9/8/45

Estudar o conjunto $\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+m}}$

As restrições são - $R = 2$ e $r = 0$

$R \{ n = m = 0$ $r \{ n$ e $m \to \infty$

O ponto zero é ponto de acumulação.

Determinar os conjuntos derivados.

$C' \to$ conjunto de pontos de acumulação (conj. d... vado). É necessário determina... os pontos de acumulação do co... to.

$\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+m}} = \frac{1}{2^n}\left(1 + \frac{1}{2^m}\right)$ fixemos n, o conjunto passa a ser uma sucessão ... então o único ponto de acumulação ... o infinito. (p.ᵗᵒ $m \to \infty$)

Teremos -

$\lim_{m \to \infty} \frac{1}{2^n}\left(1 + \frac{1}{2^m}\right) = \frac{1}{2^n}$ Isto vale p... cada n

Além desse ponto de acumulação há ... ponto zero. Teremos

$C' \to 1/2^n, 0$ e por fim C'' se...

O conjunto não é nem denso nem ... cerrado, logo não é também perfei...

Estudar o conjunto -

$\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+m+p}} + \frac{1}{2^{n+m+p}}$

$\begin{cases} R = 3 & \{ n = m = p = 0 \\ r = 0 & \{ n, m \text{ e } p \to \infty \end{cases}$

O máximo é 3 mas 0 não é mínimo, sendo apesar disso pt. de acum. Temos -

$\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+m}}\left(1 + \frac{1}{2^p}\right)$ fixando-se m e n e fazendo-se $p \to \infty$, obtem-se

$\lim_{p \to \infty}\left[\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+m}}\left(1 + \frac{1}{2^p}\right)\right] = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+m}}$

então ∞ é pt. de ac. das n.ᵒˢ f. definem a sucessão.

Logo $C' \to 1/2^n + 1/2^{n+m}, 1/2^n, 0$

$C'' \to 1/2^n, 0$ (caso ant.ᵒʳ)

$C''' \to 0$

21/8/45.

Aos vetores $A_1 - O = \vec{i} + \vec{j}$
$A_2 - O = \vec{i} + \vec{k}$ juntar $A_3 - O = \vec{u}$ de man. q. o vol. $OA_1A_2A_3$ seja igual ao vol. $OB_1B_2B_3$ sendo $B_i - O$ o termo recíproco de $A_i - O$ e ainda $A_3 - O$ paralelo a $B_3 - O$.

$V = \frac{1}{6}(A_1 - O) \wedge (A_2 - O) \times (A_3 - O) = \frac{1}{6}(\vec{i} + \vec{j}) \wedge (\vec{i} + \vec{k}) \times \vec{u}$ -

$= \frac{1}{6}(\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}) \times \vec{x}$

$V' = \frac{1}{6}(B_1-O)\wedge(B_2-O)\times(B_3-O) = \frac{1}{6}\frac{1}{(\vec{i}-\vec{j}-\vec{k})\times\vec{x}}$

$(\vec{i}-\vec{j}-\vec{k})\times\vec{x} = \frac{1}{(\vec{i}-\vec{j}-\vec{k})\times\vec{x}}$

$[(\vec{i}-\vec{j}-\vec{k})\times\vec{x}]^2 = 1$

$\vec{x} = \rho(A_1-O)\wedge(A_2-O) = \rho(\vec{i}-\vec{j}-\vec{k})$

$[(\vec{i}-\vec{j}-\vec{k})\times\rho(\vec{i}-\vec{j}-\vec{k})]^2 = 1$

$9\rho^2 = 1 \quad \rho = \pm\frac{1}{3}$

Então —

$\vec{x} = \pm\frac{1}{3}(\vec{i}-\vec{j}-\vec{k})$

Determinar $\vec{x}$ e $\vec{y}$ de modo que

$$\begin{cases} \vec{x}\wedge\vec{a} = \vec{y}\wedge\vec{a} & (1) \\ \vec{x}\wedge\vec{y} = \vec{a}\wedge\vec{y} & (2) \\ \vec{x}\wedge\vec{b} = \vec{y} & (3) \end{cases}$$

De (1) $\rightarrow$ $\vec{x} = \vec{y} + \lambda\vec{a}$, subst. na 2ª

$(y+\lambda\vec{a})\wedge\vec{y} = \vec{a}\wedge\vec{y} \rightarrow \lambda = 1$

sendo $\vec{a}\wedge\vec{y} = 1$

logo $\vec{x} = \vec{y} + \vec{a}$, que, em (3) $\rightarrow$

$\vec{x}\wedge\vec{b} = \vec{x}-\vec{a} \longrightarrow b\times\vec{x}-\vec{a} = 0$ ou

$\vec{x}\times\vec{b} = \vec{a}\times\vec{b}$

$\vec{x} = b\wedge(\vec{x}-a) + \rho\vec{b}$

$\vec{x}\times\vec{b} = \rho|\vec{b}|^2 = \vec{a}\times\vec{b}$

$\rho = \vec{a}\times\vec{b}$

daí $\rightarrow$ $\vec{x} = \vec{b}\wedge(\vec{x}-\vec{a}) + (\vec{a}\times\vec{b})\vec{b}$

$\vec{x} = \vec{b}\wedge\vec{x} - \vec{b}\wedge\vec{a} + (\vec{a}\times\vec{b}).\vec{b}$

$\vec{x} = \vec{a}-\vec{x} - \vec{b}\wedge\vec{a} + (\vec{a}\times\vec{b})\vec{b}$

$2\vec{x} = \vec{a} - \vec{b}\wedge\vec{a} + (\vec{a}\times\vec{b}).\vec{b}$

$\vec{x} = \frac{\vec{a} - \vec{b}\wedge\vec{a} + (\vec{a}\times\vec{b})\vec{b}}{2}$

finalmente —

$\vec{y} = \vec{x} - \vec{a}$

$\vec{y} = \frac{\vec{a} - \vec{b}\wedge\vec{a} + (\vec{a}\times\vec{b})\vec{b}}{2} - \vec{a}$

Estudo do conjunto: —

$\frac{1}{n} + \frac{1}{2^n}$

$n, m \rightarrow \infty \rightarrow r = 0$ (pt. ac.)

$R = 3/2$ é maximo

$1/n$ são pt.s ac. $C' - 1/n, 0$

Conj. dos n.º entre 0.1 e 0.4 c/ os alg. 2 e 3

23/8/45

Resolver - $(\vec{u} \wedge \vec{a}) \times (\vec{u} \wedge \vec{b}) = c$

$(\vec{u} \wedge \vec{a}) \wedge \vec{u} \times \vec{b} = \vec{c}$ Suponhamos $|\vec{b}| = 1$

$(\vec{u} \wedge \vec{a}) \wedge \vec{u} = \underbrace{c \cdot \vec{b} + \vec{k} \wedge \vec{b}}_{\vec{d}}$

$(\vec{u} \wedge \vec{a}) \times \vec{d} = 0$

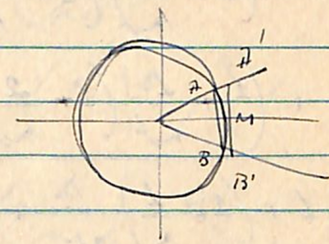
$\vec{u} \times \vec{d} = 0$

1°) $\vec{a} \wedge \vec{d} \neq 0 \rightarrow \vec{u} = \lambda \vec{d} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{d})$

Caímos numa equação já resolvida.

Estudo de LIMITES

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$



$\overline{AB} < \widehat{AMB} < \overline{A'B'}$

$2 \operatorname{sen} x < 2x < 2 \operatorname{tg} x$

$\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$

$\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}$

$1 > \frac{\operatorname{sen} x}{x} > \cos x$ passando a

limite $\rightarrow 1 \geq \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \geq 1$

logo $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

1) $n \rightarrow$ número natural

Desenvolvendo pelo binomio de Newton —

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\dots+\binom{n}{p}\frac{1}{n^p}+\dots+\binom{n}{n}$$

$$\binom{n}{p}\frac{1}{n^p} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}{n^p}\cdot\frac{1}{p!} =$$

$$= \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\dots\left(1-\frac{p-1}{n}\right)\frac{1}{p!}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!}+\dots+$$

$$+\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\dots\left(1+\frac{p-1}{n}\right)\frac{1}{p!}+\dots$$

$$+\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\dots\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{n!} \quad (1)$$

$$= 1+1+\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!}+\dots+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{p-1}{n}\right)$$

$$+\dots+\frac{1}{n^n}$$

$$2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{p!}+\dots+\frac{1}{n!}$$

$$2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^{p-1}}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$= 2+\frac{\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1} = 2-\left(\frac{1}{2^{n-1}}+1\right) < 3$$

$$2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$$

A função é pois restrita.

Aplicando o teoremas da convergencia das funções monotonicas.

A expressão (1) mostra que a função crescente.

Ela sendo crescente e restrita, admite limite finito, e que se designa por e.

$e = 2,718281828459\dots$

Demonstremos agora para

2) $m \to$ nº negativo supondo —

$m = -(n+1)$

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-(n+1)} =$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$\lim_{m\to-\infty} y = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) = e$$

c.q.d.

28/8/45.

$$\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u \text{ para } u \text{ real.}$$

Sejam n e $n+1$ os dois numeros inteiros entre os quais u esta compreendido.

$n \leq u < n+1$, invertendo —

$\frac{1}{n} \geq u > 1/n+1$ ou

$1+\frac{1}{n} \geq u+1 > \frac{1}{n+1}+1$ ou

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} \quad (1)$$

Então

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$= e \cdot 1 = e$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e$$

Em (1) →

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e \quad \text{cqd}$$

Calcular

$$\lim_{x\to\infty}\left(\log_a\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right) = \log_a e \quad \text{Que correto}$$

$$\lim_{t\to 0}\log_a(1+t)^{1/t} = \log_a e \quad \text{sendo } \frac{1}{x} = t$$

Virá $\lim_{t\to 0}\frac{\log_a(1+t)}{t} = \log_a e$

$$\boxed{\lim_{t\to 0}\frac{\log_a(1+t)}{t} = \log_a e}$$

$\log_a(1+t) = z \longrightarrow a^z = 1+t \;\therefore$

$t = a^z - 1$

Se $t\to 0$ será $z \to 0$

$\lim_{t\to 0} z = 0$

$$\lim_{z\to 0}\frac{z}{a^z-1} = \log_a e$$

Invertendo

$$\boxed{\lim_{z\to 0}\frac{a^z-1}{z} = La}$$ Importante

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{x}-1\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(x^{\frac{1}{n}}-1\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{x^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} =$$

$$\lim_{\frac{1}{n}\to 0}\frac{x^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = Lx$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^{n} = y \quad \text{suponhamos } b=0$$

$$y = \lim_{n\to\infty} b\left(\frac{\sqrt[n]{\frac{a}{b}}+1}{2}\right)^{n} \quad \text{sabendo que } x = e^{Lx}$$

$$y = b\lim_{n\to\infty} e^{L\left(\frac{\sqrt[n]{\frac{a}{b}}+1}{2}\right)^{n}} = b\lim_{x\to 0} e^{L\left(\frac{c^{x}+1}{2}\right)^{1/x}}$$

$\frac{a}{b} = c \qquad n = \frac{1}{x}$

$$y = b \lim_{x\to 0} e^{\frac{L\left(\frac{c^x+1}{2}\right)}{x}} \rightarrow \frac{c^x+1}{2} = t+1$$

$$c^x + 1 = 2t+2$$

$$c^x = 2t+1$$

$$x = \log_c (2t+1)$$

$$y = b \lim_{t\to 0} e^{\frac{L(t+1)}{\log_c(2t+1)}} = b \lim_{t\to 0} e^{\frac{L(t+1)}{t}\cdot\frac{2t}{\log_c(2t+1)}}$$

$$y = b\, e^{\frac{Lc}{2}} = b e^{L\sqrt{c}} = b\sqrt{c} = b\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{ab}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\,\mathrm{sen}^2\, x/2}{x^2} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}^2\, x/2}{2\left(\frac{x^2}{2}\right)} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(a + \mathrm{sen}\,\frac{1}{x}\right) = \infty \quad \text{Para } |a| > 1$$

Não existe para $|a| \leq 1$

Ver aula anterior.

