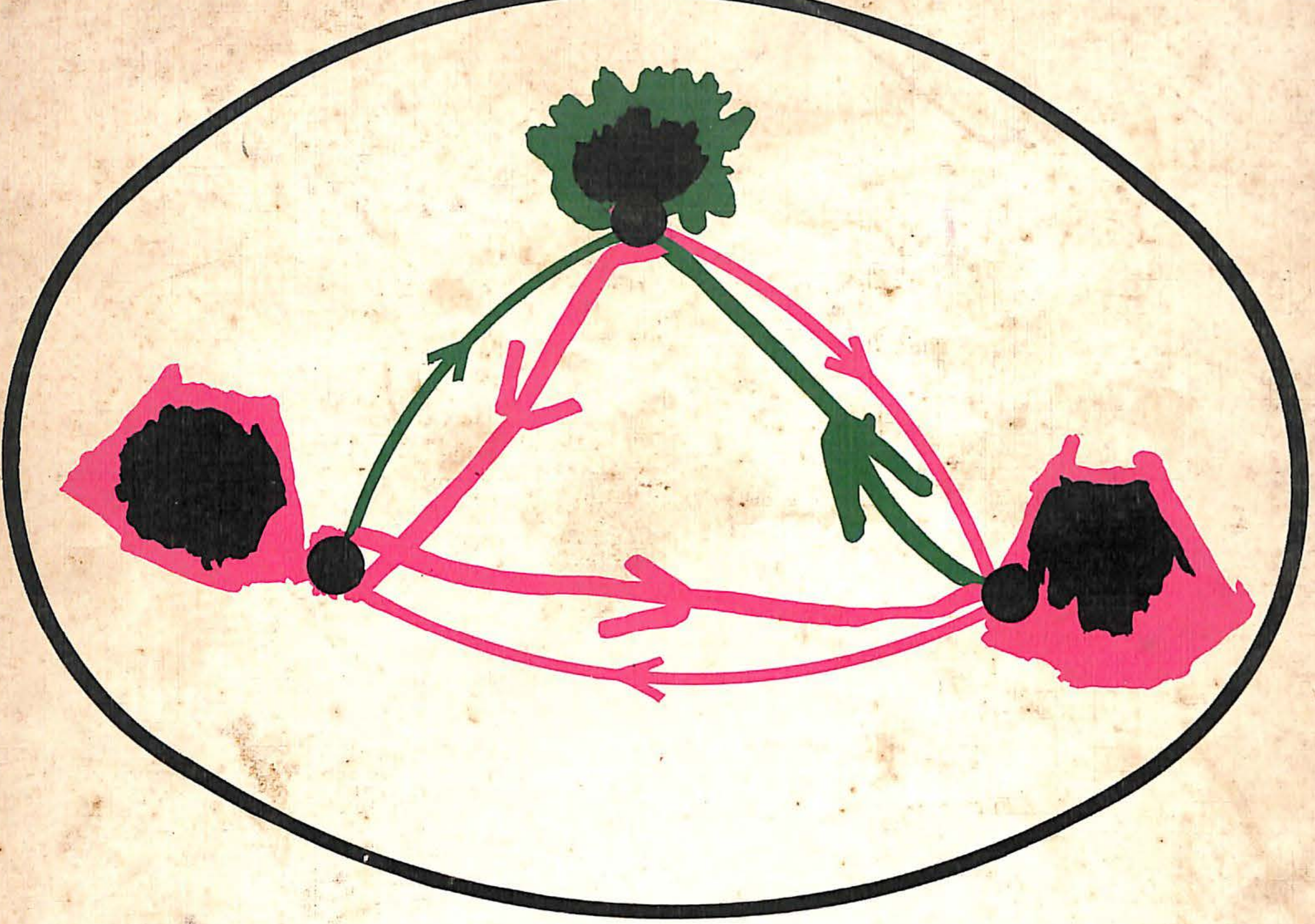
FRÉDÉRIQUE ET PAPY



L'ENFANT ET LES GRAPHES

L'ENFANT

ET

LES GRAPHES

L'enfant et la mathématique

DU MÊME AUTEUR

Chez le même Editeur :

MATHÉMATIQUE MODERNE

(Reconstruction de la mathématique au niveau élémentaire)

1. **ENSEMBLES, RELATIONS**
2. **NOMBRES RÉELS ET VECTORIEL PLAN**
3. **VOICI EUCLIDE**
5. **ARITHMÉTIQUE**
6. **VECTORIEL EUCLIDIEN PLAN**
   (Traductions: Eudeba, Collier-Macmillan, Klett, Tineretului, Didier)

Aux Presses Universitaires de Bruxelles

GROUPES (Traductions: Macmillan, Feltrinelli, Plantijn)

Collection **FRÉDÉRIQUE** (Traductions: Vandenhoeck et Ruprecht, Plantijn)

1. **GÉOMÉTRIE PLANE ET NOMBRES RÉELS**
2. **INITIATION AUX ESPACES VECTORIELS**
3. **LE PREMIER ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE**

Chez d'autres Editeurs

GROUPOÏDES (Labor) (Traductions: Vandenhoeck et Ruprecht)

ERSTE ELEMENTE DER MODERNEN MATHEMATIK (Otto Salle)

MINICOMPUTER (IVAC, Bruxelles)

FRÉDÉRIQUE ET PAPY

L'ENFANT ET LES GRAPHES

AVEC LA COLLABORATION DE

DANIELLE INCOLLE

MARCEL DIDIER

BRUXELLES - MONTRÉAL - PARIS

1968

A Paula Vilain

PRÉFACE

Depuis les temps les plus reculés, les mathématiciens n'ont jamais cessé d'utiliser des relations.

L'économie de pensée et la clarté que procure leur mise en évidence systématique est l'un des traits caractéristiques de la mathématique d'aujourd'hui.

Tout enseignement moderne doit consacrer une étude spéciale aux relations. On sait depuis 10 ans que les graphes multicolores constituent un moyen pédagogique efficace et attrayant pour l'enseignement des notions et propriétés relationnelles.

Depuis le 1er septembre 1967, le Centre Belge de Pédagogie de la Mathématique a commencé une nouvelle expérience dans deux classes d'élèves de 6 ans, conduite par FRÉDÉRIQUE avec la collaboration de Danielle INCOLLE. Les graphes y jouent un rôle de tout premier plan à côté d'un MINICOMPUTER, objet d'un autre livre (1).

Le présent ouvrage décrit les dix premières leçons au cours desquelles FRÉDÉRIQUE introduit les graphes. Chacune d'elles est suivie d'un commentaire à la fois mathématique et pédagogique. Entre les cinq premiers et les cinq derniers chapitres, un intermezzo précise la portée mathématique de cet enseignement élémentaire.

Toutes les illustrations où figure un prénom reproduisent fidèlement d'authentiques dessins d'enfants exécutés au moyen de marqueurs à mèches de feutre ou de bambou.

Les jolis dessins multicolores que constituent les graphes contribuent à dégager la notion mathématique de relation de la connaissance commune d'enfants non encore scolarisés, en lui conservant la saveur des situations familières qui lui ont donné naissance.

PAPY.

Bruxelles, le 6 mai 1968.

1. **PAPY**: *Minicomputer.* IVAC, Bruxelles.

1

Montre sa Sœur

Graphe d'une Relation

QUELQUES MINUTES D'ENTRETIEN FAMILIER SUR LE THÈME „FRÈRES ET SŒURS".

— Combien as-tu de frères... et combien de sœurs ?
Cela fait combien d'enfants dans ta famille ?
Et toi, comment s'appellent tes frères ... et tes sœurs ?

Nicolas nous dit fièrement:

— Moi, j'ai trois frères: Alain, Michäel et moi !

Le champion est Pepito. Il appartient à la famille la plus nombreuse.

— Nous allons jouer tous ensemble un nouveau jeu.

FRÉDÉRIQUE projette le dessin que voici sur un immense écran.

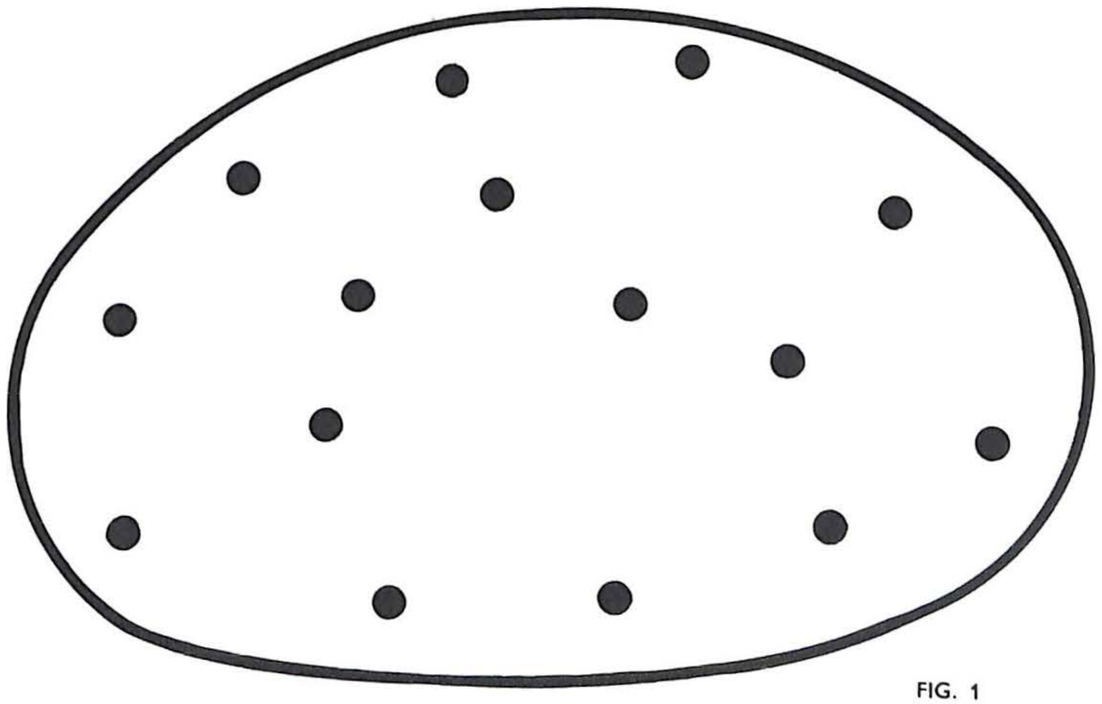


FIG. 1

— Ce sont des enfants dans la cour de récréation, des filles et des garçons. Ils sont nombreux. Qui veut les compter ?

Un enfant se présente. FRÉDÉRIQUE lui tend une baguette de bambou.

L'enfant compte de gauche à droite ... oublie deux points :

— Il y en a 13.

— Vérifions.

Un deuxième enfant se présente. Il compte d'abord les points en bordure de la corde, puis les points intérieurs ... oublie un point et dit:

— Ils sont 14 !

Le troisième enfant procède de manière analogue, sans plus se tromper cette fois.

— Ils sont 15 !

— 15 enfants dans la cour de récréation!
Pouvez-vous reconnaître les filles et les garçons ?

Rires étonnés et haussements d'épaules.

— Mais non !

— Pourquoi ?

— Ce sont tous des points !

— Les enfants ont joué un jeu qui vous aidera peut-être à reconnaître les filles et les garçons.
Ils ont joué à montrer leurs sœurs.
Voici un enfant et voici sa sœur.

FIG. 2

(La sœur est à droite).

— Comment pourriez-vous indiquer sur le dessin que cet enfant a montré sa sœur ?

Réponse immédiate de Didier.

— Avec une flèche.

Didier vient au tableau et dessine.

FIG. 3

— Très bien!
Ne pourrais-tu pas indiquer mieux encore sur ton dessin qui est montré par la flèche ?

Nouveau dessin de Didier.

FIG. 4

— Très bien!
Je te propose de prolonger la ligne jusqu'au point.

Dessin de FRÉDÉRIQUE.

FIG. 5

— Que nous dit la flèche ?

— L'enfant montre sa sœur.

FRÉDÉRIQUE projette le dessin que voici.

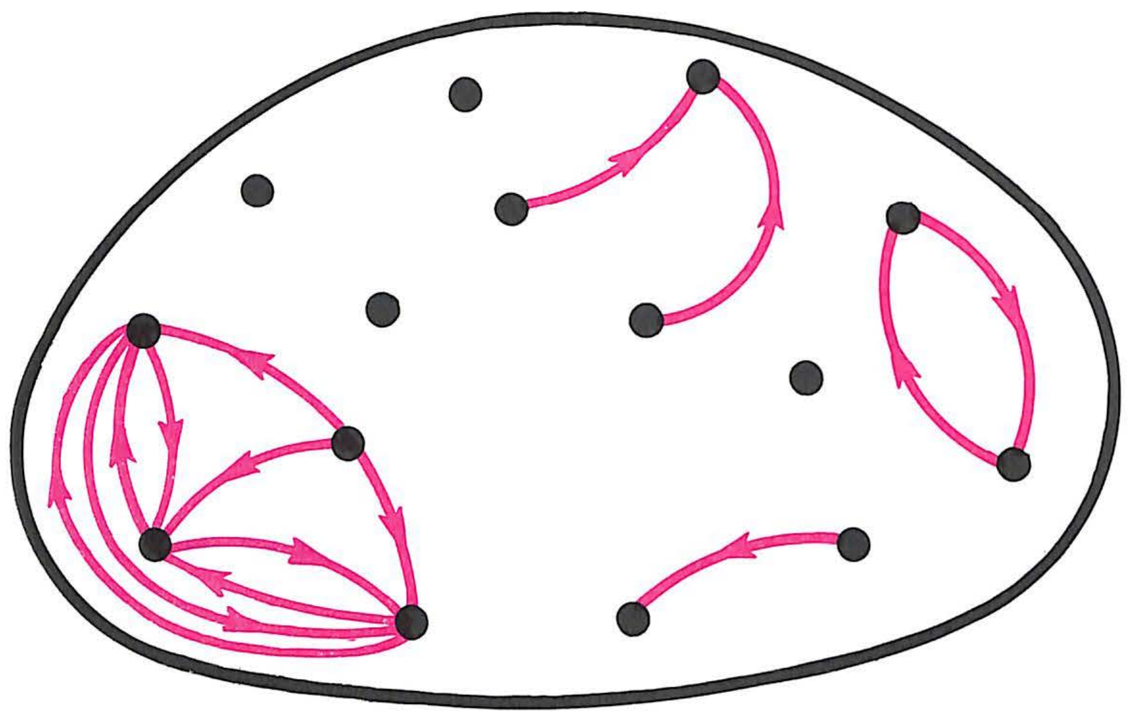


FIG. 6

— Ces enfants ont joué notre jeu. Ils ont dessiné toutes les flèches.
Qui pourrait montrer une fille ?

Les doigts se lèvent.
Un enfant se présente et montre une fille dans la partie la plus complexe du graphe.

— Est-ce bien vrai ? Comment le sais-tu ?

— **Car les flèches y arrivent.**

Un autre enfant précise :

— **Car la flèche dit que c'est une fille.**

D'autres enfants se présentent et montrent successivement toutes les filles de cet ensemble.
L'un des enfants se trompe et montre l'origine de l'une des flèches.

Protestations immédiates du chœur.

— Pourquoi n'est-ce pas une fille ?

— **Parce que la flèche va à l'envers.**

FRÉDÉRIQUE attire l'attention des enfants sur la partie du graphe que voici.

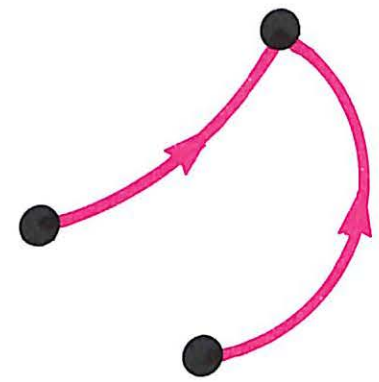


FIG. 7

— **Cet enfant montre sa sœur; et cet enfant aussi montre sa sœur.**

— Comment sont ces deux enfants ?

— **Ce sont des frères.**

— Regardons cette autre partie du dessin.

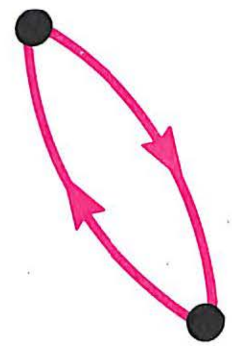


FIG. 8

— Danièle nous a dit qu'elle avait une sœur appelée Myriam.
Viens nous montrer ta sœur Myriam sur le dessin.

Danièle se montre sur le dessin puis montre sa sœur Myriam.
Danièle dit: **Voici ma sœur Myriam.**
Myriam répond: **Oui, et voici ma sœur Danièle.**

Cette petite scène est mimée sur le graphe à l'aide des flèches réciproques l'une de l'autre.

— Qui pourrait nous montrer un frère et une sœur ?

Un enfant montre la partie du graphe que voici

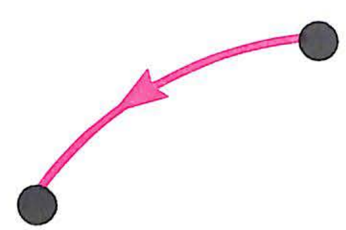


FIG. 9

— Où est la sœur, où est le frère ?

L'enfant montre sur le dessin l'extrémité puis l'origine de la flèche.

— Voici quatre enfants. Où sont les filles et les garçons ?

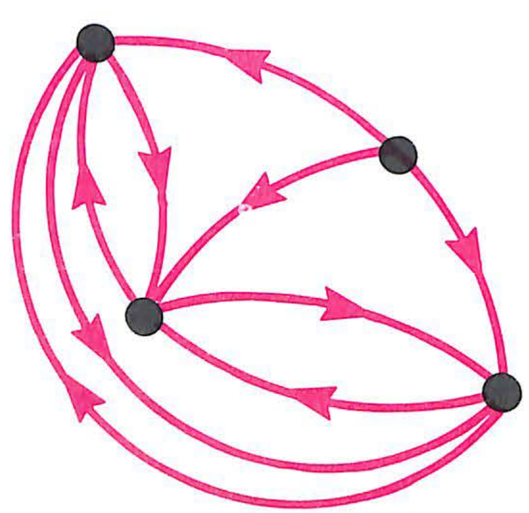


FIG. 10

La solution est trouvée assez rapidement, malgré l'apparente complexité du graphe. Quelques enfants se trompent mais chaque fois, le chœur proteste énergiquement.

COMMENTAIRE DE LA LEÇON 1

DURÉE : **25** minutes. *DATE :* 7 septembre 1967.

NOUVEAU GROUPE SOCIAL

En entrant pour la première fois à l'école, les enfants pénètrent dans un nouveau groupe social. Il est indiqué de les entretenir de leur propre milieu et notamment de leurs frères et sœurs. C'est le sujet bien naturel de la première leçon. La description de leur famille est une entrée en matière indispensable pour certains enfants. On ne s'attarde pas à cette situation réelle. On pense bien vite à une situation imaginée, plus abstraite, en projetant la figure 1.

J'AI TROIS FRÈRES: ALAIN, MICHÄEL et MOI

NICOLAS

L'entretien familier nous révèle que, pour Nicolas, la relation ... **frère** ... est à ce moment, implicitement **réflexive.**

Ne met-il en lumière quelque racine profonde de cette tendance naturelle à idéaliser la réalité en

rendant réflexives certaines relations

et tout spécialement celles auxquelles

LA RÉFLEXIVITÉ ajoute de surplus LA TRANSITIVITÉ

Sans doute aurons-nous l'occasion de revenir sur ce sujet.

GRAND ECRAN

Il est important de projeter la fig. 1 sur un très grand écran qui occupe tout le champ visuel des enfants. Les réactions des élèves ont été celles qui se produisent dans les salles de cinéma. Les points entourés de la corde ont provoqué des Oh! d'admiration ou de surprise. On constate le lien affectif positif entre les élèves et ce dessin abstrait, a priori dépourvu de toute signification.

LES ÉLÈVES ADMETTENT D'EMBLÉE QUE LES POINTS REPRÉSENTENT DES ENFANTS

Une des erreurs les plus communes consiste à sous-évaluer la tendance à l'abstraction chez les jeunes élèves et à regarder tout contact avec l'abstrait comme difficile et douloureux.
Il n'en est rien.
Observez les jeux spontanés des enfants. La tendance à l'abstraction est une composante majeure de l'activité ludique.
Les enfants n'ont pas peur de l'abstrait.
Certains adultes ont peur de l'abstrait et abîment les enfants en leur communiquant leur funeste effroi.

TUONS LES PETITS CANARDS DANS UNE CORDE

L'enseignement traditionnel du premier calcul fait une grande consommation de petits canards stéréotypés.

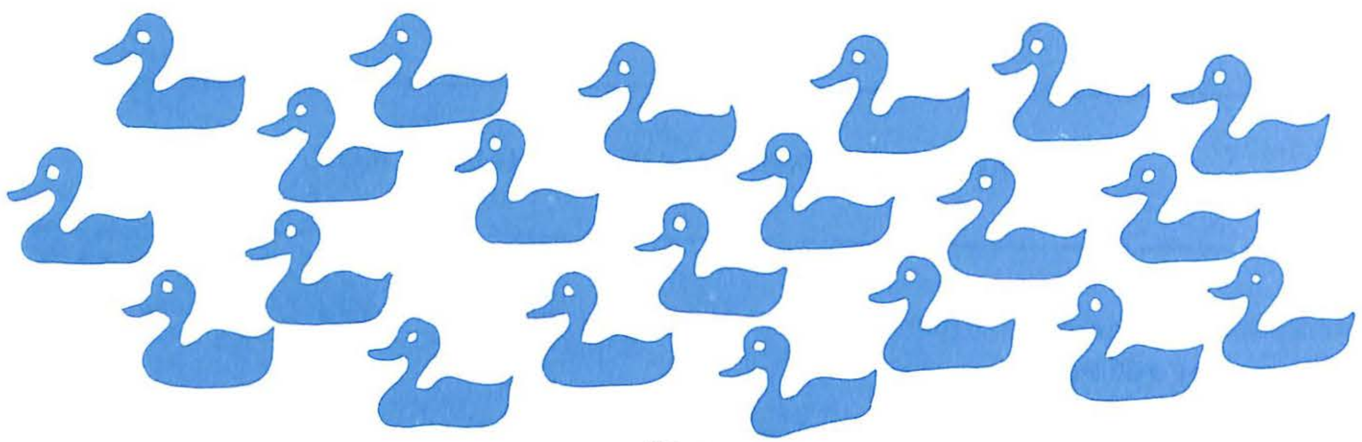


FIG. 11

Ces animaux semblent avoir la vie dure: de nombreux d'entre eux ont survécu à la Révolution et réapparaissent.

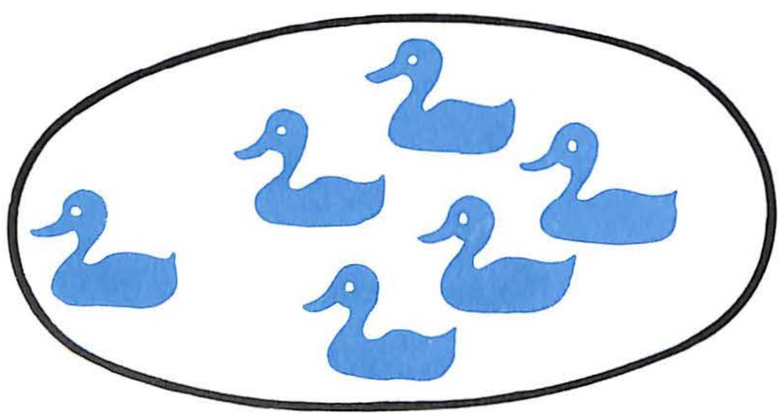


FIG. 12

... mais cette fois dans une corde.

On a vu par la leçon de FRÉDÉRIQUE — et nous avons vérifié maintes fois — que les élèves de 6 ans admettent volontiers que les points représentent des enfants, et donc n'importe quel « objet » et notamment — si l'on y tient absolument — les dodelinants petits canards.

Dessiner les petits canards au lieu de les représenter par des points impose un stade inutile qui favorise la régression.

Par sa clarté, le procédé de représentation par des points, permet les raccourcis de la langue mathématique usuelle.

Les points ne sont pas les enfants mais les représentent.

Cela est si évident qu'il n'y a aucun danger à dire « cet enfant » en montrant le point qui le représente, de même que le mathémacien dit

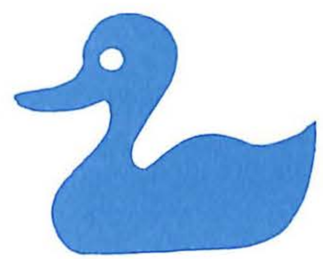
le point *a*

au lieu de

le point désigné par la lettre *a*

La situation est beaucoup moins claire quand on se met à dessiner les petits canards. La convention n'apparaît pas nettement. On confond ténébreusement les objets et les « termes-dessins » qui les représentent.

Qui me dira si



et

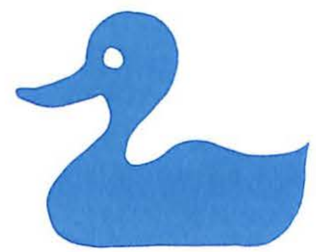
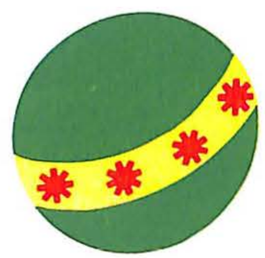


FIG. 13

désignent le même petit canard ou deux canetons frères jumeaux univitellins.

La difficulté est encore plus grande dans le cas de jouets



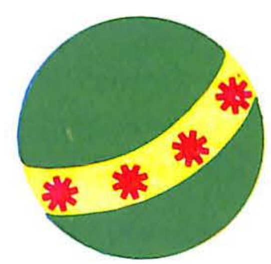


FIG. 14

ou de voitures de série

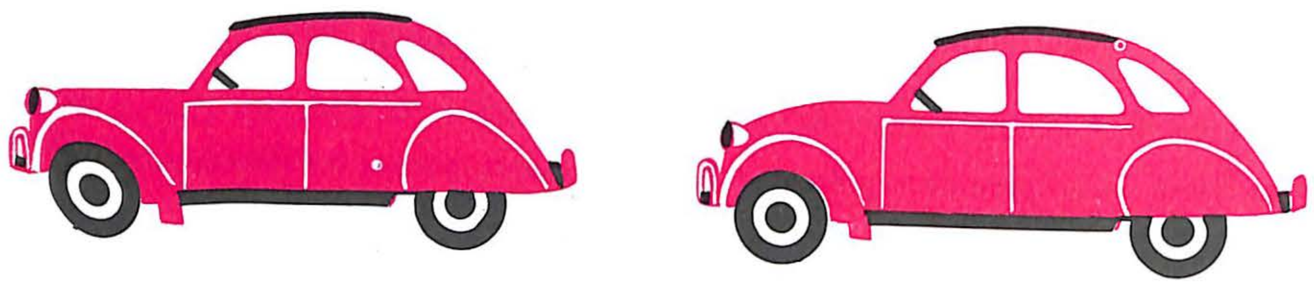


FIG. 15

Versez un pleur, âmes sensibles, car nous devons *exterminer ces petits canards dans une corde.*

CONNAISSANCE COMMUNE

La leçon de Frédérique se déroule dans une classe prise au hasard. On constate que *la plupart de ces „élèves moyens" de six ans savent compter jusqu'à quinze* (et dénombrer un ensemble de quinze objets).

Un bon enseignement doit tenir compte de la *connaissance commune des élèves*, c'est-à-dire de ce qu'ils savent — et c'est énorme, même en mathématique — sans l'avoir appris à l'école.

La plupart des élèves de six ans ont une bonne connaissance du début de l'échelle numérique

$$\omega_0 = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 \ldots \}$$

... leur mètre-étalon de comptage.

FORME ACTIVE ET FORME PASSIVE

... **montre sa sœur** ...

... **a comme sœur** ...

La relation est présentée sous forme active.

La forme passive ... **est la sœur de** ... est plus difficile.

FLÈCHES

Pour dessiner ... **montre sa sœur** ... les élèves proposent spontanément de tracer une flèche.
La flèche ... schéma, symbole, signe, signe abstrait ... appartient à la connaissance commune.

Les flèches ne jouent-elles pas un rôle important dans les panneaux du trafic routier ... un bel exemple de système conventionnel organisé qui se trouve dans la connaissance commune.

Nous avons constaté que les élèves transfèrent volontiers dans le cours de mathématique des conventions inspirées par le code routier.

TOUT ENSEMBLE NON (ENCORE) STRUCTURÉ EST HOMOGÈNE

Ce fait apparaît de manière amusante.

Impossible de distinguer filles et garçons puisque

— Ce sont tous des points !

Ils resteront des points.

La relation ... **montre sa sœur** ... structure l'ensemble qui perd son caractère homogène.

On peut reconnaître certaines filles ... et même certains garçons.
De manière formelle, c'est un raisonnement par l'absurde qui permet de découvrir les garçons.
Les élèves de 6 ans n'explicitent pas un tel raisonnement.
Il se trouve néanmoins en germe dans leur justification.
Devant la même situation, les élèves de 12 ans explicitent le raisonnement par l'absurde.

Il est dangereux de juger l'aptitude des élèves à certaines formes de raisonnement, en se bornant à examiner leur réaction dans des situations mathématiques mal définies, ou qu'ils dominent mal.

Dans la situation

... ensemble d'enfants structuré par la relation a comme sœur ...

présentée au moyen d'un graphe coloré

les élèves de six ans concluent correctement

et ceux de 12 présentent le raisonnement sous forme correcte.

SI MA TANTE AVAIT DES ROULETTES, ALORS ELLE SERAIT AUTOBUS.

Et si nous participions au jeu abstrait...

Si Myriam était un des points du dessin

Alors...

La situation s'était déjà concrétisée par la donnée de la relation ... **sœur** ...

Elle reste ouverte à bien d'autres concrétisations successives.

Et pourquoi n'exploiterions-nous pas cette latitude en imaginant que Myriam soit une des filles de l'ensemble ! Cette mutation féerique illustre le processus de concrétisation progressive.

***

Au cours de cette première leçon, les élèves ont décrit, regardé, réfléchi, réfléchi en regardant, mimé des réponses, ... mais n'ont pas dessiné ... à part Didier ... à un moment crucial !

2

Frères et Sœurs

Deux relations et leur réunion

Et revoici les enfants dans la cour de récréation.

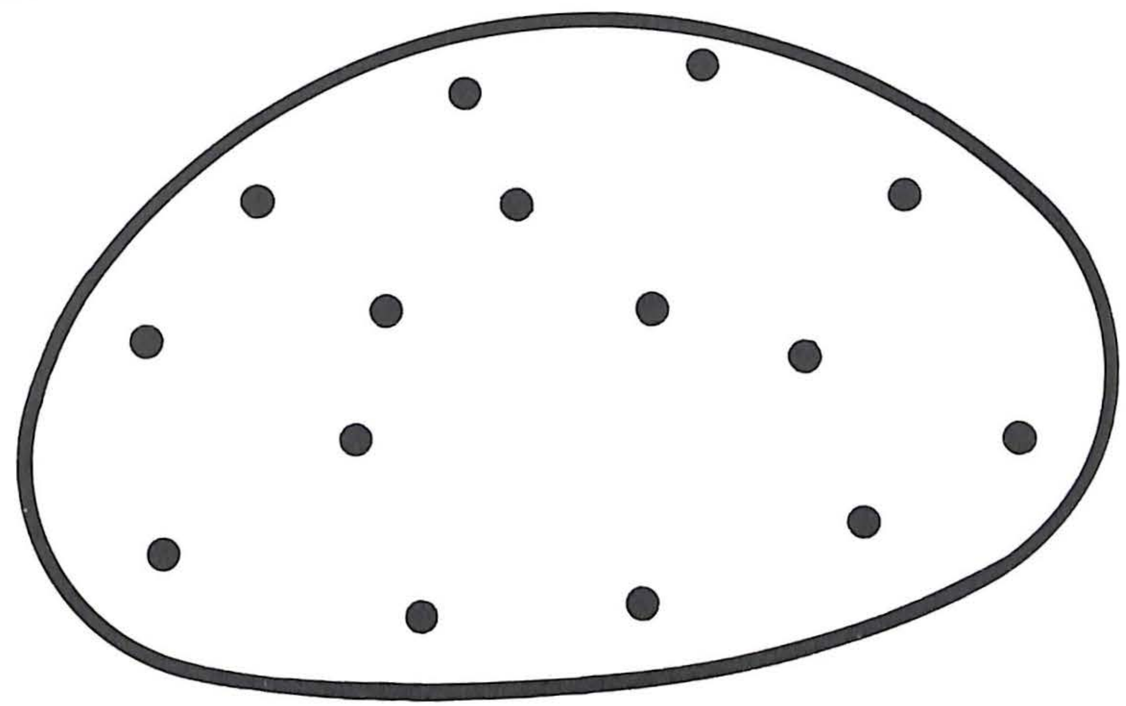


FIG. 16

On les compte une nouvelle fois, avec l'aide des élèves qui s'étaient trompés ou s'étaient tus à la première leçon.
Quelques essais; quelques erreurs ...; et nous retrouvons nos **15** enfants.

— Fermez les yeux.

Avec une feuille de papier, FRÉDÉRIQUE cache **3** points.

— Ouvrez les yeux. Des enfants se sont cachés.
Combien en reste-t-il ?

