O resultado será:

£ 3-16-6

21 — Subtração de complexos.

Seja efetuar, por exemplo, a seguinte subtração

£ 13-15-7 — £ 4-18-9

Escrevemos o minuendo e em baixo o subtraendo, de maneira que as unidades da mesma ordem se correspondam em coluna. Subtraimos separadamente as unidades da mesma ordem. Quando o número de unidades de uma ordem qualquer for, no minuendo, menor do que a correspondente no subtraendo, devemos juntar ao minuendo uma unidade da ordem imediatamente superior, que convertemos em unidades da mesma ordem daquela sobre a qual estamos operando; fazemos a subtração e, para que a diferença procurada não se altere, devemos aumentar de uma unidade correspondente o número da coluna seguinte, no subtraendo.

£	13-15-7
£	4-18-9
£	8-16-10

Assim, como não podemos tirar 9. d. de 7. d. somamos 1 s. ou 12 d. a 7 d.; do resultado obtido, 19 d., tirando 9 d. restam 10., que escrevemos na coluna dos dinheiros. Para que a diferença não se altere, somamos 1 s. a 18 s., no subtraendo; obtemos 19 s. Não sendo possivel tirar 19 s. de 15 s., somamos £ 1 ou 20 s. a 15 s.; obtemos 35 s., dos quais tiramos 19 s; o resto 16 s. escrevemos na coluna dos shillings. Para compensar êsse aumento de 20 shillings ou 1 libra, aumentamos de £ 1, o número de libras do subtraendo; obtemos £ 5, que subtraimos de £ 13; o resto £ 8 escrevemos na coluna correspondente.

A diferença procurada é £ 8-16-10.

22 — Exercício X.

Calcular a diferença entre um ângulo reto e um ângulo de 32° 41' 26".

Resolução:

Tendo o ângulo reto 90° a diferença pedida será:

90° — 32° 41' 26"

89°	59'	60"
32°	41'	26"
57°	18'	34"

Na prática em vez de 90° escrevemos 89° 59' 60", e efetuamos a subtração.

O ângulo de 32° 41' 26" somado com o ângulo obtido de 57° 18' 34" dá uma soma igual a 90°, isto é, um ângulo reto. (*)

23 — Exercício XI.

Efetuar a seguinte subtração

180° — 76° 42' 26"

Resolução:

179°	59'	60"
76°	42'	26"
103°	17'	34"

Na prática em vez de 180° escrevemos 179° 59' 60", e efetuamos a subtração como indicamos ao lado.

A diferença pedida será igual a

103° 17' 34"

24 — Multiiplicação de um número complexo por um número abstrato.

Uma certa máquina para produzir determinado trabalho gastou 1d6h23m. Em que tempo fará essa máquina um trabalho 6 vezes maior.

(*) Dois ângulos *A* e *B* são *complementares* quando somados dão um ângulo reto.

Resolução :

A solução da questão proposta é obtida multiplicando-se $1^d 6^h 23^m$ por 6.

Multiplicamos separadamente 6 por cada ordem de unidade do multiplicando. Quando for possivel, de cada produto parcial extraimos as unidades de ordem superior para as juntar ao produto seguinte.

$$\begin{array}{rrr} 1^d & 6^h & 23^m \\ & & 6 \\ \hline 7^d & 14^h & 18^m \end{array}$$

Assim, multiplicando 23^m por 6, encontramos 138^m, ou $2^h\ 18^m$; escrevemos 18^m e reservamos 2^h para somar ao produto seguinte.

Multiplicamos 6^h por 6 e ao produto obtido, 36^h, somamos as 2^h de reserva; obtemos um total de 38^h ou $1^d\ 14^h$; escrevemos 14^h reservamos 1^d para somar ao produto seguinte:

Multiplicamos 1^d por 6; ao produto obtido, 6^d, somamos a reserva de 1^d, proveniente do produto precedente; encontramos 7^d, que escrevemos.

O produto será $7^d\ 14^h\ 18^m$, que exprime a solução da questão.

25 — Exercício XII.

Na última concorrência pública para aquisição de 75000 toneladas de carvão para a Central houve ofertas de carvão inglês a 25 s. e 5 d. e a 15 s. e 2 d.; e do alemão a 24 s. e 11 d., por tonelada. Calcular o preço de 8 t. de carvão alemão.

Resolução :

O preço pedido será dado pelo produto.

24s 11d × 8

$$\begin{array}{rr} 24s & 11d \\ & 8 \\ \hline 192s & 88d \\ 199s & 4d \end{array}$$

Multiplicando-se o número de shillings e dinheiros por 8 obtemos 192s e 88d ou 199s 4d.

Em 199s ha £ 9-19-4s.

O preço pedido será £ 9-19-4.

26 — Multiplicação de um número complexo por outro número complexo.

Uma oficina trabalhando dia e noite dispende, em media, £ 8-12-6, por hora. Qual é a despesa dessa oficina em 2 dias, 5 horas e 30 minutos.

Resolução :

A solução do problema será obtida multiplicando-se o número complexo £ 4-10-0 pelo número de horas eqüivalente a $2^d\ 6^h\ 30^m$.

Reduzimos o 1.º fator a um número incomplexo expresso na unidade principal (libra) :

$$£\ 8\text{-}12\text{-}6 = £\ \frac{9}{2} \qquad \text{(Veja Ex.: II)}$$

Reduzimos o 2.º fator a uma fração ordinária da unidade principal (hora).

$$2^d\ 6^h\ 30^m = \frac{109}{2}\ h$$

Efetuando o produto das duas frações, temos:

$$£\ \frac{9}{2} \times \frac{109}{2} = £\ \frac{981}{4}$$

O produto será dado em libras. (*)

Reduzindo a fração obtida a complexo achamos:

£ 245-5-0

Conclusão :

Para multiplicarmos dois números complexos de espécies diferentes devemos reduzir cada complexo à fração da unidade principal correspondente e multiplicar as frações assim obtidas. O produto é um número concreto que será definido segundo a natureza do problema.

27 — Exercício XIII.

A máquina P de um grande jornal gasta em energia, óleo, verba de conservação, pessoal operario, etc., a quantia. de £ 1-8-9 por hora. Quanto gastará essa máquina em funcionamento durante $5^h\ 20^m$?

Resolução :

Reduzindo o número complexo £ 1-8-9 a dinheiros (pence) achamos:

345d

Reduzindo 5^h20^m a uma fração da hora, temos:

$$5^h20^m = \frac{16}{3} \text{ hora}$$

(*) Nesse exemplo achamos mais simples admitir que o 1.º fator é concreto (libras) e o segundo é abstrato. Na verdade, porém, o 1.º fator é dado em *libras por hora* e o segundo é dado em horas: $\frac{1}{h} \times h = 1$. O produto será expresso em libras. O professor explicará aos alunos a significação da operação como achar mais conveniente. Acentuamos, todavia, que o estudo da homogeneidade de uma expressão está fora dos limites desta obra.

Multiplicando 345 d por $\frac{16}{3}$ vem: $345 \text{ d} \times \frac{16}{3} = 1840$.

Escrevendo o número 1840 d sob a forma de um número complexo: £ 7 — 13 — 4.

E' essa a solução da questão proposta

28 — Divisão de um número complexo por um número abstrato.

Um ângulo mede 29° 32' 48". Determinar a terça parte desse ângulo.

Resolução :

Na determinação do quociente de um número complexo por um número abstrato inteiro procedemos do seguinte modo:

Dividimos separadamente cada ordem de unidade do dividendo (a começar pelas unidades mais elevadas) pelo divisor.

Efetuamos a divisão de 29° por 3.

$$\begin{array}{lll|l} 29° & 31' & 48" & 3 \\ \hline 2 & & & 9° \end{array}$$

Encontramos um quociente 9° e um resto de 2°. Convertemos êsse resto (2°) em minutos e juntamos o resultado (120) ao número de minutos já existentes no dividendo:

$$\begin{array}{lll|l} 29° & 31' & 48" & 3 \\ \hline 2 & 120 & & 9° \\ & \overline{151} & & \end{array}$$

Dividimos a soma obtida (151) pelo divisor 3; encontramos um quociente 50 e um resto de 1'.

(*) Nesse produto o 1.º fator é dado em d/h e o segundo em h.

```
29°   31'   48"  | 3
 2   120         |--------
     151         | 9°  50'
     ---
       1
```

O resto 1' que encontramos é convertido em segundos. O resultado dessa conversão (60") é adicionado ao número (48) de segundos do número:

```
29°   31'   48"  | 3
 2   120    60   |--------
     ---   ---   | 9°  50'
     151   108
       1
```

Dividimos a soma obtida (108) pelo divisor 3; encontramos um quociente 36 que será o número de segundos do quociente:

```
29°   31'   48"  | 3
 2   120    60   |-------------
     ---   ---   | 9°  50'  36"
     151   108
             0
```

O resultado da questão proposta será:

9° 50' 36"

29 — Exercício XV.

Sabendo-se que 8 peças de seda custaram £ 12-19-4 calcular o preço de custo de cada peça.

Resolução:

Vamos dividir o número complexo £ 12-19-4 por 8. A operação será efetuada do seguinte modo:

```
£ 12 — 19 — 4   | 8
   4   80   36  |-------------
       --   --  | 1 — 12 — 5
       99   40
        3
```


Dividimos 12 libras por 8; obtemos o quociente *1* e o resto 4 (libras).

Êsse resto *4* é transformado em shillings; multiplicando 4 por 20 e o resultado 80 somamos aos 19 shillings do número dado.

O resultado 99 shillings é didivido por 8; obtemos o quociente 12 e o resto 3. Reduzimos êsse resto a dinheiro (multiplicando por 12) e o produto 36 juntamos do número de dinheiro do número. Encontramos 40 d que dividido por 8 dá um quociente igual a 5.

O resultado da questão proposta será £ 1-12-5.

30 — Divisão de complexos.

A iluminação de um grande parque custou durante 5 horas e 20 minutos a quantia de £ 1-0-10. Calcular o custo dessa iluminação por hora.

Resolução:

A solução do problema proposto será dada pelo quociente da divisão de £ 1-0-10 por $8^h\ 20^m$.

Reduzindo £ 1-0-10 a dinheiros obtemos:

$$£\ 1\text{-}5\text{-}10 = 250\ d$$

Reduzindo $8^h\ 20^m$ a uma fração da hora achamos:

$$8^h\ 20^m = \frac{25}{3}\ \text{hora}$$

Dividimos $250\,d$ por $\frac{25}{8}$ h.

O quociente será:

$$250 \div \frac{25}{8} = 250 \times \frac{8}{25} = 80\ (*).$$

Sendo o resultado *80* d reduzindo a shillings, temos:

$$80\ d = £\ 0\text{-}6\text{-}8$$

(*) Êsse quociente é dado em *dinheiro* por *hora*, isto é, 80 d|h.

A iluminação do parque custou £ 0-6-8 por hora.

Conclusão:

Para dividirmos dois números complexos de espécies diferentes devemos reduzir cada complexo à fração da unidade principal, ou, em certos casos, a de ordem mais elevada, de cada número e dividirmos as frações assim obtidas. O quociente é um número concreto que será definido pela natureza do problema.

31 — Exercício XVI.

Para percorrer um arco de cincumferência de 36° 18' 12" um móvel gasta $2^h\ 40^m$. Que arco percorrerá êsse móvel em 1 hora ?

Resolução:

Vamos dividir 36° 18' 12" por $2^h\ 40^m$.

Reduzindo $2^h\ 40^m$ a uma fração da hora achamos:

$$2^h\ 40^m = \frac{8}{3} \text{ hora}$$

Temos:

$$(36^\circ\ 18'\ 12'') \div \frac{8}{3} = (36^\circ\ 18'\ 10'') \times \frac{3}{8}$$

Multipliquemos o número complexo 36° 18' 20" por 3, e dividamos o produto por 8.

36°	18'	12"	
		3	
108	54	36"	8
28	240	360	14°36'49",5
4	294	396	
	54	76	
	6	40	

O quociente pedido será 14° 36' 49",5.

Exercícios

51 — Um negociante comprou um objecto por £ $13 \frac{3}{4}$ e vendeu-o por £ 13-1-11. Quanto ganhou nessa transação?

52 — Uma pessoa comprou três discos de vitróla por £ 1-5-0. Por quanto devia vender cada disco para ganhar no negócio um quinto do preço de custo?

Leitura

UM PROBLEMA CURIOSO

Haverá numa grande capital, como o Rio de Janeiro, duas pessoas que tenham na cabeça precisamente o mesmo número de fios de cabelos ?

Eis aí, meu amigo, uma pergunta que poderá surpreender-vos, e para a qual um raciocínio rápido, feito de momento, parece insinuar uma resposta muito simples: Não !

Como admitir — direis — que haja duas pessoas nas condições acima impostas ? E se elas existirem realmente como seria possível provar, com os recursos da Matemática, a maravilhosa coincidência dos números?

A pergunta que formulamos traduz um problema que por ser simples demais chega a ser curioso.

Um matemático inglês, Erasmus Wilson, movido por um espírito de excentricidade muito próprio dos anglo-saxões, fez interessantes estudos sôbre o número de fios de cabelos que temos na cabeça. Depois de cuidadosas investigações chegou o Sr. Wilson à conclusão de que ninguem poderia ter na cabeça mais de 130000 fios de cabelo.

Apliquemos, pois, aos cariocas o resultado de tão singular estatística.

Vamos supor que separamos um grupo de 130000 pessoas; admitamos ainda que nesse grupo as pessoas tem todas *números diferentes de fios de cabelos na cabeça, isto é, que a primeira pessoa tenha 1 fio, a segunda 2, a terceira 3 e assim por deante. A última terá forçosamente 130000 fios.*

Se juntarmos ao grupo considerado mais uma pessoa o grupo passará a ter 130001 pessoas. Essa pessoa, que foi incluída no grupo, não podendo ter 130001 fios de cabelos na cabeça, terá forçosamente um dos números já contados. Inferimos dêsse raciocínio que em cada grupo de 130001 pessoas há, pelo menos, duas com o mesmo número de fios de cabelos na cabeça.

Ora, sendo a população da Capital Federal de 1850000 pessoas podemos formar 14 grupos de 130001 pessoas sobrando ainda 29986. Nesse resto poderíamos incluir, para dar mais precisão aos nossos cálculos, as pessoas completamente calvas, ou melhor, sem um único fio de cabelo na cabeça!

Os 14 grupos formados — como acima indicamos — demonstram que no Rio existem, no mínimo, 15 pessoas que teem na cabeça o mesmo número de fios de cabelo.

Como vimos a solução do problema foi facilmente obtida; a sua verificação, porém, está fora do domínio das coisas possíveis.

CAPÍTULO XVI

SISTEMA MÉTRICO DECIMAL

1 — Noções preliminares.

Para que possamos avaliar as diferentes grandezas que se nos deparam na vida prática, como os comprimentos, os pêsos, os volumes, etc., adotamos certas unidades ou *medidas*, cujo conjunto constituem um *sistema de pêsos e medidas*.

Antigamente, isto é, até fins do Século XVIII, cada país adotava um sistema metrológico e no mesmo país as unidades utilizadas pelo público variavam de uma cidade para a outra. Eram usadas milhares de *medidas* mal determinadas e incertas, e entre essas medidas não havia relações fixas. A *toeza* por exemplo, apresentava dezenas de valores diferentes; o mesmo acontecia com o *pé*, com a *geira*, etc. (*) — "Em França — escrevia Arthur Young — a confusão infinita das medidas excede a tudo quanto se possa imaginar" (**).

Não só o comércio, em todas as suas modalidades, como também a Indústria e especialmente a Ciência, encontravam na diversidade das medidas uma barreira invencível para o progresso. Os próprios governos, na regulamentação e cobrança dos impostos, sentiam-se embaraçados. Multiplicavam-se as questões judiciárias e os litígios tornavam-se intermináveis.

(*) No Brasil as unidades lineares antigas (hoje proíbidas por lei) tinham os seguintes nomes: linha, polegada, palmo, pé, braça, covado, vara, milha, legua, etc., todas ligadas por meio de relações mal definidas.

(**) ...*exceds all comprehension*" — Cfr. Adrien Favre "Les origines du Systéme Métrique" — 1931, pag. 4.

Era indispensável que os paises civilizados puzessem fim a essa "confusão escandalosa" (*) — verdadeira calamidade pública — adotando um sistema racional de medidas que fosse universal.

Surgiu assim, por iniciativa da França, o *sistema métrico decimal.*

2 — Origem do sistema métrico.

O sistema métrico foi criado depois de muitos anos de ingentes trabalhos, por uma comissão de sábios franceses, escolhidos pela Academia de Ciência de Paris, no último quarto do século XVIII.

Ficou, desde logo, deliberado que todas as unidades do novo sistema seriam derivadas da unidade de comprimento — que seria, por isso, a *base* do sistema.

Como escolher, porém, essa unidade básica do sistema?

A possibilidade de ser adotada uma das muitas unidades usadas pelos diferentes paises da Europa foi preliminarmente afastada.

Era preciso que a unidade básica a ser escolhida fosse inteiramente nova. (**) Ainda mais: a unidade devia ter a sua conservação assegurada, pois só assim apresentaría o carater de perpetuidade.

Um acertado critério presidiu, desde o início, a orientação dos sábios franceses: a unidade básica do sistema universal devia ser tirada da natureza.

3 — A base do sistema métrico.

Quasi ao terminar o século XVII o astrônomo holandês

(*) Expressão com que Delambre tentou definir a diversidade de medidas em França.

(**) "Il faut choisir une unité qui, pour le moment, n'est à personne" — A. Favre. Ob. cit., pag. 74.

Huyghens publicou os resultados dos seus estudos sôbre pêndulo.

Acreditava-se, realmente, a princípio, em virtude das conclusões a que Huyghens havia chegado, que o pêndulo *que batia um segundo* (*) tinha um comprimento constante em qualquer ponto da Terra.

Alguns sábios acharam que êsse comprimento do pêndulo devia ser tomado como *unidade fundamental.* O abade Picard, famoso astrônomo francês, chegou a propor a denominação de *pé-universal* para a terça parte da *constante pendular.*

Experiências feitas posteriormente vieram, entretanto, provar que o comprimento do *pêndulo do segundo* dependia da latitude do lugar.

Retomando, pois, uma idéa, que parece aliás ser muito antiga (**), resolveu a comissão que a unidade escolhida fosse uma certa e determinada fração de um comprimento tomado sôbre a Terra. E, admitindo-se que todos os meridianos são iguais, uma fração do meridiano terrestre serviria perfeitamente de base para o nosso sistema. Êsse critério, acertado e inteligente, assegurava ao sistema a *fixidez* e a *universidade.*

Que fração do meridiano convinha servir de unidade ?

