CECIL THIRÉ — J. C. MELLO E SOUSA

(DO COLLEGIO PEDRO II)

PROBLEMAS E FORMULARIO

DE

GEOMETRIA

LIVRO OFFICIALMENTE INDICADO

NO

COLLEGIO PEDRO II

6.ª Edição

Livraria-Papelaria e Litho-Typographia
PIMENTA DE MELLO & CIA.
Trav. Ouvidor, 34 — Rio de Janeiro

Todos os volumes serão rubricados por um dos autores

8589

EXERCICES GRADUÉS DE GÉOMÉTRIE

Il ne suffit pas, pour résoudre les problèmes de géométrie, de savoir son cours. Il faut encore savoir l'appliquer, et ce résultat ne peut être obtenu que par de très nombreux exercices, auxquels on doit s'entraîner dès la classe de Quatrième.

Les devoirs que donne le professeur ne peuvent pas être en nombre suffisant pour armer l'élève comme il convient en vue des examens. Le professeur lui-même recommande un travail personnel, supplémentaire, *ce travail qui est si fécond*(1). On en trouvera les éléments ci-après :

Premier livre d'initiation : **Résolution des problèmes élémentaires de géométrie**, par E. J. Honnet, professeur à l'École primaire supérieure de Caen. — Un vol. 18/12cm, 5e édition. . . . . 285 F

Le grand avantage de ce livre est qu'il démonte pour ainsi dire pièce à pièce l'édifice géométrique. Il ne vous présente tout d'abord, et une à une, que des propriétés tout à fait élémentaires ; il vous rend maître de leur emploi par une application à de nombreux exercices ; il vous familiarise avec chacune d'elles. On vous dit, pour chaque groupe de problèmes, quelle est la propriété que vous allez avoir à appliquer. Vous pouvez faire ainsi rapidement de nombreux exercices, et cette gymnastique vous fortifie vite.

L'auteur vous indique huit à dix manières de montrer l'égalité de deux segments de droites, de deux angles ; de prouver que deux droites sont perpendiculaires, ou bien parallèles, etc. Il vous prend en quelque sorte par la main en vous faisant faire beaucoup d'exercices correspondant à chaque manière d'appliquer telle ou telle propriété. A la fin de chaque groupe, cependant, il vous présente une série d'exercices pour lesquels il vous laisse le soin de trouver, parmi les divers modes de démonstration possibles, celui qui convient. Plus loin encore, des problèmes sans aucune indication.

L'auteur vous a donc soutenu d'abord ; mais petit à petit il vous a laissé chercher seul, pour développer votre initiative.

Exercices à faire par tranches, en plusieurs années : **Exercices de géométrie** (avec solutions), par Th. Caronnet, docteur ès sciences, professeur honoraire au Collège Chaptal. — 3 vol. 18/12cm ou 9 fascicules, énumérés en regard du titre du présent livre.

Dans chaque fascicule les exercices sont présentés, autant que possible par ordre de difficulté croissante. Le livre I en contient 172 ; le livre II 204 ; le livre III, 319 ; le livre IV, 151 ; le livre V, 222 ; le livre VI, 230 ; le livre VII, 232 ; le livre VIII (courbes usuelles), 332(2) ; les Compléments, 212.

Les *Compléments* comprennent, dans la limite du programme de la classe de Mathématiques :

---

(1) « La direction du travail fourni loin du maître est encore plus importante que celle des exercices exécutés en sa présence. » (*Circulaire du 31 août 1928 de M. le Ministre de l'Instruction publique.*)

(2) Ellipse, 87. — Hyperbole, 68. — Parabole, 109. — Propriétés communes aux trois coniques. Directrices des coniques. Sections planes du cône et du cylindre de révolution, 52. — Hélice, 16.

I. Des angles dans le plan orienté.
II. Transformation du plan par égalité directe. Translation. Rotation. Symétrie par rapport à un point. Transformation du plan par égalité inverse. Symétrie par rapport à une droite.
III. Vecteurs portés par un axe. Division harmonique. Somme géométrique de vecteurs. Barycentres.
IV. Relations métriques dans le triangle, dans le quadrilatère. Relation de Stewart.
V. Points en ligne droite et droites concourantes dans le triangle.
VI. Puissance d'un point par rapport à un cercle. Axe radical de deux cercles. Centre radical de trois cercles. Cercles orthogonaux. Faisceaux de cercles. Puissance d'un point par rapport à une sphère. Plan radical de deux sphères. Axe radical de trois sphères. Centre radical de quatre sphères. Sphères orthogonales. Faisceaux de sphères.
VII. Homothétie. Similitude.
VIII. Faisceaux harmoniques. Polaire d'un point par rapport à un cercle, par rapport à une sphère.
IX. Inversion.

Exercices à l'usage des élèves qui visent aux grandes écoles (Quelques fascicules peuvent servir dès la Seconde) : **Exercices de géométrie moderne,** *précédés de l'exposé élémentaire des principales théories,* par G. Papelier, ancien élève de l'École normale supérieure, agrégé des sciences mathématiques, professeur de Mathématiques spéciales au lycée d'Orléans. — 3 vol. 22/14^{cm} (groupant chacun 3 fascicules) . . . . »

On vend aussi les neuf fascicules séparément :

I : *Géométrie dirigée.*	285 F
II : *Transversales.*	285 F
III : *Division et faisceau harmoniques.*	285 F
IV : *Pôles et polaires.*	285 F
V : *Rapport anharmonique.*	285 F
VI : *Inversion.*	285 F
VII : *Homographie.*	285 F
VIII : *Involution.*	285 F
IX : *Géométrie projective. Application aux coniques.*	285 F

En s'exerçant avec ces précieux fascicules les élèves sentiront moins les effets de la disparition de la classe de Mathématiques élémentaires supérieures, qui existait autrefois dans les grands lycées.

Exercices à l'usage des élèves qui veulent devenir forts : **Compléments de géométrie moderne,** par Charles Michel, ancien élève de l'École normale supérieure, docteur ès sciences, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis. — Un vol. 22/14^{cm}, 3^{e} édition. . . . . 576 F

Problèmes d'agrégation (Mathématiques élémentaires), par J. Dollon, professeur agrégé au lycée de Rouen. — Un vol. 22/14^{cm}, 2^{e} édition. . . . . 768 F

ÉLÉMENTS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL, par W.-A. Granville et P.-F. Smith. — 11^{e} édition française. Un vol. 25/16^{cm} de 548 pages. 1 536 F

Outre les exercices complètement résolus à l'appui des parties correspondantes du cours se trouvent 2 198 exercices proposés : 1 141 de calcul différentiel, 1 057 de calcul intégral.

Ces exercices forment 101 groupes, dont chacun se présente immédiatement après la partie théorique qui y correspond. La marche est donnée pour quelques-uns de ces exercices ; le résultat à obtenir, pour tous.

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE, par P.-F. Smith et A.-S. Gale, professeur à l'Université de Rochester. — 5^{e} édition française. Un vol. 25/16^{cm} de 426 pages. . . . . 864 F

Comme le livre précédent, l'ouvrage donne un très grand nombre (1 220) de problèmes à résoudre, classés sous 120 rubriques. Ici aussi les résultats à obtenir sont indiqués.

ÉLÉMENTS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE, par P.-F. Smith et R. Longley, professeur à l'Université de Yale. — 4^{e} édition française. Un vol. 25/16^{cm} de 320 pages. . . . . 768 F

564 problèmes à résoudre.

L'enseignement aux États-Unis est différent de ce qu'il est en France ; il est beaucoup plus pratique. En mathématiques, notamment, « on ne coupe pas les cheveux en quatre », pour employer une expression un peu risquée mais assez répandue.

Le calcul différentiel, par exemple, est un instrument de travail dont ont besoin beaucoup de personnes qu'un excès de considérations théoriques rebuteraient. Un livre américain très bien adapté à ce besoin est celui qui a pour titre *Éléments de calcul différentiel et intégral,* par MM. Granville, président du Collège de Pensylvanie, et Smith, professeur à l'Université de Yale. Il est tout aussi utile en France ; aussi sa traduction dans notre langue a-t-elle eu rapidement onze éditions.

Dans le même ordre d'idées nous avons publié une traduction des *Éléments de géométrie analytique* de Smith et Gale.

Ce livre est on ne peut plus élémentaire et il intéressera quantité de jeunes gens obligés par les nécessités de la vie de quitter à regret les établissements d'instruction après leurs études secondaires. Quoi de plus attachant, pour ceux qui ont pris goût aux mathématiques, « cette forme parfaite de la beauté(1) », que de voir comment on peut résoudre simplement, par le calcul, et pour ainsi dire mécaniquement, des problèmes qui, par la géométrie pure, vous mettraient souvent dans un grand embarras !

Avec le livre de MM. Smith et Gale on est vite initié à la théorie par la pratique. Les auteurs vous font faire une multitude d'exercices simples, gradués, qui vous mettent insensiblement l'outil bien en mains.

Le livre trouve une seconde clientèle parmi les futurs candidats aux grandes écoles qui ont la géométrie analytique à leur programme. En l'étudiant ils acquièrent sans effort une première initiation aux méthodes de la géométrie analytique. Rompus dès lors à la pratique, l'aridité du cours de Mathématiques spéciales disparait ensuite pour eux.

Les mêmes qualités d'exposition, les mêmes avantages se retrouvent également dans les *Éléments de Mécanique rationnelle* de Smith et Longley, qui, comme les *Éléments de Géométrie analytique*, a atteint très vite sa 4e édition.

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

(80e année.)

Journal 28/22cm, avec figures et épures dans le texte, paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet, fondé par H. Vuibert. — Prix de l'abonnement : France, 700 F ; Étranger, 800 F. (A quelque époque de l'année que l'on s'abonne, on reçoit tous les numéros parus depuis le 1er octobre.)

Ce journal s'adresse aux candidats aux écoles et au baccalauréat (1re et 2e parties) ainsi qu'aux élèves qui doivent plus tard étudier les sciences. Le journal propose et résout des problèmes, notamment ceux posés au baccalauréat ; il publie les noms des abonnés ayant envoyé de bonnes solutions.

Numéro spécimen sur demande.

---

(1) Discours du président du conseil aux funérailles de Paul Painlevé.

QUESTÕES DE ARITHMETICA

Theoricas e praticas, livro officialmente adoptado no Collegio Pedro II, por Cecil Thiré . . . . 10$000

EXERCICIOS DE ALGEBRA

Livro officialmente indicado no Collegio Pedro II, por Cecil Thiré . . . . 6$000

INDICE

SEGMENTO DE RECTA — MEDIDA DE UM SEGMENTO

1. — Um segmento AB foi prolongado de um comprimento BC egual ao triplo de AB e depois de um comprimento CD egual a $\frac{3}{4}$ de BC. Suppondo-se que AB é egual á unidade exprimir os numeros que medem respectivamente AC, AD e BD.

Resp. $4, {}^{25}/_4$ *e* ${}^{21}/_4$

2. — Um segmento AB foi prolongado de um comprimento BC egual á metade de AB e depois de um comprimento CD egual a ${}^{5}/_8$ de AC. Suppondo-se BC egual á unidade exprimir os numeros que medem respectivamente os segmentos AC, AD e BD.

Resp. $3, {}^{21}/_8$ *e* ${}^{13}/_8$

3. — Um segmento AB é dividido em tres partes deseguaes AP, PQ e QB. Qual é a condição para que o meio M do segmento medio PQ coincida com o meio do segmento total?

Resp. E' necessario que $AP = QB$.

4. — Um segmento AB, dividido ao meio pelo ponto M, é prolongado de um certo comprimento BS. Sabendo-se que AS é egual a 56^{cm} e que BS mede 18^{cm} calcular a distancia MS.

Resp. 37^{cm}

5. — Sobre um segmento AD, que é dividido ao meio por um ponto M, marcam-se os pontos B e C. Medindo AB, BC e CD respectivamente 3^m, 5^m, e $2^m,5$ calcular BM, CM e DM.

Resp. $2^m,25$; $2^m,75$; $5^m,25$

6. — O segmento AB é dividido por um ponto M em duas partes AM e MB que estão entre si na razão ${}^5/_3$. Calcular AM e MB, sabendo-se que AB mede 320^m.

Resp. 200^m *e* 120^m

ANGULOS — COMPLEMENTO E SUPPLEMENTO DE UM ANGULO — ANGULOS OPPOSTOS PELO VERTICE

7. — Calcular o complemento de um angulo cuja terça é egual a 22°35'32".

Resp. 22°13'24"

8. — Calcular a differença entre os complementos de dois angulos que medem respectivamente 28°5' e 37°27'.

Resp. 9°22'

9. — Achar um angulo sabendo-se que o triplo de seu supplemento é egual a 229°14'33".

Resp. 103°35'9"

10. — A somma de dois angulos é egual a 92°. Achar esses angulos, sabendo-se que um delles é egual a 1/3 do supplemento do outro.

Resp. 48° e 44°

11. — Converter em grados um angulo de 36°28'40".

Resp. $40^g,5308$

12. — Converter em graus, minutos e segundos um angulo de $72^g,2256$.

Resp. 65°10",94

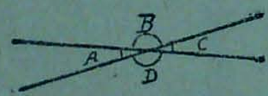


Fig 1.

13. — Na figura ao lado o angulo *A* é egual a 1/17 da somma dos angulos *B*, *C* e *D*. Calcular os angulos *A* e *B*.

Resp. 20° e 160°

14. — Calcular o angulo *A*, na figura do problema anterior, suppondo que esse angulo é egual a 1/6 do angulo *B*, mais a metade do angulo *C*.

Resp. 45°

15. — O angulo *A* (fig. 1) augmentado de 48° é egual a 1/5 da somma dos angulos *B*, *C* e *D*. Calcular *A*.

Resp. 20°

16. — O complemento do angulo *A* (fig. 1), augmentado de 15°, é egual a 1/4 da somma dos angulos *B*, *C* e *D*. Calcular *A*.

Resp. 20°

PERPENDICULARES E OBLIQUAS

17. — Dados dois pontos A e B e uma recta S, achar um ponto I da recta S, que seja equidistante de A e B.

Resp. I *é a intersecção da mediatriz do segmento* AB *com a recta* S.

18. — Para que posição particular dos pontos A e B, em relação á recta S, o problema anterior apresenta uma infinidade de soluções?

Resp. Quando A *e* B *são symetricos em relação á recta* S.

19. — Para que posição particular dos pontos A e B o problema *17* não tem solução?

Resp. Quando A *e* B *estão na mesma perpendicular á recta* S, *o ponto* I, *que resolve o problema, é um ponto do infinito.*

20. — Dados dois pontos A e B e uma recta S, determinar um ponto M sobre a recta S de modo que a somma $AM+MB$ seja a menor possivel (fig. 2).

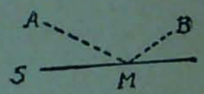


Fig. 2.

Resp. Obtem-se o ponto M *unindo-se o ponto* A *ao symetrico de* B *em relação á recta* S.

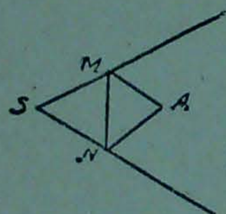


Fig. 3.

21. — Dados o angulo S e um ponto A, determinar os pontos M e N, sobre os lados do angulo, de modo que o caminho $AM + MN + NA$ seja o menor possivel (fig. 3).

Resp. Obtêm-se os pontos M *e* N *unindo-se o symetrico de* A *em relação a um dos lados do angulo com o symetrico em relação ao outro lado.*

22. — Dados os pontos A e B, situados de um lado e outro de uma recta S, determinar um ponto M da recta S de modo que a differença $MA - MB$ seja a maior possivel (fig. 4).

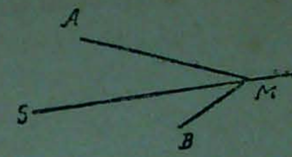


Fig. 4.

Resp. Obtem-se o ponto M *unindo-se o ponto* A *ao symetrico de* B *em relação á recta* S.

TRIANGULOS — LEI ANGULAR DE THALES

23. — Num triangulo isosceles ABC um dos angulos é egual a $^1/_5$ da somma dos outros dois. Calcular A, B e C.

Resp. 1ª sol.: 30°, 75° e 75°
2ª sol.: 120°, 30° e 30°

24. — Num triangulo isosceles ABC um dos angulos, augmentado de 20°, é egual a $^1/_3$ da somma dos outros dois. Calcular A, B e C.

Resp. 1ª sol.: 30°, 75° e 75°
2ª sol.: 120°, 30° e 30°

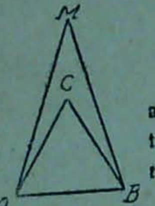


Fig. 5.

25. — O triangulo ABC é equilatero e o triangulo ABM é isosceles. Calcular os angulos do triangulo ABM, sabendo-se que o angulo M é egual a 7 vezes o angulo CBM (fig. 5).

Resp. 6°40'

26. — Num triangulo isosceles ABC o angulo A, opposto á base, é egual a $^1/_{10}$ da somma dos externos em B e em C. Calcular A.

Resp. 20°

27. — Num triangulo rectangulo ABC um dos angulos internos vale $^1/_8$ da somma dos outros dois. Calcular B e C.

Resp. 20° e 70°

28. — Num triangulo rectangulo ABC o angulo C mede 38°42'. Calcular o angulo agudo formado pela bissectriz interna CM com o lado BA.

Resp. 70°39'

29. — Na figura 6 o triangulo ABC é equilatero e o triangulo ABM é isosceles. Calcular o angulo agudo formado pela bissectriz AS, do angulo BAM, com o lado BM.

Resp. 45°

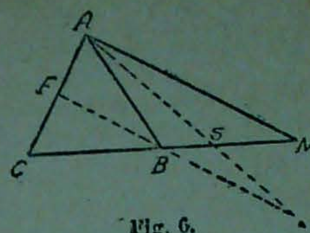


Fig. 6.

30. — Na figura 6 o triangulo ABC é equilatero e o triangulo ABM é isosceles. Determinar o angulo formado pelos prolongamentos das bissectrizes BF e AS.

Resp. 15°

31. — Na figura 6 o triangulo ABC é equilatero e o triangulo ABM é isosceles. Calcular os angulos externos do triangulo total ACM.

Resp. 120°, 150° e 90°

Fig. 7.

32. — Num triangulo isosceles ABC o angulo A é egual a $^1/_5$ do angulo M formado pelas bissectrizes BM e CM. Calcular A, B, C.

Resp. 20°, 80°, 80°

33. — Num triangulo isosceles ABC (figura 7) o angulo M, formado pelas bissectrizes BM e CM excede o angulo A de 74°. Calcular A, B e C, sendo $B=C$.

Resp. 32°, 74° e 74°

34. — Num triangulo ABC (fig. 7) o angulo A é egual a $^2/_7$ do angulo M, formado pelas bissectrizes BM e CM. Calcular os angulos A, B e C, sabendo-se que o angulo C excede o angulo B de 10°.

Resp. 30°, 70° e 80°

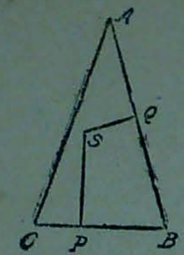


Fig. 8.

35 — Num triangulo isosceles ABC o angulo B é egual a $^2/_3$ do angulo S, formado pelas mediatrizes QS e PS. Calcular os angulos do triangulo, sendo $B=C$.

Resp. 36°, 72° e 72°

36. — Num triangulo isosceles ABC (figura 8) o angulo A é egual a $^1/_5$ do angulo S, formado pelas mediatrizes PS e QS. Calcular A, B, C.

Resp. 20°, 80° e 80°

37. — Calcular o angulo M, formado pelas bissectrizes internas BM e CM de um triangulo rectangulo ABC.

Resp. 135°

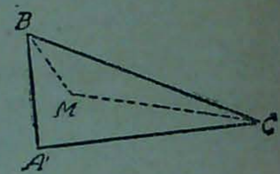


Fig. 9.

38. — Calcular os angulos agudos B e C de um triangulo rectangulo, sabendo-se que a terça parte do angulo externo em B, augmentada da quinta parte do angulo externo em C, é egual a $^1/_3$ da differença entre os angulos internos agudos.

Resp. 30° e 60°

39. — O quadrilatero $ABCD$ é decomposto pela diagonal BD em dois triangulos: o triangulo ABD é equilatero e o triangulo BCD é isosceles. Calcular os angulos do quadrilatero, sabendo-se que o angulo C é egual a $^1/_{15}$ da somma dos outros tres (fig. 10).

Resp. 22°30', 138°45', 138°45' e 60°

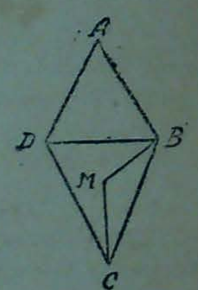


Fig. 10.

40. — Na figura 11 do triangulo ABC é equilatero e o triangulo BMC é isosceles. Sabendo-se que o angulo M é egual a quatro vezes o angulo ACM, calcular os angulos do triangulo BMC.

Resp. 70°, 70° e 40°

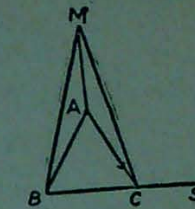


Fig. 11.

41. — Na fig. 11 o triangulo ABC é equilatero e o triangulo BMC é isosceles. Sabendo-se que o angulo externo MCS é egual a $^2/_1$ da somma dos angulos internos M e B do quadrilatero concavo $ACMB$, calcular MCS.

Resp. 100°

42. — O triangulo ABC (fig. 11) é equilatero e o triangulo BCM é isosceles. Sabendo-se que $AM = BC$, calcular o angulo BMC.

Resp. 30°

43. — O quadrilatero $ABCD$ (fig. 10) é decomposto pela diagonal BD em dois triangulos. O triangulo ABD é equilatero e o triangulo BCD é isosceles. Calcular os angulos desse quadrilatero, sabendo-se que o angulo externo em B, diminuido de 18°, é egual a $^1/_{10}$ da somma dos outros tres angulos internos não adjacentes.

Resp. 60°, 140°, 20° e 140°

44. — O quadrilatero $ABCD$ (fig. 10) é decomposto pela diagonal BD em dois triangulos: ABD e BCD, sendo o primeiro equilatero e o segundo isosceles. As bissectrizes BM e CM dos angulos internos B e C do quadrilatero formam um angulo que é egual a 5 vezes o angulo C. Calcular os angulos internos do quadrilatero.

Resp. 60°, 140°, 20° e 140°

45. — Num triangulo rectangulo $ABCD$ a differença entre os angulos agudos é egual a 15°41'28". Calcular os angulos agudos desse triangulo.

Resp. 52°50'44" e 37°9'16"

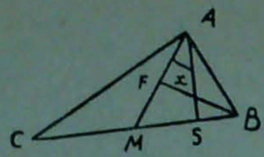


Fig. 12

46. — Num triangulo rectangulo ABC a altura AS forma com a mediana AM um angulo de 22°. Calcular B e C (fig. 12).

Resp. 56° e 34°

47. — Num triangulo rectangulo ABC (fig. 12) a mediana AM forma com a bissectriz BF os angulos adjacentes BFA e BFM. Exprimir este em funcção do angulo B.

Resp. $\frac{3B}{2}$

47-*bis*. — Num triangulo rectangulo ABC (fig. 12) a mediana AM forma com a altura AS um certo angulo x. Exprimir x em funcção dos angulos B e C.

Resp. $B-C$

48. — Na figura 13 exprimir o angulo m em funcção dos angulos a, b e c.

Resp. $m = a + c - b$

49. — Na fig. 13 exprimir o angulo i em funcção dos angulos a, b e c.

Resp. $i = 180° + b - a - c$

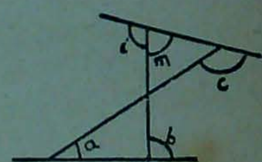


Fig. 13

50. — Na figura 14 exprimir o angulo x em funcção dos angulos m, n e p.

Resp. $x = m - n - p$

51. — Na figura 14 exprimir o angulo b em funcção dos angulos m, n e p.

Resp. $s = 180° + n + p - m$

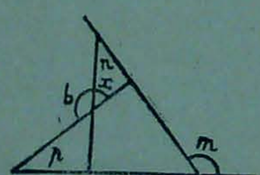


Fig. 14

52. — Na figura 15 exprimir o angulo y em funcção dos angulos a, b e c.

Resp. $y = b - a - c$

53. — Na fig. 15 exprimir o angulo f em funcção dos angulos a, b e y.

Resp. $f = 180° + a + y - b$

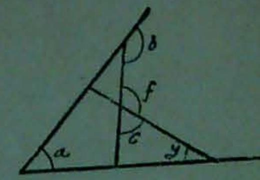


Fig. 15.

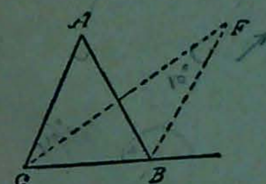


Fig. 16.

54. — No triangulo isosceles ABC a bissectriz externa BF forma com a bissectriz interna CF um angulo de 10°. Calcular A, B e C.

Resp. 20°, 80° e 80°

55. — Num triangulo rectangulo ABC (fig. 12) a mediana AM forma com a bissectriz interna BF um angulo de 105°. Calcular os angulos C e B.

Resp. 40° e 50°

56. — Num triangulo ABC traça-se MS parallela á base BC. Por que ponto deve passar MS para que se tenha a relação $MS = MB + CS$? (fig. 17).

Resp. Deve passar pelo ponto de intersecção das bissectrizes internas.

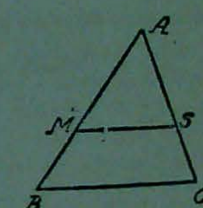


Fig. 17.

57. — Num triangulo ABC os angulos variam segundo uma progressão geometrica. Determinar esses angulos, sabendo-se que o menor vale $25\,^5/_7$ do grau.

Resp. $25°\,^5/_7$, $51°\,^3/_7$ e $102°\,^6/_7$

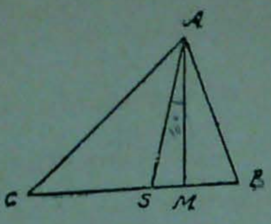


Fig. 18.

58. — Num triangulo ABC a altura AM forma com a bissectriz AS um angulo de 10°. Calcular os angulos A, B e C, sabendo-se que a differença entre os angulos B e C é egual a $^1/_3$ do angulo A.

