Ruy Madsen Barbosa

MATEMÁTICA, METODOLOGIA

e

COMPLEMENTOS

para Professôres Primários

VOLUME I

"L.P.M." editôra

Ao prezado
amigo
com um abraço
do
Ruy

8-1-1967
S. Paulo.

RUY MADSEN BARBOSA

MATEMÁTICA, METODOLOGIA
e
COMPLEMENTOS P/ PROF. PRIMÁRIOS

Aritmética teórico-prática

1 966

-GH00049-

A meus pais

meu reconhecimento

A minha espôsa

companheira e incentivadora

A meus filhos

alegria de nosso lar

PROFESSOR sou há anos,

MESTRE pretendo ser !

P R E F Á C I O

Entrego aos prezados leitores êste trabalho de Matemática, não "porque a nossa literatura correlata não possua outros trabalhos", não "porque não existam grandes obras dos diversos gêneros aqui desenvolvidos", "chavões" tão fáceis de serem empregados; mas, pura, categórica e simplesmente, por julgar os livros em nossa língua insuficientes aos fins que a êste destino.

Reuni nesta obra de Aritmética, os setores teoricos e práticos, a metodologia correspondente, e notas complementares à mesma, os quais constituem as três partes:

Primeira parte:

ARITMÉTICA TEÓRICO-PRATICA,

Segunda parte:

METODOLOGIA,

Terceira parte:

COMPLEMENTOS.

Como, é reconhecido por todos, vi no ensino da Aritmética do curso primário, já há vários anos, muitas falhas, quer de conceitos ou de processos, quer didáticos; passei a analisar mais cuidadosamente a verdadeira causa. Não me foi difícil encontrar uma pelo menos das grandes causas; raramente o culpado é o professor, mas em geral o mal está na sua formação, ou melhor, na pseudo-formação do professor primário.

Em Aritmética, o mal se agrava, em vista da própria seriação dos cursos normais de preparação de professôres para a Escola Elementar. Carregam-se os cursos com disciplinas, cujas finalidades e frutos são ótimos, mas em detrimento exagerado, em relação às necessidades mais próximas e específicas do trabalho prático, da labuta diária do educador. Isto sem entrar no mérito dos próprios programas; que, se não são inadequados, permitem um tratamento inadequado, distanciando bastante as teorias e técnicas, mesmo pedagógicas, das verdadeiras necessidades do professor com os educandos.

Durante alguns anos, passei a estudar os vários aspectos das necessidades, pesquisando a bibliografia possível,,observando as deficiências dos candidatos a exames de admissão; entrando em contato com professôres primários com professôres de Matemática do curso ginasial e normal, com professôres de prática do ensino, com os quais fui discutindo, colhendo material, sugerindo e acompanhando experimentações.

A partir de 1 961 iniciou-se, no Brasil, um movimento de modernização da Matemática, reflexos de movimentos idênticos iniciados poucos anos antes em países da Europa e da América do Norte. Tive, e tenho, a satisfação de participar de grupo de estudo e trabalho renovador, cujos contatos e reuniões, aliados aos meus estudos isolados, muniram-me de um elemento precioso para o tratamento moderno e melhor da Aritmética; quer no seu desenvolvimento teórico, quer como subsídio ideal para a aprendizagem da mesma.

Comecei então a fazer novos estudos, pesquisas e experimentações, que sancionaram na maioria das vezes as previsões; agora, utilizando noções da teoria dos conjuntos, procurando dar destaque às estruturas operatórias; que permitem um elo seguro entre a vida comum e a Aritmética. Essa Aritmética "abstrata" e por vêzes"árida", mas imprescindível, tanto para o homem médio, nos seus afazeres diários da vida, como para o homem técnico; ou mesmo para o simples e superficial entendimento das relações e grandezas numéricas do desenvolvimento científico moderno; ou como preparação para estudos posteriores, encontra nas noções de conjuntos, elementos úteis e adequados para o seu ensino, oferecendo ao professor uma linguagem mais comum ao educando, e mais uniforme e correta sob o ponto de vista matemático.

Ao iniciar a redação, tive oportunidade de encontrar nos livros do grupo de pesquisadores, de psicólogos, lógicos, matemáticos, e de epistemologia genética, material que me deu novas fôrças e convicção no caminho escolhido.

Outro ponto importante a destacar, na questão do ensino da Aritmética, é a infeliz mentalidade, que, parece-me, ter-se formado em muitas mentes com a má idéia do que seja uma verdadeira "escola nova". O aluno é considerado sujeito a complexos, a problemas sociais, pleno de necessidades e cuidados, motivá-lo, agradá-lo descer até ao aluno, dar liberdade a seus impulsos, dar jogos; mas, em geral esquece-se que êle possui um potencial enorme para a aprendizagem, abaixar o nível, descer até ao aluno, mas trazê-lo, suas capacidades são em geral desprezadas, rouba-lhes as oportunidades, deprecia-se demais os talentos. Sôbre o assunto, que não é problema só nosso, mas da própria terra de Dewey, é testemunho o interessante e oportuno artigo de Sterlyng M. McMurrin, U.S. Commissioner of Education: "What every inteligent woman should know about education", <u>In</u>: Ladies'Home Journal-March.1962.

Destas considerações resolvi reunir num só livro a teoria e a prática da Aritmética, e a sua metodologia; bem como, acrescentei a parte de Complementos, onde o professor encontrará capítulos complementares à Aritmética e seu ensino.

Dedicamos o livro com finalidades de uso a:

I. <u>Professôres Primários</u>:

Como livro de consulta, sendo que o professor encontrará, na segunda e terceira parte, material para guia de suas aulas; e, encontrará, na primeira parte, a conceituação, propriedades e regras da aritmética, ficando, evidentemente poupado de dedicar o seu tempo ao entendimento de demonstrações e de justificações.

II. <u>Futuros Professôres Primários</u>:

a) Como livro-texto, sendo que poderão seguir, na disciplina de matemática, dos cursos de formação, a primeira parte, estudando com todo cuidado os conceitos, as propriedades e as regras, bem como resolvendo as questões, exercícios e problemas. Estarão desta forma se preparando corretamente de uma maneira integral, para, quando no exercício da profissão, desempenhá-la perfeitamente, com precisão e rigor inerentes à disciplina, dedicando sua atenção e dotes pes-

soais a uma aprendizagem melhor; aplicando com acêrto
os ensinamentos e sugestões metodológicas e cuidados
psico-socio-biológicos.

b) Como livro-texto ou de consulta, para a
disciplina de prática de ensino ou metodologia de cál-
culo; quando utilizará a segunda e terceira parte do
livro. Nessa ocasião o futuro professor deverá reali-
zar apenas estudos de revisão e consultas na primeira
parte, para bem entender os cuidados que deverão ser
tomados. O futuro professor deverá ter sempre em men-
te, que os processos de ensino e aprendizagem não po-
dem servir apenas à transmissão de informações ou para
aquisição de regras, tolhendo desta maneira o racioci-
nio e a essência do pensamento matemático, em formação
e desenvolvimento; e, para o aniquilamento do espírito
científico, descobridor inventor, comparador, em em-
brião no aluno.

III. <u>Professor Primário em Aperfeiçoamento</u>:

Como livro de consulta; de modo particular,
deverá ser utilizada a segunda e a terceira parte, mas
estudando, discutindo em seminários, fazendo experimen
tações, ou comparando com as suas próprias experiên-
cias e práticas de ensino, efetuando consultas à pri-
meira parte, verificando a exatidão dos resultados que
se obtem com os diversos processos empregados; qual-
quer metodologia está ligada a disciplinas educacionais
gerais, mas está mais intimamente ligada à disciplina
em questão.

IV. <u>Professor de Matemática</u>:

a) Como livro-texto para os seus cursos de
matemática do curso normal, desenvolvendo a primeira
parte do livro, buscando também na terceira parte re-
cursos auxiliares. Caberá ao professor a exclusão de -
uma ou outra demonstração de propriedade ou teorema, -
mais difícil ou trabalhosa, da exigência nos trabalhos
de verificação de aprendizagem, conforme o nível desen
volvido ou nível da turma; sem contudo, deixar de mi-
nistrar ou pelo menos dar elementos a respeito.

É recomendável, ao professor de matemática,
leituras da segunda parte, para que possa orientar me-
lhor o seu curso, atendendo ao fato de que sua disci-
plina é essencial na formação de um professor, mas de
escola elementar. Assim, o ensino dos tópicos de Álge-
bra sôbre equações e sistemas de equações, para exem-
plificarmos, não devem ser meras repetições de proces-
sos e cálculos do curso ginasial. Devem ser orientados
a uma aprendizagem que forneça recursos hábeis ao futu
turo professor primário, para a resolução e determina-
ção de um raciocínio adequado aritmético.

b) Como livro de consulta para os seus cur-
sos de matemática ao curso ginasial, onde encontrará
elementos teóricos e práticos de aritmética, metodoló-
gicos, e complementares, melhorando e complementando
as suas aulas baseadas num livro-texto de curso gina-
sial.

V. <u>Professor de Prática de Ensino ou</u>
<u>Metodologia</u>:

Como livro de consulta, ou mesmo livro-tex-
to, tendo como fonte a segunda e terceira parte; com-
plementando os seus estudos gerais educacionais.

VI. <u>Futuros Professôres de Pedagogia</u>:

Como livro de consulta e fonte para estudos
de preparação para sua tarefa profissional, para semi-
nários de ensino, ou mesmo como ponto de referência pa
ra pesquisas pedagógicas comparativas de processos, sem
fugir à exatidão matemática.

E, acreditamos também de utilidade para os
cursos de didática especial de matemática, e para ins-
petores escolares do ensino primário.

Não podia deixar de agradecer a todos quan
tos tenham colaborado na confecção do trabalho; mas, pe
lo tempo decorrido desde o princípio da coleta de da-
dos, pelo grande número de professôres que contribui-
ram, seria humanamente impossível relacioná-los para

um agradecimento nominal, com o perigo de arriscar-me a não dar um ról completo; apenas gravo nestas linhas os meus sinceros agradecimentos e o meu muito obrigado a todos.

Confiante na importância dos objetivos propostos, e que as finalidades serão atingidas, julgo que o maior agradecimento e recompensa é a esperança em têrmos contribuido para a infância escolar.

Cumpre-me em particular, agradecer às professoras, que após a redação, fizeram experimentações da parte de aritmética teórico-prática.

De maneira especial, agradeço à minha querida espôsa, Maria do Carmo, também professora primária, que além de ter comigo discutido a totalidade dos tópicos, ítem por ítem, foi sempre a real incentivadora.

De maneira carinhosa, agradeço aos meus próprios filhos: Maria Regina, Reni, Róger, e Maria Reni, que sem o saber se prestaram também a várias observações e experiências; e, à mais nova, a Maria Rose, pequenina, que foi por muitas vêzes, com seu sorriso ou lágrimas, lenitivo e higiêne mental.

Agradecemos ao leitor que me honrar com sua leitura e também com sua crítica amiga.

Ruy Madsen Barbosa

CAPÍTULO I

NÚMERO E NUMERAÇÃO

Para podermos dar uma idéia da noção de número, daremos inicialmente alguns elementos sôbre conjuntos, o que também nos será útil nos capítulos posteriores.

A. Conjuntos

Já estamos familiarizados com a palavra conjunto; pois, na vida diária, o homem constantemente encontra-se em situações com:

- conjunto de alunos,
- conjunto de livros,
- conjunto dos habitantes de uma cidade,
- conjunto de irmãos,
- conjunto de frutas.

Empregam-se comumente os sinônimos: coleção, classe, etc.

Para representarmos os conjuntos podemos utilizar as letras latinas maiúsculas: A, B, C, etc; e, diremos conjunto A, e conjunto B, etc.

Quando conhecemos os elementos de um conjunto, podemos dar as representações dos seus nomes numa lista, e colocá-los entre os sinais $\{\ \}$, denominados "chaves", como nos seguintes exemplos:

a) O conjunto constituído das meninas: Eloisa, Eliana e Eliete, representamos por:

$\{$Eloisa, Eliana, Eliete$\}$

b) O conjunto constituido das letras: a, b, c, d, e e:

$\{a, b, c, d, e\}$.

Quando um elemento x pertence a um conjunto A indicamos:

$x \in A$; e, em caso contrário indicamos por $x \notin A$

B. Conjunto unitário

Diz-se conjunto quando se possui um só elemento, assim, admita-se que de um grupo de alunos pretende-se separar o conjunto de alunos que usam óculos e verifica-se então que do grupo, só um usa óculos; continuamos a dizer conjunto, de um aluno. A um conjunto com um só elemento chama-se conjunto unitário.

Indicamos da mesma maneira.

Assim, $\{a\}$ é a representação do conjunto unitário com o elemento "a".

É possível dar o conceito de conjunto unitário sem utilizar a palavra "um", assim dir-se-ia conjunto unitário A, a todo conjunto para o qual, qualquer que sejam os elementos x e y, tais que: $x \in A$, e $y \in A$, então $x = y$.

$\{\forall x. y \in A \quad x = y.\}$

C. Conjunto Vazio

Muitas vêzes a regra ou propriedade que caracteriza o conjunto, que determina quais os elementos que pertencem e os que não pertencem, é tal que o conjunto não possui elementos. Dizemos que o conjunto é vazio. Admita por exemplo, que as crianças vão retirando balas de um "vidro de balas" até esvaziá-lo; poderemos dizer "o vidro de balas está vazio" ou "vidro

de balas vazio", o que significa, que o "vidro" não possui balas. Anàlogamente, em situações semelhantes dizemos "estojo de lápis vazio", "garagem de autos vazio", etc.

Indicamos o conjunto vazio com : $\emptyset$

D. Sub-conjunto

Quando um conjunto A possui todos os seus elementos pertencentes a um conjunto B, dizemos que A é sub-conjunto de B.

Indicamos: $A \subset B$

e, lemos A é sub-conjunto de B, A é contido em B ou A é parte de B.

Caso B não seja também contido em A, A é chamado sub-conjunto próprio, ou que está contido pròpriamente.

Como o conjunto vazio não possui elementos, êle é contido em qualquer conjunto: $\emptyset \subset A$.

Exemplos

$\{$Maria, Marta$\} \subset \{$Maria, Márcia, Marta$\}$

$\{$Newton, Bete$\} \subset \{$Newton, Bete$\}$

$\{a, b, c,\} \subset \{a, x, b, c, y, z, d\}$

E. Igualdade

Conjuntos que possuem os mesmos elementos, são iguais; é claro que dados os conjuntos iguais A e B, qualquer um é sub-conjunto do outro.

Indicamos: $A = B$.

logo $A = B$, então $A \subset B$ e $B \subset A$; e, reciprocamente.

F. Conjuntos Cruzados e Conjuntos Disjuntos

Quando dois conjuntos A e B possuem elemen tos em comum, são denominados <u>conjuntos cruzados</u>, ou <u>que se cruzam</u>, ou ainda que se <u>interseccionam</u>.

Indicamos: $A \nparallel B$ ou $A \not\supset\!\subset B$.

<u>Exemplo</u>

$\{a, b, c, d, e\} \nparallel \{a, b, f, g\}$

Quando os conjuntos A e B não possuem elementos em comum, dizemos que são <u>disjuntos</u> ou <u>separados</u>.

Indicamos: $A \parallel B$ ou $A \supset\!\subset B$

<u>Exemplo:</u>

{Lúcia, Laíz} || {Lurdes, Leda, Letícia}

G. <u>União e Intersecção de Conjuntos</u>

Dados os conjuntos A ~~E~~ e B, ao conjunto C, constituido dos elementos que pertencem a um, pelo menos dos conjuntos A e B, denominados <u>conjunto união</u>.

Indicamos:

$$\boxed{A \cup B = C}$$

<u>Exemplos:</u>

a) $A = \{a, b, c, d\}$

$B = \{b, c, f, g, h\}$

$A \cup B = \{a, b, c, d, f, g, h\}$

b) $E = \{*, o, \triangle\}$

F = {? , §, $, '}

E ∪ F = {*, o, △, ?, §, $, '}

Dados os conjuntos A e B, ao conjunto C, constituido dos elementos comuns (elementos que pertencem simultâneamente aos conjuntos A e B, denominados <u>conjunto intersecção</u>.

Indicamos:

$$\boxed{A \cap B = C}$$

<u>Exemplos:</u>

Usando os conjuntos A, B, E e F anteriores, teremos:

$A \cap B = \{b, c\}$

$E \cap F = \emptyset$ (E e F são disjuntos)

H. <u>Produto Cartesiano de Conjuntos</u>

Dados os conjuntos A e B, chamamos <u>produto cartesiano</u>, de A e B, ao conjunto cujos elementos são todos os pares ordenados, onde o primeiro elemento do par pertence ao conjunto A, e o segundo elemento pertence ao conjunto B.

Indicamos:

$A \times B$

<u>Exemplo:</u>

A = {Cristina, Márcia, Lígia}

B = {Eduardo, Renato}

A × B = {(Cristina; Eduardo), (Cristina; Renato), (Márcia; Eduardo), (Márcia; Renato), (Lígia; Renato)} (Lígia, Eduardo)

<u>Notas:</u>

Considera-se par ordenado; assim caso $a \neq b$ temos $(a; b) \neq (b; a)$.

Observemos que os conjuntos {a, b} e {b, a} são iguais; mas, é muito comum situação em que a mudança de ordem dos elementos implica no aparecimento de novo ente.

Exemplos:

a) Mudando-se a ordem da latitude e longitude, obtem-se em geral outro ponto no globo terrestre.

b) Em "Heitor é pai de Ângela", se mudarmos a ordem dos nomes, devemos colocar "filha de". Pode acontecer de termos "Heitor é pai de Heitor", é claro que aqui (a; b) = (b; a), sòmente para nomes.

c) Em "Ernesto gosta de Vera", é bem possível que, trocando os nomes, deveremos colocar "não gosta".

I. Correspondência - Bi-unívoca

Consideremos para entendimento dêste conceito, o seguinte:

"Um antigo guarda (que não sabia contar), para verificar se os prisioneiros não fugiam, fazia-os passar por uma porta; e, para cada preso, que passava, colocava uma pequena pedra numa sacola; na manhã seguinte repetia a operação, mas retirando as pedras da sacola. Não sobrando pedra na sacola sabia que não houve fuga durante a noite.

Observemos, que do fato do guarda não saber contar não o impedia de descobrir as fugas.

O que êle fazia, inteligentemente, era colocar em correspondência bi-unívoca os elementos do conjunto de prisioneiros com os elementos do conjunto de pedras. A cada prisioneiro correspondia uma pedra, e a cada pedra correspondia um prisioneiro.

Êste procedimento era utilizado muitíssimo na antiguidade; e possìvelmente, nos dias atuais, por

não civilizados, para contagens de homens, guerreiros, rebanhos, caça, peles etc.

Esquemas:

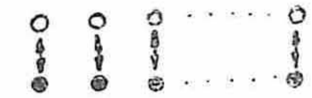


Fig.1

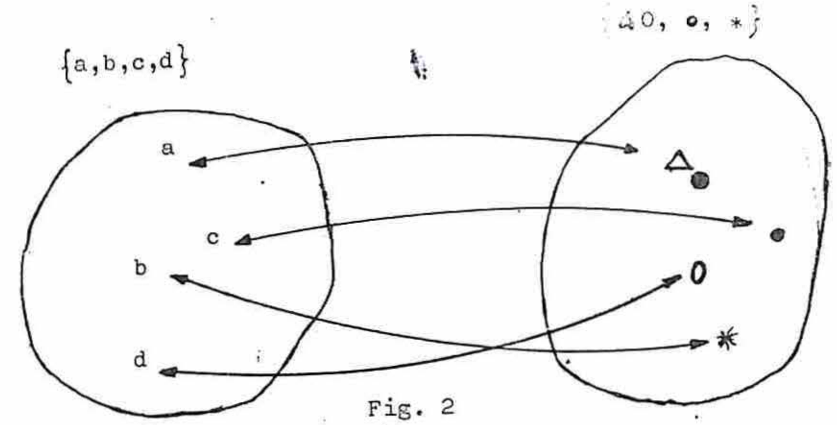


Fig. 2

De uma maneira geral, consideremos os conjuntos A e B. Admitamos que seja possível, associar a cada elemento de A um elemento de B, sem repetição, e também, recìprocamente, a cada elemento de B um e sòmente um elemento de A, sem repetição.

Dizemos, então, que entre os elementos dos conjuntos A e B foi fixada uma correspondência bi-unívoca, ou que os conjuntos estão em correspondência bi-unívoca, ou correspondência " um x um" (um por um).

Assim, se temos, um conjunto de discos, podemos associar a cada disco uma só capa, e a cada capa um só disco.

A cada menino de uma classe podemos associar o seu lugar, a cada lugar podemos associar um só menino; etc. Quando os conjuntos estão em correspondência bi-unívoca,

Dizemos, também que os conjuntos são eqüiva
dizemos

lentes; indicamos

$$A \sim B$$

e, lemos: A eqüivalente a B.

É importante notar que para os conjuntos eqüivalentes são válidas as leis:

a) Lei Reflexiva:

$$A \sim \cancel{B}\,A$$

Todo conjunto é eqüivalente (ou coordenável) com êle próprio;

~~{AMOR}~~ ~~{ROMA}~~ ~~{MORA}~~

b) Lei Simétrica:

Se $A \sim B$, então $B \sim A$;

c) Lei Transitiva:

Se $A \sim B$, e $B \sim C$, então $A \sim C$.

Nota:

Os elementos que se correspondem são denominados homólogos.

J. Exercícios:

Série I

1 - Dados os conjuntos:

A - {a, b, c, d, e}

B - {c, d, e, f}

C - {c, d, e, f, g, h}

D - {i, j, k}

E - {j, i, k}

F - {a, i}

Quais as relações existentes entre:

a) A e B b) B e C c) A e C

$A \supset B$ $B \subset C$ $A \not\subset C$ $A \cap C = \{c, d, e\}$

$A \cap D = \emptyset$ $A \parallel D$ $B \cap D = \emptyset$ $A \cap F = \{e\}$

d) A e D e) B e D f) A e F

g) C e D h) D $\overset{=}{e}$ E i) B e E

2 - No exercício 1, calcule:

a) $A \cup B$ b) $A \cap B$ c) $B \cap D$

d) $B \cap C$ e) $A \cup E$ f) $A \cap F$

g) $E \cup D$ h) $B \cap F$

3 - Escreva os raciocínios para mostrar as leis, reflexiva, simétrica, e transitiva, para eqüivalência de conjuntos.

4 - No exercício 1, determine:

a) $A \times D$ b) $D \times E$ c) $C \times F$

d) $F \times C$ e) $F \times E$

5 - Tenho as cadeiras: a e b; e, as meninas: Maria e Irma.

Quantas e quais correspondências bi-unívocas podemos estabelecer entre os conjuntos? Faça esquemas.

6 - Idem ao exercício 5, com os conjuntos:

{○, △, *} e {a, b, c}. Faça esquemas.

K. Número Natural

A noção correspondência bi-unívoca nos leva imediatamente a aceitar que a quantidade de elementos de A é igual à quantidade de elementos de B.

Êste caráter comum aos conjuntos nos dá a idéia, a noção de número, mais precisamente de número natural.

Dizemos que os conjuntos A e B, têm o mesmo número de elementos; cujo conceito, independe da natureza e da ordem dos elementos constituintes.

Caso os números de elementos dos conjuntos

$n(A) = a$
$n(B) = b$
$A \sim B \Leftrightarrow n(A) = n(B) \Rightarrow a = b$

A e B eqüivalentes sejam "a" e "b", respectivamente, dizemos que "a" e "b" representam o mesmo número, ou que são iguais, e escrevemos a = b.

Para a igualdade de números naturais são válidas as leis seguintes, as quais são conseqüências diretas de lei para conjuntos eqüivalentes:

a) Lei reflexiva: a = a

Todo número natural é igual a si próprio.

b) Lei simétrica:

Se a= b, então b= a.

c) Lei transitiva:

Se a = b, e b = c, então a = c.

L. Número Inteiro

Extendemos a noção de número a conjunto vazio, e dizemos que o número de elementos, de um conjunto vazio é zero.

O conjunto dos números naturais e, do número zero constitui o conjunto dos números inteiros, ou simplesmente, conjunto dos inteiros.

M. Desigualdade:

Quando procuramos por em correspondência bi-unívoca conjuntos A e B quaisquer, pode acontecer os casos:

a) É possível a correspondência (caso já estudado).

b) É possível colocar todos os elementos de A em correspondência com elementos de B, mas não reciprocamente. Nêste caso o conjunto A pode ser posto em correspondência bi-unívocamente com um sub-conjunto próprio de B.

Dizemos que A é prevalente ao conjunto B

(A é eqüivalente a um sub-conjunto próprio de B).

Fig. 3

Exemplo: $\begin{cases} A = \{\Delta, \bullet, *, o\} \\ B = \{a, b, c, d, e, f\}. \end{cases}$

$n(A) < n(B)$
$\Rightarrow a < b$

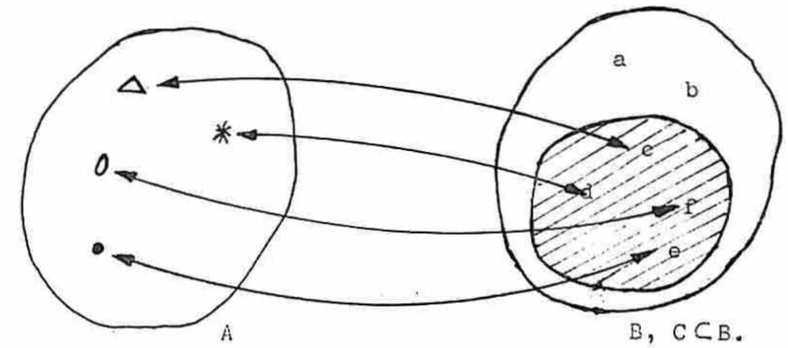


Fig.4

c) Não é possível colocar todos elementos de A em correspondência com os elementos de B; entretanto, todos de B podem ser colocados em correspondência bi-unívoca com os de A. Nêste caso o conjunto A é supervalente ao conjunto B. (Um sub-conjunto de A é eqüivalente a B).

