le c$

Fixamos $\bar{z}$ →

$\int \frac{dz}{\sqrt{z}} \underbrace{\iint_S xy\,dx\,dy}_{F(z)\ \{I_1\}} =$

$= \int_0^c \frac{dz}{\sqrt{z}} \int_0^{z\,tg\,\alpha} x\,dx \int_0^{\sqrt{z^2 tg^2\alpha - x^2}} y\,dy$

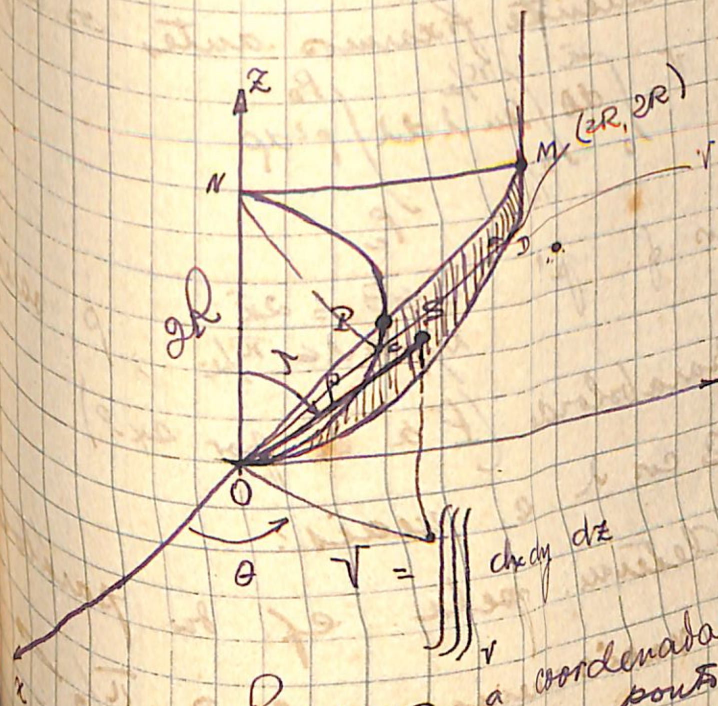
$$= \frac{1}{2}\int_0^c \frac{dz}{\sqrt{z}} \int_0^{z\,tg\,\alpha} u\left(z^2 tg^2\alpha - u^2\right) du =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^c \frac{z^4 tg^4\alpha}{4} \frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{1}{8} tg^4\alpha \int_0^c z^{7/2}\,dz = \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{9}\, tg^4\alpha\, c^4 \cdot$$

$$\boxed{= \frac{1}{36}\, tg^4\alpha \cdot c^4 \cdot \sqrt{c}}$$

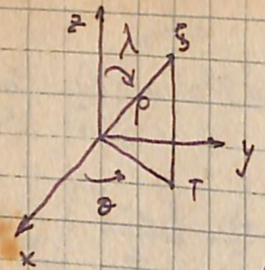
15. 5. 46

Calc. o vol....



$$V = \iiint_V dx\,dy\,dz$$

Passemos a coordenadas polares:
consideremos um ponto P do espaço -



$$V = \iiint_{V'} |J| \, d\rho \, d\theta \, d\lambda .$$

Temos — $\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen} \lambda \cos \theta \\ y = \rho \operatorname{sen} \lambda \operatorname{sen} \theta \\ z = \rho \cos \lambda \end{cases}$

$$|J| = \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (\theta, \lambda, \rho)} = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} \lambda \cos \theta & -\rho \operatorname{sen} \lambda \operatorname{sen} \theta & \rho \cos \lambda \ldots \\ \operatorname{sen} \lambda \operatorname{sen} \theta & \rho \operatorname{sen} \lambda \cos \theta & \rho \cos \lambda \ldots \\ \cos \lambda & 0 & -\rho \operatorname{sen} \ldots \end{vmatrix}$$

$= \rho^2 \operatorname{sen} \lambda \longrightarrow$

$$V = \iiint_{V'} \rho^2 \operatorname{sen} \lambda \, d\rho \, d\theta \, d\lambda$$

É conveniente fixarmos antes os ângu...

portanto: $V = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{sen} \lambda \, d\lambda \int_{\rho_c}^{\rho_p} \rho^2 \, d\rho$

Observemos q. p.ª $0 \leq \theta \leq 2\pi$
$\pi/4 \leq \lambda \leq \pi/2$, ρ varia ...
esfera ao paraboloide. (P a M por ex.º)

$\rho_c = 2R \cos \lambda$ e mais:

ρ_D q. determ. pela eq. do parábol...

$y^2 = 2pz$ raciocinemos p.ª $\theta = \pi/2$

$4R^2 = 2p \cdot 2R \longrightarrow p = R$

Análise vetorial.

logo $y^2 = 2Rz$ em coord. polares –

$$\rho^2 \operatorname{sen}^2 \lambda \operatorname{sen}^2 \theta = 2R\rho \cos \lambda$$

$$\rho_1 = 0 \quad \rho_2 = \frac{2R\cos\lambda}{\operatorname{sen}^2\lambda \cancel{\operatorname{sen}^2 \pi/2}} \quad \text{logo:}$$

$$\rho_D = \frac{2R\cos\lambda}{\operatorname{sen}^2\lambda}$$

ou, pela eq. do paraboloide:

$$\boxed{x^2 + y^2 = R^2(z) = 2Rz}$$

Façamos a mudança de variável:

$$\rho^2 \operatorname{sen}^2 \lambda = 2R\rho . \cos\lambda$$

$$\rho = 0 \quad \rho_D = \frac{2R\cos\lambda}{\operatorname{sen}^2\lambda}$$

Resta integrar.

$$V = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{sen}\lambda \, d\lambda \int_{2R\cos\lambda}^{\frac{2R\cos\lambda}{\operatorname{sen}^2\lambda}} \rho^2 \, d\rho =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\theta \int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{sen}\lambda \, d\lambda \left(\frac{8R^3\cos^3\lambda}{\operatorname{sen}^6\lambda} - 8R^3\cos^3\lambda \right) =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\theta \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\frac{8R^3\cos^3\lambda \operatorname{sen}\lambda - 8R^3\cos^3\lambda \operatorname{sen}^7\lambda}{\operatorname{sen}^6\lambda} \right) d\lambda =$$

$$= \frac{8R^3}{3}\int_0^{2\pi} d\theta \int_{\pi/4}^{\pi/2} \Big(\underbrace{\frac{\cos^3\lambda}{\operatorname{sen}^5\lambda} \, d\lambda}_{I_1} - \operatorname{sen}\lambda \cos^3\lambda \, d\lambda \Big)$$

Resolvamos I_1 :

$$I_1 = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^3\lambda\,(1-\operatorname{sen}^6\lambda)}{\operatorname{sen}^5\lambda}\, d\lambda =$$

$$= \int \frac{\cos\lambda}{\operatorname{sen}^5\lambda} d\lambda - \int \frac{\cos\lambda}{\operatorname{sen}^3\lambda} d\lambda - \int \cos^3\lambda \operatorname{sen}\lambda\, d\lambda =$$

$$= \left[-\frac{1}{4\operatorname{sen}^4\lambda} + \frac{1}{2\operatorname{sen}^2\lambda} + \frac{\cos^4\lambda}{4} \right]_{\pi/4}^{\pi/2} =$$

$$= \frac{5}{16}$$

Portanto

$$V = \int_0^{2\pi} \frac{8R^3}{3} \cdot \frac{5}{2\cancel{16}} d\theta = \left[\frac{5}{6}\theta \right]_0^{2\pi}$$

O resultado (fazer) é πR^3

22. 5. 46

Tipos de problemas sobre superfícies.

Dada $P = O + \vec{v}(t)$, teremos como incognitas $\frac{1}{R}$ $\frac{1}{T}$ e $\frac{1}{K}$ pois é possível conhecer-se $\vec{t}$, $\vec{b}$, $\vec{n}$.

Pode-se pedir o vetor de Darboux $\vec{\omega}$, o centro do círculo osculador ou o lugar geom. dos centros desses círculos.

Esferas oscul. e l. g. dos seus centros.

Planos: normal, retificante e osculador (são ef.)

$$\begin{cases} \vec{t} & 1/R \\ \vec{n} & 1/T \\ \vec{b} & 1/K \end{cases}$$

		retas	planos
$\vec{t}$	$1/R$	tg.	normal
$\vec{n}$	$1/T$	normal	retificte
$\vec{b}$	$1/K$	binormal	osculador.

Em geral, o arco não é tomado para parâmetro nos exercícios. Toma-se então quasi sempre $t = t(s)$ (funç. do arco), neste caso.