Resp. 60°, 50° e 70°

Afranio Jomal

POLYGONOS — SOMMA DOS ANGULOS INTERNOS E EXTERNOS — DIAGONAES

59. — Qual é o valor do angulo externo de um polygono regular convexo de 18 lados?

Resp. 20°

$\frac{360}{18} = 20$

60. — Calcular o angulo interno de um polygono regular convexo de 32 lados.

Resp. 168°45'

61. — Calcular o numero de lados de um polygono regular, sabendo-se que o angulo interno excede o angulo externo de 172°30'.

Resp. 96°

62. — Quantos lados tem o polygono regular cujo angulo interno é egual ao quadruplo do angulo externo?

Resp. 10

$4 \times 360 = 180(n-2)$
$\therefore 180n = 1800$
$\therefore n = 10$

63. — Quantos lados tem o polygono regular cujo angulo externo é $^1/_{60}$ da somma dos internos?

Resp. 12

64. — Dados dois polygonos regulares P e P', este de $n+1$ lados e aquelle de n lados, dizer quaes são esses polygonos, sabendo-se que o angulo interno do polygono P' excede o angulo externo do polygono P de 104°.

Resp. P *é um enneagono e* P', *um decagono*

65. — Dados dois polygonos regulares Q e Q', este de $n+2$ lados e aquelle de n lados, calcular o numero de lados desses

---

Observação: — Salvo indicação contraria os problemas formulados sobre polygonos referem-se sempre a polygonos convexos.

polygonos, sabendo-se que o angulo externo de Q é $^1/_{18}$ da somma dos angulos internos de Q'.

Resp. Q é um hexagono e Q', um octogono

66. — Sendo A, B, C e D os angulos de um quadrilatero, determinar esses angulos, sabendo-se que a somma dos dois primeiros é egual a 120° e que os quatro angulos formam uma proporção continua.

Resp. 40°, 80°, 80° e 160°

67. — Tres polygonos P, Q e S têm respectivamente n, $n+1$ e $n+2$ lados. Calcular n, sabendo-se que o total da somma dos angulos internos desses tres polygonos é egual a 2700°.

Resp. 6

68. — Dados dois polygonos regulares P e Q, dizer quaes são esses polygonos, sabendo-se que o angulo externo de P é egual a $^1/_{20}$ da somma dos internos de Q e que o angulo interno de P é o triplo do angulo externo de Q.

Resp. 1ª sol.: Quadrado e dodecagono
2ª sol.: Pentagono e decagono

69. — Quantos lados tem o polygono regular cujo angulo interno mede 157°30' ?

Resp. 16

70. — Quantos lados tem o polygono regular cujo angulo externo augmentado de 45° e egual a $^1/_{12}$ da somma dos internos?

Resp. 8

71. — Quantos lados tem o polygono regular cujo angulo externo augmentado de 36° é egual a $^1/_{20}$ da somma dos internos?

Resp. 10

72. — Em um quadrilatero convexo $ABCD$ os angulos internos variam numa progressão arithmetica cuja razão é egual a 12°. Calcular os angulos desse quadrilatero.

Resp. 72°, 84°, 96° e 108°

73. — Os angulos internos de um quadrilatero convexo variam segundo uma progressão arithmetica. Calcular esses angulos, sabendo-se que o menor excede a razão da progressão de 40°.

Resp. 60°, 80°, 100° e 120°

74. — Calcular os angulos internos e externos de um semi-hexagono regular.

Resp. 60°, 60°, 120° e 120°

75. — Quantos angulos agudos póde ter, no maximo, um polygono convexo qualquer.

Resp. 3

76. — Calcular o angulo formado por duas bissectrizes internas de dois angulos consecutivos de um rectangulo qualquer.

Resp. 90°

77. — Num polygono regular convexo $ABCDE...$ a bissectriz interna do angulo A forma com a bissectriz interna do angulo D, um angulo igual a $^2/_{21}$ da somma dos angulos internos do mesmo polygono. Calcular o numero de lados desse polygono.

Resp. 9

78. — Calcular o angulo formado pelas bissectrizes AM e CM de um pentagono regular convexo $ABCDE$.

Resp. 144°

78-*bis*. — Um polygono $ABCDE...$ é regular. As bissectrizes AM e CM formam um angulo de 60°. Quantos lados tem esse polygono?

Resp. 12

79. — Um polygono $ABCDE\ldots$ é regular. As bissectrizes internas AM e CM formam um angulo M que é egual a [illegible] do angulo interno do polygono. Calcular o numero de lados desse polygono.

Resp. [illegible]

80. — Calcular o angulo formado pelos prolongamentos dos lados AB e DC de um pentagono regular convexo $ABCD$.

Resp. 36°

81. — Prolongando-se os lados AB e DC de um polygono regular convexo $ABCDE\ldots$ obtem-se um angulo de 100°. Quantos lados tem esse polygono?

Resp. 9

82. — Prolongando-se os lados AB e DC de um polygono regular convexo $ABCDE\ldots$ obtem-se um angulo que é egual a $^3/_4$ do angulo interno do polygono. Calcular o numero de lados desse polygono.

Resp. 18

83. — Sobre cada lado de um parallelogrammo qualquer, e pela parte exterior deste, constroem-se quadrados. Calcular os angulos internos do quadrilatero que se obtem unindo-se os centros dos quadros obtido.

Resp. São todos eguaes a 90°

84. — Quantas diagonaes tem um decagono?

Resp. 35 $\frac{10(7)}{2} = 35$

85. — Qual é o polygono que tem 20 diagonaes?

Resp. O octogono $20 = \frac{n(n-3)}{2}$

86. — Quantos lados tem um polygono cujo numero de lados é egual a $^2/_9$ do numero de diagonaes?

Resp. 12

87. — Dados dois polygonos P e Q, que têm respectivamente n e $n+6$ lados, calcular n, sabendo-se que um dos polygonos tem 39 diagonaes mais do que o outro.

Resp. 5

88. — Em dois polygonos convexos P e Q o numero de lados differe de uma unidade. Calcular o numero de lados do polygono P, sabendo-se que o numero de diagonaes de um delles é egual a $^1/_{30}$ do numero de graus da somma dos angulos internos do outro.

Resp. 11

89. — Dados dois polygonos P e Q, que têm respectivamente n e $n+2$ lados, calcular n, sabendo-se que o numero total de diagonaes desses dois polygonos é egual a 55.

Resp. 8

90. — Dois polygonos têm respectivamente n e $n+4$ lados. Calcular n, sabendo-se que o numero de diagonaes de um delles dividido pelo numero de diagonaes do outro é egual a $^{10}/_n$.

Resp. 8

91. — Tres polygonos têm respectivamente n, n' e n'' lados. Calcular n, n' e n'', sabendo-se que esses tres numeros formam uma progressão arithmetica e que os tres polygonos têm conjunctamente 46 diagonaes.

Resp. 5, 7 e 9

MEDIDA DE ANGULOS — QUADRILATERO INSCRIPTO

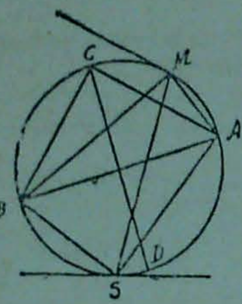


Fig. 19

92. — Na figura 19 a corda AM é egual ao lado do octogono regular inscripto e a corda BS é egual ao lado do pentagono regular inscripto. Calcular os angulos agudos formados pelas cordas AS, MS, MB e CB com o diametro CD, que é perpendicular ao diametro AB.

Resp. 54°, 31°30′, 67°30′ e 45°

93. — Medir o angulo formado pelos prolongamentos das cordas BM e SA da figura 19.

Resp. 13°30′

94. — Medir o angulo formado pelos prolongamentos das cordas CD e BS da figura 19.

Resp. 36°

95. — Medir o angulo formado pelos prolongamentos das cordas AM e CD da figura 19.

Resp. 22°30′

96. — Na figura 19 medir os angulos agudos formados pelas cordas AS, MS, MB e CB com o diametro AB.

Resp. 36°, 58°30′, 22°30′ e 45°

97. — Na figura 19 medir o angulo agudo formado pela corda MB com a tangente á circumferencia no ponto B.

Resp. 67°30′

Observação — Completam-se os enunciados dos problemas 93 a 101 com o enunciado do problema 92.

98. — Na figura 19 medir o angulo agudo formado pela corda MS com a tangente á circumferencia no ponto S.

Resp. 76°30′

99. — Na figura 19 medir o angulo circumscripto formado pelas tangentes á circumferencia nos pontos M e S.

Resp. 27°

100. — Na figura 19 medir o angulo formado pela tangente á circumferencia no ponto M com o prolongamento da corda BS.

Resp. 9°

101. — Na figura 19 medir o angulo formado pela corda AM com a tangente á circumferencia no ponto S.

Resp. 49°30′

102. — O angulo exterior S (figura 20) tem 60°. Calcular o numero de graus do arco CD, sabendo-se que a corda AB é egual ao lado do triangulo equilatero inscripto.

Resp. 30°

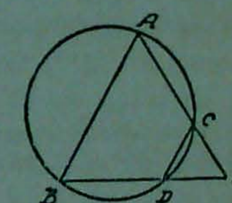


Fig. 20.

103. — O angulo S, medido em graus (figura 21) excede de 12° o arco CD e é egual a $^1/_4$ do arco AB. Calcular o angulo S e os arcos AB e CD.

Resp. 24°, 60° e 12°

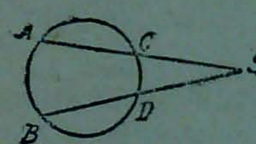


Fig. 21.

104. — O angulo S, medido em graus, excede de 12° o arco CD e é egual a $^1/_4$ do arco AB. Calcular o angulo S e os arcos AB e CD (figura 21).

Resp. 36°, 96° e 24°

105. — O angulo S, medido em graus (fig. 21), excede de 10 o arco CD e é egual a $^5/_{16}$ da somma dos arcos comprehendidos entre seus lados. Calcular o angulo S.

Resp. 25°

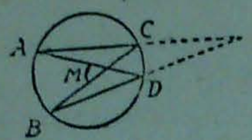


Fig. 22

106. — O arco AB (fig. 22) excede de CD de 20°. Calcular esses arcos, sabendo-se que o angulo formado pelas cordas AD e BC mede 70°.

Resp. 80° *e* 60°

107. — Determinar o angulo formado pelos prolongamentos das cordas AC e BD, sabendo-se que o arco AB (fig. 22) excede o arco CD de 20° e que o angulo agudo M, medido em graus, vale $^5/_6$ do arco AB.

Resp. 10°

108. — Qual é a relação existente entre os angulos A e B no quadrilatero concavo inscripto $ADBC$ (fig. 22) ?

Resp. São eguaes.

109. — Na fig. 22 o angulo M, expresso em graus, excede de 24° a semi-differença dos arcos AB e CD. Calcular M, sabendo-se que os numeros de graus dos arcos CD e AB estão entre si na razão de $^3/_8$.

Resp. 44°

110. — O arco AB (fig. 22), o angulo M e o arco DC, medidos em graus, valem juntamente 108°. Calcular os numeros de graus dos arcos AB e CD, sabendo-se que a angulo M, expresso em graus, excede de 6° a differença entre os arcos.

Resp. 51° *e* 21°

111. — Calcular o angulo M (fig. 22), sabendo-se que o numero de graus do arco CD é egual a $^5/_{12}$ do numero de graus do arco AB e que o angulo M, medido em graus, excede de 9° a differença entre os arcos AB e CD.

Resp. 51°

112. — As bases de um trapezio inscripto são AB e CD. Calcular os angulos internos desse trapezio, sabendo-se que AB é o lado do decagono regular inscripto e que CD é o lado do triangulo equilatero inscripto.

Resp. 111°, 111°, 69° *e* 69°

113. — Num trapezio inscripto $ABCD$, cujas bases são AB e CD, o arco AB é egual a $^3/_4$ do arco CD. Calcular os angulos internos A e B desse trapezio, sabendo-se que os arcos AB, BC e DC, medidos em graus, são expressos por numeros inteiro, e que o arco BC está comprehendido entre 60° e 70°.

Resp. 2 *soluções*: 125°30' *e* 64°30'; 114° *e* 66°

LINHAS PROPORCIONAES — LEI LINEAR DE THALES — SEGMENTOS DETERMINADOS PELAS BISSECTRIZES DE UM TRIANGULO — SEMELHANÇA — COMPRIMENTO DA CIRCUMFERENCIA

115. — Uma parallela a um lado de um triangulo determina sobre o segundo lado segmentos de 7^m e 12^m. Calcular os segmentos determinados sobre o terceiro lado, que mede 57^m.

Resp. 21^m e 36^m

116. — Um feixe de cinco parallelas corta uma transversal em quatro segmentos, que medem 5^m, 7^m, 2^m e 9^m, respectivamente. Calcular os segmentos determinados pelo mesmo feixe em outra transversal, sabendo-se que o segundo segmento comprehendido entre as parallelas extremas mede $34^m,5$.

Resp. $7^m,5$; $10^m,5$; 3^m; $13^m,5$

117. — Os lados de um triangulo medem respectivamente 20^m, 22^m e 30^m. Calcular os segmentos em que a bissectriz interna divide o lado maior.

Resp. $14^m,28$ e $15^m,71$

118. — O perimetro de um triangulo é de 36^m e os lados são proporcionaes aos numeros 3, 4 e 5. Calcular os segmentos determinados sobre os lados pelas tres bissectrizes internas.

Resp. 4^m e 5^m; $4^m,5$ e $7^m,5$; $6^m,43$ e $8^m,57$

119. — Os lados de um triangulo medem respectivamente 6^m, 11^m e 15^m. Calcular de quanto é preciso prolongar o lado maior para que elle encontre a bissectriz do angulo externo.

Resp. 18^m

120. — Os lados de um triangulo medem, respectivamente, 9^m, 7^m e 8^m. Calcular o segmento DD' determinado pelas bissectrizes AD e AD' sobre o lado BC de 8^m.

Resp. $31^m,5$

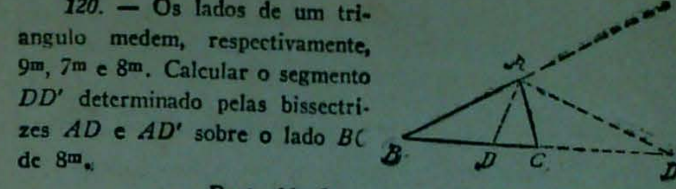


Fig. 23

121. — Os angulos de um triangulo rectangulo valem 60° e 30° respectivamente. Estabelecer a razão entre os segmentos determinados sobre o lado opposto pela bissectriz do angulo de 60°.

Resp. [illegible]

122. — Dois lados de um triangulo medem respectivamente 48^m e 64^m; a partir do vertice commum toma-se um segmento de 18^m sobre o primeiro lado. Determinar o segmento que é preciso tomar sobre o segundo para que a recta que passe pelos extremos desses dois segmentos seja parallela ao terceiro lado.

Resp. 24^m

123. — Duas transversaes partem do ponto A e encontram duas parallelas; a primeira corta as parallelas em B e C e a segunda em D e E. Sabe-se que $BC = 4^m$; $BD = 12^m$, $CE =$ 1[illegible]m e $AE = 16^m$. Calcular AB, AD e DE.

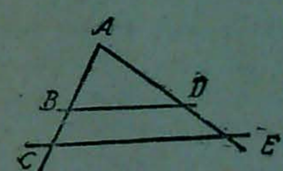


Fig. 24

Resp. $AB = 8^m$, $AD = 10^m,66$, $DE = 5^m,33$

124. — Sobre duas parallelas tomam-se seis pontos A, B, C, em uma, e A', B', C', na outra, de maneira a ter-se $AB = 2^m$, $BC = 3^m$, $A'B' = 1^m,24$ e $B'C' = 3^m,1$. Pergunta-se se os segmentos AA', BB' e CC', prolongados, passam pelo mesmo ponto.

Resp. Não

125. — Um triangulo, cujos lados medem 80^m, 180^m e 130^m, respectivamente, é semelhante a outro, em que o perimetro vale 39^m. Calcular os lados do segundo triangulo.

Resp. 8^m, 18^m e 13^m

126. — Os lados de um triangulo medem respectivamente 13^m, 17^m e 20^m. Em outro triangulo semelhante, o lado homologo ao menor lado do triangulo dado mede $19^m,5$. Calcular os outros dois lados do segundo triangulo.

Resp. $25^m,5$ e 30^m

127. — As bases de um trapezio medem respectivamente 32^m e 20^m e a altura, 9^m. Prolongam-se os lados não parallelos até se encontrarem. Calcular as alturas dos triangulos assim formados.

Resp. 15^m e 24^m

128. — As bases de um trapezio medem 28^m e 42^m e a altura, 12^m. A $3^m,60$ da base maior traça-se-lhe uma parallela. Calcular a parte dessa parallela comprehendida entre os lados não parallelos do trapezio.

Resp. $37^m,80$

129. — Pelos pontos A e B de uma recta, traçam-se perpendiculares e sobre ellas tomam-se os segmentos $AC = 13^m$ e $BD = 7^m$. No segmento AB, que mede 25^m, toma-se um ponto P tal que os angulos APC e BPD sejam eguaes. Calcular AP e BP.

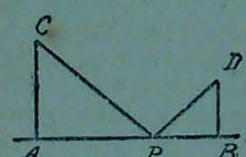


Fig. 25.

Resp. $16^m,25$ e $8^m,75$

130. — As bases de um trapezio medem, respectivamente, 18^m e 6^m e a altura, 15^m. A uma distancia de 10^m da base menor traça-se uma parallela ás bases. Calcular a parte dessa parallela comprehendida entre os lados não parallelos.

Resp. 14^m

131. — Num trapezio $ABCD$, tomam-se sobre os lados AD e BC, a partir de D e C, respectivamente, comprimentos DE e CF proporcionaes aos numeros 2 e 3. Unem-se os pontos E e F. As bases AB e CD medem, respectivamente, $38^m,5$ e 12^m45. Calcular EF.

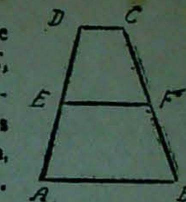


Fig. 26.

Resp. $22^m,87$

132. — Dois polygonos semelhantes têm respectivamente 280^m e 160^m de perimetro. Um lado do primeiro polygono mede 15^m; determinar o lado homologo no segundo polygono.

Resp. $8^m,57$

133. — O perimetro de um polygono vale 81^m e uma diagonal mede $4^m,5$. A diagonal homologa de um polygono semelhante mede 3^m. Calcular o perimetro desse segundo polygono.

Resp. 54^m

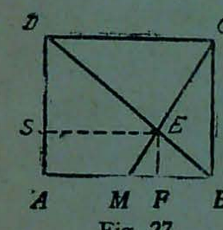


Fig. 27.

134. — Os lados AB e AD de um rectangulo $ABCD$ medem 15^m e 12^m, respectivamente. Sabendo-se que M é o meio do lado AB, calcular as distancias ES e EF, sendo E o ponto de intersecção da diagonal BD com o segmento CM.

Resp. $ES = 10^m$, $EP = 4^m$

135. — O perimetro de um triangulo equilatero vale 54^m. Calcular o lado de um triangulo equilatero, cuja altura é egual a $^2/_5$ da do primeiro.

Resp. $7^m,2$

136. — Dois triangulos rectangulos ABC e $A'B'C'$ têm os cathetos BC e $B'C'$ apoiados sobre a mesma recta MN. Por um ponto D de AB, situado a uma distancia $BD = x$ do vertice B, tira-se uma parallela $DED'E'$ á recta MN de modo que os

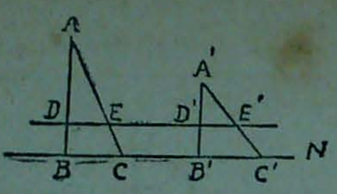


Fig. 28

segmentos DE e $D'E'$ sejam eguaes. Sabendo-se que $AB = 12^{dm}$, $BC = 10^{dm}$, $A'B' = 8^{dm}$ e $B'C' = 16^{dm}$, calcular x e DE.

Resp. $x = 5^{dm},14$; $DE = 5^{dm},71$

137. — Calcular o comprimento de uma circumferencia de raio egual a $2^m,4$.

Resp. $15^m,08$

138. — Calcular o comprimento de uma circumferencia cujo diametro mede 10^m.

Resp. $31^m,416$

139. — Calcular o raio de uma circumferencia de 1^m de comprimento.

Resp. $0^m,159$

140. — Uma circumferencia tem $4^m,084$ de comprimento. Calcular o raio.

Resp. $0^m,649$

141. — Calcular o raio da Terra, supposta espherica, sabendo-se que o arco de um quadrante, medido sobre um meridiano, mede approximadamente 10000^{km}.

Resp. 6366^{km}

142. — Tres circumferencias medem respectivamente $10^m,27$, $11^m,09$ e $19^m,01$ de comprimento. Calcular o raio de uma circumferencia, cujo comprimento seja egual á somma dessas tres circumferencias.

Resp. $6^m,425$

143. — Uma pista circular mede $4^m,25$ de raio. Calcular o diametro que deve ter outra pista circular para que a circumferencia seja o triplo.

Resp. $25^m,5$

144. — Calcular o caminho percorrido em um minuto de tempo por um ponto situado sobre o equador, sabendo-se o raio equatorial mede 6378^{km}. (Considera-se o movimento de rotação).

Resp. 27829^m

145. — O raio do equador terrestre mede 6378^{km}, approximadamente. Determinar a distancia entre dois pontos tomados sobre o equador e situados a $32°28'$ um do outro.

Resp. 3502^{km}

146. — Calcular o comprimento de um arco de $30°$ numa circumferencia de 10^m de raio.

Resp. $5^m,236$

147. — Um arco de $75°25'$ mede $58^m,725$ de comprimento. Calcular o raio da circumferencia respectiva.

Resp. $44^m,68$

148. — Determinar o numero de graus de um arco que tem o mesmo comprimento que o raio.

Resp. $57°17'38'',4$

149. — Duas tangentes traçadas de um ponto fóra de um circulo de $1^m,3$ de raio intercepta sobre a circumferencia um arco de $0^m,57$. Calcular o angulo das duas tangentes.

Resp. $27°7'18''$

RELAÇÕES METRICAS NO CIRCULO

213. — Calcular a ordenada que determina sobre o diametro correspondente segmentos de 4^m e 9^m.

Resp. 6^m

214. — O raio de um circulo mede $12^m,5$; calcular os segmentos que uma ordenada de 12^m determina sobre o diametro correspondente.

Resp. 9^m e 16^m

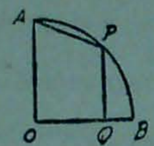


Fig. 37.

215. — Num circulo de centro O e raio egual a 2^m traçam-se dois raios perpendiculares AO e BO. Sobre o arco AB marca-se um ponto P tal que a distancia AP a uma das extremidades A do arco seja egual á distancia PQ ao raio BO que passa pela outra extremidade B do arco. Calcular AP.

Resp. $1^m,464$

216. — Pelas extremidades de um diametro traçam-se duas cordas, cujas projecções sobre esse mesmo diametro medem 2^m e 3^m, respectivamente. Sabendo-se que a primeira corda mede 6^m, calcular a outra.

Resp. $7^m,348$

217. — Uma corda de um circulo mede 24^m e a flecha 9^m. Calcular o raio.

Resp. $12^m,5$

218. — Uma corda de um circulo mede 96^m e a flecha 12^m. Calcular o comprimento da circumferencia.

Resp. $640^m,886$

155. — Dois lados de um triangulo medem respectivamente 18^m e 25^m e a projecção do terceiro lado sobre o segundo mede 3^m. Calcular o terceiro lado e a altura relativa ao segundo.

Resp. 20^m e $20^m,2$

156. — As bases de um trapezio isosceles medem 7^m e 13^m respectivamente e a altura, 4^m. Calcular o perimetro.

Resp. 30^m

157. — A hypothenusa de um triangulo rectangulo mede 40^m e a razão dos cathetos é de $^3/_4$. Calcular as projecções dos cathetos sobre a hypothenusa.

Resp. $14^m,4$ e $25^m,6$

158. — As diagonaes de um losango medem 12^{cm} e 16^{cm}, respectivamente. Calcular o perimetro.

Resp. 40^{cm}

159. — As diagonaes de um losango medem 90^m e 120^m, respectivamente. Calcular o lado e a distancia entre dois lados parallelos.

Resp. 75^m e 72^m

160. — A somma dos cathetos de um triangulo rectangulo é egual a $1^m,4$ e a hypothenusa mede 1^m. Calcular os cathetos.

Resp. $0^m,6$ e $0^m,8$

161. — A diagonal de um rectangulo mede $3^m,5$ e a differença entre dois lados consecutivos é egual a $0^m,7$. Calcular o perimetro.

Resp. $9^m,8$

162. — Calcular as dimensões de um rectangulo cuja diagonal mede $5^m,5$ e cujo perimetro vale $15^m,4$.

Resp. $3^m,3$ e $4^m,4$

163. — Calcular as dimensões de um rectangulo cuja diagonal mede 75^m, sabendo-se que elle é semelhante a um rectangulo cujos lados medem 36^m e 48^m.

Resp. 45^m *e* 60^m

164. — O perimetro de um rectangulo vale 70^m e as dimensões são inversamente proporcionaes a $^1/_3$ e $^1/_4$. Calcular a diagonal.

Resp. 25^m

165. — Os segmentos determinados sobre a hypothenusa de um triangulo rectangulo pela bissectriz do angulo recto são respectivamente eguaes a $11\,^3/_7$ metros e $8\,^4/_7$ metros. Calcular o perimetro do triangulo.

Resp. 48^m

166. — A somma da diagonal e do lado de um quadrado é egual a $7^m,242$. Calcular o perimetro.

Resp. 12^m

167. — A differença entre a diagonal e o lado de um quadrado é egual a $0^m,828$. Calcular a diagonal.

Resp. $2^m,828$

168. — Num triangulo rectangulo a hypothenusa mede 25^m e um catheto, 15^m. Calcular a altura relativa á hypothenusa.

Resp. 12^m

169. — O diametro de um circulo mede 10^m. Calcular a distancia do centro á uma corda de 8^m.

Resp. 3^m

170. — Os raios de dois circulos secantes medem 4^m e 5^m, respectivamente, e a distancia dos centros, 7^m. Calcular a corda commum.

Resp. $5^m,6$

171. — A base *BC* de um triangulo isosceles *ABC* mede 6^m e a altura, 8^m. Inscreve-se um circulo e traça-se-lhe uma tangente parallela á base *BC*. Calcular a parte *DF* dessa parallela comprehendida entre os lados *AB* e *BC* do triangulo. Calcular tambem o raio do circulo.

