Exemplo. Determinar o m. m. c. dos números 210, 660, 690 e 1 800.

210	2	660	2	690	2	1 800	2
105	3	330	2	345	3	900	2
35	5	165	3	115	5	450	2
7	7	55	5	23	23	225	3
1		11	11	1		75	3
		1				25	5
						5	5
						1	

$$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$$
$$660 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 11$$
$$690 = 2 \times 3 \times 5 \times 23$$
$$1\,800 = 2^3 \times 3^2 \times 5^2$$

M (210, 690, 690, 1 800) $= 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 \times 11 \times 23$

M (210, 660, 690, 1 800) $= 3\,187\,800$

Demonstração. Diz o 5.º teorema de divisibilidade que: *quando um número é divisivel por outro, é tambem divisivel pelos fatores deste outro.* Obtivemos para m. m. c. dos quatro números dados, o número $2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 \times 11 \times 23$. Este produto é realmente o m. m. c. dos números dados. Para prová-lo, vamos suprimir neste produto, um fator qualquer, por exemplo, o fator 7. O m. m. c. dos quatro números dados será então $2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 11 \times 23$. Ora, este número, sendo divisivel por 210, deverá ser tambem divisivel pelos fatores de 210, por exemplo, por 7, o que não é possivel porque ele, $2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 11 \times 23$, não contem o fator 7. Logo, suprimindo o fator 7, o número $2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 11 \times 23$ deixa de ser múltiplo comum dos quatro números dados. Se, devido à supressão de um qualquer de seus fatores, o número $2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 \times 11 \times 23$ deixa de ser múltiplo comum dos quatro números dados, ele é realmente o m. m. c. destes mesmos números.

Na prática a fatoração dos números dados pode ser simultânea.

Exemplo. Determinar o m. m. c. de 210, 660, 690 e 1 800.

210, 660, 690, 1 800	2
105, 330, 345, 900	2
105, 165, 345, 450	2
105, 165, 345, 225	3
35, 55, 115, 75	3
35, 55, 115, 25	5
7, 11, 23, 5	5
7, 11, 23, 1	7
1, 11, 23, 1	11
1, 1, 23, 1	23
1, 1, 1, 1	

M (210, 660, 690, 1 800) $= 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 \times 11 \times 23$

M (210, 660, 690, 1 800) $= 3\,187\,800$

Para maior clareza, chamaremos ao primeiro processo de *pesquiza do m. m. c. pela fatoração isolada* e ao segundo de *pesquiza do m. m. c. pela fatoração simultanea.*

122. Observações sobre o m. m. c. de dois ou mais números. Três ou mais números são chamados **primos entre si dois a dois** quando, considerados **dois a dois,** têm como divisor comum somente a unidade. E' o caso dos números 8, 9, 35 e 143. Nenhum deles é primo. Entretanto, tomemos dois quaisquer destes números e verificaremos que são primos entre si.

Três ou mais números são chamados **primos entre si em conjunto** quando, considerados **em conjunto,** têm como divisor comum somente a unidade. E' o caso dos números 8, 9, 18 e 33. Nenhum deles é primo. Entretanto, *existe,* apenas, *um número que divide estes quatro números; é a unidade. Eles são primos entre si em conjunto.* Mas, *não são primos entre si dois a dois*; 8 e 18 são divisiveis por 2; 18 e 33 são divisiveis por 3, etc..

Primeira observação. Quando dois números são primos entre si, ou quando três ou mais números são primos entre si, dois a dois, o m. m. c. deles é o seu produto. O m. m. c. de 8 e 9 é 72; de 4, 9 e 11 é 396; de 4, 7, 9 e 25 é 6 300. E' o que podemos verificar diretamente, determinando, pelos dois processos indicados, o m. m. c. destes números.

Exemplo. Determinar o m. m. c. dos números 36, 143 e 175.

36	2	143	11	175	5
18	2	13	13	35	5
9	3	1		7	7
3	3			1	
1					

$$36 = 2^2 \times 3^2$$
$$143 = 11 \times 13$$
$$175 = 5^2 \times 7$$

Ora, aplicando a regra (§ 121), o m. m. c. dos números 36, 143 e 175 é $2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 \times 11 \times 13$ ou $4 \times 9 \times 25 \times 7 \times 11 \times 13$ ou $36 \times 175 \times 143$, isto é, exatamente o produto dos números 36, 143 e 175.

Segunda observação. O m. m. c. de dois ou mais números tais que o maior é divisivel por todos os outros, é o maior dos números dados. Sejam os números 3, 4, 6, 8, 12 e 48, dos quais se pede o m. m. c.. Sendo 48 divisivel por si mesmo, e pelos números 3, 4, 6. 8 e 12, é um múltiplo comum de todos os números dados. E é o menor porque um número menor que 48 pode ser divisivel por 3, 4, 6, 8 ou 12, mas não é divisivel por 48.

Terceira observação. Decompondo os números 60 e 126 em seus fatores primos, para determinar-lhes o m. d. c. e o m. m. c., acharemos $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ e $126 = 2 \times 3^2 \times 7$. Estes resultados podem ser dispostos como se vê na figura ao lado.

$$60 = \boxed{2 \times 3} \times \boxed{2 \times 5}$$

$$126 = \boxed{2 \times 3} \times \boxed{3 \times 7}$$

Observando-a com atenção, verificaremos que: os fatores do 1.° retângulo superior à esquerda constituem o m. d. c. de 60 e 126; os fatores dos outros três retângulos constituem o m. m. c. de 60 e 126. E concluiremos que $D\ (60,\ 126) \times M\ (60,\ 126) = 60 \times 126$. Repetindo a operação com outros dois números quaisquer, chegaremos sempre à mesma conclusão. Fica então demonstrado que:

O produto de dois números é igual ao produto do m. d. c. pelo m. m. c. destes mesmos números.

Exercícios. Série XXVII

1. Determinar o m. m. c. de 36, 80, 77 e 91.
2. Determinar o m. m. c. de 65, 85, 39 e 44.
3. Determinar o m. m. c. de 68, 429, 770 e 390.
4. Determinar o m. m. c. de 12 012, 63 954 e 8 664.
5. Determinar o m. m. c. de 78 540 e 37 026.
6. Determinar o m. m. c. de 19 074, 17 680 e 14 535.
7. Determinar o m. m. c. de 48 279, 20 349 e 17 017.
8. Determinar o m. m. c. de 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11, 12, 15, 42, 165 e 385.
9. Qual o menor número divisivel por 24, 60 e 105?
10. Quais são os dois menores números divisiveis por 12, 35 e 54?
11. Quais são os cinco menores múltiplos comuns aos números 8, 12, 25 e 40?
12. Determinar os três menores números que, multiplicados respectivamente por 216, 400 e 720, dão produtos iguais.
13. Qual é o menor número que, dividido por 5 775, 1 911 e 24 255, deixa um resto igual a 103?
14. Quais são os quatro menores números que, multiplicados respectivamente por 10, 11, 12 e 15, dão produtos iguais?
15. Qual é o menor número que, dividido por 120, 140, 160 e 180, deixa um resto igual a 25?
16. Quais são os quatro menores números que, multiplicados respectivamente por 15, 20, 25 e 30, dão produtos iguais?

17. Qual o m. m. c. de dois números cujo produto é 6 480, sendo D = 36?
18. Qual é o m. d. c. de dois números cujo produto é 23 400, sendo M = 240?
19. O m. d. c. de dois números é 3 e o m. m. c. é 1 260. Se um dos números é 36, qual é o outro?
20. Quais são os números de dois algarismos, divisiveis por 3 e por 4?
21. Quais são os números de três algarismos, divisiveis por 5, 6 e 12?
22. Da Praça da República partem, às 6 horas da manhã, dois bondes das linhas X e Y, iniciando o serviço do transporte de passageiros. Sabendo-se que o bonde X volta ao ponto de partida ao cabo de 50 minutos, e o Y, ao cabo de 45 minutos, pergunta-se a que horas os dois bondes partirão novamente juntos da Praça da República.
23. Tenho três réguas divididas em partes iguais. Cada parte da primeira tem 3 mm, da segunda, 5 mm, e da terceira, 12 mm. Coloco as três réguas uma ao lado da outra, de modo que as suas extremidades coincidam. Quais são os traços de divisão das três réguas, que coincidem?

Capítulo V

Frações Ordinárias

123. Definição. Já vimos (§ 42) em que consiste um número inteiro ou natural; *é o número que exprime a medida de uma grandeza que contem a unidade, exatamente, uma ou mais vezes.* Pode acontecer, porem, que a grandeza que se quer medir não contenha a unidade, exatamente, uma ou algumas vezes; neste caso, para exprimir a medida desta grandeza, temos de recorrer a uma nova espécie de números, **os números fracionários,** com os quais vamos travar conhecimento neste capítulo, e que virão ampliar consideravelmente o nosso **campo numérico.** (§ 43)

Para medir uma grandeza é necessário compará-la com outra da mesma espécie, perfeitamente determinada ou conhecida, e que se chama **unidade.** (§ 41) Isto posto, consideremos uma grandeza qualquer, por exemplo, o segmento retilíneo AB, e seja RS o segmento tomado como unidade para medir o segmento AB. Desde logo notamos que a grandeza AB é menor que a unidade RS. Logo, *não ha um número natural que represente a medida do segmento* AB, tomando como unidade o segmento RS. Esta dificuldade, porem, é facil de remover. Dividimos a unidade RS em um certo número de partes iguais, por exemplo, *em quatro.* Daremos a cada uma destas partes, o nome de *um quarto.* Depois, verificamos com um compasso de pontas secas, que *um quarto da unidade* RS *está contido três vezes no segmento* AB; neste caso, diremos que **a medida do segmento AB é três vezes a quarta parte da unidade** RS. E, abreviadamente, escreveremos: $\frac{3}{4}$

Fig. 60

Consideremos agora o segmento CD, que queremos medir com a mesma unidade, RS, do exemplo anterior. Com um compasso de pontas secas verificamos que RS cabe *mais de duas vezes e menos de tres vezes no segmento* CD; portanto, *não ha um número inteiro que seja a medida do segmento* CD, tomando como unidade o segmento RS. Neste caso, dividimos a unidade RS em um certo número de partes iguais, por exemplo, *em quatro.*

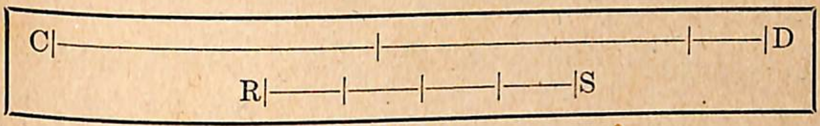


Fig. 61

Já sabemos que cada uma destas partes é chamada *um quarto.* Depois, com o compasso de pontas secas, verificamos que *um quarto da unidade* RS *está contido nove vezes no segmento* CD; neste caso, diremos que **a medida do segmento** AB **é nove vezes a quarta parte da unidade** RS. E, abreviadamente, escreveremos: $\frac{9}{4}$.

Estes símbolos, $\frac{3}{4}$ ou $\frac{9}{4}$, são chamados **números fracionários** ou, simplesmente, **frações.**

O número 4, escrito por baixo do traço horizontal, é chamado **denominador.** Com efeito, ele indica em quantas partes iguais a unidade foi dividida; como se *denomina* cada uma destas partes.

O número 3 ou o número 9, escrito sobre o mesmo traço horizontal, é chamado **numerador.** Com efeito, ele indica o **número** de vezes que uma das partes em que se dividiu a unidade RS, coube exatamente na grandeza AB, ou na grandeza CD.

E os dois números que constituem a fração são chamados **termos da fração.**

A cada uma das partes iguais em que se divide a unidade, dá-se o nome de **unidade fracionária,** para não confundí-la com a *unidade fundamental* ou simplesmente, *unidade.* Cada uma das partes iguais em que se divide a unidade é tambem chamada *parte alíquota* da unidade. No caso da figura 60, o segmento

AB contem 3 partes alíquotas do segmento RS; no caso da fig. 61, o segmento CD contem 9 partes alíquotas do segmento RS.

Portanto,

Fração é o número que designa uma ou algumas partes de uma unidade dividida em um número qualquer de partes iguais.

As frações que acabámos de definir são chamadas frações **ordinárias.**

Ilustração. Se um menino deseja comer $\frac{3}{4}$ de uma maçã, deve dividí-la em *quatro partes* **iguais** e comer *três* destas partes.

E se quiser comer $\frac{11}{4}$? À primeira vista, isto parece um absurdo, visto que uma maçã tem somente *quatro quartos*. Entretanto, este absurdo desaparece, se considerarmos que o menino pode tomar *três* maçãs, dividir cada uma delas em *quatro partes* **iguais**, isto é, em *quartos*, e comer 11 pedaços, 11 quartos.

124. Leitura de uma fração ordinária. Para ler uma fração ordinária, lê-se primeiramente o numerador e, depois, o denominador. O numerador é lido como um número natural. Para ler o denominador dir-se-á *meios, terços, quartos, quintos, sextos, sétimos, oitavos e nonos*, em lugar de *dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito* e *nove*; dir-se-á *décimos, centésimos, milésimos*, etc., em lugar de *dez, cem, mil*, etc.; juntar-se-lhe-á a palavra *avos*, em qualquer outro caso.

Exemplos; $\frac{5}{8}$ (cinco oitavos); $\frac{3}{7}$ (três sétimos); $\frac{7}{10}$ (sete décimos); $\frac{13}{100}$ (treze centésimos); $\frac{11}{24}$ (onze vinte e quatro avos).

Exercícios em classe

1. Tomando tiras de papel com o mesmo comprimento e a mesma largura (por exemplo, 25 cm por 3 cm) e dobrando-as convenientemente, mostrar $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}$ ou $\frac{1}{10}$ de cada uma destas tiras, verificando assim de um modo concreto que

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5} > \frac{1}{6} > \frac{1}{7} > \frac{1}{8} > \frac{1}{9} > \frac{1}{10}$$

2. Traçar segmentos retilíneos todos iguais (por exemplo, com 20 cm cada um e, por tentativas (com um compasso de pontas secas) dividir cada um deles em 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ou 10 partes iguais.

Exercícios orais

1. O que significa $\frac{7}{9}, \frac{11}{12}, \frac{13}{20}, \frac{17}{25}$?

2. Carlos comeu $\frac{3}{7}$ de uma maçã. Explicar de que modo Carlos procedeu para comer $\frac{3}{7}$ da maçã, dizer qual a unidade fundamental neste exemplo, e a fracionária.

3. Três meninos repartiram entre si um bolo. O primeiro comeu $\frac{4}{15}$ do bolo, o segundo comeu $\frac{5}{15}$ e o terceiro comeu o resto. Explicar minuciosamente como se passaram estas coisas todas.

4. Quem comeu $\frac{11}{16}$ de uma laranja, comeu a laranja inteira? Sobrou alguma coisa? Quanto?

5. Carlos comeu $\frac{19}{4}$ de um doce. Se um doce tem apenas *quatro quartos*, como interpretar este absurdo?

6. Carlos comeu $\frac{8}{8}$ de uma maçã e José comeu $\frac{15}{15}$ de outra maçã perfeitamente igual à primeira. Quem comeu mais? Por que?

7. Com o auxílio de duas tiras de papel, com o mesmo comprimento, comparar as frações $\frac{2}{5}$ e $\frac{5}{8}$ e dizer qual é a maior das duas.

8. Que fração do dia são 11 horas?
9. ,, ,, da semana são 3 dias?
10. ,, ,, do mês são 13 dias?
11. ,, ,, ,, ano são 5 meses?
12. ,, ,, ,, cruzeiro são 20 centavos?
13. ,, ,, ,, ,, ,, 40 centavos?

125. Frações próprias e impróprias; números mixtos. *Fração própria* é a fração menor que a unidade. Na prática se reconhece facilmente pelo fato de ter o numerador menor que o denominador. Exemplos: $\frac{3}{5}, \frac{4}{9}, \frac{7}{12}$, etc..

Fração imprópria é a fração maior que a unidade, ou igual à unidade. Na prática se reconhece facilmente pelo fato de ter o numerador maior que o denominador ou igual ao denominador. Exemplos: $\frac{4}{4}, \frac{6}{6}, \frac{11}{6}, \frac{23}{12}$, etc..

Entre as frações impróprias devemos distinguir as **frações aparentes**; *são aquelas cujo numerador é múltiplo do denominador.* As frações $\frac{2}{2}, \frac{4}{2}, \frac{9}{3}, \frac{12}{3}, \frac{15}{5}, \frac{16}{4}$, etc., são frações aparentes.

Número mixto é o número constituido por um número inteiro e uma fração propriamente dita. Exemplos: $3\frac{2}{5}$, $4\frac{5}{6}$, $8\frac{4}{9}$, $10\frac{7}{12}$, etc..

Considerando que a unidade tem *dois meios, três terços, quatro quartos*, etc., conclue-se que pode ser representada, por meio das frações ordinárias, de uma infinidade de maneiras:

$$1 = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \frac{5}{5} = \frac{6}{6} = \frac{7}{7} = \frac{8}{8} = \ldots\ldots \quad \ldots$$

Estas frações são todas impróprias (aparentes) porque cada uma delas é igual à unidade.

Exercícios orais

1. Dizer frações iguais a 2 unidades.
2. Dizer frações iguais a 3 unidades.
3. Dizer frações iguais a 4 unidades.
4. Dizer frações iguais à metade da unidade.
5. Dizer frações iguais à terça parte da unidade.
6. Dizer frações iguais a dois terços da unidade.

126. Transformação de uma fração imprópria em número inteiro ou mixto. Consideremos a fração imprópria $\frac{38}{7}$. Uma unidade tem 7 sétimos. Ora, quantas vezes 7 sétimos estão contidos em 38 sétimos? A resposta a esta pergunta é o número de unidades que a fração $\frac{38}{7}$ contem. Mas, para responder a esta pergunta, é necessário dividir 38 sétimos por 7 sétimos. (§ 75, 2.º problema) Teremos, então:

$$\begin{array}{l|l} 38 \text{ sétimos} & 7 \text{ sétimos} \\ \cline{2-2} 3 \text{ sétimos} & 5 \text{ unidades} \end{array}$$

Portanto, 38 sétimos contêm 5 unidades e restam ainda 3 sétimos; logo, $\frac{38}{7} = 5\frac{3}{7}$.

Podendo o mesmo raciocínio ser feito com qualquer outra fração imprópria, podemos estabelecer a seguinte

Regra. *Para transformar uma fração imprópria em número inteiro ou mixto, divide-se o numerador pelo denominador. Se houver resto, completa-se o quociente com uma fração tendo para numerador o resto da divisão e para denominador o divisor.*

Primeiro exemplo. Converter $\frac{143}{11}$ em número inteiro ou mixto.

$$\begin{array}{l|l} 143 & 11 \\ \cline{2-2} 33 & 13 \\ 0 & \end{array} \qquad \textit{Resposta.}\ \frac{143}{11} = 13$$

Segundo exemplo. Converter $\frac{147}{11}$ em número inteiro ou mixto

$$\begin{array}{l|l} 147 & 11 \\ \cline{2-2} 37 & 13 \\ 4 & \end{array} \qquad \textit{Resposta.}\ \frac{147}{11} = 13\frac{4}{11}$$

127. Transformação de um número inteiro em fração com denominador dado; transformação de um número mixto em fração imprópria. Qualquer número inteiro pode ser transformado em fração com denominador dado. Como exemplo, vamos transformar o número 5 em uma fração cujo denominador seja 8, isto é, vamos reduzir 5 a oitavos. Ora, se uma unidade tem 8 oitavos, 5 unidades têm 5 vezes oito oitavos, isto é, 40 oitavos. Portanto, $5 = \frac{40}{8}$. Podendo este mesmo raciocínio ser feito com qualquer número inteiro, podemos estabelecer a seguinte

Regra. *Para transformar um inteiro em fração com denominador dado, toma-se como numerador o produto do inteiro pelo denominador.*

Exemplo. Reduzir 7 a uma fração com o denominador 12.

$$7 = \frac{7 \times 12}{12} \qquad 7 = \frac{84}{12} \qquad \textit{Resposta.}\ 7 = \frac{84}{12}$$

No cálculo das frações ordinárias, teremos, muitas vezes, de dar a um número inteiro a forma de fração com denominador qualquer. O mais simples, então, é tomar a unidade para denominador. Por exemplo:

$$5 = \frac{5}{1} \qquad 7 = \frac{7}{1} \qquad 12 = \frac{12}{1}$$

Para ler estas frações diremos apenas 5, 7, 12.

Consideremos agora o número mixto $5\frac{3}{8}$. Este número se compõe de duas partes: cinco unidades e três oitavos. Ora, cinco unidades equivalem a 40 oitavos. Portanto, cinco unidades mais 3 oitavos é o mesmo que 40 oitavos mais 3 oitavos, isto é, 43 oitavos. Então poderemos concluir que:

Regra. *Para transformar um número mixto em fração imprópria, multiplica-se o número inteiro pelo denominador, soma-se o produto com o numerador, e ter-se-á o numerador da fração imprópria; o denominador da fração imprópria será o mesmo denominador que figura no número mixto dado.*

Exemplo. Transformar o número mixto $7\frac{3}{4}$ em fração imprópria.

Resposta. $7\frac{3}{4} = \frac{31}{4}$

$$7\frac{3}{4} = \frac{7 \times 4 + 3}{4}$$

$$7\frac{3}{4} = \frac{31}{4}$$

Exercícios orais

1. $\frac{23}{4} = ?$	6. $7 = \frac{?}{4}$	11. $15 = \frac{?}{1}$	16. $4\frac{2}{5} = ?$
2. $\frac{37}{8} = ?$	7. $6 = \frac{?}{5}$	12. $7 = \frac{?}{6}$	17. $3\frac{7}{8} = ?$
3. $\frac{41}{9} = ?$	8. $3 = \frac{?}{7}$	13. $23 = \frac{?}{1}$	18. $9\frac{3}{4} = ?$
4. $\frac{23}{5} = ?$	9. $6 = \frac{?}{9}$	14. $11 = \frac{?}{6}$	19. $8\frac{3}{7} = ?$
5. $\frac{27}{8} = ?$	10. $6 = \frac{?}{10}$	15. $8 = \frac{?}{5}$	20. $11\frac{2}{5} = ?$

128. Redução de frações ao mesmo denominador. *Frações homogêneas* são as frações que têm o mesmo denominador: $\frac{8}{15}, \frac{7}{15}, \frac{11}{15}$, etc..

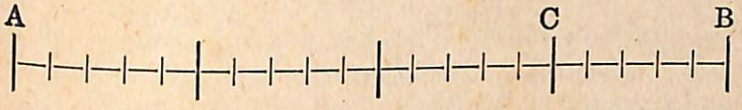
Frações não homogêneas são as frações que não têm o mesmo denominador: $\frac{4}{7}, \frac{7}{9}, \frac{11}{15}$, etc..

Reduzir frações ao mesmo denominador é transformá-las em outras equivalentes, isto é, com o mesmo valor, e homogêneas.

Dadas duas ou mais frações não homogêneas, é sempre possível torná-las homogêneas, sem que o seu valor se altere. Esta transformação depende do seguinte

Teorema. *Multiplicando ou dividindo ambos os termos de uma fração por um mesmo número, o valor da fração não se altera.*

Seja a fração $\frac{3}{4}$. Multiplicando ambos os termos desta fração por 5, resulta $\frac{15}{20}$. Vamos provar que $\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$.



Consideremos uma unidade qualquer, o segmento AB, e dividamo-lo em quatro partes iguais. Cada uma destas partes chamar-se-á *um quarto*, e a porção de segmento compreendida entre os pontos A e C representará *três quartos* do segmento AB.

Agora dividamos *cada quarto* em *cinco partes iguais*. Então o segmento AB ficará dividido em *vinte partes iguais*, cada uma das quais chamar-se-á *um vinte avos*. E a porção de segmento compreendida entre os pontos A e C representará *quinze vinte avos* do segmento AB. Ora, se o segmento AC representa indiferentemente a fração $\frac{3}{4}$ ou a fração $\frac{15}{20}$, conclue-se que estas duas frações são iguais.

Seja qual for a fração dada e o número pelo qual se multiplicam seus termos, se repetirmos esta demonstração chegaremos sempre à mesma conclusão. Então a primeira parte do teorema está demonstrada.

