na circumferencia que limita o circulo e seus lados são cordas. O **polygono** ABCDEF é INSCRIPTO no circulo C (fig. 314).

Um **polygono** é CIRCUMSCRIPTO a um circulo quando os lados são tangentes á circumferen-

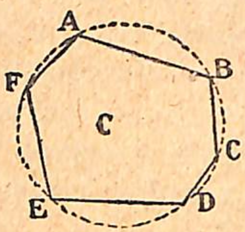


Fig. 314.

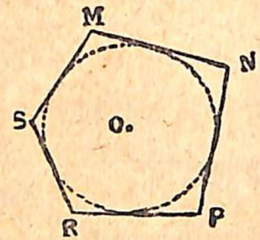


Fig. 315.

cia que limita o circulo. O **polygono** MNPRS (fig. 315) é CIRCUMSCRIPTO ao circulo O.

Um **polygono** que tem angulos alternativamente salientes e reintrantes chama-se ESTRELLADO.

MEDIDA DOS ANGULOS. DIVISÃO DA CIRCUMFERENCIA.

Medir um angulo é comparal-o com um outro angulo tomado para unidade de medida. A *unidade* para medir os angulos obtem-se dividindo um angulo recto em noventa partes eguaes.

Cada uma d'essas partes eguaes chama-se um **grão**.

O **grão** divide-se em **minutos** e **segundos**. SESSENTA minutos fazem um **grão** e SESSENTA **segundos** fazem um **minuto**.

O **grão** é designado por um ZERO collocado á direita e um pouco acima do numero que o exprime. Exemplo: 6° lê-se *seis grãos*.

O **minuto** é designado por um ACCENTO e o **segundo** por dois collocados no mesmo logar do zero para designar o grão. Exemplo: 9′ lê-se *nove minutos*; 14″ lê-se *quatorze segundos*.

19° 14′ 8″ lê-se: *dezenove grãos, quatorze minutos e oito segundos.*

Cada angulo de um polygono regular de	3	lados mede	60°
	4	—	90°
	5	—	108°
	6	—	120°
	8	—	135°
	9	—	140°
	10	—	144°
	12	—	150°
	15	—	156°
	16	—	157°,5
	18	—	160°
	20	—	162°

Observemos qual a relação que existe entre os **angulos** e os **arcos** comprehendidos entre seus lados e descriptos com o mesmo raio a partir de seus vertices.

Comparemos na figura 316 os **angulos** AOB, AOC, AOD, AOE como os **arcos** AB, AC, AD, AE comprehendidos entre

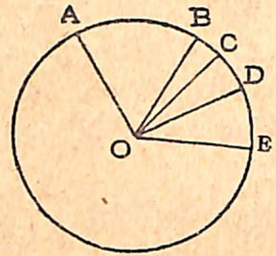


Fig. 316.

seus lados, e veremos que ao maior angulo corresponde maior arco e ao menor angulo, menor arco. D'ahi tiramos a conclusão de que em uma mesma circumferencia, ao **maior angulo central** corresponde **maior arco** e ao **menor angulo, menor arco.**

Em um mesmo circulo ou em circulos eguaes, aos angulos centraes eguaes correspondem arcos tambem eguaes; o que podemos verificar praticamente, fazendo coincidir por

superposição dois angulos depois de traçados e recortados em cartão.

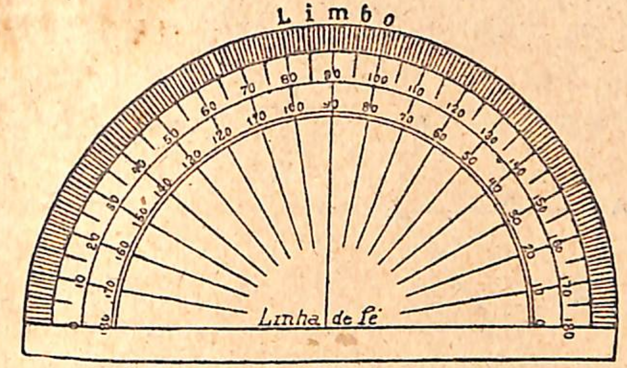


Fig. 317.

Para MEDIR ou TRANSFERIR um angulo no papel ou no cartão, usamos de um instrumento chamado *transferidor* (fig. 317).

O *transferidor* consiste geralmente em um semi-circulo de madeira, chifre, ou latão, cuja semi-circumferencia é dividida em 180 partes eguaes. Cada uma d'essas 180 partes eguaes chama-se um **grão**. A essa semi-circumferencia dá-se o nome de LIMBO, e ao diametro que liga as extremidades da semi-circumferencia, o nome de LINHA DE FÉ.

O **angulo central** tem por medida o arco comprehendido entre seus lados.

O **angulo inscripto** tem por medida a metade do arco comprehendido entre seus lados.

O angulo AVB (fig. 318) tem por medida a metade do arco AB, porque si fizermos passar pelo ponto C a recta MN parallela a VB, os angulos AVB e ACN serão eguaes

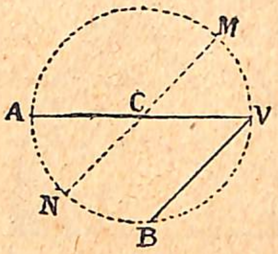


Fig. 318.

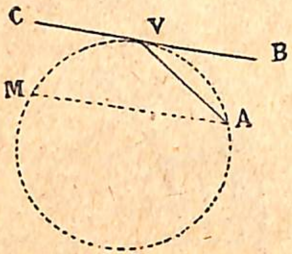


Fig. 319.

como CORRESPONDENTES; ora o **angulo** ACN sendo **central** tem por medida o arco AN comprehendido entre seus lados; mas AN é egual a MV porque estes dous arcos são a medida de dois angulos eguaes ACN e MCV; de mais, por causa das parallelas MN e VB, NB é egual a MV; portanto NB é egual a AN. O angulo ACN tem por medida a metade do arco ANB e o **angulo** AVB que é egual ao angulo ACN tem a mesma medida.

O **angulo do segmento** tem por medida a metade do arco subtendido pela corda que fórma um de seus lados.

O angulo AVB (fig. 319) tem por medida a metade do arco VA porque, se tirarmos do

ponto A uma recta AM parallela a BC, o angulo AVB ficará egual ao angulo VAM como ALTERNOS-INTERNOS, formados pelas parallelas CB e MA e pela obliqua VA. O angulo inscripto VAM tem por medida a metade do arco VM, que é egual ao arco VA; portanto o

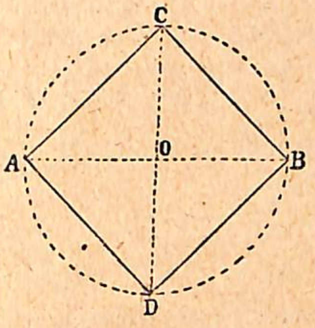


Fig. 320.

angulo do segmento AVB tem por medida a metade do arco VA.

Problema 126. — Inscrever um quadrado em um circulo.

Tracemos um diametro qualquer AB (fig. 320); tracemos um segundo diametro CD perpendicular ao primeiro; unamos, duas a duas, as extremidades A, C, B, D, e o polygono formado é o **quadrado** inscripto no circulo O.

A circumferencia ficou dividida em quatro partes eguaes.

Problema 127. — Inscrever um hexagono regular e um triangulo equilatero em um circulo.

A inscripção de um **hexagono regular** em um circulo ou a divisão da circumferencia em seis partes eguaes é simples.

Tracemos uma circumferencia e um diametro AB (fig. 321).

Façamos centro em A e depois em B e com um mesmo raio egual a OA determinemos os pontos C, D, E, F. Tracemos a linha polygonal ADFBECA e teremos o hexagono regular inscripto.

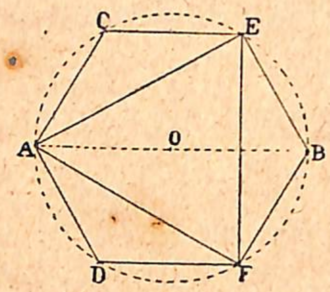


Fig. 321.

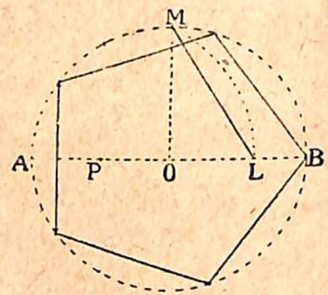


Fig. 322

Para inscrevermos em um circulo um triangulo equilatero, juntaremos os vertices não consecutivos; assim por exemplo: unamos os pontos AEF da figura 321 e acharemos o triangulo equilatero inscripto no circulo O.

Problema 128. — Inscrever em um circulo um pentagono regular.

Descrevamos uma circumferencia e tracemos um diametro AB (fig. 322). Determinemos o meio da semi-circumferencia AMB.

Tomemos o meio do raio OA. Do ponto P como centro e com o raio egual a PM determinemos o ponto L, o qual, ligado ao ponto M nos dá o lado do **pentagono** regular inscripto no circulo O.

Appliquemos sobre a circumferencia, a partir de B, duas vezes a medida LM para um e para outro lado: unamos dois a

dois os pontos de divisão da circumferencia e teremos o pentagono.

Problema 129. — Inscrever em um circulo um heptagono regular.

Descrevamos uma circumferencia (fig. 323) e tiremos um raio OA. Levantemos pelo meio do raio uma perpendicular BC até encontrar a circumferencia. A distancia do pé da perpendicular ao ponto em que ella encontra a circumferencia será o lado do **heptagono regular** inscripto.

Appliquemos a partir de A, sobre a circumferencia, tres vezes a medida BC, seguidamente, para um e para outro lado. Unamos os pontos de divisão dois a dois.

Problema 130. — Inscrever em um circulo um octogono regular.

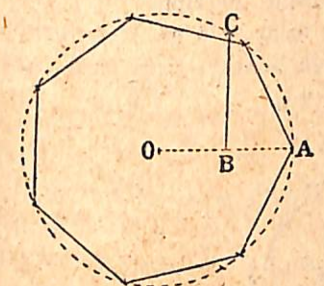


Fig. 323.

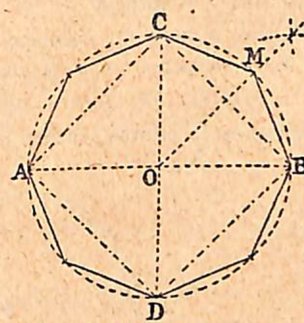


Fig. 324.

Inscrevamos um **quadrado** (fig. 324), tiremos a bissectriz do angulo COB; unamos o ponto M ao ponto B. A distancia MB é o lado do **octogono regular** inscripto.

Procedamos egualmente quanto aos angulos BOD, AOD, AOC e d'esse modo dividiremos a circumferencia em 8 partes eguaes. Unamos os pontos de divisão dois a dois.

Problema 131. — Inscrever em um circulo um enneagono regular.

Descrevamos uma circumferencia e tracemos dois diametros perpendiculares entre si (fig. 325). Com o centro em B e com o mesmo raio (OB) descrevamos um arco OG; com o centro em A e com o raio egual á distancia AG, descrevamos um arco GC até encontrar o prolongamento do diametro FE. Com o centro no ponto C e com a distancia AC ou BC tracemos o arco BD. A distancia

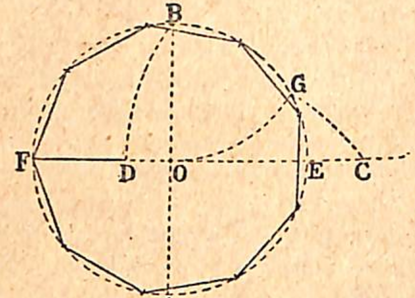


Fig. 325.

DF será o lado do **enneagono regular** inscripto.

Reproduzamos sobre a circumferencia, e a partir do ponto F, a medida DF, quatro vezes seguidamente para cada lado e unamos os pontos obtidos dois a dois.

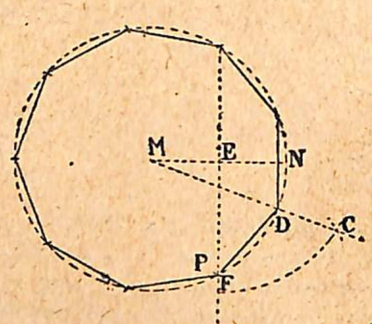


Fig. 326.

Outra solução. — Tracemos a circumferencia e tiremos o raio MN (fig. 326) pelo meio do qual façamos passar uma perpendicular.

Centro em E e com o mesmo raio da circumferencia descrevamos um arco que cortará a perpendicular em F; centro nesse ponto e com o mesmo raio, descrevamos um outro arco que determinará o ponto C. Unamos M a C por uma recta, que cortará a circumferencia no ponto D. DP é o lado do enneagono regular; procedamos como indica a 1.ª solução.

Problema 132. — Inscrever em um circulo um decagono regular.

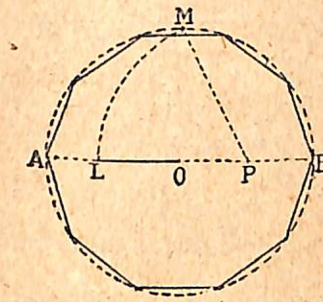


Fig. 327.

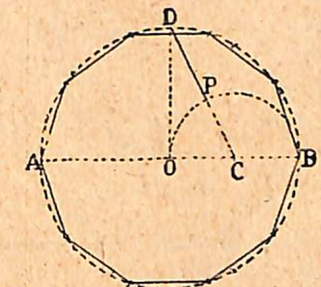


Fig. 328.

Descrevamos uma circumferencia, e tracemos um diametro AB (fig. 327).

Determinemos o meio da semi-circumferencia AMB.

Tomemos o meio do raio OB, a partir do ponto P para o ponto A, marquemos no diametro a distancia PL egual a PM. A distancia OL será o lado do **decagono regular** inscripto.

Appliquemos sobre a circumferencia, e a partir dos pontos A e B, a distancia OL duas vezes seguidamente para cada lado; unamos esses pontos de divisão dois a dois.

Outra solução. — Tracemos um diametro AB (fig. 328) e o raio OD perpendicular ao mesmo diametro.

Dividamos OB ao meio e unamos C a D.

Centro em C e raio egual a CB determinemos o ponto P.

D P é o lado do decagono regular inscripto.

Procedamos então como na 1.ª solução.

Problema 133. — Inscrever em um circulo um hendecagono regular.

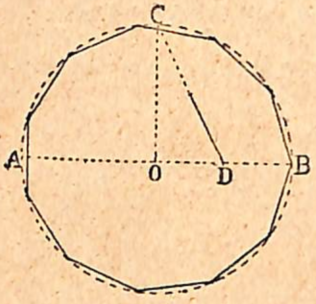


Fig. 329.

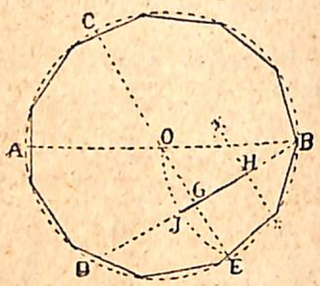


Fig. 330.

Descrevamos uma circumferencia e tracemos o diametro AB (fig. 329).

Tomemos o meio da semi-circumferencia ACB e tambem do raio OB. Unamos o ponto C ao ponto D e dividamos ao meio a recta CD.

Com o compasso appliquemos seguidamente a metade de CD, cinco vezes de cada lado, a partir de B e depois de unidos os pontos de divisão, teremos o hendecagono regular inscripto.

Outra solução. — Tracemos um diametro AB (fig. 330).

Façamos centro em A e, com um raio OA marquemos C e D.

Centro em B e com o mesmo raio, descrevamos OE.

Unamos entre si D e B, C e E. Dividamos GB ao meio e teremos JH, que é o lado do hendecagono. Procedamos como na 1.ª soluçáo.

Problema 134. — Inscrever em um circulo um dodecagono regular.

Descrevamos uma circumferencia e tracemos dois diametros AB e CD perpendiculares entre si (fig. 331).

Centro em cada uma das extremidades dos diametros e com o mesmo raio da circumferencia determinemos os pontos: 1 e 2 da extremidade A; 3 e 4 de B; 5 e 6 de C e 7 e 8 de D.

Unamos dois a dois esses pontos e teremos o polygono pedido.

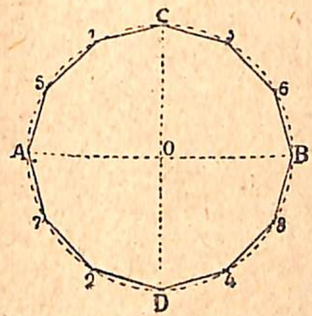


Fig. 331.

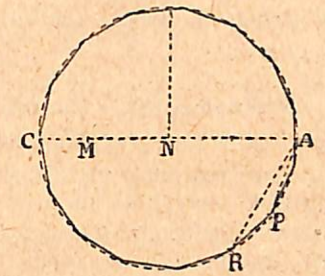


Fig. 332.

Problema 135. — Inscrever em um circulo um pentadecagono regular.

Descrevamos uma circumferencia e determinemos o lado do decagono regular inscripto. MN é o lado do decagono (fig. 332).

A partir de um ponto qualquer A, appliquemos a medida AR egual ao lado do hexagono regular inscripto (AR = NA) e AP = MN.

A corda PR é o lado do pentadecagono regular inscripto; appliquemol-a pois a partir do ponto C e sobre a circumferencia sete vezes de cada lado. Unamos dois a dois os pontos de divisão.

Problema 136. — Medir um angulo ou um arco com o transferidor.

Para medir um angulo (fig. 333) façamos coincidir o centro do transferidor com o vertice do angulo que se quer medir e a linha de fé com um dos lados do angulo.

A divisão do limbo, sob a qual fica o outro lado do angulo, determina seu valor.

Para determinar o numero de gráos de um arco, ligamos as extremidades d'esse arco ao seu centro por meio dos raios e medimos o angulo central. A medida do angulo central é a do arco.

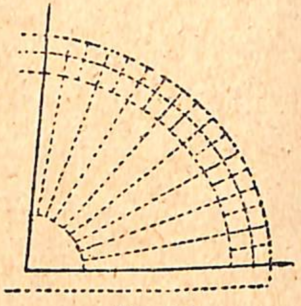


Fig. 333.

Problema 137.— Construir um angulo com o transferidor.

Tracemos uma recta, marquemos sobre ella um ponto; façamos coincidir o centro do transferidor com esse ponto e a linha de fé com a recta; procuremos no limbo a medida do angulo e marquemos um ponto defronte do limite d'essa medida. A recta que une esses dous pontos fórma, com a primeira, o angulo pedido.

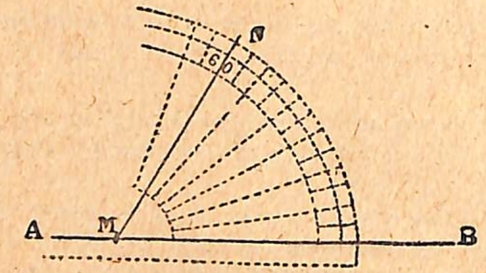


Fig. 334.

Exemplo: — Seja de 60° o angulo que desejamos construir.

Tracemos uma recta AB (fig. 334), tomemos sobre ella o ponto M, façamos coincidir o centro do transferidor com

o ponto M e a linha de fé com a recta AB. Marquemos depois um ponto N defronte da divisão 60 a contar da direita para a esquerda; unamos o ponto N ao ponto M; NMB é o angulo pedido.

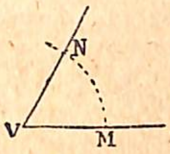


Fig. 335.

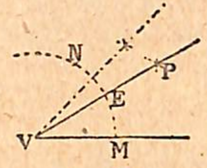


Fig. 336.

Problema 138. — Traçar com o compasso e a regua um angulo de 60°.

Pela extremidade V de uma recta e com um raio arbitrario, descrevamos um arco de modo que determine o ponto M na mesma recta (fig. 335).

Façamos centro n'esse ponto e com o mesmo raio determinemos o ponto N.

Unamos V a N e formaremos o àngulo NVM.

Problema 139. — Traçar com o compasso e a regua um angulo de 30°, de 15° e de 45°.

Pela extremidade V de uma recta e com um raio arbitrario descrevamos um arco, de modo que determine o ponto M na recta (fig. 336).

Façamos centro em M e com o mesmo raio marquemos o ponto N. De M e N determinemos o ponto P, o qual unido a V fórma o angulo de 30°.

Procedendo-se de modo egual e por fim traçando-se a bissectriz do angulo de 30° ter-se-á o de 15°.

Se dividirmos o arco NE ao meio e unirmos o ponto achado ao vertice V faremos com a recta VM um angulo de 45°.

Problema 140. — Traçar com a regua e o compasso um angulo de 120°.

Façamos centro na extremidade V de uma recta e com um raio arbitrario descrevamos um arco que determine o ponto M (fig. 337).

Appliquemos sobre o arco duas vezes, consecutivamente e a partir de M, o mesmo raio.

Unamos o ponto P a V e teremos formado o angulo PVM.

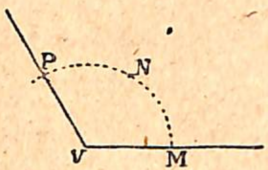


Fig. 337.

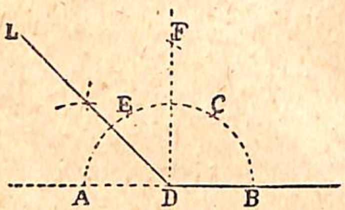


Fig. 338.

Problema 141. — Traçar com o compasso e a regua um angulo de 135°.

De um ponto D em uma recta e com um raio arbitrario descrevamos a semi-circumferencia AB (fig. 338).

Com o mesmo raio, determinemos de B o ponto C; d'este, o ponto E e dos pontos E e C o ponto F.

Unamos este ultimo ponto a D.

Tracemos a bissectriz do angulo ADF e obteremos o angulo pedido LDB.

Problema 142. — Traçar com o compasso e a regua um angulo de 150°.

Por um ponto V de uma recta e com um raio arbitrario tracemos a semi-circumferencia AB (fig. 339).

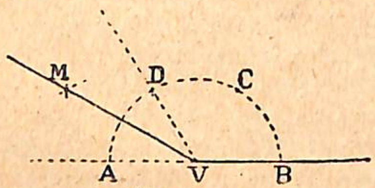


Fig. 339.

Appliquemos esse mesmo raio de B em C e de C em D.

A bissectriz VM do angulo DVA fórma com VB o angulo ped.do MVB.

Problema 143. — Traçar um pentagono regular conhecendo-se um lado.

Seja AB o lado (fig. 340).

Formemos um angulo de 108° na extremidade B e appliquemos BC = AB.

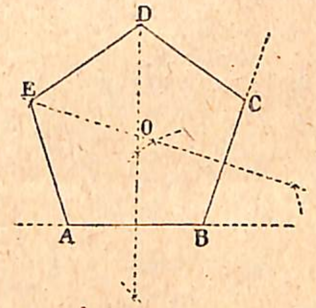


Fig. 340.

Façamos passar perpendiculares pelo meio de AB e de BC.

Centro em O e com um raio egual a OA marquemos D e E.

Unamos entre si A e E, E e D, D e C.

ABCDE é o polygono pedido.

Problema 144. — Traçar um heptagono regular conhecendo-se um lado.

Seja de 15 millimetros a medida do lado.

Traccmos um heptagono inscripto em um circulo qualquer (fig. 341).

Tomemos um vertice como ponto de partida, A por exemplo, e prolonguemos os lados do angulo.

Façamos AB = 0^m,015 e AG = AB.

De B tiremos uma parallela a *bc* e de G, outra a *gf*.

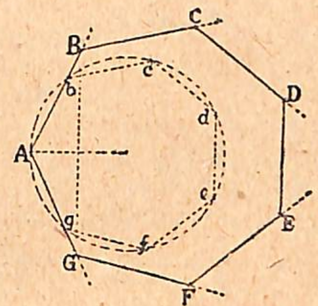


Fig. 341.

Marquemos em BC e GF a medida AB.

De C tracemos uma parallela a *cd* e de F, outra a *fe*.

Façamos CD e EF eguaes, cada uma, a 0^m,015 (AB), e finalmente unamos D a E.

ABCDEFG é o heptagono regular.

Outra solução. — Seja AB o lado (fig. 342).

Prolonguemos esta recta de uma quantidade BC = AB.

Façamos centro em A e C e com um raio egual a AC determinemos o ponto D. Unamos este ponto a B e tracemos a recta AE que parte de A, divide o arco DC ao meio e corta a perpendicular BD no ponto F.

Com o centro em A e depois em B, e com um mesmo raio AF determinemos o ponto M, centro da circumferencia circumscripta ao heptagono; descrevamol-a com um raio = MB.

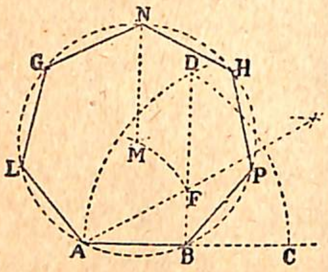


Fig. 342.

Tracemos MN parallela a BD e appliquemos em NG, NH, AL e BP a medida AB.

Unamos estes pontos como nos mostra a fig. 342 e teremos o **heptagono.**

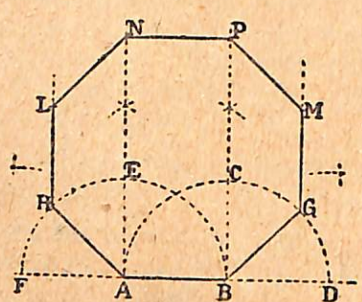


Fig. 343.

Problema 145. — Traçar um octogono regular dado o lado.

Seja AB o lado (fig. 343).

Prolonguemol-o em ambas as direcções e levantemos perpendiculares por A e B.

Centro em cada um d'esses pontos e com o mesmo raio AB, descrevamos as duas semi-circumferencias que determinam os pontos C, D, E e F.

Tiremos as bissectrizes dos angulos CBD e FAE, as quaes assignalam os pontos G e H.

Por G e H tracemos rectas parallelas a BC e façamos HL e GM eguaes, cada uma, a AB.

De L e de M, com centros, e com um raio = AB, marquemos N e P.

Tracemos a linha quebrada LNPM e resolveremos o problema.

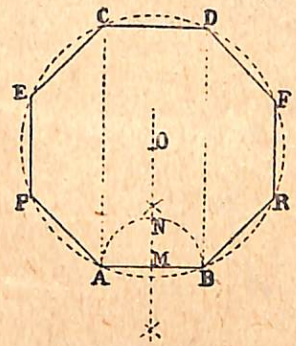


Fig. 344.

