

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**  
**RENATO FRANÇA PIRES REGGIANI**

**VERIFICAÇÃO DE LAJES DE CONCRETO ARMADO NO ESTADO LIMITE DE  
SERVIÇO DE DEFORMAÇÃO EXCESSIVA**

**Florianópolis**

**2016**

**RENATO FRANÇA PIRES REGGIANI**

**VERIFICAÇÃO DE LAJES DE CONCRETO ARMADO NO ESTADO LIMITE DE  
SERVIÇO DE DEFORMAÇÃO EXCESSIVA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Santa Catarina, como parte dos requisitos para obtenção do título de Engenheiro Civil.

Orientador: Prof. Jano D'Araujo Coelho, Dr.

**Florianópolis**

**2016**

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Reggiani, Renato França Pires

Verificação de lajes de concreto armado no estado limite  
de serviço de deformação excessiva / Renato França Pires  
Reggiani ; orientador, Jano D'Araujo Coelho -  
Florianópolis, SC, 2016.

151 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) -  
Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico.  
Graduação em Engenharia Civil.

Inclui referências

1. Engenharia Civil. 2. Lajes de concreto armado. 3.  
Estado limite de serviço. 4. Deformação excessiva. I.  
Coelho, Jano D'Araujo. II. Universidade Federal de Santa  
Catarina. Graduação em Engenharia Civil. III. Título.

**RENATO FRANÇA PIRES REGGIANI**

**VERIFICAÇÃO DE LAJES DE CONCRETO ARMADO NO ESTADO DE LIMITE  
DE SERVIÇO DE DEFORMAÇÃO EXCESSIVA**

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do Título de Engenheiro Civil e aprovado em sua forma final pela comissão examinadora e pelo Curso de Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Santa Catarina.

Florianópolis, 30 de junho de 2016.

Banca Examinadora:



---

Prof. Jano D'Araujo Coelho, Dr. – Orientador  
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Daniel Domingues Loriggio, Dr.  
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Narbal Ataliba Marcellino, Dr.  
Universidade Federal de Santa Catarina



## **AGRADECIMENTOS**

Aos meus pais, Hélio Reggiani e Marizete Alves Pires, pelo amor incondicional, por toda a dedicação e por todo o apoio e incentivo.

A minha namorada, Roberta Pieri Machado, pelo carinho, companheirismo, pela compreensão e por todo o auxílio nos momentos difíceis.

Ao meu orientador, Jano D'Araujo Coelho, pela prestatividade, pela orientação e pelos conhecimentos transmitidos.

A banca examinadora, pela vontade em contribuir com o trabalho.

A todos os meus amigos, que me foram muito importantes na minha formação acadêmica e pessoal.



## RESUMO

Este trabalho tem como objetivo a análise dos deslocamentos em lajes de concreto armado e a verificação do estado limite de deformação excessiva estabelecido na norma NBR 6118:2014. Para tal, serão utilizadas as tabelas de Bares, o método de Marcus, o método dos elementos finitos e o método da analogia de grelhas. Foi realizado o estudo de caso de diversos exemplos de lajes, incluindo lajes simplesmente apoiadas em apoios indeformáveis, lajes apoiadas em vigas de menor rigidez e um painel de lajes planas. Através dos métodos citados, foram obtidas as flechas elásticas e imediatas. Para a obtenção da flecha diferida no tempo será utilizado o procedimento descrito na norma de projeto brasileira. Os resultados obtidos foram comparados e observou-se significativa diferença entre alguns dos métodos utilizados e a influência dos vãos das lajes, assim como a rigidez dos apoios.

*Palavras chave: lajes, deslocamentos, elementos finitos, analogia de grelha,*





## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Representação de uma placa. ....	22
Figura 2– Vãos efetivos de lajes conforme a NBR 6118:2014. ....	23
Figura 3 – Vãos efetivos $l_x$ e $l_y$ (menor e maior vão). ....	24
Figura 4 – Representação em perspectiva de um pavimento com laje maciça apoiada em vigas.....	25
Figura 5 – Laje maciça sem vigas com capitel e ábaco na ligação com os pilares. ....	26
Figura 6 - Laje maciça sem vigas sem capitel ou ábaco na ligação com os pilares. ....	26
Figura 7 - Pavimento com laje maciça apoiada sobre paredes de concreto. ....	27
Figura 8 - Laje nervurada normal sem elementos de enchimento. ....	29
Figura 9 - Laje nervurada normal com elementos de enchimento. ....	29
Figura 10 - Laje nervurada normal com fôrma em materialcerâmico. ....	29
Figura 11 - Laje nervurada dupla, região de momento negativo.....	30
Figura 12 - Laje nervurada dupla, região de momento positivo.....	30
Figura 13 - Laje nervurada invertida com nervuras aparentes. ....	31
Figura 14 - Laje nervurada invertida com piso pré-fabricado .....	31
Figura 15 - Exemplo de pavimento com laje nervurada armada em uma direção .....	32
Figura 16 - Vigota do tipo trilho, concreto armado.....	33
Figura 17 - Vigota do tipo trilho protendido. ....	34
Figura 18 - Vigota com armadura treliçada. ....	34
Figura 19 - Fases de comportamento das lajes sub-armadas.....	36
Figura 20 - Momentos fletores e de torção em um elemento de placa.....	39
Figura 21 - Tipos de lajes de acordo com a vinculação nas bordas.....	42
Figura 22 - Discretização de uma laje em elementos finitos através do programa SAP2000..	44
Figura 23 - Soluções por limite superior e limite inferior. ....	46
Figura 24 - Exemplo de sistema de faixas em uma laje. ....	49
Figura 25 - Laje simplesmente apoiada nos quatro lados.....	52
Figura 26 - Padrão de linhas de ruptura de uma laje retangular simplesmente apoiada submetida a uma carga uniformemente distribuída. ....	56
Figura 27 - Exemplo de configuração de ruína .....	58
Figura 28 - Exemplo de laje quadrada com carregamento uniformemente distribuída.....	59
Figura 29 - Discretização de uma laje pelo método da analogia de grelha. ....	62
Figura 30 - Matriz de rigidez de um elemento de grelha plana. ....	63

Figura 31- Laje discretizada em 4 elem 1.....	87
Figura 32- Distribuição de momentos no eixo x (kN.m/m) para laje discretizada em 4 elementos de 3 x 3 m. ....	88
Figura 33 - Forma deformada da laje discretizada em 4 elementos de 3 x 3 m. ....	89
Figura 34- Deslocamentos (cm) na laje discretizada em 4 elementos de 3 x 3 m.....	89
Figura 35 - Laje discretizada em 16 elementos de 1,5 x 1,5 m. ....	90
Figura 36 - Distribuição de momentos no eixo x (kN.m/m) para laje discretizada em 16 elementos de 1,5 x 1,5 m. ....	90
Figura 37 - Forma deformada da laje discretizada em 16 elementos de 3 x 3 m. ....	91
Figura 38 - Deslocamentos (cm) na laje discretizada em 16 elementos de 1,5 x 1,5 m.....	92
Figura 39 - Laje discretizada em 64 elementos de 75 x 75 cm. ....	92
Figura 40 - Distribuição de momentos no eixo x (kN.m/m) para laje discretizada em 64 elementos de 75 x 75 cm. ....	93
Figura 41 - Forma deformada da laje discretizada em 64 elementos de 75 x 75 cm. ....	94
Figura 42 - Deslocamentos (cm) na laje discretizada em 64 elementos de 75 x 75 cm.....	94
Figura 43 - Laje discretizada em 256 elementos de 37,5 x 37,5 cm. ....	95
Figura 44 - Distribuição de momentos no eixo x (kN.m/m) para laje discretizada em 256 elementos de 37,5 x 37,5 cm. ....	95
Figura 45 - Forma deformada da laje discretizada em 256 elementos de 37,5 x 37,5 cm. ....	96
Figura 46 - Deslocamentos (cm) na laje discretizada em 256 elementos de 37,5 x 37,5 cm. ..	97
Figura 47 - Flecha elástica para laje 6 x 6 m. ....	99
Figura 48 - Laje discretizada em 384 elementos de 37,5 x 37,5 cm. ....	105
Figura 49 - Distribuição de momentos no eixo x (kN.m/m) para laje discretizada em 384 elementos de 37,5 x 37,5 cm. ....	106
Figura 50 - Forma deformada da laje discretizada em 384 elementos de 37,5 x 37,5 cm. ....	107
Figura 51 - Deslocamentos (cm) na laje discretizada em 384 elementos de 37,5 x 37,5 cm. ....	107
Figura 52 - Flecha elástica para laje 6 x 9 m.....	109
Figura 53 - Laje discretizada em 512 elementos de 37,5 x 37,5 cm. ....	115
Figura 54 - Distribuição de momentos no eixo x (kN.m/m) para laje discretizada em 512 elementos de 37,5 x 37,5 cm. ....	116
Figura 55 - Forma deformada da laje discretizada em 512 elementos de 37,5 x 37,5 cm. ....	117
Figura 56 - Deslocamentos (cm) na laje discretizada em 512 elementos de 37,5 x 37,5 cm. ....	117
Figura 57 - Flecha elástica para laje 6 x 12 m.....	119
Figura 58 - Forma deformada da laje 6 x 6 m apoiada em vigas deformáveis de 20 x 30cm.....	121

Figura 59 - Deslocamentos (cm) na laje de 6 x 6 m apoiada em vigas deformáveis de 20 x 30 cm. ....	122
Figura 60 - Deslocamentos (cm) na laje de 6 x 6m apoiada em vigas deformáveis de 20 x 40 cm. ....	124
Figura 61 - Deslocamentos (cm) na laje de 6 x 6m apoiada em vigas deformáveis de 20 x 80 cm. ....	126
Figura 62 - Forma deformada da laje 6 x 9 m apoiada em vigas deformáveis de 20 x 30cm.	129
Figura 63 - Deslocamentos (cm) na laje de 6 x 9m apoiada em vigas deformáveis de 20 x 30 cm. ....	130
Figura 64 - Deslocamentos (cm) na laje de 6 x 9m apoiada em vigas deformáveis de 20 x 40 cm. ....	132
Figura 65 - Deslocamentos (cm) na laje de 6 x 9m apoiada em vigas deformáveis de 20 x 80 cm. ....	134
Figura 66 - Modelo de painel de lajes planas. ....	136
Figura 67 - Lajes que compõem o painel .....	136
Figura 68 - Forma deformada do painel de lajes planas (elementos finitos).....	138
Figura 69 - Deslocamentos (cm) no painel de lajes planas. ....	138
Figura 70 - Forma deformada do painel de lajes planas (analogia de grelha).....	139

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1- Valores dos fatores de combinação ( $\psi_0$ ) e de redução ( $\psi_1$ e $\psi_2$ ) para as ações variáveis.....	65
Tabela 2 - Limites para deslocamento.....	66
Tabela 3 - Valores do coeficiente $\xi$ em função do tempo. ....	73
Tabela 4 - Momentos máximos e deslocamentos de uma laje discretizada em diferentes números de elementos finitos. ....	97
Tabela 5 - Deslocamentos (cm) obtidos por analogia de grelha para laje 6 x 6 m.....	98
Tabela 6 - Momentos máximos $M_x$ na laje 6 x 6 m. ....	99
Tabela 7 - Deslocamentos (cm) obtidos na laje 6 x 6 m.....	100
Tabela 8 - Deslocamentos (cm) obtidos por analogia de grelha para laje 6 x 9 m.....	108
Tabela 9 - Momentos máximos $M_x$ na laje 6 x 9 m. ....	109
Tabela 10 - Deslocamentos (cm) obtidos na laje 6 x 9 m.....	110
Tabela 11 - Deslocamentos (cm) obtidos por analogia de grelha para laje 6 x 12 m.....	118
Tabela 12 - Momentos máximos $M_x$ na laje 6 x 12 m. ....	119
Tabela 13 - Deslocamentos (cm) obtidos na laje 6 x 12 m.....	119
Tabela 14 - Deslocamentos (cm) na laje de 6 x 6 m apoiada em vigas deformáveis de 20 x 30 cm. ....	123
Tabela 15 - Deslocamentos (cm) na laje de 6 x 6 m apoiada em vigas deformáveis de 20 x 40 cm. ....	125
Tabela 16 - Deslocamentos (cm) na laje de 6 x 6 m apoiada em vigas deformáveis de 20 x 80 cm. ....	127
Tabela 17 - Deslocamentos (cm) obtidos na laje 6 x 6 m.....	127
Tabela 18 - Deslocamentos (cm) na laje de 6 x 9 m apoiada em vigas deformáveis de 20 x 30 cm. ....	131
Tabela 19 - Deslocamentos (cm) na laje de 6 x 9 m apoiada em vigas deformáveis de 20 x 40 cm. ....	133
Tabela 20 - Deslocamentos (cm) na laje de 6 x 9 m apoiada em vigas deformáveis de 20 x 80 cm. ....	135
Tabela 21 - Deslocamentos (cm) obtidos na laje 6 x 9 m.....	135
Tabela 22 - Deslocamentos (cm) obtidos no painel de lajes planas. ....	140
Tabela 23 - Coeficiente $\alpha$ para cálculo de flechas elásticas em lajes retangulares submetidas a carregamentos uniformemente distribuídos. ....	148

Tabela 24 - Coeficientes para o cálculo dos momentos máximos em lajes retangulares uniformemente carregadas (Casos 1, 2 e 3).....	149
Tabela 25 - Tabelas de Marcus – Caso 1.....	150



## SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO .....	20
2. OBJETIVOS.....	21
2.1 Objetivo geral .....	21
2.2 Objetivos específicos .....	21
3. LAJES .....	22
3.1 Lajes unidirecionais e lajes bidirecionais .....	23
3.2 Lajes maciças .....	24
3.3 Lajes nervuradas .....	27
3.3.1 Lajes nervuradas moldadas no local da obra .....	28
3.3.2 Lajes nervuradas pré-moldadas .....	32
4. ANÁLISE ESTRUTURAL DE LAJES .....	36
4.1 Fases de comportamento de uma laje de concreto armado.....	36
4.2 Teoria das placas em regime elástico .....	37
4.2.1 Tabelas.....	40
4.2.2 Tabelas de Bares .....	41
4.3 Método dos elementos finitos .....	43
4.4 Dimensionamento de lajes .....	45
4.4.1 Análises limites .....	45
4.4.2 Método das faixas.....	48
4.4.3 Teoria das charneiras plásticas .....	54
4.4.4 Analogia de grelha.....	61
5. ESTADOS LIMITE DE SERVIÇO .....	64
5.1 Estado limite de deformação excessiva .....	64
5.2 Fórmula de Branson.....	68
5.3 Flecha diferida no tempo .....	72
5.4 Variabilidade das flechas .....	73
6. METODOLOGIA .....	75
6.1 Estado limite último.....	75
6.2 Método dos elementos finitos .....	75
6.3 Analogia de grelha .....	76
7. EXEMPLOS.....	77
7.1 Laje simplesmente apoiada com $\lambda = 1,0$ .....	77
7.1.1 Estado limite último .....	78



7.1.2	Tabelas de Bares .....	82
7.1.3	Processo de Marcus .....	83
7.1.4	Método dos elementos finitos.....	87
7.1.5	Analogia de grelha.....	98
7.1.6	Comparação entre resultados.....	99
7.2	Laje simplesmente apoiada com $\lambda = 1,5$ .....	100
7.2.1	Estado limite último .....	101
7.2.2	Tabelas de Bares .....	102
7.2.3	Processo de Marcus .....	103
7.2.4	Método dos elementos finitos.....	104
7.2.5	Analogia de grelha.....	108
7.2.6	Comparação entre resultados.....	109
7.3	Laje simplesmente apoiada de com $\lambda = 2,0$ .....	110
7.3.1	Estado limite último .....	111
7.3.2	Tabelas de Bares .....	112
7.3.3	Processo de Marcus .....	113
7.3.4	Método dos elementos finitos.....	114
7.3.5	Analogia de grelha.....	118
7.3.6	Comparação entre resultados.....	119
7.4	Laje apoiada em vigas deformáveis com $\lambda = 1,0$ .....	120
7.4.1	Laje apoiada em vigas deformáveis de dimensão igual a 20 x 30 cm.....	120
7.4.2	Laje apoiada em vigas deformáveis de dimensão igual a 20 x 40 cm.....	123
7.4.3	Laje apoiada em vigas deformáveis de dimensão igual a 20 x 80 cm.....	125
7.4.4	Comparação entre resultados.....	127
7.5	Laje apoiada em vigas deformáveis com $\lambda = 1,5$ .....	128
7.5.1	Laje apoiada em vigas deformáveis de dimensão igual a 20 x 30 cm.....	128
7.5.2	Laje apoiada em vigas deformáveis de dimensão igual a 20 x 40 cm.....	131
7.5.3	Laje apoiada em vigas deformáveis de dimensão igual a 20 x 80 cm.....	133
7.5.4	Comparação entre resultados.....	135
7.6	Painel de lajes planas .....	136
7.6.1	Método dos elementos finitos.....	137
7.6.2	Analogia de grelha.....	139
7.6.3	Comparação entre resultados.....	140
8.	CONCLUSÕES.....	141

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFIAS .....	143
ANEXO I - TABELAS DE BARES .....	148
ANEXO II – TABELAS DE MARCUS .....	150



## 1. INTRODUÇÃO

O projeto de estruturas de concreto é um processo que compreende várias etapas, sendo necessário estimar as ações atuantes, a análise estrutural, a verificação ao estado limite último e a verificação em relação aos estados limites de serviço, que inclui a verificação de abertura de fissuras e dos deslocamentos na estrutura.

Ao longo dos anos foram desenvolvidos diversos métodos com objetivo de simplificar ou melhor projetar estruturas, no que se refere ao estado limite último. Os métodos de análise limite superior permitiram projetar estruturas de forma que os resultados obtidos sejam sempre à favor da segurança, tornando necessário verificar apenas o lado econômico da construção. Neste trabalho serão apresentados alguns métodos para projeto de lajes, mais especificamente sobre a teoria das placas em regime elástico, o método dos elementos finitos, o método das faixas, a teoria das charneiras plásticas analogia de grelha. Lembrando que para o dimensionamento de lajes estes métodos não preveem a segurança em relação aos estados limites de serviço, sendo necessárias as determinadas verificações.

O problema da deformação excessiva em lajes de concreto armado aumentou significativamente nos últimos tempos. Há algumas décadas atrás, a preocupação com tal problema era secundária. Com a tendência moderna de se construir com cada vez maiores vãos, possível pela obtenção de concretos com maior resistência, juntamente com o avanço das ferramentas computacionais, tais edificações estão sujeitas a maiores deformações, isso torna necessário o desenvolvimento de métodos mais precisos para a previsão das flechas.

A deformação excessiva pode causar uma série de problemas durante a vida útil de uma estrutura, incluindo danos em elementos não estruturais e desconforto ao usuário em caso de deformações visíveis. São vários fatores que influenciam nos deslocamentos na estrutura, incluindo as dimensões da laje, a fissuração da estrutura, a fluência do concreto, entre outros. Tal fenômeno pode comprometer as condições de serviço da estrutura, por isso torna-se essencial a previsão destes deslocamentos.

Neste trabalho será feito o estudo de caso de diversos exemplos de lajes, onde serão calculados os deslocamentos através de vários métodos e verificados se atendem os limites estabelecidos pela norma brasileira de projeto de estruturas de concreto armado.

## **2. OBJETIVOS**

### **2.1 Objetivo geral**

Determinar os deslocamentos máximos de lajes de concreto armado através de diferentes métodos e verificar se estão adequadas ao estado limite de serviço de deformação excessiva.

### **2.2 Objetivos específicos**

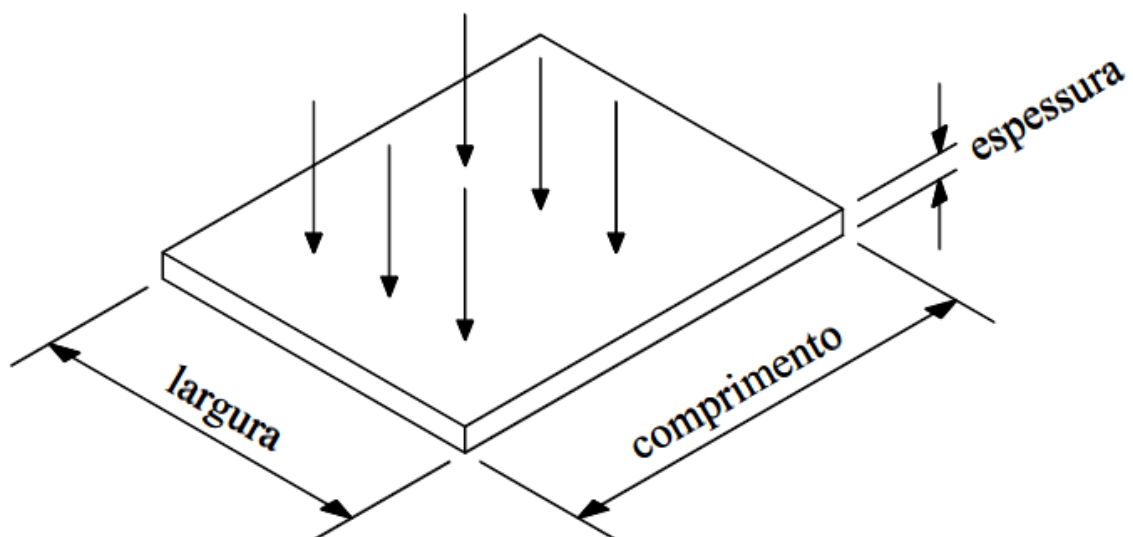
- Utilizar as tabelas de Bares para a obtenção de flechas elásticas em lajes;
- Utilizar o processo de Marcus para a obtenção de flechas em lajes;
- Determinar os deslocamentos em lajes pelo do método dos elementos finitos;
- Determinar os deslocamentos máximos em lajes pelo método de analogia de grelha;

### 3. LAJES

De acordo com o item 14.4.2.1 da NBR 6118:2014, placas são elementos de superfície plana que estão sujeitos principalmente a ações normais ao seu plano, sendo as placas de concreto usualmente chamadas de lajes. A dimensão normal ao plano médio é chamada de espessura, a qual é relativamente pequena em comparação ao comprimento e à largura. Possuindo continuidade nas duas direções de seu plano, uma carga aplicada na estrutura deve ser suportada por uma distribuição bidirecional de forças cortante, momentos fletores e momentos de torção. “A principal função das lajes é receber os carregamentos atuantes no andar, provenientes do uso da construção (pessoa, móveis e equipamentos), e transferi-los para os apoios” (PINHEIRO, 2010).

Sendo um elemento estrutural, o pavimento de uma construção pode ser projetado utilizando elementos pré-moldados ou moldados no local. O pavimento moldado no local pode ser composto por apenas uma laje, maciça ou nervurada, apoiada em vigas, ou por um conjunto de lajes, que serão apoiadas em vigas.

Figura 1 - Representação de uma placa.



Fonte: Silva (2005).

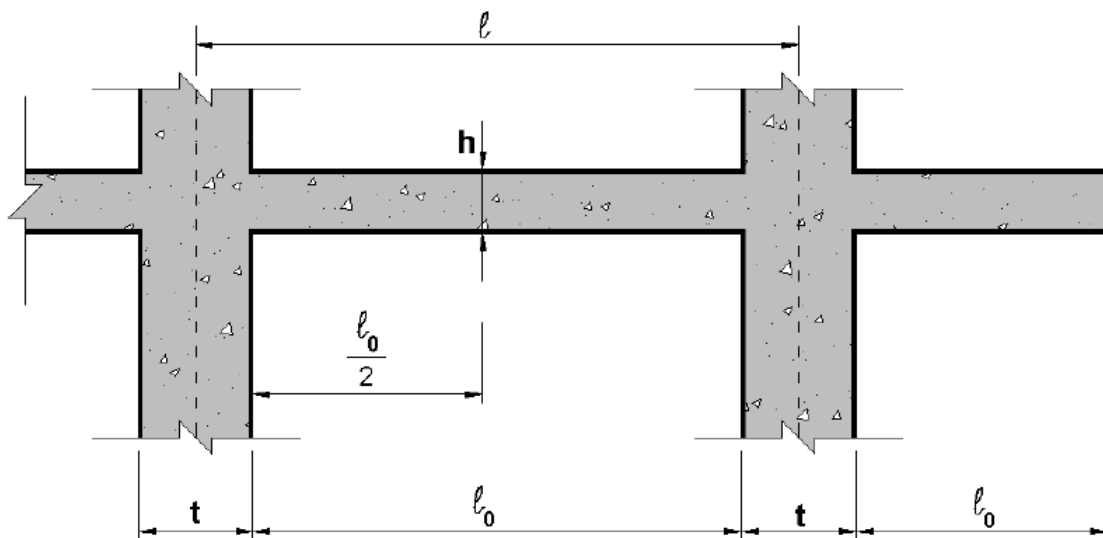
### 3.1 Lajes unidirecionais e lajes bidirecionais

A primeira etapa em um projeto de lajes consiste na determinação dos vãos livres ( $l_0$ ) e vãos efetivos ( $l_{ef}$ ), onde o vão livre é a distância livre entre as faces dos apoios (ou distância da extremidade livre até a face do apoio, no caso de balanços) e vão teórico é a distância entre os centros dos apoios (com limitações pela NBR 6118:2014). O vão efetivo é dado pela equação:

$$l_{ef} = (l_0) + a_1 + a_2 \quad (1)$$

Sendo  $a_1$  igual ao menor valor entre  $t_1/2$  e  $0,3h$  e  $a_2$  igual ao menor valor entre  $t_2/2$  e  $0,3h$  (NBR 6118:2014), de acordo com a figura 2.

Figura 2– Vãos efetivos de lajes conforme a NBR 6118:2014.



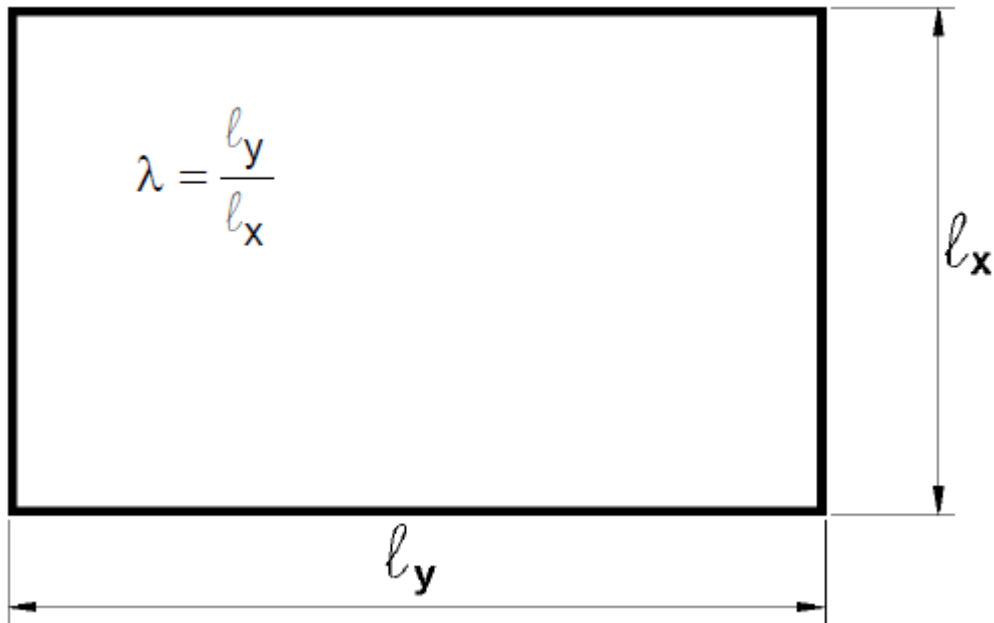
Fonte: Pinheiro (2010).

Depois de determinados os vãos livres e efetivos para os dois eixos considera-se  $l_x$  o menor vão e  $l_y$  o maior. Então calcula-se  $\lambda = l_y/l_x$ , onde para  $\lambda$  menor ou igual a 2, a laje é considerada armada em duas direções, podendo ser chamada de laje bidirecional e, para  $\lambda$  maior do que 2, a laje é armada em uma direção, podendo ser chamada de laje unidirecional.

As lajes unidirecionais dispõem de armadura longitudinal apenas no eixo de menor vão efetivo, a qual é calculada para resistir ao momento fletor nessa direção, havendo no outro eixo apenas armadura de distribuição, com seção transversal mínima dada pela

NBR 6118:2014. As lajes bidirecionais dispõem de armadura longitudinal nas duas direções, sendo a armadura calculada para resistir aos momentos fletores nas duas direções.

Figura 3 – Vãos efetivos  $l_x$  e  $l_y$  (menor e maior vão).



Fonte: Pinheiro, Muzardo e Santos (2010).

### 3.2 Lajes maciças

As lajes maciças são constituídas por uma placa de concreto armado onde a espessura é mantida constante ao longo de toda superfície.

Para que seja feita a construção de um pavimento com lajes maciças de concreto armado é necessária a utilização de fôrmas, consistem num tablado horizontal, normalmente feitas de compensados de madeira. Também há a necessidade de cimbramento, que pode ser de estrutura madeira ou metálica.

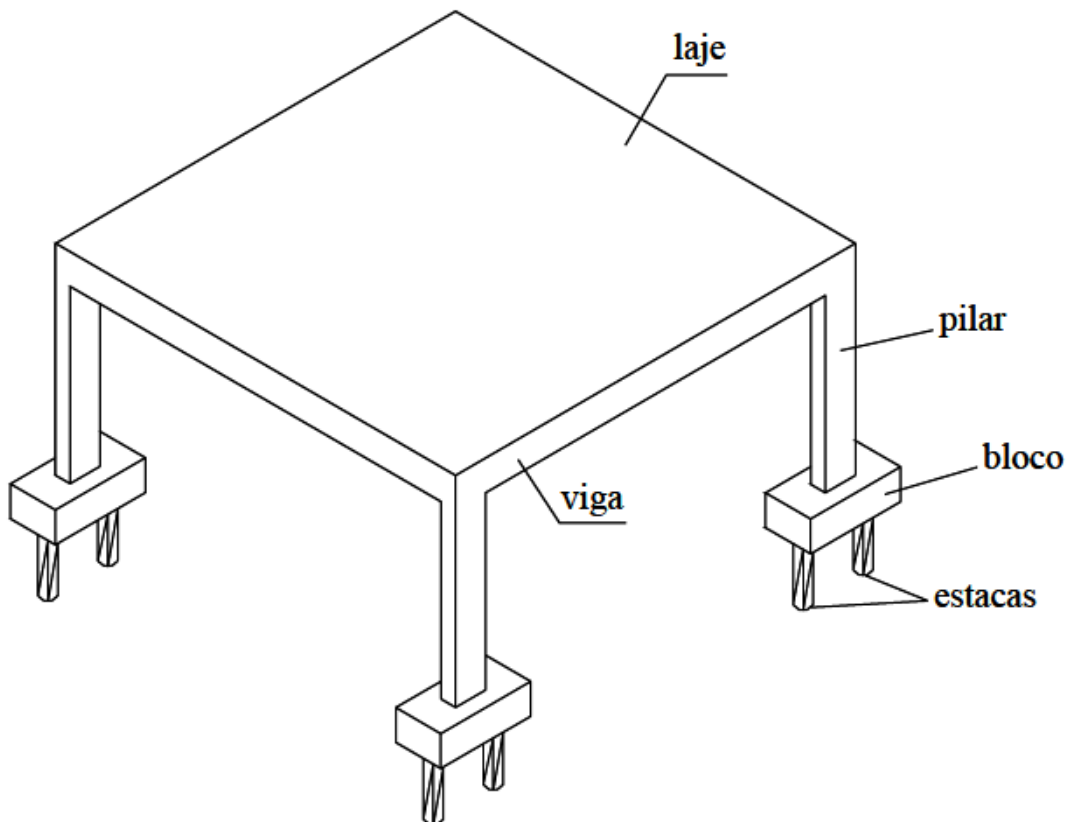
As lajes maciças distribuem suas reações em todas as vigas de contorno, o que não ocorre com as pré-moldadas. Isso gera um melhor aproveitamento das vigas do pavimento, pois todas podem ter cargas da mesma ordem de grandeza, dependendo apenas dos vãos (CARVALHO; FIGUEREDO FILHO, 2007).

Em outro caso as lajes maciças podem distribuir os carregamentos diretamente para os pilares, e então para as fundações. Nessa ligação podem existir capitéis, que são



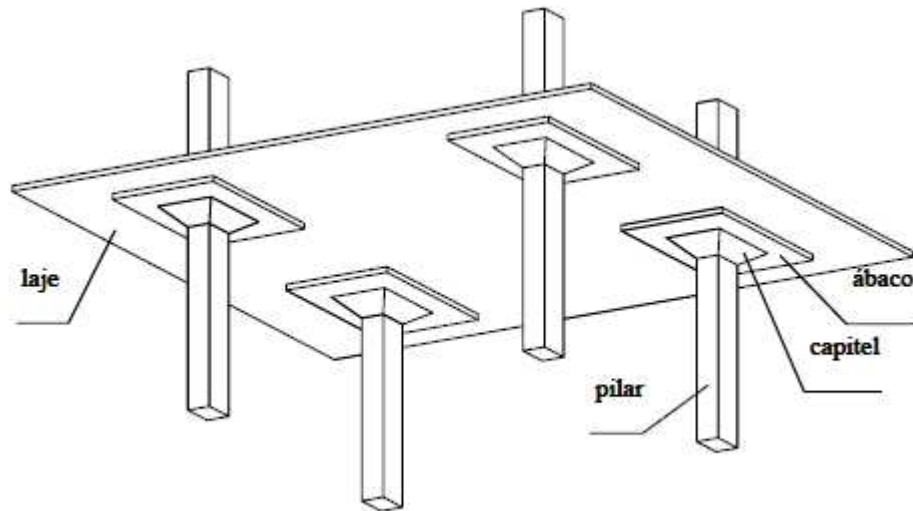
engrossamento dos pilares, ábacos, que são engrossamentos de laje, ou até ambos. Estes possuem a finalidade de diminuir as tensões de cisalhamento e evitar a possibilidade de puncionamento da laje, pois nessas regiões sempre há presença de forças cortantes elevadas. Uma alternativa que vem sendo utilizada, apresentando bons resultados, é a utilização de armadura específica para combater a punção nas lajes (SILVA, 2005).

**Figura 4 – Representação em perspectiva de um pavimento com laje maciça apoiada em vigas.**



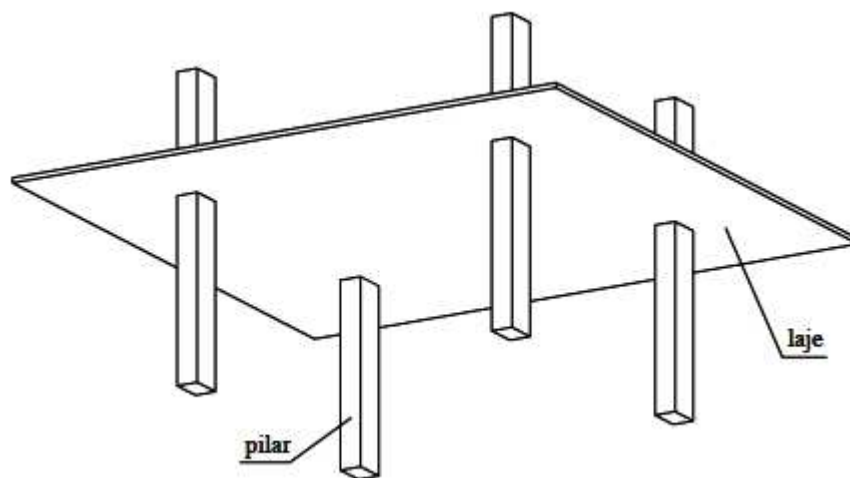
Fonte: Silva (2005).

**Figura 5 – Laje maciça sem vigas com capitel e ábaco na ligação com os pilares.**



Fonte: Silva (2005).

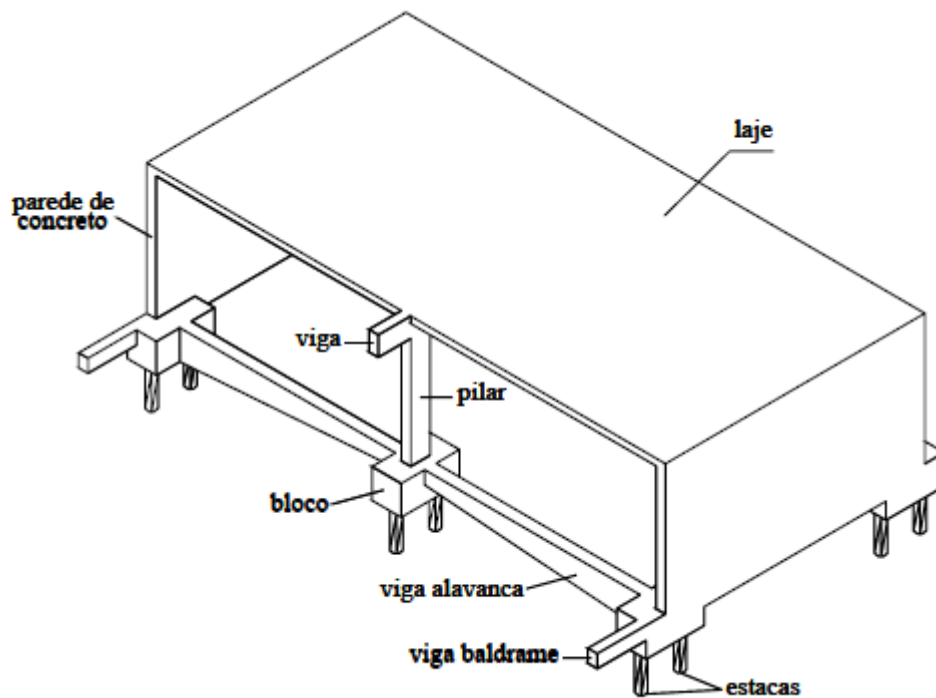
**Figura 6 - Laje maciça sem vigas sem capitel ou ábaco na ligação com os pilares.**



Fonte: Silva (2005).

