somarmos um número qualquer 10, por exemplo, temos:

$$2x - 1 + 10 = 13 + 10$$

Vemos que essa nova equação continúa a admitir uma única raiz igual a 7, isto é, ficou eqüivalente à primeira.

Dizemos, nesse caso, que a *equação dada não se alterou*

Uma equação *não se altera*, ao ser submetida a uma certa operação, quando continúa com o mesmo número de raizes e essas raízes com os mesmos valores.

15 — Propriedades das equações.

Para que possamos resolver fàcilmente uma equação dada precisamos conhecer as propriedades das equações.

Passemos, pois, ao estudo das *principais propriedades* das equações.

16 — Primeira propriedade das equações.

Uma equação não se altera quando somamos ou subtraimos o mesmo número a ambos os membros.

Seja, por exemplo, a equação

$$x + 7 = 20$$

que é satisfeita para $x = 13$.

Somemos o mesmo número (8, por exemplo), a ambos os membros dessa equação. Temos:

$$x + 7 + 8 = 20 + 8$$

ou

$$x + 15 = 28$$

e essa equação é eqüivalente à equação dada. Logo, a equação

$$x + 7 = 20$$

não se alterou quando somamos o mesmo número a ambos os membros.

À mesma conclusão poderiamos chegar se **subtraissemos** o mesmo número a ambos os membros da equação proposta.

17 — Observação.

Uma equação poderá ser comparada ao estado de equilíbrio de uma balança ordinária.

Essa comparação não passa de um simples artifício que nos vai permitir dar de uma equação qualquer uma imágem concreta, bem simples.

O estado de equilíbrio de uma balança perfeita e **exata**, indica a igualdade absoluta dos pesos dos corpos colocados nos pratos dessa balança; assim, tambem o sinal = (igual), colocado entre os dois membros da equação, indica que as duas expressões algébricas — ligadas pelo referido sinal — têm o mesmo valor.

Ora, é evidente que se juntarmos aos dois pratos de uma balança, em equilíbrio, o mesmo peso não perturbamos o estado de equilíbrio da balança. Assim, tambem, quando somamos o mesmo número a duas expressões iguais não alteramos a igualdade existente entre essas expressões.

18 — Sgunda propriedade das equações.

Uma equação não se altera quando passamos um têrmo qualquer, com o sinal trocado, de um membro para o outro.

Seja, por exemplo, a equação

$$2x - 3 = 7$$

que é satisfeita, como fàcilmente verificamos, para x igual a 5.

Somemos o mesmo número (3, por exemplo), a ambos os membros dessa equação. Já sabemos, em virtude da primeira propriedade, que essa equação não se altera.

Temos, portanto:

$$2x - 3 + 3 = 7 + 3$$

Sendo, porém,

$$-3 + 3 = 0$$

vamos obter a equação

$$2x = 7 + 3$$

Se observamos agora as equações eqüivalentes

$$2x - 3 = 7$$
$$\text{e} \quad 2x = 7 + 3$$

notamos que o termo -3 que figurava no primeiro membro da equação dada, passou para o segundo membro da equação eqüivalente, com o sinal $+$.

Exemplo: As equações $10y + 9 = 19$ e $10y = 19 - 9$ são eqüivalentes. São ambas satisfeitas para $y = 1$. O têrmo $+9$ do primeiro membro passou para o segundo membro com o sinal trocado.

Conclusão:

Uma equação não se altera quando passamos um têrmo, de um membro para o outro, com o sinal contrário.

19 — Transposição de termos numa equação.

Transpor um têrmo de uma equação é passar êsse têrmo, com o sinal trocado, de um membro para o outro da equação.

Assim na equação:

$$u + 7 = 9 - u$$

podemos transpor o termo $+7$ para o segundo membro e o termo $-u$ para o primeiro membro. Temos:

$$u + u = 9 - 7$$

Esta última equação é eqüivalente à equação dada:

$$u + 7 = 9 - u$$

20 — Observação.

Dada uma equação qualquer podemos — se fôr conveniente — passar todos os termos para o primeiro membro. Nesse caso o segundo membro da equação fica igual a zero:

Exemplo:

Dada a equação

$$2x^2 = 7x - 3$$

transportemos todos os termos para o 1.º membro. Temos:

$$2x^2 - 7x + 3 = 0$$

ficando o segundo membro da equação igual a zero.

21 — Terceira propriedade das equações.

Uma equação não se altera quando multiplicamos ou dividimos todos os seus têrmos pelo mesmo número

Seja, por exemplo, a equação

$$2x - 1 = 9$$

que admite uma raiz igual a 5.

Multipliquemos todos os têrmos dessa equação por um número qualquer, positivo ou negativo. Seja 4, por exemplo, êsse número.

Efetuando a multiplicação de todos os têrmos da equação dada por 4, temos:

$$8x - 4 = 36.$$

A equação obtida é eqüivalente à equação dada.

A mesma cousa podemos observar quando dividimos todos os têrmos de uma equação pelo mesmo número.

Seja a equação: $12t - 30 = 66$,
que admite a solução $t = 8$.

Vamos dividir todos os têrmos dessa equação por 6. Temos:

$$2t - 5 = 11$$

equação que é eqüivalente à equação

$$12t - 30 = 66.$$

Conclusão:

Uma equação não se altera quando multiplicamos ou dividimos todos os seus têrmos por um mesmo número positivo ou negativo.

22 — Trocar os sinais dos termos de uma equação.

Seja a equação:

$$-x - 5 = -8$$

Em virtude da terceira propriedade podemos multiplicar todos os têrmos dessa equação por -1: e como a multiplicação por -1 eqüivale a uma troca de sinais, temos:

$$x + 5 = 8$$

As equações:

$$-x - 5 = -8$$

e

$$x + 5 = 8$$

são eqüivalentes.

Concluímos, portanto, a seguinte propriedade:

Uma equação não se altera quando trocamos os sinais de todos os seus têrmos.

23 — Observação.

Não podemos multiplicar ou dividir todos os têrmos de uma equação por zero ou por quantidade eqüivalente a zero.

A multiplicação ou a divisão por zero de todos os têrmos de uma equação poderia nos conduzir aos maiores absurdos.

Exemplifiquemos:

A equação

$$x + 4 = 11$$

só admite uma raiz que é 7.

Multipliquemos todos os têrmos dessa equação por zero:

$$0 \times x + 0 = 0.$$

Temos assim uma identidade, isto é, uma igualdade que é satisfeita, não só para $x = 7$, como para qualquer outro valor atribuído a x.

Logo a multiplicação por zero *alterou* a equação.

Mais tarde, neste curso, estudaremos o caso da divisão por zero.

24 — Resolução da equação $ax = b$.

Seja resolver a equação

$$ax = b$$

na qual a e b representam, conforme uma convenção bastante conhecida, números dados. Assim a equação

$$7x = 12$$

é da forma $ax = b$.

Dividamos por a ambos os membros dessa equação

$$ax = b$$

Temos:

$$\frac{ax}{a} = \frac{b}{a}$$

ou, simplificando o fator a no 1.º membro da equação:

$$x = \frac{b}{a}$$

Fica assim resolvida a equação.

25 — Exercício II.

Achar um número que multiplicado por m *dê um produto igual a* n.

Resolução:

Seja x êsse número.

O produto dêsse número por m será:

$$mx$$

Êsse produto sendo igual a n, podemos escrever:

$$mx = n,$$

equação que, resolvida, nos dá: $x = \dfrac{n}{m}$.

O número procurado é $\dfrac{n}{m}$.

26 — Exercício III.

Resolver as equações:

$$\begin{array}{rl} \text{I)} & 5x = 20 \\ \text{II)} & 4t = 11 \\ \text{III)} & 2u = -12 \end{array}$$

Resolução:

Essas equações são da fórma

$$ax = b$$

Resolvendo-as, temos

I) $x = 4$. II) $t = \dfrac{11}{4}$. III) $u = -6$.

27 — Resolução de uma equação com transposição de termos.

Seja a equação

$$5x - 7 = 13 + x$$

que queremos resolver.

Vamos reduzí-la à forma $ax = b$.

Transportemos, pois, para o 1.º membro os têrmos que contêm a incógnita e para o 2.º membro os têrmos independentes da incógnita.

Da equação $5x - 7 = 13 + x$

fazendo a transposição do têrmo $+ x$ para o 1.º membro e do termo $- 7$ para o 2.º membro, passamos à equação:

$$5x - x = 13 + 7$$

Reduzindo os termos semelhantes, temos:

$$4x = 20$$

e desta última equação (que é da forma $ax = b$), tiramos:

$$x = \frac{20}{4}$$

ou finalmente $x = 5$.

28 — Exercício II.

Resolver a equação:

$$6y + 7 - y = 21 + 3y - 6$$

Transpomos para o 1.º membro os têrmos em y e para o 2.º membro os termos independentes:

$$6y - y - 3y = 21 - 6 - 7$$

Reduzindo os termos semelhantes:

$$2y = 8$$

e desta equação, que é da forma $ax = b$, tiramos:

$$y = \frac{8}{2}.$$

ou, finalmente: $y = 4$.

29 — Equação com denominadores iguais.

Consideremos a equação

$$\frac{2t}{17} + \frac{5}{17} = \frac{t}{17} + \frac{13}{17}$$

na qual todos os termos têm o mesmo denominador.

Em virtude da 3.ª propriedade podemos, sem **alterar a** equação, multiplicar todos os seus termos pelo denominador comum 17.