Consideremos agora a fração $\frac{21}{35}$. Se dividirmos ambos os termos desta fração por 7, resulta $\frac{3}{5}$. Vamos provar que $\frac{3}{5} = \frac{21}{35}$. Ora, de acordo com a primeira parte deste teorema, temos $\frac{3}{5} = \frac{3 \times 7}{5 \times 7} = \frac{21}{35}$. Logo, $\frac{21}{35}$ é realmente igual a $\frac{3}{5}$. Portanto, a segunda parte do teorema fica tambem demonstrada.

A transformação de frações não homogêneas em homogêneas, ou a redução de frações ao mesmo denominador, é feita de acordo com dois processos diferentes. Ambos nos permitem reduzir as frações dadas ao mesmo denominador, mas o segundo nos dá as mesmas frações reduzidas ao *menor denominador comum*, como veremos nos parágrafos seguintes.

129. Redução de frações ao mesmo denominador. Consideremos as frações $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{8}$ e $\frac{4}{9}$. Podemos multiplicar os dois termos de uma fração por um mesmo número, sem que o valor desta fração se altere. (§ 128) Neste caso, multipliquemos os dois termos da fração $\frac{5}{6}$ por $4 \times 8 \times 9$, isto é, *pelo produto dos denominadores das outras*; multipliquemos os dois termos da fração $\frac{3}{4}$ por $6 \times 8 \times 9$, isto é, *pelo produto dos denominadores das outras*, e assim por diante. Feitas as operações indicadas, teremos:

$$\frac{5}{6} = \frac{5\times4\times8\times9}{6\times4\times8\times8} = \frac{1\,440}{1\,728} \qquad \frac{3}{4} = \frac{3\times6\times8\times9}{4\times6\times8\times9} = \frac{1\,296}{1\,728}$$

$$\frac{3}{8} = \frac{3\times6\times4\times9}{8\times6\times4\times9} = \frac{648}{1\,728} \qquad \frac{4}{9} = \frac{4\times6\times4\times8}{9\times6\times4\times8} = \frac{768}{1\,728}$$

Regra. *Para reduzir duas ou mais frações ao mesmo denominador, é bastante multiplicar os dois termos de cada fração pelo produto dos denominadores das outras.*

130. Redução de frações ao menor denominador comum. Consideremos as frações $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{8}$ e $\frac{4}{9}$. O m. m. c. dos denominadores é 72. Dividamos 72 por cada um dos denominadores. Os quocientes respectivos, da esquerda para a direita, serão 12, 18, 9 e 8. Ora, já aprendemos que uma fração não muda de valor, se multiplicarmos seus termos por um mesmo número. Multipliquemos então os termos da primeira fração por 12; da segunda, por 18; da terceira, por 9; da quarta, por 8. Obteremos quatro frações homogêneas e equivalentes, respectivamente, às quatro frações dadas. A disposição prática da operação é a seguinte:

$$\begin{array}{cccc}
\frac{5}{6}, & \frac{3}{4}, & \frac{3}{8}, & \frac{4}{9} \\
(12) & (18) & (9) & (8) \\
\frac{60}{72}, & \frac{54}{72}, & \frac{27}{72}, & \frac{32}{72}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{cccc|c}
6, & 4, & 8, & 9 & 2 \\
3, & 2, & 4, & 9 & 2 \\
3, & 1, & 2, & 9 & 2 \\
3, & 1, & 1, & 9 & 3 \\
1, & 1, & 1, & 3 & 3 \\ \cline{5-5}
1, & 1, & 1, & 1 & 72
\end{array}$$

Na primeira linha figuram as frações dadas; na segunda, entre parênteses, os quocientes das divisões do m. m. c. dos denominadores, por cada um destes; na terceira, as frações homogêneas equivalentes às frações dadas.

Pedimos aos nossos estudantes que demonstrem:

1.°) Na pesquiza do m. m. c. dos denominadores das frações dadas neste parágrafo, é inutil considerar o denominador 4; bastaria determinar o m. m. c. de 6, 8 e 9.

2.°) Na prática, a linha dos quocientes pode ser suprimida.

3.°) Por que motivo as frações da terceira linha se apresentam com o mesmo denominador?

A redução de frações ao menor denominador comum pode ser resumida na seguinte

Regra. *Para reduzir duas ou mais frações ao menor denominador comum, determina-se o m. m. c. dos denominadores; divide-se o m. m. c. obtido por cada um dos denominadores das frações dadas; multiplicam-se os dois termos de cada uma das frações dadas pelo quociente correspondente.*

Os resultados obtidos neste parágrafo e no anterior estão no quadro ao lado.

$$\begin{array}{|l|}
\hline
\frac{5}{6} = \frac{1\,440}{1\,728} = \frac{60}{72} \\
\frac{3}{4} = \frac{1\,296}{1\,728} = \frac{54}{72} \\
\frac{3}{8} = \frac{648}{1\,728} = \frac{27}{72} \\
\frac{4}{9} = \frac{768}{1\,728} = \frac{32}{72} \\
\hline
\end{array}$$

Observando estes resultados, concluimos imediatamente que o segundo processo é mais conveniente do que o primeiro porque, pelo primeiro, as frações dadas *ficam reduzidas ao mesmo denominador* ao passo que, pelo segundo, *ficam reduzidas ao menor denominador comum*. Entretanto, quando os denominadores são primos entre si, dois a dois, os dois processos conduzem ao mesmo resultado. (§ 122) E' o que os estudantes devem verificar, reduzindo ao mesmo denominador, pelos dois processos, as frações $\frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}$ e $\frac{4}{9}$.

Exercícios orais

Reduzir ao mesmo denominador:

1. $\frac{3}{4}, \frac{5}{8}$	3. $\frac{4}{9}, \frac{5}{6}$	5. $\frac{7}{8}, \frac{3}{5}$	7. $\frac{3}{4}, \frac{5}{6}$	9. $\frac{7}{8}, \frac{5}{6}$
2. $\frac{2}{5}, \frac{7}{10}$	4. $\frac{3}{4}, \frac{2}{5}$	6. $\frac{4}{5}, \frac{2}{3}$	8. $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}$	10. $\frac{3}{4}, \frac{2}{7}$

Exercícios. Série XXVIII

1. Reduzir as frações $\frac{7}{15}, \frac{11}{18}, \frac{17}{20}, \frac{19}{24}$ e $\frac{23}{30}$ ao mesmo denominador.
2. Tornar homogêneas as frações $\frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{5}{7}$ e $\frac{4}{9}$, pelos dois processos.
3. Determinar as 10 frações de termos mais simples, iguais a $\frac{3}{5}$.
4. Determinar as 10 frações de termos mais simples, iguais a $\frac{4}{7}$.

131. Simplificação das frações ordinárias. *Simplificar uma fração ordinária é transformá-la em outra fração de termos menores, sem que o seu valor se altere.*

Esta transformação é, em geral, possivel. Com efeito, se ambos os termos de uma fração têm um divisor comum, diferente da unidade, e se os dividimos por este divisor, o valor da fração dada não se altera. (§ 128) Por exemplo, dada a fração $\frac{144}{156}$ e dividindo ambos os termos por 12, resulta $\frac{12}{13}$ que é equivalente a $\frac{144}{156}$, isto é, ambas têm o mesmo valor.

Às vezes, porem, não é possivel simplificar uma fração, como acontece por exemplo com a fração $\frac{35}{48}$. A simplificação não é possivel porque os dois termos da fração não têm um divisor comum, diferente da unidade; são primos entre si. Neste caso, dá-se à fração o nome de *fração irredutivel.*

Para simplificar uma fração há dois processos distintos: o das divisões sucessivas e o do m. d. c.

132. Simplificação de uma fração pelo processo das divisões sucessivas. Regra. *Para simplificar uma fração pelo*

processo das divisões sucessivas, dividem-se os dois termos da fração dada por um dos seus divisores comuns; dividem-se os dois termos da fração resultante por um dos seus divisores comuns; e assim sucessivamente até que os dois termos da fração se tornem primos entre si.

Exemplo. Simplificar a fração $\frac{840}{1\,320}$

$$\frac{840}{1\,320} = \frac{840 \div 10}{1\,320 \div 10} = \frac{84}{132} = \frac{84 \div 6}{132 \div 6} = \frac{14}{22} = \frac{14 \div 2}{22 \div 2} = \frac{7}{11}$$

Resposta. $\frac{840}{1\,320} = \frac{7}{11}$

Os dois termos da fração $\frac{7}{11}$, sendo primos entre si, esta fração é irredutivel.

E dizemos, então, que $\frac{7}{11}$ é a forma mais simples da fração $\frac{840}{1\,320}$, ou que *a fração* $\frac{840}{1\,320}$ *está reduzida à sua expressão mais simples.*

Exercícios orais

Simplificar as frações que se seguem.

1. $\frac{12}{15}$	3. $\frac{25}{40}$	5. $\frac{17}{51}$	7. $\frac{19}{57}$	9. $\frac{26}{39}$
2. $\frac{14}{21}$	4. $\frac{13}{26}$	6. $\frac{30}{45}$	8. $\frac{24}{60}$	10. $\frac{33}{44}$

133. Simplificação de uma fração pelo processo do m. d. c. Regra. *Para simplificar uma fração pelo processo do m. d. c., determina-se o m. d. c. dos dois termos da fração e dividem-se ambos os termos da fração pelo seu m. d. c.*

Neste caso, a fração resultante é irredutivel, (§ 107) e a pesquiza do m. d. c. pode ser aproveitada para obter os dois termos desta mesma fração.

Exemplo. Simplificar a fração $\frac{5\,330}{7\,667}$

	1	2	3	1	1	3	2
7 667	5 330	2 337	656	369	287	82	41
2 337	656	369	287	82	41	0	
187	130	57	16	9	7	2	1

$$\frac{5\,330}{7\,667} = \frac{5\,330 \div 41}{7\,667 \div 41} = \frac{130}{187}$$

Resposta. $\frac{5\,330}{7\,667} = \frac{130}{187}$

E' preferivel o primeiro processo, quando se quer simplificar uma fração de termos pequenos, cujos divisores comuns são facilmente reconheciveis pelos caracteres de divisibilidade.

E' preferivel o segundo processo, quando se quer simplificar uma fração de termos grandes, cujos divisores comuns não são facilmente reconheciveis pelos caracteres de divisibilidade.

E, às vezes, há conveniência em empregar os dois processos.

Exemplo. Simplificar a fração $\frac{84\,210}{276\,690}$

$$\frac{84\,210}{276\,690} = \frac{84\,210 \div 10}{276\,690 \div 10} = \frac{8\,421}{27\,669} = \frac{8\,421 \div 3}{27\,669 \div 3} = \frac{2\,807}{9\,223}$$

	3	3	2
9 223	2 807	802	401
802	401	00	
23	7	2	1

$$\frac{2\,807}{9\,223} = \frac{2\,807 \div 401}{9\,223 \div 401} = \frac{7}{23} \qquad \textit{Resposta.}\ \frac{84\,210}{276\,690} = \frac{7}{23}$$

Neste exemplo empregámos no começo o primeiro processo para simplificar a fração dada. Resultou a fração $\frac{2\,807}{9\,223}$. Ora, se recorremos aos caracteres de divisibilidade de que geralmente nos servimos na prática, não acharemos um divisor comum aos termos da fração $\frac{2\,807}{9\,223}$. Entretanto, não podemos afirmar que seja irredutivel. Recorremos então ao segundo processo e terminamos a simplificação.

Exercícios. Série XXIX

1. Simplificar a fração $\frac{1\,537}{3\,422}$
2. Simplificar a fração $\frac{4\,715}{7\,567}$
3. Simplificar a fração $\frac{6\,710}{9\,333}$
4. Simplificar a fração $\frac{1\,729}{1\,771}$
5. Simplificar a fração $\frac{1\,099}{8\,635}$
6. Simplificar a fração $\frac{2\,293}{3\,271}$
7. Determinar uma fração igual a $\frac{5}{8}$, cujo denominador seja 584.

8. Determinar uma fração igual a $\frac{7}{16}$, cujo numerador seja 371.
9. Determinar uma fração igual a $\frac{4}{9}$, cujo denominador seja 41. E' possivel? Por que?
10. Determinar uma fração igual a $\frac{21}{28}$, cujo denominador seja 52.
11. Determinar uma fração igual a $\frac{30}{36}$, cujo numerador seja 65.
12. Determinar uma fração igual a $\frac{44}{52}$, cujo denominador seja 130.
13. Determinar uma fração igual a $\frac{567}{648}$, cujo denominador seja 136.
14. Determinar uma fração igual a $\frac{630}{780}$, cujo numerador seja 147

134. Comparação de frações. Para indicar que um número é maior que outro, colocamos entre ambos um ângulo com a abertura voltada para o maior. Assim, $8 > 3$ significa 8 *é maior que* 3; $3 < 8$ significa 3 *é menor que* 8.

I. *Quando duas ou mais frações têm o mesmo denominador, a fração maior é aquela que tem o numerador maior.* Consideremos as frações $\frac{8}{15}$ e $\frac{3}{15}$. Ora, se a unidade foi dividida em quinze partes iguais, é evidente que $\frac{8}{15} > \frac{3}{15}$.

Consideremos as frações $\frac{7}{15}$, $\frac{11}{15}$, $\frac{9}{15}$ e $\frac{13}{15}$. E' evidente que $\frac{13}{15} > \frac{11}{15} > \frac{9}{15} > \frac{7}{15}$.

II. *Quando duas ou mais frações têm o mesmo numerador, a fração maior é aquela que tem o denominador menor.* Consideremos as frações $\frac{4}{9}$ e $\frac{4}{7}$. O denominador da primeira significa que uma unidade qualquer, uma maçã, por exemplo, foi dividida em *nove partes iguais*. O denominador da segunda significa que outra unidade igual à primeira, portanto, outra maçã, foi dividida em *sete partes iguais*. Ora, é evidente que $\frac{1}{7} > \frac{1}{9}$. Logo, $\frac{2}{7} > \frac{2}{9}$, $\frac{3}{7} > \frac{3}{9}$ e $\frac{4}{7} > \frac{4}{9}$. Precisamos admitir, é claro, que as duas unidades que foram divididas respectivamente em *sete* e em *nove partes iguais, são iguais.* Se dois viajantes percorreram respectivamente, $\frac{4}{7}$ e $\frac{4}{9}$ da estrada de rodagem Rio-S. Paulo, o primeiro andou mais do que o segundo; mas, se o primeiro percorreu $\frac{4}{7}$ da estrada Recife-Olinda, ao passo que o segundo percorreu $\frac{4}{9}$ da estrada Rio-S. Paulo, então o segundo andou mais do que o primeiro.

Consideremos as frações $\frac{7}{11}, \frac{7}{9}, \frac{7}{13}$ e $\frac{7}{10}$. E' evidente que $\frac{7}{9} > \frac{7}{10} > \frac{7}{11} > \frac{7}{13}$.

III. Quando duas ou mais frações não são homogêneas ou não têm o mesmo numerador, não se pode dizer qual seja a maior ou a menor, sem reduzí-las previamente ao mesmo denominador.

Exercícios. Série XXX

1. Comparar as frações $\frac{3}{4}, \frac{7}{10}, \frac{11}{15}$ e $\frac{17}{24}$ e verificar qual é a maior e qual a menor.

$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{11}{15}$	$\frac{17}{24}$
(30)	(12)	(8)	(5)
$\frac{90}{120}$	$\frac{84}{120}$	$\frac{88}{120}$	$\frac{85}{120}$

10,	15,	24	2
5,	15,	12	2
5,	15,	6	2
5,	15,	3	3
5,	5,	1	5
1,	1,	1	120

Resposta. $\begin{cases} \frac{3}{4} > \frac{11}{15} > \frac{17}{24} > \frac{7}{10} \\ \frac{7}{10} < \frac{17}{24} < \frac{11}{15} < \frac{3}{4} \end{cases}$

2. Colocar em ordem de grandeza crescente e decrescente as seguintes frações: $\frac{7}{8}, \frac{9}{10}, \frac{15}{16}$ e $\frac{17}{20}$.

3. Reduzir as frações $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ e $\frac{4}{5}$, *ao mesmo numerador.*

N. B. E' bastante multiplicar os dois termos de cada uma das frações *prlo produto dos numeradores das outras.* (§129)

4. Colocar em ordem de grandeza crescente e decrescente as frações $\frac{2}{11}, \frac{5}{15}, \frac{9}{19}$ e $\frac{8}{17}$, reduzindo-as ao menor numerador comum.

N. B. Veja-se a regra do §130, substituindo a palavra *denominador* pela palavra *numerador.*

5. Dadas as frações $\frac{5}{43}, \frac{7}{46}$ e $\frac{10}{47}$, pergunta-se qual é a maior e qual a menor. Para responder a esta pergunta o que é mais conveniente: reduzir as frações dadas *ao mesmo denominador* ou *ao mesmo numerador?*

6. Reduzir as frações $\frac{7}{16}, \frac{5}{8}, \frac{10}{43}, \frac{14}{19}$ e $\frac{20}{73}$ ao menor numerador comum.

7. $\frac{3}{8}$ de uma peça de fazenda custam Cr. $48,00. Qual o preço da peça?

8. Paguei Cr. $56,00 por $\frac{7}{12}$ de uma peça de fazenda. Qual é o custo de toda a peça?

9. O número 13 300 representa $\frac{19}{40}$ da população de uma cidade. Qual é a população desta cidade?

10. Um automobilista, depois de ter percorrido 572 quilômetros, foi informado de que já tinha percorrido $\frac{11}{36}$ da estrada. Qual é o comprimento total da estrada?

11. Paguei Cr. $910,00 por $\frac{13}{90}$ do valor de um automovel. Qual é o valor deste automovel?

12. De uma cesta de jaboticabas retiram-se 98, que representam $\frac{14}{51}$ de todo o conteudo da cesta. Quantas jaboticabas continha a cesta?

13. Comprei $\frac{3}{8}$ de uma peça de fazenda e o restante vale Cr. $65,00. Qual é o custo de toda a peça?

14. Um negociante vendeu $\frac{3}{16}$ de uma peça de fazenda. Depois vendeu o restante por Cr. $91,00. Por quanto vendeu toda a peça?

15. Em um combate morreram $\frac{7}{20}$ de um exército e restaram 9 100 homens. De quantos homens se compunha o exército?

16. Em um colégio foram aprovados 159 alunos e reprovados $\frac{7}{60}$ do total. Quantos alunos entraram em exame?

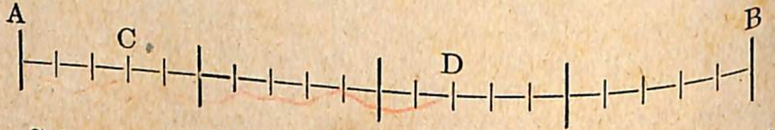
135. Propriedades das frações. I. *Somando* um número inteiro qualquer ao *numerador* de uma fração ordinária, esta fração *aumenta* de valor. Assim deve ser porque a unidade fracionária permanece invariavel, ao passo que o número delas aumenta. Por exemplo, dada a fração $\frac{5}{12}$, se somarmos 4 unidades ao numerador, resultará a fração $\frac{9}{12}$, cujo excesso sobre a fração primitiva é evidentemente igual a $\frac{4}{12}$.

II. *Somando* um número inteiro qualquer ao *denominador* de uma fração, esta fração *diminue* de valor. Assim deve ser porque a unidade fracionária se torna *menor*, sem que o número delas varie. Por exemplo, dada a fração $\frac{3}{5}$, se somarmos 4 unidades ao denominador, resultará a fração $\frac{3}{9}$. Ora, se $\frac{1}{5} > \frac{1}{9}$, então $\frac{3}{5} > \frac{3}{9}$. Reduzindo as frações $\frac{3}{5}$ e $\frac{3}{9}$ ao mesmo denominador, verificaremos facilmente qual é o excesso da primeira sobre a segunda.

III. *Diminuindo* um número inteiro qualquer do *numerador* de uma fração ordinária, esta fração *diminue* de valor. Assim deve ser porque a unidade fracionária permanece invariavel, ao passo que o número delas diminue. Por exemplo, dada a fração $\frac{11}{12}$, se diminuirmos 4 unidades do numerador, resultará a fração $\frac{7}{12}$, e o excesso da fração $\frac{11}{12}$ sobre a fração $\frac{7}{12}$ é evidentemente igual a $\frac{4}{12}$.

IV. *Diminuindo* um número inteiro qualquer do *denominador* de uma fração, esta fração *aumenta* de valor. Assim deve ser porque a unidade fracionária se torna maior, sem que o número delas varie. Por exemplo, dada a fração $\frac{7}{15}$, se diminuirmos 4 unidades do denominador, resultará a fração $\frac{7}{11}$. Ora, se $\frac{1}{15} < \frac{1}{11}$, então $\frac{7}{15} < \frac{7}{11}$. Reduzindo as frações $\frac{7}{15}$ e $\frac{7}{11}$ ao mesmo denominador, verificaremos facilmente qual é o excesso da segunda sobre a primeira.

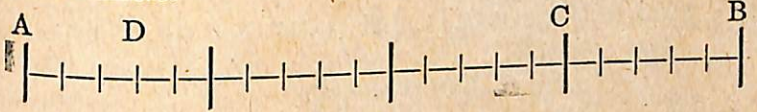
V. *Multiplicando o numerador* de uma fração ordinária por um número inteiro qualquer, a fração fica *multiplicada* por este mesmo número.



Seja a fração $\frac{3}{20}$. Multiplicando o numerador por 4, resulta $\frac{12}{20}$. Vamos demonstrar que $\frac{12}{20}$ é o produto de $\frac{3}{20}$ pelo número

4, ou então, que a fração $\frac{12}{20}$ contem 4 *vezes* a fração $\frac{3}{20}$. Tracemos um segmento AB e dividamo-lo em 20 partes iguais. Cada uma destas partes representará $\frac{1}{20}$ do segmento AB. Então a fração $\frac{3}{20}$ será representada pelo segmento AC, e a fração $\frac{12}{20}$, pelo segmento AD. Mas, examinando a figura, verificamos imediatamente que o segnemto AD contem 4 vezes o segmento AC. Logo, $\frac{12}{20}$ contem 4 vezes, $\frac{3}{20}$. Esta demonstração gráfica pode ser feita em qualquer caso, e conduz sempre à mesma conclusão; logo, o princípio está demonstrado.

VI. *Multiplicando o denominador* de uma fração ordinária por um número inteiro qualquer, a fração fica *dividida* por este mesmo número.



Seja a fração $\frac{3}{4}$. Multiplicando o denominador por 5, resulta $\frac{3}{20}$. Vamos demonstrar que $\frac{3}{20}$ é o quociente da divisão de $\frac{3}{4}$ por 5, ou então, que a fração $\frac{3}{4}$ contem 5 *vezes* a fração $\frac{3}{20}$. Tracemos um segmento AB e dividamo-lo em 4 *partes iguais*. Cada uma destas partes representará $\frac{1}{4}$ do segmento AB.

Em seguida, dividamos cada uma destas partes em *cinco partes iguais*; o segmento AB ficará dividido em *vinte partes iguais*, e cada uma destas partes representará $\frac{1}{20}$ de AB. Resulta que a fração $\frac{3}{4}$ será representada pelo segmento AC e a fração $\frac{3}{20}$ pelo segmento AD. Mas, examinando a figura, verificamos imediatamente que o segmento AC contem 5 vezes o segmento AD. Logo, $\frac{3}{4}$ contem 5 vezes, $\frac{3}{20}$. Esta demonstração gráfica pode ser feita em qualquer caso e conduz sempre à mesma conclusão; logo, o princípio está demonstrado.

VII. *Dividindo o numerador* de uma fração ordinária por um número inteiro qualquer, a fração fica dividida por este mesmo número.

Consideremos a fração $\frac{3}{20}$. Se multiplicarmos o numerador por 4, teremos $\frac{12}{20}$. E já vimos que $\frac{12}{20} = 4 \times \frac{3}{20}$. (5.ª propriedade) Torna-se então evidente que, dividindo o numerador da fração $\frac{12}{20}$ por 4, a fração resultante, $\frac{3}{20}$, será 4 vezes menor que $\frac{12}{20}$.

VIII. *Dividindo o denominador* de uma fração ordinária por um número inteiro qualquer, a fração fica *multiplicada* por este mesmo número.

