

FIG. 89

Hubert s'était d'abord trompé et avait dessiné deux ensembles de 6 objets. Il retourne sa feuille et produit ce joli dessin, qui donne l'impression qu'Hubert a perçu le lien entre injection et relation \leftarrow

Les nombres 5 et 6 ne sont pas placés aux endroits prévus et Hubert se permet quelque fantaisie avec le signe \leftarrow qu'il dessine en bleu. Mais parfois, ne faisons-nous pas comme lui ?

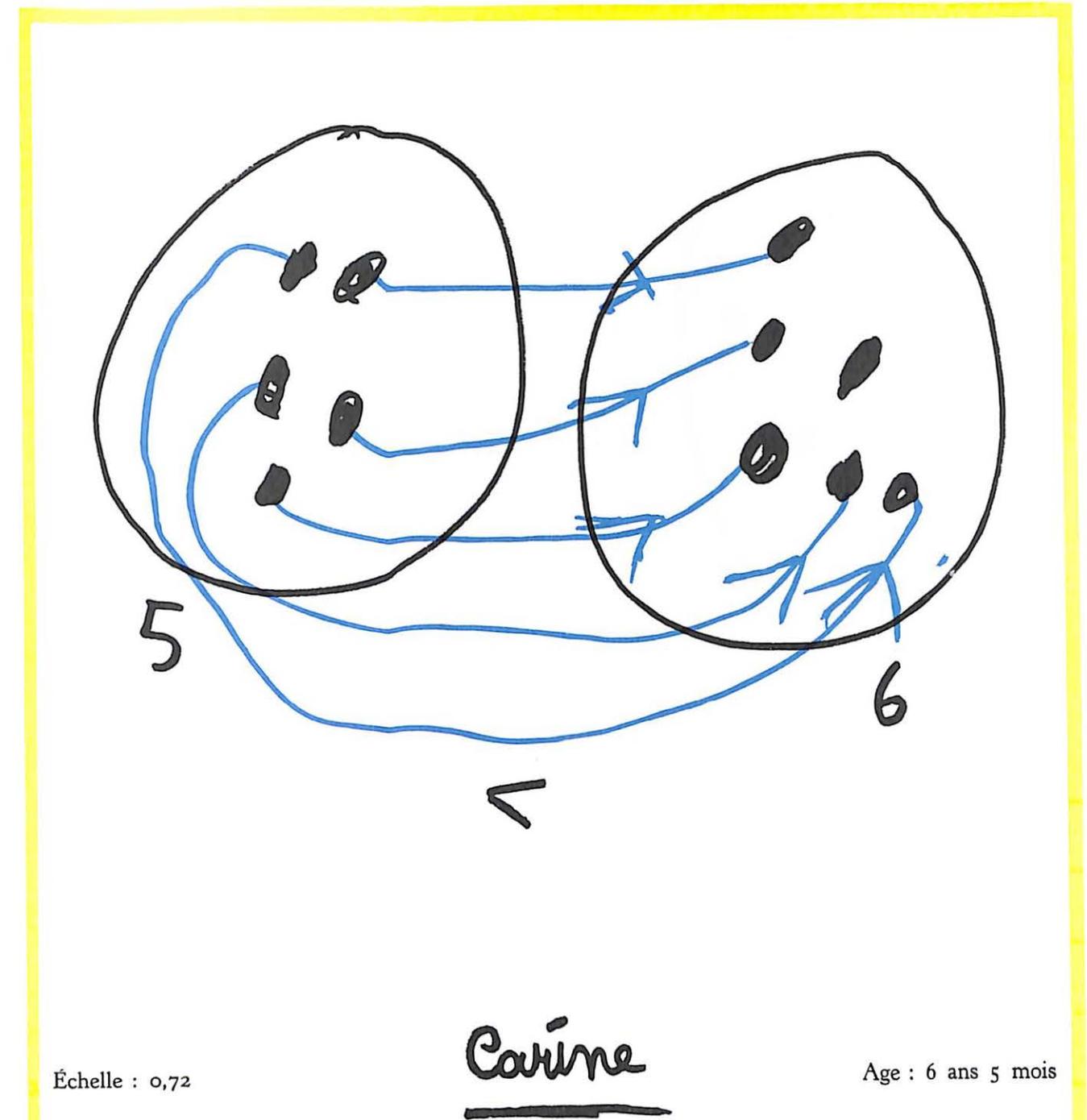


FIG. 90

Dessin simple, clair, net, correct.

— Nouvelle histoire de bonbons. Ne dites rien.
Comptez les bonbons et les enfants.

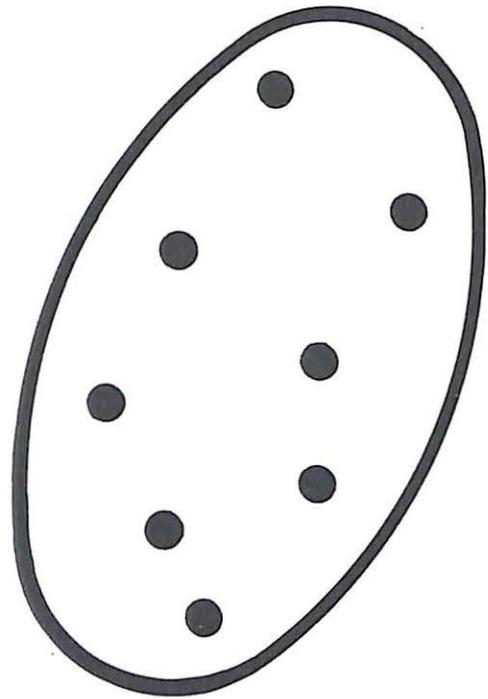
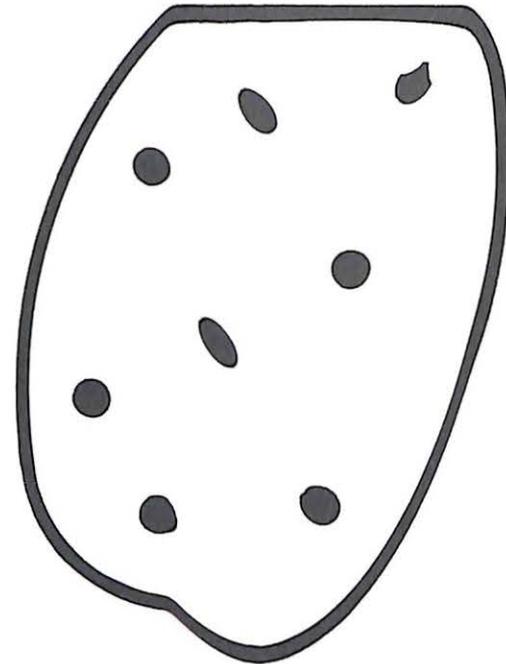


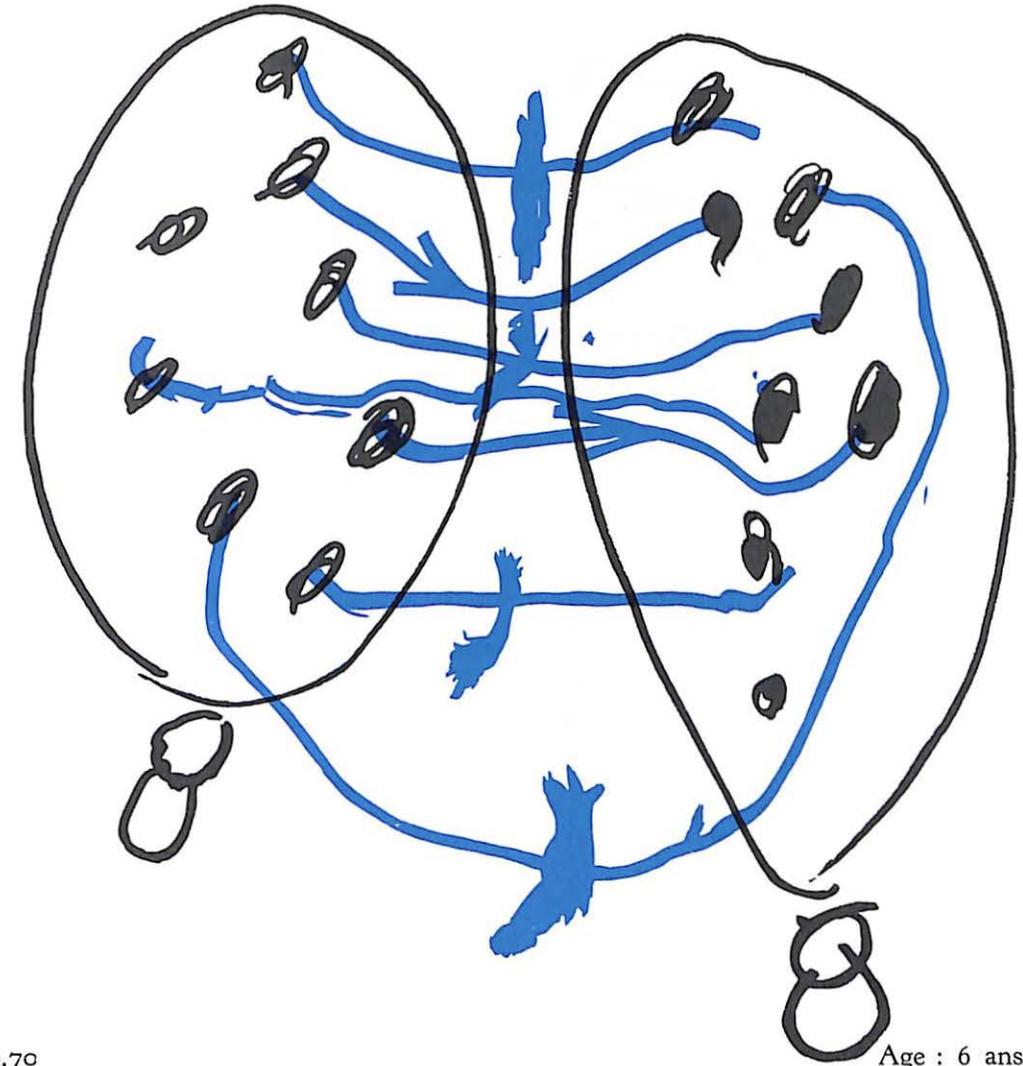
FIG. 91



- Oh!
- Moi je sais!
- Chut!
- On peut dessiner ?
- Oui. Distribuez les bonbons, un au plus par enfant ... et faites la distribution en couleur, c'est plus joli.
Que s'est-il passé ?
- Il y a huit enfants et il y a huit bonbons!
- Aucun enfant n'est puni!
- En dessous du dessin, écrivez un beau grand 8
- C'est facile!

L'ENFANT ET LES GRAPHES

Christian



Échelle : 0,70

Age : 6 ans 8 mois

FIG. 92

Christian a bien des difficultés à imiter les deux flèches tracées par FRÉDÉRIQUE.
Il a cependant compris l'idée essentielle malgré la flèche oubliée.

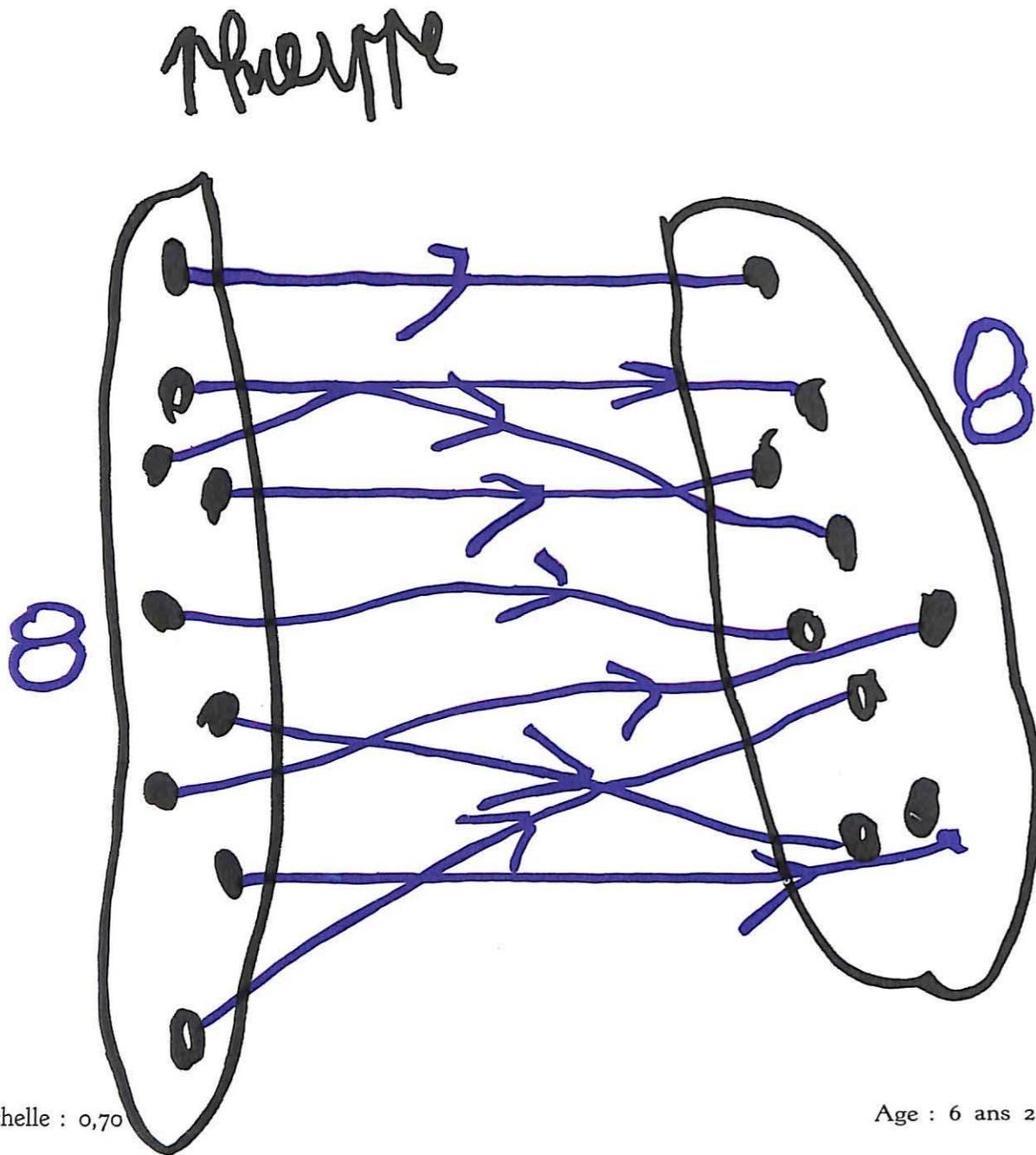


FIG. 93

Comme la plupart de ses condisciples, Philippe a marqué deux fois 8. Il souligne ainsi que la bijection assure l'égalité du nombre d'objets dans les deux ensembles. Philippe dessine des flèches croisées ... mais ses ensembles comprennent chacun 9 éléments!

Dernier exercice de distribution injective de bonbons : $5 < 7$

— C'est pas gai, avec des bonbons; c'est tout le temps la même chose, commente Hubert pour lequel ce travail ne présente plus de difficulté.

Au contraire, Pepito et Daniel font un gros effort et sont fiers de réussir leurs premiers graphes.

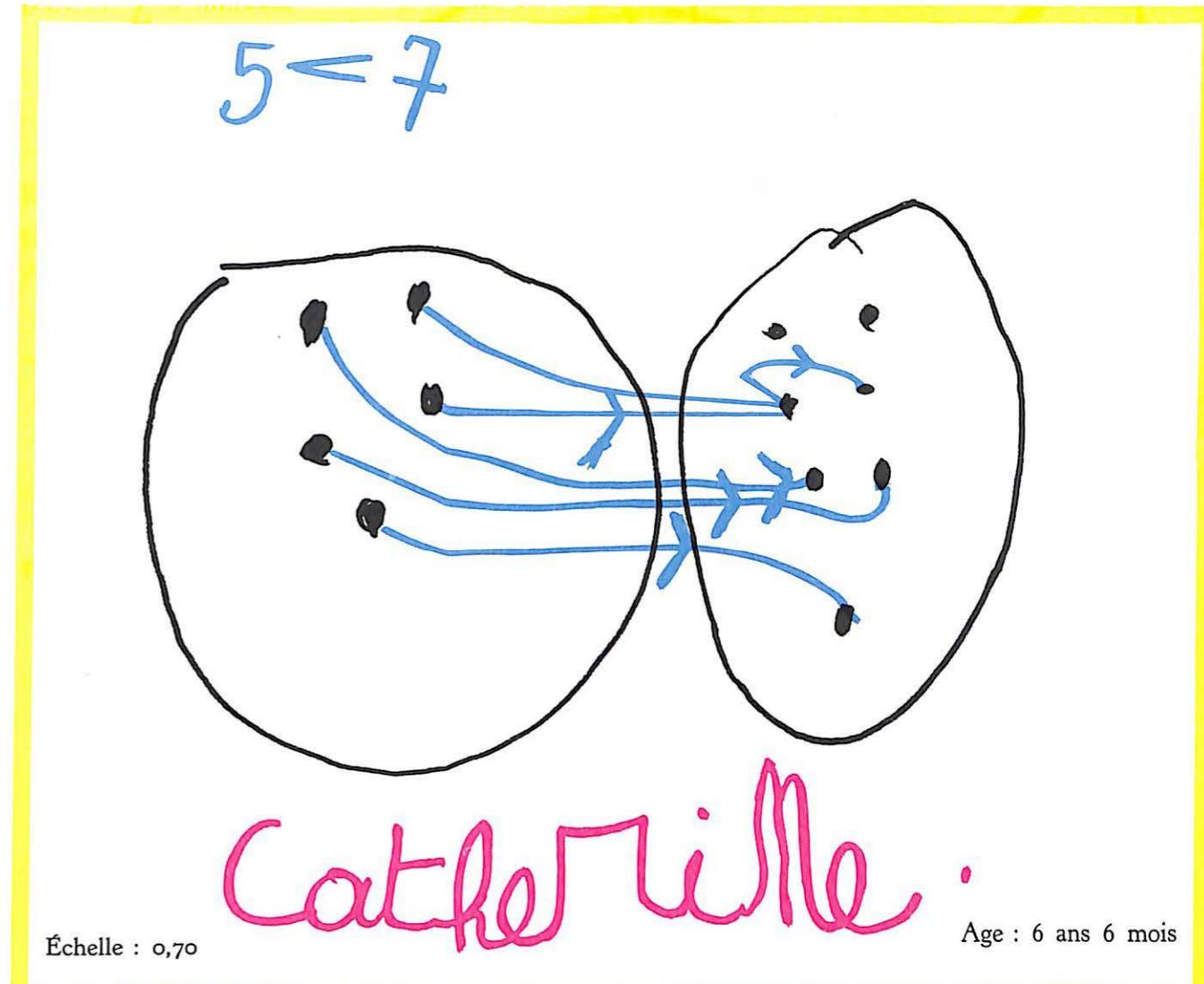
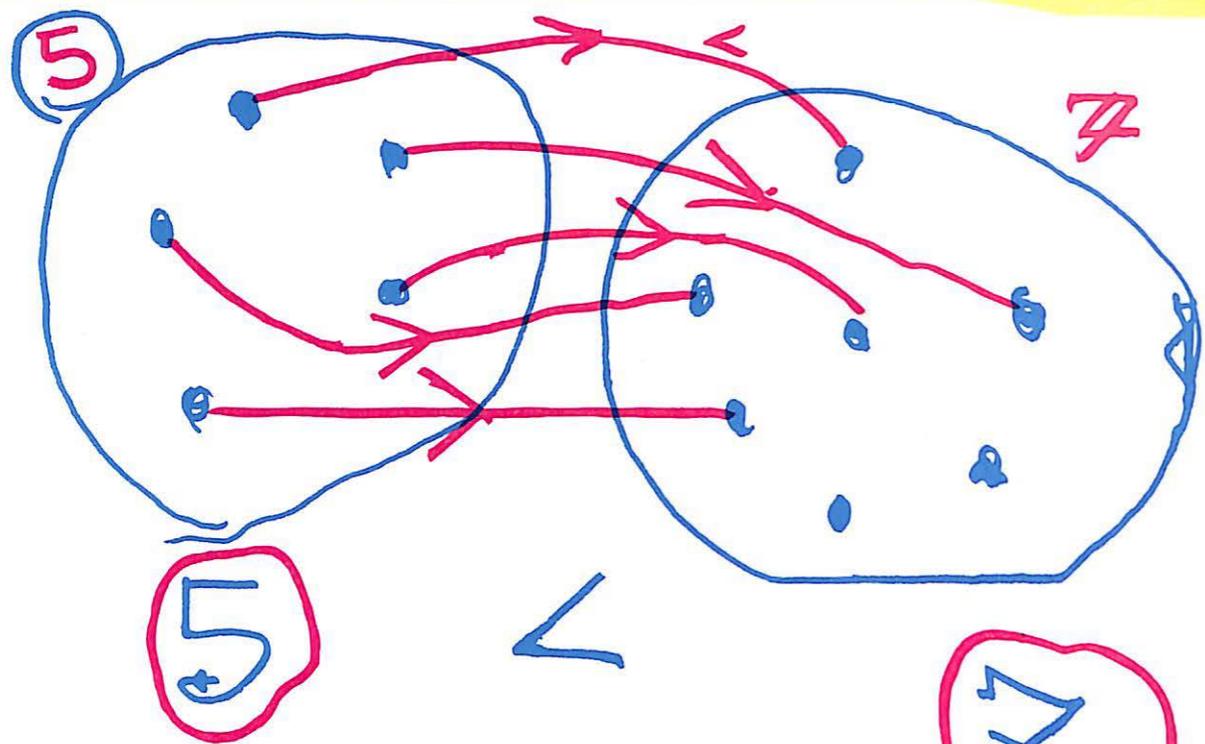


FIG. 94

Amusante correction d'un léger accident technique.

Dessin correct, bien que naïf et laborieux.

Catherine comprend a posteriori la parenté entre $<$ et injection non surjective mais ce lien n'éclate pas sur le dessin. Catherine n'a pas la vue d'ensemble a priori qui lui aurait permis de présenter un travail plus intelligible en évitant les accrochages de flèches.



Échelle : 0,70

Age : 5 ans 10 mois

FIG. 95

Nicolas à la poursuite de la perfection.

Mécontent de sa présentation de la formule $5 < 7$,

il la modifie pour la rendre plus frappante.

Nicolas sait d'avance ce qu'il fait et produit une sorte de panneau publicitaire soulignant le lien entre

$<$ et injection non surjective

COMMENTAIRE DE LA LEÇON 7

DURÉE : 40 minutes

DATE : 22 septembre 1967.

PRÉCISION DES INSTRUCTIONS

Reproduire un dessin comportant un grand nombre de points ... ce n'est pas nécessairement dessiner exactement le même nombre de points ...

Aussi FRÉDÉRIQUE est-elle précise.

— Dessinez autant de bonbons qu'au tableau, pas un de plus, pas un de moins.

LES ENFANTS SONT DE PLAIN PIED DANS L'ABSTRAIT

FRÉDÉRIQUE introduit simplement l'ensemble des bonbons en dessinant

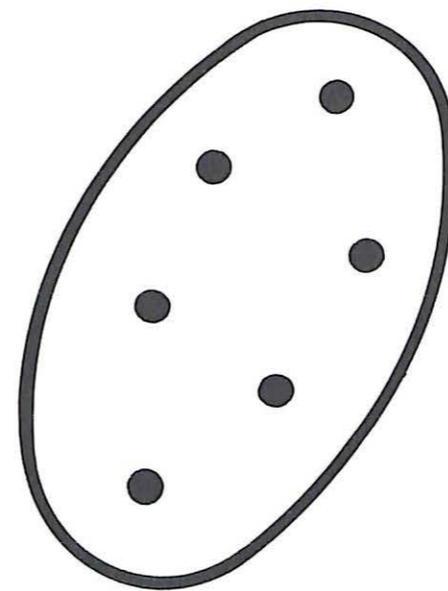


FIG. 96

... et l'ensemble des enfants en dessinant ...

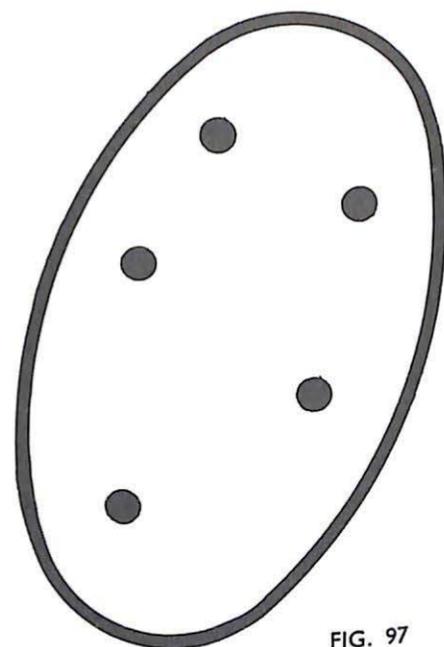


FIG. 97

Personne n'a sourcillé, ni protesté, ni ri, ni souri!
Les enfants voguent à leur aise dans ce monde de schémas abstraits représentant des situations familières.

Inutile de matérialiser la situation au moyen de vrais bonbons. Et nul ne s'étonne que

... ces enfants et ces bonbons se ressemblent terriblement !...

Les élèves sont au-dessus de ce niveau et ont parfaitement assimilé la convention.
FRÉDÉRIQUE s'en assure indirectement.

— Combien de bonbons ?

...

— Combien d'enfants ?

DISTRIBUTION DE BONBONS

FRÉDÉRIQUE énonce le petit drame enfantin. Deux enfants, peu sages, ne recevront pas de bonbons.

— Distribuez les bonbons.

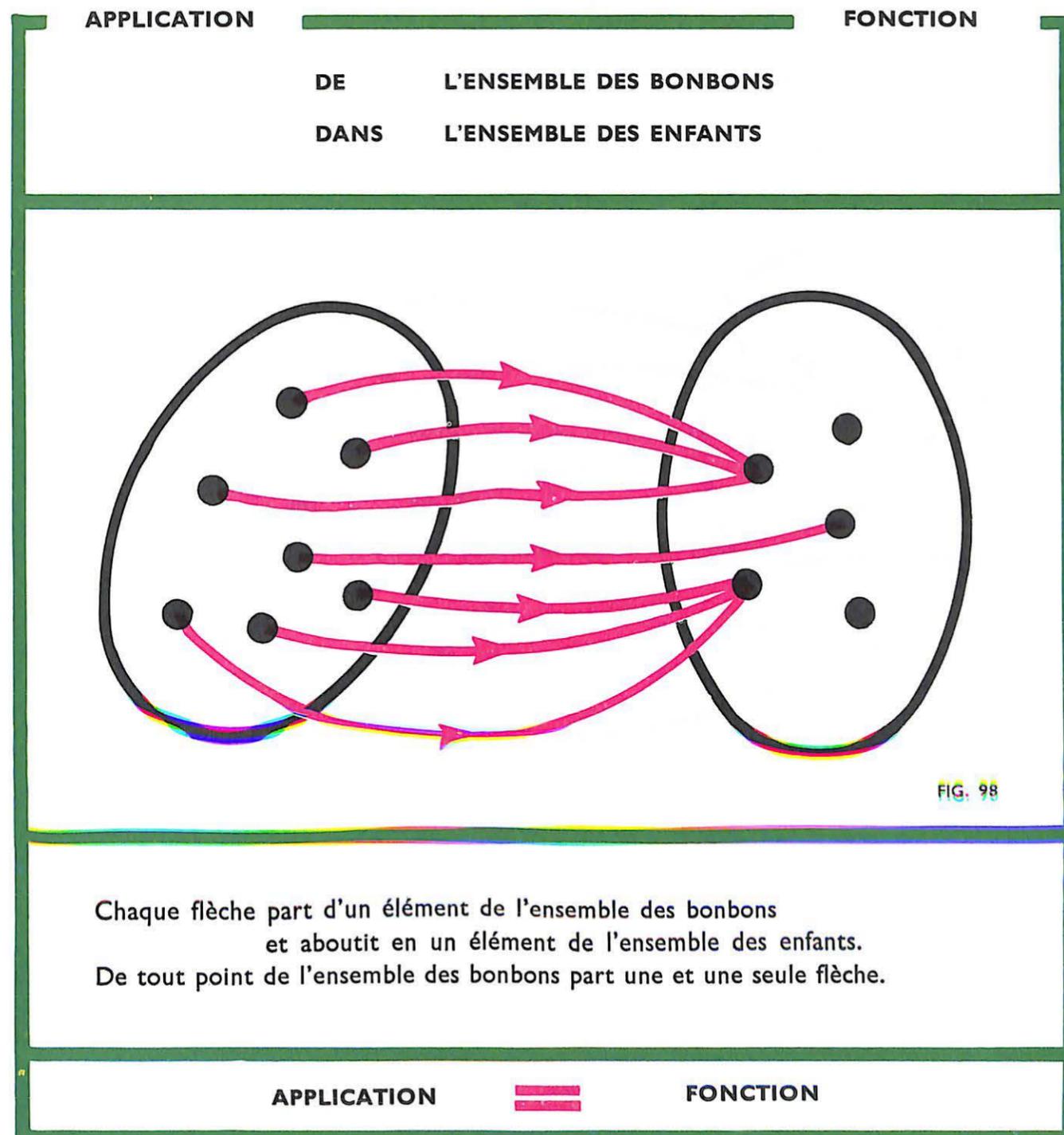
L'attrait des bonbons ne va-t-il pas provoquer quelque complexe de frustration et l'une ou l'autre difficulté ?

La question qui fuse de la classe doit nous rassurer.

— En vert ?

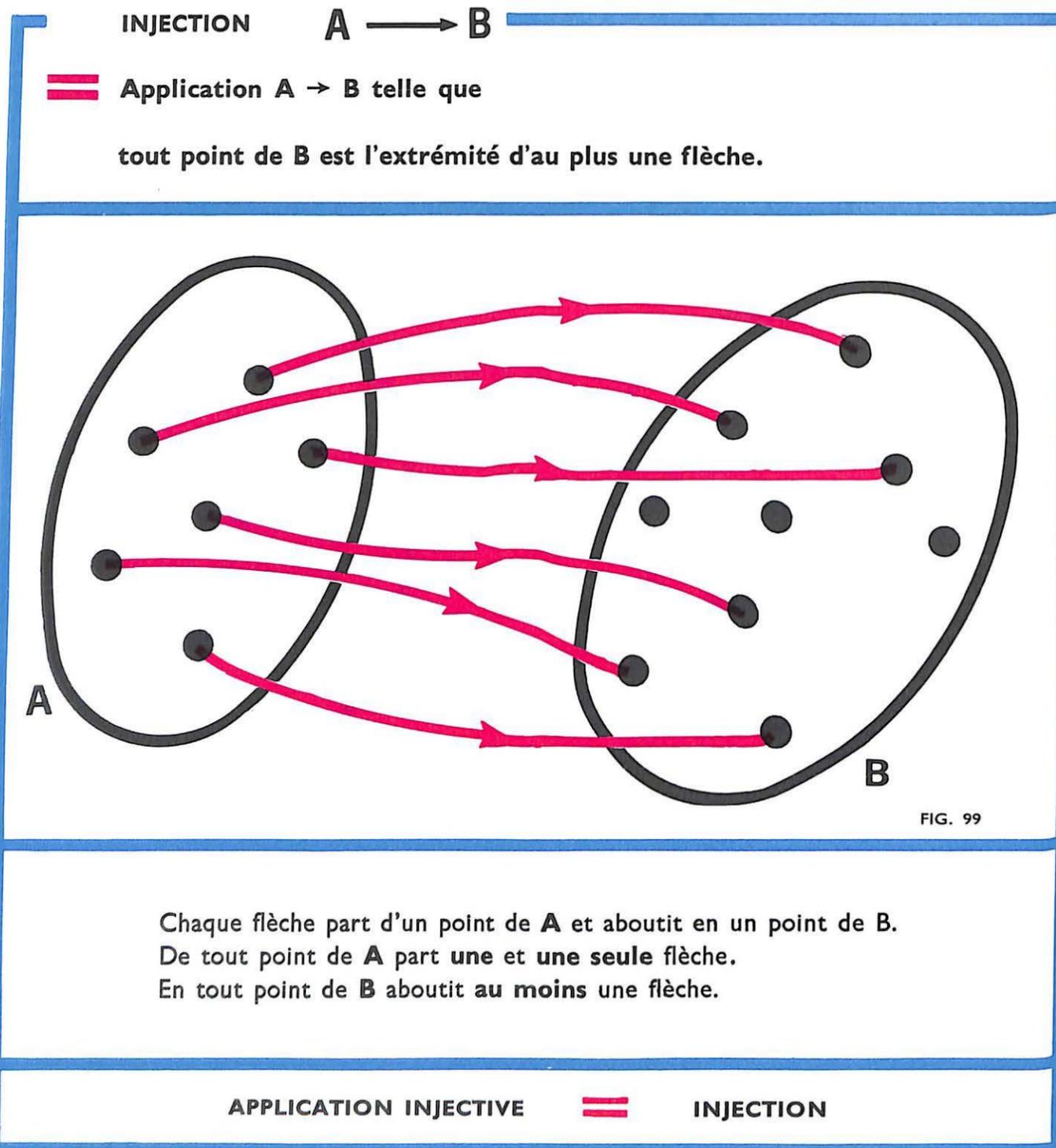
Les enfants **dépouillent** la distribution de bonbons et n'en conservent qu'

UN GRAPHE = DESSIN DE LA NOTION MATHÉMATIQUE SOUS-JACENTE
À LA SITUATION CONCRÈTE PRÉSENTÉE PAR FRÉDÉRIQUE.



