LISA-MATEMÁTICA
NA
ESCOLA ELEMENTAR

MATEMÁTICA MODERNA

MARIA DO CARMO ARRUDA TOLEDO

MATEMÁTICA MODERNA NA ESCOLA ELEMENTAR

4.º VOLUME

1970

LISA LIVROS IRRADIANTES S. A.

LISA — LIVROS IRRADIANTES S. A.
Rua Diogo Vaz, 291 — Cambuci
Tels. 278-2488 - 278-0015 - 278-0085
SÃO PAULO — BRASIL — 1970

NOÇÕES FUNDAMENTAIS

CONJUNTO E ELEMENTOS

As noções de Conjunto e de Elementos devem ser revistas cada vez que recebemos um nôvo "conjunto" de alunos. Precisamos saber o que realmente conhece a nova classe que recebemos sôbre essas noções que são fundamentais. O 3.º volume desta coleção põe em evidência alguns aspectos dêste importante capítulo que deve ser tratado em tôdas as séries da Escola Primária, cada vez em maior profundidade.

Vamos procurar encerrar, neste volume, o estudo das noções que julgamos fundamentais e que devem ser tratadas ainda na Escola Primária. A simbologia pode ficar para o curso secundário, se o aluno prosseguir seus estudos. Caso não prossiga, o principal êle terá aprendido: serão as noções gerais, os conceitos, a base.

Para verificação dos conhecimentos da classe:

EXERCÍCIOS 1

1 — Esta classe é um conjunto de alunos. Cada aluno é um .... do conjunto.

2 — Janeiro é um .... do conjunto de meses do ano.

3 — Sábado é um .... do conjunto de ....da semana.

4 — O conjunto dos dias da semana tem .... elementos.

5 — Os elementos do conjunto das estações do ano são: ...., ..., ..., ...

6 — Os elementos dos dias da semana que começam com a lêtra *q* são: ....,.................. .

7 — Os elementos do conjunto de pontos cardeais que começam com a lêtra *s* são: ....

8 — Represente entre chaves o conjunto dos dias da semana que começam com a lêtra *d*.

9 — O conjunto dos estados que se limitam com o Estado de S. Paulo é formado por .... elementos.

10 — Represente entre chaves o conjunto do exercício 9 enumerando os seus elementos um a um.

CONJUNTO UNITÁRIO

O aluno já teve oportunidade, nos exemplos que demos acima, de tomar conhecimento de que existem conjuntos que possuem apenas um elemento. Reforçaremos, agora, tais exemplos:

EXERCÍCIOS 2

1 — Enumere os elementos do conjunto de meses do ano que começam com a lêtra *o*.

2 — Represente entre chaves, enumerando um a um, todos os elementos que pertencem ao conjunto de satélites naturais da Terra.

3 — Escreva os nomes de todos os elementos que pertencem ao conjunto de oceanos que banham a costa do Brasil.

Agora, podemos pedir aos alunos que se lembrem de outros exemplos que possuem apenas um elemento. São muitos, quantos quisermos: conjunto da última lêtra de nosso alfabeto, do menor número ímpar, da primeira vogal, da capital do Brasil, etc.

Levaremos, então, ao conhecimento dos alunos que tais conjuntos que possuem apenas um elemento chamam-se *conjuntos unitários.* Os que não são unitários são denominados *não unitários.*

4 — O conjunto dos dias da semana que começam com *d* é ....

5 — O conjunto dos pontos cardeais que começam com *l* é ....

6 — O conjunto dos satélites naturais da Terra é um conjunto ....

7 — O conjunto dos meses do ano que começam com a lêtra *a* é um conjunto ....

RELAÇÃO DE PERTINÊNCIA

Podemos dizer:

"janeiro *pertence* ao conjunto dos meses do ano".

ou: "Santos *pertence* ao conjunto dos portos do Brasil".

Quando fazemos afirmações dessa natureza, estamos estabelecendo uma *relação* entre um *elemento* e um *conjunto.* É a relação *pertencer a* ou *relação de pertinência.*

EXERCÍCIOS 3

1 — O dedo anular é um elemento do conjunto { polegar, indicador, médio, anular, mínimo }. Então, podemos dizer que o dedo anular .... ao conjunto de dedos da mão.

2 — A lêtra *m* é um elemento do conjunto { m, n, o }; logo, a lêtra *m* .... ao conjunto { m, n, o }.

3 — A lêtra *p* pertence ao conjunto de consoantes do alfabeto português, enquanto que a vogal *i* .... ao conjunto de consoantes.

4 — A relação *de pertinência* é uma relação existente entre um elemento e o ....

O símbolo que indica essa relação ($\in$) não precisa ser dado a crianças de Escolas Primárias. Basta que elas entendam a relação.

RELAÇÃO DE INCLUSÃO — SUBCONJUNTOS

Sejam os seguintes conjuntos:

A = { Terra, Marte }

B = { Mercúrio, Vênus, Terra, Marte }

Todos os elementos do conjunto A são também elementos do conjunto B.

Dizemos, neste caso, que A é *sub-conjunto* de B (uma parte de B).

Sejam agora os conjuntos:

M = { meses do ano }

N = { abril e agôsto }

a) O conjunto N é sub-conjunto do conjunto M.

b) O conjunto M contém o conjunto N.

EXERCÍCIOS 4

1 — Escreva um sub-conjunto do conjunto

H = { José, Carlos, Manuel, Pedro, Osvaldo }

2 — Dados os conjuntos

P = { S. Paulo, Brasília, Belo Horizonte, Curitiba }

Q = { Brasília, Belo Horizonte }

Complete:

O conjunto .... é sub-conjunto do conjunto.......

Quando um conjunto é sub-conjunto de outro, dizemos que êle *está contido* nesse outro.

Em nosso primeiro exemplo dêste capítulo, podemos dizer que A está contido em B, pois A é sub-conjunto de B. Também, N está contido em M e Q está contido em P, considerando os exemplos seguintes.

Recìprocamente, se A *está contido* em B, B *contém* A. O mesmo se dirá dos outros dois exemplos.

3 — Escreva você, reportando-se aos outros dois exemplos mencionados acima:

a) Se N está contido em M, então M .... N.

b) Se Q está contido em P, P .... Q.

Esta relação existente entre um conjunto e um sub-conjunto, a relação *estar contido*, é denominada *relação de inclusão.* Isto porque o sub-conjunto está incluso, no conjunto do qual êle é parte.

CONJUNTO VAZIO

O conjunto vazio é uma extensão da idéia de conjunto. Seu conceito já foi dado quando, por necessidade de conceituar o número natural zero, tratamos dêle (conjunto vazio) no 3.º volume.

Já vimos também, e é preciso que as crianças se recordem disto, que os conjuntos podem ser representados enumerando os seus elementos um a um entre chaves ou mencionando-se, também entre chaves, uma propriedade que todos os elementos do conjunto que desejamos representar possuam.

Nem sempre, porém, podemos ou devemos representar um conjunto enumenrando os seus elementos um a um, pois existem conjuntos que têm tantos elementos que se torna muito trabalhosa e até mesmo impossível a sua representação por êsse processo. É o caso do conjunto de todos os habitantes do Estado de S. Paulo ou o conjunto de tôdas as cidades do Brasil, etc. O processo de repressentar o conjunto pela propriedade comum a seus elementos é o mais indicado. Mas trás, porém, um dificuldade. E quando, dada a propriedade, não há nenhum elemento que a satisfaça? Dada a seguinte propriedade para definir um conjunto: "homens de mais de cinco metros de altura". Não há elemento que satisfaça a essa propriedade, logo, o conjunto é *vazio* de elementos.

E haverá, então, quem diga: "se o conjunto não tem nenhum elemento é porque êle não existe." Realmente, o conjunto vazio não é um conjunto como os outros, é um conjunto que não possui elementos que possam ser vistos, contados ou enumerados, mas é um conjunto, já que foi definido por uma propriedade. Ele é uma extensão do conceito natural de conjunto e é para não haver exceções, para que sempre seja possível associar-se uma propriedade a um conjunto, sem procurar saber quantos ou quais são os seus elementos, que êle foi criado.

Se pedirmos aos nossos alunos o conjunto dos vulcões em atividade no Brasil, certamente dirão: "êsse conjunto não tem elementos, é um conjunto vazio".

REPRESENTAÇÃO DO CONJUNTO VAZIO

Para representar o conjunto vazio podemos empregar as mesmas chaves que temos usado até aqui, só que não colocaremos nada entre elas porque o conjunto a ser representado não possui elementos. Pode-se também empregar o símbolo $\varnothing$, mas preferimos a primeira forma. Já que o conjunto vazio é uma extensão de conceito natural de conjunto, achamos que a sua representação também deve não se constituir em exceção e possuir um símbolo especial. (pelo menos para a criança)

Seja o conjunto A, constituído pelas pessoas que têm mais de 200 anos de idade.

$$A = \{\quad\} \text{ ou } A = \varnothing$$

Ou, o conjunto B, dos meses do ano cujos nomes começam com a lêtra *p* (em português).

$$B = \{\quad\} \text{ ou } B = \varnothing$$

Neste caso, A = B, ou A e B são um único conjunto.

EXERCÍCIOS 5

1 — Dê dois exemplos de conjuntos unitários.

2 — Dê dois exemplos de conjuntos vazios.

3 — Represente entre chaves os seguintes conjuntos:

A = conjunto dos estados brasileiros que se limitam com o estado de S. Paulo.

B = conjuntos de mamíferos que voam.

C = conjunto de números naturais que são maiores que 100 e menores que 90.

SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL

ORDENS E CLASSES

O sistema de numeração mais empregado pelos povos civilizados é o decimal, isto é, a *base* é 10. Cada grupo de 10 elementos (ou unidades) forma uma dezena; cada grupo de 10 dezenas forma uma centena; cada grupo de 10 centenas forma um milhar, e assim, sucessivamente, vão se formando as dezenas de milhar, centenas de milhar, milhões, dezenas de milhões, etc.

O aluno de 4.ª série já pode conhecer as características do sistema de numeração por nós empregado:

1.º) A base é o número dez.

2.º) Os símbolos são os dez numerais indo-arábicos, também denominados algarismos, (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0).

3.º) O princípio do *valor posicional* do algarismo é que torna tão simples o sistema de numeração decimal.

De acôrdo com o princípio do valor posicional dos algarismos, o algarismo escrito à direita do numeral representa as *unidades simples* e dizemos que a posição ocupada pelo algarismo das unidades simples é a 1.ª ordem. O algarismo à esquerda (2.ª da direita para a esquerda) representa as dezenas e ocupa a 2.ª ordem, e assim sucessivamente. Assim, poderemos dizer que 348 é numeral de um número formado por 8 unidades simples + 4 dezenas + 3 centenas. Ou,

$$348 = 8 \times 1 + 4 \times 10 + 3 \times 100$$

$$\text{e} \quad 2.567 = 7 \times 1 + 6 \times 10 + 5 \times 100 + 2 \times 1.000$$

$$\text{ou} \quad 2.567 = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{milhar}}}{2 \times 1.000} + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{centena}}}{5 \times 100} + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{dezena}}}{6 \times 10} + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{unidade}}}{7 \times 1}$$

FIG. 1

Quando, para escrevermos o numeral mais simples de um número, precisamos empregar mais de três algarismos, devemos separar os algarismos de três em três, da direita para a esquerda, formando o que denominamos *classes*. A 1.ª classe será a da direita, a seguinte será a 2.ª classe, e assim por diante. Logo, cada classe tem três ordens. Assim:

1.ª classe (unidades simples):
- 1.ª ordem: unidades simples
- 2.ª ordem: dezenas
- 3.ª ordem: centenas

2.ª classe (milhares):
- 4.ª ordem: unidades de milhar
- 5.ª ordem: dezenas de milhar
- 6.ª ordem: centenas de milhar

3.ª classe (milhões):
- 7.ª ordem: unidades de milhão
- 8.ª ordem: dezenas de milhão
- 9.ª ordem: centenas de milhão

E assim, sucessivamente, surgirão novas ordens e novas classes: classe dos bilhões, trilhões, quatrilhões, etc. As classes são separadas umas das outras por um ponto.

Exemplos:

4.ª ordem		3.ª ordem	2.ª ordem	1.ª ordem
8	.	1	2	6
2.ª classe		1.ª classe		

8.ª ordem	7.ª ordem		6.ª ordem	5.ª ordem	4.ª ordem		3.ª ordem	2.ª ordem	1.ª ordem
1	8	.	3	4	2	.	1	0	8
3.ª classe			2.ª classe				1.ª classe		

FIG. 2

10.ª ordem		9.ª ordem	8.ª ordem	7.ª ordem		6.ª ordem	5.ª ordem	4.ª ordem		3.ª ordem	2.ª ordem	1.ª ordem
1	.	0	2	8	.	5	0	9	.	1	3	2
4.ª classe		3.ª classe				2.ª classe				1.ª classe		

FIG. 3

A divisão do numeral em classes simplifica muito a leitura dos numerais. Vejamos como se lê o 1.° exemplo acima:

a) 8.126 = 8 mil ou 8 milhares e 126 unidades.

b) 18.342.108 = 18 milhões, 342 mil e 108 unidades.

c) 1.028.509.132 = 1 bilhão, 28 milhões, 509 mil e 132 unidades.

EXERCÍCIOS 6

1 — Complete as sentenças que seguem mostrando o que cada algarismo do numeral significa:

a) 543 = ... × 3 + ... × 4 + ... 5.

b) 2.356 = ... × 6 + ... × 5 + ... × 3 + ... × 2.

c) 6.308 = ...

d) 15.897 = ...

2 — Escreva o numeral mais simples dos números formados por:

a) 6 unidades simples, 4 dezenas, 5 centenas e 2 milhares:

$6 \times 1 + 4 \times 10 + 5 \times 100 + 2 \times 1.000 = 6 + 40 + 500 + 2.000 = 2.546$

b) 3 unidades simples, 2 dezenas, 8 centenas, 5 unidades de milhar e 6 dezenas de milhar: ....

c) 8 unidades simples, 4 centenas, 9 unidades de milhar e 5 dezenas de milhar: ....

3 — No numeral 333, responda:

a) qual o valor do algarismo 3 escrito à direita?

b) qual o valor do algarismo 3 escrito à esquerda?

c) qual o valor do algarismo 3 escrito entre os outros dois?

4 — Escreva como se lêem os seguintes numerais:

a) 3.403.124 = ...

b) 25.376.100 = ...

c) 2.379.456.253 = ...
....

SUCESSÃO DOS NÚMEROS NATURAIS

O conjunto dos números naturais já é conhecido da classe. O aluno de 4.ª série já "sentiu" bem o que é número natural e também já percebeu que os números naturais constituem um conjunto cuja série é *infinita*.

Podemos então, ensiná-lo a representar entre chaves o conjunto dos números naturais que chamaremos de conjunto N. Assim:

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$$

As reticências indicam que os elementos dêsse conjunto vão se sucedendo em uma ordem crescente, a partir do zero, que é o menor dos números naturais, sem que se possa determinar o maior dos números naturais, uma vez que o conjunto é infinito.

Os números naturais assim representados, *ordenados* segundo uma ordem crescente, é que formam a *sucessão* dos *números naturais*.

Devemos chamar a atenção da criança para o seguinte fato: todo número natural tem um *sucessivo* que é o número natural que o segue naquela ordem crescente que os representamos entre chaves. Assim, o número 2 é o sucessivo de 1, o número 3 é o sucessivo de 2, e assim por diante.

O zero é o único número natural que não é sucessivo de nenhum outro, pois êle é o menor dos números naturais.

Como não existe o maior dos números naturais, dizemos que a sucessão dos números naturais é *infinita*.

REPRESENTAÇÃO DOS NÚMEROS NATURAIS NA RETA NUMERADA

Vimos já em nosso volume 3 que, sendo o conjunto dos números naturais um conjunto com infinitos elementos, o mesmo acontecendo com o conjunto dos pontos da reta, podemos estabelecer uma relação biunívoca (um a um) entre cada elemento do conjunto N (dos números naturais) com um elemento do conjunto de pontos que constitui a reta. Assim, teremos representado os números naturais geomètricamente. Assim:

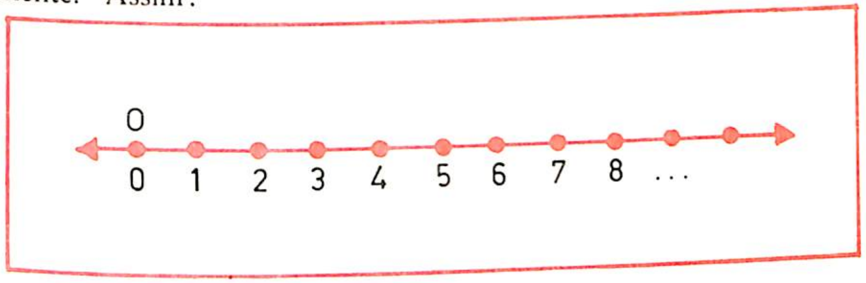

FIG. 4

Se quisermos, poderemos designar cada um dos pontos marcados na reta por uma lêtra de nosso alfabeto. No exemplo acima, apenas designamos por O o ponto que serviu de origem. Vamos desenhar outra reta numerada e designar os outros pontos marcados por B, A, C, D, etc. Assim:

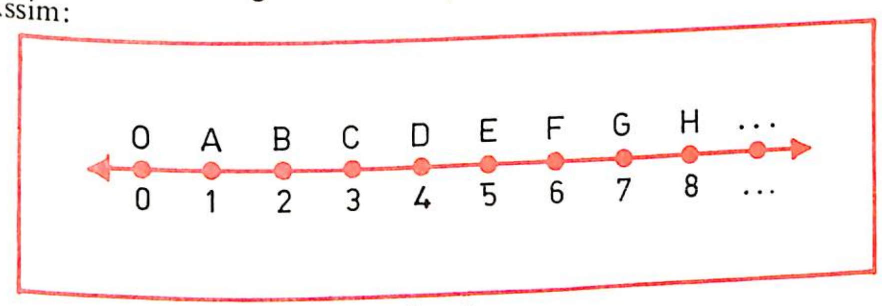

FIG. 5

O conjunto de pontos assinalados na reta (O, A, B, C, D, etc.) é a representação dos números naturais na reta. Cada ponto é a *imagem* de um único número natural: O é a imagem de zero, A é a imagem de 1, B é a imagem de 2, etc.

SUCESSÃO DOS NÚMEROS NATURAIS

O conjunto dos números naturais já é conhecido da classe. O aluno de 4.ª série já "sentiu" bem o que é número natural e também já percebeu que os números naturais constituem um conjunto cuja série é *infinita*.

Podemos então, ensiná-lo a representar entre chaves o conjunto dos números naturais que chamaremos de conjunto N. Assim:

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$$

As reticências indicam que os elementos dêsse conjunto vão se sucedendo em uma ordem crescente, a partir do zero, que é o menor dos números naturais, sem que se possa determinar o maior dos números naturais, uma vez que o conjunto é infinito.

Os números naturais assim representados, *ordenados* segundo uma ordem crescente, é que formam a *sucessão* dos *números naturais*.

Devemos chamar a atenção da criança para o seguinte fato: todo número natural tem um *sucessivo* que é o número natural que o segue naquela ordem crescente que os representamos entre chaves. Assim, o número 2 é o sucessivo de 1, o número 3 é o sucessivo de 2, e assim por diante.

O zero é o único número natural que não é sucessivo de nenhum outro, pois êle é o menor dos números naturais.

Como não existe o maior dos números naturais, dizemos que a sucessão dos números naturais é *infinita*.

REPRESENTAÇÃO DOS NÚMEROS NATURAIS NA RETA NUMERADA

Vimos já em nosso volume 3 que, sendo o conjunto dos números naturais um conjunto com infinitos elementos, o mesmo acontecendo com o conjunto dos pontos da reta, podemos estabelecer uma relação biunívoca (um a um) entre cada elemento do conjunto N (dos números naturais) com um elemento do conjunto de pontos que constitui a reta. Assim, teremos representado os números naturais geomètricamente. Assim:

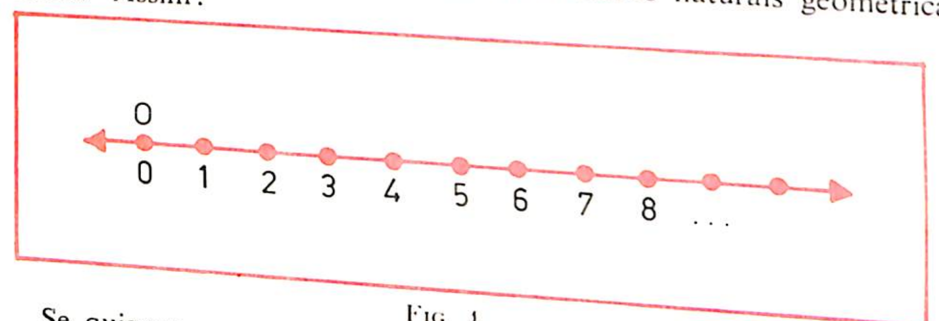

FIG. 4

Se quisermos, poderemos designar cada um dos pontos marcados na reta por uma lêtra de nosso alfabeto. No exemplo acima, apenas designamos por O o ponto que serviu de origem. Vamos desenhar outra reta numerada e designar os outros pontos marcados por B, A, C, D, etc. Assim:

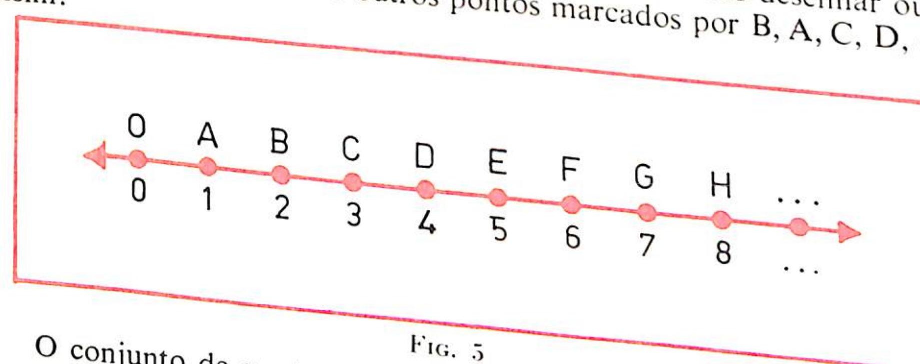

FIG. 5

O conjunto de pontos assinalados na reta (O, A, B, C, D, etc.) é a representação dos números naturais na reta. Cada ponto é a *imagem* de um único número natural: O é a imagem de zero, A é a imagem de 1, B é a imagem de 2, etc.

EXERCÍCIOS 7

1 — Complete as sentenças que seguem, tornando-as verdadeiras:

a) O número um é o sucessivo de . . .

b) O sucessivo de 1 é . . . e o sucessivo de 10 é . . .

c) 20 é o sucessivo de . . . e 99 é o sucessivo de . . .

d) Sendo 6 o sucessivo de 5, então 5 precede . . .

e) Se 35 é o sucessivo de 34, então . . . .

2 — Desenhe uma reta numerada e represente a imagem dos números naturais de zero a 10.

3 — Sôbre uma reta orientada, assinale a imagem dos seguintes números naturais: 0, 1, 3, 5 e 7.

4 — Coloque em ordem crescente e depois assinale a imagem de cada um dos números que seguem em uma reta orientada: 5, 4, 0, 6, 2, 3.

5 — Qual é o sucessivo de 99?

6 — Qual é o sucessivo do menor número natural cujo numeral mais simples é expresso com dois algarismos?

SUCESSÃO DOS NÚMEROS PARES

O conjunto dos números pares, o aluno de 4.ª série já sabe, é o conjunto de todos os números que são divisíveis por 2.

Vamos representá-lo entre chaves:

Conjunto dos números pares = { 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, . . . }

O conjunto dos números pares é também um conjunto com infinitos elementos, pois não existe o maior número par.

Os números pares quando ordenados segundo uma ordem crescente, como a que utilizamos para representá-los entre chaves, é também denominada de sucessão dos números pares.

SUCESSÃO DOS NÚMEROS ÍMPARES

Os números ímpares, também conhecidos dos alunos de 4.ª série, quando ordenados em uma ordem crescente, constituem a sucessão dos números ímpares. Podemos representá-la entre chaves e dizer que ela constitui o conjunto dos números ímpares. Assim:

Conjunto dos números ímpares = { 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, . . . }

Também êste conjunto é infinito, pois não existe o maior dos números ímpares.

RELAÇÃO DE PERTINÊNCIA NOS CONJUNTOS NUMÉRICOS CONHECIDOS

Quando procuramos estabelecer uma *relação* entre um número natural e determinado conjunto para verificar se êsse elemento pertence ou não ao conjunto, dizemos que há ou não uma relação de *pertinência* caso o elemento pertença ou não ao conjunto dado. Exemplo: Verificar se 5 pertence ou não pertence ao conjunto dos números naturais.

Examinando, mentalmente, os elementos do conjunto dos números naturais, vamos encontrar o número cinco, entre o quatro e o seis. Então, "5 pertence ao conjunto dos números naturais". Logo, há uma relação de pertinência entre o número cinco e o conjunto dos números naturais.

EXERCÍCIOS 8

1 — Complete estabelecendo uma relação de pertinência ou de não pertinência:

a) O número 10 .... ao conjunto dos números naturais.

b) O número 3/4 .... ao conjunto dos números naturais.

c) 8 .... ao conjunto dos números ímpares.

d) 15 .... ao conjunto dos números ímpares.

e) 12 .... ao conjunto dos números pares.

f) 27 .... ao conjunto dos números pares.

g) 2,8 .... ao conjunto dos números pares.

h) zero .... ao conjunto dos números naturais.

2 — Dê cinco exemplos de números maiores que 10 e que pertençam ao conjunto dos números ímpares.

3 — Se um número natural pertence ao conjunto dos números pares, seu sucessivo também pertence? Por quê?

4 — Complete:

Um número natural pertence ao conjunto dos números pares. Seu sucessivo pertence ao conjunto dos números ....

5 — Dê três exemplos de números que sejam menores que 20 e pertençam ao conjunto dos números pares.

RELAÇÃO DE INCLUSÃO ENTRE CONJUNTOS NUMÉRICOS

O conjunto dos números pares e o conjunto dos números naturais têm uma relação de *inclusão*. Isto porque cada elemento do primeiro conjunto citado é também elemento do segundo. Logo, o conjunto dos números pares é subconjunto do conjunto dos números naturais. Dizemos, então, que o conjunto dos números pares "está contido" no conjunto dos números naturais e, recìprocamente, que êste "contém" aquêle.

A mesma relação de inclusão existe entre o conjunto dos números ímpares e o conjunto dos números naturais. O conjunto dos números ímpares "está contido" no conjunto dos números naturais e, inversamente, êste "contém" aquêle. Dizemos, por isso, que o conjunto dos números ímpares é um sub-conjunto do conjunto dos números naturais.

Outros exemplos:

Sejam os conjuntos A, B e C, abaixo:

$$A = \{3, 8, 9, 13, 15, 18, 20, 23, 27\}$$
$$B = \{3, 9, 15, 20, 27\}$$
$$C = \{15\}$$

1.º) O conjunto A contém o conjunto B ou simplesmente: A contém B.