Consideremos a fração $\frac{3}{5}$. Se multiplicarmos o denominador por 8, teremos $\frac{3}{40}$. E já vimos que $\frac{3}{5} = \frac{3}{40} \times 8$. (6.ª propriedade) Torna-se então evidente que, dividindo o denominador da fração $\frac{3}{40}$ por 8, a fração resultante, $\frac{3}{5}$, será 8 vezes maior que $\frac{3}{40}$.

Exercícios orais

1. Tornar a fração $\frac{7}{48}$, seis vezes maior, sem alterar o denominador.
2. Tornar a fração $\frac{6}{30}$, três vezes maior, sem alterar o numerador.
3. Tornar a fração $\frac{15}{36}$, cinco vezes menor, sem alterar o denominador.
4. Tornar a fração $\frac{3}{4}$, sete vezes menor, sem alterar o numerador.
5. De quantos modos uma fração pode ser multiplicada por um número inteiro?
6. De quantos modos uma fração pode ser dividida por um numero inteiro?

136. Adição de frações ordinárias. *A adição de frações ordinárias é a operação que tem por fim reunir, em uma única fração, as diferentes unidades fracionárias de que são formadas duas ou mais frações dadas.*

Sejam as frações $\frac{3}{20}$, $\frac{5}{20}$ e $\frac{7}{20}$, das quais se pede a soma. Teremos $\frac{3}{20} + \frac{5}{20} + \frac{7}{20} = \frac{15}{20}$.

Admite-se, é claro, que as diferentes unidades que foram divididas em vigésimos, são iguais. Se assim é, *três vigésimos mais cinco vigésimos mais sete vigésimos* é igual, evidentemente, a *quinze vigésimos.*

Regra. *Para somar duas ou mais frações homogêneas, somam-se os numeradores e conserva-se o mesmo denominador.*

Observação. Para somar frações homogêneas, somam-se os numeradores; ora, os numeradores sendo números inteiros, e a adição destes números sendo *comutativa* e *associativa*, (§ 61) concluimos que a adição de frações ordinárias é tambem *comutativa* e *associativa.*

1) E' sempre util simplificar a fração resultante, ou transformá-la em número mixto, se for uma fração imprópria. 2) Se as frações dadas não são homogêneas, é preciso torná-las homogêneas. (§ 128) 3) Se entre as frações dadas houver números inteiros ou mixtos, é conveniente primeiramente reduzí-los a frações impróprias. (§ 127)

1. $\frac{7}{15} + \frac{11}{15} + \frac{8}{15} + \frac{13}{15} + \frac{1}{15} = \frac{40}{15} + 2\frac{10}{15} = 2\frac{2}{3}$

2. $\frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{2}{5} + \frac{7}{10} + \frac{2}{9} =$

(45) (30) (36) (18) (20

$\frac{135}{180} + \frac{150}{180} + \frac{72}{180} + \frac{126}{180} + \frac{40}{180} =$

$\frac{523}{180} = 2\frac{163}{180}$

4, 6, 10, 9	2
2, 3, 5, 9	2
1, 3, 5, 9	3
1, 1, 5, 3	3
1, 1, 5, 1	5
1, 1, 1, 1	180

3. $\frac{18}{36} + 2 + 3\frac{1}{3} + \frac{3}{4} + 1\frac{2}{5} + \frac{7}{10} =$

$\frac{1}{2} + \frac{2}{1} + \frac{10}{3} + \frac{3}{4} + \frac{7}{5} + \frac{7}{10} =$

(30) (60) (20) (15) (12) (6)

$\frac{30}{60} + \frac{120}{60} + \frac{200}{60} + \frac{45}{60} + \frac{84}{60} + \frac{42}{60} =$

$\frac{521}{60} = 8\frac{41}{60}$

3, 4, 10	2
3, 2, 5	2
3, 1, 5	3
1, 1, 5	5
1, 1, 1	60

4. $\frac{25}{50} + 3\frac{1}{3} + \frac{5}{8} + 2 + 4\frac{3}{4} + \frac{20}{25} + 5\frac{4}{9} = ?$

Em primeiro lugar simplificamos as frações que podem ser simplificadas.

$$\frac{1}{2} + 3\frac{1}{3} + \frac{5}{8} + 2 + 4\frac{3}{4} + \frac{4}{5} + 5\frac{4}{9} = ?$$

Depois, lembrando que a adição de frações é tambem comutativa e associativa, teremos sucessivamente:

$$(3 + 2 + 4 + 5) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{5}{8} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{4}{9}\right) =$$

$$14 + \left(\frac{180}{360} + \frac{120}{360} + \frac{225}{360} + \frac{270}{360} + \frac{288}{360} + \frac{160}{360}\right) =$$

$$14 + \frac{1\,243}{360} = 14 + 3\,\frac{163}{360} = 17\,\frac{163}{160}$$

137. Subtração de frações ordinárias. A subtração de frações ordinárias é a operação que tem por fim, dadas duas frações, diminuir da primeira as unidades fracionárias de que se compõe a segunda. Por exemplo, dadas as frações $\frac{7}{8}$ e $\frac{3}{5}$, a subtração tem por fim tirar dos sete oitavos que constituem a primeira fração, os três quintos que constituem a segunda.

Sejam as frações $\frac{17}{20}$ e $\frac{6}{20}$ das quais se pede a diferença. Esta diferença é, evidentemente, $\frac{11}{20}$.

Regra. *Para diminuir uma fração de outra, sendo ambas homogêneas, diminue-se o numerador da segunda, do numerador da primeira, e conserva-se o mesmo denominador.*

E' sempre util simplificar a fração resultante, ou transformá-la em número mixto, se for uma fração imprópria. Se as frações dadas não são homogêneas, é preciso torná-las homogêneas. Se o minuendo ou subtraendo é um número inteiro ou mixto, é conveniente reduzí-lo à fração imprópria.

1. $\frac{11}{15} - \frac{8}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$

2. $\frac{7}{8} - \frac{3}{5} = \frac{35}{40} - \frac{24}{40} = \frac{11}{40}$

3. $4\frac{1}{3} - \frac{5}{6} = \frac{13}{3} - \frac{5}{6} = \frac{26}{6} - \frac{5}{6} = \frac{21}{6} = 3\frac{3}{6} = 3\frac{1}{2}$

4. $5\frac{3}{4} - 2\frac{5}{6} = \frac{23}{4} - \frac{17}{6} = \frac{69}{12} - \frac{34}{12} = \frac{35}{12} = 2\frac{11}{12}$

5. $7 - \frac{3}{4} = \frac{28}{4} - \frac{3}{4} = \frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$

6. $9 - 3\frac{3}{10} = \frac{90}{10} - \frac{31}{10} = \frac{59}{10} = 5\frac{9}{10}$

Exercícios. Série XXXI

1. $\frac{3}{5} + 2\frac{1}{2} + 3\,\frac{3}{4} + 5\,\frac{7}{10} + \frac{11}{12} + 1\frac{1}{6} + \frac{7}{15} = ?$

2. Demonstrar a seguinte regra: *Para, de um número inteiro, diminuir uma fração, multiplica-se o inteiro pelo denominador, do produto subtrai-se o numerador e toma-se o mesmo denominador.* Por exemplo,

$$4 - \frac{3}{5} = \frac{4 \times 5 - 3}{5} = \frac{17}{5} = 3\frac{2}{3}$$

3. Comprei $\frac{3}{8} - \frac{7}{24}$ de uma peça de fazenda por Cr. $102,00. Quanto custa a peça toda?

4. $\frac{11}{15} - \frac{3}{10}$ de um fardo de algodão pesam 65 quilogramas. Qual é o peso do fardo?

5. Um viajante percorreu $\frac{7}{10} + \frac{4}{9} - \frac{5}{6}$ de uma estrada, ao todo 476 quilômetros. Qual é o comprimento da estrada?

6. Em um colégio foram aprovados $\frac{4}{15} + \frac{3}{10} + \frac{5}{12}$ dos alunos inscritos para prestarem exames, ao todo 413. Quantos alunos se inscreveram?

7. Um automobilista já percorreu $\frac{7}{20} + \frac{8}{15}$ de uma estrada e tem ainda 84 quilômetros a percorrer. Qual é o comprimento da estrada?

138. Expressões aritméticas fracionárias. Aprendemos (§§ 68 e 69) em que consiste uma expressão aritmética, e como se calcula.

A expressão aritmética pode ser fracionária, isto é, conter tambem uma ou mais frações. Para calculá-la, é necessário obedecer aos preceitos seguintes:

1.º) Transformar os números inteiros e mixtos em frações; 2.º) tornar as frações homogêneas; 3.º) aplicar a regra do parágrafo 69.

Exemplo

$$\frac{3}{4}-\frac{3}{10}+2+3\frac{1}{2}-5\frac{2}{3}+3\frac{1}{6}-\frac{4}{9}=$$

$$\frac{3}{4}-\frac{3}{10}+\frac{2}{1}+\frac{7}{2}-\frac{17}{3}+\frac{19}{6}-\frac{4}{9}=$$

(45) (18) (180) (90) (60) (30) (20)

$$\frac{135}{180}-\frac{54}{180}+\frac{360}{180}+\frac{630}{180}-\frac{1\,020}{180}+\frac{570}{180}-\frac{80}{180}=$$

4, 10, 6, 9	2
2, 5, 3, 9	2
1, 5, 3, 9	3
1, 5, 1, 3	3
1, 5, 1, 1	5
1, 1, 1, 1	180

m. m. c. = 180

$$\left(\frac{135}{180}+\frac{360}{180}+\frac{630}{180}+\frac{570}{180}\right)-\left(\frac{54}{180}+\frac{1\,020}{180}+\frac{80}{180}\right)=$$

$$\frac{1\,695}{180}-\frac{1\,154}{180}=\frac{541}{180}=3\frac{1}{180}$$

Exercícios. Série XXXII

1. $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\frac{1}{10}=$

2. $\frac{3}{5}-\frac{4}{9}+2+3\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{5}{6}-2\frac{1}{3}+7=$

3. $\frac{9}{10}-4-\frac{1}{5}+\frac{11}{20}+3\frac{5}{8}+2\frac{1}{3}+5\frac{1}{4}-\frac{11}{20}=$

4. $3-2\frac{1}{5}+\frac{4}{9}+1\frac{1}{2}-\frac{5}{6}-\frac{9}{10}+1\frac{8}{15}-\frac{19}{10}=$

139. Multiplicação de frações ordinárias. *A multiplicação de um número inteiro por outro número tambem inteiro, é a operação que tem por fim, efetuar uma adição de tantas parcelas iguais ao primeiro, quantas são as unidades do segundo.* Isto quer dizer que, multiplicar 47 por 5 é efetur a adição de 5 parcelas iguais a 47. Portanto, $47\times5 = 47+47+47+47+47 = 235$. (§ 71)

No caso de $\frac{3}{4}\times 5$, embora $\frac{3}{4}$ não seja um número inteiro, ainda podemos recorrer à definição dada, para calcular $\frac{3}{4}\times 5$, escrevendo: $\frac{3}{4}\times 5 = \frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=\frac{15}{4}$. Portanto, para multiplicar uma fração por um número inteiro, multiplica-se o numerador pelo inteiro e conserva-se o mesmo denominador. Poderiamos chegar imediatamente a esta regra, lembrando a 5.ª propriedade das frações. (§ 135)

Consideremos agora o seguinte exemplo: $\frac{3}{4}\times\frac{5}{8}$. Como efetuar esta multiplicação? O multiplicando, isto é, *o valor da parcela*, é $\frac{3}{4}$; mas o multiplicador, isto é, *o número de parcelas*, é $\frac{5}{8}$! Que significação têm estas palavras: *efetuar uma adição cujo número de parcelas é igual a* $\frac{5}{8}$?! Nenhuma significação, evidentemente. Portanto, a definição da multiplicação, aprendida no parágrafo 71, não pode ser aplicada ao cálculo de $\frac{3}{4}\times\frac{5}{8}$; é uma definição particular que nos permite calcular expressões aritméticas como 75×18 ou $\frac{7}{15}\times 9$, mas que não nos permite calcular $7\times\frac{3}{4}$ ou $\frac{3}{4}\times\frac{5}{8}$. A definição geral da multiplicação, e que convem a números inteiros e fracionários, é a seguinte:

Dados dois números em uma certa ordem, o primeiro chamado **multiplicando,** *e o segundo,* **multiplicador,** *a multiplicação é a operação que tem por fim determinar um terceiro número chamado* **produto,** *que seja, em relação ao multiplicando, o que o multiplicador é, em relação à unidade.*

Seja a expressão 37×25. O segundo número contem a unidade 25 vezes. Logo, o terceiro, isto é, o produto, deve conter 25 vezes o primeiro, isto é, deve conter 25 vezes o número 37. Portanto, $37\times25=37+37+37+37+37+37+\ldots\ldots = 925$.

Seja a expressão $\frac{3}{4}\times5$. O segundo número contem a unidade 5 vezes. Logo, o terceiro deve conter 5 vezes o primeiro, isto é, deve conter 5 vezes o número $\frac{3}{4}$. Portanto, $\frac{3}{4}\times5 = \frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=3\frac{3}{4}$.

Seja a expressão $\frac{3}{4}\times\frac{5}{8}$. O segundo número representa *cinco oitavos* da unidade. Logo, o terceiro deve representar *cinco oitavos do primeiro*, isto é, deve representar $\frac{5}{8}$ de $\frac{3}{4}$.

Vamos calcular *cinco oitavos* de $\frac{3}{4}$. Ora, para calcular *um oitavo* de $\frac{3}{4}$, isto é, para dividir $\frac{3}{4}$ em *oito partes iguais*, é bastante *multiplicar o denominador por* 8. (§ 135) Logo, *um oitavo* de $\frac{3}{4}$ é igual a $\frac{3}{4 \times 8}$ ou $\frac{3}{32}$.

Já sabemos quanto é *um oitavo* de $\frac{3}{4}$; é $\frac{3}{32}$. Entretanto, queremos *cinco oitavos de* $\frac{3}{4}$. Ora, um oitavo de $\frac{3}{4}$ sendo $\frac{3}{32}$, *cinco oitavos* de $\frac{3}{4}$ será *cinco vezes* a fração $\frac{3}{32}$. E' preciso, pois, multiplicar a fração $\frac{3}{32}$ por 5. Mas, para multiplicar a fração $\frac{3}{32}$ por 5, é bastante multiplicar o numerador por 5. (§ 135) Logo, $\frac{5}{8}$ de $\frac{3}{4} = \frac{3}{32} \times 5 = \frac{15}{32}$. E concluimos que $\frac{3}{4} \times \frac{5}{8} = \frac{15}{32}$.

Observando este resultado notamos que: *o numerador da fração resultante é o produto dos numeradores das frações dadas; o denominador da fração resultante é o produto dos denominadores das frações dadas.* Ora, se repetirmos todo o raciocínio que fizemos neste parágrafo, com outros exemplos, $\frac{4}{7} \times \frac{3}{5}$, $\frac{11}{12} \times \frac{13}{15}$, $\frac{7}{10} \times \frac{4}{9}$, etc., chegaremos sempre à mesma conclusão. Podemos então estabelecer a seguinte

Regra. *Para multiplicar uma fração por outra, é bastante formar uma fração cujo numerador seja o produto dos numeradores das fraçõrs dadas, e cujo denominador seja o produto dos denominadores das mesmas frações dadas.*

Se um dos fatores é número inteiro ou mixto, é conveniente reduzí-lo à fração imprópria.

E não esqueçamos que, multiplicar $\frac{3}{4}$ *por* $\frac{5}{8}$, *é calcular* $\frac{5}{8}$ *de* $\frac{3}{4}$; *multiplicar* 42 *por* $\frac{1}{7}$ *é calcular* $\frac{1}{7}$ *de* 42, *etc.*.

Observação. A regra para multiplicar uma fração por outra, pode ser demonstrada graficamente.

Já vimos que multiplicar $\frac{3}{4}$ por $\frac{5}{8}$ é calcular $\frac{5}{8}$ de $\frac{3}{4}$. Tomemos um retângulo e dividamo-lo em quatro partes iguais. (fig. 62) Deixemos de lado $\frac{1}{4}$ do retângulo (a parte que está sombreada com paralelas inclinadas). Dividamos os três quartos restantes em 8 faixas horizontais iguais, com traços interrompidos. E facilmente verificaremos que *cinco destas faixas horizontais* (as que

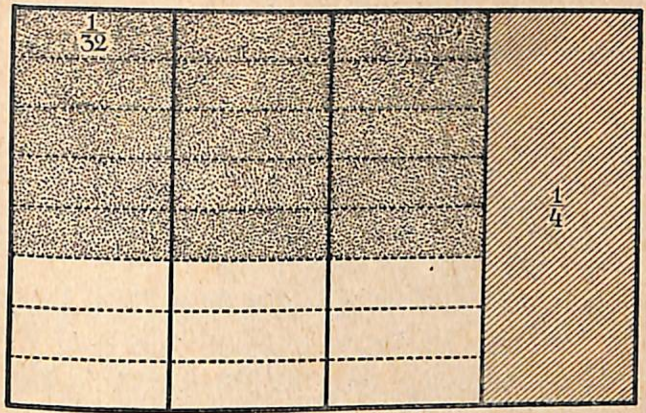


Fig. 62

estão sombreadas com pontos) *e que representam* $\frac{5}{8}$ *de* $\frac{3}{4}$ *do retângulo, representam tambem* $\frac{15}{32}$ *do retângulo.* Logo, $\frac{3}{4} \times \frac{5}{8}$, isto é, $\frac{5}{8}$ de $\frac{3}{4}$ é igual a $\frac{15}{32}$.

Exemplos

1. $\frac{7}{8} \times \frac{5}{6} = \frac{35}{48}$

2. $3\frac{1}{2} \times \frac{4}{7} = \frac{7}{2} \times \frac{4}{7} = \frac{28}{14} = 2$

3. $\frac{5}{6} \times 3\frac{2}{5} = \frac{5}{6} \times \frac{17}{5} = \frac{85}{30} = 2\frac{25}{30} = 2\frac{5}{6}$

4. $4\frac{1}{2} \times 3\frac{2}{3} = \frac{9}{2} \times \frac{11}{3} = \frac{99}{6} = 16\frac{3}{6} = 16\frac{1}{2}$

5. $7 \times 3\frac{2}{5} = \frac{7}{1} \times \frac{17}{5} = \frac{119}{5} = 23\frac{4}{5}$

6. $7\frac{2}{3} \times 5 = \frac{23}{3} \times \frac{5}{1} = \frac{115}{3} = 38\frac{1}{3}$

140. Simplificação na multiplicação de frações ordinárias. Consideremos a expressão aritmética seguinte:

$$\frac{3}{4} \times 5\frac{4}{5} \times \frac{25}{58} \times \frac{7}{10} \times \frac{4}{21}$$

Para calcular esta expressão, devemos multiplicar $\frac{3}{4}$ por $5\frac{4}{5}$; em seguida, multiplicar o produto obtido por $\frac{25}{58}$; depois multiplicar o segundo produto por $\frac{7}{10}$; finalmente, multiplicar o terceiro produto por $\frac{4}{21}$. Teremos:

$$\frac{3}{4} \times 5\frac{4}{5} \times \frac{25}{58} \times \frac{7}{10} \times \frac{4}{21} = \frac{3}{4} \times \frac{29}{5} \times \frac{25}{58} \times \frac{7}{10} \times \frac{4}{21}$$

$$= \frac{3 \times 29 \times 25 \times 7 \times 4}{4 \times 5 \times 58 \times 10 \times 21}$$

$$= \frac{60\,900}{243\,600} = \frac{609}{2\,436} = \frac{203}{812}$$

$$= \frac{29}{116} = \frac{1}{4}$$

Portanto, a expressão dada é igual a $\frac{1}{4}$. Entretanto, poderíamos obter mais depressa este resultado, suprimindo previamente os fatores comuns a ambos os termos da fração resultante.

$$\frac{3}{4} \times 5\frac{4}{5} \times \frac{25}{58} \times \frac{7}{10} \times \frac{4}{2} = \frac{3 \times 29 \times 25 \times 7 \times 4}{4 \times 5 \times 58 \times 10 \times 21}$$

Para simplificar uma fração, dividem-se os dois termos por um dos seus divisores comuns; dividem-se os dois termos da fração resultante por um dos seus divisores comuns; e assim, sucessivamente, até que os dois termos da fração se tornem primos entre si. (§ 132) Vamos aplicar este processo de simplificação à fração $\frac{4 \times 5 \times 58 \times 10 \times 21}{3 \times 29 \times 25 \times 7 \times 4}$, *antes de efetuar as multiplicações.*

Para dividir um produto indicado por um de seus fatores, é bastante suprimir este fator. Para dividir um produto indicado por um número qualquer, é bastante dividir um dos fatores por este número, se a divisão for possível. (§ 113) Vamos, agora, à fração $\frac{3 \times 29 \times 25 \times 7 \times 4}{4 \times 5 \times 58 \times 10 \times 21}$. Seus termos são produtos indicados, e

ambos contêm o fator 4. Dividamos então os dois termos desta fração, por 4, suprimindo o fator 4. Resultará $\frac{3 \times 29 \times 25 \times 7}{5 \times 58 \times 10 \times 21}$. Observando os dois termos desta fração, notamos que o numerador contem o fator 7, e o denominador contem o fator 21, que é divisivel por 7. Dividamos então os dois termos por 7, suprimindo o fator 7 no numerador, e dividindo o fator 21, do denominador, por 7. Resultará $\frac{3 \times 29 \times 25}{5 \times 58 \times 10 \times 3}$. Observando os dois termos desta fração notamos que ambos contêm o fator 3. Vamos dividí-los então, por 3, suprimindo o fator 3. Resultará $\frac{29 \times 25}{5 \times 58 \times 10}$. Observando os dois termos desta fração, notamos que o numerador contem o fator 29, e o denominador contem o fator 58, que é divisivel por 29. Dividamos então os termos desta fração por 29, suprimindo o fator 29 no numerador, e dividindo o fator 58 do denominador, por 29. Resultará $\frac{25}{5 \times 2 \times 10}$. E assim por diante.

Suprimindo o fator 5, comum aos dois termos, resultará $\frac{5}{2 \times 10}$; finalmente, suprimindo, nesta última fração, o fator 5, comum aos dois termos, resultará a fração $\frac{1}{2 \times 2}$ ou $\frac{1}{4}$.

Regra. *Para efetuar uma multiplicação de números fracionários, indica-se a multiplicação dos numeradores, assim como dos denominadores; em seguida, suprimem-se todos os fatores comuns aos dois termos da fração; finalmente, multiplicam-se os fatores que não foram suprimidos.*

N. B. Dificuldades tipográficas não nos permitem dar numerosos exemplos relativos a este assunto; os srs. professores devem obrigar seus alunos a repetidos exercícios sobre este assunto e não permitir, em absoluto, que se multipliquem duas ou mais frações, sem suprimir, previamente os fatores comuns a ambos os termos do resultado.

141. Divisão de frações ordinárias. A divisão é a operação que tem por fim, dados dois números, achar um terceiro que, multiplicado pelo segundo, reproduza o primeiro. De acordo com esta definição, dividir $\frac{3}{5}$ por $\frac{7}{8}$ é achar um número que, multiplicado por $\frac{7}{8}$ reproduza o número $\frac{3}{5}$. Ora, se este número, multiplicado por $\frac{7}{8}$, é igual a $\frac{3}{5}$, segue-se que $\frac{3}{5}$ representa $\frac{7}{8}$ deste número, ou $\frac{7}{8}$ do número procurado é igual a $\frac{3}{5}$.

