Exercicios de Calculo.
Prof. Dr. Breves.

1ª aula. Numeros naturais.

Peano partiu de 3 conceitos primitivos: - de número, de unidade e de sucessivo.
Apresentou 5 postulados -
1) Um é um numero.
2) Dado um numero, existe sempre outro numero chamado sucessivo deste.
Ex: - sendo x um numero, chamemos o sucessivo de x'. Este postulado afirma q. da igualdade dos sucessivos decorre a dos numeros.
Si $x' = y' \rightarrow x = y$.
3) Um não é o sucessivo de nenhum outro numero.
4) Dois numeros sendo iguais, tambem o são seus sucessivos.
Si $x = y \rightarrow x' = y'$.
5) - Postulado da indução - Se uma propriedade fôi verificada para o número um e se fôr verif. pª o numero n', supondo-se q. seja verif. para n, ela será valida para todos os numeros naturais.

Os postulados devem ser em menos numeros, compativeis e independentes.
Soma: - Por definição $x + 1 = x'$ e

$x + y' = (x+y)'$ (definição por indução)

Propriedade associativa: - exemplo de demonstração.

$(x+y)+z = x+(y+z)$

I) $z = 1 \rightarrow$

$(x+y)+1 = x+(y+1)$

$(x+y)+1 = (x+y)' = x+y' = x+(y+1)$

II) Suponhamos que $(x+y)+z = x+(y+z)$

$(x+y)+z' = (x+y)+(z+1) = [(x+y)+z]+1$

$= [x+(y+z)]+1 = x+[(y+z)+1] =$

$= x+[y+(z+1)] = x+(y+z')$ c.q.d.

$x+y = y+x$

I) $y = 1$ $\quad x+1 = 1+x$

Para $x = 1$, isto é verdadeiro $\rightarrow 1+1=$

Suposto que $x+1 = 1+x$, vejamos para o sucessor

$x'+1 = (x+1)+1 = (1+x)+1 = 1+(x+1) = 1+$

II) Se $x+y = y+x$, teremos que $x+y' = x+$

$= (x+y)+1 = 1+(x+y) = 1+(y+x) = (1+y)+$

$= y'+x$.

Exemplo de introdução dos numeros nega

Podemos chamar o par $(0,a)$ por $+a$

$(0,a) = +a$ e $(a,0) = -a$, pares esses or

nados.

O numero a chama-se valor absoluto de

ambos. A regra dos sinais é convenciona

da e é por definição. Justifica-se no ent

tanto sua conveniência.

Exº: $- \cdot + = -$

$(+a)[(+b)+(-b)] = 0$

$(+a)(+b)+(+a)(-b) = ab - ab = 0$

Com o sinal $+$ não se aceitaria a propriedade distributiva, o que viria dificultar.

22/5/45

Numeros racionais.

A introdução do conceito destes nos provem da impossibilidade de se realizar sem exceção a operação de divisão no campo dos nºs inteiros.

Efeito, sendo 2 nºs a e b, só há possibilidade de haver $q = a/b$, quando for $a = bq$.

O numero q é quociente de a por b.

Tir(?) a esta operação ter sentido, devemos in(?) ir o conceito de numeros racionais.

de(?) numero racional é 1 par ordenado a/b numeros inteiros, sendo $b \neq 0$ e satisfa(?) dendo as condições seguintes:–

1) $a/b = c/d \rightarrow ad = bc$

2) $a/b + c/d = \dfrac{ad+bc}{bd}$

3) $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot c}{bd}$

Os numeros inteiros podem ser considerad os rac. particulares, indicando-se $\dfrac{a}{1} = a$,

esta identificação não consta na identificação dos conceitos.

No campo dos numeros racionais são possiveis todas as operações elementares sem excção

A potenciação q. é um produto interado, possue 2 operações inversas:– radiciação e extração de logaritmo.

$$a^n = b \begin{cases} a = \sqrt[n]{b} \\ n = \dfrac{\log b}{\log a} \end{cases}$$

A radiciação nem sempre é definida no campo dos números racionais, isto é $\sqrt[n]{b}$ só tem sentido neste campo quando b é a potencia n esima de outro nº racional, o que nem sempre se dá.

Tendo-se em vista tornar sempre possivel a realisação da radiciação, somos levados a ampliar o campo dos números racionais, considerando os numeros reais, que são constituidos pelos numeros racionais e irracionais

Devemos procurar uma definição que nos permita trabalhar com todas as operações, para os números reais.

O conceito de nº real pode ser introduzi(do) geometricamente como relação de segmentos. Esta é a definição de Euclides.

Um nº real será racional quando os segmentos forem comensuraveis e irracional em caso contrário.

O conceito de nº real pode ser introduzido com o auxilio da geometria, de varias maneiras:–

1) por classes contiguas

2) por secção ou de Dedekind.

Desenvolveremos o segundo conceito.

Duas classes de nº racionais absolu(tos) e A' constituem uma secção ou corte no campo dos numeros racionais absolutos quando satisfazem às condições

1) as 2 classes possuem todos os numeros racionais abs. ou todos menos um

2) Todo nº da 1ª classe é < q. q. nº da 2ª classe.

3) A 1ª classe não possue maximo e a

segunda não possue minimo.

O nº real absoluto é um nº defin. por uma secção no campo racional absoluto.

23/5/45.

O numero racional pode ser consid. 1 caso partic. do nº real. Para este fim consideremos as secções q. não contem todos os nº racionais como definindo o nº rac. excluido.

Esta secção se chama impropria, em contraposição às demais q. são proprias e numeros reais por elas definidos são ditos irracionais.

As secções gozam de uma propriedade importante q. é a condição de contiguidade.

Demonstremos q.:— Dada uma secção (A, A') e sendo ε um nº racional abs. e arbitrario, é sempre possivel determinar 1 nº a da classe minte A e um nº a' da classe maj.te A' tais que verificam à condição
$a' - a < \varepsilon$.

C/ efeito, sejam $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$ um nº racional pertencente à classe minorante e consideremos a sucessão $\delta, 2\delta, 3\delta, \ldots$ O menor numero desta sucessão pertencente à classe major.te seja $n\delta$, o nº $(n-\delta)$ pertencerá necessariamente classe minorante.

A diferença entre estes é $n\delta - (n-2)\delta = 2\delta < \varepsilon \longrightarrow 2\delta < \varepsilon$ C.Q.D.

Igualdade e desigualdade.

Dois nº reais são iguais qdo coincidem as classes minorantes e majorantes das secções que os definem, i. é, qdo são definidos pela mesma secção.

Diz-se q. 1 nº real α é maior q. 1 nº real β ou menor

quando existir 1 nº da classe majorante de β q. pertença tambem à classe majorante de β.

Operações.

Soma. Sejam $\alpha = (A, A')$ e $\beta = (B, B')$ e construamos a classe C, dos numeros racionais c, superados por 1 soma qualquer $a + b$ e a classe C' dos nº rac. q. superam uma soma $a' + b'$. Provemos que estas classes constituem uma secção.

a) As classes C e C' contem todos os racionais ou todos menos um, c/ efeito, suponhamos q. estejam fora das classes dois numeros racionais p e q. $\rightarrow p < q$
Deveriamos ter $p \geq a + b \longrightarrow$
$a + b \leq p < q \leq a' + b'$, isto é,
$(a' + b') - (a + b) \geq q - p$ ou
$(a' - a) + (b' - b) \geq q - p > 0$, esta relação é absurda, pois está em contradição com

a condição de contiguidade. Logo a 1ª condição está satisfeita.

b) Sendo $c < a+b$ e $c' > a'+b'$, sendo $a' > a$ e $b' > b$, conclui-se que $c' > c$, portanto todo elemento de $\underline{C}$ é menor que todo elemento de C'.

c) A classe $\underline{C}$ não possui máximo, pois dado 1 nº rac. c, satisfazendo à condição $c < a+b$ é sempre possível ter-se $c_1 < c < a+b$, portanto a terceira condição está satisfeita; desde que C' também, analogamente não possui mínº.

Definição —

O nº $\gamma = (C, C')$ é chamado soma dos números α e β e escreve-se $\gamma = \alpha + \beta$

Diferença — Dados os números reais $\alpha = (A, A')$ e $\beta = (B, B')$ e suposto $\alpha > \beta$, consideremos a classe $\underline{C}$ dos nºs rac. abs. c, superados por uma diferença $a - b'$ ($a > b'$) e a classe C' de nºs rac. c' que superam a diferença $a' - b$.

Provemos que estas classes constituem uma secção.

a) Suponhamos que estejam excluídos 2 nºs racionais p e q → $p < q$, neste caso seria verificada a relação

$a - b' \le p < q \le a' - b$ isto é,

$(a' - b) - (a - b') \ge q - p$ ou

$(a' - a) + (b' - b) \ge q - p > 0$, relação absurda, por contrariar a cond. de contig.

b) Das relações $c < a - b'$ e $c' > a' - b$ e $a' > a$ e $b' > b$, segue-se → $c' > c$ ou $c < c'$

c) A classe C não possui máxº, pois sendo c um nº satisfazendo à condição $c < a - b'$, existe sempre outro nº rac. tal que $c < c_1 < a - b'$; analogamente a classe C' não possui mínimo.

Definição.

O nº $\gamma = (C, C')$ chama-se diferença dos nºs reais α e β e escreve-se $\gamma = \alpha - \beta$.

A diferença é operação inversa da soma, isto é, $\gamma = \alpha - \beta \rightarrow \beta + \gamma = \alpha$, com efeito, das relações $c < a - b'$ e $c' > a' - b$ seguem-se as relações $b' + c < a$ e $b + c' > a'$ ou por maior razão, $b + c < a$ e $b' + c' > a'$, o que mostra que todas as somas $b + c$ pertencem à classe minorante de α e todas as somas $b' + c'$ à classe majorante; isto é, $\beta + \gamma = \alpha$.

24/5/45.

Produto.

Dados os números reais $\alpha = (A, A')$ e $\beta = (B, B')$ consideremos a classe C dos nºs racionais absolutos superados por 1 produto ab e a classe C' superando um produto $a'b'$. Demonstremos que estas classes constituem uma secção.

1) Para provarmos q. a 1ª condição está preenchida, consideremos antes: $a'b' - ab = a'b' - a'b + a'b - ab = a'(b'-b) + b(a'-a) < M\varepsilon + M\varepsilon$, sendo M um nº das classes majorantes de α e β, ε um numero racional absoluto arbitrario e a, b e b', nºs racionais escolhidos convenientemente em função de M e ε. Esta relação mostra q. a diferença $a'b' - ab$ pode ser tomada tão pequena quanto se quizer. Isto isto, provemos q. as classes C e C' não podem deixar de conter 2 números racionais absolutos p e q. Com efeito, suposto $p < q$, teríamos $\rightarrow$ $ab \leq p < q \leq a'b'$ isto é, $a'b' - ab \geq q - p > 0$, relação esta q. é absurda p/ o q. demonstramos.

2) Sendo $c < ab$ e $c' > a'b'$ e sendo tambem $a < a'$ e $b < b'$ $\rightarrow$ $c < c'$.

3) A classe C não possue maximo. Com efeito, de $c < ab$, conclue-se a existencia de outro numero racional tal que $c < c_1 < ab$. A classe C' tambem não possue minimo.

Definição.

O nº real γ definido pela secção C, C' chama-se produto de α e β — $\gamma = \alpha . \beta$

Caso particular.

$\beta = 1 \Rightarrow \gamma = \alpha . 1 = \alpha$ Com efeito, sendo $b < 1$ e $b' > 1$ resulta $c < ab < a$ e $c' > a'b' > a'$. Vemos portanto que os números da classe minorante de γ pertencem á classe minorante de α e os nºs da classe majorante de γ pert. á cl. maj. de $\alpha \Rightarrow \gamma = \alpha$. C. Q. D.

---

* Inverso de um numero real.

Dado o nº real abs. $\beta = (B, B')$, consideremos as classes $\frac{1}{B'}$, $\frac{1}{B}$, a primeira constituida pelos inversos dos elementos da classe maj. de β e a 2ª pelos inversos da classe minorante. Vê-se imediatamente q. estas classes constituem uma secção. O nº real por esta definido se chama inverso de β e é indicado por $1/\beta$.

Provemos que $\beta \times \frac{1}{\beta} = 1 = \gamma$

De acordo com a definição de inverso e de produto, tem-se $\rightarrow$

$$c < b . \frac{1}{b'} < 1 \quad e \quad c' > b' . \frac{1}{b} > 1 .$$

Portanto os elementos da classe minorante de γ pertencem á classe minorante de 1 e os elementos da cl. maj. á cl. maj. de 1, logo $\gamma = 1$.

Divisão.

Chama-se quociente dos numeros reais absolutos α e β, o produto de α por $\frac{1}{\beta}$,

$$\frac{\alpha}{\beta} = \alpha . \frac{1}{\beta} .$$

Propriedades das operações

As operaç. c/ os nº reais possuem as mesmas propr. formais q. caracterizam as op[era]ções com os numeros inteiros e racionais.

São elas —

comutatividade e associativa da soma e do [pro]duto e

distributiva do produto em relação á so[ma]

———×———

Provemo-las: —

Propriedades comutativa e associativa

$\alpha + \beta = \beta + \alpha$ e $\alpha . \beta = \beta . \alpha$.

$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$ e $(\alpha . \beta) \gamma = \alpha (\beta . \gamma)$

Decorrem imediatamente das propriedades analogas correspondentes aos números racionais que estão nas respectivas classes formadoras.

———//———

29/5/45.

Propr. distr. do prod. em rel. á so[ma]

$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma)$

Seja $\delta = \alpha(\beta + \delta)$. De ac. c/ a defin. de soma e produto, os numeros racionais d pertencentes á classe minorante de δ satisfazem á condição $d < a(b + c) = ab + ac$.

Chamemos ε um nº racional absoluto satisfazendo á condição $\varepsilon < ab + ac - d$,

Portanto $d < ab + ac - \varepsilon$, isto é $d < (ab - \frac{\varepsilon}{2}) + (ac - \frac{\varepsilon}{2})$. A primeira parcela é um nº classe minorante de $\alpha\beta$ e a segunda é nº da classe minorante de $\alpha\gamma$.

A ultima relação mostra portanto que d pe[rten]ce tambem á classe minorante de $\alpha\beta + \alpha\gamma$

Por outro lado seja d' um numero da classe [m]ajorante de δ e portanto satisfazendo à [con]dição $d' > a'(b' + c') = a'b' + a'c'$. Chamemos ε' um numero racional absoluto satisfazendo à condição $\varepsilon' < d' - a'b' - a'c'$ logo [d]$' > a'b' + a'c' + \varepsilon'$, isto é, $d' > (a'b' + \frac{\varepsilon'}{2}) + (a'c' + \frac{\varepsilon'}{2})$ [A] primeira parcela pertence á classe majo[ran]te de $\alpha\beta$ e a segunda parcela á classe [m]ajorante de $\alpha\gamma$. Por conseguinte d' per[ten]ce á classe majorante de $\alpha\beta + \alpha\gamma$.

[Do] que acabamos de ver decorre que todos os [e]lementos da classe minorante de δ perten[ce]m tambem á classe minᵗᵉ de $\alpha\beta + \alpha\gamma$ e [to]dos os elementos da classe majorante [de] δ pertencem á classe majorante de [α]$\beta + \alpha\gamma$, donde se conclue ser

$\delta = \alpha\beta + \alpha\gamma$ CQD.

Baseando-nos na propriedade associa[ti]va do produto podemos demonstrar que o [q]uociente é a operação inversa do pro[d]uto, isto é, que $\frac{\alpha}{\beta} \times \beta = \alpha$.

Com efeito, $\frac{\alpha}{\beta} \times \beta = (\alpha \times \frac{1}{\beta})\beta =$

$= \alpha \times \left(\frac{1}{\beta} \times \beta\right) = \alpha \times 1 = \alpha$ C.Q.D.

Multiplo de um numero real.

Chama-se multiplo de um numero real ao produto de α por um numero natural qualquer n. Pode-se obter o multiplo efetuando-se uma soma de n parcelas iguais a α.

Com efeito $\alpha n = \alpha(1+1+1+1+\dots+1) =$
$= \alpha.1 + \alpha.1 + \dots + \alpha.1 =$
$= \alpha + \alpha + \alpha + \alpha + \dots + \alpha$ C.Q.D.