Resp. $DF=5^m,76$; $r=2^m,08$

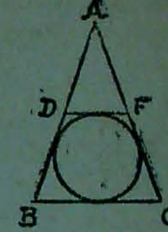


Fig. 29.

172. — A base de um triangulo isosceles mede 6^m e o raio do circulo inscripto, 2^m; calcular o raio do circulo circumscripto.

Resp. $4^m,225$

173. — O raio de um circulo mede 6^m. Por um ponto *P*, distante 10^m do centro, traçam-se duas tangentes. Calcular o comprimento das tangentes comprehendido entre *P* e os pontos de contacto; calcular tambem a corda que une os pontos de contacto.

Resp. 8^m *e* $9^m,6$

174. — Os raios de dois circulos medem, respectivamente, 8^m e 3^m e a distancia dos centros, 15^m. Calcular o comprimento da tangente commum externa.

Resp. $14^m,142$

175. — Uma corda forma com um diametro angulo de 45°; a somma dos quadrados dos segmentos da corda é egual a 18. Calcular o raio do circulo.

Resp. 3^m

174. — Os raios de dois circulos concentricos medem, respectivamente, 10^m e 8^m. Calcular o comprimento de uma corda no circulo maior que seja tangente ao menor.

Resp. 12^m

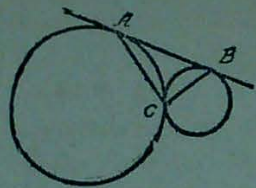


Fig. 30.

177. — Duas circumferencias de raios eguaes a 6^m e 14^m, respectivamente, são tangentes em C; traça-se uma tangente commum externa, cujos pontos de contacto respectivos são A e B. Calcular os lados do triangulo ABC.

Resp. $18^m,330$; $15^m,316$; $10^m,032$

178. — Num circulo de 8^m de raio traça-se uma corda de 3^m. Calcular os segmentos determinados por essa corda sobre o diametro que lhe é perpendicular.

Resp. $15^m,858$ e $0^m,142$

179. — Sobre uma recta tomam-se dois pontos A e B, distantes 8^m entre si. Pelo meio M do segmento AB levanta-se uma perpendicular e sobre ella marca-se um ponto C tal que $CM = 2^m,20$. Calcular o comprimento da circumferencia que passe pelos pontos A, B, C.

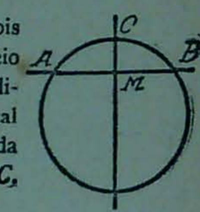


Fig. 31.

Resp. $29^m,73$

180. — Duas parallelas são cortadas por uma transversal. A parte da transversal entre as duas parallelas mede $1^m,414$. Sabendo-se que um dos angulos formados pela transversal e uma das parallelas é de 45°, calcular a distancia entre as duas parallelas.

Resp. 1^m

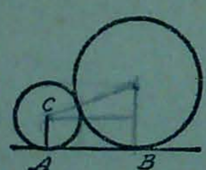


Fig. 32.

181. — Seja um segmento $AB = 6^m$ e seja um circulo de centro C e raio $AC = 2^m$ tangente em A á recta AB. Calcular o raio de um circulo tangente em B á recta AB e tangente ao primeiro circulo.

~~*Resp.* $4^m 5$~~

Resp.: 4,5 mts.

182. — As bases de um trapezio isosceles medem respectivamente 10^m e 6^m; os lados não parallelos formam com a base menor angulos de 120°. Calcular a altura do trapezio.

Resp. $3^m,464$

183. — Num trapezio isosceles as bases AB e DC medem respectivamente 12^m e 8^m; os lados obliquos AD e BC formam com a base maior angulos de 60°. Calcular os lados obliquos AD e BC, a altura DH e as diagonaes AC e BD do trapezio.

Resp. $AD = BC = 4^m$;
$DH = 3^m,464$;
$AC = BD = 10^m,58$

184. — O perimetro de um losango vale 4^m e os angulos obtusos são o dobro dos angulos agudos. Calcular as diagonaes do losango.

Resp. 1^m e $1^m,732$

185. — Um triangulo rectangulo está inscripto em um circulo. Sabe-se que um dos angulos agudos é o dobro do outro e que a circumferencia mede $12^{Dm},5664$ de comprimento. Calcular o perimetro do triangulo.

Resp. $9^{Dm},464$

186. — Calcular o lado do quadrado inscripto em um triangulo equilatero de 30^m de perimetro.

Resp. $4^m,64$

187. — Num triangulo ABC, a base BC mede 2^{dm}; as alturas BD e CE são eguaes e cortam-se num ponto H, no interior do triangulo, tal que $BH = 3HD$ e $CH = 3HE$. Calcular os lados AC e AB e as alturas AF, BD e CE.

Resp. $AC = AB = 1^{dm},73$;
$BD = CE = 1^{dm},63$;
$AF = 1^{dm},41$.

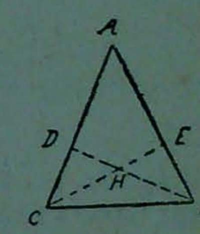


Fig. 38

188. — A base AB de um triangulo mede 8^m e a altura CH, 10^m. Calcular o perimetro do rectangulo $F\ G\ I\ J$ inscripto nesse triangulo e semelhante a um rectangulo cujos lados medem 3^m e 4^m.

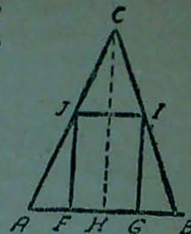


Fig. 34.

Resp. $17^m,5$

189. — Num triangulo rectangulo ABC um angulo agudo é o dobro do outro. O pé K da bissectriz BK do maior angulo agudo B dista 25^m do vertice do angulo menor C. Calcular a bissectriz BK e os cathetos AB e AC.

Resp. $BK = 25^m$, $AB = 21^m,65$, $AC = 37^m,5$

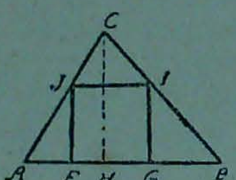


Fig. 35.

190. — A base AB de um triangulo mede 9^m e a altura CH, 6^m. Calcular a diagonal do quadrado inscripto nesse triangulo, o lado do quadrado sendo apoiado sobre a base AB do triangulo.

Resp. $5^m,09$

191. — Dados $a = 12^m$, $b = 7^m$, e $c = 8^m$, pergunta-se se o triangulo ABC é rectangulo, acutangulo ou obtusangulo.

Resp. *Obtusangulo.*

192. — Dados $a = 45^m$, $b = 36^m$ e $c = 27^m$, pergunta-se se o triangulo ABC é rectangulo, acutangulo ou obtusangulo.

Resp. *Rectangulo*

193. — Dados $a = 15^m$, $b = 13^m$ e $c = 12^m$, pergunta-se se o triangulo ABC é rectangulo, acutangulo ou obtusangulo.

Resp. *Acutangulo*

194. — Os tres lados a, b, c de um triangulo medem 10^m, 15^m e 18^m, respectivamente. Calcular as projecções a' e b' dos lados a e b sobre c.

Resp. $5^m,53$ e $12^m,47$

195. — Os lados de um triangulo, cujo perimetro vale 32^m, são proporcionaes aos numeros 40, 45 e 75. Calcular a projecção do maior lado sobre o menor.

Resp. 13^m

196. — As bases de um trapezio isosceles medem 738^m e 548^m, respectivamente, e a somma dos lados não parallelos é egual a 406^m. Calcular as diagonaes.

Resp. $667^m,54$

197. — Num triangulo ABC, $AB=42^m$, $AC=40^m$ e $BC=60^m$. Calcular a mediana AD.

Resp. $27^m,96$

198. — Os lados de um triangulo medem 10^m, 8^m e 9^m, respectivamente. Calcular as medianas.

Resp. $6^m,89$; $8^m,63$; $7^m,85$

199. — Calcular a mediana relativa á hypothenusa de um triangulo rectangulo inscripto em um circulo, cujo raio é egual á diagonal de um quadrado de 8^m de perimetro.

Resp. $2^m,828$

200. — Os lados de um triangulo medem 7^m, 10^m e 15^m, respectivamente. Calcular a bissectriz do maior angulo.

Resp. $3^m,9$

201. — Num triangulo ABC, $AB=20^m$, $AC=22^m$ e $BC=30^m$. Calcular a bissectriz interna AD.

Resp. $14^m,68$

202. — No triangulo de que trata o problema anterior calcular a bissectriz externa AK.

Resp. $313^m,94$

203. — Num triangulo ABC a bissectriz AI do angulo A determina sobre o lado BC segmentos de 4^m e 5^m, respectivamente. O producto dos lados AC e AB é egual a 180. Calcular a bissectriz AI.

Resp. $12^m,649$

204. — Os lados de um triangulo medem 8^m, 6^m e 12^m. Calcular as alturas.

Resp. $5^m,332$; $7^m,110$; $3^m,555$

205. — Num triangulo ABC, $AB = 143^m,25$, $AC = 208^m,33$ e $BC = 315^m,48$. Calcular a altura AD.

Resp. $76^m,80$

206. — As bases de um trapezio medem 6^m e 15^m e os lados não parallelos medem 5^m e $7^m,211$, respectivamente. Calcular a distancia entre os meios das bases.

Resp. $4^m,272$

207. — Os lados de um quadrilatero medem respectivamente 48^m, 40^m, 30^m e 14^m; uma diagonal mede 40^m e a recta que une os meios das diagonaes mede 15^m. Calcular a outra diagonal.

Resp. 50^m

208. — Os lados adjacentes de um parallelogrammo medem respectivamente 8^m e 10^m. Sabendo-se que uma diagonal mede 6^m, calcular a outra.

Resp. $17^m,088$

209. — As diagonaes de um parallelogrammo medem respectivamente $4^m,690$ e 10^m, e um dos lados, 6^m. Calcular o perimetro.

Resp. 22^m

210. — Dois lados adjacentes de um parallelogrammo medem respectivamente 3^m e 5^m e formam entre si um angulo de 60°. Calcular as diagonaes.

Resp. 7^m e $4^m,358$

211 — As bases de um trapezio medem 4^m e 10^m e os lados não parallelos, 3^m e $6^m,708$, respectivamente; uma diagonal mede 5^m; calcular a outra diagonal.

Resp. $10^m 440$

212. — A distancia entre os centros O e O' de duas polias de raios differentes é de $1^m,30$. Essas polias são ligadas por uma transmissão (correia) que se cruza formando um angulo de 60°.

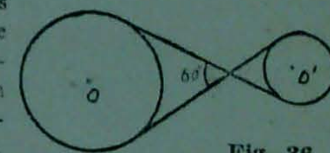


Fig. 36

A primeira polia faz 100 revoluções emquanto a outra faz 160. Calcular o comprimento total da correia.

Resp. $4^m,974$

RELAÇÕES METRICAS NO TRIANGULO — THEOREMA DE PYTHAGORAS — ALTURAS DE UM TRIANGULO; MEDIANAS E BISSECTRIZES

150. — A hypothenusa de um triangulo rectangulo mede 10^{m}. A somma dos cathetos, que são proporcionaes aos numeros 3 e 4, é egual a 14^{m}. Calcular as projecções dos cathetos sobre a hypothenusa.

Resp. 3^{m},6 *e* 6^{m},4

151. — A hypothenusa de um triangulo rectangulo mede 50^{m} e um dos segmentos determinados pela altura sobre a hypothenusa mede 30^{m}. Calcular a altura e os cathetos.

Resp. $h=24^{m},4;\ b=31^{m},6;\ c=38^{m},7$

152. — Calcular os cathetos de um triangulo rectangulo, sabendo-se que as suas projecções sobre a hypothenusa medem 2^{m},88 e 5^{m},12, respectivamente.

Resp. 4^{m},8 *e* 6^{m},4

153. — O perimetro de um triangulo equilatero vale 450^{m}. Calcular a altura.

Resp. 129^{m},9

154. — Os lados de um triangulo rectangulo são respectivamente eguaes a 3*a*, 4*a* e 5*a*. Exprimir em funcção de *a*: 1°) o raio do circulo inscripto; 2°) a distancia do centro do circulo inscripto ao centro do circulo circumscripto.

Resp. a; $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$

219. — Uma corda de um circulo mede 17^{m} e a flecha do arco duplo, 7^{m}. Calcular o diametro do circulo.

Resp. 41^{m},285

220. — A flecha de uma corda de um circulo de 312^{m} de raio mede 24^{m}. Calcular a corda.

Resp. 240^{m}

221. — Num circulo de 18^{m} de raio uma corda mede 12^{m}. Calcular a flecha da corda do arco duplo.

Resp. 4^{m}

222. — Uma corda de um circulo mede 3^{m},275; a corda que subtende um arco duplo mede 4^{m},120. Calcular o raio do circulo.

Resp. 2^{m},11

223. — Duas cordas traçadas pelas extremidades de um diametro medem 8^{m} e 10^{m}, respectivamente; a projecção da primeira corda sobre o diametro mede 6^{m}. Calcular a projecção da segunda corda sobre o mesmo diametro.

Resp. 9^{m},375

224. — Num circulo duas cordas se cortam; os segmentos de uma corda medem 6^{m} e 9^{m}, respectivamente; um dos segmentos da outra mede 10^{m}. Calcular o outro segmento.

Resp. 5^{m},4

225. — Num circulo duas cordas se cortam; os segmentos de uma medem 4^{m} e 6^{m}, respectivamente. Calcular os segmentos da outra, cujo comprimento total é de 9^{m},8.

Resp. 5^{m} *e* 4^{m},8

226. — Num circulo de 12^{m} de raio duas cordas se cortam; o producto dos segmentos de cada uma é 44^{m2}. Calcular a distancia do ponto de intersecção ao centro.

Resp. 10^{m}

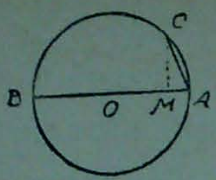


Fig. 38.

227. — De um ponto A de uma circumferencia de centro O e raio egual a 8^m partem uma corda AC e um diametro AB. Sendo AM a projecção da corda sobre o diametro, calcular AC, sabendo-se que AC é egual ao segmento MO.

Resp. $5^m,856$

228. — De um ponto partem duas secantes a um circulo; uma mede 3^m e seu segmento externo 2^m. Sabendo-se que a outra secante mede 5^m, calcular o seu segmento externo.

Resp. $1^m,20$

229. — De um ponto partem duas secantes a um circulo; as partes externa e interna de uma medem 8^m e 6^m, respectivamente; a parte interna da segunda secante mede 5^m. Calcular a parte externa.

Resp. $8^m,374$

230. — De um ponto, situado a 10^m do centro de um circulo de 8^m de raio, traça-se uma secante tal que a parte interna seja egual á parte externa. Calcular essa secante.

Resp. $8^m,484$

231. — Uma tangente a um circulo e uma secante partem do mesmo ponto; a tangente mede 18^m e a parte interna da secante, 27^m. Calcular a parte externa da secante.

Resp. 9^m

232. — De um ponto, situado a 5^m da circumferencia de um circulo de 2^m de raio, traça-se uma tangente. Calcular essa tangente.

Resp. $6^m,71$

233. — Pelo ponto A, situado sobre a circumferencia de um circulo de $2^m,2$ de raio, traça-se uma tangente. Calcular o comprimento AD dessa tangente, de modo que a seccante DF, traçada pelo ponlo D e passado pelo centro tenha a parte externa ED, egual ao diametro.

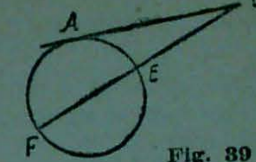


Fig. 39

Resp. $6^m,22$

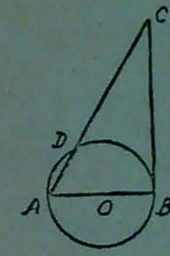


Fig. 40

234. — Dado um circulo, traça-se um diametro AB e pelo ponto B traça-se uma tangente. Do ponto A como centro e com um raio egual ao dobro de AB descreve-se um arco que corta a tangente no ponto C. Traça-se AC, que encontra o circulo dado em D. Pede-se o segmento AD.

Resp. $AD = R$.

235. — Dá-se o angulo $XOY = 30°$ e sobre OY dois pontos A e B taes que $OA = 4^m$ e $OB = 9^m$. Por A e B faz-se passar uma circumferencia tangente a OX; seja C o ponto de contacto. Calcular:

1°) o comprimento OC;

2°) o comprimento da perpendicular CD abaixada de C sobre OY;

3°) o perimetro do triangulo ABC.

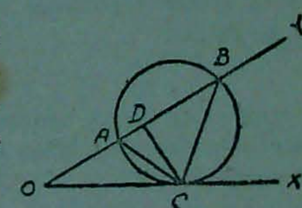


Fig. 41

Resp. $OC = 6^m$; $CD = 3^m$;
$AC + BC + AB = 13^m,074$.

POLYGONOS REGULARES

236. — Calcular o perimetro e o apothema de um triangulo equilatero inscripto em um circulo, no qual uma corda de 6^m dista 4^m do centro.

Resp. $25^m,9$ *e* $2^m,5$

237. — Calcular o perimetro de um triangulo equilatero circumscripto a um circulo de 10^m de diametro.

Resp. $51^m,9$

238. — De um ponto *P*, situado a uma distancia egual á $2R$ do centro de um circulo de raio *R*, partem duas tangentes *PA* e *PB* a esse circulo. Calcular as tangentes *PA* e *PB*, o angulo *APB* e a corda de contacto *AB*.

Resp. $PA=PB=R\sqrt{3}$; $\widehat{APB}=60°$; $AB=R\sqrt{3}$

239. — Num circulo está inscripto um hexagono regular de 21^m de perimetro. Calcular o lado do quadrado inscripto nesse mesmo circulo.

Res. $4^m,9$

240. — O lado de um quadrado circumscripto a um circulo mede $3^m,4$. Calcular a altura de um triangulo equilatero inscripto nesse mesmo circulo.

Resp. $2^m,55$

241. — Num circulo inscrevem-se um triangulo equilatero e um quadrado. Sendo o apothema do triangulo equilatero egual a $2^m,5$, calcular o apothema do quadrado.

Resp. $3^m,535$

Graciano Souza

242. — Num circulo inscrevem-se um quadrado e um triangulo equilatero. A diagonal do quadrado mede $3^m,6$. Calcular o apothema do triangulo equilatero.

Resp. $0^m,9$

243. — Calcular o apothema de um hexagono regular inscripto em um circulo, sabendo-se que nesse circulo está inscripto um triangulo equilatero cujo apothema mede $2^m,5$.

Resp. $4^m,33$

244. — O lado de um hexagono regular inscripto em um circulo mede 2^m. Calcular o perimetro do pentagono regular inscripto no mesmo circulo.

Resp. $11^m,75$

245. — O apothema de um triangulo equilatero inscripto em um circulo mede $1^m,5$. Calcular o lado de um triangulo equilatero circumscripto ao mesmo circulo.

Resp. $10^m,392$

246. — Num circulo estão inscriptos um quadrado e um decagono regular; sabe-se que a diagonal do quadrado mede 8^m; pede-se o perimetro do decagono.

Resp. $24^m,72$

247. — O apothema de um hexagono regular inscripto em um circulo mede $1^m,732$. Calcular o perimetro do hexagono regular circumscripto ao mesmo circulo.

Resp. $13^m,856$

248. — O lado de um octogono regular mede 6^m. Calcular o apothema.

Resp. $7^m,242$

249. — O apothema de um dodecagono regular mede $2^m,5$. Calcular o perimetro.

Resp. $16^m,07$

250. — Um trapezio isosceles está inscripto em um circulo de 6^m de raio; uma base é o lado do hexagono regular inscripto e a outra base é o lado do octogono regular. Calcular a altura do trapezio.

Resp. 1ª sol.: $10^m,737$
2ª sol.: $0^m,345$

251. — A differença entre os apothemas de um quadrado e um triangulo equilatero inscriptos em um circulo é egual á $0^m,414$. Calcular o apothema do decagono regular inscripto no mesmo circulo.

$1^m,902$

252. — O lado de um octogono regular inscripto em um circulo mede 2^m. Calcular o perimetro do octogono regular circumscripto ao mesmo circulo.

Resp. $17^m,308$

AREAS

253. — O perimetro de um rectangulo é de 72^m; o comprimento é o dobro da largura. Calcular a area.

Resp. 288^{m^2}

254. — O perimetro de um rectangulo é de 68^m. Calcular a area desse rectangulo, sabendo-se que um dos lados mede 24^m.

Resp. 240^{m^2}

255. — A diagonal de um rectangulo mede 39^m e um lado, 15^m. Calcular a area.

Resp. 540^{m^2}

256. — A area de um rectangulo é de 600^{m^2}. Calcular as dimensões desse rectangulo, sabendo-se que a differença entre ellas é de 10^m.

Resp. 20^m e 30^m

257. — Calcular as dimensões de um rectangulo de 60^{m^2} de area e cuja diagonal mede 13^m.

Resp. 5^m e 12^m

258 — A area de um rectangulo é de 756^{m^2}; os lados estão entre si na razão de $^3/_7$. Calcular as dimensões do rectangulo.

Resp. 18^m e 42^m

259. — A area de um rectangulo é de 192^{m^2}; a diagonal é egual a $^5/_3$ do lado menor. Calcular as dimensões do rectangulo.

Resp. 12^m e 16^m

260. — A diagonal de um rectangulo mede 15^m; os lados estão entre si na razão de $^3/_4$. Calcular a area do rectangulo.

Resp. 108^{m^2}

261. — Um rectangulo está inscripto em um circulo de $6^m,5$ de raio; um dos lados do rectangulo mede 5^m. Calcular a area.

Resp. 60^{m^2}

262. — Calcular a area de um quadrado circumscripto a um circulo de 2^m de raio.

Resp. 16^{m^2}

263. — Calcular a area de um quadrado inscripto em um circulo de 4^m de diametro.

Resp. 8^{m^2}

264. — Calcular a area de um quadrado cuja diagonal mede $1^m,2$.

Resp. $0^{m^2},72$

265. — Calcular a area de um quadrado cuja apothema mede $1^m,5$.

Resp. 9^{m^2}

266. — Um rectangulo, cuja base mede 25^m, é equivalente a um quadrado 15^m de lado. Qual desses dois polygonos tem o maior perimetro e qual a differença entre esses perimetros?

Resp. O quadrado; 8^m

267. — O perimetro de um quadrado é de 24^m; unem-se os meios dos lados consecutivos. Estabelecer a relação entre a area do quadrado inscripto e a do quadrado circumscripto.

Resp. $^1/_2$.

268. — Dois lados adjacentes de um parallelogrammo medem 6^m e 9^m, respectivamente. Calcular a area, sabendo-se que esses lados formam um angulo de $45°$.

Resp. $38^{m^2},1834$

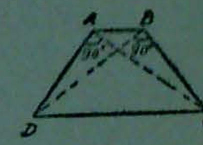
269. — Dois lados adjacentes de um parallelogrammo medem $1^m,732$ e 3^m, respectivamente. Calcular a area, sabendo-se que a somma dos angulos obtusos é o dobro da dos angulos.

Resp. $4^{m^2},50$

270. — As bases de um trapezio isosceles medem $6^m,732$ e 5^m, respectivamente; os lados não parallelos formam angulos de $120°$ com a base menor. Calcular a area do trapezio.

Resp. $8^{m^2},7990$

271. — Num quadrilatero $ABCD$ os angulos DAC e DBC são rectos; os lados AD e BC são eguaes e medem juntamente 48^m; o lado CD mede 40^m. Calcular a area do quadrilatero.



Resp. $491^{m^2},52$

Fig. 12

272. — A area de um trapezio é de 700^{m^2}; as bases medem 30^m e 40^m, respectivamente. Calcular a altura.

Resp. 20^m

273. — A area de um trapezio é de 240^{m^2}; a altura mede 16^m. Calcular as bases, sabendo-se que uma mede 3^m mais do que a outra.

Resp. $13^m,5$ *e* $16^m,5$

274. — As bases de um trapezio isosceles, de 72^m de perimetro, medem 20^m e 32^m, respectivamente. Calcular a area desse trapezio.

Resp. 208^{m^2}

275. — A area de um trapezio é de 54^{m^2}; a altura mede 6^m e a distancia entre os meios das diagonaes é de 4^m. Calcular as bases do trapezio.

Resp. 5^m *e* 13^m

276. — As bases de um trapezio medem 16^m e 20^m, respectivamente e a altura, 12^m. Calcular a base de um rectangulo equivalente e da mesma altura.

Resp. 18^m

277. — As bases de um trapezio medem 80^m e 60^m, respectivamente, e a altura, 24^m; a 6^m da base maior traça-se uma parallela, que divide o trapezio em duas partes; calcular a area de cada parte.

Resp. 1215^{m^2} *e* 465^{m^2}

278. — A altura de um trapezio mede $89^m,5$ e a base média $172^m,5$. Calcular as dimensões de um rectangulo que tem a base egual ao dobro da altura e cuja area seja os $^4/_5$ da area desse trapezio.

Resp. $78^m,58$ *e* $157^m,16$

279. — Num trapezio rectangulo *ABCD*, $AD = 80^{dm},68$, $AB = 90^{dm},75$ e $\hat{B} = 135°$. Calcular a area do trapezio (fig. 43).

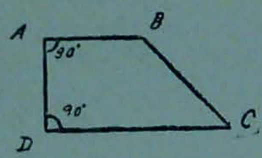


Fig. 43

Resp. $105^{m^2},76$

280. — Calcular a area de um trapezio formado por duas cordas parallelas, situadas num mesmo semi-circulo de $0^m,4$ de raio; uma das cordas é o lado do hexagono regular inscripto e a outra é o lado do triangulo equilatero.

Resp. $0^{m^2},08$

281. — Resolver o problema anterior, suppondo-se que o centro do circulo fica comprehendido entre as duas cordas parallelas.

Resp. $0^{m^2},29$

282. — Num triangulo *ABC* a base *AC* mede $52^m,7$ e a altura *BH*, $28^m,4$; a 17^m do vertice *A*, traça-se uma parallela á base *AC*. Calcular a area do trapezio formado.

Res. $480^m,17$

283. — Calcular a area de um terreno *ABCDE*, de forma pentagonal, com o auxilio dos elementos dados que apparecem indicados na figura 44.