$P = O + \vec{v}(s)$ e teremos então

$$\vec{t} = \frac{dP}{ds} = \frac{\frac{dP}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \longrightarrow |ds| = |dP|$$

virá: $\vec{t} = \dfrac{dP/dt}{|dP/dt|} = \dfrac{P'}{|P'|}$ (tangente)

Normal: $\vec{n} = \dfrac{\frac{d\vec{t}}{ds}}{\left|\frac{d\vec{t}}{ds}\right|}$ (pelo odografo das tangentes)

ou

$$\vec{n} = \frac{\frac{d\vec{t}}{dt}}{\left|\frac{d\vec{t}}{dt}\right|}$$

(Bivanti - Ex. de Análise)

1) Pode-se estudar a linha

$$P = O + (\operatorname{sen} t - \cos t)\vec{i} + (\operatorname{sen} t + \cos t)\vec{j} + \sqrt{2}\, t\, \vec{k}$$

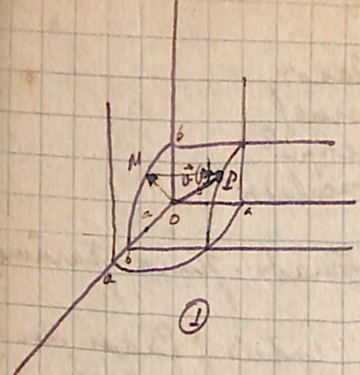
Determina-se $\vec{t}$, $\vec{n}$, depois $\vec{b} = \vec{t} \wedge \vec{n}$

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{b}}{R} - \frac{\vec{t}}{T} \quad \text{etc.}$$

2) Pode a linha ser dada pela intersec. de 2 superfícies: $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ x^2 + z^2 = b^2 \end{cases}$

$a > b$

Determinemos a expressão vetorial da linha:



No exemplo escolhamos para parametro uma das variaveis cartesianas (z p/ ex.)

$$P-O = \vec{v}(t) = \vec{v}(z)$$

$$P-O = (M-O) + (P-M)$$

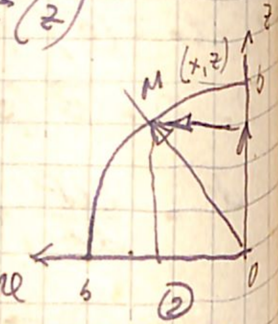


fig. 2: $M - O = z\vec{k} + \sqrt{b^2 - z^2}\,\vec{i}$

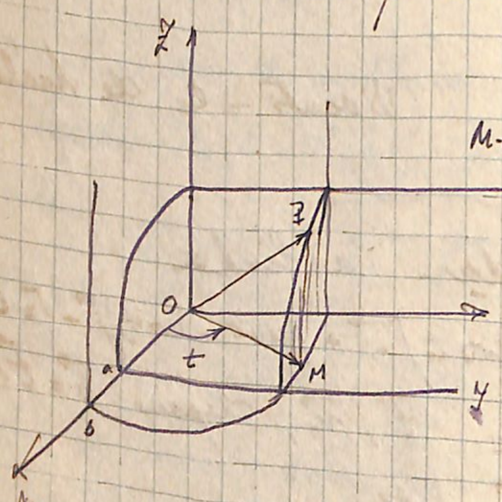
fig. 1. $(P - M)$

$x = \sqrt{b^2 - z^2}$ $\quad y = \sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 + z^2 - b^2}$

$\to P - M = \sqrt{a^2 - b^2 + z^2}\,\vec{j}$

port.º $P = O + \sqrt{b^2 - z^2}\,\vec{i} + \sqrt{a^2 - b^2 + z^2}\,\vec{j} + z\vec{k}$

Tomemos outro parametro



$$P - O = (M - O) + (P-M)$$

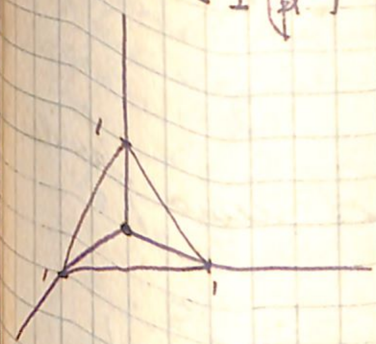
$$M-O = a\cos t\,\vec{i} + a\,\mathrm{sen}\,t \ldots$$

$$z = \sqrt{b^2 - x^2} = \sqrt{b^2 \ldots}$$

$$P - O = a\cos t\,\vec{i} + a\,\mathrm{sen} \ldots$$
$$+ \sqrt{b^2 - a^2\cos^2 t} \ldots$$

Estudar a linha:

$$\begin{cases} xy - z^2 = 0 \text{ (cone)} \\ x + y + z = 1 \text{ (pl.º)} \end{cases}$$



Observemos que a linha é plana — não terá torção.

Não nos é possivel fazer a figura.

Eliminando z p. ex.: projetamos a linha sôbre o eixo xy.

Se fôr possivel termos $y = \varphi(x)$

então

pois: $P = O + x\vec{i} + \varphi(x)\vec{j} + \psi(x)\vec{k}$

$x + \varphi(x) + z = 1 \to z = \psi(x)$

Escolhamos dois parametros tais q. não apareçam expressões irracionais

$\boxed{x = tu \;\big|\; y = \frac{t}{u}}$

resulta que $\boxed{z = t}$

A equação do cone passará a ser:

$$P = O + tu\,\vec{i} + \frac{t}{u}\,\vec{j} + t\vec{k}$$

para o plano: $x = tu \quad y = t/u$

$$z = 1 - tu - t/u$$

$$tu + t/u + t = 1 \longrightarrow$$

$$t = \frac{u}{u^2 + u + 1}$$

eliminando t na eq. do cone:

$$P = O + \frac{1}{u^2 + u + 1}\left(u^2\vec{i} + \vec{j} + u\vec{k}\right)$$

Superfícies:

A eq. de uma superf. é expressa em função de dois parâmetros

$$P = O + \vec{\varphi}(u, v)$$

Se fizermos $u = u_0$ obtemos uma família de linhas e se $v = v_0 \rightarrow L_{v_0}$

Ter-se-á então $P = O + \vec{\varphi}(u_0, v)$

$$P = O + \vec{\varphi}(u, v_0)$$

O que em primeiro lugar aparece neste estudo é a normal

$\vec{N} = P'_u \wedge P'_v$ o que interessa em geral é $\vec{u} = \dfrac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$

Se

$$P = O + x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}$$

virá

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k} \quad (1)$$

Outro caso se tem f de parâmetros são as variáveis cartesianas

$$\vec{N} = -p\vec{i} - q\vec{j} + \vec{k} \longrightarrow \begin{cases} p = \dfrac{\partial z}{\partial x} \\ q = \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{cases}$$

Vetor da reta normal: $(Q - P_0) \wedge \vec{N} = 0$ ou $Q = P_0 + \lambda\vec{N}$.

Plano tangente: $(P - P_0) \times \vec{u} = 0$

é o l.g. das tangentes num ponto da superfície.

1ª forma diferencial do estudo das superf. - diferencial do arco ~~traçado~~ de uma linha traçada sobre a superfície

Temos $P = O + \vec{\varphi}(u, v)$

$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ onde —

$$\begin{cases} E = P'_u \times P'_u \\ F = P'_u \times P'_v \quad (2) \\ G = P'_v \times P'_v \end{cases}$$

—— × ——

Estuda no exame

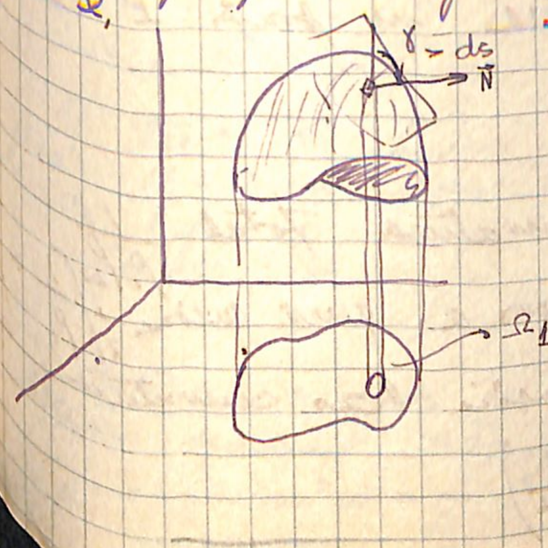
Problema da coplanação:

Cálculo da área de uma superfície curva

$$\Omega = \iint_\Omega \underbrace{\sqrt{EG - F^2}}_{|\vec{N}|\ (2)}\,du\,dv = \iint_\Omega \underbrace{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}_{|\vec{N}|\ (1)}\,du\,dv$$

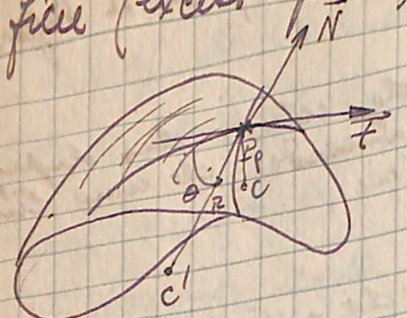
Se os parâmetros são as variáveis cartesianas:

$$\Omega = \iint_{\Omega_1} \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dx\,dy = \iint_{\Omega_1} \frac{dx\,dy}{\cos\gamma}$$



$$\iint_\Omega ds = \iint_{\Omega_1} \frac{dx\,dy}{\cos\gamma} = \iint_{\Omega_2} \frac{dx\,dz}{\cos\beta} = \iint_{\Omega_3} \frac{dy\,dz}{\cos\alpha}$$

Estudo das curvaturas de uma superficie (exceto o plano).

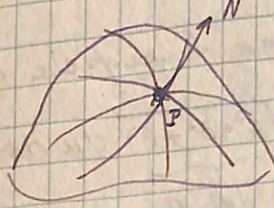


1) Examinar as curvaturas das linhas q. passam pelo ponto P.
Conhecemos pelas secções planas, a mais simples seria a resultante da intersecção por um plano contendo a normal — secções planas normais.

Aplica-se o teorema de Meunier (pg. 95)

$R = \rho \cos\theta$ (liga os raios das curvaturas das secções normais com as secções quaisquer).

Basta então estudar as secções normais.



Há sempre curvatura maxima $\frac{1}{\rho_{max}}$ e minima $\frac{1}{\rho_{min}}$.

O que resta é saber qual a funcção que exprime a curvatura no ponto P

$f\left(\frac{1}{\rho_1}, \frac{1}{\rho_2}\right)$

~~Gauss~~ propôs a curvatura total $\frac{1}{\rho_1\rho_2}$

Sophie Germaine propos a curv. media: $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)$

e Casoratti propos a media das curvaturas quadradas

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2}\right)$

A de Gauss fornece curvatura nula para superficies desenvolviveis; tambem a de Sophie Germaine.

A de Casoratti não distingue pontos elipticos de pontos hiperbolicos.

———x———

No ponto P podem passar linhas reversas (pg. 95)

Entre os planos que passam pelas curvaturas extremas (principais) existe a relação (teor. 79) de serem ortogonais.

São os meridianos e os paralelos nas superficies de revolução.