Nouvel exercice de comptage.
... **13**, puis finalement **12.**

— Combien d'enfants se sont cachés ?

— **Trois.** *(Réponse immédiate)*

On recommence le même exercice en cachant **5** enfants.

— Vous souvenez-vous du jeu que ces enfants avaient joué hier ?

— **Montrer sa sœur.**

Sur la projection lumineuse du graphe 6, FRÉDÉRIQUE fait montrer des filles et des garçons Très peu d'erreurs.

— Les enfants inventent un nouveau jeu. Lequel, pensez-vous ?

— **Montrer son frère.**

— Les enfants ont joué ce jeu en vert. Qui pourrait montrer une flèche verte ?

Un enfant se présente et à l'aide du bambou, mime la flèche verte que voici

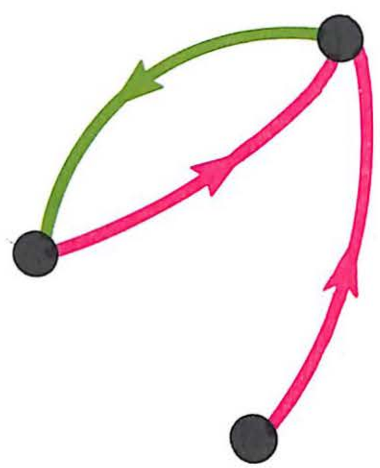


FIG. 17

Un autre enfant mime une deuxième flèche verte.

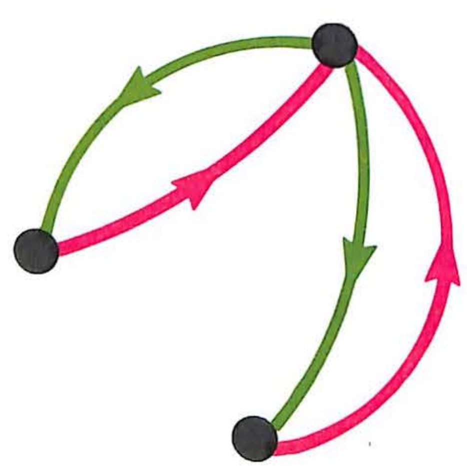


FIG. 18

Puis encore,

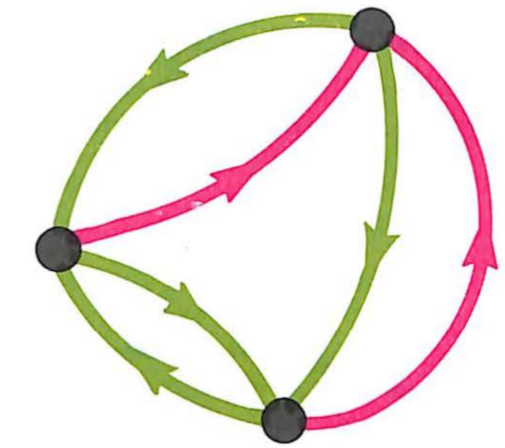


FIG. 19

Les deux nouvelles flèches sont mimées successivement par le même enfant.
Le jeu se poursuit, les enfants miment l'une après l'autre les flèches vertes qu'il est possible de découvrir.
Dans la partie la plus complexe du dessin, certains enfants se trompent, oublient où sont les frères et sœurs, indiquent des flèches à l'envers.

FRÉDÉRIQUE projette le graphe que voici.

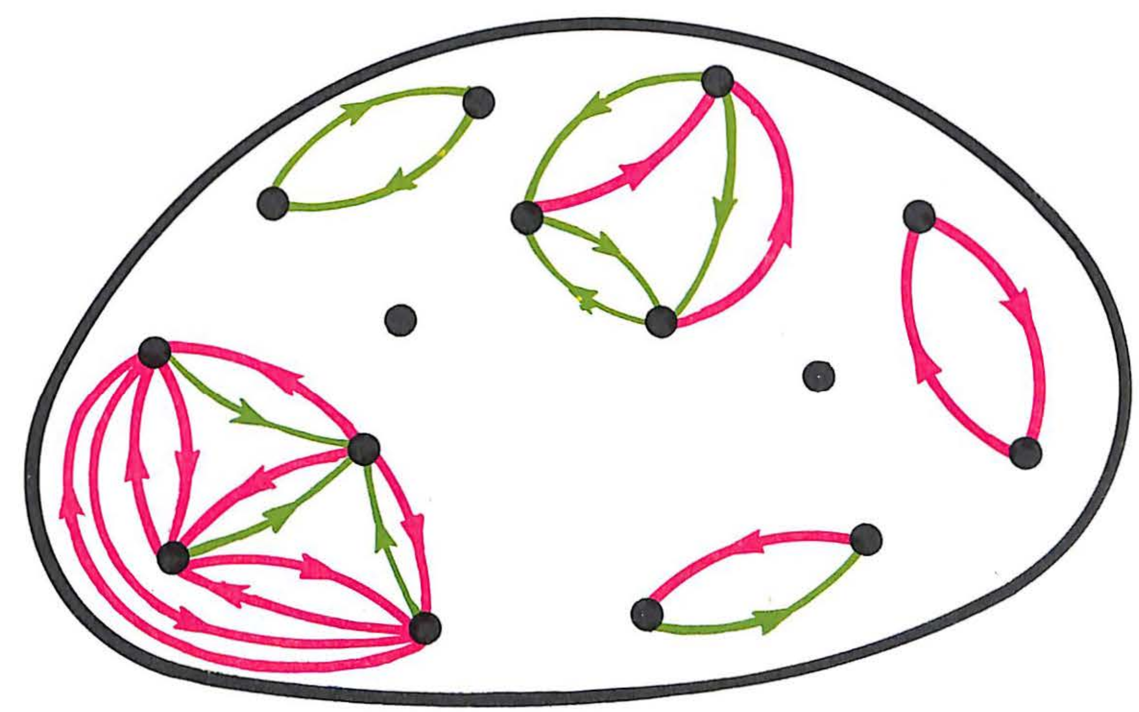


FIG. 20

— Les enfants ont joué le deuxième jeu.
Quelles flèches vertes n'avions-nous pas découvertes ?

Un enfant montre cette partie de la projection.

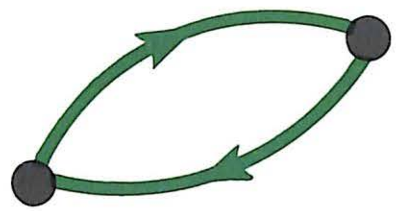


FIG. 21

— Que nous disent ces flèches ?

— **Elles disent toutes les deux : je montre mon frère. Ces deux enfants sont des garçons.**

— Que pensez-vous de cet enfant ?

FRÉDÉRIQUE montre un point isolé.

— **C'est un célibataire.**

— **Il n'a ni frère, ni sœur.**

FRÉDÉRIQUE précise :

— Ni frère, ni sœur dans la cour de récréation.

Jean-Jacques ajoute, en montrant deux points isolés :

— **C'est moi et Hubert.**

(Les élèves Jean-Jacques et Hubert sont enfants uniques)

Un dernier jeu.
Sans rien dire, FRÉDÉRIQUE projette successivement le graphe rouge, le graphe vert, les graphes rouge et vert simultanément, le graphe jaune ci-dessous, les graphes rouge, vert et jaune simultanément, enfin uniquement le graphe jaune.

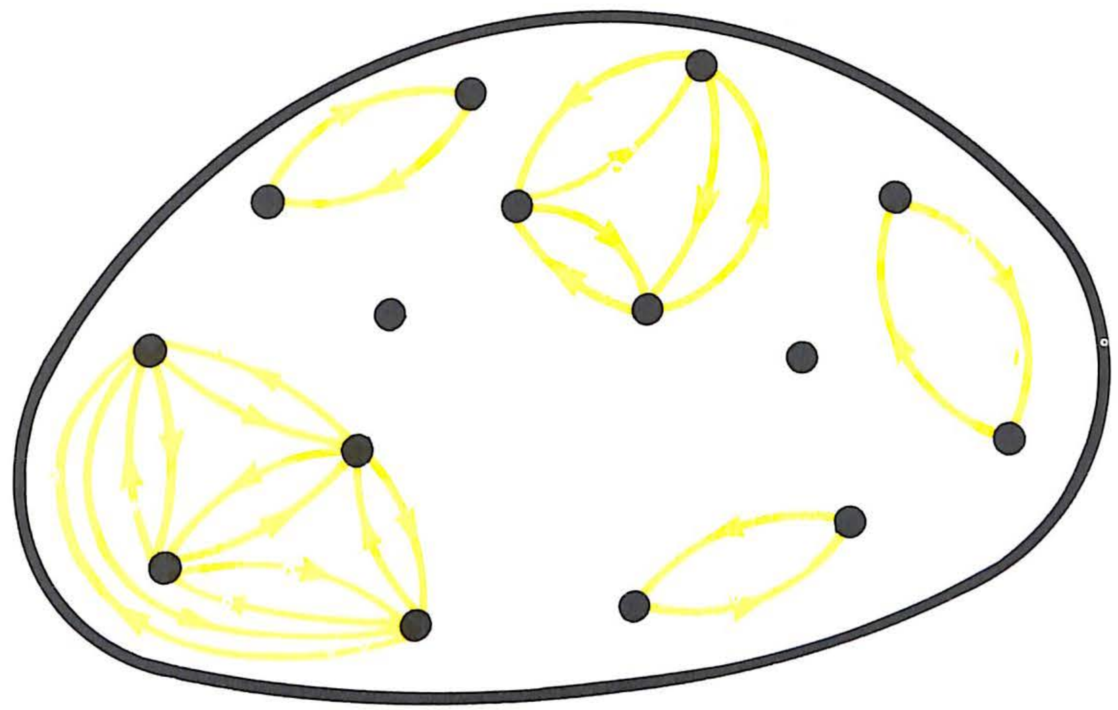


FIG. 22

— **C'est le tout, mais en jaune,** observe Jean-Jacques.

— Les enfants ont joué un troisième jeu en jaune.
Quel est ce jeu ?

— **Ils ont montré leurs frères et leurs sœurs.**

FRÉDÉRIQUE précise :

— Oui, la flèche jaune nous dit : voici mon frère ou ma sœur.

La leçon se termine par un exercice.

— Je pense à deux enfants que j'aime beaucoup.
Je ne vous dis ni leurs prénoms, ni s'ils appartiennent à la même famille.

— **C'est Jean-Jacques et Hubert,** commente Jean-Jacques très en verve.

— Je n'ai pas dit qu'ils étaient dans notre classe.
Que peut-il se passer ?

— **Ils peuvent être deux frères.**

— **Ou deux sœurs.**

— **Ou un frère et une sœur.**

— **Ou bien ne pas être de la même famille.**

— ... **comme Hubert et moi,** poursuit Jean-Jacques.

— **Ils pourraient être des jumeaux.**

(Diversion à propos des jumeaux)

— Nous allons jouer sur le tableau.
Voici deux frères.

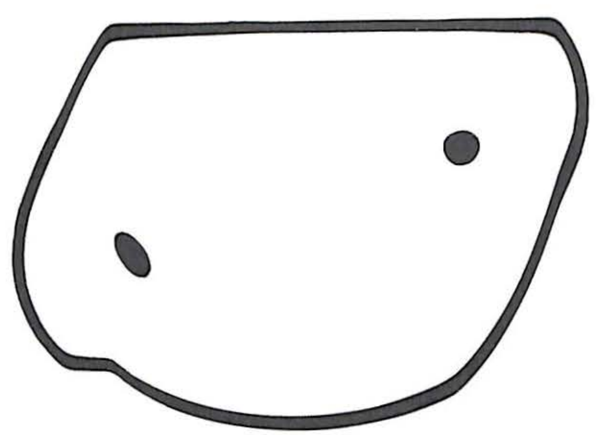


FIG. 23

— Ici un frère et une sœur.

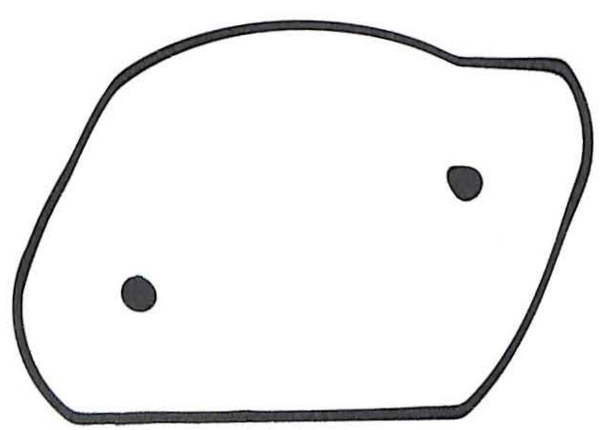


FIG. 24

— Deux sœurs.

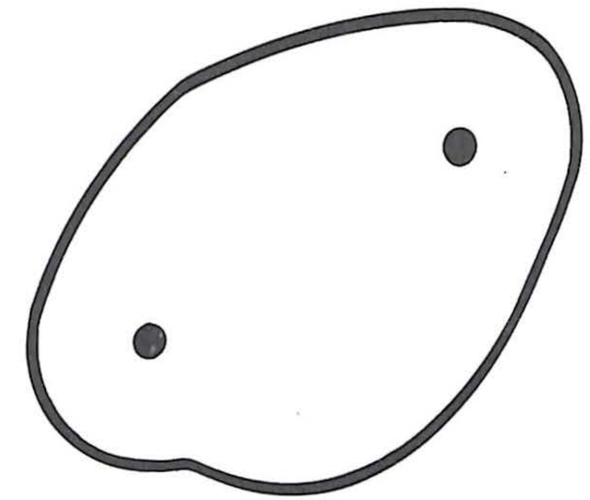


FIG. 25

— Et enfin, deux enfants qui ne sont pas de la même famille, comme Jean-Jacques et Hubert.

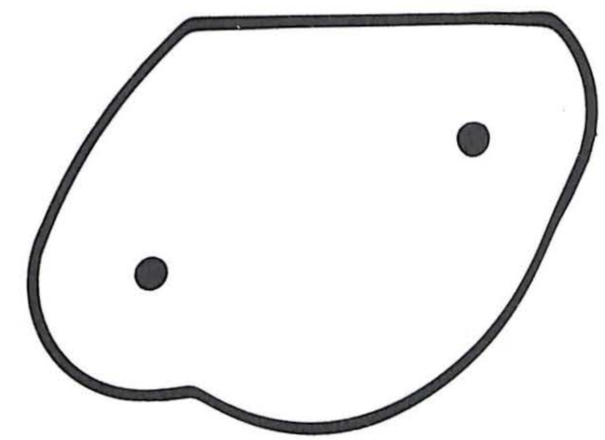


FIG. 26

— Jouez en vert et rouge dans chaque dessin.

Véronique se présente et choisit le dessin comprenant un frère et une sœur. Elle dessine cette flèche.

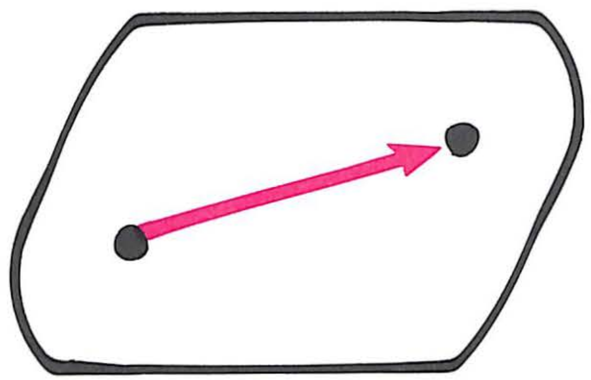


FIG. 27

— C'est bien. Pour que ton dessin soit encore plus beau, nous allons plutôt dessiner ta flèche comme ceci.

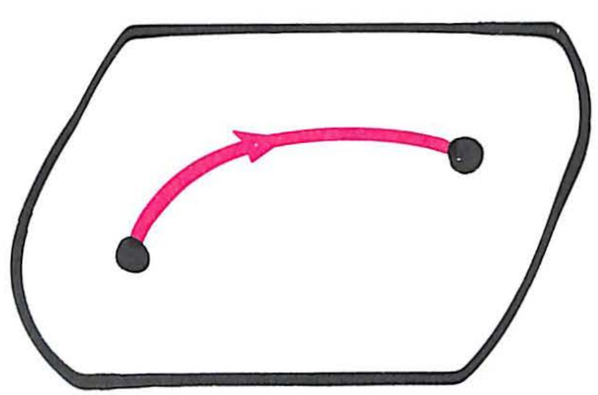


FIG. 28

— Que dit la flèche rouge ?

— **Elle montre la sœur.**

— Joue en vert à montrer le frère.

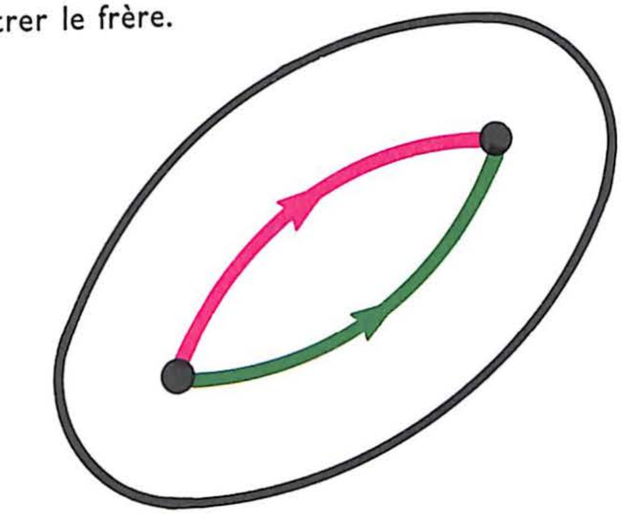


FIG. 29

— Est-ce bien ?

— **Mais non, les deux flèches montrent la sœur.**

Véronique efface, refait la même erreur, recommence encore et se trompe à nouveau. Malgré son désir de bien faire, elle ne parvient pas à dessiner la flèche dans le bon sens !

FRÉDÉRIQUE dessine les points par terre, fait mimer par Véronique les flèches rouge et verte et les lui fait dessiner par terre. Le dessin est correct.
Encouragée par FRÉDÉRIQUE, Véronique recommence au tableau, avec succès.

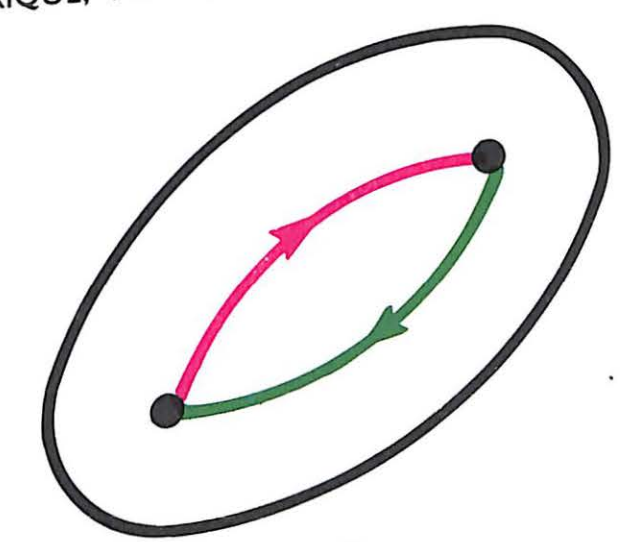


FIG. 30

Deux enfants dessinent correctement l'aller-retour rouge dans l'éventualité des deux sœurs puis l'aller-retour vert dans l'éventualité des deux frères.

— Il nous reste un dernier dessin.

Cédric se présente.

— Aura-t-il beaucoup de travail ?
S'il dessine une flèche rouge, que nous dira-t-elle ?

— **Voici ma sœur.**

— Et une verte ?

— **Voici mon frère.**

— Combien de flèches doit-il dessiner ?

— **Aucune.**

FRÉDÉRIQUE fait commenter tour à tour chacun des quatre graphes par un enfant différent.

— Que pensez-vous du dernier ?

— **Les deux enfants ne sont pas de la même famille.**

— Pourquoi ?

— **Car il n'y a pas de flèche, ni rouge, ni verte.**

COMMENTAIRE DE LA LEÇON 2

DURÉE : 30 minutes. *DATE:* 8 septembre 1967.

LE BON CONDUCTEUR D'AUTOMOBILE NE SE BORNE PAS À REGARDER LE BÉTON DE LA ROUTE

La leçon commence par un appel à la connaissance commune des élèves les moins avancés. FRÉDÉRIQUE les teste délicatement tout en exerçant au calcul intuitif.
Ces éléments non logiquement indispensables sont psychologiquement utiles.
Ils contribuent à l'idée de confort qui se dégage de l'impression de connaître la situation.
Un cours de mathématique qui se borne aux éléments logiquement indispensables donne la désagréable impression d'un périlleux exercice d'équilibre acrobatique ... ce qui ne facilite pas l'apprentissage.

L'ENCHAINEMENT DU COURS EST NATUREL

On le fait ressentir aux élèves en leur demandant de prévoir le nouveau jeu : ... **frère** ...

EXERCICES NON VERBAUX

Les graphes favorisent l'expression verbale, en montrant clairement ce que l'on dit ou explique.
Comme les réponses ne sont pas verbales, les graphes peuvent être utilisés par des enfants ne sachant ni lire, ni écrire ou qui s'expriment mal.

LES GESTES S'ENVOLENT, LES DESSINS RESTENT

Evitons l'effet démoralisant d'une mauvaise réponse dessinée, qui abîme tout un graphe.
On y parvient notamment en demandant aux élèves de mimer d'abord la flèche que l'on veut dessiner.
Ce geste s'exécute beaucoup plus vite que le dessin et constitue une activité sensori-motrice qui accroît l'intelligibilité et favorise la compréhension.
En cas de mauvaise réponse, l'élève peut réfléchir, expliquer, corriger, sans se sentir coupable d'aucun dégât!

Parler avec les mains.

PENSER AVEC LES MAINS (Alain)

Au cours de toute conversation, le geste appuie la parole.
Dans leurs exposés, les mathématiciens professionnels ne se privent pas du geste.
Affinons le langage des mains, dès la première initiation à la mathématique.

MIMER EFFICACEMENT UNE FLÈCHE

La main gauche indique le point de départ et s'y maintient
tandis que la main droite (active) mime le parcours de la flèche du point de départ au point d'arrivée et se maintient au point d'arrivée.
Les deux mains restent immobiles afin de permettre la contemplation du

COUPLE (point de départ, point d'arrivée)
ORIGINE EXTRÉMITÉ

clairement mis en évidence par la position des mains.
En cas de réponse exacte, on est en bonne position, pour ... réfléchir à la manière de dessiner la flèche sans abîmer le dessin ... et exécuter le tracé.

MIMER AVANT DE DESSINER

Une réponse résulte d'une succession de démarches et d'actes.
Lors d'une réponse inexacte, il est important de détecter l'endroit de l'accident.
Il arrive que toutes les démarches soient exactes, à l'exception de l'expression finale de la réponse.
Certains élèves pensent correctement la flèche réponse ... et la dessinent mal.
Mimer avant de dessiner ... permet de déceler ce phénomène, et d'appliquer la thérapeutique au bon endroit.
On a vu comment Frédérique apprend à une élève à dessiner correctement une flèche bien mimée.

DÉLICIEUSE TRANSPOSITION ENFANTINE DU CONCEPT DE CÉLIBATAIRE

Pour adultes : célibataire = sans mari ni femme.
Pour enfants : célibataire = sans frère ni sœur.
Amusant exemple de **TRANSFERT** spontané, démarche fondamentale en mathématique moderne.
FRÉDÉRIQUE ne casse pas la leçon par une digression sur la signification exacte du mot **CÉLIBATAIRE.**
La réponse „**célibataire**" — fausse au pied de la lettre — est positive et contribue à la convergence vers le résultat plus exact :

— **Il n'a ni frère ni sœur.**

... que FRÉDÉRIQUE précise :

— Il n'a ni frère ni sœur dans la cour de récréation.

ÉNUMÉRATION DE TOUTES LES ÉVENTUALITÉS POSSIBLES

Démarche de très grande portée, fondamentale dans tout domaine où s'exerce la pensée rationnelle.
La situation présentée en fin de leçon étudie, en fait, le

PROBLÈME

Relativement aux relations **frère , sœur**

énumérer toutes les éventualités possibles

pour un *ensemble* de 2 enfants.

La prise en considération des jumeaux, suggérée par les enfants, aurait conduit à un raffinement de la classification.

* * *

Dans cette leçon, les élèves ont regardé, contemplé, pensé, réfléchi, mimé et très peu dessiné.
Quelques élèves ont tracé un petit nombre de flèches sur le tableau.
Observer puis **PENSER** puis **ESQUISSER** puis **AGIR.**
Ne pas agir trop tôt.
S'empêtrer prématurément dans le dessin, favorise la déconcentration.

3

Souliers gauches et souliers droits

Fonctions réciproques

Dans une toute petite école de village où les élèves ne sont pas nombreux, les enfants de première et de deuxième année sont réunis dans une même classe. Ce jour-là, nos petits élèves avaient un cours de gymnastique.

— Avez-vous aussi un cours de gymnastique ?

— **Oui, aujourd'hui.**

— Faites-vous la gymnastique avec vos souliers ?

— **Non, on met des pantoufles de gymnastique.**

— Où sont-elles ?

— **Dans les casiers.**

— Les enfants de notre petite école mettent aussi des pantoufles.
Comme d'habitude, ils avaient bien rangé leurs souliers, deux par deux, le long du mur.
Pendant leur absence, un farceur de troisième année s'est introduit dans leur classe et a mélangé toutes les chaussures.
Les voici dans un grand désordre.

Craie blanche et tableau noir, FRÉDÉRIQUE dessine cet immense DIAGRAMME de VENN.

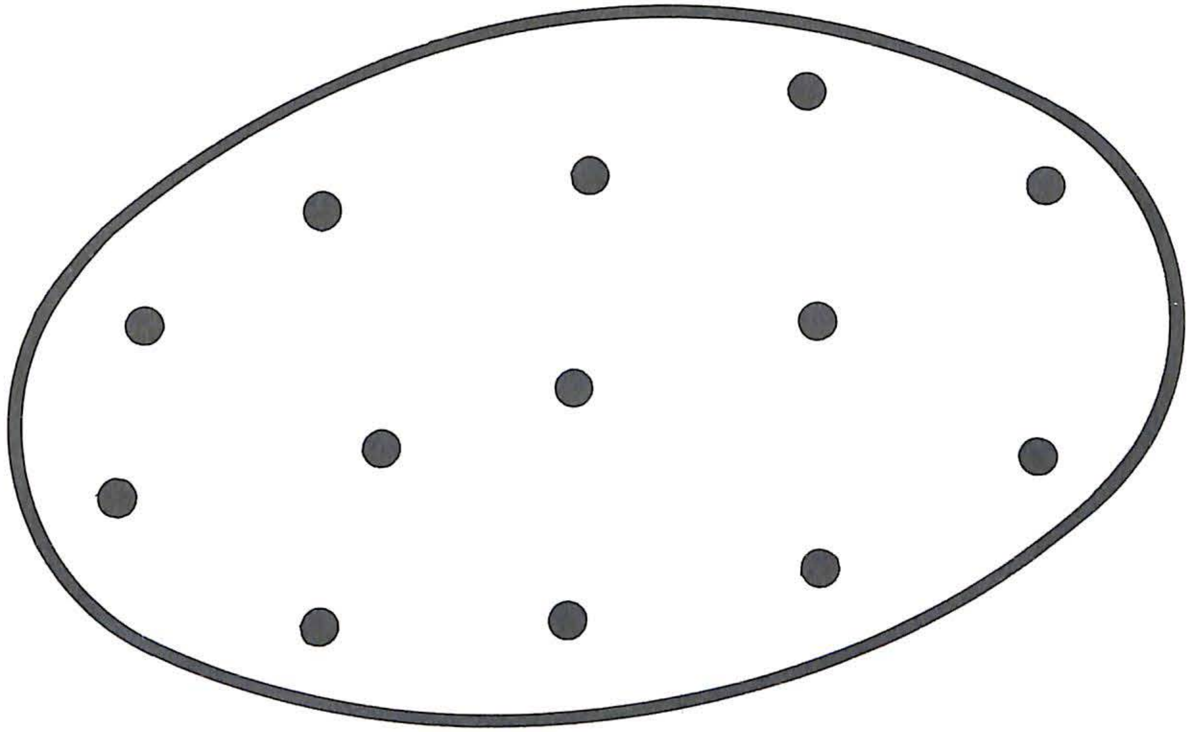


FIG. 31

— Combien de souliers ?

Essais, erreurs, vérifications.

Carine en compte finalement 13.

— D'accord : 13 chaussures en désordre.
Dessinez-les sur une grande feuille blanche.

— **Le rond en noir ?**

— Oui, avec de beaux gros points et la corde la plus grande possible.

Les enfants dessinent au moyen de leurs marqueurs et quémandent approbation. FRÉDÉRIQUE n'intervient pas, ne corrige pas les dessins inexacts.

— Vous êtes grands. Vérifiez chacun votre dessin.

...

— Qu'ont fait les enfants lorsqu'ils sont revenus dans leur classe ?

— Ils ont été très fâchés.

— Cela n'aide pas à grand chose.

— Ils les ont tous essayés.

— Cela prendrait du temps.

— Ils ont refait les paires de chaussures.

— C'est la meilleure idée.
Didier, tu as de hautes bottines; montre ta bottine gauche.

Didier montre sa bottine gauche.

— Nicolas, veux-tu montrer ta sandale droite ?

La plupart des enfants reconnaissent souliers gauches, souliers droits. FRÉDÉRIQUE montre un point du diagramme.

— Voici une bottine gauche. Que va-t-elle faire ?

— Elle va essayer de trouver la droite.

— La voici; elle l'a trouvée.

FRÉDÉRIQUE montre un deuxième point.

— Et maintenant ?

— Elle va dessiner une flèche.

Un enfant dessine au tableau une flèche verte.

— Que nous dit cette flèche verte ?

— Elle montre la chaussure droite.

FRÉDÉRIQUE montre un nouveau point.

— Voici un petit sabot droit.
A la campagne, il y a beaucoup de boue et certains enfants portent encore des sabots.
Que va faire ce petit sabot ?

— Chercher son sabot gauche.

— Le voici. Comment montrer qu'il l'a trouvé ?

— Avec une flèche.

— La flèche verte nous disait: voici mon soulier droit.

— Ici, on va faire une flèche orange.

L'enfant trace une flèche orange.

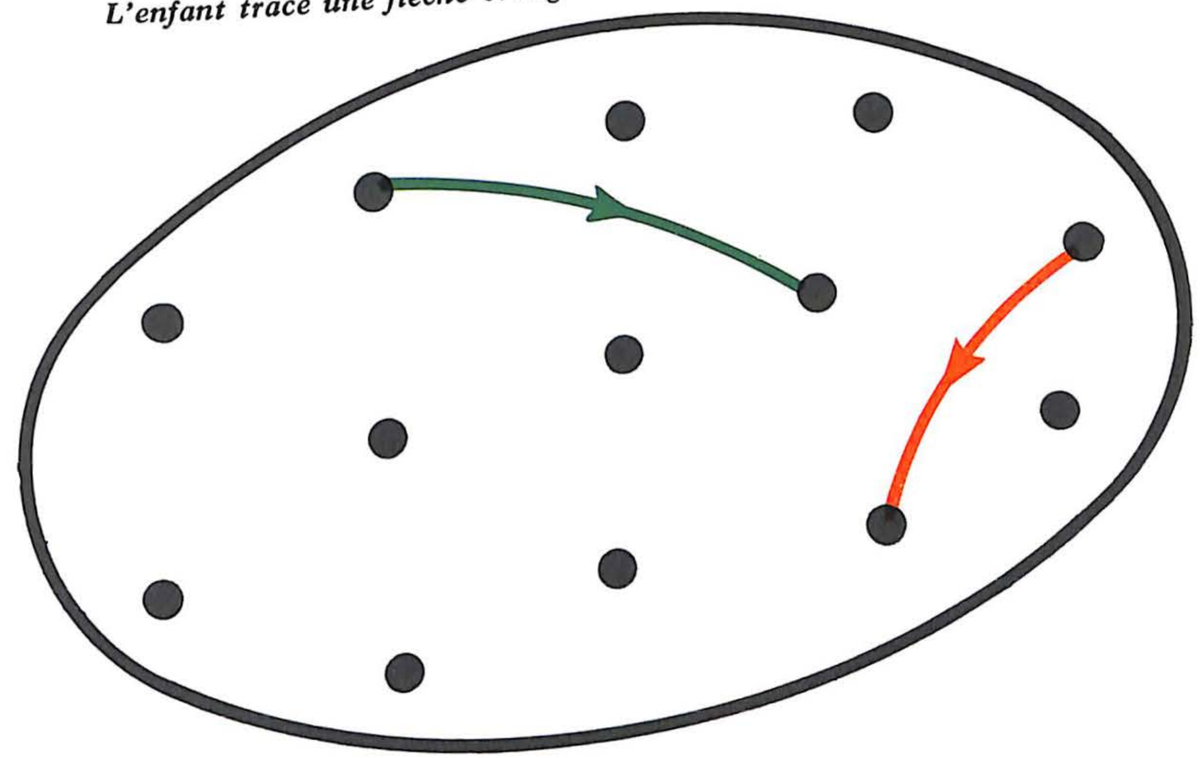


FIG. 32

— Qui veut nous montrer le sabot gauche ?

Un enfant montre l'extrémité de la flèche orange.

— Que dit le sabot gauche ?

— Je montre mon sabot droit.

