Dr. J. TH. DE SOUZA LOBO
PROFESSOR

SEGUNDA
ARITHMETICA

VIGESIMA QUINTA EDIÇÃO

1926
Edição da Livraria do Globo — Barcellos, Bertaso & C.
Matriz: PORTO ALEGRE
Filiaes: Santa Maria e Pelotas

Lauro

SEGUNDA ARITHMETICA

COMPILADA PELO PROFESSOR
J. TH. DE SOUZA LOBO

OBRA ADOPTADA NAS ESCOLAS PUBLICAS
DO RIO GRANDE DO SUL
E EM QUASI TODOS OS COLLEGIOS PARTICULARES
DO MESMO ESTADO

VIGESIMA-QUINTA EDIÇÃO

EDITORES:
BARCELLOS BERTASO & C.ª — LIVRARIA DO GLOBO
PORTO ALEGRE
Filiaes: SANTA MARIA e PELOTAS

Cada exemplar desta *Segunda Arithmetica* será assignado pela filha do auctor.

Nº 2208

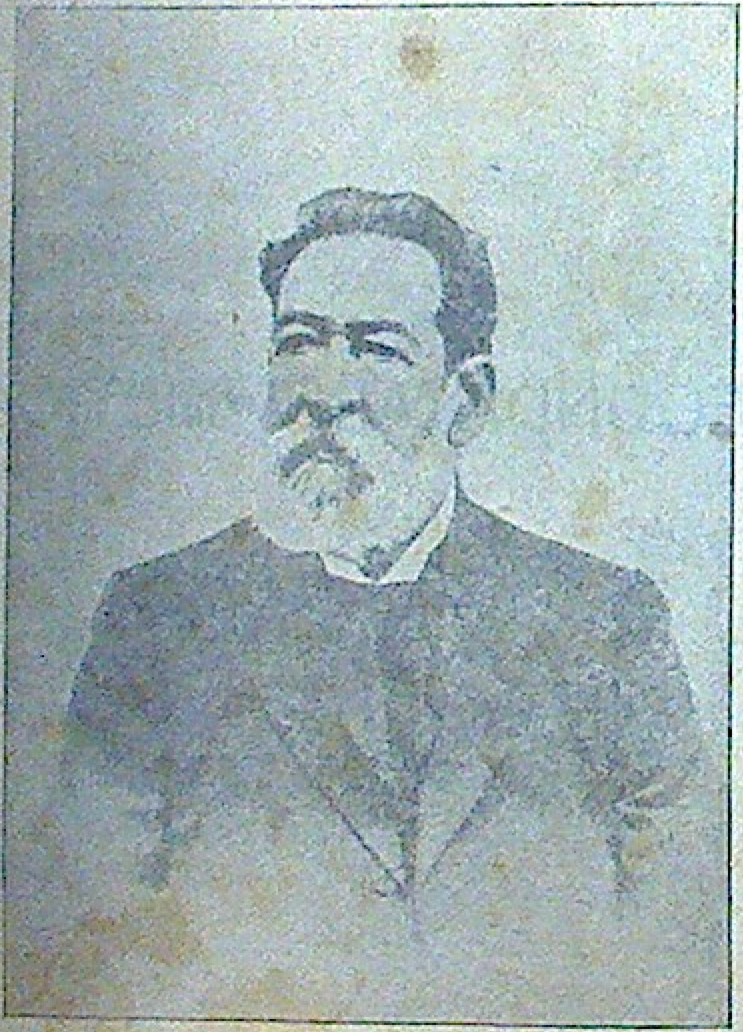
Marietta Lobo

Lauro Montenegro

Flavio Montenegro

Flavio Montenegro

SEGUNDA ARITHMETICA



Dr. José Theodoro de Souza Lobo

Nascido a 7 de Janeiro de 1846
Fallecido a 9 de Agosto de 1913

Pareceres

O Dr. Antonio Carlos Ennes Bandeira

1870

Pede-me V. S. para eu dar o meu parecer sobre a 2ª edição de sua *Arithmetica*, destinada ao ensino primario. L o seu compendio com o cuidado e interesse que me merecem os seus trabalhos pelo justo apreço e elevada consideração que tributo á sua esclarecida intelligencia.

Um compendio util é aquelle que, pela simplicidade do methodo, pela clareza da exposição e correcção do estylo, procura tornar accessiveis a qualquer intelligencia as sãs doutrinas que o constituem, despertando ao mesmo tempo no espirito da mocidade o gosto ao estudo. O amor ou aversão ao cultivo de uma sciencia não poucas vezes depende do attractivo ou da repulsão que produzem no animo juvenil do estudante as primeiras lições do professor. Quem escreve para creanças, necessita, pois, fazel-o de modo que, instruindo, tambem saiba agradar.

O livro que nos apresenta V. S., satisfaz de uma maneira completa a todas essas exigencias do ensino. Não conheço nenhum outro compendio elementar, destinado ao curso primario, que melhor preencha o fim que teve em vista V. S.

A ordem e naturalidade em que se acham expostas e explicadas as materias que compõem o seu compendio, a precisão, a escolha e a exactidão das definições e das regras, são de um incontestavel merecimento, e o tornam extremamente proficuo ao uso das nossas escolas primarias.

Em seu livro tudo é recommendavel: desde a lucidez da exposição até o rigor da dicção. Bem poucas obras didacticas satisfarão tão plenamente as necessidades do ensino.

Si alguma cousa contém a sua *Arithmetica*, que, á primeira vista, pareça superflua, como a theoria das equidifferenças, deve-se attender que a isso foi V. S. obrigado, por ter de cingir-se aos programmas e regulamentos geralmente seguidos pelos conselhos de instrucção.

Quanto a mim, fez V. S. bem conservando ainda em seu compendio a theoria dos numeros complexos, porque só poderá ella com razão, ser excluida dos tratados de Arithmetica depois da completa adopção e de vulgarisado por todo o paiz o uso do systema metrico decimal. Só assim comprehendo a inutilidade dos complexos; supprimil-os antes de alcançada essa desejada conquista, seria uma injustificavel precipitação.

Não posso fazer a apreciação merecida de todas as materias contidas em seu livro, porque isso me forçaria a exceder os limites de um simples parecer.

Ha, comtudo, em seu trabalho algumas partes que não poderei deixar passar sem menção especial, já pela proficiencia com que foram tratadas, já mesmo pela novidade que as caracterisa e recommenda. Refiro-me ao methodo simples e facil que V. S. introduziu na resolução das regras denominadas de proporcionalidade. Com effeito, o methodo da *reducção á unidade* por V. S. empregado, mas infelizmente ainda tão pouco conhecido entre nós, é de uma extrema simplicidade e de rapida execução em todas as questões dependentes de regra de tres, por mais complicadas que sejam.

Traz elle comsigo a immensa vantagem de evitar o jogo geralmente enfadonho das proporções. Não comprehendo a razão por que, em nossos collegios, se tem deixado de introduzir tão util melhoramento nessa importante parte da Arithmetica. Nos Lyceus e collegios de França quasi não se emprega outro processo para resolverem-se taes questões; em alguns estabelecimentos de ensino publico é elle até obrigatorio. Não é muito que *tambem nisto* procuremos imitar a esse intelligente povo, que tanto se distingue em todos os variados ramos de instrucção.

Os autores modernos não podem ainda entre nós eliminar de seus compendios o methodo geral das proporções, sem incorrer no desagrado dos rotineiros, desses amigos dedicados de tudo quanto é *fossil*, tanto em sciencias, como nas artes. Mas o professor intelligente, que toma por base do ensino a observação attenta e a experiencia, deve pôr de lado as considerações extravagantes da ignorancia e seguir desassombrado a marcha do progresso. Assim o praticou em parte V. S., e, a meu ver, obrou muito bem; porque tudo quanto concorre para facilitar a instrucção é um serviço prestado á causa da educação popular.

Talvez que alguem, alheio ás difficuldades das sciencias exactas, julgue o seu compendio muito extenso para *meninos de escola;* assim, porém, não pensarão aquelles que conhecem os graves inconvenientes desses obscuros resumos, que apenas servem para desafiar aos professores ignorantes a fazerem decoral-os pelos seus alumnos, habituando-os, por tal forma, a confiar mais na memoria do que na razão. E' esse um pessimo systema de ensino, que convém abandonar. O professor deve trabalhar para fazer o estudante comprehender a materia, mas nunca forçal-o a decorar o que não entende. Acostumar o discipulo ao raciocinio é um dever do mestre. O uso da memoria é util e mesmo necessario até certo ponto; querer exceder esse limite é um prejuizo.

Convem, portanto, acabar com esses pequenos folhetos, que, nada esclarecendo, tudo obscurecem. Em um livro elementar escripto para creanças, não basta que se diga a verdade; é necessario revestil-a de uma forma que a torne clara e comprehensivel; e nisto consiste o principal merecimento do trabalho.

A excessiva concisão dos compendios de mathematicas é uma das poderosas causas da difficuldade da sciencia e de sua repulsiva aridez.

Um autor que deseja tornar-se claro e agradavel na exposição das materias, não póde, nem mesmo deve ser muito conciso. Um resumo de Arithmetica bem feito é, sem contestação alguma, um trabalho de bastante merecimento; mas só poderá ser conveniente e util, quando o professor tiver a capacidade precisa para amplial-o e desenvolvel-o, de modo a tornal-o comprehensivel ás intelligencias pouco habituadas ao arido laconismo do calculo.

Entendo, pois, que V. S. **estendendo além do ordinario os limites do seu compendio,** prestou um grande serviço á mocidade estudiosa, que prefere antes comprehender a decorar o que lê.

E' de esperar que o conselho director da instrucção publica da provincia do Rio Grande do Sul, para quem vai V. S. appellar, mande adoptar, para uso das escolas, o seu compendio, de preferencia a qualquer outro que por lá exista. Prestará com isso um valioso serviço á mocidade Rio Grandense, auxiliando ao mesmo tempo a um moço intelligente, que procura no estudo e no trabalho os recursos da vida.

Digo isso, porque tenho perfeito conhecimento dos compendios até hoje em uso na provincia.

Não se persuada alguem que, dando eu este parecer, pretenda alcançar para o autor deste livro uma protecção indevida. Em materia de sciencia não tenho amigos, e nem costumo fazer elogios immerecidos a quem quer que seja: fallo só em favor, da verdade, da justiça e da instrucção.

De V. S. etc.

ANTONIO CARLOS ENNES BANDEIRA

O Dr. Dom Jorge Eugenio de Lossio e Seiblitz

1870

Discipulo e amigo. — Li com cuidado o seu livro intitulado Arithmetica para meninos.

Supponho que preenche elle o fim que V. teve em vista, publicando-o; isto é, ser adoptado com vantagem no ensino primario.

Os processos das operações fundamentaes da Arithmetica e suas principaes applicações, as regras e definições são em geral, expostas com clareza e precisão, e em linguagem adaptada á comprehensão dos meninos.

Prestou V. um importante serviço á sua provincia, destinando a seus patricios um trabalho que me parece incomparavelmente preferivel ao que actualmente é admittido nas aulas primarias com approvação do conselho director da instrucção.

De V. amigo

D. Jorge de Lossio.

O Barão de Tautphœus

1870

Li as Lições de Arithmetica para meninos, compiladas pelo Sr. *José Theodoro de Souza Lobo*, e acho que este compendio corresponde perfeitamente ao fim indicado no titulo que o autor lhe deu.

Entrando em theorias e demonstrações apenas até o ponto indispensavel para fundamentar as doutrinas de um modo satisfactorio e ao mesmo tempo accessivel ás intelligencias ainda em desenvolvimento, excluindo aquillo que pouca ou nenhuma utilidade pratica offerece, e insistindo largamente naquellas partes que são de continuo uso na vida de qualquer, como regra de tres, de juros e descontos, o autor tornou seu livro eminentemente proprio para as escolas de ensino primario; e a simplicidade e lucidez com que formula as definições e regras confirmam o valor da obra para este fim.

Barão de Tautphœus.

O Conselho Director da Instrucção Publica da Provincia

1871

Certifico ....

....

„Tendo sido por V. S. nomeados para que dessemos o nosso parecer acerca de qual Arithmetica devia ser approvada e adoptada para o ensino da instrucção publica da provincia, cumpre-nos declarar conscienciosamente que, a não ser a arithmetica elementar de **Theodoro Lobo** nenhuma ha que se preste, como obra didactica, para o caso em questão, como a que fica referida, não só porque declara em termos precisos e claros o objecto de cada operação, dispondo logo as analogias segundo os principios theoricos a que se refere, como pela sua clareza, exacção e facilidade de execução.“

....

Certifico ainda que á vista do parecer acima, *foi a dita Arithmetica approvada pelo Conselho Director* e mandada adoptar nas aulas publicas do 2.º grão POR PORTARIA DA PRESIDENCIA DA PROVINCIA de dezeseis de Dezembro do anno passado. E para constar passou-se a presente certidão na secretaria da instrucção publica, aos oito dias do mez de Agosto de 1872. — E eu, *Joaquim Manoel de Azevedo Junior*, Secretario, a subscrevi.

O Dr. Manoel Pacheco Prates

1896

LIVROS ESCOLARES *)

....

....

„Emquanto ao ensino de Arithmetica penso que estamos muito bem servidos, pois não conheço no seu genero obras tão methodicamente combinadas, como as 1ª e 2ª arithmeticas de *Souza Lobo*, em boa hora adoptadas em nossas aulas primarias.“

*) (Do Relatorio apresentado ao Sr. Dr. João Abbott, Secretario do Estado dos Negocios do Interior e Exterior.)

SEGUNDA ARITHMETICA

Capitulo I

Numeros inteiros

§ I — Principios elementares

1. ***Grandeza*** é tudo o que é capaz de augmento ou diminuição; v. g. a *extensão*, o *peso*, o *tempo*, etc. etc.

2. Ha duas especies de grandeza: a grandeza *continua* e a grandeza *descontinua*.

3. *Grandeza continua* é aquella que póde augmentar ou diminuir por graus tão pequenos quanto se queira; v. g. *a extensão*

4. *Grandeza descontinua* ou *collectiva* é aquella que representa uma collecção de individuos ou objectos da mesma especie; v. g. *um grupo de homens*.

5. Para ter-se idéa exacta de uma grandeza, é preciso medil-a, si for *continua*; contal-a, si for *descontinua*.

6. ***Unidade*** é uma grandeza que serve para *medir* todas as outras da mesma especie, ou é uma das grandezas que *se contam*.

7. *Nas grandezas continuas, a* **unidade** *é tomada, as mais das vezes, arbitrariamente;* isto quer dizer que a unidade é de grandeza arbitraria, mas sempre da mesma especie da grandeza que se quer medir.

Tem-se, por exemplo, uma distancia que se quer avaliar.

A unidade para isso empregada é *arbitraria*: isto é, tanto pode ser o *kilometro*, como o *metro*, o *decimetro*, etc.; mas qualquer destas unidades ***é da mesma especie da grandeza***; qualquer dellas representa *comprimento*.

8. *Nas grandezas descontinuas*, ***a unidade é um individuo ou uma collecção de individuos da mesma especie***; v. g. uma reunião de homens. Aqui a unidade é *homem*, ou uma collecção de homens, como *dezenas*, *centenas*, etc.

9. ***Razão*** ou ***relação*** é o resultado da comparação de uma grandeza com a sua unidade.

10. ***Numero*** é o valor de uma razão.

11. As razões podem ser apresentadas por tres especies de numeros: o *inteiro*, a *fracção*, e o *numero mixto*.

12. *Numero inteiro* é o que se compõe unicamente de unidades; v. g. *trinta e cinco* metros, *quatorze* litros.

13. *Numero quebrado* ou *fracção* é o que consta de partes da unidade, sem formal-a; v. g. *meio* kilogrammo.

14. *Numero mixto* é o que é formado de unidades e partes da unidade; v. g. *dois e meio* litros.

§ II — Systema decimal de numeração

15. ***Systema decimal de numeração*** é o conjuncto de regras que nos ensinam a ler e a escrever os numeros, tendo por base o numero ***dez***.

16. Comprehende duas partes; a numeração *falada* e a *escripta*.

17. *Numeração falada* ou *nomenclatura* é a arte de exprimir os numeros com um systema limitado de palavras convenientemente combinadas.

18. *Numeração escripta* é a arte de representar os numeros com um systema limitado de signaes que se chamam *algarismos*.

Numeração fallada

19. ***Principio convencional.*** — *Dez unidades de uma ordem formam uma unidade de ordem immediatamente superior*.

Classe das unidades

20. ***Das unidades simples.*** — Para formarem-se os numeros, considera-se primeiramente a unidade, que recebeu o nome **um**. Ajuntando-se a unidade a si mesma, tem-se o numero **dois**; e continuando a juntar-se a unidade ao ultimo numero que se houver formado, ter-se-ão os numeros: **tres, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove.**

Estes nove primeiros numeros são as **unidades simples** ou **de primeira ordem.**

21. ***Das dezenas.*** — Ao numero nove ajuntando-se uma unidade, tem-se o numero **dez**. Segundo o principio convencional, a collecção destas dez unidades simples fórma uma nova unidade de ordem immediatamente superior, a que se deu o nome de **dezena** ou **unidade de segunda ordem.**

Uma dezena, portanto, *vale dez unidades*.

Formam-se as dezenas como as unidades simples, isto é, accrescentando-se sempre uma dezena. Assim dizemos: uma dezena, duas dezenas, tres dezenas, quatro dezenas, cinco dezenas, seis dezenas, sete dezenas, oito dezenas, nove dezenas; e substituimos estas palavras pelas seguintes, que lhes correspondem em unidades simples: *dez*, *vinte*, *trinta*, *quarenta*, *cincoenta*, *sessenta*, *setenta*, *oitenta* e *noventa*.

22. ***Das centenas.*** — A *nove* dezenas ajuntando-se uma dezena, tem-se *uma collecção de dez dezenas*; e, segundo o principio convencional, esta collecção de dez dezenas fórma uma nova unidade de ordem immediatamente superior, a que se deu o nome de **centena** ou **unidade de terceira ordem.**

Uma centena, pois *vale dez dezenas* ou *cem unidades*.

Formam-se as centenas como as unidades e dezenas. Assim dizemos: uma centena, duas centenas, tres centenas, quatro centenas, cinco centenas, seis centenas, sete centenas, oito centenas, nove centenas; e estes nomes substituem-se pelos seguintes, que lhes correspondem em unidades simples: *cem* ou *cento*, *duzentos, trezentos, quatrocentos, quinhentos, seiscentos, setecentos, oitocentos* e *novecentos*.

23. ***Entre duas dezenas consecutivas.*** — Para exprimirem-se os numeros comprehendidos *entre duas dezenas consecutivas*, juntam-se ás palavras dez, vinte, trinta, quarenta, cincoenta, sessenta, setenta, oitenta e noventa os nomes dos primeiros *nove* numeros, exceptuando-se *dez e um, dez e dois, dez e tres, dez e quatro, dez e cinco*, que foram substituidos por **onze, doze, treze, quatorze** e **quinze**.

Eis os nomes dos numeros comprehendidos entre duas dezenas consecutivas:

Onze, doze, treze, quatorze, quinze, dezeseis, *dezesete, dezoito, dezenove*.

Vinte e *um*, vinte e *dois*, vinte e *tres*,.... vinte e *nove*.

Trinta e *um*, trinta e *dois*, trinta e *tres*, trinta e *quatro*,.... trinta e *nove*.

Quarenta e *um*, quarenta e *dois*,.... quarenta e *nove*.

Cincoenta e *um*, cincoenta e *dois*, cincoenta e *tres*,.... cincoenta e *nove*.

Sessenta e *um*, sessenta e *dois*, sessenta e *tres*, sessenta e *quatro*, sessenta e *cinco*,.... sessenta e *nove*.

Setenta e *um*, setenta e *dois*, setenta e *tres*, setenta e *quatro*,.... setenta e nove.

Oitenta e *um*, oitenta e *dois*, oitenta e *tres*,.... oitenta e *nove*.

Noventa e *um*, noventa e *dois*, noventa e *tres*,.... noventa e *nove*.

24. ***Entre duas centenas consecutivas.*** — Para exprimirem-se os numeros comprehendidos *entre duas centenas consecutivas*, juntam-se ás palavras cento, duzentos, trezentos, quatrocentos, quinhentos, seiscentos, setecentos, oitocentos e novecentos os nomes dos *noventa e nove* primeiros numeros.

Eis como se obtêm os nomes dos numeros comprehendidos entre duas centenas consecutivas:

Cento e *um*, cento e *dois*, cento e *tres*,.... cento e *vinte*,.... cento e *trinta*,.... cento e *quarenta*,.... cento e *cincoenta*,.... cento e *sessenta*,.... cento e *setenta*,.... cento e *oitenta*,.... cento e *noventa*,.... cento e *noventa e nove*.

Duzentos e *um*, duzentos e *dois*, duzentos e *tres*,.... duzentos e *noventa e nove*.

Trezentos e *um*, trezentos e *dois*,.... trezentos e *noventa e nove*.

Quatrocentos e *um*, quatrocentos e *dois*,.... quatrocentos e *vinte*,.... quatrocentos e *noventa e nove*.

Quinhentos e *um*, quinhentos e *dois*,.... quinhentos e *quarenta e cinco*,.... quinhentos e *noventa e dois*,.... quinhentos e *noventa e nove*.

Seiscentos e *um*,.... seiscentos e *noventa e nove*.

Setecentos e *um*,.... setecentos e *noventa e nove*.

Oitocentos e *um*,.... oitocentos e *noventa e nove*.

Novecentos e *um*,.... novecentos e *noventa e nove*.

25. Ao conjuncto das tres primeiras ordens (*unidades simples, dezenas de unidades* e *centenas de unidades*) deu-se o nome de **classe das unidades** ou **primeira classe**.

Classe dos milhares

26. ***Das unidades de milhar.*** — A nove centenas ajuntando-se uma centena tem-se *uma collecção de dez centenas*; e, segundo o principio convencional, esta collecção de dez centenas fórma uma nova unidade de ordem immediatamente superior, a que se deu o nome de **milhar** ou **unidade de quarta ordem**.

Um milhar, pois, *vale dez centenas, cem dezenas, mil unidades*.

Formam-se as unidades de milhar como as unidades simples, servindo-nos dos mesmos nomes: um, dois, tres, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, e accrescentando-lhes a expressão mil. Assim dizemos: um *mil*, dois *mil*, tres *mil*, quatro *mil*, cinco *mil*, seis *mil*, sete *mil*, oito mil, nove *mil*.

27. ***Das dezenas de milhar.*** — A nove unidades simples juntando-se uma, fórma-se uma dezena de unidades; assim tambem, juntando-se a nove unidades de milhar uma unidade de milhar, fórma-se uma **dezena de milhar** ou **unidade de quinta ordem**.

A dezena de milhar vale *dez milhares, cem centenas, mil dezenas e dez mil unidades.*

Formam-se as dezenas de milhar como as dezenas de unidades, servindo-nos das mesmas expressões com o accrescimo da palavra milhar

Assim dizemos: uma dezena *de milhar*, duas dezenas *de milhar*, tres dezenas *de milhar*, quatro dezenas *de milhar*, cinco dezenas *de milhar*, seis dezenas *de milhar*, sete dezenas *de milhar*, oito dezenas *de milhar*, nove dezenas *de milhar;* ou: dez *milhares* ou dez *mil*, vinte *mil*, trinta *mil*, quarenta *mil*, cincoenta *mil*, sessenta *mil*, setenta *mil*, oitenta *mil*, noventa *mil.*

28. ***Das centenas de milhar.*** — A nove dezenas de milhar ajuntando-se uma dezena de milhar, obtem-se dez dezenas de milhar; e esta collecção, segundo o principio da numeração falada, fórma uma centena de milhar ou unidade de sexta ordem.

A centena de milhar vale *dez dezenas de milhar, cem milhares, mil centenas, dez mil dezenas e cem mil unidades.*

Formam-se as centenas de milhar como as centenas de unidades, servindo-nos das mesmas expressões com o accrescimo da palavra milhar.

Assim, dizemos: uma centena *de milhar*, duas centenas *de milhar*, tres centenas *de milhar*, quatro centenas *de milhar*, cinco centenas *de milhar*, seis centenas *de milhar*, sete centenas *de milhar*, oito centenas *de milhar*, nove centenas *de milhar;* ou cem *milhares* ou cem *mil*, duzentos *mil*, trezentos *mil*, quatrocentos *mil*, quinhentos *mil*, seiscentos *mil*, setecentos *mil*, oitocentos *mil*, novecentos *mil.*

29. ***Entre duas unidades de milhar consecutivas.*** — Para exprimirem-se os numeros comprehendidos *entre duas unidades de milhar consecutivas* juntam-se ás palavras: mil, dois mil, tres mil, quatro mil, cinco mil, seis mil, sete mil, oito mil, nove mil, os nomes dos *novecentos e noventa e nove* primeiros numeros.

Eis como se obtêm os nomes dos numeros comprehendidos entre duas unidades de milhar consecutivas:

Mil e *um*, mil e *dois*, mil e *tres*, ... mil *novecentos e noventa e nove.*

Dois mil e *um*, ... dois mil e *cem*, dois mil *cento e um*, ... dois mil *novecentos e noventa e nove.*

Tres mil e *um*,... tres mil *novecentos e noventa e nove.*

Quatro mil e *um*, ... quatro mil *novecentos e noventa e nove.*

Cinco mil e *um*,... cinco mil *novecentos e noventa e nove.*

Seis mil e *um*,... seis mil *novecentos e noventa e nove.*

Sete mil e *um*,... sete mil *novecentos e noventa e nove.*

Oito mil e *um*,... oito mil *novecentos e noventa e nove.*

Nove mil e *um*,... nove mil *novecentos e noventa e nove.*

30. ***Entre duas dezenas de milhar consecutivas.*** — Para exprimirem-se os numeros comprehendidos *entre duas dezenas de milhar consecutivas*, juntam-se ás palavras: dez mil, vinte mil, trinta mil, quarenta mil, cincoenta mil, sessenta mil, setenta mil, oitenta mil, noventa mil, os nomes dos *nove mil novecentos e noventa e nove* primeiros numeros.

Eis como se obtêm os nomes dos numeros comprehendidos entre duas dezenas de milhar consecutivas:

Dez mil e *um*,... dezenove *mil novecentos e noventa e nove.*

Vinte mil e *um*,... vinte e *nove mil novecentos e noventa e nove.*

Trinta mil e *um*,... trinta e *nove mil novecentos e noventa e nove.*

Quarenta mil e *um*,... quarenta e *nove mil novecentos e noventa e nove.*

Cincoenta mil e *um*,... cincoenta e *nove mil novecentos e noventa e nove.*

Sessenta mil e *um*,... sessenta e *nove mil novecentos e noventa e nove*.

Setenta mil e *um*,... setenta e *nove mil novecentos e noventa e nove*.

Oitenta mil e *um*,... oitenta e *nove mil novecentos e noventa e nove*.

Noventa mil e *um*,... noventa e *nove mil novecentos e noventa e nove*.

31. ***Entre duas centenas de milhar consecutivas.*** — Para exprimirem-se os numeros comprehendidos *entre duas centenas de milhar consecutivas*, juntam-se ás palavras cem mil, duzentos mil, trezentos mil, quatrocentos mil, quinhentos mil, seiscentos mil, setecentos mil, oitocentos mil, novecentos mil, os nomes dos *noventa e nove mil novecentos e noventa e nove* primeiros numeros.

Eis como se obtêm os nomes dos numeros comprehendidos entre duas centas de milhar consecutivas:

Cem mil e *um*,... cento e *noventa e nove mil novecentos e noventa e nove*.

Duzentos mil e *um*,... duzentos e *noventa e nove mil novecentos e noventa e nove*.

Trezentos mil e *um*,... trezentos e *noventa e nove mil novecentos e noventa e nove*.

Quatrocentos mil e *um*,... quatrocentos e *noventa e nove mil novecentos e noventa e nove*.

Quinhentos mil e *um*,... quinhentos e *noventa e nove mil novecentos e noventa e nove*.

Seiscentos mil e *um*,... seiscentos e *noventa e nove mil novecentos e noventa e nove*.

Setecentos mil e *um*,... setecentos e *noventa e nove mil novecentos e noventa e nove*.

Oitocentos mil e *um*,... oitocentos e *noventa e nove mil novecentos e noventa e nove*.

Novecentos mil e *um*,... novecentos e *noventa e nove mil novecentos e noventa e nove*.

Classe dos milhões

32. ***Das unidades de milhão.*** — A nove centenas de milhar juntando-se uma centena de milhar, obtêm-se dez centenas de milhar; e esta collecção, segundo o principio convencional da numeração fallada, fórma uma unidade de milhão (ou simplesmente *um milhão*) ou unidade de setima ordem.

Formam-se as unidades de milhão como as unidades simples, servindo-nos dos mesmos nomes: um, dois, tres, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, e accrescentando-lhes a expressão milhão.

Assim, dizemos: um *milhão*, dois *milhões*, tres *milhões*, quatro *milhões*, cinco *milhões*, seis *milhões*, sete *milhões*, oito *milhões*, nove *milhões*.

33. ***Das dezenas de milhão.*** — A nove milhões juntando-se um milhão fórma-se uma dezena de milhão ou unidade de oitava ordem.

Formam-se as dezenas de milhão como as dezenas de unidade, servindo-nos das mesmas expressões com o accrescimo da palavra milhão.

Assim, dizemos: uma dezena *de milhão*, duas dezenas *de milhão*, tres dezenas *de milhão*, quatro dezenas *de milhão*, cinco dezenas *de milhão*, seis dezenas *de milhão*, sete dezenas *de milhão*, oito dezenas *de milhão*, nove dezenas *de milhão*; ou dez *milhões*, vinte *milhões*, trinta *milhões*, quarenta *milhões*, cincoenta *milhões*, sessenta *milhões*, setenta *milhões*, oitenta *milhões*, noventa *milhões*.

34. ***Das centenas de milhão.*** — A nove dezenas de milhão juntando-se uma dezena de milhão, tem-se uma collecção de dez dezenas de milhão; e esta collecção fórma uma unidade de ordem superior, chamada centena de milhão ou unidade de nona ordem.

Formam-se as centenas de milhão como as centenas de unidades, servindo-nos das mesmas expressões com o accrescimo da palavra milhão.

Assim, dizemos: uma centena *de milhão*, duas centenas *de milhão*, tres centenas *de milhão*, quatro centenas *de milhão*, cinco centenas *de milhão*, seis centenas *de milhão*, sete centenas *de milhão*, oito centenas *de milhão*, nove centenas *de milhão;* ou: cem *milhões*, duzentos *milhões*, trezentos *milhões*, quatrocentos *milhões*, quinhentos *milhões*, seiscentos *milhões*, setecentos *milhões*, oitocentos *milhões*, novecentos *milhões*.

35. ***Entre duas unidades de milhão consecutivas.*** — Para exprimirem-se os numeros comprehendidos *entre duas unidades de milhão consecutivas*, juntam-se ás palavras: um milhão, dois milhões, tres milhões, quatro milhões, cinco milhões, seis milhões, sete milhões, oito milhões, nove milhões, os nomes dos *novecentos e noventa e nove mil novecentos e noventa e nove* numeros já formados.

36. ***Entre duas dezenas de milhão consecutivas.*** — Para exprimirem-se os numeros comprehendidos *entre duas dezenas de milhão consecutivas*, juntam-se ás palavras: dez milhões, vinte milhões, trinta milhões, quarenta milhões, cincoenta milhões, sessenta milhões, setenta milhões, oitenta milhões, noventa milhões, os nomes dos *nove milhões novecentos e noventa e nove mil novecentos e noventa e nove* numeros já formados.

37. ***Entre duas centenas de milhão consecutivas.*** — Para exprimirem-se os numeros comprehendidos *entre duas centenas de milhão consecutivas*, juntam-se ás palavras: cem milhões, duzentos milhões, trezentos milhões, quatrocentos milhões, quinhentos milhões, seiscentos milhões, setecentos milhões, oitocentos milhões, novecentos milhões, os nomes dos *noventa e nove milhões novecentos e noventa e nove mil novecentos e noventa e nove* numeros já formados.

Classe dos billiões

38. A nove centenas de milhão juntando-se uma centena de milhão, obtêm-se dez centenas de milhão; e esta collecção fórma **uma unidade de billião** (ou simplesmente *um billião*) ou **unidade de decima ordem**.

39. *A classe dos billiões*, como todas as outras, é formada de tres ordens: unidade, dezena e centena. Sómente para distinguil-a de qualquer outra, precisamos dar-lhe o nome da unidade de classe, que é o **billião**.

Assim dizemos: unidade de *billião*, dezena de *billião*, centena de *billião*.

40. Contamos em cada uma das ordens desta classe, como já o fizemos nas identicas das classes precedentes. Assim:

Na ordem das *unidades de billião* dizemos: uma unidade *de billião* ou um *billião*, duas unidades *de billião* ou dois *billiões*, tres *billiões*,.... nove *billiões*.

Nas *dezenas de billião* dizemos: uma dezena *de billião* ou dez *billiões*, duas dezenas *de billião* ou vinte *billiões*, tres dezenas *de billião* ou trinta *billiões*,.... nove dezenas *de billião* ou noventa *billiões*.

Nas *centenas de billião*, dizemos: uma centena *de billião* ou cem *billiões*, duas centenas *de billião* ou duzentos *billiões*, tres centenas *de billião* ou trezentos *billiões*,... nove centenas *de billião* ou novecentos *billiões*.

41. Para exprimirem-se os numeros comprehendidos *entre duas unidades consecutivas* de qualquer ordem desta classe, empregam-se os nomes dos numeros já conhecidos e que precedem á ordem de que se tratar.

Resumo

42. Em resumo. Do que fica exposto conclue-se:

1.º *Que os termos usados na nomenclatura classificam-se em duas cathegorias:* a 1.ª comprehende as palavras **um, dez, cem, mil, dez-mil, cem-mil, milhão, dez-milhões, cem-milhões, billião, etc.**, que exprimem as unidades de differentes ordens; a 2.ª comprehende os nomes **um, dois, tres, quatro, cinco, seis,** sete, oito e nove, que indicam *quantas* unidades de cada ordem póde conter um numero dado.

2.º *Que as differentes ordens de unidades são:*

Unidades simples ou unidades de....	1.ª	ordem
Dezenas ou unidades de..................	2.ª	»
Centenas ou unidades de................	3.ª	»
Milhares ou unidades de................	4.ª	»
Dezenas de milhares ou unidades de	5.ª	»
Centenas de milhares ou unidades de	6.ª	»
Milhões ou unidades de..................	7.ª	»
Dezenas de milhões ou unidades de	8.ª	»
Centenas de milhões ou unidades de	9.ª	»
Billiões ou unidades de..................	10.ª	»

3.º *Que as classes de unidades são:* Classe das unidades simples, a de milhares, a de milhões, a de billiões, etc.

As tres primeiras ordens formam uma primeira classe:

1.ª ordem — unidades simples
2.ª » — dezenas de unidades simples
3.ª » — centenas de » »
} 1.ª classe ou classe das unidades

As tres ordens seguintes formam uma segunda classe:

4.ª ordem — unidades
5.ª » — dezenas
6.ª » — centenas
} de milhares — 2.ª classe ou classe dos milhares

As tres ordens seguintes formam uma terceira classe:

7.ª ordem — unidades
8.ª » — dezenas
9.ª » — centenas
} de milhões — 3.ª classe ou classe dos milhões

E assim por diante.

4.º *Que a serie dos numeros é infinita.*

Quadro das ordens e classes

Classe dos *billiões*			Classe dos *milhões*			Classe dos *milhares*			Classe das *unidades*		
12.ª ordem	11.ª ordem	10.ª ordem	9.ª ordem	8.ª ordem	7.ª ordem	6.ª ordem	5.ª ordem	4.ª ordem	3.ª ordem	2.ª ordem	1.ª ordem
Centenas de billião	Dezenas de billião	*Billião*	Centenas de milhão	Dezenas de milhão	*Milhão*	Centenas de milhar	Dezenas de milhar	*Milhar*	Centenas de unidade	Dezenas de unidade	*Unidades simples*

Numeração escripta

Os dez algarismos

43. Para representarem-se todos os numeros, inventaram-se dez algarismos, cuja fórma é a seguinte:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0

e cujos nomes são:

Um, dois, tres, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, zero.

44. Sabe-se pela nomenclatura, que qualquer ordem só póde ter de *uma* até *nove* unidades. Vê-se, pois, que os primeiros nove algarismos prestam-se a representar unidades de todas as ordens. Por isso, para evitar confusão na escriptura numerica, estabeleceu-se o seguinte:

45. *Principio convencional.* — *Todo algarismo escripto á esquerda de outro representa unidades dez vezes maiores do que as deste outro.*

46. Para applicar-se este principio a todos os casos houve necessidade de um decimo algarismo chamado *zero*, o qual, por si só não tendo valor algum, comtudo, collocado á direita de qualquer um dos outros algarismos, preenche dois fins: *1.º assigna-la as ordens que faltam em um numero; 2.º determina a collocação dos algarismos que lhe ficam á esquerda, segundo as ordens de unidades que devem exprimir.*

47. Qualquer um dos nove primeiros algarismos representa um valor, e por isso são elles chamados *algarismos significativos* e representam tambem as unidades simples ou os numeros *um, dois, tres, quatro, cinco, seis, sete, oito* e *nove.*

48. *Para que possam esses mesmos algarismos representar as* dezenas, é necessario que cada um delles fique, segundo o principio da numeração escripta, à esquerda de outro, que represente as unidades; *este outro é o* zero. Assim se representam as dezenas, de uma até nove, ou os numeros *dez, vinte, trinta, quarenta, cincoenta, sessenta, setenta, oitenta* e *noventa:*

10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90.

49. Para representarem-se os numeros comprehendidos *entre duas dezenas consecutivas,* substitue-se nos numeros acima o zero successivamente pelos algarismos 1, 2, 3, 4,.... 9, e obtem-se:

11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19
21, 22, 23, 24, 25, ... 29
31, 32, 33, 34, ... 39
41, 42, 43, 44, ... 49
51, 52, 53, ... 59
61, 62, 63, ... 69
71, 72, ... 79
81, 82, ... 89
91, ... 99

50. Quanto ás centenas, são ellas representadas pelos mesmos nove algarismos, comtanto que, em virtude do principio convencional da numeração escripta, cada um delles fique á esquerda de outro que representa dezenas, e o que representa dezenas á esquerda de outro que occupe a ordem das unida-

des simples. Cada uma destas duas ultimas ordens deve, pois, ser representada por zero, occupando assim cada algarismo significativo a terceira ordem. Deste modo se representam as centenas, de uma até nove, ou os numeros, *cem, duzentos, trezentos, quatrocentos, quinhentos, seiscento, setecentos, oitocentos, novecentos:*

100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900.

51. Si estes numeros acima escrevem-se os noventa e nove primeiros numeros nos lugares dos zeros representar-se-ão todos os numeros comprehendidos *entre duas centenas consecutivas.* Assim obtem-se:

101, 102, 103, ... 110, 111, 112, ... 199
201, 202, 203, 204, ... 299
301, 302, 303, 304, ... 399
401, 402, 403, ... 499
501, 502, 503, ... 599
601, 602, ... 699
701, 702, ... 799
801, 802, ... 899
901, ... 999

52. Procedendo-se sempre, em todas as outras classes, como se fez na das unidades, representar-se-ão todos os numeros com o auxilio sómente dos dez algarismos.

Valor absoluto e valor relativo dos algarismos

53. Attendendo-se ao principio convencional da numeração escripta, vê-se que os algarismos têm dois valores: o *absoluto* e o *local.*

54. *Valor absoluto* de um algarismo é o dado pela fórma desse algarismo; ou, por outra, é o valor que o algarismo tem como si estivesse só.

55. *Valor local* ou *relativo* é o dado pelo lugar que o algarismo occupa relativamente á casa das unidades.

No numero 26, o valor absoluto do primeiro algarismo á direita é 6, porque essa é a fórma do algarismo; do segundo, é 2. O valor local do primeiro é *seis unidades*; e do segundo, *duas dezenas* ou 20 unidades.

Como se lê um numero de tres algarismos

56. Para lêr-se um numero de tres algarismos, nomêa-se successivamente cada um dos algarismos do numero, começando-se pela esquerda; pronuncia-se depois de cada um delles a palavra que corresponde á ordem indicada pelo lugar que o algarismo occupa.

EXEMPLO. — *Seja para lêr-se o seguinte numero*: 729.

Observando-se o disposto na regra acima, dizemos: sete *centenas*, duas *dezenas* e nove *unidades*; ou *setecentas e vinte e nove* unidades.

Como se lê um numero qualquer

57. Para lêr-se um numero qualquer, divide-se o numero em classes de tres algarismos da direita para a esquerda, exceptuando-se a ultima, que poderá constar de um, de dois, ou mesmo de tres. Lê-se o numero da esquerda para a direita, por classes, dando-se a cada uma a denominação competente.

EXEMPLO. — *Seja para lêr-se o seguinte numero*: 35 796 214.

Observando-se a regra acima, tem-se:

Milhões	*Milhares*	*Unidades*
35	796	214

e lê-se:

Trinta e cinco *milhões**), setecentas e noventa e seis *mil*, duzentas e quatorze *unidades*.

*) Quando o numero que se tem de lêr é expresso em *réis*, em lugar da palavra *milhão* usa-se da palavra *conto*.
Tambem quando um numero é expresso em *réis*, usa-se da seguinte figura $, que se chama *cifrão*, e que se colloca *entre as centenas e as milhares.*

Como se escreve um numero de tres algarismos

58. Para escrever-se um numero de tres algarismos, escrevem-se successivamente os algarismos que exprimem quantas centenas, dezenas e unidades ha no numero dado, supprindo-se com zeros as ordens que faltarem.

EXEMPLO. *Seja para escrever o seguinte numero*: trezentos e quarenta e cinco.

Neste numero ha 3 *centenas*, 4 *dezenas* e 5 *unidades*. Portanto, para que cada um dos algarismos represente a ordem respectiva, serão assim escriptos: 345.

Como se escreve um numero qualquer

59. Para escrever-se um numero qualquer, escreve-se primeiramente a classe mais elevada; á direita desta, a classe immediatamente inferior; e assim por diante até ás unidades simples, tendo-se o cuidado de preencher com zeros as classes e ordens que faltarem.

EXEMPLO. — *Seja para escrever-se o seguinte numero*: trinta e cinco mil, quatrocentos e vinte e oito.

Neste numero ha duas classes: a dos *milhares* e a das *unidades*. Já sabendo-se escrever numeros de tres algarismos, é facil escrever cada uma dessas classes, deste modo: 35 428.

Em conclusão:

60. Do que fica dito sobre a numeração se deprehende que, com os *dez* algarismos inventados, constituiu-se um systema de numeração, chamado decimal, por causa da convenção fundamental — que dez *unidades de uma ordem formam uma unidade de ordem immediatamente superior*.

61. Ha mais systemas de numeração; mas o que está universalmente adoptado é o *decimal*, e por isso só delle nos occupamos.

62. Chama-se *base* de um systema de numeração o numero de algarismos que entram nesse systema.

Deve-se ter em vista que um systema de numeração toma sempre o nome da base.

63. Os numeros que se escrevem com um só algarismo chamam-se *numeros simples*; taes são: 1, 4, 6, etc.: e *compostos*, os que se representam com mais de um: v. g. 21, 32, 456 etc.

64. ***Arithmetica*** é a sciencia que trata das propriedades mais elementares dos numeros e das operações que directamente sobre elles se podem effectuar.

Exercicios sobre a numeração dos inteiros

Escrever com algarismos os seguintes numeros;

1. Um, tres, quatro, seis, oito, nove, dois, cinco, sete,
2. Vinte e tres, trinta e dois, quarenta e sete, cincoenta e seis,
3. Sessenta e quatro, setenta e nove, oitenta e cinco, noventa,
4. Noventa e oito, cento e um, cento e oito, cento e doze,
5. Duzentos e cinco, trezentos e vinte e tres, quatrocentos e sete,
6. Quinhentos e vinte e tres, seiscentos e quinze, setecentos,
7. Setecentos e quarenta e nove, oitocentos e cincoenta e seis,
8. Novecentos e quarenta e sete, mil e quatro, mil e seis,
9. Dois mil e vinte e seis, tres mil e cem, tres mil cento e um,
10. Quatro mil duzentos e nove, quatro mil trezentos e cincoenta e dois, quatro mil e oito, cinco mil e vinte e sete,
11. Cinco mil seiscentos e treze, seis mil setecentos e oitenta e nove, sete mil trezentos e vinte e um,
12. Oito mil e um, nove mil e quatorze, onze mil e cinco.
13. Onze mil e trinta e quatro, doze mil trezentos e quarenta e cinco, quinze mil e oitenta e nove,
14. Duzentos mil e sete, trezentos mil e vinte e um, quatrocentos mil quinhentos e sessenta e sete, quatrocentos mil e nove,
15. Quinhentos e oito mil e sete, seiscentos mil e cincoenta e tres, setecentos e nove mil e oitenta e seis,
16. Setecentos e vinte e quatro mil e oito, oitocentos mil e dois,
17. Novecentos e oitenta e sete mil seiscentos e cincoenta e quatro,
18. Um milhão, dois milhões e quatro, tres milhões e quarenta e cinco, quatro milhões trezentos e vinte e um,
19. Cinco milhões cento e vinte e cinco mil, seis milhões quatro mil e dois, seis milhões cincoenta e quatro mil e trinta e dois.

20. Sete milhões quarenta e tres mil e trinta e seis,
21. Oito milhões cento e cincoenta e tres mil duzentos e dezeseis, nove milhões noventa mil e nove.

Ler e escrever com todas as lettras os seguintes numeros:

22. 2, 5, 7, 9, 6, 8, 3, 10, 12, 17, 19, 20, 29, 30, 35, 40.
23. 43, 47, 40, 58, 60, 62, 70, 74, 76, 80, 89, 90.
24. 100, 204, 205, 425, 538, 647, 789, 892, 900, 916, 951, 963.
25. 1009, 2007, 3015, 4927, 5143, 6483, 7201, 8036, 9001.
26. 10002, 23005, 34027, 45036, 59321, 99009, 99099, 99999.
27. 100001, 200034, 300567, 401890, 595151, 627012.
28. 4000256, 5008007, 6007025, 7021032, 8542109.
29. 59876543, 98765432, 83214003, 70067054, 10000003.
30. 207006005, 403005014, 706005418, 806097214.
31. 908432015, 999099009, 999009099. 999999999.
32. 1002003004, 2034567089, 3574068025, 1234567890.

§ III — Numeração romana

65. Os numeros romanos representam-se por meio das seguintes sete lettras maiusculas do alphabeto, cujos valores convencionados vem indicados:

I,	V,	X,	L,	C,	D,	M.
um,	*cinco,*	*dez,*	*cincoenta,*	*cem,*	*quinhentos,*	*mil.*

Destes sete caracteres, quatro podem ser repetidos em um mesmo numero; são elles:

I, X, C, M.

Os outros tres, V, L, D, nunca se repetem no mesmo numero.

66. Para escreverem-se os numeros em caracteres romanos, adoptaram-se as seguintes convenções:

1.ª Quando uma lettra representa um valor igual ou inferior ao de outra e se acha á direita desta outra, sommam-se os valores de ambas.

II (*dois*); XX (*vinte*); CC (*duzentos*);
VI (*seis*); XV (*quinze*); LX (*sessenta*).

2.ª Quando uma lettra representa um valor menor do que o de outra e se acha á esquerda desta outra, subtrahe-se o valor da menor do da maior.

IV (*quatro*); IX (*nove*); XL (*quarenta*);

3.ª Quando uma lettra de valor menor do que os de duas outras se acha entre ellas, subtrahe-se o seu valor do da que lhe fica á direita, e junta-se o resto ao valor da lettra da esquerda.

XIV (*quatorze*); CVL (*cento e quarenta*); CXC (*cento e noventa*).

Exercicios

Escrever em algarismos romanos os seguintes numeros:

1500 — 1630 — 1789 — 1822 — 1846 — 1889
1531 — 1645 — 1792 — 1831 — 1858 — 1892
1567 — 1654 — 1799 — 1835 — 1884 — 1900

Ler os seguintes numeros romanos:

V	L	D	M	MDCCCXLVI
X	C	CC	DCCCC	MDCCCLVIII
IV	LV	CCC	MC	MDCCCLXXXIV
VI	XL	CCCC	MCC	MDCCCLXXXVII
IX	LX	DC	MCCC	MDCCCLXXXIX
XI	XC	DCC	MCCCC	MDCCCC
XV	CX	DCCC	MD	MM

§ IV — Addição dos números inteiros

67. ***Operações*** são as differentes maneiras por que se compõem e se decompõem os numeros.

68. As operações fundamentaes são quatro: *addição, subtracção, multiplicação e divisão.*

69. As operações de composição são: *addição* e *multiplicação;* as de decomposição são: *subtracção* e *divisão.*

70. Estas quatro operações são chamadas *fundamentaes**), porque todas as outras operações sobre os numeros se baseam em alguma destas.

*) As operações propriamente *fundamentaes* são as duas: **addição e subtracção**; porque estas, sem se basearem em alguma outra, são fundamentos de muitas. **A multiplicação e divisão** já são operações *derivadas*, pois que não são mais do que addições e subtracções *abreviadas*. Comtudo, a multiplicação e a divisão se denominam tambem fundamentaes, porque, embora derivadas, ellas são elementos da formação de muitas outras operações.

71. ***Addição*** é a operação que tem por fim reunir em um só numero todas as unidades de muitos numeros dados da mesma especie.

72. ***Nomes dos termos.*** — Os numeros que se hão de sommar chamam-se *partes* ou *parcellas*, e o resultado da operação chama-se *todo* ou *somma*.

73. ***Signal.*** — Na addição emprega-se o seguinte signal +, que se lê: **mais**, e que se colloca entre as parcellas. Assim, 5 + 3 se lê: 5 mais 3.

74. ***Casos.*** — Ha tres casos de addição:

1.° o da addição de dois numeros simples;

2.° o da addição de um numero composto e um simples;

3.° o da addição de dois ou mais numeros compostos.

Primeiro caso. — *Addição de dois numeros simples.*

75. **Para sommar dois numeros simples,** junta-se successivamente a um delles cada uma das unidades que compõem o outro.

Assim, *querendo-se sommar 4 e 3*, ajunta-se ao numero 4 successivamente cada uma das unidades que compõem o numero 3, dizendo-se: 4 mais *1*, **5**; mais *1*, **6**; mais *1*, **7**. A *somma* de *4* e *3* é **7**.

Sendo 7 e 5 os dois numeros a sommar, junta-se a 7 successivamente cada uma das unidades que compõem o numero 5, e diz-se: 7 mais *1*, **8**; mais *1*, **9**; mais *1*, **10**; mais *1*, **11**; mais *1*, **12**. A somma de *7* e *5* é **12**.

A' força de habito e com o auxilio da memoria, acaba-se por aprender a dizer immediatamente:

4 e *3*, **7**
7 e *5*, **12**

Para aprender-se de côr a somma de dois numeros simples quaesquer, organisou-se a seguinte

Taboada de addição

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Explicação da tabella. — Os algarismos de 1 a 9 escriptos na primeira columna vertical á esquerda indicam o numero de unidades que se ajuntam aos numeros simples que se acham na primeira linha horizontal.

Assim, *tomando-se o algarismo* 1, diz-se 1 e *1*, 2; 2 e *1*, 3; 3 e *1*, 4; 4 e *1*, 5; . . . . . 9 e *1*, 10.

Na linha que começa pelo 2 acham-se as sommas dos numeros simples augmentados de 2.

Assim, diz-se: 1 e *2*, 3; 2 e *2*, 4; 3 e *2*, 5; 4 e *2*, 6; . . . . . 9 e *2*, 11.

Na linha que começa pelo 3 acham-se as sommas dos numeros simples augmentados de 3.

Assim, diz-se; 1 e *3*, 4; 2 e *3*, 5; 3 e *3*, 6; 4 e *3*, 7; . . . . . 9 e *3*, 12.

E de um modo analogo se procede em todas as outras linhas horizontaes.

Uso da tabella. — Querendo saber-se qual é a somma de *6* e *5*, procura-se o numero 6 na primeira linha horizontal e o 5 na primeira columna vertical; no cruzamento das duas linhas acha-se o numero **11**, que é a somma procurada.

Segundo caso. — *Addição de um numero composto e um simples.*

Exemplo 1) *35 + 4*; Exemplo 2) *349 + 7*;

76. Para sommar um numero composto com um simples, decompõe-se o maior em dezenas e unidades; junta-se o numero simples ás unidades do maior, e á esquerda do resultado escrevem-se as dezenas. *(Exemplo 1).*

Si juntando-se o numero simples ás unidades do composto a somma der dezena e unidades, escrevem-se as unidades debaixo das unidades, e, á sua esquerda, as dezenas do numero composto augmentadas de uma. *(Exemplo 2).*

Exemplo 1)
$$\begin{array}{r} 3.5 \\ 4 \\ \hline 39 \end{array}$$

Exemplo 2)
$$\begin{array}{r} 34.9 \\ 7 \\ \hline 356 \end{array}$$

Das reservas

77. As unidades superiores que provém da somma das unidades inferiores, quando levadas a juntar ás de sua especie, chamam-se *reservas*.

Terceiro caso. — *Addição dos numeros compostos.*

Exemplo. *794 213 + 345 674 + 654 325 + + 205 786 + 432 564.*

78. Para sommar numeros compostos, escrevem-se as parcellas umas debaixo das outras, de modo que unidades fiquem debaixo de unidades, dezenas debaixo de dezenas, etc.; traça-se por baixo de todas uma risca, para separal-as da somma.

Começa-se a sommar pela ultima linha da direita. *Si a somma não exceder a 9*, escreve-se tal qual se achou; *si, porém, exceder a 9*, escrevem-se apenas as unidades debaixo da columna respectiva, e levam-se as dezenas para a columna das dezenas. Assim se procede até chegar-se á ultima columna, debaixo da qual se escreve o resultado tal qual se achou.

$$
\begin{array}{r l}
 & 7\,9\,4\,2\,1\,3 \\
 & 3\,4\,5\,6\,7\,4 \\
\textit{Parcellas} & 6\,5\,4\,3\,2\,5 \\
 & 2\,0\,5\,7\,8\,6 \\
 & 4\,3\,2\,5\,6\,4 \\
\hline
\textit{Somma} & 2\,4\,3\,2\,5\,6\,2
\end{array}
$$

Principaes usos da addição

(Tarnier)

Sob o ponto de vista pratico, os principaes usos da addição se resumem nos seguintes enunciados geraes:

1.° Uma pessoa pagou diversas compras: *Quanto gastou ao todo?* — A mesma pessoa fez diversas cobranças: *Qual foi o total de seus recebimentos?*

2.° Sabe-se a data do nascimento de uma pessoa: *Em que anno terá elle uma idade determinada?*

Uma pessoa morreu com tal idade; sabe-se a data em que nasceu: *Em que anno morreu?*

3.° *Por que preço deve-se vender uma mercadoria* para realisar-se um certo lucro sobre o preço da compra?

4.° *Qual é a população de um imperio,* conhecendo-se a de cada uma de suas provincias?

Problemas sobre a addição

(Extrahidos de varios autores)

1. *Em que anno* uma pessoa nascida em 1884 teve 15 annos? — **R. 1899.**

2. Um pae tem 23 annos mais do que seu filho que tem 28 annos. *Qual a idade do pai?* — **R. 51.**

3. Uma pessoa nasceu em 1846; *em que anno* teve elle 64 annos? — **R. 1910.**

4. Voltaire nasceu em 1684 e morreu com 84 annos; *em que anno morreu?* — **R. 1768.**

5. Uma criança comeu 25 cerejas ao almoço, 56 ao jantar e 64 á ceia; *quantas cerejas comeu?* — **R. 145 cerejas.**

6. Uma escola está dividida em tres classes: a pequena tem 39 alumnos; a média 53; e a grande 45. *Quantos alumnos tem esta escola?* — **R. 137 alumnos.**

7. Uma pessoa tem na adéga tres barris de vinho: um contém 225 litros; outro 250 e o terceiro 285; *quantos litros de vinho esta pessoa tem na adéga?* — **R. 760 litros.**

8. *Qual será a extensão de seis ruas:* a primeira tem 475m; a segunda 308m; a terceira 403m; a quarta 637m; a quinta 735m; a sexta 809m? — **R. 3367 metros.**

9. Uma mercadoria custou 246$000 réis; quer-se ter um lucro de 80$000 réis: *por que preço deve ser vendida?* —

10. *Por quanto deve ser vendida uma casa* que custou 18:600$000 réis, para ter-se um lucro de 1:595$000 réis? — **R. 20:195$000 réis.**

11. Uma pessoa recebeu de uma outra 246$000 réis; de outra 621 réis e de outra 829$000 réis; *quanto recebeu ao todo?* — **R. 1:696$000 réis.**

12. Uma pessoa pagou 22$000 réis por um vestido; 10$500 réis por um challe; por uma capa 45$000 réis; 2$500 réis por um par de luvas; *quanto gastou?* — **R. 80$000.**

13. Um negociante perdeu 305$600, vendendo certa mercadoria por 2:259$200. *Quanto lhe custou ella?* — **R. 2:564$800 réis.**

14. Um negociante vendeu 3 metros de fazenda por 30$000; depois vendeu mais 9 metros por 64$800 e 8 metros por 67$200. *Quantos metros vendeu elle e que quantia recebeu?* — **R. 20 metros; 162$000 réis.**

15. Janeiro tem 31 dias, fevereiro 28 ou 29, março 31, abril 30, maio 31, junho 30, julho 31, agosto 31, setembro 30, outubro 31, novembro 30 e dezembro 31. *Quantos dias tem o anno?* — **R. 365 ou 366 dias.**

16. A superficie do globo terrestre é dividida em cinco partes, que são: Europa, Asia, Africa, America, Oceania. Avalia-se a população da Europa em 370 milhões de habitantes; a da Asia em 820 milhões; a da Africa em 150 milhões; a da America em 135 milhões e a da Oceania em 45 milhões. *Qual é a população do globo terrestre?* — **R. 1 bilião e 520 milhões de habitantes.**

17. Os departamentos mais populosos da França são os cinco seguintes: o do Sena, que tem 2 150916 habitantes; o do Norte, que tem 1 392 768 habitantes; o do Rhódano, que tem 678 648; o do Baixo-Sena, que tem 792 041 habitantes; o do Baixo-Rheno, que tem 588 970 habitantes; *qual é a população dos cinco departamentos?* — **R. 5 603 343 habitantes.**

18. Uma pessoa contractou com um pedreiro para lhe fazer um poço, devendo pagar-lhe 2$000 pelo primeiro metro de profundidade, 3$200 pelo segundo, 4$400 pelo terceiro; assim por diante, augmentando 1$200 em cada metro. *Quanto receberá o pedreiro, si o poço tiver 10 metros de profundidade?* — **R. 74$000 réis.**

19. Um operario fez a seguinte despeza em 1 anno: 120$000, aluguel de casa; 300$000, comida; 36$000, lavagem de roupa, 24$000, miudezas; 90$000, vestuario. Sobraram-lhe 30$000. *Quanto ganhou nesse anno?* — **R. 600$000.**

20. Uma pessoa collocou na Caixa Economica: primeiro 80$000; depois 136$000; doutra vez, 166$000; e finalmente, 218$000. *Quanto possue ella?* — **R. 600$000.**

§ V — Subtracção dos numeros inteiros

79. ***Subtracção*** é a operação que tem por fim, dada a somma de duas parcellas e uma dellas, achar a outra.

80. ***Nomes dos termos.*** — Os dois numeros dados chamam-se *termos* da subtracção; a somma chama-se *minuendo*; a parcella dada, *subtrahendo*; e a parcella que se procura, *resto*, *excesso* ou *differença*.

81. Da definição dada conclue-se que *o minuendo e o subtrahendo* devem ser da mesma especie, *e da mesma* é o resto.

82. *A subtracção tem uma outra definição*; E' a operação que tem por fim tirar de um numero dado tantas unidades quantas ha em outro numero tambem dado.

Observação. — Pelas duas definições de subtracção vê-se que esta operação póde-se fazer ou por *addição* ou por *diminuição*.

83. ***Signal.*** — Na subtracção emprega-se o seguinte signal (—), que se lê: menos e que se colloca entre o minuendo e o subtrahendo. Assim, 8—4, se lê: 8 menos 4.

84. ***Casos.*** — Ha tres casos de subtracção:

1.º o da subtracção de um numero simples de outro simples ou subtracção de um numero simples de um *composto, tal que dê um resto simples;*

2.º o da subtracção de um numero simples de um composto:

3.º o da subtracção de um numero composto de outro composto.

Subtracção por addição

Primeiro caso. — *Subtracção de um numero simples de outro simples, ou subtracção de um numero simples de um composto tal que dê um resto simples.*

Sabe-se que o resto é simples, quando juntando-se 10 ao subtrahendo, o resultado é maior do que o minuendo.

EXEMPLO 1) *9 — 5;* EXEMPLO 2) *14 — 8.*

85. Para resolver-se este primeiro caso, basta saber-se a taboada da addição.

Com effeito, sendo 9 uma somma de duas parcellas, quanto se deve ajuntar á parcella dada 5, para obter-se 9? Deve-se ajuntar 4. 4 é a *parcella procurada.*

Sendo 14 uma somma de duas parcellas e 8 uma dellas, qual será a outra? isto é, quanto deve-se juntar a 8, para obter-se 14? Deve-se juntar 6. 6 é a *parcella procurada.*

Segundo caso. — *Subtracção de um numero simples de um composto.*

EXEMPLO 1) *278 — 3;* EXEMPLO 2) *278 — 9.*

86. Para subtrahir um numero simples de um composto, decompõe-se este em dezenas e unidades: procura-se quantas se devem ajuntar ao numero simples para obter-se as unidades do composto: o resultado escreve-se debaixo das unidades e á sua esquerda escrevem-se as dezenas no numero composto. *(Exemplo 1).*

Si, decomposto o numero maior em dezenas e unidades o numero simples for superior ás unidades do composto, juntam-se aos simples as unidades precisas para igualar ás do composto augmentadas de 10; as unidades que se juntaram escrevem-se debaixo das unidades, e á dezena da somma juntam-se tantas quantas sejam necessarias para obterem-se as do numero composto. *(Exemplo 2).*

EXEMPLO 1	EXEMPLO 2
278	278
3	9
275	269

Terceiro caso. — *Subtracção de um numero composto de outro composto.*

EXEMPLO 1) *56387 — 21264* EXEMPLO 2) *56387 — 32568*

87. Para subtrahir um numero composto de outro composto, começa-se a operação pelas unidades simples, juntando ás do subtrahendo tantas quantas precisas forem para igualarem ás do minuendo; o numero que se juntar, escreve-se debaixo das unidades. E de modo identico se procederá em todas as outras ordens. (*Exemplo 1*).

Si, porém, o numero de unidades ***do subtrahendo*** *for maior do que o das* ***do minuendo,*** juntam-se ás do subtrahendo tantas unidades quantas forem precisas para igualarem ás do minuendo augmentadas de 10; as unidades que se juntarem escrevem-se debaixo das unidades e augmentam-se de *1 dezena* as dezenas do subtrahendo. (*Exemplo 2*).

O mesmo se fará em qualquer outra ordem em que se der o mesmo caso.

Exemplo 1)	Exemplo 2)
5 6 3 8 7	5 6 3 8 7
2 1 2 6 4	3 2 5 6 8
3 5 1 2 3	2 3 8 1 9

Subtracção por diminuição

88. Neste methodo de subtracção ha os mesmos tres casos que no de subtracção por addição.

Primeiro caso. — *Subtracção de um numero simples de outro simples ou de um composto tal que dê um resto simples.*

Exemplo 1) *8 — 5;* Exemplo 2) *15 — 9.*

89. Para subtrahir um numero simples de outro simples, tira-se successivamente do maior numero dado cada uma das unidades que compõem o menor.

Seja para subtrahir *5 de 8.*

Do numero 8 tira-se successivamente cada uma das unidades que compõem o numero 5, dizendo-se: 8 menos 1, 7; menos 1, 6; menos 1, 5; menos 1, 4; menos 1, 3. Assim, *8* menos *5*, 3.

Do mesmo modo se procede quando, o numero menor sendo simples, o maior é menor do que o numero simples augmentado de 10.

Seja para subtrahir *9 de 15.*

Dizemos: 15 menos 1, 14; menos 1, 13; menos 1 12; menos 1, 11; menos 1, 10; menos 1, 9; menos 1, 8; menos 1, 7; menos 1, 6. Assim, *15* menos *9*, 6.

Segundo caso. — *Subtracção de um numero simples de um composto.*

Exemplo 1) *278 — 3;* Exemplo 2) *278 — 9.*

90. Seja para subtrahir um numero simples de um numero composto, tira-se o numero simples das unidades do composto; escreve-se o resto debaixo das unidades e á sua esquerda as dezenas do composto. (*Exemplo 1*).

Si o numero simples for maior do que as unidades do composto, juntam-se a estas 10, faz-se a subtracção; escreve-se o resto debaixo das unidades e á sua esquerda as dezenas do composto diminuidas de uma. (*Exemplo 2*).

Exemplo 1)	Exemplo 2)
278	278
3	9
275	269

Terceiro caso. — *Subtracção de um numero composto de outro composto.*

Exemplos:
1) *78952765 — 54720634*
2) *84521637 — 23612745*
3) *53000768 — 43516827*

91. Para subtrahir um numero composto de outro composto, escreve-se o numero menor por baixo do maior de sorte que as unidades de uma mesma ordem se correspondam em columna vertical. Traça-se por baixo uma risca, e começa-se a tirar da direita para a esquerda as unidades de cada ordem do subtrahendo das respectivas do minuendo.

Si todas as unidades do subtrahendo forem ***menores*** *do que as do minuendo,* o resultado se **obterá,** observando-se o disposto no n. 89. (*Exemplo 1*).

Si, porém, as do subtrahendo forem maiores do que suas respectivas do minuendo, toma-se uma unidade ao algarismo immediato á esquerda; decompõe-se essa unidade em unidades da ordem que se trata; juntam-se ás existentes nessa ordem e pratica-se a subtracção, considerando-se o algarismo da esquerda como diminuido de uma unidade. (*Exemplo 2*).

Si o algarismo ou os algarismos da esquerda forem zeros, consideram-se como outros tantos noves e despreza-se uma unidade no primeiro algarismo significativo á esquerda. (*Exemplo 3*).

EXEMPLO 1) *78952765 — 54720634*

$$\begin{array}{lr} \textit{Minuendo}\ldots\ldots & 78952765 \\ \textit{Subtrahendo}\ldots & \underline{54720634} \\ \textit{Resto}\ldots\ldots\ldots & 24232131 \end{array}$$

EXEMPLO 2) *34521637 — 23612745*

$$\begin{array}{cccccccc} & 3 & 15 & 1 & 10 & 15 & 13 & \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 & 6 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 6 & 1 & 2 & 7 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 9 & 0 & 8 & 8 & 9 & 2 \end{array}$$

EXEMPLO 3) *53000768 — 43516827*

$$\begin{array}{cccccccc} 4 & 12 & 9 & 9 & 9 & 17 & & \\ 5 & 3 & 0 & 0 & 0 & 7 & 6 & 8 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 6 & 8 & 2 & 7 \\ \hline & 9 & 4 & 8 & 3 & 9 & 4 & 1 \end{array}$$

Subtracção por complemento

92. Chama-se complemento de um numero a differença entre dez unidades da ordem mais elevada desse numero e o proprio numero; ou, por outra: complemento de um numero é o que falta ao numero para completar dez unidades da sua ordem mais elevada.

Seja 468 o numero *cujo complemento se procura.*

Como as unidades de ordem mais elevada do numero 468 são *centenas*, toma-se a differença entre dez centenas ou 1 000 e 468, e ter-se-á:

$$\begin{array}{cccc} & 9 & 9 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 4 & 6 & 8 \\ \hline & 5 & 3 & 2 \end{array}$$

Com effeito, o complemento de 468 é 532, porque *532* é o que falta a 468 para completar *10 centenas.*

Para achar-se o complemento do numero 6350, toma-se a differença entre 10 milhares e 6350, e ter-se-á:

$$\begin{array}{ccccc} & 9 & 9 & 10 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 6 & 3 & 5 & 0 \\ \hline & 3 & 6 & 5 & 0 \end{array}$$

Assim, 3 650 é o complemento de 6350, porque *3 650* é o que falta a 6350 para completar *10 milhares.*

93. Pelas subtracções acima effectuadas vê-se que

Para obter-se o complemento de um numero, subtrahem-se de 9 todos os algarismos do numero, com excepção do ultimo algarismo *significativo* da direita, o qual se subtrahe de 10.

94. Para fazer-se uma subtracção por complemento, junta-se ao numero maior o complemento do menor, e da somma subtrahem-se *10* unidades da ordem mais elevada do numero menor.

EXEMPLO 1) — Achar a differença entre *56743* e *4287.*

Ao numero maior 56743 juntando-se *5713* (complemento do numero menor 4287) obtem-se 62456. Desta somma subtrahindo-se *10 milhares* (pois que são os milhares a ordem mais elevada do numero menor), apparece 52456, que é a differença procurada.

Numero maior	5 6 7 4 3	
Complemento do menor ..	5 7 1 3	
Somma ...	6 2 4 5 6	
Menos	*1 0*	*milhares*
Differença pedida	*5 2 4 5 6*	

Exemplo 2) — Achar a differença entre *149 395* e *67453*.

Numero maior	1 4 9 3 9 5	
Complemento do menor ..	3 2 5 4 7	
Somma.....	1 8 1 9 4 2	
Menos......	*1 0*	*dez. de milh.*
Differença pedida....	*8 1 9 4 2*	

§ VI — Provas da addição e da subtracção

95. ***Prova*** é uma segunda operação que serve para verificar si uma primeira está exacta.

96. Na addição ha as seguintes provas:

Primeira prova. — Começa-se a sommar pela primeira columna á esquerda, e a somma subtrahe-se das unidades obtidas nessa columna, quando-se fez a operação da direita para a esquerda. Escreve-se o resto, e colloca-se á sua direita o algarismo seguinte da somma total. Deste numero assim formado subtrahe-se a somma da segunda columna á esquerda, e procede-se do mesmo modo, até chegar-se á columna das unidades simples. *Si na ultima subtracção o resto for zero, suppõe-se exacta a operação.*

```
 7 8 6 5
 4 3 2 1
 9 0 7 8
 5 6 4 5
2 6 9 0 9
1 9
  2 0
    1 9
      0
```

Segunda prova. — A prova da addição tambem se tira, sommando-se novamente todas as parcellas, com excepção de uma. Diminue-se depois esta segunda somma da primeira. *Si o resto for igual a parcella que se exceptuou, suppõe-se que está certa a operação.*

	7 8 6 5
	4 3 2 1
	9 0 7 8
	5 6 4 5
1.ª somma	2 6 9 0 9
1.ª „	1 9 0 4 4
	7 8 6 5

97. **A prova de subtracção** se tira, sommando-se o subtrahendo com o resto. *Si o resultado for igual ao minuendo, suppõe-se certa a operação.*

Minuendo	4 3 6 7 9
Subtrahendo	1 6 9 6 4
Resto	2 6 7 1 5
	4 3 6 7 9

98. Estes meios de provar, quer numa quer noutra operação, constituem o que se chama *provas reaes*. São assim denominadas, porque realmente uma operação de composição só se póde verificar por outra de decomposição. Assim é que a addição se prova pela subtracção, e vice-versa.

Principaes usos de subtracção

(Tarnier)

Sob o ponto de vista pratico, os principaes usos da subtracção se resumem nos seguintes enunciados geraes:

1.° Uma pessoa fez successivamente muitas despezas: *Quanto lhe resta?* — Uma pessoa pediu emprestada certa quantia; pagou algumas por conta: *Quanto deve ella?* — Um banqueiro recebeu algumas sommas e pagou outras: *Qual é o estado de seu cofre?*

2.° Vende-se uma mercadoria por certa quantia; por esta quantia ganha-se certo numero de mil réis. *Quanto custou essa mercadoria?*

3.° Um acontecimento deu-se em certa epocha. *Quantos annos decorreram desde essa data até a epocha actual?* — *Quantos annos viveu uma pessoa*, sabendo-se as datas do seu nascimento e da sua morte? — Uma pessoa morreu em tal anno e com tal edade. — *Em que anno nasceu?*

Problemas sobre a subtracção

1. Um pai tinha 23 annos quando nasceu-lhe um filho. *Que idade terá este quando o pai tiver 51 annos?* — **R. 28 annos.**

2. Luiz XIV subiu ao throno em 1643 e morreu em 1715. *Quantos annos reinou?* — **R. 72 annos.**

3. As idades de Antonio e Pedro sommadas dão 39 annos; Pedro tem 23 annos. *Qual é a idade de Antonio?* — **R. 16 annos.**

4. *Quantos annos tem decorrido* desde 1200 (invenção da bussola) até 1922? — **R. 722 annos.**

5. Um barril de vinho continha 2165 litros; venderam-se 978; *quantos ainda restam?* — **R. 1.187 litros.**

6. Carlos Magno morreu em 814 e Napoleão I em 1821. *Quantos annos decorreram-se* entre essas duas epochas? — **R. 1007 annos.**

7. A America foi descoberta em 1492 por Christovam Colombo; quer-se saber em 1922 *quantos annos fará do seu descobrimento?* — **R. 430 annos.**

8. A differença entre dois numeros é de 67.025; o maior é 80.000; *qual será o menor?* — **R. 12975.**

9. O Brasil foi descoberto em 1500. *Quantos annos decorreram desde essa data até 1922?* — **R. 422 annos.**

10. A primeira cruzada deu-se no reinado de Felippe 1.°, em 1096; e a setima e a ultima, no reinado de Luiz 9.°, em 1270. *Quantos annos duraram as cruzadas?* — **R. 174 annos.**

11. Napoleão nasceu em 1769 e morreu em 1821. *Quantos annos viveu?* — **R. 52 annos.**

12. Benjamin Franklin morreu em 1790, com 84 annos; *em que anno nasceu?* — **R. 1706.**

13. A differença entre dois numeros é 154, e o maior é 340. *Qual é o menor?* — **R. 186.**

14. O monte mais alto do globo acha-se no systema Himalaya, na Asia; mede 7821 metros de elevação; e o monte Branco, o mais alto da Europa, tem 4810 metros. *Qual é a differença de altura destes dois montes.* — **R. 3011 metros.**

15. Uma pessoa pediu emprestada a quantia de 8:500$000 réis; deu por conta 3:125$000 réis. *Quanto deve ella?* — **R. 5:375$000.**

16. Um banqueiro recebeu a quantia de 420:329$000 rs. pagou 209:000$000 réis. *Qual é o estado de seu cofre?* — **R. 211:329$000.**

17. Vendeu-se uma casa por 7:500$000 rs., ganhando-se 1:625$000 réis. *Quanto custou a casa?* — **R. 5:875$000.**

18. Vendendo-se certa mercadoria por 409$800, ganha-se 146$300. *Quanto custou ella?* — **R. 263$500 réis.**

19. Uma pessoa que devia 986$240, deve ainda 379$500. *Quanto pagou?* — **R. 606$740 réis.**

20. *Qual é a differença entre o menor numero de dois algarismos e o maior numero de um só algarismo;* entre o menor numero de tres algarismos e o maior numero de dois algarismos etc.? — **R. 1.**

Exercicios sobre a addição e a subtracção de inteiros

1. 8+4−3+5−2+7−9+1−6. — **R. 5.**
2. 12+15−11+23+37−45+59+63−99. — **R. 59.**
3. 29+36+78−54+83−65+76−98. — **R. 85.**
4. 345+5−8+9−2−(5+3−4+1). — **R. 344.**
5. 729−(24+12−21)+17−29+35. — **R. 737.**
6. 347−158−(96+78)−[45−28−(9+1)]. — **R. 9.**
7. 1234−(101+234−79)−(374+95−49+3). — **R. 555.**
8. 3692+23−11−24+36−(7−9−11+23). — **R. 3706.**
9. 5891−[93+112−15−(34−56+78)]. — **R. 5757**
10. 6789+345−678+900−(276−400+324). — **R. 7156.**

Observações

Primeira observação. — Quando se tem uma expressão numerica e se quer conhecer o seu valor, deve-se saber:

1.° que *chamam-se* termos *sómente as quantidades precedidas do signal* (+) *ou do signal* (−); as precedidas de (+) são chamadas *termos additivos* e as precedidas de (−) chamam-se *termos subtractivos;*

2.° que *deve-se conhecer primeiro o valor de cada termo para depois operar-se;*

3.° que *tanto se póde fazer a operação á medida que se vão succedendo os termos, como sommar todos os additivos e da somma subtrahir a dos subtractivos.*

EXEMPLO. 8+4−3+5−2+7−9+1−6.

Podemos dizer: 8 *mais* 4, 12; *menos* 3, 9; *mais* 5, 14; *menos* 2, 12; *mais* 7, 19; *menos* 9, 10; *mais* 1, 11; menos 6, 5.

Podemos obter tambem o mesmo valor 5, *sommando* os termos additivos 8, 4, 5, 7 e 1 e da somma 25 *subtrahindo* 20, *somma dos subtractivos* 3, 2, 9 e 6.

Segunda observação. — Servimo-nos de um *parenthesis* para considerarmos *tudo quanto nelle está* como uma quantidade unica, que é a que apparece quando se effectuam as operações indicadas. Este signal não se dispensa si o que nelle se acha representa um subtrahendo. Assim, na expressão 3+4−2+9−(7−3+5−1), ha cinco termos: 3, 4, 2, 9 e (7−3+5−1). Determina-se o valor deste ultimo termo; e substituindo-o na expressão, acha-se: 3+4−2+9−8=6.

Terceira observação. — O parenthesis tambem não se dispensa quando tudo que dentro delle está, representa um *factor;* o que desde já se note para a multiplicação.

Problemas sobre a addição e a subtracção simultaneas.

1. Um general que tinha sob suas ordens 98075 homens perdeu 13750 homens na batalha; 1389 morreram de peste; 1127 morreram de ferimentos recebidos em combate; 524 pereceram afogados na passagem de um rio. Pergunta-se *quantos homens ficaram?* — **R. 81285 homens.**

2. Uma pessoa foi ao mercado, levando comsigo 10$000. Comprou 2$000 de carne; gastou 1$800 em fructas e 960 réis em legumes. *Quanto lhe resta?* — **R. 5$240 réis.**

3. Um tio deixou 9:600$000 para serem repartidos entre duas sobrinhas e um sobrinho, e determinou que cada sobrinha recebesse 3:400$000. *Quanto cada sobrinha teve de mais do que o sobrinho?* — **R. 600$000.**

4. Tres irmãos herderam 18:000$000. Ao mais velho tocou 4:992$000, e ao segundo 6:344$000. *Quanto o mais moço recebeu a mais do que o mais velho?* — **R. 1:672$000 réis.**

5. Uma pessoa deve 530$000. Si ella tivesse 340$000 mais do que tem, pageria a sua divida e ainda ficaria com 64$.00. *Quanto tem essa pessoa?* — **R. 314$000 réis.**

6. Comprou-se um terreno; dividido em 3 lotes; custando o primeiro 2:580$000; o segundo 1:920$000 e o terceiro 1:460$000. Vendeu-se o mesmo terreno em dois lotes, sendo o primeiro por 3:920$000 e o segundo por 4:020$000. *Qual foi o lucro?* — **R. 1:980$000 réis.**

7. Uma pessoa comprou uma casa por 6:500$000; gastou em reparos 1:825$240 e vendeu-a por 10:000$000. *Qual foi o lucro?* — **R. 1:674$760 réis.**

8. Um estudande para pagar 80$000 que devia, pediu a um dos seus collegas 35$000 emprestados. Feito o pagamento ainda ficou com 6$500. *Quanto tinha antes de receber o dinheiro emprestado?* — **51$500 réis.**

9. Um negociante comprou uma peça de panno com 115 metros. Vendeu primeiramente 23 metros e depois 19 metros. *Quantos metros ainda lhe restam?* — **R. 73 metros.**

10. Um caixeiro deve 50$000 ao alfaiate, a quem paga por prestações: na primeira entrega 10$000; na segunda 15$000; na terceira dá uma cedula de 100$000. *De quanto foi a terceira prestação, e quanto recebeu de troco?* — **R. A ultima prestação foi de 25$000 e recebeu 75$000 de troco.**

§ VII — Multiplicação dos numeros inteiros

99. ***Multiplicação****) é a operação que tem por fim, dados dois numeros, formar com um delles um terceiro, do mesmo modo que o outro é formado com a unidade.

100. ***Nomes empregados.*** — O resultado da operação chama-se *producto;* os dois numeros dados chamam-se *factores;* o factor que é o elemento

*) A multiplicação tambem se define: *A operação que tem por fim repetir um numero tantos vezes quantas são as unidades de outro.*

Só se póde applicar esta definição, quanto o multiplicador for um numero inteiro.

de formação do producto chama-se *multiplicando,* o factor que mostra como o producto se fórma com o multiplicando, chama-se *multiplicador*

101. ***Signal.*** — Na multiplicação emprega-se o seguinte signal (×), que se lê: multiplicado por, e que se colloca entre os factores. Tambem servimonos de um ponto (.) que se lê da mesma maneira. Assim, 8×4 ou $8 . 4$, se lê: *8* multiplicado por *4.*

102. ***Casos.*** — Ha tres casos de multiplicação:

1.º o da multiplicação de dois numeros simples;

2.º o da multiplicação de um numero composto por um simples;

3.º o da multiplicação de dois numeros compostos entre si.

Primeiro caso.* — *Multiplicação de dois numeros simples.

103. Os productos de dois numeros simples devem ser aprendidos de cór na tabella de Pythagoras.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Explicação da tabella. — Cada linha horizontal contém os productos dos numeros simples pelo numero que está no principio de cada linha. Assim:

A primeira linha horizontal contém os productos dos numeros simples, por *1:*

A segunda linha horizontal contém os productos dos numeros simples por *2*; e dizemos: 2 vezes 1 . . . *2*; 2 vezes 2 . . . *4*; 2 vezes 3 . . . *6*; . . . . . ; 2 vezes 9 . . . *18*.

A terceira linha horizontal contém os productos dos numeros simples por *3*; e dizemos: 3 vezes 1 . . . *3*; 3 vezes 2 . . . *6*; . . . .; 3 vezes 9 . . . *27*.

E de um modo analogo se procede em todas as outras linhas horizontaes.

Uso da tabella. — Querendo saber-se qual o producto de *5* vezes *7*, procura-se o 5 na primeira columna vertical e o 7 na primeira linha horizontal: no cruzamento das duas linhas acha-se o numero 35, que é o *producto procurado.*

Segundo caso. — ***Multiplicação de um numero composto por um simples.***

Exemplo: 3587 × 8.

104. Para multiplicar um numero composto por um simples escreve-se o multiplicando e por baixo delle o multiplicador; traça-se uma linha horizontal para separar os factores do producto, e começa-se a multiplicar da direita para a esquerda cada ordem de unidades do multiplicando pelo multiplicador, levando-se as reservas de cada producto a juntar ao producto seguinte.

3 5 8 7	*Multiplicando*
8	*Multiplicador*
2 8 6 9 6	*Producto.*

O multiplicador é 10, 100, 1000 . . .

105. *Para multiplicar-se um numero por 10, por 100, por 1000 etc.*, basta escrever-se á direita desse numero um, dois, tres, etc. zeros. — Em geral, para multiplicar-se um numero pela *unidade seguida de zeros*, basta escrever-se á direita do numero tantos zeros, quantos ha á direita da unidade.

$$25 \times 10 = 250$$
$$25 \times 100 = 2\,500$$
$$25 \times 1\,000 = 25\,000$$
$$25 \times 10\,000 = 250\,000$$

O multiplicador tem um algarismo significativo seguido de zero ou zeros.

106. *Para multiplicar-se um numero por um outro formado de algarismo significativo acompanhado de zeros*, multiplica-se esse numero pelo algarismo significativo, e accrescentam-se á direita do producto tantos zeros, quantos ha á direita do algarismo significativo.

Querendo multiplicar-se 129 por 700 multiplica-se 129 por 7; e, á direita do producto 903 accrescentando-se dois zeros, obtem-se *o producto procurado* 90300.

Terceiro caso. — *Multiplicação de dois numeros compostos entre si.*

Exemplo 2587 × 349.

107. Para multiplicar-se um numero composto por outro composto, escreve-se o multiplicando e por baixo delle o multiplicador; traça-se uma linha para separar-se os factores do producto. Multiplica-se da direita para a esquerda todo o multiplicando successivamente por cada algarismo do multiplicador, tendo-se o cuidado de escrever o primeiro algarismo de cada producto embaixo do algarismo respectivo do multiplicador; sommam-se os productos parciaes*) e tem-se o producto total.

2 5 8 7	*Factores*
3 4 9	*Factores*
2 3 2 8 3	*1º producto parcial*
1 0 3 4 8	*2º* ,, ,,
7 7 6 1	*3º* ,, ,,
9 0 2 8 6 3	*Producto total*

108. ***Os dois factores terminam em zeros.*** — *Quando o multiplicando ou o multiplicador, ou ambos conjunctamente terminarem em zeros*, pratica-se a multiplicação sem attender-se aos zeros; e

*) *Productos parciaes* são os productos obtidos pelos algarismos *significativos* do multiplicador.

depois collocam-se á direita do producto total tantos zeros, quantos forem os de ambos os factores.

Para multiplicar 43 200 por 23, effectua-se a multiplicação de 432 por 23, e á direita do producto 9 936 accrescentando-se dois zeros, será 993 600 *o producto pedido.*

Querendo multiplicar 3 267 por 48 000, effectua-se a multiplicação de 3 267 por 48, e á direita do producto 156 816 accrescentando-se tres zeros, será 156 816 000 *o producto pedido.*

O producto de 230 por 6 700 se obtem, multiplicando-se 23 por 67, e accrescentando-se tres zeros á direita do producto 1541. Assim, 1 541 000 será *o producto pedido.*

109. ***O multiplicador contém zeros intercalados.*** — *Quando entre os algarismos significativos do multiplicador ha zeros,* não se escrevem os productos, porque são zeros. Neste caso pratica-se a multiplicação pelo algarismo significativo seguinte, escrevendo-se o primeiro algarismo deste producto embaixo do algarismo que serviu de multiplicador.

Ex.:

```
      43602
       2009
     392418
   87204
   87596418
```

Observações

Observação primeira. — *O producto de dois factores não muda,* quando se inverte a ordem dos factores.

$$5 \times 7 = 7 \times 5$$

Observação segunda. — *Para multiplicar-se um todo composto de partes por um numero,* basta multiplicar-se cada parte do todo por este numero e ajuntar os productos parciaes.

$$(3 + 4 + 5) \times 6 = (3 \times 6) + (4 \times 6) + (5 \times 6) = 18 + 24 + 30 = 72.$$

Observação terceira. — *Para multiplicar-se um numero por um todo composto de partes,* basta multiplicar-se esse numero por cada parte do todo e ajuntar os productos parciaes

$$5 \times (7 + 8 + 9) = (5 \times 7) + (5 \times 8) + (5 \times 9) = 35 + 40 + 45 = 120.$$

Observação quarta. — *Quando se torna o multiplicando ou o multiplicador certo numero de vezes maior ou menor,* o producto torna-se esse mesmo numero de vezes maior ou menor.

Observação quinta. — *Quando se tornam simultaneamente multiplicando e multiplicador o mesmo ou differente numero de vezes maiores ou menores,* o producto torna-se tantas vezes maior ou menor, quantas são as unidades do producto dos factores introduzidos ou supprimidos.

Potencias

110. Chama-se potencia de um numero o producto de dois ou mais factores iguaes a esse numero. O factor que se repete denomina-se raiz ou base.

O numero de factores iguaes mostra o *grau* ou o *indice* da potencia.

Assim, $16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$ é a *quarta potencia* de 2, ou uma potencia do 4.º grau; $243 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ é a *quinta potencia* de 3 ou uma potencia do 5.º grau; $9 = 3 \times 3$ é a *segunda potencia* de 3; $125 = 5 \times 5 \times 5$ é a *terceira potencia* de 5.

111. Indica-se abreviadamente uma potencia, escrevendo-se á direita do numero e um pouco acima um pequeno algarismo, chamado expoente.

Assim, a quarta potencia de 2 se escreve: 2^4; a quinta potencia de 7 se escreve: 7^5.

Observações. — A primeira potencia de um numero qualquer é o proprio numero que se considera como affecto do expoente 1. Assim, $3 = 3^1$; $5 = 5^1$; etc.

A *segunda potencia* recebeu a denominação de quadrado; e a *terceira,* a de cubo.

§ VIII. Operações sobre as potencias

112. *Para multiplicar-se potencias da mesma base* sommam-se os expoentes.

$$3^4 \times 3^2 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^6.$$

113. *Para dividir-se duas potencias da mesma base* subtrahem-se os expoentes.

$$\frac{7^8}{7^5} = \frac{7^5 \times 7^3}{7^5} = 7^3.$$

114. *O producto de potencias do mesmo grau* é igual á mesma potencia do producto dos factores, e vice-versa.

$$2^4 \times 3^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = (2 \times 3)^4.$$

115. *O quociente de potencias do mesmo grau* é igual á mesma potencia do quociente dos factores, e vice-versa.

$$\frac{8^5}{2^5} = \frac{8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = \left(\frac{8}{2}\right)^5 = 4^5$$

116. *Para elevar-se uma potencia á outra,* multiplicam-se os expoentes

$$(4^2)^3 = 4^2 \times 4^2 \times 4^2 = 4^6$$

117. *Para extrahir-se uma raiz de uma potencia,* divide-se o expoente pelo indice.

$\sqrt[5]{6^{10}} = 6^2$, pois 6^2 elevada á 5.ª potencia, reproduz 6^{10}.