E' claro que essa unidade básica não devia ser muito grande, e a prática indicava que não fosse também muito pequena.

Decidiram os sábios que a unidade principal do sistema fosse precisamente igual à *decima milionésima parte do quadrante terrestre.*

(*) Sôbre o famoso problema histórico do *pêndulo do segundo* limitamo-nos aqui a dar apenas uma indicação. E' evidente que o Professor poderá, se julgar conveniente, fornecer a classe alguns esclarecimentos práticos e elementares sôbre o pêndulo do segundo.

(**) Segundo Paucton e Bailly as unidades usadas na antiguidade eram tiradas das dimensões da Terra. Cfr. A. Favre, ob. cit., pag. 80.

4 — Determinação do metro.


Méchain

Uma vez escolhida a unidade do sistema era preciso determiná-la. Para tanto era mistér que se medisse o comprimento do meridiano terrestre. Dessa importante tarefa foram encarregados dois engenheiros, que se tornaram notáveis: Méchain e Delambre.

Uma vez medido o arco do meridiano entre Dunkerque e Barcelona, não foi difícil calcular o comprimento do quadrante terrestre. Êsse resultado dividido por 10000000 deu o comprimento que iria servir com a denominação de *metro*, de unidade fundamental do novo sistema.


Delambre

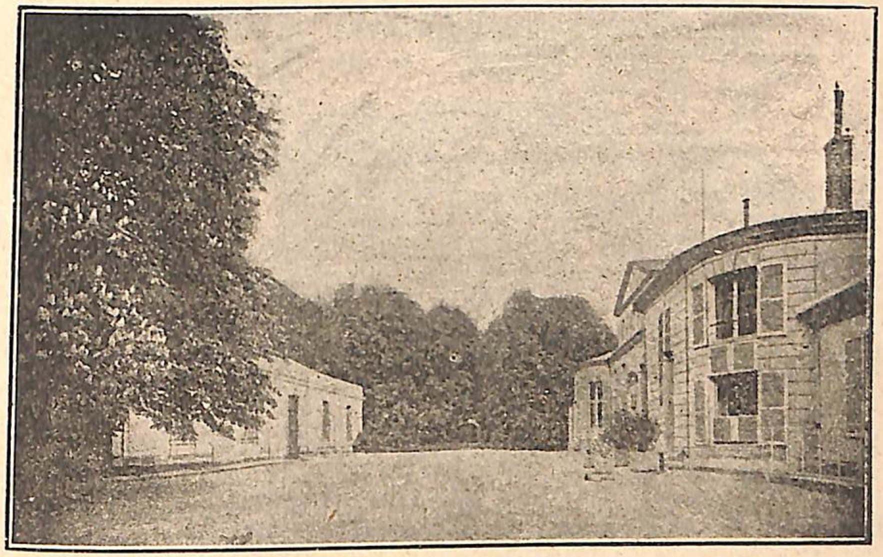
Uma barra primástica de platina dêsse comprimento foi construida e depositada, em 1799, nos Archivos Nacionais, na temperatura do pêlo fundente (0°c), para servir de *padrão do metro legal.*

5 — O metro legal.

Os astrônomos Biot e Arago refizeram, com o maior rigor, todos os cálculos da medida do meridiano terrestre e acharam que o metro, calculado por Delambre e Méchain, apresentava uma pequena diferença, isto é, a décima milionésima

parte do quadrante terrestre era um pouco maior que o metro. (*)

O comprimento do *metro legal,* no entanto, não foi modificado, embora se tenha construido outro padrão para o metro legal. Mantido o comprimento do primitivo padrão o metro passou a ser uma medida convencional.


Pavilhão de Breteuil e Observátorio

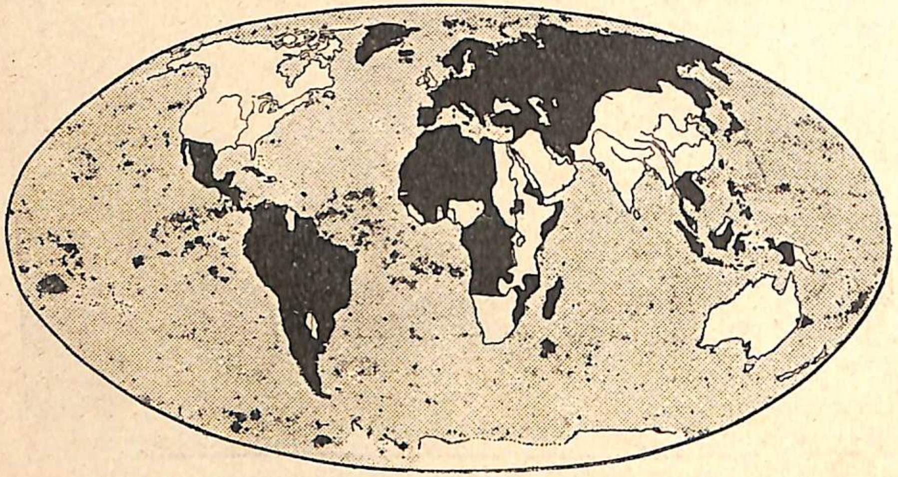
Afim de assegurar a perfeita concordância das unidades principais em todos os paises que adotaram o sistema métrico, foi creado, em 1875, um Bureau Internacional de Pêsos e Medidas, instalado no Pavilhão de Breteuil, em Sèvres, com a missão de construir e conservar os padrões definitivos. Foram construidos dois padrões — o *metro padrão* e o *quilograma padrão* — que, depois de sancionados pela Conferência Geral de Pêsos e Medidas, realizada em Paris, em 1889, foram guardados com o máximo cuidado nos subterraneos do Pavilhão de Breteuil.

(*) Essa diferença não chegou a dois milésimos do milímetro.

6 — Observação.

Muitas nações como o Brasil, Argentina, Suecia, etc., tornaram, por lei, obrigatório o uso do sistema métrico decimal. (*)

A Inglaterra não adotou o sistema métrico por uma questão puramente política. A França havia auxiliado Washigton e os patriotas americanos nas guerras de independência, e por isso o govêrno inglês atribuia à França, em parte, a perda da sua riquissima colônia da América.



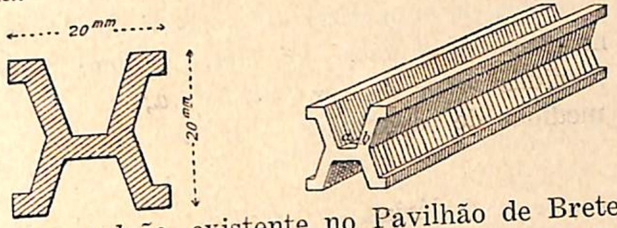
Paizes que adotaram obrigatóriamente o Sistema Métrico

7 — Padrões.

O Bureau Internacional de Pêsos e Medidas, encarregado de construir os padrões internacionais procurou reproduzir, o

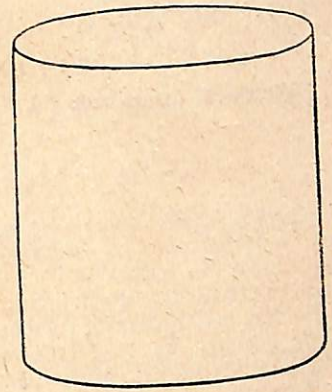
(*) Eis a relação dos países que adotaram obrigatoriamente o sistema métrico: Afghanistan, Alemanha, Argentina, Áustria, Bélgica, Bólivia, Brasil, Bulgária, Chile, Colómbia, Congo Belga, Costa Rica, Cuba, Dinamarca, Equador, Espanha, Estônia, Finlandia, França, Grécia, Guatemala, Haiti, Holanda, Honduras, Hungria, Islandia, Itália, Japão, Letônia, Luxemburgo, Marrocos, México, Nicaragua, Noruega, Panamá, Perú, Pérsia, Portugal, Polônia, Rumânia, Salvador, Sião, Suécia, Suiça, Tchéco-slováquia, Tunisia, Turquia, U. R. S. S., Uruguai, Venezuela e Iugoslávia.

quanto possível, os padrões primitivos existentes nos Arquivos Nacionais. As precauções tomadas na construção dêsses padrões permitem assegurar o comprimento do *metro-padrão* definitivo com uma exatidão de 0,00002 de milimetro e a massa do *kilograma-padrão* definitivo com uma exatidão de 0,01 de miligrama.



O *metro-padrão*, existente no Pavilhão de Breteuil é de platino iridiada (*) que é uma liga inalterável, e tem a fórma indicada na figura acima. A peça tem um comprimento total de 102 centímetros e 2 centímetros de altura. O comprimento do metro é indicado por duas ranhuras, uma proxima de cada extremidade.

O *quilograma-padrão* tem a forma de um cilindro com os bordos ligeiramente arredondados, como mostra a figura ao lado, em tamanho natural.



Dos padrões construídos pelo Bureau Internacional de Pesos e Medidas foram feitas 30 cópias do metro e 40 do quilograma e distribuídos, por sorte, entre os países que haviam adotádo o sistema métrico. O Brasil possue um *metro-padrão* em platina iridiada, que se acha guardado num cofre na Casa da Moeda no Rio de Janeiro. O *metro-padrão* brasileiro pesa $2^{kg}780$.

(*) A comparação dos padrões, (reguas e traços) entre si é feita por meio de instrumentos especiais denominados *comparadores*.

Os padrões nacionais ou padrões primários servem a aferição dos

8 — Unidades principais.

A cada espécie de grandêsa corresponde uma unidade. As unidades principais são:

para as medidas de comprimento — o *metro;*
para as medidas de superfície — o *metro quadrado;*
para as medidas de volumes — o *metro cúbico;*
para as medidas de peso — o *quilograma;*
para as medidas de capacidade — o *litro.*

9 — Unidades secundárias.

As unidades secundárias são os *multiplos* e os *sub-multiplos* da unidade principal. Êles são 10, 100, 1000, etc. vezes maiores ou menores do que a unidade principal.

Para designar os *multiplos* da unidade principal antepõem-se à unidade principal os prefixos gregos *deca, hecto, quilo* e *míria* que significam, respectivamente: dez, cem, mil, e dez mil.

Para indicar os *sub-multiplos* da unidade principal faz-se proceder ao nome da unidade principal dos prefixos latinos:

---

padrões secundários ou padrões industriais que podem ser tambem reguas
a traços, como os padrões primários, ou reguas de topo, de uso muito
comodo na industria. Os padrões secundários são feitos de uma liga
de ferro-nickel, denominada *invar*. Êsses padrões secundários são distri-
buidos, pelos diversos laboratórios do serviço metrologico de cada país.
Apezar do Brasil ter sido um dos primeiros paises que aderiram
a Convenção do Metro não tem nenhum serviço organisado de Pesos e
Medidas, não possuindo padrão algum oficial.
A fixação do metro padrão pode ser feita aproveitando-se os feno-
menos óticos, como foi proposta separadamente por Maxwell e por Fi-
zeau. Em 1893 Michelson comparou o metro ao comprimento de onda
da raia vermelha do cadmium, e achou para esta um valor de
0.00064384696 mm.
O professor Guillaume, atual diretor do Bureau Internacional de
Pesos e Medidas estima que a relação entre o metro e o comprimento
da onda da raia vermelha do espetro do cadmium pode ser obtida com
um erro relativo de 0,0000001. (*Notas do curso* do Prof. Dulcidio Pereira,
da Escola Polítéchnica).

deci, centi, e *mili,* que significam, respectivamente: a décima, a centésima e a milésima parte.

As operações a se efetuar com os números que medem as grandêsas são operações sobre inteiros e decimais. O sístema métrico é, pois, *decimal.*

10 — Medidas efetivas.

As medidas efetivas são as que no comércio e na industria servem para medir as mercadorias, a determinar os comprimentos ou os volumes. As suas formas são reguladas por lei e a sua exatidão sujeita a verificação periódica.

11 — Medidas de comprimento. Unidade principal.

A unidade princinpal das medidas de comprimento e o *metro.*

O metro é a distância, à temperatura de 0°c, entre duas ranhuras de uma barra de platina iridiada, existente no Pavilhão de Breteuil em Sévres, França (*)

O comprimento do metro é aproximadamente a décima milionésima parte da quarta parte do meridiano terrestre. A decima milionésima parte de um quarto do meridiano terrestre pouco excede de 1^{m},0002.

Designamos abreviadamente o metro pela letra *m.*

(*) Eis a definição mais rigorosa de metro:

O metro é o comprimento, na temperatura do gelo fundente, compre-
endido entre os eixos de dois traços existentes na régua de platina
iridiada, sancionada como metro prototipo internacional pela Conferencia
Internacional de Pesos e Medidas, reunida em Paris em 1889.
Este prototipo, depositado no Bureau Internacional de Pesos e Me-
didas em 1889 é uma regua tendo uma secção reta em forma de X,
indicada por Henri Tresca, feita de uma liga de platina com 10% de
iridium criada por Saite Claire Devilla.
O metro padrão pesa 3^{Kg},300.

12 — Unidades secundárias.

1.º — Para os multiplos do metro temos:

o *decâmetro*, que vale 10 metros;
o *hêtometro*, que vale 100 metros;
o *quilometro*, que vale 1000 metros;

O décametro é designado abreviadamente por *Dm*, o hêctometro, por *Hm*, e o quilometro por *Km*.

2. — Para os sub-multiplos, temos:

o *decímetro*, que vale 0,1 do metro;
o *centímetro*, que vale 0,01 do metro;
o *milímetro*, que vale 0,001 do metro.

Designa-se abreviadamente o decímetro por *dm*, o centímetro por *cm* e o milímetro por *mm*.

13 — O megâmetro.

Recentemente foi adotádo o *megâmetro*, que vale 1000000 de metros.

14 — O micron.

Para medir comprimentos extremamente pequenos emprega-se uma unidade chamada *micron*. O micron vale 0,001 milímetro e é representada pela letra grega μ (mu). O plural de micron é *micra*. A abreviatura do micron é μm.

Uma unidade ainda menor é empregada na *spectroscopia*, com o nome de *micromilímetro*. Essa unidade vale a milésima parte do micron e é representada por $m\mu m$. (*).

(*) O *angstrom*, unidade mais recente, usada em Física, vale 1 décimo do micromilímetro.

15 — Medidas maritimas.

As unidades mais usadas são a *milha marítima* e o *nó*.

A *milha* é o *comprimento de um arco de 1 minuto do meridiano terrestre*.

Um meridiano terrestre medindo 40000000 de metros, um arco de 1 gráu mede

$$\frac{40000000}{360} \text{ metros}$$

e um arco de 1 minuto

$$\frac{40000000}{360 \times 60} = 1851^{m},85$$

Pode-se considerar a milha como tendo 1852^{m}.

O *nó* é a 120^{a} parte da milha; vale

$$\frac{1851^{m},85}{120} = 15^{m},43.$$

O nó é a unidade adotáda para indicar a velocidade de navios. Quando dizemos que um navio desenvolve 14 nós, por exemplo, significa que o navio percorre 14 nós em 30 segundos.

A *milha* é admitida no sistema métrico a título transitório. (*)

16 — Exercício I.

Quantos quilometros por hora percorre um torpedeiro que desenvolve 28 nós?

Resolução:

O torpedeiro percorre 28 milhas em 1 hora; percorrerá

$$1852^{m} \times 28 = 51856^{m}$$

ou $51^{km},856$ por hora.

(*) J. Frécaut — "Systéme M. T. S." — 1922, pag. 9.

17 — Exercício II.

Exprimir em milhas marítimas uma distância de 120 Km

Resolução:

cada milha marítima vale 1852^m.
Em 120^{km} haverá um número de milhas igual ao quociente

$$\frac{120000}{1852}$$

Efetuando essa divisão, vem:

$$\frac{120000}{1252} = 65 \text{ (aprox.)}$$

Resposta: 120^{km} equivalem a 65 milhas marítimas aproximadamente.

18 — Observação.

A transformação de quilômetros em milhas pode ser feita graças a um processo prático e muito simples.

Tomamos a metade do número dado em quilômetro e calculamos a décima parte dessa metade. Somamos em seguida, a metade com a décima parte que foi cálculada. O resultado será aproximadamente, o valor em milhas da distância dada.

Seja, por exemplo, exprimir em milhas a distância de 120^{km}.

A metade será	60
Um décimo da metade	6
(Soma)	66

O resultado será 66 milhas aproximadamente.

19 — Exercício III.

Resolução :

Exprimir em quilômetros a distância de 200 milhas marítimas.

A transformação de milhas em quilômetro pode ser feita facilmente, graças a um processo prático.

Dobro da distância dada	400
$^1/_{10}$ do dobro	40
(Diferença)	360

A distância dada equivale a 360^{km} aproximadamente.

20 — Os números que exprimem comprimentos.

As unidades de comprimento, sendo de dez em dez vêses maiores ou menores, são escritas e lidas cómo número decimais.

Para indicarmos a unidade escolhida escrevemos o sinal pela qual é designada abreviadamente ao alto e à direita do último algarismo da parte inteira do número.

Assim, doze decámetros e cincoenta e três decímetros, escrevemos: $12^{Dm},53$.

Fazemos a leitura de um número que exprime um comprimento enunciando a parte inteira seguida do nome da unidade e depois a parte decimal acompanhada do nome da unidade que representa o último algarismo décimal.

Assim, $238^{km},047$, lemos: duzentos e trinta e oito quilometros e quarenta e sete metros.

21 — Observação.

O décametro, o hétometro e o míriametro não são usados na prática.

Reproduzimos para servir de exemplo, um telegrama publicado pelos jornais:

BRUXÉLAS, 3 (H.) *A corrida de bicicleta Paris-Bruxélas foi ganha pelo ciclista belga Vervaecke em 11 horas e 35 minutos com a média de 32 quilometros e 400 metros á hora.*

Vemos aí indicada uma distância em quilômetro e em metros. Seria realmente estranhavel que escrevessemos 32 *quilômetros e 4 héctometros* em vês de 32 quilômetros e 400 metros.

Na linguagem literária é frequente exprimir-se uma distância de alguns quilômetros em metros.

Eis, para servir de exemplo, um trecho de Humberto de Campos:

Mark Twain tem um conto, em que refere um episódio ocorrido no Pacífico, em viagem de São Francisco da California para a Australia ou para as Molucas. Ao fim de poucos dias o návio parou. Debalde bufavam as máquinas e inchavam as velas. E descobriu-se, afinal, a causa: acumulando-se no casco da embarcação, os corais haviam formado um volume tão grande, que tinham ido fixar a outra extremidade a cinco mil metros, nos abismos marinhos, improvisando assim uma bengala enorme, de que o návio era o castão e cuja ponteira se afundava nas misteriosas profundidades do mar.