Em um terceiro caso os carregamentos aplicados às lajes são transmitidos diretamente para paredes de concreto ou de alvenaria estrutural nas quais estão apoiadas. Neste caso as lajes distribuem os carregamentos atuantes em todas as paredes do contorno onde, dependendo somente dos vãos das lajes, podem estar submetidas à ações da mesma ordem de grandeza.

Figura 7 - Pavimento com laje maciça apoiada sobre paredes de concreto.



Fonte: Silva (2005).

### 3.3 Lajes nervuradas

Segundo o item 14.7.7 da NBR 6118:2014 as “lajes nervuradas são as lajes moldadas no local ou com nervuras pré-moldadas, cuja zona de tração para momentos positivos esteja localizada nas nervuras entre as quais pode ser colocado material inerte”.

As lajes nervuradas são constituídas por um conjunto de vigas, chamadas de nervuras, solidarizadas por uma mesa de concreto. O funcionamento da laje nervurada se dá de forma em que a mesa de concreto resista às tensões de compressão e as barras das armaduras resistam às tensões de tração. Porém, como ligação entre a mesa e a armadura é feita pela nervura de concreto, esta também pode absorver tensões de compressão. Portanto o conjunto formado pela nervura e a laje possui comportamento semelhante ao de uma viga de seção “T” (BOCCHI JUNIOR; GIONGO, 2007).

Podendo ser moldadas no local da obra ou pré moldadas, os tipos de lajes nervuradas possuem semelhança em relação ao funcionamento, embora difiram no aspecto construtivo .

Os espaços entre as nervuras podem permanecer vazios ou serem ocupados por elementos de enchimento leves, inertes, que não possuam função estrutural, podendo ser constituídos por blocos cerâmicos, de concreto circular, de poliestireno expandido (isopor), entre outros materiais. O uso desses elementos tem como finalidade evitar o uso de fôrmas entre as nervuras e a face inferior da mesa, onde estes ficam incorporados à laje. No caso em que se opta pelo uso de fôrmas, normalmente vinha-se utilizando fôrmas de madeira, porém devido principalmente aos altos custos, atualmente têm-se optado pelas fôrmas de polipropileno, também chamadas de “cubetas”, por serem reaproveitáveis (SILVA, 2005).

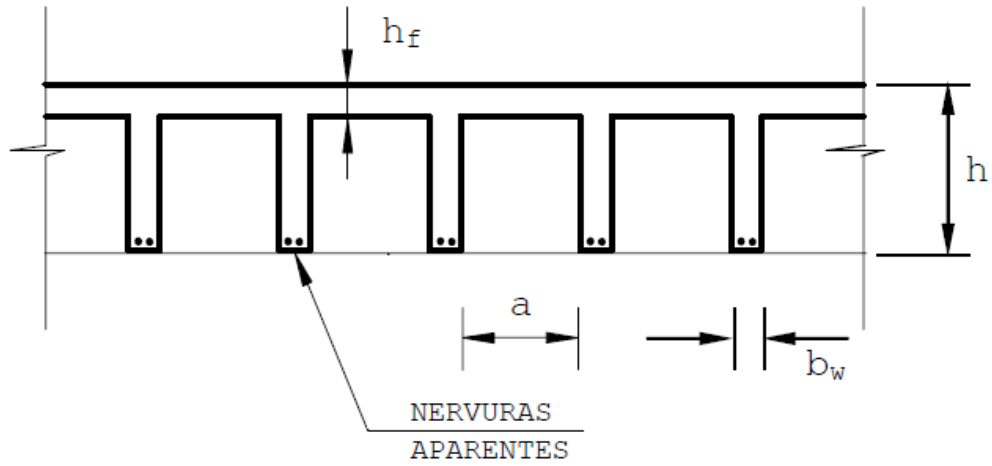
### 3.3.1 Lajes nervuradas moldadas no local da obra

Lajes nervuradas moldadas no local são executadas em toda sua totalidade, com a mesa (ou mesas, no caso de mesa dupla) e as nervuras que as constituem concretadas na posição efetiva em que serão utilizadas. Normalmente as nervuras são inferiores à mesa, podendo ser posicionadas em uma direção (laje nervurada unidirecional) ou duas direções (laje nervurada bidirecional).

A classificação da laje nervurada moldada no local é feita de acordo com a posição das nervuras na seção transversal e com a quantidade de mesas utilizada, podendo ser dividida em três tipos: normal (direta), invertida e dupla.

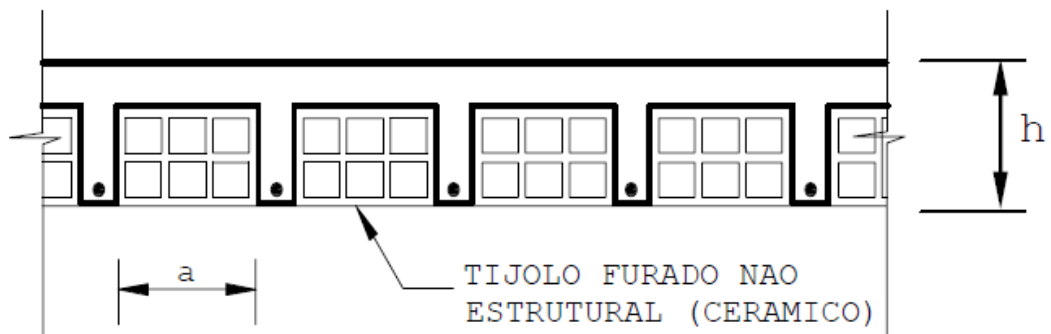
Na laje do tipo normal (direta) as nervuras são inferiores, havendo uma mesa superior de concreto. Neste tipo de laje os espaços entre as nervuras podem tanto permanecerem vazios, sendo necessária a utilização de fôrmas, quanto serem preenchidos por elementos de enchimento sem função estrutural, que permanecerão no local servindo de fôrma para mesa e para as faces laterais das nervuras. Em casos de pequenas alturas, podem ser utilizadas fôrmas cerâmicas com abas laterais de pequena espessura, sobre quais serão apoiadas a armadura longitudinal, como mostra a figura 10.

Figura 8 - Laje nervurada normal sem elementos de enchimento.



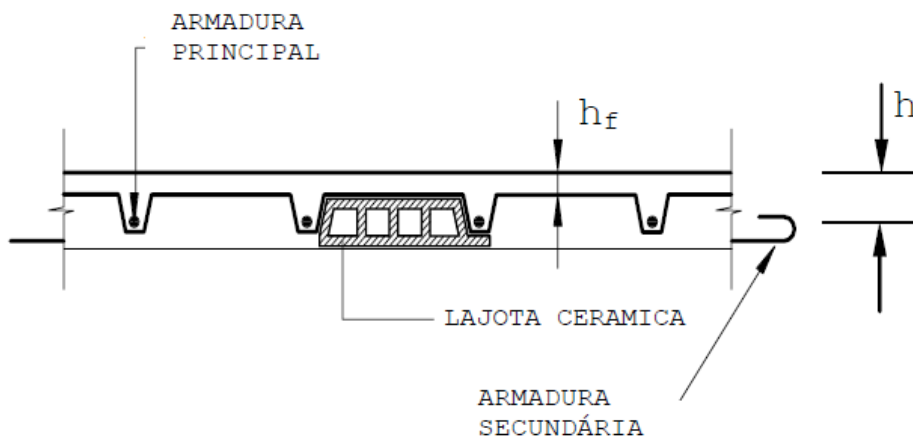
Fonte: Bocchi Junior e Giongo (2007).

Figura 9 - Laje nervurada normal com elementos de enchimento.



Fonte: Bocchi Junior e Giongo (2007).

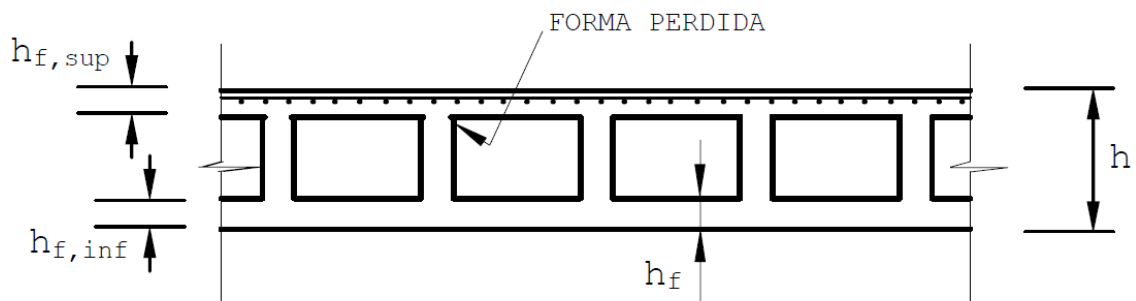
Figura 10 - Laje nervurada normal com fôrma em materialcerâmico.



Fonte: Bocchi Junior e Giongo (2007).

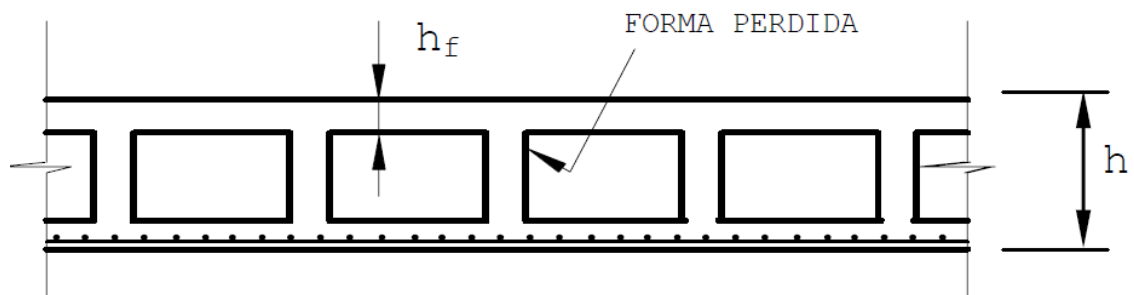
No tipo “dupla” as nervuras são executadas entre duas mesas de concreto, sendo uma inferior e outra superior. Caso se opte pela utilização de fôrmas e, conseqüentemente, por manter os espaços vazios, estas serão perdidas, pois ficarão dentro da laje. Em projetos de edifícios que há necessidade de adotar lajes nervuradas contínuas, para absorver a tensão de compressão oriunda de momento fletor negativo é viável considerar a utilização de mesa inferior (figura 11), assim como mesa superior para regiões de momento fletor positivo (figura 12).

**Figura 11 - Laje nervurada dupla, região de momento negativo.**



Fonte: Bocchi Junior e Giongo (2007).

**Figura 12 - Laje nervurada dupla, região de momento positivo.**

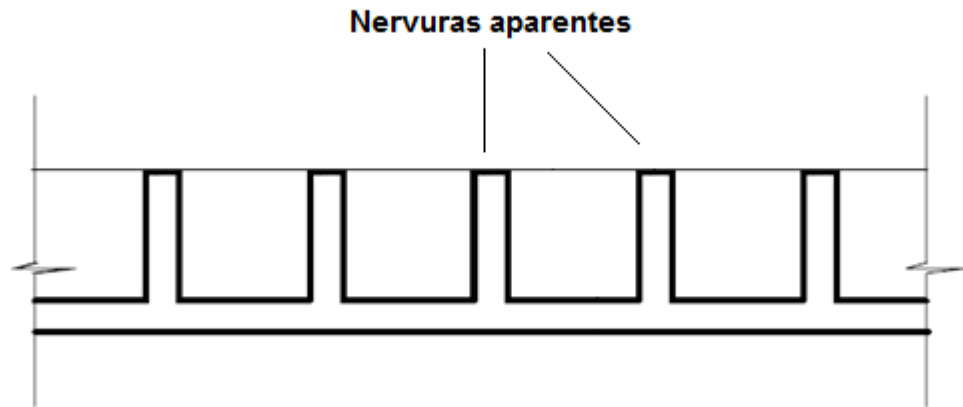


Fonte: Bocchi Junior e Giongo (2007).

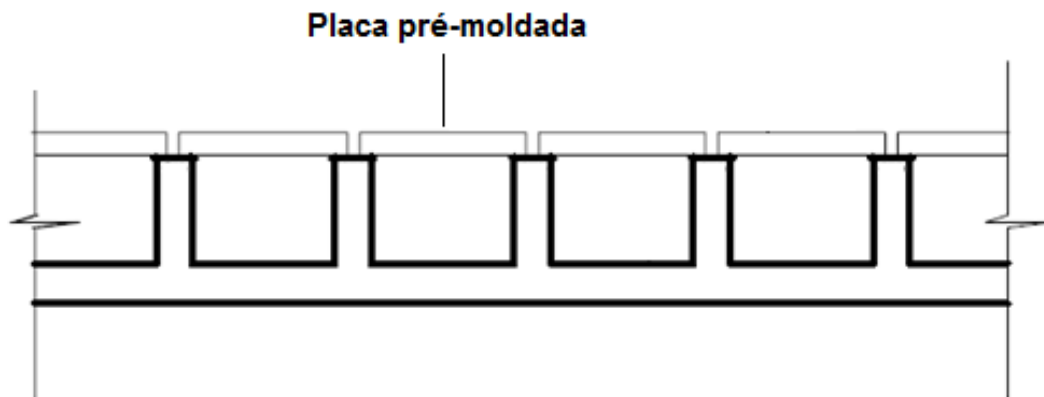
No tipo “invertida”, há a existência de somente mesa inferior de concreto, onde as nervuras são superiores. Neste tipo de laje é exigido o uso de fôrmas para moldar tanto a mesa como as nervuras, pois os espaços entre as nervuras permanecem vazios. As lajes nervuradas invertidas são utilizadas em casos que há ação de momento fletor negativo que provoca tração

na face superior, onde a mesa inferior se faz necessária para absorver as tensões de compressão.

**Figura 13 - Laje nervurada invertida com nervuras aparentes.**

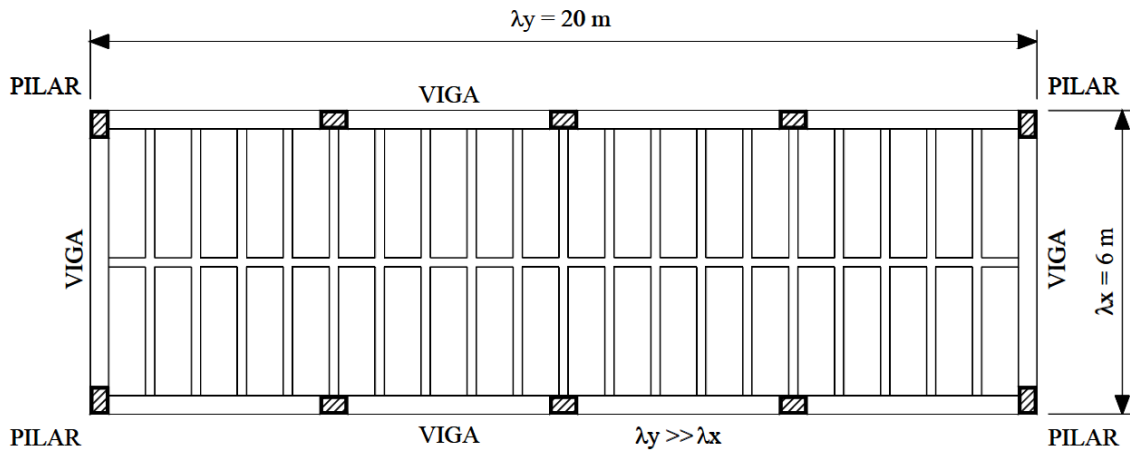


**Figura 14 - Laje nervurada invertida com piso pré-fabricado**



Nas lajes nervuradas armadas em uma direção (unidirecionais) as armaduras normalmente são dispostas na direção do menor vão teórico. Dependendo das dimensões desse vão e quando existirem cargas concentradas ou parcialmente distribuídas, como peso de paredes, por exemplo, são utilizadas nervuras transversais, com a função de distribuir tais cargas entre as nervuras principais. A figura 15 mostra um exemplo de laje nervurada armada em uma direção.

**Figura 15 - Exemplo de pavimento com laje nervurada armada em uma direção**



Fonte: Silva (2005).

Para o cálculo dos esforços solicitantes e dos deslocamentos, consideram-se as nervuras como um conjunto de vigas paralelas que trabalham praticamente independente, adotando-se uma seção transversal em forma de “T”; normalmente não é considerada a continuidade entre lajes vizinhas, logo as nervuras são analisadas como vigas simplesmente apoiadas nas extremidades.

### 3.3.2 Lajes nervuradas pré-moldadas

Segundo Bocchi Junior (1995), “entende-se por lajes nervuradas pré-moldadas aquelas em que parte da laje é executada fora do local definitivo”. As lajes formadas por vigotas pré-moldadas, apesar do grande volume de concreto moldado no local, são caracterizadas como lajes pré-moldadas (DROPPA JÚNIOR, 1999). As vigotas (parte da nervura) são espaçadas por elementos de preenchimento (normalmente cerâmica ou EPS) e cobertas por uma capa de concreto moldada no local, que possui a função de garantir a distribuição dos esforços atuantes, assim como aumentar a resistência à flexão e também nivelar o piso (FLÓRIO, 2004). Ainda, segundo Droppa Júnior (1999), “as vigotas pré-moldadas devem ser capazes de suportar seu peso próprio e as cargas de construção, vencendo os vão delimitados pelas linhas de apoio do cimbramento”.

Para a construção de um pavimento utilizando laje nervurada com vigotas pré-fabricadas não é necessário o emprego de fôrmas para a concretagem da capa e de parte da nervura, pois que as vigotas e os elementos de preenchimento realizam tal função; sendo as



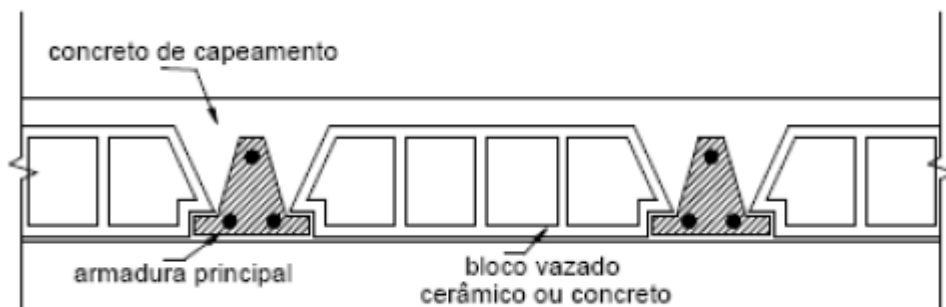
fôrmas necessárias apenas para realizar a concretagem das vigas que se encontram no pavimento.

De acordo com Carvalho e Figueredo Filho (2007), sendo a principal vantagem a economia com fôrmas, as principais desvantagens das lajes com vigotas pré-fabricadas são a dificuldade das instalações prediais e os valores dos deslocamentos transversais, maiores do que os apresentados por lajes maciças. Esse tipo de laje é utilizado principalmente em construções residenciais e comerciais de pequeno e médio porte, para pequenos e médios vão e cargas não muito elevadas.

As vigotas podem ser divididas em três categorias: vigotas tipo trilho (concreto armado), vigotas tipo trilho protendido e vigotas treliçadas.

A vigota do tipo trilho (concreto armado) é usualmente feita com seção transversal com forma aproximada de um “T” invertido, com armadura passiva totalmente envolvida pelo concreto.

**Figura 16 - Vigota do tipo trilho, concreto armado.**



Fonte: Droppa Júnior (1999).

A vigota do tipo trilho protendido é usualmente feita com seção transversal com forma aproximada de um “T” invertido, possuindo armadura pré-tracionada e totalmente envolvida pelo concreto.

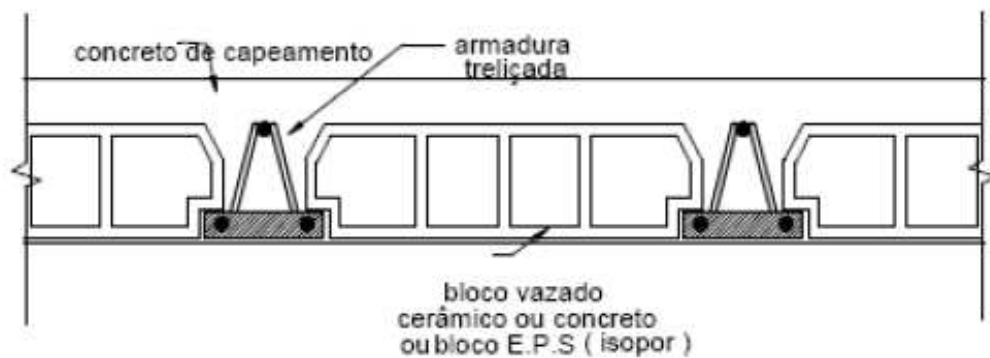
**Figura 17 - Vigota do tipo trilho protendido.**



Fonte: Droppa Júnior (1999).

As vigotas treliçadas são formadas por uma armadura treliçada e por uma placa de concreto que envolve as barras inferiores da treliça, que irão compor a armadura da parte tracionada da laje.

**Figura 18 - Vigota com armadura treliçada.**



Fonte: Droppa Júnior (1999).

As lajes nervuradas com vigotas pré-fabricadas podem ser consideradas lajes unidirecionais, sendo as vigotas dispostas em uma única direção, normalmente a do menor vão teórico da laje, e apoiadas nas extremidades; assim, trabalhando como vigas bi-apoiadas. Portanto, segundo Silva (2005), isso representa uma desvantagem em relação às lajes maciças, pois além de apresentarem maiores esforços solicitantes e deformações do que as lajes maciças, as cargas atuantes são distribuídas em apenas uma direção.

Assim como nas lajes nervuradas moldadas no local, em algumas situações pode ser necessária a construção de nervuras transversais, estas com finalidade de travamento das nervuras principais, nesse caso sendo necessário o uso de fôrmas para a concretagem das nervuras transversais.

## 4. ANÁLISE ESTRUTURAL DE LAJES

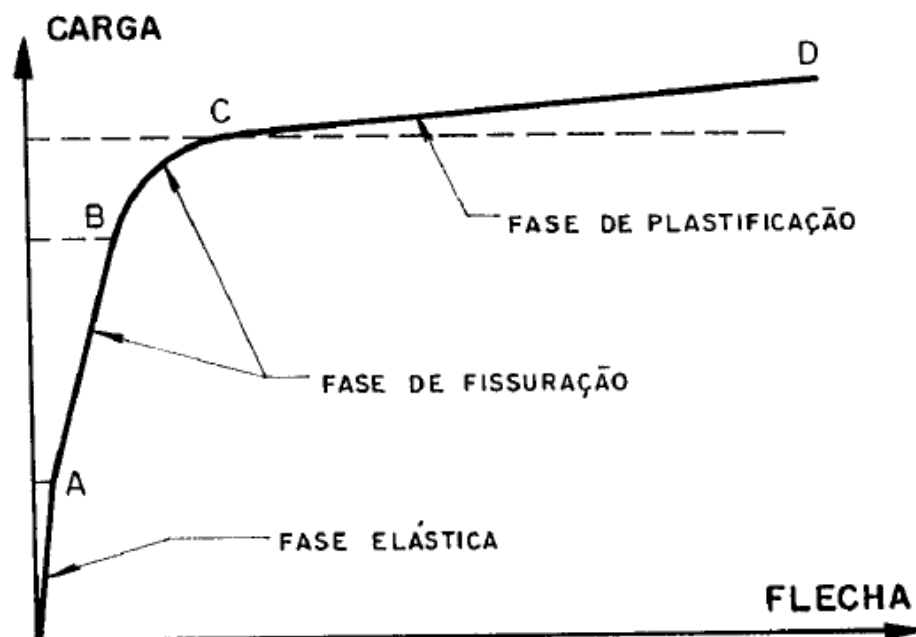
Segundo a NBR 6118:2014, a análise estrutural tem por objetivo determinar os efeitos das ações em uma estrutura, com finalidade de realizar verificações dos estados-limites últimos (ELU) e de serviço (ELS). A análise estrutural permite definir as distribuições de esforços internos, tensões, deslocamentos e deformações.

Consistindo em uma das principais etapas do projeto estrutural, a escolha dos modelos teóricos e do tipo de análise influenciará diretamente nos resultados, sendo que o método escolhido deverá representar adequadamente a estrutura real e o tipo de análise terá relação com o comportamento dos materiais. Isto se aplica também às lajes, sendo estas um tipo de elemento estrutural.

### 4.1 Fases de comportamento de uma laje de concreto armado

As peças de concreto armado sub-armadas, submetidas a esforços de flexão simples com carregamento crescente até a ruptura (ou atingir um dos limites convencionais), apresentam evolução dos deslocamentos correspondente ao apresentado na figura 19.

Figura 19 - Fases de comportamento das lajes sub-armadas.



Fonte: Gonzalez (1997).

O comportamento de uma laje de concreto armado depende do carregamento atuante sobre ela. Para certos carregamentos de pequena intensidade, a teoria das placas em regime elástico demonstra bem o comportamento da laje, mesmo considerando o material como isotrópico e homogêneo. Esta fase se trata da fase elástica, indicada pelo trecho que compreende desde a origem até o ponto A da figura 3.1, correspondente ao Estádio I, onde a peça não se encontra fissurada.

Aumentando o carregamento, ao ser atingido o valor da resistência à tração, começa a ocorrer a fissuração nas regiões dos maiores esforços solicitantes, o que diminui a rigidez destas seções. Nesta fase é difícil avaliar a laje pela teoria das plásticas em regime elástico, levando em consideração a redução da rigidez na zona fissurada. Ocorre a redistribuição dos esforços, que migram para as seções não fissuradas, provocando novas fissuras. Esta fase corresponde à fase de fissuração, indicada pelo trecho AC da figura 3.1, com as seções fissuradas no Estádio II. No trecho BC as armaduras ultrapassam o regime elástico linear, acentuando mais o crescimento dos deslocamentos.

Continuando o aumento do carregamento, as seções mais solicitadas começam a sofrer plastificação. Por serem sub-armadas, que é o caso mais comum em lajes, passam a deformar sem aumento significativo do momento fletor. Esta fase é caracterizada por grandes deformações, sendo a redistribuição de esforços bem mais acentuada que na fase anterior, fazendo com que as seções vizinhas plastifiquem, até que se forme um mecanismo. Correspondente ao Estádio III, esta se trata da fase de plastificação, mostrada no trecho CD da figura 3.1.

Com o desenvolvimento da plastificação a estrutura acaba se tornando hipostática, se deformando livremente com qualquer acréscimo de carregamento. Os deslocamentos aumentam mesmo com a diminuição da carga. Quando a laje atinge um dos limites convencionais de deformação (no aço ou no concreto), afirma-se que atingiu um Estado Limite Último.

## **4.2 Teoria das placas em regime elástico**

A teoria das placas para pequenas deformações, conforme Timoshenko, S.P. e Woinowsky-Krieger (1959) e Szilard (1974), baseia-se nas seguintes hipóteses simplificadores:

- O material da placa é elástico, homogêneo e isotrópico, obedecendo à lei de Hooke;
- A placa indeformada é plana;
- A espessura ( $h$ ) da placa é pequena, da ordem de  $1/10$  em relação às outras dimensões;
- As deformações angulares da superfície média são pequenas comparadas à unidade;
- Os deslocamentos dos pontos da superfície média são pequenos comparados à espessura da placa, com relação limite de  $1/10$ , para que possa ser considerada teoria de pequenas deformações;
- As cargas são aplicadas perpendicularmente à superfície da placa;
- Linhas retas inicialmente perpendiculares à superfície média permanecem retas e perpendiculares na configuração deformada da placa;
- Deformações devidas ao cisalhamento são desprezadas;
- A deformação da placa é produzida por deslocamentos dos pontos da superfície média perpendicular ao plano indeformado;
- As tensões normais à superfície da placa são podem ser desprezadas.

A obtenção da equação diferencial de equilíbrio de uma placa é mais complexa do que a de uma viga, que é dada por:

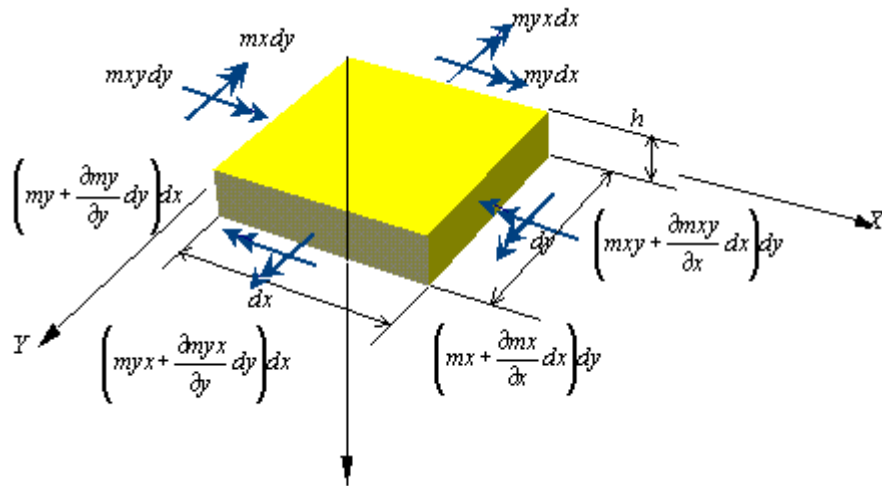
$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2} = \frac{M(x)}{EI} \quad (2)$$

Ou em função carga aplicada:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{q(x)}{EI} \quad (3)$$

Para obter a equação diferencial de uma placa deve-se incluir termos para os momentos nas direções  $x$  e  $y$ . Então utilizando-se das hipóteses básicas e de um elemento de placa infinitesimal de dimensões  $dx$  e  $dy$  sujeito a uma carga vertical  $q$ , obtêm-se o equilíbrio a partir esforços cortantes  $Q_x$  e  $Q_y$ , momentos fletores  $M_x$  e  $M_y$  e momentos de torção  $M_{xy}$  e  $M_{yx}$  atuantes nas faces do elemento.

Figura 20 - Momentos fletores e de torção em um elemento de placa.



Fonte: Coelho (2000).

O resultado obtido são as equações diferenciais das placas em regime elástico, dadas pelas equações:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (4)$$

$$m_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (5)$$

$$m_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (6)$$

$$m_{xy} = -D \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (7)$$

Onde:

- $q$  é a carga distribuída na placa por unidade de área;
- $E$  é o módulo de elasticidade do material da placa;
- $h$  é a espessura da placa;
- $\nu$  é o coeficiente de Poisson;
- $D$  é a rigidez da placa, dada por:

$$D = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (8)$$

A equação 1 é chamada de equação de Lagrange, em coordenadas cartesianas, que define o campo de deslocamento da placa ( $w$ ) em função das coordenadas  $x,y$ , da carga ( $q$ ) e da rigidez ( $D$ ). Logo o cálculo dos deslocamentos através da Teoria da Elasticidade depende das condições de contorno, das dimensões da placa, do carregamento atuante, do módulo de elasticidade do material e do coeficiente de Poisson.

No entanto, normalmente existe dificuldade em encontrar uma função  $w = w(x,y)$  que tanto satisfaça a equação diferencial de Lagrange quanto atenda às condições de contorno, já que o campo de deformações de uma placa é definido por uma equação diferencial de quarta ordem. A solução exata, analítica pela integração direta da equação diferencial é restrita a poucos casos de formas de placas e condições de apoios, onde a maioria dos formatos de placas não possui solução por integração direta, fazendo este processo ser de pouca finalidade prática.

#### 4.2.1 Tabelas

Pela dificuldade da solução analítica para os problemas de placas, outros métodos matemáticos foram utilizados para obter soluções exatas, como solução por séries simples e solução por séries duplas trigonométricas.

Atualmente há a disponibilidade de programas computacionais para o cálculo de lajes em projetos de edifícios, porém antes disso a maior parte dos casos era resolvida através do uso de tabelas, tanto para soluções elásticas quanto para elastoplásticas. Diversos autores incluíram em seus livros tabelas para o cálculo de lajes de concreto armado isoladas, contendo soluções das equações diferenciais para diversas variações de carregamento e condições de apoio, sendo que algumas publicações são especializadas exclusivamente em tabelas.

Os livros geralmente contém uma coleção de tabelas para o cálculo dos momentos fletores e flechas máximas, onde alguns apresentam também tabelas contendo momentos de torção, esforços cortantes, reações de apoio e forças concentradas nos cantos. Dentre os autores que publicaram livros especializados em tabelas de placas pode-se citar Richard Bares (1970) e dentro os que possuem publicações que incluem tabelas, pode-se citar S.P Timoshenko com S. Woimowsky-Krieger (1959) e Rudolph Szilard (1974).



As tabelas são usadas, principalmente, para o cálculo de lajes isoladas, com opções de apoio simples, engastados ou livres. No caso do cálculo de painéis contínuos de lajes apoiadas em vigas, o cálculo pelo uso de tabelas se limita ao cálculo de lajes isoladas, porém estabelecendo critérios para corrigir os esforços dados pela continuidade. Geralmente desprezada quando o uso de tabelas, a flexibilidade pode resultar em grande diferença de esforços e de deslocamentos verticais, no caso de apoio em vigas.

Embora as ferramentas computacionais sejam bastante eficientes para soluções de painéis de lajes de edifícios, atualmente ainda as tabelas são frequentemente utilizadas para soluções elásticas de placas com carregamentos especiais, para o caso de cálculo de tanques, reservatórios e estações de tratamento de água e efluentes (COELHO, 2000).

#### 4.2.2 Tabelas de Bares

Com base na solução em séries trigonométricas, Bares (1972) desenvolveu tabelas para o cálculo de momentos em lajes. No Anexo I estão apresentadas as tabelas adaptadas para o coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) de 0,2, valor definido pela NBR 6118:2014 para a análise linear de estruturas de placas de concreto armado.

Os momentos máximos positivos nas direções x e y, por unidade de comprimento, podem ser obtidos pelas equações:

$$M_x = \mu_x \cdot \frac{p \cdot l_x^2}{100} \quad (9)$$

$$M_y = \mu_y \cdot \frac{p \cdot l_x^2}{100} \quad (10)$$

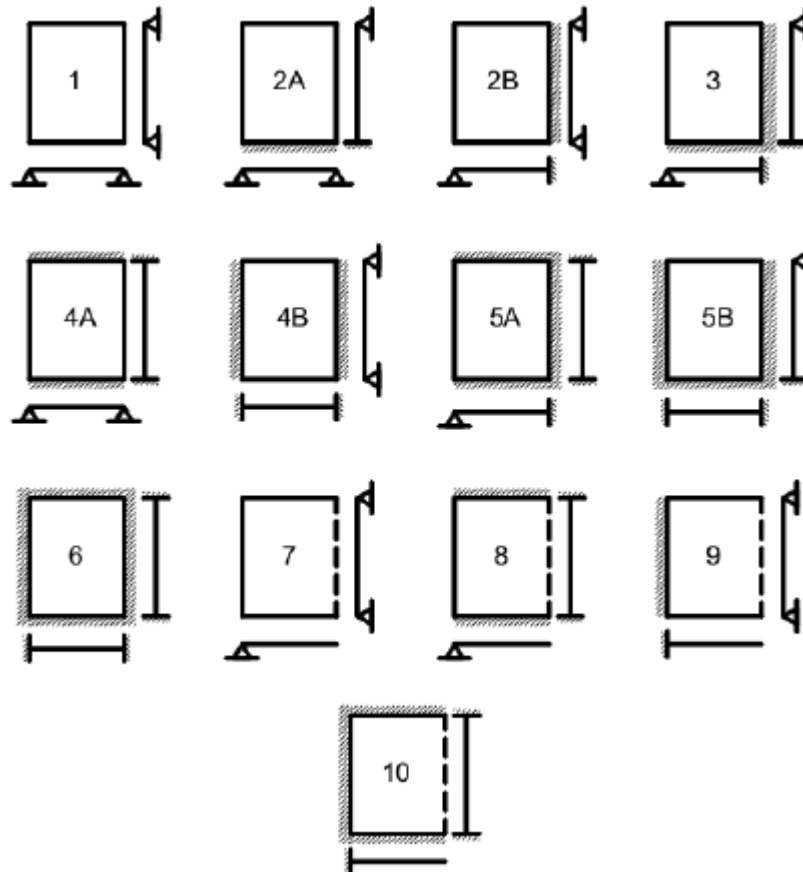
Os momentos máximos negativos nas direções x e y, por unidade comprimento, podem ser obtidos pelas equações:

$$M_x^- = \mu_x^- \cdot \frac{p \cdot l_x^2}{100} \quad (11)$$

$$M_y^- = \mu_y^- \cdot \frac{p \cdot l_x^2}{100} \quad (12)$$

Os coeficientes  $\mu_x, \mu_y, \mu_x^-$  e  $\mu_y^-$  para obtenção dos momentos máximos são obtidos pelas tabelas de Bares em função do caso de vinculação da laje e da relação entre  $l_y$  e  $l_x$  ( $\lambda$ ). Os casos previstos para uso das tabelas de Bares são mostrados na figura 21.