Teorema de Euler:—

Expressão das curvaturas

de Gauss: $\frac{1}{\rho_1\rho_2} = \frac{LN + M^2}{EG - F^2}$

de S. Germ.: $\frac{1}{2\rho_1} + \frac{1}{2\rho_2} = \frac{1}{2}\,\frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2}$

onde alem de E, G, F temos L, M e N

$$\begin{cases} L = \vec{u} \times P''_{u^2} \\ M = \vec{u} \times P''_{u,v} \\ N = \vec{u} \times P''_{v^2} \end{cases}$$

O teor.a de Euler garante que se $F=0$ será $M=0$ e como consequ. vem a formula de Euler:

Conhece-se $\frac{1}{\rho_u}$ (ρ_u) $\frac{1}{\rho_v}$ (ρ_v)

determinaremos a curvatura de uma secção normal não principal

$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_u} \cdot \operatorname{sen}^2 w + \frac{1}{\rho_v} \cos^2 w$ sendo w o angulo do plano da secção normal q. fazemos determ. a curvatura com o plano de curvatura $1/\rho_\mu$.

Vê-se algumas vezes q. acontece com os pts proximos ao ponto em q. o plano tangente tangencia a superficie. Teremos os pontos eliticos e os pontos hiperbolicos. (pg. 91)

$$2\delta = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$$

$LN - M^2 > 0$ (pontos eliticos)

$LN - M^2 < 0$ (pontos hiperbolicos)

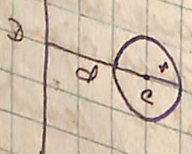
$LN - M^2 = 0$ (pontos parabolicos)

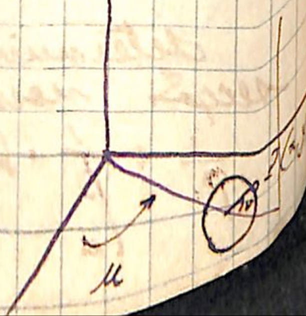
No primeiro caso o plano não corta a superficie
" 2º " " " corta " "
" 3º " " " tangencia varios pontos da superficie, ou melhor têm em comum com a superficie uma linha.

Linha assintotica — tem sua binormal coincidente com a normal da superficie.

Exercícios —

Toro circular — Superficie gerada por uma circunferencia que gira em torno de um eixo do seu plano.





$x = (d + r\cos v)\cos\mu = R\cos\mu$

$y = (d + r\cos v)\,\text{sen}\,\mu = R\,\text{sen}\,\mu$

$z = r\,\text{sen}\,v = r\,\text{sen}\,v$

Então: $P = O + R\cos\mu.\vec{i} + R\,\text{sen}\,\mu.\vec{j} + r\,\text{sen}\,v\,\vec{k}$ é a eq. do toro.

1) Determinação da normal:

$\vec{N} = P'_\mu \wedge P'_v$

(μ_0) $P'_\mu = -R\,\text{sen}\,\mu.\vec{i} + R\cos\mu.\vec{j}$

(v_0) $P'_v = -r\,\text{sen}\,v.\cos\mu.\vec{i} - r\,\text{sen}\,v.\text{sen}\,\mu\,\vec{j} + r\cos v.\vec{k}$

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -R\,\text{sen}\,\mu & R\cos\mu & 0 \\ -r\,\text{sen}\,v.\cos\mu & -r\,\text{sen}\,v.\text{sen}\,\mu & r\cos v \end{vmatrix} =$$

$= Rr\cos v.\cos\mu\,\vec{i} + Rr\cos v.\text{sen}\,\mu.\vec{j} + Rr\,\text{sen}\,v\,\vec{k} =$

$= Rr(\cos v.\cos\mu.\vec{i} + \cos v.\text{sen}\,\mu\,\vec{j} + \text{sen}\,v\,\vec{k})$

$\vec{n} = \dfrac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$ sendo $|\vec{N}| = Rr$

2) Curvaturas —

a) Determ. de E, F, G:

$E = R^2 \quad F = 0 \quad G = r^2$

$EG - F^2 = R^2 r^2$

b) Determ. de L, M, N →

$L = \vec{n} \times P''_{u^2}$ (corresp. a E) $= -R\cos v$.

$M = 0 = \vec{n} \times P''_{u.v} = 0$

$N = \vec{n} \times P''_{v^2}$ (corresp. a G) $= -r$

$P''_{u^2} =$

$P''_{v^2} =$

$$LN - M^2 = Rr.\cos v \begin{cases} > 0 \left(-\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}\right) & \text{(pt. el...)} \\ < 0 \left(\frac{\pi}{2} < v < \frac{3\pi}{2}\right) & \text{(pt. hi...)} \\ = 0 \left(v = \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) & \text{(pt. para...)} \end{cases}$$

$(R = d + r\cos v)$

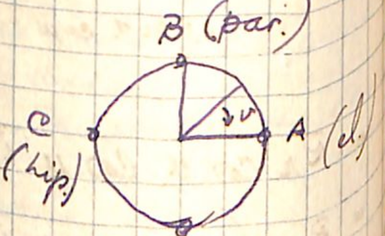
para $\pi/2 > v > -\pi/2$ a diferença $LN - M^2$ é >0 são pontos eliticos.

c) Curvaturas:

Gauss: $$\frac{1}{\rho_1 \rho_2} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{Rr.\cos v}{R^2 r^2} =$$

$$= \frac{\cos v}{Rr} = \frac{1}{\rho_t}$$

$$\frac{1}{\rho_t} = \frac{\cos v}{(d + r\cos v)\cos v}$$



pt. A) $$\frac{1}{\rho_{t_A}} = \frac{1}{(d+r)r} = \underbrace{\frac{1}{d+r}}_{\text{curv. da sup. de rev. } d+r \text{ (paralelo)}} \cdot \underbrace{\frac{1}{r}}_{\text{curv. ger.}}$$

Nos pts. eliticos, as duas curv. extremantes são de mesmo sinal.

pt. B) $\to \rho_t = 0$ (vemos q. há uma fa... neste caso, pois há curvatura).

É necessário que uma das curvaturas seja nula para que $\rho_t = 0$

pt. C) $$\frac{1}{\rho_{t_C}} = \frac{-1}{(d-r)r} = \frac{1}{d-r} \cdot \frac{-1}{r}$$

$\frac{1}{d-r}$ – curvat. do paralelo

$\frac{-1}{r}$ curvat. do meridiano. São pontos hiperbólicos – as curvaturas extremantes são de sinais contrarios.

d) Curvatura media de Sophie-Germaine

$$\frac{1}{\rho_m} = \frac{1}{2}\left(\frac{EN - \cancel{2FM} + GL}{EG - \cancel{F^2}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{EN + GL}{EG} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{N}{G} + \frac{L}{E}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{-r}{r^2} - \frac{R\cos v}{R^2}\right) =$$

$$= \frac{-1}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{\cos v}{R}\right)$$ Sendo $\underline{R = d + r\cos v}$

pt. A: $\cos v = 1$

$$\frac{1}{\rho_m} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{d+r}\right)$$ são as curvaturas extremas. O sinal é contrario que o do sinal neste caso, na curvatura de Gauss.

pt. B: $$\frac{1}{\rho_m} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r}$$

pt. C. $$\frac{1}{\rho_m} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{d+r}\right)$$

3) Área do toro:

$$a = \iint_\Omega \sqrt{EG - F^2}\, du.dv =$$

$$= \iint_\Omega (d + r\cos v)\, r.\, \cancel{du}\, dv =$$

$$= \int_0^{2a} d\theta \int_0^{2r} (\cancel{d} \cancel{s} \, r \cos v) \, dr$$

Estudar a superfície S

$$z = a \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + 2\sqrt{2a}\,(x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}$$

e calcular a área da porção de S que se projeta em Oxy na região definida por

$$0 \leq x \leq a \leq 2r \qquad y \geq 0 \qquad x^2+y^2-2rx \leq 0$$

Solução

Tomando como parâmetro as coordenadas polares ρ, θ no plano Oxy temos:

$$x = \rho\cos\theta \quad y = \rho \operatorname{sen}\theta \quad z = a\theta + 2\sqrt{2a}\,\rho^{1/2}$$

$$P = O + \rho\cos\theta\,\vec{i} + \rho\operatorname{sen}\theta\,\vec{j} + (a\theta + 2\sqrt{2a}\,\rho^{1/2})\,\vec{k}$$

Normal:

$$\vec{N} = P'_\theta \wedge P'_\rho$$

$$P'_\theta = -\rho\operatorname{sen}\theta\,\vec{i} + \rho\cos\theta\,\vec{j} + a\vec{k}$$

$$P'_\rho = \cos\theta\,\vec{i} + \operatorname{sen}\theta\,\vec{j} + \sqrt{2a}\,\rho^{-1/2}$$

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\rho\operatorname{sen}\theta & \rho\cos\theta & a \\ \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & \rho^{-1/2}\sqrt{2a} \end{vmatrix}$$

$$\vec{N} = (\sqrt{2a}\,\rho^{1/2}\cos\theta - a\operatorname{sen}\theta)\,\vec{i} + (a\cos\theta + \sqrt{2a}\,\rho^{1/2}\operatorname{sen}\theta)\,\vec{j} - \rho\vec{k}$$

$$\cancel{(N)^2 = \sqrt{2a}\,\rho^{\frac{1}{2}}\cos\theta)}$$

$$|\vec{N}|^2 = \rho^2 + 2a\rho + a^2 = (a+\rho)^2$$

$$|\vec{N}| = a + \rho \qquad \vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$$

$$E = P'_\theta \times P'_\theta = \rho^2 + a^2$$

$$F = \vec{\rho}'_\theta \times \vec{\rho}'_\rho = a\sqrt{2a}\,\rho^{-\frac{1}{2}}$$
$$G = \vec{\rho}'_\rho \times \vec{\rho}'_\rho = 1 + 2a\rho^{-1}$$

$$EG - F^2 = \rho^2 + 2a\rho + a^2 = (\rho+a)^2 =$$

$$\vec{\rho}''_{\theta^2} = -\rho\cos\theta\,\vec{i} - \rho\,sen\,\theta\,\vec{j}$$
$$\vec{\rho}''_{\theta,\rho} = -sen\,\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$$
$$\vec{\rho}''_{\rho^2} = -\frac{1}{2}\sqrt{2a}\,\rho^{-3/2}\,\vec{k}$$

$$L = \vec{n} \times \vec{\rho}''_{\theta^2} = -\frac{\sqrt{2a}\,\rho^{3/2}}{\rho+a}$$
$$M = \vec{n} \times \vec{\rho}''_{\theta,\rho} = \qquad = \frac{a}{\rho+a}$$
$$N = \vec{n} \times \vec{\rho}''_{\rho^2} = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2a}}{\rho+a}\,\rho^{-1/2}$$

$$LN - M^2 = -\frac{a}{\rho+a} < 0$$ todos pontos de S são hip

Curvaturas:

