22/i

24

METODOLOGIA DA MATEMÁTICA

OBRAS DE IRENE DE ALBUQUERQUE

— Metodologia da Matemática.
— Jogos e Recreações Matemáticas.
— Tudo é Fácil (em colaboração).
— Diário de Lúcia (em colaboração).
— Educação Doméstica.
— Testes para o Curso Primário. (Livro para o professor).
— Caderno de Testes, 1.ª série.
— " " " 2.ª "
— " " " 3.ª "
— " " " 4.ª "
— " " " 5.ª "
— Cálculos Graduados (Adição I, Adição II, Subtração I, Subtração II, Multiplicação I, Multiplicação II, Divisão I, Divisão II).
— Prática de Ensino Primário (em colaboração).
— A Prática de Ensino nos Institutos de Educação e Escolas Normais (monografia).

IRENE DE ALBUQUERQUE

Catedrático de Prática de Ensino do Inst. Educação do Distrito Federal. Prof. de Metodologia da Matemática dos Cursos de Aperfeiçoamento do INEP. Prof. de curso primário.

METODOLOGIA DA MATEMÁTICA

(De acôrdo com o programa do curso de formação do professor primário)

Orientação detalhada e sugestões práticas acêrca de todos os pontos do programa do curso primário.

Para uso de professôres primários, orientadores do Ensino e alunos das Escolas Normais.

2.ª EDIÇÃO

Ilustrações de
COSETTE DE ALBUQUERQUE

1954
CONQUISTA
Av. 28 de Setembro, 174 — Rio de Janeiro

INTRODUÇÃO

Tôda criança de inteligência normal, sem ser brilhante, é capaz de aprender, com relativo êxito, as noções dos programas de Matemática da escola primária; pode, ainda, resolver com certa facilidade os problemas de Matemática que a vida lhe apresenta.

A Matemática não é difícil, mas ensinar Matemática é das tarefas que exigem maior dose de reflexão, de bom-senso e de cuidado.

Em geral, o professor erra algumas vêzes, antes de encontrar o caminho certo para ministrar dada noção; e, enquanto o professor está errando, o aluno não está aprendendo.

Por ser uma ciênca lógica, certas noções precisam ser dadas antes de outras, a fim de que os alunos possam jogar com elas. Há ainda a preocupação com a dosagem certa, com a graduação de dificuldades, com o desdobramento de casos que a nós parecem idênticos, mas são diferentes para a criança; há o apêlo constante ao seu interêsse, à sua experiência anterior; há, sobretudo, a necessidade de certo conhecimento de psicologia que nos leve a uma adaptação tão perfeita ao tipo de raciocínio da criança em cada idade, que seja êsse o raciocínio que empreguemos ao ministrar-lhe uma noção.

Proporcionar à criança o prazer da "redescoberta" em Matemática é um direito que lhe tem sido negado em detrimento do êxito do próprio ensino. Quando ela é capaz de descobrir uma regra e chegar a enunciá-la, essa regra está sabida para sempre, e o tempo gasto são apenas alguns minutos. Se, ao contrário, na ânsia de economizar tempo e esfôrço, damos a regra, o "saber pronto" para a criança usar, estamos oferecendo uma tarefa muito mais difícil e desinteressante, e a sua aprendizagem vai tomar-nos vários dias; voltaremos a insistir no mesmo assunto daí a semanas, daí a meses, porque haverá sempre o "esquecimento"; o que nunca confessamos a nós mesmos é que a criança esquece justamente porque nunca chegou a aprender.

Nosso ensino apela muito para a memória; e como memória não significa inteligência, a criança de inteligência normal ou superior deixará de aprender coisas elementares, se não possui boa memória.

A Matemática que se exige na escola primária é viva e concreta, à nossa volta; quando essa mesma Matemática passa para o quadro-negro de uma sala de aula, o professor mata-a, tira-lhe a vida, torna-a abstrata; a criança, cujo raciocínio não pode ser ainda abstrato, é incapaz para essa "matemática do quadro-negro".

Nas universidades americanas estão-se multiplicando clínicas pedagógicas, aonde vêm ter, espontâneamente ou enviados pelas suas escolas, estudantes, desde o curso primário até ao mais alto nível universitário, que não encontram o êxito devido nos seus estudos. O primeiro cuidado da clínica consiste em aplicar-lhes um teste de inteligência; se esta se prova normal ou superior, o estudante estagiará na clínica.

Em geral, falhas em leitura e em noções básicas de Matemática originam o insucesso do estudante. Tivemos ocasião de lidar com estudantes de 2.º ciclo secundário que, com uma revisão de aritmética elementar, em um a dois meses, passaram a alcançar boa colocação em suas turmas, em tôdas as matérias afins; êles tinham sido ensinados por métodos tão inadequados que, às vêzes, apresentando quociente intelectual muito acima do normal, ótima saúde e reações psicológicas

normais, vinham arrastando falhas que os prejudicavam por muitos anos.

Cada ano que passa, queremos ensinar a 40 crianças a pensar pelos métodos que nós, adultos, usamos em nosso raciocínio; é uma luta inglória; seria bem mais fácil que nós, professôres, nos modificássemos, e ensinássemos à criança a resolver os seus problemas pelos métodos que a sua maturidade pode permitir.

As páginas que se seguem são o produto de alguns lustros de magistério, acrescidos de leituras, cursos e observações; pensamos mesmo que os nossos melhores mestres foram os nossos alunos, e confessamos que a nossa aprendizagem se fêz, em parte, à custa do sacrifício de algumas dezenas de crianças que não alcançaram sucesso pelos métodos que lhes quisemos impor.

Não consideramos nem completo nem perfeito êsse trabalho. E' apenas uma contribuição honesta aos alunos das escolas normais que se preparam para a missão de ensinar, aos autodidatas, ou aos que têm função de orientar professôres com pouca experiência, ou, ainda, aos mestres sinceros que não se sentem plenamente satisfeitos com os resultados obtidos em seu ensino. Tôdas as sugestões que nos forem remetidas serão bem-aceitas e estudadas para edições posteriores.

Êsse livro não apresentará novidades para muitos, nem pretende ser original. Para outros, talvez, cause choques com suas crenças mais arraigadas. Foi escrito para ser lido sem idéias preconcebidas; pretende ser útil, prático e desataviado; seu único mérito, talvez, é procurar colocar o professor de Matemática em tal identidade com a criança, seu modo de ver, de sentir, de agir, de pensar, que a Matemática se torne simples, fácil, agradável e viva.

Não há uma linha, uma palavra, que não represente a crença sincera do autor.

I. A.

I PARTE

CAPÍTULO I — PRINCÍPIOS GERAIS DA APRENDIZAGEM

A — Aprendizagem espontânea

Há uma porção de conhecimentos que a criança adquire espontâneamente, assistemàticamente, fora da escola; o nome dos petizes da vizinhança, o caminho da casa da vovó, o lugar onde se guardam os brinquedos ou os doces, etc.

A própria observação da maneira pela qual ela aprende vai-nos ensinar a basear o nosso ensino em princípios condizentes com a sua psicologia. Como aprende ela tudo isso? Aprende pelo uso, porque ouviu os nomes várias vêzes ou chamou várias vêzes por êles, ou porque fêz várias vêzes o mesmo trajeto.

Êsse uso prendeu-se a uma necessidade, ou a uma sensação de satisfação, a um *interêsse* enfim. Ouvir ou chamar os nomes dos colegas, ir à casa da vovó foram fatos que ocorreram várias, *muitas vêzes*, mas em dias diferentes, em *situações diferentes;* a criança nem notou que aquêle elemento comum — nome dos colegas, caminho da casa da vovó — estava sendo repetido. Margarida, Luís, Paulo, por exemplo, seriam nomes abstratos, se ditos isoladamente, mas a criança os aprendeu para designar os seus donos; ela tem um *conhecimento concreto* dêsses nomes: Margarida, Luís, Paulo. Se lhe ensinassem que Margarida, Luís e Paulo são nomes de pessoas e ela não conhecesse essas pessoas, êsse conhecimento não teria significação para ela — e ela seria incapaz de guardá-lo.

B — Aprendizagem dirigida

Essa criança, que aprende sòzinha tantas coisas, é a mesma que vai para a escola; e se êsse ensino intencional, sistemático, que a escola se propõe, lhe oferecer os mesmos elementos que a vida de cada dia lhe proporciona, a aprendizagem não apresentará problemas.

E é fácil conseguir:

1 — Prover muitas e variadas experiências (Ex.: contar cadeiras, contar mesas, conchas, etc.); fazer a repetição pelo uso.

2 — Distribuir o treino de cada noção de maneira a ser mais intenso no início da aprendizagem, tornando-se mais raro, mas sem desaparecer, à proporção que a aprendizagem se firma.

3 — Dar um sentido, um interêsse a tôda aprendizagem. Essa tem como ponto de partida sempre uma situação problemática e serve a resolver novos problemas. "Vamos ver qual dos jardins está mais florido; o dos meninos ou o das meninas". "Vamos calcular as despesas para a impressão do nosso jornal e dividi-las". "Vamos fazer nosso horário para uma excursão a tal lugar, etc.". E' a tão debatida questão da motivação da aprendizagem.

Pode-se bem ver que, quanto mais a escola abandona os seus moldes tradicionais de meninos sentados nas carteiras estudando lições, e deixa que a vida lhe entre pela janela, mais motivos para a aprendizagem aparecem espontâneamente. De tôdas as escolas que temos visitado no Brasil (conhecemos relativamente poucas, é verdade) as que mais apresentam essa identidade com a vida são as rurais de Butantã, em São

Paulo, de Santíssimo e Governador no Distrito Federal. Isso porque, sendo a atividade rural o centro das atividades escolares, dá o motivo, cria a necessidade ou desperta a curiosidade para as aprendizagens ditas "intelectuais".

Nas escolas não rurais, a aprendizagem se origina de problemas surgidos para atingir objetivos outros a que nos propomos: ornamentação da sala de aula, plantação de um jardim ou horta no terreno da escola, organização de um museu, de um laboratório de química, de um livro de histórias, de um sistema de correspondência escolar interestadual, etc. Nunca deparamos situação mais desagradável do que chegar a uma sala de aula e dizer: "vamos fazer umas contas", ou "vamos aprender a somar frações". Os motivos forçados, as histórias em que criança alguma acredita, jamais chegam também a motivar; são o ensino tradicional mascarado de moderno; são a forma sem a essência, e de nada valem, desde que não atinjam a sua única finalidade: dar um sentido, um interêsse intrínseco a tôda aprendizagem.

4 — Tornar todo o conhecimento concreto:

Ex.: Contar coisas, ao invés de enunciar números de 1 a 100; medir extensões com um metro ou uma fita métrica, ao invés de papaguear uma lista de múltiplos e submúltiplos, usados ou não.

A criança gosta de ver, pegar, sentir as coisas.

Quanto mais nós apelamos para os seus sentidos, melhor é a aprendizagem. Usar objetos do mundo real, desenhos, massa plástica, papel e tesoura, etc., ajudam muito mais do que longas explicações ou infindas decorações. Apelar mais para o raciocínio e a evidência do que para a memória, é o papel do professor. A *objetivação* da aprendizagem é de grande valor para o seu êxito.

5 — Oferecer situações para que a criança redescubra fórmulas, regras ou relações.

Ao invés de ensinarmos que 2 + 2 são 4, proveremos oportunidade para que a criança junte dois grupos de dois objetos e "descubra" que o total é quatro.

Ao invés de ensinarmos a fórmula para achar a área do triângulo, permitiremos que ela, com papel e tesoura, veja que pode partir um paralelogramo em dois triângulos iguais e, daí, "redescobrirá" como achar a área do triângulo.

6 — Ensinar pouco de cada vez, graduando as dificuldades e atendendo ao interêsse.

Êsse é o ponto que faz o ensino intencional superior à aprendizagem espontânea. Se assim não fôsse, melhor seria deixar a criança aprender apenas com as oportunidades que o meio lhe oferecesse.

Mas o meio oferece uma porção de oportunidades, que a criança vai selecionando de acôrdo com os seus interêsses e possibilidades.

A escola fará êsse trabalho de seleção e dosagem, ensinando-lhe pouco de cada vez, primeiro o mais fácil, depois o mais difícil. E como é a Matemática uma ciência lógica, é preciso selecionar ainda as noções básicas para a aprendizagem de outras: a numeração antes da adição; as medidas de comprimento antes das de área, etc. Como não é preciso, por exemplo, conhecer todo o sistema de numeração para aprender as combinações fundamentais da adição, essas aprendizagens vão-se alternando, sempre obedecendo à ordem de dificuldade, e resolvendo situações de real interêsse.

7 — Formar hábitos que evitem o êrro e economizem o trabalho.

8 — Formar conexões agradáveis em tôrno do ensino da Matemática; promover o êxito e evitar o fracasso.

TÓPICOS PARA DISCUSSÃO

(*Para o estudante de Metodologia*)

A. Em que o método de redescoberta se assemelha ou se distingue dos demais métodos usados para o ensino da Matemática; quais as vantagens do seu uso e qual a sua praticabilidade na escola primária.

B. Como deve ser distribuído o treino de cada noção e quais as razões dessa distribuição.

C. Em que consiste e por que é importante a objetivação no ensino de Matemática. Pode ser abandonada em alguma série? Tem mais intensidade em algumas do que em outras? Justifique as suas asserções.

D. Como conciliar os princípios de prover suficiente repetição para a aprendizagem e de variar e enriquecer a experiência da criança.

E. Como pode resolver a questão da motivação da aprendizagem no tipo de escola em que trabalha? Que mudanças sugeriria na vida dessa unidade escolar, para tornar mais efetivo o fator motivação, dentro das possibilidades reais e imediatas?

CAPíTULO II — A MATEMÁTICA E AS DEMAIS MATÉRIAS; PLANOS DE TRABALHO; PLANO DE AULA

1. O professor sente, geralmente, dificuldade em relacionar a Matemática com as demais matérias do programa. Sendo a globalização do ensino de valor indiscutível na escola primária, a Matemática não pode manter-se isolada. A motivação torna-se muito mais fácil quando as necessidades ou as oportunidades para o uso da Matemática nascem naturalmente no desenrolar do dia escolar.

A Matemática, em inúmeras ocasiões, vale-se das ou auxilia as demais disciplinas; tem uma terminologia própria, que é linguagem; lida com desenhos e côres, divisões do tempo, etc. Quanto mais a Matemática se apresentar em conexão com as demais disciplinas, resolvendo os problemas numéricos que a vida apresenta, mais ela estará ligada à vida.

2. Nenhum ensino pode ser eficiente sem planejamento cuidadoso.

O plano é esboçado, primeiramente, em suas linhas gerais e, depois, nos seus detalhes. Há três tipos de planos:

a) Plano para o ano letivo (programa escolar).
b) Plano para o período correspondente a uma unidade de trabalho (é chamado, geralmente, "plano de trabalho").
c) Plano de aula (diário) { para nôção nova ou fixação da aprendizagem.

3. **Linhas gerais para o planejamento e realização de uma unidade de trabalho:**

Unidade de trabalho ....
Série escolar ....

I — Planejamento

a) Escolha de um assunto geral dentro do qual estejam relacionadas as matérias do currículo.
b) Indicação das questões das diferentes matérias do currículo, a serem estudadas durante o desenvolvimento da unidade.
c) Lançamento da unidade: condições possíveis para motivação.
d) Métodos a empregar.
e) Material.
f) Atividades complementares necessárias.
g) Hábitos e atitudes a desenvolver.
h) Duração provável da unidade.

II — Execução

a) Andamento da unidade (faz-se através dos planos de aula).
b) Avaliação periódica do andamento da unidade (em relação ao objetivo proposto e às noções assimiladas).
c) Matéria dominada (verificação por meio de uma prova).
d) Tempo gasto.
e) Observações sôbre a execução.

Naturalmente êstes três últimos itens só podem ser registados após o término da unidade.

A Matemática deve sempre ser prevista na elaboração do plano para o desenvolvimento de uma

unidade de trabalho, pois ela é importante para a resolução dos problemas numéricos.

Nota — O *plano de aula* deve ser registado num caderno especial.

Ao iniciar a unidade de trabalho, o professor deve transcrever o plano desta no caderno de planos, de modo que não há necessidade de mencioná-la diàriamente, nem tampouco fazer referência à série escolar.

Pela motivação prevista no plano, podemos examinar se a Matemática está sendo dada realmente em conexão com as outras matérias, em relação à unidade de trabalho, ou se o professor insiste em isolá-la.

Embora, à proporção que adquire prática, o professor possa ir resumindo o seu registo de planos, dêle devem constar sempre, por exemplo, os exercícios propostos para fixação, ou os jogos realizados e as questões por êle envolvidas, bem como os problemas resolvidos pela classe. Tôda essa parte deve ser planejada por escrito e colecionada no caderno de planos, para que o professor possa consultá-la ao elaborar outros exercícios.

Após cada noção nova de aritmética dada à classe, seguem-se sempre uma revisão, oral ou no quadro-negro, e um exercício escrito de fixação.

4. **Linhas Gerais do plano de aula:**

a) Série escolar — data
b) Unidade de trabalho
c) Matéria
d) Objetivos:

1 — aquisição de conhecimentos (assunto; mencionar se se trata de noção nova, revisão da matéria, fixação ou verificação da aprendizagem; no caso de fixação, indicar se é por exercício ou jôgo e explicar simàriamente o jôgo)

2 — formação de hábitos e atitudes

e) Material a ser utilizado

f) Motivação

g) Andamento provável (como a aula será encaminhada)

h) Exercícios (para aplicação, treino ou verificação; transcrever os exercícios, jogos ou problemas).

Naturalmente que, num dia escolar, serão dadas várias aulas, de várias matérias; a Matemática pode encontrar seu motivo na própria aula anterior, de outra matéria, ou, diretamente, na unidade de trabalho (veja exemplificação de plano de aula de Matemática).

5. A Matemática, como outras disciplinas, exige um treino especial, que precisa ser dado por exercícios sistematizados de treino ou por jogos. Êsse treino tem uma finalidade em si mesma e, portanto, fixa as noções a cujo aparecimento a Unidade deu motivo, mas não envolve, necessàriamente, problemas ou questões diretamente ligados à unidade de trabalho. Fazer problemas sòmente sôbre feira ou sôbre meios de transporte, por exemplo, se tais fôssem as unidades de trabalho da classe, seria completamente sem sentido e, ao invés de despertar o interêsse da criança, causaria monotonia.

SUGESTÕES PRÁTICAS

A — Sugestões relativas às unidades de trabalho

A título de sugestão, tomamos alguns tópicos dos programas de 2.ª e 3.ª séries do Distrito Federal e colocamos ao lado o que êles nos lembram, em relação à Matemática. E' preciso notar que não se trata de um artificialismo do ensino, mas que a Matemática, fornecendo os dados numéricos, completa as noções que os programas das outras matérias se propõem.

I — *Sugestões para a 2.ª série:*

a) Como unidades de trabalho, analisando os programas, são das mais interessantes as que se referem à vida da fazenda e à vida na cidade, por meio de livro de histórias, fazenda em miniatura (construção) barra para sala de aula, "cinema", etc.

b) Tópicos e sua relação com a Matemática:

Canteiros — filas de plantação; contagem de 5 em 5, de 10 em 10, etc.

Animais — número; contagem; adição, subtração; criação de pintos; chocadeira — multiplicação, divisão, subtração, adição.

Vegetais — frutas das árvores, flores dos jardins — adição, multiplicação.

Animais e vegetais — preço de venda dos produtos da fazenda; listas de preços; moedas, notas.

Meios de transporte e comunicação — preços, moedas, notas.

Carros de bois — contagem de 2 em 2, de 4 em 4.

Ruas — pares e ímpares; numeração de 2 em 2, de 4 em 4.

Vida na fazenda e na cidade — horários das diferentes atividades; leitura de horas; cartas enigmáticas.

Valor do gêlo para conservação dos alimentos — arrumação de geladeiras: adição, subtração, dôbro.

II — *Sugestões para a 3.ª série:*

a) Unidades de trabalho: "Album Turístico do Rio"; "Aventuras de um turista no Rio" (livro, diário, cinema, etc.).

b) Tópicos e sua relação com a Matemática:

Pontos aprazíveis da cidade — transporte, tempo, preço, dinheiro; — curiosidades para comprar (postais, trabalhos de asa de borboletas, etc.) — dinheiro, problemas de compra.

Praças — tamanho, perímetro, forma, sistema métrico.

Fatos históricos, datas — subtração.

Correio — preços de cartas aéreas, preços de transportes de livros — massa (pêso) — registro, selos, encomendas aéreas; problemas sôbre dinheiro e massa.

Telégrafo — tempo, horas, preços.

Estradas de ferro e de rodagem — extensão, quilômetros; transporte de malas e de volumes; acondicionamento; cubo, paralelepípedo, medidas de comprimento, pêso.

Agricultura, indústria e comércio — salário de empregados, trabalho feito, em unidade, horas de trabalho; pagamento quinzenal, pagamento mensal; lucros, abatimento; tamanho de fazendas, tamanho de canteiros, cêrcas para fazendas e canteiros, viveiros de aves, cercados para animais; cálculo da produção aproximada de um laranjal, cálculo do leite necessário para fazer certa quantidade de manteiga (capacidade e massa), cálculo da despesa com alimento de animais; cálculo das compras semanais para o consumo de uma cozinha de fazenda (alimentação dos agricultores) ou de fábrica (alimentação de operários), retalhos vendidos em fábricas de tecidos (cálculo do comprimento, do preço, etc.).

NOTA — Exemplificamos aqui tópicos de conhecimentos gerais, pois são êsses programas que dão as sugestões para linguagem e matemática. Convém acentuar, ainda, o valor da gravura, em tôrno da qual se possam fazer problemas e derivar as aulas de linguagem e de conhecimentos. O desenho e os trabalhos manuais desenvolvem-se com a unidade de trabalho e dão, por sua vez, novos motivos à Matemática.

Adotamos, quer para as Unidades de Trabalho, quer para os Planos de Aula, a orientação dada no Instituto de Educação do Rio de Janeiro pela catedrática de Metodologia Geral Alfredina de Paiva e Sousa.

B — Exemplo de um plano de aula de Matemática

1.ª série — 31 de agôsto de 1948.
Unidade de trabalho: Livro de Classe.
Cálculo.
Objetivos:

a) treino de problemas orais com cálculo e resultado escritos;

b) ordem e asseio nos trabalhos: operações armadas convenientemente, algarismos bem feitos; boa posição para a escrita; atenção à leitura do problema (pelo professor).

Material: Folhinha do livro de classe, distribuída entre os alunos (um exemplar está anexado ao plano).

Motivação: Continuação das aventuras de Filipe na fazenda.

Andamento provável:

a) Motivada a classe, distribuir o material, recomendando que escrevam apenas o nome e a data, na margem;

b) Recomendações sôbre execução do trabalho, atitude, etc.;

c) Leitura do 1.º problema, execução pelas crianças, correção individual pelo próprio aluno, usando a professôra o quadro-negro, e adotando a mesma disposição a que as crianças devem obedecer: a professôra imediatamente verificará se tôdas entenderam;

d) Leitura do 2.º problema, procedendo como anteriormente, e assim por diante.

Exercícios: (Tipo — Historieta em problemas):

a) Um empregado tirou 2 mangas para Filipe chupar, e outro tirou 1. Quantas mangas Filipe chupou?

b) Filipe começou a passear e chegou ao lugar dos coelhos. Numa casinha havia 8 coelhinhos, depois entraram 4. Quantos coelhos ficaram, afinal, na casa?

c) No chiqueiro havia uma dúzia de porquinhos. Filipe abriu a porta e fugiram 4. Quantos porquinhos ficaram?

d) No milharal, Filipe colheu 10 espigas, mas 3 estavam verdes. Quantas espigas maduras Filipe colheu?

Professoranda: Lucy Serrano Ribeiro

C — Sugestões para trabalhos práticos

(Para o estudante de Metodologia)

1 — Sugira uma unidade de trabalho que encontre sua motivação dentro da Matemática e trace um plano para o seu desenvolvimento.

2 — Consulte os programas do seu Estado. Escolha uma série escolar. Mencione três unidades de trabalho a desenvolver dentro de um ano letivo (uma seguindo-se à outra), englobando todo o programa desta série; distribua as noções do programa de Matemática pelas três unidades escolhidas e diga que relação essas noções teriam com as demais matérias ou com o desenvolvimento da unidade.

CAPÍTULO III — HÁBITOS, ATITUDES E IDEAIS A DESENVOLVER; SUA IMPORTÂNCIA

1. O professor costuma dar mais atenção ao ensino do que à formação de hábitos, sem se lembrar de que os hábitos concorrem para a melhor aprendizagem. Geralmente, a preocupação com os exames o absorve. Entretanto, se o aluno não "faz prova" de hábitos, a maneira por que se conduz numa prova é resultado da formação de hábitos.

E' preciso insistir com a criança, até que o hábito se forme, mas convém não esquecer que dar ao aluno o *porque* de cada hábito ajuda-o a formá-lo, uma vez que a criança, conscientemente, trabalhará para a consecução do objetivo conhecido. E' sempre tempo para progredir na aprendizagem, mas um hábito indevidamente formado é um empecilho à formação de hábitos devidos. Portanto, quanto mais cedo nos preocuparmos com o assunto, melhor.

2. A *verificação dos cálculos realizados* é um dos hábitos de maior importância, e pode ser realizada de várias maneiras:

Números terminados em zeros, números decimais, oferecem fáceis oportunidades a resultados absurdos; no entanto, não é difícil formar o hábito de sempre rever essa parte, ao fim de cada operação; da mesma forma, evitar-se-á o esquecimento de sinais de cruzeiros, ou das denominações em medidas de comprimento, capacidade, etc.; mesmo nas últimas séries escolares, é freqüente encontrarmos áreas e volumes expressos em unidades lineares, por falta de verificação.

O ensino das provas das operações fundamentais permite dar ênfase ao valor da verificação. Mesmo quando o professor não pedir a prova real, por escrito (e a prova real, para algumas operações, deve ser evitada, uma vez que é mais difícil do que a própria operação) é importante que faça os alunos verificarem as operações. Indicamos, para isso, no estudo especial das operações fundamentais, as provas mais aconselháveis. Cada exercício deveria ser dado com a ordem completa: "Efetue e verifique as operações..."

A *verificação é, também, importante na resolução de problemas*; considerar certo ou quase certo um problema que contém um pequeno "engano" de vírgula, transformando, por exemplo, cem cruzeiros em mil cruzeiros, é critério que não deve ser seguido, de maneira alguma; o aluno precisa compreender a significação e as conseqüências de tal "engano" na vida real. Antes que os alunos comecem a resolver qualquer problema, individualmente, o professor deverá chamar-lhes a atenção para tôdas as formas de verificação necessárias a um resultado satisfatório: conferir cada operação; conferir os dados usados no seu cálculo com os do enunciado do problema; estar certo de que não houve engano em vírgula, zero, denominação ou sinal de cruzeiro; ver se a resposta que pretende dar responde, realmente, ao problema (às vêzes perguntamos o preço e o aluno responde em metros); ver se os resultados encontrados se aproximam da verdade, fazendo o cálculo mental em "números redondos"; pelo menos, os erros mais grosseiros serão assim evitados.

3. *Clareza na escrita dos algarismos, boa disposição dos cálculos*, facilitando a sua verificação ou correção, devem ser estimulados.

4. *Levar o trabalho sempre à sua conclusão*, concentrando a atenção na tarefa até o término, só se contentando com a resposta certa, é um ideal que o pro-

fessor habilidoso, que planeja exercícios interessantes, consegue formar nos seus alunos, conseguindo, assim, que os trabalhos de Matemática sejam desejados pela classe.

5. *Presteza* na execução de tarefas, exigindo, sempre, e cada vez mais, *perfeição e rapidez*, através de um estímulo crescente nesse sentido, é de grande valor, não só para economia de tempo, como, ainda, porque a morosidade, quando permitida, leva os alunos a desviarem a atenção das tarefas que executam, cometendo erros e, até, fazendo decrescer o interêsse.

6. A *correção do trabalho* deve ser considerada importante por alunos e professor; isso é conseguido quando, pela nossa atitude, levamos os alunos a se sentirem felizes consigo mesmos pelo seu êxito; e, quando errarem, à compreensão de que o êrro não é uma situação permanente, mas algo que pode ser afastado; humilhações nesse sentido levam a criança a desinteressar-se da correção, a pretender enganar o professor e a persistir no êrro.

7. Em suma, o *ideal do trabalho rápido, completo, certo, bem disposto*, deve dominar na classe, e o espírito de precisão que a Matemática desenvolve só assim será conseguido.

CAPÍTULO IV — TAREFAS DESNECESSÁRIAS EM MATEMÁTICA

1. Em Matemática, muito do tempo e da atenção que a criança deveria dedicar ao trabalho pròpriamente de Matemática, é empregado em tarefas absolutamente desnecessárias para a aprendizagem.

Uma de tais tarefas é o *cabeçalho* que precede cada exercício feito em caderno. Tal tarefa vai-se tornando desnecessária, à proporção que a criança vai sabendo escrever, sem erros, o nome da escola, do professor e a data. E' preferível que a criança tenha apenas um caderno para tôdas as matérias e faça cabeçalho uma vez por dia, ao início dos trabalhos escolares.

2. A *cópia do enunciado dos problemas* é outro trabalho que faz demorar e perder o interêsse pela atividade. Às vêzes, um problema, que é resolvido em 5 minutos, exige 15 para a cópia, na qual, não raro a criança comete erros de linguagem, justamente porque está desinteressada. Justifica-se num problema de tipo novo, que a professôra queira deixar arquivado nos cadernos dos alunos; pelo menos 75% dos problemas feitos em classe, entretanto, poderiam poupar tal tarefa, calculando uma média de três problemas para o treino de cada tipo novo apresentado.

E' preferível numerar os problemas que vão sendo dados em classe e escrever, apenas, por exemplo, "Problema n.º 20 — Solução". Muitos de tais problemas podem ser feitos em fôlhas de bloco de papel-lousa, economizando o caderno, tão dispendioso para muitas crianças das nossas escolas públicas.

3. *Armar cálculos que a criança possa e deva fazer mentalmente* é, ainda, exigência que demonstra falta de bom-senso.

4. *Cópia de cálculos a serem efetuados* é tarefa longa, fastidiosa, que traz erros e cansa a atenção em atividade sem valor, além de prejudicar o interêsse. Infelizmente, ainda precisamos usar êsse recurso, na falta de material impresso.

Nas escolas onde há mimeógrafo ou duplicador, é interessante fornecer cálculos impressos e fazer o aluno dobrar a fôlha de papel-lousa, efetuando nela os cálculos, logo abaixo de cada operação armada. Nos casos de estar a operação indicada, para colocar ao lado os resultados, em colunas, proceder-se-á da mesma forma. Assim, uma fôlha de cálculos poderá servir a tôdas as turmas da mesma série escolar durante um ano ou, até, anos subseqüentes.

Os copiadores ou duplicadores manuais, à base de rolos de gelatina, são hoje de custo insignificante para uma escola ou um grupo de professôres, prestando grande serviço na economia de tarefas de alunos e de professôres. As matrizes são preparadas fàcilmente com papel-carbono ou lápis especial e transferida para a superfície de gelatina pelo espaço máximo de um minuto. A operação de tirar as cópias pode ser confiada a qualquer criança de idade escolar e é rapidíssima.

Economizando, ainda, as cópias, não deixando que os alunos escrevam nelas, como aconselhamos acima, elas poderão ser usadas até que o papel ou a cartolina onde forem tiradas se gaste, pelo uso.

CAPÍTULO V — FIXAÇÃO DA APRENDIZAGEM: EXERCÍCIOS SISTEMATIZADOS

1. Valor da fixação.

Não basta, ao professor, transmitir, claramente, uma noção, e fazer que ela seja entendida pelos alunos. Indispensável será fixá-la por meio de um treino bem-escolhido e orientado, que irá, afinal, constituir o elemento fundamental da aprendizagem.

O treino se fará por meio de exercícios sistematizados ou jogos; os problemas são uma forma especial de exercícios que estudaremos em outro capítulo.

2. Planejamento.

Para se obter os melhores resultados é mister que os exercícios sejam prèviamente organizados ou planejados de acôrdo com o objetivo primordial — a fixação. Não basta, entretanto, planejar os exercícios. O importante é saber como aplicá-los e dirigi-los; é proceder à necessária verificação dos resultados e suprir as falhas que, porventura, apareçam.

Devem merecer a atenção da professôra, não só os exercícios feitos em classe, como, também, a tarefa que os alunos levam para casa.

Cada questão proposta será cuidadosamente examinada em sua forma e apreciada segundo o índice de dificuldade, a fim de assegurar o êxito do trabalho.

Para o *planejamento do exercício* podemos considerar os seguintes aspectos, tendo em conta que a realização do exercício, em classe, deve corresponder, tanto quanto possível, ao seu planejamento:

a) *Quanto ao objetivo* — Ao planejarmos os exercícios para os nossos alunos, devemos cogitar, antes de tudo, do conceito, noção ou habilidade que pretendemos fixar. Isso feito, teremos definido nosso objetivo precípuo: manejo da vírgula decimal, cálculo de porcentagens, etc.

Êsse objetivo deve ser bem delimitado, com demarcações precisas, para que os exercícios alcancem o máximo de eficiência. A prática aconselha a reduzirmos cada noção a fixar a seus elementos mais simples, para que o aluno, com o pensamento orientado no mesmo sentido, se entregue a uma aprendizagem mais rápida e segura, poupando tempo e energia.

O professor pode calcular, assim, que quantidade de treino de determinada noção ou habilidade proporcionou ao aluno e, portanto, que intensidade deve ter êsse treino daí por diante.

Os exercícios dados sem essa preocupação de sistematização deixam-nos no escuro para agir. O professor que propõe exercícios ao sabor do acaso, muitas vêzes perde tempo demasiado com treino de conhecimentos fáceis e deixa esquecidos outros que estão a exigir de sua parte a mais detida atenção.

b) *Quanto à dificuldade* — Nos exercícios propostos, a dificuldade deve ficar adstrita ao conceito ou noção que se deseja treinar. Assim, quando o nosso intuito é treinar raciocínio, cumpre-nos evitar que a parte puramente de cálculo absorva a atenção dos alunos.

c) *Quanto ao elemento básico* — Os exercícios serão formulados de tal sorte que, variando os elementos acidentais, se conserve o elemento básico, o que se pretende treinar:

Observemos as seguintes operações:

506 — 184 =
308 — 59 =
1 085 — 957 =
4 032 — 875 =

Nota-se no exemplo acima, que, nas operações propostas, varia o número de algarismos de cada têrmo, mas há uma "singularidade" que permanece: trata-se de uma subtração, com recurso à ordem superior, aparecendo um zero no minuendo, entre dois algarismos significativos.

Eis o que constitui o nosso objetivo de treinamento ou fixação.

d) *Quanto à seriação* — Os exercícios devem ser dispostos em ordem crescente de dificuldade. Vencida uma pequena dificuldade, adquire o aluno certa experiência inicial que o ajudará a vencer a seguinte, e assim sucessivamente. Além disso, o primeiro êxito constituirá, desde logo, valioso estímulo para o prosseguimento do trabalho.

e) *Quanto à adequação* — Deve haver perfeita concordância entre o nível da turma e os exercícios propostos.