Figura 21 - Tipos de lajes de acordo com a vinculação nas bordas.



Fonte: Bastos (2005).

Para o cálculo da flecha elástica é utilizado o coeficiente  $\alpha$ , obtido por tabela, também em função do caso de vinculação e de  $\lambda$ , inserido na equação:

$$f = \frac{p \cdot l_x^4}{E \cdot h^3} \cdot \frac{\alpha}{100} \quad (13)$$

Onde:

- $p$  é o carregamento uniformemente distribuído na placa;
- $l_x$  é o menor vão da placa;
- $E$  é o módulo de elasticidade do concreto;

- $h$  é a espessura da placa.

De acordo com a NBR 6118:2014, para a análise linear de estruturas deve ser considerado o módulo de elasticidade secante do concreto ( $E_{cs}$ ), que pode ser determinado pela equação:

$$E_{cs} = \alpha_i \cdot E_{ci} \quad (14)$$

Sendo que:

$$\alpha_i = 0,8 + 0,2 \cdot \frac{f_{ck}}{80} \leq 1,0 \quad (15)$$

E, para  $f_{ck}$  de 20 MPa a 50 MPa:

$$E_{ci} = \alpha_E \cdot 5600 \sqrt{f_{ck}} \quad (16)$$

O valor de  $\alpha_E$  é dado de acordo com o tipo de agregado graúdo utilizado no concreto, sendo:

- $\alpha_E = 1,2$  para basalto e diabásio;
- $\alpha_E = 1,0$  para granito e gnaisse;
- $\alpha_E = 0,9$  para calcário;
- $\alpha_E = 0,7$  para arenito.

### 4.3 Método dos elementos finitos

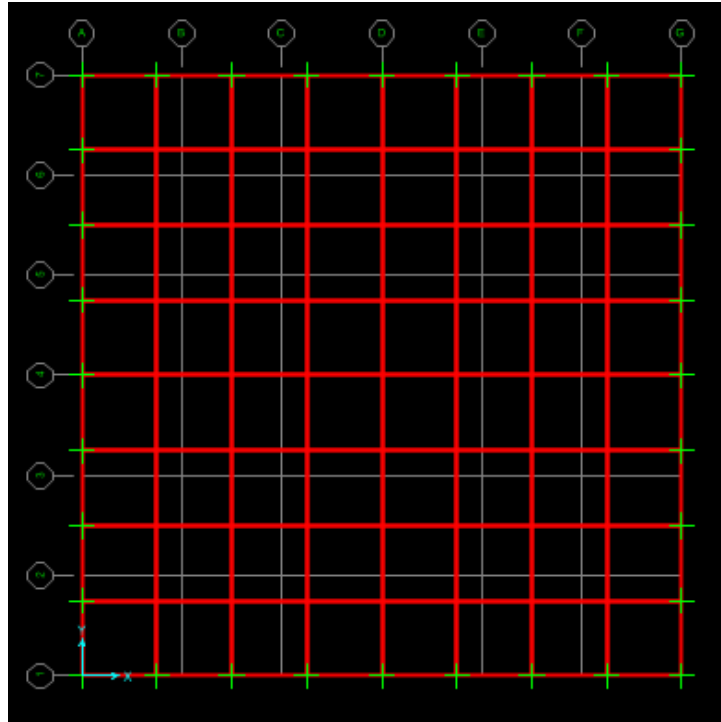
O método dos elementos finitos é um procedimento numérico para a análise de meios contínuos, que pode ser utilizado para solução de problemas de lajes. Foi difundido e desenvolvido junto com os avanços dos recursos computacionais, que forneceram as ferramentas necessárias.

No método dos elementos finitos faz-se a subdivisão da placa em elementos de dimensão finita conectados por nós, formando uma malha de elementos, impondo-se nos nós a compatibilidade dos esforços solicitantes e deslocamentos. Com a discretização, o número

infinito de incógnitas a determinar é substituído por conjunto finito de nós com um número discreto de incógnitas.

Com a utilização de um número adequado de elementos de superfície da laje, é possível obter soluções para praticamente qualquer geometria (SILVA, 2005).

**Figura 22 - Discretização de uma laje em elementos finitos através do programa SAP2000.**



Ao invés de se determinar uma função admissível descrevendo todo o campo de deslocamentos de uma placa, são definidos campos de deslocamentos para cada elemento finito, arbitrados em função dos deslocamentos nodais.

A solução de problemas pelo método dos elementos finitos fornece resultados aproximados, que podem convergir para a solução exata, à medida que a malha é refinada. Utilizando um maior número de elementos de malha ou utilizando elementos que melhor representam o problema analisado, desde que atendendo certas condições de convergência do método, melhores resultados serão obtidos, que convergem em direção aos resultados dados pela teoria da elasticidade.

## 4.4 Dimensionamento de lajes

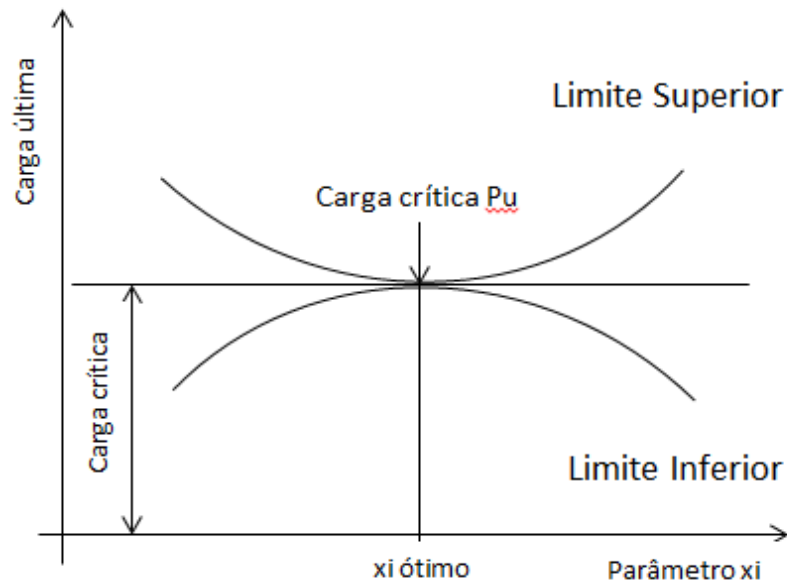
Buscando maior facilidade e bons resultados em resoluções de problemas de placas, vários métodos em análise de lajes têm sido propostos, desenvolvidos e utilizados ao longo dos anos, inclusive muitos destes desenvolvidos antes da popularização dos computadores.

### 4.4.1 Análises limites

A análise estrutural fundamentada em teorias elásticas apresenta bons resultados de tensões e deformações para cargas de serviço (ELS), entretanto não representam a capacidade de resistência última (ELU) das estruturas. Na análise plástica, considera-se que o concreto armado trabalha a beira da ruptura, caracterizada pelo escoamento da armadura e pelo progresso de linhas de plastificação através de sua estrutura (DUARTE, 1998). A análise através do método da ruptura é uma alternativa para o cálculo de lajes, gerando resultados para capacidade última, que as teorias elásticas não conseguem fornecer.

No caso particular das lajes, a análise limite, baseada na teoria clássica plástica para placas, fundamentada por Prager e Hodge (1951), mostra que nem sempre é possível encontrar uma solução exata, uma vez que o grau de indeterminação estática das mesmas é infinito. No lugar da obtenção do valor exato da carga última, estabelecem-se um limite superior e um limite inferior, onde a carga última de colapso está situada entre dois limites, dependendo da solução utilizada.

Figura 23 - Soluções por limite superior e limite inferior.



O teorema cinemático, ou teorema do limite superior, estabelece que toda carga corresponde a um mecanismo de valor igual ou superior ao da carga última da estrutura ou do elemento analisado, onde que mecanismo é definido como toda e qualquer configuração de ruína cinematicamente admissível. Este teorema possibilita a definição de um limite superior para a carga efetiva de ruína, o que dá margens para a obtenção de resultados contra a segurança, pois torna possível que sejam obtidos valores superestimados de carga última (DUARTE, 1998). A teoria das Charneiras Plásticas para lajes de concreto armado é um método de análise limite superior e será abordado mais especificamente no item 3.3.3.

O teorema estático, ou teorema do limite inferior, segundo Duarte (1998), estabelece que “todo carregamento em equilíbrio com uma distribuição de esforços estaticamente admissível apresenta valor igual ou inferior ao que provoca a ruína”. A distribuição de esforços internos estaticamente admissível para toda a laje, para uma solução de limite inferior, de acordo com Coelho (2000), é encontrada de forma que:

- As condições de equilíbrio são satisfeitas em todos os pontos da placa;
- O critério de plastificação que define a resistência do elemento de placa não é excedido em nenhum ponto;
- As condições de contorno são cumpridas.

A carga última da placa é obtida através das equações de equilíbrio e da distribuição de momentos. Deste modo, a carga encontrada é sempre igual ou menor que a carga de ruína, conduzindo a resultados a favor da segurança.

Teoricamente, existe um número infinito de soluções pelo teorema da análise limite inferior para uma determinada placa, cada solução baseada em uma distribuição de momento, desde que satisfaça os critérios estabelecidos.

O teorema de análise limite inferior foi chamado por Hillerborg (1956) de “teoria do equilíbrio”, sendo sugerido por ele como um método de projeto para lajes de concreto armado. De acordo com Hillerborg, se para uma distribuição de momentos, que satisfaz as equações de equilíbrio e as condições de contorno da placa para uma determinada carga, a laje é capaz de resistir a estes em cada ponto, a carga adotada representa um limite inferior de capacidade de resistência da laje.

É necessária uma redistribuição de momentos para todas as possíveis soluções de distribuição de momentos, antes da carga última da placa ser atingida, inclusive quando o dimensionamento é feito pela teoria elástica, pois a distribuição de momentos depende de uma complexa distribuição na rigidez da laje após a fissuração do concreto. Assim sendo, as análises limites apenas podem ser aplicadas em lajes de concreto armado que possuam seções com grande ductilidade .

Por isso assume-se que as seções das lajes de concreto armado são dúcteis o suficiente, possuindo um longo trecho horizontal no diagrama trilinear da relação momento-curvatura, para que a distribuição de momentos escolhida possa ser atingida após a redistribuição.

A equação de equilíbrio de um elemento de placa é dada por:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial m_{yx}}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -q \quad (17)$$

A equação 17 pode ser aplicada tanto aos elementos de laje que estão em regime elástico, quanto aos que estão em regime plástico, pois é deduzida apenas a partir de considerações de equilíbrio. Existe um grande número de soluções, pois qualquer solução que satisfaça as condições de contorno e o critério de plastificação é considerada uma solução possível para a configuração de momentos, entre as quais a teoria elástica é uma delas.

Para a obtenção das soluções possíveis, deve-se fazer o equilíbrio da carga  $q$  com a soma dos termos do lado esquerdo da equação 17, sendo o primeiro termo o momento fletor

na direção  $x$ , o segundo termo os momentos de torção e o terceiro termo o momento fletor na direção  $y$ . A carga da laje pode ser equilibrada por qualquer combinação de momentos fletores e momentos de torção nas duas direções, isso já mostra uma ideia do conceito físico do método das faixas, que será abordado a seguir.

#### 4.4.2 Método das faixas

O método das faixas (*strip method*), também chamado de método de Hillerborg, foi apresentado por Hillerborg, em 1956, como um método para o dimensionamento de lajes de concreto armado através da teoria da análise limite.

O objetivo de Hillerborg era apresentar um método de projeto que fosse, ao mesmo tempo, fácil de ser aplicado que sempre gerasse resultados a favor da segurança. Este método é utilizado por engenheiros há muitos anos e, em muitos casos, de forma intuitiva, sem o conhecimento que estão utilizando um método de projeto formulado em bases formais (COELHO, 2000).

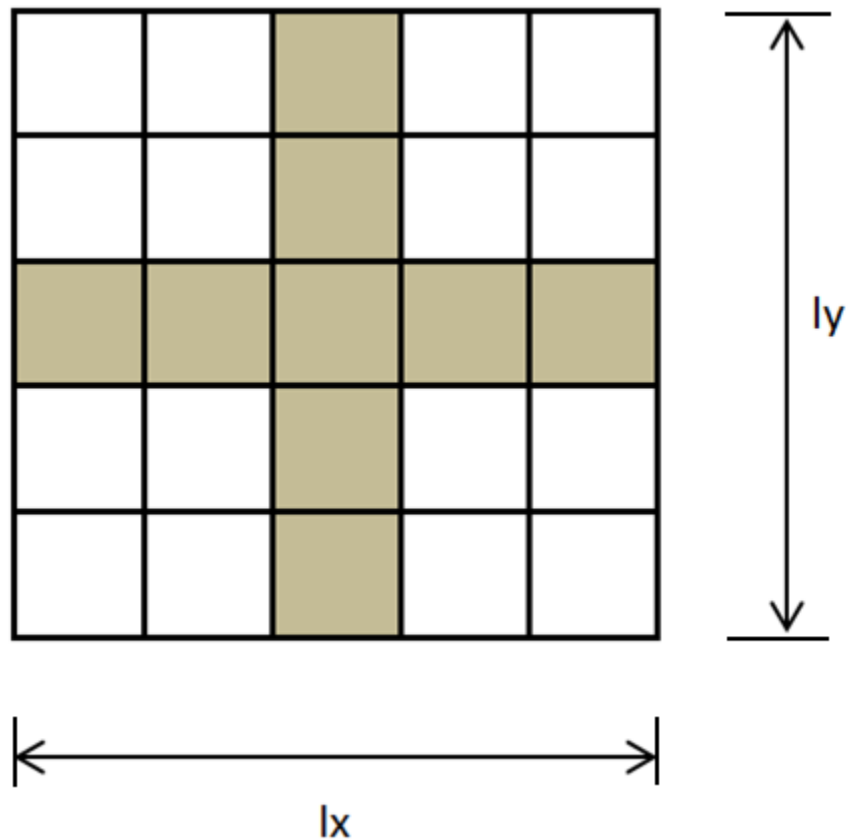
Este método, com algumas modificações de reforço nas faixas, vem sendo frequentemente utilizado para calcular, de forma aproximada, as lajes com formatos irregulares, bordos livres, aberturas, entre outras situações que não são apresentadas nas soluções clássicas ou não estão disponíveis em tabelas (BANDEIRA, 2006).

O teorema da análise limite inferior foi simplificado no método simples das faixas, eliminando a necessidade de se considerar os momentos de torção no cálculo da distribuição de momentos. Como é considerado que nenhuma parcela de carga é absorvida pelos momentos de torção, o dimensionamento da laje pode ser realizado como se esta fosse composta por faixas independentes, no geral em duas direções. Torna-se necessário, então, apenas o cálculo dos momentos fletores das faixas por critérios de estáticas, a fim de garantir o equilíbrio. Posteriormente, foi apresentado por Hillerborg o método avançado das faixas, incluindo casos especiais de cargas concentradas.

Com este método, a laje pode ser calculada como se fosse composta por duas vigas nas direções  $x$  e  $y$ , onde a carga aplicada é distribuída adequadamente entre as faixas, utilizando as condições de vinculação adequadas.



Figura 24 - Exemplo de sistema de faixas em uma laje.



Segundo a teoria geral da análise limite inferior, qualquer combinação dos momentos fletores ( $m_x$  e  $m_y$ ) e momentos de torção ( $m_{xy}$ ) que atenda a equação 17 para qualquer ponto da laje e que satisfaça às condições de contorno ao ser aplicada a carga última, é uma solução válida. Porém, deve-se dimensionar e dispor as armaduras na laje para a absorção destes momentos.

Neste método, Hillerborg escolheu a solução onde  $m_{xy} = 0$ . Então, a carga  $q$  será equilibrada por apenas dois termos da equação 17: os termos de momentos fletores  $m_x$  e  $m_y$ . Logo a equação pode ser separada em duas equações de equilíbrio para cada faixa nas direções  $x$  e  $y$ , com um fator de distribuição  $k$ , obtendo assim uma parcela  $k_x \cdot q$  para a direção  $x$  e uma parcela  $k_y \cdot q$  para a direção  $y$ , da seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} = -k_x \cdot q \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2 my}{\partial y^2} = -Ky \cdot q \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 my}{\partial y^2} = -(1 - kx) \cdot q \quad (19)$$

Onde:

$$kx + ky = 1 \quad (20)$$

Logo é possível encontrar diferentes distribuições de momentos, dependendo dos valores adotados para os coeficientes  $kx$  e  $ky$ , que podem ser entre 0 e 1,0. Em um caso extremo, adotando-se o valor  $kx = 1$ , todo o carregamento seria absorvido apenas na direção  $lx$ .

“Do ponto de vista prático, as principais exigências são que a estrutura seja economicamente adequada e que esta estrutura tenha bom funcionamento sob condições de serviço, com respeito à necessidade de se limitar deformação e fissuração” (PINHEIRO, 2002). A escolha entre as soluções possíveis se torna, então, um problema de otimização de detalhamento de armadura, que são dispostas de acordo com os diagramas de momento, levando em consideração os custos e o estado limite de serviço (ELS).

É importante salientar que o método das faixas de Hillerborg é válido para o cálculo no estado limite último, não levando em conta o comportamento das lajes em serviço. Os momentos de torção, calculados pelas teorias elásticas, existirão. Estes momentos em geral são maiores nos cantos de lajes simplesmente apoiadas em vigas rígidas ou paredes. Embora o método não exija que os momentos de torção sejam absorvidos por nenhuma armadura, no projeto executivo das lajes deverá ser incluída, nos cantos em que a laje for simplesmente apoiada, armadura superior e inferior, que pode ser calculada e detalhada seguindo as recomendações da norma NBR 6118:2014 e complementada com as recomendações de diversas bibliografias específicas para detalhamento de estruturas de concreto armado, como Fusco (1995) e Leonhardt (1997) (COELHO; LORIGGIO, 2002). Portanto tornam-se necessárias as verificações no estado limite de serviço e, talvez, sejam necessárias modificações no projeto.

Para demonstrar a utilização do método das faixas de Hillerborg, segue um exemplo de uma laje quadrada, simplesmente apoiada em todo o contorno, submetida a um carregamento uniformemente distribuído.

#### 4.4.2.1 Exemplo

Uma laje quadrada, de dimensões de 5,0 m de largura por 5,0 m de comprimento está submetida a uma carga distribuída  $q$  de 12 kN/m<sup>2</sup>. Para uma distribuição em que a carga  $q$  seja dividida metade para cada direção, uniformemente distribuída entre as faixas, serão adotados os coeficientes  $k_x = 0,5$  e  $k_y = 0,5$ . O resultado dos momentos obtidos para as faixas na direção  $x$ , que é o mesmo para a direção  $y$ , é dado pelo cálculo estático de uma viga biapoiada de largura unitária (1,0 m).

Sendo o valor do momento máximo em uma viga biapoiada dado por:

$$M = \frac{q \cdot l^2}{8} \quad (21)$$

O valor máximo dos momentos na direção  $x$ , com  $k_x = 0,5$ , é dado por:

$$M_x = 0,5 \cdot \frac{q \cdot l^2}{8} \quad (22)$$

Logo  $M_x = 18,75$  kN.m/m.

Também pode se obter o valor das reações nos apoios por estática, onde:

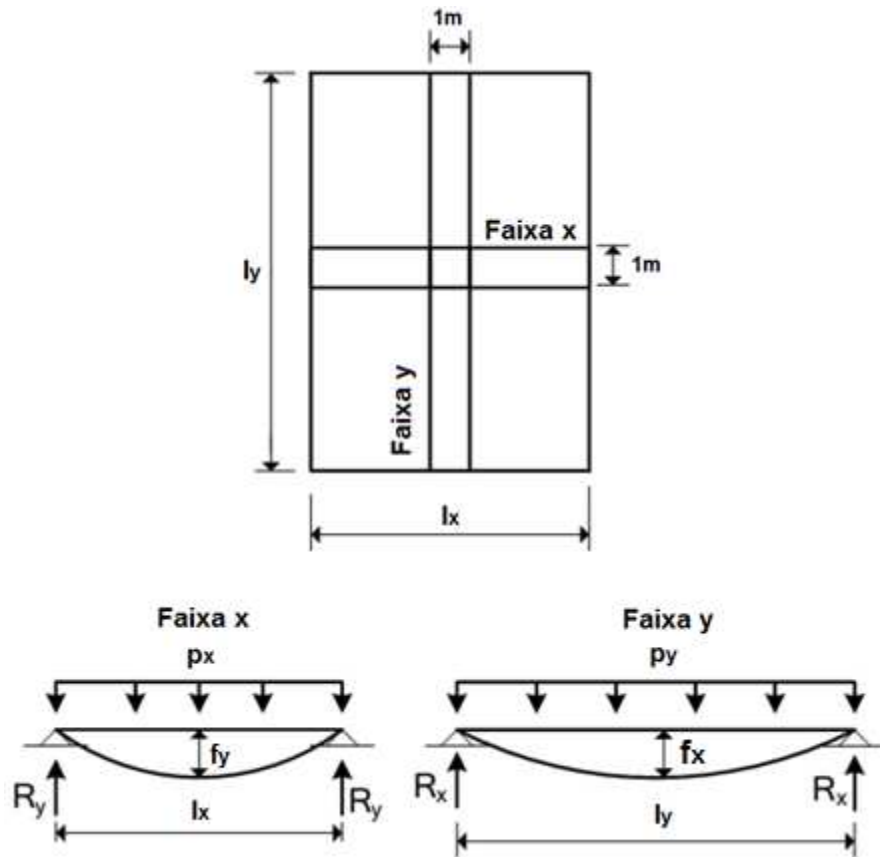
$$R_x = 0,5 \cdot \frac{q \cdot l}{2} \quad (23)$$

Logo  $R_x = 15$  kN/m.

#### 4.4.2.2 Processo de Marcus

Neste método as lajes são calculadas baseadas na teoria das grelhas para o cálculo de placas, considerando a laje como uma composição de vigas em duas direções. A figura 25 mostra uma exemplificação do método, através de uma laje apoiada nos quatro lados, submetida a uma carga  $p$  uniformemente distribuída, com vãos  $l_x$  e  $l_y$ .

Figura 25 - Laje simplesmente apoiada nos quatro lados.



As parcelas de carga devem obedecer à relação:

$$p = p_x + p_y \quad (24)$$

Para o caso de uma laje simplesmente apoiada nos quatro cantos, a flecha no centro da faixa da direção x e da direção y, considerando as cargas  $p_x$  e  $p_y$ , é dada pelas equações:

$$f_x = \frac{5}{384} \cdot \frac{p_x \cdot l_x^4}{EI} \quad (25)$$

$$f_y = \frac{5}{384} \cdot \frac{p_y \cdot l_y^4}{EI} \quad (26)$$

Sendo  $E$  o módulo de elasticidade do material e  $I$  o momento de inércia da seção da faixa de largura unitária. A rigidez deve ser definida de acordo com o item 5.2 deste trabalho.

Como a flecha no centro da laje possui um único valor, a condição de continuidade é determinada por:

$$f_x = f_y \quad (27)$$

Logo:

$$p_x \cdot l_x^4 = p_y \cdot l_y^4 \quad (28)$$

$$p_y = p - p_x \quad (29)$$

$$p_x = \left( \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4} \right) \cdot p \quad (30)$$

Assim é permitido o cálculo das parcelas de carregamento.

Com a relação entre os vãos da laje dada por  $\lambda$ , pode-se simplificar a equação transformando uma parcela em um fator  $k_x$ , sendo:

$$k_x = \left( \frac{\lambda^4}{1 + \lambda^4} \right) \quad (31)$$

Logo o fator  $k_y$  será dado por:

$$k_y = 1 - k_x \quad (32)$$

E, por fim, as parcelas de carga podem ser escritas da seguinte forma:

$$p_x = k_x \cdot p \quad (33)$$

$$p_y = k_y \cdot p \quad (34)$$

No método das faixas a rigidez à torção da laje é desprezada. Porém, em uma laje, as deflexões  $f_x$  de uma faixa  $x$  provocam um giro de torção na faixa  $y$ , onde a rigidez à torção desta faixa faz com que as flechas sejam reduzidas e também sejam diminuídos os momentos fletores. No método de Marcus, esse efeito redução dos momentos é dado por coeficientes  $m_x$  e  $m_y$ , para os momentos positivos, e  $n_x$  e  $n_y$ , para os momentos negativos. Estes coeficientes estão presentes nas tabelas mostradas no Anexo II, determinados considerando a relação entre os vãos da laje ( $\lambda$ ) e o caso de vinculação da laje. Os casos previstos para a utilização das tabelas de Marcus são os mesmos mostrados na figura 21.

Os momentos positivos, nas direções  $x$  e  $y$ , portanto, serão dados pelas equações:

$$M_x = \frac{p \cdot l_x^2}{m_x} \quad (35)$$

$$M_y = \frac{p \cdot l_x^2}{m_y} \quad (36)$$

E os momentos negativos são dados por:

$$M_x^- = -\frac{p \cdot l_x^2}{n_x} \quad (37)$$

$$M_y^- = -\frac{p \cdot l_x^2}{n_y} \quad (38)$$

#### 4.4.3 Teoria das charneiras plásticas

A teoria das charneiras plásticas, ou método das linhas de ruptura, para lajes de concreto armado, teve sua primeira publicação em dinamarquês, por Ingerslev (1921), onde sua teoria não era aplicável a muitos casos de lajes, pois não levavam em consideração os esforços cortantes ao longo das linhas de plastificação. Johansen, em 1931, aprimorou

significativamente a teoria, deduzindo equações para cálculo dos momentos de plastificação em diversos tipos de lajes, formulação esta aceita até os dias atuais (DUARTE, 1998).

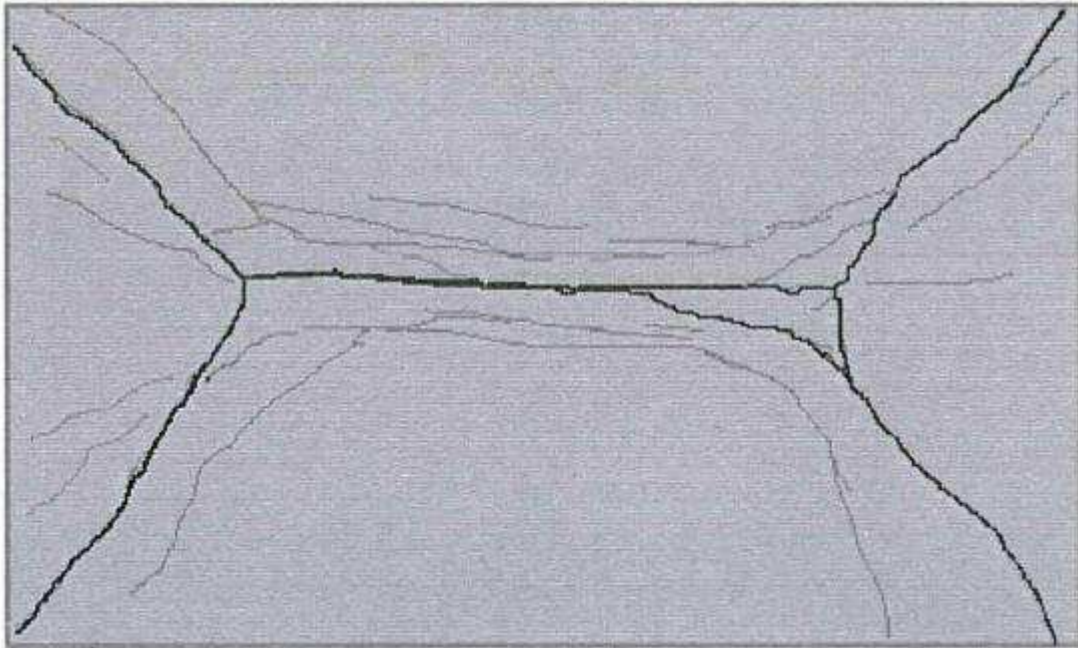
Segundo Duarte (1998), o grande impulso no desenvolvimento do método só ocorreu depois de 1950 e, no Brasil, apenas a partir de 1960. Os trabalhos de Jones e Wood (1967), na Inglaterra e os de Langendonck de 1970 e 1975, no Brasil, merecem destaque por sua contribuição no aprimoramento da teoria.

Este método consiste de um método de análise limite, mais especificamente um método de análise limite superior. A carga última da laje é obtida postulando-se um mecanismo de ruína compatível com as condições de contorno estabelecidas. Os momentos nas linhas de ruptura são os momentos últimos plásticos, que são resistidos pela seção de concreto armado. Estabelecendo estas hipóteses básicas, a carga última é determinada utilizando-se o princípio dos trabalhos virtuais ou as equações de equilíbrio. A carga última assim calculada é sempre uma carga igual ou superior à carga correta, sendo por esse motivo que o método é chamado de limite superior. Se o mecanismo de colapso postulado não for o correto, o resultado será uma carga de ruína superior à carga real, sendo, portanto, um valor contra a segurança. Caso for optado por adotar um coeficiente de segurança para a carga última, o resultado do mecanismo de colapso incorreto terá um coeficiente de segurança menor do que o coeficiente de segurança mínimo adotado.

Apesar de ser bem aceita e difundida no meio técnico, a teoria das charneiras plásticas não costuma ser a primeira opção entre as análises de lajes utilizadas, devido justamente pelo fator de conduzir a resultados com possibilidade de ser contra a segurança.

Na teoria das charneiras plásticas, o mecanismo de colapso é composto por painéis (charneiras) separados pelas linhas de plastificação (ou linhas de ruptura). Não são analisadas as regiões entre as linhas de ruptura para verificar se o momento de plastificação não é atingido em nenhum ponto, o que só pode ocorrer caso um mecanismo de colapso incorreto for adotado. “As linhas de plastificação são na verdade zonas de plastificação delineadas por seções planas ou cilíndricas, normais ao plano médio da laje, nas quais foi atingido o momento de plastificação” (BUENO, 2008). Nas lajes reais de concreto armado, as charneiras plásticas correspondem a zonas de intensa fissuração da face tracionada.

**Figura 26 - Padrão de linhas de ruptura de uma laje retangular simplesmente apoiada submetida a uma carga uniformemente distribuída.**



Fonte: Park e Gamble (1980).

Como não há nenhuma garantia de que o mecanismo de colapso adotado é o correto, que representa a realidade, torna-se necessário realizar a verificação de todos os mecanismos de colapso possíveis, a fim de garantir que a capacidade de suporte de carga foi superestimada.

De acordo com Loriggio (1998), as lajes dimensionadas no domínio 2 e grande parte das lajes dimensionadas no domínio 3 possuem um patamar de plastificação bem definido. Admite-se que as seções transversais da laje apresentem comportamento plástico, a partir de determinada rotação o momento de plastificação torna-se o momento resistente, permanecendo constante. A norma NBR 6118:2014 limita a posição da linha neutra a um valor de 30% da altura útil da seção da laje quando for utilizado um método plástico de análise, o que garante a ductilidade das seções transversais.

A teoria das charneiras plásticas assume um mecanismo de colapso por flexão, para a determinação da carga de ruína são considerados apenas os momentos fletores de plastificação. Assume-se que a laje possui resistência suficiente ao cisalhamento para que não ocorra a ruptura por cisalhamento.

A teoria das charneiras plásticas é aplicada a lajes que possuam armadura uniforme, onde a área da armadura é considerada constante ao longo da laje, porém podendo



ser diferente cada direção ou para a armadura superior e inferior. Apesar de ser possível analisar lajes com armadura não uniforme por este método, isto não foi suficientemente estudado até hoje por causa das dificuldades que se apresentam (COELHO, 2000).

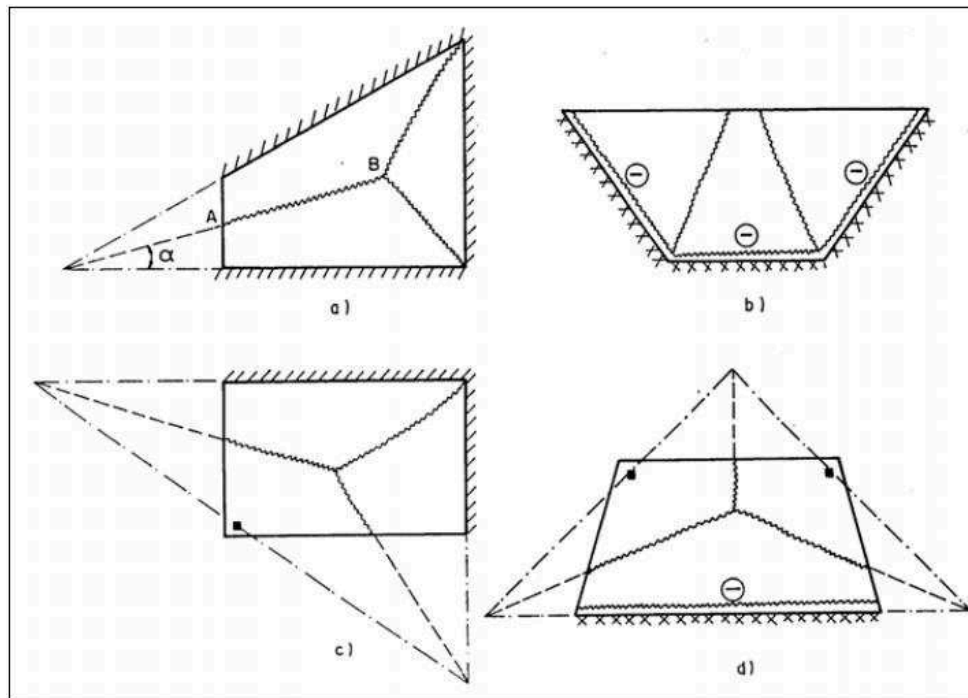
Para uma laje de concreto armado no estado limite último, a configuração de momentos depende da resistência à flexão das seções, assim como do carregamento e das condições de contorno. É necessária uma redistribuição significativa de momentos fletores para desenvolver um mecanismo de colapso, o que implica que as seções da laje devem possuir ductilidade suficiente para que ocorram rotações plásticas nas seções críticas.

#### 4.4.3.1 Determinação da carga última

A primeira etapa para a obtenção de qualquer solução com charneiras plásticas é postular o padrão de linhas de rupturas, utilizando as seguintes regras:

- Para atuar como rótulas plásticas de um mecanismo de colapso formado por segmentos planos, as linhas de ruptura deverão ser linhas retas, que formam eixos de rotação para o movimento destes segmentos, funcionando como se fossem dobradiças (charneiras) plásticas;
- Os apoios da laje funcionarão como eixos de rotação. Caso um lado seja engastado, uma linha de ruptura poderá se formar neste apoio. Um eixo de rotação passará através de uma coluna de apoio;
- Uma linha de ruptura deverá passar pela intersecção do eixo de rotação de segmentos adjacentes da placa, por compatibilidade de deformação;

Figura 27 - Exemplo de configuração de ruína



Fonte: Gonzales (1997).

- Os padrões normalmente possuem dimensões conhecidas, que localizam as linhas de ruptura, podendo existir mais de uma família de linhas de ruptura para uma laje em particular;
- Deve-se assegurar de que todos os padrões de linhas de ruptura tenham sido considerados, pois o padrão correto é aquele que resultará na menor carga última. Caso não for considerado o padrão crítico, a carga última estará contra a segurança;
- A obtenção da carga última pode ser feita a partir um padrão de linhas de ruptura utilizando o método dos trabalhos virtuais ou as equações de equilíbrio.

#### 4.4.3.2 Solução pelo princípio dos trabalhos virtuais

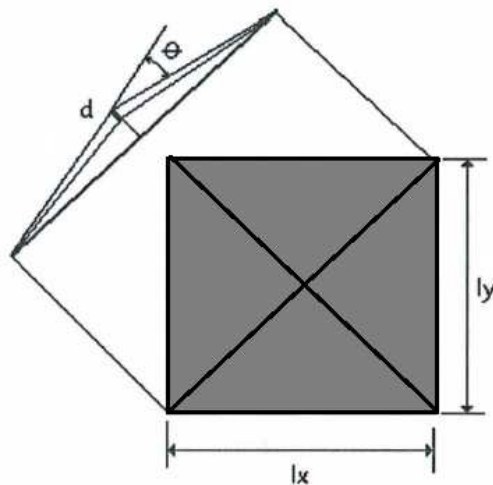
Para realizar a análise de uma laje através do método dos trabalhos virtuais, é postulado um padrão de linhas de ruptura para a laje no estado limite último. Os painéis do padrão serão considerados como corpos rígidos. Os painéis da laje estão em equilíbrio sob ação das forças externas e dos momentos fletores, de torção e esforços cortantes ao longo das linhas de ruptura. Em função dos deslocamentos e das dimensões dos painéis poderão ser

obtidos o campo de deslocamentos em todos os pontos da laje e a rotação dos painéis em torno das linhas de ruptura. O carregamento externo e os esforços internos ao longo das linhas de ruptura realizam trabalho devido ao deslocamento virtual.

#### 4.4.3.3 Exemplo

Para a demonstração da utilização do método dos trabalhos virtuais para o cálculo da carga última de uma laje de concreto armado, será apresentado um exemplo de uma laje quadrada submetida a uma carga uniformemente distribuída  $q$ , considerando que a armadura da laje é isotrópica, com os momentos de plastificação indicados por  $m_u$  ao longo das linhas de ruptura.

**Figura 28 - Exemplo de laje quadrada com carregamento uniformemente distribuída**



É postulado um padrão de linhas de ruptura para laje, de acordo com a figura 3.8, de forma a coincidirem com as diagonais do quadrado que representa a laje. Supõe-se um deslocamento  $d$  no centro da laje e, como o comprimento da diagonal é dado por  $l_x\sqrt{2}$ , a rotação ao longo das linhas de ruptura será igual a:

$$\theta = \frac{2\sqrt{2}d}{l_x} \quad (39)$$

O trabalho total realizado pelos momentos internos, nas linhas de ruptura, é dado por:

$$\sum m_{un} \theta_n \sqrt{2l_x} = 2 \left( m_u \cdot \frac{2\sqrt{2d}}{lx} \cdot \sqrt{2l_x} \right) = 8 \cdot m_u \cdot d \quad (40)$$

Será dado apenas pelos momentos fletores o trabalho realizado pelos esforços internos nas linhas de ruptura, pois quando somado para toda a laje, o trabalho realizado pelos momentos de torção e pelas forças cortantes será igual a zero.

O trabalho externo é expresso por:

$$\sum W_n \Delta = 4 \left( \frac{q_u l_x^2}{4} \cdot \frac{d}{3} \right) = q_u \cdot l_x^2 \cdot \frac{d}{3} \quad (41)$$

A equação equivale ao produto entre carga distribuída última ( $q_u$ ) e o volume do tetraedro formado pelas charneiras plásticas. Logo a equação dos trabalhos virtuais pode ser escrita da seguinte maneira:

$$q_u \cdot l_x^2 \cdot \frac{d}{3} = 8 \cdot m_u \cdot d \quad (42)$$

Os termos dos deslocamentos virtuais anulam-se em ambos os lados da equação, logo o valor da carga última de ruína, para o padrão de linhas de ruptura postulado é dado por:

$$q_u = \frac{24m_u}{lx^2} \quad (43)$$

Modificando a equação 43 pode-se definir o momento último de dimensionamento da laje como:

$$m_u = \frac{q_u lx^2}{24} \quad (44)$$

A configuração adotada para este exemplo, porém, não é a mais desfavorável para o dimensionamento da laje. Devem ser verificadas outras configurações onde, neste caso, a configuração a ser deveria ser com bifurcações das charneiras junto aos cantos.

A teoria das charneiras plásticas consegue prever a carga última das lajes com muito boa precisão, comparando com os resultados obtidos através de ensaios de ruptura (BANKI; COELHO; LORIGGIO, 2013). Também permite um melhor aproveitamento da capacidade resistente da laje, resultando em maior economia nos dimensionamentos. Porém, como este método trabalha com carga última da laje, ele não leva em consideração o estado limite de serviço, onde deverão ser feitas análises a fim de verificar se os valores obtidos estão de acordo com o estabelecido pela norma NBR 6118:2014.

Outro problema é que o dimensionamento de lajes pela teoria das charneiras plásticas está limitado a situações relativamente simples, como em lajes retangulares com carga uniformemente distribuída apoiada em vigas. Para casos mais complexos de geometria e carregamentos, podem ser causados erros que levarão a obtenção de resultados contra a segurança.

#### 4.4.4 Analogia de grelha

O método da analogia de grelha consiste em representar a laje através de uma grelha equivalente, composta por barras (vigas) ortogonais entre si, de forma que as rigidezes longitudinais da laje sejam concentradas nas barras nesta direção e as rigidezes transversais sejam concentradas nas barras de direção ortogonal (DUARTE, 1998). As grelhas podem ser consideradas como um conjunto de vigas individuais, interconectadas por seus nós.

A analogia de grelha pode ser considerada como um refinamento do método das faixas de Hillerborg, considerando a rigidez à torção das barras.

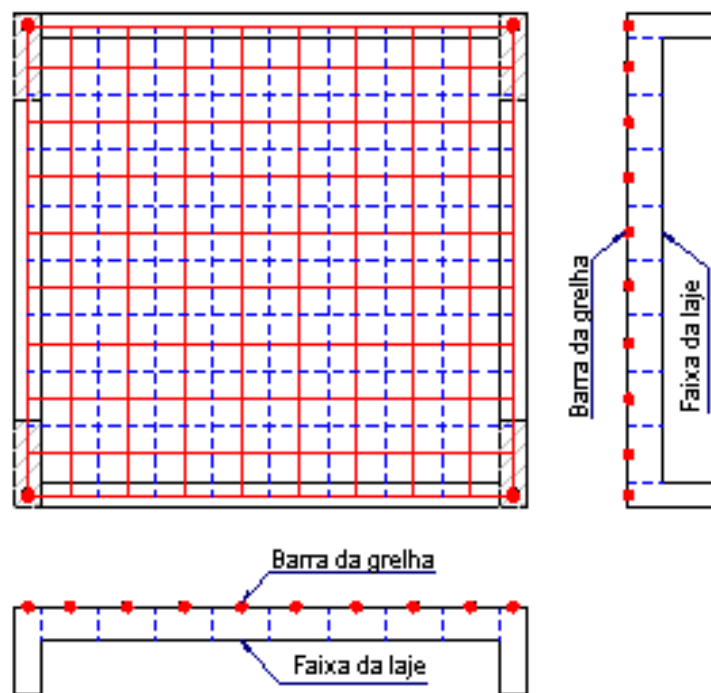
A substituição de uma laje por uma série de vigas ortogonais que se cruzam, provavelmente é o mais antigo dos procedimentos e é, de fato, um método de projeto de limite inferior (PARK; GAMBLE, 1980), portanto possui fundamento formal nos teoremas de equilíbrio da teoria da plasticidade. O processo de substituição da laje por uma grelha equivalente torna possível reproduzir o comportamento estrutural de lajes com praticamente qualquer geometria.

Sendo uma solução por análise limite, são inúmeros os resultados possíveis para uma laje, em função da variação dos parâmetros de rigidez das barras da grelha. Utilizando-se certos parâmetros para rigidez e torção, é possível obter resultados muito próximos aos obtidos pela teoria elástica.

Para analisar uma laje através da analogia de grelha, esta deve ser discretizada com uma série de faixas com largura determinada, onde estas faixas podem ser substituídas por elementos estruturais de barras situadas nos seus eixos, o que forma uma grelha plana. Todas as barras e nós da grelha situam-se no mesmo plano, facilitando a análise e o processamento do método. É atribuída uma inércia à flexão e uma inércia à torção a cada barra da grelha.

À respeito dos carregamentos, é considerado que as cargas distribuídas atuantes na placa se dividem entre as barras da grelha equivalente de acordo com a área de influência de cada uma. As cargas podem ser consideradas uniformemente distribuídas ao longo das barras da grelha ou concentradas diretamente nos nós (SILVA; FIGUEIREDO FILHO; CARVALHO, 2003).

Figura 29 - Discretização de uma laje pelo método da analogia de grelha.



Fonte: Puel, 2010.

#### 4.4.4.1 Influência da rigidez à torção

A rigidez à torção tem grande influência nos resultados dos esforços e deslocamentos em uma grelha. Deve-se estudar a influência deste parâmetro e determinar qual valor será adotado, para a análise de uma laje pela analogia de grelha, em função dos resultados que se deseja obter. Também é necessário verificar a influência de outros

parâmetros, como o número de faixas adotado, a rigidez à flexão, etc, de forma a observar o comportamento do modelo da laje.

Os esforços cortantes, momentos fletores e momentos de torção são proporcionais às rigidezes correspondentes das barras, que na matriz de um elemento de grelha plana, correspondem aos parâmetros de rigidez à torção  $G.Jp$  e de rigidez à flexão  $Ely$ .

**Figura 30 - Matriz de rigidez de um elemento de grelha plana.**

$$K_M = \begin{bmatrix} \frac{GJp}{L} & 0 & 0 & -\frac{GJp}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4Ely}{L} & -\frac{6Ely}{L^2} & 0 & \frac{2Ely}{L} & \frac{6Ely}{L^2} \\ 0 & -\frac{6Ely}{L^2} & \frac{12Ely}{L^3} & 0 & -\frac{6Ely}{L^2} & -\frac{12Ely}{L^3} \\ -\frac{GJp}{L} & 0 & 0 & \frac{GJp}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2Ely}{L} & -\frac{6Ely}{L^2} & 0 & \frac{4Ely}{L} & \frac{6Ely}{L^2} \\ 0 & \frac{6Ely}{L^2} & -\frac{12Ely}{L^3} & 0 & \frac{6Ely}{L^2} & \frac{12Ely}{L^3} \end{bmatrix}$$

O parâmetro de rigidez à torção é definido pelo produto do módulo de elasticidade transversal  $G$  do material, que pode ser medido ou calculado em função do módulo de elasticidade transversal ( $Ec$ ) e pelo momento de inércia polar  $Jp$  da seção transversal da barra.

A lei de Hooke generalizada, para materiais isotrópicos homogêneos, possui somente três constantes elásticas:  $E$ ,  $\nu$  e  $G$ . A equação de conexão é dada por:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (45)$$

Para aplicações em concreto armado, a NBR 6118:2014 define o valor do coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) sendo 0,2.

Para o momento de inércia polar ( $Jp$ ) o valor adotado é

$$Jp = 2.I \quad (46)$$

Sendo  $I$  o momento de inércia de área.

## **5. ESTADOS LIMITE DE SERVIÇO**

Além de garantir a segurança da estrutura contra o colapso ou qualquer outra forma de ruína estrutural que impossibilite o uso da estrutura, é necessário garantir que a estrutura de concreto armado (ou protendido) atenda aos estados limites de serviço indicados na NBR 6118:2014.

De acordo com a norma são necessárias verificações dos estados limites de serviço dos elementos estruturais que estão relacionados à aparência, durabilidade, conforto do usuário e boa utilização funcional.

### **5.1 Estado limite de deformação excessiva**

De acordo com as normas de projeto, os deslocamentos devem ser calculados considerando as combinações quase permanentes de carregamento. Deve-se incluir, também, o efeito da fissuração do concreto e da deformação diferida no tempo. Para a verificação de estados limites de deformações excessivas decorrentes da ação do vento ou temperatura, são utilizadas as combinações de serviço frequentes de carregamento.

Para as combinações quase permanentes, em cada combinação, as ações permanentes são consideradas com seus valores integrais, enquanto que os valores das ações variáveis são reduzidos por meio de um coeficiente  $\psi_2$ , estabelecido na norma NBR 8681:2003, conforme a tabela 1.



**Tabela 1- Valores dos fatores de combinação ( $\psi_0$ ) e de redução ( $\psi_1$  e  $\psi_2$ ) para as ações variáveis**

Ações	$\psi_0$	$\psi_1$	$\psi_2^{3), 4)}$
<b>Cargas acidentais de edifícios</b>			
Locais em que não há predominância de pesos e de equipamentos que permanecem fixos por longos períodos de tempo, nem de elevadas concentrações de pessoas. <sup>1)</sup>	0,5	0,4	0,3
Locais em que há predominância de pesos de equipamentos que permanecem fixos por longos períodos de tempo, ou de elevadas concentrações de pessoas. <sup>2)</sup>	0,7	0,6	0,4
Bibliotecas, arquivos, depósitos, oficinas e garagens.	0,8	0,7	0,8
<b>Vento</b>			
Pressão dinâmica do vento nas estruturas em geral	0,6	0,3	0
<b>Temperatura</b>			
Variações uniformes de temperatura em relação à média anual local	0,6	0,5	0,3
<b>Cargas móveis e seus efeitos dinâmicos</b>			
Passarelas de pedestres	0,6	0,4	0,3
Pontes rodoviárias	0,7	0,5	0,3
Pontes ferroviárias não especializadas	0,8	0,7	0,5
Pontes ferroviárias especializadas	1,0	1,0	0,6
Vigas de rolamentos de pontes rolantes	1,0	0,8	0,5
<sup>1)</sup> Edificações residenciais, de acesso restrito. <sup>2)</sup> Edificações comerciais, de escritórios e de acesso público. <sup>3)</sup> Para combinações excepcionais onde a ação principal for sismo, admite-se adotar para $\psi_2$ o valor zero. <sup>4)</sup> Para combinações excepcionais onde a ação principal for o fogo, o fator de redução $\psi_2$ pode ser reduzido, multiplicando-o por 0,7.			

Fonte: Adaptado da tabela 6 da NBR 8681, 2003.

A norma NBR 6118:2014 define valores de deslocamentos limites práticos para a verificação em serviço do estado limite de deformações excessivas em estruturas, classificados em quatro grupos básicos:

- Aceitabilidade sensorial: o limite é caracterizado por vibrações indesejáveis ou efeito visual desagradável;
- Efeitos específicos: as deformações podem impedir a utilização adequada da construção;
- Efeitos em elementos não estruturais: os deslocamentos de elementos estruturais podem causar o mau funcionamento de elementos que não fazem parte da estrutura, porém estão ligados a ela;
- Efeitos em elementos estruturais: os deslocamentos podem influenciar o comportamento do elemento estrutural analisado, provocando afastamento em relação às hipóteses de cálculo adotadas. Caso os deslocamentos forem relevantes para o elemento estrutural considerado, seus efeitos sobre as tensões ou sobre a estabilidade da estrutura devem ser considerados.

**Tabela 2 - Limites para deslocamento.**

<b>Tipo de Efeito</b>	<b>Razão da limitação</b>	<b>Exemplo</b>	<b>Deslocamento a Considerar</b>	<b>Deslocamento Limite</b>
Aceitabilidade e sensorial	Visual	Deslocamentos visíveis em elementos estruturais	Total	$l/250$
	Outro	Vibrações sentidas no piso	Devido a cargas acidentais	$l/350$
Efeitos estruturais em serviço	Superfícies que devem drenar água	Coberturas e varandas	Total	$l/250^a$
	Pavimentos que devem permanecer planos	Ginásios e pistas de boliche	Total	$l/350 + \text{contraflecha}^b$
			Ocorrido após a construção do piso	$l/600$
Elementos que suportam equipamentos sensíveis	Laboratórios	Ocorrido após nivelamento do equipamento	De acordo com recomendação do fabricante do equipamento	

Efeitos em elementos não estruturais	Paredes	Alvenaria, caixilhos e revestimentos	Após a construção da parede	$l/500^c$ e 10mm e $\theta = 0,0017 \text{ rad}^d$	
		Divisórias leves e caixilhos de telescópios	Ocorrido após a instalação da divisória	$l/250^c$ e 25mm	
		Movimento lateral de edifícios	Provocado pela ação do vento para combinação frequente ( $\psi_1 = 0,30$ )	$H/1700$ e $H_i/850^e$ entre pavimentos <sup>f</sup>	
		Movimentos térmicos verticais	Provocado por diferença de temperatura	$l/400^g$ e 15mm	
	Forros	Movimentos térmicos horizontais	Provocado por diferença de temperatura	$H_i/500$	
		Revestimentos colados	Ocorrido após a construção do forro	$l/350$	
		Revestimentos pendurados ou com juntas	Deslocamento ocorrido após a construção do forro	$l/175$	
	Pontes rolantes	Desalinhamento de trilhos	Deslocamento provocado pelas ações decorrentes da frenagem	$H/400$	
	Efeitos em elementos estruturais	Afastamento em relação às hipóteses de cálculo adotadas	Se os deslocamentos forem relevantes para o elemento considerado, seus efeitos sobre as tensões ou sobre a estabilidade da estrutura devem ser considerados, incorporando-as ao modelo estrutural adotado.		

Fonte: Adaptado da tabela 13.3 da NBR 6118, 2014.

**Tabela 2 – Limites para deslocamento - continuação.**

- a As superfícies devem ser suficientemente inclinadas ou o deslocamento previsto compensado por contraflechas, de modo a não se ter acúmulo de água.
- b Os deslocamentos podem ser parcialmente compensados pela especificação de contraflechas. Entretanto, a atuação isolada da contraflecha não pode ocasionar um desvio do plano maior que  $l/350$ .
- c O vão  $l$  deve ser tomado na direção na qual a parede ou a divisória se desenvolve.
- d Rotação nos elementos que suportam paredes.
- e  $H$  é a altura total do edifício e  $H_i$  o desnível entre dois pavimentos vizinhos.
- f Esse limite aplica-se ao deslocamento lateral entre dois pavimentos consecutivos devido à atuação de ações horizontais. Não devem ser incluídos os deslocamentos devido às deformações axiais nos pilares. O limite também se aplica para o deslocamento vertical das extremidades de lintéis conectados a duas paredes de contraventamento, quando  $H_i$  representa o comprimento do lintel.
- g O valor  $l$  refere-se à distância entre o pilar externo e o primeiro pilar interno.

**NOTAS:**

- 1 Todos os valores limites de deslocamentos supõem elementos de vão  $l$  suportados em ambas as extremidades por apoios que não se movem. Quando se tratar de balanços, o vão equivalente a ser considerado deve ser o dobro do comprimento do balanço.
- 2 Para o caso de elementos de superfície, os limites prescritos consideram que o valor  $l$  é o menor vão, exceto em casos de verificação de paredes e divisórias, onde interessa a direção na qual a parede ou divisória se desenvolve, limitando-se esse valor a duas vezes o vão menor.
- 3 O deslocamento total deve ser obtido a partir da combinação das ações características ponderadas pelos coeficientes definidos na Seção 11.
- 4 Deslocamentos excessivos podem ser parcialmente compensados por contraflechas.

Fonte: Adaptado da tabela 13.3 da NBR 6118, 2014.

## 5.2 Fórmula de Branson

Branson realizou um estudo experimental em vigas retangulares e “T”, submetendo-as a carregamentos uniformemente distribuídos e de curta duração. Partindo desse ensaio, em 1963 propôs um modelo em que admite uma única inércia para todo o elemento de concreto, representando os trechos fissurados e não fissurados, baseado num

método semiprobabilístico. É tomada a variação de tensão ao longo da seção transversal e ao longo do comprimento, de maneira simplificada, utilizando expressões empíricas que fornecem valores médios de inércia.

Dessa formula o autor procurou simular, de forma aproximada, o efeito da fissuração no concreto, quando submetido à flexão, na obtenção das flechas imediatas. O método simplificado proposto por Branson adota uma fórmula de inércia em que ela é ponderada entre o estágio I e o estágio II puro ( $I_I$  e  $I_{II}$ ), chamada de momento de inércia efetivo. A fórmula de Branson é mostrada na seguinte equação:

$$I_m = \left( \frac{M_r^m}{M_a^m} \right) \cdot I_c + \left[ 1 - \left( \frac{M_r^m}{M_a^m} \right) \right] \cdot I_{II} \quad (47)$$

Onde:

- $I_m$ : Momento de inércia efetivo;
- $I_c$ : Momento de inércia da seção bruta da peça no estágio I;
- $I_{II}$ : Momento de inércia da peça no estágio II puro;
- $M_r$ : Momento de fissuração do concreto;
- $M_a$ : Maior momento de serviço atuante na estrutura;
- $m$ : índice de valor igual a 4, para situações onde a análise é realizada em apenas uma seção da peça ou, igual a 3, quando for feita a análise da peça ao longo de todo o seu comprimento.

O American Concrete Institute (ACI Committee 435, 1966) foi a primeira norma a adotar o método para o cálculo simplificado de flecha imediata. A norma brasileira NBR 6118 na versão de 1978, recomendava utilizar a inércia do estágio I puro para o cálculo de flechas de elementos lineares, o que pode levar a resultados superestimados. Na versão de 2003, a norma passou a adotar a fórmula de Branson para o cálculo de flechas imediatas em vigas (JUNGES, 2011). Posteriormente, na versão NBR 6118:2014 foi adotado este método também para a estimativa de flechas imediatas em lajes de concreto armado.

Para o cálculo de deslocamentos imediatos em lajes de concreto armado, a NBR 6118:2014 fornece a equação da rigidez equivalente, utilizando a fórmula de Branson, dada por:

$$(EI)_{eq} = E_{cs} \cdot \left\{ \left( \frac{M_r^3}{M_a^3} \right) \cdot I_c + \left[ 1 - \left( \frac{M_r^3}{M_a^3} \right) \right] \cdot I_{II} \right\} \leq E_{cs} \cdot I_c. \quad (48)$$

Sendo que:

- $(EI)_{eq}$ : rigidez equivalente da estrutura;
- $E_{cs}$ : módulo de elasticidade secante do concreto;
- O valor adotado para o índice  $m$ , mostrado na equação 48, é igual a 3.

Segundo a NBR 6118:2014, nos estados limites de serviço as estruturas trabalham parcialmente no estágio I e parcialmente no estágio II, a separação entre essas duas partes é definida pelo momento de fissuração. O momento de fissuração  $M_r$  é dado por:

$$M_r = \frac{\alpha f_{ct} I_c}{y_t} \quad (49)$$

Sendo:

- $\alpha = 1,2$  para seções “T” ou “duplo T”;
- $\alpha = 1,3$  para seções “I” ou “T invertido”;
- $\alpha = 1,5$  para seções retangulares.

Onde:

- $\alpha$  é o fator que correlaciona aproximadamente a resistência à tração na flexão com a resistência à tração direta;
- $y_t$  é a distância do centro da gravidade da seção à fibra mais tracionada;
- $I_c$  é o momento de inércia da seção bruta de concreto;
- $f_{ct}$  é a resistência à tração direta do concreto, sendo que para análise no estado limite de deformação excessiva é utilizado o valor médio  $f_{ct,m}$ .

O valor do  $f_{ct,m}$  com, para concretos com  $f_{ck}$  até 50 MPa, é dado por:

$$f_{ct,m} = 0,3 \cdot f_{ck}^{2/3} \quad (50)$$

O momento de inércia da seção bruta  $I_c$  é dado pela equação:

$$I_c = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad (51)$$

Para a determinação do momento de inércia da peça no estágio II puro ( $I_{II}$ ), é necessário primeiramente encontrar a posição da linha neutra da peça fissurada ( $x_{II}$ ), que pode ser determinada pela seguinte equação de segundo grau:

$$b \cdot \frac{x_{II}^2}{2} + \alpha_e \cdot A'_s \cdot (x_{II} - d') - \alpha_e \cdot A_s \cdot (d - x_{II}) = 0 \quad (52)$$

Para quando não houver armadura na área comprimida da seção da laje ( $A'_s = 0$ ), a equação pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{x_{II}^2}{2} + \frac{2 \cdot A_s \cdot \alpha_e}{b} \cdot x_{II} - \frac{2 \cdot A_s \cdot d \cdot \alpha_e}{b} = 0 \quad (53)$$

Onde:

- $b$  é a largura da seção transversal, onde para lajes é considerada largura unitária (1 m);
- $x_{II}$  é a posição da linha neutra da peça no estágio II puro;
- $A_s$  é a área de armadura inferior da laje;
- $A'_s$  é a área de armadura superior da laje;
- $d$  é o centro de gravidade da armadura tracionada;
- $d'$  o centro de gravidade da armadura comprimida;
- $\alpha_e$  é a relação entre o módulo de elasticidade do aço ( $E_s$ ) utilizado na armadura e o módulo de elasticidade secante do concreto ( $E_{cs}$ ), dado por:

$$\alpha_e = \frac{E_s}{E_{cs}} \quad (54)$$

O momento de inércia da peça fissurada  $I_{II}$  é dado pela equação:

$$I_{II} = \frac{b \cdot x_{II}^3}{12} + b \cdot x_{II} \cdot \left(\frac{x_{II}}{2}\right)^2 + \alpha_e \cdot A_s (d - x_{II})^2 \quad (55)$$

### 5.3 Flecha diferida no tempo

A fluência é o fenômeno em que ocorre o aumento gradual da deformação de um elemento de concreto, quando submetido a um estado de tensões constante ao longo do tempo. As flechas diferidas no tempo são causadas em decorrência da fluência do concreto. A taxa de crescimento dos deslocamentos da estrutura pela fluência é alta nos períodos imediatamente superiores à aplicação do carregamento, diminuindo ao longo do tempo, até estabilizar em um valor máximo limite (METHA; MONTEIRO, 2008).

De acordo com a norma NBR 6118:2014, a flecha diferida no tempo pode ser calculada de maneira aproximada multiplicando a flecha imediata pelo fator  $\alpha_f$  dado pela equação:

$$\alpha_f = \frac{\Delta\xi}{1 + 50\rho'} \quad (56)$$

Sendo  $\rho'$  determinado por:

$$\rho' = \frac{A'_s}{b \cdot d} \quad (57)$$

Onde:

- $A'_s$  é a armadura da área comprimida da seção, caso exista;
- $b$  é a largura da seção transversal, considerada unitária no caso de lajes;
- $d$  é o centro de gravidade da armadura tracionada;
- $\xi$  é um coeficiente função do tempo.

O coeficiente  $\xi$  pode ser obtido diretamente pela tabela 2 ou ser calculado pela equação:

$$\Delta\xi = \xi(t) - \xi(t_0) \quad (58)$$

Sendo:

- $t$  o tempo, em meses, quando se deseja o valor da flecha diferida;
- $t_0$  a idade, em meses, referente à data de aplicação da carga de longa duração.

Para um tempo  $t$  menor que 70 meses,  $\xi(t)$  é dado por:



$$\xi(t) = 0,68 \cdot (0,996^t) \cdot t^{0,32} \quad (59)$$

Para um tempo  $t$  maior ou igual a 70 meses,  $\xi(t)$  é dado por:

$$\xi(t) = 2 \quad (60)$$

**Tabela 3 - Valores do coeficiente  $\xi$  em função do tempo.**

<b>Tempo (t)</b> (meses)	0	0,5	1	2	3	4	5	10	20	40	$\geq 70$
<b>Coeficiente</b> $\xi(t)$	0	0,54	0,68	0,84	0,95	1,04	1,12	1,36	1,64	1,89	2

Fonte: Adaptado da tabela 17.1 da NBR 6118, 2014.

No caso serem aplicadas parcelas de carga de longa duração em idades diferentes, pode-se usar a equação a seguir para determinar um valor ponderado para  $t_0$ :

$$t_0 = \frac{\sum P_i \cdot t_{0i}}{\sum P_i} \quad (61)$$

Onde:

- $P_i$  representa as parcelas de carga;
- $t_{0i}$  é a idade de aplicação de cada parcela  $P_i$ , em meses.

O valor da flecha total será dado, então, por:

$$f_t = f_i \cdot (1 + \alpha_f) \quad (62)$$

## 5.4 Variabilidade das flechas

A norma brasileira permite verificar de forma simplificada os deslocamentos nas vigas e lajes, porém é importante destacar que a deformação real da estrutura depende de uma série de fatores. Segundo a NBR 6118:2014, tanto o processo construtivo quanto as propriedades dos materiais no momento de sua efetiva solitação, com destaque no módulo

de elasticidade e na resistência à tração, influenciarão na deformação da estrutura e, por haver uma grande variabilidade destes parâmetros, há uma grande variabilidade das flechas reais. Assim, não se pode esperar uma grande precisão nas previsões de deslocamentos obtidas pelos processos citados na norma.

No entanto a variabilidade dos deslocamentos tem influência de outros fatores além dos citados pela norma brasileira, como: o grau de fissuração, as variações nos carregamentos reais, nas propriedades de fluência e retração do concreto, nas dimensões das lajes, entre outros efeitos.

Diversos autores apresentaram resultados de estudos numéricos e medidas experimentais que confirmam a afirmação de que as flechas calculadas variam significativamente em relação aos valores medidos nas estruturas reais. Em 1972, o relatório ACI Commitee 435, publicado por este mesmo comitê concluiu existir uma probabilidade de 90% de que os deslocamentos de uma determinada viga estejam dentro do limite de 20% abaixo ou de 30% acima do valor calculado.

A variabilidade das flechas pode ser medida pelo coeficiente de variação (*COV*), que é a relação entre o desvio padrão e a média dos deslocamentos. Sbarounis (1984) relatou coeficientes de variação de 0,21 para flechas medidas em campo em edifícios de múltiplos andares. Jokinen e Scanlon (1984) apresentaram coeficientes de 0,30 para o mesmo tipo de construção.

Um estudo realizado por Coelho (2011) mostrou que a variabilidade dos deslocamentos de vigas e lajes de concreto armado depende basicamente da razão entre o momento fletor na seção crítica ( $M_a$ ) e o momento de fissuração do elemento estrutural ( $M_r$ ). Os valores de *COV* mais elevados foram observados para flechas que ocorrem quando os valores dos momentos fletores na seção crítica estão mais próximos dos valores do momento de fissuração.

Este mesmo estudo ainda apresenta conclusões sobre a influência da taxa da armadura de flexão do elemento estrutural e da umidade relativa do ambiente. O *COV* tende a aumentar quando é diminuída a taxa da armadura de flexão, o que tem relação com o efeito da razão entre o momento fletor da seção crítica e o momento de fissuração. Taxas de armadura maiores são necessárias para absorver momentos fletores de serviço mais elevados, e a probabilidade de formação de fissuras aumenta para momentos fletores mais elevados.

O estudo também mostra que a umidade relativa do ar influencia na variabilidade dos deslocamentos. Quando a umidade diminui, aumentam os deslocamentos, devido aos efeitos da fluência e retração do concreto.

## 6. METODOLOGIA

O método utilizado neste trabalho foi o estudo de caso. Serão determinadas as flechas elásticas, imediatas e diferidas no tempo de diversas lajes. Primeiramente serão analisadas lajes de diferentes dimensões, considerando-as simplesmente apoiadas nos quatro cantos em apoios indeformáveis. Para este caso serão utilizados os seguintes métodos:

- Tabelas de Bares;
- Processo de Marcus;
- Método dos elementos finitos;
- Analogia de grelha.

Também serão apresentados exemplos de lajes apoiadas em vigas de menor rigidez e ainda um exemplo de laje painel de lajes planas (lajes sem vigas, também conhecido como laje cogumelo). Para estes exemplos serão utilizados somente o método dos elementos finitos e analogia de grelha.

### 6.1 Estado limite último

O dimensionamento para o estado limite último das lajes apresentadas nos exemplos mostrados no item 7 foi realizado de acordo com a seção 19 da norma NBR 6118:2014. Os momentos atuantes nas lajes foram obtidos através das tabelas de Bares, onde as tabelas utilizadas são apresentadas no Anexo I deste trabalho.

### 6.2 Método dos elementos finitos

Para a análise dos deslocamentos das lajes através do método dos elementos finitos foi utilizado o software SAP2000<sup>®</sup>.

O SAP2000<sup>®</sup> é um programa de elementos finitos, desenvolvido pela empresa Computers and Structures, Inc. Utiliza interface gráfica 3D orientada a objetos, sendo preparado para realizar, de forma integrada, a modelagem, análise e dimensionamento de diversos tipos de estruturas.

### **6.3 Analogia de grelha**

Para a análise dos deslocamentos nas lajes através de analogia de grelha foi utilizado o software Eberick<sup>®</sup> V9.

O Eberick<sup>®</sup> é um programa para projeto estrutural em concreto armado e concreto protendido, desenvolvido pela empresa AltoQi, inclui as etapas de lançamento, análise da estrutura, dimensionamento e detalhamento final dos elementos estruturais, de acordo com a norma NBR 6118:2014. Possui sistema gráfico de entrada de dados e ainda permite a visualização tridimensional da estrutura modelada.

## 7. EXEMPLOS

Para todos os exemplos de estudo de caso, a flecha diferida no tempo será obtida considerando o procedimento de cálculo simplificado do item 17.3.2.1.2 da norma NBR 6118:2014. O valor de  $\alpha_f$  calculado a seguir serve para todos os exemplos apresentados.

A data de aplicação da carga de longa duração ( $t_0$ ) será adotada como 1 mês e a data para qual se deseja obter a flecha ( $t$ ) será adotada como 70 meses. Assim, de acordo com a tabela 2:

$$\xi(t_0) = 0,68$$

$$\xi(t) = 2$$

Pela equação 58:

$$\Delta\xi = \xi(t) - \xi(t_0) = 2 - 0,68 = 1,32$$

Como não há armadura na seção comprimida da laje em nenhum dos exemplos apresentados, o fator  $\alpha_f$  será dado por, de acordo com a equação 57:

$$\alpha_f = \frac{\Delta\xi}{1 + 50\rho'} = \frac{\Delta\xi}{1 + 0} = 1,32$$

### 7.1 Laje simplesmente apoiada com $\lambda = 1,0$

Laje maciça, simplesmente apoiada nos quatro lados em apoios indeformáveis, com os vãos:

- $l_x = 6,0$  m
- $l_y = 6,0$  m

Logo:

$$\lambda = \frac{l_y}{l_x} = \frac{6,0}{6,0} = 1,0$$

Foi escolhida uma altura  $h = 15\text{cm}$  e um cobrimento inferior  $c = 3\text{cm}$ . O concreto utilizado possui  $f_{ck} = 25\text{ MPa}$  e para o agregado graúdo foi escolhido granito.

Nesta análise foi considerada a laje como sendo para uma construção comercial, pra uso como escritório, sendo foi adotada uma carga acidental de  $2,0\text{ kN/m}^2$ , de acordo com a norma NBR 6120:1980. Sendo o peso específico do concreto igual a  $25\text{ kN/m}^3$ , para a altura definida, tem-se uma carga de peso próprio da laje igual a  $3,75\text{ kN/m}^2$ . Foi considerado também o carregamento devido a regularização, reboco e revestimento, levando em consideração a espessura de cada item, juntamente com seu peso específico, resultando numa carga de  $1\text{ kN/m}^2$

$$g = 3,75 + 1,0 = 4,75\text{ kN/m}^2$$

$$q = 2,0\text{ kN/m}^2$$

A carga total atuante é então:

$$p = 4,75 + 2,0 = 6,75\text{ kN/m}^2$$

### 7.1.1 Estado limite último

Segundo NBR 6118:2014, para combinação última normal as cargas devem ser majoradas por um coeficiente de ponderação  $\gamma_f$ , onde, de acordo com a tabela 11.1 da norma, para este caso tanto as cargas permanentes quanto as variáveis deverão ser multiplicadas por  $\gamma_f$  igual a 1,4. Neste caso podem ser calculados os momentos máximos e depois majorá-los. Os momentos máximos positivos, de acordo com as equações 9 e 10, com  $\mu_x$  e  $\mu_y$  obtidos através pela tabela 24 no Anexo I, serão dados por:

$$M_x = \mu_x \cdot \frac{p \cdot l_x^2}{100} = 4,41 \times \frac{(6,75\text{ kN/m}^2) \times (6,0\text{m})^2}{100} = 10,72\text{ kN.m/m}$$

$$M_y = \mu_y \cdot \frac{p \cdot l_x^2}{100} = 4,41 \times \frac{(6,75\text{ kN/m}^2) \times (6,0\text{m})^2}{100} = 10,72\text{ kN.m/m}$$

Majorando  $M_x$  e  $M_y$  obtidos pelo coeficiente  $\gamma_f = 1,4$  tem-se os momentos de cálculo:

$$M_{x_d} = \gamma_f \cdot M_x = 1,4 \times 10,72 = 15,01 \text{ kN.m}$$

$$M_{y_d} = \gamma_f \cdot M_y = 1,4 \times 10,72 = 15,01 \text{ kN.m}$$

A posição da linha neutra no eixo  $x$ , no estágio I, para a determinação da armadura inferior  $A_{sx}$ , é dada por:

$$x = 1,25 \cdot d_x \cdot \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{M_{x_d}}{0,425 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d_x}} \right] \quad (63)$$

O valor da altura efetiva da laje  $d_x$  é dado subtraindo da altura  $h$  o cobrimento  $c$  e metade do diâmetro da barra da armadura utilizada. Neste caso foi adotado o uso de barras de 8,0mm de diâmetro. Logo:

$$d_x = h - c - \frac{\phi_x}{2} \quad (64)$$

$$d_x = 15\text{cm} - 3\text{cm} - \frac{0,8\text{cm}}{2} = 11,6 \text{ cm}$$

A resistência de cálculo do concreto ( $f_{cd}$ ) é dada por:

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \quad (65)$$

Para combinação última normal o valor de  $\gamma_c$  é igual a 1,4.

Sendo, para o cálculo de lajes,  $b$  considerado com largura unitária (1m), o valor da posição da linha neutra será dada por:

$$x = 1,25 \times (11,6 \text{ cm}) \times \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{(1501 \text{ kN.cm})}{0,425 \times \left(\frac{2,5 \text{ kN/cm}^2}{1,4}\right) \times (100 \text{ cm}) \times (11,6 \text{ cm})}} \right]$$

$$x = 1,107 \text{ cm}$$

$$\frac{x}{d} = 1,107 \text{ cm}$$

Pelo valor de  $x$  obtido, esta laje, assim como a maioria das lajes, se encontra no domínio 2 de deformação. Por apresentar pequena diferença de resultado, foi utilizado o procedimento para cálculo de estruturas no domínio 3.

A área de armadura  $A_{sx}$  será dada por:

$$A_{sx} = \frac{Mx_d}{f_{yd} \cdot (d_x - 0,4x)} \quad (66)$$

A resistência de cálculo do aço ( $f_{yd}$ ) é dada por:

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} \quad (67)$$

Para combinação última normal o valor de  $\gamma_s$  é igual a 1,15. Logo:

$$A_{sx} = \frac{(1501 \text{ kN.cm})}{\left(\frac{5,0 \text{ kN/cm}^2}{1,15}\right) \times [(11,6 \text{ cm}) - 0,4 \times (1,107 \text{ cm})]}$$

$$A_{sx} = 3,09 \text{ cm}^2/\text{m}$$

A posição da linha neutra no eixo  $y$ , no estágio I, para a determinação da armadura inferior  $A_{sy}$ , é determinada de forma semelhante ao obtido pelo eixo  $x$ , pela equação 61. O valor da altura efetiva da laje  $d_y$ , considerando barra da armadura com diâmetro de 8,0 mm, é dado por:



$$d_y = h - \frac{\phi_x}{2} - \frac{\phi_y}{2} \quad (68)$$

$$d_y = 11,6 \text{ cm} - \frac{0,8 \text{ cm}}{2} - \frac{0,8 \text{ cm}}{2} = 10,8 \text{ cm}$$

O valor da posição da linha neutra é:

$$x = 1,25 \times (10,8 \text{ cm}) \times \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{(1501 \text{ kN.cm})}{0,425 \times \left(\frac{2,5 \text{ kN/cm}^2}{1,4}\right) \times (100 \text{ cm}) \times (10,8 \text{ cm})}} \right]$$

$$x = 1,197 \text{ cm}$$

A área  $A_{sy}$ , obtida da mesma forma que  $A_{sx}$ , pela equação 64, é dada por:

$$A_{sy} = \frac{(1501 \text{ kN.cm})}{\left(\frac{5,0 \text{ kN/cm}^2}{1,15}\right) \times [(10,8 \text{ cm}) - 0,4 \times (1,197 \text{ cm})]}$$

$$A_{sy} = 3,34 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Deve ser verificada também a armadura mínima, que pode ser calculada, de acordo com a norma, através da equação:

$$A_{s,\text{mín}} = 0,67 \cdot \rho_{\text{mín}} \cdot b \cdot h \quad (69)$$

Para  $\rho_{\text{mín}}$  igual a 0,15%:

$$A_{s,\text{mín}} = 0,67 \times 0,0015 \times 100 \times 15 = 1,51 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Como  $A_{s,\text{mín}}$  é menor do que  $A_{sx}$  e  $A_{sy}$ , não são alterados os valores das armaduras.

Assim, respeitando o espaçamento mínimo entre barras definido pela norma, as armaduras da laje ficam definidas em 7 barras de 8,0 mm por metro de laje na direção  $x$ , com 14 cm de espaçamento ( $7 \phi 8,0 \text{ c}/14$ ) e 7 barras de 8,0 mm por metro de laje na direção  $y$ , com 14 cm de espaçamento ( $7 \phi 8,0 \text{ c}/14$ ). Assim, as armaduras efetivas ficam definidas em:

$$A_{sx,e} = 3,52 \text{ cm}^2/m$$

$$A_{sy,e} = 3,52 \text{ cm}^2/m$$

### 7.1.2 Tabelas de Bares

Para este método, neste trabalho será apenas verificada a flecha elástica.

Para a estrutura em serviço, deve-se utilizar a combinação de carga quase permanente para a verificação dos deslocamentos. O carregamento atuante na estrutura então será:

$$p_{serv} = g + \psi_2 \cdot q \quad (70)$$

Por esta laje ser de uma edificação comercial, o valor de  $\psi_2$ , de acordo com a tabela 1, é de 0,4. Logo:

$$p_{serv} = 4,75 + 0,4 \times 2,0 = 5,55 \text{ kN/m}^2$$

Os momentos para carregamento em serviço serão:

$$M_{x,serv} = 8,81 \text{ kN.m}$$

$$M_{y,serv} = 8,81 \text{ kN.m}$$

Esta laje é atribuída ao “caso 1” de vinculação, de acordo com a figura 21. A flecha elástica será dada pela equação 13, onde o valor de  $\alpha$ , obtido pela tabela 23 do Anexo I, será igual a 4,67.

Deve ser calculado, também, o módulo de elasticidade secante do concreto ( $E_{cs}$ ), através da equação 14. Para isso, primeiro deverá ser calculado o  $\alpha_i$ , pela equação 15 e o  $E_{ci}$ , pela equação 16. Assim:

$$\alpha_i = 0,8 + 0,2 \cdot \frac{25}{80} \leq 1,0$$

$$\alpha_i = 0,8625$$

$$E_{ci} = 1,0 \times 5600 \times \sqrt{25} = 28000 \text{ MPa}$$

$$E_{cs} = 0,8625 \times 28000 = 24150 \text{ MPa}$$

Logo, pela equação 13, a flecha elástica é dada por:

$$f = \frac{(5,55 \times 10^{-4} \text{ kN/cm}^2) \times (600)^4}{(2415 \text{ kN/cm}^2) \times (15)^3} \times \frac{4,67}{100}$$

$$f = 0,412 \text{ cm}$$

A flecha diferida no tempo será, considerando o valor de  $\alpha_f$  obtido anteriormente, igual a:

$$f_d = \alpha_f \cdot f = 1,32 \times 0,412 = 0,544 \text{ cm}$$

E a flecha total, segundo a equação 63:

$$f_t = f_i \cdot (1 + \alpha_f) = 0,412 \times (1 + 1,32) = 0,956 \text{ cm}$$

### 7.1.3 Processo de Marcus

Pelas equações 35 e 36 são obtidos os momentos máximos nas direções  $x$  e  $y$ . Sendo esta laje atribuída ao “caso 1” de vinculação, de acordo com a figura 21, são obtidos os

coeficientes  $m_x = 27,43$  e  $m_y = 27,43$  pela tabela 25 do Anexo II. Logo os momentos obtidos, para o carregamento  $p = 6,75 \text{ kN/m}^2$ , serão:

$$M_x = \frac{p \cdot l_x^2}{m_x} = \frac{(6,75 \text{ kN/m}^2) \times (6,0 \text{ m})^2}{27,43} = 8,86 \text{ kN} \cdot \text{m/m}$$

$$M_y = \frac{p \cdot l_x^2}{m_y} = \frac{(6,75 \text{ kN/m}^2) \times (6,0 \text{ m})^2}{27,43} = 8,86 \text{ kN} \cdot \text{m/m}$$

Os momentos para carregamento de serviço serão:

$$M_{x, \text{serv}} = 7,28 \text{ kN} \cdot \text{m/m}$$

$$M_{y, \text{serv}} = 7,28 \text{ kN} \cdot \text{m/m}$$

Como a flecha decorrente do quinhão de carga do eixo  $x$  deve ser a mesma flecha decorrente do quinhão de carga do eixo  $y$ , a deformação desta laje será calculada pela equação 25.

Será utilizado o mesmo carregamento, para combinação de carga quase frequente, calculado no item 7.1.2. A carga  $p_{\text{serv}} k_x = 0,5$ , calculado pela equação 31.

$$k_x = \left( \frac{\lambda^4}{1 + \lambda^4} \right) = \left( \frac{1^4}{1 + 1^4} \right) = 0,5$$

Assim, conforme a equação 33:

$$p_x = k_x \cdot p_{\text{serv}} = 0,5 \times 5,55 = 2,78 \text{ kN/m}^2$$

Primeiramente foi feito o cálculo da rigidez equivalente da estrutura, de acordo com o item 5.2 deste trabalho, através da equação 49:

$$(EI)_{eq} = E_{cs} \cdot \left\{ \left( \frac{M_r^3}{M_a^3} \right) \cdot I_c + \left[ 1 - \left( \frac{M_r^3}{M_a^3} \right) \right] \cdot I_{II} \right\} \leq E_{cs} \cdot I_c.$$

Onde o módulo de elasticidade secante do concreto já foi calculado no item 7.1.2, sendo:

$$E_{cs} = 24150 \text{ MPa}$$

O momento de fissuração  $M_r$  é calculado pela equação 50. Para seções retangulares,  $\alpha$  é igual a 1,5 e para o valor de  $f_{ct}$  é utilizado o  $f_{ct,m}$ , calculado pela equação 51:

$$f_{ct,m} = 0,3 \cdot f_{ck}^{2/3} = 0,3 \times (25)^{2/3} = 2,565 \text{ MPa}$$

O momento de inércia da seção bruta é calculado considerando largura unitária da laje (1,0 m). Pela equação 53:

$$I_c = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{100 \times 15^3}{12} = 28125 \text{ cm}^4$$

O valor de  $y_t$  é dado pela metade da altura da laje, sendo para este caso 7,5 cm.

Logo o momento de fissuração  $M_r$  é dado por:

$$M_r = \frac{\alpha f_{ct} I_c}{y_t} = \frac{1,5 \times (0,2565 \text{ kN/cm}^2) \times (28124 \text{ cm}^4)}{(7,5 \text{ cm})} = 1442,79 \text{ kN.cm} = 14,43 \text{ kN.m}$$

O momento máximo  $M_a$  será o momento  $M_x$  já calculado.

A posição da linha neutra da peça fissurada ( $x_{II}$ ) pode ser determinada pela seguinte equação 54, sendo  $\alpha_e$  calculado pela equação 55:

$$\alpha_e = \frac{E_s}{E_{cs}} = \frac{210000 \text{ MPa}}{24150 \text{ MPa}} = 8,696$$

$$\frac{x_{II}^2}{2} + \frac{2 \times (3,52 \text{ cm}^2) \times 8,696}{(100 \text{ cm})} \times x_{II} - \frac{2 \times (3,52 \text{ cm}^2) \times (11,6 \text{ cm}) \times 8,696}{(100 \text{ cm})} = 0$$

$$x_{II} = 2,376 \text{ cm}$$

Pela equação 56, o momento de inércia da peça fissurada será:

$$I_{II} = \frac{(100 \text{ cm}) \times (2,376 \text{ cm})^3}{12} + (100 \text{ cm}) \times (2,376 \text{ cm}) \left( \frac{2,376 \text{ cm}}{2} \right)^2 + 8,696 \\ \times (3,52 \text{ cm}^2) \times [(11,6 \text{ cm}) - 2,376 \text{ cm}]^2$$

$$I_{II} = 3051,4 \text{ cm}^4$$

Assim, resolvendo a equação 49, é obtida a rigidez equivalente da laje:

$$(EI)_{eq} = 47795 \text{ kN.m}^2$$

A rigidez da peça não fissurada é dada por:

$$EI = (24150 \times 10^3 \text{ kN/m}^2) \times (28125 \times 10^{-8} \text{ m}^4) = 6792 \text{ kN.m}^2$$

A rigidez equivalente obtida é maior do que a rigidez da peça não fissurada, isso significa que não ocorre a fissuração na laje. Logo, para o cálculo da flecha imediata, será utilizada a rigidez da peça no estágio I  $EI$ .

A flecha imediata obtida, através da equação 25, é:

$$f = \frac{5}{384} \cdot \frac{p_x \cdot l_x^4}{EI} = \frac{5}{384} \cdot \frac{(2,78 \text{ kN/m}^2) \cdot (6,0 \text{ m})^4}{(6792 \text{ kN.m}^2)} = 0,00689 \text{ m}$$

$$f = 0,689 \text{ cm}$$

A flecha diferida no tempo será, considerando o valor de  $\alpha_f$  obtido anteriormente, igual a:

$$f_d = \alpha_f \cdot f = 1,32 \times 0,689 = 0,910 \text{ cm}$$

E a flecha total, segundo a equação 62:

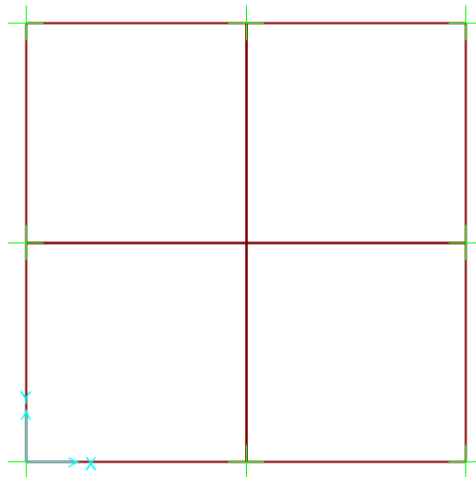
$$f_t = f_i \cdot (1 + \alpha_f) = 0,689 \times (1 + 1,32) = 1,60 \text{ cm}$$

#### 7.1.4 Método dos elementos finitos

Para a análise por elementos finitos, a laje foi modelada no software SAP2000. Na definição do material foi utilizado coeficiente de Poisson  $\nu = 0,2$  e o módulo de elasticidade secante  $E_{cs} = 24150 \text{ MPa}$ , calculado no item 7.1.2. Não será considerada a fissuração na laje, onde serão obtidas apenas as flechas elásticas.

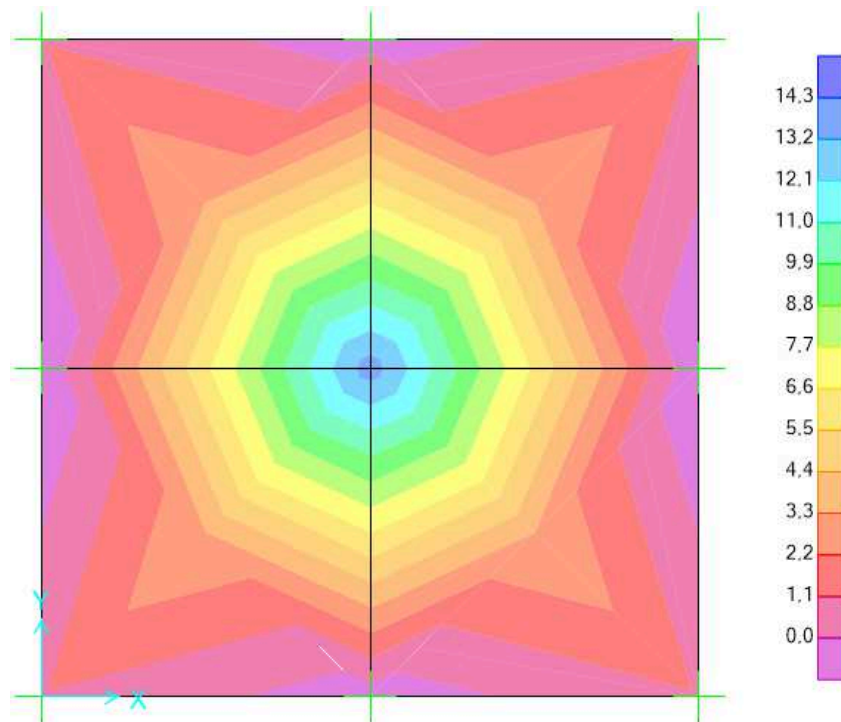
Primeiramente a laje foi discretizada em 4 elementos finitos de dimensão 3 x 3m, como mostra a figura 31.

**Figura 31- Laje discretizada em 4 elem 1**



Através desta modelagem, foi obtida a seguinte distribuição de momentos  $M_x$  ao longo da laje, para uma carga  $p = 6,75 \text{ kN/m}^2$ , conforme a figura 32.

Figura 32- Distribuição de momentos no eixo x (kN.m/m) para laje discretizada em 4 elementos de 3 x 3 m.



O momento  $M_x$  máximo obtido foi:

$$M_x = 13,77 \text{ kN.m/m}$$

Só serão mostrados, para o método dos elementos finitos, os valores do momento na direção principal  $x$ , por apresentarem os maiores valores, como é mostrado no item 7.1.1.

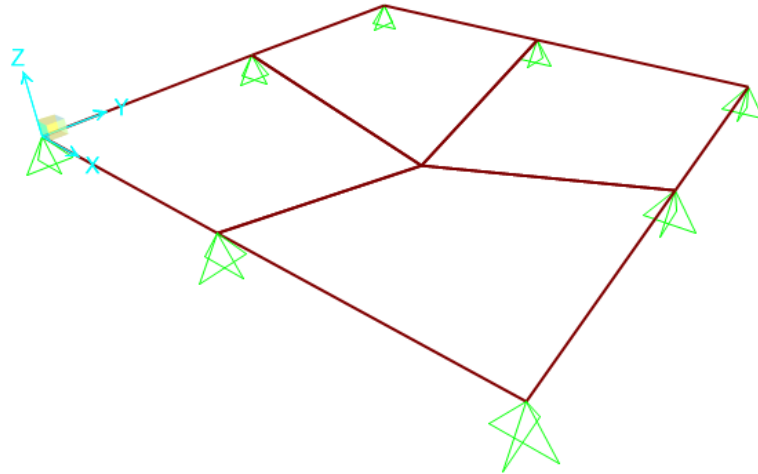
Sendo avaliado o estado limite de deslocamento excessivo, a análise das flechas na laje foi feita considerando a combinação de carga quase frequente, onde:

$$p_{serv} = g + \psi_2 \cdot q = 4,75 + 0,4 \times 2,0 = 5,55 \text{ kN/m}^2$$

O modelo deformado da estrutura pode ser visto na figura 33, em escala aumentada.

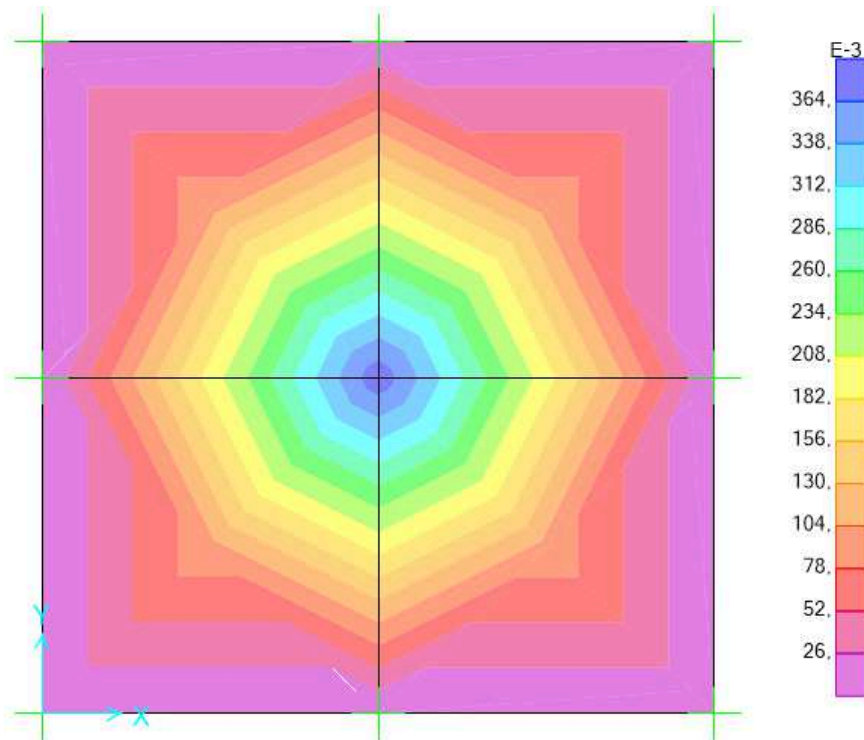


**Figura 33 - Forma deformada da laje discretizada em 4 elementos de 3 x 3 m.**



Os deslocamentos da laje são mostrados na figura 34.

**Figura 34- Deslocamentos (cm) na laje discretizada em 4 elementos de 3 x 3 m.**

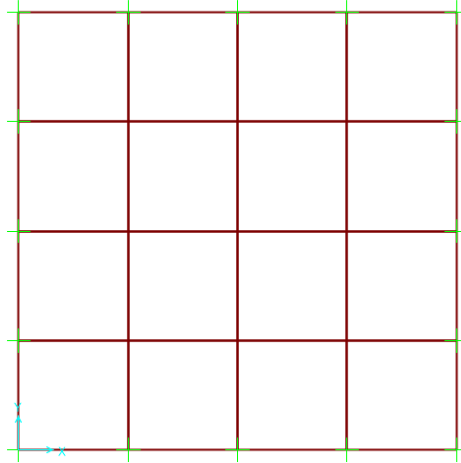


A flecha máxima na estrutura, segundo a análise, será:

$$f = 0,3839 \text{ cm}$$

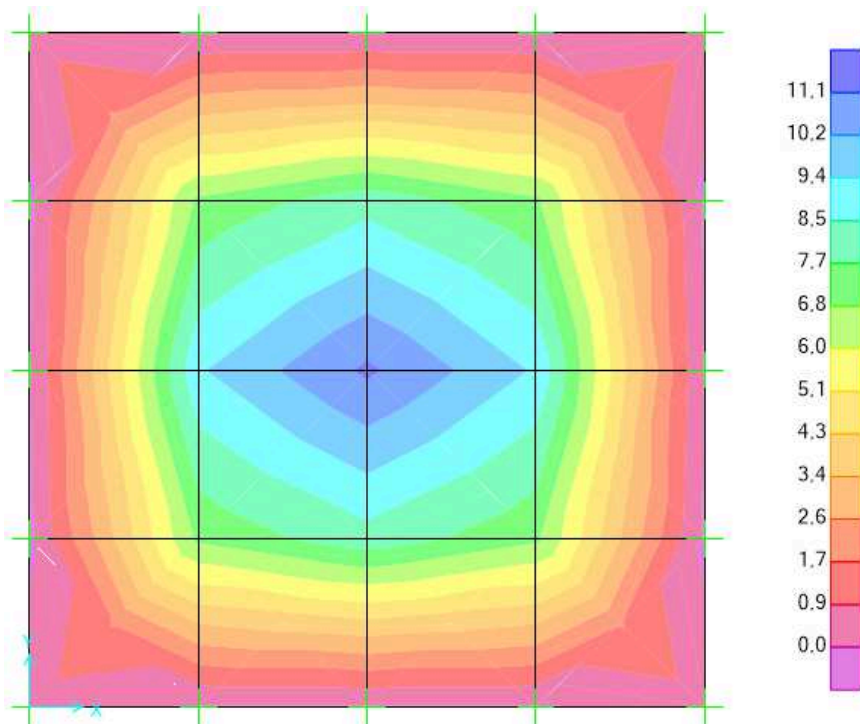
Realizando uma divisão do número de elementos finitos da laje, discretizando-a em 16 elementos de dimensão 1,5 x 1,5 m, tem-se o modelo mostrado na figura 35.

**Figura 35 - Laje discretizada em 16 elementos de 1,5 x 1,5 m.**



Para uma carga  $p = 6,75 \text{ kN/m}^2$ , tem-se a seguinte distribuição de momentos  $M_x$  ao longo da laje, conforme a figura 36.

**Figura 36 - Distribuição de momentos no eixo x (kN.m/m) para laje discretizada em 16 elementos de 1,5 x 1,5 m.**

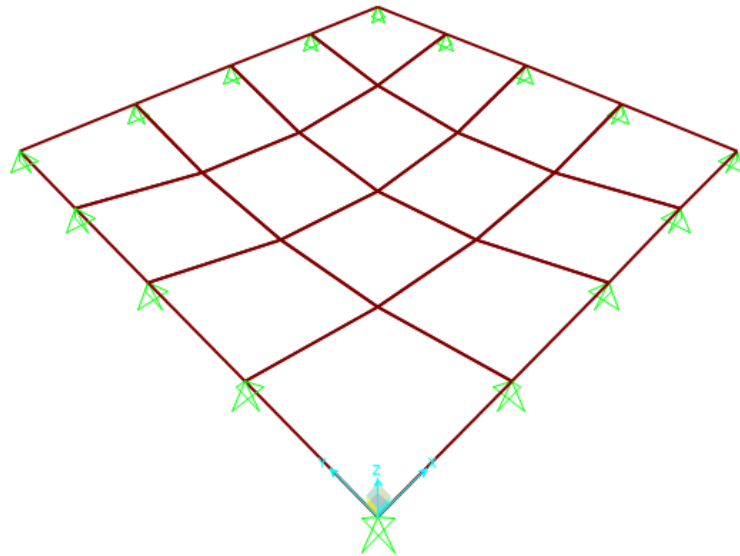


O momento  $M_x$  máximo obtido foi:

$$M_x = 11,21 \text{ kN.m/m}$$

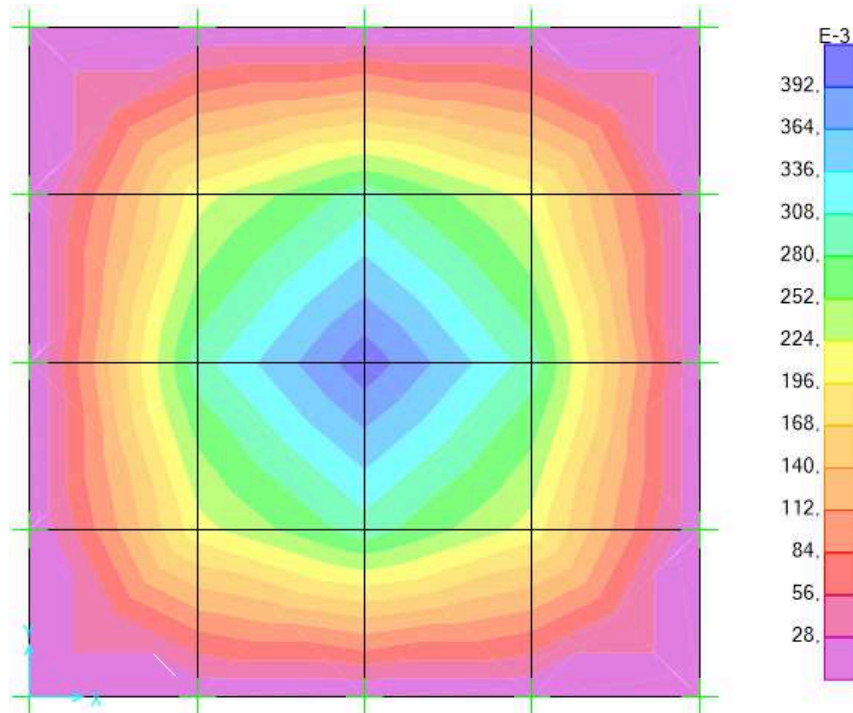
Considerando a carga de serviço  $p_{serv}$  determinada anteriormente, o modelo deformado da estrutura pode ser visto na figura 37, em escala aumentada.

**Figura 37 - Forma deformada da laje discretizada em 16 elementos de 3 x 3 m.**



Os deslocamentos da laje são mostrados na figura 38.

**Figura 38 - Deslocamentos (cm) na laje discretizada em 16 elementos de 1,5 x 1,5 m.**

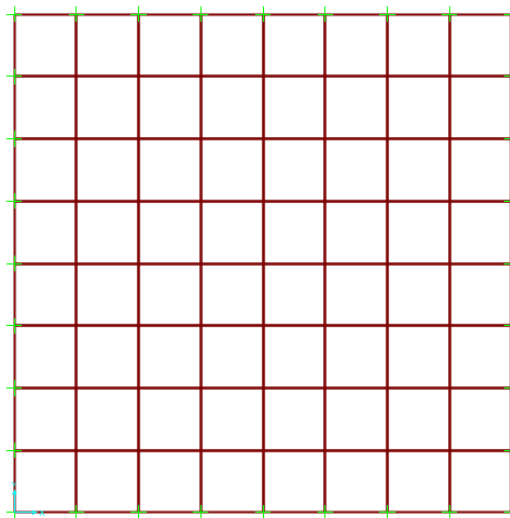


A flecha máxima na estrutura, segundo a análise, será:

$$f = 0,4121 \text{ cm}$$

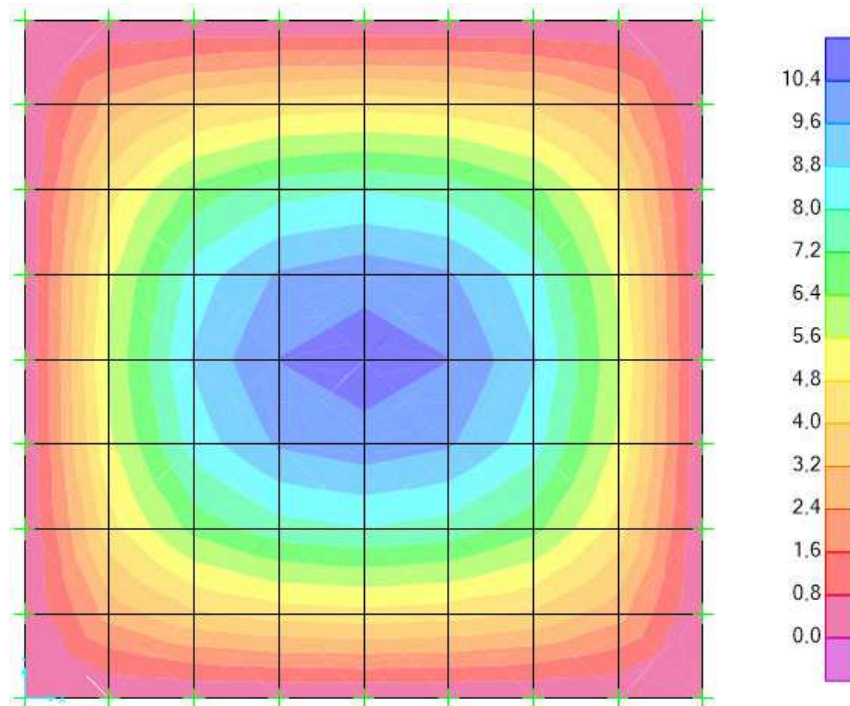
Realizando uma divisão dos elementos finitos, discretizando a laje em 64 elementos de dimensão 75 x 75 cm, tem-se o modelo apresentado na figura 39.

**Figura 39 - Laje discretizada em 64 elementos de 75 x 75 cm.**



Para uma carga  $p = 6,75 \text{ kN/m}^2$ , tem-se a seguinte distribuição de momentos  $M_x$  ao longo da laje, conforme a figura 40.

**Figura 40 - Distribuição de momentos no eixo x (kN.m/m) para laje discretizada em 64 elementos de 75 x 75 cm.**

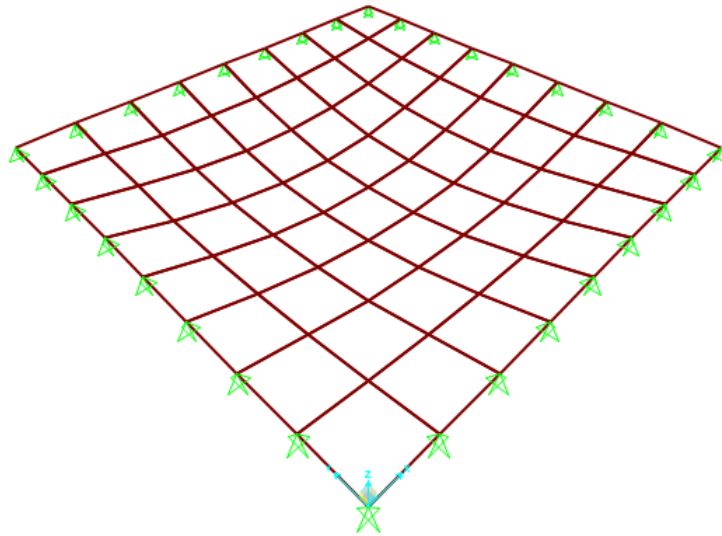


O momento  $M_x$  máximo obtido foi:

$$M_x = 10,85 \text{ kN.m/m}$$

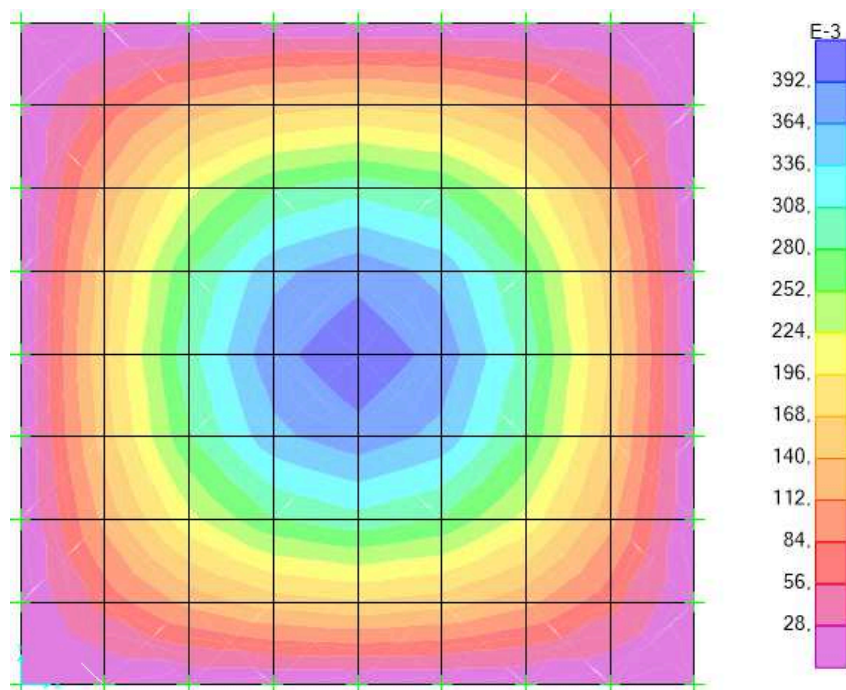
Considerando a carga de serviço  $p_{serv}$  determinada anteriormente, o modelo deformado da estrutura pode ser visto na figura 41, em escala aumentada.

Figura 41 - Forma deformada da laje discretizada em 64 elementos de 75 x 75 cm.



Os deslocamentos da laje são mostrados na figura 42.

Figura 42 - Deslocamentos (cm) na laje discretizada em 64 elementos de 75 x 75 cm.

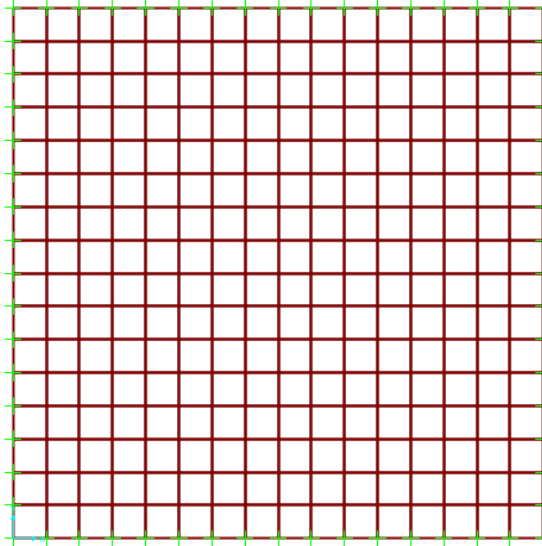


A flecha máxima na estrutura, segundo a análise, será:

$$f = 0,4126 \text{ cm}$$

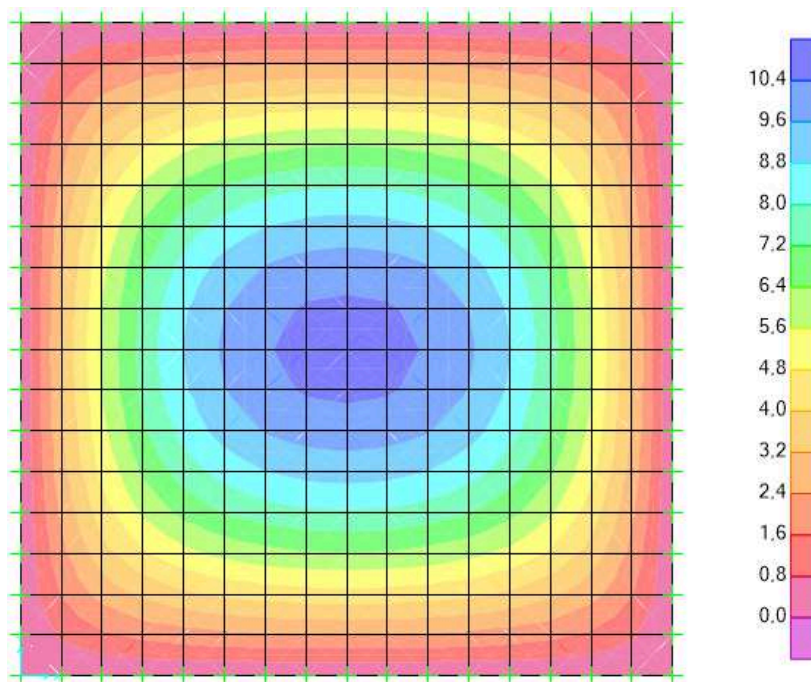
Por fim, realizando uma última divisão dos elementos finitos, discretizando a laje em 256 elementos de dimensão 37,5 x 37,5 cm, tem-se o modelo apresentado na figura 43.

