A um triangulo sempre se póde circumscrever um circulo (basta fazer passar um circulo por tres pontos que são os vertices). Em um triangulo sempre se póde inscrever um circulo (o centro é o ponto em que se encontram as tres bissectrizes) (Figs. 178 e 179).

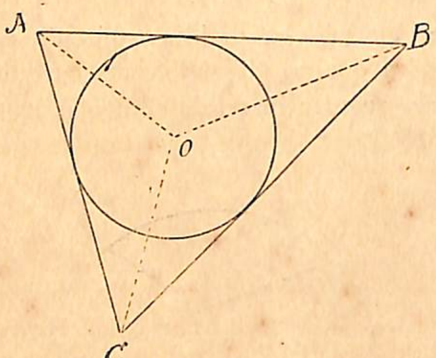

Fig. 179

45) **Areas de polygonos** — A area de um polygono regular se calcula dividindo-o em triangulos eguaes, avaliando a area de um desses triangulos e multiplicando-a pelo numero delles.

Sendo n o numero de lados, l o lado, a o apothema de um polygono regular e p o perimetro, ter-se-á:

$$\text{area} = n \times \frac{l \times a}{2} = \frac{n\,l \times a}{2} = \frac{p \times a}{2}, \text{ isto é:}$$

a area de um polygono regular é egual á metade do producto do perimetro pelo apothema.

Esta formula se applica a todo o polygono, mesmo não regular, desde que nelle se possa inscrever um circulo, porque então todos os triangulos de

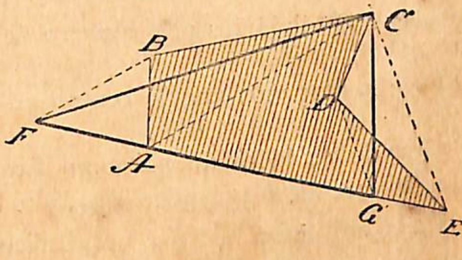

Fig. 180

vertice no centro, tendo para bases os lados do polygono, terão a mesma altura.

Para calcular a area de um polygono qualquer, basta dividi-lo em triangulos, calcular separadamente a area de cada um delles e sommar essas areas.

Dous triangulos com a mesma base, tendo os vertices sobre uma parallela á base, são equivalentes. Nisso se funda o processo para transformar um polygono qualquer em triangulo *equivalente* (Fig. 180). O pentagono ABCDE é equivalente ao quadrilatero ABCG e este ao triangulo CGF.

46) **Desenvolvimento do circulo** — O desenvolvimento do circulo, é pouco mais de tres vezes o diametro; mais exactamente, egual ao diametro multiplicado por 3,14, por 3 1/7 ou por 22/7. Ex.: diametro = 5 cm.

Circulo: $5 \times 3{,}14 = 15{,}70$ cm.

Póde-se verificar isso aproximadamente, em um cylindro, com um cordel e uma regua metrica. Basta medir o diametro e o desenvolvimento do circulo da base.

O numero constante que representa a relação entre um circulo qualquer e o seu diametro, e que é, aproximadamente, 3,1416, praticamente 3,14 ou 3,142, costuma-se designar pela lettra grega π (pi). Dahi, sendo C o desenvolvimento dó circulo e D o seu diametro:

$$C = 3{,}14 \times D = \pi\ D = \pi \times 2R = 2\,\pi\,R$$

Nas officinas é muito commum fazer-se a transmissão de movimento por meio de duas polias e uma correia (Fig. 181).

Quando a polia A tiver dado n voltas, um ponto qualquer do seu circulo terá percorrido um caminho egual a $2\,\pi\,R\,n$, e um ponto da polia B, terá feito um caminho $2\pi R'n'$, se n' é o seu numero de voltas e R' o seu raio.

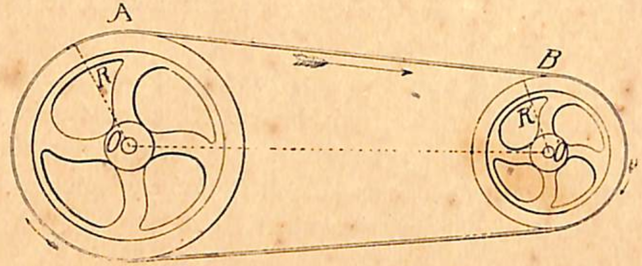

Fig. 181

Como esses dous caminhos devem ser eguaes:

$$2\pi Rn = 2\pi R'n' \text{ ou } Rn = R'n', \text{ donde } R' = \frac{n}{n'} R$$

Ex.: R = 0,30 m; n = 60 rotações e n' = 90 rotações por minuto:

$$R' = 0{,}30 \times \frac{60}{90} = 0{,}20 \text{ m.}$$

47) **Area do circulo** — Considerando o circulo como se fosse um polygono regular, a formula da area será ainda $\frac{p \times a}{2}$.

Mas como $p = C = 2\pi R$ e $a = R$, virá:

$$\text{Area} = \frac{2\pi R \times R}{2} = \pi \frac{R^2}{2} = \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{\pi D^2}{4}$$

A area do quadrado circumscripto é D^2. Assim, a area de um circulo é pouco mais de ¾ da area do quadrado circumscripto (Fig. 182).

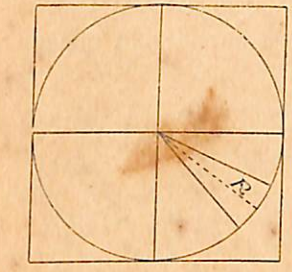

Fig. 182

48) **Area de uma figura qualquer** — Quando se trata de uma figura qualquer, póde-se avaliar a sua area por meio de uma balança sensivel. Desenham-se a figura e um certo quadrado em cartão da mesma qualidade e espessura. Pesam-se as duas figuras. Calcula-se a relação dos dous pesos e multiplica-se essa relação pela area do quadrado (Figs. 183 e 183 A).

Ex.: lado do quadrado 3 cm.

Pesos: quadrado 8 g. (Fig. 183).
figura... 24 g.

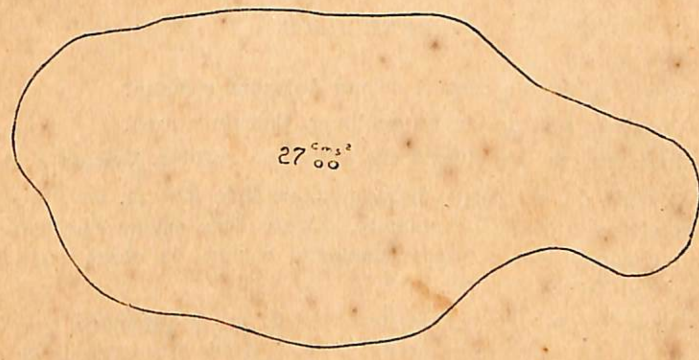

Fig. 183

Relação: $\frac{24}{8} = 3$. Area do quadrado $= 9$ cm².

Area da figura: $3 \times 9 = 27$ cm².

Este processo se usa para avaliar areas de plantas de terrenos ou de mappas.

Póde-se tambem empregar o papel quadriculado transparente para avaliar a area aproximada de uma figura qualquer (Fig. 184).

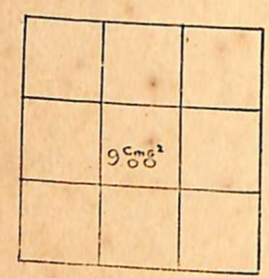

Fig. 183 A

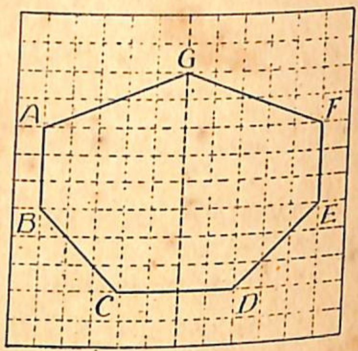

Fig. 184

EXERCICIOS

1 — Qual é o angulo central de um decagono regular?

2 — Constrúa um pentagono qualquer. Calcule a area.

3 — Inscreva em um circulo um hexagono regular. Calcule a area.

4 — O chão de um coreto hexagonal, de lado 2,80 m. deve ser revestido de chapa de cimento. Quanto deve custar esse serviço, sabendo-se que o preço (material e mão de obra) póde ser calculado a 5$000 por m² ?

5 — As rodas de uma bicyclette têm 0,68 m. de diametro. Que distancia ha entre dous pontos A e B, desde que para ir de um a outro, cada roda faz 225 voltas?

6 — Qual é o raio do meio de um tonel cujo circulo do meio tem o desenvolvimento de 2,15 m. ?

7 — Uma polia de transmissão tem 0,75 m. de diametro e faz 30 rotações por minuto. Qual o diametro que deve ter uma segunda polia ligada a essa por meio de correia, para fazer 90 rotações por minuto ?

8 — Em um circulo em que R é egual a 3 m, qual é o desenvolvimento do arco de 1°? E do de 34°?

9 — Um prado circular tem D egual a 85 m, e um caminho que o rodeia tem 2 m. de largo. Quaes são as suas areas?

10 — Em um circulo em que D é egual a 5,40 m., qual é a area do sector de 1°? E do de 27° 30'?

CAPITULO XXV

COMBINAÇÕES DE CIRCULOS E DE ARCOS

49) **Arcos tangentes** — Dous arcos de circulo, e em geral duas curvas quaesquer, se dizem tangentes entre si quando têm uma tangente commum.

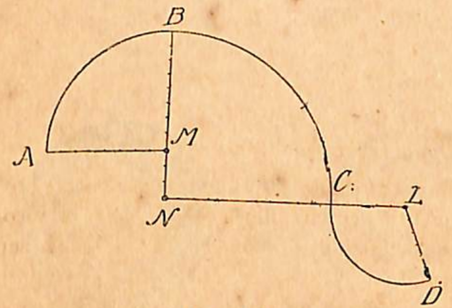

Fig. 185

Quando dous arcos de circulo são tangentes, o ponto de tangencia e os dous centros estão em linha recta.

No traçado de estradas de ferro, passa-se ás vezes de uma curva para outra de raio diverso. Se os dous centros estão do mesmo lado se diz que a curva é *composta;* se estão dos lados contrarios, que a curva é *reversa* (Fig. 185).

50) **Posições relativas de dous circulos** — Dous circulos pódem ter as seguintes posições relativas:

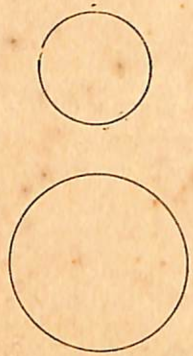

Fig. 186

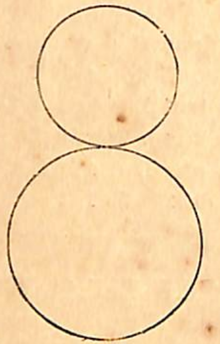

Fig. 187

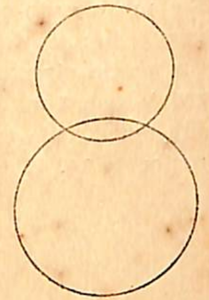

Fig. 188

a) exteriores (Fig. 186).
b) tangentes exteriores (Fig. 187).
c) seccantes (Fig. 188).
d) tangentes interiores (Fig. 189).
e) excentricos (Fig. 190).
f) concentricos (Fig. 191).

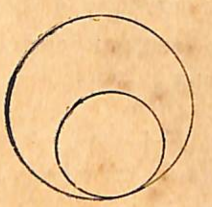

Fig. 189

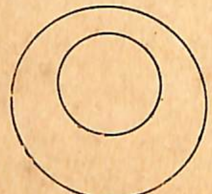

Fig. 190

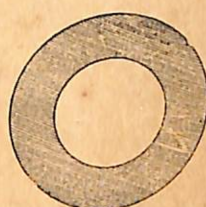

Fig. 191

A parte comprehendida entre os dous circulos concentricos chama-se *corôa* ou *annel*.

51) **Figuras formadas por arcos de circulo** — a) *Oval* — Traçam-se um circulo e dous diametros perpendiculares, AB e CD (Fig. 192).

Liga-se C a A e a B, e do mesmo modo D a A e a B; prolongam-se as rectas CA, DA, CB e DB. Com centro em C e abertura CD traça-se o arco 1—2. Com a mesma abertura e centro em D, traça-se 3—4. Faz-se centro em A e traça-se 1—3; faz-se centro em B e traça-se 2—4.

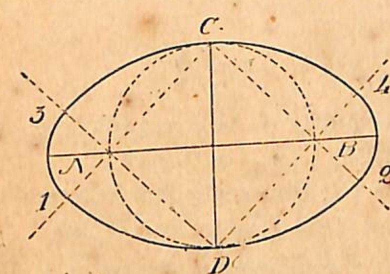

Fig. 192

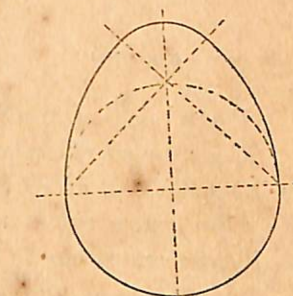

Fig. 193

b) — *Ovulo* — Basta fazer esse traçado apenas para um lado, ficando a figura formada de uma meia oval e um meio circulo (Fig. 193).

c) *Espiraes circulares* — Pódem traçar-se essas curvas com 2, 3 ou mais centros.

Espiral de 2 centros: Com centro em A e abertura AB traça-se um semi-circulo. Muda-se o centro para B e com abertura dupla, traça-se outro semi-circulo; muda-se de novo o centro para A, e assim por deante (Fig. 194).

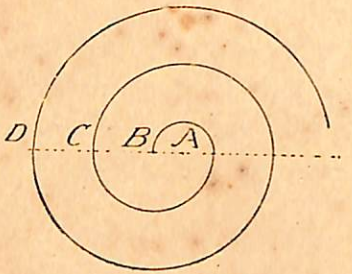

Fig. 194

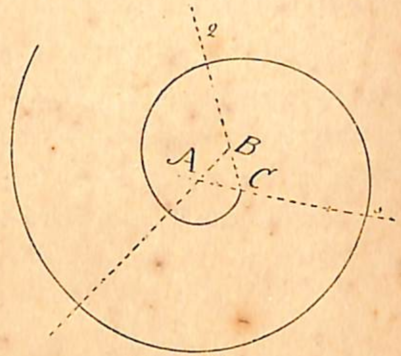

Fig. 195

Espiral de 3 centros: A, B, C.

Constroe-se um triangulo equilatero ABC e prolongam-se os lados BA, CB e AC (Fig. 195).

Com centro em A, traça-se C1, com centro em B, traça-se 1—2, com centro em C, traça-se 2—3 e assim por deante.

d) *Ornatos* — Por meio de combinações de arcos e de

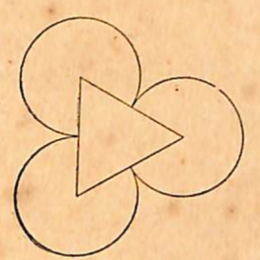

Fig. 196

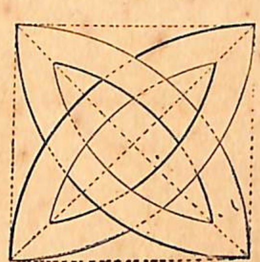

Fig. 197

polygonos póde-se desenhar grande variedade de ornatos. (Figs. 196 e 197).

e) *Arco em asa de cesto* — Liga-se C a A e a B. Traça-se o semi-circulo FCF'. Marcam-se CG e CH eguaes a AF. Le-

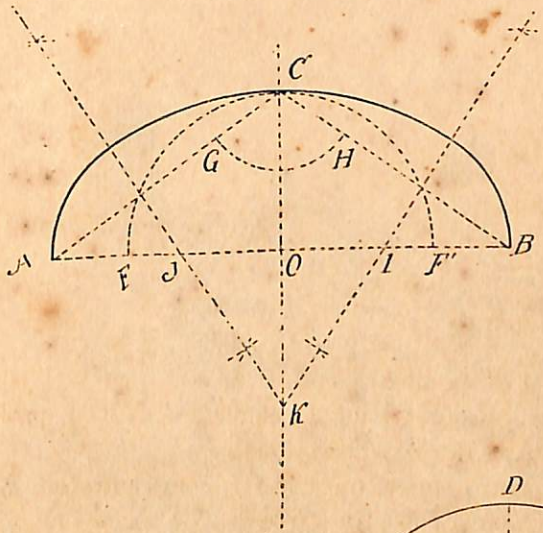

Fig. 198

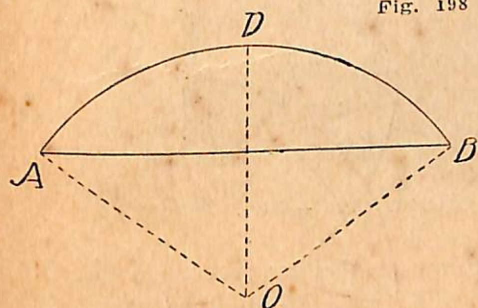

Fig. 199

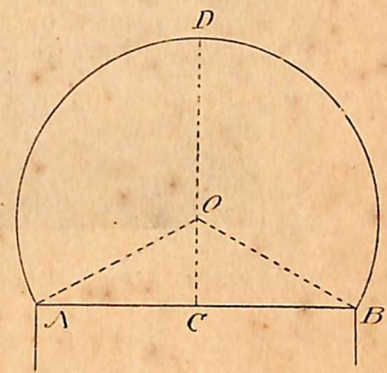

Fig. 200

vantam-se as perpendiculares ao meio de AG e BH. Os pontos J, K e I serão os centros dos 3 arcos (Fig. 198).