$\lim_{\to\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = A \rightarrow \lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{f(x)} = A$ sendo $f(x) \neq 0$ e x finito.

Passando ao emprego do log. →

$\log f(x) = \varphi(x)$ →

$$\lim_{x\to\infty} \log \frac{f(x+1)}{f(x)} = \log A$$

$$\lim_{\to\infty} \left[\log f(x+1) - f(x)\right] = \log A$$

$$\lim_{\to\infty} \left[\varphi(x+1) - \varphi(x)\right] = \log A$$

De acordo c/ o teorema da aula passada —

$$\lim_{\to\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \log A \text{ , então}$$

$$\lim_{\to\infty} \frac{\log f(x)}{x} = \log A$$

$$\lim_{\to\infty} \log \sqrt[x]{f(x)} = \log A$$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{f(x)} = A$$

Calc.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(n+1)}\, n^n}{(n+1)^{n+\cancel{1}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$$

Calcular

$$\lim_{n\to\infty} n\, e^{-nx^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^{nx^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{e^{nx^2}}{n}}$$

Achemos $\lim_{n\to\infty}\left[e^{(n+1)x^2} - e^{nx^2}\right] =$, e aplicamos o teorema da aula anterior.

$$= \lim_{n\to\infty} e^{nx^2}\left(e^{x^2}-1\right) = \infty$$

O lim. dado será o inverso de

logo, $\lim_{n\to\infty} n \cdot e^{-nx^2} = 0$.

Calcular $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+nx)}{n}$

De acordo com o teorema ant. vemos calcular $\lim_{n\to\infty} [f(n+1) - f(n)$

Então $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+nx)}{n} =$

$$\lim_{n\to\infty} \left\{\log[1+(n+1)x] - \log(1+nx)\right\} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \log \frac{1+(n-1)x}{1+nx} = \lim_{n\to\infty} \log \frac{\frac{1}{n}+\left(1+\frac{1}{n}\right)x}{\frac{1}{n}+x} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \log 1 = 0$$

Calcular

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{e^{tg\, x}-1}{e^{tg\, x}+1} = \lim y$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} tg\, x = \pm\infty \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} tg\, x = -\infty$$

Então $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} y = -1$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} y = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \frac{1-\frac{1}{e^{tg}}}{1+\frac{1}{e^{tg\, x}}} = 1$$

Derivadas e diferenciais

Calcular as derivadas no ponto zero

$f(x) = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ sendo $f(0)=0$

Desde que $e^{\frac{1}{x}}$ não é definida no ponto zero, apliquemos a definição de derivada

$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x+h}{1+e^{\frac{1}{x+h}}} - \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}}{h}$ será

$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0+h}{1+e^{\frac{1}{h}}}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{h}}}$

$f'(0+) = 0 \qquad f'(0-) = 1$

Calcular as derivadas no ponto zero, sendo $f(0)=0$, de

$f(x) = x.\text{arc. tg}\frac{1}{x}$

$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)\text{arc. tg}\frac{1}{x+h} - x\,\text{arc. tg}\frac{1}{x}}{h}$

sendo $x=0$

$f'(0) = \frac{h\,\text{arc. tg}\frac{1}{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \text{arc. tg}\frac{1}{h}$

Consideremos o arc. tg. definido no intervalo $0, \pi$ do qual se exclue o ponto $\pi/2$.

$$\left.\begin{aligned} f'(0+) &= \frac{\pi}{2} \\ f'(0-) &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}\right\} f'(0) = \frac{\pi}{2}$$

Suponhamos agora arc. tg. definido no intervalo $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

$$\text{será} \left\{\begin{aligned} f'(0+) &= \frac{3\pi}{2} \\ f'(0-) &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}\right.$$

Diferenciais e Integrais.

Consideremos $y = f(x)$, definida e contínua num certo intervalo fechado.

Por definição diferencial da função é $dy = f'(x).dx$ e tambem por definição $\int f(x).dx = F(x)$ se $d.F(x) = f(x).dx$

A $F(x)$ podemos acrescentar uma constante arbitraria, pois não altera a diferencial —

$\int f(x).dx = F'(x) + c^{te}$

$F(x) + c^{te}$ chama-se integral indefinida função $F(x)$

Ex: $\int u^2\, dx = \frac{u^3}{3} + c^{te}$

pois $d\frac{u^3}{3} = u^2 . dx$

6/9/45

Exercícios de Integrais

$\int \frac{u . dx}{(1+u^2)^2}$.

Os exercícios dados estão nos tipos que $\int u^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1}$ por exemplo.

$\int \frac{u . du}{(1+u^2)^2} = \int (1+u^2)^{-2} . u . du =$

$= \int \frac{(1+u^2)^{-2} . 2u . du}{2} = \frac{1}{2} \int (1+u^2)^{-2} . d(1+u^2)$

$= \frac{-1}{2} \frac{(1+u)}{1} = \frac{(1+u)}{2}$

$\int \frac{(\text{arc. tg } u)^3}{(1+u^2)} dx$

Derivemos antes

$y = \text{arc. tg } u \rightarrow u = \text{tg } y$

$\frac{dx}{dy} = \sec^2 y \longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y} =$

$= \frac{1}{1+\text{tg}^2 y} = \frac{1}{1+u^2} \longrightarrow$ será ainda

$dy = \frac{dx}{1+u^2}$

$\int \frac{(\text{arc. tg } u)^3}{1+u^2} du = \int (\text{arc. tg } u)^3 . d(\text{arc. tg } u) =$

$= \frac{(\text{arc. tg } u)^4}{4}$

$\int \frac{\cos u . du}{\text{sen } u} = \int \frac{d(\text{sen } u)}{\text{sen } u} = l . (\text{sen } u)$

Pois $\boxed{d\, l . u = \frac{du}{u}}$

$\int \text{sen}^2 u . du$

Sabem ser $\begin{cases} 2\,\text{sen}^2 u = 1 - \cos 2u \\ 2\cos^2 u = 1 + \cos 2u \end{cases}$

$\int \text{sen}^2 u . du = \int \frac{1-\cos 2u}{2} . du =$

$= \int \frac{1}{2} dx - \int \frac{\cos 2u}{2} du = \frac{1}{2} u - \int \frac{\cos 2u}{2} . \frac{2du}{2}$

$= \frac{1}{2} u - \frac{\text{sen } 2u}{4}$

$\int u . e^{u^2} du$

Façamos $u^2 = z \longrightarrow$

$2x \cdot dx = dz \rightarrow x \cdot dx = \frac{dz}{2}$

Substituindo

$\int x \cdot e^{x^2} \cdot dx = \int e^z \cdot \frac{dz}{2} = \frac{1}{2}\int e^z \cdot dz = \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2} e^{x^2}$

$\int \frac{x \cdot dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} x \cdot dx = \frac{1}{2}\int (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} d($

$= \frac{1}{2} \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+x^2}$

11/9/45

Exercícios a resolver –

1) $\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ (sendo $n = 1$ resulta

2) $\int \frac{dx}{x} = l \cdot x$

3) $\int e^x \cdot dx = e^x$

4) $\int \cos x \cdot dx = \operatorname{sen} x$

5) $\int \operatorname{sen} x \cdot dx = -\cos x$

6) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$ $\quad d(\operatorname{tg} x) = \sec^2 x \cdot dx$

7) $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{cotg} x$

8) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc} \cdot \operatorname{tg} x$

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc} \cdot \operatorname{sen} x$

Decora-las

Resolver –

$\int \frac{dx}{1-x^2}$

Desenvolvamos a fração

$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{A}{(1+x)} + \frac{B}{(1-x)}$

$1 = A(1-x) + B(1+x)$

Façamos $x = 1$ e $x = -1$

$1 = 2B \quad B = \frac{1}{2} \quad A = \frac{1}{2}$

Resulta

$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1/2}{1+x} + \frac{1/2}{1-x}$ Integremos –

$\int \frac{dx}{2+2x} + \int \frac{dx}{2-2x} = \frac{1}{2}\left(\int \frac{dx}{1+x} + \int \frac{dx}{x-1}\right) =$

$= \frac{1}{2} l \cdot (x+1) - \frac{1}{2} l \cdot (x-1) = l\sqrt{x+1} - l\sqrt{x-1} =$

$= l\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

$$\int \sqrt{(1+2x)^n}\, dx = \int (1+2x)^{n/2} = \frac{1}{2}\int 2(1+2x)^{n/2}$$

$$= \frac{1}{2}\int (1+2x)^{\frac{n}{2}}\, d(1+2x) = \frac{1}{2}\,\frac{(1+2x)^{\frac{n+2}{2}}}{\frac{n+2}{2}} = \sqrt{(1+2x)^{n+2}}$$

$$\int tg\, x\, dx = \int \frac{sen\, x}{\cos x}\, dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = \ldots$$

$$\int \frac{x^2\, dx}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}$$

Decomponhamos a fração. Pelo dispositivo de Ruffini —

1	1	-6	11	-6
	1	-5	6	0

temos —

$(x-1)(x^2 - 5x + 6)$

Resolvamos $x^2 - 5x + 6$. $x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2}$ $\begin{cases} x_1 \\ x_2 \end{cases}$

$$\frac{x^2}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} = \frac{x^2}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \ldots$$

$x^2 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2)$

Atribuindo valôres a x, obtemos A ... C. $(x = 1, 2, 3)$

$$R \rightarrow I = l \frac{\sqrt{(x-1)(x-3)^9}}{(x-2)^4}$$

12/9/45

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(a^x - 1)'}{x'} = La$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{tg\, x - x}{x - sen\, x} = \frac{0}{0}$$ Derivando numerador e denominador —

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x / \cos^2 x}{1 - \cos x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{(1 - \cos x)\cos^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + \cos x}{\cos^2 x} =$$

$= 2.$

$$\lim (tg\, x)^{tg\, 2x} = \frac{1}{e}$$

Pelas regras de l'Hoppital.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim \frac{e^x}{n(x)^{n-1}} = \ldots$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{n!} = \infty$$

13/9/45. (Eg. 97 Lavallé)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - tg\,x}{x^3} = \frac{0}{0} \quad \text{Derivando} -$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sec^2 x}{3x^2} = -\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{tg^2 x}{x^2} = \frac{-1}{3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(a+x)^x - a^x}{x^2} = \lim \frac{1}{2x}\left[x(a+x)^{x-1} + (a+x)^x \, L(a+x) - a^x \cdot La\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left[(a+x)^{x-1} + x(x-1)(a+x)^{x-2} + x(a+x)^{x-1} l.(a+x) + x(a+x)^{x-1} l.(a+x) + (a+x)^x l^2(a+x) + (a+x)^{x-1} - a^x l^2 a\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[a^{-1} + l^2 a + a^{-1} - l^2 a\right] = \frac{1}{a}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - cotg^2 x\right) = \infty - \infty$$

$$\underset{\infty\ \cdot\ \infty}{f - F} = f.F\left(\frac{1}{F} - \frac{1}{f}\right) = \infty . 0$$

$$\frac{tg^2 x - x^2}{x^2 tg^2 x} = \frac{x^2}{tg^2 x}\cdot\frac{tg^2 x - x^2}{x^4}$$

Calculemos o limite da relação das derivadas considerando apenas o segundo fator

$$\lim_{x\to 0}\frac{2tg\,x.\sec^2 x - 2x}{4x^3} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{tg\,x.\sec^2 x -}{x^3}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sec x - x.\cos^3 x}{(x\cos x)^3} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x + 3x\sec x.\cos^2 x - \cos^2 x}{3(x\cos x)^2(-x\sec x + \cos x)} =$$

$$\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x + 3x.\sec x.\cos x}{3x^2\cos x(-x\sec x + \cos x)} =$$

$$= \frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x}{x^2}\cdot\frac{1 + \frac{3x\cos x}{\sec x}}{\cos x(-x\sec x + \cos x)} =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot 4 = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x(x+1)} - \frac{l.(1+x)}{x^2}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{x - (x+1)\,l.(1+x)}{x^2(x+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1 - l(1+x) - 1}{x(3x+2)} = -\frac{1}{2}$$ Que é o lim.