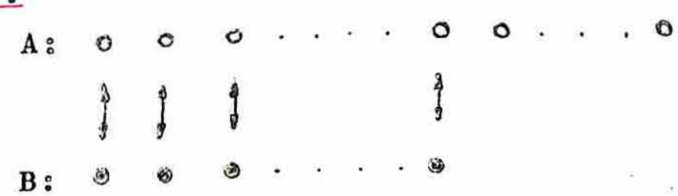
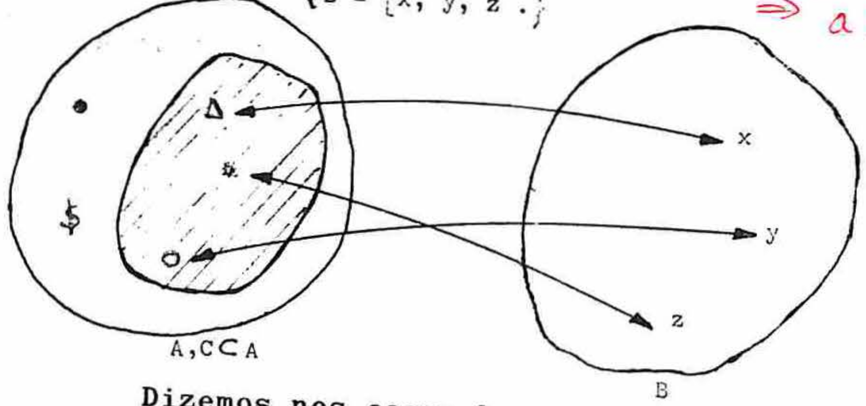


Fig. 5

Exemplo:

Conjuntos: $\begin{cases} A = \{\Delta, \bullet, *, \circ, \$\} \\ B = \{x, y, z\} \end{cases}$ $n(A) > n(B)$ $\Rightarrow a > b$



Dizemos nos casos b e c que os números são desiguais; em b dizemos que o número de elementos de A é <u>menor</u> que o número de elementos de B; em c dizemos que o número de elementos de A é <u>maior</u> que o número de elementos de B.

Caso os números respectivos sejam "a e b" indicamos:

$a < b$ (a menor que b, ou a inferior que b)

$a > b$ (a maior que b, ou a superior a b)

As relações anteriores são denominadas de <u>desigualdade</u>.

Resulta dos casos anteriores seguinte lei para os números inteiros:

<u>Lei da Tricotomia</u>:

"Dados os números inteiros "a e b" sempre existe uma e uma só das relações:

$\boxed{a = b, \quad a < b, \quad a > b}$

Para a desigualdade são válidas as leis: Relação de ordem

a) <u>Lei Irreflexiva</u>:

a não é menor que a, e a não maior que a.

b) <u>Lei Assimétrica</u>:

Se $a > b$, então $b < a$

c) <u>Lei Transitiva</u>:

Se $a < b$, e $b < c$, então $a < c$

N. <u>O conjunto dos naturais</u>.

Temos aprendido o número zero; no caso do conjunto unitário, dizemos, que o número é <u>um</u>.

Excluindo-se de um conjunto um elemento, e verificado, que ficamos com um conjunto unitário, dizemos que o número de elementos de conjunto é <u>dois</u>. Analogamente, diremos: <u>três</u>, <u>quatro</u>, <u>cinco</u>, <u>seis</u>, <u>sete</u>, <u>oito</u>, <u>nove</u>, <u>dez</u>, etc. (isto é em português)

Êstes nomes podem ser introduzidos também pela idéia de <u>sucessivo</u>: Pela Lei de Tricotomia, sabemos que dados os números "a" e "b" desiguais, ou $a < b$ ou $b > a$; seja $a < b$, diremos a precede b, ou que "b" sucede "a"; caso não exista número inteiro que seja maior que "a" e menor que "b", dizemos que "b" é o sucessivo de "a", ou sucessor de "a", e "a" é antecessor de "b". Denominamos então:

dois ao sucessivo de um,

três ao sucessivo de dois,

quatro ao sucessivo de três, etc.

Com o conjunto de naturais podemos agora utilizá-lo como referência para correspondências bi-unívocas. Para representação dêsse conjunto utilizam-se as palavras anteriormente dadas, (um, dois, etc.) ou sinais(*): os <u>algarismos</u> (hindú-árabes, no nosso caso).

Contagem

Consideremos um conjunto de n elementos. Separemos do conjunto um elemento, que diremos <u>elemento um</u>, ou <u>primeiro</u>.

Separemos ainda do conjunto um elemento, que diremos elemento dois ou segundo e juntemos ao primeiro, teremos conjunto de dois elementos.

Continuamos êste procedimento: elemento três ou terceiro, elemento quatro ou quarto, elemento cinco ou quinto, etc., até que tomaremos o último elemento que será o elemento n, ou enésimo, o qual irá reconstruir o conjunto de n elementos.

Êste processo é denominado: contar ou contagem.

O. Número Cardinal e Número Ordinal

Observemos que em contagem, está na verdade, colocando-se um conjunto em correspondência bi-unívoca com o conjunto dos naturais;

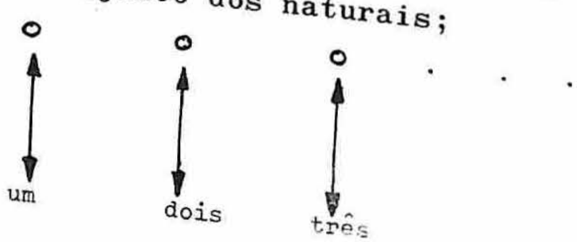


Fig. 7

porém, em ordem (como dizemos ... umente, na ordem natural). Assim, a cada elemento do conjunto corresponde um número natural, um número de ordem, mais precisamente um número ordinal.

O conjunto assim considerado é dito ordenado ou uma sucessão.

Chegamos à conclusão de que um número natural possui dois sentidos, um cardinal e outro ordinal. Evidentemente êstes sentidos estão ligados: Caso um conjunto possua, por exemplo, cinco elementos, (cinco, número cardinal), contando, o último elemento será o elemento cinco, ou quinto (número ordinal); recíproca-

mente, se o último elemento de um conjunto ordenado é o elemento cinco, o conjunto possui cinco elementos.

Considere, a exemplo, o conjunto de uma família.

7 anos 10 anos 12 anos 5 anos

{Luiz, Roberto, Elizabete, Cláudia}

Podemos por êste conjunto em correspondência, por exemplo, com o conjunto:

{um, dois, três, quatro}

sem nos interessarmos pelos elementos constituintes dos pares homólogos; temos no caso, que a família possui quatro crianças (número cardinal); porém se a correspondência é feita atendendo aos nascimentos (idades), por exemplo: Elizabete (mais velha), com o um primeiro), Roberto com o dois (segundo), Luiz com três (terceiro), Cláudia com quatro (quarto), temos fornecido a cada criança um número de ordem, ordinal, que indica a posição do elemento na sucessão.

P. Exercícios

Série II

1. Escreva os raciocínios para provar as leis, reflexiva, simétrica e transitiva da igualdade de números naturais.

2. Explique a prevalência, eqüivalência e supervalência, para o conjunto de moças e de rapazes de uma determinada classe, de um baile etc.

3. No exemplo da família dada no ítem O, faça a correspondência dos elementos do conjunto de crianças pela ordem das iniciais. O número cardinal é alterado?

4. Numa sala de aula os estudantes ocupam suas car

teiras, mas carteira é ocupada por um e um só estudante; os estudantes possuem um só livro, mas há alguns que não trouxeram o seu livro.

a) Como são os conjuntos:

I. De estudantes e o de carteiras?

II. De carteiras e o de livros (nessa ordem)?

III. De livros e o de estudantes (nessa ordem)?

b) Como são os números dos conjuntos das três perguntas anteriores?

Q. <u>Numeração</u>

O procedimento, adotado em quase tôdas nações para representar os números, é aquêle de base "dez" denominado <u>sistema de numeração decimal</u>.

O sistema decimal utiliza dez sinais, ou algarismos, (*) os quais são de origem hindú-árabe, por isto, chamados algarismos hindú-arábicos.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

zero, um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove,

Um <u>sistema de base "b"</u> ou <u>b-ádico</u>, consiste de "b" sinais; sendo um sinal para o zero, utiliza <u>valor de posição</u>, um sinal dolocado à esquerda de outro vale "b" vezes mais se estivesse naquela posição (**).

A numeração pode ser separada em dois aspectos, a <u>falada</u> e a <u>escrita</u>, intimamente ligados; entretanto, qualquer representação é <u>numeral</u>.

1) base
2) simbolos
3) Princípio da posição

Os nove primeiros números são denominados <u>unidades</u>.

O sucessivo do nove é o dez; cada dez números constitui uma <u>dezena</u>, e conforme o número de dezenas, possuem nomes especiais:

duas	dezenas	vinte
três	dezenas	trinta
quatro	dezenas	quarenta
cinco	dezenas	cincoenta (cinquenta)
seis	dezenas	sessenta
sete	dezenas	setenta
oito	dezenas	oitenta
nove d	dezenas	noventa

Os números compreendidos entre o dez e o vinte possuem os seguintes nomes:

o sucessivo do dez é o onze
onze é o doze
doze é o treze
treze é o catorze (quatorze)
catorze é o quinze
quinze é o dezesséis(dezasseis)
dezesseis é o dezessete (dezassete)
dezessete é o dezoito
dezoito é o dezenove (dezanove)

Os números compreendidos entre vinte e trinta, trinta e quarenta, etc., são formados com a parcela da menor dezena seguida do nome da unidade; assim temos:

vinte e um, vinte e dois, . . . vinte e nove;
trinta e um, trinta e dois,. . . trinta e nove;
- - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Da mesma forma, depois do noventa temos:

noventa e um, noventa e dois, . . . noventa e nove

O sucessivo de noventa e nove é o cem.

Cada cem unidades constitui uma centena ou cento. As centenas recebem os seguintes nomes:

uma centena	cem, centenas, cento
duas centenas	duzentos
três centenas	trezentos
quatro centenas	quatrocentos
cinco centenas	quinhentos
seis centenas	seiscentos
sete centenas	setecentos
oito centenas	oitocentos
nove centenas	novecentos

Os números compreendidos entre cem e duzentos, duzentos e trezentos, etc., formam-se com os nomes já dados, assim temos:

cento e um, cento e dois, etc.

Da mesma forma depois do novecentos teremos:

novecentos e um, etc., até novecentos e noventa e nove.

O sucessivo de novecentos e noventa e nove, é o número mil, ou milhar, ou milheiro.

Cada mil é contado da forma seguinte:

Um mil, dois mil, três mil, etc.

ou, um milhar, dois milhares etc.:

Os compreendidos entre os milhares são formados acrescentando-se os nomes já dados; assim, por exemplo, teremos após o oitenta e três mil, o oitenta e três mil e um, oitenta e três mil e dois, etc..

O sucessivo do novecentos e noventa e nove mil e novecentos e noventa e nove, que corresponde a mil milhares, chama-se milhão.

Os conjuntos de números seguintes, de mil em mil, recebem os nomes:

mil milhões	bilhão
mil bilhões	trilhão
mil trilhões	quatrilhão
mil quatrilhões	quintilhão
mil quintilhões	sextilhão ou sextilião
mil sextilhões	setilhão ou setilião
mil setilhões	octilhão ou octilião

Para os números compreendidos acrescenta-se os nomes já formados.

Os agrupamentos anteriores de mil em mil chaman-se classes:

classe das unidades simples

classe dos milhares

classe dos milhões

classe dos bilhões, etc.

Cada classe é separada em três ordens, que variam de dez em dez:

ordem das unidades

ordem das dezenas

ordem das centenas.

Vejamos agora, a numeração escrita:

Já vimos que o sistema de numeração decimal utiliza sòmente dez algarismos: os quais permitem re

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;

presentar todos os números.

Utiliza-se o <u>Princípio Fundamental</u>:

"<u>Um algarismo escrito à esquerda de outro, vale dez vêzes mais do que se estivesse ocupando o lugar dêsse outro</u>"

Do princípio verifica-se que:

1 - <u>Em qualquer classe</u>:

a) o algarismo representativo das dezenas fica à esquerda do algarismo das unidades,

b) o algarismo das centenas fica à esquerda do algarismo das dezenas.

2 - <u>Para as classes</u>:

a) a classe dos milhares fica à esquerda da classe das unidades simples,

b) a classe dos milhões fica à esquerda da classe dos milhares, etc. .

Do exposto verifica-se que um algarismo possui dois tipos de valôres:

<u>valor absoluto</u>, que é o valor algarismo isolado do número, como se estivesse representando sòmente um dos dez primeiros números; o outro, <u>valor relativo</u>, é o valor do algarismo dependente de sua posição na representação do número. Assim, o número representado por 8 304 (oito mil, trzentos e quatro), constituido de oito milhares, três centenas, nenhuma dezena e quatro unidades simples, possui:

Algarismo 4 com: valor absoluto: quatro (4)
valor relativo: quatro (4)

Algarismo 0 com: valor absoluto: zero (0)
valor relativo: zero (0)

Algarismo 3 com: valor absoluto: três (3)
valor relativo: três centos (ou trezentos (300)

Algarismo 8 com: valor absoluto: oito (8)
valor relativo: oito milhares - (8 000)

Com o conhecimento das operações "adição" e "multiplicação", que veremos mais tarde, o leitor verificará que o sistema de numeração decimal é um <u>sistema posicional multiplicativo</u> e <u>aditivo por justaposição à direita</u>.

Para a separação das classes, existe o Decreto Federal 4 267 (de 16/6/1939) e pelo que me consta, a Resolução de 21/6/1957, nº 707 do Conselho Nacional de Estatística, que no ítem L, de conformidade com o decreto, recomenda para que os números de mais de três algarismos (com exceção dos indicativos de anos do calendário) sejam separados por um espaço, em classes de três algarismos (a parte inteira, da direita para a esquerda, e a decimal da esquerda para a direita); sendo que nas tabelas manuscritas, os espaços poderão ser substituidos por pontos.

<u>Exemplos</u>:

a) Duzentos e oitenta e sete — 287 (*)

b) Quatro mil, e noventa — 4 090

c) Três milhões, quarenta e dois mil, e quatrocentos e seis — 3 042 406

Para a numeração dos ordinais usa-se o mesmo proce

(*) Pode-se acrescentar na leitura, ao final, a palavra "unidade" ou "inteiros"; assim diriamos duzentos e oitenta e sete unidades.

dimento dos cardinais, com as denominações:

a) primeiro, segundo, terceiro, quarto, quinto, sexto, sétimo, oitavo, nono;

b) décimo, vigésimo, trigésimo, quadragésimo, quinquagésimo, sexagésimo, septuagésimo, octagésimo, nonagésimo;

c) centésimo, duocentésimo, tricentésimo, quadricentésimo, etc. .

R.

Exercícios:

Série III

1 - O que existe de comum entre dois conjuntos equivalentes?

2 - Sendo todos conjuntos vazios iguais (unicidade do conjunto vazio), qual é o número cardinal dos seus elementos?

3 - Ordene do menor para o maior (ordenação crescente) os números: 5, 7, 8, 1, 0, 4.

4 - Idem (ordem decrescente).

5 - Escreva os nomes e as representações dos sucessivos de:

a) oito; b) doze; c) vinte e quatro; d) trezentos e nove; e) cinco mil, e novecentos e nove.

6 - Escreva as representações dos números seguintes:

a) trinta e dois mil, e oitenta e seis;

b) quatro bilhões, duzentos milhões, e quinhentos e setenta e dois;

c) cinco milhões, e três;

d) setenta milhões, e vinte e cinco mil.

7 - Escreva (ou leia) os nomes dos números:

a) 354; b) 8 750; c) 33 498; d) 60023 046;

e) 32 000 004; f) 5 329412; g) 7 026008053;

h) 1 038; i) 9 750 666.

8 - Qual é o valor absoluto e o relativo do algarismo 7 nos números:

a) 3 472; b) 57 083 320; c) 1375 200

9 - Escreva (ou leia) as quantidades de cada ordem dos números:

a) 3 526; b) 37 589; c) 70 035; d) 6 327529

e) 83 110390; f) 5003 042.

10 - Escreva os números que possuim:

a) Seis unidades de milhão, cinco centenas de milhar, duas dezenas de milhar, quatro unidades de milhar, três centenas, quatro dezenas e seis unidades simples;

b) Seis centenas de trilhão, quatro dezenas de bilhão, sete centenas e oito unidades de milhão, seis dezenas e cinco unidades de milhar, e três dezenas de unidades simples.

11 - Enuncie (ou leia) abreviadamente os números do exercício 10.

12 - Qual o número maior 8 ou 4? E o algarismo maior 8 ou 4?

13 - Qual é a metade do número 8? E do algarismo 8?

14 - Tire o algarismo 3 de 34?

15 - Escreva um número e um algarismo maior que 7?

16 - Escreva um número e um algarismo menor que 5?

Depois que aprender operações volte a resolver os seguintes exercícios:

1 - Um menino devia escrever o número 352, mas enganou-se, e trocou o algarismo 5 com o 2. De quanto foi a alteração?

2 - Um homem devia escrever o número:
oitenta e três milhões, duzentos e quarenta e cinco mil, e noventa e seis; mas enganou-se:

a) Na primeira vez escreveu 83 245 960
b) Na segunda vêz escreveu 83 024 956
c) Na terceira vêz escreveu 83 542 960
d) Na quarta vêz escreveu 83 245 096
e) Na quinta vêz escreveu 83 945 260

De quanto foram os diversos êrros.

*

DAR a noção de Produto Cartesiano.
1) Por [illegible]
2) $A \times B = \{(x,y)\ x \in A$ e $y \in B\}$

CAPÍTULO II

AS OPERAÇOES ARIMÉTICAS

A. ADIÇÃO

A.1. Introdução

Consideremos dois conjuntos $A = \{a,b,c,d,e\}$, $B = \{m,n,o,p,\}$

disjuntos, embaixo esquematizados:

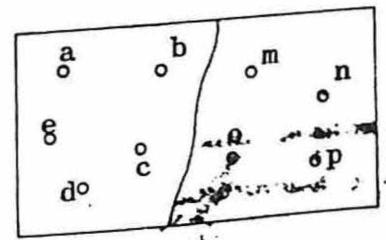


Fig. 8

aos quais correspondem os inteiros 5 e 4, respectivamente.

Formemos o conjunto união $A \cup B$, (*), temos:

$$A \cup B = \{a,b,c,d,e,m,n,o,p\}$$

de diagrama:

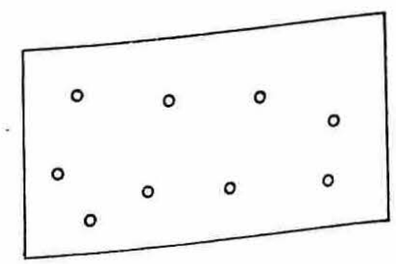


Fig. 9

O número inteiro 9 de elementos do conjunto união dizemos que é a soma dos inteiros 5 e 4, e indicamos:

(*) Ver capítulo I.

$$5 + 4 = 9$$

A. 2 - Definição

Dados dois números inteiros "a", e "b", a êles pode-se pensar sempre associados dois conjuntos diferentes A e B, que tenham "a e b" elementos; portanto, de uma maneira geral:

Chamamos soma de dois inteiros "a e b" a um número inteiro "c", número de elementos do conjunto C, união dos conjuntos A e B.

Indicamos:

$$\boxed{a + b = c}$$

A operação que ao par de inteiros (a; b) faz corresponder o inteiro "c" igual à sua soma é denominada a-dição.

Quando estamos operando para determinarmos a soma, dizemos que estamos somando ou adicionando.

- O sinal +, é o símbolo da operação de adicionar e lê-se "mais",
- O "a" e o "b" são os têrmos ou parcelas, ou adendos,
- O "c", como já vimos, é o resultado da adição e é chamado soma, ou total.

A. 3 - Propriedades

Do exposto, os leitores verificam que a adição goza das seguintes propriedades:

I - Propriedade Comutativa:

$$\boxed{a + b = b + a}$$

Regra: "A ordem das parcelas não altera a soma".

De fato, esta propriedade é conseqüência imediata da comutatividade da união de conjuntos; assim, é intuitivo que se reunimos os elementos dos conjunto A aos elementos do conjunto B, obtemos o mesmo conjunto caso reuníssemos os elementos do conjunto B aos elementos do conjunto A. (*)

II - Propriedade Associativa:

$$\boxed{(a + b) + c = a + (b + c)}$$

que é, também conseqüência da associatividade da união de conjuntos.

Esta propriedade é importantíssima, pois permite a supressão dos sinais indicativos de cada operação de adição, e reciprocamente, permitem que se adicione as parcelas conforme as nossas conveniências; a primeira aplicação nos será útil no algoritmo de cálculo para adicionarmos de uma só vêz várias parcelas.

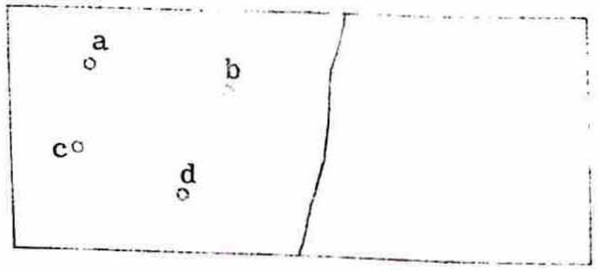
III - Existência do elemento neutro

O zero é o elemento neutro (indiferente) da adição, pois para qualquer inteiro "a" temos:

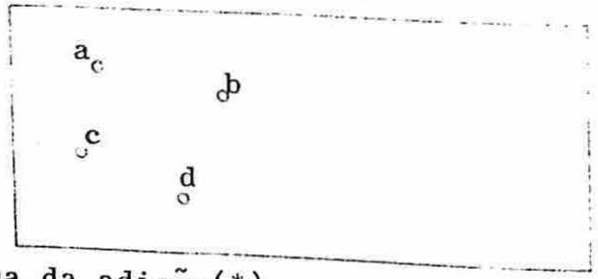
$$\boxed{a + 0 = 0 + a = a}$$

(*) A própria definição dada de união de conjuntos é independente da ordem em que são considerados os conjuntos.

que, anàlogamente às propriedades anteriores, é conseqüência da união de um conjunto A, qualquer, com o conjunto vazio $\emptyset$:



$A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$ Fig. 10



A.4. - Tábua da adição(*)

Da definição dada, de adição, verificamos que - para se achar a soma de dois inteiros reune-se num só conjunto os elementos de dois conjuntos e comtam-se os elementos, portanto, sob certo aspecto adição, é fazer uma contagem.

Deste fato resulta da conveniência de se obter certas somas mais simples e retê-las na memória.

A.4.1. Uma parcela é nula

Da propriedade do zero ser elemento neutro resulta que:

$$0 + 1 = 1 + 0 = 1$$

(*) ou tabela, usualmente chamada tabuada.

$$0 + 2 = 2 + 0 = 2$$
$$0 + 3 = 3 + 0 = 3$$
$$\vdots$$

A. 4. 2 - Uma parcela é a unidade (um)

Pela definição de sucessivo de um número sabemos que:

$1 + 1 = 2$ (dois é o sucessivo de um)
$2 + 1 = 3$ (três é o sucessivo de dois)
$3 + 1 = 4$ (quatro é o sucessivo de três)
$\vdots$

Pela propriedade comutativa sabemos também que:

$1 + 2 = 3$
$1 + 3 = 4$
$1 + 4 = 5$
$\vdots$

A. 4. 3 - Uma parcela é o dois

a)
$2 + 2 = 2 + (1 + 1)$ (2 é o sucessivo de 1)
mas: $2 + (1 + 1) = (2 + 1) + 1$ (propriedade associativa)
mas: $(2 + 1) + 1 = 3 + 1$ (3 é o sucessivo de 2)
mas: $3 + 1 = 4$ (4 é o sucessivo de 3)
logo $2 + 2 = 4$ (Lei transitiva da igualdade)

b)

$2 + 3 = 2 + (2 + 1)$ (3 é o sucessivo de 2)

mas: $2 + 2 + 1) = (2 + 2) + 1$ (propriedade associati va)

mas : $(2 + 2) + 1 = 4 + 1$ (Resultado a)

mas : $4 + 1 = 5$ (5 é o sucessivo de 4)

logo $2 + 3 = 5$ (Lei transitiva da i- gualdade)

Pode-se chegar ao resultado de maneira um pouco diferente

$2 + 3 = 3 + 2$ (Propriedade comutativa)

mas $3 + 2 = 3 + (1 + 1)$ (2 é o sucessivo de 1)

mas $3 + (1 + 1) = (3 + 1) + 1$ (Propriedade associativa)

mas $(3 + 1) + 1 = 4 + 1$ (4 é o sucessivo de 3)

mas $4 + 1 = 5$ (5 é o sucessivo de 4)

logo $2 + 3 = 5$ (Lei transitiva da igual dade)

c)

$2 + 4 = 2 + (3 + 1)$ (4 é o sucessivo de 3)

mas $2 + (3 + 1) = (2 + 3) + 1$ (Propriedade associati- va)

mas $(2 + 3) + 1 = 5 + 1$ (Resultado b)

mas $5 + 1 = 6$ (6 é o sucessivo de 5)

logo $2 + 4 = 6$ (Lei transitiva da igual dade)

Analogamente mostraríamos que:

$2 + 5 = 7$

$2 + 6 = 8$

$2 + 7 = 9$

$2 + 8 = 10$

e, pela propriedade comutativa:

$3 + 2 = 5$

$4 + 2 = 6$

$5 + 2 = 7$

. .

. .

. .

De maneira análoga estudar-se-ia as adições com o 3, 4, 5, 6, 6, 8, 9; e, estamos aptos a construir a tábua da adição, (*) onde a soma está localizada no cruzamento da linha e coluna que passam pelas parcelas (**).

+	0	1	22	3	4	5	6	7	8	9	. . .
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
6	6	7	8	.	.	.	.	.	.	.	
7	7	8	9	.	.	12	.	.	.	.	
8	8	9	10	.	.	.	.	.	.	.	
9	9	10	11	.	.	.	.	.	.	.	
-											
-											
-											

(*)- É uma tabela de dupla entrada.

(**) - Na tábua deixamos indicado com setas a adição: 5 + 7 = 7 + 5 = 12.