O escritor tomou para unidade o metro apenas para dar mais força à expressão, e despertar a atenção do leitor para a grandesa da profundidade a que se referia.

22 — Mudança de unidade.

Seja, por exemplo, exprimir em decâmetros o número $82347^{cm},9$.

Como o decâmetro vale 1000 centímetros, basta que dividamos por 1000 o número 82347,9; encontramos $82^{Dm},3479$.

Em geral, para mudarmos a unidade basta que multipliquemos ou dividamos o número dado por 10, 100, 1000, etc.

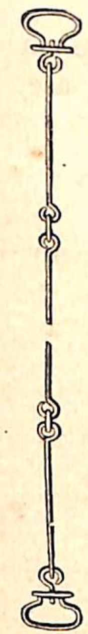
23 — Medidas efetivas.

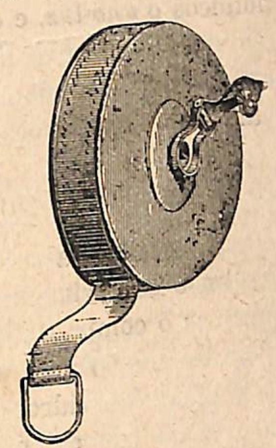
As medidas efetivas são:

o meio decâmetro	o duplo decímetro
o decâmetro	o meio metro
o duplo metro	o decímetro
o duplo-decâmetro	o metro

Essas medidas são bastante conhecidas e por isso parece-nos inutil descreve-las.

Todos conhecem o metro rígido que os negociantes de fazendas empregam, bem como o metro articulado empregado por carpinteiros e por muitos outros operários. Não há aluno que não tenha usado uma régua de duplo-decímetro. O duplo decâmetro, o decâmetro e o meio decâmetro são *fitas* ou trenas de pano ou aço que se enrolam em estojos de couro ou metal. Êstes são tambem os comprimentos de *correntes* de agrimensor, empregadas nas medições de terras.





24 — Medidas itinerárias.

Chamam-se medidas itinerárias as que usamos para avaliar grandes distâncias sobre estradas de rodagem, estradas de ferro, canais, etc. A mais empregada é o quilômetro.

Nas estradas de ferro, bem como nas estradas de rodagem os quilômetros são assinalados por marcos.

A *légua*, usada no interior do Brasil, vale 6 km.

25 — Medidas astronômicas.

Para as avaliações das distâncias interplanetárias usam os astrônomos várias unidades.

A distância da Terra ao Sol, em seu valor médio, recebeu a denominação especial de *unidade astronômica* e corresponde a 150 milhões de quilômetros.

A unidade astronômica tem um múltiplo denominado *siriometro*.

O siriômetro equivale a 1 milhão de unidades astronômicas.

Além dessas são tambem empregadas nos cálculos astronômicos o *ano-luz*, e o *pasec*.

O ano-luz é a distância percorrida pela luz durante um ano, e corresponde a 63048 unidades astronômicas. O pasec vale 205460 unidades astronômicas.

26 — Escolha da unidade.

A escolha da unidade depende do comprimento a medir. Assim o comprimento de uma peça de fazenda é avaliada em metros; o comprimento de uma estrada em quilômetros; a largura de uma folha de papel, em centímetros; a espessura de uma chapa de vidro, em milímetros. Emfim, escolhemos a unidade mais conveniente.

27 — Medidas de superfície. Unidade principal.

A unidade principal das medidas de superfície é o *metro quadrado.*

O metro quadrado é a área de um quadrado de um metro de lado.

O metro quadrado é designado abreviadamente por m^2.

28 — Unidades secundárias.

As unidades secundárias são áreas de quadrados que têm para lados respectivos as unidades secundárias de comprimento. As unidades secundárias são:

1.° — Para os múltiplos:

o *decâmetro quadrado*, que é designado por Dm^2;
o *hectômetro quadrado*, que é designado por Hm^2;
o *quilômetro quadrado*, que é designado por Km^2.

2.° — Para os sub-multiplos:

o *decímetro quadrado*, que é designado por dm^2;
o *centímetro quadrado*, que é designado por cm^2;
o *milímetro quadrado*, que é designado por mm^2.

29 — Relação entre duas unidades consecutivas.

Cada unidade vale 100 vezes a unidade que lhe é imediatamente inferior. Assim, o Hm^2 vale 100 Dm^2; o dm^2 vale 100 cm^2.

30 — Os números que exprimem áreas.

Como as unidades de superfície são de 100 em 100 vêses maiores ou menores, para exprimirmos o número de unidades da superfície de certa ordem são necessários dois algarismos; na unidade, porém, o número pode ser expresso por um só algarismo.

Escrevemos um número exprimindo área como um número decimal, indicando ao alto e à direita do último algarismo da parte inteira a unidade escolhida.

Assim, para exprimir duzentos e trinta e oito centímetros quadrados, escrevemos: 238^{cm^2}.

Um número que exprime área deve ter sempre um número par de casas decimais.

Fazemos a leitura de número que exprime uma área enunciando a parte inteira acompanhada da unidade adotada; em seguida lemos a parte decimal, dando o nome da unidade que representa a última classe.

Assim, $283^{Hm^2},7389$ lemos: 283 hectômetros quadrados e 7389 metros quadrados.

31 — Mudança de unidade.

Seja, por exemplo, exprimir em decimetros quadrados o número $938^{Dm^2},076418$.

Como o decâmetro quadrado vale $100 \times 100 = 10000$ decímetros quadrados, basta que multipliquemos por 10000 o número 938,076418; obtemos: $9380764^{dm^2},18$.

Para mudarmos a unidade basta que multipliquemos ou dividamos o número dado por 100, 10000, 1000000, etc.

32 — Medidas agrárias.

Chamamos *unidades agrárias* aquelas que empregamos para medir as áreas de terrenos geralmente produtivos como pastos, chácaras, fazendas, etc.

A unidade principal das medidas agrárias é o *are*, que vale 1 decâmetro quadrados.

O are é indicado abreviadamente por *a*.

O are só tem um múltiplo; o *hectare*, que vale 100 ares ou 1^{Hm^2}. Representamo-lo por *Ha*.

Só ha um sub-múltiplo do are: o *centiare*, que é a centésima parte do are; vale 1^{m^2} e é representado abreviadamente por *ca*.

33 — O alqueire.

Entre as unidades lineares do antigo sistema brasileiro figurava a *braça* que correspondia, mais ou menos, a $2^m,2$. A unidade de superfície derivada da braça denominava-se *braça-quadrada*.

Da antiga braça-quadrada são ainda hoje, nas medidas agrárias, usados dos múltiplos: o *alqueire paulista* e o *alqueire mineiro*.

O alqueire paulista equivale a 5000 braças quadradas, isto é, a 24200^{m^2}. O alqueire mineiro contém 10000 braças quadradas ou 48400^{m^2}.

34 — As medidas agrárias.

O múltiplo do are — o hectare — é 100 vêses maior do que o are e o sub-múltiplo — o centiare — é 100 vezes maior do que o are. Escrevemos e lemos, as medidas agrárias como as de áreas comuns, tendo o cuidado de atribuir ao número, se for necessario, duas casas decimais.

Exemplo: $38^a,49$ designa 38 ares e 48 centiares.

O número $7^a,5$, será lido do seguinte modo: 7 ares e 50 centiares.

35 — Exercício IV.

Um terreno de fórma retangular tem 340 m. de comprimento por 80 m. de largura. Exprimir em hectares a área desse terreno.

Resolução :

A área do terreno será :

340×80 (metros quadrados)

Efetuando o produto:

27200^{m^2}

Substituindo o m² por centiare, vem:

27200 ca

ou, exprimindo em hectares:

272^{Ha}

36 — Medidas de volume. Unidade principal.

A unidade principal das medidas de volume é o *metro cúbico*.

O metro cúbico é o volume de um cubo de um metro de aresta. O metro cúbico é designado abreviadamente por m^3.

37 — Unidades secundárias.

As unidades secundárias, são volumes de cubos que têm para arestas as unidades secundárias de comprimento.

Os múltiplos do metro cubico não são usados. Os sub-múltiplos são:

o decímetro cúbico, que designamos por dm^3;
o centímetro cúbico, que designamos por cm^3;
o milímetro cúbico, que designamos por mm^3;

38 — Relação entre duas unidades consecutivas.

Cada unidade vale 1000 vêses a unidade que lhe é imediatamente inferior.

Assim, o m^3 vale 1000 dm^3; δ dm_3 vale 1000 cm_3.

39 — Os números que exprimem volumes.

Como as unidades de volume são de mil em mil vêses maiores ou menores, para exprimirmos o número de unidades de volume de certa ordem são necessarios três algarismos; na unidade mais elevada, porém, o número pode ser expresso por um ou dois algarismos.

Escrevemos um número que exprime volume como um número decimal, indicando ao alto e à direita do ultimo algarismo da parte inteira a unidade escolhida. Assim, 8 metros cúbicos e 93 decimetros cúbicos, escrevemos: $8^{m3},093$.

Um número decimal exprimindo volume, no caso de não ser inteiro, deve ter 3, 6 ou 9 casas decimais.

Fazemos a leitura de um número que exprime volume enunciando a parte inteira acompanhada da unidade adotada; em seguida lemos a parte decimal, por classe de três algarismos, dando o nome das unidades que representam a ultima classe. Assim, $75^{m3},008076$, lemos: 75 metros cúbicos e 8076 centimetros cúbicos.

40 — Mudança de unidade.

Seja ,por exemplo, exprimir em centímetros cúbicos o número $6^{m3},734936542$. "

Como o metro cúbico vale $1000 \times 10000 = 1000000$ centímetros cúbicos, basta que multipliquemos por 1000000 o número 6,73493542; obtemos $6734936^{cm3},542$.

Para mudarmos a unidade basta que multipliquemos ou dividamos o número dado por 1000, 1000000 ou 1000000000.

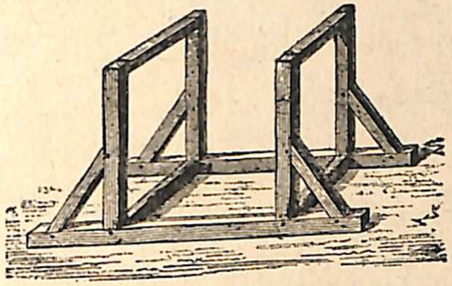
(*) A lenha bruta, no interior de nosso país, é vendida aos carros. A madeira lavrada é medida em *pés*.

41 — Medidas para lenha.

A unidade principal das medidas para lenha é o *stereo*.

O stereo, que designamos abreviadamente por st, equivale a 1 metro cúbico.

O stereo tem um sub-múltiplo — *odecistereo dst*, — que vale a décima parte do stereo.



O stereo é uma medida efetiva, construida de madeira, da fórma indicada na figura que vemos acima.

O stereo, e seu sub-múltiplo, não são usados no Brasil.

42 — Peso de um corpo. Massa.

Um corpo abandonado a si mesmo no ar cáe. A força, que o faz cair, que o atráe para a Terra é a *gravidade*.

O *peso* de um corpo é a resultante da ação que a gravidade exerce sobre ele. Esse peso varía com a posição do corpo em relação ao centro da Terra.

A *massa* de um corpo é a quantidade de materia que ele contém. A massa é independente da posição do corpo em relação ao centro da terra.

O que se mede com a balança é a massa de um corpo. Na linguagem vulgar confundimos a noção de massa com a de peso.

43 — Unidade principal de peso.

A unidade principal das medidas de peso é o *quilograma*.

O quilograma é a massa do prototípo internacional, que foi aprovado pela Conferencia Geral de Pesos e Medidas, realisada em Paris, em 1889, e que está depositado no Pavilhão de Breteuil, em Sévres, França.

A massa do quilograma é *aproximadamente* igual a de um decímetro cúbico de água distilada.

Designamos abreviadamente o quilograma por *kg.*

Em linguagem usual dizemos *kilo* em lugar de *quilograma.*

44 — Unidades secundárias.

As unidades secundárias, são:

a *tonelada,* que vale 1000 *kg.*
o *quintal,* que vale 100*kg.*
o *hectograma,* que vale 0,1 *kg.*
o *decagrama,* que vale 0,01 *kg.*
o *grama,* que vale 0,001 *kg.*
o *decigrama,* que vale, 0,0001 *kg.*
o *centigramma,* que vale 0,00001 *kg.*
o *miligrama,* que vale 0,000001 *kg.*

45 — Observação.

Na Física é usada uma unidade extremamente pequena — o *micrograma* — que vale a milésima parte do miligrama. Designamos essa unidade pela letra grega γ

No comércio aparece frequentemente na avaliação de certas mercadorias, algodão, por exemplo, a *arroba,* que corresponde a 15 *kg.*

A arroba fazia parte do antigo sistema metrológico brasileiro.

46 — Relação entre duas unidades consecutivas.

Cada unidade vale 10 vêses a unidade que lhe é imediatamente inferior.

Assim, 1 *kg.* vale 10 *Hg;* 1*g* vale 10 *dg.*

47 — Os números que exprimem pesos.

As unidades de peso, sendo de dez em dez vêses maiores ou menores, são escritas e lidas como números decimais.

Para indicarmos a unidade adotada escrevemos o símbolo pelo qual é designada abreviadamente ao alto e à direita do último algarismo da parte inteira do número. Assim, 73 quilos e 250 gramas, escrevemos: $73^{Kg},250$.

Fazemos a leitura de um número que exprime um peso enunciando a parte inteira seguida do nome da unidade adotada e em seguida a parte decimal acompanhada do nome da unidade que representa o último algarismo decimal. Assim 129,581 lemos: 1^{g} grama e 581 miligramas.

48 — Observação.

O *quilo* é de uso corrente na vida comercial, mas o decagrama e o hectograma *não são usados.*

Um número tendo a sua parte inteira expressa em quilogramas deverá ter a parte decimal expressa em gramas.

Exemplo: Seja o número $8^{kg},42$. Para ler êsse número acrescentamos um zero à direita ($8^{kg}420$) e lemos:

8 *quilos* e 420 *gramas.*

49 — Mudança de unidade.

Seja, por exemplo, exprimir em centigramas o número $28^{g},394$.

Como o grama vale $10 \times 10 = 100$ centigramas, basta que multipliquemos o número 28,394 por 100; obtemos $2839^{cg},4$.

Para mudar a unidade basta que multipliquemos ou dividamos o número dado por 10, 100, 10000, etc.

50 — Medidas efetivas.

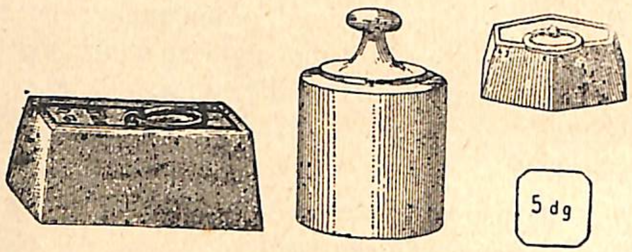
Determinar o peso de um corpo, ou fazer uma *pesada* é comparar, por meio da balança, o peso desse corpo com pesos de formas e dimensões reguladas por lei.

Para efetuarmos uma pesada usamos pesos efetivos de formas e dimensões reguladas por lei.

As unidades efetivas compreendem as unidades secundarias de 50^{kg} até 1^{mg}, seu dobro e sua metade.

As medidas efetivas estão divididas em três séries.

1.ª *série* — Para as grandes *pesadas* existem 10 pesos de ferro fundido, que vão de 50^{kg} até 5^{dg}. Os dois mais pesados têm a forma de um *tronco de pirâmide* de base retangular; os outros têm a forma de um *tronco de pirâmide* de base hexagonal.



2.ª *série* — Para as pesadas médias existem 14 pesos de cobre ou latão, que vão de 20^{kg} a 1^{g}. Têm a forma de um cilindro, terminando por uma especie de botão.

3.ª *série* — Para as pesadas de precisão ha 9 pesos, que vão de 5^{dg} a 1^{mg}. Esses pesos são pequenas chapas de cobre ou aluminio.

O valor de cada peso está inscrito na face superior.

Em cada série ha duplicatas de pesos de 20^{Kg}, 2^{Kg}, 2^{Hg}, 2^{Dg}, 2^{g}, 2^{dg}, 2^{cg} e 2^{mg} para que sejam possíveis todas as pesadas (*).

De fato, se não houvesse essas duplicatas seria impossível fazer uma pesada de 4g, por exemplo. Para efetuarmos uma pesada de 9^{Kg} empregamos 1 peso de 5^{Kg} e 2 pesos de 2^{Kg} cada um.

(*) A menor massa indicada pela balança é 0,000000001 g.

51 — Relações entre pesos e volumes.

Conforme vimos:

1^{cm3} de água pura pesa aproximadamente 1^{g},
1^{dm3} de água pura pesa aproximadamente 1^{kg},
1^{m3} de água pura pesa aproximadamente 1^{t}.

Em virtude dessas relações
o grama e o centímetro cúbico,
o quilograma e o decímetro cúbico,
a tonelada e o metro cúbico,
são chamados *unidades correspondentes*.

Os números que exprimem um volume de água pura e os pesos em unidades correspondentes são iguais.

Assim, 12^{cm3} de água pura pesam 12^{g}; 4^{kg} é o peso de 4^{m3} de água pura (aproximadamente).

52 — Medidas de capacidade. Unidade principal.

A unidade principal é o *litro* (*).

O litro é o volume ocupado por um quilograma de água pura à temperatura de 4º centígrados, sob pressão atmosférica normal.

O volume de um litro é muito aproximadamente egual a um decímetro cúbico. Um decímetro cúbico de água pura, à temperatura de 4º centígrados, pesa um pouco menos do que um quilograma; portanto, um litro vale um pouco menos do que um decímetro cúbico. O litro vale

$$\frac{1}{1000013}\ dm^3 \text{ ou } 0^{dm3},999987.$$

Essa diferença é tão pequena que na prática é abandonada; só é levada em conta em Física, em trabalhos de pre-

(*) A unidade de capacidade, correspondente a 0,001 do metro cúbico foi, a princípio, em França, denominada *pinte*, mais tarde *cadil* e, finalmente, *litro*.

cisão. Consideramos o litro como eqüivalente ao decímetro cúbico.

O litro é designado abreviadamente por *l.* (*)

53 — Unidades secundárias.

As unidades secundárias são:

1.º — Para os múltiplos:

o *decalitro* (^{Dl}), que vale 10^l;
o *hectolitro* (^{Hl}), que vale 100^l.