**Figura 43 - Laje discretizada em 256 elementos de 37,5 x 37,5 cm.**



Para uma carga  $p = 6,75 \text{ kN/m}^2$ , tem-se a seguinte distribuição de momentos  $M_x$  ao longo da laje, conforme a figura 44.

**Figura 44 - Distribuição de momentos no eixo x (kN.m/m) para laje discretizada em 256 elementos de 37,5 x 37,5 cm.**

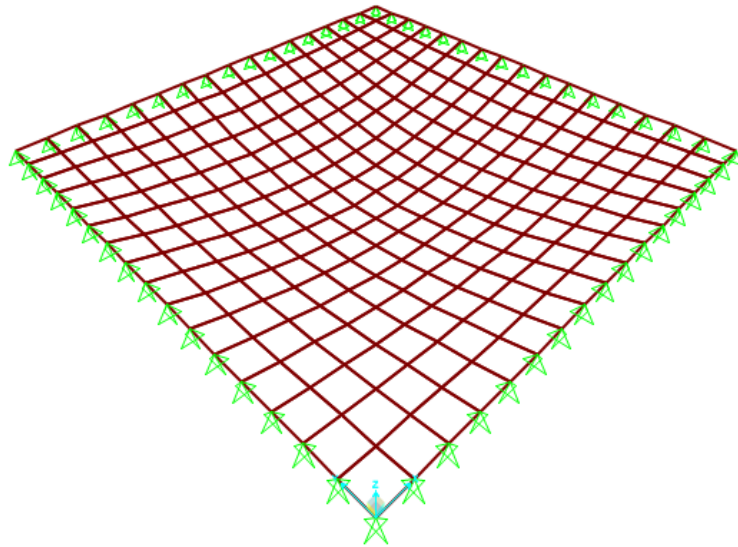


O momento  $M_x$  máximo obtido foi:

$$M_x = 10,77 \text{ kN.m/m}$$

Considerando a carga de serviço  $p_{serv}$  determinada anteriormente, o modelo deformado da estrutura pode ser visto na figura 45, em escala aumentada.

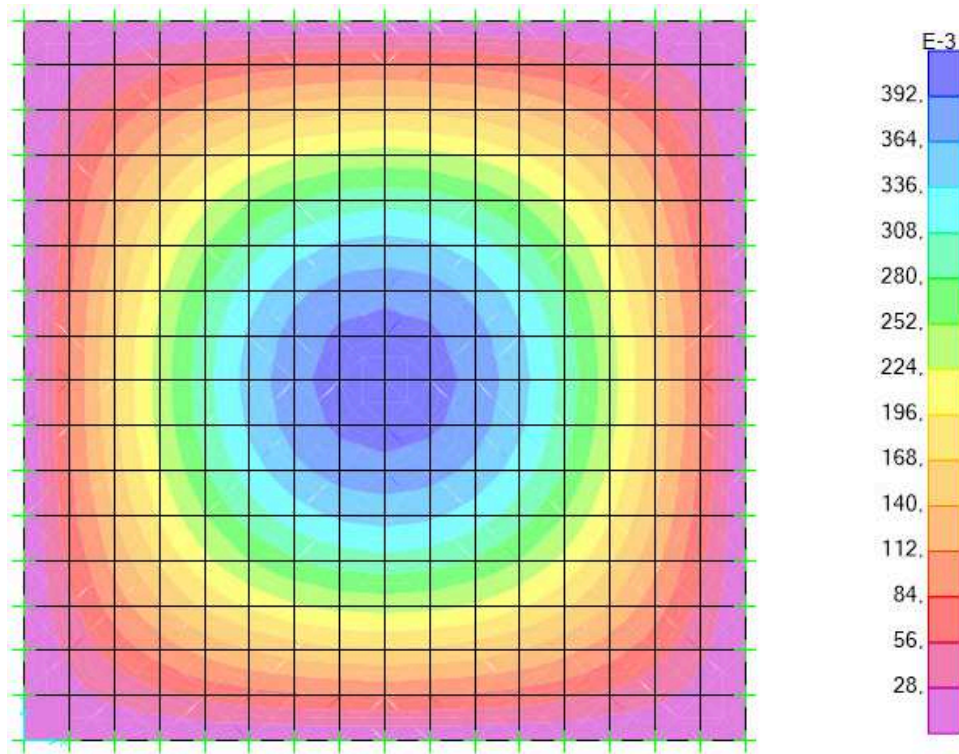
**Figura 45 - Forma deformada da laje discretizada em 256 elementos de 37,5 x 37,5 cm.**



Os deslocamentos da laje são mostrados na figura 46.



**Figura 46 - Deslocamentos (cm) na laje discretizada em 256 elementos de 37,5 x 37,5 cm.**



A flecha máxima na estrutura, segundo a análise, será:

$$f = 0,4128 \text{ cm}$$

**Tabela 4 - Momentos máximos e deslocamentos de uma laje discretizada em diferentes números de elementos finitos.**

nº de elementos	$Mx$ (kN.m/m)	$f$ (cm)
4	13,77	0,3839
16	11,21	0,4121
64	10,85	0,4126
256	10,77	0,4128

Quanto maior o número de elementos finitos definido para uma laje, maior será sua aproximação com a teoria da elasticidade. Nota-se que o momento  $Mx$ , tende a se aproximar do momento obtido utilizando as tabelas de Bares, ao modo que aumenta o número de elementos finitos da laje.

O valor da flecha imediata adotado será, nesse caso, o obtido através da laje discretizada em 256 elementos:

$$f = 0,413 \text{ cm}$$

A flecha diferida no tempo será, considerando o valor de  $\alpha_f$  obtido anteriormente, igual a:

$$f_d = \alpha_f \cdot f = 1,32 \times 0,413 = 0,545 \text{ cm}$$

E a flecha total, segundo a equação 63:

$$f_t = f_i \cdot (1 + \alpha_f) = 0,413 \times (1 + 1,32) = 0,958 \text{ cm}$$

#### 7.1.5 Analogia de grelha

Para análise desta laje foi considerando o coeficiente de Poisson  $\nu = 0,2$ . Os resultados obtidos por analogia de grelha foram as flechas elástica e imediata. O Eberick realiza uma análise não linear, através de um processo iterativo, para a determinação da flecha imediata, sendo levada em consideração a fissuração do concreto.

O momento  $M_x$  máximo obtido por analogia de grelha foi:

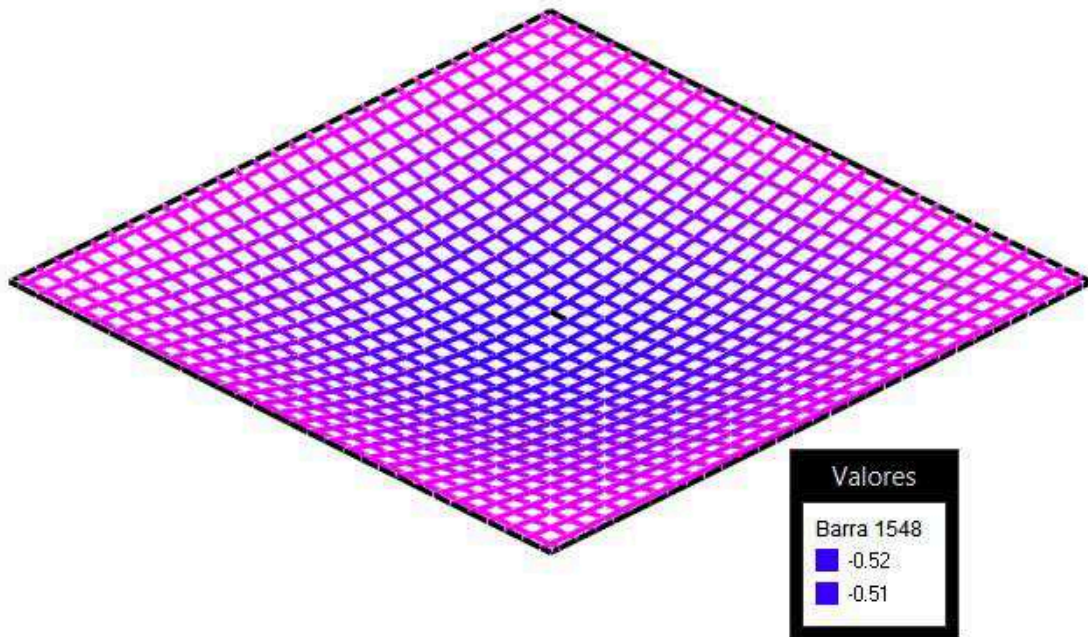
$$M_x = 11,66 \text{ kN.m/m}$$

Os deslocamentos obtidos são mostrados na tabela 4.

**Tabela 5 - Deslocamentos (cm) obtidos por analogia de grelha para laje 6 x 6 m.**

Flecha elástica	0,52
Flecha imediata	0,61
Flecha diferida	0,81
Flecha total	1,42

**Figura 47 - Flecha elástica para laje 6 x 6 m.**



### 7.1.6 Comparação entre resultados

**Tabela 6 - Momentos máximos  $M_x$  na laje 6 x 6 m.**

	Momento máximo $M_x$ (kN.m/m)
Tabelas de Bares	10,72
Processo de Marcus	8,86
Elementos finitos	10,77
Analogia de grelha	11,66

O momento fletor  $M_x$  obtido através da solução por elementos finitos apresentou um valor muito próximo ao obtido pelas tabelas de Bares. Como foi mostrado no item 7.1.4, quanto melhor discretizada, mais os resultados se aproximam da teoria da elasticidade, em qual as tabelas de Bares tem base.

O método da analogia de grelha foi o que apresentou o maior momento fletor. O momento obtido através do processo de Marcus apresentou um valor significativamente menor, quase 20% menor do que o obtido através das tabelas de Bares.

**Tabela 7 - Deslocamentos (cm) obtidos na laje 6 x 6 m.**

	Tabelas de Bares	Processo de Marcus	Elementos finitos	Analogia de grelha
Flecha elástica	0,41	0,69	0,41	0,52
Flecha imediata	-	-	-	0,61
Flecha diferida	0,54	0,91	0,54	0,81
Flecha total	0,96	1,60	0,96	1,42

Os resultados obtidos pelo método dos elementos finitos são semelhantes aos encontrados utilizando as tabelas de Bares, isso mostra uma discretização adequada da laje para a análise.

Pelo fato de o momento obtido com as tabelas de Marcus apresentar um valor significativamente menor, foi considerado não haver fissuração na laje e, conseqüentemente, o valor da flecha imediata foi considerado igual o da flecha elástica.

O processo de obtenção por analogia de grelha se dá através de um processo iterativo (análise não-linear) onde cada elemento da grelha possui uma rigidez diferente, podendo ser considerada a fissuração em alguns elementos. Isso pode explicar a obtenção de uma flecha imediata.

Ainda assim, a maior flecha total foi obtida através do processo de Marcus, pois o método considerada a laje como um elemento composto por vigas, enquanto que na analogia de grelha é levada em consideração a rigidez da grelha.

Para o quesito aceitabilidade sensorial visual estabelecido pela NBR 6118:2014, as flechas totais, segundo a tabela 2 apresentada neste trabalho, devem ser menor que  $l/250$ , ou seja, para este exemplo a flecha não pode exceder o valor de 2,4 centímetros. Verifica-se que para todos os métodos utilizados, as flechas totais obtidas são inferiores ao valor máximo definido.

## 7.2 Laje simplesmente apoiada com $\lambda = 1,5$

Laje maciça, simplesmente apoiada nos quatro lados em apoios indeformáveis, com os vãos:

- $l_x = 6,0$  m
- $l_y = 9,0$  m

$$\lambda = \frac{l_y}{l_x} = \frac{9,0}{6,0} = 1,5$$

Esta laje possui as mesmas características do exemplo mostrado em 7.1.1, exceto pelas dimensões. Logo:

- Altura da laje  $h = 15$  cm;
- Cobrimento inferior  $c = 3$  cm
- $f_{ck} = 25$  MPa;
- Agregado graúdo: granito;
- Carga permanente  $g = 4,75$  kN/m<sup>2</sup>;
- Carga variável  $q = 2$  kN/m<sup>2</sup>;
- Carga total  $p = 6,75$  kN/m<sup>2</sup>.

### 7.2.1 Estado limite último

O processo realizado para o dimensionamento é o mesmo utilizado no item 7.1.1. Utilizando os coeficientes  $\mu_x = 7,86$  e  $\mu_y = 4,25$ , os momentos obtidos para esta laje foram:

$$M_x = 7,86 \times \frac{(6,75 \text{ kN/m}^2) \times (6,0\text{m})^2}{100} = 19,10 \text{ kN.m}$$

$$M_y = 4,25 \times \frac{(6,75 \text{ kN/m}^2) \times (6,0\text{m})^2}{100} = 10,33 \text{ kN.m}$$

Majorando  $M_x$  e  $M_y$  obtidos pelo coeficiente  $\gamma_f = 1,4$  tem-se os momentos de cálculo:

$$M_{x_d} = 26,74 \text{ kN.m}$$

$$M_{y_d} = 14,46 \text{ kN.m}$$

As armaduras obtidas para esta laje foram:

$$A_{sx} = 5,76 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$A_{sy} = 3,12 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Considerando o uso de barras de diâmetro de 10,0 mm para a armadura na direção  $x$  e barras de diâmetro de 8,0 mm para a armadura na direção  $y$ , serão utilizadas 8 barras por metro na direção  $x$ , com 12 cm de espaçamento ( $8 \phi 10,0 \text{ c}/12$ ) e 7 barras por metro na direção  $y$ , com 14 cm de espaçamento ( $7 \phi 8,0 \text{ c}/14$ ). As armaduras efetivas, então, serão:

$$A_{sx,e} = 6,28 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$A_{sy,e} = 3,52 \text{ cm}^2/\text{m}$$

### 7.2.2 Tabelas de Bares

O processo para a obtenção da flecha elástica desta laje é o mesmo utilizado no item 7.1.2.

O momento máximo para carregamento em serviço será:

$$M_x = 15,70 \text{ kN.m/m}$$

Para  $\lambda = 1,5$ , tem-se  $\alpha = 8,87$ . Logo:

$$f = \frac{(5,55 \times 10^{-4} \text{ kN/cm}^2) \times (600)^4}{(2415 \text{ kN/cm}^2) \times (15)^3} \times \frac{8,87}{100}$$

A flecha obtida será:

$$f = 0,783 \text{ cm}$$

A flecha diferida no tempo será:

$$f_d = 1,033 \text{ cm}$$

E a flecha total:

$$f_t = 1,816 \text{ cm}$$

### 7.2.3 Processo de Marcus

O processo para obtenção da flecha desta laje é o mesmo utilizado no item 7.1.3.

Para a geometria desta laje, o coeficiente  $k_x$  é igual a 0,835, assim a carga  $p_x$  será:

$$p_x = 0,835 \times 5,55 = 4,64 \text{ kN/m}^2$$

O momento máximo será obtido utilizando o coeficiente  $m_x$  igual a 13,87. Assim, para a carga  $p$  sem redução, igual a 6,75 kN/m<sup>2</sup>, tem-se o momento máximo na direção  $x$  obtido por:

$$M_x = \frac{(6,75 \text{ kN/m}^2) \times (6,0 \text{ m})^2}{13,87} = 17,52 \text{ kN.m/m}$$

O momento máximo para carregamento em serviço será:

$$M_x = 14,41 \text{ kN.m/m}$$

A rigidez equivalente obtida foi:

$$(EI)_{eq} = 6819 \text{ kN.m}^2$$

Comparando com a rigidez da peça não fissurada

$$EI = 6792 \text{ kN.m}^2$$

Verifica-se que  $(EI)_{eq}$  é maior do que  $EI$ , logo não ocorre a fissuração na laje. A flecha elástica, utilizando  $EI$ , é:

$$f = 1,151 \text{ cm}$$

A flecha diferida no tempo será:

$$f_d = 2,394 \text{ cm}$$

E a flecha total:

$$f_t = 3,545 \text{ cm}$$

#### 7.2.4 Método dos elementos finitos

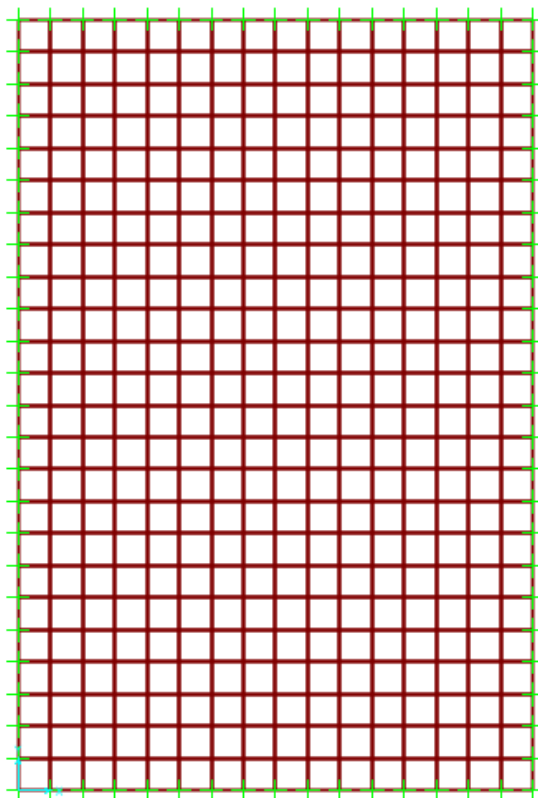
A análise da deformação da laje por elementos finitos foi realizada da mesma forma que no item 7.1.4.

Na definição do material foi utilizado coeficiente de Poisson  $\nu = 0,2$  e o módulo de elasticidade secante  $E_{cs} = 24150 \text{ MPa}$ , calculado no item 7.1.2.

A laje foi discretizada em 384 elementos finitos de dimensão  $37,5 \times 37,5 \text{ cm}$ , como mostra a figura 48.

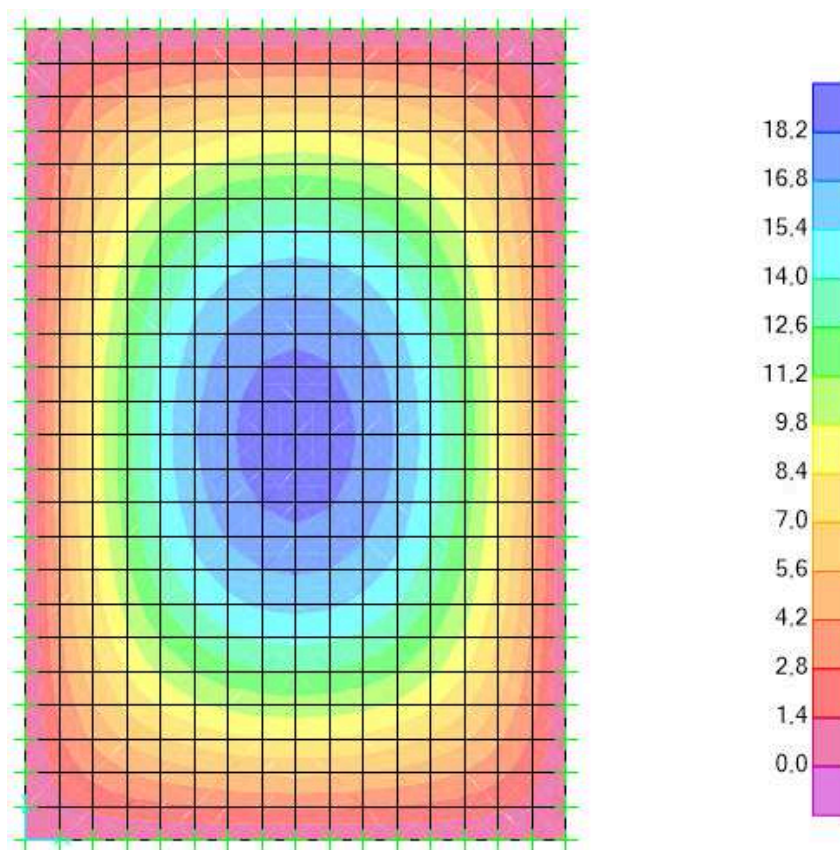


Figura 48 - Laje discretizada em 384 elementos de 37,5 x 37,5 cm.



Para uma carga  $p = 6,75 \text{ kN/m}^2$ , tem-se a seguinte distribuição de momentos  $M_x$  ao longo da laje, conforme a figura 49.

Figura 49 - Distribuição de momentos no eixo x (kN.m/m) para laje discretizada em 384 elementos de 37,5 x 37,5 cm.

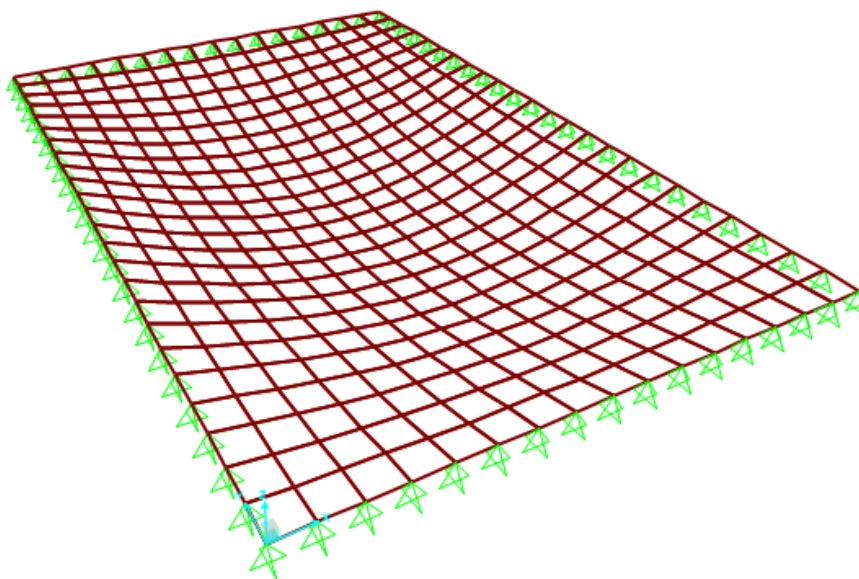


O momento  $M_x$  máximo obtido foi:

$$M_x = 19,08 \text{ kN.m/m}$$

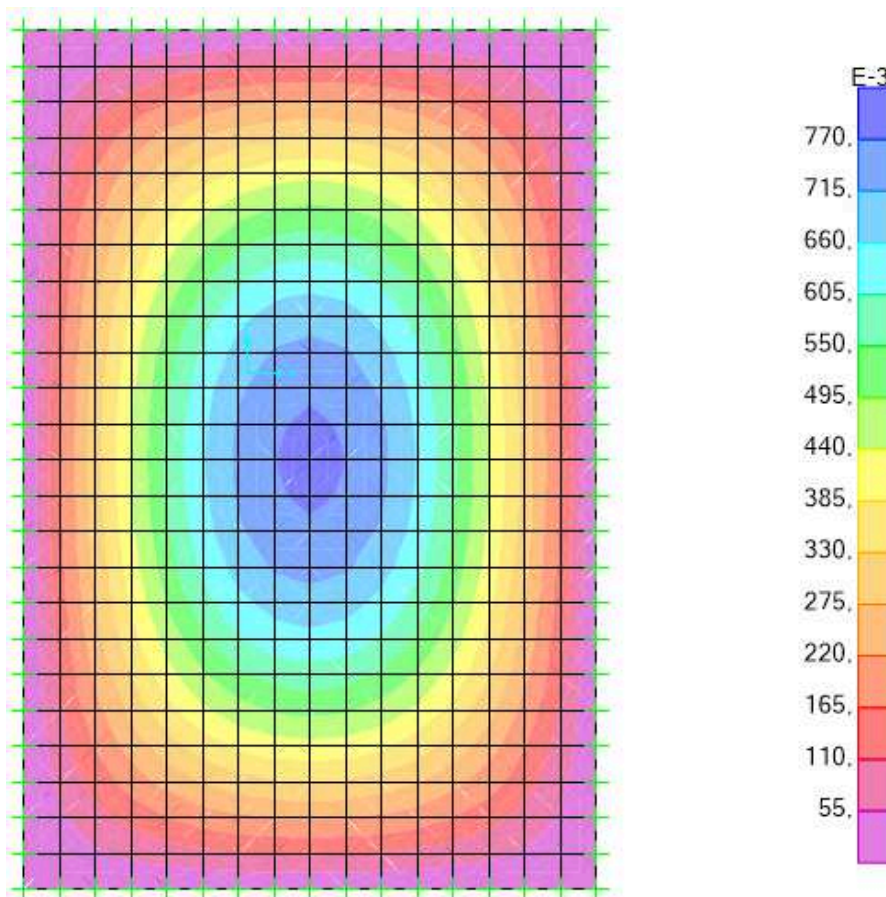
Considerando a carga de serviço  $p_{serv}$  determinada anteriormente, o modelo deformado da estrutura pode ser visto na figura 50, em escala aumentada.

Figura 50 - Forma deformada da laje discretizada em 384 elementos de 37,5 x 37,5 cm.



Os deslocamentos da laje são mostrados na figura 51.

Figura 51 - Deslocamentos (cm) na laje discretizada em 384 elementos de 37,5 x 37,5 cm.



A flecha máxima na estrutura, segundo a análise, será:

$$f = 0,785 \text{ cm}$$

A flecha diferida no tempo será:

$$f_d = 1,036 \text{ cm}$$

E a flecha total:

$$f_t = 1,821 \text{ cm}$$

### 7.2.5 Analogia de grelha

O momento  $M_x$  máximo obtido por analogia de grelha foi:

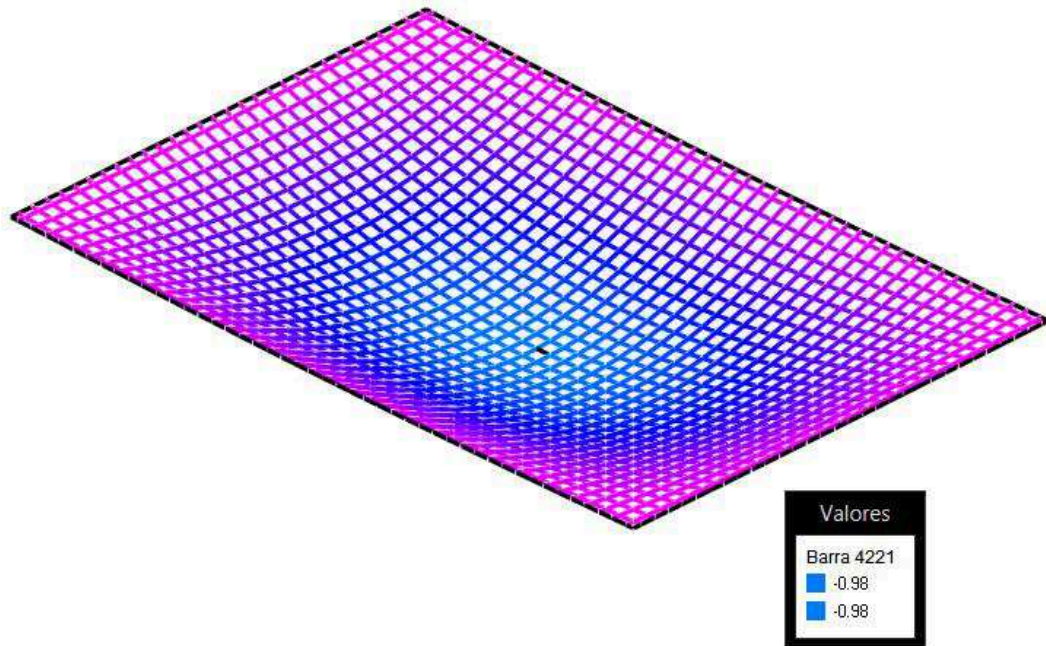
$$M_x = 21,66 \text{ kN.m/m}$$

Considerando o coeficiente de Poisson  $\nu = 0,2$ , os deslocamentos obtidos por analogia de grelha, juntamente com as flechas diferida e total calculadas, foram:

**Tabela 8 - Deslocamentos (cm) obtidos por analogia de grelha para laje 6 x 9 m.**

Flecha elástica	0,98
Flecha imediata	1,19
Flecha diferida	1,57
Flecha total	2,76

Figura 52 - Flecha elástica para laje 6 x 9 m



### 7.2.6 Comparação entre resultados

Tabela 9 - Momentos máximos  $M_x$  na laje 6 x 9 m.

	Momento máximo $M_x$ (kN.m/m)
Tabelas de Bares	19,10
Processo de Marcus	17,52
Elementos finitos	19,08
Analogia de grelha	21,66

O maior momento fletor foi obtido através do método de analogia de grelha. O menor foi novamente o obtido com o uso das tabelas de Marcus, porém apresentando neste exemplo uma menor diferença em relação aos métodos baseados na teoria da elasticidade, comparando com o exemplo anterior.

**Tabela 10 - Deslocamentos (cm) obtidos na laje 6 x 9 m.**

	Tabelas de Bares	Processo de Marcus	Elementos finitos	Analogia de grelha
Flecha elástica	0,78	1,15	0,78	0,98
Flecha imediata	-	-	-	1,19
Flecha diferida	1,03	2,39	1,04	1,57
Flecha total	1,82	3,54	1,82	2,76

Neste exemplo, pelo método utilizando o processo de Marcus, não foi verificada a fissuração da laje. Por analogia de grelha, foi verificada a fissuração da laje, obtendo-se uma flecha diferida. Ainda assim, o valor da flecha total obtido pelo processo de Marcus foi maior.

Os resultados obtidos com as tabelas de Bares e através do método dos elementos finitos continuam semelhantes. E, para os vãos da laje desse exemplo, fica mais evidente a influência da fissuração nos deslocamentos das lajes. Onde as flechas totais obtidas por estes dois métodos são significativamente inferiores aos obtidos pelo processo de Marcus e analogia de grelha.

Em relação ao quesito de aceitabilidade sensorial visual estabelecido pela NBR 6118:2014, as flechas totais para este exemplo devem ser menores que 2,4 centímetros. As flechas totais obtidas através do processo de Marcus e da analogia de grelha, que levam em conta a fissuração da laje, excedem o valor limite. Logo a estrutura falha em relação ao estado limite de deformação excessiva.

### **7.3 Laje simplesmente apoiada de com $\lambda = 2,0$**

Laje maciça, simplesmente apoiada nos quatro lados em apoios indeformáveis, com os vãos:

- $l_x = 6,0$  m
- $l_y = 12,0$  m

$$\lambda = \frac{l_y}{l_x} = \frac{12,0}{6,0} = 2,0$$

Esta laje possui as mesmas características do exemplo mostrado em 7.1.1, exceto pelas dimensões. Logo:

- Altura da laje  $h = 15$  cm;
- Cobrimento inferior  $c = 3$  cm
- $f_{ck} = 25$  MPa;
- Agregado graúdo: granito;
- Carga permanente  $g = 4,75$  kN/m<sup>2</sup>;
- Carga variável  $q = 2$  kN/m<sup>2</sup>;
- Carga total  $p = 6,75$  kN/m<sup>2</sup>.

### 7.3.1 Estado limite último

O processo realizado para o dimensionamento é o mesmo utilizado no item 7.1.1. Utilizando os coeficientes  $\mu_x = 10,00$  e  $\mu_y = 3,64$ , os momentos obtidos para esta laje foram:

$$M_x = 10,00 \times \frac{(6,75 \text{ kN/m}^2) \times (6,0\text{m})^2}{100} = 24,30 \text{ kN.m}$$

$$M_y = 3,64 \times \frac{(6,75 \text{ kN/m}^2) \times (6,0\text{m})^2}{100} = 8,85 \text{ kN.m}$$

Majorando  $M_x$  e  $M_y$  obtidos pelo coeficiente  $\gamma_f = 1,4$  tem-se os momentos de cálculo:

$$M_{x_d} = 34,02 \text{ kN.m}$$

$$M_{y_d} = 12,38 \text{ kN.m}$$

As armaduras obtidas para esta laje foram:

$$A_{sx} = 7,61 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$A_{sy} = 2,69 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Considerando o uso de barras de diâmetro de 12,5 mm para a armadura na direção  $x$  e barras de diâmetro de 8,0 mm para a armadura na direção  $y$ , serão utilizadas 10 barras por metro na direção  $x$ , com 10 cm de espaçamento (10  $\phi$ 12,5 c/10) e 6 barras por metro na direção  $y$ , com 16 cm de espaçamento (6  $\phi$ 8,0 c/16). As armaduras efetivas, então, serão:

$$A_{sx,e} = 12,33 \text{ cm}^2/m$$

$$A_{sy,e} = 3,02 \text{ cm}^2/m$$

### 7.3.2 Tabelas de Bares

O processo para a obtenção da flecha elástica desta laje é o mesmo utilizado no item 7.1.2.

O momento máximo para carregamento em serviço será:

$$M_x = 19,98 \text{ kN.m/m}$$

Para  $\lambda = 2,0$ , tem-se  $\alpha = 11,68$ . Logo:

$$f = \frac{(5,55 \times 10^{-4} \text{ kN/cm}^2) \times (600)^4}{(2415 \text{ kN/cm}^2) \times (15)^3} \times \frac{11,68}{100}$$

A flecha obtida será:

$$f = 1,031 \text{ cm}$$

A flecha diferida no tempo será:

$$f_d = 1,361 \text{ cm}$$

E a flecha total:



$$f_t = 2,392 \text{ cm}$$

### 7.3.3 Processo de Marcus

O processo para obtenção da flecha desta laje é o mesmo utilizado no item 7.1.3.

Para a geometria desta laje, o coeficiente  $k_x$  é igual a 0,941, assim a carga  $p_x$  será:

$$p_x = 0,941 \times 5,55 = 5,22 \text{ kN/m}^2$$

O momento máximo será obtido utilizando o coeficiente  $m_x$  igual a 10,57. Assim, para a carga  $p$  sem redução, igual a 6,75 kN/m<sup>2</sup>, tem-se o momento máximo na direção  $x$  obtido por:

$$M_x = \frac{(6,75 \text{ kN/m}^2) \times (6,0 \text{ m})^2}{10,57} = 22,99 \text{ kN.m/m}$$

O momento máximo para carregamento em serviço será:

$$M_x = 18,90 \text{ kN.m/m}$$

A rigidez equivalente obtida foi:

$$(EI)_{eq} = 4089 \text{ kN.m}^2$$

Comparando com a rigidez da peça não fissurada

$$EI = 6792 \text{ kN.m}^2$$

Verifica-se que  $(EI)_{eq}$  é menor do que  $EI$ , logo ocorre a fissuração na laje. A flecha elástica, utilizando  $EI$ , é:

$$f = 1,298 \text{ cm}$$

E a flecha imediata será:

$$f_i = 2,818 \text{ cm}$$

A flecha diferida no tempo será:

$$f_d = 3,720 \text{ cm}$$

E a flecha total:

$$f_t = 6,538 \text{ cm}$$

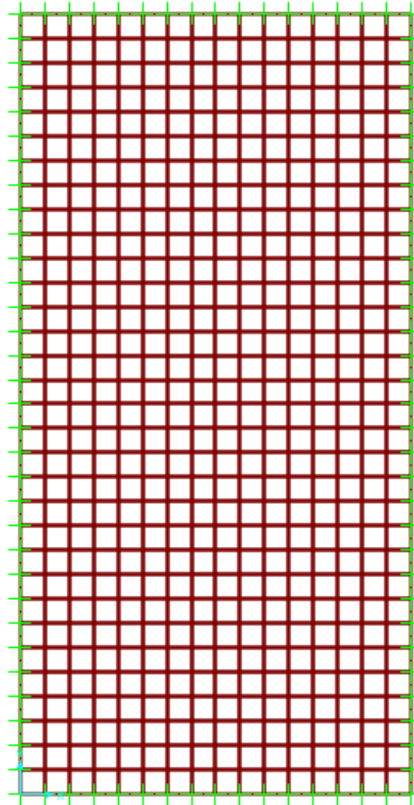
#### 7.3.4 Método dos elementos finitos

A análise da deformação da laje por elementos finitos foi realizada da mesma forma que no item 7.1.4.

Na definição do material foi utilizado coeficiente de Poisson  $\nu = 0,2$  e o módulo de elasticidade secante  $E_{cs} = 24150$  MPa, calculado no item 7.1.2.

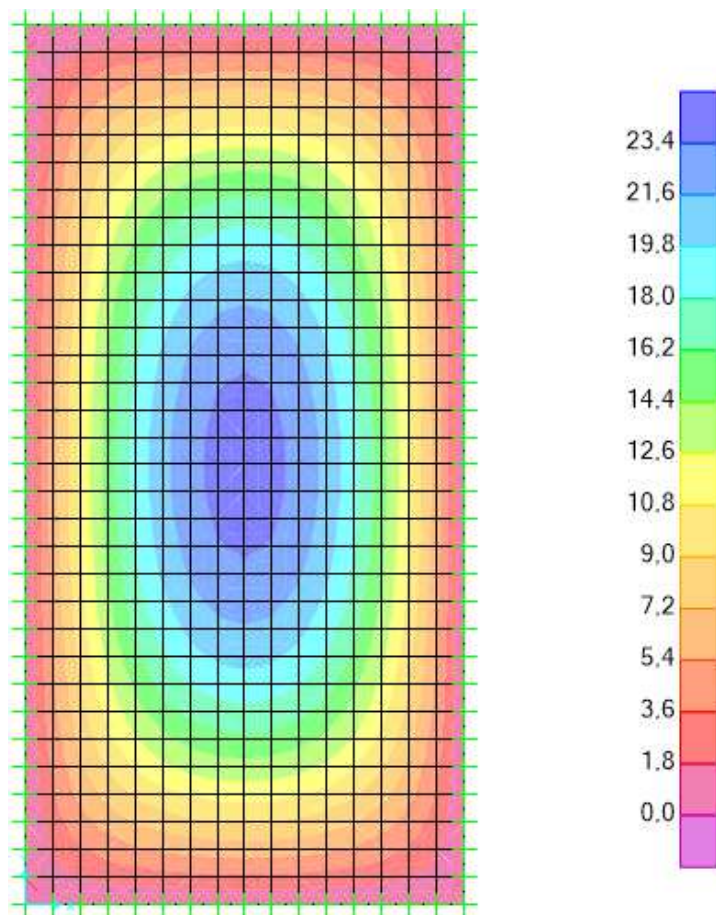
A laje foi discretizada em 384 elementos finitos de dimensão  $37,5 \times 37,5$  cm, como mostra a figura 53.

Figura 53 - Laje discretizada em 512 elementos de 37,5 x 37,5 cm.



Para uma carga  $p = 6,75 \text{ kN/m}^2$ , tem-se a seguinte distribuição de momentos  $M_x$  ao longo da laje, conforme a figura 54.

Figura 54 - Distribuição de momentos no eixo x (kN.m/m) para laje discretizada em 512 elementos de 37,5 x 37,5 cm.

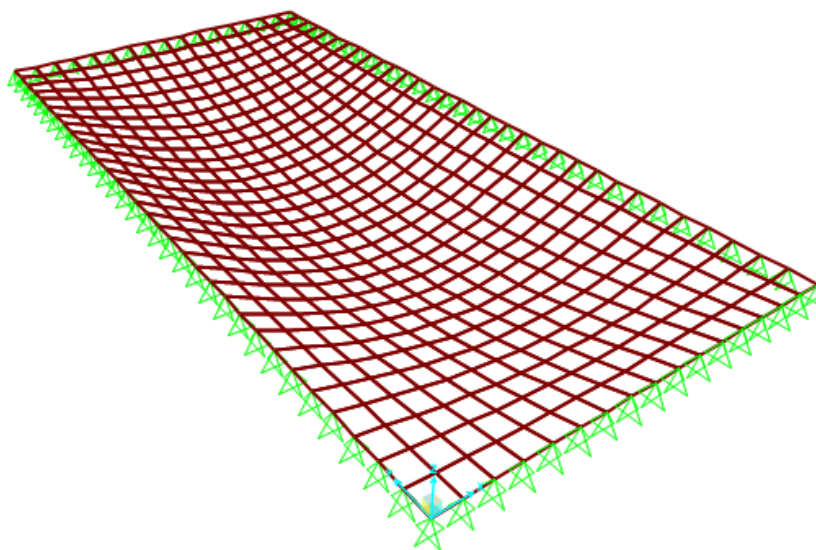


O momento  $M_x$  máximo obtido foi:

$$M_x = 24,32 \text{ kN.m/m}$$

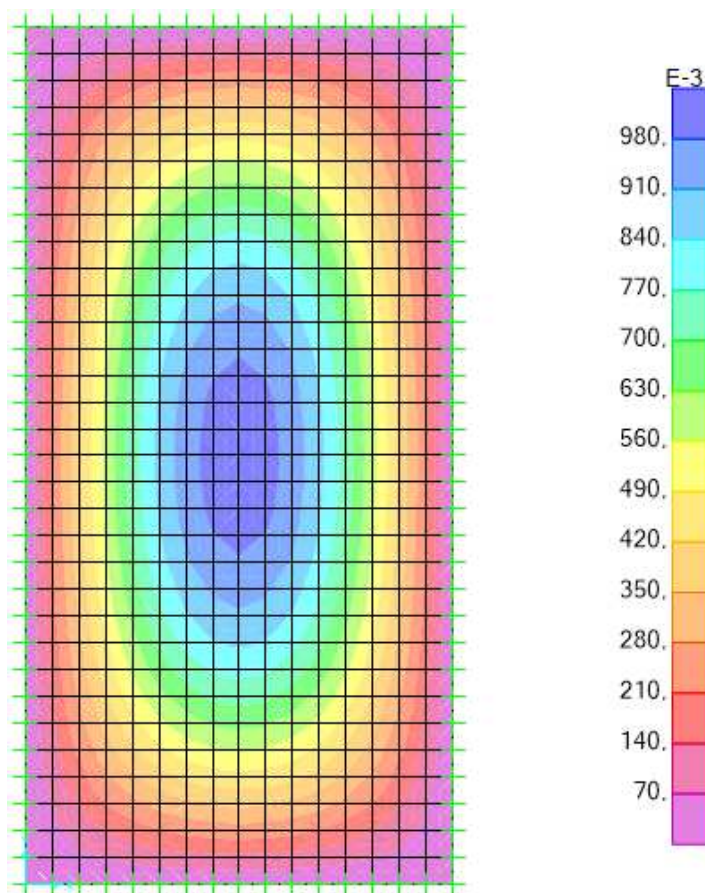
Considerando a carga de serviço  $p_{serv}$  determinada anteriormente, o modelo deformado da estrutura pode ser visto na figura 55, em escala aumentada.

Figura 55 - Forma deformada da laje discretizada em 512 elementos de 37,5 x 37,5 cm.



Os deslocamentos da laje são mostrados na figura 56.

Figura 56 - Deslocamentos (cm) na laje discretizada em 512 elementos de 37,5 x 37,5 cm.



A flecha máxima na estrutura, segundo a análise, será:

$$f = 1,028 \text{ cm}$$

A flecha diferida no tempo será:

$$f_d = 1,357 \text{ cm}$$

E a flecha total:

$$f_t = 2,385 \text{ cm}$$

### 7.3.5 Analogia de grelha

O momento  $M_x$  máximo obtido por analogia de grelha foi:

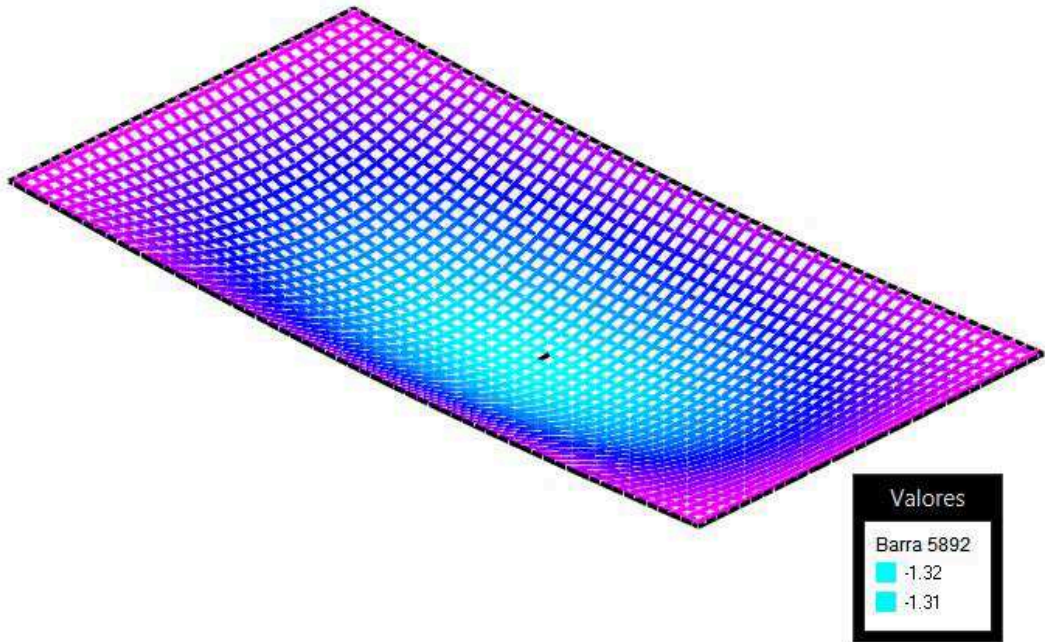
$$M_x = 26,98 \text{ kN.m/m}$$

Considerando o coeficiente de Poisson  $\nu = 0,2$ , os deslocamentos obtidos por analogia de grelha, juntamente com as flechas diferida e total, foram:

**Tabela 11 - Deslocamentos (cm) obtidos por analogia de grelha para laje 6 x 12 m.**

Flecha elástica	1,32
Flecha imediata	1,74
Flecha diferida	2,30
Flecha total	4,04

Figura 57 - Flecha elástica para laje 6 x 12 m



### 7.3.6 Comparação entre resultados

Tabela 12 - Momentos máximos  $M_x$  na laje 6 x 12 m.

	Momento máximo $M_x$ (kN.m/m)
Tabelas de Bares	24,30
Processo de Marcus	22,99
Elementos finitos	24,32
Analogia de grelha	26,98

Tabela 13 - Deslocamentos (cm) obtidos na laje 6 x 12 m.

	Tabelas de Bares	Processo de Marcus	Elementos finitos	Analogia de grelha
Flecha elástica	1,03	1,30	1,03	1,32
Flecha imediata	-	2,82	-	1,74
Flecha diferida	1,36	3,72	1,36	2,30
Flecha total	2,39	6,54	2,38	4,04

Em relação ao quesito de aceitabilidade sensorial visual estabelecido pela NBR 6118:2014, as flechas totais para este exemplo devem ser menores que 2,4 centímetros. As flechas totais obtidas através do processo de Marcus e da analogia de grelha, que levam em conta a fissuração da laje, excedem o valor limite. Logo a estrutura falha em relação ao estado limite de deformação excessiva.

## 7.4 Laje apoiada em vigas deformáveis com $\lambda = 1,0$

Laje maciça, simplesmente apoiada nos quatro lados em vigas de menor rigidez, com os vãos:

- $l_x = 6,0$  m
- $l_y = 6,0$  m

$$\lambda = \frac{l_y}{l_x} = \frac{6,0}{6,0} = 1,0$$

Esta laje possui as mesmas características do exemplo mostrado em 7.1.1, exceto pelas dimensões. Logo:

- Altura da laje  $h = 15$  cm;
- Cobrimento inferior  $c = 3$  cm
- $f_{ck} = 25$  MPa;
- Agregado graúdo: granito;
- Carga permanente  $g = 4,75$  kN/m<sup>2</sup>;
- Carga variável  $q = 2$  kN/m<sup>2</sup>;
- Carga total  $p = 6,75$  kN/m<sup>2</sup>.

### 7.4.1 Laje apoiada em vigas deformáveis de dimensão igual a 20 x 30 cm

Para este exemplo é considerada uma laje apoiada sobre vigas de menor rigidez com dimensão de 20 cm base ( $b$ ) e 30 cm de altura ( $h$ ). A resistência característica do concreto das vigas é a mesma utilizada para a laje, sendo  $f_{ck} = 25$  MPa.



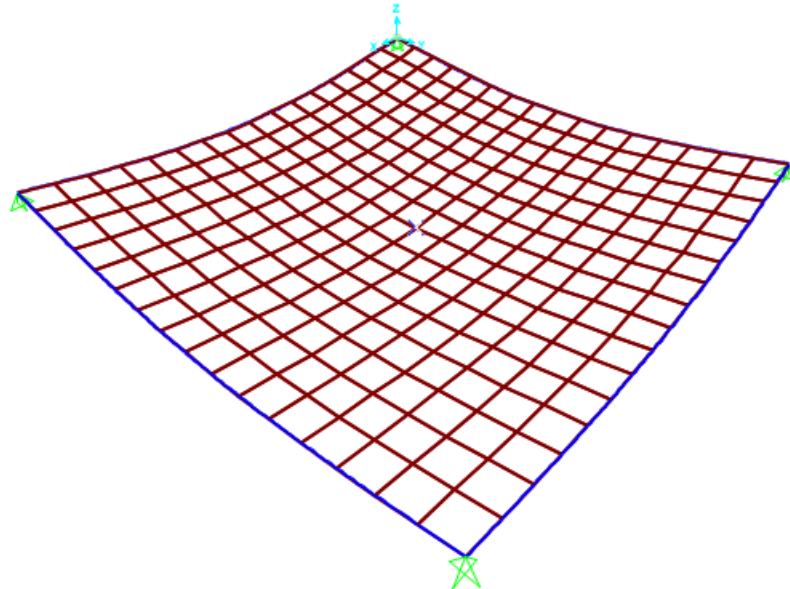
#### 7.4.1.1 Método dos elementos finitos

A análise da deformação da laje por elementos finitos foi realizada da mesma forma que no item 7.1.4.

Na definição do material foi utilizado coeficiente de Poisson  $\nu = 0,2$  e o módulo de elasticidade secante  $E_{CS} = 24150$  MPa, calculado no item 7.1.2 .A laje foi discretizada em 256 elementos finitos de dimensão  $37,5 \times 37,5$  cm.

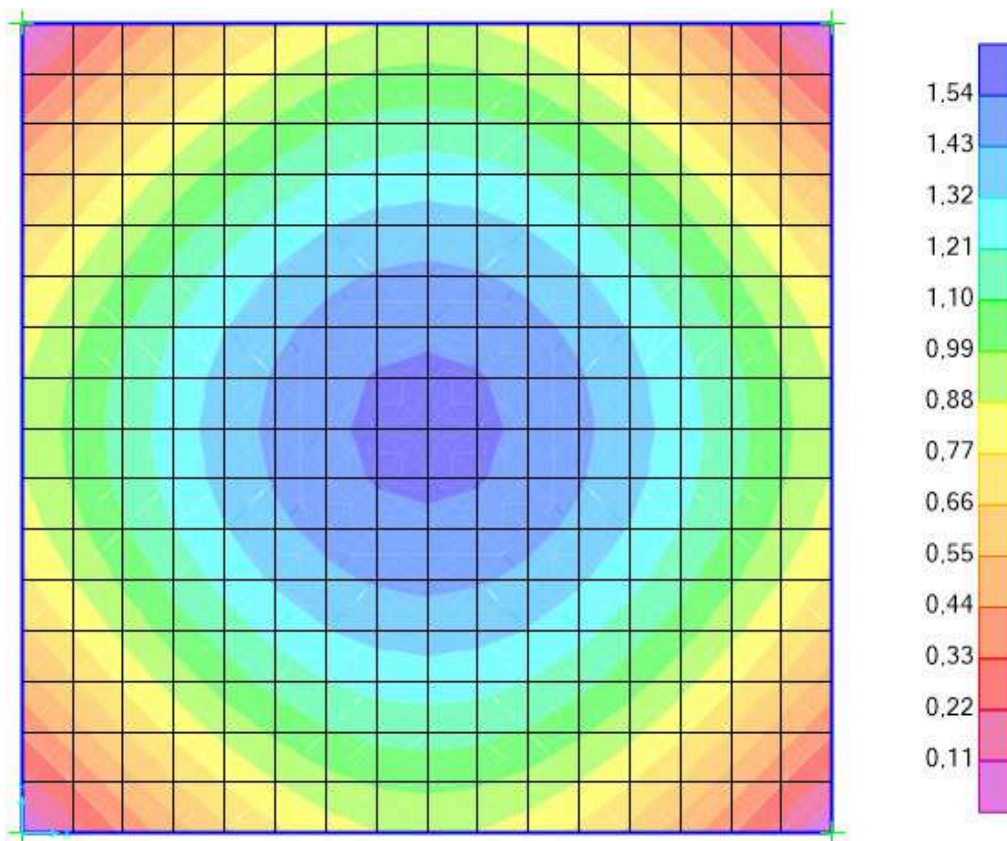
Considerando a carga de serviço  $p_{serv}$  determinada anteriormente, o modelo deformado da estrutura pode ser visto na figura 58, em escala aumentada.

**Figura 58 - Forma deformada da laje 6 x 6 m apoiada em vigas deformáveis de 20 x 30cm.**



Os deslocamentos da laje são mostrados na figura 59.

Figura 59 - Deslocamentos (cm) na laje de 6 x 6 m apoiada em vigas deformáveis de 20 x 30 cm.



A flecha máxima na laje, segundo a análise, será:

$$f = 1,574 \text{ cm}$$

A flecha diferida no tempo será:

$$f_d = 2,078 \text{ cm}$$

E a flecha total:

$$f_t = 3,652 \text{ cm}$$

### 7.4.1.2 Analogia de grelha

Considerando o coeficiente de Poisson  $\nu = 0,2$ , os deslocamentos obtidos por analogia de grelha, juntamente com as flechas diferida e total, foram:

**Tabela 14 - Deslocamentos (cm) na laje de 6 x 6 m apoiada em vigas deformáveis de 20 x 30 cm.**

Flecha elástica	1,74
Flecha imediata	2,99
Flecha diferida	3,95
Flecha total	6,94

### 7.4.2 Laje apoiada em vigas deformáveis de dimensão igual a 20 x 40 cm

Para este exemplo é considerada uma laje apoiada sobre vigas de menor rigidez com dimensão de 20 cm base ( $b$ ) e 40 cm de altura ( $h$ ). A resistência característica do concreto das vigas é a mesma utilizada para a laje, sendo  $f_{ck} = 25$  MPa.

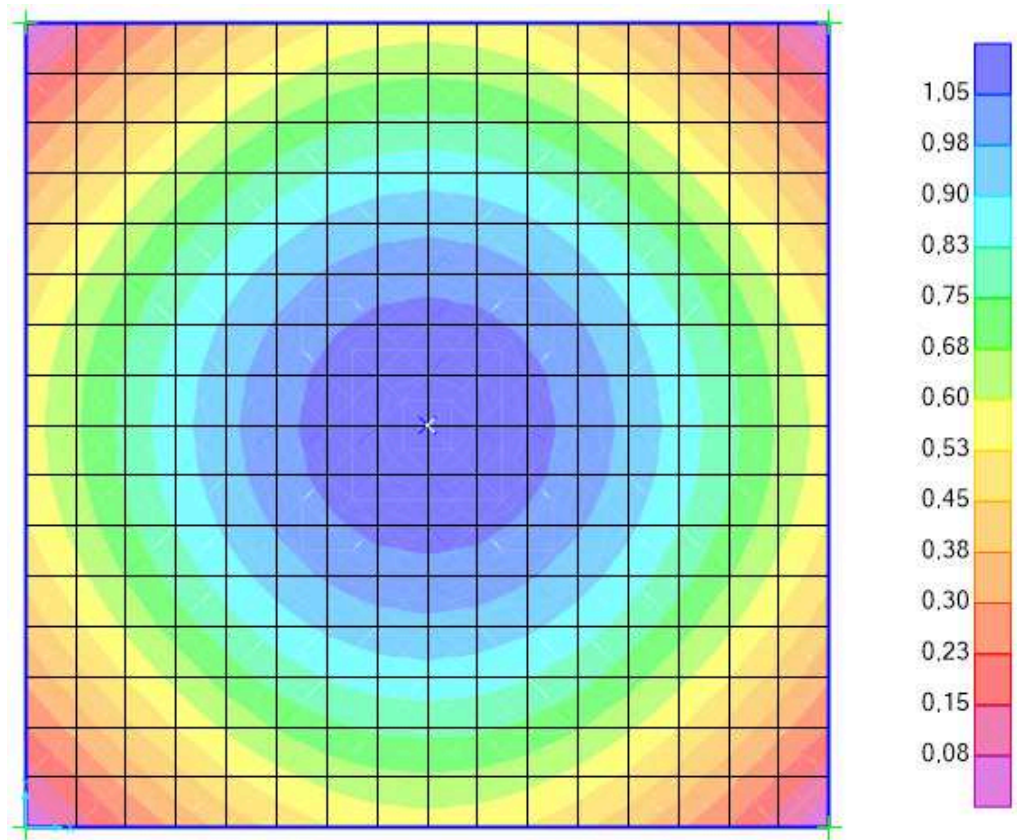
#### 7.4.2.1 Método dos elementos finitos

A análise da deformação da laje por elementos finitos foi realizada da mesma forma que no item 7.1.4.

Na definição do material foi utilizado coeficiente de Poisson  $\nu = 0,2$  e o módulo de elasticidade secante  $E_{cs} = 24150$  MPa, calculado no item 7.1.2. A laje foi discretizada em 256 elementos finitos de dimensão 37,5 x 37,5 cm.

Considerando a carga de serviço  $p_{serv}$  determinada anteriormente, o modelo deformado da estrutura será semelhante ao mostrado na figura 58, em escala aumentada. Os deslocamentos da laje são mostrados na figura 60.

Figura 60 - Deslocamentos (cm) na laje de 6 x 6m apoiada em vigas deformáveis de 20 x 40 cm.



A flecha máxima na laje, segundo a análise, será:

$$f = 1,123 \text{ cm}$$

A flecha diferida no tempo será:

$$f_d = 1,482 \text{ cm}$$

E a flecha total:

$$f_t = 2,605 \text{ cm}$$

### 7.4.2.2 Analogia de grelha

Considerando o coeficiente de Poisson  $\nu = 0,2$ , os deslocamentos obtidos por analogia de grelha, juntamente com as flechas diferida e total, foram:

**Tabela 15 - Deslocamentos (cm) na laje de 6 x 6 m apoiada em vigas deformáveis de 20 x 40 cm.**

Flecha elástica	1,26
Flecha imediata	2,12
Flecha diferida	2,80
Flecha total	4,92

### 7.4.3 Laje apoiada em vigas deformáveis de dimensão igual a 20 x 80 cm

Para este exemplo é considerada uma laje apoiada sobre vigas de menor rigidez com dimensão de 20 cm base ( $b$ ) e 80 cm de altura ( $h$ ). A resistência característica do concreto das vigas é a mesma utilizada para a laje, sendo  $f_{ck} = 25$  MPa.

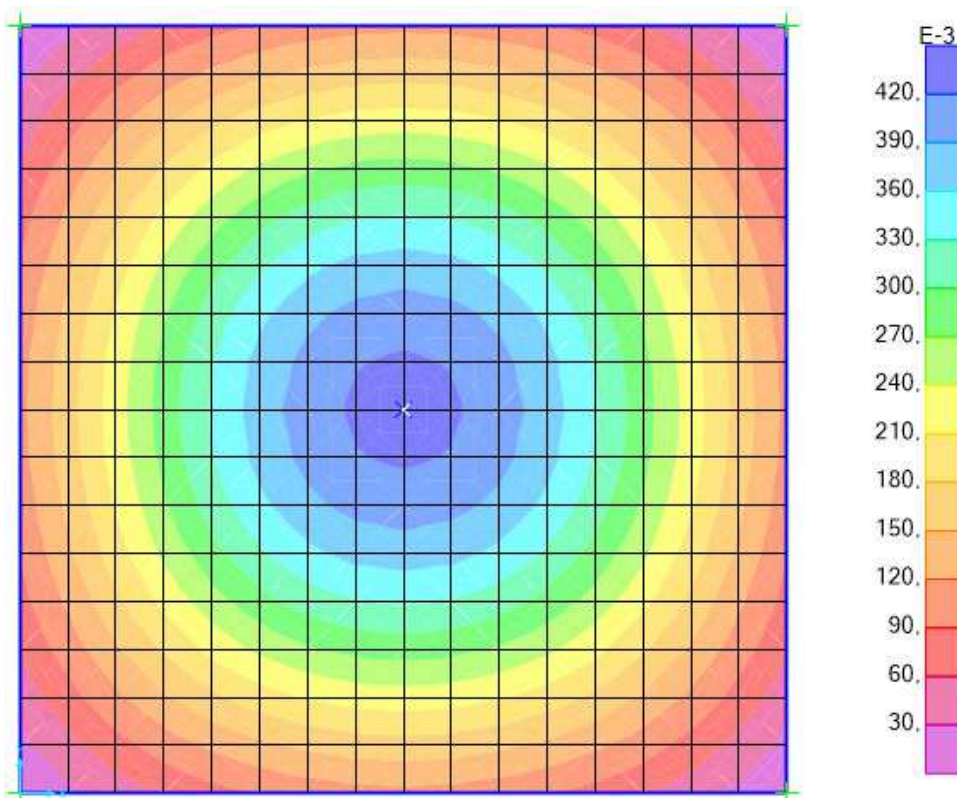
#### 7.4.3.1 Método dos elementos finitos

A análise da deformação da laje por elementos finitos foi realizada da mesma forma que no item 7.1.4.

Na definição do material foi utilizado coeficiente de Poisson  $\nu = 0,2$  e o módulo de elasticidade secante  $E_{CS} = 24150$  MPa, calculado no item 7.1.2 .A laje foi discretizada em 256 elementos finitos de dimensão 37,5 x 37,5 cm.

Considerando a carga de serviço  $p_{serv}$  determinada anteriormente, o modelo deformado da estrutura será semelhante ao mostrado na figura 7-58, em escala aumentada. Os deslocamentos da laje são mostrados na figura 61.

Figura 61 - Deslocamentos (cm) na laje de 6 x 6m apoiada em vigas deformáveis de 20 x 80 cm.



A flecha máxima na laje, segundo a análise, será:

$$f = 0,431 \text{ cm}$$

A flecha diferida no tempo será:

$$f_d = 0,569 \text{ cm}$$

E a flecha total:

$$f_t = 1,000 \text{ cm}$$

### 7.4.3.2 Analogia de grelha

Considerando o coeficiente de Poisson  $\nu = 0,2$ , os deslocamentos obtidos por analogia de grelha, juntamente com as flechas diferida e total, foram:

**Tabela 16 - Deslocamentos (cm) na laje de 6 x 6 m apoiada em vigas deformáveis de 20 x 80 cm.**

Flecha elástica	0,61
Flecha imediata	0,71
Flecha diferida	0,94
Flecha total	1,65

### 7.4.4 Comparação entre resultados

**Tabela 17 - Deslocamentos (cm) obtidos na laje 6 x 6 m.**

	Vigas 20 x 30 cm		Vigas 20 x 40 cm		Vigas 20 x 80 cm	
	Elementos finitos	Analogia de grelha	Elementos finitos	Analogia de grelha	Elementos finitos	Analogia de grelha
Flecha elástica	1,57	1,74	1,12	1,26	0,43	0,61
Flecha imediata	-	2,99	-	2,12	-	0,71
Flecha diferida	2,08	3,95	1,48	2,80	0,57	0,94
Flecha total	3,65	6,94	2,60	4,92	1,00	1,65

Nota-se que, quanto maior a altura das vigas onde a laje é apoiada, menor é a deformação da laje. Isso porque a rigidez das vigas aumenta quando a altura é aumentada, diminuindo a deformação delas e, conseqüentemente, diminuindo a deformação da laje.

Em relação ao quesito de aceitabilidade sensorial visual estabelecido pela NBR 6118:2014, as flechas totais para este exemplo devem ser menores que 2,4 centímetros. Apenas o caso da laje apoiada em vigas flexíveis de 80 cm altura satisfaz o critério estabelecido pela norma, onde as flechas obtidas pelos dois métodos apresentam valores inferiores ao valor limite, com a observação que pelo método dos elementos finitos a fissuração do concreto não é levada em consideração.

## 7.5 Laje apoiada em vigas deformáveis com $\lambda = 1,5$

Laje maciça, simplesmente apoiada nos quatro lados em de menor rigidez, com os vãos:

- $l_x = 9,0$  m
- $l_y = 6,0$  m

$$\lambda = \frac{l_y}{l_x} = \frac{9,0}{6,0} = 1,5$$

Esta laje possui as mesmas características do exemplo mostrado em 7.1.1, exceto pelas dimensões. Logo:

- Altura da laje  $h = 15$  cm;
- Cobrimento inferior  $c = 3$  cm
- $f_{ck} = 25$  MPa;
- Agregado graúdo: granito;
- Carga permanente  $g = 4,75$  kN/m<sup>2</sup>;
- Carga variável  $q = 2$  kN/m<sup>2</sup>;
- Carga total  $p = 6,75$  kN/m<sup>2</sup>.

### 7.5.1 Laje apoiada em vigas deformáveis de dimensão igual a 20 x 30 cm

Para este exemplo é considerada uma laje apoiada sobre vigas de menor rigidez com dimensão de 20 cm base ( $b$ ) e 30 cm de altura ( $h$ ). A resistência característica do concreto das vigas é a mesma utilizada para a laje, sendo  $f_{ck} = 25$ MPa.

#### 7.5.1.1 Método dos elementos finitos

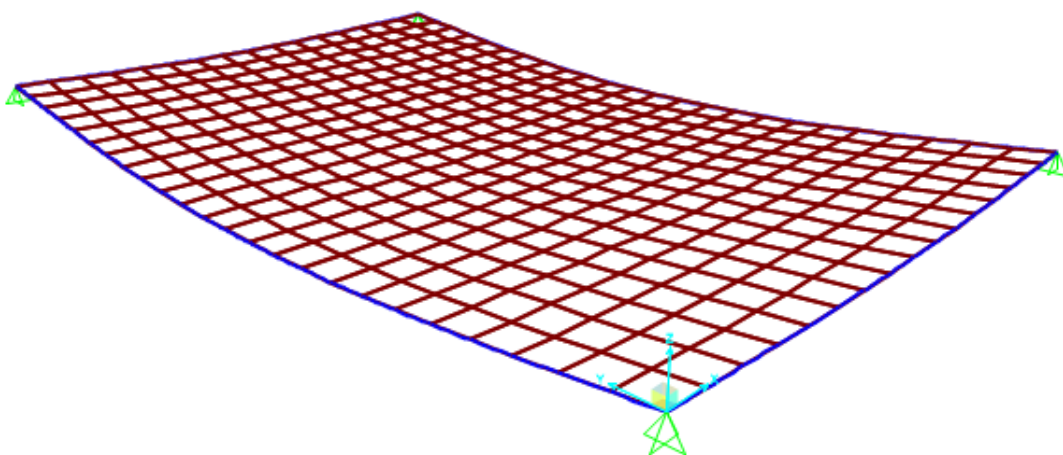
A análise da deformação da laje por elementos finitos foi realizada da mesma forma que no item 7.1.4.



Na definição do material foi utilizado coeficiente de Poisson  $\nu = 0,2$  e o módulo de elasticidade secante  $E_{cs} = 24150$  MPa, calculado no item 7.1.2. A laje foi discretizada em 384 elementos finitos de dimensão  $37,5 \times 37,5$  cm.

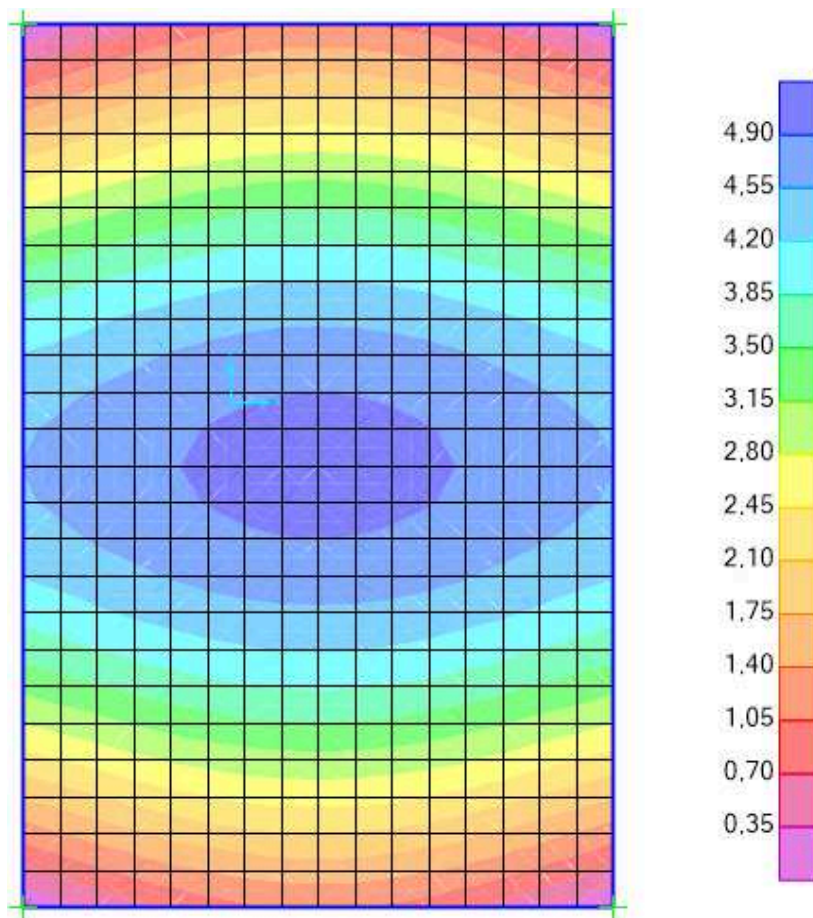
Considerando a carga de serviço  $p_{serv}$  determinada anteriormente, o modelo deformado da estrutura pode ser visto na figura 62, em escala aumentada.

**Figura 62 - Forma deformada da laje 6 x 9 m apoiada em vigas deformáveis de 20 x 30cm.**



Os deslocamentos da laje são mostrados na figura 63.

Figura 63 - Deslocamentos (cm) na laje de 6 x 9m apoiada em vigas deformáveis de 20 x 30 cm.



A flecha máxima na laje, segundo a análise, será:

$$f = 5,037 \text{ cm}$$

A flecha diferida no tempo será:

$$f_d = 6,649 \text{ m}$$

E a flecha total:

$$f_t = 11,686 \text{ cm}$$

### 7.5.1.2 Analogia de grelha

Considerando o coeficiente de Poisson  $\nu = 0,2$ , só foi possível a obtenção da flecha elástica para a estrutura, foi encontrado erro para a obtenção da flecha imediata. Isso porque as dimensões das vigas não satisfazem o estado limite último para este exemplo.

**Tabela 18 - Deslocamentos (cm) na laje de 6 x 9 m apoiada em vigas deformáveis de 20 x 30 cm.**

Flecha elástica	5,45
Flecha imediata	*
Flecha diferida	-
Flecha total	-

\*Não foi possível calcular a flecha fissurada por Branson.

## 7.5.2 Laje apoiada em vigas deformáveis de dimensão igual a 20 x 40 cm

Para este exemplo é considerada uma laje apoiada sobre vigas de menor rigidez com dimensão de 20 cm base ( $b$ ) e 40 cm de altura ( $h$ ). A resistência característica do concreto das vigas é a mesma utilizada para a laje, sendo  $f_{ck} = 25$  MPa.

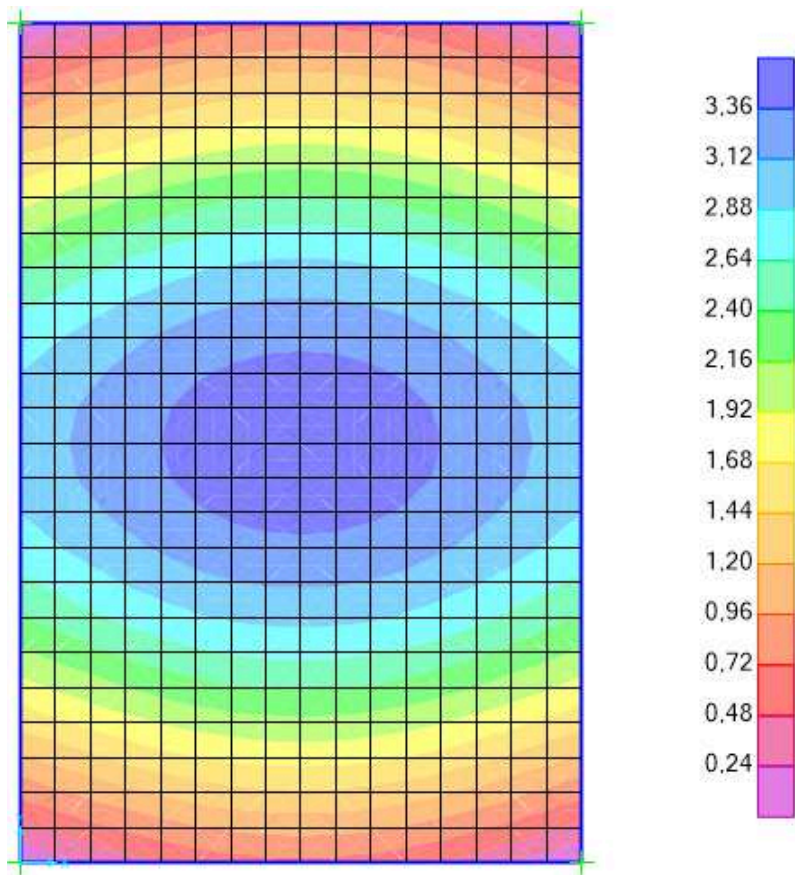
### 7.5.2.1 Método dos elementos finitos

A análise da deformação da laje por elementos finitos foi realizada da mesma forma que no item 7.1.4.

Na definição do material foi utilizado coeficiente de Poisson  $\nu = 0,2$  e o módulo de elasticidade secante  $E_{cs} = 24150$  MPa, calculado no item 7.1.2. A laje foi discretizada em 384 elementos finitos de dimensão 37,5 x 37,5 cm.

Considerando a carga de serviço  $p_{serv}$  determinada anteriormente, o modelo deformado da estrutura será semelhante ao mostrado na figura 62, em escala aumentada. Os deslocamentos da laje são mostrados na figura 64.

Figura 64 - Deslocamentos (cm) na laje de 6 x 9m apoiada em vigas deformáveis de 20 x 40 cm.



A flecha máxima na laje, segundo a análise, será:

$$f = 3,532 \text{ cm}$$

A flecha diferida no tempo será:

$$f_d = 4,425 \text{ cm}$$

E a flecha total:

$$f_t = 8,194 \text{ cm}$$

### 7.5.2.2 Analogia de grelha

Considerando o coeficiente de Poisson  $\nu = 0,2$ , os deslocamentos obtidos por analogia de grelha, juntamente com as flechas diferida e total, foram:

—

**Tabela 19 - Deslocamentos (cm) na laje de 6 x 9 m apoiada em vigas deformáveis de 20 x 40 cm.**

Flecha elástica	3,88
Flecha imediata	5,97
Flecha diferida	7,88
Flecha total	13,85

### 7.5.3 Laje apoiada em vigas deformáveis de dimensão igual a 20 x 80 cm

Para este exemplo é considerada uma laje apoiada sobre vigas de menor rigidez com dimensão de 20 cm base ( $b$ ) e 80 cm de altura ( $h$ ). A resistência característica do concreto das vigas é a mesma utilizada para a laje, sendo  $f_{ck} = 25$  MPa.

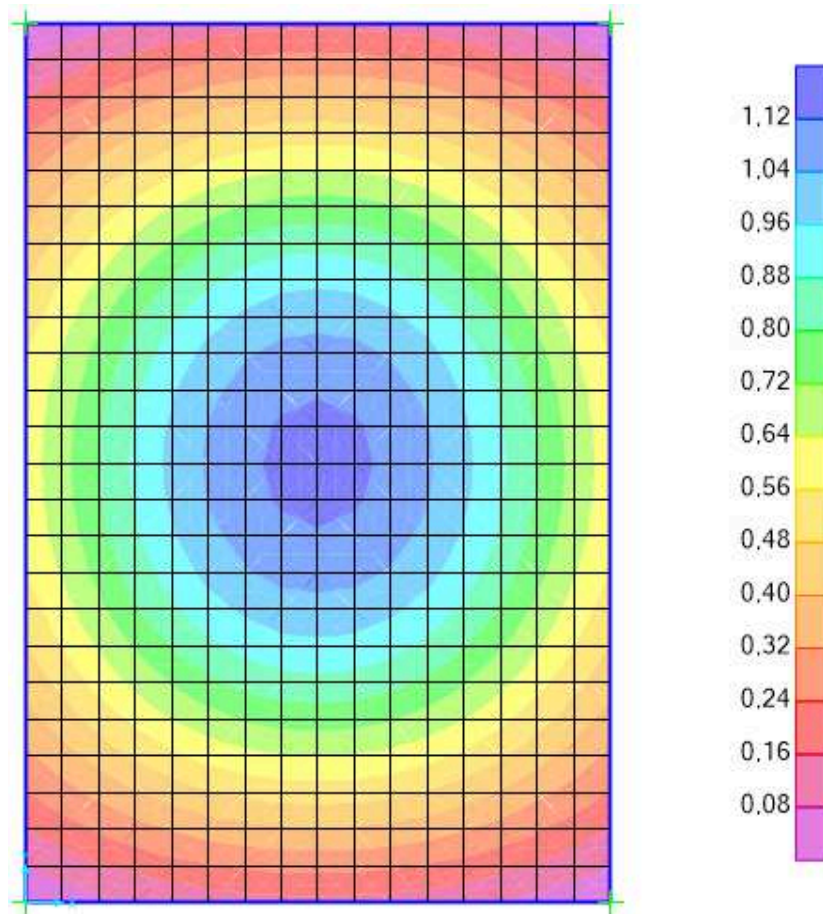
#### 7.5.3.1 Método dos elementos finitos

A análise da deformação da laje por elementos finitos foi realizada da mesma forma que no item 7.1.4.

Na definição do material foi utilizado coeficiente de Poisson  $\nu = 0,2$  e o módulo de elasticidade secante  $E_{cs} = 24150$  MPa, calculado no item 7.1.2. A laje foi discretizada em 384 elementos finitos de dimensão 37,5 x 37,5 cm.

Considerando a carga de serviço  $p_{serv}$  determinada anteriormente, o modelo deformado da estrutura será semelhante ao mostrado na figura 62, em escala aumentada. Os deslocamentos da laje são mostrados na figura 65.

Figura 65 - Deslocamentos (cm) na laje de 6 x 9m apoiada em vigas deformáveis de 20 x 80 cm.



A flecha máxima na laje, segundo a análise, será:

$$f = 1,148 \text{ cm}$$

A flecha diferida no tempo será:

$$f_d = 1,515 \text{ cm}$$

E a flecha total:

$$f_t = 2,663 \text{ cm}$$

### 7.5.3.2 Analogia de grelha

Considerando o coeficiente de Poisson  $\nu = 0,2$ , os deslocamentos obtidos por analogia de grelha, juntamente com as flechas diferida, foram:

**Tabela 20 - Deslocamentos (cm) na laje de 6 x 9 m apoiada em vigas deformáveis de 20 x 80 cm.**

Flecha elástica	1,44
Flecha imediata	2,38
Flecha diferida	3,14
Flecha total	5,52

### 7.5.4 Comparação entre resultados

**Tabela 21 - Deslocamentos (cm) obtidos na laje 6 x 9 m.**

	Vigas 20 x 30 cm		Vigas 20 x 40 cm		Vigas 20 x 80 cm	
	Elementos finitos	Analogia de grelha	Elementos finitos	Analogia de grelha	Elementos finitos	Analogia de grelha
Flecha elástica	5,04	5,45	3,53	3,88	1,15	1,44
Flecha imediata	-	*	-	5,97	-	2,38
Flecha diferida	6,65	-	4,42	7,88	1,52	3,14
Flecha total	11,67	-	8,19	13,85	2,66	5,52

\*Não foi possível calcular a flecha fissurada por Branson.

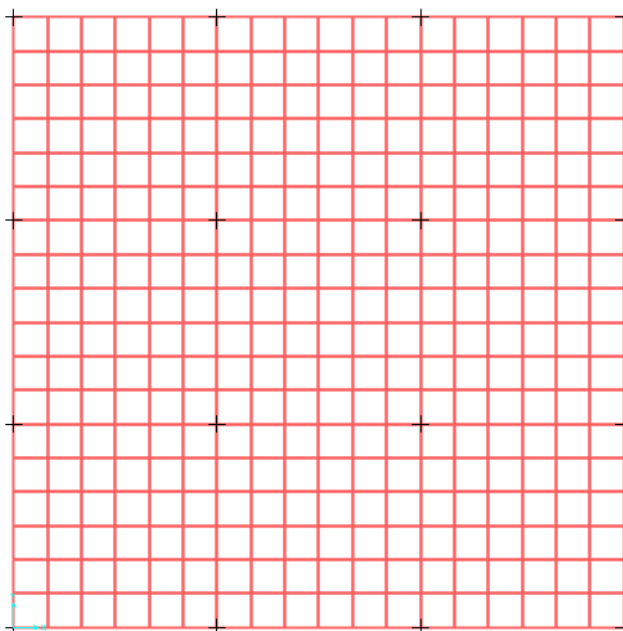
No caso da laje apoiada nas vigas de altura igual a 30 cm o Eberick não calculou a flecha imediata, pois as vigas destas dimensões não satisfazem o estado limite último para este exemplo. Nos casos de vigas 30 cm e 40 cm de altura, as flechas obtidas foram extremamente elevadas.

Em relação ao quesito de aceitabilidade sensorial visual estabelecido pela NBR 6118:2014, as flechas totais para este exemplo devem ser menores que 2,4 centímetros. Nenhum caso deste exemplo satisfaz a norma, sendo que o valor mais próximo do limite é o dado pelo método dos elementos finitos, porém para este método não é levada em consideração a fissuração do concreto.

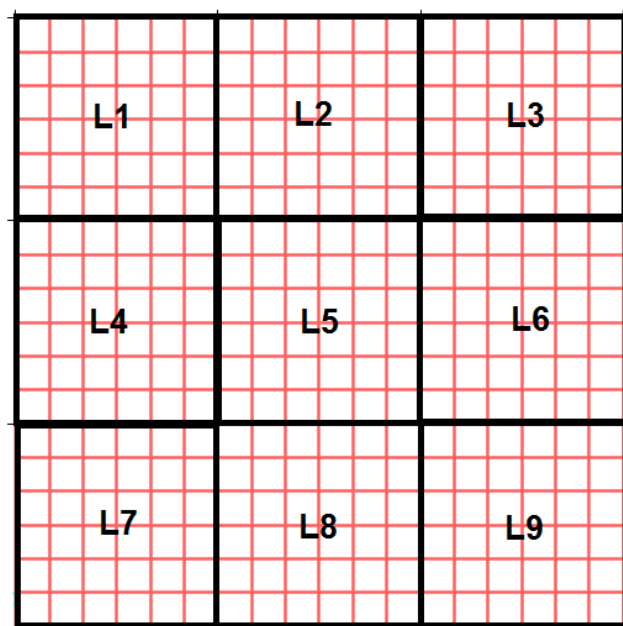
## 7.6 Painel de lajes planas

Foi feita a análise de um painel de lajes planas, ou laje cogumelo, composto por 9 lajes de 6 x 6 m apoiadas em suas extremidades, esquematizado pelo modelo mostrado nas figuras 66 e 67.

**Figura 66 - Modelo de painel de lajes planas.**



**Figura 67 - Lajes que compõem o painel**





Para este exemplo são consideradas as seguintes informações:

- Altura da laje  $h = 16$  cm;
- $f_{ck} = 25$  MPa;
- Carga permanente  $g = 5,0$  kN/m<sup>2</sup>;
- Carga variável  $q = 2$  kN/m<sup>2</sup>;
- Carga total  $p = 7,0$  kN/m<sup>2</sup>.

A espessura adotada da laje é a espessura mínima, segundo a norma NBR:6118, para lajes sem vigas.

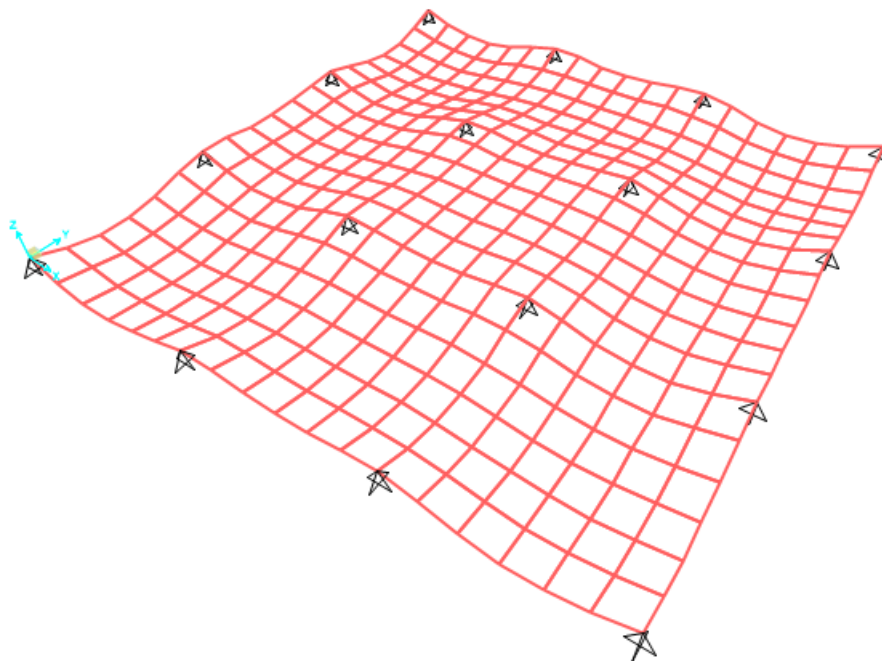
Neste exemplo só serão analisadas as flechas elásticas, para fins comparativos.

### 7.6.1 Método dos elementos finitos

Na definição do material foi utilizado coeficiente de Poisson  $\nu = 0,2$  e o módulo de elasticidade secante  $E_{cs} = 24150$  MPa, calculado no item 7.1.2. A laje foi discretizada em 324 elementos finitos de dimensão 1,0 x 1,0 m.

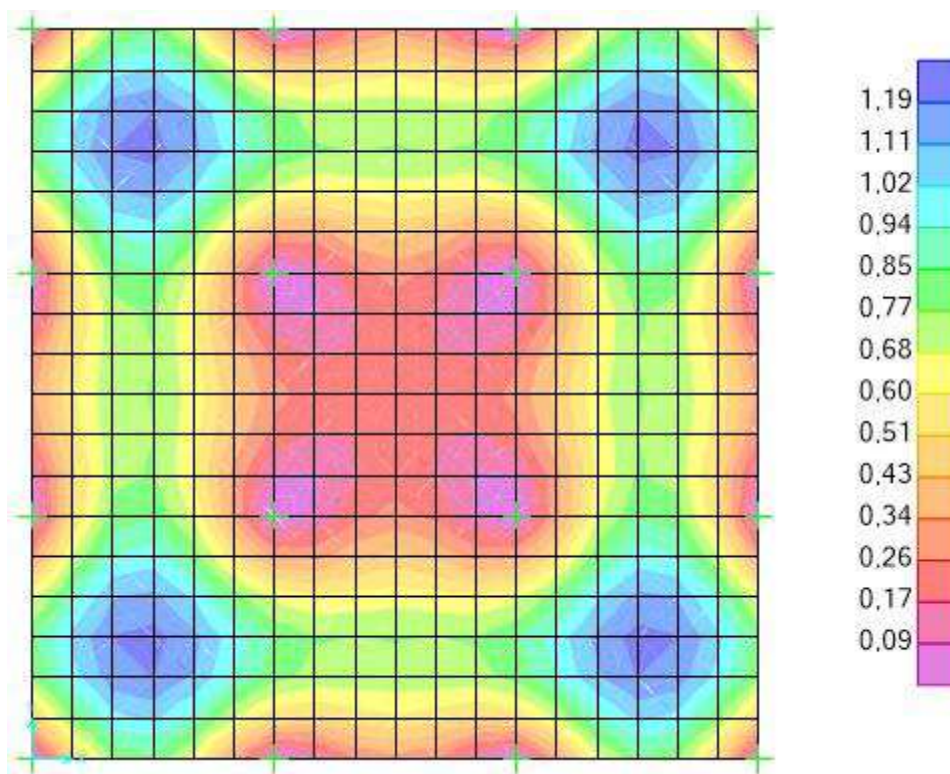
Considerando a carga de serviço  $p_{serv}$  igual a 5,8 kN/m<sup>2</sup>, o modelo deformado da estrutura pode ser visto na figura 68, em escala aumentada.

**Figura 68 - Forma deformada do painel de lajes planas (elementos finitos).**



Os deslocamentos da laje são mostrados na figura 7-39.

**Figura 69 - Deslocamentos (cm) no painel de lajes planas.**

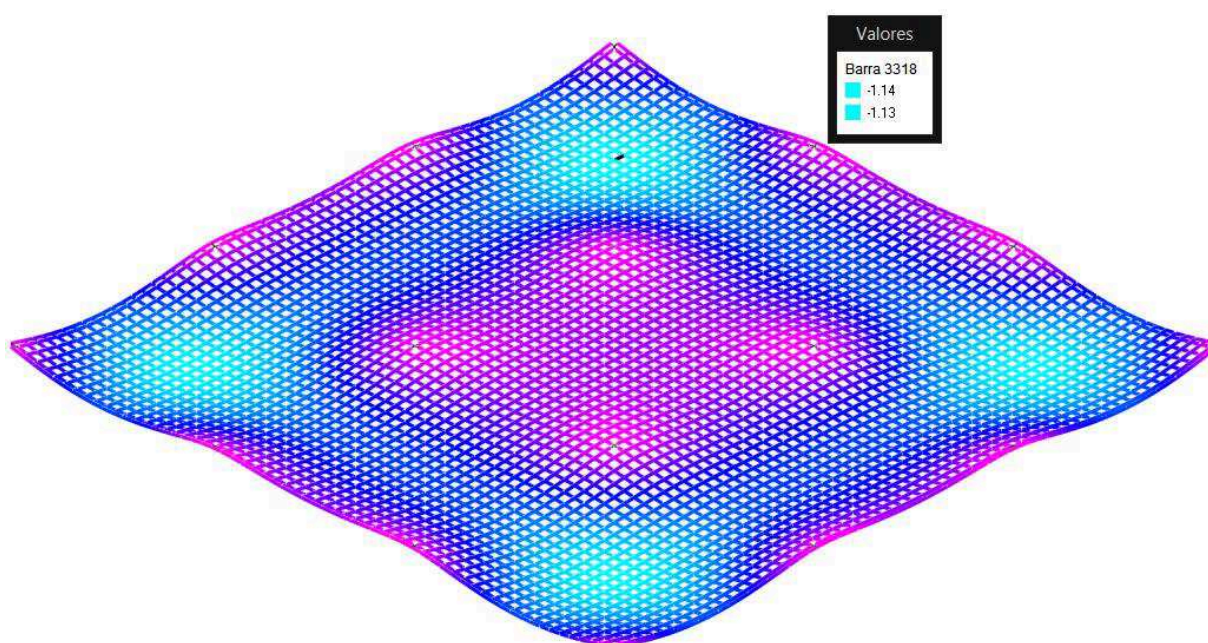


De acordo com a análise, as maiores flechas estão localizadas no centro das lajes L1, L3, L7 e L9, possuindo o valor:

$$f = 1,224 \text{ cm}$$

### 7.6.2 Analogia de grelha

**Figura 70 - Forma deformada do painel de lajes planas (analogia de grelha).**



Considerando o coeficiente de Poisson  $\nu = 0,2$ , a forma deformada do painel de lajes é semelhante à obtida por elementos finitos através do SAP2000. A flecha elástica máxima obtida foi:

$$f = 1,14 \text{ cm}$$

### 7.6.3 Comparação entre resultados

**Tabela 22 - Deslocamentos (cm) obtidos no painel de lajes planas.**

	Flecha elástica máxima (cm)
Elementos finitos	1,22
Analogia de grelha	1,14

Os dois métodos forneceram resultados próximos, sendo as maiores deformações encontradas no centro das lajes L1, L3, L7 e L9.

## 8. CONCLUSÕES

Ao longo dos anos foram desenvolvidos vários métodos para projeto de estruturas, porém alguns destes métodos só se aplicam aos estados limites últimos, não levando em conta os estados limites de serviço. Tomando como exemplo os métodos análise limite superior, estes sempre geram resultados a favor da segurança, variando apenas o fator da economia, mas isso apenas para o estado limite último.

Neste trabalho foram feitos alguns estudos de caso de lajes que se encontram dimensionadas adequadamente para o estado limite último, mas não satisfazem à norma NBR 6118:2014 no que se refere ao estado limite de deformações excessivas, onde alguns resultados mostram flechas muito maiores do que a flecha limite calculada. As flechas diferidas no tempo podem representar uma grande parcela da deformação total das lajes e devem ser verificadas. Em alguns casos, uma alternativa ao redimensionamento da laje é o uso de contra-flecha, que é o deslocamento vertical intencional da laje, através de escoramentos, no sentido contrário da flecha.

Foram observadas algumas diferenças entre os resultados obtidos entre os métodos utilizados. Os métodos das tabelas de Bares e dos elementos finitos fornecem resultados semelhantes, pois os dois se baseiam na teoria da elasticidade, sendo que quanto melhor discretizada a laje para a análise por elementos finitos, mais próximos da teoria da elasticidade serão os resultados gerados. Porém, para a determinação dos deslocamentos nas lajes, estes dois métodos fornecem apenas a flecha elástica, não levando em consideração a fissuração da laje.

A fissuração da laje tem influência nos deslocamentos que ocorrerão na estrutura. Os métodos baseados na teoria da elasticidade por si não preveem este fenômeno, se o projetista determina apenas a flecha elástica de uma laje, este pode estar subestimando a deformação real. Os métodos em que foram previstos a fissuração foram o processo de Marcus e a analogia de grelha.

O processo de Marcus vem sendo criticado por subestimar os esforços atuantes na estrutura. No exemplo do item 7.2, o momento  $M_x$  obtido pelas tabelas de Marcus apresentou um valor significativamente inferior comparado aos outros métodos. Um estudo realizado por Silva e Horowitz (2008) mostra que o método de Marcus pode gerar momentos subestimados em até 20% do seu valor.

Os deslocamentos obtidos por analogia de grelha foram menores dos que obtidos pelo método de Marcus. O método de Marcus se baseia no método das faixas, onde a laje é considerada como um conjunto de vigas ortogonais, levando apenas em consideração a flexão, o que gera resultados de flechas muito elevados. O método da analogia de grelhas já leva em consideração a rigidez da malha.

Um fator muito importante que não deve ser desconsiderado, é que no caso das estruturas reais todos os elementos estruturais sofrerão deformações, não se restringindo as lajes. Os exemplos apresentados nos itens 7.5 e 7.6 mostram a diferença entre as flechas obtidas considerando lajes apoiadas em apoios indeformáveis e lajes apoiadas em vigas de menor rigidez de diferentes dimensões.

É importante destacar que não se deve tomar como representação da realidade os valores dos deslocamentos obtidos, pois as flechas reais podem variar, dependendo de vários fatores. No entanto a verificação da deformação das lajes ainda é de grande importância, para se ter uma previsão dos deslocamentos possíveis na estrutura.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118:2014**. Projeto de estruturas de concreto – Procedimento. Rio de Janeiro, 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6120:1980**. Cargas para o cálculo de estruturas de edificações. Rio de Janeiro, 2000.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 8681:2003**. Ações e segurança nas estruturas. Rio de Janeiro, 2004.

ACI Committee 435, “Variability of Deflections of Simply Supported Reinforced Concrete Beams,” (ACI 435.4R-66) (Reapproved 1984), American Concrete Institute, Detroit, 1972, 7 p.

BANDEIRA, Mirtes Silva. **Análise não-linear de lajes de concreto armado pelo método dos elementos finitos**. 2006. 136 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Curso de Mestrado em Engenharia Civil, Escola de Engenharia Civil, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2006.

BASTOS, Paulo Sérgio dos Santos. **Notas de aula da disciplina de Estruturas de Concreto I – lajes de concreto**. Curso de graduação em Engenharia Civil. Universidade Estadual Paulista. Bauru, 2005.

BOCCHI JUNIOR, Carlos Fernando. **Lajes nervuradas de concreto armado: projeto e execução**. 1995. 183 f. Dissertação (Mestrado) – Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo, São Carlos, 1995.

BOCCHI JUNIOR, Carlos Fernando; GIONGO, José Manuel. **Concreto armado: projeto e construção de lajes nervuradas**. 2007. 47 f. Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo, São Carlos, 2007.

BRANSON, D. E. **Instantaneous and time-dependent deflections of simple and continuous reinforced concrete beams**. HPR Report, N° 7, Alabama Highway Department, Bureau of Public Roads, 1963.

BRANSON, D. E. **Design procedures for computing deflections**. ACI Journal, September, 1968.

BANKI, André Luiz; COELHO, Jano D'araujo; LORIGGIO, Daniel Domingues. **Análise de lajes pelo método das charneiras plásticas**. 2013. Disponível em: <<http://faq.altoqi.com.br/content/245/586/pt-br/análise-de-lajes-pelo-metodo-das-charneiras-plásticas.html>>. Acesso em: 05 abr. 2016.

BUENO, Luiz Otávio Silva. **Cálculo de dimensionamento de lajes e comparação entre as ferramentas disponíveis**. 2008. 52 f. TCC (Graduação) - Curso de Engenharia Civil, Universidade Anhembi Morumbi, São Paulo, 2008.

CARVALHO CHUST, A.; FIGUEIREDO FILHO, J. R. **Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado**. 3. ed. São Carlos: Edusfcar, 2007.

COELHO, Jano D'Araújo. **Modelagem de lajes de concreto armado por analogia de grelha**. 2000. 220 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Civil, Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2000.

COELHO, Jano D'araújo. **Confiabilidade de vigas de concreto armado no estado limite de serviço**. 2011. 272 f. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia Civil, Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2011.

COELHO, Jano D'Araújo; LORIGGIO, Daniel Domingues. **Análise de lajes pelo método das faixas de Hillerborg (artigo 252)**. In: Análise de lajes de concreto armado (sequência de artigos). Eberick. 2002. p. 8.

Computers and Structures, Inc. SAP2000. Disponível em: <<https://www.csiamerica.com/products/sap2000#>>. Acesso em: 05 junho 2016.



DROPPA JÚNIOR, Alonso. **Análise estrutural de lajes formadas por elementos pré-moldados tipo vigota com armação treliçada.** 1999. 177 f. Dissertação (Mestrado) – Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo, São Carlos, 1999.

DUARTE, Heraldo. **Aspectos da análise estrutural das lajes de edifícios de concreto armado.** 1998. 83 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Civil, Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo, São Carlos, 1998.

EBERICK. Sistema para projetos em edificações em concreto armado – Manual do usuário.

FLÓRIO, Márcio Cardozo. **Projeto e execução de lajes unidirecionais com vigotas de concreto armado.** 2004. 213 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Civil, Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2004.

GONZALEZ, Rogério Luciano Miziara. **Análise de lajes pela teoria das charneiras plásticas e comparação de custos entre lajes maciças e lajes treliçadas.** 1997. 144 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Civil, Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo, São Carlos, 1997.

HILLERBORG, Arne. **A plastic theory for the design of reinforced concrete slabs.** Stockholm. 1960.

HILLERBORG, Arne. **Strip method of design.** William & Sons. Londres. London. 1975.

JOKINEN, E. P. e SCANLON, A. "Field Measured Two-Way Slab Deflections", Proceedings of the 1985 Annual Conference, CSCE, Saskatoon, Saskatchewan, Canada, May 1985, pp. 43-58.

JUNGES, Elizabeth. **Estudo comparativo entre métodos simplificados e modelos de elementos finitos não lineares para o cálculo de flecha imediata em vigas de concreto armado.** 2011. 360 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2011.

LORIGGIO, Daniel Domingues. **Utilização da teoria das charneiras plásticas em análise e dimensionamento de lajes de edifícios**. In: 40º Congresso Brasileiro do Concreto (REIBRAC). Anais. Rio de Janeiro, 1998.

METHA, K. P. e MONTEIRO, P. J. M.. **Concreto Microestrutura, Propriedades e Materiais**, 3 ed. São Paulo, Ibracon, 2008.

PARK, Robert; GAMBLE, William L. **Reinforced concrete slabs**. John Wiley & Sons. New York. 1980.

PINHEIRO, Libânio Miranda. **Análise elástica e plástica de lajes retangulares de edifícios**. 1988. 303 f. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia de Estruturas, Departamento de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo, São Carlos, 1988.

PINHEIRO, Libânio Miranda. **Fundamentos do concreto e projeto de edifícios**. 2010. Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo, São Carlos, 2010.

PUEL, André. **Diferença de flechas entre lajes de um pavimento simétrico**. 2010. Disponível em: <<http://faq.altoqi.com.br/content/274/668/pt-br/diferença-de-flechas-entre-lajes-de-um-pavimento-simetrico.html>>. Acesso em: 13 maio 2016.

RODRIGUES, Paulo Cesar. **Notas de Aula da disciplina de Estruturas de Concreto Armado I. Curso de graduação em Engenharia Civil**. 2. Ed. Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul. Ijuí, 2011.

SBAROUNIS, J. A. "Multi-Story Flat Plate Buildings, Measures and Computed One-Year Deflection", *Concrete International*, V6, No 8, Aug 1984, pp 31-35.

SILVA, Marcos Alberto Ferreira da. **Projeto e construção de lajes nervuradas de concreto armado**. 2005. 239 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Civil, Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2005.

SILVA, F. A. N.; HOROWITZ, B.. Bending moments in beams of reinforced concrete buildings: Ibracon. **Revista Ibracon de Estruturas e Materiais**, v. 1, n. 2, p.193-211, jun. 2008.

SZILARD, Rudolph. **Theory and analysis of plates**. Pretince-Hall, Inc, Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.

TIMOSHENKO, S.P; Woinowsky-Krieger,S. **Theory of plates and shells**. McGraw-Hell Kogakusha, Ltda, 1959.

ZENZEN, Alessandro. **Comparação de métodos de cálculo para determinação dos momentos fletores em lajes de concreto armado**. 2012. 91 f. TCC (Graduação) - Curso de Engenharia Civil, Departamento de Ciências Exatas e Engenharia, Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí, 2012.

## ANEXO I - TABELAS DE BARES

**Tabela 23 - Coeficiente  $\alpha$  para cálculo de flechas elásticas em lajes retangulares submetidas a carregamentos uniformemente distribuídos.**

$\lambda$	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6	Caso 7	Caso 8	Caso 9
1,00	4,67	3,20	3,20	2,42	2,21	2,21	1,81	1,81	1,46
1,05	5,17	3,61	3,42	2,67	2,55	2,31	2,04	1,92	1,60
1,10	5,64	4,04	3,63	2,91	2,92	2,41	2,27	2,04	1,74
1,15	6,09	4,47	3,82	3,12	3,29	2,48	2,49	2,14	1,87
1,20	6,52	4,91	4,02	3,34	3,67	2,56	2,72	2,24	1,98
1,25	6,95	5,34	4,18	3,55	4,07	2,63	2,95	2,33	2,10
1,30	7,36	5,77	4,35	3,73	4,48	2,69	3,16	2,42	2,20
1,35	7,76	6,21	4,50	3,92	4,92	2,72	3,36	2,48	2,30
1,40	8,14	6,62	4,65	4,08	5,31	2,75	3,56	2,56	2,37
1,45	8,51	7,02	4,78	4,23	5,73	2,80	3,73	2,62	2,45
1,50	8,87	7,41	4,92	4,38	6,14	2,84	3,91	2,68	2,51
1,55	9,22	7,81	5,00	4,53	6,54	2,86	4,07	2,53	2,57
1,60	9,54	8,17	5,09	4,65	6,93	2,87	4,22	2,87	2,63
1,65	9,86	8,52	5,13	4,77	7,33	2,87	4,37	2,78	2,68
1,70	10,15	8,87	5,17	4,88	7,70	2,88	4,51	2,79	2,72
1,75	10,43	9,19	5,26	4,97	8,06	2,88	4,63	2,81	2,76
1,80	10,71	9,52	5,36	5,07	8,43	2,89	4,75	2,83	2,80
1,85	10,96	9,82	5,43	5,16	8,77	2,89	4,87	2,85	2,83
1,90	11,21	10,11	5,50	5,23	9,08	2,90	4,98	2,87	2,85
1,95	11,44	10,39	5,58	5,31	9,41	2,90	5,08	2,89	2,88
2,00	11,68	10,68	5,66	5,39	9,72	2,91	5,19	2,91	2,91
$\infty$	15,35	15,35	6,38	6,38	15,35	3,07	6,38	3,07	3,07

Fonte: Carvalho e Figueiredo Filho, 2007.

**Tabela 24 - Coeficientes para o cálculo dos momentos máximos em lajes retangulares uniformemente carregadas (Casos 1, 2 e 3).**

$\lambda$	Caso 1		Caso 2			Caso 3		
1,00	4,41	4,41	3,07	3,66	8,40	3,94	8,52	2,91
1,05	4,80	4,45	3,42	3,78	8,19	4,19	8,51	2,84
1,10	5,18	4,49	3,77	3,90	9,18	4,43	9,30	2,76
1,15	5,56	4,49	4,14	3,97	9,53	4,64	9,63	2,68
1,20	5,90	4,48	4,51	4,05	9,88	4,85	9,95	2,59
125	6,27	4,45	4,88	4,10	10,16	5,03	10,22	2,51
1,30	6,60	4,42	5,25	4,15	10,41	5,20	10,48	2,42
1,35	6,93	4,37	5,60	4,18	10,64	5,36	10,71	2,34
1,40	7,25	4,33	5,95	4,21	10,86	5,51	10,92	2,25
1,45	7,55	4,30	6,27	4,19	11,05	5,64	11,10	2,19
1,50	7,86	4,25	6,60	4,18	11,23	5,77	11,27	2,12
1,55	8,12	4,20	6,90	4,17	11,39	5,87	11,42	2,04
160	8,34	3,14	7,21	4,14	11,55	5,98	11,55	1,95
1,65	8,62	4,07	7,42	4,12	11,67	6,07	11,97	1,87
1,70	8,86	4,00	7,62	4,09	11,79	6,16	11,80	1,79
1,75	9,06	3,96	7,66	4,05	11,88	6,24	11,92	1,74
1,80	2,97	3,91	7,69	3,99	11,96	6,31	12,04	1,38
1,85	9,45	3,83	8,22	3,97	12,03	6,38	12,14	1,34
1,90	9,63	3,75	8,74	3,94	12,14	6,43	12,24	1,59
1,95	9,77	3,71	8,97	3,88	12,17	6,47	12,29	1,54
2,00	10,00	3,64	9,18	3,80	12,20	6,51	12,34	1,48
$\infty$	12,57	3,77	9,18	3,80	12,20	7,61	12,76	1,48

Fonte: Carvalho e Figueiredo Filho, 2007.

## ANEXO II – TABELAS DE MARCUS

Tabela 25 -Tabelas de Marcus – Caso 1.

$\lambda$	$m_x$	$m_y$	$\lambda$	$m_x$	$m_y$	$\lambda$	$m_x$	$m_y$
1,00	27,4	27,4	1,35	16,1	29,3	1,69	12,1	34,8
1,01	27,0	27,4	1,36	16,0	29,5	1,70	12,0	35,0
1,02	26,5	27,4	1,37	15,8	29,6	1,71	12,0	35,2
1,03	26,0	27,4	1,38	15,6	29,7	1,72	11,8	35,5
1,04	25,6	27,5	1,39	15,4	29,8	1,73	11,8	35,7
1,05	25,1	27,5	1,41	15,1	30,0	1,74	11,7	35,9
1,06	24,6	27,5	1,42	14,9	30,2	1,75	11,7	36,2
1,07	24,2	27,5	1,43	17,8	30,3	1,76	11,6	36,4
1,08	23,7	27,5	1,44	14,7	30,5	1,77	11,5	36,7
1,09	23,2	27,6	1,45	14,5	30,6	1,78	11,5	36,9
1,10	22,8	27,6	1,46	14,4	30,7	1,79	11,4	37,1
1,11	22,4	27,6	1,47	14,3	30,9	1,80	11,4	37,4
1,12	22,1	27,7	1,48	14,1	31,0	1,81	11,4	37,6
1,13	21,8	27,7	1,49	14,0	31,2	1,82	11,3	37,8
1,14	21,4	27,8	1,50	13,9	31,3	1,83	11,3	38,1
1,15	21,1	27,8	1,40	15,2	29,9	1,84	11,2	38,3
1,16	20,8	27,8	1,50	13,9	31,3	1,85	11,2	38,5
1,17	20,4	27,9	1,51	13,8	31,4	1,86	11,1	38,8
1,18	20,1	27,9	1,52	13,7	31,6	1,87	11,1	39,0
1,19	19,8	27,9	1,53	13,6	31,8	1,88	11,0	39,2
1,20	19,4	28,0	1,54	13,5	31,9	1,89	11,0	39,5
1,21	19,2	28,1	1,55	13,4	32,1	1,90	11,0	39,7
1,22	19,0	28,2	1,56	13,3	32,3	1,91	10,9	40,0
1,23	18,7	28,3	1,57	13,2	32,4	1,92	10,9	40,2
1,24	18,5	28,4	1,58	13,1	32,6	1,93	10,8	40,5
1,25	18,2	28,4	1,59	13,0	32,8	1,94	10,8	40,8
1,26	18,0	28,5	1,60	12,9	33,0	1,95	10,8	41,0
1,27	17,7	28,6	1,61	12,8	33,2	1,96	10,7	41,3

1,28	17,5	28,7	1,62	12,7	33,4	1,97	10,7	41,6
1,29	17,2	28,8	1,63	12,6	33,6	1,98	10,6	41,8
1,30	17,0	28,8	1,64	12,5	33,8	1,99	10,6	42,1
1,31	16,8	28,9	1,65	12,4	34,0	2,00	10,6	42,3
1,32	16,7	29,0	1,66	12,4	34,2			
1,33	16,5	29,1	1,67	12,3	34,4			
1,34	16,3	29,2	1,68	12,2	34,6			

Fonte: Adaptado de Rodrigues, 2011.