Se êstes forem demasiado fáceis para os alunos, provocarão lamentável desinterêsse, do qual resultará perda de tempo e energia numa atividade inteiramente despicienda. Exercícios rebuscados e difíceis conduzem tàcitamente ao êrro, geram o desânimo e só podem trazer rendimento negativo. Só se deve propor um exercício quando as noções que êle subentende foram bem-explicadas e compreendidas.

f) *Quanto ao tempo* — Eis outro fator de importância primacial. Aconselha a prática a evitarmos os exercícios longos, que se tornam fastidiosos, e, também, os extremamente breves, que não sejam suficientes para fixar uma noção. Impõe-se-nos achar o equilíbrio entre os extremos condenáveis do exagêro. E' claro que nas séries mais adiantadas os exercícios um pouco mais longos são bem-aceitos, mas para as classes mais atrasadas a nossa escolha deve recair sôbre os exercícios de menor duração.

Propõe Thorndike, para exercícios de treino, a seguinte distribuição, que êle reputa a melhor:

10	exercícios	de	20	minutos	na	1.ª semana
10	"	"	10	"	"	2.ª "
10	"	"	5	"	"	3.ª "
5	"	"	10	"	"	4.ª "
1	"	"	10	"		nos meses seguintes.

No intervalo fixado por Thorndike não foi incluído o tempo gasto com a cópia. Os minutos são consagrados ùnicamente à resolução.

g) *Quanto à variedade de técnica e de tipos* — Deve-se variar a técnica de trabalho, ou o tipo de exercícios; a variedade evita a monotonia, favorece a aprendizagem e torna-a mais atraente.

"*A repetição de uma aprendizagem não a melhora, necessàriamente.*

De fato, se se desse justamente a mesma coisa de cada vez, o aluno não poderia melhorar".

São infinitos os modos de conseguirmos essa variação. Citaremos apenas alguns exemplos:

— Dar o trabalho no quadro negro.
— Dar o trabalho escrito no caderno.
— Fornecer o trabalho impresso para o aluno resolver.
— Fazer uns alunos proporem questões a outros.
— Usar o sistema de perguntas.
— Mandar completar lacunas.
— Mandar escolher a resposta certa dentre uma lista.

E' fora de dúvida que haverá inúmeras modalidades, de acôrdo com o assunto e a série escolar, as quais o professor habilidoso vai, aos poucos, descobrindo e criando.

h) *Quanto à motivação* — Os exercícios constituem uma atividade da turma e, como tal, devem ser

bem motivados, como ocorre, aliás, com todos os trabalhos escolares. Impor um exercício à classe não é o meio de conseguir os melhores resultados.

Às vêzes, a motivação pode surgir pela simples habilidade do professor em fazer a turma sentir a necessidade de fixar certos conhecimentos. Os exercícios podem-se seguir a uma noção nova, que, quando bem ministrada, lhes dará motivo; poderão, também, partir da unidade de trabalho, onde o professor encontrará inúmeras fontes de motivação.

3. Direção dos exercícios.

Proposto o exercício à turma, é necessário explicá-lo antes do início do trabalho e conseguir a atenção de tôdas as crianças. Se assim não se der, elas, muitas vêzes, não entenderão a tarefa proposta e perderão tempo improfìcuamente, resolvendo-a de forma incorreta. Além disto, essa falta de direção inicial vai aumentar o número de estudantes que precisarão de explicações do professor. Não poucas vêzes terá êle de esclarecer dúvidas idênticas formuladas por alunos diferentes. Não devemos esquecer que o exercício deve evitar o êrro, para fixar o certo.

4. Correção.

A correção pode ser feita pelo professor ou pelos próprios alunos, usando o quadro-negro, se necessário. Esta prática é a preferida para os exercícios sistematizados e pode obedecer a qualquer das formas abaixo:

I) A professôra chamará cada aluno para resolver uma questão.

II) A professôra, para economizar tempo, ou para assegurar maior clareza, resolverá as questões no quadro-negro, enquanto cada criança corrige o seu próprio exercício.

Tôda correção, entretanto, seja de que maneira fôr, precisa ser bem comentada e com a participação geral da turma, para que todos se mantenham interessados e a correção auxilie, realmente, a aprendizagem.

E' necessário chamar a atenção para a forma correta e não mostrar a forma errada, evitando, assim, que o êrro se fixe.

Quando a verificação é feita no quadro-negro, o professor precisa ver, pelo menos de vez em quando, os trabalhos dos alunos. Não com a preocupação de emendar erros que isso nada adiantaria; o trabalho mais lucrativo de correção é o que é feito à vista do aluno. Apresenta êste método, de revisão dos cadernos, dentre outras, as seguintes vantagens:

O aluno tem prazer em que o seu caderno seja visto pela professôra.

O professor avaliará melhor os progressos que o aluno vem fazendo, em caligrafia, ordem, asseio e aprendizagem.

A correção posterior do trabalho pelo professor justifica-se na 1.ª série ou quando se trata de uma pequena prova, isto é, um trabalho de verificação.

Não é preciso lembrar que, durante a "direção dos exercícios", o professor procura corrigir individualmente, e no momento de ocorrência, as falhas apresentadas pelos alunos.

5. Trabalhos em casa.

Há quem condene os *trabalhos para casa*, há quem abuse dêles. O melhor é usá-los com parcimônia.

Os alunos, em geral, gostam de ter com que se ocupar em casa; gostam de mostrar aos colegas os exercícios que o professor passou. As crianças, geralmente, acham que são de turmas adiantadas quando têm deveres escolares a cumprir em casa. Os pais, por sua vez, gostam de sentir que seus filhos têm o que estudar, têm o que fazer.

Nas tarefas para casa precisamos atender, porém, a várias condições:

a) O trabalho deve ter continuidade com o trabalho escolar e não ser uma tarefa completamente desligada da unidade de trabalho que se está desenvolvendo.

b) Deve ter tôdas as condições requeridas para os trabalhos de classe.

c) Deve-se levar em conta o tempo de que os alunos dispõem para realizar os exercícios e o tempo que o professor empregará para corrigi-los. E' preciso evitar as tarefas demasiadas. Lembremo-nos de que muitas crianças trabalham em casa e não nos esqueçamos, também, de que elas precisam ter tempo para brincar.

d) Os trabalhos de casa devem sofrer correção, comentada, como qualquer outro trabalho.

6. Organização das classes em grupos.

O trabalho em grupo é prática bastante em voga em nosso meio; o trabalho individual, supletivo, com os mais atrasados é, também, comum. A combinação da distribuição em grupos com a individualização do ensino, dando também oportunidade aos mais capazes de progredir quanto possam, e não criando situação especial, deprimente, para os menos capazes, é nova, entre nós.

Entretanto, se o professor tiver oportunidade de experimentar, verá, em breve, que seu trabalho tornou-se menor e o rendimento da classe muito maior.

Nem tôdas as crianças têm a mesma velocidade de aprendizagem; as dificuldades encontradas por umas são diferentes das encontradas por outras; o professor precisa conhecer a situação de cada indivíduo em particular; cada aluno, em determinadas situações, precisa da atenção individual do professor.

Dividindo a classe em três ou quatro grupos, de 10 a 12 alunos, de acôrdo com seu adiantamento (sem que os alunos o saibam), o professor pode obter grupos mais ou menos homogêneos. Dois ou três grupos podem estar ocupados em tarefas adequadas aos seus níveis e nas quais possam trabalhar sòzinhos, enquanto outro grupo, disposto junto à mesa do professor, recebe explicações suplementares sôbre dificuldades que apresentam, e treino especial sôbre os seus pontos fracos.

Os trabalhos destinados aos outros grupos sofrem, em seguida, correção, usando o quadro-negro, ou por meio de discussão oral.

Variando os grupos que trabalham diretamente com o professor, todos recebem igual atenção individual, uma vez que num grupo de 10 a 12 todos têm oportunidades de atenção individual, o que não acontece em turmas de 30 e 40 alunos ou mais.

Usando o tipo de material que propusemos no capítulo III, mesmo os grupos que estão trabalhando sòzinhos podem receber tarefas adequadas aos seus níveis de adiantamento, uma vez que não é necessário determinar exercícios iguais para todos. O uso de tal material ainda poupa ao professor o trabalho de transcrever exercícios no quadro-negro, uma vez que bastará distribuir às crianças os cartões impressos, para trabalharem de acôrdo com êles.

CAPÍTULO VI — FIXAÇÃO DA APRENDIZAGEM: JOGOS DIDÁTICOS

1. Objetivo.

O jôgo didático serve para fixação ou treino da aprendizagem. E' uma variedade de exercício, que apresenta motivação em si mesma, pelo seu objetivo lúdico.

E' êste objetivo, consciente da parte da criança, que o torna tão valioso na fixação da aprendizagem. Do ponto de vista do professor, entretanto, o objetivo da atividade não é apenas o alvo a que o jôgo se propõe, isto é, ver o cavalo que chega primeiro ao fim da corrida, ou formar um desenho, ou armar um dominó, ou conquistar a bandeira da vitória, etc. Do ponto de vista do professor, a criança deve ter treinado alguma noção, ao fim do jôgo, tendo melhorado a sua aprendizagem.

Torna-se, pois, necessário planejar o jôgo didático de forma a que ambos os objetivos sejam atingidos: é preciso que êle não redunde em tarefa para a criança; não será, também, apenas uma brincadeira; se êle, embora exigindo esfôrço mental, não tiver concorrido para a aprendizagem, também não terá sido útil.

Sendo um jôgo didático, o acaso, a sorte não devem concorrer para a vitória; esta deve ser conquistada pelo saber.

O *objetivo didático* deve ser bastante definido, treinando apenas uma noção; por exemplo: adições sem reservas; cálculo de área do retângulo e do quadrado;

conversão de frações ordinárias, etc. Justamente a vantagem do jôgo é permitir que, sem cansar, muitas questões sôbre o mesmo assunto sejam treinadas. Excepcionalmente, o jôgo pode ser dado com objetivo de revisão da matéria, abrangendo várias noções.

2. **Jogadores.**

Todos os alunos devem jogar. Mesmo numa turma de 40 ou mais, tôdas as crianças devem tomar parte no jôgo, ativamente.

3. **Duração.**

O jôgo deve ser econômico em tempo (duração máxima de 20 a 30 minutos), do contrário os próprios jogadores sentir-se-ão enfadados, esperando que chegue a sua vez de jogar ou aguardando que o jôgo termine. Sempre que mais de um jogador estiver participando ao mesmo tempo, melhor. Ainda, do ponto de vista da aprendizagem, é preferível que as questões propostas a um jogador aproveitem aos demais. O uso do quadro-negro, com 5 ou 6 jogadores simultâneamente fazendo as suas operações para dar a sua contribuição ao jôgo, é o melhor. Tôda a turma aproveita e em 5 ou 6 etapas o jôgo está concluído.

4. **Tipos de jogos.**

A — O jôgo *individual* é aquêle em que a criança joga consigo mesma; dêsse tipo são os jogos de armar figuras, por exemplo. Quando cada uma das crianças de uma classe recebe uma figura para armar, o jôgo é *individual, em situação coletiva.*

B — O *jôgo coletivo* é aquêle de que todos os jogadores participam para atingir ao mesmo objetivo lúdico. Ex.: armar um dominó, recebendo cada criança

uma pedrinha. Neste exemplo dado, o jôgo é *sem competição.* No *jôgo de competição de partidos* as crianças estão distribuídas em grupos, disputando uma vitória para o seu partido. Ex.: uma corrida de cavalos, com obstáculo; cada partido corre com um cavalo; cada jogador vence um dos obstáculos, que é a operação. Pode haver *competição individual,* quando é um aluno o vencedor; são os concursos e campeonatos. Os jogos coletivos, ao invés de ocupar *tôda uma classe,* exigem, às vêzes, apenas um *pequeno grupo.*

5. **Material para jogos.**

Podem-se fazer jogos com *material especial,* alguns mais fáceis outros mais requintados. Entretanto, mesmo os jogos sem material especial, como os *jogos de quadro-negro,* ou os *jogos ao ar livre,* usando bolas, bandeirinhas, etc., são de grande utilidade. Material comum aos jogos de azar deve ser evitado, para impedir a iniciação no vício: dados, cartas, etc.

6. **Disciplina nos jogos.**

O jôgo deve desenrolar-se com disciplina, para seu êxito, havendo economia de tempo, boa aprendizagem, e facilitando ao juiz decisões justas. Naturalmente que a disciplina é bem mais livre do que em outras atividades.

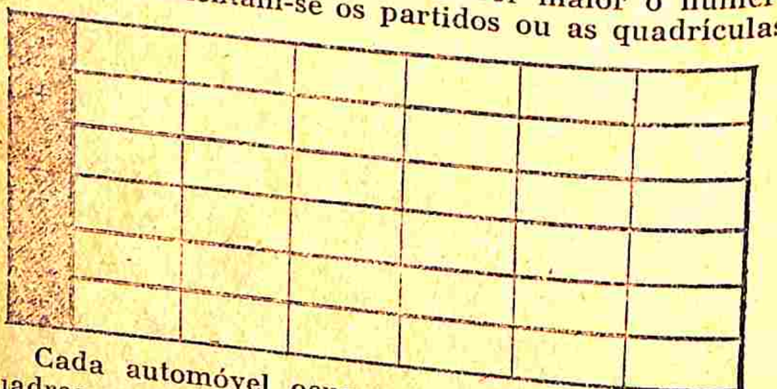
7. **Direção dos jogos.**

A explicação da "técnica do jôgo" — isto é, da maneira de jogar, suas regras e penalidades, — deve ser feita claramente ao início, para evitar confusões no seu decorrer, devidas à falta de compreensão. Às vêzes, pode-se jogar um pouco a título de exemplificação, para evitar dúvidas. Dentre as penalidades, as referentes à disciplina devem ser logo combinadas; uma vez estabelecidas, devem ser respeitadas, ou o juiz perderá sua autoridade.

SUGESTÕES PRÁTICAS

Daremos aqui alguns exemplos de jogos que não demandam material de difícil confecção e que podem ser usados para treinos diversos:

1. *Corrida de automóveis* — Cada partido disputa a corrida com um automóvel (adquirido em casas de brinquedos; cavalinhos de corrida também servem). Numa fôlha de cartolina ou papelão do tamanho da mesa da professôra, traça-se uma pista, circular ou retangular, dividida em setores ou quadras. O exemplo abaixo dá para 36 jogadores; se fôr maior o número de alunos, aumentam-se os partidos ou as quadrículas.



Cada automóvel ocupa, antes do jôgo, uma das quadras escuras e deve correr na sua faixa. Ganha a corrida o partido que chegar ao final. Se o professor quiser, poderá fazer uma faixa de cada côr.

Cada partido recebe cartões numerados de 1 a 6 ou mais, conforme fôr o número de quadrículas de cada faixa. Cada cartão traz uma operação, de acôrdo

com o objetivo do jôgo. As operações são tôdas diferentes, mas eqüivalentes em dificuldade. *O aluno não escreverá no cartão, mas sim no bloco de rascunho.*

Distribuídos os cartões por todos, ao mesmo tempo, todos farão as suas operações na carteira. Então, o professor chamará: *n.º 1*. Todos os alunos que têm cartão n.º 1 virão ao quadro ao mesmo tempo, e farão a sua operação novamente à vista da classe. Aquêles que acertarem, farão seus carros entrarem na 1.ª quadrícula. Se algum errar deverá repetir a operação, com auxílio do professor, mas não fará o carro andar. Procede-se da mesma maneira com o n.º 2, n.º 3 até o fim.

Observações: Note-se nesse jôgo que:

a) O treino aproveita a todos, porque todos vêem as operações serem feitas no quadro-negro, em situação interessada.

b) Cada criança treina a mesma operação duas vêzes: uma no papel e outra no quadro-negro.

c) O jôgo desenvolve-se com grande economia de tempo, pois que:

I) Em 6 etapas, uma turma de 30 a 42 alunos pode concluí-lo, desde que o quadro-negro comporte 5, 6 ou 7 alunos de uma só vez.

II) As crianças não demoram muito a fazer a operação, pois já a resolveram no papel, tôdas simultâneamente.

III) Alguma ajuda que um jogador tenha dado a outro, nas carteiras, não é prejudicial, mas, ao contrário, concorre para a aprendizagem, pois a criança deve resolver a operação, sòzinha, no quadro-negro. Note-se que o jôgo não é atividade de verificação, mas, sim de fixação da aprendizagem.

d) O mesmo jôgo pode ser jogado várias vêzes com o mesmo material, variando-se os partidos; cada criança receberá, assim, uma operação diferente.

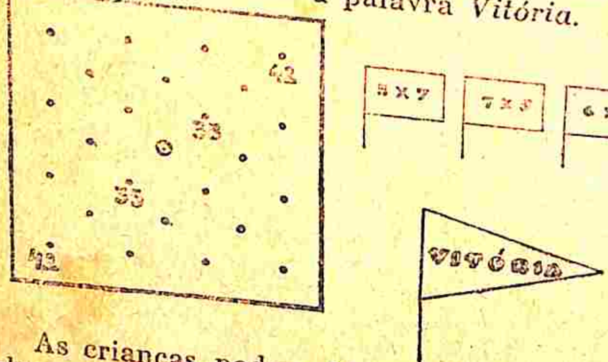
e) Fazendo novos cartões (o que não demanda maior tempo do que um exercício comum) o professor poderá, com o mesmo material, treinar pràticamente qualquer noção de matemática, e, até, fazer exercício intensivo de resolução de problemas.

f) As questões usadas no jôgo podem ser aproveitadas para exercícios sistematizados de treino, dos quais tôda a turma participe ao mesmo tempo.

2. *Conquista da vitória* — Num tabuleiro de papelão, de 40cm × 40cm aproximadamente, fazem-se pequenos furos, onde se possam adaptar palitos. Ao lado de cada furo, há um número, correspondente aos resultados das combinações fundamentais de uma das operações. Bandeirinhas de 2 côres (para 2 partidos), feitas com um retângulo de papel lustroso, tendo como mastro um palito, apresentam as combinações correspondentes aos resultados do tabuleiro.

De acôrdo com os atuais programas do D. F., com 55 bandeiras treinam-se tôdas as combinações exigidas para a 2.ª série (produtos de 1 até 30).

Duas bandeiras maiores, cada uma da côr de um partido, trazem escrita a palavra *Vitória*.



As crianças podem ficar nas suas carteiras e receber as bandeirinhas. Chamadas pelos seus próprios

nomes, cada uma deve ler a combinação que lhe coube e dizer o seu resultado ou escrevê-lo no quadro-negro, colocando a bandeirinha no tabuleiro, no lugar respectivo.

O partido que colocar tôdas ou o maior número de bandeirinhas terá o direito de fincar a bandeira da Vitória. Se houver empate, as duas bandeiras serão "desfraldadas". As bandeiras onde houve erros são separadas para treino posterior da classe.

Observação:

a) As bandeirinhas são distribuídas prèviamente às crianças, para evitar a ansiedade provocada pelo desconhecimento da bandeira que lhe vai caber, ansiedade que, não raro, provoca nervosismo e erros. Assim, há tempo para pensar, há calma e, além disso, o jôgo desenvolve-se mais depressa; as respostas são rápidas e não há tempo perdido em escolher bandeirinhas. Se algum colega ensinar ao outro, por exemplo, que 6 × 5 são 30, não houve prejuízo algum, pois justamente o objetivo do jôgo é a aprendizagem, em situação interessada. A criança fixará melhor essa combinação 6 × 5 por essa forma do que por qualquer outra que se possa imaginar.

b) A confecção do material é surpreendentemente fácil, uma vez que só o tabuleiro é feito exclusivamente pelo professor. As bandeirinhas podem ser cortadas e coladas por qualquer aluno desde o 1.º ano, em aula de Trabalhos Manuais.

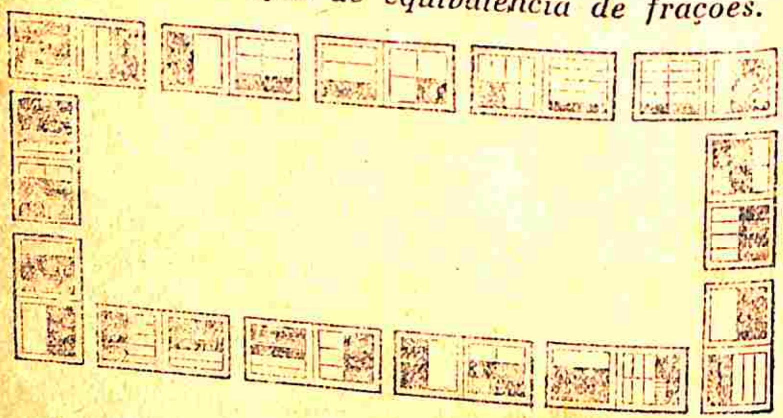
c) Variando as bandeirinhas, quaisquer questões, cujos resultados correspondem ao do tabuleiro, podem ser utilizadas para treino.

d) As questões de um partido devem ser diferentes, mas ter dificuldade eqüivalente à do outro.

e) O jôgo pode ser jogado muitas vêzes, usando o mesmo material, sempre com interêsse e aprendizagem, pois dificilmente as crianças receberiam as mesmas bandeiras.

3. *Dominó*: (em grupos)

Objetivo: *Fixação de equivalência de frações.*



As pedras são distribuídas às crianças, um dominó para cada grupo. Podem-se atribuir pontos ao grupo que primeiro completar o seu dominó. A criança deve ler, em voz alta, para os companheiros de grupo, a fração que completa o dominó, bem como a seguinte. Pode-se combinar ler a fração de cada quadrado que está em branco:

$$\frac{2}{10},\ \frac{2}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{4}{6},\ \text{etc.}$$

4. *Chamada da roda* (ao ar livre)

Crianças formando roda com cartões numerados, pregados na blusa, por "clips".

Uma, destacada para iniciar o jôgo, vai para o centro e grita, por exemplo: 42 ÷ 7 (se foi combinado treinar divisão), correndo, em seguida. Tôdas as crianças que têm o n.º 6 devem persegui-la. A que a alcançar virá para o centro e citará uma operação que dê outro resultado.

5. *Colhêr mangas* — Duas mangueiras esquematizadas em cartolina, com as mangas recortadas, sôltas, apenas afixadas à mangueira, enfiando o "cabinho" da manga num talho da cartolina. Atrás de cada manga está indicada uma redução de sistema métrico. Cada mangueira cabe a um partido. A criança "colhe" a manga, lendo a redução indicada atrás e resolvendo-a, por escrito, no quadro-negro, ou oralmente. Se errar, deve repor a manga. Jogam duas crianças ao mesmo tempo, uma de cada partido. Ganha aquêle que tiver colhido mais mangas. Em lugar de reduções do sistema métrico, pode ser usada qualquer outra noção para treino.

CAPÍTULO VII — O TREINO DO RACIOCÍNIO E OS PROBLEMAS DE MATEMÁTICA

1. O treino do raciocínio não se faz apenas através dos problemas de Matemática; pelo contrário, qualquer ensino, de qualquer matéria, deve levar sempre a criança a pensar, a refletir. Já vimos que, ao dar uma noção nova de cálculo, devemos levar a criança a "redescobri-la"; essa redescoberta faz-se à custa de raciocínio.

2. O problema de matemática exige um raciocínio envolvendo dados numéricos ou relações matemáticas; forma, ainda, métodos de raciocínio que podem ser úteis em situações fora da Matemática.

3. E' preciso, entretanto, que, resolvendo um problema de Matemática, esteja a criança realmente raciocinando; isso depende muito do professor; ensinar a raciocinar exige grande cuidado, para não mecanizar formas de resolução de problemas-tipo, as quais nem desenvolvem os métodos de pensamento, em geral, nem habilitam a criança a resolver outros problemas de Matemática.

4. **Planejamento do problema.**

O primeiro cuidado do professor consiste no *planejamento do problema*, isto é, na sua escolha e organização. O melhor problema, sem dúvida, é aquêle que resolve uma situação ocorrida na classe, em relação à unidade de trabalho ou projeto, ou em relação a qualquer outra atividade, como, por exemplo, compra de material, despesa de uma excursão, etc. A professôra desperta a atenção das crianças para o problema presente e leva-as a redigi-lo em colaboração, no quadro-negro, para, então, resolvê-lo. Mesmo êsse problema, assim tão real, pode e deve ser previsto pelo professor, ao pensar a sua aula, para aquêle dia.

Os livros de exercícios podem apresentar-nos sugestões para problemas, e devem ser, para isso, consultados. Entretanto, ao escolher um dos livros ou ao organizá-lo, é preciso pensar:

a) Êsse problema *interessará* aos meus alunos? Tem relação com a sua vida infantil? E' relativo à vida adulta mas tem, realmente, probabilidades de ocorrer? E', em suma, um problema de *vida real?* Constituirá uma atividade interessante para os meus alunos?

b) E' adequado à minha classe e corresponde às necessidades dos meus alunos:

— quanto às noções de Matemática cujo treino envolve?
— quanto à dificuldade de raciocínio?
— quanto à dificuldade dos cálculos?
— quanto ao número de cálculos?

Convém, aqui, acentuar que não é o problema longo nem complicado o que mais satisfaz. E' preciso que êle jogue com as noções de Matemática que vão sendo ensinadas, não só para fixá-las, como também porque uma noção de Matemática só tem valor para a aprendizagem se ajuda a resolver problemas que a vida oferece; é necessário que essa mesma noção se apresente em diferentes situações; assim, por exemplo, problemas sôbre subtração devem ser planejados de maneira a apresentar não só a situação de resto, como também a de excesso e a de diferença.

O problema serve, ainda, ao treino de raciocínio e não do cálculo, logo os cálculos longos devem ser abandonados, pois desviariam a atenção da criança do

raciocínio para o cálculo; além de tudo, logo de início o interêsse de uma criança pela resolução de um problema recrudesce quando ela percebe que, para vencê-lo, tem que fazer cálculos como, por ex.: 4,3502 × × 0,9857. A fadiga na resolução de longas ou muitas operações envolvidas num problema é, muitas vêzes, a responsável pelo insucesso de crianças no ataque de um problema.

c) A linguagem em que está redigido o problema é clara, correta, adequada, simples?

d) Em relação aos problemas anteriores dados em classe, há uma variedade de tipos?

5. Tipos de problemas.

Em verdade, o raciocínio deve ser treinado, em situações diferentes, e o próprio tipo do problema oferece uma forma dessa variedade; além disso, cada tipo satisfaz melhor a certos objetivos do que outros (*).

Naturalmente que um problema, às vêzes, apresenta características de mais de um tipo, ao mesmo tempo. Vejamos alguns tipos, embora cada professor possa sempre imaginar outros tipos novos.

I — *Problema comum da vida real* — E' o tipo mais simples de problema, e o mais comumente usado na escola; é de fácil redação.

II — *Problema-historieta* — Interessa muito à criança, mas não devemos usá-lo demais, pois apresenta dois inconvenientes: o primeiro é tornar-se, muitas vêzes, demasiado longo; o segundo é levar a criança a uma leitura pouco meditada, como é a leitura empregada em historietas; assim, lido o problema uma vez, ela não é capaz de resolvê-lo, geralmente, sem uma outra leitura, dessa vez meditada.

(*) Vide exemplificação de cada tipo na parte de Sugestões Práticas.

III — *Problema sem números* — E' de grande utilidade, pois não envolve cálculos; deve ser dado oralmente e sua resolução será, também, oral, podendo ser permitida resposta por escrito, se assim convier. Há economia de tempo, proporcionando grande treino de raciocínio, através de muitos problemas, sem cansaço; agrada muito às crianças; pode ser usado desde o primeiro ano.

IV — *Problema incompleto* (quanto aos dados ou quanto à pergunta) — São tais problemas de grande utilidade, pois é preciso que a criança entenda, realmente, as relações entre os dados do problema, para que descubra o que falta. Além disso, essa situação de "adivinhar" dá ao problema uma motivação intrínseca.

V — *Problemas em série* — Diz-se dos problemas que formam um conjunto, sendo necessário resolver os primeiros ou valer-se dos dados dêstes para solucionar os últimos. Muitas vêzes, reproduzem uma historieta.

VI — *Problema sugerido por gravura* — E' formulado, a princípio, sob a orientação do professor, que procura apontar os dados numéricos que aparecem numa gravura qualquer, às vêzes a mesma que serviu de motivo para redação; pràticamente, qualquer gravura serve de motivo a um problema; até uma paisagem de praia, por exemplo, pode dar motivo a questões sôbre extensão da praia, sôbre natação, etc. A criança gosta imensamente de inventar problemas tendo gravuras por motivo; e, naturalmente, se ela sabe arranjar os dados de maneira a criar uma situação problemática, evidentemente está raciocinando; formulado o problema, sua resolução será fácil, pelo menos para aquêles que o inventaram. Mesmo na 1.ª série, a criança já é capaz de inventar problemas dessa natureza.

VII — *Problema para vestir* — E' o nome comum dado a problemas a serem inventados pela criança, tendo como ponto de partida os cálculos a fazer, e que são apresentados pela professôra; da 2.ª série em diante são muito úteis, desenvolvem o raciocínio; à vista

de um cálculo como, por exemplo, $2 + 3 = 5$, a criança imagina um problema que possa ser resolvido por esta operação. Pode-se, também, mandar inventar um problema entrando: crianças, fazenda, ovos, por exemplo.

VIII — *Problema para encontrar o dado desnecessário* — Não deve ser dado de permeio com outros, indiferentemente, mas sempre com o objetivo, conhecido pela criança, de encontrar o dado desnecessário; é, realmente, um treino ótimo de raciocínio e, desde que a criança reconhece que não necessita de determinado dado para resolver um problema, é porque sabe jogar com os demais para solucionar a questão. Ademais, nos problemas que surgem na vida, os dados necessários e os desnecessários aparecem em conjunto, e é preciso separar os que realmente interessam para formular o nosso problema.

6. **Problemas orais** (Com cálculo escrito, com a resposta escrita ou com cálculo e resposta orais).

Tais problemas são muito usados para cálculo mental, em qualquer série; é fora de dúvida que muitos dos tipos de problemas apresentados anteriormente podem e, até, devem, ser dados oralmente.

Na 1.ª série, os problemas orais fazem-se necessários, uma vez que a criança ainda não pode lê-los; ao fim do ano, podem ser substituídos por problemas escritos. Tais problemas devem envolver apenas uma operação, sua linguagem é muito simples: Usando a própria linguagem da criança, naturalmente que corretamente, o professor formulará oralmente o problema surgido na classe, e sua resolução será feita tanto objetivamente (usando material de objetivação ou desenhos), como por cálculo no quadro-negro ou cálculo individual no caderno. O problema só terá o enunciado escrito quando, ao fim do ano, a criança já estiver lendo. Deve lidar com elementos tirados do próprio meio escolar ou familiar (cadernos, cadeiras, alunos, notas, viagem para a escola, pessoas da família, brinquedos, etc.).

7. **Motivação do problema.**

Se êle surge em classe, de uma situação real, do próprio andamento da unidade de trabalho, muitas vêzes, já estará motivado; do contrário, é preciso pensar que motivo, que razão lhe dar, de maneira a que as crianças o desejem; em certas ocasiões, um problema anterior, realizado com prazer, correspondendo a uma necessidade imediata, será o motivo para o treino de outros, desde que o professor, hàbilmente, leve a classe a isso. E' necessário desenvolver grande treino, e não vamos, por isso, deixar que a única motivação em nossa classe seja a condicionada pelo aparecimento de situações ocasionais.

8. **Redação do problema no quadro-negro.**

Muitos dos problemas serão enunciados apenas oralmente, outros tantos pedirão um enunciado escrito o qual, quando prèviamente sentido o problema, será feito em colaboração com as crianças. Constitui ótimo exercício de redação e ajuda a criança a compreender a linguagem do autor ao apresentar, em livros, problemas já formulados.

Entretanto, é necessário que, muitas vêzes, o enunciado seja apresentado por escrito, para levar o aluno a lê-lo e compreendê-lo.

A *cópia* do problema deve ser intensivamente evitada, porque constitui grande perda de tempo e desnecessário fator de fadiga.

9. **Leitura do problema.**

Ensinar o tipo de leitura usada no problema é tarefa do professor. A leitura silenciosa necessária ao

problema é completamente diferente da leitura empregada para histórias ou para, até, assuntos de estudo em ciências físicas ou sociais. Difere ainda grandemente da leitura oral.

Não vamos ensinar às crianças a ler histórias como se fôssem problemas, da mesma maneira que não podemos permitir que leiam problemas coom se fôssem histórias.

A leitura do problema é meditada, vagarosa, com uma fixação de olhos aproximadamente para cada palavra, pois tôdas são importantes; há ainda a leitura dos números, que constituem um bloco com muitas fixações. O movimento dos olhos, entretanto, deve ser feito sempre da esquerda para a direita, sem voltar atrás; apenas nos números permitem-se regressões. Geralmente, é aconselhável fazer uma primeira leitura para apreender o sentido, sem grande preocupação com os números; numa segunda leitura, dar-se-á atenção aos números. Na leitura silenciosa dos problemas há certo grau de vocalização.

O professor deve dar o exemplo da leitura aconselhável, fazendo-a oral e pausadamente, para que o aluno compreenda o mecanismo a usar na sua leitura silenciosa. A leitura oral por um aluno, depois do professor, é sempre valiosa. Ao proceder à leitura silenciosa, o professor deve recomendar sempre de que maneira fazê-la. E' fora de dúvida que a leitura silenciosa faz-se antes da leitura oral, pois, uma vez feita esta, a primeira não mais terá razão de ser. Muitas vêzes, no entanto, até que seja adquirido o treino da leitura silenciosa aconselhável, pode-se levar a criança a uma nova leitura silenciosa, a fim de que ela mesma perceba que pode obter, dessa nova leitura, todo o significado que o problema apresentava.

Todos os professôres conhecem casos de alunos que raciocinam bem, que são ótimos leitores de textos recreativos, mas incapazes de resolver um problema que não lhes seja apresentado oralmente. Trata-se simplesmente de falha no mecanismo de leitura especial para problemas.

10. Análise oral do problema.

Qualquer que seja o problema, quaisquer as noções com que lide ou as situações que apresente, a única maneira de resolvê-lo é estabelecendo um método que se aplique indiferentemente a todos. Êsse método é o verdadeiro raciocínio aplicado à Matemática. O método é único e eficaz, porque habilita, realmente, a pensar e a atacar qualquer problema novo.

A nossa escola tem enchido as cabeças das nossas crianças com problemas-tipos, isto é, problemas que apresentam certas situações estandartizadas; para treino, aproveita-se o mesmo enunciado, a mesma redação, mudam-se os dados, até a criança aprender, isto é, mecanizar a solução. Como a própria definição de problema é a de situação nova, não há problemas-tipos em número suficiente para apresentar tôdas as situações da vida, e as crianças ensinadas por tal processo falham fora da escola e, inúmeras vêzes, dentro da própria escola, desde que os problemas apresentados numa prova fujam aos "tipos" solucionados em classe.

A não ser quando se tratar de verificação, o problema apresentado em aula deve ser antes oralmente analisado, com a colaboração de alunos e professor, para, então, ser resolvido por escrito. A análise escrita importa em perda de tempo.