2.º) B está contido em A.

3.º) B é sub-conjunto de A.

4.º) A contém C.

5.º) C está contido em A.

6.º) C é sub-conjunto de A.

7.º) B contém C.

8.º) C está contido em B.

9.º) C é sub-conjunto de B.

10.º) C é sub-conjunto de A e de B.

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE NÚMEROS NATURAIS

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES INICIAIS

As operações de adição e subtração de números naturais são já por demais conhecidas da classe e cremos serem desnecessárias mais algumas palavras sôbre conceitos, técnicas operatórias ou mesmo sôbre a verificação dos respectivos resultados, assunto já tratado em profundidade suficiente para o nível primário em nosso volume anterior.

Vimos a verificação do resultado da adição pela operação inversa e pela propriedade comutativa e a verificação do resultado da subtração pela adição correspondente. A tão conhecida prova "dos noves", não foi por nós tratada em volumes anteriores e nem será agora, por um motivo muito simples: esta prova (a dos noves) é uma aplicação das propriedades dos restos, em Divisibilidade, parte da Matemática que, normalmente, não é estudada na Escola Primária. Assim, se queremos que nossos alunos tenham elementos para fundamentar e justificar tôdas as regras e técnicas que vão aprendendo, para não se transformarem em meros repetidores, sem nenhuma compreensão das mesmas, achamos nós que a prova "dos noves" é inoportuna e desnecessária, no momento, porque temos outras formas, e muito mais seguras, para verificar a exatidão dos resultados não só das operações de adição e subtração, como também da multiplicação e divisão.

As provas "por um divisor" e em particular a "dos noves" não oferecem uma garantia absoluta de que as operações estejam realmente certas. Elas oferecem apenas uma probabilidade de acêrto. Entretanto, por serem de fácil aplicação e muito conhecidas, especialmente a "dos noves", são muito usadas. Fica a critério do professor o seu uso ou não.

PROPRIEDADES DA ADIÇÃO

As propriedades que vimos fazendo as crianças "sentirem" informalmente e sem nenhuma ou quase nenhuma terminologia desde os seus primeiros contatos com as operações matemáticas fundamentais são denominadas *propriedades estruturais*. Vamos, agora, procurar reunir as de adição para que, no final do curso primário, a criança possa ter uma visão de conjunto das mesmas.

Propriedade Comutativa: A soma não altera quando a ordem das parcelas é trocada.

Exemplo: $\left.\begin{array}{r} 25 + 32 = 57 \\ 32 + 25 = 57 \end{array}\right\}$ então, $25 + 32 = 32 + 25$.

Elemento Neutro: A adição possui um elemento neutro que é o número *zero*.

Exemplo: $\left.\begin{array}{r} 15 + 0 = 15 \\ 0 + 15 = 15 \end{array}\right\}$ então, $15 + 0 = 0 + 15 = 15$

Propriedade Associativa: Numa adição de três parcelas, podemos associar as duas primeiras ou as duas últimas, para depois reunir à parcela restante.

Exemplo: $\left.\begin{array}{r} (8+7)+3 = 15+3 = 18 \\ 8+(7+3) = 8+10 = 18 \end{array}\right\}$ então, $(8+7)+3 = 8+(7+3)$

Fechamento: A soma de dois números naturais é sempre um número natural.

Exemplo: $\underset{\text{nº nat.}}{\underset{\downarrow}{18}} + \underset{\text{nº nat.}}{\underset{\downarrow}{12}} = \underset{\text{nº nat.}}{\underset{\downarrow}{30}}$

SUBTRAÇÃO

Já temos dito muitas e repetidas vêzes que a subtração é a operação inversa da adição. Nada dissemos, porém, a respeito de "propriedades" da subtração. Façamos, agora, algumas considerações a respeito dessa operação:

Poderemos efetuar a subtração $5 - 8$?

Haverá a possibilidade de se "retirar" um "número maior" de elementos de um conjunto que possui uma quantidade "menor" de elementos?

O aluno percebe, desde logo, que *não é possível* efetuar tal operação no conjunto dos números naturais. Então, precisamos deixar bem claro que, para a subtração de números naturais ser possível é condição essencial que o primeiro número seja maior ou igual ao segundo número. Se forem iguais, a diferença é zero, como é fácil verificar.

Logo, a subtração não possui a propriedade do *fechamento* no conjunto dos números naturais, pois muitas vêzes (quando o minuendo é menor que o subtraendo), a diferença "foge" do conjunto dos números naturais e a operação se torna impossível nesse conjunto.

Que a subtração não é comutativa, não será preciso mais que um exemplo para mostrar:

$10 - 3$ será o mesmo que $3 - 10$? Claro que não!

Será associativa, a subtração?

Um exemplo: $18 - (10 - 4)$ e $(18 - 10) - 4$ produzirão o mesmo resultado?

Vejamos: $18 - (10 - 4) = 18 - 6 = 12$

$(18 - 10) - 4 = 8 - 4 = 4$

Os resultados são diferentes e basta que em um só exemplo isso aconteça para ser negada a propriedade associativa à subtração.

Também não possui elemento neutro a operação inversa da adição. No exemplo $8 - 0 = 8$, pode parecer que o zero atuou como elemento neutro. Mas, em $0 - 8$? Tanto o zero não é elemento neutro que até impossibilita a subtração.

Conclusão:

A subtração não possui as propriedades estruturais que a adição possui.

RELAÇÕES DE IGUALDADE E DESIGUALDADE

Vamos apenas sugerir situações em que as relações de igualdade e desigualdade podem ser aplicadas porque essas relações já foram tratadas em nosso volume anterior.

Existe uma propriedade que *vale* tanto para as igualdades como para as desigualdades e que se chama *propriedade transitiva*. Também não é esta a primeira vez que vamos falar desta propriedade. Entretanto, por ser ela muito importante e grandemente empregada para demonstrar a veracidade de certas proposições (ou a falsidade), vamos nos referir a ela novamente.

Se queremos verificar se a propriedade comutativa é válida para a adição, que fazemos? Primeiro, imaginamos um exemplo: $3 + 5$ e $5 + 3$. Agora, vamos verificar se os resultados das duas adições é o mesmo: $3 + 5 = 8$ e $5 + 3 = 8$. O resultado permanece inalterável. Então, empregando a propriedade transitiva da igualdade, porque cada uma das duas sentenças obtidas pelo nosso exemplo é uma igualdade, teremos:

Se $3 + 5 = 8$ e $5 + 3 = 8$, então $3 + 5 = 5 + 3$.

Assim, muitíssimas são as oportunidades em que, para chegarmos a uma conclusão, precisamos empregar essa propriedade.

Outro exemplo:

Se $2 + 8 + 5 = 15$ e $10 + 5 = 15$, então $2 + 8 + 5 = 10 + 5$.

A propriedade transitiva é válida também para as relações de desigualdade.

Assim: Se $8 < 10$ e $10 < 15$; então $8 < 15$.
ou: Se $20 > 15$ e $15 > 12$; então $20 > 12$.

A propriedade simétrica da igualdade também é bastante usada, na prática. Seja a igualdade $7 + 5 = 12$. Pela propriedade simétrica, podemos escrever: $12 = 7 + 5$.

É comum o aluno empregá-la ao formular a sentença matemática para resolver um problema. Escreve, por exemplo, $\square = 15 - 8$ ou, $15 - 8 = \square$, indiscriminadamente. Êle faz nada mais, nada menos, que aplicar a propriedade simétrica da igualdade.

Nas desigualdades em que há a preocupação com o sentido, isto é, quando são empregados os símbolos $>$ ou $<$, esta propriedade (simétrica) não vale.

Vejamos: se $5 < 8$ é verdadeira,

$8 < 5$ é falsa.

Podemos, porém, nos valer desta *não validade* da propriedade transitiva para concluir exatamente o contrário do que concluiríamos se ela valesse:

Se $5 < 8$, então $8 > 5$.

Ao trocarmos os têrmos da igualdade, invertemos também o seu sentido.

Se $3 + 8 > 10$, então $10 < 3 + 8$.

Quando não há preocupação com o sentido da desigualdade e empregamos o símbolo $\neq$, a propriedade simétrica é válida:

$$4 + 5 \neq 3 + 3 \text{ ou } 3 + 3 \neq 4 + 5.$$

Tôdas as considerações aqui feitas serão oportunamente empregadas para concluirmos algumas verdades e chegarmos a alguns conceitos.

ALTERAÇÃO DO RESULTADO DE ADIÇÕES E SUBTRAÇÕES EM FUNÇÃO DA VARIAÇÃO DE SEUS TÊRMOS

Tratamos do assunto em nosso volume 3. Vamos, agora, apenas recordar, através de problemas, que continuem os:

EXERCÍCIOS 9

1 — Numa adição de duas parcelas, aumenta-se 5 unidades a cada uma delas. A soma aumenta ou diminui? De quanto?

2 — Numa adição de três parcelas, aumenta-se 8 unidades a cada uma delas. Que alteração sofre o resultado?

3 — Uma adição possui três parcelas. Se aumentarmos a primeira parcela de 12 unidades, a segunda de 15 e a terceira de 18, de quanto aumentará a soma?

4 — Numa adição de três parcelas, a soma é 52. Se aumentarmos 2 unidades à primeira parcela, 3 à segunda e 5 à terceira, qual será a nova soma?

5 — Uma adição tem duas parcelas. Se tirarmos 8 unidades da primeira parcela e uma dezena da segunda parcela, que alteração sofrerá a soma?

6 — Numa adição de duas parcelas, a soma é 146. Se aumentarmos 25 unidades a uma das parcelas e tirarmos 25 unidades da outra, qual será a soma?

7 — Numa subtração, a diferença é 236. Se aumentarmos 49 unidades ao minuendo, qual será a diferença?

8 — Ao efetuar uma subtração cuja diferença deveria ser 23, Carlos enganou-se e colocou 9 unidades a mais no subtraendo. Qual deve ter sido a diferença (resultado da subtração) encontrada por Carlos?

9 — Se aumentarmos 6 unidades aos dois têrmos da subtração, que acontecerá com a diferença?

10 — O minuendo tendo sido acrescido de 109 unidades, que se deve fazer ao subtraendo para que o resto não se altere?

11 — Se do minuendo foram tiradas 23 dezenas, que operação devemos efetuar com o subtraendo para que a diferença permaneça a mesma?

12 — O subtraendo foi diminuído de 2.080 unidades. Que operação devemos efetuar com o minuendo para que a diferença não seja alterada?

13 — Numa adição de duas parcelas, a soma é 12.506 e uma das parcelas é 5.854. Qual é a outra parcela?

Sentença matemática:

$\square + 5.854 = 12.506$

$\square = \ldots$

$\square = \ldots$

14 — Numa adição de três parcelas, as duas primeiras são 2.008 e 7.506. A soma é 11.000. Qual é a terceira parcela?

Sentença matemática:

$(2.008 + 7.506) + \square = 11.000$

$\ldots + \square = \ldots$

$\square = \ldots$

$\square = \ldots$

15 — Numa adição de três parcelas, as duas últimas são 509 e 1.038. A soma é o sucessivo de 1.999. Qual é a primeira parcela?

Sentença matemática:

$\square + (509 + 1.038) = 2.000$

$\square + \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots$

$\square = \ldots$

$\square = \ldots$

16 — Se aumentarmos uma das parcelas de 6 unidades, a soma ficará ....de 6 unidades.

17 — Diminuindo uma das parcelas de 13 unidades, a soma ficará ....de .... unidades.

18 — Numa subtração, a diferença é 109. Se o minuendo fôr diminuído de 25 unidades, a diferença passará a ser ...

19 — Para resolver um problema, eu devia adicionar 48 e 65. Ao copiar as parcelas para efetuar a operação, cometi um engano e escrevi 56 ao invés de 65. A soma sofreu uma alteração para mais ou para menos, em conseqüência do meu engano? De quantas unidades foi o êrro cometido?

Já sabemos que "se uma das parcelas aumenta ou diminui, a soma aumenta ou diminui o mesmo número de unidades" (matéria estudada na 3.ª série).

Logo, em nosso problema, a soma vai ficar diminuída porque a parcela 65 passou a 56. Chamando de □ a diferença para menos, teremos a seguinte sentença:

$\square = 65 - 56$

$\square = \ldots$

20 — Luís devia efetuar a subtração 608 - 257. Ao copiar o minuendo, cometeu um engano: inverteu as posições dos algarismos 6 e 8. Qual a alteração sofrida pela diferença?

Ao inverter a posição dos algarismos 6 e 8, do minuendo, êste aumentou. Seja □ êsse aumento:

$\square = 806 - 608$

$\square = \ldots$

21 — Quando se aumenta o subtraendo, que acontece à diferença? E quando se diminui o subtraendo?

22 — Numa subtração, o subtraendo é 2.506. Que acontecerá com o resultado (diferença) se eu me enganar e escrever 506 no subtraendo ao efetuá-la?

23 — Paguei uma dívida de Cr$ 128,00. Se essa minha dívida fôsse de menos Cr$ 43,00, eu teria ficado com Cr$ 200,00 para as despesas. Quanto eu tinha antes de pagar a dívida?

$\square - 128{,}00 = 200{,}00 - 43{,}00$

$\square - 128{,}00 = 157{,}00$

$\square = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\square = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Também se poderia ter pensado e formulado a sentença assim:

$\square - (128{,}00 - 43{,}00) = 200{,}00$

$\square - \quad 85{,}00 = 200{,}00$

$\square = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\square = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

24 — A diretora mandou distribuir 5 dúzias de lápis aos alunos da escola. Se ela tivesse dado menos 9 lápis, teria ficado com 250 para os alunos necessitados usarem durante o ano. Quantos lápis ela tinha antes da distribuição?

Sentença matemática:

$\square - 60 = 250 - 9$ ou $\square - (60 - 9) = 250$

25 — Verifique, nas sentenças abaixo, quais as propriedades empregadas:

a) $38 + 0 = 38$

b) $156 + 35 = 35 + 156$

c) $(45 + 9) + 120 = 45 + (9 + 120)$

26 — Complete, empregando uma das propriedades estudadas:

a) $56 + 204 = 204 + \ldots$

b) $1.035 + \ldots = 1.035.$

c) $256 + (14 + 12) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

EXPRESSÕES NUMÉRICAS COM ADIÇÕES E SUBTRAÇÕES

Em nosso terceiro volume demos início ao estudo das expressões numéricas. Vimos que as expressões podem ser "pontuadas" com o emprêgo de parênteses; as operações envolvidas por parênteses são consideradas como efetuadas. Então, devemos efetuá-las em primeiro lugar. Assim:

a) $(9 - 3) + 2 = 6 + 2 = 8$

b) $9 - (3 + 2) = 9 - 5 = 4$

Às vêzes acontece que a expressão numérica possui também indicações entre colchêtes e chaves. Para determinarmos o seu valor (ou o numeral mais simples que a representa), seguimos a seguinte ordem: primeiramente, efetuamos as operações indicadas entre parênteses; a seguir, as que estão entre colchêtes e, por último, as que estão entre chaves. Assim:

a) $32 - [20 + (9 - 5)]$

$32 - [20 + 4]$

$32 - 24 = 8$

b) $12 + \{41 - [9 + (6 + 4) - (9 - 3)] - 5\}$

$12 + \{41 - [9 + 10 - 6] - 5\}$

$12 + \{41 - 13 - 5\}$

$12 + 23 = 35$

c) $24 - \{18 + [11 - (6 + 4)]\}$

$24 - \{18 + [11 - 10]\}$

$24 - \{18 + 1\}$

$24 - 19 = 5$

EXERCÍCIOS 10

1º.) $28 - (15 + 2) + (12 - 9)$

2º.) $(13 + 12) - (8 + 7)$

3º.) $45 + [(15 + 2) - (23 - 8)] - 1$

4º.) $\{ 150 - [43 + (52 - 28 - 14) - 6] \} + (10 - 9)$

5º.) $(123 - 78) + \{ 105 + [(18 - 13) + (12 + 5 + 32)] \} + (36 - 12)$

6º.) $500 - \{ 132 - [46 + (55 - 17 + 2) - 41] + 15 \} - 1$

7º.) $100 + \{ 426 + [(328 - 115) - (342 - 218)] \}$

8º.) $10 - \{ 326 - [204 + (39 - 6) + (35 + 21 + 32)] \}$

MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO DE NÚMEROS NATURAIS

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

A respeito das operações em epígrafe, também não temos mais muito a dizer. A conceituação está formada e as técnicas quase dominadas. A aplicação em problemas e questões práticas envolvendo casos com dificuldades crecentes nas técnicas e com números cada vez maiores fará com que o estudo dessas operações se complete. Procuraremos, ao sugerir alguns problemas e exercícios diversos para aplicação dessas operações, logo mais, incluir dados que sirvam também para verificar e treinar as diferentes e crescentes dificuldades que inevitàvelmente irão surgindo nas técnicas operatórias das mesmas.

A verificação da exatidão dos resultados destas operações é assunto que tivemos já oportunidade de tratar no volume anterior.

Estimativa:

Podemos estimar o resultado, isto é, fazer uma avaliação, a grosso modo, do resultado de uma multiplicação ou de uma divisão. Suponhamos que temos de efetuar a seguinte multiplicação: 27×51.

Pensaremos mais ou menos assim, para estimar o resultado (produto).

"20 é menor que 27 e 50 é menor que 51"

ou 20×50 é menor que 27×51 ou $1.000 < 27 \times 51$

"30 é maior que 27 e 60 é maior que 51"

ou 30×60 é maior que 27×52 ou $1.800 > 27 \times 51$

Logo, o produto 27×51 está entre 1.000 e 1.800.

Outro exemplo: estimar o resultado de 83×645:

"80 é menor que 83 e 600 é menor que 645"

ou 80×600 é menor que 83×645 ou $48.000 < 83 \times 645$

"90 é maior que 83 e 700 é maior que 645"

ou 90×700 é maior que 83×645 ou $63.000 > 83 \times 645$

Logo, o produto 83×645 está entre 48.000 e 63.000.

O resultado da divisão pode ser também estimado alterando um dos seus têrmos, ou ambos. Vejamos como estimar o resultado da divisão variando o dividendo para mais ou para menos.

Seja a divisão: $860 \div 9$

$810 < 860$; então $810 \div 9 < 860 \div 9$ ou: $90 < 860 \div 9$
$900 > 810$; então $900 \div 9 > 860 \div 9$ ou: $100 > 860 \div 9$
Logo, o quociente de $860 \div 9$ está entre 90 e 100.

Outro exemplo: $2.568 \div 12$
$2.400 < 2.568$; então $2.400 \div 12 < 2.568 \div 12$ ou: $200 < 2.568 \div 12$
$3.600 > 2.568$; então $3.600 \div 12 > 2.568 \div 12$ ou: $300 > 2.568 \div 12$
Logo, o quociente de $2.568 \div 12$ está entre 200 e 300.

Neste exemplo, podemos nos aproximar ainda mais do resultado da divisão observando que 2.568 está muito mais próximo de 2.400 que de 3.600. Logo, o resultado estará muito mais perto de 200 que de 300.

EXERCÍCIOS 11

1 — Estime os resultados das seguintes multiplicações:

a) 37×45
b) 62×35
c) 48×39
d) 572×47
e) 53×843

2 — Estime os resultados das divisões que seguem:

a) $352 \div 8$
b) $508 \div 6$
c) $845 \div 12$
d) $1.950 \div 9$

PROPRIEDADES DA MULTIPLICAÇÃO

As propriedades estruturais da multiplicação vêm sendo "sentidas" pelas crianças desde que começaram a aprender a operação, na 1.ª série. Procuraremos agora reuni-las para uma visão de conjunto e um confronto com as propriedades estruturais da adição.

Propriedade Comutativa: O produto não altera quando os fatôres têm a sua ordem trocada.

Exemplo: $\left.\begin{array}{l} 5 \times 12 = 60 \\ 12 \times 5 = 60 \end{array}\right\}$ então, $5 \times 12 = 12 \times 5$

Elemento Neutro: A multiplicação possui um elemento neutro que é o número *um*.

Exemplos: $\left.\begin{array}{l} 20 \times 1 = 20 \\ 1 \times 20 = 20 \end{array}\right\}$ então, o número *um* não influi no produto, é neutro.

Propriedade Associativa: Numa multiplicação de três fatôres, podemos associar os dois primeiros ou os dois últimos, para depois multiplicar pelo fator restante.

Exemplo: $\left.\begin{array}{l} (10 \times 5) \times 8 = 50 \times 8 = 400 \\ 10 \times (5 \times 8) = 10 \times 40 = 400 \end{array}\right\}$ então, $(10 \times 5) \times 8 = 10 \times (5 \times 8)$.

Fechamento: O produto de dois números naturais é sempre um número natural.

Exemplo: $\underset{\text{n.º nat.}}{\underset{\downarrow}{10}} \times \underset{\text{n.º nat.}}{\underset{\downarrow}{58}} = \underset{\text{n.º nat.}}{\underset{\downarrow}{580}}$

Distributiva: A ação de multiplicar pode se "distribuir" entre as parcelas de soma indicada.

Na expressão $2 \times (4 + 5)$ devemos antes efetuar a adição (por estar entre parênteses) e depois multiplicar.

$2 \times (4 + 5) = 2 \times 9 = 18$

A mesma expressão pode ser resolvida fazendo uma "distribuição" da multiplicação por parcela, assim:

$2 \times (4 + 5) = 2 \times 4 + 2 \times 5 = 8 + 10 = 18$

Outro exemplo: $3 \times (8 + 5) = 3 \times 13 = 39$

$3 \times (8 + 5) = 3 \times 8 + 3 \times 5 = 24 + 15 = 39$

Tanto faz resolver de um modo como de outro, o resultado é 39. Logo, a multiplicação pode ser distribuída pelas parcelas da soma e dizemos, por isso, que ela possui a propriedade distributiva em relação à adição.

Examinando os exemplos seguintes, veremos que a multiplicação se distribui também entre os têrmos de uma diferença indicada:

$5 \times (8 - 3) = 5 \times 5 = 25$

ou $5 \times (8 - 3) = 5 \times 8 - 5 \times 3 = 40 - 15 = 25$

Seguindo um ou outro caminho, o resultado é 25, no exemplo acima.

Outro exemplo: $12 \times (15 - 3)$

$12 \times (15 - 3) = 12 \times 12 = 144$

ou $12 \times (15 - 3) = 12 \times 15 - 12 \times 3 = 180 - 36 = 144$

Logo, a multiplicação é distributiva em relação à subtração.

a) $6 \times (10 - 5) =$ ....

b) .... $= 3 \times (12 - 7)$

c) $(11 - 4) \times 3 =$ ....

d) .... $= 8 \times 4 - 5 \times 4$

Quando empregamos a técnica de multiplicar, já tão conhecida da criança, estamos aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Exemplo: 5×132

$5 \times 132 = 5 \times (100 + 30 + 2) \leftarrow$ Outro numeral de 130.

ou $5 \times (2 + 30 + 100) \leftarrow$ Propr. comut. da adição.

Pela técnica:

$$\begin{array}{rl} 132 & \\ \times\ 5 & \\ \hline 10 & = 5 \times 2 \\ 150 & = 5 \times 30 \\ 500 & = 5 \times 100 \\ \hline 660 & \end{array} \qquad \text{ou} \qquad \begin{array}{r} 132 \\ \times\ 5 \\ \hline 660 \end{array}$$

Observando a técnica de multiplicação, em todos os casos, veremos que é uma aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Outro exemplo:

$$\begin{array}{rl} 236 & \\ \times\ 32 & \\ \hline 12 & = 2 \times 6 \\ 60 & = 2 \times 30 \\ 400 & = 2 \times 200 \\ 180 & = 30 \times 6 \\ 900 & = 30 \times 30 \\ 6.000 & = 30 \times 200 \\ \hline 7.552 & \end{array} \qquad \text{ou} \qquad \begin{array}{rl} 236 & \\ \times\ 32 & \\ \hline 472 & = 2 \times 236 \\ 7.080 & = 30 \times 236 \\ \hline 7.552 & \end{array} \qquad \text{ou} \qquad \begin{array}{r} 236 \\ \times\ 32 \\ \hline 472 \\ 708\ \\ \hline 7.552 \end{array}$$

Faremos com que os nossos alunos se interessem em perceber a aplicação da propriedade distributiva e também pela evolução da técnica operatória para um processo cada vez mais breve.

Ainda mais um exemplo:

$$\begin{array}{rl} 354 & \\ \times\ 231 & \\ \hline 354 & = 1 \times 354 \\ 10.620 & = 30 \times 354 \\ 70.800 & = 200 \times 354 \\ \hline 81.774 & \end{array} \qquad \text{ou} \qquad \begin{array}{r} 354 \\ \times\ 231 \\ \hline 354 \\ 1.062\ \\ 708\ \ \\ \hline 81.774 \end{array}$$

Decompusemos apenas o multiplicador. No exemplo anterior, decompusemos ambos os fatôres para o processo mais longo de todos.

Atividades:

Justifique a técnica que você emprega para fazer as multiplicações seguintes pela propriedade distributiva da multiplicação:

a) 8×235

b) 34×192

c) 245×346

DIVISÃO

Divisão é a operação inversa da multiplicação.

$$18 \div 6 = 3 \text{ porque } 3 \times 6 = 18$$

A divisão tornou-se necessária ao homem para resolver dois problemas: um dêles, consiste em determinar *quantos subconjuntos* com um determinado número de elementos um dado conjunto contém. Por exemplo: quantos subconjuntos de 6 elementos podem ser encontrados em um conjunto de 18 elementos? O outro, consiste em determinar *quantos elementos* cada subconjunto possui quando repartimos um dado conjunto em um certo número de subconjuntos, todos com a mesma quantidade de elementos. Por exemplo: com os 18 elementos de um conjunto queremos formar 6 subconjuntos com o mesmo número de elementos; quantos elementos cada um dos subconjuntos terá?

Resumindo, os dois problemas que tornaram a operação divisão necessária ao homem foram:

1.º) procurar saber *quantos grupos* com o mesmo número de elementos;

2.º) procurar saber *quantos elementos* há em cada grupo.

Êstes problemas nem sempre são muito simples porque não é sempre que se pode encontrar um número (quociente) que multiplicado pelo divisor reproduza o dividendo. Não existe, por exemplo, um número natural que, multiplicando por 5, produza para resultado o número 19.

Nós sabemos que $3 \times 5 = 15$ e 15 é menor que 19
e que $4 \times 5 = 20$ e 20 é maior que 19.

Então, o quociente de $19 \div 5$ não é 3 e nem é 4. Se dissermos que é 3, estaremos cometendo um êrro *por falta* (pois faltam 4 unidades para 3×5 ser igual ao dividendo que é 19); se dissermos que o quociente é 4, estaremos cometendo um êrro *por excesso* (pois o produto 4×5 excede o dividendo 19 em 1 unidade).

Para solucionar êsse impasse, convencionou-se que o quociente será o número que produz o *menor êrro por falta*, e êsse êrro será o *resto* da divisão. Assim, em nosso exemplo, $19 \div 5$, o quociente é 3 e o resto é 4. Esta divisão que se diz ser aproximada (se o resto fôsse zero, seria exata), corresponde à seguinte relação: $3 \times 5 + 4 = 19$

Em outras palavras: sendo a divisão aproximada, o dividendo será igual ao produto do quociente pelo divisor, mais o resto. Quando a divisão é exata, o resto é zero.

