determinar as relações entre idade e velocidade de corrida. O tempo decresce com a idade, e meninos de uma dada idade correm mais ràpidamente que as meninas dessa mesma idade. Depois de uma tal discussão, as crianças estarão provàvelmente prontas a fim de encontrar as respostas para uma série de problemas[10] baseados em uma tabela. As crianças podem, indubitàvelmente, efetuar computações que envolvam decimais.

Ensino da Leitura de Gráficos

O gráfico é uma representação visual dos dados de uma tabela. Um gráfico deve possibilitar às crianças a percepção das relações numéricas entre as quantidades muito mais fàcilmente que quando os dados são apresentados sob a forma de tabela. A leitura de gráficos de vários tipos, que expressam as relações entre as quantidades, deve ser considerada como um elemento essencial em um programa para o ensino da resolução de problemas. Para ler um gráfico, a criança deve entender suas características físicas e ser capaz de interpretar os dados. Deve ainda ser capaz de determinar se o mesmo é ou não apropriado para representar os dados corretamente. A leitura de um gráfico e a crítica de suas características físicas constituem uma habilidade a ser desenvolvida. A interpretação dos dados em um gráfico depende da experiência do indivíduo. Uma criança pode ser capaz de ler um gráfico corretamente, mas pode não ser capaz de interpretar os dados, porque o tópico apresentado não lhe é familiar.

Na escola elementar, o livro-texto de Aritmética deve prover instrução para a leitura e interpretação de vários tipos de gráficos semelhantes àqueles encontrados nos livros de referência, nos livros-texto de estudos sociais e outras fontes, assim como prover instrução para os processos numéricos básicos. Pelo estudo dos gráficos no seu livro-texto, a criança se familiariza com métodos de descoberta de relações entre quantidades em tôdas as áreas do currículo. Neste sentido, o gráfico é uma ajuda na resolução de problemas. A criança deve aprender como ler gráficos e tabelas a fim de interpretar os dados apresentados visualmente em estudos sociais, ciências e outras áreas de estudo.

Um exemplo típico de gráfico encontrado em livros-texto é o que é dado adiante. Êle mostra como a semana de trabalho tem diminuído nos Estados Unidos desde 1850. Num relance, pode-se ver que a sua duração tem decrescido consideràvelmente. O gráfico mostra essa tendência mui claramente. As crianças devem primeiramente notar que o tempo está representado na escala vertical. O intervalo de tempo nessa escala é de 10 anos, mas não é uniforme através da mesma. A diminuição na extensão da semana é indicada pelos mostradores dos relógios dispostos horizontalmente. Cada relógio representa uma determinada duração de tempo: 10 horas. O número de mostradores de relógio foi-se tornando menor de ano para ano, mostrando um decréscimo na duração da semana de trabalho. O gráfico tem duas variáveis, que neste caso são os anos e o número de horas das semanas de trabalho durante certo número de anos. A escala vertical é usada para representar a variável, que muda de maneira uniforme nos últimos 30 anos, enquanto a mudança na duração da semana de trabalho varia diferentemente de ano para ano.

[10] WILLIAMS (C. M.), "The Function of Charts in the Arithmetic Program", *The Arithmetic Teacher*, 2: 72-76.

As crianças devem entender que os números lidos em um gráfico são predominantemente números redondos. Assim, o número de horas em uma semana de trabalho em 1850 era, aproximadamente, de 70 horas, como está mostrado pelos sete relógios, cada um representando 10 horas. No gráfico não é possível determinar valôres exatos para 1930, 1940 e 1960, mas estimativas, que muito se aproximem da verdade, podem ser feitas. O uso de números redondos simplifica o trabalho quando os gráficos representam grandes números, como neste caso.

O professor deve ajudar as crianças a ler, no gráfico, os dados correspondentes a cada ano e a formar uma tabela de informações. Desta maneira as relações entre um gráfico e uma tabela podem ser apresentadas. Os métodos de estimativa e falta de exatidão dos dados devem ser descobertos. Estimativas podem também ser feitas pela intercalação de intervalos de 5 anos, notando-se as mudanças para os intervalos de 10 anos. Uma experiência dêste tipo deveria ser usada com propósitos de enriquecimento para as crianças de nível intelectual superior.

A interpretação dos dados no gráfico depende da riqueza de experiências das crianças. Estas devem ser levadas a explicar as mudanças que têm ocorrido, bem como as tendências para o futuro.

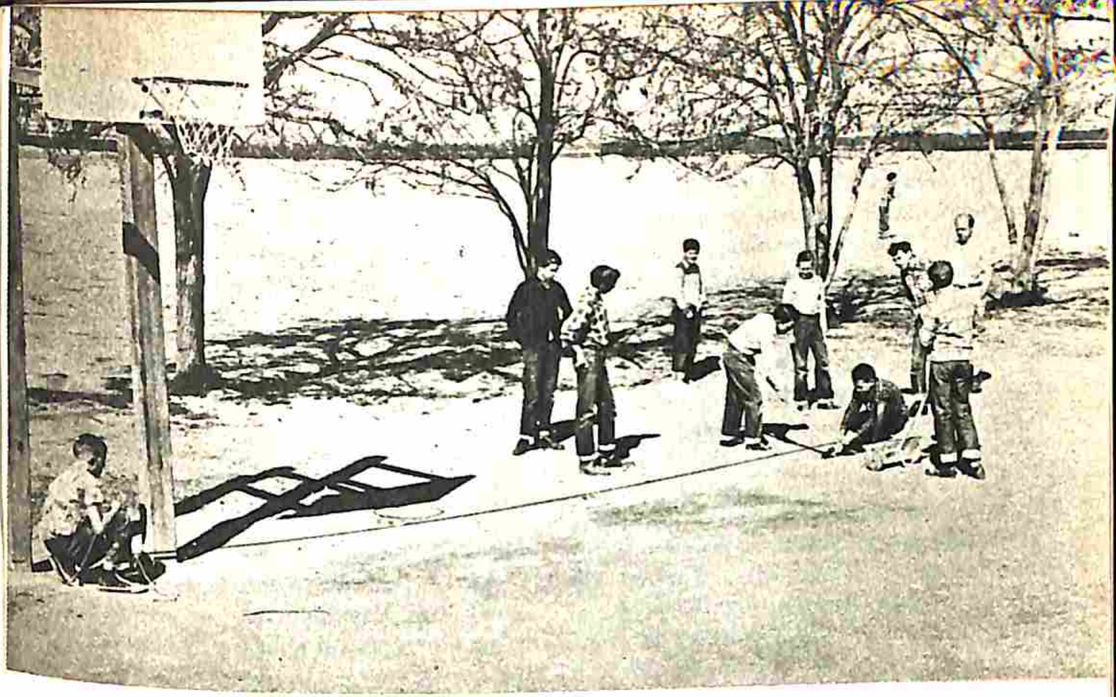
Quanto à redução do tempo, as crianças não serão capazes de explicar, a menos que elas tenham conhecimentos sôbre as condições econômicas e industriais do país e como tais condições afetam a extensão ou duração da semana de trabalho. Deve-se pedir às crianças que usem os dados do gráfico para prever a duração da semana de trabalho no futuro e assinalar os fatôres que pròvàvelmente afetarão a redução do tempo. Elas devem entender por que prognósticos dêste tipo são úteis em negócios, planos ou projetos de família. A percepção de uma relação entre períodos de tempo e extensão ou duração da semana de trabalho depende, sobretudo, da riqueza de experiências das crianças. A classe tôda muito lucraria com estas discussões, para as quais os alunos mais capazes podem trazer contribuições valiosas. Os alunos de nível intelectual mais baixo ou aquêles que aprendem mais lentamente podem ser os observadores, dando-se-lhes também a oportunidade de trazer contribuições para a discussão.

Há muitos tipos de fatos que podem ser deduzidos dos dados de um gráfico como o apresentado acima. Algumas das respostas às questões feitas pelo professor devem ser fatuais em natureza, tais como o título do gráfico, os anos relacionados na linha vertical, e o número de horas representado para um dado ano. Questões mais difíceis feitas pelo professor podem requerer das crianças a estimativa do número de horas da semana de trabalho em um certo ano, tal como 1925, por exemplo. Da mesma maneira, quando solicitadas a fazer uma previsão para 1970, elas devem projetar o gráfico além do último valor dado. Como se pode notar, as informações deduzidas de um gráfico podem variar desde o tipo fatual até as conclusões puramente de interpretação.

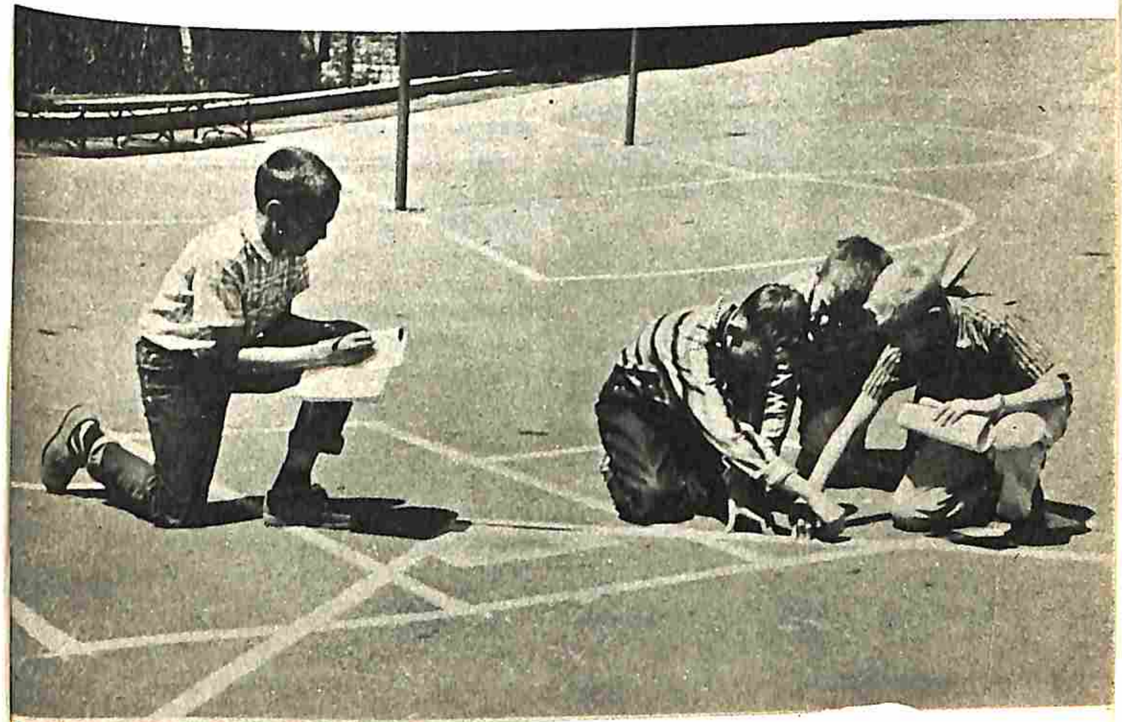
Processos semelhantes àqueles descritos acima são usados sempre que as crianças são levadas a responder a questões baseadas em dados apresentados sob a forma gráfica.

Desenvolvimento de Vocabulário Aritmético

O professor verá que o uso de exercícios de vocabulário semelhantes àqueles aplicados em leitura alargará e aprofundará a compreensão de palavras usadas em Aritmética e melhorará o trabalho na resolução de problemas. O ponto mais importante e que o professor deve ter em mente é que as idéias representadas por um dado vocabulário contribuem para as dificuldades de leitura de uma sentença. Assim, as palavras da seguinte sentença estão tôdas elas entre as primeiras 2 500 na Lista de Palavras de Thorndike, mas o contexto no qual elas são usadas envolve idéias que não são intelegíveis às crianças de quarta série: "O quadrado da soma de dois números é igual ao quadrado do primeiro



Medidas usadas fora da sala de aula, como nos esportes.



número somado a duas vêzes o produto do primeiro pelo segundo número somado ao quadrado do segundo número."[11] Quando as crianças não entendem a situação que um problema apresenta, muitas vêzes o abandonam, outras vêzes arriscam adivinhações quanto aos processos a serem usados, e algumas vêzes meramente escamoteiam os números que são dados e chegam a respostas que não têm nenhuma significação. O professor deve desenvolver a significação da situação e a experiência necessária para entendê-la. De outra maneira, as crianças não se sucederão na resolução de problemas. Exercícios de vocabulário como os seguintes devem ser suplementados, quando surgir necessidade, por lições para o esclarecimento de dificuldades específicas de significação e de palavras não-familiares que surgem em problemas, explicações etc.:

1) Correspondência de palavras com definições, objetos, gravuras etc.

2) Exercícios de múltipla escolha para selecionar a palavra correta entre várias escolhas.

3) Exercícios de preenchimento de lacunas nas quais as crianças escrevem as palavras que faltam.

4) Indicação da unidade de medida ou do instrumento usado na medida de vários itens ou aspectos de coisas.

5) Escrita de palavras corretas para abreviaturas.

6) Indicação de nomes das figuras geométricas ou partes de desenhos e desenhos de representações de expressões.

7) Desempenho de alguma ação para mostrar significação.

8) Reestruturação de expressões em outras palavras.

9) Correção de sentenças erradas ou defeituosas.

10) Preparação de listas originais de palavras arranjadas de acôrdo com títulos ou cabeçalhos dados.

11) Indicação de unidades e instrumentos de medir usados por operários diversos, tais como carpinteiros, empregados de armazéns, de lojas etc.

12) Escrita de listas de palavras que relacionem palavras dadas, tais como frações, dinheiro, círculo, tempo.

Ajudas Especiais na Resolução de Problemas

Há um grande número de tipos especiais de ajudas de leitura na resolução de problemas que são largamente usados. Os mais valiosos dêles serão brevemente descritos nas ilustrações seguintes:

1. *Desenho de soluções de problemas* — Em tôdas as séries, as crianças são muito beneficiadas pelo desenho ou objetivação das soluções de problemas reais ou criados para substituir os reais. Tal objetivação pode ser feita com material concreto exploratório ou com desenhos. O uso de material concreto é especialmente desejável para a solução de problemas nas séries inferiores (primeira e segunda) e para o trabalho com as crianças mais lentas em tôdas as séries da escola elementar. O uso de objetos e desenhos ajuda a criança a visualizar as relações apresentadas no problema e isto facilita à criança a compreensão do mesmo.

Os grupos de fichas e os desenhos de gravuras são especialmente úteis no ensino a crianças de séries inferiores para resolver problemas como os seguintes:

a) "Jane tinha Cr$ 13. Deu Cr$ 5 a Beatriz. Com quantos cruzeiros Jane ficou?"

b) "João tinha 5 coelhinhos marrons e 4 coelhinhos brancos. Quantos coelhinhos João tinha ao todo?"

c) "A mãe de Maria tem 6 biscoitos. Ela quer distribuí-los para as suas três crianças. Quantos biscoitos ela dará a cada criança?"

d) "Quanto custarão 4 selos de Cr$ 8?"

Em problemas tais como os que seguem, um desenho poderá trazer à atenção da criança fatôres que poderiam passar despercebidos e evitar que sejam dadas respostas absurdas e sem significação:

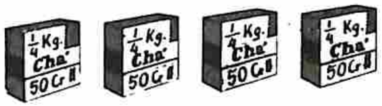
a) "Qual é a distância ao redor de um jardim que tem 14 m de comprimento e 10 m de largura?"

b) "Quanto mais frio é o tempo a 20° abaixo de zero que 25° acima de zero?"

c) "Quantos pedaços de fita de $\frac{1}{2}$ m podem ser cortados em uma peça que tem $2\frac{1}{2}$ m?"

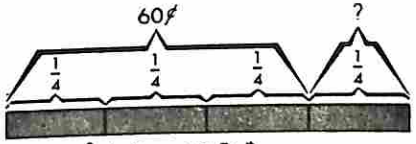
O uso de um diagrama, às vêzes, ajuda as crianças a apreender melhor as relações entre os números nos problemas. Os diagramas abaixo ilustram êste ponto:

a) "Se $\frac{1}{4}$ de quilo de açúcar custa Cr$ 50, quanto custará 1 quilo? O desenho abaixo ajudará a encontrar a resposta $\frac{1}{4}$ de ? = = Cr$ 50."



$\frac{1}{4}$ de ? = 50 Cr.$

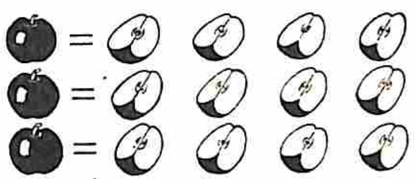
b) "Se $\frac{3}{4}$ de metro de fita custam Cr$ 60, quanto custará 1 metro? O desenho abaixo ajudará você a encontrar a resposta para $\frac{3}{4}$ de ? = Cr$ 60."



$\frac{3}{4}$ de ? = 60 Cr.$

[11] YOUNG (W. E.) "The Language Aspects of Arithmetic", *School Science and Mathematics*, 57:172.

e) "Usar o desenho abaixo para mostrar como 4 crianças dividiram entre si 3 maçãs. $3 \div 4 = ?$"



$3 : 4 = ?$

2. *Elaboração de problemas originais* — Um bom meio de testar a compreensão da criança sôbre um determinado processo em aplicação é a verificação da habilidade que tem a criança de organizar problemas originais para ilustrá-lo. Os exercícios seguintes, que tanto podem ser orais como escritos, são ilustrativos:

1) "Escreva problemas nos quais os seguintes exemplos sejam usados:"

(a) $\begin{array}{r}8\\ \underline{+3}\end{array}$ (b) $\begin{array}{r}20\\ \underline{-5}\end{array}$ (c) $\begin{array}{r}3\\ \underline{\times 5}\end{array}$ (d) $2\underline{|10}$

Exemplos mais difíceis, envolvendo números inteiros maiores, frações e decimais, podem ser usados para estimular as crianças mais capazes.

2) "Escreva problemas originais sôbre o seguinte:

a) Achar a soma de dois números

b) Encontrar trôco

c) Medir alguma coisa."

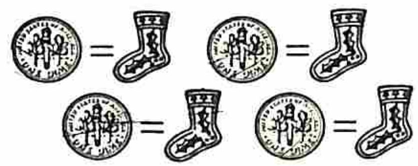
3) "Complete êstes problemas:

a) Um quilo de manteiga custa Cr$ 1.500.

b) Carlos tinha Cr$ 27. Tomás tinha Cr$ 24.

c) Alice pagou Cr$ 150 por 3 lenços.

d) Três garotos pesaram juntos 90 quilos.



e) Escreva um problema sôbre o desenho que se vê acima."

3. *Problemas sem números* — A prática oral do método a ser usado na resolução de problemas quando números não são dados é um valioso recurso que muito ajuda as crianças a sentir as relações numéricas nas situações apresentadas.

1) "Se você sabe quanto custam várias maçãs, como pode você encontrar o preço de uma maçã?"

2) "Como poderá você encontrar o pêso médio de certo número de perus?"

3) "Se você comprar pães e frutas, como saberá o trôco que deve receber?"

4) "Como encontrar a distância entre dois lugares em um mapa cujo traçado é feito segundo uma determinada escala?"

4. *Estimativa de respostas* — Quando uma criança é capaz de estimar respostas para problemas, não aceita as respostas absurdas que outras crianças dão. A estimativa requer habilidade de computar mentalmente com números arredondados. Os exercícios abaixo são exemplos típicos daqueles considerados como de grande valor para tais casos. Através de todo êste volume, os Autores têm salientado o valor da aproximação no trabalho de computação como meio de verificar respostas.

Os exemplos seguintes ilustram procedimentos que ensinarão às crianças como estimar respostas para problemas:

1) "Alice tem Cr$ 890. Ela quer comprar um livro que custa Cr$ 480 e um disco que custa Cr$ 320. Tem ela o dinheiro necessário?"

Pensar:
"Cr$ 480 são cêrca de Cr$ 500.
Cr$ 320 são cêrca de Cr$ 300.
Cr$ 500 + Cr$ 300 = Cr$ 800.
Portanto, Alice tem dinheiro suficiente".

2) "Que é mais, 9×39 ou 357?"

Pensar: "39 é quase 40.
$9 \times 40 = 360$. Portanto, 9×39 é menos que 357."

3) "Que é menos, $718 \div 8$, ou 92?"

Pensar: "718 é quase 720.
$720 \div 8 = 90$. Assim, $718 \div 8$ será menos que 92."

Quando as crianças não são capazes de estimar respostas corretamente, devem-se-lhes ensinar processos simples e práticos como os descritos acima. É melhor começar com exemplos fáceis de modo que as crianças ao aprenderem o método de estimativa sejam capazes de aplicá-lo, com sucesso, na verificação de respostas.

QUESTÕES, PROBLEMAS E TÓPICOS PARA DISCUSSÃO

1. Qual é a diferença entre resolução de problemas e pensamento quantitativo? Que se entende por comportamento matemático como definido no Capítulo 1?
2. Dê exemplos de diferentes níveis de pensamento quantitativo.
3. Dê um exemplo de resolução de problema surgido de uma situação da vida.
4. Explique e exemplifique os passos na solução de um problema real.
5. Explique os conceitos que fundamentam a resolução de problemas aplicando-os a uma situação real

6. Por que o trabalho com problemas leva as crianças à aprendizagem de fatos e operações numéricos?

7. Dê exemplos de casos de pensamento quantitativo semelhantes àqueles apresentados na pág. 398.

8. Pode a computação ser sempre puramente mecânica?

9. Dê exemplo de pensamento quantitativo em situações de trabalho.

10. Por que a aritmética mental deve ser considerada como um elemento essencial na solução de problemas?

11. Quais os objetivos ou propósitos dos problemas orais do tipo tradicional?

12. Elabore um problema que possa ser resolvido de muitas maneiras diferentes.

13. Examine alguns livros-texto de Aritmética. Faça uma lista dos processos nêles indicados e que têm como objetivo ensinar as crianças a resolver problemas.

14. Dê exemplos de cada um dos tipos básicos de problemas apresentados nas págs. 405 e 406.

15. Como você desenvolveria os conceitos matemáticos que fundamentam as relações custo-número de objetos-preço?

16. Mostre que o ensino da leitura tem um lugar importante na Aritmética.

17. Dê exemplos de mapas, gráficos, cartazes e tabelas que as crianças têm de interpretar quando trabalhando em outras áreas do currículo escolar.

18. Descreva alguns exercícios de construção de vocabulário que sejam úteis em Aritmética.

19. Quais os tipos de ajuda específica que você pode dar na resolução de problemas e que são também úteis para ensinar as crianças menos dotadas a resolver problemas?

SUGESTÕES PARA LEITURA

Brueckner, L. J., Grossnickle, F. E., and Reckzeh, J. *Developing Mathematical Understandings in the Upper Grades.* Philadelphia: The John C. Winston Co., 1957. Chapter 9.

Harding, L. W., and Bryant, I. P. "An Experimental Comparison of Drill and Direct Experience in Arithmetic Learning in a Fourth Grade," *Journal of Education Research*, 37: 324-337.

Hartung, M. L., "Advances in the Teaching of Problem-Solving," *Arithmetic, 1948.* Chicago: University of Chicago Press, 1948. pp. 44-53.

Henderson, K. B., and Pingry, R. E. "Problem Solving in Mathematics," *Twenty-first Year-Book of the National Council of Teachers of Mathematics*, Washington, D. C.: The National Council, 1953. Chapter 8.

Johnson, H. C. "Problem Solving in Arithmetic: A Review of the Literature," *Elementary School Journal*, 44: 396-404.

"Mathematics in General Education," *Report of the Committee on the Function of Mathematics in General Education for the Commission on the Secondary School Curriculum.* New York: D. Appleton-Century Co., Inc., 1940.

Stokes, C. N. *Teaching the Meanings of Arithmetic.* New York: Appleton-Century-Crofts Inc., 1951. Chapter 8.

Sueltz, B. "Measuring the Newer Aspects of Functional Arithmetic," *Elementary School Journal*, 47: 323-330.

"The Measurement of Understanding," *Forty-fifth Yearbook of the National Society for the Study of Education.* Chicago: University of Chicago Press, 1946. Chapter 7.

Wilson, G. M. *Teaching the New Arithmetic.* New York: McGraw-Hill Book Co., 1951.

14

Como Ensinar as Medidas

As medidas são talvez a mais importante aplicação do número que as crianças de tôdas as idades encontram. Na escola elas devem aprender as unidades de medida e os instrumentos usados para medir. Devem ter experiências de primeira mão em que as medidas são aplicadas. As crianças devem familiarizar-se também com a história e o desenvolvimento dos instrumentos de medir, para que possam conhecer as maneiras pelas quais a inteligência e a capacidade inventiva criaram para usar números, descrever em têrmos precisos, definidos e com significação muitos dos aspectos quantitativos do meio ambiente. Neste Capítulo discutiremos os seguintes tópicos:

a. Que é medir
b. Ensino do significado de medida
c. Processo de medir
d. Operações com medidas.

a. QUE É MEDIR

Significado das Medidas

Medir uma quantidade significa encontrar quantas vêzes ela contém uma certa quantidade-padrão comumente aceita como unidade de medida. Assim, quando falamos que uma linha mede 6 centímetros de comprimento, significa que usamos e verificamos que seu comprimento é igual a 6 unidades de comprimento, cada uma com 1 centímetro. Da mesma maneira, uma quantidade de gasolina que é igual a 4 litros encherá, apenas, quatro unidades-padrão de 1 litro.

O uso do número, dêste modo, para apresentar fatos sôbre aspectos e propriedades das coisas possibilita-nos a descrevê-las com precisão e significativamente, bem como compreendê-las. As medidas possibilitam justamente isto: definir, predizer e controlar. Os cientistas estão sempre à procura dos aspectos das coisas para medir, e tentar inventar, aplicar e aperfeiçoar meios de torná-los objetivos. Para discutir o desenvolvimento conseguido pelos cientistas nos métodos de medir a eletricidade, Perry[1] comenta o seguinte:

[1] Perry (John), *The Story of Standards*. Nova Iorque: Funk and Wagnalls Co., 1955, pág. vii.

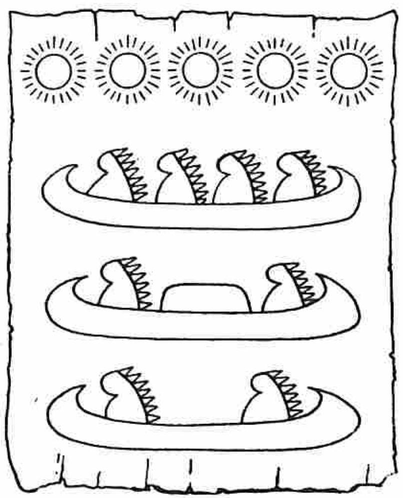
No século XIX, os cientistas sonhavam compreender o fenômeno chamado *eletricidade*. Para descobrir suas propriedades tiveram primeiro que descobrir como medi-lo para criar novas unidades-padrão de medir e para a invenção dos instrumentos. A medida não é simplesmente um instrumetno básico da ciência, é uma das fronteiras da ciência; e muitas e grandes descobertas têm sido feitas nesta fronteira.

Origens

Antigamente os instrumentos de medir usados eram indefinidos e imperfeitos. Assim como o sistema de numeração decimal foi precedido pelo uso dos dedos, as medidas das várias espécies tiveram a sua origem em acontecimentos naturais e em unidades que eram fáceis de se usar e compreender. Assim, os movimentos dos corpos celestes forneceram uma maneira fácil para marcar o tempo. O dia era o espaço de tempo que decorria de um nascer de sol a outro; o mês era o espaço de tempo que decorria entre uma determinada fase da Lua até a sua repetição; e um ano, o tempo que o Sol levava através de mudanças sucessivas de uma posição no céu até voltar à mesma posição. Pequenas distâncias eram medidas pelo número de passos dados para vencê-las, e as longas distâncias pelos dias de viagem. Tigelas e xícaras eram usadas para medir a capacidade dos recipientes. Grãos de trigo e cevada eram usados para saber o pêso de coisas valiosas. Durante milhares de anos a permuta era o único meio de comércio, e conseqüentemente unidades de valor não eram necessárias.

Desenvolvimento de Unidades Definidas

Com a passagem dos séculos e o desenvolvimento da vida em comunidade, surgiram várias medidas em resposta às necessidades práticas. Elas variavam de localidade para localidade. Eram adotadas, prontamente, de acôrdo com a conveniência. Em muitos casos os nomes das unidades eram os mesmos entre vários lugares de uma região geográfica, mas as quantidades que elas representavam variavam de lugar para lugar devido à falta de padrões comuns. Os que viajam



pela Europa podem, ainda hoje, encontrar remanescentes das unidades de medir locais nas paredes dos castelos e nos mercados. Essas unidades eram assim definidas, mas não eram padronizadas.

É interessante descrever a história das unidades de medida de comprimento. É natural talvez que partes do corpo humano sejam usadas como unidades de medida de comprimento. Assim, a *polegada* vem do comprimento da falange terminal do polegar; o *palmo* representa uma unidade com 3 polegadas de comprimento; o *pé* humano é correspondente a 12 polegadas; o *cúbito* era igual ao comprimento do antebraço, partindo do cotovêlo à extremidade do dedo médio, ou aproximadamente 18 polegadas; a *jarda* foi definida como o comprimento de um braço estendido; a *toesa* era a maior distância entre dois braços estendidos, ou 6 pés. A *milha* foi, de início, uma medida de mil passos. A falta de uma relação sistemática entre estas unidades é evidente.

Níveis de Medidas

O nível mais baixo de medida pode ser definido como o estágio pré-medida. Nesse nível a criança descreve as coisas em têrmos indefinidos, como grande, pesado, cheio, longo.

Num nível mais alto ela começa a fazer comparações entre objetos. Diz, por exemplo: "João é mais alto que Maria"; "A bicicleta é menor que o automóvel", ou "Hoje está mais quente que ontem.".

Com a continuidade, a criança vê a possibilidade de usar um objeto como um método de descrever outro objeto. Assim, ela pode dizer: "O pai de Tom é quase duas vêzes mais alto que Tom", ou "Esta bola tem o pêso de quase duas maçãs." Mais tarde a criança pode usar uma linha na parede para saber a altura de seus companheiros. Aqui ela já usa unidades padronizadas. No mais alto nível, a criança se utiliza de instrumentos para medir ou descrever aspectos de alguma coisa com números. Dessa forma, pode pesar um pacote em uma balança postal, calcular quantos quartos de litro contém uma garrafa quando cheia, ou medir com a fita métrica para ver quantos metros, em distância, pode pular.

Significado de Medida

A criança deve aprender através de experiências a responder de maneira inteligente a questões como: "Quantos?" "Qual é a distância?" "Qual o pêso?" "Quanto?" etc. Para que possa responder a essas perguntas deve aprender a selecionar uma unidade apropriada de medir — como o metro, o quilo, o litro — e depois encontrar a resposta da questão pela contagem ou medindo diretamente. A maior dificuldade encontrada em medidas é decidir a unidade a ser

usada e, em segundo, decidir sôbre o método ou o instrumento de medir que será empregado para contar ou encontrar o número de unidades.

O aluno deve familiarizar-se com as unidades-padrão comumente usadas na vida e a sua relação com os instrumentos de medir. O aluno deve aprender o que é unidade-padrão e porque ela é necessária. Um padrão é uma unidade estabelecida por lei e usada comumente nas atividades diárias pelos membros de uma comunidade. O *United States Bureau of Standards* é a repartição oficial encarregada de estudar e de manter precisas e exatas as unidades de medidas. * Há cêrca de duzentos anos que os cientistas têm a responsabilidade de procurar e manter unidades padronizadas. Antes, as pessoas que estabeleciam as medidas padronizadas eram os governadores, padres e comerciantes.

Necessidade de Medidas-Padrão

Enquanto o homem viveu em lugares isolados, quase não havia comércio ou indústria. Essa era a razão pela qual os métodos e unidades de medir diferiam. Entretanto, quando os homens começaram a trabalhar em grupos, ou quiseram comerciar entre si, tornou-se evidente a necessidade de estabelecer, com significado comum, unidades de medir. Para medir ou trocar eficientemente e para êxito no comércio, tornou-se necessário estabelecer unidades padronizadas com o mesmo significado para todos aquêles que tinham os mesmos interêsses. A princípio isto foi feito em grandes regiões dentro do mesmo país, depois no país como um todo, e finalmente em grupos de países. Acredita-se que os Romanos foram os primeiros a estabelecer medidas padronizadas, que foram largamente aceitas. Contudo, com a queda do Império Romano, estas unidades foram abandonadas por muitos povos.