Sabendo que $\lim_{x\to} \frac{l(1+x)}{x} = 1$

Resolver em casa —

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{cotg\,x}{x}\right) = \frac{1}{3}$$

18/9/45

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sec(\sec x) - \sec^2 x}{x^6}$$

Seja $f(x) = x.\sec(\sec x) - \sec^2 x =$
$= f_1(x) - f_2(x)$

$F'(x) = x^6$

Procuremos a 1ª derivada de $f(x)$ que não se anula em zero.

De inicio calculemos as derivadas de $y = \operatorname{sen} t$ sendo $t = \operatorname{sen} x$

$y' = \cos t . \cos x$

$y'' = -\operatorname{sen} t . \cos^2 x - \cos t . \operatorname{sen} x = -y \cos^2 x - c$

$y''' = -y' \cos^2 x + y \operatorname{sen} 2x - \underbrace{\operatorname{sen} t}_{y} . \cos x . \operatorname{sen} x - \cos$

$= -y'(1+\cos^2 x) + \frac{3}{2} y \operatorname{sen} 2x$

$y^{IV} = -y''(1+\cos^2 x) - y' \operatorname{sen} 2x + \frac{3}{2} y' \operatorname{sen} 2x + 3$

$= -y''(1+\cos^2 x) + \frac{5}{2} y' \operatorname{sen} 2x + 3y \cos 2x$

$y^{V} = -y'''(1+\cos^2 x) + y'' \operatorname{sen} 2x + \frac{5}{2} y'' \operatorname{sen} 2x$

$+ 5y' \cos 2x + 3y' \cos 2x - 6y \operatorname{sen} 2x$

$= -y'''(1+\cos^2 x) + \frac{7}{2} y'' \operatorname{sen} 2x + 8y' \cos 2x$

$- 6y \operatorname{sen} 2x.$

Ora, $y(0) = 0$

$y'(0) = 1$

$y''(0) = 0$

$y'''(0) = -2$

$y^{IV}(0) = 0$

$y^{V}(0) = 12$

agora derivemos $f_1(x) \rightarrow$

$f_1(x) = x . y$

$f_1'(x) = y + x y'$

$f_1''(x) = 2y' + x . y''$

$f_1'''(x) = 3y'' + x y'''$

$f_1^{IV}(x) = 4y''' + x y^{IV}$

$f_1^{V}(x) = 5y^{IV} + x y^{V}$

$f_1^{VI}(x) = 6y^{V} + x y^{VI}$

$f_1(0) = 0$

$f_1'(0) = 0$

$f_1''(0) = 2$

$f_1'''(0) = 0$

$f_1^{IV}(0) = -8$

$f_1^{V}(0) = 0$

$f_1^{VI}(0) = 72$

Derivadas de $f_2(x)$ agora —

$f_2(x) = \operatorname{sen}^2 x$

$f_2'(x) = \operatorname{sen} 2x$

$f_2''(x) = 2 \cos 2x$

$f_2'''(x) = -4 \operatorname{sen} 2x$

$f_2^{IV}(x) = -8 \cos 2x$

$f_2^{V}(x) = 16 \operatorname{sen}^2 x$

$f_2^{VI}(x) = 32 \cos 2x$

$f_2(0) = 0$

$f_2'(0) = 0$

$f_2''(0) = 2$

$f_2'''(0) = 0$

$f_2^{IV}(0) = -8$

$f_2^{V}(0) = 0$

$f_2^{VI}(0) = 32$

A primeira derivada de $f(x)$ que não se anula no ponto zero é a de 6ª ordem

e $f^{VI}(0) = 40$

Por outro lado, a primeira derivada de x^6 que não se anula no ponto zero é a de sexta ordem, que é igual a 6!

Pela 1ª regra de l'Hospital –

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f^{VI}(x)}{F^{VI}(0)} = \frac{40}{6\times5\times4\times3\times2}$$

$$= \frac{1}{18}$$

Calcular

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{tg\, x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$y = \left(\frac{tg\, x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} \quad \log y = \frac{1}{x^2}\cdot l\,\frac{tg\, x}{x} =$$

$$= \frac{l\,\frac{tg\, x}{x}}{x^2}$$ no limite, $\frac{0}{0}$

Aplique-se a primeira regra –

$$\lim_{x\to 0} l.y = \lim \frac{\frac{x}{tg\, x}\cdot\left\{\frac{x\sec^2 x - tg\, x}{x^2}\right.}{2x} =$$

Sendo um produto e $\lim \frac{x}{tg\, x} = 1$, po[demos] desprezar este fator.

~~Desprezam~~

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x - \operatorname{sen} x\cos x}{2x^3\cos^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{x - \operatorname{sen} x\cos x}{2x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)}{6x^2} = \lim\frac{2\operatorname{sen}^2 x}{6x^2}.$$ Então –

$$\lim_{x\to 0} y = e^{\frac{1}{3}}$$

$$\lim\left[\cos(ax)\right]^{\frac{1}{x^2}} \qquad \boxed{\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{a^2}{2}}}$$

20/9/45

$$\lim_{x\to 0}(\cos ax)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to 0}(-\log_e x)^x = \lim y$$

$$\lim_{x\to 0} l.y = \lim_{x\to 0} x\; l.(-\log_e x) = \lim_{x\to 0}\frac{l(-\log_e x)}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim\frac{\frac{-\frac{1}{x}}{\log x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim\left(-\frac{x^2}{x\log_e x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{x}{\log_e x}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to 0} y = 1$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} tg\, 2x\cdot cotg\left(\frac{\pi}{4}+x\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{tg\, 2x}{tg\left(\frac{\pi}{4}+x\right)} =$$

$$\lim\frac{2\sec^2 2x}{\sec^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)} = \lim\frac{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{\cos^2 2x} =$$

$$= \cancel{\frac{-4\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{-4\cos 2x\,\operatorname{sen} 2x}}$$

$$= 2\left[\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{\cos 2x}\right]^2 = 2\left[\lim\frac{-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{-2\operatorname{sen} 2x}\right.$$

$= \frac{1}{2}$

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (tg\, x)^{sen\, 2x} = \lim y \quad (\infty^0)$

$l.\, y = sen\, 2x .\, l.\, tg\, x = \frac{l.\, tg\, x}{\frac{1}{sen\, 2x}} =$

$= \frac{\frac{1}{tg\, x} .\, sec^2 x}{-\frac{2 \cos 2x}{sen^2 2x}} = \frac{\cancel{\cos x}}{2\, sen\, x} \frac{1}{\cos^2 x .\, \cos}$

$= \frac{-2 \cos x .\, sen\, x}{\cos 2x} = -tg\, 2x \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} -tg\, 2$

$\lim y = 1$

20/9/45

Integrais por substituição.

$\int \frac{dx}{\sqrt{2ax + x^2}} = \quad \cancel{x = a - t}$

$= \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - 2ax + x^2 - a^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - (a - x)^2}} =$

$\int \frac{dx}{a \sqrt{1 - \left(\frac{x - a}{a}\right)^2}} \quad \left(d. \frac{x - a}{a} = \frac{dx}{a} = dt \right.$

$\quad \text{Se } \frac{x - a}{a} = t$

$= \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = arc.\, sen\, t = arc.\, sen \left(\frac{x - a}{a} \right)$

$\int \frac{dx}{x \sqrt{2ax - x^2}}$ Façamos $2ax - a^2 = t^2$

$x = \frac{t^2 + a^2}{2a}$

$dx = \frac{d.\, t^2 + a^2}{2a} = t \frac{dt}{a}$

$\int \frac{t\, dt .\, 2a}{a (t^2 + a^2)\, t} = \int \frac{2\, dt}{t^2 + a^2} = 2 \int \frac{dt}{t^2 + a^2} =$

$2 \int \frac{dt}{a^2 \left[\left(\frac{t}{a} \right)^2 + 1 \right]} = \frac{2}{a} \int \frac{dt}{a \left[\left(\frac{t}{a} \right)^2 + 1 \right]} =$

$= \frac{2}{a} arctg \left(\frac{t}{a} \right) = \frac{2}{a} arc.\, tg \frac{\sqrt{2ax - a^2}}{a}$

$\int \frac{x\, dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)(b^2 - x^2)}}$

$x^2 - a^2 = t$

$x^2 = t + a^2$

$2x .\, dx = dt$ fica então -

$\int \frac{dt}{2 \sqrt{t (b^2 - a^2 - t^2)}}$

$t (b^2 - a^2 - t^2) = t (b^2 - a^2) - t^2 =$

$= \frac{1}{4} (b^2 - a^2) - \frac{1}{4} (b^2 - a^2) + t (b^2 - a^2) - t^2 =$

$$= \frac{1}{4}(b^2-a^2)^2 - \left[t - \frac{b^2-a^2}{2}\right]^2$$

fazendo $\frac{b^2-a^2}{2} = c$

fica $= c^2 - z^2$ $\left\{ \begin{array}{l} c = \frac{b^2-a^2}{2} \\ z = t - c \end{array} \right.$

$$I = \int \frac{dz}{2\sqrt{c^2-z^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{c\sqrt{1-\left(\frac{z}{c}\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\text{arc. sen}\,\frac{z}{c} = \ldots$$

25/9/45

Metodos de integração

1) Substituição.

2) Por partes

$$\int u.dv = u.v - \int v.du$$

3) Integração das funções racionais

$$\int \frac{p(x)}{P(x)}\,dx = \ldots$$

4) Integração das funções irracionais

a) abelianas $\int R(x, y).\,dx$ sendo $P(x, y) = 0$

b) binomias $\int x^n (a + bx^m)^p.\,dx$

sendo n, m e p racionais.

5) Int. das funções transcendentes

Não há metodo especial, a não ser o caso $\int R(\text{sen}\,x, \cos x)\,dx$

$2\,\text{sen}^2\,x/2 = 1 - \cos x$ $\quad 2\cos^2 x/2 = 1 + \cos x$

$tg\frac{x}{2} = t$

$$t^2 = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

$$\frac{t^2}{1+t^2} = \frac{1-\cos x}{2} \quad \boxed{\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}} \boxed{\text{sen}\,x = \frac{2t}{1+t^2}}$$

$x/2 = \text{arc}\,tg\,t$ $\quad dx = 2dt/1+t^2$ $\quad \int R(t)\,dt.$

Apresentando-se apenas potencias pares de sen x e cos x, é mais simples fazer a substituição de $tg\,x = t$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}.\,dx$$

$\frac{x}{a} = \text{sen}\,t \quad \therefore \quad x = a\,\text{sen}\,t$

$dx = a\cos t.\,dt$

$$\int a^2\cos^2 t.\,dt = a^2\int \cos^2 t.\,dt$$

$$2\cos^2 t = 1 + \cos 2t \rightarrow \cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$$

$$a^2\int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{a^2}{2}\int dt + \frac{a^2}{2}\int \cos 2t.\,dt =$$

$= \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{4} \operatorname{sen} 2t =$

$= \frac{a^2}{2}(t + \operatorname{sen} t . \cos t) = \frac{a^2}{2}\left(\operatorname{arc\,sen} \frac{u}{a} + \frac{u}{a}\sqrt{1-\right.$

$\int u e^u du = \int u . de^u = u e^u - \int e^u du = u e^u$

generalizando —

$I_n = \int u^n e^u du = \int u^n de^u = \int u^n e^u - \int e^u d$

$= u^n e^u - n \int u^{n-1} e^u du$

$I_n = u^n e^u - n I_{n-1}$

$I_{n-1} = u^{n-1} e^u - (n-1) I_{n-2}$

$I_{n-2} = u^{n-2} e^u - (n-2) I_{n-3} \; ...$

$I_1 = u e^u - I_0$

$I_0 = \int e^u du = e^u$

$I_n = (u^n + ~~\dots~~) e^u$

Metodo de Hermite.

$\int \frac{p(u) du}{(u-a)(u-b)^2(u-c)^3(u^2+a^2)(u^2+b^2)^3} =$ Só havendo raizes multiplas.

$\frac{p_1(u)}{(u-b)(u-c)^2(u^2+b^2)^2} + \int \frac{p_2(u) . du}{(u-a)(u-b)(u-c)(u^2+a^2)(u^2+b^2)}$

$p_1(u)$ de grau inferior a 7

$p_2(u)$ " " " a 7 (no caso coincidem)

Os coeficientes são determinados derivando-se ambos os membros e aplicando identidade dos polinomios.