Total (Gauss) $\dfrac{1}{\rho_1\rho_2} = \dfrac{LN-M^2}{EG-F^2} = -\dfrac{a}{\rho+a}$

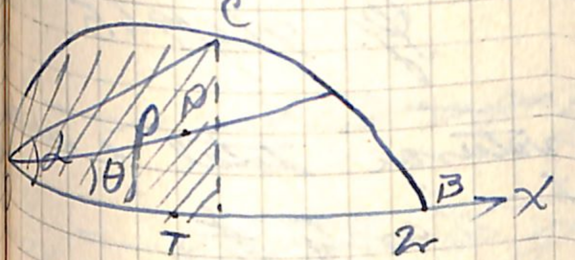
(As c. tem sinais contrár

Média (Sophie Germain) $\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{\rho_1} + \dfrac{1}{\rho_2}\right] = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{EN}{EG-}$

$$= -\frac{1}{4}\,\frac{\sqrt{2a}}{\rho+a}\left[\rho^{3/2} + 4a\rho^{1/2} + 3a^2\rho^{-1/2}\right]$$

Área:

$$Q = \iint_\Omega \sqrt{EG-F^2}\,d\rho\,d\theta = \iint_\Omega (\rho+a)\,d\rho\,d\theta$$



Conforme o enunciado, o campo Ω fica assinalado na figura.

A área Q corresponde a diferença entre o semi círculo e a região ACB.

$$Q = Q_1 - Q_2$$

$$Q_1 = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2r\cos\theta} (\rho+a)\,d\rho = \frac{\pi r^2}{2} + 2ar$$

$$Q_2 = \int_0^{\alpha} d\theta \int_{a/\cos\theta}^{2r\cos\theta} (\rho+a)\,d\rho = 2ar\,sen\,\alpha + r^2\left(\alpha + \frac{1}{2}sen\,2\alpha\right) - \frac{a^2}{2}tg\,\alpha - a^2 L(\sec\alpha + tg\,\alpha)$$

(Detalhes da integral a cargo do estudante).

$$Q = 2ar(1-\operatorname{sen}\alpha) + r^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\alpha\right) + \frac{a^2}{2}\operatorname{tg}\alpha + a^2 l(\operatorname{sen}\ldots$$

sendo o ângulo α dado por

$$\cos^2\alpha = \frac{a}{2r} \qquad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

Sj. 9/6/946.

Achar as curvaturas total e média do helicoide $z = 4\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$

Total (Gauss) $\dfrac{1}{\rho_1}\cdot\dfrac{1}{\rho_2} = \dfrac{LN - M^2}{EG - F^2}$

média (Sophie) $\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{\rho_1} + \dfrac{1}{\rho_2}\right] = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{EN - 2FM + \ldots}{EG - F^2}$

Sendo: $P = O + x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}$ a equação vetorial da superfície

E, F, G, L, M, N são funções de u, v dadas por:

$E = |P'_u|^2 \quad F = P'_u \times P'_v \quad G = |P'_v|^2$

$L = P''_{u,u} \times \vec{n} \quad M = P''_{u,v} \times \vec{n} \quad N = P''_{v,v} \times \vec{n}$

$\vec{n} = \dfrac{\vec{N}}{|\vec{N}|} \qquad \vec{N} = P'_u \wedge P'_v$

Equação vetorial do helicoide

$x = u\cos v$

$y = u \operatorname{sen} v \quad \therefore z = 4\operatorname{arctg}\operatorname{tg} v = 4v$

$P = O + u\cos v\,\vec{i} + u\operatorname{sen} v\,\vec{j} + 4v\,\vec{k}$

$\dfrac{\partial P}{\partial u} = \cos v\,\vec{i} + \operatorname{sen} v\,\vec{j}$

$\dfrac{\partial P}{\partial v} = \cancel{(\cos v\,\vec{i}+)} - u\operatorname{sen} v\,\vec{i} + u\cos v\,\vec{j} + 4\vec{k}$

$\dfrac{\partial^2 P}{\partial u^2} = 0$

$\dfrac{\partial^2 P}{\partial v^2} = -u\cos v\,\vec{i} - u\operatorname{sen} v\,\vec{j}$

$\dfrac{\partial^2 P}{\partial u\,\partial v} = -\operatorname{sen} v\,\vec{i} + \cos v\,\vec{j}$

$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos v & \operatorname{sen} v & 0 \\ -u\operatorname{sen} v & u\cos v & 4 \end{vmatrix} = 4\operatorname{sen} v\,\vec{i} - 4\cos v\,\vec{j} + u\vec{k}$

$\vec{n} = \dfrac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \dfrac{4\operatorname{sen} v\,\vec{i} - 4\cos v\,\vec{j} + u\vec{k}}{\sqrt{16+u^2}}$

$E = 1 \quad F = 0 \quad G = u^2 + 16 \quad L = 0$

$M = -\dfrac{4}{\sqrt{16+u^2}} \qquad N = 0$

$\dfrac{1}{\rho_1}\cdot\dfrac{1}{\rho_2} = -\left(\dfrac{4}{\sqrt{16+u^2}}\right)^2 : u^2+16 = -\dfrac{16}{(u^2+16)^2}$

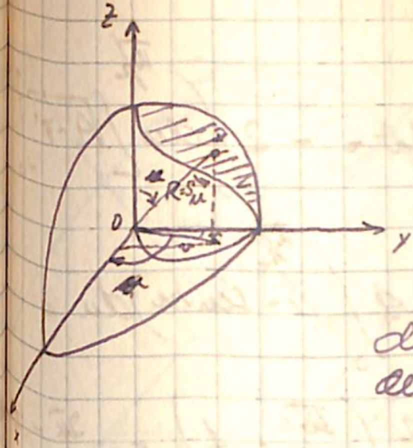
$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\rho_1} + \dfrac{1}{\rho_2}\right) = \dfrac{1}{2}\,0 - 0 + 0 = \underline{0}$

Observação: A média das curvaturas sendo zero, elas serão de sinais opostos; portanto seu produto será negativo.

Em São Paulo 9/6/946.

Paulo Lucarini

Áreas



$$x = r \operatorname{sen} u \cos v$$
$$y = r \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$$
$$z = r \cos u$$

Qual a área da superfície da esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

delimitada pela interseção desta com o cilindro

$$x^2 + (y-1)^2 = 1$$

Solução:

$$P - O = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$x = v \operatorname{sen} u$ $\quad y = v \cos u$ $\quad z = \sqrt{4-v^2}$

$$P - O = v \operatorname{sen} u\,\vec{i} + v \cos u\,\vec{j} + \sqrt{4-v^2}\,\vec{k}$$

$$Q = \iint_{\Omega(u,v)} |P'_u \wedge P'_v|\, du\, dv$$

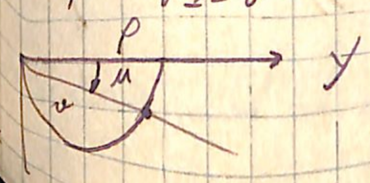
$$P'_u = v \cos u\,\vec{i} - v \operatorname{sen} u\,\vec{j}$$

$$P'_v = \operatorname{sen} u\,\vec{i} + \cos u\,\vec{j} - \frac{v}{\sqrt{4-v^2}}\vec{k}$$

$$P'_u \wedge P'_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v\cos u & -v \operatorname{sen} u & 0 \\ \operatorname{sen} u & \cos u & \frac{-v}{\sqrt{4-v^2}} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{v^2 \operatorname{sen} u}{\sqrt{4-v^2}}\vec{i} + \frac{v^2 \cos u}{\sqrt{4-v^2}}\vec{j} + (v\cos^2 u + v \operatorname{sen}^2 u)\vec{k}$$

$$|P'_u \wedge P'_v| = \frac{2v}{\sqrt{4-v^2}} \qquad \Omega\left[\begin{array}{l} 0 \le u \le \pi/2 \\ 0 \le v \le 2\cos u \end{array}\right]$$



$$\rho = 2\cos u$$

$$Q = \iint_{\Omega} \frac{2v}{\sqrt{4-v^2}}\, du\, dv =$$

$$= \int_0^{\pi/2} du \int_0^{2\cos u} 2v\,(4-v^2)^{-\frac{1}{2}}\, dv = -2\int_0^{\pi/2} du \left[\sqrt{4-v^2}\right]_0$$

$$= -2\int_0^{\pi/2} (2\operatorname{sen} u - 2)\, du = 4\int_0^{\pi/2} (1-\operatorname{sen} u)\, du =$$

$$= 4\left[u + \cos u\right]_0^{\pi/2} = 4\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = 2\pi - 4$$

$$= 2(\pi - 2)$$

R: $8(\pi - 2)$ *

$$* \begin{cases} 2z\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x \\ 2z\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y \end{cases}$$