Mas, desde que *sete oitavos* do número procurado é igual a $\frac{3}{5}$, então *um oitavo* do número procurado é a *sétima parte* de $\frac{3}{5}$, isto é, $\frac{3}{5 \times 7}$. (§ 135)

E, desde que *um oitavo* do número procurado é $\frac{3}{5 \times 7}$, então *oito oitavos* do número procurado, isto é, *todo* o número procurado é *oito vezes* $\frac{3}{5 \times 7}$, isto é, $\frac{3 \times 8}{5 \times 7}$ (§ 135). Portanto,

$$\frac{3}{5} \div \frac{7}{8} = \frac{3 \times 8}{5 \times 7}$$

Mas, invertendo os termos da fração divisora, e multiplicando em lugar de dividir, teremos:

$$\frac{3}{5} \times \frac{8}{7} = \frac{3 \times 8}{5 \times 7}$$

Comparando os dois resultados verifica-se que dividir $\frac{3}{5}$ por $\frac{7}{8}$ é o mesmo que multiplicar $\frac{3}{5}$ por $\frac{8}{7}$. Ora, se repetirmos todo o raciocínio que fizemos neste parágrafo, com outros exemplos, $\frac{2}{3} \div \frac{5}{6}$, $\frac{4}{9} \div \frac{7}{10}$, $\frac{11}{20} \div \frac{13}{30}$, etc., chegaremos sempre à mesma conclusão. Podemos, pois, estabelecer a seguinte

Regra. *Para dividir uma fração por outra, é bastante multiplicar a primeira fração pela segunda fração invertida.*

Se o dividendo ou o divisor é número inteiro ou mixto, é conveniente, primeiramente, dar-lhe a forma de fração.

1. $\frac{3}{5} \div \frac{6}{11} = \frac{3}{5} \times \frac{11}{6} = \frac{11}{10} = 1\frac{1}{10}$
2. $4\frac{2}{3} \div \frac{7}{10} = \frac{14}{3} \times \frac{10}{7} = \frac{20}{3} = 6\,\frac{2}{3}$

3. $8 \div \frac{3}{5} = \frac{8}{1} \times \frac{5}{3} = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$
4. $7\frac{3}{4} \div 62 = \frac{31}{4} \div \frac{62}{1} = \frac{31}{4} \times \frac{1}{62} = \frac{1}{8}$

142. Fração de fração. *Chama-se* **fração de fração** *a uma ou mais partes iguais de uma fração.*

Problema. Carlos tinha $\frac{5}{8}$ de um bolo. Comeu $\frac{3}{4}$ destes $\frac{5}{8}$. Pergunta-se qual a fração do bolo que Carlos comeu.

Para responder a esta pergunta é necessário calcular $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{8}$, isto é, *uma fração de outra fração.*

Ora, $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{8}$ significa $\frac{5}{8} \times \frac{3}{4}$. (§ 139) Portanto, $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{8}$ $= \frac{5}{8} \times \frac{3}{4} = \frac{15}{32}$. Donde se conclue que:

1. *Para calcular uma* **fração de fração,** *é bastante multiplicar a primeira pela segunda.*

2. *A preposição* **de,** *entre duas frações, indica que a primeira deve ser multiplicada pela segunda.*

1. $\frac{3}{4}$ de $5\frac{1}{2} = \frac{3}{4} \times \frac{11}{2} = \frac{33}{8} = 4\frac{1}{8}$
2. $2\frac{3}{5}$ de $3\frac{2}{3} = \frac{13}{5} \times \frac{11}{3} = \frac{143}{15} = 9\frac{8}{15}$
3. $\frac{5}{6}$ de $720 = \frac{5}{6} \times \frac{720}{1} = \frac{3\,600}{6} = 600$

Exercícios orais

1. $\frac{3}{5} \times \frac{4}{9} =$	**5.** $\frac{7}{8} \div \frac{7}{5} =$	**9.** $\frac{3}{4}$ de $12 =$	**13.** $\frac{7}{10} \times \frac{10}{7} =$
2. $7 \times \frac{2}{5} =$	**6.** $4 \div \frac{3}{5} =$	**10.** $\frac{5}{6}$ de $15 =$	**14.** $7 \times \frac{1}{7} =$
3. $2\frac{1}{2} \times 4 =$	**7.** $7 \div \frac{7}{10} =$	**11.** $\frac{2}{3}$ de $4\frac{1}{2} =$	**15.** $\frac{1}{8} \times 8 =$
4. $\frac{3}{4} \times \frac{5}{6} =$	**8.** $2\frac{1}{2} \div \frac{5}{6} =$	**12.** $\frac{3}{8} \times \frac{8}{3} =$	**16.** $3\frac{1}{2} \times \frac{2}{7} =$

Exercícios. Série XXXIII

1. Calcular, com uma única operação, $\frac{5}{8}$ de Cr. $534,00.

2. Calcular, com uma única operação, $\frac{3}{16}$ de Cr. $2 748,00

3. Calcular, com uma única operação, $\frac{15}{24}$ de Cr. $37 638,00.

4. Carlos comeu $\frac{5}{8}$ de um bolo; mais tarde comeu $\frac{3}{7}$ do resto do bolo. Que fração do bolo ele comeu?

5. Um menino recebeu uma cesta de jaboticabas. Deu a um irmão $\frac{3}{5}$ do conteudo da cesta, e a outro, $\frac{2}{3}$ do resto. Ficou com 48 jaboticabas. Quantas eram as jaboticabas ao todo?

6. Qual é a fração que, dividida por $2\frac{1}{3}$, dá um quociente igual a $\frac{3}{4}$ do divisor?

7. Dividindo $\frac{3}{4}$ por um certo número, o quociente obtido é igual a $\frac{2}{5}$ do dividendo. Qual é o número?

8. Recebi uma certa quantia. Gastei $\frac{3}{8}$ dela em uma primeira compra, e $\frac{1}{4}$ do resto em uma segunda compra. Sobraram ainda Cr. $840,00. Qual foi a quantia por mim recebida?

9. Recebi uma certa quantia. Gastei $\frac{2}{9}$ dela; depois gastei $\frac{3}{4}$ do resto; em seguida gastei $\frac{3}{14}$ do segundo resto. Sobraram ainda Cr. $594,00. Qual foi a quantia por mim racebida?

10. Paguei Cr. $12 300,00 por $\frac{2}{3}$ dos $\frac{3}{4}$ dos $\frac{4}{5}$ do valor de um automovel. Qual o preço do automovel?

11. Por que número é necessário dividir a fração $\frac{9}{10}$, para que o quociente seja igual a $\frac{2}{5}$ de $\frac{5}{9}$ de $\frac{7}{10}$ do dividendo?

12. Se $\frac{7}{15}$ de uma casa valem Cr. $37 800,00 quanto valerão $\frac{32}{45}$ da mesma casa?

143. A fração ordinária é o quociente exato da divisão do numerador pelo denominador. *A fração ordinária é o número que representa uma ou mais partes de uma unidade que foi dividida em partes iguais.* (§ 123)

Vamos agora resolver o seguinte problema: *dividindo 5 maçãs por 8 meninos, de modo que cada um deles receba a mesma quantidade de maçãs, qual será a parte de cada um?*

E' evidente que cada um dos meninos não pode receber uma maçã inteira porque as maçãs são *cinco e os meninos são oito*. Mas cada uma das maçãs pode ser dividida em qualquer número de partes iguais; e, de acordo com o nosso problema, para que a distribuição ou divisão das maçãs seja feita com facilidade, convem dividir cada uma delas em *oito partes iguais*. Cada uma das fatias será *um oitavo* da maçã. E, se as maçãs são cinco, então o número total de fatias ou de *oitavos* será *quarenta*. Ora, dividindo as *quarenta* fatias de maçã, ou *quarenta oitavos*, pelos *oito meninos*, cada um deles receberá cinco fatias de maçã ou *cinco oitavos* e não haverá resto. Portanto,

$$5 \text{ maçãs} \div 8 \text{ meninos} = \frac{5}{8} \text{ de maçã} \;\therefore\; 5 \div 8 = \frac{5}{8}$$

Variando o número de maçãs e o número de meninos, substituindo maçãs e meninos por outras unidades quaisquer, e repetindo todo o raciocínio que acabámos de fazer, chegaremos sempre ao mesmo resultado. Podemos então estabelecer que:

Uma fração ordinária é o quociente exato da divisão do numerador pelo denominador.

Exemplos	1. $15 \div 45 = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$	4. $7 \div 8 = \frac{7}{8}$
	2. $22 \div 55 = \frac{22}{55} = \frac{2}{5}$	5. $3 \div 10 = \frac{3}{10}$
	3. $72 \div 14 = \frac{72}{14} = 5\frac{1}{7}$	6. $4 \div 9 = \frac{4}{9}$

7. Comprei 13 livros por Cr. $60,00. Quanto teria pago por 52 livros iguais ao primeiro?

Solução. Para obter o preço de um livro é necessário dividir Cr. $60,00 por 13. (*) Vamos tomar a fração $\frac{60,00}{13}$ como preço de cada livro. Ora, se

(*) A nova unidade monetária nacional, isto é, o cruzeiro, nos leva a antecipar a divisão de uma fração decimal por um número inteiro. Não ha mal nisto, porque os estúdantes já aprenderam esta operação no curso primário. **O mais simples será reduzir a quantia dada a centavos.**

um livro custa $\frac{60,00}{13}$, então 52 livros custarão $\frac{60,00}{13} \times 52$. Efetuando esta multiplicação, teremos: $\frac{60,00}{13} \times 52 = \frac{60,00}{13} \times \frac{52}{1} =$ Cr. \$240,0

Observação. Se tivéssemos de resolver este problema, exclusivamente com o auxílio das quatro operações sobre números inteiros, deveríamos, em primeiro lugar, dividir Cr. \$60,00 por 13. Obteríamos o quociente Cr. \$4,615 que representaria *o preço aproximado, não exato*, de cada livro, visto que o número 60 não é divisivel por 13. Em seguida, multiplicando Cr. \$4,615 por 52, obteríamos, como preço dos 52 livros, o número Cr. \$239,98, o que não é verdade, porque o preço exato dos 52 livros é Cr. \$240,00.

Este exemplo mostra eloquentemente quanto é util a definição das frações ordinárias, dada neste parágrafo. Graças a esta definição, obtivemos o preço exato dos 52 livros, evitámos a divisão de Cr. \$60,00 por 13, e a multiplicação de Cr. \$4,615 por 52. O nosso único trabalho foi o de multiplicar Cr. \$60,00 por 4!

Vemos, pois, que *a fração equivale a um quociente.* Não é o quociente exato de que falámos anteriormente (§76); mas, podemos dizer que *a fração é um quociente exato fracionário.* Assim, pois, com o auxílio das frações, a divisão, operação nem sempre possivel no campo dos números naturais (§77) será, daqui por diante, uma operação sempre possivel. E, para conseguir este resultado, foi necessário que o nosso campo numérico (§43) se enriquecesse com mais uma categoria de números; **os números fracionários.** Outras categorias de números aparecerão mais tarde.

Exercícios. Série XXXIV

1. Se 47 carneiros custam Cr. \$850,00 qual é o preço de 84 carneiros?

2. Comprei 360 litros de vinho pór Cr. \$1 260,00. Quanto custarão 620 litros?

3. Pagando Cr. \$2 345,00 por 91 quilogramas de chá, quanto pagarei por 147 quilogramas?

4. Sabendo que 15 maçãs custam Cr. \$27,00, 18 peras custam Cr. \$31,50 e 27 pêssegos custam Cr. \$78,00, formar uma expressão aritmética que represente o custo de 24 maçãs, 25 peras e 36 pêssegos, e calcular a mesma expressão.

N. B. As igualdades dadas nos exercícios 5 a 18 não devem ser consideradas como equações. O valor de x deverá ser determinado com o auxílio das quatro operações sobre números inteiros e fracionários, e dos princípios relativos a estas mesmas operações. Por exemplo, na igualdade $\frac{7}{8} \div \frac{2x}{5} = \frac{3}{4}$, qual o valor de x? $\frac{2x}{5} = \frac{7}{8} \div \frac{3}{4} \therefore \frac{2x}{5} = \frac{7}{8} \times \frac{4}{3} \therefore \frac{2x}{5} = \frac{7}{6}$. Considerando $2x$ como dividendo, 5 como divisor e $\frac{7}{6}$ como quociente, teremos: $2x = 5 \times \frac{7}{6} \therefore 2x = \frac{35}{6}$. E sendo $2x = \frac{35}{6}$, então $x = \frac{35}{6} \div 2 \therefore x = \frac{35}{12}$.

Determinar o valor de x, nas igualdades que se seguem.

5. $\frac{3}{8} + x = \frac{5}{9}$

6. $x - 2\frac{1}{3} = \frac{5}{8}$

7. $7\frac{1}{2} - x = 5\frac{2}{3}$

8. $\frac{8}{9} \times x = \frac{11}{15}$

9. $\frac{9}{8} \div x = \frac{11}{20}$

10. $2x + \frac{5}{6} = \frac{7}{8}$

11. $3\frac{1}{4} + 3x = \frac{59}{10}$

12. $5x - \frac{7}{8} = 3\frac{1}{2}$

13. $5\frac{1}{2} - 4x = \frac{3}{5}$

14. $\frac{3}{4} \times 2x = \frac{7}{10}$

15. $5x \times \frac{7}{8} = 5\frac{1}{2}$.

16. $3x \div \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

17. $\frac{x}{5} + \frac{1}{2} = \frac{9}{10}$

18. $\frac{7}{10} \div \frac{x}{4} = 3\frac{1}{2}$.

144. Divisão com resto. No parágrafo 75, quisemos dividir 26 por 8 e não o conseguimos, porque não existe um número que, multiplicado por 8, dê 26. Então tivemos de aceitar como quociente incompleto, até nova ordem, o número 3, por ser 3 o maior número que, multiplicado por 8, dá um produto inferior ao número 26. Graças, porem, ao que aprendemos no parágrafo 143, estamos habilitados agora a descobrir o número que, multiplicado por 8, reproduz o número 26. Teremos:

$$26 \div 8 = \frac{26}{8} = 3\frac{2}{8} = 3\frac{1}{4}$$

$$\text{Com efeito, } 3\frac{1}{4} \times 8 = \frac{13}{4} \times \frac{8}{1} = \frac{104}{4} = 26$$

Procuremos agora o quociente da divisão de 3 715 por 438. Eefetuando a divisão acharemos o quociente incompleto 8 e o resto 211.

$$\begin{array}{r|l} 3\,715 & 438 \\ \hline 211 & 8 \end{array}$$

Logo, 8 não é o quociente exato da divisão de 3 715 por 438. Mas, $3\,715 \div 438 = \frac{3715}{438} = 8\frac{211}{438}$. Comparando este resultado com a divisão efetuada, podemos estabelecer a seguinte

Regra. *Para completar o quociente de uma divisão, ou para obter o quociente exato da divisão de dois números, mesmo que o primeiro não seja divisivel pelo segundo, é bastante juntar ao quociente* *uma fração ordinária, cujo denominador é o divisor e cujo numerador é o resto da divisão.*

145. Expressões aritméticas fracionárias. Para calcular uma expressão aritmética fracionária em que entram as quatro operações, é necessário:

1.º Transformar os números mixtos e inteiros em frações impróprias.

2.º Substituir a preposição *de* pelo sinal que indica multiplicação.

3.º Substituir o sinal que indica divisão, pelo sinal que indica multiplicação, *tendo, porem, o cuidado de inverter as frações divisoras.*

4.º Efetuar todas as multiplicações, *tendo o cuidado de suprimir os fatores comuns.*

5.º Aplicar a regra do parágrafo 69.

Exercício

Calcular a expressão aritmética seguinte:

$$\frac{7}{8}+\frac{2}{3}\div 3\frac{3}{4}-4\times\frac{5}{6}+7\times\frac{2}{5}\div\frac{9}{10}-2\div\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\text{ de }5\frac{1}{2}$$

Transformando os números mixtos e os números inteiros em frações impróprias, teremos:

$$\frac{7}{8}+\frac{2}{3}\div\frac{15}{4}-\frac{4}{1}\times\frac{5}{6}+\frac{7}{1}\times\frac{2}{5}\div\frac{9}{10}-\frac{2}{1}\div\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\text{ de }\frac{11}{2}$$

Substituindo o sinal de divisão pelo sinal de multiplicação, e a preposição *de* pelo sinal de multiplicação, teremos:

$$\frac{7}{8}+\frac{2}{3}\times\frac{4}{15}-\frac{4}{1}\times\frac{5}{6}+\frac{7}{1}\times\frac{2}{5}\times\frac{10}{9}-\frac{2}{1}\times\frac{2}{1}+\frac{3}{4}\times\frac{11}{2}$$

Efetuando as multiplicações, teremos:

$$\frac{7}{8}+\frac{8}{45}-\frac{10}{3}+\frac{28}{9}-\frac{4}{1}+\frac{33}{8}$$

Reduzindo ao menor denominado comum, teremos:

$$\frac{315}{360}+\frac{64}{360}-\frac{1\,200}{360}+\frac{1\,120}{360}-\frac{1\,440}{360}+\frac{1\,485}{360}$$

Aplicando a regra conhecida, teremos:

$$\left(\frac{315}{360}+\frac{64}{360}+\frac{1\,120}{360}+\frac{1\,485}{360}\right)-\left(\frac{1\,200}{360}+\frac{1\,440}{360}\right)=$$

$$\frac{2\,984}{360}-\frac{2\,640}{360}=\frac{344}{360}=\frac{86}{90}=\frac{43}{45}$$

Exercícios. Série XXXV

Problemas sobre frações ordinárias

1. Um tanque tem duas torneiras. A primeira enche o tanque em 7 horas e a segunda em 8 horas. Abrindo-se as duas torneiras ao mesmo tempo, e estando o tanque vazio, em quantas horas ficará cheio?

Solução. Se a primeira torneira enche o tanque em 7 horas, em 1 hora encherá $\frac{1}{7}$ do tanque. Se a segunda enche o tanque em 8 horas, em 1 hora encherá $\frac{1}{8}$ do tanque. Logo, as duas, abertas simultaneamente, em 1 hora encherão $\frac{1}{7}+\frac{1}{8}$ do tanque, isto é $\frac{8}{56}+\frac{7}{56}$ ou $\frac{15}{56}$ do tanque.

Ora, para encher $\frac{15}{56}$ do tanque, é necessário que as duas torneiras fiquem abertas durante 1 hora; para encher $\frac{1}{56}$ do tanque, será necessário então que fiquem abertas durante $\frac{1}{15}$ da hora; para encher os $\frac{56}{56}$ do tanque isto é, o tanque todo, será necessário que fiquem abertas durante $56\times\frac{1}{15}$ da hora, isto é, durante $\frac{56}{15}$ da hora ou 3 horas e $\frac{11}{15}$ da hora. Mas, $\frac{11}{15}$ da hora é o mesmo que $\frac{11}{15}$ de 60 minutos, e $\frac{11}{15}$ de $60=\frac{11}{15}\times\frac{60}{1}=44$ minutos. Portanto, o tanque ficará cheio em 3 horas e 44 minutos.

2. Um tanque tem duas torneiras. A primeira enche o tanque em 5 horas e a segunda o esvazia em 8 horas. Abrindo-se as duas torneiras ao mesmo tempo, e estando o tanque vazio, em quantas horas ficará cheio?

Solução. Se a primeira torneira enche o tanque em 5 horas, em uma hora encherá $\frac{1}{5}$ do tanque. Se a segunda esvazia o tanque em 8 horas, em 1 hora esvaziará $\frac{1}{8}$ do tanque. Logo, as duas torneiras, correndo simultaneamente, em 1 hora encherão $\frac{1}{5}-\frac{1}{8}$ do tanque, isto é, $\frac{8}{40}-\frac{5}{40}$ ou $\frac{3}{40}$ do tanque. Ora, para encher $\frac{3}{40}$ do tanque, é necessário que as duas torneiras fiquem abertas durante 1 hora; para encher apenas $\frac{1}{40}$ do tanque, é necessário então que fiquem abertas durante $\frac{1}{3}$ da hora; para encher os $\frac{40}{40}$ do tanque, ou o tanque todo, será necessário que fiquem abertas durante $40 \times \frac{1}{3}$ da hora, isto é, durante $\frac{40}{3}$ da hora ou 13 horas e $\frac{1}{3}$ da hora. Mas, $\frac{1}{3}$ da hora é o mesmo que $\frac{1}{3}$ de 60 minutos, e $\frac{1}{3}$ de $60 = \frac{1}{3} \times \frac{60}{1} = 20$ minutos. Portanto, o tanque ficará cheio em 13 horas e 20 minutos.

3. Somando a um certo número os $\frac{3}{7}$ do mesmo número, resulta 490. Qual é o número?

Solução. O número pedido tem $\frac{7}{7}$. Logo, $\frac{7}{7}$ do número pedido, mais $\frac{3}{7}$ do mesmo número, isto é, $\frac{10}{7}$ do número pedido, é igual a 490. Ora, se $\frac{10}{7}$ do número pedido equivalem a 490, então $\frac{1}{7}$ deste número é a décima parte de 490, isto é, 49. E, se $\frac{1}{7}$ do número é 49, o número todo, que tem sete sétimos, é igual a 49×7, isto é, 343.

4. Diminuindo de um número dado os $\frac{5}{9}$ do mesmo número, restam 320. Qual é o número?

5. Qual é o número cujos $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} - \frac{3}{4}$ é igual a 86?

6. Determinar um número cujos $\frac{2}{3}$ dos $\frac{4}{5}$ equivalem a 176.

7. Um menino gastou $\frac{3}{8}$ do seu dinheiro em livros, $\frac{3}{7}$ do resto em doces, e ficou com Cr. $18,00. Quanto tinha antes de fazer estas compras?

8. Determinar uma fração equivalente a $\frac{2}{5}$ e cuja soma dos termos seja 49.

Solução. A fração $\frac{2}{5}$ é irredutível. Logo, para obter uma fração equivalente a $\frac{2}{5}$, é necessário multiplicar os dois termos desta, por um mesmo número. Mas o problema exige que a soma dos termos da fração equivalente seja 49. Então não podemos multiplicar os dois termos da fração $\frac{2}{5}$ por um número qualquer. Seja n o número pelo quel devemos multiplicar os dois termos da fração $\frac{2}{5}$, para que a soma dos termos da fração resultante seja 49. Teremos então $\frac{2}{5} = \frac{2n}{5n}$ e $2n + 5n = 49$. Mas, *duas vezes o número n*, mais *cinco vezes o número n*, isto é, *sete vezes o número n*, é igual a **49**. Portanto, se $7 \times n = 49$, então $n = 49 \div 7$, isto é, $n = 7$. E a fração equivalente a $\frac{2}{5}$, e cuja soma dos termos é 49, é $\frac{2 \times 7}{5 \times 7}$ ou $\frac{14}{35}$.

9. Determinar duas frações cuja soma é $7\frac{1}{2}$ e cuja diferença é $3\frac{2}{5}$. (*)

10. Determinar duas frações cuja soma é $\frac{3}{4}$ de $7\frac{2}{3}$ e cuja diferença é a terça parte de $5\frac{2}{5}$.

11. Determinar duas frações cuja soma é $9\frac{1}{4}$ e cujo quociente é 6.

12. Determinar duas frações cuja soma é $15\frac{3}{4}$ e cujo quociente é $7\frac{1}{2}$.

13. Determinar duas frações cuja diferença é $11\frac{5}{6}$ e cujo quociente é 8.

14. Determinar duas frações cuja diferença é $12\frac{1}{2}$ e cujo quociente é $7\frac{1}{3}$.

15. Multiplicando uma certa fração por $5\frac{1}{2}$, a fração obtida é igual ao multiplicando aumentado de $11\frac{1}{2}$. Qual é a fração?

16. Calcular $37 \times \frac{1}{2} + 37 \times \frac{2}{3} + \frac{3}{7} \times 34$, sem efetuar as multiplicações indicadas.

17. Calcular $48 \times \frac{5}{6} - 48 \times \frac{2}{9}$, sem efetuar as multiplicações indicadas.

18. Comprei 37 milheiros de tijolos por Cr. $2 850,00. Quanto devo pagar por $\frac{11}{24}$ de 48 milheiros? (Evitar a 1.ª divisão)

19. Um tanque tem três torneiras. A primeira enche o tanque em 18 horas, a segunda em 24, e a terceira em 30. Abrindo-se as três torneiras e estando o tanque vazio, em quantas horas ficará cheio?

20. Um tanque ten três torneiras. A primeira enche o tanque em 25 horas e a segunda em 40 horas. Mas a terceira o esvazia em 60 horas. Abrindo-se as três torneiras e estando o tanque vazio, em quantas horas ficará cheio?

21. Dois operários constroem uma parede em 25 dias. Um deles, trabalhando sozinho, constrói a mesma parede em 36 dias. Pergunta-se em quantos dias o outro operário seria capaz de executar sozinho a mesma tarefa.

22. Três operários constroem uma parede em 60 dias. Dois deles, trabalhando separadamente, constroem a mesma parede em 120 e 150 dias. Em quantos dias o 3.º poderia construir a mesma parede, se trabalhasse sozinho?