Aplicação —

$\int \frac{u\, du}{(u-1)^3(u^2+1)} = \frac{Au+B}{(u-1)^2} + \int \frac{Cu^2+Du+E}{(u-1)(u^2+1)} du$

Derivando —

$\frac{u}{(u-1)^3(u^2+1)} = \frac{A(u-1)^2 - 2(Au+B)(u-1)}{(u-1)^{4}} +$

$+ \frac{Cu^2+Du+E}{(u-1)(u^2+1)}$

$= A(u-1)(u^2+1) - 2(Au+B)(u^2+1) + (Cu^2+Du+E)(u-1)^2$

Temos $u^4: \; C = 0$

$u^3: \; A - 2A + D = 0 \rightarrow A = D$

$u^2: \; -A - 2B - 2D + E = 0$

$3A + 2B - E = 0$

$u: \; A - 2A + D - 2E = 1 \quad E = -\frac{1}{2}$

$u^0: \; -A - 2B + E = 0$

$A + 2B = -\frac{1}{2}$

$\begin{cases} A = 0 \quad D = 0 \quad E = -\frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{4} \end{cases}$

$$= -\frac{1}{4(u-1)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{du}{(u-1)(u^2+1)}$$

$$\frac{1}{(u-1)(u^2+1)} = \frac{\alpha}{(u-1)} + \frac{\beta u+\gamma}{(u^2+1)}$$

$u=1 \to \alpha = \frac{1}{2}$ $\quad u=0 \to 1 = \cancel{\alpha} \cdot \gamma \to$

$u=-1 \to \beta = \gamma = -\frac{1}{2}$

Aplicações do metodo de Hermite.

3/10/45

$$\int \frac{(u^3+1)\,du}{(u-1)(u^2+2)^2} = \frac{Au+B}{u^2+2} + \int \frac{Cu^2+Du+E}{(u-1)(u^2+2)}\,du$$

$$\frac{(u^3+1)}{(u-1)(u^2+2)^2} = \frac{(u^2+2)A-(Au+B)\cdot 2u}{(u^2+2)^2} + \frac{Cu^2+Du+E}{(u-1)(u^2+2)}$$

$$u^3+1 = (u^2+2)A\cdot(u-1) - 2(Au+B)(u-1)u + (Cu^2+Du+E)(u^2+2)$$

Aplicando a identidade dos polinomios —

$u^4: \quad 0 = C$

$u^3: \quad 1 = A - 2A + D \to D - A = 1$

$u^2: \quad 0 = -A - 2B + 2A + E \to A - 2B + E = 0$

$A + E = 2B$

$u: \quad 0 = 2A + 2B + 2D \to A + B + D = 0$

$u^0: \quad 1 = -2A + 2E \to E - A = \frac{1}{2}$

donde —

$A = -\frac{5}{12} \quad B = -\frac{1}{6} \quad D = \frac{7}{12} \quad E = \frac{1}{12}$

Logo —

$$\int \cdots = \frac{-5/12\,u - 1/6}{u^2+2} + \int \frac{7/12\,u + 1/12}{(u-1)(u^2+2)}\,du$$

$$= -\frac{1}{12}\,\frac{5u+2}{u^2+2} + \frac{1}{12}\int \frac{7u+1}{(u-1)(u^2+2)}\,du$$

Calculemos agora —

$$\int \frac{7u+1}{(u-1)(u^2+2)}\,du$$

$$\frac{7x+1}{(x-1)(x^2+2)} = \frac{a}{(x-1)} + \frac{bx+c}{(x^2+2)}$$

$$7x+1 = a(x^2+2) + (bx+c)(x-1)$$

$x = 1 : \; 8 = 3a \rightarrow a = \frac{8}{3}$

$x = 0 : \; 1 = 2a - c \rightarrow c = \frac{13}{3}$

$x = -1 : \; -6 = 3a + 2b - 2c$

$$b = -\frac{8}{3}$$

A solução será

$$I = a\, l|x-1| + \frac{b}{2}\, l.|x^2+2| + \frac{c}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg}$$

9/10/45

Integrais abelianas relativas às conicas $\int \frac{x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$

$\int R(x,y)\,dx \qquad y^2 = ax^2 + bx + c$

1.) A conica corta o eixo dos x

Será $y = 0$ e então a condição será — $b^2 - 4ac$ positivo

A substituição $y = t(x - x_0)$ racionaliza a integral

2.) A conica corta o eixo dos y

Como condição deve ser c positivo ou nulo.

A substituição $y - y_0 = tx$ racionaliza a integral

3.) A conica é uma hiperbole — Quando $a > 0$

Determinação das assintotas — Consideremos coordenadas homogeneas

$x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$ teremos

$$x_2^2 = ax_1^2 + bx_1x_3 + cx_3^2$$

Para $x_3 = 0$ — $x_2^2 = ax_1^2$, i.é.,

$$x_2 = \pm\sqrt{ax_1^2} = \pm\sqrt{a}\,x_1$$

Voltando às coordenadas x, y,

$y = \pm\sqrt{a}\,x$, e temos as equações das assintotas.

A substituição $y = t \pm \sqrt{a}.x$, racionaliza a integral, sendo esta a equação de uma reta paralela à assintota.

Exercicio — $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{-2+x+x^2}} = I$

$I = \int \frac{dx}{x^2 y}$ sendo $y^2 = -2 + x + x^2$

Aplica-se aqui o primeiro ou o terceiro. Trabalhêmos com o terceiro

Entramos com $y = t \pm u$

$y^2 = t^2 + 2tu + u^2$

$-2t u + \cancel{u^2} = t^2 + 2tu + \cancel{u^2}$

$u - 2tu = t^2 + 2$

$u = \frac{t^2 + 2}{1 - 2t}$ $\qquad du = \frac{1 + 2t - 2t^2}{(1-2t)^2}$

$y = t + \frac{2+t^2}{1-2t} = \frac{2+t-t^2}{1-2t}$

$$I = \int \frac{(1+2t+2t^2)\,(1-2t)^2\,(1-2t)}{\cancel{(1-2t)^2}\,(2+t^2)^2\,(2+t+t^2)}\,dt$$

$$= 2\int \frac{1-2t}{(2+t^2)^2}\,dt = \frac{At+B}{2+t^2} + \int \frac{Ct+D}{2+t^2}$$

Fazer pelo primeiro metodo.

$t^2 (1+t)^{\frac{1}{2}}$

$(1+t) = z$

$t^2 = (z-1)^2$

$z^{\frac{1}{2}} (z-1)^2$

Integrais binomias.

$\int u^m (a + b u^n)^p\, du = I_b$

$b u^n = a t$ $\qquad u = \left(\frac{a}{b}\right)^{1/n} t^{1/n}$

$du = \frac{1}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^{1/n} t^{\frac{1}{n}-1}\, dt$

$u^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{m/n} t^{m/n}$

$$I_b = c\int t^{\frac{m+1}{n}-1} (1+t)^p\, dt$$

Devemos portanto considerar a integral $I = \int t^q (1+t)^p\, dt$ e temos então (três+1) casos –

1) p e q são inteiros – a integral é racional.

2) p é inteiro – aplica-se o binomio de Newton :– p positivo a integral é imediata;
p negativo – $q = \frac{r}{s}$ $\quad t^{1/s} = z$ e a integral se torna racional.

3) f inteiro — faz-se $1+t=z$
recai-se no caso anterior.

4) $p+f$ = inteiro

$$I=\int t^{f}(1+t)^{p}\,dt=$$

$$=\int t^{p+f}\left(\frac{1+t}{t}\right)^{p}dt$$

fazemos —

$\frac{1+t}{t}=z$ e recaimos no caso anterior em que um dos expoentes é inteiro.

A substituição fornece

$$I=-\int(z-1)^{-p-f-2}z^{p}\,dz.$$

Aplicação —

$$I=\int x^{\frac{1}{2}}\left(5-2x^{-2}\right)^{-\frac{1}{4}}dx$$

$$2x^{-2}=5t$$

$$x=\left(\frac{5}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}t^{-\frac{1}{2}}$$

$$dx=-\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}t^{-\frac{3}{2}}dt$$

$$x^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{5}{2}\right)^{-\frac{1}{4}}t^{-\frac{1}{4}}$$

63

$$I=-5^{-\frac{1}{4}}\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}\right)^{-\frac{3}{4}}\int t^{-\frac{7}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{4}}dt$$

$$I_1=\int t^{-\frac{7}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{4}}dt=$$

$$=\int t^{-\frac{7}{4}}(1-t)^{\frac{7}{4}}(1-t)^{-2}dt$$

$$=\int\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\frac{7}{4}}(1-t)^{-2}dt$$

$$\frac{1-t}{t}=z\qquad\frac{1}{t}=z+1$$

$$t=(z+1)^{-1}$$

$$I_1=\int t^{-2}\left(\frac{1-t}{t}\right)^{-\frac{1}{4}}dt.$$

Não se faz o binômio fica com expoente inteiro.

Façamos $\frac{1-t}{t}=z\qquad\frac{1}{t}=z+1$

$$t=(z+1)^{-1}$$

$dt=-(z+1)^{-2}dz$ portanto

$$I_1=-\int(z+1)^{2}(z+1)^{-2}z^{-\frac{1}{4}}dz=$$

$$=-\int z^{-\frac{1}{4}}dz=\frac{z^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}}=-\frac{4}{3}\frac{(1-t)^{3/4}}{t^{3/4}}=$$

$$\boxed{=-\frac{4}{3}\frac{\left(1-\frac{2}{5}x^{-2}\right)^{3/4}}{\left(\frac{2}{5}\right)^{3/4}x^{-3/2}}}$$

Integrar —

$$\int u^{3/2}(1+u)^{-\frac{1}{2}}du = \int u\left(\frac{1+u}{u}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1+u}{u} = z$$

$$u = (z-1)^{-1}$$

$$du = -(z-1)^{-2}$$

$$I = -\int (z-1)^{-1} z^{-\frac{1}{2}} (z-1)^{-2} dz =$$

$$= \int (z-1)^{-3} z^{-\frac{1}{2}} dz$$

É necessária nova mudança de variável —

$$z^{\frac{1}{2}} = t \qquad z = t^2 \qquad dz = 2t\,dt$$

$$I = -\int \frac{2\,dt}{(t^2-1)^3}$$

$$I = \int \frac{du}{(2u^2-5)\sqrt{4u^2+u+7}} = \int \frac{du}{(2u^2-5)\,y}$$

$4u^2+u+7=0$ é uma hipérbole, que corta o eixo dos y em dois pontos $\pm\sqrt{7}$

Façamos as duas transformações $y = tu+\sqrt{7}$ e $y = t+2u$ respectivamente

$$y^2 = t^2u^2+7+2\sqrt{7}\cdot tu =$$

$$= 4u^2+u+7$$

$$t^2u + 2\sqrt{7}\,t = 4u+1$$

$$(t^2-4)\,u = 1-2t\sqrt{7}$$

$$u = \frac{1-2t\sqrt{7}}{t^2+4} \qquad u^2 = \frac{1-4\sqrt{7}\,t+28t^2}{t^4-8t^2+16}$$

$$2u^2-5 = \frac{-5t^4+96t^2-8\sqrt{7}\,t-78}{(t^2-4)^2}$$

$$du = \frac{-2\sqrt{7}(t^2-4)-2t(1-2t\sqrt{7})}{(t^2-4)^2}\cdot dt =$$

$$= \frac{2t^2\sqrt{7}-2t+8\sqrt{7}}{(t^2-4)^2}\,dt$$

$$y = \frac{t-2t^2\sqrt{7}}{t^2-4}+\sqrt{7} = \frac{-t^2\sqrt{7}+t-4\sqrt{7}}{(t^2-4)}$$

$$I = \int \frac{\cancel{(2t^2\sqrt{7}-2t+8\sqrt{7})}^{-2}\,\cancel{(t^2-4)^2}\,(t^2-4)}{\cancel{(t^2-4)^2}\,(-5t^4+96t^2-8\sqrt{7}\,t-78)\,\cancel{(-t^2\sqrt{7}+t-4\sqrt{7})}}$$

$$= 2\int \frac{(t^2-4)\,dt}{5t^4-96t^2+8\sqrt{7}\,t+78}$$

Δ

$$\Delta = 5(t^2-4)^2 - 2(2t\sqrt{7}-1)^2 =$$

$$= \left[\sqrt{5}\,t^2 - 4\sqrt{5} + 2\sqrt{2}\sqrt{7}\,t - \sqrt{2}\right]\left[\sqrt{5}\,t^2 - 4\sqrt{5} - 2\sqrt{2}\sqrt{7}\,t + \sqrt{2}\right]$$

Isto porque a equação do quarto grau encontrada pôde ser decomposta, de maneira a permitir a determinação de suas raizes.