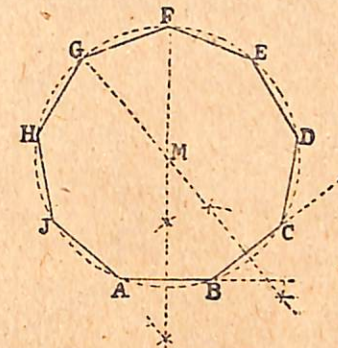


Fig. 345.

Outra solução. — Façamos passar pelo meio de AB uma perpendicular (fig. 344) e com o centro em M e raio MA, descrevamos a semi-circumferencia ANB.

Com um raio egual a NA e centro em N determinemos o ponto O; finalmente centro em O e raio egual a OA descrevamos a circumferencia que será circumscripta ao octogono.

Tracemos AC e BD parallelas a MO e depois reproduzamos em CE, DF, AP e BR a medida AB.

Unamos C à D, D a F, A a P, E a C, B a R, P a E e R a F.

Problema 146. — Traçar um enneagono regular conhecendo-se um lado.

Sobre uma recta marquemos AB egual ao lado dado, e pelo ponto B façamos um angulo = 140°, (fig. 345).

Appliquemos BC = AB e façamos passar pelo meio de AB e de BC, rectas perpendiculares que determinarão o ponto M, do qual, como centro e raio egual a MB descrevamos a circumferencia de circulo que cortará as perpendiculares em G e F.

Centro successivamente em A, C, G e F e com um raio = AB determinemos os pontos J, D, H e E.

Tracemos a linha quebrada AJHGFEDC.

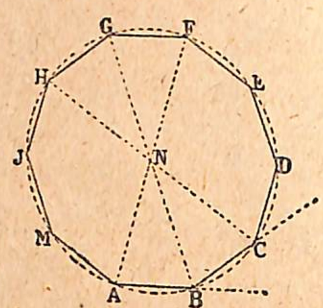


Fig. 346.

Problema 147. — Traçar um decagono regular conhecendo-se um lado.

Sobre uma recta appliquemos a medida AB egual ao lado dado e façamos no ponto B um angulo = 144° (fig. 346).

Tracemos a bissectriz d'esse angulo e, pelo meio de AB a perpendicular que determina o ponto N do qual, como centro, e raio = NB descrevamos uma circumferencia que cortará a bissectriz no ponto G.

Tracemos os diametros AF e CH e de cada um dos pontos A, C, F e H, com um mesmo raio AB marquemos M, D, E e J.

Unamos entre si os pontos G—F, H—G, F—E, M—A, E—D, J—M, C—D e J—H.

Problema 148. — Traçar um dodecagono regular conhecendo-se um lado.

Formemos na extremidade B da recta AB (fig. 347) um angulo de 150°; tracemos-lhe a bissectriz, e pelo meio de AB, uma perpendicular.

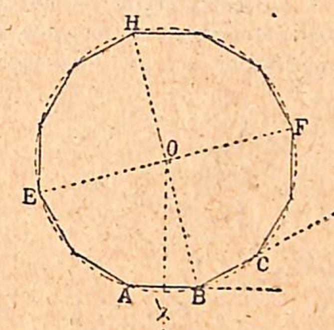


Fig. 347.

Centro em O e com um raio OB descrevamos uma circumferencia.

Tracemos o diametro EF perpendicular a BH e dividamos cada um dos angulos rectos BOF, BOE, HOE e HOF em tres partes.

Unamos dois a dois os pontos de divisão e obteremos o polygono desejado.

Problema 149. — Traçar um polygono regular (um pentagono, por exemplo) conhecendo-se uma diagonal.

Construamos um pentagono regular de qualquer dimensão (fig. 348) e de um vertice qualquer A, por exemplo, tiremos duas diagonaes, prolongando-as.

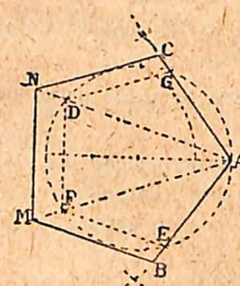


Fig. 348.

Appliquemos AM e AN eguaes, cada uma, á diagonal dada e unamos M a N.

Prolonguemos os lados do angulo A e, do ponto M, tracemos MB parallela á EF.

De N tiremos NC parallela á DC.

ABMNC é o polygono pedido.

Problema 150. — Traçar o polygono estrellado regular formado pelas diagonaes do pentagono regular.

Dividamos uma circumferencia em 5 partes eguaes, e unamos os pontos 1 a 3, 3 a 5, 5 a 2, 2 a 4 e 4 a 1 (fig. 349).

O polygono assim obtido tem cinco vertices salientes e cinco reintrantes, é formado pelas diagonaes de um pentagono regular, e é um decagono.

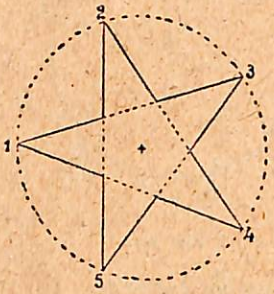


Fig. 349.

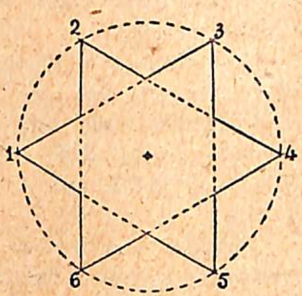


Fig. 350.

Problema 151. — Traçar o polygono regular estrellado, formado pelas diagonaes menores de um hexagono regular.

Dividamos uma circumferencia em 6 partes eguaes e unamos os pontos: 1—3—5—1, 2—4—6—2 (fig. 350).

Resulta um polygono regular estrellado, formado pelas diagonaes menores de um hexagono regular.

Representa a figura resultante da superposição de dois triangulos equilateros eguaes, cujos centros coincidem e os lados de um são, dois a dois, parallelos aos do outro.

Problema 152. — Traçar os polygonos regulares estrellados formados pelas diagonaes de um heptagono regular.

1.º caso — Diagonaes menores.

Dividamos uma circumferencia em 7 partes eguaes e unamos os pontos na ordem seguinte: 1—3—5—7—2—4—6—1 (fig. 351).

Este polygono é formado pelas diagonaes menores de um heptagono regular.

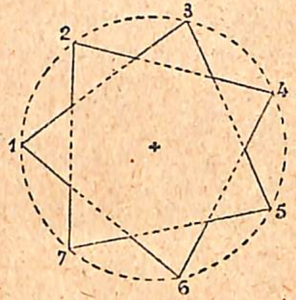


Fig. 351.

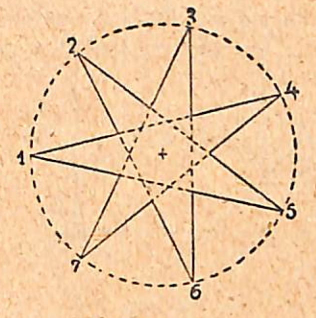


Fig. 352.

2.º caso. — Diagonaes maiores. Unindo-se os pontos de divisão nesta ordem: 1—4—7—3—6—2—5—1, obteremos outro polygono, formado pelas diagonaes maiores do heptagono regular (fig. 352).

Ambos são polygonos de 14 lados e têm 7 vertices salientes e 7 reintrantes.

Problema 153. — Traçar os polygonos regulares estrellados formados pelas diagonaes de um octogono regular.

1.º caso. — Diagonaes menores. Dividamos a circumferencia em 8 partes eguaes e unamos os pontos de divisão do seguinte modo: 1—3—5—7—1 e 2—4—6—8—2 (fig. 353).

O polygono estrellado resultante é formado pelas diagonaes menores do octogono regular, é uma combinação de dois quadrados superpostos cujos centros coincidem e cujos lados de um são parallelos ás diagonaes do outro.

2.º caso. — Diagonaes médias.

Unamos agora os pontos de divisão como indica a figura 354, isto é: 1—4—7—2—5—8—3—6—1.

Resulta um polygono regular estrellado, formado pelas diagonaes médias de um octogono regular.

Ambos são polygonos de 16 lados com 8 vertices salientes e 8 reintrantes.

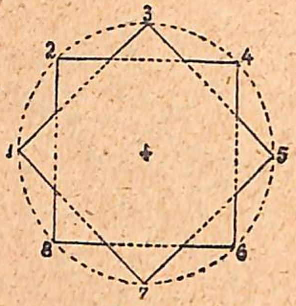


Fig. 353.

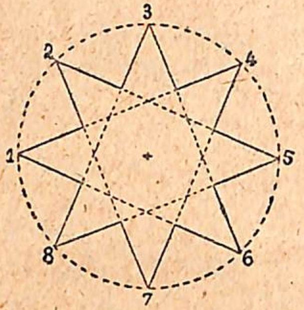


Fig. 354.

Problema 154. — Traçar os polygonos regulares estrellados, formados pelas diagonaes de um enneagono regular.

1.º caso. — Diagonaes menores.

Dividamos uma circumferencia em 9 partes eguaes e unamos os pontos de divisão na seguinte ordem: 1—3—5—7—9—2—4—6—8—1 (fig. 355).

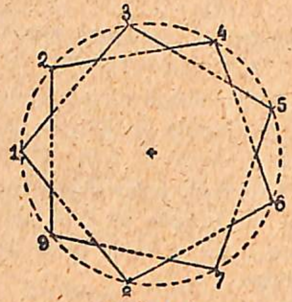


Fig. 355.

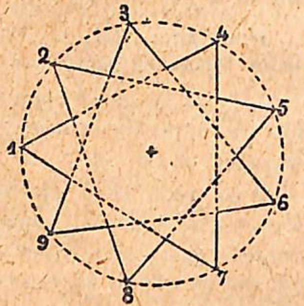


Fig. 356.

Este polygono é formado pelas diagonaes menores de um enneagono regular.

2.º caso. — Diagonaes médias.

Unamos os pontos de divisão como nos mostra a fig. 356,

isto é, 1—4—7—1, 2—5—8—2, 3—6—9—3 e obteremos um outro polygono, formado pelas diagonaes médias de um enneagono regular.

Este polygono estrellado é o resultado da superposição de 3 triangulos equilateros inscriptos num mesmo circulo.

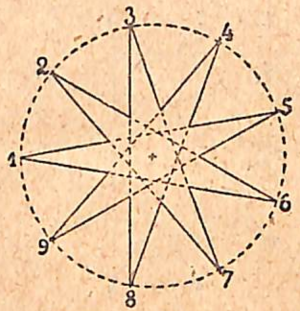


Fig. 357.

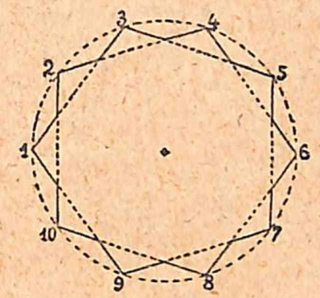


Fig. 358.

3.º caso. — Diagonaes maiores.

Finalmente, unamos os pontos de divisão na ordem seguinte: 1—5—9—4—8—3—7—2—6—1 (fig. 357) e teremos o polygono regular estrellado formado pelas maiores diagonaes do enneagono regular.

Estes tres polygonos estrellados têm, cada um, 18 lados eguaes, 9 vertices salientes e 9 reintrantes.

Problema 155. — Traçar os polygonos regulares estrellados formados pelas diagonaes de um decagono regular.

1.º *caso.* — Diagonaes menores.

Dividida a circumferencia em 10 partes eguaes, unamos os pontos de divisão d'este modo : 1—3—5—7—9—1, 2—4—6—8—10—2 (fig. 358). Resulta um polygono estrellado formado pelas menores diagonaes de um decagono regular.

E' a combinação de dois pentagonos regulares inscriptos em uma mesma circumferencia e collocados de modo que os lados de um são, dois a dois, parallelos aos do outro.

2.º caso. — Menores diagonaes médias.

Liguemos os pontos de divisão seguidamente e pelo modo indicado na fig. 359, isto é: 1—4—7—10—3—6—9—2—5—8—1 e resultará o polygono estrellado formado pelas menores diagonaes médias de um decagono regular.

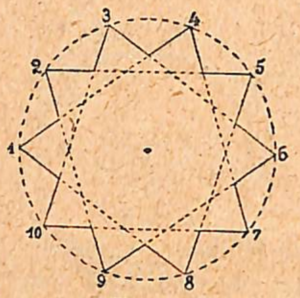


Fig. 359.

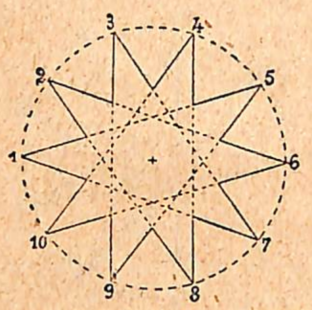


Fig. 360.

3.º caso. — Maiores diagonaes médias.

Unidos finalmente os pontos de divisão do modo seguinte: 1—5—9—3—7—1; 2—6—10—4—8—2 (fig. 360) resultará um polygono estrellado formado pelas maiores diagonaes médias de um decagono regular.

Este ultimo polygono estrellado é o resultado da combinação de dois outros de cinco vertices salientes.

Os tres polygonos estrellados têm, cada um 20 lados eguaes, 10 vertices salientes e 10 reintrantes.

Problema 156. — Traçar os polygonos estrellados formados pelas diagonaes de um hendecagono regular.

1.º caso. — Diagonaes menores.

Dividamos uma circumferencia em 11 partes eguaes, unamos seguidamente os pontos de divisão: 1—3—5—7—9—11—2—4—6—8—10—1 (fig. 361).

Resulta um polygono regular estrellado formado pelas diagonaes menores de um hendecagono regular.

2.º caso. — Menores diagonaes médias.

Unamos os pontos de divisão: 1—4—7—10—2—5—8—11—3—6—9—1 e obteremos um polygono estrellado formado pelas menores diagonaes médias de um hendecagono regular (Fig. 362).

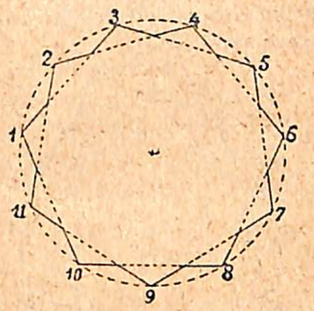


Fig. 361.

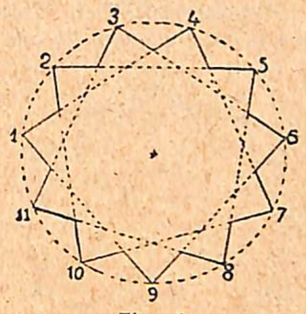


Fig. 362.

3.º caso. — Maiores diagonaes médias.

Unidos os pontos de divisão como indica a figura 363: 1—5—9—2—6—10—3—7—11—4—8—1 apparece o polygono

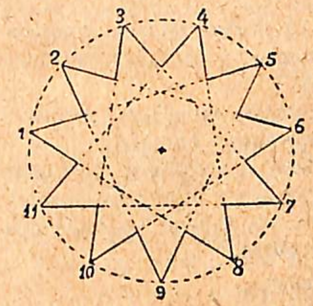


Fig. 363.

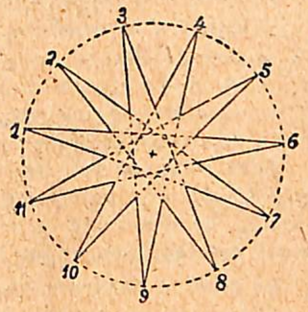


Fig. 364.

estrellado formado pelas maiores diagonaes médias de um hendecagono regular.

4.º caso. — Diagonaes maiores.

Tracemos a linha polygonal 1—6—11—5—10—4—9—3—8—2—7—1 (fig. 364).

O resultado é um polygono regular estrellado formado pelas diagonaes maiores de um hendecagono regular.

Estes quatro ultimos polygonos têm, cada um, 22 lados, 11 vertices salientes e 11 reintrantes.

Problema 157. — Traçar os polygonos estrellados formados pelas diagonaes de um dodecagono regular.

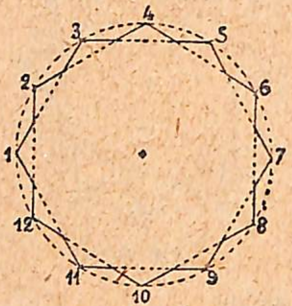


Fig. 365.

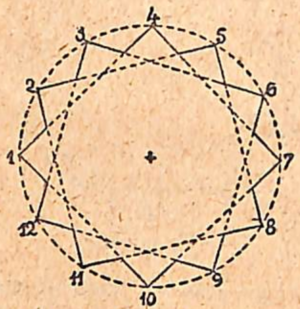


Fig. 366.

1.° caso. — Diagonaes menores.

Dividida a circumferencia em 12 partes eguaes, unamos os pontos de divisão do seguinte modo, 1—3—5—7—9—11—1; 2—4—6—8—10—12—2 (fig. 365).

O resultado é um polygono regular estrellado formado pelas diagonaes menores de um dodecagono regular.

Esse polygono estrellado é tambem o resultado da superposição de dois hexagonos regulares inscriptos num mesmo circulo, de modo que os vertices de um fiquem no meio dos arcos correspondentes aos lados do outro.

2.° caso. — Menores diagonaes médias.

Liguemos os pontos de divisão pela seguinte fórma: 1—4—7—10—1, 2—5—8—11—2, 3—6—9—12—3 (fig. 366) e o polygono resultante é formado pelas menores diagonaes médias do dodecagono regular e representa a superposição de tres quadrados eguaes, inscriptos num mesmo circulo.

3.° caso. — Diagonaes médias.

Unamos os pontos de divisão da fórma seguinte:

1—5—9—1, 2—6—10—2, 3—7—11—3, 4—8—12—4 (fig. 367) e o resultado é um polygono formado pela superposição de 4 triangulos equilateros eguaes inscriptos num mesmo circulo.

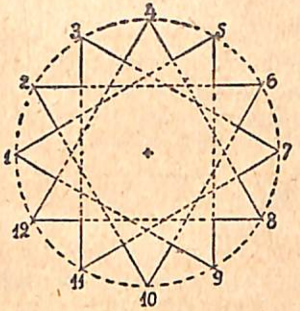


Fig. 367.

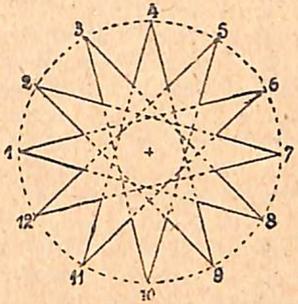


Fig. 368.

4.° caso. — Maiores diagonaes médias.

Unidos, finalmente, os pontos de divisão pelo modo indicado na fig. 368: 1—6—11—4—9—2—7—12—5—10—3—8—1, obtemos o polygono regular estrellado formado pelas maiores diagonaes médias de um dodecagono regular.

EXERCICIOS

1. — Francisco! traça um polygono qualquer.
2. — Mostra os lados, os angulos, os vertices.
3. — Que é perimetro?
4. — Como se chama uma superficie plana limitada por mais de quatro lados?
5. — Dá-me os nomes dos polygonos que conheces.
6. — Que é uma diagonal?
7. — Traça todas as diagonaes de um hexagono, de um pentagono, etc.
8. — Que é um polygono regular?
9. — Que é um polygono irregular?
10. — A quantos angulos rectos é egual a somma dos angulos de um polygono; — de um octogono; — de um hexagono, — de um heptagono; — de um icosagono?

11. — Qual é o triangulo regular?
12. — Qual o quadrilatero regular?
13. — Que quer dizer polygono?
14. — A que é egual o lado de um hexagono regular?
15. — Que é um apothema?
16. — Traça um apothema.
17. — Que é um polygono inscripto?
18. — Que é um polygono circumscripto?
19. — Que é um polygono estrellado?
20. — Que é medir um angulo?
21. — Qual a unidade de medida dos angulos?
22. — Quantos minutos tem um gráo?
23. — Quantos segundos tem um gráo?
24. — Como se lê 9° 11' 22''?
25. — Escreve : dezenove gráos, doze minutos e seis segundos.

26. — Quantos gráos mede cada angulo de um quadrado? — de um octogono regular? — e de um polygono regular de dezeseis lados?

27. — Quantos gráos mede a somma dos angulos de um quadrado? — e de um octogono regular?

28. — Quantos gráos mede cada angulo de um pentagono regular? — e de um decagono regular? — e de um icosagono regular?

29. — Quantos gráos mede cada angulo de um triangulo equilatero? — de um hexagono regular? — e de um dodecagono regular?

30. — Quantos gráos mede cada angulo de um enneagono regular? — e de um polygono regular de dezoito lados?

31. — Quantos gráos mede cada angulo de um pentadecagono regular?

32. — Quantos gráos mede a somma dos angulos de um pentagono regular? — de um decagono regular? — de um triangulo equilatero? — de um hexagono regular? — de um enneagono regular?

33. — Quantos gráos mede a somma dos angulos de um icosagono regular? — de um dodecagono regular? — e de um pentadecagono regular?

34. — Quantos angulos rectos em 360°? — em 540°? — em 720°? — em 3240°?

35. — Que é um transferidor?
36. — Mostra o limbo; — a linha de fé.
37. — Para que serve o transferidor?
38. — Qual a medida de um angulo central?
39. — Qual a medida de um angulo inscripto?
40. — Qual a medida de um angulo de segmento?
41. — Traça um angulo de 120°, 18°, 62°, 44°, 38°.

42. — Marca sobre uma circumferencia diversos arcos tendo por medida 40°, 60°, 140°, 190°, 6°.

43. — Traça um angulo de segmento e determina o seu valor.

44. — Uma recta encontra outra e fórma dois angulos; um de 65°. Avalia o outro.

45. — Fórma ao redor de um ponto seis angulos eguaes e dize o valor de cada um.

46. — Se dois angulos de um triangulo valem: um 70° e outro 25°, qual será o valor do terceiro angulo?

47. — Dize quaes são os valores dos angulos de um triangulo em que um d'elles mede 75° e o segundo é o dobro do terceiro.

48. — Quantos gráos mede cada angulo da base de um triangulo isosceles cujo angulo do vertice é de 35°?

49. — Quantos gráos mede o angulo do vertice de um triangulo isosceles em que um dos angulos da base é de 49°?

50. — Em um triangulo rectangulo, um dos angulos agudos mede 25°. Avalia os outros dois.

51. — Em circumferencias de $0^m,06$ de raio, inscreve um quadrado; — um hexagono regular; — um pentagono regular; — um heptagono regular; — um octogono regular.

52. — Em circulos de $0^m,08$ de raio, inscreve um enneagono regular; — um hendecagono regular.

53. — Em circulos de $0^m,13$ de diametro, inscreve um dodecagono regular; um decagono regular; — um pentadecagono regular.

54. — Sem o auxilio do transferidor, fórma um angulo de 15°, 30°, 60°, 45°, 120°.

55. — Idem um angulo de 135°, 150°.
56. — Traça um pentagono regular de $0^m,06$ de lado.
57. — Idem um heptagono regular de $0^m,05$ de lado.
58. — Idem um octogono regular de $0^m,04$ de lado.

59. — Idem um enneagono regular de $0^m,023$ de lado.
60. — Idem um decagono regular de $0^m,02$ de lado.
61. — Idem um dodecagono regular de $0^m,03$ de lado.
62. — Com uma diagonal menor egual a $0^m,06$ traça um heptagono regular.
63. — Traça os polygonos estrellados formados pelas diagonaes de um pentagono regular de $0^m,04$ de lado.
64. — Idem de um hexagono regular de $0^m,03$ de lado.
65. — Idem de um heptagono regular; — de um octogono regular, ambos de $0^m,025$ de lado.
66. — Idem de um enneagono regular de $0^m,03$ de lado; — de um decagono regular de $0^m,05$ de raio,
67. — Idem de um hendecagono e de um dodecagono regulares, ambos de $0^m,024$ de lado.
68. — Qual o supplemento de um angulo de 115°40'?
69. — Traça um pentagono regular cuja diagonal seja egual a 6 cm.
70. — Idem um heptagono regular cuja diagonal menor = 5 cm.
71. — Idem um heptagono regular cuja diagonal maior = 8 cm.
72. — Idem um octogono regular cuja diagonal maior = 8 cm., 5.
73. — Idem um octogono regular cuja diagonal menor = 3 cm.
74. — Idem um octogono regular cuja diagonal média = 6 cm., 5.
75. — Idem um enneagono regular cuja diagonal maior = 8 cm., 3.
76. — Idem um enneagono regular cuja diagonal menor = 72 mm.
77. — Idem um enneagono regular cuja diagonal média = 4 cm., 6.
78. — Idem um decagono regular cuja diagonal menor = 3 cm.
79. — Idem um decagono regular cuja maior diagonal média = 8 cm.
80. — Idem um decagono regular cuja menor diagonal média = 6 cm., 5.

CAPITULO IX

SUMMARIO: **Linhas proporcionaes. — Problemas.**

LINHAS PROPORCIONAES.

O QUOCIENTE que obtemos dividindo entre si os numeros que exprimem as grandezas de duas linhas medidas com a mesma unidade, chama-se RAZÃO ou RELAÇÃO.

Assim, por exemplo, medindo-se duas rectas encontramos uma egual a 0,08 e a outra = $0^m,04$. Dividindo-se 8 por 4 dá 2 que é a RAZÃO ou RELAÇÃO que existe entre as duas rectas.

A egualdade entre duas RAZÕES chama-se **proporção.**

Exemplo:

$\frac{4}{2}=\frac{6}{3}$ é uma **proporção** porque estas duas RAZÕES são eguaes, uma e outra a 2.

Em uma **proporção** o primeiro e o ultimo termos chamam-se *extremos;* o segundo e o terceiro chamam-se *meios.*

Em toda a **proporção** o producto dos *extremos* é egual ao producto dos *meios.*

Exemplo :

$$\frac{5}{10}=\frac{6}{12}$$

portanto

$$5\times12=10\times6=60$$

Este principio permitte o calculo de um dos termos de uma **proporção,** quando os outros tres são conhecidos.

Exemplo :

$$\frac{2}{4}=\frac{6}{X}$$

Em virtude do principio citado:

$$2\times X=4\times6 \text{ ou } 2X=24$$

d'onde

$$X=\frac{24}{2}=12$$

logo :

$$\frac{2}{4}=\frac{6}{12}$$

Quatro linhas, quatro numeros ou quatro

quantidades quaesquer são **proporcionaes** quando a primeira contém a segunda ou está contida na segunda o mesmo numero de vezes que a terceira contém ou está contida na quarta.