Através dessa *análise oral*, sempre rigidamente orientada pelo professor, para que o aluno forme o seu método de ataque a qualquer problema, é que a criança aprende, realmente, a solucioná-lo. A ordem que se segue nessa análise não é indiferente, como não é, tampouco a ordem que será seguida na sua resolução escrita.

a) Que pede o problema ? Há alguma coisa que queremos encontrar e, portanto, precisamos saber que

coisa é esta, antes de nos entregarmos à tarefa de procurá-la. Geralmente, é a pergunta quem nos diz isso, portanto devemos começar por compreendê-la.

b) Que precisaríamos saber, para resolver tal problema?

c) Que nos diz êle? Que dados nos dá para ajudar a procurar o que êle pede?

d) Que relação há entre êsses dados, para nos habilitar a encontrar o que procuramos?

Há algumas questões que ainda precisam ser resolvidas antes de chegarmos à fase final? Quais são? Em que ordem podem ser resolvidas?

e) Como podemos, então, organizar a nossa marcha para resolução?

f) Que resposta daremos ao problema? (E' preciso ler novamente a pergunta, para responder correta e adequadamente).

Exemplo:

Em nosso "Livro de Viagens", gastamos 25 fôlhas de papel a Cr$ 1,60 e a encadernação custará Cr$ 40,00. A professôra pagará 1/4 da despesa total. Com quanto deve concorrer cada uma das 40 crianças da classe?

a) O problema quer saber com que quantia cada criança concorrerá para a confecção do livro de classe.

b) Precisamos saber em quanto importa a despesa e quantas crianças concorrerão para pagá-la.

c) O problema diz:

— o preço de cada fôlha de papel e o número de fôlhas;
— o preço da encadernação;
— que a professôra concorrerá com 1/4 das despesas;
— que o restante será distribuído entre as crianças;
— o número de crianças.

d) — A despesa com o papel corresponderá ao preço de cada fôlha multiplicado pelo número de fôlhas;

— a despesa total será a despesa com o papel, acrescida da despesa com a encadernação;
— a professôra pagará a quarta parte do total;
— os alunos pagarão o restante, isto é, a despesa total menos a parte da professôra;
— a parte restante será distribuída igualmente entre os 40 alunos para encontrar a parte de cada um.

e) — Calcular a despesa com o papel;

— calcular a despesa total;
— calcular a parte da professôra;
— calcular a parte dos alunos;
— calcular a parte de cada aluno.

f) Com quanto deve concorrer cada uma das 40 crianças da classe? (ler novamente a pergunta):

Cada uma das 40 crianças da classe deve concorrer com ..... ou: Cada criança deve concorrer com ..... ou: A parte de cada criança serão ..... cruzeiros.

11. **Resolução do problema, em colaboração, no quadro-negro.**

Para turmas mais atrasadas ou com maior dificuldade em solução de problemas, aconselha-se a usar com maior intensidade o quadro-negro para solução de problemas.

Aqui, é preciso formar os seguintes hábitos:

a) Dividir o quadro-negro, parte para a solução explicada e parte para os cálculos:

Solução	Cálculos

Resposta:

b) Redigir primeiramente cada fase da solução e indicar o cálculo respectivo, para, então, efetuá-lo na parte destinada a isso; em seguida, escrever o resultado ao lado da operação indicada.

c) Conferir, mentalmente, cada cálculo efetuado, antes de dá-lo por terminado;

d) Dispor bem os cálculos, escrever os algarismos legìvelmente;

e) Ler as perguntas, antes de escrever a resposta, e fazer corretamente a redação desta. (*)

Tais hábitos são necessários para evitar erros devidos à má disposição, ilegibilidade, falta de ordem nas operações; além disso, primeiro se pensa o que se vai encontrar, para, então, efetuar a operação; é preciso colocar o resultado imediatamente, a fim de evitar confusões, escrevendo resultados de umas operações em outras ou explicando uma solução e indicando cálculo que pertence a outra fase do problema. (Ex.: Sob a frase "Despesa total" indicar o cálculo referente à parte que cabe a cada criança). Além disso, os cálculos apresentam, muitas vêzes, certos absurdos que seriam evitados por uma verificação rápida; às vêzes, bastaria ver, ràpidamente, se o resultado da operação seria possível ou não. (Ex.: Cr$ 40,00 ÷ 40 = Cr$ 150,00).

Tais hábitos devem ser, realmente, formados, para que se obtenha êxito, e a criança deve conhecer a razão de se lhe pedir a obediência a tais normas de ação, pois a compreensão do *porque* de um hábito ajuda a formá-lo.

(*) A resposta aos problemas apresenta-se, muitas vêzes, inteiramente disparatada, em relação à pergunta (O problema pede o lucro e a criança responde em têrmos de preço, quantidade, etc.).

12. Resolução individual do problema.

Feita a leitura e a análise oral, a professôra pode levar os alunos a resolvê-lo individualmente, ao invés de fazê-lo em colaboração, recomendando tudo o que se leva em conta no problema resolvido em colaboração:

— Boa disposição da solução e dos cálculos;
— Legibilidade de palavras e números;
— Boa redação da solução;
— Conveniente indicação dos cálculos;
— Resolução e verificação dos cálculos que não puderam ser feitos mentalmente;
— Redação da resposta, em frase completa, após reler a pergunta.

13. Correção do problema.

Se o trabalho é individual, há necessidade de correção. Esta será feita no quadro-negro, pela professôra ou um aluno, comentando cada parte e procurando elucidar as dúvidas apresentadas; cada criança corrige o próprio trabalho.

Entretanto, a *atitude do professor*, durante a resolução, deve ser a de atender aos alunos, individualmente, solvendo as suas dificuldades, a fim de afastá-las no momento em que surgem. Durante a correção coletiva, que se segue, deve procurar a participação dos alunos, principalmente dos mais tímidos ou atrasados.

14. Progressivamente, os alunos devem ser levados a dispensar a leitura oral do problema e a restringir a sua análise oral, habilitando-se a resolvê-los com independência. Forçar o desenvolvimento das crianças até essa fase, antes de estarem preparadas para isso, seria trabalho inútil. Enquanto tal não fôr pos-

sível, mesmo os problemas para resolver em casa devem ser prèviamente analisados em classe.

15. Vocabulário usado nos problemas.

Há um pequeno vocabulário que diz respeito a noções de aritmética ou problemas dessa matéria, e cujo desconhecimento ou conhecimento imperfeito é responsável por muitas falhas verificadas na solução de problemas. O significado de tais expressões precisa ser fixado, podendo mesmo ser objeto de exercício dos tipos usados nas aulas de linguagem. Abandonando as unidades do sistema métrico, cuja nomenclatura precisa ser conhecida, damos aqui uma lista de vocábulos ou expressões muito comuns. Naturalmente o professor poderá aumentá-la conforme julgar conveniente, para sua classe:

a (20 cruzeiros)
a pagar
a prazo, a prestações
a dinheiro, à vista
a varejo, no varejo varejista
abatimento
adicionar, adição
algarismo
altura
anual, anualmente, por ano
área
atacado, atacadista, por atacado
caber a
cada
capital
centésima parte, décima parte, etc.
cociente
coluna
comissão
compra, comprador
comprimento
conter, conteúdo
de fundo, de profundidade, de lado
de entrada
despesa
diária, diário, dìariamente, por dia
diferença
dimensões, distância
dôbro, triplo, etc.
em prestações mensais, etc.
emprestar, tomar emprestado, empréstimo
encomenda, encomendar, encomenda postal

espaço
espessura
excesso, de quanto excede
fileira
fração
freguês
ganhar
hipoteca, hipotecar
inverter
juntar
juros
largura
liquidação
lucro, lucrar, de lucro
medir, medida
média, em média
mensal, mensalmente, por mês
negociante, negócio
nota (de preços, papel-moeda)
número, número de vêzes
ordenado, salário, vencimentos
perda, perder
pêso, pesar
percentagem, porcentagem, por cento
por (20 cruzeiros)
porte (aéreo, aéreo registrado, etc.)
preço, lista de preços, tabelas de preços
preço de custo, preço de compra, preço de venda
prejuízo
produto
profundidade
proporção, em proporção, proporcionalmente
quantas vêzes maior? quantas vêzes menor?
quantia
quantidade
quinzena, por quinzena, quinzenalmente
quanto?
quanto — é maior do que?
quanto — é menor do que?
razão
recipiente
redução, remarcação
reservatório
resto, restante, restar
saldo
semanalmente, por semana
soma, somar
subtrair, subtração, subtraendo
tamanho
taxa, taxa de percentagem, taxa de juros
total
troca, trôco
valor
velocidade, velocidade média, velocidade uniforme
venda, vendedor
vencimento
— vêzes mais do que, — vêzes menos do que
— vêzes maior do que, — vêzes menor do que
— volume

16. **Erros em solução de problemas, cometidos pelas crianças do Distrito Federal nas provas finais** (segundo estudos de D. Isa Goulart Bueno).

Na 2.ª série:

a) Incompreensão do enunciado.
b) Decoração de soluções de "problemas-tipo" e sua aplicação em problemas completamente diferentes.
c) Explicação do resultado usando vocábulos inadequados. Ex.: "O lucro do lápis foi Cr$ 1,50 (trata-se de achar o preço).
d) Noções confusas de: quantia, quantidade, preço, lucro, trôco, prejuízo.

Na 3.ª série:

a) Incompreensão do que seja igualdade e desconhecimento de expressões que facilitam a representação de solução dos problemas:

Ex.: $2 \times 4 = 8 + 7 = 15$, ao invés de:

$$2 \times 4 = 8$$
$$8 + 7 = 15$$

ou:

$$2 \times 4 + 7 = 15$$

b) Desconhecimento das operações fundamentais.
c) Deficiência de expressões para esclarecer o raciocínio.
d) Desconhecimento das relações existentes entre os dados do problema.

Na 4.ª série:

a) Repete-se, em âmbito maior, o quadro esboçado na 2.ª série e na 3.ª. Ausência de solução raciocinada, ou uso de expressões como "quantia de quilômetros", "quantia de dias", etc.

b) Erros em:

— operações fundamentais;
— reduções dentro do sistema métrico;
— emprêgo da vírgula decimal;
— frações ordinárias;
— divisão de quantia (expressa em cruzeiros) por outra quantia ou número inteiro).

Na 5.ª *série:*

a) Erros dos tipos já apontados.
b) Confusões de quantidade e quantia, taxa e juros, percentagem e juros, abatimento e lucro.
c) Cancelamento dos zeros da parte decimal dos cruzeiros com o 100 do denominador, nos cálculos referentes a porcentagem e juros.

Todos êsses erros, como vemos, são conseqüentes de mal-orientado ensino, e as sugestões apresentadas anteriormente, se cuidadosamente seguidas, são capazes de evitá-los. Apenas os erros referentes a cálculos são anulados com o treino específico a respeito. Mesmo alguns dêles, entretanto, supondo que os problemas estejam bem formulados e adequados à classe, serão evitados formando o hábito de verificar as operações e de dispô-las convenientemente.

Conhecimento do vocabulário adequado, uso do tipo de leitura necessária ao problema, normas convenientes de raciocínio para atacar qualquer problema novo, sem decorar "soluções-tipo", correta redação de soluções e indicação de cálculos, leitura da pergunta antes de dar a resposta, corrigem todos os erros apresentados e já foram anteriormente considerados, nesse capítulo.

17. Medida do raciocínio, em Aritmética.

A medida da habilidade das crianças para resolver problemas numéricos também pode ser feita objetivamente.

Bonser e Stone foram os pioneiros dos testes de raciocínio, e hoje existem inúmeros testes dêsses gênero devidos a Wilson, Woody, Mc Call, etc.

Para organizar provas dessa natureza, precisamos:

1. Evitar que os problemas apresentados tenham cálculos difíceis ou demasiado longos, pois é o raciocínio que queremos medir.
2. Selecionar as noções de Matemática com que desejamos que os alunos joguem, na resolução dos problemas.
3. Dividir as dificuldades de maneira que cada problema envolva o uso de uma noção de Matemática.
4. Redigir problemas curtos, em linguagem simples e clara.
5. Graduar os problemas em ordem crescente de dificuldade, a fim de que os alunos se sintam encorajados para prosseguir.
6. Atribuir a cada problema um valor, variável de acôrdo com o grau de dificuldade.

Parece-nos, ainda, uma boa forma de medida de raciocínio, selecionar problemas que envolvam apenas uma operação e mandar que a criança indique, dentro dos parênteses, apenas com um sinal, a operação que resolve cada problema. Naturalmente, é preciso organizar uma prova que apresente várias operações. Provas de tal natureza permitem, até (usando grande número de problemas e fazendo a aplicação em várias turmas de várias séries escolares) estabelecer escalas de raciocínio para cada série escolar.

SUGESTÕES PRÁTICAS

I — Exemplos de tipos de problemas:

1) *Problema comum da vida real:* Hoje, o movimento de compra de material na cooperativa da escola, foi o seguinte: Cr$ 12,50 na 1.ª série, o dôbro dessa quantia na 2.ª série, Cr$ 23,00 na 3.ª série e Cr$ 45,00 na 4.ª série. Qual o total da venda de hoje?

2) *Problema-historieta* — Mário e Jorge estão planejando um passeio de bicicleta na ilha do Governador, e contam também com a companhia de seus primos José e Letícia. Os quatro têm treinado muito, pois pretendem apostar uma corrida. Letícia está treinando duas horas por dia, depois da escola, há duas semanas, e três horas aos domingos (já treinou 2 domingos). Mário e Jorge, há 3 semanas fazem exercícios diários de hora e meia; quanto a José, faz 5 semanas que anda de bicicleta uma hora por dia. Escreva, em ordem decrescente os nomes das crianças que apresentam maior número de horas de treino.

3) *Problemas sem números:*
a) Comprei tantos livros a tanto e paguei com uma nota de tanto. Quanto recebi de trôco?
Resposta — A quantia que deu, menos a despesa feita com os livros.
b) De um ninho com tantos passarinhos voaram tantos. Quantos ficaram?
Resposta — O número de pássaros que havia menos o número de pássaros que voaram.
4) *Problemas incompletos quanto aos dados:* (Pedir à criança que descubra o dado que falta e complete o problema, resolvendo-o):
a) Lia ganhou de seu padrinho Cr$ 50,00 para comprar uma boneca; foi à loja com mamãe e com-

prou-a. Que quantia sobrou do dinheiro que o padrinho lhe deu?
b) Um terreno retangular mede 15m de frente e . . . . Qual a sua área?

5) *Problema incompleto quanto à pergunta* (a criança deve dizer qual a pergunta que se faria no problema).
Mariazinha ganhou um lindo livro de histórias; ela está encantada porque é um livro grande, com 327 páginas, e ela já leu 289.

6) *Problemas em série:*
a) Lúcia faz anos hoje e, por isso, está muito contente; levantou-se agora, às 7 horas da manhã, para esperar a vovó, que vem almoçar ao meio-dia. Quantas horas faltam para vovó chegar?
b) Lúcia faz 8 anos. Qual a data do seu nascimento?
c) Tôda a família de Lúcia estará presente ao aniversário: a mamãe, o papai, 4 tios e tias, 5 primas e 4 avós. Quantos parentes tem Lúcia?
d) Cada parente de Lúcia deu-lhe 2 presentes. Quantos presentes Lúcia ganhou da família?
e) Lúcia convidou 15 colegas e vizinhos, com suas mamães. Quantas pessoas amigas Lúcia convidou?
f) A mamãe de Lúcia fêz um enfeite pequeno de mesa para dar a cada pessoa que estiver na festa. Quantos enfeites mamãe fêz?
g) Mamãe quer preparar 2 copos de laranjada, 1 taça de sorvete, 6 doces e 6 salgadinhos para cada pessoa. Naturalmente as pessoas escolherão o que lhes apetecer, mas Mamãe não quer que falte. Calcule quantos copos de laranjada, quantos sorvetes, quantos doces e quantos salgadinhos Mamãe terá que fazer?

SUGESTÕES PRÁTICAS

I — Exemplos de tipos de problemas:

1) *Problema comum da vida real:* Hoje, o movimento de compra de material na cooperativa da escola, foi o seguinte: Cr$ 12,50 na 1.ª série, o dôbro dessa quantia na 2.ª série, Cr$ 23,00 na 3.ª série e Cr$ 45,00 na 4.ª série. Qual o total da venda de hoje?

2) *Problema-historieta* — Mário e Jorge estão planejando um passeio de bicicleta na ilha do Governador, e contam também com a companhia de seus primos José e Letícia. Os quatro têm treinado muito, pois pretendem apostar uma corrida. Letícia está treinando duas horas por dia, depois da escola, há duas semanas, e três horas aos domingos (já treinou 2 domingos). Mário e Jorge, há 3 semanas fazem exercícios diários de hora e meia; quanto a José, faz 5 semanas que anda de bicicleta uma hora por dia. Escreva, em ordem decrescente os nomes das crianças que apresentam maior número de horas de treino.

3) *Problemas sem números:*

a) Comprei tantos livros a tanto e paguei com uma nota de tanto. Quanto recebi de trôco?

Resposta — A quantia que deu, menos a despesa feita com os livros.

b) De um ninho com tantos passarinhos voaram tantos. Quantos ficaram?

Resposta — O número de pássaros que havia menos o número de pássaros que voaram.

4) *Problemas incompletos quanto aos dados:* (Pedir à criança que descubra o dado que falta e complete o problema, resolvendo-o):

a) Lia ganhou de seu padrinho Cr$ 50,00 para comprar uma boneca; foi à loja com mamãe e comprou-a. Que quantia sobrou do dinheiro que o padrinho lhe deu?

b) Um terreno retangular mede 15m de frente e .... Qual a sua área?

5) *Problema incompleto quanto à pergunta* (a criança deve dizer qual a pergunta que se faria no problema).

Mariazinha ganhou um lindo livro de histórias; ela está encantada porque é um livro grande, com 327 páginas, e ela já leu 289.

6) *Problemas em série:*

a) Lúcia faz anos hoje e, por isso, está muito contente; levantou-se agora, às 7 horas da manhã, para esperar a vovó, que vem almoçar ao meio-dia. Quantas horas faltam para vovó chegar?

b) Lúcia faz 8 anos. Qual a data do seu nascimento?

c) Tôda a família de Lúcia estará presente ao aniversário: a mamãe, o papai, 4 tios e tias, 5 primas e 4 avós. Quantos parentes tem Lúcia?

d) Cada parente de Lúcia deu-lhe 2 presentes. Quantos presentes Lúcia ganhou da família?

e) Lúcia convidou 15 colegas e vizinhos, com suas mamães. Quantas pessoas amigas Lúcia convidou?

f) A mamãe de Lúcia fêz um enfeite pequeno de mesa para dar a cada pessoa que estiver na festa. Quantos enfeites mamãe fêz?

g) Mamãe quer preparar 2 copos de laranjada, 1 taça de sorvete, 6 doces e 6 salgadinhos para cada pessoa. Naturalmente as pessoas escolherão o que lhes apetecer, mas Mamãe não quer que falte. Calcule quantos copos de laranjada, quantos sorvetes, quantos doces e quantos salgadinhos Mamãe terá que fazer?

7) *Problema para vestir*: Imaginar um problema que seja resolvido com as seguintes operações:

$$3 \times 4 = 12 \text{ m}$$
$$\text{Cr\$ } 15{,}00 \times 12 = \ldots\ldots\ldots$$

(Qualquer problema que satisfaça às condições e que seja real será aceito).

8) *Problema para achar o dado desnecessário*: De meia dúzia de pacotes com uma centena de cadernos cada um, já foi vendida a terça parte. Quantos pacotes restam?

II — **Alguns problemas para medida do raciocínio em aritmética:**

O aluno indicará, apenas, dentro dos parênteses, adiante de cada problema, a operação necessária para resolvê-lo.

a) Maria comprou 9 pêras a Cr$ 2,00 cada uma. Quanto gastou? .... (   ).

b) Luís e Antônio pescaram 19 peixes. José pescou 2 e Paulo nenhum. Quantos peixes os quatro meninos pescaram? .... (   ).

c) Pedro caminhou 83 metros. Ainda faltam 47 metros para chegar à escola. Qual a distância que êle tem que percorrer para ir à escola? .... (   ).

d) De uma peça com 38 metros de cretone, Dona Sofia quer fazer lençóis de 2,5m de comprimento. Para quantos lençóis dará a peça? .... (   ).

e) Minha avó tem 58 anos e meu avô 65. Quantos anos um é mais velho do que o outro ? ...... (   ).

CAPÍTULO VIII — VERIFICAÇÃO DA APRENDIZAGEM E DO PROGRESSO DO ALUNO

1. *A verificação traz vantagens para o professor*, porque lhe indica os pontos fracos da turma, em geral, e de cada aluno em particular e, portanto, dá-lhe rotas seguras para o ensino.

2. *A verificação é útil para o aluno*, porque lhe traz um conhecimento da sua própria situação, e do tipo de tarefa que lhe deve merecer maior atenção.

3. Há, ainda, em certos casos, a possibilidade de *formar grupos ou classes mais ou menos homogêneos*.

4. Na verificação, podemos incluir os *exercícios de verificação e as provas*.

Os primeiros são muito comuns em classe, e cobrem pequena extensão da matéria; geralmente, na 1.ª série, sua extensão não vai além de 10 minutos. A correção, entretanto, será feita pelo professor, para que êle tenha um conhecimento exato da situação de cada aluno.

As *provas* cobrem a matéria dada num determinado período ou medem velocidade, ou medem habilidade em determinado assunto, ou servem à promoção dos alunos.

5. Em qualquer caso, tanto os exercícios de verificação quanto as provas devem permitir uma *medida objetiva* daquilo que se pretende avaliar e tal tarefa é fácil em Matemática.

6. *As provas para medir aproveitamento num determinado período* incluem questões sôbre a matéria abordada, questões essas de complexidade variável, e de tipos variados, em ordem crescente de dificuldade.

7. As *provas de velocidade* têm um objetivo definido (medir, por exemplo, a velocidade para a resolução de adições de duas parcelas, sem reservas): Dão-se grande número de questões, abrangendo tôdas as situações possíveis, graduadas, pelo menos aproximadamente, em ordem de dificuldade, e marca-se um limite de tempo. Pode-se, assim, calcular, contando as questões certas, a velocidade do aluno por minuto.

8. As *provas de habilidade ou capacidade* apresentam questões graduadas, em tôdas as situações possíveis, dentro do que se deseja medir; todos os casos da divisão, por exemplo. A criança faz tôdas as que é capaz de resolver.

9. Em qualquer situação, a prova apresentada ao aluno como um instrumento de "fiscalização" do professor perde parte do seu valor. As provas de habilidade ou de velocidade são ótimas para que o aluno tenha um "objetivo" a atingir e saiba em que deve trabalhar para atingir tal meta. As repreensões, as humilhações a que se sujeitam os alunos de menor aproveitamento não têm valor educativo nem concorrem para o progresso.

10. Há necessidade de estandardizar testes para a medida de determinadas habilidades. Êsse trabalho, uma vez realizado pelos centros de pesquisa, fornecerá aos professôres ótimo instrumento para avaliar o progresso individual e atender às diferenças individuais, oferecendo trabalho supletivo aos alunos que os necessitarem.

11. O *gráfico individual*, feito sôbre notas obtidas em provas sucessivas, estimula o progresso do aluno, porque lhe dá a consciência da aprendizagem, estabelece uma comparação do aluno consigo mesmo. E' preciso, porém, que essas provas sejam de igual complexidade. O gráfico de classe, em que cada criança ocupa uma coluna, não oferece as mesmas vantagens, uma vez que força a comparação entre cada aluno e seus

colegas. Complexos de inferioridade ou de superioridade são estimulados por tais gráficos. Da mesma forma, estabelecer comparação sôbre as médias obtidas numa prova por turmas da mesma série escolar já prèviamente classificadas por adiantamento, é absurdo e causa descontentamento, uma vez que as turmas mais fracas jamais poderão obter os primeiros lugares.

II PARTE

CAPITULO I — NOÇÕES DE GEOMETRIA

1. As noções de Geometria são dadas em tôdas as séries, desde a primeira, e de acôrdo com as oportunidades surgidas.

2. A Geometria existe à volta de nós, nos vidros de uma janela, na disposição de um jardim, na forma curiosa de certas flores e frutos, nos ninhos de abelhas e até na simetria do corpo humano.

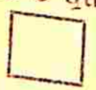
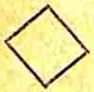
O primeiro princípio importante para o ensino da Geometria é, pois, a *observação*.

O *desenho e os trabalhos manuais* são outros poderosos meios auxiliares de ensino e de fixação da Geometria, justamente porque fortalecem a observação, uma vez que só podemos representar bem aquilo que vemos bem.

3. Outro ponto importante em Geometria é que a *forma geométrica* tem que ser *exata e não aproximada*: um quadrado só é quadrado quando é uma superfície plana, com os quatro lados iguais e os quatro ângulos retos; uma esfera só é esfera quando é um corpo sólido, gerado pela revolução completa de um semicírculo em tôrno do seu diâmetro; da mesma maneira, duas linhas só são paralelas quando guardam entre si sempre exatamente a mesma distância, etc.

Isso não quer dizer que abandonemos a forma aproximada; basta que a identifiquemos com a criança; por exemplo: corpos que têm a forma de uma esfera: uma bola de gude, uma bola de futebol, etc.; corpos que têm a forma parecida com a da esfera: laranja, uva, etc.

4. O *sólido-tipo*, seja comprado pronto ou construido pelo professor, bem como a representação de figuras em papel colorido colado sôbre cartolina, auxiliam à fixação.

5. A representação gráfica dos sólidos e figuras deve ser feita de modo a *evitar confusões*. Assim, por exemplo, o desenho da esfera deve ser sempre sombreado, para evitar confusões com o círculo. O professor de primeira série usa muito as bolas desenhadas como círculo ou recortadas em papel de côr, para objetivação de aulas de contagem ou de leitura. E' preferível não usar essa forma de objetivação, que tem conseqüências sérias para o resto do curso. E' freqüente, também, que o quadrado seja representado sempre nesta posição  ; quando se inverte a posição  , os alunos o confundem com o losango.

6. O uso correto da *linguagem geométrica* também deve ser preocupação do professor; expressões como "caixa quadrada" serão evitadas, fazendo ver que as faces da caixa é que são quadradas.

SUGESTÕES PRÁTICAS

(Para atividades relacionadas com a aprendizagem da Geometria)

1) Colecionar objetos parecidos com a esfera ou com o cubo, ou com o cilindro, etc.; estabelecer semelhanças e diferenças.

2) Fazer, em massa plástica: bolas, frutinhas, bonecos formados por esferas, halteres com duas esferas e um palito.

3) Cortar um quadrado de papel e, com êle, fazer um copo.

4) Cortar um retângulo de papel e, com êle, fazer: um barco, um chapéu.

5) Pintar ou colocar decalcomania em ladrilhos quadrados, fazendo quadrinhos para a sala de aula, descansos para pratos, bandejas para copos, etc.

6) Cortar, em sabão, cubos, prismas, pirâmides.

7) Preparar guardanapos de papel quadrado.

8) Preparar uma colcha de retalhos, usando retalhos da forma geométrica desejada.

9) Fazer um boneco com pequeninas ripas articuladas, para observar os ângulos formados pelas diferentes posições dos braços, pernas, pés, dedos, etc.

10) Preparar barras decorativas para fôlhas de album, marcadores de livros, etc., compondo, em barra, desenhos inscritos em quadrados, triângulos retângulos, triângulos equiláteros ou outra figura que se deseje fixar.

11) Preparar painéis decorativos para tampas de caixa, capas de livro, etc., usando os motivos apontados para a barra.

12) Preparar um mostrador de relógio, observando os ângulos formados pelos ponteiros.

13) Mandar fazer (em casa ou na escola) papagaios de papel, observando a forma geométrica, os ângulos, etc.

14) Fazer chapéu de fada de forma cônica; caixas de balas de forma cúbica ou prismática, pela planificação e recomposição dos sólidos (uma das bases será prêsa apenas por uma das arestas e um cordão atado em laço a fechará); pode-se usar fita Durex para recompor os sólidos ou deixar-se-á uma vira de cartolina para colar as arestas necessárias.

15) Confeccionar jogos de paciência, para recompor figuras. Exemplos:

a) Colam-se várias figuras em fôlhas de cartolina. Cada figura é recortada em pedaços obedecendo a uma determinada forma geométrica; o jogador deverá recompor as figuras, juntando pedaços que tenham a mesma forma.

b) Arranjam-se seis gravuras retangulares do mesmo tamanho; divide-se cada figura em 12 quadrados iguais. Planificam-se 12 cubos iguais; em cada face prega-se um quadrado de uma figura diferente, recompõem-se os cubos.

16) Confeccionar jogos de dominó (relacionados a qualquer matéria do programa) com pequeninos prismas de madeira aproveitada de caixas de charuto ou de doces.

17) Confeccionar casas de boneca, carrinhos de mão, bicicletas, etc., observando as formas geométricas usadas; caixinhas de fósforos, carretéis, etc., podem ser empregados como material.

CAPÍTULO II — NOÇÃO DE NÚMERO — CONTAGEM — NUMERAÇÃO

1. Sentidos do número.

O número tem vários sentidos; vejamos:

— de grupo ou coleção (5 bolas, 5 carteiras, etc.);
— de posição numa série (o número 5 fica entre o 4 e o 6; ocupa uma posição definida);
— de razão ou medida (resultante da comparação com a unidade (8 metros, 8 litros);
— resultante da combinação de outros números (5 é o resultante de 3 + 2, 8 — 3, etc.).

Todo o programa de Matemática do curso primário apresenta o número nos seus vários sentidos. A aprendizagem, entretanto, é feita pouco a pouco, em experiências sucessivas.

A precisão da noção de número é relativa às possibilidades das crianças de cada idade: Uma criança pode não ter noção de quanto sejam 500 brinquedos, mas saberá que são "muitos"; saberá que são mais do que 5 ou do que 100. Só mais tarde poderá compreender que 500 são 5 centenas, sendo uma centena 100 unidades ou 10 dezenas.

2. Objetivação.

E' da máxima importância para formar a noção de número. "Objetivar é relacionar o número com a realidade, que lhe dá significação".

Para a objetivação, utilizamos:

a) Material encontrado no ambiente escolar: carteiras, mesas, salas, cadeiras, pessoas, etc.

b) Material encontrado na comunidade e trazido para a escola: conchas, palitos, caroços de frutas, etc. E' preciso cuidado, aqui, em evitar o material que a criança possa introduzir no ouvido ou nariz.

c) Material especialmente preparado para a contagem: contador mecânico, ou blocos e tornos especiais; com êsses blocos e tornos, bem como com o material apontado na letra *b*, podemos construir, com as crianças, as "caixas de cálculo", individuais ou para uso da classe.

d) Desenhos no quadro-negro ou nos exercícios apresentados à classe são, ainda, muito úteis para objetivação.

O material de contagem de maior utilidade é o individual, que a criança possa manusear e com o qual possa fazer, ela mesma, a sua objetivação (palitos de fósforos usados, coloridos em anilina pelas próprias crianças e colocados em caixinhas de fósforos forradas de papel).

3. **Contagem dentro da dezena.**

A contagem será feita, primeiro de 1 até 5 e depois de 6 a 10, e objetivamente, apontando ou segurando os objetos. Mesmo quando a criança vem para a escola enunciando os números até 5 ou até 10, em ordem, isso não significa que tenha a noção de número, desde que não saiba conhecer quando um grupo tem determinado número de coisas. A contagem com objetivação mostra a correspondência entre o número, o símbolo oral (um, dois, três, dez, etc.) enunciado pela criança, e as algarismos que o representam.

4. **Unidades didáticas para o ensino de cada número.**

Mesmo quando a criança já saiba contar oralmente ou até escrever alguns números, o ensino de cada número formará uma unidade independente, na qual o aluno verá o número representado por coisas e por desenho, enunciado oralmente, ou escrito em algarismos que a criança reconhecerá, passando a copiá-lo e, depois, a fazê-lo de cor.

Haverá, assim:

— correspondência entre o número objetivamente representado e o símbolo oral;
— correspondência entre o número objetivamente representado e o símbolo escrito;
— leitura e escrita do número em algarismos;
— leitura e escrita do número em palavras (facultativa).

Conforme as possibilidades da turma, pode-se dar mais de um número no mesmo dia, não sendo, entretanto, aconselhável, no início da aprendizagem, apresentar mais de três.

Para a escrita dos algarismos, seguem-se as mesmas diretrizes aconselhadas para os exercícios de caligrafia. Depois de reconhecido o algarismo, quando escrito, o aluno fará, com a professôra, os movimentos no ar, depois com gis no quadro-negro e, finalmente, com lápis no papel, para a escrito de cada algarismo aprendido.

O uso do quadro-negro pelas crianças é muito útil para evitar movimentos errados e, às vêzes, invertidos.

5. **A contagem como preparo para adição e subtração.**

O número 2 será dado objetivamente como *duas coisas* ou "uma coisa mais uma coisa" (um carro pequeno e um carro grande são dois carros; uma laranja verde e uma laranja madura são duas laranjas, etc.).

O mesmo com o número 3 (dois e um, um e dois); o número 4 (dois e dois, três e um, um e três), o número 5 (quatro e um, um e quatro, três e dois, dois e três), etc.

Ex.: 4 = 0000 0 000 000 0 00 00.

6. **Noção de dezena.**

Ao chegar a 10, a criança aprenderá a ler e escrever o número 10, sem ter ainda aprendido o zero isoladamente. Nesse ponto, será dada a noção de dezena como *grupo de dez* (pessoas, objetos, frutas, etc.). A objetivação especial da dezena é importante. Nas caixas de cálculo podem ser organizados grupos com uma dezena (dez palitos amarrados, ou 10 conchas numa caixinha menor, etc.).

7. **Dezenas e unidades; composição e decomposição de números.**

A noção de *unidade* é dada de preferência depois que a de dezenas estiver compreendida, como "uma quantidade que não chega a formar uma dezena". Aprendida a noção de dezena e de unidades, as crianças poderão fazer, oralmente, composição e decomposição de números, servindo-se, de início, da objetivação. O trabalho escrito não é aconselhável. O vocabulário *composição* e *decomposição* virá mais tarde.

8. **Noção de zero.**

Será dada em aula especial, e quando surgir a oportunidade (zero erros num trabalho; zero pontos num jôgo; zero balas numa caixa, etc.), isto é, representando ausência.

9. **Contagem acima de 10.**

Sempre através da objetivação, levamos a criança à compreensão de que:
11 = dez e um
12 = dez e dois, etc. até 20 ou *duas dezenas*.
Dada a noção de *duas dezenas*, passamos à formação de números entre 20 e 30.
Daí, torna-se fácil ler e escrever qualquer número, bastando aprender 40, 50, 60, 70, 80, 90.
As caixas de cálculo organizadas pela criança facilitam a aprendizagem. Cada nova dezena aprendida deve ser objetivada como a primeira.
10 dezenas formarão *uma centena*, que tem 100 unidades. Êste é, em geral, o limite de aprendizagem na 1.ª série. Na caixa de cálculo, podemos colocar 10 dezenas dentro de uma caixa e escrever, por fora: 1 centena.