Façamos a segunda substituição isto é, $y = t + 2u$

$$y^2 = t^2 + 4tu + \cancel{4u^2} = \cancel{4u^2} + u + 7$$

$$(4t-1)u = 7 - t^2$$

$$u = \frac{7-t^2}{4t-1}$$

$$du = \frac{-2t(4t-1) - 4(7-t^2)}{(4t-1)^2}\, dt =$$

$$= \frac{-4t^2+2t-28}{(4t-1)^2}\, dt$$

$$y = t + \frac{14-2t^2}{4t-1} = \frac{2t^2-t+14}{4t-1}$$

$$I = \int \frac{(-4t^2+2t-28)\,(4t-1)}{(2u^2-5)(4t-1)^2(2t^2-t+14)}\, dt = -2\int \frac{dt}{(2u^2-5)(4t-1)}$$

$$2u^2-5 = (u\sqrt{2}-\sqrt{5})(u\sqrt{2}+\sqrt{5}) =$$

$$= \left(\frac{7\sqrt{2}-\sqrt{2}\,t^2}{4t-1} - \sqrt{5}\right)\left(\frac{7\sqrt{2}-\sqrt{2}\,t^2}{4t-1} + \sqrt{5}\right)$$

$$(2u^2-5)(4t-1) = \frac{1}{4t-1}\left(7\sqrt{2}-\sqrt{2}\,t^2-\sqrt{5}\,t+\sqrt{5}\right)\left(7\sqrt{2}-\sqrt{2}\,t^2+\sqrt{5}\,t-\sqrt{5}\right)$$

Substituindo na integral — resolve-se o problema.

Resolver — $I = \int \frac{du}{(u^2-1)\sqrt{4u^2+u+7}}$

Ficará —

$$I = \int \frac{(4t-1)\,dt}{(8-t-t^2)(6+t-t^2)}$$

Obteremos quatro logaritmos.

17/10/45

$$\int (\text{arc. sen } x)^2 \, dx = I$$

arc. sen $x = t$

$x = \text{sen } t$

$dx = \cos t \, dt.$

$$I = \int t^2 \cdot \cos t . dt = \int t^2 \, d(\text{sen } t) = t^2 \text{sen } t -$$

$$- \int \text{sen } t . 2t . dt = t^2 \text{sen } t + 2 \int t . d\cos t =$$

$$= t^2 \text{sen } t + 2t \cos t - 2 \int \cos t . dt =$$

$$= t^2 \text{sen } t + 2t \cos t - 2 \text{sen } t.$$

Voltando à antiga incognita —

$$(t^2 - 2) \text{sen } t + 2t \cos t = (\text{arc}^2 \text{sen } x - 2) x +$$

$$+ 2 \sqrt{1 - x^2} \text{ arc. sen } x.$$

Resolver $\displaystyle\int \frac{2 - \text{sen } x}{2 + \cos x} dx =$

$$= \int \frac{2 dx}{2 + \cos x} - \int \frac{\text{sen } x \, dx}{2 + \cos x} = l(2 + \cos x) +$$

$$+ \int \frac{2 dx}{2 + \cos x}$$

$$2 \int \frac{dx}{2 + \cos x} = 2 I_1$$

Faça-se $\text{tg} \frac{x}{2} = t$ — $\cos x = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$

$$\text{sen } x = 2t / 1 + t^2$$

$$u = 2 \operatorname{arc\,tg} t \qquad du = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$I_1 = \int \frac{2dt}{\left(2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)(1+t^2)} =$$

$$= \int \frac{2dt}{2+2t^2-t^2+1} = \int \frac{2dt}{3+t^2} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc.tg} \frac{t}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc.tg} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{u}{2}\right)$$

$$I = l(2+\cos u) + \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arc.tg} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{u}{2}\right)$$

—— // ——

$$I = \int u^2 (5+u^2)^{\frac{1}{2}} du$$

$$\frac{u^2}{5} = t \qquad u = 5^{1/2} t^{1/2}$$

$$du = \frac{1}{2} 5^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} dt$$

$$I = 5 . 5^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} 5^{\frac{1}{2}} \int t (1+t)^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} dt =$$

$$= \frac{1}{2} 5^{2} I_1$$

$$I_1 = \int t^{\frac{1}{2}} (1+t)^{\frac{1}{2}} dt = \int t \left(\frac{1+t}{t}\right)^{\frac{1}{2}} dt$$

$$\frac{1+t}{t} = z \qquad dz = -\frac{dt}{t^2}$$

$$t = \frac{1}{z-1} \qquad dt = \frac{-dz}{(z-1)^2} = -dz (z-1)^{-2}$$

$$I_1 = -\int (z-1)^{-1} z^{\frac{1}{2}} dz (z-1)^{-2} =$$

$$= -\int (z-1)^{-3} z^{\frac{1}{2}} dz$$

$$z^{\frac{1}{2}} = y \qquad z = y^2 \qquad dz = 2y\,dy$$

$$I_1 = -2 \int \frac{y^2 dy}{(y^2-1)^3}$$ Resolver por Hermite.

18/10/45

Pesquisar

$$\int_0^{\pi/2} \frac{du}{\operatorname{sen}^4 u + \cos^4 u}$$ Faz-se $\operatorname{tg} u = t$

$$du = \frac{dt}{1+t^2}$$

$$u = 0 \; \{ t = 0 \qquad u = \frac{\pi}{2} \; \{ t = \infty$$

$$\operatorname{sen}^2 u = \left(\frac{t^2}{1+t^2}\right) \qquad \cos^2 u = \left(\frac{1}{1+t^2}\right)$$

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2 \left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^2 \left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2} = \int_0^{\infty} \frac{(1+t^2)dt}{1+t^4}$$

Decompondo —

$$\frac{1+t^2}{1+t^4} \qquad 1+t^4 = (1+t^2)^2 - 2t^2 = (1+\sqrt{2}t+t^2)(1-\sqrt{2}t+t^2)$$

$$\frac{1+t^2}{1+t^4} = \frac{At+B}{1+\sqrt{2}t+t^2} + \frac{Ct+D}{1-\sqrt{2}t+t^2}$$

$$t^3: \quad 0 = A + C$$

$$t^2: \quad 1 = B + D + \sqrt{2}(C - A)$$

$$t: \quad 0 = A + C + \sqrt{2}(D - B)$$

$t^0: \quad 1 = B + D$

$$\left.\begin{array}{l} D - B = 0 \\ D + B = 1 \end{array}\right\} B = D = \frac{1}{2}$$

$$\left\{\begin{array}{l} C - A = 0 \\ A + C = 0 \end{array}\right\} A = C = 0$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{1+\sqrt{2}t+t^2} + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{-dt}{1+\sqrt{2}t+t^2} =$$

$$= \frac{1}{2}(I_1 - I_2)$$

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{dt}{1+\sqrt{2}t+t^2} = \int_0^\infty \frac{dt}{\left(t+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}} =$$

$$= \sqrt{2}\left[\text{arc.tg}\,\sqrt{2}\left(t+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]_0^\infty =$$

$$= \sqrt{2}\,\frac{\pi}{2} - \sqrt{2}\,\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\,\frac{\pi}{4}$$

$$I_2 = -\sqrt{2}\,\frac{3\pi}{4}$$

$$I = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{4} + \frac{3\sqrt{2}\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

Pesquisar —

$$I = \int \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\, l.u.\, du = \quad \text{(Integral partes)}$$

$$= -\int l.u.\, d\sqrt{1-u^2} = l.u\sqrt{1-u^2} + \underbrace{\int \sqrt{1-u^2}}_{I_1} \ldots$$

$$I_2 = \int \frac{\sqrt{1-u^2}}{u}\, du$$ (Resolver como ab... para exercício)

Façamos

$u = \text{sen}\,t \rightarrow$

$\sqrt{1-u^2} = \cos \rightarrow du = \cos t.\, dt$

$$I_1 = \int \frac{\cos^2 t}{\text{sen}\,t}\, dt = \int \frac{1-\text{sen}^2 t}{\text{sen}\,t}\, dt =$$

$$= \underbrace{\int \frac{dt}{\text{sen}\,t}}_{I_2} - \int \text{sen}\,t.\, dt =$$

$$\text{tg}\,\frac{t}{2} = u \qquad \text{sen}\,t = \frac{2u}{1+u^2} \qquad dt = \frac{2\,du}{1+u^2}$$

$$I_2 = \int \frac{du}{u} = l.u = l.\,\text{arc.tg}\,\frac{t}{2}$$

$$I_1 = l.\,\text{tg}\,\frac{t}{2} + \cos t =$$

$$l\left|\text{tg}\,\frac{1}{2}\,\text{arc.sen}\,u\right| + \cos.\,\text{arc.sen}\,u.$$

$$I = -l\,u\sqrt{1-u^2} + \sqrt{1-u^2} + l\left|\text{tg}\,\frac{1}{2}\,\text{arc.sen}\,u\right|$$

— " —

24/10/45.

Questões da turma π.

$$\lim_{u \to n} (n^2 - u^2)^{-2}\left(\frac{n^2+u^2}{nu} - 2\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{2}\,\text{sen}\,\frac{u\pi}{2}\right)$$

(n = impar)

Aplicando l'Hospital —

$$\lim_{u \to n} \frac{1}{4u(u^2-n^2)}\left(\frac{1}{n}\,\frac{2u^2 - n^2 . u^2}{u^2} - \pi\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{2}\cos\frac{u\pi}{2}\right)$$

Novamente aplicando — a —

$$\lim_{x \to \pi} \frac{1}{4(3x^2-\pi^2)} \left(\frac{1}{\pi} \frac{2x^3 - 2x(x^2-\pi^2)}{x^4} + \frac{\pi^2}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2} \operatorname{se}\right.$$

$$= \frac{1}{8\pi^2}\left(\frac{2}{\pi^2}+\frac{\pi^2}{2}\right) = \frac{\pi^4 + 4}{16\pi^4}$$

———— " ————

Provar que a função

$f(x) = x^2 \operatorname{sen} 1/x \qquad f(0) = 0$

admite derivada descontínua no ponto zero.

1) Calculo da derivada no ponto zero.

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{h^2 \operatorname{sen} \frac{1}{h}}{h} = h \operatorname{sen}$$

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} h . \operatorname{sen} \frac{1}{h}$$

$\operatorname{sen} \frac{1}{h}$ é uma função que não possue limite no ponto zero,

No entretanto o limite do produto é zero.

Logo, $f'(0) = 0$

Provemos que a função derivada é descontínua no ponto zero.

$\lim_{x \to 0} f'(x) \neq f'(0)$

Ora, $f'(x) = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ a qual não admite limite para $x \to 0$.

c.q.d.

———— .... ————

$$I = \int (\operatorname{arctg} x) \frac{3x^2 + 2x + 1}{(x^3 + x^2 + x + 1)^2} dx$$

Calcular sua parte racional.

Façamos $x^3 + x^2 + x + 1 = u$

$$I = \int \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{du}{u^2} = \int \operatorname{arc.} \operatorname{tg} x \, d\left(\frac{-1}{u}\right)$$

Aplicando-se a integração por partes

$$I = -\frac{1}{u} \operatorname{arc.} \operatorname{tg} x + \int \underbrace{\frac{1}{u} . \frac{dx}{1+x^2}}_{I_1}$$

$$u = x^2(x+1) + (x+1) = (x^2+1)(x+1)$$

$$I_1 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2(x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \int \frac{Cx^2+Dx+E}{(x^2+1)(x+1)} dx$$

Derivando —

$$\frac{1}{(x^2+1)^2(x+1)} = \frac{A(x^2+1) - 2x(Ax+B)}{(x^2+1)^2} + \frac{Cx^2+Dx+E}{(x^2+1)(x+1)}$$

$$1 = A(x^2+1)(x+1) - 2x(Ax+B)(x+1) + (Cx^2+Dx+E)(x^2+1)$$

$$x = i \to 1 = -2(i-1)(Ai+B) =$$
$$= +2[(A+B) + i(A-B)]$$

$A+B=\frac{1}{2}$ $A-B=0$ $A=B=\frac{1}{4}$

A parte racional será

$\frac{1}{4}\frac{x+1}{x^2+1}$

Turma D.

