A = 1,2,3,6,13 , B = 1,3,5,7,15,21,35,105,
C = 1,2,4,8,16,3,6,9,12,24,48
D = 2,3,5,7,10,21,30,210

construa os respectivos Diagramas de Hasse.

2. Determine os equimúltiplos de 7,12, e 18, segundo o número 5, idem segundo o número 7.

3. Sabendo-se que o número 7 é divisor de A, não é divisor de B, deixando resto 3, e que também é disordivisor de C, deixando resto 6; pede-se o resto da divisão de: a) A + B + C por 7 , b) A x B+C por 7, c) A + B x C por 7, d) A x B x C por 7 e) A x C + B por 7.

4. Com os dados do exercício 3 responda se podem estar certos os cálculos: a) A + B = C b) BxC+B = A c) C - B = B d) C x C + B = B x C

5. Utilizando a igualdade: 1 000 = 8 x 125, e a expressão N = $\overline{D}$ x 100 + cdu, determine um critério -resto para o 8 (ou 125).

6. Verifique se os números:
a) 435 286 b) 12 380 c) 3 275 d) 4 266
e) 245 619 f) 103 425 g) 3 926 h) 178
são divisíveis por: 2,3,4,5,6,7,8,9,10,11, e determine os restos.

7. Quais algarismos podemos colocar no lugar de "x" para que o número: 3 58x seja divisível: a) por 2 e 5 b) por 4 e 5 c) por 2 e 9 d) por 3 e 5 e) por 11 f) por 6 g) por 6 e 9.

8. Numa urna existem menos de 40 bolas. Contando-as de 9 em 9 não sobra bola, mas, contando-as de 11 em 11 sobra 5. Quantas são as bolas?

9. Faça os cálculos e depois tire: a "prova dos nove" e "prova dos onze": a) 35 + 68 + 125 , b) 7 296 + 5 417 c) 382 - 145 d) 4723 - 986 e) 248 x 34 f) 2 157 x 19 g) 5 286 : 45 h) 1234321 : 11.

10. Sem efetuar os cálculos indicados determine o resto do valor da expressão seguinte quando se dividir por: a) 9 b) por 11 c) por 5:

a') [(32 x 48) + 180] - 73

b') 8 292 + 35 x 384 x 12 - (63 : 7 + 84x12)

c') (756 x 325 - 2 048 : 16) x 143

b) Exercícios Especiais mais avançados:

1. Prove que se a soma de dois números quaisquer é divisível por 2, sua diferença também é.

Sugestão: utilize (a+b) - 2 x b = a - b

2. Prove que o quadrado de um número ímpar é múltiplo de 8 mais uma unidade.

Sugestão: Utilize para ímpar a forma: 2 x k + 1

3. Prove que todo múltiplo de 4 é igual à soma de dois ímpares consecutivos.

Sugestão: Utilize: (2 x k + 1) + (2 x k - 1)

4. Prove que se: a x b | a x c então b | c.
5. Prove que se a|b e c ≠ 0 então a x c | b x c.
6. Quais os algarismos que devemos colocar no lugar de "x" e "y" no número 1x4y2, para que:
   a) seja divisível por 4 e 9,
   b) seja divisível por 9 e 11.
7. Prove que dados dois números pares consecutivos um é sempre divisível por 4.
   Sugestão: Utilize para pares: 2 x k e 2 x k + 2
8. Prove que a soma dos n primeiros naturais é divisível pelo inteiro seguinte, caso êle seja ímpar.
9. Prove que o produto de três inteiros consecutivos é divisível por 6.
   Sugestão: Indique-os com k, k+1, e k+2, estude os casos de k ser par ou ímpar.
10. Prove que a soma dos quadrados de três números - não divisíveis por 3 é múltiplo de 3.
    Sugestão: Indique as suas formas possíveis com 3 x k + 1 e 3 x k'+ 2, ou 3 x k - 1 e 3 x k' + 1.
11. Prove que a diferença dos quadrados de dois números não divisíveis por 3 é múltiplo de 3.

*

CAPÍTULO - V

NÚMEROS PRIMOS E NÚMEROS COMPOSTOS

A. Definição

Temos aprendido no capítulo IV, que, um número pode ter divisores próprios e divisores impróprios (o próprio número e a unidade); disto resulta as duas definições seguintes:

Definição I: Número primo:

Um número inteiro, diferente da unidade, é primo se, e sòmente se, possui por únicos divisores os divisores impróprios. (*)

Definição II: Número Composto:

Um número inteiro diferente de zero e da unidade, é composto se, e sòmente se, possui pelo menos um divisor próprio.

Exemplos:

a) 5 é primo, pois os únicos divisores são 1 e 5.

b) 6 é composto, pois possui os divisores próprios 2 e 3.

Das definições, e do que já vimos anteriormente resulta que os números inteiros podem ser classificados

(*) Da definição resulta que o zero não é rpimo; acrescentamos na definição: "diferente da unidade", para deixarmos claro que um não é primo.

do seguinte modo:

Número Inteiro:

- 1 - Primeiro divisor, ou divisor universal,
- p - Primos (divisores: 1 e p)
- c - Compostos (divisores: 1, c e outros)
- 0 - último divisor, em Múltiplo Universal

Definição III:

Dois ou mais números inteiros são chamados primos entre si caso admitam como único divisor comum a unidade.

Exemplo:

Os números inteiros 15 e 56 são números primos entre si, pois o único divisor comum é a unidade.

B. **Teorema da Decomposição:**

"Todo número composto é igual a um produto de fatôres primos".

Mostraremos primeiramente, para facilitar, com um exemplo numérico.

Seja o número composto 120.

Sendo composto o número 120, possui pelo menos um divisor próprio, por exemplo temos: 60, 20, 30, etc.

Tomemos o menor divisor próprio; se 20 é o menor, é primo, pois em caso contrário admite um divisor próprio (menor que êle), que é também divisor de 120, por exemplo o 10.

Logo 20 não é o menor divisor próprio de 120; e de fato o menor divisor próprio de 120 é o 2; e 2 é primo.

Concluimos que:

$$120 = 2 \times 60 \quad (*)$$

Raciocinando novamente com 60 chegaremos à conclusão que 60 possui como menor divisor próprio um número primo, que é no caso, novamente o 2:

$$120 = 2 \times (2 \times 30) = 2 \times 2 \times 30$$

Novamente, para o 30, o menor divisor próprio deve ser primo, que é ainda o 2:

$$120 = 2 \times 2 \times (2 \times 15) = 2 \times 2 \times 2 \times 15$$

e, sucessivamente teremos:

$$120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

Chegamos então ao quociente 5 que é primo, e teremos decomposto o 120 em fatôres só primos.

De uma maneira geral podemos raciocinar da mesma maneira:

Seja N o número composto.

Entre os divisores próprios tomemos o menor "p_1", que deve ser primo, pois, em caso contrário teria um divisor próprio menor que êle, que seria também divisor de N, contra a hipótese de "p_1" ser o menor:

$$N = p_1 \times a$$

Novamente, seja "p_2" o menor divisor próprio "a", com "p_2" primo, pela mesma razão:

(*) Nesta oportunidade o número 120 já está fatorado, mas a fatoração não é completa.

$$N = p_1 \times p_2 \times b$$

e, raciocinando anàlogamente chegaremos a um quociente final primo, porque enquanto não chegarmos a um primo o raciocínio é aplicável:

$$N = p_1 \times p_2 \times p_3 \times \ldots \times p_n$$

com todos fatôres primos.

C - <u>Forma Geral de Decomposição</u>:

No produto anterior, é claro, que algum dos fatôres primos podem ser iguais, o que se verificou no exemplo numérico:

$$120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

ou, em forma de potências:

$$120 = 2^3 \times 3 \times 5$$

logo, de uma maneira geral, qualquer número composto N pode ser escrito na seguinte Forma Geral de Decomposição:

$$\boxed{N = p_1^{\,a} \times p_2^{\,b} \times p_3^{\,c} \times \ldots \times p_m^{\,m}} \quad (*)$$

onde $p_1, p_2, \ldots p_m$, são primos; e, a,b,c,...m são números inteiros.

Exemplo:

Na decomposição utiliza-se a obtenção dos mesmos em ordem crescente, por divisões sucessivas; aliás, segundo o próprio raciocínio empregado nas explicações acima, e, na prática adota-se um dispositivo prático:

Seja N = 360

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

D. <u>TEOREMA DA ILIMITAÇÃO</u>:

<u>"A sucessão dos números primos é ilimitada"</u>.

De fato:

Mostremos que dado um número primo "p" qualquer, sempre existe um número primo maior que êle.

Para isso façamos o produto de todos os primos desde 2 até p:

$$P = 2 \times 3 \times 5 \times \ldots \times p$$

e, em seguida adicionemos uma unidade:

$$N = P + 1$$

podem se dar dois casos: $\begin{cases} N \text{ é primo} \\ N \text{ é composto} \end{cases}$

Sendo N primo já provado, pois N+1 é maior que p, e p foi um primo qualquer escolhido.

Admitamos a segunda hipótese: N composto: portanto N admite um divisor primo "q", mas q deve ser diferente de 2,3,5,...p, pois êsses números dividindo exatamente P, não dividem N, pois não dividem a unidade

$$N = P + 1).$$

Sendo o número "q" primo, diferente dos primos 2, 3,5,... p, deve ser maior que p, como pretendíamos provar.

E. OBTENÇÃO DE NÚMEROS PRIMOS

E.1. Crivo de Erat´st nes: (*)

Consiste de um simples processo de .liminação de números compostos sucessivamente, eliminando:

a) Cancela-se o número 1,

b) os múltiplos de 2, cancelando de 2 em 2, a partir do 4,

c) os múltiplos de 3, cancelando de 3 em 3, a partir do 9,

d) os múltiplos de 5, cancelando de 5 em 5, a partir do 25,

e) os múltiplos de 7, cancelando de 7 em 7, a partir do 49, etc.

No quadro seguinte obtivemos os primos entre 1 e 100.

(*) Ver nota histórica na 3ª parte da obra.

1	2	3	4	5	6	7	8	~~9~~	10
11	~~12~~	13	14	~~15~~	16	17	~~18~~	19	20
~~21~~	22	23	~~24~~	~~25~~	26	~~27~~	28	29	~~30~~
31	32	~~33~~	34	~~35~~	~~36~~	37	38	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	44	~~45~~	46	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	52	53	~~54~~	~~55~~	56	~~57~~	58	59	~~60~~
61	62	~~63~~	64	~~65~~	~~66~~	67	68	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	74	~~75~~	76	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	82	83	~~84~~	~~85~~	86	[illegible]	88	89	~~90~~
~~91~~	92	~~93~~	94	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

E.2. Verificação se um número é ou não primo.

O crivo de Eratóstenes apresenta defeito, pois, para se obter um primo é necessário trabalhar com muitos números da tabela; ou então, iniciar no meio desta, começando o cancelamento com o primo quadrado de primo possível. Pode acontecer também, de se ter necessidade de saber se um número é primo ou é composto; então é claro que não iríamos construir a tabela, ou mesmo parte dela para a eliminação.

Usamos então o seguinte critério de Verificação de Primos:

Toma-se o número e efetua-se divisões sucessivas pelos primos: 3, 5, 7, 11,... (*):

a) sendo divisão exata o número é composto,

b) sendo inexata, faz-se a divisão pelo primo seguinte,

(*) Por 2 é fácil, basta observar o último algarismo.

c) repete-se as regras a) e b) até que o quociente de uma divisão seja igual ou inferior ao divisor; quando isto acontecer o número é primo.

O critério está baseado na seguinte propriedade:

Propriedade:

Um número é primo quando não é divisível por nenhum primo cujo quadrado não o exceda.

Seja N o número e p o maior número primo tal que seu quadrado não exceda N: $p^2 < N$.

e, que N não seja divisível por p e por nenhum primo menor que p:

$$N = p \times q + r$$

Seja p_1 o primeiro primo divisor de N tal que

$$p_1 > p:$$

$$N = p_1 \times q$$

Como $p_1 > p$; pela hipótese feita o seu quadrado excede N:

$$p_1^2 > N$$

mas, neste caso, será $p_1 > q$.

isto é, como q_1 é também divisor de N, existe um divisor de N menor que p_1, que é contra a hipótese, logo, não existe um número que divide N.

Exemplo: Verificar se os números: a) 143; b) 367; c) 113 são primos.

a)

143	3
23	47
2	

143	5
43	28
3	

143	6
03	20

143	11
33	13
0	

portanto 143 é composto

b)

367	3
06	122
07	
1	

367	5
17	73
2	

367	7
17	52
3	

367	11
37	33
4	

367	13
107	28
3	

367	17
27	21
10	

367	19
177	19
06	

portanto, 367 é primo, pois não é divisível por nenhum primo cujo quadrado não o excede.

c)

113	3
23	37
2	

113	5
13	22
3	

113	7
43	16
1	

113	11
03	10

portanto, já podemos afirmar que 113 é primo, pois o quociente é inferior ao divisor, e nenhumadivisão é exata.

F. DIVISORES DE UM NÚMERO COMPOSTO

Do teorema da decomposição de um número num produto de primos, resultam algumas aplicações que veremos a seguir (*).

F.1. Propriedade dos expoentes:

Vimos que um número composto N pode ser escrito na Forma Geral de Decomposição:

$$N = p_1^a \times p_2^b \times p_3^c \times \ldots \times p_m^m$$

portanto, qualquer número M que possua os mesmos fatôres primos, afetados de expoentes menores ou iguais aos de N, será divisor de N, como é fácil verificar.

Seja para exemplo:

temos $N = 360$
$N = 2^3 \times 3^2 \times 5$
e, seja $M = 2^2 \times 3^2$

que satisfaz a condição:

Como $N = 2^3 \times 3^2 \times 5$, será $N = 2^2 \times 2 \times 3^2 \times 5$ ou

$$N = (2^2 \times 3^2) \times (2 \times 5)$$

ou

$$N = M \times (2 \times 5),$$

que implica ser $M \mid N$.

o que de fato se verifica, pois: $M = 2^2 \times 3^2 = 36$ e, $36 \mid 360$.

(*) - Serão feitas aplicações também ao cálculo do máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum, por exemplo.

F.2 - Dispositivo Prático:

Primeiramente determina-se a Forma Geral de Decomposição; operação denominada: Decomposição em Fatores Primos, como vimos em C. Capítulo V.

Seja o caso da determinação dos divisores de 360; como já vimos antes:

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5.$$

Escreve-se os fatôres primos numa coluna (pode ser a mesma obtida no dispositivo prático da decomposição).

Os divisores são obtidos multiplicando-se os primos colocados à esquerda, pelos números que estejam à direita, e colocados acima dêles próprios; escrevendo-se os produtos em frente, na sua linha horzontal. Para início, escreve-se a unidade, visto que é divisor universal.

Os produtos repetidos não se escrevem.

	1									
2	2									
2	4									
2	8									
3	3	6	12	24						
3	9	18	36	72						
5	5	10	20	40	15	30	60	120	45	90 180 360

F.3. Representação Gráfica:

Os Diagramas de Hasse, que aprendemos no capítulo anterior, fornecem interessante representação do Conjunto de Divisores de um Número.

Exemplo: N = 60

		1
60	2	2
30	2	4
15	3	3 6 12
5	5	5 10 20 15 30 60
1		

Conjunto dos Divisores:

$\{1,2,3,4,5,6,10,12,15,20,30,60\}$

Representação pelos Diagramas de Hasse:

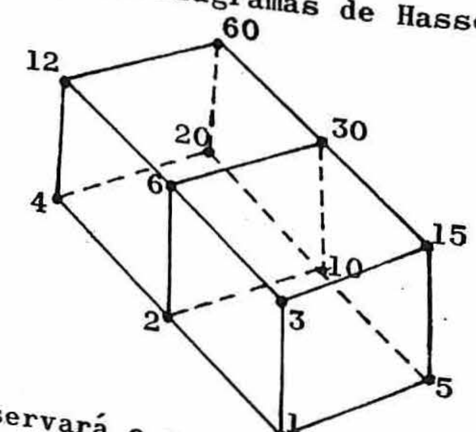


Fig.14

O leitor observará o aspecto geométrico de um paralelogramo; assim, um número na Forma Gera:

a) com 1 fator primo - terá representação em linha reta,

b) com 2 fatôres primos - terá representação em forma de paralelogramo

c) com 3 fatôres primos - terá representação na forma de paralelepípedo, etc.

Exemplos:

a) $16 = 2^4$

$\{1,2,4,8,16\}$

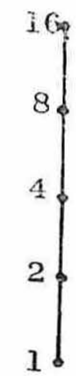


Fig. 16

b) $72 = 2^3 \times 3^2$

$\{1,2,4,3,6,8,9,12,18,36,24,72\}$

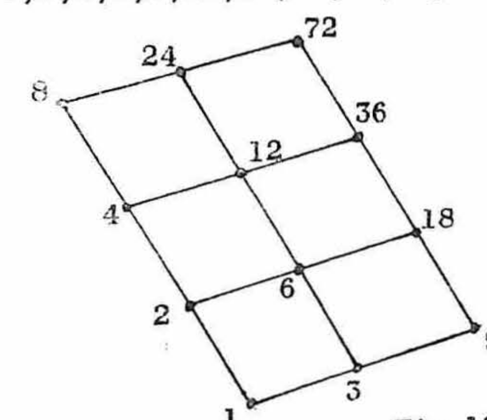


Fig.16

Nota: Com habilidade e prática o Diagrama de Hasse pode ser empregado como dispositivo para obtenção (*) de todos os divisores de um número.

G. Cálculo do número de divisores de um número.

Seja a Forma Geral de Decomposição

$$N = p_1^a \times p_2^b \times \ldots \times p_m^m$$

Um divisor M qualquer, de N, pode ter na sua Forma Geral o fator p_1 com expoente:

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ a$$

ou, mesmo com expoente 0, portanto de "a+1" maneiras diferentes. Idem, pode ter o fator primo p_b com expoente:

(*) - Sugestão da matemática francêsa: Lucienne Felix (curso ministrado para o G. E. E. M. - São Paulo - 1962).

1, 2, 3, ... b ou com expoente 0; portanto, de "b + 1" maneiras diferentes.

Anàlogamente os outros fatôres; portanto podemos formar um divisor M qualquer de:

$$(a + 1) \times (b + 1) \times \dots\dots\dots\dots \times (m + 1)$$

maneiras diferentes, logo, a fórmula do Número D de divisores é dada por:

$$\boxed{D = (a + 1) \times (b + 1) \times \dots \times (m + 1)}$$

Exemplo:

$$N = 72 = 2^3 \times 3^2$$

Temos: $D = (3 + 1) \times (2 + 1) = 4 \times 3 = 12$

isto é, o número de divisores de 72 é 12.

Observação:

Sugerimos, ao leitor interessado, consultar nosso livro: "Um Curso Moderno Elementar de Análise Combinatória (pp 131, 132), e, o problema anterior poderá ser interpretado como o cálculo do número total de misturas do conjunto-depósito

$$\{(p_1)_a, (p_2)_b, \dots\dots\dots (p_m)_m\},$$

de: cela do tipo p_1 com capacidade a

cela do tipo p_2 com capacidade b, etc.

H. Cálculo da soma dos divisores de um número.

Seja: $N = p_1^a \times p_2^b \times \dots \times p_m^m$

Multiplicando-se as expressões:

$$(1 + p_1 + p_1^2 + p_1^3 + \dots\dots\dots + p_1^a)$$

$$(1 + p_2 + p_2^2 + p_2^3 + \dots\dots\dots + p_2^b)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(1 + p_m + p_m^2 + p_m^3 + \dots\dots\dots + p_m^m)$$

obteremos têrmos da forma

$$M = p_1^{a'} \times p_2^{b'} \times p_3^{c'} \times \dots\dots \times p_m^{m'}$$

onde: $a' \leqslant a$, $b' \leqslant b$, $c' \leqslant c$, ... $m' \leqslant m$

ou que M é divisor de N.

Resulta que a soma dos divisores é igual ao produto das expressões:

$$S = (1 + p_1 + p_1^2 + \dots\dots + p_1^a) \times (1 + p_2 + \dots + p_2^b) \times$$

$$\times \dots\dots\dots \times (1 + p_m + \dots + p_m^m)$$

Os leitores que conhecem as progressões geométricas (*) reconhecem que cada expressão é a soma de têrmos em progressão geométrica, de fórmula conhecida, logo:

(*) Os que não conhecem progressões e se interessam poderão consultar qualquer livro de primeira série do ciclo colegial.

$$S = \frac{p_1^{a+1} - 1}{p_1 - 1} \times \frac{p_2^{b+1} - 1}{p_2 - 1} \times \dots \frac{p_m^{m+1} - 1}{p_m - 1}$$

Exemplo:

$$N = 72 = 2^3 \times 3^2$$

temos: $S = \dfrac{2^4 - 1}{2 - 1} \times \dfrac{3^2 - 1}{3 - 1} = \dfrac{15}{1} \cdot \dfrac{26}{2} = 15 \times 13$

ou: $S = 195$

I - EXERCÍCIOS - SÉRIE XIII

1. Qual é o número par que é primo?
2. Pode ser primo um múltiplo de um número "a" primo?
3. Pode ser primo um múltiplo de um número "b" composto?
4. Por que no Crivo de Eratóstenes não cancelamos:
   a) os múltiplos de 9 ?
   b) os múltiplos de 6 ?
   c) os de 15?
   d) os de 10?
5. O que assegura o processo de cancelamento para obtenção do crivo de Eratóstenes fornece só primos?
6. Construa uma tabela de primos de 1 a 400 com o auxílio do Crivo.

7. Sem usar a tabela anterior reconheça se os números seguintes são primos ou compostos:
   a) 149 b) 373 c) 137 d) 361 e) 389 f) 367
   Verifique pela tabela.
8. Idem para os números: a) 881, b) 2209, c) 5001
9. O produto de dois números é um número primo. Qual é um dos fatôres?
10. Mostre que um número primo maior que 3 pode sempre ser escrito nas formas: ou $m \times 6 + 1$ ou $m\times 6 - 1$.
11. Determine a Forma Geral de Decomposição em primos dos números:
    a) 180 b) 270 c) 2205 d) 1000 e) 1600
    f) 1800.
12. Determine os divisores dos números do exercício 11.
13. Represente gràficamente em Diagramas de Hasse os conjuntos de divisores dos números do exercício 11.
14. Calcule o número de divisores de:
    a) 80 b) 50 c) 48 d) 480
15. Determine os divisores dos números do exercício 14, com utilização do Diagrama de Hasse para obtenção.
16. Determine o menor número com 6 divisores que só possui fatôres primos 2 e 3.
17. Idem, ao exercício 16, para o maior número.
18. Determine o menor número com 12 divisores, que só possui os fatôres primos 2, 3 e 5.

19. Idem, ao exercício 18, mas o maior.

20. Verifique se os pares de números seguintes, são primos entre si: (sugestão: utilize fatoração).
a) 18 e 125 b) 48 e 45 c) 3600 e 3773
d) 216 e 1125.

Exercícios especiais:

1. Determine o menor número que admite 20 divisores.
2. Idem, ao exercício 1, mas o maior.
3. Idem, ao exercício 1, mas com 24 divisores.
4. Idem, ao exercício 3, mas o maior.

*

CAPÍTULO - VI

MAXIMIZAÇÃO E MINIMIZAÇÃO

A. Preliminares:

Estudaremos a seguir duas operações bastante semelhantes; e, por isso vamos procurar estudá-las simultâneamente. O leitor observará que a forma que apresentaremos não é usual nos livros de Aritmética até então; isto é, cuidando das operações que conduzem a determinar o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum, cujo processo é vantajoso, entre outros méritos, pela uniformização dos conceitos.

B. Divisores e Múltiplos Comuns:

B.1. Divisores Comuns:

Consideremos os números 18 e 12; determinemos os eus conjuntos de divisores (*):

$$A = \{1,2,3,6,9,18\}$$
$$B = \{1,2,3,4,6,8,12\}$$

Façamos a intersecção desses conjuntos:

$$C = A \cap B = \{1,2,3,6\}$$

Da definição de conjunto intersecção sabemos que êste conjunto C é constituido só dos elementos que são comuns aos dois conjuntos dados; portanto, o conjunto dos divisores comuns dos números 18 e 12; isto é, o con

(*) - Por qualquer processo.

junto dos números que dividem os números dados 18 e 12.

Como consequencia, pelo que vimos no capítulo V, caso houver dois números cujo conjunto de divisores comuns seja o conjunto unitário constituido da unidade, sabemos, por definição, que os números são primos entre si.

Exemplo: 15 e 28

$A = \{1,3,5,15\}$

$B = \{1,2,4,7,14,28\}$

$C = A \cap B = \{1\}$

B.2. <u>Múltiplos Comuns</u>:

Consideremos agora, os mesmos números 18 e 12; mas, determinemos os seus <u>conjuntos de múltiplos, com excluSão do zero</u> (*), por exemplo, multiplicando os números dados pela sucessão de naturais: 1,2,3,4,...... (**):

$A' = \{18,36,54,72,90,108,..........\}$

$B' = \{12,24,36,48,60,72,84,96,108,120,......\}$

Da mesma forma anterior, procuremos o conjunto-intersecção (também conjunto-infinito):

$C' = A' \cap B' = \{36, 72, 108, ...\}$

(*) Lembremos que zero é múltiplo universal.

(**) Como a sucessão dos naturais é ilimitada, o conjunto é infinito.

O conjunto intersecção C' encontrado é o conjunto dos múltiplos comuns, de 18 e 12; isto é, o conjunto dos números que gozam da propriedade de serem divisíveis pelos números dados 18 e 12.