Exemplo:

12 contém 4 tres vezes, assim como 15 contém 5 tambem tres vezes, isto é:

12 : 4 :: 15 : 5 (doze está para quatro, assim como quinze está para cinco).

ou

$\frac{12}{4}=\frac{15}{5}$(doze dividido por quatro é egual a quinze dividido por cinco).

Cada uma das quatro linhas que entram em uma PROPORÇÃO chama-se QUARTA PROPORCIONAL.

Conhecendo-se tres d'estas linhas podemos sempre achar a QUARTA.

Acontece muitas vezes que em uma PROPORÇÃO o segundo e o terceiro termos, isto é, os *meios* são eguaes e então denomina-se qualquer d'estas linhas uma MEIA PROPORCIONAL ás outras duas, e cada uma d'estas duas outras chama-se uma TERCEIRA PROPORCIONAL.

Exemplo:

$$\frac{M}{N}=\frac{N}{P}$$

donde $M \times P = N \times N$ ou N^2

e $N = \sqrt{M \times P}$

N é a MEIA OU MÉDIA PROPORCIONAL a M e P; M e P são *extremos;* e M ou P é uma TERCEIRA PROPORCIONAL aos *meios* e ao outro *extremo.*

Outro exemplo:

$$\frac{16}{8}=\frac{8}{4}$$

donde $16 \times 4 = 8 \times 8$ ou 8^2

e $8 = \sqrt{16 \times 4} = \sqrt{64}$

Problema 158. — Dividir uma recta em partes eguaes.

Seja AB (fig. 369) a recta que queremos dividir em cinco partes eguaes.

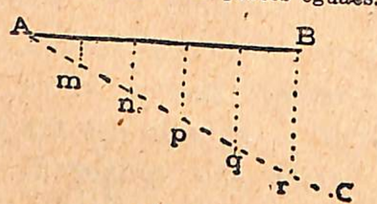


Fig. 369.

Do ponto A tracemos uma recta AC que forme com AB um angulo qualquer. A partir do ponto A e sobre AC

marquemos cinco distancias eguaes *Am*, *mn*, *np*, etc. Unamos o ponto *r* ao ponto B e pelos pontos *q*, *p*, *n*, *m* tracemos rectas parallelas á rB, as quaes dividem AB em cinco partes eguaes.

Outra solução. — Seja MN a recta que desejamos dividir em 7 partes eguaes (fig. 370).

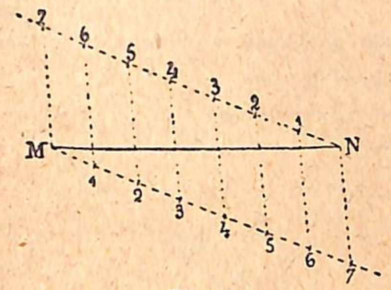


Fig. 370.

Formemos na extremidade M um angulo qualquer e em N, outro egual a M.

Appliquemos, a partir de M e de N, sobre cada uma das rectas que formam com MN os angulos, sete distancias eguaes entre si e unamos depois M — 7, 1 — 6, 2 — 5, 3 — 4, 4 — 3, 5 — 2, 6 — 1 e 7 — N.

Essas parallelas dividem MN em 7 partes eguaes.

Problema 159. — Dividir uma recta em partes proporcionaes a distancias dadas.

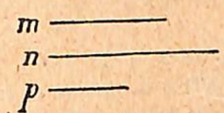


Fig. 371.

Seja AB (fig. 372) a recta que queremos dividir em partes proporcionaes ás tres rectas *m*, *n*, e *p* (fig. 371).

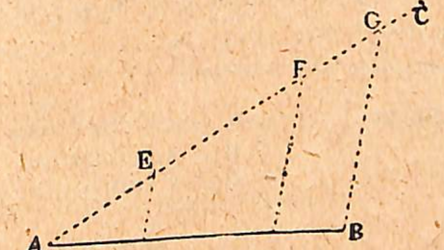


Fig. 372.

Do ponto A tracemos uma recta AC que forme com AB um angulo qualquer. Sobre AC e a partir de A marquemos AE = m, EF = n e FG = p; unamos G a B e dos pontos E e F tracemos parallelas a GB. Estas parallelas dividem a recta AB em partes **proporcionaes** ás distancias m, n e p, porque se duas rectas são cortadas por um numero qualquer de parallelas, as secções correspondentes das duas rectas são proporcionaes.

Problema 160. — Achar a quarta proporcional a tres rectas dadas.

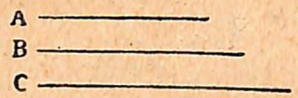


Fig. 373.

(*Solução graphica*):

Sejam A, B e C (fig. 373) as rectas dadas.

Tracemos um angulo qualquer V (fig. 374); sobre um dos lados marquemos a distancia VM = A e VN = B e, sobre o outro lado VP = C. Unamos o ponto M ao ponto P e do ponto N tracemos uma parallela a MP. A recta VD é a **quarta proporcional** pedida.

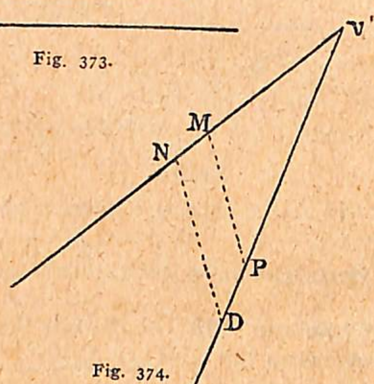


Fig. 374.

Uma recta traçada de um a outro lado de um triangulo e parallelamente ao terceiro, divide os dois primeiros em partes proporcionaes.

(*Solução numerica*):

Sejam : A = 2 centimetros;
B = 4 centimetros;
C = 3 centimetros;

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{X}$$

substituamos A, B e C pelos seus valores:

$$\frac{2}{4}=\frac{3}{X}$$

portanto

$$X=\frac{4\times 3}{2}=\frac{12}{2}=6$$

logo

$$\frac{2}{4}=\frac{3}{6}$$

Problema 161. — Achar a média proporcional a duas rectas dadas.

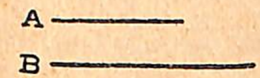


Fig. 375.

Sejam A e B as rectas dadas (fig. 375). Sobre uma recta indefinida marquemos M N (fig. 376) egual a A e NP = B. Sobre MP como diametro, descrevamos uma semi-circumferencia e pelo ponto N levantemos uma perpendicular. A recta NK é a **média proporcional** pedida.

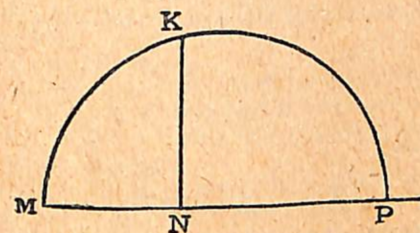


Fig. 376.

MN : NK :: NK : NP

porque, uma perpendicular abaixada de um ponto da circumferencia sobre o seu diametro é a média proporcional entre os segmentos d'esse diametro.

Substituindo-se MN e NP pelas rectas A e B, temos

A : NK :: NK : B

Se A = 2 e B = 8; NK será egual a 4; porque

$$NK=\sqrt{A\times B}=\sqrt{2\times 8}=\sqrt{16}=4.$$

Problema 162. — Dividir uma recta em média e extrema razão (*).

Seja AB a recta dada (fig. 377).

Construamos um triangulo ABC em que BC $\frac{1}{2}$ de AB; prolonguemos AC.

Do ponto C, como centro e raio egual a CB descrevamos a semi-circumferencia EBF e do ponto A e raio AE tracemos o arco ED.

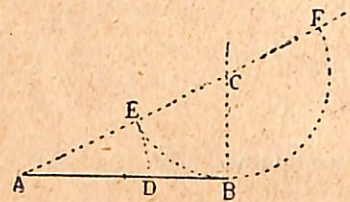


Fig. 377.

O ponto D divide a recta AB em média e extrema razão. AB : AD :: AD : DB.

Problema 163. — Construir um triangulo de perimetro egual a uma recta dada, sendo seus lados proporcionaes a tres medidas dadas.

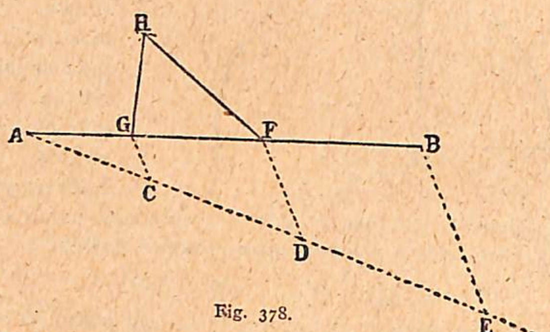


Fig. 378.

Seja AB a recta egual ao perimetro (fig. 378) e as tres medidas, respectivamente eguaes a $0^m,017$; $0^m,02$ e $0^m,025$.

Formemos com a recta AB um angulo qualquer A e appliquemos AC = $0^m,017$, CD = $0^m,02$ e DE = $0^m,025$.

(*) Uma recta dividida em média e extrema razão, quando o maior segmento é média proporcional entre a recta inteira e o menor segmento.

Unamos o ponto B ao ponto E e de C e D tracemos parallelas a BE.

Sobre GF construamos o triangulo GFH cujos lados GH = GA e FH = FB.

O angulo BAE denomina-se ANGULO DE REDUCÇÃO.

EXERCICIOS

1. — Dinah! que é razão? — dá exemplos.
2. — Como se chama a egualdade de duas razões?
3. — Exemplo.
4. — Como se chamam o primeiro e o ultimo termos de uma proporção?
5. — O segundo? — e o terceiro?
6. — Em uma proporção a que é egual o producto dos extremos?
7. — Exemplo.
8. — Que é uma quarta proporcional?
9. — Que é uma média porporcional?
10. — Que é uma terceira proporcional?
11. — Exemplo.
12. — Traçar quatro rectas taes que formem a proporção 2:6::3:9; sabendo-se que a primeira é egual a 3 centimetros.
13. — Divide uma recta de $0^m,045$ em tres partes proporcionaes a tres rectas de $0^m,012$; $0^m,025$ e $0^m,034$.
14. — Divide uma recta de 72 centimetros em cinco partes eguaes.
15. — Divide uma recta de $0^m,086$ em partes proporcionaes a $0^m,03$; $0^m,04$ e $0^m,06$.
16. — Qual a 4.ª proporcional a tres rectas de, respectivamente, $0^m,024$; $0^m,032$ e $0^m,05$?
17. — Qual a média proporcional de duas rectas: uma de $0^m,05$ e outra de $0^m,03$?
18. — Divide uma recta de $0^m,10$ em média e extrema razão.
19. — Qual o comprimento da média proporcional entre duas rectas, uma de $0^m,20$ e outra de $0^m,45$?
20. — Qual o comprimento da quarta proporcional a tres rectas de $0^m,10$; $0^m,20$, $0^m,50$?

CAPITULO X

SUMMARIO: **Polygonos semelhantes. — Escalas. — Problemas.**

POLYGONOS SEMELHANTES.

Quando dois **polygonos** têm os angulos eguaes e os lados homologos proporcionaes, são **semelhantes** (fig. 379).

São *homologos* os lados adjacentes aos angulos eguaes.

Uma recta, parallela a um dos lados de um triangulo, determina um triangulo semelhante ao primeiro.

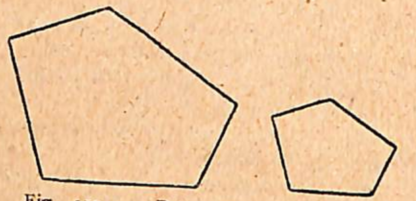


Fig. 379. — Polygonos semelhantes.

Os vertices dos angulos eguaes são *homologos.*

Dous ou mais **polygonos semelhantes** têm, cada um, o mesmo numero de lados e de angulos.

Todos os triangulos que têm seus angulos correspondentes eguaes, são **semelhantes.**

Todos os quadrados são **semelhantes**, e do mesmo modo o são todos os polygonos regulares do mesmo numero de lados.

Os rectangulos só são **semelhantes** quando os lados correspondentes são proporcionaes.

Convém não confundir *semelhante* com *egual;* duas figuras eguaes, superpostas, coincidem em todos os seus pontos; ao passo que semelhantes, não coincidem.

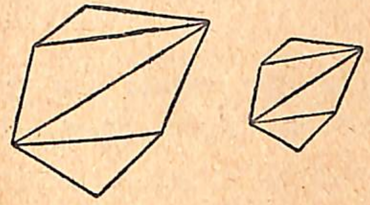


Fig. 380.

Dois **polygonos semelhantes** podem ser decompostos em um mesmo numero de triangulos semelhantes (fig. 380) e semelhantemente dispostos.

ESCALAS.

COPIAR um modêlo do tamanho natural é reproduzil-o com egual fórma, de modo que o desenho, em todos os seus detalhes, fique exactamente egual ao modêlo; AUGMENTAR OU DIMINUIR um modêlo é reproduzil-o maior ou menor de modo que todos os seus detalhes sejam proporcionalmente traçados.

Uma reducção ou diminuição póde ser feita proporcionalmente ás linhas ou ás áreas; no primeiro caso diz-se *reducção linear* e no ultimo *superficial*.

Para a reducção, usa-se geralmente da **escala** que é a relação que existe entre o tamanho de um objecto ou de um modêlo, que se deseja reproduzir e o desenho d'esse objecto ou modêlo.

Póde-se tambem dizer que, **escala** é a relação que existe entre as dimensões reaes e as do desenho.

Esta relação exprime-se em fórma de fracção ordinaria em que o numerador é a unidade e o denominador indica de quantas vezes está reduzido o modêlo.

Assim diz-se que um desenho está na **escala** de um para vinte (1:20; $\frac{1}{20}$; 1/20) quando elle representa a vigesima parte do natural. Geralmente adoptamos o metro como unidade de medida e, se uma linha de um desenho qualquer medir 4 centimetros e a sua correspondente no natural ou no modêlo fôr 4 metros, a **escala** usada n'esse desenho será de

um para cem (1:100; $\frac{1}{100}$ ou 1/100) porque 4 centimetros é a centesima parte de 4 metros.

A **escala** DE REDUCÇÃO é formada por duas rectas parallelas, divididas em partes eguaes por meio de perpendiculares communs.

Cada uma d'essas partes representa a unidade de medida (geralmente o metro) em uma dada relação.

Para desenharmos um modêlo na proporção de 1:10, por exemplo, teriamos que construir uma **escala** em que cada uma das divisões representasse a decima parte da medida adoptada e, se essa medida fosse o metro as divisões que correspondessem á unidade, em nossa escala, seriam eguaes á decima parte do metro ou o decimetro e cada uma das dez primeiras subdivisões corresponderia a um decimetro.

Na figura 381 (Escala de 1:10) AB que é egual a um decimetro, representa um metro;

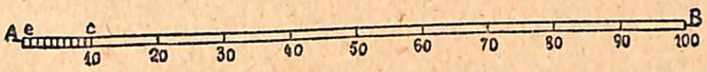


Fig. 381.

AC que é egual a um centimetro, representa um decimetro e A$\cdot$e que é um millimetro, representa um centimetro.

Na figura 382 (Escala de 1:20) as dez primeiras divisões reunidas que são eguaes a cinco centimetros representam um metro, porque cinco centimetros é a vigesima parte do metro; cada uma das dez divisões que é egual a cinco millimetros representa um decimetro e, finalmente divididos cinco millimetros em dez partes eguaes, cada uma representará nessa escala, um centimetro.

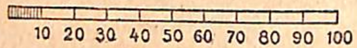


Fig. 382.

As **escalas** METRICAS DE PROPORÇÃO, mais usadas, são:

Escala	Medida real	Medida graphica
1:5	1 metro	0m,20
1:10		0m,10
1:20		0m,05
1:25		0m,04
1:50		0m,02
1:100		0m,01

Isto é, na **escala** de 1:5, um metro é egual a 0m,20; na de 1:10, 1m,0 = 0m,10, etc.

Serve a **escala** para se poder traçar um desenho cujas linhas estejam em uma mesma relação com as correspondentes no modêlo re-

presentado e, para julgar por um desenho, das dimensões exactas e reaes do modêlo ou objecto representado nesse desenho.

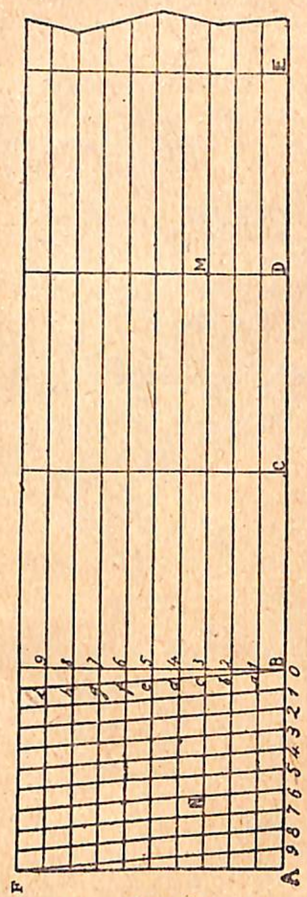


Fig. 383.

A **escala** DECIMAL ou TRANSVERSAL permitte divisões muito pequenas as quaes não poderiamos obter na **escala** commum.

Sua construcção é baseada na theoria dos triangulos semelhantes cujos lados homologos são proporcionaes.

Problema 164. — Construir uma escala decimal.

Tracemos uma recta e marquemos, a partir de um ponto qualquer diversas medidas, AB, BC, CD, DE, etc., eguaes entre si e cada uma correspondente á unidade de medida (fig. 383).

Dos pontos A, B, C, D, E levantemos perpendiculares á recta anteriormente traçada.

Sobre a perpendicular A appliquemos dez vezes uma mesma medida arbitraria e pelos pontos de divisão tracemos rectas parallelas a AE. Dividamos AB em dez partes eguaes e tiremos pelos pontos de divisão, obliquas parallelas a F 9, como indica a fig. 383.

O ponto B é o zero da escala; as distancias crescentes *a1*, *b2*, *c3*, etc., exprimem 1, 2, 3, etc., centenas; as partes eguaes em que está dividida AB são as dezenas e as distancias AB, BC, CD, são as unidades.

Applicações. — Para marcar 130 unidades, tomemos a distancia C3 em linha horisontal.

Para ter 263 unidades tomemos a distancia MN, porque MN = M3 + 3c + cN ou 200 + 3 + 60 = 263.

Problema 165. — Construir sobre uma recta dada um triangulo semelhante a um outro.

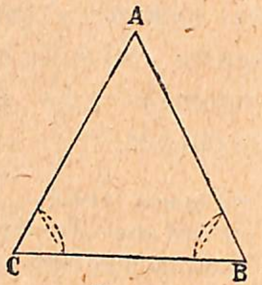


Fig. 384.

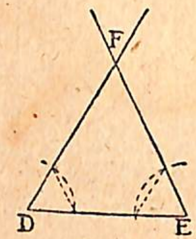


Fig. 385.

Seja ABC o triangulo dado (fig. 384).

Tracemos uma recta DE (fig. 385) proporcional a CB.

Façamos no ponto D um angulo = C e no ponto E um outro = B.

Os triangulos CAB e DFE têm os angulos eguaes e os lados homologos proporcionaes: são semelhantes.

Problema 166. — Construir um polygono semelhante a um outro. Seja ABCDE o polygono dado (fig. 386).

Decomponhamol-o nos triangulos ABE, BDE e BCD.

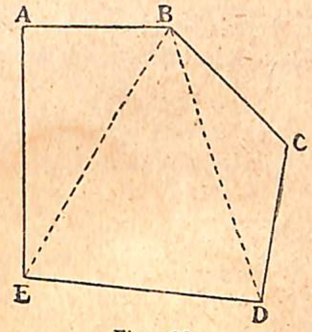


Fig. 386.

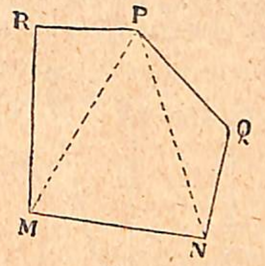


Fig. 387.

Tracemos uma recta MN (fig. 387) proporcional a ED, sobre a qual façamos um triangulo PNM semelhante a BDE; sobre o lado PN façamos um triangulo PQN semelhante a BCD, e sobre PM um triangulo PMR semelhante a BEA. Os **polygonos** RPQNM e ABCDE **são semelhantes**, porque têm os angulos eguaes e os lados homologos proporcionaes.

Problema 167. — Construir um rectangulo semelhante a um outro, de modo que seus lados sejam menores $\frac{1}{7}$ dos lados d'esse outro, isto é, que seus lados estejam para os d'esse outro como 6 : 7.

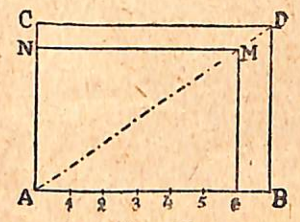


Fig. 388.

ABCD é o rectangulo conhecido (fig. 388).

Tiremos a diagonal AD e dividamos o lado AB em 7 partes eguaes.

Pelo ponto 6 levantemos uma perpendicular á recta A B até determinar o ponto M na diagonal A D.

Do ponto M tracemos MN parallela a CD. A6NM é o rectangulo pedido; seus lados estão na seguinte proporção: A6 : AB :: 6M : BD.

Problema 168. — Dado um rectangulo, construir, por meio do angulo de reducção, um outro cujos lados estejam para os do primeiro como 3 : 5.

Fig. 389.

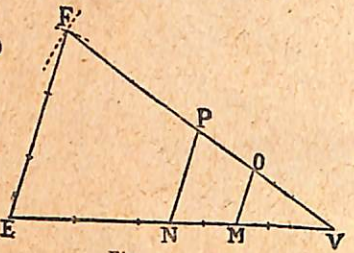


Fig. 390.

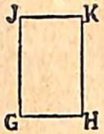


Fig. 391.

Seja ABCD o rectangulo dado (fig. 389).

Construamos um triangulo isosceles FEV de modo que a base e o lado estejam na proporção de 3 : 5 (fig. 390).

Trasportemos em VN a medida do lado AC e em VM a do lado AB.

Pelos pontos N e M tracemos rectas parallelas á base EF e construamos, com as rectas NP e MO, o rectangulo GHJK (fig. 391) cujos lados estarão para os de ABCD como 3 : 5.

Problema 169. — Construir um polygono irregular, semelhante a um outro, de modo que seus lados estejam para os correspondentes do outro, como 6 : 4.

Seja MNOPQR o polygono irregular (fig. 392).

Dividamos MN em 4 partes eguaes e prolonguemos MR e MN.

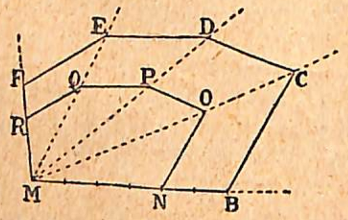


Fig. 392.

Appliquemos em NB duas vezes a medida que dividiu MN, isto é, $\frac{2}{4}$ de MN, e teremos MB : MN :: 6 : 4.

Do vertice M tiremos todas as diagonaes do polygono dado, prolongando-as.

Tracemos BC, CD, DE, EF respectivamente parallelas a NO, OP, PQ, QR.

O polygono MBCDEF é semelhante ao polygono dado, e seus lados estão para os do primeiro como 6 : 4.

EXERCICIOS

1. — Clarisse! que são polygonos semelhantes?
2. — Que nome têm os lados adjacentes aos angulos eguaes?
3. — Mostra dois lados homologos.
4. — Quando são semelhantes dois triangulos?
5. — Quaes os quadrilateros que são semelhantes?
6. — Que é preciso para que dois ou mais polygonos regulares sejam semelhantes?
7. — Que é preciso para que dois rectangulos sejam semelhantes?
8. — Semelhança e egualdade são a mesma cousa?
9. — Não será a egualdade um caso especial de semelhança?
10. — Dois polygonos semelhantes poderão ser divididos em um mesmo numero de triangulos semelhantes?
11. — Traça um triangulo semelhante a um outro triangulo dado.
12. — Traça um polygono semelhante a um outro polygono dado.
13. — Sendo $0^m,60$ e $0^m,20$ as medidas dos lados de dois quadrados, que são estes quadrados entre si?
14. — Porque?
15. — Traça um rectangulo semelhante a um outro e cujos lados estejam na relação de 4:7. — Idem, na de 8:5.
16. — Faze um triangulo equilatero de $0^m,05$ de lado e depois um outro, cujo perimetro seja a metade do do primeiro.

17. — Faze um quadrado de $0^{m},03$ de lado e depois um outro cujo perimetro seja o dobro do do primeiro.

18. — Faze um hexagono cujo perimetro seja egual a $\frac{2}{5}$ do perimetro de um outro de $0^{m},032$ de lado.

19. — Faze um quadrado cujo perimetro seja egual a uma vez mais $\frac{1}{5}$ do perimetro de um outro de $0^{m},035$ de lado.

20. — Traça um octogono regular e depois um outro que lhe seja semelhante e tenha um perimetro duplo do primeiro.

21. — Idem, idem cujo perimetro seja egual a $\frac{1}{3}$ do do primeiro.

22. — Faze um rectangulo cujos lados adjacentes sejam $0^{m},025$ e $0^{m},052$ e depois um outro semelhante cujo perimetro seja egual a $0^{m},120$.

23. — Faze um losango cujas diagonaes meçam, uma $0^{m},03$ e a outra $0^{m},045$ e depois um segundo semelhante ao primeiro e cujo perimetro seja egual a $\frac{7}{5}$ do perimetro do primeiro.

24. — Faze um losango de $0^{m},04$ de lado, em que um dos angulos agudos seja de 38°; depois um outro semelhante, cuja diagonal maior seja egual a $\frac{8}{7}$ da do primeiro.

25. — Traça um triangulo equilatero inscripto em um circulo de raio = $0^{m}028$, e outro em um circulo cuja circumferencia circumscreva um quadrado de $0^{m},04$ de lado.

26. — Qual a relação entre os perimetros de dois triangulos equilateros tendo para lados: o primeiro $0^{m},02$ e o segundo $0^{m},07$.

27. — Qual a relação entre os perimetros de dois quadrados tendo para os lados $0^{m},04$ e $0^{m},05$? — idem $0^{m},08$ e $0^{m},05$? — idem 10^{m} e 52^{m}?

28. — Qual a relação entre os perimetros de dois pentagonos regulares inscriptos em circulos de: um $0^{m},08$ de raio e outro $0^{m},04$ de raio?