$\lim_{x\to 0} \frac{l(1+x+x^2)+l(1+x+x^2)}{\operatorname{sen} x-\cos x}$

Provar que a função
$\begin{cases} f(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{x} \\ f(0)=1 \end{cases}$ admite derivada

$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{\frac{\operatorname{sen} h}{h}-1}{h}$

$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h-h}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{2h}=$

$=\lim_{h\to 0}\frac{-\operatorname{sen} h}{2}=0$

$f'(0)=0$

Provemos $f'(x)=f'(0)$

$f'(x)=\frac{\cos x . x-\operatorname{sen} x}{x^2}$

$\lim_{x\to 0} f'(x)=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{-x\operatorname{sen} x+\cancel{\cos x}-\cancel{\cos x}}{\cancel{2x}}=$

$=0=f'(0)$ c.q.d.

25/10/45

Pesquisar

$\int\frac{dx}{(x^6-1)}$ Ora –

$\frac{2}{x^6-1}=\frac{1}{x^3-1}-\frac{1}{x^3+1}$

Façamos agora a decomposição –

$\frac{1}{x^3-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+D}{x^2+x+1}$

$1=A(x^2+x+1)+(Bx+D)(x-1)$

$x^2: \quad 0=A+B \qquad A=-B$
$x: \quad 0=A-B+D \qquad D=2B$
$x^0: \quad 1=A-D \qquad D=A-1$

$2B=A-1 \quad B=\frac{A-1}{2}$

$2A=1-A \quad A=\frac{1}{3} \quad B=-\frac{1}{3} \quad D=\frac{2}{3}$

$I_1=\int\frac{dx}{x^3-1}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{3}\int\frac{x+2}{x^2+x+1}dx=$

$$= \frac{1}{3} l.(x-1) + \frac{1}{6}\int \frac{2x+1+3}{x^2+x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3} l(x-1) + \frac{1}{6} l(x^2+x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1/2)}$$

$$= \frac{1}{3} l(x-1) + \frac{1}{6} l(x^2+x+1) - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$2I = I_1 - I_2$, porem

$$I_2 = \frac{1}{6} l \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc.tg} \frac{1-2x}{\sqrt{3}}$$

então

$$2I = \frac{1}{6} l \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc.tg} \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

$$- \frac{1}{6} l \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc.tg} \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x +\right.$$

$$= \frac{1}{6} l \frac{(x-1)^2 (x^2-x+1)}{(x+1)^2 (x^2+x+1)} - \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\operatorname{arc.tg}\right.$$

$$\left. - \operatorname{arc.tg} \frac{1-2x}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\int \frac{dx}{x^6+1}$$

$$x^6+1 = \cancel{(x^2+1)(x^4)} = (x^2)^3 + 1 =$$

$$(x^2+1)(x^4-x^2+1) = (x^2+1)\left[(x^2+1)^2 - 3x^2\right] =$$

$$(x^2+1)(x^2+\sqrt{3}x+1)(x^2-\sqrt{3}x+1)$$

Resolver em casa...

— XX —

$$I = \int \frac{e^x+1}{(e^x-1)}\,dx$$

$e^x = y$
$x = l.y$
$dx = \frac{dy}{y}$

$$I = \int \frac{y+1}{y-1}\cdot\frac{dy}{y} = \int \frac{y+1}{y^2-y}\,dy = \int \frac{dy}{y-1} + \int \frac{dy}{(y-1)y} =$$

$$\frac{1}{(y-1)y} = \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}$$

$$I = l.|y-1| + l|y-1| - l|y| =$$

$$= 2l|y-1| - ly =$$

$$= 2l|e^x-1| - x$$

Vejamos outro caminho —

$$I = \int \frac{e^x - 1 + 2}{e^x - 1}\,dx = x + 2\int \frac{dx}{e^x - 1} =$$

$$= x + 2\int \frac{e^{-x}\,dx}{1 - e^{-x}} = x + 2\,l\,|\,e^{x}-1|$$

5/11/45.

Calcular a diferencial total

$f(x,y) = x^3 + 3y^2 + x + 1$ e mostrar que difere do acréscimo por um infinitésimo de ordem superior à primeira.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy =$$

$$= (2x+1)\,dx + 6y\,dy$$

O acréscimo:

$$\Delta f = f(x+\Delta x,\, y+\Delta y) - f(x,y) =$$

$$= (x+\Delta x)^2 + 3(y+\Delta y)^2 + (x+\Delta x) + 1$$

$$- x^2 - 3y^2 - x - 1 =$$

$$= x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + 3(y^2 + 2y\,\Delta y + \Delta y^2) +$$

$$+ x + \Delta x + \cancel{1} - \cancel{x^2} - \cancel{3y^2} - \cancel{x} - \cancel{1} =$$

$$= 2x.\Delta x + \Delta x^2 + 6y.\Delta y + 3\Delta y^2 + \Delta x$$

$$= \Delta x\,(2x+1) + \Delta x^2 + 6y\,\Delta y + 3y^2 =$$

$$= df + \varepsilon$$

Calcular $\dfrac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m\,\partial y^n}$ de $f(ax+by+c) =$

$= f(z)$.

$$z = ax + by + c$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{df}{dz}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = b.\frac{df}{dz}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = b\frac{d^2 f}{dz^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = b^2\frac{d^2 f}{dz^2}$$

$$\frac{\partial^n f}{\partial y^n} = b^n\frac{d^n f}{dz^n}$$

$$\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x\,\partial y^n} = b^n\frac{d^{n+1} f}{dz^{n+1}}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = ab^n\frac{d^{n+1} f}{dz^{n+1}}$$

$$\frac{\partial^{n+m} f}{\partial x^m\,\partial y^n} = a^m b^n\frac{d^{m+n} f}{dz^{m+n}}$$

Derivada segunda de

$f(x, u)$ $\quad u = u(x)$

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d^2F}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) + \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}\right] =$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial x}\cdot\frac{du}{dx} + \left(\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u}\right)\frac{du}{dx} +$$

$$+ \frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{d^2u}{dx^2} =$$

$$= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial x}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial u}\frac{du}{dx} +$$

$$+ \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{d^2u}{dx^2}$$

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

$(x^2+y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$ é diferencial exata pois $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y$ e é homogenea

Como exata $-\int_0^x (x^2 - y^2)\,dx = 0$

$\left[\frac{x^3}{3} - y^2x\right]_0^x = 0 \qquad x^3 - 3y^2x = c^{te}$

Como homogênea $-\; y = tx \;-$

$dy = t\,dx + x\,dt \rightarrow$

$(x^2 + t^2x^2)\,dx - 2tx^2(t\,dx + x\,dt) = 0$

$(1-t^2)\,dx + 2t^2dx - 2t\,dt\,x = 0$

$(1-3t^2)\,dx - 2tx\,dt = 0$

$\frac{dx}{x} - \frac{2t\,dt}{1-3t^2} = 0$ Integrando

$\ln x + \frac{1}{3}\ln|1-3t^2| = c^{te}$ ...

$x^3 - 3x\,y^2 = c^{te}$

equação linear.

Resolver a equação

$y' - y = x y^5$ (De Bernoulli)

$\frac{y'}{y^5} - y^{-4} = x \qquad y^{-4} = t$

$-\frac{t'}{4} - t = x \qquad$ derivando $\quad t'$

$t' + 4t = -4x$

$t = uv \to t' = uv' + vu'$

$uv' + vu' + 4uv = -4x$

$u(v' + 4v) + vu' = -4x$

$v' + 4v = 0$

$\frac{dv}{v} = -4dx \to \boxed{v = e^{-4x}}$

Para este valor de $v \to$

$e^{-4x} u' = -4x$

$\frac{du}{dx} = -4x e^{4x}$

$du = -4x e^{4x} dx \qquad u = -\int x e^{4x} 4\,dx$

$= -x e^{4x} + \int e^{4x} dx = -x e^{4x} + \frac{1}{4} e^{4x}$

Logo, $t = -x + \frac{1}{4} + c e^{-4x}$

Finalmente $\boxed{y = \left(\frac{1}{4} - x + c e^{-4x}\right)^{-1/4}}$

Resolver a equação

$x\,dy - 2y\,dx = 0$ Considerando-a como diferencial exata, apesar de ser equação de variáveis separáveis.

Tornemo-la diferencial exata. Procuremos $f(x, y)$ chamado multiplicador tal que $f.x\,dy - 2f y\,dx = 0$ seja diferencial exata.

Deve ser $\frac{\partial (f.x)}{\partial x} = -2 \frac{\partial (f y)}{\partial y}$

Suponhamos f apenas função de x.

$f + x\frac{df}{dx} = -2f \qquad x\frac{df}{dx} = -3f$

$\frac{df}{f} = -3\frac{dx}{x} \qquad lf = -3lx$

$\boxed{f = \frac{1}{x^3}}$ substituindo na equação –

$\frac{1}{x^{3/2}} x\,dy - \frac{2y}{x^3} dx = 0$ Que é diferencial exata

$\int_0^y \frac{1}{x^2} dy = c^{te} \to \boxed{\frac{y}{x^2} = c^{te}} \quad \boxed{y = c x^2}$

//

$x\,dy - 2y\,dx = 0$

$\frac{1}{2}\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0 \to \boxed{y = c x^2}$

Mudança de variáveis.

Dada a equação

$$\frac{dy}{dx}\frac{d^3y}{dx^3} - 3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 0$$ transfor-

la de modo que x passe a ser funç[ão de] y.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{x'}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x'}\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{x'}\right)\frac{dy}{dx} =$$

$$= -\frac{x''}{x'^2}\cdot\frac{1}{x'} = -\frac{x''}{x'^3}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{x'^3 \cdot x''' - x'' 3x'^2 x''}{x'^6}\;\frac{1}{x'} =$$

$$= \frac{3x''^2 - x'x'''}{x'^5}$$

Substituindo-se na eq. dada e sim[pli]ficando

$$x' x''' = 0$$

A solução é $\boxed{x = ay^2 + by + c}$

21/11/45

Proton

Eq. de Riccati

$$y' + L y^2 + My + N = 0$$

O processo é recair numa equação de Bernoulli. Para isto devo ser $N=0$. Devemos então procurar uma solução particular para fazer com que N desapareça

$$y' + Ly^2 + My + N = 0$$

$$y_0' + Ly_0^2 + My_0 + N = 0$$

$$y' - y_0' + L(y^2 - y_0^2) + M(y - y_0) = 0$$

Devíamos agora fazer $y - y_0 = z$, teríamos uma equação de Bernoulli em z e depois $z = \frac{1}{t}$ portanto logo faremos $y = \frac{1}{t} + y_0$

Resolver a equação

$$y' + \frac{x - y^2 + x^2 y}{1 + x^3} = 0$$

sabendo que admite como uma solução um polinômio do primeiro grau:

$$y_1 = ax + b \qquad y_1' = a$$

$$a + \frac{x - a^2x^2 - 2axb - b^2 + ax^3 + bx^2}{1 + x^3} \equiv 0$$

$$a - b^2 + 2(1 - ab)x + (b - a^2)x^2 \equiv 0$$

$$\left.\begin{aligned} a &= b^2 \\ ab &= 1 \\ a^2 &= b \end{aligned}\right\} a = 1 \text{ e } b = 1 \qquad \text{logo} -$$