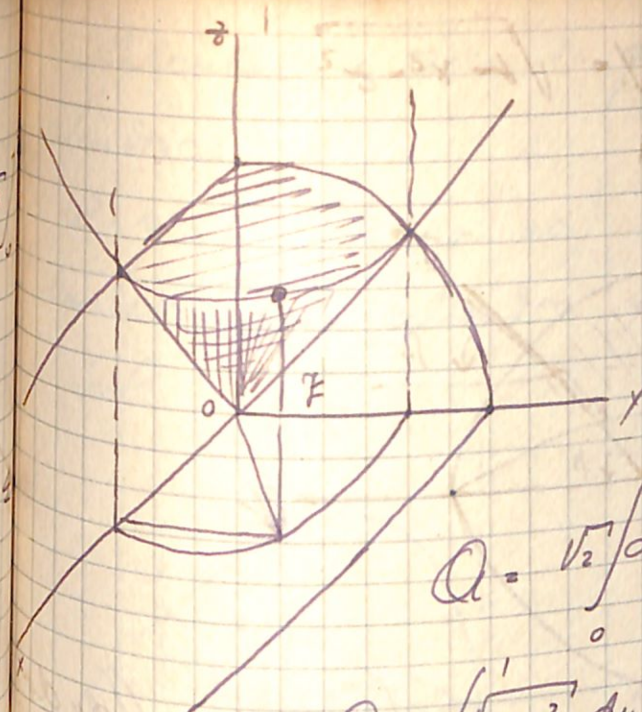
2) Del. a área da porção da superf. con. $z^2 = x^2 + y^2$ $[x \geq 0 \quad y \geq 0 \quad z \geq 0]$ limitada pelo cilindro $y^2 + z^2 = 1$

Sol.:

$$* \; p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\sqrt{1+p^2+q^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}} = \sqrt{2}$$

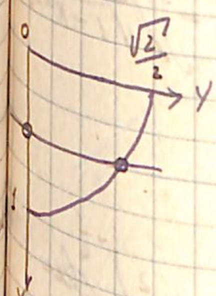
$$Q = \iint_{\Omega} \sqrt{1+p^2+q^2}\, dx\, dy = \iint \sqrt{2}\, dx\, dy$$



$$\left.\begin{aligned} z^2 &= x^2 + y^2 \\ z^2 &= 1 - y^2 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 - y^2 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \text{ (elipse - projeção)} \end{cases}$$

$$Q = \sqrt{2}\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{\frac{1-x^2}{2}}} dy = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$$



$$Q = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$$

$x = \operatorname{sen} t \qquad dx = \cos t\, dt$

$$Q = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t\right) dt =$$

$$= \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

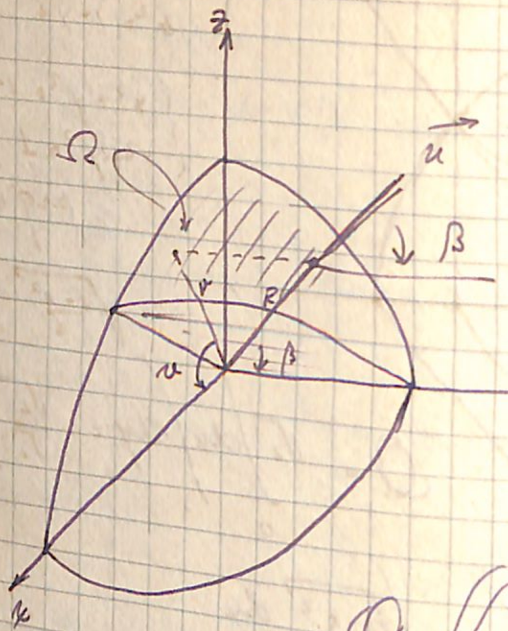
R: $\pi/4$.

Calcular a área da porção da superf. esfer. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ $[x, y, z \geq 0]$ delimitada pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $\sqrt{3}\,x - z = 0$

Solução

$$dQ = \frac{dx\, dz}{\cos\beta}$$

$\cos\beta = \frac{y}{R} = y = \sqrt{1 - x^2 - z^2}$



$$\Omega = \iint_{\Omega} \frac{dx\,dz}{\cos\beta} = \iint \frac{dx\,dz}{\sqrt{1-x^2-z^2}}$$

$x = u\cos v$

$z = u \,\text{sen}\, v \qquad J = u$

$$\Omega = \iint_{\Omega_1} \frac{u\,du\,dv}{\sqrt{1-u^2}} = \int_{\bar v}^{\pi/2} dv \int_0^1 u(1-u^2)^{-\frac{1}{2}}\,du =$$

$$= \int_{\bar v}^{\pi/2} \left[(1-u^2)^{\frac{1}{2}}\right]_1^0 dv = \int_{\bar v}^{\pi/2} dv \qquad \bar v = ?$$

$\sqrt{3}\,x - z = 0$

$\sqrt{3}\,u\cos v - u\,\text{sen}\,v = 0 \qquad u = 0$

$\sqrt{3}\cos v - \text{sen}\,v = 0 \qquad \text{tg}\, v = \sqrt{3} \qquad \bar v =$

$$\Omega = \int_{\pi/3}^{\pi/2} dv = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

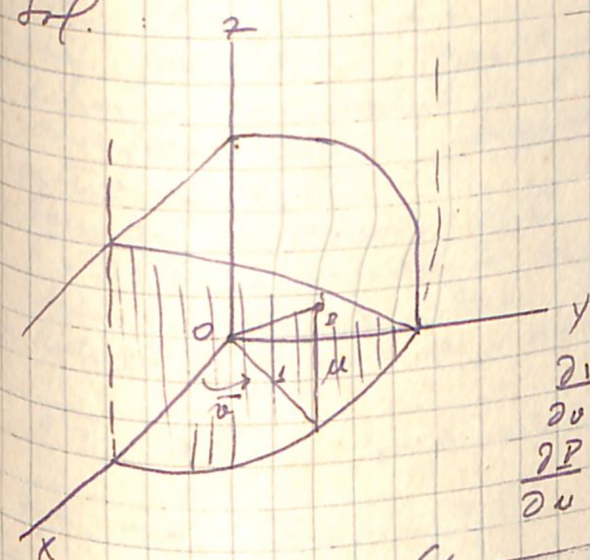
$\boxed{R: \pi/6}$

Calcular a área da porção de superf. cilíndrica

$x^2 + y^2 = 1 \qquad (x, y, z \geq 0)$

limitada pelo cilindro $y^2 + z^2 = 1$

Sol.



$x = \cos v$

$y = \text{sen}\, v$

$z = u$

$P - O = \cos v\,\vec{i} + \text{sen}\,v\,\vec{j} + u\,\vec{k}$

$\frac{\partial P}{\partial v} = -\text{sen}\,v\,\vec{i} + \cos v\,\vec{j}$

$\frac{\partial P}{\partial u} = \vec{k}$

$$\Omega = \iint_{\Omega} \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv$$

$E = P'_u \times P'_u = 1$

$F = P'_u \times P'_v = 0 \qquad EG - F^2 = 1$

$G = P'_v \times P'_v = 1$

$$\Omega = \iint_{\Omega} du\,dv = \int_0^{\pi/2} dv \int_0^{\bar u} du \qquad \bar u = ?$$

$y^2 + z^2 = 1 \qquad \text{sen}^2 v + u^2 = 1$

$\bar u^2 = 1 - \text{sen}^2 v = \cos^2 v \qquad \bar u = \cos v$

$$\Omega = \int_0^{\pi/2} \left[u\right]_0^{\cos v} dv = \int_0^{\pi/2} \cos v\,dv =$$

$$\left[\operatorname{sen} x\right]_0^{\pi/2} = 1$$

R: 1

2.7.46.

Calcular $\vec{v}$ na homografia

$$\sigma\vec{i} = \vec{i} + \vec{j}$$
$$\sigma\vec{j} = 2\vec{i} - \vec{k}$$
$$\sigma\vec{k} = \vec{v}$$

sendo valores principais — 1, −1, 2.

2) Determinar $\vec{a}$ (direção unit.)
3) Det. $V\sigma\wedge$, $D\sigma$, $K\sigma$
4) Verif. que $K\sigma$ é conjugado de σ.
5) Achar a indicatriz de σ e mostrar q. ela se identifica com a indicatriz de $D\sigma$ e c/ a indicatriz de $K\sigma$.
6) Formar a diade $H(\vec{a}, \vec{b})$ sendo $\vec{a} = \sigma\vec{j}$ e $\vec{b} = D\sigma\vec{k}$ e aplicá-la ao vetor $V\sigma\wedge\vec{i}$.
7) Achar o vetor da diade anterior — $VH(\vec{a},\vec{b})\wedge$.
8) Reduzir σ à soma de 3 diades — $\sigma = \sum_1^3 H_i$.

$$\sigma\vec{a} = s\vec{a} \qquad s_1 = 1 \quad s_2 = -1 \quad s_3 = 2.$$

Seja $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Ora, $(s-1)(s+1)(s-2) = s^3 - I_1 s^2 + I_2 s - I_3$

onde

$$I_1 = \vec{i}\times\sigma\vec{i} + \vec{j}\times\sigma\vec{j} + \vec{k}\times\sigma\vec{k} = 1+0+z$$
$$= \underline{\underline{1+z}}$$

$$I_2 = \vec{i}\wedge\sigma\vec{j}\times\sigma\vec{k} + \sigma\vec{i}\wedge\sigma\vec{j}\times\vec{k} + \sigma\vec{i}\wedge\vec{j}\times\sigma\vec{k} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} =$$
$$= \underline{\underline{y - 2 + z}}$$

$$I_3 = \sigma\vec{i}\wedge\sigma\vec{j}\times\sigma\vec{k} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = y - x - 2z$$

logo — $s^3 - 2s^2 - s + 2 = s^3 - I_1 s^2 + I_2 s - I_3$

portanto — $\begin{cases} I_1 = 1+z = 2 \\ I_2 = 2+y+z = -1 \\ I_3 = -x+y-2z = -2 \end{cases}$ daqui tiramos

$$\begin{cases} z = 1 \\ y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \longrightarrow \vec{v} = \vec{k}$$

Podemos dizer q. $\vec{k}$ é uma direção unida e onde $s_1 = 1$.