— Que dessine-t-il ?

— **Une flèche verte.**

— Parlons comme les sabots.
En vert, le sabot dit ...

— **Je montre mon sabot droit.**

— Celui-ci répond en orange ...

— **Je montre mon sabot gauche.**

La conversation se poursuit et le graphe se complète peu à peu.

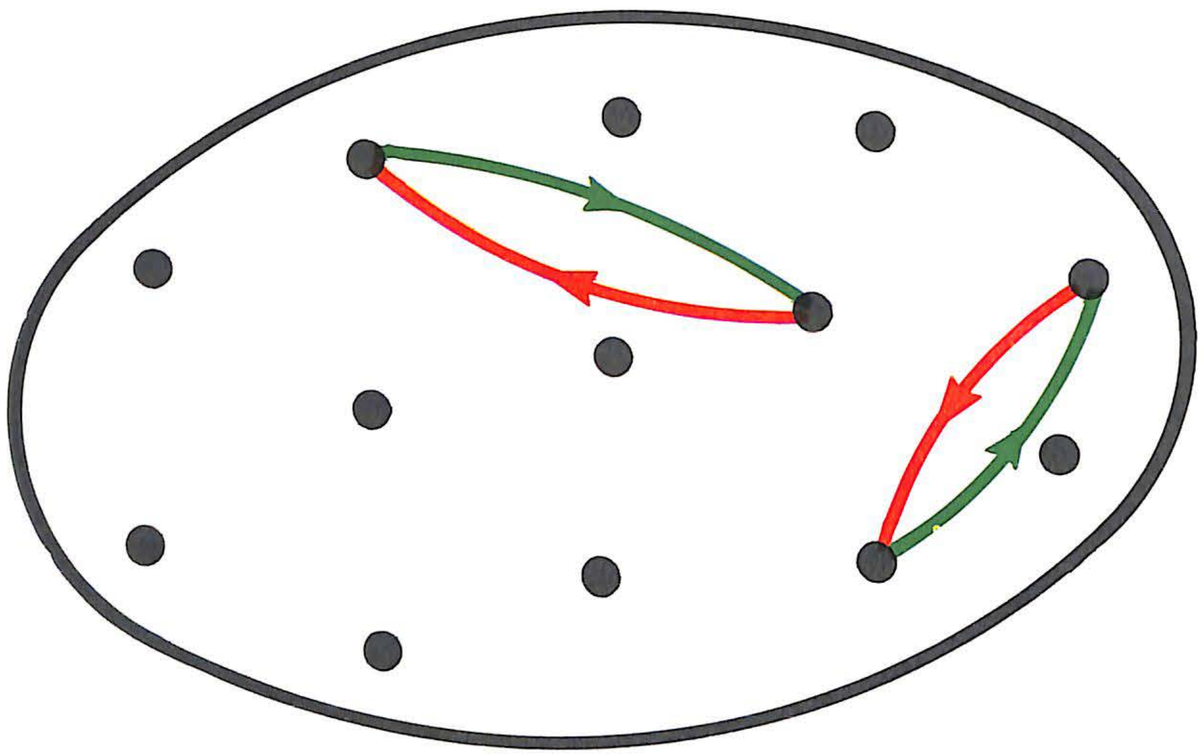


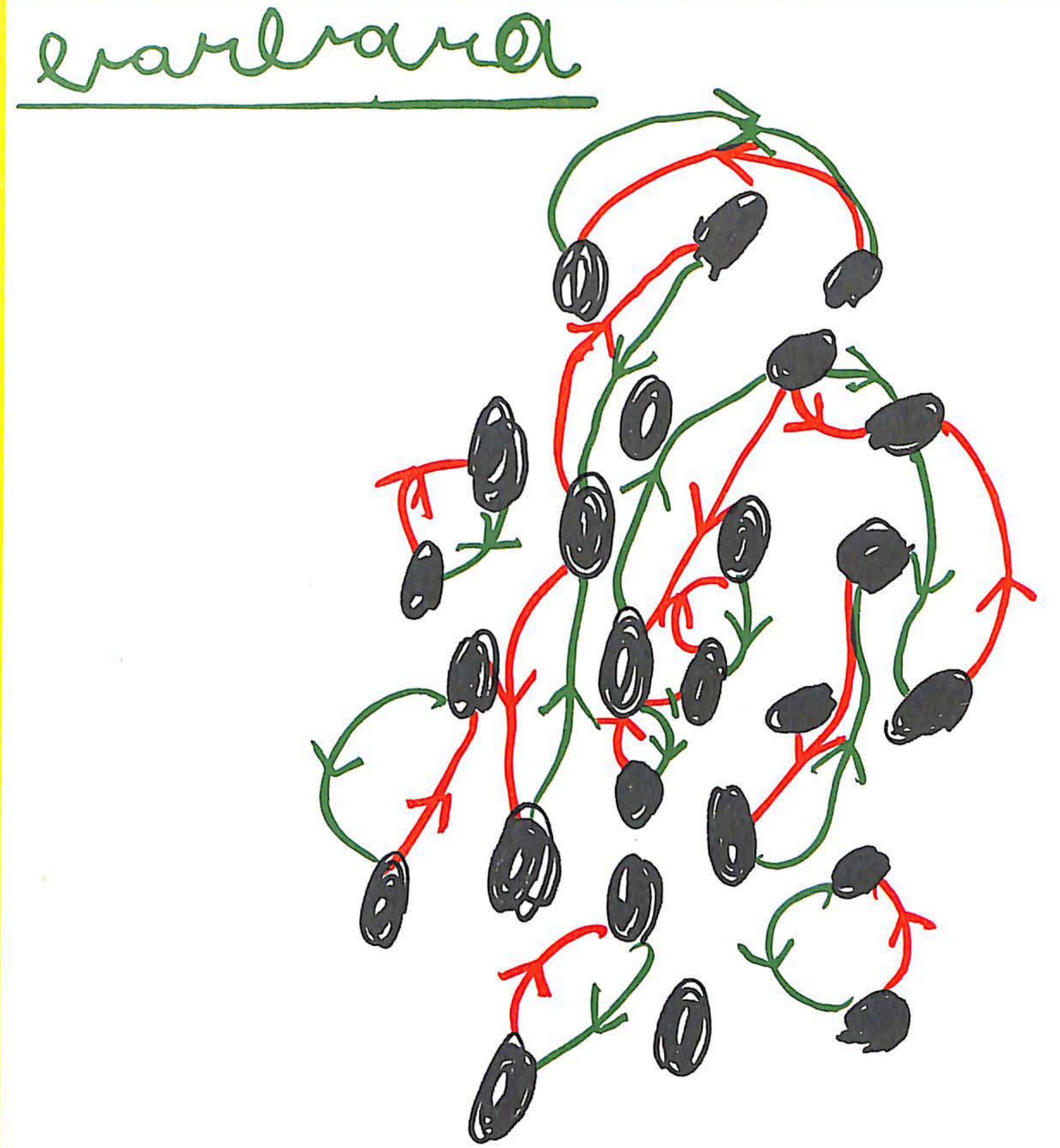
FIG. 33

— Voilà deux paires de chaussures très contentes.
Continuez tout seuls à assortir les chaussures.

FRÉDÉRIQUE donne uniquement quelques conseils d'ordre technique.

— Les flèches bien dessinées sont collées comme les oreilles d'un lièvre.
Tracez les flèches en partant de la chaussure qui montre.

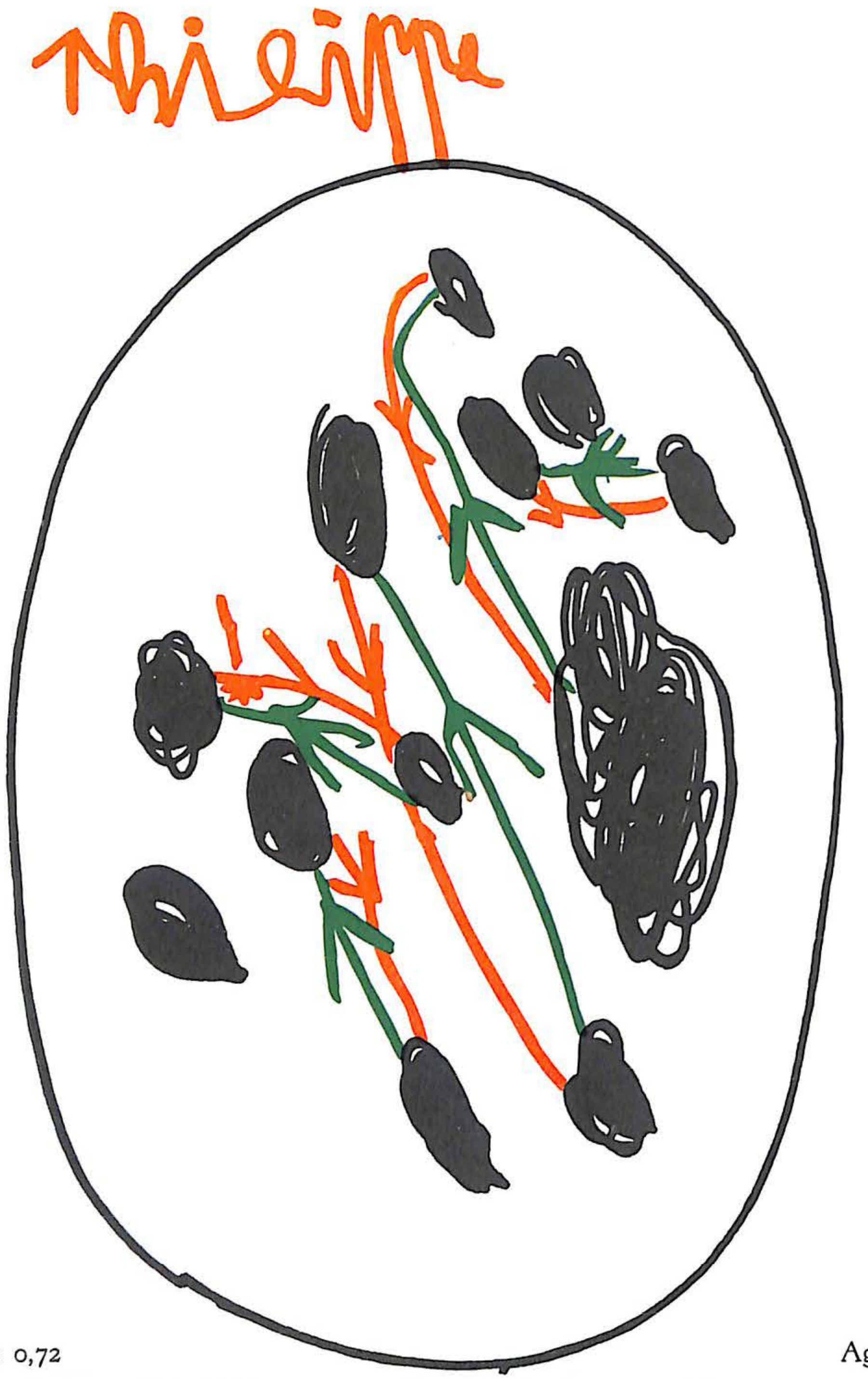
La plupart des enfants terminent le graphe assez rapidement.



Échelle : 1 — Age : 6 ans 4 mois

FIG. 34

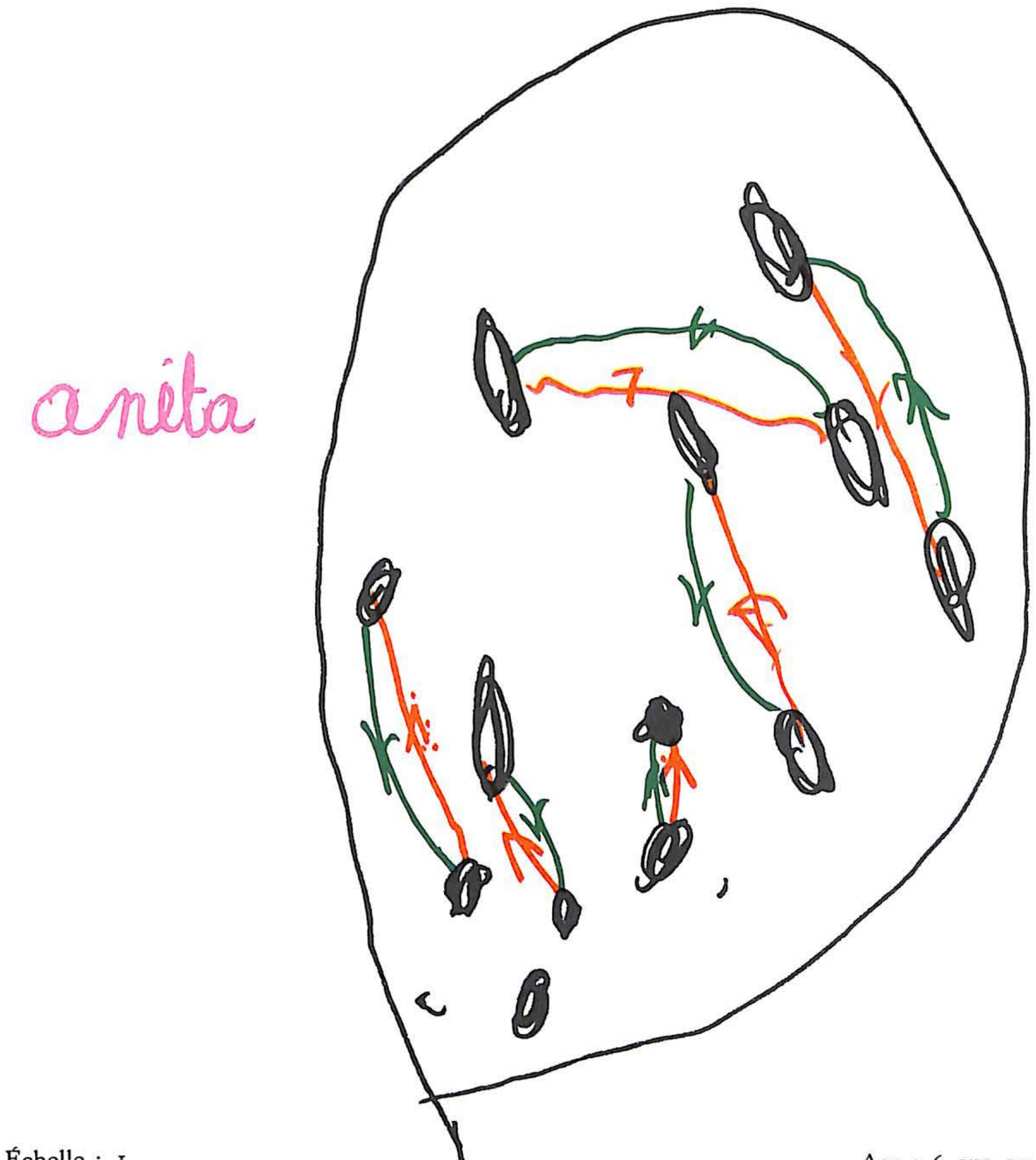
Joli dessin.
Treize, c'est beaucoup.
Barbara a la notion d'aller-retour.
Certaines paires apparaissent mais pas toutes, ... et pour cause.



Échelle : 0,72 Age : 6 ans 2 mois

FIG. 35

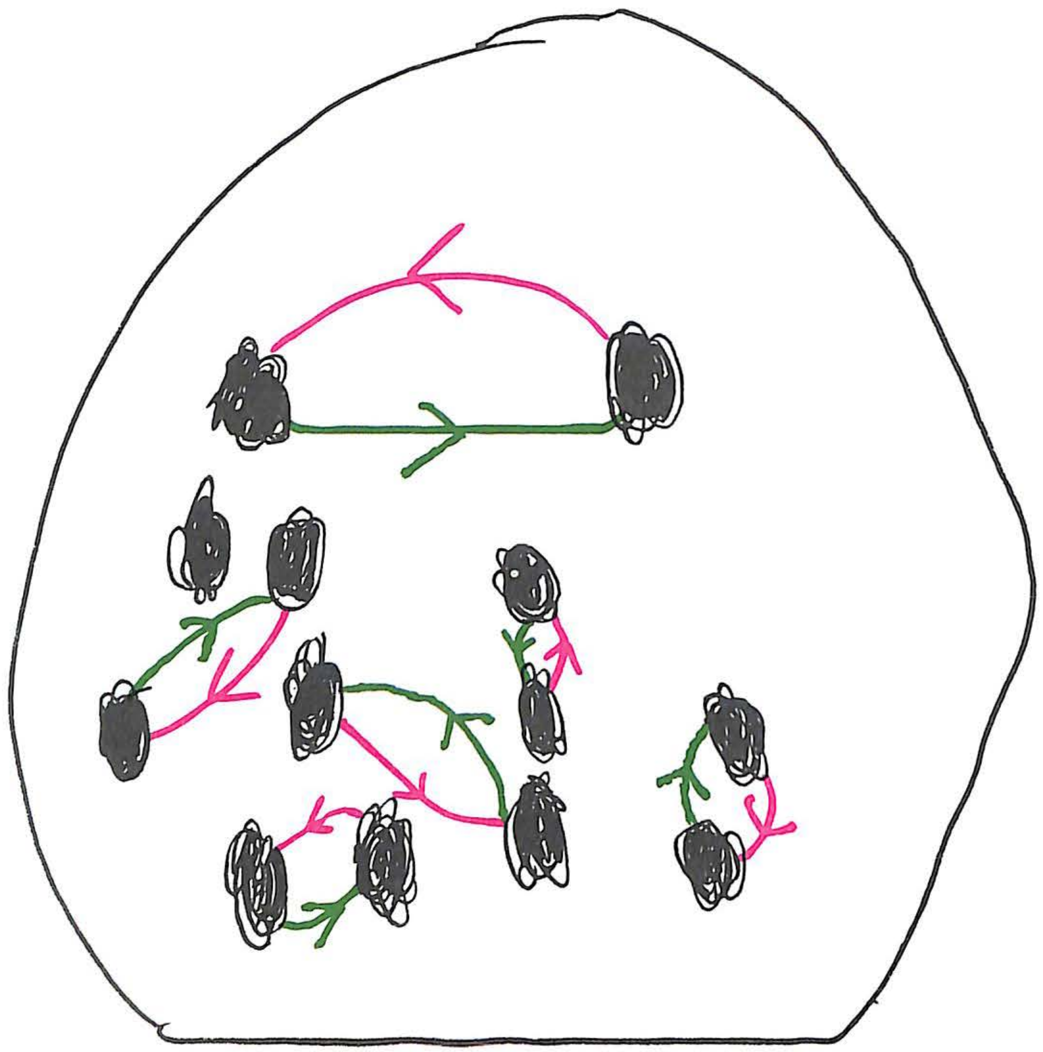
Philippe a bien compris mais son travail est entravé par la fusion accidentelle de deux points



Échelle : I Age : 6 ans II mois

FIG. 36

Très bien.
Flèches encore maladroites.
Anita s'applique et parvient à dessiner de belles flèches en se concentrant sur le tracé … au point d'en oublier la signification du dessin et de commettre sa seule erreur.

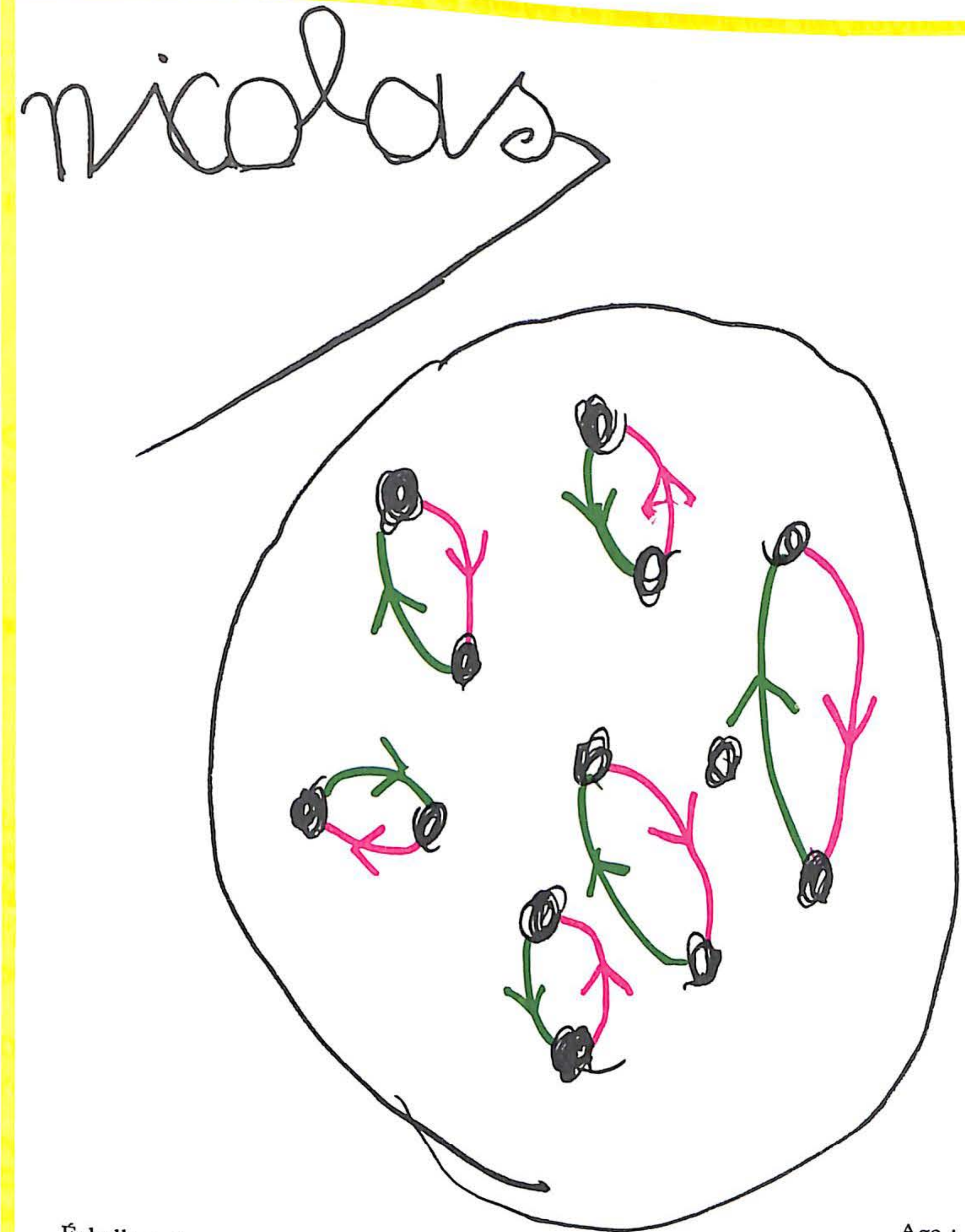


Échelle : 1

Age : 5 ans 10 mois

FIG. 37

Théoriquement parfait.
Mais Nicolas n'est pas content. Il ne signe pas sa feuille, la retourne et produit ce document remarquable.



Échelle : 1

Age : 5 ans 10 mois

FIG. 38

Clair, intelligible. Signé.

FRÉDÉRIQUE fait compléter par les enfants le graphe du tableau.

— **Il y en a un qui reste! Il en faudrait encore un**, observe Cédric.

— **C'est peut-être le farceur de troisième année qui l'a caché et peut-être s'est-il caché aussi,** ajoute Jean-Jacques.

— Combien d'enfants dans cette petite classe ?

— **Treize.**

— **Sept.**

— Pourquoi sept, Ariane ?

— **Car il y a deux chaussures pour un enfant; deux flèches, c'est un enfant.**

Ariane montre au tableau les sept enfants en comptant successivement les six aller-retour puis le treizième point.

— Didier, pourquoi nous avais-tu dit 13 enfants ?

— **J'avais compté les souliers et pas les enfants.**

COMMENTAIRE DE LA LEÇON 3

DATE : 12 septembre 1967.

DURÉE : **35** minutes

$$\{F, R, E, D, E, R, I, Q, U, E\} \supset \{F, E, E, R, I, Q, U, E\}$$

Quelle belle leçon de la Fée FRÉDÉRIQUE.
Mathématique moderne et graphes multicolores s'adaptent merveilleusement à l'esprit enfantin.

Mathématique Moderne = Mathématique plus humaine.

DE L'IMPORTANCE DES INTRODUCTIONS

La leçon commence comme un joli conte de fées.
Qu'elles sont astucieuses les introductions des contes enfantins, si abondantes en détails parfaitement inutiles pour le déroulement ultérieur de l'histoire, mais qui plantent le décor, créent l'atmosphère et provoquent l'intérêt par leur caractère de ... situation ouverte ... à tant d'imprévu!

Délicieuse école de village, petite, comme la maison et le pré du bon Monsieur Seguin, que la jolie chevrette contemplait, si amusée, du haut de sa montagne!

Peu à peu, l'intérêt se focalise sur la situation, objet de notre étude :
Ce fameux ensemble de godasses, abandonnées par les élèves de la petite classe, pendant leur cours de gymnastique et tandis qu'un farceur de la 3ème année rôde aux alentours.

Bigre! Attention à **nos** chaussures!
Quelle histoire!

LA SITUATION ÉTUDIÉE DOIT INTÉRESSER LES ÉLÈVES ET ÊTRE DOMINÉE PAR EUX

Contrairement à ce que l'on semble admettre trop souvent, les jeunes enfants raisonnent de manière étonnamment correcte dans les situations qu'ils connaissent bien, pour autant qu'elles les intéressent et que leur pensée puisse s'appuyer sur un support sensoriel structuré.

L'ensemble des chaussures est une situation familière et l'on s'assure qu'elle est bien dominée en demandant aux élèves de montrer leur chaussure gauche et leur chaussure droite.
Un lien affectif identifie les élèves de FRÉDÉRIQUE à ceux de la petite classe justement inquiets au sujet de leurs chaussures, d'autant plus que l'on a signalé la présence d'un petit drôle de 3ème année.
Les élèves de FRÉDÉRIQUE sont plus qu'intéressés par une situation simple. Mais tout cela ne suffit pas.

LES ÉLÈVES DOIVENT ÉCOUTER LA SUITE DE L'HISTOIRE AVEC ATTENTION, L'ESPRIT PRÉSENT ET LIBRE

Le caractère familier de la situation et le lien affectif avec les enfants de l'histoire, provoquent des résonnances, ravivent des souvenirs, excitent l'imagination des élèves de FRÉDÉRIQUE
Leur esprit est occupé par des choses à dire, des histoires à raconter.
Histoires personnelles ou collectives, véridiques, réelles ou affabulées.
Histoires à raconter.
Il faut libérer l'esprit des élèves en provoquant l'extériorisation de leur pensée, en leur faisant raconter leurs histoires.
A ce prix, ils consentent à prêter attention à la suite du récit.

DESSIN ABSTRAIT — ABSTRACTION FAMILIÈRE

Le premier dessin de nos élèves est un diagramme de Venn d'un ensemble de 13 points, schéma abstrait d'une situation familière.
Un point est plus facile à dessiner qu'un petit canard ou une paire de bottines.

Dessin techniquement facile ... motivé.
Dessin abstrait ... motivé.

ILS ONT ÉTÉ TRÈS FÂCHÉS

Le contact affectif maintenu, excite favorablement l'intelligence.

REFAIRE LES PAIRES DE CHAUSSURES

Sujet de la leçon.
Démarche fondamentale dans la vie pratique, introduite ici progressivement et fortement motivée.

Mathématique Moderne = Mathématique des démarches fondamentales de la vie pratique.

PERSONNIFICATION

Premier degré : comme dans les fables que les élèves adorent, les souliers vivent et agissent.
Ils ont apparemment suivi les leçons de FRÉDÉRIQUE et le plus naturellement du monde,

la petite bottine va dessiner une flèche verte.

AU TEMPS OÙ LES FLÈCHES PARLAIENT...

FRÉDÉRIQUE entre de plain pied dans le jeu des élèves.

Que nous dit cette flèche verte?

Cette personnification au deuxième degré autorise un langage commode et permettra la référence aux diverses langues des graphes.
Les flèches disent en vert...
Les flèches disent en orange...
Manière de parler brève et rapide, dépourvue de tout pédantisme.

... *montre son soulier droit* ... (en vert)
... *montre son soulier gauche* ... (en orange)

Fonctions réciproques.

PROGRESSION SIMULTANÉE À PLUSIEURS NIVEAUX

Certaines parties de la leçon se déroulent au niveau du schéma abstrait.
Mais le contact avec la réalité est maintenu jusqu'au bout :

— C'est peut-être le farceur de 3e année qui l'a caché et peut-être s'est-il caché aussi!

Les élèves progressent parallèlement à plusieurs niveaux et passent de l'un à l'autre, attitude essentielle en mathématique appliquée.

Mathématique moderne = Mathématique appliquée.

DESSIN

Au cours d'expériences antérieures, nous demandions de dessiner des flèches-réponses au tableau noir, dès la première leçon.

FRÉDÉRIQUE a considérablement amélioré la qualité des dessins exécutés par les enfants en changeant de stratégie.
Les premiers graphes que voient les élèves de FRÉDÉRIQUE sont de magnifiques images très lumineuses projetées sur grand écran. D'emblée, les élèves se trouvent en présence de très bons modèles, de qualité nettement supérieure à tout ce qu'il est possible de dessiner à la craie au tableau noir.

FRÉDÉRIQUE se garde de demander immédiatement aux enfants de reproduire ces images. Elle initie d'abord les élèves à l'usage des graphes et leur en fait sentir l'utilité pour traduire clairement certaines situations.

Peu à peu, les enfants adoptent affectivement les graphes.

Avant de dessiner, on mime, ce qui met en évidence certains aspects cinématiques et permet de nombreux essais sans trace ineffaçable.

Les premiers tracés sont effectués au tableau sous la surveillance de la classe entière qui a l'occasion d'observer certaines difficultés.
Ce n'est qu'après cette entrée en matière progressive que les élèves dessinent leurs premiers graphes au moyen de leurs marqueurs magiques.

4

Frères et Sœurs

Énumération exhaustive d'éventualités

Revoici les frères et sœurs.

— En quelle couleur les enfants montraient-ils leurs sœurs ?

— **En rouge.**

— Et leurs frères ?

— **En vert.**

— J'ai trois petits amis qui appartiennent à la même famille. Je ne vous dis pas quels sont leurs prénoms. Comment peuvent être mes amis ?

— **Rien que des frères.**

— **Ou un frère et deux sœurs.**

— **Aussi, deux frères et une sœur.**

— **Et trois sœurs.**

— Combien de possibilités ?

— **Trois.**

— Comptons-les tous ensemble.

Le chœur répète les différentes éventualités en les comptant sur les doigts.

— **Ça fait quatre possibilités.**

FRÉDÉRIQUE dessine au tableau.

— Ici trois frères...

trois sœurs ...