O desenvolvimento de unidades comumente aceitas facilitou o comércio entre localidades distantes umas das outras. Gradualmente foram-se desenvolvendo unidades bem definidas para medir comprimentos, superfícies, volumes, pêso, capacidade, tempo, valor, temperatura e arcos de círculo. Atualmente os cientistas continuam a se esforçar para criar métodos que descrevam os aspectos quantitativos dos fenômenos naturais usualmente expressos como alguma unidade de medir.

b. ENSINO DO SIGNIFICADO DE MEDIDA

Elaboração de Conceitos de Medida

O Capítulo 5 mostrou que as crianças aprendem muito sôbre

* No Brasil é o Instituto Nacional de Pesos e Medidas. (Av. Venezuela, 82, 3º andar, Rio de Janeiro, GB.).

medidas através de suas atividades em casa. Para dar à criança experiências sistematizadas que irão contribuir para que compreendam medidas de várias espécies, o professor deve aproveitar a experiência que as crianças já possuem e desenvolver atividades com a sua participação. Por exemplo:

1) Conservar o registro da temperatura em certas horas do dia.

2) Usar várias medidas para líquidos, como litro, copo, xícara, etc. para encher um aquário ou outro qualquer recipiente.

3) Conservar o registro do tempo que as sementes levam para germinar.

4) Planejar uma planta de um jardim, e usar medidas, como passos, cordões, réguas, metro, fita métrica etc.

5) Usar a escala desenhada ou pintada na parede para encontrar e comparar a altura de várias crianças.

6) Calcular se uma caixa grande de brinquedos cabe em uma das partes do armário.

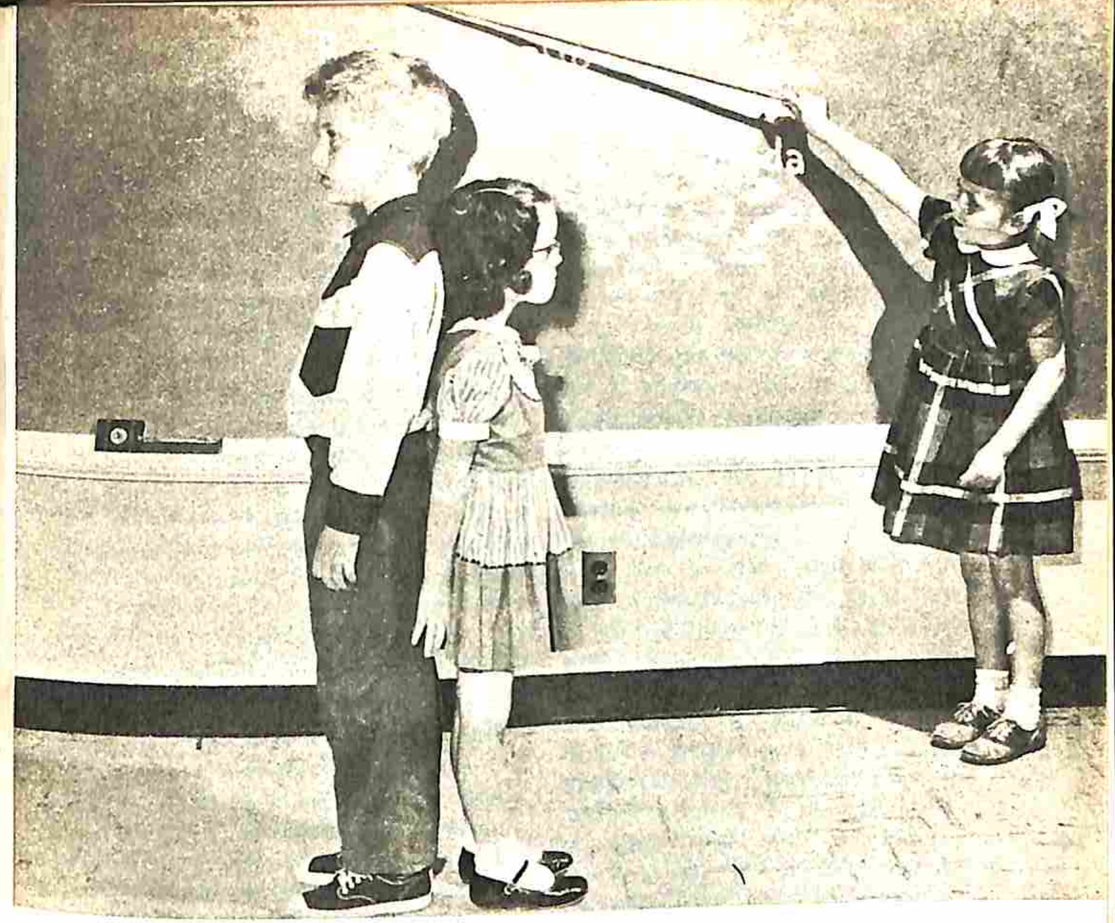
7) Pesar alimento para um animalzinho.

8) Fazer uma frisa ou mural de acôrdo com determinado espaço.

9) Marcar na parede ou tira de papel a altura de várias plantas.

10) Comparar a capacidade de copos, latas, xícaras, caixas e cartões.

No decorrer de tais atividades, as crianças terão oportunidade de usar muitas medidas padronizadas. Nas primeiras séries não há necessidade de explicar, com detalhes, as razões para usar tais medidas ou o significado dos têrmos usados. A princípio, devemos encorajar as crianças a usar simples objetos, como fichas, relógios, tiras, varetas e outros semelhantes, para descrever a quantidade que está sendo considerada. Mais tarde devem aprender a usar medidas padronizadas para descrever ou reproduzir coisas ou para compará-las.



As crianças, na primeira série, devem fazer experiências simples com medidas.

Aprendizado Sôbre Medidas

Nas primeiras séries, a criança deve começar a considerar as unidades padronizadas de uso diário, cujas apresentações objetivas possam ser feitas com material como metro, fita métrica etc. Ela pode aprender sôbre tôdas unidades pela observação de seu uso em casa e mais tarde o papel das mesmas em situações sociais. A criança deve ter experiências de primeira mão em manipular e aplicar os instrumentos de medir baseados nessas unidades. Deve, também, aprender os tipos de questões cujas respostas dependem dessas unidades para várias espécies de quantidades. Por exemplo, a régua poderá ajudar a responder a questões como: "Quantos centímetros mede . . .?" A balança ajudará a criança a encontrar resposta para perguntas como: "Quanto pesa . . .?"

As crianças devem, em seguida, considerar as medidas menos comuns e que, no entanto, precisam guardar. O metro quadrado é um exemplo. A unidade-padrão, o metro quadrado, a criança poderá construí-la e usá-la objetivamente. O propósito dêste trabalho é dar significação às unidades. Uma vez que a criança compreende o significado das unidades de medir, encontrar a área ou a superfície é questão de usar a multiplicação. As medidas cúbicas são outra ilustração dêsse tipo de medidas.

Antigamente o tempo era medido com unidades naturais, como dias, meses ou anos. Mais tarde, instrumentos mecânicos, como relógios de água, foram usados para marcar o tempo já decorrido. A descoberta das leis do pêndulo levaram ao desenvolvimento dos relógios modernos, altamente eficientes. As crianças começam a aprender sôbre tempo, na sala de aula, através do estudo das estações, do calendário e do relógio. Devem aprender também como o relógio ajuda as pessoas a regular os afazeres da vida diária, principalmente nos negócios, na indústria e no planejamento de suas atividades. O estudo dos fusos horários tem lugar nas séries mais adiantadas e é uma excelente unidade de estudo, pois mostra como os povos resolveram êste problema que causava tanta confusão, especialmente nas viagens e comunicações, surgido porque não existia um sistema uniforme do tempo. Judd [2] mostra a dupla significação social do relógio, nas atividades diárias, da seguinte maneira:

> Não há instrumento de medir mais útil para promover a cooperação civilizada em larga escala que o plano universalmente aceito de medir o tempo. Quando consideramos o fato que o sistema industrial, incluindo escalas de pesos, é regulado pelo tempo; quando pensamos na impossibilidade de um seguro e conveniente sistema de transporte sem horários e tôdas as demais implicações; quando pensamos nos compromissos sociais e sua dependência da habilidade de dizer os dias e as horas; quando consideramos que as festas religiosas têm sido um dos principais centros de interêsse nos calendários, começamos a sentir o que a medida de tempo significa para a civilização.

O dinheiro é uma medida de valor que não é estável, variando

[2] JUDD (Charles), *The Psychology of Social Institutions.* Nova Iorque: The Macmillan Co., 1926, pág. 105.

de tempo em tempo de acôrdo com as condições políticas, econômicas e sociais. Entretanto, sem um sistema monetário bem sustentado e mais ou menos estável, o comércio e a indústria seriam quase impossíveis, excetuando as trocas de mercadorias. As crianças se familiarizaram com o dinheiro antes mesmo de entrar para a escola. Aprender a calcular com dinheiro é uma atividade que interessa muito às crianças. Podemos começar essas atividades desde as primeiras séries.

Em tôdas as atividades com medidas, a questão básica sempre envolve uma unidade-padrão. Algumas unidades podem ser aplicadas diretamente, outras não o podem, como foi mostrado.

Através de orientação cuidadosa das experiências de aprendizagem, o aluno sente-se capacitado a aplicar unidades-padrão de tôdas as espécies. Se algumas idéias sôbre a história das medidas forem dadas aos alunos, êles poderão sentir como o sistema atual de medir passou de uma fase de diversidade para a uniformidade.

Tabelas de Medidas

Houve um tempo em que se acreditava ser necessário à criança memorizar tabelas de medidas. Muito do tempo dedicado à Matemática era destinado a resolver problemas baseados nessas tabelas. Na sociedade moderna, contudo, faz-se menor uso dêsses conhecimentos e se dá menos ênfase às tabelas nas aulas de Aritmética. É verdade que certos fatos, como o número de centímetros em um metro e o número de minutos em uma hora, são aprendidos de modo geral incidentalmente e devem ser memorizados. Contudo devemos ensinar às crianças onde encontrar as tabelas de medidas e os fatos relacionados às medidas no dicionário e livro-texto. Referências freqüentes a êsse material para informações necessárias, em conexão com a solução de grupos de problemas e outras atividades de classe, farão com que as crianças se acostumem com seu uso.

Ampliação dos Conceitos de Medidas

Despertar o interêsse das crianças por questões como as que se seguem muito enriquecerá o trabalho com medidas:

1) Como funciona o termômetro?
2) Como se pode medir o comprimento de um quarteirão?
3) Como podemos medir a espessura de uma fôlha de papel?
4) Como um aviador sabe em que direção está o avião?
5) Quais são os diferentes tipos de balanças? Como funcionam?
6) Como podemos fazer um relógio de sol?
7) Como podemos medir o valor alimentício das coisas que comemos?

8) Que significam as palavras *infinitesimal* e *infinito*?

9) Qual é o melhor meio para comprar laranjas, em quilo ou em dúzia? Por que os ovos são vendidos em dúzia e não por pêso?

A investigação dêsses problemas e as experiências necessárias para encontrar respostas satisfatórias são partes significativas do trabalho em Aritmética. Atenção especial deve ser dada ao desenvolvimento histórico dos instrumentos de medir e das unidades de medidas para enriquecer os conhecimentos dos alunos. Sua evolução é uma interessante parte da história da cultura humana.

Variabilidade Entre os Sistemas de Medidas

Porque a indústria e as ciências exigiam, cada vez mais, o aumento da precisão e exatidão das medidas, tornou-se necessário dividir as unidades em partes menores e a criar medidas menores para medir. Por exemplo, o carpinteiro geralmente usa medidas envolvendo frações do metro. Para fazer isso, êle tem medidas menores como o centímetro e o milímetro, dependendo do grau de precisão requerido e de acôrdo com suas necessidades imediatas.

O calculista deve fazer muitas operações difíceis quando trabalha com frações muito pequenas. O mesmo problema está relacionado quase que a todos os sistemas de medidas. Não há evidência de um sistema comum entre as equivalências das medidas abaixo relacionadas:

2 quartilhos = 1 quarto
3 pés = 1 jarda
4 quartos = 1 galão
8 quartos = 1 *peck*
9 pés quadrados = 1 jarda quadrada
10 *cents* = 1 *dime*
12 polegadas = 1 pé
16 onças = 1 libra
5 cents = 1 níquel
6 coisas = meia dúzia
7 dias = 1 semana
16½ pés = 1 vara
160 varas quadradas = 1 A
32 quartos = 1 *bushel*
60 segundos = 1 minuto
144 polegadas quadradas = 1 pé quadrado

Se o sistema de medidas inglês tivesse sido desenvolvido em base decimal, a confusão na conversão de medidas e nos cálculos com medidas teria sido eliminada. No comêço, as medidas e nosso sistema de numeração não tinham relação e eram independentes um do outro. Um artífice devia selecionar uma subdivisão de unidade de medida que o possibilitasse a julgar ou estimar, para a tarefa a ser executada, o valor da menor unidade, mesmo que os cálculos na precisão do trabalho fôssem difíceis e complicados.

Não é difícil compreender por que as unidades de medida escolhidas não tinham relação com o sistema de numeração. Perry[3] explicou o assunto assim:

> Unidades de medidas de comprimento — pé, unha, côvado, palmo — não foram escolhidas porque elas eram relacionadas umas com as outras, numa proporção simples. Nem o homem começou a contar porque seus dedos eram 10. As razões foram descobertas mais tarde, e assim a contagem decimal foi estabelecida.
>
> Os primeiros aperfeiçoamentos das medidas foram muito simples mais na natureza das operações mecânicas que no trabalho com números. Você pode fàcilmente dividir em metades e pode verificar, comparando, se as partes estão exatamente iguais. Com menos facilidade, mas com um pouco mais de exatidão, você podia dividir em terços... Mas se você dividir em quintos ou décimos, sua margem ou possibilidade de erros será consideràvelmente maior.
>
> Dêsses princípios é que parte a estrutura das medidas inglêsas dos dias atuais: 12 polegadas — 1 pé, 3 pés — uma jarda, 6 pés — uma toesa etc. Das subdivisões dos artífices veio a divisão da polegada em metades, quartos, oitavos e dezesseis avos; e subdivisões semelhantes do galão, milha, tonelada e libra. Nas medidas lineares foram encontradas razões 3:1 devido à proporção do corpo. Nas unidades de pêso e capacidade, onde essas proporções não são relevantes, a razão 2:1 é geral.

Enquanto as medidas e suas aplicações em cálculos conservaram-se independentes entre si, não houve conflito entre os sistemas de medidas e de numeração. Quando as exigências do comércio começaram a pedir cálculos feitos com medidas, aí surgiram as dificuldades. Não havia relação entre uma série de medidas divididas *binàriamente* e o sistema de numeração. Não havia relação comum entre unidades que poderiam ajudar a pessoa a encontrar uma medida partindo de outra. Ainda hoje, é necessário recorrer à memória a fim de resolver fatos sem relação entre si para encontrar respostas a questões como:

1) Quantos pés tem uma vara?

2) Quantas varas quadradas há em um acre?

3) Quantas polegadas cúbicas há em um alqueire?

4) Quantas polegadas cúbicas há em um galão?

5) Qual o pêso de um pé cúbico de água?

Essas e muitas outras questões semelhantes usando medidas podem ser formuladas mas não podem ser respondidas sem o conhecimento de fatos isolados. A razão decimal que existe entre vários lugares no sistema de numeração está ausente entre as unidades consecutivas das medidas. Assim, a conversão de uma unidade de medir para outra unidade freqüentemente envolve dificuldades de cálculo, como é o caso de encontrar o número de

[3] PERRY (John), *The Story of Standards.* Nova Iorque: Funk and Wagnalls Co., 1955, págs. 80-81.

polegadas em uma milha, ou o número de pés quadrados em um acre.

Sistema Métrico

O conflito entre medidas e sistema de numeração não é muito acentuado no campo da ciência. Quando a ciência começou a exigir um aumento de precisão em medidas, tornou-se necessária a construção de um sistema de medidas relacionado com o sistema de numeração. O resultado foi a construção do *sistema métrico* de medidas. A razão entre unidades lineares consecutivas neste sistema é a mesma existente entre os lugares consecutivos no sistema de numeração. A tabela que é apresentada mostra unidades de medidas lineares nos dois sistemas:

Inglês

12 polegadas	=	1 pé
3 pés	=	1 jarda
5½ jardas	=	1 vara
320 varas	=	1 milha

Métrico

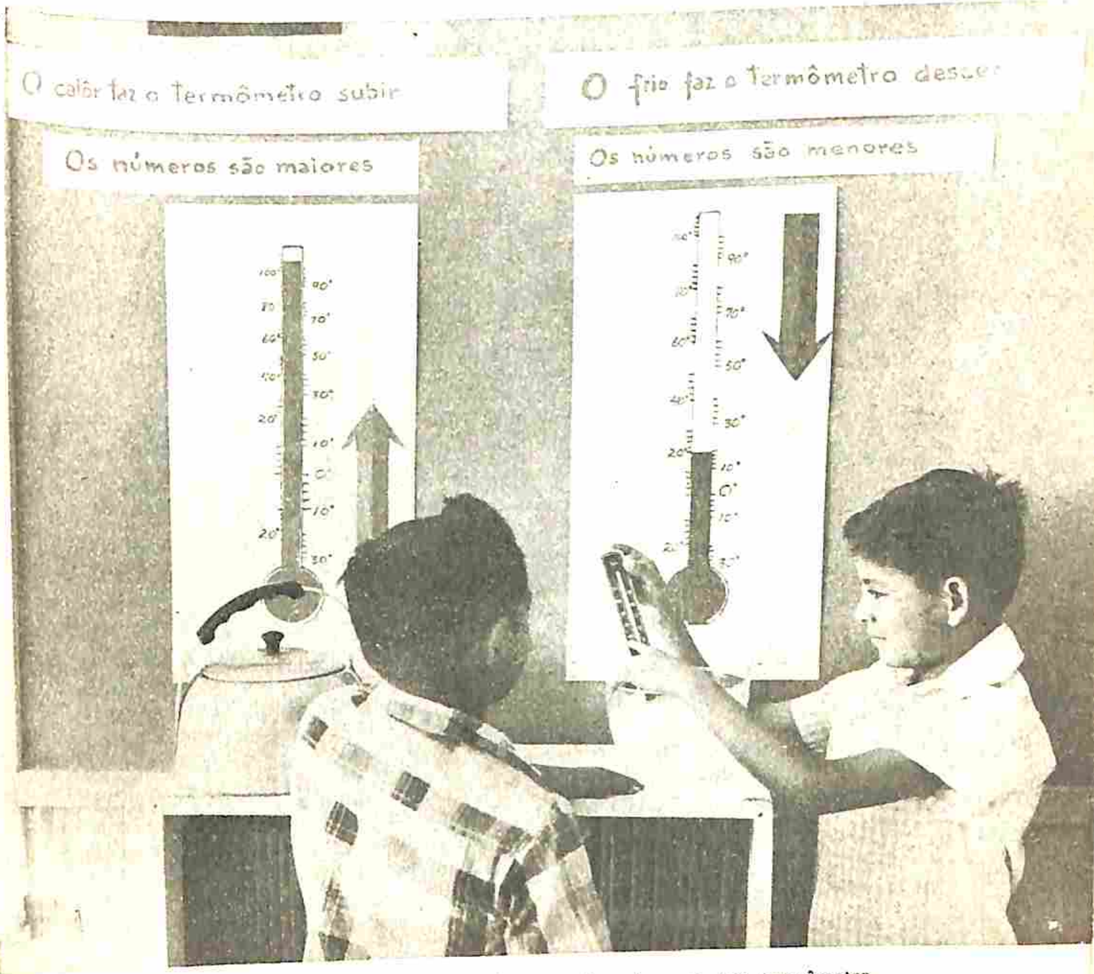
10 milímetros	=	1 centímetro
10 centímetros	=	1 decímetro
10 decímetros	=	1 metro
10 metros	=	1 decâmetro
10 decâmetros	=	1 hectômetro
10 hectômetros	=	1 quilômetro

A primeira das tabelas dificilmente merece o título de *sistema de medidas,* porque não existe uma sistematização que é característica das medidas. A tabela é de uma coleção de medidas não-relacionadas, não merecendo, pois, o têrmo *sistema.* Por outro lado, o sistema métrico foi criado por alguns dos melhores cientistas da Europa no começo do século XIX. O sistema preencheu a lacuna entre medidas e cálculo. É fácil transformar uma unidade em outra no sistema métrico, como é fácil transformar uma classe do número em outra. Em cada caso a transformação é acompanhada do deslocamento da vírgula. 750 centímetros são iguais a 7,5 metros, assim como 7 500 são iguais a 7,5 milhares.

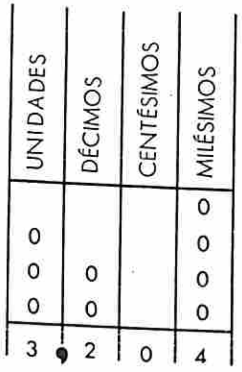
O sistema métrico é usado quase que universalmente no campo da ciência porque êste sistema unifica as unidades de pesos e medidas. No sistema inglês, as unidades para comprimento, pêso e volume não são relacionadas. No sistema métrico há relação entre êsses elementos. O centímetro é uma das unidades de comprimento; o grama, de pêso, e o centímetro cúbico, de volume. Partindo-se dêste fato, pode-se chegar à conclusão que um recipiente tendo o volume de 1 000 centímetros, ou um *litro,* tem o pêso de 1 000 gramas, ou um *quilo.* O número de unidades de metros cúbicos no volume de um sólido é igual ao número de unidades métricas do pêso de água daquele sólido. No sistema inglês de medidas não é possível fazer um cálculo fácil, manipulando com pêso e volume de qualquer recipiente cúbico, quando se conhece o pêso de uma polegada cúbica.

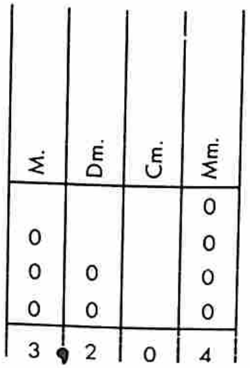
Por Que Não é Universal o Sistema Métrico?

A superioridade do sistema métrico sôbre o sistema inglês é evidente. Pode-se, então, perguntar: Por que os países que falam inglês não substituem seu sistema antigo pelo sistema métrico? A relutância em mudar, bem como o preço desta mudança, são as duas razões básicas



Descobrindo os efeitos do frio e do calor em um termômetro.





da não-adoção do sistema métrico. A substituição das máquinas reguladas pelo sistema inglês custaria bilhões de dólares. Os países de língua inglêsa são os melhores fregueses no mundo comercial. Não há necessidade urgente de mudança como haveria se os países que adotam o sistema métrico fôssem os principais fregueses dos países de língua inglêsa. Assim, é bem certo que o sistema métrico não substituirá o sistema inglês em futuro muito próximo.

A maior razão para o ensino do sistema métrico não é o seu valor prático. É desejável que se ensine o sistema métrico devido à sua estrutura. O sistema mostra como cálculos e medidas são integrados e unidos.

O aluno pode compreender a vantagem advinda do sistema métrico quando faz os cálculos complicados que o sistema inglês exige. Em seguida, êle será capaz de apreciar por que o sistema de numeração que usamos é superior a um sistema de numeração em que não haja uma razão fixa entre duas ordens consecutivas de um número. Johnson mostrou como utilizar o aspecto decimal do sistema métrico no ensino da significação do valor do lugar em um número. Êle levou os alunos a usar réguas graduadas em milímetros e centímetros. Uma linha com 35 milímetros de comprimento poderia ser expressa como 35 milímetros, ou 3 centímetros e 5 milímetros. Da mesma maneira o número 35 pode ser lido como 35 unidades, ou 3 dezenas e 5 unidades. Johnson[4] concluiu

[4] JOHNSON (T. J.), "The Use of a Ruler in Teaching Place Value in Numbers", *The Mathematics Teacher*, 45:266.

que a criança com a idade mental de 12 anos e 6 meses é suficientemente madura para compreender o valor do lugar e que devem ser feitos esforços posteriores para criar lições a fim de assegurar aos alunos uma compreensão melhor do valor do lugar. O uso de material apropriado é recomendável para ajudar a criança a compreender, em nosso sistema de numeração, o valor do lugar e a razão entre as ordens.

Deve-se lembrar que a maioria das unidades, no sistema inglês, foi adotada porque passou no teste do uso prático. As medidas foram criadas porque os homens acharam necessário descrever as características das coisas em têrmos específicos mas sem relação com outras medidas. O sistema métrico foi projetado em bases diferentes. Para o cientista, o centímetro e o metro são baseados no nosso sistema de numeração e correspondem à polegada e à jarda. Mas o homem comum achou o centímetro muito pequeno e o metro muito grande para expressar de maneira compreensiva o comprimento de três ou quatro pés, que são as medidas que êle usa mais freqüentemente. Há alguns que sustentam que medidas não podem ser usadas em Aritmética para ensinar o sistema de numeração, mas que o uso de medidas torna o trabalho com números socialmente significativo.

Graduação do Trabalho com Medidas*

A graduação mais em uso para o ensino das medidas é a que mostramos abaixo:

1ª série: Comparações: maior, menor, mais curto, comprido, mais leve. Medidas indefinidas: passo, punhado, braçada. Medidas padronizadas: pé, polegada, hora, libra, moedas de pequeno valor.

2ª série: Comparações: mais claro, muito pequeno, muito largo, muito estreito. Medidas-padrão: quarto de dólar, meio dólar, dólar, quartilho, xícara, jarda, dúzia, minuto, dia, semana, mês, ano.

3ª série: Meia dúzia, graus usados em temperatura, dizer as horas contando de 5 em 5 minutos, galões.

4ª série: Tonelada, *peck*, *bushel*, onça, milha, dizer as horas contando por minutos.

5ª série: Segundos, escalas, encontrar distâncias no mapa, vara, medidas quadradas, área do retângulo, reduções de medidas, adição e subtração de medidas expressas em duas unidades.

6ª série: Multiplicação e divisão de medidas expressas em duas unidades, interpretação, calorias.

7ª série: Medidas de ângulos, sistema métrico, *kilowatt*.

8ª série: Medidas cúbicas.

* De acôrdo com o sistema inglês, nas escolas americanas. (N. T.)

Tôdas as Medidas São Aproximadas

As medidas nunca são exatas; são sempre aproximadas. É quase impossível traçar *exatamente* uma linha de 5 3/8 polegadas de comprimento. A linha certamente será um pouco mais longa ou mais curta dependendo do cuidado com que foi desenhada. Podemos dizer que uma linha de 5 3/8 de polegadas aproximadamente mede 5 1/2 polegadas. A necessidade de unidades de medida cada vez menores aumenta de acôrdo com a exigência de um mais alto grau de precisão que estas oferecem, o que não acontece com medidas maiores. Unidades menores são divididas em partes fracionárias de acôrdo com as necessidades que surgem. Os famosos blocos Johannsen, usados pelos fabricantes de automóveis, permitem aos mecânicos medir até milésimos de polegada.

Uma interessante e valiosa experiência de aprendizagem é levar a classe a organizar uma lista de unidades de medir bem variadas em tamanho, desde a maior à menor, e discutir as suas finalidades. Ao mesmo tempo, deve-se dar alguma consideração à graduação dos instrumentos de medir. É interessante observar que não é possível indicar um instante específico no constante *correr do tempo* porque não se pode parar qualquer instante em particular.

c. PROCESSO DE MEDIR

Aproximação nas Medidas de Linhas com Régua

As crianças devem aprender a medir o comprimento de linhas e as dimensões dos objetos. Nas primeiras séries devem usar réguas graduadas em metades e quartos de polegadas. Mais tarde devem aprender a medir com réguas graduadas em dezesseis avos. No princípio devem aprender a usar a régua para medir o comprimento de um segmento dado, como em AB. Na ilustração

A ———————————————— B

o aluno verá que o comprimento de AB é aproximadamente 2 1/2 polegadas. Se a régua usada para medir é graduada em quartos de polegada, o comprimento será expresso como 2 3/4 de polegada; se graduada em oitavos de polegada, o comprimento será expresso como 2 5/8 de polegada; se graduada em dezesseis partes da polegada, o comprimento será expresso como 2 11/16 de polegada. Experiências desta espécie provarão ao aluno que nenhuma medida de comprimento é exata, mas que a medida de comprimento é sempre aproximada.

A precisão das medidas depende da graduação dos instrumentos de medir e da habilidade em usar os mesmos instrumentos. Se o ponto terminal de uma linha é mais próximo de uma escala de valor que de outra, o ponto é

marcado na escala de valor mais próxima. Se o ponto aparece bem no meio, entre duas escalas de valor, deve-se assinalar o maior valor dessas duas escalas. Quando a menor divisão na régua é a fração indicada, o comprimento da linha AB deve ser expresso como:

1) Para a polegada mais próxima — 3 polegadas

2) Para a meia polegada mais próxima — 2 1/2 polegadas

3) Para o mais próximo quarto de polegada — 2 3/4

4) Para o mais próximo oitavo de polegada — 2 5/8

5) Para a mais próxima décima-sexta parte da polegada — 2 11/16.

Os erros de medidas resultam do uso incorreto dos instrumentos de medir, devido a:

1) Falha em marcar o ponto inicial da linha no ponto zero da régua.

2) Falta de habilidade em determinar as extremidades da linha.

3) Falta de habilidade em ler as graduações de uma polegada.

4) Falta de habilidade em determinar, na régua, o valor que deve ser assinalado quando o ponto terminal da linha não coincide com o ponto da escala.

Erros semelhantes são cometidos quando se desenha uma linha de determinado comprimento.

Como Calcular a Área do Retângulo

Às crianças nas últimas séries não se deve ensinar como encontrar a área do retângulo até que compreendam o significado de área e a unidade de medida de área. *Área* é a porção de espaço que uma superfície cobre ou contém. *A unidade de medir a área é um quadrado.*

Para desenvolver o conceito de área, as crianças devem envolver-se numa série de atividades variadas e informações antes que o assunto seja apresentado sistemàticamente. Por exemplo: como encontrar o número de quadrados em um tabuleiro de xadrez, ou o número de biscoitos ou doces dispostos em fileiras em um prato. Elas descobrem que o número total de objetos é encontrado multiplicando-se o número de fileiras pelo número de objetos em cada fileira. Essa regra pode também ser aplicada para encontrar o número de carteiras em uma sala de aula, ou em alguma situação semelhante. As crianças também podem descobrir quantas fôlhas quadradas de papel são necessárias para cobrir uma mesa ou qualquer outra superfície.

Para introduzir a idéia de medir área, o professor deve ter na sala um quadrado de papelão de uma polegada quadrada. Deve o professor explicar que êste quadrado é a unidade-padrão para medir área. Sua área é uma polegada quadrada. Ela pode ser usada para encontrar a área de superfícies pequenas. Cada criança pode desenhar um quadrado com as dimensões de 4 por 3 polegadas. Depois, com um quadrado de uma polegada de lado e um lápis marcar e contar o número de quadrados na primeira fila do retângulo. Faz a mesma coisa com a segunda e a terceira fileiras. Esta experiência mostrará que há 4 polegadas quadradas em cada fileira e que em 3 fileiras há 12 polegadas quadradas. A área dêste retângulo por conseguinte é de 12 polegadas quadradas. Repetindo-se êste processo com muitos retângulos de diferentes tamanhos, as crianças descobrem que o número de quadrados no retângulo é o mesmo que se obtém multiplicando o número de unidades lineares do comprimento pela largura. Outras experiências podem ser repetidas.

A regra para encontrar a área de qualquer retângulo pode ser expressa como se segue: A área do retângulo é igual ao produto do comprimento e largura expressos na mesma medida. A fórmula é:

$$A = cl$$

O professor deve ajudar as crianças a compreenderem por que um quadrado é a medida-padrão para medida de áreas. Cada criança poderá experimentar encher um retângulo com círculos, triângulos, hexágonos e outras formas. As experiências mostrarão que o quadrado é considerado a unidade mais própria para expressar área, porque o quadrado é a forma mais fácil para cobrir completamente uma superfície retangular.