Temos assim:

$$\frac{2t \times 17}{17} + \frac{5 \times 17}{17} = \frac{t \times 17}{17} + \frac{13 \times 17}{17}$$

ou simplificando, por simples cancelamento, as frações, temos:

$$2t + 5 = t + 13$$

Comparando as duas equações eqüivalentes:

$$\frac{2t}{17} + \frac{5}{17} = \frac{t}{17} + \frac{13}{17}$$

e $\quad 2t + 5 = t + 13$

podemos concluir o seguinte:

Quando todos os têrmos de uma equação têm o mesmo denominador (positivo ou negativo) podemos escrever apenas os numeradores despresando os denominadores

30 — Exemplo.

Dada a equação

$$\frac{x}{3} - \frac{5}{3} - \frac{1-x}{3}$$

podemos escrever:

$$x - 5 = 1 - x;$$

ou, transpondo:

$$x + x = 1 + 5$$

Reduzindo, temos a equação da forma $ax = b$;

$$2x = 6$$

Tirando o valor de x, temos: $x = 3$.

31 — Resolução de uma equação com denominadores.

Consideremos, por exemplo, a equação

$$\frac{x}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{6} - \frac{x}{2}$$

Reduzimos ao mesmo denominador todos os termos da equação.

O $m.m.c.$ dos denominadores é 12. Dividimos êsse $m.m.c.$

$$(A) \qquad \underset{(4)}{\frac{x}{3}} + \underset{(3)}{\frac{1}{4}} = \underset{(2)}{\frac{7}{6}} - \underset{(6)}{\frac{x}{2}}$$

pelos denominadores (como já fizemos no caso da adição de frações) escrevendo os quocientes obtidos em baixo de cada denominador, entre parentesis.

Multiplicamos em seguida cada quociente por ambos os termos da fração correspondente:

$$\frac{4x}{12} + \frac{3}{12} = \frac{14}{12} - \frac{6x}{12}$$

e como todos os denominadores são iguais, escrevemos apenas os numeradores:

$$(B) \qquad 4x + 3 = 14 - 6x$$

ficando assim *expelidos os denominadores* da equação.

Na prática devemos passar diretamente da fórma dada (A), para a forma (B), que é eqüivalente.

32 — Equação do 1.º grau.

A equação

$$ax = b$$

é do 1.º grau porque a incógnita x figura no seu têrmo de mais alto grau, com expoente 1.

A equação $x^3 + 2x = 9$ é do 3.º grau.

Toda equação do 1.º grau póde ser reduzida sempre á fórma

$$ax = b.$$

33 — Exercício V.

Resolver a equação do 1.º grau:

$$\frac{x}{3} + 4 = \frac{x+1}{2} + x.$$

Resolução:

Vamos expelir os denominadores da equação:

$$\frac{x}{3} + 4 = \frac{x+1}{2} + x$$

O $m.m.c.$ dos denominadores é 6. Dividimos êsse $m.m.c.$ pelos denominadores, sem esquecer que os termos inteiros têm para denominador a unidade:

$$\underset{(2)}{\frac{x}{3}} + \underset{(6)}{4} = \underset{(3)}{\frac{x+1}{2}} + \underset{(6)}{x}$$

e expelimos os denominadores:

$$2x + 24 = 3x + 3 + 6x$$

Transpomos:

$$2x - 3x - 6x = 3 - 24$$

Reduzimos:

$$-7x = -21$$

Trocamos os sinais:

$$7x = 21$$

Finalmente, tiramos o valor de x:

$$x = \frac{21}{7} \quad \text{ou} \quad x = 3$$

34 — Exercício VI.

Resolver a seguinte equação do 1.º grau:

$$2x + \frac{1-x}{3} = \frac{x+5}{6}$$

Resolução:

$$\underset{(6)}{2x} + \underset{(2)}{\frac{1-x}{3}} = \underset{(1)}{\frac{x+5}{6}} \qquad m.m.c. = 6.$$

Expelimos os denominadores:

$$12x + 2 - 2x = x + 5.$$

Transpomos:

$$12x - 2x - x = 5 - 2.$$

Reduzimos a equação à forma $ax = b$; temos:

$$9x = 3.$$

Tiramos o valor de x:

$$x = \frac{3}{9} \quad \text{ou} \quad x = \frac{1}{3}$$

Exercícios

70 — Resolver a equação: $2y - 3 = 12 - 3y$. $y = 3$

71 — Resolver as equações:

$$1 - 2u + 3u = 12 - 5u$$
$$4v - 9 = v + 5.$$

$u = \frac{11}{6}$ $v = \frac{14}{3}$

72 — Resolver a equação: $\frac{x}{2} + 5 = \frac{x}{3} + 15$. $x = 60$

Leitura

ÁLGEBRA (*)

(PEDRO A. PINTO)

Álgebra, *primitivamente, correspondia ao que hoje chamamos* cirurgia. *Do árabe* algibarat, *que significa restauração, concêrto; crêm outros que seja do nome próprio de* Geber, *químico e matemático célebre, chamado pelos árabes* Gicebert.

Se não repito noção errada aparece o têrmo, pela primeira vez, na obra de um persa, de educação árabe, Ben Musa Al-Kharesmi, que, mais ou menos pelo ano de 830, escreveu o seu tratado de Álgebra, obra que foi traduzida para o latim por Leonardo de Pisa e é a fonte da Álgebra ocidental.

E' o têrmo álgebra, salvo êrro, mais velho em medicina que em Matemática. João dos Santos e Santo Antonio Moura dão ambos os sentidos. Copio-lhes as palavras:

"Algebista... *Aljabbar. O que exerce a arte de concertar, soldar, reparar os ossos quebrados ou deslocados...*"

(*) Escrito especialmente para êste livro.

"Álgebra... *Algebar. A arte de reparar e concertar ossos quebrados...*"

"Álgebra... *A ciência que faz uma das partes da Matemática*".

Não sei se os autores concientemente escreveram algebista, no logar de algebrista, ou se houve colaboração do tipógrafo, que eliminou o r.

Era corrente, até no falar do povo, a expressão álgebra em vez de cirurgia. Em Portugal, pelo menos na linguagem escrita, ainda se usa álgebra, *como* cirurgia *e* algebrista *como operador. Em meu livrinho "Linguagem médica e digressões vocabulares", cito muitos exemplos de Camillo Castello Branco e aqui apenas reproduzo dois:*

"*A ciência médica atual não vai muito além da álgebra. Endireita-se uma costela...*" (*Quatro horas inocentes, p. 163 ed. 2.ª*).

"*...os algebristas tiveram muito que fazer destorcendo ou soldando costelas...*" (*A mulher fatal, pág. 56*).

Aqui usa-se o têrmo Álgebra para designar a parte da Matemática onde se estuda o cálculo das relações. O cultor da Álgebra é algebrista; em regra, porém, quem se dedica ao estudo da Matemática não se dá como algebrista e sim como geômetra, como matemático. A palavra algebrista é freqüentemente usada em sentido pejorativo, para designar cientistas que pretendem explicar fenômenos de ordem superior, como os biológicos, os sociológicos, por meio de fenômenos matemáticos, de número, de extensão ou de movimento.

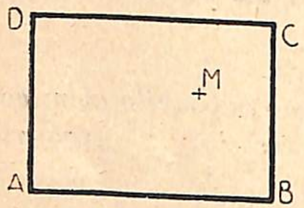
CAPÍTULO XXIII

EIXOS COORDENADOS. GRÁFICOS.

1 — Como fixar a posição de um ponto.

Vamos resolver, a título de curiosidade, o seguinte problema:

"Um nobre russo, obrigado a fugir de seus domínios durante uma revolta, resolveu ocultar o dinheiro que possuia para rehave-lo mais tarde, quando voltasse. Colocou, pois, os



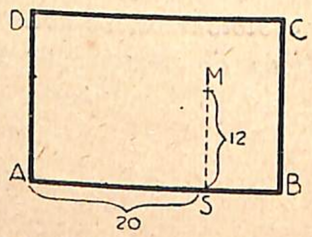
seus haveres mais preciosos dentro de uma pequena caixa e enterrou-a secretamente, sem deixar vestígio, em certo ponto M de um grande terreno retangular $ABCD$. Como determinar de um modo claro e seguro, sem despertar suspeitas, a posição do ponto M ?

A solução desse problema é muito simples.

O cauteloso nobre mediu a distância MS, do ponto M até o lado AB do terreno, conforme indica a figura abaixo. Vamos supor que essa distância era de 12 metros. Em seguida mediu a distância do ponto S até o vértice A, e achou, por exemplo, 20 metros.

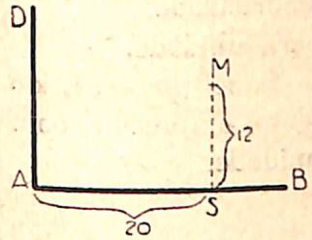
Com auxílio dessas duas distâncias e fixado o vértice, como ponto de referência, fica perfeitamente determinado o ponto M.

Com efeito. A pessoa que, conhecendo as indicações necessárias, quisesse atingir o ponto M caminharia, a partir de A, 20 metros sôbre AB, chegando assim ao ponto S; dêsse ponto na direção de AD, isto é, perpendicularmente a AB, caminharia 12 metros alcançando o ponto M.



2 — Determinação de um ponto.

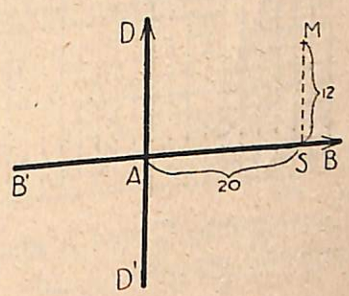
A determinação do ponto M — no problema anterior — foi obtida, dadas as duas distâncias, apenas com o auxílio dos lados AB e AD do retângulo $ABCD$. É evidente, portanto, que o ponto M ficaria perfeitamente determinado, como indica a figura ao lado, mesmo que suprimissemos os lados BC e DC do retângulo primitivo.



Convém observar que as semi-retas AB e AD são perpendiculares.

3 — Eixos coordenados.