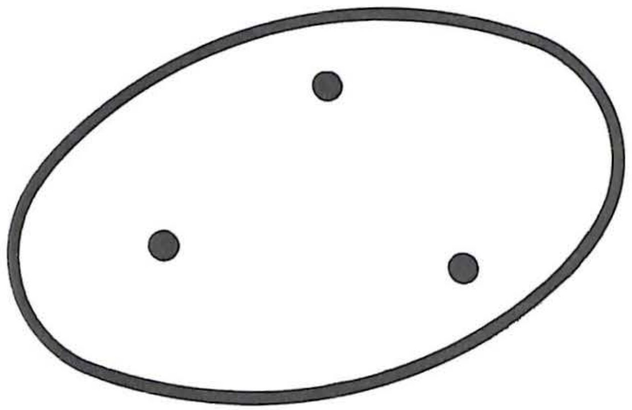


FIG. 39

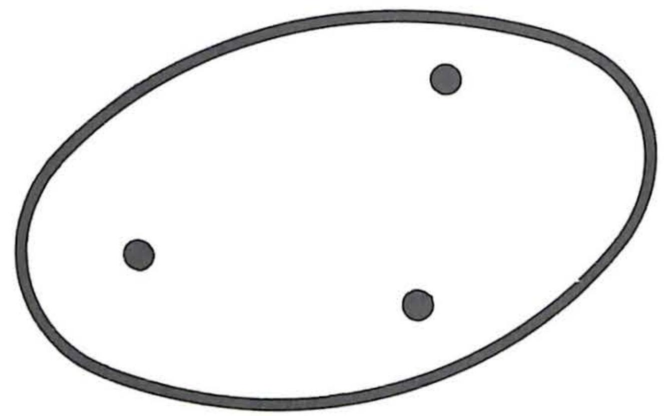


FIG. 40

... deux sœurs et un frère...

deux frères et une sœur

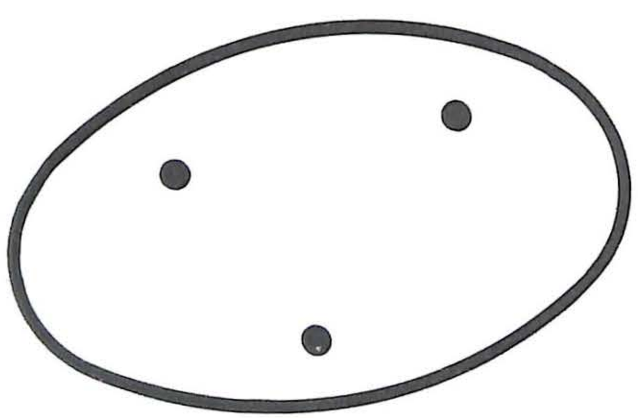


FIG. 41

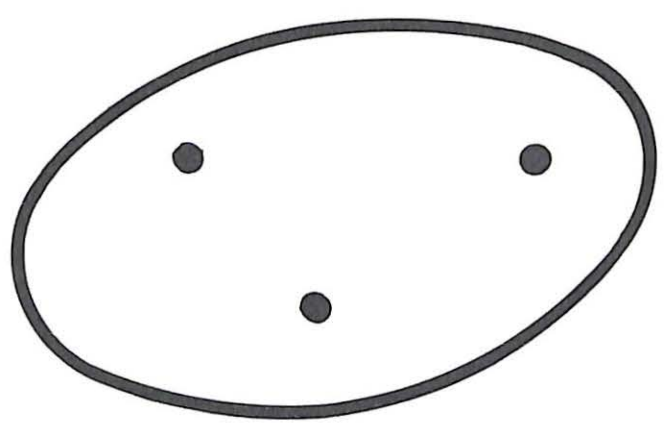
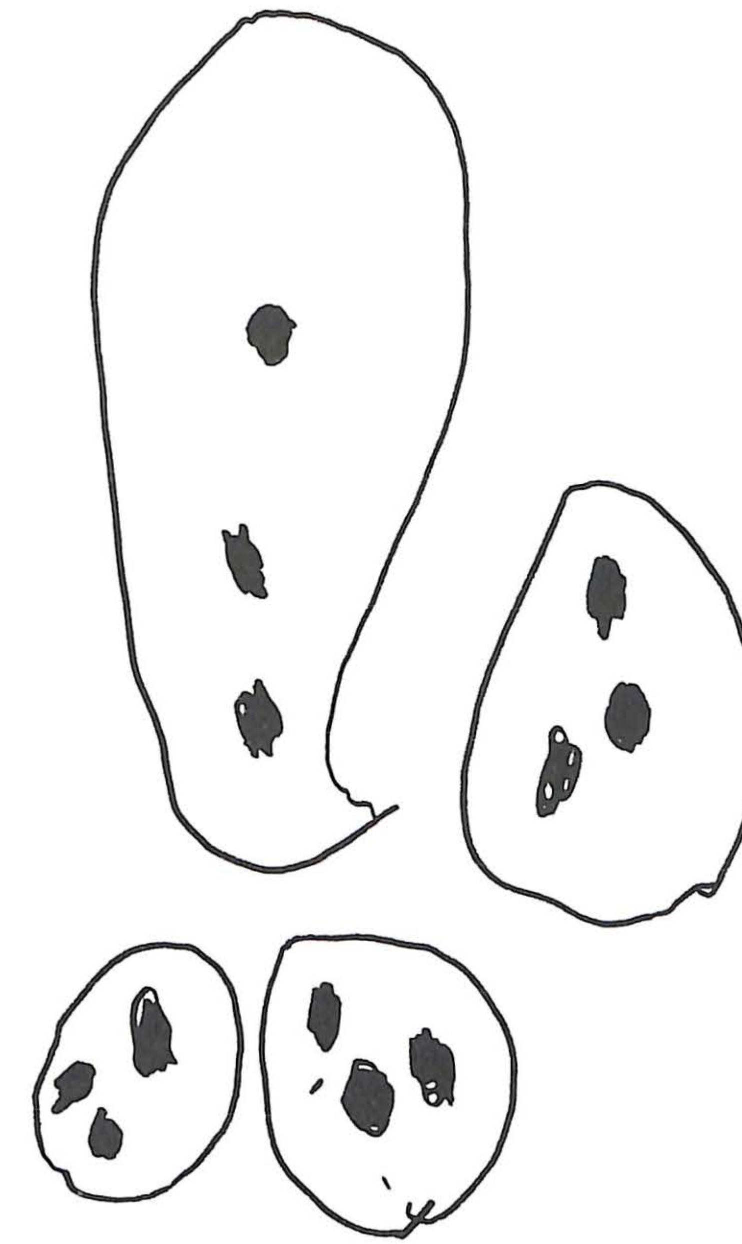


FIG. 42

— **Madame, vous avez dessiné une bouche et deux yeux.**

— C'est vrai, mais ce n'est pas cela que nous regarderons.

Les enfants reproduisent les quatre diagrammes sur des feuilles de papier blanc.



Échelle : 0,7

Age : 6 ans 5 mois

Premier essai de Didier.

FIG. 43

— Regarde, Hubert. Tout le grand tableau est occupé par nos quatre schémas. Tu as une immense place sur ta feuille de papier. Ne veux-tu pas refaire un nouveau dessin ?

— **Madame, j'ai fini!**

— **Moi aussi!**

— Regardons au tableau. Voici les trois frères.
Que dit ce frère ?

— **Je montre mon frère.**

Mime, puis dessin de la flèche au tableau.

— Que répond le frère ?

— **Je montre mon frère.**

— Les trois frères ont-ils parlé ?

— **Non.**

— Fais-les parler et montre avec le bambou.

Un enfant mime la conversation complète entre les trois frères mais ne dessine pas au tableau. Chaque enfant dessine ou essaie de dessiner le graphe sur la feuille de papier.

FRÉDÉRIQUE observe les dessins, ne corrige pas, se borne à des remarques d'ordre technique.

— Ton dessin est bien, Emmanuel, mais tu as des difficultés car il est trop petit.

...

— Faites parler les trois sœurs.

Une petite se trompe.

— Voici les trois sœurs. Pourquoi une sœur a-t-elle répondu : je montre mon frère ?

— **Je me suis trompée.**

Au tableau, les enfants complètent le deuxième dessin.

— **Madame, une sœur n'a pas répondu.**

— Pas encore, mais Sylvie va la faire parler.

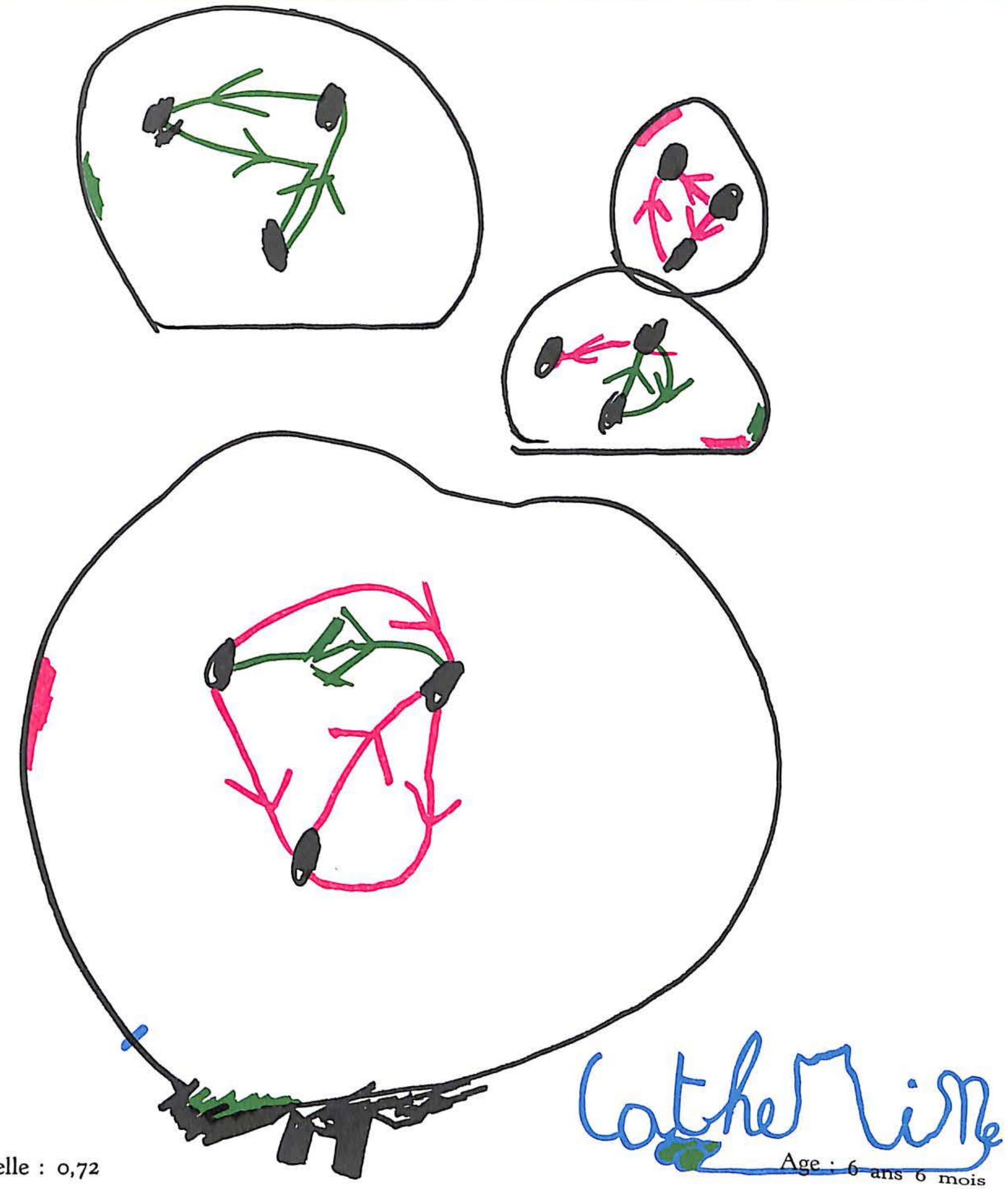
...

— Observons à présent le troisième dessin; qu'avions-nous dit ?

— **Deux sœurs et un frère.**

— Faites parler les enfants en rouge et en vert.

Mimes, dessins individuels puis dessin au tableau.
On procède de même pour le quatrième diagramme.

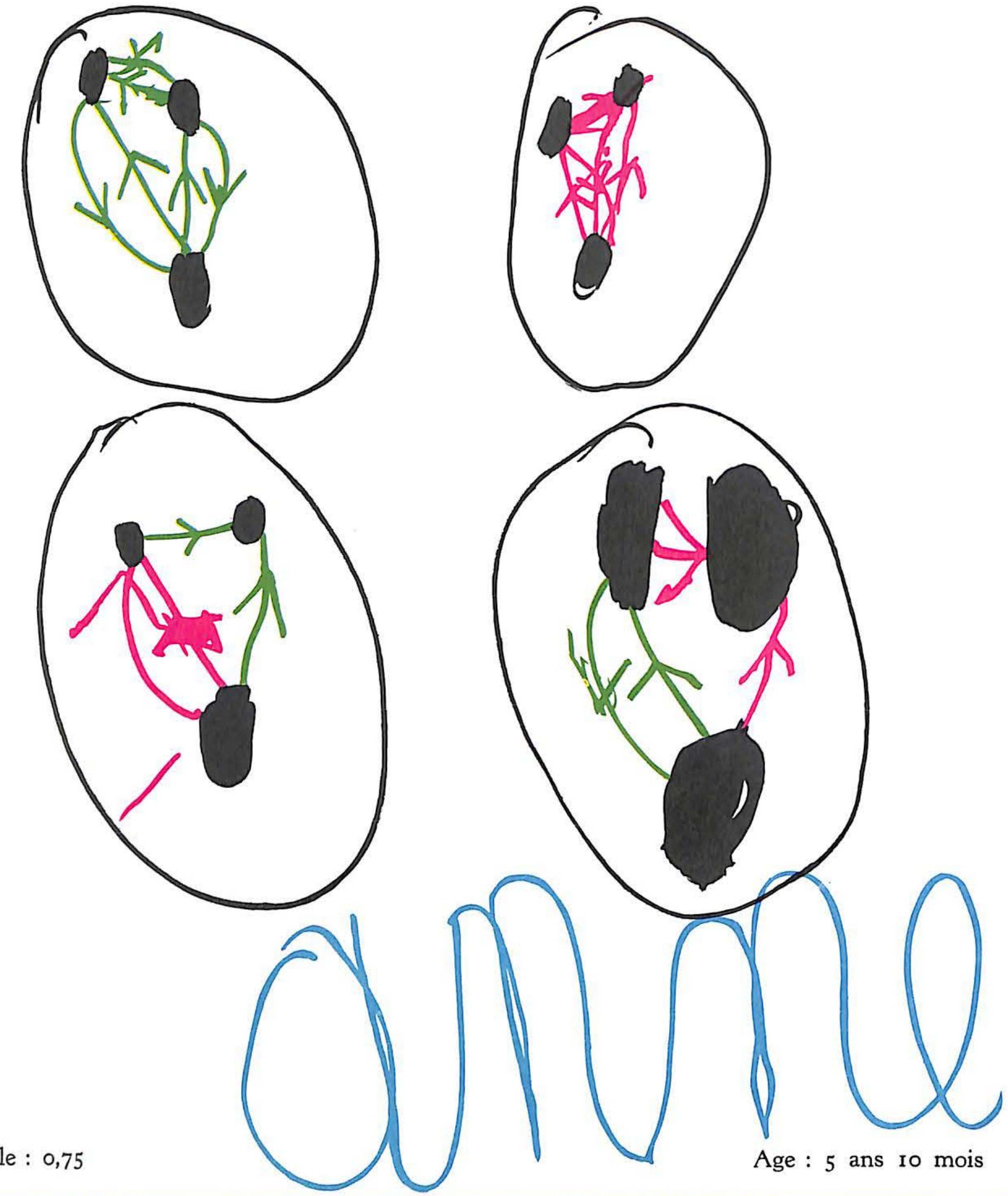


Échelle : 0,72

Âge : 6 ans 6 mois

FIG. 44

Pas de flèche inexacte (une flèche verte corrigée).
Assez de flèches pour caractériser chaque situation.
De nombreuses flèches oubliées un peu au hasard.
Catherine ajoute ses petites conventions : une classification moins fine, tout vert, tout rouge, bicolore.

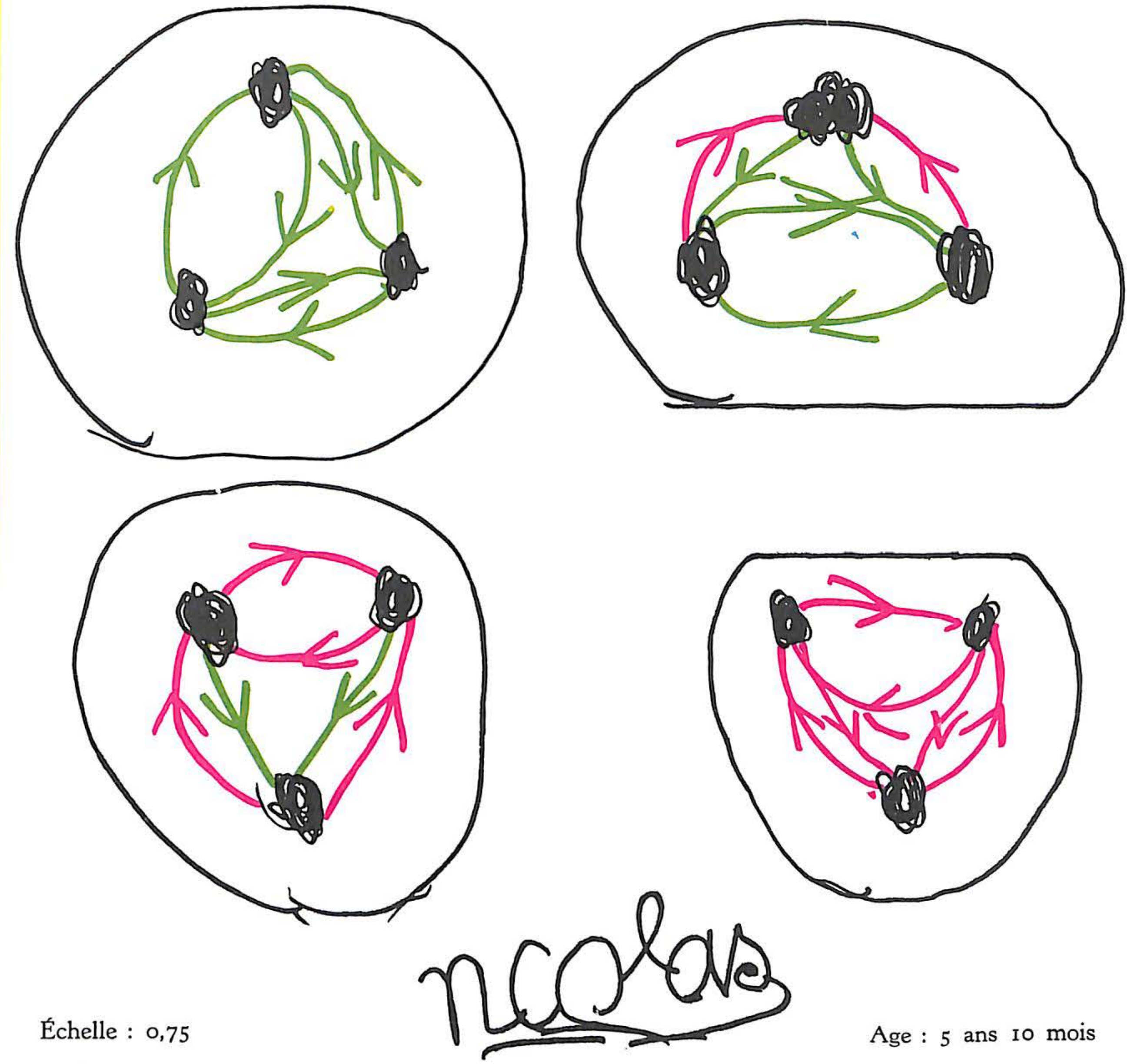


Échelle : 0,75

Age : 5 ans 10 mois

FIG. 45

Pas de flèche inexacte.
Anne semble avoir saisi le dualisme vert-rouge.
Deux flèches-retour rouges manquent sur le diagramme rouge-vert.
Les flèches-retour vertes correspondantes manquent sur le diagramme vert-rouge.



Échelle : 0,75

Age : 5 ans 10 mois

FIG. 46

Parfait.
Nicolas modifie l'ordre de présentation des graphes.
Du vert au rouge, en rougissant de plus en plus.
Et Nicolas ne fait pas dire à ses garçons : „Je suis mon frère"

Chaque enfant reçoit une nouvelle feuille blanche.

— Voici quatre enfants.

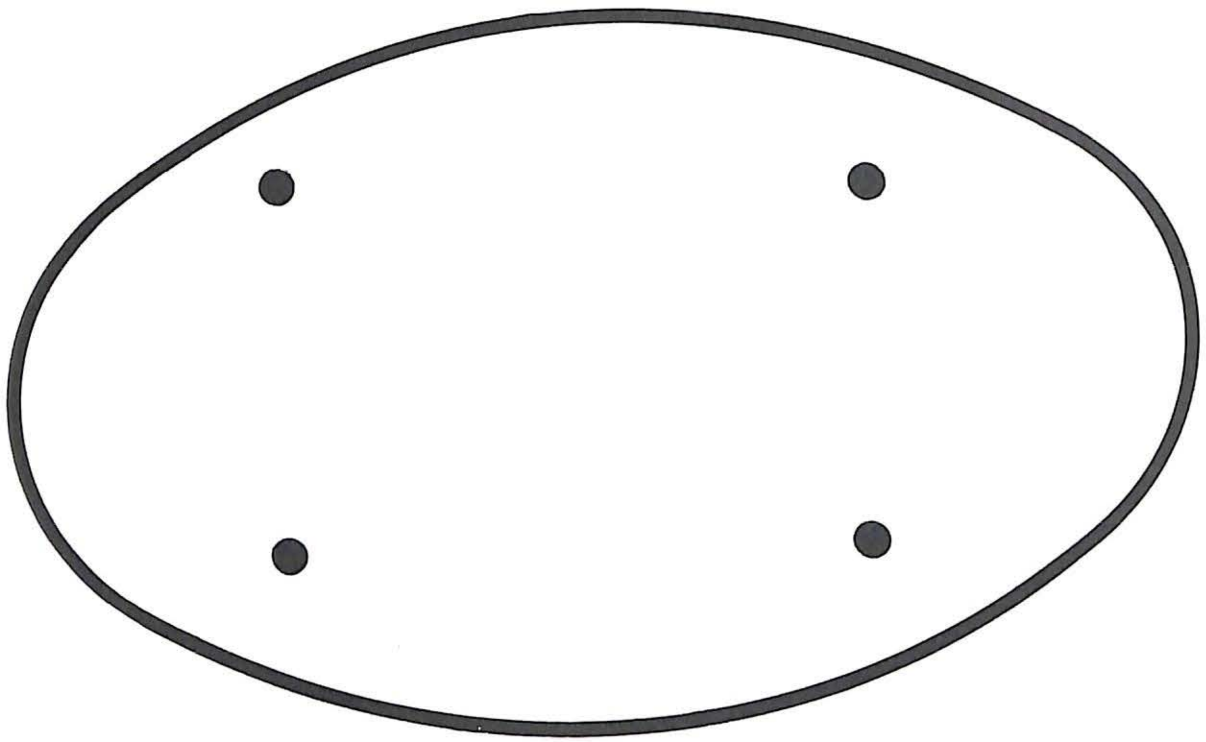


FIG. 47

— Avec des flèches vertes et des flèches rouges, je vais vous raconter une histoire.

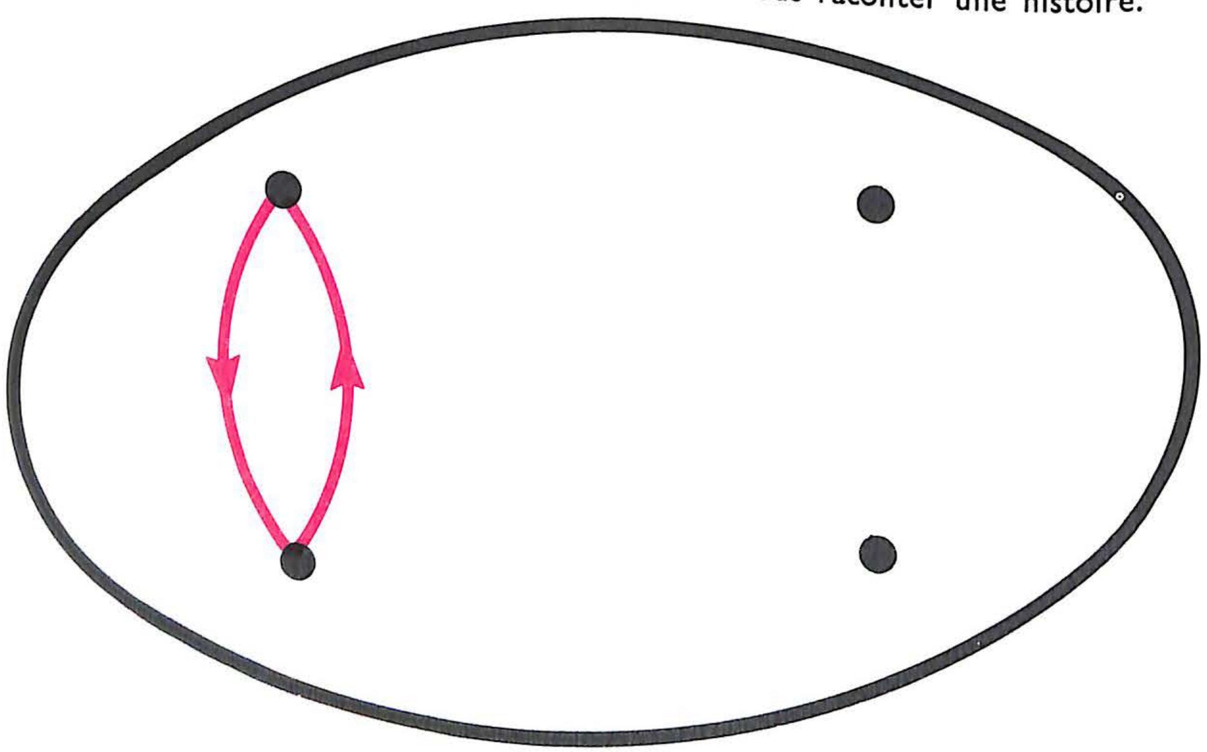


FIG. 48

— C'est deux sœurs!

— L'histoire continue.

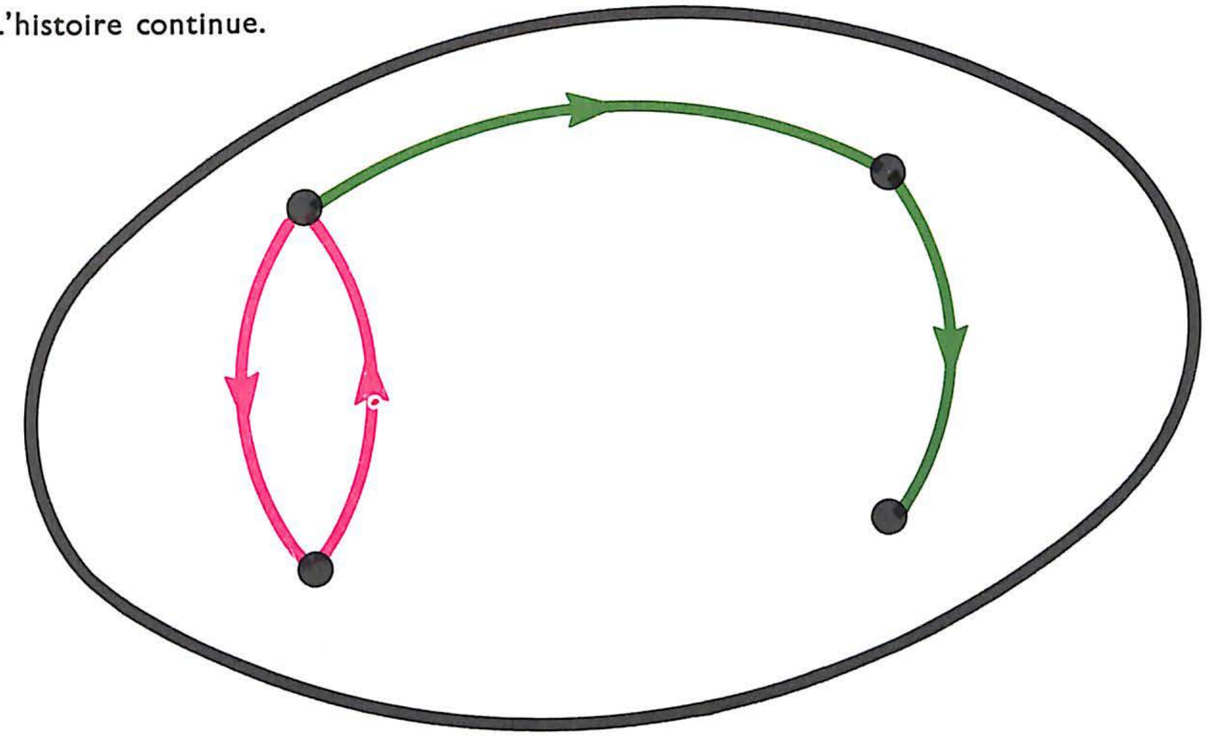


FIG. 49

— Une sœur montre son frère.

— Et lui, que dit-il ?

— Je montre mon frère.

— Combien d'enfants dans cette famille ?

— Quatre enfants, deux sœurs et deux frères.

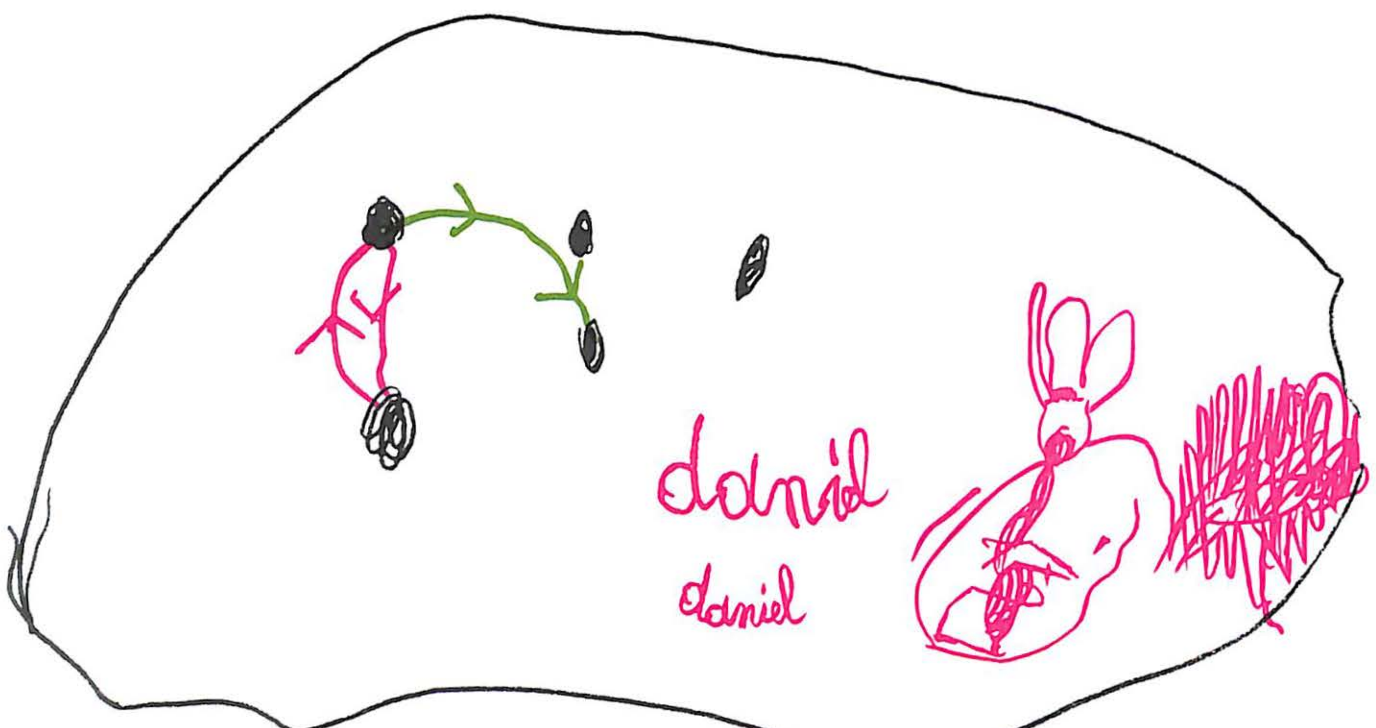
— Ont-ils tous suffisamment parlé ?

— Non.

— Complétez le dessin.

…

— Madame, Daniel a dessiné un lapin!
Et à côté du lapin, un feu d'artifice!



Échelle : 0,63

Age : 6 ans 7 mois

FIG. 50

— Daniel est petit; il joue avec des petits lapins.
Les grands dessinent des flèches. Il faut choisir …

Mais FRÉDÉRIQUE reste indulgente.
Dans les moments les plus solennels, son PAPY ne dessine-t-il pas d'étranges oiseaux?