INJECTION

Notion mathématique sous-jacente à la seconde distribution de bonbons.



APPRENDRE L'USAGE DES LOCUTIONS LOGIQUES

La définition des **INJECTIONS** utilise l'articulation logique **AU PLUS**, que les enfants comprennent peut-être mal.

FRÉDÉRIQUE particularise la nouvelle distribution, en se servant d'une langue simple et claire, bien à la portée des élèves.

— *Aucun enfant ne recevra plus d'un bonbon.*

L'idée est immédiatement renforcée par la formule lapidaire correcte

— **AU PLUS** un bonbon par enfant !

qui introduit le *quantificateur logique AU PLUS*.

**LES SITUATIONS RELATIVES À DES BONBONS
ÉVEILLEN LES FACULTÉS CALCULATRICES DES ENFANTS**

Cinq bonbons et six enfants.

Réaction spontanée.

— **Il y en a un qui ne va pas en recevoir!**

L'ÉCRITURE DES CHIFFRES

Chaque jour, on arrache une feuille au calendrier.

Maisons, voitures, tramways portent des numéros.

L'écriture des chiffres ... 5, 6 ... (enjôlée de variantes!) est dans la connaissance commune des enfants de six ans.

Les élèves **APPRENNENT** à écrire les chiffres et les nombres

SANS QUE FRÉDÉRIQUE LE LEUR ENSEIGNE

PÉDAGOGIE DES SITUATIONS

« La meilleure leçon est celle que l'on ne fait pas! »
Il est plus efficace, chaque fois que c'est possible de

SUBSTITUER LE LEARNING AU TEACHING

Apprentissage par des enfants **actifs** plutôt qu'un enseignement à des élèves voués à un rôle **passif**.
Le but ultime de l'enseignement n'est pas d'**enseigner** mais de **faire apprendre**.

On y arrive, notamment, par la

PÉDAGOGIE DES SITUATIONS DUE À CALEB GATTEGNO

Elle consiste à mettre les élèves dans des *situations* qui les amènent à apprendre spontanément et activement.

SURJECTION $A \longrightarrow B$

== APPLICATION $A \rightarrow B$ telle que
tout élément de B est l'extrémité d'au moins une flèche.

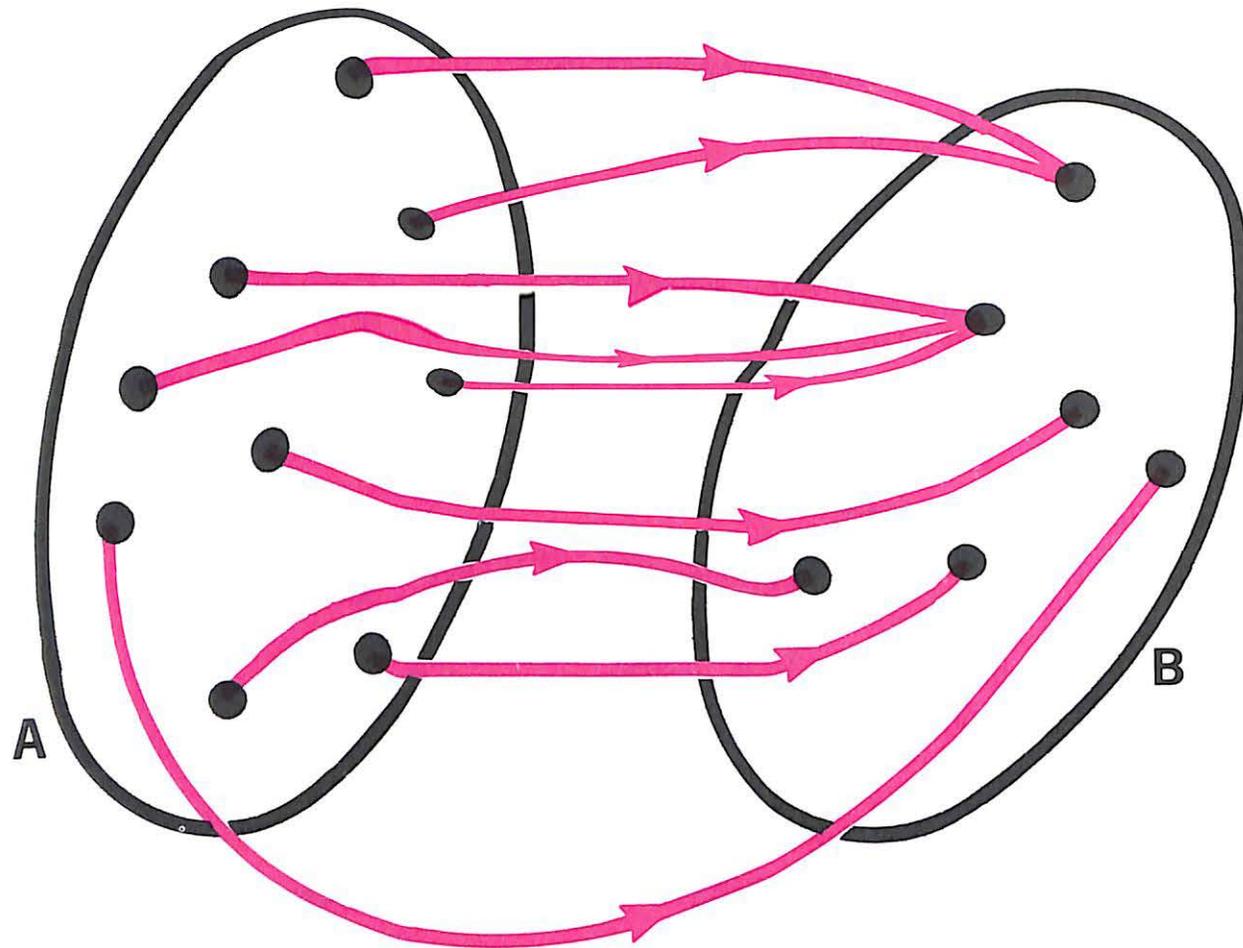


FIG. 100

Chaque flèche part d'un point de A et aboutit en un point de B .
De tout point de A part une et une seule flèche.
En tout point de B aboutit au moins une flèche.

APPLICATION SURJECTIVE == SURJECTION

CONTRE-EXEMPLES

FRÉDÉRIQUE n'a pas présenté de situation isolant la notion de surjection qui apparaît néanmoins ... par des exemples d'applications ... *non surjectives*.

La distribution des lettres par ce facteur n'est pas surjective ... puisque certains enfants n'ont pas reçu de lettres.

La distribution des bonbons à ces enfants n'est pas surjective ... puisque ces deux enfants n'ont pas reçu de bonbon.

Dans ce dernier cas, la non-surjectivité est soulignée de manière cruelle : deux enfants sont punis!



CHOIX DE LA SITUATION

Les bonbons ne se distribuent pas comme les lettres du facteur. Après les exhubérantes et exceptionnelles distributions du premier exemple, on se calme et les nouvelles distributions suivent l'usage : un par un ... c'est-à-dire de manière à fournir une injection ... chaque fois que c'est possible. Les distributions de bonbons appellent la notion d'injection.

ORDRE STRICT : PLUS PETIT QUE

Certaines distributions injectives sont **malheureusement** non surjectives ... lorsque le nombre de bonbons est plus petit que le nombre d'enfants.

Les élèves de FRÉDÉRIQUE avaient rencontré la locution **PLUS PETIT QUE** au cours de manipulations de Règlettes CUISENAIRE qui mirent en jeu des **longueurs** et non des **nombre**s (calculations de Règlettes CUISENAIRE qui mirent en jeu des **longueurs** et non des **nombre**s (calculations de Règlettes CUISENAIRE qui mirent en jeu des **longueurs** et non des **nombre**s). Les enfants formément à la pédagogie prônée par Caleb GATTEGNO et Madeleine GOUTARD). Les enfants avaient d'ailleurs consigné leurs observations sur la longueur des trains de réglettes en des formules littérales.

Voici les premières formules écrites par NICOLAS.

nicolas
 $j < n$
 $R < m$
 $j < B$
 $b < o$
 $r + R < o$
 $b < B$
 $m < j + v$
 $b < o + o + o + o + o + o + o + o$

FIG. 101

Chaque lettre désigne la **LONGUEUR** d'une **REGLETTE**

- | | | | | |
|---------|--------|--------|-------|------------|
| bleue | jaune | noire | rouge | vert pâle |
| Blanche | marron | orange | Rose | Vert foncé |

Au cours de la leçon 7 de FRÉDÉRIQUE, les élèves transfèrent sans grande difficulté.

BIJECTION

Huit bonbons et huit enfants.

Au plus un bonbon par enfant!

On réussit l'injection, mais cette fois tout est pour le mieux, personne n'est puni.

La notion mathématique sous-jacente à cette situation bien saisie par les élèves est celle de **BIJECTION**

BIJECTION A → B

== APPLICATION A → B injective et surjective

FIG. 102

Chaque flèche part d'un point de **A** et aboutit en un point de **B**
 De tout point de **A** part une et une seule flèche.
 En tout point de **B** aboutit une et une seule flèche.

APPLICATION BIJECTIVE == **BIJECTION**

BIJECTION ET NOMBRE D'ÉLÉMENTS

Pour les élèves de FRÉDÉRIQUE il est absolument évident que

Les ensembles **A** et **B** ont même nombre d'éléments

si et seulement s'

il existe une bijection $A \rightarrow B$

En particulier

LES BIJECTIONS CONSERVENT LE NOMBRE

Contrairement à ce que l'on semble parfois craindre, les enfants de 6 ans sont parfaitement conscients de la

CONSERVATION DU NOMBRE PAR BIJECTION

LE NOMBRE 8

En demandant de mettre un grand 8 sous le dessin, FRÉDÉRIQUE veut donner un air de famille à la catégorie des ensembles de 8 objets articulée par bijections.

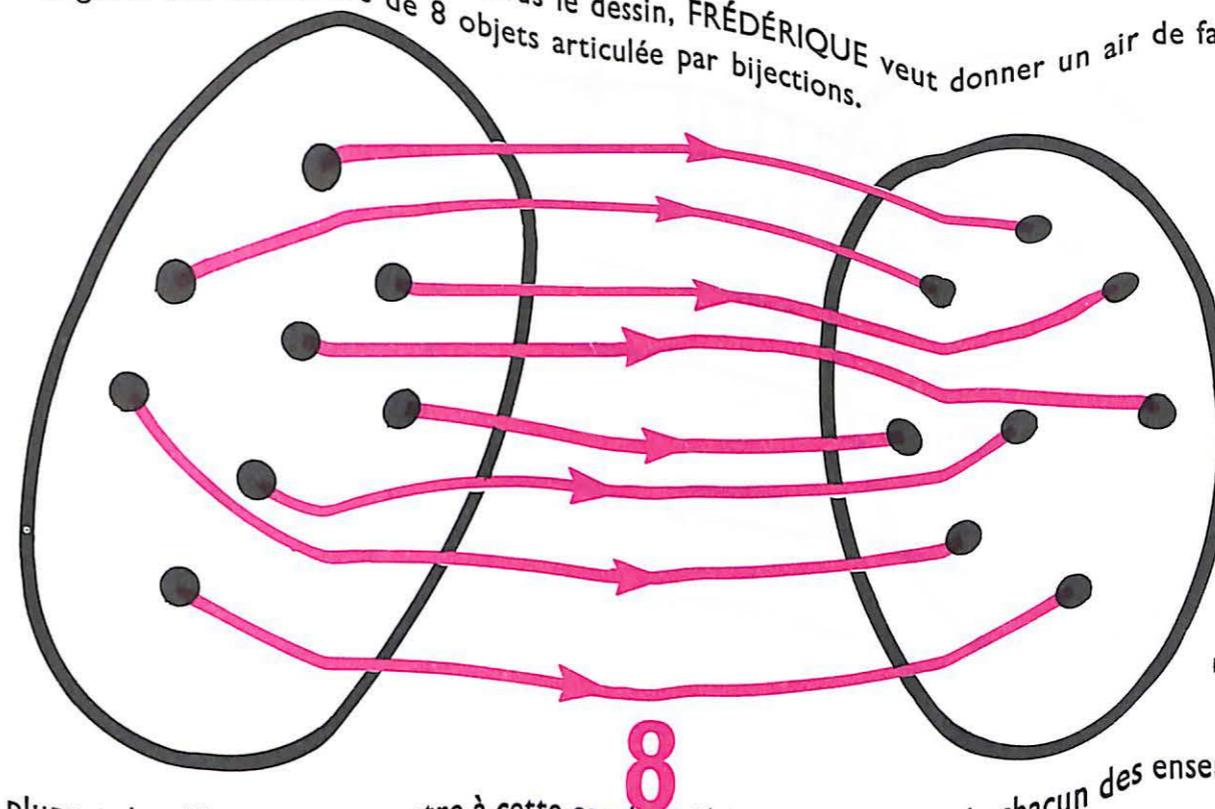


FIG. 103

La plupart des élèves passent outre à cette consigne et tracent un 8 près de chacun des ensembles. Décidément, la classe de **tous** les ensembles de 8 éléments n'a rien de naturel! En écrivant un 8 auprès de chaque ensemble, les élèves traitent la bijection ...

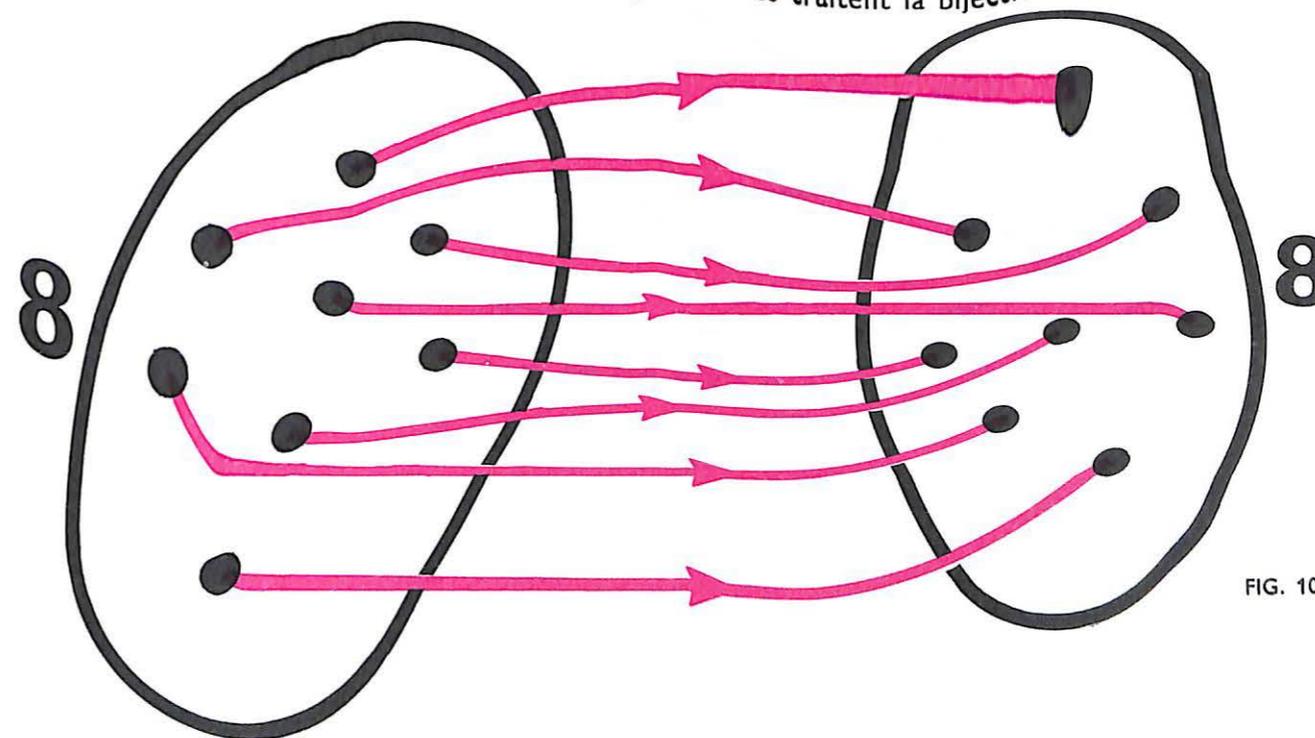


FIG. 104

... comme cas particulier d'injection

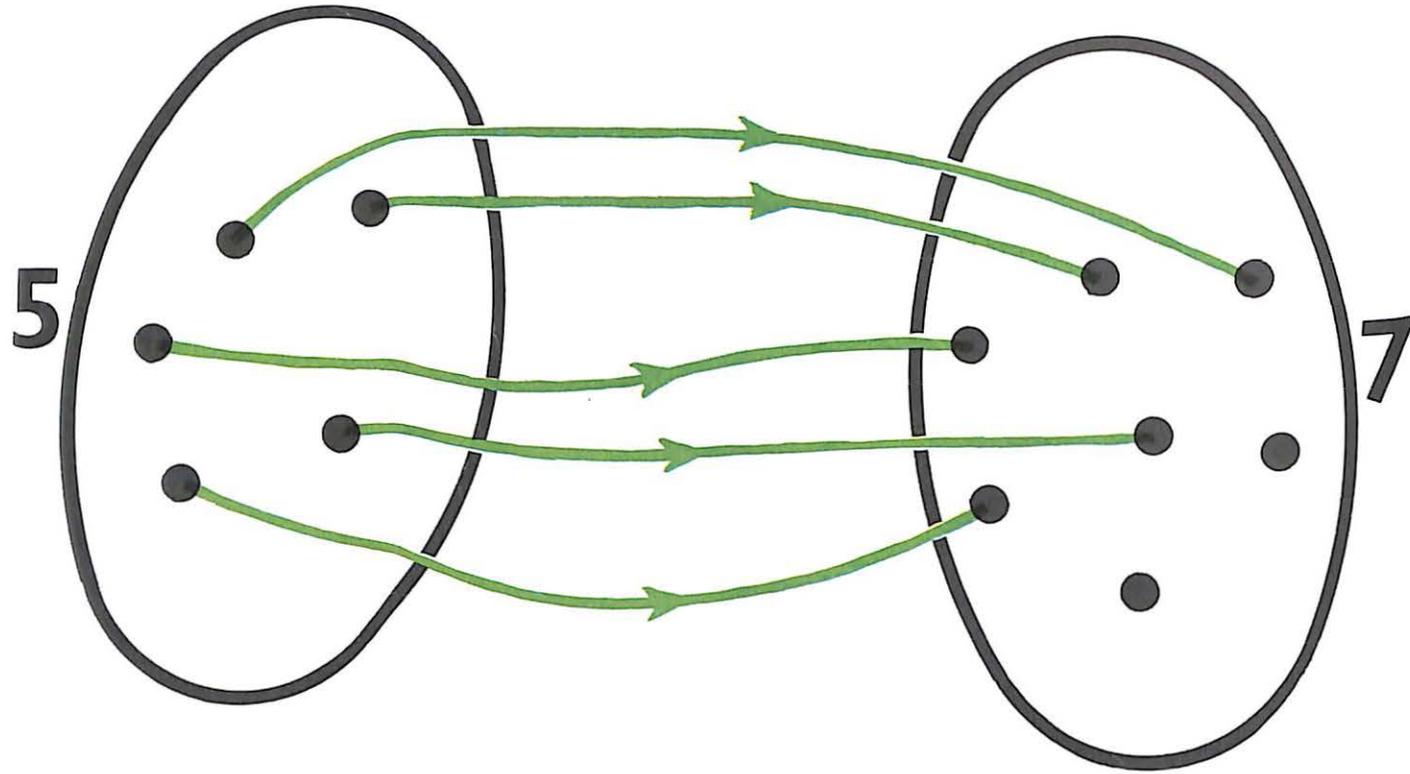


FIG. 105

SURJECTIVITÉ

=

PAS DE PUNIS

La remarque

— Il n'y a pas de punis!

traduit la **SURJECTIVITÉ**

8

Problèmes introduits par des graphes

... FRÈRE ... et ... SŒUR ...

Chaque élève reçoit une feuille de format 20 cm × 30 cm reproduisant ce dessin.

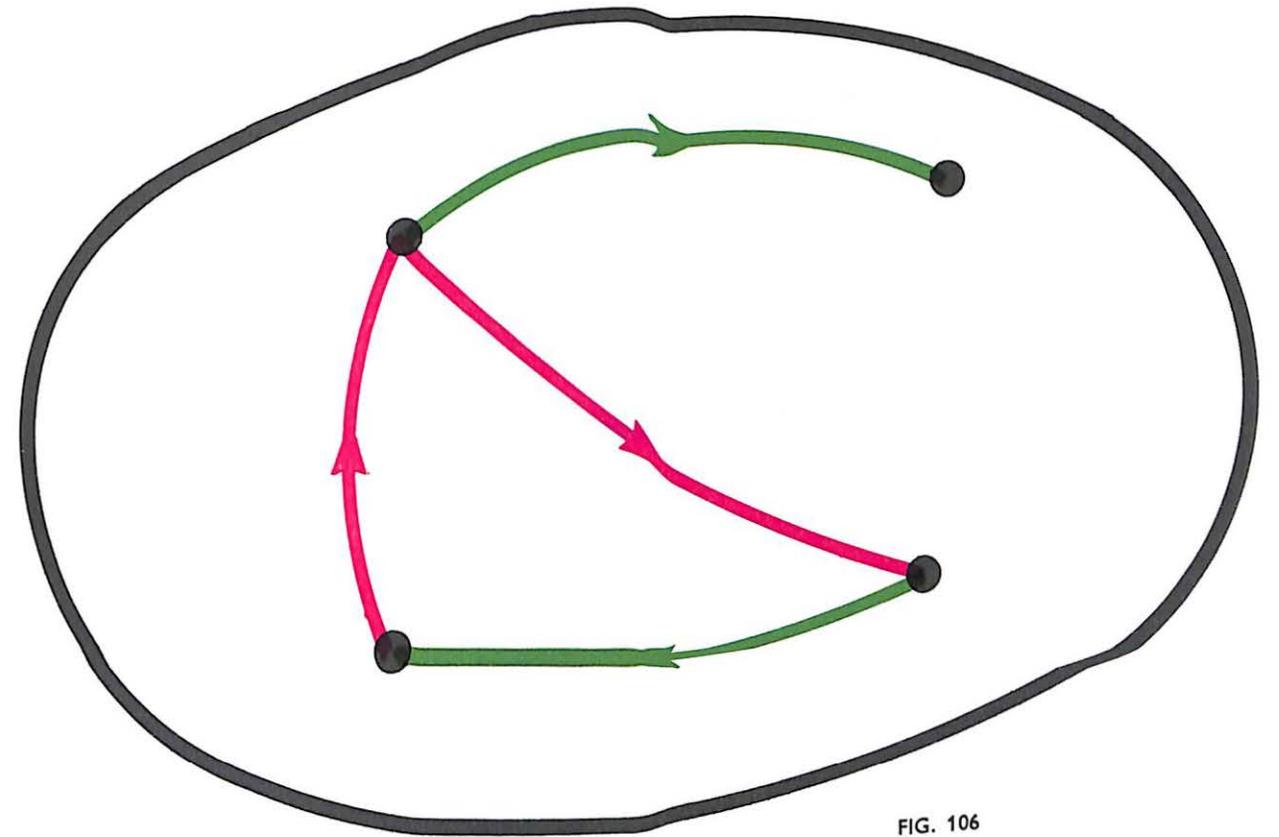


FIG. 106

- Quatre enfants ont joué ... frère ... et ... sœur ...
Que disent les flèches rouges ?
- Voici ma sœur.
- Que disent les flèches vertes ?
- Voilà mon frère!

— Où sont les filles et les garçons ?

...

— Comment indiquons-nous les filles ?

— Avec deux longues tresses.

— Et les garçons ?

— Avec une petite brosse!

— Marquez les filles et les garçons ...

Et si certains petits distraits ont oublié de jouer ou n'ont pas tout dit... faites-le pour eux, en dessinant les flèches qui manquent!

*Les enfants dessinent. FRÉDÉRIQUE n'intervient pas.
Pas de correction, ni individuelle, ni collective.*

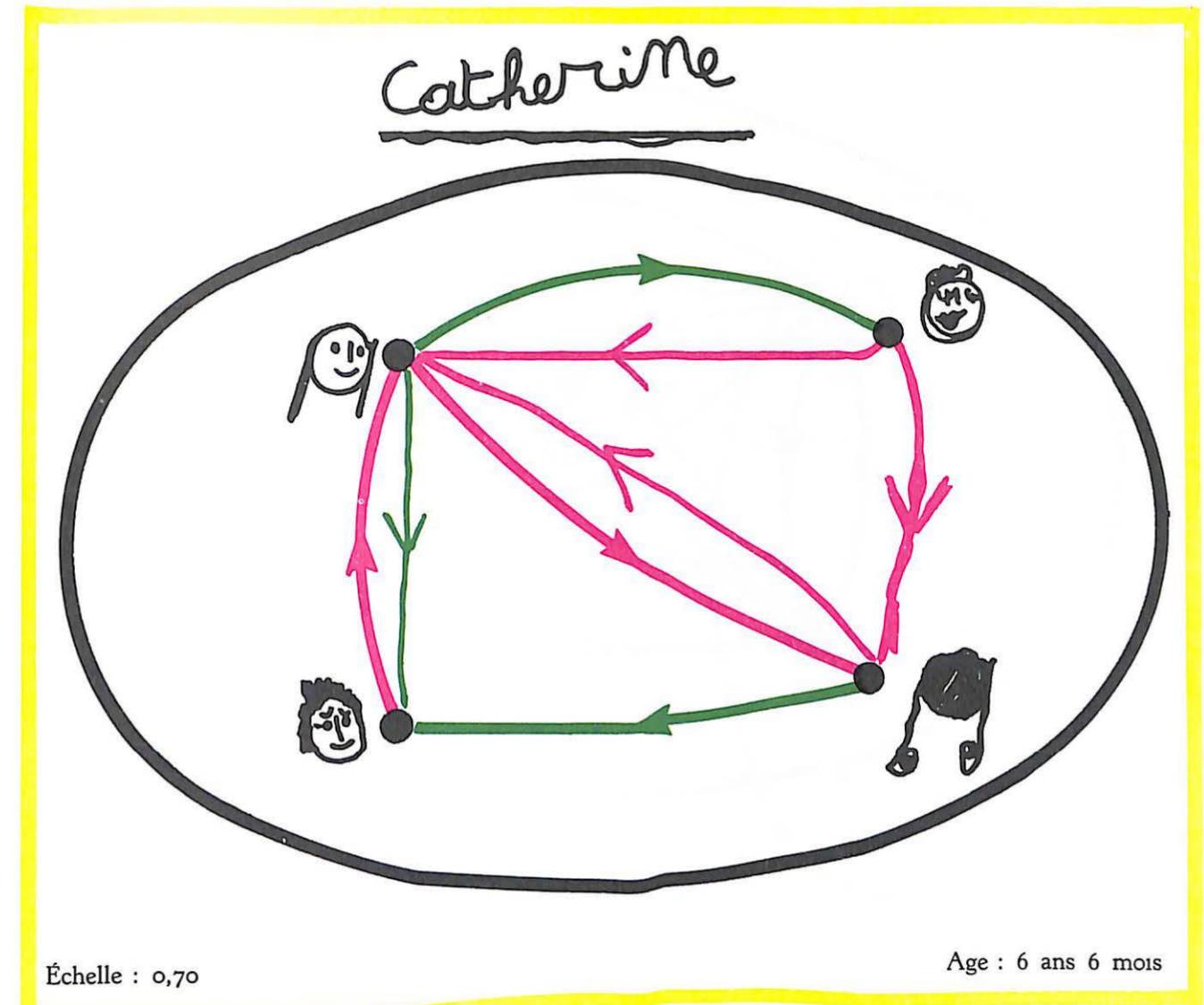
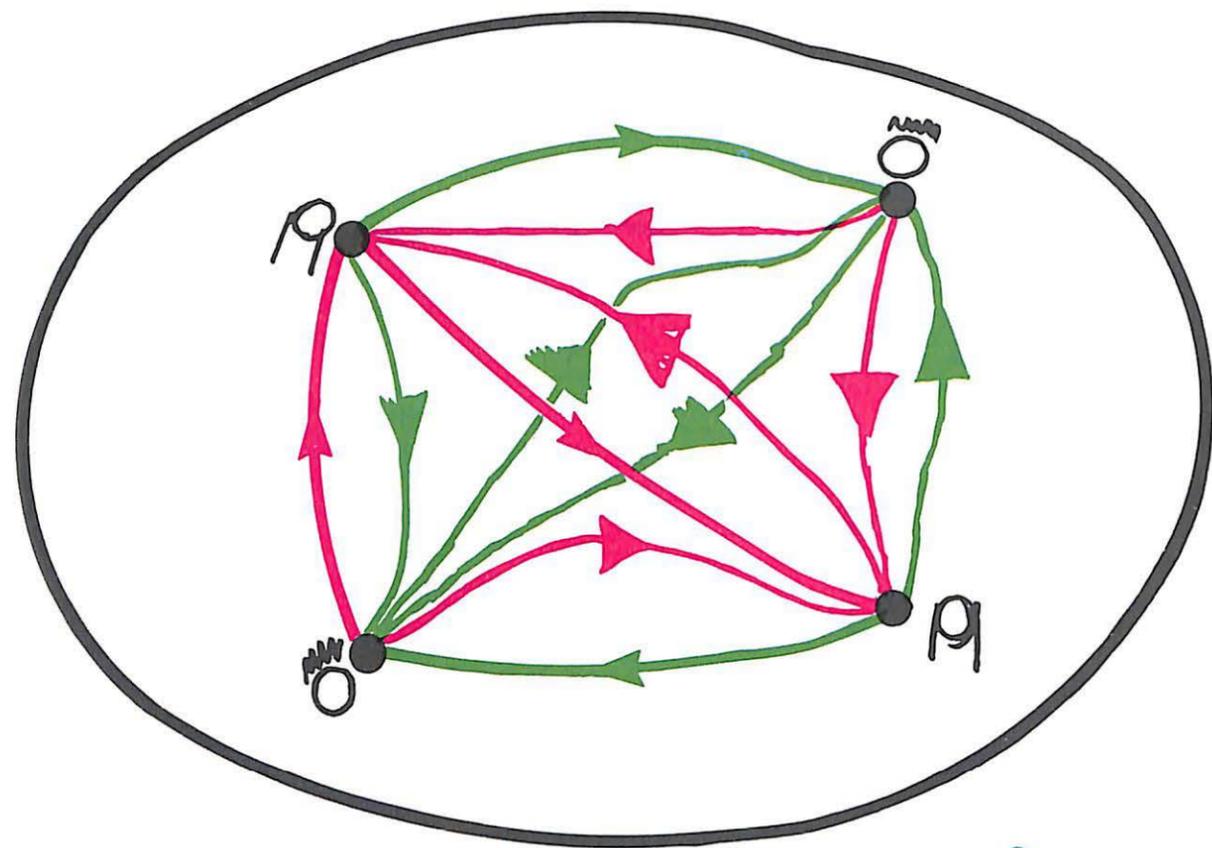


FIG. 107

Toutes les flèches tracées sont correctes.