A divisão, em geral, quando se opera com números naturais, é aproximada. Quando a divisão é exata, dizemos que o dividendo é *divisível* pelo divisor.

O *resto* de uma divisão *é sempre* menor que o divisor. Já vimos acima que o quociente é o número que produz o *menor êrro* por falta, logo, se o resto fôr igual ou maior que o divisor, o êrro não será *o menor*.

O ZERO NÃO PODE SER DIVISOR

Uma divisão por zero não tem sentido. Se tentarmos dividir um número por zero notaremos logo o absurdo que estamos tentando cometer. Por exemplo, se cometermos a tolice de querer dividir 5 por zero, teremos:

$$5 \div 0 = ?$$

Que número poderemos encontrar para quociente, número êsse que, multiplicado por zero, dê o produto 5 (ou quase 5, no caso de pensarmos em uma divisão aproximada)?

Não existe êsse número! Pois qualquer que seja o número por nós pensado, quando o multiplicarmos pelo divisor (0), dará o produto zero.

Poderemos tentar a "tolice" de dividir por zero com muitos outros dividendos e chegaremos sempre a êsse resultado: o produto do quociente pelo divisor será zero. Logo, o zero não pode ser divisor. Poderá, porém, ser dividendo:

$$0 \div 5 = 0 \text{ porque } 0 \times 5 = 5 \times 0.$$

Outros exemplos:

$$\begin{array}{r|l} 0 & 8 \\ \hline 0 \times 8 = 0 & 0 \\ \hline 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 0 & 25 \\ \hline 0 \times 25 = 0 & 0 \\ \hline 0 & \end{array}$$

DIVISÃO POR 10, 100, E 1.000

Se pensarmos que, dividir um número por 10 é o mesmo que procurar saber quantas dezenas êle tem, tudo ficará muito fácil.

Exemplos:

$50 \div 10 = 5$ porque 50 tem 5 dezenas.
$62 \div 10 = 6$ porque 62 tem 6 dezenas; o resto é 2.
$146 \div 10 = 14$ porque 146 tem 14 dezenas; o resto é 6.
$8.545 \div 10 = 854$ porque 8.545 tem 854 dezenas; o resto é 5.

Dividir um número por 100 é o mesmo que procurar saber quantas centenas tem o número.

Exemplos: $850 \div 100 = 8$ porque 850 tem 8 centenas; o resto é 50.
$2.535 \div 100 = 25$ porque 2.535 tem 25 centenas; o resto é 35.

Da mesma forma, dividir um número por 1.000 é o mesmo que procurar saber quantos milhares tem o número.

Exemplos: $8.235 \div 1.000 = 8$ porque 8.235 tem 8 milhares; o resto é 235.
$12.540 \div 1.000 = 12$ porque 12.540 tem 12 milhares; o resto é 540.

PROPRIEDADES DA DIVISÃO

A divisão é uma operação inversa, como a subtração, e não possui as propriedades estruturais que a multiplicação possui. O aluno poderá experimentar, como fizemos com a subtração, se a divisão é comutativa, associativa, etc.

A propriedade *distributiva* em relação à adição e à subtração é a única que vale para a divisão, e assim mesmo, não completamente. Ela só vale num sentido: quando a adição ou a subtração indicada são o dividendo. No outro sentido, ela não vale.

Vejamos o exemplo que segue:

$(20 + 15) \div 5 = 35 \div 5 = 7$

ou $(20 + 15) \div 5 = 20 \div 5 + 15 \div 5 = 4 + 3 = 7$ (Verdadeira)

O resultado é 7, das duas formas, logo, foi possível distribuir a divisão.

Outro exemplo, no mesmo sentido:

$(32 - 12) \div 4 = 20 \div 4 = 5$

ou $(32 - 12) \div 4 = 32 \div 4 - 12 \div 4 = 8 - 3 = 5$ (Verdadeira)

O resultado é 5, pelas duas maneiras, logo, foi possível distribuir a divisão.

Vejamos, agora, um exemplo em sentido contrário:

$36 \div (4 + 2) = 36 \div 6 = 6$

$36 \div (4 + 2) = 36 \div 4 + 36 \div 2 = 9 + 18 = 27$ (Falsa)

Como vemos, a segunda sentença é falsa porque o resultado da divisão no exemplo dado é 6 e não 27.

Logo, neste sentido, a divisão *não é distributiva* nem em relação à adição, nem à subtração, como veremos com o seguinte exemplo:

$36 \div (6 - 4) = 36 \div 2 = 18$

$36 \div (6 - 4) = 36 \div 6 - 36 \div 4 = 6 - 9 = ?$ (impossível)

Como acabamos de ver, a distributividade da divisão só se faz em um sentido porque ela não é comutativa. A multiplicação, por ser comutativa, pode ser distribuída nos dois sentidos.

EXPRESSÕES COM AS QUATRO OPERAÇÕES FUNDAMENTAIS

Não havendo sinais de associação, o valor das expressões é encontrado assim:

1.º) Multiplicações e Divisões;

2.º) Adições e Subtrações.

Exemplos:

1.º) $18 - \overset{\frown}{15 \div 3} = 18 - 5 = 13$

2.º) $(18 - 15) \div 3 = 3 \div 3 = 1$

3.º) $25 + \overset{\frown}{3 \times 2} - \overset{\frown}{10 \div 5} = 25 + 6 - 2 = 29$

4.º) $\overset{\frown}{6 \div 2} + (9 - 3) \div 6 = 3 + \overset{\frown}{6 \div 6} = 3 + 1 = 4$

EXERCÍCIOS 12

Determine o numeral mais simples das seguintes expressões numéricas:

1 — $9 - 4 \times 2$

2 — $3 \times 4 + 5 \times 3$

3 — $12 - 9 \div 3 + 5$

4 — $(15 - 6) \div 3 \times 2$

5 — $27 - (4 + 3) + 8 \div 4$

APLICAÇÃO DAS PROPRIEDADES ESTRUTURAIS DAS OPERAÇÕES

EXERCÍCIOS 13

1 — Complete as afirmações seguintes com o nome da propriedade utilizada:

a) $186 \times 25 = 25 \times 186$ → propriedade . . . .
b) $(6 \times 8) \times 9 = 6 \times (8 \times 9)$ → propriedade . . . .
c) $185 \times 1 = 185$ → propriedade . . . .
d) $5 \times (12 + 8) = 5 \times 12 + 5 \times 8$ → propriedade . . . .
e) $8 \times (9 - 4) = 8 \times 9 - 8 \times 4$ → propriedade . . . .

2 — Descubra o numeral mais simples das seguintes expressões:

a) $6 \times (5 + 3)$
b) $5 \times (6 - 4)$
c) $9 \times (3 + 2)$

3 — Resolva as mesmas expressões acima empregando a propriedade distributiva e compare os resultados.

4 — Complete as sentenças que seguem aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição:

a) $10 \times (18 + 3) = 10 \times \ldots + \ldots \times 3$
b) $6 \times (8 + 4) =$ . . . .
c) . . . . $= 3 \times 7 + 3 \times 5.$
d) $(2 + 9) \times 3 = 2 \times \ldots + 9 \times \ldots$
e) $(5 + 6) \times 7 =$ . . . .

5 — Complete as sentenças seguintes aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtração:

a) $6 \times (10 - 5) =$ . . . .
b) . . . . $= 3 \times (12 - 5)$
c) $(11 - 4) \times 3 =$ . . . .
d) . . . . $= 8 \times 4 - 5 \times 4$

6 — Assinale a resposta correta: Quando o resto de uma divisão é maior que zero, dizemos que a divisão é:

a) exata.
b) aproximada.
c) impossível.

7 — Asinale a afirmativa correta: O resto de uma divisão é:

a) sempre igual a zero.
b) nunca igual a zero.
c) sempre menor que o divisor.

8 — Assinale as operações que são possíveis no conjunto dos números naturais:

a) $13 \div 13$
b) $0 \div 4$
c) $4 \div 0$
d) 0×0
e) $8 \div 1$
f) $1 \div 8$

9 — Determine o numeral mais simples de cada uma das seguintes expressões e conclua se a divisão é ou não é associativa:

a) $(18 \div 6) \div 3$
b) $18 \div (6 \div 3)$
c) $(72 \div 12) \div 2$
d) $72 \div (12 \div 2)$

10 — Dê um exemplo em que a divisão seja distributiva e um exemplo em que ela não seja distributiva.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

Para que a criança resolva com segurança os problemas de aplicação das quatro operações fundamentais é preciso que ela se acostume, ao ler o problema, separar o que êle "conta" do que êle "pede". Destacadas estas duas partes, deverá ela, baseada nas afirmações do problema, formular a sentença matemática, que é uma afirmação.

Os exemplos que seguem serão resolvidos para evidenciar as propriedades das operações que empregamos ao irmos transformando a sentença matemática inicialmente estabelecida até encontrarmos o valor desconhecido da mesma.

Como a solução de um problema depende do raciocínio de cada um, é claro que nem todos os alunos sigam o mesmo caminho para chegar a um mesmo resultado. Entretanto, as sentenças matemáticas estabelecidas por êles devem ser fundamentadas numa mesma "estrutura" que é a idéia geral do que o problema afirma em seu enunciado. A criança que é capaz de extrair do enunciado do problema a sentença matemática que a conduzirá à solução sente uma tão grande sensação de vitória que é a sua melhor recompensa pelos esforços dispendidos.

Sejam os seguintes problemas:

1 — Uma pessoa teve o seu salário diário aumentado de Cr$ 12,50 para Cr$ 15,00. De quanto foi aumentado o seu ordenado mensal?

A "estrutura" dêste problema pode ser "vista" assim:

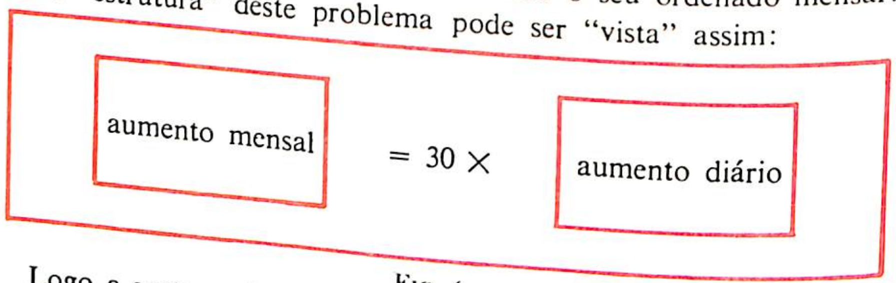

FIG. 6

Logo, a sentença inicial será aquela que nos dará o aumento diário:

1 dia ⟶ 15,00 − 12,50 = 2,50 (singular)
30 dias → 30 × 2,50 = 75,00 (plural)
1 mês ⟶ Cr$ 75,00

Resposta: O aumento mensal foi de Cr$ 75,00.

Outro aluno poderia pensar assim: Chamarei de □ o aumento mensal.

Então,

□ = 30 × (15,00 − 12,00).

O resultado será o mesmo e a estrutura do problema, a idéia geral, é a mesma.

2 — Mamãe foi à quitanda com Cr$ 10,00. Comprou 1 abacaxi por Cr$ 1,20, 6 maçãs a Cr$ 0,35 cada uma, 2 quilos de tomates a Cr$ 0,90 o quilo e 2 pés de alface a Cr$ 0,30 cada um. Com quanto mamãe voltou?

A "estrutura" do problema pode ser "vista" assim:

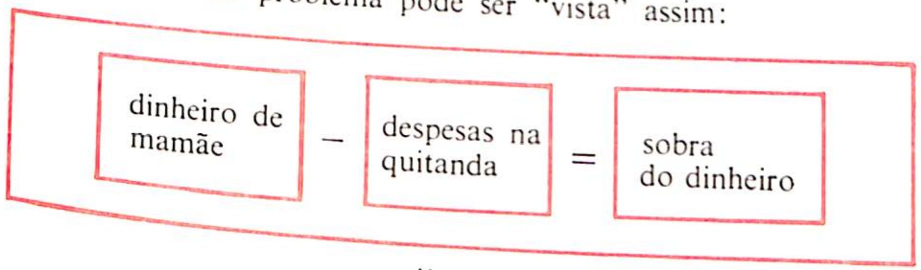

FIG. 7

Logo, poderemos procurar a despesa, em primeiro lugar:

1 abacaxi ⟶ 1,20

1 maçã ⟶ 0,35 (singular)
6 maçãs ⟶ 6 × 0,35 = 2,10 (plural)

1 kg de tomates ⟶ 0,90 (singular)
2 kg de tomates ⟶ 2 × 0,90 = 1,80 (plural)

1 pé de alface ⟶ 0,30 (singular)
2 pés de alface ⟶ 2 × 0,30 = 0,60 (plural)

Chamando de □ o valor desconhecido do problema, teremos:

□ = 10,00 − (1,20 + 2,10 + 1,80 + 0,60)
□ = 10,00 − 5,70
□ = 4,30

Resposta: Ela voltou com Cr$ 4,30.

Outro aluno, mais rápido no raciocínio, fará diretamente a sentença extraída da estrutura do problema:

Sendo □ o valor procurado,

□ = 10,00 − (1,20 + 6 × 0,35 + 2 × 0,90 + 2 × 0,30)
□ = 10,00 − (1,20 + 2,10 + 1,80 + 0,60)
□ = 10,00 − 5,70
□ = 4,30

Como vemos, a linha mestra dos raciocínios é a mesma, a "estrutura" do problema é uma só, portanto, o resultado também é um só.

3 — Pensei em um certo número e acrescentei-lhe 7 unidades; multipliquei o resultado por 4 e subtraí 6 unidades do produto, obtendo, finalmente, 310. Em que número pensei?

Podemos "ver" a estrutura dêste problema assim:

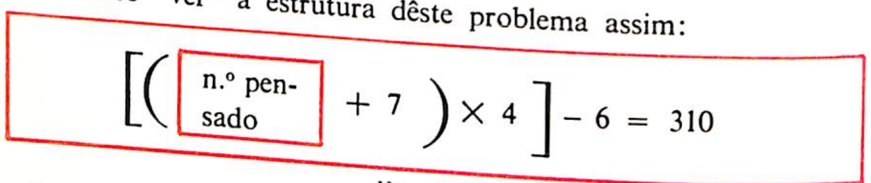

FIG. 8

Chamando de □ o número pensado e seguindo tôda a "estrutura" do problema, teremos a sentença matemática:

[(□ + 7) × 4] − 6 = 310

Uma sentença matemática que traduz um pensamento em que o têrmo desconhecido passou por diversas operações e produziu um resultado conhecido deve ter tôdas as operações "desfeitas" para que o têrmo desconhecido passe a ser conhecido. Para se desfazer duas ou mais operações, devemos começar pela última: a última operação efetuada será a primeira a ser desfeita, a seguir a penúltima, e assim por diante.

Voltando à sentença matemática que traduz o enunciado do problema acima:

[(□ + 7) × 4] − 6 = 310
(□ + 7) × 4 = 310 + 6 (desfazendo a subtração)
(□ + 7) × 4 = 316
□ + 7 = 316 ÷ 4 (desfazendo a multiplicação)
□ + 7 = 79
□ = 79 − 7 (desfazendo a adição)
□ = 72

4 — Uma costureira comprou tecido a Cr$ 2,40 o metro. Por quanto deve ela vender o metro de tecido a suas freguezas para lucrar em 5 metros o preço de custo de um metro?

Estrutura do problema:

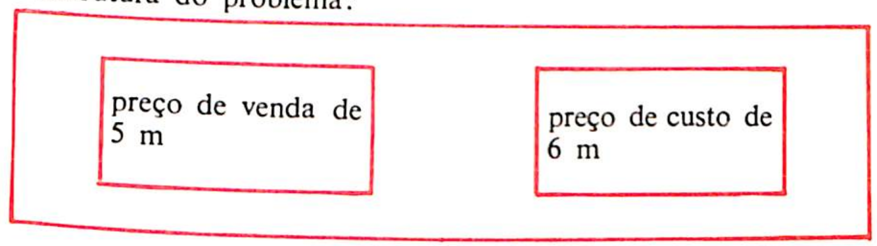

FIG. 9

Logo, para saber o preço de venda de 5 m devemos procurar o preço de custo de 6 m (o problema "conta" o preço de custo).

1 m → 2,40 (singular)
6 m → 6 × 2,40 = 14,40 (plural)

Se 6 m (custo) correspondem a 5 m (venda), de acôrdo com a estrutura, podemos passar a última sentença para a equivalente:

5 m → 14,40 (plural)
1 m → 14,40 ÷ 5 = 2,88

Resposta: Deve vender cada metro a Cr$ 2,88.

5 — Repartir 530 laranjas em duas caixas de modo que a caixa maior receba 130 laranjas mais que a outra.

Êste problema envolve uma "estrutura" diferente, que pode ser "vista" assim:

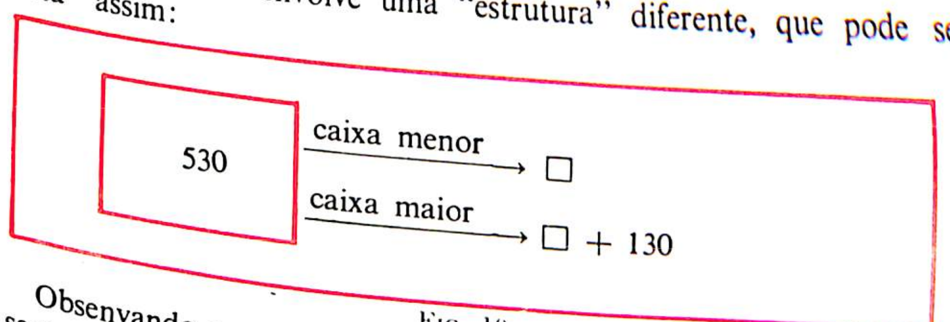

FIG. 10

Observando a estrutura acima esquematizada, poderemos formular a sentença matemática. As partes, se reunidas novamente, formarão o todo:

$\square + (\square + 130) = 530$
$(\square + \square) + 130 = 530$ (pela propr. associat. da adição)
$2 \times \square + 130 = 530$ (pelo conceito de multiplicação)
$2 \times \square = 530 - 130$ (desfazendo a adição)
$2 \times \square = 400$
$\square = 400$
$\square = 400 \div 2$ (desfazendo a multiplicação)
$\square = 200$ (caixa menor)
$\square + 130 = 200 + 130 = 330$ (caixa maior)

Poderemos habituar nossos alunos a, tão logo descubram o valor de $\square$, passarem êsse valor para a estrutura esquematizada acima e, observando o esquema das outras partes, ir descobrindo cada uma delas, em correspondência com a própria estrutura. Êsse hábito não só tornará mais claro o pensamento dos alunos menos habilidosos em raciocinar como facilitará a elaboração da resposta e propiciará uma rápida verificação dos resultados. Repetiremos abaixo o esquema da estrutura do problema para fazer o que dissemos, após ter descoberto o valor de $\square$. Nos exemplos seguintes não repetiremos a estrutura, mas voltaremos a ela, após ter simplificado as sentenças, para descobrir o valor das outras partes em que o conjunto foi dividido e verificar os resultados.

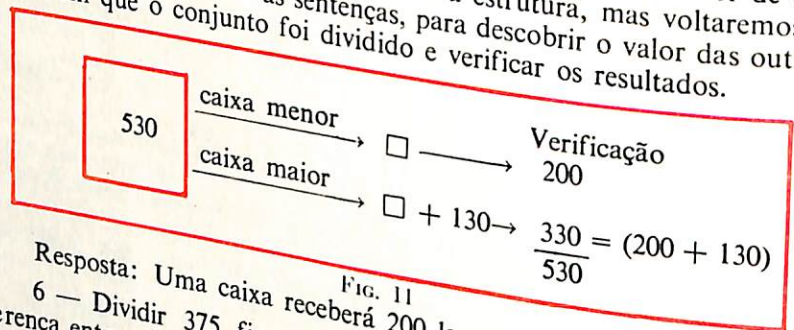

Fig. 11

Resposta: Uma caixa receberá 200 laranjas e outra, 330.

6 — Dividir 375 figurinhas em dois álbuns de modo que a diferença entre as figurinhas de um e outro seja de 129.

Estrutura:

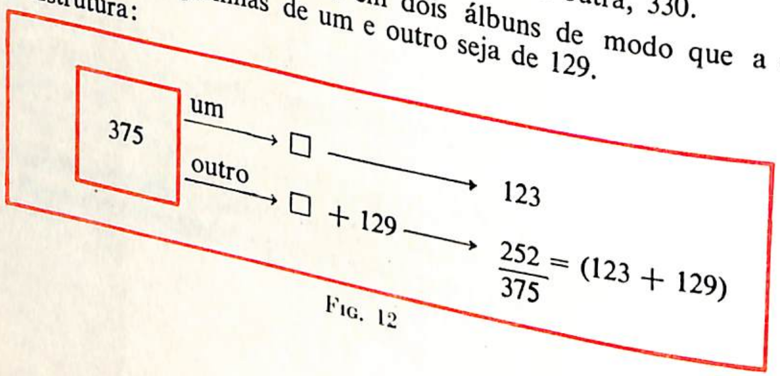

Fig. 12

Sentença matemática:

$\square + (\square + 129) = 375$
$(\square + \square) + 129 = 375$ (propr. assoc. da adição)
$2 \times \square = 375 - 129$ (desfazendo a adição)
$2 \times \square = 246$
$\square = 246 \div 2$ (desfazendo a multiplicação)
$\square = 123$

Resposta: Um álbum ficará com 123 figurinhas e o outro, com 252.

7 — Repartir 100 balas entre João Rui e Sérgio de modo que Rui receba o triplo das balas que receber João, e Sérgio receba o dôbro das balas que receber Rui.

Estrutura:

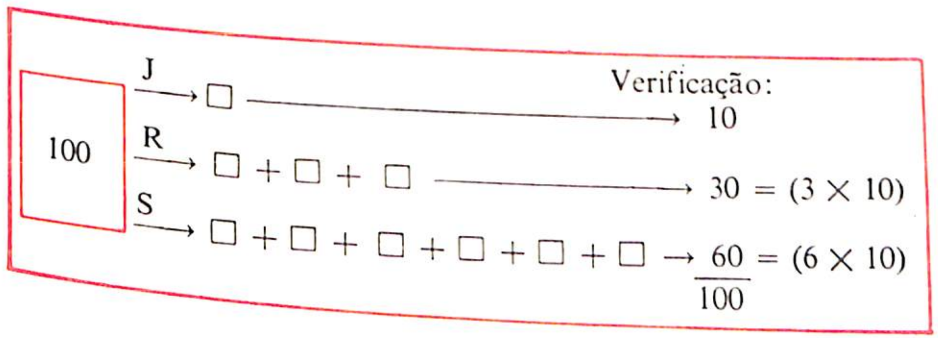

Fig. 13

Sentença matemática:

$\square + (\square + \square + \square) + (\square + \square + \square + \square + \square + \square) = 100$
ou: $\square + \square + \square + \square + \square + \square + \square + \square + \square + \square = 100$
$10 \times \square = 100$ (conceito de multiplicação)
$\square = 100 \div 10$ (desfazendo a multiplicação)
$\square = 10$

8 — A capacidade de carga de um vagão é 5 vêzes maior que a de um caminhão. Juntos, podem transportar 42 toneladas de mercadorias. Qual a capacidade de carga de cada um?

Estrutura:

$$\boxed{42}\quad \xrightarrow{\text{caminhão}} \square \longrightarrow 7$$
$$\xrightarrow{\text{vagão}} \square + \square + \square + \square + \square \longrightarrow \underline{35} = (5 \times 7)$$
$$42$$

FIG. 14

Sentença matemática:

$\square + (\square + \square + \square + \square + \square) = 42$

ou $\square + \square + \square + \square + \square + \square = 42$

$6 \times \square = 42$ (conceito de multiplicação)

$\square = 42 \div 6$ (desfazendo a multiplicação)

$\square = 7$

9 — Distribuir Cr\$ 218,00 entre três pessoas, de modo que a segunda receba Cr\$ 25,00 mais que a primeira e que esta receba Cr\$ 8,00 mais que a terceira.

Estrutura: (Pela simples leitura do problema, vemos que quem receberá menos será a terceira. Logo, representá-la-emos por $\square$, para facilitar a representação das outras).

$$\boxed{281{,}00}\quad \xrightarrow{1.^a} \square + 8{,}00 \longrightarrow 88{,}00 = (80{,}00 + 8{,}00)$$
$$\xrightarrow{2.^a} (\square + 8{,}00 + 25{,}00) \rightarrow 113{,}00 = (80{,}00 + (8{,}00 + 25{,}00))$$
$$\xrightarrow{3.^a} \square \longrightarrow \underline{80{,}00}$$
$$281{,}00$$

FIG. 15

Sentença matemática:

$\square + (\square + 8{,}00) + (\square + 8{,}00 + 25{,}00) = 281{,}00$

$(\square + \square + \square) + (8{,}00 + 8{,}00 + 25{,}00) = 281{,}00$ (propriedades comut. e assoc. da adição).

$3 \times \square + 41{,}00 = 281{,}00$ (conceito de multiplicação)

$3 \times \square = 281{,}00 - 41{,}00$ (desfazendo a adição)

$3 \times \square = 240{,}00$

$\square = 240{,}00 \div 3$ (desfazendo a multiplicação)

$\square = 80{,}00$

Resposta: A 1ª pessoa receberá Cr\$ 88,00, a 2.ª receberá Cr\$ 113,00 e a 3.ª receberá Cr\$ 80,00.

10 — Distribuir 25 pirulitos entre Ana, Lúcia e Marina, de modo que Ana receba 4 a mais que Lúcia e Marina, 3 a menos que Lúcia.

Estrutura:

$$\boxed{25}\quad \xrightarrow{\text{A}} \square + 4 \longrightarrow 12 = (8 + 4)$$
$$\xrightarrow{\text{L}} \square \longrightarrow 8$$
$$\xrightarrow{\text{M}} \square - 3 \longrightarrow \underline{5} = (8 - 3)$$
$$25$$

FIG. 16

Sentença Matemática:

$(\square + 4) + \square + (\square - 3) = 25$

$[(\square + \square + \square) + 4] - 3 = 25$ (propr. comut. e associat. de adição)

$[3 \times \square + 4] = 25 + 3$ (desfazendo a subtração)

$3 \times \square + 4 = 28$

$3 \times \square = 28 - 4$ (desfazendo a adição)

$3 \times \square = 24$

$\square = 24 \div 3$ (desfazendo a multiplicação)

$\square = 8$

MÚLTIPLOS E DIVISORES — NÚMEROS PRIMOS

CONCEITUAÇÃO

As relações "ser múltiplo de" e "ser divisor de" devem já ter sido introduzidas na 3.ª série.

Recapitulemos:

No produto $3 \times 7 = 21$, já sabemos:

21 é múltiplo de 7 $\Longleftrightarrow$ 7 é divisor de 21

e 21 é múltiplo de 3 $\Longleftrightarrow$ 3 é divisor de 21

Essas duas relações são inseparáveis. Se um número é múltiplo de outro, êste outro é divisor daquele, e vice-versa.