Determinaremos as outras direções unidas.

$$V\sigma = \frac{1}{2}\left(\vec{i}\wedge\sigma\vec{i} + \vec{j}\wedge\sigma\vec{j} + \vec{k}\wedge\sigma\vec{k}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\vec{k} - 2\vec{k} - \vec{i}\right) = -\frac{1}{2}\left(\vec{i}+\vec{k}\right)$$

O operador será:

$$V\sigma\wedge = -\frac{1}{2}\left(\vec{i}+\vec{k}\right)\wedge$$

Ora,

$$\sigma = \frac{1}{2}\left(\sigma + k\sigma\right) + \frac{1}{2}\left(\sigma - k\sigma\right)$$

$$D\sigma = \frac{1}{2}\left(\sigma + k\sigma\right)$$

$$V\sigma\wedge = \frac{1}{2}\left(\sigma - k\sigma\right)$$

$$D\sigma + V\sigma\wedge = \sigma \quad \to \quad D\sigma = \sigma - V\sigma\wedge$$

e mais $k\sigma = \sigma - 2V\sigma\wedge$.

$$D\sigma\vec{i} = \sigma\vec{i} + \tfrac{1}{2}\left(\vec{i}+\vec{k}\right)\wedge\vec{i} = \vec{i}+\vec{j} + \tfrac{1}{2}\vec{j} = \vec{i} + \tfrac{3}{2}\vec{j}$$

$$D\sigma\vec{j} = \ldots = \tfrac{3}{2}\left(\vec{i}-\vec{j}\right)$$

$$D\sigma\vec{k} = \sigma\vec{k} - V\sigma\wedge\vec{k} = \vec{k} + \tfrac{1}{2}\vec{j}$$

$$D\sigma \equiv \begin{matrix} D\sigma\vec{i} \\ D\sigma\vec{j} \end{matrix}$$

$\vec{i} + \tfrac{3}{2}\vec{j} + \tfrac{3}{2}i - \tfrac{3}{2}\vec{j} + k - \ldots$

para o conjugado:

$$k\sigma\vec{i} = \ldots$$

$$k\sigma\vec{j} = \sigma\vec{j} - 2V\sigma\wedge\vec{j} = 2\vec{i} - \vec{k} + \frac{1}{2}\vec{k} - \frac{1}{2}\vec{i} = \ldots$$

$$k\sigma\vec{k} = \ldots$$

4)

$$\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{k}$$

$$\vec{v} = -\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}.$$

Devemos ter $\sigma\vec{u}\times\vec{v} = k\sigma\vec{v}\times\vec{u}$.

ou

$$\sigma\left(2\vec{i}-\vec{k}\right)\times\left(-\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}\right) = k\sigma\left(-\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}\right)\times\left(2\vec{i}-\vec{k}\right)$$

5) Indicatrizes

$$(P-O)\times\sigma(P-O) = c$$

$$P-O = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

$$\left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right)\times\left(x\sigma\vec{i}+y\sigma\vec{j}+z\sigma\vec{k}\right) = c$$

$$\left(\quad \text{"} \quad\right)\times\left(x\vec{i}+x\vec{j}+2y\vec{i}-y\vec{k}+z\vec{k}\right) = c$$

$$\left(\quad \text{"} \quad\right)\times\left[(x+2y)\vec{i}+x\vec{j}+(z-y)\vec{k}\right] = c$$

$$x(x+2y) + yx + z(z-y) = c$$

$$\boxed{x^2 + z^2 + 3xy - yz - c = 0}$$

Devemos calcular depois a indic. de $D\sigma$ e de $k\sigma$; as três devendo ser iguais.

6) Diade $H(\vec{a},\vec{b}) \equiv H(\sigma\vec{j}, D\sigma\vec{k})$

$H(\sigma\vec{j}, D\sigma\vec{k})$. $V\sigma\wedge\vec{i}$ sendo $H(\vec{a},\vec{b}) = (\vec{a}\times\vec{v})\vec{b}$

teremos no caso $\left[\sigma\vec{j}\times\left(V\sigma\wedge\vec{i}\right)\right] D\sigma\vec{k}$.

7) $VH(\vec{a},\vec{b})\wedge = \tfrac{1}{2}\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right)$

5. 8. 46

Operadores de campo

Seja uma região do espaço. A cada ponto se faz corresponder um escalar - função escalar de ponto $f(P)$. Campo escalar.
Se a cada ponto se fizer corresponder um vetor, teremos uma $\vec{u}(P)$ Campo vetorial.

Derivada num campo -

Seja um pto. P dum campo e uma direção a partir de $P - \vec{s}$, isto é: $P' - P = h.\vec{s}$.

então: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(P + h\vec{s}) - f(P)}{h}$ é a derivada da função $f(P)$ segundo $\vec{s}$;

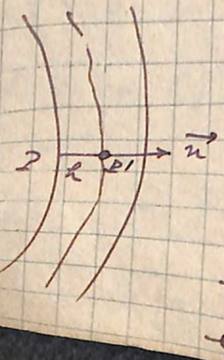
é dada pela expressão $\dfrac{df}{dP} \vec{s}$. (É escalar)

Gradiente:

Seja $f(P)$. Há sempre um conj. de pontos que dão a $f(P)$ uma mesma determinação, formando uma superfície dita de nível.

Consideremos numa sup. de nível (SN) um ponto P e a normal $\vec{n}$ à SN nesse ponto.

Passemos pela normal a um outro ponto P' onde a determ. da função seja $f(P')$.



$$\left(\lim_{h \to 0} \frac{f(P + h\vec{n}) - f(P)}{h}\right) \vec{n} = \text{grad. } f(P)$$

Portanto $\text{grad. } f(P) = \left(\dfrac{df}{dP} \vec{n}\right) \vec{n}$

é vetor !!!

Temos então definido uma operação vetorial, pois passamos de um campo escalar a um campo vetorial.

Propriedades do grad. f:

1). $\text{grad.} (f_1 + f_2) = \text{grad.} f_1 + \text{grad.} f_2$

2) $\text{grad.}\, m f = m\, \text{grad.} f$

Sejam 2 fções. f_1 e f_2; seu produto: $f_1 . f_2$ vem -

3) $\text{grad.}\, f_1 . f_2 = f_1\, \text{grad.} f_2 + f_2\, \text{grad.} f_1$.

4) função de função $f(\varphi)$ sendo $\varphi(P) \to f[\varphi(P)]$ neste caso:

$\text{grad.} f[\varphi(P)] = \dfrac{df}{d\varphi} \text{grad.} \varphi$.

Diferencial (pg. 122 - importte) →

5) $df = \text{grad.} f \times dP$.

Mostrar q. $\vec{a} \times \text{grad} (\vec{b} \times \overbrace{\text{grad } l.r}^{①}) =$

$= \dfrac{\vec{a} \times \vec{b}}{r^2} \overset{③}{-} \dfrac{2}{r^2} (\vec{a} \times \vec{r})(\vec{b} \times \vec{r})$

$\vec{a}$ e $\vec{b}$ constes e $\vec{r} = P - O$.

① $\text{grad. } l.r = \dfrac{1}{r} \overset{②}{\text{grad. } r}$ (prop. 4)

② $\text{grad. } r = \left[\lim \dfrac{(r+h) - r}{h}\right] \vec{n} = 1 . \dfrac{\vec{r}}{r} = \dfrac{\vec{r}}{r}$

portº: $\text{grad. } l.r = \dfrac{1}{r^2}$ (prop. 3)

③ $\text{grad.} \left(\vec{b} \times \dfrac{\vec{r}}{r^2}\right) = \text{grad. } \vec{b} \times \vec{r} . \dfrac{1}{r^2}$

$= \dfrac{1}{r^2} \text{grad. } \vec{b} \times \vec{r} + (\vec{b} \times \vec{r})\, \text{grad } \dfrac{1}{r^2}$

grad. $\vec{b}\times\vec{r}$ =

Sabemos $df = \text{grad}\, f \times d\vec{l}$.

no caso $f = \vec{b}\times\vec{r} \rightarrow df = \vec{b}\times d\vec{r} = \text{grad}.\, \vec{b}\times\vec{r}$

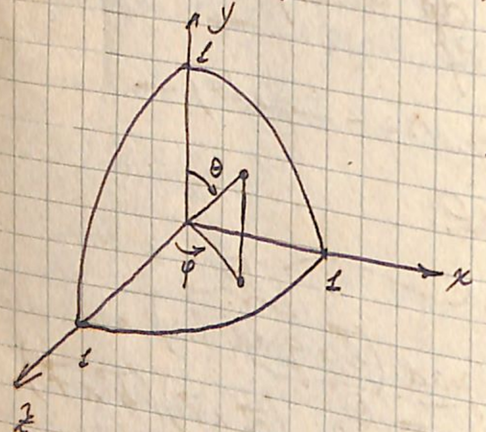
logo $\text{grad}.\, \vec{b}\times\vec{r} = \vec{b}$

$\text{grad}.\, \frac{1}{r^2} = -\frac{2}{r^3}\cdot \text{grad}.\, r = -\frac{2}{r^4}\cdot \vec{r}$

6.8.46.

Baricentros.