Em qualquer arco, D chama-se o *fecho* do arco, AB o *vão*, CD a *flecha* ou *altura* (Fig. 200).

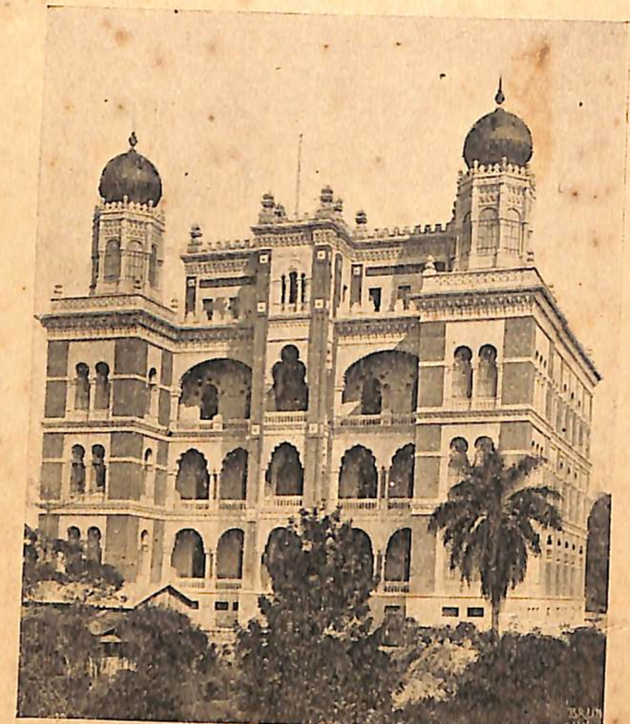

Fig. 201 — Instituto Oswaldo Cruz — Rio.

Um arco simples tem geralmente a altura menor do que a metade do vão (Fig. 199).

Quando a altura é maior do que a metade do vão, chama-se o arco, *mourisco* ou *arabe* (Figs. 200 e 201); quando é egual, chama-se o arco, *pleno* ou *romano* (Figs. 202 e 203).

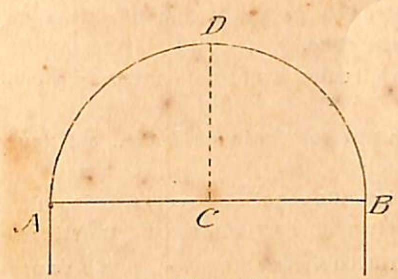

Fig. 202

Fig. 203 — Arcos da Carioca — Rio

EXERCICIOS

1 — Trace dous circulos de modo que cada um passe pelo centro do outro. Qual é o maior ?

2 — Trace tres circulos de modo que o centro de cada um esteja sobre os outros dous.

3 — Trace quatro circulos eguaes, de modo que cada um toque dous dos outros.

4 — Dado um circulo com raio de 4 cm., construir sobre elle uma oval e um ovulo.

5 — Dado um triangulo equilatero com lados de 2 cm., construir uma espiral circular com centros nos vertices.

6 — Construir um arco de asa de cesto, sendo dados o vão e a flecha.

CAPITULO XXVI

CURVAS DIVERSAS

52) **Ellipse** — F e F' são duas estacas cravadas no chão. Amarre nellas um cordel mais comprido do que a distancia F F'; por meio de outra estaca estique o cordel e risque sobre o chão. Essa estaca traçará uma curva fechada que se chama

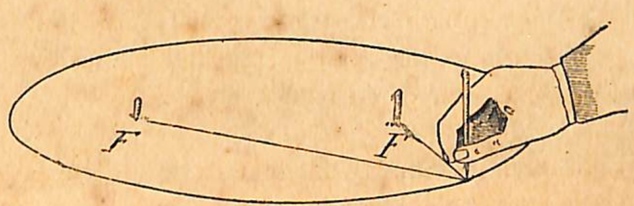

Fig. 204

ellipse (Fig. 204). O mesmo se póde fazer com dous pregos em uma taboa, um cordel e um lapis.

Esse traçado se denomina *dos jardineiros* (Fig. 205).

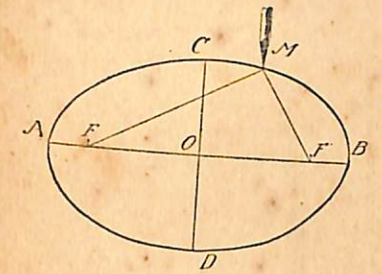

Fig. 205

F e F' chamam-se *fócos.*

AB = *eixo maior.*

CD = *eixo menor.*

O = *centro.*

A, B, C e D = *vertices.*

MF e MF' = *raios vectores.*

F F'= *distancia focal.*

Sommando as duas distancias MF e MF' de um ponto qualquer da curva aos dous fócos, acha-se sempre o mesmo numero, que representa o comprimento do cordel.

Se os dous fócos se reunirem no mesmo ponto, o lapis ou a estaca traçará um circulo.

Quando se conhecem os dous eixos e se quer marcar os fócos, basta fazer centro em C e com abertura AO, marcar sobre a recta AB os dous pontos F e F'.

A ellipse serve para curvas de canteiros de jardim, para fórmas empregadas na marcenaria (espelhos, mesas, etc.), para abobadas de tunneis, arcos de pontes, etc.

53) **Parabola** — Seja F um prego cravado em uma taboa e D D' uma regua. No vertice de um esquadro se amarra um cordel cuja outra ponta se amarra em F. O comprimento do cordel deve ser egual ao lado AB do esquadro. Apoia-se o esquadro sobre a regua e com um lapis estica-se o cordel (Fig. 206).

2 — Trace tres circulos de modo que o centro de cada um esteja sobre os outros dous.

3 — Trace quatro circulos eguaes, de modo que cada um toque dous dos outros.

4 — Dado um circulo com raio de 4 cm., construir sobre elle uma oval e um ovulo.

5 — Dado um triangulo equilatero com lados de 2 cm., construir uma espiral circular com centros nos vertices.

6 — Construir um arco de asa de cesto, sendo dados o vão e a flecha.

CAPITULO XXVI

CURVAS DIVERSAS

52) **Ellipse** — F e F' são duas estacas cravadas no chão. Amarre nellas um cordel mais comprido do que a distancia F F'; por meio de outra estaca estique o cordel e risque sobre o chão. Essa estaca traçará uma curva fechada que se chama

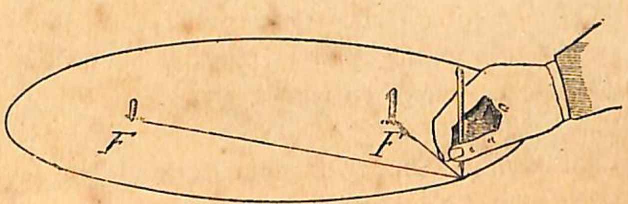

Fig. 204

ellipse (Fig. 204). O mesmo se póde fazer com dous pregos em uma taboa, um cordel e um lapis.

Esse traçado se denomina *dos jardineiros* (Fig. 205).

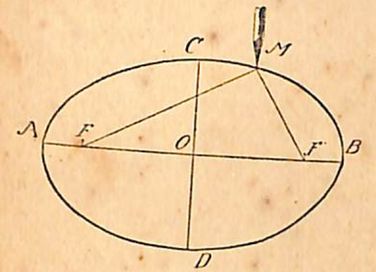

Fig. 205

F e F' chamam-se *fócos.*

AB = *eixo maior.*

CD = *eixo menor.*

O = *centro.*

A, B, C e D = *vertices.*

MF e MF' = *raios vectores.*

F F'= *distancia focal.*

Sommando as duas distancias MF e MF' de um ponto qualquer da curva aos dous fócos, acha-se sempre o mesmo numero, que representa o comprimento do cordel.

Se os dous fócos se reunirem no mesmo ponto, o lapis ou a estaca traçará um circulo.

Quando se conhecem os dous eixos e se quer marcar os fócos, basta fazer centro em C e com abertura AO, marcar sobre a recta AB os dous pontos F e F'.

A ellipse serve para curvas de canteiros de jardim, para fórmas empregadas na marcenaria (espelhos, mesas, etc.), para abobadas de tunneis, arcos de pontes, etc.

53) **Parabola** — Seja F um prego cravado em uma taboa e D D' uma regua. No vertice de um esquadro se amarra um cordel cuja outra ponta se amarra em F. O comprimento do cordel deve ser egual ao lado AB do esquadro. Apoia-se o esquadro sobre a regua e com um lapis estica-se o cordel (Fig. 206).

Fazendo mover o esquadro ao longo da regua e conservando sempre o cordel esticado, o lapis traçará uma curva aberta que se chama *parabola*.

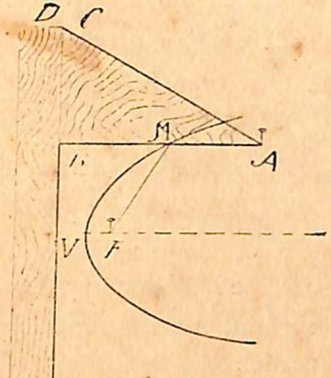

Fig. 206

Fig. 207

F é o *fóco*. D D'= *directriz*. V= *vertice*.

MF = MB.

Qualquer ponto da curva tem a mesma distancia até o fóco e até a directriz.

Fig. 208 — Ponte da Ilha das Cobras — Rio.

A curva que faz um jacto d'agua assim como um projectil qualquer, atirado horizontalmente ou com inclinação; é um arco de parabola (Fig. 207).

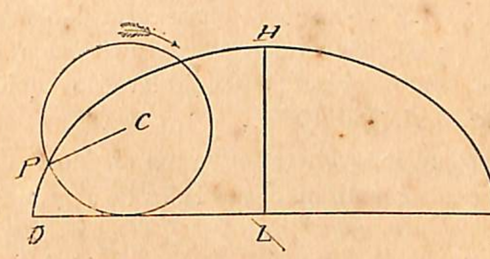

Fig. 209

A parabola é muito empregada para a forma de vigas em pontes metallicas. Os cabos que supportam as pontes suspensas (Fig. 208) tomam a forma de parabola.

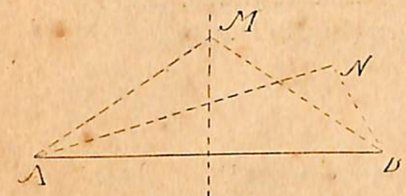

Fig. 210

54) **Cycloide** — A curva gerada por um ponto de um circulo que rola sobre uma recta, chama-se *cycloide*. A base OX da cycloide é egual ao desenvolvimento do circulo (Fig. 209).

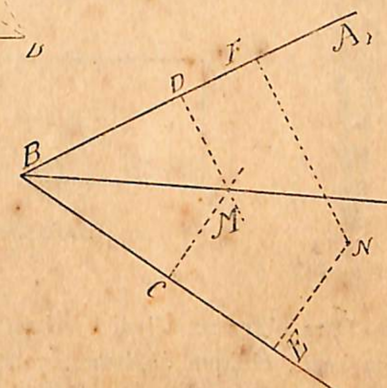

Fig. 211

55) **Lugar geometrico** — Sempre que todos os pontos de uma linha possuem

uma certa propriedade que só pertence a elles, se diz que essa linha é um *lugar geometrico*. Assim, o circulo é um lugar geometrico, a ellipse é outro e a parabola, outro.

A perpendicular ao meio de uma recta é o lugar geometrico dos pontos equidistantes dos extremos dessa recta, porque todos os pontos dessa perpendicular são equidistantes e porque *só* elles o são (Fig. 210).

Do mesmo modo, a bissectriz de um angulo é o lugar geometrico dos pontos equidistantes dos lados do angulo (Fig. 211).

56) **Helice** — Nem todas as curvas pódem ser traçadas em um plano. As que o não pódem, como a curva de um parafuso, a de um sacarrolhas ou de uma verruma, chamam-se curvas de *torsão,* emquanto que as curvas planas como o circulo. a ellipse, a parabola, etc., se chamam de *flexão*. Entre as primeiras a mais conhecida é a *helice* (Fig. 212).

Fig. 212

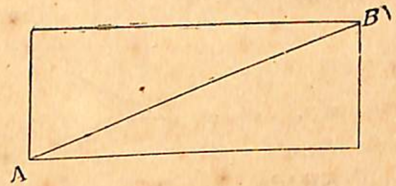

Fig. 213

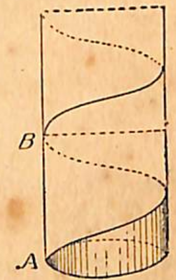

Fig. 214

Para obter uma helice é bastante traçar em um rectangulo, uma recta obliqua ás bases, como a diagonal por exemplo, e depois, enrolar a folha em forma de cylindro (Figs. 213 e 214).

A distancia AB contada sobre uma geratriz do cylindro entre duas passagens seguidas da helice chama-se *passo*.

O arco da helice entre A e B chama-se *espira*.

EXERCICIOS

1 — Constrúa uma ellipse tendo os dous fócos a 8 cm. de distancia um do outro e o eixo maior com 12 cm.

2 — A que egual a distancia de uma extremidade do eixo menor a um fóco ?

3 — Tomando para cathetos a metade do eixo menor e a metade da distancia dos fócos, a que é egual a hypothenusa ?

4 — Que succede quando as duas estacas se aproximam até se reunirem em um só ponto ? E quando se afastam ?

5 — Constrúa uma parabola tendo o fóco a 6 cm. da directriz. A que distancia da directriz estará o vertice ?

6 — Qual é o lugar geometrico dos centros dos circulos tangentes aos lados de um angulo?

7 — Idem dos centros de circulos de egual raio tangentes a uma recta ?

8 — Idem dos centros de circulos de egual raio tangentes a um circulo ?

9 — Idem dos centros de circulos de egual raio, que passem por um ponto ?

CAPITULO XXVII

SEMELHANÇA

Escala

57) **Egualdade. Semelhança** — Dous rectangulos com a mesma base e a mesma altura são eguaes: recortando-os e collocando um sobre outro, elles se recobrem perfeitamente.

Duas figuras planas eguaes sempre se pódem recobrir perfeitamente. Essas figuras têm a mesma forma e o mesmo tamanho, ou area.

Duas figuras podem, porém, ter a mesma forma sem terem o mesmo tamanho ou area. Chamam-se então *semelhantes* (Fig. 215).

Póde-se empregar o processo da quadricula para construir figuras semelhantes.

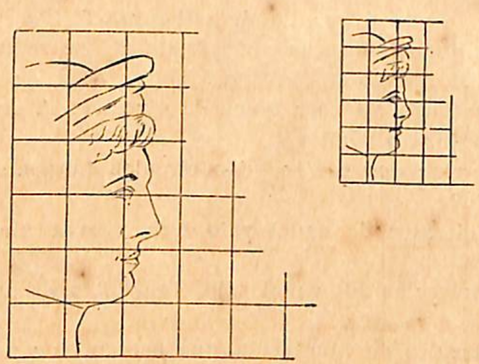

Fig. 215

Seja um rectangulo de 2 cm.$\times$ 3 cm. Se se traçar outro de 4 cm.$\times$ 6 cm., isto é, tendo, tanto a base como a altura, duplas das do outro, elles terão a mesma forma, mas as areas serão differentes: emquanto que a do primeiro é de 6 cm^2, a do segundo é de 24 cm^2. (Fig. 216).

Diz-se então que esses dous rectangulos são *semelhantes.*

58) **Escala** — A relação que existe entre cada lado da segunda figura e o seu correspondente na primeira, chama-se *relação de semelhança.*

A relação de semelhança entre um objecto e seu desenho chama-se *escala.*

EXEMPLOS

(a)
1.º rectangulo : 2×3
2.º rectangulo : 4×6
escala 4 : 2 ou 2/1

(b)
1.º rectangulo : 6×9
2.º rectangulo : 2×3
escala 2 : 6 ou 1/3

No exemplo (a) se diz que, substituindo o primeiro rectangulo pelo segundo houve *ampliação;* no exemplo (b), que houve *reducção.*

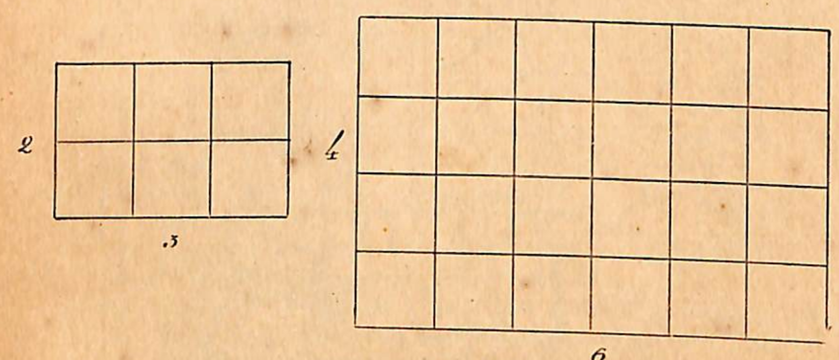

Fig. 216

Quando a escala é de 1/1, o desenho é egual ao objecto, isto é, está em escala natural ou em verdadeira grandeza.