Vamos supor que o lado AB, na figura do parágrafo anterior, foi prolongado para a direita e para a esquerda indefinidamente e que o lado AD foi, do mesmo modo prolongado para cima e para baixo.



Temos assim, passando pelo ponto A, duas retas perpendiculares. Orientemos essas duas retas, transformando-as em eixos com a origem no ponto A.

Êsses eixos são chamados *eixos coordenados*.

4 — Coordenadas de um ponto.

As duas distâncias SA e SM, com auxílio das quais determinamos a posição do ponto M, são chamadas *coordenadas* do ponto.

A coordenada AS é denominada *abcissa* e a coordenada SM é denominada *ordenada*.

5 — Observação.

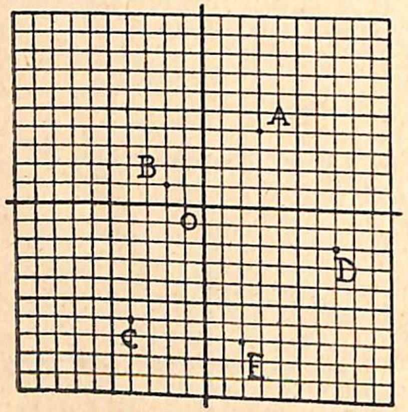
Para que possamos estudar com mais facilidade os diferentes problemas sobre eixos coordenados devemos de preferencia, traçar as figuras sobre papel quadriculado.

Cada divisão no papel será tomada para unidade.

E' preferivel, muitas vezes, adotar o papel milimetrado que permite escolher uma unidade conveniente, e apreciar, com relativa previsão, as diversas frações da unidade.

6 — Coordenadas de um ponto qualquer.

Consideremos cinco pontos: A, B, C, D, e E.



O ponto A tem a abcissa positiva $(+3)$ e a ordenada tambem positiva $(+4)$. A posição do ponto A é indicada pelo notação $A\ (+3;\ +4)$.

O ponto B tem a abcissa negativa (-2) e a ordenada positiva $(+1)$. A posição do ponto B será definida do seguinte modo: $B\ (-2;\ +1)$.

O ponto C tem a abcissa negativa (-4) e a ordenada também negativa (-6). Temos, do mesmo modo:

$$C\ (-4;\ -6).$$

O ponto D tem a abcissa positiva $(+7)$ e a ordenada negativa (-2). E temos, portanto, para o ponto D:

$$D\ (+7;\ -2).$$

As coordenadas do ponto E serão $+2$ e -7.

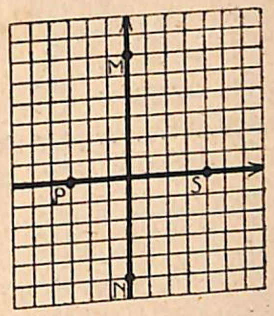
7 — Observação.

Um ponto A qualquer, cujas coordenadas sejam x e y, será determinado pela notação:

$$A\quad (x,y)$$

8 — Pontos sobre os eixos. Coordenadas da origem.

Quando o ponto está sôbre o eixo dos y a sua abcissa é zero.



O ponto M tem por coordenadas 0 e $+6$.

As coordenadas do ponto N são 0 e -5.

Quando o ponto está situado sôbre o eixo dos x a sua coordenada é zero.

O ponto S tem por coordenadas 4 e 0.

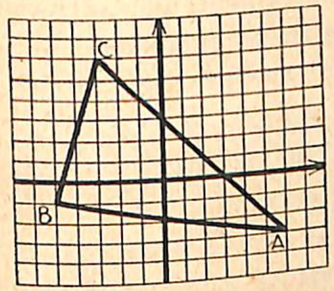
As coordenadas do ponto P são -3 e 0.

As coordenadas da origem são -0 e 0.

9 — Exercício I.

Determinar graficamente um triângulo ABC dados pelas coordenadas dos vértices:

$A\ (+6, -3)$; $B\ (-5, -1)$:
$C\ (-3, +6)$



Resolução:

Fixemos, com auxílio de dois eixos coordenados, os pontos A, B e C.

Unindo os pontos obtemos o triângulo pedido.

10 — Representação gráfica.

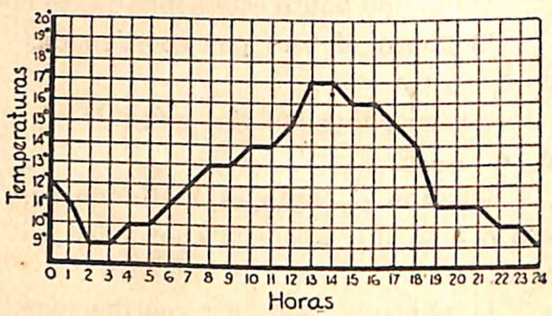
Com auxílio dos eixos coordenados podemos fazer a representação gráfica de certos fenómenos.

Citemos um exemplo.

Vamos supor que em certo lugar foram, durante um dia, de hora em hora, medidas as temperaturas.

Admitamos ainda que foram obtidos os seguintes resultados:

Hora	*Temperatura*
0	12.º
1	11.º
2	9.º
3	9.º
4	10.º
5	10.º
6	11.º
7	12.º
8	13.º
9	13.º
10	14.º
11	14.º
12	15.º
13	17.º
14	17.º
15	16.º
16	16.º
17	15.º
18	14.º
19	11.º
20	11.º
21	11.º
22	10.º
23	10.º
24	9.º



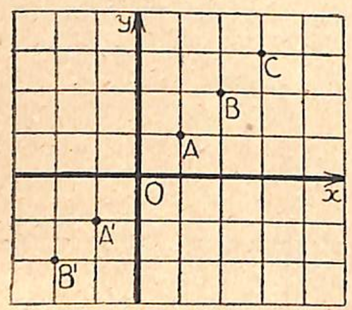
Marquemos sôbre o eixo dos x as horas e sobre o eixo dos y marquemos as temperaturas correspondentes.

Vamos obter dêsse modo uma série de pontos.

Ligando convenientemente esses pontos obtemos o gráfico das variações da temperatura.

11 — Exercício II.

Determinar graficamente todos os pontos que têm a abcissa igual à ordenada.



Resolução:

Marquemos os diversos pontos cujas abcissas são iguais às ordenadas.

O ponto A, por exemplo, tem a abcissa 1 e a ordenada 1.

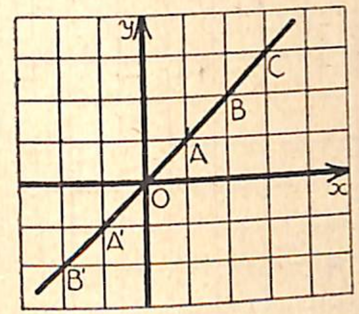
O ponto B tem a abcissa 2 e a ordenada também igual a 2.

As coordenadas do ponto C são $+3$ e $+3$.

As coordenadas do ponto A', são -1 e -1.

O ponto B', tem por coordenadas -2 e -2.

Obtemos assim uma serie de pontos A, B, C, A' B', etc. que têm a ordenada igual à abcissa.



Se unirmos todos os pontos assim determinados vamos obter uma reta S.

Para um ponto qualquer dessa reta, temos que a ordenada é igual à abcissa.

Se designarmos a ordenada por y e a abcissa por x, vem:

$$x = y$$

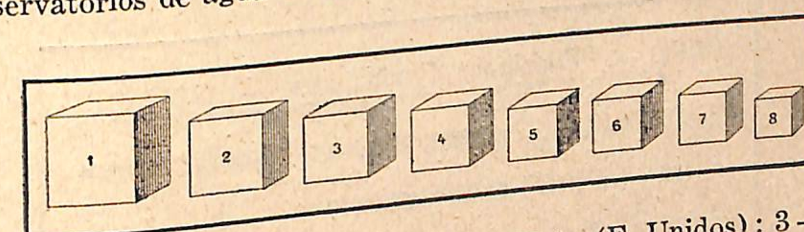
Essa equação exprime que um ponto qualquer da reta S tem a ordenada igual à abcissa.

12 — Gráfico por meio de barras ou figuras.

O gráfico em certos casos póde ser feito com auxílio de *barras* ou de *figuras*.

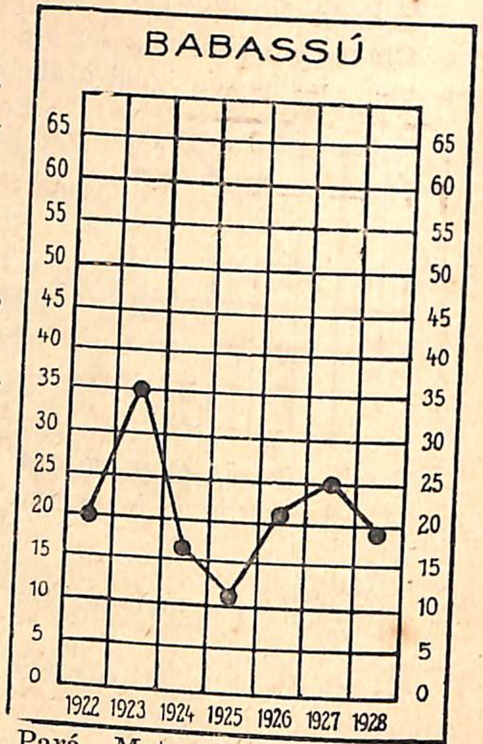
Cada uma dessas barras ou figuras, representará a grandeza relativa de uma das quantidades a comparar.

Apresentamos abaixo um gráfico, onde estão simbolisados por meio de cubos, segundo a capacidade de cada um, os maiores reservatorios de água do mundo.