$\begin{cases} y \geq 0 \\ x \geq 0 \;\; z \geq 0 \end{cases}$ Do vol. limitado pelo ~~pelo~~ vol. da esfera $x^2+y^2 \dots = 1$. ~~interior~~



O eixo de simetria do pf. é a reta $(0, \vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$, port.

$$x_G = y_G = z_G = \frac{\int x\, dV}{\int dV}$$

$$\begin{cases} x = r\, \text{sen}\theta \cos\varphi \\ y = r\, \text{sen}\theta \cdot \text{sen}\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$|J| = r^2\, \text{sen}\,\theta \quad \therefore$

$dV = r^2\, \text{sen}\,\theta\, dr.\, d\theta.\, d\varphi.$

$$\int_V dV = \int_0^1 r^2\, dr \int_0^{\pi/2} \text{sen}\theta\, d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi =$$

$\int_0^1 r^2\, dr = \frac{1}{3}$ $\quad \int_0^{\pi/2} \text{sen}\theta\, d\theta = 1 \quad \int_0^{\pi/2} d\varphi = \pi/2$

logo $V = \pi/6$

$$\int_V x\, dV = \underbrace{\int_0^1 r^3\, dr}_{I_1} \underbrace{\int_0^{\pi/2} \text{sen}^2\theta\, d\theta}_{I_2} \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos\varphi\, d\varphi}_{I_3}$$

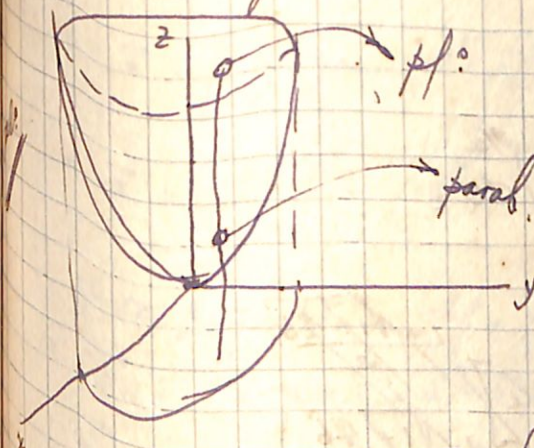
$I_1 = \frac{1}{4} \quad I_2 = \frac{\pi}{4} \quad I_3 = 1$

$\int x\, dV = \frac{\pi}{16} \rightarrow x_G = \frac{\int x\, dV}{\int dV} = \cancel{\frac{\pi}{16}\cdot\frac{6}{\pi}} =$

$= \frac{3}{8}$

$y_G = z_G = x_G = 3/8$

Calcular o baricentro do volume interior ao parabolóide $x^2+y^2-z=0$ e limitado pelo plano $z = x+b$



O plano xz é plano de simetria — logo: $y_G = 0$

$$\begin{cases} V x_G = \int x\, dV \\ V \cdot z_G = \int z\, dV \end{cases}$$

$$V = \int dV = \int dx \int dy \int_{x^2+y^2}^{x+b} dz.$$

Variação de z:

$x^2+y^2 \leq z \leq x+b$

Variação de y: $y = \pm\sqrt{x - x^2 + b}$

de x: $x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4b}}{2}$

$$V = 2\int_{\frac{1-\sqrt{1+4b}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{1+4b}}{2}} dx \int_0^{\sqrt{x-x^2+b}} dy \underbrace{\int_{x^2+y^2}^{x+b} dz}_{I_1}$$

$$I_1 = \int_{x^2+y^2}^{x+5} dz = x+5-x^2-y^2$$

$$I_2 = \int_0^{\sqrt{\cdots}} (x+5-x^2-y^2)\,dy =$$

$$= \left[xy + by - x^2y - \frac{y^3}{3}\right]_0^{\sqrt{\cdots}} =$$

$$= \sqrt{x-x^2+5}\left(x+b-x^2 - \frac{x-x^2+5}{3}\right) =$$

$$= \sqrt{x-x^2+5}\left[\frac{2}{3}(x-x^2+5)\right] =$$

$$= \frac{2}{3}(x-x^2+5)^{3/2}$$

finalmente:

$$V = \frac{2}{3}\int_{\frac{1-\sqrt{1+46}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{1+46}}{2}} (x-x^2+6)^{3/2}\,dx =$$

$$= \cancel{4/3\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 5x\right]_{\frac{1-\sqrt{1+46}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{1+45}}{2}}}$$

$$V = 2\int_0^{\frac{1+\sqrt{1+45}}{2}} \left[2/3\,(x-x^2+5)^{3/2}\right] dx +$$

$$+ 2\int_0^{\frac{1-\sqrt{1+46}}{2}} 2/3\,(x-x^2+6)^{3/2}\,dx.$$

Temos a integrar uma abeliana.

Fazer !!

7.8.46.

Continuação grad.

Demonstrar:

$$\vec{a}\times \text{grad}\,(b\times\text{grad.}\,l.\,r) = \frac{\vec{a}\times\vec{b}}{r^2} - \frac{2}{r^2}(\vec{a}\times\vec{r})(\vec{b}\times\vec{r})$$

$$a\times\text{grad}\left(\vec{b}\times\frac{1}{r}\,\text{grad.}\,r\right) = \vec{a}\times\text{grad}\left(\vec{b}\times\frac{\vec{r}}{r\,r}\right) =$$

Sendo $\left\{\text{grad.}\,r = \left(\lim_{h\to 0}\frac{r+h-r}{h}\right)\frac{\vec{r}}{r} = \frac{\vec{r}}{r}\right\}$

$$= \vec{a}\times\text{grad}\,\frac{\vec{b}\times\vec{r}}{r^2} \quad (\text{pela prop. } 3) \rightarrow$$

$$= \vec{a}\times\left[\frac{1}{r^2}\,\text{grad.}(\vec{b}\times\vec{r}) + (\vec{b}\times\vec{r})\,\text{grad.}\,\frac{1}{r^2}\right] =$$

$$= \vec{a}\times\left[\frac{1}{r^2}\vec{b} - (\vec{b}\times\vec{r})\frac{2}{r^3}\cdot\frac{\vec{r}}{r}\right] \quad \text{Cqd}.$$

pela propr. 5: $df = \text{grad.}\,f\times dP$.

$d(\vec{b}\times\vec{r}) = \text{grad.}(\vec{b}\times\vec{r})\times dP \rightarrow$

$\vec{b}\times \cancel{d\vec{r}} = \text{grad}\,(\vec{b}\times\vec{r})\times \cancel{dP}$ logo

$\vec{b} = \text{grad}\,(\vec{b}\times\vec{r})$

Calcular $\text{grad.}(\vec{c}\times\vec{r})$ sendo $|\vec{c}|^2 = 1$ $d\vec{c} = 0$ e $\vec{r} = P-O$.

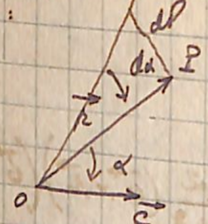
aplicando a 5ª propr.: no caso –

$df = \text{grad.}\,f\times dP$

$\vec{c}\times \cancel{d\vec{r}} = \text{grad}\,(\vec{c}\times\vec{r})\times \cancel{dP}$

$\text{grad}\,(\vec{c}\times\vec{r}) = \vec{c}.$

Façamos o cálculo desenvolvendo o produto escalar:



$$\text{grad.}(\vec{c} \times \vec{r}) = \text{grad.}\, |\vec{c}|.|\vec{r}| \cos\alpha$$

$$= \text{grad.}\, r.\cos\alpha =$$

$$= \cos\alpha \,\text{grad}\, r + r\,\text{grad.} \cos\alpha$$

$$= \frac{\vec{r}}{r}\cos\alpha - r.\,\text{sen}\,\alpha.\,\text{grad}\,\alpha$$

Sendo $\text{grad}\,\alpha = \lambda i \vec{r}/r$ devemos determ. α

$$\left.\begin{array}{l} d\alpha = \text{grad}\,\alpha \times dP \\ dP = r\,d\alpha.\, i\frac{\vec{r}}{r} \end{array}\right\} d\alpha = \lambda i \frac{\vec{r}}{r} \times r\,d\alpha.\, i\frac{\vec{r}}{r} =$$

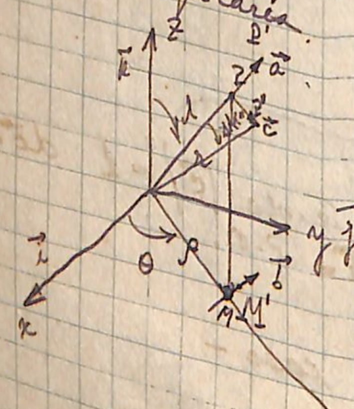
$$= \lambda.\, r\,d\alpha \quad \rightarrow \quad \lambda r = 1 \rightarrow \lambda = 1/r$$

finalte: $\text{grad}\,\alpha = \frac{i\vec{r}}{r^2}$ então

$$\text{grad}\,(\vec{c} \times \vec{r}) = \frac{\vec{r}}{r}\cos\alpha - \lambda\,\text{sen}\,\alpha\,\frac{i\vec{r}}{r^2} =$$

$$= \frac{\vec{r}}{r}(\cos\alpha - i\,\text{sen}\,\alpha) = \frac{\vec{r}}{r}e^{-i\varphi} = \vec{c}$$

Achar o grad. de uma função de ponto em coordenadas polares.



$$\text{grad.}\, f(P) =$$

$$= \text{grad}\, f(r, \theta, \lambda) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial r}\text{grad.}\, r + \frac{\partial f}{\partial \theta}\text{grad.}\,\theta +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial \lambda}\text{grad.}\,\lambda.$$

$$\text{grad.}\, r = \left(\lim_{h \to 0} \frac{r+h-r}{h}\right)\vec{a} = \vec{a}$$

sendo $\vec{a}$ a normal na direção do raio r.

$$\text{grad}\,\theta = \left(\frac{d\theta}{dM}.\vec{b}\right)\vec{b} = \left(\lim_{h' \to 0}\frac{\Delta\theta}{h'}\right)\vec{b} =$$

$$= \left(\lim_{h' \to 0}\frac{\text{actg}\,\frac{h'}{\rho}}{h'}\right).\vec{b} = \frac{1}{\rho}\underbrace{\left(\lim_{h' \to 0}\frac{\text{actg}\,\frac{h'}{\rho}}{\frac{h'}{\rho}}\right)}_{=1}\vec{b} =$$

$= \frac{\vec{b}}{\rho}$ sendo $\vec{b}$ a normal na direção MM', perpendicular à direção OM.

$$\frac{\vec{b}}{\rho} = \frac{\vec{b}}{r\,\text{sen}\,\lambda}$$

Por outro lado: $d\theta = \text{grad}\,\theta \times dM = \text{grad}\,\theta \times \rho\, d\theta\, \vec{b}$

$$\text{grad}\,\theta \times \rho = 1$$

Da mesma maneira $-\,\text{grad}\,\lambda = \left(\frac{d\lambda}{dP}.\vec{c}\right)\vec{c} =$

$$= \lim_{h'' \to 0}\frac{\Delta\lambda}{h''}\vec{c} = \lim \frac{\Delta\lambda}{r\,\text{tg}\,\Delta\lambda} = \frac{\vec{c}}{r}$$

Portanto: $\text{grad.}\, f(r, \theta, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{a} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\vec{b}}{r\,\text{sen}\,\lambda} + \frac{\partial f}{\partial \lambda}\frac{\vec{c}}{r}.$

Podemos calcular o grad. em coord. cilíndricas de uma fç. ff.