Exercicios sobre as operações de potencias

1.)	2.)	3.)
$2^3 \times 2^5$	$10^9 : 10^3$	$3^3 \times 5^3$
8×8^4	$4^8 : 4^4$	$6^8 \times 7^8$
$6^{10} \times 6^2$	$6^5 : 6$	$9^{12} \times 3^{12}$
$5^6 \times 5^4$	$9^5 : 9^2$	$4^7 \times 8^7$
$14^7 \times 14^2$	$15^9 : 15^7$	$18^5 \times 12^5$

4.)	5.)	6.)
$6^4 : 2^4$	$(5^7)^2$	$\sqrt[2]{3^{14}}$
$18^3 : 6^3$	$(3^5)^4$	$\sqrt[7]{10^{42}}$
$24^6 : 3^6$	$(8^7)^6$	$\sqrt[3]{4^9}$
$54^5 : 9^5$	$(7^4)^3$	$\sqrt[5]{2^{15}}$
$36^{10} : 12^{10}$	$(12^3)^5$	$\sqrt[6]{8^{12}}$

Principaes usos da multiplicação

(Tarnier)

Sob o ponto de vista pratico, os principaes usos da mu tiplicação se resumem nos seguintes enunciados geraes:

1.° Qual é o valor de muitos objectos, *quando se conhe o valor de um delles?*

2.° Sabendo-se quantos objectos se podem comprar po um mil réis ou por um franco, *achar quantos desses objecto se poderiam comprar com certa quantia de mil réis ou d francos.*

3.° Quantos minutos *tem um dia?* Quantos segundo *no mesmo tempo?*

4.° Qual é a superficie de uma sala rectangular, *conhe cendo-se a largura e o comprimento?* Qual é o volume d uma sala, *conhecendo-se o comprimento, a largura e a altur*

5.° Quanto ganha por anno um operario, *sabendo-s quanto elle ganha por dia?* Qual será sua economia no fi de um anno, *sabendo-se quanto economisa por dia?*

Problemas sobre a multiplicação

1. Um typographo compoz num mez 54 paginas, ga nhando por cada uma 1$800 rs. *Quanto recebeu?* — R. 97$20 réis.

2. Um metro de morim custa 1$500 rs. *Quanto custar uma peça de 18 metros?* — R. 27$000 réis.

3. Uma aula tem 17 bancos, em cada uma dos quae accommodam-se 12 alumnos. *Quantos alumnos tem a aula* — R. 204 alumnos.

4. Uma casa tem 45 janellas; cada uma dellas tem vidros. *Quantos vidros têm as janellas?* — R. 270 vidros.

5. Um hortelão, para contar com mais facilidade as ar vores da sua horta, plantou-as em fileiras de 320 arvores; a horta tem 79 fileiras. *Quantas arvores tem ella?* — R. 25 28 arvores.

6. Uma resma de papel contém 20 mãos, e cada mão 25 folhas. *Quantas folhas tem a resma?* — R. 500 folhas.

7. O cerco de uma cidade durou 21 dias; durante este tempo os sitiados atiraram 545 bombas por dia. *Qual é o numero de bombas atiradas durante o cerco?* — R. 11 445 bombas.

§ VIII. Operações sobre as potencias

112. *Para multiplicar-se potencias da mesma base* sommam-se os expoentes.

$$3^4 \times 3^2 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^6.$$

113. *Para dividir-se duas potencias da mesma base* subtrahem-se os expoentes.

$$\frac{7^8}{7^5} = \frac{7^5 \times 7^3}{7^5} = 7^3.$$

114. *O producto de potencias do mesmo grau* é igual á mesma potencia do producto dos factores, e vice-versa.

$$2^4 \times 3^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = (2 \times 3)^4.$$

115. *O quociente de potencias do mesmo grau* é igual á mesma potencia do quociente dos factores, e vice-versa.

$$\frac{8^5}{2^5} = \frac{8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = \left(\frac{8}{2}\right)^5 = 4^5$$

116. *Para elevar-se uma potencia á outra*, multiplicam-se os expoentes

$$(4^2)^3 = 4^2 \times 4^2 \times 4^2 = 4^6$$

117. *Para extrahir-se uma raiz de uma potencia*, divide-se o expoente pelo indice.

$\sqrt[5]{6^{10}} = 6^2$, pois 6^2 elevada á 5.ª potencia, reproduz 6^{10}.

Exercicios sobre as operações de potencias

1.) $2^3 \times 2^5$, 8×8^4, $6^{10} \times 6^2$, $5^8 \times 5^4$, $14^7 \times 14^2$

2.) $10^9 : 10^3$, $4^8 : 4^4$, $6^5 : 6$, $9^8 : 9^2$, $15^9 : 15^7$

3.) $3^3 \times 5^3$, $6^8 \times 7^8$, $9^{12} \times 3^{12}$, $4^7 \times 8^7$, $18^6 \times 12^6$

4.) $6^4 : 2^4$, $18^3 : 6^3$, $24^6 : 3^6$, $54^5 : 9^5$, $36^{10} : 12^{10}$

5.) $(5^7)^2$, $(3^5)^4$, $(8^2)^6$, $(7^4)^3$, $(12^3)^5$

6.) $\sqrt[3]{3^{15}}$, $\sqrt[7]{10^{14}}$, $\sqrt[3]{4^9}$, $\sqrt[8]{2^{16}}$, $\sqrt[6]{8^{12}}$

Principaes usos da multiplicação
(Tarnier)

Sob o ponto de vista pratico, os principaes usos da multiplicação se resumem nos seguintes enunciados geraes:

1.º Qual é o valor de muitos objectos, *quando se conhece o valor de um delles?*

2.º Sabendo-se quantos objectos se podem comprar por um mil réis ou por um franco, *achar quantos desses objectos se poderiam comprar com certa quantia de mil réis ou de francos.*

3.º Quantos minutos *tem um dia?* Quantos segundos *no mesmo tempo?*

4.º Qual é a superficie de uma sala rectangular, *conhecendo-se a largura e o comprimento?* Qual é o volume de uma sala, *conhecendo-se o comprimento, a largura e a altura.*

5.º Quanto ganha por anno um operario, *sabendo-se quanto elle ganha por dia?* Qual será sua economia no fim de um anno, *sabendo-se quanto economisa por dia?*

Problemas sobre a multiplicação

1. Um typographo compoz num mez 54 paginas, ganhando por cada uma 1$800 rs. *Quanto recebeu?* — R. 97$200 réis.

2. Um metro de morim custa 1$500 rs. *Quanto custará uma peça de 18 metros?* — R. 27$000 réis.

3. Uma aula tem 17 bancos, em cada uma dos quaes accommodam-se 12 alumnos. *Quantos alumnos tem a aula?* — R. 204 alumnos.

4. Uma casa tem 45 janellas; cada uma dellas tem 6 vidros. *Quantos vidros têm as janellas?* — R. 270 vidros.

5. Um hortelão, para contar com mais facilidade as arvores da sua horta, plantou-as em fileiras de 320 arvores; a horta tem 79 fileiras. *Quantas arvores tem ella?* — R. 25 280 arvores.

6. Uma resma de papel contém 20 mãos, e cada mão 25 folhas. *Quantas folhas tem a resma?* — R. 500 folhas.

7. O cerco de uma cidade durou 21 dias; durante este tempo os sitiados atiraram 545 bombas por dia. *Qual é o numero de bombas atiradas durante o cerco?* — R. 11 445 bombas.

8. Um vapor faz 5 viagens por dia, e transporta em cada uma dellas 243 pessoas. *Qual é o numero de pessoas transportadas?* — R. 1215 pessoas.

9. O Sol é 1405000 vezes maior do que a Terra, a qual é 49 vezes maior do que a Lua. *Quantas vezes o Sol é maior do que a Lua?* — R. 68 845 000 vezes.

10. Addicionar 458 numeros iguaes ao numero 3 769. — R. 1 726 202.

11. *Quantas horas tem um mez de 31 dias?* — R. 744 horas.

12. *Quantas pessoas vão em 32 wagons, si cada um delles leva 41 pessoas?* R. 1312 pessoas.

13. Um caderno de escripta tem 32 paginas e cada pagina 18 linhas. *Quantas linhas tem este caderno?* — R. 576 linhas.

14. Uma hora tendo 60 minutos, *quantos minutos ha em 35 horas?* — R. 2100 minutos.

15. *Quantos mezes ha em 46 annos?* — R. 552 mezes.

16. *Quantos metros de panno ha em 20 peças,* tendo cada uma 18 metros? — R. 360 metros.

17. Custando um metro de panno 6$800, *em quanto importarão 36 metros?* — R. 244$800 réis.

18. Em uma officina trabalham 45 operarios que ganham 4$500 por dia cada um. *Qual é a despeza diaria em pagamento?* — R. 202$500 réis.

19. Uma pessoa economisa 5$400 por semana. *Quanto economisará em 54 semanas?* — R. 291$600 réis.

20. Vendendo-se o cento de laranjas a 480 rs., *quanto custarão 300 laranjas?* — R. 1440 réis.

Exercicios sobre a addição, subtracção e multiplicação de inteiros

1. $3\times4+5\times6-2\times9+7\times6-8\times3+4$. — R. 46.
2. $5\times7-4\times8+2\times9\times6-3\times5\times6+4\times9$. — R. 57.
3. $6\ (4+3)+7\times5-3\ (9-6)+2\times3\times4$. — R. 92.
4. $10\ (5-2+4)-9\times5+4\times3\times5-2\ (9+6-7)$. — R. 69.
5. $9\ (3+5-2)-4\times8-3\times7+2\ (4+3-3\times2)$. — R. 3.
6. $4\ (7+3\times5+1)+2\times7\times8-5\ (6-3+4\times9)$. — R. 9.
7. $12+7(5-2+3+8)-(9\times4-3\times6+1)$. — R. 91.
8. $3(5+6\times4+7)+8\times9\times11-(7\times3\times4+8)$ — R. 808.
9. $7[3+4\times5-(6\times7-8\times4)]-5\times3\times6$. — R. 1.
10. $5(2+3)\ (4+2)+(9-5)\ (8-6)$. — R. 158.

Problemas sobre as tres primeiras operações

1. Um commerciante tinha uma sacca de café com 37 kilogrammos. Vendeu 14 kilogrammos e depois 17. *Quanto valem os kilogrammos restantes á razão de 2$400 o kilo?* — R. 14$400.

2. Um taverneiro comprou 328 feixes de lenha por 9$840. Vendeu 250 a 80 rs. e o resto a 60 réis. *Quanto ganhou?* — R. 14$840 réis.

3. Um negociante vendeu a uma pessoa 6 cadeiras a 3$500 cada uma, 2 ditas de braços a 8$000 cada uma; e um banco de piano por 12$000. O comprador deu uma nota de 100$000; *quanto se lhe deve dar de troco?* — R. 51$000 réis.

4. Um mestre de obras contractou 16 operarios a quem paga assim: 6 a 5$000 cada um por dia, 3 a 4$500 e os outros a 3$500. *Em quanto importa o pagamento de 6 dias de trabalho?* R. 408$000 réis.

5. Paulo deve a Pedro 1:000$000, que lhe paga em 4 prestações. Na primeira leva 27 notas de 5$000; na segunda, 15 de 10$000; na terceira 16 de 20$000. *De quanto será a ultima prestação?* — R. 395$000 réis.

6. Entregaram-se as seguintes quantias: 15$600 a uma pessoa; a uma segunda o dobro do que recebeu a primeira, menos 5$200; a uma terceira o triplo do que recebeu a segunda, menos 14$400; e a uma quarta o dobro do que receberam a 2.ª e a 3.ª, mais 3$200. *Que quantia foi entregue ás 4 pessoas?* — R. 287$600 réis.

7. Em uma familia o chefe ganha 8$320 por dia; sua mulher 5$000, e 2 filhos, 4$600 cada um. Pergunta-se: 1.º) *quanto ganha esta familia por semana de 6 dias de trabalho?* 2.º) *quanto póde economisar por semana, sendo a despeza diaria de 12$000?* — R. 1.º) 135$120; 2.º) 51$120 réis.

8. Um negociante de aves comprou 32 gallinhas a 1$800 rs. cada uma, 48 frangos a 1$100 rs., 16 patos a 2$200 e 9 perús a 6$500. Na venda ganhou 700 rs. por gallinha, 400 rs. por frango, 500 rs. por pato e 1$500 rs. por perú. Pergunta-se: 1.º) *quanto empregou na compra?* 2.º) *de quanto foi o lucro?* 3.º) *quanto arrecadou na venda?* — R. 1.º) 204$100 réis; 2.º) 63$100 réis; 3.º) 267$200 réis.

9. Uma pessoa vendeu 26 hectolitros de trigo a 10$800 o hectolitro, e 18 hectolitros de vinho a 13$500 o hectolitro. A importancia da venda deu para comprar um cavallo e mais 26 metros de panno a 2$300 o metro. *Quanto custou o cavallo?* — R. 464$000 réis.

10. Um negociante comprou 68 metros de panno a 6$800 o metro, 47 metros de seda a 6$000 o metro e 84 metros de veludo a 14$400 o metro. Deu em pagamento 16 notas de 20$000, 9 de 50$000, 7 de 100$000 e 1 de 500$000. *O comprador ainda ficou devendo alguma quantia? ou tem de receber troco?* — R. 16$000 réis.

§ IX — Divisão dos numeros inteiros

118. *Divisão**) é a operação que tem por fim, dados o producto de dois factores e um delles, achar o outro.

119. *Nomes dos termos.* — O producto dado chama-se *dividendo*; o factor conhecido, *divisor*; e o factor que se procura, *quociente*.

O dividendo e o divisor chamam-se *termos* da divisão.

120. *Signal.* — Na divisão usa-se do seguinte signal (:) que se colloca entre os dois numeros que têm de dividir-se.

Tambem se usa de um traço (—), em cima do qual se escreve o dividendo, e embaixo o divisor.

Estes signaes se lêm: **dividido por.** Assim, 7 : 3 ou $\frac{7}{3}$, se lê: **7 dividido por 3.**

121. *Casos.* — Ha quatro casos de divisão:

1.º divisor simples, devendo ser simples o quociente;

2.º divisor simples, devendo ser composto o quociente;

3.º divisor composto, devendo ser simples o quociente;

4.º divisor composto, devendo o quociente ser composto.

122. *Primeiro caso.* — *Divisor simples e quociente simples.*

Sabe-se que o quociente é simples, quando o producto do divisor por 10, é maior do que o dividendo.

*) Esta definição é a geral. Tambem ha duas outras definições: 1) Divisão é a operação que tem por fim repartir um numero dado em tantas partes iguaes, quantas são as unidades de outro tambem dado 2) Divisão é a operação que tem por fim procurar quantas vezes um numero dado contém outro tambem dado.

EXEMPLO. — Seja para dividir *48* por *6*

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Conhecendo-se a tabella da multiplicação, é facil achar-se o quociente. Para isso, procurando-se *48* na columna vertical que começa por *6*, vemos o numero 8 no principio da linha em que está o numero 48. Assim, *8 é o quociente* de *48* por *6*.

Si tivermos de dividir *58* por *7*, procuraremos o numero *58* na columna vertical que começa por *7*, e não o encontrando, vemos que está elle comprehendido entre *56* (producto de *7* por 8) e *63* (producto de *7* por 9). Assim, o numero proposto *58* contém o numero 7, 8 vezes, deixando um resto.*)

Segundo caso. — *Divisor simples e quociente composto.*

Sabe-se que o quociente é composto, quando o producto do divisor por 10, é menor do que o dividendo.

EXEMPLO. — *7432 : 6.*

123. Para dividir um numero composto por um simples, escreve-se o divisor á direita do dividendo, separando este daquelle por meio de uma risca vertical, e o divisor do quociente por meio de uma risca horizontal.

Procura-se quantas vezes o divisor cabe no primeiro algarismo da esquerda do dividendo, ou

*) Quando o dividendo não é um producto exacto do divisor pelo quociente, diz-se que *a divisão tem por fim procurar o maior numero de vezes que o dividendo contém o divisor.*

nos dois primeiros, quando o primeiro for menor do que o divisor; o numero de vezes se escreve no quociente, e por elle se multiplica o divisor, escrevendo-se o producto debaixo do dividendo parcial, que é o primeiro ou os dois primeiros algarismos da esquerda do dividendo. Subtrahe-se esse producto do dividendo parcial, e á direita do resto se escreve o algarismo seguinte do dividendo principal, formando-se deste modo um segundo dividendo parcial. Assim se procede por diante.

Quando, porém, o resto com o algarismo seguinte do dividendo não contiver o divisor, escreve-se um zero no quociente; e, abaixando-se o algarismo seguinte do dividendo, continua-se a operação

```
Dividendo . . . . 7' 4 3 2 | 6 . . . . . Divisor
                  6        |--------------------
                  ---      | 1 2 3 8 Quociente
2° dividendo parcial 1 4
                     1 2
                     ---
3°    "     "          2 3
                       1 8
                       ---
4°    "     "            5 2
                         4 8
                         ---
                           4 . . . . Resto
```

Observação. — *Para abreviar-se a divisão, quando se multiplica o quociente pelo divisor, não se escreve o producto do dividendo parcial:* faz-se logo mentalmente a subtracção, como se vê no seguinte exemplo:

```
5 2' 7 6 | 8
  4 7    |------
    7 6  | 6 5 9
      4
```

Terceiro caso. — *Divisão de um numero composto por outro composto, devendo o quociente ser simples.*

Sabe-se, como no primeiro caso, que o quociente é simples, quando o producto do divisor por 10 é maior do que o dividendo.

EXEMPLOS. 1) *5368 : 3789;*
2) *8368 : 975.*

124. **Para dividir-se um numero composto por outro composto, devendo o quociente ser simples,** escreve-se o divisor á direita do dividendo, separando-se este daquelle por uma risca vertical, e o divisor do quociente por uma risca horizontal.

Si o dividendo tiver tantos algarismos quantos o divisor, (1°. Ex.) divide-se o primeiro algarismo da esquerda do dividendo pelo primeiro á esquerda do divisor. O quociente se multiplicará por todo o divisor, e o producto se subtrahirá do dividendo.

Si o dividendo tiver mais um algarismo que o divisor, (2°. Ex.) divide-se o numero formado pelos dois primeiros algarismos á esquerda do dividendo pelo primeiro á esquerda do divisor, e procede-se depois como acima ficou dito.

Póde acontecer que, determinado o quociente, seja este excessivo (2°. Ex.) Isto se reconhecerá, quando, multiplicando-se esse quociente pelo divisor, não se puder effectuar a subtracção, por ser o producto maior do que o dividendo. *Neste caso diminue-se o quociente de uma unidade* e pratica-se depois o que manda a regra.

```
EXEMPLO 1)              EXEMPLO 2)
5 3 6 8 | 3 7 8 9       3 6 8 | 9 7 5
1 5 7 9 | 1             5 6 8 | 8
```

Quarto caso. — *Divisão de um numero composto por outro composto, devendo o quociente ser composto.*

Sabe-se que o quociente é composto, como no segundo caso, quando o producto do divisor por 10 é menor do que o dividendo.

EXEMPLOS. 1) *456792 : 426;*
2) *35742 : 98.*

125. **Para dividir um numero composto por outro composto, devendo o quociente ser composto,** escreve-se o divisor á direita do dividendo, separando-se este daquelle por uma risca vertical, e o divisor do quociente por uma risca horizontal.

A' esquerda do dividendo separam-se tantos algarismos quantos forem precisos para conter o divisor, e busca-se quantas vezes o primeiro algarismo da esquerda do divisor se contém no primeiro, ou nos dois primeiros da esquerda do dividendo (conforme este dividendo parcial constar de tantos algarismos, ou de mais um dos que tiver o divisor.) O quociente que se achar se escreverá no seu lugar competente; forma-se o seu producto por todo o divisor, e subtrahe-se esse producto dos algarismos separados á esquerda do dividendo. A' direita do resto se escreve o algarismo seguinte do dividendo, e continua-se do mesmo modo a divisão, até se acabarem os algarismos do dividendo.

Si acontecer que, escrevendo-se á direita do resto o algarismo do dividendo, o numero assim formado seja menor do que o divisor, escreve-se um zero no quociente, e á direita do dividendo parcial escrevendo-se o algarismo seguinte do dividendo, continua-se a operação.

EXEMPLO 1.°

$$\begin{array}{r|l} 4567'92 & 426 \\ \cline{2-2} 3079 & 1072 \\ 972 & \\ 120 & \end{array}$$

EXEMPLO 2.°

$$\begin{array}{r|l} 357'42 & 98 \\ \cline{2-2} 634 & 364 \\ 462 & \\ 70 & \end{array}$$

Observações.

Observação primeira. — *Quando se torna o dividendo certo numero de vezes maior ou menor,* o quociente torna-se o mesmo numero de vezes maior ou menor.

Observação segunda. — *Quando o divisor se torna certo numero de vezes maior ou menor,* o quociente torna-se o mesmo numero de vezes *menor* ou *maior.*

Observação terceira. — *Quando tornando-se o dividendo certo numero de vezes maior ou menor, torna-se tambem o divisor esse mesmo numero de vezes maior ou menor,* o quociente não muda. Si, porém, houver resto na divisão, elle se achará esse mesmo numero de vezes maior ou menor.

Observação quarta. — *Quando o dividendo e o divisor acabam em zeros,* supprimem-se em ambos igual numero de zeros: o quociente não muda; mas o resto deve-se multiplicar pela unidade seguida de tantos zeros, quantos foram supprimidos.

$$\begin{array}{r|l} 364'1(000 & 56(000 \\ \cline{2-2} .281 & 65 \\ ..1\,000 & \end{array}$$

Observação quinta. — *Para dividir-se um numero pela unidade seguida de zeros, separam-se,* com uma virgula, tantos algarismos á direita do dividendo, quantos são os zeros á direita da unidade. O numero á esquerda da virgula representa a parte inteira do quociente; e o da direita, o resto. Assim,

$$\frac{357}{100} = 3{,}57; \qquad \frac{47389}{1000} = 47{,}389.$$

Observação sexta. — *Para dividir-se um numero por um producto de muitos factores,* basta dividil-o pelo primeiro factor do producto; o quociente obtido, pelo segundo factor, e assim por diante, até que se tenha dividido pelo ultimo factor. V. g.: *Querendo dividir-se o numero* 462 *por um producto* 42 (cujos factores são: *2, 3* e *7*), basta dividil-o pelo factor 2; o quociente 231, pelo segundo factor 3; o quociente 77, pelo factor 7, e ter-se-á o *quociente 11 procurado.*

$$\text{Com effeito, } \frac{462}{42} = 11.$$

Observação setima. — *Para dividir-se um producto, por um de seus factores,* basta supprimir esse factor no producto. V. g.

$$\frac{2 \times 3 \times 7}{7} = 2 \times 3 \times \frac{7}{7} = 2 \times 3 \times 1 = 6.$$

Observação oitava. — *Quando um producto encerra todos os factores de outro producto, o quociente da divisão do primeiro pelo segundo se obtem, supprimindo-se no primeiro producto todos os factores do segundo.*

$$\frac{3\times5\times7}{5\times7}=3.$$

§ X — Prova real da multiplicação e da divisão

126. Para tirar-se a prova da multiplicação, divide-se o producto pelo multiplicador, e deve apparecer no quociente o multiplicando; ou divide-se o producto pelo multiplicando, e deve apparecer no quociente o multiplicador.

EXEMPLO.

$$\begin{array}{r} 4\,7\,3\,2 \\ 8 \\ \hline 3\,7\,8\,5\,6 \end{array}$$

1.° Dividir o producto pelo **multiplicador:**

$$\begin{array}{l|l} 3\,7'8\,5\,6 & 8 \\ \cline{2-2} \;.\,5\,8 & 4\,7\,3\,2 \\ \quad .\,2\,5 & \\ \qquad .\,1\,6 & \\ \qquad\quad .\,0 & \end{array}$$

2.° Dividir o producto pelo **multiplicando:**

$$\begin{array}{l|l} 3\,7'8\,5\,6 & 4\,7\,3\,2 \\ \cline{2-2} \;.\;.\;.\;.\,0 & 8 \end{array}$$

127. Para tirar-se a prova real da divisão, multiplica-se o quociente pelo divisor, e junta-se o resto da divisão (si o houver). O numero que resultar deve ser igual ao dividendo.

EXEMPLO.

$$\begin{array}{l|l} 4\,6'8\,9 & 5 \\ \cline{2-2} \;.\,1\,8 & 937 \\ \quad .\,3\,9 & \\ \qquad .\,4 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 9\,3\,7 \\ \times\,5 \\ \hline 4\,6\,8\,5 \\ +\,4 \\ \hline 4\,6\,8\,9 \end{array}$$

Principaes usos da divisão

(Tarnier)

Sob o ponto de vista pratico, os principaes usos da divisão se resumem nos seguintes enunciados geraes:

1.° Repartir igualmente certa quantidade de dinheiro ou de objectos quaesquer entre muitas pessoas.

2.° Qual é o preço de um objecto, conhecendo-se o preço de muitos desses objectos?

3.° Quantos objectos se podem obter com uma somma, conhecendo-se o preço de um objecto?

4.° Conhecendo-se a renda annual de uma pessoa, *quanto póde ella gastar por mez, por dia?*

Problemas sobre a divisão

1. Uma roda em 24 horas faz 14 400 voltas. *Quantas voltas faz a roda por hora?* — R. 600 voltas.

2. A revolução franceza deu-se em 1789; *em que seculo?* — R. 18.° seculo.

3. Uma pessoa deixou a quantia de 500:000$000 réis para ser dividida entre 25 pessoas. *Quanto tocará a cada uma?* — R. 20:000$000 réis.

4. Dezoito metros de chita custam 23$400. *Quanto custará 1 metro?* — R. 1$300 réis.

5. Uma pessoa levou 120 dias para ir de Porto Alegre á China. *Quantos mezes gastou na viagem?* — R. 4 mezes.

6. Um metro de merinó custa 7$500 rs. *Quantos metros se podem comprar por 45$000 réis.* — R. 6 metros.

7. Por uma maçã pagou-se 800 réis. *Quantas maçãs se podem comprar por 9$600 réis?* — R. 12 maçãs.

8. Uma pessoa tem de renda annual 1:500$000. *Quanto póde ella gastar por mez?* — R. 125$000 réis.

9. Uma pessoa ganha por mez 600$000. *Quanto ganha ella por dia?* — R. 20$000 réis.

10. O numero 72 841 é o producto de dois factores, dos quaes um é 23; *qual é o outro?* — R. 3 167.

11. *Qual é o numero* que, multiplicado por 307, dá o numero 75 215? — R. 245.

12. Exportaram-se da China 157 500 000 kilogrammos de chá em 7 annos. *Quantos kilogrammos por anno?* — R. 22 500 000 kilogrammos.

13. Uma locomotiva que faz 19 kilometros por hora deve percorrer 247 kilometros. *Quantas horas levará ella na viagem?* — R. 13 horas.

14. Um homem fez 162 metros de um trabalho em 9 dias. *Quantos metros fez por dia?* — R. 18 metros.

15. *Pede-se um numero 17 vezes* menor do que 731. — R. 43.

16. Qual é o numero que, sendo multiplicado por 5, acha-se augmentado de 1000 unidades? — R. 250.

17. Um empregado ganha 1:000$000 por anno: *quanto ganha por mez?* — R. 83$333 réis.

18. *Quanto é preciso pagar por mez para em 7 mezes satisfazer uma divida de 354$620?* — R. 50$660 réis.

19. Si uma porção de panno custou 57$600, *a como sahiu um metro*, sabendo-se que o panno comprado tinha 12 metros? — R. 4$800 réis.

20. Gastaram-se 308$000 com uma companhia de operarios, cada um dos quaes ganhava 1$100. *Qual era o numero de operarios?* — R. 280 operarios.

Exercicios sobre a addição, subtracção, multiplicação e divisão dos inteiros

1. $6 \times 2 + 14 : 7 + 3 - 5 \times 8 : 4 + 27 : 9 \times 6$. — R. 25.
2. $18 : 3 + 5 \times 7 + 2 \times 12 : 4 - 6 (9 + 7 - 11)$. — R. 17.
3. $5 \times 9 + 6 + 24 : 8 + 15 : 5 \times 4 + 7 - 3 \times 12 : 9$. — R. 69.
4. $2 (3 \times 4 + 10 : 5) + 3 (14 : 2 - 5 + 7) + 105 : 3 : 7$. — R. 60.
5. $(15 + 7 \times 6 : 3 - 4 \times 2) + 11 + 23 - 39 : 13 + 8$. — R. 60.
6. $8 (4 + 9 \times 3 \times 15 : 5 - 7) + 5005 : 13 : 11 - 9 \times 8 \times 7$. — R. 155.
7. $(5 + 4) (3 + 8) : 3 + 4 (9 - 6) (8 - 3)$. — R. 93.
8. $[210 : (2 \times 7) + (6 - 2) (9 - 4)] \times (3 + 5 \times 4) (2 \times 6)$. — R. 9660.
9. $100 : 2 : 5 + (7 \times 3 + 9) (6 \times 3 - 8) (15 : 3 + 7)$. — R. 3510.
10. $5 [(3 + 4 \times 5) - (6 \times 9 - 3 \times 17)] + 5 - (8 - 3 + 40 : 10)$. — R. 96.

Problemas sobre as quatro operações de inteiros

1. Uma senhora comprou 4 kilogrammos de lã a 2$800 cada kilo; para fiar pagou 300 rs. por kilo. Gastou 40 dias para fazer meias, que ella vendeu por 1$500 o par. Com 1 kilogrammo de lã ella faz 8 pares; *quanto ganhou por dia?* — R. 690 réis.

2. Com 2:904$000 um negociante comprou 15 peças de panno, 4 das quaes valem 168$000 cada uma; e 6, 192$000 cada uma. *Quanto vale cada uma das outras?* — R. 216$000 réis.

3. Um negociante comprou 245 kilos de assucar a 900 rs o kilo; 70 ditos de sabão a 800 rs. cada um, e 25 de banha a 1$500 rs. o kilo. Saldou o debito pagando á vista 247$200. *Quanto lhe abateram na importancia da compra, e esse abatimento a quantos por cento corresponde?* — R. 61$200; 20 por cento.

4. Perguntando-se a um jogador quanto ganhára em 4 partidas que jogára, respondeu: na segunda partida o meu ganho foi o triplo do que havia alcançado na primeira, menos 1$200; na terceira ganhei tanto como nas duas primeiras, mais 600 rs.; na quarta ganhei duas vezes mais do que na segunda, com tres vezes mais do que na terceira, menos 12$600. O ganho total tendo sido de 12$600, *quanto ganhou em cada partida?* — R. 1.ª 1$200 réis; 2.ª 2$400 réis; 3.ª 4$200 réis; 4.ª 4$800 réis.

5. Dois correios dirigem-se um para o outro; a distancia que os separa é de 500 kilometros. Um que faz 16 kilometros

por hora, parte ao meio dia; e o outro, que faz 12 kilometros no mesmo tempo, parte 5 horas depois do primeiro. *A que horas se encontrarão, e a que distancia dos respectivos pontos de partida estará cada um?* — R. A's 8 horas da manhã; 1.º 320 kilometros, 2.º 180 kilometros.

6. Dois correios seguem o mesmo caminho, levando um sobre o outro 100 kilometros de avanço. O primeiro que faz 10 kilometros por hora, parte ás 8 horas da manhã; e o segundo que faz 15 kilometros por hora, parte no mesmo dia ao meio dia. *A que horas se encontrarão, e a que distancia dos respectivos pontos de partida estará cada um?* R. A's quatro horas da tarde do dia seguinte; 1.º 320 kilometros, 2.º 420 kilometros.

7. Um especieiro comprou por 75$200 uma sacca de café com 60 kilogrammos. A torração deste café custa 80 rs. por kilo e diminue $^1/_5$ no peso. *Por quanto deverá vender o kilo de café torrado para ganhar 20 por cento?* R. 2$000.

8. Um mascate comprou 12 duzias de lenços a 6$000 a duzia; perdeu 5 lenços. *A como deve vender cada um dos outros para ter um lucro de 25$300?* R. 700 réis.

9. Uma pessoa, que ganha annualmente 1:200$000 gasta 1$600 por dia e economisa 300$000. *Quantos litros de vinho de 800 rs. o litro poderá comprar com o resto do seu ordenado?* — R. 395 litros.

10. Um negociante comprou 208 kilogrammos de mercadoria por 260$000; vendeu a oitava parte por 38$350, e o resto á razão de 1$600 cada kilo. *Qual foi o lucro?* — R. 69$550 réis.

Problemas de recapitulação das quatro operações sobre inteiros

1. Uma pessoa deu por conta de uma divida sua, a quantia de 225$000 réis e ficou devendo ainda 339$000 réis. *Quanto devia ella?* — R. 564$000 réis.

2. Uma pessoa nasceu em 1809 e morreu com a idade de 34 annos. *Em que anno morreu?* — R. 1843.

3. Compraram-se 10 metros de chita por 12$000; 8 metros de morim por 11$200 réis, 4 metros de fita por 3$200 réis. *Qual o gasto feito?* — R. 26$400.

4. A invenção da imprensa data de 1445 e a da polvora de 1474. *Quanto tempo decorreu entre estas duas epochas?* — R. 29 annos.

5. Um vapor caminhou 35 dias, para fazer a viagem elle gasta 52 dias. *Quantos dias lhe faltam?* — R. 17 dias.

6. Um barril cheio de azeite pesa 137 kilogrammos; vasio, o mesmo barril pesa 19 kilogrammos. *Qual é o peso do azeite?* — R. 118 kilogrammos.

7. Carlos Magno nasceu em 742 e morreu com 72 annos, depois de ter reinado 46 annos. *Em que anno foi elle elevado ao throno e em que anno morreu?* — R. 768, 814.

8. Uma escola estava dividida em tres classes, tendo: a pequena, 69 alumnos; a média, 48; a grande 53. Sahiram 12

da pequena, 8 da média e entraram 7 para a grande. *Quantos alumnos ha na escola e em cada classe?* — R. 157. 57 (cl. peq.); 40 (cl. méd.); 60 (cl. gr.)

9. Repartiram-se 144$000 entre tres pessoas, de modo que á primeira tocou 52$000, á segunda 8$000 menos do que á primeira. *Qual a parte que tocou á terceira?* — R. 48$000 réis.

10. A luz percorre 310000 kilometros por segundo. *Quantos kilometros percorre por dia?* — 26.784.000.000 kilometros.

11. Uma pessoa nasceu em 1858; *em que anno terá ella 60 annos?* — R. 1918.

12. Francisco I, rei da França, nasceu em 1494 e morreu em 1549. *Quanto tempo viveu?* — R. 55 annos.

13. Um alumno fazendo uma addição achou para somma 34597. O mestre depois de ter examinado a operação, lhe disse: Vmcê, enganou-se. Na primeira columna á direita contou 1 de mais; na segunda columna, esqueceu-se de levar 2 de reserva; na terceira, contou 2 de menos e na quarta, contou 3 de mais. *Qual devia ser o resultado e qual é a differença entre o resultado achado pelo alumno e o verdadeiro resultado?* — R. 31816; 2781.

14. Suppondo-se que um livro de 450 paginas tem 36 linhas por pagina e 24 lettras por linha; pergunta-se *quantas lettras tem o livro?* — R. 388800 lettras.

15. Multiplicando-se dois numeros inteiros, dos quaes 63 era o multiplicando, obteve-se o producto 3339; mas tomou-se um 5 por um 3 no algarismo das unidades do multiplicador. *Qual deve ser o verdadeiro producto?* — R. 3465.

16. Um operario trabalhou 17 dias, á razão de 540 réis por dia, em casa de um homem a quem elle devia 16$000. *Quanto deve elle ainda?* — R. 6$820 réis.

17. Um pai repartiu os seus bens entre os seus quatro filhos; deu ao mais velho 5:500$000 réis; ao segundo, 3:000$000 réis; ao terceiro, 2:800$000 réis, e ao quarto, 1:800$000 réis. *Em quanto importavam os bens do pae?* — R. 13:100$000 réis.

18. Um pai tem 45 annos e o seu filho 18; quando o pai tiver 60 annos, *qual será a idade do filho?* — R. 33 annos.

19. Uma herança foi assim dividida: o primeiro herdeiro recebeu 5:600$000; o segundo, 320$000 menos; o terceiro, 200$000 menos do que o segundo; além disso, 1:440$000 foram legados aos hospitaes e 480$000 distribuidos aos pobres. *Qual é a importancia desta herança?* — R. 17:880$000 réis.

20. Uma obra foi feita em 64 dias por 6 operarios, que trabalharam 11 horas por dia. *Quantas horas trabalharia um operario só, para fazer a mesma obra?* — R. 4224 horas.

21. Tres pessoas repartiram entre si uma herança. A primeira teve o dobro do que tocou á segunda; á segunda, o triplo do que coube á terceira que recebeu 300$000. *De quanto era a herança?* — R. 3:000$000 réis.

22. Um livreiro comprou 12 volumes a 1$400 cada um e recebeu um 13.º de graça. *Que lucro teve elle, vendendo cada volume a 1$700?* — R. 5$300 réis.

23. Uma pessoa deve a quantia de 734$000. Dá em pagamento 74 metros de linho a 1$500 o metro, 42 metros de panno

a 6$000 o metro, e 27 metros de panninho a 900 réis o metro; *quanto ainda está devendo?* — R. 346$700 réis.

24. *Qual é o numero que, multiplicado por 307, dá o numero 75215?* — R. 245.

25. Quatro metros de panno tendo custado 14$880 réis, *a como sahiu o meio-metro?* — R. 1860 réis.

26. O menor de dous numeros excede sua differença de 17, e a sua somma é 112. *Quaes são estes numeros?* — R. 69; 43.

27. Comprei uma casa por 21:396$000; gastei para reparal-a 5:307$200, e desejo vendel-a lucrando 2:400$000. *Por que preço devo vendel-a?* — R. 29:703$200.

28. Uma pessoa que casou-se tendo 25 annos, morreu em 1842, 30 annos depois de casada. *Em que anno nasceu ella?* — R. 1787.

29. O raio do equador terrestre é de perto de 6377 kilometros; a distancia da Terra ao Sol vale 24068 vezes este raio. *Quantos kilometros ha da Terra ao Sol?* — R. 153481636 kilometros.

30. Uma tia deixa a metade de sua fortuna a 5 sobrinhos e a outra metade a 3 sobrinhas. *Que parte deve tocar a cada um dos herdeiros, sendo de 6:336$000 a fortuna da tia?* — R. 633$600 réis. (sobr.os); 1:056$000 réis (sobr.as).

31. Qual é o numero que, sendo dividido por 8, acha-se diminuido de 861 unidades? — R. 984.

32. Um pai deixa a fortuna de 14:000$000 para ser dividida entre seus tres filhos. O primeiro recebeu 4:980$000; o segundo 140$000 menos do que o primeiro. *Qual a parte do terceiro?* — R. 4:780$000 réis.

33. Para pagar os salarios de um creado durante um anno deu-se-lhe: 3 moedas de 20 francos, 16 de 5 e 5 de 2 francos. *Quanto ganha por anno este criado?* — R. 150 francos.

34. Ajustaram-se 7 operarios á razão de 3$500 réis por dia cada um; trabalharam 95 dias e cada operario fez por dia 3 metros. Tendo-se vendido a 2$000 o metro, *qual o lucro ou prejuizo?* — R. 1:662$500 réis.

35. Dois trens partem ao mesmo tempo, um de Paris e outro de Strasbourg; o primeiro faz 43 kilometros por hora; o segundo, 57. Sendo de 500 kilometros a distancia das duas cidades (pela estrada de ferro), *depois de quantas horas se encontrarão os trens?* — R. 5 horas.

36. Si eu tivesse o dobro do que tenho e mais 15$200, poderia comprar um movel pelo qual me pedem 170$400. *Quanto tenho?* — R. 77$600 réis.

37. Um moleiro deve moer 70 saccos de trigo de 75 kilogrammos, cada um, em 25 dias. *Quantos kilogrammos de trigo deve moer por dia?* — R. 210 kilogrammos.

38. Tres operarios, que trabalharam juntos, ganharam: o primeiro 160$000; o segundo, tanto como o primeiro e mais 60$000; e o terceiro tanto como os outros dois juntos. *Quanto recebeu cada um e qual foi o total da receita?* — R. 220$000 réis (2.º); 380$000 réis (3.º); 760$000 réis (receita).

39. Uma pessoa possuia a quantia de 4:800$000 réis; pagou uma divida de 3:400$000 réis. *Com quanto ficou?* — R. 1:400$000 réis.

40. Repartir 3:600$000 entre duas pessoas de modo que a primeira tenha o mesmo numero de notas de 10$000 que a segunda de 5$000. *Quanto receberá cada uma?* — 2:100$000 (1.ª); 1:200$000 (2.ª).

41. Com 216$000 mais do que tenho, poderia pagar uma divida de 720$000 e ainda ficaria 11$200. *Quanto possuo?* — R. 515$200 réis.

42. Um negociante comprou 463 barricas de sebo por 10:741$600. Tendo-as vendido com o lucro de 926$000, *quanto ganhou em cada barrica e por que preço vendeu cada uma?* —R. 2$000 (lucro em cada barrica); 25$200 (preço de venda de cada uma).

43. Quinze duzias de lenços custaram 126$000, e foram vendidas por 135$000. *Quanto se ganhou em cada duzia?* — R. 600 réis.

44. Uma sala tem 72 decimetros de comprimento e 57 de largura. Querendo-se assoalhal-a com taboas de 18 decimetros de comprido e 2 decimetros de largo, *quantas taboas se deverão empregar?* — R. 114 taboas.

45. Luiz XIV nasceu em 1638 e morreu em 1715. *Com que idade?* — R. 77 annos.

46. A distancia da Terra ao Sol é, mais ou menos, de 153,624,000 kilometros; a luz deste astro gasta 8 minutos para chegar até nós. *Quantos kilometros percorre ella por minuto?* R. 19.203,000.

47. *Pede-se um numero 19 vezes menor do que 817.* — R. 43.

48. Para comprar uma mesa de 5$000, uma cadeira de 2$500 e um lampeão de 3$000, pedi emprestados 2$500 que com o meu dinheiro deram para a compra, restando-me ainda 800 rs. *Que quantia tinha eu?* — R. 8$800 réis.

49. Suppondo-se que uma pessoa deu 7140 passos numa hora, *quantos passos deu por minuto?* — R. 119 passos.

50. Um negociante comprou uma peça de fazenda com 74 metros, a 5$200 o metro; fez vendas na importancia de 254$800 réis. *Quantos metros ainda lhe restam e quantos vendeu?* — R. 25 metros (rest.); 49 metros (vend.).

51. *Qual é o numero que sendo reunido á nona parte de 2457, dá para a somma 2731?* — R. 2458.

52. Si a quantia que possuo fosse multiplicada por 8 e o producto dividido por 7, eu teria 24$000. *Quanto tenho?* — R. 21$000.

53. *Qual é o numero que sendo multiplicado por 12, dá o mesmo producto que 456 multiplicado por 15?* — R. 570.

54. Duas turmas de operarios receberam, uma 800$000 e a outra 560$000, ganhando cada um o mesmo salario. *Dizei o numero de operarios que ha em cada turma e quanto ganha cada um delles, sabendo-se que o pessoal das turmas é de 136 operarios.* — R. 80 (1.ª turma); 56 (2.ª); 10$000 (salario).

55. Duas turmas de operarios receberam, uma 800$000 e a outra 560$000; cada operario ganha o mesmo salario. Pergunta-se: *quantos operarios tem cada turma e quanto ganha cada um, sabendo-se que a primeira turma tem 30 operarios mais do que a segunda?* — R. 100 (1.ª turma); 70 (2.ª turma); 8$000 (salario).

56. *Achar um numero tal que delle tirando-se 56 e dividindo-se o resto por 55, acha-se 2854 para quociente e zero para resto.* — R. 157026.

57. Um negociante comprou 78 kilogrammos de mercadoria á razão de 2$800 o kilogrammo, 87 kilogrammos a 2$400, 69 kilos a 3$600 o kilo; torna a vender tudo a 3$200 o kilo; *qual é o lucro?* — R. 73$200 réis.

58. O menor de dois numeros excede sua differença de 7, e a sua somma é 41. *Quaes são esses numeros?* — R. 25; 16.

59. Tres pessoas dividiram entre si a quantia de 446$400. A primeira tomou a terça parte, a segunda a quarta parte da mesma quantia e a terceira o resto. *Quanto tocou a cada uma?* R. 148$800 (1.ª); 111$600 (2.ª); 186$000 (3.ª).

60. Dividir 4:800$000 por duas pessoas, de modo que a primeira tenha 1:200$000 mais do que a segunda. — R. 3:000$000 (1.ª); 1:800$000 (2.ª).

61. Dividir 21$600 entre quatro pessoas, de modo que a segunda tenha o dobro da primeira, a terceira tenha o triplo da segunda, e a quarta tenha tanto como as outras tres. — R. 1$200 (1.ª); 2$400 (2.ª); 7$200 (3.ª); 10$800 (4.ª).

62. Repartir 18:000$000 entre 9 herdeiros. Os quatro primeiros devem receber cada um 2:960$000 e os outros o resto dividido em partes iguaes. *Quanto tocará a cada um destes?* — R. 1:232$000 réis.

63. O producto de dois numeros é 144, e o sexto deste producto é igual a tres vezes o menor. *Quaes são estes dois numeros?* — R. 8; 18.

64. Um dos dois factores duma multiplicação é 37; e 5 vezes o producto dos dois é 10730. *Qual é o outro factor?* — R. 58.

65. Um operario ganhou 411$000 em um anno. *Quantos dias trabalhou elle, ganhando 1$500 por dia?* — R. 274 dias.

66. Uma pessoa ganha 1$400 por dia; *em quantos mezes gastará 252$000?* — R. 6 mezes.

67. Foram pagos 15 obreiros a 3$500 e 128 a 2$800 por dia; durante 100 dias que trabalharam fizeram 7950 metros, que foram vendidos a 10$000 o metro; *qual foi o lucro?* — R. 38:410$000 réis.

68. Dividir 356$000 entre 3 pessoas, de modo que a primeira tenha 72$000 mais do que a segunda, e a segunda 46$000 mais do que a terceira. — R. 64$000 (3.ª); 110$000 (2.ª); 182$000 (1.ª).

69. Uma guarnição de 5115 homens tem viveres para 20 dias. *Quantos dias durarão os viveres si chegar um reforço de 3410 homens?* — R. 12 dias.

70. O todo de tres numeros é de 131; o terceiro é 89, e o segundo é o quintuplo do primeiro. *Quaes são estes numeros?* — R. 7; 35; 89.

71. Uma pessoa comprou 200 metros de fazenda por 120$000. Tendo vendido 75 metros a 1$200 o metro, *a como deve vender cada um dos metros restantes, querendo ganhar 90$000 em todo o negocio?* — R. 960 réis.

72. Um negociante comprou 384 litros de vinho por 600$000. Vendeu: 96 litros a 1$800 o litro; 76 a 1$500; e 64 a 2$000 o

litro. O resto foi vendido a 2$500 o litro. *Quantas peças de chita poderá comprar com o lucro, á razão de 12$000 cada peça?* — R. 9 peças.

73. Dividir 3:840$000 entre quatro pessoas, de modo que a primeira tenha 120$000 mais do que a segunda, a segunda 100$000 mais do que a terceira e a terceira 80$000 mais do que a quarta. — R. 820$000 (4.ª); 900$000 (3.ª); 1:000$000 (2.ª); 1:120$000 (1.ª).

74. Uma pessoa comprou 350 metros de fazenda de duas qualidades, tantos de uma como de outra. A segunda qualidade custou 12$000 o metro, e 5 metros da primeira custam tanto como 7 da segunda. *Quanto pagou?* — R. 5:040$000.

75. Uma guarnição de uma praça, composta de 1 800 homens, só tinha viveres para 14 dias, quando fez uma sortida em que perdeu 400 homens. Supponde que não torna a ter mais perda alguma de gente, *quantos dias poderá ainda sus-com viveres?* — R. 18 dias.

Um trabalhador encarregou-se de apromptar uma obra em 11 dias por 71$000. Nos tres primeiros dias foi auxiliado por seu filho mais velho, que ganhava 1$200 por dia; depois, eram tres a trabalhar, porque veiu um segundo filho, cujo jornal era de 900 réis. *Quanto ganhou por dia o trabalhador?* — R. 4$600.

77. Tres objectos foram comprados por 4$330. Dois delles custaram, um 1$100 e o outro 2$120. *Qual é o valor do terceiro objecto?* — R. 1$160.

78. Uma pessoa fez uma viagem de 240 kilometros em 5 dias. No primeiro dia caminhou 8 horas, fazendo 150 metros por minuto; no segundo, caminhou 7 horas, fazendo 100 metros por minuto. *Quantos kilometros fez por hora nos outros dias, caminhando 7 horas em cada dia?* — R. 6 kilometros.

79. Alguem comprou duas peças de fazenda de qualidade diversa por 206$000. A de melhor qualidade tinha 37 metros e cada um foi comprado por 1$250 mais do que o metro da outra peça, que tinha 34 metros. *Qual o preço do metro de cada peça?* — R. 2$250 réis; 3$500 réis.

80. Alguem comprou 136 metros de fazenda á razão de 7,m20 por 9$000. Vendeu a metade a 14$400 os 9,m60 e a outra metade a 14$700 os 8,m40. *Qual foi o lucro?* — R. 51$000.

81. Um operario recebe 5$000 diarios na construcção de uma obra, que deve ser feita em 10 dias, sendo obrigado a pagar 600 réis de multa por cada dia que exceder do prazo. Concluida a obra, o operario recebeu 46$400. *Em quantos dias foi feita a obra?* — R. 16 dias.

82. Uma quitandeira comprou 144 ovos a 400 réis a duzia. No transporte quebrou a sexta parte e trocou a metade do resto por tres gallinhas que vendeu a 800 réis cada uma, e a outra metade vendeu a 480 a duzia. *Lucrou ou perdeu?* —

83. Dividir 98 em quatro partes, cada uma das quaes exceda á precedente em 5 unidades. — R. 17; 22; 27; 32.

84. Uma pessoa quer mandar encadernar 1 200 volumes. Um operario póde encadernal-os em 20 dias; outro em 24, e um terceiro em 30. *Quantos dias levarão os tres operarios para encadernar os 1 200 volumes, trabalhando juntos; e quantos volumes encadernará cada operario?* — R. 8 dias; 480 vol. (1.º); 400 vol. (2.º); 320 vol. (3.º).

85. Duas fontes correndo juntas encheram em 14 horas uma bacia de 11 900 litros de capacidade. Uma dellas tendo fornecido 2 380 litros mais do que a outra, quer-se saber *quantos litros deu cada uma em uma hora?* — R. 340 litros; 510 litros.

86. Tres gavetas de um movel contêm dinheiro. Nas duas primeiras encontram-se 8 023 francos; na primeira e terceira 9 134; na segunda e terceira 10 245. *Quantos francos ha em cada gaveta separadamente?* — R. 5678 francos (3.ª); 4567 (2.ª); 3456 (1.ª).

87. Repartir 14:400$000 entre dez pessoas, de modo que cada uma das duas primeiras receba cinco vezes o que recebe cada uma das outras oito. — R. 800$000 (cada uma das oito); 4:000$000 (cada uma das duas primeiras).

88. Tres obreiros trabalharam juntos; o primeiro fez 24 metros de obra e recebeu 14$400; o segundo fez 5 metros menos e recebeu 3$000 menos; o terceiro fez 21 metros menos que os dois outros juntos e recebeu 1$800 mais do que o segundo. *De quanto se precisa para o pagamento dos operarios e quantos metros fizeram?* — R. 39$000; 65 metros.

89. Tres associados repartindo entre si o lucro de uma empreza, receberam: o primeiro 3 745 francos; o segundo 908 francos menos; o terceiro 2 850 menos que os dois outros juntos. *Dizer o lucro de cada um e o lucro total.* — R. 3745 (1.º); 2837 (2.º); 3732 (3.º); 10314 (lucro total).

90. Tres associados repartiram entre si um lucro de 7 200 francos. O segundo recebeu 500 francos mais do que o primeiro, e o terceiro 200 francos mais do que o segundo. *Achar a parte de cada um.* — R. 2000 francos; 2500; 2700.

91. Dois correios partem ao mesmo tempo para ir ao encontro um do outro: a distancia que os separa é de 480 kilometros; um faz 12 kilometros por hora e o outro faz 8. *Depois de quantas horas se encontrarão, e a distancia dos respectivos pontos de partida?* — R. 24 horas; 288 kilometros; 192 kilometros.

92. Dois correios seguem o mesmo caminho, levando um sobre o outro 180 kilometros de avanço. O que está mais adiantado faz 8 kilometros por hora e o outro faz 20. *Depois de quantas horas e a que distancia dos respectivos pontos de partida se dará o encontro?* — R. 15 horas; 120 kilometros; 300 kilometros.

93. Um gavião voando com a velocidade de 995 metros por minuto, persegue a um pombo que tem sobre elle 245 metros de avanço e que percorre 960 metros por minuto. No fim de 6 minutos, um caçador matou o gavião. *A que distancia estava (este) do pombo, e quantos minutos lhe faltavam para alcançal-o?* — R. 35 metros; 1 minuto.

94. Havendo 650 metros de distancia entre duas pessoas, que em linha recta se dirigem uma para a outra, *qual será a distancia que entre ellas haverá quando uma tiver feito 187 metros e a outra 215?* — **R. 248 metros.**

95. Duas pessoas dirigem-se em linha recta uma para a outra. A distancia que as separa é de 1 645 metros; uma tendo feito 256 metros, emquanto a outra fez 308, ambas pararam-se. *Que distancia haverá entre estas duas pessoas, quando a primeira tiver percorrido mais 280 metros e a segunda 324?* — **R. 477 metros.**

96. Duas pessoas partem de um mesmo ponto, com a differença de uma hora de distancia, e seguem o mesmo caminho. A primeira faz 4 kilometros por hora e a segunda 5. *Ao cabo de quanto tempo a segunda alcançará a primeira e a que distancia do ponto de partida?* — **R. 4 horas; 20 kilometros.**

97. Uma pessoa parte com 80 metros de velocidade por minuto ao encalço de outra que tem 200 metros de avanço sobre ella e que faz 70 metros por minuto. Pergunta-se: 1) *quantos metros mais do que a segunda faz a primeira em um minuto;* 2) *que tempo gastará para vencer os 200 metros de atrazo?* — **R. 10 metros; 20 minutos.**

98. Um regimento partiu ás 5 horas da manhã e faz 4 kilometros por hora. *A que horas será alcançado por um outro que só poude sahir ás 8 da manhã e que faz 6 kilometros por hora?* — **R. 2 horas da tarde.**

99. Uma guarnição compõe-se de 1 200 homens, infantes e cavalleiros. O soldo de um mez para toda a guarnição importa em 15:600$000, recebendo cada soldado de infantaria 12$000 por mez e cada soldado de cavallaria 15$000. *Quantos infantes e quantos cavalleiros ha nessa guarnição?* — **R. 800 inf.; 400 caval.**

100. Em uma grande fabrica estão empregados homens e mulheres; aquelles a 16$500 por semana e estas a 10$500. Com o pagamento de 24 dias de trabalho gastou-se a quantia de 23:940$000, sendo 18:480$000 com os homens. *Qual é o salario de cada homem por dia e de cada mulher; quantos homens e quantas mulheres trabalham na fabrica?* — **R. 2$750 (hom.); 1$750 (mulh.); 280 hom.; 130 mulh.**

Capitulo II.

Fracções decimaes

§ I — Numeração das fracções decimaes

128. ***Fracções decimaes*** são partes da unidade menores do que ella na razão décupla, isto é, na razão de 10.

129. Para fazer-se idéa das fracções decimaes, considera-se a unidade dividida *em 10 partes iguaes*. Cada uma dessas partes sendo *um decimo*, uma unidade valerá *10 decimos*.

Divide-se cada decimo *em 10 partes iguaes*; e deste modo *a unidade* fica dividida em *cem partes iguaes*, ou *centesimos*. Um decimo, portanto, vale *10 centesimos*.

Dividindo-se cada centesimo *em 10 partes iguaes*, uma unidade ficará dividida em *mil partes iguaes*, ou *millesimos*. Logo, um centesimo vale *10 millesimos*.

Procedendo-se sempre do mesmo modo, tem-se que:

Um millesimo vale *10 decimos-millesimos;*

Um decimo-millesimo vale *10 centesimos-millesimos;*

Um centesimo-millesimo vale ***10 millionesimos***, e assim por diante.

130. Do que acabamos de dizer se conclue que as ordens decimaes fraccionarias são:

Decimos	1.ª ordem
Centesimos	2.ª »
Millesimos.	3.ª »
Decimos-millesimos.	4.ª »
Centesimos-millesimos. . . .	5.ª »
Millionesimos.	6.ª »
Decimos-millionesimos. . . .	7.ª »
Centesimos-millionesimos. .	8.ª »
Billionesimos.	9.ª »

E assim por diante.

Conclue-se mais que *nas fracções decimaes, como nos numeros inteiros,* 10 unidades de uma ordem formam uma unidade de ordem immediatamente superior.

Por conseguinte, o principio convencional da numeração escripta tem toda a applicação afim de se poder representar um numero decimal fraccionario. Torna-se, porém, necessario um signal que distinga a parte inteira da parte fraccionaria. Este signal é uma virgula, chamada *virgula decimal*, ficando á sua esquerda a parte inteira, e á direita a fracção decimal propriamente dita ou decimaes.

Como se lê uma fracção decimal

131. Para lerem-se as fracções decimaes, lê-se o numero como se fosse inteiro, dando-se no fim da leitura ao ultimo algarismo a denominação que lhe compete.

Assim, a seguinte fracção decimal 43,6747 lê-se: 436 mil 747 decimos-millesimos.

Como se escreve uma fracção decimal

132. Para escreverem-se as fracções decimaes, escreve-se o numero como si fosse inteiro; dá-se ao ultimo algarismo a denominação que se pronunciou, e vai-se successivamente descendo de ordem até chegar-se ás unidades, onde se põe a virgula.

Si os algarismos do numero forem para isso insufficientes, accrescentar-se-ão zeros até chegar-se á posição das unidades.

„Quatrocentos e oitenta mil quatrocentos e cincoenta e quatro" decimos-millesimos se escrevem: 48,0454.

Consequencias do principio da numeração escripta

133. 1.ª *Si á direita de uma fracção decimal se accrescentar qualquer numero de zeros,* a fracção decimal não se altera; vice-versa: quando uma fracção decimal for terminada por zeros, supprimindo-se qualquer numero delles, ou todos, a fracção decimal tambem não se altera.

$$46{,}372 = 46{,}37200$$
$$5{,}01400 = 5{,}014$$

134. 2.ª *Multiplica-se uma fracção decimal por 10, por 100, por 1000, etc.,* mudando-se a virgula uma, duas, tres, etc., casas para a direita. Em geral:

Multiplica-se uma fracção decimal pela unidade seguida de zeros, mudando-se a virgula tantas casas para a direita quantos forem os zeros á direita da unidade.

$$74{,}7283 \times 10 = 747{,}283$$
$$74{,}7283 \times 100 = 7472{,}83$$
$$74{,}7283 \times 10\,000 = 747\,283$$

135. 3.ª *Divide-se uma fracção decimal por 10, por 100, por 1000, etc.,* mudando-se a virgula uma, duas, tres, etc., casas para a esquerda. Em geral:

Divide-se uma fracção decimal pela unidade seguida de zeros, mudando-se a virgula tantas casas para a esquerda, quantos forem os zeros á direita da unidade.

$$74{,}7283 : 10 = 7{,}47283$$
$$74{,}7283 : 100 = 0{,}742283$$
$$74{,}7283 : 10\,000 = 0{,}00747283$$

Exercicios sobre a numeração das fracções decimaes

Escrever com algarismos as seguintes fracções decimaes

1. Um decimo, uma unidade e um *decimo*, onze *decimos*, dois *decimos*, tres unidades e dois *decimos*, trinta e dois *decimos*.

2. Um centesimo, vinte e um *centesimos*, uma unidade e um *centesimo*, tres unidades e vinte e um *centesimos*, cento e um *centesimos*, trezentos e vinte e um *centesimos*.

3. Um millesimo, vinte e um *millesimos*, trezentos e vinte e um *millesimos*, uma unidade e um *millesimo*, duas unidades e vinte e um *millesimos*, tres unidades e trezentos e vinte e um *millesimos*, mil e um *millesimos*, dois mil e vinte e um *millesimos*, tres mil trezentos e vinte e um *millesimos*.

4. Tres unidades e cinco *decimos*, quarenta e seis *centesimos*, setenta e oito *decimos*, trezentos e vinte e nove *cente-*

simos, cinco *millesimos*, treze *centesimos*, duas unidades e trinta e quatro *millesimos*, tres mil e cincoenta e seis *millesimos*, sete *decimos*, setenta e cinco *centesimos*, quatro unidades e cinco *centesimos*, trezentos e sete *centesimos*, vinte e nove *decimos*, trinta e oito *millesimos*, cinco unidades e seis *decimos*, tres *centesimos*, quatrocentos e cincoenta e seis *millesimos*.

5. **Um decimo-millesimo**, vinte e um *decimos-millesimos*, trezentos e vinte e um *decimos-millesimos*, quatro mil trezentos e vinte e um *decimos-millesimos*, dez mil e um *decimos-millesimos*, vinte mil e vinte e um *decimos-millesimos*, trinta mil trezentos e vinte e um *decimos-millesimos*, quarenta e cinco mil trezentos e vinte e um *decimos-millesimos*.

6. Cinco unidades e quarenta e seis *decimos-millesimos*, seis unidades e trinta e dois *decimos-millesimos*, sete unidades e quatrocentos e trinta e dois *decimos-millesimos*, oito unidades e cinco mil quatrocentos e trinta e dois *decimos-millesimos*.

7. **Um centesimo-millesimo**, oitenta e nove *centesimos-millesimos*, setecentos e oitenta e nove *centesimos-millesimos*, seis mil setecentos e oitenta e nove *centesimos-millesimos*, cincoenta e seis mil setecentos e oitenta e nove *centesimos-millesimos*, cento e cincoenta e seis mil setecentos e oitenta e nove *centesimos millesimos*, duzentos e nove mil oitocentos e setenta e seis *centesimos-millesimos*, sete milhões cento e vinte e tres mil quatrocentos e cincoenta e seis *centesimos-millesimos*.

8. **Um millionesimo**, oitocentos e noventa e sete *millionesimos*, noventa e oito *millionesimos*, sete mil novecentos e oitenta e seis *millionesimos*, nove *millionesimos*, novecentos e cincoenta e seis mil setecentos e oitenta e nove *millionesimos*.

9. **Um decimo-millionesimo**, vinte e quatro *decimos-millionesimos*, oito mil seiscentos e quarenta e dois *decimos-millionesimos*, doze mil quatrocentos e sessenta e oito *decimos-millionesimos*, quatrocentos e sessenta e dois *decimos-millionesimos*.

10. **Um centesimo-millionesimo**, quatrocentos e cinco mil e sete *centesimos-millionesimos*, sessenta mil cento e oito *centesimos-millionesimos*, um milhão vinte mil trezentos e quatro *centesimos-millionesimos*, trinta e cinco *decimos*, quatrocentos e trinta e dois *centesimos*, dois *centesimos*, tres *millionesimos*, trezentos e cincoenta e sete *millesimos*, mil duzentos e trinta e quatro *millesimos*.

Ler e escrever com todas as lettras as seguintes fracções decimaes:

11. 0,5; 0,04; 0,005; 0,23; 0,045; 0,654; 2,7; 3,09; 2,004; 4,059.
12. 0,0008; 0,00009; 0,0086; 0,09865; 1,3456; 2,04689; 3,7008.
13. 0,0234; 0,013507; 0,2486; 0,19283; 5,70901; 6,78901; 7,23456.
14. 0,897654; 0,204061; 0,010305; 0,004003; 9,468023; 10,579246.
15. 0,3278815; 0,0040302; 0,0500109; 0,0001032; 8,4321987.
16. 0,4; 0,35; 0,09; 0,047; 0,009; 0,0004; 0,0324; 0,0053; 0,0678.
17. 0,0102; 0,3045; 0,0206; 0,00512; 0,00048; 5,98765; 3,14702.
18. 0,000001; 0,000012; 0,000213; 0,004312; 0,052413; 0,635124.
19. 0,010203; 0,0000001; 0,0000042; 0,0400305; 0,9008007.

§ II — Addição das fracções decimaes

136. **Para sommar fracções decimaes**, escrevem-se as fracções umas debaixo das outras, de modo que fiquem decimos debaixo de decimos, centesimos debaixo de centesimos, etc., para o que basta que as virgulas se correspondam em uma só columna vertical. Faz-se, depois, a operação como nos numeros inteiros, collocando-se a virgula na somma, de modo a corresponder com a virgula das parcellas.

Exemplo. — $4{,}36 + 15{,}4 + 36{,}564 + 8{,}47 + 3{,}1$

$$\begin{array}{r} 4{,}36 \\ 15{,}4 \\ 36{,}564 \\ 8{,}47 \\ 3{,}1 \\ \hline 67{,}894 \end{array}$$

Exercicios sobre a addição das fracções decimaes

1. 37,045 9,08 + 58,34782 + 65,0093 627,8.
2. 400,000637 + 20,0014 + 9,5 + 34,682 + 860,05372.
3. 54,0036 + 0,08 7,000623 + 0,092 + 743,00529.
4. 0,00485 + 0,000538 0,66 + 0,0376 + 0,009.
5. 0,734 + 2,72 + 13,2 + 3,431 + 15,729.
6. 737,307 + 3,5 + 0,739 + 23,9 + 1,24.
7. 47,0381 + 3276,048 + 0,01709 + 14,00187 + 23,75.
8. 19,24 + 0,48 + 1,976 + 17,6 + 7,0024 + 296,00046.
9. 813,703 + 4196,07084 + 0,030018
10. 4173,0017 + 0,00513 + 8,053 + 0,000017.
11. 3,25 + 42,348 + 748,4 + 29,5 + 0,567.
12. 1,346 + 13,25 + 0,342 + 0,003 + 1,007 + 3,008.

§ III — Subtracção das fracções decimaes

137. **Para subtrahir uma fracção decimal de outra**, igualam-se as casas de dizima [*] em ambas as fracções: escreve-se a menor por baixo da maior, de modo que se correspondam as virgulas e pratica-se depois a subtracção como nos numeros inteiros, collocando-se a virgula no resto de modo a corresponder com a virgula dos dois termos.

[*] Chama-se *dizima* as casas decimaes fraccionarias.

EXEMPLO. — *46,732 — 25,47321.*

$$\begin{array}{r} 46{,}73200 \\ 25{,}47321 \\ \hline 21{,}25879 \end{array}$$

Exercicios sobre a subtracção das fracções decimaes

1. 34,295437 — 18,575628
2. 9,3256987 — 8,4257989
3. 73,1203579 — 19,0345293
4. 5192,00019 — 276,043
5. 10 — 0,05234789
6. 5176 — 4276,04357
7. 219423 — 0,008179
8. 0,924567 — 0,8324896
9. 8004 — 1900,001858
10. 870,1468 — 53,41975
11. 0,157924 — 0,000193754
12. 74,897654 — 0,475312789.

Exercicios sobre a addição e subtracção das fracções decimaes

1. (24,7 + 15,8) — (24,3 + 12,9). — R. 3,3.
2. (53,46 + 17,82) — (32,35 + 27,18). — R. 11,75.
3. (7,986 + 6,543) — (2,345 + 3,678). — R. 8,506.
4. (5,31 + 6,42 + 7,58) — (2,45 + 3,67 + 4,89). — R. 8,30.
5. (14,38 + 5,6 + 7) — (4 + 8,35 + 1,58). — R. 13,05.
6. (85,3 — 56,7) + (32,6 — 17,65) + (3 — 1,47). — R. 45,08.
7. (4,67 — 2,85) + (3,45 — 1,793) + (9,53 — 2). — 11,007.
8. (45 — 29,3) + (32,7 — 25) — (19,7 — 4,935). — R. 8,635.
9. (38,976 — 25,38) — (3,45 + 9,8) + (5 — 0,748). — R. 4,598.
10. (567 + 3,49 — 15,678) — (317 — 58,7 + 0,43). — R. 296,082.

§ IV — Multiplicação das fracções decimaes

138. Ha tres casos na multiplicação das fracções decimaes:

1.° o da multiplicação de uma fracção decimal por um numero inteiro;

2.° o da multiplicação de um inteiro por uma fracção decimal;

3.° o da multiplicação de uma fracção decimal por outra.

139. *Estes tres casos se resolvem pela seguinte*

Regra: Multiplicam-se os dois numeros como si fossem inteiros, sem attender-se á virgula; e no producto separam-se da direita para a esquerda, com uma virgula, tantas casas para a dizima, quantas houver em ambos os factores.

Si, formado o producto, elle tiver menos algarismos que as casas de dizima que deve ter, se preencherão com zeros á sua esquerda as casas que faltarem.

EXEMPLO DO 1.° CASO:

$$45{,}326 \times 4 \left\{ \begin{array}{r} 45{,}326 \\ 4 \\ \hline 181{,}304 \end{array} \right.$$

EXEMPLO DO 2.° CASO:

$$17 \times 0{,}25 \left\{ \begin{array}{r} 17 \\ 0{,}25 \\ \hline 85 \\ 34 \\ \hline 4{,}25 \end{array} \right.$$

EXEMPLO DO 3.° CASO:

$$25{,}41 \times 2{,}3 \left\{ \begin{array}{r} 25{,}41 \\ 2{,}3 \\ \hline 7623 \\ 5082 \\ \hline 58{,}443 \end{array} \right.$$

EXEMPLO 4)

$$0{,}074 \times 0{,}7 \left\{ \begin{array}{r} 0{,}074 \\ 0\,7 \\ \hline 0{,}0518 \end{array} \right.$$

Exercicios sobre a multiplicação das fracções decimaes

1. 0,435 × 17.
2. 23 × 0,047.
3. 4,25 × 3,7.
4. 0,504 × 0,023.
5. 19 × 0,78.
6. 0,0029 × 3.
7. 58 × 0,00009.
8. 0,009 × 0,03.
9. 2,1345 × 67.
10. 0,0403 × 0,052.
11. 37 × 1,007.
12. 9,003 × 4.
13. 0,57938 × 23.
14. 39 × 0,3195.
15. 0,4636 × 0,7961.
16. 0,9076 × 9
17. 2474 × 0,006.
18. 0,0045 × 0,0009.

Exercicios sobre a addição, subtracção e multiplicação das fracções decimaes

1. (25,7 + 8,49) × (13,5 — 9) — R. 153,855.
2. (46 + 24,6 — 3,072) × (2 + 0,135). — R. 144,172 280.
3. 36,75 × 2,9 + (5 — 3,468). — R. 108,107.
4. (12 — 4,58 + 2,345) × (9,8 + 0,012). — R. 95,814 180.
5. (6,7 — 3,4567) × (4 + 5,93 — 3,5976) — R. 20,70 003 792.
6. 53,24 × 0,19 — (5,9 + 3,6543). — R. 0,5 613.
7. (6,45 — 0,123 + 2,7) — 3,576 × 0,49. — R. 7,27 476.
8. (7,32 × 6) + (2,5 × 3,98) — 12,5 × 0,017. — R. 53,6 575.
9. (3,67 — 4,589) × 7 + 3,75 × 0,943. — R. 32,10 325.
10. (9,2 + 3,67) × 4 — (5,4 — 1,653) × 5. — R. 32,745.

§ V — Divisão das fracções decimaes

140. Ha tres casos na divisão das fracções decimaes:

1.º o da divisão de uma fracção decimal por um numero inteiro;

2.º o da divisão de um numero inteiro por uma fracção decimal;

3.º o da divisão de uma fracção decimal por outra.

141. ***Primeiro caso.*** — *Divisão de uma fracção decimal por um numero inteiro.*

EXEMPLO 1) *0,384 : 4* EXEMPLO 2) *0,003 : 4*

Para dividir uma fracção decimal por um numero inteiro, faz-se abstracção da virgula na fracção; e depois effectua-se a divisão como nos numeros inteiros, separando-se á direita do quociente tantos algarismos para dizima, quantos são os algarismos de dizima da fracção dada. *(Ex. 1.)*

Si acontecer que, fazendo-se abstracção da virgula na fracção, o numero resultante seja menor do que o divisor, escrever-se-á no quociente um zero e virgula, e depois della tantos zeros, quantas forem as casas de dizima da fracção proposta. Accrescentando-se, depois, zeros á direita do dividendo, faz-se a divisão até que esta se exgotte, ou até obter-se a casa de dizima que se quizer ou que for pedida. *(Ex. 2.)*

EXEMPLO 1)	EXEMPLO 2)
0,)384 : 4 = 0,096	0,)003 : 4 = 0,00075
24	30
0	20
	0

142. ***Segundo caso.*** — *Divisão de um inteiro por uma fracção decimal.*

EXEMPLO 1) *9 : 0 07* EXEMPLO 2) *5 : 6,4*

Para dividir um inteiro por uma fracção decimal faz-se abstracção da virgula na fracção decimal; e, á direita do inteiro, accrescentando-se tantos zeros quantas forem as casas de dizima da fracção, faz-se a divisão, como nos numeros inteiros. Havendo resto, escreve-se uma virgula depois das unidades do quociente, e á direita do resto se accrescentarão tantos zeros, quantas forem as casas de dizima que se quizerem no quociente.*) *(Ex. 1.)*

Si, depois de accrescentar-se á direita do inteiro tantos zeros quantas forem as casas de dizima da fracção, o dividendo seja menor do que o divisor, escrever-se-á um zero e virgula no quociente; e accrescentando-se á direita do dividendo um zero, effectua-se a divisão e obtem-se o algarismo dos decimos do quociente; e continua-se assim, accrescentando-se zero á direita de cada resto até que a divisão se exgotte, ou até obter-se no quociente a casa de dizima que se quizer ou que for pedida. *(Ex. 2.)*

EXEMPLO 1)	EXEMPLO 2)
900 : 7 = 128,571	50 : 64 = 0,78125
20	500
60	520
40	80
50	160
10	320
3	0

143. ***Terceiro caso.*** — *Divisão de uma fracção decimal por outra.*

EXEMPLOS: 1) *0,54 : 0,321* 2) *0,02 : 0,6432*
3) *0,345 : 0,5* 4) *0,015 : 3,15*

Para dividir uma fracção decimal por outra, igualam-se as casas de dizima em ambos os termos; depois, abstrahe-se da virgula e faz-se a divisão.

*) Os zeros que se accrescentam ao resto da divisão podem juntar-se todos d'uma só vez, ou, um por um a cada resto successivo.

Havendo resto, escreve-se uma virgula depois das unidades do quociente, e ao resto se accrescentarão tantos zeros, quantas forem as casas de dizima que se quizerem no quociente, continuando-se depois a divisão. *(1.° exemplo.)*

Si depois de igualadas as casas de dizima, fazendo-se abstracção da virgula, o dividendo assim constituido seja menor do que o divisor, então escrever-se-á um zero com a virgula no quociente; accrescentando-se um zero á direita do dividendo e effectuando-se a divisão, obtem-se o algarismo dos decimos do quociente; á direita do resto escreve-se outro zero, e praticando-se a divisão, obtem-se o algarismo dos centesimos, e assim se procede até exgottar-se a divisão, ou até apparecer no quociente a casa decimal que se quizer. *(2.° exemplo.)*

Quando a fracção decimal divisor tem menos casas de dizima do que a fracção dividendo, faz-se abstracção da virgula na fracção divisor, e na fracção dividendo muda-se a virgula tantas casas para a direita, quantas são as casas de dizima da fracção divisor. Procede-se depois como no caso da divisão de uma fracção decimal por um inteiro. *(3.° e 4.° exemplos.)*

1.° EXEMPLO

0,)540 : 0,)321 = 1,68
2190
2640
..72

2.° EXEMPLO

0,)0200 : 0,6432 = 0,031
2000
20000
.7040
.608

3.° EXEMPLO

3,45 : 5 = 0,69
45
0

4.° EXEMPLO

1,5 : 315 = 0,004
150
1500
240

Exercicios sobre a divisão das fracções decimaes

1. 4,35 : 3.
2. 21 : 0,3.
3. 3,45 : 0,7.
4. 0,75 : 0,125.
5. 0,07 : 8.
6. 9 : 0,13.
7. 0,193 : 0,05.
8. 0,936 : 6.
9. 3 : 4,57.
10. 2,93 : 1,542.
11. 0,009 : 11.
12. 2 : 3,1.
13. 0,4395 : 3.
14. 317 : 0,5625.
15. 0,7568 : 0,4756.
16. 0,004 : 0,064.
17. 0,15 : 0,425.
18. 4,5 : 5,123.

Exercicios sobre a addição, subtracção, multiplicação e divisão das fracções decimaes

1. (4,57 + 2,3 — 2,345) × 5,6 : 8. — R. 3,1675
2. (32,8 — 17,275) : 4,5 + 2,43 × 6,567 — R. 19,40781.
3. 21,75 × 3,9 : 0,3 — (2,4 + 3,56 — 0,457). — R. 277,247.
4. 51 : 0,003 + (24,3 — 12,653) × 74. — R. 17.861,878.
5. (6 — 4,7 + 3,68) × 0,2415 : 3,45. — R. 0,3486.
6. 3,5 + 7,89 — 2,567 × 0,38 : 0,19. — R. 6,256.
7. 6,7 × 3,27 : 3 — (4,72 + 3 — 5,6) × 2 — R. 3,063.
8. 5 : 0,25 + 2 — 0,478 : 0,2 × 3,19. — R. 14,3759.
9. 0,4 ÷ 0,08 — [3 — 0,5 — (2,6 + 0,1 — 0,9)] × 5. — R. 1,5.
10. [5 + 31 — (2,4 + 3,51)] × 3 — 4,7 + 0,36 : 6. — R. 1,96.
11. $$\frac{13,824 \div (9,0842 + 7,54 - 67,90125 \div 6,25)}{48 \div (15,625 \times 6,4)} = 5$$
12. $$\left[\left(\frac{0,016 \div 0,0005}{38,9 - 38,74} + \frac{0,48 \div 0,075}{0,002 \div 0,25}\right) \times 1,5\right] - 1500 = 0$$

Capitulo III

Systema metrico francez

§ 1 — Preliminares

144. Systema metrico francez é a reunião dos pesos e medidas que, obedecendo sempre á lei decimal, tem por base o metro.

Das unidades principaes

145. *As principaes unidades deste systema são:*

Metro (para as medidas lineares ou de comprimento);
Metro quadrado e aro (para as de superficie);
Metro cubico e stereo (para as de volume);
Litro (para as de capacidade, tanto de liquidos, como de seccos);
Grammo (para as de peso);
Franco (para as monetarias).

Dos multiplos e submultiplos

146. Estas unidades por si só não sendo sufficientes para os usos ordinarios da vida, admittiram-se multiplos e submultiplos decimaes de cada uma dellas.

147. Chamam-se **multiplos metricos** ou **decimaes** as unidades que são *dez, cem, mil, dez mil* vezes maiores do que a unidade principal.

148. *Os multiplos metricos* ou *decimaes* formam-se antepondo-se a cada uma das unidades principaes (exceptuando-se o franco) as seguintes palavras, tiradas do grego:

Deca	que quer dizer			*dez*	*10*
Hecto	„	„	„	*cem*	*100*
Kilo	„	„	„	*mil*	*1000*
Myria	„	„	„	*dez mil*	*10000*

149. Chamam-se **submultiplos metricos** ou **decimaes** as unidades que são *dez, cem, mil, dez mil* vezes menores do que a unidade principal.

150. *Os submultiplos metricos* ou *decimaes* formam-se antepondo-se as seguintes palavras, tiradas do latim:

deci	que quer dizer		*decimo*	*0,1*	da unidade
centi	„	„	„	*centesimo*	*0,01*	„
milli	„	„	„	*millesimo*	*0,001*	„

151. Cada unidade principal com seus multiplos e submultiplos constitue uma *classe de medidas.*

§ II — Medidas de comprimento

(Primeira classe)

152. A principal das medidas *lineares* ou de *comprimento*, e a *base* de todo o systema, é o **metro**.

153. **O metro** é a decima-millionesima parte da distancia do pólo terrestre ao equador, ou a decima-millionesima parte do quarto do meridiano terrestre.*)

Fig. 1. — O quarto do meridiano.

Multiplos

Denominações	Abreviaturas	Valores
Myriametro	*Mm*	10 000 metros
Kilometro	*Km*	1 000 „
Hectometro	*Hm*	100 „
Decametro	*Dm*	10 „
metro	*m*	*(Unidade principal)*

*) Para calcular-se a distancia do pólo ao equador, empregou-se a *toeza*; acharam-se 5130740 *toezas*, cuja decima-millionesima parte é *443l*, *295 936*, ou **3 pés, 11 l**, 296; considerando-se 936 millionesimos como quasi *um millesimo*, o qual, juntando-se a 295, fazem 296.

Submultiplos

Denominações	Abreviaturas	Valores	
decimetro	*dm*	0,1	do metro
centimetro	*cm*	0,01	" "
millimetro	*mm*	0,001	" "

Valores relativos dos multiplos e submultiplos do metro

154. Procurando-se a relação de grandeza que guardam entre si as medidas de comprimento, vê-se que:

1 myriametro. . . . . . = 10 kilometros
1 kilometro. . . . . = 10 hectometros
1 hectometro . . . . . . = 10 decametros
1 decametro. . . . . . . = 10 metros
1 metro . . . . = 10 decimetros
1 decimetro . . . . = 10 centimetros
1 centimetro. . . . . . . = 10 millimetros.

Por conseguinte:

O millimetro é o *decimo* do centimetro
O centimetro " " " " decimetro
O decimetro " " " " metro
O metro " " " " decametro
O decametro " " " " hectometro
O hectometro " " " " kilometro
O kilometro " " " " myriametro.

Numeração das unidades de comprimento

155. Attendendo-se á relação de grandeza que guardam entre si as medidas de comprimento do systema metrico francez, vê-se que essa relação é expressa pelo numero 10, isto é, que, a contar das medidas inferiores para as superiores, uma unidade qualquer de comprimento é *10* vezes *maior* do que a precedente e *10* vezes *menor* do que a seguinte.

Daqui podemos concluir que a numeração das medidas de comprimento do novo systema obedece aos mesmos principios da numeração decimal.

Como nas fracções decimaes, uma virgula separa os multiplos dos submultiplos, e tambem como nessas fracções se lerá e se escreverá qualquer numero multiplo ou submultiplo do metro.

Como se lê um numero de metros

Seja o numero 35467ᵐ,869.

A simples inspecção deste numero mostra que o algarismo 7 representa a unidade *metro;* o 6 á sua esquerda representa *dezenas do metro* ou *decametros;* o 4, *centenas do metro* ou *hectometros;* o 5, *milhares do metro* ou *kilometros;* o 3, *dezenas de milhar do metro* ou *myriametros.* Do mesmo modo o algarismo 8 á direita da virgula representa *decimos do metro* ou *decimetros;* o 6, *centesimos do metro* ou *centimetros;* o 9, *millesimos do metro* ou *millimetros.*

Logo, o numero proposto lê-se do seguinte modo: 3 *myriametros* 5 *kilometros* 4 *hectometros* 6 *decametros* 7 *metros* 8 *decimetros* 6 *centimetros* e 9 *millimetros*.

156. **Para ler-se um numero resultante de uma medida metrica**, lê-se primeiramente a parte inteira e depois a parte decimal, dando-se a cada um dos algarismos a denominação competente.

Observações

Observação primeira. — Tambem se póde ler a parte inteira referindo-se á unidade do ultimo algarismo á direita, e depois a parte decimal, como si fosse inteiro, dando-se-lhe a denominação do ultimo algarismo á direita.

Assim o numero 35467ᵐ,869 ler-se-á: 35 *mil* 467 metros, 869 millimetros.

Observação segunda. — Póde-se tambem ler o numero todo, como si fosse inteiro, dando-se-lhe a denominação do ultimo algarismo á direita.

Assim, 35,467^m,869 ler-se-á: 35 *milhões 467 mil* 869 millimetros.

Observação terceira. — Finalmente, póde-se ainda dividir um numero dado em quantas partes se queira, lendo-se cada parte successivamente, seguida da unidade simples desta parte.

Assim, o numero 35467^m,869 póde-se ler:

1) 3/54/67^m,86/9.

3 *myriametros*, 54 *hectometros*, 67 *metros*, 86 *centimetros* e 9 *millimetros;* porque 1 myriametro vale *100* hectometros; 1 hectometro, *100* metros; 1 metro, *100* centimetros.

2) 35/467^m,869.

35 *kilometros*, 467 *metros*, 869 *millimetros;* porque um kilometro vale *1000* metros; 1 metro *1000* millimetros; etc., etc., etc.

Como se escreve um numero de metros

Seja: 5 *kilometros* 4 *hectometros* 2 *decametros* 7 *metros* e 9 *centimetros o numero que se quer escrever, referindo-se á unidade principal* metro.

157. Para escrever um numero qualquer de metros, escreve-se o numero começando-se pelo multiplo mais elevado que houver; á direita deste, o que lhe for immediatamente inferior, e assim até chegar-se á unidade principal, onde se escreverá a virgula, observando-se o mesmo a respeito dos submultiplos, e preenchendo-se com zeros as casas dos multiplos e submultiplos que faltarem.

O numero proposto se escreverá: 5427^m,09.

Observação. — Quando o numero é referido unicamente a uma unidade do systema metrico francez, para escrevel-o observa-se a regra dada para escrever uma fracção decimal.

1) Seja o numero *„trinta e quatro mil e noventa e seis"* centimetros. Elle se escreverá: 340^m,96.

2) Escreve-se o numero *„doze mil e cinco"* decimetros do seguinte modo: 1200^m,5.

Conversão das unidades de comprimento

1) Seja o numero *4735^m,192 cuja unidade é o* metro. *Si a unidade for o* decametro, *quantos decametros terá esse numero?*

Como a nova unidade é *10* vezes *maior* do que a antiga, o numero proposto conterá *10* vezes *menos* da nova unidade, e isto se consegue mudando-se a virgula uma casa para a esquerda. Assim, 473^{Dm},5192.

2) Supponha-se o mesmo numero *4735^m,192. Si a unidade for o* kilometro, *quantos kilometros terá elle?*

Sendo a nova unidade *kilometro 1000* vezes *maior* que a antiga, o numero conterá *1000* vezes *menos* da nova unidade, o que se obtem, recuando a virgula, tres casas para a esquerda, deste modo: 4^{Km},735 192.

158. Logo, dado o numero, cuja unidade é determinada, para exprimil-o, referindo-o á outra unidade que seja multiplo ou submultiplo da primeira, procura-se quantas vezes a nova unidade é maior ou menor do que a antiga. *Si for 10, 100, 1000, etc. vezes maior*, muda-se a virgula 1, 2, 3, etc. casas para a esquerda; *si for 10, 100, 1000, etc. vezes menor*, muda-se a virgula 1, 2, 3, etc. casas para a direita.

Usos dos multiplos e submultiplos do metro

159. As medidas de comprimento dividem-se em duas especies: *as medidas de comprimento propriamente ditas* e *as medidas itinerarias.*

160. Nas medidas de comprimento propriamente ditas empregam-se como unidades: *o metro, o centimetro* e *o millimetro.*

Nunca se exprimem os comprimentos em decimetros, usa-se sempre do *centimetro*. Assim, em vez de 4 decimetros diz-se *40 centimetros.*

O metro, *unidade principal*

161. Usa-se do metro para medir o comprimento de uma peça de fazenda, de um muro, de um pedaço de madeira, etc.

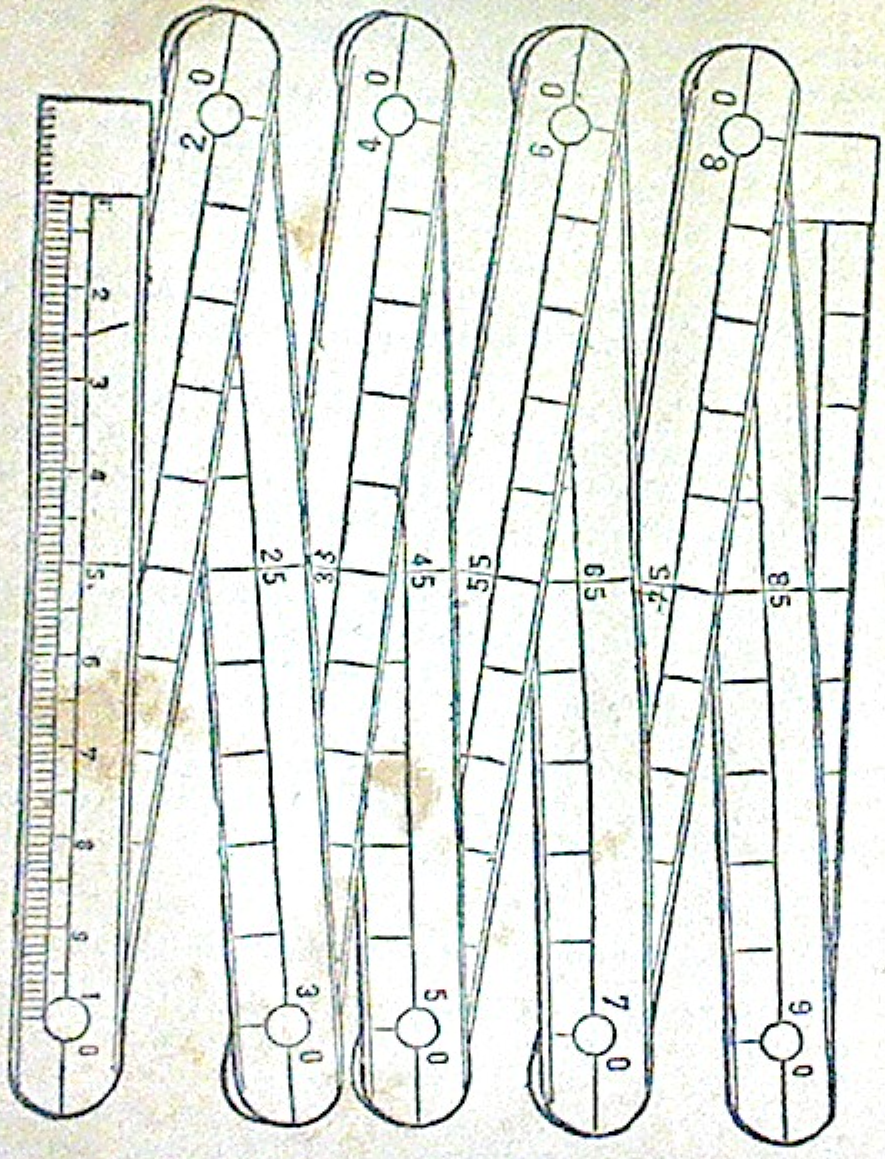


Fig. 2. — Metro dobradiço. (Tamanho natural)

Assim se diz: 1000 *metros* de chita, e não 1 kilometro de chita; 500 *metros* de morim, e não 5 hectometros de morim.