Mais Catherine, en net progrès, a néanmoins assez vite cessé de jouer.

Les flèches croisées manquent toujours.



nicolas

Échelle : 0,70

Age : 5 ans 10 mois

FIG. 108

Mur du son franchi!
 Dessin parfait.
 Flèches croisées avec retour!
 Nicolas inaugure une nouvelle technique de flèches inspirée du modèle
 Admirons la délicate interruption des traits, là où les flèches se croisent!
 Nicolas comprend bien ce qu'est un **symbole**.

INTERPRÉTATION

Chaque élève reçoit une feuille de format usuel reproduisant ce graphe.

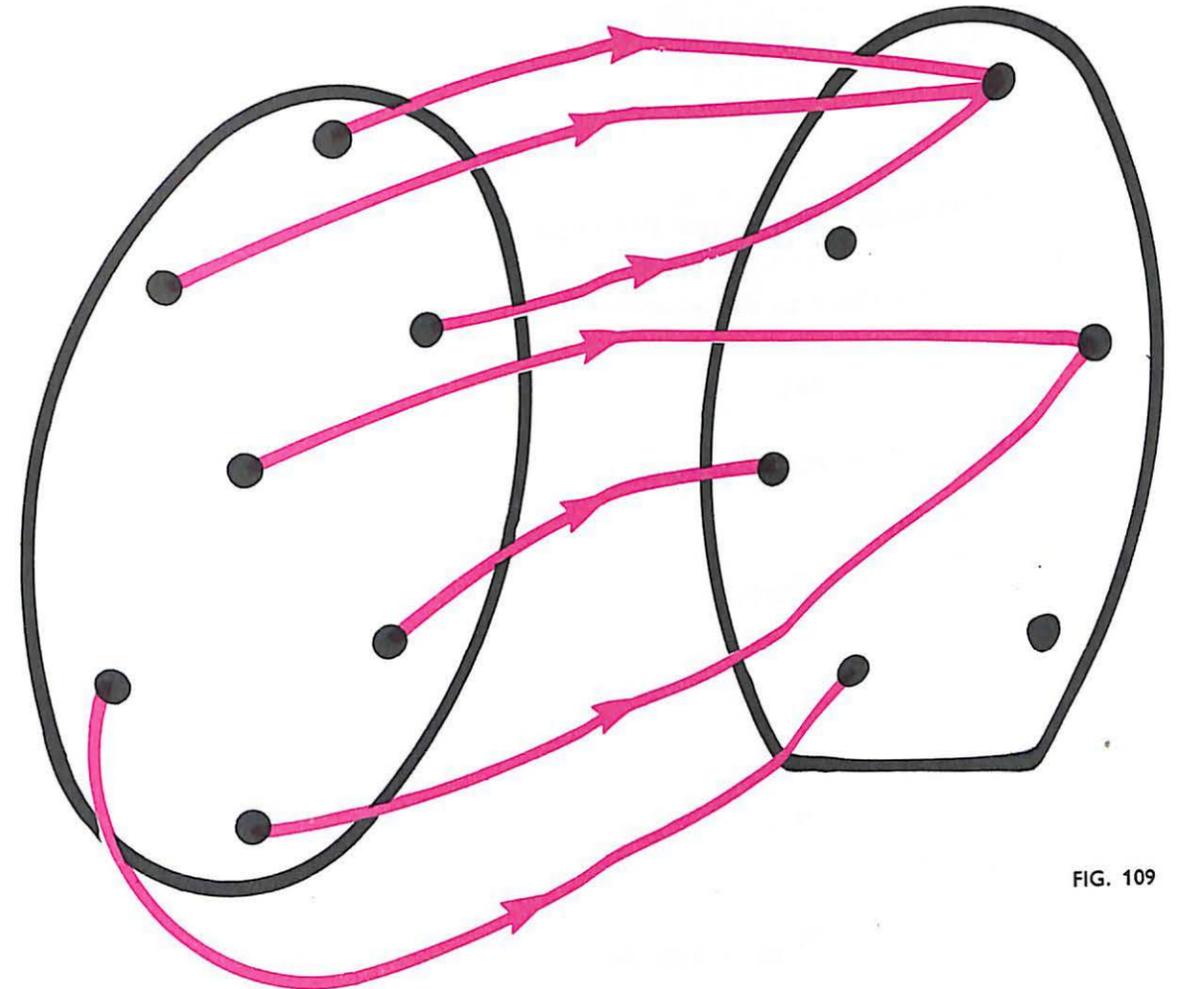


FIG. 109

- Ne dessinez pas!
 Regardez bien!
 Trouvez l'histoire que raconte ce dessin.

Didier proclame

- Il y a un enfant qui en a reçu trois!
- Reçu quoi ? Des bonbons?
- Ou des cartes.
- C'est comme tu veux!

— **Des bonbons!**

— Combien de bonbons dans l'histoire de Didier ?

— **Sept.**

— Et combien d'enfants ?

— **Six.**

— Et il y a deux enfants qui n'en ont pas reçu!

— Et un qui en a reçu deux et deux autres un!

— Au tour de Sylvie, maintenant.

Sylvie raconte la même histoire avec des sucettes.

— **Moi, j'en ai une belle!**

Il y a sept autos et six enfants.

— Qui a distribué les autos ?

— **Le facteur.**

— Le facteur distribue des autos ?

— **Non, c'est Saint-Nicolas.**

Un enfant en a reçu trois, un autre deux et deux enfants en ont une.

— C'est bien! Qui nous raconte une histoire toute différente ?

— **Ce sont sept chocolats et ...**

— Encore une, la dernière.

— **Il y a sept lettres ... etc.**

— C'est très bien!

Nous allons dessiner une nouvelle histoire.

C'est une histoire sérieuse pour grands enfants.

— **Ah!**

LES NOMBRES PARLENT

La relation d'ordre strict $<$ dans l'ensemble \mathbb{N} des entiers naturels

— Il y avait une fois ... quatre nombres.
Le premier, c'était 1 ... le second 5 ... et les deux autres 7 et 9.

FRÉDÉRIQUE dessine au tableau noir cet immense diagramme.

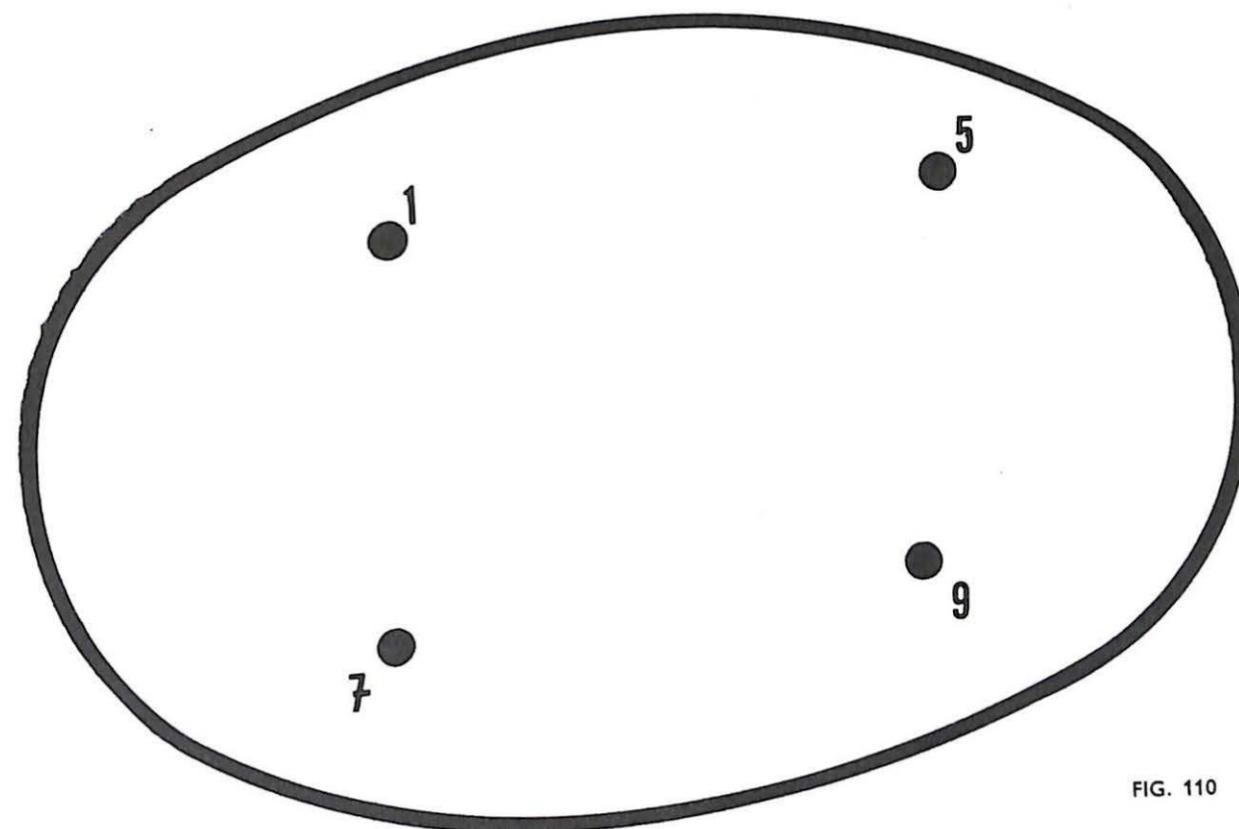


FIG. 110

— Et ces nombres parlaient.
Le nombre 1 a commencé par regarder le nombre 5 et lui a dit ...

« Je suis plus petit que toi! » ...
ou

... « Je suis plus grand que toi! » ?

— **Je suis plus petit que toi!**

— **On le dit en quelle couleur ?**

— En orange.

— **Moi, j'aime mieux en jaune!**

- Le nombre 1 pouvait-il parler à d'autres nombres ?
- 1 est plus petit que 7.
- Est-ce tout ?
- Non! Il pouvait dire encore « Je suis plus petit que 9 »
- Voilà! C'est fini!

Au tableau un élève mime, une à une, les trois flèches annoncées, et tandis que FRÉDÉRIQUE les dessine à la craie, chaque enfant les reproduit sur sa feuille

- Voilà tout pour 1.
Mais d'autres nombres pouvaient-ils parler ?
- Oui! 5 est plus petit que 7.
- Et encore, Madame, 5 est plus petit que 9.
- Tous les nombres ont-ils parlé ?
- Non! 7!
- Qu'a-t-il pu dire ?
- Je suis plus petit que 9.
- Est-ce tout ?
- 9 est plus petit que 20.
- C'est vrai! Mais avons-nous dessiné 20 au tableau ?
- Non! 20 n'est pas là!
- On pourrait dire aussi : « 9 est plus grand que 7 ».
- Bonne idée ... mais nous racontons l'histoire de « plus petit que ». Aussi, à côté du dessin écrivons-nous en orange <

Échelle : 0,75 Age : 6 ans 5 mois

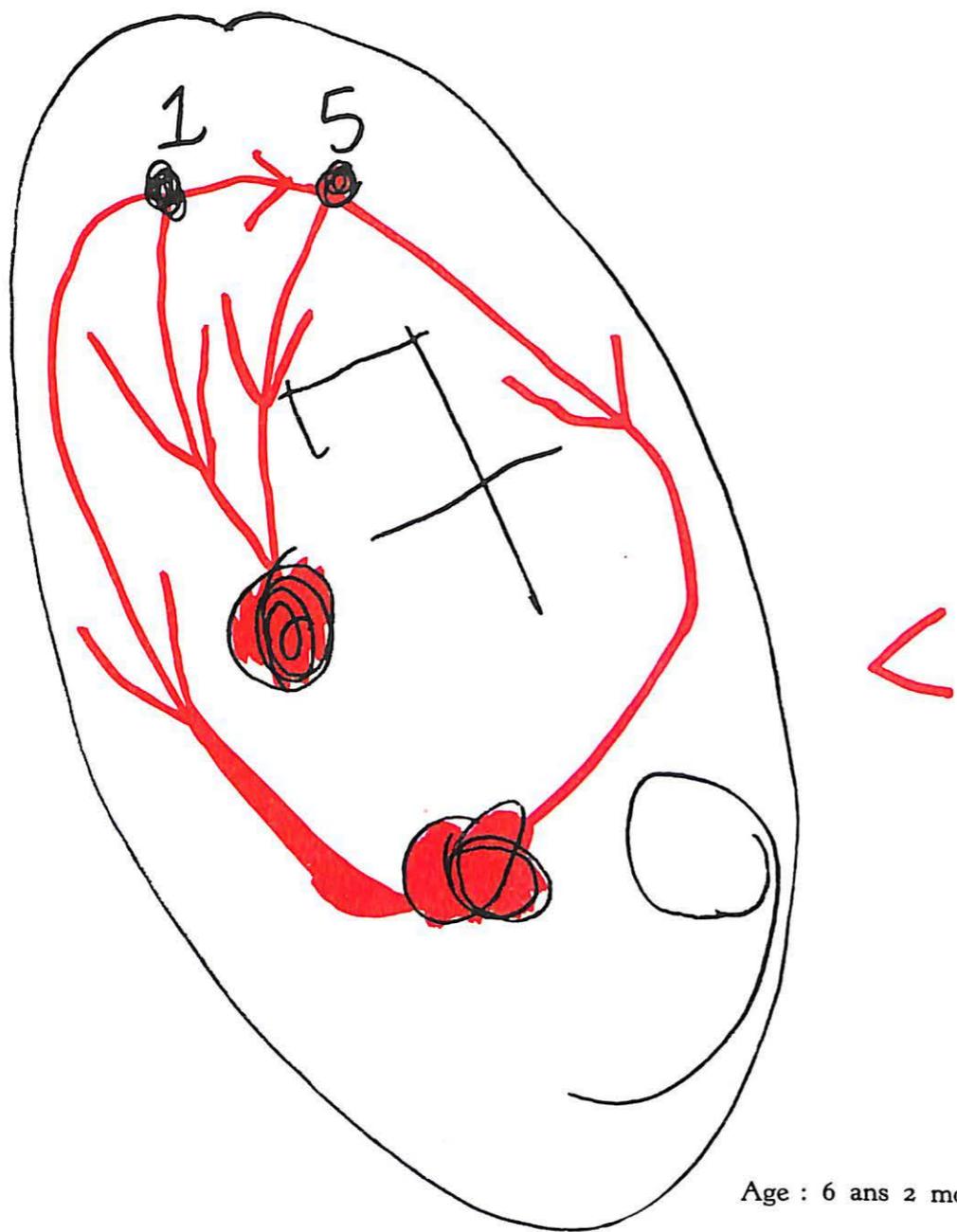
FIG. 111

En reproduisant le modèle présenté par FRÉDÉRIQUE, Didier le déforme complètement. Il ne conserve du dessin original qu'un ensemble de quatre nombres.

Il trace très correctement les flèches, mais il lui arrive un malheur : il reproduit mal le 1 qui devient 7 ...

Et Didier hérite d'un dessin où le nombre 7 figure deux fois. Didier raffine la convention : les deux points représentatifs de 7 sont reliés par une ligne ... sans flèche!

Carine



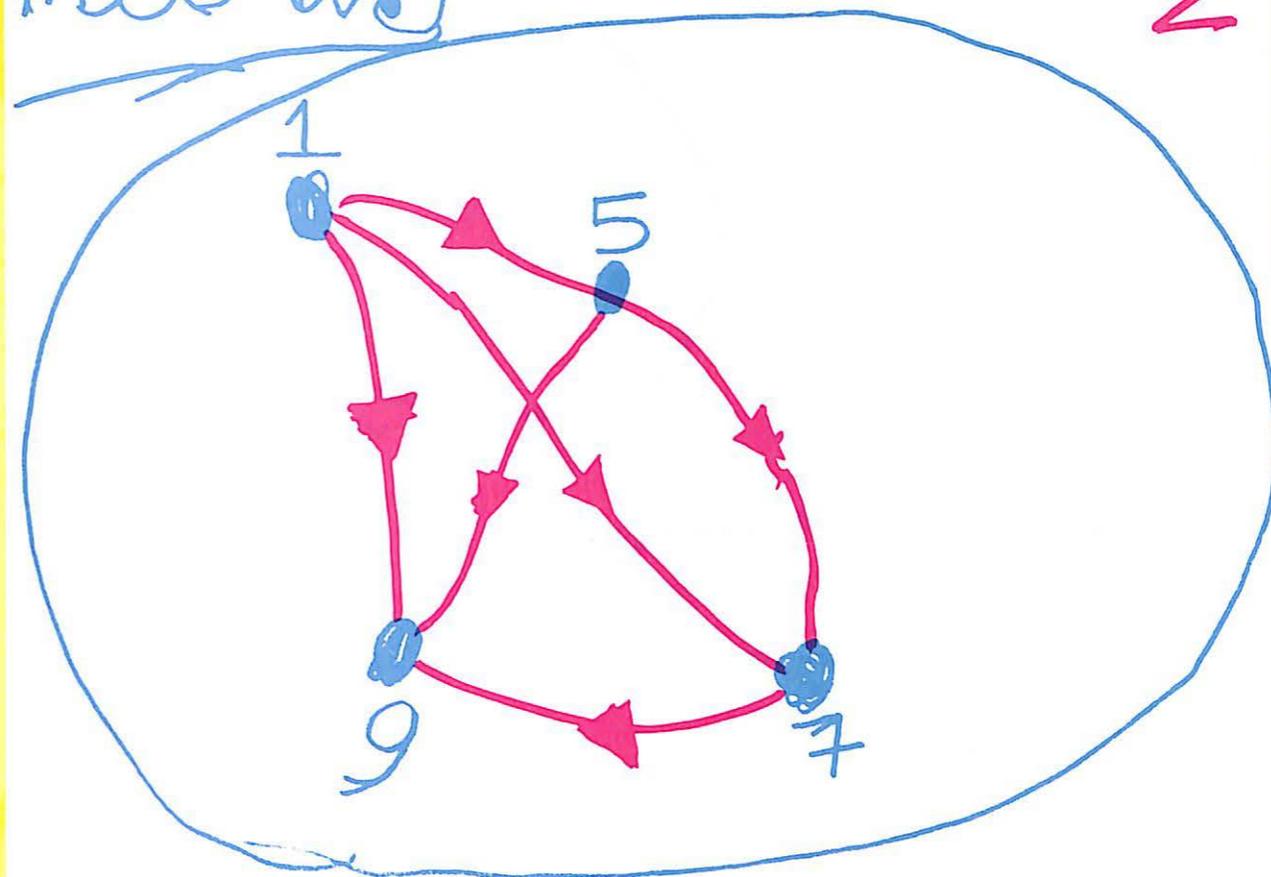
Échelle : 0,85

Age : 6 ans 2 mois

FIG. 112

Carine éprouve le besoin de marquer trois fois l'ordre strict : par les flèches, la grandeur des chiffres, la grandeur des points!

Nicolas



Échelle : 0,70

Age : 5 ans 10 mois

FIG. 113

Nicolas profite de la latitude que lui laisse la copie du modèle de FRÉDÉRIQUE pour disposer astucieusement les nombres de manière à obtenir un joli graphe très intelligible.

QUELS PEUVENT ÊTRE CES NOMBRES QUI ONT PARLÉ ?

FRÉDÉRIQUE dessine au tableau.

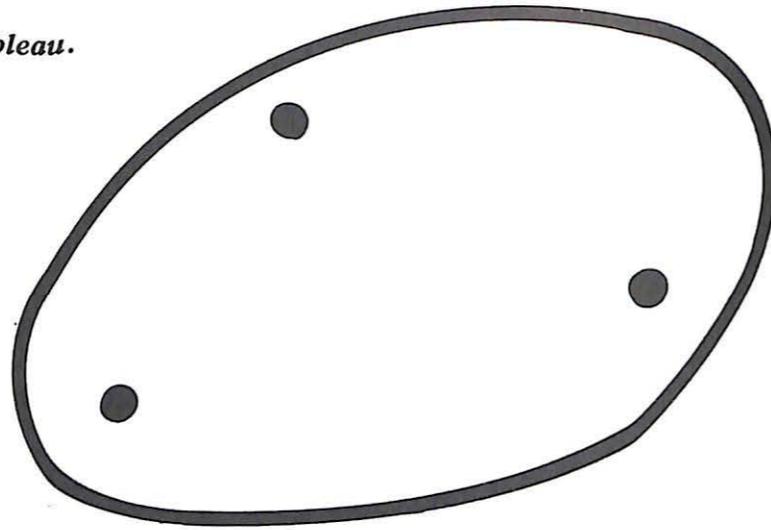


FIG. 114

— C'est encore une histoire de nombres qui parlent.
Écoutons-les.

et FRÉDÉRIQUE dessine ces deux flèches rouges et le signe <

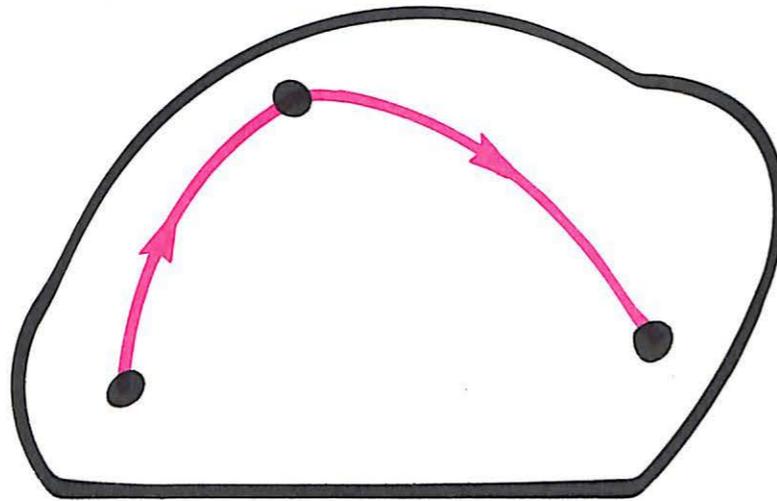


FIG. 115

— Que disent ces flèches ?

— Je suis plus petit que toi !

— Quels peuvent être ces nombres ?

Chaque enfant dessine et marque des nombres sur sa feuille.

— Et maintenant, répondons au tableau !

FRÉDÉRIQUE montre le point situé à l'extrême gauche du tableau.

— Que marquer ici ?

— 1

— Que dit-il ?

— Je suis plus petit que 2.

— Et 2 enchaîne ...

— Je suis plus petit que 4.

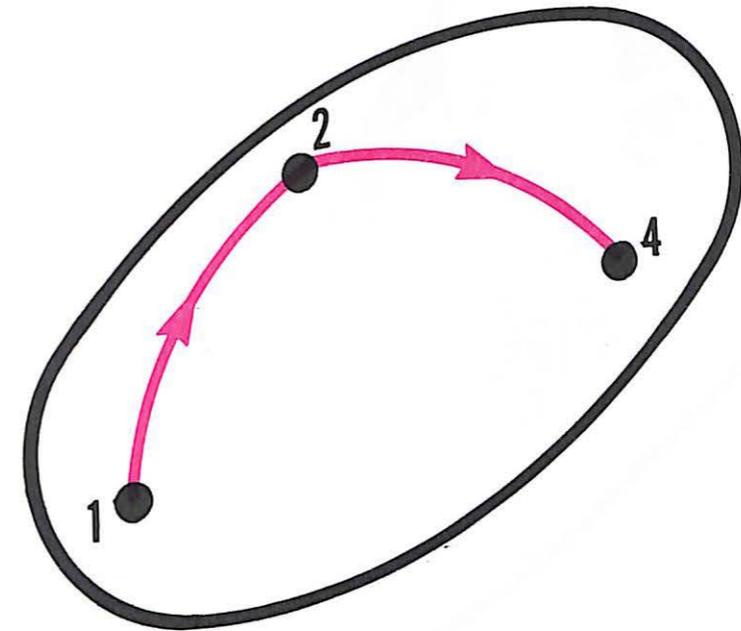


FIG. 116

— Qui va nous raconter une autre histoire ?

— 1 est plus petit que 3 et 3 dit : je suis plus petit que 4.

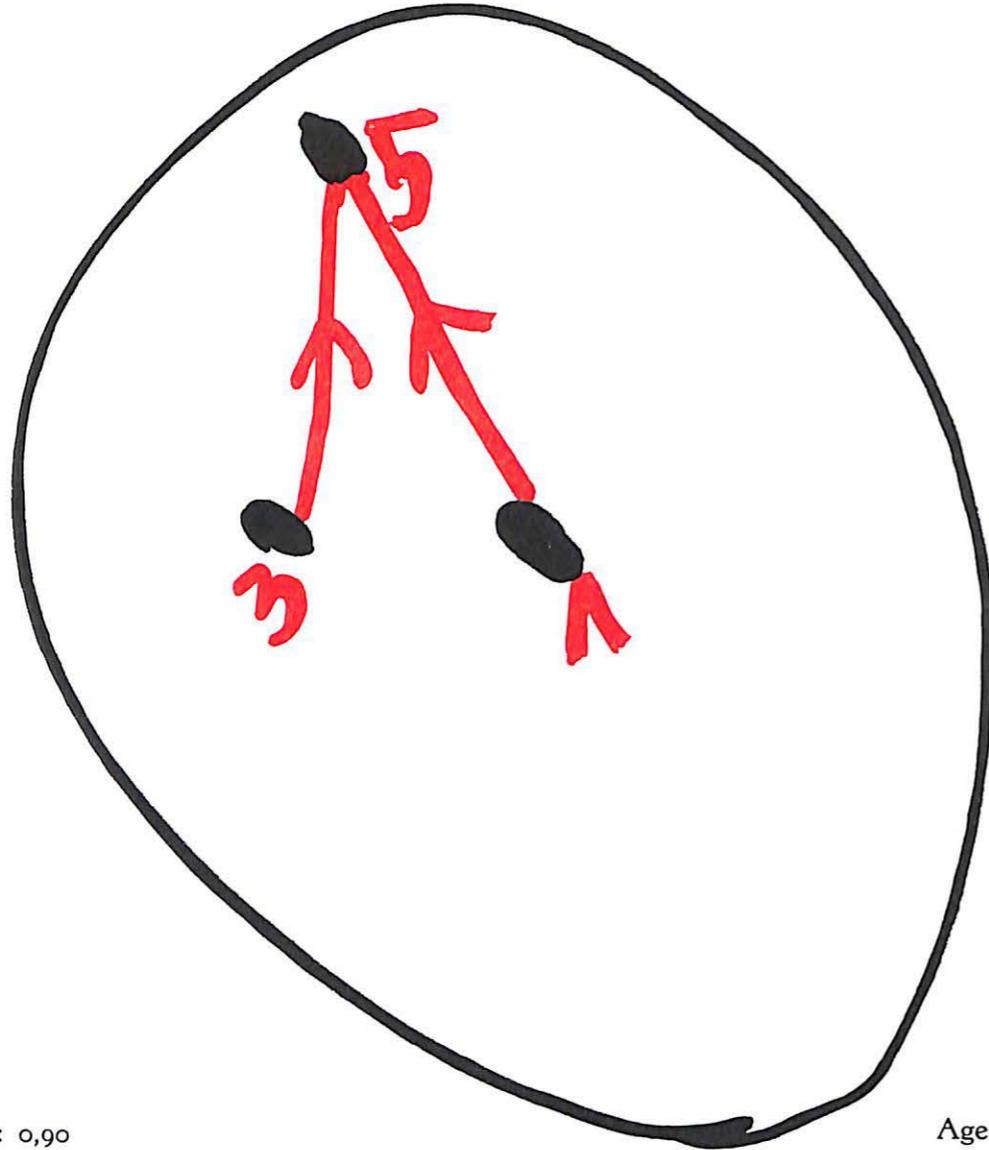
— Dans ces histoires, un nombre n'a-t-il pas oublié de parler ?

— Oui, 1 et 4 !

— Qui parle ?

— 1 dit : je suis plus petit que 4 !

Philippe



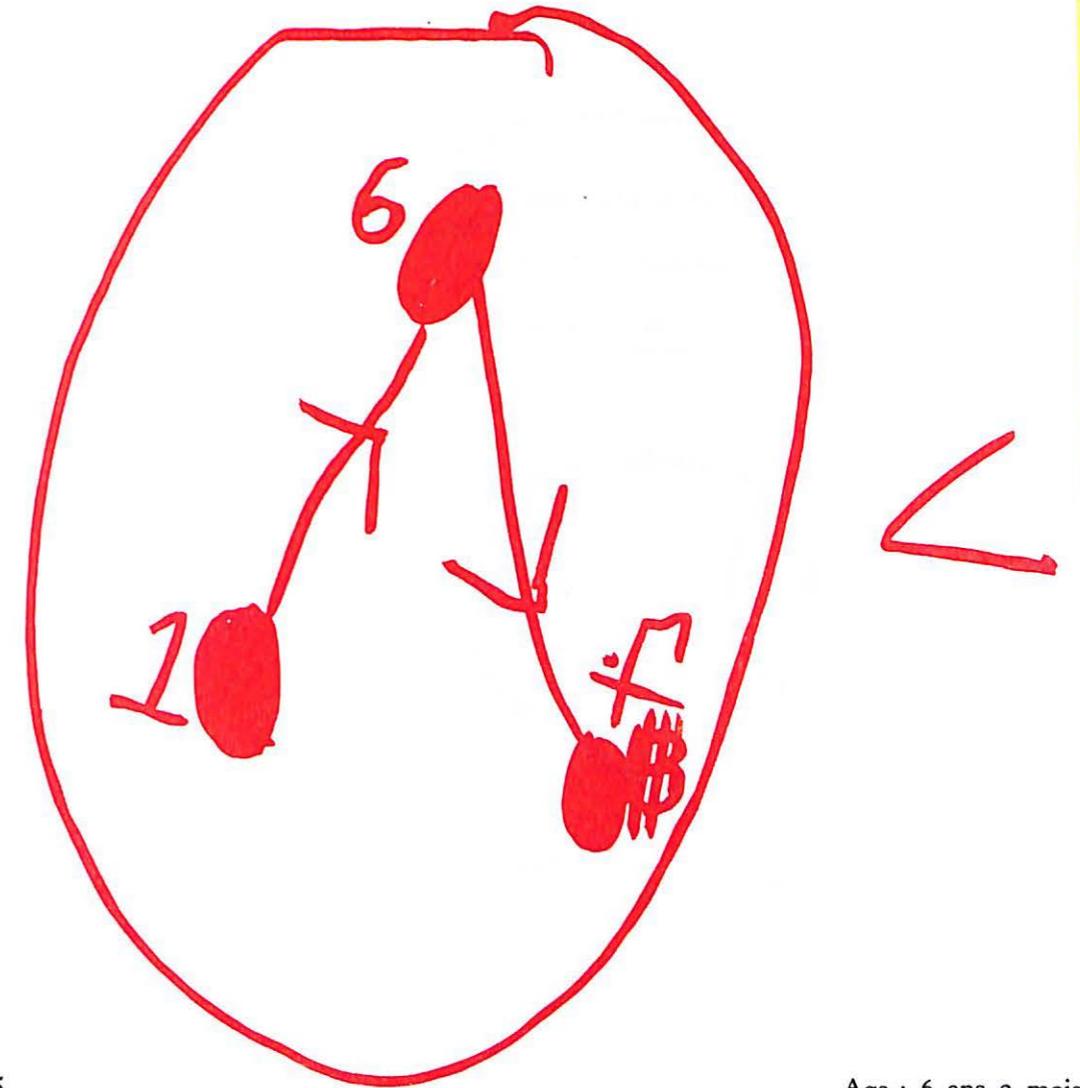
Échelle : 0,90

Age : 6 ans 2 mois

FIG. 117

Philippe a mal recopié l'énoncé ... et a bien répondu au nouveau problème qui en résulte.