Resp. 29641^{m^2}

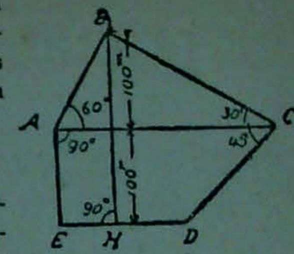


Fig. 44

284. — Um trapezio cujas bases medem 7^m e 12^m, respectivamente, é dividido em duas partes equivalentes por uma parallela ás bases. Exprimir em funcção da altura *h* do trapezio a distancia dessa parallela á base menor.

Resp. $0^m,564^h$

285. — A area de um trapezio é de 32^{m^2}, uma base mede 10^m e a altura, 4^m. A distancia de 1^m da base dada tira-se uma parallela a essa base. Calcular o segmento dessa recta comprehendido entre os lados não parallelos.

Resp. 9^m

286. — As bases de um trapezio medem 60^m e 40^m, respectivamente, e a altura, 20^m; uma parallela ás bases divide o trapezio em duas partes cujas areas estão entre si na razão de $3/4$. Calcular o comprimento dessa parallela.

Resp. $49^m,57$

287. — A altura de um trapezio mede 75^m, a base maior mede 264^m e os angulos adjacentes a essa base medem 45° e 60°, respectivamente. Calcular a area desse trapezio.

Resp. $15363^{m^2}75$

288. — Dividir o trapezio de que trata o problema anterior em duas partes equivalentes por uma perpendicular á base maior. Calcular a distancia do pé dessa perpendicular ao vertice do angulo de 45°.

Resp. $132^m,2$

289. — Um trapezio tem uma area de $37^{Dm^2},50$; a base maior mede 90^m e a altura, 50^m. Calcular o comprimento da parallela ás bases, que divide o trapezio em duas partes equivalentes.

Resp. $76^m,48$

290. — Os diagonaes de um losango medem respectivamente 47^m e 36^m. Calcular a area desse losango.

Resp. 846^{m^2}

291. — Um losango de 40^m de perimetro tem a menor diagonal egual a 12^m. Calcular a area desse losango.

Resp. 96^{m^2}

292. — A somma das diagonaes de um losango é egual a 12^m. Calcular a area desse losango, sabendo-se que as diagonaes estão entre si na razão de $^3/_4$.

Resp. $16^{m^2},8750$

293. — Um losango de 100^{m^2} de area tem uma diagonal egual a 10^m. Calcular a outra diagonal.

Resp. 20^m

294. — Estabelecer a relação entre a area de um losango, no qual um angulo agudo mede 60°, e a area de um quadrado isoperimetro.

Resp. ½

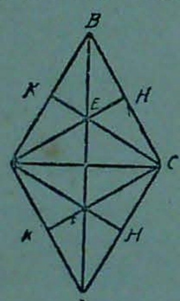


Fig. 45

295. — Num losango *ABCD*, de $316^{m^2},41$ de area, os angulos obtusos são o dobro dos angulos agudos. Dos vertices *A* e *C* abaixam-se as perpendiculares *AH*, *CK*, *AH'* e *CK'*, que se cortam em *E* e *F*. Calcular a area do quadrilatero *AECF*.

Resp. $115^{m^2},47$

296. — O perimetro de um triangulo vale 60^m e os lados são proporcionaes aos numeros 3, 4 e 5. Calcular a area do triangulo.

Resp. 150^{m^2}

297. — Calcular a area de um triangulo isosceles de $187^m,5$ de perimetro e tendo 52^m de base.

Resp. $1626^{m^2},56$

298. — Os lados de um triangulo rectangulo são proporcionaes aos numeros 3, 4 e 5 e a altura relativa á hypothenusa mede 12^m. Calcular a area.

Resp. 150^{m^2}

299. — As projecções dos cathetos de um triangulo rectangulo sobre a hypothenusa medem 4^m e 9^m, respectivamente. Calcular a area desse triangulo.

Resp. 39^{m^2}

300. — Um catheto de um triangulo rectangulo mede 15^m e a altura relativa á hypothenusa, 8^m. Calcular a area.

Resp. $70^{m^2},9298$

301 — A area de um triangulo rectangulo é de 300^{m^2} e a hypothenusa mede 50^m. Calcular os cathetos.

Resp. $48^m,441$ e $12^m,386$

302. — A area de um triangulo é de 875^{m^2}. Calcular a base e a altura, sabendo-se que ellas estão entre si na razão de $^5/_{14}$.

Resp. 25^m e 70^m

303. — Os lados de um triangulo medem 75^m, 150^m e $98^m,5$, respectivamente. Calcular a area.

Resp. $3229^{m^2},28$

304. — Os lados de um triangulo medem $47^m,5$, $67^m,5$ e $87^m,5$, respectivamente. Calcular a area.

Resp. $1589^{m^2},18$

305. — Os lados de um triangulo medem 65^m, 119^m e 138^m, respectivamente. Calcular o lado do quadrado equivalente a esse triangulo.

Resp. $62^m,16$

306. — Os lados de um triangulo medem 37^m, 35^m e 12^m, respectivamente. A altura de um parallelogrammo equivalente a esse triangulo mede 10^m. Calcular a base desse parallelogrammo.

Resp. 21^m

307. — O perimetro de um triangulo é de 24^m; um lado a é egual a $^1/_3$ da somma dos outros dois lados b e c; o producto desses lados b e c é egual a 80^{m^2}. Calcular a area do triangulo.

Resp. 24^{m^2}

308. — Calcular o lado e a altura de um triangulo equilatero cuja area é egual a 1024^m.

Resp. $l = 48^m,62$; $h = 42^m,10$

309. — Calcular a area de um triangulo equilatero, sabendo-se que a altura é egual a um catheto de um triangulo rectangulo e isosceles de 18^{m^2} de area.

Resp. $20^{m^2},7840$

310. — Calcular a area de um triangulo equilatero inscripto em um circulo, no qual uma corda de 8^m dista 3^m do centro.

Resp. $32^{m^2},4750$

311. — Calcular a area de um triangulo equilatero cuja apothema é egual ao lado de um quadrado de 2^{m^2} de area.

Resp. $10^{m^2},3920$

312. — Um triangulo é equivalente a um rectangulo, cujas dimensões medem 10^m e 24^m, respectivamente. A base do triangulo é egual á diagonal desse rectangulo. Calcular a altura do triangulo.

Resp. $18^{m^2},4615$

313. — A base de um triangulo mede 15^m e a altura, 8^m. Calcular o perimetro de um losango equivalente, no qual a distancia entre dois lados oppostos é de 6^m.

Resp. 40^m

134. — A hypothenusa de um triangulo rectangulo ABC mede 25^{dm} e um angulo agudo, $60°$. Sobre os lados desse triangulo constroem-se exteriormente: 1°) sobre a hypothenusa o quadrado $BCHJ$; 2°) sobre os cathetos os triangulos equilateros ACG e ABF. Calcular a area do polygono concavo $AGCHJF$.

Resp. $10^{dm^2},61$

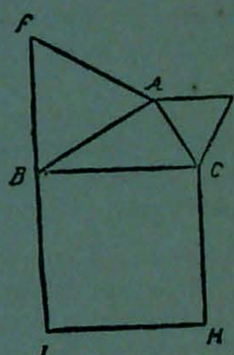


Fig. 46

315. — O perimetro de um triangulo isosceles é de 120^m; a base é egual á metade de um dos lados eguaes. Calcular o lado de um quadrado equivalente a esse triangulo.

Resp. $23^m,59$

316. — Num triangulo isosceles ABC a base BC mede 10^{cm} e os angulos B e C, $30°$ cada um. Sobre os lados AB e AC constroem-se externamente os quadrados $ABFG$ e $ACJH$; une-se a G a H. Calcular a area do polygono $BCJHGF$.

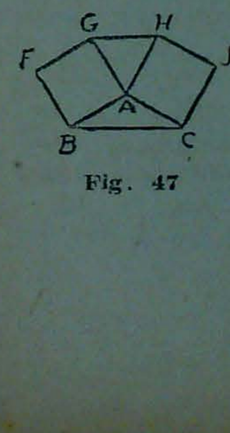


Fig. 47

Resp. $95^{cm^2},53$

317. — O perimetro de um triangulo é de 14^m; o raio do circulo inscripto mede $1^m,07$. Calcular a area desse triangulo.

Resp. $7^{m^2},49$

318. — Os lados de um triangulo medem 5^m, 6^m e 7^m, respectivamente. Calcular o raio do circulo circumscripto.

Resp. $3^m,572$

319. — Dois lados de um triangulo de 11^{m^2}, 6189 de area medem 4^m e 6^m, respectivamente; o raio do circulo circumscripto mede $4^m,13$. Calcular o terceiro lado do triangulo.

Resp. 8^m

320. — Calcular a area de um circulo circumscripto a um triangulo equilatero, sabendo-se que a area do circulo inscripto no mesmo triangulo é egual a $78^{cm^2},54$.

Resp. $314^{cm^2},16$

321. — Num triangulo rectangulo *ABC* o catheto *b* mede $28^m,4$; a somma da hypothenusa *a* e o segundo catheto *c* é egual ao dobro do catheto *b*. Calcular a area do circulo inscripto a esse triangulo e o raio de menor circulo ex-inscripto.

Resp. $158^{m^2},3680$; $14^m,2$

322. — Os lados de um triangulo medem 10^m, 17^m e 21^m, respectivamente. Calcular as areas das duas partes em que o triangulo fica dividido pela bissectriz interna do maior angulo.

Resp. $31^{m^2},11$ e $52^{m^2},88$

323. — A base de um triangulo mede 120^m e a altura 40^m. Calcular a area de um quadrado inscripto nesse triangulo sabendo-se que um dos lados do quadrado está apoiado sobre a base do triangulo

Resp. 900^{m^2}

324. — Duas circumferencias *O* e *O'*, de raios respectivamente eguaes a 5^m e $2^m,5$ são tangentes externas. A tangente commum interno *AD* encontra uma das tangentes communs externas em *D*. Calcular as areas do trapezio *OBCO'* e do triangulo *ODO'*.

Resp. $26^{m^2},5125$ e $13^{m^2},2562$

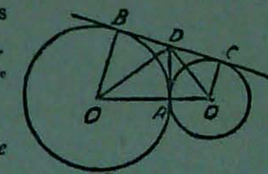


Fig. 48

325. — Calcular a area de um quadrado inscripto em um triangulo equilatero de 2^m de lado.

Resp. $0^{m^2},8640$

326. — Os lados de dois triangulos equilateros *ABC* e *CDE* medem respectivamente 4^m e 6^m. Collocam-se esses dois vertices de modo que o vertice *C* de um coincide com o vertice *C* do outro e as bases *AC* e *CE* fiquem em linha recta. Unem-se os vertices *B* e *D*. Calcular a area do quadrilatero *BAED*.

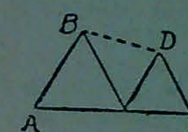


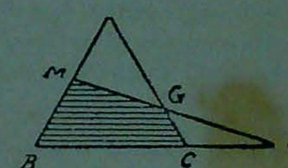
Fig. 49

Resp. $32^{m^2},9080$

327. — Calcular a area de um triangulo equilatero inscripto em um quadrado de 5^{dm} de lado, devendo um dos vertices do triangulo coincidir com um vertice do quadrado.

Resp. $11^{dm^2},6025$

328. — Um triangulo equilatero *ABC* tem 60^m de perimetro. Prolonga-se a base *BC* e sobre esse prolongamento toma-se $CS = 12^m$. Une-se o ponto *S* ao meio *M* do lado *AB*. Calcular a area do quadrilatero *BCGM*.



Resp. $110^{m^2},21$

Fig. 50

329. — O lado de um hexagono regular mede $41^m,2$. Calcular a area.

Resp. $4409^{m^2},9491$

330. — Calcular a area de um hexagono regular cujo apothema mede $0^m,6$.

Resp. $1^{m^2},2470$

331. — Um octogono regular tem $2^m,4$ de perimetro. Calcular a area.

Resp. $0^{m^2},4345$

332. — Calcular a area de um octogono regular inscripto em um circulo de 2^m de diametro.

Resp. $2^{m^2},8284$

333. — O lado de um decagono regular mede 4^m. Calcular a area.

Resp. $123^{m^2},1040$

334. — Calcular a area de um decagono regular inscripto em um circulo, sabendo-se que a diagonal do quadrado circumscripto a esse circulo mede $1^m,414$.

Resp. $0^{m^2},73$

335. — Calcular a area de um pentagono regular inscripto em um circulo, cujo raio é egual ao lado de um hexagono regular de 24^m de perimetro.

Resp. $38^{m^2},0423$

336. — Calcular a area de um dodecagono regular cujo lado é egual ao apothema de um triangulo equilatero inscripto em um circulo de 2^m de circumferencia.

Resp. $0^{m^2},283046$

337. — Calcular a area de um dodecagono regular inscripto em um circulo, no qual uma ordenada de 6^m determina sobre o diametro correspondente um segmento de 9^m.

Resp. $126^{m^2},75$

338. — Estabelecer a razão da area do triangulo equilatero inscripto para a area do triangulo equilatero circumscripto ao mesmo circulo.

Resp. $1/4$

339. — Estabelecer a razão da area do hexagono regular inscripto para a area do triangulo equilatero circumscripto ao mesmo circulo.

Resp. $1/2$

340. — Estabelecer a razão da area do quadrado inscripto para a area do dodecagono regular inscripto no mesmo circulo.

Resp. $2/3$

341. — Calcular a area de um circulo cujo raio é egual ao catheto de um triangulo rectangulo e isosceles de 50^{m^2} de area.

Resp. $314^{m^2},16$

342. — Duas cordas, que ligam um ponto *P* de uma circumferencia ás extremidades de um mesmo diametro *AB*, medem 6^m e 8^m, respectivamente. Calcular a area do circulo.

Resp. $78^{m^2},57$

343. — O comprimento de uma corda de um circulo é de 24^m e o da flecha, 9^m. Calcular a area do circulo.

Resp. $490^{m^2},87$

344. — Calcular a area de um circulo de 1^m de circumferencia.

Resp. $0^{m^2},0794$

345. — Calcular o raio de um circulo de 1^{m^2} de area.

Resp. $0^m,564$

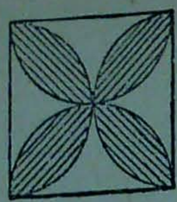


Fig. 51

346. — A diagonal de um quadrado mede $1^m,414$. Fazendo centro no meio dos lados e com um raio egual á metade do lado descrevem-se quatro semi-circumferencias, que passam pelo centro do quadrado. Calcular a area da rosacea de quatro folhas assim obtida.

Resp. $0^{m^2},5708$

346-bis — A area de um quadrado é egual a 1^{m^2}. Fazendo centro no meio dos lados e com um raio egual á metade do lado descrevem-se quatro semi-circumferencias, que passam pelo centro do quadrado. Calcular a area da cruz de malha assim obtida (area da parte não sombreada da fig. 51).

Resp. $0^{m^2},4292$

347. — Calcular a area de um sector de 28°, num circulo de 1^m de raio.

Resp. $0^{m^2},2443$

348. — Um sector de 65°15' tem $20^{m^2},6250$ de area. Calcular o comprimento do arco desse sector.

Resp. $6^m,875$

349. — Calcular a area de um segmento de 60°, em um circulo de 2^m de raio.

Resp. $0^{m^2},3624$

350. — Calcular a area de um segmento de 300°, em um circulo de 1^m de raio.

Resp. $3^{m^2},0509$

351. — O lado de um triangulo equilatero mede 5^{cm}. De cada vertice como centro e com raio egual ao lado desse triangulo descrevem-se arcos de circulos limitados pelos outros dois vertices. Calcular a area do triangulo curvilineo assim formado.

Resp. $17^{cm^2},62$

352. — O raio de um circulo mede 10^m; calcular a area de um segmento circular de duas bases, limitado por um lado do hexagono regular inscripto e por um lado do triangulo equilatero inscripto. Considerem-se os casos 1° — das bases estarem situadas no mesmo semi-circulo; 2° — do centro do circulo ficar comprehendido entre as bases.

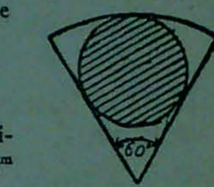
Resp. $52^{m^2},36$ e $243^{m^2},68$

353. — Os raios de dois circulos concentricos medem 3^m e 5^m, respectivamente. Calcular a area da corôa formada por esses circulos.

Resp. $50^{m^2},24$

354. — Calcular a area do circulo inscripto num sector circular de 60°, sabendo-se que o arco do sector mede $3^m,14$.

Resp. $3^{m^2},14$



355. — Calcular a area do circulo inscripto num sector de 90° de um circulo de 10^m de raio.

Resp. $17^{m^2},16$

Fig. 52

356. — A base de um triangulo isosceles mede 6^m e o raio do circulo inscripto, 2^m. Calcular a area do circulo circumscripto.

Resp. $56^{m^2},07$

357. — Duas circumferencias concentricas medem 460^m e 352^m de comprimento. Calcular a area da corôa circular limitada por essas circumferencias.

Resp. 5544^{m^2}

358. — Um circulo de 18^m de diametro fica dividido, por duas circumferencias concentricas, em tres partes equivalentes. Calcular os raios dessas circumferencias.

Resp. $5^m,196$ e $7^m,348$

359. — A area de uma corôa circular é de 25$^{m^2}$,1328 e a distancia entre as duas circumferencias é de 2^{m}. Calcular os raios das duas circumferencias.

Resp. *1^{m} e 3^{m}*

360. — A area de uma corôa é de 37$^{m^2}$,68; o raio do circulo maior mede 10^{m}. Calcular a largura da corôa.

Resp. *0^{m},62*

361. — Calcular a area de uma corôa, sabendo-se que a corda do circulo maior, tangente ao menor, mede 2^{m}.

Resp. *3$^{m^2}$,1416*

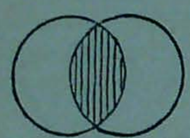


Fig. 53

362. — Dois circulos eguaes, de 1^{m} de raio, são dispostos de modo que a circumferencia de um passa pelo centro do outro. Calcular a area da parte commum aos dois circulos.

Resp. *1$^{m^2}$,2294*

363. — A area de um circulo, augmentada da area do triangulo equilatero inscripto, é egual a 3$^{m^2}$. Calcular a area de cada uma dessas figuras.

Resp. *2$^{m^2}$,12 e 0$^{m^2}$,87*

364. — Em um circulo de 20^{m} de diametro foi traçado um angulo central *AOB* de 30°. Sendo *BC* a perpendicular baixada do ponto *B* sobre o raio *AO*, calcular a area da parte limitada pelo angulo *BCA* e pelo arco *AB*.

Resp. *4$^{m^2}$,53*

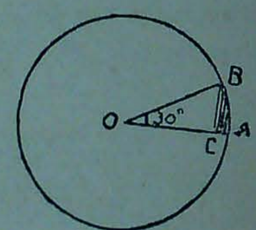


Fig. 54

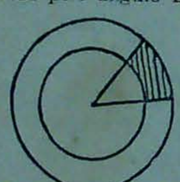


Fig. 55

365. — As areas de dois circulos concentricos estão entre si na razão de 5/8. A area do trapezio circular de 45° é de 300$^{m^2}$. Calcular os raios desses dois circulos.

Resp. *28^{m},2 e 45^{m},1*

366. — O raio de um circulo mede 1^{m},2. Sobre a corda *AB* de um quadrante como diametro descreve-se uma semi-circumferencia. Calcular a area da figura curvilinea limitada pela semi-circumferencia e pelo arco *AMB* do quadrante considerado.

Resp. *0$^{m^2}$,72*

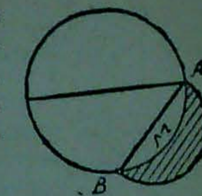


Fig. 56

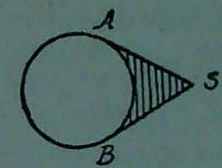


Fig. 57

367. — Por um ponto *S*, exterior a um circulo de 0^{m},2 de raio, traçam-se duas tangentes que formam entre si um angulo de 60°. Calcular a area da figura limitada pelas tangentes e pelo arco menor *AB*.

Resp. *0$^{m^2}$,027392*

368. — Tres circulos de 0^{m},5 de raio tangenciam-se dois a dois. Calcular a area da figura interior comprehendida entre os tres circulos.

Resp. *0$^{m^2}$,1712*

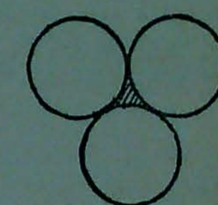


Fig. 58

369. — As diagonaes de dois quadrados medem 12^{m} e 18^{m}, respectivamente. Calcular a diagonal de um quadrado equivalente á somma dos dois primeiros.

Resp. *21^{m},633*

370. — Por cada um dos vertices de um triangulo tira-se parallela ao lado opposto. Estabelecer a razão entre a area do triangulo dado e a do angulo total assim formado.

Resp. *1/4*

371. — A altura de um triangulo mede 6^m; calcular a altura homologa de um triangulo semelhante, tendo uma area cem vezes maior que a do primeiro.

Resp. 60^m

372. — Um polygono tem 450^{m^2} de área e um de seus lados mede 15^m. Calcular a area de um polygono semelhante, sabendo-se que o lado homologo mede 25^m.

Resp. 1250^{m^2}

373. — Dois lados homologos em dois hexagonos semelhantes medem 33^m e 56^m, respectivamente. Calcular o lado correspondente em um terceiro hexagono semelhante aos primeiros, tendo uma area egual á somma das areas desses dois hexagonos.

Resp. 65^m

374. — Um rectangulo tem 12^m de base e 8^m de altura. Calcular a area de um rectangulo semelhante inscripto em um semi-circulo de 20^m de raio. (A base maior do rectangulo deverá ficar apoiada sobre o diametro do semi-circulo).

Resp. 384^{m^2}

375. — Num angulo BAC de 60° inscrevem-se dois circulos tangentes entre si exteriormente no ponto D e tangentes ao lado AB nos pontos P' e P'. O raio do circulo menor mede $0^m,31$. Calcular a area da figura limitada pela tangente commum PP', pelo arco DMP do circulo menor e pelo arco DNP' do circulo maior.

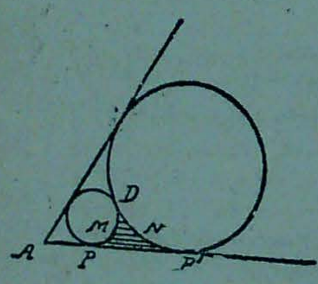


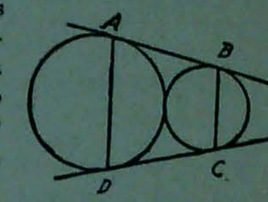
Fig. 59

Resp. $0^{m^2},1122$

376. — Um dos lados não parallelos de um trapezio mede 12^m e dista de 6^m do meio do outro lado não parallelo. Calcular a area do trapezio.

Resp. 72^{m^2}

377. — Dois circulos, cujos raios medem respectivamente 6^m e 4^m, tangenciam-se externamente. Calcular a area do trapezio $A\ B\ C\ D$ formado pelas tangentes communs AB e CD e pelas cordas de contacto AD e BC.



Sig. 60

Resp. $94^{m^2},0588$

378. — Calcular as bases AD e BC e a altura h do trapezio de que trata o problema anterior.

Resp. $AD = 11^m,7;\ BC = 7^m,8;\ h = 9^m,6$

379. — Os centros C e C' de dois circulos exteriores, cujos raios medem 6^m e 2^m respectivamente, distam 10^m um do outro. Calcular a area do trapezio formado pelas tangentes communs exteriores e pelas cordas de contacto.

Resp. $61^{m^2},58$

380. — Sobre os tres lados de um triangulo rectangulo ABC descrevem-se as semi-circumferencias BAC, BMA e ANC. Calcular a somma das areas das lunulas assim obtidas, sabendo-se que a hypothenusa mede 10^m e que as projecções dos cathetos sobre a hypothenusa estão entre si na razão $^9/_{16}$.

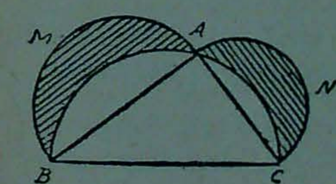


Fig. 61

Resp. 24^{m^2}

POLYEDROS — THEOREMA DE EULER

381. — Um polyedro convexo tem 10 faces e 7 vertices. Calcular o numero de arestas.

Resp. *15*

382. — Calcular o numero de vertices de um polyedro convexo que tem 8 faces e 18 arestas.

Resp. *12*

383. — Um polygono convexo tem 16 arestas e o numero de faces é egual ao numero de vertices. Quantas faces tem esse polyedro?

Resp. *9*

384. — Um polyedro convexo tem 6 faces, todas triangulares. Calcular o numero de vertices.

Resp. *5*

385. — Quantos vertices tem um polyedro convexo que apresenta 12 faces, todas quadrangulares?

Resp. *14*

386. — Dois prismas P e Q e uma pyramide S têm conjunctamente 32 arestas. Determinar a natureza dos prismas e da pyramide, sabendo-se que o primeiro prisma tem mais arestas do que o segundo.

Resp. P - pentagonal; Q - triangular; S - quadrangular

387. — Um polyedro convexo tem 30 arestas. Calcular o numero de faces desse polyedro, sabendo-se que o numero de vertices é egual a $^3/_5$ do numero de faces.

388. — Num polyedro convexo o numero de arestas excede o numero de vertices de 3 unidades. Quantas faces tem esse polyedro?

Resp. *5*

389. — Um polyedro convexo apresenta 5 faces triangulares, 2 quadrangulares e 3 pentagonaes. Quantas arestas e vertices tem esse polyedro?

Resp. 19 arestas e 11 vertices

390. — Um polyedro convexo apresenta faces quadrangulares e triangulares, sendo 5 o numero de faces quadrangulares. Calcular o numero de faces desse polyedro, sabendo-se que o numero de arestas é o quadruplo do numero de faces triangulares.

Resp. *9*

391. — Um polyedro convexo tem 1 face triangular, 3 quadrangulares, 3 pentagonaes e 1 hexagonal. Calcular o numero de vertiecs desse polyedro.

Resp. *12*

392. — Um polyedro convexo tendo 12 vertices apresenta faces triangulares e pentagonaes. O numero de faces pentagonaes é o triplo do numero de faces triangulares. Calcular o numero de faces desse polyedro.

Resp. *8*

393. — Um polyedro convexo apresenta faces quadrangulares e pentagonaes. Calcular o numero de faces de cada especie, sabendo-se que a somma total dos angulos das faces desse polyedro é egual a 32 rectos.