Áreas maiores podem-se tornar significativas para as crianças se usarmos um campo de futebol ou outros lugares. As áreas dos Estados são apresentadas em livros de informações. Elas são expressas em milhas quadradas (ou quilômetros quadrados), conceito que pode-se tornar significativo para a classe se ela indicar os limites aproximados de uma área quadrada da vizinhança da escola, aproximadamente com uma milha de comprimento (ou um quilômetro).

Como Calcular o Volume de Um Sólido Retangular

O cálculo do volume dos sólidos é usualmente iniciado nas últimas séries do curso primário, ou além. O volume de um sólido é a quantidade de espaço que êle ocupa. Justamente como o quadrado é a unidade de medida da área de uma superfície, o cubo é a unidade de medida do volume de um sólido. O professor deve ter muitas caixas pequenas retangulares de diferentes tamanhos — por exemplo, caixas de cigarros — e aproximadamente 125 cubos de 1 polegada para desenvolver o processo de medir o volume. Uma criança deve encher uma caixa de cigarros, com as dimensões de 8 × 5 × 2 polegadas com êstes cubos. A classe pode

descobrir que 8 cubos podem ser colados em uma fileira, formando 5 fileiras em uma camada, levando ao total 40 cubos. Se a caixa comporta 2 camadas, teremos, na caixa, ao todo 80 cubos. Repetindo-se esta experiência com caixas de diferentes tamanhos, a classe descobrirá que o produto do número de unidades de comprimento e largura dará o número de unidades cúbicas de uma camada. Para encontrar o número de unidades cúbicas do volume da caixa tôda, a classe deve multiplicar êste produto pelo número de unidades de sua altura, isto é, pelo número de camadas de unidades cúbicas. A fórmula para o volume de prismas retangulares é:

$$V = cla$$

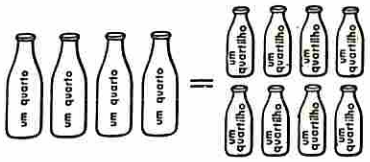
d. OPERAÇÕES COM MEDIDAS

Visualização de Mudanças de Unidades de Medir

É fácil mostrar a transformação de medidas por meio de material concreto e visual. Por exemplo, se o problema apresentado fôr: "Quantos quartos há em 7 quartilhos?", deve-se pedir, inicialmente, a uma criança que coloque 7 quartilhos em uma fila, como mostra o desenho.

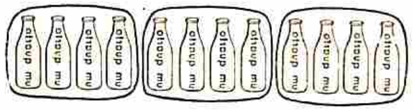
Em seguida, deve-se levar a criança a dizer quantos quartilhos há em um quarto. Um desenho semelhante ao abaixo pode ser feito.

Há três pares de quartilhos e um quartilho extra. Por conseguinte, 7 quartilhos é o mesmo que 3 quartos e 1 quartilho. O processo reverso, mudar 4 quartos em quartilhos, pode ser demonstrado do mesmo modo, como no desenho.



As mudanças de outras unidades, como polegadas para pés e pés para polegadas, jardas para pés e pés para jardas, níqueis (moedas de 5 *cents*) para *dimes* (moedas de 10 *cents*) etc., podem ser igualmente demonstradas usando-se materiais concretos.

Mais tarde, podem-se usar diagramas com a mesma finalidade. Assim, no desenho adiante há 12 garrafas de 1 quarto. A classe sabe que há 4 quartos em um galão. Passando um círculo à volta de 4 quartos, a classe pode ver, de maneira rápida, que 12 quartos são 3 galões.



O processo usado foi uma divisão com o conceito de razão. Depois de muitas experiências com várias medidas, a classe descobre que para transformar medidas menores em maiores é necessário dividir. Da mesma maneira, descobre que para transformar medidas maiores em menores basta multiplicar.

Transformação de Medidas em Partes Fracionárias de Outras Medidas

Quando se usa medidas, há um emprêgo considerável de frações equivalentes. Assim, a medida de 1/2 libra pode ser expressa em onças, encontrando-se 1/2 de 16 onças. Da mesma maneira, 3/4 de hora podem ser expressos em minutos, encontrando-se 3/4 de 60 minutos. Cálculos desta espécie envolvem uma das aplicações mais comuns da multiplicação de frações.

Uma aplicação mais difícil é a mudança de uma medida menor para uma parte fracionária de uma medida maior. Assim, para expressar 30 minutos como parte fracionária de uma hora, o aluno deve resolver o seguinte exemplo: 30 minutos = ...? h. Êle deve ser levado a ver que 1 minuto é 1/60 da hora. Então, 30 minutos devem ser 30/60 de uma hora. Quando reduzida a têrmos menores, a fração torna-se 1/2 de uma hora. Êle pode depois mostrar que sua resposta é correta mostrando que 1/2 de 60 minutos é 30 minutos.

Agrupamento e Reagrupamento com Medidas

A semelhança dos processos de cálculo usados com números abstratos e medidas é ilustrada abaixo, pela reserva na adição.

A. Números Mistos

Dez.	Unid.	
1	3	$\frac{7}{10}$
+ 2	4	$\frac{6}{10}$
	1	$\frac{3}{10}$
3	7	
3	8	$\frac{3}{10}$

B. Números Decimais

Dez.	Unid.	Déc.
1	3,	7
+ 2	4,	6
	1,	3
3	7	
3	8,	3

C. Medidas Líquidas

Quartos	Quartilhos
3	1½
2	1½
5	3

= 6 quartos e 1 quartilho
= 1 galão, 2 quartos e 1 quartilho

Descobrindo a equivalência de medidas.

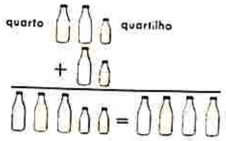
Observe-se que as transformações em A e B são muito fáceis e baseadas em dezenas. Entretanto, em C a transformação de quartilhos em quartos é baseada em 2, enquanto a transformação de quartos para galão é baseada em 4. As transformações envolvendo cálculo com medidas são complicadas e difíceis devido às mudanças nas bases das unidades das várias medidas.

Operações com Medidas

Adição. O processo de adição com medidas é semelhante ao processo de adição com números inteiros e frações, mas o processo de reagrupamento envolve diferentes transformações dependendo das unidades que vão ser combinadas.

A.

	2 quartos	1 quartilho
+	1 quarto	1 quartilho
	3 quartos	2 quartilhos
		ou 4 quartos



Considerando o desenho A, que mostra visualmente como adicionar 2 quartos e 1 quartilho mais 1 quarto e 1 quartilho, porque 2 quartilhos = 1 quarto, reduzimos 3 quartos e 2 quartilhos a 4 quartos.

Duas subdivisões de uma mesma medida podem ser mudadas para uma única unidade. Assim, o exemplo inicial pode ser trabalhado em dois caminhos diferentes, como se vê abaixo:

	2 quartos	1 quartilho =	2 ½ quartos
+	1 quarto	1 quartilho =	1 ½ quarto
			4 quartos

2 quartos	1 quartilho =	5 quartilhos
1 quarto	1 quartilho =	3 quartilhos
		8 quartilhos = 4 quartos

Subtração. A transformação que é feita na subtração de 1 galão e 3 quartos de 4 galões e 1 quarto é mostrada visualmente em B.

B.

4 galões 1 quarto	=	3 galões	5 quartos
	−	1 galão	3 quartos
		2 galões	2 quartos

Porque não podemos subtrair 3 quartos de 1 quarto, é necessário primeiro transformar 1 galão em 4 quartos, ficando no total 3 galões e 5 quartos. Depois podemos subtrair, como mostra a ilustração em B.

Duas subdivisões podem também ser reduzidas a uma única

unidade, e depois se faz a ilustração como se vê abaixo:

$$\begin{array}{lcl} \text{3 galões 1 quarto} & = & 3\frac{1}{4} \text{ galões} \\ -\text{ 1 galão 3 quartos} & = & -\,1\frac{3}{4} \text{ galões} \\ \hline & & 1\frac{1}{2} \text{ galão} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{3 galões 1 quarto} & = & \text{13 quartos} \\ -\text{ 1 galão 3 quartos} & = & -\text{ 7 quartos} \\ \hline & & \text{6 quartos} \\ & & (1\frac{1}{2} \text{ galão}) \end{array}$$

Multiplicação. Na multiplicação de medidas, expressas de forma diferente, a transformação para a unidade menor é constantemente necessária. O processo é mostrado abaixo:

C.

$$\begin{array}{l} \text{2 pés 7 polegadas} \\ \times 3 \\ \hline \text{6 pés 21 polegadas} \\ = \text{7 pés 9 polegadas} \end{array}$$

A transformação aqui envolve 21 polegadas. O produto pode também ser encontrado adicionando-se três vêzes 2 pés e 7 polegadas.

Duas medidas menores podem ser reduzidas para a mesma unidade e multiplicadas, como se mostra abaixo:

$$\begin{array}{lcl} \text{2 pés 7 polegadas} & = & 2\frac{7}{12} \text{ pés} \\ \times 3 & & \times 3 \\ & & 6\frac{21}{12} = 7\frac{9}{12} \text{ pés} \\ & & = 7\frac{3}{4} \text{ pés} \end{array}$$

Divisão. Na divisão de duas medidas expressas em unidades diferentes, a transformação para a unidade menor é constantemente necessária, como se demonstra a seguir:

$$\begin{array}{l} \text{3 pés 6 polegadas} \;\underline{|\,2} \\ = \text{2 pés 18 polegadas} \;\underline{|\,2} \\ \qquad\qquad\qquad \text{1 pé 9 polegadas} \end{array}$$

(1 pé foi transformado em 12 polegadas)

Duas medidas, expressas em unidades diferentes, podem também ser reduzidas à mesma unidade e divididas, como se vê abaixo:

$$\text{3 pés 6 polegadas} = 3\frac{1}{2} \text{ pés}$$

$$3\frac{1}{2} \text{ pés} \div 2 = 1\frac{3}{4} \text{ pé}$$

$$\text{ou 3 pés 6 polegadas} = \text{42 polegadas}$$

$$\text{42 polegadas} \div 2 = \text{21 polegadas}$$

Estimativa com Medidas

Há um valor considerável em procurar desenvolver nas crianças a habilidade em fazer estimativas com medidas. Isto pode ser feito como parte do trabalho de laboratório na aula de Aritmética. Atividades como as seguintes podem ser usadas com grande vantagem para enriquecer o trabalho com medidas:

1) Desenhar uma linha, estimar o seu comprimento e depois, medindo, verificar a estimativa.

2) Estimar distâncias entre dois pontos no quadro-negro, depois medir para encontrar o êrro.

3) Estimar e verificar as dimensões de objetos, como uma mesa, um livro, uma gravura, um jardim, uma sala.

4) Fazer estimativa do pêso de objetos, como cartas, pacotes, caixas, frutas etc. e depois verificar na balança.

5) Fazer estimativa de tempo decorrido, como 10 segundos, 1 minuto etc. com outra pessoa verificando no relógio.

6) Fazer estimativa da capacidade de vasos, garrafas, verificar com xícaras, litros, meios-litros etc.

7) Estimar a velocidade de um carro e verificar o resultado com um velocímetro.

8) Estimar o número de crianças de uma sala e em seguida contá-las para encontrar o número exato.

9) Estimar o valor total de algumas cédula.s

Desenvolvimento de Padrões de Referência

Deve-se ensinar aos alunos como aplicar medidas com as quais estão familiarizados, como ponto de referência na estimativa da dimensão de objetos cuja medida êle não conhece. Para ilustrar o desenvolvimento de pontos de referência que serão usados em estimativas de comprimento, largura e altura, o seguinte processo de laboratório pode ser usado:

1) O professor faz uma lista de objetos de tamanhos variados que podem ser colocados sôbre a mesa ou em lugar acessível, tais como um cartão de 9 × 15 polegadas, uma pequena fôlha de papel para escrever, uma fôlha de papel de embrulho, uma moldura de janela ou de uma gravura ou tampo de mesa.

2) Em seguida, o professor prepara uma fôlha de papel para cada aluno. Cada criança faz a estimativa mais aproximada possível e registra na fôlha própria.

FÔLHA DE REGISTRO PARA ESTIMATIVAS E MEDIDAS

	Estimativas		Medida Real	
	Comp.	Larg.	Comp.	Larg.
1) Cartão pequeno				
2) Fôlha de papel de escrita				
3) Fôlha de papel de embrulho				
4) Moldura de uma janela				
5) Tampo de uma mesa				

3) Com uma régua cada criança deve medir os objetos relacionados acima na fôlha de registro.

Depois que as medidas forem feitas, deve-se levar a criança a comparar com as estimativas feitas. A classe deve discutir as diferenças nas estimativas e as medidas reais que elas encontram individualmente e as diferenças encontradas pelos demais membros e as possíveis razões para essas diferenças. O processo usado em estimar pela criança, cuja diferença foi muito pequena ou muito maior, deve ser discutido, fazendo sentir o valor de pontos de referência que devem ser aplicados em estimativas futuras. A classe, então, deve sugerir meios apropriados para visualizar uma polegada, um pé, uma jarda, e outras medidas de comprimento.

Processo igual pode ser aplicado para ajudar a criança a estabelecer pontos de referência para medidas de pêso, tamanho, área, volume, tempo e dinheiro.

QUESTÕES, PROBLEMAS E TÓPICOS PARA DISCUSSÃO

1. Que é unidade de medida-padrão?
2. Selecione alguns instrumentos de medir e procure a sua história. A enciclopédia da escola e outros livros de referência contêm discussão interessante da maioria dêles. Prepare um esquema sôbre o que deve ser ensinado sôbre isso, semelhante ao apresentado na pág. 435. Procure, também, encontrar fontes de referência às quais as crianças possam recorrer.
3. Ilustre o conceito *níveis de medidas*.
4. Faça uma lista de atividades relacionadas com qualquer medida adequada à série em que leciona.
5. Selecione uma das atividades da lista dada na pág. 426, ou atividades semelhantes, e mostre como você desenvolveria o tópico com uma classe.
6. Comente a citação feita por Judd na pág. 428 e sua importância no ensino da Aritmética.
7. Por que o sistema de medida inglês dificilmente pode ser chamado de sistema?
8. Quais são os méritos do sistema métrico?
9. A classe pode planejar um debate sôbre o tópico: "Resolver que os Estados Unidos devem adotar o sistema métrico como unidade legal de medidas."
10. Demonstre o fato de que tôdas as medidas são aproximadas.
11. Expresse as frações seguintes na fração de polegada mais próxima ($''$ = polegada):

$2\frac{3}{4}''$ $4\frac{1}{2}''$ $3\frac{7}{8}''$ $4{,}17''$ $8{,}76''$ $7{,}49''$

12. Prepare o material essencial para ensinar às crianças como encontrar a área de um retângulo de 6 × 15 polegadas. Mostre como você procederia para ensinar à classe o significado de área.
13. Que cálculos com medidas são usados nas atividades diárias?
14. De que maneira os métodos de distribuição afetam o uso de medidas em casa? nas lojas? na compra de alimentos?
15. Faça uma lista de padrões de referência que possam ajudar as crianças a encontrar distâncias, pêso, tempo, área, volume, medidas líquidas. Como você as desenvolveria?
16. Examine algum livro ou currículo para determinar até que ponto se dá atenção ao ensino das medidas.
17. Leve várias crianças a tentar medir o comprimento de uma linha dada. Avalie seu trabalho e tente determinar as razões para as diferenças na precisão da medida.
18. Estime a largura da sala de aula. Verifique depois o seu êrro de estimativa na medida.

SUGESTÕES PARA LEITURA

Buckingham, B. R. *Elementary Arithmetic: Its Meaning and Practice.* Boston: Ginn and Company, 1947. Chapter 13.

Clark, J. and Eads, L. *Guiding Arithmetic Learning.* Yonkers: World Book Co., 1954. Chapter 8.

McSwain, E. T. and Cooke, R. J. *Understanding and Teaching Arithmetic.* New York: Henry Holt and Co., 1958. Chapter 10.

Perry, John. *The Story of Standards.* New York: Funk and Wagnalls Co., 1955.

Spencer, P. L. and Bridegaard, M. *Building Mathematical Concepts in the Elementary School.* New York: Henry Holt and Co., Inc., 1952. Chapter 8.

Spitzer H. F. *The Teaching of Arithmetic.* Boston: Houghton Mifflin Co., 1954. Chapter 9.

Swain, Robert L. *Understanding Arithmetic.* New York: Rinehart and Co., 1957. pp. 192-216.

15

Avaliação em Aritmética

PARA DETERMINAR a eficiência do programa de Aritmética, os professôres podem empregar uma grande variedade de meios de avaliação, indo da medida de habilidade nos cálculos até a observação informal do comportamento na classe e em outros lugares, e entrevistas pessoais. Nos últimos anos, tem sido dada ênfase especial aos meios de avaliação dos resultados que não se enquadram fàcilmente nas medidas objetivas, tais como a compreensão do sistema de numeração e das operações numéricas, a habilidade para usar números, com eficiência, em situações sociais, o interêsse em Aritmética, e assim por diante. Êsses métodos de avaliação chamaram a atenção dos professôres para valôres importantes que algumas vêzes são descuidados.

Neste Capítulo discutiremos os seguintes tópicos:

a. Processo de avaliação
b. Seleção e construção de instrumentos para apreciação
c. Métodos de apreciação
d. Interpretação dos resultados dos métodos de apreciação
e. Avaliação do programa de ensino
f. Aperfeiçoamento do programa de Aritmética.

a. PROCESSO DE AVALIAÇÃO

Natureza da Avaliação

A avaliação é um processo contínuo de inquérito, relacionado com a apreciação, estudo e aperfeiçoamento de todos os aspectos do programa de Aritmética, incluindo o conhecimento adquirido pelo aluno. O ideal é que êste processo seja realizado em cooperação, por todos os interessados no desenvolvimento das crianças. Baseando-se nas informações sôbre seu crescimento e desenvolvimento, conseguidas com métodos de avaliação adequados, podem ser feitos julgamentos sôbre o nível de eficiência com que o programa de Aritmética satisfaz às necessidades das crianças e da comunidade como um todo, e também sôbre a qualidade do programa. Os pontos fortes e fracos do programa são revelados por uma análise do crescimento do aluno e das necessidades da comunidade. Podem ser considerados, subseqüentemente, planos para resolver os problemas que surgem. Devem ser planejados os passos a serem dados para assegurar um crescimento mais eficiente.

Passos Básicos no Processo de Avaliação

Os passos essenciais no processo de avaliação são discutidos nos parágrafos seguintes:

1) Todos os objetivos e valôres principais do programa de Aritmética devem ser determinados e aceitos. Êstes refletem os ideais e desejos da comunidade. Os objetivos foram discutidos no Capítulo 1.

2) Os objetivos, tanto imediatos como posteriores, devem ser baseados em uma análise sistemática das necessidades individuais e do grupo. Devem ser claros e formulados em têrmos de um comportamento desejável da parte dos indivíduos e grupos.

3) Devem, então, ser dados os passos por meio de processos apropriados, para se obter evidência de conquistas e crescimento, em relação aos objetivos e valôres estabelecidos, revelados pelas mudanças no comportamento dos alunos em situações sociais, no trabalho e na vida em sociedade.

4) Devem ser examinados o ambiente escolar e os processos de ensino, incluindo o currículo, usados para alcançar estas metas. Devem ser analisados os contatos e experiências das crianças, tanto na escola como fora dela.

5) A síntese e interpretação de tôdas estas descobertas, em relação ao crescimento do aluno e às práticas educacionais, é a etapa final na avaliação, levando à redefinição dos objetivos e valôres quando fôr necessário, e ao planejamento de melhores meios para atingir objetivos aceitos.

6) As escolas devem agir de modo a assegurar o interêsse e cooperação dos pais e de tôdas as instituições da comunidade, relacionadas com o crescimento e desenvolvimento das crianças, na avaliação total do programa de Aritmética e no planejamento de melhorá-lo. Escolhas devem ser baseadas em um julgamento bem informado dos grupos envolvidos na situação existente e na probabilidade de que as sugestões de aperfeiçoamento propostas proporcionarão as mudanças desejadas nas situações locais. A necessidade de um estudo contínuo dos problemas locais e de experimentação dos meios de resolvê-los é, evidentemente, uma emprêsa na qual os professôres devem desempenhar um papel importante.

b. SELEÇÃO E CONSTRUÇÃO DE INSTRUMENTOS DE APRECIAÇÃO

Há cinco etapas básicas no desenvolvimento dos processos para avaliação dos resultados do pro-

grama de Aritmética. Podem ser enumerados da seguinte maneira:

1) *Formular os objetivos claramente.* No Capítulo 1 há uma análise extensa dos resultados específicos do ensino de Aritmética. Os resultados que vão ser avaliados devem incluir não só a habilidade para efetuar operações numéricas e resolver problemas, mas, também, o conhecimento do significado dos números e do vocabulário básico à compreensão de como o sistema de numeração se relaciona com a computação, processos de pensamento crítico, habilidade para aplicar o que aprender em tôdas as áreas do currículo, hábitos de estudo e de trabalho e riqueza de recursos no uso dos números, lidando com os aspectos quantitativos das situações sociais, interêsses, apreciações e atitudes. O programa de Aritmética deve contribuir, também, para o desenvolvimento de relações sociais e de desejáveis traços de caráter e personalidade.

A análise geral dos objetivos deve, mais tarde, ser dividida, para indicar os objetivos específicos para cada estágio ou nível de desenvolvimento. Isto será de grande ajuda. Tal análise é valiosa, tanto para o professor como para qualquer um que se esforce em criar métodos para apreciação. Deve-se reconhecer que o estudo de Aritmética é um longo processo de desenvolvimento e que objetivos e metas específicos devem ser ajustados ao processo de crescimento. Os alunos não progridem no mesmo ritmo. Uma lista de objetivos de acôrdo com os níveis de desenvolvimento mais do que de acôrdo com as séries é necessária, considerando a atenção que se deve dar às diferenças individuais.

2) *Esclarecer os objetivos.* Os objetivos devem ser definidos, em têrmos do comportamento do aluno, que representa mudanças em direção aos objetivos desejados. Por exemplo, um teste da compreensão do sistema de numeração deve ser baseado em uma análise do que significa êste item, como será discutido no Capítulo 16. Na construção ou seleção de meios, para serem usados na apreciação, questões como estas devem ser consideradas: "O tipo de comportamento envolvido neste meio ou instrumento relaciona-se com um objetivo importante da Aritmética?" "Quais os meios de avaliação que podem ser usados para avaliar outros resultados importantes?"

3) *Colecionar situações de testes e itens.* Um teste deve consistir em situações que representam várias ocasiões nas quais os alunos, geralmente, usam as habilidades, informações e outros itens que vão ser avaliados. Por exemplo, para calcular a precisão com que o aluno resolve operações numéricas em situações reais, alguém deve anotar e registrar seu comportamento em situações típicas. Um teste padronizado não fornecerá esta informação. Os re-

Os alunos escrevem as respostas para os fatos fundamentais em um gravador.

sultados darão uma medida desta realização em relação a um teste padronizado. As situações que vão ser usadas no teste devem proporcionar uma evidência direta em relação ao comportamento que vai ser avaliado. Devem dar ao indivíduo a oportunidade de expressar o comportamento que se deseja avaliar. As situações apresentadas no teste devem ser exeqüíveis, do ponto de vista de tempo, esfôrço e facilidade. Devem exemplificar uma conduta definida sob várias condições a fim de que possam ser tiradas conclusões seguras em relação à realização específica do aluno que fêz o teste.

4) *Registrar o comportamento.* É necessário um tipo qualquer de registro do comportamento do aluno a fim de que sua conduta possa ser avaliada. Meios que envolvem o uso de papel e lápis fornecem uma espécie de registro, tais como os exames comuns, os tipos objetivos de testes, ou trabalho diário escrito. Relatórios das observações do comportamento do aluno, registro de reações em situações de testes ou em atividades livres, coisas produzidas pelos alunos, fotografias, gravações, questionários e outros meios semelhantes podem ser usados para o registro de comportamento. A forma de registro depende da natureza da conduta que vai ser analisada.

O registro deve descrever, com precisão, tôdas as reações significativas que possam, mais tarde, ter valor na interpretação dos resultados, como a evidência do uso de métodos ineficientes e vagos para fazer cálculos, falta de interêsse para com a tarefa em mão, e manuseio defeituoso dos instrumentos de medir. Quanto maior o número de registros significativos, mais objetiva, digna de confiança e mais válida será a avaliação. Um registro cumulativo do comportamento anterior e outras informações sôbre o indivíduo aumentarão a facilidade do diagnóstico. Se os registros forem práticos e úteis, não exigirão muito tempo para a interpretação.

5) *Avaliar o comportamento e interpretar registros feitos.* A avaliação do comportamento de um aluno deve ser feita em têrmos dos importantes objetivos do ensino. Deve surgir a questão: "Qual é o nível do indivíduo em relação a um objetivo particular?" O problema principal aqui será o estabelecimento de padrões para a avaliação, pela observação, da realização de tipos diferentes de testes e várias espécies de registros. Em alguns casos, a avaliação é relativamente simples, como avaliar a capacidade de uma criança de terceira série para somar números com três algarismos. Isto pode ser feito calculando a porcentagem de um grupo de exemplos representativos que foram respondidos de maneira correta. Por outro lado, a avaliação de como um aluno compreende o sistema de numeração ou sua habilidade para usar as operações numéricas em situações sociais é muito mais difícil, desde que meios satisfatório e objetivos de descrever a realização do aluno, relativamente a êstes pontos, estão faltando no momento. Devem ser

avaliados por meios menos formais.

O problema do estabelecimento de normas de avaliação de conhecimento apresenta muitas dificuldades. O método em uso, geralmente, manda tirar a média dos resultados conseguidos por crianças de uma determinada idade cronológica ou mental ou de uma determinada série e considerá-la como realização normal. Devido à grande escala de diferenças de capacidade e interêsse dos indivíduos em um grupo, êste método de estabelecimento de uma norma é de valor duvidoso. Ao estabelecer uma meta para uma determinada criança, a consideração primária deve ser a natureza do objetivo e a evidência de que o aluno está fazendo progressos em direção à meta. O propósito do professor deve ser guiar o aluno *de onde êle está* para *onde êle deve estar*, baseando-se nas realizações de crianças parecidas quanto à potencialidade, isto é, seu nível de possibilidade. Em muitas escolas, a norma usada para o trabalho clínico e corretivo, nos casos de incapacidade, é a observação de resultados passados, pelos quais é medido o progresso subseqüente. Em geral, reconhece-se que, se o comportamento está em harmonia com os objetivos aceitos, o resultado é satisfatório.

A avaliação é facilitada pelo uso de dados objetivos, a fim de eliminar tanto quanto possível o julgamento e as inclinações pessoais. Quando possível, deve ser usada uma forma de teste que possa ser administrada e avaliada com facilidade. Nos últimos anos, tem havido um progresso considerável no desenvolvimento dos meios para avaliar resultados que, antigamente, eram considerados difíceis de ser medidos.

Os registros da escola contêm amplas informações sôbre a inteligência, histórico escolar, saúde, interêsse e ambiente familiar das crianças, de grande valor na interpretação dos dados reunidos sôbre o desenvolvimento e comportamento em Aritmética pelos métodos de avaliação mencionados acima.

c. MÉTODOS DE APRECIAÇÃO

Técnicas Para Avaliar os Resultados do Programa de Aritmética

Estão sendo usados muitos tipos diferentes de técnicas para a apreciação do comportamento e características do aluno relacionadas com a Aritmética. Alguns dêstes meios são de origem recente, enquanto outros têm sido usados há muitos anos. Os métodos mais valiosos são os seguintes:

1) Testes padronizados e testes objetivos
   a) Testes padronizados
      (1) Testes de conhecimento
      (2) Testes de prontidão
      (3) Testes para diagnóstico em aspectos específicos
   b) Testes objetivos, não-padronizados, exigindo respostas curtas
      (1) Simples recordação ou respostas livres
      (2) Respostas alternadas
      (3) Múltipla escolha
      (4) Completação
      (5) Combinação ou ordenação
2) Avaliação por meios menos formais
   a) Análise do comportamento em alguma situação relacionada com um problema
   b) Uso de registros de comportamento
      (1) Condições controladas, envolvendo questionários, escala de avaliação, tempo de estudo, registros.
      (2) Condições não-controladas, envolvendo registros diários, relatórios feitos pelo professor e por outros, observação do comportamento na classe e em outros lugares, registros de agências sociais.
   c) Inventários e questionários sôbre atitudes, interêsses, atividades, métodos de estudo.
   d) Entrevistas, conferências, relatórios pessoais.
   e) Análise das qualidades e méritos de algum produto, como um gráfico ou um relatório oral.
   f) Métodos sociométricos para estudar as relações sociais.

Os mais práticos e úteis dêstes meios serão discutidos em alguns detalhes nas seções seguintes.[1]

Testes Padronizados

O propósito dos testes padronizados é proporcionar uma base para determinar a eficiência do programa de Aritmética como um todo, medida pelo progresso feito por indivíduos e grupos em direção a objetivos determinados. Os dados fornecidos por um seguro teste de pesquisa dá, também, ao professor informação sôbre qual pesquisa pode planejar o programa de ensino.

Atualmente há um considerável número de testes de Aritmética padronizados úteis para êsse levantamento. Por seleção cuidadosa, é possível conseguir medidas razoàvelmente satisfatórias de resultados, como: (a) habilidade e rapidez, (b) habilidade para resolver problemas, (c) conhecimento do vocabulário aritmético e têrmos técnicos, (d) conhecimentos das aplicações sociais da Aritmética, (e) habilidade para ler mapas, gráficos e tabelas, (f) desenvolvimento do pensamento quantitativo, (g) compreensão do sistema de nu-

[1] SPITZER (H. F.), "Techniques for Evaluating Outcomes in Arithmetic", *Elementary School Journal*, 49:41.

meração das operações numéricas.

Os testes em Aritmética mais usados nos Estados Unidos são os seguintes:

1) *Analytical Scales of Attainment in Arithmetic* — contém testes dos tipos (a), (b), (c) e (d) relacionados acima (*Educational Test Bureau*).

2) *Coordinated Scales of Attainment* — itens (a) e (b) (*Educational Test Bureau*).

3) *California Achievement Test* — contém testes dos tipos (a), (b) e (c) (*California Test Bureau*).

4) *Iowa Every Pupil Tests of Basic Skills* — contém testes sôbre os itens (b), (c), (e), (f) e (g) (*Research Associates, and Houghton Mifflin Co.*)

5) *Metropolitan Achievement Test* — itens (a) e (b) (*Teachers College, Columbia University*).

6) *New Stanford Achievement Test* — itens (a) e (b) (*World Book Co.*).

7) *SRA Arithmetic Test* — itens (a), (b) e (c) (*Science Research Associates*).

8) *Sueltz Functional Evaluation in Mathematics* — itens (d) e (f) (*Educational Test Bureau*).

O *Iowa, SRA* e *Stanford Tests* incluem testes de leitura de gráficos e tabelas em uma das seções.

As principais características de um teste padronizado são as seguintes:

1) O conteúdo do teste é selecionado e organizado, sistemàticamente, de acôrdo com algumas especificações aceitas.

2) As condições em que o teste é aplicado, as direções que devem ser seguidas ao aplicá-lo e o tempo previsto, tudo é padronizado para assegurar uniformidade em sua administração.

3) O método especificado para marcar o resultado é definido e objetivo, a fim de que o julgamento pessoal de quem aplica o teste seja eliminado tanto quanto possível.

4) Padrões ou normas baseados nos resultados alcançados por um grande número de alunos tornam possível avaliar e interpretar os resultados de um aluno em particular.

Deve-se ter em mente que as normas são baseadas em resultados médios para alunos médios, ensinados por professôres comuns, usando material habitual; elas são, portanto, as melhores medidas moderadas dessas situações. Êsses padrões, geralmente, são ultrapassados quando há um alto nível de ensino.

A aplicação de meios informais de avaliação exige do observador a escolha de técnicas adequadas entre as que são possíveis de encontrar. Quando é usada a avaliação informal, não há processos ou normas padronizados e a interpretação dos dados conseguidos deve ser baseada na estimativa de valôres e julgamento pessoal subjetivo.