A. 5 - Lei do Corte (ou do cancelamento na adição)

A adição goza além das propriedades estruturais, estudadas em A. 3, de uma outra importantíssima e útil na resolução de problema, a qual é chamada: Lei do Corte, isto é:

Se $a + b = a + c$ então $b = c$

ou simbòlicamente: (*)

$$\boxed{a + b = a + c \Longrightarrow b = c}$$

A. 6 - Exercícios

Série IV

1 - Responda as seguintes questões

a) Por que: $4 + 3 = 3 + 4$?

b) Por que: $5 + 0 = 5$?

c) Por que: $(3 + 2) + 6 = 3 + (2 + 6)$?

d) Por que: $7 + 1 = 8$?

e) Por que: $1 + 7 = 8$?

f) Por que: $7 > 6$, $7 > 5$, $0 < 3$, $2 < 3$, $2 < 4$?

g) Por que: $6 + 2 > 6$?

2 - Mostre que as somas da tábua contendo a parcela 3.

3 - Idem ao exercício 2, contendo a parcela 4.

4 - Mostre que $9 + 8 = 17$; e, que $8 + 9 = 17$

5 - Utilize as propriedades para provar que:

a) $(a + b) + c = (c + b) + a$

b) $\{[(a + b) + c] + d\} + e = a + \{b + [c + (d + e)]\}$.

(*) O símbolo $\Longrightarrow$ de implicação, lê-se "implica que"

c) $b + (a + c) = (c + b) + a$

6 - Mostre que:

a) $3 = (1 + 1) + 1$ ou $1 + 1 + 1$

b) $4 = [(1 + 1) + 1] + 1$ ou $1 + 1 + 1 + 1$

B - SUBTRAÇÃO

B. 1 - Introdução

Consideremos um conjunto A, seja:

$A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$

no caso, com 9 elementos, e um sub-conjunto B, por exemplo de 3 elementos

$B = \{e, f, i\} \subset A$

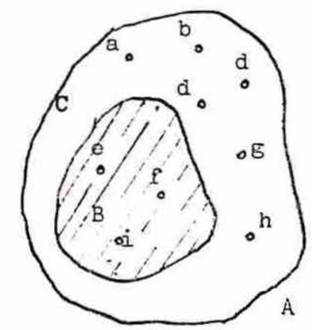


Fig.11

Ao sub-conjunto B corresponde um outro sub-conjunto C de A:

$C = \{a, b, c, d, g, h\}$

denomina-se complementar de B em relação a A, indica-se $Comp_A^B$. $\complement_A^B$

Ao número 6, de elementos do conjunto C, chamamos diferença dos inteiros 9 e 3, nessa ordem, e indicamos:

$$9 - 3 = 6$$

Nota: É interessante observar que esta definição é válida mesmo no caso de B = A, quando C é o conjunto vazio $\emptyset$, portanto a diferença é 0.

B. 2 - Definições:

Definição 1:

Dados dois números inteiros: $a \geq b$, (*) a êles pode-se pensar associados dois conjuntos A e B, com - $B \subset A$, que tenham "a" e "b" elementos respectivamente, portanto:

Chamamos diferença de dois números inteiros "a" e "b" ($a \geq b$), nessa ordem ao número "c", de elementos do conjunto C complementar do conjunto B em relação ao conjunto A.

Indicamos:

$$a - b = c$$

A operação, que ao par (a; b) faz corresponder o inteiro "c", igual à sua diferença, é denominada subtração.

Conseqüência:

Como a união dos conjuntos B e C é o conjunto A, verificamos pela definição de adição que:

$$b + c = a,$$

logo, sempre que existir

$$a - b = c$$

existirá $b + c = a$; e, recìprocamente; podemos dizer - que estas igualdades se equivalem, e escrevemos simbòlicamente:

(*) a maior ou igual a b.

$$\boxed{a - b = c \Longleftrightarrow b + c = a} \quad (*)$$

Desta eqüivalência fundamental da subtração segue o caráter da subtração como operação da adição. De onde temos na subtração dois aspectos (**).

1) Retirada do número maior, de tantas unidades quanto é o número menor.
2) Obtenção das unidades, que adicionadas resultam o número maior (ou igual).

Do segundo aspecto podemos obter uma definição eqüivalente para subtração:

Definição 2:

Dados dois números inteiros "a" e "b" ($a \geq b$), chama-se subtração desses números, nessa ordem, à operação que tem por objetivo, a obtenção do número inteiro "c", que adicionado ao segundo fornece o primeiro.

Quando estamos operando para determinarmos a diferença, dizemos, que estamos subtraindo, ou diminuindo: (*).

O sinal -, é o símbolo da subtração e lê-se "menos".

Os têrmos "a" e "b", nessa ordem, recebem nomes especiais; a é o minuendo (ou diminuendo), b é o subtraendo (ou diminuidor).

O "c", que é o resultado da subtração, é chamado diferença (ou resto, ou excesso).

(*) Será utilizada na prática de cálculo como prova, o símbolo de equivalência, indica a implicação ( ) nos dois sentidos.

(**) Nos serão úteis na parte metodológica.

(*) Operação: diminuição.

Notas: A rigor, como diferença não é definida para qualquer par (a; b) de inteiros, não existe a operação; a retirada da restrição $a \geq b$, permite ampliar o campo dos inteiros criando os números negativos.

B. 3 - Operações inversas da subtração

Numa adição, quando se conhece a soma e uma qualquer das parcelas, a determinação da outra parcela conduz à operação inversa que é a subtração.

Numa subtração, conhecida a diferença e um dos têrmos, a determinação do outro não conduz necessàriamente à operação de adição:

a) Seja a determinação do diminuendo x:

$$x - b = c$$

Pela eqüivalência temos:

$$x - b = c \Leftrightarrow b + c = x$$

b) Seja a determinação do diminuidor y:

$$a - y = c$$

Pela eqüivalência teremos:

$$a - y = c \Leftrightarrow y + c = a$$

que, não fornece ainda y; apliquemos novamente a eqüivalência:

$$y + c = a \Leftrightarrow a - c = y$$

No caso a), a operação inversa foi adição, mas no caso b), a operação inversa foi a própria subtração, o que nos obriga a distinguir a primeira como inversa à esquerda, e a segunda como inversa à direita.

Exemplos:

1) Qual é o diminuendo sabendo-se que o diminuidor é 4 e a diferença é 2?

Temos $x - 4 = 2$ ou
$$\begin{array}{r} ? \\ -\ 4 \\ \hline 2 \end{array}$$

Temos pela eqüivalência: $x = 4 + 2$, ou $x = 6$

2) Qual é o diminuidor, sabendo-se que o diminuendo é 8 e a diferença é 3?

Temos $8 - y = 3$ ou
$$\begin{array}{r} 8 \\ -\ ? \\ \hline 3 \end{array}$$

Pela eqüivalência: $y + 3 = 8$
e ainda pela eqüivalência: $y = 8 - 3$, ou $y = 5$

B. 4 - Propriedades

1) Propriedade não-comutativa

A subtração não goza da propriedade comutativa, pois, justamente, impomos a condição para a existência: que o diminuendo seja maior ou igual ao diminuidor; portanto mudando a ordem não será mais possível a operação.

Assim:

$5 - 2 = 3$, mas $2 - 5 = ?$ (não tem significado).

Nota: É importante frizar que a subtração é simplesmente não-comutativa, e não anti-comutativa, pois há casos em que podemos permutar, basta que $a = b$.

2 - Propriedade não-associativa

A subtração também não goza da propriedade associativa pois em geral:

$$(a - b) - c \neq a - (b - c)$$

visto que, no primeiro membro da desigualdade nós reduzimos inicialmente o número de elementos do maior conjunto; e, no segundo membro, nós reduzimos o número de elementos do sub-conjunto que vai ser separado (ou retirado), portanto em geral o segundo membro é maior. Outras vêzes nem é possível uma das associações.

<u>Exemplo</u>:

$$(9 - 4) - 1 = 5 - 1 = 4$$

mas $9 - (4 - 1) = 9 - 3 = 6$

Também é útil, observarmos que a subtração não é <u>anti-associativa</u>, pois há casos em que é válida a associatividade, como no exemplo seguinte:

$$(8 - 2) - 0 = 8 - (2 - 0)$$

3 - <u>Elemento neutro</u>

Como $a - 0 = a$

que, corresponde a separar como sub-conjunto e conjunto vazio (que não contém elementos), e, como $0 - a = a$? (em geral não tem sendito, pois $a \geq o$), concluimos que existe sòmente <u>elemento neutro à direita</u>, que é o <u>zero</u>.

B. 5 - <u>Tábua da subtração</u>

Como fizemos para a adição podemos construir uma tabela operatória para a subtração, para cuja construção nos basearemos naquela.

a) <u>Diminuendo 1</u>

Temos $1 - 0 = 1$ (elemento neutro à direita)

Temos $1 - 1 = 0$ (Pela eqüivalência ou 2ª definição)

$$1 = 1 + 0 \Longleftrightarrow 1 - 1 = 0$$

b) <u>Diminuendo 2</u>

Temos $2 - 0 = 2$ (elemento neutro a direita ou por eqüivalência)

Temos $2 - 1 = 1$ pela eqüivalência (ou 2ª definição):

$$2 = 1 + 1 \Longleftrightarrow 2 - 1 = 1$$

Temos $2 - 2 = 0$ pela eqüivalência (ou 2ª definição):

$$2 = 2 + 0 \Longleftrightarrow 2 - 0 = 2$$

Anàlogamente determinaríamos as outras diferenças. Na tábua escrevemos o diminuendo na primeira coluna vertical, e o diminuidor na primeira linha horizontal. Observem também que não existem números acima da diagonal, pois não é possível a operação.

−	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0									
1	1	0								
2	2	1	0							
3	3	2	1	0						
4	4	3	2	1	0					
5	5	4	3	2	1	0				
6	6	5	4	3	2	1	0			
7	7	6	5	4	3	2	1	0		
8	8	7	6	5	4	3	2	1	0	
9	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

B. 6 - <u>Propriedades particulares da subtração</u>

1) <u>Adicionando um inteiro ao diminuendo a diferença fica adicionada do mesmo inteiro.</u>

Dada a diferença a - b, devemos provar que:

$$\boxed{(a + c) - b = (a - b) + c}$$

ou, pela segunda definição a igualdade eqüivalente:

$$a + c = b + (a - b) + c$$

que, de fato é verdadeira, pois aplicando ao segundo membro a propriedade associativa obtemos:

$$b + (a - b) + c = b + (a - b) + c$$

e, como $b + (a - b) = a$

resulta: $a + c$

<u>Exemplo</u>: $7 - 2 = 5$

logo $(7 + 3) - 2 = 5 + 3 = 8$

1. Caso Dem. $a - b = r \Rightarrow a = r + b$
2ª def. $a + c = (r + b) + c \Leftrightarrow a + c = b + r + c$
$(a + c) - b = r + c$
$(a + c) - b = (a - b) + c$ c.q.d.

2) <u>Adicionando um inteiro ao diminuidor a diferença fica diminuida do mesmo inteiro.</u>

Dada a diferença: a - b, devemos provar que:

$$a - (b + c) = a - b) - c$$

Chamamos de x ao resultado de: $a - (b + c)$

Temos $a - (b + c) = x$ $\quad x + (b + c) = a$ (pela 2ª definição)

$x + (b + c) = a$ $\quad (x + b) + c = a$ (pela associatividade da adição)

$(x + b) + c = a$ $\quad (b + x) + c = a$ (pela comutatividade da adição)

$(b + x) + c = a$ $\quad b + (x + c) = a$ (pela associatividade da adição)

$a - b = r$ $\quad a - (b + c) = r - c$
$a = r + b$
$a + c = r + b + c \Rightarrow a + c - c = (b + c) + r - c$
$a = (b + c) + r - c$
$a - (b + c) = r - c$ c.q.d.

$b + (x + c) = a \Leftrightarrow x + c = a - b$ (pela 2ª definição de subtração)

$x + c = a - b \Leftrightarrow x = (a - b) - c$ (pela 2ª definição de subtração)

que é, o que pretendíamos provar.

<u>Exemplo</u>: $7 - 2 = 5$

logo: $7 - (2 + 3) = 5 - 3 = 2$

3) <u>Subtraindo ao diminuidor um inteiro a diferença fica diminuida do inteiro.</u>

Dada a diferença: a - b, devemos provar que:

$$\boxed{(a - c) - b = (a - b) - c}$$

que, eqüivale pela segunda definição de subtração a provarmos que:

$$a - c = [(a - b) - c] + b$$

mas, pela propriedade 1:

$$[(a - b) - c] + b = [(a - b) + b] - c$$

e, pelo exercício 9 (definição de subtração):

$$[(a - b) + b] = a$$

de onde, resulta de fato: $a - c$

<u>Exemplo</u>: $7 - 2 = 5$

logo $(7 - 3) - 2 = 5 - 3 = 2$

4) <u>Subtraindo do diminuidor um inteiro a diferença fica adicionada do inteiro</u>

Devemos provar que:

$$\boxed{a - (b - c) = (a - b) + c}$$

Chamaremos de x o resultado do primeiro membro. Temos

$a - (b - c) = x \Leftrightarrow a = (b - c) + x$ (2ª difinição de diferença)

$\Leftrightarrow a = (b + x) - c$ (Propriedade 1)

$\Leftrightarrow a + c = b + x$ (2ª definição)

$\Leftrightarrow (a + c) - b = x$ (2ª definição)

$\Leftrightarrow (a - b) + c = x$ (Propriedade 1).

Exemplo: $7 - 4 = 3$

logo: $7 - (4 - 2) = 3 + 2 = 5$

B. 7 - Exercícios

Série V

1 - Responda as seguintes questões

a) Por que $7 - 2 = 5$?

b) Por que $8 - 6 = 2$?

c) Por que $6 - 0 = 6$?

d) Por que $4 - 4 = 0$?

2 - Numa subtração o diminuendo é 7, e a diferença é 3, qual é o diminuidor? Por que?

3 - Numa subtração, o diminuidor é 5 e a diferença é 2, qual é o diminuendo? Por que?

4 - Dê exemplo em que a subtração é comutativa.

5 - Idem, associativa.

6 - Dê um exemplo de não-associatividade.

7 - Mostre que se $a - b = 0$ então $a = b$

8 - Mostre que: $(a + b) - b = a$

9 - Mostre que: $(a - b) + b = a$

10 - Mostre que: $a - b = (a + c) - (b + c)$

11 - Mostre que: $a - b = (a - c) - (b - c)$

12 - Mostre que para tôda equidiferença $a - b = c - d$, é válida a igualdade $a + d = b + c$

RESPOSTAS SELECIONADAS

Série I (Capítulo I) - pp...

2.c: $\emptyset$; 2.f: $\{a\}$; 2.g: $\{i, j, k\}$; 4.e: $\{(a,j),(a,i),(a,k),(i,j),(i,i),(i,k)\}$; 6: Seis correspondências bi-unívocas.

Série II (Capítulo I) - pp...

3. Cláudia $\leftrightarrow$ um, Elizabete $\leftrightarrow$ dois, Luiz $\leftrightarrow$ três, Roberto $\leftrightarrow$ quatro; não é alterado.

Série III (Capítulo I) - pp...

2: zero; 5.b) treze - 13; 5.e) cinco mil, e novecentos e dez - 5.910; 8.b) sete; e sete milhões; 10.a) 6 524 346; 14 : 4.

Série IV (Capítulo II) - pp...

1.b: existência de elemento neutro; 1.d: 8 é sucessivo de 7;

1.e: propriedade comutativa, 1.d., propriedade transitiva da igualdade.

4.a: $9 + 8 = 9 + (7+1)$ por definição do sucessivo de 7, $(9+7)+1$ pela associativa, $16 + 1$ por resultado obtido anteriormente, 17 por definição de sucessivo de 16, $9 + 8 = 17$ pela transitiva.

5.c: $b + (a+c) = b+(c+a)$ pela comutativa, $(b+c)+a$ pela associativa, $(c+b)+a$ pela comutativa, $b+(a+c) = (c+b)+a$ pela transitiva.

Série V (Capítulo II) - pp...

1.b: $8 - 6 = 2 \Leftrightarrow 6 + 2 = 8$

2: É 4, porque: $7 - x = 3 \Leftrightarrow x + 3 = 7 \Leftrightarrow x = 7 - 3 \Leftrightarrow x = 4$

7: $a - b = 0 \Leftrightarrow a = b + 0 \Leftrightarrow a = b$, 0 é neutro.

8: Pela eqüivalência fundamental.

10: $a - b = x \Leftrightarrow a = b + x$, $(a+c) - (b+c) \Leftrightarrow a + c = b + c + y$, $\Rightarrow a = b + y$ (lei do corte), pela transitiva: $b + x = b + y$, $\Rightarrow x = y$.

12: $x = a - b \Leftrightarrow a = b + x$, $x = c - d \Leftrightarrow c = d + x$, $a+d = (b+x) + d \Leftrightarrow a + d = b + (x + d) \Leftrightarrow a + d = b + c$.

14: $a - (b + c) = x \Leftrightarrow a = (b + c) + x$, $(a - c) - b = y \Leftrightarrow (a - c) = b + y \Leftrightarrow a = c + (b + y) \Leftrightarrow a = (c+b) + y$, por transitividade: $(b + c) + x = (c + b) + y$, pela lei do corte: $x = y$; ou: $(a-c)-b = x \Leftrightarrow a-c = b+x \Leftrightarrow a = c+(b+x) \Leftrightarrow a = (c + b) + x \Leftrightarrow a - (c + b) = x \Leftrightarrow a - (b + c) = x$.

$a - (b - c) = x \Leftrightarrow a = (b - c) + x$ (2ª difinição de diferença)

$\Leftrightarrow a = (b + x) - c$ (Propriedade 1)

$\Leftrightarrow a + c = b + x$ (2ª definição)

$\Leftrightarrow (a + c) - b = x$ (2ª definição)

$\Leftrightarrow (a - b) + c = x$ (Propriedade 1).

Exemplo: $7 - 4 = 3$

logo: $7 - (4 - 2) = 3 + 2 = 5$

B. 7 - Exercícios

Série V

1 - Responda as seguintes questões

a) Por que $7 - 2 = 5$?

b) Por que $8 - 6 = 2$?

c) Por que $6 - 0 = 6$?

d) Por que $4 - 4 = 0$?

2 - Numa subtração o diminuendo é 7, e a diferença é 3, qual é o diminuidor? Por que?

3 - Numa subtração, o diminuidor é 5 e a diferença é 2, qual é o diminuendo? Por que?

4 - Dê exemplo em que a subtração é comutativa.

5 - Idem, associativa.

6 - Dê um exemplo de não-associatividade.

7 - Mostre que se $a - b = 0$ então $a = b$

8 - Mostre que: $(a + b) - b = a$

9 - Mostre que: $(a - b) + b = a$

10 - Mostre que: $a - b = (a + c) - (b + c)$

11 - Mostre que: $a - b = (a - c) - (b - c)$

12 - Mostre que para tôda equidiferença $a - b = c - d$, é válida a igualdade $a + d = b + c$

13 - Mostre por raciocínio com conjuntos e sub-conjuntos as quatro propriedades particulares da subtração.

14.- Mostre que: $a - (b + c) = (a - c) - b$

15 - Mostre que: $a - (b - c) = (a + c) - b$

C. Multiplicação

C.1. Introdução

Recordemos do capítulo I que dados os conjuntos

$A = \{a, b, c, d, e\}$

$B = \{1, 2\}$

o produto cartesiano desses conjuntos, nessa ordem, é dado por:

$A \times B = \{(a; 1), (a; 2), (b; 1), (b; 2), (c; 1), (c; 2), (d; 1), (d; 2), (e; 1), (e; 2)\}$,

isto é, conjunto de todos pares ordenados $(x;y)$ que podemos formar, com x pertencendo ao conjunto A ($x \in A$), e y pertencendo ao conjunto B ($y \in B$).

Assim, para fixarmos bem êste conceito e introduzirmos uma nova operação, imaginemos o seguinte problema:

Numa sala estão 2 rapazes: R_1 e R_2; e, 3 moças: M_1, M_2, e M_3. Pergunta-se quais e quantos casais diferentes poderemos formar?

Coloquemos em têrmos de conjunto, seja R o conjunto de rapazes, e M o de moças:

$R = \{R_1, R_2\}$

$$M = \{M_1, M_2, M_3\}$$

é claro que devemos considerar todos os pares possíveis tendo um elemento do conjunto R e um elemento do conjunto M; isto é, a primeira parte da pergunta é respondida pelo conjunto produto cartesiano de R por M:

$$R \times M = \{(R_1; M_1), (R_1; M_2), (R_1; M_3)\ (R_2; M_1), (R_2; M_2), (R_2; M_3)\}$$

A segunda parte seria respondida com o número 6, número de elementos do conjunto

A êste número 6 denominamos produto do número 2 pelo número 3 (ou produto aritmético do 2 pelo 3), e indicaremos:

$$2 \times 3 = 6 \text{ ou } 2 . 3 = 6$$

C. 2 - Definição I

Dados dois números inteiros "a" e "b", a êles pode-se associar dois conjuntos A e B, que tenham "a" e "b" elementos respectivamente; portanto, de maneira geral:

Chamamos produto de dois inteiros "a" e "b" a um inteiro "c", número de elementos do conjunto C, produto cartesiano dos conjuntos A e B:

Indicamos:

$$a \times b = c \text{ ou } a . b = c$$

A operação que ao par de inteiros (a; b) faz corresponder o inteiro "c" igual ao seu produto é denominada multiplicação.

Quando estamos operando para determinarmos o produto, dizemos que estamos multiplicando.

O sinal x (ou .), é o símbolo da operação de multiplicar e lê-se "vêzes", ou "multiplicado por"

O "c", é como já vimos, é o resultado da multiplicação, e é o chamado produto

O "a" e o "b" são denominados multiplicador e multiplicando, denominações que nós preferimos utilizar conforme o sentido empregado ao têrmo, como atuante ou paciente, o que será precisado quando estudarmos a segunda definição. Ao "a" e "b" chamamos também indistintamente de fatôres: primeiro e segundo fator.

C.3. - Relação com a adição.

No problema de rapazes e moças separemos o conjunto resposta em conjuntos, tendo cada um, só pares com um determinado rapaz. Assim, teremos os 2 conjuntos parciais:

$$(R_1; M_1), (R_1; M_2), (R_1; M_3)$$

$$(R_2; M_1), (R_2; M_2), (R_2; M_3)$$

Cada conjunto possui exatamente 3 elementos (3 pares); pois, consta das combinações de um rapaz com qualquer das moças; isto é, cada conjunto possui o número de elementos do conjunto de moças.

Sendo o conjunto produto cartesiano união dêsses conjuntos, pela definição de soma, que já aprendemos na operação adição, vemos que o produto 6 é igual à soma de duas parcelas iguais a 3; quantos são os elementos do conjunto de rapazes:

$$3 + 3 = 6 \text{ ou } \overbrace{3 + 3}^{2 \text{ parcelas}} = 2 \times 3$$

De uma maneira geral, se tivéssemos os conjuntos A e B respectivamente com "a" e "b" elementos, poderíamos formar "a" conjuntos com "b" elementos, e depois, fazer a união para obter o produto cartesiano, com:

$$\boxed{\underbrace{b + b + b + b + \dots + b}_{a \text{ parcelas}} = a \times b \text{ elementos}}$$

Dêste raciocínio, que relaciona as operações de multiplicar e de adicionar, resulta uma segunda definição de produto e de multiplicação.

Definição:2

Chama-se produto de dois inteiros "a" e "b", a soma de "a" parcelas iguais ao inteiro "b".

Chama-se multiplicação a operação de adicionar parcelas iguais.

C. 4 - Propriedades

C. 4 1 Propriedade Comutativa.

$$\boxed{a \times b = b \times a}$$

Quando separamos o conjunto em conjuntos parciais, tendo cada conjunto um só determinado rapaz, evidente-

mente, poderíamos ter separado em conjuntos, tendo cada um, uma determinada moça:

$$\{(R_1; M_1), (R_2; M_1)\}$$

$$\{(R_1; M_2), (R_2; M_2)\}$$

$$\{(R_1; M_3), (R_2; M_3)\}$$

isto é, 3 conjuntos, cada um com 2 elementos.

Fazendo a união teríamos pela definição de soma:

$$2 + 2 + 2 = 6 \text{ ou } \underbrace{2 + 2 + 2}_{3 \text{ parcelas}} = 3 \times 2^{(*)}$$

Portanto, de uma maneira geral, se tivessemos os = conjuntos A e B respectivamente com "a" e "b" elementos, poderíamos formar "a" conjuntos com "b" elementos ou "b" conjuntos com "a" elementos, e depois fazer a união para obter o produto cartesiano com tantos elementos quanto é a soma de

$\boxed{\text{a parcelas iguais a b}}$

ou, tantos elementos quanto é a soma de

$\boxed{\text{b parcelas iguais a a}}$

ou que:

$$a \times b = b \times a$$

de regra "a ordem dos fatôres não altera o produto".

Esta propriedade permite dar uma definição alternativa eqüivalente à definição 2:

Chama-se produto de dois inteiro "a" e "b", a soma

(*) Não escrevemos (2 + 2)+ 2 em atenção à propriedade associativa, pois é indiferente calcular (2 + 2) + 2 ou 2 + (2 + 2) de "b" parcelas iguais ao inteiro "a".

Da definição 2 e desta definição alternativa, é que derivamos interpretações para as denominações especiais dadas aos fatôres: multiplicador e multiplicando; nós julgamos conveniente reservar o nome multiplicador para o fator indicativo do número de parcelas (atuante), e o nome multiplicando para o fator que é tomado como parcela repetitiva (paciente). Decorre ainda dêste fato que a leitura do sinal x indicativo da operação, deve ser, também utilizado conforme.

Assim, por exemplo nas sentenças seguintes:

a) 4 vêzes o 3

b) 4 multiplicado por 3

nós entendemos na primeira o 4 como multiplicador e o 3 como multiplicando, e na segunda o oposto.

C.4.-2 Propriedade Associativa.

$$\boxed{(a \times b) \times c = a \times (b \times c)}$$

Mostrar a veracidade desta propriedade equivale a mostrar que os conjuntos: produtos cartesianos $(A \times B) \times C$ e $A \times (B \times C)$ possuem o mesmo número de elementos, o que é verdade.

Observemos primeiramente que cada conjunto é constituido de elementos que são ternas ordenadas, do primeiro produto, da forma: a rigor pares

$\{(a;\ b);\ c\}$, e do segundo, da forma $\{x;\ (y;\ z)\}$

Para mostrarmos que possuem o mesmo número de elementos basta (conforme a definição de número) mostrar

que é possível estabelecer uma correspondência bi-unívoca entre os seus elementos; e isto é possível; pois, a cada terna $((a;\ b);\ c)$ dos elementos: a de A, b de B, e c de C, corresponde bi-unìvocamente a terna $(a;(b;c))$ do outro conjunto.