Resp. 1ª sol.: 5 faces quadrangulares e 2 pentagonaes;
2ª sol.: 2 quadrangulares e 4 pentagonaes.

394. — As faces de um polyedro convexo P são quadrangulares algumas e outras triangulares. Determinar o numero de faces de cada especie, sabendo-se que esse polyedro tem 16 arestas e que a somma total dos angulos das faces é egual a 28 rectos.

Resp. 4 faces triangulares e 5 quadrangulares

395. — Dois prismas P e Q têm conjunctamente 12 faces. Determinar a natureza de cada um desses primas, sabendo-se que o primeiro tem mais arestas do que o segundo.

Resp. P - pentagonal; Q - triangular

396. — Uma pyramide P e um prisma S têm conjunctamente 23 arestas. Determinar a natureza do prisma e da pyramide.

Resp. 1ª sol.: P - quadrangular; S - pentagonal;
2ª sol.: P - heptagonal; S - triangular.

397. — A somma dos angulos de todas as faces de uma pyramide é egual a 1440°. De que natureza é essa pyramide?

Resp. Pentagonal

398. — A somma de todos os angulos das faces de um prisma é egual a 32 rectos. Determinar a natureza desse prisma.

Resp. Pentagonal

399. — A somma total de todos os angulos das faces de uma pyramide P e de um prisma S é egual a 28 rectos. Determinar a natureza da pyramide e do prisma.

Resp. P - quadrangular; S - triangular

Afranio Gomes

PARALLELEPIPEDO

400. — As dimensões de um parallelepipedo rectangulo são 5^m, 6^m e 8^m respectivamente. Calcular a diagonal desse parallelepipedo.

Resp. $11^m,18$

401. — Calcular a diagonal de um cubo de 10^m de aresta.

Resp. $17^m,32$

402. — Calcular a diagonal de um cubo, sabendo-se que a diagonal de uma face mede $1^m,414$.

Resp. $1^m,732$

403. — Um cubo tem uma area total de 54^{m^2}. Calcular a diagonal.

Resp. $5^m,196$

404. — A diagonal de um cubo mede 5^m. Calcular a area total.

Resp. 50^{m^2}

405. — A aresta de um cabo mede $1^m,5$. De quando se deve augmentar a diagonal desse cubo de modo que a aresta do novo cubo seja egual a 2^m?

Resp. $0^m,866$

406. — Um cubo tem uma area total de 54^{m^2}. De quanto se deve augmentar a diagonal desse cubo para que o volume augmente de 98^{m^3}?

Resp. $3^m,464$

407. — Um parallelepipedo rectangulo tem 648^{m^3} de volume; calcular as dimensões desse parallelepipedo, sabendo-se que ellas são proporcionaes aos numeros 2, 3 e 4.

Resp. 6^m, 9^m e 12^m

408. — Um parallelepipedo rectangulo tem 1^{dm} de altura e 40^{dm^2} de area total; o comprimento é o triplo da largura. Calcular a diagonal.

Resp. $6^m,4$

409. — Um cubo tem uma area tatal de 24^{m^2}. Cortar esse cubo por um plano tal que a secção seja um hexagono regular. Calcular a area desse hexagono.

Resp. $5^{m^2},19$

410. — Calcular o volume de um cubo de 90^{m^2} de area total.

Resp. 64^{m^3}

411. — Dois parallelepipedos de bases equivalentes têm $7^{m^3},815$ e $4^{m^3},450$ de volume respectivamente; o primeiro tem 2^m de altura. Calcular a altura do segundo e as bases de cada um dos dois parallelepipedos.

Resp. $1^m,13$ e $3^{m^2},90$

412. — Um parallelepipedo rectangulo tem uma area total de 208^{m^2}; a diagonal da base mede 10^m e a somma das tres dimensões é egual a 18^m. Calcular o volume.

Resp. 192^{m^3}

413. — Um parallelepipedo rectangulo tem uma area total de 94^{m^2}; calcular as dimensões desse parallelepipedo, sabendo-se que ellas estão em progressão arithmetica e que a somma de todas as arestas é egual a 48^m.

Resp. 3^m, 4^m e 5^m

414. — Um parallelepipedo rectangulo tem 7^{dm} de altura; a base é um rectangulo de 10^{dm} de diagonal e cujas dimensões estão entre si na razão $^3/_4$. Calcular a diagonal, a area total e o volume desse parallelepipedo.

Resp. $12^{dm},2$; 292^{dm^2}; 336^{dm^3}

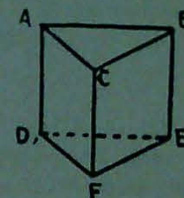
415. — Calcular o volume de um parallelepipedo de 9^{dm} de altura, sabendo-se que a base é um losango cujas diagonaes medem respectivamente 8^{dm} e 10^{dm}.

Resp. 360^{dm^3}

416. — As seis faces de um parallelepipedo são losangos eguaes de 2^{dm} de lado. Calcular o volume desse parallelepipedo, sabendo-se que uma das diagonaes da face é egual ao lado.

Resp. $5^{dm^3},656$

417.—Num prisma triangular *ABCDEF* a face *ABED* é um parallelogrammo cujos lados *EB* e *DE* medem respectivamente 9^{dm} e 6^{dm} e o angulo *E*, 60°; a distancia dessa face *ABED* á aresta *CF* é de 4^{dm}. Calcular o volume desse prisma.



Resp. $93^{dm^3},528$

Fig. 62

418. — Calcular o volume de um parallelepipedo rectangulo, sabendo-se que: 1°) a somma das 12 arestas é egual a 48^m; 2°) a somma dos quadrados das arestas que concorrem ao mesmo vertice é egual a 50^{m^2}; 3°) a base tem uma area de 12^{m^2}.

Resp. 60^{m^3}

Afranio [illegible]

PRISMA — TRONCO DE PRISMA

419. — Calcular a area total de um prima regular de 2^{dm} de altura, sabendo-se que a base é um quadrado inscripto em um circulo de 5^{dm} de raio.

Resp. $156^{m^2},56$

420. — A altura de um prisma recto mede 15^{dm}; calcular a area total e o volume, sabendo-se que a base é um losango de 10^{m} de lado e uma diagonal mede 12^{dm}.

Resp. 792^{dm^2} e 1440^{dm^3}

421. — Um prisma recto mede 14^{m} de altura; a base é um triangulo isosceles cuja base mede 6^{dm} e cujos lados eguaes medem respectivamente 5^{dm}. Calcular o volume desse prisma.

Resp. 168^{dm^3}

422. — A base de um prisma recto é um quadrado cuja diagonal mede 2^{m}; calcular o volume desse prisma, sabendo-se que a altura mede 3^{m}.

Resp. 6^{m^3}

423. — Um prisma recto tem 32^{dm^3} de volume; calcular a altura e a aresta lateral, sabendo-se que a base é um quadrado de $1^{dm},41$ de diagonal.

Resp. $0^{dm},997$ e $32^{dm},19$

424. — O volume de um prisma de base quadrada é egual a 81^{dm^3}; a altura desse prisma é o triplo do lado da base. Calcular a altura desse prisma.

Resp. 9^{dm}.

425. — A base de um prisma é um triangulo equilatero de 6^{m} de perimetro; a altura do prisma é o dobro da altura do triangulo da base. Calcular o volume.

Resp. 6^{m^3}

426. — Um prisma hexagonal regular tem $8^{dm^3},540$ de volume e $2^{dm},5$ de altura. Calcular o lado do hexagono que serve de base aa prisma.

Resp. $1^{m},14$

427. — A area lateral de um prisma recto é egual a 28^{m^2}; a base é um octogono regular de 2^{m} de lado. Calcular o volume.

Resp. $33^{m^3},796$

428. — Um prisma hexagonal regular tem $4^{dm^3},500$ de volume e 12^{dm^2} de area lateral; calcular a altura desse prisma e o lado do hexagono que lhe serve de base.

Resp. $0^{dm},86$ e $2^{dm},31$

429. — A altura de um prisma octogonal regular mede $2^{m},2$ e o volume é egual a 8^{dm^3}. Calcular a area lateral desse prisma.

Resp. $13^{dm^2},25$

430. — A aresta lateral de um prisma recto mede 1^{dm}; a base é um triangulo de 14^{m} de perimetro, circumscripto a um circulo de $1^{m},07$ de raio. Calcular o volume desse prisma.

Resp. $0^{m^3},749$

431. — A altura de um prisma mede 1^{dm}; a base é um parallelogrammo no qual dois lados adjacentes medem respectivamente 80^{cm} e 54^{cm} e formam um angulo de 60°. Calcular o volume desse prisma.

Resp. $37^{cm^3},411$

432. — A area lateral de um prisma regular é egual a 10^{m^2}. A base é um dodecagono regular de 1^m de lado. Calcular o volume desse prisma.

Resp. $9^{m^3},330$

433. — A aresta lateral de um prisma triangular obliquo mede 9^{dm}; dois lados da secção recta medem respectivamente 8^{dm} e 10^{dm} e o angulo comprehendido por esses lados mede $60°$. Calcular o volume desse prisma.

Resp. $311^{m^3},760$

434. — Calcular o volume de um prisma hexagonal regular de 3^m de altura, sabendo-se que se a altura fosse augmentada de 2^m o volume do prisma augmentaria de 6^{m^3}.

Resp. 9^{m^3}

435. — Calcular o volume de um prisma triangular regular de 8^m de altura, sabendo-se que a area lateral excede a area da base de $3^{m^2},464$.

Resp. 10586^{m^3}

436. — Calcular o volume de um prisma, cuja base é um triangulo equilatero de 15^{cm} de lado, sabendo-se que a aresta lateral é egual á aresta da base e faz com o plano da base um angulo de $60°$.

Resp. $1265^{cm^3},625$

437. — A altura de um prisma hexagonal regular mede 5^m; a area lateral é egual ao quadruplo da area da base. Calcular o volume desse prisma.

Resp. $108^{m^3},250$

438. — Em um prisma triangular regular a area lateral é egual a $^3/_2$ da area da base. Calcular a altura desse prisma, sabendo-se que o volume é egual a 32^{m^3}.

Resp. 2^m

439. — Calcular o volume de alvenaria empregada em uma torre hexagonal regular de 20^m de altura, sabendo-se que o muro tem $0^m,5$ de espessura e que o polygono da base, na parte exterior, tem 4^m de lado.

Resp. $222^{m^3},714$

440. — Um prisma hexagonal regular tem 2^{cm} de aresta na base. De quanto se deve diminuir a altura desse prisma de modo a se obter um novo prisma que tenha a area total equivalente á area lateral do prisma dado.

Resp $1^{cm},732$

441. — Um prisma triangular regular tem todas as arestas eguaes. Calcular o volume desse prisma, sabendo-se que a area lateral é egual a 32^{cm^2}.

Resp. $15^{m^3},082$

442. — Um prisma triangular regular tem a aresta da base egual a 6^{cm}. De quanto se deve augmentar a altura, conservando a mesma base, para que a area lateral do novo prisma seja egual á area total do prisma dado?

Resp. $1^m,732$

443. — São dados dois prismas regulares *P* e *Q*, sendo o primeiro quadrangular e o segundo triangular. Os prismas *P* e *Q* têm 6^m de altura e a aresta da base do primeiro é egual á aresta da base do segundo. De quanto se deve augmentar a altura do prisma *Q*, conservando a base constante, para se obter um prisma equivalente ao prisma *P*?

Resp. $7^m,86$

444. — São dados dois prismas regulares *P* e *Q*, sendo o primeiro quadrangular e o segundo triangular. Esses prismas têm a mesma altura de 6^m; a aresta da base do primeiro é egual á aresta da base do segundo. De quanto se deve augmentar a altura do prisma *Q*, conservando a base constante, para que a area lateral do novo prisma seja o dobro da area lateral do prisma *P*?

Resp. 10^m

445. — Um prisma triangular recto $ABCA'B'C'$ tem 6^m de altura; sobre a aresta lateral AA' toma-se $AF = x$; sobre a aresta BB' toma-se $BG = x + 1^m,5$ e sobre a aresta CC' toma-se $CH = x + 3^m,5$. Pelos pontos F, G e H passa-se um plano, que divide o prisma em dois troncos. Calcular x de modo que esses dois troncos de prisma sejam equivalentes.

Resp. $1^m,333$

PYRAMIDE — TRONCO DE PYRAMIDE

446. — Uma pyramide de 6^m de altura tem uma base de 144^{m^2} de area; a que distancia do vertice se acha uma secção plana parallela á base de 121^{m^2} de area?

Resp. $5^m,5$

447. — Uma pyramide de 6^{cm} de altura tem para base um quadrado de 12^{cm} de lado. Calcular a area de uma secção plana parallela á base e distante 5^{cm} do vertice.

Resp. 100^{cm^2}

448. — A base de uma pyramide tem 81^{dm^2} de area; uma secção feita parallelamente á base, a 3^{dm} do vertice, tem uma area de 36^{dm^2}. Calcular a altura da pyramide.

Resp. $4^m,5$

449. — Duas pyramides de alturas eguaes assentam-se sobre o mesmo plano; as bases têm 144^{dm^2} e 189^{dm^2} de area respectivamente. Um plano parallelo ao plano das bases determina na primeira pyramide uma secção de 48^{dm^2} de area. Calcular a area da secção determinada na segunda pyramide pelo mesmo plano.

Resp. 63^{dm^2}

450. — Uma pyramide regular tem para base um quadrado de 144^{dm^2} de area; a aresta lateral mede 10^{dm}. Calcular a area lateral.

Resp. 192^{dm^2}

451. — A aresta lateral de uma pyramide triangular regular mede 22^{cm}; o polygono da base tem um perimetro egual a 45^{cm}. Calcular a area total.

Resp. $560^{cm^2},92$

452. — A base de uma pyramide regular é um quadrado de 4^{dm} de perimetro; a aresta lateral mede 2^{dm}. Calcular a area total.

Resp. $4^{dm^2},87$

453. — A altura de uma pyramide regular mede 6^{dm}; a base e um quadrado de 64^{dm} de perimetro. Calcular a area total.

Resp. 576^{dm^2}

454. — Uma pyramide tem para base um rectangulo cujas dimensões medem respectivamente 1^{m} e 2^{m}. As arestas lateraes são eguaes a uma das diagonaes do rectangulo da base. Calcular a area total da pyramide.

Resp. $8^{m^2},18$

455. — A base de uma pyramide hexagonal regular está inscripta em um circulo de 6^{dm} de diametro; a area da base é a decima parte da area lateral. Calcular a altura da pyramide.

Resp. $25^{dm},85$

456. — Calcular o volume de uma pyramide de 30^{dm} de altura, sabendo-se que a base é um hexagono regular de 6^{dm} de lado.

Resp. $935^{dm^3},306$

457. — Uma pyramide regular tem para base um triangulo equilatero de $4^{dm},25$ de lado; a area lateral da pyramide é o triplo da area da base. Calcular o volume da pyramide.

Resp. $9^{dm^3},046$

458. — A somma das arestas lateraes de uma pyramide regular é egual a 80^{cm}; calcular o volume dessa pyramide, sabendo-se que a base é um quadrado circumscripto a um circulo de 5^{cm} de raio.

Resp. $0^{dm^3},623$

459. — Uma pyramide regular tem um volume de $4^{dm^3},200$; calcular a altura dessa pyramide, sabendo-se que a base é um hexagono de $0^{dm},35$ de lado.

Resp. $3^{m}959$

460. — A base de uma pyramide é um rectangulo de 320^{dm^2} de area. A altura dessa pyramide é egual ao lado maior do rectangulo da base, que é o quintuplo do lado menor. Calcular o volume dessa pyramide.

Resp. $4266^{dm^3},666$

461. — As arestas lateraes de uma pyramide são eguaes, medindo cada uma $0^{m},94$; a base é um rectangulo, cujas dimensões medem $0^{m},6$ e $0,^{m}8$ respectivamente. Calcular o volume dessa pyramide, sabendo-se que a altura cae no centro da base.

Resp. $0^{m^3},127$

462. — Um cubo tem 3^{m} de aresta. Calcular o volume da pyramide que se obtem cortando esse cubo por um plano que passa pelas extremidades de tres arestas que concorrem no mesmo vertice.

Resp. $4^{m^3},500$

463. — Um tetraedro regular *SABC* tem 1^{m} de aresta. Corta-se esse tetraedro por um plano que passa pelo vertice *A* e pelos pontos *D* e *E*, situados respectivamente sobre as arestas *SB* e *SC*; sabendo-se que $SD = SE = \frac{1}{4}\, SC$, calcular o volume da pyramide *ASDE*.

Resp. $0^{m^3},007$

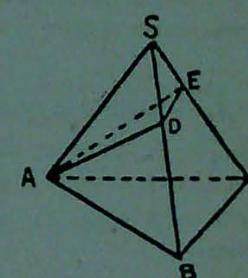


Fig. 68

464. — A base de uma pyramide regular é um triangulo circumscripto a um circulo de 4^{dm} de raio; a area lateral dessa pyramide é o dobro da area da base. Calcular o volume da pyramide.

Resp. 192^{dm^3}

465. — A base de uma pyramide regular é um octogono inscri-pto em um circulo de 15^{cm} de raio; a aresta lateral é egual ao diametro do circulo circumscripto á base. Calcular o volume.

Resp. $5511^{cm^3},375$

466. — Calcular a area total de um tetraedro regular de 2^m de aresta.

Resp. $6^{dm^2},92$

467. — A aresta de um tetraedro regular mede 6^{dm}; calcular a altura.

Resp. $4^{dm},898$

468. — A altura de um tetraedro regular mede 2^{dm}; calcular a area total.

Resp. $10^{dm^2},39$

469. — Calcular o volume de um tetraedro regular de 6^{dm} de aresta.

Resp. $25^{dm^3},452$

470. — Um tetraedro regular tem $1^{m^3},414$ de volume; calcular a aresta.

Resp. $2^m,289$

471. — Calcular a area total de um octaedro regular de 2^m de aresta.

Resp. $13^{dm^2},8560$

472. — A aresta de um octaedro regular mede 3^{dm}; calcular o volume.

Resp. $12^{dm^3},726$

473. — A diagonal de um octaedro regular mede 6^{dm}. Calcular o volume.

Resp. 36^{dm^3}

474. — Calcular o volume de um octaedro regular, sabendo se que os vertices são os meios das arestas de um tetraedro regular de 6^{dm} de aresta.

Resp. $12^{dm^3},726$

475. — Calcular a area total de um octaedro tendo para vertices os centros das faces de um parallelepipedo rectangulo cujas dimensões são respectivamente $8^{dm},2$, $6^{dm},4$ e $5^{dm},8$.

Resp. $79^{dm^2},96$

476. — Calcular o volume de um octaedro tendo para vertices os centros das faces de um parallelepipedo rectangulo cujas dimensões são respectivamente 24^{cm}, 18^{cm} e 16^{cm}.

Resp. 1152^{cm^3}

477.—Um cubo $ABCDA'B'C'D'$ tem 3^{dm} de aresta. Corta-se esse cubo pelos planos $AB'D'$, CAB' $B'D'C'$ e $D'AC$. Calcular a area tal e o volume do tetraedro $D'AB'C$.

Resp. $31^{dm^2},1760$ e 9^{dm^3}

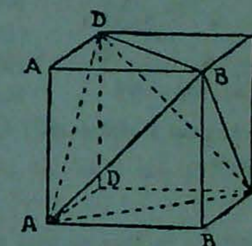


Fig. 64

478. — Numa pyramide triangular $SABC$ o angulo triedro S é trirectangulo. As arestas lateraes SA, SB e SC medem respectivamente 75^{dm}, 100^{dm} e 80^{dm}. Calcular a area total dessa pyramide e a altura relativa á base ABC.

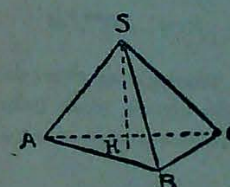


Fig. 65

Resp. 17000^{dm^2} e 48^{dm}

479. — Numa pyramide triangular $SABC$ (fig. 65) o angulo triedro S é trirectangulo; as arestas lateraes SA, SB e SC medem respectivamente 6^{dm}, 8^{dm} e 10^{dm}. Calcular o volume e area lateral.

Resp. 80^{dm^3} e 94^{dm^2}

480. — Numa pyramide triangular *SABC* (fig. 65) o angulo triedro *S* é trirectangulo. O triangulo *ABC* da base é equilatero de 2^{dm} de lado. Calcular o volume da pyramide e a altura *SH*.

Resp. $0^{dm^3},471$ e $0^{dm},81$

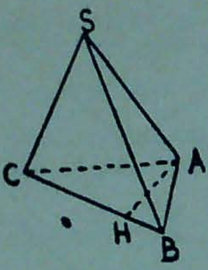


Fig. 66

481. — Uma pyramide triangular tem para base um triangulo rectangulo *ABC* cuja hypothenusa mede 25^{dm}; o vertice *S* da pyramide está situado sobre a perpendicular á base tirada do ponto *A*. A differença entre as projecções *BH* e HC dos cathetos do triangulo rectangulo *ABC* sobre a hypothenusa é egual a 7^{dm}. A altura da pyramide é egual a $AB + AC$. Calcular o volume e a area total dessa pyramide.

Resp. 1750^{dm^3} e 1225^{dm^2}

482. — A base de uma pyramide regular é um triangulo equilatero de 6^{dm} de lado; cada aresta lateral mede 5^{dm}. Calcular o volume dessa pyramide.

Resp. $18^{dm^3},732$

483. — Um tetraedro tem para base um triangulo escaleno de lados eguaes a *a*, *b* e *c*; as arestas lateraes são eguaes, tendo cada uma um comprimento egual a *d*. Exprimir o volume desse tetraedro em funcção das arestas.

Resp. $V = {}^1/_{12}\sqrt{16\,p(p-a)\,(p-b)\,(p-c)d^2 - a^2b^2c^2}$

484. — Uma pyramide hexagonal regular tem $248^{dm^2},41$ de area lateral; a perpendicular do centro da base a uma das faces mede 6^{dm}. Calcular o volume dessa pyramide.

Resp. $596^{dm^3},82$.

485. — Numa pyramide triangular *OABC* o triedro *O* é trirectangulo. Calcular o volume dessa pyramide, a area da base *ABC* e a altura *OH*, sabendo-se que $OA = OB = OC = 6^{dm}$. Sobre as arestas lateraes tomam-se, a partir do vertice, tres comprimentos eguaes $OD = OE = OF = 2^{dm}$ e constroe-se o prisma recto *DEFD'E'F'*, cuja base inferior *D'E'F'* assenta-se sobre a base da pyramide. Calcular a altura *GH* e a area lateral desse prisma.

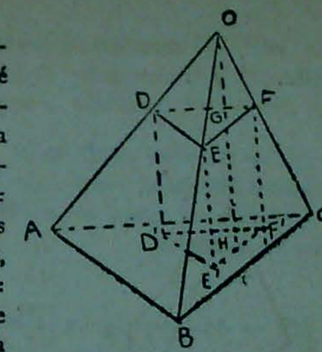


Fig. 67

Resp. 36^{dm^3}; $31^{dm},17$; $OH = 3^{dm},46$; $GH = 2^{dm^3},3$; $19^{dm^2},59$

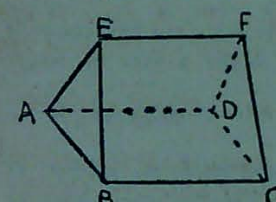


Fig. 68

486. — Num tronco de prisma triangular *ABCDEF* a face *ABCD* é um rectangulo cujos lados *AB* e *BC* medem respectivamente $2^{m},64$ e $9^{m},14$; a aresta *EB* mede $2^{m},98$; as quatro faces *BCFE*, *ADFE*, *ABE* e *DCF* são egualmente inclinadas sobre a face *ABCD*. Calcular a aresta *EF* e o volume desse tronco de prisma.

Resp. $EF = 6^{m},5$; $V = 25^{m^3},325$

487. — A base de uma pyramide é um quadrado de 1^{m} de lado; as arestas lateraes são eguaes á diagonal do quadrado da base. Do centro *O* da base abaixa-se a perpendicular *OA'* á aresta *SA*; pelo ponto *A'* passa-se um

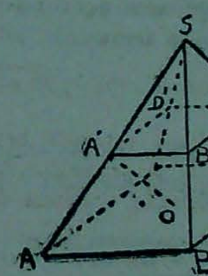


Fig. 69

plano $A'B'C'D'$ parallelo á base. Calcular o volume do tronco $ABCDA'B'C'D'$.

Resp. $0^{m^3},236$

488. — As bases parallelas de um tronco de pyramide são dois pentagonos regulares, cujos lados medem respectivamente 4^{dm} e 2^{dm}; a altura do tronco mede 5^{dm}. Calcular a area lateral desse tronco de pyramide.

Resp. 75^{dm^2}

489. — As bases de um tronco de pyramide são dois hexagonos regulares, cujos lados medem respectivamente 1^m e 2^m; a altura do tronco mede 3^m. Calcular o volume.

Resp. $18^{m^3},186$

490. — As bases de um tronco de pyramide são hexagonos de 9^{m^2} e 4^{m^2} de area respectivamente.. Calcular a area da secção média.

Resp. $4^{m^2},75$

491. — Um tronco de pyramide tem 1064^{dm^3} de volume; as bases parallelas são quadrados cujos lados medem respectivamente 4^{dm} e 9^{dm}. Calcular a altura desse tronco de pyramide.

Resp. 24^{dm}

492. — Um tronco de pyramide de bases parallelas tem um volume de 40^{dm^3}; uma das bases é um quadrado de 4^{dm} de lado. Calcular o lado da outra base, sabendo-se que a altura do tronco mede 5^{dm}.

Resp. $1^{dm},46$

493. — A altura de um tronco de pyramide de bases parallelas mede 6^{dm}; uma das bases é um pentagono de 20^{dm^2} de area;

Observação — Nos problemas em que figuram troncos de pyramide, a não ser que seja indicado o contrario, deve-se suppor que o tronco de pyramide seja de primeira especie.

um lado dessa base mede 4^{dm} e o seu homologo na outra base mede 3^{dm}. Calcular o volume desse tronco de pyramide.

Resp. $92^{dm^3},500$

494. — A aresta lateral de um tronco de pyramide regular mede 5^{cm}; as bases parallelas são quadrados cujas diagonaes medem 8^{dm} e 14^{dm} respectivamente. Calcular o volume e a area total desse tronco de pyramide.

