112. Compasso de proporção. — O *compasso de proporção* (fig. 80) compõe-se de duas reguas eguaes articuladas no ponto *O*, e divididas no mesmo numero de partes eguaes a partir do vertice.

Seja a tomar os $\frac{4}{9}$ de uma recta *CD*, por exemplo; abrem-se as reguas de maneira que a divisão *9* de cada regua fique nas extremidades de *CD*, e a distancia *AB* entre as divisões *4* é a que se procura.

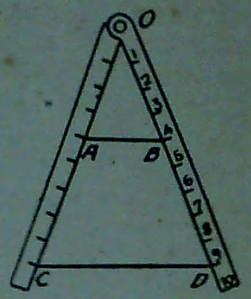

Fig. 80

113. Processo das quadriculas. — Este processo é empregado quando se tem de reproduzir uma figura complicada. Consiste em encerrar a figura proposta num rectangulo ou quadrado *ABCD*, que se divide em outros pequenos rectangulos ou quadrados eguaes entre si (fig. 81) por meio de duas series de rectas parallelas equidistantes e perpendiculares entre si.

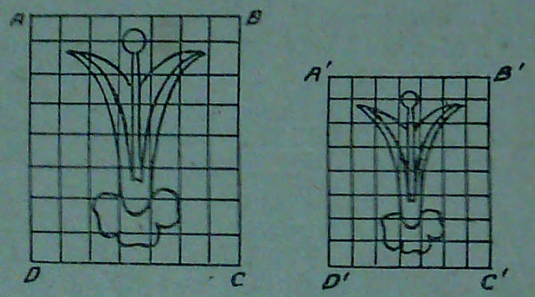

Fig 81

Depois se constróe um outro rectangulo ou quadrado *A'B'C'D'* cujos lados estão para os do primeiro na mesma escala do desenho que se pretende fazer, $\frac{1}{2}$ por exemplo; neste quadrado ou rectangulo fórma-se a mesma rede de quadriculas. A copia da figura torna-se assim muito facilitada, pelo conhecimento da posição dos differentes pontos da figura que ficam demarcados nas quadriculas.

114. Pantographo — O *pantographo* (fig. 82) é um instrumento que se emprega na reducção ou augmento mecanico dos desenhos.

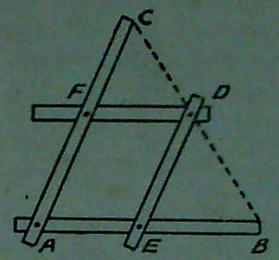

Fig. 82

Compõe-se essencialmente de duas reguas *AB* e *AC* articuladas em *A*, e mais duas outras *DE* e *DF*, articuladas em *D*, e ligadas ás primeiras nos pontos *E* e *F* por meio de parafusos moveis, de sorte que o quadrilatero *AEDF* seja sempre um parallelogrammo, e o ponto *D* fique na direcção *BC*.

Fixando o ponto *C*, por meio de um estilete, obriga-se o ponto *B* a acompanhar o contorno de uma figura qualquer, e o ponto *D*, que se acha munido de um lapis, traçará uma figura semelhante á primeira e cuja razão de semelhança será $\frac{CF}{CA}$.

Problema

115. *Determinar a distancia de um ponto* A *a outro ponto inaccessivel* B, *que fica á outra margem de um rio*, por exemplo (fig. 83).

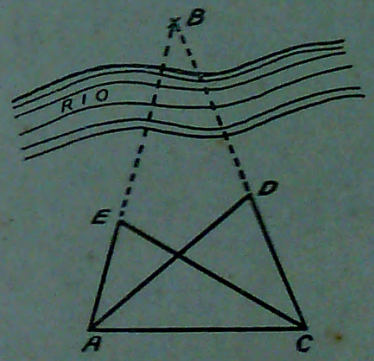

Fig 83

Traça-se no terreno, a partir de *A*, uma recta *AC*, e nas direcções *AB* e *CB* marcam-se por meio de balisas ou de varas rectas, dois pontos arbitrarios *E* e *D*. Formam-se assim no terreno os dois triangulos *ACE* e *ACD*, que têm uma base commum *AC*, que se mede, bem como os outros lados *AE*, *CE*, *CD* e *AD*.

Desenham-se depois numa folha de papel e

numa certa escala, triangulos semelhantes a *ACE* e *ACD*; prolongando no desenho os lados correspondentes a *AE* e *CD*, a sua intersecção será um ponto que corresponderá ao ponto *B* do terreno. Basta depois medir, na escala do desenho, a distancia entre os dois pontos correspondentes a *A* e a *B*, para se ter a distancia procurada. Por exemplo, na escala 1:500, si a distancia no desenho fosse 124 millimetros, a distancia natural seria 124 mm.$\times$500$=$62^{m}.

PROBLEMA

116. *Calcular a distancia entre dois pontos inaccessiveis* M *e* N, *que ficam além de um rio*, por exemplo (fig. 84).

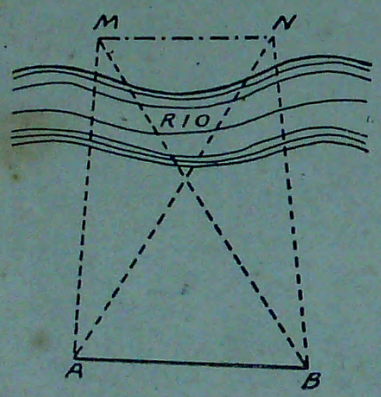

FIG 84

Traça-se no terreno uma recta *AB* de um certo comprimento; applicando depois o problema anterior, determinam-se os comprimentos das rectas *AM*, *BM*, *AN* e *BN* que são lados dos triangulos *ABM* e *ABN*. Desenham-se em seguida numa folha de papel e na escala escolhida, os dois triangulos *ABM* e *ABN* com a base commum *AB*; medindo finalmente no desenho a distancia *MN*, e transformando-a na escala adoptada, tem-se a distancia que se deseja obter.

PROBLEMA

117. *Calcular a altura de uma torre por meio da sombra* (fig. 85).

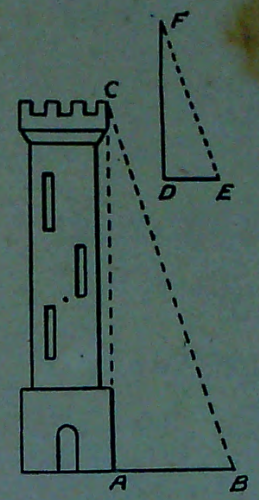

FIG. 85

Crava-se verticalmente no terreno uma vara *DF*, cuja sombra *DE* se projecta numa direcção parallela á sombra *AB* da torre; formam-se assim dois triangulos rectangulos semelhantes *ABC* e *DEF*, que dão a seguinte proporção:

$$\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC}, \text{ donde } AC = \frac{AB \times DF}{DE},$$

isto é, a altura *AC* da torre é egual ao producto do comprimento da sombra da torre pela altura da vara dividido pelo comprimento da sombra da mesma vara.

Exemplo: Sejam 2^{m},40 a altura da vara *DF*, 0,^{m}40 o comprimento da sombra da vara e 3^{m},10 o comprimento da sombra da torre, teremos:

$$\text{Altura da torre} = \frac{3.10 \times 2.40}{0.40} = 18^{m},60.$$

Exercicios

36. — Os lados *AB* e *AC* de um triangulo *ABC*, valem respectivamente 8 m. e 12 m. Por um ponto *D* do lado *AB*, situado a 3 m. de *A*, traça-se uma parallela ao lado *BC*. Calcular os dois segmentos determinados sobre o lado *AC*.

37. — Calcular a quarta proporcional a tres rectas que valem respectivamente 5 m., 6 m. e 8 m.

38. — Achar a meia proporcional entre duas rectas de 4 m. e de 16 m.

39. — Uma escada de 12 m. de comprimento está inclinada contra um poste vertical; que altura alcança a escada, si o pé da mesma dista 3 m. do poste?

40. — Calcular o diagonal de uma sala rectangular que tem 7,m 50 de comprimento por 4 m. de largura.

41. — Um poste de 15 m. está applicado contra uma casa da rua, e alcança a altura de 6 m. Sem mudar a posição do pé do poste, e applicando-o contra a casa opposta da rua, póde alcançar 8 m. Qual é a largura da rua?

42. — Calcular a altura do triangulo equilatero de 7 m. de lado.

43. — Calcular a altura do triangulo isosceles que tem 12 m. de lado e 10 m. de base.

44. — Calcular a altura do triangulo equilatero que tem 24 m. 60 de perimetro.

45. — Calcular os segmentos determinados sobre a hypotenusa de um triangulo rectangulo pela perpendicular baixada do vertice do angulo recto, sabendo-se que os cathetos valem 8 m. e 6 m.

46. — Os dois segmentos determinados sobre a hypotenusa pela perpendicular baixada do vertice do angulo recto valem 3m.60 e 6m.40. Calcular a perpendicular e os cathetos.

47. — A hypothenusa de um triangulo rectangulo tem 5 m. e um dos cathetos 4 m. Calcular o outro catheto; os dois segmentos determinados sobre a hypothenusa pela altura correspondente, e a mesma altura.

48. — Qual é a diagonal de um quadrado que tem 4m. 5 de lado?

49. — Sendo a diagonal de um quadrado egual a 4 m., calcular o lado do quadrado.

50. — Um mastro de 10 m. partiu-se a uma certa altura, de modo que a ponta tombada por terra ficou a 2m. 5 do pé do mastro. A que altura se partiu o mastro?

CAPITULO IV

POLYGONOS INSCRIPTOS E CIRCUMFERENCIA

I. — Polygonos regulares

118. Definições.—Chama-se *polygono inscripto* numa circumferencia aquelle cujos lados são cordas da circumferencia.

Todos os polygonos regulares podem ser inscriptos numa circumferencia, e é do seu estudo que vamos agora tratar.

O centro da circumferencia na qual se acha inscripto o polygono regular é tambem o *centro do polygono*; a recta que vae do centro a um vertice é o *raio* do polygono regular, e a perpendicular baixada do centro ao meio do lado tem o nome de *apothema*.

PROBLEMA

119. *Inscrever um quadrado numa circumferencia* (fig. 86).

Traçam-se dois diametros perpendiculares AC e BD, e unem-se as suas extremidades duas a duas. O quadrilatero $ABCD$ é um quadrado.

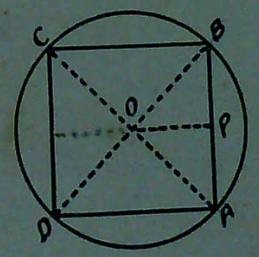

FIG. 86

Para calcular o lado do quadrado, basta attender que no triangulo rectangulo AOB, tem-se:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2,$$

$$\text{ou } \overline{AB}^2 = r^2 + r^2 = 2r^2$$

$$\text{logo, } AB \text{ ou } l_4 = \sqrt{2r^2} = r\sqrt{2}.$$

O apothema OP do quadrado é a metade do lado, portanto:

$$a_4 = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

120. Observação. — O valor de $\sqrt{2}$ é proximamente 1,41.

PROBLEMA

121. *Inscrever numa circumferencia um hexagono regular e um triangulo equilatero* (fig. 87).