Exemplo elucidativo:

Sejam os conjuntos:

$$A = \{1,\ 2\}$$

$$B = \{x,\ y,\ z\}$$

$$C = \{*,\ \Delta\}$$

Teremos:

$$(A \times B) \times C = \{((1;x);*),\ ((1;x);\Delta),\ ((1;y);*),\ ((1;y);\Delta),\ ((1;z);*),\ ((1;z);\Delta),\ ((2;x);*),\ ((2;x);\Delta),\ ((2;z);*),\ ((2;z);\Delta),\ ((2;y);*),\ ((2;y);\Delta)\}$$

e

$$A \times (B \times C) = \{(1;\ (x;*)),\ (1;\ (x;\Delta)),\ (1;\ (y;*)),\ (1;\ (y;\Delta)),\ (1;\ (z;*)),\ (1;\ (z;\Delta)),\ (2;\ (x;*)),\ (2;\ (x;\Delta)),\ (2;\ (y;*)),\ (2;\ (y;\Delta)),\ (2;\ (z;*)),\ (2;\ (z;\Delta))\}$$

ambos com 12 elementos: $(2 \times 3) \times 2 = 2 \times (3 \times 2)$; e o leitor, poderá observar, que a cada elemento de um dos conjuntos corresponde bi-unìvocamente um elemento do outro (*).

C. 4 - 3 Existência de elemento neutro

(*) Para a determinação completa do produto cartesiano sugerimos a utilização da árvore de possibilidades (ver nosso Curso de Combinatória).

A operação de multiplicação possui o elemento neutro que é o 1; de fato:

$$\boxed{a \times 1 = 1 \times a = a}$$

Interpretando a multiplicação como adição, temos :

$$a \times 1 = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{a \text{ parcelas}} = a$$

O segundo produto 1 x a como adição não tem sentido, é igual também a "a" pela propriedade comutativa , ou mesmo, efetuando o produto cartesiano de um conjunto unitário por um conjunto de "a" elementos.

Seja:

$A = \{x\}$, de 1 elemento,

$B = \{1, 2, 3, \dots, a\}$, de a elementos

Teremos:

$A \times B = \{(x; 1), (x; 2) \dots (x ; a)\}$

que evidentemente possui tantos elementos quanto o conjunto B, logo,

$$1 \times a = a$$

A interpretação de 1 x a com o multiplicando 1 e o multiplicador "a" fornece o mesmo resultado.

C.5. <u>Tábua de Multiplicação.</u>

Como fizemos para as outras operações, organizaremos uma tabela das principais multiplicações, porque , em caso contrário, seríamos obrigados, por exemplo, para calcular um produto, transformarmos a multiplicação numa adição.

C.5.1 - <u>Um fator é nulo.</u>

Qualquer que seja o número "a" por ser $a \times b = \underbrace{b + b + \dots + b}_{a \text{ parcelas}}$, é fácil concluirmos que a x 0 = 0 pois teremos "a" parcelas nulas.

A propriedade comutativa nos forneceria 0 x a = 0, mas surge a dúvida se a propriedade é válida também neste caso.

Podemos novamente recorrermos à definição inicial de produto cartesiano para justificarmos que devemos aceitar ser: $0 \times a \stackrel{?}{=} 0$; basta tomarmos os conjuntos; vazio (∅), e um conjunto A com "a" elementos.

Pela definição de produto cartesiano devemos construir um conjunto com pares ordenados tendo o primeiro elemento pertencendo ao conjunto vazio; ora, o conjunto vazio não possui elementos, logo o produto cartesiano também não possui elementos, ou que $\emptyset \times A = \emptyset$.

Concluimos então que o número de elementos é 0, ou que deve ser 0 x a = 0.

C. 5 - 2 <u>Um fator é a unidade (um)</u>

Da propriedade do "um" ser o elemento neutro teremos que:

$$1 \times 1 = 1$$
$$1 \times 2 = 2 \times 1 = 2$$
$$1 \times 3 = 3 \times 1 = 3$$

. . .
. . .
. . .

C. 5 - 3 <u>Um fator é o dois</u>

a) 2 x 2

Tomando a multiplicação como adição teremos:

$$2 \times 2 = 2 + 2$$

e utilizando a tábua de adição

$$2 \times 2 = 4$$

b) 2×3

Tomando a multiplicação como adição

$$2 \times 3 = 3 + 3$$

e, utilizando a tábua de adição

$$2 \times 3 = 6.$$

Pela propriedade comutativa:

$$3 \times 2 = 6$$

Anàlogamente mostraríamos que:

$$2 \times 4 = 4 \times 2 = 8$$
$$2 \times 5 = 5 \times 2 = 10$$
$$2 \times 6 = 6 \times 2 = 12$$

. . .
. . .
. . .

C. 5 4 - Um fator é o 3

a) 3×3

Teremos: $3 \times 3 = 3 + 3 + 3$

$= (3 + 3) + 3$ (associatividade)

$= 6 + 3$ (tábua de adição)

$= 9$ (tábua de adição)

Anàlogamente dterminaríamos as outras multiplicações

com fator 3, as multiplicações com fator 4, fator 5, - etc. .

Notas: a) O produto de um inteiro por 2 é chamado dôbro do inteiro.

Exemplo: 6 é o dôbro de 3,

b) Os produtos de um inteiro por 3, 4, 5, ... são chamados triplo, quádruplo, quíntuplo,..

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	. . .
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	. . .
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	. . .
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	. . .
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	. . .
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	. . .
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	. . .
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	. . .
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63	. . .
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	. . .
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81	. . .

C. 6 - Lei do Côrte

Caso numa multiplicação tivermos

$$a \times b = a \times c$$

não podemos (como, na adição) usarmos a lei do Côrte e afirmarmos que deve ser $b = c$ em todos os produtos, pois se

$$a \times b = a \times c = 0$$

esta igualdade não implica ser $b = c$, como é o contra-exemplo

A operação de multiplicação possui o elemento neutro que é o 1; de fato:

$$\boxed{a \times 1 = 1 \times a = a}$$

Interpretando a multiplicação como adição, temos :

$$a \times 1 = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{a \text{ parcelas}} = a$$

O segundo produto 1 x a como adição não tem sentido, é igual também a "a" pela propriedade comutativa , ou mesmo, efetuando o produto cartesiano de um conjunto unitário por um conjunto de "a" elementos.

Seja:

$A = \{x\}$, de 1 elemento,

$B = \{1, 2, 3, \dots, a\}$, de a elementos

Teremos:

$A \times B = \{(x; 1), (x; 2) \dots (x ; a)\}$

que evidentemente possui tantos elementos quanto o conjunto B, logo,

$$1 \times a = a$$

A interpretação de 1 x a com o multiplicando 1 e o multiplicador "a" fornece o mesmo resultado.

C.5. <u>Tábua de Multiplicação.</u>

Como fizemos para as outras operações, organizaremos uma tabela das principais multiplicações, porque , em caso contrário, seríamos obrigados, por exemplo, para calcular um produto, transformarmos a multiplicação numa adição.

C.5.1 - <u>Um fator é nulo.</u>

Qualquer que seja o número "a" por ser $a \times b = \underbrace{b + b + \dots + b}_{a \text{ parcelas}}$, é fácil concluirmos que $a \times 0 = 0$ pois teremos "a" parcelas nulas.

A propriedade comutativa nos forneceria 0 x a = 0, mas surge a dúvida se a propriedade é válida também neste caso.

Podemos novamente recorrermos à definição inicial de produto cartesiano para justificarmos que devemos aceitar ser: $0 \times a \stackrel{?}{=} 0$; basta tomarmos os conjuntos; vazio (∅), e um conjunto A com "a" elementos.

Pela definição de produto cartesiano devemos construir um conjunto com pares ordenados tendo o primeiro elemento pertencendo ao conjunto vazio; ora, o conjunto vazio não possui elementos, logo o produto cartesiano também não possui elementos, ou que ∅ x A = ∅.

Concluimos então que o número de elementos é 0, ou que deve ser 0 x a = 0.

C. 5 - 2 <u>Um fator é a unidade (um)</u>

Da propriedade do "um" ser o elemento neutro teremos que:

$1 \times 1 = 1$

$1 \times 2 = 2 \times 1 = 2$

$1 \times 3 = 3 \times 1 = 3$

. . .

. . .

. . .

C. 5 - 3 <u>Um fator é o dois</u>

a) 2 x 2

A operação de multiplicação possui o elemento neutro que é o 1; de fato:

$$\boxed{a \times 1 = 1 \times a = a}$$

Interpretando a multiplicação como adição, temos :

$$a \times 1 = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{a \text{ parcelas}} = a$$

O segundo produto 1 x a como adição não tem sentido, é igual também a "a" pela propriedade comutativa , ou mesmo, efetuando o produto cartesiano de um conjunto unitário por um conjunto de "a" elementos.

Seja:

$A = \{x\}$, de 1 elemento,

$B = \{1, 2, 3, \ldots, a\}$, de a elementos

Teremos:

$A \times B = \{(x; 1), (x; 2) \ldots (x ; a)\}$

que evidentemente possui tantos elementos quanto o conjunto B, logo,

$$1 \times a = a$$

A interpretação de 1 x a com o multiplicando 1 e o multiplicador "a" fornece o mesmo resultado.

C.5. Tábua de Multiplicação.

Como fizemos para as outras operações, organizaremos uma tabela das principais multiplicações, porque, em caso contrário, seríamos obrigados, por exemplo, para calcular um produto, transformarmos a multiplicação numa adição.

C.5.1 - Um fator é nulo.

Qualquer que seja o número "a" por ser $a \times b = \underbrace{b + b + \ldots + b}_{a \text{ parcelas}}$, é fácil concluirmos que a x 0 = 0 pois teremos "a" parcelas nulas.

A propriedade comutativa nos forneceria 0 x a = 0, mas surge a dúvida se a propriedade é válida também neste caso.

Podemos novamente recorrermos à definição inicial de produto cartesiano para justificarmos que devemos aceitar ser: $0 \times a \stackrel{?}{=} 0$; basta tomarmos os conjuntos; vazio ($\emptyset$), e um conjunto A com "a" elementos.

Pela definição de produto cartesiano devemos construir um conjunto com pares ordenados tendo o primeiro elemento pertencendo ao conjunto vazio; ora, o conjunto vazio não possui elementos, logo o produto cartesiano também não possui elementos, ou que $\emptyset \times A = \emptyset$.

Concluimos então que o número de elementos é 0, ou que deve ser 0 x a = 0.

C. 5 - 2 Um fator é a unidade (um)

Da propriedade do "um" ser o elemento neutro teremos que:

$1 \times 1 = 1$

$1 \times 2 = 2 \times 1 = 2$

$1 \times 3 = 3 \times 1 = 3$

. . .

. . .

. . .

C. 5 - 3 Um fator é o dois

a) 2 x 2

Tomando a multiplicação como adição teremos:

$$2 \times 2 = 2 + 2$$

e utilizando a tábua de adição

$$2 \times 2 = 4$$

b) 2×3

Tomando a multiplicação como adição

$$2 \times 3 = 3 + 3$$

e, utilizando a tábua de adição

$$2 \times 3 = 6$$

Pela propriedade comutativa:

$$3 \times 2 = 6$$

Anàlogamente mostraríamos que:

$$2 \times 4 = 4 \times 2 = 8$$
$$2 \times 5 = 5 \times 2 = 10$$
$$2 \times 6 = 6 \times 2 = 12$$

. . .

. . .

. . .

C. 5 4 - Um fator é o 3

a) 3×3

Teremos: $3 \times 3 = 3 + 3 + 3$

$= (3 + 3) + 3$ **(associatividade)**

$= 6 + 3$ **(tábua de adição)**

$= 9$ **(tábua de adição)**

Anàlogamente dterminaríamos as outras multiplicações

com fator 3, as multiplicações com fator 4, fator 5, - etc. .

Notas: a) O produto de um inteiro por 2 é chamado dôbro do inteiro.

Exemplo: 6 é o dôbro de 3,

b) Os produtos de um inteiro por 3, 4, 5, ... são chamados triplo, quádruplo, quíntuplo,..

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	. . .
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	. . .
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	. . .
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	. . .
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	. . .
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	. . .
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	. . .
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	. . .
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63	. . .
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	. . .
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81	. . .

C. 6 - Lei do Côrte

Caso numa multiplicação tivermos

$$a \times b = a \times c$$

não podemos (como, na adição) usarmos a lei do Côrte e afirmarmos que deve ser $b = c$ em todos os produtos, pois se

$$a \times b = a \times c = 0$$

esta igualdade não implica ser $b = c$, como é o contra-exemplo

$$0 \times 2 = 0 \times 4 = 0$$

C. 6 Propriedades da Multiplicação em relação à adição

Consideremos a multiplicação indicada

$$a \times (b + c)$$

Pela segunda definição de multiplicação podemos escrever:

$$a \times (b + c) = \overbrace{(b + c) + (b + c) + \ldots + (b + c)}^{a \text{ parcelas}}$$

$= \left[(b + c) + b\right] + c + \ldots + (b + c)$ (propriedade associativa)

$= \left[b + (c + b)\right] + c + \ldots + (b + c)$ (associativa)

$= \left[b + (b + c)\right] + c + \ldots + (b + c)$ (comutativa)

$= \left[(b + b) + c\right] + c + \ldots + (b + c)$ (associativa)

$= (b + b) + (c + c) + \ldots + (b + c)$ (associativa)

Analogamente, conseguiremos reunir tôdas as "a" parcelas iguais a "b" e as "a" parcelas iguais a "c" separadas.

$$a \times (b + c) = \underbrace{(b + b + b + \ldots + b)}_{a \text{ parcelas}} + \underbrace{(c + c + \ldots + c)}_{a \text{ parcelas}}$$

$\boxed{a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)}$ (pela 2a definição).

ou simplesmente: $a \times b + a \times c$ (*), igualdade que exprime a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição pela esquerda.

(*) Eliminamos os sinais parênteses ( ), mas adotaremos, daqui para frente, que havendo multiplicação e adição se fará primeiro as multiplicações.

Como:

$a \times (b + c) = (b + c) \times a$ (comutatividade)

temos:

$(b + c) \times a = a \times b + a \times c$ (distributividade pela esquerda)

$(b + c) \times a = b \times a + c \times a$ (comutatividade)

igualdade que exprime a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição pela direita.

Dizemos então simplesmente, que a multiplicação goza da propriedade distributiva em relação à adição:

Exemplo:

a) $5 \times (4 + 3) = 5 \times 4 + 5 \times 3 = 20 + 15 = 35$

ou $5 \times 7 = 35$

b) $(2 + 4) \times 3 = 2 \times 3 + 4 \times 3 = 6 + 12 = 18$

ou $6 \times 3 = 18$

Nota: Observar que a adição não é distributiva em relação à multiplicação.

C. 8 - Exercícios

Série VI

1 - Mostre, utilizando as propriedades, que:
$2 \times (3 + 4) = 2 \times 3 + 2 \times 4$

2 - Mostre que:
a) $(3 \times 4) \times 5 = (5 \times 3) \times 4$
b) $\left[a \times (b \times c)\right] \times d = a \times \left[b \times (c \times d)\right]$
c) $\left[a \times (b \times c)\right] \times d = (b \times a) \times (d \times c)$

3 - Qual é o valor de um produto de vários fatôres com um nulo? Por que?

4 - Caso tenhamos um produto nulo como devem ser os fatôres?

5 - Adicionando-se um inteiro a um dos fatôres de quanto aumentará o produto? Mostre?

6 - Mostre que a multiplicação é distributiva em relação à subtração.

7 - Subtraindo um inteiro a um dos fatôres de quanto diminuirá o produto? Mostre?

8 - Mostre que:

(a + b) x (c + d) = a x c + b x c + a x d + b x d

9 - Mostre com recursos da propriedade distributiva, do elemento neutro da adição, e pela lei do côrte da adição, que a x 0 = 0, e que 0 x a = 0

10 - Mostre que:

a) 4 x 2 = 2 x 4 = 8

b) 4 x 3 = 3 x 4 = 12

D. Divisão

D. 1 - Múltiplos

Consideremos um inteiro qualquer a, e os produtos dêste inteiro pela sucessão dos naturais 1, 2, 3, 4,...

1 x a, 2 x a, 3 x a, 4 x a, ...

A êsses produtos denominamos múltiplos do inteiro a Toma-se também como múltiplo de um inteiro o seu produto por 0; isto é, o 0 é múltiplo de qualquer número inteiro.

Exemplo:

O conjunto dos múltiplos de 3.

{0, 3, 6, 9, 12, ...}

é obtido da seguinte maneira:

1 x 3 = 3, 2 x 3 = 6 3 x 3 = 9, 4 x 3=12, etc.

O conjunto dos múltiplos de 2:

{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, ...}

recebe o nome especial de conjunto dos números pares.

O conjunto dos números inteiros que não pertencem ao conjunto dos pares:

{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, ...}

é denominado conjunto dos números ímpares.

Um inteiro que seja um dos fatôres de um produto é chamado sub-múltiplo do produto; disto resulta que se um inteiro "a" é múltiplo de um inteiro "b", "b" é sub-múltiplo do inteiro "a".

Exemplo:

8 é múltiplo de 2 porque 4 x 2 = 8

logo: 2 é sub-múltiplo de 8.

D. 2 - Operação inversa da multiplicação

Admitamos que é dado o produto

a = b x c

dos inteiros "b e c", e que se conhece um dos fatôres "b" por exemplo.

O problema da determinação do outro fator "c" leva-nos a operação inversa da multiplicação.

Ao resultado desta operação denominamos quociente (ou cociente), e indicamos:

a : b = c, ou a : b = c

Assim, o quociente de 6 por 2 é 3 porque 2 x 3 = 6.

Definição

Chamamos quociente de dois inteiros "a e b", nessa ordem, "a" múltiplo de "b", a um inteiro "c", que multiplicado por "b" fornece o produto "a".

A operação que ao par de inteiros (a; b) faz corresponder o inteiro "c" igual ao seu quociente é denominada divisão.

Quando estamos operando para determinarmos o quociente, diz-se que estamos dividindo.

O sinal ÷ (ou :), é o símbolo da operação de dividir e lê-se "dividindo por"

O "a" é chamado dividendo

O "b" é chamado divisor

O "c", que é o resultado da divisão, é denominado quociente.

Nota: Como o quociente não é definido para qualquer par (a; b) de inteiros, pois existe a restrição de "a" ser múltiplo de "b", a rigor não existe a operação.

Da definição resulta a eqüivalência fundamental da divisão:

$$\boxed{a : b = c \iff b \times c = a \iff \underbrace{b + b + \ldots + b}_{c \text{ parcelas}} = a}$$

Desta eqüivalência segue dois aspectos para divisão (*):

1) Obtenção do número de vêzes que deve ser adicionado o divisor para se obter o dividendo.

(*) Nos serão úteis na parte metodológica.

Como:

$$a : b = c \iff \underbrace{(b + b + \ldots + b)}_{c \text{ parcelas}} + b = a$$

ou

$$a : b = c \iff \underbrace{(b + b + \ldots + b)}_{c\,-\,1 \text{ parcelas}} + b = a - b$$

ou

$$a : b = c \iff \underbrace{(b + b + \ldots + b)}_{c\,-\,2 \text{ parcelas}} + b = (a - b) - b$$

e, sucessivamente:

$$a : b = c \iff \{[(a - b) - b] - \ldots - b\}$$

c subtrações de diminuidor b,

ou que:

– Obtenção do número de vêzes que se pode subtrair o divisor do dividendo.

D. 3 Operações inversas da divisão

a) Seja a determinação do dividendo: x

$$x : b = c$$

Pela eqüivalência fundamental da divisão temos:

$$x : b = c \iff b \times c = x$$

b) Seja a determinação do divisor y:

$$a : y = c$$

teremos

$$a : y = c \iff y \times c = a$$

Novamente, pela eqüivalência fundamental da divisão

$$y \times c = a \Longleftrightarrow y = a : c$$

No caso a) a operação inversa é a multiplicação; mas, no caso b) a operação inversa é a própria divisão; diremos como o dissemos para a subtração; "a operação inversa à esquerda da divisão é a multiplicação", e " a operação inversa à direita da divisão é a divisão".

Exemplos:

1 - 1) Qual é o dividendo sabendo-se que o divisor é 2 e o quociente é 4?

Temos:

$$x : 2 = 4 \Longleftrightarrow x = 2 \times 4 = 8$$

2) Qual é o divisor sabendo-se que o dividendo é 10 e o quociente é 5?

Temos:

$$10 : y = 5 \Leftrightarrow y \times 5 = 10$$

mas:

$$y \times 5 = 10 \Leftrightarrow 10 : 5 = y$$

portanto $y = 2$.

D. 4 Propriedades

D. 4 - 1 Propriedade não-comutativa $\boxed{a : b \neq b : a}$

A divisão não goza da propriedade comutativa, o que decorre da condição do dividendo ser múltiplo do divisor; logo mudando a ordem, em geral, o dividendo não será mais múltiplo do divisor.

Exemplo:

8 : 2 = 4, mas 2 : 8 = ? (não tem sentido, não existe)

Observemos entretanto que a divisão não é anti-comutativa, pois

$$a : b = b : a, \quad \text{quando } a = b.$$

D. 4 - 2 Propriedade não-associativa

$$\boxed{(a : b) : c \neq a : (b : c)}$$

Para mostrarmos que a divisão não goza da propriedade associativa basta darmos um contra exemplo:

$$12 : (4 : 2) = 12 : 2 = 6$$

mas

$$(12 : 4) : 2 = 3 : 2 = ?$$

Observemos também aqui que, a divisão não é anti-associativa, pois há os casos em que é associativa como no exemplo seguinte:

$$8 : (4 : 1) = 8 : 4 = 2$$
$$(8 : 4) : 1 = 2 : 1 = 2$$

D. 4 - 3 Elemento neutro

Como $1 \times a = a$

segue pela eqüivalência que:

$$a : 1 = a$$

para qualquer inteiro a.

Mas como 1 : a em geral não é possível, concluímos que:

"A divisão possui elemento neutro à direita"

Nota: Como 1 x a = a para qualquer inteiro, o 1 é denominado sub-múltiplo universal pois é divisor de qualquer inteiro (anàlogamente o zero é múl-tiplo universal).

D. 5 - Divisão com zero

1) Dividendo 0

Pela eqüivalência

$$0 \times b = 0 \Longleftrightarrow 0 : b = 0$$

concluimos que a divisão com dividendo 0 é possível e o quociente é zero.

2) Divisor 0

Seja "c" o quociente:

$$a : 0 = c$$

Pela eqüivalência temos:

$$0 \times c = a$$

mas, $0 \times c = 0$ (tábua de multiplicação)

mas, como "a" em geral é diferente de zero, temos um absurdo.

Concluimos portanto, que não existe inteiro "c" que satisfaça a difinição de quociente. Dizemos que a divisão é impossível, ou em outras palavras, não existe divisão com divisor nulo.

Do raciocínio anterior segue, também que se a = 0 teríamos:

$$0 \times c = 0$$

que é uma igualdade sempre verdadeira, independente do valor do inteiro "c"; isto é, qualquer inteiro satisfaz nêste caso a definição de quociente.

Dizemos então, quando o dividendo e o divisor são nulos que a divisão é indeterminada.

D. 6 Distributividade da divisão em relação à adição

Admitimos que seja possível as divisões de cada

parcela por "c", teremos as eqüivalências:

$$a : c = y \Longleftrightarrow a = c \times y$$

$$b : c = z \Longleftrightarrow b = c \times z$$

portanto existe a igualdade:

$$a + b = c \times y + c \times z$$

e pela propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, podemos escrever:

$$a + b = c \times (y + z)$$

mas

$$a + b = c \times (y + z) \Longleftrightarrow (a + b) : c = y + z$$

logo

$$\boxed{(a + b) : c = a : c + b : c}$$

Igualdade que mostra, que, se as parcelas são múltiplos do divisor a divisão é distributiva pela direita em relação à adição:

Exemplo:

$$(8 + 6) : 2 = 8 : 2 + 6 : 2 = 4 + 3 = 7$$

ou

$$14 : 2 = 7$$

Entretanto, a divisão não é distributiva pela esquerda em relação à adição, vejamos um contra-exemplo:

$$6 : (2 + 1) = 6 : 3 = 2$$

$$6 : 2 + 6 : 1 = 3 + 6 = 9$$

D. 7 Tábua de Divisão

Com recursos da tábua de multiplicação é fácil construir a tabela de divisão seguinte onde colocamos o dividendo na primeira coluna e o divisor na primeira linha (*).

:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	. . .
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	2	1	.	.	.	.	.	.	.	.
3	3	.	1	.	.	.	.	.	.	.
4	4	2	.	1	.	.	.	.	.	.
5	5	.	.	.	1	.	.	.	.	.
6	6	3	2	.	.	1	.	.	.	.
7	7	.	.	.	.	.	1	.	.	.
8	8	4	.	2	.	.	.	1	.	.
9	9	.	3	.	.	.	.	.	1	.
10	10	5	.	.	2	.	.	.	.	.
.										
.										
.										

Da dificuldade de leitura desta tabela, por causa dos espaços em branco, onde não existe o quociente dos inteiros; prefere-se subdividí-la em tabelas parciais para cada divisor, como são as tabelas seguintes, onde para dividendo só se escreve aquêles que são múltiplos dos divisores:

(*) Já se exclui o divisor nulo, não existe divisão.

:	3
0	0
3	1
6	2
9	3
12	4
15	5
18	6
21	7
24	8
27	9
30	10

:	4
0	0
4	1
8	2
12	3
16	4
20	5
24	6
28	7
32	8
36	9
40	10

:	5
0	0
5	1
10	2
15	3
20	4
25	5
30	6
35	7
40	8
45	9
50	10

D. 8 Exercícios

Série VVII

1) Mostre que:

a) $2 : 2 = 1$

b) $4 : 2 = 2$

cc) $6 : 2 = 3$

e, construa com as outras divisões com divisor 2 uma tabela parcial.

2) Mostre pela eqüivalência fundamental da divisão que para um produto de dois fatôres diferentes de zero sempre obtem-se dois quocientes de números inteiros.

3) Escreva dois exemplos numéricos em que é válida a comutatividade de divisão

$$a : b = b : a$$

4) Calcule $(20 + 12) : 4$ por dois processos.

nha (*).

:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	. . .
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	2	1	.	.	.	.	.	.	.	.
3	3	.	1	.	.	.	.	.	.	.
4	4	2	.	1	.	.	.	.	.	.
5	5	.	.	.	1	.	.	.	.	.
6	6	3	2	.	.	1	.	.	.	.
7	7	.	.	.	.	.	1	.	.	.
8	8	4	.	2	.	.	.	1	.	.
9	9	.	3	.	.	.	.	.	1	.
10	10	5	.	.	2	.	.	.	.	.
.										
.										
.										

Da dificuldade de leitura desta tabela, por causa dos espaços em branco, onde não existe o quociente dos inteiros; prefere-se subdividí-la em tabelas parciais para cada divisor, como são as tabelas seguintes, onde para dividendo só se escreve aquêles que são múltiplos dos divisores:

(*) Já se exclui o divisor nulo, não existe divisão.

:	3
0	0
3	1
6	2
9	3
12	4
15	5
18	6
21	7
24	8
27	9
30	10

:	4
0	0
4	1
8	2
12	3
16	4
20	5
24	6
28	7
32	8
36	9
40	10

:	5
0	0
5	1
10	2
15	3
20	4
25	5
30	6
35	7
40	8
45	9
50	10

D. 8 Exercícios

Série VVII

1) Mostre que:

a) $2 : 2 = 1$

b) $4 : 2 = 2$

cc) $6 : 2 = 3$

e, construa com as outras divisões com divisor 2 uma tabela parcial.

2) Mostre pela eqüivalência fundamental da divisão que para um produto de dois fatôres diferentes de zero sempre obtem-se dois quocientes de números inteiros.

3) Escreva dois exemplos numéricos em que é válida a comutatividade de divisão

$$a : b = b : a$$

4) Calcule $(20 + 12) : 4$ por dois processos.

5) Coloque os parênteses adequadamente nas divisões sucessivas

a) 36 : 6 : 2 = 12

b) 20 : 4 : 2 = 10

c) 24 : 6 : 2 = 2

d) 48 : 12 : 8 : 2 = 1

6) Mostre que:

a) (a : b) x b = a

b) (a x b) : b = a

7) Mostre que:

a) multiplicando-se o dividendo por um inteiro o quociente fica multiplicado pelo inteiro (a x c) : b = (a : b) x c.

b) Dividindo-se o dividendo por um inteiro, o quociente fica dividido por êsse inteiro se a divisão é possível: (a : c) : b = (a : b) : c.

c) Multiplicando-se divisor por um inteiro, o quociente fica dividido pelo inteiro, se a divisão ainda é possível: a : (b x c) = (a : b) : c.

d) Dividindo-se o divisor por um inteiro, o quociente fica multiplicado pelo inteiro: a : (b : c) = (a : b) x c.

c) Multiplicando-se (ou dividindo-se) o dividendo e o divisor por um mesmo inteiro, o quociente permanece inalterado:

(a x c) : (b x c = a : b

(a : c) : (b : c) = a : b

8) Mostre que sendo possível a divisão dos têrmos da subtração, a divisão é distributiva pela direita em re-

lação à subtração:

(a - b) : c = a : c - b : c

9) Mostre que se existe a associatividade:

(a : b) : c = a : (b : c), e a ≠ 0,

então c = 1.

E. DIVISÃO GERAL

E. 1 - Introdução:

Temos definido divisão como a operação que determina o quociente de dois inteiros, mas, no caso do primeiro inteiro (dividendo), ser múltiplo do segundo (divisor).

Na vida diária, entretanto, existem problemas análogos ao da operação de divisão, problemas denominados de repartição, ou mesmo de divisão, que necessitam ser resolvidos para o caso de inteiros, mesmo que um não seja múltiplo do outro.

Por exemplo, todos nós já passámos por situações como a seguinte: "tem-se, 38 objetos (38 balas, 38 lápis, etc.) para repartir igualmente por 7 pessoas".

É claro, que devemos encontrar um número (quociente), que multiplicado por 7 seja igual ao total 38, de objetos; mas, no caso, 38 não é múltiplo de 7, logo, não existe o quociente.

Mas, êste é um problema que dever ser resolvido, pelo menos satisfatòriamente. A solução é a seguinte: darmos 5 objetos para cada pessoa, e, separar 3 objetos, os quais não serão repartidos, ou dados a algumas das pessoas atendendo a outros critérios de previlégio.

Teremos:

$$7 \times 5 + 3 = 38$$

E. 2 Definição:

Dados dois inteiros "a e b" ($b \neq 0$), chamamos quociente dos inteiros, nessa ordem o inteiro "q", tal que:

$\boxed{a = b \times q + r}$ com $\boxed{0 \leq r < b}$

A operação, que ao par (a; b) faz corresponder o inteiro "q", igual ao seu quociente, é denominada Divisão Geral.

O inteiro "r" é chamado resto.

Quando $r = 0$, teremos: $a = b \times q$; e, portanto "a" é múltiplo de "b", que é a Divisão anteriormente definida. Concluimos que a Divisão Geral generaliza, como indica o nome, o conceito de Divisão.

Diremos conforme o resto r:

$r = 0$ --- Divisão ou Divisão Exata (quociente exato)

$0 < r < b$ --- Divisão Aproximada (quociente aproximado).

Exemplo:

5 é o quociente (quociente aproximado) de 38 por 7 e o resto é 3; pois, 6 já forneceria a igualdade:

$$38 = 6 \times 7 - 4$$

e o resto precisa ser adicionado e não subtraido.

4 também não pode ser o quociente, desde que teríamos

$$38 = 4 \times 7 + 10$$

e, então $r = 10$, que é maior que o divisor 7.

Nota: A definição dada implica que o inteiro "q" seja o maior inteiro que satisfaça a:

$$\boxed{b \times q \leq a}$$

Assim, no exemplo: 6 não pode ser o quociente, pois $6 \times 7 = 42 > 38$; e, 4 não é o maior inteiro que a satisfaz.

É importante observar que esta operação conduz à determinação de dois inteiros "q" e "r"; e, que dado o par (a; b) existe sempre um único par (q; r) que satisfaz a definição (propriedade uniforme).

Cálculo de quociente aproximado:

Dados os inteiros "a e b", a não múltiplo de b, a determinação do quociente se faz por processo análogo ao do quociente exato.

Procuramos o inteiro "q" que multiplicado por "b" forneça quase "a", isto é, tal que o inteiro "q+1" multiplicado por "b" ultrapasse "a".

Exemplo:

Seja a determinação do quociente de 27 por 6:

Temos:

$6 \times 1 = 6$

$6 \times 2 = 12$

$6 \times 3 = 18$

$6 \times 4 = 24$

$6 \times 5 = 30$ (ultrapassou)

logo, 4 é o quociente aproximado, e, o resto é 27 - 24 = 3.

E. 3 <u>Propriedades</u>:

Como a divisão exata não goza da associatividade e comutatividade, com maior razão a divisão aproximada não goza dessas propriedades; o que é visível pelo fato da divisão aproximada conduzir à determinação de dois inteiros (quociente e resto).

Podemos, no entretanto, acrescentar a seguinte propriedade:

"<u>Multiplicando-se o dividendo e o divisor por um inteiro, o quociente é o mesmo, mas o resto fica multiplicado pelo inteiro</u>".

De fato:

Sejam "a e b", dividendo e divisor. Temos o quociente "q" e o resto dados por: $a = b \times 1 + r$ com $0 \leq r < b$.

Multipliquemos o dividendo "a" por um inteiro "d";

$a \times d = (b \times q + r) \times d$

ou $a \times d = (b \times q) \times d + r \times d$ (distributividade)

ou $a \times d = (b \times d) \times q \ast r \times d$ (associatividade e comutatividade)

Nesta expressão o antigo dividendo está multiplicado por "d", e o dividendo também, provemos que $r \times d$ satisfaz a condição de novo resto: $0 \leq r \times d < b \times d$; o que de fato se verifica, pois o resto anterior satisfaz à desigualdade: $0 \leq r < b$, logo, multiplicando por "d", obtemos a condição procurada.

E. 4 <u>EXERCÍCIOS</u>

<u>Série VIII</u>

1. Mostre que o quociente de:

a) 45 por 8 é 5 (resto 5)

b) 39 por 9 é 4 (resto 3)

c) 26 por 6 é 4 (resto 2)

d) 26 por 4 é 6 (resto 2)

2. Determine o maior inteiro que pode ser adicionado ao dividendo sem alterar o quociente? Qual será o resto?

3. Idem, subtrair.

4. Numa divisão geral o quociente é 12 e o resto é 5; determine o dividendo e o divisor sabendo-se que a sua soma é 96.

5. Numa divisão geral o quociente é 14 e o resto é 3; determine o dividendo e o divisor sabendo-se que a sua diferença é 68.

6. Numa divisão exata o quociente é 21. Adicionando-se 12 ao dividendo o quociente será 24. Qual é o dividendo e o divisor?

7. Numa divisão exata o quociente é 26. Subtraindo-se 24 do dividendo o quociente será 18. Qual é o dividendo e o divisor?

8. Numa divisão exata o quociente é 27. Adicionando-se 3 ao divisor, o quociente será 18. Qual é o dividendo e o divisor?

9. Numa divisão exata o quociente é 4. Subtraindo-se 11 ao divisor, o quociente será 6. Qual é o dividendo e o divisor?

10. Numa divisão geral, o quociente é 15, e o resto é 1. Adicionando-se 15 ao dividendo, o quociente será 20, e o resto ainda é 1. Qual é o dividendo e o divisor?

11. Numa divisão geral, o quociente é 9, e o resto é 3. Subtraindo-se 13 ao dividendo o quociente é 7, e o resto é 2. Qual é o dividendo e o divisor.

12. Multiplicou-se o dividendo e o divisor pelo mesmo número 5, sabendo-se que o resto e o quociente eram respectivamente 8 e 12; pede-se o novo quociente e o novo resto?

F. Potenciação

F. - 1 Preliminares

Consideremos uma multiplicação de vários fatôres iguais, por exemplo:

$$4 \times 4 \times 4 = 64$$

Da maneira análoga à adição de parcelas iguais:

$$4 + 4 + 4 = 12$$

que equivale à operação de multiplicação.

$$3 \times 4 = 12$$

onde o 3 (multiplicador) indica o número de parcelas 4 (multiplicando); passamos a definir uma nova operação: potenciação:

Assim, a multiplicação anterior escrevemos também numa nova forma, mais prática:

$$4^3 = 64$$

e, ao resultado 64 denominamos potência.

F. - 2 Definição

Dados dois números inteiros "a e b" (com b > 1), chamamos potência "b de a", o produto "C" de "b" fatôres iguais "a",

Indicamos:

$$a^b = c$$

A operação que ao par de inteiros (a; b) faz corresponder o inteiro "c", igual à sua potência é denominada potenciação.

Quando estamos operando para determinarmos a potencia diz-se que estamos potenciando.

Nota-se que para a potenciação não se usa um símbolo indicativo da operação; e, sim, uma disposição adequada dos têrmos, assim, coloca-se o número indicativo do número de fatôres à direita e pouco acima do fator repetitivo.

O "a" (fator repetitivo) é chamado base.
O "b" (número indicativo de fatôres) é chamado gráu ou expoente.
O "c" (resultado) é chamado potência.

É costume representar-se o expoente com algarismos um pouco menores que a base.

Na potência : a^b

lemos:

a elevado ao gráu b

ou

a elevado ao expoente b

ou

a elevado à potência b

<u>Exemplo:</u>

a) $7^2 = 7 \times 7 = 49$

7^2 lemos também 7 ao quadrado (*)

ou 7 elevado à segunda potência

b) $7^3 = 7 \times 7 \times 7 = 343$

7^3 lemos também 7 ao cubo (**)

ou elevado à terceira potência

Da definição resulta a eqüivalência fundamental da potenciação:

$$\boxed{a^b = c \Longleftrightarrow \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{b \text{ fatôres}} = c}$$

F. 3 - <u>Extensões</u>

Como não tem sentido multiplicação com um só fator, e também multiplicação sem fatôres, os símbolos

$$\boxed{a^1 \quad e \quad a^o}$$

são desprovidos de sentido.

Entretanto, por razões que ainda justificaremos, extende-se a definição tomando:

$$\begin{cases} a^1 = a \\ a^o = 1, \text{ com } a \neq o \end{cases}$$

(*) Quando o expoente é 2 pode-se ler sempre ao quadrado; por razões de área.

(**) Quando o expoente é 3 pode-se ler sempre "ao cubo"; por razões de volume.

F. 4 - <u>Propriedades:</u>

F. 4 - 1 <u>Propriedade não-comutativa</u>

Em geral $\boxed{a^b \neq b^a}$

Basta fornecermos um contra-exemplo:

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

$$3^2 = 3 \times 3 = 9$$

entretanto, caso a = b, é válida a propriedade.

F. 4 - 2 <u>Propriedade não-associativa</u>

Em geral $\boxed{(a^b)^c \neq a^{(b^c)}}$

Também aqui é fácil dar um contra-exemplo

$$(2^2)^3 = 4^3 = 64$$

mas $2^{(2^3)} = 2^8 = 256$

F. 4 - 3 <u>Elemento neutro</u>

Pela extensão dada, a potenciação só possui elemento neutro à direita, que é o um,

<u>Exemplo:</u>

$$5^1 = 5$$

F. 4 - 4 <u>Propriedade Distributiva</u>

a) <u>Não-distributiva em relação à adição ou subtração.</u>

Em geral $\boxed{(a + b)^c \neq a^c + b^c}$

Contra-exemplos

$$(2 + 3)^2 = 5^2 = 25$$

mas $2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$

$$(5 - 2)^2 = 3^2 = 9$$

mas $5^2 - 2^2 = 25 - 4 = 21$

b) Distributiva pela direita em relação à multipli-cação

$$\boxed{(a \times c)^b = a^b \times c^b}$$

de fato

$$(a \times c)^b = (a \times c) \times (a \times c) \times \ldots \times (a \times c)$$

(Definição)

$(a \times c) \times (a \times c) \times \ldots \times (a \times c) = (a \times a \times (a \times a \times \ldots \times a) \times (c \times c \times \ldots \times c)$

(Propriedade comutativa e associativa da multiplicação).

$(a \times a \times \ldots \times a) \times (c \times c \times \ldots \times c) = a^b \times c^b$ (Definição)

logo:

$(a \times c)^b = a^b \times c^b$ (Propriedade transitiva da igualdade)

Exemplo:

$$(4 \times 3)^2 = 4^2 \times 3^2 = 16 \times 9 = 144$$

Esta propriedade é verdadeira para multiplicação de vários fatôres.

c) Não-distributiva pela esquerda em relação à multiplicação

Em geral: $\boxed{a^{b \times c} \neq a^b \times a^c}$

Contra-exemplo: $3^{2 \times 3} = 3^6 = 729$

mas: $3^2 \times 3^3 = 9 \times 27 = 243$

d) Distributiva pela direita em relação à divisão

$$\boxed{(a : c)^b = a^b : c^b}$$

De fato:

Pela eqüivalência fundamental da Divisão:

$$a^b : c^b = (a : c)^b \Leftrightarrow a^b = (a : c)^b \times c^b$$

e pela distributividade da potenciação em relação à multiplicação:

$$a^b = (a : c)^b \times c^b \Leftrightarrow a^b = \left[(a : c) \times c\right]^b$$

pela definição de divisão:

$$a^b = \left[(a : c) \times c\right]^b \Leftrightarrow a^b = a^b$$

o que mostra a propriedade.

Exemplo:

$$(8 : 2)^3 = 8^3 : 2^3 = 512 : 8 = 64$$

e

$$(8 : 2)^3 = 4^3 = 64$$

c) Não-distributividade pela esquerda

$$\boxed{a^{b : c} \neq a^b : a^c}$$

Contra-exemplo: $2^6 : 2^2 = 2^3 = 8$

mas $2^6 : 2^2 = 64 : 4 = 16$

F. 5 - Operações com potências da mesma base

1) Multiplicação

$$\boxed{a^b \times a^c = a^{b+c}}$$

De fato:

$$a^b \times a^c = \underbrace{(a \times a \times \ldots \times a)}_{b \text{ fatôres}} \times \underbrace{(a \times a \times \ldots \times a)}_{c \text{ fatôres}}$$

logo $a^b \times a^c = \underbrace{(a \times a \times \ldots \times a)}_{b + c \text{ fatôres}}$

ou $a^b \times a^c = a^{b+c}$

Regra:

"O produto de potências da mesma base é igual à potência da base cujo expoente é a soma dos expoentes" (Lei dos índices).

Exemplo:

$$3^2 \times 3^4 = 3^{2+4} = 3^6 = 729$$

2) Divisão:

$$\boxed{a^b : a^c = a^{b-c}} \qquad \text{com } b > c$$

De fato:

pela eqüivalência fundamental da divisão

$$a^b : a^c = a^{b-c} \Longleftrightarrow a^b = a^{b-c} \times a^c$$

mas pela regra anterior

$$a^b = a^{b-c} \times a^c \Longleftrightarrow a^b = a^{(b-c)+c}$$

e, pela definição de diferença

$$a^b = a^{(b-c)+c} \Longleftrightarrow a^b = a^b \quad \text{que é verdadeira}$$

Regra:

"O quociente, de potências da mesma base é igual à potência da base cujo expoente é a diferença dos expoentes"

Exemplo:

$$2^6 : 2^2 = 2^{6-2} = 2^4 = 16$$

3) Potenciação

$$\boxed{(a^b)^c = a^{b \times c}}$$

De fato:

$$(a^b)^c = \underbrace{a^b \times a^b \times a^b \times \ldots \times a^b}_{c \text{ fatôres}}$$

mas

$$a^b \times a^b \times \ldots \times a^b = a^{b+b+\ldots+b} \quad \text{(Por F. 5.1}$$

mas

$$a^{b+b+\ldots+b} = a^{b \times c} \quad \text{(Def. de Multiplicação)}$$

logo

$$(a^b)^c = a^{b \times c} \quad \text{(Propriedade Transitiva)}$$

Regra:

"Para se elevar uma potência a outra potência, multiplica-se os expoentes e conserva-se a base"

Exemplo:

$$(3^2)^3 = 3^{2 \times 3} = 3^6 = 729$$

F. 6 - Justificativas das extensões

a) Consideremos o quociente:

$$a^b : a^b$$

pela definição de divisão $a^b : a^b = 1$, admitindo que a regra de F. 5. 2, possa ser aplicada também nêste caso teremos:

$$a^b : a^b = a^{b-b} = a^o$$

o que justifica a extensão

$$a^o = 1$$

b) Consideremos a potência

$$a^b$$

e, multiplicaremos por a, temos:

$$a^b \times a$$

pela definição de potência

$$a^b \times a = \underbrace{(a \times a \times \ldots \times a)}_{b \text{ fatôres}} \times a$$

logo:

$$a^b \times a = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{b + 1 \text{ fatôres}}$$

ou que:

$$a^b \times a = a^{b+1}$$

Usando a regra de multiplicação de potência da mesma base temos:

$$a^{b+1} = a^b \times a^1$$

de onde teríamos a igualdade

$$a^b \times a = a^b \times a^1$$

e, sendo $a^b \neq 0$, pela lei do córte teremos:

$$a^1 = a$$

que justifica a extensão.

É importante observar que as extensões deixam as regras F. 5. 1 e F. 5. 2 também válidas nêstes casos.

F. 7 - Exercícios:

Série IX

1 - Construa uma tábua de quadrados e mostre a obtenção dos resultados.

2 - Construa uma tábua de cubos e mostre a obtenção dos resultados.

3 - Mostre que se a base é zero e o expoente é diferente de zero qualquer potência é zero.

4 - Justifique com exemplos numéricos as extensões expoente zero, expente um.

5 - Calcule aplicando a propriedade distributiva:

a) $(4 \times 7 \times 3)^2$

b) $(5 \times 2)^3$

c) $(12 : 2)^3$

6)- Calcule utilizando as operações para bases iguais:

a) $3^2 \times 3^4$

b) $2^3 \times 2^2 \times 2^4$

c) $4^2 \times 4^0 \times 4^1 \times 4^2$

d) $8^5 : 8^2$

e) $7^6 : 7^4$

f) $3^4 : 3^4$

g) $(4^8 : 4^2) : 4^3$

h) $(3^5 : 3^3) \times 3^4$

$i - (5^2 \times 5^7) : 5^6$

$j - (4^2)^2$

$k - (3^2)^{3\ 2}$

$l - (5^3)^{4\ 0^{2}}$

7 - Determine uma regra para potências de base 10, e aplique em:

10^2, 10^3, 10^4 e 10^5

8 - Determine uma regra para potências de base 1. Exemplifique.

9 - Mostre que: $(a^b)^c = (a^c)^b$

10 - Calcule:

a) $5^2 + 3^3 + 2^0 + 0^3 + 4^1 + 1^3$

b) $8^3 - (2^2 \times 2^3) + (3^6 : 3^2)$

c) $(4 + 3)^2 - (5 - 2)^3 + 3^4 + 3^2 - 2^3 \times 2^4$

*

CAPÍTULO III

CÁLCULO PRÁTICO DAS OPERAÇÕES

A. Outra forma dos números:

O princípio Fundamental do Sistema de Numeração Decimal permite escrever os números de uma maneira compacta; assim, o número oitocentos e trinta e quatro, nós o escrevemos simplesmente 834. Vimos para isto, que na representação de um número, cada algarismo possui dois valôres: absoluto e relativo. O valor relativo, que é o de posição, é que vamos realçar, para firmarmos melhor os nossos conhecimentos sôbre a numeração escrita. Poderemos dêste modo obter as regras operacionais.

Retomemos o número 834, temos:

valor de posição do 8 = 800
valor de posição de 3 = 30
valor de posição do 4 = 4

então; temos: $834 = 800 + 30 + 4$

ou: $834 = 8 \times 100 + 3 \times 10 + 4$

ou: $834 = 8 \times 10^2 + 3 \times 10 + 4$

onde o leitor observa claramente que o sistema de numeração utilizado é um <u>sistema posicional multiplicativo e aditivo por justaposição à direita</u>.

<u>Exemplos</u>:

a) $759 = 700 + 50 + 9$
$= 7 \times 100 + 4 \times 10 + 9$
$= 7 \times 10^2 + 5 \times 10 + 9$

b) $8\,326 = 8000 + 300 + 20 + 6$

$= 8 \times 1000 + 3 \times 100 + 2 \times 10 + 6$

$= 8 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 2 \times 10 + 6$

c) $23\,042 = 20000 + 3000 + 40 + 2$

$= 2 \times 10000 + 3 \times 1000 + 0 \times 100 + 4 \times 10 + 2$

$= 2 \times 10^4 + 3 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 4 \times 10 + 2$

d) $2\,007 = 2000 + 7$

$= 2 \times 1000 + 0 \times 100 + 0 \times 10 + 7$

$= 2 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 0 \times 10 + 7$

Indicando para facilidade, a base 10 do sistema (*) com y, teremos por exemplo:

$$739 = 7 \times y^2 + 3 \times y + 9$$

ou, simplesmente, suprimindo o sinal de multiplicação:

$$739 = 7y^2 + 3y + 9$$

De maneira geral o número abcd constituído dos algarismos a, b, c e d, nessa ordem, seria escrito na nova forma: (**)

$$\boxed{abcd = a\,y^3 + b\,y^2 + c\,y + d}$$

Exemplos:

1) $ab = a\,y + b$

2) $abc = a\,y^2 + b\,y + c$

3) $abcde = a\,y^4 + b\,y^3 + c\,y^2 + d\,y + e$

Muitas vêzes prefere-se utilizar para explicações, algarismos indicativos das próprias ordens que

(*) O leitor deverá observar que esta forma é válida para qualquer base y.

(**) O leitor que conhece elementos de álgebra reconhece a forma polinomica.

representam; assim, para as centenas, teremos:

$$\boxed{cdu = c \times 10^2 + d \times 10 + u}$$

B. <u>ADIÇÃO</u>

Sejam os números N e N' que se pretenda adicionar:

$$N = abcd$$
$$N' = a'b'c'd'$$

escritos na nova forma teremos:

$$N = a \times 10^3 + b \times 10^2 + c \times 10 + d$$
$$N' = a' \times 10^3 + b' \times 10^2 + c' \times 10 + d'$$

Adicionando:

$$N + N' = (a \times 10^3 + b \times 10^2 + c \times 10 + d) + (a' \times 10^3 + b' \times 10^2 + c' \times 10 + d')$$

Aplicando a propriedade comutativa e associativa várias vêzes, conseguiremos reunir as parcelas do seguinte modo:

$$N + N' = (a \times 10^3 + a' \times 10^3) + (b \times 10^2 + b' \times 10^2) + (c \times 10 + c' \times 10) + (d + d')$$

Aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição podemos escrever:

$$N + N' = (a+a') \times 10^3 + (b+b') \times 10^2 + (c+c') \times 10 + (d+d')$$

De onde se conclui que devemos adicionar separadamente:

os algarismos das unidades:	d + d'
os algarismos das dezenas :	c + c'
os algarismos das centenas:	b + b'
os algarismos das unidades de milhar:	a + a', etc.

para obtermos, respectivamente:

o algarismo das unidades

o algarismo das dezenas (coeficiente de 10)

o algarismo das centenas (coeficiente de 10^2)

o algarismo das unidades de milhar (coeficiente de 10^3)

Entretanto, pode acontecer que em uma destas adi_ ções parciais, a soma <u>supere</u> ou <u>iguale</u> a base (no caso base 10).