10. **Aprendizagens ligada à contagem na 1.ª série; suas dificuldades para a criança.**

a) *Pares e impares*:

A noção de número par vem do conhecimento do que é um par e da objetivação de coisas usadas aos pares, levando ao conhecimento de:

um par	=	2
dois pares	=	4
três pares	=	6
quatro pares	=	8
cinco pares	=	10

e de que números como 1, 3, 5, 7, 9 são impares, porque não formam pares exatamente. Mais tarde, pela objetivação, apresentando números e pedindo que as crianças, em suas carteiras, separem os tentos dois a dois, a fim de ver se o número é par ou impar — levar à "redescoberta" de como se reconhecem quaisquer números pares e ímpares.

b) *Contagem de 2 em 2, de 5 em 5, de 10 em 10; dezenas e meias dezenas.* A contagem de 2 em 2 corresponde à ordem dos números pares; a de 10 em 10, à sucessão das dezenas e a de 5 em 5 auxiliará o reconhecimento de meia dezena, duas dezenas e meia, etc., que será dado mais tarde. Tabelas como as seguintes auxiliam tais tipos de contagem e dão oportunidade a numerosos exercícios.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	10	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	30	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

As contagens de 3 em 3, de 4 em 4, etc., devem ser dadas acima da 1.ª série escolar.

c) *Dúzia, meia dúzia.* A noção será dada objetivamente e usada com coisas que realmente se contem em dúzias; evitar confusão com dezenas.

d) *Ordem crescente e decrescente.* Fixar bem a ordem crescente, antes de passar à seguinte, que é muito mais difícil; treinar primeiro com números até 9, para depois ir progredindo.

e) *Números vizinhos; completamento de séries.* Convém, nos primeiros exercícios de treino, escrever a série completa no quadro-negro, deixando a criança consultá-la ou para exercício de completamento de sé-

ries ou de números vizinhos. Exercitar primeiro com os números menores, para, depois, passar aos maiores.

11. Estudo da numeração, acima da centena.

a) *Contagem de centenas sucessivas até 900* (objetivação). — Dificuldade: escrita entre duas centenas sucessivas, principalmente no caso do zero intercalado: 203, 304. Armar a adição leva à redescoberta de como se escrevem os números.

$$\begin{array}{r} 200 \\ +\quad 3 \\ \hline 203 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 200 \\ +\ 10 \\ \hline 210 \end{array}$$

E' fora de dúvida que, assim sendo, a criança só deve ser levada a escrever números acima da centena depois que tenha aprendido a efetuar adição com número desigual de algarismos nas parcelas. Esta última, aliás, é aprendizagem feita na 1.ª série.

b) *Leitura e escrita de números acima de milhares.* A mesma dificuldade, o mesmo processo.

c) *Noção de número e de algarismo.* Mostrar o mesmo número escrito com algarismos grandes e algarismos pequenos; algarismos vermelhos e algarismos azuis, etc.

d) *Noção de classe e de ordem.* A representação simbólica das casas ajuda à fixação (vide sugestões práticas).

e) *Composição e decomposição.* Com objetivação, como dentro da centena, será feita primeiro oralmente e depois por escrito.

12. Numeração romana.

Cada vez mais diminuem as razões para o ensino da numeração romana nas primeiras séries escolares, desde que raros relógios ainda apresentam mostradores em romanos e só da 3.ª série em diante é que as crianças começam a lidar com livros distribuídos em capítulos ou partes numeradas em romanos. Entretanto, os programas escolares continuam a insistir no assunto.

A aprendizagem até XII não apresenta dificuldade às crianças de 1.ª série e, em geral, é feita com agrado. Não se deve ter grande preocupação de estabelecer regras, mas a criança aos poucos as descobrirá, auxiliada pelo professor.

A aprendizagem daí por diante faz-se fàcilmente, uma vez que se trata de fortalecer princípios anteriormente estabelecidos e prosseguir acrescentando alguns símbolos.

O número maior que se pode escrever em algarismos romanos é o do ano em que estamos, e o programa que pede mais do que isso incide em grave êrro didático. Só se deve pedir a escrita de algarismos romanos em situação real. Nunca, por exemplo, se levará uma criança a efetuar uma operação em algarismos romanos.

SUGESTÕES PRÁTICAS

A — *Gerais*:

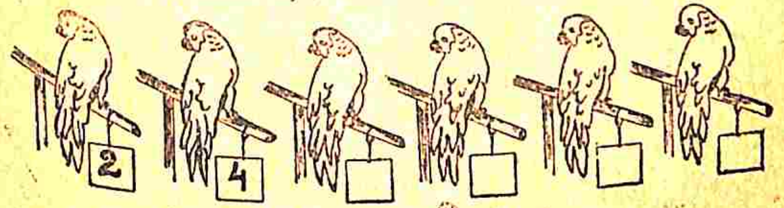
— Organização de calendário.
— Organização de cartazes com desenhos que sugiram a forma dos algarismos.
— Organização de um quadro como o do parágrafo 10 (fixação de ordem numérica, números vizinhos, séries de 2 em 2, séries de 5 em 5, de 10 em 10, consulta para organização de séries decrescentes).
— Organização de cartões numerados para jogos de sala e de campo.
— Desenhos curiosos, mostrando o uso das expressões *número* e *algarismo*. (*)

(*) Vide "Tudo é Fácil" — Mello e Souza e I. Albuquerque.

— Exercícios de complementamento de séries, procurando os números "fujões".
— Organização de fôlhas de exercícios de contagem, impressas, variando a disposição dos objetos, para servir de preparo à adição e subtração.
— Organização de problemas ilustrados para contagem.
— Numeração de animais, numeração de casas de vilas série natural dos números inteiros).
— Numeração de casas de uma rua (lado impar, lado par).
— Numeração de casas de vila (em algarismos romanos); numeração de volumes de livros de uma coleção (em algarismo romanos).
— Organização de mostradores de relógios para a sala de aula (em arábicos e em romanos), marcando a hora da entrada, a da saída, a do recreio, etc.
— Confecção de casas recortadas em cartolina e grupadas de 3 em 3 com os números e os nomes das diferentes classes e ordens.
— Evitar: mandar escrever séries infindas de números.

B — *Exemplificação de exercícios*:

1. Numerar, em ordem, os cartões que cada animal traz (de 1 em 1, de 2 em 2, etc., em ordem crescente ou decrescente).



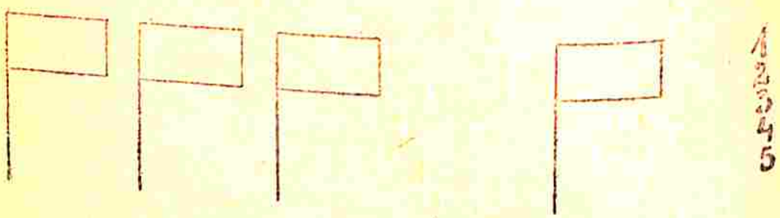
2. Pegar os números "fujões"

1 2 — 4 5 — — 8 — 10

3. Joãozinho foi contar os vidros de remédio da farmácia da escola. Contou-os de 3 em 3:

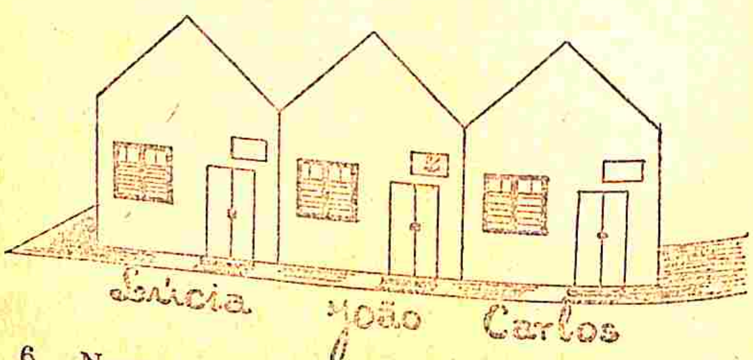
3, 6, —, —, 15, —, 21 — 27 —

4. Colorir 3 bandeirinhas de amarelo e 1 de azul. Passar uma linha em volta do total.



5. Joãozinho mora numa vila. As casas são de um só lado e têm os números: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Lúcia e Caros são vizinhos de Joãozinho. Escreva os números das casas de Lúcia e Carlos.

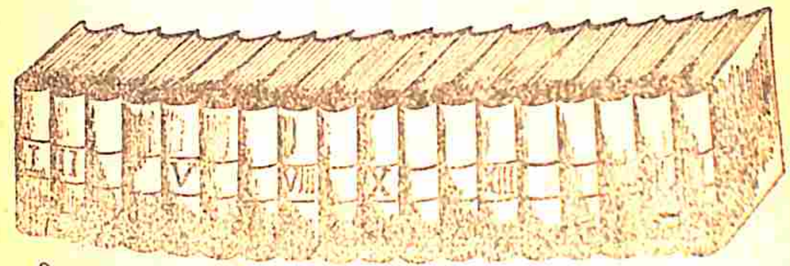


6. Nossa escola comprou 1 centena de livros. A loja que os vendeu ofereceu-nos 5 livros de presente.

Calcule o número de livros novos que a biblioteca recebeu.

Decomponha êsse número em suas diferentes ordens.

7. Os números de alguns dos volumes do Tesouro da Juventude estão apagados. Quem ajuda a escrevê-los?



8. a) Quantos algarismos tem o número 528 ?
b) Quantos algarismos diferentes você usa para escrever o número 5253 ?
c) Escreva o número 3022 com algarismos azuis e o número 4 com algarismo verde.
d) De quantos algarismos diferentes você precisa para escrever qualquer número dado?

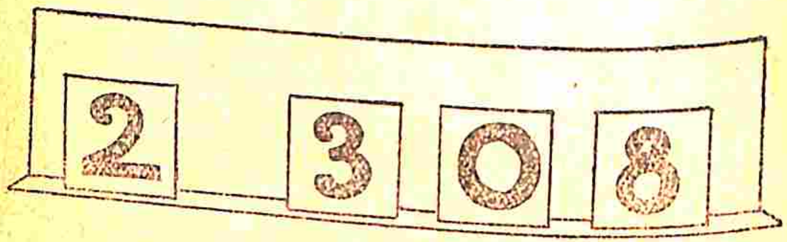
C — *Jogos*:

1. *Meus bons vizinhos* — Cada criança recebe um cartão grande com um número. O 28, por exemplo, levanta-se, mostra o cartão, e diz, de frente para a classe: "Estou procurando os meus bons vizinhos". O 27 e o 29 devem levantar-se e ficar ao seu lado, mostrando os cartões, que devem ficar na ordem 27, 28, 29. (O 27 e o 29 devem levantar bem os cartões, de maneira a destacar os *vizinhos* do 28).

2. *Algarismos perdidos* — Cada criança recebe um cartão grande, com um algarismo de 0 a 9.

A professôra diz, por exemplo:

"O 2308 perdeu seus algarismos. Quem ajuda a procurá-los?" Os possuidores dos algarismos devem formálos na barra do quadro-negro e indicar, oralmente, a ordem que ocupam (unidade, dezena, centena, milhar). Se o professor julgar conveniente, pode ter 4 conjuntos de cartões, cada um de côr diferente, assim, o número será formado simultâneamente 4 vêzes e haverá maior treino.



Os cartões numerados são material fácil de confeccionar, e de muita utilidade. Os próprios alunos podem recortar os cartões e recortar ou colar algarismos retirados de folhinhas usadas. Com um pincel molhado em nanquim também se confecciona êsse material.

3. *Acertar no alvo* (ao ar livre) — O alvo pode ser traçado no chão e atirar-se um saquinho de feijão sôbre êle, ou pode ser o alvo comum. A contagem dos pontos certos faz-se de 2 em 2, de 5 em 5, etc., conforme se combinar.

4. *Lenço atrás* — Crianças com cartões numerados presos com "clips" sôbre os bolsos das blusas. Formam uma roda. Uma criança coloca um lenço atrás de uma qualquer e grita um número, que pode ser de outra criança qualquer. A que tem o número deve apanhar o lenço e correr para pegá-la. Se alguma errar, vai para o centro da roda.

CAPÍTULO III — APRENDIZAGEM DOS FATOS FUNDAMENTAIS DAS 4 OPERAÇÕES DE INTEIROS — A TABUADA

1. A aprendizagem dos fatos ou das combinações fundamentais da adição e da subtração, assim como da multiplicação e da divisão, é a mais importante etapa da Aritmética, na escola primária. Um dos erros mais comuns de Artmética verificados nas séries adiantadas é a falta de segurança nas combinações dos números dígitos. O professor precisa levar os alunos a formar firmes conexões, de maneira a dar respostas imediatas e corretas, automáticas, às situações que envolvem tais combinações. Nunca aceitar resposta "quase certa"; considerá-la tão errada quanto outra qualquer.

2. A adição, a subtração e a multiplicação apresentam, cada qual, 100 fatos fundamentais. A divisão apresenta apenas 90, porque o zero não é usado para divisor. Daremos, como exemplo, os fatos fundamentais da adição. Será fácil a qualquer pessoa agir de modo idêntico em relação às demais operações:

Adição: 81 fatos fundamentais sem zeros:

1+1	2+1	3+1	4+1	5+1	6+1	7+1	8+1	9+1
+2	+2	+2	+2	+2	+2	+2	+2	+2
+3	+3	+3	+3	+3	+3	+3	+3	+3
+4	+4	+4	+4	+4	+4	+4	+4	+4
+5	+5	+5	+5	+5	+5	+5	+5	+5
+6	+6	+6	+6	+6	+6	+6	+6	+6
+7	+7	+7	+7	+7	+7	+7	+7	+7
+8	+8	+8	+8	+8	+8	+8	+8	+8
+9	+9	+9	+9	+9	+9	+9	+9	+9

Adição: 19 fatos fundamentais com zeros:

0+1 0+2 0+3 0+4 0+5 0+6 0+7 0+8 0+9
1+0 2+0 3+0 4+0 5+0 6+0 7+0 8+0 9+0 0+0

3. Êsses 390 fatos fundamentais é que formam a famosa *tabuada*, cuja recitação constituia o pavor da escola antiga.

A necessidade de memorização dêsses fatos é de capital importância na escola moderna. Apenas os métodos variaram, e muito. Mudaram principalmente para permitir que a criança aprenda mais depressa, com mais interêsse, com maior eficiência e menor esfôrço. Para assegurar o êxito na tarefa, procuramos dar aqui alguns pontos essenciais ao ensino dos fatos fundamentais (ou combinações dos números dígitos).

4. **Apresentação das combinações ou fatos fundamentais.**

A *apresentação de um fato fundamental* deve partir de uma *situação real*, surgida em classe, e bastante objetiva. Na 1.ª série, mesmo uma história, acontecida com personagens que, para as crianças têm vida real, serve de motivação à aprendizagem.

Mas a mera apresentação dos fatos fundamentais, inteiramente desligados da realidade, não lhes dá qualquer significação e dificulta a aprendizagem.

Já tivemos ocasião de discutir o assunto no capítulo referente aos princípios gerais da aprendizagem: 6 ÷ 2, 18 ÷ 9, isoladamente, não têm significação alguma para a criança, e a memorização torna-se, assim, muito difícil.

5. **Objetivação.**

A *objetivação* é essencial para o cálculo. A caixa de cálculo, que a criança organizou para a contagem, vai servir para a adição, subtração, multiplicação e

divisão. Os próprios exercícios de contagem, utilizando objetos e figuras, são um preparo para a adição e subtração. Grupos iguais de objetos servirão à multiplicação e à divisão. Crianças, mesas, carteiras, tudo isso é material de objetivação.

6. **Tanto as combinações fundamentais, como qualquer cálculo, só podem ser resolvidos pela criança quando ela conhece os números com que terá de lidar e o número que obterá para resultado.**

Não se pode, por exemplo, ensinar à criança 3 + 3, antes que ela conheça perfeitamente o valor do seis, e saiba ler e escrever 6.

7. **O aluno deve ser levado a compreender a significação das operações.**

A *adição* resolve situações em que se tem que juntar, ou acrescentar, ao passo que a *subtração* resolve situações em que se tenha que ver quanto ficou, ou quanto ainda falta, ou quanto um é mais do que outro.

A *multiplicação* será uma soma de parcelas iguais, realizada abreviadamente. A *divisão* serve para repartir uma coisa ou um número de coisas em partes iguais.

Essa compreensão se faz usando o cálculo em situação real e resolvendo-o objetivamente, levando a criança a "redescobrir" o resultado de cada combinação.

8. **Cada fato fundamental de uma operação será apresentado paralelamente ao seu inverso.**

A escola antiga apresentava a tabuada em série de fatos isolados. Não levava em conta que a criança juntando, por exemplo, 3 objetos a 4 e achando um total 7, imediatamente compreenderia que juntando 4 objetos a 3 o total seria também 7.

Só essa prática simplifica de muito a aprendizagem, reduzindo à quase metade o esfôrço da criança. Permite, ainda, que fatos que, aprendidos isoladamente, apresentam certa dificuldade para memorização, se tornem fáceis quando aliados ao seu inverso.

Exemplo 1:

000 0000
ou
0000 000

$$\begin{array}{r}3\\+4\\\hline 7\end{array}\qquad\begin{array}{r}4\\+3\\\hline 7\end{array}\qquad\text{ou}\qquad\begin{array}{l}3+4=7\\4+3=7\end{array}$$

Exemplo 2:

0 0
0 0
0 0

$$\begin{array}{l}2\times 3=6\\3\times 2=6\end{array}\qquad\text{ou}\qquad\begin{array}{r}3\\\times 2\\\hline 6\end{array}\qquad\begin{array}{r}2\\\times 3\\\hline 6\end{array}$$

9. Depois que a criança aprende a adição e a sua razão de ser e conhece, também, alguns fatos fundamentais, ela estará apta a aprender a subtração.

Assim, no exemplo 1, que aparece acima, a mesma objetivação usada para a adição serviria para a subtração. Mostrar-se-ia que, do conjunto 7 *coisas*, tirando 3 *coisas* ficariam 4; da mesma forma, dêsse mesmo conjunto 7 *coisas*, tirando 4 *coisas* ficariam 3:

$$\begin{array}{l}7-3=4\\7-4=3\end{array}\qquad\text{ou}\qquad\begin{array}{r}7\\-3\\\hline 4\end{array}\qquad\begin{array}{r}7\\-4\\\hline 3\end{array}$$

O mesmo acontece em relação à multiplicação e à divisão.

A objetivação usada no exemplo 2 serviria, também, a mostrar que, dividindo 6 *coisas* por 2 pessoas, caberiam 3 a cada pessoa; da mesma forma, dividindo 6 *coisas* por 3 pessoas, caberiam 2 a cada pessoa:

$$\begin{array}{r|l}6 & 2\\\hline & 3\end{array}\qquad\begin{array}{r|l}6 & 3\\\hline & 2\end{array}\qquad\text{ou}\qquad\begin{array}{l}6\div 2=3\\6\div 3=2\end{array}$$

Facilita-se, assim, a aprendizagem pela "transferência", que se dá em virtude do aparecimento de elementos comuns e situações idênticas, em cada caso.

Sabendo a criança quanto são $3+4$, imediatamente estará apta a responder a situações como $4+3$, $7-3$ e $7-4$. Da mesma forma, se ela aprender quanto são 2×3, poderá resolver situações como 3×2, $6\div 2$ e $6\div 3$.

O papel da memorização dos 390 fatos fundamentais da adição, subtração, multiplicação e divisão, isoladamente, reduz-se, pois, aproximadamente, *à quarta parte*, uma vez que cada quatro fatos constituem um conjunto, que exige apenas um esfôrço de memória, desde que a compreensão, através da objetivação, se tenha fixado.

10. Resumindo o que foi apresentado nos itens 8 e 9 dêsse capítulo, podemos dizer (*):

a) Cada fato fundamental de uma operação é apresentado paralelamente ao seu inverso.

b) O ensino dos fatos fundamentais da adição e da subtração deve ser concomitante.

c) O ensino dos fatos fundamentais da multiplicação e da divisão deve ser concomitante.

(*) Note-se que só nos referimos a fatos fundamentais que não incluem zeros; para os fatos com zeros, consulte-se o item 11.

Assim, cada 4 fatos (2 da adição e 2 da subtração ou 2 da multiplicação e dois da divisão) formam um conjunto indissolúvel para o ensino; chamaremos a êsse conjunto uma *unidade didática para o ensino dos fatos fundamentais.*

Exemplos:

00 0

2 + 1   3 — 1
1 + 2   3 — 2

00 / 000

2 + 3   5 — 2
3 + 2   5 — 3

0 0 0 0
0 0 0 0

2 × 4   8 ÷ 2
4 × 2   8 ÷ 4

11. **Todo o ensino dos fatos fundamentais obedecerá a unidades didáticas, organizadas de acôrdo com os princípios expostos, salvo as exceções que se seguem:**

a) No início da aprendizagem, é aconselhável que sejam treinados, principalmente, apenas os fatos da adição, até que a compreensão do processo e a significação da operação estejam perfeitamente aprendidas: depois, então, inicia-se a subtração, usando fatos que correspondam aos já conhecidos da adição. O mesmo sucede em relação à multiplicação e divisão. Não há um ponto exato para iniciar a subtração ou a divisão. Só a reação da classe o dirá.

b) Dois números iguais, combinados, só apresentam um fato da adição e um da subtração ou um fato da multiplicação e um da divisão.

Exemplos:

3 + 3 = 6   2 × 2 = 4

6 — 3 = 3   4 ÷ 2 = 2

c) Os fatos com zeros constituem unidades didáticas formadas de outra maneira, uma vez que dêles se podem tirar conclusões de outra natureza:

I — Qualquer número somado a zero não se altera (0 + 1, 1 + 0, 2 + 0, 0 +2, etc.). Todos os fatos da adição, com zeros, constituem uma só unidade didática.

II — Subtraindo zero de qualquer número, o número não se altera; todos os fatos com subtraendo zero formam uma só unidade didática (1 — 0, 2 — 0, 3 — 0, etc.).

III — Numa subtração em que o minuendo e o subtraendo são iguais, o resto é zero (uma só unidade didática): 1 — 1, 2 — 2, 3 — 3, etc.

IV — Zero multiplicado ou dividido por qualquer número dá, como resultado, zero: (uma unidade didática): 0 × 5, 5 × 0, etc.

A criança descobrirá essas regras, pela objetivação.

12. **Na apresentação das unidades didáticas, é preciso obedecer à ordem de dificuldades dos fatos fundamentais.**

A escola antiga apresentava os fatos fundamentais em série, obedecendo a uma ordem lógica, constituindo a tabuada. Acontece que pesquisas levadas a efeito demonstraram que os fatos mais fáceis para a criança, raramente correspondem à ordem em que êles se apresentam na tabuada.

Além disso, a prática de fazer as crianças decorarem a tabuada, assim apresentada nessa série de fatos lògicamente ordenados, diminui a velocidade na resposta às situações que se apresentam na vida. Todos nós já encontramos alunos que, para resolver a situação 7 × 9 que se deparava numa operação, teriam que relembrar tôda a tabuada de 7 (7 × 1, 7 × 2, 7 × 3, etc., até 7 × 9).

Estudando a *ordem de dificuldades* dos fatos da adição e da subtração, segundo as pesquisas de Clapp, nos Estados Unidos, e de Alfredina de Paiva e Sousa, no Brasil, podemos formular as seguintes conclusões:

Em relação à adição:

a) As combinações mais fáceis da adição apresentam total não superior a 10; as mais difíceis apresentam totais altos (17, 16, 15, 14, 13).

b) Figuram entre as mais fáceis, as combinações de adição com o número 1 (3 + 1, 1 + 3, etc.), e as combinações com números iguais (3 + 3, 5 + 5, etc.).

c) As combinações com zero são, em geral, de dificuldade média (3 + 0, 0 + 3, etc.).

Em relação à subtração:

a) As combinações mais fáceis apresentam minuendo não superior a 9; as mais difíceis têm minuendos altos (17, 16, 15, 14, 13).

b) Figuram, entre as mais fáceis, as combinações com subtraendo 1 (7 — 1), com resto 1 (4 — 3), bem como as de número subtraído de si mesmo (3 — 3) e de número menos zero (3 — 0).

Analisando as pesquisas de Clapp em relação às dificuldades dos fatos fundamentais da multiplicação e divisão chegamos às seguintes conclusões:

Quanto à multiplicação:

a) Os fatos com zeros são dos mais difíceis.

b) Os fatos com 1 estão, em geral, entre os mais fáceis.

c) Os fatos onde figuram os números 6, 7, 8, 9 combinados entre si são dos mais difíceis.

Quanto à divisão:

a) Os fatos com dividendo *zero* são de dificuldade média.

b) Os fatos com dividendo igual ao divisor figuram entre os mais difíceis.

c) Figuram entre os mais difíceis os fatos cujo quociente e divisor são 6, 7, 8, 9, correspondendo, assim, aos mais difíceis da multiplicação.

13. **Distribuição dos fatos fundamentais da adição e da subtração em grupos de unidades didáticas, atendendo à ordem de dificuldades.**

Atendendo aos princípios didáticos expostos, e tendo em vista as conclusões a que pesquisas feitas nos fazem chegar, podemos distribuir os fatos fundamentais em grupos de unidades didáticas que nos dêem, aproximadamente, a ordem em que êles deverão ser apresentados aos alunos. Não há rigidez nessa ordem, mas ela poderá sofrer ligeiras modificações *dentro de cada grupo*, de acôrdo com as oportunidades surgidas.

Em cada grupo, aparecem fatos fundamentais de aproximado grau de dificuldade.

Em relação à adição e subtração, obedecemos, também, ao processo de formação dos números, usado na contagem.

Convém, ainda, lembrar o que já foi dito anteriormente:

No início da aprendizagem, daremos apenas os fatos da adição, até que esta operação esteja bem compreendida; atingido êsse objetivo, passaremos à subtração, usando justamente os fatos correspondentes àqueles da adição já aprendidos; daí por diante, ensinaremos sempre por unidades didáticas completas, incluindo adição e subtração.

Em relação à multiplicação e divisão, procederemos de maneira idêntica.

1.º *grupo* (6 unidades didáticas): Combinações com 1 ou com números iguais (na adição); até 5 (no total ou minuendo).

1+1	2+1	3+1	2+2	4+1	2+3
2—1	1+2	1+3	4—2	1+4	3+2
	3—1	4—1		5—1	5—2
	3—2	4—3		5—4	5—3

2.º *grupo* (8 unidades didáticas): Idem até 10 (no total ou minuendo).

5+1	3+3	6+1	7+1	4+4	1+8	9+1	5+5
1+5	6—3	1+6	1+7	8—4	8+1	1+9	10—5
6—1		7—1	8—1		9—1	10—1	
6—5		7—6	8—7		9—8	10—9	

(Até aqui, há 46 fatos fundamentais sem zeros, isto é, aproximadamente 1/4 de tabuada de adição e subtração).

3.º *grupo* (uma unidade didática): Subtração de números iguais (resto zero).

1—1 2—2 3—3 4—4 5—5 6—6 7—7 8—8 9—9

4.º *grupo* (7 unidades didáticas): Fatos fundamentais de complexidade média, de 6 até 10 (no total ou minuendo).

4+2	5+2	3+4	6+2	5+3	7+7	8+2
2+4	2+5	4+3	2+6	3+5	2+7	2+8
6—2	7—2	7—3	8—2	8—3	9—2	10—2
6—4	7—5	7—4	8—6	8—5	9—7	10—8

5.º *grupo* (uma unidade didática): Adição com zero como parcela:

1+0 2+0 3+0 4+0 5+0 6+0 7+0 8+0 9+0 0+0

0+1 0+2 0+3 0+4 0+5 0+6 0+7 0+8 0+9

6.º *grupo* (uma unidade didática): Subtração com subtraendo zero.

1—0 2—0 3—0 4—0 5—0 6—0 7—0 8—0 9—0 0—0

Pela aprendizagem dessas duas unidades didáticas, os alunos devem ser levadas a formular o princípio de que um número não se altera quando se lhe soma ou subtrai zero.

Chegando a êsse ponto, já estão sabidos 112 fatos fundamentais, isto é, mais de metade dos fatos fundamentais contidos nas tabuadas de somar e subtrair.

7.º *grupo* (8 unidades didáticas): Fatos fundamentais de complexidade média, de 8 até 11 (no total ou minuendo), excetuando as duas primeiras unidades.

6+6	7+7	5+3	6+3	7+3	6+4	9+2	5+6
12—6	14—7	3+5	3+6	3+7	4+6	2+9	6+5
		8—3	9—3	10—3	10—4	11—2	11—6
		8—5	9—6	10—7	10—6	11—9	11—5

8.º *grupo* (7 unidades didáticas): Fatos fundamentais de complexidade alta, de 11 até 12 (no total ou minuendo), excetuando as duas primeiras unidades.

8+8	9+9	8+3	9+3	8+4	5+7	7+4
16—8	18—9	3+8	3+9	4+8	7+5	4+7
		11—3	12—3	12—4	12—5	11—4
		11—8	12—9	12—8	12—7	11—7

9.º *grupo* (9 unidades didáticas): Fatos fundamentais de mais alta complexidade, com totais ou minuendos de 13 até 17.

6+7	9+4	8+5	8+6	9+5	7+8	9+6	7+9	8+9
7+6	4+9	5+8	6+8	5+9	8+7	6+9	9+7	9+8
13—6	13—9	13—5	14—6	14—9	15—7	15—9	16—9	17—9
13—7	13—4	13—8	14—8	14—5	15—8	15—6	16—7	17—8

14. Distribuição dos fatos fundamentais da multiplicação e da divisão em grupos de unidades didáticas, atendendo à ordem de dificuldades.

Adotamos aqui a classificação de Morton, que, atendendo às condições anteriormente expostas, ordenou as 45 unidades didáticas sem zeros para o ensino dos fatos fundamentais da multiplicação e da divisão em

5 grupos, de 9 unidades didáticas cada um. Fazemos apenas uma restrição quanto ao 3.º grupo, como veremos adiante.

Naturalmente, cada unidade didática compreende os fatos fundamentais da multiplicação e da divisão, que a integram.

1.º *grupo*

2×2	5×2	8×2	4×2	6×2	3×2	7×2	9×2	3×3
4÷2	2×5	2×8	2×4	2×6	2×3	2×7	2×9	9÷3
	10÷2	16÷2	8÷2	12÷2	6÷2	14÷2	18÷2	
	10÷5	16÷8	8÷4	12÷6	6÷3	14÷7	18÷9	

2.º *grupo*

4×4	5×5	4×3	5×4	6×3	6×5	5×3	5×7	4×9
16÷4	25÷5	3×4	4×5	3×6	5×6	3×5	7×5	9×4
		12÷3	20÷4	18÷3	30÷5	15÷3	35÷5	36÷4
		12÷4	20÷5	18÷6	30÷6	15÷5	35÷7	36÷9

3.º *grupo*

5×1	2×1	4×1	7×1	3×1	8×1	6×1	9×1	1×1
1×5	1×2	1×4	1×7	1×3	1×8	1×6	1×9	1÷1
5÷1	2÷1	4÷1	7÷1	3÷1	8÷1	6÷1	9÷1	
5÷5	2÷2	4÷4	7÷7	3÷3	8÷8	6÷6	9÷9	

Preferíamos distribuir êsse grupo em 3 unidades didáticas apenas, levando as crianças a formular os seguintes princípios:

— Qualquer número multiplicado ou dividido por 1 não se altera.

— Qualquer número dividido por si mesmo dá, para quociente, 1.

4.º grupo

8×5	7×3	8×4	6×4	7×6	8×3	9×5	9×3	7×4
5×8	3×7	4×8	4×6	6×7	3×8	5×9	3×9	4×7
40÷5	21÷3	32÷4	24÷4	42÷6	24÷3	45÷5	27÷3	28÷4
40÷8	21÷7	32÷8	24÷6	42÷7	24÷8	45÷9	27÷9	28÷7

5.º grupo

9×6	7×7	8×6	9×7	8×7	9×8	6×6	8×8	9×9
6×9	49÷7	6×8	7×9	7×8	8×9	36÷6	64÷8	81÷9
54÷6		48÷6	63÷7	56÷7	72÷8			
54÷9		48÷8	63÷9	56÷8	72÷9			

Os casos com *zeros* formarão unidades didáticas à parte, e serão dados quando aparecerem em situações como essas, por exemplo: 30 × 3 ou 20 ÷ 2, pois não aparecem na multiplicação e na divisão combinações com zeros isolados. Como agimos na soma e subtração, aqui levaremos a criança aos conceitos de que "qualquer número multiplicado por zero, dá zero", assim como "zero vêzes qualquer número é zero também"; da mesma forma, "zero dividido por qualquer número dá zero"; ela compreenderá que não se pode dividir nenhum número por zero. Isso virá da própria compreensão do que seja divisão.

15. **Fixação da aprendizagem.**

Certa quantidade de prática ou exercício é necessária para a *fixação das noções;* o professor precisa encontrar o "ponto áureo" entre o "de mais" que fatiga e aborrece, e o "de menos" que é insuficiente. E' importante a aplicação, não só em exercícios sistematizados e jogos, como em problemas. O interêsse é, aqui, um fator importante.

Exercícios sistematizados, uso em problemas e jogos levam à fixação. E' preciso exercitar pouco de cada vez e levar à fixação, pela compreensão e pelo uso, com interêsse.

Nos primeiros exercícios, os resultados dos fatos ou combinações estarão ao alcance do aluno, para que êle os consulte quando precisar. Aprende-se tabuada de cor, como se decora uma música de piano ou uma receita de crochê: pelo uso.

A primeira fase do ensino da adição, subtração, multiplicação ou divisão é feita por contagem, usando objetos ou desenhos, para a sua perfeita compreensão; imediatamente, abandona-se essa fase, que só será usada em caso de dúvida, ou para verificação; e quando a criança, por comodidade, mantém-se nessa fase além do período necessário, é preciso levá-la a compreender o valor da memorização, vendo a diferença de tempo gasto para uma resposta imediata ou para a resposta por contagem.

Em caso algum, entretanto, será a criança levada a cometer erros porque lhe foi prematuramente vedada a consulta à tábua de combinações ou o uso da caixa de cálculo para resolver os casos de dúvidas. Devemos lembrar-nos de que o papel do exercício é "*evitar o êrro*" e que, cada vez que a criança comete um êrro, tem uma oportunidade para fixar a forma errada, em vez de fixar a certa.

E' boa prática fazer uma revisão oral das combinações a serem usadas a seguir, num exercício ou num jôgo, a fim de que a criança recorde os resultados certos e os aplique corretamente, fazendo, assim, uma verdadeira fixação da aprendizagem.

A crença de que o aluno "*pode*" ou "*deve*" estudar a tabuada é um êrro em que gerações e gerações de professôres têm teimado em laborar, apesar do pouco resultado que tem dado, da reação negativa das crianças, do esfôrço despendido pelo professor para "*obrigar*" o aluno ao estudo, dos castigos e ameaças a que é compelido a recorrer.

Seria muito mais eficiente se, ao invés de mandar estudar a tabuada, o professor facilitasse a necessária repetição das combinações em classe, por meio de jogos e concursos tão fáceis de realizar e tão capazes até de motivar certos alunos ao estudo em casa, em situação interessada e, portanto, com proveito.

Alguns jogos que daremos nas sugestões práticas podem ser confeccionados pelas próprias crianças ou não exigem qualquer material. Outras sugestões podem ser encontradas no nosso livro "Jogos e recreações matemáticas".

Convém, ainda, atentar nas combinações que aparecem nos exercícios, jogos e problemas.

Os fatos fundamentais mais difíceis exigem maior treino do que os mais fáceis. Portanto, ao planejar um jôgo, um problema ou um exercício, é preciso pensar nos fatos a fixar, e registrar tais exercícios nos cadernos de planos, a fim de que seja fácil consultá-los tôda vez que se tiver de planejar novo exercício.

Os exercícios já passados no copiador ou mimiógrafo e entregues aos alunos, para colocar apenas os resultados, economizam o tempo e o trabalho gasto com cópia, permitem que sejam treinados cêrca de vinte fatos num espaço de 5 minutos, auxiliam à organização de exercícios seriados por complexidade (que podem ser usados todos os anos, desde que os alunos

não escrevam no material que lhes foi fornecido), trazem grande interêsse ao aluno e tornam-no consciente do seu progresso e das suas falhas.

SUGESTÕES PRÁTICAS

A — Exercícios que servem à aprendizagem e à fixação dos fatos fundamentais e da significação das operações:

1 — Fazer, com desenhos, pauzinhos ou conchas, etc., o número 10, por exemplo, formado por dois grupos, de tôdas as maneiras que souber; indicar as adições correspondentes:

	000000000	0	9 + 1 = 10
0	000000000		1 + 9 = 10
00	00000000		2 + 8 = 10
	00000000	00	8 + 2 = 10
	0000000	000	7 + 3 = 10
000	0000000		3 + 7 = 10
0000	000000		4 + 6 = 10
	000000	0000	6 + 4 = 10
00000	00000		5 + 5 = 10

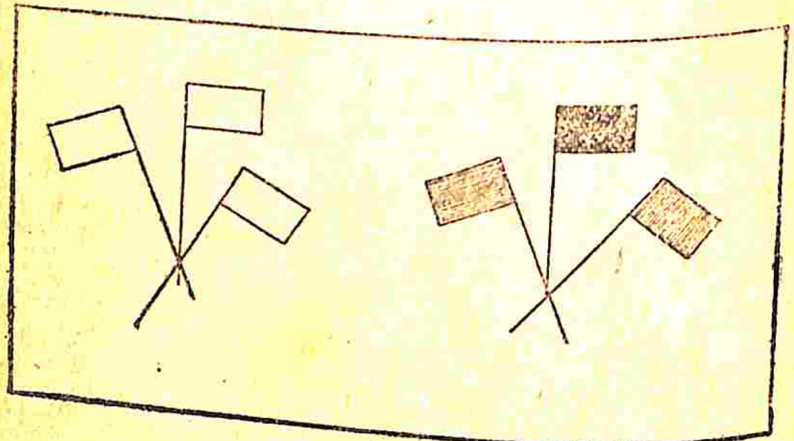
(Quando os dois grupos ficam iguais, tôdas as combinações já foram feitas).

2 — Agir como anteriormente, indicando a operação de subtração envolvida (ou colorindo um grupo de

cada côr, ou riscando um dos grupos, para significar subtração):

000000000 $\quad \phi \quad 10 - 1 = 9$

3 — Inventar um problema de adição (subtração, multiplicação ou divisão) com um desenho dado, e resolvê-lo.



4 — Idem, com uma operação dada: $3 + 3$, ou $6 - 3$ ou $6 \div 3$ ou 3×2.

B — Exercícios preparatórios para a multiplicação:

São a contagem rítmica (2, 4, 6, 8, 10, etc.) e a adição de parcelas iguais ($2 + 2 + 2$, etc.), levando o aluno à compreensão de que a multiplicação é uma adição abreviada, na qual um número é repetido certo número de vêzes. O professor deverá perguntar "quanto são três oitos" ou "quanto são oito três vêzes" "quanto são três vêzes oito" ou e levar o aluno à compreensão do sentido da pergunta.

C — Organização do caderno do professor, para anotação da freqüência com que foram exercitados os vários fatos fundamentais:

Cada página será dividida ao meio, para adição e subtração; o professor irá anotando os fatos fundamentais à proporção que vão sendo ensinados, o que corresponderá também aproximadamente, à ordem de dificuldades. Os fatos correspondentes da subtração serão logo relacionados mesmo que sua aprendizagem não se tenha iniciado. Cada vez que o fato entra em exercício ou jôgo, coloca um risco adiante; o quinto risco é feito cortando os 4 anteriores, para facilitar a contagem.

Tendo o caderno sempre em classe, o professor pode fazer a anotação com rapidez, enquanto as crianças realizam o exercício ou o jôgo. E' aconselhável reservar as últimas fôlhas do caderno de planos para tais anotações.

Uma vez que cada operação tem 100 fatos, é fácil calcular quantas páginas reservar.

ADIÇÃO		SUBTRAÇÃO	
1+1	卌 I	2-1	
2+1	卌 ////	3-1	
1+2	卌 ////	3-2	
3+1		4-1	
1+3		4-3	

Pode-se proceder de maneira idêntica em relação à multiplicação e à divisão, sem esquecer, em qualquer caso, que os fatos mais difíceis devem exigir mais prática.

	ADIÇÃO										SUBTRAÇÃO								
	M	A	M	J	J	A	S	O	N		M	A	M	J	J	A	S	O	N
1+1	IIII IIII II									2-1									
2+1	卌 IIII									3-1									
1+2	卌 III									3-2									

Como é preciso distribuir a prática de maneira que cada fato, uma vez aprendido, não fique demasiado tempo sem ser exercitado, o professor pode organizar ainda melhor o seu caderno, dividindo-o, em colunas verticais, correspondentes aos meses letivos representados pelas respectivas iniciais.

D — Jogos:

1) *Ao ar livre*: Divide-se a turma em 4 partidos: o partido 13, o partido 14, o partido 15, o partido 16. As crianças de cada partido levam o número prêso por um clipe, na blusa. As crianças dispõem-se em roda, alternando os partidos. Fica uma bola ao centro. A professôra joga a bola longe e diz, por exemplo: 6 + 8; tôdas as crianças 14 darão um passo à frente. Con-

tam-se os pontos perdidos: se duas crianças 14, por exemplo, deixarem de dar um passo à frente, o partido 14 perderá 2 pontos. Da mesma maneira, se uma criança 13 der um passo à frente, o partido 13 perde um ponto. Verificada a contagem, a professôra dará um sinal para os alunos 14 que acertarem correrem para pegar a bola. O que a conseguir, deve trazê-la de volta, colocá-la ao centro da roda, e arremessá-la longe quando a professôra disser, por exemplo, 7 + 8. Êsse jôgo deve desenvolver-se havendo um quadro-negro para marcar os pontos perdidos e, também, anotar os partidos que foram chamados, para não haver dúvidas.

Exemplo:

Pontos perdidos		*Chamados*
I	Partido 13	II
II	Partido 14	III
I	Partido 15	I
	Partido 16	II

Naturalmente que êsse jôgo pode servir a qualquer operação.

2) *Na sala de aula*:

Procede-se de maneira semelhante à anterior, mas não há bola. O professor diz, por exemplo: 7 + 8 e tôdas as crianças do partido 15 devem levantar-se, mostrando o cartão. Uma delas será escolhida (de preferência a que primeiro se levantar) para escrever no quadro-negro a operação, com a resposta, no lugar destinado ao seu partido. Mesmo que a operação seja repetida, repete-se no quadro-negro.

13	14	15	16
9 + 4	7 + 7	6 + 9	9 + 7
9 + 4		7 + 8	

A professôra soma os pontos perdidos, no quadro-negro (o critério é o mesmo do jôgo anterior).

13— |
14—
15— |
16— ||

Êsse jôgo, como o anterior, servirá a qualquer operação.

3) Os jogos 1, 2, 4 e 5 apresentados no capítulo VI da I parte servem bem aqui.

4) *A pescaria* é, também, muito usada. Escrevem-se as combinações nos peixes (3×2, 4×8, etc.) e arrumam-se os peixes numa caixa imitando aquário. Faz-se uma argola de linha em cada peixe. A criança, com anzol, pesca o peixe e diz o resultado; se estiver certo sai o peixe; se estiver errado, o peixe volta para o aquário. Pode-se dividir a turma em partidos e contar pontos; havendo mais de um anzol, o jôgo é mais rápido. Pode-se mandar cada criança escrever no quadro-negro a operação com o resultado, para que o jôgo sirva a tôda a classe. Caixas de *sortes* ou de *segredos* são, também, usadas com êxito.

5) *O jardim*: Recortam-se flores em cartolina colorida, deixando um pèzinho e escreve-se, atrás de cada flor, um fato fundamental ($48 \div 8$, por exemplo); numa fôlha de cartolina grande, afixada à parede desenha-se o jardim, faltando as flores. No lugar das flores, há o resultado das combinações (6, por exemplo) e um corte para enfiar o pé da flor. Cada criança deve ler a sua "continha", enunciar o resultado (ou escrever no quadro-negro a operação com o resultado) e colocar a flor no lugar conveniente. Pode-se fazer o jôgo em partidos, usando flores de côres diferentes para cada partido. Faz-se a contagem dos pontos contando as flores de cada côr, que estão no jardim.

6) Distribuem-se cartões com os fatos fundamentais que se deseja fixar. Uma criança, chamada, levanta-se, mostra o cartão à professôra e diz o resultado em voz alta (56, por exemplo); a criança ou as crianças que têm cartões que dão o mesmo resultado devem levantar-se imediatamente. A professôra mandará que cada um leia o seu cartão e, sendo considerado certo, irão tôdas (inclusive a primeira) ao quadro-negro, escrever as operações com os resultados. As combinações onde houve êrro serão escritas pela professôra, ao alto do quadro-negro. Se o professor quiser, pode dividir a turma em partidos, fazendo cada criança escrever no quadro-negro, no lugar destinado ao seu partido.

Depois do jôgo, pode-se fazer um exercício de fixação empregando os fatos fundamentais que ocasionaram erros.

CAPÍTULO IV — APRENDIZAGEM DAS OPERAÇÕES FUNDAMENTAIS COM INTEIROS

A — RECOMENDAÇÕES GERAIS

1. Graduação de dificuldades.

A *graduação das dificuldades* de cada operação é essencial para que a aprendizagem se realize com êxito. Cada operação, considerada do ponto de vista das dificuldades que apresenta à criança, não pode ser estudada apenas em um, dois ou três casos, conforme pareceria, à primeira vista. Essa graduação está minuciosamente explicada nas páginas a seguir, e o professor não encontrará grande trabalho em guiar-se por ela, o que assegurará o progresso do aluno e lhe evitará estar sempre voltando atrás para novas explicações.

Visto que cada caso só deva ser apresentado quando o anterior estiver sabido, o professor deve *planejar as operações* a propor à turma, a fim de que sejam treinados, realmente, os casos visados. Êsse trabalho de planejamento será fartamente recompensado pelo êxito obtido.

A *escolha dos algarismos* que formam os números a ser usados nos primeiros exemplos é, também, de capital importância. Sabido que só se aprende uma coisa de cada vez, é preciso afastar tôda dificuldade que provenha das combinações fundamentais, até que o aluno tenha dominado o caso da operação que desejamos ensinar. Se assim não fizermos, sua atenção ficará voltada para a dificuldade da combinação necessária, e não oferecerá a concentração necessária à aprendizagem que desejamos estabelecer.

Assim, por exemplo, a operação 987 × 8 não será própria para iniciar a multiplicação.

Aconselhamos a usar, a princípio, números formados por algarismos até 5, combinados entre si, para adição e multiplicação; na subtração, procuraremos combinar algarismos até 5 no subtraendo e no resto a obter; na divisão, algarismos até 5 no divisor e no quociente a obter.

O uso fortalece a fixação, e a criança aprenderá melhor as próprias combinações fundamentais, usando-as em *exercícios, jogos e problemas* variados, não apenas combinando números dígitos, como também usando números maiores.

Paralelamente ao ensino da numeração e das combinações dos números dígitos, vai-se introduzindo a aprendizagem dos vários casos da adição e da subtração, em ordem crescente de dificuldade. Não é necessário terminar a aprendizagem de uma operação para iniciar os casos mais simples da operação seguinte. Apenas por uma necessidade de organização fomos levados a encarar nesse capítulo, na maioria das vêzes, cada operação isoladamente.

2. **Verificação.**

Um hábito importante a formar é o de verificar qualquer operação logo após a sua conclusão. E' preciso, pois, ensinar e *exigir* que a criança o faça, assim que aprenda o caso mais simples de cada operação. A *verificação das operações* far-se-á usando um método ao mesmo tempo fácil, rápido e seguro.

a) *Para a adição*: Ensina-se a somar de cima para baixo; completada a operação, soma-se mentalmente, de baixo para cima, verificando se há coincidência de resultados;

b) *Para a subtração*: Calculado o resto, soma-se mentalmente o subtraendo com o resto, a partir das

unidades, confrontando com os algarismos do minuendo, para ver se coincidem;

c) *Para a multiplicação*: Refazer mentalmente a operação após cada produto parcial, verificar a colocação dos produtos parciais, o número de produtos parciais, a adição dos produtos parciais e os zeros finais. De preferência, multiplica-se em sentido inverso, isto é, por exemplo: 382 × 8 = Da 1.ª vez, dizemos: 8 × 2; 8 × 8; 8 × 3; da 2.ª vez, dizemos: 2 × 8; 8 × 8; 3 × 8.

Para a verificação da adição dos produtos parciais, usa-se o método *a*.

d) *Para a divisão*: Verificar imediatamente se cada resto obtido é, realmente, menor que o divisor. Refazer as multiplicações e subtrações, mentalmente. Verificar os zeros finais.

Ainda uma forma de verificação, a "grosso modo", mas que desenvolve o espírito de julgamento, é verificar ràpidamente se o resultado é o *aproximado* do real ou se é absurdo. E' muito comum para zeros esquecidos e outras distrações; sabemos, muitas vêzes, de subtrações que apresentam resultado maior do que o minuendo, multiplicações de inteiros com produto menor que um dos fatôres, etc.

3. *Prova real* — A prova real da *subtração* deve ser logo ensinada, pois é a que usamos para a verificação de todo dia, apenas evitando escrevê-la, porque importaria em um trabalho quase equivalente ao da operação em si.

A *prova real da adição* deve ser dada mas não exigida no cálculo diário, pois envolveria uma operação, para prova, mais difícil do que a operação real; daí, muitas vêzes, ser comum a criança acertar na adição e errar na prova. Sua exigência contínua leva a criança a burlar a fiscalização do professor, "copiando a prova" dos têrmos da própria adição. O caso se complica na adição de mais de duas parcelas, envolvendo a prova duas operações, o que, como prova, é absurdo.

No mesmo caso está a *prova real da multiplicação*.

A *prova real da divisão* deve ser dada e pode, até, ser usada com freqüência, no caso de divisor simples. O divisor composto já levaria a uma operação longa e também difícil e, o que é pior, não localizaria o êrro, sendo preciso efetuar a divisão novamente. Isso seria um trabalho longo e árduo.

4. *Regra dos noves* — A regra dos noves, também conhecida por prova dos noves, não é uma prova, uma vez que não merece confiança.

Sabemos todos que a prova dos noves pode dar certa e a operação estar errada.

A regra dos noves é uma aplicação da divisibilidade por 9, e só deve ser dada em relação ao estudo da divisibilidade. E' uma curiosidade, mas não é uma prova.

$$\begin{array}{r} 38 \\ \times\ 4 \\ \hline 152 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} 2 & 8 \\ \hline 4 & 8 \end{array}$$

Quando dizemos: 3 e 8, 11, noves fora 2, estamos verificando que o número 38 não é divisível por 9 e deixa resto 2; da mesma maneira, o número 4 deixaria resto 4.

O produto dêsses 2 restos é 8. Tirando os 9 ao produto (152, no caso), encontramos 8. A prova está certa. A operação, entretanto, estará certa ou não. Milhares de resultados absurdos dariam, também, 8, ao tirar os 9:

Assim, se o aluno tivesse encontrado no produto, por exemplo: 8, 620, 413, 218, 4.202, etc.... a prova daria certa...

5. **Terminologia das operações.**

Aos poucos, deve ir sendo introduzida a terminologia que diz respeito às operações, mesmo porque nós precisamos dêsse vocabulário para nos fazer entender pelos alunos.

B — CASOS SIMPLES DA ADIÇÃO E DA SUBTRAÇÃO

Adições sem reservas:

1.º caso

$$\begin{array}{r} 42 \\ +\ 13 \\ \hline \end{array}$$

(o mesmo número de algarismos nas parcelas)

2.º caso

$$\begin{array}{r} 23 \\ +\ 6 \\ \hline \end{array}$$

(número desigual de algarismos nas parcelas)

3.º caso

$$\begin{array}{r} 4 \\ 2 \\ +\ 3 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3 \\ 2 \\ +\ 5 \\ \hline \end{array}$$

(adição de colunas)

Subtração sem recurso à ordem superior:

$$\begin{array}{r} 33 \\ -\ 11 \\ \hline \end{array}$$

(o mesmo número de algarismos no minuendo e subtraendo)

$$\begin{array}{r} 18 \\ -\ 4 \\ \hline \end{array}$$

(minuendo com mais algarismos que o subtraendo)

$$\begin{array}{r} 38 \\ -\ 35 \\ \hline 3 \end{array}$$

(resto representado por um número com zero à esquerda)

4.º caso

$$\begin{array}{r} 25 \\ 32 \\ +\ 11 \\ \hline 68 \end{array}$$

(adição com 3 ou mais parcelas)

Nota — Para os exercícios de adição de colunas, deve-se evitar, a princípio, que as crianças tenham que lidar com fatos que ultrapassam os das combinações fundamentais de números dígitos.

Exemplo:

$$\begin{array}{r} 5 \\ 4 \\ +\ 9 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5 \\ 9 \\ +\ 7 \\ \hline \end{array}$$

No primeiro exemplo, a criança pensará: 5 + 4 são 9; 9 + 9 são 18; 5 + 4 e 9 + 9 são fatos fundamentais da adição.

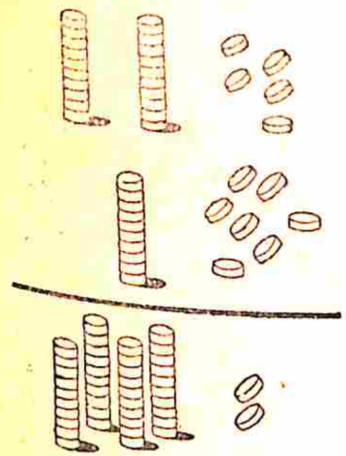
No segundo exemplo, será preciso pensar: 5 + 9 são 14; 14 + 7 são 21; 5 + 9 é um fato fundamental; entretanto 14 + 7 ultrapassa a tabuada, e a criança pode conhecê-la inteiramente, e sentir-se incapaz de vencer essa dificuldade. Tal situação só deve ser apresentada quando o objetivo fôr, realmente, o treino do cálculo mental acima da tabuada, necessário para vencer adições longas mas usadas freqüentemente na vida do adulto.

Para variar os exercícios, consultar as tabelas I e II, apresentadas em "sugestões práticas".

C — ADIÇÃO COM RESERVAS

1. Trabalho preparatório para a adição com reservas.

a) Perfeito conhecimento da composição e decomposição dos números; compreensão prática, de que dez unidades de uma ordem formam uma unidade de ordem superior.



b) Objetivação da adição com reserva, usando pilhas de 10 moedinhas ou fichas para representar a dezena: (*)

$$\begin{array}{r} 25 \\ +\ 17 \\ \hline 42 \end{array}$$

O resultado é: 4 dezenas e 2 unidades, ou 42.

5 unidades + 7 unidades = 12 unidades ou: 1 dezena e 2 unidades;
1 dezena + 2 dezenas + 1 dezena = 4 dezenas.

2. Erros mais comuns nas adições com reservas.

Havendo, no ensino, a precaução de evitar o êrro, é necessário, também, saber diagnosticá-lo, quando

(*) Vide: Melo e Sousa — I. Albuquerque, "Tudo é Fácil" (Matemática, 3.º ano primário).

aparece, a fim de corrigi-lo. A criança pode cometer apenas um tipo de êrro, ou mais de um, combinados; conhecendo os tipos de erros mais comuns, será fácil ao professor diagnosticá-los vendo o trabalho escrito do aluno, ou chamando-o ao quadro-negro, em caso de dúvida.

Erros mais comuns:

a) o aluno escreve o total de cada coluna.

Ex.:
$$\begin{array}{r} 28 \\ +\ 37 \\ \hline 515 \end{array}$$

b) o aluno escreve o algarismo das unidades, em cada coluna, mas não leva a reserva.

Ex.:
$$\begin{array}{r} 28 \\ +\ 37 \\ \hline 55 \end{array}$$

c) o aluno escreve o algarismo das dezenas e leva o das unidades.

Ex.:
$$\begin{array}{r} 28 \\ +\ 37 \\ \hline 101 \end{array}$$

d) o aluno acrescenta uma reserva que não há.

Ex.:
$$\begin{array}{r} 3427 \\ +\ 2379 \\ \hline 6806 \end{array}$$

3. Graduação das dificuldades da adição com reservas.

E' feita tendo em vista vários aspectos:

a) número de parcelas;
b) número desigual de algarismos nas parcelas;
c) reservas em todos os casos ou não.

1.º caso
$$\begin{array}{r} 28 \\ +\ 34 \\ \hline 62 \end{array}$$
(Duas parcelas, o mesmo número de algarismos em cada parcela, não há reservas na última coluna à esquerda).

2.º caso
$$\begin{array}{r} 98 \\ +\ 12 \\ \hline 110 \end{array}$$
(O total da última coluna à esquerda é maior que 9, acrescentando uma dificuldade nova à escrita).

3.º caso
$$\begin{array}{r} 425 \\ +\ 718 \\ \hline 1143 \end{array}$$
(As colunas com reservas apresentam-se de permeio às colunas sem reservas).

4.º caso
$$\begin{array}{r} 385 \\ +\ 15 \\ \hline 400 \end{array}$$
(Número desigual de algarismos nas parcelas).

Os exemplos apresentados utilizam, apenas, duas parcelas; é evidente que, aumentando o número de parcelas, crescem as dificuldades, dentro de cada caso.

Para somas com muitas parcelas é permitido escrever ao alto, em cada coluna, as reservas respectivas, para evitar esquecimento.

D — SUBTRAÇÃO COM RECURSO À ORDEM SUPERIOR

1. Processos para ensinar a subtração com recurso à ordem superior.

O professor deve escolher cuidadosamente o processo; há três processos:

a) *De decomposição ou por empréstimos*: é o mais comum mas o mais sujeito a erros, principalmente nas subtrações longas; não se presta sempre a ser usado na divisão; permite fácil objetivação e prova real.

Ex.:

485	15 — 8, 7
— 98	o 8 fica valendo de 7; 7 — 9, não pode; pede uma dezena emprestada; 17 — 9, 8;
387	o 4 fica valendo de 3; 3 — 0, 3.

b) *Austríaco* (pela adição): é baseado no completamento de igualdades para a adição; é econômico em tempo, pouco sujeito a erros; a tabuada é mais fácil; pode ser sempre empregado na divisão.

Ex.:

485	8 e 7, 15
— 98	vai 1
	e 9, 10; e 8, 18
	vai 1
387	1 e zero, 1; e 3, 4.

c) *Eclético* (ou das adições iguais): pouco sujeito a erros, econômico em tempo; é o mais comumente usado na divisão; permite fácil prova real.

Ex.:

	8 para 15, 7
485	vai 1
— 98	e 9, 10; para 18, 8
	vai 1
387	e zero, 1, para 3, 4.

Os dois últimos processos são os melhores para começar o ensino; entretanto, para crianças já iniciadas pelo método de decomposição, é preferível não alterar o processo, eliminando as falhas, pelo meio *corretivo* aconselhável:

a) mostrar como o número é decomposto: (vide parágrafo seguinte, letra *d*);

b) levando em conta que a atenção da criança não dura além de dois ou três empréstimos sucessivos, permitir recursos auxiliares, que se justificam em subtrações mais longas:

```
 2  1  5  12
 ~~3~~  1  ~~6~~  ~~2~~
    7  4  5
-----------
 2  4  1  7
```

A experiência e a pesquisa demonstram maior rapidez e perfeição alcançadas com êsse uso.

2. Trabalho preparatório para a subtração com recurso à ordem superior.

a) conhecimento perfeito da composição e decomposição de números em dezenas e unidades;

b) (para o processo austríaco) — treino e compreensão de completamento de igualdades com as combinações fundamentais da adição: $7 + \ldots = 12$; treino de subtrações fáceis usando êsse processo:

$$\begin{array}{r} 23 \\ -\ 13 \\ \hline 12 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 3 \text{ e } 2,\ 5 \\ 1 \text{ e } 1,\ 2 \end{array}$$

c) (para o processo eclético): compreensão da subtração como uma operação que serve, também, para ver quanto falta para completar uma quantidade (por meio de problemas orais e por aplicação a casos simples de subtração):

Ex.: Jorge quer comprar um brinquedo que custa 9 cruzeiros e já tem 7 cruzeiros. Quanto falta?

R. 7 cruzeiros para 9 cruzeiros, faltam 2 cruzeiros.

Mamãe apanhou no galinheiro 7 ovos. Quantos faltam para uma dúzia?

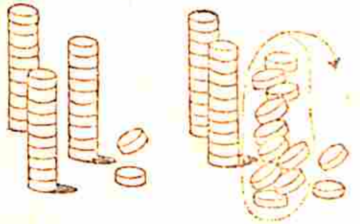
R. 7 para 12 faltam 5.

$$\begin{array}{r} 72 \\ -\ 21 \\ \hline 51 \end{array}$$

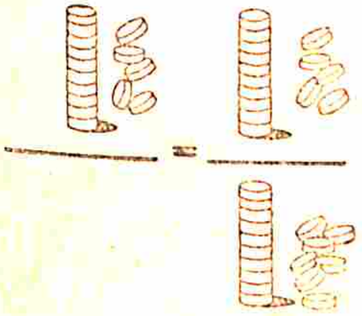
Resolver de duas formas:
2 menos 1, 1; 7 menos 2, 5; ou (de preferência):
1 para 2, 1; 2 para 7, 5.

d) (para o processo de decomposição): objetivar com pilhas de 10 moedinhas ou de fichas para as

dezenas: moedinhas ou fichas soltas para as unidades.



$$\begin{array}{r} 32 \\ -\ 15 \\ \hline \end{array} =$$



$$\begin{array}{r} 2\text{ d} + 12\text{ u} \\ -\ 1\text{ d} + \ \ 5\text{ u} \\ \hline 1\text{ d} + \ \ 7\text{ u} = 17 \end{array}$$

3. Graduação de dificuldades para a subtração com recurso à ordem superior.

Essa graduação é de grande importância quando se usa o processo de decomposição; subtrações longas, com sucessivos empréstimos, levam a erros; além disso, os zeros no minuendo, principalmente quando intercalados com 1, constituem grande dificuldade. Para os outros dois processos, é lógico que as subtrações pequenas são mais fáceis do que as longas, mas os casos com zeros se identificam com os demais. Aqui vão alguns exemplos, classificados em ordem crescente de dificuldade. Mesmo ao professor acostumado ao processo de decomposição, pedimos que experimente efetuar as operações pelos três processos; terá aí, constatada a grande desvantagem dos empréstimos.

$$\begin{array}{r} 35 \\ -18 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 225 \\ -38 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 204 \\ -37 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 1002 \\ -635 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 20101 \\ -9875 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 301001 \\ -71273 \\ \hline \end{array}$$

E — MULTIPLICAÇÃO

1. **Multiplicação com multiplicador simples, sem reservas.**

a) *Conhecimento anterior*: Os fatos fundamentais da multiplicação que serão usados; noção de decomposição de números; adição; compreensão de que a multiplicação é uma soma abreviada de parcelas iguais e que o multiplicador indica quantas parcelas há nessa soma.

b) *Processo*: Levar a criança a redescobrir que se multiplicam as unidades e, depois, as dezenas, e assim sucessivamente, para obter o resultado da multiplicação.

Ex.: Uma dúzia de ovos são 12 ovos. Quantos ovos há em duas dúzias?

A criança, geralmente, já sabe de cor a resposta: 24.

Como indicaremos a operação feita?

$$\begin{array}{r} 12 \\ +\ 12 \\ \hline 24 \end{array} \quad \text{ou} \quad 12 + 12 = 24 \quad \text{ou} \quad 12 \times 2 = 24 \quad \text{ou} \quad \begin{array}{r} 12 \\ \times\ 2 \\ \hline 24 \end{array}$$

Se não soubéssemos o resultado da multiplicação, poderíamos achá-lo sem passar pela soma. "Redescobrir" o que aconteceu, depois de apresentar outros exemplos com resultados conhecidos:

$$\begin{array}{r} 10 \\ \times\ 2 \\ \hline 20 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12 \\ \times\ 3 \\ \hline 36 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10 \\ \times\ 3 \\ \hline 30 \end{array}$$

Aplicar a regra a multiplicações cujos resultados são desconhecidos:

$$\begin{array}{r} 20 \\ \times\ 4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 23 \\ \times\ 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \\ \times\ 4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 11 \\ \times\ 5 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 203 \\ \times\ 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 1243 \\ \times\ 2 \\ \hline \end{array}$$

Fixada essa situação, apresentar exemplos em que o resultado da multiplicação do último algarismo à esquerda seja maior que 9. Ex.:

$$\begin{array}{r} 53 \\ \times\ 3 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 912 \\ \times\ \ 4 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 53 \times 3 = \\ 912 \times 4 = \end{array}$$

Levar a criança, simultâneamente, a armar e indicar a operação.

2. **Multiplicação com multiplicador simples, com reservas.**

a) *Erros mais comuns* (além dos erros nas combinações fundamentais):

— esquecer as reservas;
— somar a reserva ao próximo algarismo do multiplicando;
— escrever a reserva e levar o outro algarismo.

O professor deve evitar o êrro e, encontrando-o, saber diagnosticá-lo, para corrigir.

b) *Processo a usar:*

Levar a criança a compreender que decompomos o número, para a multiplicação, multiplicamos primeiro as unidades e, depois, as dezenas:

duas vêzes 4 unidades = 8 unidades
duas vêzes 3 dezenas = 6 dezenas

6 dezenas e 8 unidades = 68

$$\begin{array}{r} 34 \\ \times\ 2 \\ \hline 68 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times\ 3 \\ \hline 72 \end{array}$$

três vêzes 4 unidades = 12 unidades ou 1 dezena e 2 unidades; escrevemos o 2 correspondendo às unidades e guardamos a dezena; três vêzes 2 dezenas = 6 dezenas; mais 1 dezena que já tínhamos, 7 dezenas.

7 dezenas e 2 unidades = 72.

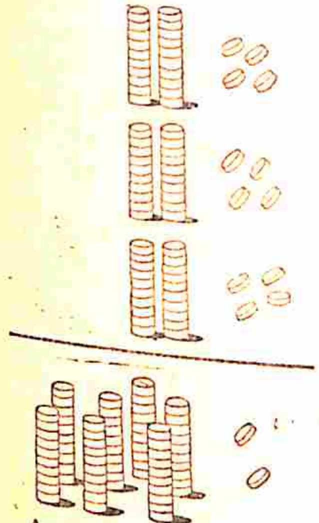
Pela objetivação, a criança verá que é importante guardar a reserva; e sentirá que a reserva pertence à ordem seguinte do produto.

Exemplo:

00000000000000
00000000000000
00000000000000

$$\begin{array}{r} 14 \\ 14 \\ +\ 14 \\ \hline 42 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 14 \\ \times\ 3 \\ \hline 42 \end{array}$$

A única maneira de achar na multiplicação o resultado 42 que se obtém pela contagem é multiplicando as unidades, guardando as dezenas encontradas nessa multiplicação e, depois, multiplicando as dezenas e somando a êste produto as dezenas reservadas.



A objetivação aconselhada para a soma e a subtração também cabe aqui:

$$\begin{array}{r} 24 \\ 24 \\ +\ 24 \\ \hline \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{r} 24 \\ \times\ 3 \\ \hline \end{array}$$

A pilha de moedas (ou dezena) obtida no produto das unidades é acrescentada ao produto das dezenas.

c) Apresentados os exemplos mais simples, e fixado o seu mecanismo, o professor poderá, aos poucos, alongar as multiplicações e usar combinações fundamentais mais difíceis, na medida das possibilidades das crianças.

Exemplo:

$$\begin{array}{r} 132 \\ \times\ 6 \\ \hline 792 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 408 \\ \times\ 7 \\ \hline 2856 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 985 \\ \times\ 8 \\ \hline 7880 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 970 \\ \times\ 9 \\ \hline 8730 \end{array}$$

d) *Exercícios complementares de cálculo mental* de adição são necessários para que a criança tenha êxito em tais produtos, uma vez que lidará com adições que ultrapassam os seus conhecimentos.

No terceiro exemplo do item *c*, terá que somar: 64 + 4 e 72 + 6.

Aconselhamos ,assim aos professôres, que escolham os seus exercícios de multiplicação obedecendo às seguintes etapas e com os seguintes treinos complementares de adição:

I — Multiplicando e multiplicador com algarismos até 5; somar 1 e 2 aos possíveis resultados da multiplicação de cada algarismo.

II — Multiplicando e multiplicador com algarismos até 6: somar 1, 2, 3 aos possíveis resultados da multiplicação de cada algarismo.

III — Multiplicando e multiplicador com algarismos até 7: somar 1, 2, 3, 4 e 5 aos possíveis resultados da multiplicação de cada algarismo.

IV — Multiplicando e multiplicador com algarismos até 8: somar 1, 2, 3, 4, 5 e 6 aos possíveis resultados da multiplicação de cada algarismo.

V — Multiplicando e multiplicador com algarismos até 9; somar 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8 aos possíveis produtos.

3. **Multiplicação de um número por potências de 10.**

Processos de ensino:

a) Efetuando multiplicações e aplicando o princípio, já pràticamente conhecido (embora não enunciado), desde o estudo das combinações fundamentais de que a ordem dos fatôres não altera o produto:

$$\begin{array}{r} 10 \\ \times\ 5 \\ \hline 50 \end{array} \qquad 10 \times 5 = 50 \quad \text{ou} \quad 5 \times 10 = 50$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ \times\ 3 \\ \hline 30 \end{array} \qquad 10 \times 3 = 30 \quad \text{ou} \quad 3 \times 10 = 30$$

$$\begin{array}{r} 100 \\ \times\ 2 \\ \hline 200 \end{array} \qquad 100 \times 2 = 200 \quad \text{ou} \quad 2 \times 100 = 200$$

$$\begin{array}{r} 100 \\ \times\ 4 \\ \hline 400 \end{array} \qquad 100 \times 4 = 400 \quad \text{ou} \quad 4 \times 100 = 400$$

Apagando o quadro e deixando apenas a última coluna, levaremos as crianças a analisarem os dois primeiros casos e a concluir a regra de multiplicação por 10, aplicando-a a números diferentes, quaisquer; faremos o mesmo em relação à multiplicação por 100 e, depois, procederemos da mesma forma em relação à multiplicação por 1000.

b) Podemos, também, concluir a regra redescobrindo o resultado pela adição, fazendo adições de 10 parcelas com números iguais e, depois indicando a multiplicação:

Assim:

$$\begin{array}{r} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ +\ 5 \\ \hline 50 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12 \\ 12 \\ 12 \\ 12 \\ 12 \\ 12 \\ 12 \\ 12 \\ 12 \\ +\ 12 \\ \hline 120 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 115 \\ 115 \\ 115 \\ 115 \\ 115 \\ 115 \\ 115 \\ 115 \\ 115 \\ +\ 115 \\ \hline 1150 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5 \times 10 = 50 \\ 12 \times 10 = 120 \\ 115 \times 10 = 1150 \end{array}$$

As multiplicações por 100 e por 1000 são deduzidas da multiplicação por 10.

4. **Multiplicação por número simples seguido de zeros.**

Processos de ensino:

a) redescoberta pela adição de 20 parcelas (muito moroso);

b) fazendo exercício para que a criança compreenda que:

$$20 = 2 \times 10$$
$$50 = 5 \times 10$$
$$500 = 5 \times 100, \text{ etc.}$$

e que, para multiplicar um número

por 20, basta multiplicá-lo por 2 e, depois, por 10
" 30, " " " 3 " " " 10
" 50, " " " 5 " " " 10
" 500, " " " 5 " " " 100 etc

Daí:

$$\begin{array}{r} 57 \\ \times\ 20 \\ \hline 1140 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 323 \\ \times\ 50 \\ \hline 16150 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 832 \\ \times\ 40 \\ \hline 33280 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 323 \\ \times\ 200 \\ \hline 64600 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 250 \\ \times\ 200 \\ \hline 50000 \end{array}$$

Note-se a disposição da operação. *Os zeros devem ser acrescentados ao fim*, porque essa prática será de grande utilidade mais tarde, na multiplicação com multiplicador composto.

c) A multiplicação por número simples seguido de zeros pode ser dada, se o professor quiser, depois da multiplicação por multiplicador composto de algarismos significativos. Aqui, a redescoberta será feita pela

própria multiplicação, evitando um produto parcial composto de zeros.

Exemplos:

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times\ 50 \\ \hline 00 \\ 225\ \\ \hline 2250 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 38 \\ \times\ 20 \\ \hline 000 \\ 76\ \\ \hline 760 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 19 \\ \times\ 40 \\ \hline 00 \\ 76\ \\ \hline 760 \end{array}$$

A criança verá que é mais lógico e mais fácil multiplicar pelos algarismos significativos e acrescentar os zeros necessários.

5. **Multiplicação por multiplicador composto.**

1.º *caso — Multiplicador composto de algarismos significativos.*

Processo de ensino: Levar a criança a compreender que é difícil multiplicar um número de uma só vez por um multiplicador acima de 9. Por isso, multiplicam-se primeiro as unidades, depois as dezenas, achando-se, respectivamente, unidades e dezenas; as dezenas devem ser, pois, colocadas debaixo das dezenas.

$$\begin{array}{rl} 123 & \\ +\ 42 & \\ \hline 246 & \text{unidades} \\ 492\ \ & \text{dezenas} \\ \hline 5166 & \end{array}$$

Feito isso, pode-se somar:

6 unidades
4 + 2 = 6 dezenas
2 + 9 = 11 centenas, vai 1
1 e 4 = 5 milhares.

Produto: 5166 ou 5 milhares, 1 centena, 6 dezenas e 6 unidades.

Insistir que essa colocação dos produtos parciais é importante para o êxito.

2.º *caso — Multiplicação por multiplicador composto seguido de zeros.* E' apenas uma combinação com a etapa n.º 4 (multiplicação por número simples seguido de zeros).

Levar a criança a verificar, não só a operação como os zeros. Exemplos: 435 × 120 =

3.º *caso — Multiplicando e multiplicador terminados em zeros.* Habituar a colocar os zeros apenas no produto final, e a verificá-los, também:

$$\begin{array}{r} 130 \\ \times\ 2500 \\ \hline 65 \\ 26 \\ \hline 325000 \end{array}$$

4.º *caso — Multiplicador com zeros intercalados.* Pela redescoberta, efetuando a multiplicação por zero, levar a criança a preferir um meio mais econômico.

Relembrar dois casos conhecidos anteriormente:

$$\begin{array}{r} 1123 \\ \times\ 302 \\ \hline 2246 \\ 000 \\ 3369 \\ \hline 339146 \end{array}$$

— manter os produtos parciais das unidades na coluna destinada às unidades; das dezenas na coluna destinada às dezenas, etc.
— qualquer número multiplicado por zero dá zero, daí um produto parcial representado por zeros, o que devemos evitar.

$$\begin{array}{r} 1123 \\ \times\ 302 \\ \hline 2246 \\ 3369. \\ \hline 339146 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 132 \\ 2002 \\ \hline 264 \\ 264.. \\ \hline 264264 \end{array}$$

Conclusão: Manter os produtos parciais começando nas colunas respectivas; como meio para facilitar a verificação, pode-se *permitir* a colocação de um ponto no lugar correspondente a uma ordem representada por zero no multiplicador.

F — DIVISÃO COM DIVISOR SIMPLES

1.º *caso* — Calcular quocientes e restos simples, armando e indicando a operação:

6 ÷ 2 = ... resto ....
$$\begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & 3 \end{array}$$

18 ÷ 3 = ... resto ....
$$\begin{array}{r|l} 18 & 3 \\ \cline{2-2} 0 & 6 \end{array}$$

19 ÷ 3 = ... resto ....
$$\begin{array}{r|l} 19 & 3 \\ \cline{2-2} 1 & 6 \end{array}$$

Essa noção deve ser prèviamente objetivada e deve levar a criança a usar mentalmente a tábua de multiplicar para encontrar o quociente.

Para o cálculo do resto, tanto nesse caso como em todos os que se seguirem, a criança deve ser levada a usar, na divisão, o mesmo processo que usa para os demais cálculos de subtração:

Assim, dirá: 19 — 18, 1 (se usa o processo de decomposição).

ou 18 e 1, 19 (se usa o processo austríaco).

ou 18, para 19, 1 (se usa o processo eclético).

2.º *caso*: Levar a criança a "redescobrir", usando operações, cujos resultados ela conheça mentalmente, que a divisão, para números maiores, é feita por etapas:

$24 \div 2 = 12$ $36 \div 3 = 12$

```
2'4 | 2         3'6 | 3
    |---            |---
0 4   12        0 6   12
  0               0
```

Insistir para que a criança marque o algarismo "abaixado" de cada vez, no dividendo, para evitar confusões.

Apresentar exemplos mais longos e com resto:

```
3'8' | 3        3'6'5' | 3
     |---              |---
0 8    12       0 6      121
  2               0 5
                    2
```

3.º *caso*: Um dos dividendos parciais é um número formado pelo resto seguido do próximo algarismo abaixado no dividendo.

```
9'8'3' | 3
       |---
0 8      327
  2 3
    2
```


4.º *caso*: É preciso começar abaixando dois algarismos no dividendo.

```
12'5 | 3       13'5 | 3       13'7 | 3
     |---           |---           |---
 0 5   41       1 5   45       1 7   45
   2              0              2
```

5.º *caso*: Algarismo zero no quociente.

```
24'2 | 3       24'0 | 3       5'0'0 | 5
     |---           |---            |---
 0 2   80       0 0   80      0 0 0   100
```

6.º *caso*: A operação continua depois do zero no quociente:

```
24'0'8' | 3        24'2'8' | 3
        |---               |---
0 0 8     802      0 2 8     809
    2                  1
```

7.º *caso*: Mais de um zero no quociente, antes de prosseguir a divisão:

```
24'0'1'8' | 3
          |---
0 0 1 8     8006
      2
```

2. Em todos os casos apresentados acima, as subtrações exigidas são de dificuldade mínima e os divisores são baixos; entretanto, a dificuldade da subtração envolvida concorre para aumentar a dificuldade da operação.

Exemplo:

```
44'4'5' | 9
        |------
 8 4      493
   3 5
     8
```

Essas dificuldades são tanto maiores quanto mais altos são os divisores.

Para a resolução de tais casos, o professor pode adotar um dos seguintes critérios:

a) Treinar os alunos, paralelamente, no cálculo mental de subtração acima da tabuada, necessário para resolver a divisão. Ex.: 44 — 36; 35 — 27, etc., pode-se dizer, conforme o processo adotado 44 menos 36 ou 36 para 44, ou 36 e..., 44). Para tal, deve o professor organizar uma tabela para cálculo de todos os restos possíveis entre dois quocientes consecutivos:

Exemplos:

Para a divisão por 7

quociente 2	quociente 3	quociente 4
15 (	22 (	29 (
16 (	23 (	30 (
17 (— 14	24 (— 21	31 (— 28
18 (	25 (	32 (
19 (	26 (	33 (
20 (	27 (	34 (

quociente 5	quociente 6	quociente 7, etc.
36 (	43 (	50 (
37 (	44 (	51 (
38 (— 35	45 (— 42	52 (— 49
39 (	46 (	53 (
40 (	47 (	54 (
41 (	48 (	55 (

E' fora de dúvida que o professor levará a criança a redescobrir, e esta fixará, ao fim de pouco tempo, que quando o algarismo das dezenas é o mesmo no minuendo e subtraendo, basta efetuar a subtração das unidades.

Ex.: 16 — 14; 38 — 35; 45 — 42, etc.

Concluída essa regra, o treino intenso se verificará para os casos diferentes, que são apenas os seguintes:

Para o divisor 4: 29, 30 e 31 menos 28.

Para o divisor 6: 20, 21, 22 e 23 menos 18; 40 e 41 menos 36; 50, 51, 52 e 53 menos 48.

Para o divisor 7: 20 menos 14; 30, 31, 32, 33 e 34 menos 28; 40 e 41 menos 35; 50, 51, 52, 53, 54 e 55 menos 49.

Para o divisor 8: 20, 21, 22, 23 menos 16; 30 e 31 menos 24; 54 e 55 menos 48; 63, 64, 65, 66, 67, 70 e 71 menos 55 (além de outras subtrações já anteriormente estudas para os divisores 6 e 7).

Para o divisor 9: 24, 25 e 26 menos 18; 30, 31, 32, 33, 34 e 35 menos 27; 42, 43, 44 menos 36; 50, 51, 52 e 53 menos 45; 70 e 71 menos 63; 80 menos 72 (além de outras subtrações já anteriormente estudadas).

Note-se que as divisões por 2, 3 e 5 não apresentam dificuldades para o cálculo dos restos. Só depois de treinadas as crianças em todos os casos da divisão usando apenas os divisores 2, 3 e 5 é que poderemos passar a usar outros divisores, treinando primeiramente, para cada divisor, as subtrações necessárias.

b) Se o professor assim julgar conveniente, principalmente quando tiver a seu cargo crianças com difícil nível de aprendizagem, pode ensinar a divisão pelo processo longo, evitando, assim, o treino das subtrações acima enumeradas:

41'3'2' | 6
36 | 688
.53
48
.52
48
.4

Cada resultado da multiplicação do algarismo do quociente pelo divisor é escrito abaixo do dividendo considerado, para, então, efetuar a subtração:

$41 \div 6 = 6$ escreve o 6 no quociente)

$6 \times 6 = 36$ (escreve o 36 abaixo do 41)

e subtrai, achando 5 e continuando a divisão.

E' êste, aliás, o processo mais aconselhável para tais casos, devendo ser abandonado logo que o aluno sinta segurança no processo abreviado.

G — DIVISÃO COM DIVISOR COMPOSTO

1. E' necessário que a criança tenha vencido *tôdas* as etapas da divisão com divisor simples, apresentando firmeza na subtração, na multiplicação, no cálculo do algarismo do quociente.

2. *Processos de ensino*:

a) *Processo abreviado*: Por estudos objetivos feitos nos Estados Unidos, ficou comprovado que se trata de um processo cuja aprendizagem está adequada à idade mental da criança média do 6.º ano escolar. No Brasil os professôres, em geral, insistem sôbre êsse processo, daí se verificarem erros graves nas divisões até a 5.ª série escolar (última do nosso curso primário).

Exemplo:

135'2' | 32
.72 | 42
8

A criança deve proceder da seguinte maneira (sem contar com a dificuldade de calcular o algarismo do quociente):

$4 \times 2 = 8$ (que ela não vê)

para subtrair de 15 (que ela também não vê) dá resto 7; escreve o 7; vai 1 (que ela também não vê, mas que deve guardar); $4 \times 3 = 12$ (que ela não vê), mais 1 (da reserva que guardou) dá 13 (que ela não vê) para subtrair de 13, zero. E assim por diante.

Todo êsse processo mental foi necessário para calcular um algarismo do quociente de uma divisão por 32, uma operação das mais fáceis da divisão como divisor composto.

b) *Processo longo*: E' o único que torna a divisão acessível a crianças de idade escolar e mental mais baixa, eliminando muitos dos erros que seriam produzidos pelo outro processo e levando a menor fadiga, mais confiança e, até, grande velocidade.

Não há mal em conservá-lo como método único, embora se deva, chegada à idade mental devida, apresentar o processo abreviado, aconselhando-o aos que puderem segui-lo com êxito.

Note-se que o processo longo dá muito melhor compreensão da operação e não prejudica, de maneira alguma, a aprendizagem posterior do processo abreviado; pelo contrário, facilita-a, porque aumenta o treino em todos os setores necessários ao processo abreviado, deixando apenas, para êste, a dificuldade de fazer simultâneamente a multiplicação e a subtração.

Exemplo:

135'2' | 32
128 | 42
.72
64
.8

a) Multiplica-se o quociente pelo divisor, colocando o produto abaixo do dividendo considerado:

$4 \times 2 = 8$ (escreve)
$4 \times 3 = 12$ (escreve)

b) Efetua-se a subtração, encontrando o resto dêsse dividendo considerado (7 no caso).

E assim por diante.

Note-se que, ainda, nesse processo, torna-se mais fácil que o aluno faça subtração pelo método a que se acostumou. A verificação da operação pode ser feita imediatamente após cada etapa.

3. A *graduação das dificuldades*, apresentando cada etapa ao aluno, com seu ensino especial, e depois que a anterior tenha sido perfeitamente dominada, é essencial à aprendizagem.

São de quatro ordens as dificuldades na operação em questão:

a) Em relação ao cálculo do algarismo do quociente;

b) Em relação às subtrações envolvidas;

c) Em relação às multiplicações a efetuar;

d) Em relação aos zeros.

O método longo diminui a influência da dificuldade *b*, que só será muito séria se há deficiências anteriores.

Ainda convém estabelecer que só depois que a criança tenha completado todos os casos de divisão com divisor composto de dois algarismos é que se passa ao divisor com três algarismos, que, então, lhe será fácil. Mais do que três algarismos não deve ser prática geral, usando-se apenas para demonstrar que o processo é o mesmo.

1.° *caso*: Acha-se o algarismo do quociente experimentando o primeiro algarismo do divisor. Subtrações sem recurso à ordem superior. Multiplicações sem reservas.

```
86 | 42        139 | 32        1375 | 21
```

NOTA — Reparar que o algarismo baixo nas unidades do divisor facilita o cálculo do algarismo do quociente.

2.° *caso*: Algarismo do quociente fácil de calcular; subtração com recurso à ordem superior; multiplicações sem reservas a princípio e, depois, com reservas

```
135'2' | 32          623'1' | 85
128      42          595      73
----                 ---
.72                  .28 1
 64                   25 5
----                  ----
 .8                   .2 6
```

3.° *caso*: Situações em que aparecem zeros no dividendo, quociente ou divisor. Naturalmente que, quanto ao cálculo do algarismo do quociente e às subtrações envolvidas, subsistem os casos anteriormente aprendidos.

Os zeros apresentam situações variadas, fáceis de deduzir pelos exemplos abaixo apresentados, os quais, todos êles, devem ser objeto de ensino e fixação por parte do professor:

```
a) — 37658 | 70

b) — 376'3'8' | 75      376'0'8' | 75      376'0'0' | 75
     375        501     375        501     375        501
     ---                ---                ---
     138                108                100
      75                 75                 75
     ---                ---                ---
      63                 33                 25

c) — 375'0'7' | 75      375'0'0' | 75
     375        500     375        500
     ---                ---
     007                000

d) — 37600 | 750        37600 | 7500       3760 | 700
```

4.º *caso*: Não se acha o algarismo do cociente experimentando o primeiro algarismo do divisor; progressivamente, vão-se combinando tôdas as dificuldades anteriormente vencidas com essa última, completando, assim, a aprendizagem da divisão:

Exemplo:

452'1'	78
390	57
621	
546	
75	

SUGESTÕES PRÁTICAS

1) Obtendo totais não excedentes de 10, podem-se dar 120 diferentes somas de colunas usando 3 números digitos, com as combinações da Tabela I, variando a posição das parcelas, dentro de cada adição:

Exemplo:

1+1+2 1+2+1 2+1+1

1+2+3 1+3+2 3+2+1 2+3+1 3+1+2 2+1+3

TABELA I

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2
1	2	3	4	5	6	7	8	2	3	4	5

1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2
2	2	3	3	3	3	4	4	2	2	2	2
6	7	3	4	5	6	4	5	2	3	4	5

2	2	2	2	2	3	3
2	3	3	3	4	3	3
6	3	4	5	4	3	4

2) Agindo de modo idêntico para colunas com totais de 11 a 18, obtemos 204 adições, usando as combinações da Tabela II, variando a ordem das parcelas:

TABELA II

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	2	3	3	3	4	4	4	4	5	5
9	8	9	7	8	9	6	7	8	9	5	6

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	5	5	6	6	6	6	7	7	7	8	8
7	8	9	6	7	8	9	7	8	9	8	9

2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	4
7	8	9	6	7	8	9	5	6	7	8	9

2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
5	5	5	5	5	6	6	6	6	7	7	7
5	6	7	8	9	6	7	8	9	7	8	9

3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	5
5	6	7	8	9	4	5	6	7	8	9	5

3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4
5	5	5	5	6	6	6	6	4	4	4	4
6	7	8	9	6	7	8	9	4	5	6	7
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

4	4	4	4	4	4	4
4	4	5	5	5	5	5
8	9	5	6	7	8	9
—	—	—	—	—	—	—

3. **Sugestões para trabalhos práticos** (para o estudante de Metodologia):

1) Organize um plano de aula sôbre assunto a escolher dentre os seguintes (incluindo noção nova e exercício de fixação):

a) 2.º caso de adição com reservas (1.ª série);

b) subtração com recurso à ordem superior (2.ª série);

c) multiplicação com multiplicador composto (3.ª série);

d) divisão com divisor composto (caso em que a subtração tem recursos sucessivos à ordem superior) 4.ª série. Mencione os casos que o aluno precisa ter dominado anteriormente.

2) Descreva 4 jogos diferentes que possam servir ao treino de operações de inteiros. Indique as questões que proporia:

a) para treino de adição;
b) para treino da subtração;
c) para treino da multiplicação;
d) para treino da divisão.

Classifique cada jôgo apontado e calcule em quanto tempo se desenvolveria, aproximadamente.

3) Organize 5 exercícios a serem fornecidos mimeografados aos alunos, contendo adições de três parcelas com reservas, fixando as 20 últimas combinações que aparecem na tabela II (3.ª série primária).

Indique as dificuldades da adição que cada exercício procurou fixar, gradue os exercícios em ordem crescente de dificuldade.

CAPÍTULO V — CÁLCULO MENTAL ABREVIADO

1. O treino do cálculo mental abreviado deve ser progressivamente intensificado, por exercícios sistematizados de cálculo mental, nos quais os alunos empreguem processos abreviados de cálculo que lhes foram ensinados. Veremos alguns dos mais comuns.

2. **Para adição e subtração.**

a) Aprender, mentalmente, o total de quantidades iguais (pelo uso):

$20 + 20, \quad 50 + 50, \quad 12 + 12, \quad 15 + 15, \quad 25 + 25$

b) Casos como $91 + 40$; somam-se as dezenas e acrescentam-se as unidades: $90 + 40 + 1$.

O aluno somará mentalmente 130, 131.

c) Casos como $91 + 68$ serão feitos somando o 1.º número às dezenas do 2.º e acrescentando as unidades do 2.º.

$$91 + 68 = 91 + 60 + 8$$

O aluno pensará: 151, 159.

d) Casos como $91 - 43$, serão feitos subtraindo do minuendo as dezenas do subtraendo, e depois as unidades:

$$91 - 43 = \begin{cases} 91 - 40 = 51 \\ 51 - 3 = 48 \end{cases}$$

3. Para multiplicação.

a) Multiplicar por 5 é o mesmo que multiplicar por 10 e dividir por 2:

$$36 \times 5 = 360 \div 2 = 180$$

b) Multiplicar por 25 é o mesmo que multiplicar por 100 e tomar a 4.ª parte:

$$36 \times 25 = 3600 \div 4 = 900$$

c) Multiplicar por 4 é achar o dôbro do número e depois o dôbro do resultado:

$$32 \times 4 = 64 + 64 = 128$$

d) Multiplicar por 11 um número de 2 algarismos é o mesmo que acrescentar entre os dois algarismos do número o algarismo igual à sua soma:

$$35 \times 11 = 385$$

No caso em que os dois algarismos somem mais do que 9, a reserva será juntada ao algarismo das dezenas, formando as centenas do produto:

$$85 \times 11 = 935$$

e) Multiplicar por 11 qualquer número é escrever o algarismo das unidades e ir escrevendo, da direita para a esquerda, o total de cada algarismo com o seu vizinho da esquerda; ao final, escreve-se o último algarismo da esquerda:

$$4327 \times 11 = 47\ 597$$
$$3825 \times 11 = 42\ 075$$

Êsse caso já é mais difícil para a criança, e só algumas alcançarão com facilidade; é preferível que ensinemos o cálculo abreviado:

$$3825 \times 11 = 3825 \times 10 + (3825 \times 1), \text{ e, daí:}$$

$$\begin{array}{r} 3825 \times 11 = 38250 \\ +\ \ 3825 \\ \hline 42075 \end{array}$$

4. Para divisão.

a) Dividir um número por 5 é o mesmo que multiplicar por 2 e dividir por 10:

$$135 + 5 = \begin{cases} 135 \times 2 = 270 \\ 270 \div 10 = 27 \end{cases}$$

Só devem ser usados números múltiplos de 5, pois outros deixarão resto e dificultarão o cálculo para a criança.

b) Dividir por 25 é multiplicar por 4 e dividir por 100:

$$350 \div 25 = \begin{cases} 700 + 700 = 1400 \\ 1400 \div 100 = 14 \end{cases}$$

Só os números múltiplos de 25 devem ser usados.

c) Dividir por 20, 30, 50, etc., números terminados em zeros, é o mesmo que cortar um zero e dividir por 2, 3, ou 5:

$$500 \div 20 = 50 \div 2 = 25$$
$$500 \div 50 = 50 \div 5 = 10$$
$$600 \div 30 = 60 \div 3 = 20$$

Só os números múltiplos do divisor devem ser dados para dividendos.

5. O cálculo mental pode ser dado apresentando a operação indicada por escrito e pedindo que o aluno coloque apenas o resultado sem efetuá-la.

Em casos simples, os números serão ditos oralmente e o aluno dirá em voz alta ou escreverá apenas o resultado.

E' dos mais aconselháveis o treino do cálculo mental por meio de pequenos problemas orais. Certos processos abreviados de multiplicação e divisão só poderão ser aprendidos a partir da 3.ª série.

CAPÍTULO VI — FRAÇÕES ORDINÁRIAS

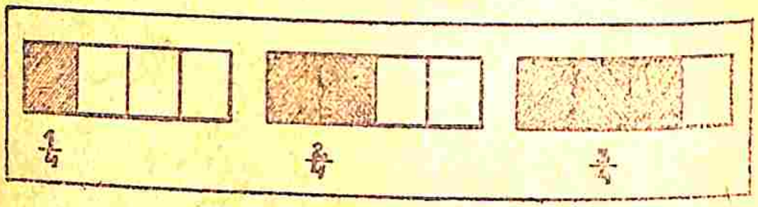
1 — Em investigações levadas a efeito sôbre o emprêgo de frações ordinárias, foi verificado que as frações 1/2, 1/3, 1/4, 2/3 e 3/4 constituem 90% de tôdas as frações usadas na vida, sendo que a fração 1/2 contribui com 60%; são ainda usadas as frações 1/5, 1/8, e, com menor freqüência ainda, 4/5, 3/8, 5/8 e 7/8.

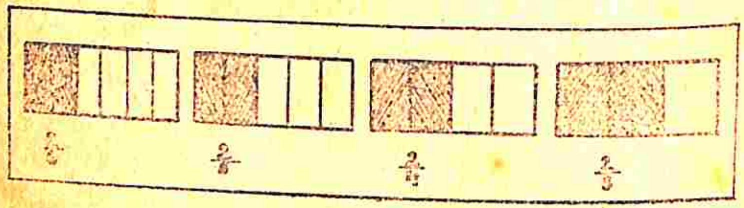
2 — *Frações de uma coisa* são fàcilmente compreendidas pelas crianças; (de maçã, de fôlha de papel, etc.). Segue-se a *noção* da metade (objetivamente) de números até uma dúzia. Paralelamente ao estudo da divisão, podem-se achar 1/2, 1/3, 1/4 de números dados.

3 — Prosseguindo na *noção de fração*, a criança será levada a achar outras frações da unidade, concretamente, com frutas, fôlhas de papel, cartolina, etc., ou por meio de desenhos coloridos.

4 — A *comparação de frações* será feita também objetivamente, de modo que o aluno chegue à noção perfeita de que 1/2 é maior que 1/3 e 1/4, e de que 2/3 são maiores que 1/3, e 3/4 são maiores que 2/4 e 1/4, etc., usando as frações de uso comum na vida. Quadros para comparação de frações devem ser feitos para que o aluno "redescubra" que:

"De frações com o mesmo denominador, é maior a que tem maior numerador, das frações com o mesmo numerador, a maior é a que tem menor denominador".





A não ser em turmas com elevado nível mental, é preferível apresentar e fixar bem a primeira situação para, então, em dia posterior, levar à redescoberta do outro aspecto da comparação de frações. O quadro de objetivação (de preferência feito em cartolina e papel colorido) deve ficar à vista da turma algum tempo, até que haja uma fixação perfeita, pois decorar a regra não habilitará a resolver as situações práticas. O aluno deverá *pensar na fração* como uma parte da unidade, e não como em número com traço de fração, numerador e denominador.

Se a turma fôr, realmente, muito fraca, é aconselhável usar mais de um quadro de objetivação, para a redescoberta de cada regra. Inclusive, desenhos no quadro-negro podem completar o material confeccionado em cartolina. Empregando giz ou papel colorido, deve o professor usar sempre a mesma côr em cada grupo de exemplos, para evitar que a criança faça a fixação apenas pela côr.

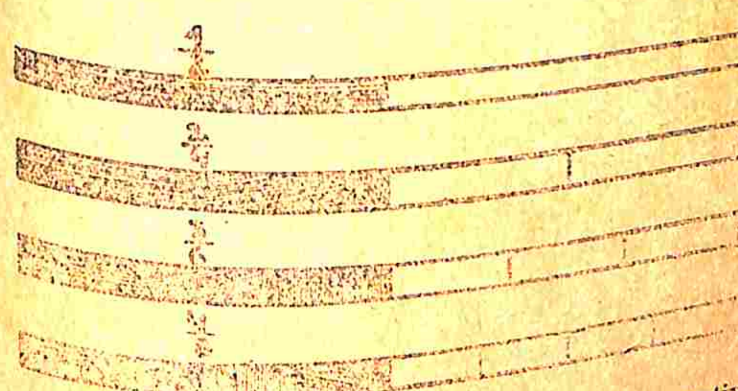
5 — Para a *comparação de frações heterogêneas*, que será dada mais tarde, o aluno será levado à com-

preensão de que precisa torná-las homogêneas, para compará-las. A forma mais comum de tornar homogêneas as frações é representá-las com o mesmo denominador.

6 — A noção de *eqüivalência de frações* é, também, uma aprendizagem básica, indispensável para a própria compreensão das frações e dos estudos posteriores de comparação de frações heterogêneas e de adição e subtração de frações heterogêneas. Esta noção precisa ficar firme e, para isso, ser dada de maneira prática, com objetivação e exercícios adequados.

A criança deve saber objetivamente e de cor quantos quartos há num meio, quantos oitavos há num quarto, etc. (Veja "Sugestões práticas").

Devem ser feitos e afixados na sala de aula, para consulta, quadros de eqüivalência das frações mais usuais, do tipo do que se segue:



Frações eqüivalentes à unidade devem ser motivo de objetivação, para levar à redescoberta de que a unidade expressa sob a forma de fração tem numerador e denominador iguais.

7 — *Simplificar* uma fração não é mais do que encontrar a fração equivalente a uma outra dada, expressa nos seus têrmos mais simples. A consulta ao quadro de eqüivalência pode levar a criança a compreender isso e a redescobrir que se simplifica uma fração dividindo ambos os têrmos pelo mesmo número, isto é, por um divisor comum.

Muitas vêzes, êsse cálculo é feito mentalmente, e a criança descobre logo que a forma mais simples, por exemplo, de $\frac{15}{20}$ é $\frac{3}{4}$; outras tantas, isso é feito por etapas:

$$\frac{40}{60} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Não há necessidade alguma, e importa, não raro, em *perda de tempo*, levar a criança a fazer a simplificação acima indicada por um dos seguintes processos:

$$\frac{40}{60} = \frac{20}{30} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \quad \text{ou}$$

$$\frac{40 \div 20}{60 \div 20} = \frac{2}{3}$$

	1	2	
60	40	20	
20	0		

m.d.c. = 20

ou

$$\begin{array}{r|l} 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$
$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$
m. d. c. $= 2 \times 2 \times 5 = 4 \times 5 = 20$

$$\frac{40 \div 20}{60 \div 20} = \frac{2}{3}$$

Calcular o m.d.c. é uma tarefa muito longa e sem valor para a simplificação de frações. Não tem qualquer utilidade na vida comum. Tal aprendizagem não tem aplicação alguma ao curso primário e só por arcaísmo se conserva nos nossos programas, acrescentando dificuldades desnecessárias à aprendizagem da matemática. A melhor forma de simplificar frações (quando, pelo próprio quadro de eqhüivalência, não se pode fazê-lo imediatamente) é dividir ambos os têrmos por um divisor comum qualquer (o maior que pudermos mentalmente estabelecer), e, se virmos que a fração ainda comporta nova simplificação, realizá-la.

8 — *Extrair inteiros* é outra aprendizagem na qual a criança pode, aos poucos, ser treinada; desde que esteja bem firme na representação da unidade sob forma da fração, compreenderá imediatamente:

a) o que é *fração imprópria*, isto é, maior do que a unidade;

b) como reconhecer frações impróprias correspondentes a duas, três unidades;

c) como ir retirando de uma fração imprópria os inteiros que ela contém:

$\frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$ por que contém $\frac{5}{5}$, que é um inteiro, e ainda sobra $\frac{1}{5}$.

Mais tarde, aprenderá a outra forma de extrair inteiros:

$$\begin{array}{r|l} 6 & 5 \\ \hline 1 & 1 \end{array} \quad = \quad 1\frac{1}{5}$$

9 — *Hábitos a formar em relação às operações:*

a) Dar sempre o resultado de um cálculo em fração irredutível e, quando se tratar de fração imprópria, extrair os inteiros. Começa-se a iniciar a turma nessa aprendizagem e a formar tal hábito logo que os casos mais simples de adição e subtração de frações homogêneas estejam sabidos.

b) Encarar a fração mais pelo que significa do que pelos seus têrmos isoladamente:

Exemplo: "Quantos sextos há em 1/3" leva a melhor compreensão do que: "dê à fração 1/3 o denominador 6".

10 — *Adição e subtração de frações homogêneas.*

Motivada a aprendizagem, leva-se a turma, pela objetivação, à redescoberta de que "para somar ou subtrair frações ordinárias com o mesmo denomina-

dor, somam-se ou subtraem-se os numeradores, dando ao resultado o denominador comum.

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4} \qquad \frac{1}{6} + \frac{4}{6} = \frac{5}{6}$$

Mostra-se cada situação objetivamente, e enuncia-se o cálculo oralmente (um quarto mais dois quartos igual a três quartos) antes de escrevê-lo. Apresentados dois ou três exemplos, os alunos são levados a examinar os numeradores e os denominadores nos vários exemplos e a concluir a regra.

Daí, aplica-se a noção em exercícios e em outros problemas de vida real.

Procede-se da mesma maneira em relação à subtração.

11 — Nosso sistema decimal de pesos e medidas não admite possibilidades de vida prática para *adição e subtração de frações heterogêneas*. Quando muito, podemos efetuar cálculos em que o denominador de uma fração seja múltiplo do da outra. (Ex.: Comprei 1/2 litro de leite e gastei 1/4 de litro para fazer um bôlo; quanto sobrou ?)

Aprendizagem da situação como:

$$\frac{3}{5} + \frac{2}{8} + \frac{3}{7}$$

constitui um êrro palmar na elaboração de programas do curso primário, dada a sua inteira inaplicabilidade na vida real. Mesmo supondo que o aluno vá dedicar-se a trabalhos como, por exemplo, carpintaria, onde as medidas inglêsas pés e polegadas são tão usadas, ainda assim, teria que fazer cálculos apenas com metades, quartos e oitavos de pés ou polegadas, isto é, frações nas quais um dos denominadores é múltiplo dos demais.

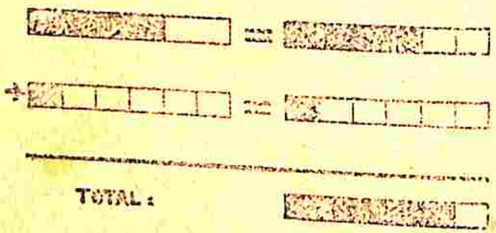
12 — A *adição e a subtração de frações heterogêneas* baseiam-se na eqüivalência de frações. Admitindo-se o princípio já assentado de que só se darão frações de uso comum, os alunos terão facilidade em encontrar as frações equivalentes que lhes permitam efetuar a adição ou a subtração; poderão, quando necessário, consultar os quadros de eqüivalência.

Aqui, ainda é importante, como já foi dito anteriormente, levar a criança a encarar a fração mais pelo que significa, do que pelos seus têrmos, isoladamente: "Para somar 1/3 com 1/6, preciso reduzir os *terços* a *sextos*" é melhor forma de pensamento do que "preciso dar a ambas as frações o denominador 6".

A objetivação ajuda à compreensão:

Leva-se o aluno primeiro a trabalhar com desenhos e depois com números:

Ex. 1:



$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

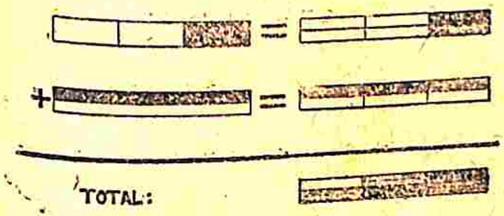
$$\text{Total: } \frac{5}{6}$$

a) Reduzir tôdas as frações ao maior denominador, quando êste é um múltiplo comum das demais:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{6} \quad \text{(ex. 1)}.$$

b) Multiplicar os denominadores, quando êstes são primos entre si: $\frac{1}{3} + \frac{1}{2}$ (ex. 2); $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$ (ex. 3) ou em qualquer outra situação, desde que se apresentem os resultados das operações em frações irredutíveis.

Ex. 2:

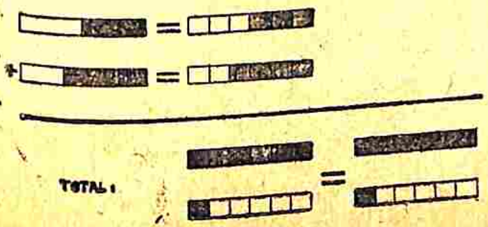


$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$$

$$+ \frac{1}{2} + \frac{3}{6}$$

$$\text{Total: } \frac{5}{6}$$

Ex. 3 (mais difícil):



$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$$

$$+ \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

$$\text{Total: } \frac{7}{6} = 6\,\frac{1}{6}$$

c) Calcular mentalmente um denominador que seja o menor múltiplo comum dos denominadores dados, multiplicando sucessivamente o maior denominador por 2, 3, 4, etc., até encontrar um número que seja múltiplo dos outros denominadores dados.

Ex. 4: $\frac{1}{4} + \frac{2}{5} + \frac{3}{10}$

$$\frac{1}{4} = \frac{5}{20}$$
$$\frac{2}{5} = \frac{8}{20}$$
$$+\ \frac{3}{10} = \frac{6}{20}$$
$$\frac{19}{20}$$

Cálculo oral do denominador comum:

$10 \times 2 = 20$; 20 é divisível por 4 e por 5; logo, é o menor denominador comum.

Note-se que adotamos a forma de resolver as operações mais aceita pelos autores modernos, uma vez que mostra melhor à criança a eqüivalência das frações. A forma mais comum no Brasil é a seguinte:

Exemplo:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} = \frac{7}{6} = 1\ \frac{1}{6}$$

Para reduzir frações ao mesmo denominador, progressivamente, os alunos serão treinados nas seguintes situações:

Ex. 5: $\frac{1}{3} + \frac{2}{8} + \frac{5}{6}$

$$\frac{1}{3} = \frac{8}{24}$$
$$\frac{2}{8} = \frac{6}{24}$$
$$+\ \frac{5}{6} = \frac{20}{24}$$
$$\frac{34}{24} = 1\ \frac{10}{24} = 1\ \frac{5}{12}$$

Cálculo oral do denominador comum:

$8 \times 2 = 16$ (não é divisível por 6 nem por 3)

$8 \times 3 = 24$ (divisível por 6 e por 3)

Note-se que o cálculo do mínimo múltiplo comum pelos processos aconselhados nos livros é perfeitamente dispensável.

O que foi feito para a adição, servirá à subtração.

13 — *Subtrair de um número inteiro uma fração* é situação real e será ensinado objetivamente, sem processos artificiais de cálculo:

Ex.: "Mamãe fêz dois pudins. Nós comemos meio pudim no jantar: quanto ainda resta ?"

E' evidente que, na vida real, só se parte o inteiro do qual se vai tirar a fração. Logo, a operação será:

$$2 = 1\frac{2}{2}$$

$$-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$1\frac{1}{2}$$

14 — O cálculo envolvendo *adição* ou *subtração* com *número misto e fração* é, também, real: Ex.: "Havia um litro e um quarto de leite e comprou-se mais um quarto de litro. Quanto ficou ?

$$1\frac{1}{4}$$

$$+\frac{1}{4}$$

$$1\frac{2}{4} = 1\frac{1}{2}$$

Outros exemplos:

$$1\frac{1}{4} = 1\frac{1}{4} \qquad 3\frac{1}{4} = 3\frac{2}{8}$$

$$+\frac{1}{2} = \frac{2}{4} \qquad +\frac{7}{8} = \frac{7}{8}$$

$$\text{Total: } 1\frac{3}{4} \qquad \text{Total: } 3\frac{9}{8} = 4\frac{1}{8}$$

Ex. para *subtração*:

$$6\frac{3}{4} = 6\frac{6}{8} = 5\frac{14}{8}$$

$$-4\frac{7}{8} = 4\frac{7}{8} = 4\frac{7}{8}$$

$$\text{Resto} \quad -1\frac{7}{8}$$

Para a subtração envolvendo números mistos, subtraem-se primeiro as frações e depois os inteiros.

15 — A *multiplicação de fração por número inteiro* tem aplicação prática; por exemplo, dobrar a receita de um doce; onde se lê:

$$\frac{1}{4} \text{ de xícara será } \frac{1}{4} \times 2 = \frac{1 \times 2}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{3} \text{ de xícara serão } \frac{2}{3} \times 2 = \frac{2 \times 2}{3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{2} \text{ de xícara será } \frac{1}{2} \times 2 = \frac{1 \times 2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

(Pode-se redescobrir pela soma).

Usa-se ainda a multiplicação de fração por inteiro nas seguintes situações:

a) Achar parte de um modo: 3/4 de 20 livros: (Pode-se redescobrir pela objetivação).

$$\frac{3}{4} \text{ de } 20 = \frac{3 \times 20}{4} = \frac{80}{4} = 15 \quad \text{ou}$$

$$\frac{3}{4} \times 20 = \frac{80}{4} = 15$$

b) Fazer, abreviadamente, uma adição de frações iguais:

$$\frac{3}{4} \times 5 = \frac{15}{4} = 3\,\frac{3}{4}$$

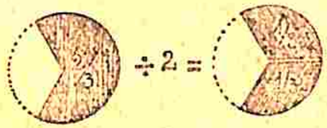
Pode-se redescobrir pela soma).

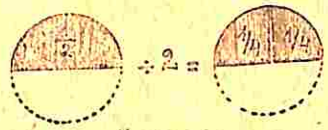
16 — A *divisão de fração por um número inteiro* também aparece na vida: E' o caso em que, por exemplo, uma receita de bôlo vai ser feita apenas pela metade. E' preciso, pois, dividi-la ao meio, isto é, dividi-la por 2. Podemos agir de 2 maneiras; a primeira é a mais simples, mas nem sempre pode ser usada.

Objetivando com desenhos, o aluno redescobre a regra para ambas as situações, e compreende a divisão, de maneira a não confundir com outras operações. Só

depois de trabalhar bem com desenhos, pode êle passar a trabalhar exclusivamente com números.

a) $\dfrac{2}{3} \div 2 = \dfrac{2 \div 2}{3} = \dfrac{1}{3}$





b) $\dfrac{1}{2} \div 2 = \dfrac{1}{2 \times 2} = \dfrac{1}{4}$

Usa-se a 2.ª forma quando a primeira não permite uma divisão exata.

12 — A *multiplicação de fração por fração* tem também pouquíssimo uso para nós. Ocorre para achar parte de uma fração.

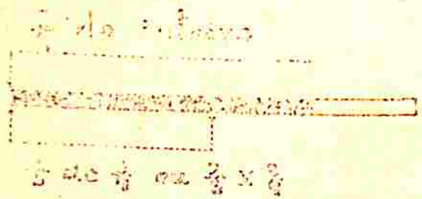
Ex.: 2/3 de uma garrafa com 3/4 de litro de leite.

E' pouquíssimo comum nos países que adotam o sistema métrico decimal. Não deveria estar no programa do curso primário.

O importante, aqui, é mostrar à criança que, quando se multiplica uma fração própria por outra, o *pro-*

duto é menor do que os fatôres; e isso, porque, em verdade, estamos achando *uma parte de uma fração*.

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$



18 — A *divisão de fração por fração* também não é comum entre nós, dado o nosso sistema de pesos e medidas.

Ex.: "Colocar 3/4 de litro de leite em garrafas com capacidade para meio litro e verificar quantas garrafas enchemos". Constitui também aprendizagem fora das necessidades da escola primária.

Ao contrário da multiplicação, quando dividimos uma fração por outra, o resultado é maior que qualquer das frações dadas.

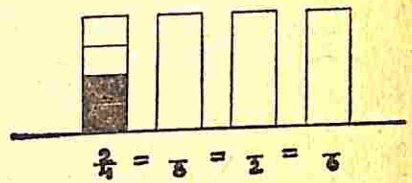
No problema proposto, distribuindo 3/4 de litro por garrafas com capacidade para 1/2 litro, enchemos garrafa e meia, como vemos no desenho:

$$\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{3\times 2}{4\times 1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1\,\frac{1}{2}$$

SUGESTÕES PRÁTICAS

Alguns modelos de questões sôbre eqüivalência de frações, em ordem decrescente de valor didático e crescente de dificuldade.

1 — Complete:



2 — Quantos quartos há em meio bôlo?

Quantos quartos de litro há em meio litro de leite?

De quantos oitavos preciso para obter 1/2 melancia?

Com 1/5 de um queijo, quantos décimos posso obter?

3 — Pense em 2/3 sob a forma de sextos e de nonos.

Pense em 5/10 sob a forma de meios e de quintos.

Pense em 3/4 com denominador 8 e com denominador 2.

Represente a fração 4/9, respectivamente, com o denominador 4 e o denominador 2.

4 — Reduza a sextos a fração 2/3.

5 — Ache as frações equivalentes à primeira, em cada linha, com os denominadores indicados.

$$\frac{1}{2} = \frac{\quad}{4}, \quad \frac{\quad}{10}, \quad \frac{\quad}{6}, \quad \frac{\quad}{8}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{\quad}{6}, \frac{\quad}{9}, \frac{\quad}{12}$$

6 — Escreva frações equivalentes à unidade, respectivamente com os denominadores 10, 5, 8, 2, 6.

7 — Reduza ao mesmo denominador as frações que estão em cada linha e represente-as gràficamente:

$$\frac{1}{2} \text{ e } \frac{3}{10}$$

$$\frac{5}{6} \text{ e } \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{2}, \frac{4}{10} \text{ e } \frac{4}{5}$$

8 — Apresente a forma mais simples de cada uma das frações abaixo indicadas:

$$\frac{4}{6}, \frac{50}{100} \text{ e } \frac{20}{50}$$

CAPíTULO VII — FRAÇÕES DECIMAIS — NÚMEROS DECIMAIS — CÁLCULO COM NÚMEROS DECIMAIS

1 — São chamadas *frações decimais* as frações que têm os denominadores 10, 100, 1000, etc. (10 ou potências de 10). Conhecidas as frações ordinárias, os alunos aprenderão fàcilmente a denominação dada especialmente a tais frações, sejam elas próprias ou impróprias.

Exemplo:

$$\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{8}{100}, \frac{4}{1000} \text{ etc.}$$

$\frac{41}{10}, \frac{52}{10}, \frac{418}{100}$ etc., dos quais podemos extrair os inteiros, obtendo, respectivamente:

$$4\frac{1}{10}, 5\frac{2}{10}, 4\frac{18}{100} \text{ etc}$$

2 — Para dar a *noção de número decimal*, é necessário:

a) Recapitular o nosso sistema decimal de numeração, no qual cada ordem vale um décimo da ordem à esquerda (a ordem das unidades corresponde a um décimo da ordem das dezenas, etc.).

Firmar bem a noção, com números inteiros.

b) Mostrar que a fração decimal pode ser escrita sob a forma de *número decimal,* que é muito mais simples.

Exemplo:

$$\frac{42}{10} = 4\,\frac{2}{10} = 4{,}2$$

4,2 é um *número decimal,* que pode ser lido como 4 inteiros e 2 décimos ou 42 décimos, sendo a primeira forma a mais usada. 4,2 é um *número decimal* equivalente à fração decimal $\frac{42}{10}$ ou $4\,\frac{2}{10}$.

O número decimal tem uma *parte inteira* e uma *parte decimal,* separadas pela *vírgula decimal.*

c) Levar a criança, por meio de objetivação, à escrita e, depois, sem objetivação, à leitura e escrita de números decimais, como:

2,3	4,8	17,9	
4,18	3,43	19,10	19,83
8,175	29,217	3,921	2,100

Note-se que, nos exemplos dados, a parte inteira está sempre presente. Usar as várias formas de leitura aconselháveis.

d) Fazer a criança redescobrir que, para a escrita de números decimais sem parte inteira, esta deve ser representada por um zero.

cinco décimos = 0,5
oitenta e dois centésimos = 0,82
três centésimos = 0,03 etc.

e) Treinar os vários casos de leitura e escrita de números decimais com zeros intercalados:

2,08 — dois inteiros, zero décimos e oito centésimos;
2,05 — dois inteiros e cinco centésimos;
3,002 — três inteiros, zero décimos, zero centésimos e dois milésimos;
3,007 — três inteiros e sete milésimos.

Incidentalmente, já podem ter aparecido casos de zeros finais. Convém, entretanto, que o professor insista sôbre êles, fazendo ver que tais zeros não constituem êrro, mas sim aproximação.

Quando digo que um aluno obteve média 9,00, quero significar que obteve nove pontos, e zero centésimos; não posso garantir se obteve algum milésimo.

f) Conhecidos os fundamentos da numeração decimal, podemos, imediatamente, levar à compreensão do nosso sistema monetário, justificando, pois, a notação usada.

3. Adição.

Para o ensino da *adição* de números decimais, devemos chamar a atenção das crianças para que:

a) Coloquem as parcelas convenientemente, atendendo à correspondência das diferentes ordens; a vírgula nos auxilia nessa colocação;

b) Procurem colocar ao alto os números com mais casas decimais (embora se treine também a adição sem esta preocupação);

c) Façam os algarismos bem legíveis e disponham as operações com clareza (essas são as causas de grande parte dos erros verificados em tal operação);

d) Efetuem a operação como qualquer outra adição, sem esquecer a vírgula.

E' preciso, ainda, graduar as dificuldades e apresentar as várias situações que podem ocorrer na adição:

3,45+2,37 — parcelas com igual número de casas decimais;
2,45+2,3 — parcelas com número desigual de casas decimais;
3,27+2 — algumas parcelas só com inteiros e outras com parte inteira e parte decimal;
3+0,27 — usar parcelas só com números inteiros e outras só com parte decimal (parte inteira representada por zero).

4. **Subtração.**

Para o ensino da *subtração*, além das recomendações de ordem geral feitas para a adição e que aqui se aplicam, é preciso apresentar os vários casos em relação ao minuendo e ao subtraendo, a exemplo do que foi feito na adição.

Exemplos:
3,45 — 2,37 =
3,45 — 2,3 =
3,4 — 2,37 =
3,27 — 2 =
3 — 0,27 =

Para facilitar o cálculo, é aconselhável preencher com zeros as casas decimais do minuendo que não apresentam correspondência com as do subtraendo ou vice-versa.

(Mostrar que o número não se altera).

Quanto ao cálculo em si, não oferece dificuldade alguma, uma vez que efetuamos a subtração de decimais de maneira idêntica à de inteiros, sem esquecer a vírgula.

5. **Multiplicação.**

As três situações que aparecem podem ser reduzidas a um só caso:

— multiplicação de inteiro por decimal, de decimal por inteiro e de decimal por decimal.

A única dificuldade consiste em fomentar o hábito de contar as casas decimais do produto, somando as encontradas no multiplicando e no multiplicador.

Também é interessante formar o hábito de cancelar os zeros finais da parte decimal do produto, embora não seja errado conservá-los.

6. **Multiplicação abreviada por potências de 10.**

Deve ser ensinada depois que o aluno sabe multiplicar o número decimal por qualquer número inteiro.

Apresentando vários exemplos de multiplicação por 10 e analisando cada algarismo, para ver que passou a uma ordem acima e que o número, assim, tornou-se 10 vêzes maior, levar a concluir a regra para multiplicação abreviada. Notar o deslocamento da vírgula uma casa para a direita:

5,85 × 10 = 58,50 —— 5,85 × 10 = 58,5
3,9 × 10 = 39,0 —— 3,9 × 10 = 39
0,5 × 10 = 05,0 —— 0,5 × 10 = 5

De maneira idêntica, levar a enunciar a regra, para qualquer potência de 10.

7. **Divisão de número decimal por inteiro.**

Levar a descobrir que basta dividir como se fôsse um número inteiro e contar no quociente o mesmo número de casas decimais encontradas no dividendo.

E' fácil compreender que, se eu tenho três décimos de alguma coisa para distribuir por três pessoas, caberá um décimo a cada pessoa:

0,3	3	5,25	3	0,394	2
	0,1	22	1,75	19	0,197
		15		14	
		0		0	

Vários exemplos fortalecerão a regra.

8. **Divisão de número decimal por potências de 10.**

Será dada bem mais tarde do que a multiplicação, para evitar interferência.

Apresentar exemplos com números terminados em zero, para concluir a regra.

Efetuar cada cálculo armando as operações (tratando o 10 como qualquer número inteiro) e, em seguida, indicando-as:

$$13{,}420 \div 10 = 1{,}3420$$
$$2{,}50 \div 10 = 0{,}250$$
$$0{,}280 \div 10 = 0{,}0280$$

Daí passar a números não terminados em zero:

$38{,}5 \div 10 = 3{,}85 \qquad 0{,}28 \div 10 = 0{,}028$

9. **Divisão de número decimal por decimal.**

I — *Hábitos a formar:*

— Dispor bem a divisão, deixando lugar para acrescentar zero, no dividendo, se fôr preciso.

— Evitar o preconceito de que tôda divisão é exata ou deve continuar até dar zero. Em geral, o que nos interessa é obter certa aproximação: até décimos ou centésimos, etc.

— Verificar as operações, inclusive a colocação da vírgula.

II — *Alguns exercícios que dão ênfase à colocação correta da vírgula:*

— Calcule o número de casas decimais que haverá nas seguintes divisões: ....

— Faça as seguintes divisões, aproximando até milésimos: .... etc.

III — *Método a seguir:*

O velho método de "igualar casas decimais" e contar as vírgulas é muito simplista, para o professor, mas complica muitas vêzes as operações dos alunos. Numa operação, por exemplo, como $0{,}0075 \div 0{,}5$, a criança seria levada a acrescentar três casas decimais no divisor, deparando com uma divisão por 5000 quando deveria fazê-lo por 5 apenas. Além disso, o resto aparece alterado, muitas vêzes.

O único método aconselhável para a divisão do decimal por decimal consiste em:

Dividir como se fôssem inteiros e subtrair do número de casas decimais do dividendo o número de casas decimais do divisor, para encontrar as casas decimais do quociente.

Ex. 1:

```
8,532 | 0,5
      |-----
35      17,06
 032
   2
```

Casas decimais:

$3 - 1 = 2$

De antemão, pode-se saber que o quociente irá até centésimos. Se nos interessar aproximação até milésimos, antes de iniciar a operação acrescentamos um zero ao dividendo. A operação ficará:

```
8,5320 | 0,5
       |-----
```

e o cômputo das casas decimais dará: $4 - 1 = 3$.

Ex. 2:

```
185,2 | 3,5
      |-----
```

N.º de casas decimais:

$1 - 1 = 0$

Se quisermos alguma aproximação, faremos como nos casos acima.

Ex. 3:

```
18,4 | 0,025
     |------
```

A subtração das casas decimais torna-se impossível aqui; é, entretanto fácil de resolver: Basta acrescentar zeros no dividendo, tal como fizemos anteriormente, para a aproximação. Acrescentamos 2, 3, 4, 5 zeros, sem número limitado, conforme a aproximação que desejamos.

Vejamos:

a) resultado em número inteiro:

```
18,400 | 0,025
       |------
```

Casas decimais

$3 - 3 = 0$

b) resultado com aproximação até centésimos (ou 2 casas decimais):

```
18,40000 | 0,025
         |------
```

Casas decimais

$5 - 3 = 2$

9 — *Divisão de inteiro por decimal* — Resume-se ao caso do exemplo 3, já estudado. Coloca-se uma vírgula, para separar a parte inteira da decimal, e acrescentam-se tantos zeros quantos se deseja, para a aproximação que se tem em vista.

Ex.

```
427 | 2,8
    |-----
```

Se quero o resultado até centésimos, o dividendo terá três zeros:

```
427,000 | 2,8
        |-----
```

Se quero o resultado até centésimos, o dividendo será:

```
427,0 | 2,8
      |-----
```

10 — Em resumo, todos os casos de divisão de decimais, seja de decimal por decimal, de inteiro por decimal ou de decimal por inteiro, obedecem a uma só

forma de resolução: Dividir como se fôssem inteiros e dar ao quociente tantas casas decimais quantas são as do dividendo diminuídas das do divisor. Quando necessário, acrescentar zeros ao dividendo, em número ilimitado.

Vejamos mais alguns exemplos, para fortalecer esta asserção:

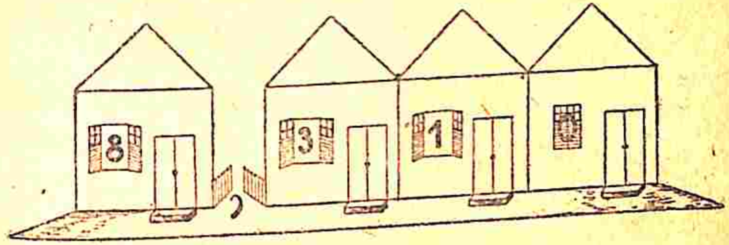
3,425÷8	Casas decimais do quociente:	3—0=3
3,425÷0,8	" " " " :	3—1=2
3,425÷0,008	" " " " :	3—3=0
34,25÷0,0008=		
= 34,2500÷0,0008=	" " " " :	4—4=0
=34,25000÷0,0008=	" " " " :	5—4=1
etc.		

3425÷0,8 =		
3425,0÷0,8 =	" " " " :	1—1=0
3425,000÷0,8	" " " " :	3—1=2
etc.		

Note-se que os restos permanecem inalterados, uma vez que não se cortam vírgulas. A operação também não se complica, pois que o divisor nunca é acrescido de zeros.

SUGESTÕES PRÁTICAS

1 — Dada a noção do número decimal, é interessante fazer em cartolina e colocar na sala de aula, para estar à vista dos alunos durante o período de fixação, um material semelhante ao que exemplificamos para os estudos iniciais de numeração.



Fechando as janelas, aparecem os zeros, que representam as "casas vazias".

2 — *Exercícios aconselhados*:

a) Transformação de frações decimais em números decimais e vice-versa;

b) Exercícios de completamento ou escrita de números decimais em ordem crescente, tal como foi sugerido para a aprendizagem dos números inteiros.

Exemplo:

	1,0
0,1 — 0,2 — 0,3	1,00
0,10 — 0,20 — 0,30	0,20
0,10 — 0,11 — 0,12	0,10
0,01 — 0,02 — 0,03	

c) Leitura de números decimais: Ex.: 3,523:

— três inteiros e quinhentos e vinte e três milésimos;
— três, vírgula, quinhentos e vinte e três;
— três, vírgula, quinhentos e vinte e três milésimos;
— três inteiros, cinco décimos, dois centésimos e três milésimos;
— três mil quinhentos e vinte e três milésimos (a mais difícil e a menos comum).

d) Ditado de números decimais. Usando qualquer das formas apontadas acima, excetuando a segunda e a terceira que, sendo embora muito comuns, não teriam valor prático para o exercício em questão.

3 — Devemos *evitar situações como*:

a) Mandar escrever um número decimal por extenso (em palavras), a não ser para treino de ortografia. Consegue-se o mesmo resultado fazendo lê-lo oralmente, e o exercício é menos fastidioso.

b) — Apresentar um número decimal em palavras, a fim de que o aluno o represente em algarismos. O professor gasta menos energia ditando o número para que o aluno o escreva. (Justifica-se num trabalho já impresso).

CAPÍTULO VIII — SISTEMA MONETÁRIO BRASILEIRO

1 — Os problemas com dinheiro são dos mais comuns no uso cotidiano e, portanto, nêles deve ser a criança treinada, exercitando a leitura, a escrita, os cálculos de quantias.

Os pontos principais nesse assunto são:

a) O valor do dinheiro: que se compra com 10 centavos, 20 centavos, um cruzeiro, etc.; quanto se precisa para ir de casa até tal lugar de trem, bonde, etc., conforme a condução;

b) o uso correto das palavras *centavo* e *cruzeiro;*

c) o reconhecimento das moedas e cédulas, mesmo quando há moedas e cédulas de tipos diferentes representando o mesmo valor (é o caso dos níqueis e cédulas antigas, ainda em circulação). Êsse reconhecimento será dado objetivamente, com material real.

A princípio, as palavras *cruzeiros* e *centavos* aparecerão por extenso nos problemas com enunciado escrito, para facilitar o cálculo.

Ex.: "Maria ganhou 12 cruzeiros da titia e 5 cruzeiros do padrinho. Quanto ganhou ao todo ?"

Solução:

$$\begin{array}{r} 12 \\ +\ 5 \\ \hline 17 \end{array}$$ cruzeiros

Resp.: Maria ganhou 17 cruzeiros.

Também nenhuma referência se fará a número decimal, nem à relação decimal do nosso sistema monetário, até que a criança tenha a noção de números decimais. Isso não impede que se vá, progressivamente, ensinando a escrita de quantias e, mesmo, a adição e a subtração, uma vez que a disposição do cálculo não apresentará dificuldades para a criança.

2 — Podemos estabelecer várias etapas para a aprendizagem inicial de leitura, escrita e cálculo de quantias:

a) Leitura e escrita de quantias incluindo apenas cruzeiros, até nove cruzeiros;

b) Leitura e escrita de quantias incluindo apenas centavos, até noventa centavos;

c) Leitura e escrita das quantias: dez, vinte, trinta, quarenta, cinqüenta, sessenta, setenta, oitenta, noventa e cem cruzeiros;

d) Leitura e escrita de quaisquer quantias entre um e cem cruzeiros, incluindo apenas cruzeiros;

e) Adição e subtração de quantias já conhecidas e que se escrevam com o mesmo número de algarismos:

```
   0,60          20,00          20,00
+  0,20       + 35,00          18,00
--------      --------       + 11,00
Cr$ 0,80      Cr$ 55,00      --------
                             Cr$ 49,00

   1,00           0,60          35,00
+  0,50        —  0,20       —  20,00
--------      --------       --------
Cr$ 1,50      Cr$ 0,40       Cr$ 15,00
```

f) Derivando da soma, a leitura, escrita de quantias, incluindo cruzeiros e centavos:

```
   1,00
+  0,10
--------
Cr$ 1,10
```


Cr$ 1,00 — Cr$ 1,10 — Cr$ 1,20 — . . . Cr$ 2,00

g) Adição e subtração de quantias já conhecidas, número desigual de algarismos nos têrmos (sem e com reservas):

```
   10,00          20,00          18,00
+   9,00       +   0,80       +   1,80
---------      ---------      ---------
Cr$ 19,00      Cr$ 20,80      Cr$ 19,80

   25,00                 18,00
    1,20              —   2,00
+   0,80              ---------
---------             Cr$ 16,00
Cr$ 27,00
```

h) Leitura e escrita de quantias incluindo cruzeiros e centavos, com zeros intercalados, ou quaisquer outras, até 100 cruzeiros. Aprendizagem feita pela adição:

```
   10,00
+   0,10
---------
Cr$ 10,10
```

Cr$ 10,00 — Cr$ 10,10 — Cr$ 10,20 — Cr$ 10,30 — Cr$ 20,00
Cr$ 29,00 — Cr$ 29,10 — Cr$ 29,20 — . . . . — Cr$ 30,00

i) Os mesmos métodos serão adotados para a leitura e escrita de quantias acima de cem cruzeiros;

j) A multiplicação e a divisão com o uso de quantias serão aprendidas à proporção que tal aprendizagem se fizer em relação a números decimais.

SUGESTÕES PRÁTICAS

(*Exercícios*)

1 — Escrever o nome das moedas que faltam para trocar uma moeda de 50 centavos.

2 — Completar as moedas:

e recebi de trôco:

Escrever os valores das notas

3 — Troquei Cr$ 20,00 em duas notas iguais:

4 — Dei Cr$ 0,50 para pagar um sêlo de 40 centavos.

Recebi de trôco ....

5 — Unir as quantias iguais:

Cr$ 10,00	10 centavos
Cr$ 0,10	10 cruzeiros
Cr$ 0,80	80 centavos

6 — Completar séries de quantias:

a) Cr$ 5,00 — Cr$ 10,00 — ...... — Cr$ 20,00 — ...... — ......

b) Cr$ 1,50 — Cr$ 2,00 — Cr$ 2,50 — ...... — ...... — ....— — Cr$ 4,50.

7 — Organizar problemas com listas ou desenhos de objetos com preços.

8 — Escrever quantias sob ditado.
9 — Ler quantias dadas.

CAPÍTULO IX — NOÇÕES FUNDAMENTAIS DO SISTEMA MÉTRICO

1 — O estudo do nosso sistema de pesos e medidas deve ser iniciado levando a criança a compreender a relação e a significação de têrmos a que seu ouvido já está acostumado, pela vida prática:

metro, litro, quilo, meio metro, meio litro, meio quilo, 1/4 de litro, 250 grs., 20 centímetros, 30 centímetros, etc.

2 — Não será dada, a princípio, qualquer noção de múltiplos ou submúltiplos; é necessário, porém, praticar muito nessas medidas, pelo uso. Os problemas e a prática em situação viva são mais importantes do que os exercícios escritos, desligados da vida, embora o conhecimento do vocabulário adequado seja também importante. Muitas crianças sabem papaguear tôdas as relações do sistema métrico, mas se satisfazem com resultados absurdos em problemas, porque sua aprendizagem foi feita por mero verbalismo. Fazer adivinhar medidas, aproximadamente, é uma forma de tornar útil e prática a aprendizagem do sistema métrico. (Quanto pesa um embrulho de feijão, quanto há num jarro com água, quanto mede a sala de aula, ou um pedaço de fita, etc.).

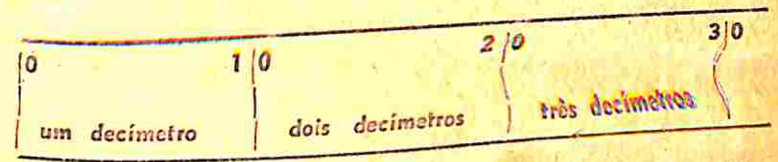
3 — O ensino do *quilo* exige o uso de uma *balança* e de coisas que se vendam a quilos, ou cujo transporte é pago por quilos, para que as crianças pesem.

Há balanças domésticas fáceis de ser levadas à escola, no caso desta não a possuir. A balança é, entretanto, um material importante, não só para o estudo da aritmética como das ciências físicas. Os alunos serão conduzidos a ver que é preciso ter quatro pacotes de manteiga de 250 grs. para pesar um quilo, ou dois pacotes de talharim de meio quilo para formar um quilo, etc. Dêsse conhecimento prático se derivarão problemas; pão, biscoito, etc., podem ser pesados.

4 — O *litro*, meio litro e 1/4 de litro empregados para medir leite devem ser trazidos para classe, para ensinar litro. Usando água, as crianças compreenderão as relações entre as várias medidas, aliás bastante fácil, dado que já têm o conhecimento de metade e quarta parte. Podem compreender, aproximadamente, quanto do litro um copo de leite representa, e quantos copos de leite uma criança deve tomar por dia. Incentiva-se a prática das mensurações em casa: Quantos litros de água cabem no tanque, no balde, na panela maior, na panela menor, que porção dágua cabe no jarro ou garrafa em que é servida a água à mesa. Lembraremos coisas que se compram em litros, como vinagre, álcool, azeite, gasolina, grandes vasilhames para transporte do leite; como são medidos os litros de gasolina colocados num carro. A introdução do vocábulo *capacidade* será oportuna.

5 — Para ensinar o *metro*, é preciso que o professor disponha de um metro de carpinteiro (articulado em diâmetros) ou um metro usado em lojas, ou fita métrica. Quanto mais variado o material de exemplificação, melhor será. Quanto às crianças, uma régua graduada (de preferência, duplo-decímetro) com auxílio da qual elas construirão o seu próprio metro. Para isso, cada criança receberá uma tira de papel, que cortará na medida do metro, conferindo no metro da

professôra. O metro, dobrado ao meio, dará o meio metro. Os primeiros exercícios constarão de mensurações aproximadas com essas medidas. Com o auxílio da régua, dividirão o metro em decímetros ou grupos de 10 centímetros. Será, mesmo, interessante que escrevam na fita métrica assim construída:



Usarão a régua para medidas pequenas e a fita métrica para medidas para as quais a régua seja demasiado pequena. Verificarão as relações entre o metro e seus submúltiplos, sem empregar êsse têrmo:

$$\text{1 metro tem} \left\{ \begin{array}{l} \text{10 decímetros} \\ \text{ou} \\ \text{100 centímetros} \\ \text{ou} \\ \text{1000 milímetros} \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \text{1 decímetro} = \frac{1}{10} \\ \text{1 centímetro} = \frac{1}{100} \\ \text{1 milímetro} = \frac{1}{1000} \end{array} \right\} \text{do metro}$$

Não será usada, a princípio, nessas abreviaturas, a vírgula decimal, preferindo-se a escrita de números sem parte decimal:

20 centímetros
50 centímetros
2 metros e meio

Mais tarde, poderão ser usadas as formas:

2 m — 50 cm — 3 mm

6 — Depois que o professor introduzir objetivamente a noção de décimos e centésimos de uma unidade e a escrita de números decimais, será o momento de explicar às crianças a forma de escrever metros e fração de metro como número decimal, fazendo-as compreender melhor que existe entre o metro, o decímetro e o centímetro uma relação decimal.

Só então será adotada a notação decimal: 0,35 m ou 3,5 cm, etc. E' preciso treinar na leitura e escrita dessas medidas, lembrando que, embora escrevendo a denominação ao fim, ela diz respeito à parte inteira. Assim, o primeiro exemplo dado seria lido: zero metros e 35 centímetros ou, apenas, 35 centímetros; o segundo exemplo seria: 3 centímetros e meio, ou 3 centímetros e 5 milímetros ou 35 milímetros (essa forma é a mais difícil e a menos usual).

7 — Depois de conhecidas as unidades menores do que o metro, as quais estudamos acima, podemos passar ao *quilômetro*, usado para medidas maiores, como as de estradas, por exemplo. Lembraremos que o quilômetro tem mil metros e faremos as conversões de quilômetros a metros e vice-versa, usando o mesmo raciocínio já adotado em problemas de numeração para calcular "quantas dúzias há em 36 bananas" ou "quantos milheiros são 5000 pêras" ou quantas laranjas há em 3 centos. Sabidas a divisão e multiplicação de decimais, podem ser elas aplicadas a tais problemas.

8 — Aprendidas, assim, tôdas as *unidades usuais* de comprimento, o professor pode ensinar que o *metro* é a *unidade principal* de comprimento, e fazer, com as crianças, um quadro dos seus submúltiplos e múltiplos usuais.

Metro (*m*) (*unidade principal*)

múltiplos	quilômetro	(km)	— 1000	metros
	hectômetro	(hm)	— 100	metros
	decâmetro	(dam)	— 10	metros
submúltiplos	decímetro	(dm)	— 1/10	do metro
	centímetro	(cm)	— 1/100	do metro
	milímetro	(mm)	— 1/1000	do metro

O *hectômetro* e o *decâmetro* não são usados, não devendo ser objeto de problemas, nem de exercícios, entretanto, podem ser dados completando o quadro.

O *miriâmetro* não é usado e iria complicar inùtilmente a aprendizagem.

8 — Se a aprendizagem das medidas de comprimento fôr feita vagarosa e cautelosamente, as crianças não terão dificuldade alguma em *conversões* ou *movimento de vírgula*. (Vide sugestões práticas, n.° 9) e, mesmo, em leitura e escrita de medidas de comprimento.

9 — A sistematização feita para o metro facilitará a aprendizagem relativa às *medidas da massa* (ou pêso) e de *capacidade*, tendo-se a preocupação de insistir sôbre o que é usual, e de só dar problemas reais. E' preciso, ainda, acentuar que a *unidade principal de massa* é o quilo, que é um múltiplo do grama. O quilo, por sua vez, tem dois múltiplos, um dos quais é muito usado: A tonelada (que vale mil quilos) e o quintal métrico (que vale 100 quilos).

SUGESTÕES PRÁTICAS

A — *Exercícios e problemas*:

1) Nossa sala tem 5 metros de comprimento e a sala de música tem o dôbro. Qual o comprimento da sala de música ?

2) Trace um quadrado de 20 cm de lado. Calcule o perímetro. Verifique com a fita métrica se acertou.

3) Um metro de fita custa Cr$ 2,00. Qual o preço de 2 metros e meio?

Solução:

$$\begin{array}{r} 2{,}00 \\ 2{,}00 \\ 1{,}00 \\ \hline \text{Cr\$ } 5{,}00 \end{array}$$

4) Um metro de renda custa Cr$ 4,50. Qual o preço de 3 metros?

Solução:

$$\begin{array}{r} 4{,}50 \\ 4{,}50 \\ +\ 4{,}50 \\ \hline \text{Cr\$ } 13{,}50 \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{r} 4{,}50 \\ \times\ 3 \\ \hline \text{Cr\$ } 13{,}50 \end{array}$$

5) Paguei, pelo porte aéreo de uma carta .... Cr$ 3,60. Quanto pesava ela, aproximadamente, sabendo que o correio cobra Cr$ 1,20 por um porte de 5 gramas?

6) A estrada Rio-Petrópolis tem .... quilômetros. Nós já estamos no quilômetro 20. Quantos metros faltam para chegarmos ao fim?

7) Quantos quilômetros mede um rio que tem 2.300 metros?

B — *Material*:

Sistematizado o ensino dos múltiplos a submúltiplos do metro, pode-se fazer um cartaz semelhante ao

aconselhado para a numeração decimal, mas com a vírgula móvel.

C — *Jogos*:

Distribuir, pelos alunos, cartões grandes com os algarismos, a vírgula e as várias unidades de comprimento, massa ou capacidade. Ditar um número, deixar as crianças o formarem com os cartões, em frente aos demais colegas que, por sua vez, o copiam.

E' preferível armar os cartões na barra do quadro-negro ou adaptá-los a uma tira de cartolina, de modo que as crianças possam colocá-los e voltar aos lugares, para copiar o número. (Pode-se, também, dividir a turma em partidos e contar pontos).

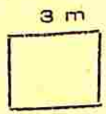
Variando o jôgo, pode-se propor uma conversão após ser cada número copiado; dos que a fizerem corretamente no papel, escolhe-se um para vir fazer a conversão com os cartões.

CAPÍTULO X — PERÍMETROS — ÁREAS — VOLUMES (*)

1. Noção de perímetro.

A noção de *perímetro* será dada em relação ao estudo do metro, e depois do conhecimento prático do quadrado e do retângulo. Perímetro é a soma dos lados de uma figura; nenhuma fórmula será usada. A adição é a melhor operação. No quadrado, podem ser usadas a adição e a multiplicação:

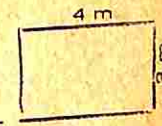
Quadrado:



$$\begin{array}{r} 3' \\ \times\ 4 \\ \hline 12\text{ m} \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{r} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ \hline 12\text{ m} \end{array}$$

Retângulo:

$$\begin{array}{r} 3 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \\ \hline 14\text{ m} \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{r} 3 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \\ \hline 14\text{ m} \end{array}$$



Como vemos, não é preciso esperar que a criança saiba escrever números decimais para se lhe dar a noção de perímetro, desde que usamos, de início, apenas números inteiros.

Dada a noção de perímetro por essa forma, a criança estará apta a calcular o perímetro de qualquer figura dada e a descobrir as "fórmulas" a empregar; mesmo para o perímetro do retângulo, poderá chegar à fórmula mais comum: (c + l) 2.

(*) Vide "Diário de Lúcia", Melo e Sousa, I. Albuquerque.

2. Noção de área

A noção de área será dada mostrando a necessidade de medir superfícies; pode-se criar uma situação-problema, apresentando duas figuras diferentes, com áreas aproximadas, para que os alunos descubram qual a maior. Para isso, podem ser usados pedaços de cartolina.

Dados os conhecimentos anteriores do sistema métrico, os alunos serão levados à conclusão de que:

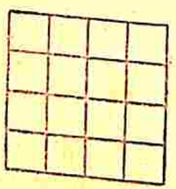
a) E' preciso *medir* as superfícies;

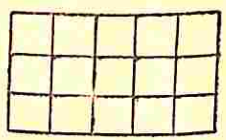
b) Para medir uma superfície, é preciso estabelecer uma *unidade;*

c) Essa unidade será, também uma superfície.

O professor pode ter quadriculado o verso dos pedaços de cartolina que representam a superfície a medir; estabelece-se como unidade uma quadrícula; a 1.ª figura tem 16 quadrículas; a 2.ª figura tem 15 quadrículas.

E' hora de introduzir o têrmo área; a medida da superfície chama-se área.





3. Unidades legais de área.

Achada a área em quadrículas, levaremos à noção de que há *unidades legais de área,* como há de capacidade, de comprimento, etc. No Brasil, e em muitos outros países, as unidades legais de área são:

$$\text{Unidade principal} \begin{cases} \text{forma: um quadrado} \\ \text{grandeza: um metro de lado} \\ \text{nome: metro quadrado} = m^2 \end{cases}$$

Cada unidade de comprimento dá origem a uma unidade legal de área:

$$\text{Unidades mais usadas} \begin{cases} dm \text{ dá } dm^2 \text{ (decímetro quadrado)} \\ cm \text{ dá } cm^2 \text{ (centímetro ")} \\ mm \text{ dá } mm^2 \text{ (milímetro ")} \\ km \text{ dá } km^2 \text{ (quilômetro ")} \end{cases}$$

O professor deve mostrar *quadrados de cartolina* representando, respectivamente, 1 m², 1 dm², 1 cm², 1 mm², lembrará que seria impossível trazer para a sala de aula o km².

4. Cálculo da área.

Para levar à redescoberta do *cálculo da área,* é *indispensável* que seja fornecido a cada criança um pedaço de papel centimetrado, isto é, dividido em quadrículas de 1 cm de lado. Êsse papel já se encontra à venda nas papelarias e, quando não houver, é preferível fazê-lo, tirando várias cópias em papel-carbono, copiador ou mimiógrafo.

Insistimos sôbre êsse ponto, porque a maneira pela qual a noção fôr dada concorrerá para a sua compreensão, aprendizagem e fixação. Muitas das dificuldades e "esquecimentos" dos alunos em questões referentes a áreas provêm da má apresentação da noção. O tempo gasto pelo professor na confecção de material tão simples será supercompensado pelo esfôrço que economizará, não tendo que voltar atrás constantemente, para explicar o mesmo assunto.

Fazer traçar, no papel quadriculado, por exemplo:
a) um retângulo com 15 cm^2;
b) um quadrado com 9 cm^2
c) outro retângulo, diferente, com a mesma medida do anterior, etc., etc.

O professor traçará, no quadro-negro, um retângulo igual a um que tôdas as crianças tenham feito (ampliará o desenho, para que todos vejam bem). Suponhamos que seja igual ao da figura:

Levará as crianças a contarem, nos seus próprios papéis, os centímetros quadrados, um a um, da mesma forma que ela fará no quadro-negro: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15.

Pedirá, em seguida, outra forma de contar: 3 fileiras de 5 centímetros quadrados ou

$$(3 \times 5)\ cm^2 = 15\ cm^2$$

ou $$(5 \times 3)\ cm^2 = 15\ cm^2$$

Procederá da mesma forma em outros retângulos, levando sempre à conclusão de que, multiplicando o número de fileiras ou colunas pelo número de quadrados em cada fileira ou coluna, acha-se a área: em centímetros quadrados, se cada quadrado medir um centímetro quadrado; em dm^2, se cada quadrado medir 1 dm^2, etc.

Em seguida, proporá o problema: Sem quadrículas, quem achará a área de um retângulo, sabendo a medida dos lados? Desenhará um retângulo no quadro-negro, dando as suas medidas.

Os alunos, com facilidade, redescobrirão que o número de centímetros ou decímetros de um dos lados dará o número de fileiras de quadradinhos, enquanto o outro lado fornecerá o número de quadrados em cada fileira. Está calculada a área. Vários exemplos no

quadro-negro fortalecerão a noção, sendo os alunos levados a enunciar a regra.

Convém, apenas, insistir na *forma certa de indicar o cálculo da área*.

Exemplos:

$$(3 \times 5)\ m^2 = 15\ m^2$$
$$(4 \times 8)\ cm^2 = 32\ cm^2$$
$$(5 \times 7)\ km^2 = 35\ km^2$$

A indicação: 3 m $\times$ 5 m = 35 m^2 não é correta, e levaria a criança à convicção errônea de que o produto pode ser de espécie diferente do multiplicando. Em verdade, não se multiplica a medida do comprimento pela medida da largura, mas o número de quadrados que há numa fileira pelo número de fileiras.

Finalmente, as crianças compreenderão que não seria prático usar *medidas efetivas* de área para as mensurações; colocar um metro quadrado sôbre o chão de uma sala de aula é muito menos prático do que tomar o seu comprimento e a sua largura e, sôbre êsses dados, fazer o cálculo; em medidas maiores, o caso tornar-se-ia, ainda, mais complicado.

5. Área do quadrado.

Compreendida a área do retângulo, a do *quadrado* torna-se apenas um caso especial, em que o comprimento é igual à largura; logo, conhecido o lado, é bastante multiplicá-lo por si mesmo:

$$(9 \times 9)\ m^2 = 81\ m^2$$

6. Área de triângulos, quadriláteros e polígonos regulares.

Com o uso de papel e tesoura ,mostrar suas relações com o retângulo, isto é, que sua área é igual à metade da de um retângulo da mesma base e da mesma altura. Quanto aos *polígonos regulares*, serão decompostos em triângulos iguais, dos quais será calculada a área.

Êsse cálculo não existe na maioria dos programas do curso primário.

7. **Relações entre múltiplos e submúltiplos do m²; conversões.**

a) Redescobrir quantos dm² há num m² (dividir em dm² o m² anteriormente mostrado à classe);

b) Redescobrir quantos cm² há num dm²; (uso de desenho do dm² dividido em quadrículas de 1 cm²); pode-se aproveitar o papel centimetrado fornecido anteriormente);

c) Redescobrir quantos mm² há num cm² (uso de papel milimetrado);

d) Redescobrir quantos cm² há em um metro quadrado (pelo cálculo):

$$100 \times 100 = 10.000$$

e) Redescobrir quantos mm² há em 1 m²:

$$100 \times 100 \times 100 = 1.000.000$$

f) Reduzir m² a dm², cm², mm² e vice-versa.

Mostrar que precisamos de duas casas decimais, porque podemos ter até 99 unidades de uma ordem antes de formar uma unidade de ordem imediatamente superior, fazer leitura e escrita de certas áreas:

3,45 m² — 8,97 dm² — 3,4853 m² — 7,0095 m², etc.

g) Dizer quantos metros quadrados há num quilômetro quadrado, para dar a idéia de sua extensão;

aliás, as crianças podem fàcilmente calcular, multiplicando:

$$(1000 \times 1000)\ m^2 = 1.000.000\ m^2$$

h) Fixada bem essa noção, em todos os seus aspectos, e aprendido o manejo da vírgula para as outras medidas do sistema métrico, não haverá dificuldades para conversões de medidas de área.

8. **Noção de volume.**

A noção de *volume* só será dada bem depois que a da área esteja aprendida e fixada, nos seus vários aspectos, do contrário causaria interferência de aprendizagem. Não apresentará, assim, dificuldade à criança. Para ensinar a calcular o volume, é necessário:

a) Dar a noção de volume como lugar que o corpo ocupa no espaço;

b) Mostrar, usando cubos do mesmo tamanho, que as coisas podem ter formas diferentes e o mesmo volume (com o mesmo número de cubos iguais, armar de maneiras diferentes);

c) Lembrar a necessidade de uma unidade de volume, para obter uma medida; essa unidade seria um cubo.

Daí, será fácil, dados os conhecimentos anteriores da criança, levá-la a concluir qual a unidade principal de volume e quais as outras unidades legais usadas para medida de pequenos volumes e de grandes volumes.

Unidade principal de volume:

forma:	cubo
grandeza:	1 metro de lado
nome:	metro cúbico: m³

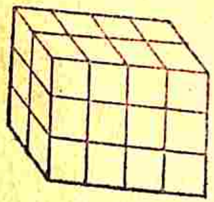
Outras unidades legais usadas:

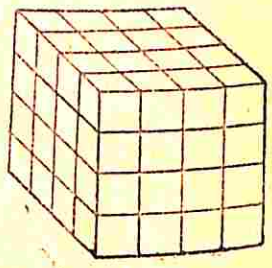
dm³, cm³, mm³, km³.

d) Com alguns decímetros cúbicos, construir cubos ou paralelepípedos. Calcular o volume dos sólidos assim formados, contando os decímetros cúbicos usados;

e) Com os mesmos cubos, redescobrir as fórmulas para achar o volume do cubo e do paralelepípedo.

$(4 \times 3 \times 2)$ dm³ = 14 dm³ ou comp. × lar. × alt.
$(4 \times 4 \times 4)$ dm³ = 64 dm³ ou lado × lado × lado.





9. **Relações entre as unidades de volume.**

Para estabelecer as relações entre as várias unidades de volume, a objetivação é necessária. Quando não se tiver material melhor, o desenho bem feito já satisfaz. Entretanto, 109 cubinhos de 1 cm de lado e um de 1 dm ajudariam muito; êste último será, de preferência, construído em fôlha de Flandres ou zinco, com uma das faces aberta para servir também à outra aprendizaem que se segue (item 11); não sendo possível, papelão, cartolina, celofane ou madeira servem. Os cubinhos pequenos serão construídos na aula de Trabalhos Manuais, pelas crianças, usando chumbo derretido sôbre fôrmas, ou toros de madeira ou, em último caso, sabão; embora menos trabalhosos, os cubos de sabão dificilmente podem ser guardados de ano para ano, enquanto os outros poderão durar sempre.

Formando a base do decímetro cúbico com 10 fileiras de 10 cubinhos, as crianças compreenderão que

cada camada terá 100 cm²; empilhando os outros 9 cubinhos sôbre um dos cantos da camada feita, as crianças verão que são necessários, ao todo, 10 camadas de 100 cm³ ou sejam 1.000 cm³ para encher 1 dm³. Logo:

$$1 \text{ dm}^3 = 1.000 \text{ cm}^3$$

Por extensão, deduzirão que:

$$1 \text{ m}^3 = 1.000 \text{ dm}^3$$
$$1 \text{ cm}^3 = 1.000 \text{ mm}^3$$
$$1 \text{ m}^3 = 1.000 \times 1.000 = 1.000.000 \text{ cm}^3.$$

Compreenderão ainda que cada unidade de volume ocupa três ordens de algarismos, uma vez que podemos ter até 999 dm³ antes de formar 1m³, e assim por diante. O movimento da vírgula para conversões basear-se-á, também, nesse princípio.

O *volume dos líquidos* deverá, também, ser considerado; sabendo-se que o líquido toma a forma do recipiente que o contém, seu volume é calculado pelo volume dêste recipiente, considerado, naturalmente, até a altura que ocupa. O cm³ é muito usado para a medida de líquidos em poções, injeções, etc.

Usando o dm³ aconselhado no item 9, uma garrafa de litro com água destilada e uma balança, pode-se objetivar a correspondência entre decímetro cúbico, litro e quilo.

Tanto para o cálculo do perímetro como da área ou do volume, todos os exemplos serão inicialmente resolvidos apenas com números inteiros. Só usaremos números decimais quando as crianças já forem capazes de ler corretamente os resultados obtidos, compreendendo a quanto corresponde a parte decimal achada, respectivamente em metro linear, m² e m³.

SUGESTÕES PRÁTICAS

a) Cálculo da quantidade de papel necessária para colocar uma barra à volta da sala; cálculo do preço do papel.

b) Cálculo do preço de renda para colocar à volta de bordados feitos nas aulas de trabalhos de agulhas.

c) Cálculo da área da sala de aula, do quadro-negro, das cortinas.

d) Cálculo do número de ladrilhos necessários e do preço do material e da mão-de-obra para ladrilhar cozinhas, banheiros, piscina, etc.

e) Leitura de plantas de casas e apartamentos; cálculo da área das diferentes peças.

f) Leitura e comparação das áreas de alguns Estados brasileiros; cálculo das áreas de regiões, sabidas as áreas dos Estados que a compõem.

g) Cálculo do número médio de metros quadrados por pessoa, na sala de aula.

h) Cálculo do número de habitantes do Brasil por km² (usando dados do último recenseamento); idem em relação a certas regiões, Estados ou cidades do Brasil (usando os mesmos dados).

i) Cálculo dos preços de pavimentação de estradas de rodagem, pistas de corrida, calçadas, etc.

j) Leitura e escrita de volumes dágua de rios, de lagos, açudes, piscinas. Conversão em litros.

k) Capacidade de caixas dágua, tanques, reservatórios.

l) Calcular de quanto se deve aumentar a altura de um reservatório da forma de um paralelepípedo, para que sua capacidade aumente de dado número de litros.

CAPÍTULO XI — NOÇÃO DE PROPORCIONALIDADE — RÊGRA DE TRÊS

1 — A noção de proporcionalidade, que as crianças já possuem, intuitivamente, será sistematizada, fazendo exercícios de completamento de frases em que vejamos grandezas dependentes e diretamente proporcionais (sem usar tais expressões para a criança).

Exemplo:

"Quanto MAIOR o comprimento de um pedaço de fazenda, maior o seu *custo*".

E outros mais, usando:

Quantidade de trabalho e tempo gasto; tempo de trabalho e salário, etc.

Chamar a atenção para que, quando uma grandeza aumenta, a outra aumenta; quando uma diminui, a outra diminui.

2 — Mais ainda, mostraremos que, quando uma grandeza é multiplicada ou dividida por um número, a outra aparece multiplicada ou dividida pelo mesmo número.

"Para fazer 20 metros de uma obra gastam-se 10 dias; para fazer 4 metros da mesma obra gastam-se 2 dias".

A primeira grandeza: 4 metros foi dividida pelo número 5; a segunda grandeza: 10 *dias* apareceu também dividida pelo número 5. Êsse número 5 é a *razão*.

Para achar a razão procedemos assim:

1.ª grandeza: $20 \div 4 = 5$ 2.ª grandeza: $10 \div 2 = 5$

ou ou

$$\frac{20}{4} = 5 \qquad \frac{10}{2} = 5$$

Lembraremos, então, às crianças, que essas duas frações. $\frac{20}{4}$ e $\frac{10}{2}$ são, como vemos, equivalentes, podendo ser ligados pelo sinal = :

$$\frac{20}{4} = \frac{10}{2}$$

3 — Temos, assim, uma proporção, que será lida: 20 está para 4 assim como 10 está para 2. A proporção poderá ser escrita ainda de outra forma, embora lida da mesma maneira:

$$20 : 4 :: 10 : 2$$

E' preciso fazer muitos exercícios para a compreensão das proporções, ora apresentando as situações para os alunos traduzirem em proporções, ora apresentando as proporções para que êles encontrem situações que possam ser traduzidas pelas proporções; o cálculo das

razões também é aconselhável, mostrando que a razão nem sempre é um número inteiro.

4 — Bem conhecidas as proporções, dar-se-á a nomenclatura necessária: 1.° têrmo, 2.° têrmo, meios, extremos, levando, pela apresentação de exemplos, à redescoberta de que:

— o produto dos meios é igual ao produto dos extremos;

— para se achar um meio desconhecido, multiplicam-se os extremos e divide-se pelo meio conhecido;

— para se achar um extremo desconhecido, multiplicam-se os meios e divide-se pelo extremo conhecido.

Podem-se, assim, resolver problemas de grandezas proporcionais, onde são dados três elementos e o quarto é desconhecido. São problemas de *regra de três simples, direta*.

5. **Regra de três.**

Os problemas de regra de três simples direta, pelo método da redução à unidade, empregam o mesmo raciocínio a que a criança já está acostumada, desde séries anteriores, apenas o que é diferente é a forma de indicar.

Por exemplo, no problema:

"Comprei três metros de renda por Cr$ 15,00; vou precisar de mais dois metros; quanto pagarei por êsse segundo pedaço?"

Qualquer criança que saiba cálculo com dinheiro fará:

preço de 1 metro: Cr\$ 15,00 ÷ 3 = Cr\$ 5,00
preço de 2 metros: Cr\$ 5,00 × 2 = Cr\$ 10,00

Será fácil aprender a armar:

3 m — Cr\$ 15,00
2 — x

3 — 15,00
1 — $\dfrac{15,00}{3}$

2 — $\dfrac{15,00 \times 2}{3}$ = Cr\$ 10,00

A simplificação dos cálculos da expressão final não é obrigatória, só devendo mesmo ser feita quando não houver perigo de dúvidas. Muitas vêzes, a criança é levada a simplificar, cortando, os zeros finais da parte decimal dos cruzeiros e os zeros finais de um número inteiro.

A nosso ver, a resolução de um problema de regra de três pela redução à unidade é mais simples em raciocínio do que a noção de proporção, de razão, e a resolução da regra de três pelo processo das proporções.

Temos sempre preferido ensiná-lo à criança antes de sistematizar a noção de proporcionalidade, que elas já possuem, intuitivamente, desde alguns anos atrás.

6 — Problemas com *grandezas inversamente proporcionais* só serão dadas depois de bem fixados os de grandezas diretamente proporcionais. Serão resolvidos, a princípio, pela redução à unidade e, depois, pelas proporções, compreendendo de antemão que se trata

de grandezas inversamente proporcionais, isto é, quando uma aumenta, a outra diminui, embora mantendo sempre a mesma razão.

Exemplo: "8 operários levam 10 dias para fazer uma obra; quanto tempo levarão 4 operários ?"

Evidentemente, menos operários gastarão mais tempo; no caso ,o dôbro, ou sejam 10 dias.

Como são inversas, a proporção será armada inversamente:

8 : 4 : : 20 : 10 — Produto dos meios: 80

ou

$\dfrac{8}{4} = \dfrac{20}{10}$ — Produto dos extremos: 80

Razão: 2

E' bom ensinar à criança , dado um problema de regra de três, determinar imediatamente se é direta ou inversa, colocando setas e armando a proporção seguindo a direção das setas:

Exemplo 1:

Direta:

3 operários ganham Cr\$ 180,00; quanto ganharão 5 operários ?

3 operários — Cr\$ 180,00 — 3 : 5 : : 180,00 : ×
5 operários — ×

Exemplo: 2:

Inversa:

3 pessoas levam 15 dias para completar uma tarefa; quanto tempo levarão 8 pessoas ?

3 pessoas — 15 dias — 3 : 8 : : × : 15
8 pessoas — ×

7 — Estudando a variação de duas grandezas proporcionais, supõe-se constantes tôdas as outras. Assim, quando se estuda o salário de um operário em relação à quantidade de trabalho que produz, supõe-se que o trabalho seja sempre da mesma espécie e apresentando a mesma qualidade. Há, ainda, certos limites para a proporcionalidade: Por exemplo, a venda em grosso não é proporcional à venda a varejo, porque sofre desconto; é impraticável aumentar o número de operários de tal forma que uma obra de 15 dias passe a ser feita em 5 minutos, etc.

SUGESTÕES PRÁTICAS

(Para organização de problemas)

1 — Grandezas diretamente proporcionais:

a) distância percorrida (em movimento uniforme) e tempo gasto;

b) pêso de uma substância (homogênea) e volume;

c) quantidade de trabalho produzido e tempo gasto;

d) preço de um artigo e quantidade adquirida (do mesmo artigo);

e) salário de um operário e quantidade de trabalho;

f) salário de um operário e tempo de trabalho;

g) quantidade de combustível gasto por um veículo e distância percorrida (em marcha uniforme).

2 — Grandezas inversamente proporcionais:

a) velocidade e tempo gasto em percurso;

b) velocidade e percurso feito num tempo dado;

c) tempo gasto numa obra e número de pessoas que trabalham;

d) pêso transportado por cada caminhão e número de caminhões necessários.

CAPÍTULO XII — PORCENTAGEM — JUROS

1. Noção de porcentagem.

Pode-se dar a noção de porcentagem, objetivando em papel quadriculado no qual se limita o espaço correspondente a 100 quadrículas.

Daí, podemos pedir às crianças que pintem de verde, por exemplo, 30 quadrículas. São 30 quadrículas em 100 ou um cento; podemos dizer que pintamos 30 por cento, que também se escreve 30%. Como cada quadrícula é um centésimo do total, podemos, também, escrever 0,30 (trinta centésimos).

Logo: $30\% = 0{,}30$

Ainda com o papel quadriculado, levaremos a compreender o significado de expressão *por cento* e do sinal %, através de exemplo como 5%, 40%, 20%, 10%, etc., estabelecendo a relação com os números decimais equivalentes.

2. Cálculo de porcentagem.

Compreendido o significado, poderemos achar uma porcentagem de qualquer número dado, pois achar 30% de 500 laranjas, por exemplo, é o mesmo que achar 0,30 de 500; a criança, nessa época, já saberá bem que basta, para isso, efetuar uma multiplicação. A indicação do cálculo será:

30% de 500 laranjas: 500 × 0,30 = 150 laranjas.

Usando o papel quadriculado e, também, os conhecimentos que as crianças já têm sôbre eqüivalência entre certos números decimais e frações ordinárias, leva-se a resolver problemas de porcentagem abreviadamente e, até, mentalmente (*):

$$50\ \% = \frac{1}{2} \text{ (basta } \div \text{ por 2)}$$

$$25\ \% = \frac{1}{4} \text{ (" } \div \text{ por 4)}$$

$$20\ \% = \frac{1}{5} \text{ (" } \div \text{ por 5)}$$

$$10\ \% = \frac{1}{10} \text{ (" } \div \text{ por 10)}$$

$$1\ \% = \frac{1}{100} \text{ (" } \div \text{ por 100)}$$

4 — Compreendido o assunto, pode-se fixar o vocabulário adequado:

principal
porcentagem
taxa de percentagem (quantos por cento)

(*) Vide "Diário de Lúcia", Melo e Souza, I. Albuquerque.

5. **Juros de compensação.**

Os juros devem ser compreendidos como uma vantagem que o capital recebe. Por exemplo, quando uma pessoa empresta dinheiro a outra, recebe uma vantagem, que são os juros. Nas compras a prestações, pagam-se juros (o preço inicial é acrescido de uma certa quantia). Quando nós depositamos dinheiro na Caixa Econômica ou num Banco, nós recebemos juros, porque é como se o nosso dinheiro estivesse emprestado ao Banco ou Caixa Econômica. Se, ao contrário, o Banco nos financiar a construção de uma casa, por exemplo, nós é que pagamos juros ao Banco, pelo dinheiro emprestado.

6. **Juros - vocabulário.**

Compreendido isso, podemos fixar o vocabulário relativo:

— a quantia que é emprestada chama-se *capital;*
— o dinheiro que se paga a mais pelo empréstimo são os *juros;*
— os juros são sempre determinados em "tantos por cento" sôbre o capital; êsses "tantos por cento" (2%, 6%, 8%) são a *taxa de juros.*
— quanto maior o prazo (ou tempo) para saldar o empréstimo, maiores os juros; os juros são cobrados a tantos por cento ao mês ou ao ano; chama-se ao prazo *tempo.*

7. **Cálculo de juros**

Dado um problema, pode-se levar a criança a "redescobrir" a fórmula para o cálculo dos juros, em função de:

capital = c
taxa = i
tempo = t

Exemplo: Cobra-se 1% ao mês pelo empréstimo de uma quantia, que será saldada ao fim de 12 meses. Quanto se pagará de juros ?

Naturalmente que a criança raciocinará achando os juros ao fim de um mês e ao fim de 12 meses, levando-o o professor, se julgar necessário, a escrever a fórmula.

O grande perigo aqui é que, uma vez usada a fórmula, a criança, muitas vêzes, comete o êrro de simplificar os zeros da parte decimal dos cruzeiros com o 100:

$$\frac{8.000{,}00 \times 1 \times 12}{100}$$

obtendo para resultado o número abstrato 8.000; isso é muito comum. E' preciso insistir que o número decimal se divide por 100 andando com a vírgula duas casas para a esquerda.

Não há inconveniente em que, ao invés de usar tal fórmula, o aluno multiplique o capital pelo taxa expressa em centésimos e pelo tempo.

8 — Há necessidade, ainda, de calcular juros com taxas como 4,5%, 6,5%, etc,. que são muito comuns nas Caixas Econômicas e Bancos. Também é importante insistir que o tempo seja usado sempre na mesma unidade; se a taxa é ao mês, por exemplo, mesmo que o tempo seja dado em dias ou em anos, é preciso reduzi-lo a meses. Para tais cálculos, considera-se o ano com 360 dias ou 52 semanas; o mês com 30 dias.

9 — Para que os problemas dados sejam reais, é preciso apresentar apenas problemas de juros a *prazo curto*, porque são os que comportam juros simples. Os prazos longos demandam juros compostos, calculados por tabelas especiais.

10 — O grande valor da aprendizagem de problemas de juros na escola primária está no seu valor educativo, pela compreensão da economia. E' preciso dar ênfase a êsse ponto:

Mostrar que o depósito feito em Caixas Econômicas e Bancos, além de representar um capital de que podemos lançar mão a qualquer momento, é um capital que rende juros.

Evitar as compras a prestações, a não ser quando de absoluta necessidade. Exemplo: uma máquina de costura, mesmo pagando-se juros por ela, é uma compra compensadora, porque representa uma economia; da mesma forma, um terreno, uma casa, etc.

Em qualquer compra a prestação, procurar saber o preço a vista, para ver de quanto aumenta; indivíduos inescrupulosos aproveitam a ignorância alheia para cobrar juros proibidos por lei sôbre mercadorias ou empréstimos.

SUGESTÕES PRÁTICAS

a) Para o cálculo de porcentagem, fazer problemas sôbre:

— abatimentos;
— comissões;
— lucros;
— parte aproveitável de matéria-prima;
— impostos;
— prêmios de seguros;
— dados comparativos para estudos estatísticos.

b) Organizar problemas sôbre juros que estimulem a economia e formem o hábito de evitar os empréstimos.

c) Organizar problemas sôbre financiamentos e empréstimos com uso da Tabela Price, levando o aluno a consultá-la e a conferir os juros que pagará pela mesma quantia conforme o prazo ou a taxa.

BIBLIOGRAFIA

Aguayo, A. M. — Pedagogia Cientifica (trad.) — Cia. Editôra Nacional, S. Paulo.
Aguayo, A. M. — Didática da Escola Nova (trad.) — Cia. Editôra Nacional, S. Paulo.
Albuquerque, Irene — Jogos e Recreações Matemáticas — Editôra Conquista — Rio de Janeiro.
Backheuser, Everardo. — Como se Ensina Aritmética (Fundamentos Psicopedagógicos), Pôrto Alegre.
Beck, A. L. — Remedial Work in the Addition of Commom Fractions, "California Journal of Elementary Education", n.º 9, 1940.
Brueckner, L. J. — Diagnostic and Remedial Teaching in Arithmetic, Filadélfia, 1930.
Buswell, G. T. e John, L. — The Vocabulary of Arithmetic, "The Supplementary Educational Monographs", n.º 38, University of Chicago Press, 1931.
Cambiaggio, Delmira F. — La Arithmética en la Escuela Primária (Fundamentos Psicológicos de su Metodologia), Buenos Aires, 1948.
Clapp, F. L. — The Number Combinations, Their Relative Difficulty and the Frequency of their Appearance in Textboocks, "Bureau of Educational Research Bulletin, n.ºs 1 e 2, 1924.
Cole, Luella — The Elementary School Subjects, N. York, 1946.
Comas, Margarita — Metodologia de la Aritmética y la Geometria, Madrid, 1932.
Comas, Margarita — Como se Enseña la Aritmética of la Geometria, Madrid, 1925.
Elam, M. R. — The Fundamental Vocabulary of Elementary School Arithmetic, "Educational School Journal, 33, 1932.
Faria de Vasconcelos — Como se Ensina Aritmética, 1934.
Fehr, Howard H. — The Place of Multisensory Aids in the Teacher Training Program, "The Mathematics Teacher", vol. XL, n.º 5, 1947.
Howard, Ray W. — Learning the Multiplication Combinations, "The Packet", vol. 4, n.º 2, 1949.
Johnson e Nickerson — The Future of Visual Aids in Mathematics, "The Mathematics Teacher", vol. XL, n.º 4, 1947.
Lyda, W. J. — Direct, Practical Experiences in Mathematics and Success in Solving Realistic Verbal "Reasoning", Problems in Arithmetic, "The Mathematics Teacher", vol. XL, n.º 4, 1947.
Morton — Teaching Arithmetic in the Elementary School, N. York, vol. I — Primary Grades; vol. II — Intermediate Grades.
Morton, Gray e outros — A Straight Talk to Teachers of Arithmetic, N. York.
Mossman, E. L. — So-Called Shorscuts often Cause Confusion — "The Mathematics Teacher", vol. XL, n.º 2,
Myers, G. — Prevention and Correction of Errors in Arithmetics, The Plymouth Press, 1925.
Newson, C. V. — A philosophy for the Mathematics Teacher, "The Mathematics Teacher", vol. XL, n.º 5, 1947.
Olander e Sharp — Long Division versus Short Division — "Journal of Educational Research", 1932.
Osburn W. J. — Corrective Arithmetic (2 volumes), N. York, 1924 e 1926.
Osburn e Drennan — Problem Solving in Arithmetic — Educational Research Bulletin, n.º 10, 1931.
Paiva e Sousa, Alfredina — O cálculo na Escola Primária (Problemas Metodológicos), Rio de Janeiro, 1942.
Paiva e Sousa, Alfredina — Metodologia do Cálculo — Revista de Educação Pública, vol. I, n.º 4, Prefeitura do Distrito Federal.
Raths, L. E. — Grade Placement in the Addition and Subtraction of Fractions — "Educational Research Bulletin", Ohio State University, 1932.
Rude, Adolf — El Tesoro del Maestro, vol. IV — La Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales (trad.) — Editorial Labor, Buenos Aires, 1939.
Steele, D. C. — Teaching and Testing the Understanding of Common Fractions — "University of Pittsburgh Bulletin, n.º 37, 1941.
Thorndike, Ed. Lee — A Nova Metodologia da Aritmética (trad.), Pôrto Alegre.
Thorndike, Ed. Lee — Psychology of Arithmetic, N. York, 1929.
Wheat, H. G. — Teaching Thinking in Arithmetic, "The Mathematics Teacher", vol. XL, n.º 5, 1947.
Wilson, G. M. — The Motivation of Arithmetic, Washington, 1926.

Programa de Matemática — Departamento de Educação do Distrito Federal, 1934.
Programa em Experiência — Secretaria de Educação e Saúde Pública do Estado de Minas Gerais, 1941.
Programa Experimental — Secretaria de Educação e Saúde, Bahia 1945.

ÍNDICE