Teorema de Arquimedes.

Sendo α e β dois numeros reais quaisquer existe sempre um multiplo de α que supera β, isto é, pode-se determinar um numero natural n tal que $n\alpha > \beta$.

Com efeito, sendo a e b' dois numeros racionais quaisquer, o primeiro da classe minorante de α e o segundo da majorante de β. Tem-se de acordo com o teorema de Arquimedes aplicado aos numeros racionais $na > b'$ e por maior razão $n\alpha > \beta$. C.Q.D.

Numeros reais relativos.

Chama-se numero real relativo a um numero definido por uma secção no campo racional relativo.

As definições de igualdade e desigualdade são analogas ás correspondentes para os numeros reais absolutos.

A secção que não contem todos os numeros racionais é dita impropria. Considera-se como definindo o numero racional relativo excluido. O zero é definido pela secção cuja classe minorante é formada por todos os numeros racionais negativos e cuja classe majorante contem todos os positivos.

O numero real chama-se positivo quando o zero pertence á classe minorante da secção que o define e negativo em caso contrario.

Ao numero positivo se associa o sinal + e ao negativo o sinal −.

Valor absoluto dum numero real.

Chama-se valor absoluto de um numero real relativo α ao numero real absoluto que se indica por $|\alpha|$, definido da seguinte maneira: Para α positivo considera-se a secção cuja classe minorante é constituida pelos valores absolutos da classe minorante de α com exclusão do zero e dos elementos negativos e cuja classe majorante é const. pelos valores absolutos da classe majorante de α. Para α negativo considera-se a secção cuja classe minorante é const. pelos elementos da classe majorante de α com exclusão do zero e dos el.^{tos} positivos e cuja classe

majorante é const. pelos valores absolutos
dos elementos da classe minorante de

— × —

30/5/48.

Oposto de um numero real.

Dado um número real $\alpha = (A, A')$, chama-se
de α ao numero real $-\alpha = (-A', -A)$, cuja classe
rante é constituida pelos opostos dos elementos da c
majorante de α e cuja classe majorante é cons
tuida pelos opostos dos elementos da classe mi
rante de α.

Operações com os números reais relativos

São realizadas considerando-se os valôres absol
e introduzindo-se o sinal no resultado, de a
com as regras dos sinais.

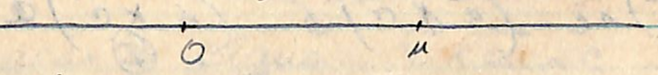
Correspondencia entre os números reais e
pontos de uma reta. Para podermos estabe
cer esta correspondencia precisamos admitir os
tulados sobre a reta da geometria Elementar
alem disso precisamos introduzir o postulado da
tinuidade (Dedekind e Cantor). Estes dois
são equivalentes; um mais o de Arquimedes
equivalente ao outro.

Cantor

Dadas duas classes de pontos de uma reta

s 1) nenhum ponto da primeira dessas segue qual
quer ponto da segunda, 2) Dado um segmento ε
itrário, é sempre possível determinar um ponto da
imeira classe e um da segunda, de modo que o
mento por êles determinado é menor que ε. Nes
s condições existe um ponto da reta que não
guido por nenhum ponto da primeira classe e nem
ecedido por nenhum ponto da 2ª classe.

Baseando-nos neste postulado provemos que entre
números reais ordenados segundo o critério do
valor algebrico e os pontos de uma reta orientada
tos para a qual se estabelece um sentido de
ercurso, é possível considerar uma correspondên
a biunívoca perfeita de modo que se um ponto B
guir o ponto A, o mesmo se dará entre os nú
meros correspondentes. Seja r uma reta orienta
da, fixemos sôbre r um ponto O dito origem e
um ponto U que segue O, dito ponto unitário
sendo A um ponto qualquer da reta não coin
cidindo com a origem.



Dividamos os números racionais absolutos em duas
classes tais que $a.u < OA$ e $a'.u > OA$.
As duas classes de números reais absolutos a
a' satisfazem às três condições de uma secção
O número real definido por esta secção, seja α.
Se o ponto seguir O, a ele faremos correspon
der o numero $+\alpha$ e se preceder, ao numero $-\alpha$

À origem faremos corresponder o número 0.

Inversamente consideremos um número real relativo não nulo $\beta = (b, b')$. Se $\beta > 0$ raciocinamos na semirreta positiva e se $\beta < 0$ raciocinamos na semirreta negativa. Considerando apenas o valôr absoluto de β, dividamos os pontos das reta em duas classes colocando numa primeira classe pontos P tais que ~~que~~ b ou $= 0$ numa segunda classe, pontos P' tais que b' o

As duas classes de pontos P e P' satisfazem o postulado da continuidade de Cantor e portanto determinam um ponto B associado a um número real β.

— x —

V

Cálculo Vetorial.

5/6/45.

Duplo produto vetorial.

Tese:

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \times \vec{c})\vec{a}$$

Será $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} - (\vec{a} \times \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \times \vec{c})\vec{a} = \vec{\alpha}$ (I)

1º) $\vec{a} \wedge \vec{b} = 0$ é verdadeira a expressão

2º) $\vec{a} \wedge \vec{b} \neq 0$

a) $\vec{c} = \vec{a}$ $\quad \vec{\alpha} \times \vec{a} = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{a} \times \vec{a} - (\vec{a} \times \vec{a})\vec{b} \times \vec{a} + (\vec{b} \times \vec{a})\vec{a} \times \vec{a} = 0$

~~tambem~~

$$\vec{\alpha} \times \vec{b} = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{a} \times \vec{b} - (\vec{a} \times \vec{a})\vec{b} \times \vec{b} + (\vec{b} \times \vec{a})\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a} \wedge \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 + |\vec{a} \times \vec{b}|^2 =$$

$$= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \operatorname{sen}^2(\vec{a}, \vec{b}) - |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 [1 - \cos^2(a, b)] = 0$$

$$\vec{\alpha} \times \vec{a} \wedge \vec{b} = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{a} \times (\vec{a} \wedge \vec{b}) - (\vec{a} \times \vec{a})\vec{b} \times \vec{a} \wedge \vec{b} + (\vec{b} \times \vec{a})\vec{a} \times \vec{a} \wedge \vec{b} = 0$$

por ser constituído de produtos com dois vetores iguais.

Logo, $\vec{\alpha} = 0$

— x —

b) $\vec{c} = \vec{b}$ Demonstração idêntica à anterior, trocando $\vec{a}$ por $\vec{b}$ e trocando os sinais. Logo $\alpha = 0$.

c) $\vec{c}$ qualquer.

$$\vec{\alpha} \times \vec{a} = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} \times \vec{a} - (\vec{a} \times \vec{c})\vec{b} \times \vec{a} + (\vec{b} \times \vec{c})\vec{a} \times \vec{a}$$

$$= -[(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{a} + (\vec{b} \times \vec{a})\vec{a} - (\vec{a} \times \vec{a})\vec{b}] \times \vec{c} =$$

$= 0 \times \vec{c} = 0$. (em virtude de a)

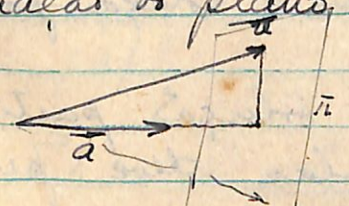
$\vec{\alpha} \times \vec{b} = 0$ do mesmo modo (em virtude de b)

$$\vec{\alpha} \times \vec{a} \wedge \vec{b} = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} \times (\vec{a} \wedge \vec{b}) - (\vec{a} \times \vec{c})\vec{b} \times \vec{a} \wedge \vec{b} + (\vec{b} \times \vec{c})\vec{a} \times \vec{a} \wedge \vec{b} = 0$$

Logo $\alpha = 0$.

— x —

Equação do plano $\quad \vec{r} \times \vec{a} = c$



Todos os pontos do plano π, têm a mesma projeção c sobre $\vec{a}$, de $\vec{r}$.

Dando-se uma solução geral $\vec{r}_0$, vem: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{l} \wedge \vec{a}$ ou $(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{a} = 0$.

Suponhamos os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$, os recíprocos serão $\vec{v}_1' = \frac{\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3}{\Delta}$; $\vec{v}_2' = \frac{\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_3}{\Delta}$; $\vec{v}_3' = \vec{v}$

Sendo $\Delta = \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \times \vec{v}_3$ e $\Delta' = \vec{v}_1' \wedge \vec{v}_2' \times \vec{v}_3'$.

$$\vec{V}_2 = \frac{\vec{v}_1' \wedge \vec{v}_2'}{\Delta'} = \frac{1}{\Delta'} \frac{\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3}{\Delta} \wedge \frac{\vec{v}_3 \wedge \vec{v}_1}{\Delta}$$

Tiramos $\vec{v}_2' \wedge \vec{v}_3' = \frac{\vec{v}_1}{\Delta}$, substitue-se em

$$\Delta' = \vec{v}_1' \wedge \vec{v}_2' \times \vec{v}_3' = \frac{1}{\Delta}.$$

—— × ——

Resolver o sistema

$$\begin{cases} \vec{x} \times \vec{v}_1 = c_1 \\ \vec{x} \times \vec{v}_2 = c_2 \\ \vec{x} \times \vec{v}_3 = c_3 \end{cases}$$

Sendo três produtos escalares ~~logo~~ temos três projeções de $\vec{x}$ sobre $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ e virá

$$\vec{x} = c_1 \vec{V}_1 + c_2 \vec{V}_2 + c_3 \vec{V}_3 \qquad (\delta \neq 0)$$

—— × ——

$\vec{x} \wedge \vec{a} = \vec{b}$ (Equação de uma reta) Seja sol

$\vec{x}_0 \wedge \vec{a} = \vec{b}$

$(\vec{x} - \vec{x}_0) \wedge \vec{a} = 0$ Segue-se que a solução ~~partic~~ geral é $\vec{x} = \vec{x}_0 + \lambda \vec{a}$.

Vejamos qual será esta solução particular a qual, para ser particular deve perpendicular a $\vec{a}$.

Será $\vec{x}_0 = \vec{l} \wedge \vec{a}$ donde

$(\vec{l} \wedge \vec{a}) \wedge \vec{a} = \vec{b}$, ou $(\vec{l} \times \vec{a})\vec{a} - (\vec{a} \times \vec{a})\vec{l} = \vec{b}$

$\vec{l} = -\frac{\vec{b}}{|a|^2} \longrightarrow x_0 = \frac{-\vec{b}}{|a|^2} \wedge \vec{a} = \frac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{|a|^2}$.

Impuzemos que fôsse $\vec{l} \times \vec{a} = 0$ e $\vec{l} \,//\, \vec{b}$.

Finalmente $- \vec{x} = \frac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{|a|^2} + \lambda \vec{a}$.

Resolver a equação – (I)

$\vec{x} \wedge \vec{a} + \vec{x} = \vec{b} \longrightarrow \vec{x} \wedge \vec{a} = \vec{b} - \vec{x}$,

virá: $- \vec{x} = \frac{\vec{a} \wedge (\vec{b} - \vec{x})}{|a|^2} + \lambda \vec{a}$

$$\vec{x} = \frac{(\vec{a} \wedge \vec{b}) - \vec{a} \wedge \vec{x}}{|a|^2} + \lambda \vec{a}$$

$$\vec{x} = \frac{\vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{x} - \vec{b}}{|a|^2} + \lambda \vec{a}$$

Devemos impor que $\vec{a} \times (\vec{b} - \vec{x}) = 0 \rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{x}$

—— × ——

~~Resolver~~ para haver perpendicularismo entre $\vec{x} \wedge \vec{a}$ e $\vec{b} - \vec{x}$

$$\vec{x} \times \vec{a} - \frac{\vec{a} \wedge (\vec{b} - \vec{x})}{|\vec{a}|^2} \times \vec{a} + \lambda \vec{a} \times \vec{a} = \vec{a} \times \vec{b} \longrightarrow$$

$$\vec{x} \times \vec{a} = \lambda |\vec{a}|^2 - \vec{a} \times \vec{b} \longrightarrow \boxed{\lambda = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a}|^2}}$$

Só admite uma solução, que será

$$x = \frac{\vec{a} \wedge (\vec{b} - \vec{x})}{|a|^2} + \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|a|^2} \vec{a}$$

$$x = \frac{\vec{a} \wedge \vec{b} - \vec{a} \wedge \vec{x} + (\vec{a} \times \vec{b})\vec{a}}{|a|^2} \quad \text{indo a (I)}$$

$$x - \frac{\vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{b} - \vec{x} + (\vec{a} \times \vec{b})\vec{a}}{|a|^2}$$

$\vec{u}\,(1+|\vec{a}|^2) = \vec{a}\wedge\vec{b} + \vec{b} + \vec{a}\times\vec{b}\,.\,\vec{a}$

$\vec{u} = \dfrac{\vec{a}\wedge\vec{b} + \vec{b} + \vec{a}\times\vec{b}\,.\,\vec{a}}{1+|\vec{a}|^2}$ sendo $|a| = 0 \to \vec{u} =$

— x —

$(\vec{u}\wedge\vec{a})\wedge\vec{u} = \vec{b}$ (1)

Deve ser $\begin{cases}\vec{u}\times\vec{b} = 0\\ \vec{u}\wedge\vec{a}\times\vec{b} = 0\end{cases}$ $\begin{cases}\vec{u}\times\vec{b} = 0\\ \vec{u}\times\vec{a}\wedge\vec{b} = 0\end{cases}$

1) $\vec{a}\wedge\vec{b} \neq 0$

$\vec{u} = \lambda\,.\,\vec{b}\wedge(\vec{a}\wedge\vec{b})$

$\vec{u}\wedge\vec{a} = \lambda\,.\,\cancel{(\vec{b}\wedge\vec{a})\wedge(\vec{a}\wedge\vec{b})} =$

$= \lambda\,[\vec{b}\wedge(\vec{a}\wedge\vec{b})]\wedge\vec{a}$

$= \lambda\,[(\vec{b}\times\vec{b})\vec{a} - (\vec{a}\times\vec{b})\vec{b}]\wedge\vec{a} =$

$= \lambda\,.\,(\vec{a}\times\vec{b})(\vec{a}\wedge\vec{b})$ Subst. em (1)

$\to (\vec{u}\wedge\vec{a})\wedge\vec{u} = \lambda^2(\vec{a}\times\vec{b})(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge[\vec{b}\wedge(\vec{a}$

$= \lambda^2(\vec{a}\times\vec{b})(\vec{a}\wedge\vec{b})\times(\vec{a}\wedge\vec{b})\vec{b} =$

$= \lambda^2(\vec{a}\times\vec{b})\,|\vec{a}\wedge\vec{b}|^2\,\vec{b} = \vec{b}$.

$\lambda^2(\vec{a}\times\vec{b})\,|\vec{a}\wedge\vec{b}|^2 = 1 \to$

$\lambda^2 = \dfrac{1}{(\vec{a}\times\vec{b})\,|\vec{a}\wedge\vec{b}|^2} \to$

$\lambda = \pm\dfrac{1}{|\vec{a}\wedge\vec{b}|\sqrt{(\vec{a}\times\vec{b})}}$ e por fim —

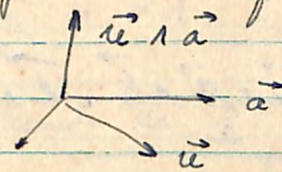
$\vec{u} = \pm\dfrac{\vec{b}\wedge(\vec{a}\wedge\vec{b})}{|\vec{a}\wedge\vec{b}|\sqrt{\vec{a}\times\vec{b}}}$ Para haver solução deverá ser $\vec{a}\times\vec{b} \neq 0$ pois se isso não se der, não há solução possível para $\vec{u}$.