1 — Orós (Ceará); 2 — Elephant Bute (E. Unidos); 3 — Passagem Funda (Ceará); 4 — Assuan (Egypto); 5 — Poço dos Paus (Ceará); 6 — Queixeramobim (Ceará); 7 — Santa Cruz (Ceará); 8 — Periar (India).

13 — Exemplo I.



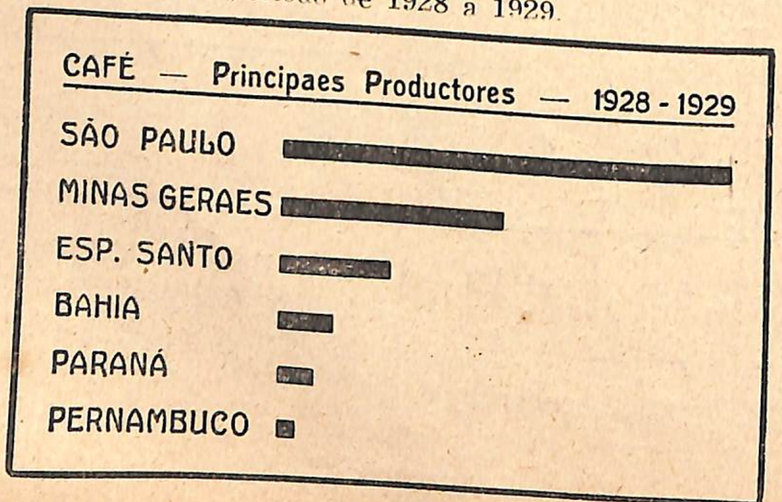
Na figura ao lado vemos um gráfico indicando a exportação havida do côco babassú, no período compreendido entre 1922 e 1928. Cada divisão do papel representa, sobre o eixo das ordenadas cinco mil toneladas exportadas.

Em 1923, por exemplo, o Brasil exportou 35.000 toneladas de babassú; em 1925 a nossa exportação pouco excedeu de dez mil toneladas.

Existem grandes babassuaes em extensas regiões do Brasil, principalmente nos Estados do Piauí, Maranhão, Pará, Mato Grosso e Goiaz.

14 — Exemplo II.

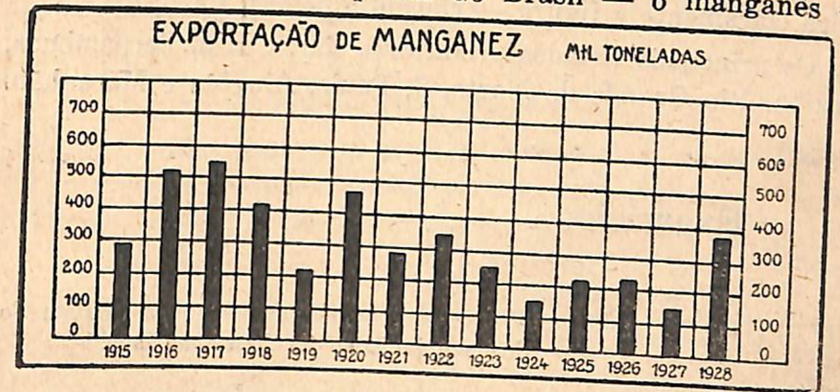
Com o auxílio do quadro abaixo, podemos não só apreciar, como tambem comparar, o valor da producção do café em diversos Estados, no período de 1928 a 1929.



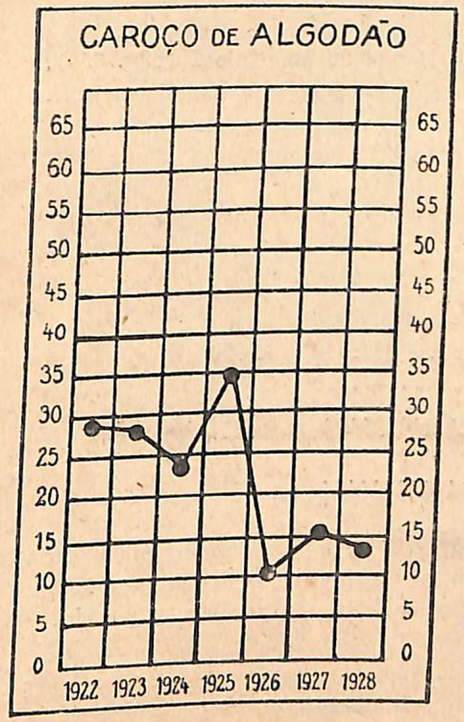
Cada barra representa o valor relativo do café produzido pelo Estado correspondente.

15 — Exemplo III.

Uma das grandes riquezas do Brasil — o manganês —



teve, por causa da guerra na Europa, a sua exportação muito desenvolvida em 1915, cresceu em 1916 e aumentou ainda em 1917. Depois dessa data a exportação de manganês sofreu grandes variações. Em 1924, com a descoberta das minas do Rio do Ouro, na África, que entraram a concorrer com o Brasil, a nossa exportação diminuiu extraordinariamente.



E isso podemos apreciar observando o gráfico que figura acima.

16 — Exemplo IV.

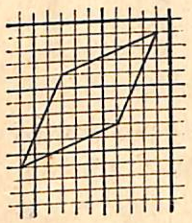
Na figura ao lado vemos representada, por meio de um gráfico muito simples, a exportação brasileira de caroço de algodão desde 1922 até 1928.

Como no exemplo anterior cada divisão do papel quadriculado representa 5.000 toneladas do produto exportado.

Em 1925 a nossa exportação de caroço de algodão — como indica claramente a figura — chegou a 35.000 toneladas.

Os principais Estados produtores são: Ceará, Pernambuco, Paraíba, Rio Grande do Norte, S. Paulo, Alagôas e Maranhão.

Exercícios



73 — Determinar as coordenadas dos vértices do losango indicado na figura ao lado.

74 — Indicar, por meio de um gráfico, sem barras, a nossa exportação de manganês de 1915 a 1925 (V. pág. 351).

75 — Determinar, com auxílio da figura do Exemplo I (pág. 350), a quantidade de côco babassú exportada pelo Brasil em 1927.

76 — A exportação brasileira de farinha de mandioca, desde 1922 até 1927, foi a seguinte:

Ano	*Exportação em toneladas*
1922	12300
1923	12000
1924	4500
1925	7800
1926	5000

Indicar, por meio de um gráfico, em papel quadriculado, essa exportação. Cada divisão de papel deve representar (sôbre o eixo das ordenadas) 1.000 toneladas do produto exportado.

77 — A nossa produção de mate foi, em média, no período de 1928 até 1929, aproximadamente, a seguinte:

Paraná	60.200 toneladas
Santa Catarina	20.000 "
Mato Grosso	800 "
Rio Grande do Sul	450 "

Indicar a exportação de mate dêsses Estados por meio de barras.

Leitura

RENÉ DESCARTES

No século XVII, entre os grandes geômetras (*), destaca-se o filósofo francês René Descartes, que conseguiu, com suas descobertas, revolucionar por completo a Geometria fornecendo aos matemáticos métodos mais gerais, utilizáveis, não só nas especulações teóricas, como também na resolução de uma multiplicidade de problemas.

Movido menos por vocação natural do que pelo desejo de atender às solicitações de sua família, resolveu, ainda muito jovem, abraçar a carreira das armas. E a vida militar de Descartes foi um verdadeiro r o s á r i o de aventuras e de imprevistos sucessos; tomou parte em vários combates e viu-se envolvido, não raras vezes, nos azares das mais perigosas campanhas. Era, entretanto, um espírito acentuadamente

(*) Os principais geômetras do século XVII foram: Descartes, Mersenne, Fermat, Wallis e Pascal.

inclinado ao estudo e à meditação; quando esgrimia acompanhava com a maior atenção o voltear das espadas, não para se defender dos golpes do inimigo, mas com a preocupação de descobrir, pela observação direta, uma nova lei de movimento ou um novo princípio para a theoria dos choques. (*)

A natureza foi para com Descartes de uma avareza extrema em atributos de beleza. O filósofo era baixo, magro e de resistência orgânica muito precária; os olhos empapuçados surgiam de sob o cabelo que lhe caía descuidado sôbre a testa; no rosto pálido, onde a fealdade nada poupara, destacava-se o nariz proeminente e mal feito; e, como complemento de sua feia figura, usava habitualmente uma enorme cabeleira que lhe descia revôlta sôbre os ombros.

E, no entanto, êsse homem que em nada se recomendava pela aparência física, era dotado de um engenho invulgar. Em 1637, *nove anos depois de ter abandonado a vida militar, publicou uma de suas obras mais notáveis:* Discurso sôbre o Método (*Discours de la Méthode pour bien conduire la raison et chercher la verité dans les sciences*). *A essa obra foram reünidos três apêndices, um dos quais intitulava-se* "La Géométrie".

René Descartes, ex-soldado de Maurício de Nassau, foi o primeiro a dar uma interpretação aos números negativos, e determinava, no plano, a posição de um ponto, referindo-o por suas coordenadas, a dois eixos. Veio daí a denominação de coordenadas cartesianas *ao sistema usual de coordenadas.*

Devemos igualmente a Descartes a descoberta de um grande número de princípios e de métodos correntes em Matemática; foi êle que definiu a tangente como "sendo o limite das posições de uma secante" e que teve a idéia de representar as incógnitas pelas últimas letras do alfabeto (**). *O método denominado dos "coeficientes a determinar", muito usado em Matemática, foi introduzido por Descartes. E a êsse grande geômetra — diz Rouse Ball — devemos igualmente um teorema sôbre poliedros, que é comumente atribuído a* Euler (*).

(*) Descartes chegou a escrever um tratado de esgrima e um compêndio de música.

(**) Vide página 194.

Foi ainda Descartes que lançou os alicerces da Filosofia Moderna:

— "É inútil duvidar de tudo — dizia — basta refletir sôbre a dúvida para ver claramente que duvidar é pensar e que pensar é existir."

Em 1649, *a convite da Rainha Cristina, fez Descartes uma viagem à Suécia. Não resistiu, porém, ao clima rigoroso de Stockolmo e no ano seguinte, em conseqüênvia de uma violenta pneumonia, o admirável criador da Geometria Analítica "deixou de filosofar e de viver".*

(*) Em todo poliedro convexo o número de arestas mais 2 é igual ao número de faces mais o número de vértices.

CAPÍTULO XXIV

MULTIPLICAÇÃO ALGÉBRICA

1 — Multiplicação de um monômio por um número.

Consideremos, por exemplo, o monômio $4ab^3$

Vamos multiplicar êsse monômio por um número qualquer: 7, por exemplo.

Temos: $4ab^3 \times 7 = 4 \times 7 \times a \times b^3 = 28ab^3$.

Conclusão: O produto de um monômio por um número é obtido multiplicando-se o número pelo coeficiente do monômio.

Assim:
$$5mx \times 8 = 40mx$$
$$-3by \times 16 = -48by$$

2 — Exercício I.

Multiplicar o monômio $8a^2b$ *por* a^3.

Resolução:

O produto será:

$$8a^2b \times a^3 = 8 \times a^2 \times a^3 \times b$$

Sabemos que o produto de a^2 por a^3 é igual a^5.

$$8a^2b \times a^3 = 8a^5b.$$

3 — Exercício II.

Efetuar os produtos:

$$6ax \times x^3 \qquad 5my \times a$$

Resolução:

Os produtos serão:

$$6ax \times x^3 = ax^4$$
$$5my \times a = 5amy$$

4 — Produto de dois monômios.

Vamos multiplicar, por exemplo, os monômios

$$5a^4x \quad \text{e} \quad 3ax^2$$

Multipliquemos o primeiro monômio sucessivamente por 3, por a e por x^2.

Temos: $5a^4x \times 3ax^2 = 15a^5x^3$

Conclusão:

O produto de dois monômios é um monômio cujo coeficiente é o produto dos coeficientes dos monômios dados. A parte literal do produto é formada tomando-se cada letra com um expoente igual à soma dos expoentes com que essa letra figura nos monômios.

Exemplo:
$$6ay^3 \times 2ay = 12a^2y^4$$
$$5xy \times 9x = 45x^2y$$

5 — Exercício III.

Efetuar os produtos:

$$-4a^2y \times (-6ax) \quad \text{e} \quad 3mx\ (-2my)$$

Resolução:

Os produtos serão:

$$24a^3xy \quad \text{e} \quad -6m^2xy$$

6 — Produto de um monômio por um polinômio.

Seja multiplicar o monômio $4ax$ pelo polinômio

$$5x + 2a + 9.$$

Escrevemos, portanto:

$$4ax\ (5x + 2a + 9)$$

Ora, sabemos que para multiplicar um número $4ax$ por uma soma $5x + 2a + 9$, multiplicamos o número por todas as parcelas da soma:

$$4ax\ (5x + 2a + 9) = 20ax^2 + 8a^2x + 36ax.$$

Conclusão:

Para multiplicarmos um monômio por um poligômio multiplicamos o monômio por todos os têrmos do poligômio, e somamos algèbricamente os resultados.

7 — Exercício IV.

Multiplicar $2ay$ *por* $5a - 8x + 2y$.

Resolução:

$$2ay\ (5a - 8x + 2y) = 10a^2y - 16axy + 4ay^2$$

8 — Exercício V.

Multiplicar o monômio $-4a^2$ *pelo polinômio* $8 - 2x + a^3$.

Resolução:

$$-4a^2\ (8 - 2x + a^3) = -32a^2 + 8a^2x - 4a^5.$$

9 — Exercício VI.

Efetuar:

$$8\ (2 + x) + 5\ (3 - 2x) + 6\ (x - 2).$$

Resolução:

Efetuando os produtos indicados, temos:

$$16 + 8x + 15 - 10x + 6x - 12$$

Reduzindo os termos semelhantes:

$$4x + 19$$

10 — Multiplicação de polinômios.

Seja multiplicar o polinômio:

$$5x^2 + 4x + 3$$

por $2x + 6$.

Escrevemos os dois fatores com a seguinte disposição:

$$\begin{array}{l} 5x^2 + 4x + 3 \\ \underline{2x \ + 6 \qquad\quad} \end{array}$$

Multiplicamos em seguida o 1.º têrmo ($2x$) do multiplicador por todos os têrmos do multiplicando:

$$\begin{array}{ll} 5x^2 + 4x + 3 & \\ \underline{2x \ + 6 \qquad} & \\ 10x^3 + 8x^2 + 6x & \text{1.º produto parcial} \end{array}$$

e vamos obter assim o 1.º produto parcial. Multiplicamos, em seguida, o segundo têrmo do multiplicador (+ 6) pelo multiplicando:

$$\begin{array}{ll} 5x^2 + 4x + 3 & \\ \underline{2x \ + 6 \qquad} & \\ 10x^3 + 8x^2 + 6x & \text{1.º produto parcial} \\ 30x^2 + 24x + 18 & \text{2.º produto parcial} \end{array}$$

vamos obter, portanto o 2.° produto parcial. O produto total será igual à soma algébrica dos produtos parciais:

$$\begin{array}{rrrrl}
 & 5x^2 & +4x & +3 & \\
 & & 2x & +6 & \\
\hline
10x^3 & +8x^2 & +6x & & \text{1.° produto parcial} \\
 & 30x^2 & +24x & +18 & \text{2.° produto parcial} \\
\hline
10x^3 & +38x^2 & +30x & +18 & \text{Produto total}
\end{array}$$

11 — Exercício VII.

Multiplicar $2 - 3x + 4x^2$ por $5 + 2x - 3x^2$.

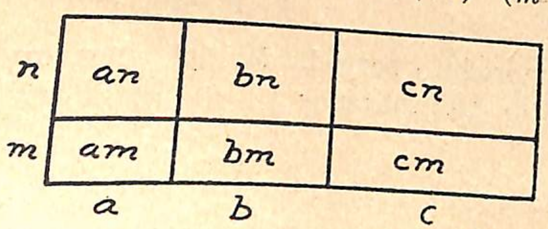
Resolução:

$$\begin{array}{rrrrr}
2 & -3x & +4x^2 & & \\
5 & +2x & -3x^2 & & \\
\hline
10 & -15x & +20x^2 & & \\
 & 4x & -6x^2 & +8x^3 & \\
 & & -6x^2 & +9x^3 & +12x^4 \\
\hline
10 & -11x & +8x^2 & +17x^3 & -12x^4
\end{array}$$

12 — Explicação gráfica.

O produto de dois polinômios pode ser explicado gràficamente de um modo muito simples.

Consideremos um retângulo cuja base é $a + b + c$ e cuja altura é $m + n$. A área dêsse retângulo (produto da base pela altura) será: $(a + b + c)\ (m + n)$.



Podemos, porém, como indica a figura, decompor o retângulo dado em 6 retângulos: três dêles tendo a altura m e bases respectivamente a, b e c e os outros altura n e bases, respectivamente, a, b e c

Vemos então que o retângulo dado será igual à soma das áreas dos 6 retângulos em que foi decomposto.

O retângulo dado terá, portanto, a área igual à soma:

$$am + bm + cm + an + bn + cn$$

Logo, podemos escrever:

$$(a + b + c)\ (m + n) = am + bm + cm + an + bn + cn.$$

O produto de dois polinômios é obtido multiplicando cada têrmo de um por todos os têrmos do outro e somando algèbricamente os resultados.

13 — Quadrado de um monômio.

Seja $5ay^3$ o monômio que queremos elevar ao quadrado.

Temos: $(5ay^3)^2 = 5ay^3 \times 5ay^3 = 25a^2y^6$.

Conclusão:

Para elevarmos um monômio ao quadrado elevamos o coeficiente ao quadrado e tomamos cada letra, com o dôbro do expoente.

Exemplos: $(8ay)^2 = 64a^2y^2$; $(-6mx^4)^2 = 36m^2x^8$.

14 — Quadrado de um binômio.

Seja $a + b$ o binômio que queremos elevar ao quadrado. Multipliquemos $a + b$ por $a + b$.

Temos:

$$\begin{array}{rrr}
a & +b & \\
a & +b & \\
\hline
a^2 & +ab & \\
 & +ab & +b^2 \\
\hline
a^2 & +2ab & +b^2
\end{array}$$

Podemos escrever:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Conclusão:

O quadro de um binômio é igual ao quadrado do 1.° têrmo dêsse bi-

nômio, mais o dôbro do produto do 1.º têrmo pelo 2.º, mais o quadrado do 2.º.

15 — Exercício VIII.

Elevar ao quadro os binômios: $5x + y$ e $3 + m$.

Resolução:

$$(5x + y)^2 = 25x^2 + 10xy + y^2$$
$$(3 + 8m)^2 = 9 + 48m + 64m^2$$

16 — Quadrado de uma diferença.

Elevar ao quadrado o binômio $x - y$.

Temos:

$$\begin{array}{r} x - y \\ x - y \\ \hline x^2 - xy \quad\quad \\ - xy + y^2 \\ \hline x^2 - 2xy + y^2 \end{array}$$

Conclusão:

O quadrado de uma diferença é igual ao quadrado do 1.º têrmo, menos o dôbro do 1.º pelo 2.º, mais o quadrado 2.º.

17 — Exercício IX.

Elevar ao quadrado os binômios:

$5 - 4x$ e $8a - 6$.

Resolução:

$$(5 - 4x)^2 = 25 - 40x + 16x^2$$
$$(8a - 6)^2 = 64a^2 - 96a + 36$$

18 — Formação do quadrado de um binômio. Explicação gráfica.

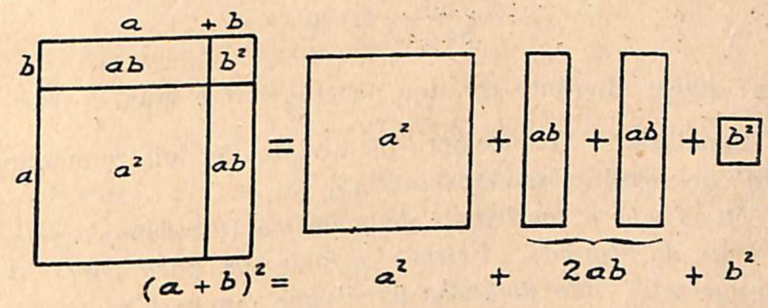
O quadrado do binômio:

$a + b$

conforme já vimos compõe-se de três parcelas:

1.ª) a^2 quadrado de a;
2.ª) $2ab$ dôbro de a por b;
3.ª) b^2 quadrado de b.

A formação do quadrado de um binômio admite uma explicação gráfica muito simples, como vemos pela figura que segue:



19 — Produto de uma soma por uma diferença.

Seja multiplicar a soma $a + b$ pela diferença $a - b$.

Efetuando o produto obtemos:

$$\begin{array}{r} a + b \quad\quad \\ a - b \quad\quad \\ \hline a^2 + ab \quad\quad \\ - ab - b^2 \\ \hline a^2 \quad\quad - b^2 \end{array}$$

$a^2 - b^2$

Conclusão:

O quadro da soma de duas quantidades pela diferença entre essas mesmas quantidades é igual do quadrado da 1.ª menos o quadrado da 2.ª.

Exemplo:

$$(4 + x)(4 - x) = 16 - x^2$$
$$(y + 7)(y - 7) = y^2 - 49$$

20 — Divisão de monômios.

Tomemos dois monômios quaisquer. Sejam por exemplo:

$8ax^4$ e $5a^2x^3$.

O produto desses monômios será:

$$8ax^4 \times 5a^2x^3 = 40a^3x^7$$

Como a divisão é a operação inversa da multiplicação, o produto $40a^3x^7$ dividido pelo fator $8ax^4$ deve dar um quociente igual ao outro fator $5a^2x^3$.

Temos:

$$\frac{40a^3x^7}{8ax} = 5a^2x^3$$

lê-se: $40a^3x^7$ dividido por (ou sôbre) $8ax^4$ é igual a $5ax^3$.

Conclusão: O quociente da divisão de dois monômios é obtido do seguinte modo:

Dividimos o coeficiente do primeiro (dividendo) pelo coeficiente do segundo (divisor), e tomamos, para parte literal do quociente, cada uma das letras que figuram no dividendo com um expoente igual à diferença entre os expoentes que a letra tiver no dividendo e no divisor.

Exemplo:

Seja dividir $15a^4b^5x^2$ por $3a^2bx$.
O quociente será $5a^2b^4x$.

21 — Observação.

Quando, na divisão de dois monômios, o dividendo e o divisor contiverem uma certa letra, com o mesmo expoente essa letra não aparecerá no quociente.

Exemplo:

Seja dividir $8a^5b^2$ por $4ab^2$.

O quociente será $2a^4$. O fator b não figura no quociente. por ter havido o cancelamento:

$$\frac{8a^5b^2}{4ab^2} = 2a^4.$$

22 — Exercício X.

Efetuar as seguintes divisões:

I) $12a^4b^3 \div 4ab$
II) $-60a^2b \div 2a^2$
III) $18a^4x \div (-a^3x)$

Resolução:

Os quocientes pedidos serão

I) $3a^3b^2$ II) $-30b$ III) $-18a$

23 — Condição para que um monômio seja divisível por outro monômio.

Para que um monômio (dividendo) seja divisível por outro monômio (divisor) é necessário que as letras que figuram no divisor figurem tambem no dividendo com expoente igual ou maior.

Assim $12a^5bx^3$ é divisivel por $3a^4bx^2$. As letras que figuram no monômio divisor ($3a^4bx^2$) figuram com expoente igual ou maior, no dividendo.

O monômio $8a^2x$ não será divisível (*) por $2a^3x$.

O monômio $15a^4b^2$ não será divisível por $5a^3bx$.

24 — Exercício XI.

Efetuar as seguintes divisões:

I) $6a^3p^2 \div 4ap$
II) $8b^5z \div -bz$
III) $7xy \div 5xy$.

(*) O quociente nesse caso não será algèbricamente inteiro. O estudo completo das expressões algébricas fracionárias e bem assim a teoria da divisão algébrica, ficam além do limite dêste livro.

Resolução:

Os quocientes serão:

I) $\frac{6}{4}\,a^2p$ II) $-\,8b^4$ III) $\frac{7}{5}$

25 — **M.d.c. de monômios literais.**

Consideremos os monômios:

a^4x^2y $a^3b^3x^2$ $a^5c^2x^4$

As letras a e x figuram em todos monômios: são, portanto, *comuns*. As letras y, b e c não são comuns.

O $m.d.c.$ dos três monômios é formado tomando-se as letras comuns afetas dos menores expoentes.

Logo o $m.d.c.$ dos monômios dados (*) será o monômio:

a^3x^2

Podemos escrever:

$$m.d.c \quad (a^4x^2y, \quad a^3b^3x^2, \quad a^5c^2x^4) = a^3x^2$$

Exemplo:

Achar o $m.d.c.$ dos monômios

a^5b a^4b^2 a^3b^3y

O $m.d.c.$ dêsses polinômios será a^3b.

26 — **Observação.**

Quando os monômios tiverem coeficientes inteiros podemos atribuir ao $m.d.c.$ um coeficiente numérico que será o $m.d.c.$ (aritmético) dos coeficientes numéricos dos monômios dados.

(*) Dois ou mais monômios são algèbricamente primos entre si quando não admitem divisor comum literal.

Assim, o $m.d.c.$ dos monômios

$8ax^3$ $12a^2x^2$ $20ax^4$

é ax^2

A êsse $m.d.c.$, se houver conveniência para o cálculo, podemos atribuir o coeficiente 4, pois 4 é o $m.d.c.$ dos coeficientes dos monômios dados.

Escrevemos, portanto:

$$m.d.c. \quad (8ax^3, \quad 12a^2x^2, \quad 20ax^4) = 4ax^2$$

Convém salientar que o coeficiente numérico, atribuido ao $m.d.c.$ de monômios algébricos, não tem, no cálculo, a menor importância.

27 — **Exercício XII.**

Calcular o m.d.c. *dos monômios:*

$\frac{4}{5}\,a^3xy$ $-\,\frac{7}{3}\,a^2x^3z$ $9a^4x$

Solução:

O $m.d.c.$ será a^2x.

28 — **Cálculo do m.m.c. de monômios.**

Sejam os monômios

a^2bx ab^3x^2 b^2x^2y

o $m.m.c.$ dêsses monômios será formado pelas letras comuns e não comuns afetadas dos maiores expoentes:

$$m.m.c. = a^2b^3x^2y.$$

29 — **Exercício XIII**

Calcular o m.m.c. *dos monômios:*

mx^2y ax^2y mx^3

Solução: amx^3y.

30 — Exercício XIV.

Calcular o m.d.c. *e o* m.m.c. *dos monômios:*

$$a^3b \qquad a^4bx \qquad a^2b^3x^2$$

Resolução:

$$m.d.c. = a^2b \qquad m.m.c. = a^4b^3x^2.$$

31 — Observação.

Quando os monômios tiverem coeficientes inteiros podemos atribuir ao *m.m.c.* dêsses monômios um coeficiente numérico que será o *m.m.c.* (aritmético) dos coeficientes numéricos dos monômios dados.

Exemplo:

O *m.m.c.* dos polinômios

$$8ax^3 \qquad 12a^2x^2 \qquad 20ax^4$$

é a^2x^4.

Se houver, porém, conveniência para o cálculo, podemos atribuir a êsse *m.m.c.* um coeficiente que será o *m.m.c.* dos coeficientes dos monômios dados:

$$8 \qquad 12 \qquad 20$$

Êsses números têm para *m.m.c.* 120.

Logo, podemos dizer que os monômios

$$8ax^3 \qquad 12a^2x^2 \qquad 20ax^4$$

têm para *m.m.c.* o monômio: $120a^2x^4$.

32 — Aplicação.

Simplificar a fração algébrica: $\dfrac{8a^3x^2}{12a^2x^3}$

Nessa fração ambos os termos são monômios; calculamos o *m.d.c.* desses monômios e dividimos ambos os termos da fração por êsses *m.d.c.*

Os monômios: $8a^3x^2$ e $12a^2x^3$ admitem para *m.d.c.* $4a^2x^2$.

Dividindo, pois, ambos os termos da fração por $4a^2x^2$, temos:

$$\frac{8a^3x^2}{12a^2x^3} = \frac{2a}{3x}$$

33 — Exercício XV.

Simplificar a fração: $\dfrac{6a^2y^4}{12ay^5}$

O *m.d.c.* dos termos da fração é $6ay^4$.

Dividimos ambos os têrmos da fração por êsse *m.d.c.*

Exercícios

78 — Efetuar as operações:

$$(7 + x)^2 + (3 - x)(3 + x) + (2x + 1)^2$$

e reduzir os têrmos semelhantes.

79 — Elevar ao quadrado os binômios:

$$3x + 1 \qquad 5x + 3 \qquad x - 8$$

e somar os resultados obtidos.

80 — Efetuar o produto:

$$(1 + 2x + 3x^2)(2 - 5x)$$

e ao resultado somar $15x^3 - 2$.