Critérios a Considerar na Seleção de Métodos de Apreciação

Devem ser considerados os seguintes critérios na seleção dos meios de medir e avaliar:

1) *O valor da característica ou aspecto de crescimento testado.* O teste exige a medida de um aspecto ou característica do crescimento do aluno no qual você está interessado? Os valôres educacionais testados são de indubitável valor e significação?

2) *Validade.* O teste mede realmente aquilo que é seu objetivo medir?

3) *Confiança.* O teste mede com precisão? As crianças conseguirão o mesmo resultado se o teste fôr aplicado novamente?

4) *Facilidade de administração e registro dos resultados.* As direções para administrar o teste são claras e fáceis de seguir? O teste é, razoàvelmente, fácil de valorizar? A chave de correção é clara?

5) *Provisão e utilidade das normas padronizadas.* O teste apresenta resultados bem definidos e adequadamente padronizados? Os resultados são fàcilmente compreensíveis?

Testes Objetivos Não-Padronizados e de Respostas Curtas

Os itens dados abaixo, sob cada um dos cinco tipos de questões de testes objetivos mais usados e dos que exigem respostas curtas, ilustram os meios nos quais os itens de cada espécie podem ser usados na preparação de testes com os vários objetivos e habilidades indicados:

1) Simples recordação ou respostas livres
   a) Conhecimento do vocabulário
      (1) Qual é a resposta do exemplo 3×47? ...
      (2) Qual é a unidade de medida que é igual a 100 centímetros? ...
   b) Habilidade em operação
      (1) Quanto é $2\frac{1}{2} - 1\frac{1}{4}$? ...
      (2) Qual é a soma de 47, 59 e 68? ...
   c) Compreensão das operações numéricas
      (1) Qual é a operação numérica que é inversa à adição? ...
      (2) Escreva a fração decimal que tem o mesmo valor que $\frac{3}{4}$. ...
      (3) A soma de três números é 45. Qual é sua média? ...

2) Respostas alternadas
   a) Reconhecimento de generalizações
      (1) 2×340 é igual a 340×2? Sim ... Não ...
      (2) $8 - 8$ é igual a zero? Sim ... Não ...
   b) Compreensão do valor de lugar

(1) Em qual número o 3 aparece na casa das dezenas, 370 ou 139? ...

(2) Qual é o número maior, 0,8 ou 0,29? ...

O professor descobre a capacidade do aluno, pela observação diária, para resolver problemas.

c) Estimativa em cálculo mental

(1) O produto de 4,96 e 2,8 é maior que 10. Verdadeiro ... Falso ...

(2) A média de 75, 56 e 94 é maior que 60. Verdadeiro ... Falso ...

3) Escolha múltipla

a) Conhecimento do vocabulário

(1) Como chamamos o dinheiro que nos pagam pelo nosso dinheiro emprestado?

(a) prêmio
(b) juros
(c) desconto
(d) seguro

b) Habilidade para identificar o processo usado para resolver um problema

Assinalar o método que pode ser usado para resolver êste problema:

"Qual é a área de um jardim que tem 30 metros de comprimento por 15 de largura?"

(a) Somar 30 e 15
(b) Subtrair 15 de 30
(c) Multiplicar 30 por 15
(d) Dividir 30 por 15

c) Habilidade para estimar as respostas, para verificar soluções de exemplos e problemas

(1) O quociente de .... 1278 | 25 está próximo de: (a) 30, (b) 40, (c) 50, (d) 60?

(2) Qual das respostas dadas abaixo está mais próxima da resposta correta do problema? "Roberto comprou 4 metros de fita a .. Cr$ 79 o metro e 8 botões por Cr$ 15. Quanto êle pagou pela fita e pelos botões?"

(a) Cr$ 250
(b) Cr$ 310
(c) Cr$ 380
(d) Cr$ 450

d) Compreensão do sistema de numeração

(1) Qual dos números dados abaixo é o maior número inteiro que se pode escrever com os quatro algarismos 5, 8, 6, 4?

(a) 8 654 (b) 6 584
(c) 8 465 (d) 8 645

(2) Qual dos seguintes números tem o maior valor?

(a) 4,2 (b) 4,1468
(c) 4,19 (d) 4,204

(3) Somando 764 e 129, transporta-se

(a) 1 dezena
(b) 2 dezenas
(c) 1 centena
(d) 3 unidades

4) Completação ou lacunas

a) Percepção das relações numéricas

(1) $4 + 2 = 9 - ?$

(2) $5 \times ? = 16 + 24$

(3) $36 \div 2 = 9 \times ?$

b) Compreensão

(1) Quando dividimos frações próprias por número inteiro, o quociente é sempre menor que . . .

(2) Se a vírgula em 7,2 é tirada, o número fica multiplicado por . . .

c) Reconhecimento de generalizações

(1) Quando dividimos um número por êle próprio, a resposta é . . .

(2) Quando subtraímos 1 de um número inteiro, a resposta é o número . . .

d) Vocabulário

(1) O nome da resposta na multiplicação é . . .

(2) O mapa de um estado é, sempre, desenhado em . . .

5) Combinação ou ordenação

a) Vocabulário de medidas
Desenhe uma linha ligando cada palavra abaixo da letra A com sua idéia correspondente em B:

A	B
Valor	Metro quadrado
Área	Cruzeiro
Tempo	Quilo
Pêso	Litro
Volume	Hora

b) Compreensão do sistema de numeração

A	B
Três quartos	0,34
Trinta e quatro	340
Trezentos e quarenta	$\frac{3}{4}$
Trinta e quatro centésimos	34

Atitudes em Relação à Aritmética

Um método para estudar as atitudes das crianças em relação à Aritmética é dado abaixo. Esta escala abreviada é uma adaptação da escala criada por W. H. Dutton.[2] Os alunos são levados a indicar o item da escala que descreve sua atitude com mais aproximação.

Escala de Atitudes com Relação à Aritmética

10,5 A Aritmética interessa-me e eu gosto mais dela do que de qualquer outro assunto.

[2] Adaptado de uma escala de atitude organizada por W. H. Dutton e reproduzida em "Attitudes of Junior High School Pupils Toward Arithmetic", *School Review*, 64:18-22.

9,0 Eu gostaria de ter mais tempo na escola para resolver problemas de Aritmética.

8,1 A Aritmética é muito interessante.

7,0 Algumas vêzes eu gosto do desafio apresentado por um problema de Aritmética.

5,9 A Aritmética é tão importante como qualquer outra matéria.

4,6 Eu não acho a Aritmética interessante, mas sempre quero fazer bom trabalho nesta matéria.

3,7 Eu não sinto segurança em Aritmética.

3,0 Não vejo muito valor na Aritmética.

2,5 Sempre tenho mêdo da Aritmética.

1,5 Não gosto de Aritmética.

É interessante saber que, em pesquisa recente,[3] chegou-se à conclusão que as crianças, nas 4ª e 5ª séries, consideram a Aritmética uma das áreas de estudo mais agradável. Os meninos classificam a Aritmética em primeiro lugar, e as meninas em segundo, ligeiramente abaixo da Leitura. Chase pediu aos alunos para classificar a Aritmética entre tôdas as matérias dadas em uma lista. Êste método pode ser usado por qualquer professor. Quando a Aritmética tem uma classificação baixa no interêsse das crianças, o professor deve estudar as possíveis causas e tomar as medidas necessárias para melhorar a situação.

[3] CHASE (W. I.), "Subject Preferences of Fifth Grade Children", *Elementary School Journal*, 50:208-211.

Avaliação por Meios Menos Formais

A falta de espaço torna impossível descrever em detalhes os meios menos formais enumerados na pág. 448, os quais podem ser usados na avaliação dos resultados relacionados com o ensino de Aritmética. A análise ilustrativa, págs. 460-461, relaciona e define seis resultados importantes do ensino de Aritmética e diversas técnicas de avaliação, incluindo testes para verificar se estão sendo alcançados pelos alunos. Outros resultados podem ser avaliados por métodos semelhantes.

Fontes de Informações Sôbre Métodos de Apreciação

Aquêles que estão muito interessados nos métodos de avaliação discutidos acima devem consultar estas referências gerais, para maiores detalhes:

Burton (W. H.) e Brueckner (L. J.) — *Supervision, A Social Process*. Nova Iorque: Appleton - Century - Crofts, Inc., 1955, Capítulo 9.

Greene (H. A.) e outros — *Measurement and Evaluation in the Elementary*

School. Nova Iorque: Longmans, Green and Co., Inc., 1953.

Lindquist (E. F.) — *Educational Measurement.* Washington: American Council on Education, 1951.

Torgerson (T.) e Adams (G. S.) — *Measurement and Education in Elementary School Teaching.* Nova Iorque: The Dryden Press, Inc., 1954.

As referências seguintes tratam, especìficamente, de métodos de avaliação em Aritmética:

"Arithmetic in General Education," *Sixteenth Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics.* Nova Iorque: Bureau of Publications, Teachers College, Columbia University, 1941, Capítulo 10.

"Mathematics in General Education", *Report of the Committee on the Functions of Mathematics in General for the Commission on the Secondary School Curriculum.* Nova Iorque: Appleton-Century-Crofts, Inc., 1940.

Spitzer (H. F.) — *The Teaching of Arithmetic.* Boston: Houghton Mifflin Co., 1954, Capítulo 12.

"The Measurement of Understanding", *Forty-fifth Yearbook of the National Society for the Study of Education.* Chicago: University of Chicago Press, 1946, Capítulos 7 e 8.

"The Teaching of Arithmetic", *Fiftieth Yearbook of the National Society for the Study of Education.* Chicago: University of Chicago Press, 1951, Capítulo 10.

RESULTADOS O aluno está:	TÉCNICAS DE AVALIAÇÃO
1. Desenvolvendo conceitos numéricos do sistema de numeração a) Compreende o significado e a função do valor de lugar b) Usa símbolos para expressar números de tôdas as espécies c) Compreende os princípios que dirigem as operações	Testes objetivos de compreensão Observação do trabalho diário Entrevistas com o aluno Registros sôbre suas contribuições Demonstração pelo aluno
2. Adquirindo habilidades nas operações fundamentais e na capacidade para aplicá-las em situações sociais a) Conhece e domina os fatos fundamentais b) Compreende o significado das quatro operações e de suas relações c) É hábil na execução das operações d) Pode resolver problemas reais ou descritos	Testes padronizados Testes informais, baseados em livros ou preparados pelo professor Observação do comportamento Análise do trabalho escrito diário Entrevistas para verificar a compreensão Registros
3. Desenvolvendo competência na utilização de sistemas e instrumentos para medir e em métodos quantitativos para resolver problemas da vida diária a) Pode ler e usar o termômetro b) Tem habilidade no uso de medidas para descrever e definir aspectos quantitativos de objetos, acontecimentos e idéias c) Constrói e interpreta tabelas e gráficos	Testes com problemas Testes objetivos Registro e classificação do comportamento Classificação dos resultados Entrevistas Registros das respostas em outras áreas do currículo
4. Desenvolvendo interêsse e atitudes desejáveis com a Aritmética a) Faz contribuições voluntárias com significação para as discussões da classe b) Lê muito sôbre a Matemática e sua aplicação c) É engenhoso e inventivo no lidar com aspectos quantitativos dos problemas e situações	Inventário dos interêsses Classificação do interêsse em atividades e em relação ao conteúdo do currículo Observação do comportamento Esquema de classificação do próprio progresso Entrevistas Questionário sôbre as atividades
5. Desenvolvendo métodos eficientes para estudar e aprender a Aritmética a) Estuda com afinco os fatos e operações b) Usa material audiovisual para desenvolver a percepção c) Pratica, sistemàticamente, para conseguir o domínio da matéria	Testes de eficiência dos métodos do estudo Observação do comportamento Classificação do comportamento Entrevistas Registros das atividades Questionários Classificação dos métodos Análise de registros de métodos de estudo

O professor é auxiliado, na avaliação do crescimento emocional da criança em Aritmética, pela conservação de registros do comportamento.

RESULTADOS	TÉCNICAS DE AVALIAÇÃO
6. Desenvolvendo um comportamento desejável como resultado das atividades de grupo	Observação do comportamento Testes com problemas Escala de avaliação Entrevistas Testes do tipo "Que faria" Gravações
a) Revela qualidades para líder	
b) Participa, efetivamente, do trabalho em grupo e das comissões organizadas	
c) É capaz de resolver problemas reais sistemát'ca e eficientemente	

d. INTERPRETAÇÃO DOS RESULTADOS DOS MÉTODOS DE APRECIAÇÃO

A interpretação de qualquer dado na avaliação deve ser feita com precaução, mesmo quando meios padronizados e normas adequadas são usados. Quando êstes estão faltando, como no caso dos métodos informais descritos anteriormente, deve haver um cuidado especial na interpretação dos resultados. Deve ser dada consideração às características gerais, à capacidade individual e às suas possíveis realizações. Os professôres devem interpretar os resultados dos testes padronizados em têrmos do ambiente cultural e das experiências das crianças. Em geral, crianças de áreas pouco privilegiadas não alcançam o mesmo nível que as crianças que vivem em áreas mais favorecidas. Entretanto, o conhecimento dos resultados dos testes ajuda muito o professor, observando as crianças na sala de aula, na aplicação de tipos menos formais de avaliação.

A análise dada adiante sugere meios para analisar e interpretar os resultados de testes de levantamento de informações em Aritmética, nos vários níveis do sistema escolar, começando com o pessoal da administração e terminando com o professor.

1. Superintendência e Secretaria
   a) Análise dos resultados, série por série, em comparação com a realização esperada
   b) Comparação com os resultados dos anos anteriores
   c) Consideração da distribuição consolidada dos resultados da classe
   d) Exame dos resultados de várias escolas
   e) Consideração das possíveis causas destas variações nos resultados das diferentes escolas
   f) Planejamento do que deve ser feito, em seguida, para melhorar o programa.
2. Corpo Administrativo de uma escola em cooperação com Supervisores
   a) Comparação dos resultados da escola como um todo dentro dos resultados de tôdas as escolas de uma cidade e com resultados padronizados nas várias séries
   b) Tendências gerais de progresso de série em série, comparadas com os resultados dos anos anteriores
   c) O desvio de cada série e classe dos níveis de realização esperados, em relação à habilidade mental das

crianças, seu ambiente social e sua saúde

d) Consistência dos níveis de resultados nas várias áreas testadas

e) Classificação dos resultados do teste, para cada área, dentro das classes individualmente

f) Resultados dos testes que abrangem o que esperamos obter na série consecutiva

g) Identificação dos pontos fortes e fracos do programa da escola, baseada nos resultados do teste

h) Consideração dos possíveis passos que devem ser dados em seguida

3. Cada professor em cooperação com o diretor ou o supervisor

a) Observação dos resultados da classe como um todo, discutindo a informação com os alunos

b) Análise do progresso feito pelos alunos, em particular, baseada na comparação com os testes anteriores, de preferência resumidos em forma de gráfico

c) Comparação crítica dos níveis atingidos em relação à habilidade mental de cada criança

d) Consideração dos fatôres que possam esclarecer as variações na realização de cada criança e os desvios do nível esperado

e) Consideração das discrepâncias entre os resultados do teste de um aluno e a estimativa do professor

f) Análise dos itens do teste em investigações que tenham possível valor de um diagnóstico

g) Planejamento de meios para usar os dados com mais eficiência em um programa de relações públicas.

Os passos que devem ser dados para avaliar informações conseguidas com meios menos formais são semelhantes aos que são usados para lidar com os resultados dos testes. A avaliação, necessàriamente, será menos precisa e definida que é possível com testes padronizados, devido à falta, na maior parte dos casos, de normas de comparação.

AVALIAÇÃO DO PROGRAMA DE ENSINO

Há três aspectos do programa de ensino que devem ser avaliados como parte de um programa compreensivo de avaliação: (1) o currículo; (2) os métodos usados no ensino, e (3) o material.

O Currículo

A avaliação do currículo deve ser feita à luz de critérios como os seguintes, que devem surgir de discussões e estudos em grupo:

1) As crianças devem ter experiências no campo de Aritmética, adaptadas à sua prontidão, necessidade, habilidade e interêsses.

2) As experiências numéricas devem ser baseadas nas necessidades que aparecem na vida escolar e no trabalho nas várias áreas do currículo.

3) Deve ser dada consideração às experiências numéricas baseadas nas atividades e necessidades surgidas na vida da comunidade.

4) Devem ser providenciadas atividades para ampliar as experiências e os interêsses em relação à Aritmética, especialmente para as crianças bem dotadas.

5) As crianças devem participar em unidades de trabalho e experiências em comum que alarguem as funções sociais da escola como uma agência de nossa sociedade democrática.

O currículo, seja o encontrado em uma sala de aula ou o discutido nos guias de ensino, pode ser bem organizado; os objetivos podem ser demasiadamente limitados e não incluir a grande variedade de resultados desejáveis, como discutimos no Capítulo 1; a graduação e a seqüência de assuntos podem ser defeituosas; o conteúdo pode ser muito acadêmico, formal e sem relação com as necessidades e interêsses das crianças; pode não ser adaptado ao desenvolvimento e níveis de crescimento; os padrões estabelecidos podem não ser flexíveis e o conteúdo não ser adaptado às diferenças individuais das crianças. É preciso dar uma consideração especial ao processo pelo qual o currículo está sendo desenvolvido. O programa pode estar limitado a um livro, pelas prescrições de um curso e pelos regulamentos estabelecidos pelas autoridades da escola. Aparentemente pouco pode ser feito para ajudar os professôres, como base de seleção do conteúdo do currículo, no estudo das necessidades das crianças e da comunidade.

Avaliação dos Processos de Ensino

A avaliação dos processos de ensino usados nas salas de aula deve ser uma emprêsa em cooperação, na qual os professôres tomam parte ativa. Critérios como os seguintes devem ser estabelecidos, cooperativamente, pelo grupo e, depois, aplicados na avaliação:

1) Devem ser usados processos que tornem os números e as operações numéricas significativos para as crianças.

2) Os processos devem salientar a compreensão dos números e a eficiência do pensamento quantitativo.

3) O trabalho, em Aritmética, deve ser associado às atividades diárias da escola e não apenas a um determinado período na classe.

4) O ensino deve proporcionar tempo adequado, na escola, para a prática sistemática, necessária para desenvolver a competência e habilidade no uso de números e processos quantitativos.

5) O diagnóstico e o tratamento das dificuldades de aprendizagem são essenciais.

6) Devem ser tomadas providências para adaptar o ensino às diferenças individuais, de acôrdo com as habilidades e o nível de aprendizagem.

7) A escola deve proporcionar meios para que as crianças sejam mentalmente sadias e ajustadas socialmente, através de trabalho bem sucedido e atividades interessantes.

8) Deve haver um programa contínuo de avaliação de aprendizagem que informe a criança, ao professor e aos pais sôbre o progresso individual em Aritmética.

Pode-se demonstrar, por uma cuidadosa avaliação, que muitos dêstes critérios estão sendo aplicados com sucesso. Por outro lado, pode-se descobrir que o ensino é demasiado formal e que o trabalho é muito limitado a um intenso programa de exercícios, dando-se pouca importância a outros aspectos importantes. A prática pode estar sendo desenvolvida em operações que não tenham significação para as crianças. Então, os alunos não compreendem o que se exige que aprendam. Com freqüência, acontece que pouco é feito para apresentar um nôvo assunto, de modo que as crianças possam ver seu valor e utilidade social. Os processos de ensino podem não estar de acôrdo com os resultados das pesquisas ou aplicados com inabilidade. Pode estar sendo dada ênfase à necessidade de agrupar as crianças de acôrdo com seus níveis.

A discussão dos meios para diagnosticar as dificuldades na aprendizagem da Aritmética sôbre os fatôres que contribuem para estas dificuldades e sôbre as maneiras de tratá-las são o assunto do próximo capítulo.

Avaliação do Material de Ensino

Os critérios abaixo servem para avaliar a adequacidade dos materiais:

1) Material manipulativo e exploratório, objetos e recursos visuais devem ser usados para tornar os números e as operações numéricas significativos para as crianças.

2) O estudo de instrumentos para medir e sua utilidade na vida diária devem ser a base de muitas experiências de aprendizagem.

3) Contatos com os recursos da comunidade vitalizam o ensino de Aritmética.

4) Devem ser usadas leituras suplementares, para explorar e ampliar o vocabulário e o fundo cultural em Aritmética.

5) Material especial destinado particularmente a despertar e manter o interêsse em Aritmética deve ser acessível aos professôres e às crianças.

6) Material destinado à prática cientìficamente construído e meios de avaliação devem ser usados para desenvolver e manter conhecimentos e habilidades.

Pode-se achar que o material de ensino e o equipamento são inteiramente adequados para satisfazer às necessidades de um laboratório de aprendizagem, como foi descrito no Capítulo 4. Por outro lado, devemos considerar que há limitações na qualidade e variedade do material considerado eficaz. O material de ensino pode ser difícil, ou construído e organizado de maneira pouco recomendada. A matéria pode não ser apresentada de maneira atraente ou clara; os assuntos podem carecer de interêsse; os suprimentos podem não incluir o material necessário nem testes para diagnóstico. Muitas vêzes o material suplementar e recursos visuais que existem é limitado; faz-se ainda pouco uso do comércio, museus, bibliotecas e centros cívicos semelhantes, que podem ampliar e enriquecer a aprendizagem. Esta situação surge, em parte, porque estas agências podem ser indiferentes e até mesmo não permitirem que as escolas as use. Esta situação, em parte, existe porque a escola não as integrou nas experiências de aprendizagem.

Meios Sistemáticos Para Avaliar o Programa de Aritmética

Nos últimos anos, o crescente interêsse na avaliação dos programas de Aritmética levou ao desenvolvimento de métodos sistemáticos de avaliação e à sua aplicação em tôdas as partes do país. Os mais usados são: classificações subjetivas do programa de Aritmética, questionários, estudo de consensos e discussões em grupo. As referências seguintes devem ser consultadas para sugestão de métodos, pelos professôres, supervisores e outros que desejam estudar e melhorar seus programas de Aritmética:

Brueckner (L.J.), *Improving the Arithmetic Program.* Nova Iorque: Appleton-Century-Crofts, Inc., 1957.

Elementary Evaluative Criteria. Boston: Boston University, 1953.

Evaluating the Elementary School. Atlanta, Georgia: Southern Association of Colleges and Secondary Schools, 1951.

Ragan (W. R.), *The Modern Curriculum.* Nova Iorque: The Dryden Press, Inc., 1953.

f. APERFEIÇOAMENTO DO PROGRAMA DE ARITMÉTICA

Seleção dos Itens Que Devem Ser Melhorados

O grupo, tendo avaliado o programa existente, deve, então, fazer uma lista dos problemas, dificuldades, defeitos e necessidades revelados pela apreciação. Devem ser relacionadas, também, na lista, novas variações que possam ser consideradas para introdução local. Através de discussões, o grupo deve escolher uma lista de suas necessidades, problemas e variações novas que possam exigir alteração com mais urgência. Êstes itens podem tornar-se os objetivos de um programa que está sendo melhorado.

Planejamento de Meios Para Melhorar o Programa

Uma vez que os problemas foram escolhidos e definidos, a próxima tarefa será o planejamento e organização de atividades para diagnóstico e solução. O programa dêste trabalho deve ser flexível e adaptado às necessidades individuais e de grupos com problemas e necessidades comuns. O programa pode conter qualquer número de técnicas subsidiárias,[4] incluindo, entre outras:

1) Conferências individuais e em pequenos grupos para planejar todo e qualquer tipo de projeto

2) Séries de grupos de estudo, encontros entre professôres, podendo ser geral ou em pequenos grupos

3) Um grupo de estudo, valendo-se de facilidades pessoais, em horas marcadas

4) Ampliação dos cursos, cursos de verão, permissão para ausências, para estudo ou viagem

5) Boletins cooperativos, geralmente com referências e guias de estudo

6) Trabalho experimental, individual ou em grupo, para o desenvolvimento de material nôvo, e novos métodos de avaliação; experiências com o material

7) Comissões e grupos de estudo para examinar os interêsses dos alunos, suas atitudes, problemas e necessidades

8) Comissões para planejar o desenvolvimento do currículo ou dos cursos

9) Visitas dos professôres às escolas locais ou em outras cidades, de acôrdo com planos feitos pelos professôres e pela diretoria

10) Visitas e conferências por supervisores com determinada finalidade

11) Determinados programas, em comum, de observação e estudo dirigido

12) Comissões e grupos de estudo para examinar novos livros e escolher livros e material

[4] BURTON (W. H.) e BRUECKNER (L. J.), *Supervision, A Social Process.* Nova Iorque: Appleton-Century-Crofts, Inc., 1955, pág. 133.

13) Troca de professôres entre escolas e entre sistemas.

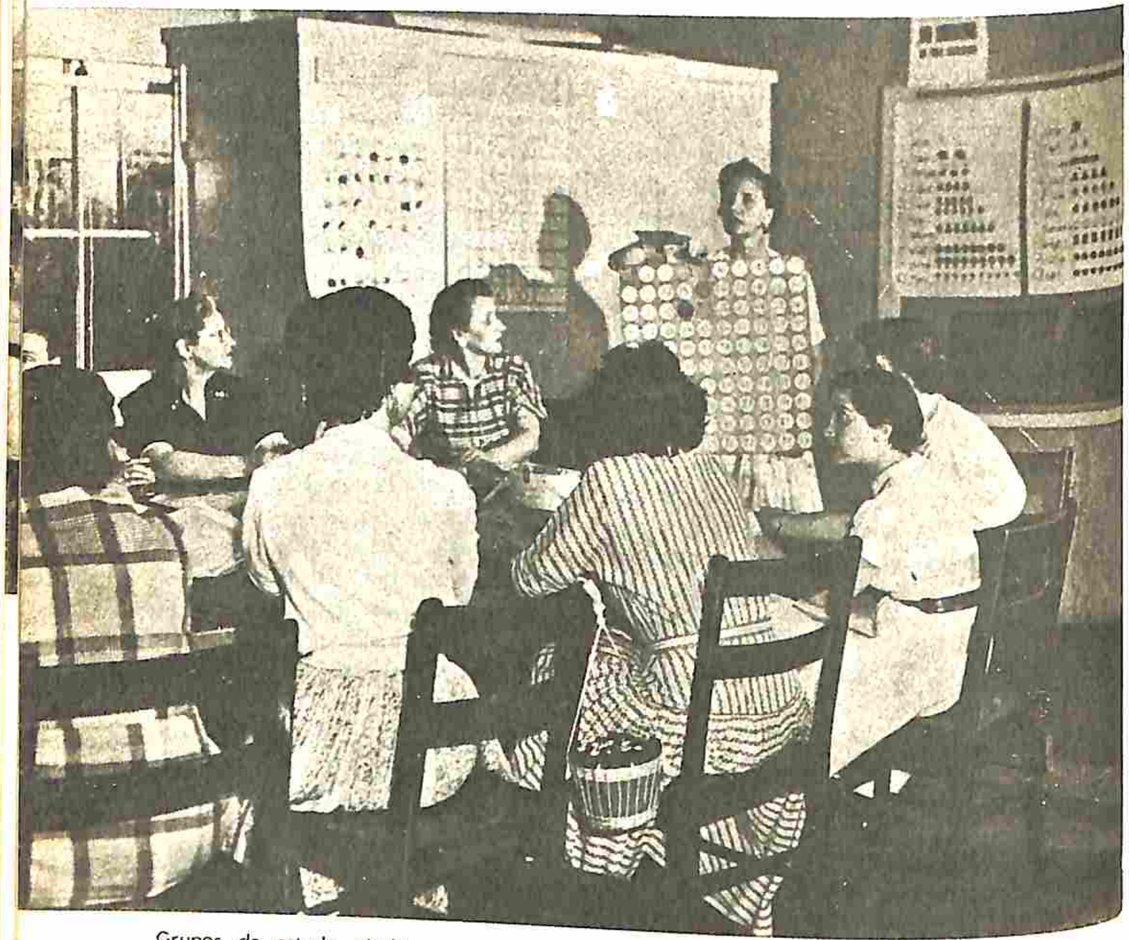
Exemplo de Um Programa em Desenvolvimento

O programa de pesquisas sôbre o currículo em Aritmética experimental, na cidade de Nova Iorque, descrito por Eads[5] exemplifica métodos de cooperação para melhorar o ensino de Aritmética. O programa começou devido à insatisfação geral de crianças bem dotadas com seu progresso em Aritmética em tôdas as séries. O principal problema era a falta de compreensão da matéria e os vagos conceitos numéricos. No primeiro ano de experiência, o trabalho começou no curso primário, para desenvolver métodos e materiais para ensinar, de maneira significativa, conceitos e processos numéricos. Os resultados dêste trabalho experimental foram, então, incluídos nos programas de primeira série em uma escola local. Cada ano sucessivo, a série seguinte foi incluída no programa. Professôres especialmente treinados assistiam os professôres regulares na aplicação do método. Foram organizadas exposições com experiências desenvolvidas e demonstradas, materiais, métodos, conteúdo, exercícios, métodos para avaliação e material semelhante. Foram também preparados e distribuídos aos professôres boletins e guias. Esta experiência é considerada como a essência de um programa contínuo para melhorar o ensino de Aritmética. O modêlo discutido acima sugere métodos que podem ser usados em qualquer escola.

QUESTÕES, PROBLEMAS E TÓPICOS PARA DISCUSSÃO

1. Por que a avaliação do programa de Aritmética deve ser considerada como uma tarefa cooperativa?
2. Esboce os passos que devem ser dados para a avaliação do programa.
3. Escolha qualquer resultado que se predeterminou em Aritmética. Desenvolva um plano e métodos de avaliação.
4. Examine os registros da escola local para determinar os dados que possam ajudar na interpretação dos resultados do teste em Aritmética.
5. Quais são os valôres e limitações dos testes padronizados? Quais os tipos de testes padronizados usados nas escolas locais?
6. Por que é necessário usar meios menos formais de avaliação em alguns casos?
7. Escolha qualquer aspecto educacional específico em

[5] EADS (Laura K.), "Learning Principles That Chracterize Developmental Mathematics", *The Arithmetic Teacher,* 4:179-181.



Grupos de estudo ajudam os professôres a discutir e experimentar soluções para melhorar o programa de Aritmética.

Aritmética. Crie um teste objetivo para avaliá-lo.

8. Tente estabelecer uma medida das atitudes das crianças para com a Aritmética, em qualquer classe, usando a escala de Dutton ou um método de classificação.

9. Examine a discussão dos testes de Aritmética em uma das referências dadas na pág. 459.
10. Examine um livro de Aritmética para determinar os tipos de testes que nêle são incluídos. Avalie os testes.
11. Consiga os resultados de um teste de Aritmética para qualquer classe. Analise os resultados de acôrdo com os passos esboçados nas págs. 463-464.
12. Por que os resultados dos testes podem provar a existência de um nível consideràvelmente abaixo do normal? Que pode ser feito para melhorar as condições relacionadas com o currículo, instrução e material?
13. Que está sendo feito pelas escolas locais para melhorar o programa de Aritmética?
14. Esboce um programa de desenvolvimento em Aritmética que considere útil. Relacione e descreva métodos específicos que acredita serem de real valor.
15. Algum aluno mais bem dotado deve examinar e registrar para a classe o programa descrito na monografia de Brueckner, *Improving the Arithmetic Program.*

SUGESTÕES PARA LEITURA

"Arithmetic in General Education," *Sixteenth Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics.* New York: Bureau of Publications, Teachers College, Columbia University, 1941. Chapter 10.

Burton, W. H. and Brueckner, L. J. *Supervision: A Social Process.* New York: Appleton-Century-Crofts, Inc., 1955.

Brueckner, L. J., Grossnickle, F. E., and Reckzeh, J. *Developing Mathematical Understandings in the Upper Grades.* Philadelphia: The John C. Winston Co., 1957. Chapter 13.

"Educational Diagnosis," *Thirty-fourth Yearbook of the National Society for the Study of Education.* Bloomington, Ill.: Public School Publishing Co., 1935. Chapter 14.

Greene, H. A., Jorgensen, A. N. and Gerberich, J. R. *Measurement and Evaluation in the Elementary School.* New York: Longmans, Green and Co., Inc., 1953.

"Mathematics in General Education," *Report of the Committee on the Function of Mathematics in General Education for the Commission on the Secondary School Curriculum.* New York: D. Appleton-Century Co., Inc., 1940.