— x —

2) $\vec{a}\wedge\vec{b} = 0 \to \vec{b} = 0$

$(\vec{u}\wedge\vec{a})\wedge\vec{u} = 0$

Se $\vec{u}$ não fôr // a $\vec{a}$ o primeiro membro não pode ser nulo, logo $\vec{u}$ é paralelo a $\vec{a}$; e a solução para a equação é $\vec{u} = \lambda.\vec{a}$



— x —

3º) $\vec{b} = m\vec{a} \to (\vec{u}\wedge\vec{a})\wedge\vec{u} = m\vec{a}$ deverá ser $\vec{u}\times\vec{a} = 0$

Desenvolvendo virá —

$(\vec{u}\times\vec{u})\vec{a} - (\vec{a}\times\vec{u})\vec{u} = m\vec{a}$

$(\vec{u}\times\vec{u})\vec{a} = m\vec{a}$

ou $(\vec{u}\times\vec{u}) = m \to |\vec{u}|^2 = m \to$

$\to |\vec{u}| = \sqrt{m}$. Devendo ser $\vec{u} \perp \vec{a} \to$

$\to \vec{u}\times\vec{a} = 0$. A condição para solução é que seja $m \geq 0$. Esta equação representa uma circunferencia situada num plano perpendicular a $\vec{a}$ e de raio igual a $\sqrt{m}$.

— x —

Exercício de prova parcial.

Resolver isolada e simultaneamente as equações: —

$$\begin{cases} \vec{x} \wedge \vec{a} = \vec{b} \\ \vec{x} \times \vec{c} = 1 \end{cases}$$ sendo $|\vec a|$ e $|\vec b|$ unitários e ortogonais. Esta condição não pode deixar de existir.

É mais $\vec{c} = \vec{a} + \vec{a} \wedge \vec{b}$

— x —

Solução particular:

$\vec{x} = \vec{a} \wedge \vec{b} + \lambda \vec{a} \to \vec{x} = \dfrac{\vec{c}}{|\vec{c}|^2} + \vec{l} \wedge \vec{c}$

$|\vec{c}|^2 = |\vec{a} + \vec{a} \wedge \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \times \vec{a} \wedge \vec{b} + |\vec{a} \wedge \vec{b}|^2 =$

$= 1 + 1 = 2 \therefore$

$\vec{x} = \dfrac{\vec{c}}{2} + \vec{l} \wedge \vec{c} \to \vec{x} = \dfrac{\vec{a} + \vec{a} \wedge \vec{b}}{2} + \vec{l} \wedge (\vec{a} + \vec{a} \wedge \vec{b})$ substituindo

$\vec{a} \wedge \vec{b} \times \vec{c} + \lambda \vec{a} \times \vec{c} = 1 \to$

$\vec{a} \wedge \vec{b} \times (\vec{a} + \vec{a} \wedge \vec{b}) + \lambda \vec{a} \times (\vec{a} + \vec{a} \wedge \vec{b}) = 1$

$1 + \lambda = 1 \to \lambda = 0 \to \vec{x} = \vec{a} \wedge \vec{b}$

— x —

Resolver

$$\begin{cases} (\vec{x} \wedge \vec{a}) \wedge \vec{b} = \vec{a} \\ (\vec{x} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{a} = \vec{b} \\ \vec{x} \wedge (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{b} - \vec{a} \end{cases}$$ $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $\vec{a} \times \vec{b} = 0$

$(\vec{x} \wedge \vec{a}) \wedge \vec{b} = (\vec{x} \times \vec{b})\vec{a} - (\vec{a} \times \vec{b})\vec{x} = \vec{a}$

$(\vec{x} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{a} = (\vec{x} \times \vec{a})\vec{b} - (\vec{b} \times \vec{a})\vec{x} = \vec{b}$

$$\begin{cases} \vec{x} \times \vec{b} = 1 \\ \vec{x} \times \vec{a} = 1 \\ \vec{x} \wedge (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{b} - \vec{a} \end{cases}$$ Por substituição teremos:

$\vec{x} \wedge \vec{a} + \vec{x} \wedge \vec{b} = \vec{b} - \vec{a}$ $\quad \vec{x} = \dfrac{(\vec{a} + \vec{b}) \wedge (\vec{b} - \vec{a})}{|\vec a + \vec b|^2} + \lambda(\vec{a} + \vec{b})$

$\vec{x} = \dfrac{2\vec{a} \wedge \vec{b}}{5} + \lambda(\vec{a} + \vec{b})$

Substituindo vem: $\dfrac{2\vec{a} \wedge \vec{b}}{5} \times \vec{b} + \lambda(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b} = 1$

$0 + \underbrace{\cancel{\vec{a} \times \vec{b}}}_{0} + 4\lambda = 1 \to \lambda = 1/4$

Substituindo na 2ª equação vem $\lambda = 1$ o que indica a incompatibilidade do sistema.

— x —

$$\begin{cases} \vec{x} \wedge \vec{a} = \vec{b} \\ \vec{x} \wedge \vec{c} = \vec{d} \end{cases}$$ $\quad \vec{x} = \dfrac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{|\vec{a}|^2} + \lambda \vec{a}$

$\dfrac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{|a|^2} \wedge \vec{c} + \lambda \vec{a} \wedge \vec{c} = \vec{d} \to$

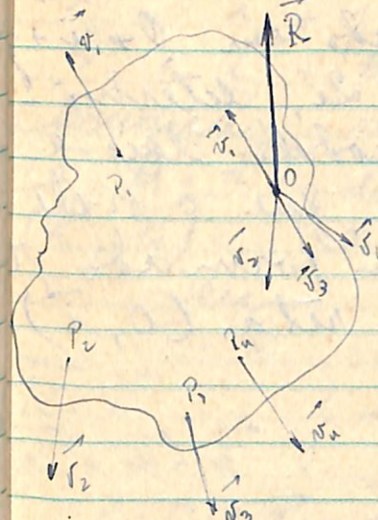
$\lambda \vec{a} \wedge \vec{c} = \vec{d} - \dfrac{(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c}}{|a|^2}$ A condição para que λ exista é que os vetores sejam paralelos, ou

$\left[\vec{d} - \dfrac{(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c}}{|\vec{a}|^2}\right] \wedge (\vec{a} \wedge \vec{c}) = 0$

$(\vec{a} \wedge \vec{c}) \wedge \vec{d} - (\vec{a} \wedge \vec{c}) \wedge \dfrac{(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c}}{|a|^2} = 0$

A solução será $\vec{a} \times \vec{d} + \vec{b} \times \vec{c} = 0$

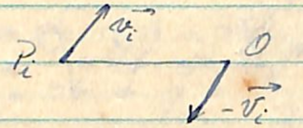
Exercício do dia 13/6/45.



$\vec{R}$ por definição é $\Sigma \vec{v_i}$ e é livre em si. Se fixamos em O, será aplicado.

Temos os sistemas

$$(\vec{v_i}, P_i) \to \begin{cases} (\vec{v_i}, P_i) \quad (-\vec{v_i}, O) \\ \Sigma (v_i, O) = (\vec{R}, O) \end{cases}$$



$$\vec{M_i} = \vec{v_i} \wedge (P_i - O)$$
$$\vec{M_0} = \Sigma \vec{v_i} \wedge (P_i - O)$$

$\Sigma \vec{M_i} = \vec{M_0}$ referido ao ponto O. Reduzimos as forças a uma resultante e a um binário. Variando o polo varia o momento. Procuramos o ~~momento~~ caso em que o momento e a resultante têm mesma direção. Será o eixo central do sistema. Nesse caso o momento é mínimo, pois não tem componente transversal.

$M_0' = M_0 + (O - O') \wedge \vec{R}$, sendo $(O - O') \wedge R$ o momento de transporte.

$$\vec{M_E} = M_0 + (O - E) \wedge \vec{R}$$

$$(E - O) \wedge \vec{R} = \vec{M_0} - \vec{M_E} \quad - \quad \frac{\vec{R} \wedge (\vec{M_0} - \vec{M_E})}{|\vec{R}|^2} + \lambda E$$

$$\vec{R} \wedge \vec{M_E} = 0 \quad \to \quad (E - O) = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}}{|\vec{R}|^2} + \lambda \vec{R}$$

Dados os vetores $2\vec{i}$ aplicado em $O+\vec{i}$, $\vec{k}$ e $\vec{j}$ aplicado em $O+2i$, determinar um terceiro vetor de modulo dois e o ponto de aplicação para que o sistema dos tres vetores assim formado tenha como eixo central a reta $(O, \vec{i})$

$|\vec{v}_3| = 2 \quad P_3 = ?$

$R = \rho i = 2i + \vec{j} + \vec{v}_3$

$\rho^2 |i|^2 = 4 + 1 + 4 = 9 \quad \rho = 3$

$3i - 2i + j = v_3 = i - j$

Dado o sistema

$\vec{v}_1 = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \qquad P_1 = O + \vec{i} + \vec{j}$

$\vec{v}_2 = \vec{i} + \vec{j} \qquad P_2 = O + \vec{i} + \vec{k}$

$\vec{v}_3 = \vec{i} + \vec{k} \qquad P_3 = O + \vec{j} + \vec{k}$

determinar outro sistema $(\vec{a}, A + \vec{k})$ $(\vec{k}, B)$ de modo que este seja equivalente ao primeiro.

será

$R = R' \qquad \vec{M}_0 = \vec{M}_0'$

$\left.\begin{array}{l}\vec{R} = \vec{i} \\ \vec{R}' = \vec{a} + \vec{k}\end{array}\right\} \vec{i} = \vec{a} + \vec{k} \quad \vec{a} = \vec{i} - \vec{k}$

$(P_1 - O) \wedge \vec{v}_1 = \vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$

$(P_2 - O) \wedge \vec{v}_2 = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

$(P_3 - O) \wedge \vec{v}_3 = -\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$

$\vec{M}_0 = -\vec{i} - \vec{j}$

$(A - O) \wedge \vec{a} = k \wedge (\vec{i} - \vec{k}) = \vec{j}$

$(B - O) \wedge \vec{k} =$

$\vec{M}_0' = \vec{j} + (B - O) \wedge \vec{k}$

$\vec{j} + (B - O) \wedge \vec{k} = -\vec{i} - \vec{j}$

$(B - O) \wedge \vec{k} = -\vec{i} - 2\vec{j}$

$(B - O) = \dfrac{\vec{k} \wedge (-\vec{i} - 2\vec{j})}{|k|^2} + \lambda \vec{k}$

$(B - O) = 2i - \vec{j} + \lambda \vec{k}$

Calcular os invariantes e o momento minimo

$\vec{I}_1 = \vec{R} \times \vec{R} = 1 \qquad I_2 = \vec{M}_0 \times \vec{R} = (-\vec{i} - \vec{j}) \times \vec{i} = -1$

$M_E = k\vec{R}$

$\vec{M}_E \times \vec{R} = h\vec{R}\times\vec{R} \rightarrow I_2 = hI, \quad h = -1$

Dados os vetores $\vec{v}_1 = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ aplicado em
$P_1 = \vec{O} + \vec{i} + \vec{j}$;
$\vec{v}_2 = i + j \longrightarrow P_2 = O + \vec{i} + \vec{k}$
Determinar $|\vec{v}_3| = \sqrt{2}$ e um ponto P_3 de modo q. o sistema tenha o mesmo eixo central que o sistema

$\vec{a} = \vec{i} - h \qquad A = O + \vec{k}$
$b = \vec{k} \qquad B = O + 2\vec{i} - \vec{j}$

$$\begin{cases} E - O = \vec{k} + \lambda\vec{i} \\ \vec{R} = \rho\vec{i} \\ \vec{M}_E = \end{cases}$$

$\rightarrow O + 2$

Questões da 1ª provinha.

$$\begin{cases} (\vec{x}\wedge\vec{a})\wedge\vec{b} = \vec{c} \\ \vec{x}\wedge\vec{a}\times\vec{c} = 0 \end{cases}$$

1) $\vec{a}\wedge\vec{c} \neq 0$
$\vec{x}$, $\vec{a}$ e $\vec{c}$ são coplanares, logo
$\vec{x} = l\vec{a} + m\vec{c}$
e

$$\left[(l\vec{a} + m\vec{c})\wedge\vec{a}\right]\wedge\vec{b} = \vec{c}$$

$(m\vec{c}\wedge\vec{a})\wedge\vec{b} = \vec{c}$

$-m\,(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c} = \vec{c}$

$m = \dfrac{-1}{\vec{a}\times\vec{b}}$ se $\vec{a}\times\vec{b} = 0$ a equação não tem solução.

$$\boxed{\vec{x} = l\vec{a} - \frac{\vec{c}}{\vec{a}\times\vec{b}}} \longleftarrow \text{Reta}$$

2) $\vec{c} = \lambda\vec{a}$
$(\vec{x}\wedge\vec{a})\wedge\vec{b} = \lambda\vec{a}$ Deve então ser —
$\vec{a}\times\vec{b} = 0$
$(\vec{x}\times\vec{b})\vec{a} = \lambda\vec{a}$
$\vec{x}\times\vec{b} = \lambda$ e $\boxed{x = \dfrac{\lambda\vec{b}}{|\vec{b}|^2} + \vec{l}\wedge\vec{b}}$ Plano

Um plano e uma reta.

Outra solução —
$\vec{x}\wedge\vec{a} = \dfrac{\vec{b}\wedge\vec{c}}{|\vec{b}|^2} + \lambda\vec{b}$ Condição de possibili-

dade -

$$\vec{a}\times\left[\frac{\vec{b}\wedge\vec{c}}{|b|^2}+\lambda\vec{b}\right]=0$$

$$\lambda\vec{a}\times\vec{b}=-\frac{\vec{a}\times\vec{b}\wedge\vec{c}}{|b|^2}$$

1) $\vec{a}\times\vec{b}=0$ e $\vec{a}\times\vec{b}\wedge\vec{c}=0$ será λ indeterminado.

2) $\vec{a}\times\vec{b}=0$ $\vec{a}\times\vec{b}\wedge\vec{c}\neq 0$

A equação não tem solução.

3) $\vec{a}\times\vec{b}\neq 0$

$$\lambda=-\frac{\vec{a}\times\vec{b}\wedge\vec{c}}{|\vec{b}|^2\,\vec{a}\times\vec{b}} \longrightarrow$$

$$\vec{x}\wedge\vec{a}=\frac{\vec{b}\wedge\vec{c}}{|b|^2}+\frac{\vec{a}\times\vec{b}\wedge\vec{c}}{|b|^2\,\vec{a}\times\vec{b}}\cdot\vec{b}$$

Então

$$\vec{x}=l\vec{a}-\frac{c}{\vec{a}\times\vec{b}}$$

II) Dado um sistema

$\vec{v}_1=\vec{j}-\vec{k}$ $\qquad P_1=0+\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$

$\vec{v}_2=\vec{i}+3\vec{k}$ $\qquad P_2=0+2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$

$\vec{v}_3=\vec{i}+\vec{j}$ $\qquad P_3=?$

Det. P_3 de modo que o sistema seja equivalente a um único vetor.

O mais simples é calcularmos em função de $\vec{R}$ e $\vec{M}_E$.