Carine



Échelle : 0,85

Age : 6 ans 2 mois

FIG. 118

Bonne réponse. Le 7 est présenté en miroir.
Le gros point provient de la correction d'une erreur initiale.

COMMENTAIRE DE LA LEÇON 8

DURÉE : 40 minutes

DATE : 28 septembre 1967.

UN SYMPATHIQUE QUATUOR

Ce même quatuor de frères et sœurs a été présenté de différentes manières par FRÉDÉRIQUE.

LEÇON	DONNÉE	FILLES ET GARÇONS
4		
6		
8		

FIG. 119

BRIN PAR BRIN L'OISEAU BÂTIT SON NID

LEÇON 4

FRÉDÉRIQUE dessine, une à une, les quatre flèches au tableau noir. Les élèves commentent et concluent au fur et à mesure, dans une situation qui s'étoffe progressivement. On évite ainsi l'effet de complication qu'entraîne la présentation globale de la donnée. Individuellement, les élèves entreprennent de compléter les graphes ... sœur ... et ... frère ... Le dessin complet

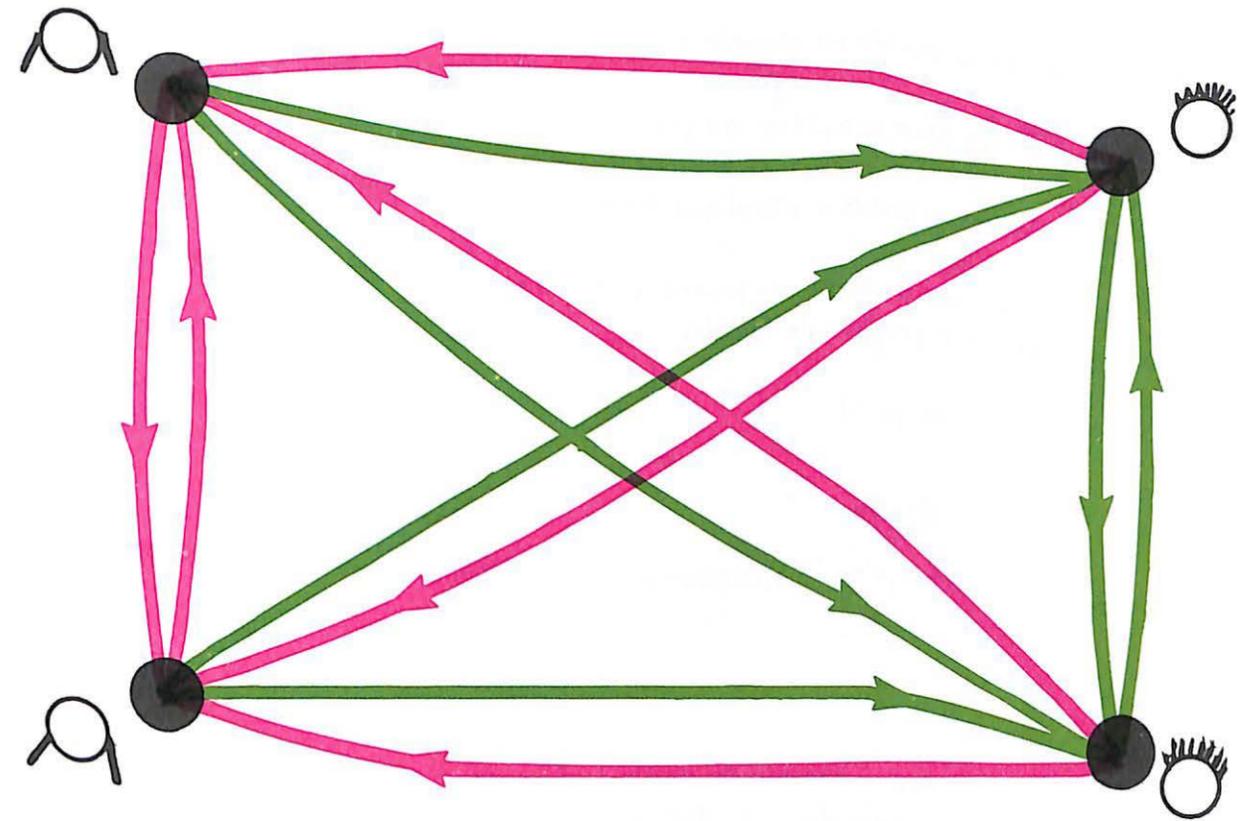


FIG. 120

est assez complexe et techniquement difficile à réaliser par des élèves de six ans. La méthode de FRÉDÉRIQUE est progressive et individuelle. Chaque enfant complique peu à peu son propre dessin, conformément à sa compréhension personnelle de la situation. En général, les flèches tracées sont correctes ... mais il en manque ... Dans l'enseignement de la mathématique ... comme en amour ... il coûte d'exiger trop tôt qu'on vous dise tout.

LEÇON 6

FRÉDÉRIQUE apporte trois modifications à la présentation du sympathique quatuor.

1) La donnée est fournie en bloc, sur des feuilles imprimées distribuées aux enfants.
Difficulté accrue : il s'agit, cette fois, de débrouiller la donnée.

2) Les sœurs encore voisines, se trouvent en haut du dessin, et non plus à gauche, comme dans la première présentation.
FRÉDÉRIQUE évite, de la sorte, l'écueil des situations figées qui ont fait tant de tort.

3) Une des flèches de la donnée est changée, ce qui transforme légèrement le problème.

La démarche des élèves pour compléter ces graphes est naturelle. Comme dans la vie, ils recherchent d'abord les liens entre personnes voisines.

L'absence des « flèches croisées » s'explique encore par la complication qu'elles apportent à l'ouvrage.

Certaines flèches-réponses déjà tracées jouent le rôle d'éléments perturbateurs.

La comparaison des deux graphes de Nicolas

L. 4. p. 53

et

L. 6. p. 85

prouve que

l'absence de certaines flèches n'est pas toujours due à la difficulté du raisonnement qu'impose leur découverte.

En effet :

l'une des flèches ... **CROISÉES** ... absente du dessin L. 6. p. 85
figure parfaitement ... **NON CROISÉE** ... au dessin L. 4. p. 53.

LEÇON 8

Pour favoriser la découverte des flèches croisées, FRÉDÉRIQUE modifie, à nouveau, la disposition des enfants de la famille en présentant d'emblée une des flèches qui doit normalement en croiser une autre (pour autant que l'on adopte des chemins directs).

Le troisième graphe de Nicolas (L. 8, p. 120) montre que la méthode de FRÉDÉRIQUE lui a permis d'apprendre par lui-même à répondre parfaitement à la question posée.

LA PEUR DES MAUVAISES RENCONTRES

Deux ou trois semaines après la leçon 8, quelques enfants dessinent de grands panneaux pour décorer la classe.

Didier présente d'abord ce travail.

Échelle : 0,26

Age : 6 ans 5 mois

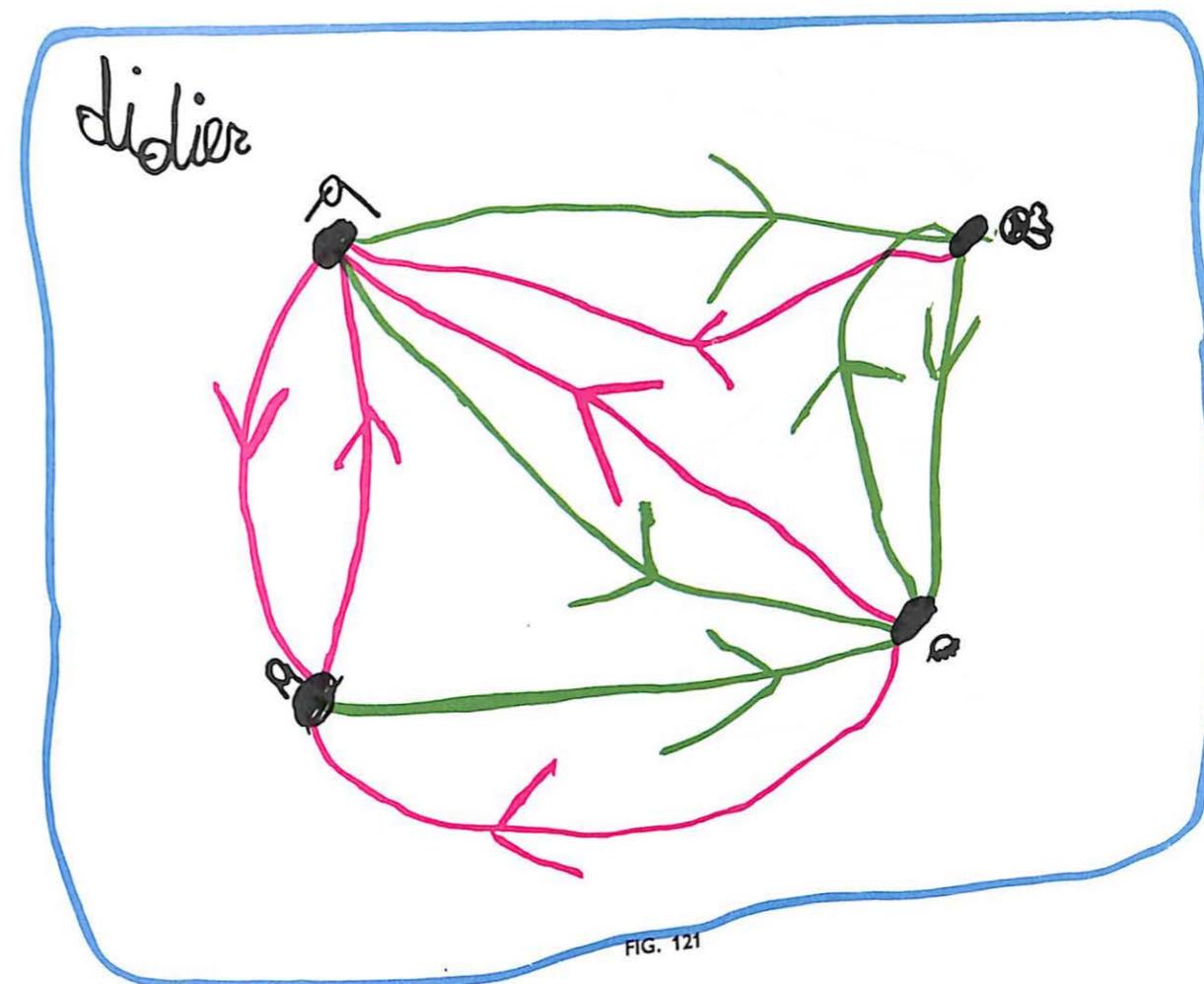


FIG. 121

— Les enfants ont-ils tous tout dit ?

— **Non!**
Celui-ci (il montre sur le dessin) peut encore dire à celui-là : (il montre le point diamétralement opposé) voici mon frère et celui-là peut lui répondre : voici ma sœur.
Mais sur le dessin, ça ne va pas à cause de ces flèches (il montre l'aller-retour diagonal déjà tracé).

Puis, se ravisant,

— Mais je puis m'arranger autrement

et produit finalement cette œuvre intéressante qui révèle jusqu'où va la hantise des mauvaises rencontres :

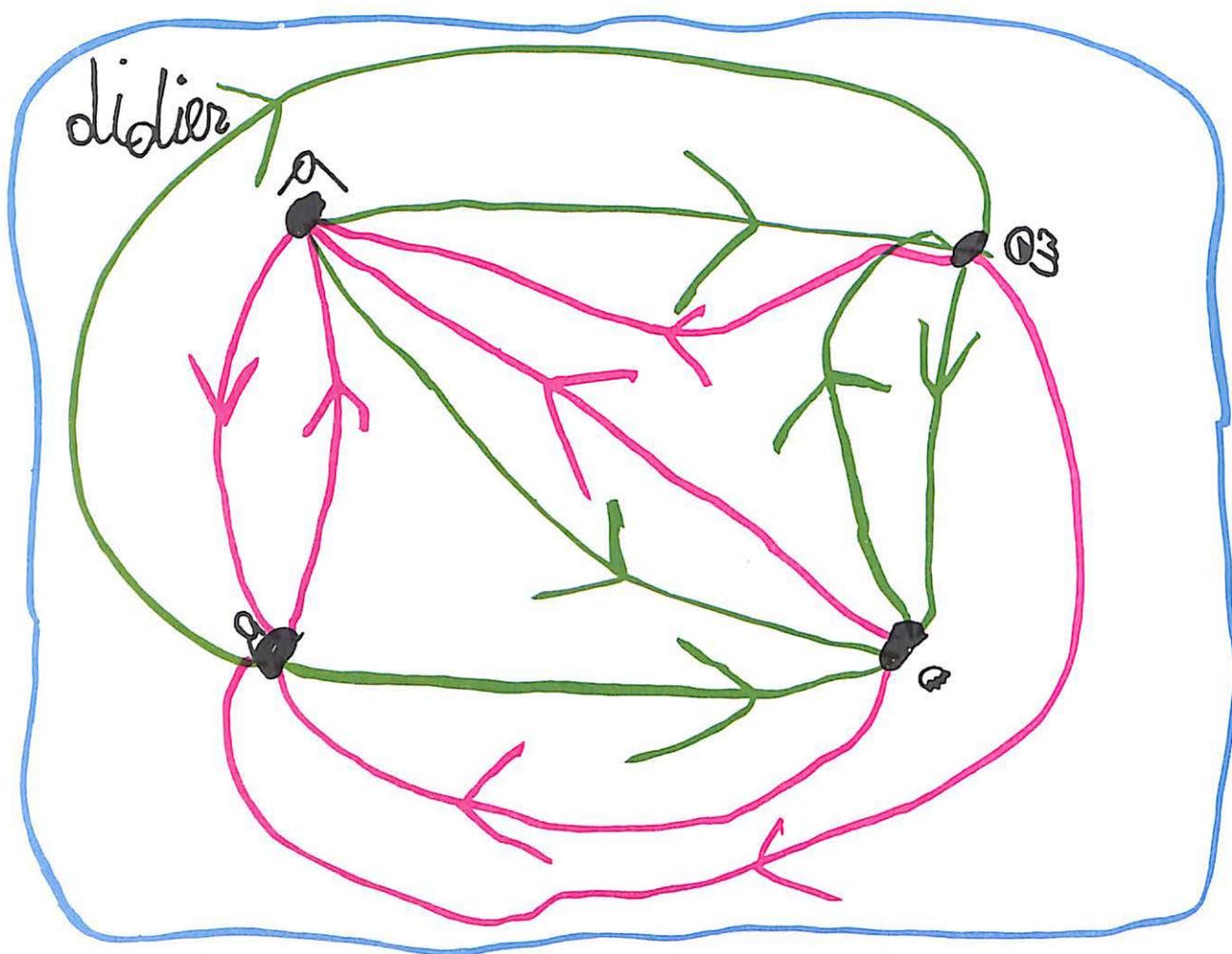


FIG. 122

Didier préfère

les longues flèches courbes ... qui ne se rencontrent pas
aux courtes flèches droites ... qui se coupent

MÉTHODE D'APPRENTISSAGE PROGRESSIF

Par le travail individuel FRÉDÉRIQUE favorise l'apprentissage progressif dans un climat optimiste. Elle n'intervient guère pendant le dessin des graphes. Chaque flèche tracée est une victoire de l'enfant. Quand les élèves sont fatigués, ils cessent de travailler et on leur retire les feuilles. Celles-ci ne sont pas corrigées, au sens traditionnel du mot. Très souvent, FRÉDÉRIQUE ne fournit pas de solution. Le problème ne se termine pas par une conclusion finale qui le tue. La vie continue. Le suspens qui demeure peut encore occuper l'esprit de nos jeunes élèves. C'est sans doute ce qui explique les progrès qu'ils réalisent ... **entre les leçons** ...

Les documents des élèves sont minutieusement étudiés. Comme ils ne sont pas corrigés, ils conservent intactes les traces de tout progrès comme de toute difficulté et fournissent un panorama très fouillé de la classe. A partir d'eux, FRÉDÉRIQUE prépare des situations qui permettront aux enfants de franchir un nouvel obstacle ou d'atteindre un niveau plus élevé de compréhension ou d'abstraction.

*

Pour des raisons fortuites, Barbara a changé de classe et retrouve le problème des petits souliers. Ses nouveaux graphes témoignent de grands progrès.

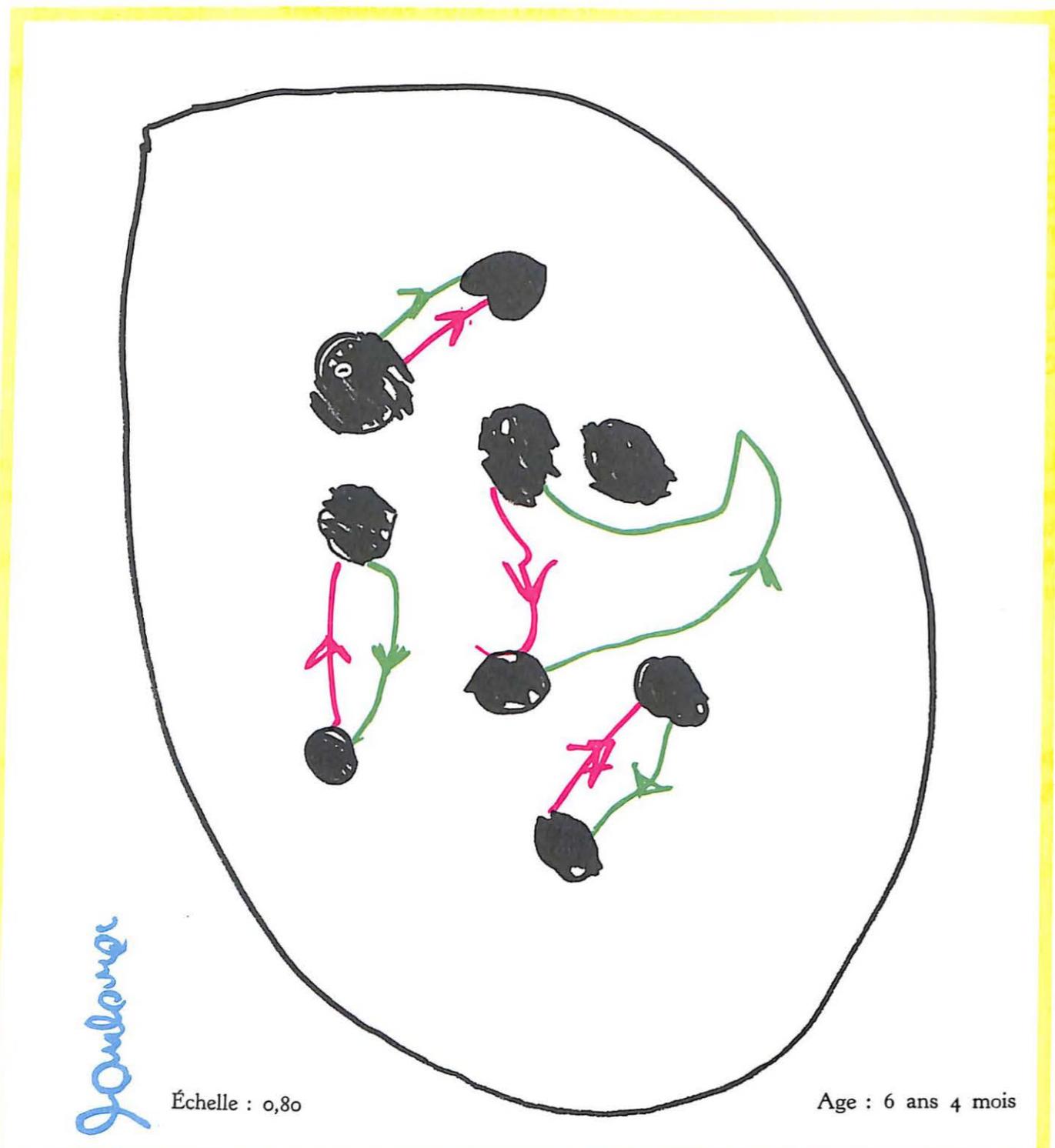


FIG. 123

Une des flèches vertes est peut-être une annonce de la notion de couple.

INTERPRÉTATION

Toute application de la mathématique est une pièce en trois actes.

- ACTE I : Mathématisation de la situation donnée en la structurant moyennant une éventuelle idéalisation.
- ACTE II : Raisonnement dans la situation mathématisée.
- ACTE III : Interprétation concrète du résultat obtenu dans la grande scène finale de l'Acte II

Très souvent l'étude d'un problème physique partiellement ou localement axiomatisé, se borne à mettre en évidence certaines contraintes, à écarter des conjectures en présentant une forme structurée de ce qui reste autorisé. Il est essentiel de pouvoir imaginer de nombreuses situations concrètes compatibles avec le schéma abstrait permis. Tel est le jeu que présente FRÉDÉRIQUE à partir de la situation aussi simple que fondamentale : application d'un ensemble dans un ensemble. Les élèves ne se sont pas libérés du **prototype** distribution. Cela n'est pas très grave, puisque l'importance du prototype est capitale et qu'applications et fonctions occuperont encore les enfants pendant plus de dix ans! Et les enfants ont raison — au niveau concret — de regarder une distribution de sucettes comme très différente d'une distribution d'autos.

FORMATION DE PROTOTYPES INTUITIFS

Les exercices d'interprétation dans le genre de celui que FRÉDÉRIQUE vient de proposer à ses élèves sont encore importants pour la compréhension de la mathématique. On a toujours admis qu'une situation mathématique n'était dominée que pour autant qu'on puisse en donner des exemples, soit en mathématique, soit au niveau de la vie réelle. L'exemplation est une démarche essentielle dans l'apprentissage de la mathématique. De manière plus précise, la faculté d'inventer des modèles intuitifs parfaits de certaines situations abstraites doit permettre à chacun de se constituer un stock de prototypes intuitifs, conforme à sa propre personnalité, en accord avec ses intérêts intellectuels, au gré de son imagination créatrice et de sa fantaisie.

OBJETS

Afin de bien nous entendre, posons cette

DEFINITION

OBJET = ELEMENT D'UN ENSEMBLE

OBJETS RENCONTRÉS JUSQU'ICI PAR LES ÉLÈVES DE FRÉDÉRIQUE

des enfants, des filles, des garçons
des souliers, des sabots, des cartes
des élèves de la classe : Cédric, Danielle, Hubert, Jean-Jacques, Myriam
des bonbons, des sucettes, des chocolats
des blocs logiques de DIENES
des autos

L'éventail de ces objets est très varié

OBJETS	VIVANTS	INANIMÉS
RÉELS	<i>élèves de notre classe</i>	<i>blocs logique de DIENES</i>
IMAGINÉS	<i>élèves de la petite classe</i>	<i>souliers, bonbons, cartes, autos</i>

La leçon 8 marque un nouvel enrichissement par l'apparition

des premiers **OBJETS ABSTRAITS**

en l'occurrence :

les nombres 1, 5, 7, 9

FRÉDÉRIQUE fait admettre implicitement qu'il n'existe qu'un seul nombre 1, un seul nombre 5
... un seul nombre 9 en personnifiant les nombres par le procédé de la fable!
Et l'ensemble

$$\{ 1, 5, 7, 9 \}$$

de quatre nombres qui conversent entre eux,
à la manière des frères et sœurs du sympathique quatuor du début de la leçon,
est admis sans la moindre difficulté.

— Et ils parlent, Madame!

ORDRE STRICT

Pour faire parler 1, 5, 7 et 9, les enfants puisent dans leur connaissance commune de l'ordre strict.
Il est vrai que celle-ci a déjà été quelque peu affinée grâce au matériel CUISENAIRE et à la perception
encore imprécise d'un lien entre *ordre strict* et *injection*.
Pour alimenter la conversation de leurs amis 1, 5, 7 et 9, il suffit à nos élèves de se rappeler la
litanie 1, 2, 3, ...

FORME PASSIVE

La familière relation d'ordre strict sert judicieusement à introduire le graphe d'une relation
présentée sous forme passive ... **est plus petit que** ...
Cette présentation offre, en général, plus de difficulté.
Mais la situation proposée ici est favorable parce qu'elle est naturelle aux yeux des élèves qui
disent de préférence

... je suis plus petit que toi ...
... tu es plus grand que moi ...

à
La flèche va naturellement du plus petit vers le plus grand.

EST-CE TOUT ?

Merveilleuse différence entre

le point de vue adulte
et
l'aventureuse imagination de l'enfant

Quand FRÉDÉRIQUE pose sa question si riche d'imprécision

— *Est-ce tout ?*

elle se place implicitement dans la convention du jeu

Les nombres 1, 5, 7, 9 conversent ENTRE EUX

ATTITUDE ADULTE

— *Est-ce tout ?*

Comme l'enfant ne veut pas que ce soit fini, il assouplit la règle qui impose la fin du jeu

Les nombres 1, 5, 7, 9 conversent ENTRE EUX

en l'instruction plus libérale

Les nombres 1, 5, 7, 9 PARLENT

ce qui lui permet de continuer le jeu

9 est plus petit que 20

ATTITUDE D'ENFANT

PROBLÈME À VIE DURE

La recherche de nombres compatibles avec un graphe d'ordre strict est un nouvel exercice d'exemplation.
Il s'agit d'un de ces merveilleux problèmes ouverts, à vie dure, si utiles pour le travail en classe. Aucun ensemble fini de bonnes réponses ne parvient à tuer ce solide problème : toujours il survit en souriant imperturbablement aux élèves qui ne lui ont pas encore répondu.

TEMPO ACCÉLÉRÉ

Cette leçon de FRÉDÉRIQUE — en aucune manière un one-fairy-show de 40 minutes — s'est déroulée au rythme de la vie moderne et de ses spectacles où se succèdent, à toute allure, des jeux variés qui requièrent l'intervention active des participants. La diversité des situations et des problèmes de cette leçon apparaît de manière frappante sur le programme souvenir de la page 144.

FÉERIE FRÉDÉRIQUE

1. Nouvelles prouesses du

QUATUOR SYMPATHIQUE

de frères et sœurs

2. Le GRAPHE MYSTÈRE à interpréter

avec généreuse distribution de bonbons,
d'autos imaginaires et apparition du grand St. Nicolas

3. Grande Première d'un

QUATUOR DE NOMBRES

4. En apothéose, l'énigme ouverte

QUELS SONT LES NOMBRES QUI ONT PARLÉ ?

9

Ordre strict <

- Jouons avec nos doigts!
Montrez 3 doigts.

Chaque enfant montre 3 doigts.

- 5 doigts ... 6 doigts ... 8 doigts ... 10 doigts.

- C'est facile!

- 9 doigts.
Attention, je vois 6 doigts et non 9 chez plusieurs enfants.
... 7 doigts ... 4 doigts.

- C'est facile!

- Groupez-vous par deux. Je vais demander plus de 10 doigts.
11 doigts.

Confusion dans certaines équipes où chacun veut montrer 10.

- Vous devez vous entendre et décider celui qui montre 10.
Bien! Pour montrer 11 ...

- On montre 10 plus 1.

- Et 12 ?

- C'est 10 plus 2.

- Et 14 ?

- C'est 10 plus quatre.

— Montrez 15!
Combien de mains ?

— 3!

— Voici un autre jeu.
Attention! Je commence.
1 plus petit que ...

FRÉDÉRIQUE désigne un enfant.

— 2!

— 2 plus petit que ...

— 4!

— 4 plus petit que ...

— 5!

— 5 plus petit que ...

— 6!

— 6 plus petit que ...

— Orange!

— Orange est la couleur d'une réglette.
Dis-nous un nombre.

— 10!

— 10 plus petit que ...

— 12!

— 12 plus petit que ...

— 14!

— 14 plus petit que ...

— 13!

— Est-ce exact ?

— **Non! C'est 13 qui est plus petit que 14!**

— 14 plus petit que ...

— 20!

— Montrez 20 doigts.

— **C'est 4 mains!**

— Continuons!
Nicolas, 20 plus petit que ...

— 22!

— 22 plus petit que ...

— 23!

— 23 plus petit que ...

— 24!

— 24 plus petit que ...

— 26!

— 26 plus petit que ...

— 25!

Rires dans la classe.

— Cédric nous dit : 26 plus petit que 25!
Il a voulu nous faire une farce.

— 26 plus petit que 30!

- Combien d'enfants pour montrer 30 doigts ?
- 3!
- 30 est plus petit que ...
- 40!
- 40 plus petit que ...
- 50!
- Combien d'enfants pour montrer 50 doigts ?
- 5!

FRÉDÉRIQUE arrête le jeu et dessine au tableau le graphe ci-dessous.

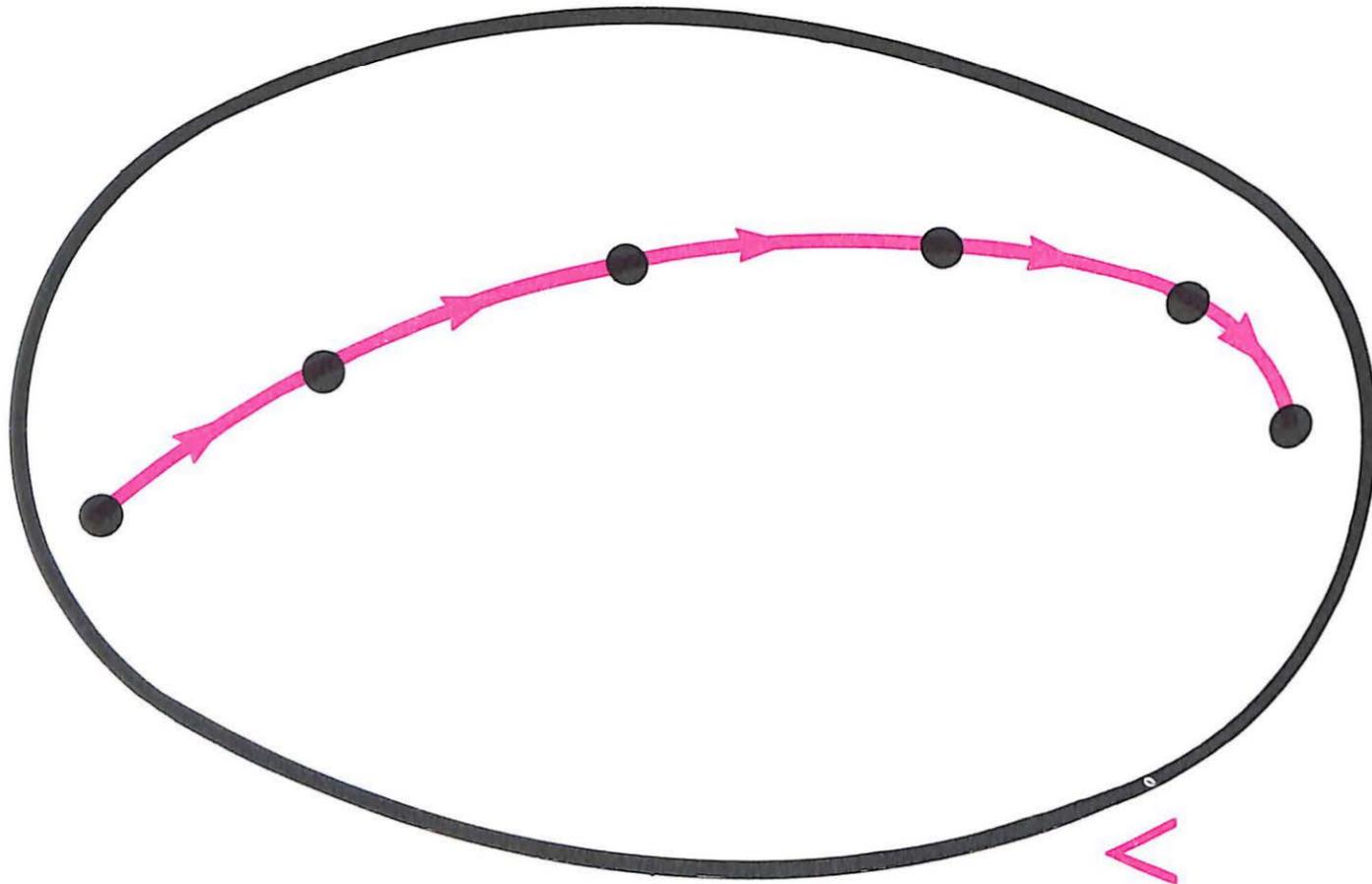


FIG. 124

- Reproduisez le dessin du tableau. Comptez bien les points car il faut en dessiner autant que moi, pas un de plus, pas un de moins.