29. — Um rectangulo tem por base 15^{km} e por altura $4^{km}5$; qual será o perimetro de um outro semelhante cujos lados meçam $\frac{1}{6}$ dos do primeiro?

30. — Quaes serão a base e a altura de um rectangulo semelhante a um outro de $0^{m},054 \times 0^{m},032$, tendo por perimetro $\frac{5}{4}$ do perimetro do primeiro?

31. — Um heptagono regular está inscripto em um circulo de $0^{m},02$ de raio; qual será o raio do circulo circumscripto a um outro heptagono semelhante e de duplo perimetro?

32. — Um quadrilatero tem por medida dos lados, successivamente, $0^{m},02$; $0^{m},03$; $0^{m},05$ e $0^{m},025$ e para medida do angulo formado pelo primeiro e segundo lados 110°: traçar um outro cujo primeiro lado esteja na relação de 7:4.

33. — Que é copiar um modêlo?

34. — Que é augmentar um modêlo? — diminuir?

35. — Quando ha reducção linear? — superficial?

36. — Que é escala?

37. — Como se lê 1:10? — 1:40? — 1:100? — 1:10000?

38.— Como é formada a escala de reducção?

39. — Qual é a medida geralmente empregada?

40. — Na escala de 1:10, mostra-me 4 centimetros; 63 millimetros; 6 decimetros.

41. — Representa-me 6 metros na escala de 1:20; idem na de 1:10; idem na de 1:5.

42. — Traça uma recta e diz-me que representa na escala de 1:25; idem na de 1:50.

43. — Para que serve a escala?

44. — Faze uma escala decimal representando o metro por $0^{m},05$; idem representando o metro por $0^{m},10$.

45. — Tanto numa como noutra, mostra os decimetros e os centimetros.

46. — Sobre uma recta de $0^{m},10$ constroe uma escala que represente, por 6 centimetros, uma dimensão de 12 metros.

47. — Constroe a escala de 1:20 e traça nessa escala um rectangulo cujos lados adjacentes meçam $0^{m},82$ e $0^{m},63$.

48. — Constroe a escala de 1:10 e nessa escala faze um quadrado cujo lado meça $0^{m},92$.

49. — Faze um quadrado de $0^{m},90$ de lado na escala de 1:10.

50. — Faze um pentagono regular inscripto em um circulo de raio egual a $0^{m},64$ na escala de 1:10; — idem na de 1:20.

CAPITULO XI

SUMMARIO: **Relação entre a circumferencia e o diametro. — Problemas.**

Reduzir uma circumferencia ou um arco a uma linha recta é rectifical-os.

RELAÇÃO ENTRE A CIRCUMFERENCIA E O DIAMETRO.

Se pudessemos applicar sobre uma circumferencia um fio de linha de modo que as suas extremidades se reunissem em um ponto, e depois collocassemos este fio em linha recta, tinhamos materialmente rectificado esta circumferencia; porém como este processo é inexequivel, os geometras substituiram-no pelo calculo.

A relação que existe entre a **circumferencia** e o **diametro** é uma quantidade constante.

Convencionou-se designar pela lettra R o raio de uma circumferencia.

Designemos por C e *c* duas circumferencias e por D e *d* os respectivos diametros.

Duas **circumferencias** *são proporcionaes* entre si, como *seus* RAIOS *ou seus* **diametros;** portanto

$$C : c : : D : d$$

mudemos os meios de logar

$$C : D : : c : d$$

d'onde

$$\frac{C}{D} = \frac{c}{d}$$

isto é, o quociente da primeira **circumferencia** por seu diametro é egual ao quociente da segunda **circumferencia** por seu diametro.

Este quociente é ordinariamente designado pela lettra grega π (pi).

$$\frac{C}{D} = \pi$$

Esta relação não se póde exprimir exactamente.

Na prática, e geralmente, empregamos a expressão 3,1416, isto é: a circumferencia contém 3 vezes o diametro mais 1416 decimos-millesimos d'este diametro.

Obtem-se o comprimento de uma **circumferencia** cujo raio ou diametro é conhecido, multiplicando-se seu diametro pela relação 3,1416 (π).

$$C = \pi \times D = 3{,}1416 \times D$$

Problema 170. — Qual o comprimento de uma circumferencia cujo raio é egual a 6 metros ?

A circumferencia é egual a $\pi \times D$; porém D é egual a 2R (porque o diametro = dois raios) logo:

$$\pi \times 2R = 3{,}1416 \times 12 = 37^m{,}6992$$

Problema 171. — Qual a circumferencia que tem para diametro 16 metros ?

A circumferencia é egual a $\pi \times D$; porém D = 16^m portanto $3{,}1416 \times 16 = 50^m{,}2656$.

O **diametro** de um circulo cuja **circumferencia** se conhece é egual ao quociente da divisão d'essa **circumferencia** pela relação 3,1416, isto é:

$$D = \frac{C}{3{,}1416}$$

Problema 172. — Qual o diametro de um circulo cuja circumferencia é egual a $37^m{,}6992$?

Sendo o diametro $= \frac{C}{3{,}1416}$ e substituindo-se C pelo seu valor, temos :

$$\frac{37{,}6992}{3{,}1416} = 12^m$$

O comprimento de um ARCO cujo numero de gráos se conhece é egual ao producto da **circumferencia**, de que o ARCO faz parte, pela relação entre o numero de gráos d'esse ARCO e 360°, isto é:

$$\pi \times D \times \frac{\text{numero de gráos do arco}}{360^\circ}$$

ou

$$\frac{\pi \times D \times \text{numero de gráos do arco}}{360^\circ}$$

Problema 173. — Qual o comprimento de um arco de 50° numa circumferencia de 12 metros de diametro ?

Sendo a circumferencia egual a

$$\pi \times D = \pi \times 12$$

O arco será egual a

$$\frac{\pi \times 12 \times 50^\circ}{360^\circ} = \frac{3{,}1416 \times 12 \times 50}{360} = 5^m{,}2360$$

Problema 174. — Qual é o numero de gráos de um arco de 6 metros, numa circumferencia de 15 metros de raio ?

Sendo a circumferencia egual a

$$3{,}1416 \times 30 = 94^m{,}2480$$

o numero de gráos do arco será egual a

$$360 \times \frac{6}{94{,}2480} = \frac{2160}{94{,}2480} = 22^\circ 54'$$

EXERCICIOS

1. — Maria! que é rectificar um arco?

2. — Como se poderia rectificar uma curva se fosse exacta esta rectificação?

3. — Qual a relação que existe entre o diametro e a circumferencia?

4. — Como geralmente exprimimos esta relação?

5. — A circumferencia a que é egual?

6. — Qual é a medida do diametro de uma circumferencia conhecida?

7. — A que é egual o raio de uma circumferencia conhecida?

8. — A que é egual o comprimento de um arco cujo numero de gráos é conhecido?

9. — Como se póde determinar o numero de gráos de um arco cujo comprimento é conhecido?

10. — Qual o comprimento de uma circumferencia cujo diametro é egual a 12 centimetros?

11. — Qual o comprimento de uma circumferencia cujo raio é egual a 8 centimetros?

12. — Qual a circumferencia que tem para diametro 40 metros?

13. — Qual a circumferencia que tem 32 metros de raio?

14. — Que comprimento tem a circumferencia de um nickel de 200 réis, sabendo-se que o diametro mede $0^m,032$?

15. — Qual a circumferencia que tem para diametro 120^m?

16. — Idem como raio 170^{km}?

17. — Quaes as circumferencias que têm para diametro $12^m,5$; $6^m,40$; 16^m; e $1^m,80$?

18. — Quaes as circumferencias que têm como raio $0^m,085$; $0^m,90$; 30^m; e $0^m,6$?

19. — Em uma circumferencia de 40 centimetros de raio, quaes são os comprimentos dos arcos de 60°, 30°, 120° e 150°?

20. — Em uma circumferencia de 50 centimetros de raio, quaes são os numeros de gráos dos arcos de 30 centimetros? — de $0^m,025$? — de $0^m,080$?

21. — Quaes os diametros das circumferencias que medem $206^m,25$; 100^m; 60^m; $0^m,06$; e 1000^m de comprimento?

22. — A roda de um carrinho de mão tem $0^m,60$ de diametro. Qual a distancia percorrida pelo carrinho quando, conduzido, a roda tiver feito 60 voltas?

CAPITULO XII

SUMMARIO: **Área dos polygonos. — Área das figuras circulares. — Figuras equivalentes. — Problemas.**

ÁREA DOS POLYGONOS.

Medir ou avaliar uma superficie é determinar quantas vezes ella contém uma outra superficie tomada para unidade de medida.

O numero de vezes que uma unidade de superficie está contida em qualquer superficie, seguida do nome da unidade, chama-se **área** (*).

Ordinariamente a unidade de superficie é um quadrado, cujo lado póde ser arbitrario; porém geralmente é um metro quadrado, ou

(*) E' necessario que não confundamos **área** com *superficie*. Superficie exprime a idéa de uma extensão absoluta e área exprime a idéa de uma extensão relativa. Assim dizemos: a superficie de um campo illimitado e a área de um quadrado.

por outra, um quadrado cujo lado mede um metro de comprimento.

As divisões do *metro quadrado* são:

O *decimetro quadrado*, isto é, um quadrado cujo lado mede a decima parte do metro;

O *centimetro quadrado*, isto é, um quadrado cujo lado mede a centesima parte do metro;

O *millimetro quadrado*, isto é, um quadrado cujo lado mede a millesima parte do metro.

ÁREA DO QUADRADO

Tomemos um quadrado A B C D (fig. 393); appliquemos o metro sobre AB e AC a partir do ponto A: obteremos os pontos de divisão 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, admittindo que os lados AB e AC tenham, cada um, uma medida exacta de 5 metros.

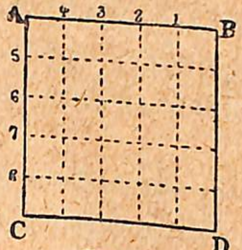


Fig. 393.

Pelos pontos 1, 2, 3 e 4 tracemos parallelas a AC e dos pontos 5, 6, 7, 8 parallelas a AB. O quadrado acha-se dividido em 25 quadrados

eguaes (tendo, cada um, um metro de lado) isto é, em 25 metros quadrados.

Neste, como em qualquer caso, podemos sempre fazer esta construcção ou simplesmente multiplicar por si mesmo o numero que representa o comprimento do lado.

Se o lado de um quadrado contém um certo numero de metros e subdivisões do metro, empregamos o mesmo processo.

Assim, por exemplo, se o lado tem de comprimento $5^m,26$ isto equivalé dizer que o comprimento é de quinhentos e vinte e seis centimetros e faremos a decomposição precedente tomando para unidade o centimetro.

Para se avaliar a **área** de um quadrado basta portanto multiplicar por si mesmo o numero que representa o comprimento do lado; o que nos dá a FÓRMULA: (*)

$$\text{Área} = \text{R}\,\text{R}^2$$

Problema 175. — Qual a área de um quadrado de $12^m,5$ de lado ?

$$\text{Area} = \overline{12,5}^2 = 12,5 \times 12,5 = 156^{m2},25.$$

Da formula : $\text{Área} = \text{B}^2$ deduz-se

$$\text{B} = \sqrt{\text{Área}}$$

(*) Fórmula é a expressão de uma regra geral que resolve muitas questões.

isto é, o comprimento de um lado é egual á raiz quadrada da **área.**

Problema 176. — Qual o comprimento do lado de um quadrado, cuja área é egual a $46^{m2},24$?

O lado é egual a $\sqrt{46,24} = 6,^{m}8$.

A **área** do quadrado inscripto em um circulo cujo raio é conhecido, obtem-se multiplicando o quadrado d'esse raio pelo numero 2.

$$\text{Área} = 2\,R^2$$

Problema 177. — Qual a área de um quadrado inscripto em um circulo cujo raio é egual $0^{m},16$?

$$\text{Area} = 2 \times \overline{0,16}^2 = 2 \times 0,0256 = 2^{m2},0512.$$

O LADO do quadrado inscripto em um circulo de raio dado é egual ao producto d'esse raio pela $\sqrt{2}$, isto é, por 1,414:

$$\text{Lado} = R\sqrt{2} = R \times 1,414.$$

Problema 178. — Qual o lado de um quadrado inscripto em um circulo de raio egual a $15^{m},80$?

$$\text{Lado} = 15,80 \times 1,414 = 22^{m},3412.$$

Para obtermos o APOTHEMA do quadrado inscripto em um circulo de raio conhecido bastará dividirmos o lado por 2:

$$Ap = \frac{1}{2} R \sqrt{2} = \frac{\text{Lado}}{2}$$

Problema 179. — Que comprimento tem o apothema de um quadrado inscripto em um circulo cujo raio mede $30^{m},42$?

$$Ap = \frac{1}{2} R \sqrt{2} = \frac{30,42 \times 1,414}{2} = 15,21 \times 1,414 = 21^{m},50694$$

ÁREA DO RECTANGULO

Ao rectangulo applicamos o mesmo processo feito com o quadrado.

O lado AB (fig. 394) contém cinco metros de comprimento e o lado AC quatro metros. Como vemos na fig. 394, o rectangulo ABCD contém $5 \times 4 = 20$ metros quadrados. Portanto para avaliarmos a **área** de um rectangulo multiplicamos o numero que apresenta o lado maior pelo que representa o lado menor ou a BASE pela ALTURA, o que nos fornece a fórmula:

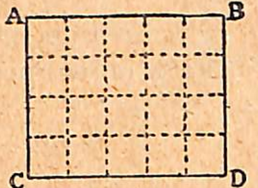


Fig. 394.

$$\text{Área} = B \times A$$

Problema 180. — Qual a área de um rectangulo de $5^{m},12$ de comprimento e $3^{m},05$ de largura?

$$\text{Área} = B \times A = 5,12 \times 3,05 = 15^{m2},6160$$

Se conhecemos a BASE e a **área** e desconhecemos a ALTURA, applicamos a seguinte fórmula:

$$\text{Altura} = \frac{\text{Área}}{\text{B}}$$

isto é, a ALTURA, é egual ao quociente da ÁREA pela BASE.

Problema 181. — Qual a altura de um rectangulo cuja área é egual a $32^{km2},30$ e a base $8^{km},5$.

$$\text{Altura} = \frac{\text{Area}}{\text{B}} = \frac{32,30}{8,5} = 3^{km},8$$

Finalmente, se é conhecida a **área** e a ALTURA e desconhecida a BASE, esta é egual:

$$\text{Base} = \frac{\text{Área}}{\text{A}}$$

A BASE é egual ao quociente da **área** pela ALTURA.

Problema 182. — A altura de um muro é egual a $2^{m},80$; a área mede $197^{m2},40$: qual a sua extensão? A extensão ou comprimento ou ainda a

$$\text{Base} = \frac{197,40}{2,80} = 70^{m},5$$

ÁREA DO PARALLELOGRAMMO

A **área** do parallelogrammo é facilmente transformada na do rectangulo; assim por exemplo:

Do ponto A (fig. 395) abaixemos a perpendicular AE commum ás parallelas AB e CD. AE é a altura do parallelogrammo.

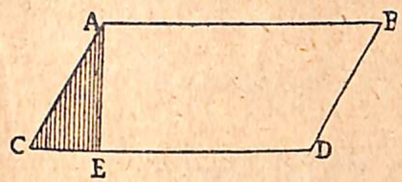


Fig. 395.

Destaquemos o triangulo AEC (fig. 396) e transportemol-o para o outro lado do parallelogrammo, que se acha d'este modo transformado em um rectangulo equivalente ABEE' (fig. 397). A altura AE do parallelogrammo tornou-se a altura do rectangulo e AB é ao mesmo tempo base de um e de outro quadrilatero.

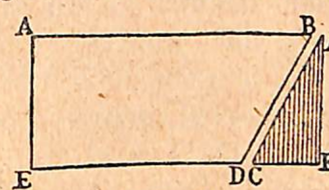


Fig. 396.

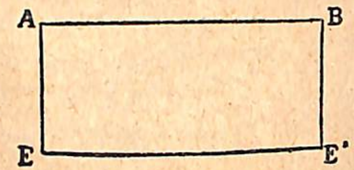


Fig. 397.

Logo o mesmo producto AB×AE é o valor da **área** do parallelogrammo e da do rectangulo. A **área** do parallelogrammo é portanto egual ao producto da BASE pela ALTURA.

$$\text{Área} = \text{B} \times \text{A}$$

Problema 183. — A base de um campo da fórma de um parallelogrammo mede $468^{m},80$ e a altura $125^{m},90$: qual a área d'esse campo ?

$$\text{Área} = 468{,}80 \times 125{,}90 = 59021^{m2}{,}92$$

ÁREA DO TRIANGULO

Da **área** do rectangulo vamos tambem deduzir a do triangulo. Do ponto B (fig. 398) abaixemos a perpendicular BM sobre AC. BM é a altura do triangulo ABC e divide este triangulo em dois outros BMA e BMC, ambos rectangulos em M.

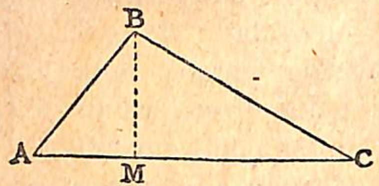


Fig. 398.

Tracemos as rectas AE e CF (fig. 399) perpendiculares á base AC do triangulo ABC e a parallela EF pelo ponto B.

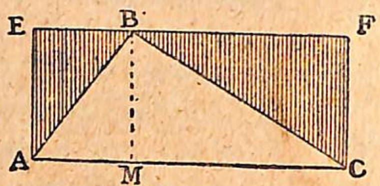


Fig. 399.

O rectangulo AEFC é o dobro do triangulo ABC porque o triangulo AEB = BMA e o triangulo BMC = CFB.

O rectangulo tem por medida AC × AE ou

MB; logo o triangulo tem por medida a metade d'este mesmo producto, e portanto:

$$\text{Área} = \frac{B \times A}{2}$$

isto é, a **área** do triangulo é egual á *metade* do producto da BASE pela ALTURA.

Problema 184. — Seja a *base* de um triangulo egual a 2 centimetros e a *altura* egual a 3 centimetros; pede-se a área. Substituimos, na fórmula, B e A pelos seus valores:

$$\text{Area} = \frac{2 \times 3}{2} = 3 \text{ centimetros quadrados.}$$

Se conhecemos a **área** e a ALTURA de um triangulo e desconhecemos a BASE, a fórmula que resolve este problema é:

$$\text{Base} = \frac{2 \text{ Área}}{A}$$

isto é, a BASE é egual ao dobro da **área** dividido pela ALTURA.

Problema 185. — Qual é a base de um triangulo cuja área mede $247^{m2},5075$ e a altura $15^{m},25$?

$$\text{Base} = \frac{2 \times 247{,}5075}{15{,}25} = 32^{m},46$$

Conhecida a **área** e a BASE e desconhecida a ALTURA, resolvemos o problema applicando a fórmula:

$$\text{Altura} = \frac{2 \text{ Área}}{B}$$

isto é a ALTURA é egual ao dobro da **área** dividido pela BASE.

Problema 186. — Pede-se a altura de um triangulo cuja área mede 175^{m2} e a base 25 metros.

$$\text{Altura} = \frac{2 \times 175}{25} = 14 \text{ metros.}$$

Conhecendo-se os tres LADOS de um triangulo, procura-se a semi-somma dos lados e d'este resultado diminue-se cada lado separadamente; depois extráe-se a raiz quadrada do producto da semi-somma pelos tres restos; ter-se-á assim a **área** do triangulo.

Problema 187. — Qual a área de um triangulo cujos lados medem respectivamente $0^m,06$; $0^m,08$ e $0^m,10$?

Sommando-se os lados e dividindo-se o total por 2:

$$\frac{6+8+10}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

diminuindo-se separadamente de 12, as medidas dos lados:

$$12 - 6 = 6$$
$$12 - 8 = 4$$
$$12 - 10 = 2$$

e extraindo-se a raiz quadrada do producto da semi-somma pelos tres restos, dá:

$$\sqrt{12 \times 6 \times 4 \times 2} = \sqrt{576} = 0^{m2},0024$$

A **área** do triangulo equilatero é egual ao producto do quadrado do seu lado pelo numero constante 0,433.

O numero constante é o resultado da divisão da $\sqrt{3}$ por 4:

$$\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1,732}{4} = 0,433$$

Portanto a área do triangulo é egual a

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 0,433 \times a^2$$

Problema 188. — O lado de um triangulo equilatero é egual a $6^m,80$; pede-se a sua área.

Substituindo-se na fórmula o valor do lado:

$$0,433 \times \overline{6,80}^{\,2} = 20^{m2},021920$$

Sendo o triangulo equilatero inscripto em um circulo cujo raio é conhecido, a sua **área** é egual ao producto do quadrado do raio pelo numero constante 1,299, isto é, $\frac{3}{4}\sqrt{3}$.

$$\text{Área} = R^2 \times \frac{3}{4}\sqrt{3} \text{ ou } \frac{3}{4} R^2 \sqrt{3} = R^2 \times 1,299$$

Problema 189. — Qual a área de um triangulo equilatero inscripto num circulo de 6 centimetros de raio?

$$\text{Área} = 6^2 \times 1,299 = 36 \times 1,299 = 46^{cm2},7640$$

O LADO de um triangulo equilatero inscripto num circulo, cujo raio é conhecido, é egual ao producto d'esse raio pelo numero constante 1,732, isto é, pela raiz quadrada de 3

$$\text{Lado} = R\sqrt{3} = R \times 1{,}732$$

Problema 190. — Qual o comprimento do lado de um triangulo equilatero inscripto num circulo de raio egual a 8 metros ?

$$L = 8 \times 1{,}732 = 13^{m}{,}856$$

A ALTURA do mesmo triangulo é egual aos $\frac{3}{2}$ do raio:

$$A = \frac{3}{2} R.$$

Problema 191. — Um triangulo equilatero é inscripto em um circulo de raio egual a 12 metros. Pede-se a altura d'esse triangulo.

$$A = \frac{3}{2} 12 = 18 \text{ metros}.$$

O APOTHEMA do mesmo triangulo é egual á metade do raio:

$$Ap = \frac{R}{2}$$

Problema 192. — Qual o apothema de um triangulo equilatero inscripto em um circulo cujo raio mede $14^{m}{,}82$?

$$Ap = \frac{14{,}82}{2} = 7^{m}{,}41$$

O RAIO DO CIRCULO INSCRIPTO em um triangulo qualquer é egual á **área** d'esse triangulo dividida pela metade do perimetro.

$$R = \frac{\text{Área}}{\frac{P}{2}}$$

Problema 193. — Qual o raio de um circulo inscripto em um triangulo cujos lados medem respectivamente $1^{m}{,}25$, $0^{m}{,}80$ e $0^{m}{,}75$?

$$\text{A metade do perimetro} = \frac{1{,}25 + 0{,}80 + 0{,}75}{2} = \frac{2{,}80}{2} = 1{,}40$$

A área do triangulo =

$$= \sqrt{1{,}40\,(1{,}40 - 1{,}25)\,(1{,}40 - 0{,}80)\,(1{,}40 - 0{,}75)} =$$

$$= \sqrt{1{,}40 \times 0{,}15 \times 0{,}60 \times 0{,}65} = \sqrt{0{,}0819} = 0^{m2}{,}2860$$

Portanto

$$R = \frac{0{,}2860}{1{,}40} = 0^{m}{,}2043$$

O RAIO DO CIRCULO CIRCUMSCRIPTO a um triangulo qualquer é egual ao producto dos tres lados do triangulo, dividido pelo quadruplo da **área**.

$$R = \frac{abc}{4 \times \text{Area}} = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

a, *b*, *c* são os lados do triangulo; *p* é a metade do perimetro do triangulo.

Problema 194. — Os lados de um triangulo são respectivamente aguaes a $0^m,6$; $0^m,7$ e $0^m,8$; pede-se o raio do circulo circumscripto a esse triangulo.

O producto dos tres lados $= 6 \times 7 \times 8 = 0,336$.

A área do triangulo $=$

$$=\sqrt{1,05\times0,45\times0,35\times0,25}=\sqrt{0,04134375}=0^{m2},2033.$$

O raio do circulo circumscripto $=$

$$=\frac{0,336}{4\times0,2033}=\frac{0,336}{0,8132}=0^m,413.$$

ÁREA DO TRAPEZIO

Recordemo-nos de que o trapezio tem duas

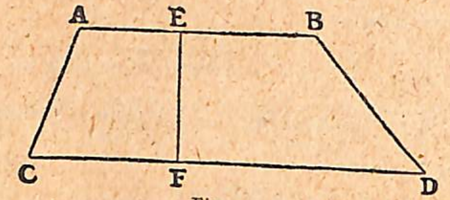


Fig. 400.

bases, que são os dois lados parallelos d'esse quadrilatero.

A altura é a perpendicular EF (fig. 400) commum ás bases. Transformemos a **área** do trapezio no do rectangulo : tomemos os pontos M e N situados nos meios dos lados não parallelos AC e BD (fig. 401).

Fig. 401.

Por esses pontos tracemos as rectas EP e GH (fig. 401) perpendiculares communs ás bases e eguaes á altura do trapezio. Prolonguemos a base AB até encontrar essas duas perpendiculares.

Os triangulos MEA e MPC são eguaes e tambem os triangulos NGB e NHD; porque têm um lado egual adjacente a dois angulos respectivamente eguaes (*).

Substituamos os triangulos MPC por MEA e NHD por NGB; teremos o trapezio transformado em um rectangulo EGHP, cuja área é PH×PE.

PE é ao mesmo tempo a altura do rectangulo e a do trapezio; resta saber o que é a base PH do rectangulo, em relação ás bases do trapezio.

Ora lembremo-nos de que EA = CP, e BG = HD. Podemos dizer que a recta PH vale AB mais EA e BG ou CD menos as mesmas quantidades EA e BG.

As duas bases reunidas valem portanto o dobro da base do rectangulo ou, o que vem a ser o mesmo, PH é a metade da somma ou a semi-somma das bases.

(*) Egualdade dos triangulos.