A figura mostra um mappa de parte do Rio de Janeiro e Districto Federal, na escala de 1:2.000.000.

Isso significa que para se obter a verdadeira distancia entre dous pontos no terreno deve-se multiplicar por 2.000.000 a distancia tomada no mappa (Fig. 217).

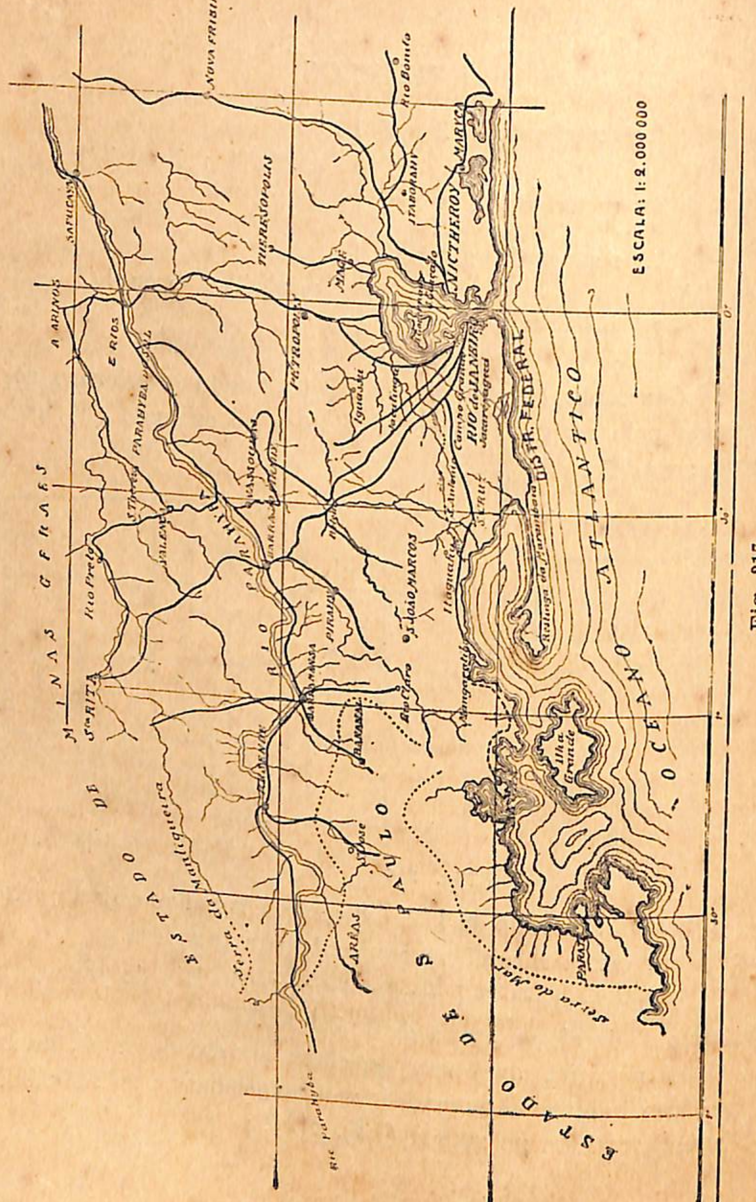

Fig. 217

59) **Relação entre as areas de figuras semelhantes** — Os dous rectangulos do exemplo (a) têm a relação 2, as suas areas têm a relação 4 ou $2 \times 2 \left(\frac{24}{6} = 4 \right)$. Os dous rectangulos do exemplo (b) têm a relação 3; as suas areas têm a relação 9 ou $3 \times 3 \left(\frac{54}{6} = 9 \right)$.

A relação das areas de duas figuras semelhantes é egual ao quadrado da relação entre ellas.

Assim, a area do Districto Federal é $2.000.000 \times 2.000.000 = 4.000.000.000.000$ vezes a area do mappa (Fig. 217).

EXERCICIOS

1 — Dous triangulos semelhantes têm para bases 60 cm. e 12 cm. Se a altura do primeiro é 40 cm., qual é a do segundo ?

2 — Dada uma figura qualquer, ampliá-la para o dobro, por meio da quadricula.

3 — Um poço tem para diametro 1,80 m; qual é o raio com que se traça o seu desenho na escala de 1/20 ?

4 — Se a escala de um mappa é de 1 para 9.600.000, isto é, 1 mm. para 9.600 m, e a distancia nesse mappa entre Rio e S. Paulo é 36 mm., qual é a distancia real entre essas cidades, em linha recta ?

5 — Qual é a area de um terreno cuja planta tem 15 cm^2, sendo 1/50 a escala do desenho ?

6 — Com auxilio do papel millimetrado transparente, calcule a area do Districto Federal em centimetros e millimetros quadrados. Sabendo qual é a escala do mappa, calcule a area verdadeira.

7 — Em uma planta do Rio de Janeiro na escala de 1/10.000 se verifica que a grande praça circular denominada Vieira Souto, tem 11 mm. de diametro. Qual é a area verdadeira dessa praça?

CAPITULO XXVIII

SYMETRIA

60) **Eixo de symetria** — Dobrando o primeiro desenho pela recta AB, a parte da direita recobre a da esquerda, ou vice-versa (Fig. 218).

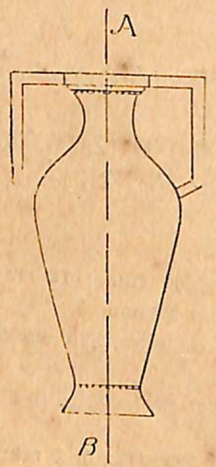

Fig. 218

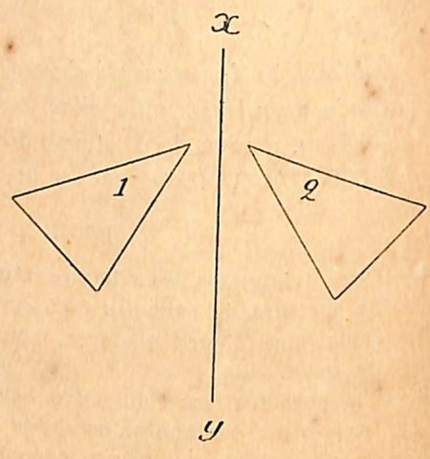

Fig. 219

Do mesmo modo, dobrando o segundo desenho pela recta XY, a figura da direita recobre a da esquerda, ou vice-versa (Fig. 219).

Em ambos os casos, se diz que a recta AB ou XY é um *eixo de symetria* e que a figura é *symetrica*, ou que as duas figuras 1 e 2 são *symetricas* entre si. A symetria entre duas figuras é portanto uma relação de forma e de posição.

Na natureza se encontram muitas figuras symetricas, como são em geral as folhas das arvores, o rosto das pessoas, as caras dos animaes (Fig. 220),

Duas figuras planas symetricas são sempre eguaes.

Fig. 220

A symetria em relação a um eixo se chama *symetria lateral*.

Uma mesma figura póde ter mais de um eixo de symetria.

Todos os polygonos regulares têm eixos de symetria, tantos quantos são os lados. A ellipse tem dous eixos; o circulo uma infinidade de eixos.

Um espelho é um *plano de symetria* entre um objecto e sua imagem.

61) **Centro de symetria** — Seja uma figura parecida com um S maiusculo de imprensa; por ex. copiando em papel transparente, espetando um alfinete em C e fazendo gyrar o papel transparente, a figura de cima recobre a de baixo depois de uma rotação de 180°. O ponto C é então um *centro de symetria* (Fig. 221).

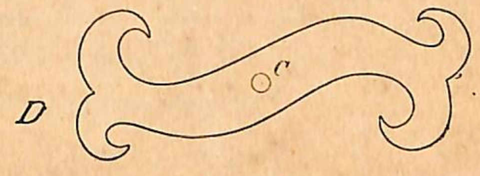

Fig. 221

A symetria em relação a um ponto, se chama *symetria radial*. Ella póde ser dupla, tripla, quadrupla, etc., conforme o numero de vezes que a figura de cima recobre a de baixo em uma rotação inteira (Fig. 222).

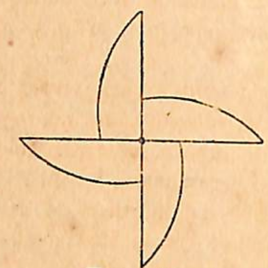

Fig. 222

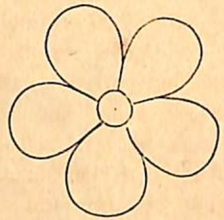

Fig. 223

A natureza nos mostra muitos exemplos de symetria radial, como nas flôres, por ex.

Sempre que uma figura tem mais de um eixo de symetria, o ponto de intersecção dos eixos é um centro de symetria radial; quando a figura tem 2 eixos, a symetria é dupla, quando tem 3, é tripla, etc. (Fig. 223).

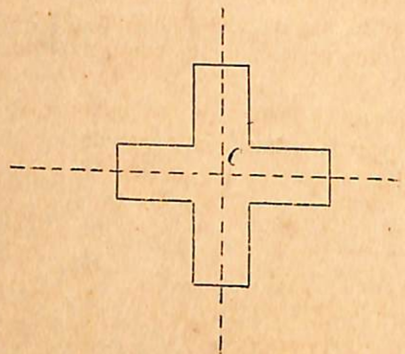

Fig. 224

Quando o numero de eixos é par, o centro de symetria é *centro de figura*. Elle divide ao meio todas as cordas da figura que por ahi passem. E' isso que succede na cruz grega, por ex. (Fig. 224). Como se viu, porém, com a lettra S, a figura póde não ter eixo algum de symetria e, entretanto, ter centro; nesse caso elle é centro de figura.

EXERCICIOS

1 — Trace uma recta XY e marque um ponto A, fóra della. Onde está o ponto A', symetrico de A em relação a XY ? Como se póde achá-lo dobrando o papel?

2 — Que condições devem satisfazer dous pontos para serem symetrictos em relação a uma recta? E em relação a um ponto?

3 — Como se póde, com auxilio de uma tesoura, recortar em uma folha de papel uma figura com eixo de symetria ?

4 — Quaes são as lettras maiusculas (typo de imprensa) e os algarismos, que têm um eixo de symetria ? Quaes são os que têm dous ? Quaes são as que têm centro sem ter eixo ?

5 — Achar a figura symetrica lateral de um angulo em relação a um lado, a uma parallela a um lado, a uma recta que o corta.

6 — Idem de um triangulo equilatero em relação a uma parallela á base e a uma recta que o corte.

7 — Idem de um circulo em relação a uma seccante e a uma tangente.

8 — Achar a figura symetrica radial de um quadrado, em relação ao meio de um dos lados, a um vertice, a um ponto externo, a um ponto interno.

9 — Idem de um circulo em relação ao centro, a um ponto qualquer da curva, a um ponto externo, a um ponto interno.

10 — Idem de um triangulo equilatero em relação ao centro, a um vertice, a um ponto externo.

CAPITULO XXIX

NOÇÃO DE VOLUME

62) **Unidades de volume** — Nem todos os corpos têm o mesmo tamanho: uns occupam maior, outros occupam menor espaço.

Chama-se *volume* de um corpo qualquer, a medida do espaço que elle occupa.

Para se medir um volume é preciso comparál-o com outro volume conhecido, que será a *unidade* de volume.

Chama-se *decimetro cubico* (dm^3) um cubo que tem um decimetro de aresta. Em um decimetro cubico cabem 1.000 centimetros cubicos (cm^3), isto é, 1.000 pequenos cubos com um centimetro de aresta. Em um centimetro cubico cabem 1.000 millimetros cubicos (mm^3), isto é, 1.000 pequenos cubos com um millimetro de aresta.

Do mesmo modo, um *metro cubico* (m^3), isto é, um cubo que tem um metro de aresta, contem 1.000 decimetros cubicos.

Elle se denomina *stere* quando serve para medir lenha ou madeira de construcção. Marca-se no chão um quadrado com 1 m. de lado. Fincam-se nos vertices 4 estacas com um metro de altura. A lenha que encher esse espaço representa um stere.

1 dm^3 se escreve 0,001 m^3.

1 cm^3 se escreve 0,000001 m^3.

1 mm^3 se escreve 0,000000001 m^3.

Dos multiplos do metro cubico o unico empregado é o *decametro cubico,* que contem $10 \times 10 \times 10 = 1.000$ metros cubicos.

Entre as medidas antigas pódem se mencionar o palmo cubico e entre as medidas inglezas a pollegada cubica e o pé cubico.

63) **Volume do parallelipipedo e do cubo** — Para medir o volume de um parallelipipedo cujas arestas tenham cada uma,

um numero inteiro de centimetros, é sufficiente medir o numero de centimetros de tres arestas como AB, AC e AD, e multiplicá-las entre si.

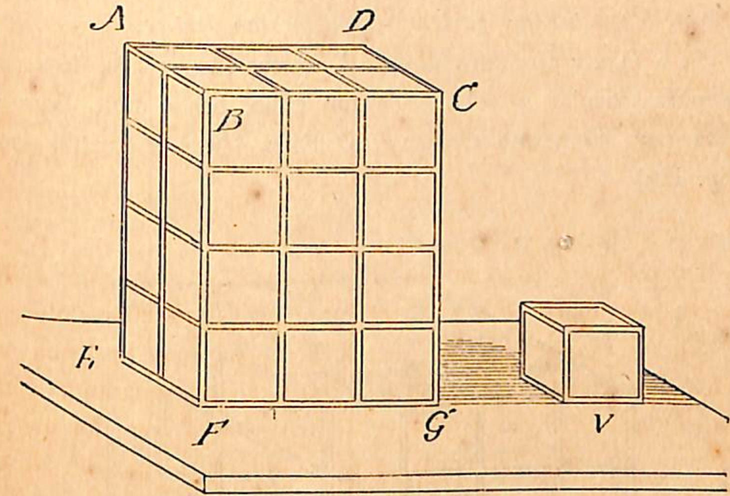

Fig. 225

Basta ver que, sendo por exemplo: AB = 2 cm. e AD = 3 cm., cabem em cada camada de um centimetro de alto, 6 m^3. Como AE = 4 cm., ter-se-ão 4 camadas e portanto ao todo $4 \times 6 = 24$ cm^3, isto é, $4 \times 3 \times 2 = 24$ Fig. 225).

Ex.: uma caixa d'agua tem:

210 cm. de comprimento

85 cm. de largura

72 cm. de altura

$210 \times 85 \times 72 = 128.520$ cm^3. Valendo cada dm^3 1.000 cm^3, o volume será: 128 dm^3 e 520 cm^3.

Como em medida de liquidos e cereaes o decimetro cubico chama-se *litro*, o volume é: 128 litros e 520 millesimos do litro.

O volume de um parallelipipedo rectangulo é egual ao producto de 3 arestas que partem de um mesmo vertice.

Se a figura fôr um cubo, as 3 arestas são eguaes, de sorte que para calcular o volume de um cubo, basta multiplicar a aresta por si mesmo duas vezes. Ex.: $4 \times 4 \times 4 = 64$ cm³ (Fig. 226).

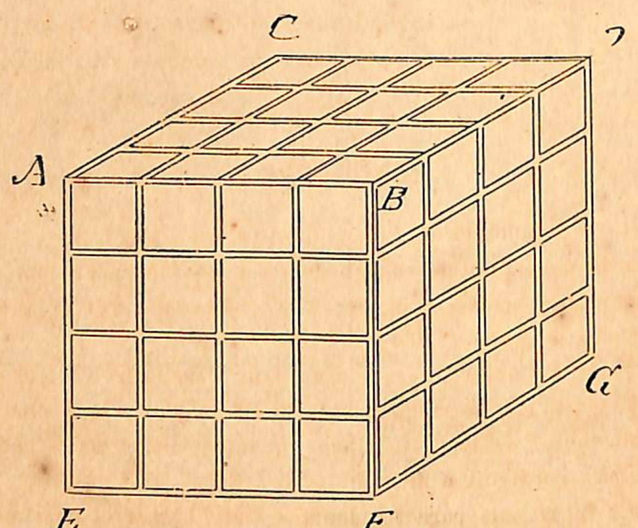

Fig. 226

Por essa razão chama-se *cubo* de um numero o producto de 3 factores eguaes a esse numero: Ex.: 8 é o cubo de 2, 27 é o cubo de 3, etc.

Quando dous corpos, embora de formas diversas, têm o mesmo volume se diz que são *equivalentes*.

Para calcular o volume de madeira esquadriada que se póde obter de um tronco bruto de arvore rectilinea, traçam-se nos topos os maiores circulos que fôr possivel obter no interior do lenho, isto é, sem attingir a casca. Inscreve-se no menor desses circulos um quadrado ou rectangulo para esquadria e multiplica-se a sua area pelo comprimento do tronco (Fig. 227).

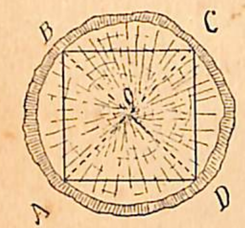

Fig. 227

EXERCICIOS

1 — Qual é o volume de um cubo cuja aresta é 8 cm. ?

2 — Quantas toneladas de coke pódem ser guardadas em um deposito tendo 6 m. por 4 m. por 3 m., sabendo-se que cada metro cubico pesa cerca de 300 kg. ?