9 — ORDRE STRICT <

Ecoutez tous l'histoire.

Ce sont des nombres ... et ils ont parlé Ils ont dit, chacun avec une flèche rouge, « Je suis plus petit que toi! »

- Montre le premier nombre, Cédric.

Cédric montre le premier point.

- Qu'a-t-il dit au deuxième ?

- **Je suis plus petit que toi!**

Cédric mime la première flèche.

On recommence le même jeu pour les autres flèches.

- Et maintenant, inventez quels nombres ont parlé.

- **On doit mettre des chiffres ?**

- Oui, des nombres, et bien les faire parler!

- **On commence par un ?**

- Si tu veux, mais ce n'est pas obligatoire.

FRÉDÉRIQUE observe les dessins des enfants.

- Les nombres de Philippe ont très bien parlé!
Mais ceux de Dominique racontent une bien curieuse histoire!

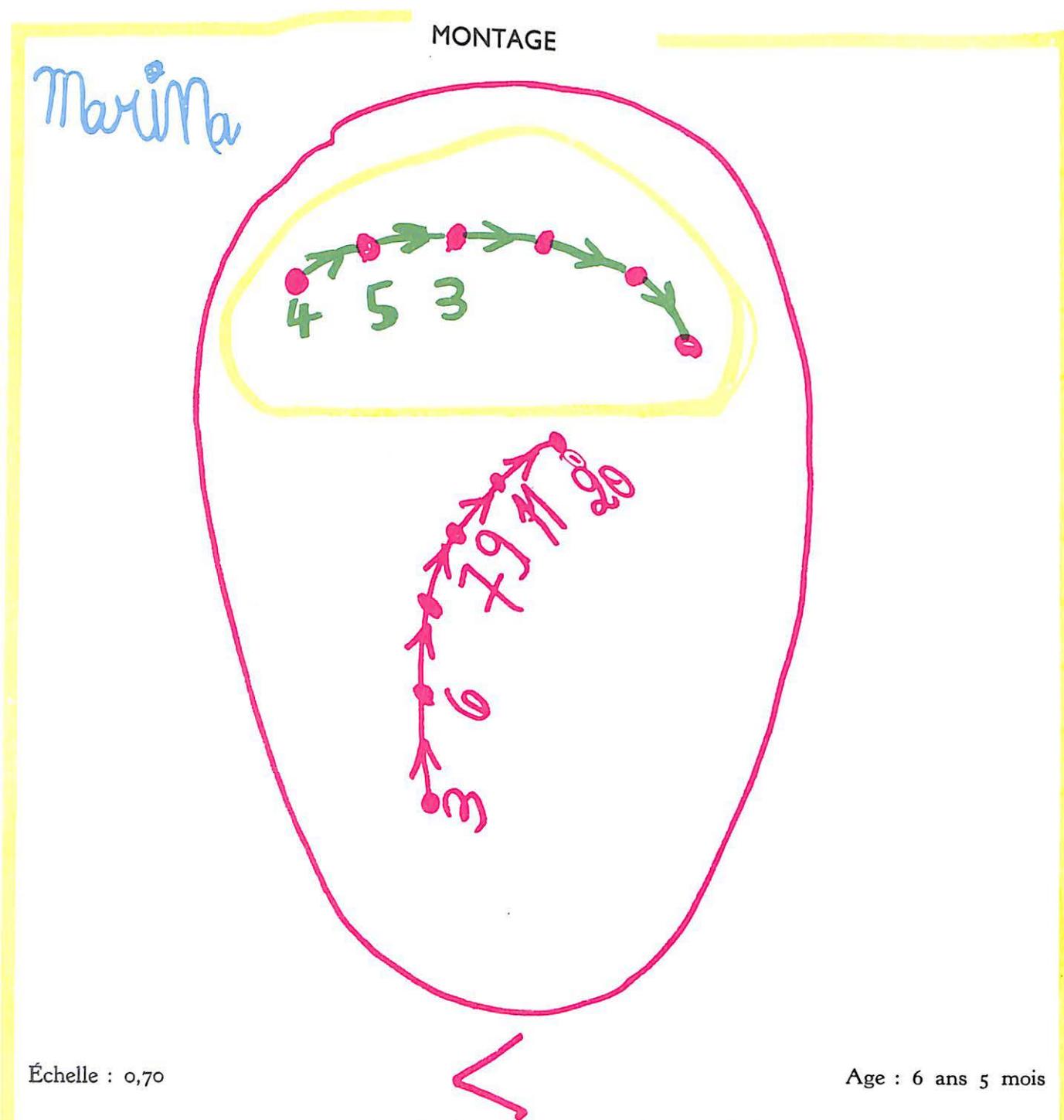


FIG. 125

En médaillon : le premier dessin de Marina.

Elle se rend compte elle-même de son erreur, tourne sa feuille, et pour gagner du temps, met tout en rouge, correctement.

Prudente, Marina, frappe d'ostracisme les coupables 4 et 5.

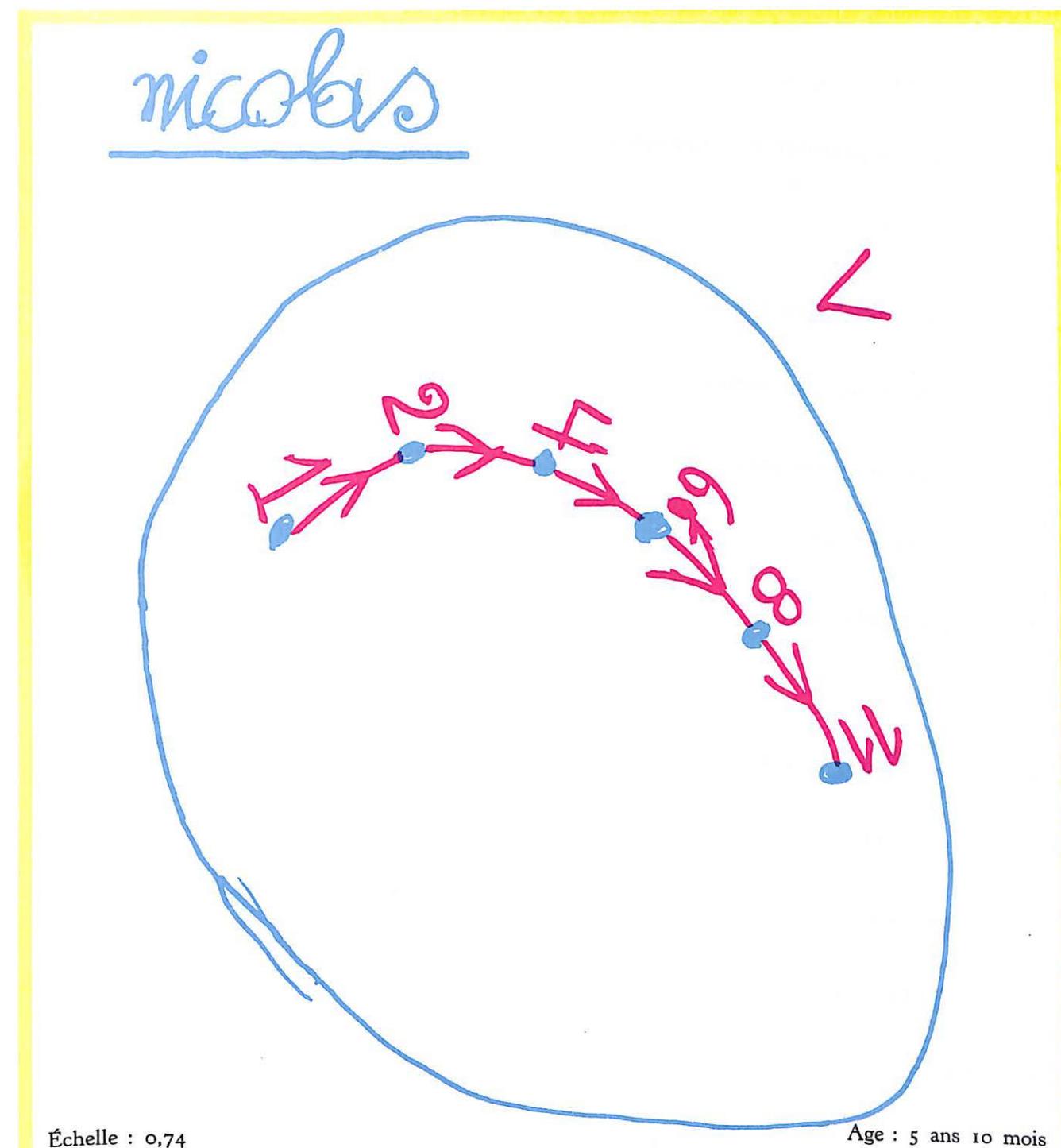


FIG. 126

Dessin correct. Nicolas tourne la feuille au fur et à mesure qu'il grave de beaux chiffres pleins d'assurance.

— Tous ensemble, faisons parler les nombres du tableau.

Didier propose.

— Chez moi, le premier nombre qui a parlé est 3.

— Qu'a-t-il dit ?

— Je suis plus petit que 6!

Jean-Jacques enchaîne.

— 6 dit : « Je suis plus petit que 7! »

— Et le nombre 7, Anne ?

— Je suis plus petit que 9!

— Et 9, Sylvie ?

— Je suis plus petit que 11.

— Sais-tu écrire 11 ?

— Oui, c'est deux « 1 »!

— Et qu'a dit 11, Jean-Philippe ?

— Je suis plus petit que 13!

Oui, mais ce n'est pas Jean-Philippe qui a parlé, c'est Sylvie!
Continue l'histoire, Jean-Philippe.

— 13 est plus petit que 20!

— Comment écris-tu 20 ?

— 2 et 0!

FRÉDÉRIQUE écrit au fur et à mesure les nombres donnés par les enfants et le graphe est complété.

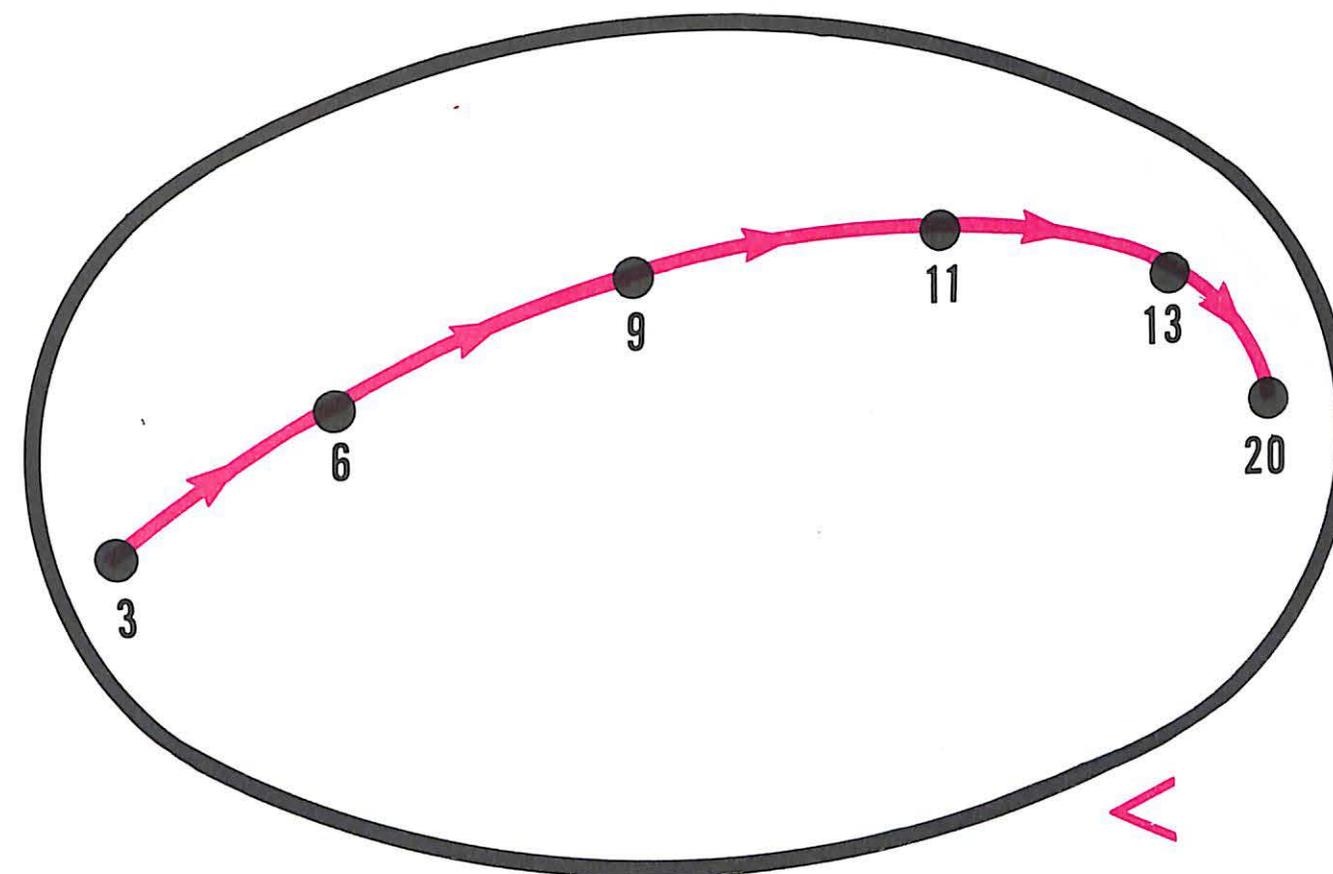


FIG. 127

— Marina, veux-tu lire l'histoire écrite au tableau ?

*Marina ne sait pas ou ne veut pas lire.
Jean-Philippe lit à sa place.*

— Voici un nouveau dessin.

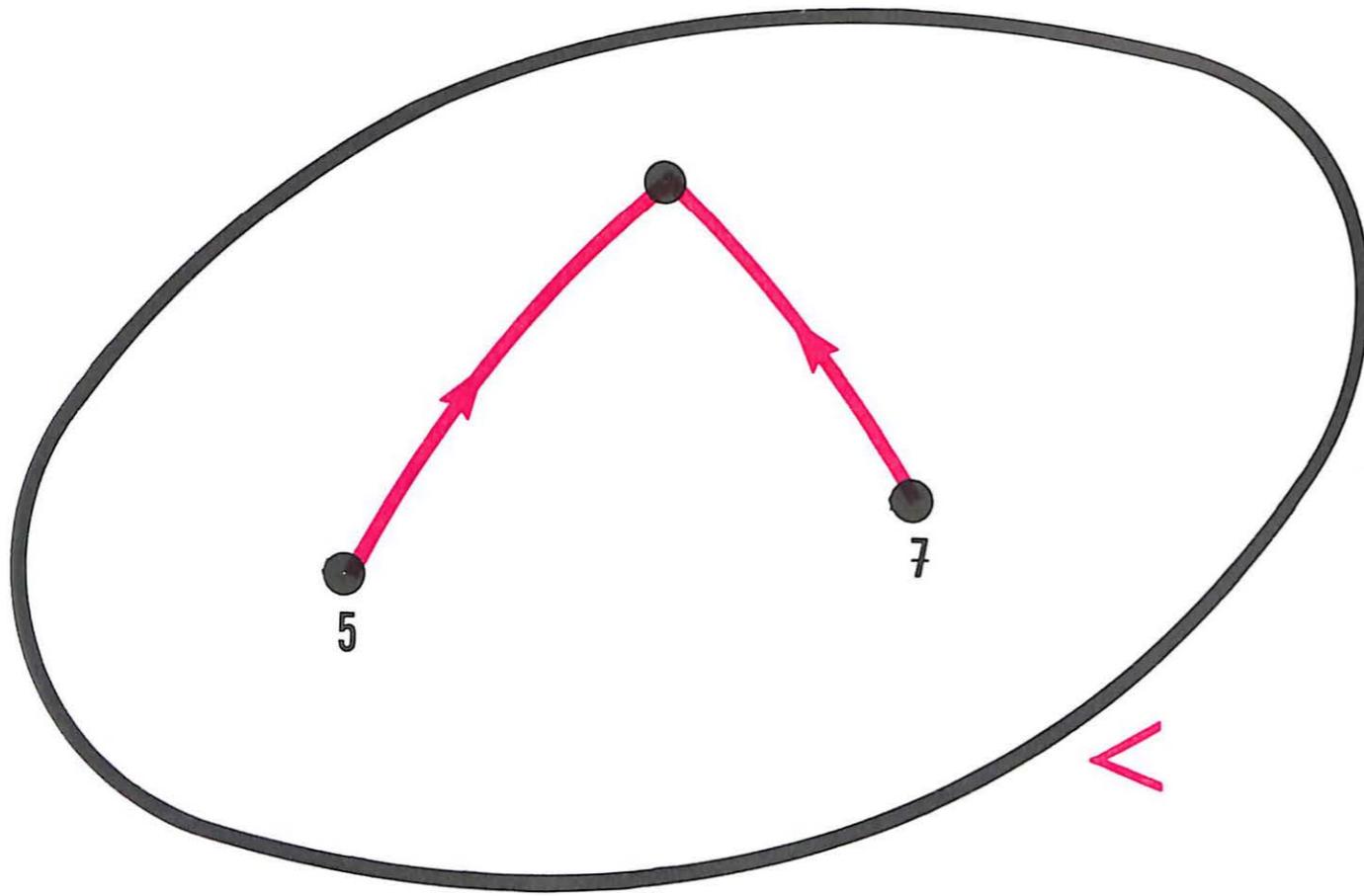


FIG. 128

— Ce sont des nombres ... ils ont dit en rouge : « Je suis plus petit que toi ! »
A vous de bien choisir le troisième nombre!

— Celui qu'on veut ?

— Oui mais prenez garde à ce que les deux autres nombres lui ont dit!

FRÉDÉRIQUE observe les dessins des enfants.

— Nicolas a choisi 10, Didier 8, Jean-Jacques 20 et Anne ?

— ...

— Anne a oublié de parler.

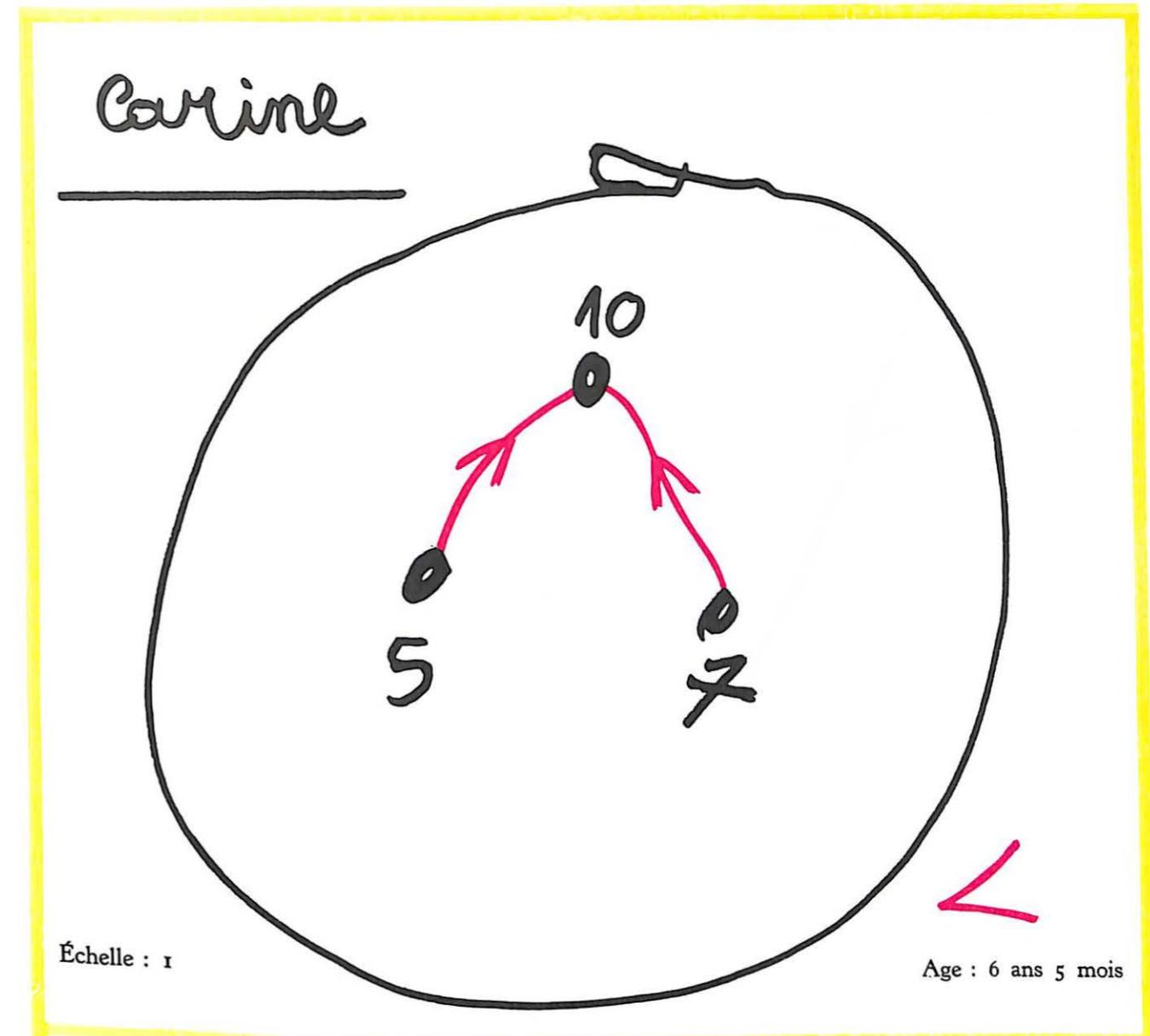


FIG. 129

Parfait.

Pas de problème avec Carine-photographe, qui reproduit très fidèlement le dessin du tableau.

Mais elle ajoute très correctement un amour de nombre 10.

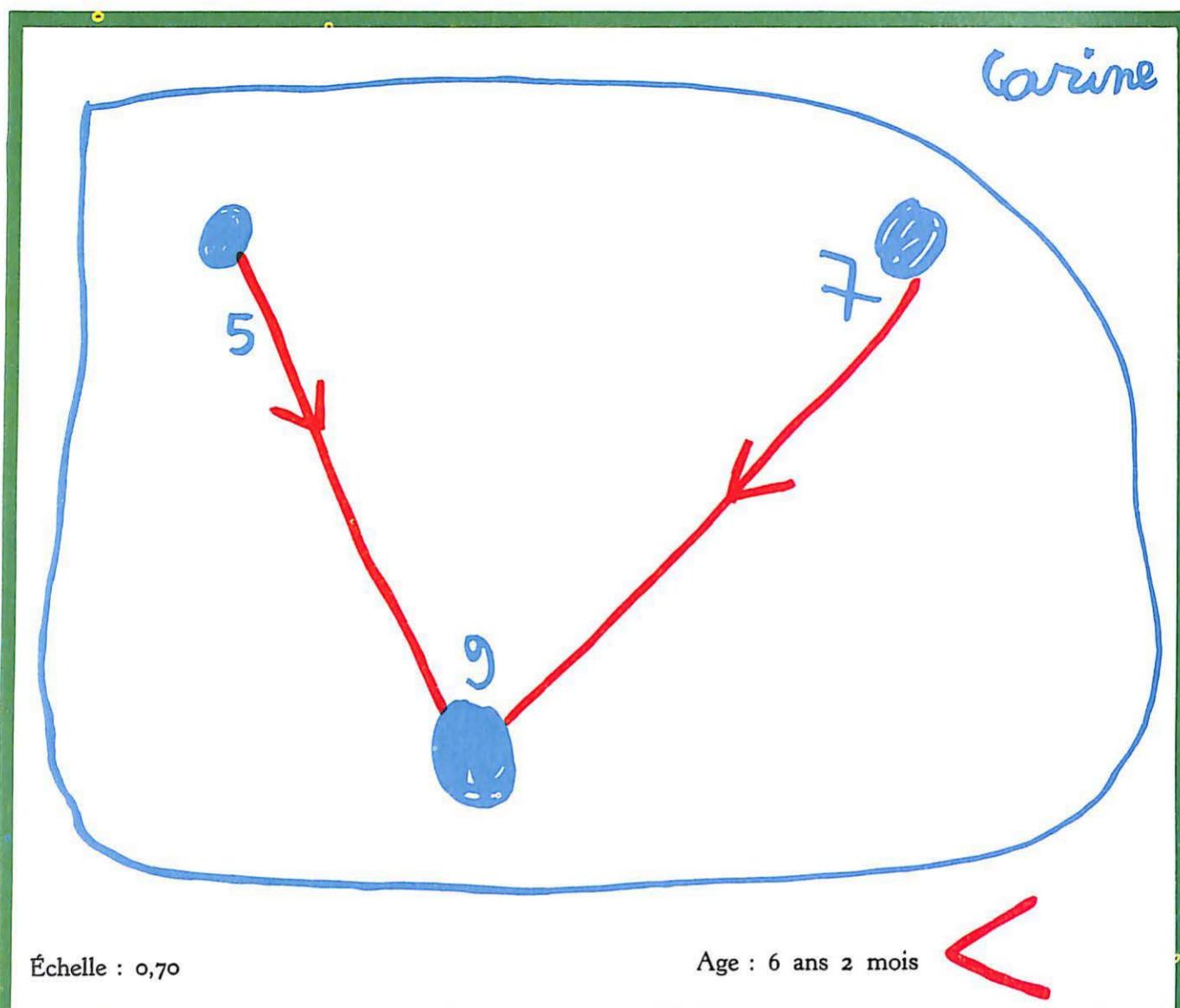


FIG. 130

Parfait.

Que de vigueur dans le style de Carine-Interprète qui a abandonné l'agrandissement progressif des chiffres mais conserve le grossissement progressif des points.

Les flèches du tableau montent, raison suffisante pour que celles du dessin de Carine descendent.

Mais n'est-ce pas son droit le plus imprescriptible ... puisque tout est correct!

— Encore une histoire de nombres qui ont dit en rouge : « Je suis plus petit que toi! »

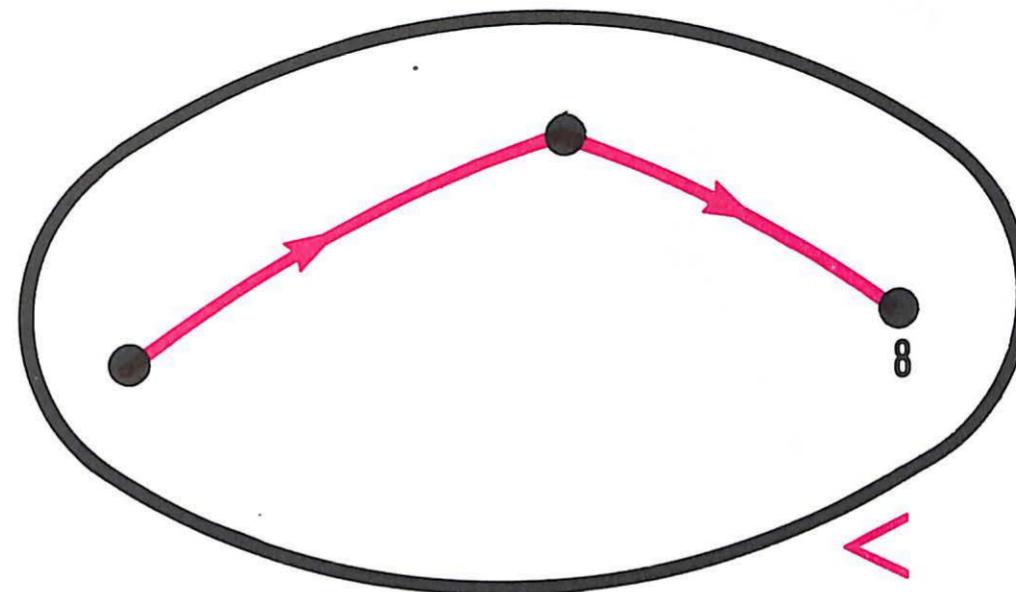


FIG. 131

— A vous de choisir deux nombres!

Les enfants travaillent individuellement.

— Bien Sylvie, sans fautes!
Et Nicolas ?

— **6 plus petit que 7 et 7 plus petit que 8!**

— Et Jean-Philippe ?

— **9 pour le premier ...**

— Est-ce possible ?

— **Non, 9 plus grand que 8!**

— Et Carine ?

— **5 plus petit que 6 et 6 plus petit que 8!**

— C'est une histoire vraie!

Et Christian ?

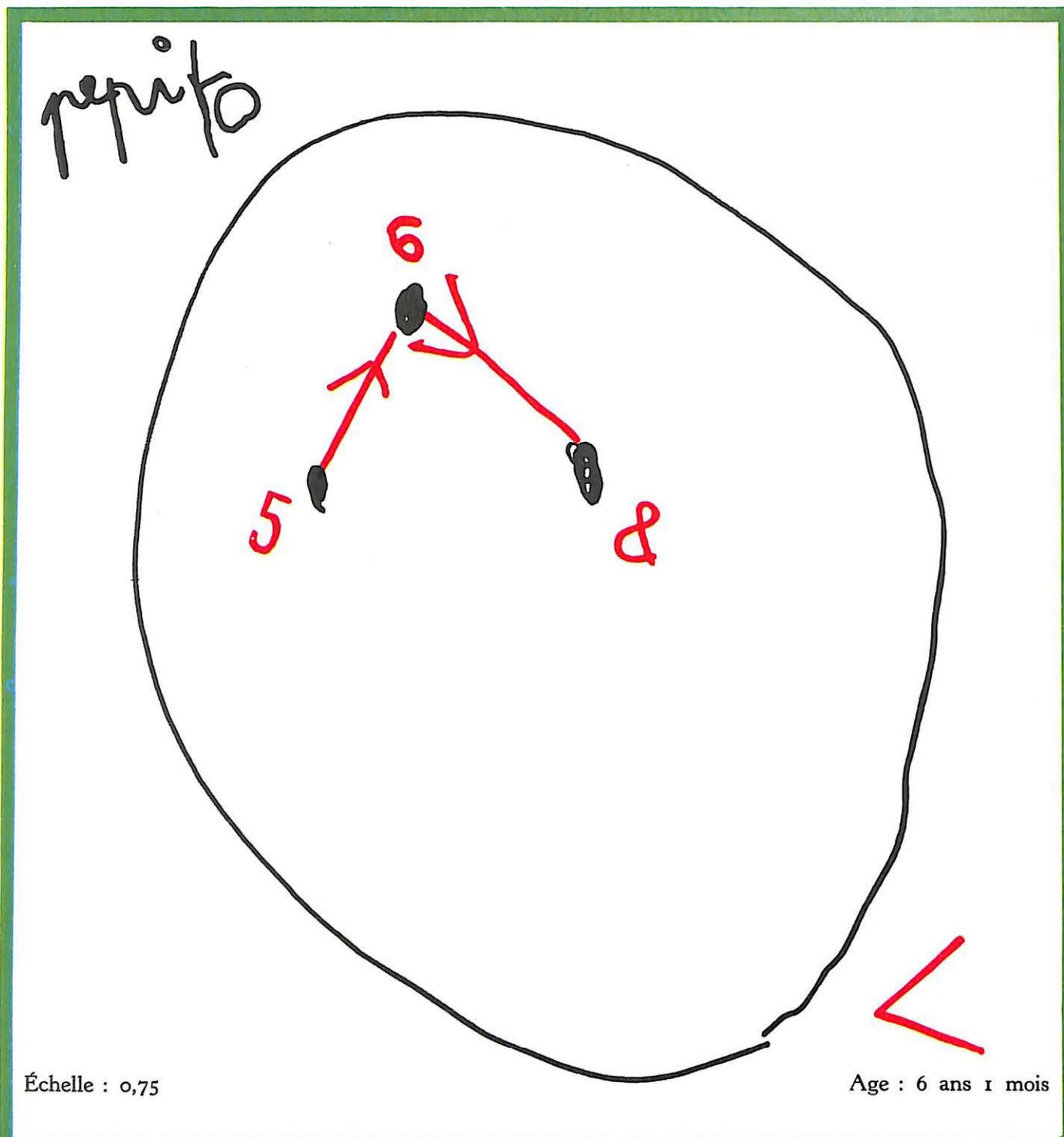
Il nous dit : **7 plus petit que 11 ...**

— **C'est vrai!**

— Et **11 plus petit que 8!**

— **Non!!**

On vérifie encore quelques réponses puis l'on passe au dernier problème.



Échelle : 0,75

Age : 6 ans 1 mois

FIG. 132

Très bien, Pepito!

— La dernière histoire est plus difficile.
C'est une histoire pour grands.

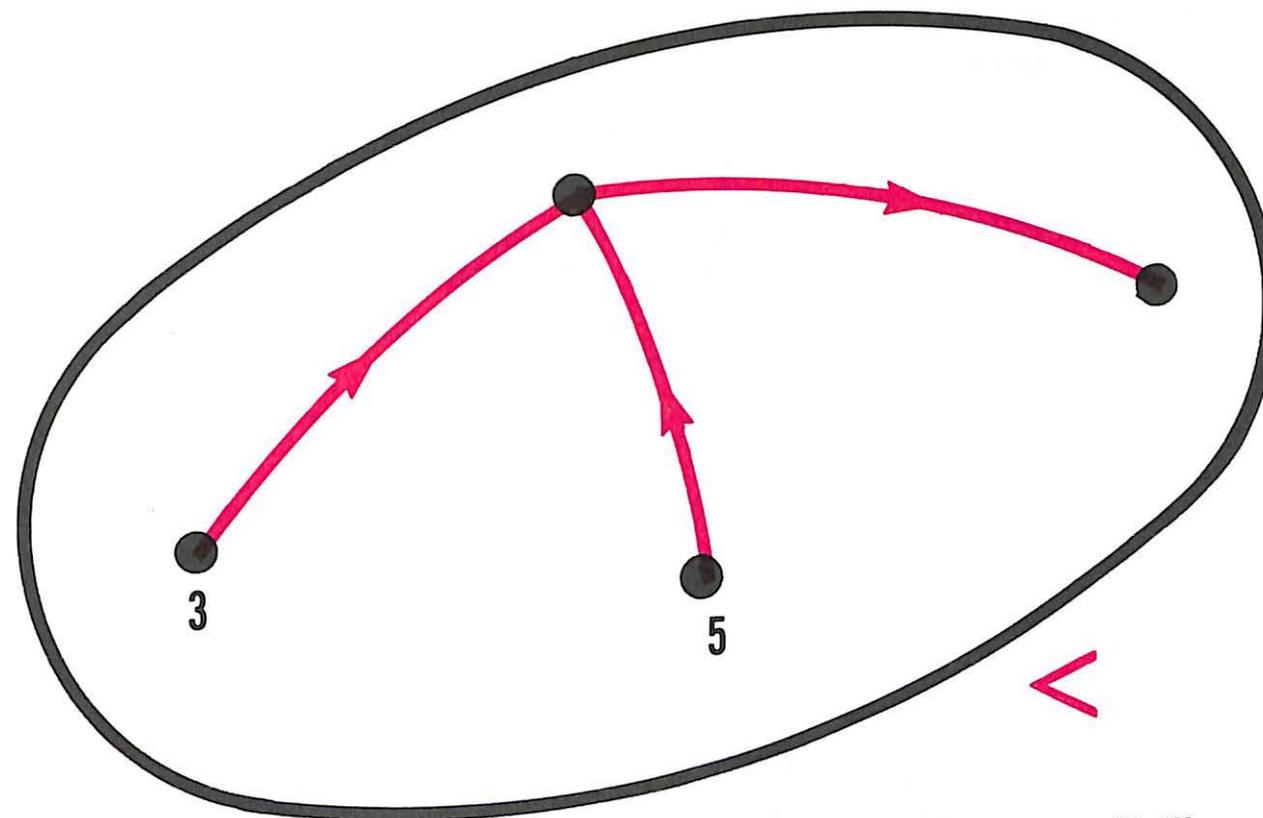


FIG. 133

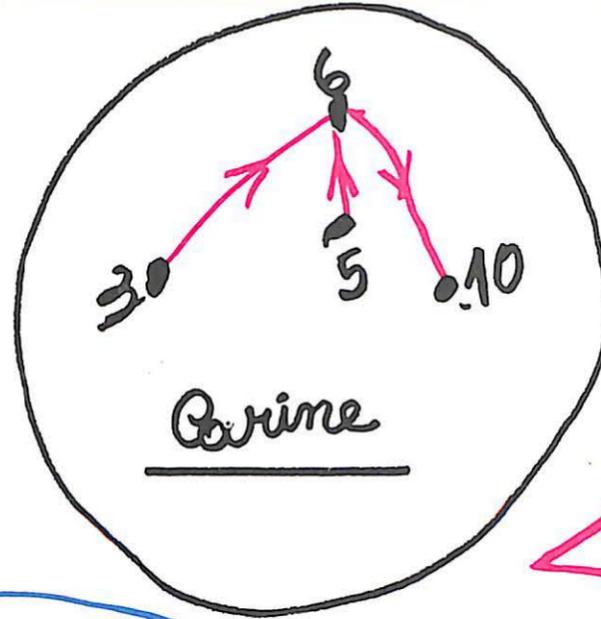
— Ces nombres ont dit en rouge : « Je suis plus petit que toi! »
A vous de choisir deux nombres.

FRÉDÉRIQUE fait mimer l'énoncé de ce problème par un enfant. Ensuite, travail individuel. La leçon se termine par la vérification de certaines réponses.

MONTAGE

Réponses différentes
également correctes.

Échelle : 0,70



Age : 6 ans 5 mois

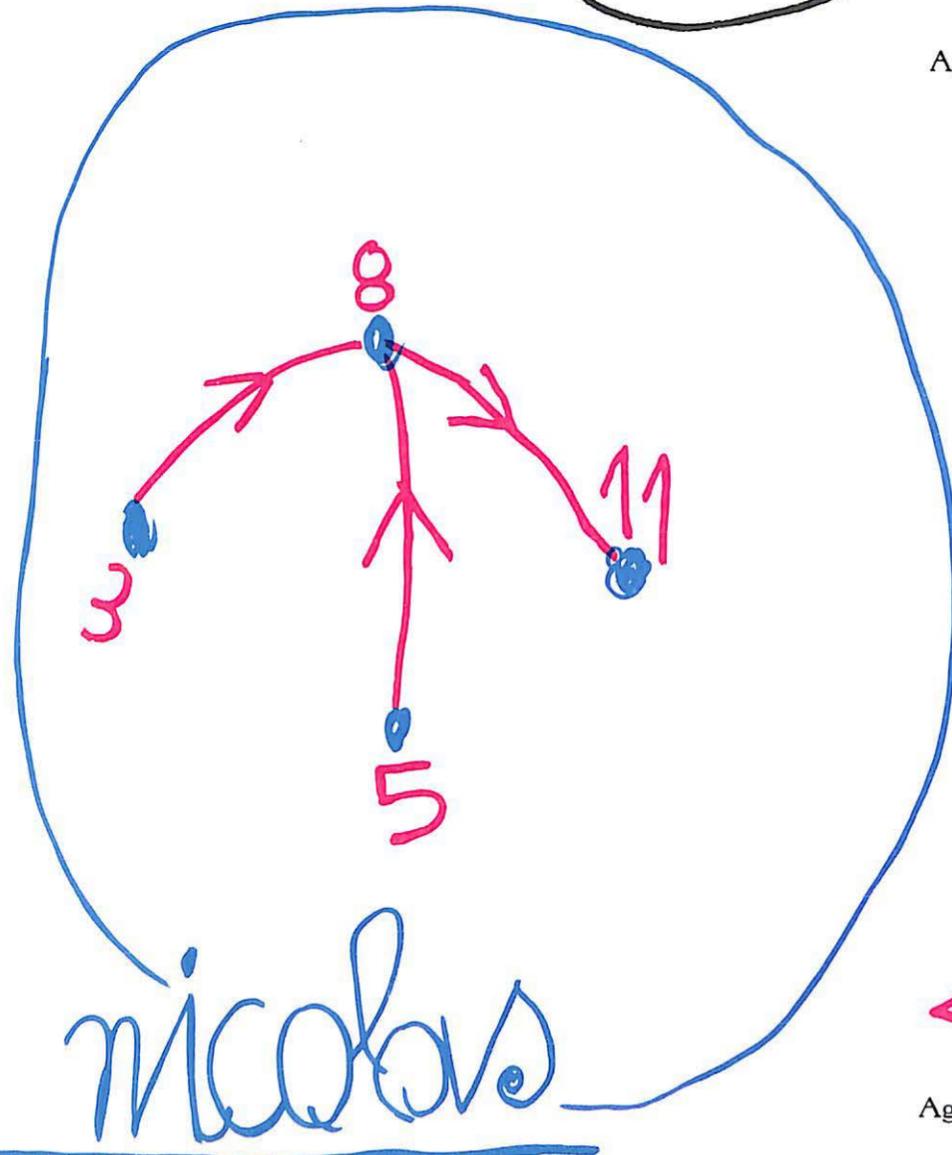


FIG. 134

Age : 5 ans 10 mois

COMMENTAIRE DE LA LEÇON 9

DATE: 4 octobre 1967.

DURÉE : 40 minutes.

L'ENSEMBLE ORDONNÉ DES NATURELS NON NULS

Les élèves de FRÉDÉRIQUE connaissent le début de la litanie des naturels non nuls
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, ... etc. ...

fondamentale pour le comptage et le calcul et l'égrènent volontiers en commettant éventuellement leurs petites erreurs personnelles.

Certains ont été entraînés à cet exercice en gravissant des escaliers, ce qui est bien conforme à l'idée d'échelle numérique.

Les premiers exercices de cette leçon permettent à FRÉDÉRIQUE de se rendre compte de l'ampleur de la connaissance commune de ses élèves.

LES DOIGTS

Le système décimal adopté par tant de civilisations a comme origine évidente le fait que l'homme possède 10 doigts.

Les mains et les doigts constituent toujours la première machine à calculer parfaitement adaptée à la numération de position de base 10.

NUMÉRATION DE POSITION

Les réponses aux questions de FRÉDÉRIQUE montrent que certains de ses élèves ont une idée assez précise de la numération de position de base 10.

Parfois, la numération parlée est la plus familière.

— dix, vingt, trente, quarante, cinquante.

Des exercices ont révélé qu'en d'autres cas, la numération écrite a la priorité et est bien connue des élèves qui peuvent dépasser la centaine.

Il n'y a pas toujours accord immédiat entre les connaissances des élèves en numération parlée et en numération écrite.

Ainsi, Carine écrit correctement la suite des entiers naturels jusque 84, mais pour énoncer « quatre-vingt-quatre » elle doit se raccrocher à la litanie.

JOUONS AVEC NOS DOIGTS... À DEUX

FRÉDÉRIQUE fait décomposer décimalement des nombres de 10 à 20 en utilisant des couples d'élèves et leurs doigts.

Cette situation favorise l'acquisition spontanée des tout premiers rudiments de la numération décimale.

FUGUE

La construction collective d'une suite croissante d'entiers est un réel concert, où chaque élève joue sa partie dans un crescendo irrésistible.

Sans difficulté, on monte jusqu'à 50 et l'on vérifie à diverses reprises que les nombres présentés sont encore connus autrement que par leur place dans la litanie.

RIBAMBELLE

Des élèves ont amorcé une suite strictement croissante, construite par réponses successives. Cette édification conduit tout naturellement à l'idée que chacun des nombres de la suite indique lui-même son suivant, d'où la notion de RIBAMBELLE dont voici un graphe.

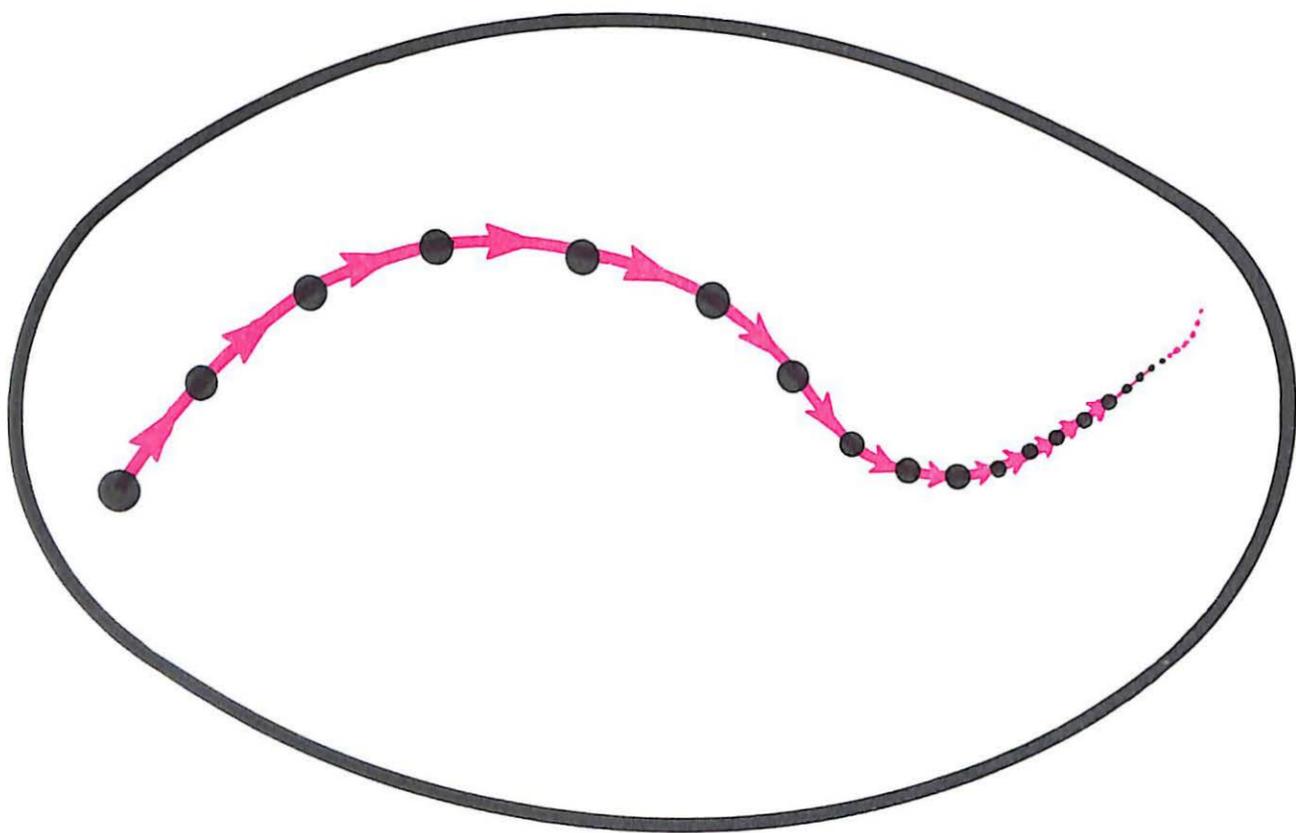


FIG. 135

Ce graphe permet à FRÉDÉRIQUE d'introduire un exercice individuel qui fait heureusement suite au travail collectif initial.

TRANSITIVITÉ

Pour résoudre cet autre exercice de la même leçon,

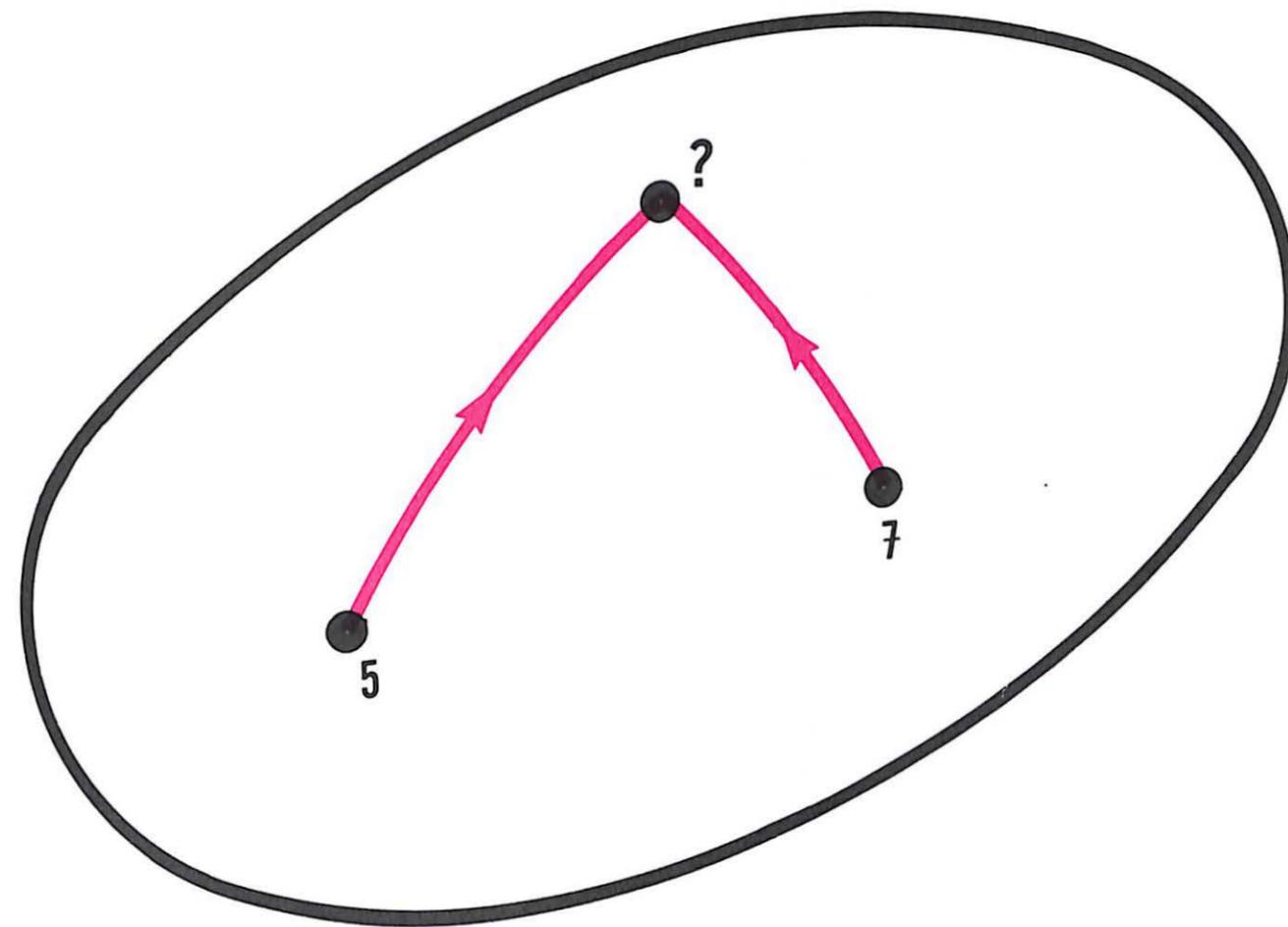


FIG. 136

des élèves choisissent d'abord un nombre plus grand que 5 et vérifient ensuite qu'il est bien plus grand que 7. C'est ainsi que certains élèves rejettent 6 après l'avoir essayé. D'autres enfants expliquent que comme 7 est plus grand que 5, il suffit de choisir un nombre plus grand que 7, utilisant ainsi implicitement la transitivité de l'ordre strict.

PROGRAMMATION

L'exercice précédent prépare la situation présentée en fin de leçon. Mais l'astucieuse FRÉDÉRIQUE évite l'automatisme trop immédiat en proposant d'abord un autre problème.

Ribambelles

Au tableau, sans mot dire, FRÉDÉRIQUE dessine.

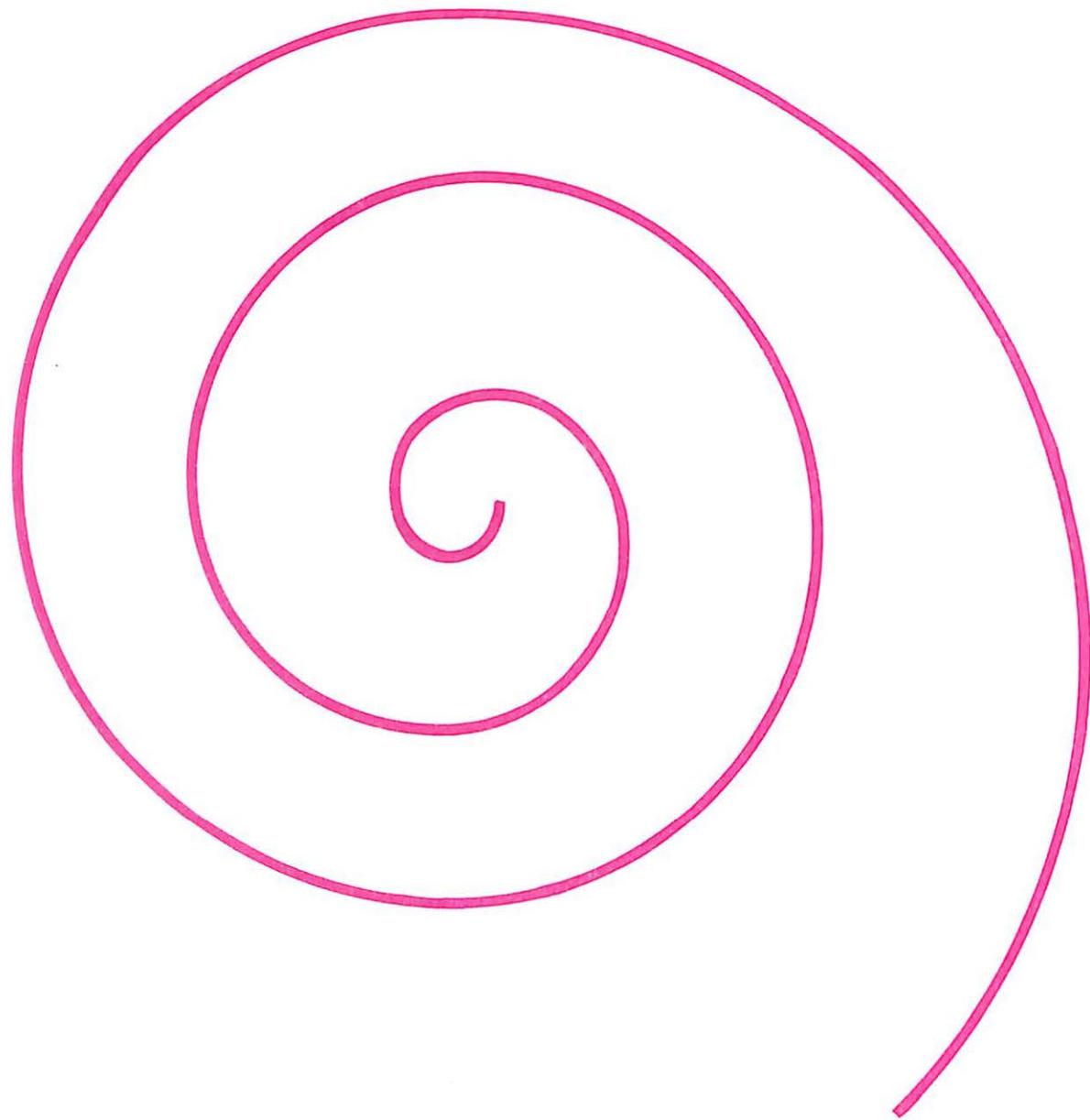


FIG. 137

10 — RIBAMBELLES

— Une crolle!

— Oui, une crolle!

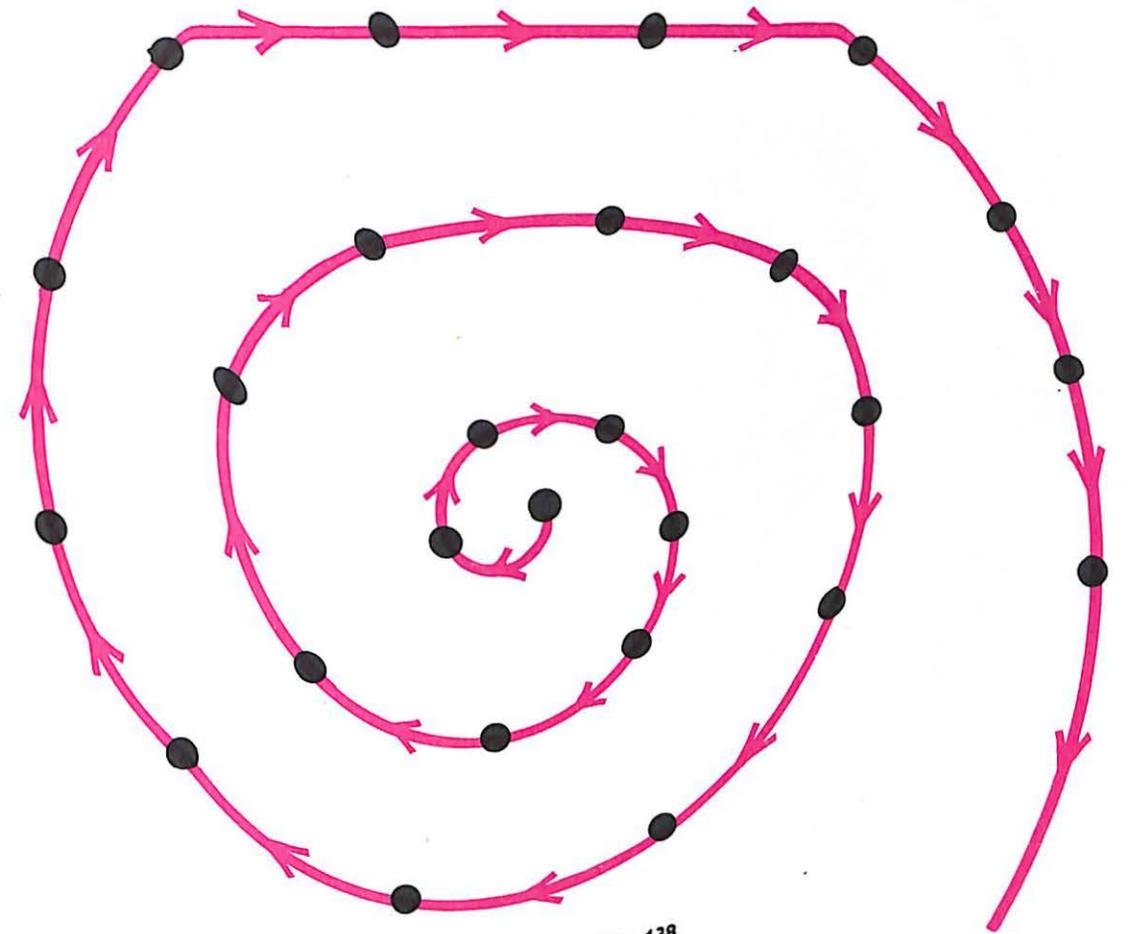


FIG. 138

— Dessinez une spirale; les points en noir, les flèches en couleur.

— La crolle en rouge ?

— Choisissez la couleur qui vous plaît.

— Madame, je l'ai faite trop petite.

— Ce n'est pas grave. Recommence ton dessin. Regardez bien les flèches. Les points courent l'un derrière l'autre.

Rires dans la classe.

— Ce sont des nombres ...

Voici 1. Qui court derrière 1 ?

— 2 !

— Et derrière 2 ?

— 3 !

etc.

— 7 !

— Continuez tout seuls en écrivant de beaux nombres, pas trop grands.

...

— Après 7, Emmanuel ?

— 8 !

— Ensuite ?

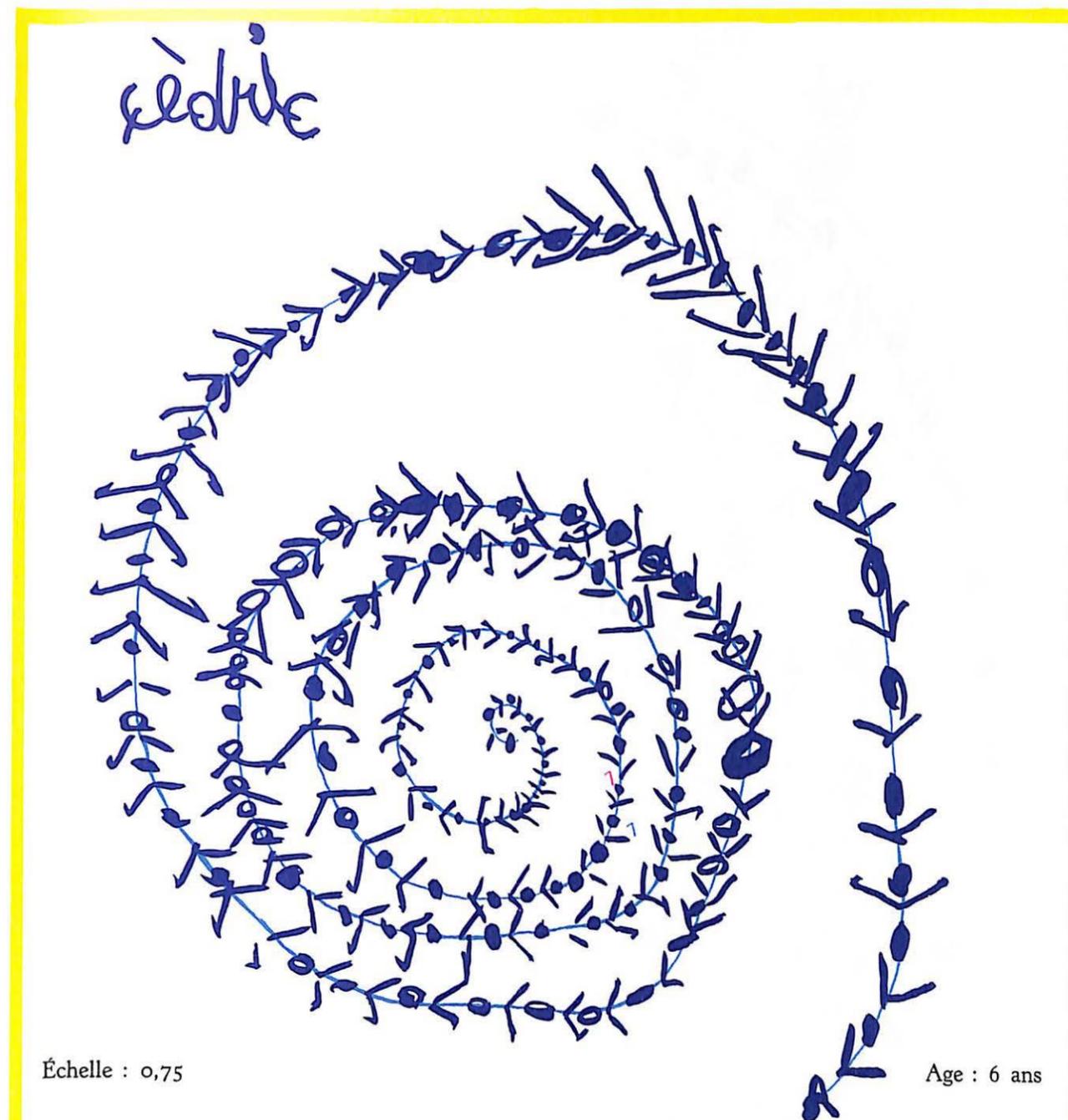
— 9 !

etc.

Chaque enfant écrit un nombre au tableau.

Le jeu se poursuit jusqu'au nombre 27.

— Au tableau, je n'ai plus de place. Peut-être en avez-vous encore sur votre feuille. Continuez le plus loin possible.



Échelle : 0,75

Age : 6 ans

FIG. 139

La liberté des couleurs a permis la réalisation de cet émouvant dessin qui a consommé toute l'énergie de son auteur.

Cédric n'a écrit aucun nombre mais il a créé une œuvre en rapport avec ses tendances et ses possibilités.