Para avaliarmos a **área** do trapezio multiplicamos a semi-somma das bases pela altura, o que nos fornece a fórmula:

$$\text{Área} = \frac{B+b}{2} \times A$$

ÁREA DO POLYGONO IRREGULAR

Para avaliarmos a **área** de um polygono irregular podemos decompol-o em triangulos traçando todas as diagonaes que partem de

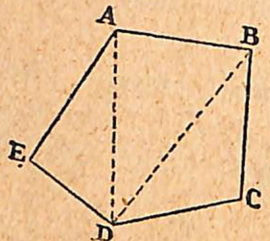


Fig. 402.

um mesmo vertice (fig. 402), ou marcando um ponto interior e ligando-o a todos os vertices do polygono; depois calculamos a **área** de cada um dos triangulos em que ficou decomposto o polygono. Entretanto parecendo muito simples este processo, não é o que permitte a avaliação da **área** da maneira mais commoda. Geralmente decompomos o polygono em triangulos rectangulos e trapezios rectangu-

los (fig. 403) e em seguida calculamos a **área** de cada triangulo e de cada trapezio, e

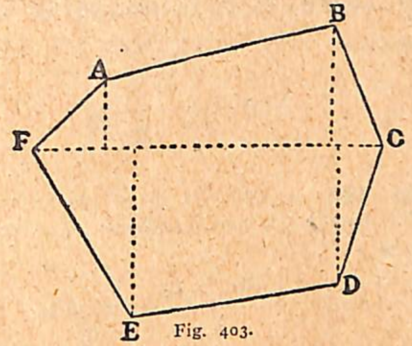


Fig. 403.

a somma de todas essas **áreas** é a **área** do polygono irregular.

ÁREA DO LOSANGO

Um losango póde ser sempre transformado em um rectangulo equivalente em que um dos lados é egual a uma das diagonaes do losango e

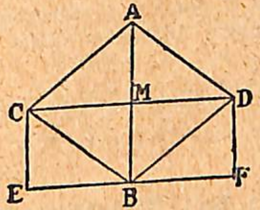


Fig. 404.

o outro lado egual á metade da outra diagonal.

O losango CABD (fig. 404) é equivalente

ao rectangulo CDEF; portanto, a **área** do losango se obtem multiplicando as duas DIAGONAES entre si e tomando a *metade* do producto:

$$\text{Área} = \frac{D \times d}{2}$$

Problema 195. — Qual a área de um ladrilho da fórma de um losango cujas diagonaes são respectivamente eguaes a 0m,16 e 0m,12 ?

$$\text{Área} = \frac{0,16 \times 0,12}{2} = 0^{m2},0096$$

Da formula $\text{Área} = \frac{D \times d}{2}$ deduzem-se:

$$d = \frac{2 \times \text{Área}}{D} \quad \text{ou} \quad D = \frac{2 \times \text{Área}}{d}$$

isto é, uma DIAGONAL é egual a duas vezes a **área** dividida por outra diagonal.

Problema 196. — Qual é a dimensão de uma das diagonaes de um losango cuja área mede 27m2,20 e a outra diagonal 6m,40 ?

$$D = \frac{27,20 \times 2}{6,40} = \frac{27,20}{3,20} = 8^m,50$$

ÁREA DO POLYGONO REGULAR

Quando o polygono é regular, effectuamos a decomposição em triangulos, ligando o

centro a todos os vertices (fig. 405). Obtemos tantos triangulos quantos são os lados do polygono e cada um tem a mesma base, porque todos os lados do polygono são eguaes, e a

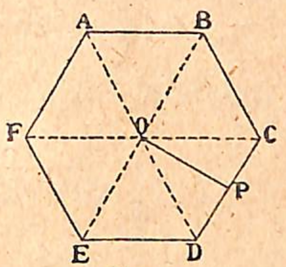


Fig 405.

mesma altura, que é o apóthema do polygono.

Avaliamos por exemplo a **área** do triangulo DCO multiplicando o lado DC do polygono pela metade do apóthema OP.

Se o polygono tem cinco, seis, oito lados, multiplicamos por cinco, seis, oito a **área** de um triangulo para termos a do polygono, o que equivale a multiplicar o PERIMETRO do polygono, pela metade do APÓTHEMA.

$$\text{Área} = P \times \frac{Ap}{2}$$

P é o perimetro e Ap é o apóthema.

ÁREA DO PENTAGONO REGULAR

A **área** de um pentagono regular é egual ao producto do quadrado de um lado pelo numero constante 1,72:

$$\text{Área} = L^2 \times 1{,}72$$

O numero constante é o resultado da seguinte operação:

$$\frac{1}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}} = \frac{1}{4}\sqrt{25+22{,}3606} =$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{47{,}3606} = \frac{6{,}88}{4} = 1{,}72$$

Problema 197. — Qual a área de um pentagono regular de $0^m{,}82$ de lado?

$$\text{Área} = \overline{0{,}82}^2 \times 1{,}72 = 0{,}6724 \times 1{,}72 = 1^{m2}{,}156528$$

Se o pentagono regular é inscripto em um circulo cujo raio é conhecido, a **área** d'esse pentagono é egual ao producto do quadrado do raio pelo numero constante 2,377.

$$\text{Área} = R^2 \times 2{,}377$$

O numero constante é assim obtido:

$$\frac{5}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}} = \frac{5}{8}\sqrt{10+4{,}47212} =$$

$$= \frac{5}{8}\sqrt{14{,}47212} = \frac{5 \times 3{,}804}{8} = 2{,}377$$

Problema 198. — Qual a área de um pentagono regular inscripto em um circulo cujo raio mede $0^m{,}46$?

$$\text{Área} = \overline{0{,}46}^2 \times 2{,}377 = 0{,}2116 \times 2{,}377 = 0^{m2}{,}5039$$

O LADO de um pentagono regular inscripto em um circulo, cujo raio é conhecido, obtemse multiplicando esse raio pelo numero constante 1,175

$$\text{Lado} = R \times 1{,}175$$

O numero vem de:

$$\frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = \frac{1}{2}\sqrt{10-2\times 2{,}236} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{10{,}000-4{,}472} = \frac{1}{2}\sqrt{5{,}528}$$

$$= \frac{1}{2}2{,}35 = 1{,}175$$

Problema 199. — Qual o lado de um pentagono regular inscripto em um circulo de raio egual a $0^m{,}58$?

$$\text{Lado} = 0{,}58 \times 1{,}175 = 0^m{,}6815$$

O APÓTHEMA d'esse mesmo pentagono é egual ao producto do raio pelo numero constante 0,81.

$$\text{Ap} = R \times 0{,}81$$

Esse numero constante resulta de:

$$\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{5}\right) = \frac{1}{4} \times 3{,}236 = 0{,}809 \text{ ou } 0{,}81$$

Problema 200. — Qual o apóthema de um pentagono regular inscripto num circulo cujo raio mede $16^m,45$?

$$Ap = 16,45 \times 0,81 = 13^m,3245$$

ÁREA DO HEXAGONO REGULAR

A **área** de um hexagono regular é egual ao producto do quadrado de um de seus lados pelo numero constante 2,598.

$$\text{Área} = L^2 \times 2,598$$

O numero constante resulta de:

$$\frac{3}{2}\sqrt{3} = \frac{3}{2}1,73205 = 2,598$$

Problema 201. — Qual a área occupada pelo pedestal de uma estatua; sabendo-se que a fórma do pedestal é hexagonal regular e que um dos lados d'essa base mede $2^m,84$?

$$\text{A área occupada pelo pedestal} = \overline{2,84}^2 \times 2,598 =$$
$$= 8,0656 \times 2,598 = 20^{m2},954428$$

O APÓTHEMA d'esse polygono é egual ao raio multiplicado pelo numero 0,866:

$$Ap = R \times 0,866$$

O numero 0,866 é obtido do seguinte modo:

$$\frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{2}1,73205 = 0,866$$

Problema 202. — A bacia de um repuxo tem a fórma hexagonal regular e uma das faces mede $2^m,50$ de comprimento; pede-se a menor distancia do centro d'essa bacia ao meio de um lado.

A menor distancia é o apóthema e o lado é egual ao raio portanto

$$Ap = 2,50 \times 0,866 = 2^m,165$$

ÁREA DO OCTOGONO REGULAR

A **área** do octogono regular é egual ao producto do quadrado de um de seus lados pelo numero constante 4,828:

$$\text{Área} = L^2 \times 4,828$$

O numero constante resulta de:

$$2\left(1+\sqrt{2}\right) = 2 \times 2,414 = 4,828$$

Problema 203. — Qual a área de um parque de fórma octogonal regular cujo lado mede $142^m,85$?

$$\text{Área} = \overline{142,85}^2 \times 4,828 = 98520^{m2},759430$$

Se o octogono é inscripto em um circulo cujo raio é conhecido: 1.° a sua **área** é egual ao quadrado d'esse raio multiplicado pelo numero constante 2,828

$$\text{Área} = R^2 \times 2\sqrt{2} = R^2 \times 2,828$$

Problema 204. — Deseja-se ladrilhar um banheiro de fórma octogonal regular, cuja distancia do centro a um dos vertices mede $2^m,25$; o metro quadrado de ladrilho custa 6$000. Em quanto importará a despeza?

A área do banheiro $= \overline{2,25}^2 \times 2,828 = 14^{m2},3167$.

E, a despeza importará em:

$$14,3167 \times 6\$000 = 85\$900$$

2.° — O seu LADO será egual ao raio multiplicado pelo numero constante 0,765 e o seu APÓTHEMA terá por medida o producto do raio pelo numero constante 0,924.

$$\text{Lado} = R\sqrt{2 \quad \sqrt{2}} =$$

$$R\sqrt{2,00000 - 1,41421} = R\sqrt{0,58579} =$$

$$= R \times 0,765$$

$$Ap = \frac{1}{2}R\sqrt{2+\sqrt{2}} = \frac{1}{2}R\sqrt{2+1,41421} =$$

$$= \frac{1}{2}R\sqrt{3,41421} = R \times \frac{1,8477}{2} = R \times 0,924$$

Problema 205. — Qual o lado de um octogono regular inscripto em um circulo cujo raio mede $0^m,90$?

$$\text{Lado} = 0,90 \times 0,765 = 0^m,6885$$

Problema 206. — Qual o apóthema de um octogono regular inscripto em um circulo cujo raio mede $1^m,48$?

$$Ap = 1,48 \times 0,924 = 1^m,36752$$

ÁREA DO DECAGONO REGULAR

A **área** de um decagono regular é egual ao producto do quadrado do lado pelo numero constante 7,694

$$\text{Área} = L^2 \times 7,694$$

O numero constante é o resultado do seguinte calculo:

$$\frac{5}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}} = \frac{5}{2}\sqrt{5+2\times 2,23606} =$$

$$= \frac{5}{2}\sqrt{5+4,47212} = \frac{5}{2}\sqrt{9,47212} =$$

$$= \frac{5}{2}3,077 = 7,694$$

Problema 207. — Qual a área de um ladrilho de fórma decagonal regular cujo lado mede $0^m,09$?

$$\text{Área} = \overline{0,09}^2 \times 7,694 = 0^{m2},06232140.$$

Sendo inscripto em um circulo de raio conhecido: 1.° — A **área** do decagono é egual ao producto do quadrado do raio pelo numero constante 2,9389.

$$\text{Área} = R^2 \times 2,9389$$

E esse numero constante resulta de:

$$\frac{5}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}=\frac{5}{4}\sqrt{10-2\times 2,23606}=$$

$$=\frac{5}{4}\sqrt{10-4,47212}=\frac{5}{4}\sqrt{10,00000-4,47212}=$$

$$=\frac{5}{4}\sqrt{5,52788}=2,9389$$

2.° — O LADO do decagono regular inscripto é egual ao producto do raio do circulo circumscripto pelo numero constante 0,618.

$$L=\frac{1}{2}R(\sqrt{5}-1)=R\times 0,618$$

3.° — O APÓTHEMA do mesmo polygono é egual ao producto do raio pelo numero constante 0,951

$$Ap=\frac{1}{4}R\sqrt{10+2\sqrt{5}}=R\times 0,951$$

Problema 208. — Qual o lado de um decagono regular inscripto em um circulo cujo raio mede $5^m,80$?

$$L = 5,80 \times 0,618 = 3^m,5844$$

Problema 209. — Qual o apóthema de um decagono regular inscripto em um circulo de raio $= 0^m,96$?

$$Ap = 0,96 \times 0,951 = 0^m,91296$$

ÁREA DO DODECAGONO REGULAR

A **área** do dodecagono regular é egual ao producto do quadrado de um lado pelo numero constante 11,196

$$\text{Área} = 3L^2(2+\sqrt{3}) = L^2\times 3\times 3,73205 =$$
$$= L^2\times 11,196$$

Problema 210. — Qual a área de um dodecagono regular cujo lado mede $2^m,65$?

$$\text{Área} = \overline{2,65}^2 \times 11,196 = 7,0225 \times 11,196 =$$
$$78^{m2},623910$$

Se o dodecagono é inscripto em um circulo cujo raio é dado: 1.° — A sua **área** é egual ao producto do quadrado do raio por 3.

$$\text{Área} = 3R^2$$

2.° — O LADO é egual ao producto do raio pelo numero constante 0,517

$$= L = R\sqrt{2-\sqrt{3}} = R\sqrt{2-1,73205} =$$

$$= R\sqrt{0,26795} = R\times 0,517$$

3.° — O APÓTHEMA é egual ao producto do raio pelo numero constante 0,966

$$Ap = \frac{1}{2}R\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{1}{2}R\sqrt{2+1,73205} =$$

$$= \frac{1}{2}R\sqrt{3,73205} = R\times\frac{1,9318}{2} = R\times 0,966$$

Problema 211. — Qual a área de um dodecagono regular inscripto num circulo cujo raio mede $60^m,50$?

$$\text{Área} = 3 \times \overline{60,50}^2 = 3 \times 3660,25 = 10980^{m2},75$$

Problema 212. — Qual o lado de um dodecagano regular inscripto em um circulo cujo raio mede $5^m,72$?

$$L = 5,72 \times 0,517 = 2^m,95724$$

Problema 213. — Qual o apóthema de um dodecagono regular inscripto em um circulo cujo raio mede $30^m,82$?

$$Ap = 30,82 \times 0,966 = 29^m,77212$$

ÁREA DO CIRCULO

Raio e circumferencia

ÁREA DAS FIGURAS CIRCULARES.

A **área** de um CIRCULO cujo *raio* e *circumferencia* são conhecidos é egual ao producto da *circumferencia* pela metade do *raio*:

$$\text{Area do circulo} = \pi \times D \times \frac{R}{2}$$

porque o CIRCULO é considerado como um polygono regular cujos lados muitissimo pequenos formam a *circumferencia* e cujo apóthema confunde-se com o *raio*.

Problema 214. — Qual a área de um circulo cuja circumferencia mede 44 centimetros e o raio 7 centimetros?

Multipliquemos a circumferencia pela metade do raio e teremos:

$$44 \times \frac{7}{2} = \frac{44 \times 7}{2} = 22 \times 7 = 154 \text{ centimetros quadrados}$$

Raio

Conhecido o *raio*, a **área** do CIRCULO é egual á relação entre a circumferencia e o diametro, multiplicada pelo quadrado do *raio*.

$$\text{Área do circulo} = \pi R^2 = 3,1416 \times R^2$$

Problema 215. — Qual a área de um circulo cujo raio = 5 centimetros?

Multipliquemos 3,1416 por 5^2 e teremos:

$$3,1416 \times 25 = 78^{cm2},54$$

Circumferencia

Dada a *circumferencia*, a **área** é egual ao quadrado da *circumferencia* dividido pelo quadruplo de π.

$$\text{Área do circulo} = \frac{C^2}{4\pi}$$

Problema 216. — Qual a área de um circulo cuja circumferencia mede 8 centimetros?

Elevemos 8 ao quadrado:

$$8^2 = 8 \times 8 = 64$$

e multipliquemos $4 \times 3,1416 = 12,5664$

dividamos 64 por 12,5664 e acharemos

$$\frac{64}{12,5664} = 509 \text{ millimetros quadrados}$$

Quando a **área** do CIRCULO é conhecida e se quer saber qual o **raio**, extrae-se a raiz quadrada do quociente da divisão da área do circulo por 3,1416 (π).

$$R = \sqrt{\frac{\text{Área do circulo}}{3,1416}}$$

Problema 217. — Qual o raio do circulo cuja área = 4225 centimetros quadrados ?

A área do circulo dividida por 3,1416 dá:

$$\frac{4225}{3,1416} = 1344$$

e portanto o raio $= \sqrt{1344} = 36^{cm^2},66$.

ÁREA DO SECTOR CIRCULAR

A **área** do SECTOR CIRCULAR é egual ao producto do *arco* que lhe serve de base pela metade do *raio*.

$$\text{Área do sector} = \text{Arco} \times \frac{R}{2}$$

porque o sector nada mais é do que um total de uma infinidade de triangulos, todos com um vertice commum (o centro de circulo) e cuja somma das bases coincide com o arco.

Problema 218. — Qual a área de um sector circular cujo raio = 6 centimetros e o arco 45° ?

A circumferencia na qual está o arco é:

$$\pi \times D = 3,1416 \times 12 = 37^{cm},69$$

Se 360° ou a circumferencia inteira = $37^{cm},69$; 1 grão será egual a

$$\frac{37,69}{360}$$

e 45° serão eguaes a

$$\frac{37,69 \times 45}{360} = 4^{cm},71$$

A área será portanto

$$4,71 \times \frac{6}{2} = \frac{4,71 \times 6}{2} = 14^{cm^2},13.$$

ÁREA DO SEGMENTO CIRCULAR

A **área** do SEGMENTO CIRCULAR é egual á do *sector*, menos a do *triangulo* formado pelos dois raios e a corda que une as extremidades dos mesmos raios.

Área do segmento = A. sector — A. triangulo.

Denominando-se A a área do segmento, A′ a do sector, e A″ a do triangulo:

$$A = A' - A''$$

Na fig. 406 a área do segmento AMB = á do sector AMBO menos a do triangulo ABO.

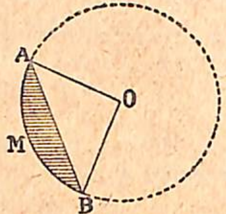


Fig. 406.

Problema 219. — Qual a área de um segmento de circulo de raio egual a 8 centimetros e limitado por um arco de 90º e uma corda egual ao lado do quadrado inscripto?

A circumferencia da qual faz parte o arco de 90º é egual a

$$3,1416 \times (8 + 8) = 50^{cm},2656$$

portanto o arco de 90º =

$$= \frac{50,2656 \times 90}{360} = \frac{4523,9040}{360} = 12^{cm},5664$$

e a área do sector circular =

$$= 12,5664 \times \frac{8}{2} = 50^{cm^2},2656$$

Sendo a área do triangulo formado pelos dois raios e pelo lado do quadrado =

$$= \frac{8 \times 8}{2} = 8 \times 4 = 32 \text{ cmq.}$$

a área do segmento será $= 50,2656 - 32 = 18^{cm^2},2656$

ÁREA DA CORÔA CIRCULAR

A **área** da CORÔA CIRCULAR é egual á differença dos dois circulos que lhe servem de limite ou ao producto de π pela differença entre os quadrados dos dois raios.

Se tomarmos R como raio do circulo maior e r raio do circulo menor, teremos a **área** da CORÔA CIRCULAR representada por:

$$\pi R^2 - \pi r^2 \text{ ou } \pi (R^2 - r^2)$$

Problema 220. — Qual a área da uma corôa circular cujos raios medem 8 centimetros e 6 centimetros?

Sendo os circulos concentricos eguaes:

O maior á $3,1416 \times 8^2 = 3,1416 \times 64 = 201^{cm^2},0624$

e o menor á $3,1416 \times 6^2 = 3,1416 \times 36 = 113^{cm^2},0976$

A área da corôa será egual a

$$201,0624 - 113,0976 = 87^{cm^2},9648$$

ou

$$3,1416 \times (8^2 - 6^2) = 3,1416\ (64 - 36) =$$
$$= 3,1416 \times 28 = 87^{cm^2},9648$$

FIGURAS EQUIVALENTES.

Duas ou mais **figuras** que têm a mesma **área**, sem entretanto terem a mesma fórma, são **equivalentes**.

Tomemos, por exemplo, o quadrado ABCD (fig. 407). Dividamos os lados AC e BD ao meio, unamos o ponto M ao ponto N. O quadrado acha-se dividido em dois rectangulos eguaes. Colloquemos o rectangulo MNCD de sorte que o lado MC coincida com o lado BN do rectangulo ABMN.

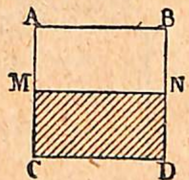


Fig. 407.

Obtemos d'este modo um rectangulo ANMD

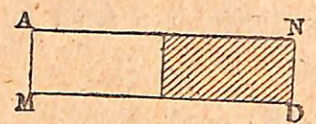


Fig. 408.

(fig. 408) tendo evidentemente a mesma **área** que o quadrado ABCD. Portanto o quadrado ABCD e o rectangulo ANMD são **figuras equivalentes.**

Se traçamos a diagonal BC, o quadrado ABCD (fig. 409) fica dividido em dois triangulos rectangulo-isosceles eguaes; colloquemos o triangulo CDB de maneira que o lado CD coincida com o lado AB do triangulo CAB; formamos assim um parallelogrammo (fig. 410) com a mesma **área** do quadrado ABCD.

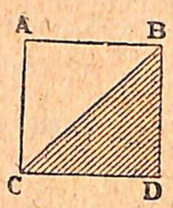


Fig. 409.

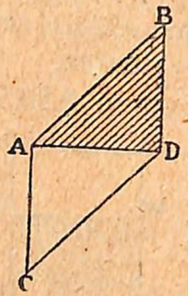


Fig. 410.

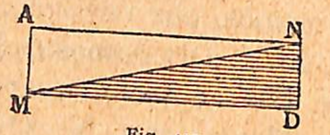


Fig. 411.

O rectangulo ANMD (fig. 411) tambem póde ser transformado em um parallelogrammo equivalente. A diagonal NM divide-o em dois triangulos-

escalenos eguaes ANM e DMN. Façamos coincidir o lado AM do primeiro com ND do

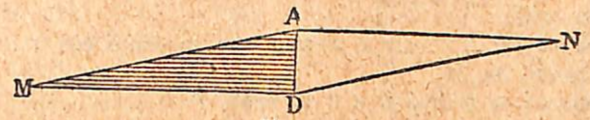


Fig. 412.

segundo, e teremos o parallelogrammo AMDN (fig. 412).

Façamos agora coincidir o lado AN com DM e o ponto A com o ponto D: formamos um trangulo isosceles (fig. 413) equivalente a cada uma das figuras precedentes.

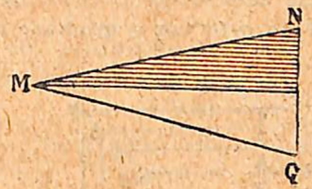


Fig. 413.

Estas combinações podem ser mais variadas e mais rapidamente executadas se recortarmos em cartão os triangulos que formam o rectangulo ANMD.

Problema 221. — Dado um quadrado, traçar um outro cuja área seja o dobro da do primeiro.

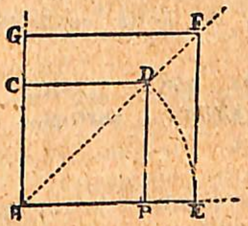


Fig. 414.

Seja ABCD o quadrado (fig. 414).

Prolonguemos os lados AB e AC e tracemos a diagonal AD que prolongaremos na direcção de A para D.

Façamos centro em A e, com um raio egual a AD, descrevamos o arco DE. D'este ultimo ponto, como centro, e com um raio = EA, cortemos em F o prolongamento da diagonal.

Centro em A e com o mesmo raio cortemos em G o prolongamento de AC.

Unamos os pontos G e E ao ponto F.

A área de AEGF é o dobro da área de ABCD.

Problema 222. — Dado um quadrado, construir outros cujas áreas sejam o dobro, o triplo, o quadruplo, o quintuplo, etc., da área do primeiro.

Seja ABCD o quadrado conhecido (fig. 415).

A área do quadrado AEGH é, como já vimos no problema antecedente, o dobro da do primeiro (ABCD).

Para obtermos o quadrado de área tripla, prolonguemos o lado CD e, com um raio AF e centro em A, descrevamos o arco FJ. Centro em J e raio egual a JA, cortemos o prolongamento da diagonal AD no ponto K; de A e com o mesmo raio, determinemos o ponto M.

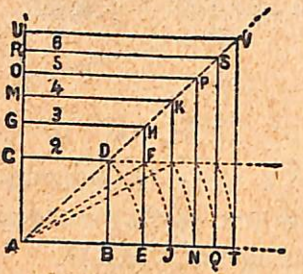


Fig. 415.

Unamos M e J ao ponto K.

A área do quadrado AJMK é o triplo da de ABCD.

Procedendo-se sempre do mesmo modo, obteremos quadrados de áreas quadrupla, quintupla, sextupla, etc.

Assim: ANOP = quadruplo de ABCD; AQRS = quintuplo do mesmo quadrado; ATUV = sextuplo do mesmo quadrado ABCD.

Problema 223. — Dado um rectangulo, construir um outro cuja área seja dupla da do primeiro.

Seja ABCD o rectangulo dado (fig. 416).

Prolonguemos o lado AB e sobre AB construamos o quadrado ABEF.

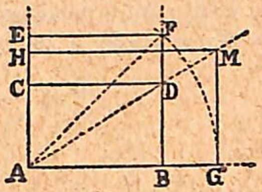


Fig. 416.

Tracemos as diagonaes AF, d'esse quadrado, e AD, do rectangulo dado.

Prolonguemos esta ultima na direcção de A para D.

Façamos centro em A, e com o raio AF tracemos um arco até determinar o ponto G pelo qual levantemos a perpendicular GM.

Por este ultimo ponto tracemos a recta HM parallela a AG.

A área do rectangulo AGHM é o dobro da do rectangulo dado.

Problema 224. — Dado um rectangulo, construir um outro cuja área seja o triplo da área do primeiro.

Seja ABCD o rectangulo dado (fig. 417).

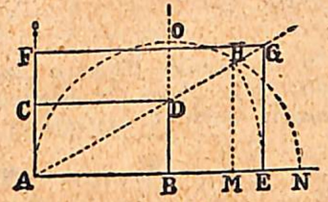


Fig. 417.

Prolonguemos os lados AB e BD; tiremos a diagonal AD, prolongando-a na direcção de A para D.

Descrevamos a semi-circumferencia AON com o centro em B.

Levantemos por M (meio de BN) uma perpendicular até encontrar a semi-circumferencia no ponto H.

Façamos centro em A, e com o raio AH descrevamos o arco HE.

Por este ultimo ponto levantemos uma perpendicular á recta AN até determinar o ponto G, e finalmente tracemos a recta FG parallela a AE.