3 — Um muro de tijolo de vez e meia, tem a espessura de 0,35 m., a altura de 2 m. e o comprimento de 15 m. Sabendo-se que cada metro cubico contem 445 tijolos, quantos tijolos serão necessarios para construir o muro ?

4 — Uma sala de aula para 30 meninos tem 7,2 m. de comprimento, 5,4 m. de largura e 3,3 m. de altura. Quantos metros cubicos de ar correspondem a cada menino ?

5 — Para assentar encanamentos, abriu-se uma vala de 1,4 m. de profundidade, 85 cm. de largura e 700 m. de comprimento. Qual foi o volume de terra excavada ? Se se medir essa terra fóra do lugar, acha-se um volume maior ou menor ? Por que ?

CAPITULO XXX

PRISMAS EM GERAL

64) **Classificação** — Em vez de ter para bases triangulos, o prisma, que já se conhece, póde ter para bases dous polygonos quaesquer, eguaes e parallelos (Figs. 228 e 229).

Fig. 228

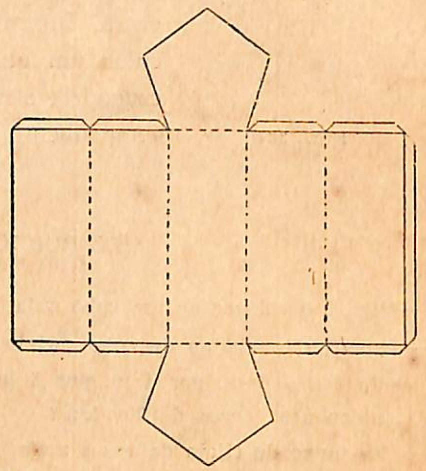

Fig. 229

O prisma chama-se quadrangular, pentagonal, hexagonal, etc., conforme o numero de faces lateraes ou de lados das bases.

Se as arestas lateraes forem perpendiculares ás bases, o prisma é *recto;* se não, é *obliquo.*

Altura é a medida da perpendicular ás bases. No prisma recto é o comprimento de uma aresta lateral.

O prisma recto chama-se *regular* se as bases são polygonos regulares. Quando as bases forem parallelogrammos, o prisma se chama *parallelipipedo.*

Se as arestas lateraes forem obliquas ás bases, chama-se *parallelipipedo obliquo* (Figs. 230 e 231). Se as arestas late-

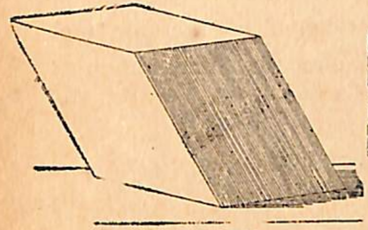

Fig. 230

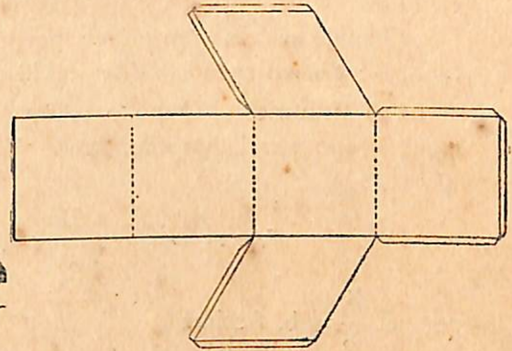

Fig. 231

raes forem perpendiculares ás bases, ter-se-á o *parallelipipedo recto.*

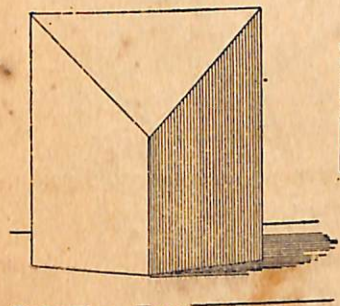

Fig. 232

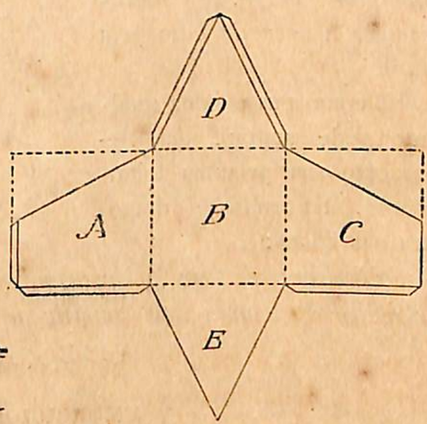

Fig. 233

Neste caso, sendo as bases rectangulos, tem-se o *parallelipipedo rectangulo,* corpo que já se conhece. Se no parallelipipedo rectangulo as bases forem quadradas e a altura fôr egual ao lado das bases, ter-se-á o *cubo,* que tambem já se estudou.

Quando se corta um prisma por um plano obliquo ás bases, tem-se o *prisma truncado* (Figs. 232 e 233).

65) **Volumes** — Como o prisma triangular é sempre metade de um parallelipipedo, sendo V o seu volume, ter-se-á: (Fig. 234)

$$V = \frac{B \times A}{2} = \frac{B}{2} \times A = b \times A$$

por ser $\frac{B}{2} = b$. Assim:

o volume de um prisma triangular obtem-se multiplicando a area da base pela altura.

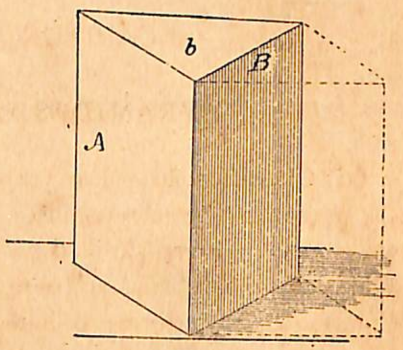

Fig. 234

E como um prisma qualquer póde sempre ser decomposto em prismas triangulares, traçando-se diagonaes nas bases:

o volume de um prisma qualquer se obtem egualmente, multiplicando a area da base pela altura.

$$V = B \times A$$

EXERCICIOS

1 — Qual é o numero total de faces de um prisma hexagonal ?
2 — Qual é o numero de faces lateraes ?
3 — Como se mede a altura de um prisma obliquo ?

4 — Qual é o nome exacto da fórma de um caixote ?
5 — Sabendo que 2.500 kg. por m³ é o peso especifico da cantaria, calcular o peso de um prisma regular de cantaria que tem por base um hexagono de lado 30 cm. e para altura 80 cm. ?
6 — Calcular, desenhando a base, a area total de um prisma cuja altura é 20 cm. e cuja base é um triangulo equilatero de 5 cm. de lado.
7 — O peso especifico do latão é 8,5 g. por cm³. Calcular, desenhando a base, o comprimento de uma barra hexagonal de lado 4 cm., que pesa 450 g.

CAPITULO XXXI

PYRAMIDES EM GERAL

66) **Classificação** — Em vez de ter para base um quadrado, a pyramide que já se conhece, póde ter para base um polygono qualquer (Figs. 235, 236 e 237).

A pyramide chama-se triangular, quadrangular, pentagonal, hexagonal, conforme o numero de faces lateraes ou de lados da base.

A pyramide triangular chama-se *tetraedro.*

Sendo a base um polygono regular, se a perpendicular baixada do vertice sobre a base, cahir no centro desta, a pyramide chamar-se-á *recta* ou *regular.*

A altura dos triangulos das faces lateraes chama-se *apothema.*

Se a perpendicular baixada do vertice cahir fóra do centro da base, a pyramide chamar-se-á *obliqua* (Fig. 238).

Quando se corta uma pyramide por um plano qualquer, a parte que fica entre a base e a secção chama-se *pyramide truncada.*

Fig. 235 — Dois Irmãos — Rio

Se a secção é parallela á base, o corpo chama-se *tronco de pyramide* (Fig. 239). A secção é então uma figura semelhante á base.

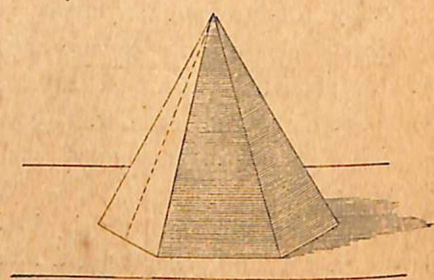

Fig. 236

Muito frequentemente se encontram tanques, amassadeiras, carroças,

etc., tendo uma forma interna que, embora parecendo ser a de um tronco de pyramide, não o é. Basta verificar que as quatro

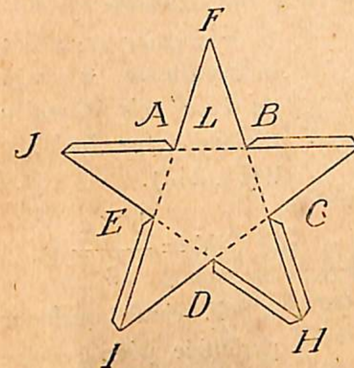

Fig. 237

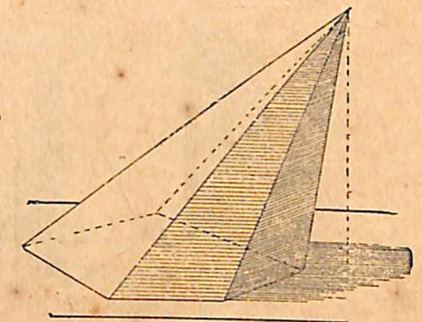

Fig. 238

arestas lateraes não se encontram no mesmo ponto. Chama-se a essa forma *prismoide* (Fig. 240).

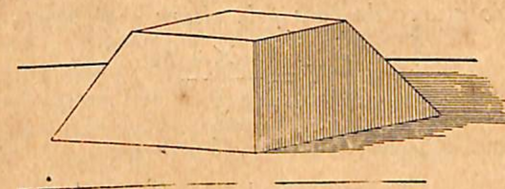

Fig. 239

67) **Volumes**—Um prisma triangular póde ser sempre decomposto em 3 tetraedros como mostra a figura. Comparando I com III se verifica que têm bases e alturas eguaes. O mesmo succede comparando II com

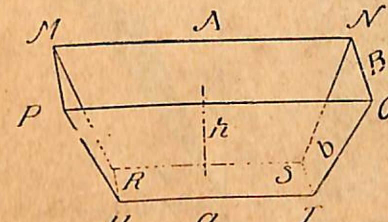

Fig. 240

III. Como dous tetraedros de mesma base e mesma altura são equivalentes, os tres serão equivalentes entre si. Portanto: *o volume de uma pyramide triangular se obtem multiplicando a area da base pela altura e dividindo por 3* (Figs. 241 e 242).

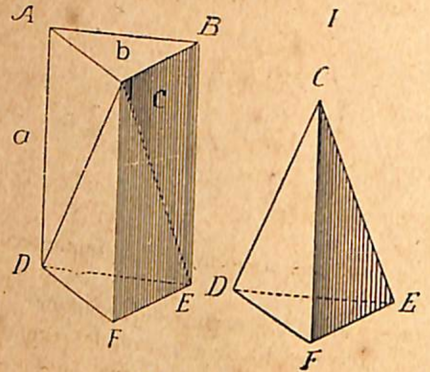

Fig. 241

$$V = \frac{b \times a}{3}$$

E como qualquer pyramide póde sempre ser decomposta em tetraedros, traçando diagonaes na base:

o volume de uma pyramide qualquer se obtem egualmente, multiplicando a area da base pela altura e dividindo por 3.

$$V = \frac{b \times a}{3}$$

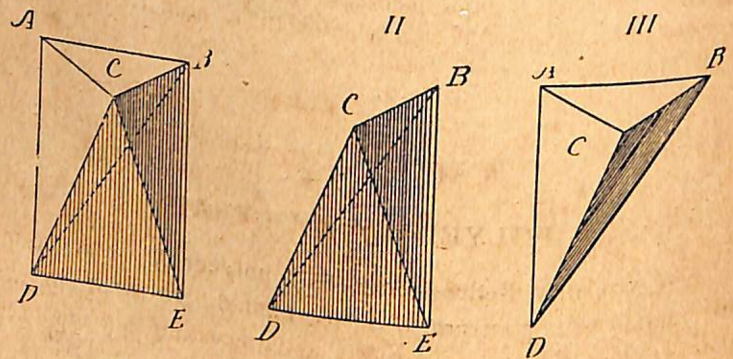

Fig. 242

Victor Hugo Silva.

O volume de um prismoide se obtem aproximadamente na pratica, multiplcando a media dos comprimentos das duas bases pela media das duas larguras e o resultado pela altura (Fig. 240).

$$V = \left(\frac{A + a}{2}\right) \left(\frac{B + b}{2}\right) \times h$$

EXERCICIOS

1 — Qual é o numero total de faces de uma pyramide pentagonal ?
2 — Qual é o numero de faces lateraes ?
3 — Qual a fórma das faces lateraes de um tronco de pyramide?
4 — Qual é a fórma das faces lateraes de uma pyramide regular ?
5 — Calcular o volume de uma pyramide regular que tem para base um hexagono de lado 4 cm. e para altura 12 cm. ?
6 — Qual é a area total de uma pyramide regular cuja base é um quadrado de lado 4 cm. e cujas faces lateraes são triangulos isosceles de lados 6 cm. ?
7 — Calcular o volume de um tronco de pyramide, considerando-o como differença de duas pyramides.
8 — Um reservatorio tem a fórma de um tronco de pyramide de bases quadradas, cujos lados são de 9,0 m. e 10,8 m., sendo a altura do tronco 2,10 m. Quantos litros póde conter esse reservatorio ?

CAPITULO XXXII

POLYEDROS EM GERAL

68) **Angulos diedros, triedros e polyedros** — Sempre que dous planos se encontram, o espaço limitado em parte por elles chama-se *angulo diedro*. A recta de intersecção é a *aresta* do

diedro (Fig. 243). A medida do angulo diedro se faz medindo o angulo das rectas GH e GL, ambas perpendiculares á aresta.

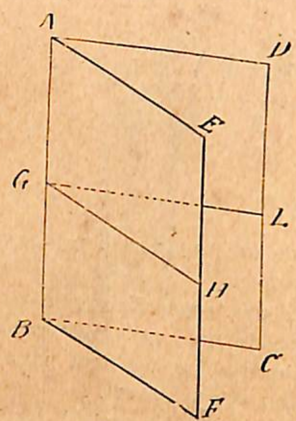

Fig. 243

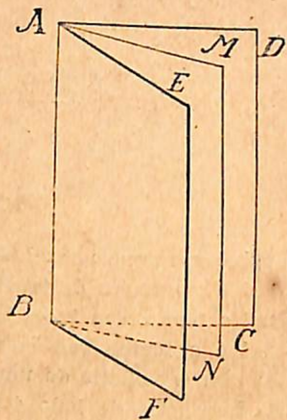

Fig. 244

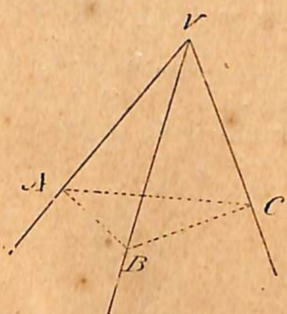

Fig. 245

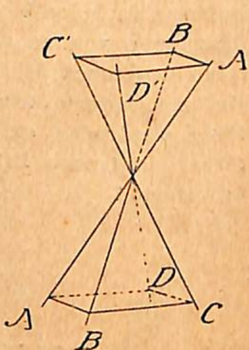

Fig. 246

O plano que passar pela aresta, dividindo ao meio o diedro, chama-se *plano bissector* (Fig. 244).

Se tres planos se encontram em um mesmo ponto, forma-se um *angulo triedro* de que esse ponto é o *vertice* (Fig. 245).

Se são mais de tres planos que se encontram em um mesmo ponto, forma-se um *angulo polyedro* (Fig. 246).

69) **Polyedros** — Chama-se *polyedro* o corpo limitado por faces planas.

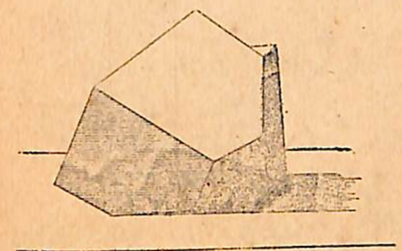

Fig. 247

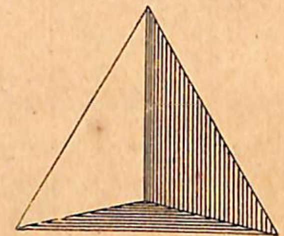

Fig. 248

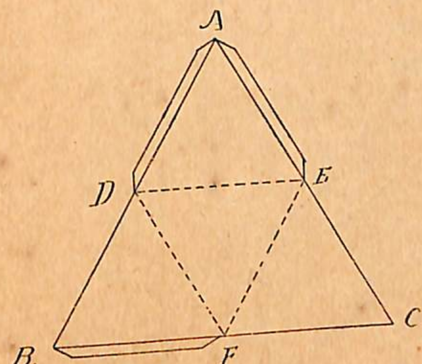

Fig. 249

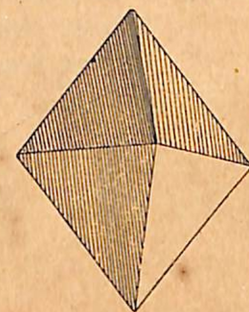

Fig. 250

Os polyedros têm arestas, faces e vertices (Fig. 247).

Os polyedros classificam-se de accordo com o numero de faces.