23. Carlos tinha uma certa quantia. Gastou $\frac{1}{5}$ do seu dinheiro mas, em seguida, recebeu Cr. $36,00, ficando então com o que tinha antes de fazer a sua despesa e mais $\frac{1}{7}$ do que tinha. Quanto tinha Carlos?

(*) Para resolver os problemas 9 a 17, é necessário recordar os problemas 1 a 14, da série VIII.

Solução. Se Carlos gastou $\frac{1}{5}$ do seu dinheiro, ficou com $\frac{4}{5}$. Mas, em seguida, recebeu Cr. \$36,00, ficando então com $\frac{8}{7}$ do que tinha. Logo:

$\frac{4}{5}$ do dinheiro + Cr. \$36,00 = $\frac{8}{7}$ do dinheiro $\therefore$

$\frac{8}{7}$ do dinheiro — $\frac{4}{5}$ do dinheiro = Cr. \$36,00 $\therefore$

$\frac{40}{35} - \frac{28}{35}$ do dinheiro = Cr. \$36,00 $\therefore$ $\frac{12}{35}$ do dinheiro = Cr. \$36,00 $\therefore$

$\frac{1}{35}$ do dinheiro = Cr. \$3,00 $\therefore$ $\frac{35}{35}$ do dinheiro = Cr. \$105,00

Resposta. Carlos tinha Cr. \$ 105,00.

24. Um tanque tem três torneiras. A primeira despeja 7 litros e $\frac{3}{4}$ por minuto; a segunda, 8 litros e $\frac{2}{5}$ por minuto; a terceira, 10 litros e $\frac{3}{8}$ por minuto. A capacidade do tanque é de 4 000 litros. Abrindo-se as três torneiras ao mesmo tempo, em quantas horas o tanque ficará cheio?

25. Um tanque tem duas torneiras. A primeira enche o tanque em 15 horas e a segunda em 18 horas. Abrem-se as duas. Ao cabo de 5 horas fecha-se a segunda. Em quantas horas a primeira acabará de encher o tanque?

26. Se $\frac{7}{15}$ de uma casa custam Cr. \$6 440,00, qual é o preço da casa?

Solução. De acordo com o enunciado do problema temos:

$\frac{7}{15}$ do preço da casa = Cr. \$6 440,00 $\therefore$ $\frac{7}{15} \times$ (preço da casa) = Cr. \$6 440,00

Donde se vê que o preço da casa é um fator muito facil de determinar.

27. Se $\frac{11}{52}$ de um exército equivalem a 36 718 soldados, de quantos soldados se compõe este exército?

28. Paguei Cr. \$48,00 pelos $\frac{15}{32}$ de uma saca de café. Qual é o preço da saca?

29. Um menino pagou Cr. \$9,10 pelos $\frac{7}{15}$ de um livro. Qual o preço do livro?

30. Somando a um número, $\frac{4}{11}$ do mesmo número, o resultado é 195. Qual é o número?

31. Diminuindo de um número, $\frac{4}{15}$ do mesmo número, o resultado é 407. Qual é o número?

32. Somando a um número, $\frac{2}{3}$ de $\frac{5}{6}$ do mesmo número, o resultado é 210. Qual é o número?

33. Diminuindo de um número, $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{9}$ do mesmo número, o resultado é 247. Qual é o número?

34. Um negociante tem uma peça de seda que vende a Cr. \$12,00 cada metro. Se a peça tivesse mais $\frac{4}{15}$ do seu comprimento, o valor dela seria Cr. \$972,80. Quantos metros de comprimento tem a peça?

35. Três meninos repartiram entre si uma certa quantia. O primeiro recebeu $\frac{3}{10}$ da quantia, mais Cr. \$50,00; o segundo recebeu $\frac{4}{15}$ da quantia mais Cr. \$60,00; o terceiro recebeu Cr. \$202,00. Calcular a quantia repartida e a parte de cada um dos três meninos.

36. Qual é o número que, dividido por $\frac{8}{15}$, aumenta de 560 unidades?

Solução. Dividir um número por $\frac{8}{15}$ é multiplicá-lo por $\frac{15}{8}$. Multiplicar um número por $\frac{15}{8}$ é tomar $\frac{15}{8}$ deste número. Tomar $\frac{15}{8}$ de um número que tem somente $\frac{8}{8}$, é aumentá-lo de $\frac{7}{8}$ de seu valor. Ora, desde que $\frac{7}{8}$ do número equivalem a 560 unidades, $\frac{1}{8}$ é $560 \div 7$, isto é, 80. E, sendo $\frac{1}{8}$ do número procurado igual a 80, este número é 80×8, isto é, 640.

37. Qual é o número que, dividido por $\frac{11}{20}$, aumenta de 315 unidades?

38. Qual é o número que, dividido por $\frac{13}{30}$, aumenta de 1 360 unidades?

39. Qual é o número que, dividido por 15, diminue de 518 unidades?

40. Qual é o número que, dividido por $7\frac{2}{3}$, diminue de 160 unidades?

41. Um barril está cheio de vinho. Tira-se do barril $\frac{1}{15}$ do vinho e enche-se novamente o barril com água. Em seguida, tira-se do barril $\frac{5}{18}$ do seu conteudo e enche-se novamente o barril com água. Restam no barril 728 litros de vinho puro. Qual é a capacidade do barril?

Solução. Tirando-se do barril $\frac{1}{15}$ do seu conteudo, restaram $\frac{14}{15}$ de vinho. Depois encheu-se o barril com água. Em seguida, tiraram-se $\frac{5}{18}$ da mistura de vinho com água. Então tiraram-se $\frac{5}{18}$ do vinho que o barril continha, isto é, $\frac{5}{18}$ de $\frac{14}{15}$. Mas, tirando do barril $\frac{5}{18}$ dos $\frac{14}{15}$ de vinho, ficaram $\frac{13}{18}$ dos $\frac{14}{15}$ de vinho, isto é, $\frac{13}{18} \times \frac{14}{15}$ ou $\frac{13 \times 7}{9 \times 15}$ ou $\frac{91}{135}$ de vinho. Mas, $\frac{91}{135}$ do vinho equivalem a 728 litros; então $\frac{1}{135}$ do vinho equivale a $728 \div 91$, isto é, 8. E, desde que $\frac{1}{135}$ do vinho são 8 litros, a capacidade do barril é de 135×8, isto é, 1 080 litros.

42. Determinar uma fração equivalente a $\frac{3}{7}$ e cuja soma dos termos seja igual a 120.

43. Determinar uma fração equivalente a $\frac{21}{28}$ e cuja soma dos termos seja igual a 119.

44. Determinar uma fração equivalente a $\frac{7}{10}$ e cuja diferença dos termos seja igual a 69.

45. Determinar uma fração equivalente a $\frac{8}{15}$ e cuja diferença dos termos seja igual a 154.

46. Dois engenheiros estão medindo o comprimento de uma estrada de rodagem. O primeiro mede $\frac{13}{40}$ da estrada. Depois o segundo, continuando os trabalhos, mede $\frac{11}{12}$ do restante e acha 693 quilômetros. Qual é o comprimento de toda a estrada?

47. Comprei seda a Cr. \$40,00 cada 7 metros, vendi-a a Cr. \$50,00 cada 6 metros e ganhei Cr. \$66,00. Quantos metros de seda comprei?

48. A soma de dois números é 120, e o menor é igual a $\frac{3}{7}$ do maior. Quais são os dois números?

49. Que horas são, se $\frac{4}{11}$ do que resta do dia é igual ao tempo decorrido?

Suponhamos o dia dividido em 15 partes iguais, e que restam 11 destas partes. Então o tempo decorrido é $\frac{4}{11}$ de 11 partes, isto é, 4 partes.

Logo, decorreram 4 partes do dia e restam 11. Mas o dia está dividido em 15 partes. Então decorreram $\frac{4}{15}$ do dia e restam $\frac{11}{15}$ do dia. Mas o dia tem 24 horas. Então decorreram $\frac{4}{15}$ de 24 horas e restam $\frac{11}{15}$ de 24 horas.

Se já decorreram $\frac{4}{15}$ de 24 horas, são $\frac{4}{15} \times 24 = \frac{32}{5}$ da hora ou 6 horas e $\frac{2}{5}$ da hora. E $\frac{2}{5}$ da hora $= \frac{2}{5}$ de 60 minutos $= \frac{2}{5} \times 60 = 24$ minutos.

Resposta. São 6 horas e 24 minutos da manhã.

N. B. Se a fração dada no problema é, por exemplo, $\frac{5}{13}$, dividimos o dia em 18 partes iguais e supomos que restam 13 destas partes; se a fração dada é $\frac{12}{17}$, dividimos o dia em 29 partes iguais e supomos que restam 17 destas partes; e assim por diante.

50. Um aviador aterrou e, verificando que o tanque de gazolina continha somente $\frac{2}{15}$ da sua capacidade, comprou 370 litros de gazolina, enchendo assim $\frac{3}{4}$ do mesmo tanque. Qual é a capacidade do tanque?

51. $\frac{3}{4} + \frac{5}{7} \div \frac{15}{28} - \frac{2}{5}$ de $4\frac{1}{3} + 7 \times 2\frac{3}{10} =$

52. $\dfrac{7}{\frac{3}{5}} + \dfrac{\frac{5}{8}}{4} + \dfrac{2\frac{1}{3}}{3\frac{1}{4}} + \dfrac{9}{10} =$

53. $\dfrac{1}{2 + \dfrac{3}{4 + \frac{5}{6}}} \div \dfrac{\dfrac{1}{2 + \frac{1}{3}}}{\dfrac{3}{1 \times \frac{1}{4}}}$

54. $\dfrac{3\frac{1}{3} + 2\frac{1}{6}}{3\frac{2}{3} - 3\frac{1}{6}} \div \dfrac{1\frac{1}{5} + 1\frac{3}{10}}{3\frac{3}{10} - 2\frac{1}{5}}$

55. $\frac{7}{8} + 2\frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \div \frac{7}{12} + \frac{4}{8} \div \frac{8}{27} \times \frac{9}{10} + \frac{2}{3}$ de $5\frac{1}{2} =$

Capítulo VI

Frações Decimais

146. Frações decimais. Consideremos as frações $\frac{7}{10}$, $\frac{31}{100}$ e $\frac{429}{1000}$. São frações cujos denominadores são potências de 10. A estas frações dá-se o nome de *frações decimais*. *Fração decimal é a fração cujo denominador é uma potência qualquer de 10.*

Tracemos um segmento retilíneo AB e dividamo-lo em 10 *partes iguais*; cada uma destas partes será *um décimo de* AB. Dividamos cada décimo de AB em 10 *partes iguais*; o segmento AB ficará dividido em 100 *partes iguais*, e cada uma destas partes será *um centésimo* de AB. Dividamos cada centésimo de AB em 10 *partes iguais*; o segmento AB ficará dividido em 1 000 *partes iguais* e cada uma destas partes será *um milésimo* de AB. Considerando que o segmento AB pode representar uma unidade qualquer, e examinando com atenção as suas divisões e subdivisões, veremos que:

1 unidade = 10 décimos = 100 centésimos = 1 000 milésimos
1 décimo = 10 centésimos = 100 milésimos
1 centésimo = 10 milésimos

N. B. O professor desenhará no quadro-negro o segmento AB, com as divisões indicadas neste parágrafo. Mas, é preferivel dar a cada aluno uma tira de papel milimetrado com 3 a 4 centímetros de largura, e na qual se tenha traçado o segmento AB, com um metro de comprimento.

Exercícios orais

1. Reduzir 1 unidade e 3 décimos a décimos.
2. Reduzir 4 décimos e 5 centésimos a centésimos.
3. Reduzir 3 unidades e 7 décimos a décimos.
4. Reduzir 5 unidades e 8 décimos a centésimos.
5. Reduzir 7 unidades, 4 décimos e 6 centésimos a centésimos.
6. Reduzir 8 décimos e 3 centésimos a centésimos.

7. Reduzir 4 décimos e 7 centésimos a milésimos.
8. Reduzir 3 unidades e 4 décimos a milésimos.
9. Reduzir 5 unidades e 8 centésimos a milésimos.
10. Reduzir 7 décimos e 9 milésimos a milésimos.

Seja a fração decimal $\frac{347}{1\,000}$. Esta fração contem 3 décimos, 4 centésimos e 7 milésimos porque

$$\frac{347}{1\,000} = \frac{300}{1\,000} + \frac{40}{1\,000} + \frac{7}{1\,000} = \frac{3}{10} + \frac{4}{100} + \frac{7}{1\,000}$$

Já sabemos que 1 décimo tem 10 centésimos e 1 centésimo tem 10 milésimos. Portanto, se escrevermos 347, *e se houver um modo qualquer de lembrar que o algarismo* 3 *representa décimos*, então o algarismo 4 representará centésimos e o algarismo 7 representará milésimos, em virtude do princípio fundamental da numeração escrita. (§ 54) Ora, para que o algarismo 3 represente décimos, escrever-se-á 0,347. *Por convenção, o primeiro algarismo à direita da vírgula representará sempre décimos.* Desde logo, o segundo algarismo à direita da vírgula representará *centésimos* e o terceiro, *milésimos*. E o algarismo *zero*, à esquerda da vírgula, representará a falta de unidades simples. (*)

Quando uma fração decimal, $\frac{347}{1000}$, é escrita sob a forma 0,347 dizemos, em Matemática, que a fração $\frac{347}{1000}$ *está escrita com a notação decimal*, e muitos autores lhe dão a denominação de *número decimal*. A parte situada à esquerda da vírgula toma o nome de *parte inteira*, e a que fica à direita toma o nome de *parte decimal*, sendo esta parte decimal constituida de um ou mais *algarismos decimais*. (**)

(*) Sendo facultativo empregar o ponto ou a vírgula nas frações decimais, julgamos preferivel a vírgula, de acordo com um hábito já tradicional em nossas escolas.

(**) A maioria dos autores, referindo-se às frações decimais, diz indiferentemente *frações decimais, números decimais. frações decimais escritas com a notação decimal*. Achamos preferivel dizer apenas **frações decimais**, para que os estudantes nunca se esqueçam de que os *números decimais* são **números fracionários**. Entretanto, os srs. professores darão a estes números, o nome que acharem mais conveniente.

Exercícios orais

Ler as frações decimais seguintes:

1. 0,3	4. 0,85	7. 0,497	10. 3,7	13. 4,25	16. 8,156
2. 2,74	5. 9,007	8. 6,04	11. 23,005	14. 8,123	17. 4,09
3. 4,367	6. 8,29	9. 15,038	12. 24,76	15. 1,01	18. 1,111

19. Quantas unidades contem cada uma destas frações?
20. Quantos décimos contem cada uma destas frações?
21. Quantos centésimos contem cada uma destas frações?
22. Quantos milésimos contem cada uma destas frações?
23. Ler estas frações, algarismo por algarismo; dada a fração 23,548 dizer: 2 dezenas, 3 unidades, 5 décimos, 4 centésimos e 8 milésimos.
24. Ler estas frações dizendo em primeiro lugar a parte inteira e depois a fracionária.
25. Ler estas frações reunindo a parte inteira com a parte fracionária. Por exemplo, dada a fração 35,08 dizer 3 508 centésimos.
26. Escrever estas frações no quadro-negro, sob ditado.
27. Escrever estas frações no quadro-negro, dando-lhes a forma de frações ordinárias.

147. Números inteiros e frações decimais. Combinando os §§47, 48 e 146, teremos:

1 dez. milhar	=	10 unid. milhar
1 unid. milhar	=	10 centenas
1 centena	=	10 dezenas
1 dezena	=	10 unidades
1 unidade	=	10 décimos
1 décimo	=	10 centésimos
1 centésimo	=	10 milésimos

Portanto, as frações decimais são uma *continuação* dos números inteiros. *Acima da unidade* temos a dezena, a centena, a unidade de milhar, etc., e *abaixo da unidade*, o décimo, o centésimo e o milésimo. Donde resulta que as leis da numeração, os processos para efetuar as operações fundamentais sobre números inteiros, e as propriedades e teoremas relativos a estas operações se aplicam, como veremos, às frações decimais.

Observação. Não há uma diferença essencial entre as frações ordinárias e as decimais. O que as distingue umas das outras é que nas frações ordinárias, o denominador é um número qualquer, ao passo que, nas frações decimais, é uma potência de 10.

Convem tambem notar que as frações ordinárias têm o denominador visivel; é o número escrito por baixo do traço de fração. As frações decimais têm o denominador oculto; é a unidade seguida de tantos zeros quantos são os algarismos da parte decimal. Assim, dada a fração 0,56 o seu denominador é 100.

As frações ordinárias e decimais constituem o conjunto dos **números fracionários,** primeira ampliação do nosso campo numérico. (§ 143)

Exercícios orais

1. 57,38	4. 235,798	7. 123,446	10. 85,593
2. 529,057	5. 3,567	8. 618,3	11. 398,4
3. 36,4	6. 43,892	9. 59,07	12. 75,86

Fazer com estas frações, exercícios análogos aos precedentes. (§ 146)

148. As subdivisões do milésimo. O milésimo se divide em 10 partes iguais chamadas *décimos-milésimos;* cada décimo-milésimo se divide em 10 partes iguais chamadas *centésimos-milésimos;* cada centésimo-milésimo se divide em 10 partes iguais chamadas *milionésimos.* Já vimos que:

as unidades simples	são chamadas unidades de 1.ª ordem
as dezenas	são chamadas unidades de 2.ª ordem
as centenas	são chamadas unidades de 3.ª ordem
as unidades de milhar	são chamadas unidades de 4.ª ordem
as dezenas de milhar	são chamadas unidades de 5.ª ordem
as centenas de milhar	são chamadas unidades de 6.ª ordem

E assim por diante. Por analogia,

os décimos..............são unidades fracionárias decimais de 1.ª ordem
os centésimos...........são unidades fracionárias decimais de 2.ª ordem
os milésimos............são unidades fracionárias decimais de 3.ª ordem
os décimos-milésimos......são unidades fracionárias decimais de 4.ª ordem
os centésimos-milésimos...são unidades fracionárias decimais de 5.ª ordem
os milionésimos..........são unidades fracionárias decimais de 6.ª ordem

E assim por diante.

Exercícios orais

1. 3,754 8	4. 24,958 76	7. 13,485 764	10. 4,235 768
2. 4,936 74	5. 8,343 537	8. 8,237 91	11. 8,137 926
3. 31,425 367	6. 15,897 2	9. 15,897 2	12. 23,574 8

Fazer com estas frações, exercícios análogos aos precedentes. (§ 146)

Convem observar que 34,578 não é uma *fração propriamente dita;* é um *número mixto* constituido por uma *parte inteira, 34* *unidades* e uma *parte essencialmente fracionária, 578 milésimos.* Entretanto, para maior simplicidade daremos o nome de *fração decimal* ao número 34,578 e a outros semelhantes. Poderiamos ler este número dizendo: *34 578 milésimos*; entretanto, é mais simples e elegante dizer *34 unidades e 578 milésimos.*

149. Multiplicação ou divisão de uma fração decimal por 10^n. Uma fração decimal não se altera, se escrevermos à sua direita um ou dois ou mais zeros.

$$3{,}47 = 3{,}470 = 3{,}470\,0 = 3{,}470\,00 = 3{,}470\,000$$

Com efeito, desde que não se mude a posição da vírgula, o algarismo 3 representará sempre *unidades*, o 4, *décimos*, e o 7, *centésimos*. Em poucas palavras, a *fração decimal não se altera porque o valor relativo de cada algarismo permanece invariável.*

Para multiplicar uma fração decimal por 10, 100, 1 000, etc., é bastante deslocar a vírgula, *para a direita*, um, dois três, etc., algarismos. Por exemplo, $0{,}758 \times 10 = 7{,}58$.

Com efeito, a mudança de posição da vírgula faz com que o valor relativo de cada algarismo *fique multiplicado por* 10. Então toda a fração decimal fica *multiplicada por* 10.

Analogamente, $0{,}007\,358 \times 100 = 0{,}735\,8$ e $0{,}978\,26 \times 1\,000 = 978{,}26$.

Para dividir uma fração decimal por 10, 100, 1 000, etc., é bastante deslocar a vírgula *para a esquerda*, um, dois, três, etc., algarismos.

$$0{,}789 \div 10 = 0{,}078\,9$$
$$2{,}475\,6 \div 100 = 0{,}024\,756$$
$$493{,}78 \div 1\,000 = 0{,}493\,78$$

Com efeito, a mudança de posição da vírgula faz com que o valor relativo de cada algarismo *fique dividido* por 10, 100, 1000, etc.. Então toda a fração *fica dividida* por 10, 100, 1 000, etc..

150. Adição e subtração de frações decimais. Regra. *Para somar duas ou mais frações decimais, escrevem-se estas frações, umas por baixo das outras, de modo que as vírgulas, e as unidades de uma mesma ordem se correspondam em linhas verticais; depois efetua-se a adição como se se tratasse de números inteiros.*

Em seguida, coloca-se a vírgula na soma, por baixo das vírgulas das parcelas.

Exemplo. $3{,}78 + 0{,}042\,6 + 53{,}57 + 0{,}896 + 54 = ?$

3,78	3,780 0
0,042 6	0,042 6
53,57	53,570 0
0,896	0,896 0
54	54,000 0
112,288 6	112,288 6

Na segunda adição, *iguálamos o numero de algarismos decimais das cinco parcelas. Não é necessário, mas é util, e tudo o que aprendemos em relação à adição dos números inteiros, inclusive as diferentes maneiras de tirar a prova desta operação, se aplica, sem restrições, à adição das frações decimais.*

Regra. *Para diminuir uma fração decimal de outra, escreve-se a menor por baixo da maior, de modo que as vírgulas, e as unidades de uma mesma ordem se correspondam em linhas verticais; depois efetua-se a subtração como se se tratasse de números inteiros. Em seguida, coloca-se a vírgula no resto, por baixo da vírgula do minuendo e do subtraendo.*

$47{,}5 - 23{,}897\,6 = ?$

$$\begin{array}{r} 47{,}500\,0 \\ 23{,}897\,6 \\ \hline 23{,}602\,4 \end{array}$$

E' sempre util igualar o número de algarismos decimais. Tudo o que aprendemos em relação à subtração dos números inteiros, se aplica, sem restrições, à subtração das frações decimais.

Exercícios orais

1. 4 + 3,5 =	5. 6 − 0,08 =	9. 3 − 1,5 =
2. 2 − 0,7 =	6. 0,1 − 0,01 =	10. 0,1 − 0,07 =
3. 0,08 + 3 =	7. 2 − 1,3 =	11. 4 − 0,8 =
4. 0,3 − 0,25 =	8. 0,7 − 0,07 =	12. 0,5 − 0,06 =

Exercícios. Série XXXVI

1. Na igualdade $3{,}27 + x = 8{,}003$ qual é o valor de x?
2. Na igualdade $8{,}5 - x = 3{,}749$ qual é o valor de x?
3. Na igualdade $7{,}48 + 3{,}059 + 0{,}002\,9 + x = 15{,}31$ qual é o valor de x?
4. Na igualdade $6{,}38 - x = 0{,}47 + 0{,}034\,6 + 0{,}006\,48 + 3$, qual é o valor de x?
5. $6{,}47 - 8{,}5 + 12 - 0{,}498 + 3{,}16 - 0{,}000\,88 =$
6. Quanto falta ao número 0,374 8 para completar uma unidade?
7. Quanto falta ao número 0,057 8 para completar uma dezena?

151. Multiplicação de frações decimais. Regra. *Para calcular o produto de duas frações decimais, efetua-se a multiplicação como se se tratasse de números inteiros, e depois separam-se no produto, a partir da direita, tantos algarismos decimais quantos são os algarismos decimais das duas frações dadas.*

```
37,456×0,48 =
      37,456
        0,48
      299648
     149824
    17,97888
```

Multiplicar 37,456 por 0,48 é o mesmo que multiplicar $\frac{37\,456}{1\,000}$ por $\frac{48}{100}$. Portanto,

$$37{,}456 \times 0{,}48 = \frac{37\,456}{1\,000} \times \frac{48}{100} =$$

$$= \frac{1\,797\,888}{100\,000} = 17{,}978\,88$$

152. Divisão de frações decimais. *Multiplicando ou dividindo o dividendo e o divisor por um mesmo número, o quociente não se altera,* **mas o resto fica multiplicado ou dividido por este número.** *O resto é sempre da mesma espécie do dividendo.* No parágrafo 75 aprendemos mais que: **quando o dividendo e o divisor são quantidades heterogêneas, o quociente é da espécie do dividendo.** Vamos insistir sobre esta última verdade, resolvendo um problema muito simples.

Dividindo 435 laranjas por 13 meninos, quantas laranjas receberá cada um deles?

```
435 laranjas | 13
 45          |____________
             33 laranjas
  6 laranjas
```

Efetuando a divisão, verifica-se que cada menino receberá *33 laranjas*, e restarão ainda *6 laranjas. Se, em lugar de dividir 435 laranjas*, dividíssemos *435 maçãs*, cada menino receberia *33 maçãs*, e restariam ainda *6 maçãs*. Se, em lugar de dividir *435 maçãs*, dividíssemos *435 fatias de bolo*, cada menino receberia *33 fatias de bolo*, e restariam ainda *6 fatias*.

E, se estas fatias fossem milésimos de bolo? Cada menino receberia 33 milésimos de bolo e restariam ainda 6 milésimos.

E, se estas fatias fossem centésimos de bolo? Cada menino receberia 33 centésimos de bolo, e restariam ainda 6 centésimos.

Na divisão de frações decimais consideram-se dois casos.

153. Primeiro caso da divisão de frações decimais. Vamos dividir 37,592 68 por 43. Suprimindo mentalmente a vírgula e efetuando a divisão, obtemos o quociente 87 424 e o resto 36. Mas nós dividimos 37,592 68 ou *3 759 268 centésimos milésimos por 43. Logo, o quociente é 87 424 centésimos milésimos* e restam *36 centésimos milésimos*. (§ 152)

```
37,59268 | 43
 3 19    |_________
  182     0,87424
   106
    208
0,00036
```

Regra. *Para dividir uma fração decimal por um número inteiro, efetua-se a divisão como se o dividendo fosse um número inteiro; em seguida, separam-se no quociente e no resto, a partir da direita, tantos algarismos decimais quantos são os do dividendo.*

Exemplos.

```
47,308 | 25          0,00274685 | 53
 22 3  |_____               096 |__________
  2 30  1,892               438  0,00005182
    58                      145
 0,008               0,00000039
```

154. Segundo caso da divisão de frações decimais. Vamos dividir 73,489 26 por 8,37. De acordo com o princípio demonstrado (§ 78), vamos multiplicar o dividendo e o divisor por um número tal, que o divisor se torne um número inteiro, isto é, por 100. (§ 149) Resultará 7 348,926 ÷ 837. Recaímos, assim, no primeiro caso. Efetuada a divisão, obtemos o quociente 8,780 e o resto 0,066, Entretanto, o resto 0,066 *está multiplicado por* 100. (§ 78) Neste caso, o resto verdadeiro é 0,066 ÷ 100, isto é, 0,000 66.

```
73,489 26 ÷ 8,37

7348,926 | 837
 652 9   |_____
  67 02   8,780
 0,00 066
```

Regra. *Para dividir uma fração decimal por outra, multiplicam-se as duas frações por uma potência de 10 tal que o divisor se torne um número inteiro. Em seguida, aplica-se a regra relativa ao primeiro caso da divisão. Mas o resto terá tantos algarismos decimais quantos são os do dividendo primitivo.*

Exemplos. $37,948\,35 \div 0,074$ | $0,003\,289 \div 4,36$

37948,35	74	0,3289	436
094	512,81	0,000237	0,0007
208			
603			
115			
0,00041			

Observando estes dois exemplos com a devida atenção, podemos proceder, na prática, de acordo com os exemplos seguintes:

$0,079\,438\,5 \div 2,34 =$ | $3,475\,82 \div 0,075 =$ | $5,379\,862 \div 0,000\,624 =$

0,0794385	2,34	3,47582	0,075	5,379862	0,000624
0923	0,03394	475	46,34	3878	8621
2218		258		1346	
1125		332		0982	
0,0000189		0,00032		0,000358	

Portanto, para dividir uma fração decimal por outra, efetua-se a divisão como se as vírgulas não existissem; em seguida, *separam-se no quociente, a partir da direita, tantos algarismos decimais quantos são os do dividendo, menos os do divisor.*

Quanto ao resto, este tem sempre tantos algarismos decimais quantos são os do dividendo.

Se tivermos de dividir 3,47 por 0,0658, acrescentaremos dois zeros à direita do dividendo. (§ 149)

155. Caso em que o divisor é um número inteiro seguido de zeros.

Para efetuar esta divisão dividem-se os dois números dados por 1 000. Em seguida, aplica-se a regra do parágrafo 153. Quanto ao resto verdadeiro, não é 0,003; é $0,003 \times 1\,000$, isto é, 3.

$5\,748\,963 \div 7\,000 = ?$

$5\,748,963 \div 7 = ?$

5748,963	7
14	821,280
08	
1 9	
56	
0,003	

Resto verdadeiro = 3

Exercícios. Série XXXVII

1. Na igualdade $37 \times x = 179,672$ qual o valor de x?
2. Na igualdade $3,485 \times x = 80,155$ qual o valor de x?
3. Na igualdade $4,6 \times x = 38,525$ qual o valor de x?

4. Sendo $7,619\,04 \div x = 2,34$ qual o valor de x?
5. $0,7 + 3,8 \times 0,92 - 9,1 \div 0,13 + 84,1 \times 2,5 =$
6. $14,4 \div 36 + 3,5 \times 6,2 - 0,78 \div 2,6 \times 0,9$ de $4,7 =$
7. Multiplicar 34,835 6 por 7,54 e tirar a prova com o divisor 9.
8. Multiplicar 416,372 por 3,94 e tirar a prova com o divisor 11.
9. Dividir 37,856 2 por 7,88 e tirar a prova com o divisor 9.
10. Dividir 197,324 1 por 15,87 e tirar a prova com o divisor 11.
11. Dividir 37,485 96 por 0,754. Qual é o resto verdadeiro?
12. Dividir 1 285 796 por 8 000. Qual é o resto verdadeiro?
13. Dividir 3,647 por 5,97. Qual é o resto verdadeiro?
14. Dividir 17 por 0,054 8. Qual é o resto verdadeiro?
15. Dividir 3,7 por 6 000. Qual é o resto verdadeiro?

156. Transformação de uma fração decimal em ordinária. E' uma questão que não oferece a mínima dificuldade. Com efeito, 0,13 é o mesmo que $\frac{13}{100}$; 0,045 é o mesmo que $\frac{45}{1\,000}$; 4,7 ou 47 décimos é o mesmo que $\frac{47}{10}$; 36,48 ou 3 648 centésimos é o mesmo que $\frac{3\,648}{100}$. Podemos, pois, estabelecer a seguinte

Regra. *Para transformar uma fração decimal em ordinária, toma-se como numerador a fração decimal dada, suprimindo-se a vírgula, e como denominador a unidade seguida de tantos zeros quantos são os algarismos decimais da fração decimal dada.*

Exemplos.

$0,715 = \frac{715}{1\,000} = \frac{143}{200}$ | $4,36 = \frac{436}{100} = 4\frac{36}{100} = 4\frac{9}{25}$

$0,075 = \frac{75}{1\,000} = \frac{3}{40}$ | $8,125 = \frac{8\,125}{1\,000} = 8\frac{125}{1\,000} = 8\frac{1}{8}$

$4,36 = 4\frac{36}{100} = 4\frac{9}{25}$ | $8,125 = 8\frac{125}{1\,000} = 8\frac{1}{8}$

157. Transformação de uma fração ordinária em decimal. Uma fração ordinária é o quociente exato da divisão do numerador pelo denominador. (§ 143)

$$5 \div 8 = \frac{5}{8};\ 4 \div 9 = \frac{4}{9};\ 11 \div 13 = \frac{11}{13},\ \text{etc..}$$

Segue-se que, dada a fração $\frac{11}{37}$, se quisermos transformá-la em decimal, devemos dividir 11 por 37. Mas, como dividir 11 por 37? E' evidente que $11 = 11{,}0 = 11{,}00 = 11{,}000$, etc..

Portanto, para dividir 11 por 37, colocamos uma vírgula à direita de 11, em seguida a esta vírgula quantos zeros quisermos, e efetuamos a divisão. (§ 153)

11,000000	37
3 60	0,297297
270	
110	
360	
270	
0,000011	

Neste exemplo se observa que os seis zeros colocados à direita de 11, depois da vírgula, não foram suficientes para obtermos um quociente exato. Mas tambem se observa que, por maior que seja o número de zeros colocados à direita do dividendo, nunca chegaremos a um quociente exato; os algarismos 2, 9 e 7 do quociente se vão repetindo indefinidamente e sempre na mesma ordem. Logo,

$$\frac{11}{37} = 0{,}297297297297\ldots\ldots$$

A estas frações decimais, constituidas por um algarismo ou grupo de algarismos, que se repete indefinidamente, e sempre na mesma ordem, dá-se o nome de *frações decimais periódicas*; delas trataremos em capítulo especial.

Vamos converter $\frac{7}{16}$ em fração decimal.

7,000000	16
60	0,4375
120	
080	
0	

Procedendo como no exemplo anterior, colocamos a vírgula à direita de 7 e, em seguida, alguns zeros, o que não altera o dividendo. Neste exemplo, porem, escrevemos zeros de mais; teria sido suficiente escrever 4 zeros.

E verificamos que $\frac{7}{16} = 0{,}4375$.

Exemplos.

Converter $\frac{13}{32}$ em fração decimal.

13,00000	32
0 200	0,40625
080	
160	
0	

Resposta. $\frac{13}{32} = 0{,}406\,25$

Converter $\frac{9}{11}$ em fração decimal.

9,000000	11
20	0,818181
90	
20	
90	
20	
9	

Resposta. $\frac{9}{11} = 0{,}818\,181\ldots\ldots$

158. Divisão com resto. Para obter o quociente exato da divisão de dois números, mesmo que o primeiro não seja divisivel pelo segundo, é bastante juntar ao quociente uma fração ordinária, cujo denominador é o divisor e cujo numerador é o resto. (§ 144) Por exemplo, se a divisão de 37 por 8 dá um quociente 4 e um resto 5, teremos: $37 \div 8 = 4\frac{5}{8}$; o quociente exato da divisão de 37 por 8 é $4\frac{5}{8}$.

Vejamos se é possivel obter o quociente exato da divisão de dois números, mesmo que o primeiro não seja divisivel pelo segundo, recorrendo às frações decimais, em lugar das ordinárias.

Vamos dividir 4 386 por 125. Nós sabemos que 4 386 não é divisivel por 125. (§ 90)

4386,000000	125
636	35,088
11 00	
1 000	
000	

À direita do número 4 386 colocamos a vírgula e, depois dela, alguns zeros. Em seguida, efetuamos a divisão. (§ 153) Neste exemplo notamos que não era necessário escrever seis zeros à direita do dividendo; bastariam três zeros. E o quociente exato da divisão de 4 386 por 125 é 35,088.

Vamos dividir 419 por 37, procedendo como acima.

Neste exemplo, o quociente é uma fração decimal periódica; logo, não é possivel obter, por meio de uma fração decimal, o quociente exato da divisão de 419 por 37; 11,324 324 324. . . .

```
419,000000 | 37
049        |__________
 120       11,324324
  090
   160
    120
     090
      160
       12
```

não é o quociente exato da divisão de 419 por 37, porque a divisão deixa sempre um resto.

Do que acabámos de dizer neste parágrafo, concluimos que:

I. E' sempre possivel completar o quociente de uma divisão, com uma fração ordinária.

II. Nem sempre é possivel completar o quociente de uma divisão com uma fração decimal.

Exercícios. Série XXXVIII

Completar, pelos dois processos, os quocientes das divisões abaixo indicadas.

1. $3\,756 \div 125$	3. $1\,874 \div 625$	5. $1\,236 \div 74$
2. $379 \div 32$	4. $719 \div 88$	6. $256 \div 7$

7. Provar que, para obter o quociente exato da divisão de um número inteiro qualquer, por 2 ou por 5, é bastante juntar um zero ao dividendo.

8. Provar que, para obter o quociente exato da divisão de um número inteiro qualquer, por 4 ou 25, é bastante juntar dois zeros ao dividendo.

9. Provar que, para obter o quociente exato da divisão de um número inteiro qualquer, por 8 ou por 125, é bastante juntar três zeros ao dividendo.

159. Quociente aproximado a menos de uma unidade, por falta ou por excesso. Se dividirmos 41 por 9, obtemos o quociente incompleto 4 e o resto 5. Logo, 4 não é o *quociente exato* da divisão de 41 por 9. Será, talvez, um *quociente errado?* Tambem não. Então que quociente é? E' o que se chama em Aritmética um *quociente aproximado*.

Se dissermos que 4 é o *quociente exato* da divisão de 41 por 9, não diremos uma verdade; *alguma cousa* falta ao número 4, para ser o quociente exato de 41 dividido por 9; mas esta *alguma cousa não atinge a uma unidade*, porque o quociente exato de 41 dividido por 9 não pode ser igual a 5 ou superior a 5.

Se dissermos que 5 é o *quociente exato* da divisão de 41 por 9, não diremos uma verdade; *alguma cousa* há de mais no número 5, para ser o quociente exato de 41 dividido por 9; mas esta

alguma cousa não atinge a uma unidade, porque o quociente exato de 41 dividido por 9 não pode ser igual a 4 ou inferior a 4.

Donde concluimos que, dividindo 41 por 9, obtemos dois quocientes, nenhum dos quais é exato; ambos se aproximam do quociente exato, *faltando ao primeiro menos de uma unidade, e sobrando no segundo menos de uma unidade*; o quociente menor chama-se *quociente aproximado a menos de uma unidade, POR FALTA*; o quociente maior chama-se *quociente aproximado a menos de uma unidade, POR EXCESSO.*

```
3750 | 9
 15  |____
  60  416
   6
```

Exemplo. $3750 \div 9 = ?$

$3750 \div 9 = 416$ (quociente aproximado a menos de uma unidade, por falta)

$3750 \div 9 = 417$ (quociente aproximado a menos de uma unidade, por excesso)

Exercícios. Série XXXIX

Problemas sobre frações decimais

1. Dividir o número 3,745 862 em classes de dois algarismos, da direita para a esquerda e, em seguida, ler o número assim dividido.

Solução. 3 unidades simples, 74 centésimos, 58 décimos milésimos e 62 milionésimos.

2. Dividir o número 378,495 6 em classes de dois algarismos, da esquerda para a direita e, em seguida, ler o número assim dividido.

3. Multiplicar o número 347 por 10; multiplicar o número 3,47 por 10.

4. Multiplicar o número 7 358 por 1 000; multiplicar o número 0,735 8 por 1 000.

5. Dividir o número 3 748 por 10, por 100, por 1 000, por 10 000, etc..

6. Provar que, para multiplicar uma fração decimal por 0,1 ou 0,01 ou 0,001 é bastante deslocar a vírgula para a esquerda, um ou dois ou três algarismos. Exemplo: $37,8 \times 0,1 = 3,78$.

7. Provar que, para dividir uma fração decimal por 0,1 ou 0,01 ou 0,001 é bastante deslocar a vírgula para a direita, um ou dois ou três algarismos. Exemplo: $3,789 \div 0,1 = 37,89$.

8. Para dividir 38 700 por 400, podemos suprimir os dois zeros que se acham à direita de cada um dos dois números dados. E se quisermos dividir 47,589 por 3 700, podemos suprimir os dois zeros que se acham à direita do divisor? Qual será a modificação que devemos fazer no dividendo?

9. Um menino distraido, ao dividir 37,480 por 540, suprimiu os dois zeros e dividiu 37,48 por 54. Este menino acertou ou errou? Por que?

10. Pode-se efetuar uma divisão, quando o dividendo é menor do que o divisor? Como dividir 13 por 40?

11. $$\frac{7{,}3 + \dfrac{3{,}4}{2 - 1{,}5} \times \dfrac{2 + 3{,}4 \div 17}{0{,}02}}{3{,}995 - 0{,}4 \times 5 + 0{,}05 \times 0{,}1} + 5 \times 4{,}47 =$$

Esta expressão aritmética foi tirada da excelente coleção de exercícios de H. Costa — E. Roxo — O. Castro. Seu valor é 400. Para calculá-la, é bastante seguir os preceitos determinados no parágrafo 82 e as regras relativas às quatro operações sobre frações decimais e ordinárias.

12. Por que número é necessário multiplicar 325 para que o produto tenha 45 unidades menos que o multiplicando?

13. Por que número é necessário multiplicar 5,74 para que este número aumente de 63,14?

14. Qual é o número cujos 0,36 são 147,6?

Solução. Seja x o número pedido. Então 0,36 de x = 147,6 ou $0{,}36 \times x = 147{,}6$.

15. Por que número é preciso dividir 720 para que o quociente tenha 5 280 unidades mais que o dividendo?

16. Por que número é necessário dividir 2,52 para que este número aumente de 37,48?

17. Por que número é necessário dividir 0,231 para que este número diminua de 0,176?

18. Não sendo 37 divisivel por 45, calcular o quociente da divisão de 37 por 45, com três algarismos decimais.

Solução. $37 \div 45 = 37{,}00 \div 45 = 0{,}822$

19. Calcular o quociente da divisão de 7 por 123 com quatro algarismos decimais.

20. Calcular o quociente da divisão de 3,7 por 0,72 com três algarismos decimais.

Solução. $3{,}7 \div 0{,}72 = 370 \quad \div 72$ (§ 154)

$3{,}7 \div 0{,}72 = 370{,}000 \div 72 = 5{,}138$ (§ 158)

21. Calcular o quociente da divisão de 0,007 por 4,78 com quatro algarismos decimais.

22. Determinar dois números tendo por soma 741 e por diferença 256.

23. Determinar dois números tendo por soma 2,76 e por diferença 0,573.

24. O triplo da soma de dois números é 2,58; o quádruplo da diferença é 1,37. Determinar os dois números.

25. Determinar dois números tais que 0,8 da sua soma seja igual a 2,776 e 0,7 da sua diferença seja igual a 0,440 3.

26. Dividir 3,758 em duas partes cuja diferença seja igual ao quádruplo da quinta parte de 0,37.

27. Comprei um automovel por Cr. $17 200,00. Algum tempo depois, vendí-o com prejuizo de 15% sobre o custo. Quanto perdí?

Solução. O prejuizo foi de 15%, isto é, de 0,15 do valor do automovel; logo, perdí Cr. $ 17 200,00 × 0,15.

28. Um negociante comprou mercadorias no valor de Cr. $8 749,00 e vendeu-as com 24% de lucro. Quanto ganhou?

Solução. Ganhou 0,24 da quantia que ele despendeu, isto é, Cr. $8 749,00 × 0,24.

29. Comprei uma casa por Cr. $74 500,00 e tornei a vendê-la com 14% de lucro. Quanto recebí?

30. Um negociante comprou 328 metros de brim por Cr. $6 590,00 e vendeu-os com 18% de prejuizo. Quanto recebeu?

31. Suponhamos que o brim, ficando dentro dágua durante 24 horas, perde 0,03 do seu comprimento. Um alfaiate compra 78 metros de brim e submete esta fazenda a um banho de 24 horas. A quanto se reduz o comprimento da peça, depois do banho?

32. Supondo que um fio de ferro, submetido a uma temperatura de 100°, aumente de 0,003 do seu comprimento, qual será o comprimento de um fio com 348 metros, submetido àquela temperatura?

33. Uma peça de brim, depois de um banho de 24 horas, tem 54,6m de comprimento. Sabendo-se que o brim perdeu 0,03 do seu comprimento durante o banho, qual era o comprimento da peça antes de ser molhada?

Sugestão. Se a peça perdeu 0,03 do seu comprimento primitivo, então conservou 0,97 deste mesmo comprimento. Chamando x a este comprimento, teremos: $x \times 0{,}97 = 54{,}6$ etc..

34. Um fio de arame a 100° está medindo 54,9m. Sabendo-se que o comprimento deste fio aumentou de 0,003 ao passar de 0° para 100°, pergunta-se qual é o comprimento de fio a zero graus.

35. Mediu-se o perímetro de um terreno e achou-se 597 metros. Verificou-se depois que a corrente que serviu para a medição está errada; tem 3 milímetros mais que o metro legal. Qual é o verdadeiro perímetro do terreno?

Solução. Três milímetros são 0,003 do metro. Se cada metro medido corresponde, na realidade, a 1,003m, o perímetro verdadeiro é 597 × 1,003m.

Regra. *Para corrigir uma medida, quando a unidade de comprimento está errada* **para mais,** *multiplica-se a medida pela* **soma** *da unidade de comprimento com o erro.*

Exemplo. Mediu-se o comprimento de um corredor, com uma régua de um metro e achou-se 74,8m. Mas a régua é defeituosa; tem 4 milímetros mais do que o metro legal. Qual o comprimento exato do corredor?

Solução. 74,8m. × (1 + 0,004) = 74,8 × 1,004.

36. Mediu-se o perímetro de um terreno e achou-se 2 374 metros. Verificou-se depois que a corrente que serviu para a medição está errada; tem 3 milímetros menos que o metro legal. Qual é o verdadeiro perímetro do terreno?

Se cada metro medido corresponde, na realidade, a 0,997m, o perímetro verdadeiro é 0,997m × 2 374.

Regra. *Para corrigir uma medida, quando a unidade de comprimento está errada* **para menos,** *multiplica-se a medida pelo excesso da unidade de comprimento sobre o erro.*

Exemplo. Mediu-se o comprimento de uma peça de seda, com uma fita de um metro, e achou-se 47,6m. Mas a fita é defeituosa; tem 4 milímetros menos que o metro legal. Qual é o comprimento exato da peça?

Solução. 47,6m × (1 – 0,004) = 47,6m × 0,996.

37. Uma tropa de 3 740 soldados entrou em combate e perdeu 540 homens. Qual foi a porcentagem dos mortos?

Solução. Porcentagem significa *tantos por cento.* Se a tropa tem 3 740 homens, cada homem é $\frac{1}{3\,740}$ da tropa e os 540 mortos representam $\frac{540}{3\,740}$ ou $\frac{54}{374}$ ou $\frac{27}{187}$ da tropa. Convertendo a fração $\frac{27}{187}$ em fração decimal, e calculando o quociente apenas com dois algarismos decimais, acharemos 0,14. *Se um centésimo* é a mesma coisa que *um por cento*, então 0,14 = 14%.

Resposta. A porcentagem dos mortos é 14%.

38. Em um colégio entraram em exame 275 alunos e foram aprovados
253. Calcular a porcentagem de reprovação.

39. Em um colégio entraram em exame 315 alunos e foram reprovados
63. Calcular a porcentagem de aprovação.

40. Em um colégio foram aprovados 84% dos alunos inscritos, num total de 231 alunos. Quantos alunos entraram em exame?

41. $\dfrac{3{,}7 - \dfrac{0{,}15}{0{,}45}}{\dfrac{21{,}4}{40}} + \dfrac{5}{6} \text{ de } \dfrac{18{,}2}{26} =$

42. $\dfrac{\dfrac{3{,}5}{0{,}07} - 0{,}3 \text{ de } 24}{171{,}2} - \dfrac{3}{20} =$

43. Um negociante comprou 500 dúzias de pratos a Cr. $6,40 a dúzia. Quebrou 84 pratos e vendeu os restantes a Cr. $0,84 cada um. Calcular a porcentagem de lucro.

44. Comprei uma casa por Cr. $80 000,00 e vendí-a por Cr. $56 000,00. Calcular a porcentagem de prejuizo.

45. Quanto é $7\frac{1}{4}$ % de 3 548?

46. Quanto é $\frac{3}{5}$ % de 48 000?

47. Vendí um automovel por Cr. $9 200,00 e ganhei 15% da quantia que o automovel me custou. Calcular esta quantia.

48. Em uma cidade há 44 000 homens. As mulheres representam 56% da população desta cidade. Calcular a população desta cidade.

160. Dízimas periódicas. Muitas vezes, ao converter uma fração ordinária em decimal, resulta uma fração decimal constituida por um algarismo ou por um grupo de algarismos, que se repetem indefinidamente e sempre na mesma ordem. Foi o que vimos no parágrafo 157, quando quisemos converter as

frações $\frac{11}{37}$ e $\frac{9}{11}$ em frações decimais. Obtivemos as frações 0,2972972......... e 0,81818181......... A estas frações dá-se o nome de *frações decimais periódicas* ou *dízimas periódicas.*

Frações decimais periódicas ou dízimas periódicas são frações decimais constituidas por um algarismo ou grupo de algarismos, que se repete indefinidamente e sempre na mesma ordem.

Ao algarismo ou grupo de algarismos, que se repete indefinidamente e sempre na mesma ordem, dá-se o nome de *período.*

Período de uma dízima periódica é o algarismo ou grupo de algarismos, que se repete indefinidamente e sempre na mesma ordem.

0,777 777.........
0,242 424 2.........
3,451 451 45.........
0,078 078 07.........
4,433 333 3.........
2,272 828 828 28..
0,523 347 347 3...
0,008 888 8.........

Consideremos as frações decimais ao lado. São dízimas periódicas. Na 1.ª o período é 7; na 2.ª é 24; na 3.ª é 451; na 4.ª é 078; na 5.ª é 3; na 6.ª é 28; na 7.ª é 347; na 8.ª é 8. Alguns autores marcam de um modo especial o *período* que constitue a *dízima periódica*; nós preferimos deixar aos estudantes o prazer de verificarem que a fração decimal é periódica, e qual o período.

Algumas vezes, o primeiro período fica situado logo depois da vírgula; é o que acontece nos quatro primeiros exemplos. Outras vezes aparece, entre a vírgula e o primeiro período, um algarismo ou um grupo de algarismos, que não se repete, e que se denomina *parte não periódica*; é o que acontece nos quatro últimos exemplos. Deste fato resulta a classificação das dízimas periódicas em dois grupos: *dízimas periódicas simples* e *dízimas periódicas compostas.*

Dízima periódica simples é a dízima na qual o primeiro período fica situado logo depois da vírgula. Os nossos quatro primeiros exemplos são dízimas periódicas simples.

Dízima periódica composta é a dízima na qual, entre a vírgula e o primeiro período, há um algarismo ou um grupo de algarismos, que não se repete e que se denomina parte não periódica. Os últimos quatro exemplos são dízimas periódicas compostas. Na 5.ª a parte não periódica é 4; na 6.ª a parte não periódica é 27; na 7.ª a parte não periódica é 523; na 8.ª a parte não periódica é 00.

161. Valor absoluto e relativo de um período. Um período tem dois valores: *valor absoluto* ou *real* e *valor relativo* ou *local*. Valor absoluto ou real de um período é o seu valor quando está isolado, separado da dízima à qual pertence. Valor relativo ou local de um período é o seu valor quando reunido com os outros períodos, constituindo a dízima periódica.

Consideremos a dízima periódica seguinte: 0,777 77..... Nesta dízima o período é 7, e o valor absoluto deste período é 7. Mas o valor relativo deste período não é 7; varia de acordo com a sua posição à direita da vírgula. Assim é que o valor do primeiro período é $\frac{7}{10}$; o do segundo é $\frac{7}{100}$; o do terceiro é $\frac{7}{1\,000}$; o do quarto é $\frac{7}{10\,000}$; etc.. Ora, sendo $\frac{7}{10} > \frac{7}{100} > \frac{7}{1\,000} > \frac{7}{10\,000}$ etc., conclue-se imediatamente que o valor relativo de cada período vai diminuindo gradualmente, à medida que o número de períodos vai aumentando. Logo, voltando à dízima 0,777 7....., se tomarmos um número de períodos bastante grande, infinitamente grande, o valor relativo do último perído tornar-se-á tão pequeno, tão insignificante, que se poderá considerar *nulo*, isto é, igual a zero.

Exercícios orais

Classificar as dízimas que se seguem, dizer qual é o período de cada uma delas, qual a parte não periódica e qual o valor relativo de cada um dos períodos.

1. 0,333..........	5. 6,042 742 74.....	9. 7,423 383 83.....
2. 4,151 515.......	6. 3,859 999.......	10. 6,070 707 0.....
3. 0,877 77........	7. 0,314 031 403....	11. 0,051 051 05.....
4. 9,081 818.......	8. 0,523 232 32.....	12. 0,284 848 48.....

162. Geratriz de uma dízima periódica. As dízimas periódicas se originam da transformação de uma fração ordinária em decimal. Surge, então, em Aritmética, este problema interessante: dada uma dízima periódica, descobrir a fração ordinária que lhe deu origem. Seja a dízima periódica 0,363 636 3..... Qual foi a fração ordinária que, ao ser transformada em decimal, deu origem a esta dízima? E' este o problema que vamos resolver nos parágrafos seguintes.

Chama-se geratriz de uma dízima periódica, a fração ordinária que, ao ser transformada em decimal, dá origem a esta dízima.

163. Geratriz de uma dízima periódica simples. Consideremos a dízima periódica simples 0,363 636 363 6..... e vamos determinar a sua geratriz. Como nós não a conhecemos, representemo-la por x. A letra x está representando a fração ordinária que, transformada em decimal, origina a dízima 0,363 636..... Portanto, a fração ordinária x é igual à dízima periódica 0,363 636 36..... Logo,

$$x = 363\,636\,36.... \quad (\S\,165) \qquad (1)$$

Estas duas frações sendo iguais, se nós as multiplicarmos por um mesmo número, 100, os dois produtos serão tambem iguais. Este fator, 100, isto é, a unidade seguida de dois zeros, foi escolhido pelo fato do período ter *dois algarismos*. Teremos, portanto,

$$100 \times x = 36{,}363\,636....... \qquad (2)$$

Escrevendo a igualdade (1) por baixo da igualdade (2), teremos:

$$100 \times x = 36{,}363\,636...... \qquad (3)$$
$$x = 0{,}363\,636\,36.... \qquad (4)$$

Antes de continuar, observemos atentamente os segundos membros das igualdades (3) e (4). As partes fracionárias são, à primeira vista, diferentes, e a diferença entre elas é de um período, 36, cujo valor relativo é 0,000 000 36. Mas, lembrando o que dissemos no parágrafo 161, se tomarmos a dízima...... 0,363 636 36...... com um número de períodos infinitamente grande, o valor relativo do último período tornar-se-á tão pequeno, tão pequeno, que se poderá considerar nulo, isto é, igual a zero. Então, as partes fracionárias dos segundos membros das igualdades (3) e (4) não são diferentes; são iguais e, se nos convier, podemos igualar o número de períodos das duas dízimas, sem que o seu valor se altere.

Isto posto, se dos números iguais **100** $\times$ x e **36,363 636 36...** diminuirmos os números iguais x e **0,363 636 36......** os restos serão iguais. Ora, de **100** $\times$ x tirando x resta **99** $\times$ x, e de 36,363 636 36..... tirando 0,363 636 36..... resta 36. Portanto,

$$99 \times x = 36 \qquad (5)$$

Da igualdade (5) se deduz que x é igual ao quociente da divisão de 36 por 99, isto é, $x = \frac{36}{99}$. Portanto, a geratriz da dízima periódica 0,363 636 36...... isto é, a fração ordinária que gerou esta dízima é $\frac{36}{99}$ ou $\frac{4}{11}$ E' o que podemos verificar, convertendo esta fração ordinária em fração decimal.

Voltando à igualdade (1), convem observar que, se multiplicámos ambos os membros desta igualdade por 100, foi com a intenção de passar o primeiro período para a esquerda da vírgula.

Seja agora a dízima periódica 0,444... Repetindo tudo o que fizemos em relação à dizima 0,363 636....., escrevendo $x = 0{,}444$......, multiplicando ambos os membros desta igualdade por **10**, etc., acharemos $x = \frac{4}{9}$. Considerando a dízima 0,415 415......, escrevendo $x = 0{,}415\,415$......, multiplicando ambos os membros desta igualdade, por **1 000**, etc., acharemos $x = \frac{415}{999}$. Podemos então estabelecer a seguinte

Regra. *A geratriz de uma dízima periódica simples é uma fração ordinária cujo numerador é um dos períodos, tomado em valor absoluto, e cujo denominador é um número formado de tantos noves quantos são os algarismos do período.*

Exemplo. Qual é a geratriz de 0,727 272...... ?

Resposta. A geratriz de 0,727 272...... é $\frac{72}{99}$ ou $\frac{8}{11}$.

164. Geratriz de uma dízima periódica composta. Consideremos a dízima periódica composta 0,735 555 55...... e vamos determinar a sua geratriz. Como não a conhecemos, representemo-la por x. Teremos:

$$x = 0{,}735\,555\,5..... \qquad (1)$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade (1) por 1 000, *para que a parte não periódica*, 73, *e o primeiro período*, 5, *fiquem à esquerda da vírgula*, resulta:

$$1\,000 \times x = 735{,}555\,5...... \qquad (2)$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade (1) por 100, *para que a parte não periódica, 73, fique à esquerda da vírgula*, resulta:

$$100 \times x = 73{,}555\,55........ \qquad (3)$$

Diminuindo a igualdade (3) da igualdade (2), teremos:

$$900 \times x = 735 - 73 \qquad (4)$$

Da igualdade (4) se deduz facilmente que $x = \frac{735-73}{900}$. Portanto, a geratriz da dízima periódica 0,735 555 5......... é a fração $\frac{735-73}{900}$. E' o que podemos verificar, simplificando esta fração e convertendo-a em fração decimal.

Se fizermos o mesmo com a dízima 0,415 15..... acharemos $x = \frac{415-4}{900}$; se fizermos o mesmo com a dízima 0,246 777... acharemos $x = \frac{2\,467-246}{900}$. Podemos então estabelecer a seguinte

Regra. *A geratriz de uma dízima periódica composta é uma fração ordinária cujo numerador é a parte não periódica seguida de um período, menos a parte não periódica; cujo denominador é um número formado de tantos noves quantos são os algarismos do período, seguido de tantos zeros quantos são os algarismos da parte não periódica.*

Exemplo. Qual é a geratriz de 0,743 33 ...... ?

Resposta. A geratriz de 0,743 33... é $\frac{743-74}{900}$ ou $\frac{669}{900}$ ou $\frac{223}{300}$.

Exercícios. Série XL

Determinar a geratriz das dízimas periódicas seguintes:

1. 0,454 545	**6.** 0,527 272 72....	**11.** 4,555 55 ....
2. 6,272 727 27......	**7.** 2,045 454 54....	**12.** 7,723 333 3.....
3. 3,090 909 0.......	**8.** 3,418 888	**13.** 6,006 666 ....
4. 0,513 513 513.....	**9.** 6,436 363 63....	**14.** 2,188 888 ....
5. 0,030 603 060.....	**10.** 0,123 232 32....	**15.** 0,999 999 9.....

165. O verdadeiro valor de uma dízima periódica. Seja a dízima periódica 0,444......

Sua geratriz é $\frac{4}{9}$. Podemos então escrever $\frac{4}{9} = 0{,}444.....$ Entretanto, é preciso compreender bem esta igualdade. A fração não é igual a 0,444..... A fração $\frac{4}{9}$ é igual à soma de um número infinito de frações decimais cujo numerador é 4 e cujo denominador é 10 para a primeira, 10^2 para a segunda, 10^3 para a terceira, 10^4 para a quarta, e assim por diante. Portanto,

$$\frac{4}{9} = \frac{4}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{4}{10^4} + \frac{4}{10^5} + \frac{4}{10^6} + \ldots\ldots$$

Compreende-se perfeitamente que é impossivel escrever todo o segundo membro desta igualdade, visto que ele é constituido por um número infinito de frações. Entretanto, a soma de todas estas frações, nós a conhecemos: é $\frac{4}{9}$; é a geratriz da dízima.

166. Operações sobre as dízimas periódicas. As dízimas periódicas podem ser somadas, subtraidas, multiplicadas ou divididas; pode-se calcular uma potência qualquer de uma dízima periódica, assim como a raiz quadrada, etc., etc.. Mas, recordando o que dissemos no parágrafo anterior, *quando se realizam operações sobre dízimas periódicas, é necessário, em primeiro lugar, substituí-las pelas suas respectivas geratrizes.* E a expressão dada fica então substituida por uma expressão constituida de frações ordinárias, e que já aprendemos a calcular.

Exercícios. Série XLI

1. $0{,}333\ldots + 0{,}454\,54\ldots + 2{,}818\,18\ldots + 3{,}555\ldots =$
2. $7{,}45454\ldots - 5{,}222\,2\ldots + 0{,}234\,234\,2\ldots =$
3. $3{,}727\,272\ldots \times 0{,}666\ldots \div \frac{5}{11} =$
4. $2{,}171\,717\ldots \div 3{,}414\,14\ldots \times 5\frac{1}{2} =$
5. $0{,}433\,3\ldots + 1{,}022\,2\ldots + 0{,}888\ldots + 0{,}325\,55\ldots =$
6. $8{,}311\,11\ldots + 2{,}577\,77\ldots + 4{,}038\,88\ldots =$
7. $5{,}612\,222\ldots \times \frac{9}{10} - 0{,}007\,272\,7\ldots \times \frac{45}{75} =$
8. $6{,}833\,3\ldots \div \frac{6}{5} + 2{,}077\,7\ldots \div \frac{7}{25} + \frac{2}{3}$ de $5\frac{1}{2} =$
9. $0{,}444\ldots + \frac{0{,}777\ldots}{0{,}888\ldots} + 0{,}533\,3\ldots + \frac{0{,}102\,02\ldots}{0{,}510\,101\ldots} =$
10. $\frac{8{,}333\,33\ldots}{9{,}151\,515\ldots} \times \frac{302}{7} \times 0{,}777\ldots \times \frac{1}{2}$ de $0{,}055\,5\ldots =$

167. Caracteres de convertibilidade. Chamam-se caracteres de convertibilidade, certas leis que nos permitem dizer antecipadamente se uma fração ordinária, ao ser convertida em decimal, produz ou não produz uma dízima periódica.

Primeiro caracter. *Se o denominador de uma fração ordinária irredutivel contem somente o fator 2, esta fração, ao ser convertida em decimal, produz uma fração decimal exata cujo número de algarismos é igual ao expoente do fator 2.*

Seja a fração $\frac{3}{8}$. Seu denominador é a terceira potência de 2. Portanto, $\frac{3}{8} = \frac{3}{2^3}$. Multiplicando ambos os termos desta fração por 5^3, a fração não se altera. Logo,

$$\frac{3}{8} = \frac{3}{2^3} = \frac{3 \times 5^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{3 \times 125}{10^3} = \frac{375}{1\,000} = 0{,}375$$

Analogamente, $\frac{7}{16} = \frac{7}{2^4} = \frac{7 \times 5^4}{2^4 \times 5^4} = \frac{7 \times 625}{10^4} = \frac{4\,375}{10\,000} = 0{,}437\,5$

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{2^2} = \frac{3 \times 5^2}{2^2 \times 5^2} = \frac{3 \times 25}{10^2} = \frac{75}{100} = 0{,}75$$

Segundo caracter. *Se o denominador de uma fração ordinária irredutivel contem somente o fator 5, esta fração, ao ser convertida em decimal, produz uma fração decimal exata, cujo número de algarismos é igual ao expoente do fator 5.*

Seja a fração $\frac{11}{25}$. Seu denominador é a segunda potência de 5. Portanto, $\frac{11}{25} = \frac{11}{5^2}$. Multiplicando ambos os termos desta fração por 2^2, a fração não se altera. Logo,

$$\frac{11}{25} = \frac{11}{5^2} = \frac{11 \times 2^2}{5^2 \times 2^2} = \frac{11 \times 4}{10^2} = \frac{44}{100} = 0{,}44$$

Analogamente, $\frac{31}{125} = \frac{31}{5^3} = \frac{31 \times 2^2}{5^3 \times 2^3} = \frac{31 \times 8}{10^3} = \frac{248}{1\,000} = 0{,}248$

$$\frac{4}{5} = \frac{4 \times 2}{5 \times 2} = \frac{8}{10} = 0{,}8$$

Terceiro caracter. *Se o denominador de uma fração ordinária irredutivel contem somente os fatores primos 2 e 5, esta fração, ao ser convertida em fração decimal, produz uma fração decimal exata, cujo número de algarismos é igual ao maior expoente desses fatores 2 e 5.*

Seja a fração $\frac{7}{20}$. Seu denominador é igual a $2^2 \times 5$. Portanto, $\frac{7}{20} = \frac{7}{2^2 \times 5}$. Multiplicando ambos os termos desta fração por 5, a fração não se altera. Logo,

$$\frac{7}{20} = \frac{7}{2^2 \times 5} = \frac{7 \times 5}{2^2 \times 5 \times 5} = \frac{7 \times 5}{2^2 \times 5^2} = \frac{35}{10^2} = \frac{35}{100} = 0{,}35$$

Analogamente,

$$\frac{31}{40} = \frac{31}{2^3 \times 5} = \frac{31 \times 5^2}{2^3 \times 5 \times 5^3} = \frac{31 \times 25}{2^3 \times 5^3} = \frac{775}{10^3} = \frac{775}{1\,000} = 0{,}775$$

$$\frac{101}{250} = \frac{101}{2 \times 5^3} = \frac{101 \times 2^2}{2 \times 5^3 \times 2^2} = \frac{101 \times 4}{2^3 \times 5^3} = \frac{404}{10^3} = \frac{404}{1\,000} = 0{,}404$$

Quarto caracter. *Se o denominador de uma fração ordinária irredutivel contem fatores primos diferentes de 2 ou de 5, esta fração, ao ser convertida em decimal, produz uma fração decimal periódica.*

Seja a fração ordinária e irredutivel $\frac{5}{14}$. Vamos provar que, se convertermos esta fração em decimal, obteremos uma fração decimal periódica. Para converter $\frac{5}{14}$ em fração decimal, é necessário dividir 5 por 14. (§ 157) E para dividir 5 por 14, é necessário escrever à direita do 5, tantos zeros quantos quisermos; um ou dois ou três ou quatro zeros, etc.. Mas, escrever um zero à direita de 5 é multiplicar 5 por 10; escrever dois zeros é multiplicar 5 por 100 ou 10^2; escrever três zeros é multiplicar 5 por 1 000 ou 10^3, etc.. Logo,

$$\begin{aligned}
5 \times 10 &= 5 \times 2 \times 5 = 5 \times 2 \times 5\\
5 \times 10^2 &= 5 \times 2^2 \times 5^2 = 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5\\
5 \times 10^3 &= 5 \times 2^3 \times 5^3 = 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5\\
5 \times 10^4 &= 5 \times 2^4 \times 5^4 = 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5
\end{aligned}$$

E assim por diante.

Ora, se observarmos com atenção este quadro, concluiremos imediatamente que, por maior que seja o número de zeros escritos à direita do 5, o número assim formado não conterá nunca o fator 7 do número 14 e, por consequência, nunca será divisivel por 14. (§ 114) Logo, a divisão se continua indefinidamente, e o quociente é uma fração decimal com um número ilimitado de algarismos. Resta provar que esta fração é periódica.

```
5,0000000 | 14
 80       |__________
 100        0,35714285...
  20
   60
    40
    120
     80
     10
```

O divisor é 14 e, sendo o resto sempre menor do que o divisor, segue-se que, na divisão de 5 por 14, podemos obter, no máximo, 13 restos diferentes. Forçosamente, depois de 13 divisões, no máximo, reaparece um dos restos já obtidos e começa então a repetição periódica dos algarismos do quociente.

No nosso exemplo temos 6 restos diferentes: 8, 10, 2, 6, 4 e 12. Efetuando a sétima divisão parcial, reaparece o resto 8 e começa a repetição dos algarismos do quociente.

N. B. Há outros caracteres de convertibilidade cuja demonstração não pode ser dada num livro elementar; mesmo toda a teoria contida neste capítulo poderá ser suprimida, se os srs. professores assim o julgarem conveniente.

CAPÍTULO VII

Números Complexos

168. Preliminares. Já conhecemos o metro, com seus múltiplos e submúltiplos. (*) Sabemos que um metro tem 10 decímetros; um decímetro tem 10 centímetros; um centímetro tem 10 milímetros. Sabemos mais que 10 metros formam um decâmetro; 10 decâmetros formam um hectômetro; 10 hectómetros formam um quilômetro.

O metro, seus múltiplos e submúltiplos são unidades para medir uma certa classe de grandezas, isto é, as linhas. Estas várias unidades guardam entre si uma relação invariavel, a saber:

Cada unidade de comprimento vale **dez** *unidades da ordem imediatamente inferior;* **dez** *unidades de comprimento, de uma mesma ordem, formam* **uma** *unidade da ordem imediatamente superior.*

Portanto, as unidades de comprimento são representadas tal qual como as unidades do sistema decimal de numeração; *os metros são as unidades de primeira ordem; os* **decâmetros** *são* **dezenas;** *os* **hectômetros** *são* **centenas;** *os* **decímetros** *são* **décimos,** *etc..* E nisto consiste a grande simplificação que se conseguiu nos cálculos, substituindo os antigos sistemas de medidas pelo sistema métrico decimal.

Mas, para medir certas grandezas, não se adotam as unidades indicadas no sistema métrico decimal e sujeitas, portanto, à *divisão decimal.* Donde resulta, da avaliação destas grandezas, uma classe especial de números, **os números complexos.**

169. Definições. Carlos viajou durante *5 anos, 7 meses, 15 dias e 18 horas.* Este número é constituido por unidades diferentes, porem, da mesma natureza, a saber, o *ano*, o *mês*, o *dia*

(*) Curso primário.

e a *hora.* Estas quatro unidades são da mesma natureza, isto é, são *unidades de tempo.* Entretanto, não ha, entre elas, a *relação decimal.* (§ 170) Não obstante, o número 5 *anos*, 7 *meses*, 15 *dias*, e 18 *horas* pode ser reduzido a uma delas, por exemplo, a *horas*; dá-se a este número o nome de *complexo.* Portanto,

Número complexo é o número constituido por unidades diferentes, porem, da mesma natureza.

Número incomplexo é o número constituido por uma unica espécie de unidades: 15 anos, 35 metros, 78 litros, etc..

Os números complexos e incomplexos são sempre concretos.

Antes de iniciarmos as quatro operações sobre números complexos, é necessário aprender as quatro transformações seguintes.

I. *Redução de um número complexo a incomplexo.*
II. *Redução de um número incomplexo a complexo.*
III. *Transformação de um número complexo em fração.*
IV. *Transformação de uma fração em número complexo.*

Observação. O significado destas quatro denominações tornar-se-á claro nos parágrafos que se seguem.

170. Unidades de tempo. Os numeros complexos mais conhecidos são os que empregamos para medir a *grandeza* **tempo.**

As unidades usuais de tempo são o ano, o mês, o dia, a hora, o minuto e o segundo.

Damos a seguir o quadro destas unidades, com as suas abreviaturas legais e a relação existente entre duas unidades consecutivas.

1 **ano**	(a)	= 12	**meses**
1 **mês**	(m)	= 30	**dias**
1 **dia**	(d)	= 24	**horas**
1 **hora**	(h)	= 60	**minutos**
1 **minuto**	(m)	= 60	**segundos**

Portanto, 3a. 7m. 10d. significa 3 *anos*, 7 *meses* e 10 *dias*; 15h. 45m. 36s. significa 15 *horas*, 45 *minutos* e 36 segundos.

Observação. Não ha confusão possivel entre *m* (mês) e *m* (minuto); os dois exemplos acima mostram que a distinção é imediata. Notemos tambem que, nos problemas relativos aos números complexos, consideramos o *ano comercial*, com 360 dias, e o *mês comercial*, com 30 dias.

Além das unidades de tempo dadas no quadro acima, temos outras unidades de tempo, como sejam: a semana, o bimestre, o trimestre, o semestre, etc..

O *segundo* não tem um submúltiplo; para indicar frações do *segundo* recorremos à numeração decimal. Por exemplo, 4,36 segundos significa 4 segundos e 36 centésimos do segundo. Aliás, uma fração de qualquer unidade de tempo pode ser expressa por uma fração decimal, como veremos adiante.

171. Redução de um número complexo a incomplexo. Consiste em reduzir o complexo dado à última das suas unidades. Como exemplo, vamos reduzir 3 anos, 7 meses, 25 dias e 10 horas a horas.

3 anos são $12 \times 3 = 36$ meses; 36 meses + 7 meses são 43 meses; 43 meses são $43 \times 30 = 1\,290$ dias; 1 290 dias + 25 dias são 1 315 dias; 1 315 dias são $1\,315 \times 24 = 31\,560$ horas; 31 560 horas + 10 horas = 31 570 horas. Portanto, 3 anos, 7 meses, 25 dias e 10 horas são 31 570 horas.

Todas estas operações podem ser assim indicadas:

$$[(3 \times 12 + 7) \times 30 + 25] \times 24 + 10$$

Calculando esta expressão aritmética acharemos 31 570 horas.

172. A unidade monetária inglesa. E' a libra esterlina, pequena moeda de ouro que pesa 7,988 gramas (peso legal). As subdivisões da libra são o *shilling*, o *dinheiro* (penny) e o *farthing*. Uma libra tem 20 shillings; um shilling tem 12 dinheiros (pence); um dinheiro ou penny tem 4 farthings.

As abreviaturas da libra, shilling, dinheiro e farthing são *£., sh. d.* e *f.* Portanto, 5£. 13*sh.* 7*d.* 3*f.* significa 5 libras esterlinas, 13 shillings, 7 dinheiros e 3 farthings.

Exercícios orais

1. Reduzir 1£. a dinheiros.
2. Reduzir 3£. e 10sh. a sh.
3. Reduzir 7sh. e 3d. a d.
4. Reduzir 5£. e 12sh. a sh.
5. Reduzir 11sh. e 10d. a d.
6. Reduzir 8d. e 3f. a f.
7. Reduzir 1sh. a f.
8. Reduzir 5sh. a f.
9. Reduzir 3£. a d.
10. Reduzir 4sh. e 2d. a f.

11. Quanto vale, em dinheiros, uma libra esterlina?
12. Se uma gravata custa 2sh., quantas poderei comprar com uma libra?
13. Se um doce custa um dinheiro, quantos poderei comprar com meia libra?
14. Gastei uma libra esterlina em gravatas. Custando cada uma delas meio shilling, quantas gravatas comprei?
15. Comprei doces a 3 dinheiros cada um e gastei uma libra esterlina. Quantos doces comprei?

Exercícios. Série XLII

1. Reduzir 7 anos a horas.
2. Reduzir 7£. 11sh. 9d. e 3 f. a farthings.
3. Reduzir 12 dias, 15 horas, 40 minutos e 25 segundos a segundos.
4. Reduzir 23£. a farthings.
5. Reduzir 4 meses, 22 dias, 15 horas e 23 minutos a segundos.

173. A unidade angular. A unidade mais usada para medir ângulos é o *grau*. O grau se subdivide em 60 partes iguais chamadas *minutos*. Cada minuto, por sua vez, se subdivide em 60 partes iguais chamadas *segundos*. Portanto, 1 grau = 60 minutos e 1 minuto = 60 segundos. Suponhamos que um ângulo tem 36 graus, 45 minutos e 36 segundos; abreviadamente se escreverá $36°45'36''$.

Exercícios. Série XLIII

1. Quantos minutos tem um ângulo de 47°?
2. Quantos minutos tem um ângulo reto?
3. Reduzir 58° 43′ 52″ a segundos.
4. Quantos segundos tem um ângulo reto?
5. Reduzir a segundos a terça parte de um ângulo reto.
6. Reduzir 84° 23′ a segundos.
7. Reduzir 77° 48″ a segundos.

174. Redução de um número incomplexo a complexo. Consiste em reduzir o número incomplexo dado a número complexo. Como exemplo, vamos reduzir 4 875 farthings a número complexo.

Dividimos 4 875 farthins por 4, para convertê-los em dinheiros. Resultam 1 218 dinheiros e 3 farthings. Portanto,

4 875 farthings = 1 218 dinheiros + 3 farthings

Dividimos 1 218 dinheiros por 12, para reduzí-los a shillings. Resultam 101 shillings e 6 dinheiros. Portanto,

1 218 dinheiros = 101 shillins + 6 dinheiros $\therefore$
4 875 farthings = 101 shillings + 6 dinheiros + 3 farthings

Dividimos 101 shillings por 20, para reduzí-los a libras. Resultam 5 libras e 1 shilling. Portanto,

101 sh. = 5£. + 1 sh. $\therefore$
4 875f. = 5£. 1sh. 6d. 3f.

4875f.	4		
08	1218	12	
07	018	101	20
35	6d.	1sh.	5£.
3f.			

A disposição prática para esta transformação é a que está indicada ao lado.

Exercícios orais

1. Reduzir 30sh. a £.
2. Reduzir 54sh. a £.
3. Reduzir 50d. a sh.
4. Reduzir 72d. a sh.
5. Reduzir 84sh. a £.
6. Reduzir 50f. a d.
7. Reduzir 76d. a sh.
8. Reduzir 100sh. a £.
9. Reduzir 47d. a sh.
10. Reduzir 55d. a sh.

Exercícios. Série XLIV

1. Converter 37 519 farthings em libras.
2. Quantos graus tem um arco de 427 859 segundos?
3. Converter 1 235 467 segundos em dias.
4. Converter 379 513 minutos em dias.
5. Reduzir 65 317 horas a número complexo.
6. Converter 85 377 farthings em libras.
7. Converter 38 045 segundos em graus.
8. Reduzir 98 713 horas a número complexo.

175. Transformação de um número complexo em fração. Vejamos como se transforma um número complexo, em fração ordinária de uma das unidades que o compõem. A que fração do ano correspondem 7 meses, 12 dias e 16 horas?

$$7\text{m. } 12\text{d. } 16\text{h.} = (7\times30+12)\times24+16 = 5\,344 \text{ horas.}$$
$$1 \text{ ano} = 12\times30\times24 = 8\,640 \text{ horas.}$$

Se um ano tem 8 640 horas, segue-se que 1 hora = $\frac{1}{8\,640}$ do ano, e 5 344 horas = $\frac{5\,344}{8\,640}$ do ano.

Como segundo exemplo vamos reduzir 5£. 10sh. 4d. à fração da libra.

$$5£.\ 10\text{sh. } 4\text{d.} = (5\times20+10)\times12+4 = 1\,324 \text{ dinheiros.}$$
$$1£. = 20\times12 = 240 \text{ dinheiros.}$$

Se uma £. tem 240 dinheiros, segue-se que 1 dinheiro = $\frac{1}{240}$ da £. e 1 324d. = $\frac{1\,324}{240}$ da £.

Para transformar um número complexo em fração decimal de uma das unidades que o compõem, é bastante convertê-lo primeiramente em fração ordinária e, depois, transformar esta em fração decimal com a aproximação pedida.

Exercícios orais.

1. Reduzir 7sh. à fração da £.
2. Reduzir 5 dias à fração do mês.
3. Reduzir 15 minutos à fração do grau.
4. Reduzir 8 dinheiros à fração do sh.
5. Reduzir 8 horas à fração do dia.
6. Reduzir 20 minutos à fração da hora.
7. Reduzir 10sh. e 8d. à fração da £.
8. Reduzir 5sh. e 10d. à fração da £.
9. Reduzir 5 meses e 20 dias à fração do ano.
10. Reduzir 10sh. e 10d. à fração da £.

Exercícios. Série XLV

1. Converter 15sh. 10d. 2f. em fração da £.
2. Reduzir 18sh. 6d. à fração decimal da £, em erro inferior a 0,001.
3. Converter 7 meses, 10 dias e 12 horas em fração do ano.
4. Converter em fração decimal do grau o número 15°24′30″ com erro inferior a 0,01
5. Reduzir 8£. 12sh. 10d. 3f. à fração da £.

176. Transformação de uma fração em número complexo. Como exemplo, vamos converter $\frac{4}{11}$ do ano em número complexo.

$$\frac{4}{11}\text{ do ano} = \frac{4}{11}\text{ de 12 meses} = \frac{48}{11}\text{ meses} = 4\text{ meses e } \frac{4}{11}\text{ do mês.}$$
$$\frac{4}{11}\text{ do mês} = \frac{4}{11}\text{ de 30 dias} = \frac{120}{11}\text{ dias} = 10\text{ dias e } \frac{10}{11}\text{ do dia.}$$
$$\frac{10}{11}\text{ do dia} = \frac{10}{11}\text{ de 24 horas} = \frac{240}{11}\text{ horas} = 21\text{ horas e } \frac{9}{11}\text{ da hora.}$$
$$\frac{9}{11}\text{ da hora} = \frac{9}{11}\text{ de 60 minutos} = \frac{540}{11}\text{ minutos} = 49\text{ minutos e } \frac{1}{11}\text{ do minuto.}$$
$$\frac{1}{11}\text{ do minuto} = \frac{1}{11}\text{ de 60 segundos} = \frac{60}{11}\text{ segundos} = 5\text{ segundos e } \frac{5}{11}\text{ do segundo.}$$

Portanto, $\frac{4}{11}$ do ano = 4 meses, 10 dias, 21 horas, 49 minutos, 5 segundos e $\frac{5}{11}$ do segundo.

Convertamos $\frac{5}{13}$ da £. em número complexo.

$$\frac{5}{13} \text{ da £.} = \frac{5}{13} \text{ de 20sh.} = \frac{100}{13} \text{ sh.} = \text{7sh. e } \frac{9}{13} \text{ do sh.}$$

$$\frac{9}{13} \text{ do sh.} = \frac{9}{13} \text{ de 12d.} = \frac{108}{13} \text{d.} = \text{8d. e } \frac{4}{13} \text{ do d.}$$

$$\frac{4}{13} \text{ do d.} = \frac{4}{13} \text{ de 4f.} = \frac{16}{13} \text{f.} = \text{1f. e } \frac{3}{13} \text{ do f.}$$

Portanto, $\frac{5}{13}$ da £. = 7sh. 8d. 1f. e $\frac{3}{13}$ do f.

Estes dois exemplos dispensam a regra.

Exercícios. Série XLVI

1. Converter $\frac{7}{15}$ do ano em número complexo.
2. Transformar $\frac{7}{31}$ do grau em número complexo.
3. Reduzir $\frac{5}{14}$ da libra esterlina a número complexo.
4. Converter 3 anos e $\frac{5}{9}$ do ano em número complexo.
5. Transformar 35° e $\frac{11}{35}$ do grau em número complexo.
6. Reduzir 11£. e $\frac{4}{7}$ da £. a número complexo.
7. Reduzir £. 4,7 a número complexo.
8. Reduzir 5,32 anos a número complexo.
9. Transformar 56,13 graus em número complexo.
10. Quantos graus, minutos e segundos tem um ângulo igual a 0,43 de um ângulo reto?
11. Reduzir 0,43 do quadrante a graus, minutos e segundos.
12. Quantos graus, minutos e segundos tem um ângulo igual a 0,742 de um ângulo reto?

177. Adição de números complexos. E' operação que não oferece dificuldade, como se vê no exemplo que se segue. Somam-se as unidades de cada uma das ordens, a saber, *horas, dias, meses* e *anos*. Em seguida, lembrando que 73 horas = 3 dias e 1 hora, reunem-se os 3 dias aos 68 dias, ficando apenas 1 hora na soma das horas. A soma dos dias será então 68 dias + 3 dias = 71 dias = 2 meses e 11 dias. Reunem-se os 2 meses à soma dos meses, isto é, 30 meses, ficando apenas 11 dias na soma dos dias. E assim por diante.

2	2	3		
3an.	7m.	10d.	15h.	+
4an.	8m.	15d.	23h.	
	9m.	21d.	19h.	
2an.		22d.		
	6m.		16h.	
11an.	8m.	11d.	1h.	

Exercícios. Série XLVII

1. 3£. 11sh. 7d. 3f + 15sh. 11d. 2f. + 7£. 9d. + 16sh. 8d. 2f. =
2. 3an. 7m. 10d. 23h. + 11m. 18d. 19h. 45m. + 23d. 22h. 43m. 57s. =
3. 48°27′35″ + 56°34″ + 19°38′ + 23°57″ + 41°42′43″ =
4. 5£. 11sh. 7d.¼ + 11£. 17 sh. 9d.¾ + 15£. 18sh. 11d.¾ =
5. 17°28′35″,7 + 36°52′58″,9 + 48°51′47″,6 + 33′34″,28 =

178. Subtração de complexos. E' tambem operação muito simples. Vamos diminuir 8£. 12sh. 8d. e 3f. de 15£. 7sh. 3d. 2f. De 2f. não podemos diminuir 3f.; juntamos 4f. aos 2f. do minuendo e tiramos um dinheiro do mesmo. Assim o minuendo não se altera porque 1d. = 4f. E diremos: 6f. − 3f. = 3f. Em lugar de 3d. temos agora 2d. De 2d. não podemos diminuir 8d.; juntamos 12d. aos 2d. do minuendo e tiramos 1sh. do mesmo. Assim o minuendo não se altera, porque 1sh. = 12d. E diremos: 14d. − 8d. = 6d. Em lugar de 7sh. temos agora 6sh. E assim por diante.

15£.	7sh.	3d.	2f.	—
8£.	12sh.	8d.	3f.	
6£.	14sh.	6d.	3f.	

Exercícios. Série XLVIII

1. 15£. 10sh. 7d. 3f. − 8£. 15sh. 9d. 1f. =
2. 7an. 23d. 15h. 40m. − 4an. 5m. 14d. 23h. 57seg. =
3. 73°26′29″,8 − 45°53′38″,43 =
4. £. 7,13 − 5£. 11sh. 13d. =

5. 7an. $\frac{5}{11}$ − 4an. 8m. 13d. 12h. 53m. 48s. =

6. Qual a diferença entre um ângulo reto e um ângulo de 54°23′57″?

7. Qual a diferença entre 5£. e 3£. 17sh. 9d. $\frac{3}{5}$?

179. Multiplicação de complexos. Há dois casos a considerar, porque o multiplicador pode ser incomplexo ou complexo.

3£.	17sh.	11d.
		×7
21£.	119sh.	77d.
21£.	125sh.	5d.
27£.	5sh.	5d.

Se um metro de casimira inglesa custa 3 £. 17sh. 11d., quanto custarão 7 metros? Multiplicam-se as 3£., os 17sh. e os 11d. do multiplicando, separadamente, por 7. Resulta 21£. 119sh. 77d. Lembrando que 77d. são 6sh. e 5d., juntam-se os 6sh. aos 119sh.; o produto será 21£. 125sh. 5d. Lembrando que 125sh. são 6£. e 5sh., juntam-se as 6£. às 21£.; o produto definitivo será 27£. 5sh. 5d.

Vejamos o caso em que o multiplicador é complexo. Se um operário ganha 33£. 10sh. 8d. por ano, quanto ganhará em 4 anos, 7 meses e 20 dias? Reduz-se o multiplicando à fração da £., e o multiplicador à fração do ano. Multiplicam-se as duas frações e converte-se a fração resultante em complexo.

$$33£.10sh.8d. = (33\times20+10)\times12+8 = 8\,048d. = \frac{8\,048}{240}(£) = \frac{503}{15}(£)$$

$$4a.\ 7m.\ 20d. = (4\times12+7)\times30+20 = 1\,670d. = \frac{1\,670}{360}(a) = \frac{167}{36}(a)$$

$$\frac{503}{15}\times\frac{167}{36} = \frac{84\,001}{540}(£) = 155£.\ 11sh.\ 1d.\ 3f.\ \frac{1}{9}$$

Às vezes, o multiplicando é incomplexo e o multiplicador, complexo. Se uma jarda de seda custa 3£., quanto custarão 15 jardas, 2 pés e 8 polegadas? Neste caso reduz-se o multiplicador à fração da jarda. (§ 180).

$$15yd.\ 2ft.\ 8in. = (15\times3+2)\times12+8 = 572in = \frac{572}{36}\ (yards)$$

$$3£.\times\frac{572}{36} = \frac{572}{72}£. = 47£.\ 13sh.\ 4d.$$

180. Medidas inglesas de comprimento. São as seguintes:

mile	(milha)	(ml)	=	1760 jardas	=	1 609,314 9m
furlong	(estádio)	(fu)	=	220 jardas	=	201,164 37m
pole ou	perch (vara)	(po)	=	5,5 jardas	=	5,029 11m
fathom	(braça)	(fa)	=	2 jardas	=	1,828 77m
yard	(jarda)	(yd)	=	*unidade*	=	0,914 38m
foot	(pé)	(ft)	=	1/3 da jarda	=	0,304 79m
inch	(polegada)	(in)	=	1/12 do pé	=	0,025 40m
line	(linha)	(*l*)	=	1/12 do inch	=	0,002 12m

Exercícios. Série XLIX

1. Se um operário economiza 5£. 13sh. 7d. 3f. por ano, quanto economizará em 12 anos?
2. Se um operário economiza 11£. 9sh. 9d. por ano, quanto economizará em 5an. 7m. 20d.?
3. Se um operário ganha 54£. por ano, quanto ganhará em 7an. 8m. 15d?
4. Uma jarda de seda custa 1£. 18sh. 7d. 3f. Quanto custarão 25 jardas?
5. Um fio de ouro com uma jarda de comprimento custa 7£. 8sh. 4d. Quanto custará um fio com 3yd. 2ft. 6in?
6. Se um pedreiro constrói 7 jardas de parede por mês, quantas jardas poderá construir em 4 meses, 10 dias e 8 horas?

181. Divisão de complexos. Se o dividendo é complexo e o divisor é incomplexo, procede-se como está indicado no exemplo ao lado, no qual dividimos 15£. 13sh. 11d. 3f. em 4 partes iguais.

```
15£.   13sh.   11d.   3f. | 4
                          |______________________
3×20+13=73sh.               3£ 18sh 5d 3f3/4
        1×12+11=23d.
                3×4+3= 3
                       3
```

Dividimos 15£ por 4; o quociente é 3£ e restam 3£, as quais, reduzidas a shillings e somadas com os 13 shillings do dividendo, são 73 shillings. Dividimos 73 shillings por 4; o quociente é 18 shillings e sobra 1 shilling que, reduzido a dinheiros e somado com os 11 dinheiros do dividendo, são 23 dinheiros; e assim por diante.

Se o dividendo e o divisor são complexos, é necessário reduzí-los a frações da unidade principal de cada um dos complexos, dividir uma fração pela outra e converter a fração resultante em número complexo.

Se 3yd. 2ft. 10in. de seda custam 5£. 6sh. 8d, quanto custará uma jarda?

$5£.\ 6sh.\ 8d. = (5 \times 20 + 6) \times 12 + 8 = 1\,280d. = \frac{1\,280}{240} £) = \frac{16}{3}(£)$

$3yd.\ 2ft.\ 10in. = (3 \times 3 + 2) \times 12 + 10 = 142in = \frac{142}{36}(yd.) = \frac{71}{18}(yd.)$

$\frac{16}{3} \div \frac{71}{18} = \frac{16}{3} \times \frac{18}{71} = \frac{96}{71}(£) = 1£.\ 7sh.\ 0d.\ 2f.\ \frac{2}{71}$

Às vezes, o dividendo é incomplexo e o divisor, complexo. Se um operário ganhou 48£. em 5 meses, 10 dias e 16 horas, quanto ganhou por mês? Neste caso reduz-se o divisor à fração do mês.

$5m.10d.16h. = (5 \times 30 + 10) \times 24 + 16 = 3\,856h. = \frac{3\,856}{720}(mês) = \frac{241}{45}(mês)$

$48£ \div \frac{241}{45} = 48 \times \frac{45}{241} = \frac{2\,160}{241}(£) = 8£.\ 10\ sh.\ 11d.\ 1f.$

Exercícios. Série L

Problemas sobre números complexos

1. Calcular o complemento de um ângulo com $37°36'48''$.

$90° - 37°36'48'' = 89°59'60'' - 37°36'48''$.

$$\begin{array}{r} 89°\ 59'\ 60'' \\ 37°\ 36'\ 48'' \\ \hline 52°\ 23'\ 12'' \end{array}$$

Resposta. $52°\ 23'\ 12''$

2. Calcular o complemento de um ângulo com $49°\ 17'\ 28''$.
3. Calcular o complemento de um ângulo com $42°\ 51'$.
4. Calcular o complemento de um ângulo com $34°\ 23''$.
5. Determinar dois ângulos complementares, tendo por diferença $17°\ 21'\ 24''$.
6. Determinar dois ângulos complementares, tendo por diferença $23°\ 11'\ 42''$.
7. Dois ângulos são complementares e o menor é igual a $\frac{4}{11}$ do maior. Determinar os dois ângulos.
8. Dois ângulos são complementares e o maior é igual a $\frac{13}{5}$ do menor. Determinar os dois ângulos.
9. A quarta parte de um ângulo mede $13°23'24''$. Quanto mede o complemento deste ângulo.
10. Qual é o ângulo igual ao dobro do seu complemento?
11. Qual é o ângulo igual ao triplo do seu complemento?
12. Qual é o ângulo igual ao quádruplo do seu complemento?
13. Determinar o ângulo que é igual à metade do seu complemento.
14. Determinar um ângulo que seja igual à terça parte do seu complemento.

15. Considerando um ângulo com $n°$, representar o complemento deste ângulo; o complemento do dobro deste ângulo; o complemento da metade deste ângulo; o dobro do complemento da terça parte deste ângulo.
16. Dois ângulos medem respectivamente $36°\ 21'28''$ e $42°\ 48''$. Calcular a soma e a diferença dos complementos destes dois ângulos.
17. Converter um ângulo de $37°\ 24°$ em fração decimal do ângulo reto, com erro inferior a 0,001.
18. Converter um ângulo com $42°\ 24'\ 36''$ em fração decimal do ângulo reto, com erro inferior a 0,001.
19. Um ângulo mede 0,72 de um reto. Quantos graus, minutos e segundos tem este ângulo?
20. Um ângulo mede 0,56 de um reto. Quantos graus, minutos e segundos tem este ângulo?
21. Representando um ângulo por x, e sabendo que $7x + 30° = 200°$ calcular o ângulo x.
22. Representando um ângulo por x, e sabendo que $11x - 35° = 400°$ calcular o ângulo x.
23. Calcular o suplemento de um ângulo com $84°35'\ 28''$.
24. Calcular o suplemento de um ângulo com $117°\ 28'\ 39''$.
25. Calcular o suplemento de um ângulo com $79°\ 28''$.
26. Calcular o suplemento de um ângulo com $134°\ 22'$.
27. Determinar dois ângulos suplementares, tendo por diferença $47°\ 31'\ 24''$.
28. Determinar dois ângulos suplementares, tendo por diferença $35°\ 32'\ 47''$.
29. Dois ângulos são suplementares e o menor é igual a $\frac{4}{11}$ do maior. Determinar os dois ângulos.
30. Dois ângulos são suplementares e o maior é igual a $\frac{13}{5}$ do menor. Determinar os dois ângulos.
31. A terça parte de um ângulo mede $23°\ 48'\ 57''$. Quanto mede o suplemento deste ângulo?
32. Qual é o ângulo igual ao dobro do seu suplemento?
33. Qual é o ângulo igual ao triplo do seu suplemento?
34. Qual é o ângulo igual ao quádruplo do seu suplemento?
35. Qual é o ângulo igual à metade do seu suplemento?
36. Qual é o ângulo igual a um terço do seu suplemento?
37. Considerando um ângulo com $n°$, representar o suplemento deste ângulo; o suplemento do dobro deste ângulo; o suplemento da metade deste ângulo; o dobro do suplemento da terça parte deste ângulo.
38. Dois ângulos medem respectivamente $41°\ 32'\ 43''$ e $81°\ 15'$. Calcular a soma e a diferença dos suplementos destes dois ângulos.
39. Sendo $3x + 10° = 170°$, calcular o complemento e o suplemento do ângulo x.
40. Sendo $3x + \frac{x}{2} + 147°$, calcular o complemento e o suplemento do ângulo x.
41. Qual é o ângulo que é o suplemento da sua terça parte?

42. Qual é o ângulo que é o suplemento dos dois terços de si mesmo?

43. Sendo $3n+15°$ um certo ângulo, qual é o seu complemento? O seu suplemento? Qual é a metade do complemento deste ângulo? E a terça parte do suplemento?

44. Paguei 16£. 15sh. 11d. 3f. por 9 jardas de seda. Qual é o preço de uma?

45. Fiz um trabalho em 3 dias, 15 horas e 45 minutos e recebí 17£. Quanto ganhei por dia?

46. Um operário recebeu 147£. 15sh. 7d. 1f, pelo trabalho de 34 meses. Quanto ganhou por mês?

47. Paguei 17£. 9sh. 3d. 2f. por 34yd. 2ft. 6 inches de seda. Quanto custou cada jarda?