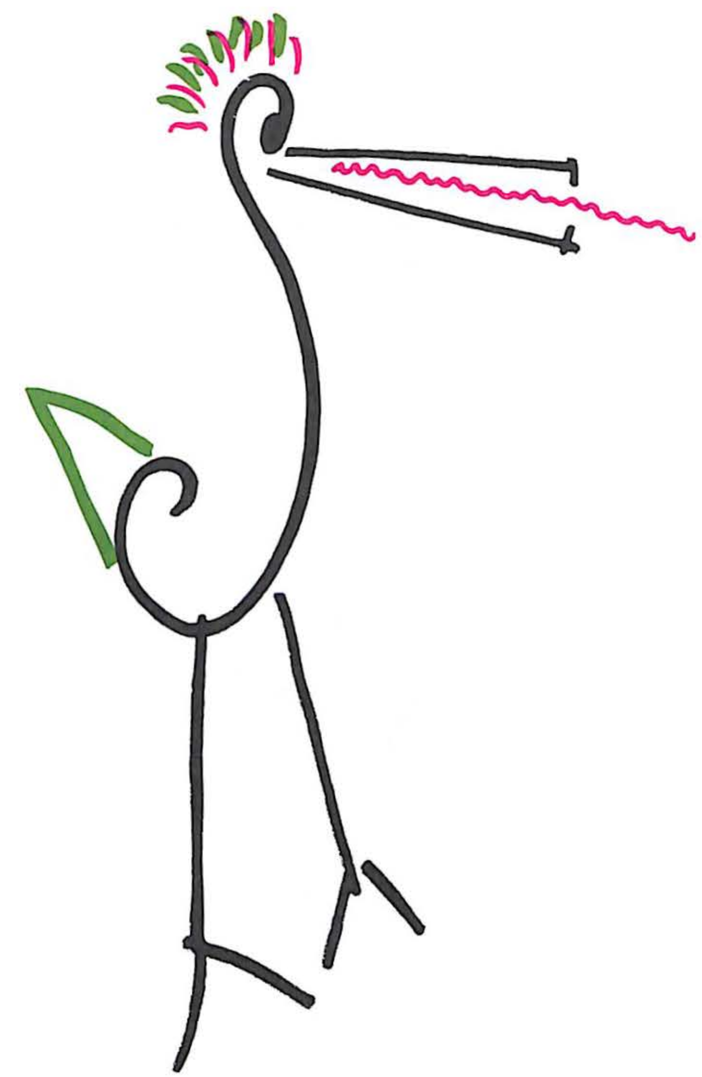
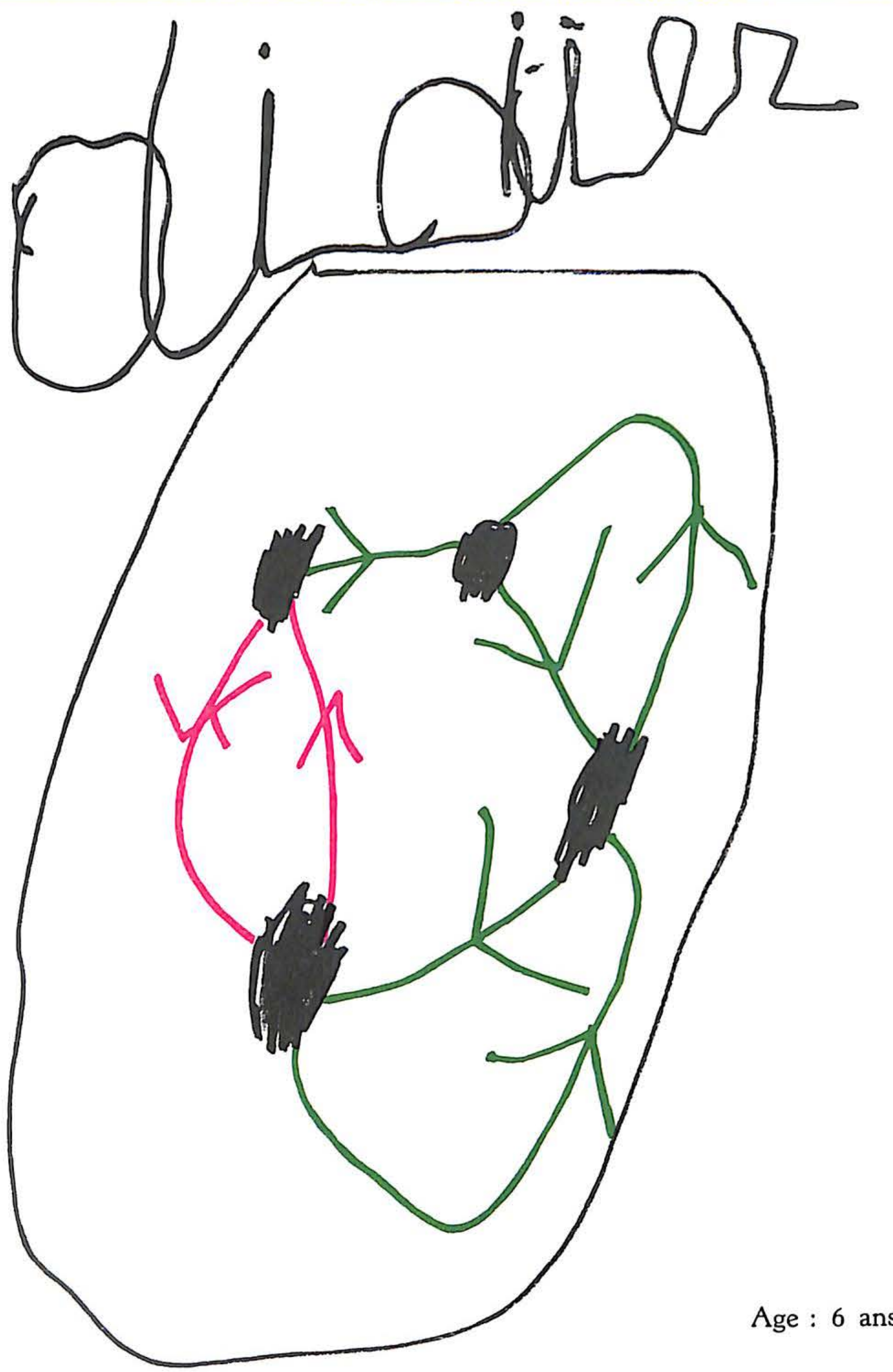


FIG. 51

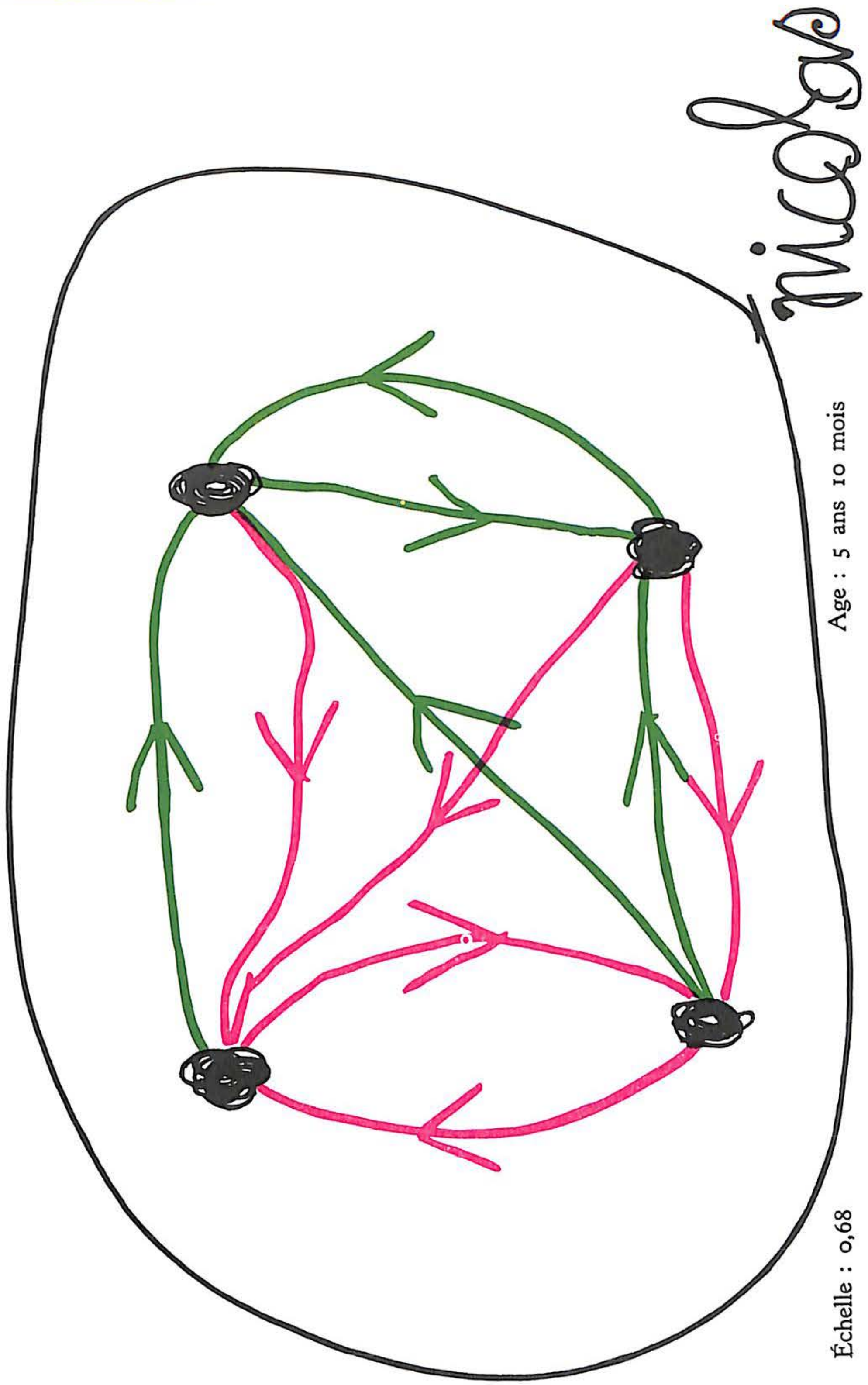


Échelle : 0,75

Age : 6 ans 5 mois

FIG. 52

Une flèche verte inexacte.
Il manque deux flèches-retour rouges et les flèches diagonales.
Il est vrai que jusqu'ici, nous n'avons pas rencontré de flèches qui se croisent.
Oser les dessiner constitue une véritable audace et une authentique petite découverte.



Age : 5 ans 10 mois

Échelle : 0,68

FIG. 53

A Nicolas, l'honneur des premières flèches croisées.
Ainsi qu'il arrive souvent en pareil cas, comme épuisé par l'effort de création, il en oublie les flèches-retour.

COMMENTAIRE DE LA LEÇON 4

DURÉE : 40 minutes.

DATE : 15 septembre 1967.

RECHERCHE EXHAUSTIVE D'ÉVENTUALITÉS

La première partie de la leçon consiste, à nouveau, en une recherche exhaustive d'éventualités. FRÉDÉRIQUE ne préjuge pas du mode de classification et introduit la question sous forme très vague.

— **Comment peuvent être nos amis ?**

Les élèves choisissent la **subdivision** la plus naturelle à leurs yeux.
Quatre cas : trois garçons; trois filles; deux garçons et une fille; deux filles et un garçon.

Les dessins montrent que certains enfants ont été effleurés par l'idée d'une classification moins fine.
Trois cas : trois garçons; trois filles; des filles et des garçons.

Aucun élève n'a songé à faire entrer en jeu l'ordre de succession des filles et des garçons dans la famille, ce qui donne une classification en 8 cas bien distincts au niveau de la vie concrète.

ÉTUDE D'UNE SITUATION MATHÉMATISÉE

Ensemble de 4 points muni des relations ... **FRÈRE ET SŒUR** ...
Le problème consiste à compléter des graphes partiels de ces relations.
Ces graphes partiels ne sont pas donnés en bloc : leurs flèches sont introduites l'une après l'autre.
Cette présentation progressive évite l'inhibition que provoque la donnée trop brutale d'une situation complexe.
Les élèves raisonnent au fur et à mesure que l'information leur est communiquée.
La situation, rudimentaire au début, se complique peu à peu, et exerce les élèves à raisonner dans des contextes de moins en moins simples.

5

Le Facteur

Application : C → E

— Des enfants de notre classe ont-ils leur anniversaire au mois de septembre ?

— **Moi!**

— **Moi aussi, c'est aujourd'hui!**

— Bravo Cédric. Bon anniversaire!
Que se passe-t-il le jour de votre anniversaire ?

— **On va au restaurant! Le soir!**

— **On invite mes amis.**

— Recevez-vous aussi des cartes ?

— **Oui, moi!**

— Qui t'apporte ces cartes ?

— **Le facteur!**

— Voici le facteur dans une rue où habitent plusieurs enfants. Tous n'ont pas leur anniversaire au mois de septembre. Quelques enfants seulement ont reçu des cartes ce matin.
Voici l'ensemble des cartes destinées à ces enfants.

FRÉDÉRIQUE dessine ce diagramme à la craie blanche au tableau noir.

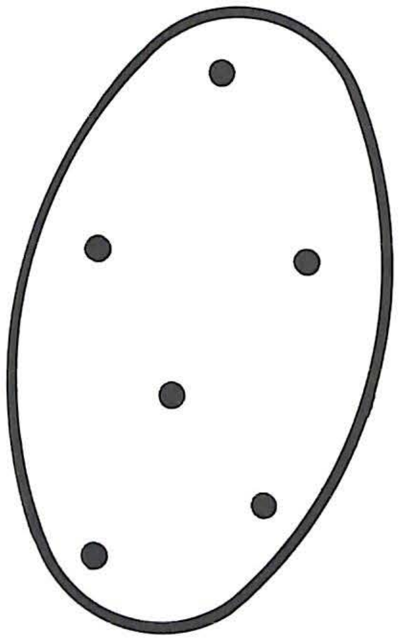


FIG. 54

— Combien de cartes ?
— **Six!**
— Le facteur dépose les cartes dans les boîtes aux lettres des enfants de la rue.
Voici l'ensemble de ces enfants.

FRÉDÉRIQUE dessine le deuxième diagramme.

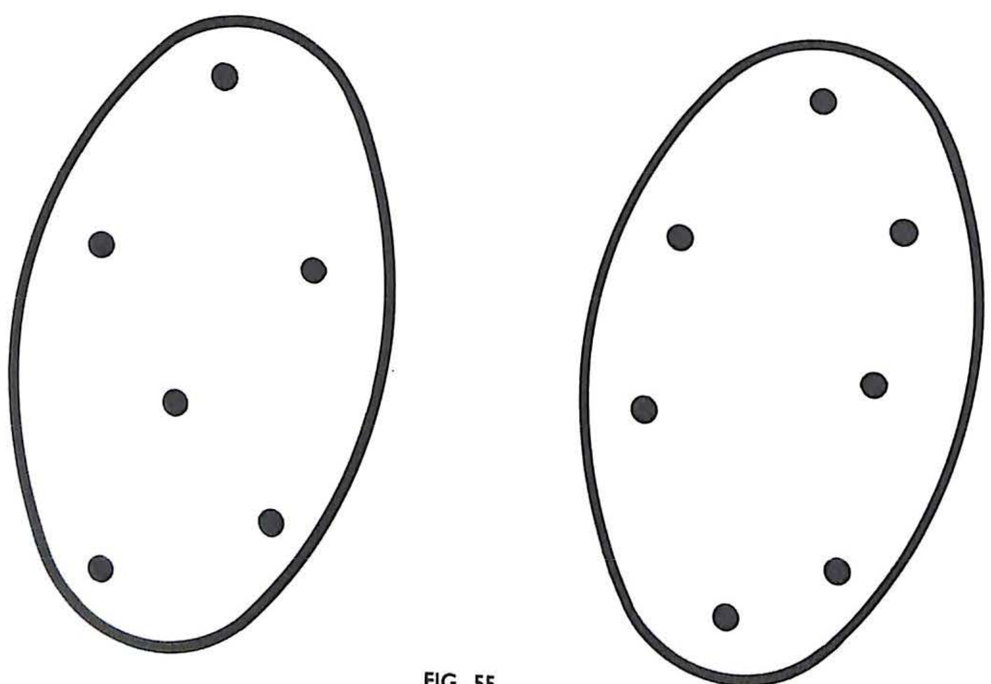


FIG. 55

— Combien d'enfants ?
— **Sept!**

— Voici une carte. Cédric habite dans cette rue.
Comment indiquer que cette carte est destinée à Cédric ?

— **Par une flèche.**
— **Et très longue.**

FRÉDÉRIQUE dessine une flèche.

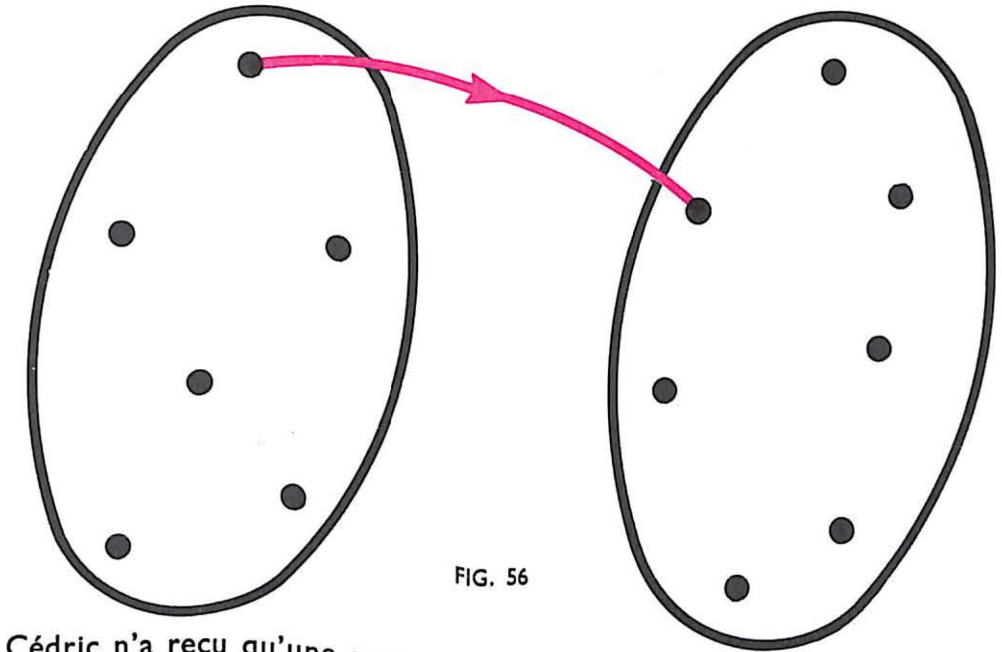


FIG. 56

— Voyons si Cédric n'a reçu qu'une seule carte.

FRÉDÉRIQUE dessine deux nouvelles flèches.

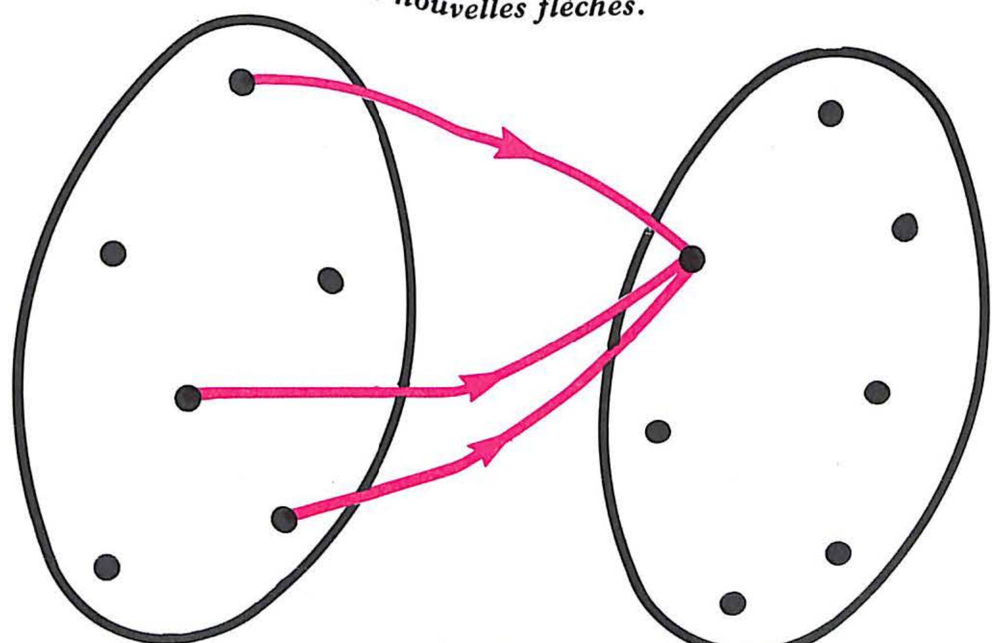


FIG. 57

— **Non, trois cartes!** observe Cédric dont les yeux brillent de plaisir.

— L'histoire continue car le facteur a encore des cartes. Il poursuit sa tournée.

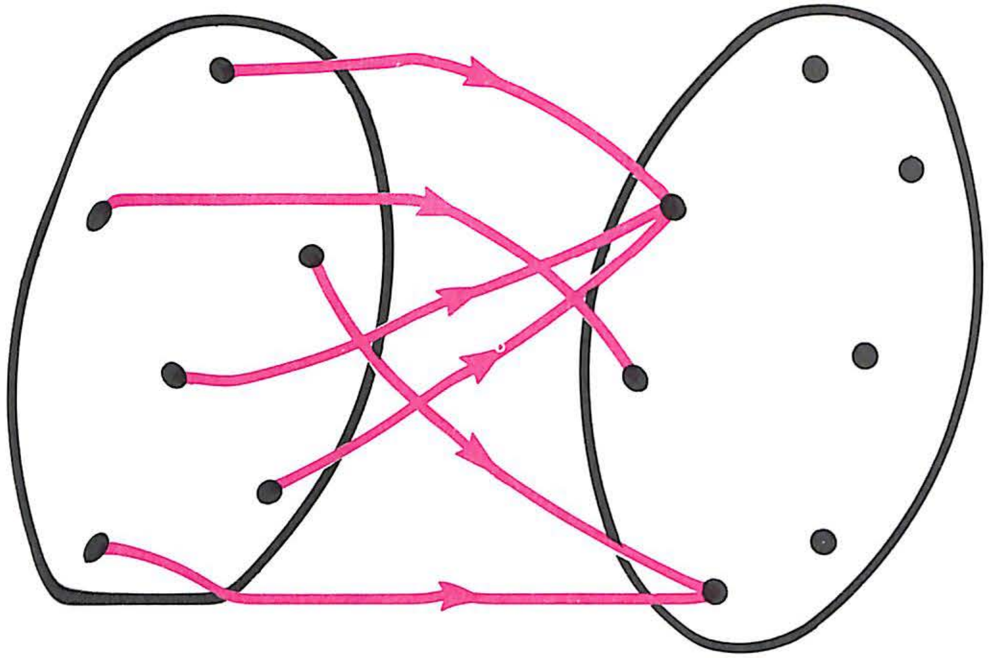


FIG. 58

— Combien d'enfants reçoivent des cartes ?

— **Trois.**

— Montre - les.

— **Cédric en reçoit trois; celui-ci une et l'autre deux,** raconte Carine en montrant successivement les points, extrémités de trois, une et deux flèches.

— Combien reste-t-il d'enfants ?

— **Quatre.**

— Ces quatre enfants n'ont pas reçu de cartes car aujourd'hui n'est pas leur jour anniversaire.

Chaque enfant reçoit une feuille blanche et reproduit à sa manière le graphe du tableau.
FRÉDÉRIQUE les encourage et donne quelques conseils techniques.

— Entourons d'une corde verte les cartes destinées à Cédric.
Montre tes trois cartes, Cédric.

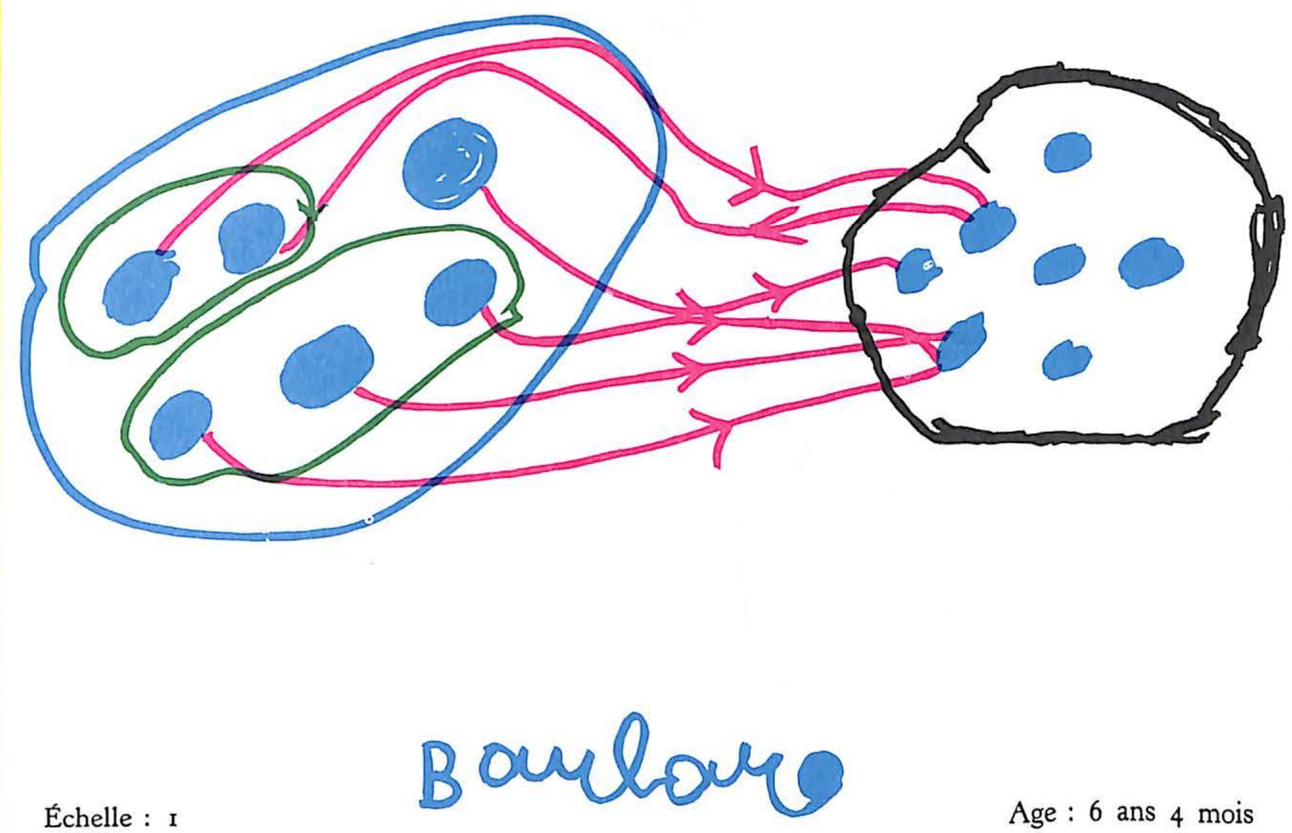
Cédric se trompe. Il montre les trois flèches.

— Les trois cartes, Cédric.

Il montre les origines des trois flèches.

— Entourons d'une corde verte les trois cartes destinées à Cédric, puis d'une autre corde les deux cartes destinées à cet autre enfant.

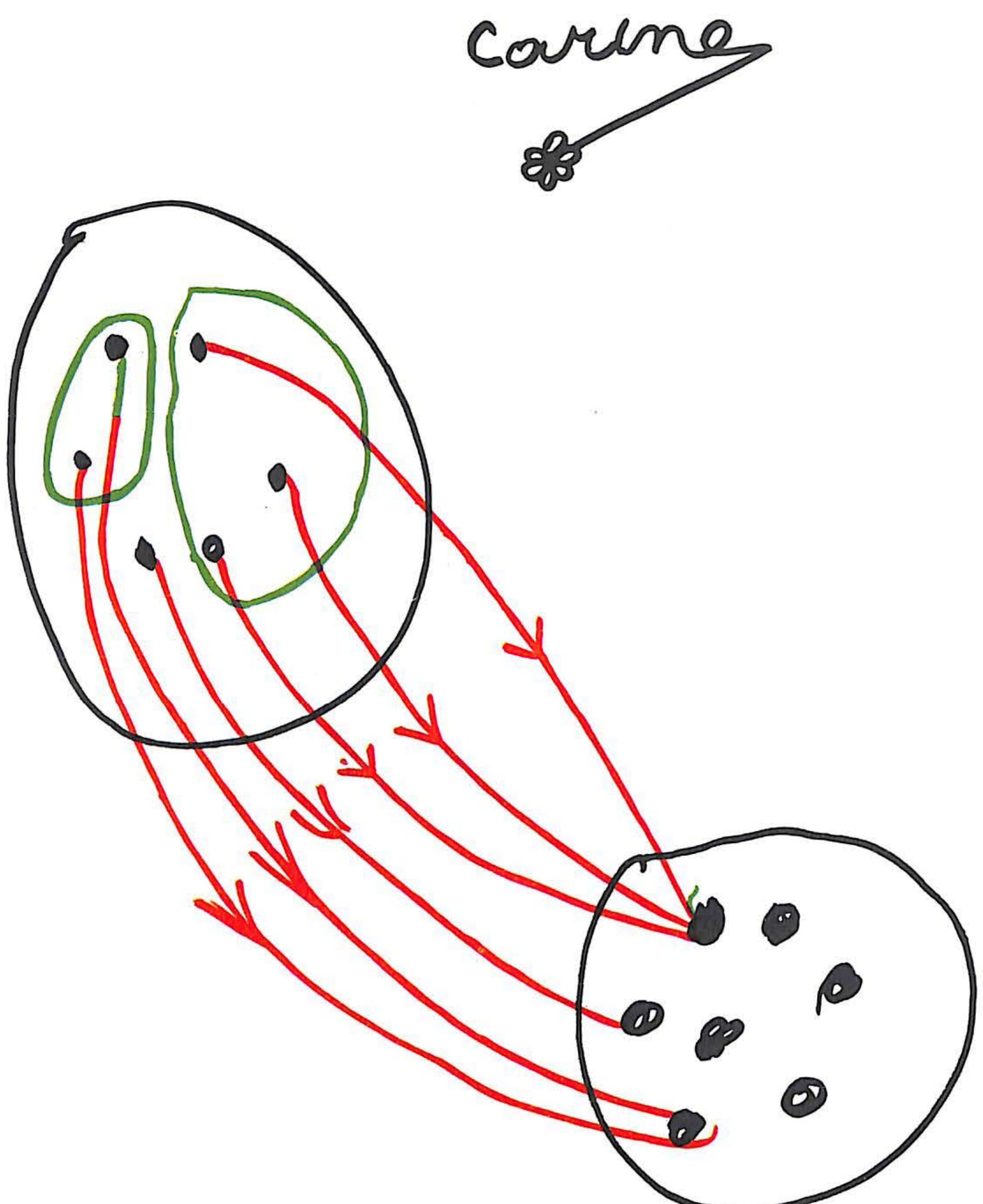
FRÉDÉRIQUE dessine elle-même les deux cordes. Les enfants terminent le graphe.



Échelle : 1 Age : 6 ans 4 mois

FIG. 59

Barbara en net progrès.
Fantaisie de couleurs.
Un accident : flèche retournée.
Que les points sont agréables et beaux.
L'un d'eux remplace le dernier „a" de Barbara.



Échelle : 1

Age : 6 ans 5 mois

FIG. 60

Reproduction parfaite, claire et sans histoire.

Échelle : 0,75

Age : 6 ans 2 mois

FIG. 61

Deux initiatives remarquables de Myriam

1) Aucune raison pour que cette corde verte reste à l'intérieur de la corde noire.
2) FRÉDÉRIQUE a reculé devant le singleton. Myriam la dribble, shote et marque! Goal! Voilà le singleton et par la même occasion le quotient de l'ensemble des cartes par la fonction orange.

COMMENTAIRE DE LA LEÇON 5

DURÉE **:** 20 minutes.

DATE **:** 18 septembre 1967.

CENTRE D'INTÉRET

Anniversaire! Mot magique!
Centre d'intérêt essentiel de l'enfant de 6 ans!
FRÉDÉRIQUE coupe court aux rêveries personnelles en demandant quels élèves ont leur anniversaire ce mois-ci ... et découvre le héros de la leçon : Cédric fête son anniversaire aujourd'hui même.

Anniversaire : jour où les enfants reçoivent des cartes, ce qui introduit un personnage familier, **le facteur**, et la situation étudiée :

DISTRIBUTION d'un **ENSEMBLE** de lettres à un **ENSEMBLE** d'enfants

Exemple, on ne peut plus typique,

d'**APPLICATION** (ou **FONCTION**) d'un ensemble dans un ensemble.

DEUX ENSEMBLES

Pour la première fois, la situation étudiée présente d'emblée deux ensembles (disjoints) :
L'ensemble des cartes destinées aux enfants de la rue.
L'ensemble des enfants de la rue.

GRAPHES

Les élèves proposent spontanément de représenter la distribution des cartes aux enfants par de „longues" flèches.
Sur le schéma on imagine comment la distribution a pu se passer.
FRÉDÉRIQUE maintient astucieusement le contact avec le concret par le procédé d'affabulation dont les enfants raffolent. On imagine que notre ami CÉDRIC est l'un des enfants de la rue.
Que celui-ci sera heureux et fier de constater par la suite qu'il a reçu trois cartes d'anniversaire!
Les enfants se placent volontiers dans une situation abstraite imaginée. Elle les impressionne souvent davantage que la réalité concrète ... qui n'est **PAS LE VRAI MONDE DES ENFANTS.**

Intermezzo

Relation

Fondamentale en MATHÉMATIQUE MODERNE, la notion de **RELATION** se trouve dans la connaissance commune, sous des formes diverses et assez vagues.

— Pour réussir, il faut se créer des **RELATIONS.**

— Je suis en bonne **RELATION** avec les généraux!

— Je pense qu'ils ont même entre eux certaines **RELATIONS** de parenté.

— Accusé, aviez-vous des **RELATIONS** sexuelles avec la victime ?

— Nos **RELATIONS** étaient amicales, sans plus!

— Joséphine et moi, nous n'étions pas dans la même **RELATION** qu' Antoinette et Zéphyrin.

Tracer une flèche entre les deux points

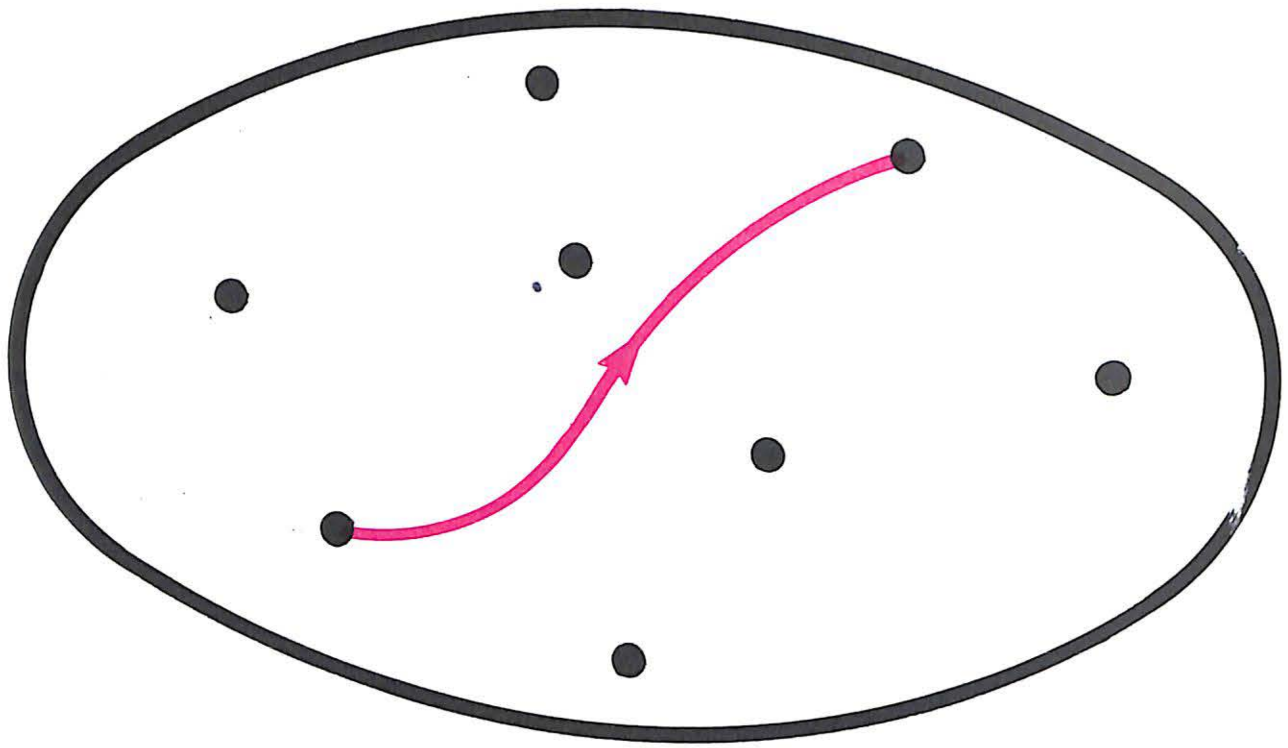


FIG. 62

c'est, dans la langue courante, établir une **RELATION** entre ces deux points.

Notons une relation en rouge et une autre en vert

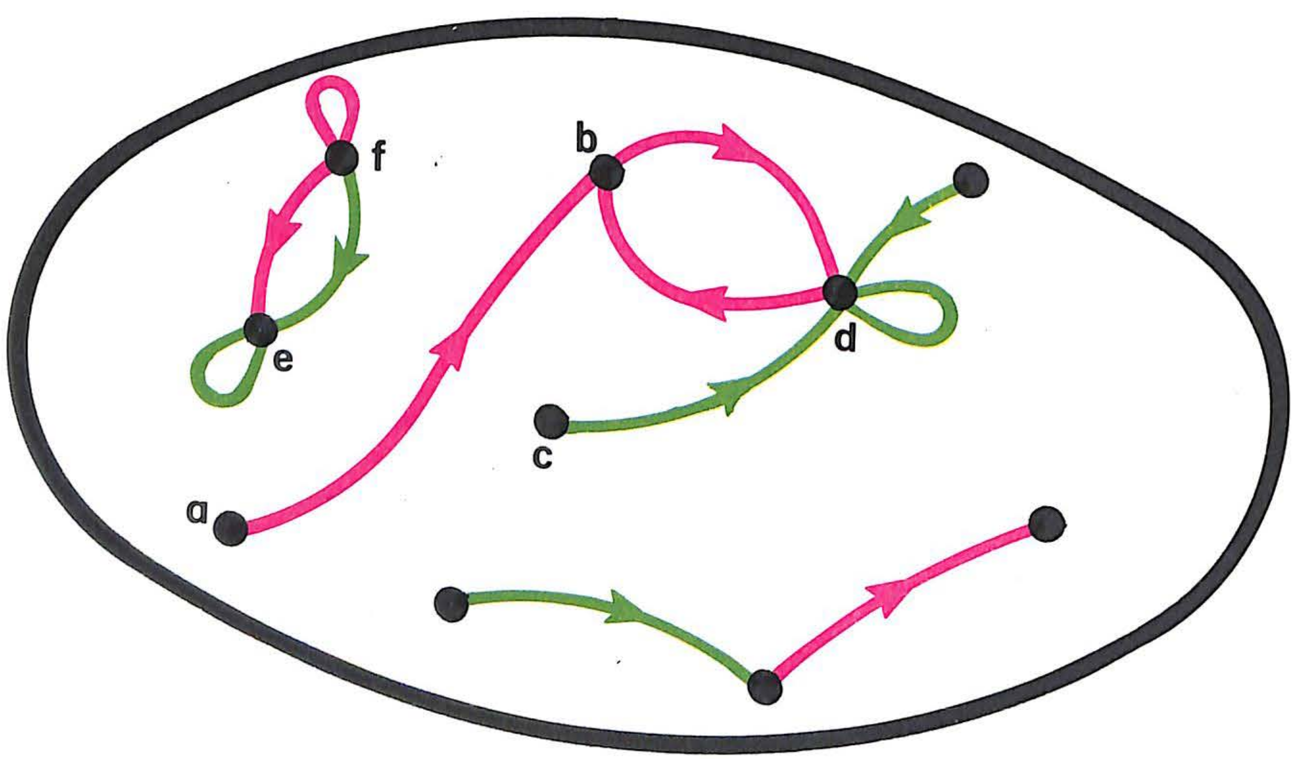


FIG. 63

Nous pourrions parfaitement dire

a et *b* se trouvent dans la relation rouge
c et *d* se trouvent dans la relation verte

Si **a** et **b** *se trouvent dans la relation de père à enfant*
Alors **b** et **a** *ne se trouvent* **pas** *dans la relation de père à enfant*

L'ordre de présentation de *a* et *b* est essentiel dans

a et **b** *sont dans la relation rouge*

. . . ce que le mathématicien souligne en disant de préférence

Le **couple** *(a , b) est dans la relation rouge*

Dès lors, pourquoi s'arrêter ?

DÉFINITION MATHÉMATIQUE

RELATION = Ensemble de couples

* * *

L'IDÉE PRIMITIVE SURNAGE PARFOIS

Anna Zofia KRYGOWSKA

Dans cet intermezzo, nous utiliserons dorénavant le mot **RELATION** au sens de la définition mathématique qui vient de tomber.

Ne nous leurrons pas : cette définition a **modifié** l'idée vague primitive, en la précisant. Le moule de la définition mathématique à **forcé** l'idée originelle : processus fréquent au cours de la mathématisation de concepts de la connaissance commune.

A certains moments . . .
. . . quand les élèves seront fatigués . . .
. . . quand ils seront distraits . . .
. . . quand leur attention sera focalisée ailleurs . . .
. . . quand ils seront absorbés par le caractère propre d'une application . . .
il arrivera que l'ancienne idée vague surnage et prenne la place du concept mathématique.

Selon les circonstances, cette reprise de vigueur de l'idée vague originelle est

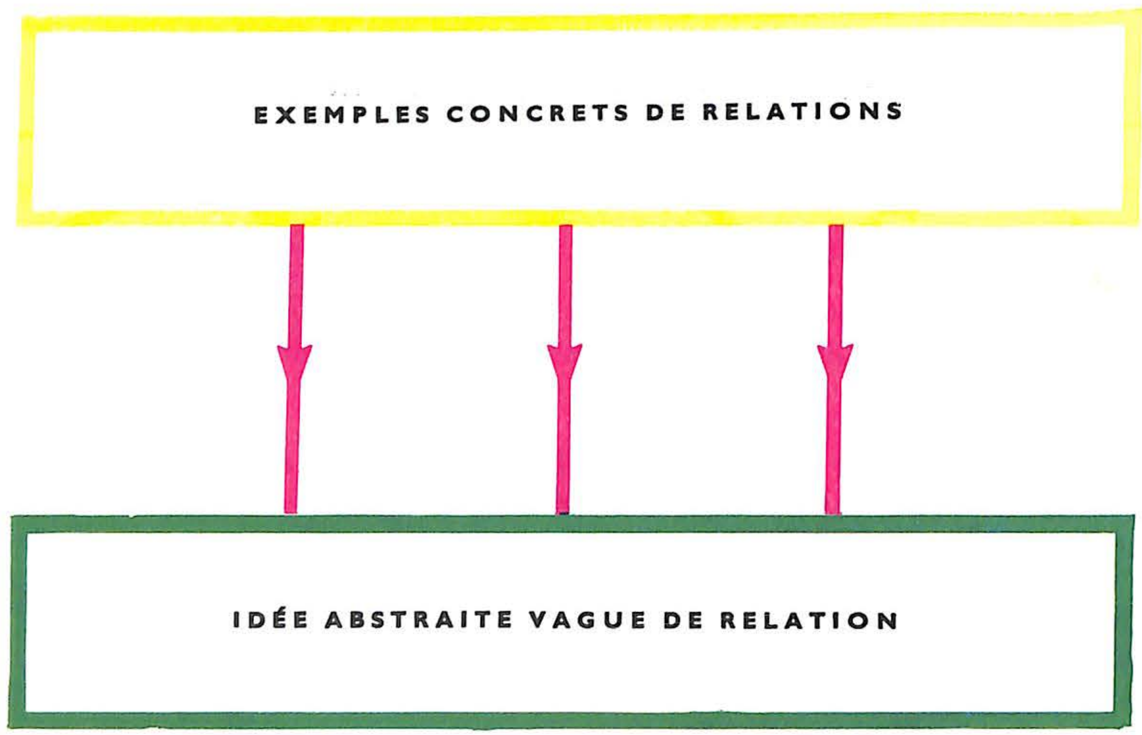
- anodine, voire imperceptible

- **Catastrophique**

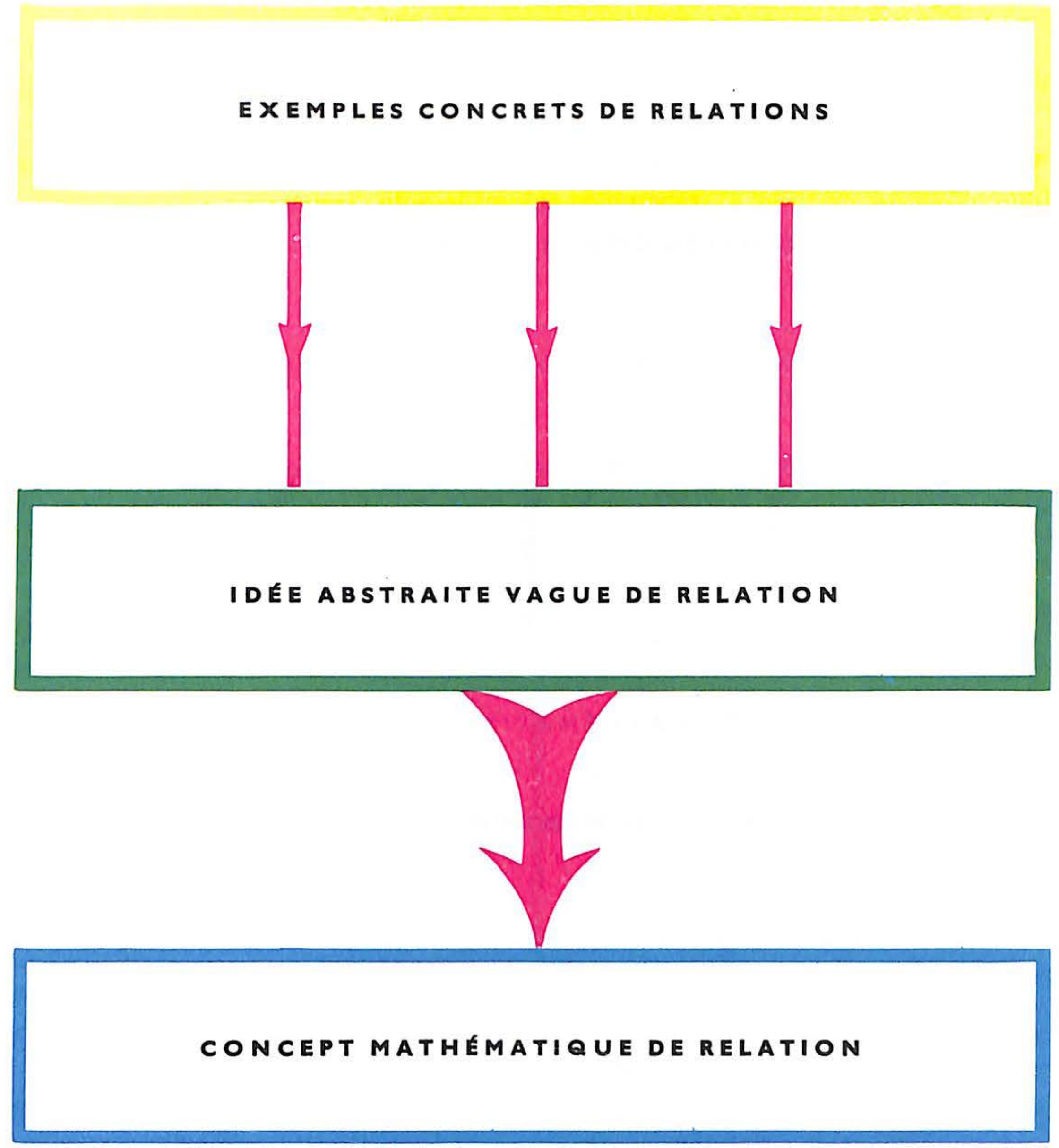
Cette substitution de la notion impure au concept mathématique est un mal **sournois** . . . qui n'épargne même pas le mathématicien professionnel. Il est vrai que celui-ci est immunisé et peut se permettre de jouer avec le feu en utilisant presque simultanément le même mot dans son sens mathématique et son sens courant.
Contrairement à ce que l'on semble croire trop souvent, la rigueur dans l'expression est plus importante avec le débutant qu'avec le mathématicien confirmé.

PARLER AUX ADULTES DE L'ENSEIGNEMENT AUX ENFANTS

Dans cet intermezzo, l'auteur s'adresse directement au lecteur adulte qui possède déjà une première idée abstraite et vague de **RELATION**.
Cette idée s'est évidemment formée peu à peu à partir d'exemples concrets de relations,



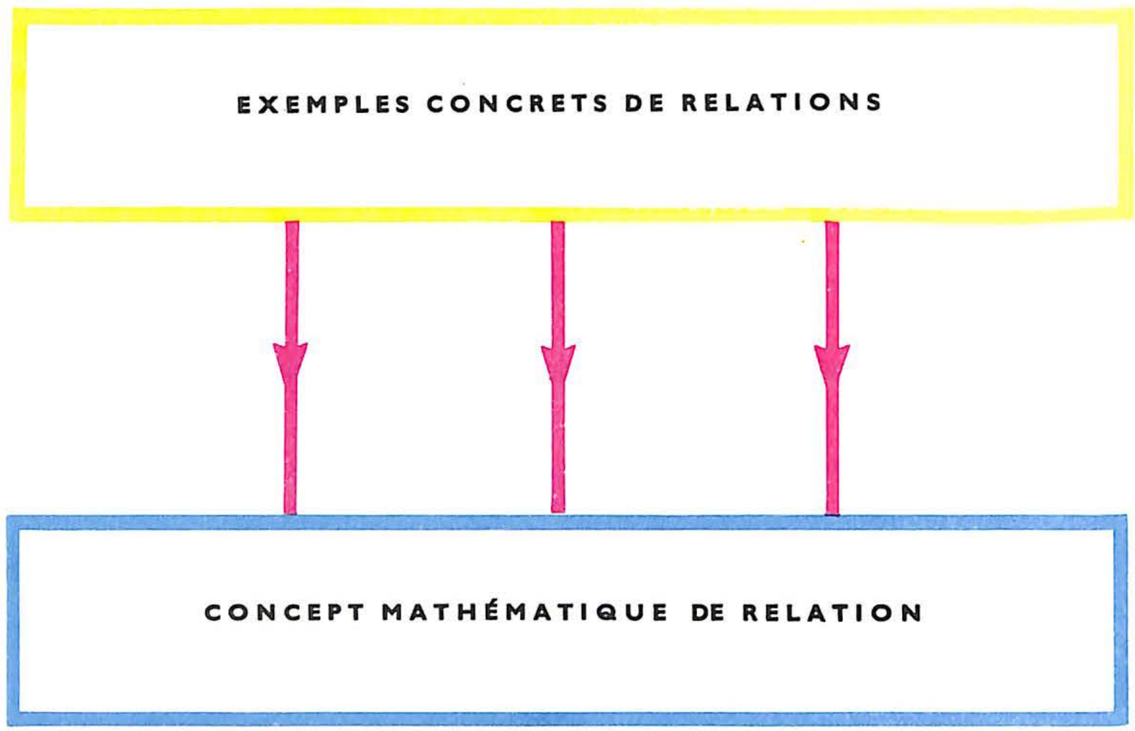
Avec le lecteur adulte, déjà arrivé au stade de l'idée abstraite vague, nous avons tenté d'introduire le concept mathématique de relation à partir de l'idée abstraite vague.



Nous avons signalé que ce procédé peut provoquer de dangereuses interférences entre l'idée abstraite vague et le concept mathématique précis.

LES ÉLÈVES DE SIX ANS PLUS RÉCEPTIFS QUE LES ADULTES

A certains égards, l'enseignement est plus facile avec les élèves de six ans, notamment, parce qu'ils ne sont vraisemblablement pas encore arrivés au stade de l'idée abstraite vague.
FRÉDÉRIQUE brûle ce stade interférant et passe directement au concept mathématique.



Le concept mathématique se forme très progressivement à partir d'exemples concrets, sans utiliser le mot relation, mais en se servant de dessins appelés graphes.
Ceux-ci évitent à FRÉDÉRIQUE une autre difficulté que le lecteur a peut-être déjà soulevée.

RELATION = ENSEMBLE DE COUPLES

— ... Fort bien ... Mais ... **Qu'est-ce qu'un couple ?**

Les mathématiciens répondent à cette question de bien des manières plus ou moins naturelles, plus ou moins heureuses, plus ou moins commodes.

Peu importe ici.

Voici tout ce que nous devons savoir, ce sur quoi **tous** les mathématiciens s'accordent

Tout couple est noté (a, b)

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ et } b = d$$

a est l'ORIGINE du COUPLE (a, b)
b est l'EXTRÉMITÉ du COUPLE (a, b)

$\Leftrightarrow$ est le signe d'équivalence logique et se lit ... *si et seulement si* ...

GRAPHES

Ce graphe

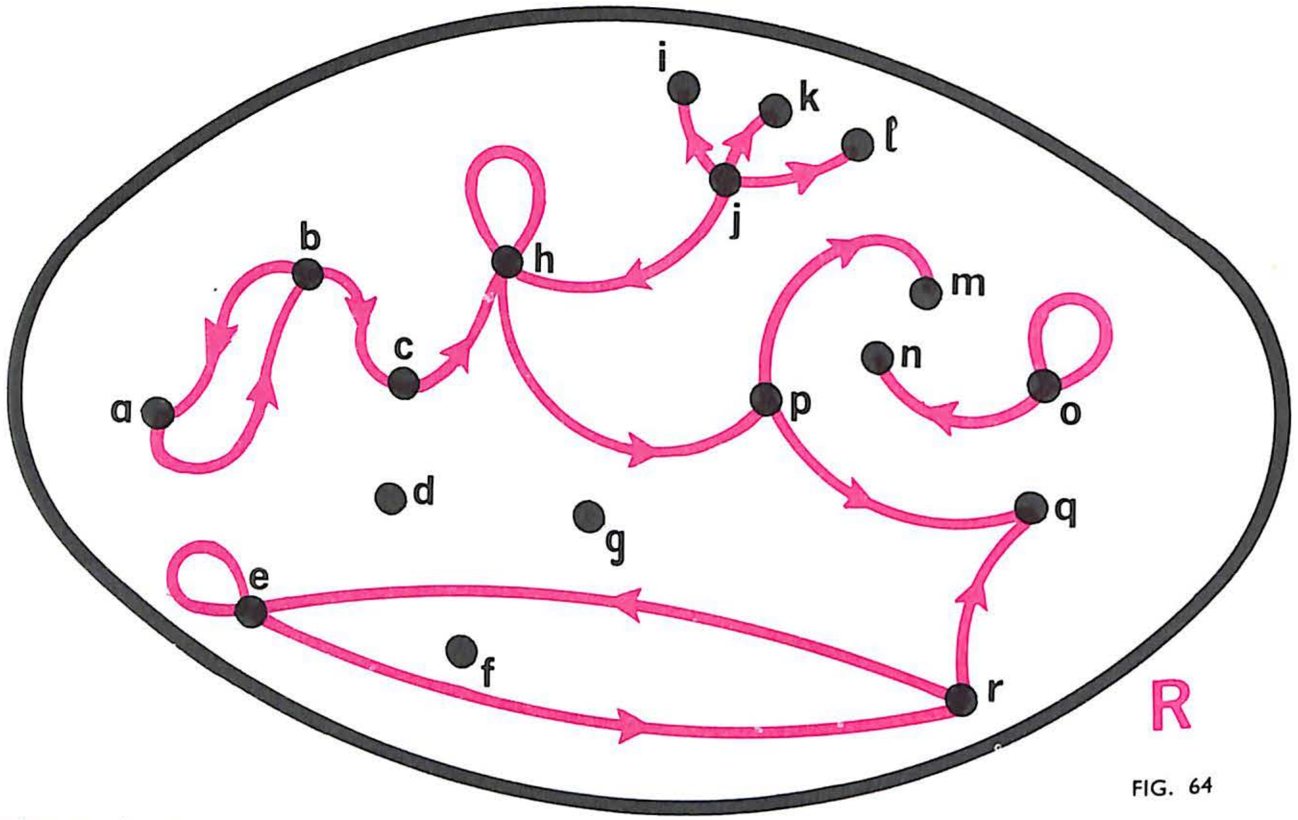


FIG. 64

représente la **RELATION**

$$\mathbf{R} = \left\{ \begin{array}{llllll} (a\,,b)\ , & (b\,,a)\ , & (b\,,c)\ , & (c\,,h)\ , & (e\,,e)\ , & (e\,,r) \\ (h\,,h)\ , & (h\,,p)\ , & (j\,,h)\ , & (j\,,i)\ , & (j\,,k)\ , & (j\,,l) \\ (o\,,n)\ , & (o\,,o)\ , & (p\,,m)\ , & (p\,,q)\ , & (r\,,e)\ , & (r\,,q) \end{array} \right\}$$

Chaque flèche rouge du graphe *indique* un couple de la relation **R**

MATHÉMATIQUE MODERNE = MATHÉMATIQUE RELATIONNELLE

Les relations les plus diverses jouent un rôle essentiel en mathématique moderne.
Les élèves de FRÉDÉRIQUE représentent des relations concrètes issues de leur connaissance commune par des schémas multicolores.
Ces *graphes* facilitent l'étude de ces situations en permettant un raisonnement abstrait qui reste proche de la réalité et contribuent peu à peu à la formation du concept mathématique de relation.
Au moyen des graphes, FRÉDÉRIQUE tire la notion mathématique de **RELATION** directement de la connaissance commune des enfants.

ABSTRACTION FAMILIÈRE

En procédant de la sorte, les concepts mathématiques conservent le caractère familier des situations qui leur ont donné naissance.
Cette abstraction n'a rien d'effrayant. Bien au contraire!

ABAISSER LE NIVEAU D'ABSTRACTION DES CONCEPTS

La mathématique progresse souvent en érigeant, par abstractions successives, un édifice très élevé, élégant, à l'armature subtile et fragile.
Il peut en résulter une impression de vertige, mêlée à la crainte perpétuelle de l'écroulement.
Le niveau d'abstraction n'est pas un caractère intrinsèque d'une notion mais dépend de la manière de la présenter.
La science progresse encore en abaissant le niveau d'abstraction de ses concepts. Pour atteindre ce but, elle s'écarte de la voie historique et introduit les notions fondamentales de manière plus directe.

L'introduction des relations, fonctions, etc ... , à partir de la connaissance commune par le moyen des graphes est un exemple frappant d'abaissement du niveau d'abstraction.

GRAPHE : MOYEN PÉDAGOGIQUE ET MATHÉMATIQUE APPLIQUÉE

FRÉDÉRIQUE a utilisé les graphes pour des raisons pédagogiques.

Le lien affectif entre les enfants et les graphes multicolores éclate sur chacun des dessins enfantins reproduits dans le présent ouvrage.

Les élèves de FRÉDÉRIQUE, contemporains de l'Art abstrait, apprécient tout particulièrement ces jolis dessins colorés.

Les graphes sont utilisés dans de nombreuses applications ...
... en théorie de l'information comme en psychologie ...
... en linguistique comme en théorie des circuits électriques ...

Impressionnante manifestation d'unité.
Tout est pour le mieux dans le meilleur des mondes possibles.

Mathématique moderne = Mathématique appliquée.

LE LANGAGE DES FLÈCHES

Les flèches ne **représentent** pas les couples.
Une flèche rouge signale qu'un couple appartient à la relation rouge.
Une flèche bleue indique qu'un couple appartient à la relation bleue.
Isolons ces deux flèches d'un graphe

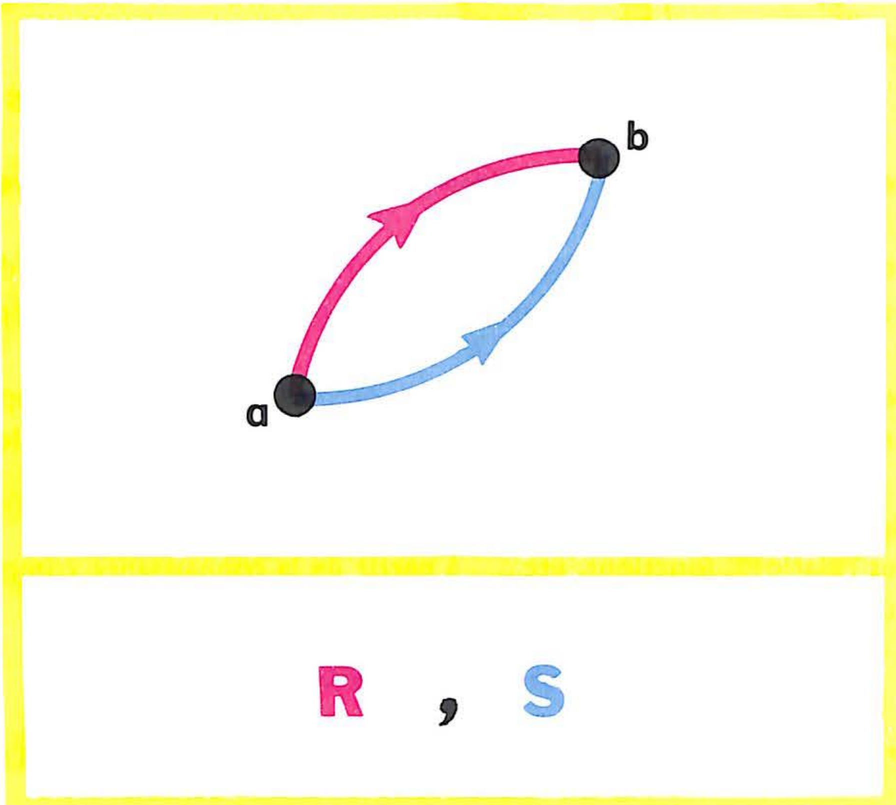


FIG. 65

La flèche rouge signale : $(a\ ,\ b)\ \in\ \mathbf{R}$

La flèche bleue signale : $(a\ ,\ b)\ \in\ \mathbf{S}$

Les flèches ne sont pas des couples.
Les graphes ne sont pas des relations.
Les points du dessin ne sont pas des objets.
Mais, adaptée aux relations, la terminologie des graphes et des flèches rend le langage plus intuitif et l'allège sans en aliéner ni la clarté, ni la rigueur.

Certaines réactions des élèves, révèlent qu'ils utilisent inconsciemment le mot flèche pour désigner le concept de couple, qui s'introduit peu à peu, via les flèches.

Un élève doit tracer une flèche rouge de a vers b

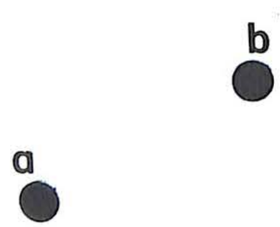


FIG. 66

et produit ce dessin

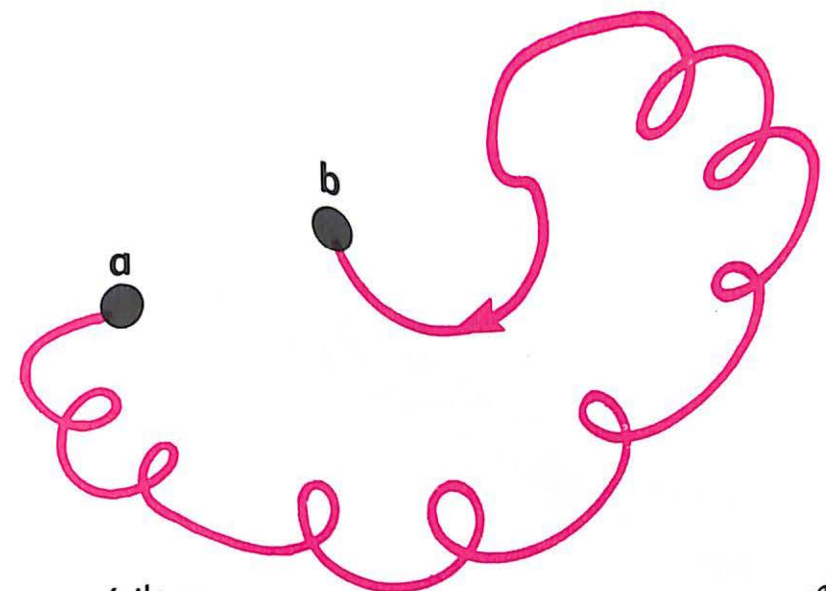


FIG. 67

soulignant de manière puérile et saisissante qu'il importe seulement de connaître les points de départ et d'arrivée ... c'est-à-dire le **COUPLE**.

Autre exemple :

En raisonnant sur une situation partiellement décrite par ce graphe

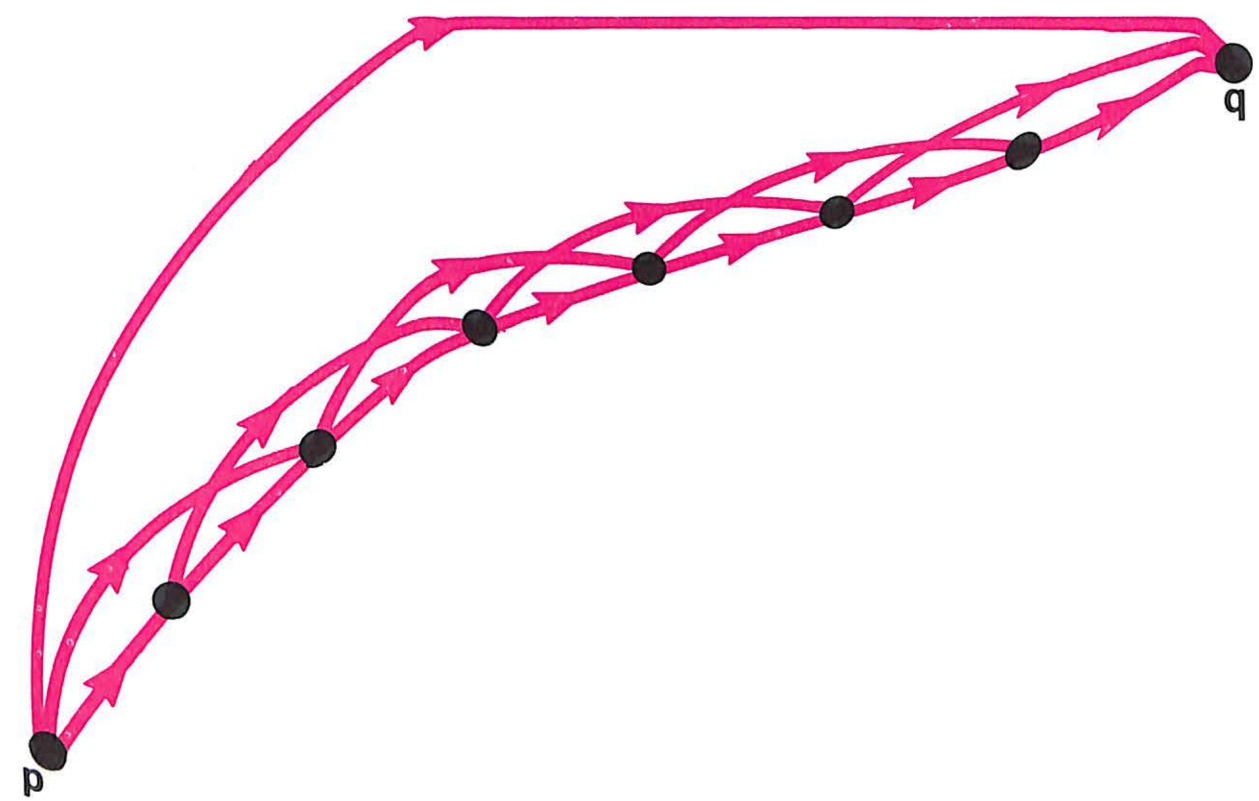


FIG. 68

cette élève conclut ... p , q se trouvent dans la relation rouge ... et se précipite pour tracer une flèche rouge „directe" de p vers q

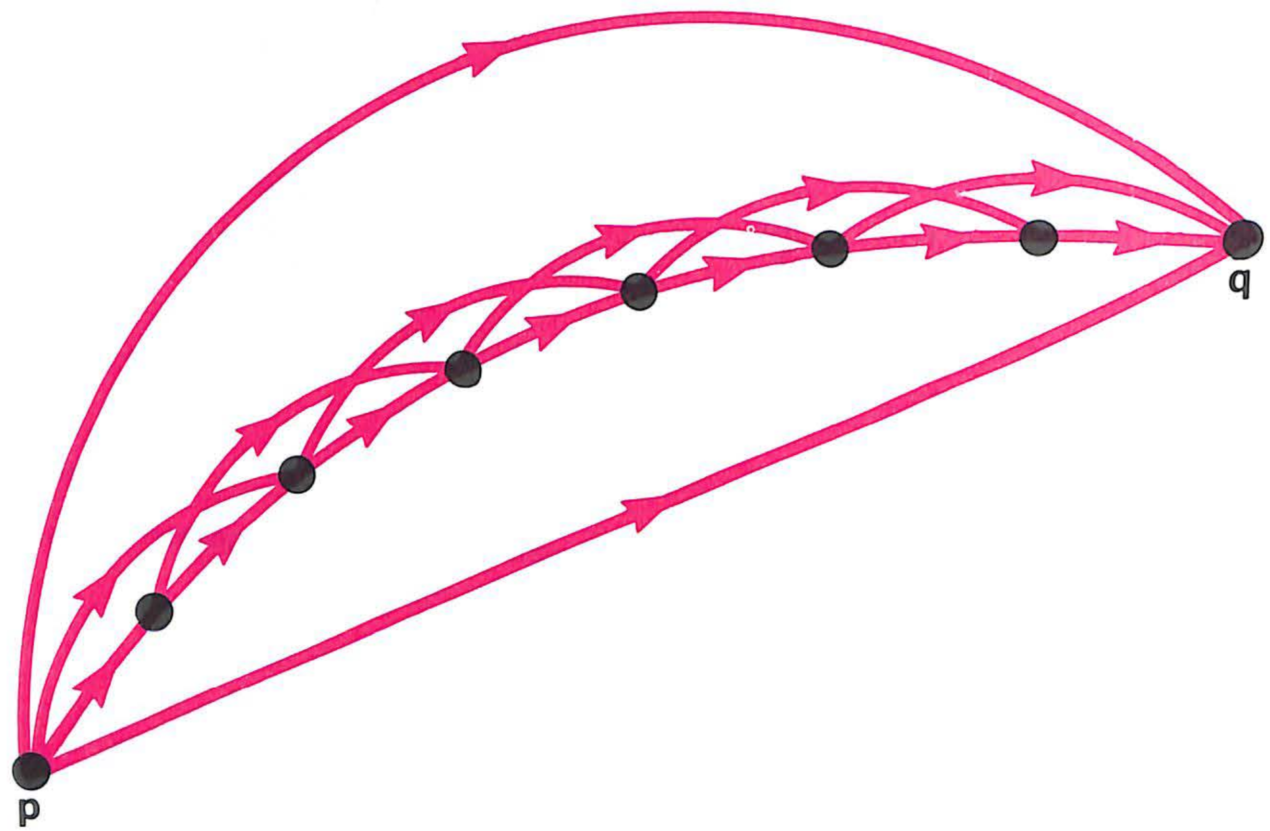


FIG. 69

Mais le chœur de la classe gronde.

— Cette flèche a déjà été dessinée!

Nos élèves savent pertinemment bien, qu'au pied de la lettre :

— Cette flèche directe n'avait pas encore été tracée.

Ce que l'on avait déjà tracé était

— Une autre flèche rouge d'origine p et d'extrémité q

Appelant « même flèche » deux flèches de même couleur d'origine p et d'extrémité q, nos élèves passent enfin à la notion de COUPLE.

RÉCIPROQUE

Voici une relation **R** ... c'est-à-dire : voici un graphe.
Retournons toutes ses flèches.
On obtient un nouveau graphe ... une nouvelle relation.

La relation $\mathbf{R}^{-1}$ = réciproque de la relation **R**

En bref :

Réciproque d'une relation = Relation retournée

Qu'arrive-t-il en retournant deux fois de suite une relation ?

$$(\mathbf{R}^{-1})^{-1} = \mathbf{R}$$

R et $\mathbf{R}^{-1}$ sont des relations réciproques

Dans la leçon 3, la complainte des chaussures
... montre son soulier droit ...
... montre son soulier gauche ...
introduit des relations réciproques.

En observant les graphes de certaines relations, on observe la propriété

DE TOUT POINT PART AU PLUS UNE FLÈCHE

Ces relations sont appelées FONCTIONS ou APPLICATIONS

FONCTION = APPLICATION
De TOUT POINT part AU PLUS UNE flèche

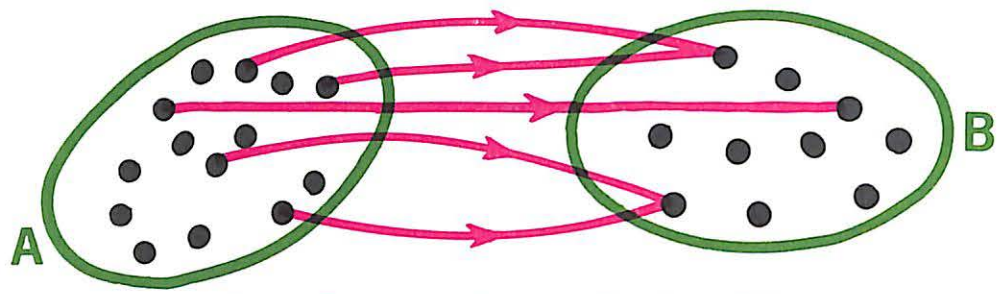
Le couplet des bottines
... montre sa chaussure droite ...
... montre sa chaussure gauche ...
présente des FONCTIONS RÉCIPROQUES

LES LOCUTIONS SYNONYMES

FONCTION de A **VERS** B
APPLICATION de A **VERS** B

signalent de plus que

chaque flèche de la FONCTION part d'un point de A et aboutit en un point de B



FONCTION DE A VERS B

FIG. 70

Nous avons rencontré une situation plus particulière encore et fort importante avec le facteur

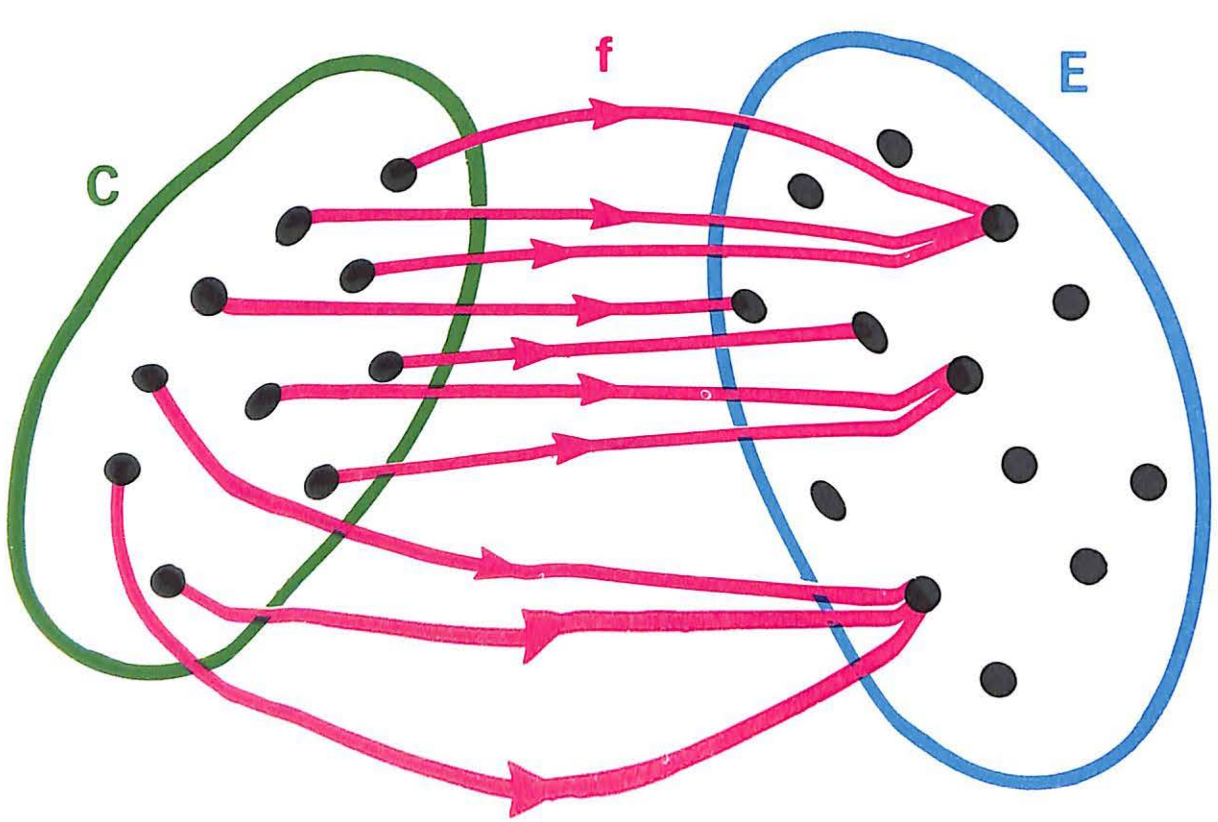


FIG. 71

Appelons f cette fonction de C **VERS** E

Cette fois, **TOUT POINT** de C est l'origine d'une (et d'une seule) flèche de f
On signale ce fait en précisant

f est une **FONCTION** de C **DANS** E

f est une **APPLICATION** de C **DANS** E

ce qui se note encore

$f : C \longrightarrow E$

PROTOTYPES PÉDAGOGIQUES

L'enseignement traditionnel des mathématiques faisait une grande consommation de problèmes-types. Certains de ceux-ci ont joué dans le passé un rôle glorieux en préfigurant quelques-unes des grandes structures de la mathématique actuelle.

Les problèmes-types concernant les achats ont introduit les équations linéaires avant la découverte des algorithmes adéquats pour les exprimer et ont contribué à dégager la notion d'espace vectoriel (ou de système linéaire, comme on disait jadis).

Dans son enseignement, FRÉDÉRIQUE introduit et utilise quelques **PROTOTYPES PÉDAGOGIQUES** de notions qui seront dégagées ultérieurement.

La distribution d'un ensemble de lettres à un ensemble de personnes est le **PROTOTYPE PÉDAGOGIQUE** utilisé par FRÉDÉRIQUE pour la notion d'application ou de fonction d'un ensemble dans un ensemble.

La distribution de lettres correspond fidèlement à celle d'application **A → B**, jusque dans le jargon parlé des mathématiciens professionnels, lorsqu'ils disent que la fonction f **envoie** a en $f(a)$
De plus, la démarche naturelle du facteur : répartir d'abord les lettres par destinataires, et remettre ensuite les « paquets » ainsi formés est exactement celle qui interviendra plus tard dans les théorèmes de morphismes.

6

Problèmes

Dans des situations mathématisées

Chaque élève reçoit une feuille de format 20 cm × 30 cm reproduisant ce dessin.

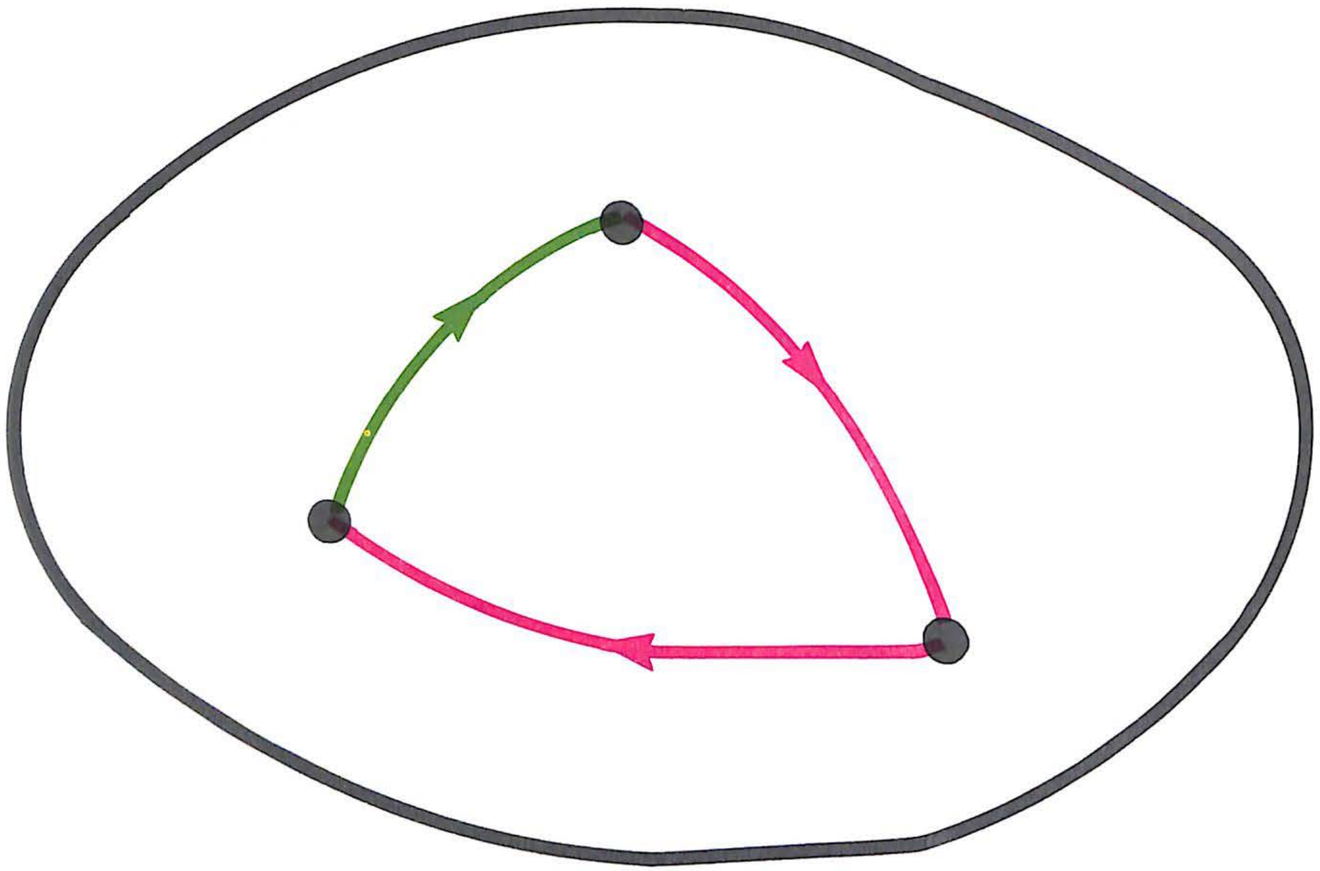


FIG. 72

— Revoici notre jeu des Frères et Sœurs et cette fois, dans un ensemble de 3 enfants. Reconnaissez-vous les filles et les garçons ?

Un enfant montre le garçon et les deux filles.

— Comment indiquer sur le dessin, ici un garçon et là une fille ?

— **Un point rouge et un point vert.**

— L'idée n'est pas mauvaise mais les flèches sont déjà rouges et vertes.

— **On pourrait faire un petit garçon et une petite fille.**

— Oui mais c'est difficile!

— **Mais non! C'est facile!**

— Viens dessiner au tableau.

L'enfant commence le dessin d'un garçon.

FIG. 73

FRÉDÉRIQUE l'arrête.

— Veux-tu dessiner une fille à présent ?

FIG. 74

— Très bien! Mais devons-nous dessiner les yeux ? Un rond et une petite brosse pour un garçon; un rond et deux tresses pour une fille; n'est-ce pas suffisant ?

FIG. 75

— Indiquez les filles et les garçons sur votre dessin.

. . .

— Toutes les flèches ont-elles été dessinées ?

. . .

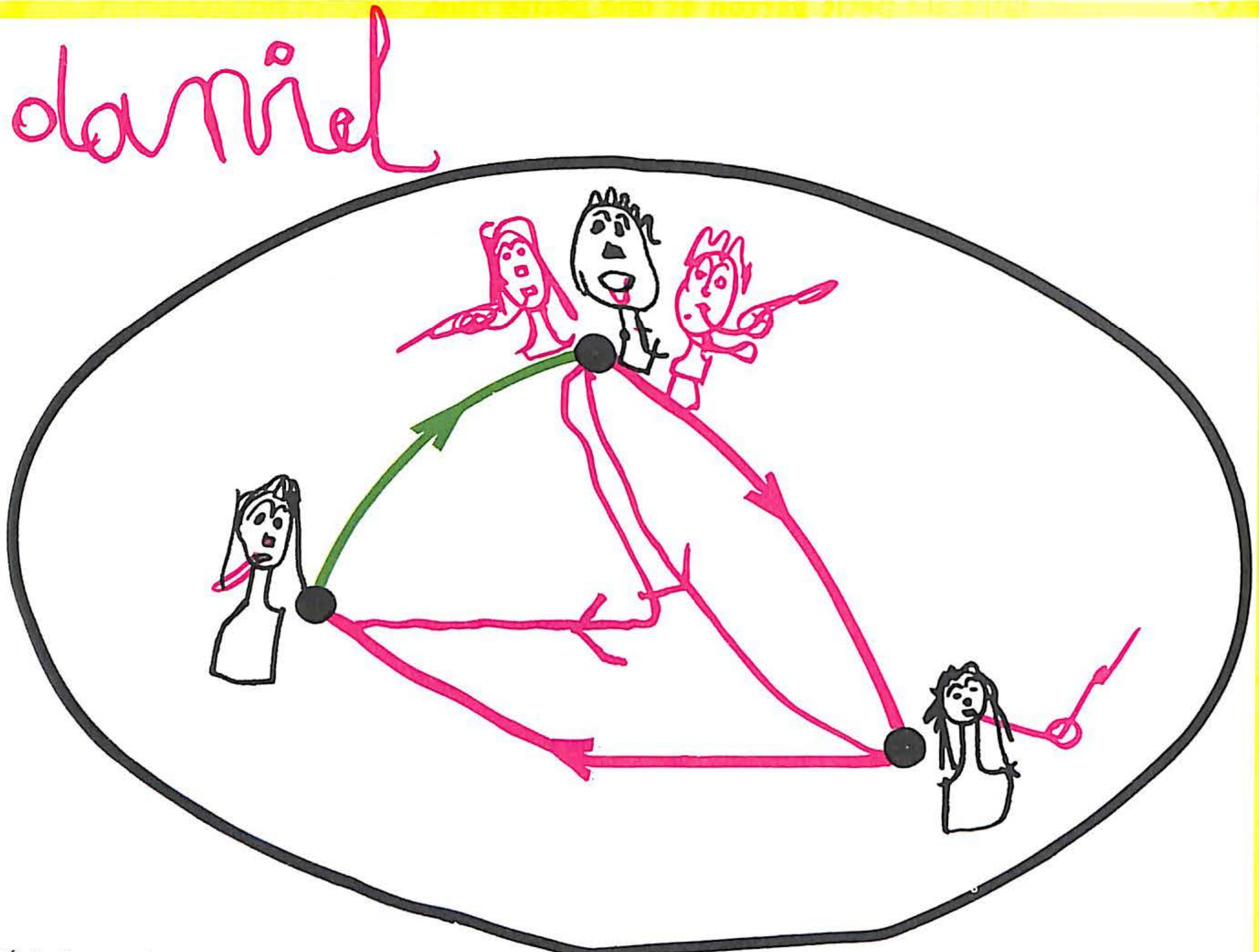
— Quelles flèches ont été certainement oubliées ?

. . .

— Dessinez-les!

. . .

Les élèves tentent de résoudre individuellement le problème posé.

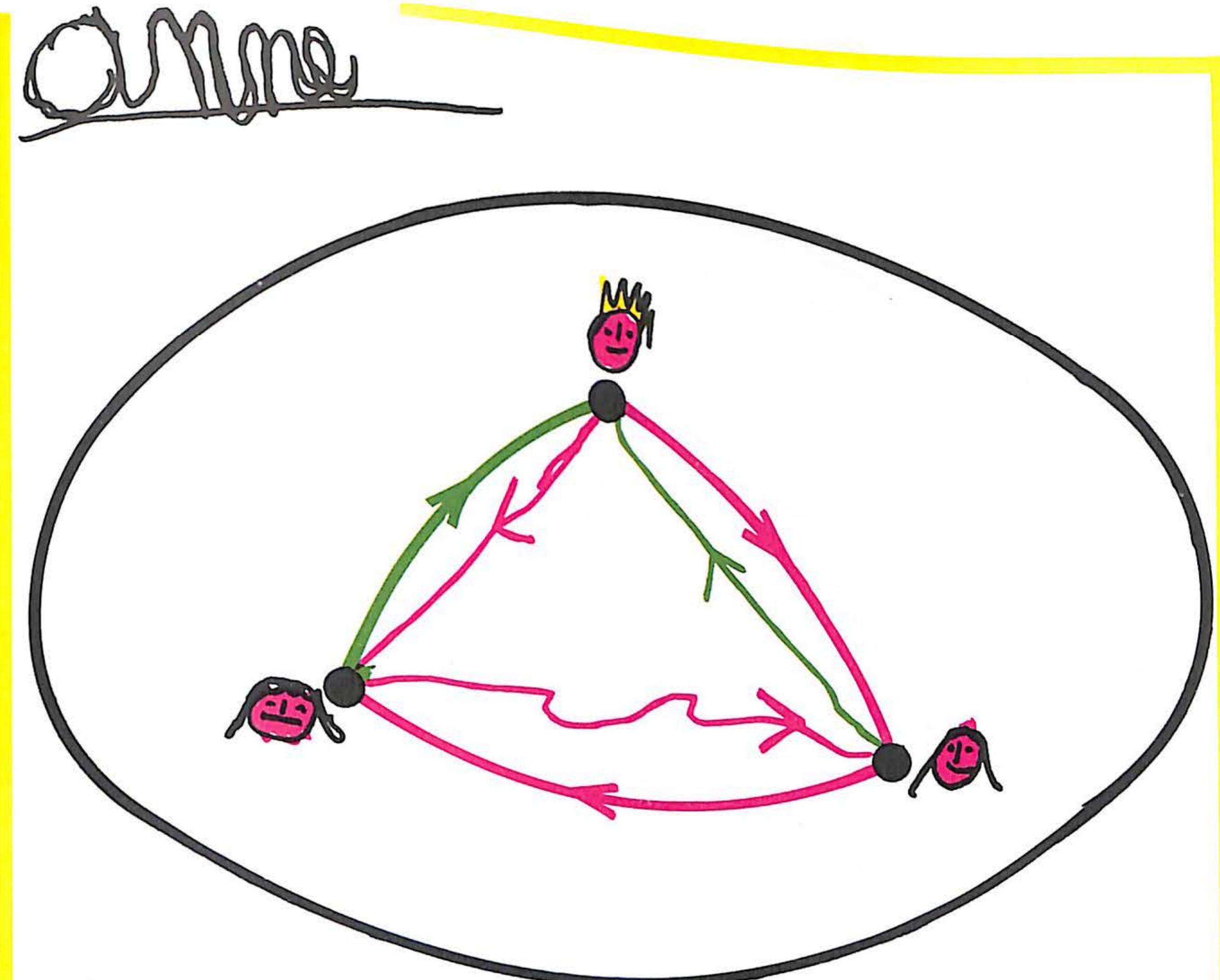


Échelle : 0,67

Age : 6 ans 7 mois

FIG. 76

Daniel n'a dessiné aucune flèche inexacte.
Il a répété une flèche donnée et en a omis deux.
Il a bien mis les filles et les garçons.
Il reste l'homme au lapin.
Sa propension au dessin l'empêche de se maintenir à la convention des schémas pour désigner filles et garçons.
Une des flèches dessinées par Daniel semble refléter vaguement la première idée de couple.



Échelle : 0,67

Age : 5 ans 10 mois

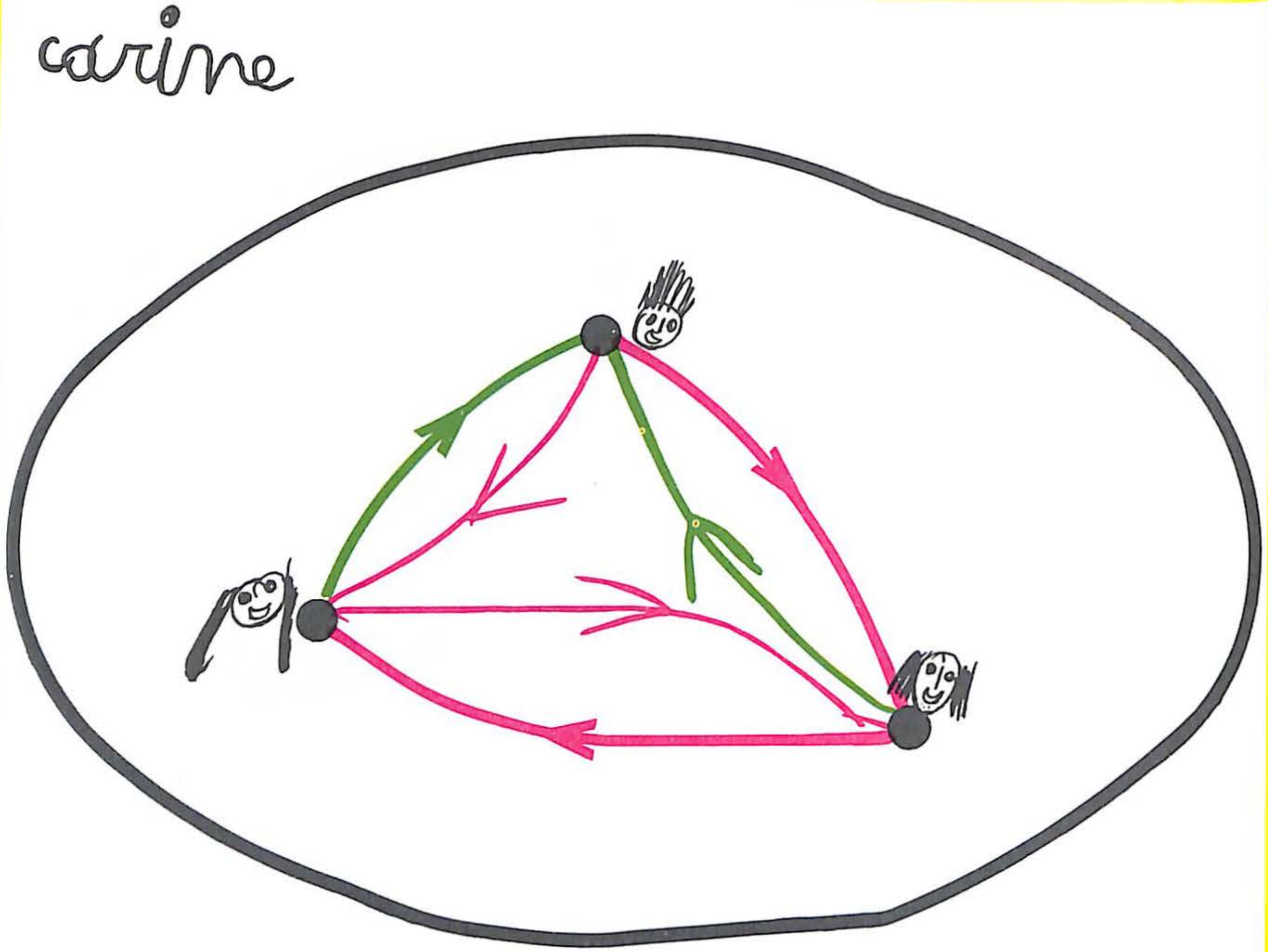
FIG. 77

Dessin correct.

La flèche rouge en zig-zag souligne nettement la notion de couple.

Anne embellit les schémas conventionnels, leur remet des yeux et les colorie.

Elle a une vision sociale bien saine : le garçon est roi!



Échelle : 0,67

Age : 6 ans 5 mois

FIG. 78

Dessin correct.

Carine reste sobre, mais les schémas conventionnels excitent sa compassion et sa fantaisie.

— Voici un deuxième travail

Chaque enfant reçoit ce graphe.

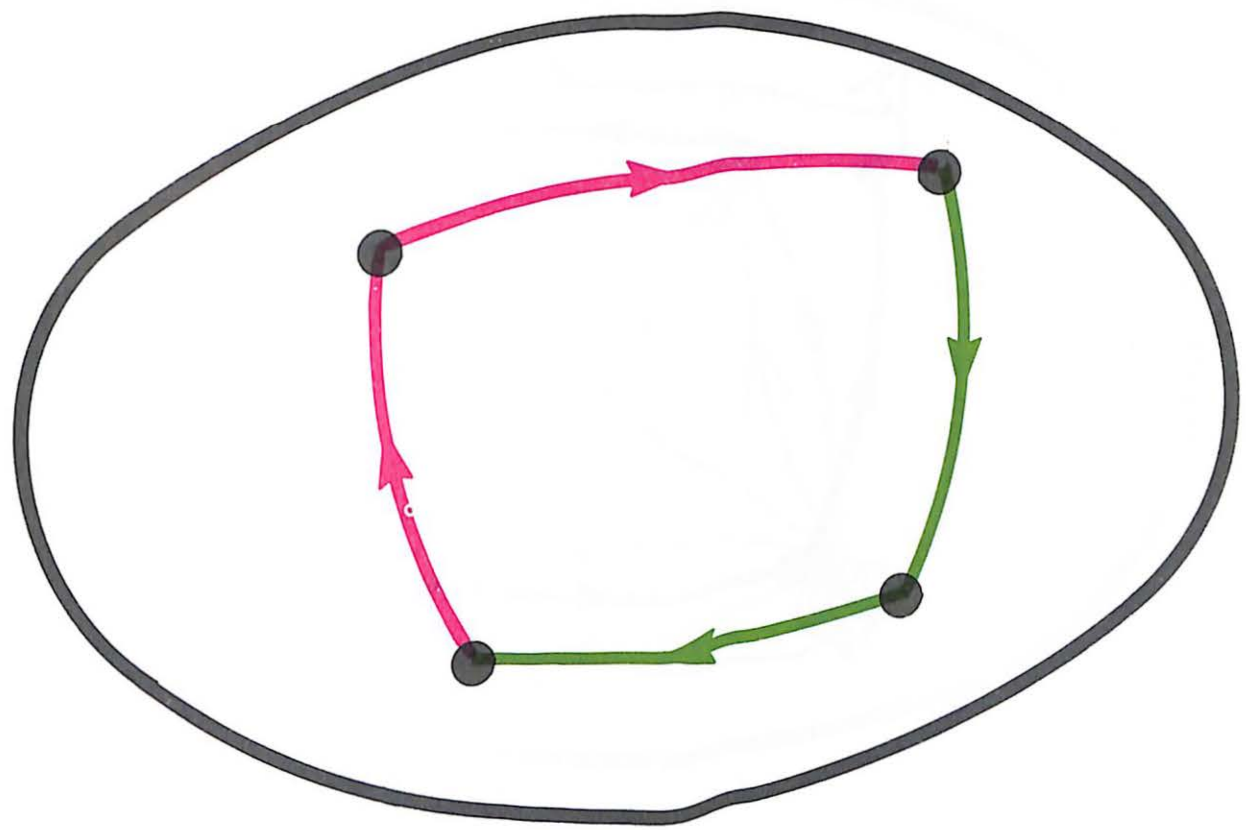


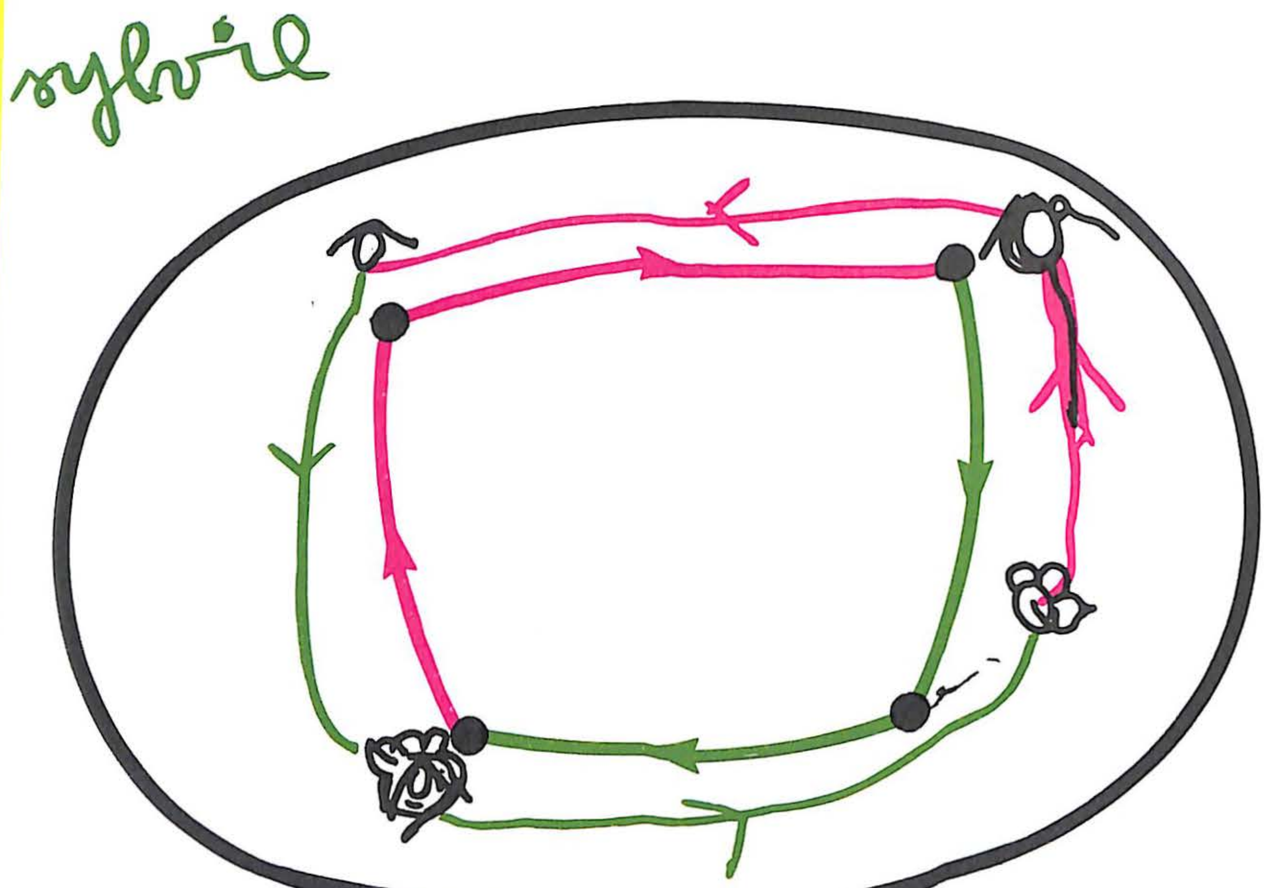
FIG. 79

— Indiquez les filles et les garçons.