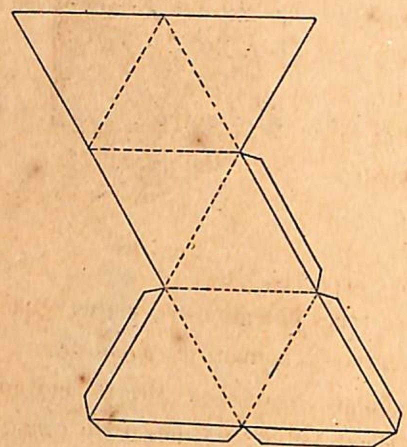

Fig. 251

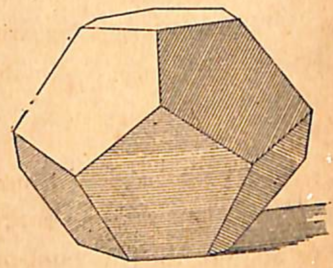

Fig. 252

O de 4 faces chama-se tetraedro.
" " 5 faces, pentaedro.
" " 6 faces, hexaedro.

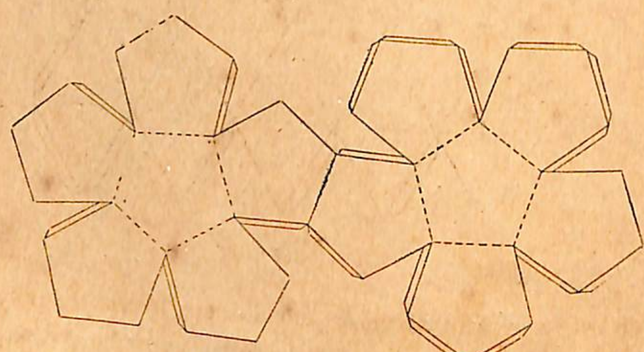

Fig. 253

Alfredo Januário da Silva

O de 7 faces, heptaedro.
" " 8 faces, octaedro.
" " 9 faces, enneaedro.
" " 10 faces, decaedro.
" " 11 faces, endecaedro.
" " 12 faces, dodecaedro.
" " 15 faces, pentadecaedro.
" " 20 faces, icosaedro.

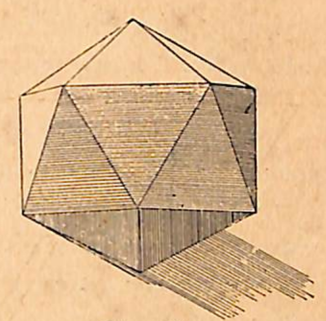

Fig. 254

Os demais não têm nomes especiaes.

Os polyedros que têm para faces polygonos regulares eguaes e os angulos diedros tambem eguaes, chamam-se *regulares*.

Só ha cinco polyedros regulares convexos; isto é, sem angulos reentrantes: tetraedro (Figs. 248 e 249), hexaedro (cubo) (Figs. 58 e 59), octaedro (Figs. 250 e 251), dodecaedro (Figs. 252 e 253), icosaedro (Figs. 254 e 255).

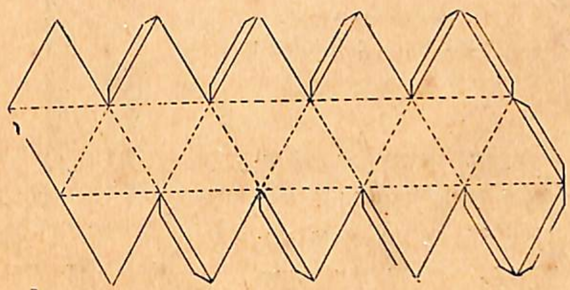

Fig. 255

Os mineraes são ás vezes achados em fórma de polyedros, por ex.: o sal gemma e a pyrite de ferro, em cubo; o magnetito (iman natural), em octaedro; a granada e tambem a pyrite, em dodecaedro. Todos estes mineraes se encontram no Brasil.

70) **Volume de um corpo qualquer** — Para medir o volume de um corpo de fórma qualquer, basta tomar um vaso com agua, mergulhar nella o corpo, marcar o nivel da agua, retirar o corpo e em seguida despejar agua até que o nivel volte á altura em que estava. Como a cada gramma de agua corresponde um cm^3, basta verificar quantas grammas foram despejadas até que o nivel voltasse á altura primitiva, para ficar conhecendo o volume do corpo (Fig. 256).

Se o corpo fôr bastante pequeno para caber no vaso graduado, basta mergulhá-lo neste e verificar quanto subiu o nivel.

Se o volume que se quer medir é a *capacidade* de um corpo vasio, basta enchê-lo d'agua e medir o volume desta.

Esta verificação pode tambem ser feita com areia.

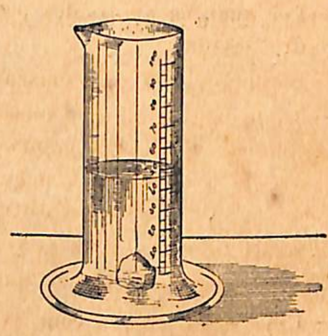

Fig. 256

71) **Relação entre os volumes de corpos semelhantes** — Dous corpos quaesquer, como dous polyedros por ex., pódem ser *semelhantes* se têm a mesma forma e são apenas differentes no tamanho ou volume. Nesse caso todos os angulos correspondentes são eguaes e as faces correspondentes são figuras semelhantes.

Sejam por ex. dous cubos, um de aresta 3 e outro de aresta 6. O volume do primeiro será 27 e o do segundo 216.

A relação das arestas é $\frac{6}{3} = 2$, e a relação dos volumes é $\frac{216}{27} = 8$; isto é:

a relação entre os volumes de dous corpos semelhantes é egual ao cubo da relação entre uma linha de um e a linha correspondente ou homologa do outro.

EXERCICIOS

1 — Qual é o menor numero de faces que póde ter um polyedro ?

2 — Por quantas pyramides póde ser considerado formado um octaedro regular ?

3 — Desenhe e construa em cartão os cinco polyedros regulares.

4 — Tome uma pyramide quadrangular por ex. Quantas faces tem ? Quantos vertices ? Quantas arestas ? Somme o numero de faces com o de vertices. A somma é egual ou maior do que o numero de arestas ? Qual é a differença ?

5 — Repita a observação com um prisma pentagonal por ex. e depois com um polyedro qualquer. Que conclusão se póde tirar ?

6 — Uma caixa cubica com 75 cm. de aresta contem pedra britada. Para enchê-la com agua foi preciso despejar 252 litros de agua. Qual é o volume real de pedra em decimetros cubicos ?

7 — Uma banheira de secção horisontal rectangular tem 2,10 m. de comprimento e 0,90 m. de largura. Uma pessoa mergulhando inteiramente na agua dessa banheira, faz o nivel subir de 0,043 m. Qual é o volume do corpo dessa pessoa ?

CAPITULO XXXIII

CYLINDROS EM GERAL

72) **Cylindro recto e obliquo** — O cylindro que já se conhece é o cylindro de bases circulares, tendo as geratrizes perpendiculares aos planos das bases.

Se as geratrizes não forem perpendiculares ás bases, o cylindro se chama *obliquo*. *Altura* é sempre a medida da perpendicular entre os planos das bases (Fig. 257).

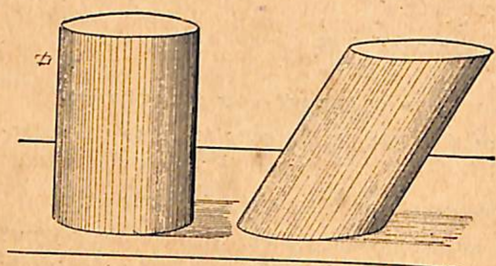

Fig. 257

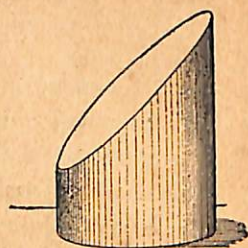

Fig. 258

Cortando um cylindro por um plano obliquo ás bases forma-se o *cylindro truncado* (Fig. 258).

A secção obliqua de um cylindro de revolução é uma ellipse.

73) **Construcção de um cylindro de revolução** — Traça-se um rectangulo cuja base seja o desenvolvimento do circulo da base do cylindro ($2\pi R$) e cuja altura seja a altura do cylindro (a). Esse será o desenvolvimento da super-

ficie lateral. Para completar o desenvolvimento basta traçar dous circulos com raio egual ao da base (Fig. 259).

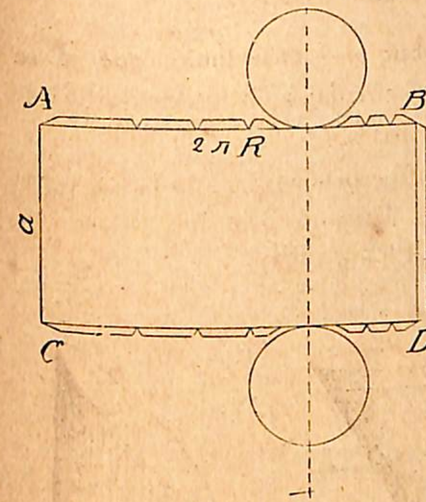

Fig. 259

Póde-se fazer uma construcção aproximada, dividindo o circulo da base em partes eguaes, 24 por ex., e applicando sobre uma recta, 24 vezes a corda correspondente.

74) **Volume** — *O volume do cylindro se obtem, como o do prisma, multiplicando a area da base pela altura.*

$$V = b \times a$$

Sendo a base circular:

$$V = \pi R^2 a$$

EXERCICIOS

1 — Qual é o volume de uma tóra cylindrica de madeira cujo diametro é 40 cm. e cuja altura é 3,50 m. ?

2 — Qual é a altura de um cylindro cujo volume é 1.728 cm³., sendo 15 cm. o raio da base ?

3 — Qual é o raio da base de uma columna cylindrica cujo volume é 0,565 m³ e cuja altura é 4,5 m. ?

4 — Qual é a area lateral de um cylindro de revolução cuja altura é 15 cm. e cuja base tem como raio 6 cm. ?

5 — Sabendo-se que um revestimento a cimento liso custa 5$000 por m², pergunta-se quanto custaria esse serviço em 6 columnas cylindricas de 3,6 m. de altura e 0,30 m. de diametro ?

6 — Qual é a area de panno necessario para formar a parte cylindrica de uma barraca de circo com 3,20 m. de altura e 13 m. de raio ?

7 — Uma bomba tem o corpo cylindrico com o diametro de 0,24 m. e um curso de embolo (altura util do cylindro) de 0,40 m. Ella faz 15 cursos duplos por minuto. Qual é a quantidade de agua em litros que esta bomba fornece em 6 horas de trabalho ?

8 — A columna de mercurio de um barometro accusa uma altura de 758 mm. Sabendo-se que 13,6 g. por cm^3 é o peso especifico do mercurio e que o tubo tem 10 mm. de diametro, pergunta-se: qual é a pressão que essa columna exerce sobre a base ?

9 — Um fio de cobre tem 12 mm. de diametro e 3,5 m. de comprimento. Quanto pesará esse fio, sabendo-se que o seu peso especifico é de 8,8 g. por cm^3 ?

CAPITULO XXXIV

CONES EM GERAL

75) **Cone recto e obliquo** — O cone que já se conhece é o cone de base circular, tendo o eixo perpendicular á base. Esse cone se chama *recto*. Quando o eixo não fôr perpendicular, o cone se chama *obliquo*.

Altura é sempre a medida da perpendicular baixada do vertice sobre o plano da base (Fig. 260).

Cortando o cone por um plano, a parte comprehendida entre a base e a secção chama-se *cone truncado*.

Se a secção é parallela á base, o corpo se chama *tronco de cone* (Fig. 261). E' a fórma commum dos vasos de barro para flôres.

Considerando as geratrizes prolongadas além do vertice, formam-se ao mesmo tempo duas *folhas* do cone.

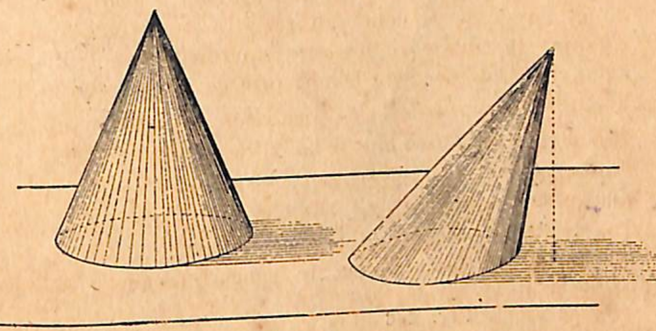

Fig. 260

No cone de revolução a secção parallela ás bases é circular. A secção obliqua, quando corta todas as geratrizes é uma ellipse,

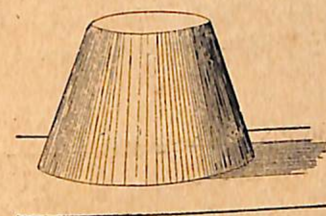

Fig. 261

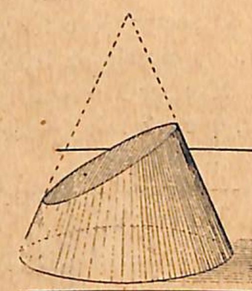

Fig. 262

(Fig. 262) ; quando não corta todas as geratrizes e só corta uma folha, é uma parabola (Fig. 263); quando corta as duas folhas, é uma curva de dous ramos que se chama *hyperbole* (Fig. 264).

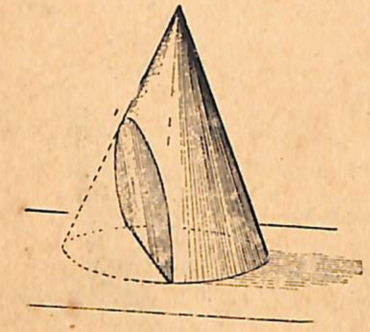

Fig. 263

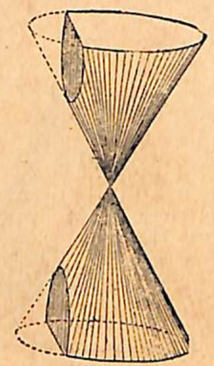

Fig. 264

76) **Construcção do cone de revolução** — A superficie lateral de um cone de revolução, desenvolvida, produz um sector circular.

O raio desse sector é o comprimento da geratriz. Como o arco do sector deve ter um comprimento egual ao desenvolvimento do circulo da base, a relação entre o angulo central n e 360°, deve ser a mesma que existe entre o raio da base e a geratriz, que é o raio do sector:

$$\frac{n}{360} = \frac{BC}{AC}, \text{ donde } n = 360^{\circ} \times \frac{BC}{AC} = 360 \div \frac{AC}{BC}$$

Ex.: $AC = 6$ e $BC = 2$:

$$n = 360 \div 3 = 120^{\circ}$$

O angulo central do sector se calcula, dividindo 360° pela relação entre o comprimento da geratriz ou apothema, e o raio da base (Figs. 265 e 266).

Para completar o desenvolvimento basta traçar um circulo com raio egual ao da base.

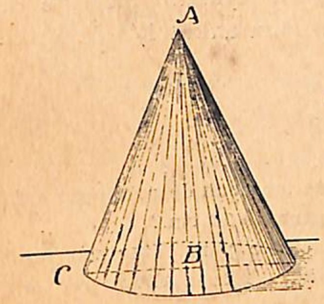

Fig. 265

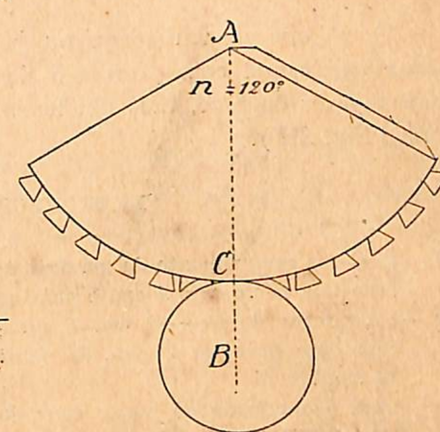

Fig. 266

Póde-se fazer uma construcção aproximada dividindo o circulo em um certo numero de partes eguaes, 24 por ex., e marcando as cordas correspondentes sobre um arco, traçado tendo como raio o comprimento da geratriz.

Fig. 267

77) **Volumes** — *O volume do cone se obtem como o da pyramide, multiplicando a area da base pela altura e dividindo o producto por 3:*

$$V = \frac{b \times a}{3}$$

Sendo a base circular: $V = \frac{\pi R^2 a}{3}$

O volume de um tonnel ou barril pode ser considerado aproximadamente como formado de um cylindro medio e de dous troncos de cone, cada um tendo para altura 1/3 da altura total (Fig. 267).

EXERCICIOS

1 — Qual é o comprimento da geratriz de um cone de revolução cuja base tem como raio 4 cm. e cuja altura é 12 cm.?

2 — Uma folha de 50 × 60 cm. é sufficiente para fazer um funil cuja base deve ter 24 cm. de diametro e cuja altura deve ser 30 cm.?

3 — Qual é o volume do maior cone que póde ser cortado em um bloco cubico de madeira com a aresta de 10 cm.?

4 — Qual é a altura de um cone cujo volume é 24.750 cm^3., tendo o raio da base 18 cm.?

5 — Qual é o raio da base de um cone cujo volume é 19.600 cm^3. e cuja altura é 50 cm.?