O rectangulo AEFG tem área tripla da do primeiro ABCD.

Problema 225. — Construir um triangulo equilatero equivalente a um triangulo isosceles.

Seja ABC o triangulo isosceles (fig. 418).

Construamos o triangulo equilatero ABD e tiremos a recta DCF que fórma com AB dois angulos rectos.

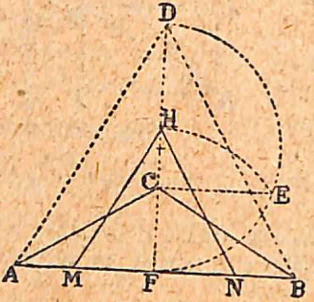


Fig. 418.

Sobre DF como diametro, descrevamos a semi-circumferencia como nos mostra a fig. 418.

Levantemos a perpendicular CE sobre DF e façamos FH = FE.

Do ponto H tracemos HM parallela a DA e HN parallela a DB.

O triangulo MNH é equilatero porque é semelhante ao triangulo ABD.

Do mesmo modo FD : FH = FH : FC
porém FD:FH = FA:FM
portanto FH:FC = FA:FM, e o angulo DFA é commum aos triangulos HFM e CFA; logo o triangulo HFM = CFA e por consequencia MNH é equivalente a ABC.

Problema 226. — Construir um triangulo isosceles equivalente a um triangulo dado.

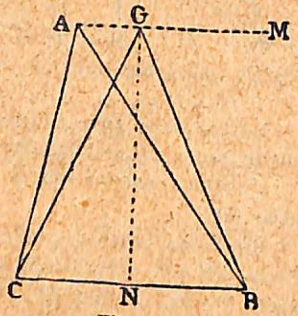


Fig. 419.

Seja CBA o triangulo dado (fig. 419); tracemos AM parallela á base CB.

Pelo meio de CB, levantemos uma perpendicular NG até encontrar AM. Unamos os pontos C e B ao ponto G e obtemos triangulos isosceles CBG equivalente ao triangulo CBA.

Problema 227. — Construir um triangulo rectangulo equivalente a um triangulo dado.

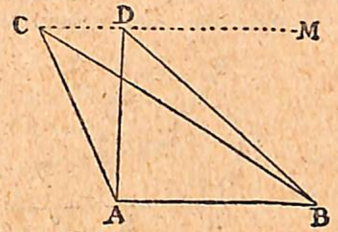


Fig. 420.

Seja ABC o triangulo dado (fig. 420); tracemos CM parallela á base AB, levantemos a perpendicular AD e juntemos os pontos D e B. O triangulo rectangulo ABD é equivalente ao triangulo dado ABC, por terem a mesma *base* e a mesma *altura*.

Problema 228. — Construir um triangulo rectangulo equivalente a um losango dado.

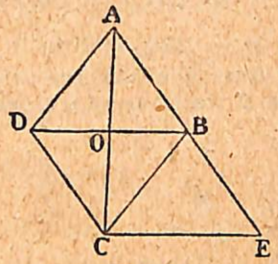


Fig. 421.

Seja ABCD o losango (fig. 421); tracemos CE parallela á diagonal DB e prolonguemos AB até encontrar CE; o triangulo rectangulo ACE é equivalente ao losango, porque este tem para medida da **área** AC $\times$ OB e aquelle tem por medida AC $\times \frac{CE}{2}$; porém $\frac{CE}{2}$ = OB porque, no parallelogrammo C E D B; CE = DB

$$\text{e sendo } \frac{CE}{2} = \frac{DB}{2}\,;\ \frac{CE}{2} = OB.$$

Portanto a **área** do triangulo rectangulo ACE é egual á do losango ABCD.

Problema 229. — Construir um triangulo equivalente a um hexagono regular.

Seja ABCDEF o hexagono regular (fig. 422); prolonguemos o lado AB e a partir do ponto B; sobre esse prolongamente marquemos as distancia Bc, *cd*, *de*, *ef*, *fg* eguaes cada uma ao lado AB. Unamos o ponto O ao ponto *g*. O triangulo AO*g* é equivalente ao polygono dado, por-

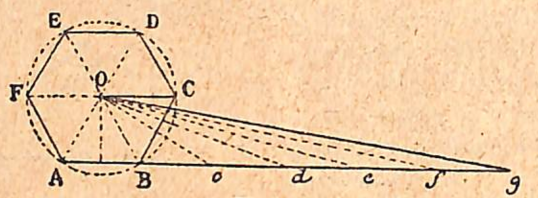


Fig. 422.

que se compõem um e outro de seis triangulos equivalentes por terem bases eguaes e a mesma altura.

Problema 230. — Construir um triangulo equivalente a um outro, conhecendo-se a altura.

Seja ABC o triangulo dado (fig. 423).

Centro em A e com um raio egual á altura conhecida descrevamos um arco RX; do ponto B tracemos uma tangen-

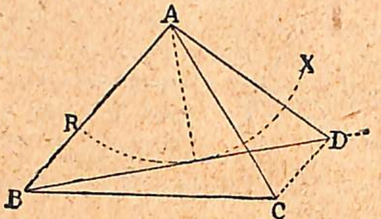


Fig. 423.

te a esse arco e do ponto C uma parallela a BA até determinar o ponto D o qual, ligado ao ponto A, resolve o problema.

Problema 231. — Construir um quadrado equivalente a um triangulo.

Pelo ponto P, meio do lado AB (fig. 424), levantemos uma perpendicular PR egual á altura do triangulo dado.

Formemos o rectangulo PBRS que é equivalente ao triangulo A B C.

Prolonguemos o lado BS de uma quantidade SV egual a SR e do meio de BV descrevamos uma semi-circumferencia.

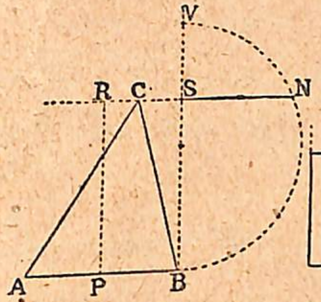


Fig. 424.

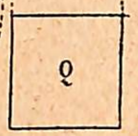


Fig. 425.

Prolonguemos RS até N; a recta SN é o lado do quadrado Q (fig. 425), equivalente ao triangulo ABC por ser tambem equivalente ao rectangulo PBRS.

Problema 232. — Construir um quadrado equivalente a um rectangulo.

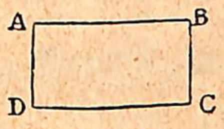


Fig. 426.

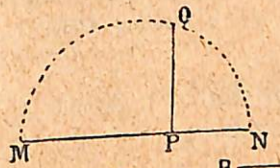


Fig. 427.

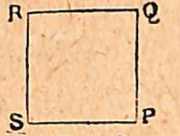


Fig. 428.

Seja ABDC o rectangulo (fig. 426).

Procuremos a média proporcional PQ (fig. 427), entre a base DC e a altura CB do rectangulo, construamos o quadrado PQRS (fig. 428), tendo para lado PQ.

Este quadrado é equivalente ao rectangulo ABDC porque a proporção

$$MP : PQ :: PQ : PN$$

dá

$$MP \times PN = \overline{PQ}^2$$

ou

$$CD \times CB = \overline{PQ}^2$$

Problema 233. — Construir um quadrado equivalente a um losango.

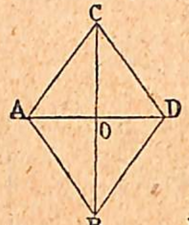


Fig. 429.

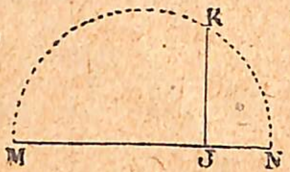


Fig. 430.

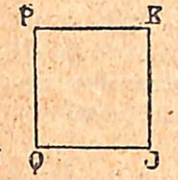


Fig. 431.

Seja ACBD o losango (fig. 429). Procuremos a média proporcional JK (fig. 430) entre a diagonal CB e a metade AO da outra diagonal, e construamos o quadrado JKPQ (fig. 431) tendo para lado a média proporcional JK.

Procedamos como no problema antecedente e chegaremos á conclusão de que o losango ACBD é equivalente ao quadrado JKPQ.

Problema 234. — Construir um quadrado equivalente a um parallelogrammo.

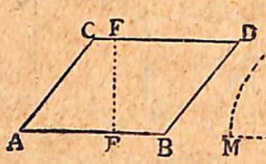


Fig. 432.

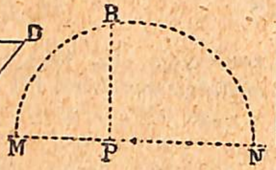


Fig. 433.

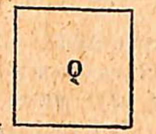


Fig. 434.

Sobre uma recta (fig. 433) appliquemos MP = EF (altura do parallelogrammo ABCD), mais PN = AB (fig. 432).

Descrevamos a semi-circumferencia que tem para diametro MN e pelo ponto P levantemos PR perpendicular

á mesma recta. O quadrado Q (fig. 434), traçado com um lado = PR é o quadrado pedido, porque:

$$MP:PR = PR:PN$$

portanto

$$\overline{PR}^2 = MP \times PN \text{ ou } EF \times AB$$

Problema 235. — Construir um quadrado equivalente á somma de dois outros.

Tracemos um angulo recto P (fig. 437) e façamos PR egual a um dos lados do quadrado M (fig. 435) e PQ egual a um dos lados do quadrado N (fig. 436).

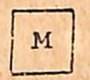


Fig. 435.

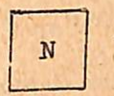


Fig. 436.

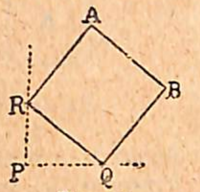


Fig. 437.

Unamos R a Q e sobre a recta RQ construamos o quadrado RQAB equivalente a M + N, porque:

$$\overline{RQ}^2 = \overline{RP}^2 + \overline{PQ}^2$$

logo

$$RQAB = M + N$$

Problema 236. — Construir um quadrado equivalente á differença de dois outros.

Façamos um angulo recto A (fig. 440) e appliquemos AB = um dos lados do quadrado P (fig. 438).

Centro em B e raio egual a um dos lados do quadrado R (fig. 439) determinamos o ponto C.

Fig. 438.

Fig. 439.

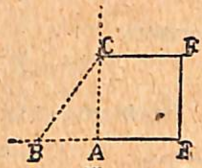


Fig. 440.

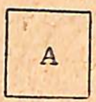
Sobre AC construamos o quadrado ACEF equivalente á differença dos dois outros, porque:

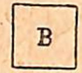
$$\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AB}^2$$

e portanto

$$ACEF = R - P$$

Problema 237. — Construir um quadrado equivalente á somma de varios outros.





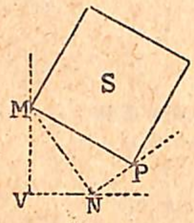


Fig. 441. Fig. 442. Fig. 443. Fig. 444.

Sejam A, B, C tres quadrados (figs. 441, 442, 443).

Tracemos um angulo recto V (fig. 444), e de V até M reproduzamos a medida de um dos lados do quadrado A; em VN a med:da de um dos lados do quadrado B.

Unamos M a N; levantemos pelo ponto N uma perpendicular a MN.

Sobre essa perpendicular, e a partir de N, marquemos NP egual a um dos lados do quadrado C.

Unamos o ponto M ao ponto P e sobre MP construamos o quadrado S (fig. 444) cuja área é egual á somma das áreas dos tres quadrados A, B e C, porque:

$$\overline{MP}^2 = \overline{NP}^2 + \overline{MN}^2$$

porém

$$\overline{MN}^2 = \overline{VN}^2 + \overline{MV}^2$$

portanto

$$\overline{MP}^2 = \overline{NP}^2 + \overline{VN}^2 + \overline{MV}^2 \text{ ou } C + B + A.$$

Problema 238. — Construir um rectangulo equivalente a um quadrado, sobre uma recta dada.

Fig. 445.

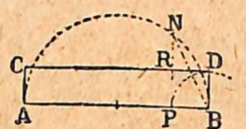


Fig. 446.

M é o quadrado (fig. 445) e AB a recta (fig. 446).

Sobre AB, como diametro, descrevamos uma semi-circumferencia.

Do ponto B, como centro, e com o raio egual a um dos

lados do quadrado M, marquemos o ponto N do qual abaixemos a perpend cular NP sobre a recta AB.

BP é a altura do rectangulo cuja base é AB e cuja área é egual á do quadrado M, porque:

$$AP : PN = PN : PB$$

d'onde

$$\overline{PN}^2 = AP \times PB$$

porém

$$AP \times PB = AP \times PR$$

portanto

$$\overline{PN}^2 = APCR$$

ora

$$\overline{PN}^2 \text{ ou } M = \overline{PB}^2 \text{ ou } PBRD + \overline{PN}^2 \text{ ou } APCR$$

mas

$$PBRD + APCR = ABCD$$

logo

$$M = ABCD$$

Problema 239. — Construir um rectangulo equivalente a um losango dado.

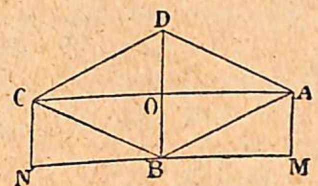


Fig. 447.

Seja BACD o losango (fig. 447.

Pelos pontos A e C, tracemos as rectas AM e CN parallelas á diagonal DB e pelo ponto B, a recta NM, parallela á diagonal CA.

O rectangulo NMCA é equivalente ao losango BACD, porque um e outro têm para medida da área CA × OB

Problema 240. — Construir um tr:angulo equivalente a um rectangulo dado.

Seja ABCD o rectangulo dado (fig. 448); prolonguemos a altura BD de uma quantidade DE egual a BD; unamos entre si os pontos E e A.

O triangulo rectangulo ABE é equivalente ao rectangulo ABCD porque a área de um e de outro são eguaes ao producto de AB por BD.

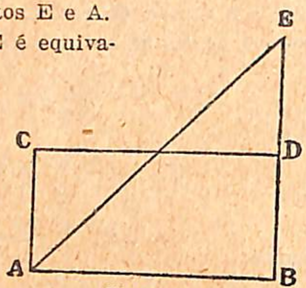


Fig. 448.

Problema 241. — Construir um rectangulo equivalente a um outro, sobre uma recta dada.

Seja ABCD o rectangulo dado (fig. 449).

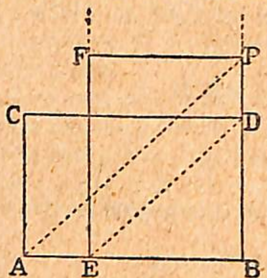


Fig. 449.

Sobre o lado AB appliquemos BE egual a recta dada.

Prolonguemos o lado BD e pelo ponto A tiremos uma recta AP parallela a ED.

BP é a altura do rectangulo pedido, isto é, de EBFP.

Problema 242. — Construir um rectangulo equivalente a um quadrado, sendo a somma de dois lados consecutivos egual a uma recta dada.

Seja AB a recta conhecida (fig. 451) e Q o quadrado (fig. 450).

Dividamol-a ao meio e descrevamos a semi-circumferencia.

Fig. 450.

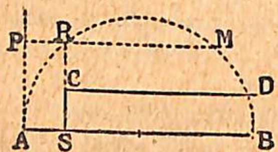


Fig. 451.

Levantemos pelo ponto A a perpendicular AP egual a um dos lados do quadrado Q, e pelo ponto P tracemos a recta PM parallela a AB.

Do ponto R abaixemos uma perpendicular á recta AB.

SBCD, cuja base SB + a altura CS = AB, é o rectangulo pedido, porque sendo

$$RS = PA;$$

$$\overline{RS}^2 = \overline{PA}^2 = Q$$

porém

$$AS : RS = RS : SB$$

logo

$$\overline{RS}^2 \text{ é equivalente a } AS \times SB$$

Problema 243. — Construir um triangulo equivalente a um parallelogrammo.

Seja ABCD o parallelogrammo (fig. 452).

Por um ponto M tomado na recta AB levantemos uma perpendicular na qual marquemos MN egual ao dobro da altura do parallelogrammo.

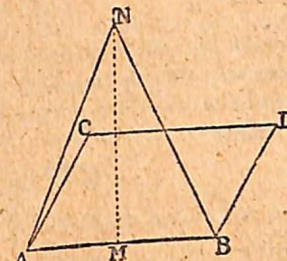


Fig. 452.

Unamos o ponto N aos pontos A e B e teremos o triangulo pedido, porque ABN tem para base a do parallelogrammo e altura dupla; portanto terá a mesma área.

Problema 244. — Construir um parallelogrammo equivalente a um quadrado, sendo a differença entre uma de suas bases e a altura egual a uma recta dada.

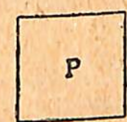


Fig. 453.

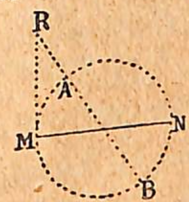


Fig. 454.

Fig. 455.

Seja P o quadrado (fig. 453) e MN a differença entre a base e a altura do parallelogrammo pedido (fig. 454).

Sobre a recta MN, como diametro, descrevamos uma circumferencia.

Pelo ponto M tracemos a tangente MR egual a um dos lados do quadrado P.

Tiremos a recta que partindo de R, passe pelo centro da circumferencia e determine os pontos A e B.

O parallelogrammo D (fig. 455), que tem para base a recta RB e para altura RA será equivalente ao quadrado P, porque:

$$RB : RM = RM : RA$$

(se de um ponto situado fóra de um circulo traçarmos uma secante e uma tangente, esta será a média proporcional entre toda a secante e o segmento externo)

portanto

$$\overline{RM}^2 \text{ ou } \overline{P}^2 = RB \times RA$$

e a differença entre RB e RA é AB ou MN, isto é, a recta dada.

EXERCICIOS

1. — Zilda! que quer dizer medir uma superficie?
2. — Que nome tem a porção limitada de uma superficie?
3. — Qual a unidade de medida das superficies?
4. — Como se divide o metro quadrado?
5. — Quantos decimetros quadrados tem um metro quadrado? — quantos centimetros quadrados? — quantos millimetros quadrados?
6. — Que é necessario para que dois triangulos sejam equivalentes?
7. — Como se avalia a área de um quadrado?
8. — Qual a fórmula?
9. — Que é fórmula?
10. — Qual a área de um quadrado de $0^m,042$ de lado?

11. — Como se avalia a área de um rectangulo?
12. — Qual a fórmula?
13. — A altura de um rectangulo a que é egual?
14. — Qual a fórmula?
15. — A base de um rectangulo a que é egual?
16. — Dá a fórmula.
17. — A área de um rectangulo = $0^{m2},0024$ e a base mede $0^m,04$; qual a altura?
18. — A área de um rectangulo = 720 millimetros quadrados e a altura mede 6 centimetros; qual a base?
19. — Como se avalia a área de um parallelogrammo?
20. — Como se avalia a área de um triangulo? — qual a fórmula?
21. — Um terreno de fórma triangular mede 80^m de base e $32^m,84$ de altura; qual a sua área?
22. — Um triangulo mede $0^m,08$ de base e $0^m,035$ e altura; qual a sua área?
23. — Os lados de um triangulo medem respectivamente $0^m,072$; $0^m,08$ e $0^m,05$. Qual a área?
24. — Traduze esta fórmula: $\frac{B + b}{2} \times A$,
25. — Como pódes avaliar a área de um polygono irregular? — e a de um polygono regular?
26. — Quaes as fórmulas?
27. — O lado de um quadrado é egual a 16 metros e 52 centimetros; qual a área?
28. — A base de um rectangulo mede 6 metros e a altura $4^m,06$; qual a área d'este rectangulo?
29. — A base de um parallelogrammo é egual ao dobro da altura e a altura é egual a $6^m,003$; qual a área d'este parallelogrammo?
30. — A base de um triangulo = $30^m,60$ e a altura mede 16 metros; qual a área d'este triangulo?
31. — Um trapezio rectangulo tem 7 metros para uma das bases e 8 metros e meio para a outra e para a altura $3^m,06$; qual a área d'este quadrilatero?
32. — Qual a área de um hexagono regular inscripto em um circulo de raio = 8 centimetros?
33. — Quaes são as figuras circulares?

34. — A que é egual a área de um circulo, quando são conhecidos o raio e a circumferencia?

35. — E quando só é conhecido o raio?

36. — E quando só é conhecida a circumferencia?

37. — Explica a fórmula: $\frac{C^2}{4\pi}$

38. — A que é egual o raio do circulo?

39. — Como podemos calcular a área de um sector circular?

40. — E a de um segmento circular?

41. — A que é egual a área de uma corôa circular?

42. — Que são figuras equivalentes?

43. — Qual o losango equivalente a um rectangulo que mede $18^{m}/_{m} \times 30^{m}/_{m}$?

44. — Um rectangulo mede $80^{m}/_{m} \times 60^{m}/_{m}$; qual o triangulo equivalente?

45. — $0^{m},04$ e $0^{m},06$ são as diagonaes de um losango; qual o triangulo equivalente?

46. — Um quadrado mede $0^{m},05$ de diagonal; traça um outro cuja área seja o dobro.

47. — Traça um quadrado cuja área seja tripla da de um outro de $0^{m},06$ de lado.

48. — Traça um quadrado cuja área seja quatro vezes maior do que a de um outro, inscripto num circulo de $0^{m},03$ de raio.

49. — Um rectangulo mede $0^{m},08 \times 0^{m},04$; traça um outro cuja área seja dupla. Idem seja o triplo.

50. — Faze um triangulo equivalente a um outro, isosceles, cuja base seja egual a $0^{m},06$, e um dos lados eguaes meça $0^{m},07$.

51. — Os lados de um triangulo são: $0^{m},05$; $0^{m},04$ e $0^{m},045$. Faze um triangulo isosceles equivalente.

52. — 125° é o angulo de um triangulo isosceles cujo lado symetrico mede $0^{m},052$; faze um triangulo rectangulo equivalente.

53. — A diagonal maior de um losango = $0^{m},074$, e um dos lados = $0^{m},05$; faze um triangulo rectangulo equivalente a esse losango.

54.— A altura de um triangulo = $0^{m},06$, e a base mede $0^{m},05$; traça o triangulo isosceles e depois um quadrado equivalente.

55. — Qual o quadrado equivalente a um losango formado de dois triangulos equilateros eguaes e de $0^{m},03$ de lado?

56. — Um quadrado tem para lado $0^{m},04$ e outro $0^{m},044$. Faze um terceiro cuja área seja egual á somma das áreas dos dois primeiros.

57. — O lado de um quadrado mede $0^{m},054$ e a diagonal de um outro $0^{m},06$; faze um terceiro cuja área seja egual á differença das áreas dos dois primeiros.

58. — Sobre uma recta de $0^{m},043$, fórma um rectangulo equivalente a um quadrado de $0^{m},05$ de lado.

59. — Sobre uma recta de $0^{m},050$, traça um rectangulo equivalente a um outro de $0^{m},040 \times 0^{m},06$.

60. — Constroe um rectangulo equivalente a um quadrado de $0^{m},048$ de lado, de modo que a somma de dois lados consecutivos do rectangulo seja egual a 60 millimetros

61. — Qual o lado de um quadrado que tem o mesmo perimetro de um rectangulo de $28^{m},80$ de comprimento sobre $12^{m},40$ de largura?

62. — Um quadrado tem $46^{m},15$ de lado. Qual seria a base de um rectangulo que tivesse a mesma área e 25 metros de altura?

63. — O preço de 529^{cm2} de certo ladrilho collocado custa 1$250. Qual será o preço do ladrilhamento de uma área quadrada de $260^{m},80$ de lado?

64. — Traça um quadrado cuja área seja o dobro da de outro, cujo lado mede $0^{m},06$.

65. — Traça um quadrado cuja área seja o triplo da de outro, cuja diagonal mede $0^{m},08$.

66. — Constroe um quadrado cuja área seja equivalente á somma de dois outros que têm respectivamente para medida dos lados $0^{m},04$ e $0^{m},03$.

67. — $0^{m},06$; $0^{m},03$; $0^{m},04$ e $0^{m},05$ são as medidas dos lados de quatro quadrados. Traça um quinto quadrado cuja área seja egual á somma das áreas dos quatro primeiros.

68. — Faze um rectangulo de $0^{m},06$ de comprimento e $0^{m},04$ de largura, e sobre a base d'esse quadrilatero traça as seguintes figuras que lhe sejam equivalentes:

a) um triangulo obtusangulo

b) um triangulo rectangulo

c) um triangulo isosceles
d) um quadrado
e) um parallelogrammo.
f) um trapezio symetrico
g) um trapezio rectangulo.

69. — Traça um rectangulo cuja área seja o dobro da de outro de $0^m,06$ de base, $0^m,05$ de diagonal e sendo o angulo formado pela base e diagonal = 25°.

70. — Traça um rectangulo cuja área seja o quadruplo da de um outro de $0^m,08$ de base e $0^m,05$ de altura.

71. — Ao redor de uma casa de 8^m de frente e 40^m de fundo, o proprietario quer mandar cimentar uma faixa do terreno, de $1^m,40$ de largura, encostada á casa; quanto gastará elle se o metro quadrado lhe ficar a 6$500?

72. — Qual a área d'este quadro negro? (O professor fará avaliar a área do quadro negro da aula).

73. — Quaes as áreas dos parallelogrammos cujos elementos conhecidos são:

a)	Base $= 0^m,04$	Altura $= 0^m,03$
b)	» $= 0^m,055$	» $= 0^m,042$
c)	» $= 0^m,08$	» $= 0^m,06$
d)	» $= 0^m,98$	» $= 0^m,68$
e)	» $= 1^m,45$	» $= 0^m,96$
f)	» $= 22^{Km},684$	» $= 12^{Km},842$
g)	» $= 14\ ^c/_m$	» $= 306\ ^c/_m$
h)	» $= 4$ Dm	» $= 3$ Hm ?

74.— O desenho de um campo da fórma de um parallelogrammo está na escala de 1:200.000. As dimensões do desenho são: um lado = 242 millimetros e a altura 160 millimetros. Qual a área do campo?

75. — Sobre cada lado de um triangulo equilatero de $0^m,504$ de lado, construamos um quadrado e calculemos a área total das quatro figuras assim formadas.

76. — Um sitio de fórma triangular e medindo 9482 metros de base e 2485 metros de altura foi vendido a 25$400 o áreo. Quanto custou este sitio?