$y_1 = x + 1$

Façamos a substituição —

$$y = y_1 + \frac{1}{t} \rightarrow y = x + 1 + \frac{1}{t} \rightarrow$$

$$y' = 1 - \frac{t'}{t^2}$$

$$\left(1 - \frac{t'}{t^2}\right)(1 - x^3) + 2x - y^2 + x^2 y = 0$$

$$(t^2 - t')(1 - x^3) + 2x t^2 - (xt + t + 1)^2 + x^2 (\ldots$$

$$-t'(1 - x^3) + (1 - x^3 + 2x - (x+1)^2 + x^3 + x^2) t^2 + (x^2 - \ldots$$

$$t'(1 - x^3) - (x^2 - 2x - 2) t + 1 = 0$$

$$(x^3 - 1) t' + (x^2 - 2x - 3) t = 1$$

$$t = uv \rightarrow t' = uv' + vu'$$

$$(x^3 - 1) uv' + (x^3 - 1) vu' + (x^2 - 2x - 3) uv =$$

$$u[(x^3 - 1) v' + (x^2 - 2x - 3) v] = (x^3 - 1) v\ldots$$

$$(x^3 - 1) v' = -(x^2 - 2x - 2) v$$

$$\frac{v'}{v} = -\frac{x^2 - 2x - 2}{x^3 - 1}$$

$$lv = -\int \frac{x^2 - 2x - 2}{x^3 - 1} dx$$

Decompondo

$$\frac{x^2 - 2x - 2}{x^3 - 1} = \frac{a}{x - 1} + \frac{bx + c}{x^2 + x + 1}$$

$(a = -1)$ $(b = 2)$ $(c = +1)$

$$I = -l|x - 1| + \int \frac{2x + 2}{x^2 + x + 1} dx =$$

$$= l\left|\frac{x^2 + x + 1}{x - 1}\right| = l\left|\frac{x^3 - 1}{(x - 1)^2}\right|$$

$$lv = -l\left|\frac{x^3 - 1}{(x - 1)^2}\right| \rightarrow v = \frac{(x - 1)^2}{x^3 - 1}$$

$$\frac{(x - 1)^2}{x^3 - 1} \frac{du}{dx} = 1 \qquad du = (x - 1)^{-2} dx$$

$$u = \int (x - 1)^{-2} dx = \frac{(x - 1)^{-1}}{-1} + c = \frac{-1}{x - 1} + c$$

$$t = \left(c - \frac{1}{x - 1}\right) \frac{(x - 1)^2}{x^3 - 1} = \frac{c(x - 1)^2}{x^3 - 1} - \frac{x - 1}{x^3 - 1}$$

$y = x + 1 + \frac{1}{t}$ dará a solução geral.

Resolver —

$$y' + 2y^2 + \frac{y}{x} - \frac{2}{x^2} = 0$$

Sabendo que admite para solução particular do tipo $xy_1 = \cancel{k}$

$$\boxed{y = y_1 + \frac{1}{t}} \qquad y_1 = k/x$$

$$y_1' = -\frac{k}{x^2}$$

$$-\frac{\cancel{k}}{x^2} + 2\frac{k^2}{x^2} + \frac{\cancel{k}}{x^2} - \frac{2}{x^2} \rightarrow k = \pm 1$$

$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{t}$ $\quad y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{t'}{t^2}$ Subst

$-\frac{1}{x^2} - \frac{t'}{t^2} + 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{t}\right)^2 + \frac{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{t}\right)}{x} -$

$t' - \frac{5t}{x} = 2$

sol. final $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{cx^5 - \frac{1}{2}x}$.

2 2 | 1 1 | 4 5

Eq. de Lagrange.

$y = x\varphi(y') + \psi(y')$ sendo $\varphi(y') \neq y'$

Caso particular é o de $\varphi(y') = y'$, temos a equação de Clairaut.

Integra-se a equação por derivação fazendo

$y' = p$

$y = \varphi(p) \cdot x + \psi(p)$ Derivando-se

$p = \varphi(p) + x\varphi'(p)\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx}$

A equação obtida é sempre linear, considerando-se "x função de p."

Exercício

$y + 2xy' + y'^2 = 0$

$\boxed{y = -2xp + p^2}$ → (1)

$p = -2p - 2x\frac{dp}{dx} - 2p\frac{dp}{dx}$

$3p = -(2x + 2p)\frac{dp}{dx}$ multiplicando por $\frac{dx}{dp}$ → $3p\frac{dx}{dp} + 2x = -2p$

$x = uv \quad x' = uv' + vu'$

$3p(uv' + vu') + 2uv = -2p$

$u(3pv' + 2v) + 3u'pv = -2p$

$3pv' + 2v = 0$

$\frac{3dv}{v} + \frac{2dp}{p} = 0 \quad v = p^{-\frac{2}{3}}$

$3pu'v = -2p \rightarrow u' = -\frac{2}{3}p^{2/3}$

$u = -\frac{2}{3}\int p^{2/3}dp \quad u = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}p^{5/3} + c$

$\boxed{x = uv = p^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(-\frac{2}{5}p^{5/3} + k\right)}$ (2)

(1) e (2) são as respostas ao exercício proposto. É solução paramétrica.

$y - xy' = \sqrt{1+y'^2}$

$y = xy' + \sqrt{1+y'^2}$ é equação de Clairaut $\rightarrow$

$y = xp + \sqrt{1+p^2}$

$p = x\dfrac{dp}{dx} + p + \dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}\dfrac{dp}{dx}$

$\dfrac{dp}{dx}\left(x + \dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) = 0$

As soluções são, então —

1) $x = -\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}$ $\quad y = xp + \sqrt{1+p^2}$

é solução particular.

2) $\dfrac{dp}{dx} = 0 \rightarrow \boxed{p = c}$ então —

$\boxed{y = cx + \sqrt{1+c^2}}$

É a solução geral.

1) $e^{2x}\dfrac{\partial u}{\partial y} = e^{y}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial u}{\partial x}\right)$ $\quad \begin{cases} x = lz \\ y = lt \end{cases}$

Resp. — $\dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - (x - e^{y})\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 = 0$ $\quad x = x(y)$

Resp. — $\dfrac{d^2x}{dy^2} + x = e^{y}$

3) Provar que $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy^{x}\dfrac{\partial z}{\partial x} + 2(y - y^3)\dfrac{\partial z}{\partial y} + x^2y^2z = 0$

é invariante para a substituição $u = xy$ $\quad v = \dfrac{1}{y}$

4) Transformar em coordenadas polares

$x^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + y^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2xy\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - x\dfrac{\partial v}{\partial x} - y\dfrac{\partial v}{\partial y}$ $\longrightarrow$ $\begin{matrix} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\,\theta \end{matrix}$

Resp. — $\dfrac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}$

5) $4\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \left(\dfrac{dy}{dx} - 1\right)^3 = 0$ $\quad \begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \\ u = u(v) \end{cases}$

Resp. — $\dfrac{d^2u}{dv^2} = 1$

Solução de exercícios —
Mudança de variáveis.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad \begin{cases} x = e^t \\ y = e^z \end{cases} \longrightarrow t = l x$$

(Pincherle

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{1}{x} = \frac{\partial u}{\partial t}e^{-t}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dy} = \frac{\partial u}{\partial z}e^{-z}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z}e^{-z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}e^{-z}\right)\frac{dz}{dy}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}e^{-z}\right)\right]e^{-z} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial u}{\partial z}\right)e^{-2z}$$

Substituindo na expressão dada —

$$\frac{\partial u}{\partial t}e^{-t} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial u}{\partial z}\right)e^{-2z}$$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}e^{2z} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial u}{\partial z}\right)e^{t}}$$

1º exerc. dado.

Pincherle

nº 4:
Calcular $\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}$ em coord. polares

$x = \rho\cos\theta$
$y = \rho\,\text{sen}\,\theta$

Derivemos em relação a x e a y

$$1 = \frac{\partial \rho}{\partial x}\cos\theta - \rho\,\text{sen}\theta\frac{\partial\theta}{\partial x} \qquad (\times\cos\theta)\ (\times -\text{sen}\theta)$$

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial x}\text{sen}\theta + \rho\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial x} \qquad (\times\,\text{sen}\theta)\ (\times\cos\theta)$$

$$\cos\theta = \frac{\partial\rho}{\partial x} \qquad -\text{sen}\theta = \rho\frac{\partial\theta}{\partial x}$$

a y →

$$0 = \frac{\partial\rho}{\partial y}\cos\theta - \rho\,\text{sen}\theta\frac{\partial\theta}{\partial y} \qquad (\times\cos\theta)\ (\times -\text{sen}\theta)$$

$$1 = \frac{\partial\rho}{\partial y}\text{sen}\theta + \rho\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial y} \qquad (\times\,\text{sen}\theta)\ (\times\cos\theta)$$

$$\text{sen}\theta = \frac{\partial\rho}{\partial y} \qquad \cos\theta = \rho\frac{\partial\theta}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}$$

Substituindo agora os val. obtidos

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial v}{\partial\rho} - \frac{\text{sen}\theta}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\theta}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \left(\frac{\text{sen}\theta}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\rho} + \frac{\cos\theta}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\theta}\right.$$

~~$\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}$~~

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} = \left(\frac{\text{sen}\theta}{}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\cos\theta}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\cos\theta\frac{\partial v}{\partial\rho} - \frac{\text{sen}\theta}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)$$

$$\sin\theta\cos\theta\,\frac{\partial^2 v}{\partial\rho} + \sin\theta\left[\frac{\sin\theta}{\rho^2}\frac{\partial v}{\partial\theta} - \frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta\,\partial\rho}\right.$$

5') $\frac{d^2y}{dx^2} = 1$ $\qquad y = \frac{1}{2}(v+u)$ $\qquad u = u$

$x = \frac{1}{2}(v - u(v))$

Derivemos em relação a v

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dv}{dx/dv} = \frac{\frac{1}{2}(1+u')}{\frac{1}{2}(1-u')} = -1 + \frac{2}{1-u'}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\frac{dy}{dx}}{dx} = \frac{\frac{d}{dv}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dv}} = \frac{2u''}{(1-u')^2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}(1}$$

$$= 4\frac{u''}{(1-u')^2}$$

Resposta ~~$4\frac{u''}{}$~~ $\quad 4u'' - (1-u')^3$

2') $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x}$

$- \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

Resp. $\qquad u = xy$

$v = x + y$

$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = 0$

Ora $- \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$

$\downarrow y \qquad \downarrow 1$

derivada direta

Calcular y em fç. de u e v

28/11/45

Questões da provinha.

Dada a expressão

$x\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial y}$ efetuar a mudança para

$x = u \qquad y = vx.$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{y}{x^2} = \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{v}{u}\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \cancel{\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial v}\frac{1}{x} = \frac{\partial z}{\partial v}\frac{1}{u}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{v}{u}\right) =$$

$$= \frac{1}{u}\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} - \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{v}{u^2} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{1}{u^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{u}\frac{\partial z}{\partial v}\right) = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

Somando depois de multiplicar

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} - \cancel{\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{v}{u}} - \cancel{\frac{\partial z}{\partial v}\frac{1}{u}} + \cancel{\frac{v}{u}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}} + \cancel{\frac{\partial z}{\partial v}\frac{1}{u}} = \boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}}$$

2ª questão —

Integrar — $y' + (1-x^2)y^2 + x^3 y - \frac{1}{4}(x^4 + x^2 + 2) = 0$

$y_0 = ax \qquad y_0' = a$

$a + (1-x^2)a^2x^2 + ax^4 - \frac{1}{4}(x^4 + x^2 + 2) = 0$

Daqui — $a = \frac{1}{2}$

$y = \frac{x}{2} + \frac{1}{t}$

Na equação — ~~Na~~. $y' = \frac{1}{2} - \frac{t'}{t^2}$

$\frac{1}{2} - \frac{t'}{t^2} + (1-x^2)\left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{t} + \frac{1}{t^2}\right) + x^3\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{t}\right)$

$+ \frac{1}{4}(x^4 + x^2 + 2) = 0$

$-\frac{t'}{t^2} + \frac{x}{t} + \frac{1}{t^2} - \frac{x^2}{t^2} = 0$

$t' - xt = 1 - x^2$

$t = uv \rightarrow$

$uv' + vu' - xuv = 1 - x^2$

$v' - xv = 0 \rightarrow \frac{dv}{v} = x\,dx \qquad v = e^{\frac{x^2}{2}}$

$e^{x^2/2} u' = 1 - x^2$

$u = \int e^{-\frac{x^2}{2}}(1-x^2)\,dx =$

$= \int e^{-\frac{x^2}{2}}dx + \int x\,de^{-\frac{x^2}{2}} =$

$= \int e^{-\frac{x^2}{2}}dx + xe^{-\frac{x^2}{2}} - \int e^{-\frac{x^2}{2}}dx = xe^{-\frac{x^2}{2}} + C$

Daqui se tira $t = uv$.