Quando um número é múltiplo de outro, dizemos que êle é *divisível* por êsse outro.

Vimos que 21 é múltiplo de 7 (e de 3), então, 21 é divisível por 7 (e por 3).

Pelo conceito que temos de múltiplo (tirado de uma multiplicação), podemos concluir que "ser múltiplo" de um número natural é o mesmo que "ser produto" dêsse número por um número natural qualquer.

Por exemplo, 3×5 é um múltiplo de 3 (e de 5).

Podemos obter todos os múltiplos de um número natural, multiplicando-o pelo conjunto dos números naturais. Assim:

Múltiplos de 2: 2×0, 2×1, 2×2, 2×3, 2×4, etc.

Múltiplos de 5: 5×0, 5×1, 5×2, 5×3, etc.

Logo, o conjunto dos múltiplos de 2, que podemos indicar por M_2, é o seguinte;

$$M_2 = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots\}$$

Se nós obtemos o conjunto de múltiplos de um número multiplicando-o pelo conjunto dos números naturais e já sabemos que êste conjunto é infinito, então o conjunto de múltiplos de um número é também infinito. Por isso, para representar um conjunto de múltiplos entre chaves, escrevemos os numerais dos primeiros quatro, cinco, ou seis elementos e colocamos reticências.

Exemplos:

$M_3 = \{0, 3, 6, 9, 12, \ldots\}$
$M_4 = \{0, 4, 8, 12, 16, \ldots\}$
$M_5 = \{0, 5, 10, 15, 20, \ldots\}$

"Ser divisor" é o mesmo que "ser fator".

Em $3 \times 5 = 15$, 3 e 5 são fatôres ou divisores de 15 e 15 é múltiplo de ambos.

Os números que multiplicados entre si dão para produto o número 15 são: 1×15 e 3×5, apenas. Logo, os divisores de 15, colocados em ordem crescente, são: 1, 3, 5, 15.

Pelo visto, podemos concluir que o conjunto de divisores de um número é um conjunto finito; tem uma quantidade finita de elementos. Podemos indicar o conjunto de divisores de 15 assim:

$D_{15} = \{1, 3, 5, 15\}$

Os divisores de 12 são os fatôres que multiplicados dois a dois produzem o produto 12: 1×12, 2×6, 3×4. Indicando por D_{12} o conjunto dos divisores de 12, temos:

$D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

EXERCÍCIOS 14

1 — Represente entre chaves os seguintes conjuntos:

a) Múltiplos de 3.
b) Múltiplos de 6.
c) Múltiplos de 9.
d) Múltiplos de 5.
e) Múltiplos de 10.

2 — Represente os seguintes conjuntos de divisores entre chaves:

a) Divisores de 12.
b) Divisores de 10.
c) Divisores de 24.
d) Divisores de 16.

3 — Responda, observando os exercícios anteriores:

a) Quantos múltiplos tem o número 3? E o número 6?
b) Quantos divisores tem o número 16? E o número 10?
c) Quantos elementos pode ter um conjunto de múltiplos?
d) Qual é o maior divisor de um número?
e) Qual é o menor divisor de um número?
f) Qual o menor múltiplo de qualquer número?
g) Qual o número que é divisor de todos os números?
h) Qual é o número que é múltiplo de todos os números?
i) Qual o maior múltiplo de um número que não seja zero?
j) Escreva o conjunto de múltiplos de zero.

RELAÇÕES DE PERTINÊNCIA E INCLUSÃO

Observando alguns conjuntos de múltiplos e de divisores representados entre chaves, poderemos mostrar à criança, de uma forma bastante clara, porque ela "vê" as relações de pertinência e de inclusão.

Sejam os seguintes conjuntos de múltiplos:

$M_3 = \{0, 3, 6, 12, 15, 18, 21, \ldots\}$

$M_2 = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, \ldots\}$

$M_6 = \{0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, \ldots\}$

Poderemos observar que o número 6 é elemento de cada um dos conjuntos acima representados. Assim:

$$\begin{cases} 6 \text{ pertence ao conjunto } M_3; \\ 6 \text{ pertence ao conjunto } M_2; \\ 6 \text{ pertence ao conjunto } M_6. \end{cases}$$

Logo o elemento 6 é comum aos três conjuntos de nosso exemplo.

Sejam agora os seguintes conjuntos de divisores:

$D_{10} = \{1, 2, 5, 10\}$

$D_{15} = \{1, 3, 5, 15\}$

$D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

$D_5 = \{1, 5\}$

Observamos que 1 é elemento comum aos quatro conjuntos acima: 2 pertence aos conjuntos D_{10} e D_{12}; 3 pertence aos conjuntos D_{15} e D_{12}, etc.

Vamos, agora, examinando os mesmos conjuntos, verificar a relação de inclusão entre alguns dêles.

O conjunto D_5 é subconjunto de D_{10} e de D_{15}, isto é, D_5 está contido em D_{10} e D_5 está contido em D_{15}.

EXERCÍCIOS 15

1 — Complete as sentenças que seguem de modo a torná-las verdadeiras:

a) O conjunto de divisores de 5 .... no conjunto dos divisores de 15.

b) O conjunto de divisores de 15 .... o conjunto dos divisores de 5.

c) O conjunto de múltiplos de 9 .... o conjunto de múltiplos de 3.

d) O conjunto de múltiplos de 3 .... o conjunto de múltiplos de 6.

2 — Empregando a indicação sugerida para múltiplos e divisores (D_2, D_6, M_3, M_6, etc.), complete as sentenças que seguem, tornando-as verdadeiras.

a) D_3 é subconjunto de ...

b) .... é subconjunto de D_{12}.

c) M_6 é .... de M_3.

d) M_5 é .... de M_{15}.

3 — Chame de D_6 o conjunto dos divisores de 6 e chame de D_{18} o conjunto dos divisores de 18. Assim:

$D_6 = \{1, 2, 3, 6\}$ e $D_{18} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

Complete:

a) D_6 está contido em ...

b) D_{18} contém ...

c) 1 pertence a D_6 e pertence a ...

4 — Chame de A, B e C cada um dos conjuntos seguintes: divisores de 5, divisores de 7 e divisores de 11. A seguir, responda às perguntas:

A = {............} B = {..........} C = {......}

a) Quantos divisores tem o número cinco? E o número 7? E 11?

b) Você conhece outros números que têm só dois divisores? Dê alguns exemplos.

c) Qual é o maior divisor de 5? E o menor?

....

d) Qual é o menor divisor de 7? E o maior?

....

e) Qual o maior e qual o menor divisor de 11?

....

CONCEITO DE NÚMERO PRIMO

Aproveitando os exemplos do último exercício, A, B, C, podemos introduzir o conceito de *número primo*. Contaremos que os números que possuem apenas dois divisores, como êsses dos exemplos citados, (5, 7 e 11) são denominados números primos.

Cinco é número primo. Sete também é número primo.

O número 11 é primo.

Existem muitos e muitos outros números que só têm dois divisores e que, por isso, são chamados números primos.

EXERCÍCIOS 16

1 — Nomeie um a um os elementos dos seguintes conjuntos:

a) D_{15} = {....................}

b) D_7 = {....................}

c) D_{11} = {....................}

2 — Complete as seguintes sentenças tendo em vista os conjuntos acima:

a) Os números que possuem apenas dois fatôres são denominados ....

b) Dos números 15, 7 e 11, os primos são ....

c) O número 15 não é .... porque possui mais de ....

3 — Dê três exemplos de números primos e escreva entre chaves os conjuntos de seus divisores.

CONCEITO DE NÚMERO COMPOSTO

Os números que, como 15, 10, 12, 6, 9, etc., têm mais que dois divisores são denominados números compostos ou números retangulares. Todos os números compostos têm mais de dois divisores. Se escrevermos os conjuntos de divisores de 15, 10, etc. e contarmos seus elementos, veremos que todos êles têm mais de dois divisores. Tais números são também conhecidos por números retangulares porque se tomarmos todos os elementos dos conjuntos a êles associados e os arrumarmos em linhas e colunas, essa "arrumação" resultará em um retângulo. Vejamos alguns exemplos:

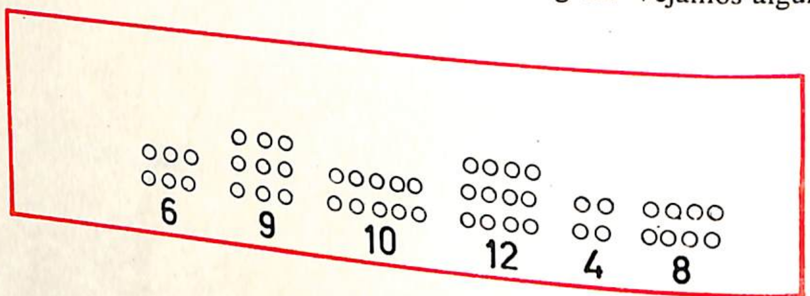

FIG. 17

Observações:

O número 2 é primo. Seus divisores são 1 e 2.
O número 2 é o único número par que é primo.
O número 1 não é primo. Êle só tem um divisor e para ser primo é preciso ter dois divisores.
O número 1 não é nem primo e nem composto: 1 é simplesmente 1.
O conjunto de números primos é infinito.
O menor número primo é 2.

EXERCÍCIOS 17

1 — Complete as sentenças que seguem, tornando-as verdadeiras;

a) O número 7 só tem dois divisores, 1 e ...

b) O número 11 só tem dois divisores, ... e ...

c) O número 7 é .... porque tem apenas ....

d) O número 11 é .... porque só tem ....

2 — Quais os números pares que são primos?

3 — Todos os números ímpares são primos?

4 — Escreva a sucessão dos números naturais até 20. Cancele todos os numerais dos números que não são primos. A seguir, escreva a sucessão dos números primos menores que 20.

5 — Você sabe que número primo é aquêle cujo conjunto de divisores é constituído por *dois elementos distintos*. Pense e responda;

a) Existe algum número natural que tenha um só divisor? Se existe, qual é êle?

b) Qual é o número primo que é menor que todos os outros?

c) Será que existe um número primo que é maior que todos os outros?

6 — Se colocarmos os números primos em uma ordem crescente, obteremos a *sucessão dos números primos*. A sucessão dos números primos é: 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ... Essa sucessão é *finita ou infinita*?

7 — Observe com atenção o conjunto A:

A = {5, 6, 8, 10, 13, 17, 21, 30, 36}

Agora forme os seguintes conjuntos:

a) = números ímpares que pertencem ao conjunto A.
b) = números pares que pertencem ao conjunto A.
c) = números primos que pertencem ao conjunto A.
d) = números compostos que pertencem ao conjunto A.
e) = números que são múltiplos de 5 e que pertencem ao conjunto A.
f) = números que são divisores de 30 e que pertencem ao conjunto A.

UM NÚMERO NATURAL COMO UM PRODUTO DE FATÔRES PRIMOS

Todo número natural diferente de zero pode ser representado como um produto de fatôres (ou de divisores).

$4 = 2 \times 2$
$5 = 5 \times 1$
$9 = 3 \times 3$
$10 = 2 \times 5$
$12 = 3 \times 4$ ou $12 = 3 \times 2 \times 2$
$20 = 4 \times 5$ ou $20 = 2 \times 2 \times 5$

EXERCÍCIOS 18

1 — Represente os números que seguem como um produto de dois fatôres:

a) $14 = \ldots \times \ldots$ b) $6 = \ldots \times \ldots$ c) $3 = \ldots \times \ldots$
d) $15 = \ldots \times \ldots$ e) $7 = \ldots \times \ldots$ f) $18 = \ldots \times \ldots$

2 — Represente os seguintes números como um produto de três ou mais fatôres:

a) $16 = \ldots \times \ldots$ ou $16 = \ldots \times \ldots \times \ldots$
ou $16 = \ldots \times \ldots \times \ldots \times \ldots$
b) $18 = \ldots \times \ldots$ ou $18 = \ldots \times \ldots \times \ldots$
ou $18 = \ldots \times \ldots \times \ldots$
c) $30 = \ldots \times \ldots$ ou $30 = \ldots \times \ldots \times \ldots$

Pela observação dos vários conjuntos de divisores com os quais vem trabalhando, a criança já deve saber que o menor divisor de qualquer número é 1. Uma outra conclusão a que devemos conduzir nossos alunos é aquela à qual chegaremos logo mais. Sejam os seguintes conjuntos de divisores:

$D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
$D_{15} = \{1, 3, 5, 15\}$
$D_{18} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$
$D_{35} = \{1, 5, 7, 35\}$

Observando êsses conjuntos, vemos que o menor divisor de qualquer dêles, diferente de 1, é um número primo. Assim, o menor divisor de 12, diferente de 1, é 2, que é primo; o menor divisor de 18, diferente de 1, é 2, que é primo; o menor divisor de 35, diferente de 1, é 5, que é primo.

A partir da observação acima, podemos expressar qualquer número composto como um *produto de fatôres todos primos.*

Seja, por exemplo, o número 24, que é *composto.* Vamos expressá-lo como um produto de fatôres, todos primos. Para isso, pensaremos por etapas:

Primeira: O menor divisor de 24, diferente de 1, é 2, que é primo. Podemos, então, escrever:

$24 = 2 \times 12$

Segunda: 12 não é primo, é *composto.* Logo, pode ser decomposto em fatôres. O menor divisor de 12, diferente de 1, é 2, que é primo. Podemos, então, escrever: $12 = 2 \times 6$ e

$24 = 2 \times 2 \times 6$

Terceira: 6 não é primo, é *composto.* Logo, pode ser decomposto em fatôres. O menor divisor de 6, diferente de 1, é 2, que é primo. Podemos, então, escrever: $6 = 2 \times 3$ e

$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$

Assim, encontraremos para o número 24 um nôvo numeral que é $2 \times 2 \times 2 \times 3$ formado só de fatôres primos.

EXERCÍCIOS (19)

Encontrar os numerais constituídos por produtos de fatôres primos para os seguintes números:

1 — 28 = ... × ...
28 = ... × ... × ...
2 — 36 = ... × ...
36 = ... × ... × ...
3 — 40 = ... × ...
40 = ... × ... × ...
40 = ... × ... × ... × ...
4 — 42 = ... × ...
42 = ... × ... × ...
5 — 32 = ... × ...
32 = ... × ... × ...
32 = ... × ... × ... × ...
32 = ... × ... × ... × ... × ...

INTERPRETAÇÃO DE GRÁFICOS

Em nosso terceiro volume iniciamos um estudo de interpretação de gráficos. Os gráficos estabelecem uma relação que desejamos evidenciar entre dois conjuntos.

Seja, por exemplo, o seguinte gráfico, que mostra o crescimento demográfico no Brasil de 1.870 até 1.970 e ainda uma previsão para o ano 2.000. Foi publicado pela revista Conhecer, vol. I, página 16.

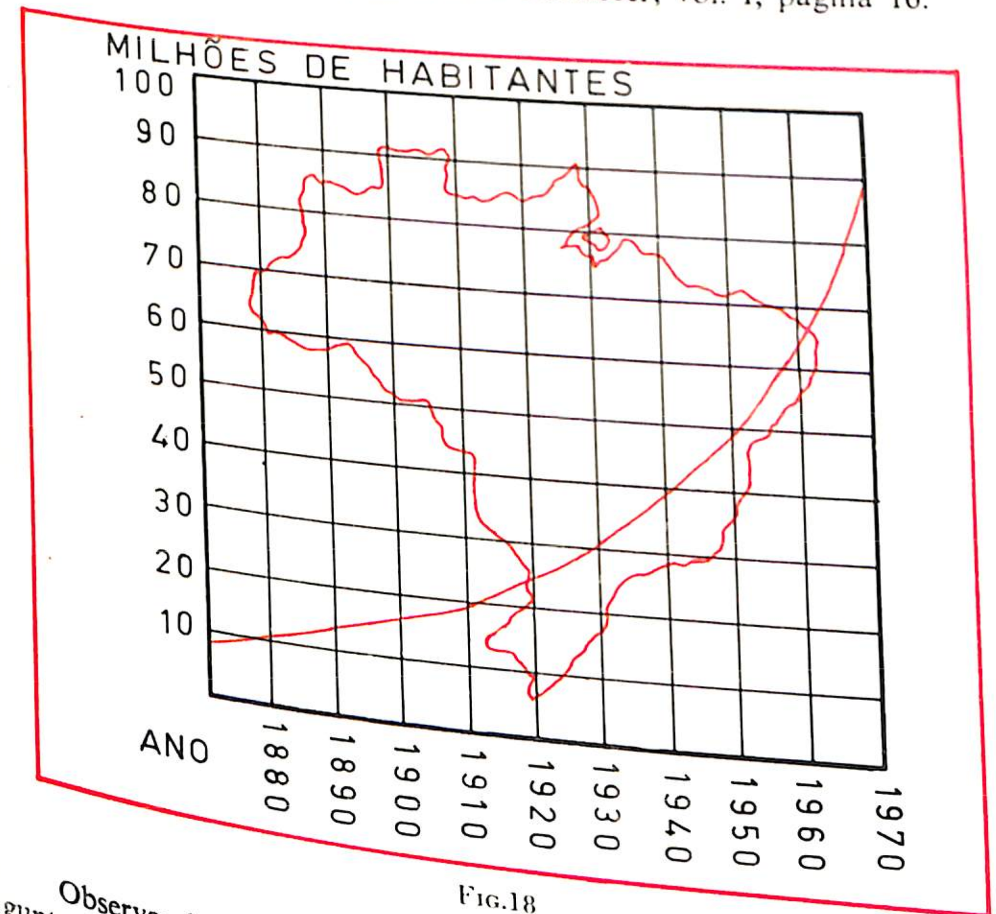

Fig. 18

Observando o gráfico acima, podemos responder às seguintes perguntas, aproximadamente, é claro:

EXERCÍCIOS 20

1 — Quantos milhões de habitantes possuia o Brasil em 1.870? E 10 anos depois?

2 — Ao iniciar o século XX, o Brasil possuia aproximadamente quantos habitantes?

3 — Em que década (período de 10 anos) o Brasil tinha aproximadamente 30 milhões de habitantes?

4 — De 1 950 a 1 960 a população do Brasil cresceu aproximadamente de ... milhões de habitantes?

5 — Em 1 970 a população brasileira é ....

6 — No ano 2 000, esperamos ser ... milhões de habitantes.

Outro exemplo:

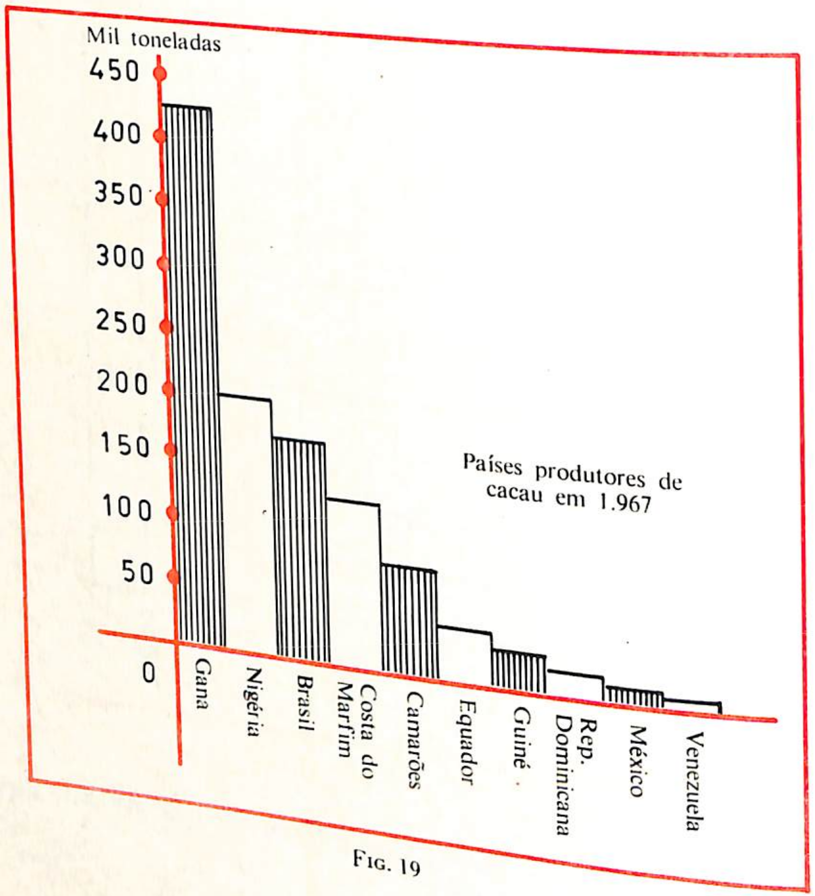

Fig. 19

7 – O gráfico acima refere-se à produção mundial de cacau em 1967. O simples "passar os olhos" por êle já nos dá uma idéia da grande distância entre o primeiro e o segundo país produtor de cacau. Vemos logo a colocação do Brasil, do nosso vizinho Equador, etc.

Vejamos se você é capaz de completar as seguintes sentenças com informações colhidas na interpretação do gráfico acima:

a) Em 1967, o Brasil foi o .... produtor de cacau do mundo.

b) O país que mais produziu cacau naquele ano foi ....

c) Gana produziu mais de .... mil toneladas de cacau em ..... .

d) O Brasil, terceiro produtor de cacau em 1967, produziu naquele ano mais de ....

e) Os países que, em 1967, produziram mais cacau que o Brasil foram: .... e ....

8 — Além do Brasil, mais alguns países da América do Sul classificaram-se entre os dez primeiros produtores de cacau.

a) Quais são êsses países?

b) Qual a classificação de cada um dêles, naquele ano?

c) Qual o maior produtor de cacau da América do Sul?

Mais um exemplo:

O gráfico seguinte mostra a evolução do potencial elétrico instalado no Brasil e em funcionamento até 1968.

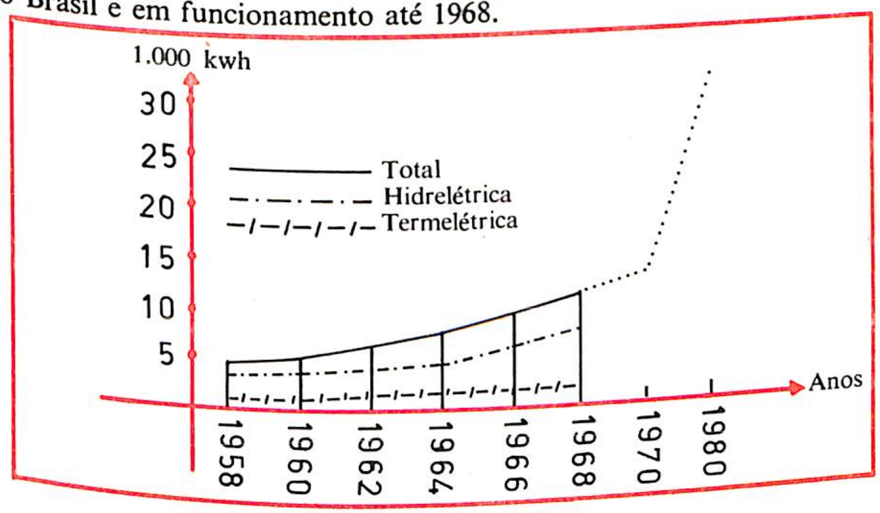

Fig. 20

Observe no gráfico o crescimento do potencial elétrico no Brasil. A linha mais baixa representa a energia térmica (termelétrica), a linha do meio representa a energia hidráulica (hidrelétrica) e a linha superior representa o total da energia elétrica de 1958 a 1968.

9 — Responda:

a) De aproximadamente quantos mil quilowats (KWH) era o potencial elétrico total do Brasil em 1958?

b) E em 1968?

c) Qual dos dois tipos de energia começou a tomar um impulso muito grande em 1964?

d) Que aconteceu com a energia termelétrica a partir de 1962?

10 — A linha pontilhada mostra o potencial elétrico que estará em funcionamento até 1970 e 1980.

a) Que acha você que vai ser o nosso potencial elétrico em 1980?

b) Em 1970 teremos, aproximadamente, quantos mil KWH?

O programa de Estudos Sociais propicia excelentes oportunidades para o desenvolvimento da criança na interpretação de gráficos. Os mapas deverão também ser interpretados, segundo a escala em que foram confeccionados. Falaremos ainda neste volume sôbre escala e suas aplicações.

OPERAÇÕES COM CONJUNTOS

REUNIÃO OU UNIÃO DE CONJUNTOS

Estamos acostumados em nossas atividades diárias a *unir* conjuntos. Quando, por exemplo, recebemos de alguém um pagamento, abrimos a carteira que, geralmente, já tem um conjunto de notas e unimos as que recebemos às que já tínhamos. O conjunto resultante dessa operação de reunir as notas existentes na carteira às notas recebidas é denominado conjunto *reunião*. Êste exemplo é dos mais simples para dar uma idéia do que é uma reunião de conjuntos.

Sejam, por exemplo, dois conjuntos de pessoas:

A = {João, Antônio, Pedro, Manuel}

B = {Rubens, Oscar, Paulo}

Para indicar a reunião ou união de conjuntos usamos o símbolo:

$\cup$ (lê-se: união).

Podemos formar um nôvo conjunto reunindo todos os elementos do conjunto A e do conjunto B. Êsse conjunto é o conjunto *reunião* ou união de A com B. Indicamos essa operação assim:

A $\cup$ B = {João, Antônio, Pedro, Manuel, Rubens, Oscar, Paulo}

Se no conjunto B aparecesse novamente os nomes de João e Manuel, representando as mesmas pessoas que êles designam no conjunto A, é claro que no conjunto reunião tais nomes deveriam aparecer uma só vez.

Sejam, agora, dois conjuntos cujos elementos são números designados por seus numerais mais simples:

$A = \{3, 5, 7, 8, 9\}$

$B = \{0, 3, 4, 7, 8, 10\}$

$A \cup B = \{0, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10\}$

No conjunto reunião não devem aparecer elementos repetidos. O numeral 3, por exemplo, que aparece no conjunto A representa o mesmo número que representa quando aparece no conjunto B. Se o número três é um só, não há necessidade de representá-lo duas vêzes no conjunto reunião, assim como não há necessidade de escrever duas vêzes o nome de João para representar uma só pessoa no conjunto reunião.

Outro exemplo: A = {3, 5, 8, 15, 20} e B = {4, 5, 6, 10, 15, 18}

A ∪ B = {3, 4, 5, 6, 8, 10, 15, 18, 20}

Como podemos concluir, dos exemplos acima, a *reunião* de dois conjuntos A e B é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A *ou* a B.

EXERCÍCIOS 21

1 — Determine a reunião dos seguintes conjuntos:

1.º) A = {verde, amarelo, azul, branco}
B = {prêto, vermelho, branco}
A ∪ B = {. . . . .}

2.º) A = {Santos, Campinas, Sorocaba}
B = {S. Paulo, Santos, Campinas, Jundiaí, Sorocaba}
A ∪ B = {. . . . .}

3.º) A = {homens}
B = {mulheres}
A ∪ B = {. . . . .}

2 — Determinar a reunião dos divisores de 6 e 10:

A = {1, 2, 3, 6} e B = {1, 2, 5, 10}
A ∪ B = {. . . . .}

3 — A reunião do conjunto dos números pares com o conjunto dos números ímpares, é o conjunto . . . .

P = {0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, . . .}
I = {1, 3, 5, 7, 9, 11, . . .}
P ∪ I = {. . . . .}

INTERSECÇÃO DE CONJUNTOS

Suponhamos que há, na escola em que funciona uma 4.ª série mista, por exemplo, um curso de admissão ao ginásio, noturno. Muitos alunos freqüentam o curso de admissão, inclusive os alunos A, B e C, que também freqüentam a 4.ª série mista. Temos, então, dois conjuntos de alunos:

Conjunto M = {Alunos da 4.ª série mista}
Conjunto N = {Alunos do curso noturno de admissão}

Formemos um nôvo conjunto I, cujos elementos são os alunos A, B e C que gozam da seguinte propriedade: ser aluno da 4.ª série mista e ser aluno do curso noturno de admissão. Êsses três elementos pertencem ao mesmo tempo ao conjunto M e ao conjunto N. O conjunto assim formado {A, B, C} é denominado *conjunto intersecção* e a operação realizada é indicada pelo símbolo: ∩ (lê-se "ínter"). Assim:

M ∩ N = {A, B, C}

Logo, entende-se que a intersecção de dois conjuntos A e B, quaisquer, é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A *e a* B.

Outro exemplo:

A = {verde, amarelo, azul, branco}
B = {prêto, vermelho, azul, branco}
A ∩ B = {azul, branco}

Um exemplo numérico:

A = {3, 6, 9, 12}
B = {0, 6, 12}
A ∩ B = {6, 12}

Mais um exemplo:

A = {a, e, i, o, u}
B = {x, y, z}
A ∩ B = { } ou ∅

O símbolo { } *ou* o símbolo ∅ representam o conjunto vazio. Quando não há elementos comuns, a intersecção é vazia.

EXERCÍCIOS 22

1 — Determine a intersecção dos seguintes conjuntos:

1.º) A = {3, 5, 8} e B = {5, 8, 10, 12}
A ∩ B = ...

2.º) A = {12, 24, 36} e B = {6, 12, 15, 18}
A ∩ B = ...

3.º) A = {3, 9, 15, 21, 27}
B = {2, 4, 8, 16, 32}
A ∩ B = ...

2 — Determine o conjunto intersecção de A e B, sabendo que:

A = {Terra, Lua, Marte}
B = {Sol, Terra, Mercúrio, Vênus}

3 — Complete:

A intersecção dos conjuntos P e I, respectivamente, dos números pares e ímpares é: ....

P = {0, 2, 4, 6, 8, 10, ...}
I = {1, 3, 5, 7, 9, 11, ...}
P ∩ I = ...

CONJUNTOS DE DIVISORES COMUNS

Sejam os conjuntos D_{12} (divisores de 12) e D_{15} (divisores de 15):

D_{12} = {1, 2, 3, 4, 6, 12}
D_{15} = {1, 3, 5, 15}
$D_{12} \cap D_{15}$ = {1, 3}

Logo, os elementos que pertencem a D_{12} e também a D_{15} são: 1 e 3.

Dizemos que 1 e 3 são *divisores comuns* de 12 e 15, isto é, são divisores tanto de 12 como de 15.

Vamos, agora, determinar as divisores comuns de 18 e 45:

D_{18} = {1, 2, 3, 6, 9, 18}
D_{45} = {1, 3, 5, 9, 15, 45}
$D_{18} \cap D_{45}$ = {1, 3, 9}

Os divisores comuns de 18 e 45 são: 1, 3, 9.

Mais um exemplo:

D_{20} = {1, 2, 4, 5, 10, 20}
D_{25} = {1, 5, 25}
$D_{20} \cap D_{25}$ = {1, 5}

Os divisores comuns de 20 e 25 são apenas dois: 1 e 5.

OPERAÇÃO MÁXIMO DIVISOR COMUM OU MAXIMAÇÃO

Vimos que:

$D_{12} \cap D_{15} = \{1, 3\}$

O conjunto formado pelos números que são, ao mesmo tempo, divisores de 12 e de 15, possui dois elementos: 1 e 3. Dos divisores comuns de dois ou mais números, interessa-nos, em particular, o maior dêles, que em nosso exemplo é o 3.

3 é o *maior divisor comum* de 12 e 15, é o maior número do conjunto intersecção.

Quando desejamos determinar o maior divisor comum de dois (ou mais) números, efetuamos a intersecção de seus divisores e escolhemos o maior dêles, como fizemos acima.

A operação realizada é denominada *maximação*. O resultado da operação maximação é denominado *maior divisor comum*. Indicamos a maximação assim:

$12 \; D \; 15 = 3$ ou $12 \wedge 15 = 3$

Lê-se: o maior divisor comum de 12 e 15 é 3.

Outro exemplo: Determinar o maior divisor comum de 6 e 14.

$D_6 = \{1, 2, 3, 6\}$

$D_{14} = \{1, 2, 7, 14\}$

$D_6 \cap D_{14} = \{1, 2,\}$

$\downarrow$

maior divisor comum

Logo, $6 \; D \; 14 = 2$ (ou $6 \wedge 14 = 2$)

Mais um exemplo: Determinar o maior divisor comum de 12, 18 e 24.

$D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

$D_{18} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

$D_{24} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

Interseccionamos dois dos conjuntos de divisores, os dois primeiros, por exemplo:

$D_{12} \cap D_{18} = \{1, 2, 3, 6\}$

A seguir, interseccionamos o terceiro conjunto de divisores, D_{24}, com o conjunto interseccção obtido dos dois primeiros:

$(D_{12} \cap D_{18}) \cap D_{24} = \{1, 2, 3, 6\} \cap \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

ou $(D_{12} \cap D_{18}) \cap D_{24} = \{1, 2, 3, 6\}$

$\downarrow$

maior divisor comum

Logo, $12 \; D \; 18 \; D \; 24 = 6$ (ou $12 \wedge 18 \wedge 24 = 6$)

PROPRIEDADES DA MAXIMAÇÃO

Comutativa: A maximação é comutativa.

Exemplo: 12 D 15 = 15 D 12 ou 12 $\wedge$ 15 = 15 $\wedge$ 12

Mandaremos experimentar, isto é, efetuar a maximação de 12 e 15 e, depois, de 15 e 12, provando que é indiferente a ordem dos têrmos.

Associativa: A maximação é associativa.

Exemplo: (12 D 15) D 18 = 12 D (15 D 18)
ou (12 $\wedge$ 15) $\wedge$ 18 = 12 $\wedge$ (15 $\wedge$ 18)

Poderemos mandar experimentar para que a criança se certifique de que, realmente, é possível associar em primeiro lugar os têrmos que quisermos. Os têrmos da operação de maximação são os conjuntos de divisores com os quais operamos.

EXERCÍCIOS 23

1 — Determine o conjunto dos divisores comuns dos seguintes pares de números:

a) 8 e 12
b) 14 e 20
c) 18 e 30
d) 24 e 36

2 — Determine o maior divisor comum dos seguintes pares de números:

a) 8 e 12
b) 14 e 20
c) 18 e 30
d) 24 e 36

3 — Efetue as seguintes operações:

a) 10 $\wedge$ 18	ou	10 *D* 18
b) 16 $\wedge$ 24	ou	16 *D* 24
c) 36 $\wedge$ 30	ou	36 *D* 30
d) 18 $\wedge$ 27	ou	18 *D* 27

4 — Calcule:

a) 7 $\wedge$ 11	ou	7 *D* 11
b) 13 $\wedge$ 5	ou	13 *D* 5
c) 11 $\wedge$ 17	ou	11 *D* 17
d) 3 $\wedge$ 11	ou	3 *D* 11

5 — Observe as maximações efetuadas por você no exercício 4 e conclua:

O maior divisor comum de dois números primos é ....

6 — Efetue:

a) 18 $\wedge$ 6	ou	18 *D* 6
b) 24 $\wedge$ 12	ou	24 *D* 12
c) 5 $\wedge$ 20	ou	5 *D* 20
d) 7 $\wedge$ 21	ou	7 *D* 21

7 — Observe as maximações efetuadas por você no exercício 6 e conclua:

Quando um número é *divisível* por outro, o maior divisor comum entre êles é ....

Quando um número é *divisível* por outro, o maior divisor comum entre êles é ....

8 — Calcule e tire suas conclusões:

a) $6 \wedge 6$	ou	$6\ D\ 6$
b) $1 \wedge 10$	ou	$1\ D\ 10$
c) $10 \wedge 1$	ou	$10\ D\ 1$
d) $5 \wedge 6$	ou	$5\ D\ 6$
e) $8 \wedge 9$	ou	$8\ D\ 9$
f) $9 \wedge 10$	ou	$9\ D\ 10$

CONJUNTOS DE MÚLTIPLOS COMUNS

Sejam os conjuntos M_2 (Múltiplos de 2) e M_3 (Múltiplos de 3):

$M_2 = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots\}$

$M_3 = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, \ldots\}$

$M_2 \cap M_3 = \{0, 6, 12, \ldots\}$

Portanto, os elementos que pertencem tanto ao conjunto M_2 como ao conjunto M_3 são: 0, 6, 12, ...

Sendo o conjunto M_2 um conjunto com um número ilimitado de elementos e o mesmo acontecendo com o conjunto M_3, não nos é possível determinar todos os elementos que são comuns a ambos os conjuntos. Determinamos, entretanto, a partir de zero, que é múltiplo de todos os números, quantos elementos quisermos. A seguir, colocamos reticências para indicar que existem muitos e muitos outros números que são também múltiplos de 2 e de 3, mas que não podemos determinar todos êles porque os conjuntos de múltiplos são *infinitos*.

Os múltiplos comuns de dois números podem ser determinados, portanto, pela intersecção dos respectivos conjuntos de múltiplos.

1.º) Determinar os múltiplos comuns de 6 e de 15.

$M_6 = \{0, 6, 12, 18, 24, 30, \ldots\}$

$M_{15} = \{0, 15, 30, 45, \ldots\}$

$M_6 \cap M_{15} = \{0, 30, \ldots\}$

Os múltiplos comuns de 6 e 15 são: 0, 30, etc.

2.º) Quais são os múltiplos comuns de 8 e 20 ?

$M_8 = \{0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, \ldots\}$

$M_{20} = \{0, 20, 40, 60, \ldots\}$

$M_8 \cap M_{20} = \{0, 40, \ldots\}$

Os múltiplos comuns de 8 e 20 são: 0, 40, etc.

OPERAÇÃO MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM OU MINIMAÇÃO

Podemos depreender, pelo que vimos atrás a respeito de múltiplos comuns de dois números, que é possível identificar o conjunto de múltiplos, mas não é possível enumerar um a um todos os seus elementos porque tais conjuntos possuem um número ilimitado de elementos. Assim sendo, nunca poderemos determinar o *maior* múltiplo comum de dois números. Podemos, isto sim, determinar o *menor múltiplo comum*, diferente de zero.

Sendo o zero múltiplo de todos os números, o menor múltiplo comum de dois ou mais números é zero. Mas, não há interêsse nenhum em aplicar êste fato em qualquer raciocínio matemático uma vez que:

$$0 \times \text{qualquer número} = 0 \iff 0 \div \text{qualquer número} = 0$$

Não há interêsse porque se o quociente de zero por qualquer número é zero, não temos elementos para determinar "êsse qualquer número" e ficamos na mesma.

Interessa-nos, porém, e muito, o *menor múltiplo comum diferente de zero*. Como vimos, pela intersecção dos conjuntos de múltiplos de 2 e 3, o conjunto de múltiplos comuns é: 0, 6, 12, ... Então, o menor múltiplo comum (diferente de zero) de 2 e 3 é 6.

Quando efetuamos a intersecção dos conjuntos de múltiplos de dois números com a finalidade de encontrar como resultado o menor múltiplo comum dêsses números, estamos efetuando uma operação denominada *minimação*.

O resultado da minimação é o *menor múltiplo comum*.

Não mais diremos "menor múltiplo comum *diferente de zero*" porque já está estabelecido que o múltiplo zero não nos interessa matemàticamente.

A minimação é indicada assim:

$$2 \text{ M } 3 = 6 \qquad \text{ou} \qquad 2 \vee 3 = 6$$

Lê-se: o menor múltiplo comum de 2 e 3 é 6.

Exemplo: Calcular o menor múltiplo comum de 3 e 5.

Temos:

$M_3 = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, \ldots\}$

$M_5 = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, \ldots\}$

$M_3 \cap M_5 = \{0, \underset{\substack{\downarrow \\ \text{menor múltiplo comum}}}{15}, \ldots\}$

Logo, $3 \text{ M } 5 = 15$ ou $3 \vee 5 = 15$

Outro exemplo: Calcular o menor múltiplo comum de 6 e 8.

Temos:

$M_6 = \{0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, \ldots\}$

$M_8 = \{0, 8, 16, 24, 32, 40, \ldots\}$

$M_3 \cap M_8 = \{0, \underset{\substack{\downarrow \\ \text{menor múltiplo comum}}}{24}, \ldots\}$

Logo, $6 \text{ M } 8 = 24$ ou $6 \vee 8 = 24$

Outro exemplo: Calcular o menor múltiplo comum de 6 e 24.

Temos:

$M_6 = \{0, 6, 12, 18, 24, 30, \ldots\}$

$M_{24} = \{0, 24, 48, 72, \ldots\}$

$M_6 \cap M_{24} = \{0, \underset{\substack{\downarrow \\ \text{menor múltiplo comum}}}{24}, \ldots\}$

Logo, $6 \text{ M } 24 = 24$ ou $6 \vee 24 = 24$

Mais um exemplo: Determinar o menor múltiplo comum de 2, 3 e 5.

Temos:

$M_2 = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, \ldots\}$

$M_3 = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, \ldots\}$

$M_5 = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, \ldots\}$

Interseccionamos em primeiro lugar os dois primeiros conjuntos:

$M_2 \cap M_3 = \{0, 6, 12, 18, 24, 30, \ldots\}$

A seguir, interseccionamos o terceiro conjunto com o conjunto intersecção dos dois primeiros. Assim:

$(M_2 \cap M_3) \cap M_5 = \{0, 6, 12, 18, 24, 30, \ldots\} \cap \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, \ldots\}$

ou

$$(M_2 \cap M_3) \cap M_5 = \{0, \underset{\substack{\downarrow \\ \text{menor múltiplo comum}}}{30}, \ldots\}$$

Logo, 2 M 3 M 5 = 30 ou $2 \vee 3 \vee 5 = 30$

PROPRIEDADES DA MINIMAÇÃO

Comutativa: A minimação é comutativa.

Exemplo: 2 M 3 = 3 M 2 ou $2 \vee 3 = 3 \vee 2$

Devemos mandar que os alunos experimentem efetuar a minimação de 2 e 3 e, depois, de 3 e 2, provando que é indiferente a ordem dos têrmos. Outros exemplos deverão ser dados para colocar em evidência a comutatividade da operação.

Associativa: A minimação é associativa. O último exemplo da página anterior servirá para mostrar essa propriedade, isto é, efetuando a intersecção dos conjuntos de múltiplos de 3 e 5 em primeiro lugar para depois interseccionar os múltiplos de 2 com o conjunto-intersecção, mostraremos que:

(2 M 3) M 5 = 2 M (3 M 5) ou $(2 \vee 3) \vee 5 = 2 \vee (3 \vee 5)$

EXERCÍCIOS 24

1 — Determine o conjunto dos múltiplos comuns dos seguintes pares de números:

a) 3 e 5
b) 2 e 6
c) 4 e 6
d) 5 e 10

2 — Determine o menor múltiplo comum dos seguintes pares de números:

a) 3 e 5
b) 2 e 6

c) 4 e 6
d) 5 e 10
e) 8 e 12

3 — Efetue as seguintes operações:

a) 6 ∨ 10 ou 6 M 10
b) 3 ∨ 9 ou 3 M 9
c) 4 ∨ 12 ou 4 M 12
d) 10 ∨ 15 ou 10 M 15

4 — Calcule:

a) 3 ∨ 5 ou 3 M 5
b) 3 ∨ 7 ou 3 M 7
c) 5 ∨ 11 ou 5 M 11
d) 11 ∨ 7 ou 11 M 7

5 — Observe as minimações efetuadas por você no exercício anterior e conclua:

O menor múltiplo comum de dois números primos é ....

6 — Efetue as operações indicadas:

a) 6 ∨ 3 ou 6 M 3
b) 8 ∨ 4 ou 8 M 4
c) 5 ∨ 10 ou 5 M 10
d) 6 ∨ 12 ou 6 M 12

7 — Observe as minimações efetuadas por você no exercício anterior e conclua:

Quando um número é *divisível* por outro, o menor múltiplo comum entre êles é ....

8 — Calcule e tire suas conclusões:

a) 8 ∨ 8 ou 8 M 8
b) 1 ∨ 6 ou 1 M 6

c) 6 ∨ 1 ou 6 M 1
d) 3 ∨ 4 ou 3 M 4
e) 4 ∨ 5 ou 4 M 5
f) 5 ∨ 6 ou 5 M 6

Observação: O cálculo do maior divisor comum e do menor múltiplo comum pode ser efetuado por um dispositivo prático muito fácil de ser ensinado. Entretanto, não sendo essas técnicas exigidas para alunos da escola primária, não as daremos neste volume. No volume seguinte, mais de conteúdo matemático para pais, professôres e outras pessoas interessadas, trataremos delas. O que mais interessa, por enquanto, é que o aluno conceitue as duas novas operações. Não haverá necessidade de exigir da criança o cálculo dessas operações, pelo emprêgo da intersecção, com números "grandes". O mais importante, na escola elementar, é a conceituação das operações. As técnicas operatórias virão depois.

NÚMEROS PRIMOS ENTRE SI

Se nós observarmos o conjunto de divisores comuns de certos números, notaremos alguma coisa de especial, de diferente, em relação aos conjuntos de divisores comuns de outros números.

Sejam os números 12 e 25. Determinemos o conjunto dos divisores comuns dêsses dois números.

Temos:

$$D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$
$$D_{25} = \{1, 5, 25\}$$
$$D_{12} \cap D_{25} = \{1\}$$

Logo, o conjunto dos divisores comuns de 12 e 25 é um conjunto unitário, tem apenas um elemento, que é o número 1. Entretanto, 12 tem vários divisores e 25 também.

Quando encontramos êsse resultado particular ao determinar o conjunto-intersecção dos divisores dos números dados, dizemos que êsses números são *primos entre si*. Portanto, 12 e 25 são primos entre si. E note-se que 12, isoladamente, não é primo, pois tem mais de dois divisores, e nem 25, pelo mesmo motivo.

Outro exemplo: Determinar o conjunto de divisores comuns de 10 e 21.

Temos:

$$D_{10} = \{1, 2, 5, 10\}$$
$$D_{21} = \{1, 3, 7, 21\}$$
$$D_{10} \cap D_{21} = \{1\}$$

Logo, 10 e 21 são números primos entre si.

Os números 10, 21 e 25 também são primos entre si. É facil verificar que:

$$(D_{10} \cap D_{21}) \cap D_{25} = 1$$

NÚMEROS RACIONAIS

REVISÃO DE CONCEITO

Os números racionais, vimos em nosso volume 3, são os naturais e os fracionários.

Como a criança já deve conhecer a operação *união* entre conjuntos, vamos mostrar-lhe o conjunto dos números racionais como o conjunto-reunião dos naturais e fracionários. Assim:

{n.os naturais} ∪ {n.os fracionários} = {n.os racionais}

Todo número natural pode ser representado por uma fração de denominador 1 $\left(3 = \frac{3}{1}\right)$. Isto possibilita a *reunião* dos dois conjuntos (naturais e fracionários) numa só espécie de números: *racionais*, e podemos representá-los pelo numeral *fração*.

Qualquer número natural pode ser representado por uma fração. Exemplos:

$$0 = \frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \frac{0}{3}, \ldots$$

$$1 = \frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \ldots$$

$$2 = \frac{2}{1}, \frac{4}{2}, \frac{6}{3}, \ldots$$

Como todo número natural pode ser representado por uma fração e como tôda fração indica um quociente $\left(\frac{3}{5} = 3 \div 5, \frac{6}{2} = 6 \div 2\right)$, o conjunto dos números racionais é indicado pela lêtra Q.

O conjunto Q é *infinito*.

EXERCÍCIOS 25

1 — Qual o menor dos números racionais?

2 — E o maior?

3 — Complete:

a) O conjunto N, dos números naturais, está contido no conjunto ...., dos números ....

b) O conjunto F, dos números fracionários, está contido no conjunto ...., dos números ....

c) O conjunto Q, dos números racionais, é o conjunto-reunião dos conjuntos .... e............ .

d) O conjunto Q contém os conjuntos .... e ....

e) O conjunto N é subconjunto de ....

f) O conjunto F é subconjunto de ....

FRAÇÕES EQUIVALENTES

Desde a 1.ª série a criança vem "sentindo", cada vez um pouco mais, a noção de equivalência entre frações. Já sabe, por exemplo, que $\frac{1}{2}$ equivale a $\frac{2}{4}$, isto é, que as duas frações representam o mesmo valor, embora seus têrmos sejam diferentes. Sabe que $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ são numerais (frações) diferentes para representar um mesmo número, a idéia de metade. (O número é uma idéia, seja êle natural ou fracionário.)

Vejamos, na reta numerada, a representação da equivalência de algumas frações cujos valôres são mais usados na vida prática.

Temos abaixo um segmento de reta correspondente a uma unidade (do ponto 0 ao ponto 1):

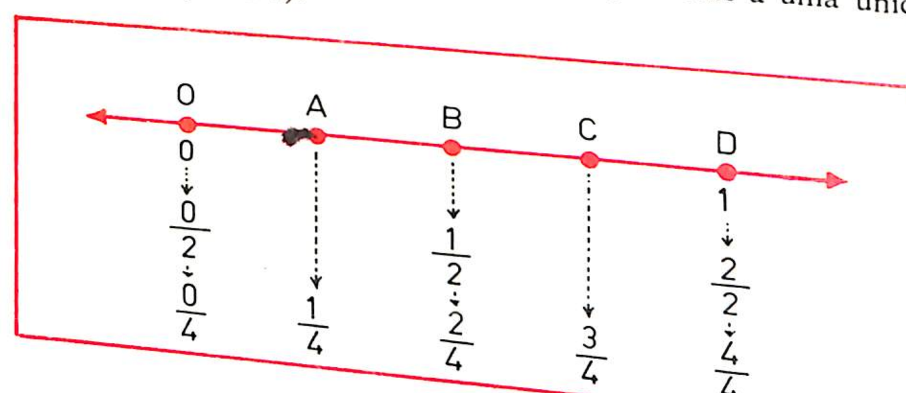

FIG. 21

Na figura acima, ao dividirmos o intervalo inicial $\overline{OD}$ em duas partes, obtivemos o quociente da divisão de $1 \div 2$ ou $\frac{1}{2}$. O ponto B corresponde à fração $\frac{1}{2}$. Dividindo cada metade do segmento O D ao meio, êle ficará dividido em quatro, isto é, cada parte de $\overline{OD}$ representará o quociente $1 \div 4$ ou $\frac{1}{4}$ de unidade.

Podemos notar que os numerais $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ correspondem ao ponto B, logo êles são equivalentes. O mesmo acontece com os numerais 1, $\frac{2}{2}$ e $\frac{4}{4}$ que correspondem aos mesmo ponto D.

CLASSES DE EQUIVALÊNCIA

Seja a reta numerada abaixo em que procuramos representar mais alguns números racionais:

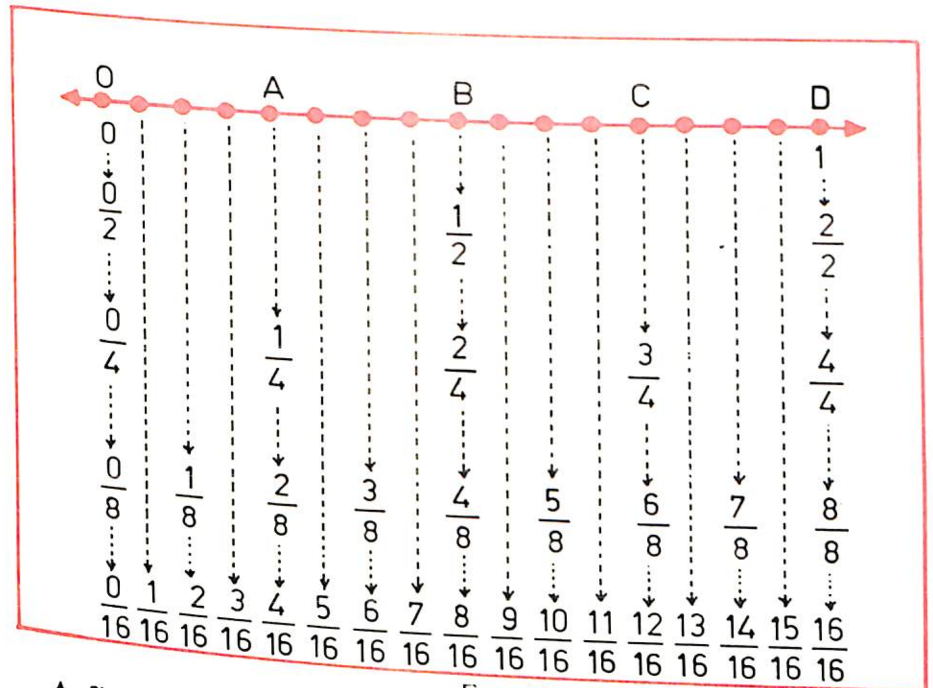

FIG. 22

A figura acima mostra perfeitamente como os vários numerais se equivalem, quando correspondem a um mesmo ponto, representando, por isso, um mesmo número racional. A simples observação da reta numerada acima faz compreender que há *uma infinidade de frações* que equivalem a $\frac{1}{2}$, por exemplo. A série infinita de frações que representam o mesmo número racional recebe o nome de *classe de equivalência*.

A classe de equivalência do número zero, por exemplo, é:

$\frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \frac{0}{3}, \frac{0}{4}, \frac{0}{5}, \frac{0}{6}, \ldots$

Na reta abaixo, representaremos mais algumas frações:

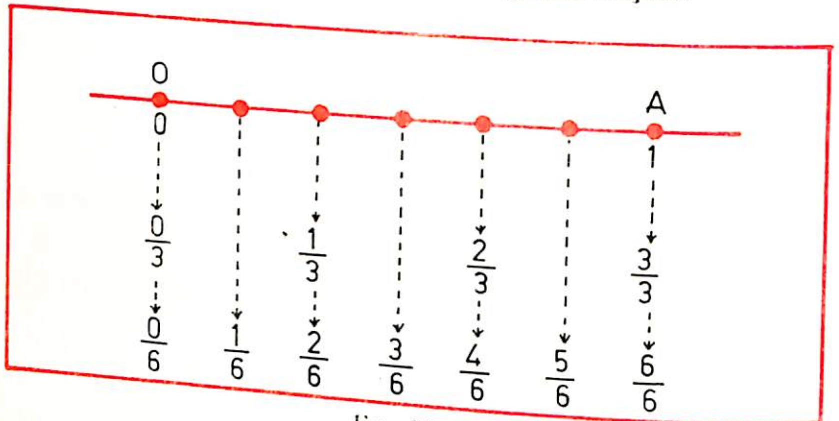

FIG. 23

Logo, $\frac{1}{3}$ equivale a $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{3}$ equivale a 1 e a $\frac{6}{6}$, etc. Podemos ainda notar que $\frac{3}{6}$ corresponde ao mesmo ponto que $\frac{1}{2}$, pois o ponto que lhe é correspondente é o que marca a metade do segmento OA. Assim, $\frac{1}{2}$ equivale a $\frac{2}{4}$, a $\frac{3}{6}$, a $\frac{4}{8}$, etc.

A classe de equivalência do número racional cujo numeral mais simples é $\frac{1}{2}$ é a seguinte: $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \frac{6}{12}, \ldots$

REPRESENTAÇÃO DAS CLASSES DE EQUIVALÊNCIA

Podemos ainda concluir, pelo simples exame das figuras que empregamos (retas numeradas) para evidenciar a equivalência das frações que, por exemplo $\frac{2}{4}$, equivale a $\frac{1}{2}$, mas não é igual a $\frac{1}{2}$. Equivale porque o ponto da reta que corresponde a $\frac{1}{2}$ é o mesmo ponto que corresponde a $\frac{2}{4}$. Logo, ambas as frações representam o mesmo número racional. Entretanto, $\frac{1}{2}$ é o quociente de $1 \div 2$ e $\frac{2}{4}$ é o quociente de $2 \div 4$, não sendo, portanto, iguais. São equivalentes, como dissemos. Há um símbolo matemático que significa "equivalente". Entretanto, na prática, é costume usar-se = para significar a equivalência entre frações. Assim, podemos escrever: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, lembrando-nos, porém, que essa igualdade é para facilitar os cálculos entre frações equivalentes. Não devemos sobrecarregar o aluno com muitos símbolos, principalmente se êle ainda está dando os primeiros passos na linguagem matemática. Usaremos, portanto, o sinal = para significar equivalência entre frações. Não nos esquecendo, porém, que $\frac{1}{2}$ só é igual a $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ só é igual a $\frac{2}{4}$

Para representar as classes de equivalências dos números racionais, uns autores costumam escrever o numeral mais simples do número cuja classe vão representar em um retângulo e, a seguir, entre chaves, as frações equivalentes. Assim:

$$\boxed{\frac{1}{2}} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \frac{6}{12}, \ldots \right\}$$

Outros autores: $\overline{\frac{1}{2}} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \frac{6}{12}, \ldots \right\}$

ou E $\dfrac{1}{2} = \left\{ \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{4}, \dfrac{3}{6}, \dfrac{4}{8}, \dfrac{5}{10}, \ldots \right\}$

Lê-se: Classe de equivalência da fração $\dfrac{1}{2}$ $\left(\text{ou do número racional } \dfrac{1}{2}\right)$

Outro exemplo:

$$\boxed{\dfrac{2}{3}} = \left\{ \dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{6}, \dfrac{6}{9}, \dfrac{8}{12}, \dfrac{10}{15}, \ldots \right\}$$

Lê-se: Classe de equivalência da fração $\dfrac{2}{3}$ $\left(\text{ou do número racional } \dfrac{2}{3}\right)$

Mais um exemplo:

$$\boxed{1} = \left\{ \dfrac{1}{1}, \dfrac{2}{2}, \dfrac{3}{3}, \dfrac{4}{4}, \dfrac{5}{5}, \dfrac{6}{6}, \ldots \right\}$$

Lê-se: Classe de equivalência do número natural 1 (ou do número racional 1)

CONSTRUÇÃO DAS CLASSES DE EQUIVALÊNCIA

A construção de uma classe de equivalência pelos alunos se tornará facílima se os levarmos a observar uma classe já construída pela linha numérica. Por exemplo, pelas linhas numéricas que apresentamos neste capítulo, pudemos "ver" que a classe de equivalência da fração $\dfrac{1}{2}$ é:

$$\boxed{\dfrac{1}{2}} = \left\{ \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{4}, \dfrac{3}{6}, \dfrac{4}{8}, \dfrac{5}{10}, \dfrac{6}{12}, \ldots \right\}$$

E se quisermos construir a classe de equivalência da fração $\dfrac{2}{5}$?

Teremos de desenhar linhas numéricas em que essa fração apareça representada por vários outros numerais? Podemos seguir êsse caminho, naturalmente. Mas, não haverá um caminho mais curto? Há. E deveremos levar nossos alunos a descobri-lo, pela observação de classes já construídas, como a da fração $\dfrac{1}{2}$, acima. Assim:

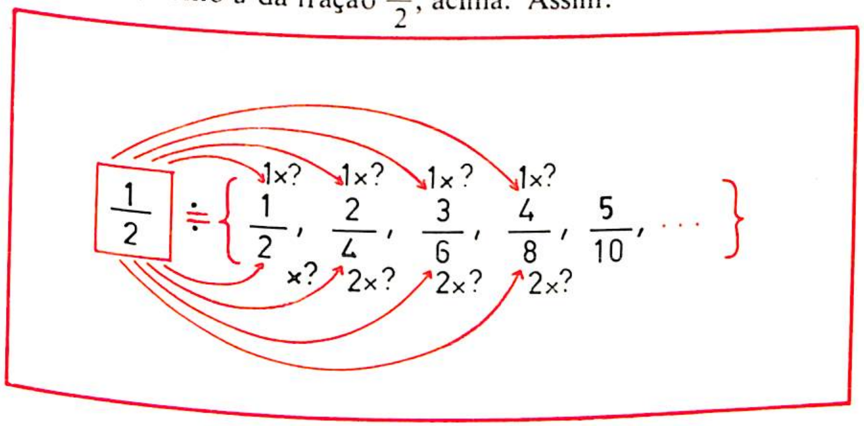

FIG. 24

Com habilidade, o professor levará a criança a descobrir que, multiplicando ambos os têrmos da fração cuja classe de equivalência vamos construir pela sucessão dos números naturais, com exceção do zero, encontramos a classe de equivalência da fração dada.

Exemplo: Construir a classe de equivalência da fração $\frac{2}{5}$.

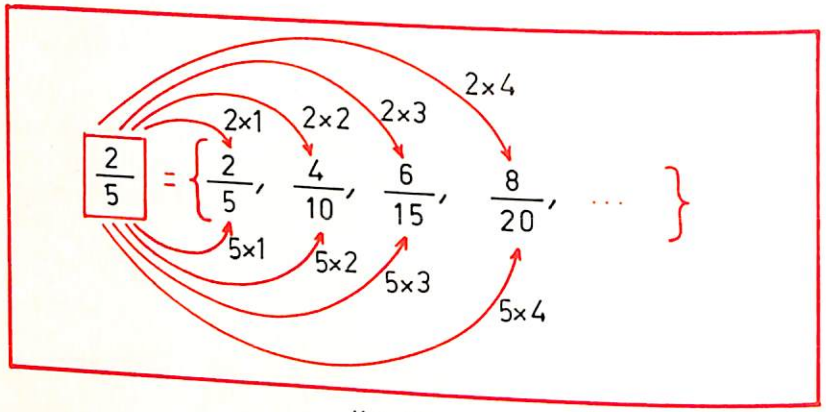

FIG. 25

RECONHECIMENTO DAS FRAÇÕES EQUIVALENTES

Dadas duas frações, $\frac{3}{4}$ e $\frac{9}{12}$, por exemplo, se quisermos saber se elas são ou não equivalentes, é só verificar se elas pertencem à mesma classe de equivalência. Para isso, construímos a classe de equivalência da fração cujos têrmos são mais simples; no caso, da fração $\frac{3}{4}$.

$$\boxed{\frac{3}{4}} = \left\{ \frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \boxed{\frac{9}{12}}, \ldots \right\}$$

Logo, $\frac{3}{4}$ e $\frac{9}{12}$ são equivalentes.

Serão equivalentes as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{5}{9}$?

$$\boxed{\frac{2}{3}} = \left\{ \frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \ldots \right\}$$

Não; $\frac{5}{9}$ não pertence à classe de equivalência da fração $\frac{2}{3}$, como é fácil verificar.

Uma outra forma à qual poderemos levar nossos alunos para verificar se as frações são ou não equivalentes, sem construir a classe de equivalência, é a seguinte:

Daremos alguns pares de frações equivalentes, cuja equivalência já foi "provada" pelas classes de equivalência ou pela reta numérica. Por exemplo:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}; \qquad \frac{3}{4} = \frac{9}{12}; \qquad \frac{2}{5} = \frac{8}{20}$$

Mandaremos observar, com relação às duas primeiras frações, os seguintes produtos:

$$1 \times 4 = 2 \times 2$$

Faremos o mesmo com as seguintes:

$$3 \times 12 = 4 \times 9$$
$$2 \times 20 = 5 \times 8$$

A criança descobrirá, quase que imediatamente, o que desejamos que ela descubra: o numerador da primeira × denominador da segunda produz o mesmo resultado que o denominador da primeira × numerador da segunda. Basta que ela perceba essa relação entre os têrmos das duas frações equivalentes e saiba aplicá-la, quando necessário. Não precisa saber enunciá-la. Assim:

1 — São equivalentes as frações $\frac{3}{6}$ e $\frac{5}{10}$?

Verificação: $\left.\begin{array}{l} 3 \times 10 = 30 \\ 6 \times 5 = 30 \end{array}\right\}$ logo, $3 \times 10 = 6 \times 5$

E podemos concluir que $\frac{3}{6}$ e $\frac{5}{10}$ são frações equivalentes.

2 — Descubra o valor de $\square$:

a) $\frac{2}{3} = \frac{\square}{12} \Longleftrightarrow 3 \times \square = 2 \times 12$

ou $3 \times \square = 24$

$\square = 24 \div 3$

$\square = 8$

b) $\frac{2}{5} = \frac{12}{\square} \Longleftrightarrow 2 \times \square = 5 \times 12$

ou $2 \times \square = 60$

$\square = 60 \div 2$

$\square = 30$

NÚMEROS RACIONAIS MAIORES QUE UM

As frações que temos visto até aqui são frações que representam números menores que 1, são frações que correspondem, na reta numerada, a pontos do intervalo $0 \vdash\!\!\dashv 1$, isto é, representam valôres maiores que zero e menores que 1. Dizemos que todo numeral dêsse tipo é uma *fração própria*, representa um número fracionário menor que 1.

Nos extremos do intervalo de 0 até 1 e fora dêle, cada ponto corresponde a uma *fração imprópria.*

Assim, o ponto O corresponde aos numerais $\frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \frac{0}{3}, \frac{0}{4}$, etc., frações impróprias que representam o número natural zero.

O ponto 1 corresponde às *frações impróprias* $\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \ldots$.

Qualquer ponto, na reta, que estiver fora do intervalo que vai de 0 a 1, à direita de 1, corresponderá a um número maior que 1 e as frações que os representam são também denominadas *frações impróprias.*

Seja a reta numerada abaixo:

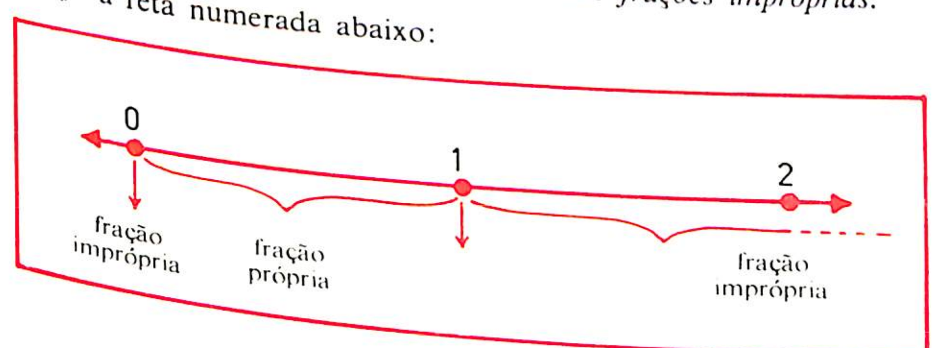

FIG. 26

Vejamos, agora, a representação na reta numerada de números racionais maiores que 1.

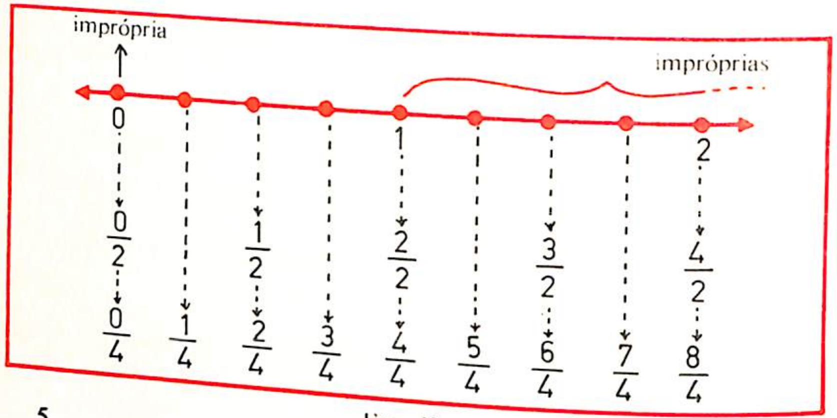

FIG. 27

$\frac{5}{4}$ é uma fração imprópria.

$\frac{6}{4}$ é uma fração imprópria.

As frações que correspondem aos números naturais são também denominadas *frações aparentes*.

Assim, as frações $\frac{0}{2}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{4}{2}$, $\frac{8}{2}$, etc., que são impróprias, são também aparentes.

EXERCÍCIOS 26

1 — Coloque V ou F dentro dos parênteses, conforme você ache que as sentenças são verdadeiras ou falsas:

a) $\frac{8}{4}$, $8 \div 4$ e 2 são três numerais diferentes do mesmo número racional. ( )

b) $\frac{1}{3}$ e $1 \div 3$ são dois numerais do mesmo número racional. ( )

c) $\frac{1}{5}$ e $1 \div 5$ não representam o mesmo número racional. ( )

d) $\frac{3}{3}$ e $\frac{4}{3}$ são dois numerais que representam números racionais diferentes. ( )

2 — Complete as sentenças que seguem, tornando-as verdadeiras:

a) O quociente da divisão de $1 \div 5$ pode também ser representado por . . . .

b) A fração $\frac{2}{3}$ representa um número . . . .

c) $4 = \frac{\dots}{1}$

d) $\dots = \frac{8}{1}$

e) $\dots = \frac{3}{1}$

f) $\frac{0}{3}$ é um numeral do número racional . . . .

3 — Represente na reta numerada os seguintes números racionais: 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, 1, $\frac{2}{2}$, $\frac{4}{4}$ e $\frac{5}{4}$.

4 — Observando a reta numerada que você desenhou acima, complete as sentenças que seguem:

a) O menor número racional é . . . .

b) $\frac{1}{2}$ e . . . são numerais do mesmo número racional.

c) $\frac{3}{4} > \dots$.

d) $\frac{2}{2}$ ... e ... são três numerais diferentes de um mesmo número racional.

5 — O desenho abaixo representa uma reta numerada com dois intervalos: 0 a 1 e 1 a 2. Cada uma das partes está dividida em três partes iguais pelos pontos A, B, C, D. Complete as sentenças que seguem:

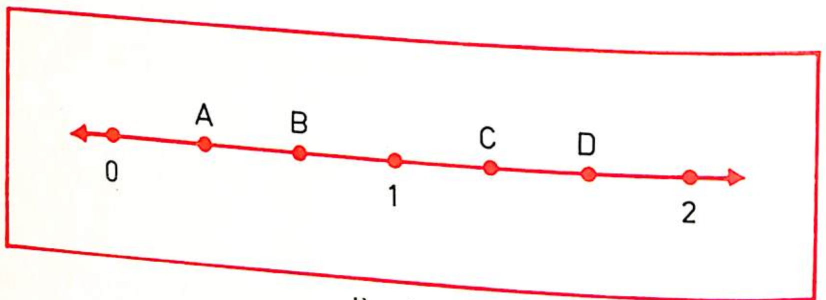

FIG. 28

a) A distância de 0 ao ponto A é $\frac{\cdots}{3}$ da distância de 0 a 1.

b) A distância de 0 ao ponto B é $\frac{\cdots}{3}$ da distância de 0 a 1.

c) O ponto A corresponde ao número racional ... e o ponto B ao número racional ... .

d) A distância entre 0 e 2 é de ... terços.

e) O ponto 2 corresponde ao número racional $\frac{\cdots}{3}$.

f) O ponto C corresponde ao número racional ... .

g) O número racional $\frac{5}{3}$ corresponde ao ponto ... .

6 — Complete as seguintes classes de equivalência:

a) $\boxed{\frac{1}{2}} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \ldots\ldots\ldots\ldots \right\}$

b) $\boxed{\frac{3}{4}} = \left\{ \frac{3}{4}, \ldots\ldots\ldots\ldots \right\}$

c) $\boxed{\frac{5}{3}} = \left\{ \ldots\ldots\ldots\ldots \right\}$

d) $\boxed{\frac{1}{1}} = \left\{ \ldots\ldots\ldots\ldots \right\}$

7 — Verifique se os seguintes pares de frações são ou não equivalentes:

a) $\frac{1}{2}$ e $\frac{4}{8}$

b) $\frac{3}{6}$ e $\frac{9}{10}$

c) $\frac{5}{4}$ e $\frac{20}{16}$

d) $\frac{1}{6}$ e $\frac{12}{6}$

e) $\frac{12}{6}$ e $\frac{2}{1}$

8 — Descubra o valor de $\square$:

a) $\frac{\square}{2} = \frac{6}{12}$

b) $\frac{3}{4} = \frac{\square}{16}$

c) $\frac{3}{\square} = \frac{9}{15}$

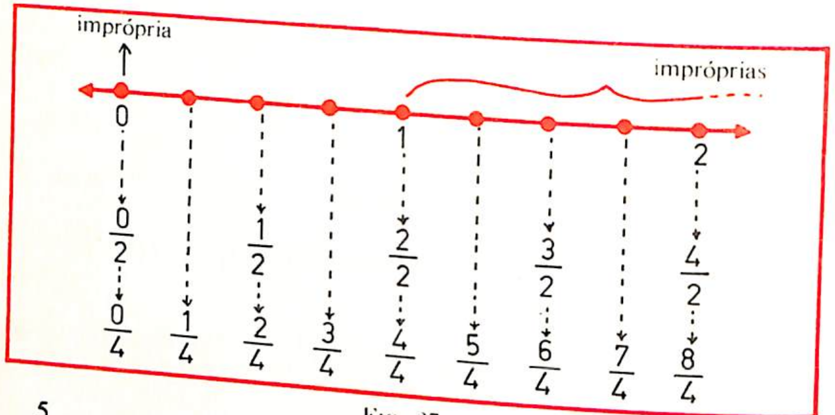

FIG. 27

$\frac{5}{4}$ é uma fração imprópria.

$\frac{6}{4}$ é uma fração imprópria.

As frações que correspondem aos números naturais são também denominadas *frações aparentes*.

Assim, as frações $\frac{0}{2}, \frac{4}{4}, \frac{4}{2}, \frac{8}{2}$, etc., que são impróprias, são também aparentes.

EXERCÍCIOS 26

1 — Coloque V ou F dentro dos parênteses, conforme você ache que as sentenças são verdadeiras ou falsas:

a) $\frac{8}{4}$, $8 \div 4$ e 2 são três numerais diferentes do mesmo número racional. ( )

b) $\frac{1}{3}$ e $1 \div 3$ são dois numerais do mesmo número racional. ( )

c) $\frac{1}{5}$ e $1 \div 5$ não representam o mesmo número racional. ( )

d) $\frac{3}{3}$ e $\frac{4}{3}$ são dois numerais que representam números racionais diferentes. ( )

2 — Complete as sentenças que seguem, tornando-as verdadeiras:

a) O quociente da divisão de $1 \div 5$ pode também ser representado por . . . .

b) A fração $\frac{2}{3}$ representa um número . . . .

c) $4 = \frac{\dots}{1}$

d) $\dots = \frac{8}{1}$

e) $\dots = \frac{3}{1}$

f) $\frac{0}{3}$ é um numeral do número racional . . . .

3 — Represente na reta numerada os seguintes números racionais:

$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1, \frac{2}{2}, \frac{4}{4}$ e $\frac{5}{4}$.

4 — Observando a reta numerada que você desenhou acima, complete as sentenças que seguem:

a) O menor número racional é . . . .

b) $\frac{1}{2}$ e . . . são numerais do mesmo número racional.

c) $\frac{3}{4} > \dots$.

d) $\frac{2}{2}$ ... e ... são três numerais diferentes de um mesmo número racional.

5 — O desenho abaixo representa uma reta numerada com dois intervalos: 0 a 1 e 1 a 2. Cada uma das partes está dividida em três partes iguais pelos pontos A, B, C, D. Complete as sentenças que seguem:

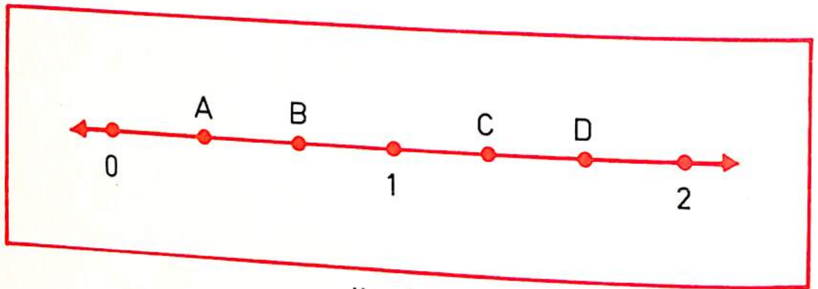

FIG. 28

a) A distância de 0 ao ponto A é $\frac{\dots}{3}$ da distância de 0 a 1.

b) A distância de 0 ao ponto B é $\frac{\dots}{3}$ da distância de 0 a 1.

c) O ponto A corresponde ao número racional ... e o ponto B ao número racional ... .

d) A distância entre 0 e 2 é de ... terços.

e) O ponto 2 corresponde ao número racional $\frac{\dots}{3}$.

f) O ponto C corresponde ao número racional ... .

g) O número racional $\frac{5}{3}$ corresponde ao ponto ... .

6 — Complete as seguintes classes de equivalência:

a) $\boxed{\frac{1}{2}} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \dots\dots\dots \right\}$

b) $\boxed{\frac{3}{4}} = \left\{ \frac{3}{4}, \dots\dots\dots \right\}$

c) $\boxed{\frac{5}{3}} = \left\{ \dots\dots\dots \right\}$

d) $\boxed{\frac{1}{1}} = \left\{ \dots\dots\dots \right\}$

7 — Verifique se os seguintes pares de frações são ou não equivalentes:

a) $\frac{1}{2}$ e $\frac{4}{8}$

b) $\frac{3}{6}$ e $\frac{9}{10}$

c) $\frac{5}{4}$ e $\frac{20}{16}$

d) $\frac{1}{6}$ e $\frac{12}{6}$

e) $\frac{12}{6}$ e $\frac{2}{1}$

8 — Descubra o valor de $\square$:

a) $\frac{\square}{2} = \frac{6}{12}$

b) $\frac{3}{4} = \frac{\square}{16}$

c) $\frac{3}{\square} = \frac{9}{15}$

d) $\frac{2}{5} = \frac{8}{\square}$

9 — Numa reta numerada, quais os pontos que correspondem às frações próprias?

10 — O ponto 0 corresponde, na reta numerada, ao número natural zero. Êsse ponto corresponde a uma fração própria, ou imprópria?

11 — Assinale, traçando um círculo em seu redor, cada uma das seguintes frações que são próprias:

$$\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{2}{2}, \frac{5}{4}, \frac{2}{5}, \frac{6}{3}, \frac{4}{3}$$

12 — Trace uma reta numerada e marque um ponto 0 e um ponto 1 A seguir divida o intervalo de 0 a 1 em quatro partes iguais e designe os pontos de divisão pelas lêtras A, B, C. Escreva as frações correspondentes aos pontos marcados e responda às perguntas que seguem:

a) Quais são as frações próprias?

b) Quais são as frações impróprias?

c) Uma fração própria corresponde a um número racional menor ou maior que 1?

FRAÇÕES IRREDUTÍVEIS

Se a criança já sabe construir a classe de equivalência de uma fração, é porque ela já percebeu que pode ir multiplicando ambos os têrmos da fração dada pela sucessão dos números naturais (com exceção do zero) e vai encontrando outras frações que representam o mesmo número racional que a primeira. Podemos ensiná-la, agora, a caminhar em sentido inverso: dada uma fração qualquer da classe de equivalência, descobrir a representante que possui os têrmos mais simples.

Exemplo: Qual a fração de têrmos mais simples que é equivalente a $\frac{24}{30}$?

A estrutura do problema é:

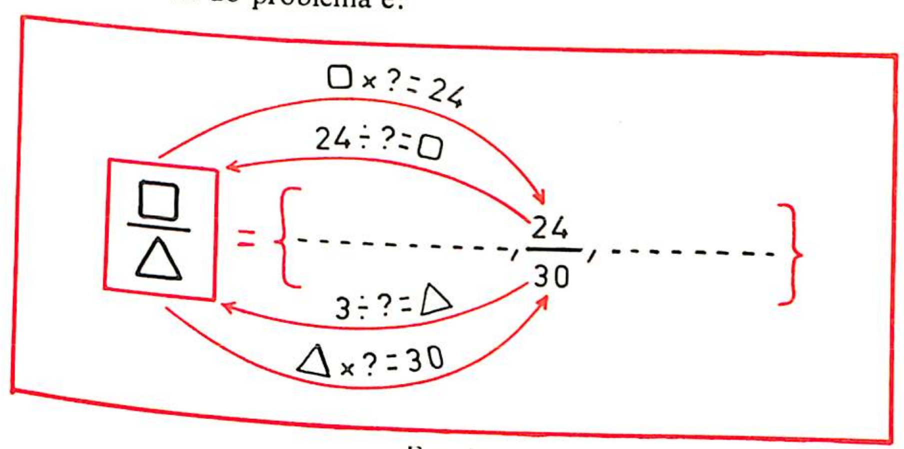

Fig. 29

Pela estrutura do problema a criança "verá" que a fração procurada, aquela cujos têrmos são o par de menores números naturais, (□, △), pode ser descoberta se efetuarmos o caminho inverso daquele que temos seguido para descobrir cada uma das representantes da classe de equivalência quando conhecemos a mais simples. 0 □ e o △ (têrmos da fração mais simples) foram multiplicados pela sucessão dos números naturais, exceto por zero, para que fôssem encontradas as frações equivalentes àquela cujos têrmos êles representam. Isto quer dizer, ao multiplicarmos êsses têrmos por um mesmo número, encontramos a fração $\frac{24}{30}$. Logo, *d*) $\frac{2}{5} = \frac{8}{\square}$

9 — Numa reta numerada, quais os pontos que correspondem às frações próprias?

10 — O ponto 0 corresponde, na reta numerada, ao número natural zero. Êsse ponto corresponde a uma fração própria, ou imprópria?

11 — Assinale, traçando um círculo em seu redor, cada uma das seguintes frações que são próprias:

$$\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{2}{2}, \frac{5}{4}, \frac{2}{5}, \frac{6}{3}, \frac{4}{3}$$

12 — Trace uma reta numerada e marque um ponto 0 e um ponto 1. A seguir divida o intervalo de 0 a 1 em quatro partes iguais e designe os pontos de divisão pelas lêtras A, B, C. Escreva as frações correspondentes aos pontos marcados e responda às perguntas que seguem:

a) Quais são as frações próprias?

b) Quais são as frações impróprias?

c) Uma fração própria corresponde a um número racional menor ou maior que 1?

FRAÇÕES IRREDUTÍVEIS

Se a criança já sabe construir a classe de equivalência de uma fração, é porque ela já percebeu que pode ir multiplicando ambos os têrmos da fração dada pela sucessão dos números naturais (com exceção do zero) e vai encontrando outras frações que representam o mesmo número racional que a primeira. Podemos ensiná-la, agora, a caminhar em sentido inverso: dada uma fração qualquer da classe de equivalência, descobrir a representante que possui os têrmos mais simples.

Exemplo: Qual a fração de têrmos mais simples que é equivalente a $\frac{24}{30}$?

A estrutura do problema é:

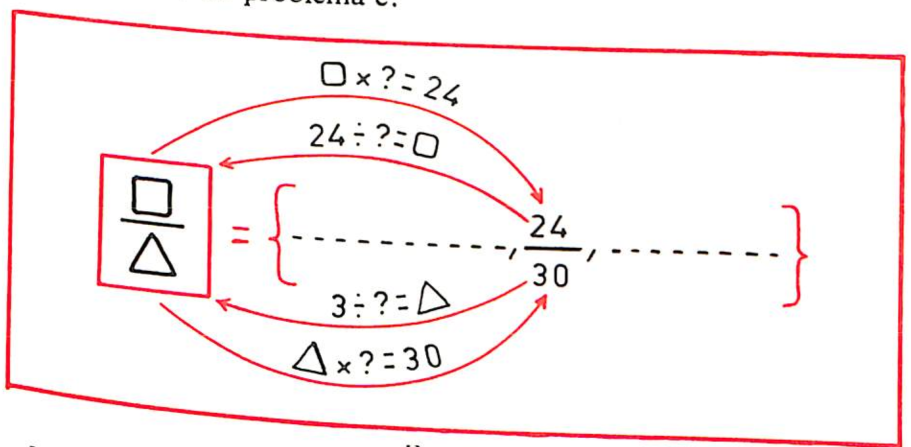

FIG. 29

Pela estrutura do problema a criança "verá" que a fração procurada, aquela cujos têrmos são o par de menores números naturais, (□, △), pode ser descoberta se efetuarmos o caminho inverso daquele que temos seguido para descobrir cada uma das representantes da classe de equivalência quando conhecemos a mais simples. O □ e o △ (têrmos da fração mais simples) foram multiplicados pela sucessão dos números naturais, exceto por zero, para que fôssem encontradas as frações equivalentes àquela cujos têrmos êles representam. Isto quer dizer, ao multiplicarmos êsses têrmos por um mesmo número, encontramos a fração $\frac{24}{30}$. Logo, se os dividirmos por êsse mesmo número, encontraremos o primeiro têrmo da classe de equivalência à qual pertence a fração $\frac{24}{30}$. Como descobrir o número pelo qual devemos dividir tanto o número 24 como o 30? É claro que êsse número deve ser fator ou divisor de ambos. Logo, deve ser um divisor comum de 24 e 30.

Vejamos os divisores comuns de 24 e 30, D_{24} e D_{30}:

$D_{24} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$
$D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$

Os divisores comuns são os que pertencem ao conjunto-intersecção dos dois conjuntos de divisores:

$D_{24} \cap D_{30} = \{1, 2, 3, 6\}$
↓
maior divisor comum.

Logo, $\square = 24 \div 6 = 4$
e $\triangle = 30 \div 6 = 5$

Assim, a fração equivalente a $\frac{24}{30}$ cujos têrmos são os mais simples é $\frac{4}{5}$ ($\square$ representava o numerador e $\triangle$ representava o denominador da fração procurada).

Pode-se também chegar ao mesmo resultado $\left(\frac{4}{5}\right)$ dividindo os têrmos da fração dada $\left(\frac{24}{30}\right)$ pela série de divisores comuns, isto é, dividindo ambos os têrmos por 2, menor divisor comum $\neq 1$, e, depois, por 3. Assim:

$\square = 24 \div 2 = 12$
$\triangle = 30 \div 2 = 15$

Mas, 12 e 15 ainda admitem um divisor comum maior que 1, que é o 3.

Então, $\square = 12 \div 3 = 4$
e $\triangle = 15 \div 3 = 5$

E a fração procurada é $\frac{4}{5}$.

Dizemos divisor comum $\neq 1$, ou maior que 1, porque dividir um número por 1 não muda o seu valor, isto é, o quociente é o próprio número, e não um número menor, conforme o nosso problema pede.

Encontrada a fração cujos têrmos são os mais simples, podemos mandar a criança construir a sua classe de equivalência para verificar a exatidão da resposta. Assim:

$$\boxed{\frac{4}{5}} = \left\{\frac{4}{5}, \frac{8}{10}, \frac{12}{15}, \frac{16}{20}, \boxed{\frac{24}{30}}, \ldots\right\}$$

Realmente, $\frac{4}{5}$ é equivalente a $\frac{24}{30}$ e os seus têrmos são o par de menores números naturais: (4, 5). Os outros pares são: (8, 10), (12, 15), (16, 20), etc.

Dizemos que a fração $\frac{4}{5}$ é *irredutível* porque não existe outra equivalente a ela com têrmos mais simples. Tôdas as outras de sua classe de equivalência são *redutíveis* a ela.

Pelo visto, uma fração se diz irredutível se os têrmos não admitem um divisor comum diferente de 1.

A fração $\frac{2}{5}$, por exemplo, é irredutível, pois os seus têrmos, 2 e 5, não admitem divisor comum diferente de 1.

A fração $\frac{5}{4}$ também é irredutível, pelo mesmo motivo.

SIMPLIFICAÇÃO DE FRAÇÃO

Simplificar uma fração consiste em substituí-la pela fração equivalente irredutível.

Por exemplo: A fração $\frac{24}{30}$ é equivalente à fração $\frac{4}{5}$, única fração irredutível de sua classe de equivalência, conforme vimos acima.

Simplificar a fração $\frac{24}{30}$ é substituí-la pela fração $\frac{4}{5}$.

EXERCÍCIOS 27

1 — Trace um círculo em volta das frações irredutíveis abaixo:

$\frac{3}{5}, \frac{4}{10}, \frac{2}{3}, \frac{9}{5}, \frac{5}{2}, \frac{6}{8}.$

2 — Determine a fração equivalente a $\frac{2}{6}$ cujos têrmos são os mais simples, completando:

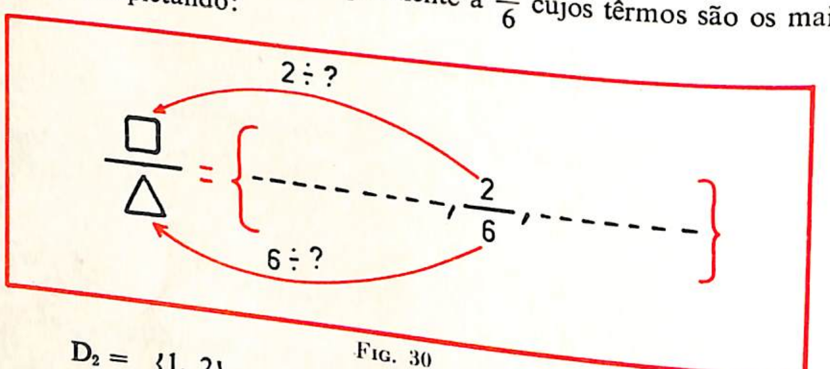

Fig. 30

$D_2 = \{1, 2\}$
$D_6 = \{1, 2, 3, 6\}$
$D_2 \cap D_6 = \{1, 2\}$

Logo, $\square = \ldots$
e $\triangle = \ldots$

Portanto, $\frac{2}{6} = —$

3 — Simplifique as seguintes frações:

a) $\frac{4}{8}$ *b)* $\frac{5}{10}$ *c)* $\frac{6}{18}$ *d)* $\frac{25}{15}$

e) $\frac{12}{16}$ *f)* $\frac{20}{10}$ *g)* $\frac{18}{12}$ *h)* $\frac{14}{21}$

FRAÇÃO IMPRÓPRIA E SUA FORMA NATURAL OU MISTA

As frações, já vimos, são numerais dos números racionais. Se a fração representa um número racional menor que a unidade e maior que zero, dizemos que a fração é própria. Caso contrário, ela é imprópria.

Logo, as *frações impróprias* podem representar o zero, a unidade, ou qualquer número maior que 1.

Podemos, portanto, concluir que:

1.º) As frações impróprias são outros numerais de números naturais (0, 1, 2, 3, ...), e neste caso são também denominadas *frações aparentes*.

2.º) As frações impróprias representam números que possuem uma *parte natural* e outra *parte fracionária* menor que 1.

Em ambos os casos podemos determinar a parte natural da fração imprópria.

Seja a fração $\frac{0}{4}$. Outro numeral desta fração é $0 \div 4$ cujo quociente é zero. Neste caso, a fração imprópria, também denominada aparente, representa um número natural, 0. O mesmo se dá com os seguintes exemplos:

$\frac{5}{5} = 5 \div 5 = 1$; $\frac{10}{2} = 10 \div 2 = 5$; $\frac{9}{3} = 9 \div 3 = 3$;

$\frac{4}{1} = 4 \div 1 = 4$, etc.

Tôdas estas frações são aparentes porque representam números naturais.

Seja, agora, a fração imprópria, $\frac{5}{3}$:

$\frac{5}{3} = 5 \div 3$

Mas, $5 \div 3$ não é numeral de nenhum número natural, a divisão não é exata. Vejamos, então, na reta numerada, a que ponto corresponde a

fração $\frac{5}{3}$. Sabemos que ela representa um número maior que 1 porque 1 é igual a $\frac{3}{3}$ e menor que 2 porque $2 = \frac{6}{3}$.

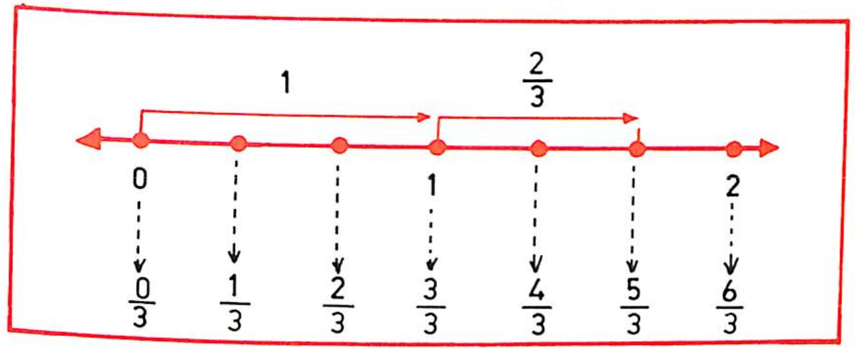

Fig. 31

Pela simples observação da reta numerada "vemos" que $\frac{5}{3} = 1$ unidade e $\frac{2}{3}$ ou $\frac{5}{3} = 1\,\frac{2}{3}$.

Então, a fração $\frac{5}{3}$ pode ser representada pela sua *forma mista* que é $1\frac{2}{3}$, forma esta que põe em evidência a *parte natural* da fração imprópria.

Como $\frac{5}{3} = 5 \div 3$, uma maneira muito prática de encontrar a sua forma mista é efetuar a divisão $5 \div 3$.

$$\begin{array}{l|l} 5 & 3 \\ \hline 2 & 1 \end{array} \text{ unidade e } \frac{2}{3} \text{ ou } 1\frac{2}{3}.$$

O resto da divisão é o número de partes que, no caso, são terços. Se tínhamos cinco terços e extraímos a parte natural, claro que o que sobrou é um certo número de terços. Se o resto é 2, é porque sobraram $\frac{2}{3}$.

Outro exemplo: $\frac{9}{4}$

$\frac{9}{4} = 9 \div 4$

$$\begin{array}{l|l} 9 & 4 \\ \hline 1 & 2 \text{ unidades e } \frac{1}{4} \text{ ou } 2\frac{1}{4} \end{array}$$

COMPARAÇÃO DE FRAÇÕES IMPRÓPRIAS

Na comparação de frações impróprias, vamos comparar números racionais maiores que 1, pois as únicas frações impróprias que não são maiores que 1 são as que representam o zero e o próprio um, não havendo, portanto, nenhuma dificuldade em compará-las com as outras frações impróprias (maiores que 1). Elas são sempre menores (representam números racionais menores) que qualquer outra fração imprópria.

Vejamos, então, as maiores que um. Sejam as frações $\frac{4}{3}$ e $\frac{5}{4}$. Como ambas são irredutíveis, sabemos que não são equivalentes. Logo, $\frac{4}{3} \neq \frac{5}{4}$.

Se são diferentes, uma delas representa um valor maior que a outra. Qual é a maior? Qual é a menor?

Vamos extrair a parte natural de ambas para ver se uma delas tem essa parte maior que a outra. Se a parte natural de uma delas fôr maior que a da outra, já saberemos qual a maior fração: aquela que tem a maior parte natural, é claro, porque a parte fracionária será menor que a unidade. Vejamos:

$$\frac{4}{3} = 4 \div 3 = 1\frac{1}{3}$$

$$\frac{5}{4} = 5 \div 4 = 1\frac{1}{4}$$

A parte natural das duas frações é o número natural *um*. Logo, não sabemos ainda qual é a maior fração. Comparemos, então, a parte fracionária de cada uma delas: $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ Esta, já sabemos comparar: $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$. Entretanto, é bom recordar. Para isso, vamos representar na reta numerada as duas frações:

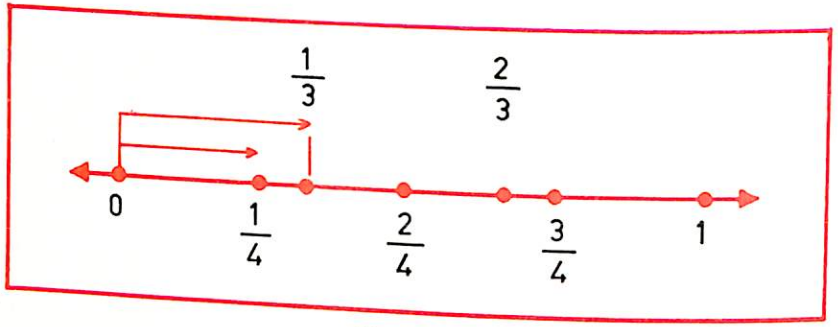

FIG. 32

Logo,

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{3} \text{ ou } \frac{1}{3} > \frac{1}{4}$$

Assim, $\frac{4}{3} > \frac{5}{4}$, pois $\frac{4}{3}$ representa uma unidade mais $\frac{1}{3}$ e $\frac{5}{4}$ representa uma unidade mais $\frac{1}{4}$. A parte que ultrapassa a unidade em $\frac{4}{3}$ é maior que a parte que ultrapassa a unidade em $\frac{4}{5}$.

Outro exemplo: Comparar as frações impróprias $\frac{9}{2}$ e $\frac{8}{3}$. Por serem ambas as frações dadas irredutíveis, sabemos que são diferentes. Logo, $\frac{9}{2} \neq \frac{8}{3}$.

Se fôssem redutíveis, era só têrmos o trabalho de procurarmos as equivalentes irredutíveis para sabermos se eram ou não equivalentes.

$$\frac{9}{2} = 9 \div 2 = 4\,\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \frac{8}{3} = 8 \div 3 = 2\,\frac{2}{3}$$

A parte natural da primeira é um número maior que a da segunda ($4 > 2$). Logo, não há necessidade de compararmos a parte fracionária de ambas. Podemos, desde logo, afirmar: $\frac{9}{2} > \frac{8}{3}$ porque $4\,\frac{1}{2} > 2\,\frac{2}{3}$.

EXERCÍCIOS 28

1 — Qual a maior fração imprópria: $\frac{5}{4}$ ou $\frac{7}{3}$?

2 — Qual a menor fração imprópria: $\frac{8}{4}$ ou $\frac{6}{5}$?

3 — Compare: $\frac{12}{8}$ e $\frac{10}{4}$.

4 — Coloque em ordem crescente: $\frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}$.

5 — Coloque em ordem decrescente: $\frac{7}{4}, \frac{6}{3}, \frac{8}{5}$.

OPERAÇÕES COM NÚMEROS RACIONAIS

ADIÇÃO

Em nosso volume 3 tivemos oportunidade de tratar da adição de dois números racionais quando:

a) As parcelas são números racionais representados por frações de mesmo denominador (frações homogêneas).

Exemplos: $\frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$

$$\frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$$

b) Uma parcela é um número natural e outra é uma fração própria.

Exemplos: $2 + \frac{3}{4} = 2\,\frac{3}{4}$

$$\frac{2}{5} + 1 = 1\,\frac{2}{5}$$

Vamos, agora, tratar de um terceiro caso:

c) As parcelas são números naturais representados por frações de denominadores diferentes (frações heterogêneas).

Seja, por exemplo, a seguinte adição: $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$.

Já sabemos que só podemos adicionar coisas da mesma espécie. Terços e quartos não são coisas da mesma espécie: terços resultam da divisão da unidade em três partes iguais e quartos, da divisão da unidade em quatro partes iguais. Se são frações de espécies diferentes, não podemos adicioná-las. Podemos, porém, procurar frações equivalentes a cada uma das parcelas e que tenham o mesmo denominador. Estas, tendo o mesmo denominador, serão da mesma espécie e poderão ser adicionadas.

Voltando ao nosso exemplo: $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$.

Para reduzi-las ao mesmo denominador, vamos construir as classes de equivalência das frações dadas:

$$\boxed{\frac{2}{3}} = \left\{ \frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \boxed{\frac{8}{12}}, \frac{10}{15}, \ldots \right\}$$

$$\boxed{\frac{3}{4}} = \left\{ \frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \boxed{\frac{9}{12}}, \frac{12}{16}, \ldots \right\}$$

Podemos observar, assinaladas, duas frações com o mesmo denominador e equivalentes, respectivamente, a cada uma delas.

Logo, $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$

e $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$

Então, $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{8}{12} + \frac{9}{12} = \frac{17}{12}$.

$\frac{17}{12}$ é uma fração imprópria e podemos transformá-la em sua forma mista:

$\frac{17}{12} = 17 \div 12 = 1\ \frac{5}{12}$

Logo, $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = 1\ \frac{5}{12}$

Outro exemplo: $\frac{5}{4} + \frac{3}{6}$.

$$\boxed{\frac{5}{4}} = \left\{ \frac{5}{4}, \frac{10}{8}, \boxed{\frac{15}{12}}, \frac{20}{16}, \frac{25}{20}, \ldots \right\}$$

$$\boxed{\frac{3}{6}} = \left\{ \frac{3}{6}, \boxed{\frac{6}{12}}, \frac{9}{18}, \frac{12}{24}, \frac{15}{30}, \ldots \right\}$$

$\frac{5}{4} + \frac{3}{6} = \frac{15}{12} + \frac{6}{12} = \frac{21}{12}$

$\frac{21}{12} = 21 \div 12 = 1\ \frac{9}{12}$.

Como a parte fracionária do resultado $\left(\frac{9}{12}\right)$ não é irredutível, isto é, como seus têrmos admitem o divisor comum 3, podemos simplificá-la:

$1\ \frac{9}{12} = 1\ \frac{9 \div 3}{12 \div 3} = 1\ \frac{3}{4}$

Logo, $\frac{5}{4} + \frac{3}{6} = 1\ \frac{3}{4}$

EXERCÍCIOS 29

1 — Calcule: $\frac{1}{3} + \frac{1}{2}$

2 — Calcule: $\frac{3}{5} + \frac{2}{3}$

3 — Efetue as seguintes adições:

a) $\frac{1}{5} + \frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{5}$

c) $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}$

d) $\frac{3}{4} + \frac{2}{5}$

e) $\frac{2}{7} + \frac{3}{5}$

f) $\frac{4}{5} + \frac{7}{3}$

4 — Ao par de racionais $\left(\frac{2}{3} \text{ e } \frac{3}{3}\right)$ podemos associar o número racional $\frac{5}{3}$ que é a sua ....

5 — A adição de números racionais associa a um par de racionais um terceiro número racional que é a sua ....

6 — Na adição $\frac{3}{6} + \frac{5}{4} = \frac{7}{4}$, $\frac{7}{4}$ é a soma e $\frac{3}{6}$ e $\frac{5}{4}$ são as ....

PROPRIEDADES COMUTATIVA E ASSOCIATIVA

A adição de números racionais tem as mesmas propriedades que a adição de números naturais.

Verificaremos apenas as propriedades comutativa e associativa. As do elemento neutro (zero) e fechamento, se assim desejarem os senhores professôres, poderão ser verificadas pelos próprios alunos que já as conhecem com relação à adição de números naturais.

Propriedade Comutativa:

Exemplos:

a) $\frac{2}{5} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{5}$

b) $2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} + 2$

c) $\frac{3}{4} + \frac{5}{3} = \frac{5}{3} + \frac{3}{4}$

É fácil de provar. Basta efetuar as adições indicadas em cada lado da igualdade e verificar que os resultados, em cada igualdade, são iguais. Isto prova que a adição de números racionais é comutativa.

Propriedade Associativa:

Exemplos:

a) $\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5}\right) + \frac{3}{5} = \frac{2}{5} + \left(\frac{1}{5} + \frac{3}{5}\right)$

$$\frac{3}{5} + \frac{3}{5} = \frac{2}{5} + \frac{4}{5}$$

$$\frac{6}{5} = \frac{6}{5} \quad \text{(verdadeira)}$$

b) $\frac{3}{2} + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2} + \frac{2}{3}\right) + \frac{1}{2}$

$\frac{9}{6} + \left(\frac{4}{6} + \frac{3}{6}\right) = \left(\frac{9}{6} + \frac{4}{6}\right) + \frac{3}{6}$ (reduzindo ao mesmo denominador)

$$\frac{9}{6} + \frac{7}{6} = \frac{13}{6} + \frac{3}{6}$$

$$\frac{16}{6} = \frac{16}{6}$$ (verdadeira)

Pelos dois exemplos acima, podemos dizer que a adição de números racionais é associativa.

SUBTRAÇÃO

A subtração de números racionais é a operação inversa da adição de números racionais. Assim, dado um par de números racionais, a subtração é a operação que associa a êsse par a sua *diferença*. A primeira fração é denominada *minuendo* e a segunda, *subtraendo*.

Podemos resumir seu estudo nos três casos estudados em relação à adição de racionais e a operação que desfaz cada um dêles. Assim:

1.º) As frações têm o mesmo denominador.

Se $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$, então, $\frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

ou, empregando sòmente símbolos:

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{3}{5} - \frac{1}{5} + \frac{2}{5}$$

Logo, dado um par de números racionais, ambos com o mesmo denominador, para encontrar a sua diferença, basta subtrair o numerador da segunda fração do numerador da primeira.

Exemplos:

$\frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$ porque $\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

$\frac{6}{10} - \frac{3}{10} = \frac{3}{10}$ porque $\frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{6}{10}$

$\frac{5}{3} - \frac{2}{3} = \frac{3}{3}$ porque $\frac{3}{3} + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$

Não é preciso que o professor dê a regra para encontrar a diferença, o próprio aluno a descobrirá se dermos algumas adições de frações com o mesmo denominador para que êle as desfaça, relacionando as duas operações, como fizemos acima.

2.º) O primeiro têrmo é um número natural.

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} \Longleftrightarrow \frac{3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

ou $$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1 \Longleftrightarrow 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Logo, dado um par de números racionais, o primeiro dêles sendo um número natural, transformamo-lo numa fração de denominador igual ao denominador da segunda fração. Assim:

a) $1 - \frac{1}{3} = \frac{3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

b) $2 - \frac{3}{5} = \frac{10}{5} - \frac{3}{5} = \frac{7}{5}$ ou $1\ \frac{2}{5}$

c) $3 - \frac{7}{4} = \frac{12}{4} - \frac{7}{4} = \frac{5}{4}$ ou $1\ \frac{1}{4}$

Para encontrar a fração imprópria de denominador desejado e equivalente ao número natural que é o minuendo (e podia ser o subtraendo), basta fazer a criança pensar assim: em $1 - \frac{1}{3}$, 1 é o mesmo que $\frac{3}{3}$.

No segundo exemplo dado acima, $2 - \frac{3}{5}$, 1 é o mesmo que $\frac{5}{5}$; logo, 2 é o mesmo que $\frac{5}{5} + \frac{5}{5}$ ou $\frac{10}{5}$.

No terceiro exemplo, $3 - \frac{7}{4}$, 1 é o mesmo que $\frac{4}{4}$ e 3 é o mesmo que $\frac{4}{4} + \frac{4}{4} + \frac{4}{4}$ ou $\frac{12}{4}$.

3.º) As frações têm denominadores diferentes.

É só considerar frações equivalentes às dadas e que tenham o mesmo denominador. Assim:

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{5}$$

$$\boxed{\frac{3}{4}} = \left\{ \frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \frac{9}{12}, \frac{12}{16}, \boxed{\frac{15}{20}}, \ldots \right\}$$

$$\boxed{\frac{2}{5}} = \left\{ \frac{2}{5}, \frac{4}{10}, \frac{6}{15}, \boxed{\frac{8}{20}}, \frac{10}{25}, \ldots \right\}$$

As frações equivalentes às duas dadas e com o mesmo denominador são, respectivamente, $\frac{15}{20}$ e $\frac{8}{20}$.

Logo,

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \frac{15}{20} - \frac{8}{20} = \frac{7}{20}$$

EXERCÍCIOS 30

1 — Complete as sentenças que seguem, tornando-as verdadeiras:

a) Ao par de números racionais $\frac{4}{5}$ e $\frac{3}{5}$, podemos associar o número racional ... que é a sua diferença.

b) Ao par de números racionais $\frac{6}{7}$ e $\frac{2}{7}$, podemos associar o número $\frac{4}{7}$ que é a sua ....

c) Considerado o par de números racionais $\frac{4}{3}$ e $\frac{3}{3}$, e a sua diferença, $\frac{1}{3}$, podemos dizer que $\frac{4}{3}$ é o .... e $\frac{3}{3}$ é o ....

d) Em $\frac{8}{5} - \frac{3}{5} = \frac{5}{5}$, $\frac{8}{5}$ é o minuendo, $\frac{3}{5}$ é o .... e $\frac{5}{5}$ é a ....

2 — Calcule as seguintes diferenças:

a) $\frac{3}{4} - \frac{1}{4}$

b) $\frac{7}{5} - \frac{3}{5}$

c) $\frac{8}{6} - \frac{6}{6}$

d) $\frac{5}{8} - \frac{2}{8}$

3 — Efetue as seguintes subtrações:

a) $2 - \frac{3}{4}$

b) $1 - \frac{3}{8}$

c) $2 - \frac{4}{5}$

d) $2 - \frac{5}{10}$

4 — Calcule:

a) $\frac{5}{4} - \frac{2}{3}$

b) $\frac{3}{4} - \frac{3}{8}$

c) $\frac{6}{5} - \frac{2}{4}$

d) $\frac{9}{2} - \frac{6}{5}$

5 — Calcule:

a) $\frac{9}{4} - 1$

b) $\frac{8}{3} - 0$

c) $1 - \frac{3}{4}$

d) $\frac{3}{5} - 0$

POSSIBILIDADE DA SUBTRAÇÃO

A subtração de números racionais só é possível quando o minuendo é maior ou igual ao subtraendo. Quando o minuendo é menor que o subtraendo, a subtração de racionais é impossível. Êste caso se tornará possível quando o conjunto numérico conhecido da classe se estender aos racionais negativos.

Por enquanto, portanto, é impossível a subtração $\frac{2}{5} - \frac{3}{5}$, por exemplo.

ADIÇÕES E SUBTRAÇÕES COMBINADAS

Alguns exemplos:

$$1 - \left(\frac{2}{3} + \frac{5}{3}\right) - \frac{1}{3}$$

$$\frac{7}{3} - \frac{1}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

$$2 - \frac{5}{4} + \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{4}\right)$$

$$\frac{5}{4} + \frac{1}{4} = \frac{6}{4} = 1\frac{2}{4} \text{ ou } 1\frac{1}{2}$$

$$3 - \left(\frac{3}{4} + \frac{4}{4}\right) - \frac{2}{4}$$

$$\frac{7}{4} - \frac{2}{4} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$$

$$4 - \frac{3}{4} + \left(\frac{4}{4} - \frac{2}{4}\right)$$

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$$

5) $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} - \frac{3}{3} = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) - \frac{3}{3} = \frac{3}{3} - \frac{3}{3} = \frac{0}{3} = 0$

6) $\left(\frac{7}{4} - \frac{1}{4}\right) - \frac{3}{4}$

$$\frac{6}{4} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

7) $\left(\frac{8}{5} - \frac{3}{5}\right) + \frac{2}{5}$

$$\frac{5}{5} + \frac{2}{5} = \frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}$$

8) $\left(\frac{3}{4} + \frac{2}{5}\right) - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{5}\right)$

$$\boxed{\frac{3}{4}} = \left\{\frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \frac{9}{12}, \frac{12}{16}, \boxed{\frac{15}{20}}, \ldots\right\}$$

$$\boxed{\frac{2}{5}} = \left\{\frac{2}{5}, \frac{4}{10}, \frac{6}{15}, \boxed{\frac{8}{20}}, \frac{10}{25}, \ldots\right\}$$

$$\boxed{\frac{1}{5}} = \left\{\frac{1}{5}, \frac{2}{10}, \frac{3}{15}, \boxed{\frac{4}{20}}, \frac{5}{25}, \ldots\right\}$$

Logo, $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$, $\frac{2}{5} = \frac{8}{20}$ e $\frac{1}{5} = \frac{4}{20}$

Então,

$$\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{5}\right)-\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{5}\right) \text{ pode ser escrito assim:}$$

$$\left(\frac{15}{20}+\frac{8}{20}\right)-\left(\frac{15}{20}-\frac{4}{20}\right)$$

$$\frac{23}{20}-\frac{11}{20}=\frac{12}{20}=\frac{12\div 4}{20\div 4}=\frac{3}{5}$$

9) $\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{4}\right)-\frac{2}{5}=\left(\frac{4}{20}+\frac{15}{20}\right)-\frac{8}{20}=\frac{19}{20}-\frac{8}{20}=\frac{11}{20}$

10) Da adição $\frac{1}{5}+\frac{3}{4}=\frac{19}{20}$, resultam duas subtrações:

$\frac{19}{20}-\frac{3}{4}=\frac{1}{5}$ e $\frac{19}{20}-\frac{1}{5}=\frac{3}{4}$

Experimente fazer as duas subtrações acima para verificar se realmente são êsses os resultados.

11 — Efetue a adição: $\frac{4}{7}+\frac{2}{5}$ e, a seguir, as duas subtrações resultantes.

12 — Determine o numeral mais simples da seguinte expressão numérica:

$$2-\left\{\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{6}{5}-\frac{3}{4}\right)\right\}$$

$$2-\left\{\left(\frac{8}{20}+\frac{15}{20}\right)-\left(\frac{24}{20}-\frac{15}{20}\right)\right\}$$

$$2-\left\{\frac{23}{20}-\frac{9}{20}\right\}$$

$$2-\frac{14}{20}=2-\frac{7}{10} \quad \text{ou} \quad \frac{20}{10}-\frac{7}{10}=\frac{13}{10}=1\,\frac{3}{10}$$

MULTIPLICAÇÃO DE RACIONAIS

Exploração do conceito: Seja a seguinte multiplicação: $3 \times \frac{2}{5}$.

Segundo o conceito que temos de multiplicação de dois números naturais, (que também são números racionais) a operação multiplicação é uma adição de parcelas iguais em que o multiplicador indica quantas vêzes deve ser repetido o multiplicando. Assim:

$3 \times 4 = 4+4+4$ ou $4+4+4=3\times 4$ (pela propr. simétrica da igualdade)

Voltando ao nosso exemplo acima:

$$3\times\frac{2}{5}=\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}$$

logo, $3\times\frac{2}{5}=\frac{6}{5}$ (efetuando a adição de parcelas iguais).

Outro exemplo: $2\times\frac{4}{5}$

$$2\times\frac{4}{5}=\frac{4}{5}+\frac{4}{5}$$

logo,

$$2\times\frac{4}{5}=\frac{8}{5}$$

Com mais alguns exemplos como êstes, a criança concluirá a regra prática para multiplicar um número natural por uma fração: multiplica-se o numerador da fração pelo número natural. O denominador continua sendo o mesmo.

Como a multiplicação é comutativa, $2\times\frac{4}{5}=\frac{4}{5}\times 2$ e a regra prática é a mesma, qualquer que seja o fator *natural*.

Mais um exemplo:

$$\frac{3}{4} \times 3 = \frac{9}{4} \text{ ou } 2\frac{1}{4}$$

Podemos, também, encontrar o resultado da multiplicação e descobrir a regra para multiplicar números racionais calculando áreas de retângulos em que as medidas são números racionais.

Por exemplo: $2 \times \frac{2}{5}$

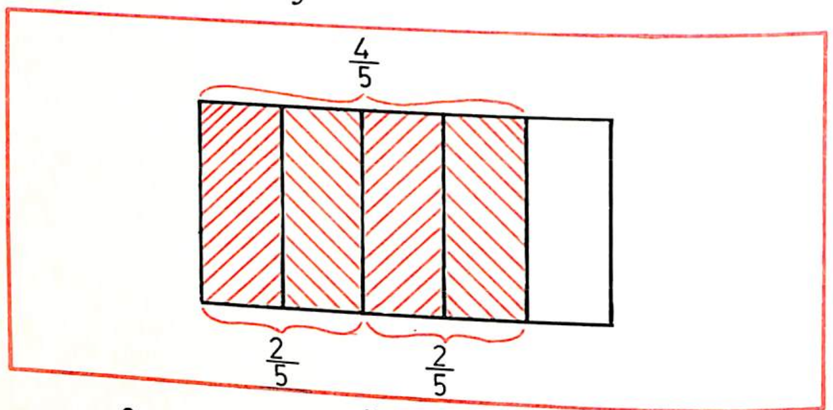

FIG. 33

$$2 \times \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$$

Vejamos, agora, o caso em que ambos os fatôres são números racionais. Por exemplo: $\frac{2}{3} \times \frac{2}{5}$

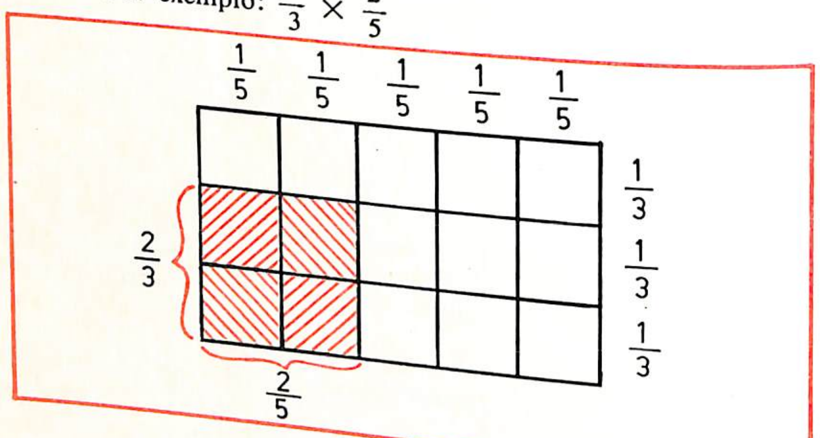

FIG. 34

Dividimos o retângulo em terços, numa dimensão, e em quintos, na outra dimensão. Marcamos, de acôrdo com os numeradores das frações dadas, o número de partes em cada dimensão do retângulo. Conforme essa marcação, podemos hachurar a parte do retângulo correspondente ao produto das duas frações, extraindo daí, conforme o número de pequenos retângulos hachurados, o numerador do produto. Em nosso exemplo, é 4. O denominador dependerá do número total de pequenos retângulos em que dividimos a figura inicial. Em nosso exemplo, é 15.

Logo,

$$\frac{2}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{15}.$$

Observe-se que o conceito de repetição de parcelas iguais para a multiplicação continua: hachuramos a parte correspondente à fração $\frac{2}{5}$ (2 colunas da superfície do retângulo) apenas $\frac{2}{3}$ de vêzes, conforme o multiplicador da multiplicação: $\frac{2}{3} \times \frac{2}{5}$.

Observando a figura acima, podemos ainda verificar a propriedade comutativa da multiplicação, isto é, que

$$\frac{2}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \times \frac{2}{3}$$

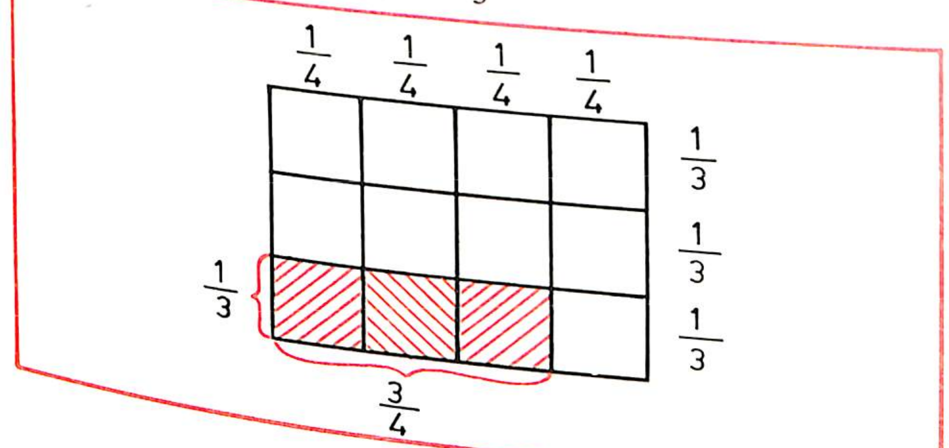

FIG. 35

Então, $\frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{12}$

e $\frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4}$ (propriedade comut. da mult.)

Mais um exemplo: $\frac{3}{7} \times \frac{4}{5}$

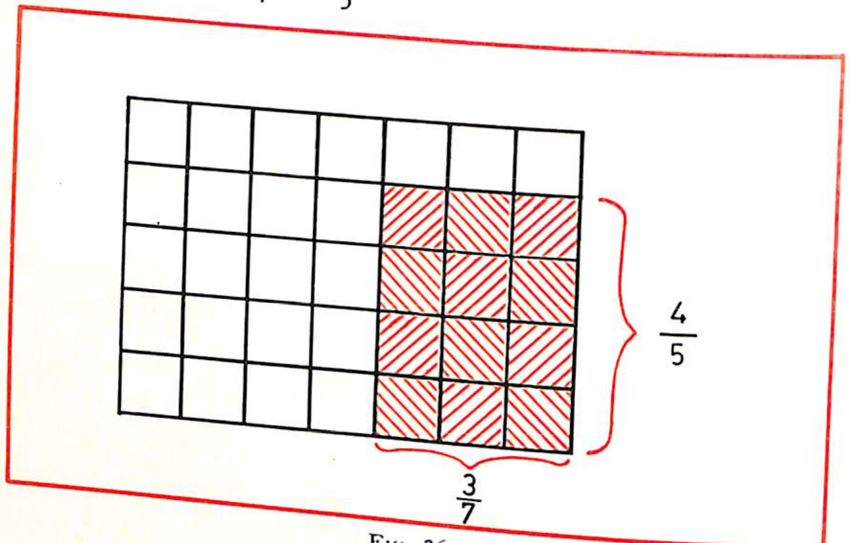

FIG. 36

Logo, $\frac{3}{7} \times \frac{4}{5} = \frac{12}{35}$

A partir destas explorações, levaremos a criança a relacionar os têrmos da multiplicação e o produto, verificando que o produto da multiplicação de duas frações é um número racional cuja fração tem para numerador o produto dos numeradores das frações dadas e para denominador, o produto dos denominadores das frações dadas.

Em nossos exemplos:

1.º) $\frac{2}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{2 \times 2}{3 \times 5} = \frac{4}{15}$ (mesmo resultado encontrado no gráfico)

2.º) $\frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{3 \times 1}{4 \times 3} = \frac{3}{12}$ (mesmo resultado encontrado no gráfico)

3.º) $\frac{3}{7} \times \frac{4}{5} = \frac{3 \times 4}{7 \times 5} = \frac{12}{35}$ (mesmo resultado encontrado no gráfico)

Assim, explorando o conceito e descoberta uma regra prática, podemos usar esta, ao invés de fazer gráficos para tôda as operações de multiplicação que tivermos necessidade de efetuar.

Vimos que, dado um par de números racionais, podemos associar a êle um outro número racional que é o seu *produto*. Cada fração do par associado ao produto recebe o nome de fator. Assim, em

$\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$, $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{2}$ são os fatôres e $\frac{3}{8}$ é o produto.

EXERCÍCIOS 31

1 — Complete as seguintes sentenças tornando-as verdadeiras:

a) A operação de multiplicação associa ao par $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{5}\right)$ o número . . . . que é o seu produto.

b) A multiplicação associa ao par $\left(\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right)$ o número racional $\frac{3}{16}$ que é o seu . . . .

c) $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{20}$ e $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20}$. Isto siginifica que a multiplicação de racionais possui a propriedade . . . .

d) $\left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{5}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{2}{15} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{30}$

e $\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{5} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{10} = \frac{2}{30}$

Os dois resultados acima nos levam a concluir que a multiplicação de racionais tem a propriedade . . . .

2 — Calcule os seguintes produtos:

a) $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5}$

b) $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$

c) $\frac{1}{5} \times \frac{1}{2}$

d) $4 \times \frac{3}{5}$

e) $\frac{3}{8} \times 3$

f) $\frac{2}{3} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{2}$

3 — Efetue as seguintes multiplicações:

a) $\frac{4}{5} \times 1$

b) $1 \times \frac{3}{8}$

c) $\frac{4}{3} \times 0$

d) $\frac{3}{4} \times 0 \times \frac{2}{5}$

e) $0 \times \frac{4}{7}$

f) $\frac{1}{1} \times \frac{2}{3}$

4 — Calcule:

a) $\frac{2}{5} \times \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{1}\right)$

b) $\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) \times \frac{2}{3}$

c) $\left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}\right) \times \frac{4}{5}$

d) $\frac{3}{2} \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}\right)$

PROPRIEDADES DA MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS RACIONAIS

Já vimos quando da exploração do conceito da multiplicação de racionais que ela é *comutativa*:

$$\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{2}{4} \times \frac{3}{5}$$

Vimos também que a multiplicação de números racionais é *associativa*:

$$\left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{5}\right) \times \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{5} \times \frac{3}{4}\right)$$

Sentimos, ainda, outras propriedades da multiplicação desde que começamos a estudá-la. Deixaremos, porém, essas propriedades para mais tarde. Veremos, agora, a propriedade *distributiva* da multiplicação de racionais, tal como a conhecemos em relação à multiplicação de números naturais. Por exemplo:

$$\frac{1}{3} \times \left(\underbrace{\frac{4}{5} + \frac{3}{4}}\right) = \underbrace{\frac{1}{3} \times \frac{4}{5}} + \underbrace{\frac{1}{3} \times \frac{3}{4}}$$

$$\underbrace{\frac{1}{3} \times \frac{31}{20}} = \underbrace{\frac{4}{15} + \frac{3}{12}}$$

$$\frac{31}{60} = \frac{31}{60}$$

Logo, a multiplicação de números racionais é associativa em relação à adição.

Vejamos se o fato se repete em relação à subtração:

$$\frac{1}{3} \times \left(\underbrace{\frac{4}{5} - \frac{3}{4}}\right) = \underbrace{\frac{1}{3} \times \frac{4}{5}} - \underbrace{\frac{1}{3} \times \frac{3}{4}}$$

$$\underbrace{\frac{1}{3} \times \frac{1}{20}} = \underbrace{\frac{4}{15} - \frac{3}{12}}$$

$$\frac{1}{60} = \frac{1}{60}$$

Portanto, a multiplicação de racionais é também distributiva em relação à subtração.

ELEMENTO INVERSO DA MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS RACIONAIS OU *INVERSO MULTIPLICATIVO*

Podemos observar, nos mais variados exemplos, que ao multiplicarmos uma fração por outra que possui para numerador, o denominador da primeira e, para denominador, o numerador da primeira, o produto é 1.

Exemplos: $\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{12}{12} = 1$

$\frac{2}{5} \times \frac{5}{2} = \frac{10}{10} = 1$

$\frac{9}{4} \times \frac{4}{9} = \frac{36}{36} = 1$

Dizemos, neste caso, que as frações dadas são *inversas*.
Denomina-se *inverso multiplicativo* a fração inversa da fração dada.

Assim, dada a fração $\frac{2}{3}$, seu inverso multiplicativo é $\frac{3}{2}$. Se a fração dada fôr $\frac{3}{2}$, seu inverso multiplicativo será $\frac{2}{3}$.

É uma propriedade que todos os números racionais possuem, com exceção do zero, a de ter um inverso multiplicativo.

O inverso multiplicativo de 2, por exemplo, é $\frac{1}{2}$ porque 2 é o mesmo que $\frac{2}{1}$.

O inverso multiplicativo de 1 é 1 mesmo, pois o número racional 1 pode ser expresso assim: $\frac{1}{1}$, e seu inverso é $\frac{1}{1}$ mesmo.

O único número racional que *não tem* inverso multiplicativo é o zero. Pois $\frac{0}{1}$, por exemplo, teria para inverso multiplicativo $\frac{1}{0}$, o que

é impossível, não existe fração com denominador zero porque não se pode dividir por zero e $\frac{1}{0}$, *se existisse*, seria igual a $1 \div 0$.

EXERCÍCIOS 32

1 — Calcule o inverso multiplicativo dos seguintes números racionais:

a) $\frac{2}{3}$

b) $\frac{4}{5}$

c) $\frac{1}{4}$

d) 5

2 — Multiplique $\frac{2}{5}$ pelo inverso multiplicativo de $\frac{1}{2}$.

3 — Qual o produto de um número racional pelo seu inverso multiplicativo?

4 — Qual o número racional que não tem inverso multiplicativo? Por quê?

5 — Efetue as operações indicadas empregando a propriedade distributiva de multiplicação:

a) $\frac{2}{3} \times \left(\frac{4}{5} + \frac{1}{2}\right)$

b) $\left(\frac{4}{3} + \frac{2}{4}\right) \times \frac{1}{5}$

c) $\frac{3}{2} \times \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{2}\right)$

d) $\left(\frac{6}{5} - \frac{2}{3}\right) \times \frac{3}{4}$

DIVISÃO DE RACIONAIS

Já sabemos que $5 \div 2 = \frac{5}{2}$

Mas, $5 \times \frac{1}{2}$ também é igual a $\frac{5}{2}$

Logo, $5 \div 2 = 5 \times \frac{1}{2}$ $\left(\frac{1}{2}\right.$ é o inverso multiplicativo de $\left.2\right)$

Vejamos outro exemplo: $3 \div 5 = \frac{3}{5}$

E, $3 \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$

Logo, $3 \div 5 = 3 \times \frac{1}{5}$ $\left(\frac{1}{5}\right.$ é o inverso multiplicativo de $\left.5\right)$

Sabemos, também, que a divisão é a operação inversa da multiplicação.

Logo, se $\frac{2}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{15} \Longleftrightarrow \frac{4}{15} \div \frac{2}{5} = \frac{2}{3}$

Pela definição de divisão, portanto,

$\frac{4}{15} \div \frac{2}{5} = \frac{2}{3}$

Mas, $\frac{4}{15} \times \frac{5}{2} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

Então, $\frac{4}{15} \div \frac{2}{5} = \frac{4}{15} \times \frac{5}{2}$ $\left(\frac{5}{2}\right.$ é o inverso multiplicativo de $\left.\frac{2}{5}\right)$.

Comparando os resultados obtidos na exploração do conceito de divisão e os resultados da multiplicação do primeiro racional pelo inverso multiplicativo do segundo racional, podemos deduzir uma regra prática para dividir: para calcular o quociente de dois números racionais, basta inverter o segundo (divisor) e multiplicar pelo primeiro.

POSSIBILIDADE DA DIVISÃO

Observação: A divisão, no conjunto dos números racionais, é sempre possível e exata, desde que o divisor não seja zero.

EXERCÍCIOS 33

1 — Complete as sentenças seguintes, tornando-as verdadeiras:

a) O quociente de $\frac{3}{5} \div \frac{2}{4}$ é o número racional $\frac{3}{5} \times \frac{4}{2} =$ ....

b) O quociente de $\frac{5}{4} \div 2$ é o número racional $\frac{5}{4} \times \ldots =$ ... .

c) O quociente de $\frac{2}{3} \div 1$ é o racional $\frac{2}{3} \times \ldots\ldots = \ldots$.

2 — Calcule os quocientes:

a) $\frac{4}{5} \div \frac{2}{3}$

b) $\frac{5}{8} \div \frac{4}{7}$

c) $6 \div \frac{3}{4}$

d) $1 \div \frac{4}{5}$

e) $\frac{9}{2} \div \frac{3}{7}$

3 — Calcule:

a) $\left(\frac{2}{3} \div \frac{1}{5}\right) \div \frac{3}{4}$

b) $\frac{2}{3} \div \left(\frac{1}{5} \div \frac{3}{4}\right)$

4 — Tendo em vista os dois resultados do exercício anterior, responda: A divisão é associativa?

5 — No conjunto dos números naturais, a divisão nem sempre é possível. E no conjunto dos números racionais?

PROBLEMAS RESOLVIDOS

1 — Ache uma fração equivalente a $\frac{3}{5}$ cujo numerador é 9.

Estrutura do problema:

$$\frac{3}{5} = \frac{9}{\square}$$

Sentença matemática:

$$3 \times \square = 5 \times 9$$
$$3 \times \square = 45$$
$$\square = 45 \div 3$$
$$\square = 15$$

Resposta: $\frac{9}{15}$

2 — Ache uma fração equivalente a $\frac{2}{7}$ cujo denominador é 49.

$$\frac{2}{7} = \frac{\square}{49}$$

Sentença matemática:

$$7 \times \square = 2 \times 49$$
$$7 \times \square = 98$$
$$\square = 98 \div 7$$
$$\square = 14$$

Resposta: $\frac{14}{49}$

3 — Comprei um caderno de 72 fôlhas e já usei 5. Que fração do caderno já usei?

1 fôlha $\rightarrow \frac{1}{72}$ do caderno (singular)

5 fôlhas $\rightarrow 5 \times \frac{1}{72} = \frac{5}{72}$ (plural)

Resposta: Usei $\frac{5}{72}$ do caderno.

4 — Um mês tem 30 dias. Que fração do mês é uma semana?

1 dia $\rightarrow \frac{1}{30}$ do mês (singular)

7 dias $\rightarrow 7 \times \frac{1}{30} = \frac{7}{30}$ (plural)

Resposta: Uma semana equivale a $\frac{7}{30}$ de um mês.

5 — Um carro consome 10 litros de gasolina para percorrer 90 quilômetros. Quantos litros êle consome por quilômetro?

90 km $\rightarrow$ 10 l (plural)

1 km $\rightarrow 10 \div 90 = \frac{10}{90}$ ou $\frac{1}{9}$ (singular)

Resposta: Consome $\frac{1}{9}$ do litro de gasolina.

6 — Um automóvel consome 10 litros de gasolina para percorrer 90 quilômetros. Quantos quilômetros êle faz com 1 litro?

10 l $\rightarrow$ 90 km (plural)

1 l $\rightarrow 90 \div 10 = 9$ km (singular)

Resposta: Faz 9 km com 1 litro.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

1 — Ache uma fração equivalente a $\frac{3}{5}$ cujo numerador é 9.

Estrutura do problema:

$$\frac{3}{5} = \frac{9}{\square}$$

Sentença matemática:

$$\begin{aligned} 3 \times \square &= 5 \times 9 \\ 3 \times \square &= 45 \\ \square &= 45 \div 3 \\ \square &= 15 \end{aligned}$$

Resposta: $\frac{9}{15}$

2 — Ache uma fração equivalente a $\frac{2}{7}$ cujo denominador é 49.

$$\frac{2}{7} = \frac{\square}{49}$$

Sentença matemática:

$$\begin{aligned} 7 \times \square &= 2 \times 49 \\ 7 \times \square &= 98 \\ \square &= 98 \div 7 \\ \square &= 14 \end{aligned}$$

Resposta: $\frac{14}{49}$

3 — Comprei um caderno de 72 fôlhas e já usei 5. Que fração do caderno já usei?

1 fôlha $\rightarrow \frac{1}{72}$ do caderno (singular)

5 fôlhas $\rightarrow 5 \times \frac{1}{72} = \frac{5}{72}$ (plural)

Resposta: Usei $\frac{5}{72}$ do caderno.

4 — Um mês tem 30 dias. Que fração do mês é uma semana?

1 dia $\rightarrow \frac{1}{30}$ do mês (singular)

7 dias $\rightarrow 7 \times \frac{1}{30} = \frac{7}{30}$ (plural)

Resposta: Uma semana equivale a $\frac{7}{30}$ de um mês.

5 — Um carro consome 10 litros de gasolina para percorrer 90 quilômetros. Quantos litros êle consome por quilômetro?

90 km $\rightarrow$ 10 *l* (plural)

1 km $\rightarrow 10 \div 90 = \frac{10}{90}$ ou $\frac{1}{9}$ (singular)

Resposta: Consome $\frac{1}{9}$ do litro de gasolina.

6 — Um automóvel consome 10 litros de gasolina para percorrer 90 quilômetros. Quantos quilômetros êle faz com 1 litro?

10 *l* $\longrightarrow$ 90 km (plural)

1 *l* $\longrightarrow 90 \div 10 = 9$ km (singular)

Resposta: Faz 9 km com 1 litro.