Seja por exemplo:

$$b + b' = 10 + m \quad \text{(m pode ser 0)}$$

Teremos:

$$N + N' + (a+a') \times 10^3 + (10 + m) \times 10^2 + (c + c') \times 10 + (d + d')$$

ou, pela distributividade e pela regra de multiplica- ção de potências da mesma base:

$$N + N' = (a + a') \times 10^3 + 10^3 + m \times 10^2 + (c + c') \times 10 + (d + d')$$

ou, ainda pela distributividade, considerando $10^3 = 1 \times 10^3$

$$N + N' = (a + a' + 1) \times 10^3 + m \times 10^2 + (c + c') \times 10 + (d + d')$$

de onde tiramos: as regras operacionais:

<u>REGRA I</u>:

<u>Para se adicionar dois números, adiciona-se os valôres dos algarismos de uma ordem para se obter o al -garismo da mesma ordem da soma.</u>

<u>REGRA II</u>:

<u>Caso a soma dos valôres dos algarismos, de uma or -dem iguale ou supere a base, do valor do algarismo "m", transporta-se uma unidade para ser adicionada aos va- lôres dos algarismos da ordem imediatamente superior, e toma-se "m" para algarismo da ordem.</u>

<u>Exemplos</u>:

a) $358 + 236 = (3 + 2) \times 10^2 + (5 + 3) \times 10 + (8 + 6)$

como $8 + 6 = 14 = 10 + 4$

$358 + 236 = (3 + 2) \times 10^2 + (5 + 3 + 1) \times 10 + 4$

$= 5 \times 10^2 + 9 \times 10 + 4$

$= 594$

b) $270 + 432 = (2 + 4) \times 10^2 + (7 + 3) \times 10 + 2$

como $7 + 3 = 10 = 10 + 0$

$270 + 432 = (2 + 4 + 1) \times 10^2 + 0 \times 10 + 2$

$= 7 \times 10^2 + 0 \times 10 + 2$

$= 702$

Na prática coloca-se os números de tal forma que os algarismos de mesma ordem (e da mesma classe) ficam na mesma coluna, e a unidade transportada <u>pode</u> ser es- crita ao alto, em cima dos algarismos da ordem superior imediata.

<u>Exemplos</u>:

a) 358 + 236

```
   1
 3 5 8
 2 3 6
 -----
 5 9 4
```

b) 3 270 + 2 432

```
 3 2 7 0
 2 4 3 2
 -------
 5 7 0 2
```

<u>Adições de várias parcelas</u>:

Para adicionar várias parcelas, o procedimento é o mesmo. No lugar de se aplicar a propriedade associati va aos números, aplica-se para os valôres dos algarismos de mesma ordem; portanto, adiciona-se tôda a coluna de cada ordem; o transporte pode dar, agora, de mais de uma unidade (ver segundo exemplo).

Exemplos:

$$\begin{array}{r} 1\,2\,3 \\ 2\,4\,5 \\ \underline{1\,3\,6} \\ 5\,0\,4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5\,3 \\ 3\,8 \\ 4\,2\,6 \\ \underline{3\,4\,7} \\ 8\,6\,4 \end{array}$$

PROVA DE CÁLCULO:

Para efeito de verificação da adição, é costume utilizar-se:

a) Propriedade comutativa: troca-se as parcelas e efetua-se o cálculo novamente

b) Propriedade associativa: No caso de adição de várias parcelas, pode-se aplicar esta propriedade como prova de cálculo; assim, adiciona-se as parcelas reunindo-as de maneiras diferentes.

c) Prova dos nove: será aprendida quando cuidarmos da divisibilidade aritmética, em capítulos posteriores.

d) Prova de Cauchy: Baseia-se na seguinte propriedade:

"A soma de todos os valôres dos algarismos das parcelas e dos algarismos transportados é igual à soma dos valôres dos algarismos da soma, mais o produto por 10 da soma dos valôres dos algarismos transportados".

Exemplo:

235 + 358 + 169

$$\begin{array}{r} 1\,2 \\ 2\,3\,5 \\ 3\,5\,8 \\ \underline{1\,6\,9} \\ 7\,6\,2 \end{array} \quad \begin{array}{c} ----- \\ ----- \\ ----- \\ ----- \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 + 2 \quad\;\; = 3 \\ 2 + 3 + 5 = 10 \\ 3 + 5 + 8 = 16 \\ 1 + 6 + 9 = \underline{16} \\ 45 \end{array}$$

mas: $7 + 6 + 2 = 15$

$15 + 3 \times 10 = 45$ (também)

logo, o cálculo está certo.

O leitor deve fazer os cálculos mentalmente, e não como fizemos, separando as somas, vai-se adicionando todos os valôres dos algarismos: 1 + 2 + 2 + 3 + 5 + 3 + 5 + 8 + 1 + 6 + 9 = 45, etc.

C. SUBTRAÇÃO

Dados os números: $N = abcd$

$N' = a'\, b'\, c'\, d'$

seja a diferença: $N'' = N - N' = a''\, b''\, c''\, d''$

Pela eqüivalência fundamental da subtração devemos ter:

$$N = N'' + N'$$

ou, que:

$a \times 10^3 + b \times 10^2 + c \times 10 + d = (a'' \times 10^3 + b'' \times 10^2 + c \times 10 + d) + (a' \times 10^3 + b' \times 10^2 + c' \times 10 + d')$

e, aplicando a Regra Prática de Adição:

$a \times 10^3 + b \times 10^2 + c \times 10 + d = (a'' + a') \times 10^3 + (b'' + b') \times 10^2 + (c'' + c') \times 10 + (d'' + d')$

Caso as somas parciais não ultrapassem (ou não igualem) a base, devemos ter evidentemente:

$$\begin{array}{lll} a = a'' + a'' & \text{que indicam ser:} & a \geq a' \\ b = b'' + b' & & b \geq b' \\ c = c'' + c' & & c \geq c' \\ d = d'' + d' & & d \geq d' \end{array}$$

e, novamente, pela eqüivalência fundamental da subtração, temos:

$$\begin{aligned} a - a' &= a'' \\ b - b' &= b'' \\ c - c' &= c'' \\ d - d' &= d'' \end{aligned}$$

expressões que nos indicam a seguinte regra operacional:

REGRA I:

Quando o valor do algarismo do minuendo, de dada ordem, é maior ou igual ao valor do algarismo do subtraendo de ordem correspondente, subtrae-se os valôres dos algarismos para se obter o algarismo de mesma ordem da diferença.

Caso alguma soma parcial, ultrapasse (ou iguale) a base não é possível identificar com o algarismo da mesma ordem como fizemos anteriormente; pois, o seu valor é inferior a dez.

Seja para exemplo o caso da soma dos valôres dos algarismos das dezenas ultrapassando a base 10 em "m" unidades:

$$c' + c'' = 10 + m$$

Aplicando a Regra II da adição:

$$a \times 10^3 + b \times 10^2 + c \times 10 + d = (a' + a'') \times 10^3 + (b' + b'' + 1) \times 10^2 + a \times 10 + (d' + d'')$$

Agora, podemos identificar os valôres dos algarismos:

$$\begin{cases} a = a' + a'' \\ b = b' + b'' + 1 \\ c = m \text{ ou } c' + c'' = 10 + m \\ d = d' + d'' \end{cases}$$

De $c' + c'' = 10 + m$ obtemos:

$$c' + c'' = 10 + c \text{ (que indica ser } c < c'\text{)}$$

e, pela eqüivalência fundamental da subtração:

$$c' + c'' = 10 + c \iff \boxed{c'' = (10 + c) - c'}$$

igualdade que nos indica a regra operacional:

REGRA II:

Quando o valor do algarismo do minuendo, de dada ordem, é menor de que o valor do algarismo do subtraendo da ordem correspondente, adiciona-se dez unidades ao minuendo para efetuar a subtração.

A igualdade:

$$b = (b' + b'') + 1 = (b' + 1) + b''$$

fornece também pela eqüivalência:

$$b = (b' + b'') + 1 \iff b - 1 = b' + b''$$

$$\text{e, } \quad b - 1 = b' + b'' \iff (b - 1) - b' = b''$$

$$\text{ou } \quad b = (b' + 1) + b'' \iff b - (b' + 1) = b''$$

Igualdades que fornecem as regras (alternativas) complementares à REGRA II:

REGRA COMPLEMENTAR:

Subtraimos uma unidade ao valor do algarismo do mi-nuendo na ordem imediatamente superior.

ou alternativamente:

Adiciona-se uma unidade ao valor do algarismo do subtraendo na ordem imediatamente superior.

Na prática procede-se como na adição, escrevendo - os algarismos de mesma ordem (e de mesma classe) em coluna, e utiliza-se as regras anteriores mentalmente.

Exemplos:

a) 358 - 215

$$\begin{array}{r} 3\ 5\ 8 \\ \underline{2\ 1\ 5} \\ 1\ 4\ 3 \end{array}$$

b) 2 627 - 1 374

$$\begin{array}{r} 2\ 6\ 2\ 7 \\ \underline{1\ 3\ 7\ 4} \\ 1\ 2\ 5\ 3 \end{array}$$

Nêste segundo exemplo usámos:

para as dezenas: 12 no lugar de 2 (10 + 2) para poder subtrair o 7.

para as centenas: 5 no lugar de 6 (6 - 1)

ou: 4 no lugar de 3 (3 + 1)

PROVA:

É geralmente usada a "prova real", que nada mais é que utilizar a definição (eqüivalência fundamental da subtração):

A soma do subtraendo com a diferença é igual ao diminuendo.

Exemplo:

$$\begin{array}{r} 2\ 8\ 3 \\ \underline{1\ 3\ 6} \\ 1\ 4\ 7 \end{array} - \qquad \text{Prova:} \quad \begin{array}{r} 1\ 3\ 6 \\ \underline{1\ 4\ 7} \\ 2\ 8\ 3 \end{array} +$$

D. MULTIPLICAÇÃO

D. 1. Caso I:

Sejam os números N e N' que se pretende multiplicar:

$$\begin{cases} N = abcd \\ N' = u \end{cases} \quad \text{(de um só algarismo)}$$

Pela definição de multiplicação devemos tomar:

$$N \times N' = \underbrace{N + N + N + \dots \dots + N}_{N' \text{ Parcelas}}$$

$$\text{ou} = \underbrace{N + N + N + \dots\dots + N}_{u \text{ parcelas}}$$

Entretanto, para adicionar, já vimos que se deve adicionar os valores dos algarismos de cada ordem, para se obter o algarismo da mesma ordem da soma; logo:

$$N \times N' = (a + a + \dots + a) \times 10^3 + (b + b + \dots + b) \times 10^2 + (c + c + \dots + c) \times 10 + (d+d+\dots+d)$$

$$\text{como} \begin{cases} d + d + \dots + d = d \times u \\ c + c + \dots + c = c \times u \\ b + b + \dots + b = b \times u \\ a + a + \dots + a = a \times u \end{cases}$$

temos: $\boxed{N \times N' = (a \times u)\times 10^3 + (b \times u)\times 10^2 + (c \times u)\times 10 + (d \times u)}$

resultado ao qual podemos chegar de outra maneira:

$$N \times N' = (a \times 10^3 + b \times 10^2 + c \times 10 + d) \times u$$

$$N \times N' = (a \times 10^3) \times u + (b \times 10^2) \times u + (c \times 10) \times u + d \times u$$

(pela Prop. distributiva)

$$N \times N' = (a \times (10^3 \times u) + b \times (10^2 \times u) + c \times (10 \times u) + d \times u$$

(pela Prop. associativa)

$$N \times N' = a \times (u \times 10^3) + b \times (u \times 10^2) + c \times (u \times 10) + d \times u$$

(pela Prop. comutativa)

$$N \times N' = (a \times u) \times 10^3 + (b \times u) \times 10^2 + (c \times u) \times 10 + d \times u$$

(pela Prop. associativa)

de onde concluimos a regra operacional seguinte:

REGRA I:

Para se multiplicar um número de vários algarismos por um número de um só algarismo, multiplica-se o valor de cada algarismo para se obter o valor do algarismo da mesma ordem do produto.

Exemplo:

132 x 3

```
  1 3 2
      3
  -----
  3 9 6
```

É claro que quando se faz um produto parcial, êle pode ultrapassar uma dezena, o procedimento é o mesmo da adição como veremos:

Seja $c \times u = n \times 10 + m$

Substituindo:

$$N \times N' = (a \times u)\times 10^3 + (b \times u) \times 10^2 + (n \times 10 + m)\times 10 + (d \times u)$$

pela propriedade distributiva podemos escrever:

$$N \times N' = (a \times u) \times 10^3 + (b \times u) \times 10^2 + (n \times 10) \times 10 + m \times 10 + (d \times u)$$

e, pela propriedade associativa e pela definição de potenciação:

$$N \times N' = (a \times u) \times 10^3 + (b \times u) \times 10^2 + n \times 10^2 + m \times 10 + (d \times u)$$

e, novamente pela propriedade distributiva:

$$\boxed{N \times N' = (a \times u) \times 10^3 + (b \times u + n) \times 10^2 + m \times 10 + (d \times u)}$$

de onde concluimos a regra operacional:

REGRA II:

Quando se multiplica o valor de um algarismo de dada ordem pelo valor de um algarismo, e [illegible] resultar um número de dois algarismos, escreve-se o algarismo das unidades para aquela ordem, e transporta-se o valor do algarismo das dezenas para a ordem imediatamente superior.

Exemplo numérico:

283 x 3

$$283 \times 3 = (2 \times 3) \times 10^2 + (8 \times 3) \times 10 + (3 \times 3)$$
$$= (6 \times 10^2 + 24 \times 10 + 9$$
$$= 6 \times 10^2 + (2 \times 10 + 4) \times 10 + 9$$
$$= 6 \times 10^2 + 2 \times 10^2 + 4 \times 10 + 9$$
$$= (6 + 2) \times 10^2 + 4 \times 10 + 9$$

$$= 8 \times 10^2 + 4 \times 10 + 9 = 849$$

ou, de modo prático:

$$\begin{array}{r} 2\ 8\ 3 \\ \underline{3} \\ 8\ 4\ 9 \end{array}$$

D. 2. CASO II:

Sejam N e N' dois números quaisquer, que para facilidade de explicações usaremos ambos com 4 algarismos:

$$\begin{cases} N = abcd \\ N' = a'b'c'd' \end{cases}$$

Temos: $N \times N' = N \times (a' \times 10^3 + b \times 10^3 + c' \times 10 + d')$

pela propriedade distributiva (à esquerda):

$$N \times N' = N \times (a' \times 10^3) + N \times (b' \times 10^2) + N \times (c' \times 10) + N \times d'$$

e, pela propriedade associativa:

$$\boxed{N \times N' = (N \times a') \times 10^3 + (N \times b') \times 10^2 + (N \times c') \times 10 + (N \times d')}$$

onde $N \times a'$, $N \times b'$ e $N \times d'$ são produtos do número N por números de um só algarismo; logo, podemos aplicar em cada caso a regra anterior como indica a regra operacional seguinte:

REGRA III:

Para multiplicar números quaisquer, multiplica-se o valor de cada algarismo do segundo fator, da direita para a esquerda, pelo primeiro número, acrescentando-se a partir do segundo produto, um zero, dois zeros, três zeros, etc., e adiciona-se os produtos parciais.

Exemplo:

325 x 246

$$\begin{aligned} 325 \times 246 &= (325 \times 2) \times 10^2 + (325 \times 4) \times 10 + 325 \times 6 \\ &= 650 \times 10^2 + 1\ 300 \times 10 + 1950 \\ &= 65000 + 13\ 000 + 1\ 950 \\ &= 79\ 950 \end{aligned}$$

ou de modo prático:

$$\begin{array}{rl} 3\ 2\ 5 & \\ \underline{2\ 4\ 6} & \\ 1\ 9\ 5\ 0 & \\ 1\ 3\ 0\ 0\ 0 & (\times\ 10) \\ \underline{6\ 5\ 0\ 0\ 0} & (\times\ 100) \\ 7\ 9\ 9\ 5\ 0 & \end{array}$$

Costuma-se suprimir os zeros das multiplicações - por 10, por 100, etc., simplesmente deslocando os produtos parciais de: um algarismo, dois algarismos, etc., para a esquerda; ou, cada vez um algarismo (ou espaço) para a esquerda:

$$\begin{array}{r} 3\ 2\ 5 \\ \underline{2\ 4\ 6} \\ 1\ 9\ 5\ 0 \\ 1\ 3\ 0\ 0 \\ \underline{6\ 5\ 0} \\ 7\ 9\ 9\ 5\ 0 \end{array}$$

No caso de algum algarismo ser o 0, é claro que a regra ainda válida e aplicável; entretanto na prática passa-se ao produto parcial com o algarismo seguinte deslocando-se mais um algarismo (ou espaço) para a esquerda.

Exemplos:

a) 3 4 8 x 2 0 5

```
      3 4 8
      2 0 5
    -------
    1 7 4 0
  6 9 6        --- (dois espaços)
  ---------
  7 1 3 4 0
```

b) 1 5 9 3 x 3 0 0 8

```
        1 5 9 3
        3 0 0 8
    -----------
      1 2 7 4 4
4 7 7 9          --- (três espaços)
-------------
4 7 9 1 7 4 4
```

PROVA:

Utiliza-se a propriedade comutativa (ou a prova dos nove):

3 4 8 x 2 0 5 = 2 0 5 x 3 4 8

```
      2 0 5
      3 4 8
    -------
    1 6 4 0
    8 2 0
  6 1 5
  ---------
  7 1 3 4 0
```

E. DIVISÃO

E. 1. CASO I:

O dividendo possui o mesmo número de algarismos que o divisor, ou sòmente um a mais, mas, tal que, multiplicando o divisor por 10 supere o di-videndo.

Exemplos:

a) Dividendo D = 834
   Divisor d = 325

b) Dividendo D = 3 356
   Divisor d = 863 (8630 > 3356)

Nêste caso o quociente q é um número de um só algarismo; pois, em caso contrário, se q ≥10, teríamos:

$$d \times q \geq d \times 10 > D$$

O valor dêste algarismo "q" multiplicado pelo divisor "d" deve ser inferior ou igual ao dividendo D.

Aprendemos que para multiplicar um número por um outro de um só algarismo multiplica-se o valor de cada algarismo para se obter o valor do algarismo de mesma ordem do produto; portanto:

a) mesmo número de algarismos:
multiplicando-se o valor do algarismo de maior ordem do divisor (primeiro algarismo da esquerda) devemos obter um valor inferior ou igual ao valor do algarismo também de maior ordem do dividendo.

b) o dividendo possui um algarismo a mais:
o produto do quociente pelo valor do algarismo

de maior ordem do divisor deve ser inferior ou igual ao número constituido pelos dois primeiros algarismos do dividendo.

Entretanto, no cálculo do produto, pode acontecer de haver transporte de unidades da ordem anterior que adiciona-se ao último produto, e, portanto pode superar, (como é o segundo exemplo); disto resulta a regra para determinação de uma cota superior para o valor do algarismo do quociente:

REGRA DA COTA:

Dividindo-se o número constituido pelo primeiro algarismo do dividendo (ou pelos dois primeiros algarismos se o dividendo possui um a mais que o divisor) pelo número constituido pelo primeiro algarismo do divisor, obtém-se uma cota superior do algarismo do quociente.

REGRA DO TENTEIO:

Na prática, utiliza-se a regra da cota e tenteio:

"Determinada a cota, experimenta-se multiplicando-se a cota pelo divisor, se o produto é igual ou inferior ao dividendo, a cota é o próprio quociente, se o produto é superior abaixa-se uma unidade e multiplica-se novamente; e, assim, sucessivamente.

Exemplos:

a) 834 : 325

Cota: 8 por 3 é 2, experimentamos

$$\begin{array}{r} 325 \\ \times\ 2 \\ \hline 650 \end{array} < 834$$

logo o quociente é 2 e o resto é dado por:

$$\begin{array}{r} 834\ - \\ 650 \\ \hline 184 \end{array}$$

b) 3356 : 863

Cota: 33 por 8 é 4, experimentamos:

$$\begin{array}{r} 863 \\ \times\ 4 \\ \hline 3452 \end{array} > 3356$$

Reduzimos: 4 para 3, experimentamos:

$$\begin{array}{r} 863 \\ \times\ 3 \\ \hline 2589 \end{array} < 3356$$

logo o quociente é 3 e o resto é dado por:

$$\begin{array}{r} 3356\ - \\ 2589 \\ \hline 767 \end{array}$$

Na prática utiliza-se o dispositivo denominado: "Divisão com Chave", onde já se efetua a subtração(*) e, quando se efetua uma redução apaga-se os cálculos anteriores:

(*) Na parte metodológica tratar-se-á novamente desta questão com o cuidado que a operação requer.

a) $\begin{array}{r|l} 834 & 325 \\ \hline 184 & 2 \end{array}$ b) $\begin{array}{r|l} 3356 & 863 \\ \hline 767 & 3 \end{array}$

E. 2. <u>CASO II</u>:

<u>O dividendo possui mais algarismos que o divisor</u>

Primeiramente mostraremos a seguinte propriedade que nos vai ser bastante útil:

<u>PROPRIEDADE</u>:

Dada uma Divisão Geral de dividendo D, divisor d, quociente q, e resto r:

<u>Adicionando-se um inteiro "m" ao dividendo, o quo-ciente fica aumentado do quociente "q'" da divisão de (r + m) por "d", e, o novo resto r' é igual ao resto desta divisão.</u>

Dispositivos: $\begin{array}{r|l} D & d \\ \hline r & q \end{array}$ $\begin{array}{r|l} r+m & d \\ \hline r' & q' \end{array}$

De fato:

Temos $D = d \times q + r$ (com $r < d$)

$r + m = d \times q' + r'$ (com $r' < d$)

O novo dividendo é D + m, substituindo o valor de D anterior:

$$D + m = d \times q + d \times q' + r' \quad (\text{com } r' < d)$$

ou, pela propriedade distributiva:

$$D + m = d \times (q + q') + r' \quad (\text{com } r' < d)$$

que prova a propriedade.

<u>Exemplo</u>:

$\begin{array}{r|l} 34 & 4 \\ \hline 2 & 8 \end{array}$

logo: 34 + 9 = 4 3, terá o quociente 8 aumentado do quociente 2 de 2 + 9 = 11 por 4:

$\begin{array}{r|l} 11 & 4 \\ \hline 3 & 2 \end{array}$

isto é, o quociente de 43 por 4 . 8 + 2 = 10 e o resto 3 é o mesmo desta divisão anterior.

Consideremos agora um dividendo qualquer N, por exemplo de 6 algarismos:

$$N = abcdef$$

e, o divisor d.

Admitamos que precisamos separar os quatro primeiros algarismos (abcd) para obtermos um número D maior que d, portanto d deverá ter também 4 algarismos (ou 3)

<u>Exemplo</u>:

$$\begin{cases} N = 3\,4\,2\,8\,4\,5 \\ d = 5\,4\,6 \end{cases}$$

: o número D será 3 4 2 8

Pela Regra da Cota do caso I, podemos determinar o quociente q (6 no caso) de D por d e o resto r (152 no caso):

Esquema:

$\begin{array}{r|l} D & d \\ \hline r & q \end{array}$ ou $\begin{array}{r|l} 3428 & 546 \\ \hline 152 & 6 \end{array}$ <u>Cota</u>: 32 por 5 é 6.

Mostremos agora, que acrescentando-se à direita do número D o algarismo seguinte "e" de N (e = 4 no exemplo), o quociente anterior ficará acrescido também à direita de um só algarismo x, que pode ser obtido dividindo-se o resto "r" anterior (152) acrescido à direita do mesmo algarismo "e"; e, que o resto r' é o resto desta divisão.

Esquemas:

$\bar{D}$ e | d
r'   qx

$\bar{r}$ e | d
r'   x

De fato:

$\bar{D}e = abcde$

logo: $\bar{D}e = D \times 10 + e$

mas como $D = d \times q + r$ teremos substituindo:

$\bar{D}e = (d \times q + r) \times 10 + e$

ou $\bar{D}e = d \times q \times 10 + r \times 10 + e$

ou $\bar{D}e = d \times q \times 10 + \bar{r}e$

No exemplo:

$$34\,284 = 3428 \times 10 + 4$$
$$= 546 \times 6 + 152 \times 10 + 4$$
$$= 546 \times 6 \times 10 + 152 \times 10 + 4$$
$$= 546 \times 6 \times 10 + 1524$$

A igualdade anterior nos mostra que o número $\bar{D}$ e é igual ao número d x (q x 10) aumentado do número $\bar{r}$ e; portanto pela propriedade, anteriormente explicada, o quociente de $\bar{D}$ e por d é igual à soma do quociente de

d x (q x 10) com o quociente de $\bar{r}$ e adicionado com o resto anterior.

Vejamos cada dividendo:

1º. d x (q x 10) é o multiplo de d, logo o resto é 0 e o quociente é q x 10

2º. $\bar{r}$ e [illegible] 0 [illegible] r e
mas, $\bar{r}e = r \times 10 + e \leq r \times 10 + 10 = (r + 1)$x
x 10 e como r < d será (r + 1) ≤ d, ou
(r - 1)x 10 ≤ d x 10 que indica ser:
$\bar{r}e < d \times 10$
resto é, [illegible] por d obtem-se um só
algarismo x (CASO 1) e um resto r'.

Esquema.

$\bar{r}$ e | d
r'   x

Pela propriedade o quociente será $q' = q \times 10 + x$
ou: $q' = qx$

No exemplo:

1 5 2 4 | 5 4 6
4 3 2   2

Cota: 15 por 5 é 3, passa, reduzimos para 2.

Portanto o quociente de 34284 por 546 é 62 e o resto é o número 432.

Aplicamos novamente o raciocínio utilizando o próximo algarismo da direita t = 5 de N:

4 3 2 5 | 5 4 6
5 0 3   7

Cota: 43 por 5 é 8, passa; reduzimos para 7.

Portanto o quociente de 3 42845 por 546 é 627 e o

resto é o número 503.

Do raciocínio empregado segue o algarismo prático seguinte:

E. 3. <u>ALGORITMO DA DIVISÃO</u>:

1. Separa-se no dividendo, da esquerda para a direita, os algarismos necessários para superar ou igualar o divisor, obtendo-se o 1º dividendo - parcial,
2. Determina-se pela Regra da Cota e Tenteio o primeiro algarismo do quociente,
3. Multiplica-se o valor do algarismo pelo divisor e subtrae-se do dividendo parcial,
4. Acrescenta-se à direita do resto parcial o próximo algarismo do dividendo depois do último dividendo parcial, obtendo-se novo dividendo parcial,
5. Pela Regra da Cota e Tenteio obtem-se o próximo algarismo do quociente,
6. Repete-se as fases 3, 4 e 5 sucessivamente;
7. O último resto parcial é o resto da divisão;
8. Na aplicação da Regra da Cota e Tenteio pode se dar o caso de um dividendo parcial ser inferior ao divisor, então, o algarismo do quociente será 0; e, passa-se à fase 4 acrescentando-se o próximo algarismo à direita do último dividendo.