2.º — Para os sub-múltiplos:

o *decílitro* (^{dl}), que vale $0{,}1^l$;
o *centílitro* (^{cl}), que vale $0{,}01^l$;
o *mílílitro* (^{ml}), que vale $0{,}001^l$.

54 — Relação entre duas unidades consecutivas.

Cada unidade vale dez vezes a unidade que lhe é imediatamente inferior.

Assim 1 hectolitro vale 10 decalitros; 1 decalitro vale 10 litros.

55 — Os números que exprimem capacidade.

As unidades de capacidade, sendo de dez em dez vezes maiores ou menores, são escritas e lidas como números decimais.

Para indicar a unidade adotada escrevemos o sinal pelo qual é designada abreviadamente ao alto e à direita do último

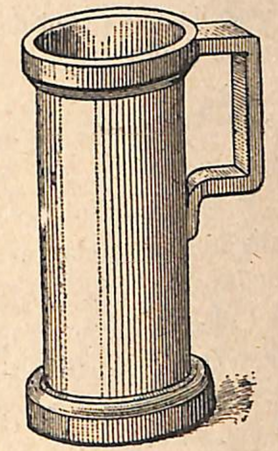
(*) A medida antiga de capacidade era denominada *alqueire*. O alqueire era uma medida incerta, e variava de um estado para o outro. Em certos lugares havia 40 litros e em outros 42 e até mesmo 50 litros. No Maranhão, por exemplo, em vez do alqueire, usava-se, para medir farinha, o *paneiro*, que valia 42 litros e meio.

algarismo da parte do número. Assim, 123 litros escrevemos: 123^l.

Fazemos a leitura de um número que exprime capacidade enunciando a parte inteira, seguida do nome da unidade adotada, e depois a parte decimal acompanhada do nome da unidade que representa o último algarismo decimal. Assim, $43^{Hl}{,}275$ lemos 43 hectolitros e 275 decilitros.

56 — Mudança de unidade.

Entre nós empregam-se as medidas efetivas de capacidade sómente para líquidos. Os grãos, como arroz, feijão, e as substancias secas, como farinha, etc., são artigos vendidos a peso.



As medidas efetivas para líquidos são vasos cilíndricos de estanho, cobre estanhado ou folha de Flandres, munidos de uma aza. A altura dessas medidas é o dobro do diâmetro.

O decalitro não é usado no Brasil.

A série compreende medidas de *duplo-litro, litro, meio-litro, duplo-decilitro, decilitro, meio-decilitro, duplo-centrilitro* e *centrilitro*.

58 — Relações entre os pesos e as capacidades.

Da definição do litro resulta que:

1 litro de água pura pesa aproximadamente 1 quilo; 1 metro cúbico de água terá o peso aproximado de 1 tonelada.

59 — Exercício V.

Uma caixa de forma retangular tem 2m de comprimento, 1 metro de altura e $0^m{,}8$ de largura está cheia de água. Calcular o peso da água contida nessa caixa.

Resolução:

O volume da caixa, em metros cúbicos, será:

$$2 \times 1 \times 0{,}8 = 1{,}6$$

Acrescentando dois zeros e exprimindo o resultado em metros cúbicos, temos:

$$1,^{m^3}600$$

Reduzindo a litros:

$$1\ 600^{l}$$

Como cada litro de água pesa aproximadamente 1^{Kg}, o peso da água contida na caixa será $1\ 600^{Kg}$, isto é, 1 tonelada e 600 quilos.

60 — Sistemas de unidades: C. G. S. e M. T. S.

Um conjunto contendo todas as unidades necessárias às medidas de todas as grandezas constitue um *sistema de unidades*.

Em 1873, sob a orientação de Lord Kelvin (*) foi creado o *sistema C. G. S.* cujas unidades fundamentais são: o centímetro, o grama e o segundo. Dessas unidades são derivadas todas as outras.

A experiencia demonstrou que para as necessidades atuais do comércio e da indústria, o centímetro e o grama são unidades muito pequenas. Em 1919 foi creado um novo *sistema de unidades*, tendo por base o *metro*, a *tonelada* e o *segundo*. Êsse novo sistema recebeu o nome de sistema *M. T. S.*

(*) Lord Kelvin (Sir William Thomson), notável físico inglês foi um dos grandes sábios de seu tempo. Nasceu em Belfast em 1824 e morreu em 1907.

O *sistema C. G. S.* é usado nas medidas científicas e o *sistema M. T. S.* é empregado nas medidas industriais.

61 — Noção de densidade.

Tomemos duas peças perfeitamente iguais quanto à forma, sendo porém a primeira de *ouro* e a segunda de *cobre*.

Fácil será verificar, com auxílio de uma balança, que essas peças não têm o mesmo peso; a de ouro pesa mais do que a de cobre.

Exprimimos êsse fato dizendo que o ouro é mais *denso* do que o cobre.

Façamos ainda uma segunda observação: Tomemos três cubos e 1 centímetro de aresta cada um, sendo, o 1.º de *chumbo*, o 2.º de *prata* e o 3.º de *ferro*.

Com auxílio da balança vamos obter:

1 cm^3 de chumbo pesa	$11^g,7$
1 " " prata "	$10^g,4$
1 " " ferro "	$7^g,7$

Concluimos que o chumbo tem maior *densidade* do que a prata, e que este metal é ainda mais *denso* do que o ferro.

62 — Densidade de um corpo.

Consideremos um cubo de alumínio. Vamos supor que êsse cubo tem 1cm. de aresta.

NOTA — No estudo das ciências físicas distinguiram-se, até 1873, dois sistemas de unidades:

O sistema de *Weber e Gauss*, adotado na Alemanha, cujas unidades fundamentais eram o milímetro, o miligrama e o segundo sexagesimal de tempo.

O sistema da *British Association* (sistema B.A.) adotado na Inglaterra, e no qual as unidades fundamentais eram o grama, o metro e o segundo. (*Nota do curso* do Prof. Dulcidio Pereira).

Pesando êsse cubo vamos encontrar $2^g,7$.
Sabemos que $1cm^3$ de água (*) pesa 1 grama.

Temos assim:

1 cm^3 de alumínio pesa .... $2,^g7$
1 cm^3 de água pesa .... 1^g

O alumínio é, portanto, 2,7 vezes mais pesado do que a água.

Admitindo-se que a água foi tomada para têrmo de comparação das *densidades*, podemos dizer que a densidade do alumínio é 2,7.

Quando dizemos, por exemplo, que a densidade da platina é 21,5, queremos assim exprimir que um certo volume desse metal pesa 21,5 vezes mais do que igual volume de água.

A densidade de um corpo é, portanto, a relação entre o peso desse corpo e o peso de igual volume de água.

$$\textit{Densidade} = \frac{\textit{Peso do corpo}}{\textit{Peso de igual volume de água}}$$

A *densidade* de um corpo é expressa por um *número abstrato*.

62 — **Exercício VI.**

Sabendo-se que 4 litros de leite pesam $4^{Kg},120$, calcular a densidade do leite.

Resolução:

4 litros de leite pesam .... $4,^{Kg}120$
4 litros de água pesam .... $4,^{Kg}$

$$\text{densidade do leite} = \frac{4,120}{4} = 1,03.$$

(*) A água é suposta distilada a 4°C.

64 — **Exercício VII.**

Calcular a densidade do mercúrio sabendo-se que 3 centímetros cúbicos desse metal pesam $40^g,8$.

Resolução:

3 cm^3 de mercúrio pesam 40,8
3 cm^3 de água pesam 3

$$\text{densidade do mercúrio} = \frac{40,8}{3} = 13,6.$$

Exercícios

53 — Uma pessoa comprou um terreno de $28^a,35$ por 32:000$000. Por quanto deve revendê-lo para ganhar 5$000 em cada metro quadrado?

54 — Um litro de ar pesa $1^g,293$. Qual é o pêso do ar contido numa sala de $382^{m^3},250$?

55 — Dois vasos cheios d'água pesam, juntos, $2^{Kg},08$. Um contém 14^{cl} mais do que o outro. Determinar a capacidade de cada um, sabendo que os vasos vasios, juntos, pesam 12^{Hg}.

Leitura

QUEBRA-QUILOS (*)

(ESCRAGNOLE DORIA)

A Convenção Nacional foi a assembléa que, estabelecendo a República Francesa, governou a França quási três anos. Condenou ao patíbulo Luiz XVI, enquanto os seus soldados

(*) Artigo escrito especialmente para esta obra.

afrontavam a morte combatendo a Europa inteira numa luta desigual.

A Convenção, em certo período, viveu sob o regimen revolucionário, de nome tragi-sanguinolento, o Terror. Pinta-o a frase famosa do homem célebre a quem perguntaram o que fizera durante o Terror. — "Vivi" — respondeu. E num verbo resumia uma época, durante a qual já muito fazia quem conseguia viver. A primeira razão do Terror foi a tirania, a última o cadafalso, onde a guilhotina fazia indistintamente rolar para o fundo do célebre cesto as cabeças dos mais ilustres e as dos mais obscuros.

No meio da violenta tempestade que agitava a Convenção houve momento de bonança. A 1.º de Agosto de 1793 a assembléa ouvia a leitura do relatório da Academia das Ciências referente ao sistema métrico. Desenhava-se, ainda, dessa vez, uma nova revolução, incruenta, é verdade, mas profunda e duradoura, numa das partes mais importantes da ciência — a metrologia. Erguiam os sábios renovadores, em bases racionais, novo sistema de pesos e medidas, as unidades antigas proscritas e condenadas sem remissão.

Chegou-nos o sistema métrico há mais de meio século. A lei n. 1157, de 26 de Junho de 1862 substituiu, em todo o Brasil nessa época Imperio — o antigo e complexo sistema de pesos e medidas, (*), pelo sistema métrico decimal de origem francêsa e histórica.

Só em princípios de 1874, isto é, doze anos depois, entrou realmente em vigor no Brasil o novo sistema. A lei de 1874 foi subscrita por D. Pedro II e por seu ministro da Agricultura, Comércio e Obras Públicas, o senador por Alagôas — e tambem alagôano — João Lins Vieira Cansanção de Sinimbú.

(*) Estudado, até então, pela Aritmética na parte relativa aos números complexos (Nota do Autor).

A inovação do sistema decimal encontrou resistência em alguns pontos do nosso país (*). Em 1874 numerosos grupos armados invadiram feiras e provocaram disturbios em alguns logares da Paraíba, de Pernambuco, e das Alagôas. Em diversos pontos dessas províncias, como se obedecessem a plano pre-concebido, bandos de armas em punho destruiam sistematicamente os quilos e litros, e punham fogo aos livros e documentos fiscais.

A princípio êsses grupos, chamados expressivamente Quebra-quilos, *a pretexto de combater o sistema métrico, espalhavam o terror praticando violencias e devastações em várias localidades. Recuaram, afinal, quando os habitantes dos sítios atacados pelos facinorosos "anti-matemáticos" reagiram com energia contra os agressores.*

O governo imperial reprimiu com severidade os exaltados; forças públicas enviadas, em tempo, para as províncias onde os "Quebra-quilos" operavam, puzeram termo às depredações e fizeram com que fosse oficialmente mantido o sistema métrico. Por fim tudo foi paz.

E os "Quebra-quilos", êsses misteriosos sertanejos que combateram o sistema francês, passaram aos domínios da História, tribunal onde as sombras aguardam o juizo do Futuro.

(*) O sistema métrico encontrou adversários no próprio país de origem. Muitos populares, levados por sentimentos que só a rotina e a ignorância sóem inspirar, iniciaram (Agosto de 1795) em Paris movimentos de protestos contra as novas unidades. A Convenção foi obrigada a ouvir um delegado do povo, que assim se exprimiu, referindo-se aos vocábulos *metro*, *grama*, *litro*, etc.: "Esses nomes, novos e ininteligíveis para a maior parte dos cidadãos, não são necessários à segurança da República". (Nota do Autor).

CAPÍTULO XVII

SISTEMA INGLÊS DE PESOS E MEDIDAS

1 — Noções preliminares.

Em 1864 a Inglaterra tornou o sistema métrcio facultativo mas o povo inglês não se conformou com a idéa de abandonar as medidas tradicionais do país para substitui-las por outras que o sistema francês apresentara. Mais uma vez ficou demonstrado o espírito conservador dos subditos inglêses.

É muito intensa no Reino-Unido a campanha movida a favor do sistema métrico, que conta inúmeros adeptos principalmente nos meios científicos.

Os industriais inglêses constituem o núcleo mais forte de resistência à metrologia decimal; alegam que a adoção de um novo sistema de medidas viria obrigar a substituição das máquinas de quasi todas as usinas, o que traria para o país um prejuizo calculado em 7 milhões de contos.

O sistema inglês é adotado ainda na Irlanda, Estados Unidos, Austrália, Canadá, Egíto, China, India Britânica e República Dominicana.

2 — Medidas de comprimento.

No sistema inglês a unidade principal para as medidas de comprimento é a *jarda*.

Os múltiplos da jarda são: a *milha* (mile), o *furlong*, a *corrente* (chain), a *percha*, (perch, pole ou rod) e a braça (fathom).

Os sub-múltiplos são: o *pé* (foot), a *polegada* (inch) e a *linha* (line).

3 — Observação.

Das diversas medidas inglêsas de comprimento o pé e a polegada são, por vários motivos, de uso frequente em nosso país. As dimensões de peças de maquinismos que importamos são avaliadas em pés ou em polegadas; as vigas e os vergalhões de ferro, usados em construção, invariavelmente são medidos em polegadas.

Damos a seguir uma tabela das medidas de comprimento, com os valores correspondentes em metros.

Nomes	Abrev.	Valores	Conversão em metros
Milha	ml	1760 yd	1609^{m}
Furlong	fur	220 yd	201^{m}
Percha	po	$5\frac{1}{2}$ yd	5^{m}
Braça	fa	2 yd	$1^{m},828$
Jarda	yd	—	$0^{m},914$
Pé	ft	$\frac{1}{8}$ yd	$0^{m},304$
Pollegada	in	$\frac{1}{12}$ ft	$2^{cm},54$
Linha	l	$\frac{1}{13}$ in	$2^{mm},11$

A legua inglêsa, que corresponde a três milhas, não foi incluida nesse quadro.

4 — Observação.

A polegada admite três sistemas de subdivisão: em *linhas* (cada linha vale 1/12 da polegada), em divisões binárias (*) até $\frac{1}{64}$ e em divisões decimais a partir dos centésimos.

(*) As *divisões binárias* são expressas por frações que tem para numerador 1 e para denominador uma potência inteira de 2, a saber: 2, 4, 6, 8, 16, 32, 64, etc.

Êsses três modos de divisão aparecem, às vezes, empregados no mesmo desenvolvimento do cálculo.

Ha entre a jarda inglêsa e a jarda americana uma pequena diferença (*).

5 — Exercício I.

Exprimir 200 jardas em metros.

Resoluçao:

$$200 \times 0{,}914 = 182{,}800$$

Resposta: $182^{m},8$

6 — Exercício II.

Exprimir 2500 pés em metros.

Resoluçao:

$$2500 \times 0{,}304 = 760$$

Resposta: 760^{m}

7 — Medidas de superfície.

Para as medidas de superfície os inglêses usam:

a milha quadrada (square mile);
a jarda quadrada (square yard);
o pé quadrado (square foot);
a polegada quadrada (square inch);
a geira (acre);

(*) Os valores das jardas são:

jarda inglêsa = $0,^{m}91439841$
jarda americana = $0,^{m}91440183$

Essa diferença só é sensivel nas medidas ciêntificas.

cujos valores correspondentes no sistema métrico decimal são:

milha quadrada (sq. mi.)	$2^{Km^2},5888$
jarda quadrada (sq. ya.)	$0^{m^2},8354$
o pé quadrado (sq. ft.)	$0^{m^2},0930$
a polegada quadrada (sq. in.)	$6^{cm},4510$
a geira (ac.)	$4046^{m},71$

E' evidente que para se obter qualquer um dos últimos valores (com exceção do da *geira*) basta elevar ao quadrado o valor da medida linear correspondente.

Assim:

1 pé quadrado será, em metros quadrados, igual a $(0{,}305)^2$

8 — Medidas de volume.

As unidades de volumes, são:

a jarda cúbica (cubic yard);
o pé cúbico (cubic foot);
a polegada cúbica (cubic inch).

Os valores dessas unidades, em relação ao metro cúbico, são obtidos elevando-se ao cubo os valores lineares correspondentes (*).

9 — Medidas de peso.

A unidade principal é a *libra avoir du pois* (pound).

Os múltiplos da libra são: *tonelada* (ton), *stone, quintal* (hundredweight) e *quarta* (quarter).

(*) As medidas inglêsas de áreas e de volumes são raramente empregadas no nosso meio comercial.

Os sub-múltiplos são: *onça* (ounce) e *drachma* (dram.).

Para os metais preciosos a unidade usada é a *libra Troy*.

Dessas unidades são usadas entre nós a tonelada e a libra. A primeira é usada na apreciação da chamada *tonelagem* de navios e a última para medir a pressão em certas maquinas nos pneumáticos de automóveis, etc.

A seguir damos uma tabela das medidas de peso (*).

Nomes	Abrev.	Valores	Conversão em kg.
Tonelada	T	20 cwt.	1016^{kg}
Stone	st.	14 lb.	
Quintal	cwt.	4 qr.	$50,^{kg}8$
Quarter	qr.	28 lb.	$12,^{kg}7$
Libra avoir du pois	lb.		$453,^{g}59$
Libra Troy	lb. Troy		$373,^{g}24$
Onça	oz.	$\frac{1}{16}$ lb.	$28,^{g}35$
Drachma	dr.	$\frac{1}{16}$ oz.	$1,^{g}77$

10 — Medidas de capacidade.

A unidade principal é o *galão* (gallon).

Os múltiplos do galão são: *quarta* (quarter), *fanga* (bushel) e *selamin* (peck).

Os sub-múltiplos são: *quarta* (quart) e *quartilha* (pint).

(*) Convém que o estudante conheça apenas as principais medidas inglêsas, mas não precisa saber de cór todos os valores dessas medidas. Na prática, para cálculos e conversões devemos nos utilisar dos quadros e das tabelas próprias. O professor de mentalidade estreita que obriga um aluno a decorar quadros e tabelas de medidas, não comete apenas um grave erro didático, mas sim um verdadeiro crime contra o ensino.

As latas de tintas a oleo e de lubrificantes importados pelo comércio, apresentam sempre as capacidades respectivas avaliadas em galões ou quartilhos.