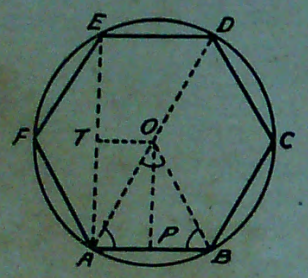

FIG. 87

1.º—Supponhamos que seja AB o lado do hexagono regular; traçando os raios OA e OB forma-se o angulo AOB que vale $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$. Os outros dois angulos em A e em B valem juntos $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, mas como o triangulo AOB é isosceles, cada um destes angulos vale $\frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$. O triangulo AOB é pois equiangulo e, portanto, equilatero (**66**); logo o lado AB do hexagono regular é egual ao raio OA do circulo, isto é:

$$l_6 = r$$

2.º — Unindo alternadamente os vertices do hexagono, teremos o triangulo equilatero inscripto cujo lado AE é um dos cathetos do triangulo rectangulo AED, e tem-se portanto (**105**):

$$AE = \sqrt{\overline{AD}^2 - \overline{ED}^2} = \sqrt{4r^2 - r^2} = \sqrt{3r^2} = r\sqrt{3}$$

isto é,

$$l_3 = r\sqrt{3}$$

122. Observação. — Toma-se para $\sqrt{3}$ o valor 1,73.

123. O *apothema* OP do hexagono é a metade do lado do triangulo equilatero inscripto, e o apothema OT do triangulo é a metade do lado do hexagono regular; temos pois, as formulas:

$$a_6 = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

$$a_3 = \frac{r}{2}$$

124. Formulas. — As principaes formulas relativas aos lados e apothemas dos polygonos regulares são as seguintes:

No triangulo . . . $l_3 = r\sqrt{3}$ e $a_3 = \frac{r}{2}$

» quadrado . . . $l_4 = r\sqrt{2}$ e $a_4 = \frac{r\sqrt{2}}{2}$

» hexagono . . . $l_6 = r$ e $a_6 = \frac{r\sqrt{3}}{2}$

» pentagono . . $l_5 = \frac{r\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2}$

» octogono . . . $l_8 = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

» decagono . . . $l_{10} = \frac{r(\sqrt{5} - 1)}{2}$

Problemas numericos

I. — Qual é o lado do quadrado, do triangulo equilatero e do hexagono regular inscriptos numa circumferencia de 5^m de raio?

$$l_4 = 5 \times 1.41 = 7,^m05$$
$$l_3 = 5 \times 1.73 = 8,^m65$$
$$l_6 = 5^m$$

II. — Calcular o raio da circumferencia, sabendo-se que o apothema do triangulo equilatero vale $1.^m2$.

$$a_3 = \frac{r}{2}, \text{ ou } r = 2 \times a_3 = 2 \times 1,2 = 2,^m4$$

III. — Calcular o perimetro do triangulo equilatero, sabendo-se que o apothema do quadrado é egual a $4,^m23$.

Temos $a_4 = \dfrac{r\sqrt{2}}{2}$, donde $2a_4 = r\sqrt{2}$, ou

$$r = \frac{2a_4}{\sqrt{2}} = \frac{2 \times 4.23}{1.41} = 6^m$$

logo, $l_3 = 6 \times 1.73 = 10,^m38$; e o perimetro do triangulo será $3 \times 10,38 = 31,^m14$

THEOREMA

125. *Dois polygonos regulares do mesmo numero de lados têm os perimetros proporcionaes aos seus raios e aos seus apothemas* (fig. 88).

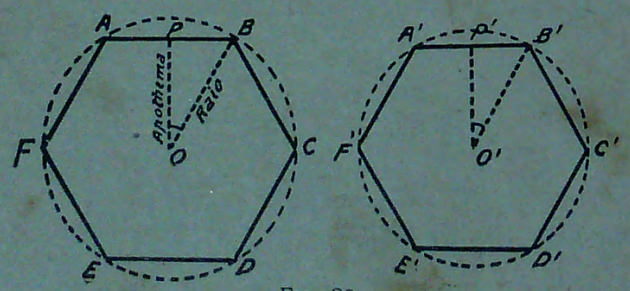

FIG. 88

Com effeito, os dois triangulos rectangulos OPB e $O'P'B'$, formados pelos raios e apothemas, são semelhantes por terem um angulo agudo egual em O e O', pelo que se tem a proporção:

$$\frac{PB}{P'B'} = \frac{OB}{O'B'} = \frac{OP}{O'P'}.$$

Designando por n o numero de lados dos polygonos, os perimetros serão $2n \times BP$ e $2n \times B'P'$; a proporção acima póde escrever-se:

$$\frac{2n \times PB}{2n \times P'B'} = \frac{OB}{O'B'} = \frac{OP}{O'P'}, \text{ isto é, } \frac{p}{p'} = \frac{r}{r'} = \frac{a}{a'}.$$

126. Polygonos estrellados. — Si uma circumferencia é dividida em n partes eguaes, e se unem os pontos de p em p, sendo p um numero primo com n, obtêm-se polygonos regulares concavos, denominados *estrellados*.

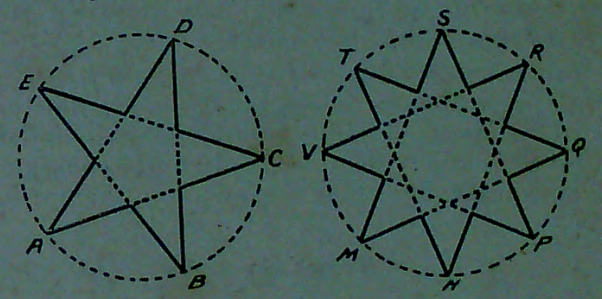

FIG. 89

Assim, dividindo uma circumferencia em 5 partes eguaes pelos pontos A, B, C, D e E, e unindo esses pontos de 2 em 2, obtem-se o pentagono estrellado. Si dividissemos a circumferencia em 8 partes eguaes, e unissemos os pontos de 3 em 3 (por ser 3 primo com 8), obteriamos o octogono regular estrellado $MNPQRSTV$ (fig. 89).

127. APPLICAÇÕES. — **Os polygonos regulares são frequentemente applicados no ladrilhamento dos aposentos; para esse fim empregam-se os triangulos equilateros, os quadrados e os hexagonos regulares. Pela combinação de polygonos de especies diffe-**

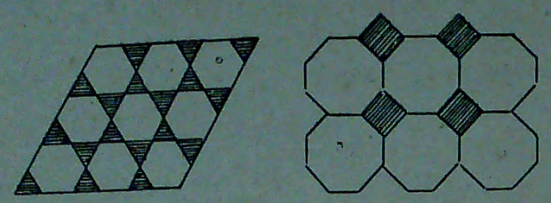

FIG. 90

rentes, obtêm-se desenhos variados (fig. 90). Nos jardins, nas vidraças de igrejas, encontram-se tambem applicações dos polygonos regulares. Os kiosques têm geralmente a fórma de um hexagono ou de um octogono regular.

II. — Medida da circumferencia

128. A medida da circumferencia não se póde effectuar *directamente*, porque a unidade linear é rectilinea e não se adapta sobre uma curva.

Considera-se a circumferencia como o *limite* para o qual tende o perimetro de um polygono regular inscripto, quando o numero de lados augmenta indefinidamente; conclúe-se dahi que a medida da circumferencia não póde ser obtida exactamente, mas sim com a approximação que se deseja.

THEOREMA

129. *A razão de duas circumferencias é egual á razão de seus diametros.*

Temos para dois polygonos regulares do mesmo numero de lados (n. **125**):

$$\frac{p}{p'} = \frac{r}{r'}.$$

Augmentando indefinidamente o numero de lados desses polygonos, p tende para uma circumferencia C e p' para outra circumferencia C'; temos, pois:

$$\frac{C}{C'} = \frac{r}{r'} = \frac{2\,r}{2\,r'}.$$

130. Corollario. — A razão da circumferencia ao seu diametro é um numero constante.

Alternando os meios da proporção $\frac{C}{C'} = \frac{2\,r}{2\,r'}$, vêm:

$$\frac{C}{2\,r} = \frac{C'}{2\,r'} = \text{constante}.$$

A razão constante $\frac{C}{2\,r}$ representa-se pela letra grega π (pi); temos, pois:

$\frac{C}{2\,r} = \pi$, donde $C = 2\,\pi\,r$ e $\frac{C}{2\,\pi} = r$; resultando dahi as duas regras seguintes:

1.ª — *A circumferencia é egual ao dobro de π multiplicado pelo raio.*

2.ª — *O raio é egual á circumferencia dividida pelo dobro de π.*

131. Observação. — O numero π é incommensuravel; o seu valor approximado em fracção decimal é 3,1416, e em fracção ordinaria é $\frac{22}{7}$.

PROBLEMAS NUMERICOS

I — Calcular o comprimento da circumferencia que tem $2^{m}5$ de raio.

SOLUÇÃO. — Applicando a formula $C = 2\,\pi\,r$, vem:

$$C = 2 \times 3{,}1416 \times 2{,}5 = 15{,}^{m}7080.$$

II — Qual é o raio da circumferencia que tem 50 metros de comprimento?

SOLUÇÃO. — Applicando a formula $r = \frac{C}{2\,\pi}$, temos:

$$r = \frac{50}{2 \times 3{,}1416} = 7{,}^{m}96$$

132. Corollario. — O comprimento do arco de um grau é evidentemente $\frac{2\pi r}{360^0} = \frac{\pi r}{180^0}$; logo, o comprimento l de um arco de n graus é dado pela formula:

$$l = \frac{\pi r n}{180^0}.$$

Exemplo. — Qual é o comprimento de um arco de 60^0 e que tem $1,^m5$ de raio?

Temos a formula $l = \frac{\pi r n}{180}$ que dá:

$$l = \frac{3.1416 \times 1.5 \times 60}{180} = 1,^m5708.$$

Problema

133. *Determinar graphicamente o comprimento da circumferencia* (fig. 91).

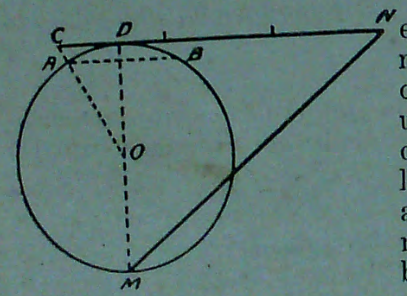

Fig. 91

Traça-se uma corda AB egual ao raio, e depois o diametro MD perpendicular á corda. Pelo ponto D traça-se uma tangente limitada á esquerda no ponto C do prolongamento de OA, e sobre a tangente leva-se o comprimento CN triplo do raio; o dobro da recta MN será o comprimento da circumferencia.

134. *Graphicamente* tambem se póde rectificar um arco menor do que um quadrante. Seja o arco AB; prolonguemos o diametro AC de um comprimento CD egual a $\frac{3}{4}$ do raio, e unamos D ao ponto B. A parte AM da tangente em A, comprehendida entre este ponto e o prolongamento de DB, é o comprimento do arco AB.

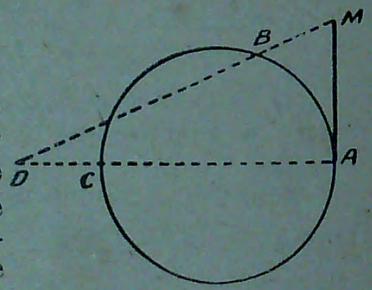

Fig. 92

Inversamente, se póde obter na circumferencia um arco de comprimento determinado, tomando em AM o comprimenta do arco e ligando M ao ponto D; o arco AB é o procurado.

135. Curvimetros. — São apparelhos que se empregam na medida das linhas curvas situadas num plano. Existem hoje differentes modificações do *curvimetro primitivo*, que consta de uma haste terminada por uma forquilha rectangular cujas pontas sustentam um eixo em rosca, no qual está montado um rodete dentado. Com este rodete percorre-se a curva, e, ao girar, avança no mencionado eixo; recorre-se depois á escala do desenho, a partir do zero, de maneira que a roda gire em sentido contrario, e, quando voltar á primitiva posição, deixará medido na escala o comprimento da curva.

As principaes modificações do curvimetro são apparelhos conhecidos pelos nomes de *cartometro*, *campilometro* e *planigrapho*.

136. APPLICAÇÕES — Na construcção das rodas dentadas, que devem engrenar uma com a outra, é preciso determinar os diametros das *circumferencias primitivas* sobre as quaes estão dispostos os dentes das rodas, de maneira que as velocidades de rotação estejam numa razão dada. Supponhamos, por exemplo, que uma das rodas deva fazer 8 voltas emquanto a outra fizer 3, devemos ter a seguinte proporção:

$$\frac{C}{C'} = \frac{3}{8}$$

Mas a razão $\frac{C}{C'}$ das circumferencias é egual á razão $\frac{r}{r'}$ dos seus raios, e tem-se pois:

$$\frac{r}{r'} = \frac{3}{8};$$

o que prova que os raios das duas rodas devem estar na *razão inversa* das velocidades que ellas devem ter.

Quando um carro se move no sólo, os pontos da circumferencia de suas rodas apoiam-se successivamente no terreno, resultando dahi que, num certo tempo, uma roda faz tantas vezes mais revoluções quantas vezes é menor a sua circumferencia ou o seu raio. E' por este motivo que as rodas dianteiras, que são menores, gastam mais os eixos, e requerem reparações mais frequentes do que as rodas de traz.

Exercicios

51. — Calcular o lado do triangulo equilatero, do quadrado e do hexagono regular inscriptos numa circumferencia de 10 m. de raio.

52. — Sendo o perimetro do quadrado egual a 12 m., calcular o lado do hexagono regular inscripto.

53. — Valendo o raio da circumferencia 3m. 60, calcular os perimetros do quadrado e do hexagono regular inscriptos.

54. — Calcular o perimetro de um triangulo equilatero inscripto, sabendo-se que o lado do hexagono regular inscripto mede 7m. 20.

55. — Calcular o raio da circumferencia, sabendo-se que o apothema do triangulo equilatero vale 1m. 75.

56. — Qual é a diagonal do quadrado inscripto numa circumferencia de 2m. 35 de raio?

57. — Calcular o lado do quadrado, sabendo-se que o perimetro do hexagono regular inscripto vale 30m. 72.

58. — Em um circulo de 2 m. de raio, calcular a differença dos perimetros do hexagono regular e do quadrado inscriptos.

59. — A differença entre o perimetro do quadrado e do triangulo equilatero inscriptos é de 0m. 40. Calcular o raio da circumferencia.

60. — Calcular o lado do decagono regular inscripto numa circumferencia de 8 m. de raio.

61. — Quanto mede a circumferencia que tem 2m. 50 de raio?

62. — Qual é o raio de uma circumferencia que tem 100 m. de comprimento?

63. — Um tanque circular tem 30m. 40 de circumferencia; qual é o seu diametro?

64. — O raio da roda de um carro tem 0m. 30 de comprimento. Que extensão percorre a roda dando 200 voltas?

65. — Que distancia percorre em 10 minutos uma bicycleta, cuja roda tem 0m. 50 de raio, si dá 2 voltas por segundo?

66. — Qual é a circumferencia de uma roda de 135 mm. de raio?

67. — Qual é o comprimento de um arco de 40° num circulo de 1m. 50 de raio?

68. — Calcular o raio do globo terrestre, sabendo-se que sua circumferencia tem 40000 Km.

69. — Duas cidades, situadas no mesmo meridiano, differem de 30° de latitude. Calcular a sua distancia, sendo o raio médio da terra 6360 Km.

70. — Calcular a differença de latitude de duas cidades situadas no mesmo meridiano, sabendo-se que distam de 450 Km. e que o raio médio da terra é de 6360 Km.

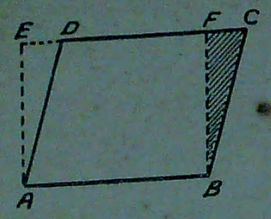

FIG. 94

Seja o parallelogrammo $ABCD$; levantando perpendiculares pelos pontos A e B, forma-se o rectangulo $ABFE$ equivalente ao parallelogrammo. Com effeito, o parallelogrammo é composto do trapezio $ABFD$ e do triangulo BCF, e o rectangulo compõe-se do mesmo trapezio e do triangulo ADE que é egual a BCF; a area do parallelogrammo é, portanto, expressa pela mesma formula da area do rectangulo.

Designando por P a area do parallelogrammo, temos:

$$P = b \times a.$$

THEOREMA

141. *A area do triangulo é egual á metade do producto da base pela altura* (fig. 95).

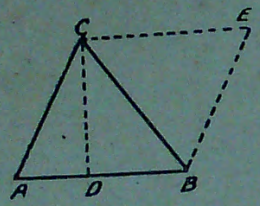

FIG. 95

Seja o triangulo ABC; traçando pelos vertices B e C parallelas ao lado opposto, forma-se o parallelogrammo $ABEC$ duplo do triangulo proposto, por ser o triangulo BEC egual a ABC. Portanto, o triangulo é a metade do parallelogrammo de mesma base e mesma altura, e a sua area T é dada pela formula:

$$T = \frac{b \times a}{2}.$$

142. No triangulo rectangulo a area póde ser obtida pela metade do producto dos cathetos; no caso do *triangulo equilatero* a area obtem-se mais facilmente pela formula: $T = \frac{l^2}{4} \times \sqrt{3}$, sendo l o comprimento do lado.

Sendo conhecidos os tres lados a, b e c de um triangulo qualquer, a sua area póde ser determinada pela

formula seguinte, na qual p representa a metade do perimetro do triangulo:

$$T = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}.$$

EXEMPLO: 1.º Qual é a area de um triangulo equilatero de $8,^{m}6$ de lado?

Applicando a formula $T = \frac{l^2}{4} \times \sqrt{3}$, vem:

$$T = \frac{8,6 \times 8,6}{4} \times 1.73 = 31,^{m^2}9877.$$

2.º — Calcular area de um triangulo cujos lados valem respectivamente 10^m, 6^m e 8^m.

Applicando a formula

$$T = \sqrt{p\,(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ na qual}$$

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{10+6+8}{2} = 12, \text{ temos:}$$

$$T = \sqrt{12(12-10)\,(12-6)\,(12-8)} =$$

$$= \sqrt{12 \times 2 \times 6 \times 4} = \sqrt{576} = 24^{m^2}.$$

THEOREMA

143. *A area de um trapezio é egual ao producto da metade da somma das bases pela altura* (fig. 96).

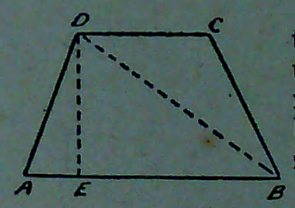

FIG. 96

Com effeito, a diagonal BD do trapezio $ABCD$ o decompõe em dois triangulos ABD e CDB que têm a mesma altura DE do trapezio, e cujas bases são as proprias bases do trapezio. Podemos pois, escrever:

$$ABCD = ABD + CDB;$$

representando por Tr a area do trapezio, por b a base AB, por b' a base superior CD e por a a altura DE, vem:

$$Tr = \frac{b \times a}{2} + \frac{b' \times a}{2} = \frac{b + b'}{2} \times a$$

Exemplo. — Calcular a area de um trapezio de $4^m.6$ de altura e cujas bases medem $8^m.2$ e 3^m.

$$Tr = \frac{8.2 + 3}{2} \times 4.6 = 25,^{m2}76.$$

Theorema

144. *A area de um polygono regular é egual ao producto da metade do perimetro pelo apothema* (fig. 97).

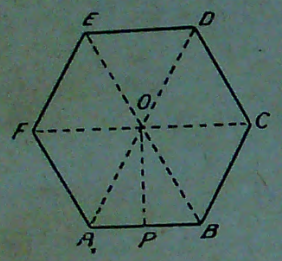

Fig. 97

Si ligarmos o centro O do polygono regular a todos os seus vertices, o polygono ficará decomposto em tantos triangulos eguaes quantos são os lados do mesmo; a area de um desses triangulos AOB, por exemplo, é $\frac{AB \times OP}{2}$; logo, representando por n o numero de lados e por a o apothema OP do polygono, a sua area Pr será:

$$Pr = \frac{n \times AB \times a}{2} = p \times a,$$

designando por p o semi-perimetro $\frac{n \times AB}{2}$ do polygono.

Exemplo. — Calcular a area de um hexagono regular de 10^m de lado.

Solução. — O semi-perimetro é egual a $\frac{6 \times 10}{2} = 30$m; o apothema é a metade do lado do triangulo equilatero (n.º **123**), portanto, $a = \frac{r\sqrt{3}}{2} = \frac{10 \times 1,73}{2} = 8m.65$, e assim temos, applicando e formula precedente:

$$Pr = 30 \times 8,65 = 259m.^2 50$$

145. Polygono qualquer. — Para avaliar a area de um polygono qualquer, decompõe-se o polygono em triangulos por meio de diagonaes, como se faz para construir um polygono (n.º **87**), calcula-se depois a area de cada triangulo, e a somma das areas de todos os triangulos componentes será a area do polygono.

Póde-se tambem traçar a maior diagonal do polygono, e baixando sobre ella perpendiculares de todos os vertices (n.º **88**), fica o polygono decomposto em triangulos e trapezios rectangulos; a somma das areas destes dará a area do polygono.

II. — Area das figuras circulares

Theorema

146. *A area de um circulo é a metade do producto da circumferencia pelo raio.*

Com effeito, o circulo é considerado como um polygono regular de uma infinidade de lados, e neste caso a circumferencia é o perimetro, e o raio o apothema do polygono; temos pois, designando por C a area do circulo:

$$C = \frac{2\pi r}{2} \times r = \pi r^2.$$

Exemplo. — Qual é a area do circulo de $1^m.5$ de raio?

$$C = 3,1416 \times 1,5 \times 1.5 = 7,^{m2}0686$$

Theorema

147. *A area de um sector circular é egual ao producto da area do circulo pelo numero de graus do arco do sector dividido por 360.*

Na verdade, si dividirmos o circulo em 360 sectores de um grau, cada um terá a area $\frac{\pi r^2}{360}$; sendo porém n o numero de graus, a area S do sector será:

$$S = \frac{\pi r^2 \times n}{360}.$$

Exemplo. — Calcular a area de um sector circular de 72° e de 2,^{m}4 de raio.

$$S = \frac{3{,}1416 \times 2{,}4 \times 2{,}4 \times 72}{360} = 3m,^2 6192$$

148. Area do segmento e da corôa circular. — A area de um *segmento circular ABCA* (fig. 98) é egual á differença entre a area do sector *OABC* e a do triangulo *OAC*.

A area de uma *corôa circular* é evidentemente egual á differença entre as areas dos dois circulos concentricos; designando por r o raio do circulo maior e por r' o raio do circulo concentrico menor, a area Cc da corôa circular é dada pela formula:

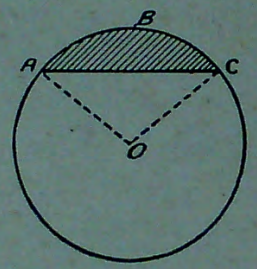

Fig. 98

$$Cc = \pi r^2 - \pi r'^2 = \pi (r^2 - r'^2)$$

Exemplo. — Calcular a area de uma corôa circular tendo como raios 5^m e 3^m,5.

$$Cc = 3{,}1416\ (25 - 12{,}25) = 40,^{m2}0554.$$

149. Area de uma figura curvilinea. — Avalia-se approximadamente a area de uma figura de contorno curvilineo, considerando-a como um polygono de lados muito pequenos, e decompondo em seguida o polygono assim formado em triangulos e trapezios, segundo o processo para calcular a area de um polygono qualquer (n.° **145**).

150. Planímetro. — Além das formulas e processos que foram anteriormente indicados para avaliar a area de qualquer superficie plana, podem ser empregados meios mecanicos com instrumentos adequados, que em muitos casos fornecem o valor da area com uma sufficiente approximação.

A essencia desses apparelhos, chamados *planimetros*, consiste em uma haste movel em condições taes que, emquanto uma de suas extremidades percorre o contorno da superficie a medir, a outra extremidade ou um ponto qualquer da mesma haste, acha-se obrigada a permanecer sobre uma outra curva determinada ou *directriz*; forma ainda parte integrante do apparelho um rodete graduado, que gira ao redor de um eixo parallelo á referida haste, á qual está preso, e em união com um contador de voltas. O *planimetro* mais commum é o de *Amsler*, cuja caracteristica é que a curva directriz vem a ser uma circumferencia, obtida por uma disposição especial do apparelho.

Problema

151. *Transformar um polygono em um triangulo equivalente* (fig. 99).

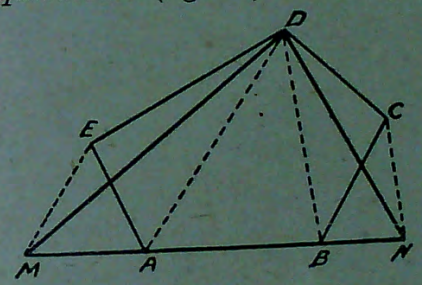

Fig. 99

Seja o polygono *ABCDE*. Traçando a diagonal *AD*, a parallela *EM* até o ponto *M* no prolongamento de *BA*, e ligando *M* ao vertice *D*, o pentagono dado *ABCDE* fica transformado no quadrilatero equivalente *MBCD*. Applicando a mesma construcção com a diagonal *BD*, o quadrilatero referido transforma-se no triangulo equivalente *MND*, que é o que se procura.

Avaliando portanto, a area do triangulo *MND*, teremos a area do proprio polygono *ABCDE*.

Problema

152. *Transformar uma figura em um quadrado equivalente.*

O lado do quadrado equivalente é a média proporcional entre as duas quantidades cujo producto dá a area da figura.

Assim, o quadrado equivalente a um triangulo tem para lado a média proporcional entre a metade da base e a altura; o lado do quadrado equivalente a um polygono regular é a média proporcional entre a metade do perimetro e o apothema; o lado do quadrado equivalente a um parallelogrammo é a média proporcional entre a base e a altura, etc.

Exemplos. 1.º — Qual é o lado do quadrado equivalente a um triangulo de $6,^{m}2$ de base e 5^{m} de altura?

Temos, chamando l o lado do quadrado:

$$l = \sqrt{\frac{6,2}{2} \times 5} = \sqrt{15,5} = 3,^{m}9.$$

2.º — Calcular o lado do quadrado equivalente a um circulo de 10^{m} de raio.

Temos:

$$l = \sqrt{\frac{2 \times 3,1416 \times 10}{2} \times 10} = \sqrt{31,416} = 5,^{m}6.$$

III. — Comparação das areas das figuras semelhantes

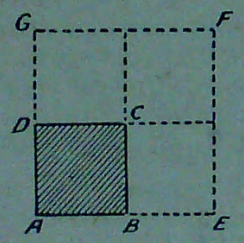

Fig. 100

153. Seja um quadrado *ABCD* (fig. 100). Si *duplicarmos* os lados obtem-se um outro quadrado *AEFG* de area *quadrupla*, como se observa facilmente na figura. Egualmente, si tomassemos os lados do mesmo quadrado *ABCD* çinco vezes maiores, teriamos outro quadrado de area vinte e cinco vezes maior.

Observando que 25 é o quadrado de cinco, e que 4 é o quadrado de 2, conclúe-se que as areas de dois quadrados, os quaes são sempre semelhantes, são proporcionaes aos quadrados de seus lados.

Portanto, suppondo um quadrado de 3^{m} de lado, e um outro de 5^{m} de lado, a razão de suas areas seria egual $\frac{3 \times 3}{5 \times 5} = \frac{9}{25}$.

154. Esta propriedade não pertence sómente aos quadrados, mas se applica a todos os polygonos semelhantes, e podemos assim enunciar a seguinte regra: *As areas de dois polygonos semelhantes estão entre si como os quadrados de dois de seus lados homologos.*

Em consequencia, decuplicando os lados de um triangulo, por exemplo, obtem-se outro triangulo de area cem vezes maior; si quizessemos tornar a sua area dupla, deveriamos multiplicar os lados pela $\sqrt{2}$; para tornar a area decupla multiplicariamos os lados pela $\sqrt{10}$.

155. Dois circulos são sempre semelhantes, e assim as suas areas são proporcionaes aos quadrados de seus raios ou de seus diametros.

Portanto, suppondo dois circulos, sendo o raio de um 12^{m} e do outro 4^{m}, as suas areas estarão entre si como os numeros 144 e 16, isto é, na razão $\frac{144}{16} = 9$, o que indica que o primeiro tem a area 9 vezes maior do que a do segundo.

Theorema de Pythagoras

156. *O quadrado construido sobre a hypotenusa de um triangulo rectangulo é equivalente á somma dos quadrados construidos sobre os cathetos* (fig. 101).

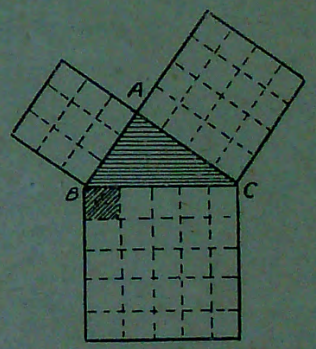

Fig. 101

Já vimos (n.º **104**) que, num triangulo rectangulo, se tem a seguinte relação:

$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$; porém $\overline{BC}^2$ representa a area do quadrado construido sobre *BC*, assim como $\overline{AB}^2$ e $\overline{AC}^2$ exprimem as areas dos quadrados

construidos sobre os lados AB e AC, donde se conclúe ser verdadeiro o enunciado do theorema.

157. De um modo geral, si sobre os tres lados de um triangulo rectangulo, considerados como lados homologos, constróem-se tres figuras semelhantes, a figura construida sobre a hypotenusa é equivalente á somma das outras duas construidas sobre os cathetos.

PROBLEMA

158. Calcular o raio de um circulo de area dupla de um outro que tem 10^m de raio.

O raio r procurado é egual:

$$r = 10 \times \sqrt{2} = 10 \times 1{,}41 = 14{,}^m1.$$

PROBLEMA

159. Calcular o raio de um circulo que seja equivalente á somma de outros dois de 8^m e 6^m de raio.

Temos: $r^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$

$$r = \sqrt{100} = 10^m.$$

PROBLEMA

160. Valendo a area de um polygono $120^{m,2}$ calcular a area de outro polygono semelhante, sabendo-se que a um lado de 5^m do primeiro corresponde outro de 8^m no segundo polygono.

Temos a proporção: $\frac{120}{S} = \frac{5^2}{8^2}$, ou $\frac{120}{S} = \frac{25}{64}$,

donde $S = \frac{120 \times 64}{25} = 307^{m,2}\ 20$

Exercicios

51. — Qual é a area de uma praça rectangular que tem $75^m.40$ de comprimento por $32^m.60$ de largura?

52. — Calcular a area de uma sala quadrada de 10m. 25 de lado.

53. — Vendeu-se um terreno de fórma quadrada, á razão de 15$000 o m^2. O lado do quadrado tem $18^m.50$; quanto pagou o comprador?

54. — Sendo a area de um terreno quadrado egual egual a $1425,^{m2}80$, calcular o lado do quadrado.

55. — Deseja-se ladrilhar um quarto de $4^m.50$ de comprimento por $3^m.20$ de largura. Quantos ladrilhos são precisos, sendo os mesmos quadrados com $0.^m20$ de lado?

56. — Quantos tijolos de $0^m.30$ por $0^m.15$ são necessarios para pavimentar uma praça rectangular de 35 m. de comprimento por $18^m.30$ de largura?

57. — Gastaram-se 1560 ladrilhos para fazer-se um certo ladrilhamento. Calcular a area ladrilhada, sendo os ladrilhos quadrados de $0^m,25$ de lado.

58. — Calcular a area de um quadrado cujo diagonal mede 15^m.

59. — Qual é a area de um rectangulo cuja base mede 20 m. e a diagonal $26^m.40$?

60. — Calcular a area de um jardim triangular que tem 6 m. de base e $9^m.20$ de altura.

61. — Calcular a area do triangulo equilatero de 8 m. de lado.

62. — Qual é o preço de um terreno de fórma triangular, cujos lados medem respectivamente 30 m., 24 m. e 18 m., á razão de 6$500 o $m.^2$?

63. — Um individuo comprou um terreno quadrado por 500$000. Calcular o lado do quadrado, sendo que o preço do terreno corresponde a 25$000 cada aro.

64. — Determinar a area de um triangulo isosceles de $3^m.80$ de base, e cujo lado tem $5^m.40$.

65. — Quantas taboas de $4^m.20$ de comprimento por $0^m.12$ de largura são necessarias para assoalhar um quarto de 6 m. de comprimento por 4 m. de largura?

66. — Quantos parallelepipedos quadrados de $0^m.16$ de lado são precisos para se calçar uma rua de 250 m. de comprimento sobre $16^m.40$ de largura?

67. — Em quanto fica o ladrilhamento de um salão de $8^m.50$ de comprimento por $6^m.20$ de largura, empregando-se ladrilhos de $0^m.20$ de lado, sabendo-se que o milheiro de ladrilhos custa 75$000 e que a mão de obra orça em 3$000 por m.²?

68. — Em quanto importa a pintura de uma parede que tem $4^m.60$ de altura e 6 m. de comprimento, á razão de 1$200 por m²?

69. — Quanto custa a pintura do tecto e das 4 paredes de um salão de $7^m.50$ de comprimento, $5^m.80$ de largura e 4 m. de altura, a 1$300 o m²?

70. — Quantas ardosias de $0^{m2},02$ são necessarias para o telhado de um pavilhão de 4 faces, si cada face é um triangulo de $3^m.20$ de base sobre $2^m.80$ de altura?

71. — Os tres lados de um jardim triangular medem respectivamente 20 m., 12 m. e 16 m.; calcular a area do jardim.

72. — Calcular a area de um trapezio cujas bases medem $9^m.60$ e $4^m.20$, e a altura 5^m.

73. — Calcular a area de um trapezio isosceles, tendo as bases 20m. e 14 m. respectivamente, e o lado egual 5 m. de comprimento.

74. — Calcular a area de um terreno que tem a fórma de uma hexagono regular, tendo de perimetro 72^m.

75. — Calcular a area de um octogono regular cujo lado tem $1^m.25$ e o apothema $1^m.50$.

76. — Calcular a area de um quadrado inscripto sabendo-se que o perimetro do hexagono regular inscripto é de $24^m.72$.

77. — Qual é a area do triangulo equilatero inscripto numa circumferencia de 2^m. de raio?

78. — Qual é a area de um triangulo cujos lados são triplos dos de outro triangulo de 25^{m2} de area?

79. — Um polygono de 36^{m2} de area tem um lado egual a $2^m.5$. Calcular a area de outro polygono semelhante, no qual o lado homologo ao lado dado é de 4^m.

80. — Calcular o lado do quadrado equivalente á somma de dois outros que têm 3m. e 4m. de lado.

81. — Um quadrado tem 64m.² de area; qual é o lado do quadrado de area dupla?

82. — Qual é o lado de um triangulo equilatero cuja area é a differença entre as areas de dois outros triangulos equilateros de 15m. e 12m. de lado?

83. — Determinar em hectaros, aros e centiaros a area de um quadrado de 110m. 30 de lado.

84. — Um terreno affecta a forma de um triangulo rectangulo, cujos cathetos valem 10m. 20 e 16m. 80. Qual é a area deste terreno?

85. — Uma parede de 4m. 80 de altura, tem 6m. de comprimento. Quantos rolos de papel são necessarios para empapelar essa parede, sabendo-se que cada rolo tem 10m. de comprimento por 0m. 40 de largura?

86. — Deseja-se entapetar um assoalho de 4m. de comprimento por 3m. 60 de largura; quantos metros de tecido são precisos, sabendo-se que este tecido tem $0^m.60$ de largura?

87. — Uma parede de $5^m.20$ de comprimento e de 4 m. de altura, tem duas portas de $3^m.20$ por $1^m.10$; qual é a area da parte cheia da parede?

88. — Calcular a area do circulo de $1^m.20$ de raio.

89. — A circumferencia de um tanque circular mede 60 m.; qual é a area do tanque?

90. — Calcular a area de um circulo, sabendo-se que o perimetro do hexagono regular inscripto é de 42^m.

91. — Qual é a area do circulo no qual o quadrado inscripto tem 16^{m2} de area?

92. — Qual é o diametro de uma roda cujo aro mede $8^m.60$?

93. — Calcular a area de um sector circular de 120° e de $2^m.50$ de raio.

94. — Calcular a area de um caminho em fórma de circulo, sabendo-se que a sua largura é de 5 m. e que o raio interior é de 41 m.

95. — Calcular a area de um segmento circular de 60°, tendo 10 m. de raio.

96. — Qual é o raio de um circulo de area dupla de outro de $2^m.75$ de raio?

97. — Qual é o raio de um circulo equivalente a dois outros de $4^m.50$ e 6 m. de raio?

98. — Calcular o raio de uma mesa circular cuja area é equivalente a de um quadrado de $2^m.20$ de lado?

99. — A area do circulo de uma roda é de $1^{m2}.25$; qual será a distancia percorrida pela mesma em 200 giros?

100. — A area de um sector de 72° é de $0^{m2}.20$; qual será o raio e a area do circulo correspondente?

SEGUNDA PARTE

GEOMETRIA NO ESPAÇO

CAPITULO I

I. — Determinação e geração do plano

161. Definições. — Um *plano* é uma superficie tal que uma recta que passe por dois de seus pontos, tomados á vontade, acha-se toda inteira contida na superficie.

Um assoalho, a superficie da mesa, da parede, etc., são exemplos de planos. Si collocarmos uma regua sobre estas diversas superficies, ficará perfeitamente ajustada, em qualquer direcção que se colloque.

O plano tem uma extensão illimitada, porém representa-se ordinariamente por um parallelogrammo, tendo a letra *P* ao lado. Assim, na fig. 102, dizemos um *plano P*.

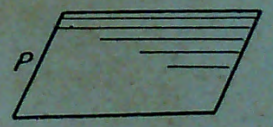

FIG. 102

Um plano póde considerar-se gerado pelo movimento de uma recta sobre outras duas rectas concorrentes ou parallelas. Os oleiros utilisam este principio na fabricação de tijolos, quando fazem escorregar uma regua sobre as bordas da fôrma cheia de barro, afim de tornar plana a superficie superior do tijolo.

Os carpinteiros fazem mover a serra segundo dois traços rectos, parallelos ou concorrentes, traçados em duas faces oppostas de uma viga; a secção feita pela serra é um plano.

Os talhadores de pedras traçam sobre o blóco a talhar, duas rectas parallelas ou concorrentes, e desbastam-no em seguida segundo estes traços, deixando assim plana uma das superficies da pedra.

Pelo exposto, vemos que duas rectas parallelas, ou duas rectas concorrentes, determinam um plano. Temos ainda que tres pontos não situados em linha recta determinam um plano, porque unindo um delles aos outros dois têm-se duas rectas concorrentes.

II. — Posições relativas das rectas e planos

162. Rectas em relação ao plano. — As linhas rectas em relação a um plano pódem ser *perpendiculares, obliquas* e *parallelas* ao plano.

Diz-se que uma recta é *perpendicular* a um plano quando é perpendicular a todas as rectas traçadas no plano, pelo seu ponto de encontro com este plano. A imagem de uma recta perpendicular a um plano nos é dada por um fio a prumo suspenso livremente sobre uma superficie de nivel; assim tambem, a direcção de um poste de illuminação é perpendicular ao plano horizontal do terreno.

Para verificarmos, portanto, si uma recta é perpendicular a um plano, basta ajustar sobre a recta um dos lados do angulo recto do esquadro, e girar o esquadro ao redor da recta; si o outro lado ajustar-se sempre com o plano, conclúe-se que a recta será perpendicular ao plano.

Quando a recta encontra um plano sem lhe ser perpendicular, é chamada *obliqua* ao plano; e quando a recta não encontra o plano por mais que se prolongue, é chamada *parallela* ao plano.

THEOREMA

163. *Si de um ponto fóra de um plano se traçam a esse plano uma perpendicular e varias obliquas: 1.º — A perpendicular é menor do que qualquer obliqua. 2.º — As obliquas equidistantes do pé da perpendicular são eguaes. 3.º — A obliqua que mais se afasta é a maior* (fig. 103).

Seja AB a perpendicular ao plano P, AC e AD duas obliquas equidistantes do pé B da perpendicular, e AE uma obliqua mais afastada. Teremos, por um processo de demonstração já applicado (n. 30):

$AB < AC$ e $AB < AE$; $AC = AD$;

$AE > AC$ ou AD.

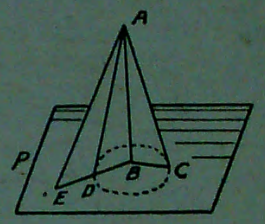

FIG. 103

A perpendicular tirada de um ponto a um plano é a *distancia* do ponto ao plano; e quando de um mesmo ponto se traçam obliquas eguaes a um plano, ellas encontram o plano numa série de pontos que se acham numa circumferencia, cujo centro é o pé da perpendicular.

164. Projecção orthogonal. — A projecção orthogonal de um ponto sobre um plano é o pé da perpendicular traçada do ponto sobre o plano.

Assim, fig. 104, C é a projecção do ponto A, e D do ponto B.

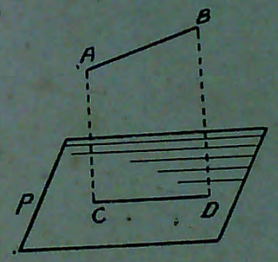

FIG. 104

A projecção de uma recta AB sobre um plano P obtém-se ligando as projecções das extremidades A e B da recta; portanto, CD é a projecção de AB.

Quando uma recta é obliqua a um plano, a sua *inclinação*, isto é, o angulo que a recta faz com o plano, é dada pelo angulo que a recta fórma com a sua projecção.

165. Plano vertical e plano horizontal. — Chama-se *plano vertical* todo aquelle que passa por uma recta vertical, isto é, pela direcção dada pelo fio a prumo; e chama-se *plano horizontal* o que é perpendicular a uma recta vertical. Toda recta traçada num plano horizontal é de nivel.

EXEMPLOS · A superficie do assoalho de uma sala, do tecto, a superficie da mesa, etc. são planos *horizontaes*;

e são planos *verticaes* as superficies das paredes da sala, a folha da porta ou da janella em qualquer posição, etc. Dão-nos a imagem de rectas perpendiculares a um plano, as pernas da mesa em relação ao plano de sua superficie superior, as cantoneiras de uma sala em relação aos planos do assoalho e do tecto, as quinas do batente de uma porta em relação ao plano do assoalho, etc.

PROBLEMA

166. *Por um ponto dado sobre um plano traçar praticamente a perpendicular ao plano* (fig. 105).

Resolve-se o problema recorrendo ao *esquadro de tres pernas* ou *duplo esquadro*, no qual cada ramo é perpendicular aos outros dois.

Faz-se escorregar este instrumento sobre o plano P, de modo que os dois ramos AD e AC se apoiem no plano e que o vertice A coincida com o ponto dado. O outro ramo AB do esquadro dará a perpendicular procurada.

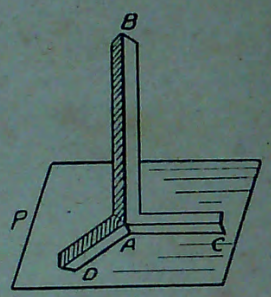

FIG 105

PROBLEMA

167. *De um ponto dado fóra de um plano, baixar a perpendicular ao plano* (fig. 105).

Seja B o ponto dado e P o plano. Si o plano for horizontal, o fio de prumo tirado de B dará a perpendicular; é o caso commum.

Si porém o plano P não é horizontal, sendo portanto, *inclinado*, recorre-se ao duplo esquadro que se faz escorregar sobre o plano até que o lado AB passe pelo ponto dado; este mesmo lado dará então a perpendicular que se pede.

PROBLEMA

168. *De um ponto dado fóra de um plano, traçar uma parallela ao plano* (fig. 106).

Do ponto A baixa-se a perpendicular AB ao plano; depois pelo mesmo ponto A, e na direcção em que se queira a parallela, traça-se uma perpendicular AC á recta AB. A recta AC é a parallela ao plano.

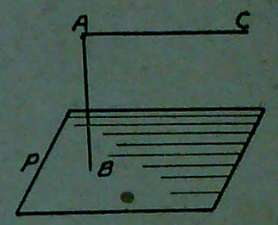

FIG. 106

III. — Posições de dois planos. — Angulos diedros e polyedros.

169. Dois planos pódem ser *parallelos* ou então *concorrentes*.

Os planos são parallelos quando, por mais que sejam prolongados, não se encontram.

Assim, o tecto e o assoalho de uma sala são dois planos parallelos; duas paredes oppostas de um quarto, as prateleiras de uma estante são tambem exemplos de planos parallelos.

Dois planos parallelos são equidistantes em toda a sua extensão, e têm perpendiculares communs.

170. Quando dois planos se cortam, dizem-se *concorrentes*, e a sua intersecção é uma linha recta. Neste caso, a inclinação dos dois planos que se cortam tem o nome de *angulo diedro* ou simplesmente *diedro*. Os planos que formam o diedro chamam-se *faces* e a sua intersecção chama-se *aresta*.

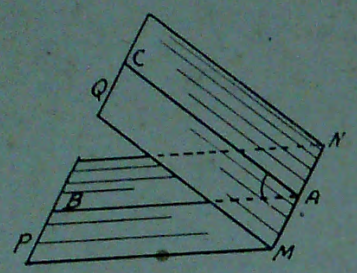

Fig. 107

Designa-se um angulo diedro com quatro letras, uma de cada face, e as duas da aresta que se collocam no meio. Assim, o angulo diedro formado pelas faces *P* e *Q* (fig. 107) designa-se diedro *PMNQ*. As duas paredes contiguas de um quarto formam um diedro, tendo como faces as duas paredes, e cuja aresta é o canto do quarto onde terminam as paredes.

171. Chama-se *rectilineo* de um diedro o angulo formado por duas perpendiculares á aresta, traçadas pelo mesmo ponto desta e em cada uma das faces do diedro. Assim, traçando pelo mesmo ponto *A* da aresta, duas perpendiculares *AB* e *AC*, uma em cada face, o angulo *BAC* é o *rectilineo* do diedro.

Para medir um angulo diedro, mede-se o rectilineo do mesmo; o numero de graus deste será tambem o numero de graus do diedro. Portanto, si o *rectilineo* de um diedro é *recto*, o angulo diedro tambem o será, e neste caso as suas faces são *planos perpendiculares*.

Assim, o diedro formado por uma parede e o assoalho, é *recto;* e geralmente são diedros rectos os que se formam em cada canto da sala, em cada quina de um movel, etc.

Dois diedros são *eguaes* quando, se collocando um sobre o outro, as suas faces e arestas coincidem.

172. APPLICAÇÕES. — **Quando as paredes de um aposento são perpendiculares ao assoalho, os cantos do aposento são rectas tambem perpendiculares ao assoalho. Si dois muros são perpendiculares entre si e ao plano do terreno, a aresta do diedro formado pelo terreno e um dos muros é perpendicular ao outro muro Os planos perpendiculares são de frequente emprego nas construcções; esta disposição é preferida em vista da regularidade e mesmo da estabilidade que della resultam.**

A egualdade dos angulos diedros deve ser observada nas diversas *semblagens*. E' indispensavel que os diedros salientes de cada uma das duas peças a reunir sejam eguaes aos diedros reintrantes em que se devem encaixar. E' o que se observa na semblagem muito usada, chamada a *traço de Jupiter* (fig. 108).

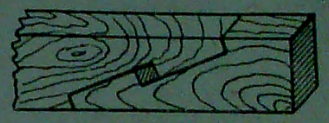

Fig. 108

173. Angulos polyedros. — Chama-se *angulo polyedro* a figura formada por tres ou mais planos que se encontram no mesmo ponto. O ponto commum aos planos chama-se *vertice* do angulo polyedro; os diversos angulos ao redor do vertice chamam-se *faces* do angulo polyedro; e as rectas que partem do vertice e que limitam as faces, têm o nome de *arestas*.

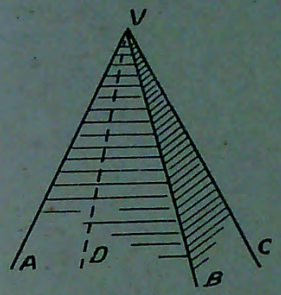

Fig. 109

Assim, na fig. 109, tem-se um angulo polyedro, em que *V* é o vertice; os angulos *AVB*, *BVC*, etc., são as faces; e as rectas *VA*, *VB*, *VC* e *VD* são as arestas do polyedro. Designa-se um angulo polyedro pela letra do vertice seguida das letras das arestas. No caso da figura, diz-se angulo polyedro *VABCD*.

O mais simples dos angulos polyedros tem tres faces: chama-se *angulo triedro* ou simplesmente *triedro*. As tres faces de uma mesa que passam pelo mesmo canto ou ponta, formam um triedro; egualmente, duas paredes contiguas de uma sala e o plano do tecto formam um triedro.

Quando as tres faces que formam o triedro são angulos rectos, tem-se um *triedro trirectangulo*. O duplo esquadro (n. **166**), em que cada ramo é perpendicular aos outros dois, dá-nos a imagem deste triedro.

Os angulos polyedros pódem ser *convexos* e *concavos*, conforme todas as suas arestas sejam salientes ou não;

os angulos polyedros convexos são os que têm interesse para o nosso estudo.

No angulo polyedro convexo, a somma de todas as faces é sempre menor do que quatro angulos rectos.

Dois angulos polyedros, e particularmente dois triedros, são *eguaes*, quando se pódem fazer coincidir os seus vertices e as suas arestas.

174. APPLICAÇÕES. — Encontram-se angulos polyedros em um grande numero de fórmas ou figuras que são estudadas nos capitulos seguintes. Os crystaes offerecem muitos exemplos: o diamante facetado *em rosa*, apresenta um angulo polyedro de um grande numero de faces.

A egualdade dos triedros encontra applicação frequente nas semblagens de madeira; esta mesma egualdade é tambem applicada na arte do fabricante de caixas, estojos, etc. Todos os triedros que se apresentam em saliencia no objecto para o qual se confecciona um estojo, devem reproduzir-se em reintrancia no proprio estojo, afim de haver perfeita adaptação do objecto com o estojo ou caixa.

CAPITULO II

CORPOS TERMINADOS POR PLANOS

I. — Prisma e parallelepipedo

175. Polyedro. — Já vimos (n.º 7), que *polyedro* é o corpo limitado por superficies planas.

Os planos que limitam o polyedro são polygonos e têm o nome de *faces*; as intersecções das faces são as *arestas*, e as extremidades das arestas são os *vertices* do polyedro. Em cada aresta fórma-se um *angulo diedro*, e em cada vertice um *angulo polyedro*. Chama-se *diagonal* de um polyedro a recta que une dois vertices não situados na mesma face; *plano diagonal* é o que passa por tres vertices não situados na mesma face.

Designa-se um polyedro com todas as letras de cada vertice, ou com duas letras situadas em dois vertices que não pertencem á mesma face.

Um polyedro é *regular* quando as faces são polygonos regulares e eguaes, e os angulos diedros tambem eguaes; é *irregular* em caso contrario.

Entre os polyedros, têm importancia especial os que são denominados *prisma* e *pyramide*.

176. Prisma. — Chama-se *prisma* o polyedro em que duas das faces são polygonos eguaes e parallelos, e as outras são parallelogrammos.

As duas faces eguaes e parallelas são as *bases* do prisma, e as outras são as *faces lateraes*. A distancia entre as duas bases, dada pela perpendicular commum, é a *altura* do prisma.

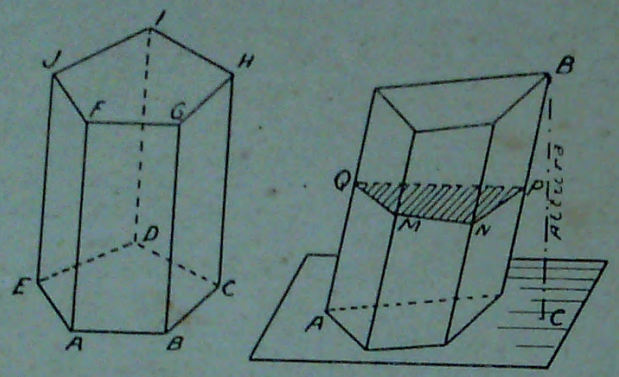

Fig. 110

Assim, no prisma *AH*, os dois polygonos eguaes e parallelos *ABCDE* e *FGHIJ* são as *bases*; e os parallelogrammos lateraes *ABGF*, *BCHG*, etc., são as faces lateraes.

No segundo prisma *AB*, a recta *BC* representa a altura.

As rectas *AF*, *BG*, *CH*, etc., communs ás faces lateraes, chamam-se *arestas lateraes*. Quando as arestas lateraes são perpendiculares ás bases tem-se um *prisma recto*, e neste caso a altura é egual á aresta lateral; quando, porém, as arestas lateraes são obliquas ás bases, como no prisma *AB*, tem-se um prisma obliquo, e então a altura é menor do que a aresta lateral.

Chama-se *secção recta* de um prisma obliquo a secção *MNPQ* que se obtem, cortando o prisma por um plano perpendicular ás arestas lateraes. Quando se corta o prisma por um plano obliquo, obtem-se um *tronco de prisma*.

Chama-se *prisma regular* o prisma recto cujas bases são polygonos regulares. Diz-se que um prisma é *triangular*, *quadrangular*, *pentagonal*, etc., quando as bases são triangulos, quadrilateros, pentagonos, etc.

O prisma tem o nome particular de *parallelepipedo* quando as bases são parallelogrammos.

Quando as bases e as faces lateraes de um parallelepipedo são *rectangulos*, tem-se um *parallelepipedo rectangulo*; e quando todas são *quadrados eguaes* tem-se um *cubo*.

177. APPLICAÇÕES. — Os batentes de uma porta, uma viga de madeira, etc., são prismas quadrangulares. Certos salões chamados *octogonos* apresentam a forma de um prisma octogonal regular.

Encontram-se na natureza muitos exemplos de prismas: os alvéolos que constróem as abelhas são prismas hexagonaes regulares; a *esmeralda*, a *turmalina*, etc., apresentam-se muitas vezes sob a fórma de prismas.

O parallelepipedo é de frequente applicação: um tijolo, as pedras para calçamento de ruas, uma viga commum de madeira; os formatos dos aposentos, de muitos moveis, etc. são parallelepipedos.

As columnas dos monumentos repousam ás vezes sobre pedestaes que são cubos; os dados de jogar são tambem cubos.

Theorema

178. *O quadrado da diagonal de um parallelepipedo rectangulo é egual á somma dos quadrados das tres arestas que concorrem no mesmo vertice* (fig. 111).

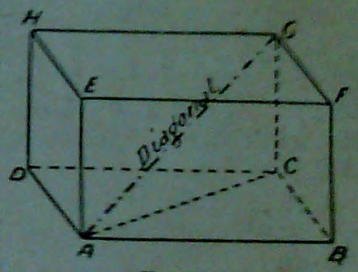

Fig. 111

Seja a diagonal *AG*. Traçando a recta *AC*, forma-se o triangulo rectangulo *ACG*, no qual o lado *AC* é, por sua vez, hypotenusa do triangulo rectangulo *ABC*; tem-se pois:

$$\overline{AG}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CG}^2, \text{ mas } \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2,$$

$$\text{e } \overline{CG}^2 = \overline{AE}^2, \text{ portanto: } \overline{AG}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2.$$

179. Corollario. — Representando por d a diagonal de um cubo de aresta a, tem-se:

$$d^2 = 3\,a^2, \text{ ou } d = a\sqrt{3}, \text{ donde } a = \frac{d}{\sqrt{3}}.$$

Exemplo. — Calcular a diagonal de um cubo cuja aresta mede 5 m. :

$$d = 5 \times \sqrt{3} = 5 \times 1{,}73 = 8\,m.\ 65.$$

Theorema

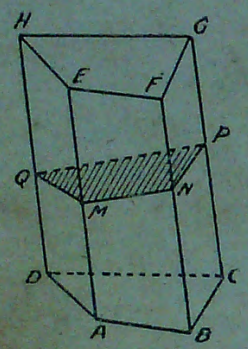

Fig. 112

180. *A area lateral de um prisma obliquo é egual ao producto do perimetro da secção recta por uma aresta lateral* (fig. 112).

Uma face qualquer $ABFE$ é um parallelogrammo de base AE e altura MN, por ser MN perpendicular a AE e BF; os outros lados NP, PQ e MQ da secção recta são egualmente as alturas das outras faces, que têm uma base egual á da primeira face considerada, visto serem eguaes todas as arestas lateraes de um prisma.

A area lateral é, pois:

$Al = AE\,(MN + PN + PQ + MQ)$, isto é, $Al = P \times a$ designando por P o perimetro da secção recta e por a a aresta lateral.

181. Corollario. — A area lateral de um prisma recto é egual ao producto do perimetro da base pela altura; pois, neste prisma, a aresta lateral é egual á altura e a secção recta é egual á base.

182. Observação. — A area total é egual á area lateral mais a area das duas bases, logo:

$$At = Al + 2\,b.$$

Exemplo. — Calcular a area lateral e a area total de um prisma recto de $4^m.50$ de altura, cujas bases são hexagonos regulares de 2 m. de lado.

Temos, applicando a formula $Al = P \times a$:

$$Al = 12 \times 4{,}50 = 54\ m^2.$$

Para o calculo da area total, temos que a area b de uma base é egual (n.º **144**):

$$b = \text{semi-perimetro} \times \text{apothema} =$$

$$= \frac{12}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{2} = 10\ m,^2\ 38.$$

Logo, $At = 54 + 2 \times 10{,}38 = 74\ m^2{,}76.$

Theorema

183. *O volume de um parallelepipedo rectangulo é egual ao producto da area da base pela altura* (fig. 113).

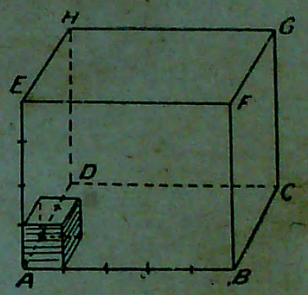

Fig. 113

Com effeito, supponhamos que as dimensões do parallelepipedo rectangulo sejam:

$AB = 5\,m.$, $AD = 3\,m.$ e $AE = 4\,m.$

A base $ABCD$ deste parallelepipedo contém 5×3 ou 15 m². Sobre cada um destes quadrados póde collocar-se um pequeno cubo de 1 m³. cada um; teremos assim uma primeira camada de 15 m³.

Sendo a altura AE do parallelepipedo egual a 4m., podemos collocar neste corpo 4 camadas eguaes á primeira; e, portanto, o seu volume V será:

$$V = 15 \times 4 = 60m.^3,$$

isto é, o producto dos numeros que medem a base e a altura do parallelepipedo.

184. Observação I. — Designando por c e l o comprimento e a largura da base, tem-se: $B = c \times l$, e representando a altura do parallelepipedo por a, vem:

$$V = c \times l \times a$$

Logo, o volume de um parallelepipedo rectangulo é egual ao producto das suas tres dimensões.

185. Corollario. — *O volume de um cubo é egual ao cubo do numero que mede a aresta.*

Com effeito, as tres dimensões do cubo são eguaes á aresta a, portanto:

$$V = a \times a \times a = a^3.$$

186. Observação II. — O theorema anterior é applicavel a qualquer parallelepipedo, assim: *O volume de qualquer parallelepipedo é egual ao producto da area da base pela altura.*

Exemplo. — Um reservatorio d'agua, tendo a fórma de um parallelepipedo rectangulo, tem para dimensões interiores $4^m.20$ de comprimento, $3^m.60$ de largura e $1^m.80$ de altura ou profundidade. Calcular a capacidade do reservatorio.

Solução. — Applicando a formula $V = l \times c \times a$, vem:

$$V = 4{,}20 \times 3{,}60 \times 1{,}80 = 27{,}^{m^3}216$$

Sendo $1m.^3$ equivalente a 1000 litros, temos que a capacidade é de $27{,}216 \times 1000 = 27216$ litros.

Theorema

187. *O volume de um prisma recto é egual ao producto da area da base pela altura.*

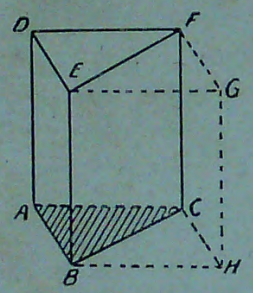

Fig. 114

Vamos suppor primeiramente um prisma recto triangular (fig. 114). Traçando pela aresta BE o plano $BHGE$ parallelo á face $ACFD$, e pela aresta CF o plano $CHGF$ parallelo á face $ABED$, forma-se um parallelepipedo duplo do prisma triangular proposto. Ora, o volume do parallelepipedo é egual á base $ABHC$ pela altura AD, logo o volume V do prisma triangular será:

$$V = \frac{ABHC}{2} \times AD = ABC \times AD = b \times a$$

representando por b a area da base e por a a altura do prisma considerado.

Supponhamos agora um prisma recto qualquer (fig. 115). Traçando planos diagonaes pela aresta AA', decompõe-se o prisma em prismas triangulares, de mesma altura que o prisma proposto, e cujas bases ABC, ACD e ADE sommadas dão a base $ABCDE$ do prisma total.

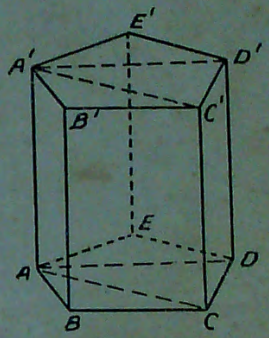

Fig. 115

Designando por b a base do prisma proposto e por a a sua altura, tem-se, pois:

$$V = (ABC + ACD + ADE) \times a = b \times a$$

188. Observação I. — Esta mesma regra é applicavel a qualquer prisma; portanto, *o volume de um prisma qualquer é egual ao producto da area da base pela altura.*

Exemplo. — Qual é o volume de um prisma cuja base é um polygono que tem $1^{m^2}.35$ de area, e cuja altura é egual a $2^m.50$?

$$V = 1{,}35 \times 2{,}50 = 3\ m^3{,}375$$

189. Observação II. — O volume de um tronco de prisma é egual ao producto da area da base pela média arithmetica das perpendiculares baixadas dos vertices superiores do tronco sobre o plano da base.

II. — Pyramide e tronco de pyramide

190. Definições. — Chama-se *pyramide* um polyedro que tem por base um polygono qualquer, e cujas faces lateraes são triangulos que têm um vertice commum.

O vertice commum dos triangulos é o *vertice* da pyramide, e a perpendicular baixada do vertice sobre a base é a *altura* da pyramide.

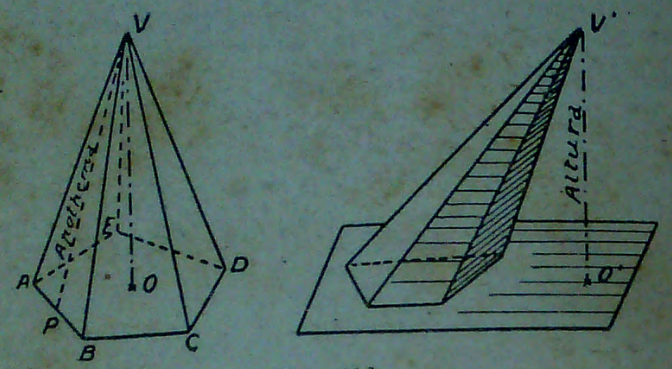

Fig. 116

Assim, na fig. 116, tem-se uma pyramide cuja *base* é o polygono *ABCDE*; o *vertice* é o ponto *V*; as *faces lateraes* são os triangulos *AVB*, *BVC*, etc. e a *altura* é *VO*. A altura póde cahir fóra da base, como se vê em *V'O'*.

Designa-se uma pyramide pela letra do vertice seguida das letras que servem para designar a base.

Quando a base da pyramide é um polygono regular e a altura cahe no centro da base, tem-se uma *pyramide regular*; neste caso, as faces lateraes são triangulos isosceles eguaes, e a altura *VP* de um destes triangulos tem o nome de *apothema*.

Chama-se *tronco de pyramide* a porção de pyramide comprehendida entre a base e um plano parallelo á base; *altura* do tronco é a distancia entre as duas bases parallelas.

Diz-se que um tronco de pyramide é regular quando pertence a uma pyramide regular; neste caso, as faces lateraes são trapezios isosceles eguaes, e a altura de um destes trapezios tem o nome de *apothema do tronco*.

Uma pyramide é *triangular*, *quadrangular*, *pentagonal*, etc., quando a base é um triangulo, um quadrilatero, um pentagono, etc.

191. APPLICAÇÕES. — Os tectos das torres quadradas têm ordinariamente a fórma de uma pyramide regular de base quadrada; dá-se o mesmo com a cobertura dos pavilhões que se costumam edificar nos jardins. As celebres pyramides do Egypto são pyramides regulares quadrangulares; o obelisco de Louqsor, em Paris, é um tronco de pyramide de base quadrada, terminada por uma pyramide regular.

Um ampliador de machina photographica, certas partes de columnas facetadas, etc. têm a forma de troncos de pyramides.

THEOREMA

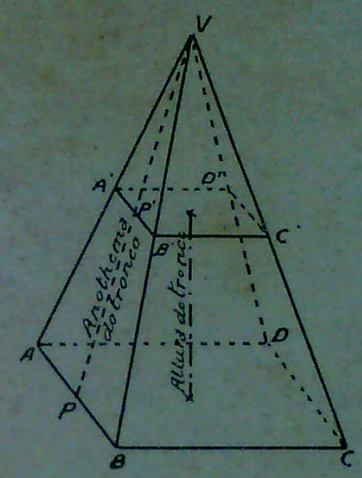

Fig. 117

192. *A area lateral de uma pyramide regular é egual ao producto da metade do perimetro da base pelo apothema da pyramide* (fig. 117).

Seja a pyramide regular *VABCD*. A area de uma face qualquer *AVB* é egual a $\frac{AB}{2} \times VP$; suppondo que a pyramide consta de *n* faces, e representando o lado *AB* por *l* e o apothema *VP* por *a*, teremos que a area lateral da pyramide será egual:

$$Al = n \times \frac{l}{2} \times a = p \times a,$$

designando por *p* o semi-perimetro da base, que é evidentemente egual á $n \times \frac{l}{2}$.

193. Observação. — A area total de uma pyramide é egual á area lateral mais a area da base.

EXEMPLO. — Calcular a area lateral e a area total de uma pyramide regular quadrangular, sendo o lado da base egual a $1^m.20$ e o apothema $2^m.50$.

Temos: $Al = \frac{4 \times 1.20}{2} \times 2.50 = 6\ m^2.$

$$At = 6 + 1.20 \times 1.20 = 7^{m^2},44.$$

THEOREMA

194. *A area lateral de um tronco de pyramide regular é egual ao producto da semi-somma dos perimetros das bases pelo apothema do tronco* (fig. 117).

Seja o tronco de pyramide regular $ABCDA'B'C'D'$. A area de uma face qualquer $ABB'A'$ é egual a $\frac{AB + A'B'}{2} \times PP'$; as n faces do tronco valerão n vezes esta expressão. Designando, pois, o lado AB por l, $A'B'$ por l', e o apothema PP' do tronco por a, tem-se a expressão da area procurada:

$$Al = n \times \frac{l + l'}{2} \times a = (p + p') \times a,$$

representando por p e p' os semi-perimetros das bases do tronco da pyramide.

195. Observação. — A area total do tronco de pyramide é egual á sua area lateral mais as areas b e b' das bases, logo:

$$At = Al + b + b'.$$

EXEMPLO. — Calcular a area lateral e a total de um tronco de pyramide regular quadrangular, valendo o apothema $3^m.20$, e sendo os lados das bases respectivamente eguaes a 2 m. e $1^m.20$.

$$Al = \frac{4 \times 2 + 4 \times 1{,}20}{2} \times 3{,}20 = 20^{m^2}{,}48.$$

$$At = 20{,}48 + 4 + 1{,}44 = 25^{m^2}{,}92.$$

THEOREMA

196. *O volume de uma pyramide é egual á terça parte do producto da area da base pela altura.*

Com effeito, demonstra-se em geometria que uma pyramide equivale a um terço de um prisma de mesma base e egual altura; o volume do prisma é egual ao producto da area da base pela altura, portanto, teremos que o volume V da pyramide tem a expressão:

$$V = \frac{b \times a}{3},$$

designando por b a area da *base* e por a a altura da pyramide.

197. Observação. — *O volume de um tronco de pyramide é egual á terça parte do producto da altura pela somma das areas das bases mais a média geometrica das mesmas bases*, isto é:

$$V = \frac{a}{3}\left(b + b' + \sqrt{b \times b'}\right).$$

EXEMPLO. — Calcular o volume de um tronco de pyramide de $4^m.20$ de altura, e cujas bases são polygonos que têm respectivamente para areas 3^{m^2}. e $1^{m^2}.92$.

SOLUÇÃO. — Temos, applicando a formula que dá o volume de um tronco de pyramide:

$$V = \frac{4.20}{3}\left(3 + 1{,}92 + \sqrt{5.76}\right) =$$

$$= 1{,}40 \times 7{,}32 = 10^{m^3}{,}248.$$

198. Polyedros regulares. — Existem apenas cinco polyedros regulares, que são: o *tetraedro*, o *octaedro* e o *icosaedro* regulares, formados respectivamente de 4, 8 e 20 triangulos equilateros eguaes; o *hexaedro* regular ou *cubo* formado de 6 quadrados eguaes; e o *dodecaedro* regular formado de 12 pentagonos regulares eguaes.

A area total de um polyedro regular é evidentemente egual ao producto da area de uma das faces pelo numero dellas.

E' no estudo das substancias mineraes que se encontram as mais frequentes applicações dos polyedros regulares.

Exercicios

101. — Quanto custa a pintura do tecto e das 4 paredes de um salão de 7m.5 de comprimento, 4m. de largura e 4m.4 de altura, a 1$600 o m^2?

102. — Qual é a area total de uma trave de 4m.20 de comprimento e 0m.25 nas duas outras dimensões?

103. — Qual é a area de um telhado pyramidal, formado de 4 triangulos eguaes de 5m. de base e $2^m.90$ de altura?

104. — Calcular, em litros, a capacidade de um tanque de 6m. de comprimento, 4m. de largura e $1^m.60$ de altura ou profundidade.

105. — Qual é a area total de um cubo de $0^m.5$ de lado?

106. — Qual é a area total de um cubo de $7^m.5$ de diagonal?

107. — A area total de um cubo é de 60 $dm.^2$; achar o lado ou aresta do cubo.

108. — Num terreno rectangular de 5m. de comprimento por 3 de largura, deseja-se cavar um fosso de 18000 litros; que profundidade deve ter o fosso?

109. — Um prisma recto, cuja base é um triangulo equilatero de $0^m.60$ de lado, tem $1^m.80$ de altura; qual é a sua area lateral?

110. — Um reservatorio tem por fundo um hexagono regular de 1m. de lado. Quantos litros de agua póde conter, si tem $1^m.40$ de profundidade?

111. — Um aterro de uma estrada tem por secção um trapezio isosceles de 3m. de altura, e cujas bases têm 12m. e 4m. Determinar o volume de 1 Km. desse aterro.

112. — Achar a area lateral e a area total de uma pyramide regular quadrangular, tendo 2m. de lado na base e $3^m.15$ de apothema.

113. — A grande pyramide do Egypto tem por base um quadrado de 240m. de lado. Calcular a sua area lateral, sabendo-se que o apothema vale 186m.

114. — Qual é a area de um telhado hexagonal, de fórma regular, cujo perimetro vale 48m. e cada uma das arestas lateraes 5m.

115. — Calcular as areas lateral e total de um tronco de pyramide regular quadrangular, tendo $3^m.60$ de apothema e os lados das bases 5m. e 3m. respectivamente.

116. — Calcular a area lateral e a total de um tronco de pyramide regular triangular, tendo os lados das bases 4m. e 2m. respectivamente, e valendo o apothema $1^m.80$.

117. — Quanto custa o papel necessario para empapelar as quatro paredes (abstrahindo-se das portas) de um quarto, tendo $4^m.20$ de altura, 5m. de comprimento e $3^m.80$ de largura, sabendo-se que a peça de papel tem 10m. de comprimento por $0^m.50$ de largura e custa 8$000?

118. — Calcular a capacidade de um tanque, cuja profundidade é de 2m., tendo as suas paredes em talude, e sendo as bordas do tanque, bem como o fundo, quadrados de lados respectivamente eguaes a 9m. e a 4m.

119. — Calcular o volume de um prisma recto que tem por base um quadrado de 5m. de lado, e sendo a altura egual ao perimetro da base.

120. — Qual é o volume de um tronco de prisma recto quadrangular, tendo $1^m.80$ de base e as arestas lateraes 3m., 2m., $1^m.5$ e $2^m.5$ respectivamente?

121. — Quantos tijolos de $0^m.30$ de comprimento, $0^m.15$ de largura e $0^m.08$ de altura são necessarios para a construcção de um muro de 10m. de comprimento, $3^m.20$ de altura e $0^m.60$ de espessura?

122. — Com as mesmas dimensões dadas no exercicio anterior para os tijolos, calcular o numero de tijolos para a construcção de uma columna quadrada de 6m. de altura, tendo $0^m.75$ de lado.

123. — Qual é a diagonal de um cubo de 27$m.^3$ de volume?

124. — Qual é a area da base de uma pyramide de $1^m.20$ altura e que tem $0^{m3}.200$?

125. — Calcular a altura de um tronco de pyramide de 10^{m3}. de volume, sabendo-se que as areas das bases são respectivamente $8m^2$. e $2m^2$.

CAPITULO III

CORPOS REDONDOS

I. — Cylindro

199. Definições. — Chama-se *superficie cylindrica* circular a superficie gerada por uma recta que se move sempre parallelamente a si mesma e que se apoia sobre uma circumferencia.

Quando se corta uma superficie cylindrica por dois planos parallelos, o corpo comprehendido entre estes dois planos e a superficie cylindrica tem o nome de *cylindro*.

Os dois planos parallelos determinam secções que são as *bases* do cylindro, e a distancia entre as bases, dada pela perpendicular commum, é a *altura*. O cylindro é *recto* ou *obliquo*, segundo o *eixo*, isto é, a recta que une os centros das bases, é perpendicular ou obliquo aos planos das bases. Assim, na figura 118, temos um cylindro recto *ABCD* no qual o eixo *OO'* é tambem altura; a altura póde cahir fóra da base, como no cylindro obliquo de altura *MN*.

Chama-se *secção recta* de um cylindro obliquo a secção que se obtem cortando o cylindro por um plano perpendicular ao eixo.

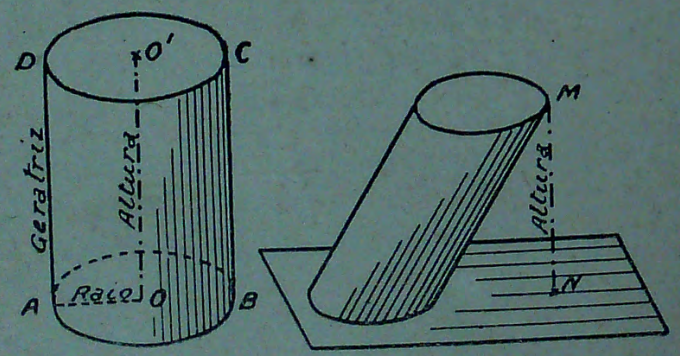

Fig. 118

Tronco de cylindro é a porção de cylindro comprehendida entre a base e um plano secante não parallelo á base.

Considera-se o cylindro como um prisma de uma *infinidade de faces*; portanto, as propriedades do prisma são applicaveis ao cylindro.

200. APPLICAÇÕES. — **Uma grande quantidade de objectos que nos rodeiam tem a fórma cylindrica: um lapis, um tubo de encanamento, um poste de força electrica, etc. E' num cylindro ôco que se move o piston das machinas a vapor. Têm tambem a fórma cylindrica a parte inferior de uma columna, as caixas redondas, certas peças de madeira, etc.**

THEOREMA

201. *A area lateral de um cylindro recto é egual ao producto da circumferencia da base pela altura.*

Com effeito, considera-se o cylindro recto como um prisma recto de um numero infinito de faces; tendo o prisma recto para area lateral o perimetro da base pela altura, teremos para o cylindro de altura a e raio r da base:

$$Al = 2\pi r \times a.$$

202. Observação I. — A area lateral do cylindro obliquo obtem-se pelo producto do perimetro da secção recta pelo eixo.

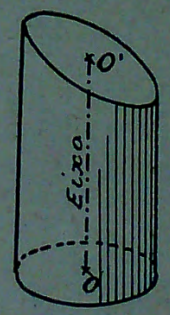

Fig. 119

203. Observação II. — A area lateral de um tronco de cylindro recto (fig. 119) é egual ao producto da circumferencia da base pelo eixo *OO'*.

204. Observação III. — A area total do cylindro é egual á area lateral mais a area das duas bases eguaes; temos, portanto:

$$At = 2\pi ra + 2\pi r^2 = 2\pi r\,(a + r)$$

EXEMPLO. — Quanto se deve pagar pela pintura de uma columna cylindrica de 4m.50 de altura e de 0m.60 de diametro, á razão de 1$500 o m²?

185. Corollario. — *O volume de um cubo é egual ao cubo do numero que mede a aresta.*

Com effeito, as tres dimensões do cubo são eguaes á aresta a, portanto:

$$V = a \times a \times a = a^3.$$

186. Observação II. — O theorema anterior é applicavel a qualquer parallelepipedo, assim: *O volume de qualquer parallelepipedo é egual ao producto da area da base pela altura.*

Exemplo. — Um reservatorio d'agua, tendo a fórma de um parallelepipedo rectangulo, tem para dimensões interiores $4^m.20$ de comprimento, $3^m.60$ de largura e $1^m.80$ de altura ou profundidade. Calcular a capacidade do reservatorio.

Solução. — Applicando a formula $V = l \times c \times a$, vem:

$$V = 4{,}20 \times 3{,}60 \times 1{,}80 = 27{,}^{m^3}216$$

Sendo $1m.^3$ equivalente a 1000 litros, temos que a capacidade é de $27{,}216 \times 1000 = 27216$ litros.

Theorema

187. *O volume de um prisma recto é egual ao producto da area da base pela altura.*

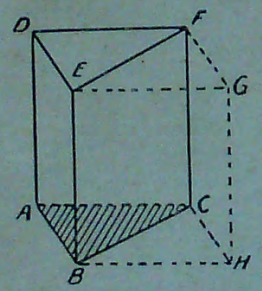

Fig. 114

Vamos suppor primeiramente um prisma recto triangular (fig. 114). Traçando pela aresta BE o plano $BHGE$ parallelo á face $ACFD$, e pela aresta CF o plano $CHGF$ parallelo á face $ABED$, forma-se um parallelepipedo duplo do prisma triangular proposto. Ora, o volume do parallelepipedo é egual á base $ABHC$ pela altura AD, logo o volume V do prisma triangular será:

$$V = \frac{ABHC}{2} \times AD = ABC \times AD = b \times a$$

representando por b a area da base e por a a altura do prisma considerado.

Supponhamos agora um prisma recto qualquer (fig. 115). Traçando planos diagonaes pela aresta AA', decompõe-se o prisma em prismas triangulares, de mesma altura que o prisma proposto, e cujas bases ABC, ACD e ADE sommadas dão a base $ABCDE$ do prisma total.

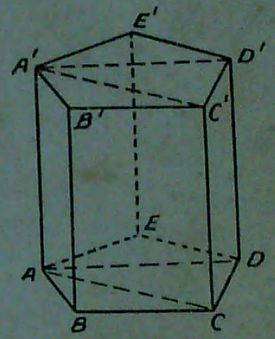

Fig. 115

Designando por b a base do prisma proposto e por a a sua altura, tem-se, pois:

$$V = (ABC + ACD + ADE) \times a = b \times a$$

188. Observação I. — Esta mesma regra é applicavel a qualquer prisma; portanto, *o volume de um prisma qualquer é egual ao producto da area da base pela altura.*

Exemplo. — Qual é o volume de um prisma cuja base é um polygono que tem $1^{m^2}.35$ de area, e cuja altura é egual a $2^m.50$?

$$V = 1{,}35 \times 2{,}50 = 3\ m^3{,}375$$

189. Observação II. — O volume de um tronco de prisma é egual ao producto da area da base pela média arithmetica das perpendiculares baixadas dos vertices superiores do tronco sobre o plano da base.

II. — Pyramide e tronco de pyramide

190. Definições. — Chama-se *pyramide* um polyedro que tem por base um polygono qualquer, e cujas faces lateraes são triangulos que têm um vertice commum.

O vertice commum dos triangulos é o *vertice* da pyramide, e a perpendicular baixada do vertice sobre a base é a *altura* da pyramide.

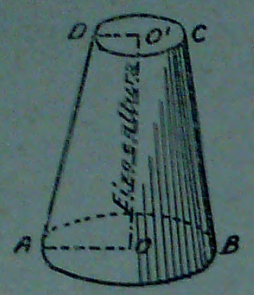

Fig. 122

Tronco de cone recto (fig. 122) é a porção de cone recto comprehendida entre a base e um plano secante parallelo á base. No tronco de cone *ABCD* a recta *AD* ou *BC* é a geratriz, e *OO'* é ao mesmo tempo *eixo* e *altura*.

Considera-se o cone como uma pyramide regular de um numero infinito de faces; portanto, as propriedades da pyramide são applicaveis ao cone.

208. APPLICAÇÕES. — **A flecha do campanario de certas egrejas, a ponta de um para-raio, etc. têm a fórma de um cone. Certos objectos usuaes, como o funil e o apagador de velas, são tambem cones.**

Os filtros empregados em certas fabricações, as chaminés de tijolos que se constróem nas fabricas, etc. são grandes troncos de cone.

Muitos utensilios domesticos, como vasos de flôres, para-lume de lampeões, etc. têm tambem a fórma conica.

THEOREMA

209. *A area lateral de um cone recto é egual á metade do producto da circumferencia da base pela geratriz.*

Com effeito, sendo o cone considerado como uma pyramide regular de uma infinidade de faces, a sua area lateral tem a mesma expressão que a da pyramide regular; temos, por conseguinte:

$$Al = \frac{2\pi r}{2} \times g = \pi r g,$$

designando por r o raio da base e por g a geratriz do cone.

210. Observação. A area total do cone é evidentemente egual á area lateral mais a area da base; logo:

$$At = \pi r g + \pi r^2 = \pi r (g + r).$$

EXEMPLO. — Calcular a area lateral e a area total de um cone recto, valendo o raio da base $0,^{m}50$ e a geratriz $2,^{m}40$.

$$Al = 3,14 \times 0,50 \times 2,40 = 3,^{m^2}7680$$
$$At = 3,14 \times 0,50\ (2,40 + 0,50) = 4,^{m^2}5530.$$

211. Desenvolvimento do cone. — Cortando-se a superficie conica ao longo de uma geratriz (fig. 123), poderá ella ser desenvolvida num plano segundo um sector circular *VBC*, cujo arco *BC* tem o mesmo comprimento que a circumferencia da base do cone, e o raio *VB* é egual á geratriz.

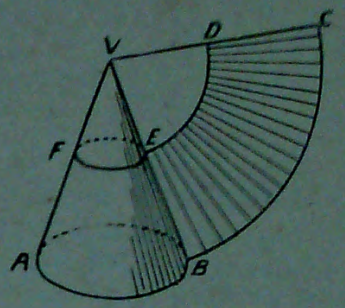

Fig. 123

A superficie tronco-conica *ABEF* tem para desenvolvimento a figura *BCDE*.

A construcção dos baldes de zinco, do funil, etc. repousa sobre esta propriedade.

THEOREMA

212. *A area lateral de um tronco de cone é egual ao producto da semi-somma das circumferencias das bases pela geratriz.*

Sendo o tronco de cone considerado como um tronco de pyramide regular de um numero infinito de faces, tem-se effectivamente, representando por r e r' os raios das bases inferior e superior, e por g a geratriz do tronco de cone:

$$Al = \frac{2\pi r + 2\pi r'}{2} \times g = (\pi r + \pi r')\, g = \pi (r + r')\, g.$$

213. Observação. — A area total do tronco de cone é evidentemente egual á sua area lateral sommada com as areas das duas bases; temos, pois:

$$At = \pi (r + r')\, g + \pi r^2 + \pi r'^2 = \pi [(r + r')\, g + r^2 + r'^2].$$

EXEMPLO. — Qual é a area lateral de uma chaminé tronco-conica de uma usina, sabendo-se que os raios das

bases são respectivamente $1^m,20$ e $0^m,50$, e que a geratriz mede 15 m.?

$$Al = 3,14\ (1,20 + 0,50) \times 15 = 80^{m2},07.$$

THEOREMA

214. *O volume de um cone é egual ao producto da terça parte da area da base pela altura.*

Com effeito, o cone póde ser considerado como uma pyramide de uma infinidade de faces, pelo que o seu volume é dado pelo producto da terça parte da base pela altura; designando a altura do cone por a, tem-se, portanto:

$$V = \frac{\pi r^2 \times a}{3}$$

215. Observação. — Do mesmo modo que para o tronco de pyramide, *o volume de um tronco de cone é egual ao producto da terça parte da altura pela somma das areas das bases e mais a média geometrica entre ellas*; logo:

$$V = \frac{a}{3}(\pi r^2 + \pi r'^2 + \sqrt{\pi r^2 \times \pi r'^2}) = \frac{\pi a}{3}\left(r^2 + r'^2 + rr'\right).$$

EXEMPLO. Calcular a capacidade de uma cuba de forma tronco-conica, tendo as seguintes medidas:

$$r = 2m\ ;\quad r' = 1m,50 \quad \text{e} \quad a = 1m,80$$

SOLUÇÃO. Temos, applicando a formula anterior:

$$V = \frac{3,14 \times 1,80}{3}\ (4 + 2,25 + 3) = 17m^3,427 \quad \text{ou}$$

$$17.427 \times 1000 = 17427 \text{ litros.}$$

Exercicios

126 — Que porção de folha de Flandres será preciso empregar para fazer uma chaminé de 3m.10 de altura e 0m.15 de raio?

127. — Quantos metros de papel de 0m.60 de largura são precisos para forrar uma columna cylindrica de 4 m. de altura e 0m.25 de raio?

128. — Calcular a area de um tronco de cylindro, sabendo-se que o eixo mede 1m.85 e a circumferencia da base 0m.90.

129. — Quantos tijolos são necessarios para o revestimento lateral de um poço de 26 m. de profundidade e 1m.80 de diametro, sabendo-se que um metro quadrado requer 50 tijolos?

130. — Qual é o volume de uma columna de ferro macisso de 7m.20 de altura e 0m.15 de raio?

131. — Quantos litros d'agua contém um tanque circular de 5 m. de diametro e 1m.20 de fundo?

132. — Qual é a profundidade de um tanque circular de 5m. de diametro e de 20000 litros de capacidade?

133. — Qual é o volume de um tubo de 8m.20 de comprimento e 0m.30 de raio?

134. — Tem-se uma folha de zinco de 1m.20 de comprimento por 0m.50 de largura. Qual será a capacidade do cylindro que se obtém enrolando a folha no sentido do comprimento?

135. — Calcular a area de um cone de 1 m. de raio na base e 3m.20 de geratriz.

136. — Um telhado conico tem 20m.40 na circumferencia da base e 4m.50 de geratriz. Quanto custou á razão de 5$000 o m.²?

137. — Quantas ardosias são necessarias para um telhado conico de 3 m. de raio na base e 5 m. de geratriz, sabendo-se que cada ardosia vale $0m^2,05$?

138. — Qual é a area lateral de uma chaminé de usina, tendo 1m.20 e 0m.40 de raio em cada base, e 25 m. de geratriz para o tronco de cone?

139. — Calcular a area lateral e total de um cone de 3 m. de raio e 4 m. de altura.

140. — Calcular a area lateral e total de um tronco de cone, sabendo-se que os raios das bases valem 7 m. e 1 m. respectivamente, e que a altura vale 8 m.

141. — Calcular o volume de um cone de 3 m. de raio e 5 m. de geratriz.

142. — Qual é o volume de um cone, sabendo-se que a circumferencia da base mede 15m.70 e que a altura vale 6 m.?

143. — Determinar o volume de um cone de 6 m. de altura e 10 m. de geratriz.

144. — Calcular o volume de um tronco de cone de 1m.80 de altura e cujas bases têm de raios 2 m. e 0m.60 respectivamente.

145 — Quantos tijolos são precisos para construir-se uma chaminé de 18 m. de altura, devendo os raios das bases serem respectivamente eguaes a 1m.60 e 0m.40, e o tubo interior ter 0m.40 de diametro? (1 m.^{3} = 330 tijolos).

CAPITULO IV

CORPOS REDONDOS (cont.)

Esphera e figuras esphericas

216. Definições. — Chama-se *esphera* o corpo limitado por uma superficie que tem todos os seus pontos equidistantes de um ponto interior chamado *centro*. Uma bola de bilhar é uma esphera.

Raio da esphera é a recta que une o centro a um ponto qualquer da superficie espherica; *diametro* é a recta que passa pelo centro e termina de um e outro lado da superficie da esphera.

Todos os raios da esphera são evidentemente eguaes, e o diametro equivale ao dobro do raio.

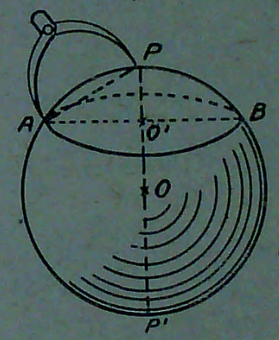

Fig. 124

Cortando-se a esphera por um plano, a secção é um circulo; diz-se *circulo maximo* quando o plano secante passa pelo centro da esphera, no caso contrario tem-se um *circulo menor*.

Chamam-se *polos* de um circulo da esphera as extremidades do diametro perpendicular ao plano do circulo. Assim, (fig. 124), os pontos P e P' são os polos do circulo AB; a recta PA é a *distancia polar* do circulo.

Para traçar-se uma circumferencia sobre a esphera recorre-se ao compasso espherico, que é semelhante a um compasso commum com os ramos recurvados. Dá-se ao compasso uma abertura egual á distancia polar, e fixando