Souvenez-vous : petite brosse et longues nattes!

Et dessinez toutes les flèches qui manquent.

Au travail!



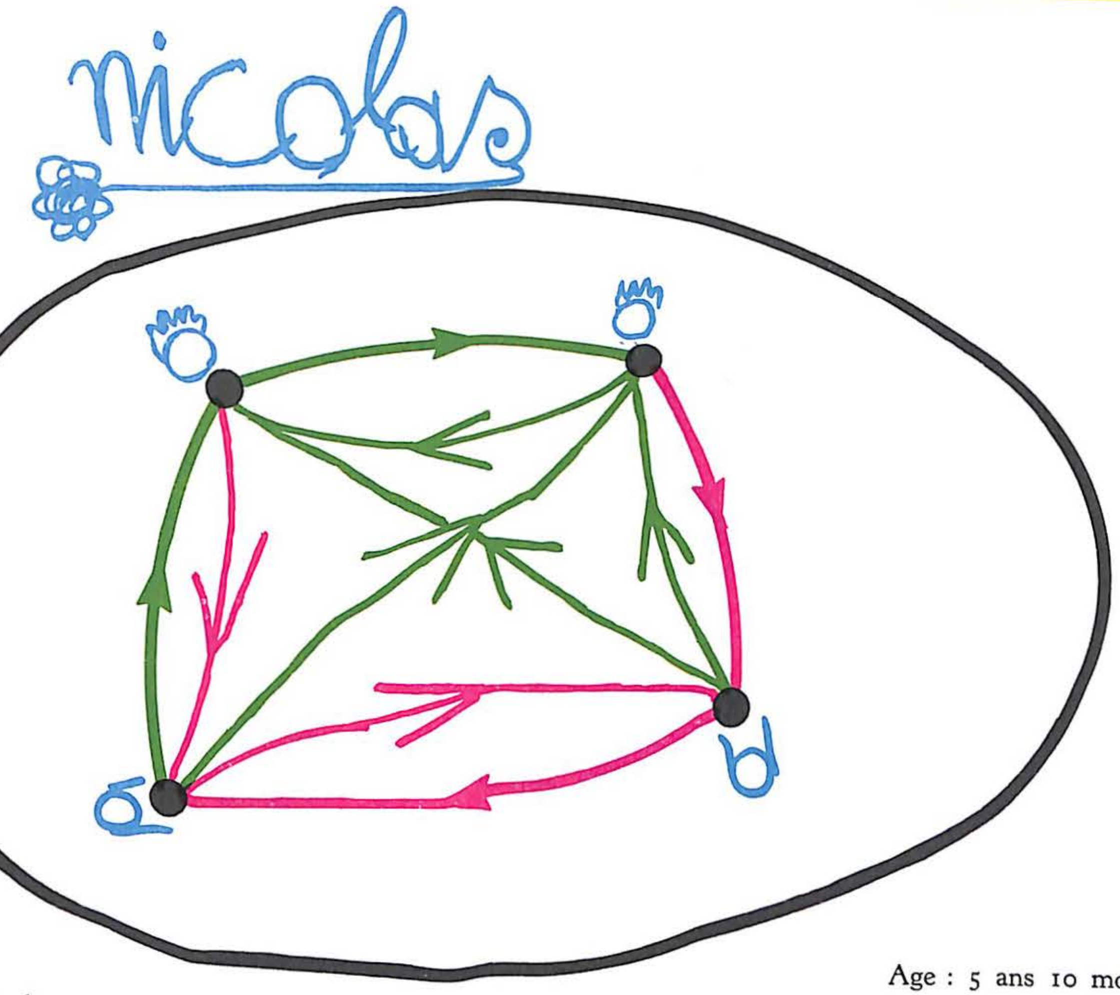
Échelle : 0,67

Age : 6 ans

FIG. 80

La découverte de Nicolas n'a pas encore atteint Sylvie mais à part l'oubli des flèches croisées, le dessin est correct.

Les schémas conventionnels sont acceptés; mais leur caractère ponctuel les fait confondre avec les points.



Échelle : 0,67

Age : 5 ans 10 mois

FIG. 81

Nicolas semble apprécier la sobriété des schémas conventionnels. Il aime pourtant dessiner et embellir ainsi que l'atteste la fleur de sa signature.

Il utilise sa découverte des flèches croisées mais oublie toujours les retours.

— Dernier jeu : vous serez le facteur.
Voici les 7 cartes illustrées à distribuer à ces 5 enfants.

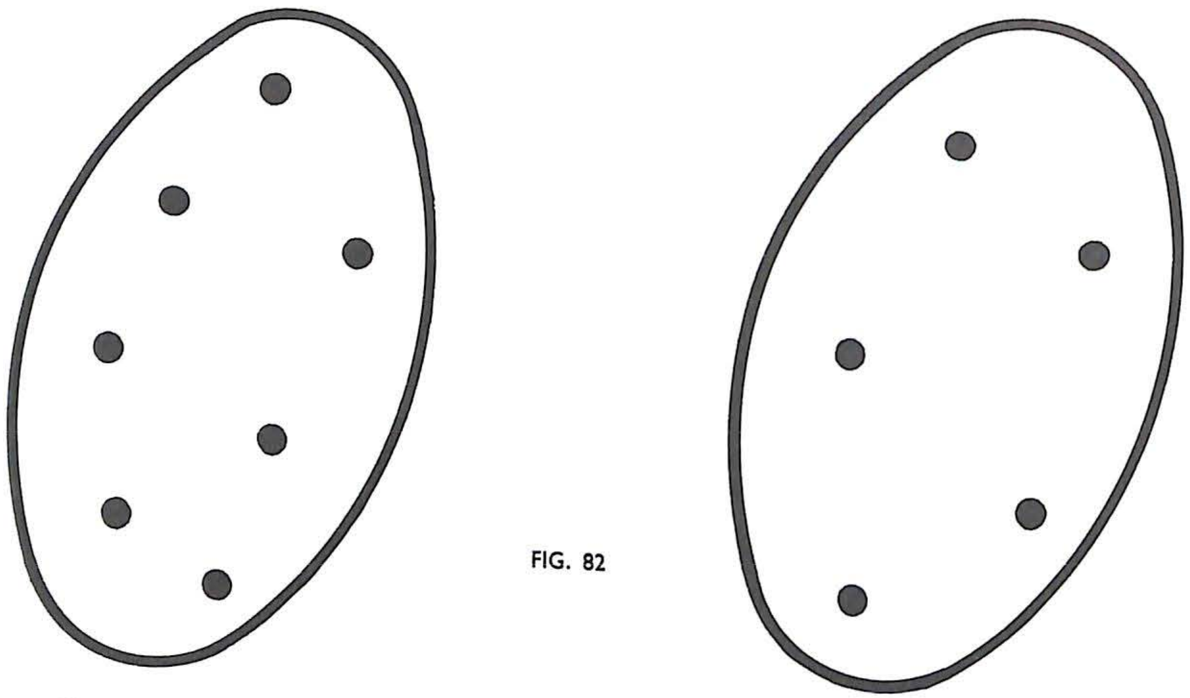


FIG. 82

— Quatre d'entre eux ont leur anniversaire aujourd'hui et reçoivent des cartes. Le cinquième n'en reçoit pas.

— **On peut donner trois cartes à un enfant ?**

— Oui, si vous le voulez.

— **C'est Cédric!**

— Ce n'est pas la même histoire que l'autre fois.

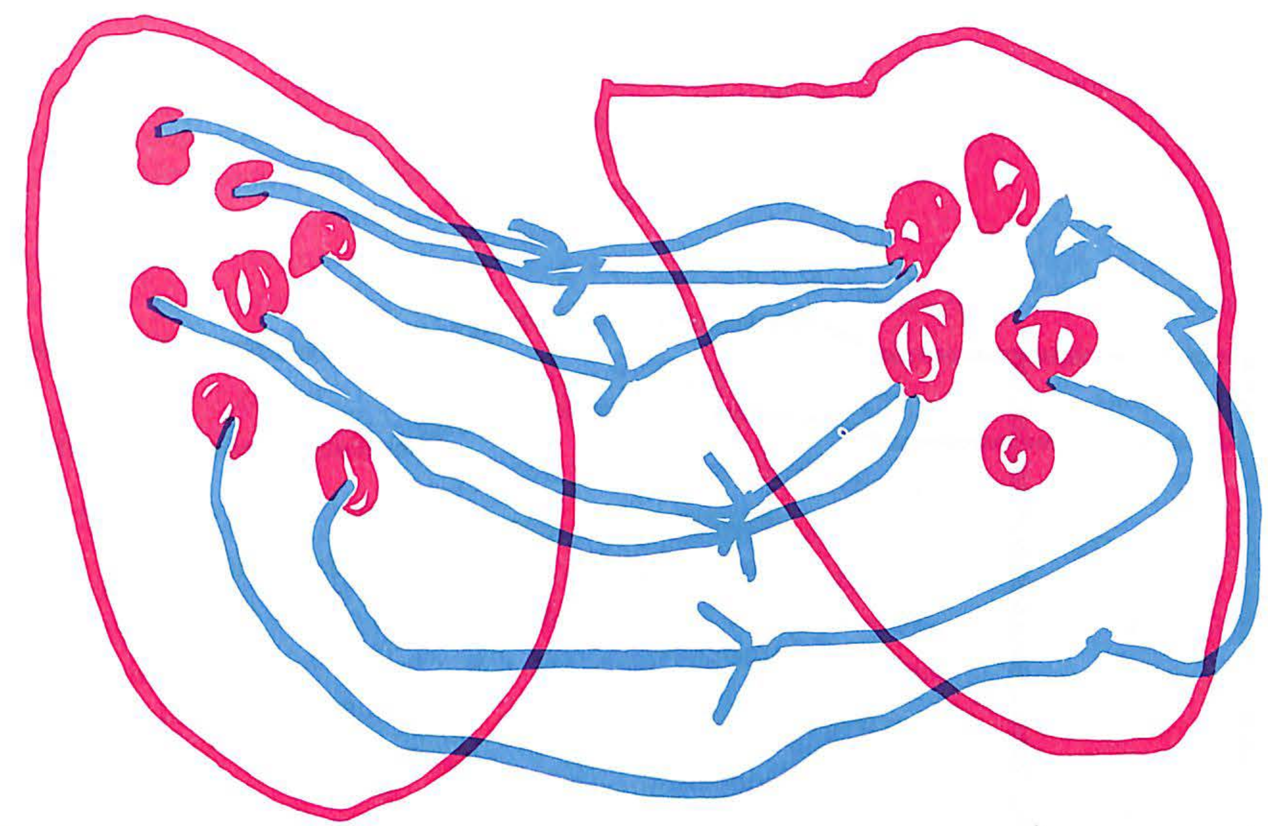
— **C'est une histoire que j'invente ?**

— **On ne donne pas toutes les cartes au même enfant!**

— Toutes les cartes doivent être distribuées; un seul enfant n'en reçoit pas.

Les élèves dessinent. FRÉDÉRIQUE observe.

— Jean-Jacques est un bon facteur mais il n'a pas distribué tout son courrier.
Christian est trop généreux. Il a donné une carte à chaque enfant. L'un d'entre eux cependant n'avait pas son anniversaire.
Pepito a bien distribué ... plus de 7 cartes!



Échelle : 0,63

Age : 5 ans 9 mois

FIG. 83

Hervé a commis une erreur.

Il allait bien dessiner sa dernière flèche mais le chemin était très long, si long qu'Hervé finit par oublier son point d'arrivée. Au moment d'aboutir victorieusement, il se ravise, réfléchit et se trompe.

COMMENTAIRE DE LA LEÇON 6

DURÉE : 40 minutes

DATE : 20 septembre 1967.

PROGRESSION

Leçons	RELATIONS ... FRÈRE ... et ... SŒUR
1 et **2**	Mathématisations effectuées collectivement.
4	Exercices semi-individuels. Les flèches des graphes partiels données une à une. Solution du problème amorcée collectivement.
6	Exercices individuels. Chaque élève aux prises avec des graphes partiels donnés en bloc.

PROBLÈMES

Comme les élèves de FRÉDÉRIQUE ne savent ni lire, ni écrire, il est impossible de leur présenter un problème sous la forme d'un texte à déchiffrer.
Les graphes permettent néanmoins de leur proposer des problèmes qui les obligent à raisonner.
Chaque élève peut tenter de les résoudre *individuellement* et présenter sa réponse en traçant de nouvelles flèches.

PROBLÈME À ÉTAPES

Pour les enfants de 6 ans, les deux premières situations proposées sont de petits problèmes à étapes.
Premier objectif : découvrir les filles et les garçons que les graphes partiels donnés permettent de déterminer.

SCHÉMAS ET SIGNES CONVENTIONNELS

— Comment indiquer sur le dessin, ici un garçon, là une fille ?

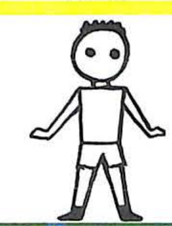
— Un point rouge et un point vert.

Ingénieuse réponse!
Les flèches rouges montrent les sœurs : donc les filles en rouge!
Les flèches vertes montrent les frères : donc les garçons en vert!
Les flèches rouges rougissent leur extrémité.
Les flèches vertes verdissent leur extrémité.
Surprise par la suggestion des élèves, FRÉDÉRIQUE craint la superposition de deux conventions concernant, l'une, les flèches et l'autre, les points.

— L'idée n'est pas mauvaise mais les flèches sont déjà rouges et vertes.

— On pourrait faire un petit garçon ou une petite fille.

Retour au concret après la suggestion purement conventionnelle des points rouges et verts.
Les enfants ne doutent de rien : **— C'est facile!**
Afin d'alléger la tâche des élèves, FRÉDÉRIQUE fait adopter un moyen terme entre la convention pure et la reproduction concrète : les schémas

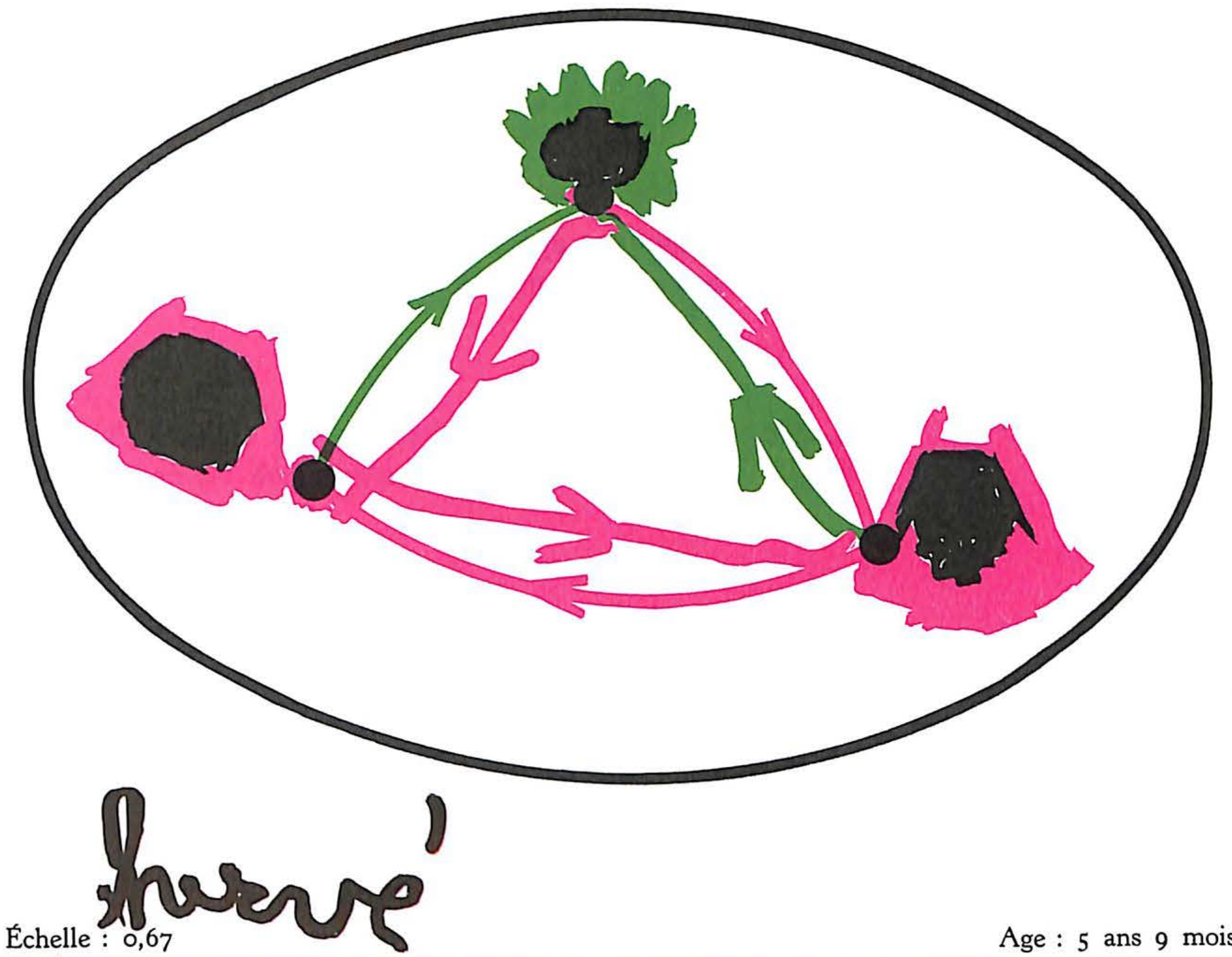
Convention pure	Schéma	Reproduction concrète
		
		

Les propositions extrêmes sont venues spontanément de la classe.
Le moyen terme plus subtil, proposé graduellement par FRÉDÉRIQUE a été accepté — verbalement — par les élèves.

Certains enfants ne se sont pas tenus strictement aux schémas mais ont regardé ceux-ci comme l'amorce de la reproduction.

Les schémas ont été enjolivés, complétés, coloriés. Peu d'élèves ont pu souffrir les figurines sans yeux.
Le schéma a évolué vers la reproduction ...
Soulignons, en contre-partie, que la toute première proposition spontanée issue de la classe fut une convention pure, se greffant ingénieusement sur celle des flèches, déjà admise.

L'enfant va naturellement vers le signe et propose volontiers des conventions pures ingénieusement articulées.



Échelle : 0,67 Age : 5 ans 9 mois

FIG. 84

Dessin très original ... et très beau.

La forme des schémas indiquant filles et garçons se stylise au point de devenir convention pure.

Aux schémas proposés par FRÉDÉRIQUE, Hervé substitue la superposition de deux conventions pures, l'une concernant la forme et l'autre, la couleur.

JOUER AU FACTEUR!

Les deux problèmes sur ... **Frère... et ... sœur** ... ont exigé une grande concentration de la part des élèves.
En changeant complètement de sujet, FRÉDÉRIQUE parvient à intéresser les élèves à un troisième problème.

— **Dernier jeu : vous serez le facteur!**

Les enfants sont fatigués. Le dernier problème est plus facile et leur demande cette fois d'extérioriser leur activité, ce qui leur permettra de terminer la leçon sur une note optimiste.

7

Distribution de Bonbons

Application
Injection
Bijection

— Aujourd'hui, nous allons distribuer des bonbons à des enfants.
Voici l'ensemble des bonbons.

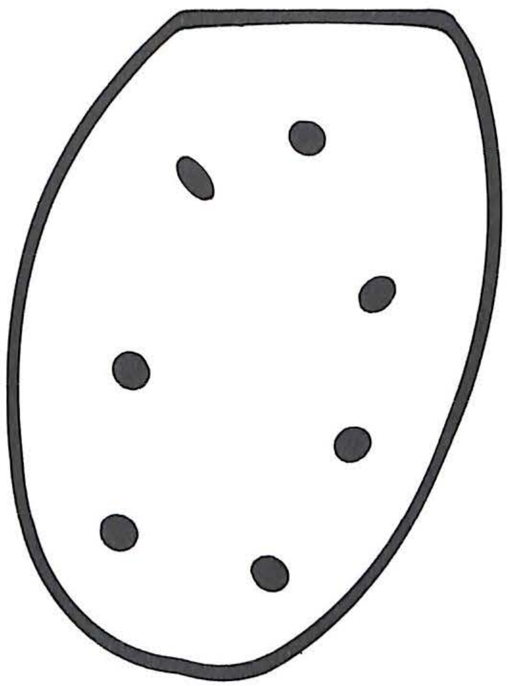


FIG. 85

— Dessinez autant de bonbons qu'au tableau, pas un de plus, pas un de moins.

A côté de l'ensemble des bonbons, dessinons l'ensemble des enfants.

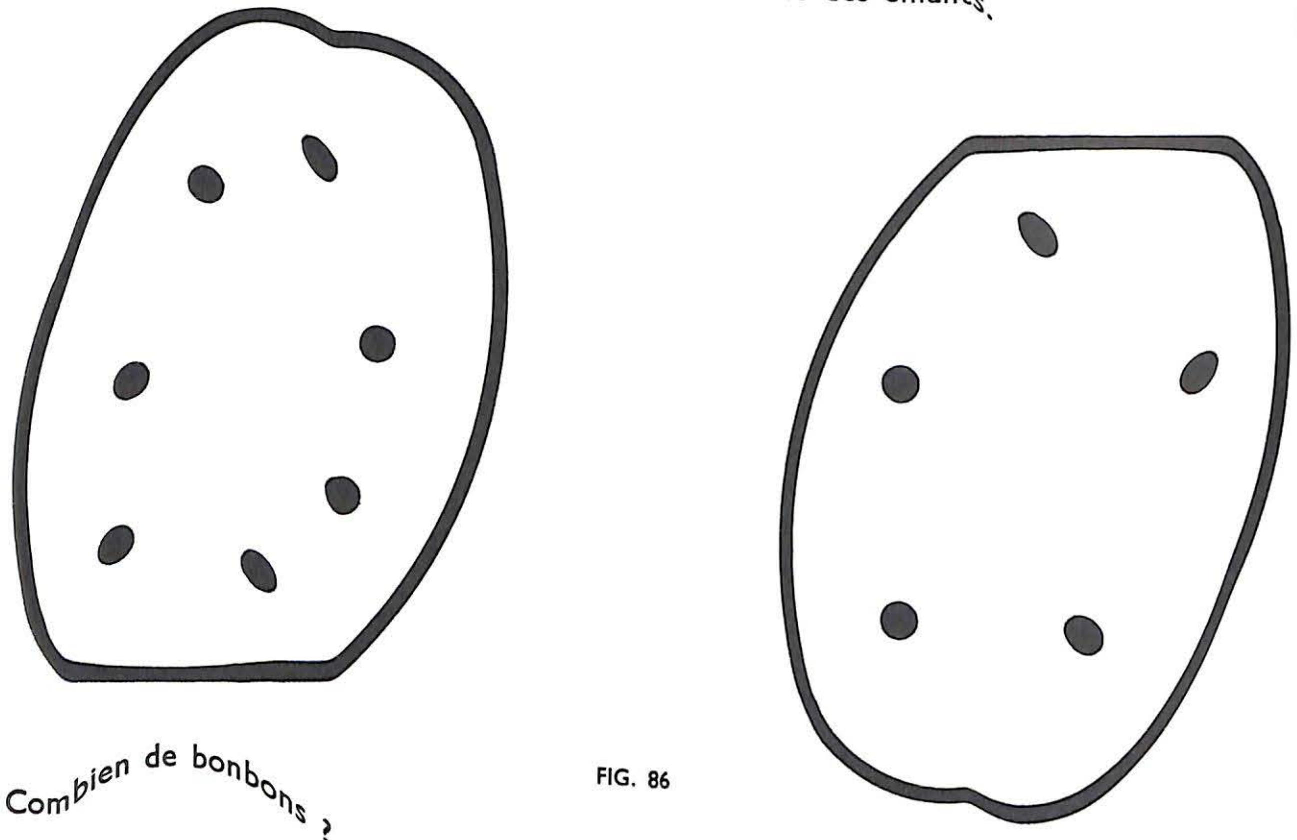


FIG. 86

— Combien de bonbons ?

— **7!**

— Combien d'enfants ?

— **5 enfants!**

— Deux des enfants n'ont pas été sages. Ils ne recevront pas de bonbons. Il ne s'agit pas de vous, bien entendu. Distribuez les bonbons.

— **En vert ?**

— Comme vous voulez, mais tous les bonbons doivent être distribués et n'oubliez pas que deux enfants sont punis.

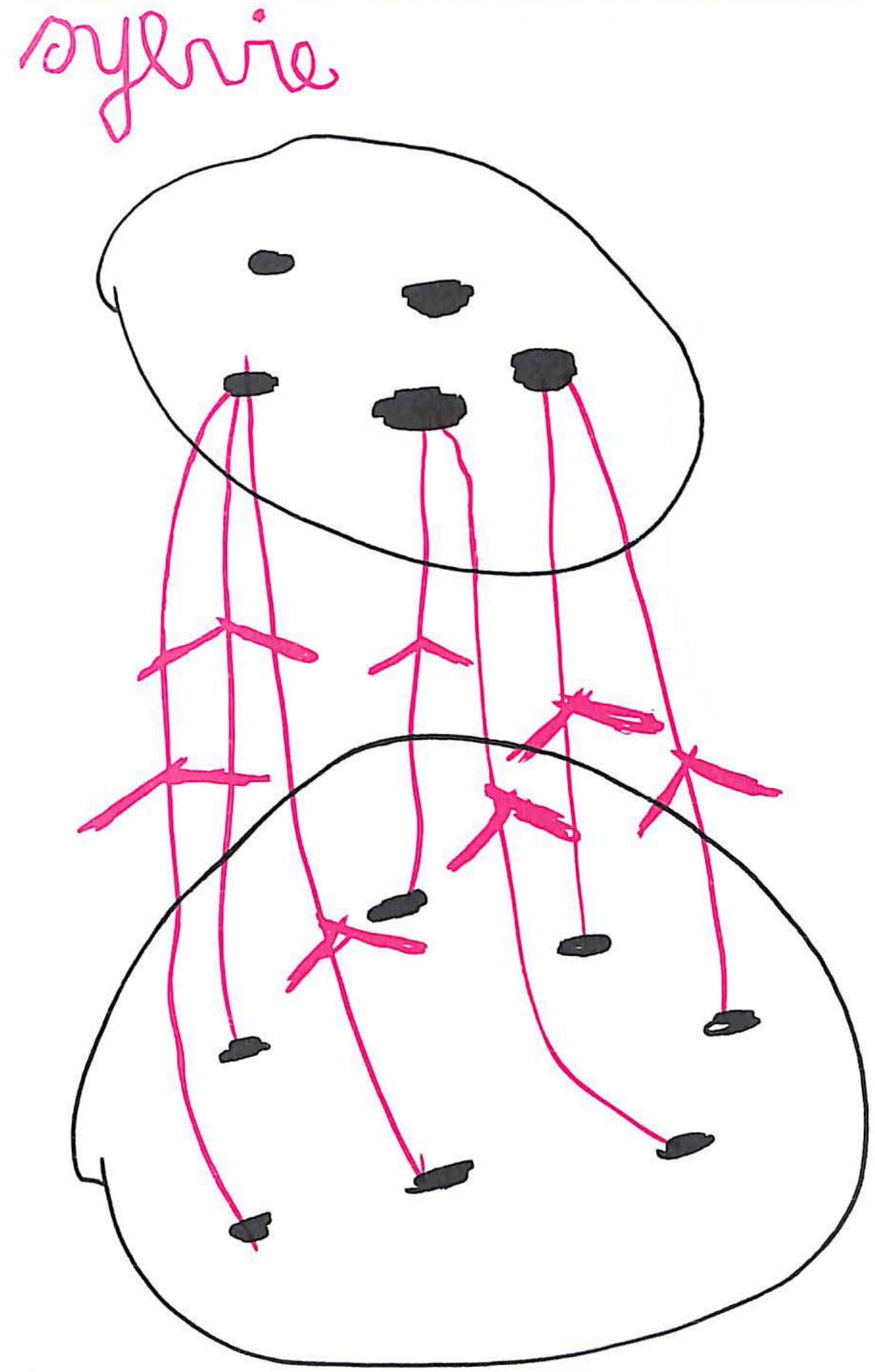
Les enfants dessinent.

— Didier, veux-tu nous raconter ta distribution ?

— **Un enfant a été très gentil et a reçu 4 bonbons. Un autre en a reçu 2 et un autre, 1.**

— Regardons le dessin de Ciaire. C'est la même distribution que Didier. Et Sylvie ?

— **3 bonbons à un enfant, 2 bonbons à un autre et encore 2 bonbons à un troisième.**



Échelle : 0,70

Age : 6 ans

FIG. 87

A la fois correct et beau.
Mathématique moderne = mathématique esthétique.

— Encore une distribution de bonbons.
Cette fois, aucun enfant ne recevra plus d'un bonbon.
Au plus un bonbon par enfant!

Voici l'ensemble des bonbons et l'ensemble des enfants.

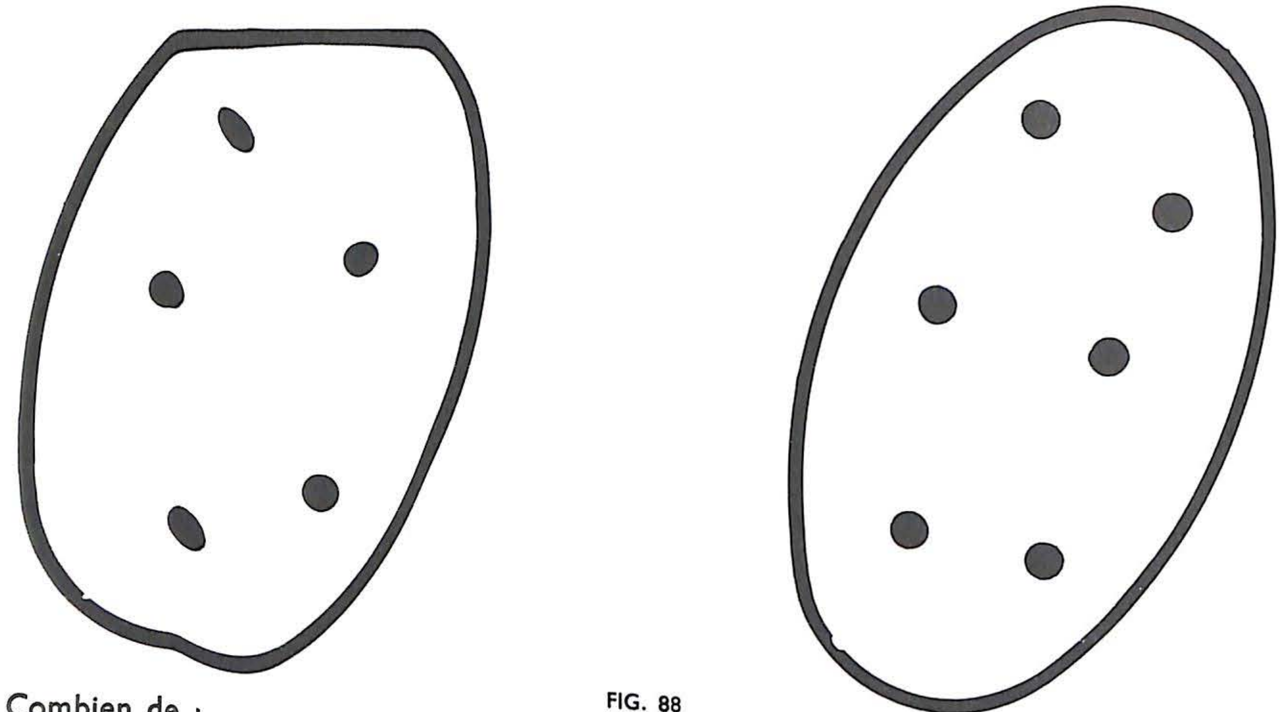


FIG. 88

— Combien de bonbons ?

— **5!**

— Et combien d'enfants ?

— **6!**

— **Il y en a un qui ne va pas en recevoir.**

— Distribuez les bonbons.

Les enfants dessinent.

— Que constatez-vous ?

— **Il y en a un qui n'en reçoit pas.**

— Pourquoi ?

— **Il n'a pas été sage!**

— Savez vous écrire 5 et 6 ?

— **Oui!**

— **C'est facile!**

— Quel est le plus petit des deux ?

— **5!**

— Ecrivez : **5** plus petit que **6**.
Vous rappelez-vous ?

— **Oui, avec une pointe.**

— En dessous du dessin, écrivez : **5 < 6**
Christine a écrit à l'envers.
Quel est le plus petit, **5** ou **6** ?

— **5!**

— La pointe du côté du plus petit!