A condição necessária e suficiente para que sistema seja equivalente a outro de um vetor é que $\vec{M}_E=0\longrightarrow I_2=0$

ra $\vec{M}_E=\frac{I_2}{I}\vec{R}=0\longrightarrow\boxed{I_2=0}$

$_2=\vec{M}_0\times\vec{R}\qquad \vec{R}=2\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$

$(P_1-0)\wedge\vec{v}_1=-\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$

$(P_2-0)\wedge\vec{v}_2=3\vec{i}-3\vec{j}-\vec{k}$

$_0=\qquad=2\vec{i}-2\vec{j}+(P_3-0)\wedge\vec{v}_3$

$\vec{M}_0\times\vec{R}=(P_3-0)\wedge\vec{v}_3\times(2\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k})=0$

$(P_3-0)\times(\vec{i}+\vec{j})\wedge(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})=0$

$(P_3-0)\times(\vec{i}-\vec{j})=0\longrightarrow\boxed{(P_3-0)=l\wedge(\vec{i}-\vec{j})}$

III) Resolver o sistema

$$\begin{cases}\vec{x}\times\vec{a}=1\\ \vec{x}\wedge\vec{a}\times\vec{b}=1\end{cases}\longrightarrow\vec{x}\times\vec{a}\wedge\vec{b}=1$$

Introduzimos um terceiro plano

$\vec{x}\times\vec{b}=\lambda$

$\vec{x}=\vec{a}'+(\vec{a}\wedge\vec{b})'+\lambda\,\vec{b}'$

$\delta=\vec{a}\wedge\vec{b}\times(\vec{a}\wedge\vec{b})=|a\wedge b|^2$

$$\vec{x}=\frac{1}{|a\wedge b|^2}\left[(\vec{b}\wedge\vec{a}\wedge\vec{b})+(\vec{a}\wedge\vec{b})+\lambda(\vec{a}\wedge\vec{b}\wedge\vec{a})\right]$$

x

IV) √

$(\vec{u} \wedge \vec{a}) + \vec{u} = \vec{b}$ $\qquad \vec{u} \wedge \vec{a} = \vec{b} - \vec{u}$

$[\vec{a} \times (\vec{b} - \vec{u})] = 0 \rightarrow \vec{a} \times \vec{u} = \vec{a} \times \vec{b}$

$\vec{u} = \frac{a \wedge (\vec{b} - \vec{u})}{|\vec{a}|^2} + \lambda \vec{a}$

$\vec{u} \times \vec{a} = \frac{\vec{a} \wedge (\vec{b} - \vec{u}) \times \vec{a}}{|\vec{a}|^2} + \lambda \vec{a} \times \vec{a} = \vec{a} \times \vec{b}$

$\lambda |\vec{a}|^2 = \vec{a} \times \vec{b} \longrightarrow \lambda = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a}|^2}$

$\vec{u} = \frac{\vec{a} \wedge (\vec{b} - \vec{u})}{|\vec{a}|^2} + \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a}|^2} . a$

$\vec{u} = \frac{(\vec{a} \wedge \vec{b}) - (\vec{a} \wedge \vec{u}) + (a \times \vec{b}).a}{|a|^2}$

$\vec{u} = \frac{\vec{a} \wedge \vec{b} - \vec{u} + \vec{b} + (\vec{a} \times \vec{b}).a}{|a|^2}$

$\vec{u}(1 + |\vec{a}|^2) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{b} + (\vec{a} \times \vec{b}).\vec{a}$

$\vec{u} = \frac{\vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{b} + (\vec{a} \times \vec{b})\vec{a}}{1 + |\vec{a}|^2}$

Sempre tem solução

√ Resolver -

$(\vec{u} \wedge \vec{a}) \wedge \vec{u} = \vec{b}$ $\qquad \vec{u} \times \vec{b} = 0$

$\vec{u} \wedge \vec{a} \times \vec{b} = 0$ ou $\vec{u} \times \vec{a} \wedge \vec{b} = 0$

1º caso) $\vec{a} \wedge \vec{b} \neq 0$ $\qquad \vec{u} = \lambda \vec{b} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b})$

$\vec{u} \wedge \vec{a} = \lambda [\vec{b} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b})] \wedge \vec{a} =$

$= \lambda [(\vec{b} \times \vec{b})\vec{a} - (\vec{a} \times \vec{b})\vec{b}] \wedge \vec{a}$

$\vec{u} \wedge \vec{a} = \lambda (\vec{a} \times \vec{b})(\vec{a} \wedge \vec{b})$

$\vec{u} \wedge \vec{a} \wedge \vec{u} = \lambda [(\vec{a} \times \vec{b})(\vec{a} \wedge \vec{b})] \wedge \lambda [\vec{b} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b})] =$

$= \lambda^2 (\vec{a} \times \vec{b}) [(\vec{a} \wedge \vec{b}) \times (\vec{a} \wedge \vec{b}) \vec{b} - 0 \ldots] =$

$= \lambda^2 (\vec{a} \times \vec{b}) |\vec{a} \wedge \vec{b}|^2 \vec{b} = \vec{b}$

$\longrightarrow \lambda^2 (\vec{a} \times \vec{b}) |\vec{a} \wedge \vec{b}|^2 = 1$

$\lambda^2 = \frac{1}{(\vec{a} \times \vec{b}) |\vec{a} \wedge \vec{b}|^2} \rightarrow \lambda = \frac{1}{|\vec{a} \wedge \vec{b}| . \pm \sqrt{\vec{a} \times \vec{b}}}$

onde $\vec{u} = \pm \frac{\vec{b} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b})}{|\vec{a} \wedge \vec{b}| . \sqrt{\vec{a} \times \vec{b}}}$ $\qquad \vec{a} \times \vec{b} \neq 0 \neq 0$

2º caso) $\vec{a} \wedge \vec{b} = 0$ $\qquad \vec{b} = 0$

$(\vec{u} \wedge \vec{a}) \wedge \vec{u} = 0 \longrightarrow \vec{u} // \vec{a} \rightarrow \vec{u} = \lambda \vec{a}$

3º caso) $\vec{b} = m\vec{a}$ $\qquad (\vec{u} \wedge \vec{a}) \wedge \vec{u} = m\vec{a}$

$m\vec{a} \times \vec{u} = 0$ $\qquad \vec{u} \times \vec{a} = 0$

$(\vec{u} \times \vec{u})\vec{a} - (\vec{a} \times \vec{u})\vec{u} = m\vec{a}$

$|\vec{u}|^2 \vec{a} = m\vec{a} \rightarrow |\vec{u}| = \pm\sqrt{m}$ só sinal +,

logo $\vec{u} \times \vec{a} = 0$, sendo $|\vec{u}| = \sqrt{m}$

Resolver isolada e simultaneamente -

$\vec{u} \wedge \vec{a} = \vec{b}$ $\qquad - \boxed{\vec{u} = \vec{a} \wedge \vec{b} + \lambda \vec{a}}$

$\vec{u} \times c = 1$

Sendo $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ e $c = \vec{a} + \vec{a} \wedge \vec{b}$.

$\vec{u} \times \vec{c} = 1 \rightarrow \vec{u} = \dfrac{\vec{c}}{|\vec{c}|^2} + \vec{l} \wedge \vec{a}$

$|\vec{c}|^2 = |\vec{a} + \vec{a} \wedge \vec{b}|^2 = |a|^2 + 2\vec{a} \times \vec{a} \wedge \vec{b} + |\vec{a} \wedge \vec{b}|$

$\vec{u} = \dfrac{\vec{c}}{2} + \vec{l} \wedge \vec{c} = \dfrac{\vec{a} + \vec{a} \wedge \vec{b}}{2} + \vec{l} \wedge [\vec{a} + (\vec{a}$

$(\vec{a} \wedge \vec{b} + \lambda \vec{a}) \times \vec{c} = 1 \rightarrow \vec{a} \wedge \vec{b} \times \vec{c} + \lambda \vec{a} \times \vec{c} = 1$

$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge (\vec{a} + \vec{a} \wedge \vec{b}) + \lambda \vec{a} \times (\vec{a} + \vec{a} \wedge \vec{b}) =$

$(\vec{a} \wedge \vec{b} \times \vec{a}) + (\vec{a} \wedge \vec{b})^2 + \lambda \vec{a} \times \vec{a} + \lambda \vec{a} \times \vec{a} \wedge \vec{b} =$

$1 + \lambda = 1 \rightarrow \lambda = 0 \rightarrow \boxed{\vec{u} = \vec{a} \wedge \vec{b}}$

Resolver o sistema –

$$\begin{cases} (\vec{u} \wedge \vec{a}) \wedge \vec{b} = \vec{a} \\ (\vec{u} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{a} = \vec{b} \\ [\vec{u} \wedge (\vec{a} + \vec{b})] = \vec{b} - \vec{a} \end{cases} \qquad |\vec{a}| = 1 \quad |\vec{b}| = 2 \quad \vec{a} \times \vec{b} = 0$$

$(\vec{u} \times \vec{b})\,\vec{a} - (\vec{a} \times \vec{b})\,\vec{u} = \vec{a} \rightarrow \vec{u} \times \vec{b} = 1$

$(\vec{u} \times \vec{a})\,\vec{b} - (\vec{b} \times \vec{a})\,\vec{u} = \vec{b} \rightarrow \vec{u} \times \vec{a} = 1$

$\vec{u} \wedge (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{b} - \vec{a} \quad \vec{u} = \dfrac{(\vec{a} + \vec{b}) \wedge (\vec{b} - \vec{a})}{|\vec{a} + \vec{b}|^2} + \lambda(\vec{a} + \vec{b})$

$\vec{u} = \dfrac{2\vec{a} \wedge \vec{b}}{5} + \lambda(\vec{a} + \vec{b})$

$\dfrac{2\vec{a} \wedge \vec{b} \times \vec{b}}{5} + \lambda(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b} = 1 \quad \lambda|b|^2 = 1$

$\lambda = \dfrac{1}{4}$ e $\lambda = 1$

Incompatível.

Resolver a equação –

$(\vec{u} \wedge \vec{a}) \wedge \vec{b} = \vec{u} \wedge \vec{b}$ então –

$(\vec{u} \wedge \vec{a}) \wedge \vec{b} - \vec{u} \wedge \vec{b} = 0$, $\rightarrow$

$[(\vec{u} \wedge \vec{a}) - \vec{u}] \wedge \vec{b} = 0$ segue-se que

$\vec{u} \wedge \vec{a} - \vec{u} = \alpha \vec{b} \rightarrow$

$\vec{u} \wedge \vec{a} = \alpha \vec{b} + \vec{u}$ (0) condição de possibilidade –

$\vec{a} \times (\alpha \vec{b} + \vec{u}) = 0$ isto é, $\vec{a} \times \vec{u} = -\alpha \vec{a} \times \vec{b}$ (1)

Em (0) $\rightarrow \vec{u} = \dfrac{\vec{a} \wedge (\alpha \vec{b} + \vec{u})}{|\vec{a}|^2} + \lambda \vec{a}$ (2) sendo esta

solução desde que (1) tenha sentido.

Determinação de λ $\rightarrow$

$\vec{u} \times \vec{a} = \lambda |\vec{a}|^2 = -\alpha \vec{a} \times \vec{b}$ (em virtude de (1))

logo $\lambda = -\dfrac{\alpha \vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a}|^2}$ Substituindo em (2) $\rightarrow$

$= \dfrac{\vec{a} \wedge (\alpha \vec{b} + \vec{u}) - \alpha \vec{a} \times \vec{b} . \vec{a}}{|\vec{a}|^2}$

$= \dfrac{\alpha \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{u} - \alpha \vec{a} \times \vec{b} . \vec{a}}{|\vec{a}|^2} =$

$= \dfrac{\alpha \vec{a} \wedge \vec{b} - \alpha \vec{b} - \vec{u} - \alpha \vec{a} \times \vec{b} . \vec{a}}{|\vec{a}|^2}$ logo $\rightarrow$

tirando o valor de $\vec{u}$ $\rightarrow$

$\vec{u} = \dfrac{\vec{a} \wedge \vec{b} - \vec{b} - \vec{a} \times \vec{b} . a}{1 + |\vec{a}|^2} . \alpha$ Há portanto uma infinidade de soluções, e elas todas fornecem uma reta.

Resolver o sistema $\begin{cases} \vec{r} \times \vec{a} = \vec{c} & (1) \\ \vec{r} \wedge \vec{a} = \vec{b} \wedge \vec{a} & (2) \end{cases}$ e

discuti-lo.

Uma solução da segunda equação é:
$\vec{r} = \vec{b} + \lambda \vec{a}$ logo
$\vec{r} \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{a} + \lambda |a|^2 = c$ logo,

$\lambda = \dfrac{c - \vec{b} \times \vec{a}}{|\vec{a}|^2}$ Segue-se por fim —

$$\boxed{\vec{r} = \vec{b} + \frac{c - \vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a}.}$$ Sempre solúvel.

1 —

Determinar a resultante invariante, eixo central do sistema A - O, B - O, C - O, B - A, - C + A e C - B, sabendo que O é a origem das coordenadas e que os pontos A, B, C tem respectivamente por coordenadas (a, o, o) (o, b, o) e (o, o, c).

Dar a condição a que devem satisfazer a, b e c para que o sistema seja reduzido a um único vetor.

Temos → $A - O = a\vec{i}$

$B - O = b\vec{j}$

$C - O = c\vec{k}$

$B - A = -a\vec{i} + b\vec{j}$

$A - C = a\vec{i} - c\vec{k}$

$C - B = -b\vec{j} + c\vec{k}$

Resultante —
$\vec{R} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$

Condição de coplanaridade de duas retas: —

$\begin{cases} \vec{r} \wedge \vec{v}_1 = \vec{v}_2 & (1) \\ \vec{r} \wedge \vec{v}_3 = \vec{v}_4 & (2) \end{cases}$ é necessário que ambas tenham um ponto comum. Ora, desde que elas se encontrem, são coplanares.

Daí: —

As condições de existência, ou melhor, de possibilidade das duas equações acima são —

$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = 0 \qquad \vec{v}_3 \times \vec{v}_4 = 0$

Somando (1) e (2) —

$\vec{r} \wedge (\vec{v}_1 + \vec{v}_3) = \vec{v}_2 + \vec{v}_4 \quad (3)$

Para que esta equação seja possível, é indispensável que seja verdadeira a relação

$$(\vec{v}_1 + \vec{v}_3) \times (\vec{v}_2 + \vec{v}_4) = 0,$$

$$\cancel{\vec{v}_1 \times \vec{v}_2} + \vec{v}_1 \times \vec{v}_4 + \vec{v}_3 \times \vec{v}_2 + \cancel{\vec{v}_3 \times \vec{v}_4} = 0$$

Mas $\begin{cases} \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = 0 \\ \vec{v}_3 \times \vec{v}_4 = 0 \end{cases}$, logo

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_4 + \vec{v}_2 \times \vec{v}_3 = 0$$

Condição esta que é a final.

Momento em relação a O:

$M_1 = M_2 = M_3 = 0$

$M_4 = (A-O) \wedge \vec{v_4} = a\vec{i} \wedge (-a\vec{i} + b\vec{j}) = ab\vec{k}$

$M_5 = (B-O) \wedge \vec{v_5} = c\vec{k} \wedge (a\vec{i} - c\vec{k}) = ac\vec{j}$

$M_6 = (B-O) \wedge \vec{v_6} = b\vec{j} \wedge (-b\vec{j} + c\vec{k}) = bc\vec{i}$

Logo

$\vec{M_0} = M_4 + M_5 + M_6 + 0 + 0 + 0 = bc\vec{i} + ac\vec{j} + ab\vec{k}$

Invariantes - $I_1 = \vec{R} \times \vec{R} = a^2 + b^2 + c^2$

$I_2 = \vec{M_0} \times \vec{R} = 3abc$

Condição para que o sistema se reduza a um só vetor - $abc = 0$

Eixo central -

$$E - O = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M_0}}{|R|^2} + \lambda \vec{R}$$

$$\vec{R} \wedge M_0 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ bc & ac & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\vec{i} & b\vec{j} & c\vec{k} \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$= a(b^2-c^2)\vec{i} + b(c^2-a^2)\vec{j} + c(a^2-b^2)\vec{k}$ Logo -

$$E - O = \frac{a(b^2-c^2)\vec{i} + b(c^2-a^2)\vec{j} + c(a^2-b^2)\vec{k}}{a^2 + b^2 + c^2} + \lambda(a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k})$$

—— // ——

Determinar a equação da reta que passa por um ponto e se apoia em duas outras retas não coplanares.

Sejam $P_0 = O + \vec{r}$

$\vec{x} \wedge \vec{a} = \vec{b} \qquad \vec{x} \wedge \vec{c} = \vec{d}$

A equação de uma reta qq. passando por P_0 é $\vec{x} \wedge \vec{y} = \vec{r} \wedge \vec{y}$

Desconhecemos a direção de $\vec{y}$

Obrigando esta reta a ser coplanar a cada uma das retas dadas, obtemos

$$\begin{cases} \vec{y} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{r} \wedge \vec{y} = 0 \\ \vec{y} \times \vec{d} + \vec{c} \times \vec{r} \wedge \vec{y} = 0 \end{cases}$$

Isto é,

$$\begin{cases} \vec{y} \times (\vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{r}) = 0 \quad \text{I} \\ \vec{y} \times (\vec{d} + \vec{c} \wedge \vec{r}) = 0 \quad \text{II} \end{cases}$$

conclue-se que $\vec{y}$ é perpendicular aos dois vetores de I e II logo

$$\vec{y} = (\vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{r}) \wedge (\vec{d} + \vec{c} \wedge \vec{r})$$

Substituindo na equação inicial vir

$$\vec{x} \wedge [(\vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{r}) \wedge (\vec{d} + \vec{c} \wedge \vec{r})] = r \wedge [(b + \vec{a} \wedge \vec{r}) \ldots$$

que é a solução para o problema, e única.