Resp. 248^{dm^3} e $270^{dm^2},4816$

495. — A altura de uma pyramide mede $0^m,4$; a base é um rectangulo, cujos lados medem respectivamente $1^m,2$ e $0^m,8$. Corta-se essa pyramide por um plano parallelo á base e passando pelo meio da altura. Calcular o volume do tronco de pyramide assim obtido.

Resp. $0^{m^3},112$

496. — Resolver o problema anterior suppondo-se que o plano parallelo á base diste da base um comprimento egual a $^1/_4$ da altura.

Resp. $0^{m^3},089$

497. — A altura de uma pyramide mede 2^m. A que distancia do vertice se deve cortar essa pyramide por um plano parallelo á base para dividil-a em duas partes equivalentes?

Resp. $1^m,586$

498. — A altura de uma pyramide mede 3^m. A que distancia do vertice se deve cortar essa pyramide por um plano parallelo á base para dividil-a em duas partes, cujos volumes estejam entre si na razão $^2/_3$?

Resp. $2^m,565$

499. — Uma aresta de uma pyramide mede 2^m. Corta-se essa pyramide por um plano parallelo á base; a razão do volume da pyramide parcial para o tronco de pyramide determinado é $^1/_8$. Calcular os segmentos em que a aresta dada fica dividida por esse plano.

Resp. $0^m,558$ e $1^m,442$

500. — Uma aresta PA de uma pyramide mede 3^m. A partir do vertice P tomam-se, sobre essa aresta, dois comprimentos PG e PH e pelos pontos G e H passam-se planos parallelos á base, que dividem a pyramide em tres partes cujos volumes são respectivamente proporcionaes aos numeros 2, 3 e 5. Calcular PG e PH.

Resp. $1^m,752$ e $2^m,379$

501. — Uma aresta PA de um tronco de pyramide de bases parallelas mede 5^m; dois lados homologos dessas bases medem respectivamente 6^m e 4^m. Corta-se esse tronco de pyramide, por um plano parallelo das bases, em duas partes equivalentes. Calcular os segmentos em que a aresta PA fica dividida por esse plano.

Resp. $2^m,98$ e $2^m,02$

502. — Uma aresta PA de um tronco de pyramide de bases parallelas mede 7^{dm}; dois lados homologos das bases medem respectivamente 6^{dm} e 8^{dm}. Corta-se esse tronco de pyramide, por dois planos parallelos ás bases, em tres partes equivalentes. Calcular os segmentos em que a aresta PA fica dividida por esses planos.

Resp. $2^{dm},80$; $2^{dm},28$; $1^{dm},92$

503. — As bases parallelas de um tronco de pyramide de segunda especie são quadrados cujas diagonaes medem respectivamente 6^{dm} e 4^{dm}; a altura mede 9^{dm}. Calcular o volume.

Resp. 42^{dm^3}

504. — Um tronco de pyramide de segunda especie tem 6^{dm} de altura; uma das bases é um triangulo de 15^{dm^2} de area; um

lado dessa base mede 5^{dm} e o lado homologo na outra base mede 4^{dm}. Calcular o volume.

Resp. $25^{dm^3},500$

505. — Um tronco de pyramide de segunda especie, de $1^m,732$ de altura, tem 2^{m^3} de volume. As bases são hexagonos regulares; sabendo-se que o lado de uma base mede 1^m, calcular o lado da outra base.

Resp. $1^m,263$

CYLINDRO DE REVOLUÇÃO — TRONCO DE CYLINDRO DE REVOLUÇÃO

506. — Calcular a area lateral de um cylindro de 2^m de altura e $1^m,5$ de raio.

Resp. $18^{m^2},84$

507. — Um cylindro tem $2^m,75$ de altura e $2^m,5$ de diametro. Calcular a area total desse cylindro.

Resp. $31^{m^2},41$

508. — Num cylindro de $1^m,25$ de altura o raio da base mede $0^m,6$. Calcular o volume desse cylindro.

Resp. $1^{m^3}414$

509. — Um cylindro tem $2^m,7$ de altura e $0^m,4$ de raio. Calcular o excesso da area lateral sobre a area da base.

Resp. $6^m,28$

510. — Calcular a altura de um cylindro de 1^m de raio, sabendo-se que a base é equivalente á secção meridiana.

Resp. $1^m,57$

511. — Um cylindro tem $3^m,14$ de altura. Calcular o raio desse cylindro, sabendo-se que a base é equivalente á secção meridiana.

Resp. 2^m

512. — Um cylindro tem $3^m,141$ de altura e $0^m,859$ de raio. Qual é a relação entre a area total e a area da secção meridiana?

Resp. 4

513. — Determinar a relação constante entre a area lateral e a area da secção meridiana de um cylindro.

Resp. π

514. — Num prisma quadrangular regular de 4^m de altura foi inscripto um cylindro de $0^m,5$ de raio. Qual é o excesso da area lateral do prisma sobre a area lateral do cylindro inscripto?

Resp. $3^{m^2},43$

515. — Um cylindro P tem 8^m de altura. Se se augmentar o raio desse cylindro de 2^m, conservando-se a altura constante, a area lateral do novo cylindro P' é egual á area total do cylindro P. Calcular o raio do cylindro P.

Resp. 4^m

516. — Calcular a area da base de um cylindro que tem 32^{m^2} de area lateral, sabendo-se que a altura é egual a $^5/_3$ do raio.

Resp. $9^{m^2},60$

517. — A differença entre a area da base de um cylindro de raio R e altura h e a area lateral desse mesmo cylindro é egual á area de um circulo cujo raio é h. Calcular R em funcção de h.

Resp. $h(1+\sqrt{2})$

518. — Calcular a area lateral de um cylindro de 12^{m^2} de area total, sabendo-se que o raio é egual a $^1/_5$ da altura.

Resp. 10^{m^2}

519. — Um cylindro de raio R e de altura h tem a area total egual a 40 vezes a area de um circulo de raio h. Sendo R egual a 1^m calcular h.

Resp. $0^m,25$

520. — A area total de um cylindro de altura h e de raio R é egual á area de um circulo cujo raio é egual á differença entre h e R. Calcular h sendo $r = 2^m$.

Resp. $8^m,46$

521. — Um cylindro C tem o raio egual a R e a altura egual a h. Determinar a relação que deve existir entre R e h para que a area total desse cylindro seja egual ao dobro da area de um circulo de raio h.

Resp. $\dfrac{h}{2}(\sqrt{5}-1)$. R *é o segmento aureo de* h.

522. — A area total de um cylindro C de raio R e de altura h é egual ao triplo da area lateral de outro cylindro C' de altura egual a R e de raio egual a h. Exprimir h em funcção de R.

Resp. $h = \frac{1}{2} R$

523. — A area total de um cylindro de 3^{dm} de raio é egual a $^1/_3$ da area de um circulo cujo raio é egual ao semi-perimetro da secção meridiana desse cylindro. Calcular a altura desse cylindro.

Resp. $8^{dm},19$

524. — Um cylindro tem $14^m,4$ de altura e $1^m,2$ de raio. De quanto se deve augmentar o raio, conservando constante a altura, para que a area lateral do novo cylindro seja egual á area total do cylindro dado?

Resp. $0^m,1$

525. — Um semi-cylindro tem 2^{dm} de altura e $0^{dm},5$ de raio, Calcular a area total.

Resp. $5^{dm^2},777$

526. — Um cylindro C e um semi-cylindro C' têm bases equivalentes e as areas lateraes eguaes. Determinar a relação entre a altura do cylindro e a altura do semi-cylindro.

Resp. $\dfrac{(\pi+2)\sqrt{3}}{2\pi}$
Resp. 20

527. — A area lateral de um cylindro equilatero excede a area da secção meridiana de $8^{m^2},5664$. Calcular o raio desse cylindro.

Resp. 1^m

528. — Um cylindro de 4^m de altura e $0^m,5$ de raio foi cortado por um plano P parallelo ao eixo e distando deste de $0^m,3$. Calcular a area da secção feita pelo plano P.

Resp. $3^{m^2},20$

529. — O volume de um cylindro equilatero é egual a $6^{m^3},282$; calcular o raio.

Resp. 1^m

530. — Calcular o volume de um cylindro equilatero cuja secção meridiana tem 1^{m^2} de area.

Resp. $0^{m^3},785400$

531. — O volume de um cylindro é egual a 8^{m^3}; calcular a area total sabendo-se que a secção meridiana desse cylindro tem 4^{m^2} de area.

Resp. $17^{m^2},6592$

532. — Calcular o volume de um cylindro de 2^m de raio, sabendo-se que a altura é egual ao semi-perimetro da base.

Resp. $78^{m^3},95$

533. — Calcular o volume de um cylindro cuja area lateral é egual a $75^{m^2},36$, sabendo-se que a diagonal do rectangulo gerador mede 5^m.

Resp. 1ª *sol.*: $113^{m^3},097$
2ª *sol.*: $150^{m^3},796$

534. — Desenvolvendo-se sobre um plano a superficie lateral de um cylindro obtem-se um rectangulo cuja diagonal mede

0^m,6. Sabendo-se que a razão entre as dimensões desse rectangulo é $^4/_5$, calcular a area total e do volume do cylindro.

Resp. $0^{m^2},20$ e $0^{m^3},006$

535. — Calcular o volume de alvenaria empregada em uma torre cylindrica de 12^m de altura, sabendo-se que a parede tem 0^m,6 de espessura e que a circumferencia exterior mede 32^m,4 de comprimento.

Resp. $219^{m^3},708$

536. — Calcular a altura de um cylindro que tem 8$^{m^2}$ de area lateral e 10$^{m^3}$ de volume.

Resp. $0^m,509$

537. — Calcular o raio de um cylindro de 31$^{m^3}$,416 de volume, sabendo-se que a area do rectangulo gerador é egual a 5$^{m^2}$.

Resp. 2^m

538. — Um cylindro é equivalente a um prisma quadrangular regular da mesma altura. Determinar a relação entre a area lateral do cylindro e a area lateral do prisma.

Resp. $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

539. — A area lateral de um cylindro é egual á area lateral de um prisma triangular regular da mesma altura. Determinar a relação entre o volume do cylindro e a do prisma.

Resp. $\dfrac{3\sqrt{3}}{\pi}$

540. — Num cylindro de 4^m de altura e 0^m,5 de raio foi inscripto um prisma quadrangular regular. Calcular o volume desse prisma.

Resp. 2^{m^3}

541. — Num cylindro de 4^m de altura e 1^m de raio foi inscripto um prisma triangular regular. De quanto o volume do cylindro excede o volume do prisma?

Resp. $7^{m^3},370$

542. — O raio de um cylindro mede 0^m,5 e a altura 3^m,183. De quanto augmentará o volume desse cylindro si se fizer o raio egual 0^m,8, conservando a altura constante?

Resp. $3^{m^3},9$

543. — Dois cylindros, de alturas deseguaes, são equivalentes. Exprimir, em funcção dos raios, a relação entre as areas lateraes desses dois cylindros.

Resp. $\dfrac{R'}{R}$

544. — Dois cylindros C e C' têm a mesma altura h. O volume do primeiro excede o volume do segundo de 360$^{m^3}$; a differença entre os raios é de 4^m. Calcular o raio do cylindro C, sabendo-se que $h = 3^m,183$.

Resp. $6^m,5$

545. — Um semi-cylindro tem a altura egual ao raio da base. Calcular o volume desse semi-cylindro, sabendo-se que a area total é egual a 6$^{m^2}$2832.

Resp. $1^{m^3},570$

546. — Um cylindro C é equivalente a um semi-cylindro C' da mesma altura. Determinar a relação entre a area lateral de C e a area lateral de C'.

Resp. $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{\pi+2}$

547. — O volume de um cylindro é egual a 16$^{m^3}$; augmentando-se o raio desse cylindro de 0^m,5 conservando-se a altura constante, o volume augmenta de 9^{m^3}. Calcular a area lateral desse cylindro.

Resp. 16^{m^2}

548. — Um cylindro tem 26^{m^3} de volume; se se augmentar a altura desse cylindro de $0^m,5$, o raio ficando constante, o volume augmenta de $1^{m^3},570$. Calcular o raio desse cylindro.

Resp. 1^m

549. — A altura de um cylindro mede 8^m e o raio $1^m,41$. De quanto se deve augmentar a area lateral, conservando a altura constante, para que o volume augmente de $6^{m^3},283$?

Resp. $4^{m^2},5216$

550. — O raio de um cylindro mede 1^m e a altura 5^m. Para que o volume desse cylindro augmente de $31^{m^3},416$ de quanto se deve augmentar a area total, conservando constante a altura?

Resp. $35^{m^2},5158$

551. — Um cylindro tem 1^m de raio e 5^m de altura. De quanto se deve augmentar o volume, conservando-se o raio constante, para que a area lateral augmente de $3^{m^2},14$?

Resp. $1^{m^3},570$

552. — Sendo dados os volumes V e V' de dois cylindros gerados por um rectangulo que gira successivamente em torno de dois lados adjacentes, exprimir a diagonal d, desse rectangulo gerador, em funcção de V e V'.

Resp. $\dfrac{\sqrt{V^2+V'^2}}{\sqrt[3]{\pi V V'}}$

553. — Um vaso, que tem a forma de um cylindro equilatero de 20^{cm} de altura, está cheio de agua. Mergulhando-se nesse cylindro um tetraedro regular ha transbordamento de certa quantidade de agua, ficando a base desse tetraedro inscripta na base do cylindro. Calcular a altura da agua no cylindro quando de dentro delle se retirar o tetraedro.

Resp. $18^{cm},05$

CONE DE REVOLUÇÃO — TRONCO DE CONE DE REVOLUÇÃO

554. — Num cone uma secção plana feita a $0^{dm},42$ do vertice tem um raio egual a $0^{dm},5$. A que distancia do vertice se acha uma secção plana, cujo raio mede $2^{dm},25$?

$1^{dm},89$

555. — A altura de um cone mede 12^{cm}; a que distancia do vertice se deve cortar esse cone por um plano parallelo á base, de modo que a area da secção obtida seja ¼ da area da base.

Resp. 6^{cm}

556. — A geratriz de um cone é g e a area da base, b; calcular a area da secção feita por um plano parallelo á base a uma distancia d do vertice.

Resp. $\dfrac{\pi b b^2}{\pi g^2 - b}$

557. — Calcular a area lateral e a area total de um cone, sabendo-se que o raio mede $3^{dm},6$ e a geratriz mede $7^{dm},2$.

Resp. $81^{dm^2},43$ e $90^{dm^2},72$

558. — Num cone uma geratriz forma com o eixo um angulo de 60°; calcular a area total desse cone, sabendo-se que a circumferencia da base tem $0^{m},76$ de comprimento.

Resp. $0^{m^2}09$

559. — A geratriz de um cone mede $1^{m},5$ e forma com o eixo um angulo de 30°. Calcular a area lateral desse cone.

Resp. $3^{m^2},5243$

560. — A altura de um cone mede $1^{dm},2$ e forma com uma geratriz um angulo de 45°. Calcular a area total desse cone.

Resp. $10^{dm^2},92$

561. — Calcular a area lateral de um cone de $1^{m},6$ de raio, sabendo-se que a altura forma com uma geratriz um angulo de 60°.

Resp. $9^{dm^2},2863$

562. — Calcular a area lateral de um cone de 13^{cm} de altura e 15^{cm} de geratriz.

Resp. $235^{cm^2},62$

563. — Um cone tem 4^{cm} de altura e 5^{cm} de geratriz. Calcular a area total desse cone.

Resp. $75^{cm^2},39$

564. — Um cone tem 4^{cm} de altura e 5^{cm} de geratriz. Calcular a differença entre a area lateral e a area da base.

Resp. $18^{cm^2},84$

565. — Um cone tem uma area lateral de $23^{m^2},10$; a geratriz mede $3^{m},5$. Calcular a altura.

Resp. 2^{m}

566. — A geratriz de um cone equilatero mede 2^{m}; calcular a area total.

Resp. $9^{m^2},4248$

567. — Calcular a altura de um cone de 1^{dm} de raio, sabendo-se que a base é equivalente á secção meridiana.

Resp. $3^{dm},14$

568. — A geratriz de um cone mede $1^{m},813$; calcular a area lateral, sabendo-se que a base é equivalente á secção meridiana.

Resp. $3^{m^2},14$

569. — Dois cones da mesma base têm as alturas respectivamente eguaes a 6^{cm} e 4^{cm}; calcular a differença entre as areas lateraes, sabendo-se que o raio commum é egual a 2^{cm}.

Resp. $11^{cm^2},63$

570. — Calcular o raio de um cone que tem $9^{cm^2},4248$ de area lateral, sabendo-se que o raio é egual a $1/3$ da geratriz.

Resp. 1^{cm}

571. — Um cone C de raio R e de altura h tem a area total egual a area de um circulo de raio h. Sendo $R = 2^{cm}$, calcular h.

Resp. $3^{cm},464$

572. — A area lateral de um cone de raio egual a 2^{cm}, augmentada da area da base desse mesmo cone, é egual a area de um circulo cujo diametro é egual ao dobro do excesso da geratriz sobre o raio do cone. Calcular a geratriz.

Resp. 6^{cm}

573. — Um cone de 4^{dm} de altura e 3^{dm} de raio foi cortado por um plano parallelo á base. Calcular a distancia da secção ao vertice, sabendo-se que a area da secção é egual á differença entre a area lateral do cone e a area da base.

Resp. $1^{dm},93$

574. — A area total de um cone de 2^{dm} de raio é egual a $1/3$ da area de um circulo cujo raio é egual ao semi-perimetro da secção meridiana desse cone. Calcular a geratriz.

Resp. 4^{dm}

575. — Num cone equilatero a area lateral excede a area da secção meridiana de $4^{dm^2},5512$. Calcular o raio.

1^{dm}

576. — A altura de um cone mede 8^{cm} e o raio 6^{cm}; se o raio augmentar de 2^{cm}, ficando a altura constante, que accrescimo soffrerá a area lateral?

Resp. $95^{cm^2},75$

577. — Calcular o raio de um semi-cone que tem $3^{m^2},22$ de area lateral, sabendo-se que a altura do semi-cone é egual ao raio.

Resp. 1^{m}

578. — Um cone C tem 4^{dm} de altura e 3^{dm} de raio; outro cone C' tem 3^{dm} de altura e 4^{dm} de raio. De quanto a area lateral de C' excede a area lateral de C?

Resp. $15^{dm^2},7080$

579. — O raio de um cone C mede 6^{dm} e a altura 8^{dm}; calcular o raio de outro cone C', da mesma altura, que tenha a area lateral egual á area total do cone C.

Resp. $12^{dm},72$

580. — Num cone de 4^{dm} de altura e 3^{dm} de raio foi inscripta uma pyramide quadrangular regular. Calcular a area lateral dessa pyramide.

Resp. $17^{dm^2},41$

X 581. — O diametro da base de um cone mede 6^{dm}; a area da base é egual a $9/15$ da area lateral. Calcular o angulo do sector circular que se obtem desenvolvendo a superficie lateral desse cone sobre um plano.

Resp. $216°$

582. — O desenvolvimento da superficie lateral de um cone sobre um plano é um sector de 135° e 12^{cm} de raio. Calcular a area total desse cone.

Resp. $233^{cm^2},14$

583. — Calcular a area total de um cone, sabendo-se que desenvolvendo a sua superficie lateral sobre um plano obtem-se um sector circular de 120° e 18^{cm} de raio.

Resp. $452^{cm^2},39$

584. — Calcular o volume de um cone equilatero de $6^{cm^2}28$ de area lateral.

Resp. $1^{cm^3},813$

585. — O volume de um cone equilatero é egual a $31^{cm^3},416$; calcular a area da secção meridiana.

Resp. $5^{cm^2},56$

586. — Calcular o volume de um cone de 2^{cm} de raio e de $31^{cm^2},4160$ de area lateral.

Resp. $19^{cm^3},316$

587. — A area total de um cone equilatero é egual a 81^{dm^2}; calcular o volume desse cone.

Resp. $45^{dm^3},700$

588. — A secção meridiana de um cone equilatero tem $1^{m^2},7320$ de area; calcular o volume desse cone.

Resp. $1^{m^3},813750$

589. — A perpendicular á geratriz de um cone, baixada do centro da base desse cone, determina sobre a geratriz segmentos de 9^{dm} e 4^{cm} respectivamente, a partir do vertice. Calcular o volume desse cone.

Resp. $588^{dm^3},978$

590. — Um cone tem uma area lateral de 24^{dm^2}; a perpendicular á geratriz, baixada do centro da base do cone, mede 6^{dm}. Calcular o volume desse cone.

Resp. 48^{dm^3}

591. — A altura de um cone mede 4^{dm}; a secção plana, feita parallelamente á base, a uma distancia de 1^{dm} do vertice tem uma area de 1^{dm^2}. Calcular o volume desse cone.

Resp. $21^{dm^3},333$

592. — Um cone tem $3^{m},831$ de altura e $0^{m},5$ de raio. De quanto augmentará o volume desse cone se se fizer o raio egual a $0^{m},8$, a altura ficando constante?

Resp. $1^{m^3},300$

593. — Dois cones têm as geratrizes respectivamente eguaes a 18^{cm} e 10^{cm}; calcular a differença entre os volumes desses cones, sabendo-se que têm a mesma altura egual a 6^{cm}.

Resp. $1406^{cm^3},720$

594. — A area lateral de um cone é egual a $31^{dm^2},4160$; calcular o volume desse cone, sabendo-se que o raio da base mais a geratriz é egual a 7^{dm}.

Resp. $19^{dm^3},185$

595. — Um cone de 20^{cm} de altura foi cortado por um plano parallelo á base, a uma distancia de 4^{cm} do vertice. Calcular o volume desse cone, sabendo-se que a area da base excede a area da secção de 864^{cm^2}.

Resp. 6^{dm^3}

596. — Dado o volume V de um cone calcular o raio, sabendo-se que o perimetro da base é egual ao semi-perimetro da secção meridiana.

Resp. $\sqrt[3]{\dfrac{3\,V}{\pi\sqrt{\pi^2-2\pi}}}$

597. — O volume de um cone é egual a 16^{cm^3}. Se se augmentar o raio desse cone de 5^{cm}, conservando a altura constante, o volume augmenta de 9^{cm^3}. Calcular o raio.

Resp. 20^{cm}

598. — O volume de um cone é egual a 26^{dm^3}. Se se augmentar a altura desse cone de 5^{cm}, conservando o raio constante, o volume augmentará de $6^{dm^3},283$. Calcular o raio.

Resp. 5^{dm}

599. — Um cone tem 4^{dm} de altura e 3^{dm} de raio. De quanto se deve diminuir o raio desse cone, conservando a altura constante, para que o volume diminua de $25^{dm^3},269$.

Resp. $1^{dm},5$

600. — Um cone e um cylindro equivalentes têm a mesma altura egual a 12^{dm} e a mesma area total. Calcular os raios das bases desse cone e desse cylindro.

Resp. $2^{dm},19$ e $6^{dm},78$

601. — Num cone de 5^{dm^3} de volume a altura é o dobro do diametro da base. Calcular o raio e o angulo do sector circular que se obtem desenvolvendo a superficie lateral desse cone.

Resp. $1^{dm},06$ e $87°22$

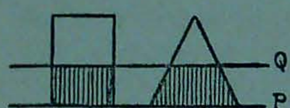


Fig. 70

602. — Um cylindro e um cone da mesma altura egual á 20^{dm} assentam-se sobre um plano *P*; o raio do cylindro mede 5^{dm} e o do cone 8^{dm}. A que distancia do plano *P* se deve passar um plano *Q* para que as partes dos dois solidos comprehendidas entre os planos *P* e *Q* sejam equivalentes?

Resp. $17^{dm},01$

603. — Num tronco de cone de 184^{dm^2} de area lateral, a geratriz forma com a altura um angulo de 60°. Calcular os raios desse tronco de cone, sabendo-se que a altura mede 4^{dm}.

Resp. $0^{dm},20$ e $7^{dm},12$

604. — Num tronco de cone de 25^{dm^3} de volume a geratriz forma com a altura um angulo de 30°. Sabendo-se que o raio de uma base mede 1^{dm}, calcular o raio da outra base.

Resp. $2^{dm},5$

605. — Um cone tem 6^{dm} de altura e 10^{dm^3} de volume; corta-se esse cone, a 2^{dm} do vertice, por um plano parallelo á base. Calcular o volume do tronco de cone assim obtido.

Resp. $21^{dm^3},600$

606. — A altura de um cone mede 10^{dm} e o raio, 5^{dm}; a que distancia do vertice se deve cortar esse cone por um plano parallelo á base para que o tronco assim obtido tenha um volume de 20^{dm^3}?

Resp. $0^{dm},27$

607. — A altura de um cone mede 5^{dm} e o raio, 1^{dm}; a que distancia do vertice se deve cortar esse cone por um plano parallelo á base para que o volume do tronco assim obtido seja a média proporcional entre o cone parcial e o cone total?

Resp. $3^{dm},625$

608. — A geratriz *AB* de um cone mede 10^{m} e o raio, 6^{m}. Nesse cone ha inscripto um cylindro cuja area lateral é egual á area lateral do cone parcial *BMN*, que tem para base *MN* a base superior do cylindro. Calcular a area lateral desse cylindro inscripto.

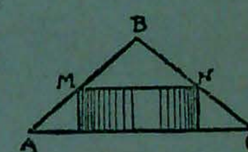


Fig. 71

Resp. $71^{cdm^2},38$

609. — A geratriz *AB* de um cone (fig. 71) mede 20^{dm} e o raio 12^{dm}. Nesse cone ha inscripto um cylindro cujo volume é egual ao volume do cone parcial *BMN*, que tem para base *MN* a base superior do cylindro. Calcular o volume desse cylindro inscripto.

Resp. $1017^{dm^3},878$

610. — O raio de um cone mede $2^{dm},4$ e a altura, $3^{dm},2$. Calcular o volume do cylindro equilatero inscripto nesse cone (fig. 71).

Resp. $5^{dm^3},621$

611. — Os raios das bases de um tronco de cone medem respectivamente 4^{dm} e 6^{dm}. Calcular a altura desse tronco de cone, sabendo-se que a area lateral é egual á somma das areas das bases.

Resp. $4^{dm},8$

612. — Um tronco de cone e um cylindro têm a mesma altura e uma base commum; o volume do cylindro é o dobro do do tronco de cone. A somma dos diametros das bases do tronco de cone é egual a 25^{cm}. Calcular as areas das bases do tronco de cone.