81 — Simplificar as frações:

$$\frac{4a^3m}{6am^4}, \qquad \frac{12a^5x}{8ax^3}$$

82 — Calcular o *m.d.c.* e o *m.m.c.* dos monômios:

$$8abx \qquad 5ab^2y \qquad 3a^2xy$$

Leitura

OS PRECURSORES DE DESCARTES (*)

(LEONEL FRANCA, S. J.)

Os estudos mais recentes de história das ciências nos revelam em plena idade média um grande precursor de Descartes, na pessoa de Nicolau de Oresme, natural da diocese de Bayeux. Estudou e ensinou na Universidade de Paris e em 1377 foi nomeado bispo de Lisieux, onde faleceu em 1382.

Nicolau é um espírito investigador e cheio de iniciativas em vários campos do saber. O seu tratado sôbre a Origem, natureza e mudança das moedas escrito em francês — nisto também precursor — coloca-o na altura do primeiro economista político do seu tempo. Contra a astrologia escreveu duas obras: Tratado contra a astrologia e Tratado contra as adivinhações.

É porém, no campo das ciências físicas e matemáticas que melhor se afirma a originalidade do seu talento. Três grandes descobertas, pelo menos, lhe deve a posteridade: 1.ª) a da teoria das coordenadas geométricas que, 250 anos antes de Descartes, lhe confere o título de inventor da Geometria Analítica; 2.ª) a lei da quéda dos corpos, até aquí atribuída a Galileu; 3.ª) a teoria heliocêntrica, contra a hipótese de Ptolomeu, por êle exposta, no dizer de Duhem, com uma clareza, precisão e segurança que não se encontra no próprio Copérnico.

Aliás, já vinha de mais longe a tradição científica que nas escolas medievais ligava ao estudo da Matemática uma importância capital. Roberto de Grosseteste (1175-1253), cancelário da Universidade de Oxford e bispo de Lincoln, escrevia

(*) Escrito especialmente para esta obra.

no seu tratado ótico Sôbre a Luz: "A utilidade do estudo das linhas, dos ângulos e das figuras é máxima. Sem êste conhecimento não é possível estudar a filosofia natural. O seu valor é absoluto e estende-se a todo o universo e a cada uma de suas partes... Os fenômenos naturais devem explicar-se por meio de linhas, ângulos e figuras". Não é possível sublinhar mais vincadamente a necessidade e importância da aplicação da Matemática às ciências da natureza.

Não menos explícito é o franciscano inglês Rogério Bacon (1210-1294) discípulo de Roberto, a quem melhor que ao seu homônimo, o chanceler Francisco Bacon, caberia o título de pioneiro da ciência experimental. A matemática, accentua Bacon, é indispensável para o estudo de qualquer ciência: "Omnis scientia requirit mathematicam". Pela certeza indubitável de suas conclusões, constitue o ideal da ciência.

Por onde se vê, como a história moderna, revolvendo manuscritos sepultados em arquivos seculares, nos vai mostrando, por uma continuidade ininterruta, as ligações que prendem o admirável progresso científico dos nossos dias aos primeiros esforços gloriosamente iniciados nas escolas e universidades da idade média. O obscurantismo medieval não passa hoje de uma frase vazia.

CAPÍTULO XXV

RAIZ QUADRADA

1 — Raiz quadrada.

Raiz quadrada de um número é um outro número que elevado ao quadrado reproduz o primeiro.

Assim a raiz quadrada de 49 é 7, porque 7 ao quadrado é igual a 49.

Em geral: Dizemos que b é a raiz quadrada de N, quando existir entre êsses números a relação $b^2 = N$.

2 — Como indicamos a raiz quadrada.

A raiz quadrada de um número é indicada pelo sinal: $\sqrt{\ }$ denominado *radical* (*). Assim escrevemos,

$$\sqrt{49} = 7$$

lê-se: raiz quadrada de 49 é igual a 7.

3 — Raiz cúbica de um número.

Raiz cúbica de um número é um outro número que elevado ao cubo reproduz o número dado.

Exemplo: A raiz cúbica de 512, é 8, porque 8 elevado ao cubo é igual a 512. Podemos escrever:

(*) Devemos a introdução dêsse sinal ao matemático alemão Miguel Stifel.

$$\sqrt[3]{512} = 8$$

lê-se: raiz cúbica de 512 é igual a 8.

4 — Raiz m de um número.

Consideremos o número 64, por exemplo. Esse número póde ser escrito sob a fórma de um produto-potência, isto é, de um produto de fatores iguais.

Temos:

$$64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

e também: $64 = 4 \times 4 \times 4$.

ou ainda: $64 = 8 \times 8$.

Essas decomposições nos mostram que os números 2, 4 e 8 são *raizes* de 64. O número 8 é a *raiz quadrada* de 64; o 4 é a *raiz cúbica* de 64 e o 2 será a *raiz sexta* de 64.

Chama-se, portanto, *raiz* de um número ao fator do produto-potência em que êsse número foi decomposto.

O número de fatores dêsse produto-potência é o *grau da raiz*.

Exemplo: O número 243 póde ser escrito sob a fórma de um produto-potência:

$$243 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

3 é a *raiz quinta* de 243. Temos:

$$\sqrt[5]{243} = 3.$$

O número que indíca o grau da raiz é o *índice* dessa raiz. Na raiz acima o índice é 5.

No caso de se tratar da raiz quadrada não escrevemos, por convenção, o índice 2.

A expressão

$$A = B^m$$

indica que B á a raiz de ordem m de A, ou raiz *emegésima* de A.

5 — Radiciação.

A determinação de uma certa raiz de um número é feita com auxílio de uma operação chamada *radiciação.*

Quando dizemos que a raiz *sexta* de 729 é 3, efetuamos uma radiciação. Elevando o número 3 a sexta potência vamos obter 729.

A radiciação é a operação inversa da potenciação.

A radiciação nem sempre é possivel.

Neste compêndio estudaremos o problema da radiciação apenas para o caso da raiz quadrada.

6 — Determinação da raiz quadrada:

Na determinação da raiz quadrada (*) de um número temos três casos a considerar:

I) *Raiz de um número inteiro;*
II) *Raiz de um número decimal;*
III) *Raiz de uma fração ordinária.*

7 — Observação.

Deste capítulo em diante, salvo indicação em contrário, em vez de *raiz quadrada* de m diremos apenas raiz de m.

8 — Raiz de um número inteiro menor do que 100.

Fácil será determinar a raiz de um número inteiro menor do que 100, desde que conheçamos os quadrados dos números inteiros desde 1 até 100.

(A) Números: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
(B) Quadrados: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.

Se o número dado estiver compreendido entre os *quadrados* (B) a sua raiz será o número correspondente da linha superior (A).

(*) Na linguagem matemática corrente empregamos abreviadamente a expressão *raiz* em logar de *raiz quadrada*. Assim dizemos, raiz de 2, raiz de 3, etc., em vez de raiz quadrada de 2, raiz quadrada de 3, etc.

Assim a raiz de 81 é 9; a raiz de 1 é 1.

Seja determinar a raiz de um número, 29, por exemplo, que não figura na relação (B).

Como o número 29 está compreendido entre 25 e 36, a sua raiz estará compreendida entre 5 e 6.

Com efeito:

$$5^2 = 25.$$
$$6^2 = 36.$$

Chamando x a raiz de 29, vemos que êsse número x é maior do que 5, porém é menor do que 6.

Dizemos, então, que 5 é a raiz de 29 por *diferença* ou por *falta* e que 6 é a raiz de 29 por *excesso* (*).

9 — Exemplo.

Determinar as raizes dos números 17 e 72.

A raiz de 17 é 4 (por falta) e a de 72 é 8 (por falta).

A raiz de 17 está compreendida entre 4 e 5 e a de 72 está compreendida entre 8 e 9.

10 — Raiz aproximada. Erro menor do que a unidade.

Consideremos o número 40, por exemplo. A raiz desse número está, como é fácil verificar, compreendida entre 6 e 7:

$$6^2 = 36$$
$$7^2 = 49.$$

A raiz de 40 é maior do que 6 e menor do que 7.

Ora, se a raiz de 40 é maior do que 6 podemos dizer que essa raiz é igual a 6 mais um certo número (menor do que a unidade) que designamos pela letra N:

$$\sqrt{40} = 6 + N$$

Se dissermos, portanto, que a raiz de 40 é 6 cometemos

(*) No ano 1200 o geômetra e poeta persa Omar Khayyam já se gabava de ter descoberto um método que permitia extrair a raiz de ordem m de um número qualquer (Boutroux, I v., pág. 59).

um erro igual a N, sendo êsse erro menor do que 1. Exprimimos êsse fato dizendo que a raiz de 40 é 6 com um erro menor do que 1, ou a *menos de uma unidade.*

O número 6 é um valor aproximado da raiz de 40.

11 — Exercício I.

Calcular, a menos de uma unidade, a raiz de 85.

A raiz de 85, a menos de uma unidade, por diferença, é 9 e, por excesso, é 10.

12 — Raiz de um número maior que 100.

Seja determinar a raiz de um número maior que 100. Consideremos o número

5361

por exemplo. Dividimos êsse número em classes de dois algarismos da direita para a esquerda, podendo a última classe à esquerda, ter 1 ou 2 algarismos:

53.61

53.61	7

Determinamos, a menos de uma unidade, a raiz da 1ª classe à esquerda, (53). Essa raiz será 7; escrevemos 7 na raiz.

53.61	7
49	
4	

Elevamos a raiz assim obtida (7) ao quadrado e o resultado (49) subtraimos da 1ª classe:

A' direita do resto escrevemos a classe seguinte (61) e debaixo da raiz (7) o seu dobro (14):

53.61	7
49	14
46.1	

Separamos por um ponto o último algarismo à direita do resto e dividimos a parte restante à esquerda (46) pelo dobro da raiz (14). 46 dividido por 14 dá para quociente aproximado 3. (Esse quociente deve ser menor do que 10).

63.61	73
49	143
46.1	

O quociente obtido, que é um algarismo da raiz, escrevemos na raiz, e à direita do dôbro.

53.51	73
49	143
46.1	3
429	
32	

O número assim formado (143) multiplicamos pelo quociente obtido (3), escrevendo o produto debaixo do resto e efetuamos a subtração.

	53.61	73
	49	143
R........	461	3
P........	429	

Se o produto (P) fosse maior que o resto (R) tomaríamos para algarismo da raiz o quociente diminuido de uma unidade, e procederíamos do mesmo modo.

A raiz de 5361 é 73, a menos de uma unidade.
32 é o *resto* encontrado na extração da raiz de 5361.

12 A — Exercício II.

Determinar a menos de uma unidade, a raiz de 784:

7.89	28
4	48
38.9	8
38 4	
5	

Nesse caso a divisão de 38 por 4 (dôbro da raiz) daria um quociente aproximado 9; verificamos, porém, que o produto de 49 por 9 era maior que o resto de 389. Logo o algarismo da raiz é 8.

13 — Exercício III.

Determinar a raiz do número 41209.

Resolução:

4.32.89	2
4	4
0	

Dividimos o número em classe de dois algarismos da direita para a esquerda 4.32.89. Determinemos a raiz da 1.ª classe à esquerda.

4.32.89	2
4	4
03.2	

À direita do resto escrevemos a classe seguinte (32) e do número assim formado separamos por um ponto o último (2) algarismo da direita.

4.32.89	20
4	40
0328.9	

Dividimos a parte restante à esquerda (3) pelo dôbro (4) da raiz achada. O algarismo da raiz é zero, porque o quociente de 3 por 4 é menor do que 1. Acrescentamos, pois, o algarismo 0 na raiz e à direita do resto (32) escrevemos a classe seguinte 89, procedendo do mesmo modo.

Dividindo 328 por 40 vamos obter o quociente aproximado 8 que será o outro algarismo da raiz.

4.32.89	208
4	408
0328.9	8
326 4	
2 5	

A raiz de 43289 é 208, a menos de uma unidade.

14 — Limite do resto na extração da raiz.

Na extração da raiz o resto não póde ser maior do que o dobro da raiz.

Exemplo. A raiz de 48 é 6, a menos de uma unidade, e o resto é 12.

Se a raiz de um número inteiro N fôr igual a x, a menos de uma unidade, o resto *não pode ser maior que* $2x$.

15 — Raiz de um número decimal.

Seja determinar a raiz do número 0,1849.

A raiz de 1849 é 43, logo

$$(0{,}43)^2 = 0{,}1849.$$

Podemos escrever:

$$\sqrt{0{,}1849} = 0{,}43$$

Conclusão:

Para obtermos a raiz de um número decimal extraimos a raiz do número como se fosse inteiro e separamos na raiz um número de decimais igual à metade do número de decimais do número dado.

Se o número tiver um número impar de decimais, acrescentamos a êsse número um zero, à direita, afim de tornar par o número de decimais.

16 — Observação.

Se o número decimal fôr periódico, consideramos, na extração da raiz, duas, quatro ou seis decimais, conforme as necessidades do cáluclo.

17 — Exercício IV.

Calcular a raiz de 0,713.

Temos:

0,7130	0,84
64	164
730	4
656	
74	

A raiz de 0,7130 será aproximadamente igual a 0,84.

18 — Raiz de um número a menos de 0,1 ou de 0,01.

Seja determinar a raiz de 0,54.

A raiz de 54 está compreendida entre 7 e 8; logo a raiz de 0,54 estará entre 0,7 e 0,8.

Sendo a raiz de 0,54 maior que 0,7 podemos escrever:

$$\sqrt{0{,}54} = 0{,}7 + N$$

sendo N menor que 0,1.

Quando dizemos, portanto, que a raiz de 0,54 é 0,7, cometemos um êrro *menor que* 0,1.

0,7 é a raiz de 0,54 *a menos de* 0,1.

Para se obter a raiz de um número decimal a menos de 0,1 é preciso que êsse número tenha *duas casas decimais*.

Se o número decimal tiver quatro casas decimais, vamos obter a sua raiz a menos de 0,01.

Exemplo: A raiz do número 0,0054 é 0,07, *a menos de* 0,01.

É evidente que se o número decimal tiver seis decimais a sua raiz poderá ser obtida a menos de 0,001.

Exemplo: A raiz de 0,000019 é 0,004, a menos de 0,001 (*).

19 — Exercício V.

Calcular, a menos de 0,01, a raiz de 8,5.

Resolução:

Acrescentamos três zeros à direita do número, de modo a fazer com que êle fique com quatro decimais. A raiz de 8,5000 será obtida com um êrro menor que 0,01.

20 — Exercício VI.

Calcular a raiz de 12 a menos de 0,001.

Resolução:

Acrescentamos ao número 12 seis zeros como decimais:

12,000000.

A raiz dêsse número será a raiz de 12, a menos de 0,001.

(*) Aos professores indicamos a leitura do excelente livro *Approximations numeriques*, do ilustre geômetra e filósofo Agliberto Xavier.

21 — Exercício VII.

Calcular a raiz de 3,1444... a menos de 0,1.

Resolução:

Para que a raiz seja obtida, a menos de 0,1 é suficiente considerar duas decimais do número:

$$\sqrt{3,14} = 1,7$$

1,7 será, a menos de 0,1, a raiz de 3,144... (*).

22 — Raiz quadrada algébrica.

Seja determinar a raiz quadrada de 16.

Queremos achar um número que elevado ao quadrado dê um resultado igual a 16.

Ora, como sabemos,

$$(+\ 4)^2 = 16$$

$$(-\ 4)^2 = 16$$

Logo, a raiz de 16 pode ser + 4 e — 4. Podemos escrever:

$$\sqrt{16} = \pm\ 4$$

A raiz de 16 tem, portanto, dois valores: + 4 e — 4.

Sendo N um número positivo qualquer, concluimos que N terá *duas raízes* quadradas.

As raízes de 1 são + 1 e — 1.

(*) Ao cálculo aproximado das raízes quadradas consagrou Arquimedes alguns dos seus mais belos trabalhos.

23 — Raiz quadrada de uma fração ordinária.

Seja a fração $\frac{3}{5}$ por exemplo, e elevêmo-la ao quadrado.

$$\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$$

De acôrdo com a definição da raiz quadrada podemos escrever:

$$\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

Sendo o numerador 3 a raiz de 9 e o denominador 5 a raiz de 25, vem:

$$\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}}$$

Em geral:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Conclusão: *A raiz quadrada de uma fração é igual à raiz quadrada do numerador sôbre a raiz quadrada do denominador.*

24 — Exercício VIII.

Calcular a raiz quadrada de $\frac{49}{81}$.

Resolução:

$$\sqrt{\frac{49}{81}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{81}} = \frac{7}{9}$$

25 — Determinação da raiz quadrada de uma fração ordinária.

Na determinação da raiz quadrada de uma fração ordinária três casos podemos encontrar:

I) *O numerador e o denominador são quadrados perfeitos.*

Nesse caso extraimos a raiz do numerador e em seguida a raiz do denominador, obtendo assim a raiz exata da fração dada. (Veja Exercício VII).

II) *Só o denominador é quadrado perfeito.* Nesse caso extraimos a raiz quadrada do denominador e determinamos, a menos de uma unidade, a raiz do numerador.

Obtemos dêsse modo uma raiz *aproximada* da fração dada. (Veja Exercício VIII).

III) *O denominador não é quadrado perfeito.*

Nesse caso multiplicamos ambos os têrmos da fração pelo próprio denominador (*) e transformamos a fração dada em outra eqüivalente tendo o denominador quadrado perfeito. (Veja Exercício IX).

26 — Exercício IX.

Determinar a raiz quadrada da fração $\frac{20}{81}$.

Resolução:

A fração dada só tem o denominador quadrado perfeito. Extraimos a raiz exata do denominador e a raiz a menos de uma unidade do numerador:

(*) Em certos casos, afim de evitar cálculos mais trabalhosos, multiplicamos ambos os têrmos de fração pelos fatores primos do denominador que tiverem expoentes ímpares.

$$\sqrt{\frac{20}{81}} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{81}} = \frac{4}{9}$$

$\frac{4}{9}$ será uma raiz aproximada da fração $\frac{20}{81}$....

27 — **Exercício X.**

Determinar a raiz quadrada da fração $\frac{4}{7}$.

Resolução:

Podemos recair no II caso (denominador quadrado) multiplicando ambos os têrmos da fração dada pelo denominador 7.

$$\sqrt{\frac{4}{7}} = \frac{\sqrt{4 \times 7}}{\sqrt{7 \times 7}} = \frac{\sqrt{28}}{\sqrt{49}} = \frac{5}{7}.$$

$\frac{5}{7}$ será uma raiz aproximada da fração $\frac{4}{7}$

28 — **Exercício XI.**

Determinar a raiz quadrada de $5\frac{1}{6}$.

Resolução:

Na extração da raiz quadrada de um número mixto devemos, prèviamente, reduzir o número mixto a uma fração imprópria.

$$\sqrt{5\frac{1}{6}} = \sqrt{\frac{31}{6}} = \sqrt{\frac{31 \times 6}{6 \times 6}} = \sqrt{\frac{186}{36}} - \frac{13}{6}$$

$\frac{13}{6}$ será uma raiz aproximada de $\frac{1}{6}$

ÍNDICE ALFABÉTICO DOS AUTORES

E

F

G

H

I

J

L

M

N

O

P

ÍNDICE ALFABÉTICO DAS MATÉRIAS

ÍNDICE

Págs.

8-12-
8
96
29
384
192
1304