Resolver a equação -

$$[(\vec{x} \wedge \vec{a}) \wedge \vec{b}] \wedge \vec{c} = \vec{d}$$

A primeira condição é que $\vec{c} \times \vec{d} = 0$ mais

$$(\vec{x} \wedge \vec{a}) \wedge \vec{b} \times \vec{d} = 0$$

Então,

1º) $\vec{b} \wedge \vec{d} \neq 0$ logo

$\vec{x} \wedge \vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{d}$ são coplanares

e $\vec{x} \wedge \vec{a} = \alpha \vec{b} + \beta \vec{d}$.

Para que isto seja possivel,

$$\vec{a} \times (\alpha \vec{b} + \beta \vec{d}) = 0 \rightarrow \alpha \vec{a} \times \vec{b} + \beta \vec{a} \times \vec{d}$$

Substituindo $\vec{x} \wedge \vec{a}$ na equação inicial

$$[(\alpha \vec{b} + \beta \vec{d}) \wedge \vec{b}] \wedge \vec{c} = \vec{d} \rightarrow$$

$$\beta (\vec{d} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} = \vec{d} \rightarrow -\beta \vec{b} \times c . d = d \rightarrow$$

$$\ldots = -\frac{1}{\vec{b} \times \vec{c}}$$ Sendo $\vec{b} \times \vec{c} = 0$ a equação é insolúvel.

Substituindo este valor em $\vec{x} \wedge \vec{a} \rightarrow$

$$\vec{x} \wedge \vec{a} = \alpha \vec{b} - \frac{\vec{d}}{\vec{b} \times \vec{c}}$$

Onde α é dado pela relação $\alpha \vec{a} \times \vec{b} + \frac{\vec{a} \times \vec{d}}{\vec{b} \times \vec{c}} = 0 \rightarrow$

Dois casos se apresentam agora -

$\vec{a} \times \vec{b} = 0$ e $\vec{a} \times \vec{d} \neq 0 \rightarrow \alpha$ não existe e não há solução

$\vec{a} \times \vec{b} = 0$ e $\vec{a} \times \vec{d} = 0 \rightarrow \alpha$ é indeterminado.

$\vec{a} \times \vec{b} \neq 0$ $\rightarrow$ um só valor para $\alpha \rightarrow$

$$\alpha = \frac{\vec{a} \times \vec{d}}{(\vec{a} \times \vec{b}) . (\vec{b} \times \vec{c})}$$

Obtido α, pode-se calcular $\vec{x}$ considerando a ultima expressão de $\vec{x} \wedge \vec{a} \rightarrow$

$$\vec{x} = \frac{1}{|\vec{a}|^2} \left[\alpha \vec{a} \wedge \vec{b} - \frac{\vec{a} \wedge \vec{d}}{\vec{b} \times \vec{c}} \right] + \lambda \vec{a}$$

Logo - uma reta de acordo com $\underline{c}$

um plano de acordo com $\underline{b}$

Resta considerar.

2) $\vec{b} \wedge \vec{d} = 0$

Neste caso $\vec{d} = m\vec{b}$

Segue-se $[(\vec{u} \wedge \vec{a}) \wedge \vec{b}] \wedge \vec{c} = m\vec{b}$ cuja condição é

$\vec{b} \times \vec{c} = 0$ Desenvolvendo o duplo produto vetorial —

$(\vec{u} \wedge \vec{a} \times \vec{c})\vec{b} - \vec{0} = m\vec{b}$ logo

$\vec{u} \times \vec{a} \wedge \vec{c} = m$ Portanto —

$\vec{u} = \frac{m}{(\vec{a} \wedge \vec{c})^2} \vec{a} \wedge \vec{c} - \ell \wedge \vec{a} \wedge \vec{c}$ que é

equação de um plano.

Discussão —

i) $\vec{b} \wedge \vec{d} \neq 0$ ($\vec{b} \times \vec{c} = 0$) — a) $\vec{b} \times \vec{c} \neq 0$ $\begin{cases} \vec{a} \times \vec{b} \neq 0 \text{ (1 s...} \\ \text{paral...} \\ \vec{a} \times \vec{b} = 0 \text{ (inso...} \\ \text{ou indetermina...} \\ \text{plano} \perp \text{a } \vec{b} \end{cases}$

b) $\vec{b} \times \vec{c} = 0$ Não há solu...

ii) $\vec{b} \wedge \vec{d} = 0$ ($\vec{b} \times \vec{c} = 0$) — $\vec{a} \wedge \vec{c} \neq 0$ — $\vec{u}$ representa um plano normal a $\vec{a} \wedge \vec{c}$

$\vec{a} \wedge \vec{c} = 0$ a equação não tem solução.

iii) $\vec{b} \wedge \vec{d} = 0$ e $\vec{b} \times \vec{c} \neq 0$ não há solução

Determinar a equação da reta que passa por um ponto, apoia-se numa reta e é paralela a um plano.

Consideremos $P_0 = O + \vec{r}$, uma reta $\vec{u} \wedge \vec{a} = \vec{b}$ e um plano $\vec{u} \times \vec{d} = \vec{c}$.

A equação de uma reta passando por P_0 é $\vec{u} \wedge \vec{y} = \vec{r} \wedge \vec{y}$.

Obrigando esta reta a verificar as outras duas condições do problema virá —

$\vec{y} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{r} \wedge \vec{y} = 0$

$\vec{y} \times \vec{d} = 0$

Portanto $\begin{cases} \vec{y} \times (\vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{r}) = 0 \\ \vec{y} \times \vec{d} = 0 \end{cases}$

Suposta uma solução única ao problema, virá $\vec{y} = \vec{d} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{r}$, valor este que fornece o valor de $\vec{u}$ —

$\vec{u} \wedge [\vec{d} \wedge (\vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{r})] = \vec{r} \wedge [\vec{d} \wedge (\vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{r})]$

Operadores vetoriais.

Operador i.

De sua definição decorre —

$|i.\vec{v}| = |\vec{v}|$

Propriedades —

1) $i(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = i\vec{v}_1 + i\vec{v}_2$

Temos $k \wedge (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = k \wedge \vec{v}_1 + k \wedge \vec{v}_2 = i\vec{v}_1 + i\vec{v}_2$ cqd.

2) $i.m\vec{v} = m.i\vec{v}$ Com efeito

$|\vec{k} \wedge m\vec{v}| = 1.|m|.|\vec{v}| = m.\vec{k}\wedge\vec{v} = mi\vec{v}$

3) $i\vec{r} \times i\vec{s} = \vec{r} \times \vec{s}$

$(\vec{k}\wedge\vec{r}) \times \vec{k}\wedge\vec{s} = (\vec{k}\wedge\vec{r})\wedge\vec{k}\times\vec{s} =$

$= [(\vec{k}\times\vec{k})\vec{r} - (\vec{r}\times\vec{k})\vec{k}]\times\vec{s} = \vec{r}\times\vec{s}$ c.q.d.

4) $i.\vec{r}\wedge i.\vec{s} = \vec{r}\wedge\vec{s}$ C/ efeito ?

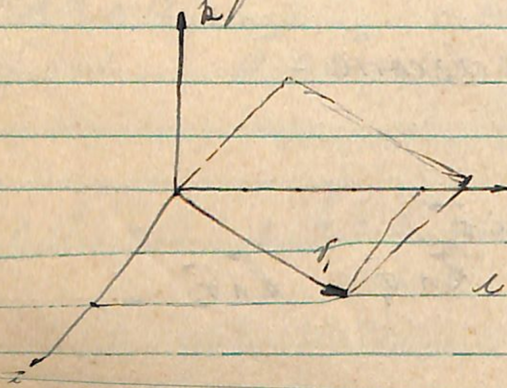
$(\vec{k}\wedge\vec{r})\wedge(\vec{k}\wedge\vec{s}) = (\vec{k}\wedge\vec{r}\times\vec{s})\vec{k} - (\vec{k}\times\vec{s})(\vec{k}\wedge$

$|(\vec{k}\wedge\vec{r}\times\vec{s})\vec{k}| =$

Extende-se o operador –

$i^2\vec{r} = -\vec{r}$

Um lado de um quadrado tem a direção e medida dadas pelo vetor $\vec{v}_1 = 2\vec{i} + 4\vec{j}$. Determinar a medida de sua diagonal auxílio do operador i e de $\vec{v}_1$.



$\vec{\delta} = \vec{v}_1 + i.\vec{v}_1$

$i = \vec{k}\wedge$

$i\vec{v}_1 = \vec{k}\wedge(2\vec{i}+4\vec{j}) =$

$= 2\vec{j} - 4\vec{j}$

Logo $\delta = 2i + 4j + 2j - 4i = -2i + 6j$

$|\delta| = \sqrt{2}\sqrt{20}$

O lado menor de um retangulo assente no plano $(\vec{i}, \vec{j})$ tem a direção e medida dadas pelo vetor $\vec{v}_1 = \vec{i} + 2\vec{j}$. Determinar o vetor da diagonal sabendo-se que um lado é cinco vezes menor que o outro.

Temos $i\vec{v}_1 = \vec{k}\wedge\vec{v}_1 = \vec{k}\wedge(\vec{i}+2\vec{j}) = \vec{j} - 2\vec{i}$

Calculêmos o vetor unitário que lhe corresponde $\vec{u} = \dfrac{i\vec{v}_1}{|\vec{v}_1|} = \dfrac{\vec{j}-2\vec{i}}{\sqrt5}$

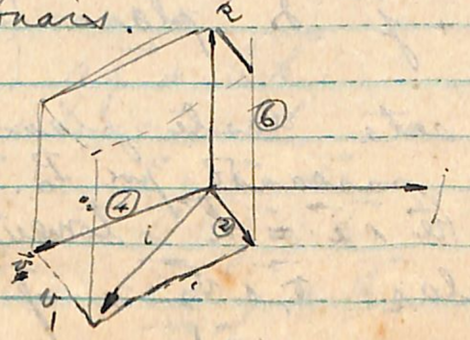
Segue-se que $\vec{v}_2 = 5\sqrt5.\vec{u} = 5.(\vec{j}-2\vec{i})$, isto multiplicando por $5\sqrt5$, que é o novo modulo.

O vetor da diagonal será

$\vec\delta = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{i} + 2\vec{j} - 10\vec{i} + 5\vec{j} = -9\vec{i} + 7\vec{j}$

$|\vec\delta| = \sqrt{130}$

Um prisma reto tem para medida de suas arestas, 2, 4, 6. A direção e medida de uma delas é dada pelo vetor $\vec{v} = 3\vec{i} + \sqrt7\vec{j}$. Determinar o vetor de uma das diagonais.



~~logo $\vec{\delta} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{j} - 4\vec{i}\vec{k}$~~
~~$= -2\vec{i} + 6\vec{j}$~~
~~$|\vec{\delta}| = \sqrt{4+36} = \sqrt{2}\,\sqrt{20}$~~

Temos o vetor de modulo 4, $\vec{v}_1$, procuremos os outros dois.

Ora $i\vec{v} = k \wedge (3\vec{i} - \sqrt{7}\vec{j}) = \vec{j} + \sqrt{7}\vec{i}$, o vetor que corresponde a este será

$$\vec{v}_1 = 2 \cdot \frac{i\vec{v}}{|\vec{v}|} = 2 \cdot \frac{3\vec{j} + \sqrt{7}\vec{i}}{4} = \frac{1}{2}(3\vec{j} + \sqrt{7}\vec{i})$$

Já temos um vetor unitario perpendicular a $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ e este é $i = \frac{3i - \sqrt{7}\vec{j}}{4}$

Então $\vec{v}_2 \rightarrow i\vec{v}_1 = \frac{1}{4}(3\vec{i} - \sqrt{7}\vec{j}) \wedge \frac{1}{2}(3\vec{j} + \sqrt{7}\vec{i})$

$= \frac{1}{8}(9\vec{k} + 7\vec{k}) = 2k \quad \therefore \vec{v}_2 = 6 \cdot \frac{i\vec{v}_1}{|\vec{v}_1|} = 6k$

O vetor da diagonal será

$$\vec{\delta} = \vec{v} + \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = 3\vec{i} - \sqrt{7}\vec{j} + \frac{3}{2}\vec{j} + \frac{\sqrt{7}}{2}\vec{i} + \ldots$$

$$\vec{\delta} = \left(3 + \frac{\sqrt{7}}{2}\right)\vec{i} + \left(\frac{3}{2} - \sqrt{7}\right)\vec{j} + 6\vec{k}.$$

x

Dada a reta $\vec{r} = \vec{r} \wedge \vec{i} = \vec{k}$ e o ponto $P_0 = O + \frac{\vec{i}}{2} + \vec{j}$ & plano (O, r)

Determinar a reta deste plano perpendicular a r e passando por P_0.

Na equação $\vec{r} \wedge \vec{i} = \vec{k}$ tomemos uma solução particular $\frac{\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2}{|\vec{v}_1|} = \frac{-\vec{j}}{1} = -\vec{j}$ que está no plano $(\vec{i}, \vec{j})$ logo $\vec{r}$ está nesse plano.

A reta $\perp$ a r é paralela a $\vec{j}$ pois r é paralela a $\vec{i}$; esta será

$\wedge \vec{v}_1 = \vec{v}_2$ Será $\vec{v}_1 = i \cdot \vec{i} = \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$

onde $\vec{r} \wedge \vec{j} = \vec{v}_2$, satisfazendo a P_0, deverá ser

$(P_0 - O) \wedge \vec{j} = \vec{v}_2 \rightarrow \left(\frac{\vec{i}}{2} + \vec{j}\right) \wedge \vec{j} = \frac{\vec{k}}{2} = v_2$,

logo $\boxed{\vec{r} \wedge \vec{j} = \frac{\vec{k}}{2}}$ é a reta pedida.

Vetores aplicados.

Dado o sistema $\vec{v}_1 = \vec{j} + \vec{k} \rightarrow P_1 = O - \vec{i} - \vec{j}$

$\vec{v}_2 = -\vec{i} + \vec{k} \longrightarrow P_2 = O + \vec{j} + \vec{k}$

$\vec{v}_3 = \vec{i} + \vec{j} \longrightarrow P_3 = O + \vec{i} + \vec{k}$

Determinar o vetor $\vec{v}_4$ perpendicular a $\vec{i}$, a ser aplicado no ponto $P_4 = O + \vec{k}$, de modo que o eixo central dos quatro vetores passe pela origem.

Devemos ter $\vec{R} \wedge \vec{M}_0 = 0$. Será M_0 o momento minimo.

Será $\vec{v}_4 = a\vec{j} + b\vec{k}$

Momento minimo $M_0 \longrightarrow$

$(P_1 - O) \wedge \vec{v}_1 = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$

$(P_2 - O) \wedge \vec{v}_2 = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$

$(P_3 - O) \wedge \vec{v}_3 = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

$(P_4 - O) \wedge \vec{v}_4 = -a\vec{i}$ somando —

$M_0 = -(a+1)\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

Resultante $- \vec{R} = 2\vec{j} + 2\vec{k} + a\vec{j} + b\vec{k} =$
$(a+2)\vec{j} + (b+2)\vec{k}$

Efetuando o produto vetorial

$\vec{R} \wedge \vec{M_0} = 0$

$\vec{R} \wedge \vec{M_0} = (a+2)\vec{i} - (b+2)\vec{i} - (a+1)(b+2)\vec{j} + ($
$= 0$

Para isto, devemos ter: $\begin{cases} (a-b) = 0 \\ (a+1)(b+2) = 0 \\ (a+1)(a+2) = 0 \end{cases}$

~~$(a+1)(a+2)b = 0$~~

$a = b$, $a+1 = 0$ e $(a+2) = 0$

donde $a = b = -1$ ou

$a = b = -2$ daqui

$\vec{v_4} = -\vec{j} - \vec{k}$ ou $\vec{v_4} = -2\vec{j} - 2\vec{k}$.