E' das medidas de capacidade a tabela seguinte:

Nomes	Abrev.	Valores	Conversão em litros
Quarter	qr.	8 bus.	290^{l}
Bushed	bus.	8 gall.	$36^{l},34$
Peck	pk.	2 gall.	$9^{l},08$
Gallon	gall.		$4^{l},54$
Quart	qt.	$\frac{1}{4}$ gall.	$1^{l},14$
Pint	pt.	$\frac{1}{8}$ gall.	$0^{l},57$

Exercícios

56 — Uma fazenda é vendida a £ 1-10-0 a jarda. Qual é o preço de $1^{m},5$?

57 — Uma pessoa pagou £ 2-12-6 por uma viagem de automóvel de $108^{Km},5$. Quanto pagaria por um percurso de 5^{fur}?

58 — Um chauffeur pagou 15$000 por um galão de oleo para motor. Quanto pagaria por $10^{l},5$?

Leitura

OS NÚMEROS FRACIONÁRIOS

(Amoroso Costa)

Os Egípcios praticavam com habilidade o cálculo das frações como nos mostra o famoso manual redigido pelo sacerdote Ahmes *em uma época que os historiadores situam entre os anos* 2000 *e* 1600 *e que faz parte da coleção* Rhind *no* Britsh Museum, *de Londres.*

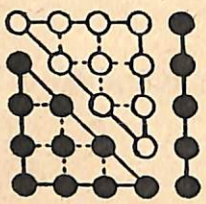
O que caracterisa êsse tratado é a ausência completa de considerações teóricas, desenvolvendo-se as operações sem justificação alguma. Se o livro de Ahmes *reproduz, como tudo faz crer, o ensino dos matemáticos egípcios, a aritmética destes não passava de uma coleção de receitas extremamente engenhosas.*

Como se vê o uso das frações vem de remota antiguidade. Sua theoria, porém, é muito mais recente, e só nos tempos modernos foram elas tidas por verdadeiros números. A êste respeito, Diophante é um precursor, cerca do ano 300 *da nossa éra. Os geômetras clássicos —entre eles Euclides, na sua theoria das proporções — consideravam as frações como nomes de relações entre números.*

Desenvolvido mais tarde, na Índia, por volta do século VI, o calculo das frações foi levado ao Ocidente pelos árabes.

Só mil anos depois, entretanto, é que aparece, na Aritmética *de Stevin* (1885), *uma exposição completa do cálculo* dos números rupti, *extensão das operações fundamentais já praticadas sobre os inteiros.*

(Do livro "As idéas fundamentais da Matemática")



CAPÍTULO XVIII

DETERMINAÇÃO DE ÁREAS. VOLUME DO PARALELEPÍPEDO

1 — Noção de área.

Tomemos uma folha de um blóco de papel. Essa folha apresentará uma certa superfície. Dividamos essa folha em duas partes iguais, cortando-a pelo meio. Cada uma dessas partes apresentará, é evidente, uma superfície que será a *metade* da superfície da folha primitiva.

Êsse exemplo nos mostra claramente que podemos comparar as superfícies dos corpos. Entre uma bola de bilhar, por exemplo, e uma pequena bola de vidro, a primeira tem uma superfície maior.

Da comparação de uma superfície dada com outra superfície escolhida para unidade, resulta a medida da primeira superfície.

A medida de una superfície é denominada *área* dessa superfície.

Área é, portanto, *a medida de uma superfície.*

2 — Observação.

Não devemos confundir *área* com *superfície*.

Área é, em geral, uma expressão numérica ou literal que nos permite apreciar ou avaliar a grandeza de uma superfície.

Dizemos comumente: *superfície plana, superfície esférica, superfície curva,* etc., no entanto, a expressão *área curva,* por exemplo, não teria sentido algum.

A palavra *superfície* é muitas vezes empregada como sinonimo de *área* (*). Entretanto, é preferivel reservar a denominação de *superfície* para a figura geométrica, cuja grandeza (independente da figura) à uma área.

3 — Unidade de superfície.

A unidade de superfície é a superfície de um quadrado que tem para lado a unidade de comprimento.

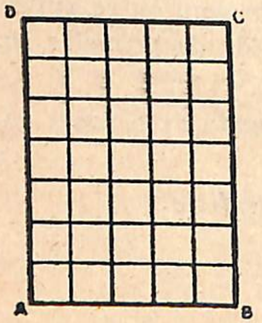
Assim, se a unidade de comprimento fôr o metro, a unidade de superfície será a superfície de um quadrado que tem um metro de lado, isto é, o *metro quadrado.*

4 — Figuras eqüivalentes.

Figuras eqüivalentes são aquelas que têm áreas iguais.

5 — Área do retângulo.

Seja o retângulo *ABCD.*



Suponhamos que a base *AB* meça 5m e a altura *AD,* 7m. Sobre a base *AB* marquemos pontos que a dividam em 5 partes iguais e sobre a altura *AD* marquemos pontos que a dividam em 7 partes iguais. Cada parte mede, evidentemente 1m de comprimento. Se por esses pontos traçarmos paralelas à altura e à base, respectivamente, decomporemos o retângulo em 5 quadrados de 1m².

(*) Pierre Boutroux — "Les principes de l'Analyse Mathématique".

Portanto a área do retângulo dado vale

$$5^{m} \times 7^{m} = 35^{m2}$$

Conclusão:

A área de um retângulo é igual ao produto da base pela altura.

6 — Observação.

Se a base do retângulo medisse $5^{m},2$, por exemplo, e a altura $7^{m},45$, nós dividiriamos a base em 520 partes iguais e a altura em 745 partes iguais; cada parte mediria 1^{cm} de comprimento e o retângulo teria uma área igual a:

$$520^{cm} \times 745^{cm} = 387400^{cm2}$$

Em geral:

A base de um retângulo sendo b e a altura, h (b e h são medidas com a mesma unidade) a área S do retângulo será dada pela fórmula:

$$S = bh.$$

Para o caso do quadrado de lado l a área s seria: $S = l^2$.

7 — Exercício.

Calcular a área de um retângulo de 8^{m} de comprimento e $6^{m},7$ de altura.

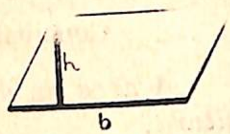
Resolução :

$$S = 8^{m} \times 6,^{m}7 = 53^{m2},60$$

A área é de $52^{m2},60$

8 — Área do paralelogramo.

A área de um paralelogramo é igual à base multiplicada pela altura



Sendo b a base de um paralelogramo e h a altura, a área S é dada pela fórmula:

$$S = bh.$$

9 — Exercício I.

Um paralelogramo tem uma área de 32^{m2} *; a base mede* 8^m. *Qual é a altura desse paralelogramo?*

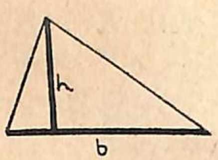
Resolução:

Como a área de um paralelogramo é igual ao produto da base pela altura, concluimos que a altura é o quociente da área pela base.

Temos, pois, que a altura procurada é igual a:

$$\frac{32^{m2}}{8^m} = 4^m$$

10 — Área do triângulo.



A área de um ~~retângulo~~ é igual ao semi-produto da base pela altura

Designado por b a base, h a altura de um retângulo, a área será dada pela fórmula:

$$S = \frac{1}{2}\ bh.$$

11 — Exercício II.

Os catetos de um triângulo retângulo medem 7^m *e* 10^m, *respectivamente. Qual é a área desse triângulo retângulo?*

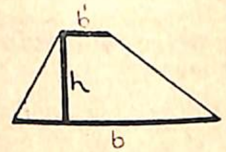
Resolução:

Considerando um cateto como base do triângulo retângulo, a altura será o outro cateto. A área será, por conseguinte, o semi-produto dos dois catetos.

A área procurada á igual a:

$$S = \frac{7^m \times 10^m}{2} = 35^{m2}$$

12 — Área do trapézio.



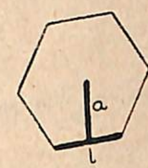
A área de um trapézio é igual à semi-soma das bases multiplicada pela altura

Se representarmos as bases de um trapézio por b e b' respectivamente, e a altura por h, a fórmula que dá a área S será:

$$S = \frac{b \times b'}{2} \times h.$$

13 — Área de um polígono regular.

A área de um polígono regular é igual ao semi-perímetro multiplicado pelo apotema.



Sendo p o semi-perímetro de um polígono regular e a, o apotema, a área S será dada pela fórmula:

$$S = pa.$$

Apotêma de um polígono regular é a distância do centro ao meio do lado.

14 — Exercício III.

O lado de um hexágono regular mede 4^m *e o apotêma* $3^m,46$. *Qual é a área ?*

Resolução:

O semi-perímetro vale:

$$\frac{4^m \times 6}{2} = 12^m$$

e a área é igual a:

$$12^m \times 3^m{,}46 = 41^{m2}{,}52$$

15 — Área do círculo.

A área do círculo é igual ao produto de π pelo quadrado do raio.

Sendo r o raio de um círculo a fórmula que dá a área S será:

$$S = \pi\, r^2$$

16 — Exercício IV.

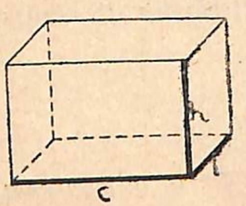
Qual é a área de um círculo de 10^m de raio?

Aplicando a fórmula $S = \pi\, r^2$, temos

$$S = 3{,}\,1416 \times 10^2 = 314^{m2}{,}16.$$

17 — Volume de um paralelepípedo retângulo.

O volume de um paralelepípedo é igual ao produto da largura pelo comprimento e pela altura.



Se representarmos por l a largura de um paralelepípedo retângulo, por c o comprimento e por h a altura, o volume V será dado pela fórmula:

$$V = c \times l \times h$$

Como a base do paralelepípedo é um retângulo o produto $c \times l$ é a área dêsse retângulo, isto é, a área de *base* do paralelepípedo.

Representando o produto $c \times l$ por B, temos:

$$V = B \times h$$

Conclusão:

O volume de um paralelepípedo é igual ao produto da área da base pela altura.

Para o caso do *cubo* de aresta l o volume V será: $V = l^3$.

18 — Exercício V.

Quantos litros de água contém uma caixa de água que mede $1^m{,}3$ de largura, $1^m{,}5$ de comprimento e $0^m{,}7$ de altura?

Resolução:

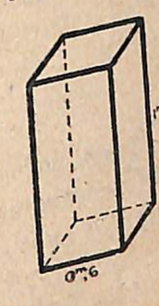
O volume ou capacidade da caixa-d'água é igual ao produto das três dimensões:

$$1^m{,}3 \times 1^m{,}5 \times 0^m{,}7 = 1^{m3}{,}365 \text{ ou } 1365 \text{ litros}$$

A caixa contém 1365 litros d'água.

19 — Exercício VI.

Uma caixa de forma retangular tem por base um quadrado de $0^m{,}6$ de lado e a altura igual a $1^m{,}2$. Sabendo-se que essa caixa está cheia de álcool, que pesa 794 gramas por litro, calcular o pêso dêsse álcool contido na caixa.



Resolução:

O volume da caixa, será:

$$V = 0{,}6 \times 0{,}6 \times 1{,}2$$

Efetuando, temos:

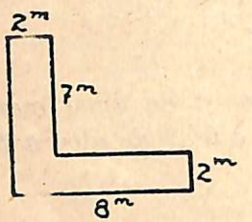
$$V = 0{,}432$$

A caixa contém, portanto, 432 litros. Como cada litro de alcool pesa 794 gramas o peso do alcool contido na caixa será:

$$794^{g} \times 432 = 343^{g}{,}008$$

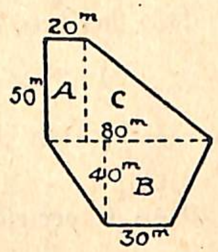
Exercícios

59 — Um terreno mede 14^{m} de frente por 30^{m} de fundos. Nesse terreno constroe-se uma casa que ocupa uma área quadrada de $10^{m},5$ de lado. Qual é a porção do terreno não construída ?



60 — A varanda de uma casa tem a forma de um *L com* as dimensões indicadas na figura ao lado. Essa varanda deve ser pavimentada com ladrilhos. Quanto custará a pavimentação dessa varanda, se 1^{m2} de ladrilhos colocados custa 18$000 ?

61 — Um terreno irregular está dividido em três lotes: um retângulo *A* de 20^{m} de largura e 50^{m} de comprimento, um trapézio *B* de 40^{m} de altura e cujas bases medem 30^{m} e 80^{m} e um triângulo retângulo *C*. Qual é a área total dêsse terreno ?



Leitura

ARQUIMEDES (*)

(J B. Mello e Souza)

Quasi todos os historiadores, inclusive o celebre Plutarco, procuraram fixar a vida de Arquimedes no ante-século III, entre os anos — 287 *e* — 212.

(*) Escrito especialmente para esta obra.

Era o famoso siracusano filho de um astrônomo chamado Fidias, e ligado por laços de parentesco ao rei Hierão, soberano de sua cidade natal.

Jovem ainda, empreendeu Arquimedes uma viagem ao Egito; em Alexandria, que era, então, um centro de intensa cultura, frequentou as lições dos ilustres sucessores de Euclides (*) *e estudou com os matemáticos Conon, de Samos. Dositheu de Pelusa e Eratosthenes, aos quais dedicou grande número de suas obras. Voltando, mais tarde, ao Egito, foi ali encarregado de vários trabalhos em que já demonstrou sua profunda capacidade técnica.*

A mór parte de sua existência, passou-a Arquimedes em Siracusa consagrando-se inteiramente às investigações tendentes ao progresso da Matemática, e produzindo memoráveis trabalhos sobre assuntos de Aritmética, Geometria, Mecânica Hiarostática e Astronomia. De todos esses ramos da ciência tratou com maestria. "Apresentando conhecimentos novos, explorando teorias novas, com uma originalidade que dá ao geômetra o mais alto posto na História do progresso da ciência. (**).

Um fato, a que Gino Loria atribue o cunho de lenda. caracteriza bem o valor de Arquimedes.

Mandára Hierão construir um navio de grandes dimensões, o qual, devido a seu peso consideravel, não pôde ser retirado do estaleiro e lançado ao mar. Hierão, receioso de perder o sacrifício dispendido na construção da pesada nave, pediu, para a solução do caso, o auxílio do reconhecido engenho de Arquimedes. Êste, utilisando-se de uma máquina que inventou especialmente para tal fim, conseguiu, com geral surpresa, deslocar a enorme embarcação e levou-a com relativa facilidade, até o mar.

(*) Segundo Gino Loria (*Histoire des Sciences Mathématiques dans l'Antiquité Hellénique*), o autor dos "Elementos" já havia falecido.

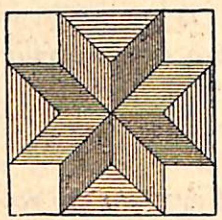
(**) F. A. Vasconcelos — "História da Matemática na Antiguidade".

Diz-se que, ao receber as felicitações do rei pelo exito de seus esforços, o geômetra respondeu com uma frase que encerra a bravata célebre na ciência:

— Dá-me um ponto de apoio no espaço, e eu deslocarei terra e céu! (*).

É de notar, realmente, que, apesar de seu amor pelas especulações teóricas, a tradição e o testemunho dos antigos referem ter sido Arquimedes autor de muitas invenções mecànicas e de aparelhos vários, destinados a fins práticos, os quais fizeram com que os conterraneos admirassem nele mais o engenheiro do que o geômetra (**).

Entre essas invenções figuram o parafuso sem fim *e o sistema de* multiplicação de roldanas *Hoeffer menciona, tambem, uma esfera celeste,* (***) *feita por Arquimedes, e que transportada mais tarde para Roma, foi alí objeto de extraordinária admiração.*



(*) Os escritores latinos conservaram a frase sob a forma de um hexâmetro. *"Da uhi consistam, et terram coelumque movebo".* Segundo calculou Fergusson, na "Astronomy Explained", um homem pesando 80 quilos, com uma alavanca de 20 quintilhões de quilômetros, ao cabo de vinte bilhões de anos, deslocaria a Terra... de 25 milímetros ! *"Excusez du peu !".*

(**) F. P. Vasconcelos, *op. cit.*

(***) Políbio, Tito Lívio e Plutarco (Notas do autor).

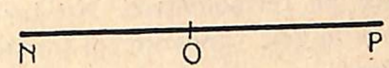
CAPÍTULO XIX

NÚMEROS RELATIVOS OU QUALIFICADOS

1 — Grandeza suscetível de ser contada em dois sentidos.

Encontramos comumente grandezas que podem ser medidas em dois sentidos diferentes; outras ha que podem ter acepções opostas.

Vejamos um exemplo bem simples:



Suponhamos que passando por um certo ponto *O* existe uma estrada retilínea *NP*, e que um viajante, tendo partido de *O*, caminhou pela estrada uma certa distância: 8 quilômetros, por exemplo.

Essa indicação não é suficiente, pois é evidente que a distância dada pode ser contada sobre a estrada em dois sentidos: ou de *O* para *N* ou de *O* para *P*.

A dúvida desaparecerá quando adotarmos a seguinte convenção: as medidas feitas num certo sentido serão precedidas do sinal + (mais) e serão chamadas *positivas*, e aquelas que forem feitas em sentido oposto serão precedidas do sinal — (menos) e denominadas *negativas*.

Convencionemos, ainda que o sentido de *O* para *P* é positivo; nesse caso qualquer medida feita de *O* para *N* será negativa.

Se depois dessa convenção alguem nos disser que um viajante, tendo partido de *O*, andou + 8 (lemos: mais oito) sabemos que ele se acha, entre *O* e *P*, a uma distância 8 do ponto *O*.

Se ao contrário o viajante tivesse, a partir do mesmo ponto O, *percorrido* a distância — 8 (lemos: menos 8) teria andado de O para *N*.

Eis aí, portanto, uma grandeza sucetível de ser contada em dois sentidos.

2 — Origem.

O ponto *O*, arbitrariamente escolhido, a partir do qual contamos as medidas positivas e negativas é denominado *origem*.

3 — A medida das temperaturas.

No caso das medidas das temperaturas podemos obter igualmente números positivos e negativos.

A medida da temperatura de um corpo é feita com auxílio de um aparelho, bastante conhecido, chamado *termometro*.

Ha vários típos de termometros. No termometro centigrado a temperatura do gelo fundente foi tomada para origem, e corresponde, portanto, ao zero da escala.

Convencionou-se que os corpos mais *quentes* do que o gelo teriam temperatura *positiva*, e que os mais *frios* teriam temperatura *negativa*.