Resp. $35^{cm^2},24$ e $263^{cm^2},07$

613. — O volume de um tronco de cone, de $2^{dm},5$ de altura, é egual a 36^{dm^3}; a differença entre os raios é egual a $1^{dm},5$. Calcular os raios das bases.

Resp. $1^{dm},3$ e $2^{dm},8$

614. — Um cone e um cylindro têm a mesma altura egual a 12^{dm}, a mesma area total e o mesmo volume. Calcular os raios do cone e do cylindro.

Resp. $3^{dm},80$ e $2^{dm},19$

615. — Um tronco de cone e um cylindro têm a mesma altura egual a $1^{m},2$ e uma base commum de raio egual a $0^{m},56$; sabendo-se que os volumes estão entre si na razão de $^{28}/_{9}$, calcular o raio da outra base do tronco de cone.

Resp. $1^{m},358$

ESPHERA

616. — Calcular a area de uma secção plana feita a uma distancia de 12^{dm} do centro, numa esphera de 30^{dm} de diametro.

Resp. $254^{dm^2},4696$

617. — A area de uma secção plana de uma esphera é egual a $50^{dm^2}2656$; calcular a distancia dessa secção ao centro, sabendo-se que o raio da esphera mede 5^{dm}.

Resp. 3^{dm}

618. — Calcular a area da menor secção feita numa esphera de raio R por um plano que divide um diametro da esphera em média e extrema razão.

Resp. $4\pi R^2(\sqrt{5}-2)$

619. — Por um ponto M, a uma distancia d do centro de uma esphera, faz-se passar uma infinidade de planos. Calcular a differença entre a area da maior e a area da menor das secções assim obtidas.

Resp. πd^2

620. — Numa esphera de $0^{m},25$ de raio descreve-se um circulo de distancia polar egual a $0^{m},08$. Calcular a distancia do plano desse circulo ao centro da esphera.

Resp. $0^{m},237$

621. — Calcular a area de um circulo de uma esphera, sabendo-se que as distancias polares medem, respectivamente $0^{dm},3$ e $0^{dm},5$.

Resp. $0^{dm^2},2079$

622. — A altura de uma zona mede 8^{cm} e os raios das bases medem respectivamente 6^{cm} e 10^{cm}. Calcular a area da zona.

Resp. $502^{cm^2},85$

623. — O raio de uma esphera mede $0^{m},35$. Calcular a area da zona cujas bases têm por distancias polares $0^{m},12$ e $0^{m},28$ respectivamente.

Resp. $0^{m^2},20$

624. — Calcular o comprimento da circumferencia da menor base de uma zona de 140^{cm^2} de area, sabendo-se que a base maior dista 7^{cm} do centro da esphera de 18^{cm} de raio.

Resp. $100^{cm},5$

625. — Calcular a area de uma calotte pertencente a uma esphera de $0^{m},56$ de raio e tendo para base um circulo de $0^{m},12$ de raio.

Resp. $0^{m^2},0423$

626. — Calcular a area de uma calotte espherica de 15^{cm} de altura, sabendo-se que o raio da base mede 54^{cm}.

Resp. $9867^{cm^2},76$

627. — Um plano determina sobre uma superficie espherica duas calottes, cujas areas estão entre si na razão de $3/4$. Calcular o raio da esphera, sabendo-se que a corda do arco gerador da menor calotte mede $0^{m},8$.

Resp. $0^{m},6$

628. — Calcular o raio de uma esphera de 576^{dm^2} de area.

Resp. $6^{dm},78$

629. — A area de uma esphera é egual a 45^{dm^2}; calcular o comprimento da circumferencia de um circulo maximo.

Resp. $11^{dm},8$

630. — Calcular o numero de graus de um fuso de 1^{m^2} de area numa esphera de 9^{m^2} de area.

Resp. $40°$

631. — Calcular a area de um fuso de $60°$ em uma esphera de $0^{m},5$ de raio.

Resp. $0^{m^2},52$

632. — Calcular o raio de uma esphera, sabendo-se que um fuso de $30°$ nessa esphera tem 108^{cm^2} de area.

Resp. $10^{cm},15$

633. — Um fuso espherico de $72°$ é equivalente a uma zona de $0^{m},48$ de altura na mesma esphera. Calcular o raio da esphera.

Resp. $1^{m},2$

634. — Uma zona espherica de 5^{cm} de altura é equivalente a um fuso de $45°$ na mesma esphera. Calcular o raio da esphera.

Resp. 20^{cm}

635. — Uma zona espehrica tem 12^{cm^2} de area. Se se augmentar a altura dessa zona de 1^{cm} a aera augmenta de $31^{cm^2},41$. Calcular o raio da esphera.

Resp. 5^{cm}

636. — Duas espheras *E* e *E'* têm respectivamente 8^{cm} e 6^{cm} de raio. Quantos graus deve ter um fuso da primeira para ser equivalente ao fuso de $56°$ da segunda?

Resp. $31°30'$

637. — A somma dos raios *R* e *R'* de duas espheras é egual a 14^{cm}. Calcular esses raios, sabendo-se que o fuso de $25°$ da primeira esphera é equivalente ao fuso de $4°$ da segunda.

Resp. 10^{cm} e 4^{cm}

638. — Uma esphera tem 49^{dm^2} de area. De quanto devemos augmentar o raio para que a area fique egual a 100^{cm^2}?

Resp. $0^{dm},84$

639. — A area de uma esphera augmentada da area de uma zona de 5^{dm} de altura é egual a $314^{dm^2},16$. Calcular o raio da esphera.

Resp. $3^{dm},90$

640. — A area de uma esphera, diminuida da area de certa zona dessa esphera, dá um resultado egual á area de um circulo cujo diametro é a altura da zona. Estabelecer a relação entre o raio da esphera e a altura da zona.

$$Resp. \quad \frac{R}{h} = \frac{1+\sqrt{2}}{4}$$

641. — A area de um fuso de 60° é egual á differença entre a area da esphera e a area de uma zona de 5^{cm} de altura. Calcular o raio da esphera.

Resp. 3^{cm}

642. — Uma secção plana feita numa esphera de 1^{cm} de raio é equivalente a um fuso de 10° dessa mesma esphera. Calcular a distancia da secção ao centro.

Resp. $0^{cm},94$

643. — Calcular, em kilometros quadrados, a area da Terra vista por um observador collocado a uma altitude de 800^{cm}. (Suppõe-se a Terra espherica).

Resp. 32000^{km^2}

644. — Calcular, em kilometros quadrados, a area da superficie terrestre comprehendida entre o equador, o parallelo de 30° de latitude *N*, e os dois meridianos cujas longitudes são respectivamente 22°37′48″ *E* e 25°14′31″ *E*. (Suppõe-se a Terra espherica).

Resp. 923786^{km^2}

645. — Calcular o volume de uma esphera de 1^{m^2} de area.

Resp. $0^{m^3},094$

646. — Numa esphera de 1^{m} de raio, a zona que serve de base a um sector tem $0^{m},30$ de altura. Calcular o volume do sector.

Resp. $0^{m^3},628$

647. — O volume de uma esphera é egual a 1^{m^3}; calcular a area de uma secção plana feita a $0^{m},3$ do centro dessa esphera.

Resp. $0^{m^2},93$

648. — Um disco cylindrico de chumbo de 35^{cm} de diametro e 2^{cm} de altura é, depois de fundido, transformado em balas esphericas de 3^{mm}. Calcular o numeró de balas.

Resp. 136111

649. — Uma secção plana de uma esphera de raio *R* serve de base a dois cones cujos vertices coincidem com os pólos da secção. Calcular a distancia dessa secção ao centro, sabendo-se que a somma dos volumes dos cones é egual a $^1/_6$ do volume da esphera.

Resp. $^1/_3 \, R\sqrt{6}$

650. — Calcular o volume de uma esphera, sabendo-se que uma secção plana feita a $0^{m},2$ do centro tem $0^{m^2},80$ de area.

Resp. $0^{m^3},665$

651. — Calcular o volume de uma esphera inscripta em um cubo de 24^{m^2} de area total.

Resp. $4^{m^3},188$

652. — Calcular o volume de uma esphera circumscripta a um cubo de 8^{m^3} de volume.

Resp. $21^{m^3},765$

653. — Calcular o volume de uma cunha de 36° numa esphera de 7^{cm} de raio.

Resp. $143^{cm^3},733$

654. — Numa esphera de 6^{dm^3} de volume, calcular o numero de graus de uma cunha de 1^{dm^3} de volume.

Resp. 60°

655. — O volume de um segmento espherico de uma base, de 2^{dm} de altura, é egual a $31^{dm^3},416$; calcular o raio da esphera a que pertence esse segmento.

Resp. $3^{dm},16$

656. — Um segmento espherico tem para bases circulos cujos raios medem respectivamente 12^{cm} e $16^{cm},8$. A area da zona correspondente é egual á somma das areas das bases. Calcular a altura do segmento e o raio da esphera primitiva.

Resp. $126^{cm},6$ e $168^{cm},2$

657. — Uma esphera de 7^{dm} de raio é cortada por dois planos parallelos P e P', que distam respectivamente 3^{dm} e 5^{dm} do centro. Calcular o volume do segmento espherico comprehendido entre os dois planos, sabendo-se que a distancia entre P e P' é menor do que o raio.

Resp. $205^{dm^3},333$

658. — Os diametros de duas espheras medem respectivamente 5^{dm} e 20^{dm}. Estabelecer a relação entre as areas dessas espheras. Estabelecer tambem a relação entre os volumes.

Resp. $^1/_{16}$ e $^1/_{64}$

659. — O raio de uma esphera mede 1^m. Calcular o raio de uma esphera de area dupla.

Resp. $1^m,414$

660. — O diametro de uma esphera mede 7^{dm}. Calcular o diametro de outra esphera cujo volume é o triplo do volume da esphera dada.

Resp. $10^{dm},09$

661. — Uma esphera de 5^{dm} de raio e um cone do mesmo raio, e de altura egual ao diametro da esphera, assentam-se sobre um plano P. Calcular as areas das secções feitas na esphera e no cone por um plano Q parallelo ao plano P e distando deste 6^{dm}.

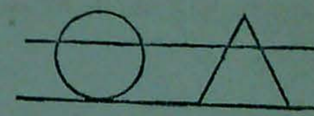


Fig. 72

Resp. $12^{dm^2},5664$ e $75^{dm^2},3984$

662. — Um tronco de cone, cuja geratriz é egual á a, está circumscripto a uma esphera de raio R. Exprimir, em funcção de a, a area total S e o volume V desse tronco de cone, sabendo-se que a geratriz forma com o raio da base maior um angulo de 60°.

Resp. $S = {}^{13}/_{8}\,\pi a^2$; $V = {}^{13}/_{96}\,\pi a^3 \sqrt{3}$

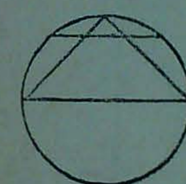


Fig. 73

663. — Numa esphera de 12^{cm} de raio inscreve-se um cone cuja base é um circulo maximo da esphera; a 10^{cm} do vertice do cone passa-se um plano parallelo á base. Calcular a area da parte da secção comprehendida entre a superficie da esphera e a superficie conica.

Resp. $125^{cm^2},66$

664. — Calcular o volume de um tronco de cone circumscripto a uma esphera, sabendo-se que os raios das bases medem respectivamente $4^{dm},2$ e $2^{dm},4$.

Resp. $27^{dm^3},273$

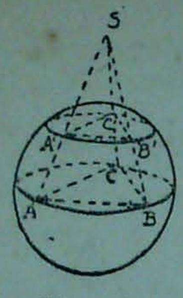


Fig. 74

665. — Num circulo maximo de uma esphera de raio R inscreve-se um triangulo equilatero ABC, que serve de base a um tetraedro regular de vertice S. As arestas lateraes desse tetraedro interceptam a superficie da esphera nos pontos A', B', C'. Estabelecer a razão dos volumes e das areas totaes dos tetraedros $SA'B'C'$ e $SABC$.

Resp. $^1/_{27}$ e $^1/_9$

666. — Um tronco de cone cuja geratriz é egual a a está circumscripto a uma esphera de raio R. Calcular, em funcção de R e de a, a area total S e o volume V desse tronco de cone.

Resp. $S = 2\pi\,(a^2 - R^2)$; $V = {}^2/_3\,\pi R(a^2 - R^2)$

667. — Numa esphera de 2^{dm} de raio foi inscripto um tronco de cone. O raio de uma base desse tronco é o quadruplo do raio da outra base. Calcular o volume do tronco de cone.

Resp. $87^{dm^3},964$

668. — Uma esphera de 4^{dm} de raio foi inscripta numa superficie conica C. Calcular a area da menor das calottes determinadas pelo circulo de contacto da superficie espherica com a conica, sabendo-se que o angulo formado por uma geratriz com o eixo da superficie conica mede 30°.

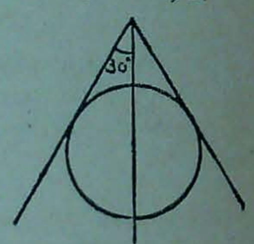


Fig. 75

Resp. $50^{dm^2},26$

669. — Num cone oco o eixo faz com uma geratriz um angulo de 30° (fig. 75). Nesse cone introduz-se uma esphera de 2^{dm} de raio. Calcular: 1°) o raio da circumferencia de contacto da esphera com o cone; 2°) a area da parte da superficie espherica visivel do vertice do cone; 3°) o volume limitado pela parte interior da superficie espherica e a superficie do cone.

Resp. $1^{dm},73$; $12^{dm},56$; $4^{dm^3},188$

670. — Um cone de 54^{cm} de raio e 72^{cm} de altura tem para vertice o centro de uma esphera de 32^{cm} de raio. Calcular o volume V da porção commum a esses dois solidos.

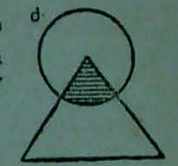


Fig. 76

Resp. $13727^{cm^3},779$

671. — A uma esphera de raio R circumscreve-se um cone cuja altura é egual ao dobro do diametro. Estabelecer: 1°) a relação entre a area total S' do cone e a area S da esphera; 2°) a relação entre os volumes dos dois solidos.

Resp. $\dfrac{S}{S'} = \dfrac{1}{2}$; $\dfrac{V}{V'} = \dfrac{1}{2}$

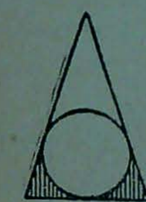


Fig. 77

672. — Num cone de 4^{dm} de altura e $1^{dm},41$ de raio foi inscripta uma esphera. Calcular o volume da porção do cone comprehendida entre a esphera e a base.

Resp. $2^{dm^3},792526$

673. — Um cone de altura h está inscripto em uma esphera de raio R. Calcular, em funcção de R e h, o volume V e a area lateral S desse cone.

Resp. $V = {}^1/_3\,\pi h^2(2R - h)$

$S = \pi h \sqrt{2R(2R - h)}$

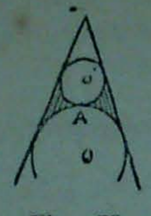


Fig. 78

674. — Num cone inscrevem-se duas espheras O e O' de raios respectivamente eguaes a r e r' $(r > r')$ tangentes entre si no ponto A. Conhecendo-se o raio r da esphera maior, calcular r' de modo que a porção do volume do cone comprehendida entre as duas espheras e a superficie conica seja equivalente á esphera O'.

Resp. $r' = \dfrac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$. (r' *é o segmento aureo de* r)

675. — Estabelecer a relação entre a area S da esphera e a area total S' do cone equilatero circumscripto. Estabelecer tambem a relação entre os volumes V e V'.

Resp. $\dfrac{S}{S'} = \dfrac{4}{9}$; $\dfrac{V}{V'} = \dfrac{4}{9}$

—

SUPERFICIES E SOLIDOS DE REVOLUÇÃO

676. — A diagonal de um rectangulo mede 15^{dm} e os lados são proporcionaes aos numeros 3 e 4; esse rectangulo gira em torno do maior lado: calcular a area gerada pelo lado opposto.

Resp. $678^{dm^2},5856$

677. — Calcular o volume gerado por um quadrado girando em torno de um de seus lados, sabendo-se que a diagonal mede $1^m,414$.

Resp. $3^{m^3},142$

678. — As dimensões de um rectangulo estão entre si na razão $^5/_8$. Estabelecer a relação entre os volumes gerados por esse rectangulo girando successivamente em torno de dois lados adjacentes.

Resp. $5/8$

679. — Calcular o volume gerado por um rectangulo $ABCD$ de 75^{dm^2} de area, girando em torno de um eixo parallelo ao maior lado AD e distante 5^{dm} do centro do rectangulo.

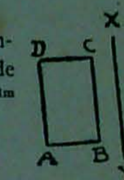


Fig. 79

Resp. $2356^{dm^3},200$

680. — Um rectangulo $ABCD$ (fig. 79), cujas dimensões AB e AD medem respectivamente 8^{dm} e 12^{dm} gira em torno de um eixo XY, parallelo a AD e distante 5^{dm} do centro do rectangulo. Calcular a area total do solido gerado.

Resp. $1256^{dm^2},64$

681. — Calcular as dimensões de um rectangulo, sabendo-se que os volumes gerados por esse rectangulo, girando successivamente em torno de dois lados adjacentes, são respectivamente eguaes a V e V'.

$$Resp.\ \sqrt{\frac{V}{V'}\sqrt[3]{\frac{VV'}{\pi^2}}};\ \sqrt{\frac{V'}{V}\sqrt[3]{\frac{VV'}{\pi^2}}}$$

682. — Um catheto de um triangulo rectangulo mede $1^{dm},6$ e o angulo opposto tem 60°; esse triangulo gira em torno do segundo catheto. Calcular a area da superficie gerada pela hypothenusa.

Resp. $9^{dm^2},2863$

683. — Um triangulo equilatero de $0^m,92$ de lado gira em torno de um de seus lados. Calcular a area e o volume do solido gerado.

Resp. $4^{m^2},61$ e $0^{m^3},664$

684. — Um triangulo, cujos lados medem respectivamente 2^{dm}, 3^{dm} e 4^{dm} gira em torno do maior lado. Calcular o volume do solido gerado.

Resp. $8^{dm^3},838$

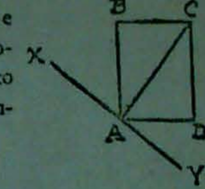
685. — Um triangulo equilatero de 10^{cm} de lado gira em torno de um eixo que passa por um vertice e é parallelo ao lado opposto. Calcular o volume do solido gerado.

Resp. $1570^{cm^3},800$

686. — Um segmento AB de 5^{dm} gira em torno de um eixo situado no mesmo plano; calcular a area da superficie gerada, sabendo-se que as distancias de A e B ao eixo são respectivamente eguaes a 3^m e 4^m.

Resp. $109^{dm^2},95$

687. — Os lados AB e BC de um rectangulo $ABCD$ medem respectivamente 4^{dm} e 3^{dm}. Calcular o volume gerado pela revolução desse rectangulo em torno de um eixo XY, que passa pelo vertice A e é perpendicular á diagonal AC.



Resp. $188^{dm^3},496$

Fig. 80

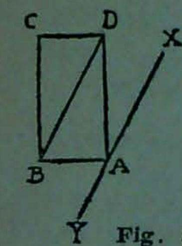


Fig. 81

688. — A diagonal BD de um rectangulo $ABCD$ mede 2^{dm} e faz com o lado AD um angulo de 30°. Esse rectangulo gira em torno de um eixo XY que passa pelo vertice A e é parallelo á diagonal BD. Calcular o volume do solido gerado.

Resp. $9^{dm^3},424$

689. — Um quadrado de lado a gira em torno de um eixo perpendicular á extremidade de uma diagonal. Calcular a area e o volume do solido gerado.

Resp. $S = 4\pi a^2\sqrt{2}$; $V = \pi a^3\sqrt{2}$

690. — Um parallelogrammo gira successivamente em torno de dois lados adjacentes a e b. Estabelecer a relação entre os volumes dos solidos gerados.

Resp. $\frac{Va}{} = \frac{b}{a}$

691. — Um triangulo ABC gira em torno de AC. Estabelecer a relação entre os volumes gerados pelos triangulos ADC e ADB, sendo AD uma mediana.

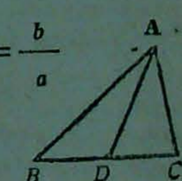


Fig. 82

Resp. ½

692. — Um triangulo equilatero de $3^{dm},2$ de lado gira em torno de um eixo que passa por um vertice e é perpendicular a um lado. Calcular o volume do solido gerado.

Resp. $44^{dm^3},575$

693. — Calcular o volume gerado por um semi-hexagono regular *ABCD*, girando em torno de seu diametro *AD* de 64^{cm}.

Resp. $823^{dm^3},551$

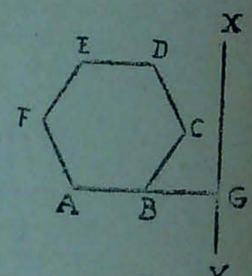
694. — Calcular o volume gerado por um hexagono regular de 1^{dm} de lado, girando em torno de um de seus lados.

Resp. $14^{dm^3},137$

695. — Um hexagono regular de 1^{dm} de lado gira em torno de um eixo que passa por um vertice e é perpendicular ao raio que parte desse vertice. Calcular a area e o volume do solido gerado.

Resp. $37^{dm^2},69$ e $16^{dm^3},323$

696. — O lado de um hexagono regular *ABCDEF* mede 1^m; esse hexagono gira em torno de um eixo *XY* perpendicular a *AB* e distante 1^{dm} do vertice *B*. Calcular a area e o volume do solido gerado.



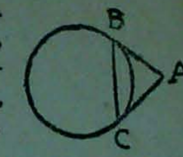
Resp. $56^{dm^2},54$ e $24^{dm^3},485$

Fig. 83

697. — Num semi-circulo traçou-se uma cor da parallela ao diametro *AB* de 20^{cm}; esse semi-circulo gira em torno de *AB*. Calcular a area total do solido gerado pelo segmento circular limitado pela corda *AB*, que é egual á metade do diametro.

Resp. $1172^{cm^2},44$

698. — O raio de um circulo mede 2^{dm}. Por um ponto *A*, situado a 3^{dm} do centro, traçam-se duas tangentes *AB* e *AC*. Calcular o volume gerado pelo triangulo *ABC*, girando em torno do diametro parallelo a *BC*.



Resp. $29^{dm^3},486$

Fig. 84

699. — Um circulo circumscripto a um hexagono regular de lado egual a *R*, gira em torno de um diametro que passa por dois vertices do hexagono. Estabelecer a relação entre os volumes gerados pelo circulo e pelo hexagono.

Resp. $^4/_3$

700. — Um circulo circumscripto a um hexagono regular de lado egual a *R* gira em torno de um diametro que passa pelos meios de dois lados do hexagono. Estabelecer a relação entre os volumes gerados pelo circulo e pelo hexagono.

Resp. $\frac{16}{7\sqrt{3}}$

Afranio Soares

692. — Um triangulo equilatero de $3^{dm},2$ de lado gira em torno de um eixo que passa por um vertice e é perpendicular a um lado. Calcular o volume do solido gerado.

Resp. $44^{dm^3},575$

693. — Calcular o volume gerado por um semi-hexagono regular *ABCD*, girando em torno de seu diametro *AD* de 64^{dm}.

Resp. $823^{dm^3},551$

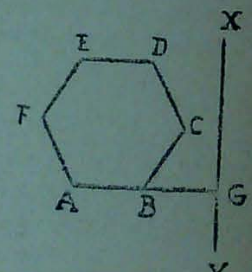
694. — Calcular o volume gerado por um hexagono regular de 1^{dm} de lado, girando em torno de um de seus lados.

Resp. $14^{dm^3},137$

695. — Um hexagono regular de 1^{dm} de lado gira em torno de um eixo que passa por um vertice e é perpendicular ao raio que parte desse vertice. Calcular a area e o volume do solido gerado.

Resp. $37^{dm^2},69$ e $16^{dm^3},323$

696. — O lado de um hexagono regular *ABCDEF* mede 1^{m}; esse hexagono gira em torno de um eixo *XY* perpendicular a *AB* e distante 1^{dm} do vertice *B*. Calcular a area e o volume do solido gerado.



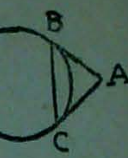
Resp. $56^{dm^2},54$ e $24^{dm^3},485$

Fig. 83

697. — Num semi-circulo traçou-se uma cor da parallela ao diametro *AB* de 20^{cm}; esse semi-circulo gira em torno de *AB*. Calcular a area total do solido gerado pelo segmento circular limitado pela corda *AB*, que é egual á metade do diametro.

Resp. $1172^{cm^2},44$

698. — O raio de um circulo mede 2^{dm}. Por um ponto *A*, situado a 3^{dm} do centro, traçam-se duas tangentes *AB* e *AC*. Calcular o volume gerado pelo triangulo *ABC*, girando em torno do diametro parallelo a *BC*.



Resp. $29^{dm^3},486$

Fig. 84

699. — Um circulo circumscripto a um hexagono regular de lado egual a *R*, gira em torno de um diametro que passa por dois vertices do hexagono. Estabelecer a relação entre os volumes gerados pelo circulo e pelo hexagono.

Resp. $^4/_3$

700. — Um circulo circumscripto a um hexagono regular de lado egual a *R* gira em torno de um diametro que passa pelos meios de dois lados do hexagono. Estabelecer a relação entre os volumes gerados pelo circulo e pelo hexagono.