C. <u>Operação de Maximização do Divisor Comum</u>.

No conjunto dos divisores comuns existe um que é o maior de todos; assim, no exemplo dado, o número 6 é o maior, isto é: <u>máximo divisor comum</u>, e indicamos

$$18 \;D\; 12 = 6$$

de onde seguem as definições:

<u>Definição a)</u>:

<u>Dados dois inteiros "a e b", ao número "c", que seja o maior número do conjunto de divisores comuns, denominados máximo divisor comum.</u>

Indicamos: $a \;D\; b = c$

ou $\max(a;b) = c$

ou $m.d.c(a;b) = c$,

<u>Definição b)</u>:

<u>A operação, que ao par (a;b) faz corresponder o inteiro "c" igual ao seu máximo divisor comum, é chamada maximização do divisor comum.</u>

D. <u>Operação de Minimização do Múltiplo Comum</u>.

De maneira análoga a anterior, o conjunto dos múltiplos comuns possui um <u>menor</u> que todos; assim, no exemplo dado, o número 36 é o menor, isto é: <u>mínimo múltiplo comum</u> de 18 e 12; e, indicamos

18 M 12 = 36

Definições:

a) Dados inteiros "a e b", ao número "c" diferente de zero, que seja o menor número do conjunto de múltiplos comuns de a e b, denominamos mínimo múltiplo comum.

Indicamos:

a M b = c
ou min(a ; b) = c
ou m.m.c.(a ; b) = c

b) A operação, que ao par (a;b) faz corresponder o inteiro "c", igual ao seu mínimo múltiplo comum, é chamada minimização do múltiplo comum.

E. PROPRIEDADE PARTICULAR:

E.1. Da Maximização:

"Quando um dos números divide o outro, o máximo divisor comum é o menor".

De fato: Seja b divisor de a: b|a.

Pela propriedade reflexiva: b|b; é claro que então b é divisor comum de "a e b", e como é o maior; pois, não pode existir número maior que divida o próprio b, b é o máximo divisor comum.

Exemplo: Sejam os números 12 e 48

Temos: $\begin{cases} 12 \mid 48 \\ 12 \mid 12 \end{cases}$, logo: 12 D 48 = 12

E.2. Da Minimização: "Quando um dos números é múltiplo do outro, o mínimo múltiplo comum é o maior".

De fato: Seja b divisor de a.

Pela propriedade reflexiva a|a; é claro então que "a" é múltiplo comum de "a e b" ; e, como é o menor, pois não pode existir número menor que a, que seja seu próprio múltiplo (excluimos o zero), "a" é o mínimo múltiplo comum.

Exemplo:

No exemplo anterior, como 12|48, temos:

12 M 48 = 48.

F. DETERMINAÇÃO DO MÁXIMO DIVISOR COMUM E DO MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM.

F.1. Pelo Processo expontâneo:

O procedimento que vimos para introduzir as duas operações, serve como processo de cálculo para a determinação do máximo divisor comum, e do mínimo comum; processo que denominamos expontâneo, pois, surge da própria definição.

a) Máximo Divisor Comum:

1. Determina-se os conjuntos de divisores de cada número, por fatoração em primos,
2. Determina-se, por intersecção de conjuntos, o conjunto de divisores comuns,
3. Toma-se o maior número do conjunto de divisores comuns.

Exemplo: 60 e 45

		1
60	2	2
30	2	4
15	3	3-6-12
5	5	5-10-20-15-30-60-

A = $\{1,2,3,4,5,6,10,12,15,20,30,60\}$.

		1
45	3	3
15	3	9
5	5	5 - 15 - 45
1		

B = $\{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$

C = $A \cap B$ = $\{1, 3, 5, 15\}$

Conclusão: 60 D 45 = 15

b) <u>Mínimo múltiplo comum:</u>

1. Determina-se os <u>conjuntos de múltiplos</u> de cada número por multiplicação, pela sucessão dos naturais,
2. Determina-se, por intersecção de conjuntos, o conjunto dos múltiplos comuns,
3. Toma-se o <u>menor</u> número do conjunto de múltiplos comuns.

Exemplo: 60 e 45

60 x 1	=	60	45 x 1	=	45
60 x 2	=	120	45 x 2	=	90
60 x 3	=	180	45 x 3	=	135
60 x 4	=	240	45 x 4	=	180
60 x 5	=	300	45 x 5	=	225
60 x 6	=	360	45 x 6	=	270
60 x 7	=	420, etc	45 x 7	=	315
			45 x 8	=	360, etc.

A' = $\{60,120,180,240,300,360,420,........\}$

B' = $\{45,90,135,180,225,270,315,360,.......\}$

C' = $A' \cap B'$ = $\{180,360,.......\}$

Conclusão: 60 M 45 = 180

Nota: Na prática, quando se determina o segundo conjunto de múltiplos, pode-se parar quando encontrarmos o primeiro múltiplo comum; o qual, será o mínimo múltiplo comum.

F.2. <u>Algoritmo de Euclides para o máximo divisor comum:</u>

O processo que vamos expôr consiste de um <u>processo de divisões sucessivas</u>, chamado comumente <u>Algoritmo de Euclides</u> para a determinação do máximo divisor comum.

O estabelecimento do processo está baseado numa propriedade simples da Divisão Geral, que procuraremos explicar em seguida:

"<u>O máximo divisor comum</u> de dois números é igual ao <u>máximo divisor comum</u> do menor e do resto da divisão

<u>do maior pelo menor.</u>"

De fato: Seja $a > b$.

Dividamos "a" por "b", temos a expressão da Divisão Geral:

$$a = b \times q + r$$

e, admitamos a divisão não exata.

Seja "d" um divisor comum qualquer de "a" e "b":

$$\begin{cases} d \mid a \\ d \mid b \end{cases} \Longrightarrow d \mid b \times q$$

Da definição de subtração temos:

$$a = b \times q + r \Longleftrightarrow a - b \times q = r$$

portanto, pela propriedade da divisibilidade em relação à subtração (Prop. 5-Cap. IV) podemos garantir que:

$$d \mid r ,$$

ou que:

"todo divisor comum de "a e b" é divisor de "r", portanto de "b e r".

Reciprocamente, seja "d" um divisor comum de "b e r"; temos:

$$\begin{cases} d \mid b \\ d \mid r \end{cases} \Longrightarrow d \mid b \times q$$

e, como $a = b \times q + r$

pela propriedade da divisiblidade em relação à adição, (Prop. 1 - Cap. IV), podemos garantir que:

$$d \mid a$$

ou que: "todo divisor comum de "b e r" é divisor de "a", portanto de "a e b".

Reunindo as duas pequenas conclusões podemos afirmar:

O conjunto de divisores comuns de "a e b" é igual ao conjunto de divisores comuns de "b e r".

e, finalmente, como consequência:

O máximo divisor comum de "a e b" é igual ao máximo divisor comum de "b e r".

Exemplo:

Sejam os números 36 e 20;

Temos:

Conjunto dos divisores de 36

$$A = \{1,2,3,4,6,9,12,18,36\}$$

Conjunto de divisores de 20

$$B = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$$

Conjunto de divisores comuns de 36 e 20:

$$C = A \cap B = \{1, 2, 4\}$$

Dividamos 36 por 20: $36 \mid 20$ = 1 e sobra resto 16:

$$36 = 20 \times 1 + 16$$

Conjunto de divisores do resto 16:

$$R = \{1, 2, 4, 8, 16\}$$

Conjunto de divisores comuns de 20 e 16:

$$C' = B \cap R = \{1, 2, 4\}$$

que é igual ao conjunto C; e, o máximo divisor comum 4 de 36 e 20 é portanto o máximo divisor comum de 20 e 16.

<u>PROCESSO</u>:

O leitor observa que a propriedade pode continuar a ser aplicada até que se obtenha um resto nulo, pois então pela propriedade dada em F.1., o máximo divisor comum é o menor da última divisão efetuada.

Segue então o Algoritmo:

1. Divide-se o maior "a" pelo menor "b",
2. Se o resto r é zero, o máximo divisor comum é b,
3. Se o resto não é zero, divide-se b por r,
4. Se o novo resto é zero, o máximo divisor comum é o resto anterior,
5. Se o novo resto não é zero, divide-se o resto anterior pelo novo resto; e, assim sucessivamente.

Nota: É claro que o processo possui um número limitado de operações, pois a sucessão dos restos é decrescente.

DISPOSITIVO PRÁTICO:

	q	q'	q''	
a	b	r	r'	
bxq	rxq'	r'xq''	...	....
r	r'	r''	...	....

Exemplo: $a = 400, \quad b = 280$

	1	2	3
400	280	120	40
280	240	120	
120	40	0	

Conclusão: $400 \text{ D } 280 = 40$

F.3. Processo da Decomposição em Fatôres Primos.

A decomposição de um número em fatôres primos, que aprendemos no capítulo V, possui várias aplicações, das quais já vimos algumas; faremos agora aplicações às operações de maximização e minimização.

Recordemos que um número é divisor de outro, se - possui os seus fatôres primos, também fatôres primos do outro; e, afetados de expoentes menores ou iguais aos expoentes correspondentes.

Exemplo: $720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$

Qualquer número N' forma:

$$N' = 2^a \times 3^b \times 5^c$$

com $a \leq 4, \quad v \leq 2, \quad c \leq 1$, é divisor de N = 720; por exemplo, com a = 4, b = 1 e c = 0.

$$N' = 2^4 \times 3 \times 5^0 = 16 \times 3 \times 1 = 48$$

e, de fato 48 é divisor de 720, o que fàcilmente pode ser verificado por divisão direta.

PROCESSOS:

a) De maximização:

Da propriedade resulta que se tivermos dois números "a e b" na Forma Geral de Decomposição, um divisor comum de "a e b" é qualquer número que satisfaça, como divisor, a propriedade para ambos os números dados.

Exemplo:

Sejam os números 48 e 180,

Temos:
$$\begin{cases} 48 = 2^4 \times 3 \\ 180 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \end{cases}$$

Os divisores comuns são da forma

$$N = 2^x \times 3^y$$

com. $x \leq 2$ (do fator primo 2 de 180)

$y \leq 1$ (do fator primo 3 de 48)

É evidente, então, que o máximo divisor comum é dado pela forma anterior quando tomamos os maiores expoentes permitidos pelas condições; no caso:

$x = 2$ e $y = 1$

Teremos: $N = 2^2 \times 3^1 = 4 \times 3 = 12.$

ou que: $48 \; D \; 180 = 12$

de onde resulta a regra:

REGRA:

"O máximo divisor comum de dois números, é igual ao produto dos seus fatôres primos comuns, tomados com os menores expoentes que estão nas suas formas gerais de decomposição".

Exemplo: 240 e 360

240	2	360	2
120	2	180	2
60	2	90	2
30	2	45	3
15	3	15	3
5	5	5	5
1		1	

$240 = 2^4 \times 3 \times 5$

$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$

$240 \; D \; 360 = 2^3 x 3 x 5 =$

$= 120$

b) De minimização:

Ainda, da propriedade, resulta que um múltiplo comum de dois númerbs "a e b" é qualquer que satisfaça, como múltiplo, a propriedade para "a" e para "b"; por exemplo:

Sejam os números anteriores: 48 e 180.

Temos:
$$\begin{cases} 48 = 2^4 \times 3 \\ 180 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \end{cases}$$

Os múltiplos comuns são da forma

$$N = 2^a \times 3^b \times 5^c \times 7^d \times 11^e \times \ldots$$

com:
$$\begin{cases} a \geq 4 & \text{(do fator 2 de 48)} \\ b \geq 2 & \text{(do fator 3 de 180)} \\ c \geq 1 & \text{(do fator 5 de 180)} \\ d \geq 0 & \\ e \geq 0, \text{ etc.} & \end{cases}$$

É claro, também aqui, que o mínimo múltiplo comum é dado pela forma anterior, quando tomamos os menores expoentes permitidos pelas condições; no caso:

$a = 4, \; b = 2, \; c = 1, \; d = 0, \; e = 0, \ldots$ etc.

Teremos:

$$N = 2^4 \times 3^2 \times 5 = 720$$

ou que:

$$48 \; M \; 180 = 720$$

Do raciocínio concluímos a regra seguinte:

R E G R A:

"O mínimo múltiplo comum de dois números, é igual_ ao produto dos seus fatôres primos, tomados com os maiores expoentes que estão nas suas formas gerais de decomposição".

Exemplo: $\begin{cases} a = 240 \\ b = 360 \end{cases}$

$$\begin{cases} 240 = 2^4 \times 3 \times 5 \\ 360 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \end{cases}$$

$$240 \text{ M } 360 = 2^4 \times 3^2 \times 5 = 720$$

Dispositivos Práticos:

Os processos estudados de maximização e de minimização podem ser aplicados de uma maneira mais simples, com a utilização de um dispositivo prático:

a) De maximização

Na prática, coloca-se os números dados em colunas, simultâneamente para a pesquisa dos fatôres.

Opera-se por divisões sucessivas de cada número pelos fatôres primos comuns; para isto, pode-se empregar para facilidade os critérios de divisibilidade. Desta forma passa-se ao fator primo seguinte sempre que houver um número não divisível pelo fator primo testado.

Exemplo:

$$\begin{cases} a = 240 \\ b = 360 \end{cases}$$

240 -	360	2	
120 -	180	2	
60 -	90	2	
30 -	45	3	(o segundo número não é divisível por 2)
10 -	15	5	(o primeiro número não é divisível por 3)
2	3	-	(não há mais fator primo comum)
		$2^3 \times 3 \times 5 = 120$	

Conclusão:

$$240 \text{ D } 360 = 120$$

b) De minimização

O procedimento é análogo ao anterior; mas, passa-se ao fator primo seguinte sòmente quando nenhum dos números é divisível pelo fator primo testado; e, quando não é possível a divisão de um dêles, copia-se novamente o número.

Exemplo: $\begin{cases} a = 240 \\ b = 360 \end{cases}$

240 -	360	2	
120 -	180	2	
60 -	90	2	
30 -	45	2	(o 30 ainda é divisível por 2)
15 -	45	3	(copiou-se o 45)
5 -	15	3	(15 ainda é divisível por 3)
5 -	5	5	(copiou-se o 5)
1 -	1		
		$2^4 \times 3^2 \times 5 = 720$	

Conclusão:

$$240 \text{ M } 360 = 729$$

G. Propriedades Gerais:

G.1. Do divisor do máximo divisor comum

"Todo divisor comum de dois números é divisor do máximo divisor comum".

A propriedade é evidente em exemplos numéricos, veja-se o seguinte:

$$\begin{cases} a = 18 \\ b = 12 \end{cases}$$

O conjunto dos divisores comuns C:

$$C = \{1, 2, 3, 6\}$$

possui todos os elementos, divisores do 6, que e o máximo divisor comum de 12 e 18.

A prova da propriedade está baseada no próprio Algoritmo das Divisões Sucessivas:

Assim, vimos que os divisores comuns de "a e b" são divisores comuns e "b e r"; ora, se "r" é o máximo divisor comum, já está provado.

Caso "r" não seja o máximo divisor comum, todo divisor de "b e r" é divisor comum de r e r', onde r' é o segundo resto; se r' é o máximo, está provado; se não é, podemos continuar com o raciocínio. Obrigatòriamente um resto deverá ser o máximo; e, portanto, divisível pelo divisor comum de "a e b".

Nota: Pode-se mostrar a veracidade também, raciocinando com o processo da decomposição em fatôres primos.

G.2. Dos múltiplos do mínimo múltiplo comum.

"Todo múltiplo comum de dois números é múltiplo do mínimo múltiplo comum".

Também aqui, a propriedade é fàcilmente verificável através de exemplo numérico:

Sejam os números 18 e 12; o conjunto dos múltiplos comuns

$$C' = \{36, 72, 108, \ldots\ldots\ldots\}$$

possui todos os elementos múltiplos de 36, que é o mínimo múltiplo comum.

A prova da veracidadde da propriedade baseia-se na expressão da divisão geral como veremos a seguir: -

Seja N um múltiplo, e "m" o mínimo múltiplo comum. Dividindo N por m, teremos um quociente q e um resto r:

$$N = m \times q + r \qquad (r < m)$$

Caso N não seja múltiplo de m o resto r não é nulo.

Como "a e b" são divisores dos seus múltiplos comuns, "N e m" serão também de "N e m x q"; e, como N - m x q = r, pela propriedade da divisibilidade em relação à subtração (Porp. 5 - Cap. IV), podemos afirmar que "a e b" serão divisores de "r"; ou que "r" é múltiplo comum de "a e b", o que é absurdo, pois r < m, e "m" é o menor múltiplo comum.

G.3. Dos números primos entre si:

a) De maximização:

"O máximo divisor comum de dois números primos entre si é a unidade".

De fato, é consequência da própria definição de números primos entre si; pois, êstes são os números que possuem por divisor comum sòmente a unidade.

$$12 \text{ D } 35 = 1$$

pois 12 e 35 são primos entre si.

b) De minimização:

"O mínimo múltiplo comum de números primos entre si é igual ao produto dos números".

De fato, as formas gerais de decomposição em fatôres primos possui os fatôres primos todos diferentes (pela própria definição de números primos entre si); logo, o mínimo múltiplo comum será constituido pelo produto de todos fatôres primos com os respectivos expoentes; e, portanto igual ao seu produto.

Exemplo:

$$12 = 2^2 \times 3$$

$$35 = 5 \times 7$$

portanto:

$$12 \text{ M } 35 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 = 12 \times 35 = 420.$$

G.4. Dos quocientes primos entre si.

a) De maximização:

"Dividindo-se dois números pelo seu máximo divisor comum os quocientes são primos entre si".

De fato:

Seja "a e b" os números dados e "d" o máximo divisor comum.

Temos:

$$\begin{cases} a = d \times q \\ b = d \times q' \end{cases}$$

Caso "q e q' " não fossem primos entre si, admitiriam um divisor comum diferente da unidade; por exemplo "m"; isto é:

$$\begin{cases} q = m \times q'' \\ q' = m \times q''' \end{cases}$$

Substituímos teríamos:

$$\begin{cases} a = (d \times m) \times q'' \\ b = (d \times m) \times q''' \end{cases}$$

isto é, (d x m) seria divisor comum de "a e b", e maior que o próprio máximo divisor comum "d", o que é absurdo.

Exemplo: $12 \text{ D } 54 = 6$

Temos: $\begin{cases} 12 : 6 = 2 \\ 54 : 6 = 9 \end{cases}$

e, de fato, 2 e 9 são primos entre si.

b) De minimização:

"Dividindo-se o mínimo múltiplo comum pelos números dados, os quocientes obtidos são primos entre si".

De fato: Sejam "a e b" os números e "m" o mínimo múltiplo comum.

Temos:

$$\begin{cases} m = a \times q \\ m = b \times q' \end{cases}$$

Caso "q e q' " não sejam primos entre si, admitem um divisor comum "d" diferente da unidade; isto é:

$$\begin{cases} q = q'' \times d \\ q' = q''' \times d \end{cases}$$

portanto:

$$\begin{cases} m = (a \times q'') \times d \\ m = (b \times q''') \times d \end{cases}$$

ou que, "m" é igual ao produto de $a \times q''$ por d, ou de $b \times q'''$ por d;

portanto:

$$a \times q'' = b \times q'''$$

e, seja m' igual a êste produto:

$$m = m' \times d$$

verificamos então, que m' que é múltiplo comum de "a e b" é menor que "m", que é mínimo múltiplo comum, o que é absurdo.

Exemplo:

temos: $12 \ M \ 40 = 120.$

$$\begin{cases} 120 : 12 = 10 \\ 120 : 40 = 3 \end{cases}$$

e, de fato, 10 e 3 são primos entre si.

G.5. **Do produto dos números**

"Multiplicando-se o máximo divisor comum pelo mínimo múltiplo comum de dois números, obtém-se o produto dos dois números".

De fato: Sejam:

$$\begin{cases} a \ D \ b = d \\ a \ M \ b = m \end{cases}$$

Pela propriedade G.4.a. os números

$$(a \mid b) \quad e \quad (b : d)$$

são primos entre si.

Pela propriedade G.3.b. o mínimo múltiplo comum de primos entre si é igual ao produto, portanto:

$$(a:d) \ M \ (b:d) = (a:d) \times (b:d)$$

Mas, multiplicando dois números por um mesmo número o mínimo fica multiplicado por êste número. (As Formas Gerais de Decomposição em Fatôres Primos ficarão acrescidos dos fatôres dêsse número).

logo: $a \ M \ b = [(a:d) \ M \ (b:d)] \times d$

$$a \ M \ b = [(a:d) \times (b:d)] \times d$$

e, pela propriedade associativa:

ou $a \ M \ b = (a:d) \times [(b:d) \times d]$

$$a \ M \ b = (a:d) \times b$$

e, ainda: $a \ M \ b = (a \times b) : d$

e, pela definição de divisão

ou, finalmente:

$$(a \ M \ b) \times d = a \times b$$

$$\boxed{(a\ M\ b) \times (a\ D\ b) = a \times b}$$

Exemplo:

$$\begin{cases} 12\ D\ 18 = 6 \\ 12\ M\ 18 = 36 \end{cases}$$

$$(12\ D\ 18) \times (12\ M\ 18) = 6 \times 36 = 216$$

que é igual ao produto $12 \times 18 = 216$.

H. <u>PROPRIEDADES ESTRUTURAIS DA MAXIMIZAÇÃO E DA MINIMIZAÇÃO.</u>

H.1. <u>Propriedade Comutativa</u>

a) $a\ D\ b = b\ D\ a$

b) $a\ M\ b = b\ M\ a$

Esta propriedade resulta da comutatividade da intersecção de conjuntos.

Assim teremos:

$$A \cap B = B \cap A.$$

onde, A e B são os conjuntos de divisores (ou múltiplos) comuns de "a e b" respectivamente.

Exemplos:

a) $12\ D\ 18 = 6$ e $18\ D\ 12 = 6$

b) $12\ M\ 18 = 36$ e $18\ M\ 12 = 36$

H.2. <u>Propriedade Associativa</u>

a) $(a\ D\ b)\ D\ c = a\ D\ (b\ D\ c)$

b) $(a\ M\ b)\ M\ c = a\ M\ (b\ M\ c)$

Provaremos sòmente a segunda.

Temos por definição de Minimização:

(1) $a\ M\ b \mid [(a\ M\ b)\ M\ c]$

(2) $c \mid [(a\ M\ b)\ M\ c]$

(3) $a \mid a\ M\ b$

(4) $b \mid a\ M\ b.$

Pela propriedade transitiva da divisibilidade em (3) e (1), (4) e (1)

(5) $a \mid [(a\ M\ b)\ M\ c]$

(6) $b \mid [(a\ M\ b)\ M\ c]$

Pela propriedade G.2., todo múltiplo comum de "b e c" é múltiplo do mínimo b M c; portanto, por (2) e (6)

(7) $b\ M\ c \mid [(a\ M\ b)\ M\ c]$

idem, por (5) e (7):

(8) $[aM(bMc)] \mid [(aMb)Mc]$

Na parte seguinte procuraremos provar a (8) no outro sentido, pois então, pela propriedade anti-simétrica (Prop. A.3.3 – Cap. IV) estár provada a associatividade.

De fato:

(1') $b\ M\ c \mid [a\ M\ (bMc)]$

(2') $a \mid [a\ M\ (bMc)]$

(3') $b \mid b\ M\ c$

(4') $c \mid b\ M\ c$

Por (3') e (1'), (4') e (1') temos:

(5')
$$b \mid [a\,M\,(b\,M\,c)]$$
(6')
$$c \mid [a\,M\,(b\,M\,c)]$$

Por (2') e (5'):

(7')
$$a\,M\,b \mid [a\,M\,(b\,M\,c)]$$

Por (6') e (7'), temos:

(8')
$$[(aMb)Mc] \mid [aM(bMc)]$$

Pela (8) e (8') resulta finalmente que

$$(aMb)Mc = aM(bMc).$$

Exemplo (De maximização).

Sejam os números 36, 24 e 18.

$$\begin{cases} 36 \ D \ 24 = 12 \\ 12 \ D \ 18 = 6 \end{cases}$$

portanto:

$$(36 \ D \ 24) \ D \ 18 = 6,$$

Temos:

$$\begin{cases} 24 \ D \ 18 = 6 \\ 36 \ D \ 6 = 6 \end{cases}$$

e, então:

$$36 \ D \ (24 \ D \ 18) = 6.$$

ou que:

$$(36 \ D \ 24) \ D \ 18 = 36 \ D \ (24 \ D \ 18).$$

Nota: Esta propriedade permite trabalharmos sem os sinais de reunião.

H.3. <u>Elemento Neutro</u>.

a) "<u>O zero é o elemento neutro da maximização</u>".

$$a \ D \ 0 = 0 \ D \ a = a.$$

b) "A unidade é o elemento neutro da <u>minimização</u>".

$$a \ M \ 1 = 1 \ M \ a = a$$

São consequências imediatas os fatos de serem:

$$\begin{cases} \text{O zero, múltiplo universal.} \\ \text{O um, divisor universal.} \end{cases}$$

I. <u>NOTAS COMPLEMENTARES</u>.

Mutas vêzes tem-se necessidade de extrair, ou o máximo divisor comum, ou o mínimo múltiplo comum de vários números. O leitor observará que a definição dada é a mesma; e portanto, o processo expontâneo é aplicável bem como os outros processos.

O processo das divisões sucessivas fornece o máximo só de dois números, portanto, deverá ser aplicado sucessivamente; entretanto, o calculista deverá fazer uso bom das propriedades gerais e estruturais para diminuir o número de operações.

Faremos a seguir um exemplo de maximização e um de minimização para três números pelos vários processos.

Sejam os números: 120, 80 e 60.

a) <u>Expontâneo</u>.

Conjuntos de divisores. (Pode ser usada a fatoração em primos).