Assim, quando dizemos que um corpo apresenta a temperatura de + 6º queremos indicar que êsse corpo está numa temperatura de 6 graus mais elevada que a temperatura do gelo; quando dizemos que um corpo apresenta a temperatura de — 3º (lemos: menos três graus) queremos indicar que faltam 3 graus para que a temperatura desse corpo fique igual à do gelo.

A temperatura negativa — no termometro centigrado — indica, apenas, que o corpo é *mais frio* que o gelo fundente

4 — O dinheiro — Crédito — Débito.

Em relação ao dinheiro podemos, graças a um artifício, introduzir tambem a noção de *sentido*, e, com auxílio de uma

convenção muito simples, obter para as medidas monetárias números positivos e negativos.

Convencionemos que as quantias ganhas ou recebidas sejam *positivas* e que as quantias gastas ou perdidas sejam *negativas*. As dívidas representarão tambem, para quem as tem, quantias *negativas*.

Um exemplo mostrará claramente a grande comodidade que essa convenção trás para o cálculo.

Vamos supor que uma pessoa, que mantem transações com uma casa comercial, depositou nessa casa, em conta corrente, a quantia de 15 contos, por exemplo. No fim de algum tempo essa pessoa retirou a quantia de 18 contos. Qual é o saldo da conta corrente?

É evidente que o correntista tendo depositado 15 e retirado 18 ficou a dever a quantia de 3 contos; o seu saldo será, portanto, segundo a nossa convenção, *negativo* e igual a — 3 contos.

O saldo negativo indicará um débito; o saldo positivo um crédito.

5 — Exemplo.

Um negociante entrou numa sociedade comercial com 30 contos e saiu, sem ter tido outra retirada, com 22 contos.

Dizemos nesse caso que o negociante saiu com — 8 contos, isto é, que perdeu 8 contos.

6 — As medidas de tempo.

Adotada uma certa convenção podemos obter facilmente, nas medidas de tempo, números positivos e negativos.

Uma vez escolhida a origem, que será um *instante* considerado, o tempo decorrido entre êsse instante e um fato qualquer ocorrido posteriormente será *positivo*; o período de tempo compreendido entre êsse mesmo instante (origem) e um fato anterior será *negativo*.

Para os tempos históricos a origem adotada é o ano do nascimento de Cristo

Quando dizemos, por exemplo, que Arquimedes nasceu no ano — 287, queremos com essa data negativa indicar apenas que o famoso geômetra nasceu 287 anos antes de Cristo

7 — Exercício I.

Uma pessoa nasceu em 1905; que idade tinha em 1900?

Resposta: — 5 anos.

Essa resposta indíca que em 1900 faltavam ainda 5 anos para que a pessoa em questão nascesse

8 — Números aritméticos.

Um número qualquer, considerado isoladamente, sem estar precedido do sinal + ou do sinal — é denominado um *número aritmético.*

Assim, 13; $\frac{4}{5}$; 0,39 são números aritméticos.

9 — Números positivos. Números negativos.

Chama-se número *positivo* a um número aritmético, diferente de zero e afetado ao sinál +.

Exemplos: $+ 18$, $+ \frac{4}{5}$, $+ 1{,}92$.

Chama-se número *negativo* a um número aritmético, diferente de zero, afetado do sinál —.

Exemplos: $- 76$, $- \frac{2}{9}$ $- 4{,}1$.

10 — Zero.

O zero não pertence nem ao conjunto dos números positivos, nem ao conjunto dos números negativos.

Os símbolos + 0 e — 0 significam a mesma cousa.

11 — Números relativos ou qualificados.

Ao conjunto formado pelos números positivos, o zero e os números negativos chamamos *números relativos* ou *qualificados.*

Assim, $+ 5$ $+ 3$ $- 2$ $- 4\frac{1}{2}$ são números relativos. (*)

12 — Valor absoluto de um número relativo.

Chamamos *valor absoluto* de um número relativo ao número aritmético que obtemos quando suprimimos o sinal desse número relativo.

Assim o valor absoluto de + 7 é 7 e o valor absoluto de — 9 é 9.

13 — Exercício II.

Determinar a soma dos valores absolutos dos números.

$- 3$ $+ 6$ $- 7$ $- 2$

Resposta:

A soma dos *valores absolutos* dos números dados é 18.

14 — Como se representa o valor absoluto de um número relativo.

O valor absoluto de um número relativo é indicado escrevendo-se êsse número entre duas pequenas barras.

Exemplo: $| 8 - | = 8$

lê-se: valor absoluto de — 8 é igual a 8.

(*) A origem histórica da noção de números negativos não se encontra na consideração de determinadas classes de grandezas, mas na necessidade de interpretar o resultado de uma subtração quando o minuendo é menor do que o subtraendo (Amoroso Costa — *As idéas fundamentais da Matemática*, 1929, pág. 80).

Sendo m um número relativo qualquer, o simbolo $|m|$ representa o valor absoluto de m.

15 — Valor absoluto dos números positivos.

Podemos admitir, em relação aos números positivos, a seguinte convenção:

Todo número positivo é igual ao seu valor absoluto

Essa convenção permite que escrevamos:

$$+8 = 8$$

Fica assim convencionado que os números positivos *são idênticos aos números aritméticos.*

É evidente, portanto, que quando um número relativo não apresenta sinal explícito êsse número é *positivo.*

Assim, entre os números 8 — 3 7 o primeiro 8 e o último 7 são positivos.

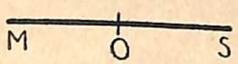
16 — Igualdade de números relativos.

Para que dois números relativos sejam *iguais* é necessário que tenham o mesmo valor absoluto e o mesmo sinal.

No caso contrário os números relativos serão desiguais.

17 — Eixo.

Sobre uma reta fixa MS marquemos um ponto O (origem) a partir do qual medimos as distâncias positivas e negativas sobre a reta.



Convencionemos para essa reta um *sentido positivo.*

Admitamos, por exemplo, que o sentido *positivo* é de O para S. Uma distância qualquer contada de O para M será negativa.

Fica assim a reta *orientada.*

Essa reta orientada, isto é, para a qual escolhemos um sentido positivo recebe a denominação especial de *eixo.*

Eixo é, pois, uma reta orientada

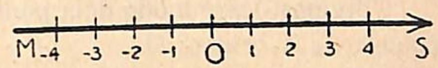
O sentido positivo de um eixo é, em geral, indicado por meio de uma flexa colocada na extremidade.

OS será o semi-eixo positivo; OM será o semi-eixo negativo.

18 — Série numérica. — Representação gráfica.

Sobre um eixo MS préviamente escolhido, marquemos a origem O.

Fixada uma unidade para a medida das distâncias, marquemos, a partir do ponto O, distâncias iguais a 1, 2, 3, 4, etc. sobre o semi-eixo positivo.



Os pontos assim marcados corresponderão aos números:

$$+1, \quad +2, \quad +3, \quad +4 \text{ etc.}$$

A partir do ponto O, sobre o semi-eixo negativo, marquemos distâncias iguais à unidade. Obtemos desse modo os pontos correspondentes aos números negativos:

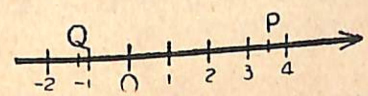
$$-1, \quad -2, \quad -3, \quad -4 \text{ etc.}$$

Fica assim formada uma *escala numérica.* A cada ponto do eixo corresponderá um número relativo; reciprocamente, a cada número relativo corresponderá um ponto do eixo.

19 — Observação.

É evidente que sobre o eixo podemos marcar pontos correspondentes a números relativos fracionários.

Exemplo:



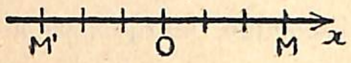
O número + 3,5, compreendido entre 3 e 4, corresponderá ao ponto P.

O número — 1 1/4, corresponderá ao ponto Q situado entre — 1 e — 2.

Em certos casos só podemos fixar aproximadamente a posição do ponto correspondente a um número relativo dado (*).

20 — Números simétricos.

Consideremos um eixo Ox.



Marquemos sobre êsse eixo dois números do mesmo valor absoluto e de sinais contrários: + 3 e — 3, por exemplo.

Obtemos desse modo dois pontos M e M' que são *simétricos* em relação à origem O.

Os números que tem o mesmo valor absoluto e de sinais contrários são por isso denominados *números simétricos*.

Exemplo: + 7 e — 7 são simétricos.

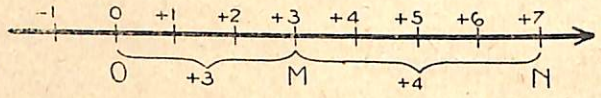
21 — Adição de números positivos.

Consideremos dois números positivos quaisquer:

+ 3   + 4

Como já vimos os números positivos são idênticos aos números aritméticos; logo a soma dos números + 3 e + 4 é igual a 7.

A interpretação gráfica dessa operação pode ser feita de um modo muito simples.



A partir do ponto O marquemos dois segmentos consecutivos $O\,M$ e $M\,N$ respectivamente iguais a + 3 e a + 4.

O ponto N corresponderá ao número + 7.

(*) Uma vez construida uma escala numérica as expressões *ponto* e *número* podem ser consideradas como completamente eqüivalentes. (*Knopp* — Teoria das funciones — Ed. Labor, pág. 11).

22 — Adição de números negativos.

Consideremos dois números negativos

— 5 e — 9, por exemplo.

A soma desses números é — 14

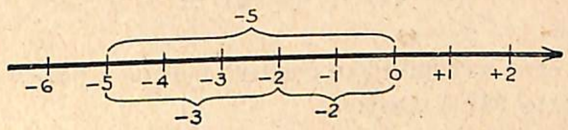
A soma de dois números negativos é um número negativo cujo valor absoluto é igual à soma dos valores absolutos das parcelas.

Exemplo: (— 3) + (— 5) = — 8.

23 — Observação.

A soma de dois números algébricos negativos pode ser explicada, de um modo muito simples.

Vamos supor que um negociante deve a um banqueiro a quantia de 5 contos e a outro a quantia de 9 contos. Essas dívidas, conforme uma convenção podem ser representadas por números negativos. O negociante tem assim nos bancos saldos negativos respectivamente iguais a —5 e a —9. A *soma* desses dois saldos é igual a —14, isto é, o negociante deve aos dois banqueiros a quantia de 14 contos.



Na figura vemos gráficamente indicada a soma dos números —2 e —3.

24 — Exercício III.

Determinar a soma dos números —6 e —11.

Resposta:

A soma dos números —6 e —11 é igual a —17

25 — Adição de números relativos de sinais contrários.

Vejamos agora como determinamos a soma de dois números relativos, sendo um positivo e o outro negativo.

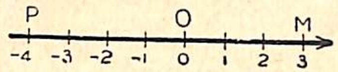
Consideremos os números $+3$ e -7.

A soma desses dois números poderá ser interpretada gràficamente do seguinte modo:

Uma pessoa que se achava em O (origem) caminhou a distância $+3$ (para a direita), chegando ao ponto M.

A partir do ponto M $(+3)$ caminhou a distância -7 (para a esquerda) indo ter ao ponto P, que corresponde — como nos mostra a figura ao número -4.

Logo $+3 + (-7) = -4$.



Conclusão:

A soma de dois números relativos de sinais contrários tem para valor absoluto a diferença entre os valores absolutos das parcelas. O sinal do resultado é igual ao sinal da parcela que tiver maior valor absoluto.

Exemplo: consideremos as seguintes operações:

$$(-5) + (+8) = +3$$
$$(-11) + (+2) = -9$$

No 1.º caso o resultado é positivo porque a parcela de maior valor absoluto (8) é positiva.

No 2.º caso o resultado é negativo porque a parcela de maior valor absoluto (11) é negativa.

26 — Exemplo.

Soma de números relativos:

$$\begin{array}{r} -10 \\ +7 \\ \hline -3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -6 \\ +11 \\ \hline +5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +3 \\ -8 \\ \hline -5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -12 \\ +14 \\ \hline +2 \end{array}$$

27 — Adição de números simétricos.

A soma de dois números simétricos é igual a zero

Exemplo: $-8 + 8 = 0$.

28 — Soma algébrica.

A soma de números relativos é denominada *soma algébrica*.

29 — Adição de vários números relativos.

Vamos calcular a soma dos números relativos:

$$+3 \qquad -8 \qquad +7 \qquad -6$$

A soma desses números será indicada escrevendo-se um ao lado do outro, conservando cada número o respectivo sinal

$$+3 \quad -8 \quad +7 \quad -6$$

Efetuemos a adição desses números do seguinte modo: somamos algèbricamente os dois primeiros, o resultado juntamos ao terceiro, êsse segundo resultado ao quarto, e assim por diante:

$$+3 - 8 = -5 \quad \text{(soma dos dois primeiros)}$$
$$-5 + 7 = +2$$
$$+2 - 6 = -4$$

O resultado final é -4

30 — A soma algébrica é comutativa.

A adição de números relativos é uma operação comutativa, pois a ordem das parcelas não altera a soma.

31 — A soma algébrica é associativa.

Na adição de vários números relativos podemos substituir duas ou mais parcelas por sua soma algébrica.

A adição de números relativos é, portanto, uma operação associativa.

Exemplo: $-3 + 7 - 8 + 10$

Podemos substituir as duas últimas parcelas pela soma $+2$; temos:

$$-3 + 7 - 8 + 10 = -3 + 7 + 2.$$

32 — Observação.

Em certos casos a adição de vários números relativos poderá ser efetuada da seguinte maneira:

Somamos em primeiro logar todas as parcelas positivas: em seguida somamos todas as parcelas negativas. O resultado final será dado pela soma algébrica dos dois resultados obtidos.

Exemplo: Seja somar os números:

$$-8 + 3 - 7 + 12 - 5 + 11 - 9.$$

A soma das parcelas positivas é

$$+3 + 12 + 11 = 26.$$

A soma das parcelas negativas é

$$-8 - 7 - 5 - 9 = -29.$$

A soma final será

$$+26 - 29 = -3.$$

33 — Subtração de números relativos.

Seja determinar a diferença entre os números $+5$ e -2.

Indicamos essa operação do seguinte modo:

$$+5 - (-2)$$

escrevendo o subtraendo -2 entre parentesis.

Ora, sabemos que numa subtração $a - b$ a diferença somada ao subtraendo b dá um resultado igual ao minuendo a.

Queremos, pois, achar um número que somado a -2 (que é o subtraendo) dê uma soma igual a $+5$ (que é o minuendo).

O número $+7$ somado a -2 dá $+5$, logo o número $+7$ é a diferença entre $+5$ e -2.

Escrevamos pois:

$$+5 - (-2) = +7$$

Essa expressão nos mostra que a diferença $+7$ foi obtida juntando-se o minuendo ao subtraendo tomado com o sinal contrário.

$$+5 - (-2) = +5 + 2 = 7$$

Conclusão:

Para acharmos a diferença entre dois números relativos somamos o primeiro número (minuendo) *ao subtraendo tomado com o sinal contrário.*

Exemplo:

$$-8 - (+5) = -8 - 5 = -13$$
$$2 - (+7) = 2 - 7 = -5$$

Em geral:

$$a - (+b) = a - b$$
$$a - (-b) = a + b$$

34 — Diferença entre dois números relativos.

A regra que acabamos de estabeleecr para a subtração de números relativos poderá ser verificada com auxílio de um exemplo muito simples:

Vamos supor que um grande prédio de construção moderna apresenta 10 pavimentos. Desses 10 pavimentos, porém, por causa da situação especial do edifício, 7 foram construidos acima do nível da rua, um ao nível da rua e 2 foram construidos em sub-solo, isto é, abaixo do nível da rua.

Os andares construidos acima do nível da rua foram designados por números positivos:

$$+1 \quad +2 \quad +3 \quad +4 \quad +5 \quad +6 \quad +7$$

e os andares inferiores por números negativos: -1 -2

Um indivíduo que se acha no andar $+2$ e quer atingir o andar $+7$ terá que subir 5 andares.

Um indivíduo que se acha, por exemplo, no pavimento $+7$ e quizer ir para o $+2$ terá que descer 5 andares.

Em geral: Um indivíduo que se achar no pavimento a e quizer ir a b terá que subir ou descer conforme a diferença $b - a$ for positiva ou negativa.

Se a diferença $b - a$ for positiva ele terá de *subir;* no caso contrário terá de *descer.*

I Caso) *Um indivíduo se acha em* -2 *e quer ir a* $+3$.

Determinemos a diferença entre $+3$ e -2:

$$+3 - (-2) = +3 + 2 = +5$$

Nesse caso terá de *subir* 5 andares.

II Caso) *Uma pessoa que se acha em* $+3$ *e quer ir a* -1.

Determinemos a diferença entre -1 e $+3$:

$$-1 - (+3) = -1 - 3 = -4$$

Nesse caso terá que *descer* 4 andares.

III Caso) *Uma pessoa que se acha em* -2 *quer ir a* $+5$.

Determinemos a diferença entre $+5$ e -2:

$$+5 - (-2.) = 5 + 2 = +7$$

Nesse caso a pessoa terá que *subir* 7 andares.

35 — Exercício IV.

Numa cidade a temperatura máxima foi de $32°$ *e a temperatura mínima foi de* $-3°$. *Determinar a diferença entre essas temperaturas extremas.*

Resolução:

Calculemos a diferença algébrica entre os números 32 e -3:

$$32 - (-3) = 32 + 3 = 35.$$

A diferença pedida é de $35°$.

36 — Exercício V.

Um negociante, que devia a quantia de 15 contos, tendo feito uma transação pôde, com o lucro, pagar a dívida e ainda ficou com um saldo de 8 contos. Qual foi o lucro obtido na transação

Resolução:

O lucro é igual à diferença entre o saldo $(+8)$ e a divida (-15); logo será:

$$+8 - (-15) = 8 + 15 = 23$$

O negociante lucrou, portanto, 23 contos na transação.

37 — Números relativos em ordem crescente.

Sejam a e b dois números relativos quaisquer.

Dizemos que a é maior do que b quando a diferença $a - b$ fôr positiva.

De acordo com essa convenção —3 é maior que —8, pois a diferença entre —3 e —8 é positiva e igual a 5.

$$-3-(-8)=-3+8=5.$$

Podemos escrever: $-3 > -8$

Quando a diferença entre a e b for negativa o número a será menor que o número b.

Assim — 5 é menor do que 2, conforme podemos mostrar pela diferença.

$$-5-(+2)=-5-2=-7$$

A desigualdade convencional

$$a < o$$

indíca que a é um número negativo.

A desigualdade

$$b > o$$

indíca que b é positivo.

38 — Produto de números relativos.