162. O metro tem geralmente a fórma de uma regua, na qual estão marcadas as divisões em *decimetros, centimetros* e *millimetros.*

Tambem ha metros dobradiços *(Fig. 2)* de madeira, de metal, etc. e metros de fita *(Fig. 3)*; estes são fechados em uma caixinha redonda.

Fig. 3 — Metro de fita.

O centimetro tomado como unidade

163. O centimetro é empregado para medir pequenos comprimentos.

Um marceneiro dizendo que uma taboa tem 140 de comprimento, subentende-se *centimetros*, isto é, 140 centimetros, que se escrevem $1^m,40$. Um vidraceiro dizendo que um vidro mede 45 sobre 56, entende-se 45 *centimetros* de largura sobre 56 *centimetros* de comprimento, que se escrevem $0^m,45$ sobre $0^m,56$.

O millimetro tomado como unidade

164. Tratando-se de medir pequenas dimensões, como a grossura d'uma taboa, d'uma lamina de vidro, etc., emprega-se o millimetro como unidade.

Assim, diz-se que uma taboa é de 15 *millimetros* de grossura.

O decametro tomado como unidade

165. Na agrimensura toma se para unidade o decametro; *mas os comprimentos são expressos em metros.*

166. Para medirem-se distancias usa-se da

Fig. 4 — Cadêa metrica

cadêa de agrimensor (Fig. 4). Assim se chama uma cadêa de ferro que tem 10 ou 20 metros de comprimento.

167. Nas medidas itinerarias, que servem para avaliar grandes comprimentos, como estradas, canaes, caminhos de ferro, etc., empregam-se o *myriametro*, o *kilometro* e o *hectometro*.

O kilometro tomado como unidade

168. A unidade principal das medidas itinerarias é o kilometro.

Depois da inauguração dos caminhos de ferro, o *kilometro* substituiu, como unidade itineraria, ao *myriametro*, que só é considerado como multiplo do kilometro e tambem como unidade nos *calculos geographicos*.

O *hectometro* só é considerado como submultiplo do kilometro.

Observação. — Para avaliar as distancias itinerarias emprega-se tambem a **legua metrica** que vale *4 kilometros* ou *4000 metros*.

A milha maritima tomada como unidade

169. No mar medem-se as distancias por meio da milha maritima que equivale a *1852ᵐ,125*.

170. Para indicar a velocidade dum navio, emprega-se o **nó**, que é *120 vezes menor* do que a milha maritima e vale *15ᵐ,43*.

171. Quando se diz que um navio *deita 12 nós*, significa isto que percorre elle 12 vezes 15ᵐ,43 em *meio-minuto*.

A hora tem 60 minutos ou *120 meios-minutos*; a milha maritima tem *120 nós*. Por conseguinte, o navio que percorre 12 nós em *meio-minuto*, percorre 1440 nós ou 12 milhas *por hora*.

Assim, **quantos nós** *em meio minuto*, **tantas milhas** *por hora*.

Mede-se a velocidade de um navio por meio de um apparelho chamado *barquinha*.

Quadro das medidas reaes e de calculo

172. *Medidas reaes* ou *effectivas* são as que existem como instrumentos ou objectos autorisados por lei. — *Medidas de calculo* são as que não existem sob a fórma de instrumentos e apenas são empregadas nos calculos.

	Medidas de calculo	Medidas reaes
Medidas itinerarias	Myriametro Kilometro Hectometro	
Medida empregada na agrimensura	Decametro	O decametro;*) o duplodecametro (20 m):
Medidas de comprimento propriamente ditas	metro	metro; duplo-metro;**) o meio-metro;
	decimetro	decimetro; o duplo-decimetro.
	centimetro millimetro	

Exercicios sobre as medidas de comprimento

1. *Um myriametro* vale quantos decametros? — centimetros? — hectometros? — decimetros? — kilometros? — millimetros? — metros?
2. *Um kilometro* vale quantos decametros? — decimetros? — hectometros? — millimetros? — myriametros? — centimetros — metros?

*) Os decametros empregados para medir comprimentos chamam-se *cadêas metricas* ou *cadêas de agrimensor*.

**) O duplo-metro, o metro, o meio-metro, o duplo-decimetro e o decimetro são de metal ou de madeira. Ha metros e meios-metros de braciços, cujo numero de partes deve ser 2, 5 ou 10.

3. *Um hectometro* vale quantos centimetros? — myriametros? — millimetros? — kilometros? — decimetros? — decametros? — metros?

4. *Um decametro* vale quantos centimetros? — myriametros? — decimetros? — hectometros? — millimetros? — kilometros? — metros?

5. *Um metro . . .* vale quantos millimetros? — decametros? — kilometros? — centimetros? — myriametros? — hectometros? — decimetros?

6. *Um decimetro* vale quantos millimetros? — decametros? — hectometros? — myriametros? — centimetros? — kilometros? — metros?

7. *Um centimetro* vale quantos decametros? — myriametros? — decimetros? — hectometros? — millimetros? — kilometros? — metros?

8. *Um millimetro* vale quantos decametros? — centimetros? — hectometros? — myriametros? — decimetros? — kilometros? — metros?

Ler os numeros seguintes:

1. $3^m,5$
2. $5^{Dm},75$
3. $9^{Km},234$
4. $6^{Dm},87$
5. $8^{Km},347$
6. $6^{Hm},3265$
7. $18^{Km},437$
8. $9^{Dm},85$
9. $24^{Hm},6199$
10. $6^{Km},752$
11. $5^{Dm},36$
12. $49^m,79$
13. $7^{Hm},34$
14. $38^{Km},705$
15. $9^m,123$
16. $4^{Km},92$
17. $16^{Hm},78$
18. $25^m,5$
19. $7^{Dm},469$
20. $5^{Km}555$

Escrever os seguintes numeros, referindo-os á unidade metros:

1. 6 metros 5 decimetros.
2. 9 metros 25 centimetros
3. 8 metros 175 millimetros
4. 7 decimetros
5. 45 centimetros
6. 504 millimetros
7. 9 centimetros
8. 15 millimetros
9. 23 decimetros
10. 13 metros 6 millimetros
11. 375 decimetros
12. 5 metros 37 centimetros
13. 9 decametros 5 decimetros
14. 6 metros 25 millimetros
15. 2 hectometros 3 decametros 4 metros
16. 5 decametros 125 centimetros.
17. 8 kilometros 78 decametros 9 metros
18. 5 kilometros 54 decametros 15 decimetros
19. 12 decametros 25 centimetros
20. 25 hectometros 85 centimetros.

Reduzir os numeros seguintes á unidade indicada:

1. **Ao metro:** $5^{Hm},43$; — $9^{Dm},71$; — $29^{Km},1234$; — $74^{Dm},27$; — — $9^{Hm},7$.
2. **Ao decametro:** $8^m,75$; — $0^m,25$; — $6^{Hm},57$; — $3^{Km},975$; — — $6^{Km},5$.
3. **Ao hectometro:** $12^m,25$; — $27^{Dm},0$; — $4^{Km},367$; — $0^m,58$; — — $8^{Dm},5$.
4. **Ao kilometro:** $345^m,91$; — $18^{Dm},5$; — 68^m; — $9^{Hm},346$; — — $7^{Dm},8$.

Fazer as seguintes subtracções, reduzindo-se o numero menor á unidade do maior:

1. $6^{Km},37$ — $4^{Hm},52$
2. $32^{Hm},145$ — $17^{Dm}428^{cm}$
3. $8^{Dm},264$ — 12^m75^{mm}
4. $4^{Mm}5^{cm}$ — $2^{Km}6^{Dm},345^{cm}$
5. 27^{Dm} — 48^{cm}
6. 5^{Km} — 19^m
7. 54^{Dm} — $3^{Hm}5^m$
8. 8^m — 569^{cm}

§ III — Medidas de superficie

(Segunda classe)

173. As medidas de superficie são quadrados, que têm para lado qualquer das medidas lineares.

A unidade principal de superficie é o metro quadrado.

Multiplos

Denominações	Abreviaturas	Valores
Myriametro quadrado	*Mmq* ou Mm^2	100000000 m^2
Kilometro quadrado	*Kmq* ou Km^2	1000000 m^2
Hectometro quadrado	*Hmq* ou Hm^2	10000 m^2
Decametro quadrado	*Dmq* ou Dm^2	100 m^2

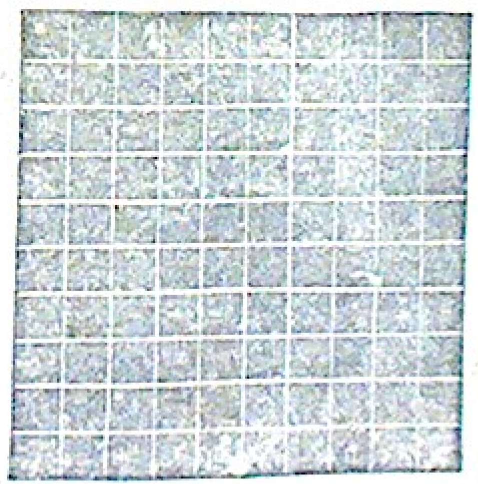


Fig. 5. — Subdivisão do metro quadrado

Submultiplos

decimetro quadrado	*dmq* ou *dm*²	$0^{m},^{2}01$
centimetro quadrado	*cmq* ou *cm*²	$0^{m},^{2}0001$
millimetro quadrado	*mmq* ou *mm*²	$0^{m},^{2}000001$

Observação

O metro quadrado	é um quadrado que tem	1^{m} de lado
O decametro quadrado .	„ „ „ „ „	10^{m} „ „
O hectometro quadrado .	„ „ „ „ „	100^{m} „ „
O kilometro quadrado .	„ „ „ „ „	$1\,000^{m}$ „ „
O myriametro quadrado	„ „ „ „ „	$10\,000^{m}$ „ „
O decimetro quadrado .	„ „ „ „ „	$0^{m},1$ „ „
O centimetro quadrado .	„ „ „ „ „	$0^{m},01$ „ „
O millimetro quadrado .	„ „ „ „ „	$0^{m},001$ „ „

Valores relativos dos multiplos e submultiplos do metro quadrado

174. Para determinar-se a relação de grandeza que guardam entre si as medidas de superficie, nota-se que o myriametro quadrado é um quadrado que tem um myriametro de lado. Ora, um myriametro tendo 10 kilometros, o myriametro quadrado é um quadrado que tem 10 kilometros de lado ou 100 kilometros quadrados de superficie. Assim:

1 myriametro quadrado	=	100 kilometros quadrados
1 kilometro quadrado	=	100 hectometros quadrados
1 hectometro quadrado	=	100 decametros quadrados
1 decametro quadrado	=	100 metros quadrados
1 metro quadrado	=	100 decimetros quadrados
1 decimetro quadrado	=	100 centimetros quadrados
1 centimetro quadrado	=	100 millimetros quadrados

Por conseguinte:

O millimetro quadrado	é o centesimo do	centimetro quadrado
O centimetro quadrado	„ „ „	„ decimetro quadrado
O decimetro quadrado	„ „ „	„ metro quadrado
O metro quadrado	„ „ „	„ decametro quadrado
O decametro quadrado	„ „ „	„ hectometro quadrado
O hectometro quadrado	„ „ „	„ kilometro quadrado
O kilometro quadrado	„ „ „	„ myriametro quadrado

Numeração centesimal das superficies

175. Attendendo-se á relação de grandeza que guardam entre si as medidas de superficie do systema metrico francez, vê-se que essa relação é expressa pelo numero 100, isto é, que, partindo-se das unidades menores para as maiores, uma unidade qualquer de superficie é *100* vezes *maior* do que a precedente e *100* vezes *menor* do que a seguinte.

Donde se conclue que cada um dos multiplos e submultiplos deve ser representado por *dois algarismos*.

Como se lê um numero exprimindo superficie

Seja o numero *2543617m²,9153*.

Pelo que fica exposto vê-se que, sendo precisas *100* unidades de superficie para formar uma unidade de especie immediatamente superior, em um numero dado de metros quadrados os dois algarismos á esquerda da virgula exprimem *metros quadrados;* os dois outros, *decametros quadrados;* os dois seguintes, *hectometros quadrados*, etc. Da mesma maneira, os dois algarismos á direita da virgula exprimem *decimetros quadrados;* os dois seguintes, *centimetros quadrados*, etc.

Assim o numero proposto lê-se:

2 *kilometros quadrados* 54 *hectometros quadrados* 36 *decametros quadrados* 17 *metros quadrados;* 91 *decimetros quadrados* e 53 *centimetros quadrados.*

176. **Para lêr-se um numero exprimindo superficie,** divide-se a parte inteira em classes de dois algarismos a contar da esquerda da virgula, dando-se á 1.ª classe o nome de metros quadrados, á 2.ª o de decametros quadrados, etc. A parte decimal tambem se dividirá em classes de dois algarismos a contar da direita da virgula, dando-se á 1.ª classe o nome de decimetros quadrados, á 2.ª o de centimetros quadrados, e á 3.ª o de millimetros quadrados.

No caso que a ultima classe decimal tenha um só algarismo, accrescenta-se um zero.

Feito isto, lê-se o numero da esquerda para a direita, dando-se a cada uma das classes a denominação competente.

E' preferivel, porém, ler-se a parte inteira, referindo-a á unidade principal, e depois a parte decimal, referindo-a á unidade do ultimo algarismo á direita.

Assim, o numero acima ler-se-á: 2 *milhões* 543 *mil* 617 metros quadrados, 9 *mil* 153 centimetros quadrados.

Observação

O mesmo numero tambem se poderia ler (conforme o disposto na Observação II. do n. 156): 25 *bilhões* 636 *milhões* 179 *mil* 153 centimetros quadrados.

Como se escreve um numero exprimindo superficie

Seja para escrever em algarismos o seguinte numero: 4 *kilometros quadrados 5 decametros quadrados 27 metros quadrados 8 decimetros quadrados* e 90 *centimetros quadrados.*

177. Para escrever-se um numero exprimindo superficie, escreve-se o multiplo mais elevado que existir em o numero dado; á sua direita, o que lhe for immediatamente inferior, e assim por diante até chegar-se-á unidade principal, onde se escreverá a virgula. A' direita desta, virão os submultiplos, começando-se pelo mais elevado, tendo-se sempre o cuidado de preencher com zeros os lugares dos multiplos e submultiplos que faltarem, não esquecendo que são precisos dois algarismos para cada ordem de unidade.

O numero proposto se escreverá, pois:

4000527$^{m^2}$,0890.

Observação

Si o numero dado for expresso *unicamente em uma unidade do systema metrico francez*, para escrevel-o observa-se a regra para escreverem-se as fracções decimaes, attendendo-se que *100* unidades de uma especie formam uma unidade da especie immediata superior.

Escreve-se o numero „*quatro mil seiscentos e trinta e quatro*" decimetros quadrados deste modo: 46$^{m^2}$,34.

Conversão das unidades de superficie

1) Seja *4356712*$^{m^2}$*,1384* o numero que queremos referir a uma nova unidade, o hectometro quadrado.

A nova unidade sendo *10 000* vezes *maior* do que a antiga, o numero proposto conterá *10000* vezes *menos* da nova unidade; e isto se consegue, mudando-se a virgula quatro casas para a esquerda. Donde resulta: $Hm^2$435,67121384.

2) Si a nova unidade fosse o decimetro quadrado, o numero *4356712*$^{m^2}$*,1384* se tornaria: 435671213$^{dm^2}$,84; por isto, que o decimetro quadrado sendo 100 vezes *menor* do que o metro quadrado, o numero conterá 100 vezes *mais* daquella unidade.

178. Para mudar-se a unidade de um numero, procura-se quantas vezes a nova unidade é maior ou menor do que a antiga. *Si for 100, 10000 1000000 etc. de vezes maior*, muda-se a virgula duas, quatro, seis, etc. casas para a esquerda; *si for 100, 10000, 1000000 etc., de vezes menor*, muda-se a virgula duas, quatro, seis, etc. casas para a direita.

Usos dos multiplos e submultiplos do metro quadrado

179. As medidas de superficie dividem-se em duas especies: *as medidas de superficie propriamente ditas* e *as medidas topographicas e geographicas.*

Nas medidas de superficie propriamente ditas empregam-se como unidades: *o metro quadrado, o decimetro quadrado, o centimetro quadrado* e *o millimetro quadrado.*

Do metro superficial

180. Nas construcções, os pedreiros, os marceneiros, os pintores, dão ao metro quadrado, que exprime uma *superficie*, a denominação de metro superficial, para differençal-o do *metro corrente* ou *linear*, no qual só se considera o *comprimento.*

181. Nas medidas topographicas e geographicas empregam-se como unidades: *o myriametro quadrado, o kilometro quadrado* e *o hectometro quadrado.*

Do kilometro quadrado

182. Para medir as superficies de paizes, provincias, Estados, etc. o kilometro quadrado serve de unidade de preferencia ás outras. O myriametro é cada vez menos empregado.

Quadro das medidas de calculo

	Medidas de calculo	Medidas reaes
Medidas de grandes superficies	Myriametro quadrado Kilometro quadrado Hectometro quadrado	Não ha medidas reaes para as superficies; estas se avaliam pelos processos indicados na Geometria.
Med. de superficie propriamente ditas	metro quadrado decimetro quadrado centimetro quadrado millimetro quadrado	

Exercicios sobre as medidas de superficie

1. *Um myriametro quadrado* vale quantos decimetros quadrados? — decametros quadrados? — millimetros quadrados? — hectometros quadrados? — centimetros quadrados? — kilometros quadrados? — metros quadrados?

2. *Um kilometro quadrado* vale quantos decametros quadrados? — decimetros quadrados? — hectometros quadrados? — centimetros quadrados? — metros quadrados?
3. *Um hectometro quadrado* vale quantos decimetros quadrados? — millimetros quadrados? — decametros quadrados? — centimetros quadrados? — metros quadrados.
4. *Um decametro quadrado* vale quantos decimetros quadrados? — millimetros quadrados? — centimetros quadrados? — metros quadrados?
5. *Um metro quadrado* vale quantos millimetros quadrados? — centimetros quadrados? — decimetros quadrados?
6. *Um decimetro quadrado* vale quantos millimetros quadrados? — centimetros quadrados?
7. *O kilometro quadrado* que fracção é do myriametro quadrado?
8. *O hectometro quadrado* que fracção é do myriametro quadrado? — do kilometro quadrado?
9. *O decametro quadrado* que fracção é do hectometro quadrado? — do myriametro quadrado? — do kilometro quadrado?
10. *O metro quadrado* que fracção é do decametro quadrado? — do kilometro quadrado? — do hectometro quadrado? — do myriametro quadrado?
11. *O decimetro quadrado* que fracção é do metro quadrado? — do decametro quadrado? — do hectometro quadrado?
12. *O centimetro quadrado* que fracção é do metro quadrado? — do decametro qnadrado? — do hectometro quadrado?
13. *O millimetro quadrado* que fracção é do metro quadrado? — do centimetro quadrado? — do decimetro quadrado?
14. Que differença ha: 1.º) entre um *decimetro quadrado* e um *decimo do metro quadrado?*
    2.º) entre um *centimetro quadrado* e um *centesimo do metro quadrado?*
    3.º) entre um *millimetro quadrado* e um *millesimo do metro quadrado?*

Ler os numeros seguintes

1. $3^{m^2},24$	6. $21^{Dm^2},34$	11. $8^{Hm^2},35$	16. $18^{Km^2},9735$
2. $17^{m^2},09$	7. $35^{Dm^2},067$	12. $9^{Hm^2},876$	17. $35^{Km^2},057$
3. $0^{m^2},5$	8. $7^{Dm^2},698$	13. $21^{Hm^2},0345$	18. $13^{Km^2},07542$
4. $7^{m^2},456$	9. $21^{Dm^2},7$	14. $17^{Hm^2},65403$	19. $0^{Km^2},030609$
5. $9^{m^2},0345$	10. $9^{Dm^2},054006$	15. $7^{Hm^2},08091$	20. $2^{Km^2},34005$

Escrever com algarismos os seguintes numeros

1. 7 metros quadrados 25 decimetros quadrados 19 centimetros quadrados.
2. 8 metros quadrados 5 decimetros quadrados 25 centimetros quadrados.
3. 9 metros quadrados 15 decimetros quadrados 7 centimetros quadrados.
4. 6 metros quadrados 2 decimetros quadrados 7 centimetros quadrados.
5. 24 metros quadrados 36 centimetros quadrados.
6. 27 metros quadrados 3 decimetros quadrados 458 millimetros quadrados.
7. 9 decametros quadrados 7 metros quadrados 3 decimetros quadrados.
8. 12 decametros quadrados 357 millimetros quadrados.
9. 27 hectometros quadrados 158 metros quadrados.
10. 35 kilometros quadrados 2547 metros quadrados.
11. 5 decametros quadrados 2475 centimetros quadrados.
12. 4 hectometros quadrados 347 metros quadrados.
13. 2 kilometros quadrados 6 decametros quadrados 357 centimetros quadrados.
14. 3 decimetros quadrados 5 centimetros quadrados 7 millimetros quadrados.
15. 9 decimetros quadrados 11 millimetros quadrados.
16. 2 metros quadrados 5 centimetros quadrados.

Reduzir os numeros seguintes á unidade indicada:

1. **Ao metro quadrado** $5^{Dm^2},0837$; — $7^{dm^2},28$; — $9^{Hm^2},000523$; $31^{cm^2},45$; — $0^{Km^2},003567$.
2. **Ao decametro quadrado** $431^{m^2},62$; — $5^{Hm^2},6742$; — $0^{Km^2},000546$; — 12345^{dm^2}; — 6012345^{cm^2}.
3. **Ao hectometro quadrado**: $68147^{m^2},25$; — $260^{Dm^2},1548$ — 97541246^{cm^2}; — $71^{Km^2},2435$; — 8246791^{dm^2}.
4. **Ao kilometro quadrado** $9861^{Hm^2},14$; — $538^{Hm^2},2004$, — $667489^{m^2},25$; — $89^{Dm^2},0025$; — $99^{Km^2},0102$.

Fazer as seguintes subtracções, reduzindo-se o numero menor á unidade do maior

1. $40^{Hm^2} - 3748^{m^2}$	4. $356^{m^2} - 2^{Dm^2},47$
2. $3^{Dm^2} - 27^{m^2},18$	5. $0^{Hm^2},15 - 9^{m^2},56$
3. $15^{m^2} - 453^{dm^2}$	6. $25^{Hm^2} - 420^{m^2},9$

Effectuar as seguintes multiplicações, depois de haver reduzido os dois factores á mesma unidade:

1. $3^{Km} \times 8^{Hm},5$	4. $3^{m},25 \times 6^{Hm}$
2. $8^{Hm} \times 42^{m}$	5. $25^{Dm},18 \times 5^{m},63$
3. $33^{Dm} \times 17^{m}$	6. $33^{Km},10 \times 5^{Dm},4$

Medidas agrarias

183. As unidades de superficie applicadas á medição dos campos chamam-se *medidas agrarias*.

A principal das *medidas agrarias* é o aro.

184. Aro é um decametro quadrado; isto é, um quadrado que tem 10 metros de lado ou 100 metros quadrados de superficie.

Multiplos

Denominações	Abreviaturas	Valores
Myriaro	*Ma*	10000 aros ou 1000000 m²
Kilaro	*Ka*	1000 — — 100000 m²
Hectaro	*Ha*	100 — — 10000 m²
Decaro	*Da*	10 — — 1000 m²
Aro	*a*	*(Unidade principal)*

Submultiplos

deciaro	*da*	0,1 do aro ou 10 m²
centiaro	*ca*	0,01 — — — 1 m²
milliaro	*ma*	0,001 — — — 0,1 m²

Valores relativos dos multiplos e submultiplos do aro

185. Si procuramos a relação de grandeza que guardam entre si as medidas agrarias, vemos que

1 myriaro = 10 kilaros
1 kilaro = 10 hectaros
1 hectaro = 10 decaros
1 decaro = 10 aros
1 aro = 10 deciaros
1 deciaro = 10 centiaros
1 centiaro = 10 milliaros

Inversamente:

O milliaro é o *decimo* do centiaro
O centiaro — — — deciaro
O deciaro — — — aro
O aro — — — decaro
O decaro — — — hectaro
O hectaro — — — kilaro
O kilaro — — — myriaro

Numeração das medidas agrarias

186. A relação de grandeza que guardam entre si duas medidas agrarias quaesquer *consecutivas* é expressa pelo numero 10; isto é, das unidades inferiores para as superiores, qualquer uma destas medidas é *10* vezes *maior* do que a que lhe precede, e *10* vezes *menor* do que a que lhe segue

Conclue-se, pois, que nas *medidas agrarias* os numeros lêm-se e escrevem-se, observando-se as mesmas regras dadas para resolverem-se taes questões nas *medidas de comprimento*. (n. 155 e 156).

Conversão das medidas agrarias

187. Para mudar de unidade em um numero exprimindo *medidas agrarias*, observa-se a mesma regra dada para resolver questão identica nas *medidas de comprimento* (n. 157).

188. Para passar-se do metro quadrado, seus multiplos ou submultiplos para o aro, seus multiplos ou submultiplos, *e reciprocamente*, deve-se referir o numero dado á unidade metro quadrado, depois do que substitue-se essa unidade pelo centiaro, que lhe corresponde e procede-se como nas medidas agrarias. *Si o numero dado for expresso em* aros ou em qualquer multiplo ou submultiplo, refere-se o numero dado á unidade centiaro, substitue-se depois essa unidade pelo metro quadrado e procede-se como nas medidas de superficie.

1) Seja o numero *$4356712^{mq},13$* cuja unidade queremos passar para **hectaro.**

Primeiramente substituimos o *metro quadrado* pelo *centiaro* e resulta **$4\,356\,712^{ca},13$.**

Sendo o *hectaro* 10000 vezes maior do que o centiaro, muda-se a virgula quatro casas para a esquerda, e obtem-se **$435^{Ha},671213$.**

2) Seja o numero *$36^{a},125$* cuja unidade queremos passar para **metro quadrado.**

Passando *aro* para *centiaro*, resulta $3612^{ca}5$; substituindo o *centiaro* pelo metro quadrado, obtem-se $3612^{mq},50$

Medidas agrarias usadas

O *Hectaro* = 100 aros.. equivale ao *Hectometro quadrado.*
O *aro* = 100 mq... equivale ao *Decametro quadrado*
O *centiaro* = centesimo do aro... equivale ao *metro quadrado.*

Exercicios

1 *Um hectaro* vale quantos aros?
— hectometros quadrados?
— decaros?
— deciaros?
— decametros quadrados?

2. *Um aro* vale quantos metros quadrados?
— deciaros?
— decimetros quadrados?
— decametros quadrados?
— centiaros?

3. *Um centiaro* vale quantos metros quadrados?
— milliaros?
— decimetros quadrados?
— millimetros quadrados?
— centimetros quadrados?

Ler os numeros seguintes:

1. $27^{a},16$	5. $342^{Ha},9785$	9. $7^{Ha},35$	13. $56^{a},38$
2. $9^{a},43$	6. $12^{Ha},0135$	10. $36^{a},04$	14. $0^{Ha},567$
3. $68^{a},3$	7. $29^{Ha},534$	11 $11^{a},78$	15. $0^{a},27$
4. $0^{a},05$	8. $0^{Ha},2824$	12. $3^{Ha},0075$	16. $5^{Ha},0009$

Escrever com algarismos os seguintes numeros:

1. 20 aros 5 centiaros	7. 5 hectaros 37 aros 19 centiaros
2. 46 hectaros 68 aros	8. 9 hectaros 5 aros 7 centiaros
3. 12 hectaros 79 centiaros	9. 1234 centiaros
4. 216 centiaros	10. 7 centiaros
5. 4008 centiaros	11. 27 hectaros 5432 centiaros
6. 9 hectaros 9 centiaros	12. 21 aros 3 centiaros

Reduzir os numeros seguintes á unidade indicada:

1. **Ao hectaro:** 1234^a; — $567^a,85$; — $46^a,19$; — $7^a,25$; — $0^a,17$.
2. **Ao aro;** 24^{Ha}; — $7^{Ha},8912$; — $0^{Ha},0567$; — $9^{Ha},7755$; — $0^{Ha},0024$.
3. **Ao centiaro:** 12^a; — $0^{Ha},3456$; — $35^a,29$; — $8^{Ha},36$; — $0^{Ha},05$.
4. **Ao metro quadrado:** $3^{Ha},2789$; — 8^a; — $46^a,35$; — $0^a,77$; — $0^{Ha},0005$.
5. **Ao decametro quadrado:** 7^{Ha}; — $5^{Ha},27$; — $4^a,56$; — $0^{Ha},0507$.
6. **Ao hectometro quadrado:** $4^{Ha},57$; — 3527^a; — $8914^a,21$; — $0^a,19$; — $5^{Ha},0577$; — $0^a,48$.
7. **Ao aro:** $0^{Hm^2},2785$; — $9^{Dm^2},87$; — 125^{m^2}; — $3^{Hm^2},45$; — 75^{m^2}.
8. **Ao hectaro:** 53^{Dm^2}; — 2785^{m^2}; — $3^{Hm^2},59$; — 287^{Dm^2}; — 356787^{m^2}.

Quadro de todas as medidas de superficie, segundo a sua grandeza e correspondencia

VALOR EM TERMOS QUADRADOS	SUPERFICIES TOPOGRAPHICAS E GEOGRAPHICAS	SUPERFICIES PROPRIAMENTE DITAS	SUPERFICIES AGRARIAS
100 000 000	Myriametro quadrado		
1 000 000	Kilometro quadrado		Myriaro*)
10 000	Hectometro quadrado		Hectaro
100		Decametro quadrado	aro
1		*metro quadrado*	centiaro
0,01		decimetro quadrado	
0,00 01		centimetro quadrado	
0,00 00 01		millimetro quadrado	

*) Pouco usado; só é empregado nas grandes extensões de mattos.

Fazer as seguintes subtracções, reduzindo-se o numero menor á unidade do maior:

1. $7^{Ha},54$ — $35^a,21$	6. 36^{Hm^2} — 2438^a
2. 12^a — $9^a,57$	7. 9^{Ha} — $276^a,49$
3. 18^a — 745^{m^2}	8. 6^{Dm^2} — $4^a,25$
4. 5^{Ha} — 42^{Dm^2}	9. $52^{Ha},13$ — 4753^{m^2}
5. 27^a — $13^a,78$	10. 8^{Dm^2} — $0^{Ha},0546$

§ IV — Medidas de volume

(Terceira classe.)

189. As medidas de volume são cubos construidos sobre qualquer das medidas lineares.

A unidade principal do volume é o metro cubico.

Multiplos

Denominações	Abreviaturas	Valores
Myriametro cubico	*Mmc* ou Mm^3	1000000000000 m^3
Kilometro cubico	*Kmc* — Km^3	1000000000 m^3
Hectometro cubico	*Hmc* — Hm^3	1000000 m^3
Decametro cubico	*Dmc* — Dm^3	1000 m^3
metro cubico	*mc* — m^3	*Unidade principal.*

Submultiplos

decimetro cubico	*dmc* ou dm^3	$0^{m^3},001$
centimetro cubico	*cm* — cm^3	$0^{m^3},000001$
millimetro cubico	*mmc* — mm^3	$0^{m^3},000000001$

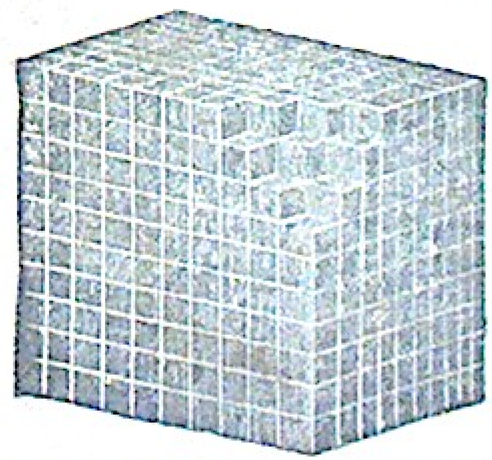


Fig. 6 — **Subdivisão do metro cubico.**

Observação. — *Metro cubico* é um cubo, cujas faces são metros quadrados, ou um cubo que tem um metro de *lado* ou *aresta*.

Decimetro cubico é um cubo, cujas faces são decimetros quadrados, ou um cubo que tem um decimetro de *lado*.

Centimetro cubico é um cubo, cujas faces são centimetros quadrados, ou um cubo que tem um centimetro de *lado*.

Millimetro cubico é um cubo, cujas faces são millimetros quadrados, ou um cubo que tem um millimetro de *lado*.

Valores relativos dos multiplos e submultiplos do metro cubico

190. Para determinar-se a relação de grandeza que guardam entre si as medidas de volume propriamente ditas, nota-se que o myriametro cubico é um cubo que tem um myriametro de lado. Ora, um myriametro tendo 10 kilometros, podemos dizer que um myriametro cubico é um cubo que tem 10 kilometros de lado. Um cubo que tem 10 kilometros de lado tem o seu volume igual a 10 × 10 × 10 ou 1000 kilometros cubicos. Logo:

1 myriametro cubico = 1000 kilometros cubicos
1 kilometro cubico = 1000 hectometros cubicos
1 hectometro cubico = 1000 decametros cubicos
1 decametro cubico = 1000 metros cubicos
1 metro cubico = 1000 decimetros cubicos
1 decimetro cubico = 1000 centimetros cubicos
1 centimetro cubico = 1000 millimetros cubicos.

Por conseguinte:

O millimetro cubico	é o *millesimo*	do centimetro cubico
O centimetro cubico	— —	do decimetro cubico
O decimetro cubico	— —	do metro cubico
O metro cubico	— —	do decametro cubico
O decametro cubico	— —	do hectometro cubico
O hectometro cubico	— —	do kilometro cubico
O kilometro cubico	— —	do myriametro cubico.

Numeração millesimal dos volumes

191. Attendendo-se á relação de grandeza que guardam entre si as medidas de volume do systema metrico francez, vê-se que essa relação é expressa pelo numero 1000; isto é, que, partindo-se das unidades menores para as maiores, uma unidade qualquer de volume é *1000* vezes maior do que a precedente e *1000* vezes menor do que a seguinte.

Donde se conclue que cada um dos multiplos e submultiplos deve ser representado por *tres algarismos*.

Como se lê um numero exprimindo volumes

Seja o numero $5678901342^{m^3},195342$.

Sabendo-se, pelo que fica dito, que são precisas *1000* unidades inferiores para formar uma unidade immediatamente superior, facilmente se conclue que em um numero dado de metros cubicos os tres algarismos á esquerda da virgula exprimem *metros cubicos;* os tres seguintes, *decametros cubicos*, e assim por diante.

Pela mesma razão, os tres algarismos á direita da virgula exprimem *decimetros cubicos:* os tres seguintes *centimetros cubicos*, etc.

Assim, o numero proposto lê-se:

5 *kilometros cubicos* 678 *hectometros cubicos* 901 *decametros cubicos* 342 *metros cubicos;* 195 *decimetros cubicos* e 342 *centimetros cubicos.*

192. Para ler-se um numero qualquer de metros cubicos, divide-se a parte inteira (si houver) em classes de tres algarismos a contar da esquerda da virgula, dando-se á 1.ª classe o nome de metros cubicos, á 2.ª o de decametros cubicos, etc. A parte decimal do mesmo modo se dividirá em classes de tres algarismos a contar da direita da virgula, dando-se á 1.ª classe o nome de decimetro cubicos, á 2.ª o de centimetros cubicos e á 3.ª o de millimetros cubicos.

No caso que a ultima classe decimal não tenha os tres algarismos, serão preenchidos por zeros os que faltarem.

Lê-se o numero da esquerda para a direita, por classes, dando-se a cada uma a denominação que lhe compete.

E', comtudo, preferivel ler-se primeiramente a parte inteira, referindo-a á unidade da ultima classe á direita; e depois a parte decimal, como si fosse inteiro, dando-se a denominação da ultima classe á direita.

Assim, o numero precedente se lerá:

5 *billiões* 678 *milhões* 901 *mil* 342 **metros cubicos**; 195 *mil* 342 centimetros cubicos.

Observação. — Tambem se poderia ler todo o numero como si fosse inteiro, dando-se no fim a denominação da ultima classe á direita.

Como se escreve um numero exprimindo volumes

Seja para escrever em algarismos o seguinte numero: 2 *kilometros cubicos*, 134 *decametros cubicos*, 56 *metros cubicos*; 789 *decimetros cubicos*, 123 *millimetros cubicos*.

Nas medidas do volume são precisas 1000 unidades de uma especie para formar uma unidade da especie immediatamente superior. Donde se conclue que de tres em tres algarismos apparecerá uma nova unidade. Além disso conhecendo-se a ordem da successão dos multiplos e submultiplos, facilmente se deduzirá o seguinte:

193. Para escrever, referindo-se á unidade principal, um numero expresso pelos multiplos e submultiplos decimaes daquella unidade, começa-se a escrever o numero pelo multiplo mais elevado que nelle existir; á direita deste, o que lhe for immediatamente inferior, e assim por diante, até á unidade principal, onde se collocará a virgula. A' direita desta, escrevem-se os submultiplos, começando-se pelo mais elevado, attendendo-se sempre que cada especie de unidade é expressa por meio de tres algarismos, exceptuando-se a unidade mais elevada do numero, a qual póde constar de um ou de dois algarismos.

Si faltar algum multiplo ou submultiplo, ou si algum delles tiver menos de tres algarismos, suppre-se essa falta com zeros.

O numero proposto se escreverá:

$$2000134056^{m^3},789000123.$$

Observação. — A regra para escreverem-se as fracções decimaes serve para escrever-se *um numero qualquer, expresso em uma só especie de unidade de volume do systema metrico francez.* Basta attender-se que nestas medidas cada ordem de unidades consta de tres algarismos.

Assim, o numero „*cinco mil e sete*" decimetros cubicos se escreve: $5^{m^3},007$.

Conversão das unidades de volume

1) Seja o numero *4325617*$^{m^3}$,*295430* o qual queremos referir á unidade hectometro cubico.

A nova unidade sendo *1000000* de vezes *maior* do que a antiga, o numero proposto conterá *1000000* de vezes *menos* da nova unidade, e por isto muda-se a virgula seis casas para a esquerda, deste modo:

$$4^{Hm^3},325617295430.$$

2) *Si a nova unidade fosse* kilometro cubico, que é *1000000000* de vezes *maior* do que a antiga, o numero *4325617*$^{m^3}$,*295430* se tornaria $0^{Km^3},004325617295430$.

3) *Si a nova unidade fosse* decimetro cubico, que é *1000* vezes *menor*, o numero *4325617*^{mc},*295430* conteria *1000* vezes *mais* da nova unidade, e se escreveria deste modo: $4325617295^{dmc},430$.

194. Para mudar-se a unidade de um numero, procura-se quantas vezes a nova unidade é maior ou menor do que a antiga. *Si for 1000, 1000000, 1000000000, etc. de vezes maior*, muda-se a virgula 3, 6, 9, etc. casas para a esquerda; *si for 1000, 1000000, 1000000000 etc. de vezes menor*, muda-se a virgula 3, 6, 9, etc. casas para a direita.

Unidades usadas

195. A unidade principal de volume é, como já sabemos, o metro cubico.

Para exprimir os multiplos do metro cubico, servimo-nos dos numeros ordinarios *dez, cem, mil*. Assim, dizemos que uma bacia contém *dez* metros cubicos, *cem* metros cubicos d'agua.

Os submultiplos empregados são o *decimetro cubico* e o *centimetro cubico*.

	Medidas de calculo	Medidas reaes
Medidas de grandes volumes	metro cubico (com o nome de tonelada metrica)	Nestas duas especies de medidas não ha effectivas ou reaes; os volumes avaliam-se pelos processos ensinados na Geometria.
Medidas de volume propriamente ditas	metro cubico decimetro — centimetro —	

Exercicios sobre as medidas de volume

1. *Um metro cubico* quantos decimetros cubicos vale?
— millimetros cubicos —
— centimetros cubicos

2. *Um decimetro cubico* — millimetros cubicos —
— centimetros cubicos —

3. Que differença ha: 1.º) entre um *decimetro cubico* e um *decimo do metro cubico?*
2.º entre um *centimetro cubico* e *um centesimo do metro cubico?*
3.º) entre um *millimetro cubico* e um *millesimo do metro cubico?*

4. Quanto vale o dm^3 em relação ao *metro cubico?*
— — — cm^3 — — — *decimetro cubico?*
— — — mm^3 — — — *centimetro cubico?*
— — — cm^3 — — — *metro cubico?*
— — — mm^3 — — — *decimetro cubico?*

Ler os numeros seguintes

1. $1^{m^3},234$	6. $5^{m^3},004003$	11. $25^{m^3},09$	16. $3^{m^3},578796$
2. $7^{m^3},38$	7. $12^{m^3},35791$	12. $27^{m^3},6$	17. $0^{m^3},9876543$
3. $0^{m^3},005$	8. $0^{m^3},56$	13. $9^{m^3},87654$	18. $4^{m^3},000776099$
4. $473^{m^3},3$	9. $14^{m^3},024$	14. $35^{m^3},6789$	19. $0^{m^3},047000005$
5. $48^{m^3},2347$	10. $16^{m^3},5$	15. $8^{m^3},19283$	20. $0^{m^3},000000358$

Escrever com algarismos os numeros seguintes

1. 7 metros cubicos 25 decimetros cubicos 18 centimetros cubicos.
2. 9 metros cubicos 8 decimetros cubicos 24 centimetros cubicos.
3. 8 metros cubicos 17 decimetros cubicos 5 centimetros cubicos.
4. 6 metros cubicos 7 decimetros cubicos 8 centimetros cubicos.
5. 15 decimetros cubicos 24 millimetros cubicos.
6. 26 centimetros cubicos 7 millimetros cubicos.
7. 17 metros cubicos 32 millimetros cubicos
8. 236 decimetros cubicos 45 centimetros cubicos.
9. 567 centimetros cubicos 9 millimetros cubicos.
10. 1365 centimetros cubicos 97 millimetros cubicos.
11. 24 metros cubicos 36 centimetros cubicos
12. 27 metros cubicos 3 decimetros cubicos 458 millimetros cubicos.

Fazer as seguintes subtracções

1. $7^{m^3}32^{dm^3} - 976^{dm^3}458^{cm^3}$	5. $0^{m^3},567 - 98^{cm^3},217$
2. $564^{dm^3} - 785^{cm^3}$	6. $8^{m^3},754 - 5^{m^3}7^{cm^3}$
3. $342^{cm^3} - 854^{mm^3}$	7. $32^{cm^3} - 476^{mm^3}$
4. $0^{m^3},467 - 89^{dm^3}$	8. $9^{m^3},27 - 5483^{dm^3}$

Effectuar as seguintes multiplicações

1. $3^{m},26 \times 2^{m},75 \times 13^{m}$	5. $6^{m^3},478 \times 0,26$
2. $0^{m},12 \times 0^{m},07 \times 0^{m},5$	6. $0^{m^3},7902 \times 16$
3. $4^{m},567 \times 0^{m},25 \times 0^{m},767$	7. $8^{m^3},000745 \times 0,79$
4. $0^{m},78 \times 0^{m},349 \times 0^{m},653$	8. $0^{m^3},00068 \times 0,098.$

Medidas especiaes para lenha

196. A principal das medidas especiaes para lenha e madeira de construcção é o stereo.

197. Stereo é um cubo que tem um metro nas tres dimensões *(comprimento, largura e altura)*; ou, por outra: stereo *é um metro cubico*.

Multiplos

Denominações	Abreviaturas	Valores
Myriastereo	*Ms*	10000 stereos ou 10000 m^3
Kilostereo	*Ks*	1000 — — 1000 m^3
Hectostereo	*Hs*	100 — — 100 m^3
Decastereo	*Ds*	10 — — 10 m^3
stereo	*s*	*Unidade principal.*

Submultiplos

decistereo	*ds*	0,1 do stereo ou 0,1 do m^3
centistereo	*cs*	0,01 — — — 0,01 do m^3
millistereo	*ms*	0,001 — — — 0,001 do m^3

Valores relativos dos multiplos e submultiplos do stereo

198. Procurando-se a relação de grandeza que guardam entre si as medidas acima, vê-se que:

1 myriastereo = *10* kilostereos
1 kilostereo = *10* hectostereos
1 hectostereo = *10* decastereos
1 decastereo = *10* stereos
1 stereo = *10* decistereos
1 decistereo = *10* centistereos
1 centistereo = *10* millistereos

Inversamente:

O millistereo é o *decimo* do centistereo
O centistereo — — — decistereo
O decistereo — — — stereo
O stereo — — — decastereo
O decastereo — — — hectostereo
O hectostereo — — — kilostereo
O kilostereo — — — myriastereo

Assim, das unidades inferiores para as superiores, vê-se que são precisas 10 unidades de uma especie para formar uma da especie immediatamente superior.

Como se lêm, se escrevem e se convertem numeros expressos em stereos, seus multiplos e submultiplos

199. Quando o numero é expresso em stereos, tanto para *ler-se* esse numero como *para escrevel-o* e *mudar sua unidade* (para outra maior ou menor do que ella, porém da mesma terminação), observam-se as mesmas regras dadas para se resolverem taes questões sobre as medidas lineares

Observações

Observação primeira. — Para passar-se de metros cubicos a stereos e reciprocamente basta mudar-se o nome: porque *o stereo é o mesmo metro cubico.*

$47^{s},3 = 47^{m^3},300$
$123^{s},48 = 123^{m^3},480$
$48^{m^3},320 = 48^{s},32$
$234^{m^3},900 = 234^{s},9.$

Observação segunda. — Sabendo-se que o stereo *é um metro cubico*, é facil fazerem-se as seguintes conversões:

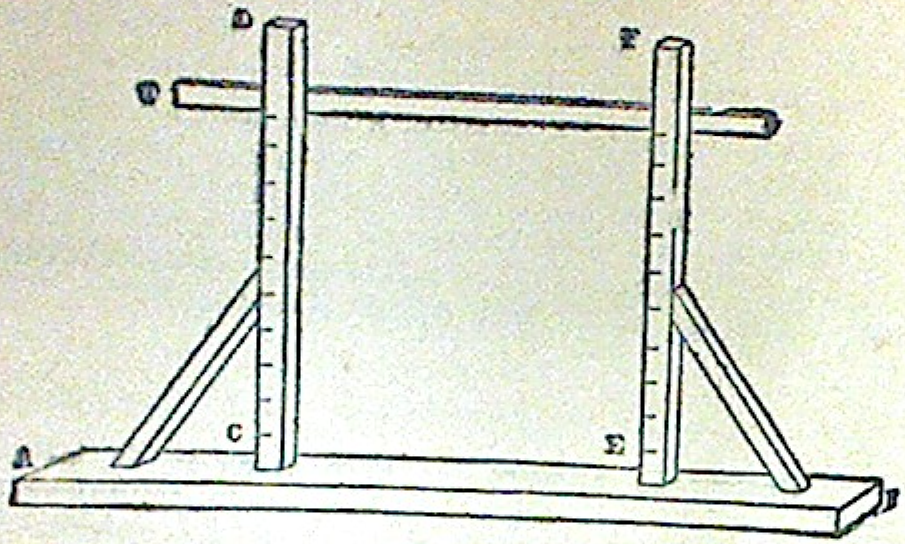
Converter $3^{m^3},195$ *em* stereos = $3^{s},195$
— $2^{Ds}3541$ *em* metros cubicos = $23^{m^3},541$
— $23^{m^3},541$ *em* decastereos = $2^{Ds}3541$
— $3^{s},195$ *em* metros cubicos = $3^{m^3},195$.

Unidades usadas

200. O stereo só tem um multiplo decimal usado, o *decastereo* e um submultiplo, o *decistereo.* Tanto um como outro são pouco empregados.

Medidas effectivas

201. As medidas effectivas são: o *meio-decastereo* (5 stereos), o *duplo-stereo* (2 stereos), e o *stereo.*



(Fig. 7) Apparelho para medir lenha.

Quadro do valor relativo das medidas de volume

VALOR EM METROS Cubicos	*Medidas de volume propriamente ditas*	*Medidas para lenha*
1 000 000 000 000	Myriametro cubico *)	
1 000 000 000	Kilometro cubico	
1 000 000	Hectometro cubico	
1 000	Decametro cubico	
	metro cubico	Decastereo
		stereo
		decistereo
0,000 000 001	decimetro cubico	
0,000 001	centimetro cubico	
0,001	millimetro cubico	

§ V — Medidas de capacidade

(Quarta classe)

202. Para os seccos e liquidos a unidade principal é o litro.

203. O litro *é um decimetro cubico;* corresponde á millesima parte do metro cubico.

*) Os multiplos do metro cubico são mui pouco usados; só serviriam como unidades para volumes muito consideraveis.

Multiplos

Denominações	Abreviaturas	Valores
Myrialitro	*Ml*	10000 litros
Kilolitro	*Kl*	1000 — ou 1 m³
Hectolitro	*Hl*	100 —
Decalitro	*Dl*	10 —
litro	*l*	*Unidade principal.*

Submultiplos

decilitro	*dl*	0,1 do litro
centilitro	*cl*	0,01 — —
millilitro	*ml*	0,001 — —

Os multiplos usados são o decalitro e o hectolitro. O kilolitro é unicamente usado nas avaliações de grandes capacidades, e tambem é chamado tonelada.

Dos submultiplos os unicos usados são: o decilitro e o centilitro.

Numeração das unidades de capacidade

204. Si procurarmos a relação de grandeza que guardam entre si as medidas de capacidade, veremos que do mesmo modo que nas medidas lineares, cada medida de capacidade é *10* vezes maior do que a precedente e *10* vezes menor do que a seguinte.

Donde se conclue que *para ler-se e escrever-se* um numero expresso em *litros*, seus muliplos ou submultiplos, bem como *para mudar-se de unidade*, observam-se as mesmas regras dadas para resolverem-se taes questões sobre as medidas lineares.

Conversão das unidades de capacidade em unidades de volume

205. Para passar-se das unidades de capacidade para as de volume, substitue-se a unidade litro pela unidade decimetro cubico, e depois procede-se como ficou dito para referir medidas de volume a qualquer unidade desta especie.

1) Seja o numero *375*$^{\text{hl}}$*,17* cuja unidade queremos passar para metro cubico.

Primeiramente, passemos do *hectolitro* para o *litro*, para o que basta mudar a virgula duas casas para a direita, e teremos: *37517 litros*. Substituindo-se depois o *litro* pelo *decimetro cubico*, o que é o mesmo, resulta *37517 decimetros cubicos*. Querendo-se referir este numero de *decimetros cubicos* a metros cubicos, muda-se a virgula tres casas para a esquerda e obtem-se 37$^{\text{m}^3}$,517.

2) Seja o numero *274*$^{\text{Dl}}$*,195* cuja unidade queremos passar para metro cubico.

Em primeiro lugar, passemos do *decalitro* para o *litro*, para o que basta mudar a virgula uma casa para a direita, e obteremos: *2741*$^{\text{l}}$*,95*. E como o *litro* corresponde a um *decimetro cubico*, o numero 2741$^{\text{l}}$,95 corresponde a *2741*$^{\text{dm}^3}$*,950*. Mudando-se, depois, a virgula tres casas para a esquerda, obtem-se o numero 2$^{\text{m}^3}$,741950, equivalente ao numero proposto.

Conversão das medidas de volume em medidas de capacidade

206. Para passar-se das medidas de volume ás de capacidade, reduz-se a unidade de volume a *decimetros cubicos*, substitue-se esta unidade pelo *litro*, e procede-se depois como quando se referem medidas de capacidade a qualquer outra unidade desta especie.

1) Seja *34*$^{\text{m}^3}$*,941* o numero, cuja unidade se quer passar para hectolitro.

Em primeiro lugar, passemos da unidade *metro cubico* para o *decimetro cubico*, para o que basta mudar-se a virgula tres casas para a direita, e resulta: *34941 decimetros cubicos*. Este numero é o mesmo que *34941 litros*. Querendo-se referir o numero á unidade hectolitro, muda-se a virgula duas casas para a esquerda e obtem-se 349$^{\text{hl}}$,41.

2) Seja o numero *215*$^{\text{m}^3}$*,170* cuja unidade queremos passar para decalitro.

Mudemos, primeiramente, a unidade *metro cubico*, para o que basta deslocar-se a virgula tres casas para a direita, resultando d'ahi o numero *215170 decimetros cubicos* ou *215170 litros*. Para obter-se o decalitro, mudaremos a virgula uma casa para a esquerda, e obteremos *21517* decalitros.

Quadro das relações entre medidas de capacidade e de volume

CAPACIDADE	VOLUMES	
	propriamente ditos	*Lenha*
Myrialitro	....	Decastereo
Kilolitro	*metro cubico*	*stereo*
Hectolitro	....	decistereo
Decalitro	....	....
litro	decimetro cubico	....
decilitro	....	....
centilitro	....	....
millilitro	centimetro cubico	....

Medidas reaes de capacidade

207. As medidas reaes de capacidade têm a fórma cylindrica com a mesma capacidade, porém, dos cubos correspondentes. São formados do dobro e da metade de cada uma.

Conforme se destinam para medir seccos ou liquidos são de madeira ou de metal.

Para seccos ha 11 medidas reaes. São cylindros cuja altura e diametro no interior são iguaes.

Eis os seus nomes:

Hectolitro (100 litros)
Meio-hectolitro (50 litros)

—

Duplo-decalitro (20 litros)
Decalitro (10 litros)
Meio-decalitro (5 litros)

Duplo-litro (2 litros)
Litro (1 litro)
Meio-litro (5 decilitros)

—

Duplo-decilitro (2 decil.)
Decilitro (1 decilitro)
Meio-decilitro (5 centilitros)

As medidas para liquidos dividem-se em duas classes: as grandes medidas e as pequenas medidas.

As 5 grandes medidas são cylindros que têm, interiormente, altura e diametro iguaes. Os seus nomes são:

Hectolitro	*Duplo-decalitro*
Meio-hectolitro	*Decalitro*
	Meio-decalitro.

As 8 pequenas medidas têm a altura interior igual ao dobro do diametro: são de estanho e servem para todos os liquidos, á excepção dos oleos e leite.

Os seus nomes são:

Duplo-litro	*decilitro*
Litro	*Meio-decilitro*
Meio-litro	*Duplo-centilitro* (2 centilitros)
Duplo-decilito	*centilitro* (1 centilitro)

Estas mesmas 8 medidas, quando destinadas para *azeite* e *leite*, são cylindros de folha de Flandres, **cuja altura e diametro,** no interior, são iguaes.

As medidas destinadas para azeite têm uma **aza;** as que servem para leite têm um gancho.

Para medir leite usam-se as 6 primeiras (do **duplo-litro** ao meio-decilitro).

Decilitro para liquidos.

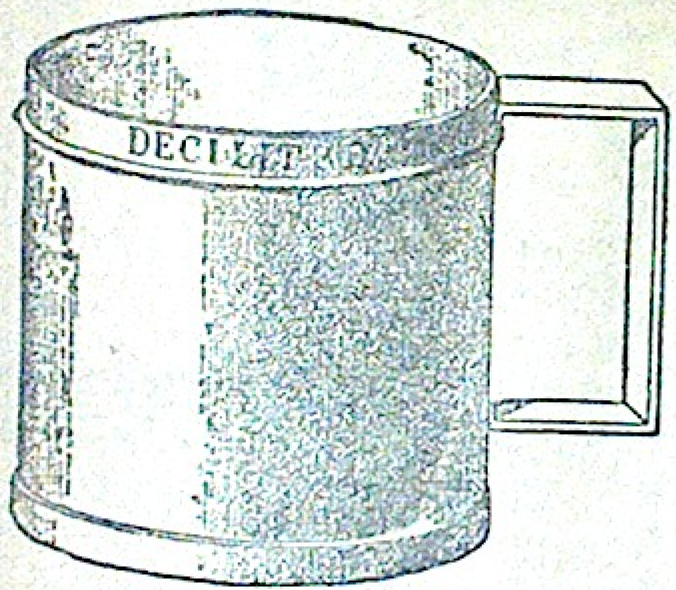
Exercicios sobre as medidas de capacidade

1. Um ***hectolitro*** quantos decalitros vale?
— decilitros?
— centilitros?
— metros cubicos?
— centimetros cubicos?

2. Um *decalitro* quantos decilitros vale?
— metros cubicos?
— centilitros?
— decimetros cubicos?

3. Quanto vale o *litro* em centimetros cubicos
— — *decalitro* — metros —
— — *decilitro* — centimetros —
— — *millilitro* — millimetros —

4. Que é o *centimetro cubico* em relação ao litro?
— — *millimetro cubico* — — — decilitro?
— — *decimetro cubico* — — — meio-decilitro?
— — *metro cubico* — — — duplo-decalitro?



Ler os seguintes numeros:

1. $5^{l},2$	6. $7^{Dl},800$	11. $18^{Hl},345$	16. $11^{l},75$
2. $4^{l},25$	7. $42^{Hl},28$	12. $9^{l},340$	17. $29^{dl},92$
3. $9^{Dl},2$	8. $0^{l},325$	13. $11^{Dl},234$	18. $33^{Hl},6$
4. $17^{Hl},4$	9. $7^{Dl},64$	14. $0^{Hl},07$	19. $0^{l},05$
5. $0^{l},025$	10. $38^{dl},9$	15. $0^{l},652$	20. $0^{Dl},780$

Escrever em algarismos os seguintes numeros:

1. 3 litros 5 decilitros
2. 5 litros 65 centilitros
3. 7 decilitros
4. 15 centilitros
5. 24 decalitros 7 litros
6. 15 decalitros 29 decilitros
7. 14 hectolitros 8 litros
8. 29 litros 7 centilitros
9. 6 hectolitros 5 decilitros
10. 8 decalitros 4 centilitros
11. 3 hectolitros 56 centilitros
12. 9 litros 7 centilitros
13. 11 decalitros 321 centilitros
14. 5 hectolitros 456 decilitros.

Reduzir os numeros seguintes á unidade indicada:

1. **Ao hectolitro:** $5^{Dl},432$; — 789^{l}; — 67^{l}; — $15^{Dl},046$; — 8277^{dl}
2. **Ao decalitro:** 6^{Hl}; — 32^{l}; — 1245^{dl}; — $0^{Hl},75$ — 2753^{cl}.
3. **Ao litro:** $2^{Hl},47$; — $8^{Dl},977$; — $3,45^{cl}$; — $0^{Dl},012$; — $2^{Hl},0056$.
4. **Ao metro cubico:** 4596^{l} — 5694^{Dl}; — 187^{Hl}; — 6732^{dl}; — 5978^{l}.
5. **Ao decimetro cubico:** $3^{Hl},62$; — $7^{Dl},59$; — $0^{l},216$; — $0^{Dl},3567$; — $0^{Hl},05009$.
6. **Ao hectolitro:** 25^{m3}; — $0^{m3},27$; — $3^{m3},98$; — $0^{m3},015$; — $5^{m3},195$.
7. **Ao litro:** $0^{m3},005$; — $0^{m3},000567$, — $4^{m3},65$, — $5^{m3},312$, — 27^{m3}

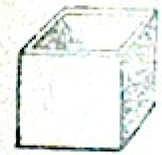
Fazer as seguintes subtracções, reduzindo-se o numero menor á unidade do maior:

1. $3^{Hl},45$ — 216^{l}	5. $34^{Dl},7$ — 17^{l} 4^{cl}
2. $23^{Dl},7$ — 187^{dl}	6. $2^{Hl},05$ — 16^{Dl} 7 dl
3. $5^{l}4$ — 278^{cl}	7. $21^{Hl},35$ — 2148^{l} 35^{cl}
4. $6^{Hl},34$ — 24^{l} 5dl	8. $32^{Dl},07$ — 2^{Hl} 35^{l} 9dl

§ VI — Medidas de peso

(Quinta classe)

208. Grammo é o peso *(no vacuo)* de um centimetro cubico d'agua distillada na sua maior densidade *(4 graus centigrados acima de zero)*.



1 centimetro cubico. (Tamanho natural).

209. O grammo é representado por um pequeno peso de cobre, de fórma cylindrica, ligado pela parte superior a um pequeno botão.

1 grammo. Tamanho natural).

Multiplos

Denominações	Abreviaturas	Valores
Myriagrammo	*Mg*	10000 grammos
Kilogrammo*)	*Kg*	1000 —
Hectogrammo	*Hg*	100 —
Decagrammo	*Dg*	10 —
grammo	*g*	*Unidade principal.*

*) 1 kilogrammo d'agua distillada corresponde ao decimetro cubico ou ao litro.
1000 kilogrammos, portanto, correspondem ao kilolitro.

Submultiplos

decigrammo	*dg*	0,1	do grammo
centigrammo	*cg*	0,01	— —
milligrammo	*mg*	0,001	— —

Observação. — São tomados tambem como multiplos: O **quintal metrico** que vale *100 kilogrammos*. O **milheiro metrico** ou **tonelada metrica** que vale *1000 kilogrammos*.

Além disso, empregam-se o *duplo* e a *metade* de cada um dos multiplos e submultiplos decimaes.

Numeração das unidades de peso

210. Os numeros que representam os multiplos e submultiplos da unidade principal, **lêm-se e escrevem-se** e as suas unidades **transformam-se umas em outras**, exactamente como taes questões foram resolvidas sobre as medidas de comprimento; porque a relação que guardam entre si as medidas de peso é a mesma que a das medidas lineares, isto é, cada medida de peso é *10* vezes maior do que a precedente e *10* vezes menor do que a seguinte.

Emprego das unidades

211. A **tonelada metrica** emprega-se quando se trata de pesos consideraveis, como *o peso de uma locomotiva*, *a carga de um navio*.

O **quintal metrico** é usado tratando-se de pesos menos consideraveis, como *uma massa de ferro*, a *quantidade de trigo carregada em um navio*.

O **kilogrammo** emprega-se no commercio e nos usos ordinarios da vida, para exprimir *o peso do assucar, do café, etc.*

O **centigrammo** é muitas vezes empregado como unidade na *pesagem das pedras preciosas*.

O **myriagrammo** é pouco usado; e quando se emprega, exprime-se o peso em kilogrammos.

O **hectogrammo** e o **decagrammo** são antes empregados como subdivisões do kilogrammo do que como unidades. Para mais simplicidade costuma-se muitas vezes na pratica reduzil-os a grammos.

O **decigrammo** e o **milligrammo** são pouco usados.

Medidas reaes do peso

212. Ha tres especies de pesos; **os grandes pesos, os pesos medios** e **os pequenos pesos**.

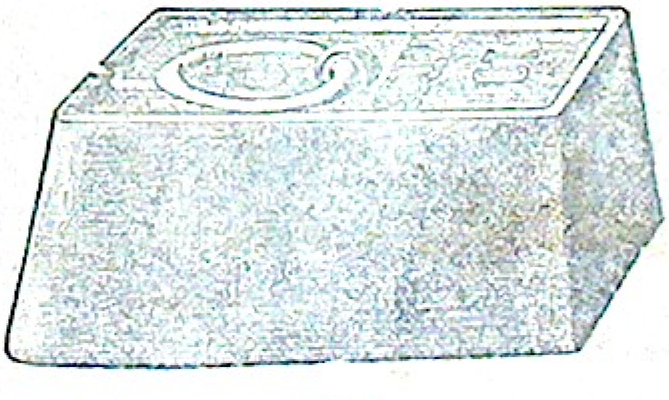
Os *grandes pesos* excedem ao kilogrammo, e **são 5.**

Os *pesos medios* vão do kilogrammo ao grammo, **e são 10.**

Os *pequenos pesos* vão do grammo ao milligrammo **e são 9.**

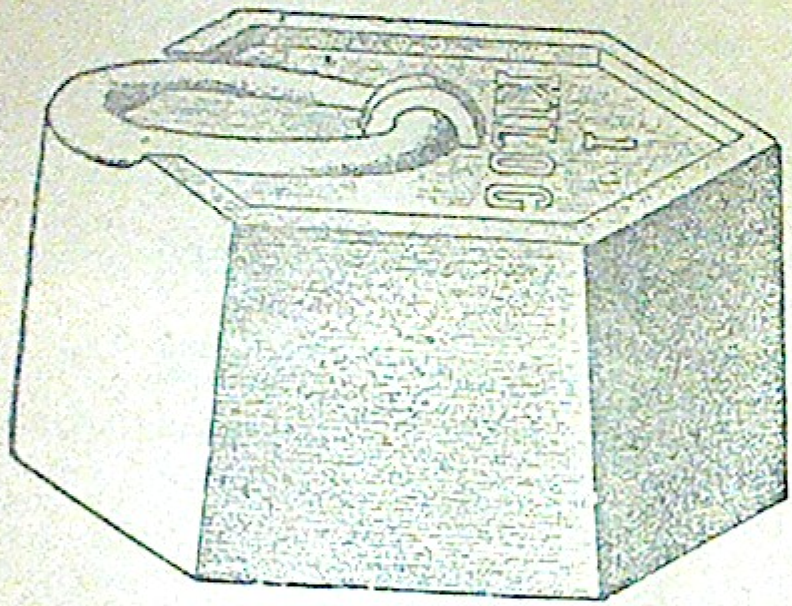
Grandes pesos

1) 50 *kilogrammos* = meio-quintal
2) 20 *kilogrammos* = duplo-myriagrammo
3) *10 *kilogrammos* = 1 myriagrammo
4) 5 *kilogrammos* = meio-myriagrammo
5) *2 *kilogrammos* = duplo-kilogrammo



(Fig. 1)

Os pesos de *50* kilogrammos e *20* kilogrammos têm a fórma duma pyramide truncada, arre dendada nos angulos e de base rectangular *(Fig. 1)*. Esta mesma fórma *podem ter* os pesos de *10* kilogrammos e *5* kilogrammos.

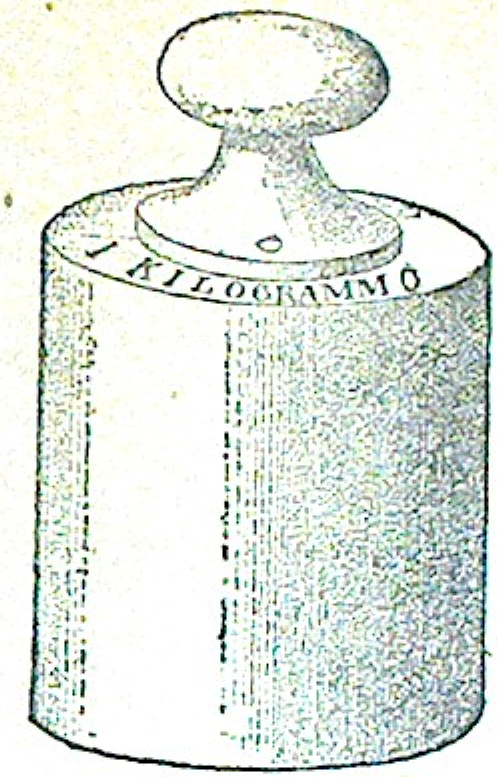


(Fig 2)

Os pesos de ferro de 10 kilogrammos a 5 decagrammos (inclusivamente) têm a fórma duma pyramide truncada, tendo por base um hexagono regular. *(Fig. 2.)*

Pesos medios

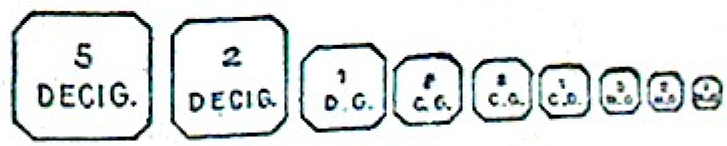
1) *Kilogrammo* = 10 hectogrammos
2) *Meio-kilogrammo* = 5 hectogrammos
3) *Duplo-hectogrammo* = 2 hectogrammos
4) **Hectogrammo* = 10 decagrammos
5) *Meio-hectogrammo* = 5 decagrammos
6) *Duplo-decagrammo* = 2 decagrammos
7) **Decagrammo* = 10 grammos
8) *Meio-decagrammo* = 5 grammos
9) **Duplo-grammo* = 2 grammos
10) *Grammo* = 10 decigrammos.



(Tamanho natural)

Pequenos pesos

1) *Meio-grammo* = 5 decigrammos
2) *Duplo-decigrammo* = 2 decigrammos
3) **Decigrammo* = 10 centigrammos
4) *Meio-decigrammo* = 5 centigrammos
5) *Duplo-centigrammo* = 2 centigrammos
6) **Centigrammo* = 10 milligrammos
7) *Meio-centigrammo* = 5 milligramos
8) **Duplo-milligrammo* = 2 milligrammos
9) *Milligrammo.*



Os *pequenos pesos* têm a fórma de *placas finas* de 4 ou 8 lados e que podem ser de latão, prata ou aluminium.

Observação. — Na serie de pesos ha sempre **dois** pesos de 10 *kilogrammos*, de 1 *duplo-kilogrammo*, de 1 *hectogrammo*, de 1 *decagrammo*, de 1 *duplo-grammo*, de 1 *decigrammo*, de 1 *centigrammo*, de 1 *duplo-milligrammo*. (Estes pesos estão marcados na lista com um asterisco.)

E' necessario haver duplicata de cada um desses pesos, para poderem-se fazer *directamente* as pesadas de 4 e de 9 unidades.

Para 4 unidades, tomam-se *dois-duplos*, ou o *duplo* e *duas unidades*. Para 9 unidades, tomam-se o *quintuplo*, e *dois duplos*; ou o *quintuplo*, o *duplo* e *duas unidades*.

Quadro das relações entre pesos, capacidades e volumes

PESOS	CAPACIDADE	VOLUMES
Tonelada metrica	Kilolitro	*metro cubico*
Quintal metrico	Hectolitro	....
Myriagrammo	Decalitro	....
Kilogrammo	*litro*	decimetro cubico
Hectogrammo	decilitro	....
Decagrammo	centilitro	....
grammo	millilitro	centimetro cubico
decigrammo	....	....
centigrammo	....	....
milligrammo	....	millimetro cubico

Exercicios

1. Um *kilogrammo* quantos decagrammos vale?
   — grammos —
   — hectogrammos —
   — decigrammos —
   — milligrammos —
   — centigrammos —
2. Um *grammo* quantos milligrammos vale?
   — decigrammos —
   — centigrammos —
3. Quantos *centigrammos* formam um grammo?
   — — decagrammo?
   — — kilogrammo?
   — — decigrammo?

4. Quantos *milligrammos* formam um centigrammo?
   — — decigrammo?
   — — grammo?
5. 1.º) Quanto pesa um litro d'agua tomada nas condições do grammo? — 2.º) um decalitro d'agua? — 3.º) um hectolitro? — 4.º) um kilolitro? — 5.º) um decilitro?

Ler os seguintes numeros:

1. $437^{g},5$	6. $178^{Dg},74$	11. $53^{Hg},417$	16. $4^{Kg},780$
2. $3485^{Dg},7$	7. $6^{Kg},37$	12. $0^{Kg},32$	17. $8^{Dg},77$
3. $9^{Hg},2$	8. $5^{g},728$	13. $0^{Dg},03$	18. $11^{g},258$
4. $8^{Kg},4$	9. $0^{Hg},09$	14. $7^{g},354$	19. $14^{Hg},069$
5. $0^{g},25$	10. $9^{Dg},721$	15. $0^{Hg},05$	20. $0^{Kg},0057$

Escrever com algarismos os seguintes numeros:

1. 34 grammos 3 decigrammos	8. 17 decagrammos 8 decigr.
2. 15 hectog. 2 grammos	9. 17 decigrammos 9 milligr.
3. 7 decagrammos 13 decigr.	10. 4 hectogrammos 5 centigr.
4. 58 kilogr. 63 grammos	11. 5 centigrammos 1 milligr.
5. 12 centigrammos 7 milligr.	12. 17 kilogrammos 3 decagr.
6. 7 decigrammos	13. 19 grammos 13 centigr.
7. 8 grammos 7 milligrammos	14. 12 decagrammos 14 milligr.

Converter em grammos os hectogrammos e decagrammos dos numeros seguintes:

1. 4 kilogrammos 3 hectos.	6. 3 kilogrammos 6 decagr.
2. 8 — 5 decas.	7. 6 — 7 hectogrammos
3. 12 — 7 hectos. 2 decas.	8. 9 — 12 decas. 8 gr.
4. 21 — 9 hectos. 4 gr.	9. 27 — 5 hectos. 3 decas.
5. 24 — 16 decagrammos	10. 29 — 4 hectos. 1 deca. 5 gr.

Dizer o peso dos volumes d'agua *(nas condições do grammo)* **expressos pelos seguintes numeros**:

1. $0^{l},2$	5. $16^{Dl},35$	9. $16^{Hl},59$	13. 9^{m^3}
2. $4^{Dl},5$	6. $3^{l},36$	10. $23^{Dl},098$	14. $4^{m^3},3$
3. $0^{Hl},7$	7. $0^{Hl},05$	11. $5^{l},791$	15. $7^{m^3},45$
4. $0^{m^3},6$	8. $0^{m^3},25$	12. $0^{m^3},005$	16. $0^{m^3},0005$

Que pesos devem-se collocar no prato d'uma balança para fazer as seguintes pesadas:

1. 4 grammos	7. 79 grammos	13. $4^{Dg},5$	19. $4^{Kg},9$
2. 5 —	8. 94 —	14. $9^{Hg},54$	20. $0^{Hg},27$
3. 7 —	9. 249 —	15. $2^{Hg},356$	21. $7^{Kg},349$
4. 9 —	10. 394 —	16. $5^{Kg},347$	22. $5^{Dg},9$
5. 24 —	11. 444 —	17. $9^{Dg},48$	23. $7^{Dg},97$
6. 45 —	12. 9999 —	18. $3^{Kg},064$	24. $4^{Hg},59$

Densidades, pesos especificos

213. Densidade de um corpo é a relação entre a quantidade de materia deste corpo e a de um outro servindo de termo de comparação, ***tomados ambos sob o mesmo volume.***

A agua distillada, a 4 graus, acima de zero, é a unidade para *os solidos e os liquidos; para os gazes*, a unidade é o ar.

Assim, quando se diz que a densidade do mercurio é 13, por exemplo, significa isto que, tomando-se volume igual de mercurio e de agua, o mercurio contém 13 vezes mais materia do que a agua.

214. Peso especifico de um corpo é a relação entre o seu peso relativo*), sob certo volume, a *zero*, e o peso de um igual volume d'agua distillada, *a 4 graus acima de zero.*

Quando se diz que o peso especifico do mercurio é 13, quer isto dizer que *em volume igual* o mercurio *a zero* pesa 13 vezes mais do que a agua distillada, *a 4 graus.*

O peso dos corpos, em volume igual, sendo proporcional á sua massa, um corpo que contém duas, tres vezes mais massa do que a agua, deve pesar duas, tres vezes mais; por conseguinte, *a relação entre os pesos* ou **o peso especifico**, é a mesma que *a relação entre as massas* ou **a densidade relativa**. Por isso, as expressões *densidades* e *pesos especificos* se tomam muitas vezes como equivalentes.

E' de summa importancia notar que o systema metrico francez presta-se a fazer que a definição de densidade tome uma outra fórma.

Com effeito, neste systema, a *unidade de peso* é sempre o *peso da unidade de volume d'agua*. O numero que exprime o *peso* duma massa d'agua exprime tambem *o seu volume*. Por exemplo: a unidade de peso *kilogrammo* é o peso d'agua da unidade de volume *decimetro cubico* ou *litro*.

---

*) *Peso relativo* é o que se determina por meio da balança.

Supponhamos que uma certa porção de mercurio pesa 65 kilogr. *e que o mesmo volume d'agua pesa* 5 kilogrammos; a densidade do mercurio será

$$\frac{65 \text{ Kg.}}{5 \text{ Kg.}} = 13, \text{ pela definição dada.}$$

Neste exemplo, o peso d'agua considerada sendo de 5 *kilogrammos*, seu volume é de 5 *decimetros cubicos* ou de 5 *litros*. Póde-se, pois, dizer que dividindo-se 65 por 5, dividiu-se o peso do mercurio por seu volume, que é o mesmo que o da agua. Dahi a seguinte definição:

Densidade, ou peso especifico de um corpo, *é o quociente do peso deste corpo dividido por seu volume.*

Chamando-se **D** a *densidade* de um corpo, **P** o *peso* deste corpo e **V** o *seu volume*, teremos: $D = \frac{P}{V}$

Desta formula, deduz-se esta outra $P = V \times D$ que se traduz:

O peso de um corpo é o producto do seu volume pela sua densidade.

Da formula $P = V \times D$, se tira esta outra $V = \frac{P}{D}$, que se traduz:

O volume de um corpo é o quociente da divisão do seu peso por sua densidade.

A' vista da correspondencia que ha entre as unidades de peso e as unidades de volume do systema metrico, póde-se facilmente passar *do peso* de um corpo *para seu volume* e reciprocamente, por meio de tabellas das densidades.

Tabella das densidades de alguns dos principaes corpos

SOLIDOS E LIQUIDOS EM RELAÇÃO Á AGUA				GAZES E VAPORES EM RELAÇÃO AO AR	
Agua distillada	1,	Agua distillada	1	Ar 0,001293	1
Cal viva	0,480	Agua do mar	1,026	Acido carbonico	1,529
Carvão vegetal	0,250	Aguardente 18°	0,947	Azote	0,971
Carvão de pedra	1,329	Aguardente 22°	0,923	Ammoniaco	0,596
Chumbo	11,352	Aguardente 30°	0,848	Chloro	2,47
Cobre fundido	8,788	Alcool absoluto	0,815	Hydrogeneo	0,069
Coke	0,340	Azeite de oliveira	0,915	Hydrogeneo bicarbonado	0,978
Estanho	7,292	Espirito de vinho 33°	0,863	Hydrogeneo protocarbonado	0,555
Ferro fundido	7,207	Espirito de vinho 36°	0,848	Oxygeneo	1,105
Ferro forjado	7,788	Ether sulfurico	0,736	Vapor d'agua	0,614
Ouro puro	19,258	Leite de vacca	1,032		
Platina batida	23,000	Mercurio	13,594		
Platina laminada	21,150	Vinagre	1,019		
Vidro de garrafa	2,527	Vinho Bordeaux	0,994		
Vidro de vidraça	2,732	Vinho de Malaga	1,0[illegible]		
Zinco	7,100	Vinho do Porto	0,997		

Applicação da tabella. — 1) *Uma barra de ferro forjado tem $3^m,50$ de comprimento, 35 millimetros d'espessura e 4 centimetros de largura. Qual é o peso?*

O volume em centimetros cubicos, é $350 \times 4 \times 3,5$ ou 4900^{cm^3}. A densidade do ferro forjado sendo 7,788, o peso pedido será:

$$4900 \times 7,788 = 38162\,g = 38^{Kg},162.$$

2) *Uma bala de chumbo pesa 150 grammos. Qual é o seu volume?*

A densidade do chumbo sendo 11,352, o volume pedido será $150 : 11,352 = 13^{cm^3},213$.

§ VII — Medidas monetarias

(Sexta classe)

215. O systema metrico francez tambem é chamado systema metrico decimal, porque todas as suas medidas têm multiplos e submultiplos formados segundo a lei decimal. Como este systema é o unico admittido por lei, é chamado **systema legal de pesos e medidas.**

216. O franco é a unidade monetaria. *E' uma peça de prata, que pesa 5 grammos, sendo 4^g5 de prata e $0^g,5$ de cobre.*

Os seus multiplos e submultiplos não seguem a mesma formação que as outras unidades deste systema.

217. Para exprimir os multiplos empregam-se os numeros ordinarios. Assim diz-se: dez, cem, mil etc. *francos*, e não *deca*franco, *hecto*franco, *kilo*franco, etc.

Os submultiplos do franco são:

Decimo (pouco empregado), que equivale ao decimo do franco (moeda de *10 centimos).*

Centimo, que equivale ao centesimo do franco.

§ VIII — Medidas de tempo

218. Comquanto fossem apresentadas novas medidas de tempo, de accordo com o systema decimal, prevaleceram as antigas que abaixo vão numeradas:

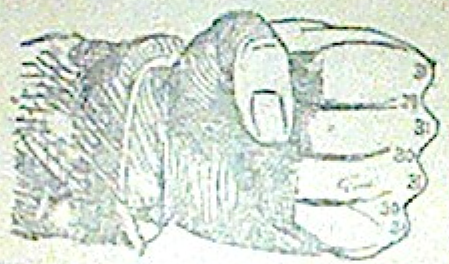
Seculo	100 annos.
Decennio	10 —
Lustro	5 —

Anno { 12 mezes trigesimaes e 5 dias
12 mezes do calendario
52 semanas e 1 dia
365 dias

O anno *bissexto* tem *366* dias.

Semestre	6 mezes.
Trimestre	3 —
Bimestre	2 —

Mez	30	ou 31 dias*), sendo o commercial de 30.
Semana	7	dias.
Dia *(unidade principal)*	24	horas.
Hora	60	minutos.
Minuto	60	segunndos.



Janeiro
Fevereiro
Março — Agosto
Abril — Setembro
Maio — Outubro
Junho — Novembro
Julho — Dezembro

Um meio de facilmente conhecer-se quaes os mezes de 31 dias ou de 30, é fechar-se a mão esquerda e começar a contar sobre as saliencias das articulações e sobre os intervallos; os que cahirem nas saliencias tem 31 dias, e os que cahirem nos intervallos tem 30, como se vê na figura do texto.

§ XI — Medidas angulares

219. A circumferencia divide-se, no systema metrico decimal, em *4 quadrantes;* cada quadrante em *100* partes chamadas *grados;* cada grado em *100* partes chamadas *minutos centesimaes;* cada minuto centesimal em *100* partes chamadas *segundos centesimaes.*

Na divisão antiga da circumferencia, chamada divisão *sexagesimal,* e adoptada de preferencia á centesimal, a circumferencia divide-se em 4 partes iguaes ou *4 quadrantes:* cada quadrante em *90 graus* (90°): cada grau em *60 minutos* (60'); cada minuto em *60 segundos* (60").

*) Pelos versos seguintes póde-se facilmente conhecer quaes são os mezes de 30 e 31 dias, e qual o de 28 e 29:

Trinta dias tem Setembro,
Abril, Junho e Novembro;
Fevereiro vint'oito tem;
No bissexto mais um lhe dêm
E os mais, que sete são,
Trinta e um todos terão.

Tabella do systema metrico francez

MEDIDAS	Unidades 1	10	100	1 000	10 000	0,1	0,01	0,001
Lineares	Metro	Decametro	Hectometro	Kilometro	Myriametro	Decimetro	Centimetro	Millimetro
Itinerarias				Kilometro	Myriametro			
Agrarias	Aro		Hectaro				Centiaro	
De capacidade para seccos e liquidos	Litro	Decalitro	Hectolitro	Kilolitro	Myrialitro	Decilitro	Centilitro	Millilitro
De peso	Grammo	Decagrammo	Hectogrammo	Kilogrammo	Myriagrammo	Decigrammo	Centigrammo	Milligrammo
Para lenha e madeira	Stereo	Decastereo				Decistereo		
		100	10 000	1 000 000	100 000 000	0,01	0,00 01	0,000001
De superficie	Metro²	Decametro²	Hectometro²	Kilometro²	Myriametro²	Decimetro²	Centimetro²	Millimetro²
		10³	100³	1 000³	10 000³	(0,1)³	(0,01)³	(0,001)³
De volume	Metro³	Decametro³	Hectometro³	Kilometro³	Myriametro³	Decimetro³	Centimetro³	Millimetro³

§ X — Vantagens do systema metrico francez

220. Para que um systema metrico qualquer seja bem organizado, é preciso que satisfaça ás seguintes condições:

1.ª Todas as medidas principaes do systema devem derivar-se de uma maneira simples da medida fundamental.

2.ª A medida fundamental deve ser tomada de tal modo, que possa ser de novo determinada, quando for preciso.

3.ª As relações de cada medida principal com os seus multiplos e submultiplos devem ser uniformes e faceis.

4.ª A nomenclatura deve conter o menor numero possivel de nomes distinctos e arbitrarios.

221. Vejamos si o systema metrico francez satisfaz a estas condições principaes.

Quanto á primeira

As diversas medidas principaes do systema metrico francezd derivam-se de uma maneira simples da unidade fundamental — **metro** —. Com effeito: o **aro** se deriva do *metro*, porque é um quadrado que tem 10 metros de lado; o **stereo** se deriva do *metro*, porque é um metro cubico; o **litro** se deriva do metro, porque é um cubo construido sobre o decimo do metro; o **grammo** se deriva do *metro*, porque é o peso d'agua distillada que enche o cubo construido sobre o centesimo do metro; o **franco**, finalmente, se deriva indirectamente do *metro*, porque pesa 5 grammos, e o grammo se deriva do metro

Quanto á segunda

A unidade fundamental do systema metrico francez foi tomada no globo; de sorte que, si porventura vier a perder o seu padrão, póde-se de novo determinal-a.

Quanto á terceira

No systema metrico francez as unidades de cada classe têm com a sua unidade principal relações uniformes e simples. Com effeito, com quatro pequenas palavras *(deca, hecto, kilo, myria)* formam-se todos os multiplos da unidade principal: assim como com tres outras *(deci, centi, milli)* formam-se os submultiplos. Da etymologia dessas palavras conclue-se a regularidade da formação dos multiplos e submultiplos.

Quanto á quarta

Na nomenclatura do systema metrico francez consideram-se apenas seis medidas de nomes distinctos; a saber: **o metro, o aro, o stereo, o litro, o grammo e o franco.** A propria nomenclatura é tão systematica que, *enunciada a medida*, sabe-se logo a *classe a que pertence*, e a *relação que tem com a unidade principal da sua classe.*

Accresco ainda, que a *reducção de uma medida metrica qualquer para uma outra unidade* se effectua por uma simples mudança da virgula.

O nosso systema monetario é, porem, preferivel ao francez. A unidade principal **real**, comquanto seja imaginaria, tem, comtudo, seus multiplos expressos *em numeros inteiros*, o que é uma grande commodidade para os calculos. Por isso, a lei n. 1157 de 26 de Junho de 1862 que mandou substituir o antigo systema de pesos e medidas pelo systema metrico francez, determinou a substituição *sómente na parte concernente ás medidas lineares, de superficie, volume, capacidade e peso.*

Problemas sobre fracções decimaes e sobre systema metrico

1. Um negociante vendeu num dia 4 peças de morim, uma das quaes tinha 51m,75; a segunda 49m,30; a terceira 63m e a quarta 38m46. *Quantos metros vendeu ao todo?* — R. 202m,51.

2. Vendendo-se uma mercadoria por 454f,80 teve-se um prejuizo de 45f,20. *Quanto custou ella?* — R. 500 francos.

3. Um viajante partiu de Paris para Strasbourg passando por Nancy; sabe-se que a distancia de Paris a Nancy é de

378^{Km},7 e que a distancia desta ultima cidade á de Strasbourg é de 155^{Km}. *Quantos kilometros andou o viajante?* — **R. 533^{Km},7.**

4. Collocou-se um objecto no prato de uma balança e para que esta ficasse em equilibrio foi necessario collocarem-se no outro prato 5 Hg, 2 Hg, 5 Dg, 1 g e 5 dg. *Qual será o peso deste objecto?* — **R. 751^{g},5.**

5. Uma carroça leva 4 pacotes, um dos quaes pesa 86Kg 7Dg; o segundo 12Kg 162g; o terceiro 151Kg; e o quarto 135 Kg 8 Dg. *Que peso leva a carroça?* — **R. 384^{Kg},312.**

6. Um viajante fez no primeiro dia 18 Km de caminho, no dia seguinte 13 Km 7 Hm, e no terceiro dia tanto quanto nos dois dias precedentes. *Que distancia percorreu elle no fim de tres dias?* — **R. 63^{Km},4.**

7. O sino de uma igreja está a 28^{m},54 acima do nivel do mar; o de uma outra a 29^{m},67 do mesmo nivel. *Qual é a differença destas duas alturas?* — **R. 1^{m},13.**

8. Um negociante vendeu por 132^{f},40 uma mercadoria que lhe custou 109^{f},60; *que lucro teve?* — **R. 22^{f},80.**

9. Uma pessoa ganha 126^{f},66 por mez, e gasta 123^{f},49; *quanto lhe resta?* — **R. 3^{f},17.**

10. Deu-se a uma modista 7^{m},56 de certa fazenda; ella tirou para um vestido 5^{m},87. *Quantos metros restaram?* — **R. 1^{m},69.**

11. Um vaso que continha 3^{l},5 ficou exposto ao sol durante uma hora; depois disto encontraram-se só 2^{l},97. *Que quantidade d'agua evaporou-se?* — **R. 0^{l},53.**

12. Si uma pessoa possuisse 24^{f},50 mais, teria 1000 francos. *Quanto tem ella?* — **R. 975^{f},50.**

13. Uma pessoa foi contratada para calçar uma rua de 6000 metros quadrados. *Quantos metros lhe faltam para concluir o trabalho,* sabendo-se que ella tem feito 2476 m² 7 dm², 84$^{cm^2}$? — **R. 3523$^{m^2}$,9216.**

14. Um pedaço de terra contém 179 aros. Empregaram-se 5 aros para construir-se uma casa, e 11 para um jardim. *Quantos aros restaram?* — **R. 154 aros.**

15. Um negociante devia certa quantia; deu por conta: 246^{f}20; 340^{f}; 150^{f},50; 1372^{f},25. *Quer se conhecer esta quantia,* sabendo-se que na ultima prestação o negociante deu uma cedula de 1000 francos e recebeu de troco 357^{f},49. — **R. 2751^{f},46.**

16. Um fabricante mandou fazer 1364^{m},69 de certa mercadoria por 649^{f},78; depois, 2865^{m},87. por 1287^{f},83; vendeu o todo a 1 f. o metro; *qual foi o seu lucro ou o seu prejuizo?* — **R. 2292^{f},95.**

17. Um commerciante contrahiu dois emprestimos, um de 9789^{f},75 e outro de 6749^{f},35, por conta dos quaes já pagou 1852^{f},42. Duas pessoas lhe devem, uma 3520^{f},15 e a outra 11508^{f},13; elle tem em caixa 9763^{f},90. *Quanto possuirá quando tiver pago sua divida e tiver recebido o que lhe devem?* — **R. 10105^{f},50.**

18. Um kilogrammo d'agua do mar contém 0^{Kg},025 de sal; *que porção de sal se encontrará em 32^{Kg},8 da mesma agua?* — **R. 0^{Kg},82.**

19. *Quanto se deve pagar por 35^{Kg},7 de certa mercadoria,* sabendo-se que o kilogrammo custa 2^{f},45. — **R. 87^{f},46.**

20. Um metro de fazenda custa 16 francos. *Quanto se deve pagar por 0^{m},25?* — **R. 4 francos.**

21. Um pedreiro construiu um muro de 56^{m},34 de comprimento, 1^{m},85 de altura e 0^{m},50 de largura, recebendo 5^{f},20 por metro cubico. *Quanto ganhou elle?* — **R. 271 francos** (por excesso).

22. *Qual é o peso de ar contido numa sala* que tem 5^{m},4 de comprimento sobre 4^{m},6 de largura e 4^{m},75 de altura, sabendo-se que um metro cubico de ar pesa 1^{Kg},293? — **R. 152^{Km},561.**

23. *Quantos stereos de lenha* podem-se accommodar em um quarto que tem 8^{m},4 de comprimento, 4^{m},85 de largura e 3^{m},6 de altura? — **R. 146^{s},66.**

24. *Quantos centimetros cubicos d'agua serão precisos* para encher um vaso que tem a capacidade de 12^{l},7? — **R. 12700 centimetros cubicos.**

25. Um muro tem 105^{m},8 de comprimento sobre 64^{m},15 de altura. *Determinar a sua superficie em hectaros e em aros.* **R. 0^{Ha},6787070; 67^{a},87070.**

26. *Qual será a superficie total de 14 pedaços de terra,* sabendo-se que cada um tem 5^{Ha} 6^{a} 42^{ca}? — **R. 7089^{a},88.**

27. Uma pessoa distribue dinheiro aos pobres; entre elles ha 7 homens, 4 mulheres e 15 creanças. Dá a cada homem 0^{f},25; a cada mulher 0^{f},15, e a cada creança 0^{f},10. *Quanto gastou?* — **R. 3^{f},85.**

28. Em uma familia, o pae ganha 0^{f},65 por hora, a mãe 0^{f}35 e o filho 0^{f},40. *Quanto ganham juntamente em um dia em que o pae trabalha 11 horas, a mãe 6 e o filho 8?* — **R. 12^{f},15.**

29. Um negociante vende com um lucro de 47^{f},55 um retalho de panno de 8^{m},7 que lhe custou 9^{f},25 o metro. *Que quantia arrecadará desta venda?* — **R. 128 francos.**

30. Dois vasos cheios d'agua pura pesam 2^{Kg}28^{g}. Um contém 14 centil. mais do que o outro. *Qual é a capacidade de cada um,* sabendo-se que os dois vasos vasios pesam 12 hectogr.? **R. 34^{cl},4: 48^{cl},4.**

31. *Qual é a capacidade de um vaso* que pesa, vasio, 1 hectogrammo e, cheio d'agua pura, 270 grammos? — **R. 0^{l},17.**

32. Um tonel vasio pesa 53^{Kg},5; cheio d'agua, 268^{Kg},75. *Qual é a sua capacidade?* — **R. 215^{l},25.**

33. Si eu tivesse mais 500 francos, poderia pagar 28^{a},60 de terra a 47^{f},50 o aro, e me restariam 140 francos. *Quanto possuo?* — **R. 998^{f},50.**

34. *Que lucro ou prejuizo póde ter* uma pessoa que paga a 7 operarios á razão de 3^{f},59 por dia, tendo elles trabalhado 95 dias e tendo feito cada um por dia 2^{m},59 que se vendem a 1^{f},78 o metro? — **R. 678^{f},43.**

35. Um negociante tem 132^{Hl},14 de vinho; com elles encheu 3 toneis cada um dos quaes leva 12^{Hl},32. *Quantos hectolitros de vinho lhe restam?* — **R. 95^{Hl},18.**

36. Um negociante comprou $583^{m},25$ de panno a $12^{f},30$ o metro; vendeu-os a 15 francos o metro. *Qual foi o seu lucro?* — R. $1520^{f},77$.

37. Uma pessôa occupou por 42 dias a $1^{f},75$ por dia a um operario que lhe devia 50 francos. *Quanto deve receber o operario,* descontando-se da importancia do seu trabalho a quantia que elle devia? — R. $23^{f},50$.

38. Uma pessoa tinha o mesmo numero de moedas de 5^{f}, 2^{f} e 1^{f}, cujo peso era de $75^{Kg},44$. Comprou uma casa por 12500^{f}; *quanto ainda tem?* — R. 2588^{f}.

39. Um negociante deve $1835^{f},25$. Dá em pagamento $73^{m},25$ de linho a $3^{f},75$ o metro, $41^{m},60$ de panno a 15 francos o metro, e $16^{m},56$ de algodão a $2^{f},10$. *Quanto ainda deve?* — R. $901^{f},79$.

40. Uma caseira vendeu 200 ovos a $9^{f},50$ o cento, e 17 kilogr. de manteiga a $2^{f},30$ o kilogr. Com o producto desta venda pagou $9^{m},60$ de estofo a $1^{f},25$ o metro. *Com quanto ficou?* — R. $46^{f},10$.

41. Foram pagos 15 operarios á razão de $3^{f},57$ e 128 á razão de $2^{f},89$ por dia; trabalharam 100 dias durante os quaes fizeram $7949^{m},65$ que foram vendidos a 10 francos o metro. *Qual foi o lucro?* — R. $37\,149^{f},50$.

42. Um negociante de estofos o qual devia 1 500 francos, deu em pagamento $69^{m},40$ de linho a $1^{f},45$ o metro, mais $34^{m},80$ de panno a $15^{f},60$ o metro. *Quanto ainda deve?* — R. $856^{f},49$.

43. Uma pessoa comprou 6 myriagr. de certa mercadoria, depois 745 decagr.; depois 186 hectogr., á razão de 125 francos o quintal metrico. Tendo dado 200 francos em pagamento, *quanto se lhe deve restituir?* — R. $92^{f},44$.

44. *Por que numero deve-se multiplicar* 12 668 569 para obter-se o producto 506 742 760? — R. 4.

45. Feita a divisão de um numero por 25, ficou um resto 12. *Qual é a parte decimal relativa a este resto?* — 0,48.

46. *Qual é o numero que multiplicado* por 0,55 é igual a 156,97? — 285,40.

47. Um homem poz de parte $237^{f},25$ para comprar uma quantidade de vinho que durasse um anno, bebendo elle por dia uma garrafa. *Quanto deve elle pagar por cada garrafa* para que o preço não exceda á quantia reservada? — R. $0^{f},65$.

48. *Qual será o peso de uma barrica de assucar,* sabendo-se que 7 barricas, da mesma capacidade, reunidas, pesam $736^{Kg},24$? — R. $105^{Kg},177$.

49. Mediram-se as dimensões de um tanque e achou-se que elle podia conter $5^{m3},454$ d'agua. *Quantos litros poderá elle conter?* — R. 5 454 litros.

50. Uma garrafa tem uma capacidade de $1^{l},35$. *Quantas vezes a agua contida nesta garrafa encherá um copo que tem uma capacidade de* $0^{m3},000\,045$? — R. 30.

51. Um ferreiro comprou 645 kilos de ferro por $448^{f},25$; *por quanto deve elle vender cada kilo, querendo ganhar 100 francos no todo?* — R. $0^{f},85$.

52. Uma sociedade composta de tantos homens quantas mulheres gastou $250^{f},25$ á razão de $1^{f},75$ por homem e $1^{f},50$ por mulher. *Quantos eram os homens e quantas as mulheres?* — R. 77.

53. *Achar um numero tal* que delle subtrahindo-se 28, o resto multiplicado por 7 dá para producto 105. — R. 43.

54. O kilogrammo de assucar vale $1^{f},30$ e o kilogrammo de café $4^{f},10$; um especieiro quer empregar 350 francos na compra de uma igual quantidade de assucar e de café. *Quantos kilos de uma e outra mercadoria deverá comprar?* — R. $64^{Kg},81$.

55. Apresentaram-me seda que vale 87 francos os 12 metros e outra que vale $59^{f},50$ os 7 metros. *Tomando 1 metro de cada qualidade, quanto devo pagar?* — $15^{f},75$.

56. Tres saccos de centeio, um com $48^{Kg},9$, outro com $51^{Kg},6$ e o terceiro com 56 kilogr., valem juntos $28^{f},17$. *Qual é o preço do kilogrammo?* — R. $0^{f},18$.

57. Duas peças de fazenda da mesma qualidade custaram: uma $485^{f},75$; a outra, $686^{f},25$. A primeira tem $24^{m},50$ menos do que a segunda; *qual é o comprimento de cada uma?* — R. 1ª... $51^{m},75$; 2ª... $76^{m},25$.

58. Dois amigos compraram $32^{m},65$ de fazenda por $163^{f},25$; depois de dividida a fazenda, um teve de pagar $45^{f},75$ mais do que o outro. *Quantos metros tocaram a cada um?* — R. $11^{m},75$; $20^{m},90$.

59. Um vaso cheio d'agua pesa $3^{Kg},7$; o peso do vaso vasio é de 5 hectogrammos. *Qual é a capacidade do vaso?* — R. $3^{l},2$.

60. Um vaso cheio d'agua do mar pesa $45^{Kg},25$; vasio, $7^{Kg},15$. *Quantos litros contém elle?* — R. $38^{l},10$.

61. Vendendo-se 17 objectos a $2^{f},80$ cada um, obteve-se um lucro de $11^{f},05$. *Quanto custou cada um?* — $2^{f},15$.

62. Um negociante vendeu-me $39^{m},50$ de linho. Devolvi-lhe 14 metros com a respectiva importancia e fiquei com o resto por $33^{f},15$. *Quanto custou o metro deste linho?* — R. $1^{f},30$.

63. Um commerciante trocou com outro 250 metros de panno e recebeu 200 metros de outro panno de qualidade differente e que valia $31^{f},25$ o metro. *Qual era o preço de um metro de panno que elle trocou?* — R. 25 francos.

64. Um homem vendeu 95 laranjas por $14^{f},25$. *Por quanto vendeu elle a duzia?* — $1^{f},80$.

65. $72^{m},50$ importaram em $5\,211^{f},75$. *Quanto se deve pagar por $77^{m},20$?* R. $5\,581^{f},56$.

66. Distribuiu-se uma ração de vinho a todos os homens que tinham trabalhado numa grande manobra. O litro era dividido em 3 rações; cada tonel contendo 270 litros custou $121^{f},50$; pagou-se pelo total da despeza 2 700 francos. 1) *Quantos homens entraram nesta manobra,* 2) *quanto se pagou por cada ração?* — R. 18 000 homens; $0^{f},15$.

67. Um terreno de $678^{m2},84$, vendeu-se por $26\,047^{f},80$. *Quanto deve custar um hectaro?* — R. 450 000 francos.

69. Um reservatorio tem uma capacidade de 436$^{m^3}$,050; seu comprimento é de 12^{m},5 e a sua largura de 10^{m},8. *Qual é a sua profundidade?* — **R. 3^{m},23.**

70. *Qual será o preço de 38 duplos-decalitros*, á razão de 18 francos o hectolitro? — **R. 136^{f},80.**

71. *Quantos pães de 12 meios-kilos se comprarão com 226,80*, custando o meio-kilo 0^{f},225? — **R. 84.**

72. Custando o meio-kilo de pão 0^{f},21, *quantos pães de 3 kilos se comprarão com 64,26?* — **R. 51 pães.**

73. *Quantos kilos de pão de 0^{f},42 se podem comprar com o preço de 12 kilos de carne de 1^{f},26?* — **R. 36 kilos.**

74. Comprei 27 hectolitros de maçãs á razão de 2^{f},10 o meio-hectolitro. *Quanto devo pagar?* — **R. 113^{f},40.**

75. Um criado ganha 273^{f},75 por anno; depois de certo tempo foi despedido, recebendo 93^{f},75, correspondentes aos dias que elle trabalhou. *Quantos dias trabalhou elle?* — **R. 125 dias**

76. Um empreteiro combinou com um pedreiro em pagar-lhe 26^{f},80 por 6 metros de um trabalho. Depois de 15 dias o pedreiro recebeu 122^{f},55 pelo trabalho. *Quantos metros fez o pedreiro e quanto ganhou por dia?* — **R. 28^{m},50; 8^{f},17.**

77. Um operario contrahiu um debito de 345^{f},85. Pagou primeiramente 45^{f},35; depois 29^{f},70; depois 56^{f},80 e propoz saldar o resto em 4 prestações iguaes. *De quanto será cada uma?* — **R. 53^{f},50.**

78. Um negociante de estofos comprou 4 peças de panno, á razão de 17^{f},20 o metro, por 1 866^{f},20. A primeira peça tem 25^{m},40; a segunda 23^{m},80; a terceira 31^{m},50. *Quantos metros tem a quarta?* — **27^{m},80.**

79. Uma pessoa comprou vinho na importancia de 285^{f},25 a 3^{f},50 o decalitro. Entregaram-lhe primeiro 2^{Hl},35; depois 437 litros. *Quantos decalitros recebeu na 3.ª entrega?* — **R. 14^{Dl},3.**

80. Um vinhateiro deve 560 francos. Pagou primeiro 45 francos, depois 27^{f},50; depois 24^{f},25; propoz-se a saldar o resto, dando vinho ao preço de 42^{f},50 o hectolitro. *Quantos decalitros de vinho deve elle dar para saldar o seu debito?* — **R. 109 Dl.**

81. Uma senhora deixa a seu sobrinho uma fortuna de 64 440 francos, encarregando-o de dar ao creado que a servia a 18ª parte de sua successão, e á sua enfermeira a 25ª parte do resto. *Qual é a parte de um e de outro, e quantos aros de terra, á razão de 5 800 francos o hectaro, poderia comprar o sobrinho com a parte que lhe coube?* — **R. 3580 fr.; 2434^{f},40; 100^{a},33.**

82. Um negociante comprou trigo em casa de 3 rendeiros, na importancia de 2062^{f},50, á razão de 37^{f},50 o quintal metrico; o primeiro rendeiro entregou 17 quintaes e o segundo 230 myriagrammos. *Quantos kilogrammos entregou o terceiro?* — **R. 1500 kilogrammos.**

83. 117 lenços custaram 409^{f},50. *Por que preço se deve vender a duzia para ganhar-se 111^{f},15 sobre os 117 lenços?* — **R. 53^{f},40.**

84. 75 camisas custam 421^{f},875. *Por quanto se deve vender a duzia para ganhar-se 1^{f},075 em cada camisa?* — **R. 91^{f},20.**

85. Dividir 8624 francos entre tres pessoas, de modo que a terceira pessoa por si só tenha tanto quanto as outras duas que devem receber uma parte igual. — **R. As duas primaras 2156 francos; a 3ª 4312.**

86. A tripulação de um barco de pesca, composta de patrão e 18 marinheiros, ganhou 6 500 francos. Devem-se reservar 6 partes para o barco; o resto se dividirá pela tripulação de modo que ao patrão toquem duas partes e a cada marinheiro uma parte. *Dizer quanto tocou ao barco, ao patrão e a cada marinheiro.* — **R. Barco, 1500 fr.; patrão 500; cada marinheiro, 250.**

87. Um vaso que vasio pesa 475 grammos contém 2^{l},54 de um liquido. Suppondo-se que 1 decimetro cubico deste liquido pesa 0^{Kg},974, *a quanto montaria uma somma de dinheiro que pesasse tanto quanto o vaso e o liquido nelle contido?* — **R. 589^{f},79.**

88. 25 obreiros fizeram um fosso de 1327^{m},45 em 9 semanas; pagou-se-lhes cada metro a 9^{f},60. *Quanto ganhou por semana cada um desses obreiros*, sabendo-se que 6 dentre elles devem ter, cada um, um terço mais do que um dos outros? — **R. 52^{f},44; 69^{f},92.**

89. Duas peças de fazenda da mesma qualidade têm: uma 76^{m},25; outra 51^{m},75. A primeira custa 220^{f},50 mais do que a segunda; *qual é o preço de cada uma?* — **R. 1ª . . . . 686^{f},25; 2ª . . . . 465^{f},75.**

90. Em uma grande fabrica estão empregados homens, mulheres e creanças. Os homens recebem 16^{f},50 por semana, as mulheres 10^{f},50 e as creanças 4^{f},50. A despeza de um mez, durante o qual cada obreiro trabalhou 24 dias é de 25 470 francos. Os homens tiveram 18480 francos e as creanças 1530 francos; *quantos homens, quantas mulheres e quantas creanças ha na fabrica, e qual o salario que cada um tem por dia?* — **R. 280 homens; 2^{f},75 por dia. 130 mulheres; 1^{f},75. 85 creanças; 0^{f},75.**

91. Uma pessoa tem duas fazendas a escolher para mandar fazer um vestido: a primeira tem 0^{m},78 de largura e custa 2^{f},45 o metro; a segunda tem 1^{m},12 de largura e custa 3^{f},25 o metro. São precisos 12^{m},54 da primeira para um vestido; *quantos metros da segunda serão precisos e qual a differença de preço dos dois vestidos?* — **R. 8^{m},73; 2^{f},35.**

92. Uma sociedade de beneficencia reparte uma somma de 460 francos entre 15 familias necessitadas; as 8 primeiras recebem cada uma 17^{f},30. *Quanto tocará a cada uma das outras?* — **R. 45^{f},94.**

93. Um negociante comprou 84^{m},60 de panno de duas qualidades; recebeu tanto de uma qualidade como doutra e pagou 1281^{f},60: a primeira qualidade vale 16^{f},50 o metro. *A quanto sahe o metro da segunda.* — **R. 13^{f},79.**

94. Um operario ganha 4^{f},50 por dia e descança aos domingos. *Quanto póde gastar por dia querendo economisar a quarta parte do seu salario?* — **R. 2^{f},89.**

95. Um especieiro comprou 156 litros de azeite a 98 francos o hectolitro; 123 kilos de assucar a 100 francos os 100

kilos e 12 kilos de pimenta a $3^f,25$ o kilo. Vendeu o azeite a $1^f,10$ o litro; o assucar a $0^f,90$ o meio-kilo; e a pimenta a $0^f,40$ o hectogrammo. *Qual será o seu lucro?* — R. $52^f,32$.

96. 42 obreiros fizeram juntos $1806^m,50$ de obra á razão de $1^f,52$ o metro. Forneceram-lhes em abatimento no preço do seu trabalho $225^{kg},09$ de pão á razão de 0,35 o kilo; $15^l,60$ de liquido a $11^f,50$ o litro. *Quanto recebeu cada obreiro?* — R. $59^f,23$.

97. Um negociante vendeu por partes 650 metros de fazenda a saber: 150 metros por 740 francos e o resto a $5^f,50$ o metro, ganhou $2^f,50$ em cada metro. *Por quanto comprou elle cada metro desta fazenda?* — R. $2^f,86$.

98. Dois irmãos devem repartir igualmente entre si um terreno com $13^{Ha},20$; um delles dá ao outro 1257 francos, com a condição de que ficará a sua parte com $1^{Ha},42$ mais do que a outra. *Calcular a parte de cada um e o valor do terreno?* — R. $5^{Ha},97$; $7^{Ha},39$; $23652^f,81$.

99. Uma pessoa tem um rendimento annual de 7044 francos; tira desta somma: 530 fr. para aluguel de casa, 325 para vestuario, 280 para um creado, 1520 fr. para seu sustento e 420 para seus divertimentos e para augmento de seus moveis; além disto, economisa os 0,75 do que lhe resta depois destas despezas. *Quanto póde gastar por dia?* — $2^f,71$.

100. Um especieiro recebeu 56 pães de assucar, pesando cada um $8^{kg},50$; pagou-os a $11^f,20$ o myriagrammo. Vendeu 0,25 pelo preço do custo, depois 12 pães a $1^f,25$ o kilogrammo, e finalmente o resto por $330^f,74$. *Qual é o lucro deste especieiro?* — R. $58^f,40$.

Capitulo IV.

Noções sobre os restos e sobre a divisibilidade dos numeros

222. *Um numero inteiro se diz* **divisivel** *por outro,* quando a divisão do primeiro pelo segundo dá um resto nullo. V. g.: 16 é *divisivel* por 2; 14 é *divisivel* por 7; etc.

223. *Chama-se* **multiplo** *de um numero inteiro* aquelle numero que contém exactamente o outro. **V. g.:** 12 é um *multiplo* de 4; 18 é um *multiplo* de 9; etc.

224. *Um numero inteiro que está contido exactamente em outro chama-se* **submultiplo, parte aliquota, factor ou divisor** *desse outro.* V. g.: 8 é um *submultiplo* de 24; 9 é *submultiplo, parte aliquota, factor ou divisor* de 36, etc.

Divisor 10 ou uma potencia de 10

225. *O resto da divisão de um numero inteiro por uma potencia de* 10 é o numero formado de tantos algarismos á direita do numero proposto, quantas são as unidades do grau da potencia.

Assim, *o resto da divisão do numero 3725 por* **100** (ou segunda potencia de 10) é 25; *o resto da divisão do numero 7316 por* **1000** (ou terceira potencia de 10) é **316**.

Consequencia. — Para que um numero inteiro seja divisivel por uma potencia de 10 *é preciso que esse numero termine, pelo menos, em tantos zeros, quantas são as unidades do grau da potencia.*

Observação. — *Qualquer potencia de* **10** *é igual á unidade seguida de tantos zeros, quantas são as unidades do grau da potencia.* Assim, a segunda potencia de 10 ou 10^2 é 100 (10×10); a terceira potencia de 10 ou 10^3 é 1000 ($10 \times 10 \times 10$)

Divisores 2 e 5

226. *O resto da divisão de um numero inteiro qualquer por* 2 ou 5 é igual ao resto da divisão do numero representado pelo seu primeiro algarismo á direita por 2 ou por 5.

Assim, *o resto da divisão de 327 por* **2** *é* **1**; *o resto da divisão desse mesmo numero por* **5** *é* **2.**

Consequencia. — **Para que um numero inteiro seja divisivel por 2 ou por 5** *é preciso e basta que seu ultimo algarismo á direita represente um numero divisivel por* **2** *ou por* **5.**

Os numeros divisiveis por 2 terminam em 0, 2, 4, 6, 8.

Os numeros divisiveis por 2 chamam-se numeros pares; aquelles que o não são chamam-se impares.

Para que um numero inteiro seja divisivel por 5, *é necessario e basta que seu ultimo algarismo á direita seja* **0** *ou* **5.**

Divisores 4 e 25, 8 e 125; em geral, uma potencia qualquer de 2 ou de 5

227. *O resto da divisão de um numero inteiro por uma potencia de 2 ou de 5* é igual ao resto da divisão, por essa potencia, do numero formado por tantos algarismos á direita do numero proposto, quantas são as unidades do grau da potencia.

Assim, *o resto da divisão de 3247 por* 4, que é o mesmo que 2^2) *é igual ao resto da divisão de 47 por* 4. *O resto da divisão desse mesmo numero por* 25 (5^2) *é igual ao resto da divisão de 47 por* 25.

1.ª Consequencia. — **Para que um numero inteiro seja divisivel por 4 ou por 25,** *é necessario e basta que os seus dois ultimos algarismos á direita formem um numero divisivel por 4 ou por 25.*

O resto da divisão de 3748 por **8** *ou por* **125** *é igual ao resto da divisão de 748 por* **8** *ou por* **125.**

2.ª Consequencia. — **Para que um numero inteiro seja divisivel por 8 ou por 125,** *é necessario e sufficiente que os tres ultimos algarismos á sua direita formem um numero divisivel por* 8 *ou por* 125.

3.ª Consequencia. — **Para que um numero inteiro seja divisivel por uma potencia qualquer de 2 ou de 5,** *é necessario e basta que, tomando-se á direita do numero proposto tantos algarismos quantas são as unidades do grau da potencia, esses algarismos formem um numero divisivel* **por essa potencia.**

Divisores 9 e 3

228. *O resto da divisão de um numero inteiro por 9 ou por 3* é igual ao resto da divisão por 9 ou por 3 da somma dos valores absolutos dos seus algarismos.

Assim, *o resto da divisão de 2384 por 9, é igual ao resto da divisão de $2+3+8+4$ ou de 17 por 9; esse resto é* **8.**

1.ª Consequencia. — **Para que um numero inteiro seja divisivel por 9,** *é necessario e basta que a somma dos valores absolutos dos seus algarismos seja nove ou um multiplo de* **9.**

O resto da divisão de 6743 por 3, é igual ao resto da divisão de $6+7+4+3$ ou de 20 por 3; este resto é **2.**

2.ª Consequencia. — **Um numero inteiro será divisivel por 3,** *quando a somma dos valores absolutos dos seus algarismos for* **3** *ou um multiplo de* **3.** — *(201, 264).*

Divisor 11

229. *O resto da divisão de um numero inteiro por* 11 é igual ao resto da divisão por 11 da differença entre a somma dos algarismos de ordem impar e a dos algarismos de ordem par.

O resto da divisão de 4958 por **11,** *é o mesmo que o resto da divisão de $(8+9)-(5+4)$, por* **11**; isto é, *de 17 menos 9 por* **11.** *Esta differença é* 8; e sendo 8 menor do que 11, 8 *é o resto da divisão do numero dado por* **11.**

Observação. — Si acontecer que *a somma dos algarismos de ordem impar seja menor que a dos algarismos de ordem par*, ajunta-se á primeira um multiplo de 11, *sufficiente para que ella exceda á segunda.*

Si procurarmos o resto da divisão de 9381 por 11, vemos que a somma 1 + 3 ou 4, dos algarismos de ordem impar, é menor que a somma 8 + 9 ou 17, dos algarismos de ordem par.

Devemos, pois, ajuntar á primeira somma um multiplo de 11 *sufficiente para que elle exceda á segunda;* ajuntando-se 11 a 4, a somma 15 ainda é menor do que 17; assim, devemos ajuntar 22 a 4, e sua somma 26 excede a 17, em 9; 9 sendo menor do que 11, 9 *é o resto da divisão do numero proposto por 11.*

Consequencia. — **Um numero inteiro qualquer será divisivel por 11,** *quando a differença entre a somma dos algarismos de ordem impar e a dos de ordem par, for zero, 11 ou um multiplo de 11. — (6479, 5918, 70928).*

Prova dos nove das quatro operações fundamentaes

230. Prova da addição. — Tiram-se os 9 ás parcellas e depois á somma; si os resultados forem iguaes, suppõe-se estar certa a conta.

231. Prova da subtracção. — Tiram-se os 9 ao subtrahendo e juntamente ao resto; si, tirando-se os 9 ao minuendo, os resultados forem iguaes, é de suppor que esteja certa a conta.

232. Prova da multiplicação. — Tiram-se os 9 ao multiplicando e depois ao multiplicador; multiplicando-se entre si os resultados e a esse producto tirando-se os 9, o resultado deve ser igual ao producto total, depois de extrahidos os 9.

233. Prova da divisão. — Extrahem-se os 9 ao divisor e depois ao quociente; multiplicando-se entre si os resultados, tiram-se os 9, e junta-se o resto da divisão (si o houver); extrahindo-se os 9 dessa somma, si isso for possivel. Si o numero resultante for igual ao que der o dividendo depois de extrahidos os 9, é de presumir-se que esteja certa a conta.

Observação

A prova dos 9 é a mais commummente empregada. Entretanto, póde-se tambem tirar a prova dos 2, dos 3, dos 4, etc.; para isto basta conhecer-se o resto da divisão dos numeros dados por esses divisores, seguindo-se o processo da prova dos 9.

Prova dos 9 e dos 2 da addição

Prova dos 9

$$\begin{array}{r} 275 \ldots\ldots 5 \\ 386 \ldots\ldots 8 \\ \underline{657} \ldots\ldots 0 \end{array}\Big\} 4 \qquad \begin{array}{r} 1318 \ldots\ldots\ldots 4 \end{array}$$

Prova dos 2

$$\begin{array}{r} 275 \ldots\ldots 1 \\ 386 \ldots\ldots 0 \\ \underline{657} \ldots\ldots 1 \end{array}\Big\} 0 \qquad \begin{array}{r} 1318 \ldots\ldots\ldots 0 \end{array}$$

Prova dos 3 e dos 4 da subtracção:

Prova dos 3

$$\begin{array}{r} 7854 \ldots\ldots\ldots 0 \\ \underline{2863} \ldots\ldots 1 \\ 4991 \ldots\ldots 2 \end{array}\Big\} 0$$

Prova dos 4

$$\begin{array}{r} 7854 \ldots\ldots\ldots 2 \\ \underline{2863} \ldots\ldots 3 \\ 4991 \ldots\ldots 3 \end{array}\Big\} 2$$

Prova dos 5 e dos 8 da multiplicação:

Prova dos 5

$$\begin{array}{r} 476 \ldots\ldots 1 \\ \underline{23} \ldots\ldots 3 \end{array}\Big\} 3 \qquad \begin{array}{r} 1428 \\ \underline{952} \\ 10948 \ldots\ldots\ldots 3 \end{array}$$

Prova dos 8

$$\begin{array}{r} 476 \ldots\ldots 4 \\ \underline{23} \ldots\ldots 7 \end{array}\Big\} 4 \qquad \begin{array}{r} 1428 \\ \underline{952} \\ 10948 \ldots\ldots\ldots 4 \end{array}$$

Prova dos 10 e dos 11 da divisão:

Prova dos 10

$$\begin{array}{l} 8 \ldots 3\,6\,8 \,\lfloor\underline{1\,6 \ldots 6}\, \\ \,4\,8 \;\; 2\,3 \ldots 3 \\ 0 \end{array}\Big\} 8$$

Prova dos 11

$$\begin{array}{l} 5 \ldots 3\,6\,8 \,\lfloor\underline{1\,6 \ldots 5}\, \\ \,4\,8 \;\; 2\,3 \ldots 1 \\ 0 \end{array}\Big\} 5$$

Capitulo V

Numeros primos

234. Numeros primos absolutos ou, simplesmente, **numeros primos** *são os numeros inteiros que sómente são divisiveis por si e pela unidade.* Taes são os numeros 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 etc.

235. Numeros primos entre si *são dois ou mais numeros inteiros que só têm a unidade por divisor commum.* Taes são os numeros 2 e 5; 4 e 9; 3, 5 e 7; 8, 9 e 25.

236. Numeros primos entre si dois a dois são tres ou mais numeros inteiros taes *que qualquer delles é primo com cada um dos outros.* — Os numeros 4, 9, 25 são *primos entre si dois a dois,* porque entre 4 e 9, 4 e 25, 9 e 25 só ha o divisor commum 1. Do mesmo modo 8, 9, 25, 49 são *primos entre si dois a dois.*

Os numeros *primos entre si dois a dois* são tambem *primos entre si.* — Os numeros *primos entre si* podem deixar de ser *primos entre si dois a dois.*

Os numeros 4, 9, 15, 49 são *primos entre si,* porque só têm por divisor commum a unidade; não são, porém, *primos entre si dois a dois,* porque 9 e 15 têm o divisor commum 3.

237. Todo numero inteiro que não fôr primo decompõe-se em factores primos.

a) Decomposição de um numero em seus factores primos

238. Para decompor-se um numero inteiro em seus factores primos divide-se o numero dado por 2 (si isto fôr possivel), o quociente achado divide-se ainda por

2 (si estiver no caso) e continua-se do mesmo modo, até que a divisão por 2 não seja mais possivel. Faz-se igual tentativa com os numeros primos 3, 5, 7, etc., até que appareça um quociente que seja numero primo. Este ultimo quociente e todos os divisores precedentes são os factores primos do numero dado.

Seja 420 o numero inteiro cujos factores primos se procuram.

Este numero é divisivel por 2; effectuando-se divisão, tem-se

$$420 = 2 \times 210$$

O numero 210 ainda é divisivel por 2; praticando-se a divisão, tem-se

$$210 = 2 \times 105$$

O numero 105 é divisivel por 3; effectuando-se a divisão, tem-se

$$105 = 3 \times 35$$

O numero 35 é divisivel por 5; effectuando-se a divisão, tem-se

$$35 = 5 \times 7$$

O numero 7 sendo primo, termina-se a operação. Portanto este ultimo quociente 7, seguido de todos os divisores precedentes, 2, 2, 3 e 5, são os factores primos do numero dado.

Para mais simplicidade, faz-se a seguinte disposição:

	Factores
420	2
210	2
105	3
35	5
7	7

Exercicios

Decompor em seus factores primos os seguintes numeros:

1.	72	108	180	300	360	480	560.
2.	1470	1640	1764	2260	2310	3552	6900.
3.	7200	8820	9504	10625	46305	65856	537824

Quadro dos numeros primos entre 1 e 1009

1	41	101	167	239	313	397	467	569	643	733	823	911
2	43	103	173	241	317	401	479	571	647	739	827	919
3	47	107	179	251	331	409	487	577	653	743	829	929
5	53	109	181	257	337	419	491	587	659	751	839	937
7	59	113	191	263	347	421	499	593	661	757	853	941
11	61	127	193	269	349	431	503	599	673	761	857	947
13	67	131	197	271	353	433	509	601	677	769	859	953
17	71	137	199	277	359	439	521	607	683	773	863	967
19	73	139	211	281	367	443	523	613	691	787	877	971
23	79	149	223	283	373	449	541	617	701	797	881	977
29	83	151	227	293	379	457	547	619	709	809	883	983
31	89	157	229	307	383	461	557	631	719	811	887	991
37	97	163	233	311	389	463	563	641	727	821	907	997

b) Maximo commum divisor

239. Chama-se maximo commum divisor de muitos numeros inteiros *o maior dos numeros inteiros que dividem ao mesmo tempo a esses numeros.*

240. *Todo numero inteiro que divide ao mesmo tempo a muitos outros,* deve ter os factores primos da composição desses outros. Assim, os factores primos da composição de um divisor commum devem ser *communs* aos differentes numeros, aos quaes elle divide.

Sejam 108, 84 *e* 36 *os numeros, cujo maximo commum divisor se procura.*

Decompondo-se estes numeros em seus factores primos, tem-se:

$$108 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^3$$
$$84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7 = 2^2 \times 3 \times 7$$
$$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^2$$

O numero que dividir ao mesmo tempo a 108, 84 e 36 deve formar-se dos *factores primos communs a esses numeros;* e constará, *pelo menos,* de dois factores 2 e um factor 3. Tomando-se esses factores, que são os restrictamente precisos, obtem-se o maximo commum divisor dos numeros propostos.

Assim, teremos: $2^2 \times 3 = 12$.

241. O maximo commum divisor de muitos numeros inteiros é o producto de todos os factores primos *communs a estes numeros,* **affectando-se cada um desses factores do seu menor expoente.**

242. Póde-se tambem achar o maximo divisor commum de dois numeros inteiros pela seguinte

Regra. — Divide-se o maior numero pelo menor; si não houver resto, o menor dos dois numeros será o maior divisor commum. *Si houver resto,* divide-se por elle o menor dos numeros; si esta segunda divisão não deixar resto, o primeiro resto será o maior commum divisor; si, porém, deixar resto, divide-se o primeiro resto pelo segundo, e assim se continúa até chegar-se *a um resto nullo. O divisor que concorrer para essa divisão, será o maximo commum divisor procurado.* **V. g.:**

Determinar o maximo commum divisor dos numeros 540 e 396.

	1	2	1	3	*Linha dos quocientes*
540	396	144	108	36	„ *divisores*
144	108	36	0		„ *restos*

Vê-se que o divisor 36 é o maximo commum divisor dos numeros 540 e 396.

Observação. — Por esta mesma regra póde-se determinar o maximo commum divisor de muitos numeros.

Procura-se o maximo commum divisor de dois dos numeros dados; depois, o maximo commum divisor entre o maximo commum divisor achado e um outro dos numeros dados, e assim se procede até chegar-se ao ultimo dos numeros propostos. O ultimo maximo commum divisor obtido é o dos numeros propostos.

Exemplo. — *Procurar o maximo divisor commum aos numeros* 1350, 900, 540, 240 e 585.

Determina-se o maximo divisor commum aos numeros 1350 e 900; acha-se 450. Procura-se depois o maximo divisor commum entre 450 e 540, obtem-se 90; procura-se o maior divisor commum entre 90 e 240, apparece 30; e achado o maior divisor commum aos numeros 30 e 585, será 15 o (ultimo maximo divisor commum a dois numeros) *o maximo divisor commum a todos os numeros dados.*

Todas estas operações se resumem no seguinte quadro:

1350, 900, 540, 240, 585
450, 540, 240, 585
90, 240, 585
30, 585
15 *M. C. D*

Exercicios

Procurar o maximo commum divisor dos numeros:

1. 60 e 108 248 e 964 220, 300 e 630.
2. 240 e 735 324 e 360 270, 300, 360 e 840.
3. 90 e 140 396 e 1024 1260, 3780, 7056 e 10584.

c) Menor multiplo commum

243. Chama-se menor multiplo commum a dois ou mais numeros inteiros, *o menor dos numeros divisiveis por cada um delles.*

244. *Todo numero inteiro que é divisivel ao mesmo tempo por muitos outros,* deve encerrar os factores primos de cada um delles.

Proponhamo-nos a achar o menor multiplo commum aos numeros 18, 27, 40 e 135.

Teremos que

$$18 = 2 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^2$$
$$27 = 3 \times 3 \times 3 = 3^3$$
$$40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 = 2^3 \times 5$$
$$135 = 3 \times 3 \times 3 \times 5 = 3^3 \times 5$$

O numero que for divisivel ao mesmo tempo por 18, 27, 04 e 135 deve encerrar, *pelo menos,* tres

factores 2, tres factores 3 e um factor 5. Tomando-se esses factores, que são os restrictamente precisos, obtem-se o menor multiplo commum aos numeros propostos.

Assim, teremos: $2^3 \times 3^3 \times 5 = 1080.$

245. Podemos, pois, dizer que o menor multiplo commum a muitos numeros inteiros, é o producto *de todos os factores primos, que entram nestes differentes numeros,* affectando-se cada um desses factores do seu maior expoente.

246. Quando os numeros dados são *todos primos absolutos* o menor multiplo é o producto destes mesmos numeros, visto elles não terem factor commum.

Assim, o menor multiplo commum aos numeros 7, 11 e 17 é: $7 \times 11 \times 17 = 1309.$

O mesmo se dá com *os numeros primos entre si* dois a dois. O menor multiplo de 8, 9 e 35, é: $8 \times 9 \times 35 = 2520.$

247. *Para achar-se directamente o menor multiplo commum de dois ou mais numeros* ha a seguinte regra:

Escrevem-se todos os numeros em linha horizontal, separados por virgulas; traça-se á direita uma linha vertical pára a collocação dos divisores. Dividem-se os numeros dados por 2 (si isto for possivel); os quocientes achados e os numeros que não forem exactamente divisiveis escrevem-se debaixo, formando uma segunda linha horizontal, e assim se continua até que a divisão por 2 não seja mais possivel. Faz-se igual tentativa com os numeros primos 3, 5, 7, etc. até que só appareça nos quocientes o algarismo 1.

O producto de todos os divisores será o menor multiplo commum procurado. V. g. Sejam 18, 27, 40 e 135 os numeros, cujo menor multiplo commum se procura.

18, 27, 40, 135	2
9, 27, 20, 135	2
9, 27, 10, 135	2
9, 27, 5, 135	3
3, 9, 5, 45	3
1, 3, 5, 15	3
1, 1, 5, 5	5
1, 1, 1, 1	

Assim, $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^3 \times 3^3 \times 5 = 1080$. M. M. C.

M. R.

Exercicios

Procurar o menor multiplo commum aos numeros:

1. 60 e 126—156 e 192—120 e 378—210 e 384.—
2. 29 e 37 — 47 e 61 — 101 e 209 — 203 e 297.
3. 30, 42 e 66 — 210, 300 e 126 — 450, 612 e 720 — 484, 598 e 600.
4. 864, 936 e 1 024 — 693, 1 400 e 2 100 — 3, 7 e 13 — 2, 5, 7 e 17.
5. 4, 7 e 9 — 2, 9 e 25 — 2, 9, 25 e 49 — 9, 14, 25 e 77.
6. [illegible], 126, 180 e 360 — 1 260, 1 764, 2 940 e 8 780.

CAPITULO VI

Fracções ordinarias

§ I — Preliminares

248. Fracções *são numeros que constam de partes da unidade, sem formal-a.*

249. Fracções ordinarias *são partes da unidade, menores do que ella em uma razão qualquer.*

250. As fracções ordinarias representam-se com dois numeros: um delles se escreve por cima de um risco e o outro por baixo. *O numero que se escreve em baixo do risco chama-se* denominador, e mostra em quantas partes iguaes a unidade está dividida; *o que se escreve em cima chama-se* numerador, e mostra quantas dessas partes se tomam para representar-se a fracção.

O numerador e o denominador conjunctamente chamam-se termos da fracção.

251. As fracções se lêm exprimindo-se primeiramente o numerador, e depois o denominador, ajuntando-se a este a terminação avos, si for maior do que 10; porque sendo menor, toma as seguintes denominações: meios, terços, quartos, quintos, sextos, setimos, oitavos, nonos; e, sendo a unidade seguida de zero ou zeros, toma as denominações: decimos, centesimos, millesimos, etc. Assim, leremos as seguintes fracções: $\frac{4}{13}$ quatro treze avos; $\frac{5}{27}$ cinco vinte sete avos; $\frac{1}{2}$ um meio; $\frac{3}{5}$ tres quintos; $\frac{1}{10}$ um decimo; $\frac{3}{100}$ tres centesimos.

Tambem se podem ler os dois termos sem accrescentar terminação, collocando entre elles a palavra sobre.

Assim, $\frac{4}{9}$ se lê: 4 sobre 9, isto é, 4 partes tomadas sobre as 9 em que a unidade está dividida.

252. As fracções ordinarias são *proprias* ou *improprias*.

253. *Fracção propria* é aquella que tem o numerador menor do que o denominador. V. g.: $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$.

254. *Fracção impropria*, é aquella cujo numerador é maior do que o denominador. V. g.: $\frac{7}{4}$, $\frac{3}{2}$.

Observação. — Segundo esta definição nestas fracções ha inteiros debaixo da fórma fraccionaria, os quaes, muitas vezes, para simplicidade dos calculos, convém que sejam separados da parte fraccionaria, como se verá mais adiante, n. 271.

Exercicios

Ler as seguintes fracções e dizer si são proprias ou improprias:

1. $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{9}{7}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{11}{3}$ $\frac{7}{8}$ $\frac{19}{9}$

2. $\frac{9}{4}$ $\frac{5}{2}$ $\frac{6}{5}$ $\frac{7}{9}$ $\frac{12}{17}$ $\frac{15}{11}$ $\frac{21}{29}$ $\frac{17}{31}$

3. $\frac{7}{10}$ $\frac{9}{100}$ $\frac{13}{10}$ $\frac{121}{100}$ $\frac{47}{1\,000}$ $\frac{3\,251}{10\,000}$ $\frac{2\,143}{1\,000}$ $\frac{41\,153}{10\,000}$

§ II — Propriedades das fracções ordinarias

255. 1.ª Uma fracção ordinaria torna-se 2, 3, 4, etc., vezes maior, *multiplicando-se o seu numerador, ou dividindo-se o seu denominador*, por 2, 3, 4, etc. V. g.: Multiplicando-se o numerador da fracção $\frac{3}{8}$ por 7, o resultado $\frac{21}{8}$ é 7 vezes maior do que $\frac{3}{8}$.

Dividindo-se o denominador da fracção $\frac{5}{9}$ por 3, o resultado $\frac{5}{3}$ é 3 vezes maior do que $\frac{5}{9}$.

256. 2.ª Uma fracção ordinaria torna-se 2, 3, 4, 5, etc. vezes menor, *ou multiplicando-se o seu denominador, ou dividindo-se o seu numerador*, por

2, 3, 4, 5, etc. V. g.: Multiplicando-se o denominador da fracção $\frac{2}{3}$ por 9, o resultado $\frac{2}{27}$ é 9 vezes menor do que $\frac{2}{3}$.

Dividindo-se o numerador da fracção $\frac{4}{7}$ por 2, o resultado $\frac{2}{7}$ é 2 vezes menor do que $\frac{4}{7}$.

257. 3.ª Uma fracção ordinaria não muda de valor, *quando se multiplicam ou se dividem ambos os seus termos por um mesmo numero*. V. g.: Multiplicando-se ambos os termos da fracção $\frac{5}{6}$ por 3, o resultado $\frac{15}{18}$ tem o mesmo valor que a fracção $\frac{5}{6}$.

Dividindo-se ambos os termos da fracção $\frac{6}{12}$ por 6 o resultado $\frac{1}{2}$ tem o mesmo valor que $\frac{6}{12}$.

Observações.

Observação primeira. — Esta 3.ª propriedade encerra duas partes. A primeira, *uma fracção ordinaria não muda de valor, quando se multiplicam ambos os seus termos por um mesmo numero*, serve de base á reducção das fracções ao mesmo denominador. A segunda parte, *uma fracção ordinaria não muda de valor, quando se dividem ambos os seus termos por um mesmo numero*, serve de base á simplificação das fracções.

Observação segunda. — Para indicar-se que uma quantidade é maior ou menor do que outra, empregam-se os dois seguintes signaes:

$>$ maior.
$<$ menor.

Assim $8 > 4$ se lê: 8 *maior do que* 4; $4 < 8$ se lê: 4 *menor do que* 8.

A abertura do signal volta-se sempre para o lado da quantidade maior.

Observação terceira. — Ajuntando-se uma mesma quantidade aos dois termos de uma fracção, ella *augmenta* quando é *propria* e *diminue* quando é *impropria*. Tem-se, pois:

$$\frac{3}{7}<\frac{3+5}{7+5} \text{ ou } \frac{3}{7}<\frac{8}{12}$$

$$\frac{9}{4}>\frac{9+8}{4+8} \text{ ou } \frac{9}{4}>\frac{17}{12}$$

Si, porém tirar-se uma mesma quantidade de ambos os termos de uma fracção, *ella diminue* quando é *propria* e *augmenta* quando é *impropria*. Tem-se pois:

$$\frac{5}{6}>\frac{5-3}{6-3} \text{ ou } \frac{5}{6}>\frac{2}{3}$$

$$\frac{8}{7}<\frac{8-5}{7-5} \text{ ou } \frac{8}{7}<\frac{3}{2}$$

Observação quarta. — *Quando muitas fracções são iguaes entre si*, a somma dos seus numeradores dividida pela somma dos seus denominadores é uma fracção igual a cada uma das fracções dadas

Sejam as fracções:

$$\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{8}{12}=\frac{16}{24} \text{ etc.}$$

A fracção $\frac{2+4+8+16}{3+6+12+24}$ ou $\frac{30}{45}=\frac{2}{3}\quad\frac{4}{6}=\frac{8}{12}=\frac{16}{24}$

Exercicios

1. *Tornar 2, 3, 4, 5, 6 vezes maiores as seguintes fracções:* 1.º) sem mudar o denominador, 2.º) sem mudar o numerador, quando for possivel

$$\frac{3}{4}\quad\frac{5}{6}\quad\frac{7}{9}\quad\frac{8}{15}\quad\frac{12}{24}\quad\frac{15}{16}\quad\frac{9}{18}\quad\frac{6}{25}$$

$$\frac{4}{12}\quad\frac{10}{24}\quad\frac{18}{72}\quad\frac{5}{20}\quad\frac{12}{40}\quad\frac{18}{80}\quad\frac{25}{100}\quad\frac{50}{100}$$

2. *Tornar 2, 3, 4, 5, 6 vezes menores as fracções acima:* 1.º) sem mudar o numerador; 2.º) sem mudar o denominador, quando for possivel.

§ III — Simplificação das fracções ordinarias

258. Simplificar uma fracção *é mudal-a em outra que tenha o mesmo valor mas cujos termos sejam menores.*

259. Quanto menores forem os termos de uma fracção mais facil se torna apreciar a grandeza que ella representa, e mais commodos se tornam os calculos. Por isto, uma fracção se deve reduzir á expressão mais simples, sempre que se possa simplifical-a.

260. Para operar-se a simplificação das fracções ordinarias empregam-se tres processos:

1º) Dividem-se successivamente os dois termos pelos numeros cuja divisibilidade é conhecida (n. 225 a 229 incl.) V. g.:

$$\frac{240}{360}=\frac{24}{36}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

2º) Decompõem-se os dois termos em seus factores primos, e desprezam-se aquelles que são communs ao numerador e ao denominador.

V. g.: $\frac{240}{360}$

$$\begin{array}{r|l} 240 & 2 \\ 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \end{array}\qquad\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \end{array}$$

Logo, $\frac{240}{360}=\frac{2\times2\times2\times2\times3\times5}{2\times2\times2\times3\times3\times5}=\frac{2}{3}$

3º) Dividem-se os dois termos da fracção pelo seu maior divisor commum. V. g.: $\frac{240}{360}$

$$\begin{array}{c|c|c} & 1 & 2 \\ \hline 360 & 240 & 120 \\ \hline 120 & 0 & \end{array}$$

$$\frac{240}{360}\quad\frac{240:120}{360:120}=\frac{2}{3}$$

Por estes processos, ficamos sabendo que a fracção $\frac{240}{360}$, cujo valor não se podia bem apreciar, é igual á fracção $\frac{2}{3}$ de termos menores.

Como os dois termos desta fracção são primos entre si, elles não admittem divisor commum. Portanto, podemos concluir que a fracção $\frac{240}{360}$ não póde ser representada por outra fracção mais simples do que $\frac{2}{3}$.

261. *Toda fracção cujos termos são numeros primos entre si, e* irreductivel.

Exercicios

Reduzir á mais simples expressão as seguintes fracções:

1. $\frac{1512}{2268}$. R. $\frac{2}{3}$.	7. $\frac{1280}{6400}$. R. $\frac{1}{5}$.	13. $\frac{42196}{105490}$. R. $\frac{2}{5}$.
2. $\frac{5292}{7056}$. R. $\frac{3}{4}$.	8. $\frac{3000}{5250}$. R. $\frac{4}{7}$.	14. $\frac{20196}{22032}$. R. $\frac{11}{12}$.
3. $\frac{2940}{3675}$. R. $\frac{4}{5}$.	9. $\frac{6561}{7290}$. R. $\frac{9}{10}$.	15. $\frac{30030}{42042}$. R. $\frac{5}{7}$.
4. $\frac{2376}{2772}$. R. $\frac{6}{7}$.	10. $\frac{3760}{9024}$. R. $\frac{5}{12}$.	16. $\frac{35112}{40128}$. R. $\frac{7}{8}$.
5. $\frac{6825}{8190}$. R. $\frac{5}{6}$.	11. $\frac{11550}{18480}$. R. $\frac{5}{8}$.	17. $\frac{18000}{32400}$. R. $\frac{5}{9}$.
6. $\frac{3564}{11880}$. R. $\frac{3}{10}$.	12. $\frac{17388}{22356}$. R. $\frac{7}{9}$.	18. $\frac{30240}{34020}$. R. $\frac{8}{9}$.

Simplificar e calcular depois as seguintes expressões:

1. $\frac{528 \times 50 \times 45}{30 \times 40}$ 2. $\frac{26 \times 12 \times 12}{8 \times 13}$ 3. $\frac{9 \times 72 \times 40}{8 \times 5}$

4. $\frac{40 \times 24 \times 120}{8 \times 9 \times 20}$ 5. $\frac{9 \times 72 \times 60}{8 \times 12 \times 15}$ 6. $\frac{36 \times 45 \times 50}{9 \times 20 \times 15}$

7. $\frac{18 \times 36 \times 7 \times 6}{42 \times 12 \times 9}$ 8. $\frac{63 \times 36 \times 120 \times 15}{25 \times 42 \times 9}$ 9. $\frac{560 \times 45 \times 27 \times 6}{36 \times 7 \times 12}$

10. $\frac{240 \times 24 \times 3 \times 6}{32 \times 15 \times 8 \times 9}$ 11. $\frac{80 \times 36 \times 14 \times 121}{352 \times 7 \times 6 \times 5}$ 12. $\frac{473 \times 21 \times 26 \times 160}{56 \times 220 \times 39 \times 45}$

§ IV — Reducção das fracções ao mesmo denominador

262. **Para reduzir duas ou mais fracções ao mesmo denominador,** procura-se o menor multiplo commum aos denominadores das fracções dadas: divide-se este menor multiplo pelos denominadores, e os quocientes se multiplicam por ambos os termos de cada fracção.

1.° Exemplo $\frac{3}{5}$ e $\frac{2}{7}$.

Fracções propostas	*Quocientes do menor multiplo pelos differentes denominadores*	*Fracções reduzidas*	
$\frac{3}{5}$	7	$\frac{21}{35}$	*Menor multiplo commum*
$\frac{2}{7}$	5	$\frac{10}{35}$	$5 \times 7 = 35$

2.° Exemplo. $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ e $\frac{4}{5}$.

Fracções propostas	*Quocientes do menor multiplo pelos differentes denominadores*	*Fracções reduzidas*	
$\frac{2}{3}$	20	$\frac{40}{60}$	
$\frac{3}{4}$	15	$\frac{45}{60}$	*Menor multiplo commum* $3 \times 4 \times 5 = 60$
$\frac{4}{5}$	12	$\frac{48}{60}$	

3.° Exemplo. $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$ e $\frac{7}{24}$.

Fracções propostas	*Quocientes do menor multiplo pelos differentes denominadores*	*Fracções reduzidas*	
$\frac{1}{2}$	12	$\frac{12}{24}$	
$\frac{3}{4}$	6	$\frac{18}{24}$	*Menor multiplo commum*
$\frac{5}{6}$	4	$\frac{20}{24}$	$2^3 \times 3 = 24$
$\frac{7}{24}$	1	$\frac{7}{24}$	

4.° Exemplo. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ e $\frac{1}{6}$.

Fracções propostas	*Quocientes do menor multiplo pelos differentes denominadores*	*Fracções reduzidas*	
$\frac{1}{2}$	6	$\frac{6}{12}$	
$\frac{2}{3}$	4	$\frac{8}{12}$	*Menor multiplo commum*
$\frac{3}{4}$	3	$\frac{9}{12}$	$2^2 \times 3 = 12$
$\frac{1}{6}$	2	$\frac{2}{12}$	

Observação. — Tambem se reduzem fracções ao mesmo denominador, multiplicando-se ambos os termos de cada uma pelo producto dos denominadores das outras. *Sendo duas fracções*, multiplicam-se ambos os termos da 1.ª pelo denominador da 2.ª, ambos os termos da 2.ª pelo denominador da 1.ª.

Exercicios

Reduzir ao mesmo denominador as seguintes fracções;

1. $\frac{7}{12}, \frac{5}{6}$. R. $\frac{7}{12}, \frac{10}{12}$.
2. $\frac{5}{6}, \frac{3}{4}$. R. $\frac{10}{12}, \frac{9}{12}$.
3. $\frac{6}{7}, \frac{7}{9}$. R. $\frac{54}{63}, \frac{49}{63}$.
4. $\frac{5}{7}, \frac{10}{21}, \frac{2}{3}$. R. $\frac{15}{21}, \frac{10}{21}, \frac{14}{21}$.
5. $\frac{7}{8}, \frac{5}{12}, \frac{1}{6}$. R. $\frac{21}{24}, \frac{10}{24}, \frac{4}{24}$.
6. $\frac{4}{9}, \frac{5}{11}, \frac{11}{13}$. R. $\frac{572}{1287}, \frac{585}{1287}, \frac{1089}{1287}$.
7. $\frac{11}{12}, \frac{17}{19}, \frac{7}{11}, \frac{3}{5}$. R. $\frac{11495}{12540}, \frac{11220}{12540}, \frac{7980}{12540}, \frac{7524}{12540}$.
8. $\frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{4}{5}, \frac{7}{8}, \frac{10}{11}$. R. $\frac{6160}{9240}, \frac{6600}{9240}, \frac{7392}{9240}, \frac{8085}{9240}, \frac{8400}{9240}$.
9. $\frac{17}{48}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{5}{6}$. R. $\frac{17}{48}, \frac{36}{48}, \frac{42}{48}, \frac{40}{48}$.
10. $\frac{21}{32}, \frac{5}{8}, \frac{11}{16}, \frac{5}{6}, \frac{3}{4}$. R. $\frac{63}{96}, \frac{60}{96}, \frac{66}{96}, \frac{80}{96}, \frac{72}{96}$.
11. $\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{11}{12}, \frac{13}{16}$. R. $\frac{24}{48}, \frac{40}{48}, \frac{42}{48}, \frac{44}{48}, \frac{39}{48}$.
12. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{12}$. R. $\frac{6}{12}, \frac{8}{12}, \frac{9}{12}, \frac{10}{12}, \frac{7}{12}$.

§ V — Comparação das fracções ordinarias entre si

263. Quando as fracções têm o *mesmo denominador*, é *maior* aquella que tem *maior numerador*. V. g.:

Das fracções $\frac{3}{7}$ e $\frac{5}{7}$ a segunda é a maior.

264. Quando as fracções têm o *mesmo numerador*, é *maior* aquella que tem *menor denominador*. V. g.:

Das fracções $\frac{5}{7}$ e $\frac{5}{9}$, a primeira é a maior.

265. Quando as fracções têm *termos differentes*, é preciso reduzil-as ao mesmo denominador, ou ao mesmo numerador, para fazer-se depois a comparação.

E' preciso notar-se que a reducção ao mesmo denominador é mais vantajosa, por indicar-nos de quanto uma fracção excede á outra, o que não acontece na reducção ao mesmo numerador.

Exercicios

Dizer em cada exercicio qual das fracções é a maior:

1. $\frac{5}{8}$ ou $\frac{3}{8}$? $\frac{4}{5}$ ou $\frac{2}{5}$? $\frac{7}{9}, \frac{8}{9}$ ou $\frac{4}{9}$?
2. $\frac{5}{8}$ ou $\frac{5}{6}$? $\frac{6}{7}$ ou $\frac{6}{11}$? $\frac{7}{8}, \frac{7}{9}$ ou $\frac{7}{10}$?
3. $\frac{3}{4}$ ou $\frac{2}{5}$? $\frac{5}{8}$ ou $\frac{4}{9}$? $\frac{5}{7}, \frac{3}{8}$ ou $\frac{11}{14}$?

VI — Conversão de um inteiro em fracção; de uma fracção em outra. Extracção dos inteiros contidos em uma expressão fraccionaria

266. Todo numero inteiro se póde apresentar em fórma de fracção, dando-se-lhe a unidade por denominador; v. g.: *6* em fórma de fracção se escreve $\frac{6}{1}$, e se lê: 6 sobre 1 ou 6 unidades.

267. Reduz-se um inteiro á denominação de fracção, multiplicando-se o inteiro pela denominação que lhe queremos dar, e dando-se ao producto essa denominação por denominador. **V. g.:** *Querendo reduzir-se o inteiro 4 á denominação* 15 avos tem-se:

$$4 = \frac{4 \times 15}{15} = \frac{60}{15}.$$

268. Para reduzir-se um numero mixto á fórma fraccionaria, multiplica-se o inteiro pelo denominador da fracção, junta-se ao producto o numerador, e dá-se por denominador ao resultado o denominador da fracção. **V. g.:**

$$4 + \frac{3}{7} \text{ ou } 4\,\frac{3}{7} = \frac{(4 \times 7) + 3}{7} = \frac{31}{7}.$$

269. Para passar-se de uma fracção para outra de um denominador dado, multiplicam-se ambos os termos da fracção por este denominador; dahi resulta uma nova fracção, cujos termos se dividem pelo denominador da fracção primitiva — **V. g.**

Reduzir $\frac{3}{5}$ **a 15 avos.**

$$\frac{3 \times 15}{5 \times 15} = \frac{45}{75} = \frac{\frac{45}{5}}{\frac{75}{5}} = \frac{9}{15}$$

$$\text{Donde, } \frac{3}{5} = \frac{9}{15}.$$

Reduzir $\frac{7}{8}$ **a 24 avos.**

$$\frac{7 \times 24}{8 \times 24} = \frac{168}{192} = \frac{\frac{168}{8}}{\frac{192}{8}} = \frac{21}{24}$$

$$\text{Donde, } \frac{7}{8} = \frac{21}{24}.$$

Observação. — Esta reducção só é possivel, *quando o denominador dado é multiplo do da fracção dada,* a qual se suppõe irreductivel.

270. Uma fracção irreductivel póde ser transformada em outra, *cujo denominador seja dado,* embora *este* não seja multiplo do da fracção dada; isto é, *uma fracção irreductivel* póde ser avaliada com uma *approximação dada.*

1) Avaliar a fracção irreductivel $\frac{145}{268}$ *com a approximação* $\frac{1}{15}$

Applicando a regra precedente, temos:

$$\frac{145}{268} = \frac{145 \times 15}{268 \times 15} = \frac{2175}{4020} = \frac{\frac{2175}{268}}{\frac{4020}{268}} = \frac{\frac{2175}{268}}{15} = \frac{8 + \frac{31}{268}}{15}$$

Este fracção resultante *(que é igual á fracção dada)* tem para numerador uma somma de duas parcellas (8 e $\frac{31}{268}$), a qual deve ser dividida por 15: e para dividir uma somma por uma quantidade, divide-se cada uma das parcellas por essa quantidade, e sommam-se os quocientes.

$$\text{Assim, pois, } \frac{8 + \frac{31}{268}}{15} = \frac{8}{15} + \frac{\frac{31}{268}}{15}.$$

Desprezando-se a parcella $\frac{\frac{31}{268}}{15}$, fica a outra parcella $\frac{8}{15}$ representando a fracção dada $\frac{145}{268}$ por *falta.* Esta *falta,* sendo de $\frac{\frac{31}{268}}{15}$, é menor do que $\frac{1}{15}$ *(approximação dada).* — Com effeito, entre fracções que têm o mesmo denominador é menor a que tem menor numerador: assim, entre as fracções $\frac{\frac{31}{268}}{15}$ e $\frac{1}{15}$, a primeira *(que indica a falta)* é *menor* do que a segunda *(que indica a approximação);* porque, tendo ambas o mesmo denominador *(15),* a primeira tem o numerador $(\frac{31}{268})$ menor do que o numerador (1) da segunda.

Avaliar a mesma fracção irreductivel $\frac{145}{268}$ (por *excesso) com a approximação* $\frac{1}{15}$.

Seguindo a regra, temos: $\frac{145}{268}=\frac{145\times15}{268\times15}=\frac{2175}{4020}=$
$\frac{\frac{2175}{268}}{\frac{4020}{268}}=\frac{\frac{2175}{268}}{15}=\frac{8+\frac{31}{268}}{15}=\frac{8}{15}+\frac{\frac{31}{268}}{15}.$

Nesta somma de duas parcellas, *em vez de desprezar-se a parcella* $\frac{\frac{31}{268}}{15}$, como fizemos precedentemente, consideremos o seu numerador $\frac{31}{268}$ como se *1 unidade fosse*; para *o que* seria preciso ser elle augmentado do $\frac{237}{268}$.

Sendo assim, teremos:

$$\frac{8}{15}+\frac{\frac{31}{268}+\frac{237}{268}}{15}=\frac{8}{15}+\frac{\frac{268}{268}}{15}=\frac{8}{15}+\frac{1}{15}=\frac{9}{15}$$

(valor approximado da fracção dada $\frac{145}{268}$, por *excesso).*

Este *excesso* do $\frac{\frac{237}{268}}{15}$ é menor do que $\frac{1}{15}$ *(approximação dada).*

Assim, $\frac{8}{15}$ é *uma approximação* da fracção $\frac{145}{268}$, por *falta* e esta *menor* do que $\frac{1}{15}$.

$\frac{9}{15}$ é uma *approximação* por *excesso* e este *menor* do que $\frac{1}{15}$.

Qual será a maior approximação? *a por falta ou a por excesso?* Comparemos os erros commettidos: *por falta,* $\frac{\frac{31}{268}}{15}$; *por excesso,* $\frac{\frac{237}{268}}{15}$. Erra-se *menos* por *falta* do que por *excesso: o erro por falta* nos mostra, pois, que a fracção $\frac{8}{15}$ é *mais approximada* da fracção dada, do que a fracção $\frac{9}{15}$.

Praticamente se reconhece que approximação se deve tomar. No exemplo dado, a fracção é $\frac{145}{268}$ a qual applicando-se a regra, tem-se:

$$\frac{145}{268}=\frac{145\times15}{268\times15}=\frac{2175}{1020}=\frac{\frac{2175}{268}}{\frac{1020}{268}}=\frac{\frac{2175}{268}}{15}=\frac{8+\frac{31}{268}}{15}=\frac{8}{15}+\frac{\frac{31}{268}}{15}$$

Quando o *numerador da fracção da segunda parcella é menor* do que a *metade do denominador,* a approximação deve ser por *falta.* Ora, o numerador 31 da fracção $\frac{31}{268}$ *é menor* do que 134 *(metade do denominador 268)*; a approximação deve ser, pois, por *falta.*

2°) Avaliar a fracção irreductivel $\frac{145}{204}$ *com a approximação* $\frac{1}{15}$. Seguindo a marcha sabida, temos:

$$\frac{145}{204}=\frac{145\times15}{205+15}=\frac{2175}{3060}=\frac{\frac{2175}{204}}{\frac{3060}{204}}=\frac{\frac{2175}{204}}{15}=\frac{10+\frac{135}{204}}{15}$$

Esta fracção resultante *(que é igual á fracção dada)* tem para numerador uma somma de duas parcellas (10 e $\frac{135}{204}$), a qual deve ser dividida por *15;* o que sendo indicado, tem-se: $\frac{10+\frac{135}{204}}{15}=\frac{10}{15}+\frac{\frac{135}{204}}{15}$.

Desprezando-se a parcella $\frac{\frac{135}{204}}{15}$, a outra parcella $\frac{10}{15}$ representa a fracção dada $\frac{145}{204}$ por *falta.* — Esta *falta,* sendo de $\frac{\frac{135}{204}}{15}$ *é menor* do que $\frac{1}{15}$ *(approximação dada).* Com effeito, ambas as fracções tendo o mesmo denominador (15), a primeira $\left(\frac{\frac{135}{204}}{15}\right)$ que indica a *falta* é menor do que a segunda $\left(\frac{1}{15}\right)$ que indica a *approximação.*

Avaliar a mesma fracção irreductivel $\frac{145}{204}$, (por *excesso)* com a approximação $\frac{1}{15}$.

Seguindo a regra, teremos:

$$\frac{145}{204}=\frac{145\times15}{204\times15}=\frac{2175}{3060}=\frac{\frac{2175}{204}}{\frac{3060}{204}}=\frac{\frac{2175}{204}}{15}=\frac{10+\frac{135}{204}}{15}$$

Esta fracção resultante *(que é igual á fracção dada)* tem para numerador uma somma de duas parcellas (10 e $\frac{135}{204}$), a qual deve ser dividida por *15;* o que sendo indicado, tem-se: $\frac{10+\frac{135}{204}}{15}=\frac{10}{15}+\frac{\frac{135}{204}}{15}$

Nesta somma de duas parcellas, em vez de desprezar-se a parcella $\frac{\frac{135}{204}}{15}$ como fizemos no caso precedente, consideremos o numerador $\frac{135}{204}$ como se fosse *1* (unidade), para o que seria necessario acrescentar-lhe $\frac{69}{204}$; e sendo assim, teremos:

$$\frac{10}{15}+\frac{\frac{135}{204}+\frac{69}{204}}{15}=\frac{10}{15}+\frac{\frac{204}{204}}{15}=\frac{10}{15}+\frac{1}{15}=\frac{11}{15}$$

para valor approximado da fracção $\frac{145}{304}$ por *excesso*.

Este *excesso* de $\frac{\frac{69}{204}}{15}$ é *menor* do que $\frac{1}{15}$ *(approximação dada)*.

$\frac{10}{15}$ é uma approximação da fracção $\frac{145}{204}$ por *falta* e esta menor do que $\frac{1}{15}$.

$\frac{11}{15}$ é uma approximação da fracção $\frac{145}{204}$ por excesso e este *menor* do que $\frac{1}{15}$.

Qual será a maior approximação? a por *falta* ou a por *excesso?* Comparemos os erros commettidos: por *falta* $\frac{\frac{135}{204}}{15}$; por *excesso* $\frac{\frac{69}{204}}{15}$. O erro por *excesso é menor* do que o por *falta;* o erro por *excesso* nos mostra, pois, que a fracção $\frac{11}{15}$ é *mais approximada* da fracção dada, do que a fracção $\frac{10}{15}$.

Praticamente se reconhece que a approximação deve ser por *excesso*, quando o *numerador da fracção da segunda parcella* é *maior* do que a *metade do denominador*.

Ora, o numerador 135 da fracção $\frac{135}{204}$ é maior do que 102 *(metade do denominador 204)*; a approximação deve ser, pois, por *excesso*.

271. Para passar-se da fórma fraccionaria a numero inteiro ou mixto, divide-se o numerador pelo denominador; não havendo resto, o quociente mostra o numero de unidades contidas na fórma fraccionaria. V. g.: $\frac{9}{3}=3$.

Si houver resto, junta-se ás unidades do quociente uma fracção que tem este resto para numerador, e o divisor para denominador.

V. g.: $\frac{15}{7}=15:7=2+\frac{1}{7}$ ou $2\frac{1}{7}$.

Exercicios.

Converter em fracções os seguintes numeros,

1. 5, 6, 7 em *quartos*
2. 8, 3, 9 " *sextos*
3. 2, 4, 6 " *nonos*
4. 12, 16, 11 " *setimos*
5. 21, 25, 30 " *quintos*
6. 34, 39, 41 em *oitavos*
7. 43, 47, 49 " *meios*
8. 54, 58, 64 " *terços*
9. 19, 25, 32 " *onze avos*
10. 43, 51, 62 " *vinte avos*.

Converter os seguintes numeros mixtos em fracções impropias:

11. $2\frac{3}{4}$ $3\frac{3}{4}$ $5\frac{5}{6}$ $6\frac{6}{7}$ $7\frac{7}{8}$ $8\frac{8}{9}$ $9\frac{3}{5}$ $11\frac{2}{7}$

12. $12\frac{1}{3}$ $9\frac{11}{12}$ $13\frac{7}{9}$ $5\frac{6}{11}$ $24\frac{2}{9}$ $17\frac{5}{8}$ $14\frac{2}{3}$ $9\frac{16}{17}$

Extrahir os inteiros contidos nas seguintes fracções impropias:

13. $\frac{7}{3}$ $\frac{9}{2}$ $\frac{8}{5}$ $\frac{11}{4}$ $\frac{13}{7}$ $\frac{21}{8}$ $\frac{19}{9}$ $\frac{17}{6}$

14. $\frac{40}{13}$ $\frac{75}{17}$ $\frac{19}{11}$ $\frac{56}{37}$ $\frac{124}{21}$ $\frac{345}{37}$ $\frac{851}{45}$ $\frac{987}{39}$

15. $\frac{549}{7}$ $\frac{324}{5}$ $\frac{1740}{11}$ $\frac{4682}{29}$ $\frac{5631}{324}$ $\frac{6798}{524}$ $\frac{9867}{991}$ $\frac{8746}{3761}$

§ VII — Addição das fracções ordinarias

272. Para sommar fracções *que têm o mesmo denominador*, sommam-se os numeradores, e dá-se a esta somma o denominador commum.

Exemplo: $\frac{4}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}$.

Disposição da operação

Numeradores

$\frac{4}{5}$ 4

$\frac{2}{5}$ .... 2 *Denominador commum*

$\frac{3}{5}$ 3

Somma $1\frac{4}{5}$ $\frac{9}{5}=1\frac{4}{5}$

273. Quando as fracções *têm differentes denominadores* deve-se primeiramente reduzil-as ao mesmo denominador, e applica-se depois a regra.

Exemplo. $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4}$.

Disposição da operação

	Nominadores	
$\frac{1}{2}$	6	*Menor multiplo commum*
$\frac{2}{3}$	8	$2^2 \times 3 = 12$
$\frac{3}{4}$	9	
Somma $1\frac{11}{12}$	$\frac{23}{12} = 1\frac{11}{12}$	

274. Para sommar fracções acompanhadas de inteiros, sommam-se primeiramente as fracções e extrahem-se os inteiros desta somma, si ella for uma fracção impropria; depois juntam-se estes inteiros á somma dos inteiros.

Exemplo. $2\frac{4}{5} + 3\frac{1}{2} + 7\frac{2}{3}$

Disposição da operação

	Numeradores	
$2\frac{4}{5}$	24	*Menor multiplo commum*
$3\frac{1}{2}$	15	$5 \times 2 \times 3 = 30$
$7\frac{2}{3}$	20	
Somma $13\frac{29}{30}$	$\frac{59}{30} = 1\frac{29}{30}$	

Exercicios sobre a addição das fracções ordinarias

1. $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} + \frac{6}{7} + \frac{5}{7} + \frac{4}{7} + \frac{1}{7}$. R. 3.
2. $\frac{7}{11} + \frac{3}{11} + \frac{5}{11} + \frac{9}{11} + \frac{4}{11} + \frac{6}{11}$. R. $3\,{}^{1}/_{11}$.
3. $\frac{5}{23} + \frac{11}{23} + \frac{9}{23} + \frac{20}{23} + \frac{3}{23} + \frac{7}{23}$. R. $2\,{}^{9}/_{23}$.

4. $\frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{12} + \frac{11}{24} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2}$. R. $3\,{}^{19}/_{24}$.
5. $\frac{2}{3} + \frac{7}{8} + \frac{13}{24} + \frac{21}{48} + \frac{11}{12} + \frac{5}{6}$. R. $4\,{}^{13}/_{48}$.
6. $\frac{5}{8} + \frac{11}{12} + \frac{17}{72} + \frac{4}{9} + \frac{1}{4} + \frac{7}{18}$. R. $2\,{}^{31}/_{36}$.
7. $\frac{5}{6} + \frac{7}{12} + \frac{7}{8} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4}$. R. $4\,{}^{5}/_{24}$.
8. $\frac{9}{16} + \frac{11}{15} + \frac{4}{5} + \frac{7}{8} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}$. R. $4\,{}^{53}/_{240}$.
9. $\frac{1}{3} + \frac{5}{9} + \frac{7}{12} + \frac{11}{24} + \frac{7}{8} + \frac{1}{6}$. R. $2\,{}^{35}/_{36}$.
10. $\frac{3}{5} + \frac{1}{2} + \frac{7}{8} + \frac{4}{9} + \frac{11}{15} + \frac{2}{3}$. R. $3\,{}^{59}/_{72}$.
11. $\frac{4}{9} + \frac{5}{12} + \frac{3}{7} + \frac{7}{8} + \frac{3}{4} + \frac{2}{3}$. R. $3\,{}^{293}/_{504}$.
12. $\frac{11}{15} + \frac{9}{10} + \frac{4}{9} + \frac{5}{8} + \frac{2}{3} + \frac{4}{5}$. R. $4\,{}^{61}/_{360}$.
13. $5\frac{3}{8} + 11\frac{4}{9} + 9\frac{13}{72} + 7\frac{11}{18} + 3\frac{7}{12}$. R. $37\,{}^{7}/_{36}$.
14. $3\frac{5}{6} + 9\frac{11}{18} + 10\frac{3}{4} + 5\frac{7}{9} + 7\frac{2}{3}$. R. $37\,{}^{23}/_{36}$.
15. $7\frac{4}{5} + 10\frac{1}{2} + 4\frac{5}{8} + 1\frac{4}{7} + 3\frac{11}{14}$. R. $28\,{}^{79}/_{280}$.

§ VIII — Subtracção das fracções ordinarias

275. Para subtrahir-se uma fracção de outra, *quando ambas têm o mesmo denominador*, toma-se a differença entre os numeradores e dá-se-lhe o denominador commum.

Exemplo. $\frac{4}{5} - \frac{2}{5}$.

Disposição da operação

	Numeradores	
$\frac{4}{5}$	4	*Denominador commum*
$\frac{2}{5}$	2	5
Resultado $\frac{2}{5}$	2	

276. Quando as fracções têm *differentes denominadores*, é preciso primeiramente reduzil-as ao mesmo denominador, e pratica-se depois a regra.

Exemplo. $\frac{5}{6} - \frac{7}{9}$.

Disposição da operação

Numeradores

$\frac{5}{6}$ 15

$\frac{7}{9}$ 14

Menor multiplo commum $2 \times 3^2 = 18$

Resultado $\frac{1}{18}$ 1

277. Para subtrahir-se de um inteiro uma fracção, toma-se ao inteiro uma unidade, a qual se reduz á denominação da fracção, e pratica-se depois a regra.

Exemplo. $2 - \frac{5}{7}$.

Disposição da operação

Numeradores

$2 = 1\frac{7}{7}$ 7

$\frac{5}{7} = \frac{5}{7}$ 5

Denominador commum 7

Resultado $1\frac{2}{7}$ 2

278. Para subtrahirem-se fracções acompanhadas de inteiros, faz-se separadamente a subtracção das fracções e a dos inteiros, começando-se pela das fracções.

Si acontecer que a fracção do minuendo seja menor do que a do subtrahendo, reduzidas ao mesmo denominador, junta-se o denominador commum ao menor numerador; faz-se a subtracção e diminue-se de uma unidade o inteiro maior.

Exemplo 1) $3\frac{3}{4} - 2\frac{2}{5}$

Disposição da operação

Numeradores

$3\frac{3}{4}$ 15

$2\frac{2}{5}$ 8

Menor multiplo commum $4 \times 5 = 20$

Resultado $1\frac{7}{20}$ 7

Exemplo 2) $4\frac{2}{5} - 2\frac{3}{4}$

Disposição da operação

Numeradores

$4\frac{2}{5}$ $8 + 20 = 28$

$2\frac{3}{4}$ 15

Menor multiplo commum $4 \times 5 = 20$

Resultado $1\frac{13}{20}$ 13

Exercicios sobre a subtracção das fracções ordinarias

1. $\frac{5}{8} - \frac{3}{8}$. R. $\frac{1}{4}$.
2. $\frac{8}{9} - \frac{5}{9}$. R. $\frac{1}{3}$.
3. $\frac{11}{12} - \frac{7}{12}$. R. $\frac{1}{3}$.
4. $\frac{7}{8} - \frac{3}{4}$. R. $\frac{1}{8}$.
5. $\frac{23}{24} - \frac{5}{6}$. R. $\frac{1}{8}$.
6. $\frac{7}{12} - \frac{7}{24}$. R. $\frac{7}{24}$.
7. $\frac{11}{12} - \frac{21}{32}$. R. $\frac{25}{96}$.
8. $\frac{11}{16} - \frac{15}{24}$. R. $\frac{1}{16}$.
9. $\frac{5}{6} - \frac{3}{8}$. R. $\frac{11}{24}$.
10. $5 - \frac{3}{7}$. R. $4\frac{4}{7}$.
11. $9 - \frac{13}{15}$. R. $8\frac{2}{15}$.
12. $3 - \frac{9}{11}$. R. $2\frac{2}{11}$.
13. $7\frac{9}{11} - 3\frac{7}{12}$. R. $4\frac{31}{132}$.
14. $9\frac{11}{16} - 5\frac{3}{8}$. R. $4\frac{5}{16}$.
15. $8\frac{5}{6} - 2\frac{3}{4}$. R. $6\frac{1}{12}$.
16. $5\frac{5}{7} - 3\frac{9}{11}$. R. $1\frac{69}{77}$.
17. $11\frac{17}{72} - 7\frac{7}{9}$. R. $3\frac{11}{24}$.
18. $6\frac{13}{25} - 4\frac{11}{15}$. R. $1\frac{59}{75}$.

Exercicios sobre a addição e subtracção de fracções ordinarias

1. $\frac{3}{5}+\frac{7}{9}+\frac{11}{15}-\frac{17}{45}$. R. $1\frac{11}{15}$.
2. $\frac{5}{6}-\frac{3}{4}+\frac{7}{8}-\frac{7}{12}$. R. $\frac{3}{8}$.
3. $\frac{3}{5}+\frac{7}{8}-\left(\frac{5}{6}+\frac{7}{12}\right)$. R. $\frac{7}{120}$.
4. $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}\left(\frac{7}{9}+\frac{3}{8}+\frac{1}{3}\right)$. R. $\frac{1}{72}$.
5. $2+\frac{3}{4}+\frac{1}{6}+2-\frac{5}{9}+\frac{7}{12}$. R. $4\frac{17}{18}$.
6. $4-3\frac{4}{9}+2-\frac{11}{12}+\frac{7}{12}-1\frac{5}{8}$. R. $\frac{43}{72}$.
7. $4-3\frac{4}{9}+2-\left(\frac{11}{12}-\frac{7}{12}+1\frac{5}{8}\right)$. R. $\frac{43}{72}$.
8. $1\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+5-\left(1-\frac{7}{9}+2\frac{1}{6}\right)$. R. $4\frac{1}{36}$.
9. $3\frac{1}{2}+2\frac{3}{4}-1\frac{2}{3}-\left(\frac{5}{6}+1\frac{2}{3}+2\frac{1}{12}\right)$. R. 0.
10. $13\frac{1}{3}-1\frac{1}{2}-2\frac{5}{6}-\left(3\frac{7}{8}+4\frac{5}{9}+\frac{41}{72}\right)$ R. 0.

§ IX — Multiplicação das fracções ordinarias

279. Ha tres casos na multiplicação das fracções:

1.º o da multiplicação de uma fracção por um numero inteiro;

2.º o da multiplicação de um inteiro por uma fracção;

3.º o da multiplicação de uma fracção por outra.

280. O 1.º caso e o 2.º se resolvem por meio de uma só regra.

Multiplicação de uma fracção por um inteiro ou de um inteiro por uma fracção

Exemplo 1) $\frac{4}{5}\times 3$. Exemplo 2) $5\times\frac{3}{8}$

Regra. — Multiplica-se o inteiro pelo numerador da fracção e dá-se ao producto o denominador della.

Exemplo do 1.º caso

$$\frac{4}{5}\times 3=\frac{4\times 3}{5}=\frac{12}{5}=2\frac{2}{5}.$$

Exemplo do 2.º caso

$$5\times\frac{3}{8}=\frac{5\times 3}{8}=\frac{15}{8}=1\frac{7}{8}.$$

Observação. — *Quando o denominador da fracção for divisivel pelo inteiro*, é preferivel effectuar-se a divisão, conservando comtudo, o mesmo numerador. V. g.

$$\frac{3}{8}\times 4=\frac{3}{8:4}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}.$$

281. Terceiro caso. — **Multiplicação de uma fracção por outra.**

Exemplo. $\frac{5}{7}\times\frac{4}{5}$.

Regra. — Multiplicam-se os numeradores entre si, e da mesma sorte os denominadores.

$$\frac{5}{7}\times\frac{4}{5}=\frac{5\times 4}{7\times 5}=\frac{20}{35}=\frac{4}{7}.$$

282. Em qualquer destes tres casos, todas as vezes que apparecer numero mixto, deve-se primeiramente reduzil-o á fórma fraccionaria, para depois applicar-se a regra.

Exemplo 1)

$$2\frac{3}{7}\times 5=\frac{17}{7}\times 5=\frac{17\times 5}{7}=\frac{85}{7}=12\frac{1}{7}.$$

Exemplo 2)

$$6\times 3\frac{2}{5}=6\times\frac{17}{5}=\frac{6\times 17}{5}=\frac{102}{5}=20\frac{2}{5}.$$

Exemplo 3)

$$4\frac{3}{7}\times 5\frac{2}{3}=\frac{31}{7}\times\frac{17}{3}=\frac{31\times 17}{7\times 3}=\frac{527}{21}=25\frac{2}{21}.$$

Exercicios sobre a multiplicação de fracções ordinarias

1. $\frac{5}{7} \times 4$. R. $2\frac{6}{7}$.
2. $\frac{5}{9} \times 3$. R. $1\frac{2}{3}$.
3. $\frac{11}{13} \times 7$. R. $5\frac{12}{13}$.
4. $\frac{9}{16} \times 8$. R. $4\frac{1}{2}$.
5. $7 \times \frac{4}{9}$. R. $3\frac{1}{9}$.
6. $4 \times \frac{5}{8}$. R. $2\frac{1}{2}$.
7. $9 \times \frac{13}{17}$. R. $6\frac{15}{17}$.
8. $12 \times \frac{17}{36}$. R. $5\frac{2}{3}$.
9. $\frac{6}{11} \times \frac{11}{12}$. R. $\frac{1}{2}$.
10. $\frac{5}{13} \times \frac{11}{15}$. R. $\frac{11}{39}$.
11. $\frac{15}{23} \times \frac{4}{7}$. R. $\frac{60}{161}$.
12. $\frac{21}{25} \times \frac{5}{7}$. R. $\frac{3}{5}$.
13. $7\frac{4}{9} \times 3\frac{2}{5}$. R. $25\frac{14}{45}$.
14. $4\frac{3}{8} \times 11$. R. $48\frac{1}{8}$.
15. $17 \times 9\frac{6}{7}$. R. $167\frac{4}{7}$
16. $\frac{15}{17} \times 3\frac{5}{9}$. R. $3\frac{7}{51}$.
17. $15\frac{11}{12} \times 10$. R. $159\frac{1}{6}$
18. $\frac{17}{19} \times 5\frac{23}{25}$. R. $5\frac{141}{475}$

Exercicios sobre a addição, substracção e multiplicação de fracções ordinarias

1. $\left(\frac{5}{6}+\frac{3}{8}+\frac{8}{9}\right) \times 36$. R. $75\frac{1}{2}$.
2. $\left(\frac{4}{7}+\frac{2}{5}\right) \times \left(\frac{1}{9}+\frac{2}{3}\right)+\frac{11}{15}$. R. $1\frac{22}{45}$.
3. $\left(2\frac{1}{3}+3+\frac{5}{12}\right) \times \frac{12}{23}+\frac{5}{7} \times 14$. R. 13.
4. $\frac{4}{5} \times \frac{5}{8}-\frac{3}{7} \times \frac{7}{9}$. R. $\frac{1}{6}$.
5. $\left(\frac{5}{6}-\frac{11}{18}\right) \times \left(4-\frac{5}{7}\right)-\frac{5}{9}$. R. $\frac{11}{63}$.
6. $\left(\frac{2}{3} \times 6-\frac{7}{10}-1\frac{2}{5}\right.$. R. $1\frac{9}{10}$.
7. $\left(\frac{9}{11}+\frac{5}{8}\right) \times \left(\frac{13}{18}-\frac{17}{24}\right) \times 88$. R. $1\frac{55}{72}$.
8. $2\frac{2}{5} \times \frac{10}{13}-\left(\frac{4}{5}+\frac{7}{10}\right)+\frac{6}{7}-\frac{1}{2}$. R. $\frac{64}{91}$.

9. $\left(\frac{7}{12}+\frac{7}{8}+\frac{7}{9}\right) \times 72-\left(5-\frac{13}{17}\right) \times \frac{17}{72}$. R. 160.
10. $\left[\left(\frac{5}{6}-\frac{3}{8}+\frac{11}{12}\right) \times 24-\left(30\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\right)\right] \times 3\frac{1}{3}$. R. $9\frac{1}{21}$

§ X — Divisão das fracções ordinarias

283. Ha tres casos na divisão das fracções;
1.° o da divisão de uma fracção por um numero inteiro;
2.° o da divisão de um inteiro por uma fracção;
3.° o da divisão de uma fracção por outra.

284. O 1.° caso e o 2.° se resolvem por meio de uma só regra.

Divisão de uma fracção por um inteiro, ou de um inteiro por uma fracção

Exemplo 1) $\frac{3}{7} : 2$. **Exomplo 2)** $2 : \frac{4}{7}$

Regra. — Reduz-se o inteiro á denominação da fracção; expelle-se depois o denominador commum e toma-se o dividendo para numerador do quociente e o divisor para denominador.

Exemplo do 1.° caso*)

$$\frac{3}{7} : 2 = \frac{3}{7} : \frac{14}{7} = \frac{3}{14}$$

***) Para dividir-se uma fracção por um inteiro,** tambem se diz: multiplica-se o denominador da fracção pelo inteiro, e conserva-se o mesmo numerador.

$$\frac{3}{7} : 2 = \frac{3}{7 \times 2} = \frac{3}{14}.$$

Observação. — *Quando o numerador da fracção dividendo for divisivel pelo inteiro,* é preferivel effectuar-se a divisão, dando-se por denominador ao quociente o denominador da fracção.

$$\frac{4}{7} : 2 = \frac{4 : 2}{7} = \frac{2}{7}.$$

Exemplo do 2.º caso)**

$$2 : \frac{4}{7} = \frac{14}{7} : \frac{4}{7} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}.$$

285. Terceiro caso. *Divisão de uma fracção por outra.*

Exemplo. $\frac{1}{2} : \frac{2}{3}$.

Regra. — Reduzem-se as duas fracções ao mesmo denominador; expelle-se depois o denominador commum, e toma-se o dividendo para numerador do quociente e o divisor para denominador.***)

$$\frac{1}{2} : \frac{2}{3} = \frac{3}{6} : \frac{4}{6} = \frac{3}{4}.$$

286. Nestes tres casos podem apparecer numeros mixtos. Quando isto acontecer, devem ser primeiramente reduzidos á forma fraccionaria, para depois applicar-se a regra que convier.

Exemplo 1) $4\frac{2}{5} : 3 = \frac{22}{5} : 3 = \frac{22}{5} : \frac{15}{5} = \frac{22}{15} = 1\frac{7}{15}.$

Exemplo 2) $6 : 8\frac{3}{4} = 6 : \frac{34}{4} = \frac{24}{4} : \frac{35}{4} = \frac{24}{35}.$

Exemplo 3) $4\frac{3}{7} : 2\frac{4}{5} = \frac{31}{7} : \frac{14}{5} = \frac{155}{35} : \frac{98}{35} = \frac{155}{98} = 1\frac{57}{98}.$

**) Tambem se póde dizer que para dividir-se um inteiro por uma fracção, multiplica-se o inteiro pela fracção divisor invertida. Assim:

$$2 : \frac{4}{7} = 2 \times \frac{7}{4} = \frac{2 \times 7}{4} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}.$$

Inverter uma fracção é passar o denominador para numerador e o numerador para denominador.

***) Para dividir-se uma fracção por outra, tambem se diz: multiplica-se a fracção dividendo pela fracção divisor invertida. Assim:

$$\frac{1}{2} : \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{1 \times 3}{2 \times 2} = \frac{3}{4}.$$

Exercicios sobre a divisão de fracções ordinarias

1. $\frac{9}{11} : 4.$ R. $\frac{9}{44}.$
2. $\frac{8}{9} : 2.$ R. $\frac{4}{9}.$
3. $\frac{13}{17} : 5.$ R. $\frac{13}{85}.$
4. $\frac{14}{23} : 7.$ R. $\frac{2}{23}.$
5. $10 : \frac{3}{5}.$ R. $16\frac{2}{3}.$
6. $6 : \frac{6}{7}.$ R. $7.$
7. $8 : \frac{32}{63}.$ R. $15\frac{3}{4}.$
8. $21 : \frac{5}{8}.$ R. $33\frac{3}{5}.$
9. $\frac{3}{5} : \frac{6}{7}.$ R. $\frac{7}{10}.$
10. $\frac{4}{9} : \frac{8}{11}.$ R. $\frac{11}{18}.$
11. $\frac{21}{23} : \frac{7}{17}.$ R. $2\frac{5}{23}.$
12. $\frac{10}{13} : \frac{20}{31}.$ R. $1\frac{5}{26}.$
13. $4\frac{3}{4} : 5.$ R. $\frac{19}{20}.$
14. $11 : 2\frac{7}{8}.$ R. $3\frac{19}{23}.$
15. $2\frac{4}{5} : 1\frac{5}{6}.$ R. $1\frac{29}{55}.$
16. $9\frac{11}{13} : 12.$ R. $\frac{32}{39}.$
17. $21 : 5\frac{2}{3}.$ R. $3\frac{12}{17}.$
18. $6\frac{4}{7} : 2\frac{1}{2}.$ R. $2\frac{22}{35}.$

§ XI — Provas da multiplicação e divisão das fracções ordinarias

287 Para tirar-se a prova da multiplicação, divide-se o producto pelo multiplicando, e no quociente deve apparecer o multiplicador: ou dividindo-se o producto pelo multiplicador, no quociente deve apparecer o multiplicando. V. g.

$$\frac{5}{7} \times \frac{4}{9} = \frac{20}{63}$$

Prova

1) $\frac{20}{63} : \frac{5}{7} = \frac{20}{63} : \frac{45}{63} = \frac{20}{45} = \frac{4}{9}.$

2) $\frac{20}{63} : \frac{4}{9} = \frac{20}{63} : \frac{28}{63} = \frac{20}{28} = \frac{5}{7}.$

288. Para tirar-se a prova da divisão, multiplica-se o divisor pelo quociente, e o producto deve ser igual ao dividendo.

Exemplo 1) $\frac{5}{6} : 7 = \frac{5}{6} : \frac{42}{6} = \frac{5}{42}.$

Prova

$$7 \times \frac{5}{42} = \frac{35}{42} = \frac{5}{6}.$$

Exemplo 2) $7 : \frac{2}{3} = \frac{21}{3} : \frac{2}{3} = \frac{21}{2} = 10\frac{1}{2}.$

Prova

$$\frac{2}{3} \times 10\frac{1}{2} = \frac{2}{3} \times \frac{21}{2} = \frac{42}{6} = 7.$$

Exemplo 3) $\frac{5}{6} : \frac{4}{7} = \frac{35}{42} : \frac{24}{42} = \frac{35}{24} = 1\frac{11}{24}.$

Prova

$$\frac{4}{7} \times 1\frac{11}{24} = \frac{4}{7} \times \frac{35}{24} = \frac{140}{168} = \frac{5}{6}.$$

Exercicios sobre a addição, subtracção, multiplicação e divisão de fracções ordinarias

1. $\left(\frac{3}{4} + \frac{2}{5}\right) \times \frac{1}{23} + \frac{4}{5} - \frac{7}{12} : \frac{7}{9}.$ R. $\frac{1}{10}$.
2. $\frac{2}{3} \times \frac{3}{8} + \frac{5}{6} : \frac{7}{12} - 1\frac{19}{28}.$ R. 0.
3. $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) : \frac{5}{6} + \frac{2}{3} \times 1\frac{1}{5}.$ R. 1.
4. $\frac{3}{4} + \frac{2}{5} \times 10 - 1\frac{3}{4} : 2\frac{1}{3}.$ R. 4.
5. $1\frac{1}{3} - \frac{2}{3} : \frac{5}{6} + \frac{2}{9} \times 17\frac{3}{5}.$ R. $4\frac{4}{9}$.
6. $\left(2\frac{1}{2} - \frac{3}{8}\right) \times \frac{5}{17} + \frac{1}{4} : \frac{2}{3}.$ R. 1.
7. $\left(\frac{3}{4} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) : \frac{11}{60} - \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4}\right) \times \frac{9}{25}.$ R. $4\frac{17}{20}$.
8. $\left(5 - 1\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + 1\right) \times \frac{1}{5} - \left[3 + 2\frac{1}{3} : 7 \times \frac{2}{9} : 3 - \left(2 + \frac{1}{9}\right)\right].$ R. $\frac{7}{81}$.
9. $\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) \times 1\frac{1}{3} - \left[\left(5 + \frac{1}{8} - 3\frac{7}{8}\right) \times \frac{2}{5} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) : 1\frac{1}{2}\right].$ R. 0
10. $\dfrac{\left(2 + \frac{5}{7}\right) \times \left(3 - \frac{4}{9}\right)}{\left(10 - \frac{3}{4}\right) \times \left(7 + \frac{11}{12}\right)} : \dfrac{\frac{23}{11}}{\frac{13}{33}}.$ R. $\frac{208}{11655}$.

XII — Conversão das fracções decimaes em fracções ordinarias e vice-versa

289. Para passar-se uma fracção decimal para a fórma de fracção ordinaria, toma-se para numerador o decimal sem a virgula, e para denominador a unidade seguida de tantos zeros, quantas forem as casas de dizima. V. g.

$$0{,}52 = \frac{52}{100}; \qquad 0{,}047 = \frac{47}{1000}; \qquad 2{,}36 = \frac{236}{100}.$$

290. Para converter-se uma fracção ordinaria em fracção decimal, ha dois processos:

O primeiro funda-se na regra n. 269.

Quer-se, por exemplo, reduzir a fracção $\frac{3}{4}$ *a* **centesimos.** Tem-se que:

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 100}{4 \times 100} = \frac{300}{400} = \frac{\frac{300}{4}}{\frac{400}{4}} = \frac{75}{100} = 0{,}75.$$

O segundo processo effectua-se pela seguinte

Regra. — Divide-se o numerador pelo denominador, e obtem-se assim a parte inteira do quociente, depois da qual escreve-se uma virgula. A' direita do resto escreve-se um zero; e, effectuando-se a divisão pelo mesmo divisor, obtem-se no quociente os decimos. E assim continua-se, ajuntando-se um zero a cada resto, até a divisão exgottar-se, ou até chegar-se á casa de dizima que se quizer.

Si o numero dado for fraccionario propriamente dito, escreve-se um zero com uma virgula no quociente, colloca-se um zero á direita do numerador, e procede-se depois como acima.

Exemplo 1) *Converter* $\frac{13}{4}$ *em fracção decimal.*

$$\begin{array}{l} 13 : 4 = 3{,}25 \\ \;\;10 \\ \;\;\;20 \\ \;\;\;\;0 \end{array}$$

Assim, $\frac{13}{4} = 3{,}25.$

Exemplo 2) *Converter* $\frac{3}{4}$ *em fracção decimal.*

$$3 : 4 = 0{,}75$$
$$\begin{array}{l} 30 \\ \;\;20 \\ \;\;\;\;0 \end{array}$$

Assim, $\frac{3}{4} = 0{,}75.$

Exemplo 3) *Converter* $\frac{2}{3}$ *em fracção decimal.*

$$2 : 3 = 0{,}666...$$
$$\begin{array}{l} 20 \\ \;\;20 \\ \;\;\;\;20 \\ \;\;\;\;\;\;2 \end{array}$$

291. Pelos exemplos precedentes vê-se que na conversão das fracções ordinarias em fracções decimaes, a divisão umas vezes exgotta-se; outras, não. No primeiro caso, tem-se um numero decimal fraccionario exacto; no segundo, tem-se a *dizima* chamada *periodica*.

§ XIII — Fracções decimaes periodicas

292. Fracções decimaes periodicas *são aquellas cujos algarismos de dizima se reproduzem indefinidamente e sempre na mesma ordem.* V. g. 0,6 6 6 etc.; 0,45 45 45 etc.

293. O menor numero de algarismos de dizima, que se reproduzem indefinidamente e na mesma ordem, chama-se *periodo.*

294. A fracção decimal periodica ou é *simples* ou *composta.*

295. Quando o periodo começa logo depois da virgula, a fracção decimal chama-se *periodica simples.* V. g. 0,6 6 6 etc. . . . . ; 0,45 45 45. . . .

296. Quando depois da virgula não começa o periodo, a fracção decimal chama-se *periodica composta* ou *mixta.* V. g. 1, 1 6 6 6 6 etc. . . .

a) Conversão das fracções decimaes periodicas em fracções ordinarias

297. Para converter-se uma fracção decimal periodica simples ou composta, *acompanhada ou não de inteiros,* em fracção ordinaria, toma-se para numerador a parte não periodica seguida de um periodo, menos os algarismos não periodicos; e para denominador tantos 9, quantos são os algarismos de cada periodo, seguidos de tantos zeros, quantos forem os *algarismos de* dizima *não periodicos.**)

Exemplo 1 $0,\,6\,6\,6\ldots\ \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$

Exemplo 2) $3,\,6\,6\,6\ldots\ \frac{36 - 3}{9} = \frac{33}{9} = \frac{11}{3} = 3\frac{2}{3}.$

Exemplo 3) $2,1\,3\,6\,6\ldots\ \frac{2136 - 213}{900} = \frac{1923}{900} = \frac{641}{300} = 2\frac{41}{300}.$

b) Meios de se reconhecer si uma fracção ordinaria irreductivel, convertida em decimal, dá uma dizima de numero limitado ou illimitado de algarismos

298. E' sempre possivel reconhecer-se antecipadamente, si uma fracção ordinaria dá lugar, na sua conversão para fracção decimal, a uma fracção decimal de numero limitado ou illimitado de algarismos.

---

*) Chama-se **limite** uma quantidade fixa ou constante, da qual se aproxima indefinidamente, sem comtudo igualal-a, uma quantidade variavel. **Quantidade variavel** é aquella que póde passar por differentes estados de grandeza. *A fracção ordinaria* é, pois, o **limite** da *fracção decimal periodica*, e esta é a *quantidade variavel.* Assim, a fracção ordinaria $^2/_3$, sendo limite da fracção decimal periodica 0, 6 6 6 etc., esta não poderá ser igual áquella, segundo a definição de limite.

Por isso, não é *rigoroso* dizer-se que a fracção decimal periodica é *igual* á fracção ordinaria que tem para numerador um dos periodos, e para denominador tantos 9, quantos são os algarismos de cada periodo.

Theoremas*)

1.° **Toda fracção irreductivel,** *cujo denominador se compõe unicamente dos factores* 2 *ou* 5, *ou de ambos conjunctamente,* na sua conversão para decimal, dá lugar a uma dizima, cujo numero de algarismos é *limitado e igual ao maior dos expoentes dos factores que entrarem no denominador.* **V. g.**

$$\frac{1}{2}=0{,}5;\quad \frac{3}{4}=\frac{3}{2\times 2}=\frac{3}{3^2}=0{,}75.$$

$$\frac{3}{40}=\frac{3}{2\times 2\times 2\times 5}=\frac{3}{2^3\times 5}=0{,}075.$$

$$\frac{7}{50}=\frac{7}{2\times 5\times 5}=\frac{7}{2\times 5^2}=0{,}14.$$

2.° **Toda fracção irreductivel,** *cujo denominador não contém nem o factor* 2, *nem o factor* 5, em sua conversão para decimal, dá lugar a uma *dizima periodica simples.* **V. g.**

$$\frac{2}{3}=0{,}6\,6\,6\ldots;\qquad \frac{7}{11}=0{,}63\,63\,63\ldots$$

$$\frac{5}{6}=\frac{5}{3\times 3}=\frac{5}{3^2}=0{,}5\,5\,5\ldots$$

3.° **Toda fracção irreductivel,** *cujo denominador encerra factores primos differentes de* 2 *e* 5, *e juntamente um destes factores ou ambos,* em sua conversão para fracção decimal, dá logar a uma *dizima periodica composta; e o numero dos algarismos da dizima não periodicos é igual ao maior dos expoentes dos factores* 2 *ou* 5. **V. g.**

$$\frac{5}{6}=\frac{5}{2\times 3}=0{,}8\,3\,3\ldots$$

$$\frac{2}{15}=\frac{2}{3\times 5}=0{,}1\,3\,3\,3\,3\ldots$$

$$\frac{11}{24}=\frac{11}{2\times 2\times 2\times 3}=\frac{11}{2^3\times 3}=0{,}458\,3\,3\,3\ldots$$

---

*) *Theorema* é uma verdade que se torna evidente por meio de demonstração.

Exercicios

Converter as seguintes fracções decimaes em fracções ordinarias:

1. 0,25   0,44   0,65   0,125   0,375   0,625   4,6   10,12.
2. 0,4 4 4...   0,6 6 6...   0,63 63...   0,72 72...   0,814 814...   1,22...   5,81 81...   0,135 135...
3. 0,455...   0,2 6 6 6...   0,3 18 18...   0,8 64 64...   4,25 3 3 3..   2,03 18 18..

Converter as seguintes fracções ordinarias em fracções decimaes:

4. $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{11}{25}$ $\frac{19}{125}$.
5. $\frac{2}{3}$ $\frac{5}{7}$ $\frac{7}{9}$ $\frac{11}{12}$ $\frac{17}{18}$ $\frac{7}{15}$ $\frac{19}{75}$.

Exercicios sobre fracções ordinarias combinadas com fracções decimaes

1. $\left(0{,}7+\frac{3}{5}-0{,}3\,3\,3\ldots\right)\times\frac{5}{8}:\frac{1}{6}=3{,}625$
2. $\left(\frac{0{,}12387387\ldots}{0{,}1486486\ldots}+\frac{11}{30}\right):4{,}166\ldots=\frac{36}{125}$
3. $\frac{5}{8}:0{,}75+\frac{2}{3}-0{,}5+\frac{2}{5}\times 0{,}8333\ldots=1\frac{1}{3}.$
4. $0{,}7\,7\,7\ldots:\frac{14}{27}+0{,}625-\frac{1}{4}\times 0{,}5+1\frac{2}{5}=3{,}4.$
5. $1\frac{1}{3}-0{,}6\,6\,6\ldots:\frac{5}{6}+0{,}2\,2\,2\ldots\times 17{,}6=4\frac{4}{9}.$
7. $\left(\frac{1}{2}+0{,}75\right)\times\frac{3}{5}+0{,}875:\frac{7}{9}\times 0{,}4\,4\,4\ldots=1{,}25.$
8. $\left(\frac{3}{4}+0{,}5\right)\times\left(0{,}75-\frac{1}{2}\right)-\left(0{,}5625-\frac{1}{4}\right)=0.$
9. $\left(5-1{,}5\times\frac{2}{3}+1\right)\times 0{,}2-\left[3+2{,}3\,3\,3\ldots:7\times\frac{2}{9}:3-\right.$ $\left.-\left(2+\frac{1}{9}\right)\right]=\frac{7}{81}.$
10. $\left(0{,}25+\frac{1}{2}\right)\times 1\frac{1}{3}+\left(5+0{,}125-3\frac{7}{8}\right)\times 0{,}4-\left(0{,}5+\frac{1}{4}\right):$ $:\frac{1}{2}=0.$

§ XIV — Vantagens das fracções decimaes sobre as fracções ordinarias

299. As fracções ordinarias são partes da unidade menores do que ella em uma *razão qualquer*, e as fracções decimaes são partes da unidade menores do que ella na *razão décupla*.

As fracções decimaes não são outra cousa mais do que fracções ordinarias, cujos denominadores são potencias de 10.

Ellas, porém, apezar de terem sua leitura como as fracções ordinarias, representam-se como numeros inteiros; nisto levam vantagem sobre as fracções ordinarias: 1.º porque a sua numeração obedece ás mesmas leis da numeração dos numeros inteiros; 2.º porque os processos de suas operações são os mesmos que os destes numeros.

Destas vantagens não gozam as fracções ordinarias, **cuja theoria e calculo são todos especiaes.**

Além do que fica dito, póde-se accrescentar que uma das mais importantes vantagens das fracções decimaes é serem ellas a base do *systema metrico francez de pesos e medidas.*

Problemas sobre as quatro operações de fracções ordinarias

1. Um trabalhador fez $\frac{5}{16}$ de uma tarefa; um outro $\frac{3}{8}$ da mesma e um terceiro $\frac{1}{4}$. *Que porção da tarefa está feita?* — R. $\frac{15}{16}$.

2. Os $\frac{4}{15}$ de um anno juntos aos $\frac{7}{15}$ e aos $\frac{3}{11}$ de um anno *farão um anno inteiro?* — R. $\frac{956}{1155}$.

3. Dois trabalhadores trabalham em uma obra; o primeiro, trabalhando sósinho fal-a-ia em 8 dias, o segundo em 11. *Que porção de obra farão os dois em um dia, trabalhando juntos?* — R. $\frac{19}{88}$.

4. Uma bomba póde exgottar a agua de um poço em 15 dias; uma segunda exgottal-a-ia em 12. *Que porção do poço esvasiarão as duas bombas juntas em um dia.* — R. $\frac{3}{20}$.

5. Um operario poderia terminar um trabalho em 8 dias; um segundo, trabalhando só, fal-o-ia em 9 dias e um terceiro, tambem sósinho, acabal-o-ia em 10 dias. *Que porção de obra ficará prompta em um dia, si os tres trabalharem juntos?* — R. $\frac{121}{360}$.

6. Uma fonte, correndo sósinha poderia encher um reservatorio em 7 horas; uma segunda enchel-o-ia em 9 horas, uma terceira em 11, uma quarta em 12 e uma quinta em 15. *Que porção do reservatorio ficará cheia em uma hora, si as cinco fontes correrem simultaneamente?* — R. $\frac{6859}{13860}$.

7. Um relogio adiantou-se 2 minutos e $\frac{4}{7}$ no primeiro dia, 2 minutos $\frac{3}{5}$ no segundo, 2 minutos $\frac{8}{11}$ no terceiro. *Quanto adiantou-se elle nos tres dias?* — R. **7 minutos** $\frac{47}{385}$.

8. Duas fontes fornecem agua a uma bacia; a primeira dá 4 litros $\frac{1}{7}$ e a segunda $5\frac{1}{3}$ por minuto. *Quantos litros d'agua recebe por minuto esta bacia, correndo as duas fontes ao mesmo tempo?* — R. **9 litros** $\frac{10}{21}$.

9. De uma peça de seda venderam-se dois pedaços tendo um 18 metr. $\frac{1}{3}$ e o outro 5 metr. $\frac{1}{4}$ mais e ainda restam 37 metr. $\frac{1}{2}$. *Qual era o comprimento da peça?* — R. **79 metros** $\frac{5}{12}$.

10. Dois operarios fizeram: um os $\frac{4}{17}$ e o outro os $\frac{8}{17}$ de um mesmo trabalho. *Que porção de obra o segundo fez mais do que o primeiro?* — $\frac{4}{17}$.

11. *Dividir* $\frac{5}{6}$ *em duas partes, uma das quaes é* $\frac{3}{8}$. — R. $\frac{11}{24}$.

12. *Qual é o numero que* sommado com $\frac{15}{24}$ dá $\frac{11}{12}$? — R. $\frac{7}{24}$.

13. Uma fonte póde encher uma bacia em 14 horas. Correndo durante uma hora, *que porção da bacia faltará para esta fica cheia?* — R. $\frac{13}{14}$.

14. Um obreiro so fez 7 horas $\frac{3}{4}$ de trabalho em vez das 11 horas $\frac{1}{2}$ que formam o seu dia habitual. *Quantas horas perdeu?* — R. **3 horas** $\frac{3}{4}$.

15. Um correio que deve andar 47 kilom. $\frac{1}{4}$ andou já 28 kilom. $\frac{3}{5}$; *quanto lhe resta ainda para andar?* — R. **18 kilom.** $\frac{13}{20}$.

16. De uma peça de panno que tinha 12 metr. $\frac{2}{3}$ cortaram-se 5 metr. $\frac{3}{4}$; *quanto resta de panno?* — R. **6 metros** $\frac{11}{12}$.

17. Dois frascos contêm: um 3 litros e o outro 2 litros $\frac{1}{2}$. *Qual é a differença de suas capacidades?* — R. $\frac{1}{2}$ **de litro.**

18. Tendo-se comprado uma porção de panno para uma sobrecasaca, uma calça e um collete, e sendo necessarios os $\frac{2}{3}$ para a sobrecasaca e $\frac{1}{4}$ para a calça, pergunta-se: *quanto resta para o collete?* — R. $\frac{1}{12}$.

19. Uma pessoa fez $\frac{1}{11}$ de certa obra, depois $\frac{1}{6}$ e depois $\frac{1}{20}$; *quanto ainda lhe falta para acabar a obra?* — R. $\frac{457}{660}$.

20. Duas torneiras podem encher uma bacia: a primeira em 3 horas, a segunda em 4; uma terceira póde esvasial-a em 12 horas. *Qual será o nivel da bacia no fim de uma hora, si as tres torneiras correrem juntas?* — R. $\frac{1}{2}$.

21. O resto de uma subtracção é $14\frac{3}{9}$. Juntaram-se $9\frac{7}{15}$ ao minuendo e $7\frac{1}{3}$ ao subtrahendo. *Qual será o novo resto?* — R. $16\frac{21}{45}$.

22. Um caixão cheio pesa 38 kilogr. $\frac{7}{10}$. Os objectos empacotados pesam 32 kilogr. $\frac{1}{5}$ e a palha para o empacotamento $\frac{4}{5}$ do kilogr. *Quanto pesa o caixão vasio?* — R. **5 kilogrammos** $\frac{7}{10}$.

23. Dois amigos compraram bilhetes de loteria e convencionaram em que, si ambos ganhassem, o que ganhasse mais daria aos pobres o excedente do seu premio sobre o do outro: Ganharam: o primeiro os $\frac{7}{10}$ do premio, o segundo os $\frac{6}{11}$. *Qual será a parte dos pobres, e qual o resto do premio?* — R. $\frac{6}{110}$, $\frac{47}{110}$.

24. Paulo tinha 17 francos $\frac{3}{5}$ mais do que Pedro. Deram 19 francos a Paulo e $24\frac{1}{4}$ a Pedro. *Quanto o primeiro tem agora mais do que o segundo?* — **R. 12. fr. $\frac{7}{20}$.**

25. Um relogio adianta-se $\frac{3}{4}$ de minuto por hora; *quanto se adiantará elle em $\frac{3}{4}$ hora?* — **R. $\frac{9}{16}$.**

26. *Quanto valem $\frac{3}{5}$ do metro de panno* a 6$000 o metro? — **R. 3$600.**

27. *Qual é o comprimento de um pedaço de panno* que é igual aos $\frac{3}{8}$ de uma peça de 60 metros? — **R. $22^m,50$.**

28. Um operario terminou os $\frac{4}{11}$ de um trabalho: um segundo só faz os $\frac{3}{4}$ da tarefa do primeiro e um terceiro os $\frac{11}{12}$ da tarefa do segundo. *Que porção de obra fez o ultimo?* — **R. $\frac{1}{4}$.**

29. Compraram 75 metros $\frac{5}{7}$ de fazenda a 2$570 o metro; *qual é o preço total?* — **R. 194$585.**

30. Copiando-se os $\frac{5}{6}$ de uma pagina de manuscripto em 1 hora, pergunta-se: *em 8 horas e $\frac{3}{4}$ quantas paginas se copiarão?* — **R. 7 paginas $\frac{7}{24}$.**

31. *Qual era ha 18 annos $\frac{1}{2}$ a edade de uma pessoa* que tem agora 37 annos mais do que seu filho, cuja edade é 46 annos $\frac{1}{2}$. — **R. 65 annos.**

32. Um negociante trocou lã por algodão á razão de 13 kilogr. de lã por 27 de algodão. *Quantos kilogrammos de lã deve dar para ter 452 kilogr. de algodão?* — **R. 217 kilogrammos $\frac{17}{27}$.**

33. Numa escola ha 68 creanças; os $\frac{13}{17}$ desta escola formam a classe inferior, e $\frac{1}{4}$ das creanças desta classe ainda não sabe ler. *Quantas crianças ha que não sabem ler?* **R. 13.**

34. *Quanto valem juntos* os $\frac{2}{7}$ e os $\frac{3}{5}$ de um pedaço de velludo cujo preço é de 28$000? — **R. 24$800.**

35. Uma lampada queimou em uma noite $\frac{1}{7}$ de kilogrammo de azeite, na noite seguinte $\frac{1}{9}$ de kilogrammo. *Quanto se gastou nas duas noites, sendo 840 réis o preço de azeite?* — **R. 213 réis.**

36. *Achar um numero tal que* tirando-se-lhe $\frac{1}{3}$ e dividindo-se o resto por $\frac{2}{3}$, obtem-se 70 para quociente. — **R. 47**

37. Dois objectos pesam: um 4 hectogr. $\frac{1}{5}$ e o outro os $\frac{5}{6}$ do peso do primeiro. *Qual é o peso total destes dois objectos?* — **R. 7 hectogr. $\frac{7}{10}$.**

38. Comprei 3 metr. $\frac{3}{4}$ de panno a 15 francos o metro; 6 metros de seda a 40 francos os 12 metros, e 15 metros de forro a 1. fr. $\frac{1}{5}$ o metro. *Quanto devo pagar?* — **R. 92 francos.**

39. Um numero compõe-se de quatro partes: as tres primeiras são $2\frac{1}{3}$, $5\frac{1}{4}$ e $3\frac{3}{8}$; a quarta é igual aos $\frac{5}{8}$ da somma das outras tres. *Quanto vale a quarta e qual é a somma de todas?* R. $6\frac{43}{64}$; $17\frac{109}{320}$.

40. Um menino gastou os $\frac{3}{7}$, depois os $\frac{5}{11}$ de suas economias. *Quanto ainda lhe resta?* — **R. $\frac{24}{77}$.**

41. Um homem viajou pela Europa por espaço de 11 annos e só na Italia passou os $\frac{2}{3}$ deste tempo. *Que tempo gastou elle em percorrer outros paizes?* — **R. 3 annos $\frac{2}{3}$.**

42. *Qual é a fracção que,* augmentada de $\frac{1}{36}$ dá os $\frac{5}{18}$ de $\frac{4}{15}$? — **R. $\frac{1}{6}$.**

43. Uma pessoa deixa a seus dois filhos uma propriedade contendo 57 aros, 25; o mais velho deve ter os $\frac{3}{5}$; *quanto terá o segundo?* — **R. 22 aros, 90.**

44. Um individuo devia fazer os $\frac{3}{4}$ de certa obra; mandou fazer os $\frac{4}{5}$ do seu trabalho por um camarada. *Quanto ainda lhe resta por fazer?* — **R. $\frac{3}{20}$.**

45. Um tonel continha 210 litros de vinho; venderam-se $\frac{17}{20}$. *Quantos litros ainda ha no tonel?* — **R. 31 litros $\frac{1}{2}$.**

46. Um operario sósinho póde acabar uma obra em 7 horas; um segundo faz por hora menos do que o precedente os $\frac{2}{15}$ da obra. *Quanto receberia este ultimo por uma hora de trabalho, si a obra inteira custa 8$400?* — **R. 80 réis.**

47. Dois amigos compram cada um uma propriedade á razão de 180$000 o hectaro. A do primeiro tem 8 hectar. $\frac{2}{5}$ e a do segundo 4 hectar. $\frac{1}{2}$ de superficie. *Qual é a differença dos valores das duas propriedades?* — **R. 702$000.**

48. Uma pessoa comprou 45 metros de fazenda; $\frac{1}{3}$ a 800 rs. o metro e o resto a 400 rs.; pagou á vista os $\frac{3}{8}$ do preço total. *Quanto ficou devendo?* — **R. 15$000.**

49. Uma fonte fornece 147 litr. $\frac{3}{8}$ d'agua por hora; uma segunda dá 138 litr. $\frac{2}{3}$ e uma terceira 140 litr. $\frac{1}{2}$ no mesmo tempo. Si as tres fontes corressem juntas para uma bacia de 45 000 litros já cheia até aos $\frac{3}{8}$, *que quantidade d'agua ainda terão de fornecer, depois de haverem corrido uma hora?* — **R. 27 698 litros $\frac{11}{24}$.**

50. Paulo tem 45 bolas. Carlos tem os $\frac{3}{5}$ mais os $\frac{4}{3}$ do quadruplo da parte de Paulo, menos 227. *Quantas bolas tem Carlos?* — **R. 37.**

51. Vendeu-se $\frac{1}{6}$ de uma peça de seda, depois $\frac{2}{5}$ do resto, depois $\frac{6}{7}$ do novo resto. *Calcular o comprimento primitivo da peça, sabendo que o retalho restante tem 6 metros.* — **R. 84 metros.**

52. Comprei 43 metros de panno; a metade a 5$600 e a outra metade a 6$000 o metro; dei por conta os $\frac{4}{5}$ do preço total. *Quanto estou ainda devendo?* — **R. 49$880.**

53. Uma pessoa me devia 2:304$000; deu-me successivamente $\frac{5}{9}$ desta quantia e depois $\frac{3}{5}$ do resto. *Quanto me está devendo ainda?* — **R. 409$600.**

54. Um trabalhador fez os $\frac{5}{7}$ de uma obra e recebeu 33$500. *Qual é o preço da obra inteira?* — **R. 46$900.**

55. Pedro tem 84$000 e esta quantia representa os $\frac{3}{4}$ do que possue Paulo. *Quanto tem este?* — **R. 112$000.**

56. Um cabello foi enrolado 675 vezes em torno de um arame de cobre que cobriu-se do mesmo cabello em um comprimento de 17 linhas; *qual é a grossura do cabello?* — **R. $\frac{17}{675}$.**

57. Um homem morou na Italia por espaço de 7 annos $\frac{1}{3}$ e este tempo é os $\frac{2}{3}$ do tempo durante o qual elle esteve ausente da sua patria. *Quanto tempo durou a sua ausencia?* — **R. 11 annos.**

58. Um parafuso penetra $\frac{3}{5}$ de millimetro por cada volta. *Quantas voltas deve dar para penetrar 3 millim. $\frac{1}{4}$?* — **R. 5 volt. $\frac{5}{12}$.**

59. Em 5 horas e $\frac{3}{4}$ uma roda faz 11 500 voltas; *quantas voltas fará essa roda em 1 hora?* — **R. 2 000 voltas.**

60. *Qual é o numero que sendo multiplicado* por $2\frac{3}{5}$ dá 52 *para resultado?* — R. 20.

61. Uma sociedade de homens e mulheres gastou certa somma cujos $\frac{2}{3}$ foram pagos pelos homens que deram 16$000; *qual foi a despeza total?* — R. 25$200.

62. Duas fontes alimentam um tanque; uma póde enchel-o em $5\frac{1}{3}$ horas, e a outra em $2\frac{1}{4}$ horas. *Que tempo será necessario para que as duas fontes correndo juntamente encham o tanque?* — R. 1 hora $\frac{17}{42}$.

63. Si aos $\frac{1}{2}$ de um numero juntarmos os $\frac{3}{10}$ deste numero, obteremos 40; *qual é este numero?* — R. 50.

64. Depois de uma batalha um regimento ficou reduzido a 220 homens. Os $\frac{1}{7}$ foram mortos; $\frac{1}{8}$ ficou prisioneiro e $\frac{1}{4}$ foi para o hospital. *De quantos homens se compunha o regimento?* — R. 1 680 homens.

65. Organizaram-se quatro companhias de operarios de modo que a primeira faria uma obra em 45 dias, a segunda em 9 dias, a terceira em 27 dias e a quarta em 36 dias. Para concluir esta obra empregam-se no mesmo tempo os $\frac{2}{5}$ dos homens da primeira companhia, $\frac{3}{4}$ dos da segunda, $\frac{1}{2}$ dos da terceira e $\frac{1}{3}$ dos da quarta. *Quantos dias levarão elles para fazer a obra?* — R. $8\frac{1}{3}$ dias.

66. Uma pessoa comprou $\frac{5}{8}$ de metro de panno por 28$800; cedeu $\frac{2}{4}$ da compra por 24$000. *A como lhe sahiu o metro do que restou?* — 23$040.

67. Dos $\frac{11}{13}$ de um numero tirando-se $\frac{2}{3}$ deste numero, obtem-se $\frac{9}{14}$; *qual é este numero?* — R. $\frac{3}{4}$.

68. Pedro fez os $\frac{2}{7}$ de certa obra e Luiz os $\frac{4}{9}$. Este recebeu 48$000 mais do que Pedro. *Qual foi o preço da obra inteira?* — R. 302$400.

69. O producto de dois numeros é 49; tem-se os $\frac{5}{4}$ do primeiro quando se tomam os $\frac{4}{7}$ deste producto; *quaes são esses numeros?* — R. 56; $\frac{7}{8}$.

70. Depois de ter-se multiplicado um numero por 3, dividido o resultado por $\frac{9}{16}$, depois multiplicado por 6, tomando-se os $\frac{1}{5}$ do resultado, acha-se 64; *qual é este numero?* — R. 8.

71. Quando se peneira farinha, ella perde perto de $\frac{3}{23}$ de seu peso; *que porção de farinha se deve peneirar para obter-se 17 kilogr. de farinha peneirada?* — R. $19\frac{7}{22}$ kilogrammos.

72. A somma de duas fracções é $\frac{38}{63}$, e uma tem $\frac{1}{63}$ mais do que a outra. *Quaes são estas duas fracções?* — R. $\frac{2}{7}$ e $\frac{2}{9}$.

73. Augusto recebeu certa quantia; e Carlos, que recebeu $\frac{3}{11}$ da mesma quantia, julga possuir 12$800 menos do que seu amigo. *Quanto recebeu cada um?* — R. Aug. 17$600. Carl. 4$800.

74. O producto de dois numeros é 312; obtem-se os $\frac{2}{3}$ do primeiro quando se tomam os $\frac{3}{4}$ deste producto: *quaes são estes numeros?* — R. 351. e $\frac{8}{9}$.

75. Uma pessoa gastou $\frac{1}{3}$ dos seus rendimentos na alimentação; $\frac{1}{4}$ do resto no aluguel da casa; $\frac{1}{3}$ do resto no vestuario e $\frac{1}{3}$ do terceiro resto em esmolas. No fim do anno restaram-lhe 1:400$000; *quaes foram os rendimentos?* — R. 3:000$000.

76. Uma pessoa que devia 2:928$000 deu por conta $\frac{1}{4}$
desta quantia e quer saldal-a em cinco prestações iguaes. *De*
quanto deve ser cada prestação? — R. 219$600.

77. Dois operarios trabalharam numa obra semelhante.
O primeiro acabou a sua, mas o segundo só fez $\frac{4}{5}$ da que lhe
confiaram. Deram-lhes 40$800 para repartirem entre si; *quanto*
tocou a cada um? — R. 21$600; 19$200.

78. A somma de dois numeros é $9\frac{1}{2}$, e um delles é igual
a $\frac{1}{3}$ do outro. *Achar estes dois numeros?* — R. 7; $2\frac{1}{2}$.

79. Uma pessoa gastou $\frac{5}{9}$ do seu dinheiro e ainda ficou
com 360$000. *Quanto tinha esta pessoa?* — R. 810$000.

80. Deu-se $\frac{1}{4}$ de uma quantia a uma pessoa; $\frac{1}{4}$ a uma
segunda pessoa e o resto a uma terceira pessoa que recebeu
33$600. *Dizer qual a quantia repartida e a parte de cada*
uma das primeiras pessoas. — R. 96$000; 24$000; 33$400.

81. Duas fontes correm para um tanque: a primeira, correndo sósinha, o enche em 5 horas, a segunda em 4 horas e
a agua do tanque corre por uma torneira que o esvasia em
2 horas. O tanque estando cheio e as tres torneiras correndo
simultaneamente, *em que tempo o tanque se esvasiará?* —
R. 20 horas.

82. Tres amigos repartiram entre si certa quantidade de
cerejas: o primeiro tirou $\frac{2}{7}$, o segundo $\frac{3}{11}$ e o terceiro 34 cerejas que restaram. *Dizer qual o numero de cerejas repartidas*
e a parte de cada um dos dois primeiros? — R. 77 cerejas; 22, 21.

83. De uma peça de panno que tinha 25 metr. $\frac{1}{7}$, um
negociante vendeu: a primeira vez $1\frac{1}{7}$, a segunda vez $5\frac{3}{4}$ metr.,
a terceira vez $1\frac{4}{5}$ metr., a quarta vez 7 metros. *Quantos*
metros restaram e por quanto o negociante vendeu o metro,
sabendo-se que si elle vendesse o resto pelo mesmo preço,
obteria 112$400? — R. $9\frac{11}{28}$ metros; 12$000.

84. Um barco de pesca ganhou 220$000; deste quantia
tiram-se: 4 partes e $\frac{1}{2}$ para o armador; para o patrão 1 parte
e $\frac{1}{2}$; para cada um dos seis marinheiros 1 parte: para o novato $\frac{3}{4}$ de uma parte e para cada um dos dois grumetes
$\frac{1}{2}$ parte. *Quanto terá cada um?* — R. Arm. 72$000; patr. 24$000;
cada marinh. 16$000; nov. 12$000; cada grum. 8$000.

85. *Dividir 65 contos de réis entre duas pessoas,* uma
das quaes deve receber $\frac{8}{5}$ do que tocar á outra. — R. 40,
25 contos.

86. Pedro, Paulo e Sancho querem repartir entre si a
quantia de 68$400, attendendo á seguinte convenção: 3 vezes
a parte de Pedro valem 4 vezes a de Paulo, e 5 vezes a de
Paulo valem 6 vezes a de Sancho. *Achar a parte de cada um.*
— R. 28$800, 21$600, 18$000.

87. Um negociante comprou 70 metros de velludo a 8$000
o metro; pagou os $\frac{4}{7}$ do preço com panno do valor de 40$000
os 8 metros e o resto em dinheiro. *Quantos metros de panno*
deu e quanto em dinheiro? — R. 64 metros; 240$000.

88. Um negociante obrigou-se a fornecer a alguem e em dia determinado certa quantidade de mercadorias, pelas quaes receberia em pagamento $5^1/_2$ metr. de panno e 600$000. Na epocha marcada só poude fornecer $^7/_8$ das mercadorias e recebeu em pagamento o panno e 520$000. *Quanto valia o metro do panno?* — R. 7$272.

89. Um negociante vendeu 3 peças de fazenda, tendo todas o mesmo comprimento. Ganhou $^3/_{10}$ de 1$000 em cada metro da primeira, $^8/_{25}$ de 1$000 em cada metro da segunda; perdeu, porém, $^{11}/_{25}$ de 1$000 em cada metro da terceira, e ganhou assim 32$400 no todo. Calcular: *1) o lucro total na venda de um metro de cada peça; 2) o numero de metros vendidos. 3) o comprimento de cada peça.* — R. 180 réis; 180 metros, 60 metros.

90. João, Pedro e Henrique ganharam certo numero de premios, João recebeu $^3/_8$ deste numero; Pedro $^8/_9$ do que tocou a João, e a Henrique coube o resto, que era 21 premios. *Dizer o numero total dos premios que ganharam, quantos tocaram a João e a Pedro.* — R. 72; 27, 24.

91. Um homem, em seu testamento, deixou $^1/_7$ de sua fortuna ao filho mais velho, além da sua parte igual á de cada um dos seus tres irmãos; após sua morte, deu-se a do filho mais velho, que deixou dois filhos que o representam na successão; antes da partilha morreu outro filho deixando $^2/_3$ de sua parte ao filho mais velho do seu fallecido irmão, e $^1/_3$ a um parente; *calcular que parte da herança coube a cada um dos dois netos, a cada filho sobrevivente e ao parente legatario.* — R. Ao neto mais velho $^9/_{28}$, ao 2.º neto $^5/_{28}$, a cada um dos dois filhos sobreviventes $^6/_{28}$ ao parente $^1/_{14}$.

92. Uma senhora faz 5 pares de meias de lã por semana; a lã lhe custa 8f,50 o kilogr., e 3 pares de meias pesam 419gr$^1/_2$; vende-as com um lucro de 1f,75 em cada par, mas dá $^1/_{20}$ da receita á pessoa que as leva ao negociante. *Quanto ganha ella por dia?* — R. 1f,33.

93. Comprou-se trigo a 21f.50 o quintal; no fim de 4 mezes este trigo perdeu 0,049 do seu peso. *Por quanto se deve vender o quintal para não se ter prejuizo?* — R. 22f,60.

94. Uma pessoa deixa a sua fortuna a tres herdeiros; ao primeiro coube $^1/_3$ da fortuna; ao segundo os $^3/_4$ do resto. O ultimo recebeu 8 400 francos. *A quanto monta a fortuna? Quaes são as tres partes?* — R. 50400 fr.; 16800; 25200; 8400fr.

95. Deixando-se cahir uma bola da altura de 1m,05, saltou ella até aos $^4/_5$ desta altura; torna a cahir e desta vez salta até aos $^2/_3$ da altura donde cahiu. *A que altura elevou-se a segunda vez?* — R. 0m,56.

96. A bala de uma espingarda pesa 25 grammos. *Quantas balas se fabricarão com 4 quintaes de chumbo, si a quebra na fabricação é de $^1/_{25}$ do peso total.* — R. 15 360 balas.

97. Uma propriedade com 2Ha,16 importou em 1:728$000 rs. Vendendo os $^2/_3$ do terreno, o comprador recuperou o preço da compra. *A como vendeu o aro?* — R. 12$000 rs.

98. Um negociante comprou vinho a 0f,60 o litro e vendeu a 0f,60 a garrafa. Cada garrafa sendo de $^3/_4$ de litro, *quanto ganhou por hectolitro?* — R. 20 francos.

99. Um agricultor colheu 34 hectolitros de trigo, que perdeu na secca os $^2/_{17}$ do volume. *Qual é o valor do trigo, á razão de 24 fr. o quintal, pesando 78 kilogr. cada hectolitro?* — R. 561f,60.

100. O litro de azeite pesa 915 grammos. *Quantas moedas de 0f,50 são precisas para pesarem tanto como o azeite contido em uma garrafa de $^2/_3$ de litro?* — R. 244 moedas.

Capitulo VII

Metrologia

I — Medidas lineares ou de comprimento

Itinerarias

Legua*) *(unidade principal)*	3 milhas
Milha**)	841 ^{br},75
Legua brazileira	50 quadras
Milha brasileira	1000 braças

De comprimentos ordinarios

Quadra	60 braças
Braça	2 varas
Vara *(unidade principal)*	5 palmos
Palmo	8 pollegadas
Pollegada	12 linhas
Linha	12 pontos

Alem destas medidas tambem se empregam as seguintes:

Yarda	4 palmos 1 pol. e $^1/_4$ de pollegada
Covado	3 palmos e $^3/_4$ de pollegada
Toesa	6 pés
Pé	12 pollegadas

*) $^1/_{18}$ de grau do Meridiano Terrestre.

**) A sexagesima parte do comprimento de um grau do Meridiano Terrestre.

Tabella das relações entre as medidas de comprimento do systema metrico francez e as nossas.

1 vara	
1 braça	$1^m,1$
1 palmo	$2^m,2$
1 pollegada	$0^m,22$
1 linha	$0^m,0275$
1 covado	$0^m,00229$
1 yarda	$0^m,68$
1 toesa	$0^m,914$
1 pé	$1^m,98$
1 legua maritima ou de 20 ao grau	$0^m,33$
1 milha (terça parte da legua marit.)	$5555^m,55$
1 legua brazileira (ou de sesmaria)	$1851^m,85$
1 milha (terça parte da legua brasil.)	6600^m
1 quadra de sesmaria	2200^m
	132^m

Exercicios

1. *Qual é o numero de metros correspondente a 12 varas?*
Pois que 1 vara $= 1^m,1$; é claro que 12 varas $= 12 \times 1^m,1 = 13^m,2$.

2. *Converter 7 varas 4 palmos e 6 pollegadas em metros.*
1 vara $= 1^m,1$; 7 varas $= 7 \times 1^m,1 = 7^m,7$.
1 palmo $= 0^m,22$; 4 palmos $= 4 \times 0^m,22 = 0^m,88$.
1 pollegada $= 0^m,0275$; 6 pollegadas $= 6 \times 0^m,0275 = 0^m,1650$.
Logo, 7 varas 4 palmos 6 pollegadas $= 8^m,745$.

3. *A quantas varas correspondem $12^m,1$?*
$1^m,1 = 1$ vara; logo, $12^m,1$ valerão tantas varas quantas as vezes que $12^m,1$ contiverem $1^m,1$; isto é, $\frac{12,1}{1,1} = \frac{121}{11} = 11$ varas.

4. *Converter $10^m,56$ em numero complexo, cuja unidade principal seja a braça.*
Pois que $2^m,2 = 1$ braça, $10^m,56 = \frac{10,56}{2,2} = \frac{1056}{220} = 4$ braças e $\frac{4}{5}$ da braça.

$\frac{4}{5}$ da braça $= \frac{2 \text{ varas} \times 4}{5} = \frac{8}{5}$ da vara $= 1$ *vara* $\frac{3}{5}$

$\frac{3}{5}$ da vara $= \frac{5 \text{ palmos} \times 3}{5} = \frac{15}{5}$ palmos $=$ *3 palmos*

Logo, $10^m,56 = 4$ braças 1 vara 3 palmos.

5. *Converter $8^{m},745$ em numero complexo, cuja unidade principal seja a vara.*

$1^{m},1 = 1$ vara; logo, $8^{m},745 = \frac{8,745}{1,1} = \frac{87,45}{11} =$ *7 varas*, 95.

0,95 da vara = 5 palmos $\times$ 0,95 = *4 palmos*, 75.
0,75 do palmo = 8 pollegadas $\times$ 0,75 = *6 pollegadas.*
Logo, $8^{m},745$ = **7 varas 4 palmos 6 pollegadas.**

6. *6 varas quantos metros são?* — R. $6^{m},6$.
7. *33 metros quantas varas são?* — R. 30 varas.
8. *9 pollegadas a quantos centimetros correspondem?* — R. $24^{cm},75$.
9. *Dizer o valor de 11 palmos em metros e em decimetros?* — R. $2^{m},42$ ou $24,^{dm}2$.
10. *110 decimetros quantos palmos são?* — R. 50 palmos.
11. *Dizer o valor das seguintes fracções $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$ da vara em millimetros?* — R. $0^{m},550$; $0^{m},366$; $0^{m},825$.
12. *Dizer o valor de 9 braças em metros.* — R. $19^{m},80$.
13. *Dizer o valor de 5 metros em braças.* — R. $2^{br},272$.
14. Um metro de certa fazenda custando 1$500 rs., *qual será o preço de uma vara?* — R. 1$650 rs.
15. *Quantos metros tem uma peça de morim de 20 yardas?* — R. $18^{m},28$.
16. *15 covados quantos metros são?* — R. $10^{m},20$.
17. 8 metros de chita custando 6$400 rs., *qual será o preço de um covado?* — R. 544 rs.
18. 10 yardas de algodãozinho custam 6$000., *quanto custará um metro?* — R. 656 rs.
19. *$^{3}/_{4}$ de covado a quantos centimetros correspondem?* — R. $0^{m},51$.
20. *25 metros a quantos covados correspondem?* — R. $36^{cov.},7$.
21. *$11^{mm},45$ a quantas linhas correspondem?* — R. 5 linhas.
22. Chama-se legua de 20 ao grau, a vigesima parte de um grau. *Quantos kilometros tem a legua de 20 ao grau?* — R. $5^{Km},55555$.
23. *Dizer o valor de $16^{Km},66665$ em leguas maritimas.* — R. 3 leguas.
24. *Dizer o valor de $16^{Km},66665$ em milhas maritimas.* — R. 9 milhas.
25. *Reduzir 594 kilometros a leguas brazileiras.* — R. 90 leguas.
26. *Reduzir 45 leguas brazileiras a kilometros.* — R. 297 kilometros.
27. *Reduzir 80 milhas brazileiras a kilometros.* — R. 176 kilometros.
28. *A quantos metros correspondem 8 quadras de sesmaria?* — R. 1056 metros.
29. Um viajante percorre 1 hectometro de caminho em um minuto; *em quantas horas percorrerá $2^{Mm} + 4^{Km} + 8^{Hm}$?* — R. 4 horas e 8 minutos.
30. O som percorre 337^{m} por segundo. *A que distancia estará uma nuvem tempestuosa, tendo-se ouvido o trovão $18^{s},25$ depois de se ter visto o relampago?* — R. $6\,150^{m},25$.

§ II — Medidas de superficie

As medidas de superficie são quadrados que têm para lado qualquer das medidas lineares. As mais usadas são as seguintes:

Legua quadrada. — Braça quadrada. — Vara quadrada. — Palmo quadrado *(unidade principal)*. Pollegada quadrada.

Nas medidas *agrarias*, a unidade mais usada é a geira ou 400 braças quadradas, ou o quadrado construido sobre 20 braças.

Tabella das relações entre as medidas de superficie do systema metrico francez e as nossas

1 braça quadrada	$4^{m^2},84$ dm²
1 vara quadrada	$1^{m^2},21$ dm²
1 palmo quadrado	$0^{m^2},0484$ (484 cm²)
1 pollegada quadrada	$0^{m^2},000756$ (756 mm²)
1 geira tem 19 aros e 36 m² ou 1936 m²	

Exercicios

1. *12 braças quadradas quantos metros quadrados são?*
1 braça quadrada = $4^{m^2},84$; 12 braças quadradas = 12 $\times$ $\times$ $4^{m^2},84$ = $58^{m^2},08$.

2. *A quantos metros quadrados correspondem 11 varas quadradas?*
1 vara quadrada = $1^{m^2},21$; logo, 11 varas quadradas = 11 $\times$ $1^{m^2},21$ = $13^{m^2},31$.

3. *A quantas braças quadradas correspondem $58^{m^2},08$?*
$4^{m^2},84$ = 1 braça quadrada; logo, $58^{m^2},08 = \frac{58,08}{4,84}$ **12 braças quadradas.**

4. *A quantas varas quadradas correspondem $13^{m^2},31$?*
$1^{m^2},21$ = 1 vara quadrada; logo, $13^{m^2},31 = \frac{13,31}{1,21} =$ **11 varas quadradas.**

5. *Converter $96^{m^2},80$ em braças quadradas.*
$4^{m^2},84$ = 1 braça quadrada; logo, $96^{m^2},80 = \frac{96,80}{4,84} =$ **20 braças quadradas.**

6. *A quantos aros correspondem 30 braças quadradas?*
1 braça quadrada = $4^{m^2},84$; logo, 30 br. quadradas = 30 $\times$ $\times$ $4^{m^2},84$ = $145^{m^2},20$.

Se 100^{m^2} = 1 aro; $145^{m^2},20 = \frac{145.20}{100} = 1^{a},452$.

§ III Medidas de volume

As medidas de volume são cubos*) cujas faces são quadrados iguaes, e cujos lados ou *arestas* são a unidade linear.

As mais usadas são:

Palmo cubico *(unidade principal).* — **Vara cubica.**

Tabella das relações entre as unidades de volume do systema metrico francez e as nossas

1 braça cubica	$10^{m^3}, 648\ dm^3$
1 vara cubica	$1^{m^3},331\ dm^3$
1 pé cubico (inglez)	$0^{m^3},028094464$ (28094464 mm^3)
1 palmo cubico	$0^{m^3},010648$ (10648 cm^3)
1 pollegada cubica	$0^{m^3},000020797$ (20797 mm^3)

Exercicios

1. *A quantos metros cubicos correspondem 16 varas cubicas?*

1 vara cubica $= 1^{m^3},331$; portanto, 16 varas cubicas $= 16 \times \times 1^{m^3},331 =$ **$21^{m},296$.**

2. *A quantos metros cubicos correspondem 1000 varas cubicas?*

1 vara cubica $= 1^{m^3},331$; por conseguinte, 1000 varas cubicas $= 1000 \times 1^{m^3},331 =$ **1331 m^3.**

3. *A quantas varas cubicas correspondem 1331 metros cubicos?*

$1^{m^3},331 =$ **1 vara cubica**; logo, $1331^{m^3} = \dfrac{1331}{1,331} =$ **1000 varas cubicas.**

4. *A quantas varas cubicas correspondem $21^{m^3},296$?*

$1^{m^3},331 =$ 1 vara cubica: $21^{m^3},296 = \dfrac{21,296}{1,331} =$ **16 varas cubicas.**

§ IV — Medidas de capacidade

Para liquidos:

Tonel	2 pipas
Pipa	15 almudes
Almude	12 canadas
Canada *(unidade principal)*	4 quartilhos

*) *Cubo* é uma figura geometrica da fórma de um dado de jogar.

Para seccos:

Moio	60 alqueires
Alqueire	4 quartas

Tabella das relações entre as unidades de capacidade do systema metrico francez e as nossas

Para liquidos	
1 tonel	960 litros ($958^l,32$)
1 pipa	480 litros ($479^l,16$)
1 almude	32 litros ($31^l,944$)
1 canada ou medida	**$2^l,662$**
1 quartilho ou garrafa	$0^l,665$
Para seccos	
1 moio	$2^{Kl},1762$ (2^{Kl} 176^l e 2 dl)
1 alqueire	$36^l,27$ (36 litros e 27 cl)
1 quarta	$9^l,07$ (9 litros e 7 cl)

Exercicios

1. *Converter 3 canadas* (ou medidas) *em* **litros.**

1 canada $= 2^l,662$; logo, 3 canadas $= 3 \times 2^l,662 = 7^l,986.$

2. *Converter 2 almudes 3 canadas 1 quartilho em* litros.

1 almude $= 31^l,944$; logo, 2 almudes $= 2 \times 31^l,944 = 63^l,888.$

1 can. $= 2^l,662$; 3 can. $= 3 \times 2^l,662 = 7^l,986.$

1 quartilho $= 0^l,6655.$

Logo, 2 almudes 3 canadas 1 quartilho $= 63^l,888 + 7^l,986 + + 0^l,6655 =$ **$72^l,5395$.**

3. *A quantas* **canadas** *correspondem $7^l,986$?*

$2^l,662 = 1$ canada; logo, $7^l,986 = \dfrac{7,986}{2,662} =$ **3 canadas.**

4. *Converter $72^l,5395$ em numero complexo, cuja unidade principal seja o* **almude.**

$31^l,914 =$ **1 almude**; logo, $72^l,5395 = \dfrac{72,5395}{31,944} = 2\ almudes\ \dfrac{86515}{319440}.$

$\dfrac{86515}{319440}$ **do almude** $= \dfrac{12\ canadas \times 86515}{319440} = 3\ canadas\ \dfrac{79860}{319440}.$

$\dfrac{79860}{319440}$ da canada $= \dfrac{4\ quartilhos \times 79860}{319440} = \dfrac{319440}{319440} = 1\ quartilho$

Logo, $72^l,5395 =$ **2 almudes 3 canadas 1 quartilho.**

§ V — Medidas de peso

Tonelada .... $13\frac{1}{2}$ quintaes ou 54 arrobas.
Quintal .... 4 arrobas.
Arroba *(unidade principal)* 32 libras.
Libra .... 2 marcos.
Marco*) .... 8 onças.
Onça .... 8 oitavas.
Oitava .... 72 grãos.

Tabella das relações entre as medidas de peso do systema metrico francez e as nossas

1 tonelada	$793^{Kg},238$
1 quintal	$58^{Kg},753^{g}$ e 4 dg
1 arroba)**	**$14^{Kg},689$ e 6 dg.**
1 libra	$459^{g},05$ (459 g e 5 cg)
1 marco	$229^{g},525^{mg}$
1 onça	$28^{g},690^{mg}$ e 6 decimos do milligrammo
1 oitava	$3^{g},586^{mg}$ e 3 decimos do milligrammo
1 grão	$0^{g},049^{mg}$ e 8 decimos do milligrammo

Exercicios

1. *A quantos* kilogrammos *correspondem 7 arrobas?*
1 arroba $= 14^{Kg},6896$; logo, 7 arrobas $= 7 \times 14^{Kg},6896 = 102^{Kg},8272$.

2. *A quantos* grammos *correspondem 16 libras?*
1 libra $= 459^{g},05$; logo, 16 libras $= 16 \times 459^{g},05 = 7344^{g},8$ ou $7^{Kg},3448$.

3. *Converter 3 libras 1 marco 6 onças em* grammos.
1 libra $= 459^{g},05$; 3 libras $= 3 \times 559^{g},05 = 1377^{g},15$.
1 marco $= 229^{g},525$.
1 onça $= 28^{g},690625$; 6 onças $= 6 \times 28^{g},690625 = 172^{g},14375$.
Logo, 3 libras 1 marco 6 onças $= 1377^{g},15 + 229^{g},525 + 172^{g},14375 = 1778^{g},81875$.

4. *A quantas* arrobas *correspondem $102^{Kg},8272$?*
$14^{Kg},6896 = 1$ arroba; logo, $102^{Kg},8272 = \frac{102,8272}{14,6896} = 7$ arrobas.

5. *A quantas* libras *correspondem $7^{Kg}3448$?*
$459^{g},05 = 1$ libra; logo, $7^{Kg},3448 = \frac{7^{Kg},3448}{459^{g},05} = \frac{7344^{g},8}{459^{g},05} = 16$ libras.

---

*) O marco é a *unidade legal* de *peso*.
**) Arroba metrica, em uso actual no commercio, vale 15 kg.

6. *Converter $1778^{g}81875$ em numero complexo, cuja unidade seja a* libra.
$459^{g},05 = 1$ libra; logo, $1778^{g},81875 = \frac{1778,81875}{459,05} = 3$ *libras* $\frac{40\,166\,875}{45\,905\,000}$
$\frac{40\,166\,875}{45\,905\,000}$ da libra $= \frac{2 \text{ marc.} \times 40\,166\,875}{45\,905\,000} = \frac{80\,333\,750}{45\,905\,000} = 1$ *marc.* $\frac{34\,428\,750}{45\,905\,000}$
$\frac{34\,428\,750}{45\,905\,000}$ do marco $= \frac{8 \text{ onç.} \times 34\,428\,750}{45\,905\,000} = \frac{275\,430\,000}{45\,905\,000} = 6$ *onças*.
Logo, $1778^{g},81875 =$ 3 libras 1 marco 6 onças.

7. Uma arroba de assucar custando 15$600, *qual será* o *preço de* ½ kilogrammo? — R. 550 rs.

Capitulo VIII

Numeros complexos

§ I — Preliminares

300. Numeros complexos *são numeros concretos que encerram differentes especies de unidades, dependentes umas das outras segundo uma lei determinada.* V. g. 1 seculo 45 annos 5 mezes.

301. Numero incomplexo *é o que contem uma só especie de unidade.* V. g. 52 toesas.

302. Para reduzir-se um numero complexo a uma subdivisão qualquer da sua unidade, toma-se a primeira parte do numero complexo e multiplica-se pela relação que existe entre essa primeira parte e a segunda; ao producto ajunta-se a segunda parte. Este resultado multiplica-se pela relação que existe entre a segunda parte e a terceira, e assim se procede até chegar-se á ultima parte do numero complexo.

Exemplo. — *42 braças 6 palmos 7 pollegadas*

$$\begin{array}{rl} 42 & \text{braças} \\ \times\ 10 & \text{(10 \textit{relação entre a braça e o palmo.})} \\ \hline 420 & \text{palmos} \\ +\ \ 6 & \text{"} \\ \hline 426 & \text{"} \\ \times\ \ 8 & \text{(8 \textit{relação entre o palmo e a pollegada})} \\ \hline 3\,408 & \text{pollegadas} \\ +\ \ 7 & \text{"} \\ \hline 3\,415 & \text{"} \end{array}$$

Logo, *42 braças 6 palm. 7 polleg.* = **3 415 pollegadas.**

Exercicios

Reduzir á ultima subdivisão os seguintes numeros complexos:

1. 7 br., 9 palm., 4 pol., 6 linh.
2. 5 alm., 11 can., 3 quart.
3. 9 moios, 43 alqueir., 3 quart.
4. 7 ar., 16 lb., 8 onç., 4 oit.
5. 17 £ 10 s., 6 dinh., 14 cruz., 15 vint., 17 rs.

Conversão dos numeros complexos em fracções ordinarias ou decimaes

303. Para converter-se um numero complexo em numero fraccionario reduz-se o numero proposto á infima especie que nelle existe; reduz-se tambem a unidade principal á mesma unidade a que se reduziu o complexo; o primeiro resultado será o numerador e o segundo o denominador.

Exemplo. — *42 braças 6 palmos 7 pollegadas.*

$$\begin{array}{rl|rl} 42 & \text{braças} & & \\ \times\ 10 & & & \\ \hline 420 & \text{palmos} & 1 & \text{braça} \\ +\ \ 6 & \text{"} & \times\ 10 & \\ \hline 426 & \text{"} & 10 & \text{palmos} \\ \times\ \ 8 & & \times\ \ 8 & \\ \hline 3\,408 & \text{pollegadas} & \textit{80} & \text{pollegadas} \\ +\ \ 7 & \text{"} & & \\ \hline \textit{3415} & & & \end{array}$$

Logo, *42 braças 6 palmos 7 pollegadas* $= \frac{3415}{80} = \frac{683}{16}$ **da braça.**

304. *Um numero complexo póde converter-se em fracção decimal,* reduzindo-o primeiramente á fracção ordinaria (n. 303) e praticando-se a regra do n. 269 ou 290.

Exemplo. — *Reduzir 2 arrobas 7 libras e 1 m. á fracção decimal.*

O numero complexo *2 arrobas 7 libras e 1 m.*, reduzido á fracção ordinaria, é igual a $^{143}/_{64}$ da arroba. Esta fracção póde reduzir-se agora á fracção decimal.

Reduzamol-a, por exemplo, a *millionesimos*, conforme a regra do n. 269.

$$\frac{143}{64}=\frac{143\times 1\,000\,000}{64\times 1\,000\,000}=\frac{143\,000\,000}{64\,000\,000}=\frac{\frac{143\,000\,000}{64}}{\frac{64\,000\,000}{64}}=$$

$$=\frac{2\,234\,375}{1\,000\,000}=2^{ar},234\,375$$

Logo, *2 arrobas 7 libras e 1 m.* = 2ª,234 375.

Exercicios

Converter os seguintes numeros complexos em numeros fraccionarios:

1. 7 ar. 12 lb. 8 onç. 5 oit.
2. 17 alm. 11 can. 3 quart.
3. 12 hor. 50 min. 42 seg.
4. 29° 25′ 12″
5. 11. var. 4 palm. 7 pol.
6. 7 £ 19 s. 8 d.

Converter os seguintes numeros complexos em fracções decimaes:

7. 7 br. 9 palm. 4 pol.
8. 9 ar. 8 lb. 4 onç. 2 oit.
9. 2 cruz. 15 vint. 12 rs.
10. 5 quint. met. 90 Kg. 9 Hg.

Conversão das fracções ordinarias ou decimaes em numeros complexos

305. Para converter-se um numero mixto *(debaixo da fórma fraccionaria)* em numero complexo, divide-se o numerador pelo denominador; o quociente exprime as unidades principaes; o resto se converte em unidades da 1.ª subdivisão. Divide-se o producto pelo mesmo divisor, e o quociente mostra unidades da mesma 1.ª subdivisão. Havendo novo resto, reduz-se ainda á unidade da seguinte subdivisão, e continua-se do mesmo modo até chegar-se á classe infima das unidades ou subdivisões.

Exemplo. $\frac{683}{16}$ *da braça.*

	683 braças	16
	43	42 *braças*
Resto. . .	11 braças	
	× 10	16
	110 palmos	6 *palmos*
Resto. . .	14 "	
	× 8	16
	112 pollegadas	7 *pollegadas*
	0	

Logo, $\frac{683}{16}$ *da braça* = 42 braças 6 palmos 7 pollegadas.

306. *Quando o numero dado é fraccionario propriamente dito,* multiplica-se o numerador pela relação que existe entre a unidade da fracção e a que lhe é immediatamente inferior, e observa-se depois a regra do numero precedente.

Exemplo. $\frac{13}{16}$ *do quintal.*

	13 quintaes	
	× 4	
	52 arrobas	16
Resto........	4 "	3 *arrobas*
	× 32	
	128 libras	16
	0	8 *libras*

Logo, $\frac{13}{16}$ *do quintal* = 3 arrobas e 8 libras.

307. Para reduzir-se uma fracção decimal a numero complexo, separa-se primeiramente a parte inteira, a qual indica as unidades principaes existentes na fracção decimal; a parte decimal multiplica-se pelo numero que exprime a relação entre a unidade da fracção e a unidade immediatamente inferior. Separa-se a parte inteira deste producto, a qual indica unidades de uma ordem inferior á da fracção. E assim se procede até chegar-se ás unidades da infima especie do numero complexo.

Exemplo.—*Reduzir 2ª,234 375 a numero complexo.*

2 arrobas ...	2ª,234375
	0,234375
	32
	468750
	703125
7 libras	7,500000
	0,5
	2
1 marco	1,0

Logo, *2ª234 375* = 2 arrobas 7 libras 1 marco.

Observações

Observação primeira. — *Quando se tem de reduzir um numero incomplexo a uma unidade superior,* reduz-se apenas a unidade superior á unidade do numero incomplexo. O incomplexo dividido pela unidade superior reduzida á unidade do numero incomplexo, dará o resultado pedido.

Exemplo. — *Reduzir 3415 pollegadas a* **braças.**

Como 80 pollegadas formam 1 braça, tem-se que 3415 pollegadas formam $^{3415}/_{80}$ braças $= 42^{55}/_{80}$ braças $= 42^{11}/_{16}$ **braças.**

Observação segunda. — *Quando se tem de reduzir unidades de especie inferior a numero complexo,* segue-se a regra precedente, attendendo depois ao disposto nos n.º 305 e 306.

Exemplo. — *Reduzir 3415 pollegadas a um numero complexo* (cuja unidade principal seja a *braça).*

Este numero incomplexo 3 415 pollegadas reduz-se á unidade superior „*braça*", pela regra precedente, e tem-se que 3 415 pollegadas = *42 braças* e $^{11}/_{16}$ da braça.

Esta fracção $^{11}/_{16}$ da braça, reduzida a numero complexo pelo n. 306, dá: 6 *palmos* e 7 *pollegadas.*

Logo, *3415 pollegadas* = **42 braças 6 palmos e 7 pollegadas.**

Exercicios

Converter as seguintes fracções ordinarias em numeros complexos:

1. $\frac{473}{64}$ da ar.	3. $\frac{2569}{200}$ da hor.	5. $\frac{39}{40}$ da var.
2. $\frac{863}{48}$ do alm.	4. $\frac{21}{50}$ do grau.	6. $\frac{59}{60}$ da £.

Converter as seguintes fracções decimaes em numeros complexos:

7. $7^{lb.},95$ **8.** $9^{ar.},2578125$ **9.** $2^{cruz.},78$ **10.** $0^{qt.\ mtr.},909.$

§ II — Addição de complexos

308. Regra. — Escrevem-se os numeros uns debaixo dos outros, de sorte que as unidades da mesma subdivisão se achem dispostas em columna vertical; traça-se uma linha horizontal por baixo de todos, e começa-se a sommar da direita para a esquerda.

Si a somma não chegar para formar uma unidade da classe immediatamente superior, escreve-

se tal qual se achou; *si, porém, contiver algumas,* extrahem-se; o que se consegue, dividindo-se essa somma pelo numero de unidades inferiores que são necessarias para formar uma unidade da classe immediatamente superior; o resto escreve-se embaixo da columna respectiva, e as unidades do quociente se levam a juntar á columna seguinte.

Assim continua-se até ás unidades principaes cuja somma se escreve por extenso.

24 libras	1 marco	7 onças
12	0	4
28	1	2
4	1	5
70 libras	1 marco	2 onças

Somma das onças 18 = 18 : 8 = 2^{m} + 2 onças.
Somma dos marcos 3 + 2 (*reserva*) = 5 : 2 = $2^{lb.}$ e $1^{m.}$

Exercicios sobre a addição dos numeros complexos

1.

$7^{br.}$	9 palm.	4 pol.	6 linh.
3	5	7	11
5	8	6	10
4	7	5	9

2.

5 alm.	11 can.	3 quart.
6	10	2
7	9	1
2	8	3

3.

9 moios	43 alqueir.	3 quart.
3	50	1
2	57	2
5	38	2

4.

7 ar.	16 lb.	8 onç.	4 oit.
3	10	4	5
4	21	14	3
2	30	15	7

5.

17 £	10 s.	6 dinh.
9	19	11
8	12	10
7	9	7

6.

14 cruz.	15 vint.	17 rs.
9	16	10
5	9	15
10	10	10

§ III — Subtracção de complexos

309. Regra. — Escreve-se o subtrahendo embaixo do minuendo, de modo que as unidades da mesma especie se achem em columnas verticaes; subtrahe-se da direita para a esquerda cada classe do numero inferior de cada classe do numero superior.

Si a classe do numero inferior for maior que a superior correspondente, toma-se uma unidade da especie immediatamente superior, a qual se decompõe em unidades da classe de que se trata, juntam-se ás existentes nessa classe, e pratica-se a operação, considerando-se a classe superior da esquerda como diminuida de uma unidade. *Quando a classe da esquerda for zero, recorre-se áquella que não o seja.*

18	2	8	12	109
19 lb.	0 m.	4 onç.	5 oit.	37 gr.
4	1	3	6	49
14 lb.	1 m.	0 onç.	6 oit.	60 gr.

Exercicios sobre a subtracção dos numeros complexos

1.	9 toes.	5 pés.	10 pol.	11 linh.	
	6	5	11	8	
2.	8 toes.	8 palm.	0 pol.	9 linh.	
	5	8	7	6	
3.	7 an.	10 mez.*)	0 ds.	17 hor.	
	2	11	20	19	
4.	7 ar.	0 lb.	0 onç.	4 oit.	
	3	16	8	6	
5.	29°	25	17		
	12	52	45		
6.	17 hor.	50 min.	49 seg.		
	13	50	59		

§ IV — Multiplicação de complexos

310. Ha tres casos na multiplicação dos numeros complexos:

1.° o da multiplicação de um numero complexo por um incomplexo;

2.° o da multiplicação de um numero incomplexo por outro complexo;

3.° o da multiplicação de dois numeros complexos entre si.

311. Primeiro caso. — *Multiplicação de um numero complexo por um incomplexo.*

Exemplo. — *Quanto custarão 7 toesas de obra á razão de 4 £**) 5 soldos e 8 dinheiros a toesa?*

Regra. — Escreve-se o multiplicando e por baixo delle o multiplicador. Começa-se a multiplicar pelas unidades da infima especie, e sempre que cada producto contiver unidades da especie immediata superior, extrahem-se, levando-as a juntar-se ao producto

*) *1 mez commercial* tem 30 dias.

**) *A libraesterlina* tem 20 soldos e o *soldo* 12 dinheiros.

seguinte. Assim se procede até chegar-se ás unidades principaes, cujo producto se escreverá por extenso.*)

4 £	5 s.	8 d.
		7
29 £	19 s.	8 d.

Producto dos dinheiros 56 = 56 : 12 = 4s. + 8d.
Producto dos soldos 35 + 4 *(reserva)* = 39 : 20 = 1 £ + 19s.

As 7 toesas custam, portanto, **29 libras 19 soldos e 8 dinheiros.**

312. Segundo caso. — *Multiplicação de um numero incomplexo por um complexo.*

Exemplo. — *Uma toesa de obra custa 456 £; quanto custarão 258 toesas 4 pés 9 pollegadas e 11 linhas?*

A este 2.° caso é applicavel a regra do caso precedente,

456 £
258 t. — 4 p. — 9 pol. — 11 l.as

A regra manda reduzir o multiplicando e o multiplicador a numeros fraccionarios, para depois effectuar-se a multiplicação.

Como no exemplo proposto o multiplicando é incomplexo, deixa-se ficar tal qual, e reduz-se sómente o multiplicador *258 toesas 4 pés 9 pollegadas e 11 linhas* a numero fraccionario; o que sendo effectuado, tem-se: $\frac{223607\ t}{864}$.

Effectuando-se a multiplicação, vem:

$$456\ £ \times \frac{223607}{864} = \frac{101964792\ £}{864}$$

Este producto, sendo reduzido a numero complexo, dá:

118014 £ 16 s. 1 d. e 1/3 do dinheiro.

*) *O producto deve ser da especie ao multiplicando;* por isso, é preciso distinguil-o do multiplicador, o que se conhecerá pela exposição do problema.

Typo do calculo

$$456£ \times 258^{t.}\,4^{p.}\,9^{pol.}\,11^{l.} = 456£ \times \frac{223607^{l.}}{864} = \frac{101964792£}{864} =$$

101964792 £	864
1556	118014 £
6924	
1279	
4152	
696	
× 20	
13920 soldos	864
5280	16 *soldos*
96	
× 12	
192	
96	864
1152 dinheiros	1 *dinh.* $\frac{288}{864}$ ou 1 *dinh.* $\frac{1\ d.}{3}$
288 "	

Logo, *258 toesas 4 pés 9 pollegadas e 11 linhas custam* 118014 £ 16ˢ 1ᵈ e 1/3 do dinheiro.

313. Terceiro caso. — *Multiplicação de dois numeros complexos entre si.*

Exemplo. — *Uma vara de certa barra de ferro pesa 23 libras 13 onças e 5 oitavas; pergunta-se quanto pesarão 17 varas 4 palmos e 6 pollegadas de uma barra semelhante.*

Regra. — Reduzem-se o multiplcando e o multiplicador a numeros fraccionarios; faz-se a multiplicação destes, e reduz-se o producto achado a numero complexo.

23 libras	13 onças	5 oitavas
17 varas	4 palmos	6 pollegadas

O multiplicando *23 libr. 13 onç. 5 oit.* reduzido á fracção ordinaria (segundo a regra do n. 303) é igual a $^{3053}/_{128}$ da libra; o multiplicador *17 vs. 4 palmos 6 pol.*, tambem reduzido á fracção ordinaria, conforme a mesma regra, é igual a $^{718}/_{40}$ da vara. Effectuando-se a multiplicação destes dois numeros

fraccionarios, tem-se o producto $^{2192054}/_{5120}$ da libra, que, reduzido a numero complexo (segundo a regra do n. 305), equivale a 428 lib. 2 onç. 1 oit. e $^{7}/_{20}$ da oitava

Typo do calculo

$$23\ \text{lib.}\ 13\ \text{onç.}\ 5\ \text{oit.} \times 17\ \text{vs.}\ 4\ \text{p.}\ 6\ \text{pol.} = \frac{3053\ \text{lib.}}{128} \times \frac{718}{40} = \frac{2\,192\,054\ \text{lib.}}{5120} =$$

	2192054 libras	5120
	14405	428 *libras*
	41654	
Resto......	694 libras	
	× 16	
	4154	
	694	
	11104 onças	5120
Resto........	864 "	2 *onças*
	× 8	
	6912 oitavas	5120
Resto........	1792 "	1 *oit.* $\frac{1792}{5120}$ ou $\frac{7}{20}$ *da oitava.*

As 17 varas 4 palmos 6 pollegadas pesam, portanto, 428 lib. 2 onç. 1 oit. e $\frac{7}{20}$ da oitava.

Exercicios sobre a multiplicação de numeros complexos

1. 14 £ 17 s. 11 d. 7	4. 63 ar. 17 alm. 11 can. 3 quart.
2. 24 ar. 17 lb. 12 onç. 7 oit. 8	5. 9 var 4 palm. 7 pol. 18 lb. 12 onç. 5 oit.
3. 7 toes. 12 £ 15 s. 9 d.	6. 7 £ 19 s. 11 d. 3 ar. 25 lb. 8 onç.

§ V — Divisão de complexos

314. Ha tres casos na divisão dos numeros complexos:

1.° o dividendo é numero complexo e o divisor incomplexo;

2.° o dividendo e o divisor são numeros complexos de especie diversa;

3.° o dividendo e o divisor são numeros complexos da mesma especie.

315. Primeiro caso. — *O dividendo é numero complexo e o divisor incomplexo.*

Exemplo. — *Si 14 almudes pesam 25 libras 1 marco e 7 onças, 1 almude quanto pesará?*

Regra — Considera-se o divisor como numero abstracto e divide-se por elle o dividendo *(conforme o n. 305)* exprimindo-se o quociente em unidades e subdivisões da mesma especie das do dividendo

```
          25 lb. 1 m. 7 onç. | 14
Resto... 11                  |_______________________
         × 2                   1 lb. 1 m. 5 onç 9/14 da onça
        ----
         22 marcos
         + 1    "
        ----
         23     "
Resto...  9
         × 8
        ----
         72 onças
         + 7    "
        ----
         79     "
Resto..   9     "
```

Assim, *1 almude pesa* **1 lb. 1 m. 5 onç. e 9/14 da onça.**

316. Segundo caso — *O dividendo e o divisor são numeros complexos de especie diversa.*

Exemplo. — *14 almudes 8 canadas e 3 quartilhos pesando 995 libras 3 onças e 2 oitavas, 1 almude quanto pesará?*

Regra — Converte-se o divisor em numero fraccionario, e multiplica-se o dividendo pelo denominador, considerando-se o numerador como divisor incomplexo, pelo qual o producto achado será dividido segundo a regra precedente.

$$995^{lb.}\ 3^{onç.}\ 2^{oit.} : 14^{alm.}\ 8^{can.}\ 3^{quart.}$$

O divisor *14 alm. 8 can. 3 quart.* reduzido a numero fraccionario, é igual a $^{707}/_{48}$ do almude. Effectuando-se depois a multiplicação do dividendo pelo denominador 48, tem-se 47 769$^{lb.}$ 12$^{onç.}$

Este producto dividido pelo numerador 707, dá para quociente: 67$^{lb.}$ 9$^{onç.}$ e $^{49}/_{707}$ ou $^{7}/_{101}$ da onça.

Typo do calculo

$$995^{lb.}\ 3^{onç.}\ 2^{oit.} : 14^{alm.}\ 8^{can.}\ 3^{quart.} = 995^{lb.}\ 3^{onç.}\ 2^{oit.} : \frac{707^{alm.}}{48} =$$

$$= \frac{995^{lb.}\ 3^{onç.}\ 2^{oit.} \times 48}{707} = \frac{47\,769^{lb.}\ 12^{onç.}}{707} =$$

```
         47 769 lb. 12 onç. | 707
          5 349             |____________
Resto...    400             | 67 libras
          × 16
          -----
          2 400
            400
          -----
          6 400 onças.
          + 12    "
          -----
          6 412   "         | 707
Resto...     49   "         |____________________________
                              9 onças e 49/707 ou 7/101 da onça.
```

Logo, *1 almude pesa* **67$^{lb.}$ 9$^{onç.}$ e $^{7}/_{101}$ da onça.**

317. Terceiro caso. — *O dividendo e o divisor são numeros complexos da mesma especie.*

Exemplo. — *Uma vara de certa fazenda custando 1 cruzado 2 tostões 3 vintens e 15 réis, quantas varas da mesma fazenda se poderão comprar com 7 cruzados 1 tostão 3 vintens e 10 réis?*

Regra. — Reduzem-se o dividendo e o divisor á menor subdivisão existente num delles, e pratica-se a divisão sobre os dois numeros resultantes, resolvendo-se a divisão successivamente em subdivisões da especie de unidade que o quociente deve exprimir, *o que se conhece pelos dados do problema.*

$$7^{cr.}\ 1^{ts.}\ 3^{vint.}\ 10^{rs.} : 1^{cr.}\ 2^{ts.}\ 3^{vint.}\ 15^{rs.}$$

O dividendo *7 cr. 1 tost. 3 vint. 10 rs.*, reduzido a réis (segundo a regra do n. 302) é igual a 2 970 rs.; o divisor *1 cr. 2 ts. 3 vint. 15 rs.*, tambem reduzido a réis, é igual a 675 rs. Praticando-se depois o que manda a regra, tem-se no quociente: *4 varas e 2 palmos.*

Typo do calculo

$7^{cr.}\ 1^{ts.}\ 8^{vint.}\ 10^{rs.} : 1^{cr.}\ 2^{ts.}\ 3^{vint.}\ 15^{rs.} = 2\,970^{rs.} : 675^{rs.} =$

2 970	675
270	*4 varas 2 palmos*
× 5	
1 355 palmos	
0	

Logo, *com 7 cruzados 1 tostão 8 vintens e 10 réis podem comprar-se* 4 varas e 2 palmos da fazenda.

Exercicios sobre a divisão dos numeros complexos

1. $29\ £\ 19^{s.}\ 8^{d.} : 7$
2. $198^{\circ}\ 47'\ 10'' : 7$
3. $428^{lb.}\ 2^{onç.}\ 2^{oit.}\ {}^{7}/_{25} : 17^{var.}\ 4^{pal.}\ 6^{pol.}$
4. $24^{hs.}\ 43^{min.} : 13^{\circ}\ 34'$
5. $428^{lb.}\ 2^{onç.}\ 1^{oit.}\ {}^{7}/_{25} : 23^{lb.}\ 13^{onç.}\ 5^{oit.}$ *)
6. $150^{quint.}\ 3^{ar.}\ 27^{lb.} : 20^{quint.}\ 3^{ar.}\ 18^{lb.}$ **)

§ VI — Provas das operações sobre numeros complexos

318. Para tirarem-se as provas das quatro operações (addição, subtracção, multiplicação e divisão) sobre os numeros complexos, seguem-se os mesmos processos das provas reaes das operações sobre numeros inteiros (96 e 97, 126 e 127).

Observação. — A 1.ª regra do n. 96 soffre uma pequena modificação, quando ella é empregada na addição dos complexos. Em vez de: «escreve-se o resto, e colloca-se á sua direita o algarismo seguinte da somma total» deve ser: «*escreve-se o resto, o qual se converte em unidades da unidade immediata inferior, ajuntando-se o resultado ao numero respectivo da somma total.*»

Problemas sobre numeros complexos***)**

1. Um negociante deve resgatar quatro letras: uma de 2 464 £. 15 s. 6 d.; outra de 346 £ 10 s.; a 3ª de 350 £. 0 s. 3 d.; e a 4ª de 1090 £. 13. s. 8 d.; elle tem em cofre 200 luizes (moeda de ouro de 24 £.). *Feito o pagamento com quanto ficará elle?* **R. 548 £. 0 s. 7 d.**

*) Exprima-se o quociente em *varas, palmos e pollegadas*

**) Exprima-se o quociente em *met. cub., decim. cub.* e *sentim. cub.*

***) Gremilliet, Recueil de problèmes.

2. Comprou-se uma peça de tafetá, pesando 14 libras, por 17 £. 15 s. a libra. *A como sahe a vara do tafetá, sabendo-se que a peça tem 52½ varas?* — **R. 4 £ 14 s. 8 d.**

3. Sessenta obreiros fizeram, em 18 dias, 354 toesas de obra; cada um ganhava por dia 3 £. 18 s. 8 d. *Qual é o preço de cada toesa?* — **R. 12 £.**

4. A circumferencia da roda grande de um carro tem 15 pés 2 pollegadas; quando caminha o carro, a roda pequena dá 7 voltas; e a grande, apenas 2. *Qual é a circumferencia da roda pequena?* — **R. 4 pés 4 pollegadas.**

5. Empregaram-se, para fazer 354 toesas de obra, 60 obreiros que a concluiram em 18 dias; cada toesa custou 12 £. *Quanto ganhou por dia cada obreiro?* — **R. 3 £. 18 s. 8 d.**

6. Um navio tem 80 625 libras de biscoito para 430 homens da equipagem, durante 5 mezes de 30 dias. *Quantas onças tem cada ração?* — **R. 20 onças.**

7. Um particular empregou certo numero de trabalhadores em uma obra que lhe custou 1 125 £.; cada trabalhador fez 25 pés de obra e recebeu 12 £. 10 s. *Quantos eram os trabalhadores e quantas toesas de obra fizeram?* — **R. 90 trabalhadores; 375 toesas.**

8. Receberam-se 100 £. 16 s. 8 d. pelo capital e juros de uma quantia emprestada; nesta estavam comprehendidos os juros pela setima parte do capital. *Qual era a quantia emprestada?* — **R. 88 £. 4 s. 7 d.**

9. Uma pessoa encontrou um amigo seu com um retalho de panno debaixo do braço e perguntou-lhe quantas varas tinha e a como pagára a vara. O amigo respondeu-lhe: Tenho tantas meias-varas quantos eram os luizes que eu possuia; de cada luiz que empreguei deram-me 24 soldos de troco; depois gastei 2 £. 8 s. e possuo ainda 12 £. *Quer-se saber o preço da vara de panno e quantas tem o seu dono.* — **R. 45 £. 12 s.; 6 varas.**

10. Uma columna de 18 000 homens, a 4 de fundo, deve desfilar diante de um general, no passo ordinario de 2 pés, que se dão em um segundo. *Que tempo gastará ella em desfilar, sabendo-se que as filas estão a 3 pés de distancia umas das outras, nesta distancia comprehendendo-se os homens?* — **R. 1 hora 52 m. 30 s.**

11. A Circumferencia da Terra é representada por meio de um grande circulo dividido em 360 partes iguaes chamadas graus; cada um destes tem 25 leguas, cada legua 2280 toesas e cada toesa 6 pés. *Quantos annos gastaria para fazer a volta da Terra um homem que caminhasse 6 horas por dia e désse em cada minuto 114 passos de 2 pés cada um?* — **R. 4 annos e 40 dias.**

12. Quando João nasceu, Pedro tinha 18 annos 6 mezes e 15 dias; *qual será a idade de João quando Pedro tiver 41 annos 6 mezes 10 dias; e que idade terá Pedro quando*

João tiver 70 annos 2 mezes 3 dias? — **R. 22 annos 11 m 25 dias** *(idade de João)*; **88 an. 8 m. 18 d.** *(idade de Pedro)*

13. Perguntando-se a uma senhora *qual era a sua idade*, não quiz a principio responder; afinal para ver-se livre do importuno que a perseguia com pergunta tão indiscreta, disse-lhe: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{6}$ da minha idade mais 4 annos e 1 dia, fazem justamente a idade que devo ter de hoje a 1 anno 11 mezes 15 dias. — **R. 24 annos 6 m. 12 d.**

14. Supponde-se que 543 £. 13 s. 9 d. produziram 46 £. 8 s. 4 d., *quanto devem produzir 2875 £. 10 s. 6 d.?* — **R. 244 £. 19 s. 3 d. $\frac{82327}{42496}$.**

Capitulo IX.

Razões e proporções

319. Razão *de duas grandezas da mesma especie é o resultado da divisão de uma pela outra.*

320. A razão se exprime, collocando-se dois pontos entre os dois numeros, ou o traço de fracção.

A razão entre 12 e 4 é 3, e se escreve:

$$12 : 4 \text{ ou } \frac{12}{4}, \text{ e se lê:}$$

12 *está para* 4, ou 12 *dividido por* 4, ou 12 *sobre* 4.

321. Proporção *é a igualdade de duas razões.*

322. Os numeros que formam a proporção chamam-se, em geral, *termos*. O primeiro e o terceiro termos são os *antecedentes*; o segundo e o quarto, os *consequentes*. O primeiro e o quarto chamam-se *extremos*, o segundo e o terceiro, *meios*.

323. Ella se indica, separando-se as duas razões por quatro pontos, ou pelo signal de igualdade.

Querendo indicar-se, por exemplo, que os numeros 12, 4, 6 e 2 formam uma proporção, escreve-se.

$$12 : 4 :: 6 : 2; \text{ e se lê:}$$

12 *está para* 4, *assim como* 6 *está para* 2.

Esta mesma proporção tambem indica-se deste outro modo: $\frac{12}{4} = \frac{6}{2}$; e se lê;

12 *dividido por* 4 *é igual a* 6 *dividido por* 2; ou 12 *sobre* 4 *é igual a* 6 *sobre* 2.

324. Propriedade fundamental. — *Em toda proporção, o producto dos extremos é sempre igual ao producto dos meios;* v. g.

$$\left.\begin{array}{r} 12 : 4 :: 6 : 2 \\ \text{ou } \frac{12}{4} = \frac{6}{2} \end{array}\right\} 12 \times 2 = 4 \times 6 = 24$$

325. Dados tres termos de uma proporção facilmente se achará o que falta:

Si o termo pedido for um extremo, *divide-se o producto dos meios pelo extremo conhecido;*

Si for um meio, *divide-se o producto dos extremos pelo meio conhecido;* v. g.

$$12 : 4 :: 6 : x; \text{ ou } \frac{12}{4} = \frac{6}{x}.$$

$$12 \times x = 4 \times 6,$$

$$x = \frac{4 \times 6}{12} = 2$$

$$12 \quad :: 6 : 2; \text{ ou } \frac{12}{x} = \frac{6}{2}.$$

$$12 \times 2 = 6 \times x,$$

$$x = \frac{12 \times 2}{6} = 4.$$

Determinar o valor de x nas seguintes proporções:

1. $3 : 4 :: 6 : x$	$x = 8$	2. $14 : x :: 28 : 16$	$x = 8$
$5 : 3 :: x : 6$	$x = 10$	$13 : 26 :: x : 12$	$x = 6$
$9 : x :: 3 : 2$	$x = 6$	$22 : 26 :: 11 : x$	$x = 13$
$x : 8 :: 9 : 4$	$x = 18$	$33 : 21 :: x : 7$	$x = 11$
3. $0,45 : 0,9 :: 0,3 : x$	$x = 0,6$	4. $2,5 : x :: 2\frac{1}{2} : 3,25$	$x = 3,25$
$1,2 : 3,6 :: x : 3,9$	$x = 1,3$	$3\frac{3}{5} : 2\frac{1}{2} :: x : 2,5$	$x = 3\frac{3}{5}$
$\frac{1}{8} : x :: \frac{9}{16} : \frac{3}{4}$	$x = \frac{1}{6}$	$2,1 : 4\frac{1}{5} :: 0,6 : x$	$x = 1,2$
$x : 1\frac{1}{2} :: 2\frac{3}{4} : 1\frac{3}{8}$	$x = 3$	$4 : 5,5 :: x : 1\frac{3}{8}$	$x = 1$

Observação. — Duas quantidades iguaes estando reunidas pelo signal = constituem uma *igualdade*. Estas duas quantidades chamam-se *membros da igualdade*. Uma igualdade, portanto, consta de dois membros; a quantidade escripta á esquerda do signal = é o *1.° membro*, e a que está collocada á direita é o *2.° membro*.

Quando em um membro de uma igualdade se acha uma incognita multiplicada por uma ou mais quantidades conhecidas, obtem-se o valor da incognita *dividindo-se o membro em que se acham as quantidades conhecidas pela quantidade ou quantidades que multiplicam a incognita.*

Capitulo X

Applicações

§ I — Regra de tres

326. **Regra de tres** *é a questão, na qual se procura uma quantidade desconhecida por meio de outras conhecidas, com as quaes entretem relações de proporção.*

327. Ha duas especies de regras de tres: *a simples* e a *composta.*

Regra de tres simples

328. *Regra de tres simples* é aquella que consta de quatro termos, sendo um desconhecido.

329. Em uma regra de tres, chamam-se *termos principaes* os dois termos dados da mesma especie; e *termos relativos*, os dois termos da mesma especie, um dos quaes é desconhecido.

330. A regra de tres simples é *directa* ou *inversa*.

E' directa, quando, *crescendo* os termos principaes, seus relativos tambem *crescem*; ou quando, *diminuindo* os termos principaes, os seus relativos tambem *diminuem*.

E' inversa, quando, *crescendo* os termos principaes, os seus relativos *diminuem*; ou quando, *diminuindo* os termos principaes, os seus relativos *crescem*.

331. A regra para armar-se a proporção é a seguinte:

***O principal maior** está para o principal menor, assim como **o relativo maior** está para o relativo menor*; ou

***O principal menor** está para o principal maior, assim como **o relativo menor** está para o relativo maior*

1) Numeros inteiros

Ex. 1) (Razão directa.) — *Um obreiro fez 210 metros de obra em 9 dias; pergunta-se quanto tempo gastará para fazer 630 metros da mesma obra?*

Disposição dos dados do problema

210 metros são feitos em 9 dias
630 „ „ „ „ x „

Raciocinio. — Si o obreiro para fazer 210 metros de obra gastou 9 dias, para fazer 630 metros gastará mais de 9 dias.

E' uma regra de tres directa; porque, *crescendo* o termo principal *metros*, o seu relativo *dias* tambem *cresce*.

A incognita *x dias* representa, pois, um numero maior do que 9 dias.

Methodo das proporções

$$210 : 630 :: 9 : x = \frac{630 \times 9^d}{210} = 27 \text{ dias.}$$

Observação. — Os problemas da regra de tres resolvem-se facilmente, sem armar-se proporção, pelo methodo que Reynaud chamou *methodo de reducção á unidade.*

Seja o mesmo exemplo acima.

Methodo de reducção á unidade

Si 210 metros de obra são feitos em 9 dias, 1 metro será feito em 210 vezes menos dias, isto é, em $\frac{9}{210}$ *do dia.* Ora, si 1 metro é feito em $\frac{9}{210}$ do dia, 630 metros serão feitos em 630 vezes mais dias, isto é, em $\frac{630 \times 9^d}{210} = 27$ dias.

Typo do calculo *)

Si 210 metros são feitos em . . . . 9 dias
630 „ „ „ „ . . . . x „

210 metros são feitão em . . . . . . 9 dias

1 metro será feito em 210 vezes menos dias ou em . . . . $\frac{9 \text{ d.}}{210}$ „

630 metros serão feitos em 630 vezes mais dias, ou em . . . . $\frac{630 \times 9^d}{210} = 27$ dias.

*) Chama-se *calculo* a reunião de todas as operações que se podem effectuar sobre os numeros.

Ex. 2.) (Razão inversa.) — *Certa obra foi feita por 10 trabalhadores em 15 dias. Quer-se saber em quantos dias 30 trabalhadores farão a mesma obra.*

Disposição dos dados do problema

10 trabalhadores gastaram 15 dias
30 „ „ x „

Raciocinio. — Si os 10 trabalhadores gastaram 15 dias para fazer a obra, os 30 trabalhadores gastarão menos de 15 dias.

E' uma regra de tres inversa, porque, *crescendo* o termo principal *trabalhadores*, o seu relativo *dias diminue.*

A incognita *x* dias é, portanto menor do que 15 dias.

Methodo das proporções

$$30 : 10 :: 15 : x = \frac{10 \times 15^d}{30} = 5 \text{ dias.}$$

Methodo de reducção á unidade

10 trabalhadores gastaram 15 dias
30 „ „ x „

10 trabalhadores gastaram . . . . 15 dias

1 trabalhador gastará 10 vezes mais dias ou . . . . 10×15^d

30 trabalhadores gastarão 30 vezes menos dias ou . . . . $\frac{10 \times 15^d}{30} = 5$ dias.

2) Fracções decimaes

Primeiro Exemplo. — *Qual é a altura de um monumento que dá $87^m,50$ de sombra, sabendo-se que um álamo de 15 metros de altura dá $37^m,50$ de sombra no mesmo momento?*

Disposição dos dados

$37^m,50$ (sombra) . . . . 15 m. (altura)
$87^m,50$ „ . . . . x „ „

Observação. — *Quando as fracções decimaes são referidas á mesma unidade fraccionaria,* abstrahe-se da virgula e procede-se depois como nos numeros inteiros.

Assim, teremos:

3750 cm. (sombra)........ 15 m. (altura)
8750 „ „ .... x „ „

Raciocinio. — A' sombra de 3750 cm. correspondendo a altura de 15 m., a uma sombra *maior* corresponderá *maior* altura. E' uma regra de tres directa.

Methodo das proporções

$$3750 : 8750 : : 15 : x = \frac{8750 \times 15^m}{3750} = 35 \text{ metros.}$$

Methodo de reducção á unidade

3750 cm. (sombra)........ 15 m. (altura)
8750 „ „ .... x „ „

3750 cm. (sombra)...... 15 m.

1 „ „ .... $\frac{15 \text{ m.}}{3750}$

8750 cm. (sombra)........ $\frac{8750 \times 15^m}{3750} = 35$ metros.

(Segundo exemplo.) — *Um especieiro ganha 500 rs. sobre 5 kilogrammos 45 decagrammos de mercadoria Quanto ganhará sobre 295 hectogrammos?*

Disposição dos dados

5 Kg. 45 Dg................................ 500 rs.
295 Hg.................................... x „

Observação. — *Quando os termos de uma razão não são da mesma especie*, reduzem-se ambos a *uma mesma unidade*, e opera-se como nos numeros inteiros.

Assim, no exemplo dado, o peso não estando referido a uma mesma unidade, reduzamos a grammos, e teremos:

5450 g................................ 500 rs.
29500 „.................................. x „

Raciocinio. — A *maior* peso corresponde *maior* preço. E' uma regra de tres directa.

Methodo das proporções

$$5450 : 29\,500 : : 500 : x = \frac{29\,500 \times 500^{rs}}{5420} = 2\$706.$$

Methodo de reducção á unidade

5 450 g.................................. 500 rs.
29 500 „.................................. x „

5 450 g.................................. 500 rs.

1 „ .... $\frac{500 \text{ rs.}}{5450}$

29 500 „ .... $\frac{29\,500 \times 500^{rs}}{5420} = 2\$706.$

3) Fracções ordinarias

Primeiro exemplo. — *Um tecelão fez com certa quantidade de fio 26m,50 de pannó, tendo 3/4 de metro de largura. Quantos metros teria elle feito com a mesma quantidade de fio, si o panno tivesse 1/2 metro de largura?*

Disposição dos dados

3/4 m. (largura)........................ 26m,50
1/2 „ „ .... x.

Observação. — *Quando os termos de uma razão são fracções ordinarias que não têm o mesmo denominador*, reduzem-se ao mesmo denominador; expelle-se o denominador commum, e opera-se sobre os numeradores, como no caso dos inteiros.

Assim, no exemplo proposto, reduzindo-se as fracções 3/4 e 1/2 ao mesmo denominador, teremos 3/4 e 2/4; expellindo o denominador commum 4, resulta:

3 m. (largura)........................ 26m,50
2 „ „ .... x.

Raciocinio. — Com a mesma porção de fio, dando-se *menor largura* ao panno, *maior* será o *comprimento* deste. E' uma regra de tres inversa.

Methodo das proporções

$$2 : 3 : : 26{,}50 : x = \frac{3 \times 26^m{,}50}{2} = 39{,}^m75.$$

Methodo de reducção á unidade

$$\begin{array}{lcl} 3 \text{ m. (largura)} & \dots\dots & 26^m,50 \\ 2 \;\;,, \quad ,, & \dots\dots & x. \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} 3 \text{ m. (largura)} & \dots\dots & 26^m,50 \\ 1 \;\;,, \quad ,, & \dots\dots & 3 \times 26^m,50 \\ 2 \;\;,, \quad ,, & \dots\dots & \dfrac{3 \times 26^m,50}{2} = 39,^m75. \end{array}$$

Segundo exemplo. — *Em 5 h. 3/4 um tecelão fez 3. m. 2/3 de panno; quantos metros fará em 9 h. 2/5 de trabalho?*

Disposição dos dados

$$\begin{array}{lcl} 5 \text{ h. } ^3/_4 & \dots\dots & 3 \text{ m, } ^2/_3 \\ 9 \;\;,, \;\; ^2/_5 & \dots\dots & x \end{array}$$

Observação. — *Quando os termos de uma razão são numeros mixtos, isto é, inteiros acompanhados de fracção,* reduzem-se a uma só expressão fraccionaria, e procede-se depois sobre estas, como sobre as fracções ordinarias.

Assim, no exemplo dado, os numeros mixtos $5^3/_4$, $9^2/_5$ e $3^2/_3$, reduzidos a uma só expressão fraccionaria dão $^{23}/_4$, $^{47}/_5$ e $^{11}/_3$, e os dados tornam-se:

$$\begin{array}{lcl} ^{23}/_4 \text{ h} & \dots\dots & ^{11}/_3 \text{ m.} \\ ^{47}/_5 \;\;,, & \dots\dots & x. \end{array}$$

Reduzindo ao mesmo denominador as fracções $^3/_4$ e $^{47}/_5$, que exprimem o *tempo,* obtem-se:

$$\begin{array}{lcl} ^{115}/_{20} \text{ h} & \dots\dots & ^{11}/_3 \text{ m.} \\ ^{188}/_{20} \;\;,, & \dots\dots & x. \end{array}$$

Expellimos o denominador commum 20, teremos:

$$\begin{array}{lcl} 115 \text{ h} & \dots\dots & ^{11}/_3 \text{ m.} \\ 188 \;\;,, & \dots\dots & x. \end{array}$$

Raciocinio. — Em *mais* horas fazem-se *mais* metros da mesma obra. E' uma regra de tres directa.

Methodo das proporções

$$115 : 188 :: {}^{11}/_3 : x = \frac{188 \times 11^m}{115 \times 3} = 5^m\,{}^{343}/_{345}.$$

Methodo de reducção á unidade

$$\begin{array}{lcl} 115 \text{ h} & \dots\dots & ^{11}/_3 \text{ m.} \\ 188 \;\;,, & \dots\dots & x. \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} 115 \text{ h} & \dots\dots & ^{11}/_3 \text{ m.} \\ 1 \;\;,, & \dots\dots & \dfrac{11 \text{ m.}}{115 \times 3} \\ 188 \;\;,, & \dots\dots & \dfrac{188 \times 11^m}{115 \times 3} = 5^m\,{}^{343}/_{345}. \end{array}$$

Problemas sobre regra de tres simples

1. Si 6 pedreiros, trabalhando 10 horas dia, fazem um muro em 18 dias, *em que tempo o fariam, si o trabalho diario fosse de 12 horas?* — **R. 15 dias.**

2. Um fonte dá 27 litros d'agua em 3 minutos; *quantos litros dará ella em 1 hora?* — **R. 540 litros.**

3. O ar sendo um corpo muito elastico, toma um volume tanto maior quanto menor é a pressão. Sendo assim, quer-se saber *em quanto se tornará o volume de 1 litro de ar na pressão 76, passando esta para 50?* — **1l,52.**

4. Uma pessoa queria dar uma esmola a 12 pobres, de modo que a cada um tocasse 200 rs.; appareceram, porém mais 3 pobres; *quanto deve então tocar a cada um,* não se tendo augmentado a quantia destinada para essa caridosa acção? — **R. [illegible] rs.**

5. Quatro obreiros fizeram 168 metros de obra em um tempo determinado; *quantos metros da mesma obra farão 36 obreiros no mesmo tempo?* — **R. 1512 metros.**

6. 29 obreiros acabaram uma obra em 18 dias; *em quantos dias 87 obreiros da mesma força acabarão essa obra?* — **R. 6 dias.**

7. Si 40 operarios fizeram certa obra em 15 dias, *quantos operarios serão precisos para fazer a mesma obra em 25 dias?* — **R. 24 operarios.**

8. Um homem ganha 25$500 rs. em 15 dias de trabalho; *quanto ganhará em 37 dias?* — **R. 62$900.**

9. 38 obreiros fazem 266 metros de obra em 1 dia; *quantos metros farão 57 obreiros no mesmo tempo?* — **R. 399 metros.**

10. Para fazer-se uma obra empregaram-se 49 trabalhadores durante 72 dias; si para fazer-se a mesma obra só se empregassem 36 trabalhadores, *quantos dias gastariam elles?* — **R. 98 dias.**

11. Um operario fez 432 metros de obra em 48 dias; *quantos metros fará em 19 dias?* — **R. 171 metros.**

12. Tendo a tripolação dum navio mantimento par 15 dias, e faltando ainda 20 dias para concluir a viagem, *a quanto devem ser reduzidas as rações?* — **R. 3/4.**

13. Para certa obra gastaram-se 24 metros de panno com $0^m,85$ de largura; *quantos metros seriam precisos* si o panno tivesse mais $0^m,15$ de largura? — **R. $20^m,40$.**

14. *Qual é a altura de um coqueiro* que projecta uma sombra de $3^m,8$ ao mesmo tempo que uma bengala de $1^m,05$ projecta uma sombra de $0^m,2$? **R. $19^m,95$.**

15. São precisos 12 rôlos de tapeçaria de $0^m,40$ de largura para forrar as paredes de uma sala. Querendo empregar tapeçaria de $0^m,48$ de largura, *quantos rôlos do mesmo comprimento são precisos?* — **R. 10 rôlos.**

16. Para telhar um edificio são precisas 2136 telhas, cobrindo uma superficie de $0^{m^2},03$ cada uma. *Quantas telhas serão precisas,* si cada uma cobrir só uma superficie de $0^{m^2},0090$? — **R. 7120 telhas.**

17. Ao longo duma estrada então plantadas 2945 arvores distantes umas das outras $4^m,50$. *Quantos arvores haveria,* si a distancia entre ellas fosse de $3^m,10$? — **R. 4275 arvores.**

18. Seis hectolitros custaram 25$500 réis; *quanto custarão 10 litros?* — **R. 425 réis.**

19. Uma sala cobre-se com $6^m,54$ de tapete de $^3/_4$ de metro de largura; *quantos metros de tapete* de $^2/_3$ do metro de largura são necessarios para cobrir o soalho da mesma sala? — **R. $7^m,3575$.**

20. Duas duzias de camisas custam (feitio) 18$000 rs.; *quanto se deve pagar por $5^1/_2$ duzias?* — **49$500.**

21. *Quantos metros se precisam de um estofo* que tem $^3/_4{}^m$ de largura, para forrar um outro estofo de $8^m,50$ de comprimento e $^3/_4{}^m$ de largura? — **R. $10^m,20$.**

22. Um candieiro estando acceso 4 h. 20 min. por dia gasta 1 kilogrammo de azeite em $3^1/_2$ dias; *para quantos dias daria esta provisão* si o candieiro estivesse acceso sómente $3^1/_4$ horas por dia? — **R. $4^2/_3$ dias.**

23. Um navio com uma tripulação de 30 homens recebe naufragos e reduz a ração de biscoutos de 96 decagr. para 576 grammos. *Quantos são os naufragos?* — **R. 20 naufragos.**

24. Um regimento, que tinha de andar 308 kilometros, já fez em 6 dias 132 kilom. Em quantos dias percorrerá elle o resto do caminho? — **R. 8 dias.**

25. Com 18 duplos decalitros de trigo podem se fazer 96 pães de 3 kilos cada um. *Quantos pães, do mesmo peso, se poderão fazer com 24 hectolitros de trigo?* **R. 640 pães.**

Regra de tres composta

332. *Regra de tres composta* é aquella que consta de mais de quatro termos.

333. Ella póde ser inteiramente directa, inteiramente inversa, e parte directa e parte inversa.

Estas considerações, porém, tornam-se desnecessarias no processo que vamos seguir para os problemas desta regra, o qual consiste em reduzir a regra de tres composta a uma regra de tres simples, resolvendo-se esta por uma unica proporção.

Primeiro exemplo. — *Si 30 pedreiros fazem 528 metros de paréde em 40 dias; pergunta-se: 50 pedreiros quantos metros farão em 45 dias?*

Disposição dos dados do problema

30 pedreiros em 40 dias fazem 528 metros
50 „ „ 45 „ „ x „

Methodo das proporções

Raciocinio — *30 pedreiros em 40 dias* é o mesmo que 40×30 ou *1200 pedreiros em 1 dia.*

50 pedreiros em 45 dias é o mesmo que 45×50 ou 2 250 pedreiros em 1 dia.

O problema fica, portanto, reduzido ao seguinte: *Si 1200 pedreiros fazem 528 metros, 2250 pedreiros quantos metros farão?*

$$1\,200 : 2250 :: 528 : x = \frac{2250 \times 528^m}{1\,200} = 990 \text{ metros.}$$

Methodo da reducção á unidade*)

30 pedreiros em 40 dias fazem 528 metros
50 „ „ 45 „ „ x „

30 pedreiros	em 40 dias	fazem	528 metros
1 pedreiro	„ 40 „	fará	$\frac{528^m}{30}$ „
1 „	„ 1 dia	„	$\frac{528^m}{40 \times 30}$ „
50 pedriros	„ 1 „	farão	$\frac{50 \times 528^m}{40 \times 30}$ „
50 „	„ 45	„	$\frac{45 \times 50 \times 528^m}{40 \times 30} =$

$= 990$ **metros.**

Segundo exemplo. — *Si 12 pedreiros fizeram certa obra em 26 dias, trabalhando 12 horas por dia, quer-se saber em quantos dias 8 pedreiros farão a mesma obra, trabalhando 13 horas por dia.*

Disposição dos dados do problema

12 pedreiros a 12 horas gastam 26 dias
8 „ „ 13 „ „ x „

*) Convém declarar que este processo não é propriamente o das proporções; elle é apenas uma combinação deste com o methodo de reducção á unidade. Por abreviação, é que lhe havemos dado aqui essa denominação.

Methodo das proporções

Raciocinio — 12 pedreiros trabalhando 12 horas por dia é o mesmo que 12×12 ou 144 pedreiros trabalhando 1 hora por dia.

8 pedreiros trabalhando 13 horas por dia é o mesmo que 13×8 ou 104 pedreiros trabalhando 1 hora por dia.

O problema proposto se reduz ao seguinte:

Si 144 pedreiros gastam 26 dias para fazer certa obra, 104 pedreiros quantos dias gastarão para fazer a mesma obra?

$$104 : 144 :: 26 : x = \frac{144 \times 26^{d}}{104} = 36 \text{ dias.}$$

Methodo de reducção á unidade

12 pedreiros a 12 horas gastam 26 dias
8 „ „ 13 „ „ x .

12 pedreiros	a 12 horas	gastam	26	dias
1 pedreiro	„ 12 „	gastará	12×26^{d}	„
1 „	„ 1 hora	„	$12 \times 12 \times 26^{d}$	„
8 pedreiros „	1 „	gastarão	$\frac{12 \times 12 \times 26^{d}}{8}$	„
8 „	„ 13 horas	„	$\frac{12 \times 12 \times 26^{d}}{13 \times 8} = 36$ dias.	

Terceiro exemplo. — *Uma barra de ferro de $1^{m},20$ de comprimento, $0^{m},45$ de largura e $0^{m},025$ d'espessura pesa 100 kilogrammos; quanto pesará uma barra do mesmo metal de $1^{m},70$ de comprimento, $0^{m},75$ de largura e $0^{m},018$ d'espessura?*

Disposição dos dados do problema

$1^{m},20$ (compr.) $0^{m},45$ (larg.) $0^{m},025$ (espes.) pesa 100 Kg.
$1^{m},70$ „ $0^{m},75$ „ $0^{m},018$ „ „ x „

Fazendo-se desapparecer as unidades fraccionarias (vide exemplo 1.° fracç. decim., pag. 213), resulta:

120 cm. (compr.) 45 cm. (larg.) 25 mm. (espes.) 100 Kg
170 „ „ 75 „ „ 18 „ „ x „

Methodo das proporções

Raciocinio. — 120 cm. de comprimento, 45 cm. de largura e 25 mm. d'espessura é o mesmo que $25 \times 45 \times 120$ cm. ou *135 000 cm.* de comprimento, *1 cm.* de largura e *1 mm.* d'espessura.

Da mesma fórma 170 cm. de comprimento, 75 cm. de largura e 18 mm. d'espessura é o mesmo que $18 \times 75 \times 170$ cm. ou *229 500 cm.* de comprimento *1 cm.* de largura e *1 mm.* d'espessura.

O problema proposto fica, portanto, reduzido ao seguinte: *Si uma barra de ferro de 135 000 cm. de comprimento pesa 100 kilogrammos, quanto pesaria si tivesse o comprimento de 229 500 centimetros?*

Dispondo-se os dados, teremos:

135 000 cm. pesam 100 Kg.
229 500 „ „ x „

E' uma regra de tres simples directa; x é maior do que 100, por ser 229 500 maior do que 135 000.

$$135\,000 : 229\,500 :: 100 : x = \frac{229\,500 \times 100^{Kg}}{135\,000} = 170 \text{ Kg.}$$

Methodo de reducção á unidade

120 cm. (compr.) 45 cm. (larg.) 25 mm. (espes.) 100 Kg
170 „ „ 75 „ „ 18 „ „ x „

120 compr.	45 larg.	25 espes.		100 Kg.
1 „	45 „	25 „		$\frac{100 \text{ Kg.}}{20}$
1 „	1 „	1 „		$\frac{100 \text{ Kg.}}{45 \times 120}$
1 „	1 „	1 „		$\frac{100 \text{ Kg.}}{25 \times 45 \times 120}$
170 „	1 „	1 „		$\frac{170 \times 100 \text{ Kg.}}{25 \times 45 \times 120}$
170 „	75 „	1 „		$\frac{75 \times 170 \times 100 \text{ Kg.}}{25 \times 45 \times 120}$
170 „	75 „	18 „		$\frac{18 \times 75 \times 170 \times 100 \text{ Kg.}}{25 \times 45 \times 120} = 170$ Kg.

Quarto exemplo. — *Uma barra de ferro de $1^{m}\,{}^{1}/_{5}$ de comprimento, ${}^{9}/_{20}{}^{m}$ de largura e ${}^{1}/_{40}{}^{m}$ d'espessura, pesa 100 kilogrammos; quanto pesará outra barra do mesmo metal tendo $1^{m}\,{}^{7}/_{10}$ de comprimento, ${}^{3}/_{4}{}^{m}$ de largura e ${}^{9}/_{500}{}^{m}$ de espessura?*

Disposição dos dados

($1^{m}\,{}^{1}/_{5}$) ou ${}^{6}/_{5}{}^{m}$ (compr.) ${}^{9}/_{20}{}^{m}$ (larg.) ${}^{1}/_{40}{}^{m}$ (espes.) 100 Kg.
($1^{m}\,{}^{7}/_{10}$) „ ${}^{17}/_{10}{}^{m}$ „ ${}^{3}/_{4}{}^{m}$ „ ${}^{9}/_{500}{}^{m}$ „ x „

Reduzindo-se ao mesmo denominador as fracções de cada uma das razões de que depende a incognita, pellindo os denominadores communs, vem: (vid. exemplos 1.º e 2.º, pag. 215 e 216.

12 compr. 9 larg. 25 espes. 100 Kg.
17 " 15 " 18 " x "

Methodo das proporções

Raciocinio. — 12 comprimento, 9 largura, 25 espessura é equivalente a 25 × 9 × 12 comprimento ou *2700* comprimento, *1* de largura e *1* de espessura.

17 comprimento, 15 largura, 18 espessura é o mesmo que 18 × 15 × 17 comprimento ou *4590* comprimento, *1* de largura e *1* de espessura.

O problema proposto ficará, pois, substituido pelo seguinte: *Si uma barra de ferro cujo comprimento é representado pelo numero 2700 pesa 100 kilogrammos, quanto pesaria si o comprimento fosse representado por 4590?*

Dispondo-se os dados, teremos:

2700 comprimento pesa 100 Kg.
4590 " " x "

E' uma regra de tres directa, porque a *maior* comprimento corresponde *maior* peso.

$$2700 : 4590 : : 100 : x = \frac{450 \times 100^{Kg}}{2700} = 170 \text{ Kg.}$$

Methodo de reducção á unidade

12 compr. 9 larg. 25 espes. 100 Kg.
17 " 15 " 18 " x "

12 compr.	9 larg.	25 espes	100 Kg.
1 "	9 "	25 "	$\frac{100 \text{ Kg.}}{12}$
1 "	1 "	25 "	$\frac{100 \text{ Kg.}}{9 \times 12}$
1 "	1 "	1 "	$\frac{100 \text{ Kg.}}{25 \times 9 \times 12}$
17 "	1 "	1 "	$\frac{17 \times 100 \text{ Kg.}}{25 \times 9 \times 12}$
17 "	15 "	2 "	$\frac{15 \times 17 \times 100 \text{ Kg.}}{25 \times 9 \times 12}$
17 "	15 "	18 "	$\frac{18 \times 15 \times 17 \times 100 \text{ Kg.}}{25 \times 9 \times 12} =$

$$= 170 \text{ Kg.}$$

Problemas sobre regra de tres composta

Vinte operarios, trabalhando 15 dias a 8 horas por dia, fizeram certa obra; *quantos operarios seriam precisos para fazer a mesma obra*, trabalhando 30 dias a 10 horas por *dia*? — **R. 8 operarios.**

2. Em 15 dias 20 operarios, trabalhando 8 horas por dia fizeram certa obra; *em quantos dias farão obra igual* 8 operarios da mesma força dos primeiros e que trabalham 10 horas por dia? — **R. 30 dias.**

3. Foi preciso que 20 operarios trabalhassem 15 dias a 8 horas por dia para concluir-se certa obra; para concluir obra igual em 30 dias *quantas horas por dia devem trabalhar 8 operarios?* — **R. 10 horas.**

4. Tres obreiros, trabalhando 2 dias a 7 horas por dia, fizeram 126 metros de obra; *quantos metros da mesma obra farão* 2 obreiros trabalhando 5 dias a 3 horas por dia? — **R. 90 metros.**

5. *Quantos obreiros farão* 126 metros de certa obra em 2 dias com o trabalho diario de 7 horas, si 2 obreiros da mesma força fizeram 90 metros de obra igual em 5 dias, trabalhando 3 horas por dia? — **R. 3 obreiros.**

6. *Em quantos dias* 2 obreiros trabalhando 3 horas por dia farão 90 metros de certa obra si 3 obreiros da mesma força trabalhando diariamente 7 horas, gastaram 2 dias para fazer 126 metros de obra igual? — **R. 5 dias.**

7. Para fazer 300 metros de obra, 45 operarios gastaram 15 dias, trabalhando 8 horas por dia; *em quantos dias* 30 operarios fariam 120 metros da mesma obra, trabalhando 10 horas por dia? — **R. 6 dias.**

8. Em 24 dias, 18 obreiros, trabalhando 8 horas por dia, cavaram uma valla de 480 metros de comprimento. *Em quantos dias* 15 obreiros da mesma força que os primeiros, trabalhando 7 horas por dia, farão 1050 metros da mesma obra? — **R. 72 dias.**

9. Uma companhia de 20 obreiros cavaram em 8 dias um fosso de 160 metros de comprimento, 2 metros de largura e $1^m,2$ de profundidade. *Em quantos dias uma segunda companhia* de 24 obreiros cavarão um fosso de 90 metros de comprimento, $1^m,60$ de largura e $1^m,6$ de profundidade. — **R. 4 dias.**

10. Trabalhando 12 horas por dia, 40 operarios ganharam 640$000 em 10 dias; *quantas horas por dia deviam trabalhar* 25 obreiros para ganhar 220$000 em 6 dias? — **R. 11 horas.**

11. Com 34 kilogrammos de lã fizeram-se 25 metros de um tecido que tem $0^m,60$ de largura; *quantos metros se poderiam fazer* com 102 kilogrammos da mesma lã, sendo de $0^m,50$ a largura do tecido — **R. 90 metros.**

12. Com $312^{kg},5$ de fio fez-se uma tela de 1200 metros de comprimento e $8^m,75$ de largura; *qual será o comprimento d'uma tela* de $2^m,1$ de largura, fabricada com 182 kilogrammos de fio? — **R. 1248.**

13. São precisos 120 kilogrammos de feno para sustentar 12 cavallos durante 15 dias; *quantos quintaes metricos serão precisos para sustentar* 35 parelhas durante 90 dias. — **R. 42q^{m}.**

14. Numa pensão gastou-se 750$000 para o sustento de 60 pessoas, durante 10 dias. *Quanto se teria gasto com o sustento de 90 pessoas*, em 15 dias? — **R. 1:687$500.**

15. Um livreiro fez a edição duma obra de 75 volumes em 8°. Cada volume tem *30 folhas de impressão (16 paginas cada uma)*, e em cada pagina ha 40 linhas de 50 letras cada uma. Quer fazer uma segunda edição em 12°, devendo cada volume ter *25 folhas de impressão (24 paginas cada folha)*, tendo cada pagina 30 linhas de 40 letras cada uma. *Deseja saber de quantos volumes será a edição?* — **R. 100 volumes.**

16. Vinte e cinco operarios, trabalhando 8 horas por dia, abriram em 15 dias um fosso de 340 metros de comprido e 4 de largura; *qual seria o comprimento dum fosso da mesma largura*, aberto por 60 operarios, cuja actividade é $^3/_4$ da dos primeiros, em 1 mez, a 10 horas por dia, em terreno 3 vezes mais difficil de trabalhar? — **R. 510 metros.**

17. Em 30 dias, 26 operarios, trabalhando $8^1/_4$ horas por dia, fizeram $628^m,65$ de certa obra, cuja difficuldade é representada pela fracção $^3/_2$. *Quantos obreiros seriam necessarios*, trabalhando 6 horas por dia, para fazerem, em 45 dias, $457^m,20$ de uma obra, cuja difficuldade fosse representada por 1, sabendo-se que a razão da actividade das duas companhias é $^{13}/_{14}$? **R. 15 obreiros.**

18. Vinte e cinco obreiros, trabalhando 11 horas por dia, durante 15 dias, levantaram uma muralha, cujas dimensões são: altura 4 metros, comprimento 750 metros, espessura $1^m,75$. *Quantos dias seriam precisos* a 33 obreiros, trabalhando 10 horas por dia, para levantarem outra muralha com as seguintes dimensões: altura 3 metros, comprimento 840 metros, espessura $1^m,50$? — **R. 9 dias.**

19. Em 25 dias, 36 obreiros trabalhando 10 horas por dia, cavaram um buraco com 60 metros de comprimento, $2^m,5$ de largura e 4 de profundidade. *Quantos obreiros serão precisos*, trabalhando 12 horas por dia, para cavarem em 18 dias um buraco com 75 metros de comprimento, 3 metros de largo e $3^m,2$ de fundo. Suppõe-se que a difficuldade do primeiro trabalho está para a do segundo, como 5 está para 6, e a força de um obreiro da primeira companhia está para a de um obreiro da segunda, como 5 está para 4? — **R. 75 obreiros.**

20. Um pedaço de madeira de pinho esquadriado tem $3^m,20$ de comprimento, $0^m,24$ de largura e $0^m,12$ d'espessura; seu peso é de $42^{kg},24$. *Qual será o comprimento de um pedaço de madeira de pinho* cuja largura fosse de $0^m,16$, a espessura $0^m,18$ e o peso $69^{kg},64$? — **R. $5^m,20$.**

21. Um livreiro mandou imprimir duas obras; uma de 25 volumes em 12°, tendo cado um 14 folhas de impressão a 33 linhas de 48 letras por pagina, foi composta por 5 compositores em 18 dias trabalhando 11 horas por dia; a outra em 8°, tendo cada volume 18 folhas de impressão a 42 linhas de

50 letras por pagina, foi composta por 9 compositores em 15 dias, trabalhando 13 horas por dia. Pergunta-se *qual é o numero de volumes da 2.ª obra?* — **R. 39 volumes.**

22. Em uma bibliotheca empregam-se em copiar manuscriptos duas secções de escreventes; uns, já idosos, só trabalham de dia e escrevem bastardo, os outros trabalham de noite e escrevem cursivo. Os primeiros, em numero de 24, transcreveram, trabalhando 90 dias a 8 horas por dia, 8 exemplares de uma obra contendo 6 volumes de 480 paginas cada um, tendo cada pagina 64 linhas e cada linha 56 letras. *Em quantas noites* a segunda secção composta de 30 copistas, que trabalham 6 horas por noite, transcreverá 9 exemplares duma obra em 4 volumes de 800 paginas cada um, tendo cada pagina 84 linhas e cada linha 80 letras suppondo-se que a velocidade dos primeiros está para a dos segundos, como 4 está para 5; que a difficuldade de trabalhar de dia está para a de trabalhar de noite, como 5 está para 6; que a de fazer o bastardo está para a do fazer o cursivo, como 6 está para 5; finalmente, que a de ler a primeira obra está para a de ler a segunda, como 8 está para 7. — **R. $157^1/_2$ noites.**

§ II — Regra de juros

334. **Regra de juros** *é a questão que tem por fim determinar o lucro que produz uma quantia em um certo tempo, a uma taxa convencionada.*

335. Chama-se *juro* de uma quantia o lucro por ella produzido em certo tempo.

Capital ou *principal* é a quantia emprestada

Taxa é o juro de uma quantia fixa em um tempo tambem fixo*)

A quantia fixa ordinariamente é *100*, e o tempo *1 anno* ou *1 mez*.

Assim, 6 por cento ao anno quer dizer que 100 rendem 6 em 1 anno, e designa-se abreviadamente do seguinte modo: 6% ao anno; $1^1/_2$ por cento ao mez quer dizer que 100 rendem $1^1/_2$ em 1 mez, e designa-se abreviadamente do seguinte modo: $1^1/_2$ % ao mez.

336. O juro de um capital depende: 1.° do *capital*; 2.° do *tempo* por que é emprestado o capital; 3.° da *taxa*.

*) A taxa é de pura convenção; ha, comtudo, um limite além do qual se chama *usura*.

337. As questões de juros dividem-se em duas especies: *regra de juros simples* e *regra de juros de juros* ou *de juros compostos**)

338. *A regra de juros simples não é mais do que um caso particular da regra de tres composta.*

Determinação do juro.

339. **O juro depende do capital e do tempo, e varia na razão directa dessas quantidades.**

Primeiro exemplo. — *Pede-se o juro de 350$000 em 2 annos a 9% ao anno.*

Disposição dos dados

$$\begin{array}{lllll} 100 & \text{em} & 1 & \text{anno rendem} & 9 \\ 350\$000 & ,, & 2 & ,, \quad ,, & x \end{array}$$

Methodo das proporções

Raciocinio. — 350$000 em 2 annos rendem o mesmo que 2 × 350$000 ou 700$000 em 1 anno, a taxa sendo a mesma. Deste modo, o problema se reduz ao seguinte:

Si 100 em 1 anno rendem 9, o capital 700$000 quanto renderá no mesmo tempo?

$$100 : 700\,000 : : 9 : x = \frac{9 \times 700\,000}{100} = 63\$000.$$

Methodo de reducção á unidade

$$\begin{array}{lllll} 100 & \text{em} & 1 & \text{anno rendem} & 9 \\ 350\$000 & ,, & 2 & ,, \quad ,, & x \end{array}$$

$$\begin{array}{lllll} 100 & \text{em} & 1 & \text{anno rendem} & 9 \\ 1 & ,, & 1 & ,, \quad ,, & \dfrac{9}{100} \\ 350\$000 & ,, & 1 & ,, \quad ,, & \dfrac{350\,000 \times 9}{100} \\ 350\$000 & ,, & 2 & ,, \quad ,, & \dfrac{2 \times 350\,000 \times 9}{100} = 63\$000. \end{array}$$

*) *Regra de juros* ou de *juros compostos* é aquella em que os juros vencidos são accumulados ao capital primitivo, formando deste modo um novo capital, que continúa a vencer o juro respectivo.

Para resolverem-se com simplicidade os problemas desta regra, exigem-se os logarithmos. Vê-se, pois, que não é ella ensinada nas aulas primarias.

Segundo exemplo. — *Pede-se o juro de 350$000 em 2 annos e 9 mezes a 9% ao anno.*

Disposição dos dados

$$\begin{array}{llll} 100 & \text{em} & 1 \text{ anno} & \text{rendem } 9 \\ 350\$000 & ,, & 2 \text{ annos } 9 \text{ mezes} & ,, \quad x \end{array}$$

Observação. — O tempo não estando referido a uma mesma unidade, é preciso fazel-o, ou em referencia á unidade *mez*, ou á unidade *anno*.

1) Referindo o tempo á unidade *mez*, como um anno tem 12 mezes e 2 annos 9 mezes têm 33 mezes, os dados do problema são:

$$\begin{array}{llll} 100 & \text{em} & 12 \text{ mezes} & \text{rendem } 9 \\ 350\$000 & ,, & 33 \quad ,, & ,, \quad x \end{array}$$

2) Referindo o tempo á unidade *anno*, como 2 annos 9 mezes equivalem a $\frac{33}{12}$ do anno*), os dados do problema são:

$$\begin{array}{llll} 100 & \text{em} & 1 \text{ anno} & \text{rendem } 9 \\ 350\$000 & ,, & \dfrac{33}{12} \quad ,, & ,, \quad x \end{array}$$

Reduzindo-se 1 anno á forma fraccionaria, tem-se $\frac{12}{12}$ do anno; e como $\frac{1}{12}$ do anno corresponde a 1 mez, os $\frac{12}{12}$ correspondem a 12 mezes e os $\frac{33}{12}$ correspondem a 33 mezes. Expellindo-se, pois, o denominador commum 12, resultam os mesmos dados já indicados acima.

Facil é a resolução por qualquer um dos methodos. O resultado é 86$625.

Terceiro exemplo. — *Pede-se o juro de 350$000 a 9% ao anno em 2 annos 9 mezes e 10 dias.*

Disposição dos dados

$$\begin{array}{llll} 100 & \text{em} & 1 \text{ anno} & \text{rendem } 9 \\ 350\$000 & ,, & 2 \text{ annos } 9 \text{ mezes } 10 \text{ dias} & ,, \quad x \end{array}$$

Observação. — Neste problema, o tempo não estando referido a uma mesma unidade, façamo-lo ou em relação á unidade *dia*, ou em relação á unidade *anno*.

*) **Para reduzir-se qualquer numero de mezes á fracção do anno,** divide-se o numero de mezes por 12. Assim, *2 annos, 9 mezes*, reduzidos á fracção do anno, dão $^{33}/_{12}$ do *anno*. Primeiramente reduzem-se os 2 annos a mezes, multiplicando-se por 12; ao producto 24 juntando-se 9, obtem-se *33 mezes*. Dividindo-se 33 por 12, apparece a fracção $^{33}/_{12}$ do anno.

1) Referindo o tempo á unidade *dia*, como um anno commercial tem 360 dias, e 2 annos 9 mezes 10 dias têm 1 000 dias, os dados do problema são:

100 em 360 dias rendem 9
350$000 „ 1000 „ „ x

2) Referindo o tempo á unidade *anno*, como 2 annos 9 mezes 10 dias equivalem $\frac{1000}{360}$ do anno*), os dados do problema são:

100 em 1 anno rendem 9

350$000 „ $\frac{1000}{360}$ *„ „ x*

Reduzindo-se 1 anno á fórma fraccionaria, tem-se $\frac{360}{360}$ do anno; e como $\frac{1}{360}$ do anno corresponde a 1 dia, os $\frac{360}{360}$ correspondem a 360 dias, e os $\frac{1000}{360}$ correspondem a 1 000 dias. Expellindo-se, pois, o denominador commum 360, resultam os mesmos dados já indicados.

Resolvido o problema por qualquer um dos methodos, obtem-se 87$500.

Quarto exemplo. — *Pede-se o juro de 350$000 emprestados a 17 de Janeiro e pagos a 9 de Maio do mesmo anno, sendo a taxa 9 °/₀ ao anno.*

Observação. — Quando se tem de attender ao *numero de dias comprehendidos entre duas datas*, considera-se o *anno com 360 dias* e o *mez com o numero de dias que realmente tem*, não se despresando o *vigesimo nono* de Fevereiro, si o anno *fôr bissexto*.

Assim, no exemplo dado, diremos:

De 17 Janeiro a 31	14	dias
Fevereiro	28	„
Março	31	„
Abril	30	„
Maio	9	„
	112	*dias.*

*) **Para reduzir-se qualquer numero de dias á fracção do anno**, divide-se o numero de dias por 360. Assim, *2 annos 9 mezes 10 dias*, reduzidos á fracção do anno, dão $^{1000}/_{360}$ do *anno*. Primeiramente reduzem-se os 2 annos a mezes, multiplicando-se por 12; ao producto 24 juntando 9 mezes, obtem-se *33 mezes*; multiplicando-se 33 por 30, obtem-se *990 dias*, que sommados com os 10, fazem *1 000 dias*. **Dividindo-se 1 000 por 360, apparece a fracção $^{1000}/_{360}$ do *anno*.**

Portanto, o problema reduz-se ao seguinte: ***Qual é o juro de 350$000 em 112 dias, a 9 °/₀ ao anno?***

100 em 360 dias rendem 9
350$000 „ 112 „ „ x

Resolve-se este problema como o precedente e obtem-se **9$800.**

Determinação da taxa

340. A taxa depende do capital e do tempo e varia na razão directa destas duas quantidades.

Primeiro exemplo. — *Sabendo-se que o capital 350$000 no fim de 2 annos produzem de juro 63$000, quer-se saber a taxa de juro.*

Disposição dos dados

350$000 em 2 annos rendem 63$000
100 „ 1 „ „ x

Methodo das proporções

Raciocinio. — 350$000 em 2 annos rendem o mesmo que 2 × 350$000 ou 700$000 em 1 anno. Assim, o problema reduz-se ao seguinte:

Si 700$000 produzem 63$000 de juro em um anno, 100, no mesmo tempo, quanto renderão?

$$700\,000 : 100 :: 63\,000 : x = \frac{100 \times 63\,000}{700\,000} = 9.$$

Methodo de reducção á unidade

350$000 em 2 annos rendem 63$000
100 „ 1 „ „ x

350$000 em 2 annos rendem 63$000

$$1 \quad „ \ 2 \quad „ \quad „ \quad \frac{63\$000}{350\,000}$$

$$1 \quad „ \ 1 \quad „ \quad „ \quad \frac{63\$000}{2 \times 350\,000}$$

$$100 \quad „ \ 1 \quad „ \quad „ \quad \frac{100 \times 63\$000}{2 \times 350\,000} = 9.$$

Segundo exemplo. — *Sabendo que o capital 350$000 no fim de 2 annos 9 mezes produziu 86$625 de juro, quer-se saber a taxa por que esteve empregado.*

Disposição dos dados

350$000 em 2 annos 9 mezes rendem 86$625
100 „ 1 anno „ x

Observação. — Sempre se deve calcular a taxa de *anno*, a não ser que outra seja expressamente pedida. Sendo assim, para a resolução do presente problema, veja-se o que ficou dito no 2.º ex. obs. 2, pag. 227. *A taxa é* 9.

Terceiro exemplo. — *Sabendo-se que o capital 350$000 no fim de 2 annos 9 mezes 10 dias produziu 87$500 de juro, por que taxa esteve empregado?*

Disposição dos dados

350$000 em 2 annos 9 mezes 10 dias rendem 87$500
100 „ 1 anno „ x

Attendendo-se ao que ficou dito na *Observação* precedente, veja-se o que ficou exposto no 3.º ex., pag. 227, obs. 2, pag. 228. *A taxa é* 9.

Determinação do capital

341. O capital depende do juro e do tempo; varia na razão directa do juro e na razão inversa do tempo.

Primeiro exemplo. — *Qual será o capital que no fim de 2 annos, a 9 % ao anno, produzirá 63$000 de juro?*

Disposição dos dados

Para render 9 em 1 anno precisa-se de 100
„ „ 63$000 „ 2 „ „ „ x

Methodo das proporções

Raciocinio. — 63$000 em 2 annos é o mesmo que $\frac{63\$000}{2}$ ou 31$500 em 1 anno. O problema proposto fica, pois, reduzido ao seguinte:

Para render 9 precisa-se de 100 em 1 anno; de quanto se precisará para, no mesmo tempo, render 31$500.

$$9 : 31\,500 :: 100 : x = \frac{100 \times 31\,500}{9} = 350\$000$$

Methodo de reducção á unidade

Para render 9 em 1 anno precisa-se de 100
„ „ 63$000 „ 2 „ „ „ x

Para render 9	em 1 anno	precisa-se de		100
„ „ 1	„ 1 „	„	„	$\frac{100}{9}$
„ „ 63$000	„ 1 „	„	„	$\frac{63\,000 \quad 100}{9}$
„ „ 63$000	„ 2 annos		„	$\frac{63\,000 \quad 100}{2 \cdot 9}$
				= 350$000.

Segundo exemplo. — *Qual será o capital que no fim de 2 annos 9 mezes a 9 % ao anno, produzirá 86$625 de juro?*

Disposição dos dados

Para render 9 em 1 anno precisa-se de 100
„ „ 86$625 „ 2 annos 9 mezes „ „ x

Referindo-se o tempo a uma mesma unidade *mez* ou *anno* (pag. 227, 2.º ex.; obs. 1 e 2), resolve-se o problema como o precedente. *O resultado é* 350$000.

Terceiro exemplo. — *Qual será o capital que no fim de 2 annos 9 mezes 10 dias a 9 % ao anno, produzirá 87$500 de juro?*

Disposição dos dados

Para render 6 em 1 anno precisa-se de 100
„ „ 87$500 „ 2 an. 9 m. 10 d. „ „ x

Referindo-se o tempo a uma mesma unidade, *dia* ou *anno* (pag. 227 e 228, ex. 3.º obs. 1 e 2), resolve-se o problema como o 1.º *O resultado é* 350$000.

Determinação do tempo

342. O tempo depende do capital e do juro e varia na razão inversa do capital e na razão directa do juro.

Primeiro exemplo. — *Em que tempo o capital 350$000. a 9% ao anno produzirá 63$000 de juro?*

Disposição dos dados

100	*rendem*	*9*	*em 1*	*anno*
350$000	„	*63$000*	„ *x*	„

Methodo das proporções

Raciocinio. — 100 rendendo 9 em 1 anno, é o mesmo que $\frac{100}{9}$ rendendo 1 no mesmo tempo. 350$000 rendendo 63$000 em x annos, é o mesmo que $\frac{350\,000}{63\,000}$ ou $\frac{350}{63}$ rendendo 1 no mesmo tempo x.

O problema fica, portanto, reduzido ao seguinte:

Si $\frac{100}{9}$ em 1 anno rendem 1, em que tempo $\frac{350}{63}$ renderão o mesmo?

Reduzindo ao mesmo denominador as duas fracções, e expellindo o denominador commum (veja-se o exemplo 1º, pagina 215), resulta:

$$350 : 700 :: 1 : x = \frac{700}{350} = 2 \text{ annos.}$$

Methodo da reducção á unidade

100	*rendem*	*9*	*em 1*	*anno*
350$000	„	*63$000*	„ *x*	„

100	rendem	9	em	1	anno
1	„	9	„	100	annos
1	„	1	„	$\frac{100}{9}$	do anno
350$000	„	1	„	$\frac{100}{350\,000 \times 9}$	„ „
350$000	„	63$000	„	$\frac{63\,000 \times 100}{350\,000 \times 9} = 2$	annos.

Segundo exemplo. — *Em que tempo o capital 350$000, a 9% ao anno, produzirá 86$625 de juro?*

Disposição dos dados

100	*rendem*	*9*	*em 1*	*anno*
350$000	„	*86$625*	„ *x*	„

Observação. — Pelo enunciado deste problema vê-se que é identico ao precedente e como este se resolve. (*O resultado* é 2 annos 9 mezes). Sómente deve-se notar que o calculo dá primeiro *annos*; si não houver annos, ou si depois de terem-se obtido *annos* no quociente, apparecer resto, multiplica-se este por 12, divide-se o producto pelo mesmo divisor e obtêm-se *mezes* no quociente.

Si depois de haverem-se obtido *mezes* no quociente, apparecer resto, multiplica-se este por 30, e effectuando-se a divisão obtem-se *dias* no quociente.

Terceiro Exemplo. — *Em que tempo o capital 350$000 a 9% ao anno, produzirá 87$500 de juro?*

Disposição dos dados

100	*rendem*	*9*	*em 1*	*anno*
350$000	„	*87$500*	„ *x*	„

Este problema resolve-se como os dois precedentes attendendo-se ao que ficou dito na ultima observação. *O resultado é* **2 annos 9 mezes 10 dias.**

Formulas

343. Chama-se **formula** *a expressão geral das operações que se têm de effectuar sobre numeros dados, para obter-se o valor de uma quantidade pedida.*

344. Os problemas da regra de juros resolvem-se facilmente por um methodo pratico, deduzido de formulas simples e geraes. As questão de juros, comprehendendo sempre *juro, capital, taxa* e *tempo*, reduzem-se a determinar uma destas quantidades por meio das tres outras.

Para generalisar, representemos por letras essas partes, e estabeleçamos o seguinte proplema:

Qual será o juro do capital — **c** — *a* — **i** — % *ao anno em* — **t** — *annos?*

Disposição de dados

100	*em 1*	*anno*	*rendem*	*i*
c	„ *t*	„	„	*x*

$$\begin{array}{llll} \text{Si } 100 \text{ em } 1 \text{ anno rendem} & & & i \\ 1 \;\text{,,}\; 1 \;\text{,,} & & \text{,,} & \dfrac{i}{100} \\ 1 \;\text{,,}\; t \;\text{,,} & & \text{,,} & \dfrac{i \times t}{100} \\ c \;\text{,,}\; t \;\text{,,} & & \text{,,} & \dfrac{c \times i \times t}{100} \end{array}$$

Logo o juro $x = \dfrac{c \times i \times t}{100} = \dfrac{cit}{100}$; ou designando-se por — j — o juro, teremos: $j = \dfrac{cit}{100}$ *(A)*

Para ter-se pois, o juro, *multiplica-se o capital pela taxa e pelo tempo, e divide-se o resultado por 100.*

345. Da formula $j = \dfrac{cit}{100}$ podemos deduzir outras que sirvam para determinar o *capital*, a *taxa* e o *tempo*. Para isto, devemos primeiramente modificar a formula acima.

Uma igualdade não se altera, quando se multiplicam ambos os seus membros por um mesmo numero.

Podemos, portanto, multiplicar por 100 ambos os membros da igualdade $j = \dfrac{cit}{100}$, e ella se transforma na seguinte: $100\, j = cit$.

Attendendo-se ao que ficou exposto na observação do n. 325, pag. 210, podemos determinar o valor de *c*, *i* e *t*.

Considerando-se — i — como incognita, teremos:

$$i = \frac{100\, j}{ct} \quad (B)$$

Assim pois, querendo-se conhecer a taxa, *multiplica-se o juro por 100, e divide-se o producto pelo capital multiplicado pelo tempo.*

Si considerarmos — c como incognita, teremos:

$$c = \frac{100\, j}{it} \quad (C)$$

Assim, para ter-se o capital, *multiplica-se o juro por 100, e divide-se o producto pela taxa multiplicada pelo tempo.*

Finalmente, si — t — figurar como incognita, teremos:

$$t = \frac{100\, j}{ci} \quad (D)$$

Querendo-se conhecer o tempo, *multiplica-se o juro por 100, e divide-se o producto pelo capital multiplicado pela taxa.*

Observações

Observação primeira. — Note-se que nas tres ultimas formulas (B, C, D) o numerador é sempre constante *(100 j)*, sendo o denominador composto das duas quantidades que restam supprimindo-se na formula *100 j = cit*, a lettra que representa a quantidade que se procura.

Observação segunda. — Na applicação destas formulas attenda-se ao seguinte:

A taxa sendo de anno, o tempo si não fôr dado em anno, deve-se reduzir á fracção do anno.

A taxa sendo de mez, o tempo si não fôr dado em mezes, deve-se reduzir a mezes.

Applicação das formulas

Juro. — 1) *Pede-se o juro de 350$000 em 2 annos a 9% ao anno.*

$$j = \frac{cit}{100} = \frac{350\,000 \times 9 \times 2}{100} = 63\$000.$$

2) *Pede-se o juro de 35$000 em 2 an. 9 m. a 9% ao anno*

$$j = \frac{cit}{100} = \frac{350\,000 \times 9 \times {}^{33}/_{12}}{100} = \frac{350\,000 \times 9 \times 33}{100 \times 12} = 86\$625.$$

3) *Pede-se o juro de 350$000 em 2 an. 9 m. 10 d. a 9% ao anno.*

$$j = \frac{cit}{100} = \frac{350\,000 \times 9 \times {}^{1000}/_{360}}{100} = \frac{350\,000 \times 9 \times 1000}{100 \times 360} = 87\$500.$$

Taxa. — 1) *Sabendo-se que o capital 350$000 no fim de 2 annos produziu 63$000 de juro, quer-se saber a que taxa esteve empregado?*

$$i = \frac{100\,j}{ct} = \frac{100 \times 63\,000}{350\,000 \times 2} = 9.$$

2) *Sabendo-se que o capital 350$000 no fim de 2 an. 9 m. produziu 86$625 de juro, quer-se saber a que taxa esteve empregado?*

$$i = \frac{100}{ct} = \frac{100 \times 86\,625}{350000 \times {}^{33}/_{12}} = \frac{100 \times 86\,625 \times 12}{350\,000 \times 33} = 9.$$

3) *Sabendo-se que o capital 350$000 em 2 an. 9 m. 10 d. produziu 87$500 de juro, a que taxa esteve empregado?*

$$i = \frac{100\,j}{ct} = \frac{100 \times 87\,500}{350\,000 \times {}^{1000}/_{360}} = \frac{100 \times 87\,500 \times 360}{350\,000 \times 1000} = 9.$$

Capital. — 1) *Qual será o capital que no fim de 2 annos, a 9°/. ao anno, produzirá 63$000 de juro?*

$$c = \frac{100\,j}{it} = \frac{100 \times 63\,000}{9 \times 2} = 350\$000.$$

2) *Qual será o capital que no fim de 2 an. 9. m., a 9°/. ao anno, produzirá 86$625 de juro?*

$$c = \frac{100\,j}{it} = \frac{100 \times 86\,625}{9 \times {}^{33}/_{12}} = \frac{100 \times 86\,625 \times 12}{9 \times 33} = 350\$000.$$

3) *Qual será o capital que no fim de 2 an. 9 m. 10 d., a 9°/. ao anno, produzirá 87$500 de juro?*

$$c = \frac{100\,j}{it} = \frac{100 \times 87\,500}{9 \times {}^{1000}/_{360}} = \frac{100 \times 87\,500 \times 360}{9 \times 1000} = 350\$000.$$

Tempo. — 1) *Em que tempo o capital 350$000, a 9°/. ao anno, produzirá 63$000 de juro?*

$$t = \frac{100\,j}{ci} = \frac{100 \times 63\,000}{350\,000 \times 9} = 2 \text{ annos.}$$

2) *Em que tempo o capital 350$000, a 9°/. ao anno, produzirá 87$625 de juro?*

$$t = \frac{100\,j}{ci} = \frac{100 \times 86\,625}{350\,000 \times 9} = 2 \text{ an. } 9 \text{ m.}$$

3) *Em que tempo o capital 350$000, a 9°/. ao anno, produzirá 87$500 de juro?*

$$t = \frac{100\,j}{ci} = \frac{100 \times 87\,500}{350\,000 \times 9} = 2 \text{ an. } 9 \text{ m. } 10 \text{ d.}$$

Questões especiaes

Primeiro exemplo. — *Sendo 520$000 a somma de um capital com o seu juro correspondente a 8 mezes, a 6% ao anno, qual é o capital? qual é o juro?*

Raciocinio. — Não se podendo comparar senão quantidades que estejam entre si nas mesmas condições, o capital augmentado de seu juro em 8 mezes deve-se comparar com 100 augmentados do juro para o mesmo tempo. Assim, si 100 em 12 mezes rendem 6, em 8 mezes rendem 4. Portanto, 100 valem 104 no fim de 8 mezes; e deste modo teremos:

Si em 104 o capital é 100
„ 520$000 „ „ „ x

Resolvido este simples problema, obtem-se.... 500$000 para *capital*.

Subtrahindo-se 500$000 de 520$000, o resto 20$000 representa o *juro*.

Observação. — Tambem póde-se calcular directamente o juro, dispondo-se os dados do problema da seguinte fórma:

Em 104 o juro é 4
„ 520$000 „ „ „ x

Resolvido o problema, obtem-se *20$000* de *juro*, que subtrahindo-se de 520$000 nos faz apparecer o *capital* 500$000.

Segundo exemplo. — *Um capital com o juro correspondente a 4 mezes, eleva-se a 620$000; o mesmo capital com o juro correspondente a 9 mezes eleva-se a 645$000. Qual é o capital e qual a taxa?*

Raciocinio. — O capital sendo o *mesmo*, a differença 645$000 — 620$000 ou 25$000 representa o *accrescimo do juro* correspondente ao *accrescimo do tempo* de 4 para 9 mezes; isto é, 25$000 representa o juro do capital em 5 mezes. Sendo assim, diremos:

Si em 5 mezes o juro é 25$000

„ 1 mez „ „ será $\frac{25\$000}{5}$

„ 4 mezes „ „ „ $\frac{4 \times 25\$000}{5} = 20\$000.$

Ora, em 620$000 ha um capital augmentado do juro correspondente a 4 mezes, e como este juro é 20$000, o capital será 620$000 — 20$000 ou 600$000.

Sabendo-se que o capital é 600$000 e 20$000 o juro correspondente a 4 mezes é facil determinar-se a taxa por meio da formula

$$i = \frac{100\,j}{ct} = \frac{100 \times 20\,000}{600\,000 \times {}^4/_{12}} = \frac{100 \times 20\,000 \times 12}{600\,000 \times 4} = 10.$$

Terceiro exemplo. — *Uma pessoa pediu emprestado 1:200$000 a 11% ao anno, por 8 mezes. No fim de 5 mezes deu por conta 800$000. Quanto deve dar para saldar o debito, quando se vencerem os 8 mezes?*

Raciocinio. Quando a pessoa deu por conta 800$000, devia o juro de 1:200$000 em 5 mezes ou

$$\frac{1:200\$000 \times 11 \times 5}{100 \times 12} = 55\$000.$$

Com a prestação de 800$000, o seu debito ficou sendo: 1:200$000—800$000=400$000.

$$\frac{400\$000 \times 11 \times 3}{100 \times 12} = 11\$000.$$

O pagamento por saldo é 55$000+400$000+11$000=466$000.

Problemas sobre juros

1. *Calcular o juro* de 570$000 rs. em 3 annos a 9% ao anno. — R. 153$900 rs.

2. Empregado a 10% ao anno o capital 1:200$000 rs., *que juro produzirá em 3 annos e 4 mezes?* — R. 400$000 rs.

3. Em 2 annos 4 mezes e 15 dias *quanto produzirá de juro o capital* 560$000 rs. a 9,75% ao anno? — R. 129$675 rs.

4. *Qual será o juro* de 800$000 rs. em 2½ annos a ¾ % ao mez? — R. 180$000 rs.

5. *A quantos por cento se deve empregar* o capital 570$000 rs. para produzir 153$900 rs. de juro em 3 annos? — R. 9 % ao anno.

6. *Qual a taxa por que esteve empregado* o capital 800$000 rs. que rendeu 180$000 rs. de juro em 2½ annos? — R. ¾ % ao mez.

7. *A que taxa deve empregar-se* o capital 1:200$000 rs. para render 400$000 rs. de juro em 3 annos e 4 mezes? — R. 10 % ao anno.

8. O capital 560$000 rs. em 2 annos 4 mezes e 15 dias rendeu 129$675 de juro. *A quantos por cento esteve empregado?* — R. 9,75 % ao anno.

9. *Que capital renderá* 153$900 rs. de juro em 3 annos a 9 % ao anno? — R. 570$000 rs.

10. *Qual será o capital* que empregado a ¾ % ao mez produziu 180$000 rs. de juro em 2½ annos? — R. 800$000 rs.

11. *Achar o capital* que em 3 annos e 4 mezes rendeu 400$000 de juro, a 10 % ao anno. — R. 1:200$000 rs.

12. *Que capital será preciso empregar-se* para produzir 129$675 de juro em 2 annos 4 mezes e 15 dias, a 9,75 % ao anno? — R. 560$000 rs.

13. *Em que tempo* o capital 570$000 rs., empregado a 9% ao anno, renderá 153$900 rs. de juro? — R. 3 annos.

14. *Por quanto tempo deve estar empregado* o capital 800$000 rs. para render 180$000 rs. de juro a ¾ % ao mez. — R. 2½ annos.

15. *Que tempo será preciso* para o capital 1:200$000 rs. a 10% ao anno, render 400$000 rs. de juro? — R. 3 annos e 4 mezes.

16. O capital 560$000 rs. a 9,75 % ao anno rendeu 129$675 de juro. *Por quanto tempo esteve empregado?* — R. 2 annos 4 mezes 15 dias.

17. *Que tempo será preciso* para que 600$000 rs., a juro de 6% ao anno, fique em 682$000 rs. (capital e juros)? — R. 2 annos 3 mezes 10 dias.

18. *Qual será o capital preciso* para que, a juro de 9 % ao anno, o capital e juros reunidos no fim de 3 annos sejam 635$000 rs.? — R. 500$000.

19. O capital 360$000 rs., augmentado com os respectivos juros durante 2 annos e 4 mezes, chegou a 452$400 rs. *Qual era a taxa?* — R. 11 %.

20. Sendo 1:365$000 a somma do capital e juro correspondente a 1 anno 4 mezes 15 dias, a 10% ao anno, *calcular o juro.* — R. 165$000.

§ III — Regra de desconto

346. Regra de desconto *é toda questão que tem por fim determinar o abatimento que deve soffrer uma letra pagavel em certo prazo, mas cuja importancia se deseja receber antes do seu vencimento.*

347. *Desconto* é o abatimento que se deve fazer na importancia de uma letra apresentada para ser paga antes de se vencer.

348. Uma letra tem dois valores: nominal e real.

Valor nominal de uma letra é a quantia inscripta na letra.

Valor actual ou *real* de uma letra é a quantia que por ella se dá no dia em que é apresentada a desconto.

349. Ha duas especies de desconto: desconto por fóra e desconto por dentro.

Desconto por fóra é o juro do valor nominal da letra durante o tempo que tem de correr a dita letra.

Desconto por dentro é o juro do valor actual da letra.

Observação. — O desconto por fóra, a taxa sendo a mesma, é maior do que o desconto por dentro, que deveria ser o unico admissivel.

O desconto por fóra é chamado desconto *commercial*, e o desconto por dentro chama-se tambem desconto *racional*.

Na regra de desconto, do mesmo modo que nas questões de juro, podem-se ter quatro quantidades a considerar: — 1.°) *o desconto*; 2.° *a taxa de desconto*; 3.°) *o valor da letra*; 4.°) *o tempo que falta até o dia do vencimento*. Estas quatro quantidades correspondem ao *juro*, á *taxa*, ao *capital* e ao *tempo*.

A) Desconto por fóra

Observação. — *No desconto* por fóra — 100 — *representa* um valor nominal.

Determinação do desconto

350. O desconto depende do valor nominal e do tempo, e varia na razão directa dessas quantidades.

Exemplo. — *Uma pessoa possuindo uma letra de 1:200$000, a vencer d'ahi a 9 mezes, quer descontal-a já. Qual será o desconto que soffre a letra, sendo a taxa 11 % ao anno?*

Disposição dos dados

Em	*100*	*a vencer-se em*	*12*	*mezes*	*descontam-se*	*11*
„	*1:200$000*	„	„	*9*	„	*x*

Methodo das proporções

Raciocinio. — 100 em 12 mezes é o mesmo que 12×100 ou *1200* em 1 mez. Do mesmo modo 1:200$000 em 9 mezes é o mesmo que 9×1:200$000 ou *10:800$000* em 1 mez. Assim o problema reduz-se ao seguinte:

Si 1200 soffrem 11 de desconto, 10:800$000 que descontos terão?

$$1\,200 : 10\,800\,000 :: 11 : x = \frac{11 \times 10\,800\,000}{1\,200} = 99\$000.$$

Methodo de reducção á unidade

Em	*100*	*a vencer-se em*	*12*	*mezes*	*descontam-se*	*11*
„	*1:200$000*	„	„	*9*	„	*x*

Em	*100*	*a vencer-se em*	*12*	*mezes*	*descontam-se*	*11*
„	1	„	„ 12	„	„	$\frac{11}{100}$
„	1	„	„ 1	„	„	$\frac{11}{12 \times 100}$
„	1:200$000	„	„ 1	„	„	$\frac{1\,200\,000 \times 11}{12 \times 100}$
„	1:200$000	„	„ 9	„	„	$\frac{9 \times 11 \times 1\,200\,000}{12 \times 100} = 99\$000.$

Determinação da taxa

351. A taxa depende do valor nominal e do tempo, e varia na razão directa dessas quantidades.

Exemplo 1.) — *Uma letra de 1:200$000 rs. foi descontada por fóra, faltando 9 mezes para seu vencimento e soffreu o desconto de 99$000 rs. Qual foi a taxa do desconto?*

Disposição dos dados

1:200$000	....	*9 mezes*	......	*99$000*
100	....	*12*	„	......	*x*

Methodo das proporções

Raciocinio. — 1:200$000 em 9 mezes é o mesmo que 10:800$000 em 1 mez; 100 em 12 mezes é o mesmo que 1200 em 1 mez. Substitue-se o problema proposto por este outro que lhe é equivalente: *Si para 10:800$000 o desconto é 99$000, no mesmo tempo, que é 1 mez? qual será o desconto para 1200 no mesmo tempo, que é 1 mez?*

$$10\,800\,000 : 1\,200 :: 99\,000 : x = \frac{1\,200 \times 99\$000}{10\,800\,000} = 11\ \%.$$

Methodo de reducção á unidade

1:200$000	......	*9 mezes*	......	*99$000*
100	......	*12*	„	......	*x*

1:200$000	9 mezes		$99\$000$
1	9	"	$\dfrac{99\$000}{1\,200\,000}$
1	1	"	$\dfrac{99\$000}{9 \times 1\,200\,000}$
100	1	"	$\dfrac{100 \times 99\$000}{9 \times 1\,200\,000}$
100	12	"	$\dfrac{12 \times 100 \times 99\$000}{9 \times 1\,200\,000} = 11\%$

Exemplo 2.) — *Uma letra de 1:200$000 rs. foi descontada por fóra, faltando 9 mezes para o seu vencimento, e o possuidor recebeu 1:101$000 rs. Qual foi a taxa do desconto?*

A questão tem a mesma solução que a precedente, attendendo-se a que equivale ser dado o desconto 1:200$000 — 1:101$000 = 99$000 rs.

Determinação do valor actual da letra

Exemplo. — *Qual é o valor actual de uma letra de 1:200$000 a que faltam ainda 9 mezes para o vencimento, sendo 11 % ao anno a taxa do desconto?*

Raciocinio. — Conhecendo-se o *desconto* que deve soffrer uma letra, para ter-se o *valor actual* da mesma, basta subtrahir-se este desconto do valor nominal.

Calculando-se o desconto que soffre 1:200$000 em 9 mezes a 11 % ao anno, sabe-se que esse desconto é de *99:000*. Subtrahindo-se esta quantia de *1:200$000* (valor nominal), o resto *1:101$000* exprime o valor *actual* ou *real*. Este processo é o geralmente seguido.

No entretanto, póde-se calcular *directamente* o valor actual; para isso raciocina-se do modo seguinte:

Procurando-se o valor actual, é preciso fazer apparecer no problema um valor actual que sirva de termo para estabelecer-se a relação.

A taxa sendo 11 % ao anno, calcula-se o juro de 100 durante 9 mezes. Este juro, que é $\dfrac{11 \times 9}{12}$ ou $^{33}/_{4}$, subtraia-se de 100, e obter-se-á o valor actual de 100. Este valor é $100 - ^{33}/_{4} = \dfrac{400 - 33}{4} = ^{367}/_{4}$.

Feito isto, o problema reduz-se ao seguinte:

De 100 (valor nominal para 9 mezes) o valor actual sendo $^{367}/_{4}$ *de 1:200$000 qual será?*

Disposição dos dados

De 100 (val. nom.) o val. act. é $^{367}/_{4}$
" 1:200$000 " " " " " " x

Methodo das proporções

$$100 : 1\,200\,000 :: {}^{367}/_{4} : x = \frac{367 \times 1\,200\,000}{4 \times 100} = 1:101\$000.$$

Methodo de reducção á unidade

De 100 (val. nom.) o val. act. é $^{367}/_{4}$
" 1:200$000 " " " " " " x

De	100	.... o valor actual é	$\dfrac{367}{4}$
"	1	.... " " " "	$\dfrac{367}{100 \times 4}$
"	1:200$000	.... " " " "	$\dfrac{1\,200\,000 \times 367}{100 \times 4} = 1:101\$000.$

Determinação do valor nominal da letra

352. **O valor nominal depende do desconto e do tempo; varia na razão directa do desconto e na razão inversa do tempo.**

Exemplo. — *Qual é o valor nominal duma letra que, sendo descontada por fóra a 11 % ao anno, e faltando 9 mezes para o seu vencimento, soffreu o desconto de 99$000?*

Disposição dos dados

O desc. 11 para 12 m. corresponde ao val. nom. 100
" " 99$000 " 9 " " " " " x

Methodo das proporções

Raciocinio. — O desconto 11 para 12 mezes é o mesmo que $^{11}/_{12}$ para 1 mez. Do mesmo modo, 99$000 para 9 mezes é o mesmo que $^{99000}/_{9}$ ou 11$000 para 1 mez. Assim, o problema reduz-se ao seguinte:

Si o desconto $^{11}/_{12}$ corresponde ao valor nominal 100, a que valor corresponderá o desconto 11$000? Dispostos os dados, temos:

$$\begin{array}{lcl} ^{11}/_{12} & \ldots\ldots\ldots\ldots & 100 \\ 11\$000 & \ldots\ldots\ldots\ldots & x \end{array}$$

Reduzindo-se 11 000 a *12 avos*, temos: $^{132000}/_{12}$; e expellindo o denominador commum 12, resulta:

$$\begin{array}{lcl} 11 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 100 \\ 132\,000 & \ldots\ldots\ldots\ldots & x \end{array}$$

$$11 : 132\,000 :: 100 : x = \frac{100 \times 132\,000}{11} = 1:200\$000.$$

Methodo de reducção á unidade

O desc. 11 para 12 m. corresponde ao val. nom. 100
„ „ 99$000 „ 9 „ „ „ „ „ x

O desc. 11 para 12 m. corresponde 100

„ „ 1 „ 12 „ „ $\frac{100}{11}$

„ „ 1 „ 1 „ „ $\frac{12 \times 100}{11}$

„ „ 99$000 „ 1 „ „ $\frac{99\,000 \times 12 \times 100}{11}$

„ „ 99$000 „ 9 „ „ $\frac{99\,000 \times 12 \times 100}{9 \times 11} = 1:200\$000.$

Observação. — O mesmo problema póde ser modificado, dando-se o valor actual da letra em vez do desconto. O enunciado será:

Qual é o valor nominal de uma letra, sabendo-se que, descontada por fóra a 11% ao anno, e faltando 9 mezes para o seu vencimento, o seu possuidor recebeu .... 1:101$000.

Raciocinio. — Como no problema tem-se o valor actual 1:101$000, é preciso determinar-se um outro que lhe corresponda.

A taxa sendo 11% ao anno, calcula-se o juro de 100 em 9 mezes; e sendo $^{33}/_{4}$ este juro, o valor actual de 100 será 100 — $^{33}/_{4}$ = $^{400}/_{4}$ — $^{33}/_{4}$ = $^{367}/_{4}$.

Assim, o problema reduz-se ao seguinte:

Si $^{367}/_{4}$ é o valor actual correspondente ao valor nominal 100, qual será o valor nominal correspondente ao valor actual 1:101$000?

Disposição dos dados

$$\begin{array}{llcl} ^{367}/_{4} & \textit{val. act.} & \ldots\ldots\ldots\ldots & 100 \textit{ val. nom.} \\ 1:101\$000 & ,, \quad ,, & \ldots\ldots\ldots\ldots & x \quad ,, \quad ,, \end{array}$$

Reduzindo-se o inteiro 1:101$000 á fórma fraccionaria *quartos, tem-se* $^{4404000}/_{4}$; e expellindo-se o denominador commum 4, resulta:

$$\begin{array}{llcl} 367 & \textit{val. act.} & \ldots\ldots\ldots\ldots & 100 \textit{ val. nom.} \\ 4:404\$000 & ,, \quad ,, & \ldots\ldots\ldots\ldots & x \quad ,, \quad ,, \end{array}$$

Methodo das proporções

$$367 : 4404\,000 :: 100 : x = \frac{4\,404\,000 \times 100}{367} = 1:200\$000.$$

Methodo de reducção á unidade

Para 367 *(val. act.)* o val. nom. é 100

„ 1 „ „ „ „ „ „ $\frac{100}{367}$

„ 4:404$000 „ „ „ „ „ „ $\frac{4\,404\,000 \times 100}{367} = 1:200\$000.$

Determinação do tempo

353. O tempo depende do valor nominal e do desconto; varia na razão inversa do valor nominal e na razão directa do desconto.

Exemplo. — *Uma letra de 1:200$000 rs. foi descontada por fóra a 11% ao anno, e soffreu o desconto de 99$000 rs. Quanto tempo faltava para o seu vencimento.*

Disposição dos dados

$$\begin{array}{llcl} \textit{Si} & 100 & \ldots\ldots & 11 \ldots\ldots 12 \textit{ mezes} \\ & 1:200\$000 & \ldots\ldots & 99\$000 \ldots\ldots x \quad ,, \end{array}$$

Methodo das proporções

Raciocinio. — 100 com 11 de desconto para 1 anno ou 12 mezes é o mesmo que $^{100}/_{11}$ com o desconto 1 *para o mesmo tempo*. Do mesmo modo 1:200$000 com o desconto 99$000 para x mezes é o mesmo que $\frac{1\,200\,000}{99\,000}$ com 1 *de desconto para x meses*. Assim o problema reduz-se ao seguinte:

Si $^{100}/_{11}$ soffre 1 de desconto para 12 mezes, em que tempo $\frac{1\,200\,000}{99\,000}$ soffrerá o mesmo desconto?

Disposição dos dados

$$\begin{array}{lcl} ^{100}/_{11} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 12\ \textit{mezes} \\ \frac{1\,200\,000}{99\,000} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & x \quad ,, \end{array}$$

Reduzindo-se as duas fracções ao mesmo denominador, e expellindo-se o denominador commum, resulta:

$$\begin{array}{lcl} 900\$000 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 12\ \textit{mezes} \\ 1:200\$000 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & x \quad ,, \end{array}$$

$$1\,200\,000 : 900\,000 :: 12 : x = \frac{900\,000 \times 12}{1\,200\,000} = 9 \text{ mezes.}$$

Methodo de reducção a unidade

$$\begin{array}{llll} \textit{Si}\quad 100 \ldots & 11 \ldots & 12 & \textit{mezes} \\ 1:200\$000 \ldots & 99\$000 \ldots & x & ,, \\ 100 \ldots & 11 \ldots & 12 & \text{mezes} \\ 1 \ldots & 11 \ldots & 100 \times 12 & ,, \\ 1 \ldots & 1 \ldots & \frac{100 \times 12}{11} & ,, \\ 1:200\$000 \ldots & 1 \ldots & \frac{100 \times 12}{1\,200\,000 \times 11} & ,, \\ 1:200\$000 \ldots & 99\$000 \ldots & \frac{99\,000 \times 100 \times 12}{1\,200\,000 \times 11} = 9 & \text{mezes.} \end{array}$$

Observação. — *Si, em vez do* **desconto**, *for dado o* **valor actual**, o mesmo problema se enunciará assim:

Uma letra de 1:200$000 rs. foi descontada por fóra a 11% ao anno, e o possuidor recebeu 1:101$000 rs. Quanto tempo faltava para o seu vencimento?

Esta questão é a mesma que a antecedente, desde que tiremos 1:101$000 de 1:200$000, para obtermos o desconto 99$000.

B) Desconto por dentro

Tomemos os mesmos problemas já expostos e resolvamo-los agora para o desconto por dentro.

Observação. — *No desconto* **por dentro — 100 —** *representa* **um valor actual.**

Determinação do desconto

Exemplo. — *Que desconto* **(por dentro)** *deve soffrer uma letra de 1:200$000 a vencer-se a 9 mezes, sendo a taxa 11% ao anno?*

Raciocinio. — Para resolvermos o presente problema, devemos **primeiramente formar com 100** um valor nominal que corresponda ao valor nominal 1:200$000. Para isto, calcula-se o juro de 100 em 9 mezes a 11% ao anno; e obtido esse juro, que é $^{33}/_{4}$, junta-se a 100, e teremos que $100 + {}^{33}/_{4}$ ou $^{433}/_{4}$ representa um valor nominal para o mesmo tempo *(9 mezes)*.

Deste modo, reduziremos o problema proposto ao seguinte:

Si em $100 + {}^{33}/_{4}$ **(valor nominal para 9 mezes)** *o desconto por dentro é $^{33}/_{4}$, em 1:200$000 rs.* **(valor nominal para os mesmos 9 mezes)** *qual será o desconto por dentro?*

Disposição dos dados

$$\begin{array}{lll} \textit{Si em} & ^{433}/_{4} & \textit{o desconto por dentro é } ^{33}/_{4} \\ ,, & 1:200\$000 & ,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad x \end{array}$$

Reduzindo 1:200$000 á expressão fraccionaria *quartos*, e expellindo o denominador commum, resulta:

$$\begin{array}{lll} \textit{Em} & 433 & \textit{o desconto por dentro é } ^{33}/_{4} \\ ,, & 4:800\$000 & ,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad x \end{array}$$

Methodo das proporções

$$433 : 4\,800\$000 :: {}^{33}/_{4} : x = \frac{4\,800\,000 \times 33}{433 \times 4} \quad 91\$455.$$

Methodo de reducção á unidade

Em 433	o desc. por dentro é	$\frac{33}{4}$
„ 1	„ „ „ „ „	$\frac{33}{433\times4}$
4:800\$000	„ „ „ „ „	$\frac{4\,800\,000\times33}{433\times4} =$
		$= 91\$455.$

Determinação da taxa

Exemplo. — *Uma letra de 1:200\$000 rs. foi descontada por dentro, faltando 9 mezes para o seu vencimento e soffreu o desconto de 91\$455 rs. Qual foi a taxa do desconto?*

Raciocinio. — Sabemos que dá-se o nome de *taxa* ao juro de *100* em *1 anno* ou em *1 mez*. E sendo 100 um *valor actual* no desconto por dentro, precisamos ter uma *quantidade homogenea* no problema proposto, a qual felizmente se obtem, subtrahindo-se 91\$455 rs. do valor nominal 1:200\$000 rs., isto é, 1:108\$545 rs. Assim, teremos o problema proposto convertido no seguinte que lhe é equivalente:

Si 1:108\$545 rs. tem de juro 91\$455 rs. em 9 mezes, qual será juro de 100 em 12 mezes?

Disposição dos dados

Si 1:108\$545 em 9 mezes tem de desconto 91\$455
100 „ 12 „ „ „ „ x

Methodo das proporções

Raciocinio. — 1:108\$545 rs. em 9 mezes é o mesmo que 9×1:108\$545 ou 9:976\$905 em 1 mez. Do mesmo modo, 100 em 12 mezes é o mesmo que 12×100 ou 1200 em 1 mez. Resulta, pois, o seguinte enunciado:

Si 9:976\$905 tem de desconto 91\$455, 1200 que descont soffrerão?

Disposição dos dados

Si 9:976\$905 tem de desconto 91\$455
1200 „ „ „ x

$$9\,976\,905 : 1\,200 :: 91\$455 : x = \frac{1200\times91\$455}{9\,976\,905} = 11\%.$$

Methodo de reducção á unidade

Si 1:108\$545 em 9 mezes tem de desconto 91\$455
100 „ 12 „ „ „ „ x

1:108\$545	9 mezes	$91\$455$
1	9 „	$\frac{91\$455}{1\,108\,545}$
1	1 mez	$\frac{91\$455}{9\times1\,108\,545}$
100	1 „	$\frac{100\times91\$455}{9\times1\,108\,545}$
100	12 mezes	$\frac{12\times100\times91\$455}{9\times1\,108\,545} =$
		$= 11\%.$

Observação. — O enunciado do problema tambem poderia ser assim:

Uma letra de 1:200\$000 rs. foi descontada por dentro faltando 9 mezes para o seu vencimento, e o possuidor recebeu 1:108\$545 rs. Qual foi a taxa?

Este problema differe do precedente apenas por ter sido dado o *valor actual* em vez do *desconto*. Mas subtrahindo-se 1:108\$545 de 1:200\$000, obtem-se o desconto 91\$455, e o problema fica reduzido ao proposto, **já resolvido.**

Determinação do valor actual da letra

Exemplo. — *Qual é o valor actual de uma letra de 1:200\$000 a vencer-se a 9 mezes, sendo a taxa 11% ao anno?*

Raciocinio. — Subtrahindo do valor nominal 1:200\$000 o desconto *por dentro* que esta quantia soffre em 9 mezes a 11% ao anno, isto é, 91\$455 (vid. exemplo da pag. 247, *determinação do desconto), obtem-se 1:108\$545 para valor actual.*

Observação. — *O valor actual tambem póde ser directamente determinado.* Para isso, façamos o seguinte:

Raciocinio. — Havendo um valor nominal (1:200\$000) no problema, é necessario fazer apparecer outro que lhe sirva de termo para a relação. Para isso, procura-se o juro de 100 em 9 mezes a 11 %, ao anno; junta-se a 100 esse juro, que é $^{33}/_{4}$, e forma-se assim o valor nominal 100 + $^{33}/_{4}$, ou $^{433}/_{4}$. O problema reduz-se ao seguinte:

Si em 100 + $^{33}/_{4}$ ou $^{433}/_{4}$, o valor actual é 100, em 1:200$000 qual será o valor actual?

Disposição dos dados

Si em $^{433}/_{4}$ *o valor actual é 100*
,, 1:800$000 ,, ,, ,, ,, x

Reduzindo-se o inteiro 1:200$000 á expressão fraccionaria *quartos*, e expellindo o denominador commum, resulta:

Em 433 o valor actual é 100
,, 4:800$000 ,, ,, ,, ,, x

Methodo das proporções

$$433 : 4\,800\,000 :: 100 : x = \frac{4\,800\,000 \times 100}{433} = \mathbf{1:108\$545.}$$

Methodo de reducção á unidade

Em 433 o valor actual é 100
,, 4:800$000 ,, ,, ,, ,, x

Em	433	o val. act. é	100
,,	1		$\frac{100}{433}$
,,	4:800$000	,, ,, ,, ,,	$\frac{4\,800\,000 \times 100}{433} = \mathbf{1:108\$545.}$

Determinação nominal da letra

Exemplo. — *Uma letra para cujo vencimento faltavam 9 mezes, foi descontada, por dentro, a 11 % ao anno, e soffreu o abatimento de 91$455. Qual era o seu valor nominal?*

Raciocinio. — Primeiramente é preciso calcular um valor nominal que corresponda ao procurado. Para isso, procura-se o juro de 100 em 9 mezes a 11 % ao anno; obtido esse juro, que é $^{33}/_{4}$, junta-se a 100, e obtem-se o valor nominal 100+$^{33}/_{4}$, ou $^{433}/_{4}$. O problema reduz-se ao seguinte:

Si o valor nominal $^{433}/_{4}$, para 9 mezes, tem o desconto $^{33}/_{4}$, qual será o valor nominal de outra letra para o mesmo tempo, soffrendo esta o abatimento de 91$455?

Disposição dos dados

Si $^{33}/_{4}$ *é o desconto do valor nominal* $^{433}/_{4}$
91$455 ,, ,, ,, ,, ,, ,, x

Reduzindo-se 91$455 a *quartos*, e expellindo o denominador commum, tem-se:

Si 33 é o desconto do valor nominal $^{433}/_{4}$
365$820 ,, ,, ,, ,, ,, ,, x

Methodo das proporções

$$33 : 365\,820 :: {}^{433}/_{4} : x = \frac{365\,820 \times 433}{33 \times 4} = 1:200\$000.$$

Methodo de reducção á unidade

Si 33 é o desconto do valor nominal $^{433}/_{4}$
365$820 ,, ,, ,, ,, ,, ,, x

Si	33	é o desc. do val. nom.	$\frac{433}{4}$
1		,, ,, ,, ,, ,, ,,	$\frac{433}{33 \times 4}$
365$820		,, ,, ,, ,, ,, ,,	$\frac{365\,820 \times 433}{33 \times 4} = 1:200\$000.$

Observação. — *Si em vez do desconto, for dado o valor actual*, formularemos o enunciado do problema assim:

Qual será o valor nominal duma letra que, sendo descontada por dentro a 11% ao anno e faltando 9 mezes para o seu vencimento, o seu possuidor recebeu 1:108$545?

Raciocinio. — Como no problema precedente, calcula-se o valor nominal de 100 para 9 mezes a 11% ao anno, e obtem-se $^{433}/_{4}$. Depois, resulta o seguinte problema, equivalente ao proposto:

Si $^{433}/_{4}$ representa o valor nominal (para 9 mezes) de uma letra cujo valor actual é 100, qual será o valor nominal de outra letra cujo valor actual é 1:108$545?

Disposição dos dados

Si ao val. act. 100 corresponde o val. nom. $^{433}/_{4}$
,, ,, ,, 1:108$545 ,, ,, ,, ,, x

Methodo das proporções

$$100 : 1\,108\$545 :: {}^{433}/_{4} : x = \frac{1\,108\,545 \times 433}{100 \times 4} = 1{:}200\$000.$$

Methodo de reducção á unidade

Si ao val. act. 100 corresp. o val. nom. $^{433}/_{4}$
" " " 1:108$545 " " " " x

Sí ao val. act.	100	corresp. o val. nom.		$\frac{433}{4}$
" " "	1	" " " "		$\frac{433}{100 \times 4}$
" " "	1:108$545	" " " "		$\frac{1\,108\,545 \times 433}{100 \times 4} = 1{:}200\$000.$

Determinação do tempo

Exemplo. — *Uma letra de 1:200$000 foi descontada por dentro a 11 % ao anno e soffreu o desconto de 91$455. Quanto tempo fallava para o seu vencimento?*

Raciocinio. — Conhecendo que 100 para render 11 pre-
cisam de 1 anno ou 12 mezes, e que 100 representa um valor
actual, é necessario que conheçamos tambem o valor actual da
letra de 1:200$000 rs.; o que facilmente se obtem, subtrahin-
se do 1:200$000 rs.; (valor nominal) o desconto 91$455 rs.;
-se 1:108$545 rs.

Feito isto, diremos:

*Si o valor actual 100 para render 11 precisa de 12 me-
zes, o valor actual:* 1:108$545 rs. *para render* 91$455 rs. *de
que tempo precisará?*

Disposição dos dados

100 para render 11 precisam de 12 mezes
1:108$545 " " 91$455 " " x "

Methodo das proporções

Raciocinio. — 100 rendendo 11 em 12 mezes é o mesmo que $^{100}/_{11}$ rendendo 1 *no mesmo tempo.* 1:108$545 rendendo 91$455 em x mezes é o mesmo que $\frac{1\,108\,545}{91\,455}$ rendendo 1 *nos mesmos x mezes.* D'ahi, o seguinte problema:

Si $^{100}/_{11}$ *para render 1 precisa de 12 mezes, de que tempo precisará* $^{1\,108\,545}/_{91\,455}$ *para render o mesmo?*

Disposição dos dados

$^{100}/_{11}$ *precisa de 12 mezes*
$^{1\,108\,545}/_{91\,455}$ *" " x "*

Reduzindo-se ao mesmo denominador as duas fracções e expellindo o denominador commum, resulta:

9:145$500 .... 12 mezes
12:193$995 .... x "

$$12\,193\,995 : 9\,145\,500 :: 12 : x = \frac{9\,145\,500 \times 12}{12\,193\,995} = 9 \text{ mezes}$$

Methodo de Reducção á unidade.

Si 100 para render 11 precisam de 12 mezes
1:108$545 " " 91$455 " " x "

100	....	11	.....	12	mezes
1	....	11	.....	100×12	"
1	....	1	.....	$\frac{100 \times 12}{11}$	"
1:108$545	....	1	.....	$\frac{100 \times 12}{1\,108\,545 \times 11}$	"
1:108$545	....	91$455	.....	$\frac{91\,455 \times 100 \times 12}{1\,108\,545 \times 11} = 9$	mezes.

Observação. — *Si, em vez do* **desconto**, **for dado o valor actual**, o enunciado será:

Uma letra de 1:200$000 foi descontada por dentro a 11 % ao anno, e o seu possuidor recebeu 1:108$545. Quanto tempo fallava para o seu vencimento?

Raciocinio. — Para que este problema se torne o mesmo precedente, basta fazer desapparecer o desconto que soffre a letra 1:200$000, o que é facil, subtrahindo-se 1:108$545 de 1:200$00. Obtido esse desconto, que é 91$455, temos o mesmo problema já resolvido.

Problemas sobre desconto

1. *Calcular o desconto* (por fóra) duma letra de 400$000 rs. pagavel em 50 dias, sendo 6 % ao anno a taxa do desconto. — R. 3$333 rs.

2. *Calcular o desconto por dentro* duma letra de 400$000 rs. pagavel em 50 dias, sendo 6 % ao anno á taxa de desconto — R. 3$300 rs.

3. *Qual é o valor real duma letra* de 920$000 rs. a que ainda faltam 2m½ para o vencimento, supposdo a taxa de desconto *(por fóra)* de 4% ao semestre? — *R. 904$667 rs.*

4. *Qual era o valor nominal duma letra* que sendo descontada por fóra a 6% ao anno, e faltando 50 dias para o seu vencimento, soffreu o desconto de 8$333 rs.? — R. 400$000 rs. *(approximadamente).*

5. *Qual é o valor nominal duma letra*, sabendo-se que sendo descontada por fóra a 6% ao anno, e faltando 50 dias para o seu vencimento, o seu possuidor recebeu 396$667 rs.? — R. 400$000 *rs. (approximadamente).*

6. Uma letra para cujo vencimento faltavam 25 dias foi descontada por dentro a 4% e soffreu o abatimento de 16$340 rs. *Qual era o seu valor nominal?* — R. 5:900$000 rs. *(approximadamente).*

7. *Qual seria o valor nominal duma letra* que sendo descontada por dentro a 4% para 25 dias, recebeu o possuidor 5:883$660 rs.? — R. 5:900$000 rs.

8. Uma letra de 5:900$000 rs. foi descontada por fóra para 25 dias, e soffreu o desconto de 16$390 rs. *Qual foi a taxa?* — R. 4%.

9. Uma letra de 5:900$000 rs. foi descontada por fóra para 25 dias, e o possuidor recebeu 5:883$610 rs. *Qual foi a taxa?* — R. 4%.

10. Uma letra de 5:900$000 rs. foi descontada por dentro para 25 dias, e soffreu o desconto de 16$340 rs. *Qual a taxa?* — R. 4%.

11. Uma letra de 5:900$000 rs. foi descontada por dentro para 25 dias e o possuidor recebeu 5:883$660 rs. *Qual foi a taxa?* — R. 4%.

12. Uma letra de 5:900$000 rs. foi descontada por fóra a 4% e soffreu o desconto de 16$390 rs. *Quanto tempo faltava para o vencimento?* — R. 25 dias.

13. Uma letra de 5:900$000 rs. foi descontada por fóra a 4% e o possuidor recebeu 5:883$610 rs. *Quanto tempo faltava para o seu vencimento?* — R. 25 dias.

14. Uma letra de 5:900$000 rs. foi descontada por dentro a 4% e soffreu o desconto de 16$340 rs. *Quanto tempo faltava para o seu vencimento?* — R. 25 dias.

15. Uma letra de 5:900$000 rs. foi descontada por dentro a 4% e o possuidor recebeu 5:883$660 rs. *Quanto tempo faltava para o dia do vencimento?* — R. 25 dias.

(Extrahidos do Tratado de Arithmetica de Raposo Botelho e Silva Dias).

§ IV — Divisão em partes proporcionaes

354. Para dividir-se um numero em partes proporcionaes a outros numeros dados, sommam-se estes numeros e pela sua somma divide-se o numero que se

quer repartir. Obtido o quociente, e por elle multiplicando-se successivamente cada um dos numeros dados, obtêm-se as differentes partes procuradas.

Primeiro exemplo. — *Dividir 240 em tres partes proporcionaes aos numeros 2, 3 e 5.*

Dividindo-se 240 por 10 *somma dos numeros dados)* obtem-se o quociente 24. Multiplicando este quociente successivamente por 2, 3, e 5, obteremos as partes procuradas: 48, 72 e 120.

Segundo exemplo. — *Dividir 1356 em partes proporcionaes aos numeros $^2/_3$, $^3/_4$, $^5/_6$ e $^8/_9$.*

Sommando-se as fracções dadas, tem-se:

$$^2/_3 + {^3/_4} + {^5/_6} + {^8/_9} = {^{24}/_{36}} + {^{27}/_{36}} + {^{30}/_{36}} + {^{32}/_{36}} = {^{113}/_{36}}.$$

Na igualdade $^{24}/_{36} + {^{27}/_{36}} + {^{30}/_{36}} + {^{32}/_{36}} = {^{113}/_{36}}$ expellindo-se o denominador commum 36, resulta:

$$24 + 27 + 30 + 32 = 113.$$

Operando-se sobre os numeros 24, 27, 30 e 32, como no exemplo precedente, apparecem as quotas 288, 324, 360 e 384.

Terceiro exemplo. — *Dividir o numero 66 em tres partes, de modo que a segunda seja os $^2/_3$ da primeira, e que a terceira seja os $^4/_5$ da segunda.*

Não tendo sido dado o *primeiro numero*, admitta-se que seja 1; devendo o segundo ser os $^2/_3$ do primeiro, ter-se-á: $^2/_3$; finalmente, o terceiro devendo ser os $^4/_5$ do segundo, cujo valor é $^2/_3$, tem-se: $^4/_5 \times {^2/_3} = {^8/_{15}}$.

Sommemos estes tres numeros 1, $^2/_3$ e $^8/_{15}$.

$$1 + \frac{2}{3} + \frac{8}{15} = \frac{15}{15} + \frac{10}{15} + \frac{8}{15} = \frac{33}{15}$$

Multiplicando-se por 15 ambos os membros da igualdade $^{15}/_{15} + {^{10}/_{15}} + {^8/_{15}} = {^{33}/_{15}}$, tem-se:

$$15 + 10 + 8 = 33.$$

Divide-se o numero 66 por 33; e multiplicando-se successivamente pelo quociente 2 os numeros 15, 10 e 8, obtem-se para valor de cada uma das tres partes procuradas: 30, 20 e 16.

Quarto exemplo. — *Dividir o numero 580 em tres partes taes que a primeira esteja para a segunda como 2:5, e a segunda para a terceira como 4:6.*

Pelo enunciado deste problema, devemos estabelecer as duas seguintes proporções:

$$1.^{a} : 2.^{a} :: 2 : 5$$
$$2.^{a} : 3.^{a} :: 4 : 6$$

Admittindo-se que seja 1 o valor da *primeira parte*, tem-se:

$$1 : 2.^{a} :: 2 : 5;\ \text{donde}$$
$$2.^{a} = \frac{5}{2}.$$

Substituindo-se este valor da *2.ª parte* na segunda proporção, tem-se:

$$\frac{5}{2} : 3.^{a} :: 4 : 6;\ \text{donde}$$

$$3.^{a} = \frac{\frac{5}{2} \times 6}{4} = \frac{\frac{5 \times 6}{2}}{4} = \frac{5 \times 6}{4 \times 2} = \frac{15}{4}.$$

Sommemos os tres numeros 1, $\frac{5}{2}$ e $\frac{15}{4}$.

$$1 + \frac{5}{2} + \frac{15}{4} = \frac{4}{4} + \frac{10}{4} + \frac{15}{4} = \frac{29}{4}$$

Multiplicando-se por 4 ambos os membros da igualdade $\frac{4}{4} + \frac{10}{4} + \frac{15}{4} = \frac{29}{4}$, obtem-se:

$$4 + 10 + 15 = 29.$$

Dividindo-se 580 por 29, tem-se o quociente 20, pelo qual sendo successivamente multiplicados os numeros 4, 10 e 15, obtem-se para valores das tres partes procuradas: 80, 200 e 300.

Quinto exemplo. — *Dividir o numero 248 em partes inversamente proporcionaes aos numeros 2, 3 e 5.*

Observação. — Quando as quotas devem ser tomadas na razão inversa dos numeros proporcionaes, invertem-se estes, e faz-se directamente a repartição sobre os numeros invertidos.

Attendendo-se ao que ficou dito em o n.º 266, pag. 155 e á nota **) da pag 170, os numeros inversos a 2, 3 e 5 são $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{5}$, sobre os quaes se opera como no 2.º exemplo. As quotas são 120, 80 e 48.

Problemas sobre divisão em partes proporcionaes

1. *Dividir 729 em tres partes* que estejam entre si como os numeros 2, 3, 4. — R. 162; 243; 324.

2. *Repartir 329 francos entre tres individuos*, de modo que a parte do primeiro esteja para a do segundo como 3 está para 5; e que a do segundo esteja para a do terceiro como 4 está para 3. — R. 84; 140; 105.

3. *Dividir 460* em partes proporcionaes ás fracções $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$. — R. 120; 160; 180.

4. *Dividir 560 em tres partes taes* que a primeira esteja para a segunda como 2 para 3, a segunda para a terceira como 4 para 5. — R. 128; 192; 240.

5. *Dividir o numero 120 em tres partes inversamente proporcionaes* aos numeros 2, $3\frac{1}{3}$, $4\frac{5}{6}$. — R. $59\frac{43}{73}$; $35\frac{55}{73}$; $24\frac{48}{73}$.

6. *Dividir 720 em tres partes taes* que a primeira seja os $\frac{3}{4}$ da segunda, e a segunda os $\frac{4}{5}$ da terceira. — R 180; 240; 300.

7. Um testador deixa 105 contos de réis a tres herdeiros, de modo que ao segundo toque os $\frac{2}{3}$ do primeiro; e ao terceiro os $\frac{5}{7}$ do segundo. *Quer-se saber qual é a herança de cada um?* — R. 49:000$000; 32:666$666$\frac{2}{3}$; 23:333$333$\frac{1}{3}$.

8. Um pai tendo 3 filhos, cujas idades eram 2, 4 e 8 annos, deixou-lhes por sua morte 6:750$000 rs. para lhes serem distribuidos na razão inversa das idades. *Quanto toca a cada um?* — R. 3:857$142$\frac{6}{7}$; 1:928$571$\frac{3}{7}$; 964$285$\frac{5}{7}$.

9. Tres trabalhadores fizeram certa obra pela qual têm de receber 800$000 rs. O primeiro fez $\frac{3}{8}$ do trabalho; o segundo $\frac{2}{5}$; o terceiro o resto. *Quanto toca a cada um?* — R. 300$000; 320$000; 180$000.

10. Tres districtos devem fornecer juntos para o exercito um contingente de 500 homens. As populações dos districtos são 23 100, 17 600, 14 300 habitantes, *qual será o contingente dado por cada districto?* — R. 210; 160; 130.

11. *Dividir 250$000 rs. aluguel mensal de uma casa*, entre tres herdeiros, dos quaes um tem 10 contos; outro, 15; e o terceiro, 25. — R. 50$000; 75$000; 125$000.

12. Uma herança de 126 contos deve ser dividida na razão inversa das idades dos tres herdeiros; o primeiro tem 15 annos; o segundo, 25; e o terceiro, 30. *Quanto toca a cada um?* —R. 60 contos; 36; 30.

§ V

Regra de sociedade ou de companhia

355. Regra de sociedade *é a que tem por fim repartir entre muitas pessoas associadas em o mesmo commercio o lucro ou a perda resultante da sua associação.*

O seu fim, em geral, *é dividir uma quantidade em partes proporcionaes.*

356. Chama-se *entrada* a quantia que fornece cada associado; *capital* é o fundo com que gira a sociedade; *dividendo* é a somma que representa o lucro ou a perda resultante da associação.

357. Ha duas especies de regra de sociedade: a *simples* e a *composta.*

a) Regra de sociedade simples

358. Regra de sociedade simples *é aquella em que, sendo differentes as entradas, são iguaes os tempos; ou, sendo differentes os tempos, as entradas são iguaes.*

No 1.º caso, o lucro ou a perda é proporcional *ás entradas;* no 2.º caso, o lucro ou a perda é proporcional *aos tempos.**)

359. A regra de sociedade reduz-se a tantas regras de tres quantas forem as partes que se buscam.

Primeiro exemplo. — Tres pessoas associaram-se para uma empresa. A primeira concorreu com 12 contos, a 2.ª com 10 e a 3.ª com 6. Tiveram o lucro de 14 contos e *querem saber quanto tocará a cada um.*

*) Os problemas em que *as entradas dos associados são as mesmas e diversos os tempos durante os quaes estiveram empregadas,* são apenas dados como exercicios, pois que tal hypothese não se dá na pratica dos negocios. A entrada ou sahida de um socio faz entrar em liquidação a sociedade existente, e dá lugar á formação de uma nova sociedade.

Entrada da 1.ª	....	*12 contos*
" " 2.ª	....	*10*
" " 3.ª	....	*6 "*
Entrada total	....	*28 contos,*

produzindo *14 contos de lucro.*

Methodo das proporções

1.ª Regra de tres. — Si 28 contos *(somma dos capitaes empregados)* dão o lucro de 14 contos, o capital 12 contos *(entrada da 1.ª) que lucro dará?*

Si 28 contos dão 14 contos de lucro
12 " " x " " "

$$28:12::14:x=\frac{12\times 14}{28}=6 \text{ contos } (\textit{lucro da 1.ª})$$

2.ª Regra de tres. — Si 28 contos dão o lucro de 14 contos, o capital 10 contos *(entrada da 2.ª) que lucro dará?*

Si 28 contos dão 14 contos de lucro
10 " " x " " "

$$28:10::14:x=\frac{10\times 14}{28}=5 \text{ contos } (\textit{lucro da 2.ª})$$

3.ª Regra de tres. — Si 28 contos dão o lucro de 14 contos, o capital 6 contos *(entrada da 3.ª) que lucro dará?*

Si 28 contos dão 14 contos de lucro
6 " " x " " "

$$28:6::14:x=\frac{6\times 14}{28}=3 \text{ contos } (\textit{lucro da 3.ª})$$

Observação. — Para verificar-se a operação, sommam-se os lucros de cada socio, e a somma deve ser igual ao lucro total.

Com effeito:

6 contos	lucro	da 1.ª	pessoa
5 "	"	da 2.ª	"
3 "	"	da 3.ª	"
14 "	"	total	

Methodo de reducção á unidade

Entrada da 1.ª	....	12 contos
" " 2.ª	....	10 "
" " 3.ª	....	6 "
Entrada total	....	28 contos,

produzindo 14 contos de lucro.

Si 28 contos produzem 14 contos de lucro
1 conto *produz* $^{14}/_{28} = \frac{1}{2}$ *conto de lucro*

Si 1 conto produz ½ conto de lucro	12 cont. prod. $^{12}/_{2} = 6$ cont.	*(lucr. da 1.ª)*
	10 " " $^{10}/_{2} = 5$ "	*(" " 2.ª)*
	6 " " $^{6}/_{2} = 3$ "	*(" " 3.ª)*

Segundo exemplo. — Tres negociantes fizeram uma sociedade, e tiveram um lucro de 9:750$000. O 1.º teve o seu capital empregado 20 mezes, o 2.º por 12 mezes, e o 3.º por 8 mezes. *Qual será o lucro de cada um, sabendo-se que as entradas são iguaes?*

20 mezes, tempo dur. o qual esteve em giro o cap. do 1.º
12 " " " 2.º
8 " " " 3.º
40 mezes, tempo empregado por certo capital para dar *9:750$000* de lucro.

Methodo das proporções

1.ª Regra de tres. — Si em 40 mezes *(somma dos tempos)* certo capital deu o lucro de 9:750$000, em 20 mezes *(tempo empregado pelo capital do 1.º socio) que lucro dará?*

Si em 40 mezes houve 9:750$000 de lucro
" 20 " " x " "

$$40 : 20 :: 9:750\$000 : x = \frac{20 \times 9:750\$000}{40} = 4:875\$000 \textit{ (lucro do 1.º)}$$

2.ª Regra de tres. — Si em 40 mezes certo capital deu o lucro de 9:750$000, em 12 mezes *(tempo empregado pelo capital do 2.º) que lucro dará?*

Si em 40 mezes houve 9:750$000 de lucro
" 12 " " x " "

$$40 : 12 :: 9:750\$000 : x = \frac{12 \times 9:750\$000}{40} = 2:925\$000 \textit{ (lucro do 2.º)}$$

3.ª Regra de tres. — Si em 40 mezes certo capital deu o lucro de 9:750$000, em 8 mezes *(tempo empregado pelo capital do 3.º) que lucro dará?*

Si em 40 mezes houve 9:750$000 de lucro
" 8 " " x " "

$$40 : 8 :: 9:750\$000 : x = \frac{8 \times 9:750\$000}{40} = 1:950\$000 \textit{ (lucro do 3.º)}$$

Verificação

4:875$000	lucro do 1.º
2:925$000	" " 2.º
1:950$000	" " 3.º
9:750$000	lucro total.

Methodo de reducção á unidade

20 mezes, tempo dur. o qual esteve em giro o cap. do 1.º
12 " " " " " " " " " " " 2.º
8 " " " " " " " " " " " 3.º
40 mezes, tempo empregado por certo capital para dar *9:750$000* de lucro.

Si em 40 mezes certo capital dá 9:750$000 *de lucro*

em 1 mez esse capital dá $\frac{9:750\$000}{40} = 243\$750$ de lucro.

Si em 1 mez ha o lucro 243$750	Em *20 mezes* ha o lucro	20×243$750 = 4:875$000 *(lucro do 1.º)*
	" *12* " " " "	12×243$750 = 2:925$000 *(lucro do 2.º)*
	" *8* " " " "	8×243$750 = 1:950$000 *(lucro do 3.º)*

Problemas sobre regra de sociedade simples

1. Tres individuos associaram-se para fundar uma fabrica, entrando um com 36 contos, outro com 45 e o terceiro com 27 contos. No fim de 4 annos tinha ganhado a fabrica 18 contos; *calcular o quinhão de cada socio.* — Rs. 6:000$000; 7:500$000; 4:500$000.

2. Tres negociantes empregam uma mesma quantia em uma empresa; o primeiro por espaço de 15 annos, o segundo por 9 annos e o terceiro por 5 annos. Perderam 1:798$000; *qual foi o prejuizo de cada associado?* — R. 930$000; 558$000; 310$000.

3. Tres pessoas associaram-se em uma empresa; entrando a primeira com 1:000$000, outra com 1:680$000 e a terceira com 1:200$000. O lucro tendo sido de 1:590$800, *calcular o lucro de cada associado.* — R. 410$000; 688$000; 492$000.

4. Dois associados receberam de lucro, um 1:200$000 e o outro 960$000. O total das duas entradas sendo de 10:000$000, *calcular a entrada de cada um.* — R. 6:000$000; 4:000$000.

5. Tres associados tendo formado uma empresa com o capital de 32:000$000, tiveram de lucro, no fim de certo tempo: um, 2:400$000; outro, 3:000$000 e o terceiro, 4:200$000. *Calcular a entrada de cada um.* — R. 8:000$000; 10:000$000; 14:000$000.

6. Quatro associados entraram com a mesma quantia numa empresa commum. O primeiro levantou o dinheiro no fim de 4 mezes; o segundo, no fim de 8 mezes; o terceiro, no fim de 1 anno; o quarto, no fim de 15 mezes. *Faça-se a distribuição do lucro*, que é de 1:317$000, proporcionalmente ás entradas augmentadas sómente de seus juros de 12% ao anno. — R. 312$000; 324$000; 336$000; 345$000.

b) Regra de sociedade composta

360. Regra de sociedade composta *é aquella em que as entradas e os tempos são differentes.*

Neste caso, o lucro ou a perda é proporcional *ao producto da entrada de cada socio pelo tempo durante o qual esteve em giro.*

361. A regra de sociedade composta resolve-se pela regra de sociedade simples, reduzindo-se todas as entradas á mesma unidade de tempo; o que melhor se verá no seguinte

Exemplo. — Um negociante começou uma empresa com 5 contos de réis; 4 mezes depois associou-se-lhe um outro entrando com 9 contos; e 10 mezes depois deste um terceiro concorreu com 10 contos. No fim de 2 annos liquidou-se o lucro de 20 contos. *Pede-se o lucro de cada um dos socios.*

Solução. — O 1.° socio teve o seu capital 5 contos em giro por 2 annos, ou 24 mezes.

5 contos por 24 mezes é o mesmo que 24×5 ou **120 contos em 1 mez.**

O 2.° socio tendo entrado 4 mezes depois, teve o seu capital 9 contos em giro sómente por 20 mezes.

9 contos por 20 mezes é o mesmo que 20×9 ou **180 contos em 1 mez.**

O 3.° socio tendo entrado 4 mezes depois do 2.°, teve em giro o seu capital 10 contos sómente por 10 mezes.

10 contos por 10 mezes é o mesmo que 10×10 ou **100 contos em 1 mez.**

Disposição dos dados

O 1.° tem	5 cont. por	24 mez. ou	24×5 ou	*120 cont. por*	*1 mez*
„ 2.° „	9 „	„ 20 „	„ 20×9 „	*180* „	„ *1* „
„ 3.° „	10 „	„ 10 „	„ 10×10 „	*100* „	„ *1* „

Assim, pois, tem-se uma regra de sociedade simples, em que as entradas são differentes e os tempos iguaes. Ella se exprimirá do seguinte modo:

Tres negociantes associaram-se para uma empresa; o 1.° concorreu com 120 contos; o 2.° com 180 contos; e o 3.° com 100 contos. Tiveram um lucro de 20 contos; *quer-se saber o lucro de cada um.*

Entrada do 1.°	....	120 contos
„ „ 2.°	....	180 „
„ „ 3.°	....	100 „
Entrada total	....	400 contos,

produzindo 20 contos de lucro.

Já sabendo-se resolver os problemas da regra de sociedade simples, facil é organisarem-se as regras de tres deste problema.

1.°

Si 400 contos dão 20 contos de lucro,
120 „ „ x „ „ „

$$400 : 120 :: 20 : x = \frac{120 \times 20}{400} = 6 \text{ contos } (\textit{lucro do 1.°})$$

2.°

Si 400 contos dão 20 contos de lucro
180 „ „ x „ „ „

$$400 : 180 :: 20 : x = \frac{180 \times 20}{400} = 9 \text{ contos } (\textit{lucro do 2.°})$$

3.ª

Si 400 contos dão 20 contos de lucro
100 " " x " " "

$$400 : 100 :: 20 : x = \frac{100 \times 20}{400} = 5 \text{ contos } (\textit{lucro do } 3.^{\circ})$$

Methodo de reducção á unidade

1.º socio	5 contos	por	24 mezes	ou	*120 contos*	*por*	*1 mez*
2.º "	9 "	"	20 "	"	*180* "	"	*1* "
3.º "	10 "	"	10 "	"	*100* "	"	*1* "

Entrada do 1.º .... 120 contos
" " 2.º .... 180 "
" " 3.º .... 100 "
Entrada total .... 400 contos,
produzindo 20 contos de lucro.

Si 400 contos produzem 20 contos de lucro
1 conto produz $^{2}/_{400}$ do conto ou 50$000 de lucro.

Si 1 conto dá 50$ de lucro	*120 cont. dão*	120×50$=6 000$	*(lucro do 1.º)*
	180 " "	180×50$=9:000$	*(lucro do 2.º)*
	100 " "	100×50$=5:000$	*(lucro do 3.º)*

Problemas sobre regra de sociedade composta

1. Tres socios tiveram de lucro 540$000 rs. O primeiro entrou na empresa com 600$000 rs., por 3 mezes; o segundo com 500$000 rs. por 5 mezes; o terceiro com 640$000 por 7 mezes. *Faça-se a distribuição dos lucros* em conformidade com o tempo e com as entradas. — R. 110$706; 153$759; 275$535.

2. Um negociante começou uma empresa com 216$000 rs.; 8 mezes depois associou-se-lhe outro, que entrou com 3:348$000 rs.; e 14 mezes depois da entrada deste, foi admittido um novo socio, que contribuiu com 5:400$000 rs. A empresa durou 6 annos, deixando por fim 8:640$000 de lucro para repartir pelos socios. *Calcular o quinhão de cada um.*—R. 268$833; 3:703$924; 4:667$243.

3. Um negociante começou uma empresa com um fundo de 25 contos de réis; 5 mezes depois, se lhe associou um capitalista entrando com 40 contos; e 6 mezes mais tarde, outro capitalista concorreu com 60 contos. No fim de 2 annos, liquidou-se um lucro de 80 contos; *pede-se a parte de cada um dos socios.* — R. 22:429$907; 28:411$215; 29:158$878.

4. Seis mezes depois de dois individuos haverem emprehendido certa negociação, entrando cada um com 6:500$000 rs., foi admittido um terceiro socio, que tambem contribuiu com 6:500$000 rs.; e 8 mezes depois da entrada deste socio, ainda foi admittido outro, que tambem contribuiu com 6:500$000 rs. 2 annos depois de começada a empresa, quando pela primeira vez se encerraram as contas, resolveu-se repartir pelos socios um dividendo de 3:876$000 rs., reservando o restante dos lucros para a continuação do negocio. *Qual é o lucro a que tem direito cada um dos quatro socios?* — R. A cada um dos primeiros socios toca 1:224$000; ao terceiro 918$000; e ao quarto 510$000.

5. Principiou um particular a negociar com o capital de 12 contos de réis; 8 mezes depois, entrou no seu commercio um socio com o capital de 20 contos; e 4 mezes depois deste, um outro com o capital de 30 contos. No fim de 3 annos, os lucros foram de 45 contos; *pergunta-se a parte do lucro que toca a cada socio*, sendo estipulado que o 1.º deveria receber 6% do lucro total, além da parte proporcional á sua entrada, por ter sido encarregado da gerencia do negocio. — R. 10:673$832; 13:836$449; 17:789$719. Ao 1.º tocam mais 2:700$000, correspondentes aos 6% sobre o lucro de 45 contos.

6. Um homem começou uma empresa com o fundo de 25 contos de réis; 5 mezes depois, associou-se-lhe um capitalista, entrando com 40 contos; e 6 mezes mais tarde, outro capitalista concorreu com 60 contos. No fim de 2 annos, liquidou-se um lucro de 80 contos, que se deve repartir, sendo mais ajustado que ao empresario tocaria, pela administração, 5% do lucro total, além da sua quota proporcional ao fundo que empregou: *Pede-se a parte de cada um dos socios.* — R. Ao 1.º 21:308$411; ao 2.º 26:990$654; ao 3.º 27:700$935. O 1.º deve receber mais 4:000$000, correspondentes aos 5% sobre o lucro de 80 contos.

§ VI — Misturas — Ligas

362. Por misturas entende-se o *ajuntamento de generos seccos ou liquidos, da mesma especie, porém de valores differentes.*

363. A regra de mistura tem por fim:

1.º *Achar o valor de uma mistura, conhecendo-se as quantidades que se devem misturar e os seus preços;*

2.º *Achar a quantidade de cada uma das cousas, conhecendo-se os seus preços e o preço total da mistura.*

No 1.º caso, a mistura chama-se *directa*; no 2.º, *inversa.*

Só nos occupamos com a 1.ª, visto ser a 2.ª do dominio da Algebra.

364. Para resolverem-se os problemas da regra de mistura directa, multiplica-se cada parte da mistura pelo seu preço respectivo, e divide-se a somma dos productos pela somma das quantidades misturadas. O quociente dá o valor procurado.

Exemplo. — Misturam-se 45 litros de vinho de 640 rs. o litro com 30 de 560 rs. *Qual será o preço de 1 litro da mistura?*

45 litros a 640 réis	28$800
30 „ „ 560 „	16$800
Logo, 75 litros da mistura...........	45$600

$$1 \text{ litro} \quad " \quad " \quad \ldots\ldots \quad \frac{45\$600}{75} = 608 \text{ réis.}$$

365. Póde nesta regra dar-se o caso de procurar-se um *valor médio* de muitas cousas de valores differentes.

A este processo chamam muito autores *regra das médias.*

Valor médio, ou simplesmente *média arithmetica* de muitas quantidades, é o quociente da divisão da somma dessas quantidades pelo numero dellas.

Exemplo. — Pesou-se tres vezes um corpo, e achou-se primeiramente o peso de 125g,926; depois, 125g,946; finalmente, 126 g, 011. *Qual é o peso médio deste corpo?*

1.ª pesada	125,926
2.ª „	125,946
3.ª „	126,011
Somma	377,883

$$\frac{377\,g,883}{3} = 125\,g,961 \quad (\textit{peso médio})$$

366. Liga *é a combinação de diversos metaes entre si.*

367. A regra de liga, do mesmo modo que a de mistura, divide-se em *directa* e *inversa.*

368. A regra de liga *é directa,* quando tem por fim *calcular o titulo de uma porção de ouro ou de prata que resultou da combinação de porções de prata ou de ouro, cujos pesos e titulos são conhecidos.*

369. *Titulo* ou *toque* de uma liga é a relação entre o peso de ouro puro ou de prata pura e o peso total da liga.

370. A regra de liga póde ser considerada como um caso particular da regra de mistura, differindo desta em se considerarem como preços os *toques* ou *titulos* dos metaes e como valores *as quantidades de prata ou de ouro puro contidas nas ligas.*

371. Para resolverem-se os problemas de regra de liga directa, observa-se a regra dada para a resolução dos problemas sobre misturas, attendendo-se ao que ficou dito em o numero anterior.

Exemplo. *) — Fundem-se tres barras de prata: a primeira pesa 1Kg,265 e seu titulo é 0,930; a segunda pesa 2Kg,124 e seu titulo é 0,851; o peso da terceira é 1Kg,850, e o titulo 0,785. *Pergunta-se qual é o titulo da liga?*

Peso das barras			Prata pura
1.ª	1,265	1,265 × 0,930 ou	1,176 450
2.ª	2,124	2,124 × 0,851 „	1,807 524
3.ª	1,850	1,850 × 0,785 „	1,452 250
	5,239		4,436 224

A liga pesa *5Kg,239* e tem de prata pura *4Kg,436 224.* Por conseguinte, em *1 kilogrammo* da liga haverá de prata pura

$$\frac{4.436\,224}{5,239} = 0,847 \ (\textit{titulo da liga}).$$

Problemas sobre regras de mistura e de liga

1. Um negociante misturou 38 hectolitros de trigo de 18 francos o hectolitro, com 19 hectolitros de 19 francos e 42 hectolitros de 15 francos. *Qual é o preço de cada hectolitro da mistura?* — R. 16f,91.

2. Misturam-se 80 litros de vinho de 70 rs. o litro com 100 litros de vinho de 90 rs. o litro. *Qual será o valor dum litro da mistura?* — R. 81 rs. (approximadamente).

3. Fórma-se o latão, fundindo juntamente 30 kilogr. de zinco com 70 de cobre. O kilogrammo de cobre custa 450 rs., e o kilogrammo de zinco 190 rs.; *pede-se o preço do kilogramma de latão.* — R. 393 rs.

*) Arithmetica pratica de Cunha.

4. Fundiram-se juntamente duas barras de prata; a primeira de 0,92 de titulo, pesava 1 240 grammos; a segunda, com o titulo 0,80, pesava 730 grammos. *Qual é o titulo da liga obtida?* — R. 0,873.

5. Um negociante misturou vinhos de diversas qualidades, a saber: 530 litros a 75 centimos o litro; 860 litros a 60 centimos o litro; 780 litros a 45 centimos o litro. *Qual é o preço do litro da mistura?* — R. 58 centimos.

6. A liga de um kilogrammo de estanho com 2 kilogrammos de chumbo serve para soldar o chumbo e o estanho. *A como sahe, sendo o estanho a 500 rs. o kilogrammo e o chumbo a 120 rs.?* — R. 246 rs. (approximadamente.)

7. Fundiram-se 7,5 kilogrammos de cobre com 4 kilogrammos de zinco e 1 kilogrammo de bismutho. Um kilogrammo de cobre custa 460 rs., um de zinco 120 rs., e um de bismutho 1$600 rs. *Qual é o preço dum kilogrammo desta liga?* — R. 442 rs. approximadamente).

8. O bronze das peças e das estatuas obtem-se, fundindo 11 kilogrammos de estanho com 100 de cobre. *A como sahe o kilogrammo de bronze, sendo o cobre a 320 rs. o kilogrammo e o estanho a [illegible] rs.* — R. 342 rs. (approximadamente).

9. Fez-se um sino, fundindo 110 kilogrammos de estanho com 390 kilogrammos de cobre, 5 kilogrammos de zinco e 4 kilogrammos de chumbo. O estanho é a 500 rs. o kilogrammo, o cobre a 540 rs., o zinco a 120 rs., e o chumbo a 140 rs. *Qual é o custo do sino e o dum kilogr. deste bronze?* — R. 266$760 rs. (preço do sino); 524 rs. (preço do kilogrammo de bronze).

10. Os caracteres de impressão fazem-se deitando nos moldes uma liga de 20 partes de antimonio sobre 80 de chumbo e 5 de cobre. *Quanto vale o kilogrammo desta liga, suppondo o antimonio a 550 rs. o kilogrammo, o chumbo a 120 rs., e o cobre a 500 rs.?* — R. 220 rs.

§ VII — Fundos publicos

372. O governo, para attender a despezas imprevistas, taes como guerras, secca, peste ou despezas de utilidade publica, sem aggravar os impostos, recorre ao credito para levantar o dinheiro emprestado.

373. As quantias que o governo se obriga a pagar aos particulares para este emprestimo, constituem o que se chama divida publica.

374. O governo contrahe geralmente esta divida de dois modos:

Ou obriga-se a pagar um juro certo e determinado, que satisfaz por semestres que se vencem em 30 de Junho e 31 de Dezembro, ficando-lhe o direito de amortizar a divida, quando queira;

Ou dá titulos de divida aos particulares com a condição de resgatal-os num dia fixo, além do qual não vencem juro algum.

No primeiro caso, a divida contrahida se diz **fundada ou consolidada**; no segundo, **fluctuante**.

375. Todas as rendas contra o Estado denominam-se fundos publicos e sob a mesma denominação ficam as acções dos bancos e companhias, e as obrigações, de que nos occuparemos nos paragraphos seguintes.

376. *Na divida consolidada*, o crédor recebe um *titulo*, que designa o capital e o juro em cada um anno.

Para facilitar ao possuidor o meio de reembolsar o seu capital sem exigil-o do crédor, que a isso não é obrigado, esses titulos são *negociaveis* ou *transferiveis*.

Si o titulo é vendido pelo valor nominal, diz-se vendido ao *par*; ha *baixa* quando é vendido por *menos* do valor; *alta*, quando vendido por *mais* do valor.

377. *A divida fluctuante* é representada por letras do thesouro, a praso, vencendo um juro que é descontado no acto do emprestimo.

378. Nestes emprestimos contrahidos pelo governo, a *renda é fixa*, e o *capital variavel*.

As apolices do governo brazileiro são de 1:000$000 e produzem uma renda de 4%, 5% e 6%; isto é, por cada inscripção paga o governo ao possuidor do titulo uma renda de 40$000, 50$000, 60$000.

Este valor de 1:000$000 das apolices é apenas nominal; porquanto o governo recebe por ellas uma quantia variavel com as circumstancias em que se acha, o fim do emprestimo, a confiança que inspira; mas sempre a quantia recebida é inferior a 1:000$000 (valor nominal da apolice).

Vê-se, pois, que sempre é prejudicial ao governo o pagamento de suas dividas quando tem de amortizal-as: primeiro, porque tem de entregar por cada apolice 1:000$000, quando recebeu pela sua venda, quantia inferior a essa; segundo, em vez de pagar juros de um capital effectivo, paga sempre um juro maior, e tanto maior quanto menor fôr o capital que haja recebido por cada apolice.

Problemas sobre fundos publicos

Primeiro problema. — Sendo 90% o curso das apolices de 6%: *qual será a taxa a que empregará os seus capitaes, neste momento, o comprador de apolices?*

O problema reduz-se ao seguinte:

Por 9:000$000 compra-se uma renda de 60$000, *por 100 que renda se comprará* — R. 6,66..

Segundo problema. — As apolices de 5% estão ao curso de 75%; as apolices de 6% estão ao curso de 86%. *Qual é o melhor emprego dos capitaes?*

Este problema resolve-se como o precedente, calculando-se a taxa da 1.ª renda e depois a da 2.ª, e estabelecendo-se a comparação entre estas taxas.

Para a 1.ª renda

Por 750$000 compra-se uma renda de 50$000; *por 100 que renda se comprará* — R. 6,66..

Para a 2.ª renda

Por 860$000 compra-se uma renda de 60$000; *por 100 que renda se comprará?* — R. 6,97.

Portanto, melhor seria, nestas circumstancias, comprar apolices de 6%.

Terceiro problema. — Compra-se uma renda de 1:500$000 em apolices de 6% ao curso de 88%; *que quantia terá de desembolsar o comprador?*

O problema reduz-se ao seguinte:

Si para ter-se uma renda de 60$000 são precisos 880$000, a renda sendo de 1:500$000 *quanto se deverá empregar?* — R. 22:000$000.

Quarto problema. — Um particular comprou apolices de 6% pela quantia de 60:000$000; *qual é a renda que possue, sendo o curso das apolices, no momento da compra,* 90%.

O problema reduz-se ao seguinte:

Por 90$000 compra-se uma renda de 60$000, *que renda se comprará por 60:000$000?* — R. 4:000$000.

(Extrahido do Tratado de Arithmetica de Rochet e Cardoso da Silva).

§ VIII — Acções

379. **Acções** *são titulos que conferem aos associados em uma empresa o direito ao lucro da mesma e lhes impõem a responsabilidade no caso de prejuizo.*

380. Os possuidores de *acções* chamam-se *accionistas.*

381. *Para maior commodidade no pagamento,* não se paga de *uma só vez* todo o valor nominal da *acção;* faz-se o respectivo pagamento *por prestações* com intervallos convenientes.

382. As acções são *nominativas* até o seu integral pagamento.

Resolvido o pagamento, podem ser convertidas em acções *transferiveis por endosso* ou em acções *ao portador.*

383. Os accionistas se responsabilizam unicamente pelo valor nominal das *acções* que possuem.

384. As *acções* são papeis de credito negociaveis. Diz-se que estão *ao par,* quando são vendidas pelo valor nominal, ou pelo desembolso, caso ainda não se tenha exigido o seu valor por completo; *estão acima ou abaixo do par,* quando se vendem por *mais* ou por *menos* do valor nominal ou do desembolso.

385. Dos lucros de uma empresa deduzindo-se as quantias necessarias para as suas despezas e mais certa quantia para *fundo de reserva* (para eventualidades futuras), o restante constitue o dividendo, isto é, a parte dos lucros liquidos da sociedade que semestralmente é destinada para se distribuir pelos accionistas, *a tanto por acção.*

Problemas

Primeiro. — Uma companhia cujo capital é de 5.000:000$000 dividido em acções de 100$000, teve um dividendo de 325:000$000; *quanto pertence a cada acção, e quanto recebe um accionista que tem 25 acções?*

1.° 5.000:000$000 divididos por 100$000 dão 50.000 acções. Si por 50.000 acções se deve repartir o dividendo 325:000$000, a cada acção tocará 6$500.

2.° Si 1 acção recebe 6$500, 25 acções receberão 25×6$500 = 162$500.

Segundo. — Uma companhia que tem 50 000 acções de 100$000 offerece um dividendo de 325:000$000. *De quantos por cento é o dividendo, e quanto receberia um possuidor de 26 acções?*

1.° 50 000 acções de 100$000, cada uma, prefazem 5.000:000$000. Si 5.000:000$000 dão 325:000$000 de dividendo, *100 quanto darão?* — R. 6½%.

2.° Si 50 000 acções dão 325:000$000 de dividendo *quanto cabe a 26 acções?* — R. 169$000.

Terceiro. — Uma companhia cujas acções são de 100$000, não tendo tido ainda senão ¾ do desembolso, offerece um dividendo de 6$000 *por acção. A quantos por cento foi feito este dividendo?*

O desembolso de ¾ de cada acção de 100$000 importa em 75$000.

Si 75$000 dão 6$000 de dividendo, *100 que dividendo dar o?* — R. 8%.

Quarto. — As acções de certa companhia têm o valor nominal de 300$000, e são pagas por prestações de 20%. *Pergunta-se de quanto deverá ser o dividendo para que o juro seja de 8%, suppondo que a companhia tem 2 500 acções e que só se pagaram 3 prestações?*

A prestação de 20% por acção de 300$000 importa em 60$000; 3 prestações de cada acção, portanto, montam a 3 × 60$000 = 180$000, e as 2 500 acções importarão em 2 500 × 180$000 = 450$000. Si 100 rendem 8, *450:000$000 quanto renderão?* — R. 36:000$000.

Quinto. — Um individuo comprou 60 acções de certa companhia, tendo soffrido cada uma o desembolso de 90$000, com um premio de 2%. *Pergunta-se quanto deverá receber, para que lhe corresponda a um juro de 7%?*

As 60 acções montam a 5:508$000; sendo 5:400$000 o producto do desembolso de cada acção (90$000) por 60 (numero das acções) e 108$000, premio de 2% sobre os 5:400$000. Si 100 dão 7 de juro, *5:508$000 quanto darão?* — R. 385$560.

(Problemas de Raposo Botelho e Silva Dias.)

§ IX — Obrigações

386. Obrigações *são titulos emittidos por alguma sociedade, vencendo um juro fixo ou determinado até o dia em que, por meio de sorteio, são amortizados os valores por elles representados.*

387. As obrigações têm por fiança todo o activo e bens da sociedade, preferindo a quaesquer outros titulos de divida.

388. Como as *acções*, são titulos negociaveis as *obrigações;* e podem, pois, estar *ao par, acima do par* ou *abaixo do par.* Seja, porém, qual for o preço por que se venderem, a sociedade emissora só os reembolsa pelo seu valor nominal.

Problemas

Primeiro. — Um individuo comprou 80 obrigações duma companhia, com o valor nominal de 100$000 cada uma, emittidas a 94, com um juro de 6%. Foram amortizadas no fim de 5 annos; e quer-se saber? 1) *quanto lucrou o individuo;* 2) *a quantos por cento corresponde o lucro?*

1.° 80 obrigações a 94$000 cada uma importam em *7:520$000.*

Importancia da amortização das 80 obrigações: *8:000$000.*

Differença entre amortização e compra (8:000$000 — 7:520$000) *480$000.*

Lucro: *2:400$000 + 480$000* = 2:880$000.

2.° Si 7:520$000 (preço das 80 obrigações a 94) produziram 2:880$000 de lucro em 5 annos, *qual será o lucro de 100 em 1 anno?* — R. 7,66% (approxim.)

Segundo. — Uma pessoa tendo comprado com 51:619$000 rs. 500 obrigações de certa companhia (de 100$000 cada uma) e 18 fracções de obrigação (de 20$000 cada fracção) *a como sahiu cada obrigação?*

Sendo de 100$000 cada obrigação e de 20$000 cada fracção, segue-se que cada fracção equivale a *um quinto* de obrigação. Assim as 500 obrigações valem 2500/5; augmentados mais de 18/5, **tem-se** 2518/5, cuja importancia é de 51:619$000.

Si 2518/5 .... custaram 51:619$000
5/5 (ou 1 obrigação) „ $x =$ **102$500.**

Terceiro. — Estando as obrigações de certa companhia a 102$500, *que quantia póde realizar uma pessoa que possue 30 obrigações e 17 fracções, sendo as acções de 100$000 cada uma, e cada fracção de 20$000?*

30 obrigações a 102$500 cada uma montam a 3:075$.

Cada fracção de 20$000 em relação a uma obrigação de 100$000, representa 1/5 de obrigação. Estando a 102$500 cada obrigação, 1/5 importará em 20$500 e 17/5 ou 17 fracções importaram em 348$500.

Logo, as 30 obrigações e 17 fracções dão .... 3:075$000 + 348$500 = 3:423$500.

Quarto. — *Quantas obrigações de 100$000 cada uma se podem comprar com* 5:125$000 *suppondo que ellas têm* 2,5 % *de premio?*

100$000 nominaes valem 102$500 em dinheiro:

$$5{:}125\$000 \text{ em dinheiro valem } \frac{5\,125\,000 \times 100\$000}{102\,500} =$$
$$= 5{:}000\$000 \text{ nominaes.}$$

O numero de vezes que 5:000$000 contiverem 100$000, indicará quantas as obrigações que com aquella quantia se podem comprar.

Effectuando-se a divisão, obtem-se 50 obrigações.

§ X — Cambio

389. Cambio, commercialmente fallando, *é a troca de dinheiro por dinheiro.*

390. Cambio de banco *é a troca de dinheiro entre duas praças commerciaes do mesmo paiz ou de paizes differentes.*

391. *Si a troca se dá entre praças do mesmo paiz*, o cambio se chama interno; será externo, *si a troca se fizer entre praças de paizes differentes.*

392. O preço do **cambio interno** se avalia a *uma porcentagem convencionada*, visto as moedas serem do mesmo paiz.

393. O preço do **cambio externo** se avalia, convencionando-se que nas relações cambiaes entre duas praças, uma dellas dê sempre uma quantia determinada *(o certo)*, e a outra o *incerto*, isto é, a quantia variavel que corresponda á primeira.

Assim, o *Brazil* dá o certo (1$000) e a *Inglaterra* o incerto (mais ou menos pence ou dinheiros sterlinos por 1$000). *Portugal* dá o certo (100 réis fortes) e o *Brazil* o incerto (mais ou menos réis fracos por 100 réis fortes). A *França* e a *Allemanha* dão o certo (1 franco e 1 reichsmark) e o *Brazil* o incerto, isto é, mais ou menos réis por 1 franco e por 1 reichsmark.

394. O preço do cambio entre duas praças está *ao par*, quando as moedas de dois paizes que a esse preço fazem suas transacções, têm o *mesmo valor intrinseco*, isto é, têm a mesma quantidade de metal precioso.

Assim, sendo *27* o preço do cambio *ao par* entre Inglaterra e o Brazil, quer isto dizer que *27 pence* é o justo valor de *1$000* ou que *1 £* vale exact. *8$889* rs.

A esse mesmo cambio 27, tem-se o par entre o *Brazil* e Portugal e a França e a Allemanha; porque

a *100 rs. fort.* correspondem exactamente *200 rs fracos*
a *1 franco:* .... *353 rs.*
a *1 reichsmark* .... *436* „

395. Conhecidos esses valores ao cambio de 27, por meio de uma regra de tres simples se determinam todos os valores correspondentes a um cambio qualquer. Assim foi organizada a pequena tabella annexa.

396. O que dito fica é sufficiente para os calculos mais communs, de que nos vamos occupar.

TABELLA

para conhecer a estimativa do cambio francez, allemão e portuguez em réis brazileiros, desde 12 dinheiros sterlinos por 1$000 até 15

Dinheiros *sterlinos por 1$000*	Inglaterra *Libra sterlina*	França *Franco*	Allemanha *Reichsmark*	Portugal *100 rs. moeda forte*
12	20$000	793	981	450
(0,125) „ 1/8	19$794	786	970	445
(0,250) „ 1/4	19$591	778	960	440
(0,375) „ 3/8	19$393	770	951	436
(0,500) „ 1/2	19$200	762	941	432
(0,625) „ 5/8	19$009	754	932	427
(0,750) „ 3/4	18$823	747	923	423
(0,875) „ 7/8	18$640	740	914	419
13	18$461	733	905	415
„ 1/8	18$285	726	896	411
„ 1/4	18$113	719	888	407
„ 3/8	17$943	712	880	403
„ 1/2	17$777	706	872	399
„ 5/8	17$614	699	864	396
„ 3/4	17$454	693	856	392
„ 7/8	17$297	686	848	389
14	17$142	680	840	385
„ 1/8	16$991	674	833	382
„ 1/4	16$842	668	826	378
„ 3/8	16$695	663	818	375
„ 1/2	16$551	657	811	372
„ 5/8	16$410	651	804	369
„ 3/4	16$271	646	798	366
„ 7/8	16$134	640	791	363
15	16$000	635	784	360
......	......	......	......	......
......	......	......	......	......
27	8$889	353	436	2[illegible]0

Exercicios sobre cambios

Inglaterra

Primeiro. — *Quanto vale 1 libra sterlina, estando o cambio a 12?*

Regra. — Si tivermos de determinar o valor de 1 libra só, multiplicaremos 240 *(numero de dinheiros que formam 1 libra)* por 1000, e divide-se o producto pelo cambio dado. *Si forem 1 ou mais libras e fracções, como soldos e dinheiros,* reduziremos primeiramente o numero dado a dinheiro e procederemos depois pela fórma iá sabida.

$$\begin{array}{l} 240 \\ \underline{\;1\,000} \\ 240\,000 : 12 = 20\$000. \\ 0\ldots \end{array}$$

Esto calculo provém do seguinte problema de regra de tres simples:

Si 12 dinheiros valem 1$000
240 „ (1 £) „ x

$$x = \frac{240 \times 1\,000}{12} = \frac{240\,000}{12} = 20\$000.$$

Segundo. — *Qual é o valor de 1 libra sterlina estando o cambio a* $12^1/_8$?

(Fracção ordinaria). $12\,^1/_8 = {}^{97}/_8$

$$\begin{array}{l} 240 \\ \underline{\;1\,000} \\ 240\,000 : {}^{97}/_8 \\ \underline{\;8\qquad} \\ 1\,920\,000 : 97 = 19\$793. \\ .950 \\ \;.770 \\ \;\;.910 \\ \;\;.370 \\ \;\;\;.79 \end{array}$$

(Fracção decimal). $12^1/_8 = 12{,}125$

$$\begin{array}{r} 240 \\ \underline{1\,000} \\ 240\,000 : 12{,}125 \end{array}$$

ou

$$\begin{array}{l} 240\,000\,000 : 12\,125 = \mathbf{19\$793.} \\ 118\,750 \\ ..96\,250 \\ \quad 113\,750 \\ \quad ..46\,250 \\ \qquad .9\,875 \end{array}$$

Terceiro. — *Saccaram de Londres contra nós uma lettra de 283 £ 17 s 1 d, ao cambio de $13^5/_8$. Quanto devemos pagar em dinheiro brazileiro?*

Nota. — O numero complexo 283 £ 17 s 1 d reduzido a dinheiros sterlinos dá *68 125 dinheiros.* (Vid. pagina 194 n. 302). O numero $13^5/_8$ reduzido a uma só expressão fraccionaria é igual a $^{109}/_8$. Feito isto, e applicando-se a regra, resulta:

$$\begin{array}{l} 68\,125 \\ \underline{\quad 1\,000} \\ \underline{68\,125\,000} : {}^{109}/_8 \\ \underline{\qquad 8} \\ 545\,000\,000 : 109 = \mathbf{5:000\$000.} \\ ..0...... \end{array}$$

Quarto. — *Tendo de remetter-se para Londres a quantia de 5:000$000, estando o cambio a $13^5/_8$, quantas libras produz essa quantia?*

Nota. — Esta questão sendo inversa da precedente, em vez de multiplicar-se o numero dado por 1 000 e dividir o producto pelo cambio, *multiplica-se o numero dado pelo cambio e divide-se o producto por 1 000.* Para converter-se o quociente, que vem expresso em dinheiros, para libras esterlinas, observa-se o disposto na pag. 198, observ. II.

$$\begin{array}{l} 5\,000\,000 \times {}^{109}/_8 \\ \underline{109\qquad\quad} \\ 545\,000\,000 : 8 = 68\,125\,000 \\ .65 \\ \;.10 \\ \;\;.20 \\ \;\;\;.40 \\ \;\;\;\;.0 \end{array}$$

68 125 000 : 1 000 = 68 125 *dinheiros*

$$\begin{array}{l} 68\,125 : 240 = \mathit{283\ £} \\ 2\,012 \\ ..925 \\ \;\;205 \\ \underline{\times\ 20} \\ 4\,100 \text{ sold.} : 240 = \mathit{17\ soldos} \\ 1\,700 \\ ..20 \\ \underline{\times 12} \\ \;246 \text{ dinhr.} = \mathit{1\ dinheiro} \\ ..0 \end{array}$$

Assim, 5:000$000, ao cambio de $13^5/_8$, produzem **283 £ 17 s 1 d.**

Este modo de proceder provém da resolução do seguinte problema de regra de tres simples.

Si 1$000 vale $13^5/_8$ dinheiros
5:000$000 „ x „

$$x = \frac{5\,000\,000 \times 13^5/_8}{1\,000} = 68\,125 \text{ dinheiros}$$

Si 240 dinheiros formam 1 £
68 125 „ „ x

$$x = \frac{68\,125}{240}\ £ = 283\ £\ 17\ s\ 1\ d.$$

França

O cambio inglez estando a 27, *1 franco vale 353 réis brazileiros.*

Desta consideração se póde deduzir qual seja o valor do franco a um cambio qualquer, estabelecendo-se uma regra de tres simples inversa.

Exercicio 1). — *Quanto vale 1 franco ao cambio de 13?*

Si ao cambio de 27.... 1 fr. vale 353
" " " 13.... " " "

$$x = \frac{27 \times 353}{13} = 733 \text{ rs.}$$

Assim, para conhecer-se o valor de 1 franco em réis brazileiros, *a um cambio qualquer*, multiplica-se 353 por 27 e divide-se o producto pelo cambio dado.

Exercicio 2). — *Uma factura de Paris importou em 3 540$^{fr.}$,50 ao cambio de 12$^{7}/_{8}$. A quanto monta essa quantia em réis brazileiros?*

1$^{fr.}$ ao cambio de 12$^{7}/_{8}$ vale

353
27
2 471
706
9 531 : $^{103}/_{8}$
8
76 248 : 103 = 740 rs.
414
28

1$^{fr.}$ valendo 740 rs., 3 540$^{fr.}$ valerão

3 540.50
740
141 620
247 835
2:619$790,00

Exercicio 3). — *Tendo-se de enviar para Paris a quantia de 2:619$970, ao cambio de 12$^{7}/_{8}$, quantos francos produz essa quantia?*

1$^{fr.}$ ao cambio de 12$^{7}/_{8}$ *vale* 740 rs.

2 619 970 | 740
.3 999 | 3 540$^{fr.}$,50
.2 997
.3 700
. . .0

Allemanha

Tudo quanto ficou dito sobre o *franco* se applica ao *reichsmark*, cujo valor é *436 réis brazileiros*, ao cambio de 27.

Exercicio 1). — *Quanto vale 1 reichsmark ao cambio de* 14$^{1}/_{8}$.

436
27
3 052
872
11 772 : $^{113}/_{8}$
8
94 176 : 113 = 833 rs.
.377
.386
.47

Exercicio 2). — *Uma factura de Hamburgo na importancia de 1725 reichsmarks, ao cambio de 13$^{3}/_{4}$, a quanto monta em réis brazileiros?*

1 reichsmark ao cambio de 13$^{3}/_{4}$ *vale*

436
27
3 025
872
11 772 : $^{55}/_{4}$
4
47 088 : 55 = 856 rs.
.308
.338
. .8

1 reichsmark valendo 856 *rs., 1725 reichsmark valerão*

```
     1 725
       856
    ------
    10 350
    8 625
  13 800
  --------
  1:476$600 rs.
```

Exercicio 3). — *Tendo de enviar para Hamburgo a quantia de 1:476$600, ao cambio de* $13^3/_4$*, quantos reichsmark produz essa quantia?*

1 reichsmark ao cambio de $13^3/_4$ *vale* 856 rs.

```
1 476 600 | 856
  . 6 206 | 1 725 reichsmark.
    .2 140
     .4 280
      . . .0
```

Portugal

O cambio inglez estando a *27, 100 réis fortes* valem *200 réis fracos.*

Para ter-se o valor de 100 réis fortes em réis fracos *a um cambio qualquer*, multiplica-se 200 por 27 e divide-se o producto pelo cambio dado.

Assim, 100 réis fortes, ao cambio de 15, valem

```
  27
   200
 ------
 5 400 | 15
  . 90 | 360 réis fracos.
    .0
```

Exercicio 1). — *A quanto monta em réis brazileiros, uma factura de Lisboa na importancia de 1:500$000, ao cambio de* $13^5/_8$.

100 réis fortes *ao cambio de* $13^5/_8$ *valem*

```
  27
   200
 ------
 5 400 : 109/8
     8
 ------
 43 200 : 109 = 396 réis fracos.        3,96
 1 050                                 1 500 000
 . . 690                               1 980
   .36                                 396
                                       5:940$000,00
```

100 réis fortes *ao cambio de* $13^5/_8$ valem *396 réis fracos*; ou 1 real forte *vale* 3,96 reis fracos.

Exercicio 2). — *Tendo de remetter para Lisboa 5:940$000 ao cambio de* $13^5/_8$*, quanto produz essa quantia em moeda portugueza?*

100 réis fortes *ao cambio de* $13^5/_8$ valem *396 réis fracos;* ou 1 real forte *vale* 3,96 réis fracos.

5 940 000 : 3,96

ou

```
5 940 000 00 | 396
  1 980      | 1:500$000 fortes.
   . . 0
```

Observação

Em todos os exercicios propostos empregámos cambios que se encontram na tabella annexa, para confirmal-a. Assim, com as regras dadas podemos resolver todas as questões identicas, *seja qual for o cambio dado.*

Maria da Gloria

Capitulo XI.

Raizes quadrada e cubica

§ I — Quadrado e raiz quadrada

397. Quadrado ou segunda potencia de um numero, é o producto de dois factores iguaes a esse numero; ou, por outra, é o producto desse numero por si mesmo.

Assim, 49 (7×7) é o *quadrado* de 7; 81 (9×9) é o *quadrado* de 9.

398. Raiz quadrada de um numero, é o numero que, sendo multiplicado por si mesmo, ou elevado ao quadrado, reproduz o numero proposto.

Assim, 7 é a raiz quadrada de *49*, porque 7×7 ou $7^2 = 49$; 9 é a raiz quadrada de *81*, porque 9×9 ou $9^2 = 81$.

399. Indica-se a extracção de raizes por meio de um signal particular ($\sqrt{}$), chamado *radical*.

As raizes, como as potencias, têm *gráos* que são indicados pelos *indices* ou *expoentes*.

Indice de um radical é o numero que indica as vezes que a raiz entra como factor; colloca-se na abertura deste signal; assim $\sqrt[2]{4}$, $\sqrt[3]{9}$, lê-se: *raiz quadrada* de 4; *raiz cubica* de 9.

Não se costuma escrever o indice *(2) da raiz quadrada.* — Assim, $\sqrt{16}$, $\sqrt{25}$, etc., lê-se: *raiz quadrada* de 16, *raiz quadrada* de 25.

400. *Para extrahir-se a raiz quadrada de um numero inteiro,* é preciso conhecer os quadrados dos *nove primeiros numeros:*

Raizes quadradas	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrados	1	4	9	16	25	36	49	64	81

Observação. — Quando um numero inteiro não é quadrado, acha-se entre os quadrados de dois numeros consecutivos.

58, por exemplo, não sendo quadrado, acha-se entre *49* e *64*, quadrados de 7 e 8 (numeros consecutivos).

Assim, 58, ficando comprehendido entre os quadrados *49* e *64*, é *maior* do que *49* e *menor* do que *64;* o que se indica deste modo:

$$49 < 58 < 64$$

A raiz quadrada, pois, de 58, fica comprehendida entre 7 e 8 (raizes quadradas de 49 e 64); é *maior* do que *7* e *menor* do que *8;* o que assim se indica:

$$\sqrt{49} < \sqrt{58} < \sqrt{64}$$

isto é,

$$7 < \sqrt{58} < 8.$$

A differença entre *7* e *8* sendo de *uma unidade,* a differença entre a raiz quadrada de 58 e qualquer um destes dois numeros *é menor do que uma unidade,* visto estar ella comprehendida entre ambos. O numero 7 é a raiz quadrada de 58, *a menos de uma unidade* por falta; 8 é a raiz quadrada de 58, *a menos de uma unidade* por excesso.

401. *O quadrado de um numero composto de dezenas e unidades consta de tres partes:*

1.º do quadrado das dezenas,
2.º do dobro do producto das dezenas pelas unidades,
3.º do quadrado das unidades.

Exemplo. $36^2 = (30 + 6)^2 = 30^2 + 2(30 \times 6) + 6^2 = 900 + 360 + 36 = 1296.$

402. *A differença dos quadrados de dous numeros consecutivos é igual ao dobro do menor mais 1.*

Exemplo. $27^2 = (26 + 1)^2 = 26^2 + 2 \times 26 + 1 = 27^2 - 26^2 = 2 \times 26 + 1 = 729 - 676 = 53.$

Raiz quadrada dos numeros inteiros

403. **Para extrahir a raiz quadrada de um numero inteiro,** divide-se este em classes de dois algarismos, começando-se da direita para a esquerda, podendo a ultima constar de um só algarismo.

Procura-se o maior quadrado contido na 1.ª classe da esquerda, e a sua raiz quadrada *(que será o primeiro algarismo da raiz pedida)* se escreve á direita do numero proposto, delle separando-se por um traço vertical.

Da classe considerada subtrahe-se o maior quadrado nella contido, e á direita do resto se escreve a classe seguinte.

Do numero assim formado separa-se o ultimo algarismo da direita, e divide-se o numero resultante pelo dobro da raiz achada. O quociente se escreve á direita da raiz achada e á direita do numero que serviu de divisor. Este divisor, assim augmentado, multiplica-se pelo ultimo algarismo da direita; e subtrahe-se o producto do numero formado pelo dividendo e o algarismo que se havia separado.

A' direita do resto escreve-se a 3.ª classe, e continua-se do mesmo modo até se haver considerado todos os algarismos.

Observações

Primeira. — Quando algum dos dividendos parciaes for menor do que o divisor, o quociente será zero, e *zero* se escreverá na raiz; para continuar a operação, baixa-se a classe seguinte, a qual se escreve á direita do numero formado pelo resto e a ultima classe considerada, procedendo-se depois como preceitua a regra.

Segunda. — *Quando não ha resto,* o numero dado é quadrado; *si houver resto,* a raiz achada é a raiz quadrada do maior quadrado contido no numero dado; ou, é a raiz quadrada approximada do numero dado, *a menos de uma unidade,* por falta.

Exemplo. = *Extrahir a raiz quadrada de* 57836025.

$\sqrt{57.83.60.25}$	7605	
49		
.88.3	$(2 \times 7) = 14$	1.º divisor
87.6	$146 \times 6 = 876$	
.. 76.0	$(2 \times 76) = 152$	2.º divisor
0		
76025	$(2 \times 760) = 1520$	3.º divisor
76025	$15205 \times 5 = 76025$	
0		

Terceira. — Quando se quer extrahir a raiz quadrada de um numero, *a menos de uma unidade fraccionaria dada,* multiplica-se esse numero pelo quadrado do denominador da fracção que indica a approximação pedida; extrahe-se depois, *a menos de uma unidade,* a raiz quadrada do producto, e o resultado divide-se pelo denominador da fracção dada.

Exemplo. — *Extrahir a raiz quadrada de* **41**, *a menos de* $\frac{1}{5}$.

$$\sqrt{41} = \frac{\sqrt{41 \times 5^2}}{5} = \frac{\sqrt{1025}}{5} = \frac{32}{5} = 6 + \frac{2}{5},$$

a menos de $\frac{1}{5}$ **por falta.**

Quarta. — Querendo-se achar a raiz quadrada de um numero, *a menos de* $\frac{1}{2}$, conserva-se o ultimo algarismo da raiz inteira, si o *resto* fôr menor do que *essa* parte *inteira,* ou *a ella* igual. Neste caso tem-se a raiz quadrada approximada *a menos de* $\frac{1}{2}$ por **falta.** (Vid. ex. 1 e 2).

Si, porém o *resto* fôr maior do que *a parte inteira,* junta-se a esta uma unidade, e obtem-se a raiz quadrada approximada *a menos de* $\frac{1}{2}$ por **excesso.** (Vid. ex. 3).

Ex. 1). $\sqrt{268}$ é **16** *a menos de* $\frac{1}{2}$ **por falta.**

```
√2.68 | 16
 1    | 26
 16.8 |
 15 6
Resto....  12
```

Ex. 2). $\sqrt{552}$ é **23** *a menos de* $\frac{1}{2}$ **por falta.**

```
√5.52 | 23
 4    | 43
 15.2 |
 12 9
Resto....  23
```

Ex. 3). $\sqrt{1128}$ é 34 *a menos de* $\frac{1}{2}$ por excesso.

```
√11.28 | 33
  9    | 63
  22.8 |
  18 9
Resto....  39
```

Exercicios

Extrahir a raiz quadrada dos seguintes numeros:

1)	2)	3)	4)	5)
7 744	87 025	128 881	334 084	5 517 801
8 649	96 100	247 009	480 249	48 846 121

Extrahir a raiz quadrada dos seguintes numeros, a menos de cada uma das *unidades fraccionarias:* $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$.

1)	2)	3)	4)	5)
34	58	75	139	342
43	69	87	291	453

Extrahir a raiz quadrada dos seguintes numeros a menos de $\frac{1}{2}$.

1)	2)	3)	4)	5)
1 118	5 700	4 444	8 322	9 506
3 253	6 162	6 201	8 574	3 451

Raiz quadrada de numeros fraccionarios

1.º Fracções decimaes

404. Para extrahir a raiz quadrada de uma fracção decimal *cujo numero de casas de dizima é* par, extrahe-se, *a menos de uma unidade,* a raiz quadrada da fracção dada, fazendo-se abstracção da virgula, e toma-se depois á direita della *a metade das casas de dizima existentes na fracção proposta.*

Exemplo. — *Extrahir a raiz quadrada de* **0,5987**

```
√59.87 | 77
 49    | 147
 108.7 |
 101.9
 ..5 8
```

$\sqrt{0{,}5987} = $ **0,77**, *a menos de* **um centesimo.**

Quando o numero de casas de dizima da fracção é impar, torna-se primeiramente par, accrescentando-se um zero á sua direita e opera-se como precedentemente.

Exemplo. — *Extrahir a raiz quadrada de* **0,57689** **(ou 0,576890).**

```
√57.68.90 | 759
 49       | 145
  86.8    | 1509
  72 5
  14 39.0
  13 58 1
    .80 9
```

$\sqrt{0{,}576890} = $ **0,759**, *a menos de* **um millesimo.**

Exercicios

Extrahir a raiz quadrada das seguintes fracções:

1)	2)	3)	4)
0,3136	0,3702	0,321	0,42521
65,9344	0,6198	0,819	0,20054
0,491401	29,4813	12,578	14,80167

2.º Fracções ordinarias

405. Para extrahir-se a raiz quadrada de uma fracção ordinaria *cujos termos são* quadrados, extrahe-se, separadamente a raiz quadrada ao numerador e ao denominador, e divide-se depois a primeira raiz pela segunda.

Exemplo. — $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$.

Si unicamente o denominador fôr quadrado, extrahe-se, a menos de uma unidade, a raiz quadrada do numerador e a exacta do denominador.

Exemplo. — $\sqrt{\frac{29}{49}} = \frac{\sqrt{29}}{7} = \frac{5}{7}$, *a menos de* $\frac{1}{7}$ por falta.

Si os dois termos não forem quadrados, multiplicam-se ambos pelo denominador e procede-se depois como no caso precedente.

Exemplo. — $\sqrt{\frac{7}{11}} = \sqrt{\frac{7 \times 11}{11^2}} = \frac{\sqrt{77}}{11} = \frac{8}{11}$, *a menos de* $\frac{1}{11}$ por falta.

Exercicios

Extrahir a raiz quadrada das seguintes fracções:

1) $\frac{9}{16}$	2) $\frac{63}{64}$	3) $\frac{6}{7}$	4) $\frac{16}{25}$
$\frac{25}{49}$	$\frac{75}{81}$	$\frac{8}{11}$	$\frac{97}{144}$
$\frac{64}{121}$	$\frac{97}{121}$	$\frac{7}{13}$	$\frac{8}{15}$

Problemas sobre os quadrados e sobre as raizes quadradas

1. 10 vezes a raiz quadrada de um numero vale 250. *Qual é este numero?* — R. 625.
2. 8 vezes o quadrado de um numero vale 8 192. *Qual é este numero?* — R. 32.
3. Dois numeros são iguaes e o seu producto é 1 849. *Quaes são os dois numeros?* — R. 43.
4. A somma dos quadrados de dois numeros é 625 e um destes numeros é 15. *Qual é o outro?* — R. 20.
5. Repartindo-se 230$400 entre diversas pessoas, cada uma dellas recebeu tantos *réis* quantas eram as pessoas. *Quantas eram as pessoas e quanto recebeu cada uma?* — R. 480 pessoas e cada uma recebeu 480 rs.
6. Um jardineiro quer plantar em um terreno quadrado 3 136 arbustos, de modo que formem renques parallelos. *Quantos arbustos deve elle plantar em cada linha?* — R. 56.
7. A somma dos quadrados de dous numeros é 1 552 e a differença de seus quadrados é 1 040. *Quaes são esses dous numeros?* — R. 36, 16.

8. *Qual é o numero cuja raiz quadrada augmentada de 13 dá para somma 29?* — R. 256.
9. A differença de dous numeros é 10 e o producto de seus quadrados é 576. *Quaes são esses numeros?* — R. 12, 2.
10. *Qual é o numero cujos* $\frac{2}{3}$ *do quadrado igualam a 6 534?* — R. 99.
11. O maior de dous numeros é 546; o quadrado de sua somma é 470 596. *Qual é o menor?* — R. 140.
12. A differença dos quadrados de dous numeros consecutivos é 65. *Quaes são esses numeros?* — R. 32, 33.

§ II — Cubo e raiz cubica

406. Cubo ou terceira potencia de um numero, é o producto de tres factores iguaes a esse numero.

Assim, 27 ($3 \times 3 \times 3$) é o cubo de *3*;
125 ($5 \times 5 \times 5$) é o cubo de *5*.

407. Raiz cubica ou raiz terceira de um numero é o numero que tomado trez vezes como factor ou elevado ao cubo, reproduz o numero proposto.

Assim 3 é a raiz cubica de *27*, porque $3 \times 3 \times 3$ ou $3^3 = 27$; 5 é a raiz cubica de *125*, porque $5 \times 5 \times 5$ ou $5^3 = 125$.

408. Para extrahir-se a raiz cubica de um numero inteiro, é preciso conhecer os cubos dos *nove primeiros numeros:*

Raizes cubicas	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cubos..........	1	8	27	64	125	216	343	512	729

Observação. — Quando um numero inteiro não é cubo, acha-se comprehendido entre os cubos de dois numeros inteiros consecutivos.

298, por exemplo, não sendo cubo, acha-se entre *216* e *343*, cubos de 6 e 7 (numeros consecutivos).

Assim, 298, ficando entre os cubos *216* e *343*, é *maior* do que 216 e *menor* do que 343; o que se indica deste modo:

$$216 < 298 < 343.$$

A raiz cubica, pois, de 298, fica comprehendida entre 6 e 7 (raizes cubicas de 216 e 343); é *maior* do que 6 e *menor* do que 7; o que assim se indica:

$$\sqrt[3]{216} < \sqrt[3]{298} < \sqrt[3]{343}; \text{ isto é,}$$

$$6 < \sqrt[3]{298} < 7.$$

E como a differença entre *6* e *7* é de *uma unidade,* a differença entre a raiz cubica de 298 e qualquer um destes dois numeros é *menor do que uma unidade,* visto estar ella comprehendida entre ambos. O numero 6 é a raiz cubica de 298, *a menos de uma unidade* por falta; 7 é a raiz cubica de 298, *a menos de uma unidade* por excesso.

409. O cubo de um numero composto de dezenas e unidades consta de quatro partes:

1.° do cubo das dezenas,
2.° do triplo do producto do quadrado das dezenas pelas unidades,
3.° do triplo do producto das dezenas pelo quadrado das unidades,
4.° do cubo das unidades.

Exemplo. $32^3 = (30+2)^3 = 30^3 + 3\ (30^2 \times 2) + 3\ (30 \times 2^2) + 2^3 = 27\,000 + 5\,400 + 360 + 8 = 32\,768.$

Raiz cubica dos numeros inteiros

410. Para extrahir a raiz cubica de um numero inteiro, divide-se este em classes de tres algarismos, começando-se da direita para a esquerda; podendo a ultima constar de 1, 2 ou 3 algarismos.

Procura-se o maior cubo contido na 1.ª classe da esquerda e a sua raiz cubica *(que será o primeiro algarismo da raiz pedida)* escreve-se á direita do numero dado, delle separando-se por um traço vertical.

Da classe considerada subtrahe-se o maior cubo nella contido, e escreve-se á direita do resto a classe seguinte. Do numero assim formado separam-se os dois ultimos algarismos da direita e divide-se o numero formado pelos outros algarismos pelo triplo do quadrado da raiz achada. O quociente se escreve á direita da raiz achada, e o numero que dahi resulta eleva-se ao cubo e subtrahe-se este das duas classes consideradas.

Quando acontecer que o cubo obtido seja maior que o numero formado pelas classes consideradas, subtrahe-se 1 ao ultimo algarismo achado da raiz e do novo eleva-se o resultado ao cubo, para ver si é possivel a subtracção.

A' direita do resto se escreve a classe seguinte, e continua-se do mesmo modo até se haver considerado todos os algarismos.

Observações

Primeira. — Si algum dos dividendos parciaes fôr menor do que o divisor, o quociente será zero, e *zero* se escreverá na raiz; para continuar a operação, baixa-se a classe seguinte, a qual se escreverá á direita do numero formado pelo resto e a ultima classe considerada, procedendo-se depois como manda a regra.

Segunda. — *Sendo zero o resto da ultima subtracção,* o numero dado é cubo; *si houver resto,* a raiz achada é a raiz cubica do maior cubo contido no numero dado; ou, é a raiz cubica do numero dado, approximada *a menos de uma unidade,* por falta.

Exemplo. — *Extrahir a raiz cubica de 12230590464.*

$\sqrt[3]{12\,230.590.464}$	**2304**	
8		
.42 30	$(3 \times 2^2) = (3 \times 4) = \mathbf{12}$	1.° divisor
12 167	$23^3 = 12\,167$	
. . . 635 90	$(3 \times 23^2) = (3 \times 529) = \mathbf{1587}$	2.° divisor
12 167 000	$230^3 = 12\,167\,000$	
. . . 63 5904 54	$(3 \times 230^2) = (3 \times 52900) = \mathbf{158\,700}$	3.° divisor
12 230 590 464	$2304^3 = 12\,230\,590\,464$	
0		

Cubo de **23**	*Cubo de* **230**	*Cubo de* **2304**
23	230	2304
23	230	2304
69	69	9216
46	46	6912
529	**52900**	4608
23	230	**5308416**
1587	1587	2304
1058	1058	21233664
12 167	**12 167 000**	15925248
		10616832
		12 230 590 464

Terceira. — Querendo-se extrahir a raiz cubica de um numero, *a menos de uma unidade fraccionaria dada*, multiplica-se esse numero pelo cubo do denominador da fracção que indica a approximação pedida; extrahe-se depois, *a menos de uma unidade*, a raiz cubica do producto, e o resultado divide-se pelo denominador da fracção dada.

Exemplo. — *Extrahir a raiz cubica de* 60, *a menos de* $\frac{1}{5}$.

$$\sqrt[3]{60}=\frac{\sqrt[3]{60\times 5^3}}{5}=\frac{\sqrt[3]{7500}}{5}=\frac{19}{5}=3+\frac{4}{5},$$

a menos de $\frac{1}{5}$, **por falta.**

Quarta. — Sabemos (observ., n. 408) que todo numero que *não é cubo* acha-se comprehendido entre os cubos de dois numeros consecutivos e que, por conseguinte, a sua raiz cubica fica entre esses dois numeros consecutivos, que são as raizes dos cubos entre os quaes se acha o numero dado; é *maior* do que um e *menor* do que o outro.

O que não ha, porém, na extracção da raiz cubica, é um meio de reconhecer-se qual dos dois exprime o valor mais approximado da verdadeira raiz, isto é, não podemos dizer *que raiz* devemos *preferir*, si a por falta ou si a por excesso; assim, toma-se qualquer uma dellas, visto ser o erro em ambas, *menor do que uma unidade.*

Na extracção da raiz quadrada, porém, podemos dizer qual a raiz que deve-se preferir, comparando o resto da operação com a raiz achada *(vid. observ. quarta, n. 403)*.

Exercicios

Extrahir a raiz cubica dos seguintes numeros:

1)	2)	3)	4)
2 197	10 648	175 616	7 414 875
3 375	24 389	262 144	8 869 743
4 096	35 937	357 911	9 528 128

Extrahir a raiz cubica dos seguintes numeros, *a menos* de cada uma das *unidades fraccionarias:* $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}$.

1)	2)	3)	4)	5)	6)
2	5	8	19	43	74
3	6	9	28	59	87
4	7	10	31	68	98

Raiz cubica de numeros fraccionarios

1.° Fracções decimaes

411. Para extrahir a raiz cubica de uma fracção decimal *cujo numero de casas de dizima* **é multiplo de 3,** extrahe-se, a menos de uma unidade, a raiz cubica da fracção dada, feita a abstracção da virgula, e separa-se á direita della *a terça parte das casas de dizima existentes na fracção dada.*

Exemplo. — *Extrahir a raiz cubica de* **0,079 507.**

$\sqrt[3]{79.507}$	43
64	
155.07	$(3\times 4^2)=(3\times 16)=48$
795 07	$43^3=79\,507$
0	

$$\sqrt[3]{0{,}079\,507}=\mathbf{0{,}43}\ \text{exactamente.}$$

Si o numero de casas de dizima da fracção **não fôr multiplo de 3,** faz-se que o seja, accrescentando-se á sua direita os zeros que para isso forem necessarios, e opera-se depois como precedentemente.

Exemplo. — *Extrahir a raiz cubica de* **0,1843** (ou 0,184 300).

$\sqrt[3]{184.300}$	56
125	
593.00	$(3 \times 5^2) = (3 \times 25) = 75.$
176.616	$56^3 = 175\,616$
8 684	

$\sqrt[3]{0{,}184\,300} = 0{,}56$ *a menos de um* **centesimo.**

Exercicios

Extrahir a raiz cubica das seguintes fracções:

1)	0,054 872	2)	0,010 503 459	3)	40,036 787 461
	0,117 649		0,210 644 875		263,005 101 143
	0,438 976		143,877 824		1818,081 515 125
4)	2,4 603	5)	0,45 622	6)	89,62 145
	40,7 074		0,01 548		136,59 071
	29,5 432		0,97 022		0,65 111 125

2.° Fracções ordinarias

412. Para extrahir-se a raiz cubica de uma fracção ordinaria *cujos termos são* cubos, extrahe-se a raiz cubica separadamente ao numerador e ao denominador, e divide-se a primeira raiz pela segunda.

Exemplo. — $\sqrt[3]{\dfrac{27}{64}} = \dfrac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{64}} = \dfrac{3}{4}$

Si unicamente o denominador fôr cubo, extrahe-se, a menos de uma unidade, a raiz cubica do numerador.

Exemplo. — $\sqrt[3]{\dfrac{143}{216}} = \dfrac{\sqrt[3]{143}}{6} = \dfrac{5}{6}$, *a menos de* $\frac{1}{6}$ **por falta.**

Os dois termos **não sendo cubos, multiplicam-se** ambos pelo quadrado do denominador e opera-se como precedentemente.

Exemplo. — $\sqrt[3]{\dfrac{5}{9}} = \sqrt[3]{\dfrac{5 \times 9^2}{9^3}} = \dfrac{\sqrt[3]{405}}{9} = \dfrac{7}{9}$, *a menos de* $\frac{1}{9}$ **por falta.**

Exercicios

Extrahir a raiz cubica das seguintes fracções:

1) $\frac{27}{64}$	2) $\frac{1728}{2197}$	3) $\frac{49}{216}$	4) $\frac{2}{9}$
$\frac{216}{343}$	$\frac{2744}{3375}$	$\frac{100}{729}$	$\frac{5}{12}$
$\frac{125}{729}$	$\frac{6859}{50653}$	$\frac{391}{512}$	$\frac{7}{15}$

Verificar as seguintes igualdades:

1. $\sqrt{169} - \left(\dfrac{\sqrt{144}}{3} + \sqrt[3]{512}\right) = \dfrac{\sqrt[3]{729}}{6} : 1{,}5$

2. $\dfrac{\frac{3}{4}}{0{,}75} + \dfrac{\sqrt{196}}{7} - \dfrac{15}{\sqrt{225}} = \sqrt[3]{1331} - \sqrt{(71+6+4)^2} : \sqrt[3]{729}$

3. $\left(\dfrac{5}{8} + 0{,}25\right) \times \dfrac{8}{\sqrt[3]{343}} + \dfrac{16}{\sqrt[3]{512}} = \dfrac{15}{2\sqrt{9}} + \sqrt{\dfrac{\frac{3}{4} + 0{,}5}{5}}$

4. $\dfrac{\sqrt{225}}{4} \times 0{,}75 + \dfrac{1}{4} = \sqrt[3]{216} - \sqrt[3]{\dfrac{216}{27}}$

5. $2{,}5 + \dfrac{\sqrt{(4 \times 5)}}{6} + \sqrt[3]{27} = \dfrac{\sqrt[3]{512}\left(\sqrt[3]{4096} - \sqrt{140 - 19}\right)}{\sqrt{144} - (2{,}25 + 1{,}75)}$

6. $\sqrt{\dfrac{4}{0{,}25}} + 2\left(0{,}8 + \dfrac{1}{5}\right) = \sqrt{\dfrac{9}{16}}\left(\sqrt{\dfrac{0{,}49}{0{,}64}} + 0{,}125\right) + \sqrt{\dfrac{1}{16}} + \sqrt[3]{125}$

7. $\left(\dfrac{3}{2^3} + \dfrac{7}{\sqrt{64}} - \dfrac{5}{\sqrt[3]{512}}\right) \dfrac{7\,(11^2 - 9)}{11\sqrt{121} - \sqrt[3]{729}} = \sqrt[3]{0{,}064}\left(\dfrac{\sqrt[3]{0{,}125}}{\sqrt{0{,}25}} + \sqrt[3]{\dfrac{0{,}216}{0{,}027}}\right) + \sqrt{0{,}64} + \sqrt[3]{125}$

8. $\sqrt[3]{0{,}008} + \sqrt{\dfrac{0{,}29 + 0{,}07}{0{,}75 - 0{,}11}} + 7{,}05 = \sqrt{144}\left(\sqrt[3]{\dfrac{8}{27}} + \dfrac{1}{3}\right) - 2^3 + \dfrac{\sqrt{80 - 16}}{\sqrt[3]{8}}$

9. $\left[\sqrt{144}\left(\sqrt[3]{\dfrac{8}{27}} + \dfrac{1}{3}\right) + \sqrt[3]{64}\right] \dfrac{\sqrt{(72+9)}}{4\sqrt{16}} = \left[\sqrt[3]{27}\,(\sqrt{0{,}0121} + \sqrt{0{,}81}) + \sqrt[3]{0{,}729}\right] \dfrac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt{4}} + \sqrt{0{,}81} + \sqrt{0{,}24^2}$

10. $$\left[\sqrt{16}\left(\sqrt[3]{0,002197}+\sqrt{0,81}\right)+\sqrt{0,0144}\right]\sqrt[3]{125}-\sqrt{121}-\frac{1}{5}-$$
$$-\sqrt[3]{\left[\sqrt{4}\left(\frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{4}}+\frac{2}{3}-\frac{\sqrt[3]{512}}{\sqrt{64}}\right)+7\right]}+\frac{6,75}{\sqrt[3]{27}}\times\sqrt[3]{64}-\frac{0,5}{\sqrt{\frac{1}{4}}}$$

Problemas sobre os cubos e raizes cubicas

1. 4 vezes a raiz cubica de um numero vale 60. *Qual é este numero?* — **R. 3375.**

2. $\frac{1}{4}$ do cubo de um numero vale 3456. *Qual é este numero?* — **R. 24.**

3. O producto de um numero pelos $\frac{3}{4}$ do seu quadrado é igual a 1296. *Qual é este numero?* — **R. 12.**

4. A somma dos cubos de dois numeros é 23625, e um destes numeros é 20. *Qual é o outro?* — **R. 25.**

5. *Qual é o numero cuja raiz cubica diminuida de 3 é igual a 24?* — **R. 19683.**

6. A somma de dous numeros é 77, o cubo de sua differença é 19683. *Quaes são estes numeros?* — **R. 52, 25.**

7. Os $\frac{5}{8}$ do cubo de um numero igualam a 8640. *Achar este numero.* — **R. 24.**

8. O menor de dous numeros é 25; o cubo de sua somma é 614125. *Qual é o maior?* — **R. 60.**

Applicações geometricas

§ I — Preliminares

1. Corpo é tudo que occupa uma porção do espaço.

2. Volume de um corpo é o espaço occupado por este corpo.

3. Superficie de um corpo é a parte exterior deste corpo; é o que o separa do resto do espaço.

As superficies são *planas, quebradas* e *curvas.*

Superficie plana é uma superficie tal, que por qualquer dos seus pontos se póde traçar uma linha recta em todas as direcções.

Superficie quebrada é a que se compõe de superficies planas concorrendo duas a duas.

Superficie curva é a que nem é plana nem composta de superficies planas.

4. Linha é o limite de uma superficie; ou é a intersecção de duas superficies.

5. Ponto é a extremidade de uma linha; ou, é o lugar em que duas linhas se cortam.

O ponto de encontro chama-se *ponto de intersecção.*

§ II — Das linhas

Linha recta, quebrada, curva

6. Quanto á forma, a linha é *recta*, *quebrada* ou *curva*.

Linha recta é o mais curto caminho de um ponto a outro; como AB *(Fig. 1)*.

Fig. 1

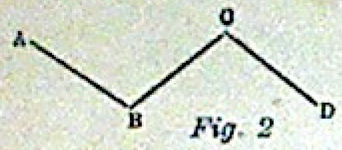


Fig. 2

Linha quebrada é toda linha composta de linhas rectas; como ABCD *(Fig. 2)*.

Linha curva é a que nem é recta nem composta de linhas rectas; como AC *(Fig. 3)*.

Fig. 3

Linhas perpendiculares, obliquas, parallelas

7. Quanto ás suas posições relativas, as linhas rectas são *perpendiculares*, *obliquas* ou *parallelas*.

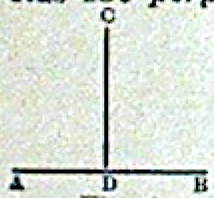


Fig. 4

Uma linha se diz *perpendicular* á outra, quando a encontra sem pender para nenhum lado; como CD *(Fig. 4)*.

Chama-se *linha obliqua* a que encontra outra, pendendo mais para um dos lados. A linha CD é obliqua a AB *(Fig. 5)*.

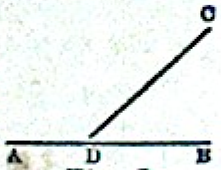


Fig. 5

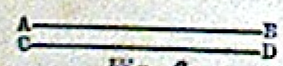


Fig. 6

Duas linhas chamam-se *parallelas* quando, traçadas no mesmo plano, não se encontram por mais que se prolonguem *(Fig. 6)*.

As duas linhas AB e CD são parallelas.

Fig. 7

Duas curvas são tambem *parallelas*, quando sempre ficam á igual distancia uma da outra *(Fig. 7)*.

Linha vertical, horizontal, inclinada

8. Quanto á sua direcção no espaço, as linhas podem ser *verticaes*, *horizontaes* ou *inclinadas*.

Linha vertical é a que segue a direcção de um prumo.

O fio de prumo não é mais do que um fio a cuja extremidade está preso um pequeno bloco de chumbo *(Fig. 8)*.

Uma linha é *horizontal*, quando segue a direcção da superficie das aguas tranquillas.

Para fazer-se uma construcção em uma posição horizontal, serve-se do nivel de pedreiro *(Fig. 9)*.

O nivel de pedreiro é uma especie de triangulo de madeira, a cujo vertice está ligado um prumo. Collocando-se o instrumento sobre uma

Fig. 8

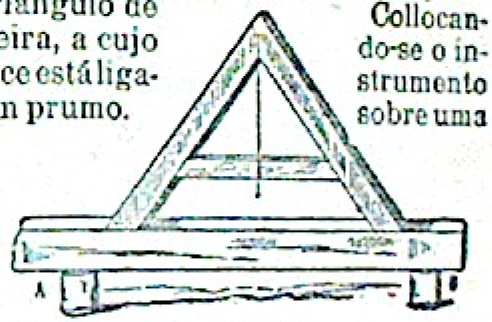


Fig. 9

construcção, esta é horizontal si o prumo cahir exactamente sobre uma pequena marca chamada *linha de fé*.

Linha inclinada ou *obliqua no espaço* é a que não é nem vertical nem horizontal.

§ III — Dos angulos

Angulo recto, agudo e obtuso

9. Angulo é a figura formada por duas linhas que se encontram; como ABC *(Fig. 10)*.

Fig. 10

10. As linhas que formam o angulo chamam-se *lados*; o ponto de encontro dos lados chama-se *vertice do angulo*.

12. *Designa-se um angulo* pela lettra do vertice Assim, diz-se: o angulo B *(Fig. 10).*

Si o vertice for commum a dois ou mais angulos, designa-se cada um destes por *tres* lettras, collocando-se *no meio* a lettra do *vertice.*

Assim, diz-se: o angulo ADC, o angulo CDB *(Figs. 4 e 5).*

12. Os angulos são: *rectos, agudos, obtusos.*

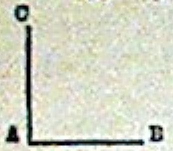


Fig. 11

Angulo recto é um angulo formado por duas rectas entre si perpendiculares *(Fig. 11).*

Angulo agudo é um angulo menor do que um angulo recto. *(Fig. 12).*

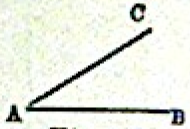


Fig. 12

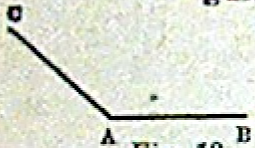


Fig. 13

Angulo obtuso é um angulo maior do que um angulo recto *(Fig. 13).*

§ IV — Dos triangulos

13. **Triangulo** é uma superficie plana limitada por tres linhas que se encontram duas a duas *(Fig. 14).* As tres linhas rectas que formam o triangulo chamam-se *lados do triangulo.*

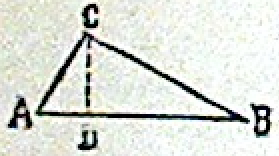


Fig. 14

Os tres angulos formados pela intersecção das tres linhas rectas são os tres *angulos do triangulo*, e os vertices destes tres angulos são os *vertices do triangulo.*

14. *Designa-se um triangulo* pelas tres lettras collocadas nos tres vertices.

Assim, diz-se: o triangulo ABC.

15. *Base de um triangulo* é qualquer um dos seus lados.

Altura de um triangulo é a perpendicular baixada de um dos vertices do triangulo sobre o lado opposto. *(Fig. 14).*

Observação. — Ás vezes *a perpendicular cahe fóra do triangulo* sobre o prolongamento da base *(Fig. 15)*; esta perpendicular é ainda a altura do triangulo.

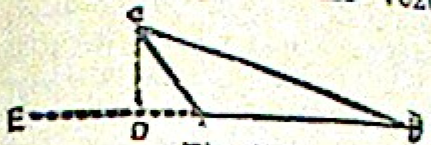


Fig. 15

16. A somma dos tres angulos de um triangulo é igual a dois angulos rectos.

Differentes especies de triangulos

17. Em relação aos lados, o triangulo se denomina: *equilatero, isosceles* e *scaleno.*

18. *Triangulo equilatero* é um triangulo que tem os tres lados iguaes. *(Fig. 16).*

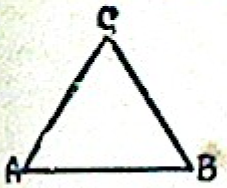


Fig. 16

19. *Triangulo isosceles* é um triangulo que tem dois lados iguaes *(Fig 17).*

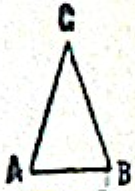


Fig. 17

No triangulo isosceles toma-se particularmente por base *o lado que não é igual* a um dos outros dois.

20. *Triangulo scaleno* é um triangulo que tem os tres lados desiguaes *(Fig. 18).*

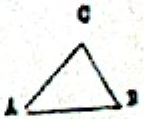


Fig. 18

21. Em relação aos angulos, o triangulo se denomina: *rectangulo, obtusangulo* e *acutangulo*

Do triangulo rectangulo

22. *Triangulo rectangulo* é um triangulo que tem um angulo recto *(Fig. 19).*

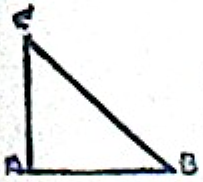


Fig. 19

O lado opposto ao angulo recto chama-se **hypothenusa.**

23. Em um triangulo rectangulo, tomando-se para *base* um dos lados do angulo recto, o outro lado é a *altura*. — Si tomar-se a *hypothenusa* para *base*, a *altura* é a perpendicular baixada do vertice do angulo recto sobre a hypothenusa.

24. **Propriedade do triangulo rectangulo.** — O quadrado da hypothenusa de um triangulo rectangulo é igual á somma dos quadrados dos outros dois lados.

Por conseguinte:

1) A hypothenusa de um triangulo rectangulo é igual á raiz quadrada da somma dos quadrados dos outros dois lados.

2) Qualquer lado do angulo recto de um triangulo rectangulo é igual á raiz quadrada da differença entre o quadrado da hypothenusa e o quadrado do outro lado.

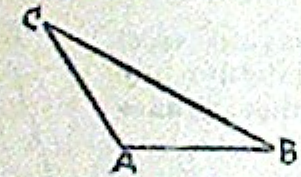


Fig. 20

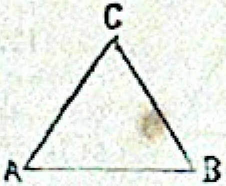


Fig. 21

Triangulos acutangulo e obtusangulo

25. *Triangulo acutangulo* é um triangulo que tem os tres angulos agudos. (*Fig. 20*).

26. *Triangulo obtusangulo* é um triangulo que tem um angulo obtuso. (*Fig. 21*).

§ V — Dos quadrilateros

27. **Quadrilatero** é uma superficie plana limitada por quatro linhas rectas que se encontram duas a duas. (*Fig. 22.*)

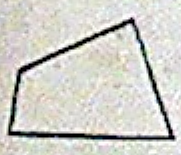


Fig. 22.

28. As linhas rectas que formam o quadrilatero chamam-se ***lados do quadrilatero.***

Os angulos formados por dois lados consecutivos chamam-se *angulos do quadrilatero.* Os vertices destes angulos são os *vertices do quadrilatero.*

29. *Designa-se um quadrilatero* pelas quatro lettras collocadas nos vertices.

30. Os principaes quadrilateros são: o *parallelogrammo*, o *rectangulo*, o *losango*, o *quadrado* e o *trapezio*.

Do parallelogrammo

31. *Parallelogrammo* é um quadrilatero que tem os lados oppostos iguaes e parallelos dois a dois. (*Fig. 23*).

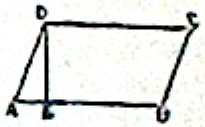


Fig. 23

32. *Base de um parallelogrammo* é qualquer um dos lados parallelos; ordinariamente escolhe-se o maior.

33. **Propriedade do parallelogrammo.** — As diagonaes de um parallelogrammo *cortam-se mutuamente em partes iguaes.* (*Fig. 24*).

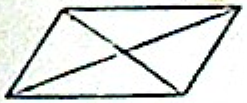


Fig. 24

Do rectangulo

34. *Rectangulo* é um parallelogrammo cujos angulos são rectos.

35. *Base de um rectangulo* é qualquer um dos lados.

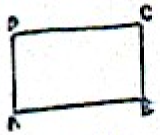


Fig. 25

Altura dum rectangulo é um dos dois lados perpendiculares áquelle que se escolheu para base.

36. **Propriedades do rectangulo.** — O rectangulo é um parallelogrammo; gosa, por tanto, da mesma propriedade deste. Logo, as suas diagonaes *cortam-se mutuamente em partes iguaes;* **além disto,** *são iguaes.* (*Fig. 26*).

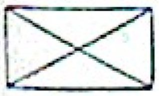


Fig. 26

Do losango

37. *Losango* é um parallelogrammo cujos lados são todos iguaes. *(Fig. 27).*

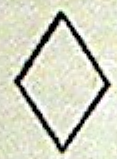


Fig. 27

38. **Propriedades do losango.** — O losango é um parallelogrammo; gosa, pois, das propriedades deste. O que o distingue do parallelogrammo é que as suas diagonaes *cortam-se em angulo recto* ou *orthogonalmente. (Fig. 28).*

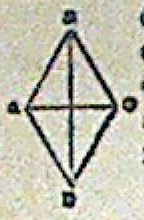


Fig. 28

Do quadrado

39. *Quadrado* é um parallelogrammo que tem os angulos rectos e os lados iguaes. *(Fig. 29).*

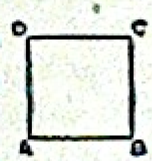


Fig. 29

40. No quadrado como são iguaes os lados, a *base* e a *altura* são iguaes.

41. **Propriedades do quadrado.** — Segundo a definição, o quadrado gosa das propriedades do *parallelogrammo*, porque os seus lados são parallelos; das do *rectangulo*, porque os seus angulos são rectos; das do *losango*, porque os seus lados são iguaes.

Por conseguinte:

1.°) As diagonaes de um quadrado *cortam-se mutuamente em partes iguaes.*

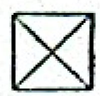


Fig. 30

2.°) *São iguaes.*

3.°) *Cortam-se em angulos rectos.*

4.°) *Decompõem a figura em quatro triangulos rectangulos, isosceles, iguaes entre si.*

Do trapezio

42. *Trapezio* é um quadrilatero que tem dois lados parallelos e desiguaes. *(Fig. 31).*

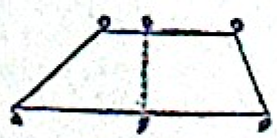


Fig. 31

43. *Bases de um trapezio* são os dois lados parallelos.

Altura de um trapezio é a distancia das duas bases; é, portanto, a perpendicular commum.

44. O trapezio póde ser *isosceles* ou *rectangulo.*

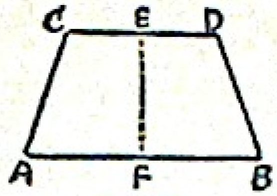


Fig. 32

Trapezio isosceles ou *symetrico* é aquelle em que são iguaes os dois lados não parallelos. *(Fig. 32).*

Trapezio rectangulo é aquelle em que um dos lados não parallelos é perpendicular ás bases. *(Fig. 33).*

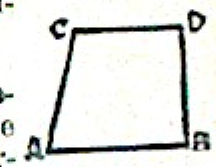


Fig. 33

45. **Propriedades do trapezio.** — Em um trapezio, a recta que une os meios dos lados não parallelos é: 1.°) *parallela ás bases;* 2.°) *igualmente distante das bases;* 3.°) *igual á semi-somma das bases.*

§ VI — Dos polygonos

46. **Polygono** é toda superficie plana limitada por linhas rectas que se encontram duas a duas. *(Fig. 34).*

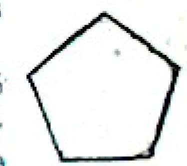


Fig. 34

47. O mais simples dos polygonos é o *triangulo;* depois deste, o *quadrilatero.*

48. Em geral, dá-se o nome de *polygono* a uma figura que tem *mais de quatro lados.*

Em relação ao numero dos lados, o polygono denomina-se:

Pentagono	quando	tem	5	*lados*
Hexagono	"	"	6	"
Heptagono	"	"	7	"
Octogono	"	"	8	"
Enneagono	"	"	9	"
Decagono	"	"	10	"
Endecagono	"	"	11	"
Dodecagono	"	"	12	"
Pentadecagono	"	"	15	"
Icosagno	"	"	20	"

São estes os unicos polygonos que têm *nomes particulares;* os outros designam-se pelo *numero de lados.*

49. As rectas que formam o polygono chamam-se *lados do polygono.*

A somma dos lados chama-se *contorno* ou *perimetro do polygono.*

Angulos do polygono são os angulos formados por dois lados consecutivos.

Vertices do polygono são os vertices dos seus angulos.

Ha tantos vertices e tantos angulos quantos forem os lados.

Toda recta que, em um polygono, une dois vertices não consecutivos, chama-se *diagonal do polygono.*

50. *Designa-se um polygono* pelas lettras collocadas nos seus vertices.

51. Em um polygono póde haver angulos *salientes* ou *reentrantes.*

52. Os polygonos cujos angulos são todos salientes chamam-se *convexos. (Fig. 35).*

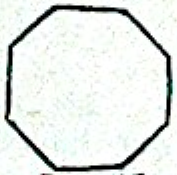


Fig. 35

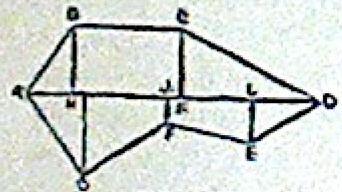


Fig. 36

53. Os polygonos em que ha um ou mais angulos reentrantes, chamam-se *concavos. (Fig. 36)*

54. Os principaes caracteres dos polygonos convexos são:

1.º) Uma recta traçada no seu plano *não póde encontrar o perimetro em mais de dois pontos.*

2.º) Prolongado indefinidamente um lado, *todo o polygono fica da mesma parte desse lado que não o corta.*

3.º) *Todas as diagonaes são interiores.*

55. Um polygono póde dividir-se em *tantos triangulos quantos são os lados menos dois.*

Tomando-se um ponto no interior dum polygono e ligando-o a todos os vertices, o polygono ficará dividido em *tantos triangulos quantos forem os lados.*

56. **Em relação aos angulos e lados,** os polygonos são *regulares* ou *irregulares.*

57. *Polygonos regulares* são os que têm os lados e os angulos iguaes. *(Fig. 37).*

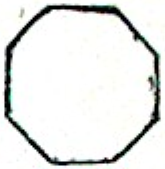


Fig. 37

O triangulo equilatero é um polygono regular de tres lados; o *quadrado* é um polygono regular de quatro lados.

Os polygonos regulares se podem decompor em *tantos triangulos isosceles quantos forem os lados (Fig. 38).* Cada lado do polygono serve de base a cada um dos triangulos, cujos vertices oppostos se acham no centro do polygono.

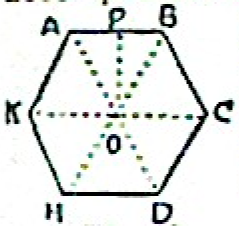


Fig. 38

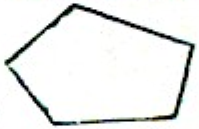


Fig. 39

58. *Polygonos irregulares* são os que têm lados e angulos desiguaes. *(Fig. 39).*

§ VII — Da circumferencia e do circulo

Linhas no circulo

59. **Circumferencia** é uma *linha* curva, plana, fechada, cujos pontos distam todos igualmente de um ponto interior chamado *centro. (Fig. 40).*

Fig. 40

60. **Circulo** é uma *superficie* limitada pela circumferencia.

61. *Raio de um circulo* é a linha recta que vae do centro á circumferencia. *(Fig. 41).*

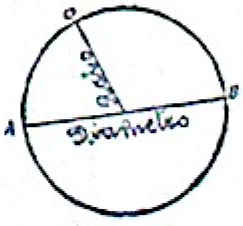


Fig. 41

62. *Diametro de um circulo* é a linha recta que passando pelo centro toca a circumferencia em dois pontos.

O diametro é o dobro do raio: divide a circumferencia e o circulo em duas partes iguaes chamadas *semi-circumferencias* e *semi-circulos. (Fig. 41).*

63. *Arco de um circulo* é uma parte qualquer da circumferencia.

64. *Corda* é toda recta que une as extremidades de um arco.

65. *Tangente ao circulo* é toda recta que toca a circumferencia em um unico ponto. (*Fig. 42*). O ponto em que a tangente toca a circumferencia chama-se *ponto de contacto* ou de *tangencia*.

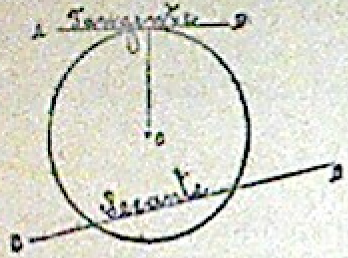


Fig. 42

A tangente a um circulo é *perpendicular á extremidade do raio*.

66. *Secante de um circulo* é toda recta que corta a circumferencia em dois pontos *(Fig. 42)*.

Uma secante não é mais do que uma corda prolongada nos dois sentidos.

Planos no circulo

67. *Sector* é uma parte da superficie do circulo, comprehendida entre um arco e os dois raios tirados para as suas extremidades. *(Fig. 43)*.

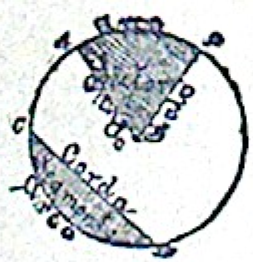


Fig. 43

68. O arco que corresponde ás extremidades destes raios chama-se *base do sector*.

69. *Segmento* é uma parte da superficie do circulo, comprehendida entre um arco e a respectiva corda *(Fig. 43)*.

70. O segmento é a differença *entre um sector* que tem por base o arco do segmento e *um triangulo* que tem por base a corda do mesmo segmento e cujo vertice está no centro do circulo.

71. *Circumferencias concentricas* são as que têm o mesmo centro e raios differentes. *(Fig. 44)*.

72. *Corôa* é uma superficie comprehendida entre duas circumferencias concentricas. *(Fig. 45)*.

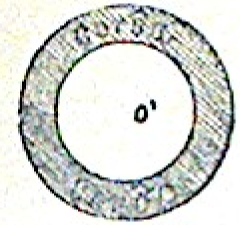


Fig. 45

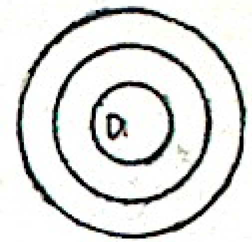


Fig. 44

§ VIII — Medida da circumferencia

73. Não se podendo medir directamente as circumferencias, tratou-se de procurar o meio geral de determinar o seu comprimento.

Para isto tomou-se o diametro que, como linha recta, facil é de medir-se. E partindo-se do principio que *duas circumferencias são proporcionaes aos seus raios* ou *aos seus diametros*, concluiu-se dahi que o diametro daria a circumferencia, si fosse conhecida *a relação constante* entre estas duas linhas.

Archimedes achou que esta relação é $\frac{22}{7}$, isto é, que dividindo-se o diametro em 7 partes iguaes, a circumferencia conterá 22 dessas partes.

Tomando-se o *diametro* por unidade, procurou-se quantas vezes a circumferencia conteria o diametro e achou-se que ella o continha tres vezes mais uma fracção: **3,1416**, valor este que se representa pela letra grega π (que se lê: **pi**).

74. **Para achar-se o comprimento de uma circumferencia**, *sendo dado o* ***diametro,*** multiplica-se este por π; *si for dado o* ***raio,*** duplica-se este e o resultado multiplica-se por π.

Chamando **D** o diametro e designando por **C** o comprimento de uma circumferencia, temos:

$$C = D\ \pi.$$

Substituindo D por 2 R, porque o diametro vale dois raios, resulta a

Formula: $C = 2 R \pi = 2 \pi R$.

Applicações

1) *Qual é o comprimento de uma circumferencia* que tem $1^m,50$ de *diametro?*

$$C = 2 \pi R = 1^m,50 \times 3,1416 = 4^m,7124.$$

2) *Qual é o comprimento de uma circumferencia* que tem $0^m,75$ de *raio?*

$$C = 2 \pi R = 2 \times 0^m,75 \times 3,1416 = 4^m,7124.$$

Observação. — Dividindo-se por π ambos os membros da igualdade

$$C = 2 \pi R, \text{ tem-se:}$$

$$2 R \text{ ou } D = \frac{C}{\pi}.$$

Si dividirmos por 2π os dois membros da mesma igualdade, resulta:

$$R = \frac{C}{2 \pi}.$$

§ IX — Medida dos angulos

75. *Medir uma grandeza* é procurar a sua relação com uma unidade da mesma especie.

76. *Medir*, pois, *um angulo* é procurar a sua relação com a unidade de angulo.

77. *Medir um arco* é procurar a sua relação com a unidade de arco.

78. No mesmo circulo ou em circulos iguaes, *a relação entre dois angulos centraes é a mesma que a dos arcos interceptados por seus lados.*

79. *Angulo central* é todo angulo cujo vertice está no centro do circulo.

80. Não basta que duas grandezas sejam proporcionaes para que a medida de uma seja a da outra: é necessario escolher para unidade de uma o valor que corresponde á unidade da outra.

Assim, deve-se tomar por *unidade de arco, o arco que corresponde á unidade de angulo.*

81. *O angulo recto* é a principal unidade de angulos. E' preciso, pois, escolher para unidade de arcos o arco comprehendido entre os lados do angulo recto que tem o vertice no centro; isto é, deve-se escolher o *quadrante.*

82. Para facilitar essa comparação, divide-se a circumferencia em 360 partes iguaes chamadas *graus* (360^0); cada grau em 60 *minutos* ($60'$); cada minuto em 60 *segundos* ($60''$).

83. Traçando-se em uma circumferencia dois diametros entre si perpendiculares, formam-se *quatro angulos* que são angulos *rectos*, e a circumferencia fica dividida em *quatro partes iguaes que são quadrantes.*

84. **Um angulo central tem por medida** *o arco comprehendido entre seus lados.*

Assim, cada quadrante valendo $90°$, diz-se que **o angulo recto vale 90°.**

Dividindo-se o angulo recto em duas partes iguaes, obtem-se $45°$ para valor de cada um dos dois angulos. Si dividirmos o angulo recto em tres partes iguaes, cada um dos tres angulos tem por medida a terça parte de $90°$ ou $30°$.

85. **O transferidor** é o mais simples dos instrumentos graduados, destinados *para medir os angulos.* E' um semi-circulo de chifre ou de latão, sobre cujo contorno ou *limbo* estão marcados os graus 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 . . . . . . 180°. *(Fig. 46).*

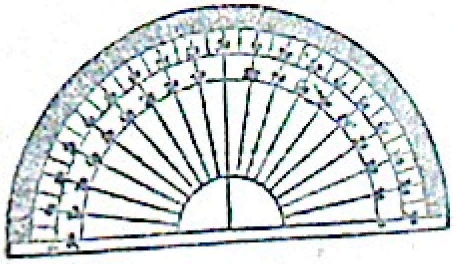


Fig. 46

86. *Seja para medir o angulo ABC. (Fig. 47).* Colloca-se o transferidor sobre o angulo dado, de modo que o vertice *B* do angulo coincida com o centro do transferidor e o lado BC do angulo coincida com o diametro do transferidor.

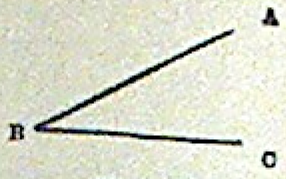


Fig. 47

Feito isto, vê-se a que divisão do transferidor corresponde o outro lado *AB*. O numero de graus marcados será a medida do angulo.

87. Conclue-se daqui, que *a grandeza de um angulo não depende do* comprimento *dos seus lados e sim do seu* afastamento.

§ X — Medida dos polygonos

88. **Medir uma superficie** *é procurar a relação desta superficie com a unidade de superficie* (metro quadrado, decimetro quadrado; ou hectaro, etc).

89. *A relação entre a extensão de uma superficie e a unidade de superficie chama-se* area.

Observação primeira. — Não são *propriamente as superficies* que se medem; são *as linhas* de que ellas dependem, isto é, medem-se as *bases*, as *alturas*, os *perimetros*, etc.

Observação segunda. — Não se confundam tambem *figuras iguaes* com *figuras equivalentes*.

Figuras iguaes são as que sendo applicadas uma sobre a outra, coincidem em todos os seus pontos; ou por outra, são as que têm a mesma fórma e a mesma grandeza. Taes são *dois triangulos* cujos lados são respectivamente iguaes; *dois circulos* cujos raios são iguaes; etc.

Figuras equivalentes são as que têm a mesma area sem que tenham a mesma fórma. Assim, um *triangulo* póde ser equivalente a um *rectangulo*; um *circulo* póde ser equivalente a um *quadrado*; etc.

Area do rectangulo

90. A area de um rectangulo é igual ao producto da base pela altura.

Designando-se por B a base e por A a altura de um rectangulo, tem-se a

Formula: *Ar. rectang.* $= B \times A$.

Applicação

Qual é a area do soalho de um quarto que tem $4^m,20$ de comprimento sobre $3^m,50$ de largura?

Ar. rectang. $= B \times A = 4^m,20 \times 3^m,50 = 14^{m^2},70$.

Area do quadrado

91. O quadrado sendo um rectangulo, *a sua area* obtem-se como a de um rectangulo.

Como, porém, no quadrado a *base* e a altura são *iguaes*, conclue-se que.

Para obter-se a area de um quadrado basta elevar-se ao quadrado ou á 2.ª potencia um dos lados.

Area do parallelogrammo

92. **Um parallelogrammo** póde sempre se transformar em um rectangulo da *mesma base* e da *mesma altura*.

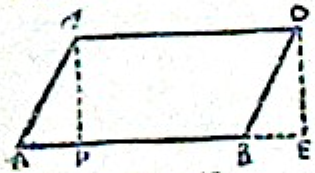


Fig. 48

Assim, o parallelogrammo *ABCD* (*Fig. 48*) é equivalente ao rectangulo *EDCP*; porque, si tem *de mais* a parte *ACP*, tem *de menos* a parte *BDE*, *igual* a *ACP*.

93. Sendo qualquer parallelogrammo *equivalente* a um rectangulo da mesma base e da mesma altura, conclue-se que

A area de um parallelogrammo é igual ao producto da base pela altura.

Area do triangulo

94. O triangulo é a metade dum parallelogrammo da mesma base e da mesma altura.

Logo,

95. Para obter-se a area de um triangulo toma-se a metade do producto da base pela altura.

Designando-se por B a base de um triangulo e por A a sua altura, obtem-se a area por meio da

Formula: $Ar.\ triang. = \dfrac{B \times A}{2}$.

Applicação

Achar a superficie de um campo triangular de $94^m{,}50$ de base e $31^m{,}50$ de altura.

$$Ar.\ triang. = \frac{B \times A}{2} = \frac{94^m{,}50 \times 31^m{,}50}{2} = 1488^{m^2}{,}3750.$$

Observação. — Multiplicando-se por 2 ambos os membros da igualdade acima

$$Ar.\ triang. = \frac{B \times A}{2} \text{ tem-se:}$$

$$2 \times ar\ triang. = B \times A;$$

donde:

$$B = \frac{2 \times ar.\ triang.}{A}$$

$$A = \frac{2 \times ar.\ triang.}{B}.$$

96. Para obter-se a area de um triangulo, *conhecendo-se os tres lados*, sommam-se estes e toma-se a metade da somma. Desta metade subtrahe-se successivamente cada um dos lados; com os tres restos e a metade da somma forma-se um producto do qual se extrahe a raiz quadrada.

Designando-se por p o *semi-perimetro* (isto é, a semi-somma dos lados) e por a, b, c os lados, calcula-se a area do triangulo por meio da

Formula: $Ar.\ triang. = \sqrt{p\ (p-a)\ (p-b)\ (p-c)}$

Applicação

Calcular a area de um triangulo cujos lados são: 72, 64, 38 metros.

$$Ar.\ triang. = \sqrt{p\ (p-a)\ (p-b)\ (p-c)} = \sqrt{87\ (87-72)\ (87-64)\ (87-38)} =$$
$$= \sqrt{87 \times 15 \times 23 \times 49} = \sqrt{1470785} = 1212^{m^2}.$$

97. Para obter-se a area de um triangulo equilatero, eleva-se o lado ao quadrado, divide-se o resultado por 4 e multiplica-se o quociente pela raiz quadrada de 3 ($\sqrt{3} = 1{,}732$).

Designando-se por l o lado do triangulo, teremos a

Formula: $Ar.\ triang.\ equilat. = \dfrac{l^2}{4}\sqrt{3}.$

Applicação

Calcular a area de um triangulo equilatero do qual cada lado tem 24 metros de comprimento.

$$Ar.\ triang.\ equilat. = \frac{l^2}{4}\sqrt{3} = \frac{24 \times 24}{4} \times 1{,}732 =$$
$$= 144 \times 1{,}732 = 249^{m^2}{,}40\,80.$$

Area do losango

98. O losango sendo um parallelogrammo, *a sua area* obtem-se como se obtem a area de um parallelogrammo.

99. Para obter-se a area de um losango, *sendo dadas as diagonaes*, toma-se a metade do producto das diagonaes.

Designando-se por D a diagonal maior e por d a diagonal menor, tem-se a

Formula: $Ar.\ los. = \dfrac{D \times d}{2}$.

Applicação

Achar a area de um losango cujas diagonaes são $3^m{,}60$ uma, $1^m{,}74$ a outra.

$$Ar.\ los. = \frac{D \times d}{2} = \frac{3^m{,}60 \times 1^m{,}74}{2} = 3^{m^2}{,}13\,20.$$

Area do trapezio

100. Um trapezio póde-se transformar em um rectangulo da mesma altura e cuja base é igual á semi-somma dos dois lados parallelos do trapezio. (*Fig. 49*).

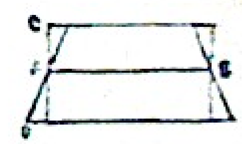


Fig. 49

101. Para obter-se a area de um trapezio, multiplica-se a semi-somma das bases pela altura.

Designando-se por B a base maior, por b a base menor e por A a altura de um trapezio, para obter-se a sua area, tem-se a

$$\text{Formula: } Ar.\ trap. = \frac{B + b}{2} \times A.$$

Applicação

Calcular a area de um trapezio, cuja base maior é de 600 metros, a menor de 400 metros e a altura de 1 100 metros.

$$Ar.\ trap. = \frac{B + b}{2} = \frac{600 + 400}{2} \times 1\,100 =$$

$$= \frac{1000}{2} \times 1\,100 = 500 \times 1\,100 = 550\,000^{m^2}.$$

Observação — Tambem se obtem a area de um trapezio, multiplicando-se a altura pela parallela equidistante das duas bases. (Vid. n. 45).

Area do polygono

102. Para obter-se a area de um polygono qualquer, traça-se uma recta chamada directriz *(linha que une dois vertices oppostos)*, e sobre ella baixando-se perpendiculares do vertice de cada angulo, decompõe-se o polygono em triangulos e trapezios, cujas areas *(avaliadas pelos processos já indicados)* sendo sommadas, dão a area do polygono. *(Fig. 50).*

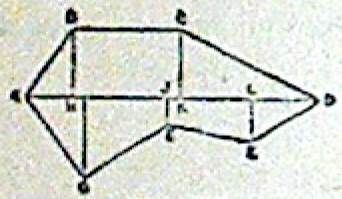


Fig. 50

Observação. — *O polygono sendo regular*, une-se o centro a todos os vertices, e ficará o polygono dividido em tantos triangulos isosceles iguaes quantos forem os lados.

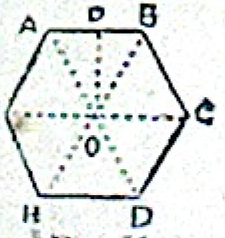


Fig. 51

103. Para obter-se a area de um polygono regular, multiplica-se a metade do perimetro pelo apothema.

Chama-se *apothema* a recta que une o centro do polygono ao meio de um dos seus lados. Na Fig. 51, a recta O P é o apothema.

Area do circulo

104. Si formos successivamente duplicando o numero de lados de um polygono regular, estes lados se irão tornando cada vez menores, e haverá occasião em que as *linhas* que compõem o perimetro serão *pontos;* o polygono terá um numero infinito de lados e tornar-se-á um circulo.

Deduzir-se-á, pois, a *area do circulo* da do polygono, visto que o semi-perimetro tornou-se semi-circumferencia e o apothema ficou sendo raio. Dahi, a

Formula: $Ar.\ circul. = \frac{C}{2} \times R$ que, traduzida, quer dizer:

105. A area de um circulo é igual á metade da circumferencia multiplicada pelo raio.

Applicação

Calcular a area de um circulo cuja circumferencia é de $4^m,7\,124$.

Para a applicação da formula acima, é necessario determinar-se o *raio*, o que se consegue pela formula $R = \frac{C}{2\pi}$.

$$\text{Assim, } R = \frac{4^m,7124}{6,2832} = 0^m,75.$$

$$Ar.\ circul. = \frac{C}{2} \times R = \frac{4^m,7124}{2} \times 0^m,75 = 1^{m^2},7671.$$

Observação. — Tambem se obtem a area de um circulo, multiplicando-se o quadrado do raio por π.

$$\text{Formula: } Ar.\ circul. = \pi R^2.$$

Applicação

Calcular a area de um circulo de 2 metros de raio.

$$Ar.\ circul. = \pi R^2 = 3,1416 \times 4 = 12^{m^2},5664.$$

Area do sector

106. Notando-se que o sector está para o circulo como o seu arco está para a circumferencia, tem-se

$$Sect. : \pi R^2 : : arc. : circumf$$

donde, a

$$\text{Formula: } Sect. = \frac{\pi R^2 \times arc.}{circumf.} = \pi R^2 \times \frac{arc.}{circumf.}$$

que, traduzido, quer dizer:

107. A area de um sector é igual á area do circulo multiplicada pela relação entre o arco e a circumferencia.

Applicação

Calcular a area de um sector cujo arco tem 20°, em um circulo de 4 metros de raio.

$$Ar.\ sect. = \pi R^2 \times \frac{arc.}{circumf.} = 3{,}1416 \times 16 \times \frac{20}{360} =$$

$$= \frac{3{,}1416 \times 16 \times 20}{360} = 2^{m^2}{,}7925.$$

Area do segmento

108. O segmento sendo a differença entre um sector (que tem por base o arco do segmento) e um triangulo do qual um dos lados é a corda do mesmo segmento, conclue-se dahi que

109. Para obter-se a area de um segmento, subtrahe-se da area do sector a area do triangulo.

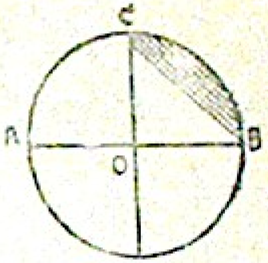
Applicação

Qual é a area do segmento que corresponde ao arco de 90° no circulo cujo raio é de 1 metro?

O sector cuja base é um quadrante representa a quarta parte do circulo; e valendo 3,1416 a area do circulo cujo raio é 1

o sector valerá $\frac{3{,}1416}{4} = 0^{m^2}{,}7854$.

O triangulo COB sendo rectangulo em O, a sua area será $\frac{OB \times OC}{2}$; sendo, porém, OB = OC = 1 tem-se $\frac{OB \times OC}{2} = \frac{1}{2} = 0^{m^2}{,}50$.



Logo, a area do segmento é $0^{m^2}7854 - 0^{m^2}{,}50 = 0^{m^2}{,}2854$.

Fig. 51

Area da corôa

110. Para obter-se a area de uma corôa, multiplica-se por π a differença entre os quadrados dos raios.

Sejam R o raio maior e r o menor, ter-se-á a **Formula:** $Ar.\ cor. = \pi\,(R^2 - r^2)$.

Applicação

Um proprietario tem em seu jardim uma bacia circular rodeada de relva, formando uma corôa que tem 8m,40 de largura. Tendo esta bacia 15m,80 de diametro, *qual será a area da corôa da relva?*

O diametro da bacia sendo de 15m,80, o raio será 7m,90. A este raio juntando-se a largura da corôa, tem-se 7m,90 + 8m,40 = 16m,30, que será o raio maior.

$$Ar.\ cor. = \pi\,(R^2 - r^2) = 3{,}1416\,(16^m{,}30^2 - 7^m{,}90^2) = 3{,}1416\,(265^{m^2}{,}69 - 62^{m^2}{,}41) = 3{,}1416 \times 203^{m^2}{,}28 = 638^{m^2}{,}62.$$

Exercicios sobre as medidas de superficie*)

1. *Achar a area de um rectangulo* cuja base é de 47m e cuja altura é de 16m. — R. 752m².

2. *Qual é a area de um parallelogrammo* de 18m de comprimento sobre 9m de largura? — R. 162m².

3. *Qual é a area de um quadrado* que tem 17m,20 de lado? — R. 295m²,84.

*) Extrahidos da Arithmétique élémentaire théorique et pratique ou cours de calcul à l'usage des écoles primaires, par plusieurs instituteurs.

4. *Qual é a area de um rectangulo* de $0^{m},8$ de base e $0^{m},75$ de altura? — R. $0^{m^2},60$.

5. Um quarto de fórma rectangular tem 17^{m} de comprimento sobre $8^{m},50$ de largura; *qual é a area?* — R. $144^{m^2},50$.

6. *Dizer a area de uma porta* que tem 2 metros de altura e $0^{m},90$ de largura. — R. $1^{m^2},80$.

7. Um terreno perfeitamente quadrado tem 13^{m} de lado; *qual é a sua area?* — R. 169^{m^2}.

8. *Dizer a area de um triangulo,* que tem 8^{m} de base e 4^{m} de altura. — R. 16^{m^2}.

9. *Dizer a area de um triangulo* de $17^{m},20$ de base sobre $15^{m},40$ de altura. — R. $132^{m^2},44$.

10. *Dizer a area de um triangulo* de $0^{m},75$ de base sobre $0^{m},45$ de altura. — R. $0^{m^2},16875$.

11. *Qual é a base de um triangulo* que tem $5^{m},9$ de altura e $41^{m^2},89$ de area? — R. $14^{m},20$.

12. Os tres lados de um triangulo são: 7^{m}, 11^{m} e 12^{m}; *qual é a sua area?* R. $37^{m^2},9473$.

13. *Qual é a area de um triangulo* cujos tres lados são: $8^{m},25$; $15^{m},2$ e 13^{m}? — R. $53^{m^2},6038$.

14. Os tres lados de um triangulo são: $15^{m},4$; $8^{m},12$ e 19^{m}; *achar a sua area?* — R. $60^{m^2},8250$.

15. Os tres lados de um triangulo equilatero têm, cada um, 12^{m}; *qual é a area do triangulo?* — R. $62^{m^2},35$.

16. Os dois lados do angulo recto de um triangulo rectangulo são 15^{m} e $8^{m},45$; *qual é o comprimento da hypothenusa?* — R. $17^{m},21$.

17. Por meio de uma escada de 11^{m} de comprimento, quer-se chegar a uma janella situada a $8^{m},10$ do solo; *que desvio se deve dar ao pé da escada?* — R. $7^{m},44$.

18. *Achar a altura de um triangulo* de $5^{m},4$ de base e igual em area a um quadrado de $10^{m},8$ de lado? — R. $43^{m},20$.

19. A area de um triangulo é de $19^{m^2},20$ e a base é de 8^{m}; *achar a altura.* — R. $4^{m},80$.

20. Um triangulo cuja area é de $42^{m^2},35$ tem uma altura de $3^{m},5$; *calcular o comprimento da base.* — R. $24^{m},20$.

21. Um triangulo tem 5^{m} de altura sobre 3^{m} de base. *Achar a altura de um segundo triangulo* duplo em area e cuja base é de 4^{m}. — R. $7^{m},50$.

22. Os dois lados do telhado de uma casa têm cada um $8^{m},15$ de comprimento sobre $4^{m},4$ de altura; *quanto se deve pagar ao telhador á razão de 1$000 por metro quadrado?* — R. 71$720.

23. Mandaram caiar as paredes internas de um quarto que tinha $6^{m},40$ de comprimento sobre 5^{m} de largura á razão de 100 rs. por metro quadrado, tendo as paredes 3 metros de altura: *quanto se deve pagar por este serviço?* — R. 6$840.

24. Os dois lados parallelos de um trapezio são 17^{m} e $11^{m},60$; a altura é de 5^{m}, *qual é a sua area?* — R. $71^{m^2},50$.

25. Na area de uma porta com $2^{m},10$ de altura e $0^{m},92$ de largura, acham-se dois losangos cada um com $0^{m},35$ de base sobre 0,25 de altura. Estes dois losangos devem ser pintados á razão de 2$000 o metro quadrado, e o resto da porta, de um só lado, á razão de 700 rs. *Quanto se deve pagar por todo o trabalho?* — R. 1$580.

26. O telhado de uma casa compõe-se de 2 trapezios e de 2 triangulos: todos com a altura de 5^{m}. A base dos triangulos é de $6^{m},65$; os lados parallelos dos trapezios têm, um 10^{m} e o outro $8^{m},50$. *Quanto se deve pagar ao telhador á razão de 1$300 o metro quadrado?* — R. 163$475.

27. *Pede-se a base de um rectangulo* de 4^{m} de altura e de $9^{m^2},60$ de area. — R. $2^{m},40$.

28. *Achar a altura de um rectangulo* de $17^{m},5$ de base e $84^{m^2},70$ de area. — R. $4^{m},84$.

29. Os dois lados parallelos de um trapezio são $18^{m},1$ e $17^{m},6$; a area é de $133^{m^2},5180$; *qual é a altura?* — R. $7^{m},48$.

30. *Qual é a area (em aros) de um parque* com 460^{m} de comprimento sobre 250^{m} de largura? — R. 1150^{a}.

31. *Calcular a area de um rectangulo* cuja base é de 12^{m} e cuja diagonal é de 15^{m}. — R. 108^{m^2}.

32. *Achar a area de um losango* do qual uma diagonal é de $7^{m},15$ e a outra de $4^{m},90$ — R. $17^{m^2},5175$.

33. *Achar a area de um losango* do qual cada lado tem 2^{m} de comprimento, e uma diagonal $3^{m},60$. — R. $3^{m^2},1356$.

34. A diagonal de um quadrado é de $15^{m},40$; *qual é (em aros) a sua area?* — R. $1^{a},1858$.

35. *Qual é o lado de um quadrado* cuja area é de $295^{m^2},84$? R. $17^{m},20$.

36. *Achar o lado de um quadrado* equivalente a dois outros cujos lados são 3^{m} e 4^{m}? — R. 5^{m}.

37. Decompoz-se um polygono em dois triangulos: o 1.º com 25^{m} de base sobre $17^{m},40$ de altura; o 2.º, com a mesma base que o 1.º, tem 9^{m} de altura; *qual é a area do polygono?* — R. 330^{m^2}.

38. A area de um terreno irregular póde-se decompor em 2 trapezios tendo, o 1.º 7^{m} e $4^{m},80$ para lados parallelos e $5^{m},10$ para altura; o 2.º $11^{m},60$ e 19^{m} para lados parallelos e 15^{m} para altura; e em tres triangulos tendo para alturas: $5^{m},10$; 4^{m} e $11^{m},25$; e para bases: $4^{m},80$, $5^{m},90$ e $11^{m},60$. *Qual é a area deste terreno?* R. $346^{m^2},88$.

39. O diametro de um circulo é de $1^{m},45$; *qual é o raio?* — R. $0^{m},725$.

40. O diametro de um circulo é de $1^{m},45$; *qual é o comprimento da circumferencia?* — R. $4^{m},5553$.

41. O diametro de um circulo é de $0^{m},145$; *qual é o raio?* — R. $0^{m},0725$.

42. O diametro de um circulo é de $0^{m},145$; *qual é a circumferencia?* — R. $0^{m},45553$.

43. A circumferencia de um circulo é de $15^{m},708$; *qual é o diametro?* — R. 5^{m}.

44. A circumferencia de um circulo é de $15^{m},708$; *qual é o raio?* — R. $2^{m},5$.

45. A circumferencia de um circulo é de $22^{m},46\,244$; *qual é o diametro?* — R. $7^{m},15$.

46. A circumferencia de um circulo é de $22^{m},46\,244$; *qual é o raio?* — R. $3^{m},575$.

47. O raio de um circulo é de $2^{m},80$; *qual é a circumferencia?* — R. $17^{m},59$.

48. A circumferencia de um circulo é de 14^{m}; *qual é o diametro?* — $4^{m},456$.

49. *Achar a area de um circulo* de $2^{m},80$ de raio. — R. $24^{m^2},63$.

50. *Achar a area de um circulo* de $11^{m},20$ de diametro. — R. $98^{m^2},5205$.

51. *Qual é a area de um circulo* de $7^{m},65$ de circumferencia? — R. $4^{m^2}6282$.

52. Sendo de $0^{m},45$ o raio de um circulo, *achar a sua area.* — R. $0^{m^2},6361$.

53. Uma bacia de fórma circular tem 19^{m} de diametro; *qual é a area?* — R. $283^{m^2}5294$.

54. Uma bacia circular tem $7^{m},15$ de diametro, entrando a alvenaria; e interiormente um diametro de $6^{m},50$. *Qual é a area occupada:* 1.º) pela agua; 2.º) pela alvenaria? — R. 1.º) $33^{m^2},1831$; 2.º) $6^{m^2},96,84$.

55. *Qual é o raio de um circulo* de $98^{m^2},5440$ de area? — R. $5^{m},59$.

56. *Determinar o raio de um circulo* que tem 3567^{m^2} de area. — R. $33^{m},69$.

57. *Qual é o diametro de um circulo* de $24^{m^2},0200$ de area? — R. $5^{m},53$.

58. *Achar a circumferencia de um circulo* de $71^{m^2},62$ de area. — R. 30^{m}.

59. *Achar o raio de um circulo* equivalente em area a um quadrado de 3 metros de lado. — R. $1^{m},69$.

60. A area de um circulo é 9 vezes menor que a de um outro circulo que tem 6^{m} de diametro; *qual é o diametro do primeiro?* — R. 2^{m}.

61. Em um circulo de 1 metro de raio, *qual é a area do sector de 28°?* — R. $0^{m^2},2443$.

62. *Qual é a area do sector de 60°* em um circulo, cujo raio é de 10 metros? — $52^{m^2},36$.

63. Um sector está comprehendido em um angulo de 60°; o raio da circumferencia é de 13 metros. *Qual é a sua area?* — R. $88^{m^2},4884$.

64. *Achar a area do sector de 37° 29'* em um circulo de $1^{m},435$ de raio. — R. $0^{m^2},6735$.

65. *Calcular a area dum sector* cuja base é um arco de 45° e cujo raio tem 8 metros. — R. $25^{m^2},1328$.

66. Um terreno tem a fórma dum sector circular cujo angulo central é de 50° 36' e o raio $19^{m},36$. *Qual é o preço deste terreno* á razão de 48 fr. o aro? — $79^{f},41$.

67. *Qual é a area do segmento de 60°* no circulo cujo raio é de 2 metros? — R. $0^{m^2},3624$.

68. *Calcular a area do segmento de 60°* em um circulo cujo raio é de 8 metros. — R. $5^{m^2},7984$.

69. *Achar a area do segmento de 60°* no circulo cujo raio é 1 metro. — R. $0^{m^2},0906$.

70. *Calcular a area do segmento de 90°* em um circulo cujo raio tem $0^{m},12$ de comprimento. — R. $0^{m^2},0041$.

71. Dois circulos concentricos têm: um, $4^{m},25$ de diametro e o outro $3^{m},20$; *qual é a area da corôa?* — R. $6^{m^2},1437$.

72. Uma bacia circular tem $7^{m},15$ de diametro, entrando a alvenaria; e interiormente, um diametro de $6^{m},50$. *Qual é a area occupada pela alvenaria?* — R. $6^{m^2},9684$.

73. Sabe-se que a somma dos raios duma corôa é 25 metros e a differença é 7 metros. *Calcular a area desta corôa.* — R. $549^{m^2},78$.

74. Uma bacia circular de 28 metros de diametro é rodeada duma muralha de pedras de $2^{m},20$ de largura. *Qual é a area desta muralha.* — R. $208^{m^2},7279$.

§ XI — Dos corpos e sua medida

111. Uma parte do espaço limitada por planos fórma um corpo chamado *polyedro*.

112. Sendo precisos, pelo menos, *quatro* planos para fechar um espaço, o mais simples dos polyedros é o que tem quatro faces, o *tetraedro*.

113. Os polyedros designam-se, em geral, pelo numero de suas faces. Assim, o de cinco faces chama-se *pentaedro*; o de seis, *hexaedro*, etc.

114. Dos polyedros os que mais merecem ser particularmente considerados são: o *prisma* e a *pyramide*.

115. Definidos e caracterisados os principaes corpos da geometria, para complemento de seu estudo basta medil-os.

116. E como em um corpo ha duas cousas distinctas a considerar, o *espaço* que elle occupa e a *superficie* que o limita, a questão da medida dos corpos deve comprehender duas partes: superficies e volumes.

Do prisma; sua superficie e volume

117. Prisma é um corpo cujas duas faces oppostas são iguaes e parallelas e cujas faces lateraes são parallelogrammos. *(Fig. 53.)*

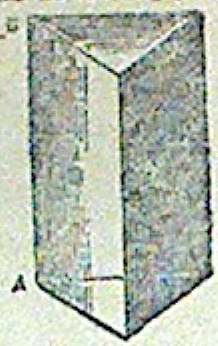


Fig. 53.

118. As duas faces oppostas chamam-se *bases* do prisma.

Altura do prisma é a porção da perpendicular comprehendida entre os planos das duas bases.

119. Um prisma se diz *triangular, quadrangular, pentagonal* etc., conforme a sua base é um triangulo, um quadrilatero, um pentagono, etc.

120. Um prisma tem duas especies de arestas: *as arestas das bases* e *as arestaes lateraes*.

As arestaes lateraes são iguaes e parallelas.

121. O prismo é *recto* quando as arestas lateraes são perpendiculares aos planos das bases; neste caso as faces são rectangulos e as arestas são iguaes á altura.

122. O prisma recto é *regular* quando suas bases são polygonos regulares.

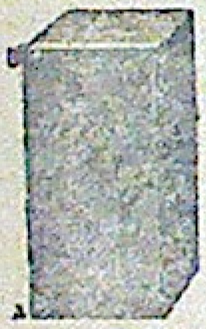


Fig. 54

Quando as bases de um prisma são parallelogrammos, este prisma denomina-se *parallelipipedo*. Si estes parallelogrammos são rectangulos, o parallelipipedo denomina-se *parallelipipedo rectangulo. (Fig. 54).*

O parallelipipedo rectangulo toma o nome de *cubo* quando todas as suas faces são quadrados.

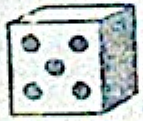


Fig. 55

O dado de jogar (Fig. 55) é um cubo.

123. Superficie lateral do prisma. — A superficie lateral do prisma recto é igual ao producto do perimetro da base pela altura.

124. Superficie total do prisma. — A superficie total do prisma recto obtem-se juntando á superficie lateral

a superficie dos *dois polygonos* que formam as bases.

Applicação

Calcular a superficie lateral e a total de um parallelipipedo rectangulo cujas tres dimensões (as tres arestas encontrando-se n'um mesmo vertice) são $0^m,5$; $0^m,3$; $0^m,7$.

Superficie lateral. — O perimetro da base é $(0,5 + 0,3) \times 2 = 0,8 \times 2 = 1,6$.

Multiplicando-se este perimetro 1,6 pela altura 0,7, obtem-se $1,6 \times 0,7 = 1^{m^2},12$ para *superficie lateral.*

Superficie total. A superficie dos dois polygonos das bases é igual $(0,5 \times 0,3) \times 2 = 0,15 \times \times 2 = 0^{m^2},30$. Assim,

Superficie lateral	$1^{m^2},12$
" *das bases*	$0^{m^2},30$
Superficie total	$1^{m^2},42.$

125. Volume do parallelipipedo rectangulo. — Para achar-se o volume de um parallelipipedo rectangulo, basta fazer-se um producto com as tres dimensões: *comprimento, largura* e *altura*; ou, o que é o mesmo, — *basta multiplicar-se a area da base pela altura.*

Applicação

Qual é o volume d'um parallelipipedo rectangulo que tem $4^m,45$ de comprimento sobre $2^m,90$ de largura, sendo de $1^m,30$ a altura?

Vol. parallelip. rect. $= 4^m,45 \times 2^m,90 \times 1^m,30 = 16^{m^3},776\,500.$

126. Volume do cubo propriamente dito. — Para obter-se o volume de um cubo, basta fazer-se um producto com tres factores *iguaes ao lado.*

Assim, o volume de um dado de jogar que tem 2^{cm} de lado será igual a $2^{cm} \times 2^{cm} \times 2^{cm} = 8^{cm^3}$.

127. Volume do prisma. — Para achar-se o volume de um prisma, multiplica-se a area da base pela altura.

Applicação

Qual é, em decimetros cubicos, *o volume de um prisma triangular*, cuja base tem $1^m,35$ de comprimento e $1^m,06$ de largura, a altura do prisma sendo de $0^m,84$?

$$Ar.\ da\ base = \frac{1^m,35 \times 1^m,06}{2} = 0^{m^2},7\,155$$

$$Vol.\ do\ prisma = 0^{m^2},7155 \times 0,84 = 0^{m^3},601020 = 601^{dm^3},020.$$

Da pyramide; sua superficie e volume

128. **Pyramide** é um corpo cuja *base* é um polygono qualquer, e cujas faces lateraes são triangulos que têm um vertice commum. *(Fig. 56)*.

129. Este vertice commum chama-se *vertice* da pyramide.

Altura de uma pyramide é a perpendicular baixada do vertice sobre a base.

Superficie lateral de uma pyramide é o conjuncto dos triangulos que têm um vertice commum.

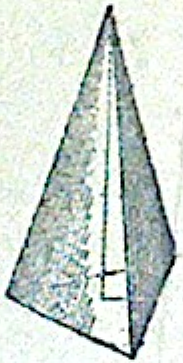


Fig. 56

130. Uma pyramide se diz *triangular*, *quadrangular*, *pentagonal*, etc., conforme a sua base é um triangulo, um quadrilatero, um pentagono, etc.

131. A pyramide é *regular* quando a sua base é um polygono regular e o seu vertice está situado sobre a perpendicular levantada pelo centro deste polygono.

132 **Superficie lateral da pyramide.** — **Para achar-se a superficie lateral de uma pyramide, sommam-se as areas das suas faces.**

Applicação

Calcular a superficie lateral de uma pyramide regular que tem por base um quadrado de $3^m,5$ de lado, tendo cada face 7 metros de altura.

A base sendo um quadrado, 4 triangulos iguaes formam a sua superficie lateral. Avaliando-se, pois, a area de um dos triangulos e repetindo-se 4 vezes, ter-se-á a superficie lateral pedida.

Assim, tem-se: $\frac{7 \times 3,5}{2} \times 4 = 49^{m^2}$.

133. **Superficie total da pyramide.** — **Para obter-se a superficie total de uma pyramide, calculam-se as areas dos triangulos que formam as faces lateraes e a do polygono que forma a base, e faz-se a somma de todas essas areas.**

Applicação

Calcular a superficie total de uma pyramide regular definida no exemplo precedente.

Area da base.......	$\overline{3^m,5}^2$.......	$= 12^{m^2},25$
Superficie lateral................		$= 49^{m^2}$
Superficie total............................		$61^{m^2},25.$

134. **Volume da pyramide.** — **O volume de uma pyramide qualquer é igual ao terço do producto da area da base pela altura.**

Chamando **V** o volume de uma pyramide, **B** a area da base e **A** a altura, tem-se a

Formula: $V = \frac{B \times A}{3}$.

Applicação

Calcular o volume de uma pyramide triangular cuja base tem $0^m,65$ de comprimento sobre $0^m,56$ de largura e $0^m,95$ de altura.

$$Ar.\ B. = \frac{0^m,65 \times 0^m,56}{2} = 0^{m^2},1820.$$

$$V = \frac{A \times B}{3} = \frac{0^{m^2},1820 \times 0^m,95}{3} = 0^{m^3},057\,633.$$

Da pyramide truncada; sua superficie e volume

135. **Tronco de cóne ou pyramide truncada** é a porção de pyramide comprehendida entre a base e uma secção que corta todas as arestas lateraes *(Fig. 57)*.

136. **Superficie lateral da pyramide regular truncada de bases parallelas.** — A superficie lateral de um tronco de pyramide regular compõe-se de trapezios iguaes. *Multiplicando-se a area de um dos trapezios pelo numero delles*, ter-se-á a superficie lateral.

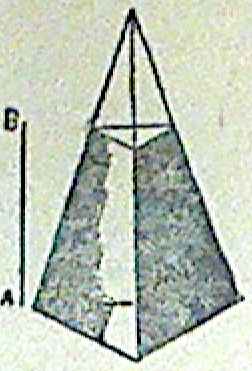


Fig. 57

137. Como tambem o apothema do tronco de pyramide é a altura commum de todos esses trapezios, dizemos, segundo o que já sabemos para a area do trapezio (n. 101), que a *superficie lateral de uma pyramide truncada é igual ao producto do apothema pela semi-somma dos perimetros das duas bases.*

138. Sabemos tambem, pelo que dito ficou em o n. 45 que a parallela tirada á igual distancia das bases de um trapezio é igual a semi-somma das bases deste trapezio. Assim, fazendo-se uma secção parallela ás bases e dellas equidistante, resultará um polygono cujo perimetro será a semi-somma dos perimetros das bases. Portanto, ***a superficie lateral de uma pyramide truncada ainda é igual ao producto do apothema pelo perimetro da secção parallela ás duas bases e dellas equidistante.***

139. **Superficie total de uma pyramide truncada de bases parallelas.** — **Para obter-se a superficie total de uma pyramide truncada de bases parallelas, juntam-se á** superficie lateral as areas dos dois polygonos que formam as bases.

140. **Volume de uma pyramide truncada. — Para obter-se o volume de uma pyramide truncada, sommam-se as areas da grande base, da pequena e do uma**

média*) entre estas duas superficies; a somma multiplica-se pela altura e o producto divide-se por 3.

Designando-se por B a base maior e por b a menor, a base média será $\sqrt{Bb}$; a altura sendo A, tem-se a

$$\textbf{Formula: } V.\ pyr.\ trunc. = \frac{(B + b + \sqrt{Bb}) \times A}{3}$$

Applicação

Calcular o volume de uma pyramide truncada de $7^m,50$ de altura e cujas bases tem: a maior 16 metros quadrados de superficie e a menor, 9 metros quadrados.

$$Sup.\ média = \sqrt{Bb} = \sqrt{16 \times 9} = \sqrt{144} = 12 \text{ m. quadr.}$$

$$V.\ pyr.\ trunc. = \frac{(B + b + \sqrt{Bb}) \times A}{3} =$$

$$= \frac{(16 + 9 + \sqrt{144}) \times 7{,}50}{3} = \frac{(16 + 9 + 12) \times 7{,}50}{3} =$$

$$= \frac{37^{m^2} \times 7{,}50}{3} = \frac{277^{m^3},500}{3} = 92^{m^3},500.$$

Do cylindro; sua superficie e volume

141. **Cylindro** é um corpo cujas *duas bases* são circulos iguaes e parallelos *(Fig 58)*.

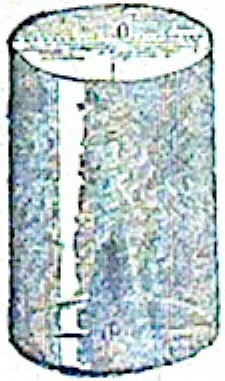


Fig. 58

142. A linha recta que une os centros dos dois circulos chama-se *altura* do cylindro.

Chama-se *superficie lateral* do cylindro toda a superficie do cylindro menos *a superficie das duas bases*.

143. **Superficie lateral do cylindro.** — Para achar-se a superficie lateral de um cylindro, multiplica-se a circumferencia da base pela altura do cylindro.

$$\text{Formula: } Sup.\ lat.\ cyl. = 2 \pi R \times A.$$

*) Para achar-se a média entre as duas superficies das bases da pyramide truncada, multiplica-se uma pela outra e extrahe-se a raiz quadrada do producto.

Applicação

Qual é a superficie lateral de um cylindro que tem $1^m,70$ de altura, sendo de $0^m,50$ o diametro da base?

Sup. lat. cyl. $= 2\pi R \times A = 3{,}1416 \times 0{,}50 \times 1{,}70 =$
$= 2^{m^2},67\,03\,60.$

144. Superficie total do cylindro. — Para achar-se a superficie total do cylindro, ajunta-se a superficie das suas duas bases á sua superficie lateral.

Formula: *Sup. tot. cyl.* $= 2\pi R^2 + 2\pi R\,A.$

Applicação

Achar a superficie total do cylindro definido no exemplo precedente.

Sup. das duas bases: $2\pi R^2 = 2 \times 3{,}1416 \times \overline{0{,}25}^2 =$
$= 0^{m^2},39\,27$

Sup. lat.: $2\pi R \times A =$ .... $2^{m^2},67\,03\,60$

Superficie total .... $3^{m^2},06\,30\,60.$

145. Volume do cylindro. — O volume de um cylindro é igual ao producto da superficie da base pela altura.

Formula: *Vol. cyl.* $= \pi R^2 \times A.$

Applicação

Calcular o volume de um cylindro de $2^m,50$, sendo de $0^m,70$ o raio da base.

Vol. cyl. $= \pi R^2 \times A = 3{,}1416 \times \overline{0{,}70}^2 \times 2{,}50 =$
$= 3^{m^3},848\,460.$

Do cóne; sua superficie e volume

147. Cóne é um corpo que termina, d'um lado, por um ponto que é o *vertice* e do outro por um circulo que é a *base*. (*Fig. 59*).

147. A linha recta que une o vertice ao centro da base, é a *altura* do cóne.

Chama-se *superficie lateral* do cóne toda a superficie do cóne menos a *superficie da base*.

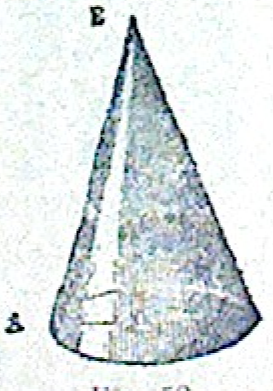


Fig. 59

148. Superficie lateral do cóne. — A superficie lateral do cóne é igual á metade do producto da circumferencia da base pela altura.

Formula: *Sup. lat. cóne* $= \dfrac{2\pi R A}{2} = \pi R \times A.$

Applicação

Qual é a superficie lateral de um cóne, cuja altura é de $0^m,40$ e a circumferencia $0{,}439\,824$?

Sup. lat. cóne $= \pi R A = \dfrac{0{,}439\,824}{2} \times 0^m,40 =$
$= 0^{m^2},08\,79\,64\,80.$

149. Superficie total do cóne. — Para obter-se a superficie total de um cóne, ajunta-se a superficie do circulo que lhe serve de base á sua superficie lateral.

Formula: *Sup. total cóne* $= \pi R^2 + R A.$

Applicação

Achar a superficie total do cóne definido no exemplo precedente.

Sup. da base):* $\pi R^2 = 0^{m^2},01\,53\,93\,84$
Sup. lat.: $\pi R A = 0^{m^2},08\,79\,64\,80$
$0^{m^2},10\,33\,58\,64$

150. Volume do cóne. — O volume de um cóne é igual ao terço do producto da superficie da base pela altura.

Formula: *Vol. cóne* $= \dfrac{\pi R^2 \times A}{3}$

Applicação

Qual é um volume de um cóne cuja altura tem $0^m,58$ e o raio da base $0^m,25$?

Vol. cóne $= \dfrac{\pi R^2 \times A}{3} = \dfrac{3{,}1416 \times \overline{0{,}25}^2 \times 0^m,48}{3} =$
$0^{m^3},031\,416.$

---

*) (Vid. *Observação*, pagina 312).

$R = \dfrac{C}{2\pi} = \dfrac{0{,}439\,824}{2 \times 3{,}1416} = \dfrac{0{,}219\,912}{3{,}1416} = 0^m,07$

$\pi R^2 = 3{,}1416 \times \overline{0{,}07}^2 = 3{,}1416 \times 0{,}0049 = 0^{m^2},01\,53\,93\,84.$

Do cóne truncado; sua superficie e volume

151. Cóne truncado é uma porção de cóne comprehendida entre a base e uma secção parallela a esta base. *(Fig 60).*

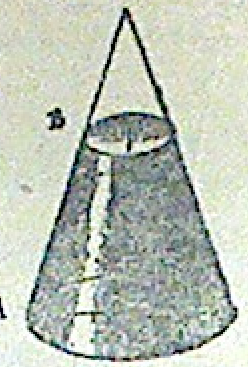


Fig. 60

152. Superficie lateral do cóne truncado. — Para achar-se a superficie lateral dum cóne truncado, multiplica-se o seu lado pela semi-somma das circumferencias das suas bases.

Designando-se por **C** a circumferencia maior, por **c** a circumferencia menor e por **l** o lado, tem-se a

Formula: *Sup. lat. cóne trunc.* $= \dfrac{C + c}{2} \times l.$

Applicação

Qual é a superficie lateral de um cóne truncado que tem $1^m,40$ de raio na base maior, $0^m,82$ do raio na base menor, sendo de $6^m,80$ o comprimento do lado?

$$\text{Sup. lat. cóne trunc.} = \frac{C + c}{2} \times l =$$

$$= \frac{8,7964 + 5,1522}{2} \times 6,80 = \frac{13,9486}{2} \times 6,80 =$$

$$= 6,9743 \times 6,80 = 47^{m^2},42.$$

153. Superficie total do cóne truncado. — Para achar-se a superficie total de um cóne truncado, ajunta-se a superficie das bases á superficie lateral.

Formula: *Sup. tot. cóne trunc* $= \pi R^2 + \pi r^2 +$ **sup. lat.**

Applicação

Qual é a superficie total do cóne truncado definido no exemplo precedente?

Superficie da base inferior	$3,1416 \times \overline{1,40}^2 =$	$6^{m^2},15$
„ „ „ *superior*	$3,1416 \times \overline{0,82}^2 =$	$2^{m^2},11$
„ *lateral*		$= 47^{m^2},42$
Superficie total		$55^{m^2},68$

154. Volume do cóne truncado. — Para achar-se o volume de um cóne truncado, observa-se o que ficou dito em o n.º 140; e note-se que para achar-se a *superficie média* de um cóne truncado multiplica-se o raio da grande base pelo da pequena e o producto por π.

Formula: *Vol. cóne trunc.* $= \dfrac{(\pi R^2 + \pi r^2 + R r \pi) \times A}{3} =$

$$= \frac{\pi(R^2 + r^2 + Rr) \times A}{3}$$

Applicação

Qual é o volume de um cóne truncado cuja altura é de $1^m,26$, tendo o raio da base inferior $0^m,68$ e o da base superior $0^m,42$?

$$\text{Vol. cóne trunc.} = \frac{\pi(R^2 + r^2 + Rr) \times A}{3} =$$

$$= \frac{3,1416\,(\overline{0^m,68}^2 + \overline{0^m,42}^2 + 0^m,68 \times 0^m,42) \times 1^m,26}{3} =$$

$$= 1^{m^3},219\,719.$$

Da esphera; sua superficie e volume

155. Esphera é um corpo limitado por uma superficie curva cujos pontos estão todos igualmente distantes de um ponto interior chamado centro. *(Fig. 61)*

Fig. 61

156. Superficie da esphera. — Para achar-se a superficie de uma esphera, multiplica-se a circumferencia pelo diametro.

Designando-se por **C** uma circumferencia e por **D** o diametro, tem-se que

Sup. esph. $= C \times D.$

Substituindo-se, nesta igualdade, **C** por $2\pi R$ e **D** por $2R$, resulta a

Formula: *Sup. esph.* $= 2\pi R \times 2R = 4\pi R^2.$

Applicação

Qual é a superficie de uma esphera de $0^m,45$ de raio?

Sup. esph. $= 4\pi R^2 = 4 \times 3,1416 \times \overline{0,45}^2 = 2^{m^2},544696.$

157. **Volume da esphera. — O volume da esphera é igual ao terço do producto da superficie da esphera pelo raio.**

Formula: $Vol.\ esph. = \dfrac{4\pi R^2 \times R}{3} = \dfrac{4\pi R^3}{3}.$

Applicação

Qual é o volume de uma esphera de $0^m,60$ de raio?

$$V.\ esph. = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4 \times 3,1416 \times \overline{0^m,60}^3}{3} = 0^{m^3},904\,780 = $$
$$= 904^{dm^3},780.$$

Do tonel

158. Para achar-se a capacidade de um tonel, tomam-se tres medidas: o comprimento interior do tonel, o diametro do bojo e o dos fundos.

Feito isto, subtrahe-se o diametro dos fundos do do bojo. Toma-se o terço da differença e subtrahe-se este terço do diametro do bojo. Obtem-se assim um resto que é o *diametro de um cylindro do mesmo comprimento do tonel e que lhe é equivalente.*

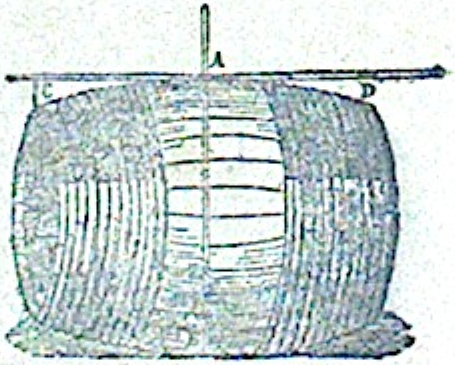


Fig. 62

Por conseguinte, continúa-se como para a medida do cylindro.*)

*) Lei franceza de 19 germinal anno VII (8 de Abril de 1798).

Designando-se por D o diametro do bojo e por d o diametro dos fundos, tem-se

$$Diam.\ cyl. = D - \frac{D-d}{3} = \frac{3D - D + d}{3} = \frac{2D + d}{3}$$

$$Raio = \frac{2D + d}{6}.$$

$$Vol.\ tonel. = \pi R^2 \times A = \pi \times \frac{(2D+d)^2}{36} \times A.$$

Applicação

Achar a capacidade de um tonel cujo comprimento é de $1^m,92$; o diametro do bojo $0^m,97$; o dos fundos $0^m,88$.

$$Vol.\ tonel = \pi \times \frac{(2D+d)^2}{36} \times A =$$
$$= 3,1416 \times \frac{(2 \times 0,97 + 0,88)^2}{36} \times 1,92 =$$
$$= 3,1416 \times 0,2209 \times 1,92 = 1^{m^3}332\,440 = 1332^{litr.},44.$$

Exercicios sobre a medida dos corpos

1. *Achar o volume de um prisma* cuja base é de $17^{m^2},15$ e cuja altura é de $0^m,75$. — R. $12^{m^3},862\,500$.

2. *Qual é o volume de um prisma* cuja base é de $1^{m^2},174$ e a altura de $0^m,25$? — R. $0^{m^3},293\,500$.

3. *Qual é o volume de um prisma* de $0^m,80$ de altura e cuja base é um rectangulo de 2^m de comprimento sobre $1^m,40$ de largura? — R. $2^{m^3},240$.

4. *Qual é o volume de um prisma* de 1^m de altura e cuja base é um parallelogrammo de $0^m,48$ de base sobre $0^m,15$ de altura? — R. $0^{m^3},072$.

5. *Achar o volume de um prisma* de $1^m,20$ de altura e cuja base é um quadrado de $0^m,26$ de lado. — R. $0^{m^3},081\,120$.

6. Qual é o volume de um prisma de $2^m,94$ de altura e cuja base é um trapezio, cujos lados parallelos têm $4^m,25$ e 6^m e a altura 5^m? — R. $75^{m^3},337\,500$.

7. *Calcular o volume de um cubo* de $0^m,75$. — R. $0^{m^3},421\,875$.

8. *Achar o vol. de um cubo* de $2^m,50$ de lado. — R. $15^{m^3},625$.

9. *Qual é o lado de um cubo* de 343^{m^3} de volume? — R. 7^m.

10. *Determinar o lado de um cubo* de $5\,088^{m^3},448$ de volume. — R. $17^m,20$.

11. A base de uma pyramide é um rectangulo de $0^m,26$ de comprimento sobre $0^m,15$ de largura; a sua altura é de $0^m,35$. *Qual é o seu volume?* — R. $0^{m^3},011\,050$.

12. Uma pyramide com $0^{m},40$ de altura tem por base um quadrado de $1^{m},30$ de lado; *qual é o seu volume?*—R. $3^{m3},605\,300$.

13. A base de uma pyramide é um triangulo de $0^{m},52$ de base e de $0^{m},15$ de altura. *Qual é o seu volume,* si a sua altura é de $0^{m},85$? — R. $0^{m3},011\,050$.

14. A base de uma pyramide é um triangulo equilatero de 1 metro de lado. *Calcular o volume,* sabendo-se que a altura é de $4^{m},50$. — R. $0^{m3},649\,500$.

15. A altura de uma pyramide é de $14^{m},25$; sua base é um trapezio cujos lados parallelos têm $2^{m},10$ e $1^{m},75$ e a altura $0^{m},90$. *Qual é o seu volume?* — R. $8^{m3},229\,375$.

16. As duas bases de uma pyramide truncada são rectangulos tendo um $1^{m},80$ de comprimento sobre $0^{m},90$ de largura, e o outro 2^{m} de comprimento sobre 1^{m} de largura. *Qual é o volume deste corpo,* que tem 3^{m} de altura? — R. $5^{m3},418$.

17. *Achar a superficie lateral de um cylindro* cuja circumferencia da base é de $2^{m},40$ e a altura de $1^{m},75$. — R. $4^{m2},20$.

18. *Qual é a superficie lateral de um cylindro* de $2^{m},10$ de altura e cujo circulo da base tem um diametro de $0^{m},45$? — R. $2^{m2},96\,88$.

19. *Achar a superficie lateral de um cylindro* de $1^{m},50$ de altura e cuja base tem um raio de $0^{m},32$. — R. $3^{m2},01\,59$.

20. *Dizer qual é o volume de um cylindro* de $1^{m},92$ de altura e cujo raio da base é de $0^{m},47$. — R. $1^{m3},332\,439$.

21. *Calcular o volume de um cylindro* cuja superficie da base é de $0^{m2},46\,25$ e a altura de $0^{m},56$. — R. $0^{m3},259$.

22. *Achar o volume de um cylindro* cuja base é uma circumferencia de $1^{m},15$ e cuja altura é de 3^{m}. — R. $0^{m3},315\,627$.

23. *Qual é o volume de um cylindro* de $1^{m},80$ de altura e cuja base tem um diametro de $0^{m},54$? — R. $0^{m3},412\,239$.

24. *Qual é o raio da base de um cylindro* cuja altura é de $1^{m},40$ e o volume de $0^{m3},750$? — R. $0^{m},413$.

25. *Até que altura se deve derramar agua em um vaso cylindrico* de $0^{m},50$ de diametro para que o volume contido seja de $0^{m3},140$? — R. $0^{m},713$.

26. Um cylindro de ferro, pesado n'agua, perde $38^{Kg},453\,184$; sua altura é de $0^{m},85$. *Qual será o diametro?* — R. $0^{m},24$.

27. Um cóne tem por base um circulo de $0^{m},76$ de circumferencia, e a distancia desta circumferencia ao vertice é de $0^{m},84$; *qual é a superficie lateral deste cóne?* — R. $0^{m2},31\,92$.

28. *Calcular a superficie lateral de um cóne* cuja base tem $0^{m},48$ de diametro, sendo de $1^{m},10$ a distancia da circumferencia da base ao vertice. — R. $0^{m2},82\,93$.

29. *Calcular a superficie total de um cóne* cujo raio da base é de $0^{m},47$ e no qual a distancia da circumferencia ao vertice é de $3^{m},84$. — R. $6^{m2},36\,39\,38$.

30. *Qual é o volume de um cóne* cuja base é de $0^{m2},465$ e a altura de $0^{m},36$? — R. $0^{m3},055\,800$.

31. A base de um cóne tem um diametro de $0^{m},48$ e a altura é de $0^{m},96$; *qual é o seu volume?* — R. $0^{m3},057\,905$.

32. *Qual é o volume de um tronco de cóne* cujos raios das bases são de 5^{m} e 3^{m} e a altura de 7^{m}? — R. $359^{m3},189\,600$.

33. A pequena base de um tronco de cóne tem 8^{m} de circumferencia e a grande $9^{m},80$; a sua altura é de $12^{m},55$; *qual é o seu volume?* — R. $79^{m3},333$.

34. Os diametros das bases de um tronco de cóne são $0^{m},32$ e $0^{m},48$; a altura é de 2^{m}; *qual é o volume deste corpo?* — R. $0^{m3},254\,678$.

35. Os raios das bases de um tronco de cóne são $0^{m},41$ e $0^{m},36$; a altura $0^{m},84$; *qual é o seu volume?* — R. $0^{m3},391\,700$.

36. *Qual é a superficie de uma esphera* de 5 centimetros de diametro? — R. $0^{m2},00\,78\,54$.

37. Uma esphera tem 3 decimetros de diametro; *qual é a sua superficie?* — R. $0^{m2},28\,27\,44$.

38. *Achar a superficie de uma esphera* cujo diametro é de $0^{m},6$. — R. $1^{m2},13\,09\,76$.

39. *Qual é a superficie de uma esphera* que tem $0^{m},12$ de raio. — R. $0^{m2},18\,09\,56$.

40. *Qual é o volume de uma esphera* cujo diametro é de $0^{m},36$? — R. $0^{m3},024\,429$.

41. O raio de uma esphera é de 6 centimetros; *qual é o seu volume?* — R. $0^{m3},000\,904\,780$.

42. *Calcular o volume de uma esphera* de 14 decimetros de diametro. — R. $1^{m3},436\,758\,400$.

43. Uma cuba de pedra tem a fórma de um prisma; ella tem interiormente uma base de $0^{m2},95\,75$ e uma altura de $0^{m},84$; *qual é a sua capacidade em litros?* — R. 804 litr., 3.

44. Uma pedra tem 8 decimetros de altura; $1^{m},40$ de comprimento e $0^{m},75$ de espessura; *qual é o seu volume e o preço a 3\$000 por metro cubico?* — R. $0^{m3},840$ e 2\$520.

45. Um poço tem $1^{m},25$ de diametro; a agua nelle se eleva a $3^{m},45$ de altura; *quantos litros tem elle?* — R. 4 233 litr., 79.

46. Um monte de pedras tem a fórma de um prisma com a altura de $1^{m},50$ e cuja base é um rectangulo de $3^{m},05$ de largura sobre $4^{m},75$ de comprimento; *quantos metros cubicos de pedra tem este monte?* — R. $21^{m3},731\,250$.

47. O telhado de um pavilhão tem a fórma de um cóne cuja base é de $8^{m},15$ de circumferencia; a distancia desta circumferencia ao vertice sendo de $3^{m},40$, *quanto se deve pagar ao telhador á razão de 1\$100 o metro quadrado?* — R. 15\$240.

48. Um funil cónico tem $0^{m},25$ de diametro na sua maior largura; a altura (não se contando com o tubo que o termina) é de $0^{m},26$; *qual é a sua capacidade?* — R. 4 litr., 25.

49. Um balde com a fórma de um cóne truncado tem $0^{m},40$ de altura; um dos seus diametros (tomados interiormente) é de $0^{m},25$; e o outro $0^{m},20$; *qual é a sua capacidade em litros?* — R. 15 litr., 97.

50. Uma cisterna com 5^{m} de profundidade tem um comprimento de $4^{m},75$ sobre $2^{m},90$ de largura; *quantos metros cubicos de terra são precisos para enchel-a?* — R. $68^{m3},875$.

51. Uma caixa tem $1^m,30$ de comprimento a $0^m,56$ de largura e $0^m,80$ de altura; *qual é a sua capacidade?* — R. $0^{m3},582\ 400$

52. Um pedaço de madeira em fórma de cône truncado tem $0^m,48$ de diametro em uma das extremidades e $0^m,42$ na outra; o comprimento sendo de 6^m, *qual é o seu volume em stereos?* — R. $0^s,95\ 56$.

53. Um mastro de barco tem $0^m,98$ de circumferencia em uma extremidade e $0^m,24$ na outra; o comprimento sendo de $16^m,50$, *qual é o seu volume em stereos?* — R. $0^s,54\ 75\ 68$.

54. Uma cuba cuja fórma é a de um cône truncado tem interiormente um diametro de $0^m,80$ no fundo, e um diametro de 1^m na abertura; sua altura é de 1^m; *qual é em litros a capacidade desta cuba?* — R. 638 litr., 79.

55. Uma celha cujos dois diametros são $0^m,60$ e $0^m,75$ tem $0^m,54$ de altura; *qual é a sua capacidade?* — R. 194 litr., 17.

56. As duas circumferencias de uma cuba são 8^m e $9^m,80$; *calcular a sua capacidade em hectolitros*, sabendo-se que a altura é de $2^m,45$? — R. $154^{hl},90\ 85$.

57. Um tonel com 2^m de comprimento tem 0^m98 de diametro na batoque e $0^m,92$ em cada extremidade, tomadas interiormente estas dimensões; *qual é a capacidade do tonel?* — R. 1447 litr., 648.

58. *Qual é a capacidade de um tonel* de $1^m,20$ de diametro no batoque, de $1^m.02$ de diametro em cada extremidade e de $2^m,10$ de comprimento? — R. 2 143 litr., 48.

59. Um negociante vendeu 17 barras de ferro com $3^m,45$ de comprimento, 6 centimetros de largura e 29 millimetros de espessura; a densidade de ferro é 7,79 e o kilogrammo vale $0^{fr},25$. *Quanto deve o comprador, tendo-se-lhe feito um desconto de* $3\frac{1}{2}$ %? — R. $191^{fr},79$.

60. Um tanoeiro quer fazer um balde que tenha um duplo decalitro de capacidade. O diametro superior sendo de $0^m,30$ e o diametro inferior de $0^m,26$ *que profundidade deve o tanoeiro dar ao balde?* — R. $0^m,324$.

FIM

INDICE

Capitulo I — Numeros inteiros

Capitulo II — Fracções decimaes

Capitulo III — Systema metrico francez

Capitulo IV — Noções sobre os restos e sobre a divisibilidade dos numeros

Capitulo V — Numeros primos

Capitulo VI — Fracções ordinarias

Capitulo VII — Metrologia

Capitulo VIII — Numeros complexos

Capitulo IX — Razões e proporções

Capitulo X — Applicações

Capitulo XI — Raizes quadrada e cubica

Applicações geometricas

Edições da Livraria do Globo

Almanaque do Globo para 1926 (3.º anno)	3$500
Almanaque do Globo para 1925 (2.º anno)	2$500
Azambuja (Darcy) — No galpão, 2.ª edição	5$000
Annes Dias (Dr. Heitor) — Lições de Clinica Medica	15$000
Annes Dias (Dr. Heitor) — Clinica médica, 2.ª série	no prélo
Avila Junior (Henrique) — Processo analytico	2$000
Abreu e Silva (Desembargador Florencio Carlos de) — Novos Commentarios ao Codigo do Processo Penal do Rio Grande do Sul	8$000
Azevedo (Olmiro de) Véo d'agua	5$000
Azurenha (Paulino de) O Semanario de Léo Pardo	no prélo
Barbosa Netto (João) — Molduras e Visões	5$000
Bernardi (Mansueto) — Terra Convalescente	5$000
Bernardi (Mansueto) — O Livro de Bêbê, 2.ª ed., enc.	15$000
Brasil (Zeferino) — Telas de Luar	6$000
Barros (Fabio de) — Palavras ôcas	5$000
Bruckner-Costa — Pequeno Tratado Homeopathico Domestico	2$000
Barnasque (Clemenciano) — No pago, manchas pampeanas, 1 vol.	3$000
Callage (Roque) — Terra natal	4$000
Callage (Roque) — Rincão, 2.ª ed.	5$000
Callage (Roque) — Vocabulario gaúcho	no prélo
Calderon de la Barca (E. G.) — Compendio de Theoria Musical	3$500
Costa (Dr. Renato) — Regimento de Custas Judiciaes do Estado, enc., 2.ª ed.	no prélo
Constituição da Republica	2$000
Constituição do Estado do Rio Grande do Sul	2$000
Codigo Penal dos Estados Unidos do Brasil	3$000
Contreiras Rodrigues (Félix) — Gaúchadas e Gaúchismos, ill.	10$000
Daissen (Augusto) — A' margem de alguns brasileirismos (estudos de filologia), 1 vol. br.	6$000
Faria (Octavio Augusto de) — Diccionario Geographico, Historico e Estatistico do Rio Grande do Sul, 2.ª edição, 1 vol. de 419 pgs., enc.	10$000
Gonçalves Vianna (Prof. R.) — Lições de Clinica Neurologica, 1 vol. enc.	15$000
Leal (Isolino) — Alma Simples	3$000
Lima (A. G.) — Chronologia da Historia Rio-grandense	3$000
Lima (A. G.) — Geographia, 1.ª parte	3$500
Lima (A. G.) — Geographia, 2.ª parte	5$000
Lima (A. G.) — Historia do Brasil	3$500
Lima (A. G.) — Manuscripto Brasileiro, cart.	2$500
Lima (A. G.) — Caderno de Contas	$500
Livro de Contas ou as 4 operações elementares com applicações a 500 questões	1$000
Lewis (Arthur B.) — Estrella d'Israel (Mysterios da Sagrada Escriptura. A vida do Redemptor predita pelos Psalmos de David), 1 vol. cart.	5$000
Maya (Alcides) — Crónica e Ensaios, 1 vol. br.	5$000
Maia (João) — Pampa (episodios regionalistas), 1 vl. br.	4$000
Maximiliano (Carlos) — Hermeneutica e Applicação do Direito, 1 vol. enc.	14$000
Moacyr (Pedro) — Discursos parlamentares (prólogo de Assis Brasil) br. 15$000, encadernado	18$000
Osorio (Dr. Joaquim Luiz) — Commentarios á Constituição do Estado do Rio Grande do Sul, 2.ª ed.	15$000
Puente (André Leão) — Grammatica primaria da Lingua Portuguesa	2$000
Planta de Porto Alegre, com indicações uteis	2$000
Pinto da Silva (João) — Bolhas de Espuma	4$000
Pinto da Silva (João) — Historia Literaria do Rio Grande do Sul, 6$000, enc.	8$000
Papini (Giovanni) — Prece a Christo, traduzida por Mansueto Bernardi	1$000
Riet (D. M.) — O Cavallo crioulo	3$000

Edições da Livraria do Globo

Stiel (D. J.) — A Estancia Moderna .... no prélo
Silva (Victor) — Victorias .... 5$000
Simch (Dr. Francisco Rodolfo) — Noções elementares de Mineralogia e Geologia, cart. .... 6$000
Simch (Dr. Francisco Rodolfo) — Dos methodos de desmonte e extracção do carvão de pedra .... 3$000
Simch (Dr. Francisco Rodolfo) — Programma de Economia Social (Resumo das lições professadas na Faculdade de Direito de Porto Alegre) .... 8$000
Souza Lobo (Prof. J. T. de) — Primeira Arithmetica, 35.ª ed., enc. .... 2$000
Souza Lobo (Prof. J. T. de) — Geographia Elementar, 11.ª ed., enc. .... 6$000
Souza Lobo (Prof. J. T. de) — Segunda Arithmetica, 24.ª ed., enc. .... 4$500
Serao (Matilde) — Adeus, amôr! — romance, trad. de Jorge Jobim .... 6$000
Salis Goulart (Jorge) — Vertigem, romance .... 5$000
Toledo Costa — (Alfredo de, pseudonymo do padre J. B. Hafkmayer) — O Duque de Caxias .... 3$000
Travassos Alves (A. H.) — Verbos da Lingua Portugueza, 1 vol. cart. .... 2$000
Teschauer (Padre Carlos, S. J.) — Novo Vocabulario Nacional, contendo 8.500 neologismos, 1 vol. enc. 20$000
Teschauer (Padre Carlos) — Os veneraveis martyres do Rio Grande do Sul, 1 vol. br. (edição popular) .... 2$000
Teschauer (Padre Carlos) — AVIFAUNA E FLORA nos costumes, superstições e lendas brasileiras e americanas, 1 vl. br. .... 6$000
Teixeira (Luis Candido) — Formulario de uma acção summaria geral, de accordo com o Codigo do Proc. Civ. e Com. do Estado .... 2$000
Teixeira (Luis Candido) — Formulario das acções summarissimas, de accordo com o Cod. do Proc. Civ. e Com. do Estado .... 2$000
Tabella de Cambios .... 3$000
Tagore (Rabindranath) — Poemas escolhidos e adaptados por Eduardo Guimaraens, 1 vl. br., edição commum .... 5$000
edição de luxo .... 7$000
Um professor — Taboada methodica $500
Vergara (Pedro) — Alma crepuscular .... 2$000
Vergara (Dr. Oswaldo) — Commentarios ao Codigo do Processo Civil e Commercial do Estado do Rio Grande do Sul. 2.ª ed., br. .... 20$000
Vergara (Dr. Oswaldo) — Problemas de Português .... 4$000
Vergara (Dr. Oswaldo) — Methodo pratico de calligraphia, col. de 12 cadernos .... 2$000
Velho (Pedro) — Occasos, 2.ª ed. .... 4$000
Vieira Pires (Antonio) — Querencia, contos regionaes, 1 vol. .... 5$000
Vargas Netto (M.) — Tropilha crioula (poesias gauchescas), 1 vol. br. .... 5$000
Wamosy (Alceu) — Poesias, 2.ª edição, (com prefacio de Mansueto Bernardi), 1 vol. br. .... 5$000
Xavier Carneiro (Joaquim) — Compendio de Escripturação Mercantil, 5.ª ed., enc. ....

BARCELLOS, BERTASO & C.
LIVRARIA DO GLOBO — PORTO ALEGRE
Rua dos Andradas ns. 272 e 274

NOVIDADE

Pedro Moacyr — DISCURSOS PARLAMENTARES, com prefacio de Assis Brasil. (vol. br. 10$, encad. ....