77. — Sobre uma recta de $0^m,036$ constroe um triangulo qualquer, e depois sobre a mesma recta faze: 1.° um triangulo rectangulo; 2.° um triangulo isosceles equivalentes, cada um, ao primeiro triangulo.

78. — Constroe um triangulo equilatero equivalente a um triangulo isosceles cuja base mede $0^m,04$ e um dos lados symetricos $0^m,06$.

79. — Traça um triangulo rectangulo equivalente a um hexagono regular de $0^m,05$ de lado.

80. — Qual o triangulo equilatero equivalente a um rectangulo de $0^m,08$ de base e $0^m,04$ de altura; sendo a base do triangulo equilatero egual á altura do rectangulo?

81. — Quaes as áreas dos trapezios cujos elementos conhecidos são:

a)	BASE $= 5^m$	Base $= 3^m$	Altura $= 2^m,5$
b)	» $= 6^m$	» $= 5^m$	» $= 3^m$
c)	» $= 32^m$	» $= 20^m$	» $= 6^m$
d)	» $= 346^m$	» $= 165^m$	» $= 84^m$
e)	» $= 112^{Km}$	» $= 88^{Km}$	» $= 50^{Km}$?

82. — Quantos áreos tem um terreno de fórma irregular e que está dividido em quatro triangulos cujas dimensões são: a do 1.° — *base* $= 31^m$, *altura* $= 40^m$; a do 2.° — $b = 65^m$, $a = 40^m$; a do 3.° — $b = 75^m$ e $a = 29^m$, e finalmente a do 4.° — $b = 86^m$ e $a = 55^m$?

83. — Qual é, em hectáreos a área de um campo irregular, dividido em tres triangulos e um trapezio, sendo as dimensões de cada um: o 1.° triangulo 750^m de base e 260^m de altura; o 2.° — $290^m \times 350^m$; o 3.° — $800^m \times 280^m$; o trapezio : $B = 750^m$; $b = 400^m$; $a = 350^m$?

84. — As diagonaes de um losango são eguaes, uma a $0^m,08$ e a outra a $0^m,06$; qual a área d'esse quadrilatero?

85. — Qual a área de um pentagono regular cujo lado mede $22^m,62$?

86. — Qual a área de um pentagono regular inscripto num circulo, cujo raio mede $12^m,30$?

87. — Qual a dimensão do lado de um pentagono regular inscripto num circulo cujo raio mede 50^m?

88. — Qual o apóthema de um pentagono regular inscripto em um circulo cujo raio mede $20^m,95$?

89. — Qual o perimetro de um hexagono regular inscripto em um circulo de raio = $22^m,68$?

90. — Que porção de superficie plana póde occupar a base de um tinteiro de fórma hexagonal regular, sendo a aresta d'essa base = $0^m,03$?

91. —Qual a área de um hexagono regular cujo lado mede $4^m,25$?

92. — Qual a área de um hexagono regular cujo raio do circulo circumscripto mede $0^m,86$?

93. — Qual o apóthema de um hexagono regular inscripto em um circulo cujo raio mede $2^m,50$?

94. — Qual a área de um octogono regular inscripto em um circulo de raio = $0^m,48$?

95. — Qual a área de um octogono regular cujo lado mede $6^m,32$?

96. — Qual o lado de um octogono regular inscripto em um circulo de raio = $0^m,965$?

97. — Qual o apóthema de um octogono regular inscripto em um circulo de raio = $16^m,40$?

98. — Qual a área de um decagono regular cujo lado mede $0^m,82$?

99. — Qual a área de um decagono regular inscripto em um circulo cujo raio mede $0^m,32$?

100. — Qual o lado de um decagono regular inscripto em um circulo cujo raio mede $0,^m06$?

101. — Qual o apóthema de um decagono regular inscripto em um circulo de raio = $0^m,08$?

102. — Qual a área de um dodecagono regular cujo lado mede 12 metros?

103. —Qual a área de um dodecagono regular inscripto em um circulo cujo raio mede $0^m,66$?

104. — Qual o lado de um dodecagono regular inscripto em um circulo cujo raio mede $6^m,42$?

105. — Qual o apóthema de um dodecagono regular inscripto em um circulo cujo raio mede $5^m,46$?

106. — Em um quadrado de $0^m,08$ de lado circumscreve-se um circulo; qual a área do quadrado fóra do circulo?

107. — No centro de um terreno quadrado de 6km. de lado mandou-se abrir um tanque circular de 10m de raio. Quanto resta da área do quadrado?

108. —Um sector circular tem $16^m,50$ de raio e $4^m,80$ de arco. Qual a sua área?

109. — Qual a área de um sector circular cujo arco mede 4 centimetros e o raio $0^m,034$?

110. — Qual a área de um segmento circular de 45° em um circulo de $1^m,20$ de raio?

111. — Qual a área de uma corôa circular limitada por dois circulos cujos raios medem respectivamente $0^m,03$ e $0^m,05$?

112. — Qual a área de uma corôa circular comprehendida entre dois circulos cujos diametros medem respectivamente $6^m,44$ e $7^m,50$?

113. — Qual a área de uma corôa circular formada pelas duas circumferencias, uma inscripta e outra circumscripta a um hexagono regular de $0^m,06$ de lado?

114. — Traça um rectangulo equivalente a um losango em que uma diagonal é egual a um lado e este tem por medida $0^m,052$?

115. — Constroe um parallelogrammo equivalente a um quadrado sendo a differença entre uma das bases e a altura d'aquelle quadrilatero = $0^m,112$.

CAPITULO XIII

SUMMARIO: **A linha recta e o plano**

A LINHA RECTA E O PLANO.

Uma *superficie* sobre a qual podemos applicar uma regua perfeita, em todos os sentidos: é *plana* ou é um **plano** (fig. 456).

Uma prancheta, um quadro negro, um espelho mostram *superficies planas* ou **planos**.

Fig. 456.

Todos os pontos de uma **linha recta** traçada em um **plano** estão situados neste **plano**.

A intersecção de dois planos é uma **linha recta**. Tomemos, por exemplo, uma fôlha de papel e dobremol-a: a dobra obtida é uma

linha recta (fig. 457) e cada parte da fôlha de papel é um **plano**.

Fig. 457.

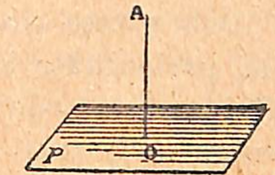


Fig. 458.

Uma **recta** póde ser *perpendicular* (fig. 458), *obliqua* (fig. 459) ou *parallela* (fig. 460), a um **plano**.

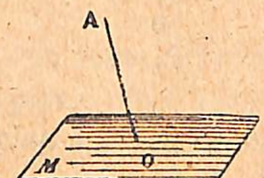


Fig. 459.

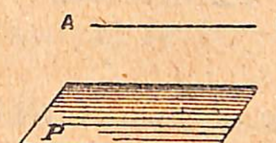


Fig. 460.

Uma **recta** é *perpendicular* a um **plano** quando é perpendicular a todas as rectas que passam por seu pé nesse plano (fig. 461).

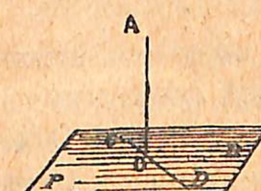


Fig. 461.

Uma **recta** e um **plano** são parallelos quando indefinidamente prolongados não se encontram;

assim, cada uma das linhas que contornam o tampo de uma mesa rectangular é parallela ao soalho.

Dois **planos** são parallelos (fig. 462) quando, prolongados indefinidamente não se encontram; taes são,

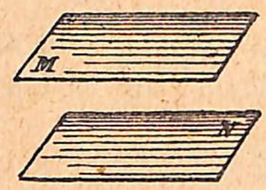


Fig. 462.

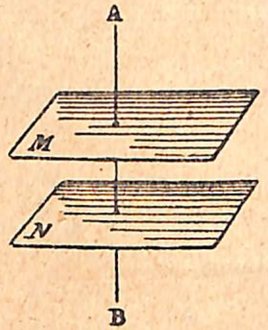


Fig. 463.

por exemplo, o tecto e o soalho de uma sala, as faces oppostas de um dado de jogar.

Por um ponto dado em uma recta podemos fazer passar um **plano** perpendicular a essa **recta** e só podemos fazer passar um unico plano.

Dois **planos** perpendiculares a uma mesma recta são parallelos (fig. 463) porque, se não o fossem, teriamos por um mesmo ponto em uma recta dois **planos** perpendiculares á mesma **recta**, o que é impossivel.

Duas rectas perpendiculares a um **plano** são parallelas entre si (fig. 464).

Por um **linha recta** podemos fazer passar uma infinidade de **planos**; porque, desde que um **plano** passando por uma **recta**, fazemol-o girar ao redor d'essa **recta**, cada posição que

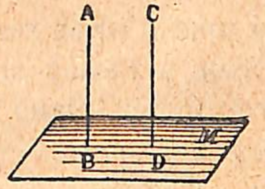


Fig. 464.

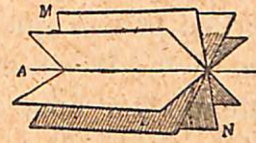


Fig. 465.

elle toma determina a passagem de um outro **plano** (fig. 465).

Tomemos um cartão de visita e com os indicadores apertemol-o por dois dos cantos oppostos; sopremos brandamente o cartão assim mantido e o veremos girar ao redor do eixo que uniria os dois cantos oppostos: cada nova posição, um novo **plano** passando sempre pela mesma **recta**.

Uma **linha recta** e um ponto situado fóra d'essa **recta** determinam um unico **plano**, porque se um **plano**, contendo uma **recta** e um ponto fóra da **recta**, girar ao redor da mesma **recta**, conterá sempre o mesmo ponto.

Tres pontos não em linha recta determinam um unico **plano** porque unido-se dois d'estes pontos ter-se-á uma **recta** e um ponto que, como já ficou dito, determinam um só **plano.**

Duas **rectas** que se cortam determinam um **plano,** porque elle conterá uma d'essas rectas e um dos pontos que marcam a passagem da outra recta; teremos portanto um **plano** determinado por uma recta e um ponto.

Duas **rectas** parallelas tambem determinam um **plano** porque este conterá uma das rectas e um ponto qualquer da outra recta.

Se dois **planos** se cortam, a intersecção é uma LINHA RECTA.

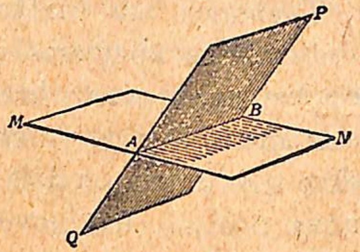


Fig. 466.

Na fig. 466, MN e PQ cortam-se e a sua intersecção AB é uma **recta** porque, se A e B são dois pontos communs aos dois **planos,** a **recta** AB está situada em cada um d'elles, e se tomarmos um outro ponto qualquer da intersecção, elle

estará forçosamente na **recta** porque, do contrario, por tres pontos não em linha recta poder-se-ia fazer passar dois **planos** o que é impossivel.

As intersecções de dois **planos** parallelos, produzidas por um terceiro **plano** são parallelas entre si.

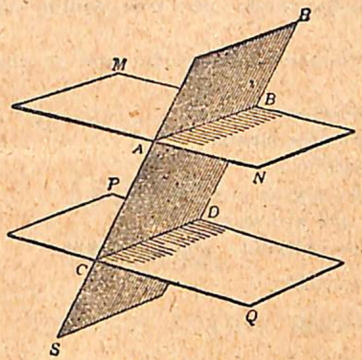


Fig. 467.

Com effeito AB e CD (fig. 467) não se podem encontrar porque os **planos** MN e PQ, nos quaes ellas se acham, não se encontram por serem parallelos, além d'isso AB e CD estão no mesmo **plano** RS; estas duas rectas são portanto parallelas.

EXERCICIOS

1. — Sarah! mostra um plano.
2. — Que é um plano?
3. — Plano e superficie plana são a mesma cousa?
4. — Esta face do quadro negro será um plano?
5. — Traça no quadro negro uma recta.
6. — Dize o que sabes em relação á recta em um plano.

7. — Que é uma recta perpendicular a um plano?
8. — Quando é, uma recta, parallela a um plano?
9. — Que são planos parallelos?
10. — Mostra dois planos parallelos.
11. — Dous planos perpendiculares a uma recta, que são entre si?
12. — Duas rectas perpendiculares a um plano, que são entre si?
13. — Quantos planos podemos fazer passar por uma recta?
14. — Por uma recta e um ponto fóra d'essa recta podemos fazer passar um plano? — Quantos?
15. — Quantos planos poderão passar por tres pontos não em linha recta?
16. — Quantos planos determinam duas rectas que se cortam?
17. — E duas rectas parallelas? — porque?
18. — Que é a intersecção de dois planos?
19. — Mostra dois planos parallelos.
20. — O soalho e o tecto são planos parallelos?
21. — A parede e o soalho que são entre si?
22. — Dá exemplo de planos passando por uma recta.

CAPITULO XIV

SUMMARIO: **Angulos diédros. — Angulos solidos ou polyédros.**

ANGULOS DIÉDROS.

Quando dois planos se encontram, formam um **angulo diédro.** Geralmente os telhados das casas formam um **angulo diédro.**

Em um **angulo diédro** consideramos dois planos, que são as *faces;* e a *aresta,* a recta onde estes planos se encontram.

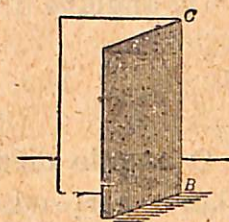


Fig. 468.

Designamos um **angulo diédro** por duas lettras collocadas na *aresta.*

Exemplo:

O angulo diédro CB (fig. 468).

Ou por quatro lettras, ficando as duas da *aresta* no meio.

Exemplo:

O angulo diédro M-AB-N (fig. 469).

Conforme o afastamento ou approximação dos planos que formam um **angulo diédro,** este se torna maior ou menor.

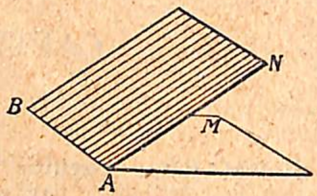


Fig. 469.

Para conhecermos com exactidão a grandeza de um **angulo diédro** levantamos, em cada um dos planos e de um ponto da *aresta,* uma perpendicular á mesma aresta.

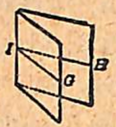


Fig. 470.

O angulo resultante é chamado **angulo plano** e mede o diédro; tal é o angulo HIG (fig. 470).

Os **angulos diédros** são:

rectos
agudos
obtusos

O **angulo diédro** *recto* é formado por dois planos perpendiculares entre si.

Exemplo:

O **angulo diédro** C-AB-D (fig. 471) é *recto,* porque o plano C é perpendicular ao plano D.

Quando um plano cae sobre outrc obliquamente, fórma dois **angulos diédros;** um *agudo* e outro *obtuso.*

Exemplo:

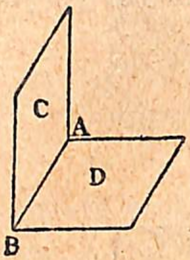


Fig. 471.

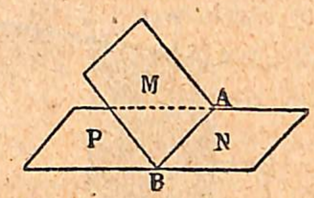


Fig. 472.

O angulo diédro M-AB-P (fig. 472) é *agudo* e o angulo diédro M-AB-N é *obtuso.*

Se dous **diédros** têm uma *aresta* e uma *face,* communs são ADJACENTES.

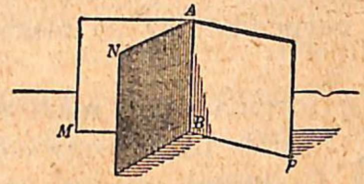


Fig. 473.

O angulo M-AB-N é adjacente ao angulo N-AB-P (fig. 473).

Dois **diédros** são EGUAES quando, collocados um sobre o outro, coincidem em todos os seus pontos.

Dois **diédros** oppostos pela aresta são eguaes.

Se dois planos que se cortam são, cada um perpendicular a um terceiro plano, a intersecção dos dois primeiros é tambem perpendicular a este ultimo.

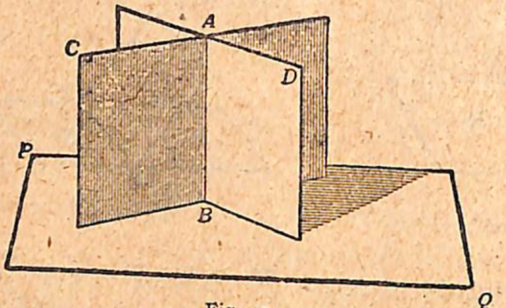


Fig. 474.

Os planos C e D (fig. 474) são perpendiculares ao plano PQ; a recta AB, que é a intersecção é tambem perpendicular ao mesmo plano.

ANGULO SOLIDO OU POLYÉDRO.

O **angulo solido** é formado por mais de dois planos que concorrem em um ponto chamado *vertice*. Estes planos chamam-se *faces* e o encontro de duas faces chama-se *aresta*.

Um **angulo polyédro** contém tantos angulos diédros quantos são os planos concorrentes.

Assim, por exemplo: o **angulo polyédro** S-ABCD (fig. 475) é formado por quatro planos SAB, SBC, SCD e SDA, e contém quatro angulos diédros: A-SB-C cuja aresta é SB; B-SC-D cuja aresta é SC; C-SD-A cuja aresta é SD e finalmente D-SA-B, cuja aresta é SA.

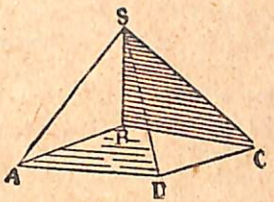


Fig. 475.

Um **angulo polyédro** denomina-se TRIÉDRO, TETRAÉDRO, PENTAÉDRO, etc., quando é formado por *tres, quatro, cinco faces*.

Dois **angulos polyédros** são *eguaes* quando seus angulos e faces correspondentes são eguaes e dispostos na mesma ordem; taes são os angulos S-ABC e S′-A′B′C′ (fig. 476).

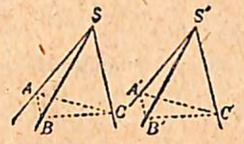


Fig. 476.

EXERCICIOS

1. — Julia! que é um angulo diédro?
2. — Mostra um angulo diédro.
3. — Desenha um angulo diédro.

4. — Como designamos um angulo diédro?
5. — Exemplo.
6. — Como se dividem os angulos diédros?
7. — Que é um angulo diédro recto? — agudo? — obtuso?
8. — Que é um angulo plano?
9. — Que propriedade tem o angulo plano?
10. — Traça um angulo plano.
11. — Que são angulos diédros adjacentes?
12. — Quando são eguaes dois diédros?
13. — Dois angulos diédros oppostos pela aresta, que são?
14. — Que é um angulo solido?
15. — Como se chamam os planos que fórmam um angulo polyédro?
16. — Como se chama o encontro de dous planos de um angulo solido?
17. — Qual é o vertice de um angulo polyédro?
18. — Quantos angulos diédros contém um angulo polyédro?
19. — Que é um angulo triédro? — tetraédro. — pentaédro?
20. — Quando são eguaes dois angulos polyédros?
21. — Ha, na classe, dois angulos polyédros eguaes?
22. — Mostra dois, tres, quatro angulos triédros eguaes.

CAPITULO XV

SUMMARIO: **Polyédros.**

POLYÉDROS.

Entre os volumes notamos que uns são limitados por superficies planas assim, por exemplo, um dado de jogar, os cristaes naturaes, um tijolo, uma regua, etc.; e outros são limitados por superficies curvas assim, por exemplo, uma bola, um ovo, um limão, um tubo, etc.

Os volumes limitados por superficies planas chamam-se **polyédros.**

A recta tirada do centro de um polyédro ao meio de uma face é o APÓTHEMA do polyédro.

Em um **polyédro** consideramos:

as *faces*
as *arestas.*
os *vertices*

No tijolo AG (fig. 477), A é um *vertice*, AB é uma *aresta* e BCDG é uma *face*.

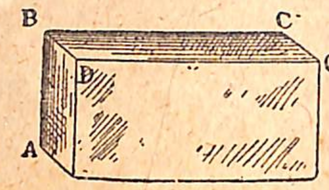


Fig. 477. — Um tijolo: um polyédro.

As *faces* são os planos que formam o **polyédro**; as *arestas* são as intersecções de dois planos; os *vertices* são os encontros isto é, os pontos de convergencia das *arestas*.

Um **polyédro** póde ser *regular* ou *irregular*.

Se as *faces* são polygonos regulares eguaes e todos os angulos solidos tambem eguaes entre si, o **polyédro** é *regular*.

Exemplo :

Um hexaédro regular ou cubo.

Se as faces são deseguaes e os angulos solidos tambem deseguaes, o **polyédro** é *irregular*.

Os **polyédros** *regulares* são cinco, sendo tres formados por triangulos equilateros :

o TETRAÉDRO *regular*
o OCTAÉDRO *regular*
o ICOSAÉDRO *regular*

Um formado por quadrados :

o HEXAÉDRO *regular* ou *cubo*

Um formado por pentagonos regulares

o DODECAÉDRO *regular*

Os principaes **polyédros** irregulares são :

o PRISMA
a PYRAMIDE

Exceptuam-se o CUBO e o TETRAÉDRO regular.

Segundo o numero de *faces*, um **polyédro** recebe o nome particular de:


Fig. 478. — Tetraédro regular.

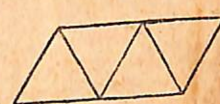


Fig. 479. — Planificação de um tetraédro.

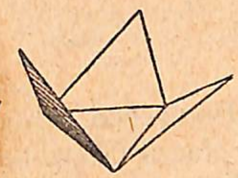


Fig. 480.

TETRAÉDRO se tem quatro faces (figs. 478, 479 e 480).

PENTAÉDRO se tem cinco faces (figs. 481 e 482.


Fig. 481.

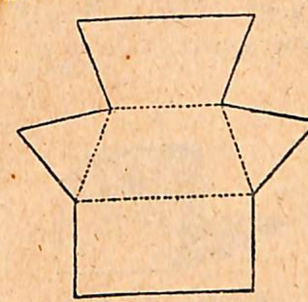


Fig. 482.

HEXAÉDRO se tem seis faces (figs. 483, 484 e 485).

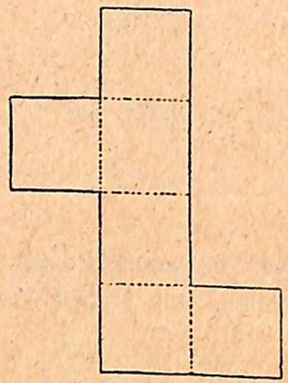


Fig. 484. — Planificação de um cubo.

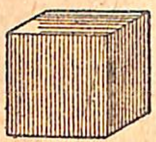


Fig. 483. — Cubo.

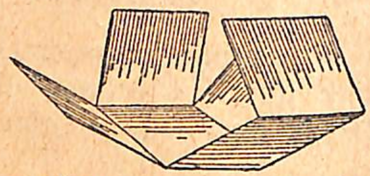


Fig. 485. — Formação de um cubo em cartão.

HEPTAÉDRO se tem sete faces (figs. 486 e 487).

OCTAÉDRO se tem oito faces (figs. 488, 489).

Fig. 486. Heptaédro.

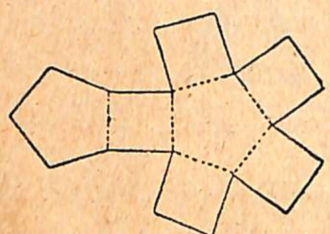


Fig. 487. — Planificação de um heptaédro.

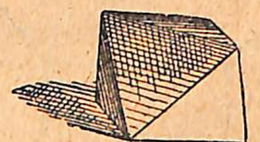


Fig. 488. — Octaédro.

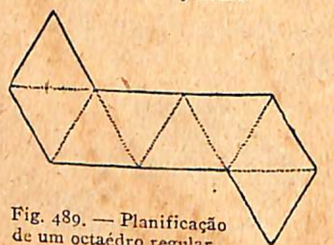


Fig. 489. — Planificação de um octaédro regular.

DODECAÉDRO, se tem doze faces (figs. 490 e 491).

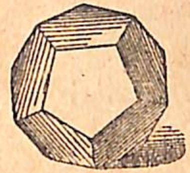


Fig. 490. Dodecaédro.

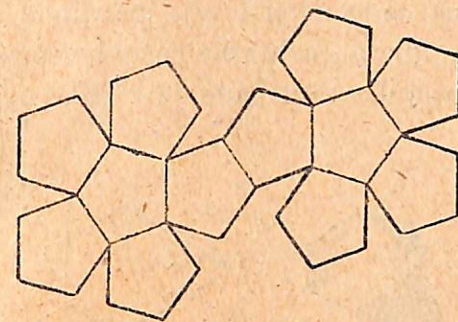


Fig. 491. — Planificação de um dodecaédro.

ICOSAÉDRO, se tem vinte faces (figs. 492 e 493).

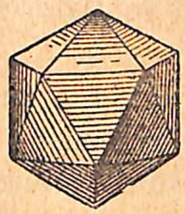


Fig. 492. Icosaédro regular.

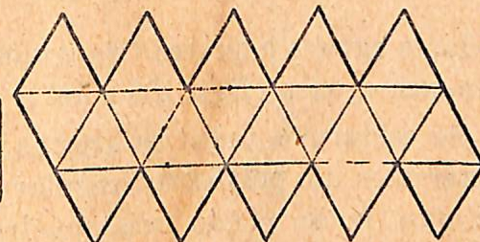


Fig. 493. — Planificação de um icosaédro regular.

Do TETRAÉDRO regular e do CUBO se deriva uma série de polyédros chamados *symetricos* (*), por serem todos os planos que os formam, symetricamente dispostos.

(*) *Dois pontos são symetricos*: 1.º — Em relação a um terceiro *ponto*, isto é, em relação a um *centro*, quando este ultimo ponto está no meio da recta que une os primeiros; 2º — Em

Se cortarmos um TETRAÉDRO regular, de sorte que cada secção seja parallela a uma face e equidistante do vertice, obteremos um OCTAÉDRO irregular, formado por quatro hexagonos re-

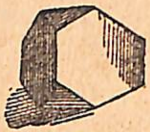


Fig. 496.

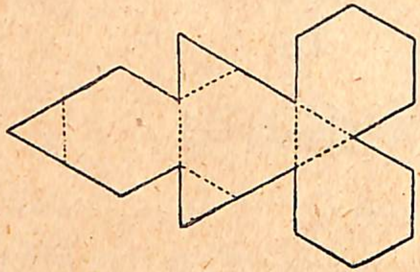


Fig. 497.

gulares eguaes e quatro triangulos equilateros tambem eguaes (figs. 496 e 497).