Resolver

$\vec{u} \wedge \vec{a} = (\vec{u} \times \vec{a})\vec{b} \rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0$ e
$\vec{u} \times \vec{b} = 0$ logo

$\vec{u} = \vec{l} \wedge \vec{b}$ Substituindo na equação -

$(\vec{l} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{a} = (\vec{l} \wedge \vec{b} \times \vec{a})\vec{b}$

$(\vec{l} \times \vec{a})\vec{b} = (\vec{l} \times \vec{b} \wedge \vec{a})\vec{b} \longrightarrow$

$\vec{l} \times \vec{a} = \vec{l} \times \vec{b} \wedge \vec{a} \longrightarrow$

$\vec{l} \times (a + \vec{a} \wedge \vec{b}) = 0$ logo

$\vec{l} = \vec{\lambda} \wedge (\vec{a} + \vec{a} \wedge \vec{b})$ e por fim

$\vec{u} = [\vec{\lambda} \wedge (\vec{a} + \vec{a} \wedge \vec{b})] \wedge \vec{b}$.

Baixar de um ponto, uma perpendicu[lar] sobre uma reta dada.

o ponto seja $P_0 = O + \vec{r}$ e a reta $\vec{u} \wedge \vec{a} = \vec{b}$

Uma reta passando por P_0 será

$\wedge \vec{y} = \vec{r} \wedge \vec{y}$, para satisfazer ao proble[ma]

$\begin{cases} \vec{y} \times \vec{a} = 0 \text{ e} \\ \vec{y} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{r} \wedge \vec{y} = 0 \text{ ou} \end{cases}$

$\begin{cases} \vec{y} \times \vec{a} = 0 \\ \vec{y} \times (\vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{r}) = 0 \end{cases}$ Portanto

$= \vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{r})$ e a equação da reta será

$\vec{u} \wedge [\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{r})] = \vec{r} \wedge [\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{r})]$.

Dada a reta $r \equiv \vec{u} \wedge (\vec{i} + \vec{j}) = \vec{i} + \vec{k}$ e o ponto $= O + \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ do plano (O, r) determinar a reta desse plano e perpendicular a r passando por P_0.

Reta perpendicular a $r \rightarrow \vec{u} \wedge \vec{v_1} = \vec{v_2}$

$\vec{i} = \dfrac{\vec{i} - \vec{k}}{\sqrt{2}} \wedge i(\vec{i} + \vec{j}) = \vec{v_1}$

$\dfrac{\vec{i} - \vec{k}}{\sqrt{2}} \wedge (\vec{i} + \vec{j}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{k} - \vec{j} + \vec{i})$

$\vec{u} \wedge \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = \vec{v_2}$

$(P_0 - O) \wedge \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = \vec{v_2}$

$\vec{v_2} = \dfrac{3(\vec{i} - \vec{k})}{\sqrt{2}}$

$\vec{u} \wedge (\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = 3(\vec{i} - \vec{k})$

Achar a distancia do polo O à reta

$r = \vec{u} \wedge \vec{v}_1 = \vec{v}_2$

$$\vec{v}_2 = \frac{i\,\vec{v}_1}{|\vec{v}_1|}\,|\vec{v}_2|$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v}_1 = \frac{|\vec{v}_2|}{|\vec{v}_1|}\, i\, \vec{v}_1 \qquad \vec{u} \wedge \vec{v}_1 = \vec{v}_2 \rightarrow$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2}{|\vec{v}_1|^2} \qquad \vec{u}_0 = \frac{|\vec{v}_2|}{|\vec{v}_1|} \cdot \frac{\vec{v}_1 \wedge i\,\vec{v}_1}{|\vec{v}_1|^2}$$

Em modulo - $|\vec{u}_0| = \frac{|\vec{v}_2|}{|\vec{v}_1|} \cdot 1$

$$d = |\vec{u}_0| = \frac{|\vec{v}_2|}{|\vec{v}_1|}$$

Se fosse de um ponto P_0

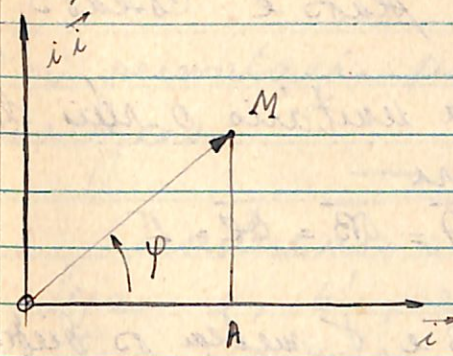
$$(P-O) \wedge \vec{v}_1 = \vec{v}_2 \qquad \left[(P-P_0) + (P_0-O)\right] \wedge \vec{v}_1 = \vec{v}_2$$

$$(P-P_0) \wedge \vec{v}_1 + (P_0-O) \wedge \vec{v}_1 = \vec{v}_2$$

$$(P-P_0) \wedge \vec{v}_1 = \vec{v}_2 - (P_0-O) \wedge \vec{v}_1$$

$$|P-P_0| = \frac{|\vec{v}_2 - (P_0-O) \wedge \vec{v}_1|}{|\vec{v}_1|^2}$$

Operador $e^{i\varphi}$



$$(M-O) = (A-O) + (M-A)$$

$$(A-O) = \cos\varphi\,\vec{i}$$

$$(M-A) = \text{sen}\,\varphi\, i\,\vec{i} = i\,\text{sen}\,\varphi\,\vec{i}$$

$$(M-O) = (\cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi)\,\vec{i}$$

$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi$ (Euler - Análise)

$$M-O = e^{i\varphi}\,\vec{i}$$

$$(M-O)\,|\vec{r}| = |\vec{r}|\,e^{i\varphi}\,\vec{i} = e^{i\varphi}\,\vec{r}$$

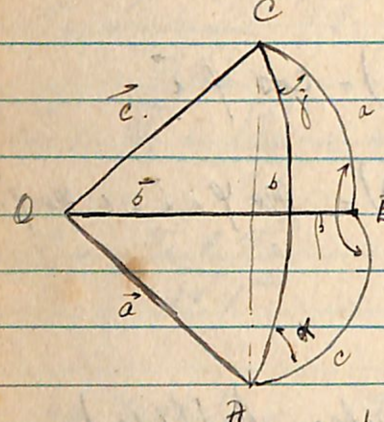
$$\vec{v} = e^{i\varphi}\,\vec{r} \qquad |\vec{v}| = |\vec{r}|$$

Cálculo aplicado à Trigonometria esferica.

Triangulo esferico é a parte da superficie esferica limitada por três arcos de circulos maximos.

Deducção da lei dos senos e cosenos

Seja unitário o raio da esfera.



$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = 1$

α, β e γ medem os diedros

Seja a identidade —

$$\vec{a}\wedge\vec{b} \times \vec{a}\wedge\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{a}\times\vec{a} & \vec{a}\times\vec{c} \\ \vec{b}\times\vec{a} & \vec{b}\times\vec{c} \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{a}\times\vec{a} \, . \, \vec{b}\times\vec{c} - \vec{b}\times\vec{a} \, . \, \vec{a}\times\vec{c}$$

Aplicando-se as definições de produto escalar e vetorial.

$|\vec{a}\wedge\vec{b}| = \text{sen } c$ $\qquad \vec{a}\times\vec{a} = 1$

$\vec{b}\times\vec{c} = \cos a$

$|\vec{a}\wedge\vec{c}| = \text{sen } \beta$ $\qquad \vec{b}\times\vec{a} = \cos c$

$\vec{a}\times\vec{c} = \cos b$

$\vec{a}\wedge\vec{b} \, , \, \vec{a}\wedge\vec{c} = \alpha .$

Substituindo

$$\text{sen } c \, . \, \text{sen } b \, . \cos\alpha = \cos a - \cos c \, . \cos b$$

$$\boxed{\cos a = \cos c \, . \cos b + \text{sen } b \, . \, \text{sen } c \, . \cos\alpha}$$

que é a lei dos cosenos.

Por permutação circular obtem-se outras analogas.

— " —

Consideremos o triedro recíproco.

Sejam a', b', e c' os vetores unitários do triedro recíproco.

Identidade analoga á anterior —

$$a'\wedge b' \times a'\wedge c' = a'\times a' . \, b'\times c' - b'\times a' . \, a'\times c'$$

Aplicando-se as definições —

$\vec{a}' , \vec{b}' = \pi - \gamma$

$|\vec{a}'\wedge\vec{b}'| = \text{sen } \gamma$ $\qquad |\vec{a}'\wedge\vec{c}'| = \text{sen } \beta .$

Substituindo —

$$-\text{sen } \gamma . \, \text{sen } \beta . \cos a = -\cos\alpha - \cos\gamma . \cos\beta .$$

$$\boxed{-\cos\alpha = \cos\gamma \cos\beta - \text{sen } \gamma . \, \text{sen } \beta . \cos a}$$

Lei dos cosenos para os angulos diedros.

Identidade —

$$\vec{a} \times [(\vec{c}\wedge\vec{a})\wedge(\vec{a}\wedge\vec{b})] = \vec{b} \times [(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c})] =$$

$$= \vec{c} \times [(\vec{b}\wedge\vec{c})\wedge(\vec{c}\wedge\vec{a})]$$

Todas representam o produto mixto
$\vec{a} \wedge \vec{b} \times \vec{c}$.

$|c \wedge a| = \text{sen}\, b \qquad |a \wedge b| = \text{sen}\, c$

$\text{sen}\, b.\, \text{sen}\, c.\, \text{sen}\, \alpha = \text{sen}\, c.\, \text{sen}\, a.\, \text{sen}\, \beta = \text{sen}\, a.\, \text{se}$

Dividindo por $\text{sen}\, a.\, \text{sen}\, b.\, \text{sen}\, c$.

$$\boxed{\frac{\text{sen}\, \alpha}{\text{sen}\, a} = \frac{\text{sen}\, \beta}{\text{sen}\, b} = \frac{\text{sen}\, \gamma}{\text{sen}\, c}}$$

— // —

Operador $e^{i\varphi}$. Propriedades.

$e^{i\varphi}(e^{i\alpha}\vec{r}) = e^{i(\varphi+\alpha)}\vec{r}$

$e^{i\varphi_1}[e^{i\varphi_2}(e^{i\varphi_3}\vec{r})] = e^{i\varphi_1}[e^{i(\varphi_2+\varphi_3)}\vec{r}] = e^{i(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3)}$

$e^{i\varphi_1}\{e^{i\varphi_2}[e^{i\varphi_3} \dots e^{i\varphi_n}\}\vec{r} = e^{i\sum_1^n \varphi_i}\vec{r}$

Se todos os angulos forem iguais a

$e^{in\varphi} = (\cos n\varphi + i\, \text{sen}\, n\varphi)\vec{\pi}$

Fazendo $n\varphi = \pi$ temos

$(\cos\pi + i\, \text{sen}\, \pi)\vec{r} = e^{i\pi}\vec{r} = -\vec{r}$

$\cos\pi + i\, \text{sen}\, \pi = -1$

Reciproco de $e^{i\varphi}$

$e^{-i\varphi}\vec{v} = (\cos\varphi - i\, \text{sen}\, \varphi)\vec{v}$

Com efeito,

$$\frac{1}{\cos\varphi + i\, \text{sen}\, \varphi} \cdot \frac{\cos\varphi - i\, \text{sen}\, \varphi}{\cos\varphi - i\, \text{sen}\, \varphi} = (\cos\varphi - i\, \text{sen}\, \varphi)$$

$$\boxed{e^{i\varphi} = \frac{1}{e^{-i\varphi}}}$$

$e^{i\varphi}\vec{r} \times e^{i\varphi}\vec{s} = \vec{r} \times \vec{s}$

Vejamos antes que

$$\left\{\begin{array}{l}\vec{r} \times i\vec{s} + i\vec{r} \times s = 0 \\ \vec{r} \times \vec{k} \wedge \vec{s} + \vec{k} \wedge \vec{r} \times \vec{s} = 0\end{array}\right.$$

Depois —

$(\cos\varphi + i\, \text{sen}\, \varphi)\vec{r} \times (\cos\varphi + i\, \text{sen}\, \varphi)\vec{s} =$

$= (\cos\varphi.\, \vec{r} + i\, \text{sen}\, \varphi.\vec{r}) \times (\cos\varphi.\, \vec{s} + i\, \text{sen}\, \varphi.\, \vec{s}) =$

$= \cos^2\varphi(\vec{r} \times \vec{s}) + \cos\varphi.\, \text{sen}\, \varphi(\vec{r} \times i\vec{s}) +$

$+ \text{sen}\, \varphi.\, \cos\varphi\, (i\vec{r} \times \vec{s}) + \text{sen}^2\varphi\, (\vec{r} \times \vec{s}) =$

$= \vec{r} \times \vec{s}(\cos^2\varphi + \text{sen}^2\varphi) =$

$= \vec{r} \times \vec{s}$

[signature]

$e^{i\varphi}\vec{r} \wedge e^{i\varphi}\vec{s} = \vec{r} \wedge \vec{s}$

$(\cos\varphi . \vec{r} + \mathrm{sen}\,\varphi . i . \vec{r}) \wedge (\cos\varphi . \vec{s} + \mathrm{sen}\,\varphi . i$

$= \cos^2\varphi (\vec{r} \wedge \vec{s}) + \mathrm{sen}^2\varphi (\vec{r} \wedge \vec{s}) +$
$+ \mathrm{sen}\varphi \cos\varphi [i\vec{r} \wedge \vec{s} + \vec{r} \wedge i\vec{s}] =$

$= \vec{r} \wedge \vec{s} (\cos^2\varphi + \mathrm{sen}^2\varphi) = \vec{r} \wedge \vec{s}.$

Dar ao vetor $\vec{i} + 2\vec{j}$ uma rotação de
° no plano $(\vec{i}, \vec{j})$ no sentido positivo.
$\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} \qquad 60° = \frac{\pi}{3}$
Aplicando $e^{i\varphi}$

$e^{i\frac{\pi}{3}}\vec{v} = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i \,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)(\vec{i} + 2\vec{j}) =$

$= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)(\vec{i} + 2\vec{j}) =$

$= \frac{1}{2}(\vec{i} + 2\vec{j}) + \frac{\sqrt{3}}{2} i (\vec{i} + 2\vec{j}) =$

$= \frac{1}{2}(\vec{i} + 2\vec{j}) + \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{k} \wedge (\vec{i} + 2\vec{j}) =$

$= \frac{\vec{i}}{2} + \vec{j} + \frac{\sqrt{3}}{2}(\vec{j} - 2\vec{i})$ que é o

vetor procurado. (w) Então
$$\vec{w} = -\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) i + \left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right) j$$

Dar uma rotação de $\pi/6$ ao mesmo
vetor no seu plano vertical.
O vetor k sobre o qual ele deve girar
será $\perp$ a $\vec{v}$ e ao eixo de $\vec{k}$.
Será então –
$\vec{t} = e^{i\frac{\pi}{6}}\vec{v}$
O vetor da rotação será portanto –
$i = \frac{\vec{v} \wedge k}{|\vec{v} \wedge k|} \wedge = = \frac{\vec{j} + 2\vec{i}}{\sqrt{5}}$ logo $i = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\vec{i} - \vec{j}) \wedge$
daí – $\vec{t} = \left(\cos\frac{\pi}{6} + i \,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6}\right)\vec{v} =$
$= \left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} . \frac{1}{\sqrt{5}}(2\vec{i} - \vec{j}) \wedge\right](\vec{i} + 2\vec{j}) =$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}(\vec{i} + 2\vec{j}) + \frac{1}{2\sqrt{5}}(4\vec{k} + \vec{k}) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j} + \frac{\sqrt{5}}{2}\vec{k}$$

//

Resolver o sistema

$$\begin{cases} \vec{u} \wedge \vec{a} = \vec{a} \wedge \vec{b} \\ \vec{u} \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge \vec{b} \end{cases}$$

Se o sistema admitir solução esta satisfará tambem a equação obti por diferença:

$$\vec{u} \wedge (\vec{a} - \vec{b}) = 0$$

Portanto –

$\vec{u} = l(\vec{a} - \vec{b})$, substituindo na equação –

$$\begin{cases} l(\vec{a} - \vec{b}) \wedge \vec{a} = \vec{a} \wedge \vec{b} \\ l(a - b) \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge \vec{b} \end{cases} \quad \text{logo}$$

$$\begin{cases} l\,\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge \vec{b} \\ l\,\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge \vec{b} \end{cases} \quad \vec{a} \wedge \vec{b} \neq 0 \rightarrow l = 1$$

e $\vec{a} \wedge \vec{b} = 0$ $\underline{l}$ indet.

//

Campo de momentos

O conjunto de todas as velocidades de um solido em movimento é um campo de momentos.

Dados três momentos, o sistema fica caracterizado.

Determinar a condição para que três vetores aplicados determinem um campo de momentos, supondo os pontos de aplicação não em linha reta.

Sejam $\vec{M}_1(P_1)$, $\vec{M}_2(P_2)$, $\vec{M}_3(P_3)$ pontos.

Suposto que esses três vetores pertençam a um mesmo campo de momentos devemos ter

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{R} \wedge (P - P_1)$$
$$\vec{M} = \vec{M}_2 + \vec{R} \wedge (P - P_2)$$
$$\vec{M} = \vec{M}_3 + \vec{R} \wedge (P - P_3)$$

Suponhamos que P não pertença ao plano P_1, P_2, P_3.

Os pontos do plano P_1, P_2, P_3 podem ser considerados em seguida.

Determinemos a condição de compatibilidade do sistema –

$$\vec{R} \wedge (P - P_1) = \vec{M} - \vec{M}_1$$
$$\vec{R} \wedge (P - P_2) = \vec{M} - \vec{M}_2$$
$$\vec{R} \wedge (P - P_3) = M - \vec{M}_3$$

Estas três retas não sendo por hipótese coplanares, para se cortarem (condição) basta que se cortem duas a duas, e portanto –

$$(P - P_i) \times (\vec{M} - \vec{M}_j) + (P - P_j) \times (\vec{M} - \vec{M}_i) = 0$$

compondo as equações duas a duas.

Ou $(P - P_i) \times (\vec{M} - \vec{M}_i + \vec{M}_i - \vec{M}_j) + (P - P_j) \times (\vec{M} - \vec{M}_j + \vec{M}_j - \vec{M}_i) = 0$

Levando em consideração as condições de existência de cada equação

$$(P-P_i)\times(\vec{M}_i-\vec{M}_j)+(P-P_j)\times(\vec{M}_j-\vec{M}_i)=$$

ou $(P-P_i-P+P_j)\times(\vec{M}_i-\vec{M}_j)=0$

$(P_j-P_i)\times(\vec{M}_i-\vec{M}_j)=0$ isto é,

$$\boxed{\vec{M}_i\times(P_i-P_j)=\vec{M}_j\times(P_i-P_j)}$$

que são as condições.

Conclusão - os vetores dados $\vec{M}_1$, ... $\vec{M}_3$ devem possuir as mesmas proj... dois a dois sôbre as retas, que unem os pontos de aplicação co...pondentes.

— * —

Exercícios sobre campo de momentos (Bonny)

Dados os vetores pertencentes a um ...po de momentos, $\vec{M}_1(\alpha,1,1)$ $P_1(1,0,0)$

$\vec{M}_2(2,\beta,2)$ $P_2(0,1,0)$

$\vec{M}_3(3,3,\gamma)$ $P_3(0,0,1)$

Determinar α, β, γ, $\vec{R}$, $\vec{M}_0$, I_2 e E_c ... sistema de vetores aplicados, correspon...tes a este campo de momentos.

A condição necessaria e suficiente p...a que os três momentos determinem ...n campo é:

$(\vec{M}_i-\vec{M}_j)\times(P_i-P_j)=0$, portanto,

$[(\alpha-2)\vec{i}+(1-\beta)\vec{j}+\vec{k}]\times(\vec{i}-\vec{j})=0$

$[(\alpha-3)\vec{i}+(1-3)\vec{j}+(1-\gamma)\vec{k}]\times(\vec{i}-\vec{k})=0$

$[\vec{i}+(\beta-3)\vec{j}+(2-\gamma)\vec{k}]\times(\vec{j}-\vec{k})=0$

...ñ as três relações de condição ...daqui -

$$\begin{cases}\alpha-2-1+\beta=0\\ \alpha-3-1+\gamma=0\\ \beta-3-2+\gamma=0\end{cases}\qquad\begin{cases}\alpha+\beta-3=0 & \text{(I)}\\ \alpha+\gamma-4=0 & \text{(II)}\\ \beta+\gamma-5=0 & \text{(III)}\end{cases}$$

(I) + (II) - (III) →

$2\alpha-2=0\rightarrow\boxed{\alpha=1}$ subst. em (I) →

$\boxed{\beta=2}$ e em (II) →

$\boxed{\gamma=3}$

são os valores de α, β, ... pedidos.

De acordo com a formula de mudança de polo -

$$\begin{cases}\vec{M}_1=\vec{M}_2+(P_2-P_1)\wedge\vec{R} & \text{ou}\rightarrow\\ \vec{M}_1=\vec{M}_3+(P_3-P_1)\wedge\vec{R}\end{cases}$$

$\vec{R}\wedge(P_1-P_2)=\vec{M}_1-\vec{M}_2$ $\quad\begin{cases}\vec{R}\wedge(\vec{i}-\vec{j})=-\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}\\ \vec{R}\wedge(\vec{i}-\vec{k})=-2\vec{i}-2\vec{j}-2\vec{k}\end{cases}$

$\vec{R}\wedge(P_1-P_3)=\vec{M}_1-\vec{M}_3$

Da primeira resulta -

$\vec{R}=\frac{1}{2}(\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k})+\lambda(\vec{i}-\vec{j})$ substituindo na segunda obtem-se

$$\vec{R} \wedge (\vec{i} - \vec{k}) = \frac{1}{2}\left(-\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}\right) + \lambda(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$$

$$= -2\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$$

Tiremos λ →

$$\lambda(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = -\frac{3}{2}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \longrightarrow$$

$\lambda = -\frac{3}{2}$ Substituindo em $\vec{R}$,

$$\boxed{\vec{R} = -\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}}$$

Determinação de $\vec{M}_0$ —

$$\vec{M}_0 = \vec{M}_1 + (P_1 - O) \wedge \vec{R}$$

$$\vec{M}_0 = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} + \vec{i} \wedge (-\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) =$$

$$\boxed{= \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}}$$

Cálculo de I_2 →

$$I_2 = \vec{M} \times \vec{R} =$$

$$= (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \times (-\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) =$$

$$= -1 + 2 - 1 = 0$$

//

Eixo central.

$$E - O = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_0}{|\vec{R}|^2} + \rho \vec{R}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + \rho \vec{R} -$$

$$-\frac{1}{6}(8\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}) + \rho \vec{R} = \frac{1}{3}(4\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}) \ldots$$

Dados os momentos $(\vec{M}_1, P_1)$ $(\vec{M}_2, P_2)$ e $(\vec{M}_3, P_3)$, determinar a condição para que o sistema de vetores aplicados aos quais estes momentos correspondem, seja equivalente à resultante única, a um binário ou zero.

Da formula $\vec{M}_P = \vec{M}_E + (E - P) \wedge \vec{R}$, resulta

a) $\vec{M}_P \times \vec{R} = 0$

b) $\vec{M}_P = \vec{M}_E$

c) $\vec{M}_P = 0$

— Então —

$\vec{M}_1 \wedge \vec{M}_2 \times \vec{M}_3 = 0$ por, sendo perpendiculares à resultante, serem coplanares.

$\vec{M}_1 = \vec{M}_2 = \vec{M}_3$

$\vec{M}_1 = \vec{M}_2 = \vec{M}_3 = 0$

→ Dados os momentos $\vec{M}_1(1, 0, 2)$ $P_1(1, 0, 0)$ $\vec{M}_2(2, \alpha, 2)$ $P_2(0, 1, 0)$ e sabendo que o sistema de vetores aplicados que os possue é equivalente à unica resultante, determinar α, e $\vec{M}_0$

Aplicando as condições de existencia do sistema, e de coplanaridade dos momentos, por ser equivalente á resultante unica,

$$\vec{M}_1 \wedge \vec{M}_2 \times \vec{M}_0 = 0 \quad \text{(I)} \quad e$$

$(\vec{M}_1 - \vec{M}_2) \times (P_1 - P_2) = 0$ (II)

$(\vec{M}_0 - \vec{M}_1) \times (P_1 - O) = 0$ (III)

$(\vec{M}_0 - \vec{M}_2) \times (P_2 - O) = 0$ (IV)

Em (II) tiramos α,
$(-\vec{i}-\alpha\vec{j}) \times (\vec{i}-\vec{j}) = 0 \rightarrow -1+\alpha = 0 \rightarrow$
Determinação de $\vec{M}_0$:
$\vec{M}_1 \wedge \vec{M}_2 = (\vec{i}+2\vec{k}) \wedge (2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}) =$

$= -2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$

A relação (I) se transforma em
$\vec{M}_0 \times (-2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}) = 0$ e em (II) e (III)

$\vec{M}_0 \times \vec{i} = (\vec{i}+2\vec{k}) \times \vec{i} = 1$
$\vec{M}_0 \times \vec{j} = (2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}) \times \vec{j} = 1$

A solução do sistema fornece –
$\Delta = \vec{i} \wedge \vec{j} \times (-2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}) = 1$ logo
sistema admite única solução dada pela expressão
$\vec{M}_0 = \Sigma_i (\vec{M}_0 \times \vec{u}_i) \vec{U}_i$ —

$\vec{M}_0 = \underbrace{\vec{i}+2\vec{k}}_{U_2} + \underbrace{\vec{j}-2\vec{k}}_{U_3} = \boxed{\vec{i}+\vec{j}}$

//

→ Dados os momentos (M_1, P_1) (M_2, P_2) (M_3, P_3) que determinam um campo de momentos, calcular I_2 do sistema de vetores aplicados ao qual corresponde este campo.

a) $\Delta = \vec{M}_1 \wedge \vec{M}_2 \times \vec{M}_3 = 0$, o sistema é equivalente à resultante única, e $I_2 = 0$

b) $\Delta \neq 0$ Neste caso I_2 deve satisfazer às três condições

$\vec{M}_1 \wedge \vec{R} = I_2$
$\vec{M}_2 \wedge \vec{R} = I_2$ das quais se tira I_2,
$\vec{M}_3 \wedge \vec{R} = I_2$ sendo $\Delta \neq 0$ e o sistema admite solução única, sendo
$\vec{R} = \Sigma (R \times \vec{M}_i) \vec{m}_i$, logo

$$\boxed{\vec{R} = I_2 (\vec{m}_1 + \vec{m}_2 + \vec{m}_3)}$$

Por outro lado, da formula de mudança de polos,
$\vec{M}_1 = \vec{M}_2 + (P_2 - P_1) \wedge \vec{R}$, portanto
$\vec{R} \wedge (P_2 - P_1) = \vec{M}_2 - \vec{M}_1$, substituindo aqui, $\vec{R}$ por seu valor, virá –
$I_2 (\vec{m}_1 + \vec{m}_2 + \vec{m}_3) \wedge (P_2 - P_1) = \vec{M}_2 - \vec{M}_1$ multiplicando ambos os membros escalarmente por $\vec{m}_1$, virá
$I_2 \vec{m}_1 \times (\vec{m}_1 + \vec{m}_2 + \vec{m}_3) \wedge (P_2 - P_1) = (\vec{M}_2 - \vec{M}_1) \times \vec{u}_1 = -1$

$I_2 \vec{m}_1 \wedge (\vec{m}_1 + \vec{m}_2 + \vec{m}_3) \times (P_2 - P_1) = -1$

multiplicando por Δ –
$I_2 \Delta \, \vec{m}_1 \wedge (\vec{m}_2 + \vec{m}_3) \times (P_2 - P_1) = -\Delta$ sendo $\Delta = \frac{1}{\delta}$ e
$\delta = \vec{m}_1 \wedge \vec{m}_2 \times \vec{m}_3$, obtem-se
$I_2 (\vec{M}_3 - \vec{M}_2) \times (P_2 - P_1) = -\Delta$ logo

$$I_2 = \frac{\Delta}{(P_1 - P_2) \times (\vec{M}_3 - \vec{M}_2)} = \boxed{\frac{\vec{M}_1 \wedge \vec{M}_2 \times \vec{M}_3}{(P_1 - P_2) \times (\vec{M}_3 - \vec{M}_2)}}$$

17/7/45.

Algebra

Decomposição das funções racionais.

Preliminares:- Resultante de dois polinomios.

Sejam dois polinomios

$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$

$Q(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m$, determinemos a condição necessária e suficiente para terem zeros comuns.

Para este fim multipliquemos $P(x)$ sucessivamente por $x^{m-1}, x^{m-2}, \dots x, 1$ e $Q(x)$ sucessivamente por $x^{n-1}, x^{n-2}, \dots x, 1$ deste modo obtemos as equações

$$a_0 x^{n+m-1} + a_1 x^{n+m-2} + \dots + a_n x^{m-1} = 0$$
$$a_0 x^{n+m-2} + \dots + a_n x^{m-2} = 0$$
$$\dots$$
$$a_0 x^n + \dots + a_n = 0$$

e

$$b_0 x^{m+n-1} + b_1 x^{m+n-2} + \dots + b_m x^{n-1} = 0$$
$$b_0 x^{m+n-2} + \dots + b_m x^{n-2} = 0$$
$$\dots$$
$$b_0 x^m + \dots + b_m = 0$$

Estas relações constituem um sistema de $n+m$ equações, lineares e homogeneas nas incógnitas $x^{n+m-1}, x^{n+m-2}, \dots, x, 1$.

Se os dois polinomios admitirem zeros comuns, duas equações admitem solução e assim também todas as outras.

Vejamos a recíproca — se o sistema admite solução os dois polinomios admitem zero comum.

A condição para que exista solução necessaria e suficiente, e portanto para $P(x)$ e $Q(x)$ admitirem zeros comuns é dada pelo teorema de Rouché Capelli: o determinante do sistema deve ser nulo.

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & \dots & & a_n & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & a_0 & \dots & a_n \\ b_0 & b_1 & \dots & b_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_0 & \dots & & b_m & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & \dots & & & b_m \end{vmatrix} = 0$$

Este determinante é chamado resultante de Sylvester dos polinomios $P(x)$ e $Q(x)$; logo, a condição necessária e suficiente para que dois polinomios tenham zeros comuns, é que o resultante de Sylvester seja nulo; se os polinomios fôrem primos entre si, isto é, não admitirem zeros comuns o resultante de Sylvester será $\neq 0$

―――――― // ――――――

Decomposição das funcões racionais

Uma função racional é por definição o quociente de dois polinomios; sem

prejuizo da generalidade, podemos supor que êstes polinomios sejam primos entre si, pois caso contrario dividiriamos ambos pelo m. d. c. Alem disso podemos supor que o numerador seja de grau inferior ao do denominador, pois caso contrário dividiriamos o numerador pelo denominador.

Seja $\dfrac{p(x)}{P(x)}$ uma função racional irredutivel e cujo numerador é de grau inferior ao do denominador.

Teorêma fundamental — Sendo n o grau do denominador $P(x)$ e suposto que este seja o produto de dois outros polinomios primos entre si $P_1(x)$ e $P_2(x)$, respectivamente de graus r e s, $(r+s=n)$, é sempre possivel determinar de uma unica maneira dois outros polinomios $p_1(x)$ e $p_2(x)$ de gráus respectivamente inferiores a r e s tais que
$$\frac{p(x)}{P(x)} = \frac{p_1(x)}{P_1(x)} + \frac{p_2(x)}{P_2(x)}$$

19/7/45.

Demonstração —

Com efeito, suposto que esta decomposição seja possivel, obtem-se —

$p(x) = P_2\, p_1 + P_1\, p_2$ (1) Seja $P_1 = a_0 x^r + a_1 x^{r-1} + \dots + a_r$

$P_2 = b_0 x^s + b_1 x^{s-1} + b_2 x^{s-2} + \dots + b_s$

$p_1 = \alpha_1 x^{r-1} + \alpha_2 x^{r-2} + \dots + \alpha_r$

$p_2 = \beta_1 x^{s-1} + \beta_2 x^{s-2} + \dots + \beta_s$ devendo ser te grau "no maximo" $r-1$ ou $s-1$

O polinomio $p(x)$ é no maximo de grau $n-1$ para que a fração seja própria. Será

$p = c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \dots + c_n$

Aplicando-se o principio de identidade dos polinomios, obtem-se de (1) as relações

$b_0 \alpha_1 + a_0 \beta_1$ — coeficiente de $x^{r+s-1} = x^n$

logo —

$b_0 \alpha_1 + a_0 \beta_1 = c_1$

para o termo seguinte

$b_0 \alpha_2 + b_1 \alpha_1 + a_0 \beta_2 + a_1 \beta_1 = c_2$, coefic de x^{n-2}, a seguir —

$b_0 \alpha_3 + b_1 \alpha_2 + b_2 \alpha_1 + a_0 \beta_3 + a_1 \beta_2 + a_2 \beta_1 =$

Estas relações constituem um sistema de n ções lineares nas n incognitas α e β.

O determinante dos coeficientes é:

$$\begin{vmatrix} b_0 & 0 & \dots & 0 & a_0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_0 & \dots & 0 & a_1 & a_0 & 0 \\ b_2 & b_1 & \dots & 0 & a_2 & a_1 & 0 \\ b_3 & b_2 & \dots & 0 & a_3 & a_2 & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - \\ & & b_0 & & & & \\ & & & & & & a_0 \end{vmatrix}$$

Este determinante é o resultante de Sylvester dos polinomios P_1 e P_2, que, por hipotese são primos entre si; portanto, como deveriamos saber, o resultante é diferente de zero.

O determinante do sistema sendo $\neq 0$, este admite solução pela regra de Cramer, um e um unico sistema de soluções, isto é, podemos determinar um e um unico sistema de valores para os coeficientes α e β.

Deste modo fica demonstrado que existem dois e apenas dois polinomios p_1 e p_2, satisfazendo a relação inicial. C.q.d.

A aplicação sucessiva deste teorema, permite a decomposição da fração inicial em frações cada vez mais simples.

Suponhamos que o polinomio $P(x)$ admita as raizes distintas $a, b, \dots, l$, isto é, seja $P(x) \equiv (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \dots (x-l)^\lambda$ sendo

$\alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda = n$

Aplicando-se o teorema fundamental, pode-se escrever $\dfrac{p(x)}{P(x)} = \dfrac{p_a}{(x-a)^\alpha} + \dfrac{p_b}{(x-b)^\beta} + \dots + \dfrac{p_l}{(x-l)^\lambda}$

Os numeradores das varias frações são polinomios de graus inferiores aos dos denominadores correspondentes.

O polinomio p_a pode ser escrito na forma

$p_a = A_1 (x-a)^{\alpha-1} + A_2 (x-a)^{\alpha-2} + \dots + A_\alpha$

Introduzindo p_a na fração correspondente te obtem-se

$$\frac{p_a}{(x-a)^\alpha} = \frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}$$

Analoga decomposição podemos efetuar p/ cada uma das frações restantes.

Finalmente obtem-se a decomposição de $\frac{p}{P}$ em $\alpha + \beta + \dots + \lambda = n$ frações:

24/7/45

Sejamos as n frações —

$$\frac{p(x)}{P(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \dots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \dots + \frac{L_1}{x-l} + \frac{L_2}{(x-l)^2} + \dots +$$

Observação sobre os zeros imaginários —

Se o polinomio $P(x)$ possuir zeros imaginários, apresentar-se-ão na decomposição anterior, frações com elementos imaginários; porem estas frações podem ser consideradas aos pares de modo que as duas frações de um mesmo par correspondam a dois zeros imaginários conjugados.

Somando-se tais frações, obtem-se uma nova fração sem elemento imaginario: —

$$\frac{A}{(x-r-si)^m} + \frac{B}{(x-r+si)^m} = \frac{\pi(x)}{[(x-r)^2+s^2]^m}$$

sendo $\pi(x)$ um polinomio no maximo de grau $m-1$

Esta última fração é susceptivel de decomposição em frações mais simples. Com efeito, seja

$(x-r)^2 - s^2 = d(x)$; dividindo-se $\pi(x)$ por $d(x)$ obtem-se um certo quociente $\pi_1(x)$ e um resto no máximo do 1º grau, isto é,

$$\frac{\pi(x)}{d(x)} = \pi_1(x) + \frac{M_1 x + N_1}{d(x)}$$

Dividindo-se novamente por $d(x)$ obtem-se

$$\frac{\pi(x)}{d^2(x)} = \frac{M_1 x + N_1}{d^2(x)} + \frac{\pi_1(x)}{d(x)} =$$

$$= \frac{M_1 x + N_1}{d^2(x)} + \pi_2(x) + \frac{M_2 x + N_2}{d(x)},$$ continuando-se a dividir por $d(x)$ chega-se finalmente a —

$$\frac{\pi(x)}{d^m(x)} = \frac{M_1 x + N_1}{d^m(x)} + \frac{M_2 x + N_2}{d^{m-1}(x)} + \dots, \frac{M_m x + N_m}{d(x)}$$

— // —

Exercicios —

$$\frac{x-1}{x^2-5x+6} = \frac{x-1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-3)}$$

$x-1 = A(x-3) + B(x-2)$

$(x-1) = (A+B)x - 3A - 2B$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 3A+2B=1 \end{cases} \quad \begin{cases} A=-1 \\ B=2 \end{cases}$$ donde —

a solução é $\dfrac{-1}{x-2} + \dfrac{2}{x-3}$

$x-1 = x(A+B) - 3A - 2B \begin{cases} \text{fazendo } x = 2 \\ 1 = -A \quad B = 2 \\ \text{ou } x = 3 \end{cases}$

25/7/45.

Decompor a fração

$$\frac{p(x)}{(x-a)(x-b)^2(x^2+x+1)(x^2+2)^2} =$$

$$= \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{(x-b)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1} + \frac{Fx+G}{x^2+2} + \frac{Hx+\ldots}{(x^2+2)\ldots}$$

$$\frac{p(x)}{x^3(x^2-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x+1} + \frac{E}{(x+1)^2} +$$

$$+ \frac{G}{(x-1)^2} + \frac{Hx+I}{(x^2+1)}$$

Observe-se que (x^2+1) tem zero imaginário, por isso a ultima fração ficou como uma reunião de outras duas.

$$\frac{x^4+x-1}{x^2+2x+4} = x^2 - 2x + \frac{9x-1}{x^2+2x+4}$$

Dividimos o numerador pelo denominador e abandonamos o resto por serem imaginários os zeros do denominador.

Observe-se que $x^2+2x+4 = (x^2+2x+1)+3 =$
$= (x+1)^2 + 3.$

Decompor

$$\frac{x+1}{(x-2)(x^2+1)(x-3)^2} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-3)} + \frac{C}{(x-3)^2} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)}$$

$x+1 = (x^2+1)(x-3)^2A + (x-2)(x^2+1)(x-3)B + (x-2)(x^2+1)C +$
$+ (x-2)(x-3)^2(Dx+E).$

fazendo →

$x = 2$ resulta —

$3 = 5A \longrightarrow A = 3/5$

$x = 3 \longrightarrow 4 = 10C \longrightarrow C = 4/10 = 2/5$

$x = i \longrightarrow i+1 = (i-2)(i-3)^2(Di+E) =$
$= (i-2)(-1-6i+9)(Di+E) =$
$= (i-2)(8-6i)(Di+E) = (Di+E)(8i+6-16+12i) =$
$= (Di+E)(20i-10) = -20D - 10Di + 20Ei - 10E =$
$= i(20E-10D) - 20D - 10E =$

donde

$i+1 = i(20E-10D) - 20D - 10E$

$\begin{cases} 1 = 20E - 10D \\ 20D - 10E = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} D = -3/50 \\ E = 1/50 \end{cases}$

logo o polinomio será —

sendo $B = \dfrac{121}{150}$

26/7/45

Exercícios -

$$\frac{x+2}{(x^2-1)(x^2+2x+1)(x^2+1)} = \frac{x+2}{(x-1)(x+1)^3(x^2+1)} =$$

$$= \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} + \frac{D}{(x-1)} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)}$$

$$x+2 = A(x-1)(x+1)^2(x^2+1) + B(x-1)(x+1)(x^2+1) + C(x-1)(x^2+1) + D(x+1)^3(x^2+1) + (Ex+F)$$

Fazendo $x=-1$ $\longrightarrow$ $\cancel{x+1} = -2 \cdot C \cdot 2 = 4C$

$$C = -\frac{1}{4}$$

$x=1$ $\quad 3 = D(2)^3(2) \quad 3 = 16D \quad D = \frac{3}{16}$

$x=i$

$$i+2 = (Ei+F)(i-1)(i+1)^3 =$$
$$= (Ei+F)(i-1)(i+1)(i+1)^2 =$$
$$= (Ei+F)(i^2-1^2)(i+1)^2 =$$
$$= (Ei+F)(-2)(i^2+2i+1) =$$
$$= -2(Ei+F)(-1+2i+1) =$$
$$= -2(Ei+F).2i = -4Ei^2 + 4Fi =$$
$$= 4E - 4Fi$$

$i+2 = 4E - 4Ei \longrightarrow$

$$\begin{cases} 1 = -4E \\ 4E = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} F = -\frac{1}{4} \\ E = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Façamos agora a determinação de A e B, para isto tomemos $x=0$;

sendo $C = -\frac{1}{4}$ $\quad D = \frac{3}{16}$ $\quad E = \frac{1}{2}$ $\quad F = -\frac{1}{4}$

resulta -

$$2 = -A - B - C + D - F \longrightarrow$$

$$2 = -A - B - \frac{1}{4} + \frac{3}{16} - \frac{1}{4}$$

$$\frac{21}{16} = -A - B \quad \text{I}$$

Procuremos a segunda equação, tomemos $x=2$ $\longrightarrow$

$$4 = 45A + 15B + 5C + 135D + 54E + 27F$$

$$4 = 45A + 15B - \frac{5}{4} + \frac{405}{16}\cancel{D} + 27\cancel{E} - \frac{27}{4}$$

$$4 = 45A + 15B - \frac{5}{4} + \frac{405}{16} + \frac{84}{4} - \frac{27}{4}$$

$$-\frac{645}{16} = 45A + 15B \longrightarrow$$

$$-\frac{43}{16} = 3A + B \quad \text{II}$$

Somando I e II $\longrightarrow$

$-\frac{11}{8} = 2A \longrightarrow A = -\frac{11}{16}$ donde $B = -\frac{5}{8}$

$$\frac{1}{(x^2+1)^2(x-1)} = \frac{A}{x^2+1} + \frac{B}{(x^2+1)^2} + \frac{C}{x-1}$$

$$= \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

$$1 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x-1)(x^2+1) + (Dx+E)$$

Demos os valores a x.

2/8/45.

Fui à pedra.

7/8/45

Determinação do baricentro.

Consideremos o sistema de vetores aplicados $S(m_i \vec{a};\ P_i)$ $\quad i = 1, 2, 3, 4 \dots n$

Suponhamos $|\vec{a}| = 1$ e $\Sigma m_i = M$

O eixo central do sistema será -

$$E - O = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M_0}}{|\vec{R}|^2} + \lambda \vec{R}$$

Ora, $\vec{R} = \sum_1^n m_i \vec{a} = \vec{a}\, \Sigma m_i = M \vec{a}$

$$\vec{M}_0 = \Sigma (P_i - O) \wedge m_i \vec{a} = [\Sigma m_i (P_i - O)] \wedge \vec{a}$$

$$E - O = \frac{M\vec{a} \wedge \{[\Sigma m_i (P_i - O)] \wedge \vec{a}\}}{M^2} + \lambda . M\vec{a} =$$

$$= \frac{(\vec{a} \times \vec{a}) \Sigma m_i (P_i - O) - [\Sigma m_i (P_i - O) \times \vec{a}] \vec{a}}{M}$$

Resolvendo (1) (2)

$\vec{y} \times \vec{b} = 0$

$\vec{y} \times \vec{d} = 1$ $\quad$ Suponhamos $\vec{y} \times \vec{c} = \lambda$

$y = \Sigma (y \times u_i) El_i$ $\quad$ seja $\vec{q} = \vec{b} \wedge \vec{d}$

$$= \frac{|\vec{a}|^2 \sum m_i (P_i - O)}{M} - \frac{\{\sum m_i (P_i - O) \times \vec{a}\}\vec{a}}{M}$$

$$= \frac{|\vec{a}|^2 \sum m_i (P_i - O)}{M} - \frac{\sum m_i (P_i - O) \times a + \lambda M}{M}$$

Sendo no nosso caso $\vec{M}_0 \times \vec{R} = 0$ (

por ser $I_2 = 0$, não há M_E. (Observar

$\vec{R}$)

Baricentro do sistema é o ponto do eix

central que independe da direção dos vet

Obtem-se o baricentro atribuindo-se

à um parametro que torne a segunda p

cela nula (Obtem-se um ponto G i

dependente de $\vec{a}$)

$$\boxed{G - O = \frac{\sum m_i (P_i - O)}{\sum m_i}}$$

Determinar a equação da reta que p

por $P_0 = O + \vec{a}$ é paralela ao plano

$\vec{x} \wedge \vec{b} = \vec{c}$ e forma com o veto

$\vec{d}$ um angulo de $60°$.

A reta que passa por um ponto é

$\vec{x} \wedge \vec{y} = \vec{a} \wedge \vec{y}$

Impondo a esta reta as condições do

blema, obtem-se

$\vec{b} \times \vec{y} = 0$ (1)

$\vec{y} \times \vec{d} = |\vec{y}||\vec{d}| \cdot \frac{1}{2}$

Suponhamos $|\vec{d}| = 1$ $\rightarrow$ $\vec{y} \times \vec{d} = |\vec{y}|$

mais $|\vec{y}| = 2$

41

8/8/45

Conjunto restrito acima - é aquele q.

q. existir um nº que supera todos os

elementos do conjunto

$x < R_0$.

Chama-se restrição acima a um nu-

mero q.q. q. restringe o conjunto superior-

mente. $u < R$

Chama-se restrição abaixo a um

nº q.q. q. restringe o conjunto inferior-

mente. $R < u$

Restrição superior é a menor das res-

trições acima.

Chamando-se por R a restrição

superior, pode-se defini-la pelas duas

condições:-

1) Nem um número do conjunto supera

R.

2) Existe sempre um número do con-

junto que supera $R - \varepsilon$ sendo $\varepsilon > 0$ e

arbitrário.

Este nº pode ser o proprio R.

Restrição inferior é a maior das re-

strições abaixo, chamando r, podemos

defini-la pelas duas condições:

1) Nem um número do conjunto é inferior a r

2) Existe um número do conjunto inferior a $r + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ arb.), que pode ser o proprio r.

Seja o conjunto de todas as frações $n/n+1$. É restrito abaixo e sua restrição é $\frac{1}{2}$, que tambem é minimo do conjunto.

O conjunto é restrito acima e $R = 1$, que não pertence ao conjunto, porem é ponto de acumulação.

— —

Seja o conj. $1, 1/2, 2, 1/3, 3, 1/4$ restrito abaixo e irrestrito acima. A restrição inferior é zero, q. não pertence ao conjunto mas é ponto de acumulação.

Seja $\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+m}}$ sendo n e m dois numeros inteiros não negativos quaisquer. É restrito acima e abaixo. A restrição superior é 2 que pertence ao conjunto logo é maxima. A restrição inferior é zero que não pertence ao conjunto e é pt. de acumulação.

São pontos de acumulação todas as frações $1/2^n$ e 0, e pertencem ao conjunto.

Não é possivel haver mais pontos de acumulação.

Consideremos o conjunto — 0, 0.3, 0.33, 0.333...

A restrição inferior é zero (minimo) e a superior é 1/3 (ponto de acumulação e o unico)

Limites de indeterminação.

Seja a um ponto de acumulação da função $f(x)$, ou melhor, do campo de definição de $f(x)$.

Consideremos uma vizinhança α á esquerda de a e suponhamos q. $f(x)$ seja restrita em α. Neste caso admitirá em α uma restrição inferior $r(\alpha)$ e outra superior $R(\alpha)$.

Chama-se maximo lim. de $f(x)$ á esquerda de a, o limite de $R(\alpha)$ quando $\alpha \to 0$ e minimo limite de $f(x)$ á esquerda de a, $\lim_{\alpha \to 0} r(\alpha)$.

Nem sempre eles coincidem. Por exemplo — $y = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ q.do $x \to 0$