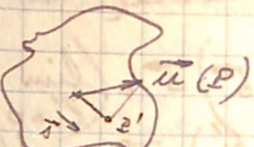
Calcular: $\text{grad}\,|\vec{c} \wedge \vec{r}|^2$ e

$$\text{grad}\,\tfrac{1}{2}\, l(\vec{c} \times \vec{r})^2$$

Observar a propr. da função de função!

12.8.946.

Rotacional.



A cada pt.º se associa um ponto. Ao conj. de vetores se diz campo vetorial.
O primeiro problema é a derivada do vetor.
Passamos de P a P' com um acrescimo h na direção $\vec{s}$.

$$\lim_{\substack{h\to 0\\(P'\to P)}} \frac{\vec{u}(P+h\vec{s})-\vec{u}(P)}{h} = \frac{d\vec{u}}{dP}\cdot\vec{s} = (\text{segundo } \vec{s})$$

$$= \sigma.\vec{s}$$

Surge o campo dos vetores derivados
A operação σ é linear.
Propried. de $d\vec{u}/dP$:

1) $m\frac{d\vec{u}}{dP}\vec{s} = \frac{d\vec{u}}{dP}\, m.\vec{s}$.

2) $\frac{d\vec{u}}{dP}\vec{s}_1 + \frac{d\vec{u}}{dP}\vec{s}_2 = \frac{d\vec{u}}{dP}(\vec{s}_1+\vec{s}_2)$ } linear.

Suponhamos dois campos de vetores $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$, podemos criar o campo $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$ e mais o campo de vetores

$$\frac{d(\vec{u}_1\wedge\vec{u}_2)}{dP}\vec{s} =$$

$$= \vec{u}_1 \wedge \frac{d\vec{u}_2}{dP}\vec{s} + \frac{d\vec{u}_1}{dP}\vec{s} \wedge \vec{u}_2.$$

Esta propr. vale para o prod. escalar.

Rot. e div.

Seja $\vec{u}(P)$. Rot. $\vec{u}$ é um novo campo, definido da seguinte maneira:

rot. $\vec{u} = 2V\frac{d\vec{u}}{dP}$ (é o dobro do vetor de $\sigma = \frac{d\vec{u}}{dP}$

div. $\vec{u} = I_1\left(\frac{d\vec{u}}{dP}\right)$

sabemos $f.\ s^3 - I_1 s^2 + I_2 s - I_3 = 0$

Propr.

1) rot $(\vec{u}+\vec{v})$ = rot $\vec{u}$ + rot $\vec{v}$ div $(\vec{u}+\vec{v})$ = div $\vec{u}$ + div $\vec{v}$

2) rot $m\vec{u} = m$ rot $\vec{u}$ div. $m\vec{u} = m$ div $\vec{u}$.
Se m for fç. de ponto não vale esta propr. e:

3) rot $f\vec{u} = f.$ rot $\vec{u}$ + grad $f \wedge \vec{u}$

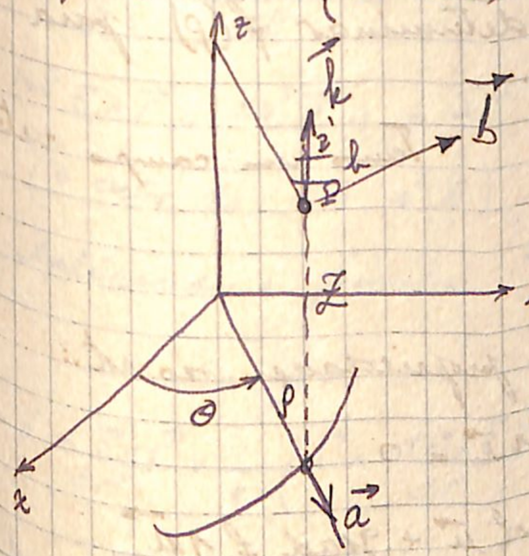
div. $f\vec{u} = f$ div $\vec{u}$ + grad $f \times \vec{u}$.

4) Função de função

rot $\vec{u}[\varphi(P)]$ = grad. $\varphi \wedge \frac{d\vec{u}}{d\varphi}$

div. $\vec{u}[\varphi(P)]$ = grad $\varphi \times \frac{d\vec{u}}{d\varphi}$

Exerc.: $\vec{v}$ = rot $e^z\rho\cos\theta\,\vec{b}$ sendo coord. cil. z, ρ, θ e $\vec{b}$ o vetor de normal à superfície $\theta = c^{te}$ (unitário); determinar rot $\vec{v}$.



Aplicamos a propr. de rot $f\vec{u}$.

Então:

$\vec{u} = e^z\rho\cos\theta$ rot $\vec{b}$ + grad. $e^z\rho\cos\theta \wedge \vec{b}$.

① grad $e^z\rho\cos\theta = e^z\rho\cos\theta$ grad z + $e^z\cos\theta$ grad ρ − $e^z\rho$ sen θ grad θ.

grad $z = \left(\frac{dz}{dP}\vec{k}\right)\vec{k} = \vec{k}$

grad $\rho = \left(\frac{d\rho}{dP}\vec{a}\right)\vec{a} = \vec{a}$

grad $\theta = \left(\frac{d\theta}{dP}\vec{b}\right)\vec{b} = \left(\lim_{h\to 0}\frac{\Delta\theta}{h}\right)\vec{b} =$

$= \left(\lim_{l\to 0} \frac{\Delta\theta}{\rho \operatorname{tg} \Delta\theta}\right)\vec{b} = \frac{\vec{b}}{\rho}$

$\vec{b} = \rho\,\text{grad}.\,\theta$, logo: $\text{rot}\,\vec{b} = \text{rot}\,\rho.\,\text{grad}\,\theta = (\text{rot}$

$= \rho\,\text{rot.grad}\,\theta + \text{grad}\,\rho \wedge \text{grad}\,\theta = \vec{a}\wedge\frac{\vec{b}}{\rho} =$

$= \frac{\vec{k}}{\rho}$

$\vec{v} = 2e^z \cos\theta\,\vec{k} - e^z\rho\cos\theta.\,\vec{a}.$

14.8.46. falta 1 aula Dr. Bocos (11

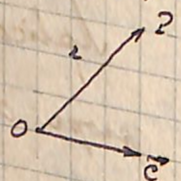
Seja o vetor $\vec{v} = f(\rho)\,\vec{c}\wedge\vec{r}$ com:

$|\vec{c}| = 1$ $\quad d\vec{c} = 0$

$\vec{r} = P - O$

$\rho = |\vec{c}\wedge\vec{r}|$;

determinar $f(\rho)$ para que rot $(\vec{v}) = 0$.



Temos um campo vetorial.

Apliquemos as propriedades do rot.:

rot $\vec{v}$ = rot $f(\rho).\,\vec{c}\wedge\vec{r} = 0$

Ora, rot $f\vec{u} = f$ rot $\vec{u}$ + grad $f\wedge\vec{u}$,

então rot $\vec{v} = f(\rho)\,\underbrace{\text{rot}\,\vec{c}\wedge\vec{r}}_{②} + \underbrace{\text{grad}\,f(\rho)}_{①}\wedge(\vec{c}\wedge$

grad $f(\rho) = \frac{df}{d\rho}$. grad ρ

grad ρ = grad $|\vec{c}\wedge\vec{r}|$

df = grad $f \times dP$

$d|\vec{c}\wedge\vec{r}|$ = grad $|\vec{c}\wedge\vec{r}|\times dP$

$d|\vec{v}| = \frac{\vec{v}\times d\vec{v}}{|\vec{v}|}$ então

$\frac{(\vec{c}\wedge\vec{r})\times\vec{c}\wedge dP}{\rho}$ = grad $|\vec{c}\wedge\vec{r}|\times dP$

grad $|\vec{c}\wedge\vec{r}| = \frac{(\vec{c}\wedge\vec{r})\wedge\vec{c}}{\rho}$

② rot. $\vec{c}\wedge\vec{r} = 2V\,\frac{d\,\vec{c}\wedge\vec{r}}{dP}$

no caso $\sigma = \frac{d\,\vec{c}\wedge\vec{r}}{dP}$

$\sigma\vec{s} \Rightarrow \frac{d\,\vec{c}\wedge\vec{r}}{dP}\vec{s} = \vec{c}\wedge\frac{dR}{dP}\vec{s} + \underbrace{\frac{d\vec{c}}{dP}\vec{s}\wedge\vec{r}}_{=0\ (d\vec{c}=0)}$

$= \vec{c}\wedge\vec{s}$ (p.ª q.q. $\vec{s}$)

logo $\frac{d\,\vec{c}\wedge\vec{r}}{dP} \equiv \vec{c}\wedge$ donde:

rot $\vec{c}\wedge\vec{r} = 2V\,\vec{c}\wedge = 2\vec{c}$

(o vetor de $\vec{c}\wedge$ é $\vec{c}$).

Aplicando a formula: $V\sigma = \frac{1}{2}\left(\vec{i}\wedge\sigma\vec{i} + \vec{j}\wedge\sigma\vec{j} + \vec{k}\wedge\sigma\vec{k}\right)$

$V\,\frac{d\,\vec{c}\wedge\vec{r}}{dP} = \frac{1}{2}\left(\vec{i}\wedge\frac{d\,\vec{c}\wedge\vec{r}}{dP}\vec{i} + \dots\right)$

$= \frac{1}{2}\left[\vec{i}\wedge\left(\vec{c}\wedge\frac{d\vec{r}}{dP}\vec{i}\right) + \dots\right] =$

$= \frac{1}{2}\left[\vec{i}\wedge(\vec{c}\wedge\vec{i}) + \dots\right] = \frac{1}{2}\left[(\vec{i}\times\vec{i})\vec{c} - (\vec{i}\times\vec{c})\vec{i} + \dots\right]$

$= \frac{1}{2}(3\vec{c} - \vec{c}) = \vec{c}$ — qed.