Resp. $\dfrac{16}{7\sqrt{3}}$

———

Afranio Fomae

FORMULARIO DE GEOMETRIA

PRINCIPAES FORMULAS DA GEOMETRIA PLANA

TRIANGULOS

Triangulos obliquangulos

(a, b, c *são lados;* p = *semi-perimetro;* A, B, C *são angulos internos;* A', B', C' *são angulos externos;* S = *area*)

Somma dos angulos internos... $A + B + C = 180°$

" " " externos... $A' + B' + C' = 360°$

Segmentos determinados pela bissectriz do angulo A......... $m = \frac{ab}{b+c}, \ n = \frac{ac}{b+c}$

Segmentos determinados pela bissectriz do angulo externo A'. $m' = \frac{ab}{c-b}, \ n' = \frac{ac}{c-b}$

Bissectriz do angulo A........ $\beta_A = \frac{2}{b+c}\sqrt{pbc(p-a)}$

" " " B........ $\beta_B = \frac{2}{a+c}\sqrt{pac(p-b)}$

" " " C........ $\beta_C = \frac{2}{a+b}\sqrt{pab(p-c)}$

" " " externo A $\beta'_A = \frac{2}{b-c}\sqrt{bc(p-b)(p-c)}$

" " " " B $\beta'_B = \frac{2}{a-c}\sqrt{ac(p-a)(p-c)}$

" " " " C $\beta'_C = \frac{2}{\quad}\sqrt{ab(p-a)(p-b)}$

Altura abaixada sobre o lado *a* $h_A = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

" " " " " *b* $h_B = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

" " " " " *c* $h_C = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Mediana relativa ao lado *a*.... $m_A = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$

" " " " *b*.... $m_B = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}$

" " " " *c*.... $m_C = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}$

Area........................... $S = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$

" em funcção dos lados.... $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Raio do circulo inscripto....... $r = \frac{S}{p}$

" " " circumscripto.. $R = \frac{abc}{4S}$

Triangulo rectangulo

(a = *hypothenusa;* b, c *são cathetos;* h = *altura abaixada sobre a hypothenusa;* m, n *são as projecções dos cathetos sobre a hypothenusa*).

$$b^2 = am$$
$$c^2 = an$$
$$h^2 = mn$$
$$h = \frac{bc}{a}$$
$$a = m + n$$
$$a^2 = b^2 + c^2$$

Mediana relativa á hypothenusa.. $m_A = \frac{a}{2}$

Mediana relativa ao catheto *b*.. $m_B = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+3c^2} = \frac{1}{2}\sqrt{b^2+4c^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2-3b^2}$

Mediana relativa ao catheto *c*.. $m_C = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+3b^2} = \frac{1}{2}\sqrt{c^2+4b^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2-3c^2}$

Bissetriz do angulo A........... $\beta_A = \frac{bc\sqrt{2}}{b+c}$

" " " B........... $\beta_B = \frac{c}{a+c}\sqrt{2a(a+c)}$

" " " C........... $\beta_C = \frac{b}{a+b}\sqrt{2a(a+b)}$

" " " externo A... $\beta_A = \frac{bc\sqrt{2}}{b-c}$

" " " " B... $\beta_B = \frac{c}{a-c}\sqrt{2a(a-c)}$

" " " " C... $\beta_C = \frac{b}{a-b}\sqrt{2a(a-b)}$

Raio do circulo inscripto........ $r = \frac{b+c-a}{2}$

" " " circumscripto.... $R = \frac{a}{2}$

Triangulo isosceles

(a = *base;* b = *lados;* h = *altura*)

Altura abaixada sobre a base.... $h_a = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2-a^2}$

" " " um lado... $h_B = h_C = \frac{a}{2b}\sqrt{4b^2-a^2}$

Altura abaixada sobre o lado *a* $h_A = \dfrac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

" " " " " *b* $h_B = \dfrac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

" " " " " *c* $h_C = \dfrac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Mediana relativa ao lado *a*.... $m_A = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$

" " " " *b*.... $m_B = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}$

" " " " *c*.... $m_C = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}$

Area........................... $S = \dfrac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$

" em funcção dos lados.... $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Raio do circulo inscripto....... $r = \dfrac{S}{p}$

" " " circumscripto.. $R = \dfrac{abc}{4S}$

Triangulo rectangulo

($a =$ *hypothenusa;* b, c *são cathetos;* $h =$ *altura abaixada sobre a hypothenusa;* m, n *são as projecções dos cathetos sobre a hypothenusa*).

$$b^2 = am$$
$$c^2 = an$$
$$h^2 = mn$$
$$h = \frac{bc}{a}$$
$$a = m + n$$
$$a^2 = b^2 + c^2$$

Mediana relativa á hypothenusa.. $m_A = \dfrac{a}{2}$

Mediana relativa ao catheto *b*.. $m_B = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+3c^2} = \frac{1}{2}\sqrt{b^2+4c^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2-3b^2}$

Mediana relativa ao catheto *c*.. $m_C = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+3b^2} = \frac{1}{2}\sqrt{c^2+4b^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2-3c^2}$

Bissetriz do angulo A........... $\beta_A = \dfrac{bc\sqrt{2}}{b+c}$

" " " B........... $\beta_B = \dfrac{c}{a+c}\sqrt{2a(a+c)}$

" " " C........... $\beta_C = \dfrac{b}{a+b}\sqrt{2a(a+b)}$

" " " externo A... $\beta_A = \dfrac{bc\sqrt{2}}{b-c}$

" " " " B... $\beta_B = \dfrac{c}{a-c}\sqrt{2a(a-c)}$

" " " " C... $\beta_C = \dfrac{b}{a-b}\sqrt{2a(a-b)}$

Raio do circulo inscripto........ $r = \dfrac{b+c-a}{2}$

" " " circumscripto.... $R = \dfrac{a}{2}$

Triangulo isosceles

($a =$ *base;* $b =$ *lados;* $h =$ *altura*)

Altura abaixada sobre a base.... $h_a = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2-a^2}$

" " " um lado... $h_B = h_C = \dfrac{a}{2b}\sqrt{4b^2-a^2}$

Mediana relativa a um lado........ $m_B = m_C = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + b^2}$

Bissectriz do angulo interno da base $\beta_B = \beta_C = \frac{a}{a+b}\sqrt{b(a+2b)}$

" " " externo " " $\beta'_B = \beta'_C = \frac{a}{a-b}\sqrt{b(2b-a)}$

" " " circumscripto....... $R = \frac{b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}}$

Area em funcção dos lados......... $S = \frac{a}{4}\sqrt{4b^2 - a^2}$

TRIANGULO EQUILATERO

Altura em funcção do lado...................... $h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$

" " " " raio do circulo inscripto.... $h = 3r$

" " " " " " " circumscripto $h = \frac{3}{2}R$

Lado " " " " " inscripto .... $l_3 = 2r\sqrt{3}$

" " " " " " " circumscripto $l_3 = R\sqrt{3}$

" " " da altura.................... $l_3 = \frac{2}{3}h\sqrt{3}$

Raio do circulo inscripto em funcção do lado.... $R = \frac{l}{6}\sqrt{3}$

" " " " " " da altura... $r = \frac{h}{3}$

" " " circums. " " do lado.... $R = \frac{l\sqrt{3}}{3}$

" " " circums. " " da altura... $R = \frac{2}{3}h$

" " " ex-inscrip. " " do lado.... $R' = \frac{l\sqrt{3}}{2}$

" " " " " " da altura... $R' = h$

Area em funcção do lado...................... $S = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$

" " " da altura..................... $S = \frac{h^2\sqrt{3}}{3}$

" " " do raio do circulo inscripto.... $S = 3r^2\sqrt{3}$

" " " " " " " circumscripto $S = \frac{3}{4}R^2\sqrt{3}$

" " " " " " " ex-inscripto.. $S = \frac{R'^2}{3}\sqrt{3}$

QUADRILATEROS

(l = *lado;* b, b' *são bases;* m = *base média;* h = *altura;* d, d' *são diagonaes;* r = *raio do circulo inscripto;* R = *raio do circulo circumscripto;* a, c *são lados não parallelos de um trapezio;* δ = *distancia de* a *ao meio de* c)

AREAS

Parallelogrammo.................................. $S = bh$

Rectangulo.. $S = bh$

Losango.. $S = \frac{dd'}{2}$

Quadrado...................... $S = l^2 = \frac{d^2}{2} = 2R^2 = 4r^2$

Trapezio....................... $S = \frac{b+b'}{2}h = mh = c\delta$

Quadrilatero inscriptivel em funcção dos lados *a, b, c, d*........ $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$

DIAGONAES

Diagonal do quadrado.................. $d = l\sqrt{2} = 2R = 2r\sqrt{2}$

Somma dos quadrados das diagonaes de um parallelogrammo de lados eguaes a *a* e *b*.............................. $S_d = 2a^2 + 2b^2$

Somma dos quadrados das diagonaes de um trapezio de lados eguaes a a e c $\quad S_d = a^2 + c^2 + 2bb'$

Diagonaes de um quadrilatero inscriptivel de lados eguaes a a, b, c, d.................

$$d = \sqrt{\frac{(ab+cd)\,(ac+bd)}{ad+bc}}$$

$$d' = \sqrt{\frac{(ad+bc)\,(ac+bd)}{ab+cd}}$$

POLYGONOS REGULARES

(R = *raio do circulo circumscrito;* r = *raio do circulo inscripto;* n = *numero de lados*)

Angulo interno.............................. $i = \dfrac{180^\circ\,(n-2)}{n}$

" externo.............................. $e = \dfrac{360^\circ}{n}$

LADOS

Triangulo equilatero..... $l_3 = R\sqrt{3} = 2r\sqrt{3}$

Quadrado .... $l_4 = R\sqrt{2} = 2r$

Pentagono .... $l_5 = \dfrac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = 2r\sqrt{5-2\sqrt{5}}$

Pentagono estrellado..... $l'_5 = \dfrac{R}{2}\cdot\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

Hexagono .... $l_6 = R = {}^2/_3\, r\sqrt{3}$

Octogono .... $l_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}} = 2r(\sqrt{2}-1)$

Octogono estrellado..... $l'_8 = R\sqrt{2+\sqrt{2}}$

Decagono .... $l_{10} = \dfrac{R}{2}\cdot(\sqrt{5}-1) = {}^2/_5\, r\sqrt{25-10\sqrt{5}}$

Decagono estrellado...... $l'_{10} = \dfrac{R}{2}\,(\sqrt{5}+1)$

Dodecagono .... $l_{12} = \dfrac{R}{2}\,(\sqrt{6}-\sqrt{2}) = 2r\,(2-\sqrt{3})$

Dodecagono estrellado... $l'_{12} = \dfrac{R}{2}\,(\sqrt{6}+\sqrt{2})$

APOTHEMAS

(R = *raio do circulo circumscripto;* l = *lado*)

Triangulo equilatero.... $a_3 = \dfrac{R}{2} = \dfrac{l\sqrt{3}}{6}$

Quadrado............. $a_4 = \dfrac{R\sqrt{2}}{2} = \dfrac{l}{2}$

Pentagono .... $a_5 = \dfrac{R}{4}\,(\sqrt{5}+1) = \dfrac{l}{10}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$

Pentagono estrellado.... $a' = \dfrac{R}{4}\,(\sqrt{5}-1)$

Hexagono............. $a_6 = \dfrac{R\sqrt{3}}{2} = \dfrac{l\sqrt{3}}{2}$

Octogono .... $a_8 = \dfrac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} = \dfrac{l}{2}\,(\sqrt{2}+1)$

Octogono estrellado..... $a'_8 = \dfrac{R}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

Decagono............. $a_{10} = \dfrac{R}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} = \dfrac{l}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$

Decagono estrellado.... $a'_{10} = \dfrac{R}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

Dodecagono........... $a_{12} = \dfrac{R}{4}\,(\sqrt{6}+\sqrt{2}) = \dfrac{l}{2}\,(2+\sqrt{3})$

Dodecagono estrellado... $a'_{12} = \dfrac{R}{4}\,(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

AREAS

(R = *raio do circulo circumscripto;* r = *apothema;* l = *lado*)

Triangulo equilatero $S = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3R^2 \sqrt{3}}{4} = 3r^2 \sqrt{3}$

Quadrado.. $S = l^2 = 2R^2 = 4r^2$

Pentagono. $S = \frac{l^2}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}} = {}^5/_8\, R^2\sqrt{10+2\sqrt{5}} = 5r^2\sqrt{5-2\sqrt{5}}$

Hexagono.. $S = {}^3/_2\, l^2 \sqrt{3} = {}^3/_2\, R^2 \sqrt{3} = 2r^2\sqrt{3}$

Octogono.. $S = 2l^2(\sqrt{2}+1) = 2R^2\sqrt{2} = 8r^2(\sqrt{2}-1)$

Decagono.. $S = {}^5/_2\, l^2\sqrt{5+2\sqrt{5}} = {}^5/_4\, R^2\sqrt{10-2\sqrt{5}} = 2r^2\sqrt{25-10\sqrt{5}}$

Dodecagono $S = 3l^2(2+\sqrt{3}) = 3R^2 = 12r^2(2-\sqrt{3})$

POLYGONO CONVEXO QUALQUER

(n = *numero de lados;* N = *numero de diagonaes;* a = *apothema;* p = *semi-perimetro*)

Somma dos angulos internos .... $S_i = 180°(n-2)$

" " " externos .... $S_e = 360°$

Numero de diagonaes de um vertice...... $N' = n - 3$

" total de diagonaes.............. $N = \frac{n(n-3)}{2}$

" de lados em funcção do numero de diagonaes .... $n = {}^1/_2\,(3+\sqrt{9+8N})$

Area de um polygono regular qualquer... $S = pa$

CIRCUMFERÉNCIA, CIRCULO ETC.

(r, r' *são raios;* d = *diametro;* a, a' *são comprimentos dos arcos;* n = *numero de graus;* C, C' *são circumferencias;* C = *corda de um arco de 2*n *graus;* l = *largura da coroa;* h = *altura do trapezio circular*)

Comprimento da circumferencia.. $C = 2\pi r = \pi d$

" de um arco de *n* graus .... $a = \frac{\pi r n}{180}$

Area do circulo .... $S = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}$

" " sector .... $S = \frac{ar}{2} = \frac{\pi r^2 n}{360}$

" " segmento .... $S = \frac{r}{2}\left(\frac{\pi r n}{180} - {}^1/_2\, C_{2n}\right)$

Area do trapezio circular ...... $S = \frac{\pi n}{360}(r^2 - r'^2) = \frac{a+a'}{2} \cdot h$

" da coroa .... $S = \pi(r^2 - r'^2) = \frac{c+c'}{2} \cdot l$

Flecha de uma corda 2*c*......... $f = r + \sqrt{r^2 - c^2}$

———

PRINCIPAES FORMULAS DE GEOMETRIA NO ESPAÇO

PRISMA

PARALLELEPIPEDO RECTANGULO

(a, b, c *são as dimensões; d = diagonal;* h = *altura;* B = *area da base*)

Diagonal .... $d = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$
Area total .... $S_t = 2(ab+bc+ac)$
Volume .... $V = abc = Bh$

PARALLELEPIPEDO QUALQUER

Volume .... $V = Bh$

PRISMA REGULAR

(P = *perimetro da base;* a = *aresta lateral;* B = *area da base;* l = *lado da base;* n = *numero de faces lateraes;* r = *apothema da base*)

Area lateral .... $S_l = Pa$
Area total .... $S_t = ln(a+r)$

Volume .... $V = Ba = \frac{n}{2}\,lra$

PRISMA RECTO

(P = *perimetro da base;* B = *area da base;* a = *aresta lateral*)

Area lateral .... $S_l = Pa$
„ total .... $S_t = Pa+2B$
Volume .... $V = Ba$

PRISMA OBLIQUO

(P' = *perimetro da secção recta;* h = *altura*)

Area lateral .... $S_l = P'a$
Volume .... $V = Bh$

TRONCO DE PRISMA TRIANGULAR

(a, a', a" *são arestas lateraes;* S_r = *area da secção recta*)

Volume .... $V = S_r \cdot \frac{a+a'+a''}{3}$

PRISMOIDE

(B, B' *são areas das bases;* B" = *area da secção equidistante das bases;* h = *altura*)

Volume .... $V = \frac{h}{6}(B+B'+4B'')$

PYRAMIDE

(P = *perimetro da base;* a = *apothema da pyramide;* a' = *apothema da base;* B = *area da base;* h = *altura*)

PYRAMIDE REGULAR

Area lateral .... $S_l = \frac{1}{2}Pa$
„ total .... $S_t = \frac{1}{2}P(a+a')$
Volume .... $V = \frac{1}{3}Bh$

TRONCO DE PYRAMIDE

(P, P' *são perimetros das bases;* B, B' *são as areas das bases;* a = *apothema do tronco;* h = *altura;* l, l' *são lados homologos das bases*)

Area lateral de um tronco de pyramide regular .... $S_l = \frac{1}{2}a(P+P')$
Area total de um tronco de pyramide regular .... $S_t = \frac{1}{2}a(P+P')+B+B'$

Volume............. $V = \frac{h}{3}(B+B'+\sqrt{BB'}) = \frac{Bh}{3}(1+\frac{l'}{l}+\frac{l'^2}{l^2})$

Volume de um tronco de pyramide de segunda especie .. $V = \frac{h}{3}(B+B-\sqrt{BB'}) = \frac{Bh}{3}(1-\frac{l'}{l}+\frac{l'^2}{l^2})$

CORPOS REDONDOS

Cylindro de revolução

(r = *raio da base;* h = *altura*)

Area lateral .... $S_l = 2\pi rh$
„ total .... $S_t = 2\pi r(h+r)$
Volume .... $V = \pi r^2 h$

Cylindro equilatero

Area lateral .... $S_l = 4\pi r^2$
„ total .... $S_t = 6\pi r^2$
Volume .... $V = 2\pi r^3$

Tronco de cylindro

(e = *eixo*)

Area lateral .... $S_l = 2\pi re$
Volume .... $V = \pi r^2 e$

Cone de revolução

(r = *raio de base;* g = *geratriz;* h = *altura*)

Area lateral .... $S_l = \pi rg$
„ total .... $S_t = \pi r(g+r)$
Volume .... $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Cone equilatero

Area lateral .... $S_l = 2\pi r^2$
„ total .... $S_t = 3\pi r^2$
Volume .... $V = \frac{1}{3}\pi r^3 \sqrt{3}$

Tronco de cone

(r, r' *são os raios das bases:* r'' = *raio da secção média;* g = *geratriz;* h = *altura*)

Area lateral......................... $S_l = \pi(r+r')g = 2\pi r''g$
" total......................... $S_t = \pi(r+r')g+\pi(r^2+r'^2)$
Volume............................ $V = \frac{\pi h}{3}(r^2+r'^2+rr')$
Volume de um tronco de cone de segunda especie.................. $V = \frac{\pi h}{3}(r^2+r'^2-rr')$

Esphera

(r = *raio;* d = *diametro;* h = *altura;* c = *corda do arco gerador;* n = *numero de graus;* a = *comprimento do arco do fuso*)

Area da zona......................... $S = 2\pi rh$
" " calote......................... $S = 2\pi rh = \pi c^2$
" " esphera......................... $S = 4\pi r^2 = \pi d^2$
" do fuso......................... $S = \frac{\pi r^2 n}{90} = 2ra$
Volume do sector espherico............ $V = \frac{2}{3}\pi^2 h = \frac{1}{6}\pi d^2 h$
" da esphera...................... $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{6}\pi d^3$
" " cunha...................... $V = \frac{\pi r^3 h}{270}$
" do segmento de uma base....... $V = \frac{1}{6}\pi h^3+\frac{1}{2}\pi r^2 h$
" " " " duas bases.. $V = \frac{1}{6}\pi h^3+\frac{1}{2}\pi h(r^2+r'^2)$
" " annel.................. $V = \frac{1}{6}\pi c^2 h$

Cylindro equilatero inscripto e circumscripto á esphera

Area lateral do cylindro eq. inscripto............ $S_l = 2\pi r^2$
" total " " " " .... $S_t = 3\pi r^2$
Volume " " " " .... $V_l = \frac{1}{2}\pi^3\sqrt{2}$
Area lateral " " " circumscripto........ $S_l = 4\pi r^2$
" total " " " " .... $S_t = 6\pi r^2$
Volume " " " " .... $V = 2\pi r^3$

Area .... $S = 3a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}} = 2R^2\sqrt{50-10\sqrt{5}} =$
$= 30r^2\sqrt{130-58\sqrt{5}}$

Volume .... $V = \frac{1}{4}a^3(15+7\sqrt{5}) = \frac{2}{9}R^3(5\sqrt{3}+\sqrt{15}) =$
$= 10r^3\sqrt{130-58\sqrt{5}}$

ICOSAEDRO

(a = *aresta*; R = *raio da esphera circumscripta*; r = *raio da esphera inscripta*).

Raio da esphera circumscripta .... $R = \frac{1}{4}a\sqrt{10+2\sqrt{5}} = r\sqrt{3(5-2\sqrt{5})}$

Raio da esphera incripta .... $r = \frac{1}{12}(3\sqrt{3}+\sqrt{15}) = \frac{1}{15}R\sqrt{75+30\sqrt{5}}$

Aresta .... $a = \frac{1}{4}R\sqrt{20-4\sqrt{5}} = r(3\sqrt{3}-\sqrt{15})$

Area .... $S = 5a^2\sqrt{3} = 2R^2(5\sqrt{3}-\sqrt{15}) =$
$= 30r^2(7\sqrt{3}-3\sqrt{15})$.

Volume .... $V = \frac{5}{12}a^3(3+\sqrt{5}) = \frac{2}{3}R^3\sqrt{10+2\sqrt{5}} =$
$= 10r^3(7\sqrt{3}-3\sqrt{15})$.

NUMEROS USUAES

$\sqrt{2} = 1{,}4142$	$\sqrt[3]{2} = 1{,}2599$
$\sqrt{3} = 1{,}7320$	$\sqrt[3]{3} = 1{,}4422$
$\sqrt{5} = 2{,}2360$	$\sqrt[3]{5} = 1{,}7099$
$\sqrt{2-\sqrt{2}} = 0{,}7653$	$\sqrt{2+\sqrt{2}} = 1{,}8478$
$\sqrt{2-\sqrt{3}} = 0{,}5176$	$\sqrt{2+\sqrt{3}} = 1{,}9318$
$\sqrt{5-\sqrt{5}} = 1{,}6625$	$\sqrt{5+\sqrt{5}} = 2{,}6899$
$\sqrt{5-2\sqrt{5}} = 0{,}7265$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}} = 3{,}0776$
$\sqrt{10-2\sqrt{5}} = 2{,}3511$	$\sqrt{10+2\sqrt{5}} = 3{,}8042$
$\sqrt{15-6\sqrt{5}} = 1{,}2583$	$\sqrt{15+6\sqrt{5}} = 5{,}3307$
$\sqrt{25-10\sqrt{5}} = 1{,}6245$	$\sqrt{25+10\sqrt{5}} = 6{,}8819$
$\sqrt{30-6\sqrt{5}} = 4{,}0722$	$\sqrt{30+6\sqrt{5}} = 6{,}5891$
$\sqrt{50-10\sqrt{5}} = 5{,}2573$	$\sqrt{50+10\sqrt{5}} = 8{,}5065$
	$\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) = 0{,}6180$
$\pi = 3{,}1415926$	$\frac{1}{\pi} = 0{,}3183$
$\pi^2 = 9{,}8696$	$\frac{1}{\pi^2} = 0{,}1013$
$\pi^3 = 31{,}0062$	$\frac{4\pi}{3} = 4{,}1887$
$\sqrt{\pi} = 1{,}7724$	$\frac{\pi}{360} = 0{,}0087$
$\sqrt[3]{\pi} = 1{,}4645$	$\frac{180}{\pi} = 57{,}2957$
$\sqrt{\frac{1}{\pi}} = 0{,}5642$	$\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} = 0{,}6203$
$\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}} = 0{,}6828$	

Area.............. $S = 3a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}} = 2R^2\sqrt{50-10\sqrt{5}} =$

$= 30r^2\sqrt{130-58\sqrt{5}}$.

Volume............ $V = \frac{1}{4}a^3(15+7\sqrt{5}) = \frac{2}{9}R^3(5\sqrt{3}+\sqrt{15}) =$

$= 10r^3\sqrt{130-58\sqrt{5}}$.

ICOSAEDRO

(a = *aresta;* R = *raio da esphera circumscripta;* r = *raio da esphera inscripta*).

Raio da esphera circumscripta....... $R = \frac{1}{4}a\sqrt{10+2\sqrt{5}} = r\sqrt{3(5-2\sqrt{5})}$

Raio da esphera incripta............ $r = \frac{1}{12}(3\sqrt{3}+\sqrt{15}) = \frac{1}{15}R\sqrt{75+30\sqrt{5}}$

Aresta............ $a = \frac{1}{4}R\sqrt{20-4\sqrt{5}} = r(3\sqrt{3}-\sqrt{15})$

Area.............. $S = 5a^2\sqrt{3} = 2R^2(5\sqrt{3}-\sqrt{15}) =$

$= 30r^2(7\sqrt{3}-3\sqrt{15})$.

Volume............ $V = \frac{5}{12}a^3(3+\sqrt{5}) = \frac{2}{3}R^3\sqrt{10+2\sqrt{5}} =$

$= 10r^3(7\sqrt{3}-3\sqrt{15})$.

NUMEROS USUAES

$\sqrt{2} = 1,4142$

$\sqrt{3} = 1,7320$

$\sqrt{5} = 2,2360$

$\sqrt{2-\sqrt{2}} = 0,7653$

$\sqrt{2-\sqrt{3}} = 0,5176$

$\sqrt{5-\sqrt{5}} = 1,6625$

$\sqrt{5-2\sqrt{5}} = 0,7265$

$\sqrt{10-2\sqrt{5}} = 2,3511$

$\sqrt{15-6\sqrt{5}} = 1,2583$

$\sqrt{25-10\sqrt{5}} = 1,6245$

$\sqrt{30-6\sqrt{5}} = 4,0722$

$\sqrt{50-10\sqrt{5}} = 5,2573$

$\pi = 3,1415926$

$\pi^2 = 9,8696$

$\pi^3 = 31,0062$

$\sqrt{\pi} = 1,7724$

$\sqrt[3]{\pi} = 1,4645$

$\sqrt{\frac{1}{\pi}} = 0,5642$

$\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}} = 0,6828$

$\sqrt[3]{2} = 1,2599$

$\sqrt[3]{3} = 1,4422$

$\sqrt[3]{5} = 1,7099$

$\sqrt{2+\sqrt{2}} = 1,8478$

$\sqrt{2+\sqrt{3}} = 1,9318$

$\sqrt{5+\sqrt{5}} = 2,6899$

$\sqrt{5+2\sqrt{5}} = 3,0776$

$\sqrt{10+2\sqrt{5}} = 3,8042$

$\sqrt{15+6\sqrt{5}} = 5,3307$

$\sqrt{25+10\sqrt{5}} = 6,8819$

$\sqrt{30+6\sqrt{5}} = 6,5891$

$\sqrt{50+10\sqrt{5}} = 8,5065$

$\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) = 0,6180$

$\frac{1}{\pi} = 0,3183$

$\frac{1}{\pi^2} = 0,1013$

$\frac{4\pi}{3} = 4,1887$

$\frac{\pi}{360} = 0,0087$

$\frac{180}{\pi} = 57,2957$

$\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} = 0,6203$

A.S.

Afranio Jornal