Na prática fazemos todos os cálculos numa só divisão com chave:

<u>Exemplos</u>: a)

```
   ↓ ↓
3 4 2 8 4 5 | 5 4 6
1 5 2 4       6 2 7 = quociente
  4 3 2 5
resto = 5 0 3
```

b)

```
      ↓ ↓ ↓
3 7 3 9 3 6 | 4 2
3 7 9         8 9 0 3.
  0 1 3 6
      1 0
```

E . 4. <u>PROVA</u>:

Utiliza-se como contrôle de cálculo a <u>prova real</u>, que consiste em verificar a definição (ou a prova dos nove):

Exemplo:

b)

```
    8 9 0 3          3 7 3 9 2 6
  ·     4 2      -           1 0 +
  1 7 8 0 6      -------------
3 5 6 1 2        3 7 3 9 3 6
-----------
3 7 3 9 3 6
```

F. <u>EXERCÍCIOS</u>:

F.1: 1. Escreva os números: a) 73 b) 528 c) 6 008 d) 35 437 na forma polinômica.

2. Faça as adições seguintes escrevendo os números na forma polinômica: explicando as passagens: a) 372 + 517 b) 7 286 + 2 552 c) 83 + 297

3. Faça as adições do exercício 2 com o dispositivo prático.

4. Idem, as adições de várias parcelas:
a) 325 + 579 + 384 b) 4 236 + 3 527 + 136 + + 92 + 508

5. Aplique a propriedade comutativa como contrôle de cálculo ao exercício 3.

6. Aplique a propriedade associativa como contrôle de cálculo ao exercício 4.

7. Aplique a Regra de Cauchy aos exercícios 3 e 4.

F.2: 1. Calcule as diferenças escrevendo os números na forma polinômica, admitindo uma forma polinômica para a diferença:
a) 768 - 234 b) 638 - 262 c) 2 873 - 1 149

2. Faça as subtrações do exercício 1 com o dispositivo em colunas.

3. Aplique a prova real ao exercício 2.

F.3: 1. Calcule os produtos seguintes, escrevendo os números na forma polinômica:
a) 342 x 2 b) 392 x 3 c) 4 086 x 4

2. Efetue as multiplicações anteriores aplicando a definição de multiplicação como adição.

3. Efetue as multiplicações do exercício 1 aplicando o dispositivo prático.

4. Calcule os produtos seguintes escrevendo os dois fatôres na forma polinômica:
a) 48 x 35 b) 326 x 654 c) 73 x 49

5. Calcule as multiplicações anteriores escrevendo um só fator na forma polinômica.

6. Efetue as multiplicações do exercício 4 com o dispositivo prático.

7. Aplique a propriedade comutativa ao exercício anterior como prova de cálculo.

F.4: 1. Determine as Cotas em separado e efetue as divisões com o dispositivo da "divisão com chave":
a) 326 : 213 b) 964 : 236 c) 1 235 : 408
d) 3 806:784 e) 4 398:856 f) 4 689 : 1527

2. Sabendo que o quociente de 9 por 2 é 4 e o resto é 1; aplicando a propriedade responda qual é o quociente e o resto de 15 por 2 e por que?

3. Faça as seguintes divisões:
a) 3 872 : 46 b) 23 568 : 423 c) 203570:362
d) 10082 : 39 e) 4 000 : 120 f) 2 379 : 34

4. Faça as verificações de cálculo do exercício 3 com a prova real.

*

resto é o número 503.

Do raciocínio empregado segue o algarismo prático seguinte:

E. 3. ALGORITMO DA DIVISÃO:

1. Separa-se no dividendo, da esquerda para a direita, os algarismos necessários para superar ou igualar o divisor, obtendo-se o 1º dividendo - parcial,
2. Determina-se pela Regra da Cota e Tenteio o primeiro algarismo do quociente,
3. Multiplica-se o valor do algarismo pelo divisor e subtrae-se do dividendo parcial,
4. Acrescenta-se à direita do resto parcial o próximo algarismo do dividendo depois do último dividendo parcial, obtendo-se novo dividendo parcial,
5. Pela Regra da Cota e Tenteio obtem-se o próximo algarismo do quociente,
6. Repete-se as fases 3, 4 e 5 sucessivamente;
7. O último resto parcial é o resto da divisão;
8. Na aplicação da Regra da Cota e Tenteio pode se dar o caso de um dividendo parcial ser inferior ao divisor, então, o algarismo do quociente será 0; e, passa-se à fase 4 acrescentando-se o próximo algarismo à direita do último dividendo.

Na prática fazemos todos os cálculos numa só divisão com chave:

Exemplos: a)

3 4 2 8 4 5	5 4 6
1 5 2 4	6 2 7 = quociente
4 3 2 5	
resto = 5 0 3	

b)

3 7 3 9 3 6	4 2
3 7 9	8 9 0 3.
0 1 3 6	
1 0	

E . 4. PROVA:

Utiliza-se como contrôle de cálculo a prova real, que consiste em verificar a definição (ou a prova dos nove):

Exemplo:

b)
$$\begin{array}{r} 8\,9\,0\,3 \\ \cdot\ 4\,2 \\ \hline 1\,7\,8\,0\,6 \\ 3\,5\,6\,1\,2 \\ \hline 3\,7\,3\,9\,3\,6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3\,7\,3\,9\,2\,6 \\ -\quad 1\,0\,+ \\ \hline 3\,7\,3\,9\,3\,6 \end{array}$$

F. EXERCÍCIOS:

F.1: 1. Escreva os números: a) 73 b) 528 c) 6 008 d) 35 437 na forma polinômica.

2. Faça as adições seguintes escrevendo os números na forma polinômica: explicando as passagens: a) 372 + 517 b) 7 286 + 2 552 c) 83 + 297

3. Faça as adições do exercício 2 com o dispositivo prático.

resto é o número 503.

Do raciocínio empregado segue o algarismo prático seguinte:

E. 3. <u>ALGORITMO DA DIVISÃO</u>:

1. Separa-se no dividendo, da esquerda para a direita, os algarismos necessários para superar ou igualar o divisor, obtendo-se o 1º dividendo - parcial,
2. Determina-se pela Regra da Cota e Tenteio o primeiro algarismo do quociente,
3. Multiplica-se o valor do algarismo pelo divisor e subtrae-se do dividendo parcial,
4. Acrescenta-se à direita do resto parcial o próximo algarismo do dividendo depois do último dividendo parcial, obtendo-se novo dividendo parcial,
5. Pela Regra da Cota e Tenteio obtem-se o próximo algarismo do quociente,
6. Repete-se as fases 3, 4 e 5 sucessivamente;
7. O último resto parcial é o resto da divisão;
8. Na aplicação da Regra da Cota e Tenteio pode se dar o caso de um dividendo parcial ser inferior ao divisor, então, o algarismo do quociente será 0; e, passa-se à fase 4 acrescentando-se o próximo algarismo à direita do último dividendo.

Na prática fazemos todos os cálculos numa só divisão com chave:

<u>Exemplos</u>: a)

```
        ↓ ↓
3 4 2 8 4 5  | 5 4 6
  1 5 2 4      6 2 7 = quociente
    4 3 2 5
resto = 5 0 3
```

b)

```
      ↓ ↓ ↓
3 7 3 9 3 6  | 4 2
  3 7 9        8 9 0 3.
    0 1 3 6
        1 0
```

E . 4. <u>PROVA</u>:

Utiliza-se como contrôle de cálculo a <u>prova real</u>, que consiste em verificar a definição (ou a prova dos nove):

Exemplo:

b)

```
    8 9 0 3          3 7 3 9 2 6
  ×     4 2                  1 0 +
  ---------        -------------
  1 7 8 0 6          3 7 3 9 3 6
3 5 6 1 2
-----------
3 7 3 9 3 6
```

F. <u>EXERCÍCIOS</u>:

F.1: 1. Escreva os números: a) 73 b) 528 c) 6 008 d) 35 437 na forma polinômica.

2. Faça as adições seguintes escrevendo os números na forma polinômica: explicando as passagens: a) 372 + 517 b) 7 286 + 2 552 c) 83 + 297

3. Faça as adições do exercício 2 com o dispositivo prático.

4. Idem, as adições de várias parcelas:
a) 325 + 579 + 384 b) 4 236 + 3 527 + 136 + + 92 + 508

5. Aplique a propriedade comutativa como contrôle de cálculo ao exercício 3.

6. Aplique a propriedade associativa como contrôle de cálculo ao exercício 4.

7. Aplique a Regra de Cauchy aos exercícios 3 e 4.

F.2: 1. Calcule as diferenças escrevendo os números na forma polinômica, admitindo uma forma polinômica para a diferença:
a) 768 - 234 b) 638 - 262 c) 2 873 - 1 149

2. Faça as subtrações do exercício 1 com o dispositivo em colunas.

3. Aplique a prova real ao exercício 2.

F.3: 1. Calcule os produtos seguintes, escrevendo os números na forma polinômica:
a) 342 x 2 b) 392 x 3 c) 4 086 x 4

2. Efetue as multiplicações anteriores aplicando a definição de multiplicação como adição.

3. Efetue as multiplicações do exercício 1 aplicando o dispositivo prático.

4. Calcule os produtos seguintes escrevendo os dois fatôres na forma polinômica:
a) 48 x 35 b) 326 x 654 c) 73 x 49

5. Calcule as multiplicações anteriores escrevendo um só fator na forma polinômica.

6. Efetue as multiplicações do exercício 4 com o dispositivo prático.

7. Aplique a propriedade comutativa ao exercício anterior como prova de cálculo.

F.4: 1. Determine as Cotas em separado e efetue as divisões com o dispositivo da "divisão com chave":
a) 326 : 213 b) 964 : 236 c) 1 235 : 408
d) 3 806:784 e) 4 398:856 f) 4 689 : 1527

2. Sabendo que o quociente de 9 por 2 é 4 e o resto é 1; aplicando a propriedade responda qual é o quociente e o resto de 15 por 2 e por que?

3. Faça as seguintes divisões:
a) 3 872 : 46 b) 23 568 : 423 c) 203570:362
d) 10082 : 39 e) 4 000 : 120 f) 2 379 : 34

4. Faça as verificações de cálculo do exercício 3 com a prova real.

*

CAPITULO - IV

DIVISIBILIDADE NUMÉRICA

A. MÚLTIPLOS E DIVISORES

A.1. Preliminares:

Temos estudado no capítulo II-D.1. os múltiplos de um número "a"; isto é, os produtos de "a" pela sucessão de inteiros: 0, 1, 2, 3, 4, ...

Agora, após o conhecimento da operação de Divisão, podemos introduzir o conceito de divisor de um número, conceito intimamente ligado ao de múltiplo.

A.2. Definições:

Dizemos que um número "a" é divisor de um inteiro "b" se existe um inteiro "y" tal que $a \times y = b$.

O número "b" é denominado múltiplo de "a".

Indicamos:

$$a \mid b$$

e lemos:

$$\begin{cases} \text{a é divisor de b} \\ \text{a é fator de b} \\ \text{a divide b} \\ \text{a é sub-múltiplo de b} \end{cases}$$

ou:

$$\begin{cases} \text{b é múltiplo de a} \\ \text{b é divisível por a} \end{cases}$$

Em caso contrário indicaremos $a \nmid b$, e lemos "a não divide b".

Nota: Da definição é claro, que o zero é divisor sòmente do zero; e, que é múltiplo de qualquer número.

Da definição resulta a equivalência fundamental da divisibilidade

$$\boxed{a \mid b \Leftrightarrow \text{existe um inteiro } y\text{, tal que: } a \times y = b}$$

Exemplos:

a) $3 \mid 12$ pois $3 \times 4 = 12$

b) $2 \mid 20$ pois $2 \times 10 = 20$

c) $3 \nmid 10$ pois, não existe um inteiro y tal que $3 \times y = 10$.

A.3. PROPRIEDADES:

1. Reflexiva:

$$\boxed{a \mid a}$$

De fato: $a \times 1 = a \Rightarrow a \mid a$

Exemplo: 5 divide 5

2. Transitiva:

$$\boxed{\text{Se } a \mid b\text{, e } b \mid c \text{ então } a \mid c}$$

De fato:

$$\begin{cases} a \mid b \Longleftrightarrow \text{existe um inteiro } y,\ a \times y = b \\ b \mid c \Longleftrightarrow \text{existe um inteiro } z,\ b \times z = c \end{cases}$$

multiplicando a primeira igualdade por z obtemos:

$$(a \times y) \times z = b \times z$$

ou:

$$a \times (y \times z) = c$$

Pela propriedade associativa e pela segunda igualdade.

indicando $y \times z$ com w (também inteiro):

$$a \times w = c \Longrightarrow a \mid c$$

Exemplo:

$$\text{Se } 2 \mid 6 \text{ e } 6 \mid 18 \text{ , então } 2 \mid 18$$

3. Anti-simétrica:

$$\boxed{\text{Se } a \mid b \text{ , e } b \mid a \text{ então } a = b}$$

De fato:

$$\begin{cases} a \mid b \Longleftrightarrow \text{existe um inteiro } y,\ a \times y = b \\ b \mid a \Longleftrightarrow \text{existe um inteiro } z,\ b \times z = a \end{cases}$$

Multiplicando a primeira igualdade pelo inteiro z:

$$(a \times y) \times z = b \cdot x\ z$$

ou: $a \times (y \times z) = a$ ou $a \times (y \times z) = 1 \times a$

Sejam os dois casos possíveis: $\begin{cases} a \neq 0 \\ a = 0 \end{cases}$

No primeiro caso é aplicável a lei do córte à multiplicação; teremos portanto:

$$y \times z = 1$$

de onde, concluimos que ambos fatôres são iguais à unidade:

$$y = z = 1$$

de onde resulta ainda : $a = b$

No segundo caso, se $a = 0$, resulta também de $a \times y = b$ que $b = 0$; e, portanto $a = b$.

A.4. Divisores Próprios, Primeiro e último Divisor

Da igualdade $1 \times a = a$ concluimos que $1 \mid a$ qualquer que seja a, logo:

"1 é divisor de qualquer inteiro"

de onde, a denominação de **Primeiro Divisor** ou **Divisor Universal**.

Da igualdade $a \times 0 = 0$, concluimos, como já observamos anteriormente, que $a \mid 0$, qualquer que seja o inteiro "a", logo:

"0 e múltiplo de qualquer inteiro"

de onde, a denominação de **Último Divisor** ou **Múltiplo Universal**.

Da propriedade reflexiva $a|a$, e de $1|a$, concluimos que, todo inteiro diferente de 1 e de 0, sempre possui dois divisores: o 1 e êle próprio; disto resulta que êsses números são chamados divisores impróprios.

Todo divisor que não é divisor impróprio é chamado divisor próprio (ou pròpriamente divisor); logo, divisor próprio de um número inteiro é todo divisor do inteiro que chamamos divisores impróprios.

B. DIAGRAMAS DE DIVISORES

Primeiramente denominamos divisor intermediário de dois outros "a" e "b" a todo inteiro tal "c" diferente de "a" e de "b" , tal que:

$$a \mid c \text{ e } c \mid b \quad (\text{no caso de } a < b)$$

Denominamos também: Divisor imediato de outro "b" ao todo inteiro "c" (diferente de b), divisor de b, tal que "c e b" não possuam divisores intermediários. O número "b" é então denominado múltiplo imediato de "a".

Assim: a) 6 é divisor intermediário de 2 e 18

b) 9 é divisor imediato de 19

c) 18 é múltiplo imediato de 9.

As definições anteriores são restringidas também a um conjunto de inteiros; assim, seja dado o conjunto de inteiros:

$$\{2 , 3 , 5 \ 18\}$$

temos:

3 e 18 não possuem divisor intermediário (no conjunto); logo 3 é o divisor imediato de 18 (que lhe é múltiplo imediato).

É interessante e nos será útil em capítulos posteriores a representação gráfica dos inteiros de um conjunto segundo as definições de divisor intermediário e de divisor imediato.

Essa representação gráfica recebe o nome de Diagrama de Hasse; e, segue a seguinte regra:

1. Cada inteiro do conjunto é representado por um ponto (ou pequeno círculo), denominado afixo ou imagem do inteiro,
2. Os afixos de dois inteiros do conjunto são ligados por um segmento sòmente quando um é divisor imediato do outro no conjunto.
3. Faz-se o Diagrama construindo o afixo do múltiplo imediato de um inteiro acima do afixo dêsse inteiro.

<u>Exemplos</u>:

a) $A = \{1, 2, 4, 6, 12\}$

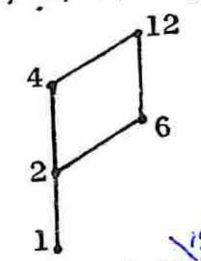


Fig. 11

b) $B = \{1,2,3,4,6,8,12,15,18,24\}$

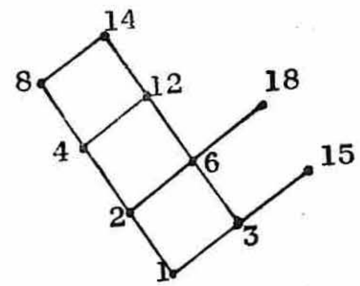


Fig. 12

c) $C = \{2,3,4,5,6,12,15\}$

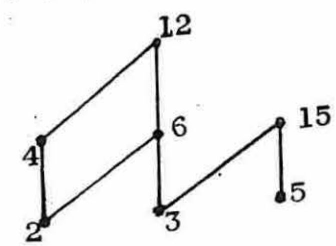


Fig.13

C. <u>EQUIMÚLTIPLOS E EQUIDIVISORES</u>

<u>Definição I: Dois ou mais números são equimúltiplos de outros números quando são iguais aos produtos dêsses números por um mesmo inteiro.</u>

<u>Definição II: Dois ou mais números são equidivisores de outros números, quando são iguais aos quocientes exatos dêsses números por um mesmo inteiro.</u>

Exemplos: 20 e 30 são equimúltiplos de 4 e 6

4 e 6 são equidivisores de 20 e 30

D. PROPRIEDADES OPERACIONAIS DA DIVISIBILIDADE

Cuidaremos em seguida, de propriedades da divisibilidade, que nos serão duplamente necessárias: para a determinação dos critérios e para as provas das operações.

1. Em relação à adição:

Todo número que é divisor das parcelas é divisor da soma, ou:

A soma de múltiplos de um número é ainda múltiplo do mesmo número.

De fato: Seja para facilitar as explicações uma adição de três parcelas:

$$S = b + c + d$$

Pela hipótese feita seja "a" o divisor de cada parcela; temos:

$$\begin{cases} a \mid b \iff \text{existe um inteiro } y,\ a \times y = b \\ a \mid c \iff \text{existe um inteiro } z,\ a \times z = c \\ a \mid d \iff \text{existe um inteiro } w,\ a \times w = d \end{cases}$$

Por ser: $S = b + c + d$

será: $S = axy + axz + axw$

e, aplicando a propriedade distributiva à esquerda:

$$S = a \times (y + z + w)$$

2. Complementar em relação à adição:

Forma A: Todo número que é divisor de uma parcela e não é divisor da outra, não é divisor da soma; e, o resto da divisão da soma por êste número é o mesmo resto da divisão da parcela não divisível.

De fato: Seja a soma $S = b + c$, e "a" o divisor de "b" e não divisor de "c"; temos:

$a \mid b \iff$ existe um inteiro y, $a \times y = b$

$a \nmid c \iff a \times z + r = c$, com $r < a$

Adicionando:

$$b + c = a \times y + a \times z + r$$

ou, pela propriedade distributiva:

$$S = a \times (y + z) + r$$

chamando O inteiro igual a $y + z$ de t, temos:

$$S = a \times t + r \qquad \text{com } r < a$$

igualdade que implica $a \nmid S$ e o resto é r.

Exemplo: $3 \mid 15$

$3 \nmid 20$ e o resto é 2,

logo $3 \nmid 35$ é o resto também é 2.

Nota: Pode-se dar outra forma a esta propriedade:

FORMA B: Dividindo-se uma soma por um inteiro o resto é igual ao resto da divisão da soma dos restos de cada parcela pelo mesmo número.

De fato: Seja, para facilidade, a soma de duas parcelas: $S = b + c$

Temos: $a \nmid b \iff b = a \times y + r$

$a \nmid c \iff c = a \times z + r'$

Adicionando: $b + c = a \times y + r + a \times z + r'$

ou

$$S = a \times (y + z) + (r + r')$$

Como a primeira parcela é divisível por "a", aplicando a Forma A concluimos que o resto da divisão de "S" por "a" é o mesmo resto da divisão de $r + r'$ por "a".-

Exemplo:

$$\begin{cases} 10 : 3 \text{ dá resto } 1 \\ 16 : 3 \text{ dá resto } 1 \\ 20 : 3 \text{ dá resto } 2 \end{cases}$$

logo, $10 + 16 + 20 = 46$ dá resto 1 igual ao resto da divisão de $1 + 1 + 2 = 4$ por 3.

Nota: Esta Forma B nos mostra também que as parcelas de uma soma podem não ser divisíveis por um número, mas que podem ter a soma divisível, como nos mostra o exemplo:

$$\begin{cases} 9 : 2 \text{ dá resto } 1 \\ 5 : 2 \text{ dá resto } 1 \end{cases}$$

mas $9 + 5 = 14$ é divisível por 2, pois $1 + 1 = 2$.

3. Em relação à multiplicação:

Todo número que é divisor de um dos fatôres é divisor do produto. ou:

Todo número que é divisor de outro é divisor de todos seus múltiplos.

De fato: Seja uma multiplicação de dois fatôres

$$P = b \times c$$

Pela hipótese feita, seja "a" o divisor de um fator, por exemplo de "b":

$a \mid b \iff$ existe um inteiro y, $a \times y = b$

Por ser: $P = b \times c$

será: $P = (a \times y) \times c$

e, pela associativa: $P = (a \times (y \times c)$

ou: $P = a \times t \Longrightarrow a \mid P$

Exemplo:

a) $3 \mid 12$ logo $3 \mid 48$ pois $48 = 12 \times 4$

b) $3 \mid 9$ logo $3 \mid 45$ pois $45 = 9 \times 5$, e $3 \nmid 8$

4. Complementar em Relação à multiplicação

Dividindo-se o produto por um número, o resto é igual ao resto da divisão do produto dos restos de cada fator pelo mesmo número.

De fato: Seja o produto : $P = b \times c$

temos: $\begin{cases} a \nmid b \iff b = a \times y + r \\ a \nmid c \iff c = a \times z + r' \end{cases}$

Multiplicando:

$$b \times c = (a \times y + r) \times (a \times z + r')$$

e, aplicando a propriedade distributiva à esquerda e depois à direita:

$$P = (a \times y) \times (a \times z) + r \times (a \times z) + (a \times y) \times r' + r \times r'$$

Pela propriedade 3 as três primeiras parcelas são divisíveis por "a" ; portanto, pela propriedade 1 a sua soma é divisível por "a"; e pela propriedade 2 o resto da divisão de P por "a" é o mesmo da divisão de $r \times r'$ por "a", como pretendíamos mostrar.

Exemplo: 8 : 3 dá resto 2

17 : 3 dá resto 2

logo $8 \times 17 = 136$ dá resto 1, igual ao da divisão de $2 \times 2 = 4$ por 3 que é 1.

Nota: Esta propriedade complementar nos mostra também, que os fatôres de um produto podem não ser divisíveis por um número; mas, que podem ter o produto divisível.

Exemplo: 42 : 10 dá resto 2, 55 : 10 dá resto 5, mas o produto 42×55 é divisível por 10 pois $2 \times 5 = 10$ e 10 é divisível por 10.-

5. Em relação à subtração:

"Todo número que é divisor de dois têrmos é divisor de sua diferença".

De fato:

Seja $b \geqslant c$, e "a" o divisor comum, temos:

$$\begin{cases} a \mid b \iff \text{existe um inteiro } y,\ a \times y = b \\ a \mid c \iff \text{existe um inteiro } z,\ a \times z = c \end{cases}$$

Seja a diferença d:

$$d = b - c \quad \text{ou} \quad d = a \times y - a \times z$$

Pela distributividade da multiplicação em relação à subtração:

$$d = a \times (y - z)$$

Por ser $y - z$ igual a um inteiro t:

$$d = a \times t \Longrightarrow a \mid d$$

Exemplo:

Se sabemos que $2 \mid 12$ e $2 \mid 20$ podemos afirmar que $2 \mid 8$ pois $20 - 12 = 8$.

6. Em relação à divisão:

"Todo número que é divisor do dividendo e do divisor (ou quociente) de uma divisão, é divisor do resto."

De fato: Seja a divisão de:

dividendo D, divisor d, quociente q e resto r.

e, seja "a" o divisor do dividendo e do divisor:

Como $D = d \times q + r$ é $D - d \times q = r$

como: $\begin{cases} a \mid d \text{ por hipótese, } a \mid d \times q \text{ (propriedade 3)} \\ a \mid D \text{ por hipótese, dividirá a diferença (propriedade 5) logo: } a \mid r. \end{cases}$

Exemplo:

$3 \mid 180$

$3 \mid 24$ é, 180 : 24 é 7 e o resto é 12, e de fato $3 \mid 12$ que é o resto.

E - NÚMEROS CÔNGRUOS OU CONGRUENTES

"Dois números são denominados côngruos em relação a um inteiro (ou segundo um inteiro), quando divididos por êsse inteiro fornecem o mesmo resto".

Exemplo: 20 e 44 são números côngruos (ou congruentes) segundo o inteiro 6, pois:

20 : 6 é 3 e o resto é 2

44 : 6 é 7 e o resto também é 2.

Indicamos:

$$20 \equiv 44 \quad (6)$$

De uma meneira geral indicamos:

$$\boxed{a \equiv b \quad (d)}$$

O inteiro d é denominado módulo da congruência.

Nota: Não desenvolvemos êste tópico, pela extensão e complexibilidade que fugiam ao nível dêste trabalho; mas, aconselhamos aos interessados a consultar a bibliografia; pois, o conhecimento da teoria das congruências facilitaria muitíssimo a determinação dos critérios de divisibilidade.

F. CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE

F.1. Preliminares:

Muitas vêzes é útil saber se um número é ou não divisível por outro sem efetuar a divisão e, outras vêzes é também importante a determinação do resto sem efetuar a divisão.

Destas necessidades decorre o estudo para a determinação de regras práticas que forneçam as respostas anteriores.

Essas regras são denominadas: "Critérios de Divisibilidade" ou "Caracteres de Divisibilidade"; quando a regra fornece também o resto é claro que ela é uma regra mais completa, por isso ela é então denominada "Critério-Resto de Divisibilidade".

Nos ítens seguintes nós procuraremos dar as explicações gerais que permitam extrair essas regras.

F.2. Forma Geral Reduzida Congruente.

O raciocínio, que faremos em seguida, será utilizado à determinação de um número mais simples do que um número dado qualquer; e, que seja congruente com êle; o qual será muitíssimo útil para a obtenção dos critérios de divisibilidade.