De 120: $A = \{1,2,3,4,5,6,8,10,12,15,20,24,30,40,60,120\}$

De 80 : $B = \{1,2,4,5,8,10,16,20,40,80\}$

De 60: $C = \{1,2,3,4,5,6,10,12,15,20,30,60\}$

$A \cap B \cap C = \{1, 2, 5, 10, 20\}$

$120 \text{ D } 80 \text{ D } 60 = 20.$

<u>Conjuntos de múltiplos:</u>

De 120: $A' = \{120, 240, 360, 480, \ldots\ldots\}$

De 80: $B' = \{80, 160, 240, 320, 400, 480, \ldots\}$

De 60: $C' = \{60, 120, 180, 240, 300, 360, 420, 480, \ldots\}$

$A' \cap B' \cap C' = \{240, 480, \ldots\}$

$120 \text{ M } 80 \text{ M } 60 = 240$

b) <u>Por Decomposição em fatôres primos.</u>

120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

80	2
40	2
20	2
10	2
5	5
1	

60	2
30	2
15	3
5	5
1	

$120 = 2^3 \times 3 \times 5$

$80 = 2^4 \times 5$

$60 = 2^2 \times 3 \times 5.$

$120 \text{ D } 80 \text{ D } 60 = 2^2 \times 5 = 20$

$120 \text{ M } 80 \text{ M } 60 = 2^4 \times 3 \times 5 = 240$

c) <u>Dispositivo prático:</u>

Maximização:

120 - 80 - 60	2
60 - 40 - 30	2
30 - 20 - 15	5
6 - 4 - 3	$2^2 \times 5 = 20$

Minimização:

120 - 80 - 60	2
60 - 40 - 30	2
30 - 20 - 15	2
15 - 10 - 15	2
15 - 5 - 15	3
5 - 5 - 5	5
1 - 1 - 1	$2^4 \times 3 \times 5 = 240.$

d) <u>Maximização por divisões sucessivas:</u>

120	80^1	40^2
80	80	
40	0	

$120 \text{ D } 80 = 40$

60	40^1	20^2
40	40	
20	0	

$60 \text{ D } 40 = 40 \text{ D } 60 = 20$

Conclusão: $(120 \text{ D } 80) \text{ D } 40 = 20.$

<u>Nota I</u>: Mas como $60 \mid 120$, pedemos eliminar 120 do processo, fazemos só com 60 e 80.

80	60^1	20^3
60	60	
20	0	

Portanto: $120 \text{ D } 80 \text{ D } 60 = 80 \text{ D } 60 = 20.$

<u>Nota II</u>: Para a minimização, como $60 \mid 120$, podemos eliminar o 60 do processo; e, fazemos só com 120 e 80: $120 \text{ M } 80 \text{ M } 60 = 120 \text{ M } 80.$

J. EXERCÍCIOS - SÉRIE XIV

1. Dados os pares de números, determine pelo processo expontâneo o seu máximo divisor comum:
a) 80 e 60; b) 120 e 75; c) 140 e 126; d) 35 e 48

2. Idem, ao exercício 1, o seu mínimo múltiplo comum.

3. Determine, pelo processo de divisões sucessivas, o máximo divisor comum dos pares:
a) 400 e 360; b) 380 e 150; c) 240 e 539.

4. Determine, pelo processo de decomposição em fatôres primos, o máximo divisor comum dos pares de números do exercício, 1, e também de:
e) 90 e 140; f) 48 e 60; g) 72 e 24; h) 36 e 108.

5. Mostre, com os conjuntos de divisores dos números 480 e 90, que o máximo divisor comum de dois números é igual ao máximo divisor comum do menor com o resto da divisão do maior pelo menor. Continue a aplicar o raciocínio com os novos restos.

6. Idem, ao exercício 4, o seu mínimo múltiplo comum.

7. O que você pode afirmar em relação ao m.d.c. e ao m.m.c. dos pares de números seguintes, e por que?
a) 120 e 40   b) 32 e 32   c) 1 e 12
d) 11 e 7   e) 12 e 77   f) 20 e 80

8. Escreva regras especiais para o exercício 7b, 7c, 7d, 7e; análogas a que empregou para o exercício 7a e 7f; que, aliás, foi dada no texto. Aplique-as a exemplos escolhidos por você mesmo.

9. Calcule o m.d.c. e o m.m.c. pelo dispositivo prático dos fatôres primos, para os pares:

a) 54 e 36   b) 70 e 80   c) 36 e 60.

10. O m.d.c. e o m.m.c. de dois números são respectivamente 12 e 72; um dos números é 24. qual é o outro?

11. O m.d.c. de dois números é 36, e o maior 288. Determine o menor.
Sugestão: Empregue a propriedade da maximização dos quocientes primos entre si; pode haver várias soluções.

12. O m.m.c. de dois números é 48, e um dêles é 24. Calcular o outro.
Sugestão: Empregue a propriedade da minimização, dos quocientes primos entre si.

13. Calcular dois números conhecendo sua soma e seu m.d.c.
a) Soma = 60   b) Soma = 108
a D b = 12   a D b = 12.

14. Calcular dois números conhecendo sua diferença e seu m.d.c.
a) Diferença = 40   b) Diferença = 15
a D b = 10   a D b = 15

15. Calcular dois números conhecendo só seu m.d.c. e m.m.c.
a) a D b = 15   b) a D b = 4
a M b = 180   a M b = 24.

16. Na pesquisa do m.d.c. por divisões sucessivas, obteve-se os quocientes: 1,2,2,3,2. Calcular os números sabendo-se o m.d.c.

a) a D b = 15 b) a D b = 20.

17. Aplicando as propriedades, e sem efetuar os cálculos de maximização ou minimização, mostre que:

a) (12 D 36) D 6 = 6

b) 15 D (30 D 45) = 15

c) (60 M 20) D (15 M 5) = 15

18. Idem, determine:

a) (0 D 50) D 10

b) (1 D 20) M 10

c) (1 M 8) M (12 M 4).

d) (11 D 7) M (8 D 2).

19. Verifique, através de exemplos (*) que a maximização é distributiva em relação à minimização:

a) a D (b M c) = (a D b) M (a D c).

b) (a M b) D c = (a D c) M (b D c).

20. Idem, através de exemplos (**), que a minimização é distributiva em relação à maximização:

a) a M (b D c) = (a M b) D (a M c)

b) (a D b) M c = (a M c) D (b M c)

21. Calcule o m.d.c. e o m.m.c. dos números:

a) 48, 60 e 36 b) 60m 150 e 180

c) 120, 240, 80 e 360 d) 45, 105, 135 e 180

Problemas:

1. Deseja-se dividir 4 peças de fazenda de comprimento : 64m, 80m, 102m e 160m, em peças menores, tôdas com o mesmo comprimento e de maior comprimento

(*)-(**) - As demonstrações não são fáceis.

possível. Calcule o número de peças e o comprimento de cada uma.

2. Um sitiante quer dividir dois rôlos de arame farpado de 40m e 50m, em pedaços iguais e de maior tamanho possível. Calcule o comprimento e quantos rolos obterá.

3. Dois andarilhos partiram juntos de uma cidade com o mesmo destino. Um anda 15 horas seguidas e descansa 6 horas; o outro, anda 18 horas seguidas, mas descansa 9 horas. Quando que ambos partirão novamente juntos? Quantas horas descansou cada um?

4. Um letreiro luminoso possui 2 palavras. A primeira acenda 12 segundos, e a outra, cada 15 segundos. Quantos segundos decorrem para que ambas palavras sejam acendidas simultânemante? Quantas vêzes acende cada uma no intervalo?

5. Uma floricultura possui 120 cravos, 180 rosas e 90 olgas. Como poderá formar o maior número de ramalhêtes com o mesmo número de flôres de cada espécie? - Quantos ramalhêtes formará?

6. Uma companhia de aviação mantém aviões que saem do Brasil para 4 países; os quais saem respecitvamente cada 6 dias, cada 8 horas, cada 10 dias e cada 7 dias. Num certo dia partiram todos; depois de quantos dias tornarão a partir juntos e quantas viagens terá feito cada um?

7. Uma escada dá certo, subindo de 6 em 6 degraus e de 4 em 4; qual é o menor número de degraus que a esca

da pode possuir?

8. Numa corrida de bicicletas, o mais rápido dá cada volta em 18 segundos, o segundo dá cada volta em 24 segundos, e o terceiro em 30 segundos. Partindo juntos, e admitindo que mantenham a mesma velocidade, depois de quanto tempo passarão juntos e quantas voltas terá dado cada um?

*

CAPÍTULO VII

NÚMEROS RACIONAIS

A. PRELIMINARES

Os números fracionários são conhecidos desde a antiguidade; e, parece, sua introdução é devida à necessidade de se exprimir a medida de algumas grandezas. Os egípcios tinham já conhecimento das frações, como atesta o famoso Papiro de Rhind, datando de 1500 a 2000 a.C.; o Papiro de Ahmés, como outras documentações egípcias, indicam que êles utilizaram frações de numerador unitário e raramente outro numerador.

Outra causa para o estudo dos novos números, e análoga é a da operação de dividir ser só possível quando o primeiro número é múltiplo do segundo.

A aprendizagem inicial das frações se faz por forma intuitiva, baseando-se principalmente em considerações geométricas da medição, do confronto de uma grandeza em várias grandezas iguais que são tomadas como unidades fracionárias.

Um desenvolvimento teórico baseado em grandezas assume várias dificuldades, a introdução do conceito de grandezas homogêneas, para as quais se deverá definir a relação de igualdade, a operação de adição, gozando da unicidade, comutatividade e associatividade, e as relações de supervalência e prevalência, o conceito de grandeza múltipla e de grandeza sub-múltipla. Para a introdução do conceito de grandeza sub-múltipla se faz neces sário "aceitar" o princípio de divisibilidade indefinida, que consiste em "aceitar" que para qualquer grandeza A e para qualquer número natural n (*) existe uma outra grandeza B, tal que seja:

$$n \cdot B = A$$

Só depois de tal aparato se poderá definir as grandezas do tipo B como <u>sub-múltiplas</u> de A, ou como <u>enésimas</u> (**) parte de A, se adotará a notação simbólica:

$$B = \frac{1}{n} A$$

com as leituras: um meio, um têrço,... denominadas <u>unidades fracionárias</u>.

Quando n = 1, se terá

$$B = \frac{1}{1} A$$

que equivale a 1. B = A, ou B = A, ou B = 1, que leva a tomar o símbolo 1/1 como 1, isto é, unidade inteira, ou inteiro simplesmente.

Para o símbolo geral de fração $\frac{m}{n}$, se definirá

$$\frac{m}{n} A = m \left(\frac{1}{n} A \right)$$

isto é, a fração m/n da grandeza A, é igual à m grandezas iguais à enésima parte de A; e, para resultados operacionais, é necessário a demonstração de que:

(*) - portanto não nulo.
(**) - enésima ou n-ésima.

$$m \left(\frac{1}{n} A \right) = \frac{1}{n} (m A)$$

isto é, m grandezas iguais à **enésima parte de A** é igual à enésima parte de m grandezas **A**.

Pelas dificuldades inerentes a **êste desenvolvimento** teórico, que recorre ao **<u>método sintético</u>**, **julgamos** preferível e muito mais formador desenvolvermos a teoria das frações pelo <u>método analítico</u>, para cujas definições lançaremos mão dos dados intuitivos dos leitores, em particular dos normalistas, futuros professôres primários.

B. <u>NÚMEROS RACIONAIS</u>

B.1. <u>Introdução</u>

Para a equação b.x = a, nem sempre há solução, visto que para a solução é exigido que b seja divisor de a (b | a), como em 3x = 9, e por exemplo em 3x=2, 3 não é divisor de 2.

Nós sabemos, da vida prática, que é necessária a sua resolução; assim, como no 1º caso, admita-se determos 9 doces para repartirmos por 3 meninos.

Indicando com x o número de doces de cada menino, teremos evidentemente a equação:

$$3x = 9$$

cuja resolução se obtém dividindo 9 por 3:

$$x = 9 : 3$$

ou

$$x = 3$$

No segundo caso, teríamos à imagem, 2 doces para repartir por 3 mininos, e a equação seria:

$$3x = 2$$

É evidente que deveríamos dividir 2 por 3, o que não é possível trabalhando só com inteiros; mas na prática, como em outras situações, o problema é resolvido repartindo os 2 doces em partes menores, por exemplo: a) dividindo cada dôce em 3 partes, ficando portanto com 6 partes e dando 2 partes a cada um; ou b) dividindo cada dôce em 2 partes, um grande e uma pequena, a grande o dôbro da menor, e dando a cada menino uma parte grande ou então 2 partes pequenas.

Sabemos então que a equação possui sempre solução, não com um inteiro, mas de qualquer forma, utilizando os dois inteiros: 9 e 3 ou 2 e 3, de onde a sugestão para definirmos um nôvo tipo de número, ao qual denominamos <u>número racional</u>, ampliando o conceito de número.

B.2. <u>DEFINIÇÃO 1</u>

Número racional, ou número fracionário x, é o número que satisfaz a equação $bx = a$, onde "a e b" são inteiros, e $b \neq 0$.

Nós adotaremos as seguintes notações simbólicas, para o número racional, isto é, o seu <u>numeral</u> é:

$$(a,b) \quad \text{ou} \quad a/b \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b}$$

onde, a primeira componente do par é denominada <u>numerador</u>, e a segunda <u>denominador</u>, do número racional. Denominamos também <u>fração ao numeral do número fracionário.</u>

O leitor observa que a referência à equação nos indica somente um ponto de apôio mais concreto; entretanto, na verdade, estamos definindo número fracionário de um par de números inteiros, com o segundo não nulo, de onde a definição equivalente mais abstrata:

<u>Definição 1!</u>

Número racional, ou número fracionário, é um número representado por um par ordenado de números inteiros, com a segunda componente não nula, satisfazendo determinadas condições.

Estas condições nós iremos fornecendo por intermédio de novas definições.

<u>Observação:</u>

É importante que se observe que o número racional, o número fracionário, é definido, portanto, por um <u>par ordenado de inteiros</u>; assim, na equação: um é o produto e o outro é o multiplicador, o que nos leva à notação com ordenação dos inteiros.

Nos exemplos, o número racional que resolve a nossa equação $3x = 9$, não é o inteiro 3, mas constituído do par (9;3) ou o par 9/3; e na segunda equação: $3x=2$, o número racional solução é constituído do par, ou mesmo o par (2;3) ou 2/3.

Como sabemos que a solução da primeira equação é também, quando trabalhamos com números inteiros, igual ao inteiro 3, quociente de 9 e 3, e $4 : 1 = 3$, isto sugere a colocar os inteiros como números racionais; as -

sim, o inteiro 3, nós o colocaríamos como racional identificando-o com o número racional (3;1) ou 3/1.

De uma maneira geral, isto sugere a identificar os inteiros "a" com os números racionais com a primeira componente igual a "a" e a segunda componente igual a "1".

Mas para isto é necessário que adotemos definições para as operações com os números racionais, que sejam consistentes com a identificação dos inteiros com o caso particular.

B.3. IGUALDADE E EQUIVALÊNCIA

B.3.1. Relações

Aprendemos no capítulo I o conceito de produto cartesiano de dois conjuntos; faremos uma rápida revisão, para depois introduzirmos a noção de relação e, de modo especial, as relações de eqüivalências.

Recordemos:

Dados dois conjuntos A e B, chamamos produto cartesiano dos conjuntos, nessa ordem, ao conjunto de todos pares ordenados que possuem a primeira coordenada pertencente ao conjunto A e a segunda coordenada pertencente ao conjunto B.

Indica-se A X B.

Assim, se temos:

$A = \{a,b\}$

$B = \{a', b', c', d'\}$

teremos: $A \times B = \{(a,a'),(a,b'),(a,c'),(a,d'),(b,a'),(b,c'), (b,d')\}$

Entre alguns elementos dos conjuntos sempre existe alguma particularidade que os relacione.

Vejamos alguns exemplos:

a) Tomemos os conjuntos:

$A = \{2, 1, 3\}$

$B = \{5, 7, 4, 10, 8\}$

formando o produto cartesiano, vamos encontrar um conjunto de pares ordenados, onde a segunda coordenada está ligada à primeira por duas operações: multiplicação e adição; de fato, o conjunto de pares:

$\{(2,7), (1,4), (3,10)\}$

que é sub-conjunto do produto cartesiano A X B possui a segunda coordenada igual ao triplo da primeira mais uma unidade.

Com o mesmo produto cartesiano poderemos encontrar outros conjuntos de pares com outras relações, como é o caso do conjunto: (2,5), (3,7) ; onde multiplicando-se o primeiro elemento par por 2 e adicionando uma unidade, obtém-se o segundo elemento do par.

b) Tomemos os conjuntos:

C = { Segismundo, João, Luiz }

D = { Lúcia, Maria, Eurico, Pitico, Filipin }

formando o produto cartesiano C X D poderemos encontrar entre alguns pares várias ligações, de comparação, sociais, preferenciais, dominâncias, etc...

Assim, admite-se que Segismundo seja gordo, ou baixo, ou rico, etc.; é bem possível que o conjunto de pares:

{(Segismundo, Eurico) (Segismundo, Pitico) (Segismundo, Filipim)}

seja o conjunto dos pares para os quais é válida a relação: "é mais gordo que", ou "é mais baixo que", etc.; portanto um sub-conjunto de um produto cartesiano define uma relação.

Em geral estuda-se as relações dos elementos de um conjunto com os próprios elementos do conjunto, isto é, faz-se o produto cartesiano de um conjunto por si mesmo: A X A.

Muitas vêzes o relacionamento se faz verificando-se, se para elementos x e y do conjunto, é válida uma propriedade, um critério, etc..

Assim, se os pares ordenados (x;y) de elementos de um conjunto (*) A satisfazem ou não uma propriedade R, diremos que está definida sôbre o conjunto A uma relação binária R.

Quando a relação R é verificada para um par (x;y), indicamos:

$$x \; R \; y$$

no lugar de $(x;y) \in R$.

Em caso contrário, indicamos:

$$x \; \overline{R} \; y$$

B.3.2. Propriedades das Relações

a) Quando para todo elemento x do conjunto A é verificado x R x, dizemos que a relação R é reflexiva em A.

Exemplos:

A relação de divisibilidade definida sôbre o conjunto de inteiros goza da propriedade reflexiva, pois todo número é divisor dêle mesmo: x | x ; mas a relação "maior que" é irreflexiva.

b) Quando para todo par (x;y) do conjunto A, se tivermos x R y então se terá y R x, dizemos que a relação R é simétrica em A.

Exemplos:

A relação de divisibilidade não é simétrica; a relação "par de" não é simétrica, a relação "disjunto de" é simétrica, a relação de paralelismo entre retas é simétrica, etc...

c) Quando para todos elementos x, y e z do conjunto A, se tivermos x R y e y R z, então se terá x R z, dizemos que a relação R é transitiva em A.

Exemplos:

A relação de desigualdade "maior que" é transitiva, a relação de divisibilidade "é múltiplo de" é também transitiva, mas a relação "tio de" não é transitiva; a relação "disjunto de" pode ser ou não transitiva, conforme o conjunto de conjuntos considerado.

B.3.3. Relação de eqüivalência e classe de equivalência.

Entre as relações, algumas gozam das três propriedades, neste caso diremos que a relação é relação de equivalência (*); portanto, uma relação de equivalência possui as três propriedades abaixo resumidas:

Reflexibilidade

Simetria

Transitividade

O exemplo mais simples e importante é o da relação de igualdade "igual a" de símbolo "=".

É útil observar que a denominação está de acôrdo com a noção intuitiva que temos de equivalência; assim entende-se, que debaixo daquela relação, daquela propriedade, daquele critério, os elementos se eqüivalem; no próprio início da Aritmética nós temos visto conjuntos eqüivalentes, no sentido numérico, portanto eqüivalentes pela relação numérica, isto é, de possuirem o mesmo número de elementos.

A relação de congruência é um exemplo de relação de eqüivalência que já nos foi importante. De fato, o leitor deve estar lembrado que dois números "a e b" são côngruos segundo um determinado número d, quando divididos por êsse número deixam o mesmo resto; e indicávamos a relação de congruência por:

$$a \equiv b \quad (d)$$

para a qual é fácil ver que:

a) $a \equiv a \quad (d)$

b) Se $a \equiv b$ então $b \equiv a \quad (d)$

c) Se $a \equiv b$ e $b \equiv c$ então $a \equiv c \quad (d)$;

(*)- Outro tipo importante de relação é a de ordem, da qual já temos feito uso.

quando, para estabelecermos os princípios de divisibilidade, para as provas das operações, trabalhamos com os próprios números, mas com os seus côngruos, pois são eqüivalentes segundo esta relação.

Quando tomamos um conjunto de elementos e separamos os seus elementos conforme verifiquem ou não uma dada propriedade, portanto, classificando os seus elementos, na verdade, os elementos que pertencem a um mesmo sub-conjunto, estamos considerando eqüivalentes.

De uma maneira geral, se um conjunto é separado em sub-conjuntos por meio de uma relação de eqüivalência, então cada sub-conjunto é denominado Classe de Eqüivalência.

Consideremos, para exemplo, um conjunto de homens e separemos os seus elementos em sub-conjuntos, por meio da relação "possui a mesma profissão que"; teremos por exemplo sub-conjuntos de engenheiros, de médicos, de professôres, etc... Esta relação é uma relação de eqüivalência, o que é fácil verificar pelas três propriedades; e cada sub-conjunto é denominado classe de eqüivalência, isto é, os elementos de uma mesma classe de eqüivalência se "eqüivalem" sob êste tipo de relação.

B.4. EQÜIVALÊNCIA DE FRAÇÕES

B.4.1. Preliminares

Intuitivamente, chegamos a verificar que a fração 9/12 eqüivale a 6/8; por exemplo, tomando um inteiro e dividindo-o em 12 partes e tomando 9, e comparando com o inteiro dividido em 8 partes e tomando 6 delas. Ou mesmo, raciocinando que a equação: $12x = 9$, possui a mesma solução que a equação : $8x = 6$, pois "podemos" dividir ambos os membros da primeira igualdade por 3 e depois multiplicar por 2 obtendo a segunda igualdade.

Sabemos portanto que as frações 9/12 e 6/8 não são iguais mas se eqüivalem; representam o mesmo número racional, o mesmo número fracionário; são numerais do mesmo número, são representantes do mesmo número.

Estas noções nos levam a tomar a seguinte definição de frações eqüivalentes:

B.4.2. DEFINIÇÃO 2:

Definimos para as frações a relação " ~ " por:(*)

$$(a,b) \sim (c,d) \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$$

se e somente se: $a \times d = b \times c$, com $b \neq 0$, $d \neq 0$.

Exemplo:

$$\frac{9}{12} \sim \frac{6}{8} \quad \text{pois } 9 \times 8 = 6 \times 12$$

B.4.3. TEOREMA 1

A relação " ~ " é uma relação de eqüivalência, como provaremos a seguir:

a) Reflexibilidade:

Como $a \times b = a \times b$, então $\frac{a}{b} \sim \frac{a}{b}$

(*)- Usa-se também o símbolo " ≡ ", ou E , ou ∠7 .

b) Simetria

Se $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$ temos pela definição da relação "~" que: $a \times d = b \times c$; pela simetria da igualdade de inteiros, podemos escrever: $b \times c = a \times d$; e, novamente pela definição da relação, podemos escrever:

$$\frac{c}{d} \sim \frac{a}{b},$$

que prova a simetria.

c) Transitividade:

$$\text{Se } \frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \quad \text{então } a \times d = b \times c$$

$$\text{e se } \frac{c}{d} \sim \frac{e}{f} \quad \text{então } c \times f = d \times e$$

Multiplicando a primeira igualdade por f obtemos, usando a associatividade e a comutatividade:

$$a \times f \times d = b \times c \times f$$

e, considerando a segunda igualdade, podemos escrever:

$$a \times f \times d = b \times d \times e$$

ou

$$a \times f \times d = b \times e \times d$$

e, como $d \neq 0$, pela lei do cancelamento da multiplicação, podemos escrever:

$$a \times f = e \times b$$

de onde, por definição de " ~ ":

$$\frac{a}{b} \sim \frac{e}{f}.$$

Com êste teorema passamos a ler a expressão

$$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$$

como: a fração a/b é eqüivalente à fração c/d.

B.4.4. CLASSE DE EQÜIVALÊNCIA

Separando o conjunto de frações em sub-conjuntos, sendo que em cada sub-conjunto colocamos as frações eqüivalentes a uma dada fração sob a relação de eqüivalência " ~ ", formamos, conforme vimos anteriormente, classes de eqüivalência.

Em outras palavras, formamos conjuntos de frações eqüivalentes; assim, a classe de eqüivalência, correspondendo à fração 3/4, por exemplo, é dada por:

$$\left\{ \frac{3}{4} , \frac{6}{8} , \frac{9}{12} , \ldots\ldots\ldots\ldots \right\}$$

que indicamos com $(3/4)$ ou $\boxed{\frac{3}{4}}$, isto é:

$$(3/4) = \left\{ \frac{3}{4} , \frac{6}{8} , \frac{9}{12} , \ldots\ldots\ldots\ldots \right\}$$

É importante ter em mente que qualquer fração de uma classe de eqüivalência representa o mesmo número racional ou número fracionário; dizemos que cada fração é um representante da classe de eqüivalência. Utiliza-se, em geral, as frações eqüivalentes como iguais, isto é, satisfazendo a relação de igualdade " = ", por isso se escreve:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ no lugar de $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$;

entretanto, tal substituição de uma relação por outra, em cálculos, não afeta, visto que, qualquer representante que se utilize, o número fracionário é o mesmo, o que veremos quando tratarmos das operações. O leitor observa que a rigor frações iguais possuem os seus elementos iguais e na mesma ordem, isto é, a fração $\frac{2}{3}$ é igual à fração $\frac{2}{3}$. Vários exemplos banais elucidarão o leitor, mesmo intuitivamente; sugerimos o seguinte: pense uma barra metálica dividida em 3 partes das quais tomamos 2; e depois, a barra dividida em 6 partes das quais tomamos 4; serão iguais as grandezas obtidas? - Pense agora que não se divida realmente a barra, mas sim fazendo pequenas marcas, e depois tomando um comprimento de barra que contenha duas partes ou 6 partes; serão agora iguais?

B.4.5. TEOREMA 2

Multiplicando-se o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número inteiro, não nulo, obtém-se uma fração eqüivalente.

Seja a fração: $\frac{a}{b}$.

Multiplicando ambos os têrmos pelo inteiro k, não nulo, obtemos a fração:

$$\frac{k \times a}{k \times b}$$

e, como

$$a \times (k \times b) = (k \times a) \times b$$

temos, por definição da relação de eqüivalência definida, que:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{k \times a}{k \times b}}$$

Nota: Êste simples teorema permite de maneira fácil passar de uma fração a uma fração eqüivalente, isto é, permite transformá-la, trocando o representante da classe de eqüivalência , ou multiplicando ou dividindo por um inteiro.

Exemplos:

a) $\frac{2}{3} = \frac{5 \times 2}{5 \times 3}$ isto é: $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$

b) $\frac{12}{28} = \frac{12 : 4}{28 : 4}$ isto é: $\frac{12}{28} = \frac{3}{7}$

C. OPERAÇÕES COM OS NÚMEROS FRACIONÁRIOS

C.1. ADIÇÃO

As considerações intuitivas sôbre números fracionários com base nas grandezas fornecem o processo para se adicionar.

Assim, tomando uma grandeza que seja $\frac{3}{7}$ de outra, e uma segunda grandeza $\frac{2}{7}$ da mesma (inteiro), reunindo (somando) as grandezas, verificamos fàcilmente que se obtém uma grandeza-soma que é igual a $\frac{5}{7}$ da grandeza fundamental.

De onde se induz a regra para se adicionar frações com o mesmo denominador, adicionando os numeradores. Idem, para o caso de frações de denominadores denominados desiguais, reduzindo-os ao mesmo denominador.

Raciocinando com a equação $bx = a$ $(b \neq 0)$, também

se induz a regra; assim, seja x o número fracionário solução da equação $bx = a$, e y o número fracionário solução da equação $by = a'$.

Das igualdades anteriores, encontramos ainda a seguinte igualdade:

$$bx + by = a + a'$$

e, "considerando" válida para os números fracionários a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, em analogia com os inteiros, podemos escrever:

$$b\,(x + y) = a + a'$$

Esta equação nos indica, também, que o número fracionário soma dos números fracionários x e y, deve ser dado pelo par $(a + a', b)$, ou com a notação fracionária:

$$\frac{a + a'}{b}$$

Idem, as equações:

$$bx = a$$
$$dy = c$$

por "multiplicação" por inteiros nos fornecem as igualdades:

$$d\,b\,x = a\,d$$
$$b\,d\,y = b\,c$$

e, portanto, a igualdade:

$$d\,b\,x + b\,d\,y = a\,d + b\,c$$

e, "considerando" válida a distributividade:

$$d\,b\,(x + y) = a\,d + b\,c$$

que sugere a soma dos números fracionários x e y por

$$(ad + bc\ ,\ db), \qquad \text{ou} \qquad \frac{ad + bc}{db}$$

Êstes resultados nos levam a tomar para adição de números fracionários a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 3:

Dados dois números fracionários representados pelos pares (a,b) e (c,d), ou $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, definimos soma dos dois números fracionários a uma terceiro número fracionário dado pelo par

$$(axd + bxc\ ,\ dxb), \qquad \text{ou} \qquad \frac{axd + bxc}{bxd}$$

Escreveremos:

$$\boxed{(a,b) + (c,d) = (a \times d + d \times c,\ b \times d)}$$

ou:

$$\boxed{\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{axd + bxc}{bxd}}$$

Exemplo:

$$(2,3) + (1,4) = (2x4 + 3x1,\ 3x4) = (11,\ 12)$$

ou:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{2x4 + 3x1}{3 \times 4} = \frac{11}{12}$$

Esta definição, no entanto, pode dar a impressão que ela é de todo livre, arbitrária; por exemplo, que poderíamos ter definido do seguinte modo:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a + c}{b + d}$$

Façamos então, a respeito, algumas considerações:

Ela é livre, mas não pode ser contrária à definição e conceitos anteriores, ela deve ser consistente com a definição de frações eqüivalentes.

Dizemos que a operação definida goza de estabilidade com a relação de eqüivalência; o leitor observa que definimos a adição utilizando particulares representantes dos números fracionários, o que nos indica a necessidade de verificarmos se os resultados obtidos se eqüivalem, operando com outros representantes.

Teorema 3: Estabilidade da operação de adição.

Sejam outros represxntantes:

$$\frac{a'}{b'} \qquad \text{e} \qquad \frac{c'}{d'}$$

Sendo também representantes das mesmas classes de eqüivalência, devemos ter as relações de eqüivalência:-

$$\frac{a'}{b'} \sim \frac{a}{b} \qquad (I)$$

e:

$$\frac{c'}{d'} \sim \frac{c}{d} \qquad (II)$$

Aplicando a definição 3, teremos:

$$\frac{a'}{b'} + \frac{c'}{d'} = \frac{a'x\ d + b'\ x\ c'}{b'\ x\ d'}$$

Êste resultado precisa ser eqüivalente ao resultado anterior, isto é, é necessário que:

$$\frac{a' \times d' + b' \times c'}{b' \times d'} = \frac{a \times d + b \times c}{b \times d}$$

Mas, pela Definição 2, é necessário, para que seja verdadeira esta solução de eqüivalência, que:

$$(b \times d) \times (a' \times d' + b' \times c') = (b' \times d') \times (a \times d + b \times c)$$

e, pela associatividade e comutatividade:

$$(a' \times b) \times (d \times d') + (c' \times d) \times (b \times b') =$$

$$= (a \times b') \times (d \times d') + (c \times d') \times (b \times b')$$

e, como pela eqüivalência I:

$$a' \times b = a \times b'$$

e, pela II:

$$c' \times d = c \times d'$$

a igualdade de fato se verifica.

Nota: Com esta demonstração fica provada a estabilidade da operação de adição definida, com a relação de eqüivalência; em outras palavras, provou-se que a operação de adição está <u>bem-definida</u>. O leitor verifica ainda que êle pode operar trabalhando com o par que lhe convier:

$$\boxed{\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a'}{b'} + \frac{c'}{d'}}$$

<u>Conseqüência</u>: <u>Redução ao mesmo denominador</u>.

O teorema de estabilidade nos leva a um processo de cálculo uniforme, transformando frações de denominadores desiguais, em frações de denominadores iguais.

Seja:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$$

Tomamos

$$\frac{a'}{m} = \frac{a}{b}$$

e:

$$\frac{c'}{m} = \frac{c}{d}$$

onde, m é um múltiplo comum de a e b, isto é:

$$m = k \times b$$

$$m = k' \times d$$

Pelo teorema 3, temos:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a'}{m} + \frac{c'}{m}$$

e, pela Definição 3:

$$\frac{a'}{m} + \frac{c'}{m} = \frac{a' \times m + c' \times m}{m \times m}$$

mas:

$$\frac{a' \times m + c' \times m}{m \times m} = \frac{(a' + c') \times m}{m \times m} = \frac{a' + c'}{m}$$

logo:

$$\boxed{\frac{a'}{m} + \frac{c'}{m} = \frac{a' + c'}{m}}$$

resultado que nos fornece a regra prática usual: Para se adicionar números fracionários, dados por frações com o mesmo denominador, adiciona-se os numeradores e conserva-se o denominador.

Exemplos:

1. $\frac{3}{8} + \frac{2}{8} \sim \frac{3 + 2}{8}$ ou:

   $\frac{3}{8} + \frac{2}{8} \sim \frac{5}{8}$

2. $\frac{1}{6} + \frac{3}{4} \sim \frac{2}{12} + \frac{9}{12} \sim \frac{11}{12}$

3. $\frac{2}{3} + \frac{1}{9} \sim \frac{6}{9} + \frac{1}{9} \sim \frac{7}{9}$

4. $\frac{1}{8} + \frac{1}{6} \sim \frac{6}{48} + \frac{8}{48} \sim \frac{14}{48} \sim \frac{7}{24}$

5. $\frac{1}{8} + \frac{1}{6} \sim \frac{3}{24} + \frac{4}{24} \sim \frac{7}{24}$

Nota: O leitor verifica que nos exercícios 2., 3., 5., e 1. usamos o mínimo múltiplo comum.

C.2. **MULTIPLICAÇÃO**

As considerações intuitivas, também aqui, nos fornecem à sugestão para definirmos a operação de multiplicação.

DEFINIÇÃO 4

Dados 2 números fracionários representados pelos pares (a,b) e (c,d), ou a/b e c/d , definimos produto dos dois números fracionários a um terceiro fracionário dado pelo par

(a x c, b x d), ou a x c / b x d.

Escrevemos:

$$\boxed{(a,b) \times (c,d) = (a \times c,\ b \times d)}$$

ou:

$$\boxed{\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}}$$

Exemplo:

$$\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{3 \times 2}{4 \times 5} = \frac{6}{20}$$

Teorema 4: Estabilidade da multiplicação

Sejam outros representantes: a'/b' e c'/d'.
Sendo também representantes, temos:

$$\frac{a'}{b'} \sim \frac{a}{b} \qquad (I)$$

e:

$$\frac{c'}{d'} \sim \frac{c}{d} \qquad (II)$$

Aplicando a definição 4, teremos:

$$\frac{a'}{b'} \times \frac{c'}{d'} = \frac{a' \times c'}{b' \times d'}$$

Deveremos provar que:

$$\frac{a' \times c'}{b' \times d'} \sim \frac{a \times c}{b \times d}$$

mas, pela definição 2 é necessário, para que está equivalência se verifique, que:

$$(a' \times c') \times (b \times d) = (a \times c) \times (b' \times d')$$

Aplicando a associatividade e a comutatividade da multiplicação de inteiros:

$$(a' \times b) \times (c' \times d) = (a \times b') \times (c \times d')$$

o que de fato se verifica, pois pela relação I:

$$a' \times b = a \times b'$$

e, pela II:

$$c' \times d = c \times d'$$

o que prova que a operação de multiplicação também está bem-definida:

$$\boxed{\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a'}{b'} \times \frac{c'}{d'}}$$

G.3. PROPRIEDADES

G.3.1. DA ADIÇÃO

A adição de números fracionários goza das mesmas propriedades da adição de inteiros:

a. Comutatividade:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$$

b. Associatividade:

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right)$$

c. Existência do neutro:

A adição de número fracionário goza da existência do elemento neutro.

Como:

$$\frac{a}{b} + \frac{0}{1} = \frac{0}{1} + \frac{a}{b} = \frac{0 + a}{1 \times b} = \frac{a}{b} =$$

$$= \frac{0}{b} + \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$$

ou:

$$\frac{a}{b} + \frac{0}{b} = \frac{0}{b} + \frac{a}{b} = \frac{0 + a}{b} = \frac{a}{b}$$

ou:

$$\frac{a}{b} + \frac{0}{1} = \frac{0}{1} + \frac{a}{b} = \frac{0 \times b + a \times 1}{b \times 1} =$$

$$= \frac{0 + a}{b} = \frac{a}{b}$$

concluímos que o número fracionário que possui como um dos representantes a fração 0/1, é o elemento neutro, que é denominado, por analogia, número fracionário zero ou nulo. O leitor observa que o elemento neutro na adição possui os representantes com numerador nulo.

C.3.2. DA MULTIPLICAÇÃO

a) Comutatividade:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$$

b) Associatividade:

$$\left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) \times \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} \times \frac{e}{f}\right)$$

c) Existência do neutro:

A multiplicação de números fracionários goza da existência do elemento neutro.

De fato:

$$\frac{a}{b} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \times \frac{a}{b} = \frac{a \times 1}{b \times 1} = \frac{a}{b}$$

o que nos mostra que o número fracionário que possui como um dos representantes a fração 1/1, é o elemento neutro.

O leitor observa que o elemento neutro na multiplicação possui os representantes com numerador e denominador iguais.

d) Existência do inverso:

Chama-se elemento inverso de outro em relação a uma operação, o elemento que, operando com êle, obtenha-se para resultado o elemento neutro da operação.

Mostraremos que os números fracionários não nulos, possuem inversos em relação à multiplicação (*):

Seja um número fracionário dado pela fração $\frac{a}{b}$; sendo não nulo é $a \neq 0$, portanto existe um número fracionário dado pela fração $\frac{b}{a}$.

Façamos a multiplicação:

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{b}{a} \times \frac{a}{b} = \frac{a \times b}{b \times a}$$

mas, como $a \times b = b \times a$, temos:

$$\frac{a \times b}{b \times a} = \frac{1}{1}$$

(*) Em relação à adição só com os números negativos.

o que mostra que o produto dos números fracionários $\frac{a}{b}$ e $\frac{b}{a}$ é o elemento neutro, de onde $\frac{b}{a}$ ser o inverso - (ou recíproco) de $\frac{a}{b}$; bem como, $\frac{a}{b}$ é o inverso de $\frac{b}{a}$; dizemos que a fração é inversa.

Exemplo:

O inverso de $\frac{3}{5}$ é $\frac{5}{3}$.

C.3.3. PROPRIEDADE DISTRIBUTIVA DA MULTIPLICAÇÃO EM RELAÇÃO À ADIÇÃO.

De fato:

$$\frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \times \left(\frac{c \times f}{d \times f} + \frac{e x d}{f x d}\right)$$

$$= \frac{a}{b} \times \left(\frac{c \times f + e \times d}{d \times f}\right) =$$

$$= \frac{a \times (c \times f + e \times d)}{b \times d \times f}$$

$$= \frac{a \times c \times f + a \times e \times d}{b \times d \times f}$$

e, $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \times \frac{e}{f} = \frac{a \times c}{b \times d} + \frac{a \times e}{b \times f} =$

$$\frac{a \times c \times f}{b \times d \times f} + \frac{a \times e \times d}{b \times f \times d} = \frac{a \times c \times f + a \times e \times f}{b \times d \times f}$$

isto é:

$$\boxed{\frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \times \frac{e}{f}}$$

À direita é distributiva, pois podemos usar a comutatividade da multiplicação.

C.4. SUBTRAÇÃO

Definição 5:

Dados dois números fracionários pelos pares (a,b) e (c,d), ou a/b e c/d, definimos diferença dos dois números fracionários, nessa ordem, a um terceiro fracionário dado pelo par

$$(a \times d - b \times c,\ b \times d), \quad \text{ou} \quad \frac{a \times d - b \times c}{b \times d}$$

Escrevemos:

$$\boxed{\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \times d - b \times c}{b \times d}}$$

Condição de possibilidade:

Da própria definição, resulta que é necessário que:

$$\boxed{a \times d \geqslant b \times c}$$

Exemplos:

$$\frac{4}{5} - \frac{2}{3}$$

Condição de possibilidade: $4 \times 3 = 12$

$5 \times 2 = 10$

portanto é possível a subtração, pois $4 \times 3 \geqslant 5 \times 2$.

Teorema 5: Estabilidade da subtração

Sejam outros representantes: $\frac{a'}{b'}$ e $\frac{c'}{d'}$.

Sendo representantes das mesmas classes de eqüivalência, devemos ter:

$$\frac{a'}{b'} \sim \frac{a}{b} \qquad (I)$$

$$\frac{c'}{d'} \sim \frac{c}{d} \qquad (II)$$

Aplicando a Definição 5:

$$\frac{a'}{b'} - \frac{c'}{d'} = \frac{a' \times d' - b' \times c'}{b' \times d'}$$

Para que a operação seja estável com a relação de eqüivalência, é necessário que:

$$\frac{a' \times d' - b' \times c'}{b' \times d'} \sim \frac{a \times d - b \times c}{b \times d}$$

Mas, pela Definição 2, devemos ter:

$$(b \times d) \times (a' \times d' - b' \times c') =$$

$$= (b' \times d') \times (a \times d - b \times c)$$

Aplicando a distributividade, depois associatividade e comutatividade, encontramos:

$$(b \times a') \times (d \times d') - (b \times b') \times (d \times c') =$$

$$= (b' \times a) \times (d \times d') - (b \times b') \times (d' \times c)$$

e que de fato se verifica, pois

Pela I:

$$a' \times b = a \times b'$$

e, pela II:

$$c' \times d = c \times d'$$

Ficando desta forma provado que a subtração tam bém é bem-definida:

$$\boxed{\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a'}{b'} - \frac{c'}{d'}}$$

Consequência I: Redução ao mesmo denominador

Pelo teorema 5, dados dois números fracionários, por frações quaisquer, podemos operar trabalhando com frações que nos convier. Assim, sejam as frações

$$\frac{a}{b} \quad e \quad \frac{c}{d} \;;$$

utilizando frações eqüivalentes com o mesmo denominador comum, teremos:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a'}{m} - \frac{c'}{m}$$

e, pela Definição 5:

$$\frac{a'}{m} - \frac{c'}{m} = \frac{a' \times m - c' \times m}{m \times m} =$$

$$= \frac{(a' - c') \times m}{m \times m} = \frac{a' - c'}{m}$$

de onde a regra prática: transforma-se as frações em eqüivalentes com denominador comum, depois subtrae-se os numeradores e conserva-se o denominador (em idênticas condições com a adição).

Exemplo:

$$\frac{5}{12} - \frac{4}{15}$$

Possibilidade: (*)

$$\left.\begin{array}{l} 5 \times 15 = 75 \\ 4 \times 12 = 48 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{é possível}$$

Cálculo (com mínimo múltiplo cumum):

$$\frac{5}{12} - \frac{4}{15} = \frac{25}{60} - \frac{16}{20} = \frac{9}{60} = \frac{3}{20}$$

ou:

$$\frac{5}{12} - \frac{4}{15} = \frac{3}{20}$$

Consequência II: Subtração [illegible] operação inversa

Outra importante consequência da definição 5 é que ela continua a considerar a subtração como operação inversa da adição.

De fato:

Se

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \times d - b \times c}{b \times d}$$

então:

$$\frac{a \times d - b \times c}{b \times d} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d - b \times c}{b \times d} + \frac{c \times d}{d \times b}$$

$$= \frac{a \times d - b \times c + c \times b}{b \times d} = \frac{a \times d}{b \times d} = \frac{a}{b}$$

isto é, pela transitividade:

$$\frac{a \times d - b \times c}{b \times d} + \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$$

(*) - Na prática pode-se verificar a possibilidade após a transformação.

ou que, a soma da diferença de dois números fracionários com o diminuidor é também igual ao diminuendo:

$$\boxed{\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right) + \frac{c}{d} \sim \frac{a}{b}}$$

Exemplo:

$$\frac{3}{8} - \frac{1}{4} \sim \frac{3}{8} - \frac{2}{8} = \frac{1}{8}$$

o que está certo, pois:

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{4} \sim \frac{1}{8} + \frac{2}{8}$$

ou: $$\frac{1}{8} + \frac{1}{4} \sim \frac{3}{8}$$

C.5. DIVISÃO

DEFINIÇÃO 6:

Dados dois números fracionários, pelos pares (a,b) e (c,d), ou a/b e c/d, o segundo não nulo, definimos quociente dos dois números fracionários, nessa ordem, a um terceiro número fracionário dado pelo par

$$(a \times d,\ b \times c), \quad \text{ou} \quad \frac{a \times d}{b \times c}$$

Escrevemos:

$$\boxed{(a,b) : (c,d) = (a \times d,\ b \times c)}$$

ou:

$$\boxed{\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times c}}$$

Exemplo:

$$\frac{3}{5} : \frac{1}{2} = \frac{3 \times 2}{5 \times 1} = \frac{6}{5}$$

Teorema 6: Estabilidade da divisão

Sejam representantes dos números fracionários outras frações:

$$\frac{a'}{b'} \quad e \quad \frac{c'}{d'}$$

Teremos as eqüivalências:

$$\frac{a'}{b'} \sim \frac{a}{b} \qquad (I)$$

$$\frac{c'}{d'} \sim \frac{c}{d} \qquad (II)$$

Sendo o segundo número fracionário não nulo, então o numerador $c \neq 0$, e, como $c' \times d = d' \times c$, obrigatòriamente, $c' \neq 0$; o que de fato deveria acontecer, pois $\frac{c'}{d'}$ também é representante do mesmo número.

Aplicando a Definição 6:

$$\frac{a'}{b'} : \frac{c'}{d'} = \frac{a' \times d'}{b' \times c'}$$

Para que a divisão definida seja estável com a relação de eqüivalência, é necessário que:

$$\frac{a' \times d'}{b' \times c'} \sim \frac{a \times d}{b \times c}$$

Mas, pela Definição 2, para que haja esta equivalência, é suficiente que:

$$(a' \times d') \times (b \times c) = (a \times d) \times (b' \times c')$$

ou, aplicando a associatividade e a comutatividade da multiplicação de inteiros:

$$(a' \times b) \times (d' \times c) = (a \times b') \times (d \times c')$$

igualdade que de fato se verifica, levando em conta as eqüivalências I e II.

Logo: $\boxed{\frac{a}{b} : \frac{c}{d} \sim \frac{a'}{b'} : \frac{c'}{d'}}$

Conseqüência I: Redução ao mesmo denominador:

Tomemos dos números fracionários, dados pelas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, outros representantes, mas com denominadores iguais:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} \sim \frac{a'}{m} : \frac{c'}{m}$$

Pela definição 6:

$$\frac{a'}{m} : \frac{c'}{m} = \frac{a' \times m}{m \times c'}$$

Mas, pela Definição 2:

$$\frac{a' \times m}{m \times c'} \sim \frac{a'}{c'}$$

ou que:

$$\boxed{\frac{a'}{m} : \frac{c'}{m} \sim \frac{a'}{c'}}$$

que nos fornece uma regra(*) para operar com frações de denominadores desiguais:

Transforma-se as frações em frações eqüivalentes com denominadores iguais, e toma-se para quociente a fração constituída dos numeradores.

Exemplo:

a) $\frac{3}{5} : \frac{1}{2} \sim \frac{6}{10} : \frac{5}{10} \sim \frac{6}{5}$

b) $\frac{6}{8} : \frac{3}{8} \sim \frac{6}{3} \sim \frac{2}{1}$

(*) Ver na 2a parte do livro, sugestão metodológica para aplicação desta regra.

Conseqüência II: Divisão como operação inversa.

A Definição 6, além de retirar a restrição existente para divisão de números inteiros, que exigia para sua possibilidade que o dividendo fosse multiplo do divisor, generalizando a operação tornando-a sempre possível, ainda conserva o conceito para a Divisão como operação inversa da multiplicação

De fato:

Se $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times c}$

então:

$$\frac{a \times d}{b \times c} \times \frac{c}{d} = \text{[illegible]}$$

ou que, o produto do quociente de dois numerários [illegible] nários pelo divisor é também igual ao dividendo.

D. EQÜIVALÊNCIA E IGUALDADE

Temos, anteriormente (em B.4.), chamado a atenção dos leitores que frações eqüivalentes em geral não são iguais, pelo fato de representarem o mesmo número; pelo fato dos resultados serem iguais, operando com uma ou com outra, quer seja adição, subtração, multiplicação ou divisão; usamos, como é usado, escrevendo no lugar da notação de eqüivalência " ~ " a notação de igualdade " = ":

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{por} \quad \frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}}$$

Em conseqüência, também se lê: "fração a/b igual à fração c/d" por "fração a/b eqüivalente à fração c/d".

Tais substituições não apresentam perigo, pelas considerações feitas; mas, principalmente pelo fato da igualdade ser a eqüivalênciamais evidente, mais comum; e, também por simplificar as indicações, identificando-as na prática.

E. ISOMORFISMO

Consideremos no conjunto dos números fracionários o sub-conjunto constituído das classes de eqüivalência $[a/1]$; isto é, tomemos para estudo, em particular, o conjunto A dos números fracionários que possuem por representantes frações com denominador igual à unidade.

Exemplos:

$$[1/1] = \left\{\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4} \ldots\ldots\ldots\ldots\right\}$$

$$[2/1] = \left\{\frac{2}{1}, \frac{4}{2}, \frac{6}{3}, \frac{8}{4} \ldots\ldots\ldots\ldots\right\}$$

$$[3/1] = \left\{\frac{3}{1}, \frac{6}{2}, \frac{9}{3}, \frac{12}{4} \ldots\ldots\ldots\ldots\right\}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$$

e, também: $[0/1] = \left\{\frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \frac{0}{3}, \frac{0}{4} \ldots\ldots\ldots\ldots\right\}$

Logo:

$$A = \left\{[1/1], [2/1], [3/1], \ldots\ldots\ldots\right\}$$

Façamos operações de adição e multiplicação (*) com elementos quaisquer dêsse conjunto A:

1. $\frac{a}{1} + \frac{b}{1} = \frac{a+b}{1}$

(*) - Subtração e Divisão não são necessárias pois são operações inversas.

2. $\frac{a}{1} \times \frac{b}{1} = \frac{a \times b}{1 \times 1} = \frac{a \times b}{1}$

isto é, elas são efetuadas como se operássemos só com numeradores, portanto, com números inteiros, então os números fracionários dêsse particular conjunto A se comportam como se fossem números inteiros.

Sabemos também, que as propriedades operacionais dos números fracionários são as mesmas dos números inteiros.

Intuitivamente, toma-se os números fracionários dêsse conjunto como inteiros; assim, por exemplo, para o número fracionário dado pela fração $\frac{6}{2}$, imagina-se dividir grandezas inteiras iguais em duas partes iguais cada uma, e toma-se 6 dessas partes a 3 grandezas inteiras, identifica-se $\frac{6}{2}$ com o número 3.

Dadas frações eqüivalentes do tipo $\frac{a \times x}{x}$, para qualquer a, sabemos que forçosamente segue a igualdade dos números inteiros "a", isto é:

$$\frac{a \times x}{x} = \frac{a' \times x}{x} \Longrightarrow a = a'$$

Destas considerações verificamos que podemos por em correspondência (*) que conserva as operações, os números fracionários do conjunto A com o conjunto dos números inteiros:

$$\left.\begin{array}{l} \left[\frac{a}{1}\right] \longleftrightarrow a \\ \left[\frac{b}{1}\right] \longleftrightarrow b \end{array}\right. \Longrightarrow \left[\frac{a}{1} + \frac{b}{1}\right] \longleftrightarrow a + b$$

(*) O leitor que tem conhecimentos de Aplicações, verifica que existe uma Aplicação Bijetora do conjunto A no conjunto dos inteiros que conserva as operações elementares.

$$\left(\frac{a}{1}\right) \longleftrightarrow a$$

$$\left(\frac{b}{1}\right) \longleftrightarrow b \qquad \Longrightarrow \left|\frac{a}{1} \times \frac{b}{1}\right| \longleftrightarrow a \times b$$

Observemos que:

1. A correspondência é de tal forma que a cada número fracionário corresponde um só número inteiro.

2. A correspondência é também no outro sentido, a um número inteiro correspondente um só número fracionário, do conjunto A.

3. Todo número inteiro é correspondente de um número fracionário.

Em vista dessa notável correspondência, podemos dizer que os dois conjuntos de números, de um ponto de vista abstrato, possuem a mesma estrutura, a estruturação aritmética é a mesma; dizemos ainda que existe um Isomorfismo, ou que os dois conjuntos munidos das operações elementares são isomorfos.

Aceito êste isomorfismo entre o conjunto dos números fracionários, que um dos representantes possui denominador igual à unidade, e o conjunto dos números inteiros, é justificável convencionarmos que:

$$\boxed{\left(\frac{a}{1}\right) = a}$$

e, escrevemos também:

$$\frac{a}{1} = a \qquad \text{ou} \qquad \frac{a \times x}{a} = a$$

Exemplos:

$$\frac{3}{1} = 3 \qquad \frac{0}{1} = 0$$

$$\frac{4}{1} = 4 \qquad \frac{0}{7} = 0$$

$$\frac{6}{2} = 3 \qquad \frac{12}{3} = 4.$$

Desta identificação resulta que o conjunto dos inteiros passa a ser um sub-conjunto do conjunto dos números fracionários, isto é, uma parte dos números fracionários são números inteiros. Surge também uma nova denominação: se as frações do particular conjunto são igualadas a números inteiros, no aspecto intuitivo, não são mais partes do inteiro, são inteiros, de onde o nome: frações aparentes (aparentemente frações).

Conseqüência I: Fração como quociente indicado

Consideremos dois inteiros a e b, b = 0.

Como:

$$a = \frac{a}{1} \qquad b = \frac{b}{1}$$

teremos:

$$a : b = \frac{a}{1} : \frac{b}{1}$$

ou:

$$a : b = \frac{a \times 1}{1 \times b} \qquad \text{(Def.6)}$$

ou:

$$\boxed{a : b = \frac{a}{b}}$$

Exemplos:

$$3 : 5 = \frac{3}{5}$$

$$8 : 4 = \frac{8}{4} = 2$$

Conseqüência II: Número misto.

Da identificação surge a necessidade de se operar com números inteiros indicados e frações; assim:

1. De $\frac{a}{1} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{d} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d + c}{d}$

surge: $a + \frac{c}{d} = \frac{a \times d + c}{d}$

e, à soma indicada: $a + \frac{c}{d}$, passamos a indicar maissimplesmente:

$$a \frac{c}{d} \quad \text{ou} \quad a \ c/d.$$

<u>Exemplo</u>:

$3 + \frac{2}{5}$ indicamos com $3 \frac{2}{5}$ ou $3 \ 2/5$

e temos: $3 \frac{2}{5} = \frac{3 \times 5 + 2}{5} = \frac{17}{5}$

2. De $\frac{a}{1} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{d}$

surge: $a \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{d}$

<u>Exemplo</u> (*):

$$3 \times \frac{2}{5} = \frac{3 \times 2}{5} = \frac{6}{5}$$

2. De $\frac{a}{1} - \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{d} - \frac{c}{d} = \frac{a \times d - c}{d}$

surge: $a - \frac{c}{d} = \frac{a \times d - c}{d}$

<u>Exemplo</u>:

$$5 - \frac{3}{4} = \frac{5 \times 4 - 3}{4} = \frac{17}{4}$$

(*) Observe-se que o uso, no ensino, da escrita do denominador 1, não é descabido.

ou: $5 - \frac{3}{4} = 4 + 1 - \frac{3}{4} = 4 + \frac{4}{4} - \frac{3}{4} = 4 \quad \frac{1}{4} = 4 \frac{1}{4}$

4. a) De $\frac{a}{1} : \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{1 \times c} = \frac{a \times d}{c}$

surge: $a : \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{c}$

b) De $\frac{c}{d} : \frac{a}{1} = \frac{c \times 1}{d \times a} = \frac{c}{d \times a}$

surge: $\frac{c}{d} : a = \frac{c}{d \times a}$

<u>Exemplos</u>:

$$3 : \frac{6}{5} = \frac{3 \times 5}{6} = \frac{15}{6}$$

$$\frac{6}{5} : 3 = \frac{6}{5 \times 3} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

F. DESIGUALDADE

F.1. INTRODUÇÃO

Na teoria de números inteiros temos estudado a equivalência de conjuntos, a prevalência e supervalência de um conjunto em relação a outro, utilizando a noção de correspondência biunívoca entre os conjuntos. Tais comparações nos levaram às relações de igualdade e desigualdade entre números inteiros.

Estudando a subtração de inteiros vimos que ela era definida com a condição de que o primeiro número fosse maior ou igual ao segundo número, isto é:

Se $a \geqslant b$ (a maior ou igual a b) existia um terceiro número inteiro c tal que $b + c = a$, ao qual denomina mos **diferença de a e b, nessa ordem.**

Para números fracionários aparece a mesma questão:

Dados dois números fracionários pelos representantes $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, verificamos que a subtração era possível se $a \times d \geqslant d \times c$; e, também que o terceiro número fracionários denominado diferença, adicionado ao segundo é igual ao primeiro.

Desta noção, somos levados à desigualdade entre números fracionários.

DEFINIÇÃO 7

Diremos que o número fracionário dado pela fração $\frac{a}{b}$ é maior que o número fracionário dado pela fração $\frac{c}{d}$, se e sòmente se

$$\boxed{a \times d > b \times c}$$

e, diremos que a fração $\frac{a}{b}$ é supervalente à fração $\frac{c}{d}$, e indicamos:

$$\boxed{\frac{a}{b} \succ \frac{c}{d}}$$

DEFINIÇÃO 7'

Diremos que o número fracionário dado pela fração $\frac{a}{b}$ é menor que o número fracionário dado pela fração $\frac{c}{d}$ se e sòmente se

$$\boxed{a \times d < b \times c}$$

e, diremos que a fração $\frac{a}{b}$ é prevalente à fração $\frac{c}{d}$, e indicamos:

$$\boxed{\frac{a}{b} \prec \frac{c}{d}}$$

Exemplos:

a) $\frac{3}{5} \prec \frac{2}{3}$ pois $3 \times 3 = 9$ e $5 \times 2 = 10$, logo $3\times5 < 5\times2$

b) $\frac{4}{5} \succ \frac{1}{3}$ pois $4 \times 3 = 12$ e $5 \times 1 = 5$, logo $4\times3 > 5\times1$

F.2. TEOREMA 7: ESTABILIDADE DA PREVALÊNCIA E DA SUPERVALÊNCIA.

Sejam os números fracionários dados por outros representantes: $\frac{a'}{b'}$ e $\frac{c'}{d'}$, isto é:

$$\frac{a'}{b'} \sim \frac{a}{b} \quad \text{(I)}$$

e:

$$\frac{c'}{d'} \sim \frac{c}{d} \quad \text{(II)}$$

Pela eqüivalência I temos: $a' \times b = a \times b'$

e pela II temos: $c \times d' = c' \times d$

de onde, obtemos a igualdade:

$$(a' \times b) \times (c \times d') = (a \times b') \times (c' \times d)$$

ou, pela associatividade e comutatividade:

$$(a' \times d') \times (b \times c) = (b' \times c') \times (a \times d)$$

Admitindo que houvesse a prevalência:

$$\frac{a}{b} \prec \frac{c}{d}$$

Pela definição 7, temos: $a \times d < b \times c$; portanto substituindo na igualdade $a \times d$ por $b \times c$ estamos aumentando o segundo membro:

$$(a' \times d') \times (b \times c) < (b' \times c') \times (b \times c)$$

O produto $b \times c$ não é nulo, pois $b \neq 0$ pela definição de número fracionário, e $c \neq 0$, pois, em caso contrário, teríamos $a \times d < 0$, o que é absurdo. Sendo $b \times c \neq 0$, deveremos ter:

$$a' \times d' < b' \times c'$$

portanto:

$$\frac{a'}{b'} < \frac{c'}{d'}$$

Da mesma meneira se provará, admitindo que houvesse a supervalência.

O teorema prova portanto que a relação de prevalência (ou de supervalência) está bem-definida; e, também, como para as operações, nos permite trabalhar com as frações que nos convier.

F.3. CONSEQÜÊNCIA I

Como para frações eqüivalentes consideramos a eqüivalência como igualdade, substituindo o sinal " ~ " por " = ", nós consideraremos a prevalência e a supervalência de frações como desigualdade, substituindo o sinal " ≺ " por " < ", e o sinal " ≻ " por " > ". Também diremos: fração menor que, ou fração maior que.

Em resumo:

$$\begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff a \times d = b \times c \\ \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \iff a \times d < b \times c \\ \frac{a}{b} > \frac{c}{d} \iff a \times d > b \times c \end{cases}$$

F.4. CONSEQÜÊNCIA II: REDUÇÃO AO MESMO DENOMINADOR

Seja $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$

logo: $\frac{a'}{m} < \frac{c'}{m}$

com m múltiplo comum de b e d.

Pela definição 7:

$$a' \times m < c' \times m$$

ou que $a' < c'$

Reciprocamente:

Se $a' < c' \Longrightarrow a' \times m < c' \times m$

ou pela Definição 7:

$$\frac{a'}{m} < \frac{c'}{m}$$

De onde, a regra prática para comparação: Transforma-se as frações em frações eqüivalentes com denominadores iguais, será menor aquela que possuir menor numerador.

Exemplo (com o m.m.c.):

$$\frac{5}{8} \quad e \quad \frac{4}{6}$$

$$\frac{5}{8} = \frac{15}{24} \quad e \quad \frac{4}{6} = \frac{16}{24}$$

como $15 < 16$ é $\frac{5}{8} < \frac{4}{6}$

F.5. CONSEQÜÊNCIA III: REDUÇÃO AO MESMO NUMERADOR

Seja

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

logo: $\frac{n}{b} < \frac{n}{d'}$

com n múltiplo comum de a e c.

Pela definição 7:

$$n \times d' < n \times b'$$

ou que $d' < b'$

ou $b' > d'$

Reciprocamente:

$b' > d' \Longleftrightarrow d'$ $b' \Longrightarrow n \times d' < n \times b'$

ou pela Definição 7:

$$\frac{n}{b'} < \frac{n}{d'}$$

De onde, a regra prática para comparação: Transforma-se as frações em frações eqüivalentes com numeradores iguais, será menor aquela que possuir maior denominador.

Exemplo (com o m.m.c.):

$$\frac{5}{8} \text{ e } \frac{4}{6}$$

$$\frac{5}{8} = \frac{20}{32} \text{ e } \frac{4}{6} = \frac{20}{30}$$

como $32 > 30$ é $\frac{5}{8} < \frac{4}{6}$

F.6. COMPARAÇÃO DE NÚMEROS FRACIONÁRIOS E INTEIROS

Como identificamos $\frac{a}{1}$ com a, teremos:

$$\frac{c}{d} > a \Leftrightarrow \frac{c}{d} > \frac{a}{1} \Leftrightarrow c > a \times d$$

$$\frac{c}{d} = a \Longleftrightarrow \frac{c}{d} = \frac{a}{1} \Longleftrightarrow c = a \times d$$

$$\frac{c}{d} < a \Longleftrightarrow \frac{c}{d} < \frac{a}{1} \Longleftrightarrow c < a \times d$$

isto é:

Uma fração é "maior que", "igual a", ou "menor que" um número inteiro, se o numerador é maior, igual, ou menor que o produto do inteiro pelo denominador.

Exemplos:

$\frac{8}{3} > 2$ pois $8 > 2 \times 3$

$\frac{6}{2} = 3$ pois $6 = 2 \times 3$

$\frac{3}{8} < 2$ pois $3 < 2 \times 8$

Apliquemos o processo para comparações com a unidade:

$\frac{c}{d} > 1 \Longleftrightarrow c > d \times 1$, ou $c > d$

$\frac{c}{d} = 1 \Longleftrightarrow c = d \times 1$, ou $c = d$

$\frac{c}{d} < 1 \Longleftrightarrow c < d \times 1$, ou $c < d$

Da mesma maneira que denominou-se frações aparentes, denominamos as frações maiores que a unidade de frações impróprias (impròpriamente frações); e, as menores que a unidade chamamos frações próprias (pròpriamente frações).

Dos resultados anteriores, concluimos que uma fração é imprópria (ou própria) quando o numerador é maior

Exemplos:

1. $\frac{5}{3} > 1$, pois $5 > 3$, logo $\frac{5}{3}$ é fração imprópria

2. $\frac{5}{5} = 1$, pois $5 = 5$, ou também porque $\frac{5}{5} = \frac{1}{1}$

logo $\frac{5}{5}$ é fração aparente;

3. $\frac{3}{5} < 1$, pois $3 < 5$, log $\frac{3}{5}$ é fração imprópria.

As frações impróprias sendo maiores que a unidade, são iguais à soma de um inteiro com uma fração, portanto, podem ser escritas na forma de número misto:

Seja: $\frac{a}{b} > 1$

Escreveremos $\frac{a}{b} = \frac{k \times b + a'}{b}$ com $a' < b$

ou $\frac{a}{b} = \frac{k \times b}{b} + \frac{a'}{b}$

ou $\frac{a}{b} = k + \frac{a'}{b}$

ou $\frac{a}{b} = k \frac{a'}{b}$

Exemplo:

$\frac{18}{7} = \frac{2 \times 7 + 4}{7}$ e $4 < 7$

ou $\frac{18}{7} = \frac{2 \times 7}{7} + \frac{4}{7}$

ou $\frac{18}{7} = 2 + \frac{4}{7}$

ou $\frac{18}{7} = 2 \frac{4}{7}$

De onde tiramos a regra prática de transformação de uma fração imprópria em número misto:

Dividindo-se o numerador pelo denominador, o quociente é o inteiro do número misto, o resto é o numerador e o denominador é o mesmo.

Exemplo: $\frac{18}{7} = ?$

$$\begin{array}{r|l} 18 & 7 \\ \hline 4 & 2 \end{array}$$

$\frac{18}{7} = 2 \frac{4}{7}$

É costume denominar-se operação de extração de inteiros à divisão do numerador pelo denominador.

Reciprocamente, como já vimos em E., na conseqüência II, podemos transformar um número misto em fração imprópria:

$k \frac{a'}{b} = k + \frac{a'}{b} = \frac{k \times b + a'}{b} = \frac{a}{b}$

cuja regra prática é conseqüência da adição de inteiro com fração, ou como regra inversa da operação anterior:

Multiplica-se o inteiro pelo denominador, adiciona-se com o numerador para se obter o numerador, e conserva-se o denominador.

Exemplo:

$2 \frac{4}{7} = \frac{2 \times 7 + 4}{7} = \frac{18}{7}$

F.7. TEOREMA 8

Dados dois números fracionários, sempre existe um terceiro intermediário, isto é, um número fracionário - menor que o maior, e maior que o menor:

Sejam os números fracionários dados pelas frações

$\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, com $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$.

Consideremos o número fracionário dado pela fração

$$\frac{a + c}{b + d}$$

Provaremos que essa "fração" satisfaz as condições do teorema:

Sendo $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, então $a \times d < b \times c$;

portanto:

$$a \times d + a \times b < b \times c + a \times b$$

ou:

$$a \times (d + b) < b \times (c + a)$$

e, pela Definição 7:

$$\frac{a}{b} < \frac{a + c}{b + d}$$

Da mesma forma, teremos:

$$a \times d + c \times d < b \times c + c \times d$$

ou:

$$(a + c) \times d < (b + d) \times c$$

e, pela Definição 7:

$$\frac{a + c}{b + d} < \frac{c}{d}$$

Reunindo os resultados:

$$\boxed{\frac{a}{b} < \frac{a + c}{b + d} < \frac{c}{d}}$$

o que prova o teorema.

Consequencia: Densidade

Entre dois números fracionários existem números fracionários quanto quisermos. Diríamos intuitivamente que entre dois fracionários está "cheio" de outros números fracionários. Rigorosamente se diz que o conjunto dos números fracionários é densо.

Exemplo:

Sejam as frações $\frac{3}{8}$ e $\frac{5}{6}$;

temos: $\frac{3}{8} < \frac{5}{6}$

1. Teremos: $\frac{3}{8} < \frac{8}{14} < \frac{5}{6}$ ou $\frac{3}{8} < \frac{4}{7} < \frac{5}{6}$

2. Idem: $\frac{3}{8} < \frac{7}{15} < \frac{4}{7} < \frac{9}{13} < \frac{5}{6}$

3. Idem: $\frac{3}{8} < \frac{10}{23} < \frac{11}{22} = \frac{1}{2} < \frac{4}{7} < \frac{13}{20} < \frac{9}{13} < \frac{14}{19} < \frac{5}{6}$

e, assim sucessivamente.

Outro processo (*) é determinar uma fórmula para frações intermediárias:

Fazemos:

$$\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{x}{y} .$$

Tomamos frações iguais a: $\frac{a}{b} + \frac{x}{y + r}$ com $r = 1, 2, 3, \ldots$

É evidente que:

$$\frac{x}{y + r} < \frac{x}{y}$$

(*) - Prova também o teorema.

logo: $\frac{a}{b} < \frac{a}{b} + \frac{x}{y + r} < \frac{a}{b} + \frac{x}{y}$

ou: $\frac{a}{b} < \frac{a}{b} + \frac{x}{y + r} < \frac{c}{d}$

Exemplo: $\frac{3}{8} < \frac{5}{6}$

Fazemos: $\frac{5}{6} - \frac{3}{8} = \frac{20 - 9}{24} = \frac{11}{24}$

Portanto:

$$\frac{3}{8} < \frac{3}{8} + \frac{11}{25} < \frac{5}{6}$$

e: $\frac{3}{8} < \frac{3}{8} + \frac{11}{26} < \frac{3}{8} + \frac{11}{25} < \frac{5}{6}$

idem: $\frac{3}{8} < \frac{3}{8} + \frac{11}{27} < \frac{3}{8} + \frac{11}{26} < \frac{3}{8} + \frac{11}{25} < \frac{5}{6}$; etc.

F.8. RELAÇÃO DE ORDEM:

F.8.1. TRANSITIVIDADE:

Temos o sinal " $<$ " entre frações, sucessivamente; mas, isto pressupõe que exista transitividade. Provaremos que de fato a relação de prevalência goza da Transitividade.

Seja $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ (I)

e: $\frac{c}{d} < \frac{e}{f}$ (II)

Pela I : $a \times d < b \times c$

Pela II: $c \times f < d \times e$

ou que:

$$(a \times d) \times (c \times f) < (b \times c) \times (d \times e)$$

e, pela associatividade e comutatividade:

$$(a \times f) \times (c \times d) < (b \times e) \times (c \times d)$$

e, por ser $c \times d \neq 0$, teremos:

$$a \times f < b \times e$$

que implica ser:

$$\frac{a}{b} < \frac{e}{f}$$

portanto, é correto escrever:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} < \frac{e}{f}$$

Da mesma maneira se provaria que a relação de supervalência é transitiva:

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{c} \quad e \quad \frac{c}{d} > \frac{e}{f} \Longrightarrow \frac{a}{b} > \frac{e}{f}$$

logo, é permitido se escrever:

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} > \frac{e}{f}$$

Observação: A rigor deveríamos escrever:

$$\frac{a}{b} \prec \frac{c}{d} \prec \frac{e}{f}$$

ou

$$\frac{a}{b} \succ \frac{c}{d} \succ \frac{e}{f}$$

Mas, com a substituição feita não há inconveniente, tomando como símbolo, e também porque, existindo a transitividade prevalência (ou supervalência) entre frações, existe transitividade da relação "menor que" (ou "maior que") entre os números fracionários, dos quais são representantes.

F.8.2. IRREFLEXIBILIDADE (*)

É impossível que uma fração seja prevalente (ou supervalente) a si mesma, como é fácil verificar, pois de:

$$\frac{a}{b} \prec \frac{a}{b} \Longrightarrow a \times b < a \times b$$

o que é absurdo.

Propriedade que corresponde à irreflexibilidade da relação "menor que" (ou"maior que") entre números fracionários; entretanto, como um número fracionário pode ser representado de vários modos, a irreflexibilidade das relações de desigualdade, de preferência, deverá ser provada com representantes diferentes:

Seja $\frac{a}{b} \prec \frac{a'}{b'}$ com $\frac{a}{b}$ e $\frac{a'}{b'}$

representantes do mesmo número fracionário.

Temos: $\frac{a}{b} \prec \frac{a'}{b'} \Longrightarrow a \times b' < a' \times b$

e: $\frac{a}{b} \sim \frac{a'}{b'} \Longrightarrow a \times b' = a' \times b$

o que é absurdo.

F.8.3. ASSIMETRIA

A relação de prevalência (ou de supervalência) é assimétrica, pois, se tivermos:

$$\frac{a}{b} \prec \frac{c}{d} \qquad (I)$$

então, não é possível que seja:

(*) O leitor deverá observar que há relações que não são reflexivas mas não são irreflexivas, como é o caso de "orgulha-se de".

$$\frac{c}{d} \prec \frac{a}{b} \qquad (II)$$

De fato:

Da I temos: $a \times d < b \times c$

Da II temos: $b \times c < a \times d$

e, pela transitividade da relação "menor que" para números inteiros:

$$a \times d < a \times d$$

o que é absurdo, pela lei de tricotomia de números inteiros. Aliás, esta lei nos garante também que haverá para as frações a mesma lei, isto é: uma fração ou é prevalente a outra, ou equivalente, ou supervalente.

Da mesma forma que para as outras propriedades, esta corresponde à assimetria de números fracionários: se tivermos um número fracionário "menor que" (ou "maior que") outro, então, não é possível que êste seja menor que o primeiro.

F.8.4. ORDENAÇÃO

É natural, que na ordenação de um conjunto, se estabeleça um critério de precedência, o qual determinará o elemento que vem antes e o que vem depois, dizendo que um elemento precede e o outro sucede.

No conjunto dos inteiros já vimos a ordenação natural: 0, 1, 2, 3, 4, 5,...... com o critério " menor que": $0 < 1 < 2 < 3, \ldots\ldots$

Nas palavras dos dicionários, na indicação de capítulos, de parágrafos, etc., é costume adotar-se a ordenação lexicográfica, fornecida pela ordem das letras do alfabeto.

Em concursos adota-se critérios diversos, como "critérios de beleza", "critérios de simpatia", "critérios fotogênicos", etc..

Para os números fracionários podemos adotar a relação "menor que" ou maior que", o que eqüivale a tomar para as frações a relação de "prevalência" ou "supervalência".

Como haveria frações que não poderiam ser ordenadas, pois teríamos frações que no confronto com outras não poderíamos afirmar que precede ou que sucede outra. Isto ocorreria sempre que comparássemos frações eqüivalentes, e elas não poderiam ser ordenadas.

Em outras palavras, o critério de prevalência não utiliza tôdas frações, e o conjunto seria parcialmente ordenado.

Para afastar êste inconveniente adota-se o critério "prevalente ou eqüivalente a" ou "supervalente ou eqüivalente a", ficando o conjunto de frações totalmente ordenado; idem, em correspondência, adota-se o critério "menor que ou igual a" ou "maior que ou igual a", para os números fracionários.

Desta forma, a relação seria indicada para frações com os símbolos " $\prec$ ou $\sim$ " ou " $\succ$ ou $\sim$ ". Da mesma maneira como temos procedido anteriormente, indicaremos esta relação com os sinais " $\leqslant$ " ou " $\geqslant$ ":

$\frac{a}{b} \leqslant \frac{c}{d}$ se e sòmente se $a \times d \leqslant b \times c$;

ou $\frac{a}{b} \geqslant \frac{c}{d}$ se e sòmente se $a \times d \geqslant b \times c$;

e, leremos também "fração a/b menor ou igual à fração c/d" ou "fração a/b maior ou igual à fração c/d".

Pela primeira relação (idem para a segunda) são válidas as seguintes propriedades:

1. Reflexibilidade: $\frac{a}{b} \leqslant \frac{a}{b}$

2. Anti-simetria: $\frac{a}{b} \leqslant \frac{c}{d}$ e $\frac{a}{b} \geqslant \frac{c}{d} \Longrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

3. Transitividade: $\frac{a}{b} \leqslant \frac{c}{d}$ $\frac{c}{d} \leqslant \frac{e}{f} \Longrightarrow \frac{a}{b} \leqslant \frac{e}{f}$

4. Propriedade da Conexão (ou Conectividade)

Quaisquer que sejam as frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, teremos:

$$\frac{a}{b} \leqslant \frac{c}{d} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b} \geqslant \frac{c}{d}$$

Dizemos que a ordenação é crescente quando utilizamos a relação " $\leqslant$ ", e que a ordenação é decrescente quando a relação usada é " $\geqslant$ ".

Exemplos: Seja o conjunto de frações:

$$\left\{ \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{6}{9}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4} \right\}.$$

Temos:

1. Em ordenação crescente:

$$\frac{1}{4} \leqslant \frac{2}{4} \leqslant \frac{1}{2} \leqslant \frac{2}{3} \leqslant \frac{6}{9} \leqslant \frac{3}{4}$$

ou: $\frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{2} \leqslant \frac{2}{4} \leqslant \frac{6}{9} \leqslant \frac{2}{3} \leqslant \frac{3}{4}$

Usa-se também escrever, o que não é melhor:

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{2} = \frac{2}{4} < \frac{2}{3} = \frac{6}{9} < \frac{3}{4}$$

2. <u>Em ordenação decrescente</u>:

$$\frac{3}{4} \geqslant \frac{6}{9} \geqslant \frac{2}{3} \geqslant \frac{1}{2} \geqslant \frac{2}{4} \geqslant \frac{1}{4}, \quad \text{etc...}$$

G. <u>EXERCÍCIOS (SÉRIE XV)</u>

1. Verifique que:

a) A relação "pai de" não é transitiva.

b) A relação "irmão de" é simétrica mas é irreflexiva.

c) A relação "menor ou igual a" é reflexiva.

d) A relação entre conjuntos: "complementar de" é simétrica e é irreflexiva.

e) A relação "mais gordo que" é transitiva.

2. Mostre quais são e quais não são relações de eqüivalência:

a) Relação "primo de"

b) Relação "irmão de"

c) Relação "igual a"

d) Relação "tão magro como"

e) Relação x R y, onde entendemos x e y alunos da classe X.

3. Verifique a veracidade ou falsidade das afirmações:

a. $\frac{3}{4} \sim \frac{2}{3}$ b. $\frac{5}{8} \sim \frac{15}{24}$

c. $\frac{1}{2} \sim \frac{3}{6}$ d. $\frac{5}{1} \sim \frac{4}{1}$

e. $\frac{9}{3} \sim \frac{6}{2}$ f. $\frac{4}{4} \sim \frac{9}{9}$

4. O que você pode afirmar:

a. Se $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$ e $\frac{c}{d} \sim \frac{e}{f}$? a'. Se $\frac{2}{5} \sim \frac{2}{x}$?

b. Se $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$? b'. Se $\frac{2}{3} \sim \frac{10}{30}$?

c. Se $\frac{a}{b} \sim \frac{a}{x}$? c'. Se $\frac{3}{5} \sim \frac{6}{10}$ e $\frac{6}{10} \sim \frac{12}{20}$?

5. Calcular x em:

a. $\frac{3}{2} \sim \frac{6}{x}$ b. $\frac{4}{x} \sim \frac{1}{3}$

c. $\frac{x}{18} \sim \frac{15}{30}$ d. $\frac{x}{12} \sim \frac{3}{x}$

6. Forme as classes de eqüivalência:

a. { 1/3 } b. { 2/3 }

c. { 0/4 } d. { 5/6 }

e. { 1/1 } f. { 4/1 }

7. Quais são os representantes das classes de eqüivalência seguintes, com denominador 12?

a. { 1/2 } b. { 1/3 } c. { 2/3 }

d. { 1/6 } e. { 5/6 } f. { 1/1 }

g. { 4/3 } h. { 3/4 } i. { 1/4 }

8. Determine as frações eqüivalentes às frações dadas, mas com denominadores iguais quaisquer; e, depois com o menor denominador igual:

a. $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{6}$ b. $\frac{4}{9}$ e $\frac{5}{6}$

c. $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ d. $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{12}$

9. *Idem ao 8, com numeradores iguais, e depois com o menor numerador igual.*

10. Calcule as somas indicadas pela Definição 3:

a. $\frac{1}{8} + \frac{3}{5}$ b. $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$

c. $\frac{5}{12} + \frac{1}{9}$ d. $\frac{4}{9} + \frac{2}{9}$

Nota: Pode escrever o sinal "=" no lugar de " ~ " em todos os futuros exercícios, mas não se esqueça, êles não dizem a mesma coisa.

11. Calcule as somas do exercício 10, usando outros representantes, mas empregando ainda a Def.3. Compare os resultados verificando a estabilidade da definição.

12. Calcule as somas pela redução ao mesmo denominar.- Verifique novamente a estabilidade.

13. Calcule os produtos indicados pela Def. 4:

a. $\frac{1}{8} \times \frac{3}{5}$ b. $\frac{1}{3} \times \frac{1}{6}$

c. $\frac{5}{12} \times \frac{1}{9}$ d. $\frac{4}{9} \times \frac{2}{9}$

e. $\frac{3}{4} \times \frac{2}{9}$ f. $\frac{2}{15} \times \frac{10}{8}$

14. Calcule os produtos do exercício 13, usando outros representantes, mas empregando ainda a Def.4. Compare os resultados verificando a estabilidade da definição.

15. Prove a comutatividade da adição. Exemplifique.

16. Prove a associatividade da adição. Exemplifique.

17. Calcule:

a. $\frac{3}{5} + \frac{0}{2}$ b. $\frac{0}{3} + \frac{1}{6}$

c. $\frac{3}{4} + \frac{0}{4}$ d. $\frac{2}{3} + \frac{0}{1}$

Poderia você dar a resposta sem calcular? por que?

18. Prove a comutatividade da multiplicação. Exemplifique.

19. Prove a associatividade da multiplicação. Exemplifique.

20. Calcule:

a. $\frac{2}{3} \times \frac{1}{1}$ b. $\frac{3}{8} \times \frac{2}{2}$

c. $\frac{1}{1} \times \frac{2}{3}$ d. $\frac{2}{2} \times \frac{3}{8}$

Poderia você dar a resposta sem efetuar cálculos? - por que?

21. Qual é o inverso de:

a. $\frac{3}{7}$? b. $\frac{2}{3}$? c. $\frac{1}{5}$? d. $\frac{0}{6}$?!

e, por que?

22. Aplique a distributividade nos cálculos seguintes:

a. $\frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3} \right)$ b. $\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{9} \right) \times \frac{1}{2}$

23. Calcule as diferenças, pela Definição 5 (Veja primeiro a possibilidade):

a. $\frac{3}{8} - \frac{1}{4}$ b. $\frac{1}{3} - \frac{1}{5}$

c. $\frac{8}{9} - \frac{3}{9}$ d. $\frac{2}{3} - \frac{3}{6}$

e. $\frac{4}{5} - \frac{8}{10}$ f. $\frac{6}{6} - \frac{2}{7}$

g. $\frac{4}{1} - \frac{1}{3}$ h. $\frac{4}{7} - \frac{0}{3}$

i. $\frac{3}{4} - \frac{5}{6}$! j. $\frac{5}{6} - \frac{2}{2}$!

24. Calcule as diferenças do exercício 23 usando outros representantes, mas ainda com a Definição 5. Compare os resultados - verificando a estabilidade.

25. Calcule as diferenças reduzindo ao mesmo denominador. Verifique com os resultados encontrados em 23 (ou 24, ou 25) que a subtração definida é operação inversa da adição.

26. Calcule as diferenças reduzindo ao mesmo denominador. Verifique novamente a estabilidade.

27. Calcule os quocientes empregando a Definição 6:

a. $\frac{3}{4} : \frac{1}{3}$ b. $\frac{1}{2} : \frac{3}{5}$ c. $\frac{2}{9} : \frac{1}{6}$

d. $\frac{2}{3} : \frac{4}{9}$ e. $\frac{0}{2} : \frac{3}{4}$ f. $\frac{1}{3} : \frac{0}{4}$!

28. Calcule os quocientes do exercício 27 utilizando outros representantes, mas continue a empregar a Def. 6. Compare os resultados verificando a estabilidade.

29. Calcule os quocientes reduzidos ao mesmo denominador. Verifique novamente a estabilidade.

30. Verifique com os resultados encontrados em 27 (ou 28, ou 29) que a divisão definida é operação inversa da multiplicação.

31. Faça os seguintes cálculos.

a. $\frac{4}{1} + \frac{3}{1}$ b. $\frac{4}{1} \times \frac{3}{1}$ c. $\frac{8}{4} \times \frac{6}{2}$

d. $\frac{5}{1} - \frac{2}{1}$ e. $\frac{2}{1} - \frac{0}{1}$ f. $\frac{6}{1} : \frac{3}{1}$

Compare com os seguintes:

a'. $4 + 3$ b'. 4×3 c'. 2×3

d'. $5 - 2$ e'. $2 - 0$ f'. $6 : 2$

Existe um isomorfismo? Qual é a identificação sugerida?

32. Mostre que, com a identificação $3 = \frac{3}{1}$ e $5 = \frac{5}{1}$, o quociente $3 : 5$ pode ser indicado por $\frac{3}{5}$. Faça outros exemplos diretos.

33. O que é, o que significa, e qual o valor:

a. $3\frac{2}{5}$? b. $2\frac{1}{3}$? c. $1\frac{1}{4}$?

34. O que é, o que significa, e qual o valor:

a. $3 \times \frac{2}{6}$? b. $2 \times \frac{1}{3}$? c. $1 \times \frac{1}{4}$?

35. Calcule:

a. $2 - \frac{3}{4}$ b. $5 - \frac{2}{3}$ c. $3 : \frac{1}{4}$ d. $\frac{1}{4} : 3$

36. Verifique a prevalência, eqüivalência ou supervalência, aplicando a Def. 7, 2 e 7':

a. $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{8}$ b. $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{7}$

c. $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ d. $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{3}$

37. Verifique as relações do exercício 36, mas com outros representantes, e continue usando a Def. 7, 2 e 7'. Verifique a estabilidade em relação à eqüivalência quando se verificar prevalência e supervalência.

38. Verifique as relações do exercício 36, usando redução ao mesmo denominador.

39. Verifique as relações do exercício 36, usando redução ao mesmo numerador.

40. Verifique as mesmas relações entre:

a. $\frac{4}{5}$ e 2 b. 3 e $\frac{12}{5}$

c. 4 e $\frac{20}{3}$ d. 1 e $\frac{3}{5}$

e. $\frac{2}{9}$ e 1 f. $\frac{3}{3}$ e 1

Quais as denominações das frações?

41. Transforme as frações seguintes em números mistos, quando possível:

a. $\frac{12}{5}$ b. $\frac{8}{3}$ c. $\frac{18}{3}$

d. $\frac{4}{5}$ e. $\frac{18}{4}$ f. $\frac{5}{5}$

42. Transforme as que forem números mistos em frações impróprias:

a. $3\ \frac{2}{5}$ b. $1\ \frac{3}{3}$ c. $\frac{3}{4}$

d. $4\ \frac{1}{4}$ e. $2 \times \frac{1}{3}$ f. $1 - \frac{1}{2}$

g. $3 : \frac{1}{2}$ h. $5\ \frac{3}{7}$ i. $\frac{2}{5} : 3$

43. Determine uma fração maior que a menor e menor que a maior:

a. $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$ b. $\frac{1}{5}$ e $\frac{3}{4}$

c. $\frac{5}{8}$ e $\frac{3}{9}$ d. $\frac{1}{6}$ e $\frac{2}{6}$

44. Coloque os conjuntos em ordenação crescente e depois em decrescente:

a. $\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{\text{[illegible]}}, \frac{1}{8}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right\}$

b. $\left\{\frac{4}{3}, \frac{4}{1}, \frac{4}{5}, \frac{4}{7}, \frac{4}{6}\right\}$

c. $\left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{1}{4}, \frac{8}{12}, \frac{2}{8}, \frac{8}{9}, \frac{6}{10}\right\}$

45. Dada uma fração qualquer, diz-se simplesmente a fração, quando a transformamos numa eqüivalência com têrmos menores; quando isto é possível, diz-se que a fração é redutível; em caso contrário, irredutível, então os têrmos deverão ser primos entre si. - Simplifique as frações seguintes, sendo que as duas últimas tornando-as irredutíveis:

a. $\frac{18}{24}$ b. $\frac{320}{840}$ c. $\frac{15}{18}$ d. $\frac{36}{180}$

46. Com a identificação: $\frac{a}{1} = a$ e $\frac{b}{1} = b$, verifique se com a definição de multiplicação de números fracionários, de fato o número $\frac{a}{b}$ é solução da equação $bx = a$.

H. PROBLEMAS

H.1. PROBLEMAS COM SUGESTÕES (SÉRIE XVI)

1. De um barril dom 60 litros de vinho retirou-se $\frac{3}{4}$. - Quanto se retirou?

   Sugestão: 1. Resolva reduzindo à unidade fracionária
   2. Resolva como simples multiplicação, interpretando a partícula "de".

2. De um saco de feijão de 45 quilos retirou-se $\frac{2}{5}$. - Quanto sobrou?

   Sugestão: 1. Resolva calculando $\frac{2}{5}$ de 45 e depois subtraindo.
   2. Resolva calculando a fração resto.

3. De um saco de arroz de 60 quilos vendeu-se $\frac{1}{6}$ para uma pessoa e $\frac{3}{4}$ para outra pessoa. Quantos quilos foram vendidos?

   Sugestão: 1. Resolva calculando os quilos de cada venda.
   2. Resolva calculando primeiramente a fração total vendida.

4. Um senhor ganhou Cr$ 120.000. Deu $\frac{3}{8}$ para um filho; e do resto deu $\frac{4}{15}$ para outro filho. Quanto deu?

   Sugestão: 1. Resolva calculando a quantia dada ao primeiro filho, depois o resto, para então calcular a quantia do segundo filho, e finalmente a doação total.
   2. Resolva calculando $\frac{4}{15}$ da fração restante, depois adicionando as frações, para então calcular a quantia doada.

5. Resolva o problema anterior para a quantia $ 180.000 com as duas sugestões; mas, no caso da pergunta ser: Com quanto ficou?

   Sugestão 3. Resolva seguindo a sugestão 2 mas calculando a fração restante, para então calcular o restante sôbre $ 180.000,00.

6. Um menino possui $\frac{3}{4}$ da altura de seu pai. Sua irmã possui $\frac{2}{3}$ da sua altura. Qual é a altura da menina, sabendo-se que a altura do pai é de 180 cm.?

   Sugestão: 1. Resolva calculando sucessivamente as alturas.
   2. Resolva calculando primeiramente a fração da altura da irmã em relação ao pai.

7. Resolva o problema 6 no caso da altura ser 160cm., seguindo as duas sugestões; mas, no caso da pergunta ser: Quanto o pai é mais alto que sua filha?

   Sugestão 3. Resolva seguindo a sugestão 2 mas calculando a fração correspondente à diferença de alturas.

8. Sabendo-se que $\frac{3}{5}$ de meu pêso é igual a 48 quilos, qual é meu pêso?

Sugestão. 1.Resolva reduzindo à unidade fracioná - ria para depois calcular o inteiro.

2.Resolva com simples divisão, racioci - nando como se o enunciado fosse por e- xemplo: "Sabendo-se que o triplo do meu pêso é igual a 48".

9. Caio ganhou mais $\frac{2}{3}$ das bolinhas que possuia e fi- cou com 30 bolinhas. Quantas bolinhas possuia?

Sugestão: Resolva calculando a fração eqüivalente a 30 bolinhas;e, depois, aplique as suges - tões do exercício 8.

10. Resolva o problema 9 no caso de ter ficado com 80 bolinhas, e sendo a pergunta: "Quantas bolinhas ga nhou?"

Sugestão: Utilize a mesma sugestão e calcule a fra ção $\frac{2}{3}$ correspondente.

11. Marcos perdeu $\frac{2}{7}$ das figurinhas e ficou com 60 fi gurinhas. Quantas figurinhas possuia?

Sugestão: Resolva calculando a fração eqüivalente a 60 figurinhas (portanto subtraindo).

12. Repartir 36 bolinhas por dois meninos, de tal for- ma que o primeiro receba $\frac{1}{3}$ do que o segundo.

Sugestão: 1:Aplicar o raciocínio usado no problema 9.

2.Transforme o problema em problema de inteiros, pela multiplicidade do segun do em relação ao primeiro.

13. Repartir 51 tampinhas por três meninos, de tal for ma que o segundo receba $\frac{1}{4}$ do primeiro, e o ter - ceiro receba $\frac{2}{3}$ do segundo.

Sugestão: 1. Aplique o mesmo raciocínio do proble ma 9.

2. Organize um esquema estrutural (ver capítulo de problemas da parte meto- dológica) e pratique o ensino!

H.2. PROBLEMAS SEM SUGESTÃO (SÉRIE XVII)

1. Teodoro teria 35 anos se vivesse mais $\frac{3}{4}$ do que já viveu. Qual à sua idade?

2. Zenaide perdeu $\frac{2}{11}$ do que possuia e ainda ficou com $ 270,00. Quanto possuia?

3. Repartir 240 bolinhas entre 2 meninos, recebendo o segundo $\frac{1}{6}$ do primeiro.

4. Repartir 59 lápis por 2 meninos, recebendo o segun- do 31 lápis mais que $\frac{1}{3}$ do primeiro.

5. Repartir $ 200,00 entre três pessoas, recebendo o segundo a metade do primeiro, e o terceiro $\frac{1}{6}$ do pri meiro.

6. Repartir 1960 figurinhas entre 3 meninos, recebendo o segundo $\frac{2}{3}$ do primeiro, e o terceiro $\frac{3}{4}$ do segun do.

7. Dividiu-se medalhas por duas crianças; a primeira - recebeu $\frac{3}{5}$ e a segunda ficou com o resto. Sabendo- se que 2/3 das medalhas são 600 medalhas, pergunta -se quanto recebeu cada uma?

8. Uma peça de fazenda se tivesse mais um sexto do seu comprimento custaria $ 42.000,00. Sendo o preço do metro $ 1.200,00 , quantos metros possui o compri - mento da peça?

9. Dois meninos juntaram os seus dinheiros para comprar um brinquedo. O primeiro possui $\frac{1}{3}$ do dinheiro, o segundo possui $\frac{1}{8}$. Verificaram no entanto que ainda lhes faltam $ 6.500,00. Qual o preço do brinquedo? Quanto possuia cada menino?

10. Um grupo de crianças estavam brincando. Um senhor aproximou-se e perguntou-lhes quantas eram. Uma bela garota respondeu: - Se ao nosso grupo viesse juntar-se outro igual, mais outro igual à metade, mais outro igual à terça parte, mais outro igual à sexta parte; e, se contássemos ainda o senhor, teríamos 55. Ajude o senhor a descobrir quantas crianças estavam no grupo.

11. Sabendo-se que $\frac{1}{4}$ de um número é igual a $\frac{1}{5}$ de outro número; e, que os dois números possuem por soma 135, calcule-os.

12. Qual é o número que dividido por 8, diminue em 42 unidades?

13. Qual é o número que dividido por $\frac{3}{4}$, aumenta em 6 unidades?

*

CAPÍTULO VIII

NÚMEROS DECIMAIS

A. PRELIMINARES

Procurando dar um tratamento aos números fracionários idêntico àquêle usado para os números inteiros, os matemáticos e físicos antigos, evidentemente, foram levados a cuidar das frações com o inteiro dividido em 10 partes, ou em potências de 10, visto que o sistema de numeração empregado é decimal, de base dez.

Simon Stevin, parece ter sido o primeiro a utilizar sistemàticamente a forma numérica decimal. O holandês Stevin trabalhava para a marinha e foi ministro dos negócios da fazenda; seu trabalho data de 1585, sob o nome "La Disme".

A notação usada por Stevin não era muito prática; assim, empregava por exemplo, para o número 32,453 a notação:

32(0)4(1)5(2)3(3)

Outras indicações foram usadas, como as seguintes:

123

32453

$32/4^{0}5^{00}3^{000}$

$32,4^{0}5^{00}3^{000}$

32,453 ou 32.453 ou 32|453

32.453 ou 32|453, etc.

A notação com ponto ainda é usada em vários países, sendo que, muitas vêzes para os decimais sem parte inteira, suprime-se o algarismo 0:

Ex.: $0,34 \longrightarrow 0.34$ ou $.34$

B. NÚMEROS FRACIONÁRIOS DECIMAIS

Dizemos que um número fracionário é decimal quando possui um dos representantes com a segunda componente igual a uma potência de 10. Isto é, um número fracionário decimal é dado por uma fração cujo denominador é potência de 10.

A fração representante de um número fracionário decimal é denominada fração decimal.

Exemplos:

$$\frac{3}{10}, \quad \frac{5}{10^3}, \quad \frac{4}{10^1}, \quad \frac{2}{10^0}, \quad \frac{0}{10^4}, \quad \frac{6}{10^2}$$

que lemos: três décimos, cinco milésimos, quatro décimos, 2 inteiros, 0 décimos milésimos, 6 centésimos.

Como $10^0 = 1$, concluimos que a definição dada engloba os números inteiros; assim, o número inteiro 2, que identificamos com $\frac{2}{1}$, pode ser dado também pela fração $\frac{2}{10^0}$; e, portanto, é número fracionário decimal.

Como os números fracionários são dados por classes de eqüivalência, isto é, um número fracionário pode ser representado por várias frações eqüivalentes, concluimos que os números fracionários decimais podem ser representados por qualquer fração eqüivalente à fração decimal da classe de eqüivalência do número.

Assim, como a classe de eqüivalência $\left(\frac{3}{10}\right)$ é o conjunto:

$$\left\{ \frac{3}{10}, \frac{6}{20}, \frac{9}{30}, \ldots\ldots \frac{30}{100}, \ldots\ldots\ldots \right\}$$

o número fracionário decimal dado pela fração decimal $\frac{3}{10}$ pode ser representado por qualquer outra fração da classe; por exemplo, por $\frac{6}{20}$; $\frac{9}{30}$, ou mesmo por frações decimais:

$$\frac{30}{100}, \quad \frac{300}{1000}, \quad \text{etc..}$$

Denominamos frações basimais às frações eqüivalentes a frações decimais.

No exemplo: $\frac{6}{20}$ é fração basimal, pois:

$$\frac{6}{20} \sim \frac{3}{10}$$

Elementarmente, diremos que uma fração basimal é qualquer fração transformável em decimal.

Teorema: A condição necessária e suficiente para que uma fração seja basimal, é que, depois de reduzida aos menores têrmos possíveis, o seu denominador só tenha fatôres 2 ou 5.

Seja: $\frac{A}{B}$ a fração dada, e que reduzida é a fração $\frac{a}{b}$, isto é: $\frac{A}{B} \sim \frac{a}{b}$ com a e b primos entre si.-

Condição necessária:

Seja a fração $\frac{a}{b}$ basimal, então por definição é eqüivalente a uma decimal.

$$\frac{a}{b} \sim \frac{a'}{10^k}$$

e, portanto: $a \times 10^k = a' \times b$.

Como a e b não possuem fatôres comuns, por ser $\frac{a}{b}$ irredutível, $a' \times 10^k$ são equimúltiplos de a e b:

$$a' = m \times a \qquad (2 \times 5)^k$$

$$10^k = m \times b \quad \text{ou} \quad 2^k \times 5^k = m \times b$$

ou que b é divisor de $2^k \times 5^k$; de onde

$$b = 2^{k'} \times 5^{k''} \qquad \text{com:} \quad 0 \leq k' \leq k$$
$$0 \leq k'' \leq k$$

portanto b só possui fatôres 2 ou 5, com $b = 2^{k'} \times 5^{k''}$

<u>Condição suficiente</u>:

Seja a fração $\frac{a}{b}$ com $b = 2^{k'} \times 5^{k''}$ com $k' \geqslant 0$ e $k'' \geqslant 0$.

1. Caso $k' = k'' = k$, então teríamos:

$$b = 2^k \times 5^k = (2 \times 5)^k = 10^k$$

e, a fração $\frac{a}{b}$ já seria decimal, então a fração dada seria basimal.

2. Caso $k' > k''$, existe um k''' tal que

$$k''' = k' - k''.$$

Multiplicando b e a por $5^{k'''}$, teremos:

$$b = 2^{k'} \times 5^{k''} \times 5^{k'''} = 2^{k'} \times 5^{k''+k'''} = 2^{k'} \times 5^{k'} =$$
$$= 10^{k'}$$

e teríamos:

$$\frac{a}{b} \sim \frac{a \times 5^{k'''}}{10^{k'}}$$

ou que $\frac{a}{b}$ é basimal, e portanto a fração dada $\frac{A}{B}$ também é basimal.

3. Se $k'' > k'$, existe um k''' tal que $k''' = k'' - k'$.

Multiplicando b e a por $2^{k'''}$, teremos:

$$b = 2^{k'} \times 5^{k''} \times 2^{k'''} = 2^{k'+k'''} \times 5^{k''} \times 5^{k''}$$
$$= (2 \times 5)^{k''} = 10^{k''}.$$

e, teríamos:

$$\frac{a}{b} \sim \frac{a \times 2^{k'''}}{10^{k''}}$$

ou que $\frac{a}{b}$ é basimal, e portanto a fração dada $\frac{A}{B}$ também é basimal.

<u>Exemplos</u>:

1) $\frac{3}{12}$ é basimal, pois: $\frac{3}{12} \sim \frac{1}{4}$ e $4 = 2^2$

De fato:

$$\frac{1}{2^2} \sim \frac{1 \times 5^2}{2^2 \times 5^2} = \frac{5^2}{10^2} = \frac{25}{100}$$

2) $\frac{12}{40}$ é basimal, pois:

$$\frac{12}{40} \sim \frac{3}{10} \quad \text{e} \quad \frac{3}{10} \text{ já é decimal.}$$

3) $\frac{16}{40}$ é basimal, pois: $\frac{16}{40} \sim \frac{2}{5}$

4) $\frac{3}{60}$ é basimal, pois:

$$\frac{3}{60} \sim \frac{1}{20} \quad e \quad 20 = 2^2 \times 5$$

5) $\frac{16}{70}$ não é basimal, pois:

$$\frac{16}{70} \sim \frac{8}{35} \quad e \quad 35 = 5 \times 7$$

6) $\frac{10}{12}$ não é basimal, pois:

$$\frac{10}{12} \sim \frac{5}{6} \quad e \quad 6 = 2 \times 3$$

7) $\frac{8}{132}$ ~~não~~ é basimal, pois:

$$\frac{8}{132} \sim \frac{2}{33} \quad e \quad 33 = 3 \times 11$$

8) $\frac{6}{200}$ ~~não~~ é basimal, pois:

$$\frac{6}{200} \sim \frac{3}{100} \quad e \quad 100 = 2^2 \times 5^2 = 10^2$$

9) $\frac{3}{200}$ não é basimal, pois é irredutível e o seu denominador é $200 = 2^3 \times 5^2$.

C. NÚMEROS DECIMAIS

Consideremos um número fracionário decimal dado por uma fração decimal $\frac{a}{b}$; portanto $b = 10^k$.

Sejam os algarismos de a. a_r; a_{r-1}, ... a_1 e a_0.

Escrevamos o numerador na forma polinômica com base 10:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{10^k} = \frac{a_r \times 10^r + a_{r-1} \times 10^{r-1} + \ldots + a_1 \times 10 + a_o}{10^k}$$

ou, pela definição de soma:

$$\frac{a}{b} = \frac{a_r \times 10^r}{10^k} + \frac{a_{r-1} \times 10^{r-1}}{10^k} + \ldots + \frac{a_r \times 10}{10^k} + \frac{a_o}{10^k}$$

Pode-se dar três casos:

1. $r > k$, então $r - k = n$

Teremos:

$$(\mathrm{I}) \quad \frac{a}{b} = a_r \times 10^n + a_{r-1} \times 10^{n-1} + \ldots + a_k + \frac{a_{k-1}}{10} + \ldots + \frac{a_1}{10^{k-1}} + \frac{a_o}{10^k}$$

ou

$$(\mathrm{II}) \quad \frac{a}{b} = a_r a_{r-1} \ldots a_k + \frac{a_{k-1}\, a_{k-2} \ldots a_1\, a_o}{10^k}$$

Exemplo:

$$\text{Seja} \quad \frac{a}{b} = \frac{35238}{1000} = \frac{35238}{10^3}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{3 \times 10^4 + 4\text{x}10^3 + 2\text{x}10^2 + 3\text{x}10 + 8}{10^3}$$

Como $4 > 3$, teremos:

$$\frac{a}{b} = 3 \times 10 + 5 + \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{8}{10^3} \qquad (\mathrm{I'})$$

$$(\mathrm{II'})$$

$$\text{ou:} \quad \frac{a}{b} = 35 + \frac{238}{10^3} = 35 + \frac{238}{1000}$$

A expressão II (ou (II') sugere uma escrita para o número misto, onde fique separado o número inteiro, da parte fracionária. A expressão I (ou I') sugere melhor que essa escrita pode ser análoga à usada no sistema de numeração decimal, colocando os algarismos um ao lado do outro, com valor posicional; de tal forma, que um algarismo escrito à esquerda de outro vale dez vêzes mais.

Passamos então à notação seguinte:

$$\frac{a}{b} = a_r\ a_{r-1} \dots a_k,\ a_{k-1}\ a_{k-2} \dots\dots,\ a_1\ a_o$$

ou, no exemplo: 35,238.

2. $r = k$

Teremos:

$$\frac{a}{b} = a_r + \frac{a_{r-1}}{10} + \frac{a_{r-2}}{10^2} + \dots + \frac{a_1}{10^{k-1}} + \frac{a_o}{10^k} \quad (I)$$

ou: $$\frac{a}{b} = a_r + \frac{a_{r-1}\ a_{r-2} \dots a_1\ a_o}{10^k} \quad (II)$$

Exemplo:

$$\frac{a}{b} = \frac{346}{100} = \frac{346}{10^2}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{3 \times 10^2 + 4 \times 10 + 6}{10^2}$$

ou: $$\frac{a}{b} = 3 + \frac{4}{10} + \frac{6}{10^2} \quad (I')$$

ou: $$\frac{a}{b} = 3 + \frac{46}{10^2} = 3 + \frac{46}{100} \quad (II')$$

Novamente se verificam as mesmas idéias: separar o número inteiro, o que fizemos com uma vírgula, e escrever os algarismos simplesmente um ao lado do outro, estendendo o sistema de numeração decimal de posição:

$$\frac{a}{b} = a_r\ ,\ a_{r-1}\ a_{r-2} \dots a_1\ a_o$$

e, no exemplo: 3,46

3. $r < k$, então $k - r = m$

Teremos:

$$\frac{a}{b} = \frac{a_r}{10^m} + \frac{a_{r-1}}{10^{m-1}} + \dots + \frac{a_1}{10^{k-1}} + \frac{a_o}{10^k} \quad (I)$$

ou simplesmente como era:

$$\frac{a}{b} = \frac{a_r\ a_{r-1} \dots a_1\ a_o}{10^k} \quad (II)$$

Exemplo:

$$\frac{a}{b} = \frac{27}{1000} = \frac{27}{10^3}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{2 \times 10 + 7}{10^3}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{10^2} + \frac{7}{10^3} \quad (I')$$

Neste caso, sendo a fração própria, evidentemente não há parte inteira; mas, para identificarmos as notações, podemos pensar o número inteiro zero, para isso colocando o algarismo 0;

$$\frac{a}{b} = 0 + \frac{a_r}{10^m} + \frac{a_{r-1}}{10^{m+1}} + \ldots + \frac{a_1}{10^{k-1}} + \frac{a_o}{10^k}$$

e, no exemplo:

$$\frac{a}{b} = 0 + \frac{2}{10^2} + \frac{7}{10^3} .$$

Entretanto, com êste procedimento fica restaurado só a existência das duas partes: número inteiro a parte fracionária; mas, o princípio de posição não seria válido; para uniformizarmos, escrevemos colocando frações adicionais com numeradores nulos:

$$\frac{a}{b} = 0 + \frac{0}{10} + \frac{0}{10^2} + \ldots + \frac{0}{10^{m-1}} + \frac{a_r}{10^m} + \frac{a_{r-1}}{10^{m+1}} + ,$$

$$+ \ldots + \frac{a_1}{10^{k-1}} + \frac{a_o}{10^k}$$

e, no exemplo:

$$\frac{a}{b} = 0 + \frac{0}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{7}{10^3}$$

e, agora sim, podemos usar a mesma notação:

$$\frac{a}{b} = 0{,}00\ldots0a_r\ a_{r-1}\ \ldots\ a_1\ a_o$$

e, no exemplo:

$$\frac{a}{b} = 0{,}027$$

<u>Definição</u>:

Definimos <u>número decimal ou numeral decimal</u> à nova notação dos números fracionários decimais, para a qual adotamos a seguinte convenção:

1. Escreve-se só os algarismos do numerador da fração decimal.
2. Separa-se o número inteiro do número fracionário menor que a unidade por um vírgula.
3. Acrescenta-se algarismos 0 para restaurar o valor de posição do sistema de numeração decimal.

Em todo número decimal ficam portanto separados pela vírgula dois conjuntos de algarismos, os quais denomina-se: <u>parte inteira</u> e <u>parte decimal</u>.

A leitura é conforme com a representação, lê-se a parte inteira, agregando a palavra inteiros, e em seguida lê-se a parte decimal, agregando-se a palavra décimos, ou centésimos, ou milésimos, etc. conforme a parte decimal possua 1 algarismo, ou 2, ou 3, etc.; e, também em conformidade com a leitura do número misto - correspondente.

<u>Exemplos</u>:

a) 45,3 - quarenta e cinco inteiros, e três décimos;

b) 7,84 - sete inteiros, e oitenta e quatro centésimos;

c) 0,372 - zero inteiros, e trezentos e setenta e dois milésimos;

d) 0,038 - zero inteiros, e trinta e oito milé-
simos.

Costuma-se também ler sem a agregação das palavras, mas pronunciando a palavra vírgula separando as partes:

a') quarenta e cinco, vírgula três;

b') sete, vírgula oitenta e quatro;

c') zero vírgula, trezentos e setenta e dois;

d') zero vírgula, zero, trinta e oito.

Adota-se ainda outra forma, análoga à anterior; lê-se a parte inteira, pronuncia-se vírgula, e passa-se à leitura da parte decimal, lendo sucessivamente as classes.

Como para os numerais de números inteiros, os números decimais (numerais decimais) também são separados em classes de três algarismos, ou três ordens; assim, a parte inteira é separada da direita para a esquerda conforme os números inteiros; mas, a parte decimal é separada da esquerda para a direita, mas a primeira classe é constituída de uma ordem da parte inteira!(*)

<u>Esquema:</u>

| 1ª classe | 2ª classe | 3ª classe |

Cada classe é separada em três ordens:

1ª ordem : ordem das unidades;

2ª ordem : ordem dos décimos;

3ª ordem : ordem dos centésimos.

1ª Classe: classe das unidades decimais simples

2ª Classe: classe dos milésimos;

(*) A razão é dada pelas frações decimais de denominador $10^0 = 1$.

3ª Classe: Classe dos milionésimos.

4ª Classe: Classe dos bilionésimos, etc..

<u>Exemplo:</u>

4,2762580209

Temos:

4 unidades decimais simples ou 4 unidades simples;

2 décimos de unidades ou 2 décimos;

7 centésimos de unidades ou 7 centésimos;

6 milésimos;

2 décimos de milésimos;

5 centésimos de milésimos;

8 milésimos (milésimo de milésimo);

0 décimos de milionésimos;

2 centésimos de milionésimos;

0 bilionésimos (milésimo de milionésimo);

9 décimos de bilionésimos.

É usada também a separação das classes em 3 ordens mas só da parte decimal, o que não achamos o melhor, pois, neste caso, as classes não estarão em conformidade com as classes dos números inteiros; deverá se dizer neste caso:

1ª ordem : ordem dos décimos;

2ª ordem : ordem dos centésimos;

3ª ordem : ordem dos milésimos.

Da propriedade de um número fracionário decimal poder ser representado por várias frações decimais, equivalentes entre si, como:

$$\frac{3}{10} = \frac{30}{100} = \frac{300}{1000}, \text{ etc}$$

resulta que é permitido acrescentar algarismos 0 à direita de um número decimal, a adição e a subtração com números decimais pode sempre corresponder à adição de frações decimais, com o mesmo denominador:

$$\frac{a}{10^k} + \frac{b}{10^k} + \frac{a + b}{10^k}$$

De onde, a adição ou subtração com números decimais é feita operando como se inteiros fossem, tomando-os com o mesmo número de algarismos na parte decimal, o que corresponde a tomar o mesmo denominador:

<u>**Exemplos:**</u>

a) $3{,}2 + 14{,}58$

Como $3{,}2 = \frac{32}{10} = \frac{320}{100}$

e $14{,}58 = \frac{1458}{100}$

teremos:

$$3{,}2 + 13{,}58 = \frac{320}{100} + \frac{1458}{100} \quad \text{ou} \quad 3{,}20 + 14{,}58$$

$$= \frac{320 + 1458}{100}$$

$$= \frac{1778}{100} = 17{,}78$$

ou: $3{,}2 = 3 + \frac{20}{100}$

$$\frac{14{,}48 = 14 + \frac{58}{100}}{= 17 + \frac{78}{100} = 17{,}78}$$

Na prática faz-se:

$$\begin{array}{r} 3{,}20 \\ \underline{14{,}58} \\ 17{,}78 \end{array} +$$

Costuma-se também, para simplicidade, não anexar os algarismos 0, mas tomando o cuidado equivalente de se colocar as vírgulas em correspondência, de tal forma que se adicione (ou subtraia) para inteira com parte inteira, para decimal com parte decimal, unidade de uma ordem com a unidade da mesma ordem:

$$\begin{array}{r} 3,\ 2 \\ \underline{1\ 4,\ 5\ 8} \\ 1\ 7,\ 7\ 8 \end{array}$$

b) $38{,}65 - 14{,}3$ $\quad \begin{array}{r} 38{,}65 \\ \underline{14{,}30} \\ 24{,}35 \end{array} -$ $\quad$ ou $\quad \begin{array}{r} 38{,}65 \\ \underline{14{,}3} \\ 24{,}35 \end{array} -$

c) $25{,}2 - 7{,}683$ $\quad \begin{array}{r} 25{,}200 \\ \underline{7{,}683} \\ 17{,}517 \end{array} -$ $\quad$ ou $\quad \begin{array}{r} 25{,}2 \\ \underline{7{,}683} \\ 17{,}517 \end{array} -$

D.2. <u>MULTIPLICAÇÃO</u>

Como $\frac{a}{10^k} \times \frac{b}{10^{k'}} = \frac{a \times b}{10^{k+k'}}$

a multiplicação com números decimais também é feita como se fossem números inteiros; depois, coloca-se a vírgula separando tantos algarismos na parte decimal quanto é a soma dos números de algarismos das partes decimais dos fatôres.

Exemplos:

a) $2,5 \times 3,4$

$$\begin{array}{r} 2,5 \\ \times\ 3,4 \\ \hline 1\,0\,0 \\ 7\,5\ \ \\ \hline 8,5\,0 \end{array}$$

b) $0,3 \times 1,42$

$$\begin{array}{r} 1,4\,2 \\ 0,3 \\ \hline 0,4\,2\,6 \end{array}$$

D.3. DIVISÃO

Consideremos a divisão:

$$0,3 : 0,2$$

Teremos com a notação de frações decimais:

$$\frac{3}{10} : \frac{2}{10} = \frac{3 \times 10}{10 \times 2} = \frac{3}{2}$$

$\frac{3}{2}$ é fração basimal, portanto transformável em decimal:

$$\frac{3}{2} = \frac{3 \times 5}{2 \times 5} = \frac{15}{10} = 1,5$$

logo: $0,3 : 0,2 = 1,5$

Façamos o cálculo de outra maneira:

$$\frac{3}{2} = 3 : 2 \qquad \begin{array}{r|l} 3 & 2 \\ \hline 1 & 1 \end{array}$$

mas $1 : 2 = \dfrac{10 : 2}{10}$ $\qquad \begin{array}{r|l} 10 & 2 \\ \hline 0 & 5 \end{array}$

$$= \frac{5}{10} = 0,5$$

isto é: $\frac{3}{2} = 1 + 0,5 = 1,5$

Observemos ainda que êste segundo cálculo poderia ser feito continuando o algorítmo da divisão, pois bastaria ter acrescentado um algarismo 0 ao lado do algarismo 1, transformando-o em décimos, por isso colocando já uma vírgula no quociente:

$$\begin{array}{r|l} 3 & 2 \\ \hline 10 & 1,5 \\ 0 & \end{array}$$

Consideremos agora a divisão:

$$0,5 : 0,3$$

$$0,5 : 0,3 = \frac{5}{10} : \frac{3}{10} = \frac{5}{3}$$

temos: $5 : 3$ ou $\begin{array}{r|l} 5 & 3 \\ \hline 2 & 1 \end{array}$

Sabemos que $\frac{5}{3}$ não é basimal, isto é, o quociente de números decimais não é decimal; estamos na mesma situação que na divisão de inteiros (*):

$$5 : 3$$

cujo quociente não é número inteiro, é fracionário.

Vamos no entanto aplicar o mesmo procedimento que empregamos para a divisão anterior.

$$\frac{5}{3} = 5 : 3 \qquad \begin{array}{r|l} 5 & 3 \\ \hline 2 & 1 \end{array}$$

(*) Dizemos que a divisão sôbre o conjunto de inteiros, ou que a divisão sôbre o conjunto de números decimais não goza da propriedade de fechamento.

ou que $\frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3}$ ou $1 + 2 : 3$

$$2 : 3 = \frac{20 : 3}{10} \qquad \begin{array}{r|l} 20 & 3 \\ \hline 2 & 6 \end{array}$$

ou que $2 : 3 = \frac{6}{10} + \frac{2 : 3}{10} = 0,6 + \frac{2 : 3}{10}$

Apliquemos novamente o processo:

$$\frac{2 : 3}{10} = \frac{20 : 3}{100} \qquad \begin{array}{r|l} 20 & 3 \\ \hline 2 & 6 \end{array}$$

ou que: $\frac{2 : 3}{10} = \frac{6}{100} + \frac{2 : 3}{100} = 0,06 + \frac{2 : 3}{100}$

com êstes resultados temos sucessivamente:

$$0,5 : 0,3 = 1 + 2 : 3$$

$$= 1 + 0,6 + \frac{2 : 3}{10} = 1,6 + \frac{2 : 3}{10}$$

$$= 1 + 0,6 + 0,06 + \frac{2 : 3}{100} =$$

$$= 1,66 + \frac{2 : 3}{100}$$

isto é, nós vamos determinando um quociente cada vez melhor, pois as frações:

$$2 : 3 = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2 : 3}{10} = \frac{2}{30}$$

$$\frac{2 : 3}{100} = \frac{2}{300}$$

são cada vez menores.

Dizemos que o quociente de 0,5 por 0,3 é:

1 aproximado por falta a menos de uma unidade

ou: 1,6 aproximado por falta a menos de um décimo

ou: 1,66 aproximado por falta a menos de um centésimo, etc.

Cujo cálculo podíamos ter feito num só dispositivo, para isso acrescentando algarismos 0 ao lado dos restos:

$$\begin{array}{r|l} 5 & 3 \\ \hline 20 & 1,66 \\ 20 & \\ 2 & \end{array}$$

Êste exemplo e o anterior sugere a utilização para os números decimais do mesmo algorítmo de cálculo usado para divisão de números inteiros, determinando quocientes exatos, ou aproximados por falta conforme a aproximação desejada.

Exemplos:

a) $3,4 : 1,25$

$$3,4 = \frac{34}{10} = \frac{340}{100}$$

$$1,25 = \frac{125}{100}$$

logo:

$$3,4 : 1,25 = \frac{340}{100} : \frac{125}{100} = 340 : 125$$

340	125
0900	2,72
250	
00	

b) $5,36 : 0,8$

$$5,36 = \frac{536}{100}$$

$$0,8 = \frac{8}{10} = \frac{80}{100}$$

logo:

$$5,36 : 0,8 = \frac{536}{100} : \frac{80}{100} = 536 : 80$$

536	80
560	6,7
00	

c) $12,6 : 0,72$

$$12,6 = \frac{126}{10} = \frac{1260}{100}$$

$$0,72 = \frac{72}{100}$$

logo:

$$12,6 : 0,72 = \frac{1260}{100} : \frac{72}{100} = 1260 : 72$$

1260	72
540	17,5
360	
00	

d) $2,8 : 1,7$

ou: $2,8 : 1,7 = 28 : 17$

28	17
11	1

ou

28	17
110	1,6
0,8	

ou

28	17
110	1,64
080	
12	

ou

28	
110	1,647
080	
120	
01	

Desta extensão resulta o processo prático de igualar o número de casas decimais para se efetuar a divisão.

Outros processos podem ser obtidos; vejamos o seguinte raciocínio que conduz ao mesmo algorítmo de divisão usado para números inteiros:

Tomemos o exemplo b) $5,36 : 0,8$.

Teremos:

$$5,36 : 0,8 = \frac{536}{100} : \frac{8}{10}$$

$$= \frac{536}{10} : 8 = (53 + \frac{6}{10}) : 8$$

$$= 53 : 8 + \frac{6}{10} : 8 \text{ e, como}$$

53	8
5	6

$$= 6 + 5 : 8 + \frac{6}{10} : 8$$

$$= 6 + \frac{50}{10} : 8 + \frac{6}{10} : 8$$

$$= 6 + \frac{56 : 8}{10} \qquad \text{e, como} \qquad \begin{array}{r|l} 56 & 8 \\ \hline 0 & 7 \end{array}$$

$$= 6 + \frac{7}{10}$$

$$= 6,7$$

cujos dois cálculos podemos fazer num só dispositivo:

$$\begin{array}{r|l} \overline{5\ 3},6 & 8 \\ \hline 5\ 6 & 6,7 \\ 0 & \end{array}$$

isto é:

Transformando-se o divisor em inteiro multiplicando-se, por uma potência de dez conveniente, o divisor e o dividendo. Coloca-se no quociente a vírgula quando é empregado o primeiro algarismo da parte decimal do dividendo.

Exemplo:

4,5694 : 0,25

Como o divisor possui dois algarismos na parte decimal, o transformamos em inteiro multiplicando-o por 100, e idem multiplicamos o dividendo, logo:

4,5694 : 0,25 = 456,94 : 25

$$\begin{array}{l|l} 4\ 5\ 6,9\ 4 & 2\ 5 \\ \hline 2\ 0\ 6 & 18,27 \text{ (aproximado)} \\ \quad 0\ 6\ 9 & \\ \qquad 1\ 9\ 4 & \\ \qquad\quad 1\ 9 & \end{array}$$

ou continuando o cálculo por anexação de algarismos 0,

pois sabemos que sendo $25 = 5^2$, a divisão é exata se prolongarmos o cálculo suficientemente:

$$\begin{array}{l|l} 4\ 5\ 6,9\ 4 & 25 \\ \hline 2\ 0\ 6 & 18,2776 \\ \quad 0\ 6\ 9 & \\ \qquad 1\ 9\ 4 & \\ \qquad\quad 1\ 9\ 0 & \\ \qquad\qquad 1\ 5\ 0 & \\ \qquad\qquad\quad 0\ 0 & \end{array}$$

Nota: Na parte metodológica do livro o leitor encontrará um estudo comparativo dos vários processos.

E. GERATRIZES E DÍZIMAS PERIÓDICAS

Temos visto que as divisões de decimais era possível em alguns casos, mas em outros não, e fizemos uma extensão do algorítmo da divisão de inteiros.

A extensão do algorítmo da divisão serviu para determinar quocientes ou quocientes aproximados; sendo que há divisões em que podemos melhorar a aproximação dos quocientes tanto quanto queiramos, para isto prolongando suficientemente o cálculo com anexação de zeros.

Estas dificuldades surgiram do fato de existirem frações não-decimais que são não-basimais.

Como uma função qualquer a/b pode ser interpretada como o quociente a : b, há frações com as quais, efetuando a divisão do numerador pelo denominador, o quociente obtido é exato, ou o quociente obtido é apro ximado. Diremos que a <u>fração gerou um número decimal</u> ou que <u>gerou um número decimal indefinido</u>. Dizemos também que a fração é <u>geratriz</u> ou <u>geradora</u> do número decimal.

No caso da divisão não ser exata, os algarismos forçosamente se repetirão sistemàticamente; por isso, dizemos que se tem <u>número decimal periódico</u>, ou <u>dízima periódica</u> ou <u>decimal periódica</u>.

O conjunto ordenado de algarismos que se repetem é denominado <u>período da dízima</u>.

Há dois tipos de números decimais periódicos:

1. O período imediato à vírgula,
2. Há um conjunto de algarismos depois da vírgula, antes do período; é denominado parte <u>não-periódica</u> ou <u>não-período</u> ou <u>ante-período</u>

O primeiro tipo é chamada <u>simples</u> e o segundo é chamada <u>composta</u>.

<u>Exemplos</u>:

a) $\frac{3}{4}$

30 | 4
20 | 0,75
0

$\frac{3}{4} = 0{,}75$

b) $\frac{23}{3}$

23 | 3
20 | 7,6
2

Escrevemos: $\frac{23}{3} = 7{,}\bar{6}$

ou: 7,666...

ou: $7{,}\dot{6}$

ou: 7,(6)

ou: 7,|6|

c) $\frac{52}{7}$

52 | 7
30 | 7,428571
20
60
40
50
10
3

escrevemos:

$$\frac{52}{7} = 7{,}\overline{428571}$$

d) $\frac{8}{15}$

80 | 15
50 | 0,53
5

escrevemos:

$$\frac{8}{15} = 0{,}5\bar{3}$$

onde, $0{,}5\bar{3}$ é uma dízima periódica composta de período 3 e de não-período 5.

Transformada a fração em irredutível, caso o denominador só possui fatôres 2 ou 5, já sabemos que ela é basimal, portanto o quociente e número decimal exato ou decimal exata. Caso possua outros fatôres, é decimal periódica. Quando possui fatôres difirentes de 2 ou 5, gera decimal periódica simples; e, quando possui fatôres 2 ou 5 e outros fatôres, gera decimal periódica composta.

Exemplos:

a) $\frac{30}{40} = \frac{3}{4}$

Como $4 = 2^2$, 30/40 é basimal, logo é geradora de decimal exata:

$$30 \;\underline{|\;40} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{r|l} 30 & 4 \\ \hline 20 & 0,75 \\ 0 & \end{array}$$

então:

$\frac{30}{40} = 0,75$

b) $\frac{30}{110} = \frac{3}{11}$

Como $11 \neq 2$ e $11 \neq 5$, a fração é não-basimal ; portanto, é geradora de dízima periódica simples:

$$\begin{array}{r|l} 30 & 11 \\ \hline 80 & 0,27 \\ 3 & \end{array}$$

então: $\frac{30}{110} = \frac{\cancel{3}}{2\cancel{2}}$ $0,\overline{27}$

c) $\frac{30}{220} = \frac{3}{22}$

Como $22 = 2 \times 11$, a fração é não-basimal, e o denominador possui fatôres 2 e fator 11 que é diferente de 2 ou 5; portanto, a fração é geratriz de dízima periódica composta:

$$\begin{array}{r|l} 30 & 22 \\ \hline 80 & 0,136 \\ 140 & \\ 8 & \end{array}$$

então: $\frac{30}{220} = 0,1\overline{36}$

Obtenção das geratrizes

Conhecendo-se o número decimal, exato ou periódico, é possível determinar fàcilmente uma fração geratriz.

1. Geratriz de decimal exata.

Êste caso é o mais simples, pois sendo rigorosamente número decimal, basta colocar todos algarismos para numerador e colocar para denominador uma potência de dez igual ao número de algarismos da parte decimal.

Exemplos:

a. $2,3 = \frac{23}{10}$

b. $0,45 = \frac{45}{100}$

c. $0,450 = \frac{450}{1000}$

2. Geratriz de dízima periódica simples.

É bastante fácil a determinação da geratriz ; faremos através de um exemplo.

Seja: $0,\overline{42}$

Temos: $100 \times 0,\overline{42} - 1 \times 0,\overline{42} = 42,\overline{42} - 0,\overline{42}$

ou $99 \times 0,\overline{42} = 42$

ou que: $0,\overline{42} = 42/99$

Fazendo novos exemplos com outros números de algarismos no período, o leitor chegará a encontrar a regra seguinte, mas é aconselhável que o professor não aplique a regra e sim saiba utilizar o processo.

Regra: "Uma geratriz de uma dízima periódica simples- (de parte inteira nula) é uma fração que tem - para numerador o período e para denominador um número formado por tantos nóves quantos forem os algarismos do período".

Exemplos:

a. $2,\bar{5} = 2 + 0,\bar{5} = 2 + \frac{5}{9} = 2\,\frac{5}{9}^{(*)} = \frac{23}{9}$

b. $0,\overline{428} = \frac{428}{999}$

3. Geratriz de uma dízima periódica composta.

Seja: $0,3\overline{42}$

Temos:

$$1000 \times 0,3\overline{42} - 10 \times 0,3\overline{42} = 342,\overline{42} - 3,\overline{42}$$

ou: $990 \times 0,3\overline{42} = 339$

ou: $0,3\overline{42} = 339/990$

O leitor poderá fazer novos exemplos e determinará a regra seguinte, mas valem as mesmas recomendações anteriores.

Regra: "Uma geratriz de uma dízima periódica composta (de parte inteira não nula) é uma fração que - tem para numerador o número constituído de não-período, seguido do período, menos o não-período; e, para denominador, um número formado de tantos noves quantos são os algarismos do [illegible]o-

(*) Uti[illegible] [illegible]esso de multiplicar por 10 diretamente o número [illegible]


```
 30  | 22
 80    0,136
140
  8
```

então: $\frac{30}{220} = 0,1\overline{36}$

Obtenção das geratrizes

Conhecendo-se o número decimal, exato ou periódico, é possível determinar fàcilmente uma fração geratriz.

1. Geratriz de decimal exata.

Êste caso é o mais simples, pois sendo rigorosamente número decimal, basta colocar todos algarismos para numerador e colocar para denominador uma potência de dez igual ao número de algarismos da parte decimal.

Exemplos:

a. $2,3 = \frac{23}{10}$

b. $0,45 = \frac{45}{100}$

c. $0,450 = \frac{450}{1000}$

2. Geratriz de dízima periódica simples.

É bastante fácil a determinação da geratriz ; faremos através de um exemplo.

Seja: $0,\overline{42}$

Temos: $100 \times 0,\overline{42} - 1 \times 0,\overline{42} = 42,\overline{42} - 0,\overline{42}$

ou $99 \times 0,\overline{42} = 42$

ou que: $0,\overline{42} = 42/99$

$$= \frac{2}{10} + \frac{5}{100} + \frac{5}{1000} + \ldots\ldots\ldots$$

$$S = \frac{a}{1-q} = \frac{5/100}{1-1/10} = \frac{5/100}{9/10} = \frac{5}{90}$$

logo: $0{,}2\bar{5} = \frac{2}{10} + \frac{5}{90} = \frac{18+5}{90} = \frac{23}{90}$

F. EXERCÍCIOS

1. Forme os conjuntos de frações basimais das seguintes frações:

   a. 2/10 b. 5/10 c. 8/10 d. 0/10
   e. 1/100 f. 4/100 g. 23/100 h. 18/1000

2. Calcule uma outra fração decimal e eqüivalente a cada fração dada:

   a. 6/10 b. 5/100 c. 8/100 d. 10/100
   e. 24/100 f. 200/1000 g. 3/1000 h. 126/100

3. Determine quais frações são basimais ou não-basimais:

   a. 5/12 b. 16/60 c. 69/150 d. 14/320
   e. 15/99 f. 23/273 g. 28/88 h. 2400/6000

4. Escreva as frações do exercício 1 na forma de numerais decimais.

5. Escreva os numerais decimais das frações basimais do exercício 3.

6. Quais frações do exercício 3 são representantes de números fracionários decimais?

7. Faça as adições seguintes, transformando os números decimais em frações decimais:

   a. 2,4 + 1,8 b. 21,73 + 5,4
   c. 0,652 + 2,[illegible] d. 1,02 + 3,541

-período."

Exemplos:

a. $0{,}46\bar{2} = \frac{462-46}{900} = \frac{416}{900}$

b. $2{,}4\bar{3} = 2 + 0{,}4\bar{3} = 2 + \frac{43-4}{90} = 2 + \frac{39}{90} = 2\,\frac{39}{90} = \frac{219}{90}$ *

Nota: O leitor poderá empregar uma fórmula básica para obter geradoras, fórmula que fornece o limite da soma de uma progressão geométrica decrescente ilimitada:

$$S = \frac{a}{1-q}$$

onde:

a = 1º têrmo

q = razão ou quociente entre dois têrmos consecutivos.

Exemplos:

a) $0{,}\bar{2} = 0{,}2 + 0{,}02 + 0{,}002 + \ldots$

$$= \frac{2}{10} + \frac{2}{100} + \frac{2}{1000} + \ldots$$

$$S = \frac{a}{1-q} = \frac{2/10}{1-1/10} = \frac{2/10}{9/10}$$ logo: $0{,}\bar{2} = 2/9$.

b) $0{,}\overline{34} = 0{,}34 + 0{,}0034 + 0{,}000034 + \ldots$

$$= \frac{34}{100} + \frac{34}{10000} + \frac{34}{1000000} + \ldots$$

$$S = \frac{a}{1-q} = \frac{34/100}{1-1/100} = \frac{34/100}{99/100}$$ logo: $0{,}\overline{34} = 34/99$

c) $0{,}2\bar{5} = 0{,}2 + 0{,}05 + 0{,}005 + 0{,}0005 + \ldots$

(*) Aplique também o processo de multiplicar diretamente ao número 2,4[illegible]

$$= \frac{2}{10} + \frac{5}{100} + \frac{5}{1000} + \ldots\ldots\ldots$$

$$S = \frac{a}{1-q} = \frac{5/100}{1-1/10} = \frac{5/100}{9/10} = \frac{5}{90}$$

logo: $0,2\bar{5} = \frac{2}{10} + \frac{5}{90} = \frac{18+5}{90} = \frac{23}{90}$

F. EXERCÍCIOS

1. Forme os conjuntos de frações basimais das seguintes frações:

   a. 2/10 b. 5/10 c. 8/10 d. 0/10

   e. 1/100 f. 4/100 g. 23/100 h. 18/1000

2. Calcule uma outra fração decimal e eqüivalente a cada fração dada:

   a. 6/10 b. 5/100 c. 8/100 d. 10/100

   e. 24/100 f. 200/1000 g. 3/1000 h. 126/100

3. Determine quais frações são basimais ou não-basimais:

   a. 5/12 b. 16/60 c. 69/150 d. 14/320

   e. 15/99 f. 23/273 g. 28/88 h. 2400/6000

4. Escreva as frações do exercício 1 na forma de numerais decimais.

5. Escreva os numerais decimais das frações basimais do exercício 3.

6. Quais frações do exercício 3 são representantes de números fracionários decimais?

7. Faça as adições seguintes, transformando os números decimais em frações decimais:

   a. 2,4 + 1,8 b. 21,73 + 5,4

   c. 0,652 + 2,[illegible] d. 1,02 + 3,541

8. Faça as adições do exercício 7 na própria forma decimal.

9. Faça as subtrações seguintes, transformando os números decimais em frações decimais:

   a. 8,4 - 2,3 b. 25,34 - 12,15

   c. 8,7 - 1,54 d. 12,6 - 0,758

10. Faça as subtrações do exercício 9 na própria forma decimal.

11. Faça as multiplicações transformando em frações decimais:

    a. 0,4 x 0,8 b. 2,5 x 1,6

    c. 1,32 x 3,4 d. 4,5 x 25,238

12. Faça o exercício 11 na própria forma decimal.

13. Faça as divisões seguintes, transformando em frações decimais, obtendo para quociente uma fração basimal; transforme-a em fração decimal e depois em numeral decimal:

    a. 0,5 : 0,2 b. 1,4 : 0,5

    c. 1,2 : 0,7 d. 0,6 : 0,25

14. Tome a questão 13.a. e resolva-a determinando:

    a. 0,5 : 0,2 = 5 : 2,

    b. o quociente e o resto inteiros.

    c. considere o quociente indicado do resto pelo divisor como sendo uma fração de denominador 10,

    d. efetue a divisão indicada no numerador,

    e. adicione os dois quocientes e confira os resultados encontrados,

    f. Faça todo o cálculo anterior num só dispositivo prático de divisão, estude bem cada passagem comparando as passagens anteriores.

15. Faça a mesma coisa que fêz no exercício 14 com as questões 13.b. e 13.d.. Qual regra prática voce conclui do exercício 13.d. a respeito das casas decimais? Essa regra já estava verificada nos exercícios a. e b.?

16. Calcule os quocientes indicados com o dispositivo prático, empregando a regra de igualação do número de casas decimais:

a. 1,54 : 0,8
b. 23,4 : 0,02
b. 42,8 : 1,25
d. 386,952 : 62,5

17. Aplique na questão 13.c. o processo sugerido no exercício 14; como não dará exata a divisão sugerida na alínea d., depois de aplicar a alínea e., utilize novamente a alínea c.; assim sucessivamente.

Resposta: Quocientes aproximados:

1; 1,7; 1,71; 1,714; etc.

18. Faça todo cálculo do exercício anterior num só dispositivo de divisão.

19. Faça as divisões seguintes num só dispositivo de divisão; continue a empregar a regra de igualação do número de casas decimais:

a. 5,32 : 0,3 com aproximação a menos de um décimo
b. 0,85 : 1,3 com aproximação a menos de um centésimo
c. 34,6 : 0,75 com aproximação a menos de um milésimo.

20. Faça as divisões do exercício 19 aplicando o processo de transformação do divisor em inteiro.

21. Verifique se as frações seguintes são geradoras de números decimais ou de números decimais periódicos:

a. 3/8
b. 15/6
c. 18/7
d. 12/15
e. 10/60
f. 40/250

22. No exercício 21, quais são geradoras de dízimas periódicas simples ou compostas?

23. Obtenha os números decimais gerados por tôdas frações do exercício 21.

24. Obtenha frações geradoras (ou geratrizes) dos números decimais seguintes:

a. $32,4$
b. $2,\overline{3}$
c. $0,26$
d. $0,\overline{35}$
e. $0,4\overline{6}$
f. $0,23\overline{8}$
g. $1,0\overline{25}$
h. $0,54$
i. $0,\overline{20}$
j. $0,20$
k. $0,0\overline{2}$
l. $0,0\overline{20}$

25. Faça os seguintes cálculos:

a. $2,34 + 1,6 + 2,846 + 7,2 + 9$
b. $(2,5 - 0,42) + (2,63 - 1,8)$
c. $(12,5 \times 1,43) + (5,6 - 1,35)$
d. $(2,01 - 1,3) \times 0,46$
e. $(3,58 - 0,4) - 2,003$
f. $5,23 \times 100$
g. $42,4 \times 10$
h. $0,023 \times 1000$
i. $3,52 \times 1000$
j. $0,4 \times 100$
k. $5,23 \times 0,1$
l. $3,8 \times 0,01$
m. $25,6 \times 0,001$
n. $(3,8 + \frac{5}{10}) + (1,53 - \frac{2}{10})$
o. $[(0,\overline{3} + 2,4) \times 0,1] - 0,3$

*

Í N D I C E

CAPÍTULO I

Número e Numeração.................... pag. 1

CAPÍTULO II

As Operações Aritméticas............ " 25

CAPÍTULO III

Cálculo Prático das Operações........ " 85

CAPÍTULO IV

Divisibilidade Numérica............ " 110

CAPÍTULO V

Números Primos e Números Compostos... " 147

CAPÍTULO VI

Maximização e Minimização........... " 165

CAPÍTULO VI

Números Racionais.................. " 197

CAPÍTULO VII

Números Decimais.................. " 267

*

Do mesmo Autor:

G. Analítica c/ Programação Linear

Análise Combinatória

Estatistica

Progressões

Matemática Metodologia e Complementos
p/ Professores Primários

vol. II - Metodologia da Aritmética
vol. III - Complementos

"L. P. M."
imprimiu
rua maria antonia, 103
tel. 35-3304

RESPOSTAS SELECIONADAS

Série I (Capítulo I) - pp...

2.c: $\emptyset$; 2.f: $\{a\}$; 2.g: $\{i, j, k\}$; 4.e: $\{(a,j),(a,i),(a,k),(i,j),(i,i),(i,k)\}$; 6: Seis correspondências bi-unívocas.

Série II (Capítulo I) - pp...

3. Cláudia $\leftrightarrow$ um, Elizabete $\leftrightarrow$ dois, Luiz $\leftrightarrow$ três, Roberto $\leftrightarrow$ quatro; não é alterado.

Série III (Capítulo I) - pp...

2: zero; 5.b) treze - 13; 5.e) cinco mil, e novecentos e dez - 5.910; 8.b) sete; e sete milhões; 10.a) 6 524 346; 14 : 4.

Série IV (Capítulo II) - pp...

1.b: existência de elemento neutro; 1.d: 8 é sucessivo de 7;

1.e: propriedade comutativa, 1.d., propriedade transitiva da igualdade.

4.a: $9 + 8 = 9 + (7+1)$ por definição do sucessivo de 7, $(9+7)+1$ pela associativa, $16 + 1$ por resultado obtido anteriormente, 17 por definição de sucessivo de 16, $9 + 8 = 17$ pela transitiva.

5.c: $b + (a+c) = b+(c+a)$ pela comutativa, $(b+c)+a$ pela associativa, $(c+b)+a$ pela comutativa, $b+(a+c) = (c+b)+a$ pela transitiva.

Série V (Capítulo II) - pp...

1.b: $8 - 6 = 2 \Longleftrightarrow 6 + 2 = 8$

2: É 4, porque: $7 - x = 3 \Longleftrightarrow x + 3 = 7 \Longleftrightarrow x = 7 - 3 \Longleftrightarrow x = 4$

7: $a - b = 0 \Longleftrightarrow a = b + 0 \Longleftrightarrow a = b$, 0 é neutro.

8: Pela eqüivalência fundamental.

10: $a - b = x \Longleftrightarrow a = b + x$, $(a+c) - (b+c) \Longleftrightarrow a + c = b + c + y$, $\Longrightarrow a = b + y$ (lei do corte), pela transitiva: $b + x = b + y$, $\Longrightarrow x = y$.

12: $x = a - b \Longleftrightarrow a = b + x$, $x = c - d \Longleftrightarrow c = d + x$, $a+d = (b+x) + d \Longleftrightarrow a + d = b + (x + d) \Longleftrightarrow a + d = b + c$.

14: $a - (b + c) = x \Longleftrightarrow a = (b + c) + x$, $(a - c) - b = y \Longleftrightarrow (a - c) = b + y \Longleftrightarrow a = c + (b + y) \Longleftrightarrow a = (c+b) + y$, por transitividade: $(b + c) + x = (c + b) + y$, pela lei do corte: $x = y$; ou: $(a-c)-b = x \Longleftrightarrow a-c = b+x \Longleftrightarrow a = c+(b+x) \Longleftrightarrow a = (c + b) + x \Longleftrightarrow a - (c + b) = x \Longleftrightarrow a - (b + c) = x$.

Série VI (Capítulo II) - pp...

2.a: $(3 \times 4) \times 5 = 5 \times (3 \times 4)$ pela comutativa, $5 \times (3 \times 4) = (5 \times 3) \times 4$ pela associativa, $(3 \times 4) \times 5 = (5 \times 3) \times 4$ pela transitiva.

5: Aumenta do produto do outro fator pelo inteiro, pela propriedade distributiva.

6: $b = c + (b-c)$, logo: $a \times b = a \times [c+(b-c)] \Leftrightarrow a \times b = a \times c + a \times (b-c) \Leftrightarrow a \times b - a \times c = a \times (b-c)$

7: $b = b + 0 \Leftrightarrow b - b = 0 \Leftrightarrow a \times (b-b) = a \times 0 \Rightarrow a \times b - a \times b = 4 \times 0 \Leftrightarrow a \times b = a \times 0 + a \times b \Leftrightarrow a \times b + 0 = a \times 0 + a \times b \Rightarrow a \times 0 = 0.$

Série VII (Capítulo II) - pp...

1.c) $6:2 = 3 \Leftrightarrow 2 \times 3 = 6$

5.b) $20:(4:2)$; 5.d) $(48:12) : (8:2)$

6.a) Pela eqüivalência fundamental.

7.a) $[(a:b) \times c] \times b = (a:b) \times (c \times b) = (a:b) \times (b \times c) = [(a:b) \times b] \times c = a \times c$, $[(a \times c):b] \times b = a \times c$.

Pela transitiva: $[(a \times c):b] \times b = [(a:b) \times c] \times b$, e como $b \neq 0$, pela lei do corte: $(a \times c):b = (a:b) \times c$.

8: $[a - b = y \Leftrightarrow a = b + y] \Rightarrow a:c = (b+y):c \Rightarrow a:c = b:c + y:c \Leftrightarrow a:c - b:c = y:c \Leftrightarrow a:c - b:c = (a-b):c.$

9: $(a:b):c = y \Leftrightarrow a:b = c \times y \Leftrightarrow a = b \times (c \times y) \Leftrightarrow a = (b \times c) \times y$; $\Leftrightarrow a : (b : c) = y \Leftrightarrow a = (b : c) \times y$

Pela transitividade: $(b \times c) \times y = (b:c) \times y \Rightarrow b \times c = b:c \Leftrightarrow (b \times c) \times c = b \Leftrightarrow b \times (c \times c) = b \Rightarrow c \times c = 1 \Rightarrow c = 1$

Série VIII (Capítulo II) - pp...

1.c: $26 = 6 \times 4 + 2$ e $2 < 6$.

2: $x = d - 1 - r$, $D = d \times q + r$ com $0 \leq r < d$.

$D + x = d \times q + r' \Leftrightarrow D = d \times q + (r' - x)$, com $0 \leq r' < d \Rightarrow r' = d - 1$. - Pela transitividade: $r = r' - x \Leftrightarrow x = r' - r \Rightarrow x = d - 1 - r$. Na divisão exata $x = d-1$.

3: $D = 12 \times d + 5$, $D + d = 96 \Leftrightarrow D = 96 - d$, $96 - d = 12 \times d + 5 \Leftrightarrow 96 = 13 \times d \Rightarrow d = 7$

Ou: Sendo o dividendo $D + d$, o quociente alterou-se (ex.2), logo passa a ser $13 : 96 = 13 \times d + 5 \Rightarrow d = 7$.

6: 84, 9 : 33, 10 : 46, 12 : 12 e 40.

Série IX (Capítulo II) - pp...

5.c) $12^3 : 2^3 = 1728 : 8 = 216$

6.e: $7^2 = 49$; 6.h: $3^2 \times 3^4 = 3^6 = 729$; 6.1: 1.

9: $(a^b)^c = a^{b \times c} = a^{c \times b} = (a^c)^b$

Série X (Capítulo III) -pp...

F.1.1.c: $6 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 0 \times 10 + 8$

F.2.1.a: $7 \times 10^2 + 6 \times 10 + 8 = (2+a) \times 10^2 + (3+b) \times 10 + (4 + c) \Rightarrow a = 5$, $b = 3$ e $c = 4$.

F.3.1.b: $3 \times (3 \times 10^2 + 9 \times 10 + 2) = (3 \times 3) \times 10^3 + (3 \times 9) \times 10 + 3 \times 2$

$= 9 \times 10^2 + (2 \times 10 + 7) \times 10 + 6 = (9+2) \times 10^2 + 7 \times 10 + 6 = 11 \times 10^2 + 7 \times 10 + 6 = (1 \times 10 + 1) \times 10^2 + 7 \times 10 + 6$

$= 1 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 7 \times 10 + 6 = 1176.$

F.4.2: É 4, mais o quociente 3 de 1+6 = 7, pois 9+6 = 15, é pelo mesmo divisor 2, e o resto é 1. Isto é: 7:2 é 3 e o resto é 1, logo 15:2 é 4+3 = 7 e o resto é também 1.

Série XI (Capítulo III) - pp...

2: 8 e 32; 4: 8 e 6; 7: 24, 48 e 72
10: 46, 48, 50 e 52; 13: 54 e 23
15: 13, 26, 39, ... 143.

Série XII (Capítulo IV) - pp...

a) 3.c: 6; 3.e: 3; 4.a: não; 4.c: pode; 7.c: x=2; 7.f: x = 2 ou x = 8 ; 10.a.a': 5

b) 2: Seja o ímpar: $(2 \times k+1)$, temos: $(2 \times k+1)^2 = 4 \times k \times (k+1)+1$; se k é par tem-se: $8 \times m + 1$, se k é ímpar, $k + 1$ é par, e também se tem $8 \times m + 1$.

9: $k \times (k+1) \times (k+2)$

a) Sendo k ímpar, k+1 é par, logo o produto possui fator 2. Sendo k, número par, o produto também possui fator 2.

b) Sendo k múltiplo de 3, o produto possui também fator 3. Sendo k não múltiplo de 3, é do tipo:

$k = 3 \times m+1$ ou $3 \times m+2$, então $k+1 = 3 \times m+2$ ou $3 \times m+3 = 3 \times n$; e de qualquer forma possui fator 3.

c) Conclusão: $k \times (k+1) \times (k+2) = 2 \times 3 \times p = 6 \times p$.

Série XIII (Capítulo V) - pp...

2. Sim, o múltiplo que seja igual a êle mesmo. 4.a: Porque já foram cancelados, quando se fêz de 3 em 3. 9: A unidade.

11.b: $2 \times 3^3 \times 5$; 11.f: $2^3 \times 5^2 \times 3^2$; 16: 12, 17: 18.

Série XIV (Capítulo VI) - pp...

3.a: 40; 4e: 10; 4h: 35 ; 7.a: m.d.c.= 40, m.m.c.=120, pois 40 | 120 ; 10: 36, 11: q=8, então q'=1,ou 3, ou 5, ou 7, isto é, o menor pode ser: 36, ou 180, ou 252. 13.b: q+q'=9; logo q=1 e q' = 8, ou q = 2 e q'= 7, ou q=4 e q'=5, portanto, os números são: 12 e 96, ou 24 e 84, ou 48 e 60.; 18.a: (OD50)D10 = 50D10 = 10; 18.c: (1M8)M(12D4) = 8M4 = 8; Problema 3: Depois de 189h, descansos: 54h e 63 h. Problema 5:Com 30 flôres, formará 13.

Série XV (Capítulo VII) - pp...

5.a: x = 4; 5.d: x = 6; 6.a: 6/12; 6.e: 10/12; 6.f: 12/12 ; 10.a: 29/40; 10.b: 9/18; 12.a: 29/40; 12.b: 3/6 ou 1/2. 23a: 4/32; 25.a: 1/8.

Série XVI (Capítulo VI) - pp...

2: 27; 4: 65 000,00; 6: 90cm; 8: 80kg.; 10: 32; 12: 9 e 27.

Série XVII (Capítulo VII) - pp...

2: 20 anos; 4: 21 e 38; 6: 780, 520 e 390; 8: 30 metros; - 10: 18 crianças; 12: 48.

Série XVIII (Capítulo VIII) - pp...

1.a: $\left\{\frac{1}{5}, \frac{2}{10}, \frac{3}{15}, \frac{4}{20}, \frac{5}{25} \ldots\right\}$ 2.a: $\frac{60}{100}$; 2.b: $\frac{50}{10}$

11.a: $\frac{1}{10} \times \frac{8}{10} = \frac{32}{100} = 0{,}32$

19.a: 17,7; b: 0,65

24.a: 324/10; b: 2 3/9 ou 21/9; h: 20/99 ; i: 20/100;j:2/90 k: 20/990.

25.d: 0,3266; h: 23; k: 0,523; n: 5.63

-oOo-

ERRATA

Pág.	Linha	Onde se lê	Leia-se
02	1↑	infelize mentalidade	infeliz mentalidade
03	9↑	Como livro texto, sindo...	Como livro texto, sendo...
05	4↑	tenha colaborado.	tenham colaborado.
06	7↑	e Maria Roni	e Maria Reni
2	11	de m aluno	de um aluno
3	4	zio", etc.	zia", etc.
4	4↑	$=\{*, 0, \Delta, ?, \S, \$, \ , .\}$	$=\{*, 0, \Delta, ?, \S, \$, \ ,\}$
5	7↑	(Márcia; Renato), (Lígia; Renato)}	(Márcia; Renato), (Lígia; Eduardo) (Lígia; Renato)}
6	8	(a;b) = (b;a)	(a;b) = (b;a), sòmente para nomes
32	2↑	$\{[(a+b)+c)+c]+d...$	$\{[(a+b)+c\}+d....$
35	4	temos a subtração ...	temos na subtração ...
43	5	= (a-c)-b	= (a+c) - b
45	5	é como já vimos, é o...	é como já vimos, o...
48	5↑	são ternas ordenadas,	são ternas ordenadas*,
48	1↑		* a rigor pares
49	15	$((2;z);\Delta)\}$	$((2;z);\Delta), ((2;y); *), ((2;y);\Delta)\}$
65	10	com divisor uma...	com divisor 2 uma...
67	4	e a 0	e $a \neq 0$
78	1	$2^6:2 = ...$	$2^6:2^2 = ...$
83	4	nos	nós
87	9↑	2 33 6	236
115	4	$B=\{1,2,3,4,6,8,12,18,24\}$	$B=\{1,2,3,4,6,8,12,15,18,24\}$
122	3	que fugiram...	que fugiriam ...

Pág.	Linha	Onde se lê	Leia-se
128	1↑	2 306 nã é ...	2 306 não é ...
129	10↑	pro 9 (ou 3)	por 9 (ou 3)
131	1↑	por 8 é prático,	por 7 não é prático,
134	8	dela divisível por ...	cela divisível por ...
152	3	diferente do primos 2,	diferente dos primos 2,
159	4↑	fator primo P_o com ...	fator primo P_b com ...
206	11	os elementos se equivalem?	os elementos se equivalem;
210	6	sendo que cada ...	sendo que em cada ...
243	7↑	que denominou frações...	que denominou-se frações...
250	8↑	$\Rightarrow a \times b' \quad a' \times b$	$\Rightarrow a \times b' = a' \times b$
272	9 e 11	não é basimal,	é basimal,
292	6↑	= 3/22	$= 0{,}\overline{27}$
292	14 a 18	$0{,}\overline{342}$	$0{,}\overline{342}$

$$A \cup B = C$$

$n(A) = a$ $n(B) = b$ $n(C) = c$

Chamamos de ~~soma~~ de dois números inteiros ~~$a + b = c$~~

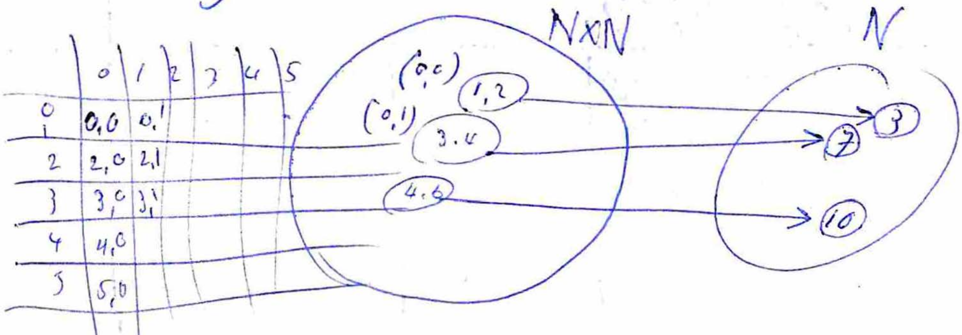
a e b a um número c tal que

c é o número elementos do conj. C que é o resultado da União de A e B.

$16 + 1 = 17$

indica-se $a + b = c$

$$(a, b) \longmapsto c$$



7 está à - - - - 9 $\Leftrightarrow$ 7 - - - 9.

6) Falsa ou Verdadeira.

a) $5 \notin Q$ (   ) b) $I \cup F = Q$ (   )

c) $Q^* = Q + \{0\}$ (   ) d) $\frac{4}{5} \notin I$ (   )

7) Foi aplicado: que conjunto, que propriedade que operação?

	Conj	Operação	Propriedad.
a) $\frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5}$			
b) $0,5 \times 1 = 0,5$			
c) $x \in Q, y \in Q$ $z \in Q$. Então $(x+y)+z = x+(y+z)$			
d) $\frac{a}{b} \in Q^*, \frac{b}{a} \in Q^*$ então $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$			