No produto de dois números relativos temos três casos a considerar:

I caso — Os dois fatores são positivos.

Nesse caso o produto é positivo

$$(+3)\ (+5)=15$$

ou

$$3 \times 5 = 15$$

II caso — Um fator é positivo e o outro é negativo.

Esta soma indíca o produto $3 \times (-4)$

$$\left\{\begin{array}{r} -4 \\ -4 \\ -4 \\ \hline -12 \end{array}\right.$$

Nesse caso o produto é negativo

$$+3 \times (-4) = -12$$

III caso — Os dois fatores são negativos.

Nesse caso o produto é positivo:

$$(-4) \times (-7) = +28$$

Em relação a um produto de dois números algébricos podemos concluir:

Quando os dois fatores são do mesmo sinal o produto é positivo; quando os fatores forem de sinais contrários o produto é negativo.

O valor absoluto do produto de dois números relativos é sempre igual ao produto dos valores absolutos dos fatores.

39 — Produto de dois números negativos.

Dissemos que o produto de dois números negativos é um número positivo.

Com efeito.

Tomemos, por exemplo, os números

$$-4 \text{ e } -7.$$

Efetuaremos o produto do primeiro pela diferença 7—7, multiplicando-o, como já sabemos, por ambos os termos da diferença:

$$-4\ (7-7)$$

Como, porém, 7 — 7 é igual a zero o produto de —4 por 7 — 7 deve ser tambem igual a zero.

O produto de —4 por 7 (que é o 1.º termo da diferença) é igual a — 28; para que o resultado seja zero é necessário que o produto de —4 por —7 (que é o 2.º termo da diferença) dê um resulutado igual a + 28

E assim temos:

$$-4\ (7-7) = -28 + 28 = 0$$

De um modo geral podemos escrever:

$$(-a)\ \ (-b) = a\,b$$

40 — Produto de um número por — 1.

Multiplicar um número relativo — positivo ou negativo — por —1 é o mesmo que trocar o sinal desse número.

Exemplo:

$$(-8) \times (-1) = +8$$
$$(+7) \times (-1) = -7$$

Em geral

$$(-a) \times (-1) = a$$
$$(+a) \times (-1) = -a$$

41 — Produto de vários números relativos.

O produto de vários números relativos é obtido do seguinte modo:

Multiplicamos o 1.º fator pelo 2.º; o resultado encontrado pelo 3.º, esse novo resultado pelo 4.º e assim sucessivamente.

Exemplo. O produto

$$(-3)\ (+2)\ (-5)\ (-4)$$

será efetuado

$$(-3)\ (+2) = -6$$
$$(-6)\ (-5) = +30$$
$$(+30)\ (-4) = -120$$

O produto de vários números relativos é *positivo* quando o número de fatores negativos for *par*; e será *negativo* quando o número de fatores negativos for *impar*.

Exemplo. O produto dos números

$$(-5)\ (+4)\ (-6)$$

será positivo e igual a 120.

O produto

$$(-8)\ (-2)\ (+5)\ (-3)$$

será negativo e igual a — 240.

42 — Observação.

O produto de dois ou mais números relativos não se altera quando mudamos a ordem dos fatores.

A multiplicação de números relativos é, portanto, uma operação *comutativa.*

Num produto de números relativos podemos substituir dois ou mais fatores pelo seu produto efetuado.

Exemplo: No produto

$$(-4)\ (-5)\ (+3)\ (-8) = (+20)\ (+3)\ (-8)$$

Substituimos dois fatores pelo produto efetuado.

A multiplicação de números relativos é uma operação *associativa*.

43 — Divisão de números relativos.

Na divisão de números relativos temos dois casos a considerar.

I caso — O dividendo e o divisor são do mesmo sinal.

$$\frac{+12}{+3} = +4$$

$$\frac{-12}{-3} = +4$$

Nesse caso o quociente é *positivo.* O valor absoluto do quociente é igual ao quociente dos valores absolutos dos números dados.

II caso — O dividendo e o divisor são de sinais contrários.

$$\frac{+28}{-4} = -7$$

$$\frac{-28}{+4} = -7$$

Nesse caso o quociente é *negativo.* O valor absoluto do quociente é igual ao quociente dos valores absolutos dos números dados.

Conclusão:

Quando o dividendo e o divisor são do mesmo sinal o quociente é positivo; *quando o dividendo e o divisor são de sinais contrários o quociente é* negativo.

44 — Exercício VI.

Dividir — 30 *por* + 6.

Resolução:

O quociente será — 5, pois êsse número multiplicado pelo divisor (+ 6) dá um produto igual ao dividendo (— 34).

45 — Exercício VII.

Dividir — 40 *por* — 8.

Resolução:

O quociente será + 5, pois êsse número multiplicado pelo divisor — 8 dá um produto igual ao dividendo (— 40).

46 — Potenciação de números relativos.

Determinemos, a partir do quadrado, as potências sucessivas de — 3, por exemplo.

Temos:

$$(-3)^2 = (-3)\ (-3) = +9$$
$$(-3)^3 = (-3)\ (-3)\ (-3) = -27$$
$$(-3)^4 = (-3)\ (-3)\ (-3)\ (-3) = +81$$
$$(-3)^5 = (-3)\ (-3)\ (-3)\ (-3)\ (-3) = -243$$

Podemos concluir, à vista desse exemplo, o seguinte princípio:

A potência de um número negativo é positiva quando o expoente é par *e é negativa quando o expoente é* ímpar.

Exemplo:

$$(-8)^2 = 64$$
$$(-5)^3 = -125$$

Exercícios

62 — Determinar a soma algébrica dos números:

— 8 + 7 — 11 — 2 + 9

e multiplicar o resultado obtido por — 2.

63 — Somar algébricamente os números:

— 5,4 + 9,3 — 3,8 — 1,9

e do resultado tirar 8,6.

64 — Indicar gráficamente a soma dos números:

— 2 — 3 + 8

Leitura

A MORTE DE ARQUIMEDES (*)

(J. B. MELLO E SOUZA)

A *formidável projeção que a fama de Arquimedes,* o Grande Geômetra, *no dizer de Comte, teve na História, provém, certamente, do concurso genial que ele prestou, na defesa de sua pátria contra os romanos, durante a segunda guerra púnica. O sábio siracusano concebeu, então, verdadeiras maravilhas de engenho, para impedir que as forças sob o comando de Marcelo tomassem a cidade. Construiu catapultas gigantescas, que lançavam à distância pesados blocos de pedra; inventou máquinas munidas de arpões que agarravam as galéras romanas, erguiam-n'as e deixavam-n'as depois cair violentamente ao mar, submergindo-as; fabricou aparelhos que atiravam substâncias inflamaveis e que levavam assim o incêndio e o terror à frota romana.*

Arquimedes possuia, diz Malet, em alto gráu, todas as qualidades de um grande cabo de guerra; o saber, a previdencia, a decisão. Afóra o caso da corôa de Hierão, o episódio, sem dúvida, mais citado da carreira de Arquimedes foi o do aparelho formado por espelhos concavos, com o qual, pela concentração de raios solares, ele conseguiu incendiar navios romanos que lhe passavam ao alcance, fazendo incidir sôbre êles "um raio ardente e destruidor".

(*) Continuação do artigo da pág. 278.

O certo é que, por três anos, lutou Marcelo em vão, contra a resistência pertinaz dos siracusanos. A força romana não lograva vencer o engenho de Arquimedes.

Siracusa só foi tomada porque certo dia, ocupados com uma festa solene em homenagem a Diana, os habitantes deixaram desguarnecido um dos lados da muralha. Os romanos, que ainda na vespera haviam sofrido sério revés, aproveitarm-se do descuido e invadiram a cidade, que foi, assim, tomada e posta a saque.

Conta-se que Arquimedes estava absorto no estudo de um problema, para cuja solução havia traçado uma figura geométrica na areia.

Um legionário romano encontrou-o e intimou-o a comparecer à presença de Marcelo. O sábio pediu-lhe que esperasse algum tempo, para que pudesse concluir a demonstração que estava fazendo.

Irritado por não ser imediatamente obedecido, o sanguinario romano, de um golpe de espada, prostrou sem vida o maior sábio do tempo.

Marcelo, que havia dado ordens no sentido de ser poupada a vida de Arquimedes, não ocultou o pezar que sentiu ao saber da morte do genial adversário. Sobre o lage do túmulo que erigiu, mandou Marcelo gravar uma esfera inscrita num cilindro, figura que lembrava um teorêma do célebre geômetra.

Arquimedes, cujo nome é um patrimonio da ciência, provou o quanto pode a inteligência humana posta ao serviço de um acendrado patriotismo.

CAPÍTULO XX

REPRESENTAÇÃO DAS QUANTIDADES POR MEIO DE LETRAS. EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

1 — O emprego das letras no cálculo.

Conforme já acentuamos (pág. 31) o emprêgo das letras, representando as quantidades, é de grande vantagem nos cálculos.

Entre as vantagens resultantes do cálculo literal sublinhemos as seguintes:

I) simplifica as operações;

II) geeraliza os problemas e as soluções.

Generalizar a solução de um problema é resolve-lo de modo tal que a solução obtida sirva para todos os casos particulares

2 — Generalização de um problema.

Seja, por exemplo, resolver o seguinte problema:

A soma de dois números é 187 e a diferença entre eles é 29 achar esses números.

Esse problema pode ser resolvido de um modo muito simples.

Da soma dada 187 tiramos a diferença 29. Temos:

$$187 - 29 = 158$$

E calculamos a metade dessa diferença:

$$158 \div 2 = 79$$

O menor dos números será 79 e o maior será igual a 187 — 79 ou 108.

A *solução* que apresentamos só serve para o problema proposto, em que a soma é 187 e a diferença é 29.

Representemos, porém, a soma dos dois números a calcular por S e a diferença — que era 29 — representemos por D.

Da soma S tirando D, vem:

$$S - D$$

Tomando-se a metade dessa diferença, temos:

$$\frac{S - D}{2}$$

Essa fração será igual ao menor número. Representando esse número por x, temos:

$$x = \frac{S - D}{2}$$

ou então, decompondo-se essa fração numa diferença de duas frações

$$x = \frac{S}{2} - \frac{D}{2}$$

Esse resultado nos permite concluir que o menor dos números é igual a semi-soma, menos a semi-diferença.

Analogamente podiamos mostrar que o maior dos números será

$$\frac{S}{2} + \frac{D}{2}$$

A solução do problema ficou assim generalizada, pois pode servir para todos os casos particulares.

O enunciado do problema proposto, uma vez generalizado, seria o següinte:

A soma de dois números é S; a diferença entre eles é D. Achar esses números.

3 — Expressões algébricas.

Uma expressão formada de letras e números ligados por sinais algébricos é denominada *expressão algébrica.*

Assim: $3\,m - 4\,ax$ é uma expressão algébrica.

4 — Termos.

Termo é a expressão algébrica que não contém os sinais + ou —, a não ser o sinal que o precede, que póde ser + ou —.

Exemplos: $8xy$ e $4am$ são termos.

Numa expressão algébrica os termos são ligados entre si pelos sinais + ou —.

Exemplo: Na expressão

$$4xy - 2al + 8 - 11m$$

ha quatro termos

O *sinal de um termo* é o sinal + ou — que precede êsse termo; os termos precedidos do + são denominados *positivos*, e aqueles que forem precedidos do sinal — são chamados *negativos*.

Convencionou-se que o termo não precedido de sinal é positivo.

Exemplo: a expressão $8\,r + 7\,y - 4\,m$ tem 3 termos; os dois primeiros são positivos e o último é negativo.

5 — Monômio.

Monômio é a expressão algébrica que só tem um termo.

Exemplo: $8xy$.

6 — Coeficiente.

Chama-se *coeficiente de um monômio* (*) o fator numérico que figura nesse monômio.

Exemplo. No monômio $7ay$ o coeficiente é 7.

Quando o monômio não contém fator numérico o coeficiente é $+ 1$, se o monômio for positivo e $- 1$ se for negativo.

Exemplo: No monômio ax o coeficiente é 1; no monômio $- by$ o coeficiente é $- 1$.

Quando consideramos uma certa letra de um monômio, o coeficiente é formado pelos outros fatores que figuram nesse monômio.

Exemplo: No monômio $4ax$ o coeficiente de x é $4\,a$; em $- 3aby$ o coeficiente de y é $- 3ab$.

7 — Polinômio.

Denomina-se *polinômio* a expressão algébrica que tem dois ou mais termos.

O polinômio que tem dois termos é denominado *binômio*.

Exemplo: $8\,a - x$ é um binômio.

O polinômio que tem três termos é denominado *trinômio*.

$4a - 2ab + c$ é um trinômio.

8 — Valor numérico de uma expressão.

Valor numérico de uma expressão é o valor que toma a expressão quando substituimos as letras por números dados.

(*) Supomos que o monômio contem uma parte literal. Todas as noções aqui apresentadas sob forma elementar serão desenvolvidas no livro *Matemática* — 3.º ano.

Exemplo. O valor numérico da expressão

$$5\,x + y + 7$$

para $x = 2$ e para $y = 6$ será

$$5 \times 2 + 6 + 7 = 23$$

9 — Fórmula.

Tomemos a igualdade

$$x = \frac{V\,d}{V - V'}$$

na qual o valor de uma incógnita x é expresso por meio de letras que representam valores dados. Essa igualdade é denominada uma *fórmula*.

Uma fórmula é, portanto, uma igualdade que nos dá, sob fórma abreviada, os cálculos que devemos efetuar sobre os dados de um problema para obtermos o valor da incógnita. (*).

As fórmulas são de emprego muito frequente em Matemática.

10 — Exercício I.

Calcular o valor numérico do trinômio $x^2 + 5\,x - 3$ *quando fazemos* $x = 4$.

Resolução:

Substituimos x por 4. Temos.

$$4^2 + 5 \times 4 - 3 = 16 + 20 - 3 = 33.$$

O valor numérico pedido é 33.

11 — Exercício II.

Determinar o valor numérico da expressão $y^2 + 3y + 5$ *quando fazemos* $y = - 4$.

(*) Designamos também por fórmulas certas identidades notáveis.

Resolução:

Substituindo na expressão dada y por — 4 temos:

$$(-4)^2 + 3\ (-4) + 5$$

Efetuando:

$$16 - 12 + 5$$

A soma algébrica dêsses números é 9.
E' êsse o valor numérico procurado.

12 — Exercício III.

Na expressão $8 + a - b$
fazer $a = -7$ e $b = -10$.

Resolução :

Substituindo a por — 7 e b por — 10 temos:

$$8 + (-7) - (-10)$$

ou

$$8 - 7 + 10 = 11$$

13 — Observação.

Quando numa expressão, cujo valor numérico vamos determinar, figura um termo constituido por uma letra precedida do sinal — (menos), êsse sinal indica que o valor numérico dessa letra deve ser tomado, na expressão, com o sinal contrário.

Exemplo: Na expressão

$$7 - t$$

fazer t igual a — 8.

O resultado será:

$$7 + 8$$

14 — Exercício IV.

No polinômio $a - m + x$
fazer $a = -4$; $m = -2$ e $x = 7$.

Resolução:

O valor de m (que no polinômio está precedido do sinal — (menos) deve ser tomado com o sinal contrário:

$$-4 + 2 + 7 = 5$$

15 — Exercício V.

Na expressão $5x^2 + 6y^3 + x - 7y$
fazer $x = -3$ e $y = -2$.

Resolução:

Substituindo-se x por — 3 e y por — 2, vem:

$$5\ (-3)^2 + 6\ (-2)^3 + (-3) - 7\ (-2)$$

Efetuando as potências indicadas:

$$(-3)^2 = 9 \qquad (-2)^3 = -8$$

temos:

$$5 \times 9 + 6\ (-8) + (-3) - 7\ (-2)$$

Efetuando os produtos indicados:

$$45 - 48 - 3 + 14$$

A soma algébrica dêsses números será: 8.
E' êsse o valor numérico da expressão dada quando substituirmos x por — 3 e y por — 2.

16 — Exercício VI.

Qual é o valor numérico da expressão πab *quando fazemos* $a = 5$ e $b = 4$

Substituimos na expressão πab, a por 5 e b por 4..

Temos: $\pi ab = \pi \times 5 \times 4 = \pi \times 20$.

Sendo, porém,

$$\pi = 3{,}14$$

temos:

$$3{,}14 \times 20 = 62{,}8$$

O valor numérico pedido é 62,8.

17 — Expressão de um enunciado por meio de símbolos algébricos.

I) *Um número é* x. *Exprimir o quadrado desse número mais o dobro desse mesmo número.*

Resposta: O quadrado de x é x^2; o dobro de x é $2x$. O quadrado de x mais o dobro de x será $x^2 + 2x$.

II) *Um número é* m. *Qual é o quadrado da terça parte desse número ?*

Resposta: A terça parte de m é $\frac{m}{3}$ e o quadrado dessa terça parte será $\left(\frac{m}{3}\right)^2$ ou $\frac{m^2}{9}$.

III) *O número* N *foi dividido em duas partes. Sendo uma* x *qual é a outra ?*

Resposta: $N - x$.

IV) *Indicar os produtos de dois números pares consecutivos.*

Resposta: Sendo m um número inteiro qualquer, $2m$ será um número par. Juntando-se duas unidades a um número par obtem-se o número par imediatamente superior. Logo $2m$ e $2m + 2$ são dois nnmeros pares consecutivos.

O produto pedido será $2m\ (2m + 2)$.

V) *Uma mulher tem galinhas e coelhos, ao todo 20 cabeças.*

Exprimir o número total de pés dessas galinhas e coelhos sendo x *o número de galinhas.*

Resposta: Sendo x o número de galinhas o número de coelhos será $20 - x$.

O número de pés de galinha será $2x$.
O número de pés de coelho será $4\ (20 - x)$.
O número total de pés será

$$2x + 4\ (20 - x)$$

Exercícios

65 — *Achar o valor numérico da expressão* $x^2 - 5x + 3$ *para* $x = -2$.

66 — No trinômio $x^2 - 15x + 50$ dar a x os seguintes valores: 3, 4, 5, 7 e 11 e somar os valores numéricos obtidos.

67 — Determinar o valor da expressão $a^2 - 3b^2 - b + 20$ para $a = 2$ e $b = 3$.

Leitura

ANIMAIS CALCULADORES

Um observador curioso, Leroy, querendo determinar o grau de inteligência dos corvos, chegou a concluir com segurança, depois de várias experiências, que êsses animais podem contar, sem êrro, até cinco.