Se cortarmos todas as arestas de um CUBO, obteremos um **polyédro** irregular symetrico de dezoito faces, sendo seis quadrados eguaes

---

relação a uma *recta*, quando esta linha é perpendicular ao meio da recta que une os dous pontos (a recta toma o nome de *eixo de symetria* (fig. 494); 3.° — Em relação a um *plano* quando este plano é perpendicular ao meio da recta que une os dous pontos (fig. 495).

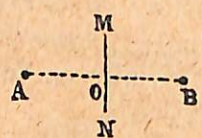


Fig. 494.

Fig. 495.

e doze hexagonos irregulares eguaes (fig. 498 e 499).

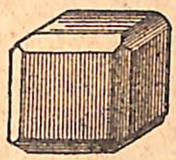


Fig. 498.

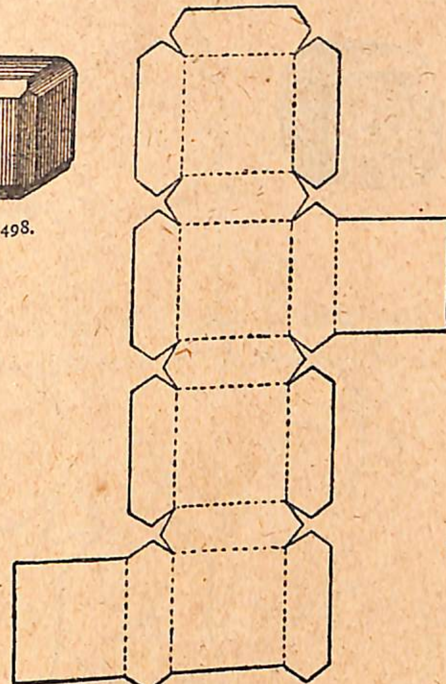


Fig. 499.

Se a partir de cada vertice de um CUBO cortarmos este CUBO de modo que todas as secções sejam triangulos equilateros eguaes e equidistantes do vertice; resultará um **polyédro** irregular symetrico de quatorze faces sendo seis octogonos eguaes e oito triangulos equilateros eguaes (figs. 500 e 501).

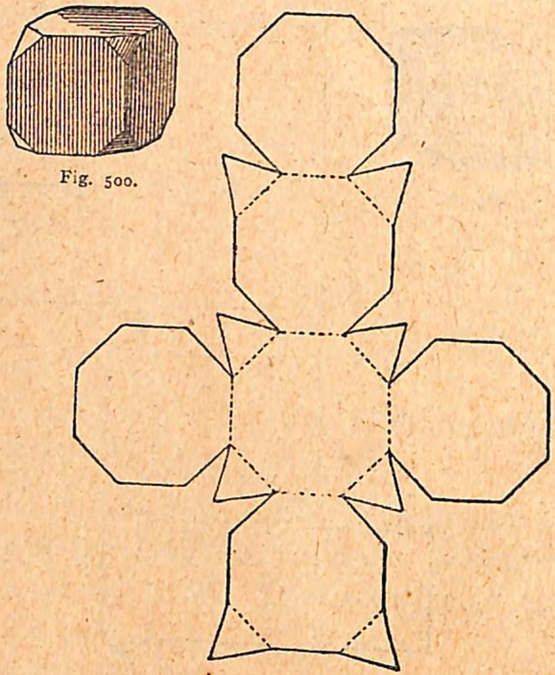


Fig. 500.

Fig. 501.

Se dividirmos ao meio todas as arestas de um cubo, unirmos os meios dos lados adjacentes de cada face e seccionarmos o cubo segundo as rectas traçadas, resultará um outro **polyédro** de quatorze faces formado de seis qua-

drados eguaes e oito triangulos equilateros eguaes (figs. 502 e 503).

Fig. 502.

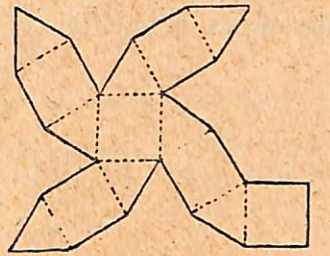


Fig. 503.

Ainda, do cubo podemos formar um outro **polyédro** de quatorze faces sendo, oito hexa-

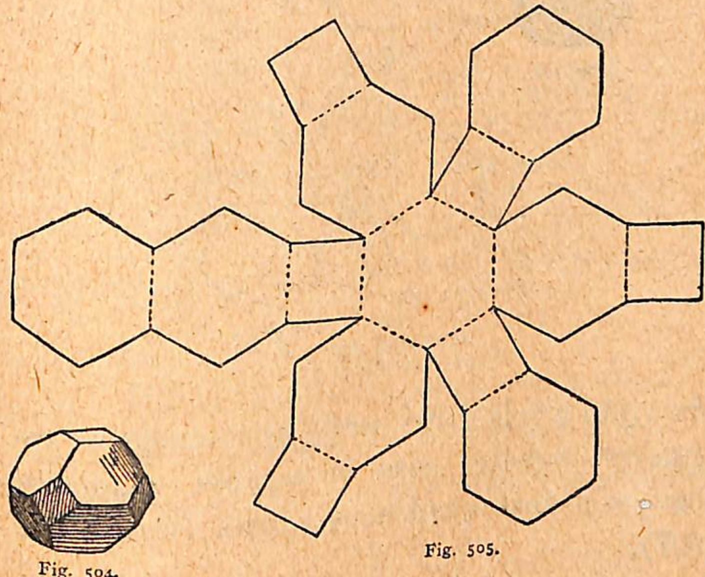


Fig. 504.

Fig. 505.

gonos regulares eguaes e seis quadrados eguaes (figs. 504 e 505). Do **polyédro** de dezoito faces (fig. 498) formamos um outro

Fig. 506.

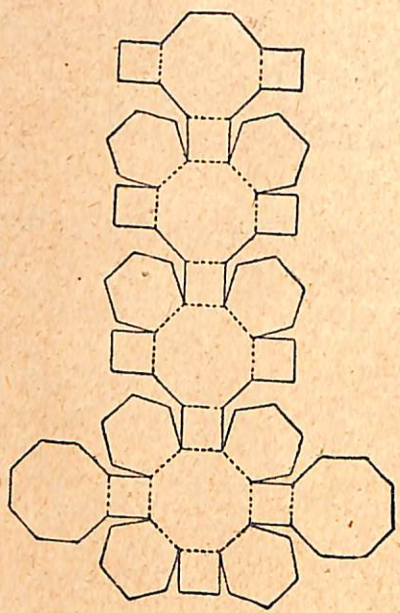


Fig. 507.

de vinte e seis faces sendo seis octogonos regulares eguaes, oito hexagonos regulares eguaes e doze quadrados eguaes (figs. 506 e 507).

EXERCICIOS

1. — Dario! quantas superficies tem esta caixa?
2. — São curvas ou planas?
3. — Que nome tem um volume limitado por superficies planas?
4. — Exemplos.
5. — Mostra as arestas d'esta regua; — as faces; — os vertices.
6. — Como se chama um polyédro de quatro faces? — de cinco? — de seis? — de sete? — de oito? — de doze? — de vinte?
7. — Que é um polyédro regular?
8. — Exemplos.
9. — Que é um polyédro irregular?
10. — Que outro nome tem o hexaédro regular?
11. — De que especie de polygonos é formado o octaédro regular?
12. — Quaes os principaes polyédros irregulares?
13. — Faze em papel a planificação de um cubo; — de um tetraédro regular; — de um octaédro regular.
14. — Quando dous pontos são symetricos?
15. — Que é eixo de symetria?
16. — As faces de um cubo são eguaes? — que são?
17. — As faces de um tetraédro regular são eguaes?
18. — Quantos angulos triédros em um cubo? — em um traédro?
19. — Que objectos pódem ter a fórma cubica?
20. — Que objectos pódem ter a fórma de um tetraédro?
21. — Conheces alguns objectos de fórma prismatica?
22. — Já viste uma pyramide?
23. — As pyramides do Passeio Publico são triangulares?
24. — Dá-me algum exemplo de pyramide.
25. — Faze em cartão um prisma.
26. — Faze em cartão uma pyramide.
27. — Idem um cubo de 0m,06 de aresta.
28. — Idem de um tetraédro regular de 0m,08 de aresta.
29. — Idem um octaédro regular de 0m,07 de aresta.
30. — Idem um icosaédro regular de 0m,04 de aresta.
31. — Idem um dodecaédro regular de 0m,03 de aresta.
32. — Traça em cartão todas as planificações que vês neste capitulo.

CAPITULO XVI

SUMMARIO: **Prisma. — Pyramide.**

PRISMA.

O polyédro irregular cujas faces extremas são polygonos eguaes e parallelos, e as lateraes são parallelogrammos, chama-se **prisma** (figs. 508 e 509).

Os polygonos eguaes são as bases do **prisma** e os parallelogrammos formam a *superficie lateral.*

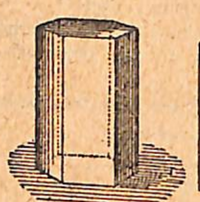


Fig. 508. — Prisma.

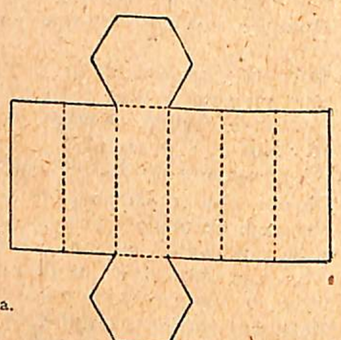


Fig. 509.

As *bases* e a *superficie lateral* formam a *superficie total.*

Fig. 510.

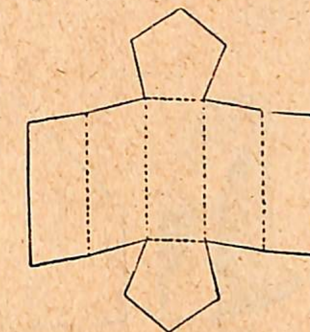


Fig. 511.

Um **prisma** é *recto* quando suas arestas lateraes são perpendiculares á base (fig. 508), e é *obliquo* quando suas arestas lateraes não são perpendiculares á base (figs. 510 e 511).

Fig. 512.

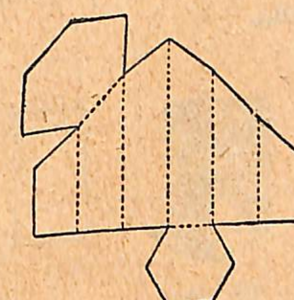


Fig. 513.

A' porção de um **prisma** *recto* ou *obliquo* comprehendida entre uma *base* e uma secção não parallela á *base* dá-se o nome de **prisma** TRUNCADO ou TRONCO de **prisma** (figs. 512, 513, 514 e 515).

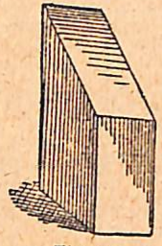


Fig. 514.

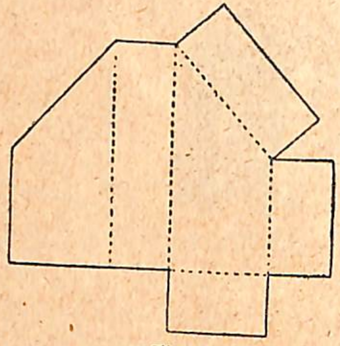


Fig. 515.

A perpendicular abaixada de um ponto qualquer da base superior sobre a base inferior ou sobre o seu prolongamento é a *altura* do **prisma**.

Fig. 516.
Prisma triangular.

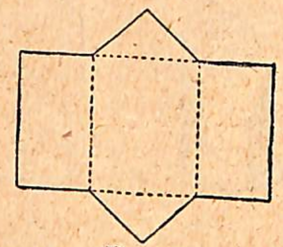


Fig. 517.
Planificação do prisma.

Se um **prisma** tem por bases dois *triangulos*, é *triangular* (figs. 516 e 517); dois *qua-*

drilateros, é *quadrangular* (figs. 518 e 519); dois *pentagonos*, é *pentagonal* (figs. 520 e 521), etc.

Fig. 518. — Prisma quadrangular.

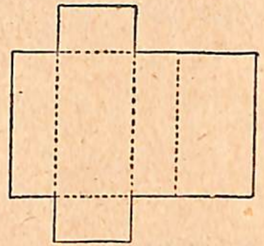


Fig. 519. — Planificação do prisma quadrangular.

Se as bases são parallelogrammos, o **prisma** recebe o nome de PARALLELEPIPEDO.

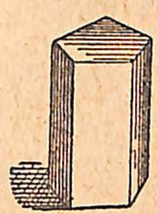


Fig 520. — Prisma pentagonal.

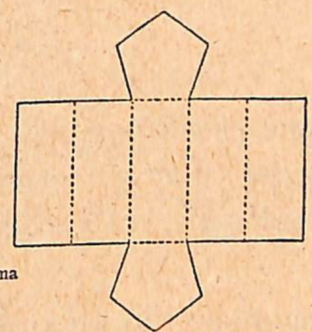


Fig. 521. — Planificação do prisma pentagonal.

As pedras com que geralmente calçam as ruas da cidade têm a fórma de parallelepipedos.

Um PARALLELEPIPEDO é *recto* quando as arestas são perpendiculares ás *bases* (fig. 518); e é *obliquo* quando as *arestas* são obliquas ás bases (figs. 522 e 523).

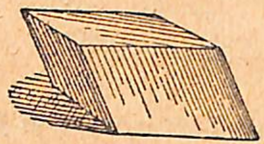


Fig. 522. — Parallelepipedo obliquo.

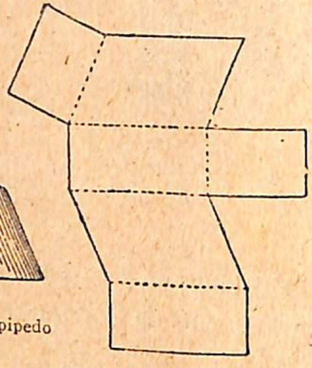


Fig. 523. — Planificação do parallelepipedo obliquo.

Se um parallelepipedo recto tem a base rectangular, toma o nome de PARALLELEPIPEDO *rectangulo*.

Chama-se SECÇÃO RECTA de um **prisma**, o *córte* feito por um plano perpendicular ás faces lateraes do **prisma.**

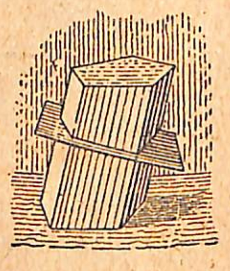


Fig. 524.

PYRAMIDE.

O polyédro limitado por um angulo solido e por um plano, chama-se PYRAMIDE (figs. 525 e 526).

O plano é a *base,* e o angulo solido é a *superficie lateral* da **pyramide.**

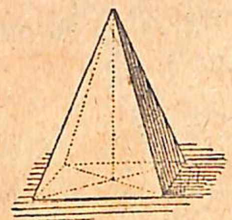


Fig. 525. — Pyramide.

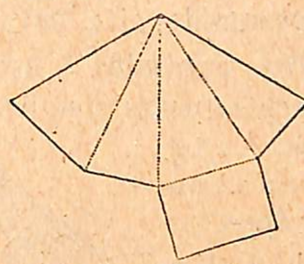


Fig. 526. — Planificação de uma pyramide.

Em uma **pyramide,** consideramos:

o *vertice*
a *base*
as *faces lateraes*
as *arestas*

O *vertice* é o ponto d'onde partem os planos triangulares que formam a superficie lateral da **pyramide.**

A *base* é o polygono sobre o qual assenta a **pyramide.**

As *faces* lateraes são os planos triangulares.

As *faces* e a *base* formam a *superficie total*.

A juncção de duas faces determina uma *aresta* da **pyramide**.

A perpendicular abaixada do vertice sobre a *base* ou sobre o seu prolongamento é a *altura* da **pyramide** (fig. 527).

Uma **pyramide** é RECTA (fig. 525) quando a perpendicular que determina a *altura* cae no centro da *base*, e é OBLIQUA (figs. 527 e 528) quando a perpendicular abaixada do vertice cae fóra do centro.

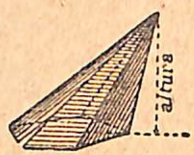


Fig. 527. — Pyramide obliqua.

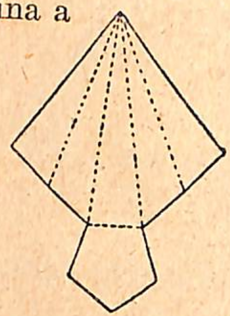


Fig. 528. — Planificação da pyramide obliqua.

Quando uma **pyramide** tem por base um polygono regular e a perpendicular abaixada do *vertice* cae no centro da *base*, é REGULAR

Em uma **pyramide** REGULAR as *faces* são triangulos isosceles eguaes.

A perpendicular abaixada do *vertice* sobre um dos lados da *base é o* APÓTHEMA da **pyramide**.

Uma **pyramide** é triangular, quadrangular,

pentagonal, etc., se a *base* é um triangulo, um quadrilatero, um pentagono, etc.

A porção de uma **pyramide** comprehendida entre a base e uma secção feita por um plano

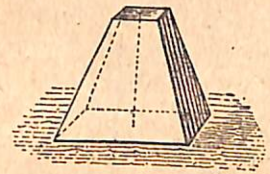


Fig. 529. Tronco de pyramide.

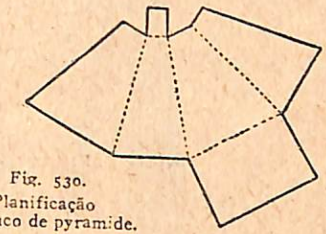


Fig. 530. Planificação do tronco de pyramide.

parallelo ou não á base chama-se TRONCO de **pyramide** (figs. 529 e 530).

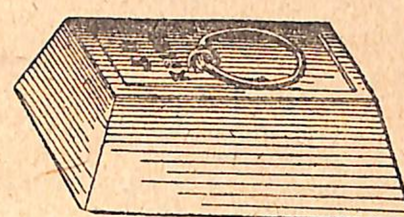


Fig. 531.

Um peso (fig. 531) tem algumas vezes a fórma de um TRONCO de **pyramide**.

Se o plano é parallelo á *base*, a **pyramide** é

TRUNCADA parallelamente á *base* (fig. 529); e

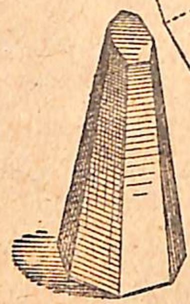


Fig. 532.

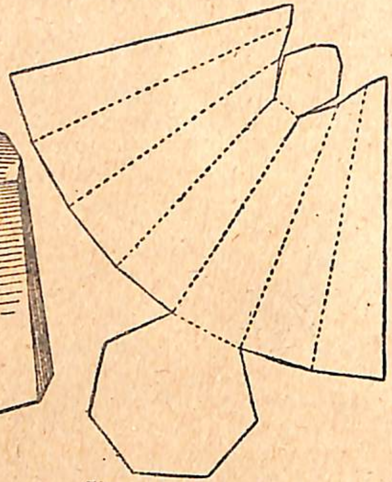


Fig. 533.

se o plano é obliquo, a **pyramide** é TRUNCADA obliquamente (figs. 532 e 533).

EXERCICIOS

1. — Carlinhos! que é um prisma?
2. — Mostra as bases de um prisma; — a área lateral.
3. — A que é egual a área total de um prisma?
4. — Quando é que um prisma é recto? — obliquo?
5. — Mostra a altura de um prisma.
6. — Que é a altura de um prisma?
7. — Que nome tem o prisma cuja base é um triangulo? — um trapezio? — um losango?
8. — Que é um prisma pentagonal? — octogonal?
9. — Quando é que um prisma recebe o nome de parallelepipedo?

10. — Que é um parallelepipedo recto?
11. — Que é um parallelepipedo rectangulo?
12. — Que é uma secção recta?
13. — Como se chama o polyédro limitado por um angulo solido e um plano?
14. — Qual a base?
15. — Qual a área lateral? — área total?
16. — Que nome tem a perpendicular abaixada do vertice sobre a base ou sobre o seu prolongamento?
17. — Que é uma pyramide recta? — obliqua?
18. — Se a pyramide tem por base um polygono regular e para altura a perpendicular abaixada do vertice sobre o centro da base, que é?
19. — Neste caso que são as faces da pyramide?
20. — Qual o apóthema de uma pyramide?
21. — Que é uma pyramide pentagonal? — icosagonal?
22. — Que é um tronco de pyramide?
23. — Que é uma pyramide truncada parallelamente á base? — truncada obliquamente?

Faze em cartão:

24. — Um prisma recto de base triangular regular, tendo 4cm. de altura 2 cm. de aresta da base.
25. — Idem, de base quadrangular regular (alt. = 4 cm., 5 e lado da base = 3 cm.).
26. — Idem, de base hexagonal regular (alt. = 5 cm. e aresta da base = 2 cm.).
27. — Idem, de base pentagonal regular (alt. = 5 cm. e aresta da base 2 cm.).
28. — Idem, de base octogonal regular (alt. = 6 cm. e aresta da base = 2 cm., 8).
29. — Uma pyramide triangular regular (aresta lat. = 6 cm. e aresta da base = 3 cm.).
30. — Idem, quadrangular regular (aresta lat. = 6 cm. e aresta da base = 2 cm., 5).
31. — Idem, pentagonal regular (aresta lat. = 8 cm. e aresta da base = 3 cm.).
32. — Um tronco de pyramide quadrangular, de bases parallelas (aresta da base maior = 2 cm., 5 aresta lateral do tronco = 4 cm.; aresta lateral da pyramide = 7 cm.).

CAPITULO XVII

SUMMARIO: **Corpos redondos.**

Em geometria elementar estudamos unicamente os tres seguintes **corpos redondos**:

CORPOS REDONDOS. o *cylindro*, o *cône*, a *esphera.*

O cylindro é limitado por duas superficies planas e uma superficie curva.

O cône é limitado por duas superficies: uma plana e outra curva.

A **esphera** é limitada por uma superficie curva.

CYLINDRO

O corpo produzido pela revolução de um rectangulo girando em torno de um de seus lados é um **cylindro recto** de base circular.

Um lapis, um poço, um tubo de borracha ou

de chumbo, uma chaminé têm geralmente a fórma de um **cylindro.**

As *bases* do **cylindro** são os circulos descriptos pelos lados do rectangulo.

A menor distancia das duas *bases* é a *altura.*

A recta que une os centros das duas *bases* chama-se *eixo.*

A *geratriz* descreve uma superficie convexa que é a *superficie lateral* do **cylindro.**

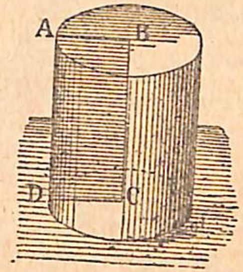


Fig. 534. — Cylindro recto de base circular.

A superficie lateral e as bases formam a *superficie total.*

A B D C é o rectangdlo gerador (fig. 534).

B C é o eixo.

A D é a geratriz

AB e DC produzem as bases do **cylindro.**

O **cylindro** é RECTO (fig. 534) quando o *eixo* é perpendicular ás bases, e é OBLIQUO (fig. 535) quando o *eixo* é obliquo ás bases. No

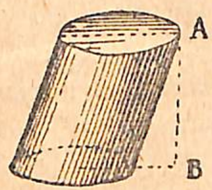


Fig. 535.

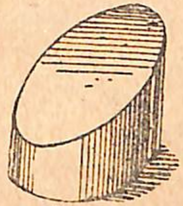


Fig. 536.

cylindro OBLIQUO (fig. 535) a recta AB é a *altura*. A porção de um **cylindro** comprehendida entre uma *base* e uma secção não parallela á base, chama-se TRONCO de **cylindro** (fig. 536).

CÔNE

O corpo produzido pela revolução de um triangulo rectangulo, girando em torno de um dos lados do

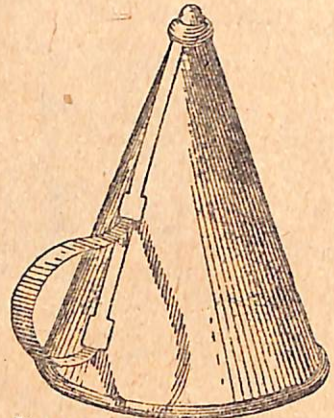


Fig. 537. — Apagador de velas: cône

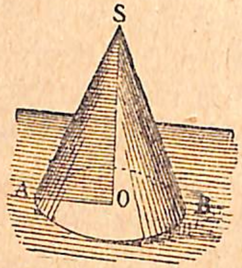


Fig. 538. — Cône recto de base circular.

angulo recto, é um **cône recto** de base circular.

Um funil, um pão de assucar, um apagador de velas (fig. 537) têm a fórma conica.

O circulo descripto pelo lado OA (fig. 538) do triangulo SOA é a *base do* **cône.**

O lado SO do triangulo SOA é a *altura* ou o *eixo*.

S é o *vertice*

A hypothenusa SA do triangulo SOA é a *geratriz* ou o *apóthema*, e a superficie convexa descripta pela geratriz SA é a *superficie lateral* do **cône.**

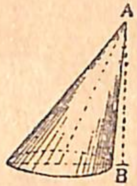


Fig. 539.

Um **cône** é RECTO quando o *eixo* é perpendicular ao centro da *base* (fig. 538), e é OBLIQUO quando o *eixo* é obliquo á *base* (fig. 539).

A porção do solido comprehendida entre a base e uma secção feita por um plano parallelo ou obliquo á base, é um TRONCO de **cône.**

Um balde (fig. 540), um

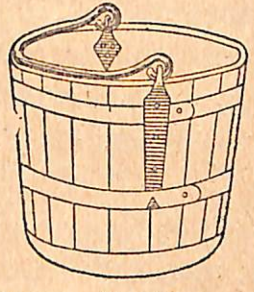


Fig. 540. — Um balde: tronco de cône.

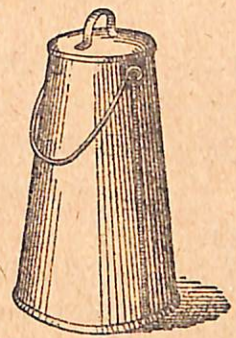


Fig 541. — Uma leiteira: tronco de cône.

dedal, uma leiteira (fig. 541) têm geralmente a fórma de um **cône** TRUNCADO.