pretende extrahir a raiz quadrada de 5,7569, que encerra numero par de decimaes. Convertendo em fracção ordinaria o numero proposto, vem (n. 229)

$$5,7569 = \frac{57569}{10000};$$

mas, conforme a regra para extrahir raizes quadradas de fracções ordinarias (n. 260), temos

$$\sqrt{\frac{57569}{10000}} = \frac{\sqrt{57569}}{\sqrt{10000}} = \frac{\sqrt{57569}}{100}:$$

por consequencia,

$$\sqrt{5,7569} = \frac{\sqrt{57569}}{100}.$$

A ultima egualdade nos-mostra que, para obter a raiz quadrada de 5,7569, deve-se extrahir a raiz quadrada de 57579, isto é, do numero decimal considerado como inteiro; e que, no resultado, é necessario separar para a direita dous algarismos, isto é, metade do numero de algarismos decimaes existentes no numero proposto. Assim, teremos, a menos de 0,01 por excesso,

$$\sqrt{5,7569} = \frac{240}{100} = 2,4$$

No exemplo que precede, suppoz-se que era par o numero dos decimaes contidos no numero dado: quando isso não aconteça, é necessario escrever um zero á direita do numero dado (ns. 204 e 256 [1]).

Regra.—*Para extrahir a raiz quadrada de um numero decimal, 1.°, se o numero dos decimaes é par, extrahe-se, a menos de uma unidade, a raiz quadrada do numero dado, feita abstracção da virgula, e no resultado separa-se para a direita metade dos decimaes existentes nesse numero; 2.°, se o numero dos decimaes é impar, escreve-se um zero á direita do numero dado, e depois procede-se como no caso anterior.*

CAPITULO II

CUBO E RAIZ CUBICA

263.—Cubo *é o producto de tres factores eguaes.*— Assim, o cubo de 3 é 3.3.3 ou 27; o cubo de $\frac{2}{3}$ é $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$ ou $\frac{8}{27}$.

Para formar o cubo de uma fracção ordinaria, eleva-se ao cubo os dous termos desta.

264.—Raiz cubica *é o numero que, elevado á terceira potencia, reproduz um numero dado.*—Assim, 3 é a raiz cubica de 27, porque $3^3 = 27$; $\frac{2}{3}$ é a raiz cubica de $\frac{8}{27}$, porque $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$.

§ 1.°—Cubo

265.—As propriedades com que passamos a occupar-nos constituem a base sobre a qual assenta a theoria da raiz cubica.

266.—Theorema I. *O cubo da somma de dous numeros é egual ao cubo do primeiro, mais tres vezes o producto do quadrado do primeiro pelo segundo, mais tres vezes o producto do primeiro pelo quadrado do segundo, mais o cubo do segundo.*

Demonstração. — Sejam a e b dous numeros cuja somma é $a + b$: vai-se provar que

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Segundo a definição de cubo (n. 263), temos

$$(a + b)^3 = (a + b).(a + b).(a+b) ;$$

porém, fazendo o producto indicado no segundo membro, vem (n. 80)

$$\begin{aligned}(a + b).(a + b).(a + b) &= (a^2 + 2ab + b^2).(a + b)\\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2\\ &\quad + a^2b + 2ab^2 + b^3\\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

portanto,

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \qquad C.\ q.\ d.$$

267.—Corollario I. *O cubo de um numero composto de dezenas e unidades é egual ao cubo das dezenas, mais tres vezes o producto do quadrado das dezenas pelas unidades, mais tres vezes o producto das dezenas pelo quadrado das unidades, mais o cubo das unidades.*

Porque todo numero inteiro maior que 9 póde ser considerado como a somma das suas dezenas com as suas unidades. Assim,

$$\begin{aligned}57^3 = (50+7)^3 &= 50^3 + 3.50^2.7 + 3.50.7^2 + 7^3\\ &= 125000 + 52500 + 7350 + 343\end{aligned}$$

268.—Collorario II. *A differença entre os cubos de dous numeros inteiros consecutivos é egual a tres vezes o quadrado do menor, mais tres vezes o menor, mais uma unidade.*

Porque, conforme o theorema do n. 266, temos

$$(a+1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1,$$

donde se-tira, subtrahindo a^3 de ambos os membros,

$$(a+1)^3 - a^3 = 3a^2 + 3a + 1.$$

ora, a e $a + 1$ são dous numeros inteiros consecutivos, e a é o menor destes numeros.

269.—Theorema II. *Se um numero inteiro não for cubo de outro numero inteiro, tambem não póde ser cubo de uma fracção.*

Demonstração.—Seja N um numero inteiro que não é cubo de outro numero inteiro : devemos provar que N tambem não é cubo de uma fracção.

Se o numero N pudesse ser cubo de uma fracção $\frac{a}{b}$, que suppomos irreductivel, ter-se-hia

$$N = \frac{a^3}{b^3} ;$$

porém, esta egualdade é impossivel, porque, sendo primos entre si os numeros a e b (n. 174), os seos cubos a^3 e b^3 tambem o-são (n. 141), e a fracção $\frac{a^3}{b^3}$ é irreductivel : logo, N não póde ser cubo de uma fracção. C. q. d.

271.—Theorema III. *Se os dous termos de uma fracção irreductivel não forem cubos, essa fracção não póde ser cubo de outra.*

Demonstração.—Seja $\frac{a}{b}$ uma fracção irreductivel cujos termos a e b não são cubos : vai-se demonstrar que esta fracção não é cubo de outra.

Supponha-se por um instante que a fracção $\frac{a}{b}$ é cubo de uma fracção irreductivel $\frac{m}{n}$: devemos ter, nesta hypothese,

$$\frac{a}{b}=\frac{m^3}{n^3};$$

ora, sendo irreductiveis as fracções $\frac{a}{b}$ e $\frac{m}{n}$, os seos termos são primos entre si (n. 174) ; e, sendo os numeros m e n primos entre si, os seos cubos m^3 e n^3 tambem o-são (n. 141) : logo, as duas fracções $\frac{a}{b}$ e $\frac{m^3}{n^3}$ são identicas (n. 172), e teremos

$$a=m^3 \text{ e } b=n^3 ;$$

o que é impossivel, pois suppoz-se que a e b não são cubos.

§ 2.º—Raiz cubica de qualquer numero, a menos de uma unidade

271.—Se compararmos a serie dos numeros inteiros consecutivos 1, 2, 3, 4, etc., com a serie dos cubos correspondentes, bem depressa reconhecemos a existencia de numeros inteiros que não são cubos de outros numeros inteiros: desde 1 até 1000, por exemplo, sómente existem dez cubos. Logo-que um numero inteiro não é cubo, se a sua raiz cubica não é numero inteiro, tambem não póde ser numero fraccionario (n. 269); mas, é sempre possivel encontrar dous cubos inteiros consecutivos, um dos quaes seja maior e o outro menor que o numero dado: a raiz cubica de um desses cubos é um valor approximado, por defeito ou por excesso, da raiz pedida.

Com effeito, sendo dado o numero 639, que está comprehendido entre o cubo de 8 e o de 9, tem-se

$$8^3 < 639 < 9^3,$$

donde se-tira, extrahindo as raizes cubicas,

$$8 < \sqrt[3]{639} < 9;$$

ora, os numeros extremos 8 e 9 differem entre si de uma unidade : portanto, a raiz cubica de 639, que está comprehendida entre 8 e 9, differe de qualquer destes numeros em menos de uma unidade. O numero 8 é a raiz cubica de 639, a menos de uma unidade por defeito ; o numero 9 é a raiz cubica de 639, a menos de uma unidade por excesso.

De modo analogo se-prova que 8 é a raiz cubica de 639,48, a menos de uma unidade por defeito ; e que 9 é a raiz cubica do mesmo numero, a menos de uma unidade por excesso.

Extrahir a raiz cubica de um numero, a menos de uma unidade por defeito, *é procurar a raiz cubica do maior cubo inteiro contido nesse numero.*

A extracção da raiz cubica de um numero inteiro, a menos de uma unidade, é a questão a que, por ultimo, ficam reduzidas todas as outras relativas á extracção de raizes cubicas : tractaremos, pois, della mais especialmente.

272. — Na extracção das raizes cubicas dos numeros inteiros considera-se dous casos, conforme o numero dado é menor ou maior que 1000.

273. — 1.º Caso : *o numero dado é menor que* 1000. — Quando o numero do qual se-pede a raiz cubica é menor que 1000, forma-se mentalmente os cubos dos numeros inteiros consecutivos 1, 2, 3,.....10,

até se-achar o numero cujo cubo seja egual ao numero proposto ou ao maior cubo nelle contido : esse numero será a raiz cubica pedida (ns. 264 e 271). Para facilitar a operação, é conveniente que seja entregue á memoria a tabella seguinte :

1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729,	1000	Cubos
1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10	Raizes

Por esta tabella facilmente se-conclue que, por exemplo, a raiz cubica de 343 é 7 exactamente, e que a de 295 é approximadamente 6. O excesso 79 de 295 sobre 216 denomina-se *resto*.

274. — 2.º Caso : *o numero dado é maior que* 1000.—Admittamos que se-quer extrahir a raiz cubica do numero 57069371.

Sendo o numero 57069371 maior que 1000, a sua raiz cubica é maior que 10 (raiz cubica de 1000) : por conseguinte, supp0ndo esta raiz decomposta em dezenas e unidades, o seo cubo conterá o cubo das dezenas, mais tres vezes o producto do quadrado das dezenas pelas unidades, mais tres vezes o producto das dezenas pelo quadrado das unidades, mais o cubo das unidades (n. 266) ; e essas quatro partes, addicionadas ao resto da operação (se o-houver), dão o numero proposto.

O cubo das dezenas da raiz é um numero exacto de milhares : portanto, esse cubo existe nos 57069 milhares do numero 57069371, os quaes poderão conter ainda reservas de milhares provenientes das outras partes do cubo da raiz e do resto da operação ; estas reservas, comtudo, não influem sobre as dezenas da raiz, isto é, extrahindo a raiz cubica de 57069, ter-se-ha o numero exacto das dezenas da raiz. Com

effeito, sendo a a raiz cubica do maior cubo contido em 57069, este ultimo numero acha-se comprehendido entre os cubos consecutivos a^3 e $(a+1)^3$, e temos

$$a^3 < 57069 < (a+1)^3,$$

donde se-deduz, multiplicando por 1000 os tres numeros,

$$1000.a^3 < 57069000 < 1000.\,(a+1)^3.$$

ora, os numeros 57069 e $(a+1)^3$, por serem inteiros, differem pelo menos em uma unidade, e quando multiplicados por 1000 ficarão differindo pelo menos em um milhar : logo, junctando 371 < 1000 ao numero 57069000, ter-se-ha ainda

$$1000.a^3 < 57069371 < 1000.\,(a+1)^3,$$

ou, extrahindo as raizes cubicas,

$$10.a < \sqrt[3]{57069371} < 10.\,(a+1);$$

assim, a raiz cubica de 57069371, estando comprehendida entre a dezenas e $a+1$ dezenas, não poderá encerrar mais do que a dezenas, isto é, um numero de dezenas egual á raiz cubica de 57069.

Sendo o numero 57069 maior que 1000, a sua raiz cubica é maior que 10 (raiz cubica de 1000) : logo, suppondo esta raiz decomposta em dezenas e unidades, o seo cubo conterá o cubo das dezenas, mais tres vezes o producto do quadrado das dezenas pelas unidades, mais tres vezes o producto das dezenas pelo quadrado das unidades, mais o cubo das unidades (n. 266) ; e essas quatro partes, addicionadas ao resto da operação (havendo-o), formam o numero 57069.

Por um raciocinio inteiramente simelhante ao que fizémos ha pouco, somos conduzidos, para achar as dezenas da raiz cubica de 57069, a extrahir a raiz cubica de 57; ora, o maior cubo contido em 57 é 27, cuja raiz cubica é 3 (n. 273): por conseguinte, a raiz cubica de 57069 encerra 3 dezenas. Vamos procurar as unidades da mesma raiz.

Se tirarmos de 57069 o cubo de 3 dezenas, que é 27 milhares, obtemos para resto 30 milhares e 69 unidades ou 30069: este resto contem ainda tres vezes o producto do quadrado das dezenas pelas unidades, mais tres vezes o producto das dezenas pelo quadrado das unidades, mais o cubo das unidades, mais o resto da operação.

Tres vezes o producto do quadrado das dezenas pelas unidades fornecem um numero exacto de centenas: portanto, este numero existe nas 300 centenas do resto 30069, as quaes podem encerrar tambem reservas de centenas provenientes das duas outras partes do cubo da raiz e do resto da operação. Chamando u o algarismo das unidades e k as reservas de centenas, teremos

$$300 = 3.3^2.u + k,$$

donde se-tira, subtrahindo k e dividindo por 3 3^2,

$$\frac{300-k}{3.3^2} = u:$$

assim, para achar o algarismo das unidades, é preciso subtrahir das 300 centenas do resto as k centenas de reserva e dividir o resultado pelo triplo do quadrado das dezenas; mas, a subtracção não podemos effectuál-a, porque a reserva é desconhecida: por consequencia, se fizermos a divisão de 300 por 3.3^2 ou 27,

acharemos um quociente egual ou superior ao algarismo das unidades; donde se-infere que é necessario verificar o dicto quociente.

Dividindo 300 por 27, acha-se 11; mas, não podendo as unidades da raiz exceder a 9, verificaremos este numero. Se o numero 9 for egual ao algarismo das unidades contidas na raiz, esta, compondo-se de 3 dezenas e 9 unidades, será 39; porém, nessa hypothese o cubo de 39 é o maior cubo contido em 57069 (n. 271), e, por este motivo, deverá ser inferior ou, quando muito, egual a 57069: logo, para verificar o numero 9, forma-se o cubo de 39 e compara-se este cubo com 57069, afim de examinar se é verdadeira a relação

$$39^3 \leqq 57069.$$

O processo de verificação que acabamos de indicar, e que é ordinariamente empregado, achamos que, com vantagem sensivel, póde ser substituido pelo que passamos a expôr. Desenvolvendo o cubo de 39 (n. 266), teremos, segundo a relação anterior,

$$30^3+3.30^2.9+3.30.9^2+9^3 \leqq 57069,$$

donde, subtrahindo 30^3 de ambos os membros, se-deduz

$$3.30^2.9 + 3.30.9^2 + 9^3 \leqq 57069-30^3;$$

ora, a differença $57069-30^3$ é conhecida e egual ao resto 30069, que ha pouco achámos: portanto, para verificar o numero 9, forma-se o numero dado pela expressão $3.30^2.9 + 3.30.9^2 + 9^3$ ou $(3.30^2 + 3.30.9 + 9^2).9$ ou, ainda, $[3.30^2 + (3.30 + 9).9].9$ ou finalmente, $(3.30^3 + 99.9).9$, e compara-se este numero com o resto 30069, afim de examinar se é verdadeira a relação

$$(3.30^2 + 99.9).9 \leq 30069.$$

Formando o numero que é dado pela expressão $(3.30^2 + 99.9).9$, tem-se, por uma parte $3.30^2 = 2700$, e, pela outra, $99.9 = 891$; e, multiplicando por 9 a somma 3591, acha-se 32319, numero maior que o resto 30069: portanto, o numero 9 é maior que o algarismo das unidades. Verifiquemos 8.

Formando o numero que é dado pela expressão $(3.30^2 + 98.8).8$, obtem-se, de uma parte, $3.30^2 = 2700$ (numero já achado), e, da outra, $98.8 = 784$; e, multiplicando por 8 a somma 3484, acha-se 27872, numero menor que o resto 30069: logo, 8 é o algarismo das unidades contidas na raiz cubica de 57069, e esta raiz é 38. O excesso de 57069 sobre o cubo de 38 é, evidentemente, egual ao excesso de 30069 sobre $(3.30^2 + 98.8).8$ ou sobre 27872, ou, finalmente, egual a 2197, que é o resto da operação.

Para achar o numero exacto das dezenas contidas na raiz cubica de 57069371, fomos levados a extrahir a raiz cubica de 57069; porém, esta raiz é, segundo vimos, 38: portanto, a raiz cubica de 57069371 contem 28 dezenas. Tractemos de achar o algarismo das unidades.

Se tirarmos de 57069371 o cubo de 38 dezenas, obtemos para resto 2197 milhares e 371 unidades ou 2197371: este resto ainda encerra tres vezes o producto do quadrado das dezenas pelas unidades, mais tres vezes o producto das dezenas pelo quadrado das unidades, mais o cubo das unidades, mais o resto da operação.

Repetindo aqui o raciocinio que fizémos para

achar os unidades da raiz cubica de 57069, teremos de effectuar a divisão de 21973 por 3.38^2. Agora apresenta-se uma difficuldade, a formação do divisor 3.38^2, que poderia illudir-nos sobre as vantagens do methodo de verificação que adoptámos: mostremos como se-forma esse divisor. Temos (n. 246)

$$38^2 = 30^2 + 2.30.8 + 8^2,$$

e, multiplicando por 3.

$$\begin{aligned} 3.38^2 &= 3.30^2 + 2.3.30.8 + 3.8^2 \\ &= 3.30^2 + 3.30.8 + 8^2 \\ &\quad + 3.30.8 + 8^2 \\ &\quad + 8^2; \end{aligned}$$

ora, é conhecida a expressão $3.30^2 + 3.30. + 88^2$ ou 3484, que nos-serviu para verificação do algarismo 8, e tambem se-conhece $3.30.8^2$ ou 794, que concorre u para o mesmo fim: logo, será bastante, para achar 3.38^2, reunir á somma desses dous numeros o quadrado 8^2 do ultimo algarismo que se-verificou. Assim, temos

$$3.38^2 = 3484 + 784 + 64 = 4332;$$

e, effectuando a divisão de 21973 por 4332, virá para quociente 5.

Reproduzindo tambem aqui o raciocinio feito para verificar o resultado da divisão de 300 par 3.3^2, seremos levados a formar a expressão $(3.38^2 + 3.380.5 + 5^2).5$ ou $(3.38^2 + 1145.5).5$, equivalente ao numero 2194625, que é menor do que o resto 2197371: portanto, 5 é o algarismo das unidades contidas na raiz cubica de 57069371, e esta raiz é 385. O excesso de 57069371 sobre o cubo de 385 é egual ao excesso de 2197371 sobre $(3.38^2 + 1145.5)\ 5$ ou sobre 2194625, Examinando com attenção as operações que foram executadas, facilmente se-descobre que a extracção da raiz cubica de um numero inteiro decompõe-se em tres partes principaes; 1ª, determinar o algarismo das mais altas unidades; 2ª, determinar cada um dos algarismos seguintes; 3ª, verificar cada um destes algarismos.

Dispõe-se o calculo do modo seguinte:

57069311	38	
27	3.3²=27..	99
30069	891	9
27872	3591	891
2197371	3.3²=27..	98
2194625	784	8
2746	3484	784
	64	
	3.38²=4332..	1145
	5725	5
	438925	5725

Regra.—*Escreve-se o numero dado e á direita delle um traço vertical e outro horizontal* (como na divisão).

Para achar o algarismo das mais altas unidades, divide-se o numero em classes de tres algarismos, da direita para a esquerda, e extrahe-se a raiz cubica do maior cubico contido na ultima classe á esquerda. Desta ultima classe tira-se o cubo do algarismo que se-obtiver.

Para achar o algarismo seguinte, escreve-se á direita do resto a segunda classe, a contar da esquerda, e divide-se as centenas do numero resultante pelo triplo

do quadrado da raiz achada: o quociente é um numero egual ou superiór ao algarismo pedido.

Para verificar o algarismo obtido no quociente, 1°, escreve-se este algarismo á direita do triplo da raiz achada e por elle se-multiplica o numero assim formado; 2°, somma-se o producto resultante com o triplo do quadrado da raiz, e 3°, multiplica-se a somma obtida pelo algarismo a verificar: se o resultado final não exceder o numero constituido pelo primeiro resto e a segunda classe, o dicto algarismo é exacto; no caso contrario verifica-se, do mesmo modo, o algarismo immediatamente inferior.

O terceiro, o quarto, etc., algarismo da raiz determina-se como o segundo. Continua-se a operação até haver considerado todas as classes.

275. — Observação 1.ª — Na extracção da raiz cubica, exceptuando o das mais altas unidades, cada um dos outros algarismos determina-se por meio de uma divisão: logo-que o quociente de qualquer divisão parcial seja zero, zero será tambem o algarismo que lhe-corresponde na raiz; e, para continuar a operação, escreve-se uma nova classe á direita do numero constituido pelo ultimo resto e a ultima classe considerada.

Observação 2.ª — O quociente de qualquer das divisões lembradas na observação que precede, ou nos-dá o algarismo pedido, ou nos-fornece outro maior que este: na segunda hypothese, diminuindo, successivamente, de uma unidade cada algarismo que acharmos ser grande, por força obteremos o algarismo verdadeiro; porém, se, querendo abreviar, diminue-se de mais de uma unidade o mencionado quociente, poderá succeder que o algarismo verificado seja menor que o verdadeiro: acontece isto quando o resto que se-obtem excede o triplo do quadrado da raiz achada, mais o triplo da mesma raiz (n. 268).

276.— Dado um numero inteiro, será, frequentes vezes, util reconhecer de prompto se elle não é cubo. Os caracteres que vamos estabelecer são puramente *negativos*: isto é, permittem-nos sómente affirmar que o numero dado *não é* cubo.

1.° *O numero que termina por zeros em numero que não seja multiplo de 3, não é cubo.* — Porque, se um numero inteiro acaba por zeros, o seu cubo deverá terminar por tres vezes mais zeros, isto é, por um numero de zeros multiplo de 3: logo, não ha cubo que termine em zeros, e não seja o numero destes multiplo de 3.

2.° *O numero par que não for divisivel por 8, não é cubo.*—Porque o cubo de um numero inteiro não póde ser par sem que este numero tambem o-seja; ora, o cubo de qualquer numero par é multiplo de 2.2.2 ou 8, (n. 88): portanto, não ha cubo par que não seja divisivel por 8.

Observação. — São estes os principaes caracteres para reconhecer se um numero não é cubo. Da inspecção do ultimo algarismo do numero proposto nada se-infere, porque o cubo de um numero inteiro póde terminar em qualquer algarismo.

§ 3º.— Raiz cubica de qualquer numero, a menos de uma unidade fraccionaria

277. — Quando um numero não é cubo, sabemos como se-obtem a raiz cubica do maior cubo que nelle se-contem (n. 274): encontra-se assim a raiz procurada

sem perda de uma unidade. Tractemos agora de ver como se-determina essa mesma raiz cubica sem perda de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ...0,1 | 0,01 | 0,001,....

Extrahir a raiz cubica de um numero, a menos de uma unidade fraccionaria dada, *é procurar o maior multiplo desta unidade contido na raiz cubica do numero.*

Proponhamo-nos, por exemplo, extrahir a raiz cubica de 639, a menos de $\frac{1}{7}$. Designando por x o maior numero de *setimos* contidos na raiz cubica que se-procura, ficará esta raiz comprehendida entre as duas fracções consecutivas $\frac{x}{7}$ e $\frac{x+1}{7}$, e ter-se-ha

$$\frac{x}{7} < \sqrt[3]{639} < \frac{x+1}{7}:$$

elevando ao cubo os tres numeros, virá (ns. 263 e 264)

$$\frac{x^3}{7^3} < 639 < \frac{(x+1)^3}{7^3};$$

multiplicando por 7^3, tem-se

$$x^3 < 639.7^3 < (x+1)^3,$$

e, finalmente, extrahindo a raiz cubica,

$$x < \sqrt[3]{639.7^3} < x+1:$$

donde se-deduz que o maior numero de setimos contidos na raiz cubica de 639, obtem-se extrahindo a raiz cubica do maior cubo inteiro contido no producto 639.7^3 ou 219177; ora extrahindo esta raiz, a menos de uma unidade (n. 274), encontra-se 60: portanto, o maior multiplo de $\frac{1}{7}$ contido na raiz procurada é $\frac{60}{7}$, e vem

$$\sqrt[3]{639}=\frac{60}{7}=8+\frac{4}{7}\text{, a menos de }\frac{1}{7}.$$

Em geral, chamando N um numero qualquer, inteiro ou fraccionario, e $\frac{1}{n}$ a unidade fraccionaria conhecida, tem-se, pela definição,

$$\frac{x}{n}<\sqrt[3]{N}<\frac{x+1}{n},$$

e, reproduzindo as mesmas transformações de ha pouco,

$$\frac{x^3}{n^3}<N<\frac{x+1}{n},$$

$$x^3<N.n^3<(x+1)^3,$$

$$x<\sqrt[3]{N.n^3}<x+1.$$

Regra.—*Para extrahir a raiz cubica de um numero qualquer, a menos de uma unidade fraccionaria dada, multiplica-se esse numero pelo cubo do denominador da fracção que exprime o grao da approximação pedida; extrahe-se, a menos de uma unidade, a raiz cubica do producto, e divide-se o resultado pelo dicto denominador.*

278.—Observação.—Na extracção de raizes cubicas não temos, como na de raizes quadradas, meio de conhecer, mediante a comparação do resto com a raiz achada, se é este ultimo numero ou o seo consecutivo o valor mais proximo da verdadeira raiz.

§ 4.º—Raiz cubica de numeros fraccionarios, ordinarios ou decimaes

279.—Suppozemos até agora que, na extracção de uma raiz cubica, se-procura, ou sómente a parte inteira da raiz (§ 2.º), ou a mesma raiz com uma approximação determinada (§ 3.º). Porém, tractando-se especialmente de fracções ordinarias ou de numeros decimaes, não é, ás vezes, dado o grao da approximação: dahi a necessidade de novas regras.

280.—Fracções ordinarias.—Supponhamos que se-quer extrahir a raiz cubica da fracção ordinaria $\frac{8}{27}$, cujos termos são cubos. Sabemos que, para formar o cubo de uma fracção ordinaria, eleva-se ao cubo o seo numerador e o seo denominador (n. 263): porém, sendo 8 o cubo do numerador da raiz, este numerador é $\sqrt[3]{8}=2$, e sendo 27 o cubo do denominador da mesma raiz, este denominador é $\sqrt[3]{27}=3$: logo a raiz procurada é $\frac{2}{3}$, e temos

$$\sqrt[3]{\frac{8}{27}}=\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}}=\frac{2}{3}.$$

No exemplo considerado, os termos da fracção proposta eram cubos: não é isso, entretanto, o que ordinariamente succede.

Supponha-se, em primeiro logar, que sómente é cubo o denominador da fracção, e seja $\frac{198}{216}$ esta fracção. Extrahindo, a menos de uma unidade, a raiz cubica do numerador 198, virá

$$5^3<198<6^3,$$

donde se-tira, dividindo por 216,

$$\frac{5^3}{216} < \frac{198}{216} < \frac{6^3}{216},$$

e, extrahindo as raizes cubicas das tres fracções,

$$\frac{5}{6} < \sqrt[3]{\frac{198}{216}} < \frac{6}{6}:$$

por consequencia, ter-se-ha, a menos de $\frac{1}{6}$ por defeito,

$$\sqrt[3]{\frac{198}{216}} = \frac{\sqrt[3]{198}}{\sqrt[3]{216}} = \frac{5}{6}.$$

Supponha-se, em segundo logar, que o denominador da fracção não é cubo, e seja $\frac{27}{53}$ essa fracção. Poderiamos, neste caso particular, extrahir de ambos os termos a raiz cubica, conforme até aqui temos feito; porém, o denominador da raiz não sendo numero inteiro nem fracção (n. 269), não seria possivel ter idéa clara sobre a especie da dicta raiz: portanto, é necessario transformar a fracção proposta em outra equivalente cujo denominador seja cubo. Para o-conseguir, —*multiplica-se ambos os termos da fracção pelo quadrado do seo denominador*—; porque, deste modo, a fracção dada não se-altera (n. 168) e o denominador da nova fracção fica sendo cubo do da primeira (n. 263) Teremos, pois, a menos de $\frac{1}{53}$,

$$\sqrt[3]{\frac{27}{53}} = \sqrt[3]{\frac{75843}{53^3}} = \frac{\sqrt[3]{75843}}{\sqrt[3]{53^3}} = \frac{42}{53}.$$

Regra.—*Para extrahir a raiz cubica de uma fracção ordinaria, 1.°, se o denominador é cubo, extrahe-se, exactamente ou a menos de uma unidade, a raiz cubica do numerador, e depois extrahe-se a raiz cubica exacta do denominador; 2.°, se o denominador não é cubo, primeiro multiplica-se os dous termos da fracção pelo quadrado do denominador, e depois procede-se como no caso anterior.*

281.—Observação.—Quando o denominador de uma fracção ordinaria não é cubo, para transformál-a em outra cujo denominador o-seja, procede-se tambem do modo seguinte:—*multiplica-se ambos os termos da fracção dada por um numero que torne multiplos de 3 os expoentes dos factores primos que entram no denominador.*—Este processo basêa-se em que o producto de tres numeros eguaes encerra o *triplo* dos factores primos de que se-compõe um desses numeros.

282.—Numeros decimaes.—Admitta-se que se-pretende extrahir a raiz cubica de 3,459, que encerra numero de decimaes multiplo de 3. Convertendo em fracção ordinaria o numero proposto, vem (n. 229)

$$3{,}459 = \frac{3459}{1000};$$

mas, conforme a regra para extrahir raizes cubicas de fracções ordinarias (n. 280), temos

$$\sqrt[3]{\frac{3459}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{3459}}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{\sqrt[3]{3459}}{10}:$$

por consequencia,

$$\sqrt[3]{3{,}459} = \frac{\sqrt[3]{3459}}{10}.$$

A ultima egua!dade nos-mostra qne, para obter a raiz cubica de 3,459, deve-se extrahir a raiz cubica de 3459, isto é, do numero decimal considerado como inteiro; e que, no resultado, é necessario separar para a direita um algarismo, isto é, um terço do numero de algarismos decimaes existentes no numero proposto. Assim, teremos, a menos de 0,1,

$$\sqrt[3]{3,459} = \frac{18}{10} = 1,8.$$

No exemplo que precede, suppoz-se que era multiplo de 3 o numero dos decimaes contidos no numero dado: quando isso não aconteça, é necessario escrever um ou dous zeros á direita do numero dado (ns. 204 e 276 [1.°]).

Regra.—*Para extrahir a raiz cubica de um numero decimal, 1°, se o numero dos decimaes é multiplo de 3, extrahe-se, a menos de uma unidade, a raiz cubica do numero dado, feita abstracção da virgula, e no resultado separa-se para a direita um terço dos decimaes existentes nesse numero; 2°, se o numero dos decimaes não é multiplo de 3, faz-se que o-seja, escrevendo-lhe á direita um ou dous zeros, : depois procede-se como no caso precedente.*

LIVRO VI

COMPLEMENTO

DO

Calculo arithmetico

283.—Expostos até aqui os principios e as regras que constituem, propriamente, o Calculo arithmetico, vamos proceder á exposição de tres theorias cuja utilidade se-tornará sensivel quando nos-occuparmos com a resolução das questões prácticas usualmente estudadas na Arithmetica.

CAPITULO I

EQUIDIFFERENÇAS E PROPORÇÕES

284.—Razão *é o resultado da comparação entre dous numeros, quando se-tem em vista a formação de um delles por meio do outro.*

Um numero póde entrar na formação de outro por dous modos principaes: como *parcella* e como *factor* (*). Quando se-dá a somma de duas parcellas e um destas, a outra determina-se por uma subtracção (n. 43) e chama-se *differença*; quando se-dá o producto de dous factores e um destes, o outro acha-se por meio de uma

(*) Póde tambem um numero concorrer para a formação de outro na qualidade de *raiz* ou de *expoente*; mas este ultimo modo não é elementar, e o outro acha-se incluido no segundo modo principal (n. 240).

divisão (n. 56) e tem o nome de *quociente*: ha, pois, duas especies de razões.

RAZÃO POR DIFFERENÇA *é a expressão da differença entre dous numeros.*—Assim, 7—5 é a razão por differença entre 7 e 5, a qual é costume ler-se 7 *menos* 5 ou, convencionalmente, 7 *está para* 5. Em geral teremos $a—b$.

A razão por differença tambem se-chama, simplesmente, *differença.*

RAZÃO POR QUOCIENTE *é a expressão do quociente da divisão de um numero por outro.*—Assim, 7:5 ou $\frac{7}{5}$ é a razão por quociente entre 7 e 5, a qual de ordinario lê-se 7 *dividido por* 5 ou, convencionalmente, 7 *está para* 5. Em geral temos $a:b$ ou $\frac{a}{b}$.

A razão por quociente denomina-se tambem, simplesmente, *razão* (*); e é neste sentido restricto que deve ser tomada a palavra quando a-empregarmos só.

285.—Os dous numeros que constituem uma razão, quer por differença, quer por quociente, denominam-se *termos*: o primeiro termo (o que se-escreve e lê em primeiro logar) tem o nome de *antecedente*, e o segundo, o de *consequente.*

Visto-que as razões por differença não são outra cousa senão subtracções indicadas em que o minuendo se-chama antecedente e o subtrahendo, consequente, torna-se claro que

1.° *Quando junctamos ou tiramos um numero qualquer ao antecedente de uma razão por differença, esta fica augmentada ou diminuida desse numero.*

2.° *Quando junctamos ou tiramos um numero*

(*) As locuções *quociente* (indicado), *fracção* e *razão* significam absolutamente o mesmo.

qualquer ao consequente de uma razão por differença, esta fica diminuida ou augmentada desse numero.

Por conseguinte:

3.° *Quando junctamos ou tiramos o mesmo numero aos dous termos de uma razão por differença, esta não se-altera.*

Uma vez que as razões (propriamente dictas) não são outra cousa mais do que divisões indicadas em que o dividendo toma o nome de antecedente e o divisor, o de consequente, segue-se que (ns. 94 e 95)

1.° *Quando multiplicamos ou dividimos por qualquer numero o antecedente de uma razão, esta fica multiplicada ou dividida por esse numero.*

2.° *Quando multiplicamos ou dividimos por qualquer numero o consequente de uma razão, esta fica dividida ou multiplicada por esse numero.*

Portanto:

3.° *Quando multiplicamos ou dividimos pelo mesmo numero os dous termos de uma razão, esta não se-altera.*

286.— Duas razões são *inversas* quando o antecedente de cada uma é o mesmo que o consequente da outra: assim, por exemplo, $\frac{7}{5}$ e $\frac{5}{7}$.— *O producto de duas razões inversas é egual á unidade*—: $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = 1$.

287. — PROPORÇÃO *é a expressão da egualdade entre duas razões da mesma especie.*

Havendo duas especies de razões, tambem ha duas especies de proporções.

PROPORÇÃO POR DIFFERENÇA *é a expressão da egualdade entre duas razões por differença.*—Assim, portanto,

$8-5=15-12$ é uma proporção por differença, que se-lê 8 *menos* 5 *egual a* 15 *menos* 12 ou, por convenção, 8 *está para* 5 *como* 15 *está para* 12. Em geral tem-se $a-b=c-d$.

A proporção por differença chama-se tambem *equidifferença.*

Proporção por quociente *é a expressão da egualdade entre duas razões por quociente.* — Assim, pois, $8:6=32:24$ é uma proporção por quociente, a qual se-lê 8 *dividido por* 6 *egual a* 32 *dividido por* 24 ou, por convenção, 8 *está para* 6 *como* 32 *está para* 24. Em geral temos $a:b=c:d$.

A proporção por quociente denomina-se ainda, simplesmente, *proporção*; e nesse sentido restricto é que se-toma a palavra quando ella se-acha desacompanhada de qualquer modificativo que a-especifique.

Numa equidifferença, assim como numa proporção: o primeiro e o quarto termos chamam-se *extremos*; o segundo e o terceiro termos, *meios*. Os termos de cada razão, por differença ou por quociente, conservam os seos nomes (n. 285).

Uma equidifferença ou uma proporção chama-se *continua* quando os meios são eguaes; um destes recebe, então, o nome de *media differencial* ou de *media proporcional.*

§ 1.º—Equidifferenças

288.— Theorema I. *Em qualquer equidifferença a somma dos extremos é egual á somma dos meios.*

Demonstração. — Seja dada uma equidifferença qualquer

$$a-b=c-d.$$

Junctando aos dous membros da precedente egualdade $b+d$ (somma dos consequentes), temos

$$a-b+b+d=c-d+b+d;$$

mas, é evidente que $-b+b=0$ e que $-d+d=0$: portanto,

$$a+d=c+b \qquad C.\ q.\ d.$$

289. — Theorema II (Reciproca). *Se a somma de dous numeros for egual á somma de outros dous, esses quatro numeros formam uma equidifferença cujos extremos são as duas parcellas de uma somma e cujos meios são as duas parcellas da outra somma.*

Demonstração. — Supponhamos que se-tem

$$a+d=b+c.$$

Tirando $b+d$ aos dous membros da egualdade proposta, vem

$$a+d-b-d=b+c-b-d;$$

porém, temos $+d-d=0$ e $+b-b=0$: por conseguinte,

$$a-b=c-d. \qquad C.\ q.\ d.$$

290.—Corollario I. *Em uma equidifferença continua a somma dos extremos é egual ao dobro do meio.*

Demonstração.—Da equidifferença continua

$$a-b=b-c$$

deduz-se (n. 288)

$$a+c=b+b;$$

porém, $b+b=2b$: logo,

$$a+c=2b. \qquad C. q. d.$$

291. — Corollario II. *Em qualquer equidifferença: 1°, um extremo desconhecido é egual á somma dos meios diminuida do outro extremo; 2°, um meio desconhecido é egual á somma dos extremos diminuida do outro meio, ou 3°, egual a metade da somma dos extremos, se a equidifferença for continua.*

Demonstração.— Da equidifferença qualquer

$$a-b=c-x,$$

na qual suppõe-se desconhecido um extremo, tira-se (n. 288)

$$a+x=b+c\ ;$$

subtrahindo a de ambos os membros desta egualdade, vem

$$x=b+c-a.$$

Da equidifferença qualquer

$$a-b=x-d,$$

em que é desconhecido um dos meios, deduz-se (n. 288)

$$b+x=a+d\ ;$$

subtrahindo b de ambos os membros desta egualdade, ter-se-ha

$$x=a+d-b.$$

Da equidifferença continua

$$a-x=x-b,$$

em que a media differencial é desconhecida, tira-se (n. 290)

$$2x=a+b\ ;$$

dividindo por 2 ambos os membros desta egualdade, virá

$$x=\frac{a+b}{2}.$$

292.—Theorema III. *Uma equidifferença não se altera quando junctamos ou tiramos o mesmo numero: 1°, aos dous antecedentes; 2°, aos dous consequentes; 3°, aos dous primeiros termos; 4°, aos dous ultimos termos; 5°, a todos os termos.*

Demonstração.—Seja a equidifferença

$$a-b=c-d,$$

e n um numero qualquer.

Quando junctamos ou tiramos o mesmo numero aos dous antecedentes, as duas differenças eguaes ficam augmentadas ou diminuidas desse numero (n. 285): logo,

$$(a\pm n)-b=(c\pm n)-d.$$

Quando junctamos ou tiramos o mesmo numero aos dous consequentes, as duas differenças eguaes ficam diminuidas ou augmentadas desse numero (n. 285): portanto,

$$a-(b\pm n)=c-(d\pm n).$$

Quando junctamos ou tiramos o mesmo numero aos dous termos de uma differença, esta não se-altera (n. 285): por conseguinte

$$(a \pm n)-(b \pm n)=c-d,$$

$$a-b=(c \pm n)-(d \pm n),$$

$$(a \pm n)-(b \pm n)=(c \pm n)-(d \pm n).$$

293.—THEOREMA IV. *Uma equidifferença não se-altera quando multiplicamos ou dividimos pelo mesmo numero todos os termos.*

Demonstração.—Seja a equidifferença

$$a-b=c-d,$$

e n qualquer numero.

Multiplicando por n ambos os membros da precedente egualdade, tem-se

$$(a-b)n=(c-d)n,$$

donde

$$an-bn=cn-dn.$$

Reciprocamente, dividindo por n os dous membros desta ultima egualdade, vem

$$a-b=c-d.$$

294.—THEOREMA V. *Uma equidifferença não se-altera: 1°, quando trocamos os logares dos meios ou os dos extremos; 2°, quando passamos os meios para extremos e vice-versa.*

Demonstração.—Seja a equidifferença

$$a-b=c-d.$$

Junctando aos dous membros desta egualdade $b-c$, vem

$$a-b+b-c=c-d+b-c,$$

donde

$$a-c=b-d;$$

e junctando aos dous membros da mesma egualdade $d-a$, tem-se

$$a-b+d-a=c-d+d-a,$$

donde

$$d-b=c-a.$$

Trocando, conjunctamente, os logares dos meios e os dos extremos da equidifferença proposta, virá

$$d-c=b-a,$$

ou, o que é evidentemente o mesmo,

$$b-a=d-c.$$

OBSERVAÇÃO.— As duas mudanças de que tracta o presente theorema, por serem frequentes, receberam nomes especiaes: *alternar* é trocar os logares dos meios ou os dos extremos; *inverter* é trocar os meios em extremos e vice-versa. Quando se-muda os logares das razões, *transpõe-se.*

§ 2.º—Proporções

295.— THEOREMA I. *Em qualquer proporção o producto dos extremos é egual ao producto dos meios.*

Demonstração.— Seja dada a proporção

$$a:b=c:d,$$

que podemos escrever de outra fórma :

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

Multiplicando ambos os membros desta ultima egualdade por $b\,d$ (producto dos consequentes), vem (n.º 194)

$$\frac{a\,b\,d}{b}=\frac{c\,b\,d}{d};$$

porém, é claro que $\frac{b}{b}=1$ e que $\frac{d}{d}=1$: portanto,

$$a\,d=c\,b \qquad C.\ q.\ d.$$

296.— Theorema II (Reciproca). *Se o producto de dous numeros for egual ao producto de outros dous, esses quatro numeros constituem uma proporção cujos extremos são os dous factores de um producto e cujos meios são os dous factores do outro producto.*

Demonstração.—Supponhamos que seja

$$a\,d=b\,c.$$

Dividindo ambos os membros desta egualdade por bd, teremos

$$\frac{a\,d}{b\,d}=\frac{b\,c}{b\,d};$$

porém, como $\frac{d}{d}=1$ e $\frac{b}{b}=1$, segue-se que

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

ou, o que é o mesmo,

$$a:b=c:d. \qquad C.\ q.\ d.$$

297. — Corollario I. *Em uma proporção continua o producto dos extremos é egual ao quadrado do meio.*

Demonstração.— Da proporção continua

$$a:b=b:c$$

deduz-se (n. 295)

$$a\,c=b\,b;$$

mas, $bb=b^2$: portanto,

$$a\,c=b^2. \qquad C.\ q.\ d.$$

298.— Corollario II. *Em uma proporção qualquer: 1º, um extremo desconhecido é egual ao producto dos meios dividido pelo outro extremo; 2º, um meio desconhecido é egual ao producto dos extremos dividido pelo outro meio, ou 3º, egual á raiz quadrada do producto dos extremos, se a proporção for continua.*

Demonstração.— Da proporção qualquer

$$a:b=c:x,$$

na qual suppomos ser desconhecido um extremo, deduz-se (n. 295)

$$ax=bc;$$

dividindo ambos os membros desta egualdade por a, vem

$$x=\frac{bc}{a}.$$

Da proporção qualquer

$$a : b = x : d,$$

na qual é desconhecido um meio, tira-se (n. 295)

$$b\,x = a\,d\,;$$

dividindo por b os dous membros desta egualdade, tem-se

$$x = \frac{ad}{b}.$$

Da porporção continua

$$a : x = x : b,$$

onde é desconhecida a media proporcional, deduz-se (n. 297)

$$x^2 = ab\,;$$

extrahindo a raiz quadrada de ambos os membros desta egualdade, virá

$$x = \sqrt{ab}$$

299.—Theorema III. *Uma proporção não se-altera quando multiplicamos ou dividimos pelo mesmo numero: 1°, os dous antecedentes; 2°, os dous consequentes; 3°, os dous primeiros termos; 4°, os dous ultimos termos; 5°, todos os termos.*

Demonstração.—Seja a proporção

$$a : b = c : d,$$

e n um numero qualquer.

Quando multiplicamos ou dividimos pelo mesmo numero os dous antecedentes, as duas razões eguaes

ficam multiplicadas ou divididas por esse numero (n. 285): por conseguinte,

$$(a.\ n) : b = (c.\ n) : d\ ;$$

e, reciprocamente, dividindo por n os antecedentes desta proporção, tem-se

$$a : b = c : d.$$

Quando multiplicamos ou dividimos pelo mesmo numero os dous consequentes, as duas razões eguaes ficam divididas ou multiplicadas por esse numero (n. 285) : logo,

$$a : (b.\ n) = c : (d.\ n)\ ;$$

e, reciprocamente, dividindo por n os consequentes desta proporção, vem.

$$a : b = c : d.$$

Quando multiplicamos ou dividimos pelo mesmo numero os dous termos de uma razão, esta não se-altera (n. 285) : portanto,

$$(a.\ n) : (b.\ n) = c : d,$$
$$a : b = (c.\ n) : (d.\ n),$$
$$(a.\ n) : (b.\ n) = (c.\ n) : (d.\ n)\ ;$$

e, reciprocamente, dividindo por n, tem-se

$$a : b = c : d$$

300.—Theorema IV. *Uma proporção não se-altera : 1.°, quando elevamos á potencia do mesmo grao todos os seos termos: 2.°, quando delles extrahimos a raiz do mesmo grao.*

Demonstração.—Seja a proporção

$$a : b = c : d,$$

que se-póde escrever

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

e seja n qualquer numero inteiro.

Elevando ambos os membros da precedente egualdade á potencia do grao n, tem-se

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{c}{d}\right)^n,$$

donde se-tira

$$\frac{a^n}{b^n} = \frac{c^n}{d^n},$$

ou, o que é a mesma cousa,

$$a^n : b^n = c^n : d^n.$$

Extrahindo a raiz do mesmo indice aos dous membros da mesma egualdade, vem

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{\frac{c}{d}};$$

daqui se-deduz

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{\sqrt[n]{c}}{\sqrt[n]{d}};$$

ou

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}.$$

301.— Theorema V. *Uma proporção não se-altera: 1°, quando trocamos os logares dos meios ou os dos extremos; 2°, quando passamos os meios para extremos e vice-versa.*

Demonstração.—Seja a proporção

$$a : b = c : d,$$

ou

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Multiplicando os dous membros da ultima egualdade por $\frac{b}{c}$, vem (n. 193)

$$\frac{ab}{bc} = \frac{cb}{dc},$$

donde se-deduz, simplificando,

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d},$$

ou

$$a:c = b:d;$$

e multiplicando ambos os membros da mesma egualdade por $\frac{d}{a}$, temos (n. 193)

$$\frac{ad}{ba} = \frac{cd}{da},$$

donde, simplificando, se-tira

$$\frac{d}{b} = \frac{c}{a},$$

ou

$$d:b = c:a.$$

Trocando, ao mesmo tempo, os logares dos meios e dos extremos da proporção dada, ter-se-ha

$$d:c = b:a,$$

ou, o que é o mesmo,

$$b:a = d:c$$

Observação. — As duas alterações de que tracta este theorema têm os mesmos nomes que nas equidifferenças.

302. — Além das precedentes propriedades, que têm suas analogas nas equidifferenças, as proporções gozam de outras, as quaes são de emprego frequente nas applicações da Arithmetica, assim como na Geometria. Passemos ao estudo dessas propriedades.

303. — Theorema VI. *Multiplicando ordenadamente os termos de duas ou mais proporções, os productos resultantes formam proporção.*

Demonstração.—Sejam tres proporções

$$a : b = c : d,$$
$$a' : b' = c' : d',$$
$$a'' : b'' = c'' : d'',$$

as quaes podemos escrever como se-segue :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$
$$\frac{a'}{b'} = \frac{c'}{d'},$$
$$\frac{a''}{b''} = \frac{c''}{d''}.$$

Multiplicando membro a membro as tres ultimas egualdades, vem

$$\frac{a}{b} \times \frac{a'}{b'} \times \frac{a''}{b''} = \frac{c}{d} \times \frac{c'}{d'} \times \frac{c''}{d''}$$

donde se-deduz (n. 195)

$$\frac{aa'a''}{bb'b''} = \frac{cc'c''}{dd'd''},$$

ou, o que é o mesmo,

$$aa'a'' : bb'b'' = cc'c'' : dd'd'' \qquad C. q. d.$$

304.—Theorema VII. *Em qualquer proporção, a somma ou a differença dos dous primeiros termos está para o segundo como a somma ou a differença dos dous ultimos termos está para o quarto.*

Demonstração.—Seja a proporção

$$a : b = c : d.$$

Da proporção proposta deduz-se (n. 295)

$$ad = bc ;$$

junctando e subtrahindo bd aos dous membros da ultima egualdade, vem

$$ad \pm bd = bc \pm bd,$$

e pondo em evidencia os factores communs (d no primeiro membro e b no segundo), tem-se

$$(a \pm b)d = (c \pm d)b :$$

portanto (n. 296)

$$a \pm b : b = c \pm d : d \qquad C. q. d.$$

305. — COROLLARIO I. *Em qualquer proporção a somma ou a differença dos dous primeiros termos está o primeiro como a somma ou a differença dos dous ultimos termos está para o terceiro.*

Demonstração.—Da proporção

$$a . b = c : d$$

tira-se (n. 314)

$$a \pm b : b = c \pm d : d :$$

alternando esta ultima proporção, assim como a proposta, ter-se-ha

$$a : c = b : d,$$
$$a \pm b : c \pm d = b : d ;$$

porém, duas razões eguaes a uma terceira são eguaes entre si : portanto,

$$a \pm b : c \pm d = a : c,$$

ou, alternando,

$$a \pm b : a = c \pm d : c. \qquad C. q. d.$$

306. — COROLLARIO II. *Em qualquer proporção a somma dos dous primeiros termos está para a sua differença como a somma dos dous ultimos está para a sua differença.*

Demonstração.—Da proporção

$$a : b = c : d$$

deduz-se (n. 304)

$$a \pm b : b = c \pm d : d,$$

ou, alternando,

$$a \pm b : c \pm d = b : d ;$$

separando esta proporção em duas, correspondente uma ao signal + e a outra ao signal —, vem

$$a + b : c + d = b : d,$$
$$a - b : c - d = b : d ;$$

mas, duas razões eguaes a uma terceira são eguaes entre si : logo,

$$a + b : c + d = a - b : c - d,$$

ou, alternando,

$$a + b : a - b = c + d : c - d. \qquad C. q. d.$$

307. — THEOREMA VIII. *Em qualquer proporção a somma ou a differença dos antecedentes está para a somma ou a differença dos consequentes como um antecedente está para o respectivo consequente.*

Demonstração.—Seja a proporção

$$a : b = c : d,$$

a qual, alternada, se-transforma nesta

$$a : c = b : d ;$$

applicando a esta proporção o theorema anterior (n. 304), vem

$$a \pm c : c = b \pm d : d,$$

donde, alternando e attendendo á proporção dada, se-deduz

$$a \pm c : b \pm d = c : d = a : b \qquad C. q. d.$$

308. — Corollario. *Em qualquer proporção a somma dos antecedentes está para a sua differença como a somma dos consequentes está para a sua differença.*

Demonstração. — Da proporção

$$a : b = c : d$$

se-tira (n. 307)

$$a \pm c : b \pm d = a : b;$$

separando esta proporção em duas, uma correspondente ao signal + e a outra ao signal —, tem-se

$$a+c : b+d = a : b,$$
$$a-c : b-d = a : b;$$

porém, duas razões eguaes a uma terceira são entre si eguaes: portanto,

$$a+c \,.\, b+d = a-c : b-d,$$

ou, alternando,

$$a+c : a-c = b+d : b-d \qquad C. q. d.$$

309.—Theorema IX. *Em uma serie de razões eguaes a somma de todos ou de um certo numero de antecedentes está para a somma de todos ou do mesmo numero de consequentes como qualquer antecedente está para o respectivo consequente.*

Demonstração. — Seja dada a serie de razões eguaes

$$A : a = B : b = C : c = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Designando por q o valor de cada razão, temos

$$A : a = q,\ B : b = q,\ C : c = q, \ldots\ldots,$$

donde se-tira (n. 60)

$$A = aq,\ B = bq,\ C = cq, \ldots\ldots;$$

sommando membro a membro estas egualdades e pondo q em evidencia, vem

$$A+B+C+\ldots\ldots = (a+b+c+\ldots\ldots)\, q,$$

donde se-deduz, dividindo por $a+b+c+\ldots\ldots$,

$$\begin{aligned} A+B+C\ldots\ldots : a+b+c+\ldots\ldots &= q \\ &= A : a \\ &= B : b \\ &= C : c \\ &\ldots\ldots \quad C. q. d. \end{aligned}$$

CAPITULO II

PROGRESSÕES

310.— Serie *é uma successão illimitada de numeros taes que qualquer delles deriva-se do precedente ou de alguns dos precedentes segundo uma* lei *determinada.* —Esses numeros denominam-se *termos* da serie.

Exemplos:

$$1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16, \text{ etc.} \qquad (1)$$

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32}, \text{ etc.} \qquad (2)$$

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6}, \text{ etc.} \qquad (3)$$

$$1,\ 4,\ 10,\ 22,\ 46,\ 94, \text{ etc.} \qquad (4)$$

$$3,\ 5,\ 21,\ 73,\ 361,\ 1229, \text{ etc.} \qquad (5)$$

Na serie (1) cada termo deriva-se do precedente junctando a este o numero 3; na serie (2), multiplicando o precedente por $\frac{1}{2}$; na serie (3), junctando 1 ao denominador do precedente; na serie (4), multiplicando o precedente por 2 e junctando 2 ao producto; na serie (5), finalmente, cada termo forma-se dos dous que o-precedem multiplicando o primeiro delles por 2, o segundo por 3, e sommando os productos.

Lei da serie *é o modo como um termo qualquer se-deriva do precedente ou de alguns dos precedentes.*

311. — Ha infinitas series, pois-que infinitos são os modos imaginaveis de formar um numero por meio de dous ou mais numeros dados. A sciencia que se-occupa com o estudo das series constitue um ramo importantissimo da Mathematica, denominado — Theoria das series.

A Arithmetica tracta unicamente das series nas quaes um termo qualquer se-deriva do precedente *augmentado* ou *diminuindo* de um numero constante de unidades esse termo precedente, ou *multiplicando* o mencionado termo precedente por um mesmo numero. A estas series elementares dá-se o nome de *progressões*, e o numero constante que serve para de um termo qualquer derivar o seguinte chama-se *razão*.

Progressão *é uma serie cujos termos crescem ou decrescem numa razão constante.*

312.—Quando a razão constante em que crescem ou decrescem os termos de uma progressão é a *differença* entre dous termos consecutivos, essa progressão tem o nome de *progressão por differença*. Quando a razão constante em que crescem ou decrescem os termos de uma progressão é o *quociente* da divisão de qualquer termo pelo precedente, a progressão denomina-se *progressão por quociente*. (*)

§ 2.º—Progressões por differença

313.—Progressão por differença *é a progressão em que um termo qualquer é egual ao precedente augmentado ou diminuido de um numero constante.*

Razão de uma progressão por differença *é o numero constante de que se-deve augmentar ou diminuir um termo qualquer para achar o seguinte.*

Uma progressão por differença é crescente quando a razão é numero *a addicionar* ou *additivo*.

Uma progressão por differença é decrescente quando a razão é numero *a subtrahir* ou *subtractivo*.

314.—Para indicar que muitos numeros constituem uma progressão por differença, costuma-se, ordinariamente, escrever antes do primeiro numero o signal $\div$ (signal de progressão por differença) e collocar em seguida os outros precedidos, cada um, de *um poncto*. Assim, as duas progressões por differença.

$$2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ \text{etc.},$$
$$48,\ 46,\ 44,\ 42,\ 40,\ \text{etc.},$$

escrevem-se como se-segue :

$$\div\ 2.\ 5.\ 8.\ 11.\ 14.\ \text{etc.},$$
$$\div\ 48.\ 46.\ 44.\ 42.\ 40.\ \text{etc.}$$

(*) Costumava-se, não ha muito, designar as progressões por differença e por quociente qualificando-as, respectivamente, de *arithmeticas* e *geometricas*; hoje, porém, acham-se com justiça abolidas similhantes denominações : tão arithmetica é uma especie de progressões como a outra.

Assim tambem, sendo a, b, c...... k, l *quaesquer numeros* em progressão por differença, teremos

$$\div\, a.\ b.\ c........\ k.\ l.$$

Esta ultima progressão por differença é *geral* porque, sendo inteiramente arbitrarios os *valores numericos* de seos termos, ella abrange *todas* as progressões por differença possiveis. Na progressão geral por differença designa-se *o numero total dos termos* por n, *o primeiro termo* por a, *o ultimo termo*, ou *o termo da ordem* n, por l, e, finalmente, *a razão* por r (inicial da palavra resto). A *somma de* n *termos* representa-se por S.

315.—Da definição de progressão por differença resulta que

1.° *A differença entre dous termos consecutivos é constante.*—Porque esta differença não é mais do que a razão.

2.° *Tres termos consecutivos quaesquer formam uma equidifferença continua.*—Com effeito, sendo f, g, h tres termos consecutivos e r a razão, temos

$$g=f\pm r \text{ e } h=g\pm r\ ;$$

donde se-deduz, subtrahindo f da primeira egualdade e g de segunda,

$$g-f=\pm r \text{ e } h-g=\pm r:$$

por conseguinte,

$$g-f=h-g\,,$$

ou (n. 294) $\quad f-g=g-h\,.$

Resulta daqui que *qualquer termo de uma progressão por differença* (exceptuados o primeiro e o ultimo) é *meio differencial* (n. 287) *entre o termo precedente e o seguinte*. E' por esta razão que os termos intermedios têm o nome de *meios differenciaes*.

316. — Estabelecidas as precedentes noções indispensaveis, passemos já ao estudo das principaes questões relativas ás progressões por differença.

317.—*Valor de qualquer termo*. — Para calcular o valor de qualquer termo de uma progressão por differença, logo-que sejam dados o *primeiro termo* e a *razão*, póde-se proceder da maneira seguinte: — Juncta-se ou tira-se ao primeiro termo a razão, e tem-se o segundo termo; juncta-se ou tira-se ao segundo termo a razão, e tem-se o terceiro termo; e assim por deante, até chegar ao termo cujo valor se-pede.— Quando, porém, a ordem do termo pedido for muita elevada, este processo torna-se impracticavel por extremamente longo: tractemos de descobrir outro processo mais facil.

318. — Theorema I. *Qualquer termo de uma progressão por differença é egual ao primeiro termo, mais ou menos a razão multiplicada pelo numero dos termos precedentes a esse qualquer.*

Demonstração. — Seja qualquer progressão por differença

$$\div\, a.\ b.\ c..........\ k.\ l,$$

onde l é o termo procurado.

Conforme a definição de progressão por differença (n. 313), tem-se

$$b=a\pm r,$$
$$c=b\pm r,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$l=k\pm r.$$

Sommando membro a membro estas $n-1$ egualdades, vem

$$b+c+\ldots\ldots+l=a+b+\ldots\ldots\ldots+k\pm r(n-1):$$

donde resulta, supprimindo em ambos os membros as parcellas communs, a expressão

$$l=a\pm r\ (n-1),$$

que traduz o enunciado.

A expressão que achámos decompõe-se em duas:

$$l=a+r\ (n-1),$$
$$l=a-r\ (n-1),$$

servindo a primeira para o caso em que a progressão é *crescente* e a segunda para aquelle em que a progressão é *decrescente*.

Applicação. — A fórmula (*) $l=a\pm r\ (n-1)$ serve para calcular *o valor de qualquer termo de uma progressão por differença* sem passar pelos dos termos precedentes, uma vez que se-conheça o *primeiro termo*, a *razão* e o *numero total dos termos*: basta, para esse fim, substituir na fórmula adequada (uma das duas em que a fórmula $l=a\pm r\ (n-1)$ se-decompõe) as lettras a, r e n pelos seos valores numericos dados, e effectuar as operações que vêm nella indicadas. Seja, por exemplo, a progressão crescente

$$\div 2.3{,}5.5\ \ldots\ldots\ldots,$$

(*) *Fórmula* é a expressão que indica as operações a effectuar sobre numeros dados para obter um numero pedido.

na qual o primeiro termo é 2 e a razão é 1,5, e supponha-se que é pedido o 100° termo; ter-se-ha:

$$\begin{array}{ll} a=2, & l=2+1{,}5.(100-1) \\ r=1{,}5, & \ \ =2+1{,}5\times 99 \\ n=100 & \ \ =2+148{,}5 \\ & \ \ =150{,}5 \end{array}$$

319.—*Somma dos termos.*—A somma de todos os termos de uma progressão por differença póde-se obtêl-a directamente; porém, desde-que o numero desses termos seja muito consideravel, o calculo torna-se fastidioso. Vamos, pois, procurar um meio de calcular mais facilmente aquella somma.

320.— Theorema II. *Em uma progressão por differença, de numero limitado de termos, a somma de dous quaesquer termos equidistantes dos extremos é egual á somma desses termos.*

Demonstração. — Seja a progressão por differença de n termos

$$\div\ a\ \ldots\ldots\ldots\ x\ \ldots.\ y\ \ldots\ldots\ldots\ l,$$

na qual x e y são dous termos equidistantes dos extremos.

Da progressão dada podemos, evidentemente, separar as duas progressões, de p termos cada uma,

$$\div\ a\ldots\ldots\ldots\ldots x,$$
$$\div\ y\ldots\ldots\ldots\ldots l,$$

das quaes se-deduz (n. 318)

$$x=a\pm r\ (p-1),$$
$$l=y\pm r\ (p-1).$$

Ajunctando $\mp r\,(p-1)$ aos dous membros da ultima destas egualdades que precedem, vem

$$y = l \mp r\,(p-1);$$

e sommando a presente egualdade com a primeira das duas anteriores, teremos

$$x + y = a + l \qquad C.\ q.\ d.$$

321.—Theorema III. *A somma dos termos de uma progressão por differença é egual a metade do producto da somma dos extremos multiplicada pelo numero dos termos.*

Demonstração.—Seja dada qualquer progressão por differença

$$\div\, a.\ b \ldots\ldots\ldots k.\ l,$$

e represente-se por S a somma pedida.

Por ser S a somma dos n termos da progressão proposta, é evidente que

$$S = a + b + \ldots\ldots\ldots + k + l,$$

e uma vez que o segundo membro desta egualdade não se-altera escrevendo os termos na ordem inversa, vem

$$S = l + k + \ldots\ldots\ldots + b + a.$$

Sommando membro a membro as duas ultimas egualdades, e agrupando dous a dous os termos equidistantes b e k, etc., tem-se

$$2\,S = (a+l) + (b+k) + \ldots\ldots (k+b) + (l+a);$$

porém, segundo o theorema que precede (n. 320), temos

$$a+l = b+k = \text{etc.}:$$

logo, sendo n o numero dos parentheses, podemos escrever

$$2\,S = (a+l)\,n,$$

donde se-tira, dividindo por 2,

$$S = \frac{(a+l)\,n}{2},$$

fórmula que corresponde ao enunciado.

Applicação.—Por meio da fórmula $S = \frac{(a+l)n}{2}$ podemos calcular *a somma dos termos de uma progressão por differença*, logo-que sejam dados os valores numericos do *primeiro termo*, do *ultimo termo* e do *numero total dos termos*. Como exemplo, seja dada a progressão por differença

$$\div\, 1.\ 1{,}5 \ldots\ldots\ldots 49{,}5,$$

na qual 49,5 é o 98.º termo; neste caso, querendo achar a somma dos 98 termos, vem

$$a=1 \qquad S = \frac{(1+49{,}5)98}{2}$$

$$l=49{,}5 \qquad = \frac{50{,}5\times 98}{2}$$

$$n=98 \qquad = 50{,}5\times 49$$

$$= 2474{,}5$$

322.—*Inserção de meios.*—A inserção de meios differenciaes tem por objecto formar uma progressão por differença, sendo conhecidos os termos extremos e o numero dos termos intermedios.

Supponhamos que se-pretende inserir m meios differenciaes entre os numeros conhecidos a e b.—Logo-que for conhecida a razão da progressão que se-procura, se a-junctarmos ou tirarmos ao primeiro termo a, teremos o segundo; se a-junctarmos ou tirarmos a este segundo termo, acharemos o terceiro; e assim por deante (n. 313) : por conseguinte, a nossa questão está reduzida a procurar a razão de uma progressão por differença que tenha a e b por extremos e que encerre m termos intermedios.

A progressão pedida, por isso que deve encerrar m termos intermedios, constará de $m+2$ termos : portanto, sendo a o primeiro termo, b o ultimo, e suppondo que a progressão deve ser crescente, teremos (n. 318)

$$b=a+r\ (m+1)\ ;$$

subtrahindo a de ambos os membros desta egualdade, vem

$$b-a=r(m+1):$$

e daqui se-deduz, dividindo por $m+1$,

$$r=\frac{b-a}{m+1}\ .$$

Se a progressão pedida fosse decrescente, teriamos

$$b=a-r(m+1\ ;$$

sommando $r(m+1)$ aos dous membros desta egualdade, vem

$$b+r\ (m+1)=a,$$

e subtrahindo b, tem-se

$$r(m-1)=a-b:$$

donde se-tira, dividindo por $m+1$,

$$r=\frac{a-b}{m+1}\ .$$

Das duas precedentes fórmulas conclue-se que *A razão, numa progressão por differença, é egual á differença entre os termos extremos dividida pelo numero dos meios, mais* 1.

Applicação.—Por uma das fórmulas $r=\frac{b-a}{m+1}$ ou $r=\frac{a-b}{m+1}$ calcula-se *a razão de uma progressão por differença*, desde-que forem dados *os termos extremos* e *o numero dos termos intermedios*. Sejam, por exemplo, 5 e 40 dous numeros entre os quaes queremos inserir 6 meios differenciaes : ter-se-ha, suppondo crescente a progressão,

$$b=40 \qquad r=\frac{40-5}{6+1}$$

$$a=5 \qquad\quad =\frac{35}{7}$$

$$m=6 \qquad\quad =5$$

e assim acha-se

$$\div\ 5.\ 10.\ 15.\ 20.\ 25.\ 30.\ 35.\ 40$$

323.—Theorema IV. *Inserindo entre os termos consecutivos de uma progressão por differença o mesmo numero de meios differenciaes, as progressões parciaes obtidas constituem uma progressão unica.*

Demonstração.—Seja a progressão

$$\div a.\ b.\ c.\dots\dots\dots k.\ l,$$

que, por maior simplicidade, suppomos crescente.

Inserindo m meios differenciaes entre a e b, entre b e c, etc., e sendo r', r'',........ as razões das progressões parciaes, vem (n. 322)

$$r' = \frac{b-a}{m+1},$$
$$r'' = \frac{c-b}{m+1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

ora, sendo

$$b-a = c-b = \ldots\ldots\ldots = r,$$

tambem teremos

$$\frac{b-a}{m+1} = \frac{c-b}{m+1} = \ldots\ldots = \frac{r}{m+1}$$

portanto,

$$r' = r'' = \ldots,\ldots$$

A razão é, pois, a mesma em todas as progressões parciaes; mas, o ultimo termo de cada progressão é o mesmo que o primeiro termo da seguinte: logo, essas progressões parciaes formam uma progressão unica, que é

$$\div\ a.\ \frac{am+b}{m+1}\ \ldots\ldots\ b.\ \frac{bm+c}{m+1}\ \ldots\ldots\ l.$$

§ 2.º—Progressões por quociente

324.—Progressão por quociente *é a progressão em que um termo qualquer é egual ao precedente multiplicado por um numero constante.*

Razão de uma progressão por quociente *é o numero constante pelo qual se-deve multiplicar um termo para obter o seguinte.*

Uma progressão por quociente é crescente quando a razão é numero *maior do que a unidade* (numero inteiro ou fracção impropria).

Uma progressão por quociente é decrescente quando a razão é numero *menor do que a unidade* (fracção propria).

325.—Para mostrar que muitos numeros constituem uma progressão por quociente, é costume escrever antes do primeiro termo o signal $\div\!\!\div$ (signal de progressão por quociente) e collocar em seguimento os outros precedidos, cada um, de *dous ponctos*. Assim, as duas progressões por quociente

3, 6, 12, 24, 48, etc.,
192, 96, 48, 24, 12, etc.,

escrevem-se da maneira seguinte:

$$\div\!\!\div\ 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : \text{etc.},$$
$$\div\!\!\div\ 192 : 96 : 48 : 24 : 12 : \text{etc.}$$

Do mesmo modo, sendo a, b, c......k, l *quaesquer numeros* em progressão por quociente, virá

$$\div\!\!\div\ a : b : c : \ldots\ldots\ldots : k : l.$$

Esta ultima progressão por quociente é *geral* porque, sendo inteiramente arbitrarios os *valores numericos* de seos termos, ella comprehende *todas* as progressões por quociente possiveis. Na progressão geral por quociente representa-se *o numero total dos termos* por

n, *o primeiro termo* por a, *o ultimo termo*, ou *o termo da ordem* n, por l, e, a final, a *razão* por q (inicial da palavra quociente). A *somma de n termos* exprime-se por S.

326.—Da definição de progressão por quociente resulta que

1.° *O quociente da divisão de um termo pelo precedente é constante.*—Porque este quociente não é outra cousa mais do que a razão.

2.° *Tres termos consecutivos quaesquer formam uma proporção continua.*—Com effeito, sendo f, g, h tres termos consecutivos e q a razão, temos

$$g = fq \text{ e } h = gq;$$

donde se-tira, dividindo por f a primeira egualdade por g e a segunda,

$$\frac{g}{f} = q \text{ e } \frac{h}{g} = q:$$

portanto,

$$\frac{g}{f} = \frac{h}{g}$$

ou (n. 301) $f : g = g : h$.

Infere-se daqui que *qualquer termo de uma progressão por quociente* (exceptuados o primeiro e o ultimo) *é meio proporcional* (n. 287) *entre o termo precedente e o seguinte.* E' por este motivo que os termos intermedios denominam-se *meios proporcionaes.*

327.—Postas as noções indispensaveis que precedem, vamos entrar no estudo das principaes questões relativas ás progressões por quociente.

328.—*Valor de qualquer termo.*—Para calcular o valor de qualquer termo de uma progressão por quociente, uma vez que sejam dados o *primeiro termo* e a *razão*, póde-se proceder do modo seguinte:—Multiplica-se o primeiro termo pela razão, e tem-se o segundo termo; multiplica-se o segundo termo pela razão, e tem-se o terceiro termo; e assim por deante, até chegar ao termo cujo valor se-procura.—Quando, porém, for muito elevada a ordem do termo que se-quer achar, este processo torna-se impracticavel por demasiado longo: vamos descobrir outro processo mais rapido.

329.—Theorema I. *Qualquer termo de uma progressão por quociente é egual ao primeiro termo multiplicado pela razão elevada a uma potencia cujo expoente é o numero dos termos precedentes a esse qualquer.*

Demonstração. — Seja qualquer progressão por quociente

$$\div\, a : b : c : \ldots\ldots\ldots : k : l,$$

em que o termo que se-procura é l.

Segundo a definição de progressão por quociente (n. 324), vem

$$b = aq,$$
$$c = bq,$$
$$\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots$$
$$l = kq.$$

Multiplicando membro a membro as $n-1$ precedentes egualdades, tem-se

$$bc \ldots\, l = ab \ldots\, kq^{n-1}:$$

donde resulta, supprimindo em ambos os membros os factores communs, a fórmula

$$l = aq^{n-1},$$

que é traducção do enunciado.

Applicação.— A fórmula $l=aq^{n-1}$ serve para calcular *o valor de qualquer termo de uma progressão por quociente* sem passar pelos dos termos que o-precedem, logo-que se-conheçam o *primeiro termo*, a *razão* e o *numero total dos termos*: é bastante, nesse intuito, substituir na mencionada fórmula as lettras a, q e n pelos seos valores numericos conhecidos, e effectuar as operações que vêm alli indicadas. Sirva de exemplo a progressão crescente

$$\div\; 2 : 3 : 4{,}5 : \ldots\ldots,$$

na qual o primeiro termo é 2 e a razão 1,5, e admitta-se que queremos achar o valor do 6.° termo; ter-se-ha:

$$\begin{array}{ll} a=2 & l=2\times(1{,}5)^{6-1} \\ q=1{,}5 & \quad =2\times(1{,}5)^5 \\ n=6 & \quad =2\times 7{,}59375 \\ & \quad =15{,}1875 \\ & \quad =15{,}2 \text{ (proximamente)}. \end{array}$$

330.—*Somma dos termos*.—A somma de todos os termos de uma progressão por quociente podemos obtêl-a de modo directo; quando, porém, o numero desses termos for muito grande, tornar-se-ha enfadonho o calculo. E' necessario, portanto, procurar um meio mais facil de chegar ao conhecimento daquella somma.

331.—Theorema II. *A somma dos termos de uma progressão por quociente é egual : 1.°, á differença entre o producto do ultimo termo pela razão e o primeiro termo, dividida pela razão menos* 1, quando a progressão for crescente; 2.°, *á differença entre o primeiro termo e o producto do ultimo pela razão, dividida por* 1 *menos a razão*, desde-que a progressão seja decrescente.

Demonstração.—Seja a progressão geral por quociente

$$\div\; a : b : c : \ldots\ldots\ldots : k : l,$$

e designe-se por S a somma procurada.

Sendo S a somma dos n termos da progressão proposta, é claro que

$$S = a + b + c + \ldots\ldots + k + l, \qquad (1)$$

e multiplicando por q ambos os membros desta egualdade, vem

$$Sq = aq + bq + cq \ldots\ldots + kq + lq. \qquad (2)$$

Consideremos agora, alternadamente, os dous casos que se-pódem apresentar, segundo a progressão proposta é crescente ou decrescente.

Se a progressão é crescente, temos (n. 324)

$$q > 1,$$

donde se-tira, multiplicando por S,

$$Sq > S:$$

subtrahindo, pois, a egualdade (1) da egualdade (2), vem

$$Sq - S = (aq - b) + (bq - c) + \ldots\ldots + (kq - l) + lq - a;$$

mas, visto como (n. 324)

$$b = a\,q,\ c = b\,q, \ldots\ldots l = k\,q,$$

os termos encerrados em parentheses destroem-se, e, pois, teremos

$$S q - S = l\,q - a:$$

donde se-deduz, pondo S em evidencia e dividindo por $q-1$,

$$S = \frac{l\,q-a}{q-1},$$

fórmula que corresponde á primeira parte do enunciado.

Se a progressão é decrescente, temos (n. 324)

$$q < 1$$

donde tiramos

$$S\,q < S:$$

portanto, subtrahindo a egualdade (2) da egualdade (1), vem

$$S - Sq = (b - aq) + (c - bq) + \ldots + (l - kq) + a - lq,$$

e daqui se-deduz, como no caso precedente,

$$S - Sq = a - lq,$$

$$S(1-q) = a - lq,$$

$$S = \frac{a-lq}{1-q},$$

e esta fórmula traduz a segunda parte do enunciado.

Applicação.—Mediante uma das precedentes fórmulas póde-se calcular *a sommu dos termos de uma progressão por quociente*, quando são dados os valores

numericos do *primeiro termo*, do *ultimo termo* e da *razão*. Supponhamos, por exemplo, que se-pede a somma dos seis termos da progressão crescente

$$\div\!\div\ 2 : 6 : 18 : 54 : 162 : 486 :$$

tem-se, neste caso,

$$a = 2, \qquad S = \frac{486.3-2}{3-1}$$

$$l = 486, \qquad = \frac{1458-2}{2}$$

$$q = 3, \qquad = \frac{1456}{2} = 728.$$

332.—Observação.—Se, em logar do ultimo termo, nos-for dado o numero total dos termos, n, será necessario, antes de tudo, calcular o valor numerico do ultimo termo para substituil-o na fórmula da somma; porém, podemos proceder de outro modo: substituindo, nas duas fórmulas que achámos, em logar de l o seo valor aq^{n-1}, vem

$$S = \frac{aq^{n-1}.q-a}{q-1} \text{ e } S = \frac{a-aq^{n-1}.q}{1-q}$$

ou, multiplicando e pondo a em evidencia,

$$S = \frac{a(q^n-1)}{q-1} \text{ e } S = \frac{a(1-q^n)}{1-q}.$$

333. — *Producto dos termos.* — O producto dos termos de uma progressão por quociente póde ser obtido multiplicando o primeiro termo pelo segundo, o primeiro producto pelo terceiro termo, e assim por deante; mas, a operação, feita deste modo, seria excessivamente longa: procuremos um processo mais rapido.

334. — Theorema III. *Em uma progressão por quociente, de numero limitado de termos, o producto de dous quaesquer termos equidistantes dos extremos é egual ao producto dos mesmos extremos.*

Demonstração. — Seja a progressão por quociente de n termos

$$\div\div a : \ldots\ldots : x : \ldots\ldots : y : \ldots\ldots : l,$$

na qual x e y são dous termos equidistantes dos extremos.

Podemos, evidentemente, da progressão proposta separar as duas progressões, de p termos cada uma,

$$\div\div a : \ldots\ldots\ldots\ldots : x,$$
$$\div\div y : \ldots\ldots\ldots\ldots : l$$

das quaes se-tira (n. 329)

$$x = aq^{p-1},$$
$$l = yq^{p-1}.$$

Dividindo ambos os membros da segunda egualdade por q^{p-1}, vem

$$y = \frac{l}{q^{p-1}},$$

e multiplicando membro a membro a ultima egualdade e a primeira das duas precedentes, ter-se-ha

$$xy = a\,l. \qquad C.\ q.\ d.$$

335.—Theorema IV. *O producto dos termos de uma progressão por quociente é egual á raiz quadrada do producto dos extremos elevado a uma potencia cujo expoente é o numero dos termos da progressão.*

Demontração.—Seja qualquer progressão por quociente

$$\div\div a : b : \ldots\ldots : k : l.$$

e represente-se por P o producto dos seos n termos.

Sendo P o producto pedido, temos, evidentemente,

$$P = a\,b \ldots\ldots k\,l,$$

donde (n. 81)

$$P = l\,k \ldots\ldots b\,a.$$

Multiplicando membro a membro as duas ultimas egualdes, vem

$$P^2 = a\,l \times b\,k \times \ldots\ldots \times k\,b \times la;$$

mas, conforme o theorema precedente, tem-se

$$a\,l = b\,k = \text{etc}:$$

logo, por ser n o numero dos termos da progressão, póde-se escrever

$$P^2 = (al)^n,$$

e daqui se-deduz, extrahindo a raiz quadrada,

$$P = \sqrt{(a\,l)^n}$$

336.—*Inserção de meios.* — A inserção de meios proporcionaes tem como objecto formar uma progressão por quociente, sendo dados os termos extremos e o numero dos termos intermedios.

Admittamos que se-pretende inserir m meios proporcionaes entre os numeros conhecidos a e b.— Quando for conhecida a razão da progressão que se-pede, se multiplicarmos por elle o primeiro termo a, acharemos o segundo ; se multiplicarmos por elle este segundo termo, virá o terceiro, e assim por deante (n. 324) : por consequencia, a nossa questão fica reduzida a procurar a razão de uma progressão por quociente que tenha a e b por extremos e que encerre m termos intermedios.

A progressão que se-pede, havendo de conter m termos intermedios, constará de $m + 2$ termos: por conseguinte, sendo a o primeiro termo e b o ultimo, temos (n. 329)

$$b = a\, q^{m+1} ;$$

dividindo por a os dous membros desta egualdade, vem

$$\frac{b}{a} = q^{m+1}$$

e daqui se-deduz, extrahindo a raiz de graó $m+1$,

$$q = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$$

Conclue-se desta fórmula que

A razão, numa progressão por quociente, é egual á raiz de grao indicado pelo numero de termos intermedios mais 1, do quociente da divisão do ultimo termo pelo primeiro.

Applicação.—Pela fórmula $q = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$ calcula-se *a razão de uma progressão por quociente*, quando forem

dados *os termos extremos e o numero dos termos intermedios*. Sejam, por exemplo, 3 e 192 dous numeros entre os quaes queremos inserir 5 meios proporcionaes : tem-se

$$b = 192 \qquad q = \sqrt[5+1]{\frac{192}{3}}$$

$$a = 3 \qquad = \sqrt[6]{64}$$

$$m = 5$$

Extrahe-se a raiz sexta de 64, notando que $6 = 2.3$: então a raiz sexta é a mesma cousa que a raiz cubica da raiz quadrada de 64. Assim, pois, temos

$$q = \sqrt[3]{\sqrt{64}}$$
$$= \sqrt[3]{8}$$
$$= 2$$

Observação. — Sómente sabemos extrahir raizes cujos indices contenham por factores 2 e 3 ; por isso o calculo da razão nas progressões por quociente é, muitas vezes, impossivel ou, pelo menos, muito embaraçoso. Veremos na theoria dos logarithmos como se-vence essa impossibilidade ou embaraço.

337.—Theorema III. *Inserindo entre os termos consecutivos de uma progressão por quociente o mesmo numero de meios proporcionaes, as progressões parciaes obtidas constituem uma progressão unica.*

Demonstração.—Seja a progressão

$$\div\!\div a : b : c : \ldots\ldots : k : l$$

Inserindo m meios proporcionaes entre a e b, entre b e c, etc., e chamando q', q'',... as razões das progressões parciaes, tem-se (n. 336)

$$q' = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}},$$

$$q'' = \sqrt[m+1]{\frac{c}{b}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Ora, temos

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \cdots\cdots = q,$$

donde se-deduz

$$\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}} = \sqrt[m+1]{\frac{c}{b}} = \cdots\cdots = \sqrt[m+1]{q}:$$

logo,

$$q' = q'' = \cdots\cdots$$

A razão é, portanto, a mesma em todas as progressões parciaes; mas, o ultimo termo de cada progressão é o mesmo que o primeiro termo da seguinte: logo, essas progressões parciaes formam uma progressão unica, que é

$$\div\div a : \sqrt[m+1]{a^m b} : \cdots\cdots : b : \sqrt[m+1]{b^m c} : \cdots\cdots l$$

CAPITULO III

LOGARITHMOS

(THEORIA ELEMENTAR)

338.—Consideremos as duas progressões seguintes, uma por quociente começando pela *unidade* e a outra por differença principiando por *zero*:

$$\div\div 1: 3: 9: 27: 81: 243: 729: 2187: \cdots\cdots,$$
$$\div 0.\ 2.\ 4.\ 6.\ 8.\ 10.\ 12.\ 14\cdots\cdots$$

1.° *Multiplicando* dous termos da progressão por quociente e *sommando* os termos da progressão por differença correspondentes, o *producto* e a *somma* são termos da mesma ordem nas duas progressões. Exemplo:

$$9\times 81=729,$$
$$4+\ 8=\ 12.$$

2.° *Dividindo* um termo da progressão por quociente por algum dos termos anteriores e *subtrahindo* um do outro os termos correspondentes da progressão por differença, o *quociente* e a *differença* correspondem-se em ambas as progressões. Exemplo:

$$729:81=9,$$
$$12 - 8=4.$$

3.° *Elevando a qualquer potencia* um termo da progressão por quociente e *multiplicando pelo expoente dessa potencia* o termo correspondente da progressão por differença, a *potencia* e o *producto* são termos correspondentes nas duas progressões. Exemplo:

$$27^2 = 729,$$
$$6 \times 2 = 12.$$

4.° *Extrahindo qualquer raiz* de um termo da progressão por quociente e *dividindo pelo indice dessa raiz* o termo correspondente da progressão por differença, a *raiz* e o *quociente* correspondem-se nas duas progressões. Exemplo:

$$\sqrt{729} = 27$$
$$12 : 2 = 6$$

Da observação que precede se-deprehende a possibilidade de substituir, no calculo, umas operações por outras mais faceis de executar, a saber: a multiplicação pela addição, a divisão pela subtracção, a elevação a potencias pela multiplicação, e a extracção de raizes pela divisão; bastará, para isso, que se construa uma tabella onde venham inscriptos, de um lado os termos da progressão por quociente, e, do outro os termos correspondentes da progressão por differença.

Logarithmo de um numero *é o termo de uma progressão por differença que começa por zero, correspondente a esse numero considerado como termo de uma progressão por quociente que principia pela unidade.*

Systema de logarithmos *é o conjuncto dos termos de duas progressões, uma por quociente e a outra por differença, começando a primeira pela unidade e a segunda por zero.*

339.— E' evidente que aos termos de uma mesma progressão por quociente podemos fazer corresponder uma infinidade de progressões por differença, e que aos termos de uma mesma progressão por differença podemos fazer corresponder uma infinidade de progressões por quociente: por conseguinte, um mesmo numero póde ter uma infinidade de logarithmos, assim como, reciprocamente, um mesmo logarithmo póde pertencer a uma infinidade de numeros. Dahi se-segue que, para definir completamente um systema de logarithmos, não basta dizer que a progressão por quociente começa pela unidade e que a progressão por differença começa por zero: é necessario ainda fixar na progressão por quociente um termo que corresponda a outro tomado arbitrariamente na progressão por differença. Este termo arbitrario da progressão por differença é, ordinariamente, 1.

Base de um systema de logarithmos *é o termo da progressão por quociente ao qual corresponde o termo* 1 *da progressão por differença*; ou, por outras palavras, *é o numero que tem por logarithmo a unidade.*

A base de um systema de logarithmos póde ser qualquer numero, excepto 1; e havendo uma infinidade de numeros, resulta que existe uma infinidade de systemas de logarithmos.

Os mais conhecidos entre os systemas de logarithmos são o *systema neperiano* (*) e o *systema decimal*; a base do primeiro systema é o numero 2,718281828...., que se-costuma designar com a lettra *e*, e a base do

(*) Esta qualificação lembra o nome do escossez John *Neper* (1550—1617), que é o inventor dos logarithmos.

segundo é o numero 10 (base, tambem, do nosso systema de numeração). Os logarithmos neperianos tambem são conhecidos pelas denominações de *logarithmos naturaes* e *logarithmos hyperbolicos*, e designam-se antepondo ao numero a lettra l: assim, l 25 quer dizer *logarithmo neperiano* de 25; os logarithmos decimaes chamam-se ainda *logarithmos vulgares* e *logarithmos de Briggs* (*), e indicam-se collocando as lettras lg antes do numero: assim, lg 25 significa *logarithmo decimal* de 25.

340.— Observação.— Segundo a definição de logarithmo apresentada em o n. 338, parece que sómente possuem logarithmos os numeros que fazem parte da progressão por quociente caracteristica. A verdade, porém, é que *todo numero maior do que a unidade tem, num dado systema, um logarithmo e sómente um*. Esta proposição, embora não possamos aqui demonstrál-a directamente, convencer-nos-hemos de que é certa por meio do raciocinio seguinte: — inserindo entre os termos consecutivos da progressão por quociente caracteristica um determinado numero de meios proporcionaes, e inserindo entre os termos consecutivos da progressão por differença *o mesmo* numero de meios differenciaes, formam-se duas novas progressões (ns. 323 e 337), e cada termo da segunda é logarithmo do termo que lhe-corresponde na primeira; ora, se o numero dos meios inseridos for tão grande que a differença entre dous termos consecutivos da progressão por quociente seja tão pequena quanto se-quizer, *qualquer numero maior que a unidade* póde ser tomado,

(*) Henrique *Briggs* (1556 — 1630), professor de Mathematica em Oxford, foi o primeiro que calculou uma taboa (embora incompleta) de logarithmos decimaes. Esta taboa de logarithmos foi, mais tarde, completada.

sem erro sensivel, como egual ao termo immediatamente menor do que elle nessa progressão por differença.

341.—Assentadas as precedentes noções, passemos á demonstração das propriedades dos logarithmos, as quaes pódem ser reduzidas a duas classes: *propriedades geraes*, communs a todos os systemas, e *propriedades particulares* dos logarithimos decimaes.

§ 1.º— Propriedades geraes dos logarithmos

342.—Theorema I. *O logarithmo de um producto é egual á somma dos logarithmos de seos factores.*

Demonstração.—Este theorema consta de duas partes, conforme são dous ou mais de dous os factores do producto supposto.

1.º *O logarithmo de um producto de dous factores é egual á somma dos logarithmos desses factores.*—Sejam a e b os dous factores de um producto: lga e lgb são os respectivos logarithmos.

Consideremos as progressões caracteristicas de qualquer systema de logarithmos. Tomando na progressão por quociente os factores propostos a e b (n. 340, obs.) e na progressão por differença os logarithmos desses factores; e sendo p um termo, tomado na primeira progressão, tão distante de b quanto a dista de 1, e lgp o termo correspondente na segunda progressão, teremos

$$\begin{array}{l} \div\!\div\ 1 : \ldots\ldots\ldots : a : \ldots\ldots : b : \ldots\ldots\ldots\ldots p, \\ \div\ 0 \ldots\ldots\ldots\ lga \ldots\ldots\ldots\ lgb \ldots\ldots\ldots\ldots\ lgp; \end{array}$$

ora, numa progressão por quociente, de numero limitado de termos, o producto dos extremos é egual ao producto de dous termos equidistantes delles (n. 334); e numa progressão por differença, de numero limitado de termos, a somma dos extremos é egual á somma de dous termos equidistantes delles (n. 320) : por consequencia,

$$1 . p \text{ ou } p = ab,$$
$$0 + lgp \text{ ou } lgp = lga + lgb,$$

e desta ultima egualdade se-deduz, substituindo em logar de p o seo valor ab, dado pela primeira,

$$lgab = lga + lgb.$$

2.º *O logarithmo de um producto de tres ou mais factores é egual á somma dos logarithmos desses factores.* —Sejam a, b, c, os tres factores de um producto : lga, lgb, lgc são os logarithmos correspondentes.

Suppondo effectuado o producto de a por b, e representando-o por p, teremos

$$p = ab,$$
$$abc = pc;$$

porém, sendo eguaes dous numeros, os seos logarithmos, tomados no mesmo systema, tambem o-são : logo,

$$lgp = lgab,$$
$$lgabc = lgpc,$$

ou, conforme a 1.ª parte do theorema,

$$lgp = lga + lgb,$$
$$lgabc = lgp + lgc;$$

sommando membro a membro estas duas ultimas egualdades, vem

$$lgp + lgabc = lga + lgb + lgp + lgc:$$

portanto, supprimindo a parcella commum lgp, ter-se-ha

$$lgabc = lga + lgb + lgc.$$

Com raciocinio analogo se-provaria o theorema no caso de quatro, cinco, etc. factores : logo, o theorema é verdadeiro em toda a sua generalidade.

343.—Theorema II. *O logarithmo de um quociente é egual á differença entre o logarithmo do dividendo e o logarithmo do divisor.*

Demonstração.—Sejam a e b dous numeros, o primeiro dos quaes deve ser dividido pelo segundo; e representemos por q o quociente (completo) da divisão de a por b : teremos

$$q = a : b,$$

donde se-tira (n. 60)

$$qb = a;$$

porém, sendo eguaes dous numeros, os seos logarithmos, tomados no mesmo systema, tambem o-são: portanto,

$$lgqb = lga,$$

ou (n. 342) $\quad lgq + lgb = lga;$

subtrahindo lgb de ambos os membros da ultima egualdade e substituindo q pela expressão equivalente $a : b$, vem

$$lg(a : b) = lga - lgb. \qquad C. q. d.$$

344.—Corollario. *O logarithmo de uma fracção é egual á differença entre o logarithmo do numerador e o logarithmo do denominador.*

Porque toda fracção exprime um quociente indicado em que o dividendo se-considera como numerador e o divisor como denominador : por conseguinte, sendo $\frac{a}{b}$ qualquer fracção, ter-se-ha

$$lg\frac{a}{b} = lga - lgb.$$

345.—Theorema III. *O logarithmo de qualquer potencia de um numero é egual ao expoente da potencia multiplicado pelo logarithmo do numero.*

Demonstração.—Seja a^m qualquer potencia de um numero a.

Segundo a definição de potencia (n. 240), temos

$$a^m = aaa\ldots\ldots a\,;$$

porém, sendo eguaes dous numeros, os seos logarithmos, tomados no mesmo systema, tambem o-são : por conseguinte,

$$lga^m = lg(aaa\ldots\ldots a)\,,$$

ou ainda (n. 342)

$$lga^m = lga + lga + lga + \ldots\ldots + lga\,;$$

ora, uma somma de parcellas eguaes póde ser substituida pelo producto do numero das parcellas por uma destas (n. 49) ; portanto,

$$lga^m = m\,lga. \qquad C.\,q.\,d.$$

346.—Theorema IV. *O logarithmo de qualquer raiz de um numero é egual ao logarithmo do numero dividido pelo indice da raiz.*

Demonstração.—Seja $\sqrt[n]{a}$ qualquer raiz de um numero a, e chame-se r a raiz n^{ma} de a : temos

$$r = \sqrt[n]{a}\,,$$

donde, pela definição de raiz (n. 241), se-tira

$$r^n = a\,;$$

porém, sendo eguaes dous numeros, os seos logarithmos, tomados no mesmo systema, tambem o-são : por consequencia,

$$lgr^n = lga,$$

ou (n. 345)

$$n\,lgr = lga\,;$$

dividindo por n os dous membros desta egualdade e substituindo r pela expressão equivalente $\sqrt[n]{a}$, tem-se

$$lg\sqrt[n]{a} = \frac{lga}{n}. \qquad C.\,q.\,d.$$

347.—Observação.—Se o primeiro termo da progressão por quociente não fosse 1, e se o primeiro termo da progressão por differença não fosse 0, o emprego dos logarithmos, bem longe de simplificar o calculo, complicál-o-hia mais.

§ 2º.—Propriedades dos logarithmos decimaes

348.—As progressões que definem o systema decimal são .

$$\div\!\div\ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : \text{etc.}$$
$$\div\ 0\ .\ 1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4\ .\ 5\ .\ \text{etc.}$$

Além das propriedades geraes, communs a todos os systemas, goza o systema decimal de propriedades especiaes que tornaram preferivel a qualquer outro este systema.

349.—Theorema I. *O logarithmo de qualquer potencia de 10 é egual ao expoente dessa potencia.*

Demonstração.—Seja 10^m uma qualquer potencia de 10: temos (n. 345).

$$lg10^m = mlg10;$$

mas, no systema decimal, temos tambem

$$lg10 = 1$$

[conforme a definição de *base* (n. 339)]: portanto,

$$lg10^m = m.1 = m. \qquad C. q. d.$$

350.—Theorema II. *O logarithmo de um numero que não for potencia de 10 é numero fraccionario.*

Demonstração. — Seja N qualquer numero comprehendido entre duas potencias consecutivas de 10, e seja m o expoente da mais baixa dessas potencias: temos, por causa da hypothese,

$$10^m < N < 10^{m+1};$$

porém, sendo deseguaes tres numeros, os seos logarithmos, tomados no mesmo systema, tambem são deseguaes e no no mesmo sentido: portanto,

$$lg\ 10^m < lg\ N < lg\ 10^{m+1},$$

ou (n. 349) $$m < lg\ N < m + 1.$$

Ora, estando $lg\ N$ comprehendido entre dous numeros inteiros consecutivos, m e $m + 1$, é egual ao

menor delles mais *uma parte da unidade*: logo, é numero fraccionario. *C. q. d.*

351 —Observação.—Os logarithmos calculam-se ordinariamente em numeros decimaes: a parte inteira do logarithmo denomina-se caracteristica; a parte decimal, mantissa (*).

352 — Theorema III. *A caracteristica do logarithmo de um numero maior que a unidade encerra tantas unidades menos uma quantos são os algarismos da parte inteira desse numero.*

Demonstração. — Seja N um numero comprehendido entre 10^m e 10^{m+1}. O numero N, por ser maior do que 10^m, não póde conter menos de $m + 1$ algarismos; e, sendo menor do que 10^{m+1}, não póde conter $m + 2$ algarismos: logo, o numero N tem $m + 1$ algarismos. Por outra parte, $lg\ N$ está comprehendido (segundo a propriedade anterior) entre m e $m + 1$: portanto, $lg\ N$ encerra m unidades. Ora, é evidente que $m = (m + 1)-1$: o que prova a propriedade.

Reciprocamente. — *O numero, maior que a unidade, correspondente a um logarithmo dado, consta de tantos algarismos mais um quantas são as unidades contidas na caracteristica desse logarithmo.*

353.— Theorema IV. *Quando se-conhece o logarithmo de um numero, basta junctar ou subtrahir á sua caracteristica 1, 2, 3, etc., unidades para se-ter o logarithmo de outro numero que seja 10, 100, 1000, etc. vezes maior ou menor.*

Demonstração.—Seja N qualquer numero: $N.10^m$

(*) Nome usado por quasi todos os mathematicos, mesmo francezes (Vej. Paque: Arithm.; pag. 370).

é um numero 10^m vezes maior, e $N : 10^m$ é um numero 10^m vezes menor que N.

1.° Desenvolvendo $lg\ (N.\ 10^m)$, teremos (ns. 342 e 349),

$$lg\ (N.\ 10^m) = lg\ N + lg 10^m = lg\ N + m.$$

2.° Desenvolvendo $lg (N : 10^m)$, virá (ns. 343 e 349),

$$lg\ (N : 10^m) = lg\ N - lg\ 10^m = lg\ N - m.$$

Os dous precedentes desenvolvimentos demonstram o que queriamos.

§ 3.°—Disposição e uso das taboas de logarithmos

354.— Taboa de logarithmos *é uma tabella que contem, de um lado, os numeros inteiros desde* 1 *até o numero que se-quizer, e, do outro lado, os logarithmos correspondentes.*

A construcção de uma taboa de logarithmos, posto-que seja operação puramente arithmetica, depende, comtudo, de considerações que são do dominio de outra parte da Mathematica: passamos, pois, em silencio por esta questão.

355.—As taboas de logarithmos decimaes usualmente empregadas são as de *Francisco* Callet; ellas contêm as mantissas dos logarithmos de todos os numeros inteiros desde 1 até 108000 (inclusive), calculadas, em geral, com *sete decimaes*; não trazem as caracteristicas das logarithmos, porque estas ficam conhecidas pela simples inspecção do numero (n. 352).

As taboas de Callet estão divididas em duas partes.

Na primeira parte, intitulada kiliade I (*), acham-se, em columnas iniciadas por N, os numeros inteiros 1, 2, 3,... 1200; á direita, e na mesma linha horizontal, encontram-se as mantissas dos logarithmos desses numeros, formando columnas designadas por Log. Na segunda parte, em columnas iniciadas tambem por N, vêm os numeros inteiros 1020, 1021, 1022,.....10799; as mantissas dos logarithmos destes numeros buscam-se, á direita, nas columnas marcadas com 0: os quatro ultimos algarismos de cada mantissa encontram-se na linha horizontal em que vem o numero, e os tres primeiros ou (depois de 10000) os quatro primeiros acham-se á esquerda daquelles e, em geral, um pouco acima. A segunda parte das taboas fornece tambem os logarithmos dos numeros *decuplos* dos que lá vêm inscriptos, isto é, de 10200 10210, 10220,:....107990; porque, quando um numero é *dez vezes maior* do que outro, a mantissa dos logarithmos de ambos é a mesma: sómente differem as caracteristica, (n. 353). Para ter os logarithmos dos numeros comprehendidos entre cada dous dos numeros 10200, 10210, 10220,......107990, e ainda os dos que vão desde 107990 até 107999, procuram-se os quatro ultimos algarismos da mantissa na columna que tiver, no alto, o algarismo em que termina o numero, e na linha horizontal onde se-acham os outros algarismos deste numero. A segunda parte contem, pois, mais nove columnas iniciadas com os algarismos 1, 2, 3,...... 9 (e nisto já differe da kiliade I).

Na ultima columna á direita, disignada por Diff., encontram-se as *differenças* entre os logarithmos de dous

(*) Não comprehendemos como, na mesma sciencia, possam escrever-se palavras da mesma familia com radicaes differentemente representados: escreva-se *chilo* e *chiliade*, ou (melhor) *kilo* e *kiliade*. A pronúncia não se-oppõe, aqui, á etymologia.

numeros inteiros consecutivos e as *partes proporcionaes* dessas differenças, isto é, os productos de cada differença por 0,1, 0,2, 0,3,..,... 0,9 : os multiplicadores estão á esquerda de cada pequena columna, que tem no alto a differença, e os productos á direita. Esta ultima columna serve para calcular, completando-os, os logarithmos dos numeros que excedem o limite das taboas (108000).

356.—Por meio das taboas de logarithmos podemos resolver as duas questões seguintes :1.ª *Dado um numero, achar o seo logarithmo; 2.ª Dado um logarithmo, achar o numero correspondente.*

Supporemos que o numero dado é maior do que a unidade : dentro em pouco vamos ver como se-procede quando, no calculo que se-quer fazer por logarithmos, ha fracções proprias, quer ordinarias, quer decimaes.

357.—Dado um numero, achar o seo logarithmo.—Temos aqui tres casos principaes a considerar.

1.º Caso : *o numero dado é inteiro e não excede a 108000*—. Conhecendo-se a disposição das taboas de logarithmos (n. 355), não se-encontra difficuldade em tirar o logarithmo de qualquer numero inteiro nas condições em que o-supponmos : menor do que 108000. Assim, por exemplo, obter-se-ha sem operação alguma

$$lg1018=3,00774778,$$
$$lg10666=4,02800158,$$
$$lg84237=4,9255029.$$

2.º Caso : *o numero dado é inteiro e excede a 108000.* — Supponhamos que se-pede o logarithmo de 9728395. Se dividirmos por 100 o numero proposto (o que equivale a separar nelle á direita *dous* algarismos), teremos, evidentemente,

$$9728395=97283,95\times 100,$$

donde (ns. 342 e 349) se-tira

$$lg9728395=lg97283,95+2:$$

estamos, portanto, reduzidos a procurar o logarithmo de 97283,95 e junctar 2 á caracteristica desse logarithmo.

O numero 97283,95 está comprehendido entre 97283 e 97284: por conseguinte, o seo logarithmo achar-se-ha entre os destes dous ultimos numeros ; mas, pelas taboas, achamos

$$\begin{aligned} lg97284 &= 4,9880414,\\ lg97283 &= 4,9880370,\\ \text{diff. por 1} &\quad \underline{44}: \end{aligned}$$

portanto,

$$lg97283,95=4,9880370+x,$$

sendo x um certo numero de *unidades da 7ª ordem decimal* que devem ser addicionadas á mantissa do logarithmo de 97283 para se-ter o de 97283,95.

Calcula-se x admittindo que, dentro de limites proximos,— *as differenças entre os logarithmos são proporcionaes ás differenças entre os numeros correspondentes.*—Tomando em consideração este principio, diremos : *por uma unidade de differença entre os numeros 97284 e 97283, temos 44 unidades* (de 7ª ordem decimal) *de differença entre os seos logarithmos ; por 0,95 de differença entre os numeros*

97283,95 e 97283, *qual será a differença entre os logarithmos correspondentes?* Estabelecendo a proporção, vem

$$1 : 44 = 0,95 : x,$$

donde se-tira

$$x = 44 \times 0,95,$$

ou, approximadamente,

$$x = 42.$$

Temos, pois,

$$\begin{aligned} lg97283,95 &= 4,9880370 \\ &\quad + \qquad\quad 42 \\ \hline &= 4,9880412: \end{aligned}$$

portanto, $lg9728395 = 6,9880412.$

O numero complementar x tambem póde ser calculado por meio das taboas. Com effeito, uma vez que $0,95 = 0,9 + 0,5:10$, temos

$$\begin{aligned} x &= 44.(0,9 + 0,5 : 10) \\ &= 44 \times 0,9 + (44 \times 0,5) : 10 ; \end{aligned}$$

mas, nas taboas (columna das differenças) encontra-se

$$\begin{aligned} 44 \times 0,9 &= 40, \\ 44 \times 0,5 &= 22 : \end{aligned}$$

por consequencia,

$$\begin{aligned} x &= 40 + 22 : 10 \\ &= 40 + 2,2 \\ &= 42 \quad \text{(proximamente).} \end{aligned}$$

Na práctica dispôr-se-ha o calculo do modo seguinte:

$$\begin{array}{lr} & 97283,95 \\ lg97283 & = 4,9880370 \\ \text{diff. por } 0,9 & 40 \\ \text{diff. por } 0,05 & 2,2 \\ \hline lg97283,95 & = 4,9880412, \\ lg9728395 & = 6,9880412 \end{array}$$

3.° Caso: *o numero dado é fraccionario improprio.*—Se o numero dado é uma fracção ordinaria impropria, procura-se o seo logarithmo como de um quociente (n. 343); se é numero decimal, avança-se para a direita com a virgula tantas casas quantas sejam necessarias para que a parte inteira conste, no maximo, de *cinco* algarismos, e recahe-se no 1.° ou no 2.° caso.

Exemplos:

1.° *Achar o logarithmo de* $\frac{58473}{2925}$. Tem-se (n. 343)

$$\begin{aligned} lg\frac{58473}{2925} &= lg58473 - lg\,2925 ; \\ lg58473 &= 4,7669554, \\ -lg2925 &= 3,4661259, \\ lg\frac{58473}{2925} &= 1,3008295. \end{aligned}$$

2.° *Achar o logarithmo de* 4728,578. Temos

$$4728,578 = 47285,78 : 10 :$$

por conseguinte (ns. 343 e 349)

$$lg 4728,578 = lg 47285,78 - 1\,;$$

$$\begin{array}{lr} 47285,78 & \\ lg 47285 & = 4,6747234, \\ \text{diff. por } 0,7 & 64 \\ \text{diff. por } 0,08 & 7,4 \\ \hline lg 47285,78 = & 4,6747305, \\ lg 4728,578 = & 3,6747305 \end{array}$$

358.—Observação.—Para completar o logarithmo de um numero maior do que 108000, admittiu-se que as differenças entre os logarithmos são proporcionaes ás differenças entre os numeros correspondentes, e é nessa hypothese que foram calculadas as *partes proporcionaes* que vêm na taboa das differenças. Este principio, entretanto, não é *rigorosamente* verdadeiro, como seria facil provar comparando, admittida a hypothese, os logarithmos de tres numeros inteiros consecutivos.

359.—Dado um logarithmo, achar o numero correspondente.

Ha dous casos unicos a considerar.

1.° Caso : *o logarithmo dado encontra-se nas taboas.*—Quem conhecer a disposição das taboas de logarithmos (n. 355), facilmente poderá ler nellas o numero correspondente a um logarithmo dado, nas condições em que o-suppomos : a caracteristica desse logarithmo dirá quantos algarismos deve ter a parte inteira do numero pedido (n. 352). Assim, temos

$$3,38021128 = lg\ 2400,$$
$$4,5774458 = lg\ 37796,$$
$$1,5774458 = lg\ 37,796.$$

2.° Caso : *o logarithmo dado não se-encontra nas taboas.*—Supponha-se que nos-pedem o numero cujo logarithmo é 3,8870279, e seja N esse numero : teremos

$$3,8870279 = lg\ N.$$

Procurando nas taboas a mantissa do logarithmo dado, achamos que ella está comprehendida entre as duas 8870262 e 8870318, correspondentes, cada uma a cada um, aos numeros 77105 e 77106 : logo, o numero pedido N (suppondo, por um momento, que a sua parte inteira consta de *cinco* algarismos) fica comprehendido entre os numeros 77105 e 77106, e será, pois,

$$N = 77105 + x,$$

sendo x uma *fracção propria* que se-deve junctar a 77105 para ter N.

Para calcular x diremos (como em o n. 357, 2.° Caso) : *por* 56 *unidades de differença entre as mantissas* 8870318 *e* 8870262, *temos* 1 *unidade de differença entre os numeros* 77106 *e* 77105, *correspondentes; por* 17 *unidades de differença entre as mantissas* 8870279 *e* 8870262, *qual será a differença entre os respectivos numeros* ? Escrevendo a proporção, vem

$$56 : 1 = 17 : x,$$

donde se-deduz

$$x = \frac{17}{56},$$

ou, avaliando x em fracção decimal,

$$x = 0,3.$$

Temos, portanto,

$$N = 77105 + 0,3$$
$$= 77105,3;$$

porém, sendo 3 a caracteristica do logarithmo proposto, deve o numero N constar de *quatro* algarismos na sua parte inteira: logo,

$$N = 7710,53.$$

A fracção complementar x póde tambem ser determinada por meio das taboas. Com effeito, x é um numero que, multiplicado pela differença tabular 56, produz a differença 17: logo, procurando na taboa das differenças o factor 56 (no alto) e o producto 17 (do lado direito), achar-se-ha, do lado esquerdo, 3, isto é, 0,3 (n. 355).

A disposição do calculo póde ser a seguinte:

$$\begin{array}{ll}
3,8870279 & \\
4,8870262 = lg77105 & \\
+ \quad 17 & \text{diff. por } 0,3 \\
\hline
4,8870279 = lg77105,3 & \\
3,8870279 = lg7710,53 &
\end{array}$$

Outro exemplo:

$$\begin{array}{ll}
5,5732601 & \\
4,5732546 = lg37433 & \\
55 & \\
+ \ 46 & \text{diff. por } 0,4 \\
\hline
90 & \\
+ \ 81 & \text{diff. por } 0,07 \\
\hline
9 & \\
\hline
4,5732601 = lg37433,47 & \\
5,5732601 = lg374334,7 &
\end{array}$$

Neste exemplo a differença entre a mantissa do logarithmo proposto e a do immediatamente inferior é 55, que não se-encontra nas taboas; toma-se, pois, 46, que fica logo abaixo e corresponde a 0,4. A differença $55 - 46 = 9$, convertida em unidades de ordem immediatamente inferior, dá 90, que tambem não se-encontra nas taboas; toma-se 81, que fica logo abaixo e corresponde a $0,7 : 10 = 0,07$. Assim tambem, a differença $90 - 81 = 9$, convertida em unidades de ordem immediatamente inferior, fornecer-nos-ha $0,07 : 10 = 0,007$.

§ 4.º—Applicações

360.—O calculo por meio de logarithmos offerece, na práctica, difficuldades que provém antes da falta de habito do que da natureza dos logarithmos; por isso accrescentamos aqui alguns exercicios, pelos quaes se-poderão formular outros analogos.

Começaremos por uma noção geral sobre complementos.

361.—Complemento de um numero *é outro numero que, sommado com o primeiro, dá para resultado 1 seguido de tantos zeros quantos algarismos houver na parte inteira do numero dado.*—Indica-se o complemento antepondo ao numero a lettra C.

Segundo a definição precedente é facil ver que

$$\left.\begin{array}{l} C\,47 = 53 \\ C\,7,14 = 2,86 \end{array}\right\} \text{porquanto} \left\{\begin{array}{l} 47 + 53 = 100 \\ 7,14 + 2,86 = 10 \end{array}\right.$$

Para achar o complemento de um numero,—*tira-se de 10 o primeiro algarismo do numero, á direita, e de 9 cada um dos outros.*

Quando é 10, 100, 1000, etc., a somma de um numero com o seo complemento, este chama-se *complemento a* 10, *a* 100, *a* 1000, etc.

Por meio dos complementos convertem-se as subtracções em addições. Supponha-se, por exemplo, que queremos subtrahir 17 de 54. E' evidente que

$$\begin{aligned}54-17 &= 54-17+100-100\\ &= 54+(100-17)-100\\ &= 54+C17-100\,;\end{aligned}$$

estamos, pois, reduzidos a procurar o complemento do subtrahendo 17, addicionál-o ao minuendo 54, e do resultado tirar 100:

$$\begin{array}{r}54\\ +\ 83 = C\,17\\ \hline 137\\ -1\\ \hline 37\end{array}$$

Na applicação dos complementos ao calculo por logarithmos, empregam-se quasi sempre complementos a 10.

362. — Exercicio I. *Calcular o valor de x dado pela expressão*

$$x=\frac{4875\times 59^3}{43\times\sqrt{8637}}$$

Tomando os logarithmos de ambos os membros e desenvolvendo o do segundo membro, tem-se

$$\begin{aligned}lgx &= lg\frac{4875\times 59^3}{43\times\sqrt{8637}}\\ &= lg(4875\times 59^3)-lg(43\times\sqrt{8637}) && \text{(n. 343)}\\ &= lg4875+lg59^3-lg43-lg\sqrt{8637} && \text{(n. 342)}\\ &= lg4875+3\,lg59-lg43-\tfrac{1}{2}\,lg8637 && \text{(ns. 346 e 345)}\end{aligned}$$

Dispondo o calculo para tomar os logarithmos, vem

$$\begin{array}{rl|rl} lg4875 = & 3,6879746 & lg59 = & 1,7708520\\ 3\,lg59 = & 5,3125560 & lg43 = & 1,6334685\\ Clg43 = & 8,3665315 & lg8637 = & 3,9363629\\ C\tfrac{1}{2}lg8637 = & 8,0318185 & \tfrac{1}{2}\ lg8637 = & 1,9681815\\ \hline lgx\ =2) & 5,3988806 & & \end{array}$$

Procurando nas taboas o numero cujo logarithmo é 5,3988806, ter-se-ha

$$\begin{array}{l}5,3988806\\ 4,3988771 = lg\ 25054\\ \hline 35\ \text{diff. por}\ \ 0,2\\ 4,3988806\ \ = lg25054,2:\end{array}$$

portanto,

$$x = 250542.$$

363. — Observação. — No precedente exercicio seria necessario fazer *duas addições e uma subtracção*, se empregassemos os logarithmos subtractivos em logar dos seos complementos a 10.

364. — Exercicio II. *Formar, por meio dos logarithmos, o producto das tres fracções proprias* $\frac{25}{36}$, $\frac{13}{80}$ e $\frac{51}{94}$.

Apresenta-se aqui um embaraço que é necessario que se-saiba vencer. Com effeito, sendo o logarithmo da unidade egual a zero, o logarithmo de um numero menor que a unidade (fracção propria) *parece* que deve ser *menor do que zero*. Para evitar, no Calculo arithmetico, considerações inteiramente estranhas a este ramo da Mathematica, vejamos como se deve proceder.

Representando por x o producto pedido, tem-se

$$x = \frac{25}{36} \times \frac{13}{80} \times \frac{51}{94} ;$$

ora, esta egualdade não se-altera se multiplicarmos ambos os seos membros por $10 \times 10 \times 10 = 1000$: portanto,

$$1000x = \frac{250}{36} \times \frac{13}{78} \times \frac{510}{94} ;$$

e, assim, ficamos reduzidos a formar o producto de tres fracções improprias.

Tomando os logarithmos, vem

$$lg1000x = lg250 - lg36 + lg13 - lg8 + lg510 - lg94$$

Dispondo e fazendo o calculo, tem-se

$lg250 = 2,3979400$	$lg36 = 1,5563025$
$lg13 = 1,1139434$	$lg8 = 0,9030900$
$lg510 = 2,7075702$	$lg94 = 1,9731279$
$Clg36 = 8,4436975$	
$Clg8 = 9,0969100$	
$Clg94 = 8,0268721$	
$lg1000x = 3)1,7869332$	
$1000x = 61,226$	

$$x = 0,061226$$

Em outro qualquer exemplo analogo a este emprega-se o mesmo *artificio*, que consiste em multiplicar ambos os membros da egualdade entre a incognita e a expressão equivalente, por uma potencia de 10 que faça com que essa expressão fique composta de fracções improprias.

SEGUNDA PARTE

Applicações

365.—Para obter o valor de uma quantidade continua, é necessario *medir* essa quantidade, isto é, comparál-a com outra da mesma natureza, que se-chama *unidade de medida* (n. 3). As unidades de medida, arbitrárias no principio, foram posteriormente fixadas por lei : vamos, pois, começar esta segunda parte da Arithmetica apresentando uma exposição succinta das unidades de medida legaes.

LIVRO VII

SYSTEMAS METROLOGICOS

366.—SYSTEMA METROLOGICO *é um conjuncto de unidades de medida ligadas entre si mediante certas relações.*

O conhecimento de um systema metrologico encerra duas partes : 1.ª, conhecimento das unidades que constituem o systema; 2.ª, conhecimento das relações que ligam umas ás outras essas unidades.

367.—As unidades de medida recebem fórmas e nomes differentes, conforme a especie de quantidades que com ellas queremos medir.

Destas quantidades as mais vulgares são :

1.º, COMPRIMENTO, que é a extensão de uma linha;
2.º, AREA, que é a extensão de uma superficie;
3.º, VOLUME, que é a extensão de um corpo;
4.º, CAPACIDADE, ou volume que um corpo é *capaz* de conter;
5.º, PESO, que é o exforço necessario para sustentar um corpo ;
6.º, TEMPO, que é a duração de um facto ;
7.º, MOEDA, que é o preço de um objecto ou de um serviço ;
9.º, ARCO, que é qualquer parte de uma circumferencia (*).

(*) *Circumferencia* é uma linha curva, plana e fechada cujos ponctos são equidistantes de um certo poncto situado no interior della.

368.—A perfeição de um systema metrologico está dependente de certas condições, que podemos reduzir a quatro principaes : *invariabilidade* e *uniformidade* no systema; *simplicidade* na nomenclatura; *facilidade* nos calculos.

Um systema metrologico é *invariavel* quando as suas unidades forem determinadas por modo tal que seja possivel, em qualquer tempo, achar de novo a grandeza de cada uma com a mesma exactidão.

Um systema metrologico é *uniforme* quando as suas unidades provierem todas de uma unica. Esta ultima unidade chama-se *base* do systema.

Um systema metrologico é *simples na sua nomenclatura* quando os nomes das unidades que o-constituem forem formados com um pequeno numero de palavras.

As unidades de um systema metrologico produzirão *facilidade de calculo* se estiverem subordinadas umas ás outras pela relação decimal, que é a que liga as unidades do systema de numeração ordinario.

369.—Para que da medição de uma quantidade não resulte numero demasiadamente grande ou pequeno, convem que a grandeza da unidade seja proporcionada á da quantidade. Por ahi se-conclue que, num systema metrologico, á mesma especie de quantidades devem corresponder unidades de differentes grandezas : uma dessas unidades toma-se como *principal*, e as outras denominam-se *multiplos* e *submultiplos*.

CAPITULO I

SYSTEMA METROLOGICO DECIMAL

370.—Considerando os grandes inconvenientes que, nas transacções commerciaes e nas investigações scientificas, provinham de não haver um systema uniforme de unidades de medida, a Assembléa nacional franceza decretou em 1790 a creação do systema metrologico decimal. Durante sete annos (1792-1799) de trabalho incessante, a commissão que fora encarregada de apresentar ao governo os fundamentos do novo systema determinou *o comprimento do quadrante terrestre* (*) e achou 5130740 *toezas*. Para obter a base do systema, dividiu-se 5130740 toezas por 10000000: esta base chamou-se *metro* (**), e deu-se o nome de *systema metrico* ao conjuncto das unidades de medida derivadas do metro.

METRO *é a unidade de medida cujo comprimento equivale á decima millionesima parte do quadrante terrestre.*

SYSTEMA METRICO *é o systema metrologico que tem por base o metro.*

§ 1.º—Nomenclatura

371.—No systema metrico consideram-se especialmente as unidades de comprimento, de area, de volume, de capacidade, de peso e de moeda (***): examinemos como se-formaram as unidades de cada uma destas classes.

372.—Em cada classe de unidades de medida ha 1,º uma unidade principal; 2º, multiplos e submultiplos desta unidade.

A unidade principal de comprimento é o *metro*

(*) Quarta parte do meridiano.

(**) Do grego—*metron*, medida—, querendo exprimir o mesmo que unidade de medida por excellencia, base do systema.

(***) As unidades de tempo e de arco são as mesmas do antigo systema.

(base do systema), ao qual, ás vezes, se-accrescenta o qualificativo de *linear*.

A unidade principal de area é *o quadrado* (*) *construido sobre um metro linear*: dá-se-lhe o nome de *metro quadrado*.

A unidade principal de volume é *o cubo* (**) *construido sobre um metro linear*: denomina-se *metro cubico*.

A unidade principal de capacidade é *o cubo construido sobre um decimo do metro linear*: é o que se-chama *litro*.

A unidade principal de peso obtem-se pesando um volume de agua pura equivalente *ao cubo construido sobre um centesimo do metro linear*: esse peso denomina-se *grammo*.

A unidade principal de moeda é uma peça de prata que pesa *cinco grammos* e contem 0,9 de prata para 0,1 de cobre: esta moeda chama-se *franco*. O franco tem de espessura *um millesimo do metro linear*.

Para formar os nomes dos multiplos, antepõem-se ao nome da unidade principal as palavras

deca, hecto, kilo, myria,

que significam, respectivamente,

dez, cem, mil, dez mil.

Para formar os nomes dos submultiplos, antepõem-se ao nome da unidade principal as palavras

deci, centi, milli,

(*) *Quadrado* é o quadrilatero que tem lados e angulos eguaes.

(**) *Cubo* é o corpo que termina por seis quadrados eguaes.

que significam, respectivamente,

decimo, centesimo, millesimo.

Segue-se a enumeração das unidades de medida que constituem o systema metrico.

Unidades de comprimento: *myriametro, kilometro hectometro, decametro,—metro—, decimetro, centimetro millimetro.*

Unidades de area: *myriametro quadrado, kilometro quadrado, hectometro quadrado, decametro quadrado,—metro quadrado—, decimetro quadrado, centimetro quadrado, millimetro quadrado.*

O decametro quadrado chama-se *areo* quando se-emprega na avaliação de superficies agrarias: o areo tem por multiplo o *hectareo* e por submultiplo o *centiareo* (*).

Unidades de volume: *myriametro cubico, kilometro cubico, hectometro cubico, decametro cubico,—metro cubico—, decimetro cubico, centimetro cubico, millimetro cubico.*

O metro cubico toma o nome de *stereo* quando serve para medir volumes de lenha ou de madeira: o stereo tem por multiplo o *decastereo* e por submultiplo o *decistereo* (**).

Unidades de capacidade: *myrialitro, kilolitro, hectolitro, decalitro,—litro—, decilitro, centilitro, millilitro.*

Unidades de peso: *myriagrammo, kilogrammo, hectogrammo, decagrammo,—grammo—, decigrammo, centigrammo, milligrammo.*

(*) Estas unidades não se-usam no Brazil.
(**) Estás unidades não são empregadas aqui no Brazil.

Unidades de moeda: *franco—, decimo* (em logar de *decifranco*), *centimo* (em logar de *centifranco*).

373.—Conhecidas as unidades de medida, vejamos que relações as ligam umas ás outras.

As unidades de comprimento, de capacidade, de peso e de moeda procedem na relação de *um para dez*, isto é, *uma* dessas unidades contem *dez* vezes a immediatamente inferior. Por exemplo, o kilometro equivale a 10 hectometros: porque, se o kilometro vale 1000 metros e o hectometro 100 metros, o kilometro conterá tantas vezes o hectometro quantas o numero 1000 contiver o numero 100, isto é, 10 vezes.

As unidades de area procedem na relação de *um para cem*, isto é, *uma* dessas unidades contem *cem* vezes a immediatamente inferior. Para o-mostrar, consideremos o decametro quadrado. A base do decametro quadrado é um decametro ou dez metros: logo, podemos construir sobre ella uma serie de dez metros quadrados, sobre esta serie uma outra, e assim por deante; porém, a altura do decametro quadrado tambem é um decametro ou dez metros: portanto, o decametro quadrado ficará cheio com dez series de dez metros quadrados cada uma, ou com 100 metros quadrados.

As unidades de volume procedem na relação de *um para mil*, isto é, *uma* dessas unidades contem *mil* vezes a immediatamente inferior. Para o-mostrar, consideremos o decametro cubico. A base do decametro cubico é um decametro quadrado ou cem metros quadrados (segundo mostrámos): logo, podemos construir sobre ella uma serie de cem metros cubicos, sobre esta serie uma outra, e assim por deante; mas, a altura do decametro cubico é um decametro ou dez metros: portanto, o decametro cubico ficará cheio com dez series de cem metros cubicos cada uma, ou com 1000 metros cubicos.

374.—Exposta a nomenclatura do systema metrico, cumpre notar que as unidades de medida pódem ser classificadas em *reaes* e *ficticias* : as unidades de medida são *reaes* quando ha objectos expressamente construidos para representál-as; são *ficticias* no caso contrario. Nem todas as unidades que enumerámos (n. 372) foram construidas; das que o-foram construiram-se tambem, por compensação, os dobros e as metades, como abaixo se-vê.

UNIDADES REAES DE COMPRIMENTO

Duplo decametro	*Decametro*	*Meio decametro*
Duplo metro	*Metro*	*Meio metro*
Duplo decimetro	*Decimetro*	....

UNIDADES REAES DE CAPACIDADE

....	*Hectolitro*	*Meio hectolitro*
Duplo decalitro	*Decalitro*	*Meio decalitro*
Duplo litro	*Litro*	*Meio litro*
Duplo decilitro	*Decilitro*	*Meio decilitro*
Duplo centilitro	*Centilitro*	....

UNIDADES REAES DE PESO

50	20	10	*kilogrammos*
5	2	1	
500	200	100	*grammos*
50	20	10	
5	2	1	
5	2	1	*decigrammos*
5	2	1	*centigrammos*
5	2	1	*milligrammos*

375.— Observação.—Do que fica dicto ácerca da nomenclatura do systema metrico, será facil concluir que este systema metrologico satisfaz ás quatro principaes condições de perfeição exaradas em o n. 368: é invariavel e uniforme, porque todas as suas unidades derivam-se do metro, e este acha-se fundado sobre o comprimento invariavel do quadrante terrestre (n. 370); é simples na sua nomenclatura, porque são bastantes treze palavras para formar os nomes de todas as unidades (n. 372); são faceis os calculos a que este systema dá logar, porque as unidades que o-constituem acham-se ligadas entre si pela relação decimal (n. 373).

§ 2.º.—**Calculo**

376.— Achando-se as unidades de medida que constituem o systema metrico subordinadas aos mesmos principios que regem a numeração dos numeros inteiros e dos numeros decimaes, nenhuma difficuldade nova se-póde encontrar nos calculos relativos a essas unidades: aqui limitar-nos-hemos, pois, a elucidar alguns ponctos de utilidade práctica que convem ter sempre em vista.

377.— Para simplificar a representação numerica das quantidades avaliadas em unidades do systema metrologico decimal, empregam-se as abreviaturas seguintes: 1.º, *m*, *mq*, *a*, *mc*, *st*, *l*, *g*, *f*, que significam: *metro*, *metro quadrado*, *areo*, *metro cubico*, *stereo*, *litro*, *grammo*, *franco*; 2.º, *M*, *K*, *H*, *D*, *d*, *c*, *m*, que se-antepõem áquellas e querem dizer: *myria*, *kilo*, *hecto*, *deca*, *deci*, *centi*, *milli*. Estas abreviaturas escrevem-se á direita da parte inteira do numero, e um pouco acima: 39^{m} | $2^{Dm},85$.

378.— Vindo os numeros acompanhados com a designação da unidade, tres ponctos principaes deveremos examinar em relação a elles: a numeração, a mudança de unidade e as operações.

Numeração. — Para ler ou escrever um numero que venha referido a unidades metricas, empregam-se as mesmas regras estabelecidas para ler ou escrever numeros inteiros e numeros decimaes: apenas se-accrescenta, quer na enunciação, quer na representação, o nome proprio da unidade a que o numero é referido. Assim: 1°, o numero $6^{m},25$ ler-se-ha 6 *metros* e 25 *centesimos do metro*, ou 625 *centesimos do metro*; 2°, o numero 548 *grammos* e 7 *centesimos do grammo*, ou 54807 *centesimos do grammo*, escrever-se-ha $548^{g},07$.

Tambem se-póde ler um numero referido a unidades metricas decompondo-o, primeiro, em classes que correspondam aos multiplos e aos submultiplos da unidade principal e enunciando, depois, cada classe acompanhada com o nome da unidade que ella representa: neste caso cumpre attender ás relações que ligam as diversas ordens de unidades (n. 373). Assim: 1°, o numero $6^{Dm},25$ ler-se-ha 6 *decametros*, 2 *metros* e 5 *decimetros*, ou 6 *decametros* e 25 *decimetros*, ou ainda 62 *metros* e 5 *decimetros*; 2°, o numero $2^{mq},834$ ler-se-ha 2 *metros quadrados*, 83 *decimetros quadrados* e 40 *centimetros quadrados*, ou 2 *metros quadrados* e 8340 *centimetros quadrados*, ou tambem 283 *decimetros quadrados* e 40 *centimetros quadrados*; 3°, o numero $7^{mc},9856$ ler-se-ha 7 *metros cubicos*, 985 *decimetros cubicos* e 600 *centimetros cubicos*, ou 7 *metros cubicos* e 985600 *centimetros cubicos*, ou ainda 7985 *decimetros cubicos* e 600 *centimetros cubicos*.

Mudança de unidade. — Quando um numero se-

acha referido a uma certa unidade, é muitas vezes necessario referir esse numero a uma outra unidade: tal é o objecto da transformação que se-denomina *mudança de unidade*.

Supponhamos, em primeiro logar, que se-pretende referir ao *kilometro* um numero que se-acha referido ao *metro* (unidade menor a maior), e seja $5^{m},96$ esse numero. O numero dado contem 596 centesimos do metro; porém, se 1 metro vale $\frac{1}{1000}$ do kilometro, 1 centesimo do metro valerá 100 vezes menos, ou $\frac{1}{100000}$ do kilometro: logo, 596 centesimos do metro correspondem a $\frac{596}{100000}$ do kilometro, e teremos

$$5^{m},96 = \frac{596^{Km}}{100000}$$
$$= 0^{Km},00596$$

Comparando o numero obtido com o proposto, vê-se que bastava ter dividido este ultimo numero por 100, que é a relação entre a maior unidade e a menor.

Supponhamos, em segundo logar, que se-deve referir ao *centimetro quadrado* um numero que se-acha referido ao *metro quadrado* (unidade maior a menor), e seja $7^{mq},45$ esse numero. O numero dado encerra 745 centesimos do metro quadrado; mas, se 1 metro quadrado vale 10000 centimetros quadrados, 1 centesimo do metro quadrado valerá 100 vezes menos, ou $\frac{10000}{100}$ do centimetro quadrado: portanto, 745 centesimos do