Eis o artifício que empregou Leroy. (*)

Tendo verificado que os corvos nunca voltam para o ninho quando ha nas vizinhanças uma pessoa, fez construir uma choupana a pequena distância de um ninho de corvos. No primeiro dia mandou Leroy que um homem entrasse na choupana e observou que os corvos não procuraram o ninho senão depois que o homem se retirou da choupana. No segundo dia a experiência foi feita com dois homens; os corvos aguardaram que os dois homens abandonassem o improvisado esconderijo. O mesmo resultado foi obtido sucessivamente, nos dias seguintes, com três, quatro e cinco homens.

Essas experiências mostraram claramente que os corvos contaram os homens não só quando estes entraram, mas tambem quando depois, com pequenos intervalos, saiam da choupana.

Com seis homens já as cousas não se passaram do mesmo modo; os côrvos enganaram-se na conta — para eles muito complicada — e voltaram para o ninho quando ainda se achavam pessoas na choupana.

Os cães e os elefantes são igualmente dotados de admirável inteligência. Spencer, filósofo inglês, refere-se, no seu livro "A Justiça" a um cão que contava até três.

E Lucas, nas suas originalissimas "Récréations mathématiques", apresenta-nos um caso bastante singular. Trata-se de um chimpanzé do Jardim Zoológico de Londres, que aprendeu a contar até cinco.

(*) Cfr. A. Lucas — "Récréations mathématiques".

CAPÍTULO XXI

TÊRMOS SEMELHANTES — ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE POLINÔMIOS

1 — Termos semelhantes.

Dois ou mais termos são semelhantes quando têm as mesmas letras e essas letras respectivamente os mesmos expoentes.

Assim, no polinômio:

$$8ab^2 - 4ab^2 + 7ab^2 + 5a$$

os três primeiros termos são semelhantes.

No polinômio.

$$8x - 9x + 10x - x + 12$$

todos os termos, com exceção do último, são semelhantes.

Os monômios:

$$8ax; \quad -5ax \quad \text{e} \quad 7ax$$

são semelhantes.

Dois termos semelhantes, têm a mesma parte literal e não diferem senão pelos coeficientes.

2 — Termos idênticos.

Quando dois termos semelhantes têm o mesmo coeficiente, são denominados *idênticos*.

Exemplo: No polinômio

$$4ax + 5x - 8 + 4ax$$

o primeiro e o último termo são idênticos.

3 — **Adição de monômios semelhantes.**

Sejam, por exemplo, os monômios semelhantes:

$$9ab; \; -7ab \text{ e } -11ab$$

A soma desses monômios é obtida somando-se algébricamente os coeficientes, que são os números

$$9 \qquad -7 \qquad -11$$

e conservando-se a parte literal comum.

A soma algébrica dos coeficientes é -9

A soma dos monômios dados é igual a: $-9\,ab$

4 — **Exercício I.**

Somar os monômios

$$6my \quad -8my \quad -my$$

Resolução:

A soma algébrica dos coeficientes

$$6 \qquad -8 \qquad -1$$

é igual a -3.

Logo, a soma dos monômios dados é $-3\,my$.

5 — **Exercício II.**

Determinar a soma dos monômios

$$5xy \qquad + \frac{2}{3}\,xy \qquad - \frac{6}{5}\,xy$$

Resolução:

A soma algébrica dos coeficientes

$$5 \qquad \frac{2}{3} \qquad -\frac{6}{5}$$

é $\dfrac{67}{15}$

A soma dos monômios será $\dfrac{67}{15}\,xy$.

6 — **Redução de termos semelhantes.**

A soma algébrica de termos semelhantes é denominada *redução de termos semelhantes.*

Assim, a expressão

$$8a + 3a + 5a - 4a$$

pela redução de termos semelhantes é igual: $12a$

A expressão $8y - 6y$ será igual a: $2y$.

7 — **Exercício III.**

Reduzir os termos semelhantes contidos no polinômio:

$$y + 6a - 2a + 8a + 6y.$$

Resolução:

No polinômio dado o primeiro e o último termo são semelhantes; a mesma propriedade os outros termos apresentam.

Reduzindo os termos semelhantes, temos:

$$7y + 12a$$

ficando, portanto, o polinômio dado reduzido a dois termos.

8 — **Exercício IV.**

Efetuar a redução de termos semelhantes nos seguintes polinômios:

I) $8x - t + 4x - 7t - 11t$
II) $2b - 4p + m - 2p + p - m$

Resolução:

Reduzidos os termos semelhantes obtemos

I) $12x - 19t$
II) $2b - 5p$

9 — Exercício V.

Reduzir a um só termo as expressões

I) $7R + 0{,}2R$
II) $0{,}2b - 1{,}7b$
III) $-y - 8y$

Resolução:

Efetuando a redução dos termos semelhantes em cada expressão dada temos:

I) $7{,}2R$
II) $-1{,}5b$
III) $-7y$

10 — Exercício VI.

Reduzir a um só termo a expressão:

$$\frac{1}{3}x - \frac{4}{5}x$$

Resolução:

$$\frac{1}{3}x - \frac{4}{5}x = \frac{5}{15}x - \frac{12}{15}x = -\frac{7}{15}x$$

11 — Exercício VII.

Uma pessôa tinha 4m livros, comprou 7m livros e perdeu 3m livros. Com quantos livros ficou?

Resolução:

$$4m + 7m - 3m = 8m$$

Ficou com $8m$ livros.

12 — Adição de polinômios.

Seja, por exemplo, somar os polinômios:

$$8a + 5b - 7$$
$$2b + 4a + 2$$
$$5 - a + 3b$$

Temos:

$$(8a + 5b - 7) + (2b + 4a + 2) + (5 - a + 3b)$$

suprimindo os parentesis

$$8a + 5b - 7 + 2b + 4a + 2 + 5 - a + 3b$$

e reduzindo os termos semelhantes:

$$11a + 10b$$

Conclusão:

Somar dois ou mais polinômios é determinar a expressão resultante da redução dos têrmos semelhantes existentes entre os polinômios dados.

13 — Exercício VIII

Somar os polinômios:

$$4x - 6y + a$$
$$6a + x - y$$
$$3y - 2x - 2a$$

Resolução:

Reduzindo os termos semelhantes entre esses polinômios, temos:

$$3x - 4y + 5a$$

que é a soma dos polinômios dados.

14 — Valor numérico da soma de dois ou mais polinômios.

Sejam os polinômios:

$$8x - 5a + 7$$
$$2x + 7a + 8$$
$$x - 8a - 10$$

A soma desses polinômios obtida, como já sabemos, pela redução de termos semelhantes, é igual a:

$$11x - 6a + 5$$

Determinemos os valores numéricos dos polinômios dados, por exemplo, para

$$x = 3$$
$$a = 2$$

Temos:

Valor numérico do 1.º polinômio:

$$8 \times 3 - 5 \times 2 + 7 = 21$$

Valor numérico do 2.º polinômio:

$$2 \times 3 + 7 \times 2 + 8 = 28$$

Valor numérico do 3.º polinômio:

$$3 - 8 \times 2 - 10 = -23$$

A soma algébrica desses três valores numéricos será:

$$21 + 28 - 23 = 26$$

Calculemos o valor numérico da soma dos polinômios:

$$11x - 6a + 5$$

Temos:

$$11 \times 3 - 6 \times 2 + 5 = 26$$

Conclusão:

O valor numérico da soma de dois polinômios é igual à soma algébrica dos valores numéricos das parcelas.

15 — Exercício IX.

Somar os polinômios:

$$a - b + c$$
$$m + n - 3.$$

Resolução:

Como não encontramos termos semelhantes nos polinômios dados a soma será

$$a - b + c + m + n - 3.$$

16 — Subtração de polinômios.

Vamos supôr que do polinômio

$$m - a + 5$$

queremos tirar o polinômio

$$x - y + b$$

Sendo a subtração a operação inversa da adição podemos obter facilmente a diferença entre os dois polinômios dados.

Com efeito. Sabemos que essa diferença somada ao subtraendo

$$x - y + b$$

deve dar o minuendo:

$$m - a + 5$$

Consideremos o polinômio:

$$m - a + 5 - x + y - b$$

que é formado pelo primeiro polinômio (minuendo) seguido do segundo (subtraendo) com os sinais trocados.

Esse polinômio assim formado

$$m - a + 5 - x + y - b$$

somado com o subtraendo $x - y + b$

$$\begin{array}{r} m - a + 5 - x + y - b \\ x - y + b \\ \hline m - a + 5 \end{array}$$

dá um resultado igual ao minuendo.

Logo o polinômio

$$m - a + 5 - x + y - b.$$

é a diferença entre

$$m - a + 5$$

e

$$x - y + b$$

Conclusão:

A diferença entre dois polinômios é obtida juntando-se o polinômio minuendo ao polinômio subtraendo com os sinais trocados.

17 — Exercício X.

Do polinômio $2x - 3y + 4a - 9$ *tirar o polinômio* $5y - 3x + 4a - 8$.

Resolução:

Vamos somar o primeiro polinômio ao segundo com os sinais trocados.

1.º polinômio $2x - 3y + 4a - 9$.
2.º polinômio $5y - 3x + 4a - 8$

A diferença será obtida pela adição dos polinômios:

$$\begin{array}{r} 2x - 3y + 4a - 9 \\ -5y + 3x - 4a + 8 \end{array}$$

Somando êsses polinômios, temos:

$$5x - 8y - 1$$

18 — Exercício XI.

Efetuar a subtração.

$$1 + x - y - (8 + x - a)$$

Resolução

$$1 + x - y - (8 + x - a) = 1 + x - y - 8 - x + a =$$
$$= -7 - y + a$$

19 — Exercício XII.

Efetuar

$$1 - y - m - (x - y + 1)$$

Resolução

$$1 - y - m - (x - y + 1) = 1 - y - m - x + y - 1 =$$
$$= -m - x$$

Exercícios

68 — Somar os polinômios:

$$\begin{array}{l} 4a - 3x + 1 \\ x - 2a + 3 \\ 1 - a + x \end{array}$$

e do resultado tirar $8 - x + 4a$

69 — Calcular a soma dos polinômios:

$$x - 3y + 6xy \text{ e } 4xy + 8 - x$$

No resultado fazer $x = -2$ e $y = 5$ e calcular o valor numérico.

70 — Sendo:

$$x = a + b - c$$
$$y = a - b + c$$
$$z = b + c - a$$

Calcular: 1.°) $x - y + z$; 2.°) $x + y - z$; 3.°) $y - x$, e somar êsses três resultados.

Leitura

O PAPIRO RHIND (*)

(RAJA GABAGLIA)

Rhind, *célebre autor da obra* "Thebes, its tombs and their tenants" (**), *obteve no Egíto alguns papiros de alto valor que passaram, após seu falecimento, ao* Britsh Museum.

Entre essas preciosidades históricas, encontradas nas excavações dos túmulos faraônicos, destaca-se um papiro notável, designado comumente pela denominação especial de Papiro Rhind, *que é de alto valor científico, por ser o documento matemático mais antigo que se conhece.*

O Papiro Rhind é subordinado ao título pomposo de "Regra para chegar ao conhecimento de todas as cousas obscuras, de todos os segredos contidos nos objetos".

Foi escrito por um sacerdote egípcio Aàhmesu — ou melhor, Ahmés — "nascido de lua, no ano 33 de um rei chamado Ra-ã-us".

Essas e muitas outras indicações fizeram com que os egiptólogos, depois de longos e cuidadosos estudos, descobrissem que o trabalho do sábio Ahmés foi feito cêrca de 20 séculos antes de Cristo.

(*) Êste artigo foi tirado do livro "O papiro Rhind", do ilustre geômetra brasileiro Raja Gabaglia.

(**) Tebas, seus túmulos e suas múmias.

No Papiro, que não passa afinal de um manual prático destinado a um lavrador rude, encontram-se não só questões resolvidas puramente com transformações aritméticas, como também algumas noções bem desenvolvidas de Álgebra e de Geometria, acompanhadas das soluções de numerosos problemas.

Citemos, a título de curiosidade, o problema n. 6 do Papiro:

— *"Repartir* 9 *pães por* 10 *pessoas. Faze como isto é: multiplica o número* $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{30}$ *vezes* 10."

Como vemos, a solução é apresentada de uma maneira obscura.

Em alguns problemas a adição e subtração apareciam indicadas por um sinal representado por duas pernas; quando essas pernas estavam voltadas na direção da escrita representavam + *(mais), quando voltadas na direção oposta indicavam* — *(menos).*

Ahmés, segundo o uso tradicional dos egípcios, só empregava frações com numerador 1, exceção feita para a fração dois têrços, que para êle era a primeira fração.

A soma de conhecimentos matemáticos que se encontram no Papiro Rhind é admirável, pois convém ter presente que há uma diferença de dez séculos entre Ahmés e Thales.

CAPÍTULO XXII

EQUAÇÕES DO 1.º GRAU

1 — Equação.

Consideremos, por exemplo, a expressão

$$x + 10$$

na qual x, como já sabemos, designa uma quantidade desconhecida, isto é, uma incógnita.

É evidente que se não conhecermos o valor de x não nos será possível determinar o valor de

$$x + 10$$

Por outro lado, uma vez dado o valor de x estará imediatamente determinado o valor de

$$x + 10$$

Vamos supor, para um caso particular, que x seja igual a 6; nesse caso $x + 10$ será igual a 16.

Podemos, então, escrever:

$$x + 10 = 16.$$

Essa igualdade, na qual figura uma incógnita, é denominada *equação*.

2 — Raiz de uma equação.

Retomemos a equação que figura no parágrafo anterior:

$$x + 10 = 10.$$

Se substituirmos o valor de x por 6, o primeiro membro da equação fica igual ao segundo:

$$6 + 10 = 16.$$

Dizemos, então, que o número 6 *satisfez* a equação.

Em geral:

Um número "satisfaz" uma equação quando, substituindo-se a incógnita por êsse número, o primeiro membro da equação fica igual ao segundo.

O número que satisfaz uma equação é denominado *raiz* dessa equação.

3 — Exemplo.

A equação:

$$5 + x = 9 - x$$

é *satisfeita* para $x = 2$.

Com efeito, substituindo x por 2, temos:

$$5 + 2 = 9 - 2$$

e efetuando as operações indicadas: $7 = 7$.

Podemos dizer, portanto, que 2 é raiz da equação

$$5 + x = 9 - x.$$

4 — Exercício.

Mostrar que o número 5 é a raiz da equação

$$2x + 1 = 16 - x.$$

Resolução:

Substituindo-se x por 5 o primeiro membro da equação fica igual ao segundo. Com efeito:

$$2 \times 5 + 1 = 16 - 5$$

e efetuando as operações indicadas, vem: $11 = 11$.

Logo o número 5 é raiz da equação proposta.

5 — Número de incógnitas de uma equação.

Uma equação póde ter uma, duas ou mais incógnitas.

Assim a equação

$$x + y = 19$$

tem duas incógnitas: x e y.

A equação:

$$2x + y + z = 13$$

apresenta três incógnitas: x, y e z.

6 — Resolver uma equação.

Resolver uma equação é determinar a raiz (ou as raízes) dessa equação.

A equação: $7 - x = 4$ é *resolvida* para x igual a 3.

A equação: $x^2 + 4 = 5x$ é resolvida para $x = 1$ e para $x = 4$.

Essa última equação tem duas raízes.

7 — Exercício I.

Exprimir por meio de uma equação o seguinte problema: O produto de dois números é igual a 12. Achar êsses números.

Resolução:

Designemos o primeiro número por x e o segundo por y.

O produto dêsses dois números será xy e, segundo o enunciado do problema, êsse produto é igual a 12. Temos, portanto:

$$xy = 12$$

equação que resolvida nos dará as soluções do problema.

Essa equação $xy = 12$ admite, como, aliás, é fácil verificar, uma infinidade de soluções.

Consideremos, por exemplo, os seguintes pares de valores:

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -1 \\ y = -12 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2{,}4 \\ y = 5 \end{cases}$$

E todos êsses pares de valores satisfazem á equação.

$$xy = 12.$$

Exemplo:

$$2{,}4 \times 5 = 12.$$

8 — Problema indeterminado.

Um problema é *indeterminado* quando admite uma infinidade de soluções:

Exemplo:

Achar dois números cuja soma seja igual a 20.

Êsse problema admite uma infinidade de soluções.

Chamemos um dos números de x e o outro de y.

Temos a equação:

$$x + y = 20.$$

Atribuimos a x um valor qualquer; o valor de y será, evidentemente, a diferença entre 20 e o valor de x.

$$1 + 19 = 20$$
$$2 + 18 = 20$$

9 — Identidade.

Consideremos, por exemplo, a expressão:

$$x + x = 2x$$

na qual figura a incógnita ou *variável* x.

Essa igualdade:

$$x + x = 2x$$

é satisfeita, como imediatamente podemos verificar, para todo e qualquer valor atribuído a x.

Assim:

$$8 + 8 = 2 \times 8$$
$$15 + 15 = 2 \times 15$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Dizemos, por isso, que a igualdade

$$x + x = 2x$$

é uma *identidade*.

Identidade é uma igualdade que é satisfeita para todo e qualquer valor atribuído às letras.

10 — Sinal de identidade.

Uma identidade póde ser indicada pelo sinal $\equiv$ colocado entre os dois membros.

Assim:

$$x + 1 \equiv 1 + x$$

lê-se: x mais 1 é identicamente igual a 1 mais x.

11 — Equação impossível.

Dizemos que uma equação é *impossível* quando não admite solução.

Exemplo: a equação

$$x = x - 6$$

é impossível. Não há número algum que seja igual a si mesmo diminuido de 6 unidades.

12 — Equações eqüivalentes.

Duas ou mais equações são *eqüivalentes* quando forem satisfeitas para os mesmos valores.

Exemplo: as equações $x + 1 = 6$

e $2x + 1 = 11$

são eqüivalentes. Ambas são satisfeitas para x igual a 5.

As equações:

$$x + \frac{y}{2} = 7$$

e $2x + y = 14$

são também eqüivalentes. Qualquer par de valores que satisfizer a primeira irá forçosamente satisfazer a segunda, e recìprocamente.

Duas equações eqüivalentes devem ter o mesmo número de raízes e, essas raízes, os mesmos valores.

13 — Equações distintas.

As equações não eqüivalentes são denominadas equações *distintas*.

Assim: $2x + y = 7$

e $x - y = 1$

são equações distintas.

14 — Caso em que uma equação não se altera.

Seja, por exemplo, a equação

$$2x - 1 = 13.$$

Essa equação admite uma única raiz igual a 7:

$$2 \times 7 - 1 = 13.$$

Se a ambos os membros dessa equação

$$2x - 1 = 13$$