6 — Em uma tóra cylindrica de madeira com 60 cm. de altura e 40 de diametro excavou-se um cone com a mesma base e a mesma altura. Qual o volume da parte que ficou?

7 — Qual é o peso de um cone de ferro de 0,20 m. de altura e 0,18 m. de diametro, sendo 7,8 g. o peso especifico do ferro (peso por cm^3)?

8 — Avaliar o volume de um tronco de cone, considerando-o como differença entre dous cones.

9 — Qual o volume de um balde que tem para diametros da boca e do fundo 0,45 m. e 0,22 m., e para altura 0,30 m.?

10 — Qual é o volume aproximado de um barril que tem para diametros dos circulos extremos da parte media 0,58 m., para diametros das cabeças 0,42 m. e para altura total 0,90 m.? Esse volume é maior ou menor do que o verdadeiro?

CAPITULO XXXV

ESPHERA

(COMPLEMENTOS)

78) **Partes da esphera e da superficie espherica** — A parte de superficie limitada por dous semi-circulos maximos chama-se *fuso* (Fig. 268). A parte correspondente da esphera chama-se *cunha* (Fig. 269).

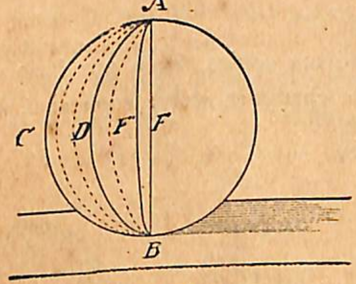

Fig. 268

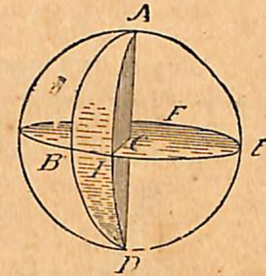

Fig. 269

A Terra faz cada dia um gyro de 360° em 24 horas, defronte do Sol. A cada hora corresponde portanto um fuso de $\frac{360}{24} = 15°$. Cada minuto corresponde a 15' e cada segundo a 15". Desde que dous lugares estejam em meridianos differentes, deviam ter horas differentes, mas para maior facilidade combinou-se que todos os pontos dentro de cada fuso de 15° teriam a mesma hora convencional. O primeiro fuso é contado 7° 30' para cada lado do meridiano de Greenwich na Inglaterra.

Rio de Janeiro e S. Paulo hoje têm a mesma hora; antes dessa convenção a hora de S. Paulo estava sempre atrazada de 13 m. 54 s. em relação á do Rio.

A parte da esphera limitada por dous planos parallelos e por uma zona ou por um plano e uma calotte chama-se *tronco espherico* (Fig. 270).

Fig. 270

A parte da esphera em fórma conica tendo por base uma calotte e para vertice o centro, chama-se *sector espherico*. E' a fórma de um pião (Fig. 271).

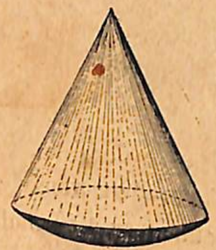

Fig. 271

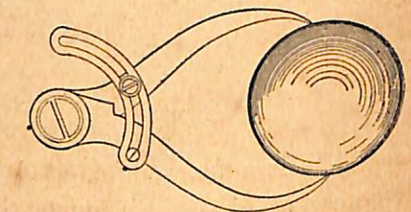

Fig. 273

O diametro da esphera se determina pelo instrumento chamado *compasso espherico* (Fig. 272).

79) **Planos seccantes e tangentes** — A secção feita por um plano na esphera é sempre um circulo. O circulo é pois a unica curva plana que se póde traçar na superficie da esphera.

O plano que corta a esphera é um *plano seccante*. Afastando-se do centro, elle chega a uma posição em que só toca em um ponto da superficie da esphera. Nessa posição elle se chama *plano tangente*.

O plano tangente é perpendicular ou normal ao raio que vae ter ao ponto de tangencia ou de contacto. O plano da mesa é tangente á esphera (Fig. 101).

80) **Volume e area da esphera** — O volume de um sector espherico é, como o de um cone, egual a um terço do producto da area da base pela altura, que é então o raio da esphera de que faz parte o sector.

Considerando a esphera como se fosse composta de sectores esphericos, o seu volume será egual a *um terço do producto da superficie espherica multiplicada pelo raio da esphera.*

$$V = \frac{S \times R}{3}$$

Pode-se determinar experimentalmente esse valor, empregando o processo de immersão que serve para determinar o volume de um corpo qualquer. Pode-se tambem, se se tem meia esphera ou um hemispherio, fazer o seu molde em cêra e enchel-o de agua: o dobro do volume da agua despejada representará o volume da esphera.

Se se calcular esse volume pela formula $V = \frac{4 \pi R^3}{3}$, verifica-se que o valor achado confere com o resultado da experiencia.

Pela formula anterior a esta, se sabe que dividindo o volume por um terço do raio, o quociente representa a superficie da esphera:

$$\frac{V}{R/3} = S \text{ ou } S = \frac{\frac{4\pi R^3}{3}}{R/3} = 4\pi R^2$$

Portanto: *a area da superficie da esphera é egual a quatro vezes a area de um circulo maximo.*

Isso se póde verificar aproximadamente pelo modo indicado na figura: o comprimento do cordel necessario para recobrir a meia esphera, é duas vezes o que é preciso para recobrir um circulo maximo (Fig. 273).

Para ter as expressões em relação ao diametro D, basta substituir nas formulas do volume e da area, R por $\frac{D}{2}$. Os resultados serão:

$$V = \frac{\pi D^3}{6} \quad \text{e} \quad S = \pi D^2$$

A area lateral do cylindro circumscripto á esphera será (Fig. 274) $2\pi R \times 2R = 4\pi R^2$, isto é, a mesma area da esphera. Este facto serve para o traçado de mappas onde os parallelos e meridianos são representados por linhas rectas

(projecção de Mercator). O mappa é traçado como se a superficie da Terra fosse a de um cylindro.

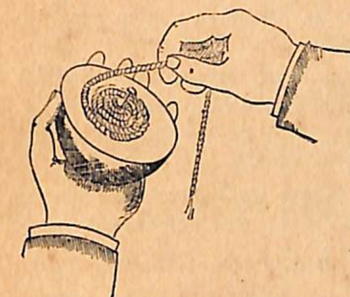

Fig. 273

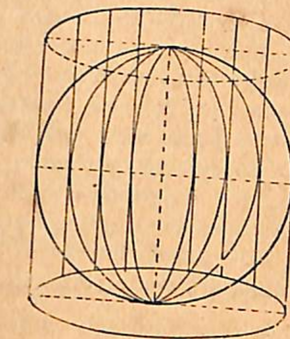

Fig. 274

O volume do cylindro será:

$$V = 2R \times \pi R^2 = 2\pi R^3$$

D'ahi: $\frac{Ve}{Vcy} = \frac{4/3\ R^3}{2 \times R^3} = \frac{2}{3}$, isto é, a esphera occupa $\frac{2}{3}$ do volume do cylindro.

Póde-se verificar isso, enchendo d'agua ou de areia o cylindro, esvasiando-o, pondo dentro a esphera e completando depois com agua ou areia o espaço vasio.

EXERCICIOS

1 — A que fusos horarios deve pertencer o Brasil, desde que o seu ponto mais a leste (Ilha da Trindade) está a 29° 18' 25" e o ponto mais a oeste (Acre) está a 74° 8' 47" do meridiano de Greenwich?

2 — Oito espheras de vidro, tendo 6 cm. de diametro, devem ser postas em uma caixa cubica cuja aresta é 12 cm. Qual é o volume de areia necessario para encher o espaço vasio ?

3 — Um cylindro de chumbo tem 35 mm. de diametro e 14 cm. de altura. Quantas espheras de 1 cm. de diametro pódem ser fundidas com esse material ?

4 — Que area de folha é necessaria para fazer uma caixa cylindrica onde possa caber uma esphera de 25 cm. de diametro ?

5 — Uma esphera de chumbo de 0,48 m. de diametro pesa 660.128 g. Qual é o peso do cm³. de chumbo ?

6 — Uma caldeira cylindrica terminada por dous hemispherios tem um diametro interno de 5 pés (ft) e um comprimento de 12 ft. Qual é a sua capacidade em litros ?

III PARTE

CAPITULO XXXVI

ANGULO INSCRIPTO

Calculo do numero de diagonaes

81) Medida do angulo inscripto — O angulo que tem o vertice sobre o circulo e cujos lados são cordas chama-se *inscripto.*

Medindo esse angulo ACB e o angulo AOB que tem o mesmo arco, é facil verificar que a *medida do angulo inscripto é metade do arco comprehendido entre seus lados* (Fig. 275).

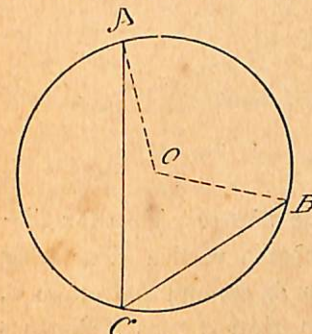

Fig. 275

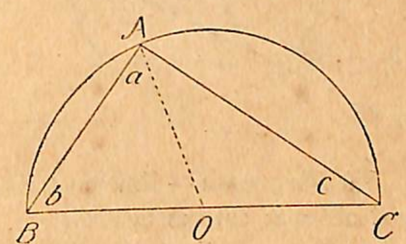

Fig. 276

Portanto: *o angulo inscripto que tem os lados passando pelas extremidades de um diametro, ou inscripto em um semicirculo, é sempre recto* (Fig. 276).

Todos os angulos inscriptos no mesmo segmento serão eguaes. O arco correspondente é o logar geometrico dos pontos de onde a corda é vista segundo um determinado angulo.

82) **Tangentes a um circulo por um ponto exterior** — Liga-se P a O e sobre PO como diametro traça-se um circulo. Os pontos A e B são os pontos de tangencia procurados que devem ser ligados a P (Fig. 277).

Quando dous alinhamentos rectos de estrada de ferro são ligados por um arco de circulo, tangente a ambos, os dous pontos de tangencia são equidistantes do ponto de encontro das duas tangentes (Fig. 136).

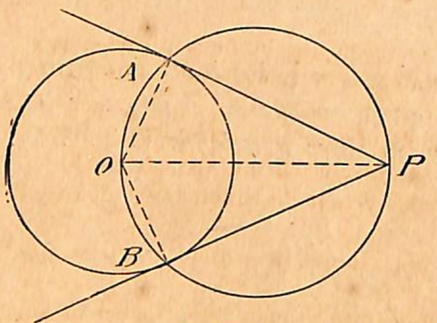

Fig. 277

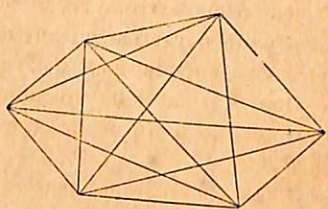

Fig. 278

83) **Diagonaes** — Em um triangulo não se póde tirar diagonal alguma: em um quadrilatero, de cada vertice só se póde tirar uma diagonal, em um pentagono 2, em um hexagono 3, etc., isto é, de cada vertice se pódem tirar tantas diagonaes quantos são os lados menos 3.

Se os lados são n, o numero de diagonaes será n — 3 de cada vertice; logo, de todos os vertices, o numero será n (n — 3). Mas sendo assim, cada diagonal será contada duas vezes, de

modo que o calculo exacto é $\frac{n(n-3)}{2}$.

Ex.: $n = 6; \frac{6 \times (6-3)}{2} = 9$ (Fig. 278).

EXERCICIOS

1 — Trace um circulo e um diametro. Tome um ponto sobre o circulo e ligue ás duas extremidades do diametro.
Meça com o transferidor o angulo das duas cordas. Repita a construcção tomando outros pontos sobre o circulo.
Que se conclue ?

2 — Tomando um ponto no meio da hypothenusa de um triangulo e traçando um circulo cujo raio seja metade da hypothenusa, por onde passa esse circulo?

3 — Se se collocar um esquadro de modo que os dous cathetos passem pelas extremidades do diametro de um circulo, onde ficará situado o vertice do angulo recto ?

4 — Como se póde, com um esquadro, traçar um circulo ?

5 — Qual é o valor de um angulo inscripto em um arco de 27° ?

6 — Qual é o ponto de um triangulo rectangulo equidistante dos tres vertices ?

7 — Trace as duas tangentes a um circulo, formando entre si um angulo de 60°.

8 — Que são entre si as duas tangentes tiradas pelos extremos do mesmo diametro ?

9 — Quantas diagonaes se pódem traçar em um polygono de 7 lados ?

CAPITULO XXXVII

POLYGONOS REGULARES

(COMPLEMENTOS)

84) **Angulo interno** — Ligando um ponto interior de um polygono convexo a todos os vertices, elle fica dividido em tan-

tos triangulos quantos forem os seus lados. Multiplicando esse numero por 180° e do producto subtrahindo 360°, tem-se a somma dos angulos internos.

Se n, é o numero de lados, a somma I dos angulos internos será: $I = 180 \times n - 360$.

Em um polygono convexo, cada angulo interno é supplemento de um angulo *externo* adjacente. A somma de todos elles é pois: $I + E = 180 \times n$. Sendo a somma I dos internos $180 \times n - 360$, segue-se que a somma E dos externos é 360° (Fig. 279).

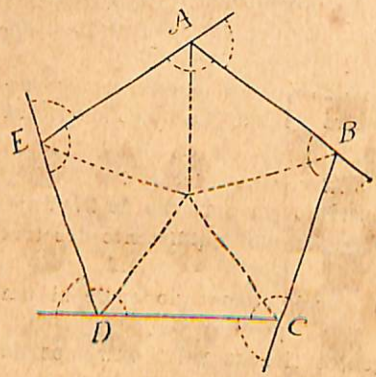

Fig. 279

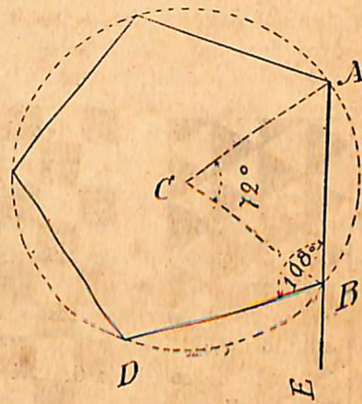

Fig. 280

Desde que o polygono é regular, todos os angulos internos serão eguaes; cada um delles (i) é pois egual a $\frac{180 \times n - 360}{n}$.

Ex.: pentagono; n = 5 (Fig. 280):

$$i = \frac{5 \times 180 - 360}{5} = 108^\circ$$

Esse angulo é supplemento do central: $(108 + 72 = 180^\circ)$ o qual é, portanto, egual ao externo DBE, que tambem é supplemento do interno.

Quando o numero de lados do polygono augmenta, o angulo central vae diminuindo e o interno augmentando.

85) **Ladrilhos** — Se se quizer empregar para revestir uma parede ou chão, ladrilhos polygonaes eguaes, só podem servir os polygonos regulares cujo angulo interno seja divisor de 360°, isto é, o triangulo equilatero (ang. int. 60°), o quadrado (ang. int. 90°) e o hexagono regular (ang. int. 120°) (Figs. 281, 282 e 283).

Fig. 281

Fig. 282

Fig. 283

As casas de marimbondos e de abelhas são formadas de alveolos com a forma de prismas de base hexagonal regular.

86) **Polygonos estrellados** — Seja um circulo dividido em um certo numero de partes eguaes, 5 por ex. Ligando

os pontos de divisão de 2 em 2, obtem-se uma figura que se chama *pentagono estrellado* (Fig. 284).

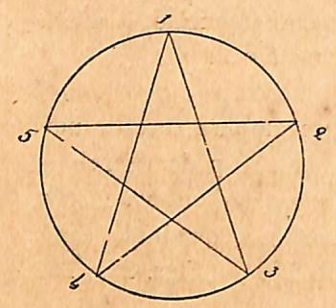

Fig. 284

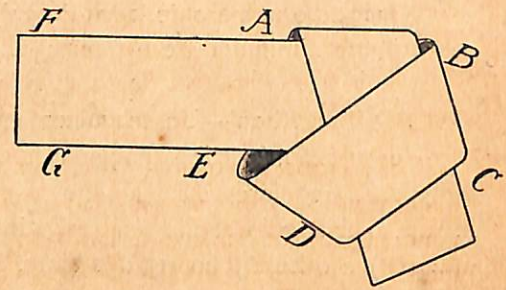

Fig. 285

Se o numero de partes fôr por ex. 6 e se se ligar de 2 em 2, formar-se-ão 2 triangulos que constituirão um falso hexagono

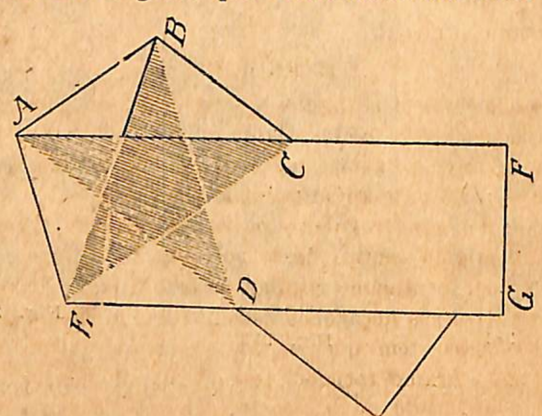

Fig. 286

estrellado, porque nelle não se póde, partindo de um vertice, voltar ao mesmo, seguindo o perimetro (Fig. 174).