Consideremos o número N (para simplicidade com 4 algarismos) e o divisor "a":

$$N = mcdu$$

ou na forma polinômica:

$$N = m \times 10^3 + c \times 10^2 + d \times 10 + u$$

Sejam:

1) r' o resto da divisão de 10 por "a", portanto, 10 é um múltiplo de "a" mais r':

$$10 = \text{múltiplo de } a + r'$$

ou, indicando qualquer múltiplo de a por A:

$$\boxed{10 = A + r'}$$

2) r" o resto da divisão de 10^2 por "a", portanto:

$$\boxed{10^2 = A + r''}$$

3) r"' o resto da divisão de 10^3 por a, portanto :

$$\boxed{10^3 = A + r'''}$$

e, anàlogamente se o número N tivesse mais algarismos.

Substituimos na forma polinômica do número N:

$$N = m \times (A + r''') + c \times (A + r'') + dx(A+r') + u$$

Pela propriedade distributiva:

$$N = m \times A + m \times r''' + c \times A + c \times r'' + dxA + dxr' + u$$

Sendo o múltiplo de a, pela propriedade da divisibilidade em relação à multiplicação:

$m \times A$, $c \times A$, $d \times A$ são também múltiplos de A; e, de a, podemos escrever:

$$N = A + m \times r''' + A + c \times r'' + A + d \times r' + A + u$$

e, pela propriedade da divisibilidade em relação à adição:

$A + A + A$ é ainda múltiplo de a:

$$N = A + (m \times r''' + c \times r'' + d \times r' + u)$$

Pela propriedade Complementar da divisibilidade em relação à adição o resto da divisão do número

$$\boxed{R = m \times r''' + c \times r'' + d \times r' + u}$$

por "a" é o mesmo resto da divisão do número N por "a", logo, N é congruente com R, segundo o número "a":

$$\boxed{N \equiv R} \qquad (a)$$

Esta congruência nos permite portanto estudar a divisibilidade de um número N por "a" através do número congruente R. Ao número R chamamos <u>Forma Geral Reduzida Congruente</u>.

Obtida a Forma Geral Reduzida Congruente de um número pode-se passar a raciocinar, não sôbre o número dado, mas sôbre êste número R.

F.3. <u>Divisibilidade por 10</u>:

Sendo:

$$\begin{cases} 10 : 10 = 1, & \text{e o resto } r' = 0 \\ 10^2 : 10 = 10, & \text{e o resto } r'' = 0 \\ 10^3 : 10 = 10^2, & \text{e o resto } r''' = 0 \end{cases}$$

e, assim sucessivamente, substituindo na Forma Geral Reduzida Congruente obtemos:

$$R = 0 + 0 + 0 + u$$

ou $\qquad R = u$

isto é: $\qquad \boxed{N \equiv u} \qquad$ 10)

de onde deriva o critério-resto seguinte:

<u>Critério-Resto por 10</u>:

<u>O resto da divisão de um número por 10 é igual ao valor do algarismo das unidades.</u>

Com consequência resulta que um número é divisível por 10 se o último algarismo é 0.

Exemplos:

a) 3 450 é divisível por 10

b) 8 434 não é divisível por 10 e o resto é 4.

F.4. <u>Divisibilidade por 2 (ou por 5)</u>

Sendo: $\quad 10 : 2 = 5$ e o resto $r' = 0$

ou $\quad 10 : 5 = 2$ e o resto $r' = 0$

$\quad 10^2 : 2 = 50$ e o resto $r'' = 0$

ou $\quad 10^2 : 5 = 20$ e o resto $r'' = 0$

e, assim sucessivamente, substituindo na Forma Geral Re duzida Congruente obtemos:

$$R = u$$

isto é:

$$\boxed{N \equiv u \qquad (2 \text{ ou } 5)}$$

de onde concluimos o critério:

Critério-Resto por 2 (ou 5)

O resto da divisão de um número por 2 (ou 5) é igual ao resto da divisão do valor do algarismo das unidades por 2 (ou 5).

Como consequência:

a) Um número é divisível por 2 se o último algarismo é: 0, 2, 4, 6 ou 8; e, caso não seja divisível, o resto é sempre igual à unidade.

b) Um número é divisível por 5 se o último algarismo é 0 ou 5.

Exemplos:

a) 3 854 é divisível por 2
b) 7 327 não é divisível por 2 e o resto é 1
c) 470 é divisível por 5
d) 325 é divisível por 5
e) 828 não é divisível por 5 e o resto é 3, pois 8 : 5 é 1 e o resto é 3. (ou 8 - 5 = 3).

F.5. Divisibilidade por 4

Sendo:

O resto de 10 por 4 igual a r' = 2,

o resto de 10^2 por 4 igual a r'' = 0,

o resto de 10^3 por 4 igual a 4''' = 0;

e, assim sucessivamente, substiutindo na Forma Geral Reduzida Congruente obtemos:

$$R = d \times 2 + u$$

isto é:

$$\boxed{N \equiv d \times 2 + u} \qquad (4)$$

de onde conluímos o critério:

Critério -Resto por 4.

O resto da divisão de um número por 4 é igual ao resto da divisão do número formado pelo dôbro do valor do algarismo das dezenas mais o valor do algarismos das unidades pelo número 4.

Exemplos:

a) 7 256 é divisível por 4; pois, 2 x 5 + 6=16, e 16 e divisível por 4.

b) 3 427 não é divisível por 4, e o resto é 3 ; pois, 2 x 2 + 7 = 11, e 11 dividido por 4 dá resto 3. Aliás, pode-se aplicar novamente o critério: 2 x 1 + 1 = 3.

Nota: Como a divisão por 2 é prática, a divisibilidade por 4 não é muito empregada, pois, divide-se o número por 2 e depois, aplica-se o critério por 2 (não vale o critério-resto).

F.6. Divisibilidade por 6.

Sendo:

O resto de 10 por 6 igual a $r' = 4$,

o resto de 10^2 por 6 igual a $r'' = 4$; e, assim sucessivamente, substituindo obtemos a seguinte Forma Geral Reduzida Congruente:

$$R = m \times 4 + c \times 4 + d \times 4 + u$$

ou $$R = (m + c + d) \times 4 + u$$

isto é:

$$\boxed{N \equiv (m + c + d) \times 4 + u} \quad (6)$$

que, nos fornece o seguinte critério:

Critério-Resto por 6:

O resto da divisão de um número por 6 é igual ao resto da divisão do número formado pelo valor do algarismo das unidades mais quatro vêzes a soma dos valôres dos outros algarismos.

Exemplos:

a) 34 212 é divisível por 6; pois, $(3 + 4 + 2 + 1) \times 4 + 2 = 42$, e 42 é divisível por 6 (ou novamente: $4 \times 4 + 2 = 18$; e, novamente: $1 \times 4 + 8 = 12$; e, novamente $1 \times 4 + 2 = 6$); é claro que não é prático aplicar novamente.

b) 2 306 não é divisível por 6 e o resto é 2; pois,

Pág.	Linha	Onde se lê	Leia-se
128	1	2 306 nã é ...	2 306 não é ...
129	10	pro 9 (ou 3)	por 9 (ou 3)
131	1	por 8 é prático,	por 7 não é prático,
134	8	dela divisível por ...	cela divisível por ...
152	3	diferente do primos 2,	diferente dos primos 2,
159	4	fator primo P_o com ...	fator primo P_b com ...
206	11	os elementos se equivalem?	os elementos se equivalem;
210	6	sendo que cada ...	sendo que em cada ...
243	7	que denominou frações...	que denominou-se frações...
250	8	$\Rightarrow a \times b' \quad a' \times b$	$\Rightarrow a \times b' = a' \times b$
272	9 e 11	não é basimal,	é basimal,
292	6	= 3/22	$= 0,\overline{27}$
292	14 a 18	$0,\overline{342}$	$0,3\overline{42}$

-/-

F.6. Divisibilidade por 6.

Sendo:

O resto de 10 por 6 igual a $r' = 4$,

o resto de 10^2 por 6 igual a $r'' = 4$; e,

assim sucessivamente, substituindo obtemos a seguinte Forma Geral Reduzida Congruente:

$$R = m \times 4 + c \times 4 + d \times 4 + u$$

ou $$R = (m + c + d) \times 4 + u$$

isto é:

$$\boxed{N \equiv (m + c + d) \times 4 + u} \quad (6)$$

que, nos fornece o seguinte critério:

Critério-Resto por 6:

O resto da divisão de um número por 6 é igual ao resto da divisão do número formado pelo valor do algarismo das unidades mais quatro vêzes a soma dos valôres dos outros algarismos.

Exemplos:

a) 34 212 é divisível por 6; pois,
$(3 + 4 + 2 + 1) \times 4 + 2 = 42$, e 42 é divisível por 6 (ou novamente: $4 \times 4 + 2 = 18$; e, novamente: $1 \times 4 + 8 = 12$; e, novamente $1 \times 4 + 2 = 6$); é claro que não é prático aplicar novamente.

b) 2 306 não é divisível por 6 e o resto é 2; pois,

$(2 + 3 + 0) \times 4 + 6 = 26$ e, 26 dividido por 6 dá resto 2.

F.7 - Divisibilidade por 9 (ou 3)

Sendo:

O resto de 10 por 9 (ou 3) igual a $r' = 1$,

o resto de 10^2 por 9 (ou 3) igual a $r'' = 1$,

e, assim sucessivamente, substituindo na Forma Geral Reduzida Congruente obtemos:

$$R = m + c + d + u$$

isto é:

$$\boxed{N \equiv m + c + d + u \ (9, \text{ ou } 3)}$$

de onde concluimos a regra:

Critério-Resto por 9 (ou 3):

O resto da divisão de um número por 9 (ou 3), é igual ao resto da divisão da soma dos valôres dos seus algarismos por 9 (ou 3).

Exemplos:

a) 21 687 é divisível por 3; pois, $2+1+6+8+7 = 24$, e 24 é divisível por 3; logo, não é divisível por 9, e o resto é 6, pois 24 dividido por 9 dá resto 6.

Na prática, para a divisibilidade por 9, faz-se uso da chamada regra dos "nove fora":

$2 + 1 = 3$
$3 + 6 = 9$, "nove fora" : 0

$0 + 8 = 8,$

$8 + 7 = 15,$ "nove fora" : 6.

Onde o leitor nota que o cálculo pode ser feito muito fàcilmente de maneira mental.

F.8. Divisibilidade por 7:

Sendo:

O resto de 10^0 por 7 igual a 1, (corresponde ao u sòzinho)

O resto de 10 por 7 igual a $r' = 3$,

O resto de 10^2 por7 igual a $r'' = 2$,

O resto de 10^3 por 7 igual a $r''' = 6$,

O resto de 10^4 por 7 igual a 4,

O resto de 10^5 por 7 igual a 5; e, novamente os restos: 1, 3, 2, 6, 4, 5; e, como a sucessão dos restos pode ser tomada como:

1, 3, 2, **-1**, **-3**, -2, 1, 3, 2, -1, -3, -2, ...

pois: $6 = 7-1$, $4-7-3$, $5 = 7-2$; o critério pode ser o seguinte:

Critério-Resto por 7

Separa-se o número em classes de 3 algarismos, adiciona-se as classes de ordem ímpar e as classes de ordem par em separado; subtrae-se as somas nessa ordem (não sendo possível a subtração, acrescenta-se um múltiplo de 7 suficiente). Adiciona-se os produtos do valor do algarismo da unidade por 1, o valor do algarismo das dezenas por 3, e o valor do algarismo das centenas por 2. O resto da divisão por 7 é o mesmo resto da divisão do número dado.

Exemplo: Seja o número 723 426 821 628

Ordem ímpar	Ordem par		
426	821	1 054	
628	723	700	(múltiplo qualquer de 7 suficiente)
1 054	1 544	1 754	

1 754
1 544 -
210 e $1 \times 0 = 0$

$3 \times 1 = 3$

$2 \times 2 = 4$

7 logo, o número é divisível por 7.

Nêste exemplo era fácil observar que era divisível, pois 210 é visivelmente múltiplo de 7.

Quando o número possui poucos algarismos pode ser usado os outros algarismos 6, 5, 4, etc. com facilidade:

Exemplo: 4 825

$1 \times 5 = 5$

$3 \times 2 = 6$

$2 \times 8 = 16$

$6 \times 4 = 24$

51 e 51 : 7 dá resto 2,

Portanto, 4 825 não é divisível por 7 e o resto é 2.

Dos exemplos resultará possivelmente ao leitor que o critério resto por ~~8~~ é prático, nós concordaremos com
(7 não

o raciocínio, mas então lembraremos ao leitor para apli car parte do critério-resto: separe em classes, adicio ne-as em separado e depois subtraia simplesmente, sem se preocupar com os algarismos 1, 3, 2 etc. efetue então a divisão por 7; isto é, no nosso exemplo nós pararíamos no 210 e já dividiríamos por 7. Concordaremos então que o critério não é prático para um número de poucos algarismos, que aliás é o caso mais frequente.

F.9.- Divisibilidade por 11:

Sendo:

O resto de 10 por 11 é igual a 10,

o resto de 10^2 por 11 é igual a 1,

o resto de 10^3 por 11 é igual a 10,

o resto de 10^4 por 11 é igual a 1,

e, assim sucessivamente obtemos substituindo na Forma Geral Reduzida Congruente:

$$R = m \times 10 + c \times 1 + d \times 10 + u$$

isto é:

$$\boxed{N = m \times 10 + c + d \times 10 + u} \qquad (11)$$

e, como $10 = 11 - 1$

podemos também escrever:

ou: $N \equiv u - d + c \pm m + \text{múltiplo de } 11 \qquad (11)$

ou: $$\boxed{N \equiv u - d + c - m} \qquad (11)$$

de onde concluimos a regra:

Critério-Resto

O resto da divisão de um número por 11 é igual ao resto da divisão por 11 do número formado pela soma dos valôres dos algarismos de ordem ímpar com a soma dos valôres dos algarismos de ordem par multiplicados por 10.

ou:

Adiciona-se em separado os valôres dos algarismos de ordem ímpar e de ordem par, subtrae-se, nessa ordem, (se não é possível, acrescenta-se um múltiplo de 11 suficiente); o resto da divisão por 11 dessa diferença é igual ao resto da divisão por 11 do número dado.

Exemplo.

Seja: N = 423 825, $\quad 5 + 8 + 2 = 15$

$\quad 2 + 3 + 4 = \underline{9}$

Pela regra primeira:

$$15 + 9 \times 10 = 15 + 90 = 105$$

e, 105 dividido por 11 dá resto t, ou aplicando novamente a regra:

$$5 + 1 = 6$$
$$0 = 0$$
$$6 + 0 \times 10 = 6.$$

Pela segunda regra:

$$15 - 9 = 6$$

Portanto, N não é divisível por 11 e o resto é 6.

G. OUTROS CRITÉRIOS

Daremos a seguir outros critérios, sendo que alguns não são critérios-resto, para os quais daremos apenas - as linhas gerais de demonstração:

G.1. Outro critério por 4 (ou 25)

Sendo D o número constituido pelos algarismos exceto os dois últimos d e u, teremos:

$$N = \overline{D}\, d\, u \quad = \quad D \times 100 + du$$

Como 100 = 4 x 25, então N é constituido de uma parcela divisível por 4 (ou 25) e outra "du" constituida pelos dois últimos algarismos, logo:

$$\boxed{N \equiv du \quad (4, \text{ ou } 25)}$$

de onde o critério:

Critério-resto por 4 (ou 25)

Exemplos:

a) 43 964 é divisível por 4, pois 64 é divisível por 4.

b) 35 257 não é divisível por 25, e o resto é 7; pois 57 divide por 25 dá resto 7; idem, não é divisível por 4, pois 57 não é divisível por 4 e dá resto 1.

Em particular, um número é divisível por 25 se terminar em 00, 25, 50, ou 75.

G.2. Outro critério por 6.

Por ser: 2 x 3 = 6, se um número N é divisível por 2 e também por 3, então:

$$N = 2 \times 3 \times d \quad = \quad 6 \times d$$

logo, 6 divide N, de onde o critério:

Critério por 6:

Um número que é divisível por 2 e também por 3, é divisível por 6.

Exemplo: N = 4 314 , é divisível por 2 (o último algarismo é 4), é divisível por 3 (a soma dos valôres é 12), portanto é divisível por 6.

G.3. Outro critério por 7:

Seja $N = \overline{D}\, u = 10 \times D + u$

Multipliquemos por 5:

$$5 \times N = 50 \times D + 5 \times u$$
$$= 7 \times 7 \times D + (D + 5 \times u)$$

Como 5 não é divisível por 7 e a parcela 7 x 7 xD é múltiplo de 7, segue que:

$$\boxed{5 \times N \equiv D + 5 \times u \quad (7)}$$

de onde o critério:

Critério por 7:

Um número é divisível por 7 quando o número de suas dezenas mais o quíntuplo do valor do algarismo das unidades é divisível por 7.

Na prática usa-se o critério sucessivamente:

Seja N = 4 825

$$\begin{array}{r} 482 \\ 5 \times 5 = \underline{25} \\ 507 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 50 \\ 5\times7 = \underline{35} \\ 85 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8 \\ 5\times5 = \underline{25} \\ 33 \end{array}$$

portanto, o número não é divisível por 7, pois 33 dividido por 7 dá resto 5; é claro que já poderíamos ter dividido o número 85.

Nota: Como 5 = 7-2 , pode-se em lugar de multiplicar por 5, e adicionar, multiplicar por 2 e subtrair.

G.4. Outro critério por 8

Sendo $N = \overline{D}\,du = D \times 100 + du$

Como $100 + 8 \times 12 + 4$, substituindo teremos:

$N = D \times 8 \times 12 + D \times 4 + du$

$\begin{cases} \text{Caso } D \text{ é par será } D \times 4 = \text{múltiplo de } 8 \\ \text{Caso } D \text{ é ímpar } D \times 4 = \text{múltiplo de } 8 \text{ mais } 4, \end{cases}$

substituindo:

$\begin{cases} N = \text{múltiplo de } 8 + du \quad (D \text{ par}) \\ N = \text{múltiplo de } 8 = 4 + du \ (D \text{ ímpar}) \end{cases}$

Seja "du" divisível por 4 (*): $du = 4 \times q$

teremos $\begin{cases} du = 4 \times (2 \times k) & (q \text{ é par}) \\ du = 4 \times (2 \times k + 1) & (q \text{ é ímpar}) \end{cases}$

ou $\begin{cases} du = \text{múltiplo de } 8 \\ du = \text{múltiplo de } 8 + 4 \end{cases}$

(*) Se não é, N também não é divisível por 8.

Substituindo estas duas expressões respectivamente nas duas expressões anteriores de N, teremos:

N = múltiplo de 8 (D par e q par)

N = múltiplo de 8 (D ímpar e q ímpar)

de onde concluímos a regra:

Critério por 8:

Um número é divisível por 8 se o quociente do número formado pelos dois últimos algarismos por 4 é de mesma paridade que o algarismo das centenas.

Exemplos:

a) N = 537 212

12 dividido por 4 é 3 (ímpar), mas o algarismo das centenas é 2 (par), portanto o número não é divisível por 8.

b) N = 63 536

36 dividido por 4 é 9 (ímpar); e, o algarismo das centenas é 5 (ímpar), portanto o número N é divisível por 8.

G.5. Critérios Vários:

Como curiosidade acrescentamos aos interessados os seguintes critérios sem a devida demonstração:

1.- Por 11:

Separa-se o número em classes de 2 algarismos e adiciona-se. O resto é o mesmo da divisão por 11 dessa soma.

Exemplo: N = 5 342 824 $\qquad 24 + 28 + 34 + 5 = 91$

91 dividido por 11 dá resto 3, portanto N não é divisível por 11.

2.- <u>Por 13 (ou 7, ou 11):</u>

Separa-se o número em classes de 3 algarismos e adiciona-se as classes impares e pares em separado. Subtrae-se. O resto é o mesmo da divisão por 13 (ou 7, ou 11) da diferença.

Exemplo: N = 23 428 659

$$\begin{array}{r} 659 \\ \underline{23} \\ 682 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 682 \\ \underline{428} \\ 254 \end{array} -$$

254 : 13 dá resto 7 , 254 : 7 dá resto 2.

portanto: o resto de N por 13 é 7, e o resto por 7 é 2.

3.- <u>Por 13 (ou 3):</u>

Um número é divisível por 13 (ou 3), se é exata a divisão por 13 (ou 3) do número de dezenas (D) com o quádruplo do valor do algarismo das unidades.

Exemplo: N = 3 282

$$\begin{array}{r} 328 \\ 4x2 = \underline{8} \\ 336 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 33 \\ 4x6 = \underline{24} \\ 57 \end{array}$$

57 : 13 dá resto 5, e 57 : 3 = 19

portanto: N não é divisível por 13.

4. <u>Por 19:</u> Um número é divisível por 19, se é exata a divisão por 19 do número de dezenas (D) com o dôbro do valor do algarismo das unidades.

Exemplo: N = 32 587

$$\begin{array}{r} 3\ 258 \\ 2x7 = \underline{14} \\ 3\ 272 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 327 \\ 2x2 = \underline{4} \\ 331 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 33 \\ 2x1 = \underline{2} \\ 35 \end{array}$$

portanto, N não é divisível por 19, pois 35 dá resto 16.

5.- <u>Por 7 (Critério-resto de Ibn al-Banna):</u>

Multiplica-se o valor do primeiro algarismo (da esquerda) por 3, adiciona-se com o valor do segundo, multiplica-se por 3, adiciona-se com o terceiro; e, assim, sucessivamente; caso o último resultado é divisível por 7 o número também é divisível.

Na prática, após cada cálculo usa-se a regra do "setes fora".

Exemplo: N = 23 428 659

2 x 3 + 3 = 9 (setes fora) 2, 2 x 3 + 4 = 10, setes fora 3, 3 x 3 + 2 = 11, setes fora, 4, 4 x 3 + 8 = 20, setes fora, 6, 6 x 3 + 6 = 24, setes fora 3, 3x3+5 = 14, setes fora 0, 0 x 3 + 9 = 9, setes fora 2, logo o número N = 23 428 659 não é divisível por 7, e o resto também é 2.

H. <u>Aplicação da Divisibilidade Numérica à verificação de cálculos.</u>

H.1.. <u>Preliminares</u>

Temos dado no capítulo III vários processos de verificação de cálculos, voltamos agora, ao assunto visto que, os critérios-resto de divisibilidade fornecem interessantes e úteis contrôles de prova das operações. Outras aplicações da divisibilidade numérica o leitor terá nos capítulos posteriores.

H.2. ADIÇÃO:

Pela propriedade Complementar da divisibilidade Numérica em Relação à Adição: "Dividindo-se uma soma por um inteiro o resto é igual ao resto da divisão da soma dos restos de cada parcela pelo mesmo número", tiramos a seguinte Regra de Prova:

Aplica-se o critério-resto de divisibilidade a cada parcela, e, novamente à soma dos restos, o resto final deve ser igual ao resto da soma.

Utiliza-se evidentemente um critério-resto que empregue todos os algarismos; como é o caso da "prova dos nove", e Prova dos onze", etc.

Exemplos:

	a)	3285	$\longrightarrow$ 1a parcela : 0	
Prova dos		4736 +	$\longrightarrow$ 2a parcela	2^+
nove:		8021	$\longrightarrow$ Soma: 2	2

b) 1" parcela: $(7 + 11) - 11 = 7$ +
Prova dos 2a parcela: $13 - 7 = 6$
$13 - 11 = 2$

Soma: $(1 + 11) - 10 = 2$

Os exemplos seguintes são para evidneciar que essas provas não são suficientes em alguns casos; assim, a prova dos nove falha quando o êrro é de múltiplo de 9 ou troca de algarismos:

3 2 1 +	1a parcela : 6 +
4 9 3	2a parcela : 7
2 7 2	3a parcela : 2
1 9 5	4a parcela : 6
1 1 9 1	21 $\longrightarrow$ 3

Soma: 3

A prova dá o cálculo como certo, no entanto a soma é na verdade 1 281; houve possìvelmente o esquecimento de adicionar na 2a coluna o valor 9.

A "prova dos cinco" por exemplo só verifica a soma no último algarismo:

4 2 3 +	1a parcela : 3 +
2 6 8	2a parcela : 3
1 7 6	3a parcela : 1
8 4 7	7 $\longrightarrow$ 2

Soma : 2

A prova dá o cálculo como certo, no entanto a soma correta é 867; disto resulta que devemos dizer simplesmente após a verificação:

"A prova não revela êrro"

H.3. SUBTRAÇÃO:

Como o diminuendo é igual à soma do diminuidor com a diferença, a prova é análoga à da adição.

Exemplos:

a) Prova dos nove:

4 8 6 −	diminuendo	: 0
1 3 8	diminuidor	: 3 +
3 4 8	diferença	: 6
		9 → 0

portanto, concluimos que: a prova não revela êrro.

b) Prova dos nove:

3 4 3	→	1
1 2 5	→	8 +
2 2 6	→	1
		9 → 0

portanto, o cálculo deve conter êrro.

H.4. MULTIPLICAÇÃO:

Pela propriedade complementar da Divisibilidade Numérica em Relação à Multiplicação: "Dividindo-se o produto por um número, o resto é igual ao resto da divisão do produto dos restos de cada fator pelo mesmo número", tiramos a Regra de Prova:

Aplica-se o critério-resto a cada fator, e novamente ao produto dos restos; o resto final deve ser igual ao resto do produto dos fatores.

Exemplo:

Prova dos nove:

4 2 2	→	8
× 2 5	→	× 7
2 1 1 0		5 6 → 2
8 4 4		
1 0 5 5 0	→	2

portanto, a prova não revela êrro.

H.5- DIVISÃO

Como na Divisão geral de dividendo "a", divisor "b", quociente "q" e resto "r", devemos ter:

$$a = b \times q + r$$

a regra deve se basear na multiplicação e adição:

O resto do dividendo deve ser igual ao resto da soma do resto do produto do divisor pelo quociente com o resto da própria divisão.

Exemplo: Prova dos nove:

4 8 6 3	3 8	Divisor	: 2 ×
1 0 6	1 2 7	Quociente	: 1
3 0 3		Produto	: 2 +
3 7		Resto	: 1
		Soma	: 3
		Dividendo	: 3

portanto, a prova não revela êrro.

I. EXERCÍCIOS - SÉRIE XII

a) Exercícios Elementares:

1. Dados os conjuntos: