2.º *exemplo.* Escrever com algarismos o número *quatro mil e sessenta e três*

Procedendo como acima, surge uma dificuldade. Este número não tem centenas e o algarismo 4 à esquerda do 6 não representará unidades de milhar, porem centenas. Para remover esta dificuldade, inventou-se mais um algarismo, o algarismo 0 (zero), o qual indica falta de unidades em uma ordem qualquer. Portanto, o número quatro mil e sessenta e três ficará assim representado: 4 063.

Um número é *simples* quando constituido por um algarismo; é *composto* quando constituido por dois ou mais algarismos.

55. Regra para escrever um número qualquer. Os dois exemplos do parágrafo anterior são suficientes para estabelecer a seguinte

Regra. *Para se escrever um número inteiro qualquer, escrevem-se os algarismos que representam as unidades de cada uma das ordens, da esquerda para a direita, começando pelas unidades de ordem mais elevada. A falta de unidades de primeira ordem ou de uma ordem intermediária qualquer será indicada pelo algarismo* 0 (zero).

56. Os algarismos e seus valores. Os algarismos são **nove.** Juntando-lhes o 0 (zero), o número de algarismos arábicos se eleva a **dez.** Os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 são chamados **algarismos significativos.**

Um algarismo tem dois valores: **absoluto** ou **real** e **relativo** ou **local.** Valor absoluto ou real de um algarismo é o valor que ele tem quando está isolado. Valor relativo ou local de um algarismo é o valor que ele tem de acordo com o lugar que ocupa em um número qualquer; é um valor de posição. Consideremos o número 37 645. Este número é constituido pelos algarismos 3, 7, 6, 4 e 5, cujos valores absolutos e relativos são:

---

te por um pequeno intervalo, não se devendo usar ponto, vírgula ou qualquer sinal nesta separação; na parte decimal, esta separação far-se-á da esquerda para a direita.

Exemplo: 3 753 648,529 74

A recomendação relativa à separação em classes de três algarismos não é, necessariamente, aplicavel aos números reunidos em tabelas ou quadros.

algarismo	5	—	valor absoluto,	5;	valor relativo,	5
»	4	—	»	4;	»	40
»	6	—	»	6;	»	600
»	7	—	»	7;	»	7 000
»	3	—	»	3;	»	30 000

57. Leitura de um número inteiro. Regra. *Para ler um número inteiro qualquer, é necessário dividí-lo em classes de três algarismos, da direita para a esquerda.* (*) *Em seguida, dá-se a cada classe a denominação que lhe compete. Depois lê-se o número, da esquerda para a direita, dizendo o nome de cada uma das classes.*

Como exemplo, vamos ler o número 74508693729. De acordo com a regra, teremos:

un. de bilhão	un. de milhão	un. de milhar	un. simples
74	508	693	729

Em seguida leremos: 74 bilhões, 508 milhões, 693 mil e 729.

58. Consequências da numeração escrita. Escrevendo um zero à direita de um número, este fica multiplicado por dez porque, de acordo com o princípio fundamental da numeração escrita, o valor relativo de cada algarismo se torna **dez vezes** maior. Seja o número 37. Escrevendo um zero à direita deste número, teremos 370 que é **dez vezes** maior do que 37 porque o algarismo 3, que representava dezenas, passou a representar centenas e o algarismo 7, que representava unidades, passou a representar dezenas, Logo,

Para multiplicar um número qualquer por 10, 100, 1 000, etc., é bastante acrescentar-lhe um, dois, três, etc., zeros, à direita.

Entretanto, à esquerda de um número podemos escrever zeros à vontade; 37 ou 037 ou 0037 ou 00037 é a mesma coisa.

(*) A divisão em classes é indicada por um pequeno intervalo, não sendo permitido, de acordo com a lei, o uso dos pontos.

Exercícios orais

N. B. Nesta série de exercícios não é permitido efetuar divisões.

1. Quantas dezenas contem o número 645?

Solução. O número 645 contem 6 centenas, 4 dezenas e 5 unidades. Uma centena é o mesmo que 10 dezenas; portanto, 6 centenas correspondem a 60 dezenas, e teremos:

645 = 60 dezenas + 4 dezenas + 5 unidades.

E, desde que 5 unidades não podem constituir uma dezena, conclue-se que o número 645 contem 64 dezenas e 5 unidades.

Praticamente, é bastante suprimir mentalmente o algarismo 5 e, lembrando que o algarismo 4 representa dezenas, responder: **64 dezenas.**

2. Quanta centenas contem o numero 3 748?

Solução. Este número contem 3 unidades de milhar, 7 centenas, 4 dezenas e 8 unidades. Uma unidade de milhar vale 10 centenas; 3 unidades de milhar valem 30 centenas; logo,

3 748 = 30 centenas + 7 centenas + 4 dezenas + 8 unidades
3 748 = 37 centenas + 4 dezenas + 8 unidades

E desde que 4 dezenas + 8 unidades valem 48 unidades e não podem, portanto, constituir uma centena, conclue-se que o número 3 748 contem 37 centenas e 48 unidades.

Praticamente, é bastante suprimir mentalmente os algarismos 8 e 4 que representam unidades e dezenas e, lembrando que o algarismo 7 representa centenas, responder: **37 centenas.**

3. Quantas dezenas contem o número 54?
4. Quantas dezenas contem o número 341?
5. Quantas dezenas contem o número 2 379?
6. Quantas centenas contem o número 6 307?
7. Quantas centenas contem o número 1 058?
8. Quantas dezenas contem o número 3 482?
9. Quantas unidades de milhar contem o número 57 493?
10. Quantas centenas contem o número 38 927?
11. Quantas dezenas de milhar contem o número 685 312?
12. Quantas unidades de milhar contem o número 87 699?
13. Quantas centenas contem o número 9 807?
14. Quantas dezenas contem o número 1 070?
15. Quantas unidades contem o número 387?
16. Quantos decâmetros há em 748 metros?

Solução. Um decâmetro tem 10 metros; é, portanto, uma dezena de metros. Logo, 748 metros = 74 decâmetros e 8 metros.

17. Quantos hectômetros há em 3 629 metros?
18. Quantos quilômetros há em 8 574 metros?
19. Quantos quilômetros há em 37 256 metros?
20. Quantos quilômetros há em 74 630 metros?
21. Quantos hectômetros há em 12 345 metros?
22. Quantos decâmetros há em 6 084 metros?

23. Tenho Cr. $7,80 em moedas de 10 centavos. Quantas são as moedas?

24. Tenho Cr. $43,80 em moedas de um cruzeiro. Quantas são as moedas?

25. Tenho Cr. 638,0 em notas de 10 cruzeiros. Quantas são as notas?

26. Tenho Cr. $1 374,00 em notas de 100 cruzeiros. Quantas são as notas?

27. Tenho Cr. $3,70 em moedas de 10 centavos. Quantas são as moedas.

28. Quantos automoveis são necessários para transportar os 347 alunos de um colégio, se cada automovel pode transportar somente 10 alunos?

29. Quantos trens são necessários para transportar 34 758 soldados, se a lotação de cada trem é de 1 000 soldados?

30. Quantos vagões são necessários para transportar 8 349 estudantes, se cada vagão pode transportar, no máximo, 100 estudantes?

31. Ler o número 7 458 693 dizendo e aplicando a regra.

32. Mesmo exercício com o número 3 745 808 333.

33. Ler o número 47 508 enunciando cada algarismo por sua vez e dizendo, ao mesmo tempo, quais as unidades representadas por cada um deles.

Solução. 4 dezenas de milhar, 7 unidades de milhar, 5 centenas e 8 unidades.

34. Mesmo exercício com o número 172 839.
35. Mesmo exercício com o número 84 077 366.
36. Mesmo exercício com o número 341 088 729 664.
37. Ler o número 8 793 529, separando-o assim: 8—79—35—29.
38. Idem, separando-o assim: 87—93—52—9.
39. Idem, separando-o assim: 879—3—529.
40. Idem, separando-o assim: 8—793—5—29.
41. Idem, separando-o assim: 8—7—93—529.

42. Quantos são os números constituidos por um algarismo? Qual o menor? E o maior? Quantos algarismos são necessários para escrevê-los?

43. Quantos são os números constituidos por dois algarismos? Qual o menor? E o maior? Quantos algarismos são necessários para escrevê-los?

44. Quantos são os números constituidos por três algarismos? Qual o menor? E o maior? Quantos algarismos são necessários para escrevê-los?

45. Quantos são os números constituidos por quatro algarismos? Qua o menor? E o maior? Quantos algarismos são necessários para escrevê-los?

46. Quantos são os números simples? Qual o menor? E o maior?

47. Quantos são os números compostos? Qual o menor? E o maior?

Exercícios para o quadro-negro

1. Escrever com algarismos uma unidade de 5.ª ordem
2. » » » » » 3.ª »
3. » » » » » 7.ª »
4. » » » » » 2.ª »
5. » » » » » 6. »

6. Escrever com algarismos uma unidade de 1.ª ordem
7. » » » » » » 8.ª »
8. » » » » » » 4.ª »
9. » » » » » » 6.ª »
10. » » » » » » 9.ª »
11. » » » » » » 5.ª »
12. » » » 2 unidades » 3.ª »
13. » » » 5 » » 8.ª »
14. » » » 7 » » 4.ª »
15. » » » 3 » » 5.ª »
16. » » » 8 » » 2.ª »
17. » » » 6 » » 3.ª »

18. Escrever um número constituido por 3 unidades, 7 centenas e 9 unidades de milhar.

19. Escrever um número constituido por 3 unidades de milhar, 5 centenas de milhar e 7 dezenas.

20. Escrever um número constituido por 7 dezenas de milhar, 9 centenas e 8 dezenas.

Exercícios. Série I

1. Quem escreveu desde 1 até 99, quantos algarismos escreveu?

2. Um menino escreveu todos os números de um, dois e três algarismos. Quantos algarismos escreveu?

3. Quantos tipos são necessários para numerar as 87 páginas de um livro, sem empregar duas vezes o mesmo tipo?

4. Um menino escreveu a série dos números naturais, desde 1 até 234. Quantos algarismos escreveu?

5. Um tipógrafo precisou de 159 tipos para numerar as páginas de um livro. Quantas páginas tinha este livro?

6. Quantos tipos são necessários para numerar as 348 páginas de um livro, sem empregar duas vezes o mesmo tipo?

7. Quantos algarismos são necessários para escrever a série dos números naturais desde 50 até 3 500?

8. Um menino escreveu a série dos números inteiros, desde 1 até 4 528. Quantos algarismos escreveu?

9. Um tipógrafo precisou de 1 500 tipos para numerar as páginas de um livro. Quantas páginas tinha este livro?

10. Um menino, escrevendo a série dos números naturais, parou depois de ter escrito 1 008 algarismos. Qual foi o último algarismo escrito?

59. Algarismos romanos. Os algarismos romanos são as letras, I, V, X, L, C, D e M, cujos valores respectivos são **1, 5, 10, 50, 100, 500 e 1 000.**

O quadro que se segue nos mostra como escrever, com algarismos romanos, as unidades simples, as dezenas e as centenas.

100 — C	10 — X	1 — I
200 — CC	20 — XX	2 — II
300 — CCC	30 — XXX	3 — III
400 — CD	40 — XL	4 — IV
500 — D	50 — L	5 — V
600 — DC	60 — LX	6 — VI
700 — DCC	70 — LXX	7 — VII
800 — DCCC	80 — LXXX	8 — VIII
900 — CM	90 — XC	9 — IX

Para escrever um número qualquer de dois ou três algarismos é bastante substituir, neste número, o valor relativo de cada algarismo, pelo valor tirado do quadro acima. Portanto,

35 se escreverá XXXV
89 » » LXXXIX
235 » » CCXXXV
704 » » DCCIV
936 » » CMXXXVI

Os números 1 000, 2 000 e 3 000 serão representados por M, MM e MMM. Entretanto, para escrever 4 000 não poderemos escrever MMMM porque **não se deve reunir mais de três algarismos romanos iguais.** Remove-se então a dificuldade com a seguinte convenção: *colocando-se um traço horizontal sobre um número escrito com algarismos romanos, este número fica multiplicado por mil.* Graças a esta convenção, $\overline{\text{V}}$ significa 5 000, $\overline{\text{XII}}$ significa 12 000, $\overline{\text{CVI}}$ significa 106 000, etc..

60. A adição; definições. *A adição é a operação que tem por fim reunir em um só número as diferentes espécies de unidades de que são formados dois ou mais números.*

Sejam os números 347, 528 e 49. Já sabemos que:

347 = 3 centenas + 4 dezenas + 7 unidades
528 = 5 centenas + 2 dezenas + 8 unidades
49 = 4 dezenas + 9 unidades

A adição tem por fim formar um número que contenha as unidades dos números 347, 528 e 49, assim como as dezenas e as centenas destes mesmos números.

Os números que se somam são chamados *parcelas;* o resultado da adição é chamado *soma.* A adição é indicada pelo sinal + que se lê *mais.*

A palavra *soma* designa tambem a adição apenas indicada ou não efetuada de dois ou mais números. Por exemplo, a expressão 36 + 48 + 256 é tambem chamada *soma.*

61. Algumas propriedades da adição. I. *A ordem das parcelas não influe na soma.* Com efeito, se quisermos reunir em uma única classe, os alunos de 3 classes que contêm respectivamente, 37, 42 e 46 alunos, é evidente que tanto faz reunir a 1.ª classe com a 2.ª e estas duas com a 3.ª, como reunir a 3.ª com a 2.ª e estas duas com a 1.ª; o número de alunos da nova classe será sempre o mesmo.

Dizemos, em Matemática, que **a adição é uma operação comutativa.**

II. *Quando as parcelas são muitas, podemos separá-las em grupos, somar as parcelas de cada um destes grupos, e depois somar as somas parciais obtidas.*

Por exemplo,

$$23 + 51 + 12 + 18 + 43 + 37 = 74 + 30 + 80 = 184$$

Eis por que dizemos, em Matemática, que **a adição é uma operação associativa.**

Para indicar, com maior clareza, que a adição é associativa, podemos recorrer aos *parênteses.*

Os parênteses indicam que devemos considerar o que está dentro deles como *um número único*, resultante das operações indicadas em seu interior.

Por exemplo, 4 + (5 + 6) significa que, ao número 4, devemos somar o número 11, resultado da adição indicada dentro dos parentêses.

Graças aos parênteses, podemos indicar a propriedade associativa da adição, assim :

$$\begin{aligned} 3+4+5+6+7+8+9 &= (3+4)+(5+6)+(7+8)+9 \\ &= (3+4+5)+(6+7+8+9) \text{ etc..} \end{aligned}$$

E, de um modo geral,

$$\begin{aligned} a+b+c+d+e+f &= (a+b)+(c+d)+(e+f) \\ &= (a+b+c)+(d+e+f) \text{ etc..} \end{aligned}$$ (*)

Se é permitido *associar* parcelas, torna-se evidente que é tambem permitido *dissociá-las,* (**) isto é, substituir uma parcela por duas ou mais cuja soma seja igual à parcela que se quer substituir. A dissociação de parcelas nos permite, às vezes, somar mentalmente dois ou mais números dados. Por exemplo,

$$\begin{aligned} 43 + 57 + 64 &= 40 + 3 + 50 + 7 + 60 + 4 \\ &= 40 + 50 + 60 + 3 + 7 + 4 \\ &= 150 + 14 = 164 \end{aligned}$$

III. *As parcelas devem ser quantidades homogêneas.* Por exemplo, 14 laranjas + 25 laranjas + 22 laranjas = 61 laranjas. Entretanto, 25 laranjas + 22 pêssegos = ? E' evidente que não podemos somar 25 laranjas com 22 pêssegos, porque estas quantidades são *heterogêneas.*

IV. *A soma e as parcelas são sempre da mesma espécie.*

V. *Se uma das parcelas aumenta ou diminue, por exemplo, de 36 unidades, a soma tambem aumenta ou diminue destas mesmas 36 unidades.*

Observação. A adição de dois ou mais números naturais *é uma operação sempre possivel, cujo resultado é tambem um número natural,* **único e determinado.**

62. Regra geral da adição. *Para efetuar a adição de dois ou mais números, escrevem-se estes números uns por baixo dos outros, de modo que as unidades de uma mesma ordem se cor-*

(*) Os alunos devem habituar-se, quanto mais cedo possivel, ao emprego das letras, em Aritmética.

(**) Este termo, eu pedí licença para empregá-lo, quando escreví a 1.ª edição do meu *Terceiro Ano de Matemática,* em Janeiro de 1934. Ultimamente tenho-o encontrado em excelentes autores.

respondam, em linhas verticais. Sublinha-se. Em seguida, somam-se as unidades de cada uma das ordens, começando pelas unidades simples. Se a soma das unidades de uma ordem qualquer não exceder de 9, escreve-se esta soma por baixo do traço horizontal; porem, se exceder de 9, então escreve-se somente o que exceder de 10, 20, 30, 40, ... , *etc.. E estas* 10, 20, 30, 40, *etc.. unidades de uma ordem qualquer são convertidas em unidades da ordem imediatamente superior, para serem somadas com elas.*

Como exemplo, vamos somar os números 3 428, 5 917, 839, 6 506 e 827.

$$\begin{array}{r} 3\,428 + \\ 5\,917 \\ 839 \\ 6\,506 \\ 827 \\ \hline 17\,517 \end{array}$$

Somando as unidades acharemos 37. Escrevemos apenas 7 unidades e convertemos as 30 que deixámos de escrever, em 3 dezenas, para somá-las com as dezenas. Somando estas 3 dezenas com as dezenas dos 5 números dados, acharemos 11 dezenas. Escrevemos apenas 1 dezena e convertemos as 10 que deixámos de escrever, em 1 centena, para somá-la com as centenas. Somando esta centena com as centenas dos 5 números dados, acharemos 35 centenas. Escrevemos apenas 5 centenas e convertemos as 30 que deixámos de escrever, em 3 unidades de milhar, para somá-las com as unidades de milhar. Somando estas 3 unidades de milhar com as unidades de milhar dos 5 números dados, acharemos 17 unidades de milhar, soma esta que, por ser a última, escrevemos por inteiro debaixo do traço horizontal.

63. Provas da adição. *Prova de uma operação é uma segunda operação que se faz para verificar a exatidão da primeira.*

A melhor prova da adição consiste em efetuar novamente esta operação, *porem de baixo para cima,* o que é permitido, em virtude da propriedade comutativa da adição. Quer na escola, quer na vida prática, todo o indivíduo que realiza uma adição *deve cuidadosamente somar duas vezes as unidades de cada uma das ordens, primeiro de cima para baixo e depois de baixo para cima.*

Voltando ao exemplo do parágrafo 62, vejamos qual é a melhor maneira de proceder para que tenhamos confiança no resultado da operação. A soma das unidades é 37 ou 3 dezenas mais 7 unidades. Escrevemos as 7 unidades por baixo do traço horizontal e por baixo da coluna das unidades. Quanto às 3 dezenas, escrevemo-las imediatamente no alto da coluna das dezenas, como se vê no exemplo ao lado. Em seguida, somamos novamente as unidades, de *baixo para cima,* para verificar se a soma é realmente igual a 37. Somando as dezenas acharemos 11 dezenas, isto é, 1 centena mais 1 dezena. Escrevemos a dezena por baixo do traço horizontal e por baixo da coluna das dezenas. Quanto à centena (1 centena) escrevemo-la imediatamente no alto da coluna das centenas, como se vê no exemplo ao lado. Em seguida, somamos novamente as dezenas, *de baixo para cima,* para verificar se a soma é realmente igual a 11. E assim por diante.

$$\begin{array}{rrrrl} \underline{3} & \underline{1} & \underline{3} & & \\ 3 & 4 & 2 & 8 & + \\ 5 & 9 & 1 & 7 & \\ & 8 & 3 & 9 & \\ 6 & 5 & 0 & 6 & \\ & 8 & 2 & 7 & \\ \hline 17 & 5 & 1 & 7 & \end{array}$$

Outra prova da adição consiste em somar as unidades de cada uma das ordens, escrever à parte as somas completas e, em seguida, fazer a adição destas somas. O resultado desta última operação deverá ser igual à soma primitiva.

Retomemos o exemplo do parágrafo 62. A soma das unidades de milhar é 14, isto é, 14 000. A soma das centenas é 34, isto é, 3 400. A soma das dezenas é 8, isto é, 80. A soma das unidades é 37. E a soma das somas é igual à soma primitiva. Se as duas somas não fossem iguais, haveria erro, **na operação primitiva ou na prova.**

$$\begin{array}{rr} +\ 3\,428 & 14\,000 \\ 5\,917 & 3\,400 \\ 839 & 80 \\ 6\,506 & 37 \\ 827 & \hline \\ \hline 17\,517 & 17\,517 \end{array}$$

Exercícios orais

Para somar mentalmente dois números, cada um com dois algarismos, é preferivel começar pelas dezenas. Por exemplo, 47 + 35 = (40 + 30) + + (7 + 5) = 70 + 12 = 82. Na prática, diremos (ou pensaremos):

$$40 + 30 + 12 = 82$$

Efetuar as adições que se seguem.

1. 27 + 34
2. 38 + 45
3. 47 + 53
4. 54 + 68
5. 67 + 59
6. 74 + 48
7. 84 + 39
8. 97 + 26
9. 77 + 46
10. 23 + 42 + 58
11. 37 + 56 + 44
12. 74 + 67 + 56

64. A subtração; definições. *A subtração é a operação que tem por fim, dados dois números, tirar do maior tantas uni-*

dades quantas são as unidades do menor. Sejam os números 678 e 253. Decompondo cada um destes números, segundo as diferentes espécies de unidades de que são formados, teremos:

$$678 = 6 \text{ centenas} + 7 \text{ dezenas} + 8 \text{ unidades}$$
$$253 = 2 \text{ centenas} + 5 \text{ dezenas} + 3 \text{ unidades}$$

A subtração tem por fim tirar do número 678, as 253 unidades de que se compõe o núnero 253; ou, então, a subtração tem por fim tirar das 6 centenas, 7 dezenas e 8 unidades do número 678, as 2 centenas, 5 dezenas e 3 unidades de que se compõe o número 253.

O número maior chama-se *minuendo;* o menor, *subtraendo;* o resultado da operação chama-se *resto, excesso* ou *diferença.* A subtração é indicada pelo sinal — que se lê *menos.*

A palavra *diferença* designa tambem a subtração apenas indicada, ou não efetuada, de dois números. Por exemplo, a expressão 25 — 17 é tambem chamada *diferença.*

Da definição da subtração se conclue que o minuendo é igual à soma do subtraendo com o resto. Com efeito, é claro que, sendo 15 menos 7 igual a 8, então 8 mais 7 deve ser igual a 15. Desta observação resulta:

1.º) *A subtração é a operação que tem por fim, dados dois números, achar um terceiro que, somado com o segundo, reproduza o primeiro.*

2.º) *A subtração é a operação que tem por fim, conhecendo a soma de duas parcelas e uma das parcelas, calcular a outra.*

Esta segunda definição nos mostra que a subtração é o inverso da adição. O que *fazemos* na adição, *desfazemos* na subtração; o que *compomos* na adição, *decompomos* na subtração. Eis por que a adição é chamada *operação de composição* e a subtração é chamada *operação de decomposição.* E ambas são denominadas **operações de primeira espécie.**

65. Algumas propriedades da subtração. I. *Somando o mesmo número ao minuendo e ao subtraendo, o resto não se altera.*

Carlos supunha ter 10 cruzeiros. Resolveu comprar um livro de 7 cruzeiros. Ficaria com 3 cruzeiros para comprar doces. Entrando na livraria, verificou porem, que o livro estava custando 11 cruzeiros, isto é, 4 cruzeiros mais do que ele supunha. Carlos ficou desapontado. Entretanto, verificando mais uma vez quanto dinheiro tinha no bolso, teve uma grata surpresa. A sua pequena fortuna era de 14 cruzeiros, isto é, 4 cruzeiros mais do que ele supunha. Então Carlos comprou o livro e saiu da livraria com os 3 cruzeiros destinados à compra de doces. Se o subtraendo, que era o preço do livro, aumentou de 4 cruzeiros, o minuendo, que era o dinheiro de Carlos, tambem aumentou de 4 cruzeiros. Logo, o troco ou o resto não poderia variar. Tudo o que dissemos pode resumir-se no quadro seguinte:

dinheiro de Carlos	Cr. $10,00 + Cr. $4,00 =	Cr. $14,00
preço do livro	Cr. $ 7,00 + Cr. $4,00 =	Cr. $11,00
troco ou resto	Cr. $ 3,00	Cr. $ 3,00

II. *Diminuindo o mesmo número do minuendo e do subtraendo, o resto não se altera.*

III. *Somando um número qualquer ao minuendo, o resto fica aumentado deste mesmo número.*

IV. *Somando um número qualquer ao subtraendo, o resto fica diminuido deste mesmo número.*

V. *Diminuindo um número qualquer do minuendo, o resto fica diminuido deste mesmo número.*

VI. *Diminuindo um número qualquer do subtraendo, o resto fica aumentado deste mesmo número.*

Em resumo: quando o minuendo **aumenta** ou **diminue,** o resto tambem **aumenta** ou **diminue;** quando o subtraendo **aumenta** ou **diminue,** o resto **diminue** ou **aumenta.**

N. B. Estas propriedades devem ser verificadas como a primeira, isto é, por meio de exemplos.

Observação. A subtração de números naturais é uma operação possivel, somente *quando o minuendo é maior que o subtraendo, sendo o resultado um número natural,* único e determinado. Quando o minuendo é igual ao subtraendo, o resto é zero; logo, se a diferença de dois números é igual a zero, os dois números são iguais.

Quando o minuendo é menor que o subtraendo, a subtração não é possivel, *no campo dos números naturais.*

66. Regra geral da subtração. Como primeiro exemplo, vamos diminuir 3 245 de 5 978. De acordo com a definição

$$\begin{array}{r} 5\,978 \\ 3\,245 \\ \hline 2\,733 \end{array}$$

da subtração, diremos: de 8 unidades diminuindo 5, restam 3; de 7 dezenas diminuindo 4, restam 3. E assim por diante.

Às vezes, porem, surge uma dificuldade: um algarismo qualquer do minuendo é menor do que o algarismo correspondente do subtraendo; vejamos como proceder neste caso.

Suponhamos, como segundo exemplo, que precisamos diminuir 3 639 de 7 285. De 5 unidades não podemos diminuir 9. Então juntamos 10 unidades às 5 do minuendo e, para que o resto não se altere, juntamos 1 dezena às 3 do subtraendo, visto que 1 dezena é o mesmo que 10 unidades. (§ 65, I) E diremos: 15 unidades menos 9 unidades, 6 unidades; 8 dezenas menos 4 dezenas, 4 dezenas.

$$\begin{array}{r} 7\,285 \\ 3\,639 \\ \hline 3\,646 \end{array}$$

De 2 centenas não podemos diminuir 6. Então juntamos 10 centenas às 2 do minuendo e, para que o resto não se altere, juntamos 1 unidade de milhar às 3 do subtraendo, visto que 1 unidade de milhar é o mesmo que 10 centenas. E diremos: 12 centenas menos 6 centenas, 6 centenas; 7 unidades de milhar menos 4 unidades de milhar, 3 unidades de milhar.

Podemos agora enunciar a seguinte

Regra geral da subtração. *Para efetuar uma subtração, escreve-se o subtraendo por baixo do minuendo, de modo que as unidades de uma mesma ordem se correspondam em linhas verticais. Em seguida, subtrai-se cada algarismo do subtraendo do algarismo correspondente do minuendo.*

Quando um algarismo qualquer do minuendo é menor do que o algarismo correspondente do subtraendo, juntam-se ao primeiro algarismo, 10 unidades da ordem que ele representa, e junta-se uma unidade ao algarismo do subtraendo que representa unidades da ordem imediatamente superior.

67. Provas da subtração. A melhor prova da subtração consiste em somar o subtraendo com o resto. A soma deve ser igual ao minuendo.

$$\begin{array}{r} 37\,508 \\ 13\,493 \\ \hline 24\,015 \\ \hline 37\,508 \end{array}$$

No exemplo ao lado, o resto somado com o subtraendo reproduz o minuendo. Na prática, é inutil escrever novamente o número 37 508. Quer na escola, quer na vida prática, todo o indivíduo que realiza uma subtração *deve* cuidadosamente verificar a operação feita, somando o subtraendo com o resto.

Outra prova da subtração consiste em substituir o subtraendo pelo resto. O segundo resto deve ser evidentemente igual ao primeiro subtraendo.

$$\begin{array}{r} 37\,508 \\ 24\,015 \\ \hline 13\,493 \end{array}$$

Voltando ao exemplo acima, vamos diminuir o resto obtido, isto é, 24 015, do mesmo minuendo 37 508. O resto é 13 493, isto é, o subtraendo da primeira operação.

Exercícios orais

Nos exercícios que se seguem (*) os estudantes deverão substituir a letra x pelos valores convenientes.

1. $x - 8 = 9$
2. $15 - x = 6$
3. $x - 13 = 16$
4. $30 - x = 17$
5. $x - 15 = 7$
6. $18 - x = 11$
7. $x - 12 = 18$
8. $24 - x = 8$
9. $x - 13 = 12$
10. $23 - x = 12$
11. $x - 15 = 17$
12. $25 - x = 11$
13. $x - 16 = 8$
14. $30 - x = 19$
15. $x - 9 = 21$
16. $26 - x = 17$

Para diminuir mentalmente um número com dois algarismos, de outro número tambem com dois algarismos, é preferivel diminuir primeiramente as dezenas do subtraendo e, depois, as unidades simples. Por exemplo:

$$74 - 37 = 74 - 30 - 7 = 44 - 7 = 37$$

Efetuar as subtrações que se seguem.

17. $75 - 32$
18. $87 - 54$
19. $65 - 48$
20. $59 - 36$
21. $59 - 23$
22. $27 - 18$
23. $62 - 36$
24. $71 - 29$

Para diminuir 9 ou 99 ou 999, etc., é preferivel diminuir 10 ou 100 ou 1 000, etc., e somar um ao resultado. Por exemplo:

$$47 - 9 = 47 - 10 + 1 = 37 + 1 = 38$$

Efetuar as subtrações que se seguem.

25. $37 - 9$
26. $58 - 9$
27. $43 - 99$
28. $215 - 99$
29. $314 - 99$
30. $473 - 99$
31. $3\,526 - 999$
32. $4\,738 - 999$

(*) *Estes exercícios não são equações;* são exercícios muito usados nos cursos primários, para que os estudantes aprendam bem as relações existentes entre o *minuendo*, o *subtraendo* e o *resto*, assim como entre as *parcelas* e a *soma*. A mesma observação se aplica aos exercícios das séries II, IV e V e a outras deste compêndio.

Exercícios. Série II

Determinar o valor de x, nas igualdades que se seguem.

1. $37\,428 - x = 19\,587$
2. $x - 48\,613 = 69\,597$
3. $41\,304 - x = 28\,786$
4. $37\,548 + x = 84\,201$
5. $x + 7\,899 = 10\,001$
6. $2x + 347 = 675$
7. $613 + 2x = 931$
8. $6\,420 - 2x = 3\,578$

N. B. Para responder às questões que se seguem, o aluno deverá efetuar somente uma operação.

9. 734 - 527 = 207. Somando 36 ao minuendo e 27 ao subtraendo, o resto aumenta ou diminue? De quanto?

10. 734 - 527 = 207. Subtraindo 43 do minuendo e 58 do subtraendo, o resto aumenta ou diminue? De quanto?

11. 734 - 527 = 207. Somando 58 ao minuendo e subtraindo 38 do subtraendo, o resto aumenta ou diminue? De quanto?

12. 734 - 527 = 207. Subtraindo 33 do minuendo e somando 47 ao subtraendo, o resto aumenta ou diminue? De quanto?

68. **Expressão aritmética.** Mário resolveu um dia **brincar de banqueiro** com seus companheiros de classe. Iniciou **as suas operações bancárias** com Cr. $10,00. Antônio depositou Cr. $7,00 no **banco.** Entretanto, Benedito **sacou** Cr. $8,00. Carlos, porem, entregou ao banqueiro Cr. $6,00. Mais tarde apareceu Décio que retirou do banco a quantia de Cr. $9,00. Mas, logo em seguida, Ernesto depositou Cr. $12,00 no banco. Finalmente Fábio, quasi na hora de fechar a caixa, retirou Cr. $5,00.

Encerrado o expediente, Mário **o banqueiro**, procedeu à verificação da caixa.

Primeiramente efetuou a seguinte série de operações:

Cr. $10,00 em caixa + Cr. $7,00 de Antônio = Cr. $17,00 em caixa
Cr. $17,00 em caixa — Cr. $8,00 de Benedito = Cr. $9,00 em caixa
Cr. $9,00 em caixa + Cr. $6,00 de Carlos = Cr. $15,00 em caixa
Cr. $15,00 em caixa — Cr. $9,00 de Décio = Cr. $6,00 em caixa
Cr. $6,00 em caixa + Cr. $12,00 de Ernesto = Cr. $18,00 em caixa
Cr. $18,00 em caixa — Cr. $5,00 de Fábio = Cr. $13,00 em caixa

Em seguida, Mário foi à caixa e, verificando a existência dos Cr. $13;00, ficou muito satisfeito com as suas excepcionais qualidades de banqueiro.

As seis operações feitas por Mário podem ser indicadas da seguinte maneira:

$$10 + 7 - 8 + 6 - 9 + 12 - 5$$

Chama-se a isto uma **expressão aritmética.** Portanto, **expressão aritmética é um conjunto de números, separados uns dos outros por sinais que indicam as operações que se devem realizar com estes números.** (*) Consideremos as três expressões aritméticas seguintes:

$$7 + 8 + 5 + 10 + 13$$
$$37 - 24$$
$$10 + 7 - 8 + 6 - 9 + 12 - 5$$

A primeira tem o nome particular de **soma** e a segunda, **diferença;** a terceira não tem nome particular.

69. **Cálculo de uma expressão aritmética.** Consideremos novamente a expressão aritmética que representa o resultado das operações bancárias de Mário, no dia da sua estréia.

Mário, para calcular o saldo existente em caixa, fez **seis** operações; **três** adições e **três** subtrações. Entretanto, se estivesse mais adiantado em Aritmética, faria apenas **três** operações, a saber: **duas** adições e **uma** subtração. Com efeito, deveria **somar** os Cr. $10,00 que já existiam em caixa, com as quantias depositadas por Antônio, Carlos e Ernesto; depois **somar** as quantias retiradas por Benedito, Décio e Fábio; finalmente, **diminuir** a segunda soma da primeira. E' evidente que chegaria ao mesmo resultado, isto é, Cr. $13,00. Podemos então estabelecer a seguinte

Regra. *Para calcular uma expressão aritmética em que entram somente adições e subtrações, isto é,* **operações de primeira espécie,** *somam-se em primeiro lugar as quantidades que devem ser somadas, inclusive a primeira; depois somam-se as quantidades que devem ser diminuidas; em seguida, diminue-se a segunda soma da primeira.*

(*) Aroldo Martini Zuccagni, *Ripetitorio di Matematica,* Manuali Hoepli, pag. 3, 1 934.

Como exercício, vamos calcular o valor da expressão aritmética seguinte:

$$37 - 15 + 28 + 31 - 13 - 19 + 60 - 35$$

Teremos:

$$37 - 15 + 28 + 31 - 13 - 19 + 60 - 35 =$$
$$(37 + 28 + 31 + 60) - (15 + 13 + 19 + 35) =$$
$$156 - 82 = 74$$

Aos números que devem ser somados dá-se o nome de **números aditivos;** aos números que devem ser diminuidos dá-se o nome de **números subtrativos.**

Exercícios. Série III

Calcular as seguintes expressões aritméticas:

1. $375 - 48 + 97 + 89 + 157 - 573 - 21 + 95$.
2. $6\,427 - 3 - 7 - 23 - 297 + 115 - 2\,578 - 3\,496 + 849$.
3. $374 - 596 - 689 + 847 + 587 - 1\,234 - 2\,386 + 8\,879$.
4. $615 + 887 - 1\,236 - 2\,457 + 3\,878 + 4\,959 - 6\,274 + 8\,000$.
5. $7 - 8 + 9 - 10 + 11 - 12 + 13 - 14 + 15 - 16 + 17 - 18 + 19 - 20 + 7$.
6. $20 - 11 + 12 - 13 + 14 - 15 - 16 + 40$.

70. Igualdade. Consideremos as expressões aritméticas seguintes:

$$4 + 7 + 11 - 6 \quad \text{e} \quad 30 - 18 + 9 - 5$$

Se calcularmos estas duas expressões aritméticas (§ 69), acharemos para ambas o mesmo valor, isto é, 16. Dizemos em Aritmética que estas duas expressões, embora formadas de números diferentes, **são iguais,** e podemos escrever:

$$4 + 7 + 11 - 6 = 30 - 18 + 9 - 5$$

A este conjunto constituido por duas expressões aritméticas que, sendo calculadas, conduzem ao mesmo resultado, dá-se o nome de **igualdade.**

A primeira expressão, isto é, **aquela que fica à esquerda** do sinal de igualdade (= , igual) chama-se **primeiro membro da igualdade.** A segunda expressão, isto é, **aquela que fica à direita** do sinal de igualdade, chama-se **segundo membro da igualdade.**

Igualdade é o conjunto constituido por duas expressões aritméticas que, sendo calculadas, conduzem ao mesmo resultado. (Aroldo Martini Zuccagni, obra citada, pag. 37)

Convem conhecer, desde já, algumas propriedades das igualdades. Por exemplo, sendo

$$5 \times 6 = 10 \times 3$$

é evidente que

$$5 \times 6 + 7 = 10 \times 3 + 7$$
$$5 \times 6 - 8 = 10 \times 3 - 8$$

isto é;

Somando o mesmo número a ambos os membros de uma igualdade, ou deles diminuindo o mesmo número, **as duas somas ou as duas diferenças continuam a formar uma igualdade.**

Exercícios. Série IV

1. Na igualdade $37 + 48 + x = 120$, qual é o valor de x?
2. Na igualdade $54 + 46 = x + 38$, qual é o valor de x?
3. Um operário trabalhou desde o dia 23 de março até o dia 28 de novembro. Quantos dias trabalhou?
4. Um automovel percorre 42 quilômetros na primeira hora; na segunda percorre 8 quilômetros mais do que na primeira; na terceira percorre 8 quilômetros mais do que na segunda, e assim por diante. Qual é o espaço percorrido em 10 horas?
5. Dois sócios constituiram um capital de Cr. \$80 000,00. O primeiro entrou com Cr. \$54 700,00. Qual é a diferenca entre os capitais de ambos?
6. Se eu tivesse mais Cr. \$548,00, poderia comprar um automovel de Cr. 7 236,00 e ficaria com Cr. \$329,00. Quanto tenho?
7. Dois meninos ganharam Cr. \$87,90. Se um deles ganhou Cr. \$49,76 quanto ganhou mais do que o outro?
8. José tinha Cr. \$87,60. Comprou alguns livros por Cr. \$48,50, deu Cr. \$28,40 a Pedro e o restante a Raul. Quanto ganhou Pedro mais do que Raul?

71. A multiplicação; definições. *A multiplicação de um número inteiro, por outro número tambem inteiro, é a operação que tem por fim efetuar uma adição de tantas parcelas iguais ao primeiro, quantas são as unidades do segundo.* Isto quer dizer que multiplicar 47 por 5 é o mesmo que calcular a soma de 5 parcelas iguais a 47.

$$47 \times 5 = 47 + 47 + 47 + 47 + 47 \quad \therefore \quad 47 \times 5 = 235$$

A multiplicação é indicada pelo sinal × que se lê *multiplicado por* ou então *vezes*. Logo, 47 × 5 quer dizer 47 *multiplicado por* 5 ou 47 *vezes* 5.

O número que se multiplica chama-se *multiplicando;* o número pelo qual se multiplica chama-se *multiplicador;* o resultado da operação chama-se *produto.*

A palavra *produto* designa tambem a multiplicação apenas indicada, não efetuada, de dois números. Por exemplo, a expressão aritmética 7 × 8 tem o nome particular de *produto.*

Da definição da multiplicação (de números inteiros) se conclue que a multiplicação é uma adição de parcelas iguais. O multiplicando representa uma das parcelas; o multiplicador representa o número de parcelas; o produto representa a soma.

O multiplicando e o multiplicador são chamados *fatores.* Um produto pode ser constituido por dois ou mais fatores. A expressão aritmética 7×5×8×4×6 é um produto, cujo valor se obtem multiplicando 7 por 5, em seguida multiplicando o resultado por 8, depois multiplicando o novo resultado por 4, e finalmente, multiplicando este último resultado por 6.

Há uma diferença essencial entre parcelas e fatores. **Parcelas** são números que se somam e **fatores** são números que se multiplicam. Consideremos a seguinte igualdade:

$$3 \times 4 \times 5 \times 7 = 57 + 64 + 86 + 213$$

O primeiro membro é um **produto;** o segundo membro é uma **soma.** No primeiro membro todos os números são **fatores;** no segundo membro todos os números são **parcelas.**

Observações. Quando o multiplicador é 1, o produto é igual ao multiplicando. Com efeito, 3 × 1 é, por definição, igual a 3. Quando o multiplicando é 1, o produto é igual ao multiplicador. Com efeito, 1 × 3 = 1 + 1 + 1 = 3. Quando o multiplicando é igual a *zero*, o produto é tambem igual a *zero;* é *nulo.* Com efeito, 0 × 3 = 0 + 0 + 0 = 0. Em geral, quando um dos fatores é *nulo*, o produto *tambem* é nulo:

$$5 \times 0 = 0 \qquad \times 0 = 0 \qquad 3 \times 0 \times 4 \times 5 = 0$$

Exercícios orais

1. Desenvolver a expressão 7 × 5.

Solução. $7 \times 5 = 7 + 7 + 7 + 7 + 7$

2. Contrair a expressão 8 + 8 + 8 + 8 + 8

Solução. $8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 8 \times 5$

3. Desenvolver a expressão 13 × 7.
4. Contrair a expressão 6 + 6 + 6 + 6 + 6.
5. Desenvolver a expressão 3 × 8.
6. Contrair a expressão 10 + 10 + 10 + 10 + 10.

72. Algumas propriedades da multiplicação. I. *Em um produto constituido por dois fatores, podemos inverter a ordem dos mesmos, sem que o valor do produto se altere.*

1 + 1 + 1
1 + 1 + 1
1 + 1 + 1
1 + 1 + 1
1 + 1 + 1

Vamos provar que 3 × 5 = 5 × 3. Já sabemos que 3 × 5 significa uma soma de 5 parcelas iguais a 3, isto é, 3 + 3 + 3 + 3 + 3. (§71) No quadro ao lado cada linha horizontal representa cada uma das parcelas. Portanto, para saber quanto é 3 × 5, basta contar todas as unidades deste quadro. Contando por linhas horizontais, temos 3 + 3 + 3 + 3 + 3, isto é, 3 × 5. Contando por linhas verticais temos 5 + 5 + 5, isto é, 5 × 3. Mas, tanto faz contar por linhas verticais como por linhas horizontais; o número de unidades do quadro é sempre o mesmo. Logo,

$$3 \times 5 = 5 \times 3$$

E, de um modo geral podemos escrever:

$$\boxed{a \times b = b \times a} \ (*)$$

II. *Em um produto constituido por três fatores, podemos inverter a ordem dos dois últimos, sem que o valor do produto se altere.*

(*) Aqui temos mais uma oportunidade para conversar com os nossos alunos, sobre o cálculo literal.

Vamos provar que $3 \times 4 \times 6 = 3 \times 6 \times 4$. A nossa figura é um bloco retangular constituido por muitos cubos. Vamos contá-los. A primeira camada horizontal inferior tem *três* carreiras. cada uma com *quatro* cubos. Portanto, tem 3×4 cubos

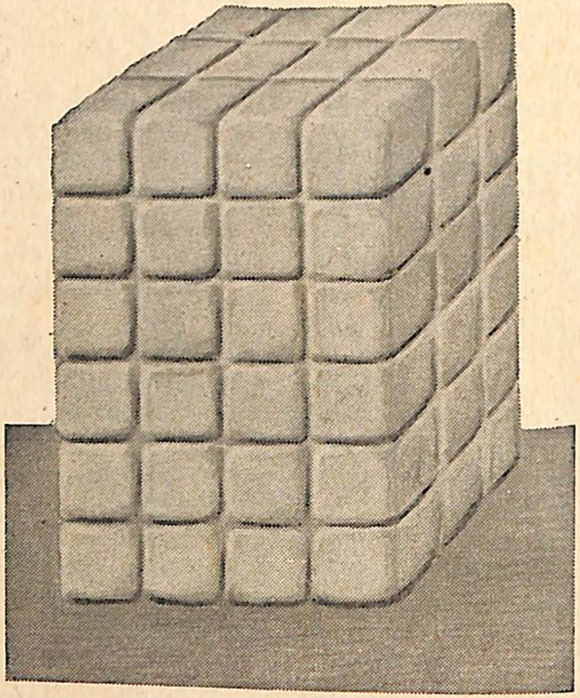


Fig. 55

E, como as camadas horizontais são *seis*, o número total de cubos, é $3 \times 4 \times 6$.

A primeira camada vertical, à esquerda, tem *três* colunas, cada uma com *seis* cubos. Portanto, tem 3×6 cubos. E, como as camadas verticais são *quatro*, o número total de cubos é $3 \times 6 \times 4$. Mas, quer contemos os cubos de um modo, quer os contemos de

outro, o número total deles é sempre o mesmo. Logo, $3 \times 4 \times 6 = 3 \times 6 \times 4$. E, de um modo geral, podemos escrever:

$$\boxed{a \times b \times c = a \times c \times b}$$

Para calcular o produto $3 \times 6 \times 4$, tanto faz multiplicar 3 por 6 e, depois, multiplicar o resultado por 4, como multiplicar 6 por 3 e, depois, multiplicar o resultado por 4. Logo,

$$3 \times 4 \times 6 = 3 \times 6 \times 4 = 6 \times 3 \times 4$$

E, de um modo geral,

$$\boxed{a \times b \times c = a \times c \times b = c \times a \times b}$$

Estamos vendo, portanto, que num produto constituido por três fatores, podemos fazer com que o último fator fique em segundo lugar, ou em primeiro. Como se pode fazer o mesmo com qualquer um dos três fatores, concluimos que, *num produto constituido por três fatores, podemos inverter, à vontade, a ordem dos mesmos, sem que o valor do produto se altere.*

Facilmente se pode provar que esta verdade se aplica a um produto constituido por qualquer número de fatores. Logo, *a multiplicação é, como a adição,* **uma operação comutativa.**

III. *Em um produto constituido por qualquer número de fatores, podemos substituir dois ou mais destes fatores, pelo seu produto efetuado.*

Seja o produto $3 \times 5 \times 4 \times 6 \times 7$. Nele podemos substituir 5×6 pelo seu produto, 30. Com efeito, a multiplicação sendo comutativa, podemos escrever:

$$3 \times 5 \times 4 \times 6 \times 7 = 5 \times 6 \times 3 \times 4 \times 7$$

No segundo membro desta igualdade, é evidente que podemos substituir os dois primeiros fatores, 5 e 6, pelo seu produto efetuado, 30. Logo

$$3 \times 5 \times 4 \times 6 \times 7 = 30 \times 3 \times 4 \times 7$$

E lembrando mais uma vez que a multiplicação é comutativa, teremos:

$$3 \times 5 \times 4 \times 6 \times 7 = 3 \times 30 \times 4 \times 7$$

Logo, a multiplicação é, como a adição, **uma operação associativa.**

Se a multiplicação é *associativa*, é tambem *dissociativa.* Assim é que, em lugar de 25×12, podemos escrever 25×4×3 ou 12×5×5. Esta dissociação de fatores nos permite efetuar mais facilmente certos produtos. Por exemplo,

$$25 \times 12 = 25 \times 4 \times 3 = 100 \times 3 = 300$$
$$25 \times 12 = 12 \times 5 \times 5 = 60 \times 5 = 300$$

IV. Se quisermos multiplicar mentalmente 24 por 7, podemos decompor 24 em duas parcelas, 20 + 4, multiplicar cada uma das parcelas por 7, e somar os resultados. Assim,

$$24 \times 7 = (20 + 4) \times 7 = 20 \times 7 + 4 \times 7 = 140 + 28 = 168$$

Podemos verificar que este processo de cálculo é legitimo, com a figura 56, a qual nos mostra claramente que:

$$9 \times 3 = (5 + 4) \times 3 = 5 \times 3 + 4 \times 3 = 15 + 12 = 27$$

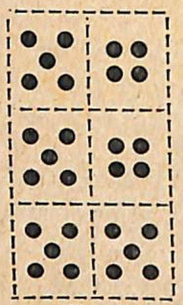


Fig. 56

Portanto, *para multiplicar uma soma por um número, podemos multiplicar cada uma das parcelas por este número e, em seguida, somar os resultados.* E aprendemos assim, mais uma propriedade da multiplicação, isto é, *a multiplicação é uma operação distributiva em relação à adição.*

Observação. E' facil explicar o significado da palavra *distributiva.* Para calcular a expressão (456 + 578 + 729 + + 853) × 648, o professor pode *distribuir* a tarefa entre quatro alunos, isto é, encarregar um dos alunos de calcular 456 × 648; dizer a outro que calcule 578 × 648; etc.. Em seguida, recebendo os quatro produtos, soma-os e terá o valor da expressão dada.

V. *O multiplicando é, em geral, um número concreto e o multiplicador é, em geral, um número abstrato.*

Queremos saber quanto custam 9 frangos a Cr. $4,50 (*) cada um. Temos de efetuar uma soma de 9 parcelas iguais a Cr. $4,50 ou multiplicar Cr. $4,50 por 9. O multiplicando é um número concreto, é **4 cruzeiros e 50 centavos.** O multiplicador é um número abstrato, é **nove,** não é **nove frangos;** o multiplicador **nove** está apenas indicando quantas vezes o número **Cr. $4,50** deve ser tomado como parcela. Seria um absurdo escrever **Cr. $4,50 × 9 frangos.**

VI. *O produto e o multiplicando são sempre da mesma espécie.* Assim deve ser, visto que a soma e as parcelas são sempre da mesma espécie. No exemplo acima, o produto, isto é, o preço dos 9 frangos é Cr. $40,50.

73. Regra geral da multiplicação. Suponhamos que é preciso calcular o seguinte produto: 3 476 × 548. De acordo com a definição da multiplicação, é bastante efetuar a adição de 548 parcelas iguais ao número 3 746. Entretanto, esta adição pode ser abreviada de acordo com a seguinte

Regra. *Para multiplicar um número inteiro (natural) por outro número inteiro (natural), escreve-se o multiplicador por baixo do multiplicando, como se faz na adição. Em seguida, multiplica-se todo o multiplicando por cada um dos algarismos do multiplicador, tendo, porem, o cuidado de escrever o primeiro algarismo de cada produto parcial debaixo do algarismo correspondente do multiplicador. Depois somam-se todos os produtos parciais.*

Vamos multiplicar 3 476 por 548.

$$
\begin{array}{rl}
\text{fatores}\left\{\begin{array}{r} 3\,476 \\ \times 548 \end{array}\right. & \begin{array}{l} \longrightarrow \text{multiplicando} \\ \longrightarrow \text{multiplicador} \end{array} \\
\hline
27\,808 & \longrightarrow \text{produto parcial} \\
139\,04 & \longrightarrow \text{produto parcial} \\
1\,738\,0 & \longrightarrow \text{produto parcial} \\
\hline
1\,904\,848 & \longrightarrow \text{produto}
\end{array}
$$

Quando o multiplicador tem mais algarismos do que o multiplicando, é preferivel inverter a ordem dos fatores. Em lugar de calcular o produto de 37 por 4 589, calculamos o produto de

---

(*) Leia-se 4 cruzeiros e 50 centavos.

4 589 por 37, o que é a mesma coisa, em virtude da propriedade comutativa da multiplicação.

Quando o multiplicador contem zeros, os produtos parciais correspondentes a estes zeros são nulos e, portanto, é inutil escrevê-los. E' o que se verifica com o seguinte exemplo:

$$\begin{array}{r} 37\,548 \\ \times 20\,703 \\ \hline 112\,644 \\ 000\,00 \\ 26\,283\,6 \\ 00\,000 \\ 750\,96 \\ \hline 777\,356\,244 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 37\,548 \\ \times 20\,703 \\ \hline 112\,644 \\ 26\,283\,6 \\ 750\,96 \\ \hline 777\,356\,244 \end{array}$$

Quando um dos fatores ou os dois têm um ou mais zeros, à direita, efetua-se a multiplicação como se estes zeros não existissem. Em seguida, escrevem-se à direita do produto tantos zeros quantos são os zeros dos dois fatores. A disposição da operação é a seguinte:

$$\begin{array}{r} 37600 \\ \times\ 43 \\ \hline 1128 \\ 1504 \\ \hline 1616800 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4957 \\ \times\ 3400 \\ \hline 19828 \\ 14871 \\ \hline 16853800 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 43700 \\ \times\ 60 \\ \hline 2622000 \end{array}$$

Exercícios em classe

1. 37 × 20 =
2. 40 × 30 =
3. 52 × 40 =
4. 70 × 56 =
5. 80 × 70 =
6. 65 × 30 =
7. 320 × 40 =
8. 510 × 630 =
9. 720 × 400 =
10. 250 × 700 =
11. 800 × 458 =
12. 930 × 560 =
13. 2 300 × 570 =
14. 6 400 × 800 =
15. 7 000 × 440 =
16. 5 000 × 586 =
17. 7 074 × 605 =
18. 3 296 × 7 000 =

74. Provas da multiplicação. Para tirar a prova de uma multiplicação, inverte-se a ordem dos fatores e repete-se a operação. O segundo produto deverá ser igual ao primeiro.

Aprenderemos mais tarde outras provas da multiplicação.

Observação. A multiplicação de dois números naturais é uma adição abreviada: 25 × 3 = 25 + 25 + 25. Ora, a adição de números naturais, sendo sempre possivel, e dando como resultado um número natural, único e determinado, concluimos que:

A multiplicação de números naturais é sempre possivel, e dá como resultado um número natural, **único e determinado.**

Exercícios orais

I. Para multiplicar um número inteiro por 10, 100, 1 000, etc., é bastante escrever um, dois, três, etc., zeros à direita deste número.

II. Para multiplicar um número de dois algarismos, por um número simples, é preferivel multiplicar primeiramente as dezenas pelo numero simples, depois as unidades, e somar os dois produtos parciais. Por exemplo: 37 × 4 = ? Para efetuar esta multiplicação, diremos: 30 × 4 = 120; 120 + 28 = 148.

III. Para multiplicar um número inteiro com dois algarismos, por um numero simples seguido de zeros, multiplicamos o inteiro pelo numero símples e, à direita do produto, escrevemos tantos zeros quantos são os zeros do multiplicador. Por exemplo; 47 × 3 000 = ? 47 × 3 = 141; 47 × 3 000 = 141 000.

IV. Multiplicar um número por 10 é efetuar uma adição de 10 parcelas iguais a este número; multiplicá-lo por 5 é efetuar uma adição de 5 parcelas. Portanto, para multiplicar um número por 5, podemos multiplicá-lo primeiramente por 10 e, em seguida, dividir o produto por 2. Assim,

$$37 \times 5 = 37 \times 10 \div 2 = 370 \div 2 = 185$$

V. Para multiplicar por 11, um número de dois algarismos, podemos adotar um processo interessante. Por exemplo; 34 × 11 = ? A soma dos valores absolutos dos algarismos 3 e 4 é 7; colocamos o 7 entre o 3 e o 4 e teremos o produto de 34 por 11; 34 × 11 = 374. E 68 × 11 = ? Somamos igualmente os algarismos 6 e 8; esta soma é 14; neste caso, escrevemos 4 entre 6 e 8 e aumentamos uma unidade às 6 centenas. Assim, 68 × 11 = 748.

Calcular mentalmente os produtos abaixo indicados.

1. 47 × 10
2. 325 × 10
3. 84 × 100
4. 93 × 1000
5. 764 × 100
6. 53 × 7
7. 48 × 6
8. 75 × 4
9. 37 × 8
10. 83 × 3
11. 36 × 20
12. 74 × 30
13. 85 × 40
14. 67 × 50
15. 49 × 60
16. 55 × 70
17. 83 × 40
18. 27 × 90
19. 47 × 60
20. 73 × 5
21. 23 × 5
22. 34 × 5
23. 45 × 5
24. 56 × 5
25. 74 × 5
26. 29 × 5
27. 23 × 11
28. 34 × 11
29. 42 × 11
30. 53 × 11
31. 74 × 11
32. 47 × 5
33. 86 × 11
34. 73 × 5
35. 37 × 4
36. 76 × 11
37. 84 × 5
38. 66 × 11
39. 38 × 5
40. 44 × 7

75. A divisão; definições. 1.º problema. *Uma senhora distribuiu 10 750 cruzeiros por 25 pobres. Quanto recebeu cada um?*

Para resolver este problema, é necessário repartir 10 750 cruzeiros em 25 partes iguais. Cada uma das partes obtidas é a quantia que toca a cada pobre.

$$\begin{array}{r|l} 10\,750 & \underline{25} \\ 75 & 430 \\ 00 & \end{array}$$

R. 430 cruzeiros

A operação que se faz para saber quanto deve receber cada pobre é chamada divisão. Portanto, *a divisão é a operação que tem por fim repartir um número em partes iguais.*

2.º problema. *Um criador gastou 10 750 cruzeiros em carneiros que comprou a 25 cruzeiros cada um. Quantos carneiros comprou?*

Para resolver este problema, é necessário calcular quantas vezes a quantia 10 750 cruzeiros contem a quantia 25 cruzeiros. O número obtido representa, evidentemente, o número de carneiros.

$$\begin{array}{r|l} 10\,750 & \underline{25} \\ 75 & 430 \\ 00 & \end{array}$$

R. 430 carneiros

A operação que se faz para verificar quantas vezes a quantia 10 750 cruzeiros contem a quantia 25 cruzeiros, isto é, para saber qual o número de carneiros, é chamada divisão. Portanto, *a divisão é a operação que tem por fim verificar quantas vezes um número está contido em outro.*

O primeiro número chama-se **dividendo**; o segundo, **divisor**; o resultado, **quociente.**

De acordo com os dois problemas acima expostos, conclue-se que **a divisão tem dois fins diferentes.**

Se o dividendo e o divisor **são quantidades heterogêneas (1.º problema)**, a divisão tem o fim especial de repartir um numero em partes iguais. **E o quociente é sempre da mesma espécie do dividendo.**

Se o dividendo e o divisor **são quantidades homogêneas (2.º problema)**, a divisão tem o fim especial de verificar quantas vezes um número está contido em outro. **E o quociente é sempre de espécie diferente do dividendo;** a espécie de unidades representada pelo quociente depende do problema.

Voltando ao primeiro problema, a quantia que cada pobre recebeu, a saber, 430 cruzeiros, sendo multiplicada pelo número de pobres, a saber, 25, deve reproduzir evidentemente a quantia distribuida, isto é, 10 750 cruzeiros.

Voltando ao segundo problema, o número de carneiros, a saber, 430, sendo multiplicado pelo preço de cada carneiro, a saber, 25 cruzeiros, deve reproduzir evidentemente o preço de todos os carneiros, isto é, 10 750 cruzeiros.

Ora, desde que em ambos os casos, o quociente multiplicado pelo divisor reproduz o dividendo, conclue-se que:

A divisão é a operação que tem por fim, dados dois números, achar um terceiro que, multiplicado pelo segundo, reproduza o primeiro.

Esta é a definição geral da divisão.

A divisão é indicada pelo sinal ÷ ou por dois pontos.

Portanto, 24 ÷ 8 ou 24 : 8 significam a mesma coisa, isto é, **24 dividido por 8.**

Sendo o produto de dois números naturais maior que o multiplicando ou o multiplicador, (ou igual a um deles, se o outro fator é a unidade) resulta que a divisão de um número natural por outro número natural é possivel, quando o dividendo é maior que o divisor ou, no mínimo, igual ao divisor. Entretanto, *se esta condição é* **necessária,** *não é* **suficiente,** isto é, não é bastante. Isto quer dizer que, dados dois números, a e b, sendo $a > b$ (ou $a = b$) nem sempre existe um terceiro número, q, o qual, multiplicado por b, reproduza o número a. Por exemplo, qual o quociente da divisão de 26 por 8? Não é 3, porque $3 \times 8 = 24$; não é 4, porque $4 \times 8 = 32$. E então?

76. Divisão exata e divisão aproximada. Quando são dados dois números naturais **a** e **b**, e existe um terceiro número, **q**, o qual multiplicado por **b**, reproduz o número **a**, dizemos que *a divisão de* **a** por **b** *é exata.* Por exemplo, a divisão de 36 por 4 é exata.

Mas, quando não existe um terceiro número, **q**, o qual, multiplicado pelo número **b**, reproduza o número **a**, dizemos que *a divisão de* **a** por **b** *é aproximada.* Por exemplo, a divisão de 37 por 4 é aproximada.

Tomando um número qualquer, 11, e multiplicando-o sucessivamente por cada um dos números da série dos números naturais, todos os produtos obtidos, isto é,

$$11 \times 0,\ 11 \times 1,\ 11 \times 2,\ 11 \times 3,\ 11 \times 4,\ 11 \times 5,\ 11 \times 6,$$

são chamados **múltiplos** de 11.

Quando a divisão é exata, *o dividendo é um* **múltiplo** *do divisor.* Seja 55 o dividendo, e 11 o divisor. O quociente exato da divisão de 55 por 11 é 5, porque 55 é múltiplo de 11.

Quando a divisão é aproximada, *o dividendo não é um* **múltiplo** *do divisor.* Seja 58 o dividendo, e 11 o divisor. Não sendo 58 um múltiplo de 11, a divisão de 58 por 11 não pode ser exata; não existe um terceiro número que, multiplicado por 11, reproduza o número 58. Com efeito, 11 × 5 = 55 e 11 × 6 = 66. Quando tal acontece, *devemos tomar como quociente* **o maior número** *que, multiplicado pelo divisor, dá um produto inferior ao dividendo.* No caso da divisão de 58 por 11, diremos que o quociente é 5, e daremos a este quociente o nome de *quociente aproximado* ou **quociente incompleto.**

Em resumo:

> ***Quociente exato*** **de dois números naturais a e b, sendo $a > b$ (ou $a = b$) é um terceiro número natural q, o qual, multiplicado pelo número b reproduz o número a.**

> ***Quociente incompleto*** **de dois números naturais a e b, sendo $a > b$ é um terceiro número natural q, o qual, multiplicado pelo número b dá um produto inferior ao número a.**

77. O resto de uma divisão; igualdades fundamentais. A divisão de 58 por 11 não é exata; é aproximada. O quociente incompleto é 5. Ora, 5 × 11 = 55 e 58 − 55 = 3. A este número, 3, damos o nome de **resto** da divisão aproximada.

Resto *de uma divisão aproximada é a diferença que existe entre o* **dividendo** *e o produto do* **divisor** *pelo* **quociente.** Donde resulta que, no caso da divisão aproximada, teremos sempre:

dividendo = divisor × quociente + resto
(resto < divisor)

No caso da divisão exata teremos sempre:

dividendo = divisor × quociente

Finalmente, representando o dividendo por D, o divisor por d, o quociente por q e o resto por r, podemos escrever abreviadamente:

$$\boxed{D = d \times q + r \qquad (r < d)}$$

Observações. I. Da definição dada para a divisão *exata*, resulta que esta operação é o inverso da multiplicação. O que *fazemos* na multiplicação, *desfazemos* na divisão; o que *compomos* na multiplicação, *decompomos* na divisão. Eis por que a multiplicação é chamada *operação de composição* e a divisão é chamada *operação de decomposição*. E ambas são denominadas **operações de segunda espécie.**

II. A divisão nem sempre é possivel no campo dos números naturais. No caso da divisão aproximada, devemos aceitar, por enquanto, o quociente incompleto. Entretanto, veremos mais tarde que, mesmo neste caso, *existe sempre um terceiro número que, multiplicado pelo segundo, reproduz o primeiro;* mas, **não será um número natural.**

III. De 5 × 1 = 5, resulta que 5 ÷ 5 = 1 e 5 ÷ 1 = 5, isto é, *quando o divisor é a unidade, o quociente é igual ao dividendo; quando o dividendo e o divisor são iguais, o quociente é a unidade.*

De 7 × 0 = 0, resulta que 0 ÷ 7 = 0, isto é, *se o dividendo é zero, e o divisor é diferente de zero, o quociente é zero.*

Dividir um número qualquer, 7, por *zero*, é um absurdo, porque não existe um terceiro número que, multiplicado por *zero*, dê 7; *zero* multiplicado por um número qualquer, dá sempre *zero*.

De um modo geral:

$$n \div 1 = n$$
$$n \div n = 1$$
$$0 \div n = 0$$

$$n \div 0 = ?$$

Operação impossivel

78. Algumas propriedades da divisão. I. *A divisão sendo exata, se multiplicarmos o dividendo e o divisor por um mesmo número, o quociente não se altera.*

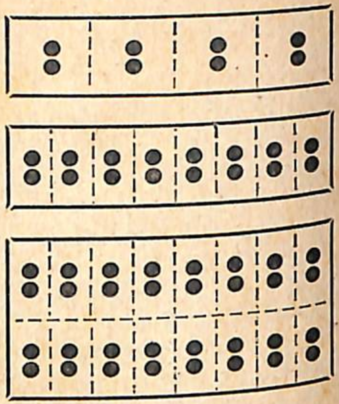


Fig. 57

Se dividirmos 8 letras em 4 grupos (8 ÷ 4) cada grupo conterá **duas letras**; 8 ÷ 4 = 2.

Duplicando o número de letras e o número de grupos, isto é, distribuindo 8 × 2 letras em 4 × 2 grupos, (16 ÷ 8) cada grupo conterá **duas letras**; 16 ÷ 8 = 2.

Triplicando o número de letras e o número de grupos, isto é, distribuindo 8 × 3 letras em 4 × 3 grupos, (24 ÷ 12) cada grupo conterá **duas letras**; 24 ÷ 12 = 2.

E assim por diante. Evidentemente, *no caso de uma divisão exata, tambem podemos dividir o dividendo e o divisor por um mesmo número, sem que o quociente se altere.*

II. *A divisão sendo aproximada, se multiplicarmos o dividendo e o divisor por um mesmo número, o quociente não se altera,* **mas o resto fica multiplicado por este mesmo numero.**

Se dividirmos 11 por 4, o quociente incompleto é 2, e o resto é 3.

Se dividirmos 11 × 2 por 4 × 2, o quociente incompleto é 2, e o resto é 3 × 2.

Se dividirmos 11 × 3 por 4 × 3, o quociente incompleto é 2, e o resto é 3 × 3.

E assim por diante.

No caso de uma divisão aproximada, se dividirmos o dividendo e o divisor por um mesmo número, o quociente não se altera, **mas o resto fica dividido por este mesmo número.**

III. *O resto é sempre da mesma espécie do dividendo.* Havendo resto, o dividendo é igual ao produto do divisor pelo quociente, somado com o resto, isto é:

dividendo = divisor × quociente + resto (§ 77)

Portanto, o dividendo é uma soma de duas parcelas. Ora, sendo a soma da mesma espécie das parcelas, conclue-se que o resto é sempre da mesma espécie do dividendo.

Por exemplo, repartindo laranjas, só podem sobrar laranjas; distribuindo cruzeiros, só podem sobrar cruzeiros; *se dividirmos 12 dezenas por 5, o quociente incompleto é 2 dezenas e restam 3 dezenas, etc..*

79. Regra geral da divisão. *Para dividir um número por outro, separam-se no dividendo, à esquerda, tantos algarismos quantos sejam necessários para formar um número que contenha o divisor no mínimo,* **uma vez** *e no máximo,* **nove vezes.** *A parte assim destacada constitue* **o primeiro dividendo parcial.** *Divide-se o primeiro dividendo parcial pelo divisor e obtem-se o primeiro algarismo do quociente. Multiplica-se este algarismo pelo divisor e subtrai-se o produto do primeiro dividendo parcial. Ao lado do resto escreve-se o algarismo do dividendo que está à direita do primeiro dividendo parcial, formando-se o segundo dividendo parcial. Divide-se o segundo dividendo parcial pelo divisor e obtem-se o segundo algarismo do quociente. Multiplica-se este algarismo pelo divisor e subtrai-se o produto do segundo dividendo parcial. E assim por diante, até baixar todos os algarismos do dividendo.*

3 750 ÷ 250

$$\begin{array}{r|l} 375 & 25 \\ \cline{2-2} 125 & 15 \\ 0 & \end{array}$$

3 470 ÷ 250

$$\begin{array}{r|l} 347 & 25 \\ \cline{2-2} 097 & 13 \\ 22 & \end{array}$$

Quando o dividendo e o divisor tem um ou mais zeros, à direita, podemos simplificar a operação, suprimindo o mesmo número de zeros, à direita dos dois números dados.

No 1.º exemplo, em lugar de dividir 3 750 por 250, podemos dividir 375 por 25. (§ 78, I) A divisão é exata e o quociente exato é 15.

No 2.º exemplo, em lugar de dividir 3 470 por 250, podemos dividir 347 por 25. A divisão é aproximada, e o quociente incompleto é 13. Mas, o resto verdadeiro não é 22; é 22 × 10, isto é, 220. (§ 78, II)

80. Provas da divisão. Para tirar a prova de uma divisão sem resto, é bastante multiplicar o quociente pelo divisor. O produto deverá ser igual ao dividendo.

Havendo resto, é preciso multiplicar o quociente pelo divisor e somar o produto com o resto. A soma deverá ser igual ao dividendo.

81. Multiplicação e divisão por 10, 100, 1 000, etc.. Já vimos (§ 58) como se multiplica um número inteiro qualquer por 10, 100, 1 000, etc.. Por exemplo, $57 \times 10 = 570$, $32 \times 100 = 3\,200$, $84 \times 1\,000 = 84\,000$, etc.. Inversamente, se um número tem zeros à direita, e queremos dividí-lo por 10, 100, 1 000, etc., é bastante suprimir um, dois, três, etc., zeros à direita. Por exemplo $350 \div 10 = 35$, $4\,700 \div 100 = 47$, $81\,000 \div 1\,000 = 81$, etc..

Exercícios orais

1. $3 \times 10 =$
2. $47 \times 100 =$
3. $9 \times 1\,000 =$
4. $750 \div 10 =$
5. $6\,300 \div 100 =$
6. $27\,000 \div 1\,000 =$
7. $6\,400 \div 10 =$
8. $3 \times 100 =$
9. $72\,000 \div 100 =$

A divisão de um número natural por um núnero dígito pode ser feita mentalmente. Efetuar as divisões que se seguem, dizendo qual o resto, se o quociente for incompleto.

10. $3\,746 \div 2$
11. $5\,893 \div 2$
12. $6\,478 \div 2$
13. $7\,379 \div 2$
14. $3\,385 \div 3$
15. $7\,684 \div 4$
16. $2\,573 \div 5$
17. $6\,753 \div 5$
18. $1\,237 \div 6$
19. $3\,216 \div 4$
20. $5\,674 \div 5$
21. $4\,366 \div 7$
22. $3\,107 \div 3$
23. $1\,624 \div 4$
24. $1\,507 \div 5$
25. $4\,137 \div 3$

Dizer o primeiro algarismo, à esquerda, do quociente das divisões abaixo indicadas.

26. $3\,756 \div 47$
27. $4\,887 \div 56$
28. $2\,133 \div 68$
29. $5\,742 \div 77$
30. $6\,840 \div 88$
31. $2\,497 \div 29$
32. $3\,875 \div 39$
33. $4\,567 \div 59$
34. $5\,775 \div 79$

Efetuar mentalmente as divisões abaixo indicadas, dizendo qual o resto, se o quociente for incompleto.

35. $33 \div 11$
36. $37 \div 12$
37. $40 \div 13$
38. $44 \div 14$
39. $47 \div 15$
40. $51 \div 16$
41. $66 \div 11$
42. $68 \div 12$
43. $70 \div 13$
44. $72 \div 14$
45. $75 \div 15$
46. $78 \div 16$

82. Expressão aritmética. Vimos em que consiste uma expressão aritmética (§ 68) e aprendemos a calcular expressões aritméticas em que entram apenas adições e subtrações. (§ 69)

Vejamos agora como calcular expressões em que entram as quatro operações já estudadas, a saber: adição, subtração, multiplicação e divisão, isto é, operações de primeira e de segunda espécies.

Para calcular expressões aritméticas desta natureza, é necessário obedecer invariavelmente à seguinte regra; **em primeiro lugar efetuam-se as multiplicações e divisões,** isto é, *as operações de segunda espécie, e na ordem em que estão indicadas.* Feito isto, continua-se o cálculo de acordo com a regra do parágrafo 68.

1.° *exemplo.*

$$4 + 7 \times 5 - 36 \div 4 + 8 + 3 \times 14 \div 7 - 8 \times 3 + 20 =$$
$$4 + 35 - 9 + 8 + 6 - 24 + 20 =$$
$$(4 + 35 + 8 + 6 + 20) - (9 + 24) =$$
$$73 - 33 = 40$$

2.° *exemplo.*

$$7 \times 3 - 8 + 32 \div 4 + 5 \times 9 - 6 \times 14 \div 21 - 5 \times 10 + 60 =$$
$$21 - 8 + 8 + 45 - 4 - 50 + 60 =$$
$$(21 + 8 + 45 + 60) - (8 + 4 + 50) =$$
$$134 - 62 = 72$$

42

Exercícios. Série V

Determinar o valor de x nas igualdades que se seguem.

1. $37 \times x = 333$
2. $8 \times 7 \times x = 280$
3. $x \div 15 = 28$
4. $324 \div x = 9$
5. $437 = 32 \times 13 + x$
6. $512 = 37 \times x + 31$
7. $648 = x \times 12 + 12$
8. $3+4\times5+6+7\times2\times8+9\times4+10\times11+12\times5\times3+8 =$
9. $20-3\times5+11+8+7\times4-2\times3\times4+20-8\times5+2\times3\times4\times5 =$
10. $18+24\div3\times8+7\times5-10\times3\div6+2\times3-7\times8\div14-3\times2 =$
11. $49\times8\div14-376\times0\times89+5\times7\times8-2\times3\times5+80 =$

83. Os parênteses em Aritmética. Consideremos a expressão aritmética seguinte: $7+8\times5-3+4\times6$. Para calculá-la temos de efetuar, em primeiro lugar, as multiplicações e divisões (§ 82) e depois aplicar as regras do parágrafo 68. Teremos:
$7+8\times5-3+4\times6=7+40-3+24=(7+40+24)-3=71-3=68$

Consideremos agora a expressão aritmética seguinte:

$$(7 + 8) \times 5 - (3 + 4) \times 6$$

Para calcular esta expressão é necessário, em primeiro lugar, calcular as expressões $7 + 8$ e $3 + 4$. Teremos:

$$(7+8)\times5-(3+4)\times6=15\times5-7\times6=75-42 = 33$$

3×4÷6

Observação. *Se uma expressão aritmética está entre parênteses,* **devemos entender que se consideram efetuadas as operações indicadas pela mesma expressão.**

Portanto, quando uma expressão aritmética contem parênteses, é necessário, em primeiro lugar, calcular as expressões aritméticas parciais que estão entre parênteses e, em seguida, aplicar as regras indicadas no parágrafo anterior e neste.

Exemplo: $(9+4)\times 3-5+(24-9)\div 5-(7+8+6)\div 3+20 =$
$13\times 3-5+15\div 5-21\div 3+20 =$
$39-5+3-7+20 = 62-12 = 50$

Exercícios. Série VI

1. $3+(7+8)\times 5+(96-14)\div 41-3\times 2\times 5+7\times(15+12-17) =$
2. $(4+8)\times 5-7\times(13-4+5)+100-(45-13+20)+5\times 4 =$
3. $7\times 4+\left[8-3\times(10-6)+9\times 4\right]-(9+4-6)\times 5+100 =$
4. $500-\left[(9+4)\times 2-3\times(8+5)+(11-7)\times 10-2\times(8-5)\right] =$

84. Eliminação de parênteses. Dada uma expressão aritmética que contem parênteses, é necessário, às vezes, suprimí-los. Vejamos como proceder neste caso.

I. E' claro que $10+(8) = 10+8$. Diminuindo 5 unidades da parcela (8), a soma diminue de 5 unidades. (§61, V) Portanto,

$$10 + (8-5) = 10 + 8 - 5$$

Somando 7 unidades à parcela $(8-5)$, a soma aumenta de 7 unidades. Portanto,

$$10 + (8-5+7) = 10 + 8 - 5 + 7$$

Diminuindo 3 unidades da parcela $(8-5+7)$, a soma diminue de 3 unidades. Portanto,

$$10 + (8-5+7-3) = 10 + 8 - 5 + 7 - 3$$

O exposto é suficiente para estabelecer a seguinte

Regra. *Quando uma expressão aritmética está entre parênteses e é precedida pelo sinal* **mais,** *os parênteses podem ser suprimidos, sem que o valor da expressão dada se altere.*

$$7 + (8-5) + (3-4+7) = 7 + 8 - 5 + 3 - 4 + 7$$

II. E' claro que $20-(12) = 20-12$. Diminuindo 5 unidades do subtraendo (12), o resto aumenta de 5 unidades. (§65, VI) Portanto,

$$20-(12-5) = 20-12+5$$

Somando 8 unidades ao subtraendo $(12-5)$, o resto diminue de 8 unidades. (§65, IV) Portanto,

$$20-(12-5+8) = 20-12+5-8$$

Diminuindo 3 unidades do subtraendo $(12-5+8)$, o resto aumenta de 3 unidades. Portanto,

$$20-(12-5+8-3) = 20-12+5-8+3$$

O exposto é suficiente para estabelecer a seguinte

Regra. *Quando uma expressão aritmética está entre parênteses e é precedida pelo sinàl* **menos,** *os parênteses podem ser suprimidos, sem que a expressão dada se altere, contanto que se mude o sinal dos números que estão entre parênteses; os números aditivos se tornam subtrativos e os números subtrativos se tornam aditivos.*

$$20-(15-7+3)-(8-6+9) = 20-15+7-3-8+6-9$$

Destas duas regras deduzimos mais duas propriedades notaveis para a subtração.

Para, de um número dado, diminuir uma soma indicada de duas ou mais parcelas, diminuimos do número dado a 1.ª parcela; do resto diminuimos a 2.ª parcela; e assim sucessivamente.

$$\boxed{\boldsymbol{n-(a+b+c+\ldots\ldots) = n-a-b-c-\ldots\ldots}}$$

Exemplo: $20-(3+4+5+6) = 20-3-4-5-6 = 2$

Para, de um número dado, diminuir uma diferença indicada, diminuimos do número dado o minuendo, e ao resto somamos o subtraendo; ou ao número dado somamos o subtraendo e, da soma, diminuimos o minuendo.

$$\boxed{\boldsymbol{n-(a-b) = n-a+b = n+b-a}} = \text{não}$$

Exemplo: $20-(11-4) = 20-11+4 = 20+4-11 = 13$

Exercícios orais

Ler em voz alta, suprimindo os parênteses, as expressões aritméticas seguintes:

1. 6+(9-5)
2. 10-(8-5)
3. 15-(7+6)
4. 30+(11+7)
5. 9+(10-7)
6. 20-(7-3)
7. 15+(8-7+5)
8. 20-(3+4+5)
9. 30+(8-7+3)
10. (25-7)+(10-3)
11. (8+7)-(10-6)
12. (5-6+7)+(8-3+4)
13. (9+8-7)-(10-3-5)
14. 10+(8-7+9-5+6)
15. 30-(7+21-10-15)
16. 12+(11-7+13-8)
17. 25-(13+8-15+9-10)
18. 8+(7-5)-(9-4+6)+15-(10-2)
19. (8-7+6-5)-(9-3+4-7)
20. 30+(3+5-6-7-8+9+10)
21. 35-(2+3+4+5+6+7)
22. 33-(40-2-3-4-5-6-7)
23. (9+4)-(8-5)+(11-7)-(13-6)

Exercícios. Série VII

Suprimir os parênteses e calcular as expressões aritméticas seguintes:

1. 235-(147-85+93-34-21)+(513-134-238)
2. (47-36+59-28)-(600-23-24-25-26)+715
3. 347-(8×5-33-7×4+36÷4)+(120-4×7×3)

N. B. Efetuar as operações de 2.ª espécie, *antes de eliminar os parênteses.*

4. (615-23×7)+539-(30-7×7+15-5×6×8)
5. (47-10+5×8)-(1-4×5×3-36÷4+5×2-8×7÷14)
6. 20-(7-4×3+10-5×5+3×8-6×2×5×4)
7. 20-(15+8-13+11-20)+(-3-7-8+9×6-1)

Exercícios. Série VIII

Problemas sobre as quatro operações

1. Repartir entre dois meninos a quantia de Cr. $53,00, de modo que o mais velho receba Cr. $13,00 mais do que o mais moço.

Da quantia a repartir, Cr. $53,00, separam-se Cr. $13,00; restam Cr. $40,00. Dividem-se estes Cr. $40,00 em duas partes iguais, uma para cada menino. Então cada menino receberá Cr. $20,00. Em seguida, entregam-se ao menino mais velho os Cr. $13,00 que tinham sido separados dos Cr. $53,00. Resulta que o menino mais velho recebe Cr. $20,00 + $13,00 e o mais moço recebe Cr. $20,00. Nestas condições os Cr. $53,00 ficam repartidos pelos dois meninos e o mais velho recebe Cr. $13,00 mais do que o mais moço.

[illegible] + [illegible] = 375

2. Determinar dois números tendo por soma 375 e por diferença 129. Para resolver este problema, é bastante observar que, determinar ou descobrir dois números tendo por soma 375 e por diferença 129, é o mesmo que repartir Cr. $375,00 em duas porções tais que uma tenha Cr. $129,00 mais do que a outra. Logo, este problema pode ser resolvido como o anterior.

Solução. (375 - 129) ÷ 2=246 ÷ 2=123

123+129=252

Resposta. Os dois números pedidos são 252 e 123.

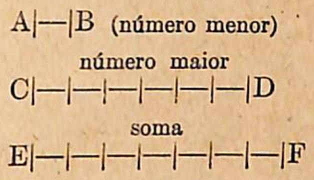
3. Determinar dois números tendo por soma 3 785 e por diferença 1 439.

4. O dobro da soma de dois números é 1 642. A terça parte da diferença dos mesmos números é 179. Quais são os dois números?

5. Determinar dois números cuja soma é 105 e cujo quociente é 6. Para resolver este problema vamos recorrer a um gráfico. Um gráfico é uma figura que nos permite compreender com mais facilidade uma verdade qualquer da Matemática, a resolução de um problema, etc..

Vejamos agora como resolver graficamente o nosso problema.

Seja AB um segmento retilíneo que representa o número menor. Ora, se o quociente dos dois números que queremos determinar é 6, isto é, **se o número maior contem seis vezes o menor,** o número maior será representado pelo segmento retilíneo CD, formado de seis segmentos iguais a AB. Resulta então que a soma dos dois números que queremos determinar será representada por um segmento retilíneo EF, igual à soma dos segmentos AB e CD, isto é igual a 7 vezes o segmento AB. Portanto,



segmento EF = 7 × segmento AB

Mas o segmento EF representa a soma dos dois números pedidos, e esta soma nós sabemos que é 105. Logo,

105 = 7 × número menor
número menor = 105 ÷ 7
número menor = 15

Está determinado o número menor; é 15. Resta determinar o número maior. Chamando-o de x e, de acordo com o problema proposto, teremos $15 + x = 105$ ou $x = 15 \times 6$. Em ambos os casos é facil calcular x.

Regra. Para determinar dois números cuja soma é **s** e cujo quociente é **q**, divide-se **s** por **q + 1**; o resultado desta divisão é o número menor.

Exemplo. Determinar dois números cuja soma é 276 e cujo quociente é 11.

276 ÷ (11 + 1) = 276 ÷ 12 = 23 (é o número menor)
23 × 11 = 253 (é o núnero maior)

6. Determinar dois números cuja diferença é 235 e cujo quociente é 6. Como no problema anterior, representemos o número menor por um segmento retilíneo AB e o maior por um segmento retilíneo CD, formado de seis segmentos iguais ao segmento AB. Então a diferença entre os dois números que queremos determinar deverá ser representada por um segmento retilíneo EF, igual à diferença entre os segmentos CD e AB ou igual a 5 vezes o segmento AB. Portanto,

A|—|B (número menor)
número maior
C|—|—|—|—|—|—|D
diferença
E|—|—|—|—|—|F

segmento EF = 5 × segmento AB.

Mas o segmento EF representa a diferença dos dois números pedidos, e esta diferença nós sabemos que é 235. Logo,

235 = 5 × número menor
número menor = 235 ÷ 5
número menor = 47

Está determinado o número menor; é 47. Resta determinar o número maior. Chamando-o de x e, de acordo com o problema proposto, teremos: $x - 47 = 235$ ou $x = 47 \times 6$. Em ambos os casos é facil calcular x.

Regra. Para determinar dois números cuja diferencça é **d** e cujo quociente é **q**, divide-se **d** por **q − 1**; o resultado desta divisão é o número menor.

Exemplo. Determinar dois números cuja diferença é 216 e cujo quociente é 7.

216 ÷ (7 − 1) = 216 ÷ 6 = 36 (é o número menor)
36 × 7 = 252 (é o número maior)

Observação. Conhecendo a soma, a diferença, o produto e o quociente de dois números, podemos organisar seis problemas diferentes, nos quais se pedem estes dois números.

1.° Determinar dois números, conhecendo sua soma e diferença.
2.° » » » , » sua sona e produto.
3.° » » » , » sua soma e quociente.
4.° » » » , » sua diferença e produto.
5.° » » » , » sua diferença e quociente.
6.° » » » , » seu produto e quociente.

O 1.°, o 3.° e o 5.° acabam de ser resolvidos. O 6.° será resolvido quando estudarmos as medidas agrárias. Entretanto, para resolver o 2.° e o 4.° precisamos de conhecimentos que ainda não possuimos.

7. A soma dos capitais de dois negociantes é C. $47 520,00. O capital de um deles é igual a 7 vezes o capital do outro. Qual o capital de cada um?

8. A diferença entre os estoques de fazendas de dois negociantes é de 53 676 metros. Sabendo que o estoque de um negociante é igual a 13 vezes o estoque do outro, quantos metros de fazenda possue cada negociante?

9. Um filho tem 33 anos menos que o pai. O pai ten 4 vezes a idade do filho. Qual é a idade de cada um? (6.° problema)

10. Um pai tem 4 vezes a idade do filho. A soma das idades do pai e do filho é igual a 70. Qual a idade de cada um? (5.° problema)

11. Multiplicando um certo número por 13, o produto obtido é igual ao multiplicando aumentado de 1 020 unidades. Qual é o número?

Para resolver este problema é bastante observar que o número pedido, e o produto da sua multiplicação por 13, são dois números cuja diferença é 1 020 e cujo quociente é 13. (6.° problema)

12. Dividir 4 785 em duas partes cuja diferença seja 1 237.

13. Dois indivíduos se reuniram para negociar, constituindo um capital de Cr. $37 480,00. A diferença entre os dois capitais sendo de Cr. $2 597,00 pergunta-se qual o capital de cada um.

14. Calcular a soma e a diferença dos produtos 48 × 35 e 48 × 15 sem efetuar estas duas multiplicações.

De acordo com a definição da multiplicação, 48 × 35 é uma soma de 35 parcelas iguais a 48, e 48×15 é uma soma de 15 parcelas iguais a 48. Portanto,

$$48 \times 35 + 48 \times 15 = 48 \times (35 + 15) = 48 \times 50 = 2\,400$$
$$48 \times 35 - 48 \times 15 = 48 \times (35 - 15) = 48 \times 20 = 960$$

15. Calcular a soma e a diferença dos produtos 37×45 e 37×25, sem efetuar estas duas multiplicações.

16. Calcular 53×25+53×13+53×12, sem efetuar as multiplicações indicadas.

17. Calcular 32×18+32×15 − 32×13, sem efetuar as multiplicações indicadas.

18. O triplo do produto de dois números é 4 968. A quarta parte de um deles é 18. Quais são os dois números?

19. O quíntuplo do produto de dois números é 2 755. O quádruplo de um deles é 116. Quais são os dois números?

20. Distribuindo certo número de metros de fazenda por 7 548 pessoas, cada uma recebeu 796 metros e restaram ainda 2 526 metros. Quantos metros de fazenda tinham sido separados para a distribuição?

21. Distribuindo 674 548 metros de fazenda por um certo número de pessoas, cada uma recebeu 787 metros e restaram ainda 89 metros. Determinar o número de pessoas.

22. Um industrial repartiu 185 296 metros de fazenda em fardos de 829 metros. Restaram 429 metros. Calcular o número de fardos.

23. Um empregado não pode gastar Cr. $800,00 por mês porque, ao cabo de um ano, ficaria devendo Cr. $1 200,00. Qual é seu ordenado mensal? Quanto deve gastar por mês, se quiser economizar Cr. $2 700,00 em 5 anos?

24. Um perú e um frango custam juntamente Cr. $19,70. O preço do perú é igual a 4 vezes o preço do frango. Quanto custarão 23 perús e 87 frangos?

25. Comprei 3 frangos e 4 perús por Cr. $68,55. Entretanto, se eu tivesse comprado 8 frangos e 4 perús, teria gasto Cr. $84,80. Quanto custou cada ave?

N. B. Observe-se que a diferença Cr. $84,80 − $68,55 representa o preço de 5 frangos.

26. Comprei 3 frangos e 5 perús por Cr. $79,26. Entretanto, se eu tivesse comprado 6 frangos e 4 perús, teria gasto Cr. $78,96. Quanto custou cada ave?

1.ª compra: 3 frangos + 5 perús custaram Cr. $79,26.
2.ª compra: 6 frangos + 4 perús custaram Cr. $78,96.

Multiplicando a 1.ª compra por 2, teremos:

1.ª compra: 6 frangos + 10 perús custaram Cr. $158,52.
2.ª compra: 6 frangos + 4 perús custaram Cr. $78,96.

Donde se vê que a diferença Cr. $158,52 - Cr. $78,96 é o preço de 6 perús.

Ou, então, multiplicando a 1.ª compra por 4 e a 2.ª por 5, teremos:

1.ª compra: 12 frangos + 20 perús custaram Cr. $317,04.
2.ª compra: 30 frangos + 20 perús custaram Cr. $394,80.

Donde se vê que a diferença Cr. $394,80 - Cr. $317,04 é o preço de 18 frangos.

Portanto, para resolver problemas desta espécie, é necessário fazer compras fictícias por meio das quais se iguale o número de perús ou o de frangos

27. Comprei 4 perús e 16 frangos por Cr. $129,60. Entretanto, se eu tivesse comprado 3 perús e 17 frangos, teria gasto Cr. $115,79. Calcular o preço de cada perú e o de cada frango.

28. Comprei 842 bois por Cr. $75 600,00. Paguei Cr. $1 720,00 pelo transporte. Morreram 37. Por quanto devo vender cada um dos restantes, para realizar um lucro total de Cr. $12 380,00?

29. Um negociante comprou 4 peças de seda por Cr. $1 050,00 e que medem, respectivamente, 23, 19, 15 e 13 metros. Qual é o valor de cada peça?

30. A soma de 2 números é 1 251; a diferença entre ambos é igual ao número menor. Quais são os dois números?

31. Um construtor comprou 84 000 tijolos a Cr. $47,70 cada milheiro. Mas o oleiro, ao fazer a remessa dos tijolos vendidos, resolveu aumentar de 6% o número de tijolos, sem modificar o preço de venda. Calcular o preço exato de cada tijolo. (6% significa *seis* em cada *cem unidades*.)

32. Um negociante comprou 4 700 ovos a Cr. $15,00 o cento. Quebrou 236 e vendeu os restantes a Cr. $2,30 a dúzia. Ganhou ou perdeu? Quanto?

33. Um negociante misturou 34 litros de vinho, de Cr. $5,40 o litro, com 47 litros de vinho, de Cr. $3,80 o litro, e 10 litros de água. Vendeu cada litro da mistura a Cr. $4,50. Quanto ganhou em cada litro? Quanto ganhou ao todo?

34. Comprei uma porção de metros de seda por Cr. $529,00. Depois vendí toda a seda por Cr. $788,10 lucrando Cr. $5,30 em cada metro. Quantos metros de seda comprei?

35. Comprei 2 700 pratos a Cr. $36,40 o cento. Paguei Cr. $18,90 de carreto. Ao desencaixotar os pratos, verifiquei que 84 estavam quebrados. Por quanto devo vender cada prato para realizar um lucro total de Cr. $245,00?

36. Um negociante comprou café e açucar, em partes iguais e pagou Cr. $355,20. Um quilo de café custa Cr. $3,60 e um quilo de açucar custa Cr. $1,20. Quantos quilos de café e quantos de açucar comprou este negociante?

129,60
09
16
00

3240

12960
11579
01381

x
3+5=7926
x+y=7896

37. Um negociante comprou 36 metros de seda e 45 metros de forro por Cr. $1 161,00. Um metro de seda custa Cr. $15,60 mais do que um metro de forro. Calcular o preço do metro de cada fazenda.

38. Um negociante comprou um certo número de pares de meias. Se ele vender cada par a Cr. $10,30, seu lucro será de Cr. $423,00; mas, se vender cada par a Cr. $9,70, seu lucro será de Cr. $282,00. Quantos pares de meias comprou, quanto pagou por cada par e quanto pagou por tudo?

39. Quero socorrer alguns pobres. Não me é possivel dar Cr. $5,00 a cada um deles, porque me faltam Cr. $37,00. Entretanto, se cada um deles se contentar com Cr. $4,00, eu ficarei ainda com Cr. $49,00. Quantos são os pobres? E quanto dinheiro tenho?

40. Comprei seda a Cr. $24,00 o metro. Por quanto devo vender cada metro para lucrar em 5 metros, **o preço de custo** de um metro?

Solução. O lucro em 5 metros deve ser o custo de um metro, isto é, Cr. $24,00. Logo, o lucro em cada metro é igual a Cr. $24,00 ÷ 5, isto é, Cr. $4,80. Portanto, devo vender cada metro por Cr. $24,00 mais Cr. $4,80, isto é, Cr. $28,80.

41. Comprei 79 metros de seda. Vendendo 35 metros por Cr. $420,00, lucrei Cr. $2,50 em cada metro. Quanto paguei pelos 79 metros?

42. Comprei seda a Cr. $24,00 o metro. Por quanto devo vender cada metro para lucrar em 5 metros, o **preço de venda** de um metro?

Solução. O preço de custo de 5 metros é Cr. $24.00 × 5, isto é, Cr. $120,00. Vendendo 4 **metros** por Cr. $120,00 ou um metro por Cr. $30,00, terei salvo o capital que empreguei na compra dos 5 metros. Vendendo o 5.° metro de seda por Cr. $30,00, esta quantia será o meu lucro na venda dos 5 metros, e este lucro é justamente o **preço de venda** de um metro, a saber, Cr. $30,00.

43. Comprei 48 carneiros por Cr. $1 137,60. Por quanto devo vender cada carneiro para lucrar em 25 carneiros, o **preço de custo** de 4 carneiros?

44. Comprei 48 carneiros por Cr. $1 137,60. Por quanto devo vender cada carneiro, para lucrar em 16 carneiros, o **preço de venda** de um carneiro?

Solução. Cr. $1 137,60 ÷ 48 = Cr. $23,70 (custo de um carneiro)
Cr. $23.70 × 16 = Cr. $379,20 (custo de 16 carneiros)
Cr. $379,20 ÷ 15 = Cr. $25,28 (preço de venda de um carneiro)

Resposta. Devo vender cada carneiro por Cr. $25,28.

Observação. Quando queremos vender uma mercadoria qualquer, de modo que o lucro sobre **n** unidades seja igual ao **preço de venda de uma** unidade, devemos, em primeiro lugar, calcular o **preço de custo** das **n** unidades e, em seguida, dividir este resultado por **n - 1**.

45. Um comissário tem café pelo qual pagou Cr. $143,00 por saca. Por quanto deve vender cada saca para lucrar em 12 o **preço de venda** de uma?

46. Comprei 37 litros de vinho a Cr. $3,80; 48 litros a Cr. $4,50; 54 litros a Cr. $ 4,70. Calcular o preço médio de cada litro.

47. Comprei 4 milheiros de ovos a Cr. $17,00 o cento; sete cestas de ovos, cada uma com 8 dúzias, a Cr. $13,50 a cesta; comprei mais 6 centos de ovos a Cr. $2,30 a dúzia; comprei ainda 212 ovos a Cr. $0,25 cada um. Calcular o preço médio da dúzia.

48. Um reservatório pode conter 43 875 litros de água. Uma torneira despeja dentro dele 910 litros em 7 minutos, e a outra despeja 380 litros em 4 minutos. Estando o reservatório vazio e abrindo-se as duas torneiras ao mesmo tempo, em quantas horas o reservatório ficará cheio?

49. Um reservatório pode conter 510 litros de água. Para enchê-lo há uma torneira que despeja 42 litros por minuto; para esvaziá-lo há outra torneira que despeja 25 litros por minuto. Estando o reservatório vazio, e abrindo-se as duas torneiras, exatamente às 6 horas da manhã, a que horas o reservatório estará cheio?

50. Comprei 3 peças de fazenda da mesma qualidade por Cr. $974,40, a Cr. $8,40 o metro. A primeira peça tem 42 metros e a segunda, 36. Quantos metros tem a terceira?

51. Vendí um automovel por Cr. $7 250,00. Neste negócio perdí a metade do custo do automovel, menos Cr. $450,00. Por quanto o tinha eu comprado?

Exercícios. Série IX

Problemas sobre as quatro operações (*)

1. Representar graficamente o produto 8 × 5.

Em primeiro lugar tomamos um segmento retilíneo AM cujo comprimento pode ser qualquer, por exemplo, 1 centímetro. Depois construimos um retângulo cujo comprimento AB seja 8 vezes AM e cuja largura AD seja 5 vezes AM. A área do retângulo ABCD é 8 × 5. Portanto, este retângulo é a representação gráfica do produto 8 × 5.

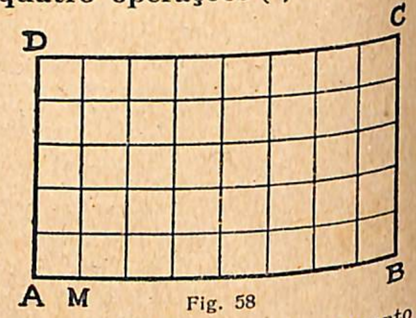


Fig. 58

N. B. Um número pode ser sempre representado por um segmento retilíneo, e um produto de dois números por um retângulo.

2. Construir um quadrado cujo lado meça 15 centímetros. (em papel milimetrado) Com o auxílio deste quadrado multiplicar dois números quaisquer que não excedam de 15.

3. Representar graficamente o produto 7 × 7.

4. O produto de dois números é 255. Juntando 4 unidades ao multiplicador, o produto se torna igual a 323. Quais são os dois números?

(*) Há nesta série de exercícios, alguns muito simples sobre a área do retângulo e a do quadrado. São questões já resolvidas pelos estudantes, no curso primário; parece-nos util recordar este assunto na primeira série ginasial, facilitando assim a nossa tarefa, quando tivermos de lecionar o programa da segunda série.

Observemos as duas igualdades seguintes:

$$14 \times 5 = 14 + 14 + 14 + 14 + 14$$
$$14 \times 8 = 14 + 14 + 14 + 14 + 14 + 14 + 14 + 14$$

Ora 14 × 5 = 70 e 14 × 8 = 112. A diferença entre os produtos é 42. E as duas igualdades nos mostram que esta diferença, 42, representa a soma de 3 parcelas iguais a 14. Portanto, se o multiplicador passa de 5 a 8, isto é, aumenta de 3 unidades, o produto aumenta de 3 vezes o multiplicando. Segue-se pois que, para resolver o problema proposto, é bastante dividir o acréscimo do produto pelo acréscimo do multiplicador, e ter-se-á o multiplicando.

5. O produto de dois números é 1 666. Juntando 8 unidades ao multiplicador, o produto se torna igual a 1 590. Quais são os dois números?

$$(1\,590 - 1\,166) \div 8 = 424 \div 8 = 53 \quad \text{(é o multiplicando)}$$
$$1\,166 \div 53 = 22 \quad \text{(é o multiplicador)}$$

6. O produto de dois números é 630. Juntando 4 unidades ao multiplicador, o produto se torna igual a 798. Quais são os dois números?

7. O produto de dois números é 18 391. Juntando 10 unidades ao multiplicador, o produto se torna igual a 21 861. Quais são os dois números?

8. O produto de dois números é 3 504. Subtraindo 3 unidades do multiplicador, o produto se torna igual a 3 285. Quais são os dois números?

9. O produto de dois números é 2 125. Juntando 5 unidades ao multiplicando, o produto se torna igual a 2 210. Quais são os dois números?

10. O produto de dois números é 20 060. Subtraindo 5 unidades do multiplicando, o produto se torna igual a 19 635. Quais são os dois números?

N. B. Quando se somam **n** unidades ao multiplicando, o produto sofre um acréscimo igual a **n** vezes o multiplicador. Quando se somam **n** unidades ao multiplicador, o produto sofre um acréscimo igual a **n** vezes o multiplicando. Quando se diminuem **n** unidades do multiplicando, o produto sofre um decréscimo igual a **n** vezes o multiplicador. Quando se diminuem **n** unidades do multiplicador, o produto sofre um decréscimo igual a **n** vezes o multiplicando.

11. Dado o produto 8 × 5, soma-se uma unidade ao multiplicando e outra ao multiplicador. Verificar graficamente, em papel milimetrado, que o acréscimo do produto é igual a 8 + 5 + 1.

12. Dado o produto 10 × 5, somam-se 3 unidades ao multiplicando e 3 unidades ao multiplicador. Verificar graficamente, em papel milimetrado, que o acréscimo do produto é igual a 5 × 3 + 10 × 3 + 3 × 3.

13. Dado o produto 12 × 8, somam-se 5 unidades ao multiplicando e 4 unidades ao multiplicador. Verificar graficamente, em papel milimetrado que o acréscimo do produto é igual a 5 ×8 + 4 × 12 + 5 × 4.

14. Calcular o perímetro e a área de um quadrado cujo lado mede 25 m.

15. Calcular o perímetro e a área de um quadrado cujo lado mede 66 dm.

16. Calcular o perímetro e a área de um quadrado cujo lado mede 82 cm.

17. O perímetro de um quadrado mede 292m. Calcular o lado e a área.

18. O perímetro de um quadrado mede 1 296m. Calcular o lado e a área.

19. Um terreno retangular mede 234m por 87m. Calcular o perímetro e a área.

20. Um retângulo tem 12dm de largura. O comprimento é igual a 4 vezes a largura. Calcular o perímetro e a área.

21. Um retângulo tem 1 296m de comprimento. A largura é igual a três quartos do comprimento. Calcular o perímetro e a área.

22. O perímetro de um retângulo mede 138m. O comprimento é o dobro da largura. Calcular o comprimento, a largura e a área.

23. O perímetro de um retângulo mede 2 024m. A largura é um terço do comprimento. Calcular o comprimento, a largura e a área.

24. Um terreno mede 649m de comprimento por 235 de largura. Abrem-se duas ruas neste terreno, com 13m de largura, perpendiculares entre si, uma no sentido do comprimento e outra no sentido da largura, e a igual distância dos limites do terreno. Fica assim o terreno dividido em 4 quarteirões iguais. Calcular a área de cada uma das ruas, a área das duas ruas, o perímetro de cada quarteirão e a área de cada quarteirão.

25. Determinar dois números, sabendo que sua soma é 1 140 e que sua diferença contem 4 vezes o número menor.

N. B. Nos **problemas sobre as quatro operações** (serie VIII) aprendemos como se determinam dois números dos quais se conhece a **soma e o quociente** (5.° problema) ou a **diferença e o quociente** (6.° problema).

Sejam **a** e **b** dois números que não conhecemos e, sejam **s** e **d**, a soma e a diferença destes mesmos números. Supondo que o quociente de **a** por **b** seja 7, estamos habilitados a escrever as seguintes igualdades:

$$\mathbf{s} = 8 \times \mathbf{b} \qquad \mathbf{a} = 7 \times \mathbf{b} \qquad \mathbf{d} = 6 \times \mathbf{b}$$

Estas igualdades nos permitem resolver o problema acima proposto.

26. Determinar dois números sabendo que sua soma é 33 896 e que sua diferença contem 6 vezes o menor.

27. Determinar dois números sabendo que sua diferença é 15 288 e que sua soma contem 8 vezes o menor.

N. B. Resolver graficamente os problemas 28 a 34.

28. Determinar dois números consecutivos tendo por soma 555.

29. Determinar três números consecutivos tendo por soma 1 362.

30. Determinar quatro números consecutivos tendo por soma 4 970.

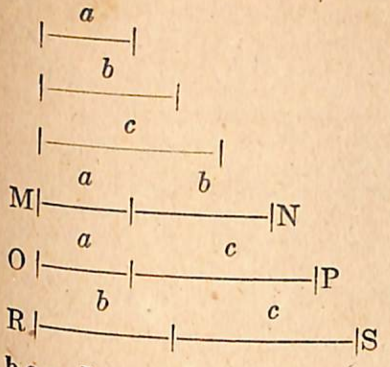
31. Determinar cinco números consecutivos tendo por soma 28 910.

32. Carlos e Raul receberam Cr. $200,00 e repartiram esta quantia de modo tal que Carlos ficou com Cr. $37,00 mais do que Raul. Quanto recebeu cada um?

33. Carlos, Raul e Mário receberam Cr. $500,00 e repartiram esta quantia de modo tal que Carlos ficou com Cr. $42,00 mais do que Raul e este com Cr. $37,00 mais do que Mário. Quanto recebeu cada um?

34. Carlos, Raul, Mário e Pedro receberam Cr. $1 000,00 e repartiram esta quantia de modo tal que Carlos recebeu Cr. $27,00 menos do que Raul, Raul recebeu Cr. $34,00 menos do que Mário, e Mário recebeu Cr. $47,00 menos do que Pedro. Quanto recebeu cada um?

35. Três operários receberam seus salários. Os operários A e B receberam Cr. $570,00; os operários A e C receberam Cr. $680,00; os operários B e C receberam Cr. $750,00. Quanto recebeu cada um?



Representemos os salários de A, B e C, respectivamente, pelos segmentos **a**, **b** e **c**. (Para maior facilidade, façamos este trabalho em papel milimetrado, tomando o segmento **a** com 3 cm, o segmento **b** com 4 cm, e o segmento **c** com 5 cm.) Os Cr. $570,00 pagos aos operários A e B serão representados pelo segmento MN, igual à soma dos segmentos **a** e **b**; os Cr. $680,00 pagos aos operários A e C serão representados pelo segmento OP, igual à soma dos segmentos **a** e **c**: os Cr. $750,00 pagos aos operários B e C serão representados pelo segmentos RS, igual à soma dos segmentos **b** e **c**. Logo, a soma dos segmentos MN, OP e RS representa a soma das quantias Cr. $570,00, Cr. $680,00 e Cr. $750,00 isto é, Cr. $2 000,00. Mas, a soma dos segmentos MN, OP e RS contem o **dobro do salário de A, mais o dobro do salário de B, mais o dobro do salário de C.** Logo, Cr. $2 000,00 é o dobro da quantia que se entregou aos três operários. Então a soma dos salários dos três operários é igual a Cr. $1 000,00. Facilmente se conclue que:

A recebeu Cr. $1 000,00 menos Cr. $750,00, isto é, Cr. $250,00.
B recebeu Cr. $1 000,00 menos Cr. $680,00, isto é, Cr. $320,00.
C recebeu Cr. $1 000,00 menos Cr. $570,00, isto é, Cr. $430,00.

36. Três operários receberam seus salários. O primeiro e o segundo receberam Cr. $738,00; o primeiro e o terceiro receberam Cr. $857,00; o segundo e o terceiro receberam Cr. $925,00. Quanto recebeu cada um?

Cr. $738,00 + Cr. $857,00 + Cr. $925,00 = Cr. $2 520,00 (dobro da quantia recebida pelos três operários)
Cr. $2 520,00 ÷ 2 = Cr. $1 260,00 (quantia recebida pelos três operários)
Cr. $1 260,00 − Cr. $925,00 = Cr. $335,00 (salário do 1.° operário)
Cr. $1 260,00 − Cr. $857,00 = Cr. $403,00 (salário do 2.° operário)
Cr. $1 260,00 − Cr. $738,00 = Cr. $522,00 (salário do 3.° operário)

37. Quanto devemos somar ao número 375 para que o resultado contenha 52 vezes o mesmo número 375?

Solução. Temos o número 375; queremos o número 375 × 52. E' bastante somar ao número 375 o número 375 × 51, isto é, 19 125.

38. Dividir 22 488 por 3 748 com o auxílio exclusivo da subtração.

39. Dividir 4 559 por 478 com o auxílio exclusivo da subtração.

40. Determinar um número que, sendo multiplicado por 19, dê um produto igual ao quociente da divisão de 10 925 por 23.

41. Em uma avenida, as árvores estão plantadas com intervalo de 12 m. As árvores situadas de um mesmo lado são 275 A primeira e a última ficam a 4 m de distância das extremidades da avenida. Qual é o comprimento desta?

N. B. Convem observar que duas árvores correspondem a um intervalo de 12 metros; três, correspondem a dois intervalos, cada um com 12 metros;

quatro, correspondem a três intervalos, cada um com 12 metros; e assim por diante.

O professor coloque 10 alunos de pé, em linha, afastados uns dos outros, e a classe verá imediatamente que os intervalos entre os 10 alunos são 9. Entretanto, se os alunos, de mãos dadas, formarem uma roda, o número de intervalos será igual ao de alunos.

42. Uma avenida mede 3 915 metros de comprimento. Calcular o número de árvores plantadas de um mesmo lado da avenida, sabendo que o intervalo entre duas árvores consecutivas é de 9 metros e que a primeira árvore e a última estão plantadas nas extremidades da avenida.

43. Um operário gasta diariamente Cr. $0,54 de fumo e Cr. $1,36 de alcool. Aos domingos gasta o dobro. Quanto poderia economizar em um ano, se ele pudesse libertar-se destes dois vícios? Supõe-se que o ano não é bissexto e que o dia 1.º de janeiro foi domingo.

N. B. O ano tem 365 dias ou 52 semanas e 1 dia. Portanto, se o primeiro dia de um ano que não é bissexto, é uma quinta-feira, o último dia deste mesmo ano é tambem uma quinta-feira.

44. Um operário ganha Cr. $14,50 por dia, sua mulher ganha Cr. $9,80 e cada um de seus três filhos ganha C. $5,70. A despesa diária desta família é de Cr. $26,70. Quais serão as economias desta família ao cabo de 5 anos, admitindo que haja 64 dias feriados por ano e que, em cada um destes dias feriados, a família tenha uma despesa extraordinária de Cr. $20,00?

N. B. Para resolver este problema, aliás muito facil, é necessário que o estudante calcule em primeiro lugar a **receita** anual, isto é, a importância dos salários recebidos pela família, durante um ano. Em seguida, deverá calcular a **despesa** anual. A diferença entre a **receita** e a **despesa** representará a economia anual, desde que a receita seja maior do que a despesa. E, conhecida a economia anual, será bastante multiplicá-la por 5. Note-se tambem, que os operários ganham somente quando trabalham. Se um operário ganha Cr. $15,00 por dia e gasta Cr. $12,00 por dia, a sua receita semanal é Cr. $15,00 × 6 e a sua despesa semanal é Cr. $12,00 × 7.

45. Um operário recebeu Cr. $170,20 por um certo número de dias de trabalho. Entretanto, se tivesse trabalhado mais 8 dias, teria recebido Cr. $229,40. Quantos dias trabalhou? Quanto ganha por dia?

46. Dois operários, trabalhando juntos, durante 45 dias, receberam Cr. $720,00. Um deles ganha Cr. $8,40 por dia. Quanto ganha o outro?

47. Um operário economizou Cr. $7 540,00 em 5 anos. Tendo descansado 74 dias por ano, e sendo sua despesa diária de Cr. $15,80, pergunta-se quanto ganhou por dia de trabalho.

48. Um operário ganha por dia Cr. $18,70. Trabalha, em média, 25 dias por mês. Paga Cr. $120,00 mensais pelo aluguel de casa e economiza Cr. $885,00 em um ano. Qual é a sua despesa diária?

49. Um negociante comprou 13 caixas de lenços por Cr. $12 480,00. Cada caixa contem 40 dúzias. O negociante pagou Cr. $36,00 de transporte e selou cada lenço com Cr. $0,02. Tendo vendido cada lenço a Cr. $3,00, qual foi o seu lucro total?

50. Comprei 75 milheiros de tijolos a Cr. $44,10 cada milheiro. Entretanto, o oleiro resolveu beneficiar-me com um acréscimo de 50 tijolos em cada milheiro. Depois eu vendí estes tijolos a Cr. $5,00 cada cento. Qual foi o meu lucro?

51. Vendí 40 kilos de nozes a Cr. $5,70 o quilo e castanhas a Cr. $3,20. A receita total foi de Cr. $452,00. Quantos quilos de castanhas vendí?

52. Comprei 8 pipas de vinho por Cr. $3 720,00. Em uma semana vendí 74 litros por Cr. $140,00, realizando um lucro de Cr. $0,35 por litro. Quantos litros contem cada pipa?

53. Quatro negociantes compraram 800m de seda por Cr. $21 920,00. O primeiro entrou com Cr. $5 891,00; o segundo com Cr. 5 $178,60; o terceiro com Cr. $6 850,00. Quantos metros de seda comprou cada um dos negociantes?

54. Comprei duas peças de seda da mesma qualidade e com a mesma largura. Paguei Cr. $1 700,00 por uma e Cr. $1 195,60 pela outra. Há entre as duas uma diferença de 12 metros. Quanto paguei pelo metro de seda? Qual é o comprimento de cada uma das peças?

55. Cerca-se um terreno retangular de 150 m por 76 m com três fios de arame amarrados a postes de madeira. A distância entre dois postes consecutivos é de 2m. Cada poste custa Cr. $1,30 e o metro de arame custa Cr. $00,64. Calcular o custo desta cerca. (Vide problema n.º 41, N. B.)

56. Comprei um terreno retangular cujo perímetro mede 5 676 m. Paguei Cr. $7,84 por metro quadrado. Mandei cercá-lo, tendo pago Cr. $0,56 por metro de cerca. Qual foi a despesa total? O terreno tem 320 metros de largura.

57. Um menino nasceu em 1.º de janeiro de 1929. Quantas horas de existência tinha ele em 17 de setembro de 1936? E' preciso levar em conta os anos bissextos e o número exato dos dias de cada mês; os dias 1–1–29 e 17–9–36 serão tambem incluidos na idade do menino.

58. Um sitiante colheu 15 cestas de laranjas que foi deixando pelo caminho, a 30 metros de distância, uma da outra. As 15 cestas ficaram em linha reta. Depois o sitiante reuniu todas as cestas, de uma em uma, no lugar em que estava a primeira. Quantos metros percorreu para fazer este serviço?

59. Tenho Cr. $620,00 em notas de Cr. $10,00 e de Cr. $5,00. O número de notas é 74. Determinar o número de notas de Cr. $10,00 e o número de notas de Cr. $5,00.

60. Comprei laranjas; deram-me uma de mais em cada dúzia e eu recebí 351 laranjas. Quantas dúzias tinha eu pedido?

61. Comprei maçãs; deram-me uma de mais em cada duas dúzias e eu recebí 825 maçãs. Quantas dúzias tinha eu pedido?

CAPÍTULO IV

Múltiplos e Divisores

85. Preliminares. Um número é divisivel por outro, quando a sua divisão por este outro não deixa resto. O número 24 é divisivel por 3, porque o quociente da divisão de 24 por 3 é 8, e o resto é **zero; 24** é um **múltiplo** de 3, e 3 é um **fator, divisor, submúltiplo** ou **parte alíquota** de 24.

Chama-se **número primo absoluto,** *o número que é divisivel somente por si mesmo e pela unidade.* Os números 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, etc., são números primos.

Chama-se **número múltiplo** *o número que, alem de ser divisivel por si mesmo e pela unidade, é ainda divisivel por um ou mais números diferentes de si mesmo e da unidade.* Os números 8, 15, 24, etc., são números múltiplos.

Convem observar que os divisores de um número inteiro qualquer são em número limitado, *sendo apenas dois,* quando o número ê primo; entretanto, um número tem sempre uma infinidade de múltiplos. Consideremos, por exemplo, o número 7. Este número tem apenas dois divisores, é um **número primo;** entretanto, tem uma infinidade de múltiplos, a saber: 0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, etc..

Analogamente, os múltiplos de 13 são 0, 13, 26, 39, 52, 65, etc.. De um modo geral, todos os múltiplos de um número dado são os produtos que se obtem multiplicando sucessivamente o número dado por 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, etc..

Por exemplo, os múltiplos de 9 são os produtos 9×0, 9×1, 9×2, 9×3, 9×4, 9×5, 9×6, etc..

Existe um único número que tem uma infinidade de divisores; é o número **zero.** Com efeito, se dividirmos *zero* por qualquer número, o quociente é *zero* e o resto é *zero.* Desde que

$8 \times 0 = 0$, então $0 \div 8 = 0$. Analogamente, $13 \times 0 = 0 \therefore 0 \div 13 = 0$; $15 \times 0 = 0 \therefore 0 \div 15 = 0$.

Há uma diferença essencial entre um número primo e um número múltiplo. O número múltiplo pode ser substituido por um produto de dois ou mais fatores, *diferentes de si mesmo e da unidade,* o que não é possivel com um número primo. Por exemplo, $24 = 3 \times 8$; $36 = 4 \times 9$; $30 = 2 \times 3 \times 5$; etc.. Entretanto, não é possivel fazer o mesmo com os números **41, 53, 67,** etc..

Observação. O produto de dois números é múltiplo de cada um destes números. Assim, dado o produto

$$8 \times 5 = 40$$

40 é múltiplo 8 ou de 5. Desta observação resulta imediatamente que, para verificar se um número dado **a** é múltiplo de outro número dado **b,** é bastante dividir **a** por **b.** Segundo a divisão for exata ou aproximada (§76) **a** será ou não será múltiplo de **b.**

Exercícios. Série X

1. Calcular os 5 menores múltiplos de 17, diferentes de zero.
2. Calcular os 8 menores múltiplos de 23, diferentes de zero.
3. Calcular os 10 menores múltiplos de 29, diferentes de zero.
4. Representar graficamente o número 3 e os seus cinco menores múltiplos.
5. Dado um segmento retilíneo AB, construir os seus cinco menores múltiplos.
6. Qual é o menor múltiplo de 41, diferente de zero? E o maior?
7. Qual é o menor múltiplo de 53, diferente de zero? E o maior?
8. Traçar um segmento retilíneo com 24 cm. Em seguida, traçar os segmentos retilíneos que representam todos os divisores de 24.
9. Dizer todos os divisores de 12, de 15, de 20, de 30, de 36.
10. Quais são os múltiplos de 7, compreendidos entre 72 e 130?
11. Quais são os divisores de 120, compreendidos entre 11 e 55?

86. Potência de um número. *Potência de um número é um produto de fatores iguais a este número.* (*)

Segunda potência ou **quadrado** de um número é um produto de dois fatores iguais a este número. A segunda potência ou o quadrado de 7 é 7×7, isto é, 49.

(*) As noções dadas neste parágrafo, muito simples, visam facilitar o conhecimento dos primeiros caracteres de divisibilidade, da decomposição de um número em seus fatores primos, etc..

Terceira potência ou **cubo** de um número é um produto de três fatores iguais a este número. A terceira potência ou o cubo de 5 é $5 \times 5 \times 5$, isto é, 125.

Quarta potência de um número é um produto de quatro fatores iguais a este número. A quarta potência de 3 é $3 \times 3 \times 3 \times 3$, isto é, 81.

E assim por diante.

Por convenção, a primeira potência de um número é o próprio número. Por exemplo, a primeira potência de 5 é o próprio número 5.

Para indicar uma potência qualquer de um número, por exemplo, a oitava potência de 5, não é preciso escrever $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$; é bastante escrever 5^8.

Se quisermos indicar a centésima potência de 7, deveremos escrever $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times \ldots$, isto é, um produto constituido por 100 fatores iguais a 7. Para poupar tempo e espaço **convencionou-se** então escrever apenas uma vez o número 7 e, à direita deste 7, um pouco acima e com algarismos menores, o número de vezes que este 7 deve ser tomado como fator. Portanto, a expressão aritmética 7^{100} significa a centésima potência de 7. Analogamente,

13^4 significa a 4.ª potência de 13.
23^5 significa a 5.ª potência de 23.
32^7 significa a 7.ª potência de 32.

Consideremos agora as expressões aritméticas 13^4, 23^5 e 32^7. Já sabemos o que é que estas três expressões aritméticas significam. Os números 13, 23 e 32 são chamados **bases**; os números 4, 5 e 7 são chamados **expoentes**. Portanto, **base** *é o número que se quer elevar a uma determinada potência; é o número do qual se pede uma potência qualquer.* **Expoente** *é o número que se coloca à direita e um pouco acima da base, para indicar a que potência esta base deve ser elevada; para indicar quantas vezes esta base deve ser tomada como fator.* O expoente 1 não se escreve; 7^1 é o mesmo que 7; a primeira potência de 7 é 7. Entretanto, não esqueçamos que, **quando nos convier, poderemos escrever 7^1 em lugar de 7: 8^1 em lugar de 8:** etc..

Observemos desde já que qualquer potência da unidade é a propria unidade. Por exemplo:

$$1^3 = 1 \times 1 \times 1 = 1$$
$$1^5 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1, \text{ etc..}$$

Para multiplicar duas potências de um mesmo número, é bastante somar os expoentes. Exemplo:

$$\boxed{2^3 \times 2^5 = 2^8}$$

$$\begin{aligned}\text{Com efeito, } 2^3 \times 2^5 &= (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2)\\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2\\ &= 2^8\end{aligned}$$

Para multiplicar duas potências com o mesmo expoente, porem com bases diferentes, é bastante multiplicar as bases e dar ao produto, como expoente, o expoente de um dos fatores. Exemplo:

$$\boxed{2^3 \times 5^3 = 10^3}$$

$$\begin{aligned}\text{Com efeito, } 2^3 \times 5^3 &= (2 \times 2 \times 2) \times (5 \times 5 \times 5)\\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5\\ &= 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5\\ &= 10 \times 10 \times 10\\ &= 10^3 \ (^*)\end{aligned}$$

Exercícios orais

Calcular as expressões aritméticas seguintes, dizendo por exemplo: $2^5 = 32$.

1. 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, 2^9, 2^{10}.
2. 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6, 10^7, 10^8, 10^9, 10^{10}.

(*) Esta regra e a anterior se justificam muito facilmente, com as leis comutativa e associativa da multiplicação.

3. $20^1, 20^2, 20^3, 20^4, 20^5$.
4. $3^1, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5$.
5. $30^1, 30^2, 30^3, 30^4, 30^5$.
6. $40^1, 40^2, 40^3, 40^4, 40^5$.
7. $5^1, 5^2, 5^3, 5^4, 5^5$.
8. $50^1, 50^2, 50^3, 50^4, 50^5$.
9. $60^2, 70^2, 80^2, 90^2, 100^2$.
10. $200^2, 300^2, 400^2, 500^2, 600^2$.

11. Qual é a quinta potência de 10? De quantos algarismos se compõe? Quais são eles?

12. Qual é a 7.ª potência de 10? De quantos algarismos se compõe? Quais são eles?

13. Qual é a 4.ª potência de 10? De quantos algarismos se compõe? Quais são eles?

14. Qual a conclusão que podemos tirar dos exercícios 11, 12 e 13?

15. As expressões 7×2 e 7^2 são iguais? Por que?

16. Qual a diferença que existe entre 7×5 e 7^5?

17. Qual a diferença que existe entre 10×3 e 10^3?

18. Desenvolver as expressões 8×5 e 8^5.

19. Desenvolver as expressões 10×6 e 10^6.

Calcular mentalmente os produtos que se seguem.

20. 2×2^3
21. 2×2^4
22. $2^5 \times 2$
23. $2^2 \times 2^4$
24. $3^3 \times 3$
25. $3^2 \times 3^3$
26. $2^5 \times 5^5$
27. $3^2 \times 2^2$
28. $2^2 \times 2^3 \times 2$
29. $2^4 \times 5^4 \times 1^4$
30. $3^3 \times 3 \times 3^2$
31. $2^3 \times 5^3 \times 10^3$

Exercícios. Série XI

1. Calcular a oitava potência de 5.
2. Calcular a sétima potência de 8.
3. Calcular a sexta potência de 9.
4. Calcular a quinta potência de 12.
5. Calcular a terceira potência de 32.
6. Calcular a segunda potência de 315.
7. Calcular a primeira potência de 3 784.
8. Calcular a trigésima potência de 1.

87. Expressões aritméticas. Para calcular expressões aritméticas em que entram adições, subtrações, multiplicações e divisões, é necessário efetuar em primeiro lugar as multiplicações e divisões, *na ordem em que estão indicadas*, e depois as adições e subtrações. Entretanto, se numa expressão aritmética entrarem potências, **é necessário calcular em primeiro lugar estas potências.**

1.º *exemplo.*

$$\begin{aligned}
&7+3^4\times5-4\times5^2\div10+8+2^3\times7-20=\\
&7+81\times5-4\times25\div10+8+8\times7-20=\\
&7+405-100\div10+8+56-20=\\
&7+405-10+8+56-20=\\
&(7+405+8+56)-(10+20)=\\
&476-30=446
\end{aligned}$$

2.º *exemplo.*

$$\begin{aligned}
&2^6\times3^4\div6^3+5\times1^{100}-4^3\times2+8^3\div4^3+5^3=\\
&64\times81\div216+5\times1-64\times2+512\div64+125=\\
&24+5-128+8+125=\\
&(24+5+8+125)-128=162-128=34
\end{aligned}$$

Exercícios. Série XII

1. $2^5-3^4+4^3-5^2+6^1-1^{50}+10^2=$
2. $8^3\times5^5\div10^2-2^3\times3^3\times5^3+12^3\times10^3\div15^3-18^{30}\times0+27\,000=$
3. $10^5-2^4\times3^5\div6^3+100^2-7^3\times9^2\div63^2+25^2=$
4. $2^5+3^5+4^5-5^2-6^2-7^2+10^3=$
5. $(12^3+24^2)\div12-3^2\times(2^5+3^5-274)+10^3=$
6. $(3+4\times5)^2=$
7. $(5\times8-4\times3)^2+(7-4\times5+14)^{10}=$
8. $(40-2^3\times5+2)^8+5\times(7^2-6^2-3^2)^4=$
9. $200-(7\times5^2)+(15+5)^3-(7\times8\times9\times0)^{50}=$
10. $(2^3+3^3+5^3+7^3)^2=$

88. Teoremas gerais da divisibilidade. (*) **Teorema** é a verdade matemática que exige prova. **Axioma** é a verdade matemática que não exige prova. Alguem nos diz: **a soma é da mesma espécie das parcelas.** Podemos duvidar desta afirmação? E' claro que não. Então esta verdade é um **axioma.** Alguem nos diz: **todo o número que é divisor das parcelas, é**

(*) Na primeira série ginasial, o ensino da Aritmética deve ser prático. Entretanto, pensamos não haver inconveniente em iniciar os nossos alunos no conhecimento de alguns teoremas, aliás muito simples, como os que apresentamos neste parágrafo. E' preciso semear para colher.

tambem divisor da soma. Podemos duvidar desta afirmação? E' claro que sim, e podemos exigir a prova desta afirmação. Então esta verdade se chama **teorema,** e ao trabalho de prová-la dá-se o nome de **demonstração.**

Antes de estudarmos os principais teoremas gerais da divisibilidade, é necessário compreender bem o signficado das seguintes frases: **24 é divisivel por 3; 3 divide 24.**

Quando dizemos que **24 é divisivel por 3,** queremos dizer com estas palavras que a divisão de 24 por 3 é exata, (§ 76) sendo que **o dividendo é 24 e o divisor é 3.**

Quando dizemos que **3 divide 24,** queremos dizer com estas palavras que a divisão de 24 por 3 é exata, sendo que **o dividendo é 24 e o divisor é 3.**

Primeiro teorema. *O número que é divisor das parcelas, tambem é divisor da soma.*

Consideremos a seguinte igualdade: $21+28+35 = x$. As três parcelas são divisiveis por 7, ou 7 é divisor das três parcelas. Com efeito, $21 \div 7 = 3$; $28 \div 7 = 4$; $35 \div 7 = 5$. Logo,

$$\begin{aligned} 21 &= 7 + 7 + 7 \\ 28 &= 7 + 7 + 7 + 7 \\ 35 &= 7 + 7 + 7 + 7 + 7 \end{aligned}$$

Torna-se agora evidente que a soma dos números 21, 28 e 35 deve conter 12 vezes o número 7. Realmente, calculando o valor de x e dividindo-o por 7, o quociente exato é 12. Como este raciocínio pode ser feito com números quaisquer, desde que preencham as condições exigidas pelo teorema, este está demonstrado.

Observação. Já aprendemos que:

minuendo = subtraendo + resto ; (§ 64)

E, de acordo com o teorema que acabámos de demonstrar resulta que:

Quando um número é divisor do subtraendo e do resto, é tambem divisor do minuendo.

Segundo teorema. *Sendo uma soma formada por duas parcelas, se um número é divisor da soma e de uma das parcelas, tambem é divisor da outra.*

Consideremos a seguinte igualdade: $39+x=91$.

A parcela 39 e a soma 91 são divisiveis por 13, ou 13 é divisor da soma 91 e da parcela 39. Com efeito, $91 \div 13 = 7$ e $39 \div 13 = 3$. Logo,

$$\begin{aligned} 91 &= 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 \\ 39 &= 13 + 13 + 13 \end{aligned}$$

Torna-se agora evidente que a diferença entre os números 91 e 39, que é o valor de x, deve conter 4 vezes o número 13. Realmente, dividindo este valor por 13, o quociente exato é 4. Como este raciocínio pode ser feito com números quaisquer, desde que preencham as condições exigidas pelo teorema, este está demonstrado.

Observação. Voltando à igualdade

minuendo = subtraendo + resto

facilmente concluiremos que:

Quando um número é divisor do minuendo e do subtraendo, é tambem divisor do resto.

Terceiro teorema. *Sendo uma soma formada por duas parcelas, se um número é divisor de uma das parcelas, mas não é divisor da outra, então não é divisor da soma, e os restos das duas divisões são iguais.*

Consideremos a seguinte igualdade: $28 + 37 = x$. A primeira parcela é divisivel por 7, sendo o quociente exato igual a 4; mas a segunda não o é, sendo o quociente incompleto igual a 5, e o resto igual a 2. Logo,

$$\begin{aligned} 28 &= 7 + 7 + 7 + 7 \\ 37 &= 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 2 \end{aligned}$$

Torna-se agora evidente que a soma dos números 28 e 37 deve conter 9 **vezes** o número 7, e mais 2 unidades. Realmente, calculando o valor de x, e dividindo-o por 7, o quociente incompleto é 9 e o resto é 2. Como este raciocínio pode ser feito com números quaisquer, desde que preencham as condições exigidas pelo teorema, este está demonstrado.

Quarto teorema. *Quando um número é divisor de outro, é tambem divisor de qualquer múltiplo deste outro.*

O número 7 é divisor de 21. O número x é múltiplo de 21. Precisamos demonstrar que o número 7 é divisor de x.

O número x é múltiplo de 21, isto é, x contem 21 um número exato de vezes. Portanto.

$$x = 21 + 21 + 21 + 21 + \ldots\ldots\ldots + 21$$

Ora, desde que o número 7 é divisor de 21, segue-se que ele é divisor de todas as parcelas da soma x. Mas, se o número 7 é divisor das parcelas, é tambem divisor da soma, em virtude do primeiro teorema. Como este raciocínio pode ser feito com números quaisquer, desde que preencham as condições exigidas pelo teorema, este está demonstrado.

Quinto teorema. *Quando um número é divisivel por outro, é tambem divisivel por qualquer fator deste outro.*

O número x é divisivel por 12 e o número 12 é divisivel por 3. Vamos demonstrar que o número x é divisivel por 3.

Com efeito, recorrendo ao quarto teorema, desde que 3 é divisor de 12 e x é múltiplo de 12, conclue-se imediatamente que 3 é divisor de x, ou x é divisivel por 3. Como este raciocínio pode ser feito com números quaisquer, desde que preencham as condições exigidas pelo teorema, este está demonstrado.

89. Caracteres de divisibilidade. Chamam-se **caracteres de divisibilidade,** certas regras que nos permitem verificar se um número ou não é divisivel por outro, **sem efetuar a divisão.**

Dividiremos os caracteres de divisibilidade em duas séries.

A primeira série é constituida pelos caracteres que nos permitem verificar se um número qualquer é divisivel por 2, por 5, por 10, ou por qualquer potência de 2, de 5 ou de 10.

A segunda série é constituida pelos caracteres que nos permitem verificar se um número qualquer é divisivel por 3, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, etc., enfim, **por qulaquer número que não seja potência de 2, de 5 ou de 10.**

$$2^1 \times 5^1 = 10^1$$
$$2^2 \times 5^2 = 10^2$$
$$2^3 \times 5^3 = 10^3$$
$$2^4 \times 5^4 = 10^4$$
$$2^5 \times 5^5 = 10^5$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

90. Primeira série dos caracteres de divisilibidade. Em primeiro lugar, o estudante deve ler o quadro à esquerda, com a maior rapidez possivel, e de duas maneiras diferentes: a princípio, sem calcular as potências e depois calculando-as. Por exemplo, a terceira linha deve ser lida assim: **2 elevado à 3.ª potência, vezes 5 elevado à 3.ª**

potência, é igual a 10 elevado à 3.ª potência. E depois: **8 vezes 125 é igual a 1 000.** (§86)

Primeiro caracter. *Um número é divisivel por 2, por 5 ou por 10, quando o número formado pelo primeiro algarismo da direita é divisivel por 2, por 5, ou por 10.*

Um número inteiro qualquer pode sempre ser decomposto em duas parcelas, sendo a primeira terminada por **um zero** e a segunda constituida pelo algarismo das unidades. Por exemplo:

$$3\,457 = 3\,450 + 7$$

A primeira parcela, com um zero à direita, é divisivel por 10 e, por consequência, por 2 e por 5, em virtude do quinto teorema de divisibilidade. Ora, se a segunda for divisivel por 2, por 5 ou por 10, a soma 3 457 tambem o será, em virtude do primeiro teorema de divisibilidade. Entretanto, se a segunda não for divisivel por 2, por 5 ou por 10, a soma tambem não o será, e os restos das duass divisões serão iguais, em virtude do terceiro teorema de divisibilidade.

Exemplo. O número 3 758 é divisivel por 5? Não é, porque o número formado pelo primeiro algarismo da direita não é divisivel por 5, sendo o resto igual a 3. E se dividirmos o número 3 758 por 5, o resto será tambem igual a 3.

Os números formados por um algarismo, divisiveis por 2, são 2, 4, 6, 8 e 0; divisiveis por 5 são 5 e 0; o único divisivel por 10 é 0. E' por isto que se costuma desdobrar o primeiro caracter de divisibilidade, em três, a saber: **um número é divisivel por 2,** *quando termina em* 2, 4, 6, 8 *ou* 0; **por 5,** *quando termina em* 5 *ou* 0; **por 10,** *quando termina em* 0.

Os números divisiveis por 2 são chamados **números pares;** os não divisiveis por 2 são chamados **números impares.**

Segundo caracter. *Um número é divisivel por* 4 (2^2), *por* 25 (5^2) *ou por* 100 (10^2), *quando o número formado pelos dois primeiros algarismos da direita é divisivel por* 4, *por* 25, *ou por* 100.

Um número inteiro qualquer pode sempre ser decomposto em duas parcelas, sendo a primeira terminada por dois zeros, e a segunda constituida pelos dois primeiros algarismos da direita. Por exemplo:

$$4\,653 = 4\,600 + 53$$

A primeira parcela, com dois zeros à direita, é divisivel por 100 e, por consequência, por 4 e por 25, em virtude do quinto teorema de divisibilidade. Ora se a segunda for divisivel por 4, 25 ou 100, a soma tambem o será, em virtude do primeiro teorema de divisibilidade.

Entretanto, se a segunda parcela não for divisivel por 4, 25 ou 100, a soma tambem não o será, e os restos das duas divisões serão iguais, em virtude do terceiro teorema de divisibilidade.

Exemplo. O número 3 478 é divisivel por 25? Não é, porque o número formado pelos dois primeiros algarismos da direita, isto é, 78, não é divisivel por 25, sendo o resto igual a 3. E se dividirmos 3 478 por 25, o resto será 3.

Os números divisiveis por 25 são os números que terminam (à direita) por 25, 50, 75 ou 00. Os números divisiveis por 100 são os números que terminam (à direita) por 00.

Terceiro caracter. *Um número é divisivel por* 8(2^3), *por* 125 (5^3) *ou por* 1 000 (10^3), *quando o número formado pelos três primeiros algarismos da direita é divisivel por* 8, *por* 125 *ou por* 1 000.

Um número inteiro qualquer pode sempre ser decomposto em duas parcelas, sendo a primeira terminada por três zeros e a segunda constituida pelos três primeiros algarismos da direita. Por exemplo:

$$47\,384 = 47\,000 + 384$$

A primeira parcela, com três zeros à direita, é divisivel por 1 000 e, por consequência, por 8 e por 125, em virtude do quinto teorema de divisibilidade. Ora, se a segunda for divisivel por 8, 125 ou 1 000, a soma tambem o será, em virtude do primeiro teorema de divisibilidade.

Entretanto, se a segunda parcela não for divisivel por 8, 125 ou 1 000, a soma tambem não o será, e os restos das duas divisões serão iguais, em virtude do terceiro teorema de divisibilidade.

Exemplo. O número 47 384 é divisivel por 8? E', porque o número formado pelos três primeiros algarismos da direita, isto é, 384, é divisivel por 8. E' divisivel por 125? Não é, porque o número formado pelos três primeiros algarismos da direita, isto é, 384, não é divisivel por 125, sendo o resto igual a 9. E se dividirmos o número 47 384 por 125, o resto será 9.

Quarto caracter. *Um número é divisivel por* 16 (2^4), *por* 625 (5^4) *ou por* 10 000 (10^4), *quando o número formado pelos quatro primeiros algarismos da direita é divisivel por* 16, *por* 625 *ou por* 10 000.

Um número inteiro qualquer pode sempre ser decomposto em duas parcelas, sendo a primeira terminada por quatro zeros e a segunda constituida pelos quatro primeiros algarismos da direita. Por exemplo:

$$346\,578 = 340\,000 + 6\,578$$

A primeira parcela, com quatro zeros à direita, é divisivel por 10 000 e, por consequência, por 16 e por 625, em virtude do quinto teorema de divisibilidade. Ora, se a segunda for divisivel por 16, 625 ou 10 000, a soma tambem o será, em virtude do primeiro teorema de divisibilidade.

Entretanto, se a segunda parcela não for divisivel por 16, 625 ou 10 000, a soma tambem não o será, e os restos das duas divisões serão iguais, em virtude do terceiro teorema de divisibilidade.

Exemplo. O número 312 658 é divisivel por 16? Não é, porque o número formado pelos quatro primeiros algarismos da direita, isto é, 2 658, não é divisivel por 16, sendo o resto igual a 2. E se dividirmos o número 312 658 por 16, o resto será 2.

Exercícios orais

1. O número 3 756 é divisivel por 8? Por que? Qual o resto?
2. O número 14 926 é divisivel por 25? Por que? Qual o resto?
3. O número 37 549 é divisivel por 4? Por que? Qual o resto?
4. O número 126 849 é divisivel por 125? Por que? Qual o resto?
5. O número 93 718 é divisivel por 16? Por que? Qual o resto?
6. O número 9 758 é divisivel por 625? Por que? Qual o resto?
7. O número 11 236 é divisivel por 8? Por que? Qual o resto?
8. O número 91 745 é divisivel por 25? Por que? Qual o resto?
9. O número 8 716 é divisivel por 16? Por que? Qual o resto?
10. Quando é que um número é divisivel por 32?
11. Quando é que um número é divisivel por 64?
12. Quando é que um número é divisivel por 128?
13. Quando é que um número é divisivel por 256?
14. Quando é que um número é divisivel por 512?
15. Quando é que um número é divisivel por 1 024?

N. B. Em relação aos exercícios 16 a 20, os estudantes devem responder às duas perguntas, sem efetuar a divisão.

16. $37\,429 \div 10 = ?$ E quanto resta?
17. $85\,687 \div 100 = ?$ E quanto resta?
18. $348\,619 \div 1\,000 = ?$ E quanto resta?
19. $1\,287\,648 \div 10\,000 = ?$ E quanto resta?
20. $37\,498\,526 \div 100\,000 = ?$ E quanto resta?

21. Quanto devemos subtrair do número 378 para que o resultado seja divisivel por 5? E quanto devemos somar-lhe, com o mesmo fim?

22. Quanto devemos somar ao número 537, para que o resultado seja múltiplo de 4? E subtrair?

23. Quanto devemos subtrair do número 753 para que o resultado seja múltiplo de 25? E somar?

91. Observações sobre o parágrafo anterior. Se os quatro caracteres de divisibilidade que expusemos no parágrafo anterior foram compreendidos, é facil concluir que esta primeira série de caracteres é ilimitada. Com efeito, estamos habilitados a dizer quando é que um número é divisivel por 2^1, 5^1, 10^1; ou 2^2, 5^2, 10^2; ou 2^3, 5^3, 10^3; e assim por diante. E estamos tambem habilitados a provar o que afirmamos. Entretanto, estes caracteres, a partir de certo ponto, se tornam inuteis. Por exemplo, o número 7 486 é divisivel por 32? O número 32 é a quinta potência de 2. Então é necessário dividir por 32, o número formado pelos cinco primeiros algarismos do número dado. Logo, só é possivel obter o resto da divisão de 7 486 por 32, pelo processo espontâneo, isto é, efetuando a divisão.

Tambem é util observar que a divisibilidade de um número qualquer por 2^1, 5^1, 10^1, depende **do número formado pelo primeiro algarismo** da direita; por 2^2, 5^2, 10^2, depende **do número formado pelos dois primeiros algarismos** da direita; por 2^3, 5^3, 10^3 depende **do número formado pelos três primeiros algarismos** da direita; e assim por diante.

92. Segunda série dos caracteres de divisibilidade.

Primeiro caracter. *Um número é divisivel por 3 quando a soma dos valores absolutos dos seus algarismos (§ 56) é divisivel por 3.*

Exemplo. O número 475 268 é divisivel por 3?

$$4+7+5+2+6+8 = 32 \qquad 32 \div 3 = 10 \text{ e restam } 2.$$

Logo, o número 475 268 não é divisivel por 3, sendo o resto da divisão igual a 2, como se pode verificar, efetuando a divisão.

Segundo caracter. *Um número é divisivel por 9, quando a soma dos valores absolutos de seus algarismos é divisivel por 9.*

Exemplo. O número 345 748 é divisivel por 9?

$$3+4+5+7+4+8 = 31 \qquad 31 \div 9 = 3 \text{ e restam } 4.$$

Logo, o número 345 748 não é divisivel por 9, sendo o resto da divisão igual a 4, como se pode verificar, efetuando a divisão.

Terceiro caracter. *Um número é divisivel por 11, quando a soma dos valores absolutos dos algarismos de ordem impar, menos a soma dos valores absolutos dos algarismos de ordem par, é divisivel por 11.*

Os algarismos de ordem impar são o 1.º, o 3.º, o 5.º, etc., a partir da direita, isto é, do algarismo das unidades; os de ordem par são o 2.º, o 4.º, o 6.º, etc., a partir tambem da direita.

Exemplo. O número 7 384 206 é divisivel por 11?

$$(6+2+8+7)-(0+4+3) = 23-7 = 16$$
$$16 \div 11 = 1 \text{ e restam } 5.$$

Logo, o número 7 384 206 não é divisivel por 11, sendo o resto da divisão igual a 5, como se pode verificar, efetuando a divisão.

Às vezes, a primeira soma é menor do que a segunda. Então juntam-se à primeira tantos *onzes* quantos sejam necessários para que se torne maior do que a segunda.

Exemplo. O número 73 827 092 é divisivel por 11?

$$(2+0+2+3)-(9+7+8+7) = 7-31$$
$$(7+11+11+11)-31 = 40-31 = 9$$
$$9 \div 11 = 0 \text{ e restam } 9.$$

Logo, o número 73 827 092 não é divisivel por 11, sendo o resto igual a 9, como se pode verificar, efetuando a divisão.

Existem tambem caracteres de divisibilidade por 6, 7, 12, 13, 14, 15, 17, etc.. Entretanto, são tão complicados que é preferivel efetuar a divisão.

N. B. A demonstração completa dos caracteres de divisibilidade que constituem a 2.ª série, pela dificuldade que oferece, não pode ser dada neste compêndio.

Exercícios orais

1. O número 374 é divisivel por 3? Por que? Quanto lhe devemos somar ou diminuir para que o resultado seja divisivel por 3? Fazer estas modificações no algarismo das unidades; no das dezenas; no das centenas.
2. Mesmo exercício em relação ao número 2 537 e ao divisor 9.
3. Mesmo exercício em relação ao número 3 427 e ao divisor 11.

Exercícios. Série XIII

1. Formar um número de 5 algarismos, que seja divisivel por 5, 9 e 11.
2. Formar um número de 4 algarismos, divisivel por 2, 5, 8 e 9.
3. Formar um número de 3 algarismos, divisivel por 2, 3, 4, 5 e 8.
4. No número 37x6, qual deve ser o valor de x, para que este número seja divisivel por 9?
5. Dado o número 46x5, qual deve ser o valor de x, para que este número seja divisivel por 11?
6. Mesma questão em relação ao número 47x6.

93. A regra dos noves fora. A divisão é a operação que tem por fim determinar quantas vezes um número contem outro, ou repartir um número em partes iguais, de acordo com o problema dado. Entretanto, não levando em conta o problema dado, podemos dizer que a divisão é a operação que tem por fim determinar quantas vezes um número contem outro. Nestas condições, o resultado da divisão, isto é, o quociente, seja ele exato ou incompleto (§76) pode ser obtido por meio de uma série de subtrações.

Como exemplo, vamos dividir 87 por 15. Teremos:

$$87 - 15 = 72;\ 72 - 15 = 57;\ 57 - 15 = 42;\ 42 - 15 = 27;\ 27 - 15 = 12$$

Efetuámos **cinco subtrações.** Portando, o quociente incompleto da divisão de 87 por 15 é 5, e o resto é 12.

Conclue-se que, assim como a multiplicação é uma adição abreviada, a divisão é a abreviação de uma série de subtrações. Vamos agora verificar se o número 45 625 é divisivel por 9. A soma dos valores absolutos de seus algarismos é 22. Dividamos esta soma por 9, por meio da subtração. Teremos: $22 - 9 = 13$; $13 - 9 = 4$. Portanto, o quociente incompleto da divisão de 22 por 9 é 2, e o resto é 4.

Mas, em lugar de somar os valores absolutos de todos os algarismos do número dado e, depois, subtrair 9 desta soma, tantas vezes quantas for possivel, podemos subtrair 9, todas as vezes que a soma atingir a 9, ou exceder de 9. E' o que vamos tornar claro com o seguinte exemplo.

O número 37 587 684 é divisivel por 9? $3+7 = 10$; noves fora 1; $1+5=6$; $6+8=14$, noves fora 5; $5+7=12$, noves fora 3; $3+6=9$, noves fora 0; $8+4=12$, noves fora 3. O número dado não é divisivel por 9, sendo o resto da divisão igual a 3. A este processo para achar o resto da divisão de um número qualquer por 9, é que se dá o nome de **regra dos noves fora.**

94. Prova da adição por meio de um divisor qualquer ou prova pelos restos. Regra. *Para tirar a prova de uma adição por meio de um divisor qualquer, determina-se o resto da divisão de cada uma das parcelas, pelo divisor escolhido; somam-se estes restos e determina-se o resto da divisão da soma dos restos pelo mesmo divisor escolhido; depois determina-se o resto da divisão da soma primitiva pelo mesmo divisor escolhido. Se os dois últimos restos forem iguais, é provavel que a adição esteja certa.*

Primeiro exemplo

Prova pelo divisor 9	7 456	4	
	8 374	4	
	637	7	
	2 346	6	
	537	6	
0	19 350	27	0

Segundo exemplo

Prova pelo divisor 11	3 456	2	
	7 293	0	
	547	8	
	6 185	3	
	2 346	3	
5	19 827	16	5

À direita de cada parcela figura o resto da sua divisão pelo divisor escolhido; à direita da soma dos restos figura o resto da sua divisão pelo divisor escolhido; à esquerda da soma primitiva figura o resto da sua divisão pelo divisor escolhido. Os dois restos que devem ser iguais estão sublinhados com dois traços.

Exercícios. Série XIV

1. $37\,548 + 96\,753 + 8\,877 + 123\,548 + 62\,375 + 7\,983 + 5\,746 = ?$ Tirar a prova com o divisor 11.
2. Repetir a mesma adição e tirar a prova com o divisor 9.
3. Repetir a mesma adição e tirar a prova com o divisor 7.
4. Repetir a mesma adição e tirar a prova com o divisor 6.

95. Prova da subtração por meio de um divisor qualquer ou prova pelos restos. Lembremos que o minuendo é uma soma constituida por duas parcelas, a saber: o subtraendo e o resto. (§ 64) Portanto, a prova de uma subtração por meio de um divisor qualquer, pode ser tirada de acordo com a seguinte

Regra. *Para tirar a prova de uma subtração, por meio de um divisor qualquer, determina-se o resto da divisão do subtraendo e, depois, do resto, pelo divisor escolhido; somam-se os dois restos e determina-se o resto da divisão desta soma, pelo mesmo divisor escolhido; em seguida, determina-se o resto da divisão do minuendo, pelo mesmo divisor escolhido. Se os dois últimos restos forem iguais, é provavel que a subtração esteja certa.*

Primeiro exemplo

$$\left\{\begin{array}{l}\textit{Prova pelo}\\ \textit{divisor } 9\end{array}\right\}\quad\begin{array}{rcc} 318\,472 & & \underline{\underline{7}} \\ \underline{153\,829} & \underline{1} & \\ 164\,643 & \underline{6} & \underline{\underline{7}} \end{array}$$

Segundo exemplo

$$\left\{\begin{array}{l}\textit{Prova pelo}\\ \textit{divisor } 11\end{array}\right\}\quad\begin{array}{rcc} 318\,976 & & \underline{\underline{9}} \\ \underline{153\,829} & \underline{5} & \\ 165\,147 & \underline{4} & \underline{\underline{9}} \end{array}$$

À direita do minuendo, do subtraendo e do resto figura o resto da divisão de cada um destes números, pelo divisor escolhido. Os dois restos, que devem ser iguais, estão sublinhados com dois traços.

Exercícios. Série XV

1. 718 293 − 547 625 = ? Tirar a prova com o divisor 9.
2. Mesma operação e prova com o divisor 11.
3. Mesma operação e prova com o divisor 7.
4. Mesma operação e prova com o divisor 6.
5. Mesma operação e prova com o divisor 12.

96. Prova da multiplicação por meio de um divisor qualquer ou prova pelos restos. Regra. *Para tirar a prova de uma multiplicação por meio de um divisor qualquer, determina-se o resto da divisão de cada um dos fatores, pelo divisor escolhido, e multiplicam-se os dois restos; depois determina-se o resto da divisão deste produto pelo mesmo divisor escolhido; finalmente determina-se o resto da divisão do produto primitivo pelo mesmo divisor escolhido. Se os dois últimos restos forem iguais, é provavel que a multiplicação esteja certa.*

Primeiro exemplo)
(Prova pelo divisor 9)

$$\begin{array}{rrc} 27\,583 & 7 & \\ \underline{\times 487} & \underline{\times 1} & \\ 193\,081 & 7 & \underline{\underline{7}} \\ 2\,206\,64 & & \\ \underline{11\,033\,2} & & \\ 13\,432\,921 & & \underline{\underline{7}} \end{array}$$

Segundo exemplo
(Prova pelo divisor 11)

$$\begin{array}{rrc} 27\,583 & 6 & \\ \underline{\times 487} & \underline{\times 3} & \\ 193\,081 & 18 & \underline{\underline{7}} \\ 2\,206\,64 & & \\ \underline{11\,033\,2} & & \\ 13\,432\,921 & & \underline{\underline{7}} \end{array}$$

À direita do multiplicando figura o resto da sua divisão pelo divisor escolhido; à direita do multiplicador figura o resto da sua divisão pelo divisor escolhido; à direita do produto destes dois restos figura o resto da divisão deste produto pelo divisor escolhido; à direita do produto primitivo figura o resto da sua divisão pelo divisor escolhido. Os dois restos que devem ser iguais estão sublinhados com dois traços.

Na prática, podemos dar à prova da multiplicação, pelos restos, a disposição que vamos indicar. Traçamos dois segmentos perpendiculares entre si. Seja 9 o divisor escolhido. Nos dois ângulos retos da esquerda, escrevemos os restos das divisões, por 9, dos dois fatores dados, isto ê, 5 (resto do multiplicando) e 4 (resto do multiplicador). Multiplicando 5 por 4 acharemos 20, cujo resto, na divisão por 9, é 2, que escrevemos no ângulo reto de cima, à direita. Finalmente, por baixo deste resto, escrevemos o resto da divisão, por 9, do produto da multiplicação, isto é, de 20 126.

$$\begin{array}{r} 347 \\ \underline{\times 58} \\ 2\,776 \\ \underline{17\,35} \\ 20\,126 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} 5 & 2 \\ \hline 4 & 2 \end{array}$$

Exercícios. Série XVI

1. 37 548 × 6 239 = ? Prova pelo divisor 9.
2. 29 372 × 7 082 = ? Prova pelo divisor 11.
3. 478 645 × 375 = ? Prova pelo divisor 7.
4. 143 586 × 8 070 = ? Prova pelo divisor 6.
5. 67 009 × 4 073 = ? Prova pelo divisor 12.

97. Resto de uma expressão aritmética. *Primeiro exemplo.* Determinar o resto da divisão, por 9, da expressão aritmética seguinte, sem efetuar a adição.

$$374 + 5\,847 + 236 + 5\,209$$

De acordo com o parágrafo 94, o resto de uma soma é igual ao resto da soma dos restos das parcelas, desde que o divisor empregado seja sempre o mesmo. Portanto, determina-se o resto da divisão de cada uma das parcelas, pelo divisor escolhido, somam-se os restos e determina-se o resto da divisão da soma dos restos, pelo mesmo divisor escolhido.

A disposição prática deste exercício pode ser a seguinte:

$$\begin{array}{ccccccc} 374 & + & 5\,847 & + & 236 & + & 5\,209 \\ 5 & + & 6 & + & 2 & + & 7 = 20 \end{array}$$

O resto da divisão por 9, da expressão dada, é o resto da divisão de 20 por 9; é 2.

Segundo exemplo. Determinar o resto da divisão, por 11, da expressão aritmética seguinte, sem efetuar a multiplicação.

$$478 \times 3\,427 \times 58$$

De acordo com o parágrafo 96, o resto de um produto é igual ao resto do produto dos restos dos fatores, desde que o divisor empregado seja sempre o mesmo. Então determina-se o resto da divisão de cada um dos fatores, pelo divisor escolhido, multiplicam-se os restos e determina-se o resto da divisão do produto dos restos pelo mesmo divisor escolhido.

A disposição prática deste exercício pode ser a seguinte

$$\begin{array}{l} 478 \times 3\,427 \times 58 \\ \;\;5 \;\times\;\; 6 \;\;\times\;\; 3 = 90 \\ (0 + 11) - 9 = 11 - 9 = 2 \end{array}$$

O resto da divisão, por 11, da expressão dada, é 2.

Terceiro exemplo. Determinar o resto da divisão, por 9, da expressão aritmética seguinte, sem efetuar as operações indicadas.

$$375 \times 85 + 786 + 478 \times 79 \times 508 + 2\,345$$

Esta expressão é uma soma constituida por 4 parcelas. Mas, a 1.ª e a 3.ª parcelas são produtos. Então é necessário aplicar as regras dos parágrafos 94 e 96, para obter o resto da divisão, por 9, desta expressão.

A disposição prática deste exercício pode ser a seguinte:

$$\begin{array}{l} 375 \times 85 + 786 + 478 \times 79 \times 508 + 2\,345 \\ \;\;\;6 \;\times\; 4 + \;3 \;+\; 1 \;\times\; 7 \times 4 \;+\; 5 \\ \;\;\;\;\;24 + \;3 \;+\; 28 + 5 \\ \;\;\;\;\;\;6 + \;3 \;+\; 1 \;+\; 5 = 15 \end{array}$$

O resto da divisão, por 9, da expressão dada, é o resto da divisão de 15 por 9; é 6.

Exercícios. Série XVII

Determinar o resto das expressões que se seguem, pelo divisor indicado, **sem calcular o valor da expressão.**

1. $293+5\,788+854+7\,081$; resto por 11.
2. $728\,590-234\,618$; resto por 11.
3. $579\times428\times319$; resto por 9.
4. $567+847+328$; resto por 11.
5. $78\,162-4\,537$; resto por 11.
6. $1\,234\times5\,786\times2\,349\times74$; resto por 11.
7. $235+548-643$; resto por 9.
8. $75-83+172-43$; resto por 11.
9. $47\times58\times93\times54$; resto por 9.
10. $847+316\times56+47\times148\times3\,146$; resto por 9.
11. $7\,242\times293-6\,328\times57$; resto por 11.
12. $7\,548^2$; resto por 9.
13. $6\,275^3$; resto por 11.
14. $37^2+56^3+4\,763^4$; resto por 9.

98. Prova da divisão por meio de um divisor qualquer, ou prova pelos restos. *Primeiro exemplo.* Já sabemos que o dividendo ê igual ao divisor multiplicado pelo quociente e mais o resto. Portanto, 378 546 = = 427 × 886 + 224. E' claro que, se dividirmos ambos os membros desta igualdade, por um mesmo número, os restos devem ser iguais. A disposição desta prova pode ser a seguinte:

$$\begin{array}{r|l} 378\,546 & 427 \\ \cline{2-2} 36\,94\;\; & 886 \\ 2\,786 & \\ 224 & \end{array}$$

$$\left\{\begin{matrix}\textit{Prova pelo} \\ \textit{divisor } 9\end{matrix}\right\} \begin{array}{c} 378\,546 \\ \Bigg\downarrow \\ \underline{\underline{6}} \end{array} \begin{array}{rcrcr} = 427 & \times & 886 & + & 224 \\ 4 & \times & 4 & + & 8 \\ & & 16 & + & 8 \\ & & 7 & + & 8 \\ & & & \underline{\underline{6}} & \end{array}$$

Segundo exemplo

Tiremos a prova da mesma divisão pelo divisor 11.

$$\left\{\begin{array}{l}\textit{Prova pelo}\\ \textit{divisor}\ 11\end{array}\right\}\quad \begin{array}{ccrcr} 378\,546 & = & 427 \times 886 & + & 224 \\ \Big\downarrow & & 9 \times 6 & + & 4 \\ & & 54 & + & 4 \\ & & 10 & + & 4 \\ \underline{\underline{3}} & & & \underline{\underline{3}} & \end{array}$$

Na prática, podemos dar a esta prova a disposição que vamos indicar. Seja 9 o divisor escolhido.

$$\begin{array}{r|l} 378\,546 & \underline{427} \\ 36\,94 & 886 \quad \begin{array}{c|c} 4 & 6 \\ \hline 4 & 6 \end{array} \\ 2\,786 & \\ 16 \Longrightarrow 224 & \end{array}$$

O primeiro 4, no alto e à esquerda da cruz, é o resto do divisor; o segundo 4 é o resto do quociente. Multipliquemos estes dois restos; o produto é 16, que escrevemos à esquerda do resto da divisão. Em seguida, determinamos o resto da divisão, por 9, de 16 ⟹ 224, como se se tratasse do número 16 224; este resto é 6, que escrevemos no alto e à direita da cruz. Finalmente, determinamos o resto da divisão, por 9, do dividendo 378 546.

99. Parte alíquota de uma grandeza. Uma grandeza (§41) pode, em geral, ser dividida em um número dado de partes iguais.

Chama-se **parte alíquota** *de uma grandeza, uma outra grandeza da mesma espécie, e que está contida um número exato de vezes na primeira.*

Uma parte alíquota comum a duas ou mais grandezas da mesma espécie é uma outra grandeza da mesma espécie e que está contida separadamente um número exato de vezes em cada uma delas.

Uma peça de fazenda com um certo número de metros pode ser dividida em partes iguais, de muitos modos diferentes; cada uma destas partes é uma parte alíquota da peça. Isto posto, consideremos duas peças de fazenda, a primeira com 42 metros e a segunda com 27 metros. Queremos dividir estas duas peças em partes iguais, e de modo que o comprimento de cada porção de fazenda seja o maior possível, *e o mesmo para as duas peças* que pretendemos repartir em partes iguais. Em outras palavras; qual será o comprimento da maior parte alíquota comum às duas peças? E' o que vamos determinar, depois de aprender a pesquiza do máximo divisor comum de dois números.

100. Máximo divisor comum. O número 36 é múltiplo; alem de ser divisivel por si mesmo e pela unidade, é tambem divisivel por 2, 3, 4, 6, 9, 12 e 18. O número 35 tambem é múltiplo; alem de ser divisivel por si mesmo e pela unidade, é tambem divisivel por 5 e 7. Entretanto, *os números* 35 *e* 36 *têm apenas um divisor comum, que é a unidade*; por este motivo, são chamados **números primos entre si,** ou **números primos relativos.** Portanto, **dois números são primos entre si, quando seu único divisor comum é a unidade.** E' o que acontece com os números 8 e 15, 24 e 25, 36 e 49, etc.. Entretanto, os números 24 e 36 não são primos entre si, porque ambos são divisiveis por 2, 3, 4, 6 e 12.

Em resumo, dois números quaisquer sempre têm um ou alguns divisores comuns. Ao maior deles dá-se o nome de máximo divisor comum. Portanto, **máximo divisor comum de dois números é o maior número que os divide sem deixar resto.**

101. Teoremas fundamentais. Primeiro teorema. (*) *Se um número divide o dividendo e o divisor, divide tambem o resto.*

Dividindo o número 58 179 por 2 497, o quociente incompleto é 23 e o resto é 748. Portanto,

$$58\,179 = 2\,497 \times 23 + 748$$

Temos uma soma formada por duas parcelas: 2 497 × 23 e 748. O número 11 divide a soma 58 179; tambem divide 2 497. Mas, se o número 11 divide 2 497, tambem divide seu múltiplo 2 497 × 23. (quarto teorema de divisibilidade) Portanto, o número 11 divide uma soma formada por duas parcelas, e divide uma das parcelas. Logo, divide tambem a outra. (segundo teorema de divisibilidade) Com efeito, dividindo 748 por 11, verificaremos diretamente que esta divisão não deixa resto. Podendo o mesmo raciocínio ser feito com números quaisquer,

---

(*) Aqui temos mais alguns teoremas, cuja demonstração muito simples tem por fim preparar o estudante para vencer mais facilmente as dificuldades que o esperam.

desde que preencham as condições exigidas pelo teorema, este está demonstrado.

Segundo teorema. *Quando um número divide o divisor e o resto, tambem divide o dividendo.*

Dividindo o número 58 179 por 2 497, o quociente incompleto é 23 e o resto é 748. Portanto,

$$58\,179 = 2\,497 \times 23 + 748$$

Temos uma soma formada por duas parcelas: 2 497 × 23 e 748. O número 11 divide 2 497; portanto, divide tambem seu múltiplo 2 497 × 23. (quarto teorema de divisibilidade) O número 11 tambem divide 748. Portanto, se o número 11 divide as duas parcelas, divide a soma. (primeiro teorema de divisibilidade) Com efeito, dividindo 58 179 por 11, verificaremos diretamente que esta divisão não deixa resto. Podendo o mesmo raciocínio ser feito com números quaisquer, desde que preencham as condições exigidas pelo teorema, este está demonstrado.

Terceiro teorema. *O m.d.c. de dois números, sendo o maior divisivel pelo menor, é o menor.*

Consideremos os números 72 e 24. Observemos que 72 se divide por 24, sem deixar resto. Logo, 24 é divisor comum aos números 72 e 24, porque divide a si mesmo e divide o número 72. E, evidentemente, 24 é o maior divisor comum aos números 24 e 72, porque um número maior do que 24, por exemplo, 36, pode dividir 72, mas não divide 24. Podendo o mesmo raciocínio ser feito com números quaisquer, desde que preencham as condições exigidas pelo teorema, este está demonstrado.

Quarto teorema. *O m. d. c. de dois números, não sendo o maior divisivel pelo menor, é igual ao m. d. c. do menor e do resto da divisão do maior pelo menor.*

Consideremos os números 168 e 48. Dividindo 168 por 48, o quociente incompleto é 3, e o resto é 24. Vamos provar que o m. d. c. dos números 168 e 48 é igual ao m. d. c. dos números 48 e 24. Não esqueçamos que 168 é o dividendo, 48 é o divisor e 24 é o resto. Ora, todo o número que divide 168 e 48, tambem divide 24 (primeiro teorema); todo o número que divide 48 e 24, tambem divide 168. (segundo teorema). Logo, se qualquer divisor comum aos números 168 e 48, é tambem divisor comum aos números 48 e 24, e reciprocamente, segue-se que estes dois pares de números têm os mesmos divisores comuns e, por consequência, o mesmo m. d. c., isto é,

$$\begin{array}{r|l} 168 & 48 \\ \cline{2-2} 24 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 48 & 24 \\ \cline{2-2} 0 & 2 \end{array}$$

$$D\ (168,\ 48) = D\ (48,\ 24) \qquad (*)$$

Ora, o m. d. c. de 48 e 24 é 24; portanto o m. d. c. de 168 e 48 é tambem 24. Podendo o mesmo raciocínio ser feito com números quaisquer, desde que preencham as condições exigidas pelo teorema, este está demonstrado.

102. Determinar o m. d. c. de dois números. Vamos determinar o m. d. c. dos números 804 e 192. De acordo com o terceiro teorema, dividimos 804 por 192. Esta divisão deixa um resto, 36. Mas o quarto teorema diz que o m. d. c. de 804 e 192 é igual ao m. d. c. de 192 e 36. Procuremos então o m. d. c. dos números 192 e 36. De acordo com o terceiro teorema, dividimos 192 por 36. Esta divisão deixa um resto, 12. Mas o quarto teorema diz que o m. d. c. de 192 e 36 é igual ao m. d. c. de 36 e 12. Procuremos então o *m. d. c.* de 36 e 12. De acordo com o terceiro teorema dividimos 36 por 12. Esta divisão não deixa resto. Portanto, o m. d. c. dos números 804 e 192 é 12, isto é, D (804, 192) = 12.

$$\begin{array}{r|l} 804 & 192 \\ \cline{2-2} 36 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 192 & 36 \\ \cline{2-2} 12 & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 36 & 12 \\ \cline{2-2} 0 & 3 \end{array}$$

103. Regra para determinar o m. d. c. de dois números. *Divide-se o maior pelo menor; divide-se o menor pelo resto; divide-se o primeiro resto pelo segundo; divide-se o segundo resto pelo terceiro; ..... e assim por diante até que se chegue a um resto nulo. O m. d. c. será o último divisor.*

A este processo para determinar o m. d. c. de dois números, dá-se o nome de **processo das divisões sucessivas.**

Como exercício, vamos determinar o m. d. c. dos números 4 452 e 1 944.

Primeira forma

$$\begin{array}{r|l} 4\,452 & 1944 \\ \cline{2-2} 564 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1\,944 & 564 \\ \cline{2-2} 252 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 564 & 252 \\ \cline{2-2} 60 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 252 & 60 \\ \cline{2-2} 12 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 60 & 12 \\ \cline{2-2} 0 & 5 \end{array}$$

(*) D (48, 24) significa m. d. c. de 48 e 24.

Segunda forma

	2	3	2	4	5
4452	1944	564	252	60	12
564	252	60	12	0	

Resposta.

$D\ (4\,452,\ 1\,944) = 12$

Na prática, a forma preferida é a segunda. A primeira linha é a linha dos quocientes; a segunda linha é a dos dividendos e divisores; a terceira linha é a dos restos.

E agora, voltando ao exemplo do parágrafo 98, verificaremos facilmente que a maior parte alíquota comum a duas peças de fazenda que medem respectivamente 42m e 27m é uma porção de fazenda com 3m de comprimento.

Exercícios orais

Determinar o m. d. c. dos pares de números que se seguem.

1. 12 e 8
2. 36 e 24
3. 35 e 7
4. 28 e 21
5. 22 e 4
6. 18 e 15
7. 48 e 32
8. 45 e 18

Exercícios. Série XVIII

1. Determinar o m. d. c. de 15 347 e 4 532.

2. Determinar o m. d. c. de 1 565 e 626.

3. Determinar o m. d. c. de 4 789 e 137.

4. Determinar o m. d. c. de 5 544 e 6 552.

5. Determinar o m. d. c. de 80 934 e 140 343.

6. Determinar o m. d. c. de 665 038 e 2 375 019.

7. Determinar o m. d. c. de 78 540 e 37 026.

8. Um campo retangular mede 351m por 221m. E' cercado com árvores plantadas à igual distância umas das outras, e a distância entre duas árvores consecutivas é a maior possivel. Quantas são as árvores?

9. Um jornal distribuiu Cr. $425,00 pelos seus pobres; outro distribuiu Cr. $325,00 tambem pelos seus pobres. Os pobres de ambos os jornais receberam todos a mesma quantia, e esta foi a maior possivel. Quanto recebeu cada pobre? Quantos foram os pobres socorridos por cada um dos jornais?

10. Duas avenidas vão ser arborizadas em ambos os lados. A primeira mede 407 metros de comprimento e a segunda mede 110 metros. E' necessário que se plantem árvores tambem nas extremidades das avenidas e que, nas duas avenidas, a distância entre duas árvores consecutivas seja a mesma, e a maior possivel. As árvores custam Cr. $380,00 cada cento, e o operário ganha Cr. $2,70 pelo plantio de cada uma. Qual será a despesa total?

---

104. Determinar os quocientes de dois números pelo seu m. d. c. Uma vez terminada a pesquiza do m. d. c. de dois números dados, podemos aproveitar a operação feita para determinar quantas vezes cada um dos dois números dados contem o m. d. c. Retomemos o exemplo do parágrafo 103.

	2	3	2	4	5
4452	1944	564	252	60	12
564	252	60	12	0	
371	162	47	21	5	1.

Para maior clareza vamos chamar os números da quarta linha de **quocientes suplementares.** Por baixo de 12 escreveremos 1, porque 12 ÷ 12 = 1. Por baixo de 60 escreveremos 5, porque 60 ÷ 12 = 5. Portanto, o primeiro quociente suplementar é 1 e o segundo é 5. Para obter o terceiro quociente suplementar, multiplica-se o segundo quociente suplementar, 5, pelo quociente correspondente da 1.ª linha, 4, e soma-se o produto com o primeiro quociente suplementar; o resultado, 21, é o terceiro quociente suplementar. Com efeito, 252 ÷ 12 = 21. Para obter o quarto quociente suplementar, multiplica-se o terceiro quociente suplementar, 21, pelo quociente correspondente da 1.ª linha, 2, e soma-se o produto com o segundo quociente suplementar; o resultado, 47, é o quarto quociente suplementar. Com efeito, 564 ÷ 12 = 47. E assim por diante. A figura ao lado mostra a marcha e a espécie de operações que se devem fazer para completar a série dos quocientes suplementares, sendo 21 o ponto de partida e 47 o ponto de chegada. O quociente da divisão de 4 452 por 12 é 371; o quociente da divisão de 1 944 por 12 é 162; o quociente da divisão de 564 por 12 é 47, etc..

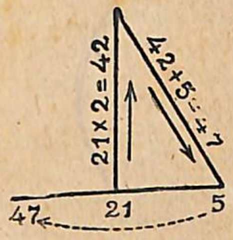


Fig. 59

Exercícios. Série XIX

1. Determinar o m. d. c. dos números 10 863 e 2 059. Em seguida, determinar os quocientes das divisões destes mesmos números, pelo seu m. d. c. com o auxílio dos quocientes suplementares.

	5	3	1	1	1	2
10 863	2 059	568	355	213	142	71.
568	355	213	142	71	0	
153	29	8	5	3	2	1

Resposta. Os dois quocientes pedidos são 153 e 29.

2. Mesmo exercício com os números 5 544 e 6 552.
3. Mesmo exercício com os números 80 934 e 140 343.
4. Mesmo exercício com os números 78 540 e 37 026.
5. O m. d. c. de dois números é 103. Os quocientes das divisões sucessivas são 3, 2, 1, 1, 2 e 3. Determinar os dois números.

	3	2	1	2	3	3
						103
149	44	17	10	7	3	1

149 × 103 = 15 347 44 × 103 = 4 532

Resposta. Os dois números pedidos são 15 347 e 4 532.

6. O m. d. c. de dois números é 207. Os quocientes das divisões sucessivas são 5, 2, 4, 1 e 3. Determinar os dois números.
7. O m. d. c. de dois números é 303. Os quocientes das divisões successivas são 4, 2, 6, 5, 3 e 7. Determinar os dois números.
8. Fazer o 5.° exercício, sem recorrer aos quocientes suplementares.
9. Idem, em relação ao 6.° exercício.
10. Idem, em relação ao 7.° exercício.

105. Propriedades do m. d. c. Voltemos ao exemplo do parágrafo 103 e consideremos a **primeira forma.** Se o número 4 divide 4 452 e 1 944, tambem divide 564. (primeiro teorema) Mas, se o número 4 divide 1 944 e 564, tambem divide 252. (primeiro teorema) Mas, se o número 4 divide 564 e 252, tambem divide 60. (primeiro teorema) Mas, se o número 4 divide 252 e 60, **tambem divide 12.** Concluimos então que, **quando um número divide outros dois números, tambem divide o m. d. c. destes dois números.** Esta conclusão será muito util mais adiante.

Se o m. d. c. dos números 4 452 e 1 944 é 12, os números 4 452 e 1 944 são múltiplos de 12. Então, de acordo com o quarto teorema geral de divisibilidade, concluimos que, **quando um número divide o m. d. c. de dois números, divide tambem estes dois números.**

De acordo com a primeira conclusão podemos desde já afirmar que os divisores comuns aos números 4 452 e 1 944 são unicamente os divisores de 12, a saber, 1, 2, 3, 4, 6 e 12.

Já vimos que, *multiplicando ou dividindo o dividendo e o divisor por um mesmo número, o quociente não se altera, mas o resto fica multiplicado ou dividido por este mesmo número.* (§ 78)

Voltando novamente ao exemplo do parágrafo 103, **primeira forma,** podemos então afirmar que, se dividirmos 4 452 e 1 944 por 4, o quociente da primeira divisão não se altera, mas o resto fica dividido por 4. Estando 1 944 e 564 divididos por 4, o quociente da segunda divisão não se altera, mas o resto fica dividido por 4. Prosseguindo com este raciocínio concluimos que, **quando se multiplicam ou se dividem dois números por um terceiro, o m. d. c. dos dois números fica multiplicado ou dividido por este terceiro.**

Exercícios. Série XX

1. Quais são os divisores comuns aos números 120 e 324?
2. Quais são os divisores comuns aos números 110 e 407?
3. Quais são os divisores comuns aos números 555 e 150?
4. Quais são os divisores comuns aos números 285 e 202?
5. Quais são os divisores comuns aos números 2 184 e 456?

106. Simplificação do processo das divisões sucessivas. Vamos determinar o m. d. c. dos números 70 500 e 25 500. Dividamos os dois números por 100 e procuremos o m. d. c. dos quocientes 705 e 255.

	2	1	3	4
705	255	195	60	15
195	60	15	0	

Mas, em virtude da terceira conclusão a que chegámos no parágrafo anterior, o m. d. c. está dividido por 100. Logo, o m. d. c. dos números 70 500 e 25 500 é 15 × 100, isto é, 1 500.

Exemplo. Determinar o m. d. c. dos números 73 600 e 2 400.

$$73\,600 \div 100 = 736$$
$$2\,400 \div 100 = 24$$

	30	1	2
736	24	16	8
16	8	0	

Resposta. D (73 600, 2 400) = 8 × 100 = 800

107. Dividindo dois números pelo seu m. d. c. os quocientes são primos entre si. O m. d. c. dos números 4 452 e 1 944 é 12 e, se dividirmos 4 452 e 1 944 por 12, os quocientes serão, respectivamente, 371 e 162. Mas, de acordo com a terceira conclusão do parágrafo 105, se os números 4 452 e 1 944 são divididos por 12, o m. d. c. deles, isto é, 12, tambem fica dividido por 12. Logo, o m. d. c. dos quocientes, isto é, de 371 e 162 é 1. Então, estes dois números são primos entre si. E' o que podemos verificar, tambem, diretamente.

	2	3	2	4	5
371	162	47	21	5	1
47	21	5	1	0	

D (371, 162) = 1

108. M. d. c. de três números. Para determinar o m. d. c. de três números, determina-se o m. d. c. de dois quaisquer dos números dados; depois determina-se o m. d. c. do resultado e do terceiro número. Este segundo m. d. c. é o m. d. c. dos três números dados.

Exemplo. Determinar o m. d. c. dos números 729, 2 538 e 8 316.

	3	3	1	1	1	1	2
8 316	2 538	702	432	270	162	108	54
702	432	270	162	108	54	00	

	13	2
729	54	27
189 27	0	

D (8 316, 2 538) = 54
D (729, 54) = 27
D (729, 2 538, 8 316) = 27

Na prática convem iniciar as operações com os dois números menores.

Exercícios. Série XXI

1. Calcular o m. d. c. de 1 958, 6 578 e 49 346.
2. Calcular o m. d. c. de 675, 4 320 e 50 715.
3. Calcular o m. d. c. de 1 624, 2 380 e 11 312.

109. Números primos Os números primos de 1 a 101 são 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97 e 101. Para facilidade do que se

segue, convem decorar esta série; é bastante contar de 1 a 101, tendo o cuidado de:

a) suprimir os múltiplos de 2, de 3 e de 5, que são facilmente reconheciveis.

b) suprimir os números 49, 77 e 91, porque 49 = 7 × 7, 77 = 7 × 11 e 91 = 7 × 13.

110. Crivo de Eratóstenes. E' o processo empregado para determinar todos os números primos, desde 1 até um número qualquer. Como exemplo, vamos determinar todos os números primos, de 1 a 1 000.

Em primeiro lugar, escrevemos a série dos números naturais, de 1 a 1 000. Ora, é evidente que, se contarmos de 2 em 2, a saber, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, etc., todos os números encontrados na série serão múltiplos, por serem divisiveis por 2, excetuando o número 2, que é primo, por ser divisivel somente por si e pela unidade.

Se contarmos de 3 em 3, a saber, 3, 6, 9, 12, 15, etc., todos os números encontrados na série serão múltiplos, por serem divisiveis por 3, exceto o número 3, que é primo, por ser divisivel somente por si e pela unidade. Assim, depois de escrita a série dos números naturais, desde 1 até 1 000, contamos de 2 em 2, de 3 em 3, de 5 em 5, de 7 em 7, de 11 em 11, etc., e cancelamos todos os múltiplos de 2, de 3, de 5, de 7, de 11, etc., *tendo o cuidado de não cancelar* os números 2, 3, 5, 7, 11, etc., por serem primos. E' inutil contar de 4 em 4, de 6 em 6, de 8 em 8, de 9 em 9, etc., porque os números que encontrarmos no decorrer da operação já estarão cancelados, por serem múltiplos de 2, de 3, etc.. (§88, quinto teorema de divisibilidade)

A operação pode ser simplificada. Por exemplo, para cancelar os múltiplos de 13, é inutil contar de 13 em 13, desde o número 1. Procuramos o número 13 × 13, isto é, 169, cancelamos este número e começamos a contar de 13 em 13, depois do número 169, isto é, a partir de 170. Com efeito, os doze primeiros múltiplos de 13, isto é, 13 × 1, 13 × 2, 13 × 3, 13 × 4, 13 × 5, ... 13 × 12, já estão cancelados, exceto 13 × 1, por serem múltiplos de 2 ou de 3 ou de 5 ou de 7 ou de 11.

No nosso exemplo, a operação estará terminada, quando tivermos de contar de 37 em 37, porque 37 × 37 = 1 369, e o limite da nossa série é 1 000. E todos os números que não tiverem sido cancelados, serão números primos. (*)

111. Regra para verificar se um número é primo ou múltiplo. O número 1 301 é primo ou múltiplo? Eis uma pergunta à qual não é possivel responder imediatamente. Na verdade, o número 1 301 não é divisivel por 2, 3, 5, 7 e 11. Entretanto, não podemos afirmar que seja primo, porque pode ser divisivel por 19 ou 23 ou 29, etc.. Empregar o crivo de Eratóstenes, unicamente para verificar se o número 1 301 é primo ou múltiplo, é coisa muito demorada. Felizmente, há uma regra que nos permite verificar rapidamente se um número é primo ou múltiplo. Antes, porem, de a aprendermos, é necessário insistir sobre alguns fatos da divisibilidade.

Se dividirmos 112 por 7, o quociente exato é 16. Logo, 112 = 7 × 16, e 112 *é tambem divisivel por* 16.

Convem tambem observar que, quando um número não é divisivel por 2, não é divisivel pelos múltiplos de 2, a saber, 4, 6, 8, 10, 12, etc.. Porque, se fosse divisivel por 4, seria tambem divisivel por 2. (quinto teorema de divisibilidade, § 88) Analogamente, quando um número não é divisivel por 3, não é divisivel pelos múltiplos de 3. De um modo geral, quando um número qualquer não é divisivel por um número primo, não é divisivel pelos múltiplos deste número primo.

Para verificar se um número é primo, é bastante dividí-lo por 2, 3, 5, 7, 11, 13, ..., etc., isto é, pela série dos números primos, **até que o quociente seja menor que o divisor, ou igual ao divisor.** Se todas as divisões deixarem resto, o número dado é primo.

Exemplo. Verificar se o número 1 301 é primo ou múltiplo.

$$\begin{array}{r|l} 1\,301 & 13 \\ \cline{2-2} 001 & 100 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1\,301 & 17 \\ \cline{2-2} 111 & 76 \\ 09 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1\,301 & 19 \\ \cline{2-2} 161 & 68 \\ 09 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1\,301 & 23 \\ \cline{2-2} 151 & 56 \\ 13 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1\,301 & 29 \\ \cline{2-2} 141 & 44 \\ 25 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1\,301 & 31 \\ \cline{2-2} 061 & 41 \\ 30 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1\,301 & 37 \\ \cline{2-2} 191 & 35 \\ 06 & \end{array}$$

Resposta. O número 1 301 é primo.

(*) Este exercício deve ser feito por todos os estudantes, e os resultados deverão ser cuidadosamente verificados pelo professor, o qual aproveitará o ensejo para recordar os numerosos fatos da divisibilidade.

Na prática, é inutil dividir o número dado por 2, 3, 5 e 11, porque os caracteres de divisibilidade nos permitem dizer de pronto se ele é ou não é divisivel por 2, 3, 5 e 11. A divisão por 7 pode ser feita mentalmente. Portanto, a primeira divisão tem como divisor o número 13. Observemos que os quocientes vão diminuindo gradualmente. Ora, se a divisão por 37 deu um quociente 35, **menor que 37,** podemos afirmar que o número 1 301 é primo. Porque, se o número 1 301 admitisse um divisor, **necessariamente maior que 37,** então o número 1 301 seria tambem divisivel pelo quociente, **necessariamente menor que 35.** Mas, vimos que o número 1 301 *não admite divisores inferiores a* 35: *logo, não admite divisores superiores a* 37 e, por consequência, é realmente primo.

Exercícios. Série XXII

Verificar se os números que se seguem são primos ou múltiplos.

1. 691
2. 1 927
3. 1 009
4. 899
5. 1 333
6. 2 021
7. 1 591
8. 1 217
9. 2 419
10. 1 697
11. 2 039
12. 1 517
13. 1 487
14. 2 491
15. 2 747
16. 2 713

112. Decomposição em fatores primos. *Decompor um número em seus fatores primos, é transformá-lo em um produto de fatores primos.* Por exemplo, decompor o número 30 em seus fatores primos é substituí-lo pelo produto 2 × 3 × 5; decompor o número 210 em seus fatores primos é substituí-lo pelo produto 2 × 3 × 5 × 7.

Os fatores primos que compõem o número dado, podem ser iguais ou desiguais. Por exemplo, $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ ou $24 = 2^3 \times 3$. O número 24 é constituido por quatro fatores primos, sendo três deles iguais a 2 e o quarto igual a 3.

Tratando-se de números pequenos, a sua decomposição em fatores primos pode ser feita mentalmente; tratando-se, porem de números grandes, a operação obedece à seguinte

Regra. *Para decompor um número em seus fatores primos, divide-se o número dado pelo seu menor divisor primo; depois divide-se o quociente pelo seu menor divisor primo; em seguida* *divide-se o novo quociente pelo seu menor divisor primo; e assim, sucessivamente, até que o último quociente seja a unidade. O número dado é igual ao produto de todos os divisores.*

Exemplo. Decompor o número 1 260 em seus fatores primos.

A operação pode ser feita de duas maneiras diferentes.

Primeira forma

```
1260 | 2
060   630 | 2
00    03    315 | 3
      10    015   105 | 3
      0     0     15    35 | 5
                  0     0    7 | 7
                             0   1
```

Segunda forma

```
1260 | 2
 630 | 2
 315 | 3
 105 | 3
  35 | 5
   7 | 7
   1 |
```

Resposta. $1260 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$

Exercícios orais

Decompor os números que se seguem, em seus fatores primos.

1. 15
2. 42
3. 60
4. 72
5. 20
6. 28
7. 42
8. 45
9. 30
10. 48
11. 54
12. 66
13. 52
14. 56
15. 69
16. 80
17. 60
18. 75
19. 78
20. 84
21. 90
22. 120
23. 150
24. 180

Exercícios. Série XXIII

Decompor em fatores primos os números que se seguem.

1. 9 085
2. 10 240
3. 9 310
4. 18 018
5. 92 300
6. 10 500
7. 29 260
8. 22 610
9. 23 270
10. 16 300
11. 16 310
12. 16 790
13. 36^4
14. $20^3 \times 33^4$
15. $6^2 \times 10^3 \times 14^4$

113. Divisão de um produto indicado por um de seus fatores ou pelo produto de dois ou mais de seus fatores.

Vimos no parágrafo anterior que:

$$1260 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 \quad \therefore \quad 1260 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$$

Esta igualdade pode ser escrita de vários modos, em virtude da lei associativa da multiplicação. (§ 72)

1260

$$1260 = 2 \times (2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7)$$
$$1260 = 3 \times (2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7)$$
$$1260 = 5 \times (2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7)$$
$$1260 = 7 \times (2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5)$$
$$1260 = (2 \times 3) \times (2 \times 3 \times 5 \times 7)$$
$$1260 = (2 \times 3 \times 5) \times (2 \times 3 \times 7)$$

Enfim, todos os fatores primos de 1 260 podem ser reunidos em *dois grupos de fatores*, ou então, 1260 pode ser reduzido a *um produto de dois fatores.* Ora, se dividirmos um produto de dois fatores por um deles, o quociente é o outro. Logo,

$$1260 \div 2 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$$
$$1260 \div 5 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7$$
$$1260 \div (2 \times 3) = 2 \times 3 \times 5 \times 7$$
$$1260 \div (2 \times 3 \times 5) = 2 \times 3 \times 7$$

Chegamos assim a uma conclusão muito simples e muito util: *para dividir um produto indicado por um de seus fatores, ou pelo produto de dois ou mais dos seus fatores, é bastante suprimir este fator ou estes fatores.*

$$(3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13) \div (3 \times 5 \times 11) = 3 \times 7 \times 13$$

Seja agora o produto $7 \times 15 \times 19$, que queremos dividir por 3. O produto dado não contem o fator 3, mas contem o fator 15, que pode ser substituido por 5×3, visto que a multiplicação é tambem uma operação *dissociativa.* Logo,

$$(7 \times 15 \times 19) \div 3 = (7 \times 5 \times 3 \times 19) \div 3 \quad \therefore \quad (7 \times 15 \times 19) \div 3 = 7 \times 5 \times 19$$

Analogamente, $(7 \times 40 \times 11 \times 13) \div 8 = 7 \times 5 \times 11 \times 13$

E assim por diante. Donde se conclue que: *para dividir um produto indicado por um número qualquer, é bastante dividir um dos fatores por este número, se a divisão for possivel.*

Exercícios orais

1. $(7 \times 8 \times 9) \div 8 = ?$
2. $(3 \times 4 \times 5 \times 6) \div 5 = ?$
3. $(4 \times 5 \times 7 \times 8) \div 8 = ?$
4. $(2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7) \div 5 = ?$
5. $(2 \times 3^2 \times 5) \div 6 = ?$
6. $(2^2 \times 3^2 \times 5) \div 10 = ?$
7. $(3 \times 5^2 \times 7) \div 15 = ?$
8. $(2 \times 5^2 \times 7) \div 14 = ?$
9. $(3 \times 5^2 \times 7) \div 35 = ?$
10. $(3 \times 15 \times 17) \div 5 = ?$
11. $(11 \times 18 \times 23) \div 9 = ?$
12. $(23 \times 30 \times 7) \div 15 = ?$

114. Quando um número é divisivel por outro, ele contem todos os fatores primos deste outro. Consideremos o número 1 716. Se dividirmos 1 716 por 44, verificaremos que o quociente exato é 39. Portanto, 1 716 é divisivel por 44, e é tambem divisivel por 39. Decompondo os números 1 716, 44 e 39 em seus fatores primos, teremos:

$$\left\{\begin{array}{r} 1\,716 = 2\times2\times3\times11\times13 \\ 44 = 2\times2\times11 \\ 39 = 3\times13 \end{array}\right\}$$

Donde se vê que o número 1 716 contem os fatores primos do número 44 e os do número 39.

Aliás, esta conclusão era facil de prever, de acordo com o quinto teorema geral de divisibilidade. (§ 87)

115. Quando um número é divisivel por dois números primos entre si, é tambem divisivel pelo produto deles. Consideremos o número 936. Este número é divisivel por 4 e por 9. Decompondo os números 4 e 9 em seus fatores primos, teremos $4 = 2 \times 2$ e $9 = 3 \times 3$. Portanto, 4 e 9 não têm um divisor comum e são, por consequência, primos entre si.

Ora, se o número 936 é divisivel por 4 e por 9, deve conter os fatores de 4 e de 9. (§ 114)

Com efeito, decompondo 936 em seus fatores primos, teremos:

$$936=2\times2\times2\times3\times3\times13 \quad \therefore \quad 936=(2\times2\times3\times3)\times(2\times13)$$

E, de acordo com o § 113, teremos:

$$936 \div (2\times2\times3\times3) = 2\times13 \quad \therefore \quad 936 \div 36 = 26$$

116. Quando um número é divisivel por outros dois que não são primos entre si, pode ser ou não ser divisivel pelo produto deles. Consideremos o número 126. E' divisivel por 2 e por 3; logo, é divisivel por 6. O número 126 é ainda divisivel por 9. Sendo 126 divisivel pòr 6 e por 9, será tambem divisivel pelo produto deles, isto é, 54? Vejamos.

$$\left\{\begin{array}{r} 6 = 2\times3 \\ 9 = 3\times3 \\ 54 = 2\times3\times3\times3 \\ 126 = 2\times3\times3\times7 \end{array}\right\}$$

Donde se vê que o número 126, sendo igual a 2×3×3×7, não é divisivel por 54, que é igual a 2×3×3×3. (§ 114)

Consideremos o número 1 680. E' divisivel por 3 e por 4; logo, é divisivel por 12; sendo divisivel por 4 e por 12, será tambem divisivel pelo produto deles, isto é, 48? Vejamos.

$$\left\{\begin{array}{r} 4 = 2\times2 \\ 12 = 2\times2\times3 \\ 48 = 2\times2\times2\times2\times3 \\ 1\,680 = 2\times2\times2\times2\times3\times5\times7 \end{array}\right\}$$

Donde se vê que o número 1 680, sendo igual a 2×2×2×2×3×5×7, é divisivel por 48, que é igual a 2×2×2×2×3. (§ 114)

Exercícios orais

1. Quando é que um número é divisivel por 6?
2. Quando é que um número é divisivel por 12?
3. Quando é que um número é divisivel por 14?
4. Quando é que um número é divisivel por 15?
5. Quando é que um número é divisivel por 18?
6. Quando é que um número é divisivel por 24?
7. Quando é que um número é divisivel por 28?
8. Quando é que um número é divisivel por 30?
9. Um número divisivel por 8 e por 9 é divisivel por 72? Por que?
10. Um número divisivel por 6 e por 12 é divisivel por 72? Por que?
11. Formar um número divisivel por 4 e por 6 e não divisivel por 24.
12. Formar um número divisivel por 8 e por 12 e não divisivel por 96.

117. Divisores de um número. Consideremos o número 1 260. De acordo com os caracteres de divisibilidade, este número é divisivel por 2, 3, 4, 5, 9 e 10. E, de acordo com o § 115, é tambem divisivel por 2 × 3, por 3 × 5, por 3 × 7, por 5 × 7, por 2 × 3 × 5, por 3 × 3 × 3 × 5, isto é, por 6, 15, 21, 35, 30, etc.. Mas, quais são então todos os divisores de 1 260? Quantos são? Como determiná-los?

Seja o número 16 200. Decompondo-o em fatores primos, acharemos:

$$16\,200 = 2^3 \times 3^4 \times 5^2$$

Os divisores de 2^3, **alem da unidade, são** 2, 4 e 8.
» » » 3^4, » » » , » 3, 9, 27 e 81
» » » 5^2, » » » , » 5 e 25.

Temos, portanto, para o número 16 200, os seguintes grupos de divisores:

1.° ➞ 1, 2, 4 8 $\qquad 3 + 1 = 4$ divisores
2.° ➞ 1, 3, 9, 27, 28 $\qquad 4 + 1 = 5$ «
3.° ➞ 1, 5, 25 $\qquad 2 + 1 = 3$ «

Já aprendemos que, *quando um número é divisivel por outros dois, primos entre si, é tambem divisivel pelo produto deles.* (§ 115) Cada um dos divisores do 1.° grupo, é primo com cada um dos divisores do 2.° grupo.

Portanto, se multiplicarmos cada um dos divisores do 1.° grupo por cada um dos divisores do 2.° grupo, teremos, ao todo,

$(3 + 1) \times (4 + 1)$ *divisores do número* 16 200.

Mas, cada um destes $(3 + 1) \times (4 + 1)$ divisores é, por sua vez, primo com cada um dos divisores do 3.° grupo. Portanto, se multiplicarmos cada um destes $(3 + 1) \times (4 + 1)$ divisores, por cada um dos divisores do 3.° grupo, teremos, ao todo,

$(3 + 1) \times (4 + 1) \times (2 + 1)$ *divisores do número* 16 200.

O exposto é suficiente para estabelecer a seguinte

Regra. *Para calcular o número de divisores de um número dado, decompõe-se este número em seus fatores primos, soma-se uma unidade ao expoente de cada um destes fatores e multiplicam-se estas somas. O produto representa o número de divisores do número dado.*

Exemplo. **Quantos divisores tem o número 12 600?**

12 600	2
6 300	2
3 150	2
1 575	3
525	3
175	5
35	5
7	7
1	

$$12\,600 = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$$

N.° dos divisores = $(3+1)\times(2+1)\times(2+1)\times(1+1)$
N.° dos divisores = $4 \times 3 \times 3 \times 2$
N.° dos divisores = 72

Resposta. **O número 12 600 tem 72 divisores.**

Convem lembrar que o expoente do fator 7 é 1; que os divisores são 72, inclusive a unidade e o proprio número 12 600.

Observação. Na relação de *todos os divisores de um número*, devem ser incluidos, sempre, *a unidade e o próprio número.*

118. Determinar todos os divisores de um número.

Vamos determinar todos os divisores do número 1 260. Já vimos que $1\,260 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$. Portanto, 1 260 tem 36 divisores, incluindo a unidade e o número 1 260. (§ 117)

Os divisores primos diferentes de 1 260 *são cinco*: 1, 2, 3, 5 e 7. Então vamos dividir todos os divisores de 1 260 em *quatro grupos*, a saber:

1.° grupo de divisores $\{\ \underline{1} - \underline{2} - \underline{4}$

2.° grupo de divisores $\begin{cases} \underline{3}\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \underline{9}\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$

3.° grupo de divisores $\{\ \underline{5}\ldots\ldots\ldots\ldots$

4.° grupo de divisores $\{\ \underline{7}\ldots\ldots\ldots\ldots$

O 1.° grupo é constituido *sempre*, seja qual for o número dado, pelo divisor 1, e pelas diferentes potências do primeiro divisor primo, diferente da unidade, que figuram no número dado. No nosso caso é constituido pelos divisores 1, 2 e 4. O 2.° grupo é constituido pelas diferentes potências do segundo divisor primo que figuram no número dado. O 3.° grupo é constituido pelas diferentes potências do terceiro divisor primo que figuram no número dado. E assim por diante.

Entretanto, faltam ainda muitos divisores. O primeiro grupo está completo; os mais estão incompletos. E, para maior clareza, vamos chamar os divisores já obtidos, e que estão sublinhados, de **divisores iniciais.**

Para completar o segundo grupo, multiplica-se cada um dos seus divisores iniciais, *por todos os divisores* do primeiro grupo. Para completar o terceiro grupo, multiplica-se cada um dos seus divisores iniciais *por todos os divisores dos dois primeiros grupos.* Para completar o quarto grupo, multiplica-se cada um dos seus divisores iniciais *por todos os divisores dos três primeiros grupos.* E assim por diante. (§ 117)

A disposição final é a seguinte:

1.° grupo de divisores $\{\ \underline{1} - \underline{2} - \underline{4}$

2.° grupo de divisores $\begin{cases} \underline{3} - 6 - 12 \\ \underline{9} - 18 - 36 \end{cases}$

3.° grupo de divisores $\{\ \underline{5} - 10 - 20 - 15 - 30 - 60 - 45 - 90 - 180$

4.° grupo de divisores $\begin{cases} \underline{7} - 14 - 28 - 21 - 42 - 84 - 63 - 126 - 252 \\ 35 - 70 - 140 - 105 - 210 - 420 - 315 - 630 - 1\,260 \end{cases}$

Exemplo. Determinar todos os divisores de 210.

$$\begin{array}{r|l} 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} 210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \\ \\ \text{N.º dos divisores} = (1+1)\times(1+1)\times(1+1)\times(1+1) \\ \text{N.º dos divisores} = 2\times2\times2\times2 \\ \text{N.º dos divisores} = 16 \end{array}$$

1.º grupo de divisores $\{ \ \underline{1} - 2$

2.º grupo de divisores $\{ \ \underline{3} - 6$

3.º grupo de divisores $\{ \ \underline{5} - 10 - 15 - 30$

4.º grupo de divisores $\{ \ \underline{7} - 14 - 21 - 42 - 35 - 70 - 105 - 210$

Exemplo. Determinar todos os divisores de 15 750.

$$\begin{array}{r|l} 15\,750 & 2 \\ 7\,875 & 3 \\ 2\,625 & 3 \\ 875 & 5 \\ 175 & 5 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} 15\,750 = 2\times3^2\times5^3\times7 \\ \\ \text{N.º dos divisores} = (1+1)\times(2+1)\times(3+1)\times(1+1) \\ \text{N.º dos divisores} = 2\times3\times4\times2 \\ \text{N.º dos divisores} = 48 \end{array}$$

1.º grupo de divisores $\{ \ \underline{1} - 2$

$$\text{2.º grupo de divisores} \begin{cases} \underline{3} - 6 \\ \underline{9} - 18 \end{cases}$$

$$\text{3.º grupo de divisores} \begin{cases} \underline{5} - 10 - 15 - 30 - 45 - 90 \\ 25 - 50 - 75 - 150 - 225 - 450 \\ \underline{125} - 250 - 375 - 750 - 1125 - 2\,250 \end{cases}$$

$$\text{4.º grupo de divisores} \begin{cases} \underline{7} - 14 - 21 - 42 - 63 - 126 - 35 - 70 - 105 - 210 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ 7\,875 - 15\,750 \end{cases}$$

Exercícios. Série XXIV

Determinar todos os divisores de cada um dos números que se seguem.

1. 1 024
2. 864
3. 5 400
4. 12 012
5. 5 580
6. 6 601

---

119. Determinar todos os divisores comuns a dois números dados. *Quando um número divide outros dois números, tambem divide o m. d. c. destes dois números.* (§ 105) Desta verdade já demonstrada, podemos deduzir a seguinte

Regra. *Para determinar todos os divisores comuns a dois números dados, determina-se o m. d. c. dos dois números dados e, em seguida, determinam-se todos os divisores do m. d. c.*

Exemplo. Determinar os divisores comuns aos números 2 375 019 e 665 038.

	3	1	1	3	116
2 375 019	665 038	379 905	285 133	94 772	817
379 905	285 133	94 772	817	13 07 4 902 0	

D (2 375 019, 665 038) = 817

$$\begin{array}{r|l} 817 & 19 \\ 43 & 43 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} 817 = 19 \times 43 \\ \text{N.º dos divisores} = (1+1)\times(1+1) \\ \text{N.º dos divisores} = 2\times2 \\ \text{N.º dos divisores} = 4 \end{array}$$

1.º grupo de divisores: $\underline{\mathbf{1}} - \underline{\mathbf{19}}$

2.º grupo de divisores: $\underline{\mathbf{43}} - \mathbf{817}$

Resposta. Os divisores comuns aos números 2 375 019 e 665 038 são 1, 19, 43 e 817.

Para calcular os divisores comuns a três ou mais números dados, o processo é o mesmo.

Exercícios. Série XXV

1. Determinar os divisores comuns aos números 505 461 e 812 702.
2. Idem para os números 1 024 e 1 800.
3. Idem para os números 583 440, 76 296 e 240 240.
4. Idem para os números 210 e 330.
5. Idem para os números 776 475, 570 843 e 1 119 195.

120. Composição do m. d. c. de dois ou mais números. Aprendemos a determinar o m. d. c. de dois ou mais números, pelo *processo das divisões sucessivas.* Vamos agora aprender outro processo, chamado **composição do m. d. c. de dois ou**

mais números dados, pela decomposição dos números dados em seus fatores primos. Este processo se resume na seguinte

Regra. *Para determinar o m. d. c. de dois ou mais números, pela decomposição destes números em seus fatores primos, decompõe-se cada um dos números dados em seus fatores primos. Em seguida, multiplicam-se os fatores primos* **comuns** *aos números dados, tomando cada um deles com o seu* **menor** *expoente. O produto será o m. d. c. dos números dados.*

Exemplo. Determinar, pelos fatores primos, o m. d. c. dos números 210, 1 980 e 14 040.

$$\begin{array}{r|l} 14\,040 & 2 \\ 7\,020 & 2 \\ 3\,510 & 2 \\ 1\,755 & 3 \\ 585 & 3 \\ 195 & 3 \\ 65 & 5 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1\,980 & 2 \\ 990 & 2 \\ 495 & 3 \\ 165 & 3 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$$
$$1\,980 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 11$$
$$14\,040 = 2^3 \times 3^3 \times 5 \times 13$$

$$D\,(210,\ 1\,980,\ 14\,040) = 2 \times 3 \times 5 = 30$$

Demonstração. Diz o quinto teorema de divisibilidade que: *quando um número é divisivel por outro, é tambem divisivel pelos fatores deste outro.* O m. d. c. dos três números dados é 2×3×5. Ora, o m. d. c. não pode ser 2×3×5×2, porque 210, se fosse divisivel por 2×3×5×2, seria tambem divisivel por 2×2, o que não é possivel, porque 210 não contem o fator 2×2. O m. d. c. não pode ser 2×3×5×7, porque os números 1 980 e 14 040, se fossem divisiveis por 2×3×5×7, seriam tambem divisiveis por 7, o que não é possivel, porque 1 980 e 14 040 não contêm o fator 7. Logo, se o produto 2×3×5, sendo multiplicado por qualquer outro número, deixa de ser divisor comum aos três números dados, ele é, realmente, o m. d. c. dos três números dados.

Exercícios. Série XXVI

Calcular, pela decomposição em fatores primos, o m. d. c. dos grupos de números que se seguem.

1.	840 e 880	**4.**	5 544 e 6 552	**7.**	78 540 e 37 026
2.	1 565 e 626	**5.**	80 934 e 140 343	**8.**	420, 990 e 1 950
3.	10 863 e 2 059	**6.**	665 038 e 2 375 019	**9.**	770, 1 078 e 2 002

121. Mínimo múltiplo comum. *Múltiplo comum de dois ou mais números é um outro número que é divisivel exatamente por estes dois ou mais números.* 15 é múltiplo comum de 3 e 5; 24 é múltiplo comum de 2, 3, 4, 6, 8 e 12; 30 é múltiplo comum de 2, 3, 5, 6, 10 e 15; e assim por diante.

Dois ou mais números têm sempre uma infinidade de múltiplos comuns. Consideremos os números 3 e 4; seu produto 3 × 4 ou 12, é divisivel por 3 e por 4. Agora, se multiplicarmos 12 pela série dos números naturais, isto é, por 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, etc., os produtos obtidos, a saber, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, 132, etc., sendo divisiveis por 12, serão divisiveis por 3 e 4, porque, quando um número é divisivel por outro, é tambem divisivel pelos fatores deste outro. (quinto teorema de divisibilidade) Portanto, não é possivel determinar *o maior múltiplo comum* de dois ou mais números.

O que nos interessa nesta lição é o menor de todos os múltiplos comuns de dois ou mais números dados; é o **mínimo múltiplo comum**, ou, abreviadamente, **m. m. c.** ou **M.**

Mínimo múltiplo comum de dois ou mais números é o menor número que é divisivel por estes dois ou mais números.

Quando os números dados são pequenos, podemos determinar mentalmente o seu m. m. c.. Para determinar o m. m. c. de 8 e 12, enunciamos vagarosamente os múltiplos de um deles, por exemplo, de 12, verificando com atenção se cada um dos múltiplos enunciados é ou não é divisivel por 8. Diremos: 12, 24... O menor múltiplo de 12, que é tambem divisivel por 8, é 24; logo, 24 é o m. m. c. de 8 e 12. Analogamente, para determinar o m. m. c., de 9 e 15, diremos: 15......., 30......., 45. O menor múltiplo de 15, que é tambem divisivel por 9, é 45; logo, 45 é o m. m. c. de 9 e 15. Entretanto, este processo é impraticavel para determinar o m. m. c. de dois ou mais números grandes. Neste caso, a pesquiza do m. m. c. se realiza com o emprego da seguinte.

Regra. *Para determinar o m. m. c. de dois ou mais números, decompõe-se cada um destes números em seus fatores primos. Em seguida, multiplicam-se os fatores primos* **comuns** *e não* **comuns** *aos números dados, tomando cada um deles com o seu* **maior** *expoente. O produto será o m. m. c. dos números dados.*