Para formar polygonos estrellados é necessario que o numero de partes em que se dividiu o circulo não seja divisivel pelo numero de partes que são ligadas de cada vez, nem tenha com este, divisor algum commum, isto é, é preciso que esses dous numeros sejam *primos entre si*. Ex.: 5 e 2.

Dobrando uma tira de papel como mostra a figura póde-se ver por transparencia um pentagono estrellado (Figs. 285 e 286).

87) **Isoperimetros** — Dado um polygono regular, se se quebrarem ao meio os seus lados, póde formar-se outro polygono regular de numero de lados duplo, que terá o mesmo perimetro do primeiro. Póde passar-se assim do triangulo para o hexagono, para o dodecagono, etc., sempre com polygonos *isoperimetros*, istò é, de perimetro egual. A area desses polygonos vae ficando cada vez maior.

Com o mesmo perimetro, a figura de maior area que se póde formar é o circulo.

EXERCICIOS

1 — Qual é a somma dos angulos internos de um octogono ?
2 — Qual é o valor do angulo interno de um dodecagono regular ?
3 — Qual é o unico polygono regular cujo angulo interno é agudo ?
4 — Qual é o unico cujo angulo central é obtuso ?
5 — Qual é o polygono regular cujo angulo interno é recto ?
6 — Qual é o angulo central desse polygono ?
7 — Construa um pentagono regular de lado 3 cm.
8 — Trace os diversos decagonos estrellados que se pódem construir.
9 — Um fazendeiro tem que cercar um terreno com 8 alqueires, empregando arame farpado. Que fórma de figura deve elle escolher, o quadrado ou o circulo, para que a cerca seja a mais curta possivel ? Se a cerca deve ser de 3 fios de arame, e se cada 10 m. de comprimento de fio pesam 1 kg., qual é o peso de arame necessario, se o terreno fôr quadrado? Qual é o peso, se fôr circular?

CAPITULO XXXVIII

LINHAS PROPORCIONAES

88) **Rasão e proporção** — Quando se consideram duas figuras semelhantes, tomando duas linhas da primeira *A* e *B* e as duas correspondentes da segunda, *a* e *b*, a *rasão* ou relação entre *A* e *a*, é a mesma que existe entre *B* e *b*.

Se por ex.: $A = 3a$, ter-se-á $B = 3b$.

Diz-se então que essas 4 linhas (A, B, a e b), formam uma *proporção*, isto é, que *A* está para *a*, assim como *B* está para *b*,

e póde-se escrever: $\frac{A}{a} = \frac{B}{b}$ (Fig. 287).

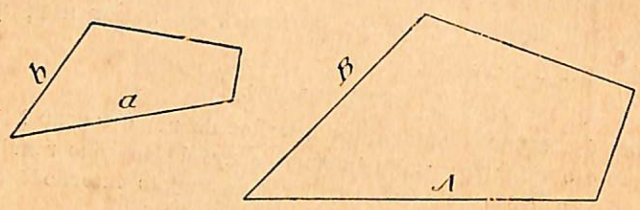

Fig. 287

Ex.: $A = 12$ mm., $a = 4$ mm., $B = 21$ m., $b = 7$ mm.:

$\frac{12}{4} = \frac{21}{7}$; a rasão é 3.

Observa-se que: $12 \times 7 = 21 \times 4$, isto é, *o producto dos dous extremos é egual ao dos dous meios*. Tambem se póde

escrever: $\frac{12}{21} = \frac{4}{7}$, porque ainda: $12 \times 7 = 21 \times 4$.

Qualquer termo, como *x*, por ex., collocado como extremo chama-se uma *quarta proporcional*.

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{x},\ A \times x = B \times a,\ \text{donde}\ x = \frac{B \times a}{A}$$

Pode-se determinar a altura de uma torre, de um mastro, ou de uma arvore por meio dos triangulos semelhantes, empregando o processo da sombra (Fig. 288).

Fig. 288

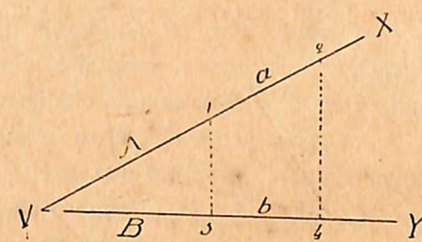

Fig. 289

A altura *a* da estaca é conhecida. Medem-se as sombras B e b e tem-se a relação:

$$\frac{a}{b} = \frac{A}{B}$$

o que indica que se deve multiplicar a sombra B pela relação $\frac{a}{b}$, para ter A:

$$A = B \times \frac{a}{b}$$

Para achar o valor do 4.º termo de uma proporção, faz-se a construcção indicada na figura 289. Traçam-se duas rectas quaesquer X e Y, formando um angulo. Sobre X, a partir de V, marcam-se A e a e sobre Y marca-se B. Liga-se 1 com 3 e por 2 tira-se uma parallela á recta 1 — 3. A distancia 3 — 4 representa b ou x.

Quando uma recta é parallela á base de um triangulo e situada a meia altura, é egual á metade da base; em um trapezio ella é egual á semi-somma das bases (Fig. 161).

A construcção acima serve para dividir uma recta em qualquer numero de partes que estejam entre si numa certa relação, por ex.: 1 : 3 : 5 (1 para 3 para 5).

Seja EF a recta dada. Por E tira-se uma segunda recta qualquer, EL, e a partir de E marca-se sobre essa recta um comprimento qualquer, depois 3 vezes, depois 5 vezes esse comprimento. Liga-se o ponto G ao ponto F e pelos outros pontos de divisão tiram-se parallelas a GF. A recta EF fica dividida pelos pontos M e N na relação que se queria (Fig. 290).

Para dividir uma recta em partes eguaes faz-se a mesma construcção, marcando sobre EL comprimentos eguaes.

Póde acontecer que em uma proporção os dous meios sejam eguaes, e que se queira achar o valor desses meios, conhecendo

os extremos. Esse termo desconhecido chama-se então *meia proporcional.*

$$\frac{A}{x} = \frac{x}{b};\ x^2 = A \times b$$

Sobre uma recta marcam-se os dous comprimentos A e b. Traça-se um semi-circulo tendo EF como diametro. Por G levanta-se uma perpendicular GH. Essa recta é o valor de x, meia proporcional.

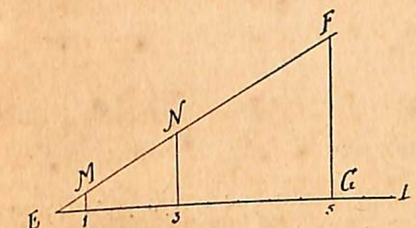

Fig. 290

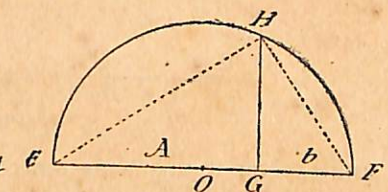

Fig. 291

Para provar isso basta ligar H a E e a F e comparar os triangulos semelhantes EGH e FGH (Fig. 291).

89) **Triangulos semelhantes** — Todas as figuras semelhantes têm os lados correspondentes proporcionaes e os angulos correspondentes eguaes.

Dous polygonos regulares de egual numero de lados são sempre semelhantes.

Quando se trata de triangulos, para saber se são semelhantes basta que se verifique se estão em um dos casos seguintes:

a) dous angulos de um são respectivamente eguaes a dous do outro;

b) os tres lados de um são proporcionaes aos tres do outro.

c) dous lados de um são proporcionaes a dous lados do outro e o angulo por elles formado, no primeiro, é egual ao angulo correspondente no segundo (Fig. 292).

$$A = A'; \; B = B'; \; C = C' \qquad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Ha um instrumento chamado *compasso de reducção* que, baseando-se nas propriedades dos triangulos semelhantes, per-

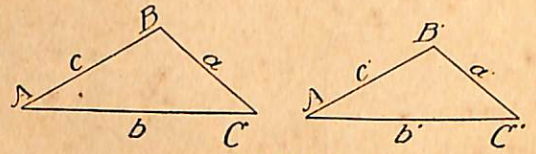

Fig. 292

mitte obter rapidamente um comprimento que esteja para outro em uma relação determinada (Fig. 293).

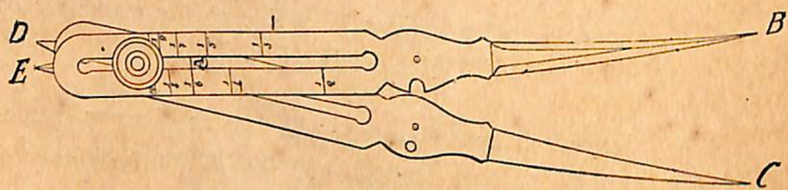

Fig. 293

Ajusta-se o parafuso junto da fracção escolhida, 1/6 por ex. Então a distancia DE será 1/6 de BC.

90) **Centro de homothetia** — Seja uma figura, ABC, a que se quer construir uma semelhante. Marca-se um ponto qual-

quer P, dentro ou fóra da figura e liga-se-o aos vertices ou pontos principaes do contorno. Tomam-se depois por ex. os

comprimentos $Pa = \frac{1}{2} PA$; $Pb = \frac{1}{2} PB$ e $Pc = \frac{1}{2} PC$.

Ligando *a, b* e *c* entre si, tem-se uma segunda figura semelhante á primeira e em situação parallela (homothetica). P é o *centro de homothetia,* quer esteja dentro, quer fóra da figura.

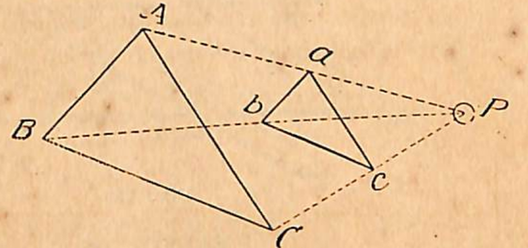

Fig. 294

A fracção que se tiver escolhido dá a *escala* de uma figura em relação á outra. E' a *relação de hemothetia* (Figs. 294 e 295).

Se as duas figuras estão situadas do mesmo lado do centro, a homothetia se diz *directa*, se de lados oppostos, se diz *inversa*.

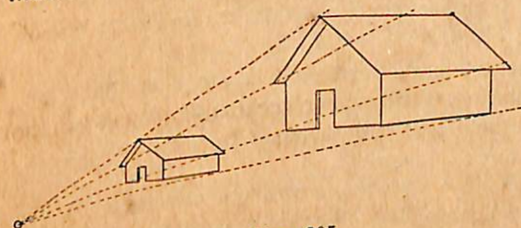

Fig. 295

O instrumento de desenho que serve para ampliação e reducção de figuras chama-se *pantographo*. (Figura 296.)

Emquanto a ponta m do estylete acompanha o contorno de uma figura, a ponta m' do lapis traça o de outra figura semelhante, ampliada na proporção de PO : P'O.

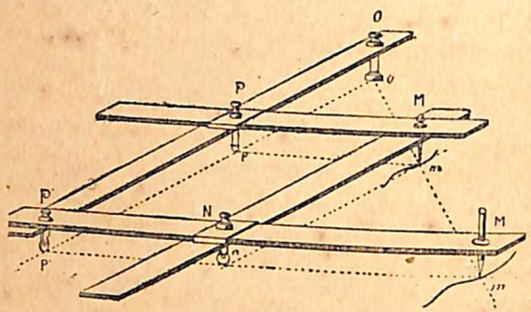

Fig. 296

EXERCICIOS

1 — Qual é a altura de um mastro cuja sombra tem 8 m., á mesma hora em que uma estaca de 2 m. tem 3 m. ?

2 — Dividir uma recta de 12 cm. em 3 partes, proporcionaes a 1, 2, 3.

3 — Como se póde resolver geometricamente o problema seguinte: se 3 m. de uma fazenda custam 12$, quanto custam 5 m.?

4 — Em um triangulo qualquer traça-se uma recta parallela á base. Que relação tem com o triangulo dado, o triangulo menor que fica formado?

5 — Os lados de um triangulo são 4, 7 e 9 cm. Em um triangulo semelhante, o lado correspondente a 4 é 12. Quaes são os outros dous lados ?

6 — Os cathetos de um triangulo rectangulo são 6 e 8. Um triangulo semelhante tem o catheto menor egual a 30. Quaes são os valores do outro catheto e da hypothenusa? Qual é a relação dos perimetros desses dous triangulos?

7 — Como se póde calcular a distancia entre um observador e um objecto, collocando deante dos olhos, a uma distancia conveniente, um lapis de comprimento conhecido, de fórma que elle encubra um certo comprimento, tambem conhecido, sobre o objecto ?

8 — Qual é a meia proporcional entre 4 e 9 ?

9 — Dado um rectangulo, achar o lado do quadrado equivalente ($x^2 = a \times b$).

10 — Dado um triangulo achar o lado do quadrado equivalente: $\left(x^2 = \frac{a}{2} \times b.\right)$

11 — Dada uma figura qualquer, ampliá-la na proporção de 1 : 3 pelo processo do centro de homothetia marcado no interior.

12 — Quando duas figuras têm homothetia inversa com a relação de 1, o que são ellas entre si, relativamente ao centro de homothetia ?

CAPITULO XXXIX

AGRIMENSURA

(NOÇÕES)

91) **Medida de angulos no terreno** — Para medir angulos, quando se trata de pequenos trabalhos sem muito rigor, póde-se, em vez de empregar os instrumentos chamados *transito* e *theodolito,* fazer uso do que se chama *prancheta* e que é muito usado em agrimensura, que é a arte de medir terrenos.

A prancheta é posta sobre um tripé, nivelado com um nivel de bolha. O fio de prumo marca no chão o ponto que deve servir de vertice. Crava-se um alfinete grande no ponto *a* e visa-se por traz delle para a balisa B. Crava-se um segundo alfinete em *b* e com uma regua traça-se *a b.* Visa-se depois de *a* para a balisa C e traça-se *a c.* Fica desenhado o angulo *bac,* que é o angulo BAC *reduzido ao horizonte* (Fig. 297).

Se se quer medir o angulo, basta desenhar na prancheta um circulo com o centro em *a*, graduá-lo de 0 a 360°. Quando estiverem cravados os dous alfinetes em *b* e *c*, o angulo *bac* estará medido.

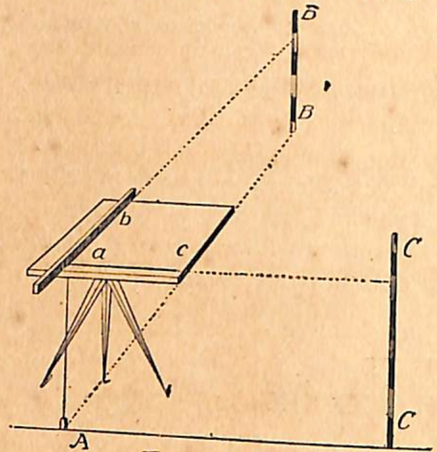

Fig. 297

Se não se dispõe da prancheta, pode-se substitui-la, desenhando em cartão um circulo graduado, em cujo centro se tenha fixado por meio de um alfinete uma peça movel (alidade) tendo nos extremos outro alfinete e uma janella. No diametro 0 — 180° se collocam tambem um alfinete e uma janella (Fig. 298).

O instrumento póderá ser collado no centro, a uma haste de madeira para ser segura na mão. Visa-se primeiro na direcção AB com o diametro 0 — 180° e depois na direcção AC, medindo-se o angulo BAC.

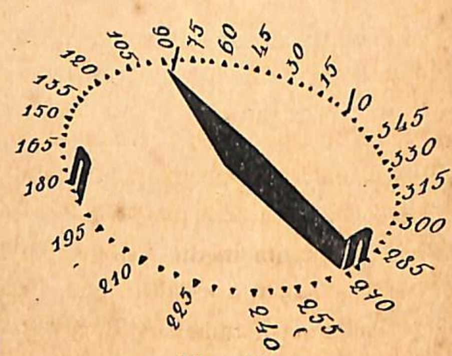

Fig. 298

Para medir um angulo vertical, ou o angulo horizontal que representa a *reducção ao horizonte* do angulo de dous alinhamentos, muito inclinados, emprega-se uma luneta com circulos vertical e horizontal.

92) **Problemas de medida indirecta** — Sabendo medir angulos e distancias, póde-se construir uma figura semelhante á do terreno, isto é, uma *planta*. Por meio dessa planta se pódem determinar distancias que ás vezes, por varios motivos, não é possivel medir directamente.

Exemplos:

1 — Medir a distancia AB, quando só são accessiveis os pontos A e B (Fig. 299).

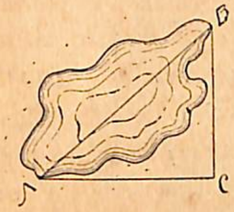

Fig. 299

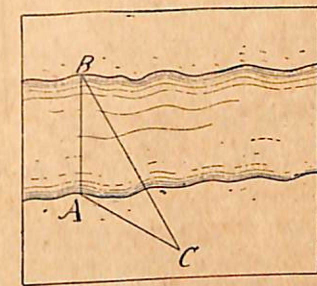

Fig. 300

Escolhe-se um ponto C de onde se avistem A e B. Obtem-se, com a prancheta por ex. o angulo ACB. Medem-se os lados CA e CB e desenha-se a planta a b c na escala conveniente.

Basta na planta medir *a b* e calcular o valor verdadeiro de AB, de accordo com a escala.

2 — Medir a distancia A B, quando só um dos extremos é accessivel (Fig. 300).

Escolhe-se um ponto C de onde se avistem A e B. Mede-se AC e os dous angulos BAC e ACB. Traça-se no papel, na escala escolhida, o triangulo *a b c;* nelle mede-se a distancia ab e por meio della se calcula A B.

3 — Medir um comprimento totalmente inaccessivel.

Escolhem-se dous pontos C e D, de onde se avistem A e B.

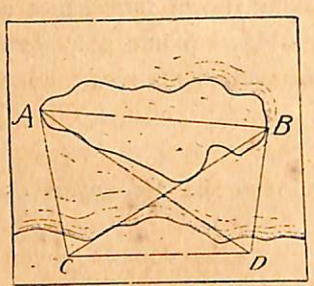

Fig. 301

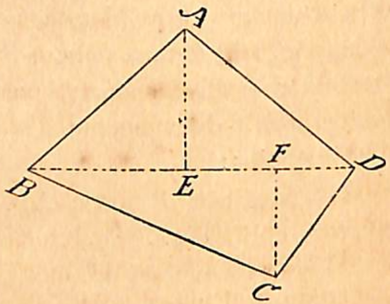

Fig. 302

Mede-se C D (base) e depois os angulos ACD, BCD, ADC e BDC. Assim se poderá fazer o desenho abcd, em escala; nesse desenho se medirá ab, calculando-se em seguida AB (Fig. 301).

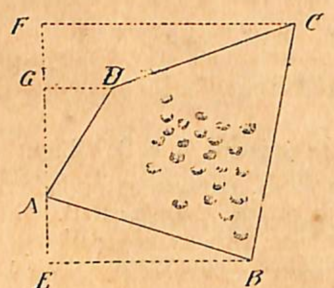

Fig. 303

4 — Medir a area de um terreno ABCD.

Traça-se no terreno, por meio de balisas a diagonal BD. Mede-se essa diagonal. Medindo tambem os angulos em B e D em cada um dos dous triangulos formados, póde-se traçar a planta e calcular a area respectiva. Multiplicando depois essa area pelo quadrado da escala invertida, encontra-se a area verdadeira (Fig. 302).

5 — Desenhar a planta de um terreno (Fig. 303).

Se o terreno não permitte que nelle se tracem as diagonaes, póde-se fazer do modo seguinte o *levantamento:*

Por um vertice A, no terreno, traça-se um alinhamento recto, empregando as balisas. Com auxilio do instrumento chamado *esquadro de agrimensor* (Fig. 114), baixam-se no terreno as perpendiculares dos outros vertices, sobre esse alinhamento. Medem-se depois as distancias AE, AF e AG e as perpendiculares BE, CF e DG. Traça-se depois uma recta no papel, marcam-se os pontos *a, e, f* e *g* e levantam-se as perpendiculares, com os comprimentos eb, fc e gd; tudo de accordo com a escala.

Traça-se então o polygono *abcd,* que representa a planta do terreno. Calcula-se a area desse polygono e por meio della a do terreno.

EXERCICIOS

1 — Para medir a distancia entre dous pontos C e D collocados no mar, mediu-se em terra uma base AB de 300 m. e de cada extremo A e B dessa base mediram-se os angulos de seu alinhamento com as direcções para C e D. Acharam-se os valores seguintes:
Em A: BAC=40° e BAD=250°; em B: ABC=30° e ABD=67°.
Qual é o comprimento de CD?

2 — Precisa-se conhecer a area de uma varzea alagada destinada a plantação de arroz. Como se deve fazer para determinar essa area, suppondo que é possivel percorrer o terreno em volta?

3 — Para achar a altura CD de uma montanha mediu-se na planicie proxima uma base AB = 850 m., e com auxilio de uma luneta com circulos horizontal e vertical, mediram-se os angulos horizontaes BAD = 58° 30' e ABD = 112°; sendo D o pé da vertical do cume. Mediu-se depois o angulo vertical DBC = 11° 30', sendo C o cume. Qual é a altura da montanha?

CAPITULO XL

GRAPHICOS

93) **Construcção** — Supponhamos que se quer estudar a variação da temperatura em um determinado lugar durante as differentes horas do dia. Póde-se organisar uma tabella onde, ao lado da indicação da hora, esteja a da temperatura, mas se se quizer ter uma impressão mais clara do modo de variação, proceda-se da fórma seguinte:

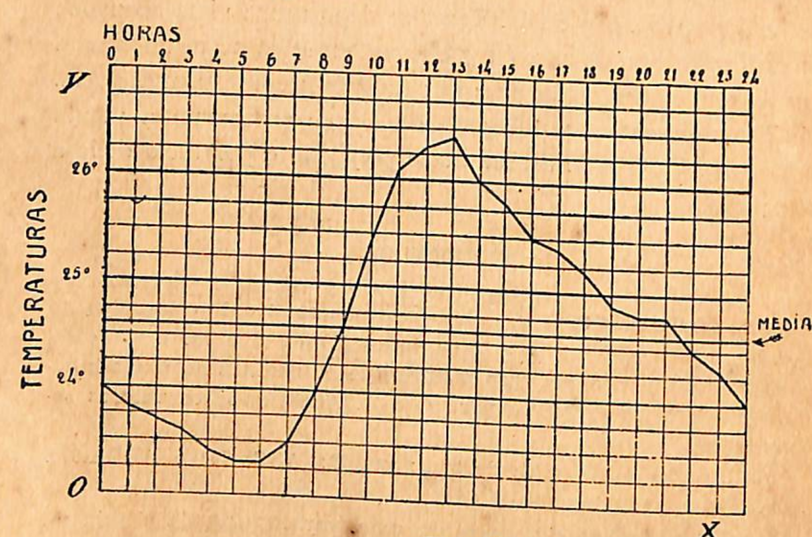

Fig. 304

Em uma folha de papel millimetrado marcam-se em uma linha horizontal 24 pontos, de cm. em cm. por ex. Sobre a vertical de cada um dos pontos marca-se a temperatura correspondente, tomando por ex.: 4 cm. para cada grau de temperatura (Fig. 304).

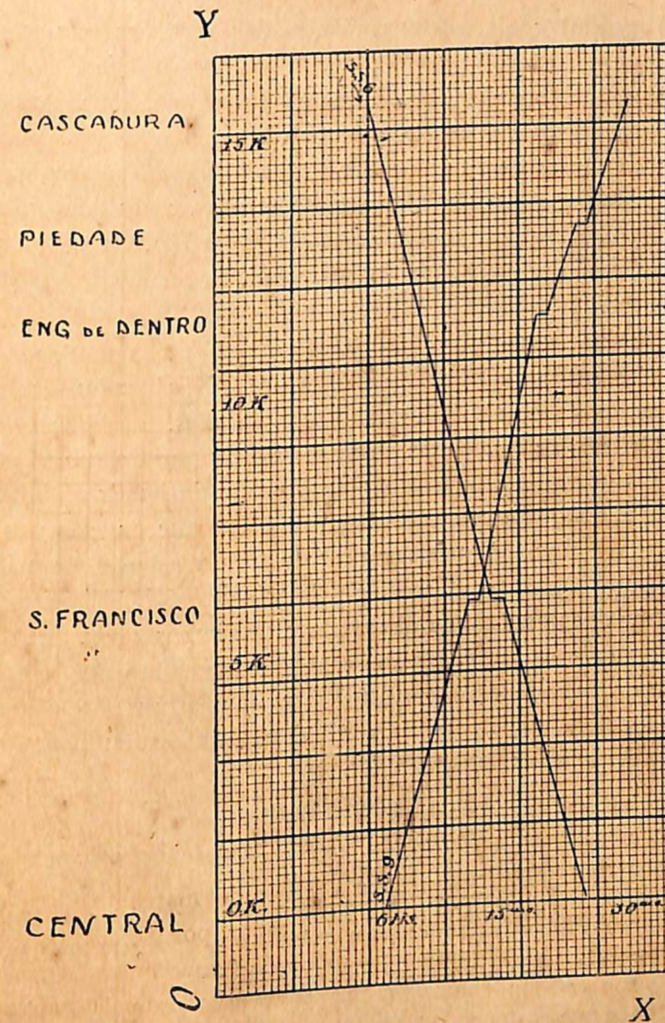

Fig. 305

Ligando depois as extremidades das verticaes tem-se uma linha que se chama o *graphico* de temperatura no dia e no lugar considerados. Sempre que, como no ex. acima, uma grandeza com a temperatura, depende de outra, como o tempo, póde-se construir um graphico que representa a variação do phenomeno.

Quando se quer estudar a temperatura de um doente, ou a pressão barometrica, nas diversas horas do dia, ou o valor do cambio nos diversos dias do mez, por ex., convem construir graphicos.

As duas rectas perpendiculares OX e OY chamam-se *eixos;* O é a *origem* e as distancias a O, sobre OX, chamam-se *abscissas;* as distancias a OX chamam-se *ordenadas.*

Ordenadas e abscissas chamam-se em conjunto *coordenadas.*

Os horarios das estradas de ferro e de bonds estudam-se construindo graphicos do movimento, em que as estações são marcadas sobre OY pelas suas distancias á estação de origem, e as horas são marcadas em abscissas sobre OX. E' necessario escolher duas escalas, de distancias e de tempos (Fig. 305).

Quando se marca sobre um plano um ponto por suas distancias a dous eixos, emprega-se o mesmo processo que quando na superficie da Terra se indica a posição de um ponto pelas suas coordenadas, *latitude* e *longitude.*

EXERCICIOS

1 — Construir um graphico de pressão barometrica durante as 24 horas de um dia.

2 — No graphico de trens representado pela figura, ler a distancia á Central do ponto de cruzamento e a hora em que este se produziu.

3 — Achar em um mappa de São Paulo a posição da Capital, sabendo que as duas coordenadas são 23° 34' de latitude sul e 46° 39' de longitude oeste de Greenwich.

CAPITULO XLI

PERSPECTIVA

94) **Regras praticas** — Para desenhar um cubo como o da figura, começa-se por traçar um quadrado ABCD. Depois tira-se AX formando com AB um angulo *a*, de 30° por ex. Marca-se um comprimento AE egual a $\frac{2}{5}$ de AB, por ex. Traçam-se depois as rectas BF, CG, DH parallelas e eguaes a AE. Ligam-se por fim EFGH (Fig. 306).

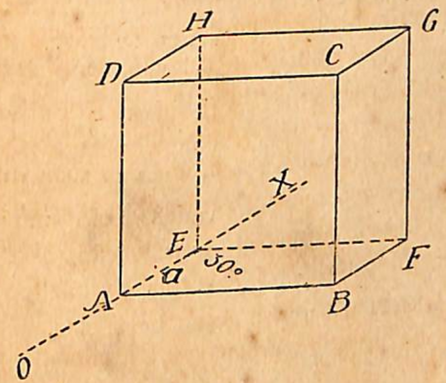

Fig. 306

Esse desenho suppõe que a face ABCD está na folha do papel, e que portanto é de frente. Se o cubo é feito de substancia opaca, as arestas AE, EF, EH são invisiveis.

Este modo de representar por uma figura plana, um objecto que tem tres dimensões, denomina-se *perspectiva parallela.*

O angulo BAE (a) não é obrigatoriamente de 30°. Essa direcção OX em que são representadas as rectas perpendiculares ao desenho chama-se *direcção fugitiva.*

A fracção (m) pela qual se deve multiplicar o verdadeiro valor da aresta AE para obter o seu comprimento no desenho, não é obrigatoriamente $\frac{2}{5}$, póde ser outra. Ella se chama *modulo de reducção.*

Este processo de representação dos corpos não os mostra como realmente elles são vistos por nós, mas de uma maneira aproximada, muito conveniente para os desenhos technicos, em que, embora se tenha tambem em vista dar ao desenho um aspecto agradavel, mais importante é a facilidade do traçado.

Na perspectiva parallela: 1 — todas as linhas de frente (parallelas ao plano do desenho) se apresentam em verdadeira grandeza; 2 — todas as linhas perpendiculares ao plano do desenho se apresentam parallelas á direcção fugitiva e os seus comprimentos são os verdadeiros multiplicados pelo modulo de reducção; 3—duas rectas parallelas, em qualquer direcção, se apresentam sempre como parallelas.

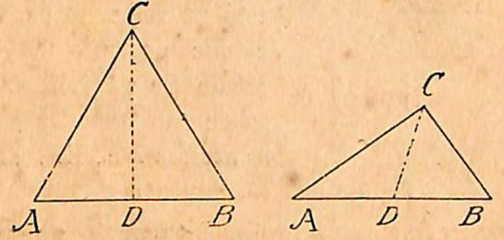

Fig. 307

Para pôr em perspectiva parallela uma figura qualquer, como um triangulo, por ex., colloca-se um lado de frente, em verdadeira grandeza, e tendo baixado dos outros pontos principaes (no caso do triangulo, do vertice opposto ao lado escolhido) uma perpendicular, põe-se esta em perspectiva na direcção fugitiva e com um comprimento determinado pelo modulo da reducção.

Com qualquer outro polygono ou curva se procede de modo identico (Fig. 307).

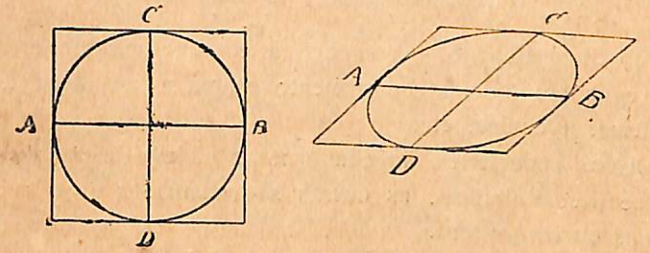

Fig. 308

Com o circulo convem primeiro circumscrever um quadrilatero, pôr este em perspectiva e dentro delle traçar a perspectiva do circulo (Fig. 308).

EXERCICIOS

1 — Ponha em perspectiva parallela um parallelipipedo de base quadrada, de 3 cm. × 3 cm. e altura 9 cm. (a = 40°, m = 1/2).

2 — Ponha em perspectiva parallela um prisma recto de base hexagonal regular, de lado 4 cm. e altura 7 cm. (a = 35°, m = 1/3).

3 — Ponha em perspectiva parallela uma pyramide recta tendo para base um triangulo equilatero de lado 4 cm. e altura 8 cm. (a = 45°, m = 1/2).

4 — Ponha em perspectiva parallela um cylindro de revolução de raio 3 cm. e altura 8 cm., circumscrevendo antes a base por um quadrado (a = 35°, m = 1/3).

5 — Idem um cone de revolução do mesmo raio e da mesma altura.

CAPITULO XLII

SUPERFICIES EM GERAL

95) **Classificação** — A superficie em que se póde encostar uma regua em todo o comprimento chama-se *rectilinea*. E.: a cylindrica, a conica, etc.

Dessas superficies, aquellas que se pódem desenrolar chamam-se *desenvolviveis*; as outras são chamadas *reversas*, *enviezadas* ou *empenadas*.

A cylindrica e a conica são desenvolviveis.

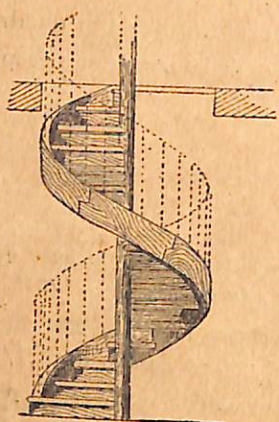

Fig. 309

Fig. 310

Fig. 311

São reversas: a superficie formada pelas arestas dos degraus de uma escada de caracol (Fig. 309), a superficie do filete de um parafuso (Fig. 212).

As superficies formadas pela rotação de uma linha em torno de um eixo chamam-se de *revolução*. Ex.: a superficie da esphera, a do cylindro, a do cone, a do ellipsoide, a do tóro, etc. (Figs. 310 e 311).

Fig. 312

As superficies geradas pelo movimento de um circulo cujo centro percorre uma linha e cujo plano é normal a essa linha chamam-se *canaes*. Ex.: a cylindrica, a do tóro, a da *serpentina* (Fig. 312).

Superficies......	Rectilineas......	Desenvolviveis
		Reversas
	Curvilineas......	De revolução
		Canaes, etc.

BIBLIOGRAPHIA

De Comberousse — Géométrie élémentaire.
Laisant — Initiation mathématique.
Carlo Bourlet — Cours abrégé de Géométrie.
Ch. Meray — Nouveaux Eléments de Géométrie.
Philips & Fisher — Elements of Geometry.
W. Campbell — Observational Geometry.
Wentworth and Hill — First Steps in Geometry.
W. G. Dobbs — School Course in Geometry.
L. Delaistre — Cours Complet de Dessin Linéaire.
Olavo Freire — Noções de Geometria Pratica.
Ed. Gabriel — Eléments de Topographie.
F. I. C. — Agrimensura.
Tom Tit — La sciense amusante.
Clairant — Eléments de Géométrie.
F. T. D. — Geometria elementar.
J. Palau-Vera — Geometria.

LEITE RIBEIRO

RIO DE JANEIRO