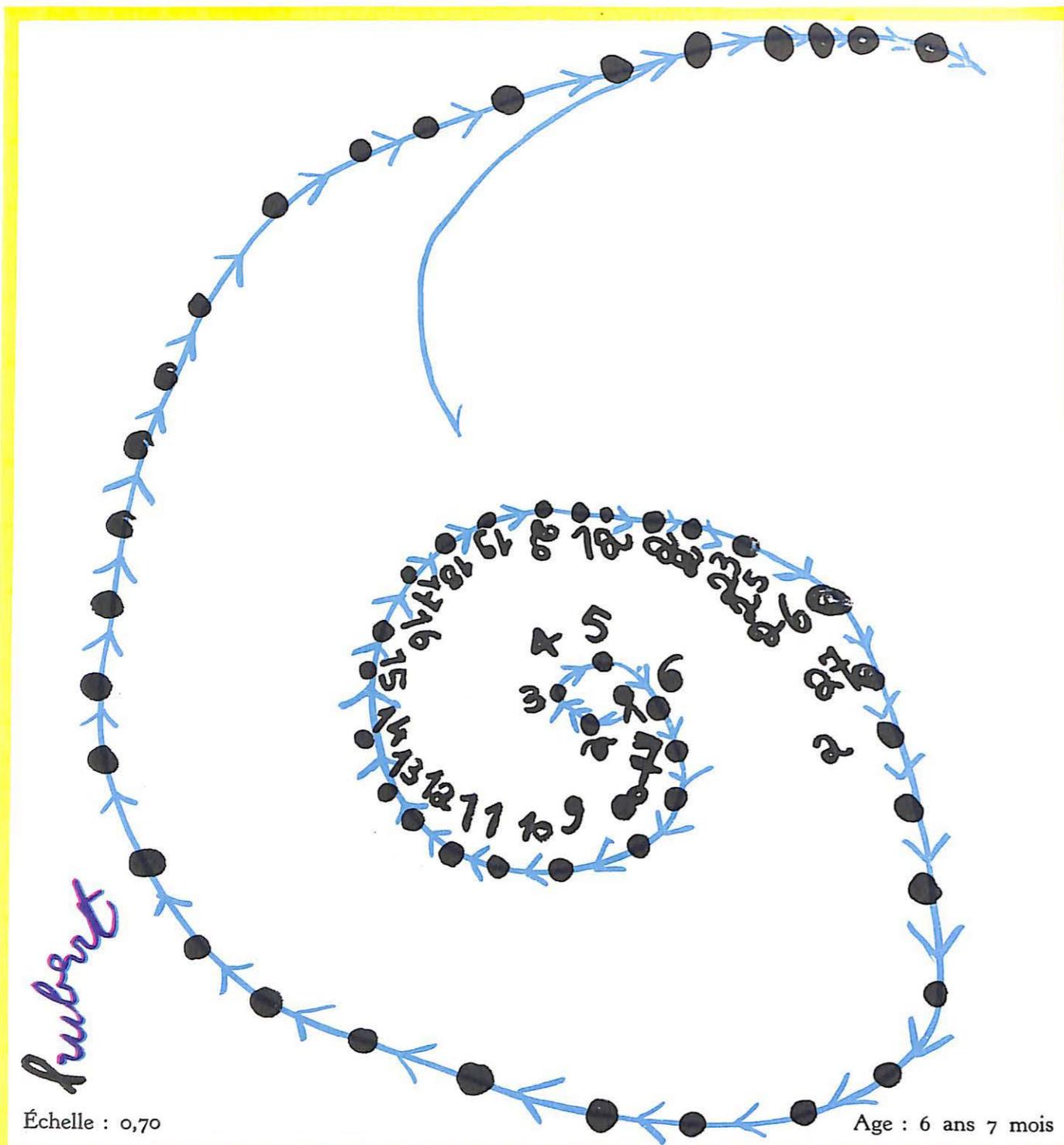


FIG. 140

Hubert a fait un gros effort mais les points trop serrés embrouillent le dessin. Ainsi qu'on le verra plus loin, Hubert en est conscient.

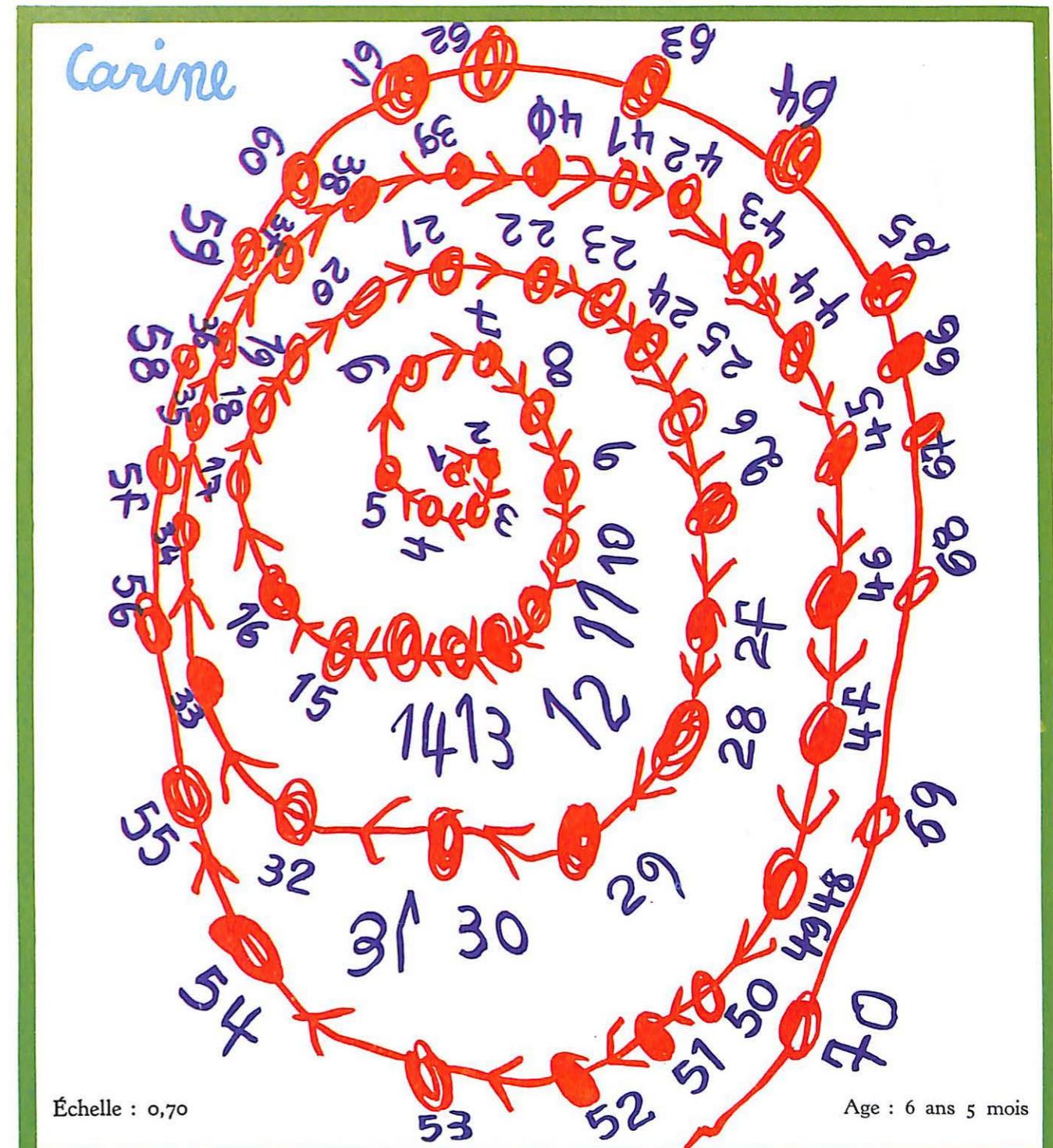


FIG. 141

Carine passe outre à la consigne des points noirs et produit ce bien joli dessin. Au tableau, FRÉDÉRIQUE s'est arrêtée à 27. Sans aide, Carine poursuit correctement la litanie jusqu'à 70.

FRÉDÉRIQUE dessine au tableau.

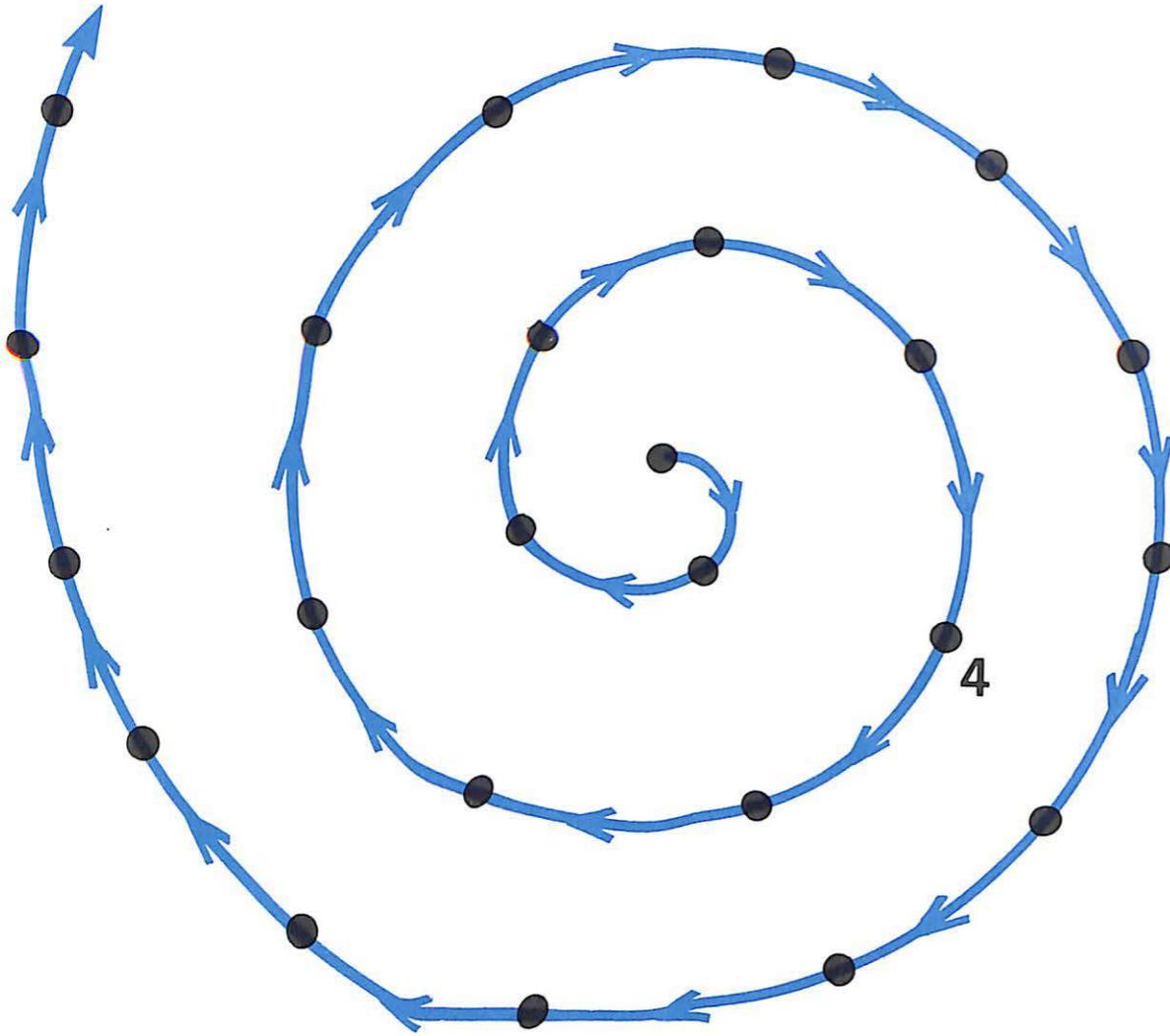


FIG. 142

— A nouveau, les nombres courent les uns derrière les autres.
Observez-bien où est placé 4.
Qui court derrière 4 ?

— 5!

— Et derrière 5 ?

— 6!

— Et avant 4 ?

— 3!

— Continuez tout seuls.

...

— Qui court avant 3 ?

— 2!

— Et avant 2 ?

— 1!

— Et avant 1 ?

— 0!

— Et avant 0 ?

— Charlot!

— Oui, Charlot!

Rires dans la classe.

— Non, c'est zéro un.

— Et zéro deux!

— C'est zéro zéro!

— Zéro Zéro, c'est toujours zéro!

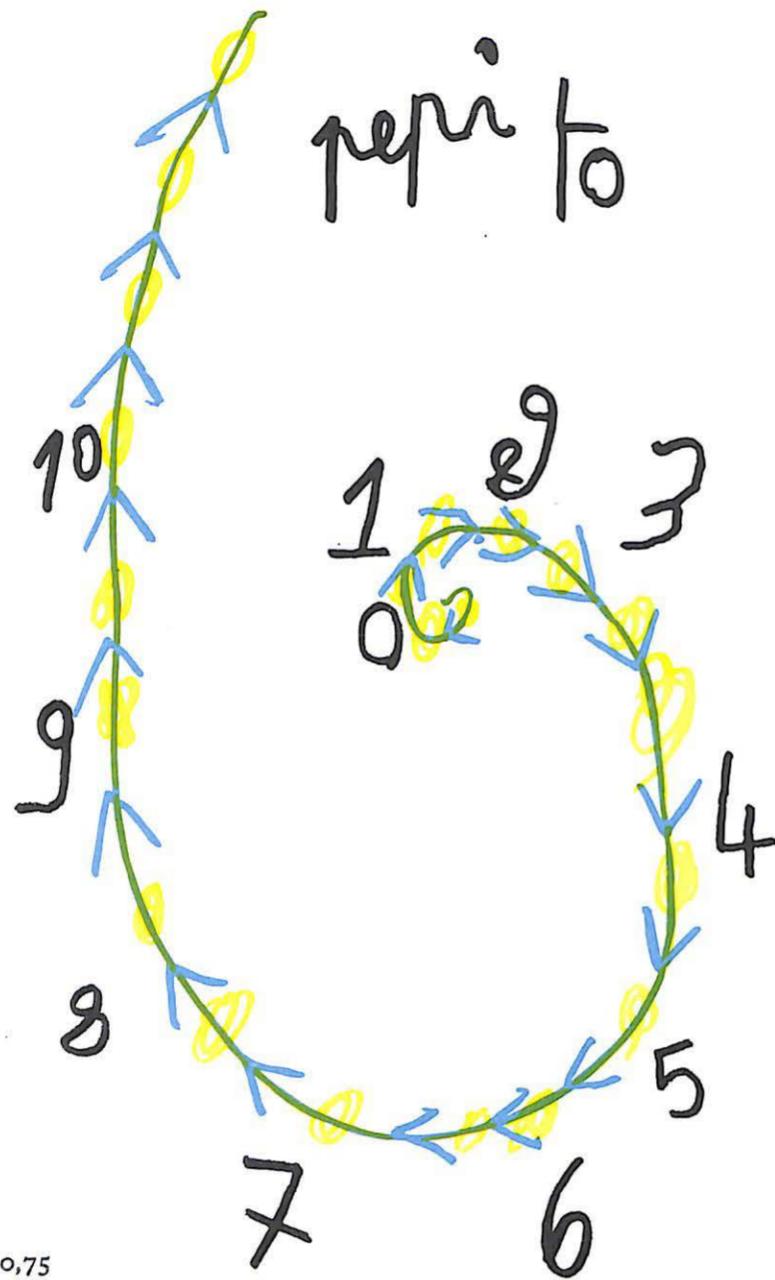
— Avez-vous déjà écouté le bulletin du temps à la radio ou à la TV ?

— Oui, moi!

— Qu'entend-on quand il fait froid ?

— Le vent!

FRÉDÉRIQUE n'insiste pas. Les enfants terminent le dessin.

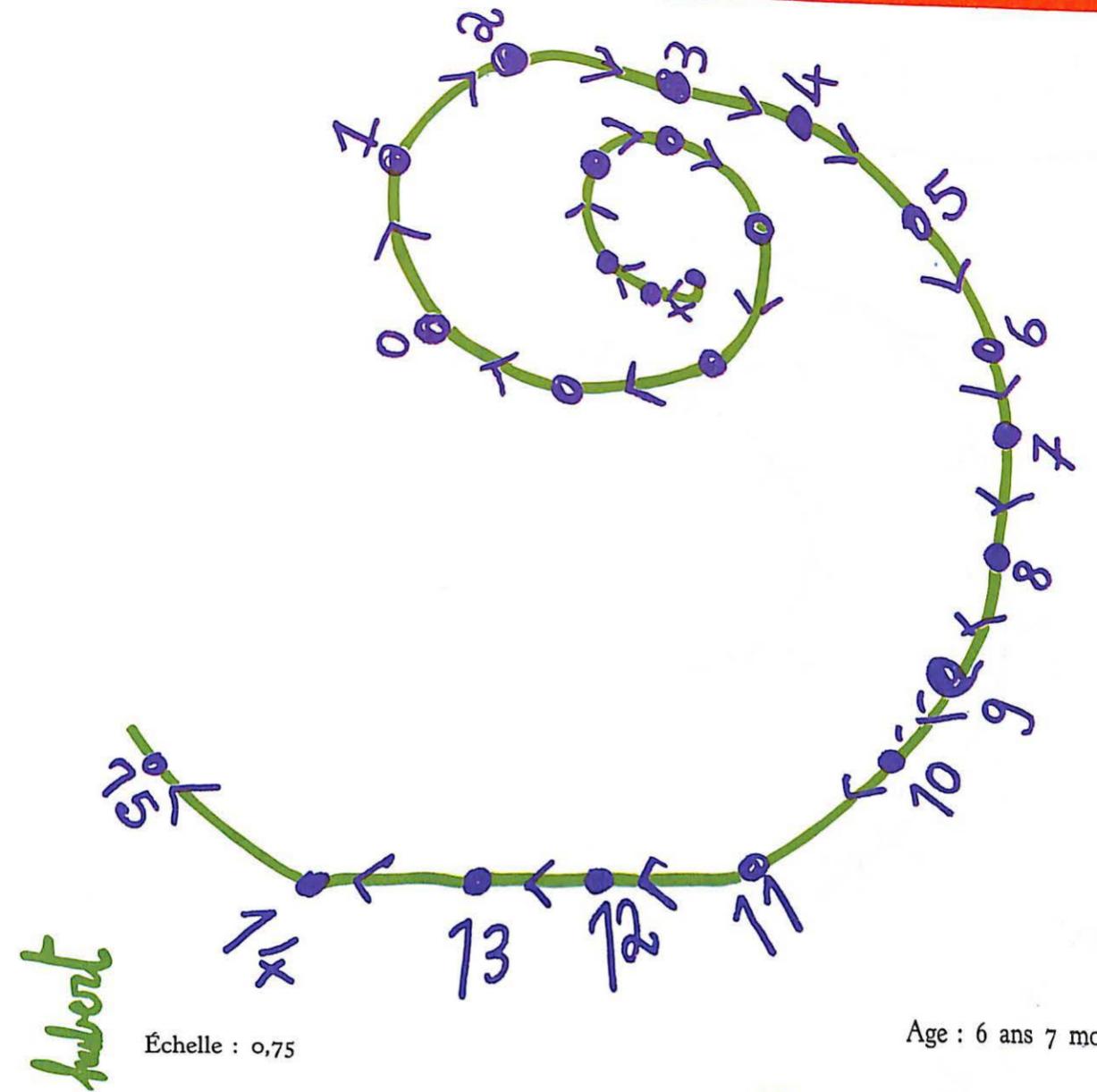


Échelle : 0,75

Age : 6 ans 1 mois

FIG. 143

Joli dessin, bien que la bijection points jaunes - nombres noirs soit imparfaite. L'ordre est respecté.



Échelle : 0,75

Age : 6 ans 7 mois

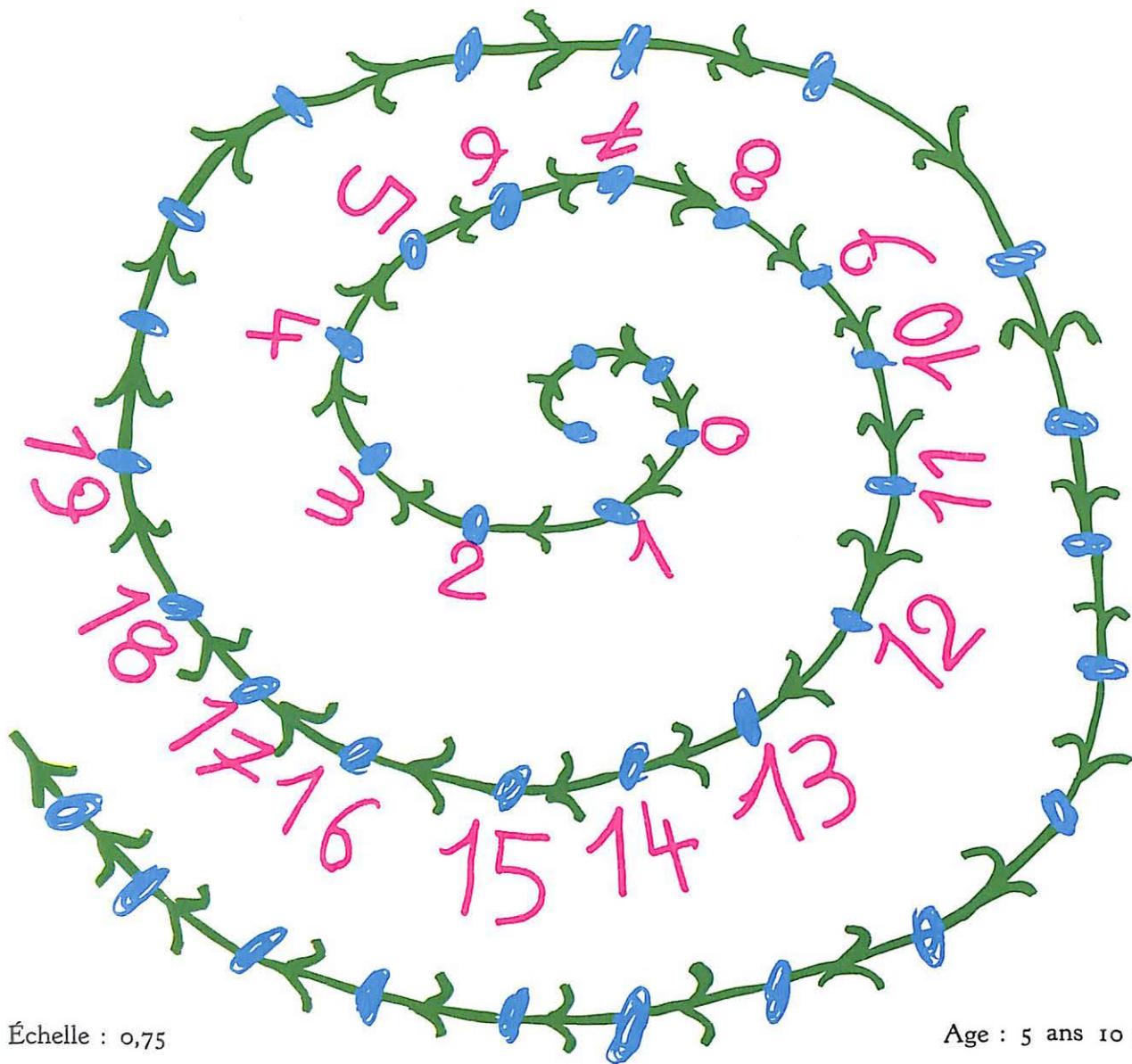
FIG. 144

Bravo, Hubert!

Les avatars du premier dessin t'ont servi de leçon. Tu as bien aéré celui-ci et tu as astucieusement changé les couleurs.

Tu t'es même permis la fantaisie de flèches bicolores!

Nicolas



Échelle : 0,75

Age : 5 ans 10 mois

FIG. 145

Parfait!

Jolies couleurs, belle courbe de la spirale, chiffres burinés.

Après les flèches-triangles, Nicolas nous présente de gracieuses flèches-mouettes.

FRÉDÉRIQUE dessine une troisième spirale et numérote les trois premiers points 0, 2, 4,

— Que se passe-t-il cette fois ?

— Ils n'ont pas bien couru!

— On a marqué 0 et puis ...

— 2!

— On n'a pas pris 1.

— 2 et puis ...

— 3!

— Non, on a pris 4.

— Et puis ...

— 6!

— Et puis ...

— 8!

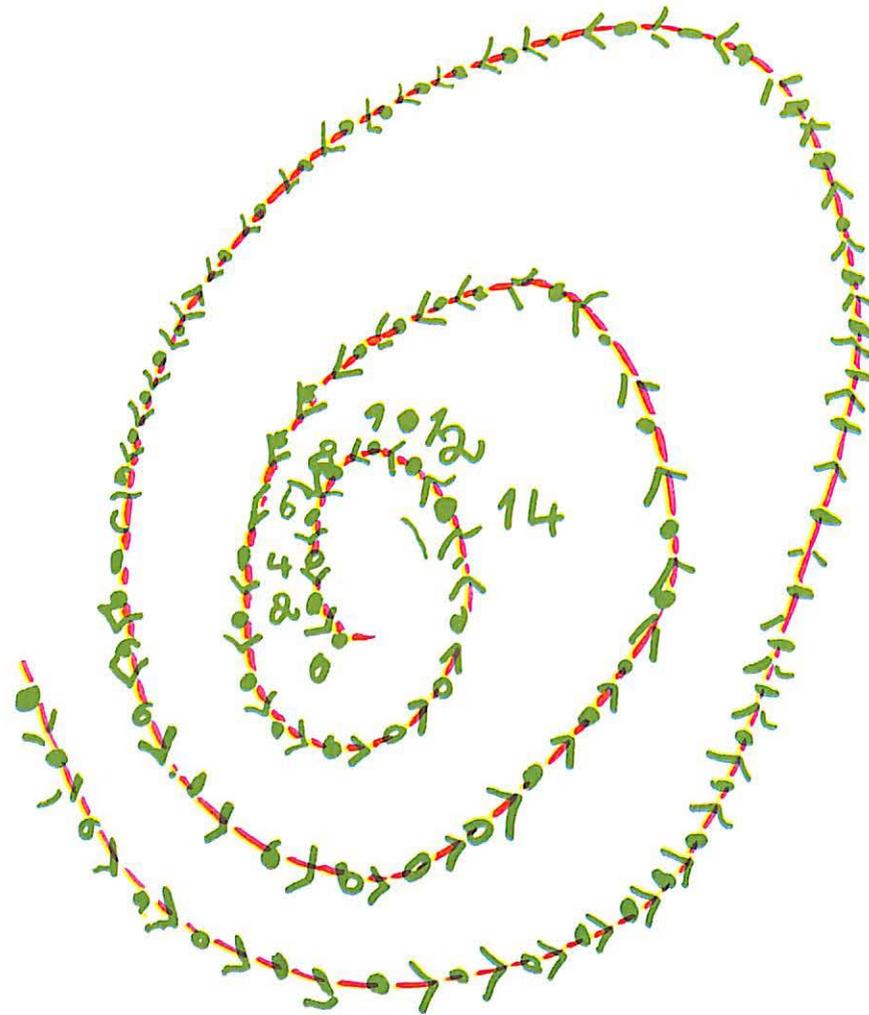
— Et puis ...

— 10!

FRÉDÉRIQUE écrit successivement 6, 8, 10.

— Continuez tout seuls.

Jedm - Jacques

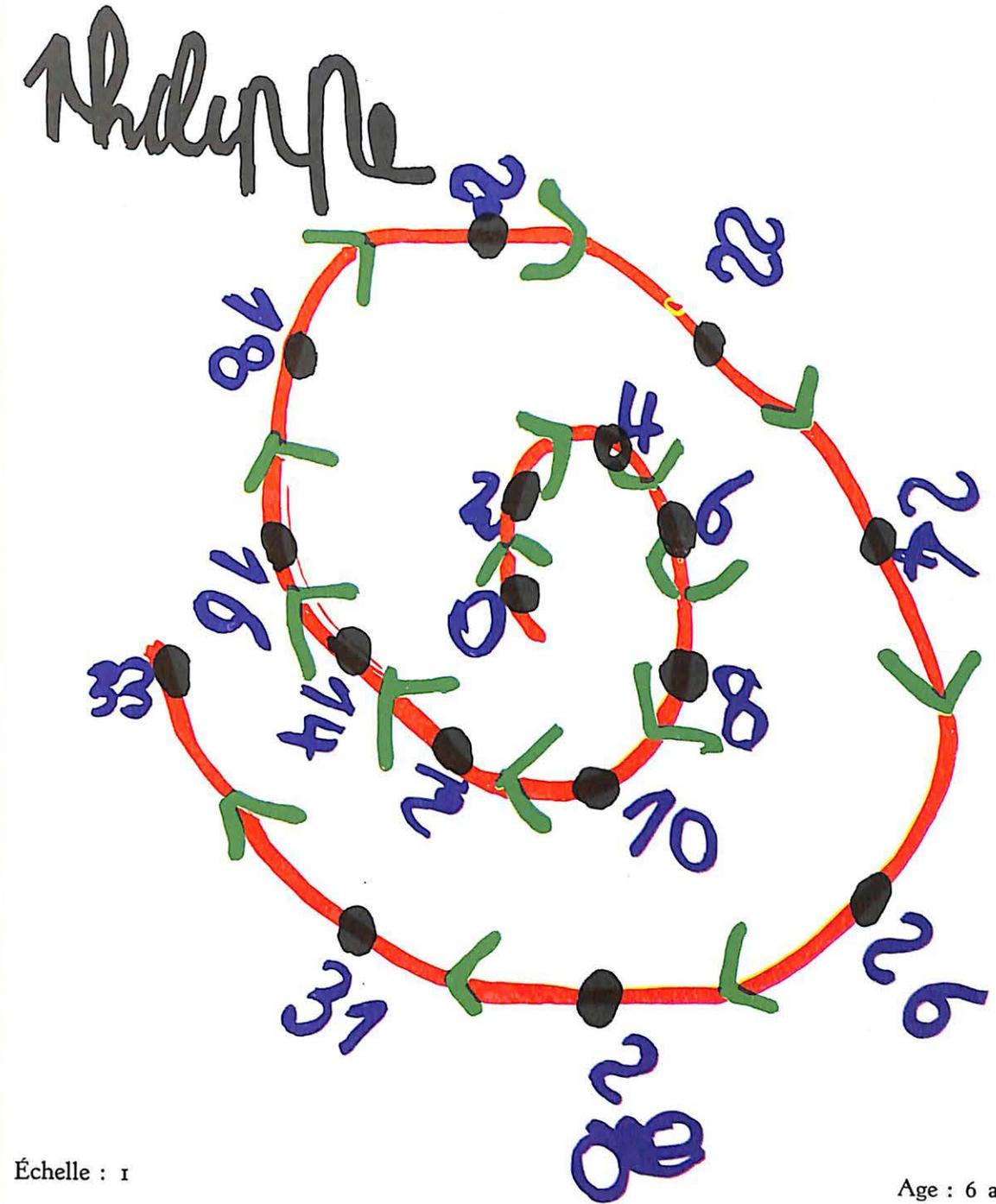


Échelle : 1

Age : 6 ans 1 mois

FIG. 146

Bon début, mais Jean-Jacques a eu les yeux plus grands que le ventre ... et retourné les flèches. Il les a mises dans le sens de la course.



Échelle : 1

Age : 6 ans 2 mois

FIG. 147

Philippe corrigera plus loin le petit accident final.

Dix jours plus tard, FRÉDÉRIQUE demande à Philippe et à trois de ses condisciples de dessiner des panneaux de mathématique pour décorer leur classe. Abondamment pourvus de feuilles de bristol de format 55 cm × 73 cm et de larges marqueurs, ils sont chargés de traiter librement et séparément quatre sujets différents. Ils travaillent, assis par terre, de manière très individuelle. Philippe est particulièrement absorbé par la réalisation d'un immense graphe-spirale de la fonction $+ 2$. Comme le bon artisan, il s'arrête de temps en temps pour souffler tout en contemplant avec grande attention l'œuvre qui se crée.

Le panneau a été réalisé en trente minutes, sans aide ni conseil, tant sur le plan technique que sur le plan mathématique.

Personne ne savait, à l'école, que Philippe connaissait l'échelle des entiers naturels jusqu'à 100 et voici qu'il en gravit allègrement les échelons deux par deux. Arrivé à 102, il demande à FRÉDÉRIQUE où placer le zéro, car il a bien peur de commettre une faute de dernière minute.

Ce monumental panneau de Philippe marque un immense progrès sur son dessin précédent.

Et pourtant, conformément à la pédagogie de FRÉDÉRIQUE, aucun exercice intermédiaire n'avait été proposé entretemps.

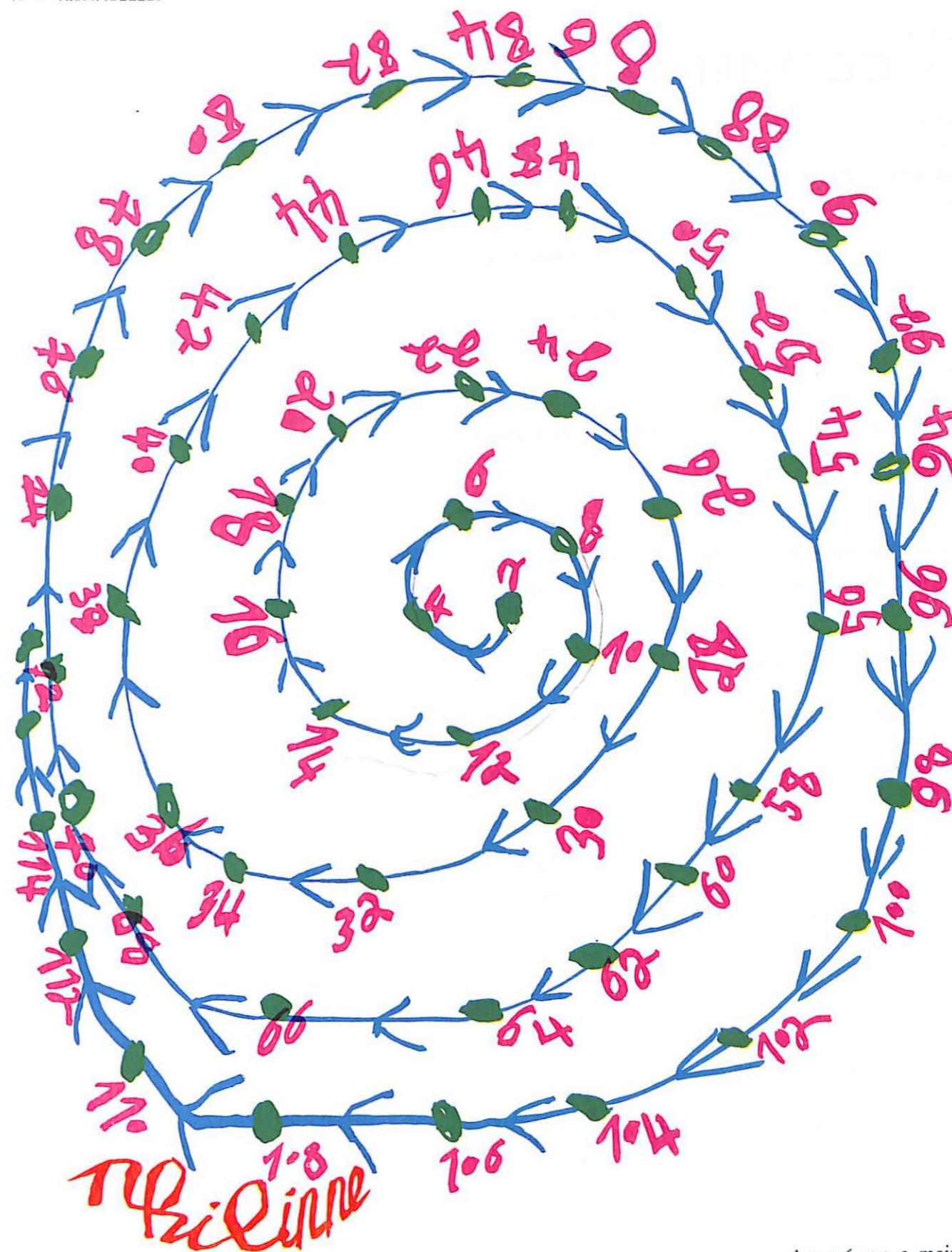


FIG. 148

Age : 6 ans 2 mois

Échelle : 0,30

COMMENTAIRE DE LA LEÇON 10

DURÉE : 45 minutes

DATE : 9 octobre 1967.

ENROULEMENT

— Que fait-on d'un mètre ruban, de certains décimètres ... quand on ne s'en sert pas ?

— On les enroule !

Pour gagner de la place, FRÉDÉRIQUE enroule la litanie des entiers naturels.

SPIRALE

La spirale, tant utilisée dans la décoration, fascine les enfants.
Le lien affectif enfant-spirale perce dans l'interjection spontanée.

— Une **CROLLE** !
— Oui, une **CROLLE** !

Le belgicisme **CROLLE** désigne notamment les boucles des cheveux et plus généralement les spirales.

Mademoiselle Beulemans avait sans doute de belles **CROLLES**, de même que la magnifique horloge spirale de la télévision française, pièce évidente de la connaissance commune des petits enfants français, suisses et belges.

Sur le cadran du petit écran, l'aiguille mobile décrit l'écoulement continu du temps tandis que les objets mis pour les nombres 1 à 12, début de la litanie, marquent inexorablement les heures et graduent une spirale.

PURETÉ DE LA LANGUE

Spontanément, les enfants ont dit **crolle**.

Ce vocable du terroir est très évocateur et FRÉDÉRIQUE se garde bien de repousser cette bouffée d'intuition pittoresque.

Sans commentaire, FRÉDÉRIQUE dit **spirale**, là où les enfants disent **crolle**.

Un judicieux apprentissage de la mathématique d'aujourd'hui est une école de bon langage, car elle exige et permet précision et clarté. Les articulations logiques de la langue y font l'objet de soins jaloux.

Pour apprendre à bien parler, il convient d'avoir des choses à dire et le désir de les exprimer.

Assaillir à tout moment les élèves, pour les reprendre au sujet d'impureté de langage, leur donne la crainte de s'exprimer et les inhibe au point de paralyser leur pensée et de tarir leur inspiration. Evitons de superposer les difficultés.

Dans la phase de la découverte, acceptons l'expression maladroite — voire incorrecte — d'affirmations vraies. Dans cette période où l'enfant a besoin de tous les encouragements implicites, donnons la priorité à l'intention sur l'expression littérale.

Quand les élèves auront acquis une vue plus nette de la situation, il sera toujours temps de corriger les erreurs de langage ... qui auront survécu à cette clarification :

MATHÉMATIQUE MODERNE = MATHÉMATIQUE DU BON LANGAGE

BÂTONS ET CERCEAUX

Un des carcans de l'enseignement traditionnel de la mathématique, consiste à donner aux cercles et droites une place presque exclusive au détriment des autres courbes ou arcs.

FLÈCHES COURBES ET RIGIDES

L'effet appauvrissant d'un tel conditionnement m'est apparu de manière frappante lors d'une leçon de démonstration dans une classe traditionnelle de section scientifique. Comme les petits élèves de FRÉDÉRIQUE, ces adolescents de 16 ans avaient proposé les flèches pour représenter une relation. Mais leurs flèches étaient droites et rigides.

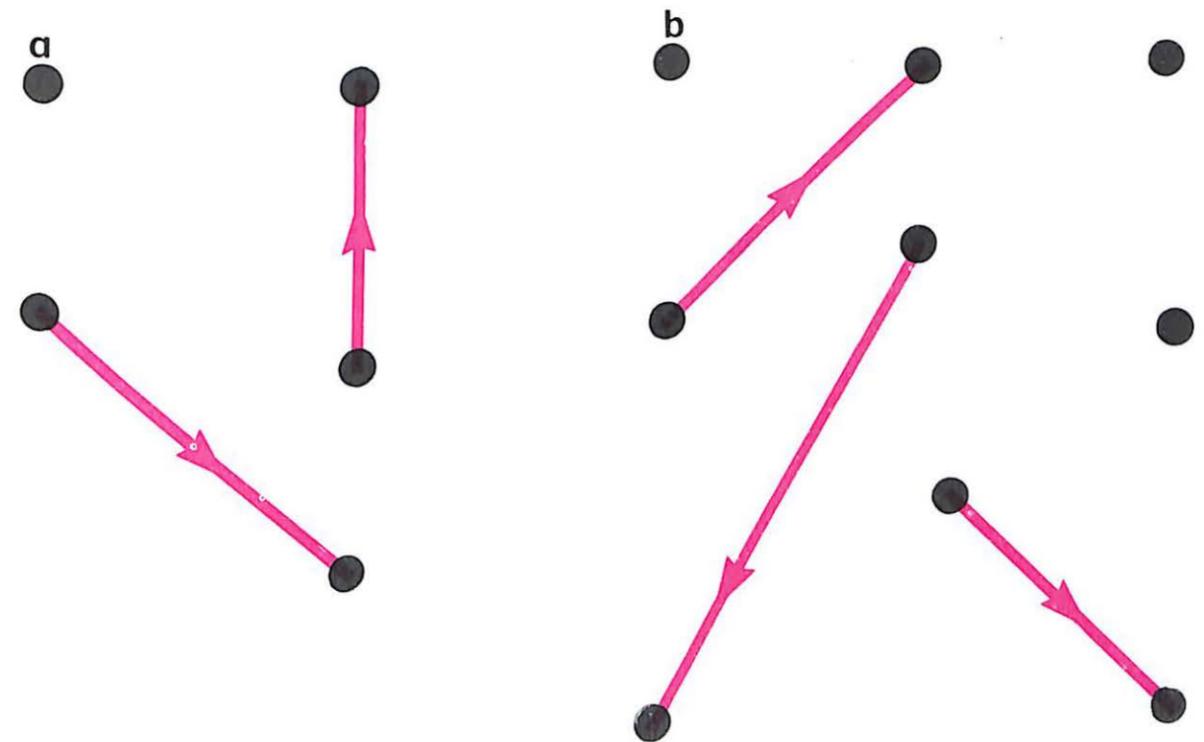


FIG. 149

Et voici que a doit montrer b
Réponse de la classe.

— Impossible!

Et quand je suggère discrètement ...

— *N'y a-t-il que des droites, dans la nature?*

... j'obtiens cette réponse édifiante :

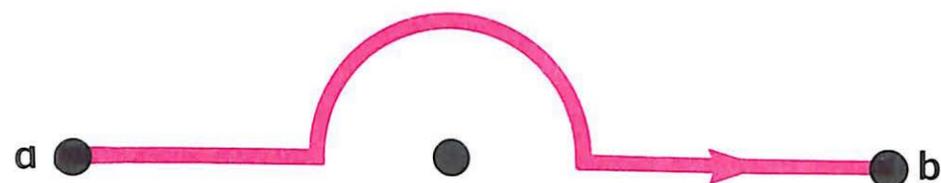


FIG. 150

Cercles et demi-cercles avaient aussi droit de cité dans le monde de l'enseignement traditionnel des mathématiques.

ARCS

FRÉDÉRIQUE ne restreint pas le monde des courbes, arcs, cycles, et ses élèves en dessinent — et en dessineront — des multitudes très variées.

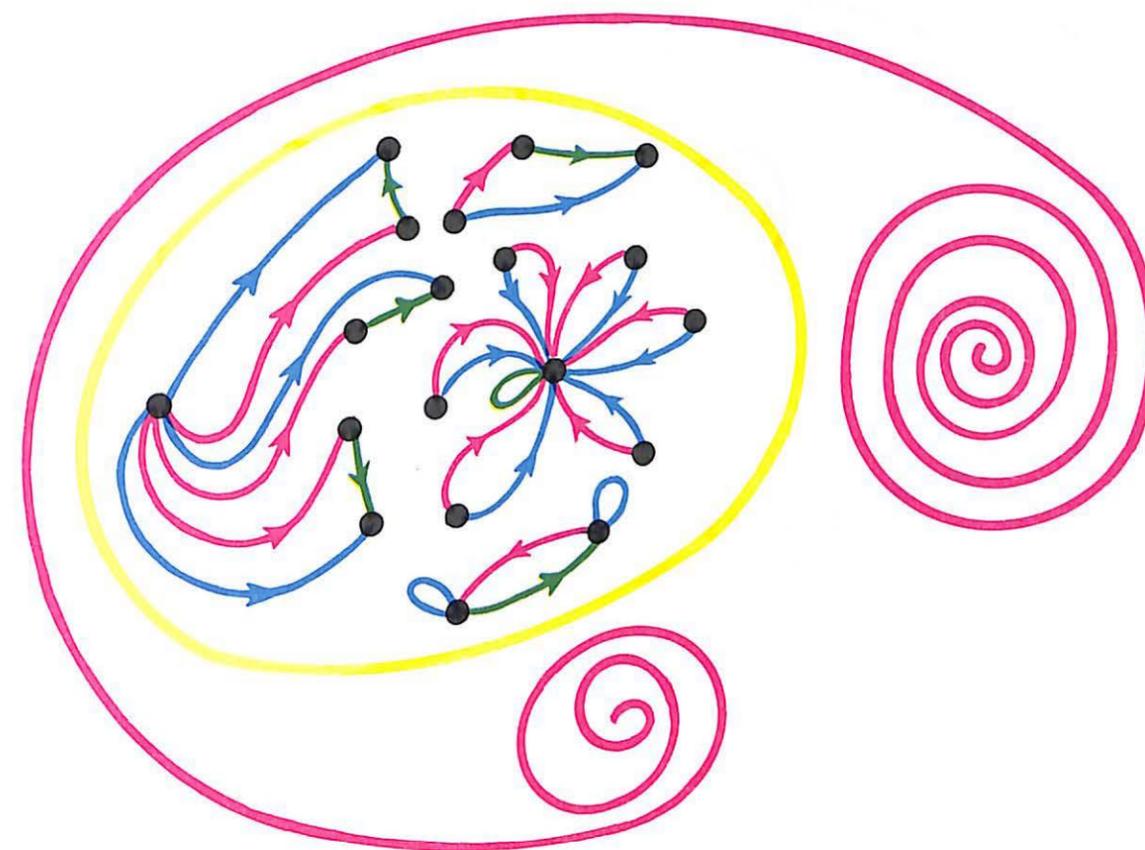


FIG. 151

Pour le mathématicien, un arc est un « espace homéomorphe » à un segment... Mais ne nous effrayons pas de cette définition. Elle mathématise, en l'idéalisant, la situation que présente un élastique, indéfiniment extensible et déformable

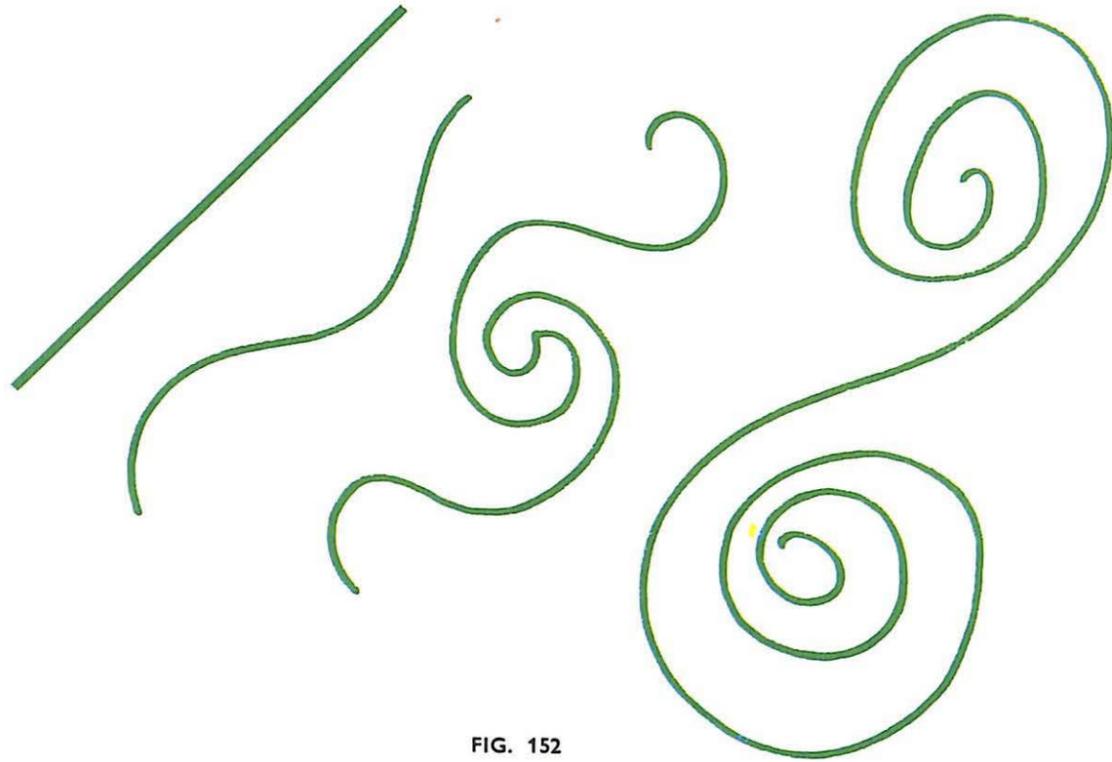


FIG. 152

ORDRES STRICTS D'UNE DROITE

Voici une droite D

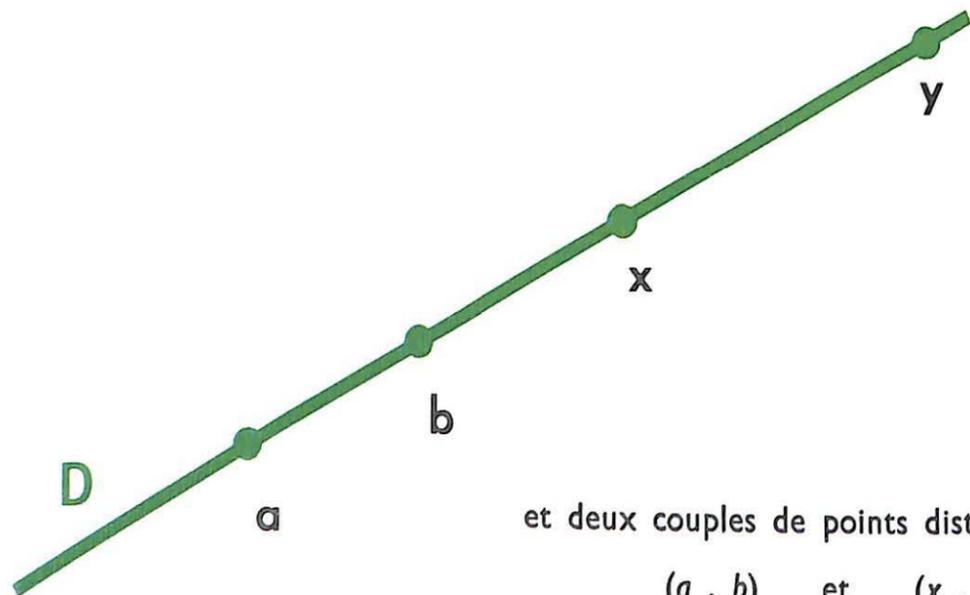


FIG. 153

et deux couples de points distincts de D
 (a, b) et (x, y)

- Si FRÉDÉRIQUE décide $a < b$
- Alors ami lecteur, tu répondras $x < y$
- Si FRÉDÉRIQUE décide $b < a$
- Alors l'ami lecteur, répondra $y < x$

Les relations $<$ et $<$ définies dans D
 sont des ordres stricts (totaux) réciproques l'un de l'autre et appelés

LES ORDRES STRICTS DE LA DROITE D

ORDRES STRICTS D'UN ARC

Notre élastique rectiligne



FIG. 154

et les conserve au cours de ses contorsions et déformations.
 a deux ordres stricts réciproques ...

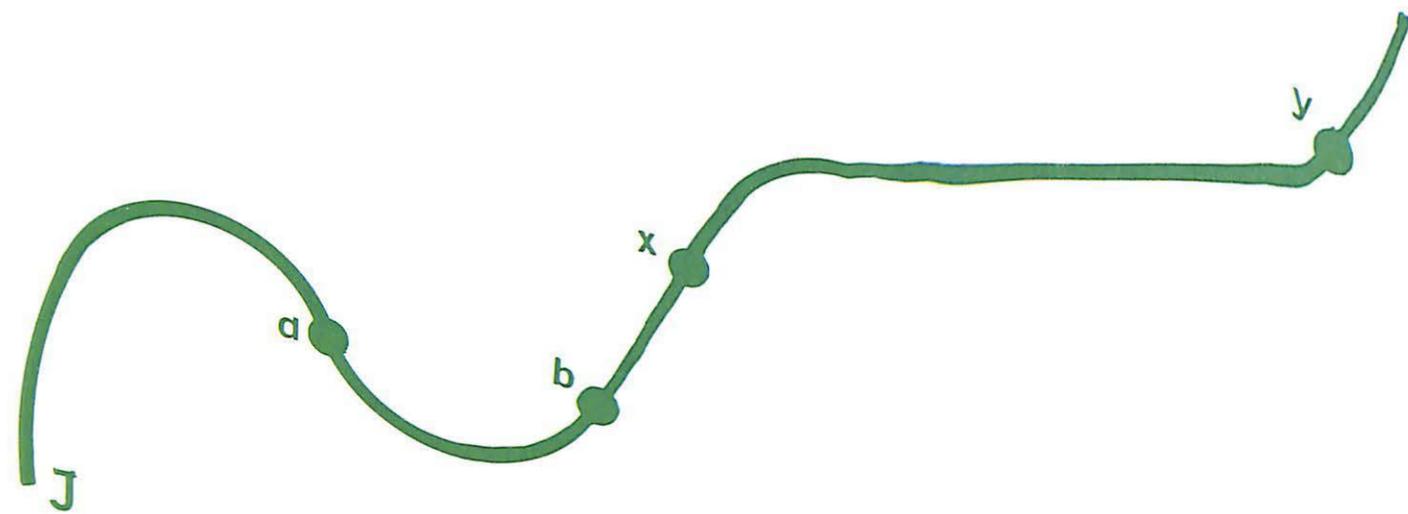


FIG. 155

- $a < b$
- $x < y$
- $b < a$
- $y < x$

Cette fois encore

- Si FRÉDÉRIQUE décide
- Alors l'ami lecteur répond
- Si FRÉDÉRIQUE décide
- Alors ami lecteur, tu lui répondras

Les ordres stricts réciproques $<$ et $<$ sont les

LES ORDRES STRICTS DE L'ARC J

ORDRE D'UN DEMI-ARC

Voici une demi droite E d'origine a

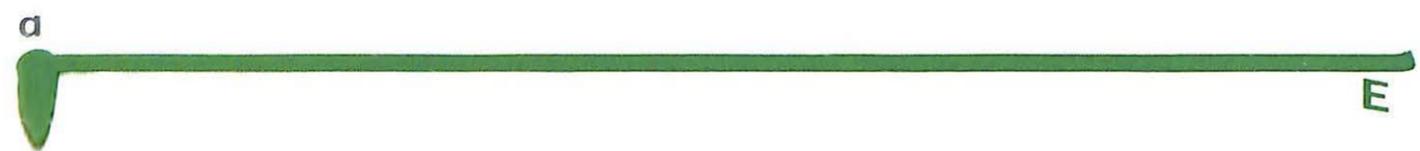


FIG. 156

a est le premier élément de E pour l'un des ordres stricts de la droite contenant E
Cet ordre strict est appelé

L'ORDRE STRICT DE LA DEMI-DROITE E

Cette fois, l'ami lecteur n'a nul besoin de FRÉDÉRIQUE

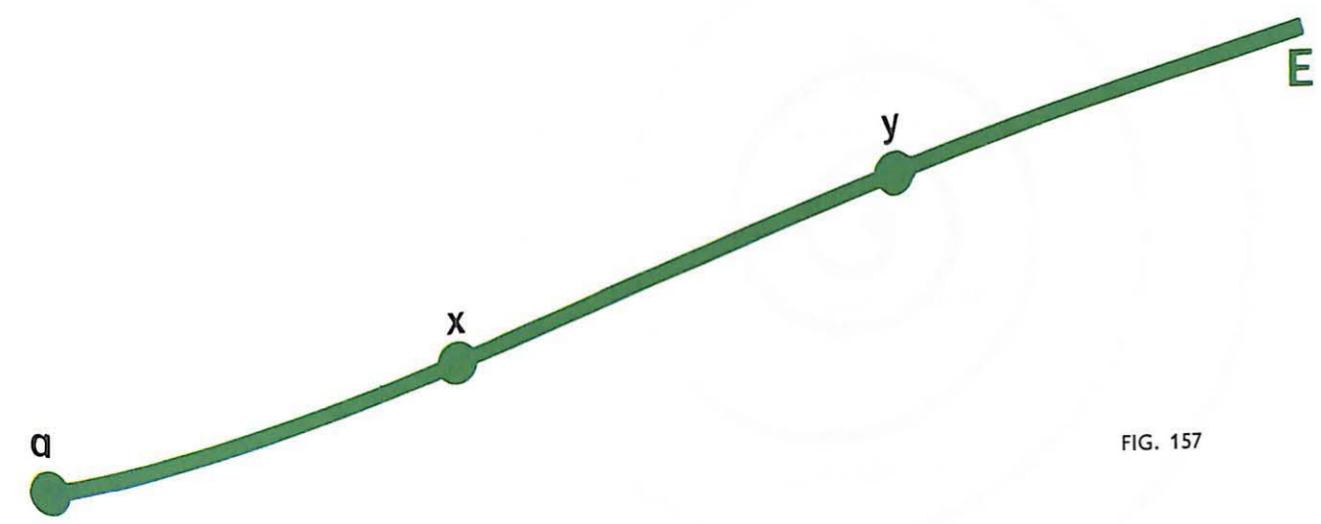


FIG. 157

Pour affirmer fièrement $x < y$

DEMI-ARCS

Les demi-arcs s'obtiennent à partir des demi-droites comme les arcs à partir des droites.

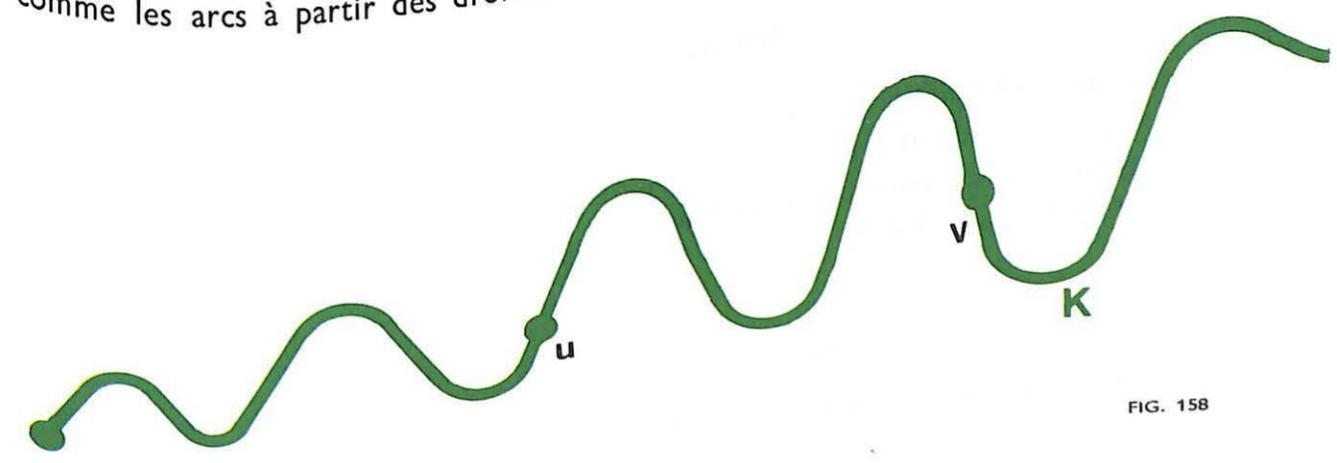


FIG. 158

Pour l'ordre strict du demi arc K : $u < v$

LES SPIRALES

Les spirales de FRÉDÉRIQUE sont des demi-arcs et



FIG. 159

grâce à leur ordre strict, elles sont prédestinées à accueillir l'échelle numérique des entiers naturels

$$\{ 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

HONNÉTÉTÉ

La présentation de FRÉDÉRIQUE qui se justifie amplement par des raisons psychologiques et affectives a priori et des raisons mathématiques a posteriori reste parfaitement honnête. La spirale n'intervient que comme trame introductive. D'entrée, FRÉDÉRIQUE substitue les flèches indicatrices de couples de points au demi-arc-spirale non encore défini.

FONCTIONS + 1 ET + 2

Les graphes spirales dessinés par les élèves de FRÉDÉRIQUE représentent les fonctions

$$+ 1 : x \rightarrow x + 1$$

$$+ 2 : x \rightarrow x + 2$$

LES NOMBRES NÉGATIFS ET CHARLOT

Fortes d'expériences antérieures, FRÉDÉRIQUE mène les élèves à la découverte des nombres négatifs dans leur connaissance commune. Mais voilà qu'à zéro, une chanson populaire entre en résonance avec les pensées des enfants

Zéro fois zéro c'est les deux yeux de Charlot

Certains élèves font cependant une magnifique réponse. Au lieu de puiser les négatifs dans leur connaissance, ils les réinventent sous une forme bien originale. Zéro, symbole de l'impossibilité... combien d'enfants n'écrivent-ils pas

$$2 - 7 = 0$$

Alors, l'idée est simple, on va affiner la situation en indiquant des degrés d'impossibilité

0 1	pour notre	- 1
0 2	pour notre	- 2
0 3	pour notre	- 3

FRÉDÉRIQUE trouve cette idée bonne, mais n'ose l'approfondir car elle craint la confusion des notations.

Se souvenant d'autres leçons où des enfants avaient parlé de -2 et -5 comme des degrés du froid, FRÉDÉRIQUE appelle la TV et son bulletin du temps à la rescousse.

Des malentendus empêchent le dialogue de s'établir.

— Qu'entends-tu en hiver ?

— Le vent!

FRÉDÉRIQUE baisse les bras.
Les entiers négatifs, c'est pour demain!

ATTENTION

Cette leçon de 45 minutes fut en grande partie un exercice de dessins abstraits assez libres. Pour autant qu'ils soient intéressés et actifs, des élèves de 6 ans peuvent rester attentifs beaucoup plus longtemps qu'on ne le croit généralement. FRÉDÉRIQUE arrive à un tel résultat en variant au maximum les situations proposées ainsi que leur degré de difficulté. Elle maintient à son enseignement un tempo rapide et évite de décourager des élèves en les éternisant sur des travaux non réussis. Pour réaliser son impressionnant panneau, Philippe a travaillé d'arrache-pied pendant 30 minutes. Mais le dessin est très grand et son exécution avançait très rapidement.

TABLE DES MATIÈRES

E 80,20

TABLE DES MATIÈRES

LEÇON 1	<i>Montre sa sœur</i>	1
	Commentaire de la leçon 1	7
LEÇON 2	<i>Frères et Sœurs</i>	13
	Commentaire de la leçon 2	23
LEÇON 3	<i>Souliers gauches et souliers droits</i>	26
	Commentaire de la leçon 3	37
LEÇON 4	<i>Frères et Sœurs</i>	55
	Commentaire de la leçon 4	54
LEÇON 5	<i>Le Facteur</i>	41
	Commentaire de la leçon 5	62
	<i>Intermezzo</i>	63
LEÇON 6	<i>Problèmes</i>	78
	Commentaire de la leçon 6	88
LEÇON 7	<i>Distribution de Bonbons</i>	93
	Commentaire de la leçon 7	105
LEÇON 8	<i>Problèmes introduits par des Graphes</i>	117
	Commentaire de la leçon 8	132
LEÇON 9	<i>Ordre Strict</i>	145
	Commentaire de la leçon 9	161
LEÇON 10	<i>Ribambelles</i>	164
	Commentaire de la leçon 10	180

APLB. J. 9. 0039