3ª questão — $2f(x)\,y \operatorname{arctg} x\,dx +$

$+ f(x)\left[\frac{x^2+1}{x}\operatorname{arctg} x - 1\right]dy = 0$

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

$2f(x)\operatorname{arctg} x = f(x)\left[\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\operatorname{arctg} x + \frac{x^2+1}{x}\frac{1}{x^2+1}\right] +$

$+ f'(x)\left[\frac{x^2+1}{x}\operatorname{arctg} x - 1\right]$

$f(x)\operatorname{arctg} x = f(x)\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\operatorname{arctg} x\right] +$

$+ f'(x)\left[\frac{x^2+1}{x}\operatorname{arctg} x - 1\right]$

$f(x)\left[\frac{1}{x} - \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\operatorname{arctg} x\right] = f'(x)\left(\frac{x^2+1}{x}\operatorname{arctg} x - 1\right)$

$-\frac{1}{x}f(x) = f'(x) \rightarrow \frac{df}{f} = \frac{dx}{x} \rightarrow f(x) = x$

Substituindo na equação dada

$\int_0^x 2x\,y \operatorname{arctg} x\,dx = C^{te}$

$y\int_0^x \operatorname{arctg} x\,d(x^2) = C^{te}$

resposta - $\boxed{y = C + C_1 x + C_2 e^{3x} - \frac{1}{9}\left(\frac{x^3}{2} - 2x\right.}$

3º caso) $y'' + y = (x+1)e^{2x}$

$y = e^{2x} z \rightarrow y' = e^{2x}(z' + 2z)$

$y'' = e^{2x}(z'' + 2 + 2z' + 4z)$

Na equação de partida -

$z'' + 2z' + 5z + 2 = x + 1$ donde

$\bar{z} = ax + b \quad \bar{z}' = a$, substituindo

$5ax + 5b + 2a \equiv x + 1$

$\rightarrow a = \frac{1}{5} \qquad b = -\frac{7}{25}$

$\bar{z} = \frac{x}{5} - \frac{7}{25}$ e

$\bar{y} = \frac{xe^{2x}}{5} - \frac{7e^{2x}}{25} = \frac{e^{2x}}{5}\left(x - \frac{7}{5}\right)$

4º caso) $y'' - y = (x+1)e^{x}\cos x$

Considerando simultaneamente a equação [em] sen e somando a 1ª com a 2ª multiplicada por i

$t'' - t = (x+1)e^{(1+i)}$

$t = ze^{x(1+i)}$ Resolve-se como nos casos anteriores

Feitos os cálculos obtem-se

$\bar{z} = ax + b$ p/ exº, $\bar{t} = (ax+b)e^{x(1+i)} =$

$= (ax+b)e^{x}(\cos x + i \operatorname{sen} x)$ e ficamos só com a parte real, i.é,

$\bar{t} = (ax+b)e^{x}\cos x = \bar{y}$

Se houver imaginários -

$\bar{t} = A + Bi$ se tivermos coseno só interessa A e se tivermos seno, só B.

29/11/45.

<u>Equações lineares de ordem n</u>

$L(y) = a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = X(x)$

1) Eq. homogeneas

$L(y) = 0$

Solução geral é $y = C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n$ onde y_i são <u>n</u> soluções particulares independentes.

Estas soluções particulares no caso de coefic. constantes são obtidas a partir da equação característica:

$a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_n = 0$ sendo r_1 uma raiz ~~solução~~ simples, obtem-se uma ~~solução~~ particular da equação homogenea

$y = e^{r_1 x}$

Sendo ρ uma raiz ~~multipla~~ de multiplic. <u>m</u> obtem-se <u>m</u> soluções particulares de eq. homogenea -

$e^{\rho x}, \; x e^{\rho x}, \; \ldots, \; x^{m-1} e^{\rho x}$

2.) Eq. não homogêneas -

$L(y) = X$

Solução geral -

$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n + \bar{y}$

$\sum c_i y_i$ - sol. geral da eq. homogênea

$\bar{y}$ é uma sol. particular da equação não homogênea

Determinação de $\bar{y}$ -

A solução partic. $\bar{y}$ pode ser determinada em qualquer caso pelo metodo de Lagrange ou da variação das constantes:

para isto considera-se a expressão $\bar{y} = c_1(x) y_1 + \ldots + c_n(x) y_n$

Onde $c_i(x)$ são n funções a serem determinadas por meio do sistema:

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 + \ldots + c_n' y_n = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' + \ldots + c_n' y_n' = 0 \\ \ldots \\ c_1' y_1^{(n-1)} + c_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + c_n' y_n^{(n-1)} = \frac{X}{a_0} \end{cases}$$

As soluções têm que ser independentes pois o sistema de soluções é fundamental.

Resolvido o sistema tem-se $c_i(x)$ e por n quadraturas obtem-se as soluções $c_i(x)$ no caso partic. a sol. $\bar{y}$ pode ser determinada

Ex. de Cálculo II

1º semestre - Análise

1946.

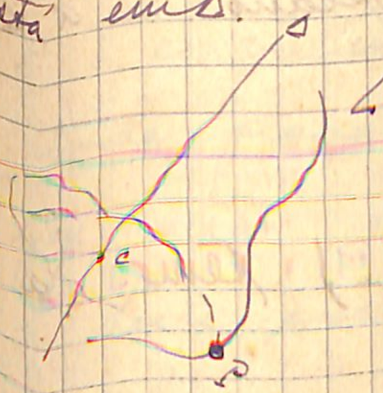
E. P. S. P.

E.

Exercícios de Calculo II.

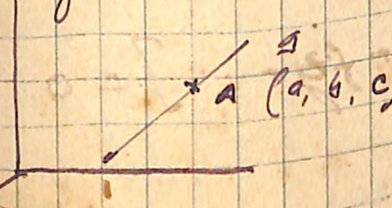
Prof. Dr. Enrico Cerruti

Superfícies de revolução - Dada uma reta Δ e uma linha L. superfície de rev. gerada por é a superf. tal que cj. ponto P de L descreve uma circ cujo plano é $\perp$ a Δ e cujo centro está em Δ.



Ou ainda dado Δ, uma circ. de raio variavel e de plano perpendicular a Δ, descrevendo o seu centro o eixo Δ. Um ponto dessas circ. deve descrever L.

Eq. dessas superf.



A eq. de Δ:

$$(1) \left\{ \frac{x-a}{p} = \frac{y-b}{q} = \frac{z-c}{r} \right.$$

a linha Δ pode ser dada em função de um parametro ou como intersecção de 2 superf.

$\textcircled{3}\{f(x, y, z) = 0 \quad e \quad F(x, y, z) = 0$

Consideramos uma esfera de centro fixo (A p/ ex.) com raio variavel: ela será

$E) \equiv (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = \lambda$

Consideramos um plano $\perp$ a Δ e cortando $E) \rightarrow$

$P) \equiv px + qy + rz = \mu$

O conjunto de $E)$ e $P)$ temos a circunferencia necessária.

Devemos fixar o plano de maneira que o plano, a esfera e a linha tenham um pt. comum, ou achar uma relação

$\phi(\lambda, \mu) = 0$

Ou melhor: $M \equiv (x, y, z)$ deve satisfazer às eq. do plano, da linha e da esfera: —

$\phi\left[(x-a)^2 + \ldots\ ;\ px + qy + \ldots\right] = 0$

este ponto dará a equação da superfície: —

$\phi\left[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2,\ px + qy + rz\right] = 0$

Para os exercícios interessam os casos particulares:

a) Δ é um dos eixos, por exemplo OZ. Já teremos $P) \equiv \ z = \mu$

b) É conveniente escolher-se uma linha plana: - por ex: no plano yz, será $f(y, z) = 0$

Neste caso: os pontos descrevem circunferencias paralelas a xy:

$\textcircled{1}\begin{cases} x^2 + y^2 = \beta^2 \\ z = \alpha \end{cases}$

As coord. de P devem satisfazer a $f(z, y) = 0$ logo:

$\textcircled{2}\ f(\alpha, \beta) = 0$ é a equação da superfície — $\boxed{f\left[\sqrt{x^2 + y^2},\ z\right] = 0}$

Há casos particulares:

a) cilindro de revolução -

A linha L e Δ são paralelas.

Toma-se um ponto de L (x, y, z) a sua distancia a Δ toma-se constante.

b) cone de revolução

Δ e G são duas retas não paralelas.

A constancia é do angulo entre as duas retas Δ e G

Exemplos:

Sejam Δ $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ e uma geratriz uma hiperbole no plano $x = 0$

Temos G $\begin{cases} -\dfrac{z^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1 \end{cases}$ (1)

Plano de um ponto P: $y = \alpha$

Circunferencia descrita por P: $x^2 + z^2 = \beta^2$ } (2)

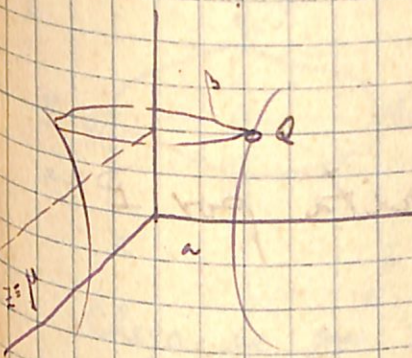
Ora: $P = (0, \alpha, \beta)$

logo: $\dfrac{\alpha^2}{a^2} - \dfrac{\beta^2}{b^2} = 1$ (3)

O sistema (2) e (3) dá a equação da superficie -

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2 + z^2}{b^2} = 1}$$

Façamos agora girar ao redor do eixo dos Z.



$\begin{cases} z = \mu \\ x^2 + y^2 = \rho^2 \end{cases}$ (1)

$\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{b^2} = 1$ (2)

$Q = (0; \beta; \mu)$

$\dfrac{\beta^2}{a^2} - \dfrac{\mu^2}{b^2} = 1$ (3)

$$\boxed{\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1}$$

Caso do toro:

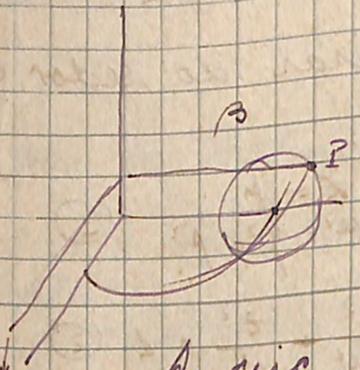
Toro - superf. gerada por uma circunferencia girando ao redor de um eixo estando o eixo no mesmo plano da circunferencia.

Seja $\Delta \equiv z$

é a circunferencia com centro e

→ $C \equiv (0, d, 0)$ e r.

circ.: $z^2 + (y-d)^2 = r^2$ (G)



A circ. descrita por P:

$$\begin{cases} z = \lambda \\ x^2 + y^2 = \beta^2 \end{cases}$$

$P \equiv (0, \beta, \lambda)$ logo:

$$\lambda^2 + (\beta - d)^2 = r^2$$

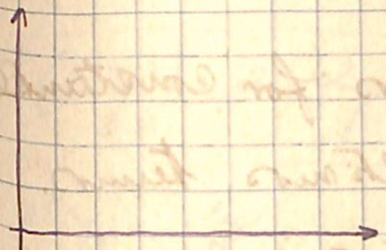
$$\boxed{z^2 + \left(\sqrt{x^2+y^2} - d\right)^2 = r^2}$$

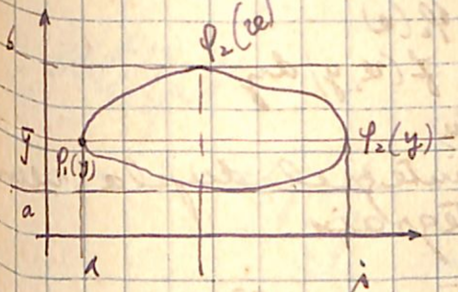
Eq. do toro.

2/4/46

Integrais dep. de 1 parametro

Funções definidas por uma integral.





Chega-se por vezes a funções $F(x) = \int_a^b f(x,y)\,dy$

$$F(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$$

x é considerada como constante, podendo variar, por isto é chamado parâmetro.

Apresentam-se dois problemas:

como derivar e como integrar estas funções.

1) Formulas de Leibniz

$$\int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,dy = \frac{\partial}{\partial x}\int_a^b f(x,y)\,dy$$