Spitzer, H. *The Teaching of Arithmetic.* Boston: Houghton Mifflin Co., 1954. Chapter 12.

Stokes, C. N. *Teaching the Meanings of Arithmetic.* New York: Appleton-Century-Crofts, Inc., 1951. Chapter 10.

"The Measurement of Understanding," *Forty-fifth Yearbook of the National Society for the Study of Education.* Chicago: University of Chicago Press, 1946.

"The Teaching of Arithmetic," *Fiftieth Yearbook of the National Society for the Study of Education.* Chicago: University of Chicago Press, 1951. Chapter 10.

16

Diagnóstico e Orientação Corretiva em Aritmética

QUANDO OS RESULTADOS dos processos de avaliação indicam que algumas das crianças não estão fazendo progresso satisfatório na aprendizagem da Aritmética, o professor deve dar os passos necessários para diagnosticar a natureza das dificuldades de aprendizagem e determinar as causas. Quando o ensino é organizado com eficiência e o trabalho tem significação para as crianças, apenas algumas delas encontrarão dificuldades. O professor deve, contìnuamente, investigar com cuidado o trabalho dos alunos, individualmente, para descobrir pontos fracos, a fim de prevenir o acúmulo de deficiências que possam interferir no progresso. A despeito dos melhores esforços do professor, algumas crianças não compreendem o que estão aprendendo e inventam processos estranhos que consideram corretos, mas realmente são falhos e ineficientes. Em alguns casos, fatôres como a mudança de uma comunidade para outra, ausência excessiva devido a doença, desvantagens físicas e distúrbios emocionais podem interferir no estudo. O professor deve esforçar-se para analisar as dificuldades de aprendizagem e tomar as medidas necessárias para conseguir resolvê-las.

Êste Capítulo trata dos seguintes tópicos:

a. Uso de testes no ensino
b. Diferenças individuais e específicas
c. Níveis de diagnóstico
d. Técnicas de diagnóstico
e. Tratamento das dificuldades de aprendizagem.

a. USO DE TESTES NO ENSINO

Papel dos Testes Padronizados

A maioria dos professôres acha os testes padronizados úteis para vários fins. Os testes modernos focalizam a atenção em importantes objetivos educacionais e torna-os claros para professôres e alunos. Os resultados de testes bem organizados colocam cada aluno em uma escala de habilidade, em um campo particular, variando de um aproveitamento rudimentar a um alto aproveitamento. Esta informação ajuda o

professor a determinar, no grupo total, a posição relativa de cada aluno. Os testes, também, possibilitam ao professor medir o progresso do aluno em um determinado período de tempo; esta informação deve ser reunida à individual. Deve-se notar que muitos fatôres, como um distúrbio emocional ou alguma distração temporária, tornam difícil, com muita certeza, medir as mudanças que se processam individualmente nos alunos. O uso dos resultados de testes de inteligência padronizados tornam mais significativa a interpretação dos testes de aproveitamento.

Papel dos Testes Informais

Os testes informais proporcionam um meio excelente para verificar a quantidade de matéria que o aluno aprendeu. Os resultados dos testes estimulam a aprendizagem, tornando os alunos capazes de pensar em seu progresso em têrmos objetivos. Servem, também, como uma excelente motivação, revelando evidências de crescimento. Os testes podem ser organizados de maneira a revelar dificuldades específicas da aprendizagem. Servem como um auxílio para a localização de áreas de aprendizagem que devem ser revisadas. O professor pode usar dados da avaliação a fim de dividir a classe em grupos para fins de ensino. Os testes possibilitam ao professor medir a eficiência dos passos dados para ajustar o programa aos pontos fortes e fracos de cada aluno em particular. Os dados do teste proporcionam, também, uma base eficiente para a organização de um boletim para apresentar aos pais, sôbre o progresso do aluno.

Uso de Testes na Direção da Aprendizagem

Os testes devem ser usados, na situação aprendizagem - ensino, quando surgir a necessidade. Antes de começar a ensinar, o professor deve reunir informações sôbre a habilidade mental das crianças, sua prontidão para o nôvo trabalho, sua capacidade e interêsses especiais, seus pontos fortes e fracos em tôdas as áreas do currículo, particularmente sua habilidade para a leitura. Isto deve ser feito com o uso de testes preparatórios, com a análise dos dados da ficha permanente de registro do aluno, e com a observação do seu comportamento durante as discussões da classe. No decorrer da aprendizagem, o progresso deve ser avaliado constantemente pelos métodos informais discutidos no Capítulo 15.

O diagnóstico e o tratamento das dificuldades de aprendizagem que aparecem de tempos em tempos devem ser um processo contínuo, pôsto em execução quando necessário. O professor pode usar os dados da avaliação para guiar e motivar o aluno, discutindo com êle seu aproveitamento. Em muitas escolas podem surgir dificuldades e deficiências sérias, as quais o professor não pode resolver, de modo eficiente, na sala de aula, sendo, então, submetidas à opinião de técnicos para um estudo especial. Baseados nestas informações, êsses técnicos podem fazer sugestões em relação aos passos que devem ser dados em direção ao aperfeiçoamento.

Muitos livros de Aritmética contêm testes bem organizados para dirigir a aprendizagem, incluindo testes-inventário, de aptidão, de diagnóstico e de verificação do progresso. Êste material é um suplemento valioso para um programa de testes padronizados.

b. DIFERENÇAS INDIVIDUAIS E ESPECÍFICAS

Escala de Diferenças Individuais

O fato mais importante, talvez, que foi revelado pelas medidas educacionais, relacionado com o ensino de Aritmética, é a ampla escala de classificações individuais, em aproveitamento e inteligência, em qualquer classe comum, em nossas escolas. Igualmente significativas são as diferenças nos resultados entre as várias escolas. Há, aparentemente, um aumento na variação, tanto no aproveitamento como na inteligência, nas várias séries e entre várias idades. Cook[1] demonstrou que a variação nas operações aritméticas e no trabalho do raciocínio dá-se na sexta série. Esta variação é um pouco menor que a variação em outras áreas do currículo, como a Leitura.

Para exemplificar as diferenças nos níveis de aproveitamento em Aritmética, em classes típicas, são apresentados os dados da Tabela A. Êles demonstram as variações entre os pontos alcançados em testes de Aritmética e de Leitura, na edição de 1957 do *California Arithmetic Test,* por 73 crianças da série 5.1 em uma pequena cidade do Leste. A média do grupo, em Aritmética, foi, pràticamente, equivalente à do teste padronizado. Na Leitura, a média da série 5.7 foi, aproximadamente, seis meses acima do normal. Entretanto, havia uma variedade bem grande em ambas as habilidades: de Aritmética e de Leitura. A variação em habilidade de raciocínio, em Aritmética, foi da série 3.0 à série 6.9, ou aproximadamente 4 anos; de fundamentos aritméticos, da série 3.5 à série 6.4, ou três anos, e para o total, da série 3.5 para a série 5.9, ou 2,4 anos. Na Leitura a variação foi ainda maior: da série 3.0 à série 8.0.

Diferenças Específicas

Quando os resultados dos testes gerais de Aritmética são tomados em partes específicas, a variação em habilidades da criança, em cada particularidade, é

[1] COOK (W. W.), *Educational Measurement.* Washington: American Council on Education, 1951, págs. 10-12.

também muito grande. Os dados da Tabela B exemplificam êste ponto. Os dados são de 100 crianças da série 6.1, escolhidas ao acaso, em todo o país, com Q. I. de 90 a 110. Os resultados dos

TABELA A

VARIAÇÕES NA HABILIDADE EM ARITMÉTICA E LEITURA, NA SÉRIE 5.1, E EM UM PEQUENO SISTEMA ESCOLAR

(73 casos)

Série	Aritmética: Raciocínio	Aritmética: O. Fundamentais	Aritmética: Total	Leitura
8.0 e mais	—	—	—	1
7.5—7.9	—	—	—	2
7.0—7.4	—	—	—	2
6.5—6.9	2		—	9
6.0—6.4	11	1		11
5.5—5.9	13	11	15	7
5.0—5.4	16	29	29	18
4.5—4.9	21	19	21	13
4.0—4.4	8	10	6	6
3.5—3.9		3	2	1
3.0—3.4	2			3
Médias	5,3	5,1	5,1	5,7

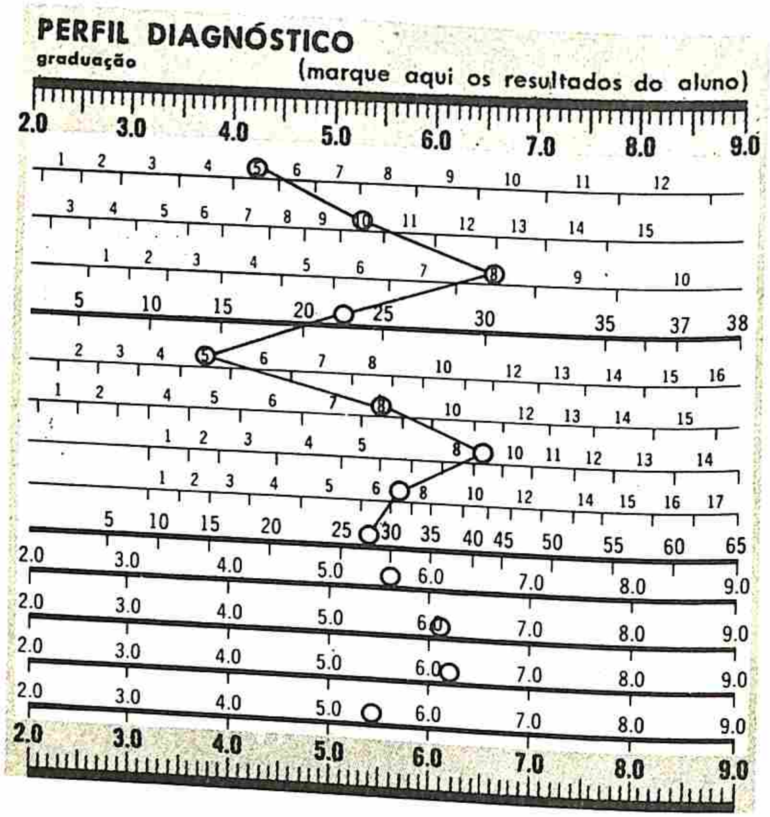
TABELA B

VARIAÇÕES NOS RESULTADOS, EM SEÇÕES DO "CALIFORNIA ARITHMETIC ACHIEVEMENT TEST", DE 100 CRIANÇAS NA SÉRIE 6.1, COM Q.I. VARIANDO DE 90 A 110

	Resultados: Mais Baixos	Resultados: Mais Altos	Resultados: Médios	Séries: Mais Baixas	Séries: Mais Altas	Séries: Médias
I. Raciocínio						
A. Significados	2	13	8,6	2,7	8,0+	5,7
B. Sinais e Símbolos	5	14	11,8	3,4	7,4	6,2
C. Problemas	1	12	7,0	2,6	8,0+	5,4
Totais em A, B e C	16	35	27,4	3,9	7,7	5,9
II. Fundamentos						
D. Adição	4	15	10,0	3,6	8,4	6,0
E. Subtração	1	15	9,6	2,4	8,0+	5,9
F. Multiplicação	3	15	7,5	4,5	8,0+	5,8
G. Divisão	3	15	8,7	4,4	7,9	6,1
Totais em D, E, F e G	21	52	35,7	4,8	7,4	6,0

pontos e das séries são distribuídos por sete aspectos específicos e por habilidades gerais em raciocínio aritmético e operações fundamentais. Por exemplo, a variação no Teste A é da série 2.7 à série 8.0+, em problemas é da série 2.6 à série 8.0+, e em subtração é da 2.4 à série 8.0+. As variações nos testes de diferenças específicas são maiores que de habilidades gerais incluídas no total.

Quando os resultados dos testes sôbre diferentes aspectos da Aritmética, de uma criança em particular, são comparados, com freqüência aparecem diferenças



marcantes em vários traços. Os dados, no mapa da pág. 476, exemplificam êste fato. Os dados são de um menino de 11 anos, da série 6.1, com Q.I. 94. São baseados nos resultados do *California Arithmetic Test*, *Form W*, edição de 1957. O perfil traça, gràficamente, seus resultados em sete seções do teste e em seções combinadas.

Na Seção do Raciocínio do teste, sua contagem de pontos foi mais baixa. Na Seção A, Significados, êle estava cêrca de dois anos abaixo do normal para sua série. Seus pontos, na Seção C, Resolução de Problemas, estavam um pouco acima do normal. No teste sôbre Operações Fundamentais, estava um pouco abaixo do normal em adição e um pouco acima em multiplicação, enquanto em subtração e divisão estava ligeiramente abaixo do normal. Sua realização no teste de Raciocínio estava um pouco abaixo de sua realização no total do teste. Sua graduação, em Aritmética, era 5,6 ou 6 meses abaixo do normal.

Êstes resultados não são raros. Perfis de quase todos os modelos possíveis são encontrados quando é feita uma análise dos resultados do teste, para diversas centenas de crianças, em Aritmética e em outras áreas do currículo. Êste fato demonstra a necessidade da administração de testes adequados logo no início do ano, o que possibilitará ao professor identificar pontos fortes e fracos, específicos, de cada criança em particular, a fim de que possa tomar as medidas necessárias para conseguir um melhoramento. Variedade semelhante existe, indubitàvelmente, onde são aplicados métodos de avaliação menos formais para outros itens do programa.

Maneiras de Atender às Diferenças Individuais

Atualmente, a tendência geral é agrupar as crianças por idade, levando em consideração a maturidade e o desenvolvimento social. Independente da forma de agrupamento usada, é essencial que haja adaptações próprias às experiências, métodos e material de ensino. A exposição seguinte descreve uma variedade de possíveis maneiras de agrupar que demonstraram ser práticas e eficientes para satisfazer às necessidades individuais.

Dentro de qualquer classe, o agrupamento, com fins de ensino, deve ser altamente flexível. Algumas vêzes, o professor deseja trabalhar com a classe como um todo para desenvolver alguma habilidade necessária a todos. Outras vêzes, o professor deseja formar diversos grupos, de acôrdo com os níveis de aproveitamento, para ajudar na organização de atividades em diferentes escalas de complexidade e dificuldade. Às vêzes, é formado um grupo com um interêsse comum para resolver juntos um problema, mas os alunos do grupo podem trabalhar em tarefas especiais e com material de níveis diferentes de abstração. Ocasionalmente, o professor pode determinar tarefas especiais para os alunos mais capazes. Outras vêzes, será formado um grupo, baseado no nível de habilidade em alguma área, para ajudar os componentes do grupo a aumentar sua capacidade nesta área. Pode ser formado um grupo de alunos para uma ajuda extra em qualquer ponto em que se mostrem fracos. Em alguns casos, o professor levará algum tempo para fazer um estudo especial do trabalho de alguns alunos, cuja execução indica sérias dificuldades de aprendizagem, que devem ser diagnosticadas e tratadas.

Quando são formados grupos dêste e de outros tipos, é possível ajustar o trabalho da classe às diferenças e necessidades individuais, níveis de crescimento, habilidade e interêsse dos vários alunos. Quando aquilo que vai ser aprendido é complexo, e quando as metas são ilimitadas, de forma que a habilidade dos alunos mais capazes possa ser considerada, a variedade de grupos tenderá, com um bom ensino, a aumentar. Quando aquilo que vai ser estudado é, relativamente, simples e são estabelecidas metas limitadas, as quais podem ser atingidas por uma grande proporção de alunos, a variedade será reduzida, através de ensino eficiente. Independente do tipo de agrupamento, deve ser dada atenção especial, pelo professor, aos alunos cujo trabalho indica que estão tendo dificuldades, as quais devem ser analisadas e eliminadas.

c. NÍVEIS DE DIAGNÓSTICO

Discutiremos três níveis de diagnóstico que podem ser identificados como (1) diagnóstico geral, (2) diagnóstico analítico e diferencial, e (3) casos individuais de estudo.

Diagnóstico Geral

Diagnóstico geral significa uso de testes de pesquisa e outros tipos de métodos de avaliação geral, como os que foram discutidos no Capítulo 15. Os dados assim conseguidos dão ao professor e à diretoria da escola informações sôbre o nível geral de aproveitamento dos alunos, em aspectos da Aritmética, dados êstes necessários em uma escola bem dirigida. Reunidos às informações sôbre o histórico escolar dos alunos, suas características e comportamento, seu ambiente social e dados semelhantes, conduzem a registros escolares e sociais adequados, que são valiosos na pesquisa de condições que possam afetar o crescimento e desenvolvimento das crianças.

Diagnóstico Analítico e Diferencial

Como diagnóstico analítico queremos dizer o uso sistemático de métodos para localizar ou identificar dificuldades ou deficiências específicas, na Aritmética e em outras áreas relacionadas do currículo, para um grupo como um todo, ou para qualquer aluno em particular.

Casos Individuais de Estudo

Casos individuais de estudo significam a aplicação de técnicas de diagnóstico que possibilitarão ao professor o estudo, em detalhes, do aproveitamento de um aluno que tenha uma dificuldade evidente de aprendizagem. Êstes estudos são usados para determinar, tão especìficamente quanto possível, a natureza e a seriedade da dificuldade e suas causas. Como será demonstrado, muitos casos individuais de estudo têm sido desenvolvidos em clínicas educacionais e psicológicas, que podem ser, fàcilmente, adaptados e aplicados pelo professor de classe.

Emprêgo Ilustrado de Cada Nível de Diagnóstico

Os três níveis de diagnóstico podem ser exemplificados com uma breve exposição de métodos que foram usados para identificar e diagnosticar a natureza de uma dificuldade específica em Aritmética, no caso de um menino de quinta série.

Nível I — *Diagnóstico Geral.* Um teste de aproveitamento geral demonstrou que os resultados de Roberto eram consideràvelmente abaixo do normal, nas operações e no raciocínio, em Aritmética. O resultado, em Leitura, era muito bom e seu Q. I. era 110, como demonstrou um teste individual. O diagnóstico geral mostrou que Roberto tinha dificuldades em Aritmética, mas eram necessárias maiores informações para determinar a natureza desta deficiência.

Nível 2 — *Diagnóstico Analítico.* Os resultados de um teste de Aritmética, para análise, que incluíam testes separados de cada uma das operações numéricas, compreensão dos números e resolução de problemas demonstraram que os pontos alcançados por Roberto em adição, subtração e multiplicação de números inteiros, compreensão e solução de problemas eram satisfatórios, mas seus pontos na divisão de números inteiros eram bem poucos. Assim, foi determinada a área específica da dificuldade. Os próprios resultados do teste não indicaram, definitivamente, o que estava errado em seu trabalho com a divisão, nem revelaram as reações pessoais de Roberto perantes as dificuldades. Eram necessárias informações mais específicas e detalhadas, para determinar as modificações necessárias no método de ensino, a fim de resolver as dificuldades de Roberto.

Nível 3 — *Casos Individuais de Estudo.* Foi feito um estudo individual completo de seu trabalho em divisão para determinar onde devia ser começado o trabalho de correção. Primeiro, foi verificado seu conhecimento dos fatos fundamentais da subtração e divisão, de forma escrita e oral. Suas respostas foram um pouco lentas e havia, também, evidências de respostas pela contagem, e omissão de respostas, palpites, especialmente dos casos mais difíceis na divisão. Para determinar os tipos de divisão que estavam causando a dificuldade, mandaram-no resolver uma série de exemplos envolvendo o processo inteiro da divisão. Pediram-lhe que respondesse, em voz alta, a certos exemplos do teste, os quais continham erros que não eram fàcilmente determinados, a fim de identificar processos incorretos de pensamento. Teve que responder, também, a questões que verificassem sua compreensão do processo da divisão, seu método de estimar o quociente, sua atitude para com a Aritmética e assuntos semelhantes, exigidos pela situação. Os registros da escola foram examinados, também, para verificar os resultados de seus estudos, incluindo seu histórico escolar, os resultados dos testes de visão e audição, seus interêsses e seu ambiente social. À luz destas informações, suas dificuldades específicas foram identificadas e foi planejado um programa para seu melhor desenvolvimento.

Uso dos Resultados de Um Estudo-Diagnóstico

Baseando-se nos resultados de estudos semelhantes, o professor pode decidir as mudanças necessárias nos métodos ordinários de ensino. Se um caso apresenta complexidades mais difíceis que as do caso de Roberto, em que o professor sente que não poderá resolver com eficiência, devido à falta de experiência profissional, o caso deve ser encaminhado aos especialistas, se necessário. Isto é especialmente aconselhado no caso de existirem, também, dificuldades na Leitura.

Tipos de Casos que Surgem

Como tem sido visto, há uma grande variação nos níveis de habilidade, em Aritmética, em uma classe. Quando são examinados os resultados individuais das crianças, surgem os seguintes casos:

1) *Progresso normal ou acima do normal.* O aproveitamento destas crianças está na mesma altura das crianças que com sua capacidade e nível de desenvolvimento geralmente alcançam, ou, em alguns casos, consideràvelmente acima. Para estas crianças, o programa regular é satisfatório, embora seja interessante fortalecer e ampliar o programa para assegurar resultados ainda melhores, especialmente para as crianças mais capazes.

2) *Simples retardo.* Estas crianças têm um aproveitamento um pouco menor do que se esperava, mas não há incapacidade visível, exigindo tratamento especial. Elas, com freqüência, carecem da experiência e do am-

biente necessários, mas, com ajuda cuidadosa, seu trabalho pode melhorar consideràvelmente. As mudanças e os longos períodos de doença, freqüentemente, são os fatôres que causam tais dificuldades.

3) *Casos de incapacidades específicas.* Estas crianças têm dificuldades específicas que interferem em um bom aproveitamento. Por exemplo, a falta de progresso na subtração de números inteiros pode ser devida à falta de conhecimento dos fatos fundamentais, ou à falta de compreensão do processo de decomposição. Esta deficiência contribui para a falta de sucesso na divisão por números de dois algarismos devido aos erros na subtração, que conduzem a respostas incorretas. Esta dificuldade específica pode ser identificada por meio de diagnósticos adequados e corrigida pelo ensino do processo, tantas vêzes quantas necessárias. Tanto o diagnóstico como o tratamento podem ser, geralmente, empreendidos pelo próprio professor, na sala de aula.

4) *Casos de incapacidade complexa.* Estas crianças, por várias razões, têm feito pouco progresso em Aritmética. Com freqüência, adquiriram aversão pela matéria, devido à incapacidade para aprendê-la. Algumas vêzes, devido à falta de interêsse, não fazem esforços para dominar os fatos básicos e as habilidades relacionadas. Podem ter mêdo da matéria e adquirir um bloqueio emocional quando trabalham com ela. Freqüentemente, não compreendem o trabalho e, por várias razões, têm sérias deficiências em outras matérias, como a incapacidade para a leitura, que interfere com a habilidade para resolver problemas escritos. Geralmente sua capacidade mental é normal ou acima da média. Êstes casos apresentam problemas tão sérios que são necessários os serviços de um especialista para fazer um diagnóstico e ajudar o professor a planejar um programa de correção. A menos que seja feito um diagnóstico adequado, o tratamento não pode ser eficiente. Nos casos de incapacidade extrema para a Aritmética, o problema é, algumas vêzes, complicado por sérias deficiências na leitura. Em tais casos, pode tornar-se necessário o tratamento em base clínica.

d. TÉCNICAS DE DIAGNÓSTICO

Discutiremos agora técnicas práticas, que podem ser usadas pelo professor para identificar e diagnosticar dificuldades de aprendizagem em cada um dêstes três níveis.

Diagnóstico Geral

Os resultados dos testes padronizados são a base mais eficiente para conseguir uma média do nível geral de aproveitamento do aluno. Para maior valor, os foi verificado seu conhecimento dos fatos fundamentais da subtração e divisão, de forma escrita e oral. Suas respostas foram um pouco lentas e havia, também, evidências de respostas pela contagem, e omissão de respostas, palpites, especialmente dos casos mais difíceis na divisão. Para determinar os tipos de divisão que estavam causando a dificuldade, mandaram-no resolver uma série de exemplos envolvendo o processo inteiro da divisão. Pediram-lhe que respondesse, em voz alta, a certos exemplos do teste, os quais continham erros que não eram fàcilmente determinados, a fim de identificar processos incorretos de pensamento. Teve que responder, também, a questões que verificassem sua compreensão do processo da divisão, seu método de estimar o quociente, sua atitude para com a Aritmética e assuntos semelhantes, exigidos pela situação. Os registros da escola foram examinados, também, para verificar os resultados de seus estudos, incluindo seu histórico escolar, os resultados dos testes de visão e audição, seus interêsses e seu ambiente social. À luz destas informações, suas dificuldades específicas foram identificadas e foi planejado um programa para seu melhor desenvolvimento.

Uso dos Resultados de Um Estudo-Diagnóstico

Baseando-se nos resultados de estudos semelhantes, o professor pode decidir as mudanças necessárias nos métodos ordinários de ensino. Se um caso apresenta complexidades mais difíceis que as do caso de Roberto, em que o professor sente que não poderá resolver com eficiência, devido à falta de experiência profissional, o caso deve ser encaminhado aos especialistas, se necessário. Isto é especialmente aconselhado no caso de existirem, também, dificuldades na Leitura.

Tipos de Casos que Surgem

Como tem sido visto, há uma grande variação nos níveis de habilidade, em Aritmética, em uma classe. Quando são examinados os resultados individuais das crianças, surgem os seguintes casos:

1) *Progresso normal ou acima do normal.* O aproveitamento destas crianças está na mesma altura das crianças que com sua capacidade e nível de desenvolvimento geralmente alcançam, ou, em alguns casos, consideràvelmente acima. Para estas crianças, o programa regular é satisfatório, embora seja interessante fortalecer e ampliar o programa para assegurar resultados ainda melhores, especialmente para as crianças mais capazes.

2) *Simples retardo.* Estas crianças têm um aproveitamento um pouco menor do que se esperava, mas não há incapacidade visível, exigindo tratamento especial. Elas, com freqüência, carecem da experiência e do ambiente necessários, mas, com ajuda cuidadosa, seu trabalho pode melhorar consideràvelmente. As mudanças e os longos períodos de doença, freqüentemente, são os fatôres que causam tais dificuldades.

3) *Casos de incapacidades específicas.* Estas crianças têm dificuldades específicas que interferem em um bom aproveitamento. Por exemplo, a falta de progresso na subtração de números inteiros pode ser devida à falta de conhecimento dos fatos fundamentais, ou à falta de compreensão do processo de decomposição. Esta deficiência contribui para a falta de sucesso na divisão por números de dois algarismos devido aos erros na subtração, que conduzem a respostas incorretas. Esta dificuldade específica pode ser identificada por meio de diagnósticos adequados e corrigida pelo ensino do processo, tantas vêzes quantas necessárias. Tanto o diagnóstico como o tratamento podem ser, geralmente, empreendidos pelo próprio professor, na sala de aula.

4) *Casos de incapacidade complexa.* Estas crianças, por várias razões, têm feito pouco progresso em Aritmética. Com freqüência, adquiriram aversão pela matéria, devido à incapacidade para aprendê-la. Algumas vêzes, devido à falta de interêsse, não fazem esforços para dominar os fatos básicos e as habilidades relacionadas. Podem ter mêdo da matéria e adquirir um bloqueio emocional quando trabalham com ela. Freqüentemente, não compreendem o trabalho e, por várias razões, têm sérias deficiências em outras matérias, como a incapacidade para a leitura, que interfere com a habilidade para resolver problemas escritos. Geralmente sua capacidade mental é normal ou acima da média. Êstes casos apresentam problemas tão sérios que são necessários os serviços de um especialista para fazer um diagnóstico e ajudar o professor a planejar um programa de correção. A menos que seja feito um diagnóstico adequado, o tratamento não pode ser eficiente. Nos casos de incapacidade extrema para a Aritmética, o problema é, algumas vêzes, complicado por sérias deficiências na leitura. Em tais casos, pode tornar-se necessário o tratamento em base clínica.

d. TÉCNICAS DE DIAGNÓSTICO

Discutiremos agora técnicas práticas, que podem ser usadas pelo professor para identificar e diagnosticar dificuldades de aprendizagem em cada um dêstes três níveis.

Diagnóstico Geral

Os resultados dos testes padronizados são a base mais eficiente para conseguir uma média do nível geral de aproveitamento do aluno. Para maior valor, os testes devem ser administrados logo no início do ano escolar.

Onde os testes padronizados não são disponíveis, os professôres devem administrar, logo no início do ano, testes informais sôbre o trabalho dos anos anteriores, como os que são dados em alguns livros de Aritmética, ou testes preparados por êles mesmos. Tais testes-inventários podem ser organizados de maneira a proporcionar uma rápida análise do resultado total e para que o teste produza não apenas uma medida razoàvelmente satisfatória do nível de habilidade individual do aluno, mas indique, também, tanto para o professor como para o aluno, os processos em que estão mais fortes e aquêles que exigem uma revisão cuidadosamente planejada ou a repetição, se necessária.

Séries graduadas de testes, dos processos e da resolução de problemas que possam ser administrados, em intervalos regulares, durante o ano, podem ser, também, encontrados em alguns livros geralmente no fim dos capítulos, ou são publicados em panfletos separados. Tais testes servem como excelente meio de motivação.

Diagnóstico Analítico

Testes de Prontidão. Os resultados dos testes de prontidão revelam diferenças notáveis nos graus de prontidão das crianças, para uma tarefa nova, em qualquer processo mais difícil. Os testes de prontidão mais recentes[2] são organizados de tal modo que ajudam o professor a identificar as fontes potenciais de futuras dificuldades. Bàsicamente são testes de verificação de habilidades relacionadas com o nôvo processo. A seguinte lista de nove subtestes dá uma noção geral dos elementos de um teste de prontidão, na divisão por números de dois algarismos, que foi aplicado com notáveis resultados.

Seção A

I. Conhecimento do valor relativo em números de três algarismos (4 minutos)

II. Multiplicação usada na divisão, do tipo quociente vêzes divisor (4 minutos)

III. Conhecimento de combinações difíceis, na divisão (5 minutos)

IV. Conhecimento do processo com um algarismo no divisor e o dividendo com dois, três ou quatro algarismos (10 minutos)

Seção B

V. Dizer se estão corretos os quocientes de algumas divisões; alguns muito grandes, outros corretos, outros pequenos demais (4 minutos)

[2] BRUECKNER (L. J.), "The Development of Readiness Tests in Arithmetic", *Journal of Educational Research*, 34:15-20.

VI. Completar o trabalho para determinar a correção de determinados algarismos do quociente (6 minutos)

VII. Subtração usada na divisão (5 minutos)

VIII. Multiplicação mental de números de dois algarismos por números de um algarismo (5 minutos)

IX. Comparação do produto de um número de dois algarismos multiplicado por um número, com um algarismo com um número dado (5 minutos)

Exemplo: Qual é maior, 3×48 ou 150?

Êste teste foi administrado em seis escolas de Minneapolis a 140 alunos de quinta série, que estavam começando a estudar a divisão por números de dois algarismos. Seu Q.I. médio era 96. Suas idades cronológicas variavam de 9 a 12 anos e 7 meses. O número de itens incorretos para os alunos individualmente, em um total de 104 itens, foi de 1 a 87, com uma média de 38 itens incorretos. A variação de pontos, em cada uma das nove partes do teste, exceto as Partes V e IX, foi de nenhum item incorreto a erros em todos os itens. A porcentagem média de itens incorretos, nas diferentes partes do teste, varia de 60 por cento de incorreção na Parte IV, a 21,6 por cento de incorreção nas Partes II e VII.

Chegou-se à conclusão de que, enquanto alguns dos alunos estavam bem preparados para o nôvo trabalho, muitos estavam sèriamente deficientes em matérias que deviam dominar, para ter sucesso no trabalho com o difícil processo da divisão por números com dois algarismos. Esta falta de prontidão foi encontrada em alunos de todos os níveis mentais. Os resultados de outro teste, consistindo em dez exemplos fáceis na divisão por dois algarismos, administrados depois de cêrca da metade das etapas do total do processo de divisão ter sido ensinado, demonstraram como era mal sucedido o ensino em tais condições. Alguns dos alunos tinham acertado apenas um dos dez exemplos, enquanto outros tinham acertado todos os dez exemplos. A média foi de sete exemplos ou 70 por cento de correção. Isto demonstra que cêrca da metade dos alunos não estava obtendo sucesso no estudo do nôvo trabalho. A razão disto era, indubitàvelmente, a falta de prontidão de muitos alunos para o nôvo trabalho, como foi demonstrado pelos resultados do teste de prontidão.

Quando os testes de prontidão são usados com eficiência pelo professor, para ajudar a aprendizagem, os resultados[3] são superiores aos que são alcançados quando os testes não são usados. Ficou demonstrado que os testes

[3] SOUDER (H. C.), "The Construction and Evaluation of Certain Readiness Tests in Common Fractions", *Journal of Educational Research*, 37:127-134.

de prontidão[4] nas séries do Curso Primário predizem o nível de aproveitamento do aluno com um alto grau de precisão. Brownell[5] discute o papel da prontidão em Arithmética como um conceito de aprendizagem na referência abaixo. Êle discute a necessidade da flexibilidade da graduação da matéria e de um agrupamento mais cuidadoso das crianças, de acôrdo com seu contrôle de habilidades, que são pré-requisitos em uma área específica da Aritmética.

Verificação e Progresso no Conhecimento dos Fatos Fundamentais

O primeiro passo, talvez, para fazer o diagnóstico de uma dificuldade em qualquer área do trabalho com números inteiros, no qual pareça existir uma deficiência, é determinar como as crianças sabem os fatos básicos. Dois métodos, fáceis de aplicar, podem ser usados:

1. *Método das respostas em fôlhas de papel.* O professor deve preparar, primeiro, uma lista de 25 fatos básicos em qualquer processo, por exemplo, a adição. Os fatos básicos devem ser organizados ao acaso. Depois, cada criança deve receber uma fôlha de papel em branco, numerar 25 linhas no papel e, depois, escrever as respostas, conforme o professor ditar os fatos. A velocidade do ditado deve ser ajustada ao nível de maturidade das crianças. Três ou quatro segundos, para cada fato básico, são satisfatórios para a quarta série. Deve-se dizer às crianças que deixem um espaço em branco se não lembram a resposta na hora. Êste método reduz a probabilidade da resposta pela contagem ou métodos de adivinhação. O professor pode ditar as respostas, enquanto as crianças conferem em seus papéis. Deve ser distribuída, então, uma cópia do teste com as respostas. Cada criança descobre, assim, os fatos a que deve dar atenção especial. O professor deve examinar os papéis das crianças com o número de erros, para determinar a extensão em que foi aplicado o método da adivinhação.

2. *Método do ditado controlado.* O professor deve preparar um conjunto de fatos fundamentais para o teste. Êstes fatos devem ser copiados em fôlhas de papel para que cada criança receba uma cópia. Depois, o professor lê os fatos na proporção de um fato em cada 4 segundos. Os alunos escreverão a resposta na mesma proporção em que os fatos são lidos. As omissões indicarão que as respostas não são conhecidas ou não podem ser lembradas dentro do tempo marcado. As respostas incorretas,

[4] BRUECKNER (L. J.), "The Development and Validation of an Arithmetic Readiness Test", *Journal of Educational Research*, 40:496-502.

[5] BROWNELL (W. A.), "Arithmetic Readiness as a Practical Classroom Concept", *Elementary School Journal*, 52:15-22.

com freqüência, indicam tentativa de adivinhação. O professor pode ditar as respostas e os alunos verificam em seus papéis. O papel do teste torna-se, assim, um registro do aluno dos fatos que não foram respondidos corretamente, ou em que as respostas foram omitidas.

Fatôres Que Devem Ser Considerados na Avaliação da Habilidade em Aritmética

Na apreciação da habilidade em Aritmética, o professor deve considerar, no mínimo, seis características: (1) velocidade na resposta, (2) precisão, (3) nível de desenvolvimento, (4) qualidade do trabalho, (5) área de experiência ou extensão de habilidade e (6) processos de pensamento e execução.

1) *Velocidade na resposta.* A velocidade do aluno no trabalho é um valioso índice de agilidade e do contrôle de uma função em particular, como o conhecimento dos fatos da adição. Pouca rapidez na resposta é, freqüentemente, sintoma de dificuldades na aprendizagem. A rapidez para escrever as respostas dos fatos pode ser avaliada calculando-se quantas respostas o aluno pode escrever em um determinado tempo, um minuto, por exemplo.

2) *Precisão.* Quanto maior a proporção de respostas corretas, mais alto o nível de aproveitamento. Thiele[6] sugeriu os seguintes padrões de precisão, para crianças médias das terceira e quarta séries, nos fatos básicos das quatro operações, quando são escritas apenas as respostas no papel do teste. Se uma criança não pode escrever tôdas as respostas corretamente, em um teste com 20 fatos de adição, em um minuto, seu nível de aproveitamento não é satisfatório.

Séries	Adição	Subtração	Multiplicação	Divisão
Quarta	20	20	20	15
Quinta	25	25	25	20
Sexta	30	30	25	25

3) *Nível de desenvolvimento.* O nível de habilidade é medido pelo nível de dificuldade dos exercícios que um aluno pode fazer com sucesso. Quanto mais difíceis os exercícios que um aluno pode resolver, maior é o seu nível de desenvolvimento. A maioria dos testes padronizados avalia o nível de desenvolvimento. Os níveis são expressos em relação à idade e às séries.

4) *Qualidade do trabalho.* A qualidade ou mérito geral da habilidade pode ser avaliada pela observação da *uniformidade* do trabalho de uma criança ao resolver uma série de exemplos, ou pela avaliação de um resultado concreto de seu trabalho,

[6] *File Nº 5499*, pág. 4. *Exact Science Department*, Board of Education, Detroit, Michigan.

como um gráfico, um desenho, um registro, um trabalho escrito, e assim por diante. Os padrões para a avaliação de material dêste tipo devem tomar em consideração itens como:

a) A autenticidade dos fatos ou representações
b) O arranjo e a organização do material
c) O cuidado e o asseio do material
d) Evidência de originalidade e riqueza de recursos
e) Riqueza e variedade do conteúdo.

Os alunos devem participar do estabelecimento de padrões para a avaliação da qualidade do trabalho.

5) *Área de experiência ou extensão de habilidade.* Para avaliar a área ou extensão de habilidade, é necessário determinar a amplitude da aprendizagem do indivíduo em cada nível geral de dificuldade e a extensão em que dominou a essência de algumas das operações fundamentais, como a divisão por número de dois algarismos. Um teste geral de Aritmética não fornece informação adequada para a avaliação de muitas habilidades específicas; sua categoria deve ser determinada pela medida de cada uma das habilidades específicas. Ao mesmo tempo, deve-se considerar fatôres como interêsses, atitudes, apreciações e compreensão em Aritmética.

6) *Métodos de trabalho.* Na avaliação de qualquer trabalho, um fator importante é o valor dos métodos de trabalho e a eficiência dos processos de pensamento empregados pelo aluno. O nível de aproveitamento de um aluno é, com freqüência, mais baixo do que devia ser, devido à ineficiência de seus hábitos de trabalho e métodos de estudo. A existência de métodos defeituosos de trabalho pode ser suspeitada quando o aproveitamento de um aluno é lento e, claramente, inferior ao que se esperava de um aluno com seu nível de capacidade mental. Os métodos defeituosos de trabalho, com freqüência, podem ser descobertos pela observação de seu comportamento enquanto resolve qualquer exercício, como um teste. Por exemplo, um aluno pode ser capaz de escrever as respostas corretas de fatos de adição, mas a observação pode demonstrar que êle usa vários métodos de contagem para encontrar o total, como: contar pelos dedos, falando, usando um lápis, e assim por diante. Uma entrevista com o aluno pode revelar que não tem um plano sistemático e eficiente para estudar os fatos básicos que não conhece.

Testes Analíticos Padronizados

Quando o propósito do diagnóstico é determinar, com maior exatidão, as fases específicas ou o elemento de qualquer processo no qual existe uma deficiência

ou uma fraqueza, devem ser usados testes para diagnóstico do tipo analítico. Por exemplo, para localizar pontos fracos na divisão de números inteiros, os seguintes elementos, derivados de uma análise dos passos dados para resolver o exemplo dado ao lado, devem ser postos à prova:

$$\begin{array}{r|l} 195 & \underline{27} \\ \underline{189} & 7 \\ 6 & \end{array}$$

1) Conhecimento dos fatos fundamentais de divisão exata aproximada, como: 19 |2

2) Habilidade para dividir por números de um algarismo, como indicação de conhecimento dos passos dados no processo da divisão.

3) Habilidade para fazer corretamente estimativas dos algarismos do quociente, primeiro do tipo em que o quociente estimado é o quociente real, como em 193 |21, depois aquêles em que o quociente estimado deve ser corrigido, como em 195 |27. (Ver Capítulo 9.)

4) Habilidade para multiplicar, como em 7×27 no exemplo.

5) Habilidade para subtrair para encontrar o resto, se houver.

Concluiu-se[7] que há uma diferença significativa entre os resultados de bons e maus alunos, na divisão por números de dois algarismos, em uma série de testes de habilidades específicas semelhantes aos relacionados acima. Concluiu-se, também,[8] que um considerável número de casos de pouco aproveitamento é devido a uma deficiência marcada em apenas uma destas particularidades, por exemplo, habilidade para fazer estimativas dos algarismos do quociente, ou em subtração. Tal informação específica é valiosa para o planejamento do trabalho de correção.

Uma série de testes[9] de diagnóstico analítico, em operações com números inteiros, frações, decimais e porcentagem, pode ser encontrada. As séries incluem os seguintes testes:

1) Testes sôbre fatos fundamentais (5 testes)
2) Testes sôbre as quatro operações com números inteiros (5 testes)
3) Testes sôbre frações ordinárias (7 testes)
4) Testes sôbre frações decimais (4 testes)
5) Testes sôbre porcentagem (6 seções)
6) Testes sôbre operações com unidades de medir (5 seções).

---

[7] Koenker (R. J.), "Certain Characteristic Differences Between Excellent and Poor Achievers in Two-Figure Division", *Journal of Educational Research*, 35:578-586.

[8] Estudo realizado por Wm. Wiest, estudante graduado pela Universidade de Minnesota.

[9] A série de testes desenvolvida por L. J. Brueckner foi publicada pelo *California Test Bureau*, Los Angeles, California (1955).

Cada teste-diagnóstico contém referências a *Auto-Ajuda*, para serem usadas em qualquer trabalho corretivo, se necessário. Estas referências aparecem na parte de trás de cada página do teste. Esta combinação de testes para diagnóstico e auto-ajuda proporciona os elementos essenciais para um melhoramento eficiente do programa nas operações artiméticas.

Uma seção do teste-diagnóstico na divisão, 10A, é dada na página 490. Nas costas de cada página do teste aparecem estudos auxiliares, que são usados para corrigir deficiências reveladas pelos testes.

Testes-Diagnóstico de Desenvolvimento

Os testes analíticos para diagnóstico estão intimamente integrados no programa de desenvolvimento e devem aparecer no fim de cada unidade nova da matéria. Êles aparecem na maioria dos livros de Aritmética modernos. Tais testes devem ser administrados em intervalos regulares, para localizar pontos fracos no nôvo trabalho, a fim de que possam ser prontamente diagnosticados e corrigidos. Os passos que devem ser dados no desenvolvimento de tais testes são:

1) Devem ser partes fracionadas de uma unidade maior, como a subtração de frações, em uma série de subunidades. Por exemplo, séries completas de quatro testes sôbre aquêle processo devem ser baseadas nas seguintes subunidades:

Subunidade I. Subtração de frações com o mesmo denominador, sem decomposição, como $\frac{3}{4} - \frac{1}{4}$, ou $2\frac{2}{3} - 1\frac{1}{3}$.

Subunidade II. Subtração de frações com o mesmo denominador, com decomposição, como $2 - \frac{1}{2}$, ou $4\frac{1}{4} - 2\frac{3}{4}$.

Subunidade III. Subtração de frações com denominadores diferentes, da mesma família, como $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$, ou $7\frac{1}{4} - 2\frac{1}{2}$.

Subunidade IV. Subtração de frações com denominadores diferentes, de famílias diferentes, como $\frac{3}{4} - \frac{1}{3}$ ou $5\frac{1}{6} - 3\frac{3}{4}$.

2) Em seguida, devem ser preparadas séries graduadas de exemplos de complexidade crescente em uma determinada subunidade, por exemplo, Subunidade II, acima; exemplifica o desenvolvimento, passo a passo, na subunidade, como demonstra a seguinte seqüência:

(*a*) $\begin{array}{r} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \hline \end{array}$	(*b*) $\begin{array}{r} 2 \\ -\frac{1}{2} \\ \hline \end{array}$	(*c*) $\begin{array}{r} 3 \\ -1\frac{1}{4} \\ \hline \end{array}$
(*d*) $\begin{array}{r} \frac{1}{6} \\ -\frac{5}{6} \\ \hline \end{array}$	(*e*) $\begin{array}{r} 5\frac{1}{3} \\ -2\frac{2}{3} \\ \hline \end{array}$	(*f*) $\begin{array}{r} 4\frac{1}{4} \\ -1\frac{3}{4} \\ \hline \end{array}$

O leitor deve examinar os exemplos para determinar como diferem e como aumentam em complexidade.

3) O teste-diagnóstico em si deve consistir em filas com três exemplos, no mínimo, [10] de cada tipo dado acima, para assegurar um diagnóstico digno de confiança. Um exemplo do desenvolvimento de um teste para diagnóstico é dado neste Capítulo. Se um aluno erra apenas um exemplo, em um único grupo de exemplos, o êrro pode ser considerado casual. Se há dois ou mais erros, em uma única fila, é indicada uma dificuldade persistente, cuja natureza deve ser determinada pelo método adequado, como os que são usados no diagnóstico individual, descrito há pouco.

4) Os testes para diagnosticar o desenvolvimento devem ser guiados adequadamente e com ajuda especial. Êstes podem estar incluídos em livros, ou compor-se de material suplementar, preparado pelo professor.

Testes semelhantes para diagnosticar o desenvolvimento sôbre tôdas as operações com números inteiros, frações e decimais são auxílios valiosos do ensino e devem ser usados na sala de aula. Quando não estão incluídos no livro, o professor, fàcilmente, pode desenvolvê-los, como foi descrito acima.

[10] BRUECKNER (L. J.) e HAWKINSON (E.), "Optimum Arrangement of Items in a Diagnostic Test in Fractions", *Elementary School Journal*, 34:351-357.

Teste-Diagnóstico na Subtração de Frações (Subunidade II)

	(*a*)	(*b*)	(*c*)	
1)	$\begin{array}{r} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 \\ -\frac{3}{4} \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 \\ -\frac{7}{8} \\ \hline \end{array}$	( )
2)	$\begin{array}{r} 2 \\ -\frac{1}{4} \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 3 \\ -\frac{1}{2} \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 4 \\ -\frac{5}{6} \\ \hline \end{array}$	( )
3)	$\begin{array}{r} 4 \\ -1\frac{1}{2} \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 5 \\ -2\frac{3}{4} \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 6 \\ -5\frac{7}{8} \\ \hline \end{array}$	( )
4)	$\begin{array}{r} 1\frac{1}{6} \\ -\frac{5}{6} \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 1\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 1\frac{3}{8} \\ -\frac{7}{8} \\ \hline \end{array}$	( )
5)	$\begin{array}{r} 5\frac{1}{3} \\ -2\frac{2}{3} \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 5\frac{1}{4} \\ -3\frac{2}{4} \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 6\frac{2}{5} \\ -5\frac{4}{5} \\ \hline \end{array}$	( )
6)	$\begin{array}{r} 6\frac{1}{4} \\ -2\frac{3}{4} \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 5\frac{3}{8} \\ -2\frac{7}{8} \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 7\frac{1}{6} \\ -6\frac{5}{6} \\ \hline \end{array}$	( )

As técnicas de diagnóstico descritas nas seções precedentes ajudarão o professor e o aluno a localizar áreas específicas de dificuldades, mas devem ser usados métodos mais penetrantes para determinar a natureza exata de uma dificuldade temporária, ou de longa duração, e, se possível, as causas do aproveitamento insatisfatório, a fim de que possa ser aplicado o tratamento corretivo apropriado.

TESTE-DIAGNÓSTICO E AUTO-AJUDA EM ARITMÉTICA

TESTE N.° 10-A

Por Leo J. Brueckner

Teste-Diagnóstico em Divisão por Dois Algarismos

Nome.................................Série..........Idade............

Escola................Professor.................Sala..........Data......

I. PROCURAR OS QUOCIENTES

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	Corretos I.
1)	60|10	80|20	240|40	300|60	630|90	1..........
2)	43|10	69|20	86|30	358|50	528|70	2..........
3)	89|44	75|24	306|51	599|85	402|79	3..........
4)	81|24	211|37	412|43	511|58	110|16	4..........

Total...............

II. MULTIPLICAÇÃO E SUBTRAÇÃO NA DIVISÃO

Complete os exemplos. Os quocientes estão corretos.

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	II.
1)	162|48 3	349|67 5	878|94 9	479|60 7	372|89 4	128|17 7	1.......
2)	126|56 2	534|86 6	690|76 9	183|57 3	631|84 7	319|39 8	2.......
3)	403|59 6	211|24 8	106|19 5	391|48 8	186|87 2	164|18 9	3.......

Total...........

AUTO-AJUDA EM DIVISÃO POR DOIS ALGARISMOS

Estude os exemplos de uma fila de cada vez, para ver que os quocientes e os restos, quando existem, estão corretos. Depois copie os exemplos num papel, sem as respostas, e divida. Verifique suas respostas, para ver se estão corretas.

I. UM ALGARISMO NO QUOCIENTE

Linhas 1-2: Divisão por dezenas exatas

Linha 3: Divisão por outro número de dois algarismos; não há necessidade de correção do primeiro algarismo do quociente

Linha 4: Divisão por outro número de dois algarismos; há necessidade de correção no quociente

	a	*b*	*c*	*d*	*e*
1)	60|10 60 6	80|20 80 4	240|40 240 6	300|60 300 5	630|90 630 7
2)	43|10 40 4 3	69|20 60 3 9	86|30 60 2 26	358|50 350 7 8	528|70 490 7 38
3)	89|44 88 2 1	75|24 72 3 3	306|51 306 6	599|85 595 7 4	402|79 395 5 7
4)	81|24 72 3 9	211|37 185 5 26	412|43 387 9 25	511|58 464 8 47	110|16 96 6 14

PARA EXERCÍCIO EXTRA (COPIAR E DIVIDIR)

1)	60|20	70|10	320|40	560|70	810|90
2)	56|10	48|20	75|30	367|60	702|80
3)	86|43	59|21	128|32	599|85	617|76
4)	600|87	402|59	263|48	318|39	128|17

VER TESTE 10B PARA TESTE EM DIVISÃO POR DOIS ALGARISMOS (DOIS OU MAIS ALGARISMOS NO QUOCIENTE)

Publicado pelo *California Test Bureau* — 5 916 Hollywood Boulevard — Los Angeles 28, California

Gráfico dos Erros

Depois de ter sido dado um teste para diagnosticar o desenvolvimento, o professor deve analisar os resultados, baseando-se nos mesmos para planos subseqüentes, de medidas corretivas. Um gráfico dos erros, como o que é mostrado abaixo, é útil para resumir os resultados para os alunos que, aparentemente, têm dificuldades fora do comum. Os alunos que cometeram apenas um êrro, em uma fila de exemplos, devem corrigir seus erros de imediato, desde que, indubitàvelmente, foi uma omissão involuntária. Para cada fila de exempos, o professor deve verificar os nomes dos alunos que erraram dois ou mais exemplos. Durante a lição seguinte, êsses alunos devem ser colocados em grupos, para diagnóstico e, caso seja necessário, nôvo ensino, enquanto os outros resolvem quaisquer exercícios do livro.

GRÁFICO DE ERROS

Filas do Teste da Pág. 489

	1	2	3	4	5	6
Maria		x		x		
Roberto			x	x	x	x
Paulo					x	x

Casos Individuais de Estudo

Necessidade de diagnóstico individualizado. A necessidade de aplicar o método de caso individual de estudo, para diagnosticar as dificuldades de aprendizagem em Aritmética, é indicada, claramente, pelos resultados de muitas investigações. Para exemplificar os tipos de erros que as crianças cometem, em um exemplo específico, o leitor deve examinar o trabalho incorreto de diferentes crianças em seis soluções de um único exemplo, na multiplicação por um número de dois algarismos terminando em zero, relatadas por Harvey.[11] A natureza e a posição da dificuldade subjacente podem ser determinadas fàcilmente pela análise das respostas escritas. O trabalho de correção deve ser ajustado às necessidades específicas de cada indivíduo.

35	35	35	35	35	35
× 50	× 50	× 50	× 50	× 50	× 50
35	175	1755	1500	55	00
175				175	175

O trabalho dado acima demonstra a falta de compreensão do papel do zero no sistema de numeração e do valor relativo. As crianças não compreenderam o significado do zero, quando aparece no multiplicador.

Verificar os erros e indicar sua posição e natureza específica é um poderoso estímulo em direção ao progresso na aprendizagem. Os professôres não ensinam, intencionalmente, as crianças a cometer erros e a usar métodos defeituosos. Os alunos devem ter construído estas idéias errôneas por si mesmos, porque não compreenderam o que lhes ensinaram.

[11] HARVEY (Lois F.), "Improving Arithmetic Skills by Testing and Reteaching", *Elementary School Journal*, 53:402-409.

Os professôres, com freqüência, não notam os raciocínios ineficientes e defeituosos que as crianças usam para resolver os exemplos maiores. Buswell[12] descobriu os seguintes *hábitos defeituosos* no transporte e na adição de números inteiros, relacionados logo abaixo, na ordem da freqüência em que ocorrem. Êstes defeitos não podem ser determinados pela análise do trabalho escrito. Podem ser descobertos ùnicamente pedindo às crianças para *resolver o exemplo em voz alta* e analisar suas respostas orais.

1) Somar transportando o númaro no fim
2) Esquecer de somar o número transposto
3) Somar o número transposto irregularmente
4) Escrever o número que vai ser transposto
5) Transpor o número errado
6) Transportar onde não é necessário
7) Escrever o número transposto na resposta
8) Somar o número transposto duas vêzes
9) Subtrair o número transposto

n = 414 casos.

Buswell relacionou hábitos defeituosos semelhantes nas outras operações com números inteiros. Êstes podem ser corrigidos por um estudo dirigido, cuidadoso.

Significação de Respostas Erradas Variáveis e Persistentes

Quando as respostas de um aluno são dadas ao acaso, irregulares e inconsistentes, o professor deve concluir que falta a compreensão básica e, com freqüência, há indiferença pela tarefa em foco. É indicada a necessidade de nôvo ensino. Quando há evidência de perseverança nas reações defeituosas, há evidência de que existe estudo, mas que devem ser tomadas medidas para estabelecer as compreensões básicas e corrigir os padrões de raciocínio.

Sem dúvida, as fontes de dificuldade são a falta de compreensão das idéias que são a base do pensamento, a falha no domínio dos fatos fundamentais, a habilidade nos cálculos e técnicas.

O seguinte comentário, feito por Spencer e Brydegaard,[13] salienta a importância da procura

[12] BUSWELL (G. T.) e JOHN (L.), "Diagnostic Studies in Arithmetic", *Supplementary Educational Monograph Nº 27*, pag. 736. Chicago: University of Chicago Press, 1926.

[13] SPENCER (P. L.) e BRYDEGAARD (M.), *Building Mathematical Concepts in the Elementary School*. Nova Iorque: Henry Holt and Company, Inc., 1952, pags. 351-352.

Uma professôra dita um teste para as crianças, na primeira série de Aritmética.

dos métodos de estudo defeituosos em Aritmética e a necessidade de uma cuidadosa ajuda no início do estudo:

Quando o estudante resolve centenas de exemplos de tipos que êle não compreende, geralmente comete muitos erros nos cálculos.

Se a criança estuda um fato numérico de forma incorreta, durante um determinado período de tempo, a forma incorreta tende a tornar-se uma resposta estudada. E uma resposta estudada tende a tornar-se, fàcilmente, um padrão. Quando o padrão do êrro está bem estabelecido, corrigir a resposta é uma tarefa muito mais difícil, nas fases iniciais do trabalho, do que a aprendizagem da resposta correta.

Ilustrações de casos individuais de estudo. Os casos individuais de estudo são de natureza clínica e são mais adequados para a aplicação no estudo do trabalho do aluno individualmente, ou a grupos de alunos que tenham dificuldade na mesma área. Entretanto, atividades como as relacionadas abaixo podem, também, ser aplicadas, informalmente, pelo professor, caso se torne necessário, no decorrer do ensino regular, para identificar e remediar qualquer dificuldade que possa impedir o domínio satisfatório de qualquer passo no desenvolvimento de uma unidade de ensino. Os métodos para diagnóstico devem ser aplicados, sempre, quando os exercícios são imprecisos ou vagarosos, ou quando está sendo feito pouco progresso. Como foi indicado no Capítulo 5, a repetição, visando decorar, nos estágios iniciais do estudo deve ser de natureza altamente clínica.

São dadas abaixo ilustrações dos métodos de aplicação no diagnóstico, em Aritmética, de várias técnicas que podem ser usadas para determinar deficiências de vários tipos. Primeiro, são dados os tipos de métodos informais que qualquer professor pode usar. No fim da lista estão descritos testes padronizados, especialmente destinados a propósitos clínicos, cuja administração exige treinamento especial.

1) Análise do trabalho escrito para descobrir respostas defeituosas, como

a) Números escritos incorretamente, como, na primeira série, número espelhado

b) Tipos de exemplos resolvidos incorretamente

c) Natureza dos erros em operações, cometidos em testes e no trabalho regular diário; dificuldades com zero

d) Formato defeituoso do trabalho; trabalho incompleto

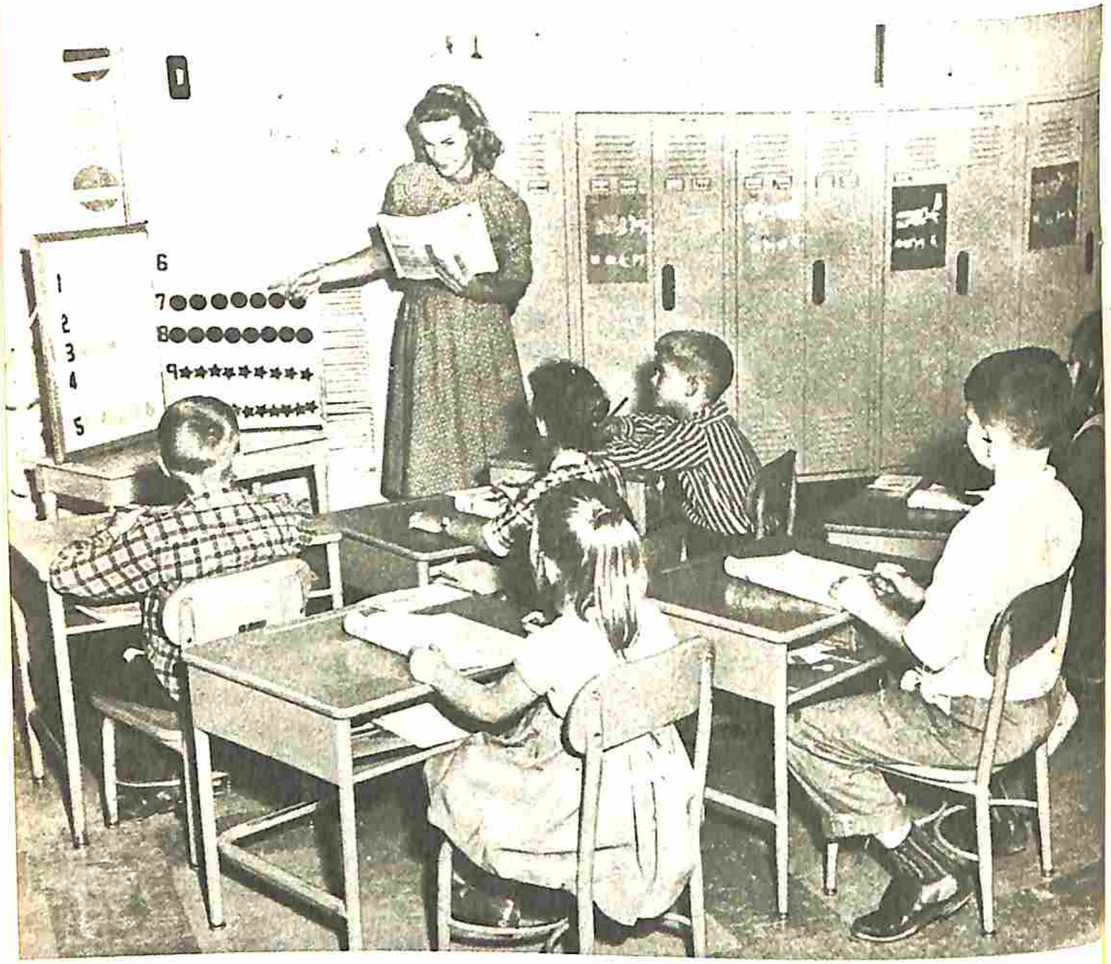
e) Extensão de uso de métodos incorretos e erros de operação na resolução de problemas.

2) Análise de exposições orais

a) Métodos defeituosos de pensamento são revelados mandando o aluno *falar em voz alta* os passos que devem ser dados na resolução de exemplos ou problemas difíceis

b) Dificuldades na leitura são reveladas quando o aluno lê o problema em voz alta

c) Pedir ao aluno para dizer como resolveu um problema revela o pensamento defeituoso.



Uma professôra dita um teste para as crianças, na primeira série de Aritmética.

dos métodos de estudo defeituosos em Aritmética e a necessidade de uma cuidadosa ajuda no início do estudo:

Quando o estudante resolve centenas de exemplos de tipos que êle não compreende, geralmente comete muitos erros nos cálculos.

Se a criança estuda um fato numérico de forma incorreta, durante um determinado período de tempo, a forma incorreta tende a tornar-se uma resposta estudada. E uma resposta estudada tende a tornar-se, fàcilmente, um padrão. Quando o padrão do êrro está bem estabelecido, corrigir a resposta é uma tarefa muito mais difícil, nas fases iniciais do trabalho, do que a aprendizagem da resposta correta.

Ilustrações de casos individuais de estudo. Os casos individuais de estudo são de natureza clínica e são mais adequados para a aplicação no estudo do trabalho do aluno individualmente, ou a grupos de alunos que tenham dificuldade na mesma área. Entretanto, atividades como as relacionadas abaixo podem, também, ser aplicadas, informalmente, pelo professor, caso se torne necessário, no decorrer do ensino regular, para identificar e remediar qualquer dificuldade que possa impedir o domínio satisfatório de qualquer passo no desenvolvimento de uma unidade de ensino. Os métodos para diagnóstico devem ser aplicados, sempre, quando os exercícios são imprecisos ou vagarosos, ou quando está sendo feito pouco progresso. Como foi indicado no Capítulo 5, a repetição, visando decorar, nos estágios iniciais do estudo deve ser de natureza altamente clínica.

São dadas abaixo ilustrações dos métodos de aplicação no diagnóstico, em Aritmética, de várias técnicas que podem ser usadas para determinar deficiências de vários tipos. Primeiro, são dados os tipos de métodos informais que qualquer professor pode usar. No fim da lista estão descritos testes padronizados, especialmente destinados a propósitos clínicos, cuja administração exige treinamento especial.

1) Análise do trabalho escrito para descobrir respostas defeituosas, como

a) Números escritos incorretamente, como, na primeira série, número espelhado

b) Tipos de exemplos resolvidos incorretamente

c) Natureza dos erros em operações, cometidos em testes e no trabalho regular diário; dificuldades com zero

d) Formato defeituoso do trabalho; trabalho incompleto

e) Extensão de uso de métodos incorretos e erros de operação na resolução de problemas.

2) Análise de exposições orais

a) Métodos defeituosos de pensamento são revelados mandando o aluno *falar em voz alta* os passos que devem ser dados na resolução de exemplos ou problemas difíceis

b) Dificuldades na leitura são reveladas quando o aluno lê o problema em voz alta

c) Pedir ao aluno para dizer como resolveu um problema revela o pensamento defeituoso.

3) Entrevista pessoal para conseguir informações

a) Fazer perguntas ao aluno sôbre seus métodos de raciocínio na resolução de um exemplo

b) Fazer perguntas ao aluno para verificar sua compreensão das operações numéricas

c) Fazer perguntas ao aluno sôbre métodos de resolução de um problema

d) Conseguir informações sôbre interêsses, atitudes e métodos de trabalho.

4) Questionários

a) Classificação dos interêsses dos tópicos, em Aritmética

b) Uso da Aritmética nas atividades extra-escolares

c) Relatórios dos colegas, pais e professôres

d) Hábitos de estudo e métodos de trabalho.

5) Observação no decorrer do trabalho diário

a) Evidência do uso da contagem e outros métodos ineficientes de trabalho

b) Velocidade no trabalho

c) Hábitos de estudo; uso de livros de referência; trabalho de construção

d) Fatôres que afetam a realização, como saúde, visão

e) Modos de usar algum instrumento de medir

f) Relações com os colegas.

6) Análise de registros existentes

a) Registro pessoal

b) Registros cumulativos.

7) Administração de testes para diagnóstico, dados no livro ou preparados pelo professor.

Passos a serem dados nos casos individuais de estudo. Os passos[14] que devem ser seguidos para fazer um estudo individual são os seguintes:

1) Administrar um teste informal, contendo séries graduadas de exemplos da operação que está sendo estudada, para localizar áreas de deficiência e determinar o nível de desenvolvimento do aluno.

2) Administrar um teste de diagnóstico analítico, adequadamente organizado em cada processo, no qual os testes gerais indicam uma deficiência real.

a) Testes de prontidão para habilidades fundamentais são encontrados em alguns livros-texto e de exercícios.

b) Testes analíticos são, algumas vêzes, encontrados em livros, com chave de exercícios para correção da dificuldade.

3) Quando êstes testes revelam pontos fracos, aplicar o seguinte método, para descobrir as dificuldades ocultas:

a) Examinar o trabalho escrito, no teste, para determinar falhas, erros, métodos incorretos, formas rudimentares etc.

b) Mandar o aluno fazer os exemplos incorretos outra vez, ou em outro papel, para verificar se as falhas persistem. Observar, também, seus métodos de trabalho, suas atitudes e comportamento sintomático.

c) No caso de dúvidas, como no método de raciocínio usado, mandar o aluno resolver o exemplo, em voz alta, e observar seu raciocínio. Registrar ilustrações de seu processo.

d) No caso de dúvidas, formular questões para determinar dificuldades ocultas que o aluno pode não ser capaz de expressar oralmente, e verificar, igualmente, sua compreensão nesta etapa.

e) Se identificou uma fraqueza aparente, em um processo, por exemplo, na subtração usada na divisão, administrar um teste de diagnóstico, em subtração, para verificar a extensão da dificuldade.

4) Repetir os passos dados acima para qualquer ou tôdas as operações onde haja dificuldades.

Casos Individuais de Estudo Aplicados à Resolução de Problemas

Métodos de diagnóstico, semelhantes aos que foram usados para determinar a natureza das deficiências nas operações, devem ser aplicados também para estabelecer a causa de um raciocínio fraco em problemas, de resultados inferiores em testes sôbre a resolução de problemas, e no trabalho escrito diário. Não há testes padronizados, destinados a propósitos clínicos, para diagnosticar as dificuldades na resolução de problemas. Podem ser usados métodos informais.

e. TRATAMENTO DAS DIFICULDADES DE APRENDIZAGEM

Causas de Dificuldades na Aprendizagem em Aritmética

Muitos fatôres contribuem para o desenvolvimento das dificuldades de aprendizagem em Aritmética. No Capítulo 15 foram discutidos a relação do currículo, métodos e materiais com o processo de aprendizagem e foram descritos meios para melhorar a situação. Entretanto, é difícil isolar sua influência em um caso particular, e daí mais difícil estabelecer uma relação de causa. Não obstante, como resultado de muitas investigações, tornou-se claro que, em muitos casos, ajustamentos no programa de ensino conduzem a um certo desenvolvimento.

Tornou-se claro, também, que certas características do aluno e do seu ambiente influenciam sua habilidade para dominar tais dificuldades na Aritmética e na Leitura. Geralmente não há uma causa ou condição única que cria uma dificuldade na aprendizagem. Entretanto, a compreensão que o professor tem do caso aumentará muito se conseguir in-

[14] BRUECKNER (Leo J.) e BOND (Guy L.), *Diagnosis and Treatment of Learning Difficulties*. Nova Iorque: Appleton-Century-Crofts, Inc., 1955, pags. 223-225.

3) Entrevista pessoal para conseguir informações

a) Fazer perguntas ao aluno sôbre seus métodos de raciocínio na resolução de um exemplo

b) Fazer perguntas ao aluno para verificar sua compreensão das operações numéricas

c) Fazer perguntas ao aluno sôbre métodos de resolução de um problema

d) Conseguir informações sôbre interêsses, atitudes e métodos de trabalho.

4) Questionários

a) Classificação dos interêsses dos tópicos, em Aritmética

b) Uso da Aritmética nas atividades extra-escolares

c) Relatórios dos colegas, pais e professôres

d) Hábitos de estudo e métodos de trabalho.

5) Observação no decorrer do trabalho diário

a) Evidência do uso da contagem e outros métodos ineficientes de trabalho

b) Velocidade no trabalho

c) Hábitos de estudo; uso de livros de referência; trabalho de construção

d) Fatôres que afetam a realização, como saúde, visão

e) Modos de usar algum instrumento de medir

f) Relações com os colegas.

6) Análise de registros existentes

a) Registro pessoal

b) Registros cumulativos.

7) Administração de testes para diagnóstico, dados no livro ou preparados pelo professor.

Passos a serem dados nos casos individuais de estudo. Os passos[14] que devem ser seguidos para fazer um estudo individual são os seguintes:

1) Administrar um teste informal, contendo séries graduadas de exemplos da operação que está sendo estudada, para localizar áreas de deficiência e determinar o nível de desenvolvimento do aluno.

2) Administrar um teste de diagnóstico analítico, adequadamente organizado em cada processo, no qual os testes gerais indicam uma deficiência real.

a) Testes de prontidão para habilidades fundamentais são encontrados em alguns livros-texto e de exercícios.

b) Testes analíticos são, algumas vêzes, encontrados em livros, com chave de exercícios para correção da dificuldade.

3) Quando êstes testes revelam pontos fracos, aplicar o seguinte método, para descobrir as dificuldades ocultas:

a) Examinar o trabalho escrito, no teste, para determinar falhas, erros, métodos incorretos, formas rudimentares etc.

b) Mandar o aluno fazer os exemplos incorretos outra vez, ou em outro papel, para verificar se as falhas persistem. Observar, também, seus métodos de trabalho, suas atitudes e comportamento sintomático.

c) No caso de dúvidas, como no método de raciocínio usado, mandar o aluno resolver o exemplo, em voz alta, e observar seu raciocínio. Registrar ilustrações de seu processo.

d) No caso de dúvidas, formular questões para determinar dificuldades ocultas que o aluno pode não ser capaz de expressar oralmente, e verificar, igualmente, sua compreensão nesta etapa.

e) Se identificou uma fraqueza aparente, em um processo, por exemplo, na subtração usada na divisão, administrar um teste de diagnóstico, em subtração, para verificar a extensão da dificuldade.

4) Repetir os passos dados acima para qualquer ou tôdas as operações onde haja dificuldades.

[14] BRUECKNER (Leo J.) e BOND (Guy L.), *Diagnosis and Treatment of Learning Difficulties.* Nova Iorque: Appleton-Century-Crofts, Inc., 1955, pags. 223-225.

Casos Individuais de Estudo Aplicados à Resolução de Problemas

Métodos de diagnóstico, semelhantes aos que foram usados para determinar a natureza das deficiências nas operações, devem ser aplicados também para estabelecer a causa de um raciocínio fraco em problemas, de resultados inferiores em testes sôbre a resolução de problemas, e no trabalho escrito diário. Não há testes padronizados, destinados a propósitos clínicos, para diagnosticar as dificuldades na resolução de problemas. Podem ser usados métodos informais.

e. TRATAMENTO DAS DIFICULDADES DE APRENDIZAGEM

Causas de Dificuldades na Aprendizagem em Aritmética

Muitos fatôres contribuem para o desenvolvimento das dificuldades de aprendizagem em Aritmética. No Capítulo 15 foram discutidos a relação do currículo, métodos e materiais com o processo de aprendizagem e foram descritos meios para melhorar a situação. Entretanto, é difícil isolar sua influência em um caso particular, e daí mais difícil estabelecer uma relação de causa. Não obstante, como resultado de muitas investigações, tornou-se claro que, em muitos casos, ajustamentos no programa de ensino conduzem a um certo desenvolvimento.

Tornou-se claro, também, que certas características do aluno e do seu ambiente influenciam sua habilidade para dominar tais dificuldades na Aritmética e na Leitura. Geralmente não há uma causa ou condição única que cria uma dificuldade na aprendizagem. Entretanto, a compreensão que o professor tem do caso aumentará muito se conseguir informações sôbre possíveis defeitos físicos e emotivos, nível mental, ajustamento pessoal e social, interêsses e motivação. Deve ser dada, idênticamente, uma consideração especial ao ambiente e aos fatôres de ensino que possam ter utilidade. As mudanças de residência são um importante fator social que afeta a organização do ensino.

As causas das dificuldades de aprendizagem são muitas. O professor, que deseja corrigir uma dificuldade no ensino de Aritmética, deve tomar as medidas necessárias para determinar o que está errado no ensino e quais os ajustamentos que devem ser feitos, em vez de perder tempo procurando a causa da dificuldade na história educacional e pessoal da criança.

Princípios de Instrução Corretiva

Quando o currículo, o ensino e o material estão ajustados às necessidades e habilidades das crianças, o número destas que não faz progresso satisfatório é reduzido ao mínimo. Entretanto, mesmo em tais condições, calcula-se que, em quase tôdas as classes, algumas crianças encontram dificuldades na aprendizagem da Aritmética. Devem ser usados processos de diagnóstico para determinar a natureza de suas necessidades.

O professor enfrenta o problema do planejamento dos passos que devem ser dados para se conseguir o desenvolvimento. Algumas vêzes são necessários cuidados médicos; outras vêzes deve ser planejada uma ajuda para melhorar as condições no lar; freqüentemente são necessárias adaptações do currículo e do material; e, por último, há necessidade de tratamento psicológico e psiquiátrico, por exemplo, quando o aluno tem uma atitude negativa devido à falta de sucesso.

Devido à falta de espaço não é possível dar uma descrição detalhada dos métodos corretivos que o professor pode aplicar. Entretanto, podemos apresentar um grupo de princípios gerais que podem ser considerados como básicos para um programa de melhoramento:

1) O tratamento deve ser baseado em um diagnóstico e deve ser individual.

2) Conseguir o interêsse e a cooperação do aluno, a fim de que êste queira resolver seus problemas com entusiasmo e voluntàriamente. Explicar-lhe a natureza de sua dificuldade e sua significação. Descrever, também, os passos que devem ser dados em direção ao sucesso.

3) Enfrentar as deficiências do aluno, diretamente. Começar pelo ponto onde possa haver sucesso no trabalho de correção, a fim de que o aluno sinta satisfação com o progresso que faz. Dar atenção especial ao tratamento das deficiências na leitura.

4) Tomar as medidas necessárias para corrigir qualquer fator físico, emocional ou de ambiente que possam interferir no progresso.

5) Fazer uma tentativa baseada na correção dos pontos fracos e não hesitar em modificar o método usado, se o progresso é lento e incerto. Fazer um uso intenso de material manipulativo e visual para tornar o trabalho significativo para o aluno, especialmente para aquêles de nível mental baixo.

6) Selecionar os métodos e o material de ensino de valor comprovado para tornar as operações significativas para o aluno. Em geral, devem ser baseados nos princípios de ensino que têm sido discutidos nos capítulos precedentes.

7) Integrar o programa corretivo com o de desenvolvimento, a fim de que o estudante sinta que não está isolado e que, ainda, é membro de um grupo.

8) Tomar medidas para assegurar o crescimento, em todos os aspectos, da personalidade do aluno. Não salientar a correção de deficiências de modo a negligenciar valôres positivos, como interêsses, atitudes e apreciações.

Exercícios Corretivos nos Fatos Numéricos

Ao planejar o trabalho corretivo nos fatos numéricos, é prudente usar material preparado para séries mais atrasadas, quando é necessário um reensino mais detalhado. No caso dos alunos mais lentos, os seguintes tipos de exercícios de adição, pelas oportunidades freqüentes de usar os números em situações sociais, são muito úteis:

1) Deixar as crianças lentas sentirem-se livres para trabalhar com materiais manipulativos e concretos, a fim de resolver operações mais difíceis que não conseguem gravar.

2) Mandá-las fazer gravuras ou desenhos mostrando as operações escolhidas, para torná-las significativas.

3) Usar uma escala numérica, contadores etc., para demonstrar os agrupamentos numéricos.

4) Mandar as crianças dramatizar várias operações básicas.

5) Escolher duas crianças para trabalhar juntas no estudo de grupos de fatos fundamentais.

6) Mandar as crianças trabalhar aos pares, em suas séries de cartões, com os fatos, verificando cada uma o trabalho da outra.

7) Usar uma grande variedade de jogos interessantes, brincadeiras e competições para motivar a prática.

8) Determinar aos alunos que conservem gráficos demonstrando seu progresso, do mesmo conjunto de fatos numéricos ou em sua própria série de cartões com os fatos, em diversos testes escritos semanais.

9) Encorajar as crianças, no estudo dos fatos fundamentais, a

usar generalizações e relações conhecidas e descobrir outras.

10) Encorajar as crianças a deixar métodos imaturos e vagos de encontrar a resposta, em favor de outros mais maduros.

11) Não deixar de elogiar os alunos e de fazer comentários sôbre o progresso que estão fazendo.

12) Salientar que a precisão nos fatos básicos é necessária para dominar qualquer processo. Adiar a apresentação de uma nova etapa interessante, até que os fatos básicos estejam razoàvelmente bem controlados.

Causas de Dificuldades no Estudo de Operações Numéricas

Os estudos-diagnóstico evidenciaram que as causas de dificuldade mais comuns, na aprendizagem das operações numéricas, são:

1) Falta de compreensão do significado dos números

2) Falta de conhecimento do motivo por que os números se comportam, como o fazem, na contagem e nas operações numéricas

3) Falta de conhecimento dos fatos básicos e das relações entre êles, conduzindo a respostas adivinhadas e incorretas

4) Falta de compreensão do significado das operações numéricas e dos passos dados para resolver os exemplos

5) Incapacidade para fazer cálculos com rapidez e precisão razoáveis

6) Falta de contrôle das habilidades necessárias para a subtração na divisão

7) Uso de métodos ineficientes e não-sistemáticos para fazer operações.

Tôdas essas causas de dificuldade podem ser identificadas pelo uso de diagnósticos apropriados. O trabalho corretivo, na maioria dos casos, envolve a adaptação e aplicação de métodos de ensino que foram descritos nos capítulos anteriores, ajustáveis às necessidades de cada criança em particular.

Causas de Dificuldades na Resolução de Problemas e no Pensamento Quantitativo

As causas de deficiência na resolução de problemas e no pensamento quantitativo classificam-se nas seguintes categorias:

1) Significado das operações numéricas e percepção das relações entre elas

2) Capacidade para operar com números

3) Capacidade para sentir as relações quantitativas relacionadas com os problemas verbais

4) Contrôle de tipos especiais de habilidades de leitura exigidos na resolução de problemas.

5) Conhecimento do vocabulário de natureza quantitativa

6) Conhecimento de informações essenciais, fatos, regras e fórmulas

7) Amplitude de conhecimento sôbre as utilidades da Aritmética, quando aplicada em situações sociais

8) Prática na resolução de problemas.

Essas limitações surgem de causas como baixo nível de capacidade mental do aluno, ambiente e experiências sociais limitados, capacidade de leitura inferior, metas limitadas e ineficiência do programa e dos métodos de ensinar Aritmética.

O uso de métodos de ensino como os descritos no Capítulo 15 é utilíssimo para melhorar o nível de capacidade na resolução de um problema.

Ajustamentos Para os Alunos Mais Lentos

Podem ser feitos, no programa de ensino, ajustamentos de vários tipos, pelo professor, na sala de aula, para satisfazer às necessidades das crianças mais lentas. As seguintes são algumas das técnicas mais úteis:

1) Usar à vontade experiências sociais e concretas, para desenvolver compreensão e enriquecer as experiências passadas.

2) Proporcionar maiores oportunidades para trabalhar com material concreto, no desenvolvimento dos fatos básicos e na demonstração do significado de um processo.

3) Usar material visual variado, para capacitar o aluno a visualizar as situações relacionadas e a compreender o significado das operações.

4) Certificar-se de que está apresentando etapas bem graduadas em um assunto nôvo, a fim de não apresentar, ao mesmo tempo, mais de uma dificuldade nova.

5) Graduar a apresentação dos passos sucessivos, em um processo nôvo, por intervalo de tempo mais longo.

6) Planejar mais tempo para os exercícios de fração e variá-los para evitar a monotonia, usando jogos e uma grande variedade de situações e aplicações sociais.

7) Providenciar uma grande quantidade de exercícios, como os que se encontram nos livros. É necessário, também, maior atenção à revisão do trabalho.

8) Dar atenção considerável à orientação das atividades de leitura dirigidas para desenvolver habilidades de leitura, em conexão com o uso do livro e do material suplementar.

9) Adiar a apresentação de um assunto nôvo até certificar-se de que o aluno adquiriu habilidades e conceitos essenciais para seu domínio. Um programa para a prontidão é fundamental.

10) Fazer uso considerável de material para explanações e de auxílios visuais, no início da apresentação de um processo, para ajudar o aluno a visualizar o método de trabalho.

11) Se possível, determinar, para os alunos mais lentos, apenas as atividades e problemas do livro, desde que não os levem a sentir-se frustrados.

12) Fazer uso de experiências nas quais haja uma grande variedade de atividades e verificar se os estudantes mais lentos estão recebendo tarefas que os interessem e nas quais possam ser bem sucedidos.

13) Verificar, pela observação de seus hábitos de trabalho e por meio de questionários, as evidências de dificuldades e falta de compreensão.

14) Aplicar, sistemàticamente, testes de diagnóstico para localizar, no início do estudo, pontos fracos. Repetir tantas vêzes quantas sejam necessárias.

15) Prevenir a prática de erros e os métodos defeituosos, insistindo no domínio de cada passo antes da apresentação de um passo nôvo.

16) Reduzir as exigências do currículo para os alunos mais lentos, eliminando os cálculos mais difíceis, como a adição e subtração de frações com denominadores diferentes muito difíceis, e a multiplicação e divisão de frações ordinárias e decimais que tenham pouco uso social. Salientar o domínio de habilidades de valor geral na vida diária.

A última das sugestões dadas acima, isto é, a simplificação do currículo, é indubitàvelmente a mais fundamental. Os alunos mais lentos não têm a capacidade mental exigida para dominar os processos mais difíceis com frações e decimais. Se êsses tópicos são ensinados aos alunos mais lentos, devem ser apresentados, apenas, com propósitos informais. Se, subseqüentemente, a carreira escolhida pelo indivíduo exige que êle saiba fazer tais cálculos, o aumento da maturidade mental e das necessidades individuais facilitará muito a aprendizagem como parte do programa de treinamento nos cursos vocacionais.

O Capítulo 17 contém uma grande variedade de sugestões de como ampliar a aprendizagem de Aritmética, especialmente para as crianças mais capazes.

QUESTÕES, PROBLEMAS E TÓPICOS PARA DISCUSSÃO

1. Que é teste padronizado de aproveitamento? Quais os testes de Aritmética padronizados que são administrados nas escolas locais? Como estão as classes locais, comparadas com os padrões?

2. Quais os tipos de testes, incluídos nos livros de Aritmética, que são usados no local? Em outras áreas?

3. Tente conseguir os resultados do teste de alguma classe e analise os resultados para determinar a escala de diferenças individuais no aproveitamento. Como são os resultados, comparados com os que foram dados na Tabela A, pág. 475?

4. Compare o nível de aproveitamento de diversas crianças com os testes de aproveitamento, em diversas áreas do currículo, para calcular como seus resultados variam nos vários testes. Os resultados são semelhantes? Discuta alguns dos resultados mais interessantes.

5. Por que as variações do resultado dos testes na quinta série são maiores em Leitura do que em Aritmética?

6. Avalie as diferenças, no nível de aproveitamento de uma criança, em testes sôbre diversos aspectos da Aritmética mostrados no gráfico da pág. 475.

7. Que significa *diagnóstico geral? diagnóstico analítico? casos de estudo individual?*

8. Se possível, exemplifique cada um dos quatro tipos de casos descritos na pág. 480. Quais as condições que acha que podem conduzir ao que foi definido como *um caso complexo de incapacidade*? Conhece casos semelhantes? Se conhece, descreva o comportamento da criança e suas dificuldades.

9. Qual é a função dos testes de *prontidão*? Alguns membros da classe podem, voluntàriamente, fazer um relatório para a classe sôbre as referências dadas ao pé das págs. 483 e 484.

10. Aplique os dois métodos para verificar o conhecimento dos fatos básicos descritos nas págs. 484 e 485. Marque os pontos e leia os resultados para a classe. Qual o método que prefere?

11. Demonstre por que as seis características de aproveitamento dadas na pág. 484 devem ser consideradas na avaliação do trabalho de um aluno. Como pode ser avaliada cada característica?

12. Que espera dos resultados de Koenker com respeito às diferenças características, registradas na página 487, entre os bons e maus estudantes? Por que um ponto fraco específico, em qualquer aspecto da divisão, pode ser a causa do pouco aproveitamento?

13. Analise o teste para diagnóstico, na divisão, dado na pág. 490. Que mede cada parte do teste?

14. Que é *teste para diagnóstico do desenvolvimento*? Como pode ser organizado?

15. Examine os livros que possam ser considerados úteis, para verificar se contêm testes de diagnóstico de desenvolvimento do tipo discutido neste Capítulo.

16. Selecione qualquer área da Aritmética e prepare um teste de diagnóstico para ela, semelhante ao teste de diagnóstico dado na pág. 490.

17. Se possível, administre um teste para diagnóstico e prepare um *gráfico dos erros* dos resultados.

18. Analise os erros, nos seis exemplos da pág. 492. Por que é necessário fazer uma análise da natureza de tais erros, no caso de cada criança em particular?

19. Por que as crianças cometem *erros* em Aritmética?

20. Discuta a lista de falhas no *transporte* dadas na pág. 493. Como as avalia?

21. Por que os erros freqüentemente variam? Por que os erros persistem com freqüência? Pode dar exemplos?

22. Quais os métodos de diagnóstico que podem ser usados pelo professor para determinar os tipos de dificuldades que um determinado aluno tem nas operações numéricas?

23. Como o professor pode calcular o tempo para o diagnóstico e tratamento das dificuldades no estudo de Aritmética?

SUGESTÕES PARA LEITURA

Brownell, W. A. *Learning the Multiplication Combinations.* Durham, North Carolina: Duke University Press, 1943. Chapters 4, 7, 8, and 9.

Brueckner, L. J. "The Development and Validation of an Arithmetic Readiness Test," *Journal of Educational Research,* 40:496-502.

Brueckner, L. J. and Bond, Guy L. *The Diagnosis and Treatment of Learning Difficulties.* New York: Appleton-Century-Crofts, Inc., 1955. Chapters 3, 8, and 9.

"*Educational Diagnosis,*" *Thirty-fourth Yearbook of the National Society for the Study of Education.* Bloomington, Ill.: Public School Publishing Co., 1935. Chapters 6, 7, 8, 10, and 14.

Harvey, Lois F. "Improving Arithmetic Skills by Testing and Reteaching," *Elementary School Journal,* 53:402-409.

Fernald, Grace M. *Remedial Techniques in Basic School Subjects.* New

York: McGraw-Hill Book Co., 1943. Chapter 14.

Koenker, R. "Arithmetic Readiness at the Kindergarten Level," *Journal of Educational Research.* 42: 218-233.

McSwain, E. T. and Cooke, R. J. *Understanding and Teaching Arithmetic.* New York: Henry Holt and Co., 1958. Chapter 12.

Spencer, P. L., and Brydegaard, M. *Building Mathematical Concepts in the Elementary School.* New York: Henry Holt and Co., Inc., 1952. Chapter 10.

17

Enriquecimento da Aprendizagem em Aritmética

Em muitas escolas, esforços estão sendo feitos para enriquecer o trabalho, em Aritmética, para todos os alunos, particularmente para as crianças mais bem dotadas. A importância dêsses esforços se faz maior devido ao alarmante decréscimo do número de estudantes que continuam o estudo de Matemática no ginásio. O progresso da ciência e da tecnologia depende do desenvolvimento de uma geração de estudantes que sejam competentes em Matemática e que tenham interêsse nas aplicações sistemáticas dos métodos quantitativos. Êstes são os estudantes que resolverão os problemas que surgirem em nossa sociedade moderna.

Neste Capítulo discutiremos os seguintes tópicos:

a. Natureza do enriquecimento
b. Propósitos do enriquecimento
c. Enriquecimento da aprendizagem de operações numéricas para tôdas as crianças
d. Uso da biblioteca
e. Atividades especiais para as crianças mais capazes
f. Processos gerais de enriquecimento

a. NATUREZA DO ENRIQUECIMENTO

Na maioria das classes, nas escolas elementares, há uma grande variação nos estágios de progresso das crianças e na marcha com que aprendem Aritmética. O professor enfrenta o problema de fazer os necessários ajustes no conteúdo do currículo, assim como nos métodos e material de ensino, para satisfazer a diferenças individuais. Por outro lado, as exigências do currículo podem ser variadas. Por exemplo, os estudantes mais lentos, na quinta série, podem não dominar os processos de adição e subtração de frações ordinárias além daquelas que têm considerável utilidade social, enquanto as crianças mais capazes podem, com facilidade, compreender as frações mais difíceis e usadas

com menos freqüência. Além disso, os estudantes lentos devem receber permissão para usar recursos exploratórios, manipulativos e visuais, livremente, no domínio das operações numéricas, enquanto os estudantes adiantados têm muito menos necessidade de tais auxiliares do ensino, exceto nos estágios iniciais da aprendizagem. Os estudantes devem ser encorajados a operar no mais alto nível de abstração em que são capazes de compreender o trabalho.

Na aula de Aritmética, freqüentemente, é desejável que o grupo inteiro funcione como um todo. Entretanto, dentro dêste todo, o professor pode achar possível formar subgrupos para operar com alguns dos aspectos difíceis do trabalho. A oportunidade pode surgir para determinar tarefas especiais para uma ou mais crianças mais capazes, exigindo investigação local, exploração e pesquisas. Certos aspectos do estudo de uma unidade de trabalho podem ser apresentados como um desafio a todos os membros da classe. Dêste modo, é possível ajustar o trabalho, na unidade, às diferenças de interêsse e habilidade das várias crianças, especialmente para enriquecer o trabalho para as crianças bem dotadas.

O ideal é o professor tentar proporcionar enriquecimento a tôdas as crianças. Quando o trabalho da classe é ajustado às necessidades das crianças mais lentas, as mais capazes não se sentem estimuladas. Elas necessitam de novos canais para sua energia, que as conduzirão a empreender não só as tarefas marcadas pelo professor, mas, também, a fazer investigações independentes de assuntos que as interessem, relacionados com o tópico que está sendo estudado. O professor deve estar sempre preparado para ajudar a essas crianças mais capazes, auxiliado pelos livros da biblioteca que contenham informações básicas ou outras fontes de material adequado. Para elas, a biblioteca é a chave do enriquecimento do programa.

b. PROPÓSITOS DO ENRIQUECIMENTO

Os propósitos básicos do enriquecimento podem ser expostos, brevemente, da seguinte maneira:

1) Desenvolver habilidades e ricas experiências sôbre o conhecimento técnico do número e as utilidades da Aritmética.

2) Desenvolver maior sensibilidade aos métodos para usar os números, na análise e interpretação dos aspectos quantitativos de experiências, em tôdas as áreas do currículo e nos acontecimentos da vida diária.

3) Estimular o aluno a atingir níveis mais altos de operação e resolução de problemas.

4) Descobrir, explorar e estimular interêsses, aptidões e potencialidades da criança no campo da Matemática.

5) Estabelecer estudos e hábitos de trabalho independentes e o uso eficiente de material impresso de todos os tipos.

É evidente que a consecução dêstes propósitos é um processo contínuo, que deve começar nas primeiras séries e estender-se através do Curso Secundário e além. Nossas escolas[1] enfrentam o desafio de satisfazer ao crescente aumento de exigências de indivíduos competentes no campo da Matemática e que sejam capazes de operar, hàbilmente, com os tipos de raciocínio quantitativo exigidos em um mundo no qual o rápido progresso científico e a aplicação de métodos de automação fazem grandes exigências de habilidades matemáticas.

O progresso recente no campo da cibernética[2] mostra que os métodos de computação automática estão liberando a mente dos cientistas de modo a permitir-lhes pensar em problemas de maior interêsse para todos nós, os quais são muitas vêzes prejudicados pelo trabalho de cálculos complicados.

c. COMO ENRIQUECER A APRENDIZAGEM DE OPERAÇÕES NUMÉRICAS PARA TÔDAS AS CRIANÇAS

Nos capítulos anteriores, procuramos elevar o nível de pensamento quantitativo da criança no trato com os números, operações numéricas, medidas e solução de problemas. Quando as crianças compreendem a Aritmética, e são capazes de aplicá-la inteligentemente em situações sociais, seus conhecimentos são, òbviamente, ampliados e aprofundados. Seu nível de pensamento está bem acima daquele das crianças que apenas memorizam os fatos e a mecânica das operações e agem de acôrdo com regras que podem, no momento, ter pouco sentido para elas.

A aprendizagem da Aritmética é muito enriquecida pelo conhecimento de como o sistema de numeração funciona nos processos fundamentais, pela compreensão do significado das operações, pela percepção das generalizações e relações entre os números e os processos, pela percepção das relações quantitativas nas situações da vida real e pela apreciação da contribuição que o número dá ao progresso social e à Ciência.

O professor deve reconhecer que os níveis de abstração em que as crianças, em diferentes graus de habilidade mental, podem proceder variam muito. As crianças lentas exigem mais experiências em níveis concretos que as crianças mais bem dotadas; estas podem, muito mais ràpidamente, operar em nível relativamente alto de raciocínio e generalização abstratos.

[1] FAULKNER (L. C.), "Milwaukee's In-Service Education Program", *The Arithmetic Teacher*, 4:222-223.

[2] DE LATRE (Pierre), *Thinking by Machine*. Londres: Sedgwick and Jackson, 1956, Capítulo 2.

Oportunidades para participar, com outras crianças, de atividades que são vitais e interessantes para o grupo, e trabalhar com outras em direção a metas comuns, proporcionam um valioso enriquecimento de experiências para tôdas as crianças.

d. USO DA BIBLIOTECA[3]

Os recursos da biblioteca devem ser usados, continuamente, para enriquecer o trabalho em Aritmética. A biblioteca é o coração de um programa de enriquecimento para os alunos mais dotados, com interêsse especial em Aritmética. Êles renovam seu conhecimento em material impresso de todos os tipos, obtendo as informações que desejam sôbre matérias de interêsse especial. A leitura e estudo independentes constituem um alto tipo de aprendizagem que deve ser encorajado e facilitado por uma grande variedade de material impresso adequado e bem escolhido, incluindo livros em geral, livros de referência, revistas, boletins, catálogos, e assim por diante.

Livros Para Uma Biblioteca de Aritmética

As referências relacionadas abaixo são excelentes fontes de material, adequado a todos os alunos. E o ideal seria a sua existência em tôdas as bibliotecas escolares.

1) Enciclopédias e livros de referência:

Britannica Junior
Encyclopedia Britannica
Compton's Pictured Encyclopedia
The World Almanac
The World Book

2) Livros com material histórico:

ADLER (I.), *Time in Your Life*. Nova Iorque: The John Day Co., 1955

HOGBEN (Lancelot), *Mathematics for the Million*. Nova Iorque: W. W. Norton and Co., Inc., 1937

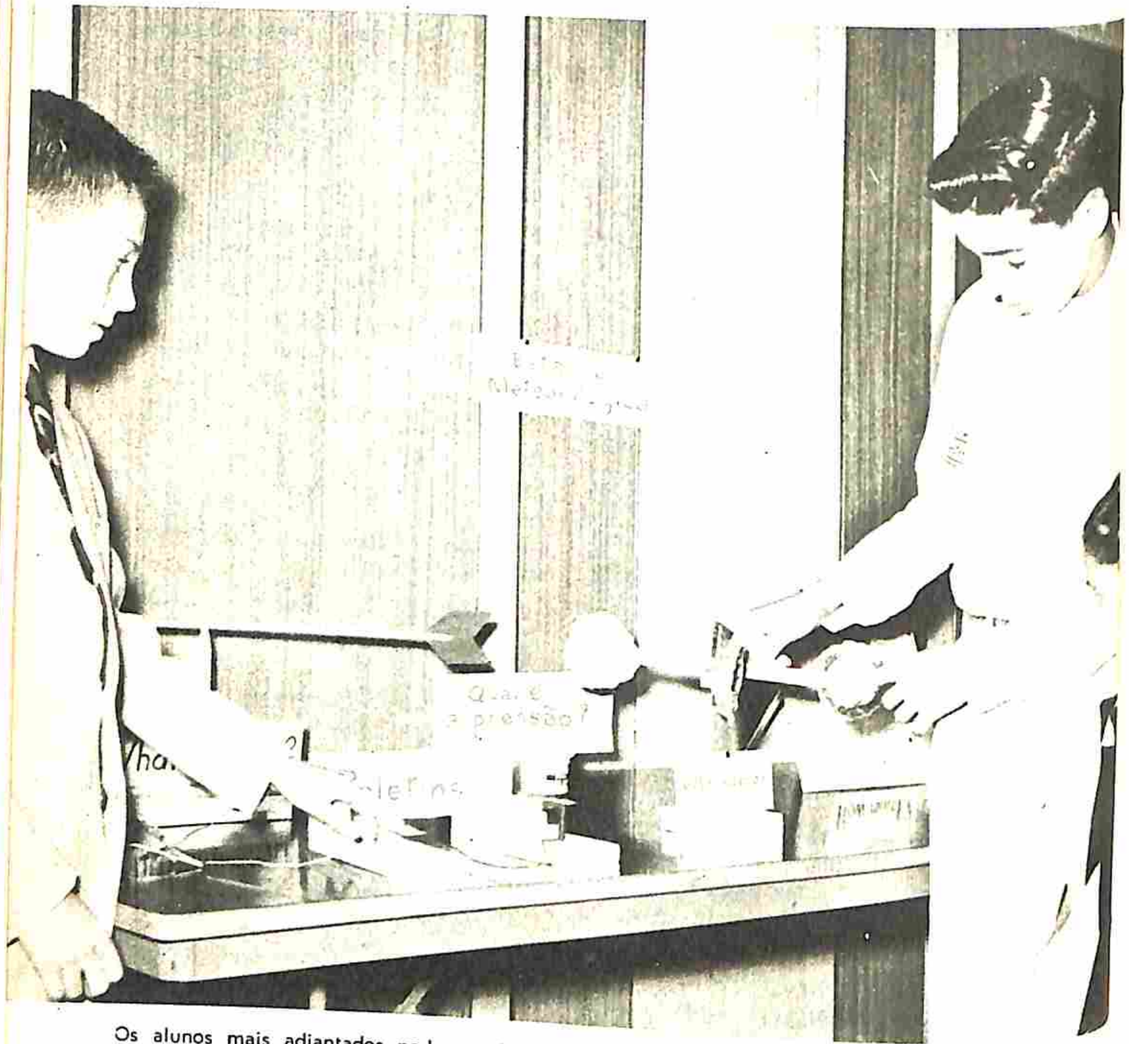
—, *The Wonderful World of Mathematics*. Garden City: Garden City Books, 1955

SANFORD (Vera), *A Short History of Mathematics*. Boston: Houghton Mifflin Co., 1930

SMITH (D. E.), *Number Stories of Long Age*. Nova Iorque: Ginn and Co., 1919

SMITH (D. E.) e GINSBURG (J.), *Numbers and Numerals*. Nova Iorque: Bureau of Publications, Teachers

[3] HUTCHESON (R.), MANTOR (E.) e HOLMBERG (M.), "The Elementary School Mathematics Library", *The Arithmetic Teacher*, 3:8-15.
HESS (A. L.), "Bibliography of Mathematics Books for Elementary School Libraries", *The Arithmetic Teacher*, 4:15-20.



Os alunos mais adiantados podem trabalhar em grupos pequenos, em cálculos matemáticos relacionados com a Meteorologia.

College, Columbia University, 1937.

3) Recreações, jogos e quebra-cabeças:

BAKST (A.), *Mathematical Puzzles and Pastimes*. Nova Iorque: D. Van Nostrand Co., Inc., 1954

BENDICK (Jeanne), *How Much and How Many?* Nova Iorque: McGraw-Hill Book Co., 1947

COLLINS (F. A.), *Fun with Figures*. Nova Iorque: Appleton-Century-Crofts, Inc., 1948

Enrichment Program for Arithmetic, série de panfletos para as 3ª, 4ª, 5ª e 6ª séries, oito por série. Evanston, Ill.: Row, Peterson and Co., 1956

FRIEND (N.), *Number's Fun and Fact*. Nova Iorque: Charles Scribner's Sons, 1954

HEATH (R. V.), *Mathemagic*. Nova Iorque: Dana Publications, 1953

MEYER (J. S.), *Fun with Mathematics*. Cleveland: The World Publishing Company, 1952

SMITH (D. E.), *Wonderful Wonders of One, Two, Three*. Rochester, Nova Iorque: Macfarland, 1937

SPITZER (H. F.), *Practical Classroom Procedures for Enriching Arithmetic*. St. Louis: Webster Publishing Co., 1956

WEEKS (R.), *Boys' Own Arithmetic*. Nova Iorque: E. P. Dutton, 1924

Uso de Livros de Referência

Os alunos bem dotados podem conseguir uma cópia de um livro, como o *World Almanac* ou uma enciclopédia infantil, e procurar informações sôbre os pontos que possam interessá-los, como os seguintes:

1) O tempo necessário para o primeiro vôo em tôrno do mundo.

2) O ano em que foram inventados a televisão, o rádio e o telefone

3) Registros esportivos; resultados dos jogos das Olimpíadas

4) A altura da montanha mais alta de cada continente

5) Os pesos padronizados

6) As distâncias para estrêlas e planêtas importantes.

O professor deve usar métodos racionais para desenvolver o interêsse em livros de referência que contenham material relacionado com a Aritmética. Devem ser usados não apenas para auxiliar uma tarefa marcada, mas o professor deve também encorajar as crianças a consultar tais fontes independentemente, durante o tempo livre, quando estiver terminado o trabalho regular. Tanto o professor quanto o bibliotecário devem dar, às crianças, a ajuda necessária para a consulta dêste material de referência.

Unidades de Enriquecimento Para os Alunos Mais Bem Dotados

Muitas cidades estão trabalhando no desenvolvimento de unidades especiais para as crianças bem dotadas, nas quais é salientada a aplicação da Matemática e da Ciência e o uso das bibliotecas. A unidade descrita abaixo, para as 5ª e 6ª séries, foi desenvolvida e verificada por uma comissão de professôres de Culver City, Califórnia, sob a direção de Vincent Alexander.

COMO OS HOMENS NAVEGAM NO MAR E NO AR

(Uma unidade de enriquecimento, em Aritmética, para as Quinta e Sexta Séries)

A Matemática desempenha um importante papel na navegação por mar e por ar. No estudo desta unidade, você aprenderá alguns dos métodos e instrumentos usados na navegação por mar e por ar. Há algumas questões que devem ser respondidas. Devem ser completadas, também, algumas das atividades relacionadas em *Algumas Coisas Interessantes Para Fazer.*

Livros e Referências Que Devem Ser Lidos

Compton's Pictured Enciclopaedia

HOGBEN (Lancelot), *The Wonderful World of Mathematics*, Capítulo "Estrêlas e Rumos"

HYDE (Margaret), *Flight Today and Tomorrow*; Capítulos "Flying Without Guesswork" e "You Fly Blind"

LEWELLAN (John), *Jet Transportation*

SCHNEIDER (Herman), *Science in Our World*

World Book Encyclopaedia

Algumas Questões Para Responder

1) Questões sôbre Pilotagem
   a) Que significa o método de navegação chamado pilotagem?
   b) Como é usado na navegação por ar e por mar?
   c) Como o pilôto ou navegador determina sua posição quando usa êste método?
2) Questões sôbre Caminho Calculado
   a) Como o pilôto ou navegador traça a direção para encontrar seu destino?
   b) Como o vento afeta a velocidade de um avião no ar?
   c) Como o vento afeta o caminho calculado de um avião na decolagem ou aterrissagem?
   d) Como o vento e as correntes afetam o curso de um avião no mar?
3) Questões sôbre Navegação pelas Estrêlas
   a) Como o pilôto ou o navegador calcula sua posição "procurando" o sol ou as estrêlas?
   b) Como é usado um sextante na navegação pelas estrêlas?
   c) Como o navegador usa um cronômetro para determinar a posição?
4) Questões sôbre Navegação Eletrônica
   a) Como um pilôto voa guiado por uma onda de rádio?
   b) Como o pilôto sabe quando o avião está diretamente sôbre uma estação de rádio?
   c) Como é usado o radar na navegação por mar e por ar?
   d) Como o Sistema de Instrumentos de Terra ajuda o pilôto a aterrissar o avião quando não pode ver o campo?
5) Questões sôbre Bússola Magnética
   a) Quantos graus há em uma bússola magnética?
   b) A bússola sempre aponta para o Pólo Norte? Por quê?
   c) Que significa desvio e variação na bússola?
6) Questões sôbre Cronômetro
   a) Que é um cronômetro?
   b) Como é usado na navegação oceânica?
7) Questões sôbre Rádio
   a) Quais as informações que um pilôto ou navegador pode obter do rádio?
   b) Como o rádio difere da bússola?
8) Questões sôbre Velocímetro
   a) Como o pilôto ou o navegador usa o velocímetro?
   b) O que êste lhe informa?
9) Questões sôbre Sextante
   a) Que é um sextante?
   b) Como é usado na navegação por mar e por ar?
10) Questões sôbre o aparelho que orienta a direção
   a) Como o pilôto de um avião usa êste aparelho para calcular seu destino?
   b) Qual é a diferença entre êste meio e o de contrôle pelo rádio?
11) Qual é a informação útil que um navegador pode obter de um azimute?
12) Para que fim é usado um computador em navegação?
13) Como você pensa que um pilôto ou navegador usa a Matemática na pilotagem? No cálculo de rumo? Na navegação pelas estrêlas? Na navegação eletrônica?

Algumas Coisas Interessantes Para Fazer

1) Fazer um livreto sôbre os métodos e instrumentos usados na navegação no mar e no ar. Ilustrá-lo com desenhos ou gravuras. Dizer como é usado cada método ou instrumento.
2) Explicar à classe como o pilôto segue uma faixa de rádio.
3) Conversar com um pilôto ou convidá-lo para vir à sua sala de aula. Fazer-lhe perguntas sôbre os diferentes tipos de bússolas e como são usadas em navegação.
4) Fazer uma bússola. (Ver *Science in Our World*, pág. 24.) Explicar à sua classe por que uma bússola magnética nem sempre aponta diretamente para o Pólo Norte. Usar um desenho para ilustrar sua explicação.

Tópicos Especiais Para Leitura ou Estudo Pelas Crianças Mais Dotadas

Alguns livros contêm listas de tópicos especiais que são de interêsse para os grupos adiantados. A seguinte lista sugere as áreas que estimulam as crianças das quinta à sétima séries. As crianças devem ser estimuladas a escolher individualmente outros tópicos, mesmo que não estejam incluídos na lista preparada, sujeitos à aprovação do professor:

1) A história de nosso sistema de numeração

2) A história do valor relativo e do zero

3) A história dos pesos e medidas

4) A história de algum instrumento de precisão, por exemplo, o termômetro, o barômetro, a régua, a balança, o velocímetro

5) Como as frações são usadas nos livros de referência e dicionários

6) Como o ábaco funciona

7) Como usar a régua

8) Como trabalham as máquinas de calcular

9) A Aritmética do tempo (Meteorologia)

10) Instrumentos usados na navegação de navios e aviões

11) A velocidade dos navios, trens, aeroplanos, homens, pássaros etc. pode mudar?

12) Quais são os recordes de velocidade no Brasil e no mundo?

13) Como são as escalas do termômetro clínico?

14) Devem todos os países adotar o sistema métrico de medidas?

15) Como as equipes calculam suas médias e posições?

16) Os tipos gráficos usados nos livros e nos jornais

17) A história das frações ordinárias e decimais

18) Por que o tempo muda nas viagens de Este para Oeste e vice-versa.

e. ATIVIDADES ESPECIAIS PARA AS CRIANÇAS MAIS CAPAZES

Estão sendo organizados programas especiais, em um crescente número de escolas, para as crianças mais capazes em Aritmética.[4] Êstes incluem: (1) separação em grupos, (2) aceleração ou progresso mais rápido, (3) enriquecimento horizontal e verticalmente, e (4) instrução diferenciada.

A *separação* em grupos de crianças bem dotadas, em classes isoladas, é possível nas grandes escolas, mas é difícil nas cidades pequenas. Cidades como Nova Iorque, Long Beach e Portland tentaram êste plano. Uma limitação dêste plano é a falta de contato das crianças bem dotadas com as crianças de níveis mais baixos de capacidade.

A *aceleração* é, geralmente, conseguida pela promoção dupla dos alunos mais capazes, ou pela organização do programa de tal modo que seja completado em menos tempo que o usual. Êste plano

[4] JUNGE (Charlotte), "The Gifted Ones — How Shall We Know Them?", *The Arithmetic Teacher*, 4:141-146.
GROSSNICKLE (F. E.), "Arithmetic for Those Who Excel", *The Arithmetic Teacher*, 3:41-48.

foi muito usado duas ou três décadas atrás, mas tem sido esquecido nos anos recentes.

O *enriquecimento* do trabalho para as crianças mais capazes,[5] em tôdas as classes, é um plano que está sendo muito usado atualmente. Na última seção dêste Capítulo há numerosas sugestões específicas dos métodos de enriquecimento para as crianças matemàticamente bem dotadas.

Por *instrução diferenciada* queremos dizer fazer ajustamentos na organização da classe no currículo, nos métodos e materiais para adaptar o ensino, tanto quanto possível, à grande escala de diferenças que existe em quase tôdas as classes. Em tais circunstâncias, o professor faz um esfôrço especial para enriquecer o trabalho para as crianças mais dotadas, especialmente para aquelas que parecem ter uma habilidade fora do comum para os números.

O agrupamento dentro de uma classe mista (subagrupamento) tem muitas das vantagens da separação em grupos. Os grupos formados devem ser fluidos e não estáticos. O agrupamento deve ser usado quando parecer útil e interessante fazê-lo. O trabalho especial pode ser feito com grupos de crianças mais capazes, quando a situação adequada por si mesma se apresenta.

Os métodos de separação e aceleração são amplamente administrativos na sua natureza, e não são inteiramente satisfatórios no nível da escola elementar. O enriquecimento de experiências relacionadas com tôdas as fases da Aritmética, incluindo seus aspectos matemático e social, é uma aproximação mais promissora. A instrução e objetivos diferenciados são métodos práticos que podem ser usados em qualquer sala de aula, independente do nível de capacidade das crianças.

Há muitas atividades fora da sala de aula que proporcionam enriquecimento, como a dramatização de certos empregos da Aritmética, a preparação de exposições, as atividades possíveis em uma sala-laboratório de Aritmética, na qual há coleção de jogos, instrumentos para medir, trabalhos com números, e assim por diante, e outras atividades da escola, como bancos, lojas ou correios.

Para a discussão de atividades de enriquecimento para as séries além da escola elementar, o leitor deve consultar um capítulo especial em um volume dos mesmos Autores.[6]

f. PROCESSOS GERAIS DE ENRIQUECIMENTO

Nas seções seguintes, possíveis atividades de enriquecimento são

[5] GLENNON (V. J.), "Arithmetic for the Gifted Child", *Elementary School Journal*, 58:91-96.

[6] BRUECKNER (L. J.), GROSSNICKLE (F. E.) e RECKZEH (J.), *Developing Mathematical Understandings in the Upper Grades*. Filadélfia: The John C. Winston Co., 1957, Capítulo 14.

agrupadas sob os seguintes títulos:

1. Explorando o sistema de numeração
2. Enriquecendo o trabalho com operações numéricas
3. Recreação com números
4. Enriquecendo a resolução de problemas e o desenvolvimento do vocabulário
5. Métodos variados de enriquecimento.

1. Explorando o Sistema de Numeração

Uso do Sistema de Numeração

O sistema de numeração oferece algumas das oportunidades mais diretas para enriquecer o currículo em Aritmética.

Exercícios como os seguintes exploram a compreensão do aluno sôbre o sistema de numeração:

a) Escreva o maior número possível com cinco algarismos.

b) Qual é o maior número possível, com quatro algarismos, que se pode escrever usando os algarismos 4, 3, 1 e 6? o menor número inteiro possível com os quatro algarismos?

c) O 4 em 42 é quantas vêzes o 4 em 400? em 24? em 0,64?

d) Use qualquer um dos algarismos 1, 3, 6, 8 ou 9, apenas uma vez em cada número, para escrever:

1) o maior número com três casas decimais menor que 1 (0,986)
2) o menor número com três casas decimais que é maior que 0,4 (0,613)
3) o menor número possível com 8 na casa das unidades (8,1369)

e) No exemplo ao lado dizer qual o efeito, no produto, se movermos a vírgula decimal:

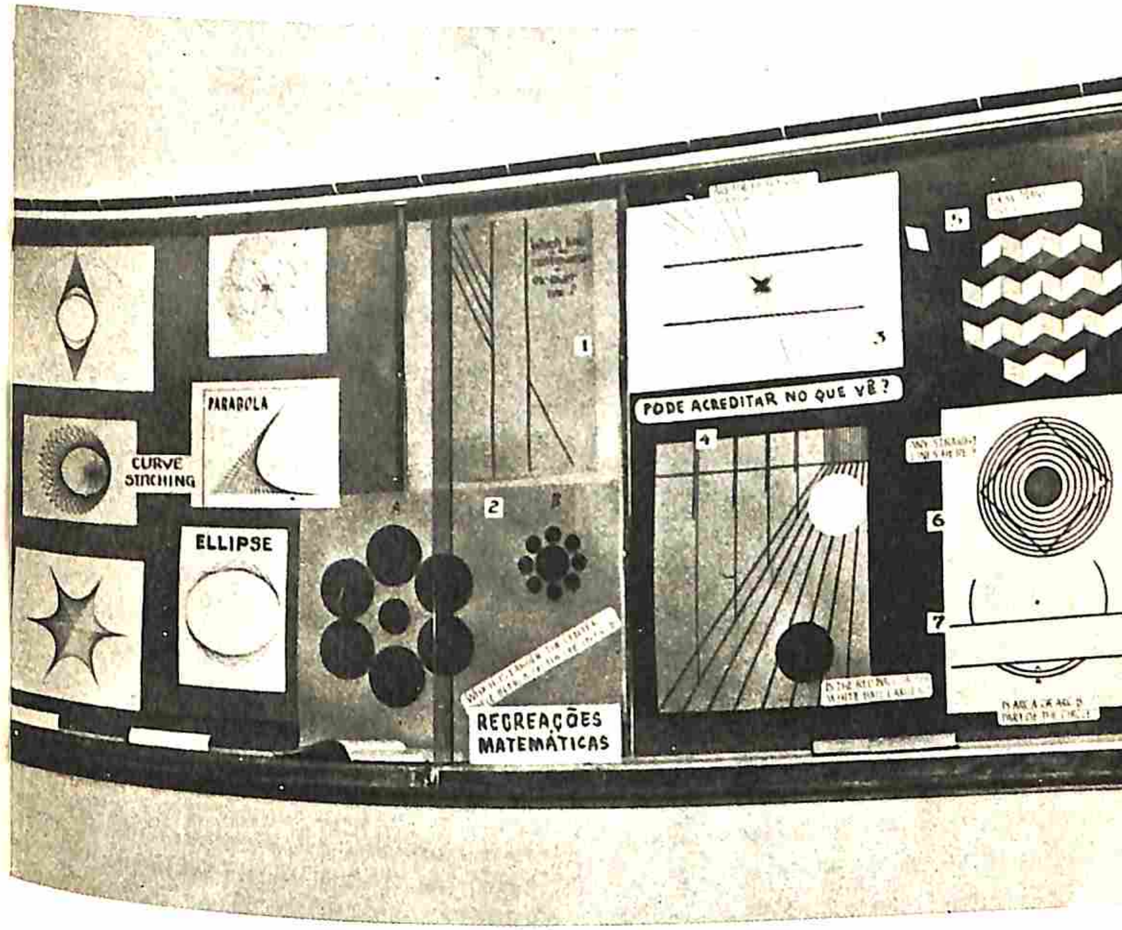
$$\begin{array}{r} 72{,}5 \\ \times\ 3{,}4 \\ \hline \end{array}$$

1) uma casa para a esquerda em ambos os números (divide-se o produto por 100)
2) uma casa para a direita em ambos os números (multiplica-se o produto por 100)
3) uma casa para a esquerda em 72,5, e uma casa para a direita em 3,4 (nenhuma mudança no produto)

f) Demonstre como calcular a soma de $\frac{3}{10} + \frac{275}{1000}$ de duas maneiras diferentes.

g) Organize os seguintes números de acôrdo com seu valor. Comece pelo número de menor valor:

1) $\frac{1}{2}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{4}$.
2) 0,046, 0,54, 0,089, 0,09, 0,5, 0,12, 1,1.
3) 22, 2,2, 0,22, 0,022, 20,2, 2,02.
4) $\frac{3}{4}$, 0,5, $\frac{7}{10}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{2}$, 0,75, $\frac{1}{8}$



Um mural de recreações matemáticas.

Sistema de Numeração Com Bases Diferentes de 10

Os alunos mais capazes, com freqüência, gostam de aprender a escrever números em uma base diferente de 10. A maioria das enciclopédias descreve diversos sistemas numéricos. Para ter um número na base 6 é necessário ter 5 algarismos e 0. Então, para escrever os números até 100, na base 6, escreveremos:

1	2	3	4	5	10
11	12	13	14	15	20
21	22	23	24	25	30
31	32	33	34	35	40
41	42	43	44	45	50
51	52	53	54	55	100

O 10 significa 1 seis e 0 unidade.

Na base 8 os números até 10 são os seguintes:

1 2 3 4 5 6 7 10

As crianças devem escrever os números até 100. Podem escrever, também, os números até 100 em outras bases, como 2, 3, 4, 5, 7, 9.

O número 724, na base 8, é igual a 468 na base 10, como é demonstrado abaixo:

Base 10	Base 8
4 —	4 — 4
20 —	2 × 8 — 16
700 —	7 × 8 × 8 — 448
724	468

Números Primos

Um número primo pode ser dividido sòmente pela unidade e por êle mesmo. Os primeiros quatro números primos são 1, 2, 3 e 5. As crianças mais capazes podem escrever todos os números primos de 1 a 100.

Progressões Numéricas

Progressão numérica é uma série de números na qual a seqüência é organizada de acôrdo com um determinado plano. Assim, na seqüência 2 — 4 — 6 — 8 — ?, o número seguinte deve ser 10, porque o intervalo entre os números é 2.

As progressões seguintes variam de fáceis a difíceis. Podem ser colocadas no quadro-negro ou em fôlhas de papel, com instruções para calcular os próximos dois números nas séries:

1) 5—10—15—20—25— ....
2) 3—6—9—12—15— ....
3) 1—2—4—5—7— ....
4) 1—2—5—6—9— ....
5) 1—3—7—9—13— ....
6) 1—4—9—16—25— ....
7) 1—8—27—64—125— ....
8) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{32}$ ....

2. Enriquecendo o Trabalho com Operações Numéricas

Procura do Número Ausente nos Exemplos

Para calcular os números que estão faltando, nos exemplos abaixo, o aluno deve usar seu conhecimento das relações numéricas e das maneiras pelas quais funciona o sistema de numeração na computação.

a) Números inteiros

```
 ?704     ???|_90     64?      4?1
-2?6?     810   ?   ×   ?      25?
-----     ---         ----     ?84
 44?7      35         3225     ---
                               900
```

b) Frações

```
   ?        6½        4½     3½ ÷ ? = 4
 - 4¾      + ?      × ?
 ----      ---      ----
  7½         8       22½
```


c) Medidas

Dar as unidades de medidas ausentes:

```
  8 — 3 —      18 — 14 —       6 — 7 —
+ 7 — 3 —      11 — 48 —         × 5
---------      ---------     ---------
 16 — 2         6 — 26 —      32 — 11
```

d) Qual é o número que dividido por 20 dá o quociente 24 e o resto 17?

Exemplos Mais Difíceis Com Números Ausentes

```
a) 17?6?|_?3      b) 1???|_36
   166xx  2?4        180x  ?? (resto 5)
   -----             ----
     11?                5
      8?
     ---
     ?3?
     3??
     ---

c)   4?6
   × 2?
   ----
    4??4
    9720
   -----
   140?4
```

Mudança de Lugar dos Algarismos no Número

Escreva o número 123 456 789. Agora, multiplique o número por 8. Some 9 ao produto. Compare a ordem dos números no produto com o número original. (Solução: A ordem dos algarismos, no produto, é o contrário do número original.)

Princípios de Divisibilidade

As crianças interessam-se pelo estudo dos princípios de divisibilidade e sua aplicação aos números. Eis alguns:

a) Qualquer número par pode ser dividido por 2 sem deixar resto. Então, 27 não é divisível por 2.

b) Se os dois últimos algarismos de um número são divisíveis por 4, o número é divisível por 4. Aplique essa regra a 972, 738 e 689.

c) Se a soma dos algarismos de um número inteiro é divisível por 3, o número é divisível por 3. Assim, 876 é divisível por 3, porque a soma de 8, 7 e 6 é 21, que é divisível por 3.

d) Se a soma dos algarismos de um número par é divisível por 3, o número é divisível por 6. Então, 372 é divisível por 6, porque a soma de 3, 7 e 2, ou 12, é divisível por 3.

e) Se a soma dos algarismos de um número inteiro é divisível por 9, o número é divisível por 9. Assim, 8 478 é divisível por 9, porque a soma de 8, 4, 7 e 8 é 27, que é divisível por 9.

f) Qualquer número inteiro terminado em 0 ou 5 é divisível por 5. A resposta é um número par quando o número termina em 0, e um número ímpar quando o número termina em 5.

Qual é o Resto?

Podem ser usadas algumas regras interessantes para calcular o resto, pela inspeção, na divisão por 5 e 9:

a) Dizer qual é o resto em cada um dos exemplos abaixo:

74 |5 68 |5 172 |5

85 |5 389 |5

b) A soma dos algarismos em 537 é 15. A soma dos algarismos de 15 é 6. Qual é o resto quando dividimos 537 por 9? 232? 601?

c) Use êste método, sem papel e lápis, para calcular o resto nos exemplos abaixo. Verifique a resposta pela divisão:

241 |9 674 |9 600 |9

7768 |9 12132 |9

Cálculo de Números Ausentes em Equações Numéricas

Uma experiência valiosa, que verifica a capacidade do aluno para sentir as relações entre os números, é o raciocínio para encontrar números ausentes[7] em expressões como as seguintes:

a) $? + 3 = 7$
b) $18 - ? = 4$
c) $5 \times ? = 75$
d) $18 \div ? = 3$
e) $1\frac{1}{2} + ? = 4$
f) $? - 6\frac{1}{2} = 7\frac{1}{2}$
g) $\frac{3}{4} \times ? = \frac{3}{4}$
h) $? \times 2\frac{1}{2} = 10$
i) $2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2} = 2 \times ?$
j) $5\frac{1}{4} - 1\frac{1}{4} = ? \times 4$
l) $3\frac{1}{2} - ? = 4 \times 0$
m) $? + 1\frac{1}{2} = 6 \times \frac{1}{2}$

[7] "Arithmetic with Frames", *The Arithmetic Teacher*, 4:119-124.

Etapas Fáceis em Álgebra

Pode-se introduzir os alunos mais capazes de quinta e sexta séries em experiências mais simples de álgebra. Por exemplo, podem ser levados a calcular o valor de lêtras que representam elementos ausentes em equações como as seguintes:

a

$n = 4 + 3$
$n = 18 - 9$
$n = 5 \times 87$
$n + 4 = 8$
$n + n = 7$

b

$n - 5 = 6$
$8 - n = 2$
$\frac{1}{2} n = 4$
$n \times 6 = 42$
$5 \times n = 40$

c

$16 \div n = 2$
$18 = \frac{1}{4} n$
$16 = n \times 4$
$8 = 12 - n$
$n + 4 = 3 \times 4$

Podem, também, expressar em palavras o significado destas equações. Por exemplo, a equação $n - 5 = 6$ pode ser expressa em forma de problema: Qual é o número que menos 5 é igual a 6?

Traduzindo Sentenças Simbólicas em Palavras

Se uma criança pode dar um problema verbal expresso em forma simbólica, como $15 \times 12 = 180$, pode expor o problema: "Um jardim tem 15 metros de comprimento por 12 de largura. Qual é a sua área?" Para a fórmula $A = c \times l$, pode dar o mesmo problema. Exercícios dêste tipo podem ser usados para o trabalho oral de Aritmética ou para o trabalho escrito.

Cálculo Abreviado Baseado em Partes Alíquotas

O uso de partes alíquotas de um número torna possível o cálculo abreviado. Se um número é divisível por outro, o número menor é uma parte alíquota do número maior. Assim, 8 é uma parte alíquota de 32.

O uso de partes alíquotas de 10 000 ou 1 000 é possível, freqüentemente, na multiplicação ou divisão. Desde que 25 é uma parte alíquota de 100, ou $\frac{1}{4}$ de 100, pode-se multiplicar um número por 25 multiplicando-o por 100 e, depois, dividindo-o por 4. Igualmente, pode-se dividir por 25, dividindo o número por 100 e multiplicando o quociente por 4.

Multiplicando por 25:

$$25 \times 68 = \frac{100 \times 68}{4} = \frac{6\,800}{4} = $$
$$= 1\,700$$

Dividindo por 25:

$$\frac{580}{25} = \frac{580}{100} \times 4 = 5{,}80 \times 4 = 23{,}20$$

Cálculos abreviados semelhantes são possíveis com outras partes alíquotas de 100 ou 1 000.

$12\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ de 100
$16\frac{2}{3} = \frac{1}{6}$ de 100
$50 = \frac{1}{2}$ de 100
$125 = \frac{1}{8}$ de 1 000

Um exercício, em multiplicação e divisão, usando estas partes alíquotas é um meio interessante e valioso de enriquecer o trabalho com números, para as crianças mais capazes das sexta à oitava séries. Entretanto, o uso do cálculo abreviado tem pouco valor se o aluno não compreende o processo.

Maneiras Diferentes Para Resolver Exemplos

a) Três maneiras diferentes de resolver o exemplo

5 min. 30 seg. |2 ,

na divisão com medidas, são mostradas abaixo. As crianças mais capazes devem compreendê-las e poder aplicá-las em outros exemplos:

1) Dividindo como medida

5 minutos 30 segundos = = 4 minutos 90 segundos

4 minutos 90 segundos ÷ 2 = = 2 minutos 45 segundos

2) Dividindo como número misto

5 minutos 30 segundos = = $5\frac{1}{2}$ minutos

$5\frac{1}{2}$ minutos ÷ 2 = $2\frac{3}{4}$ minutos = 2 minutos 45 segundos

3) Dividindo a medida expressa como unidade menor

5 minutos 30 segundos = = 5 × 60 segundos + 30 segundos = 330 segundos

330 segundos |2
165 segundos

165 segundos ÷ 60 = $2\frac{3}{4}$ minutos, ou 2 minutos 45 segundos.

O aluno pode resolver cada um dos seguintes exemplos das três maneiras:

13 anos 7 meses | 2

15 libras 2 onças | 4

5 horas 45 minutos | 3

b) A multiplicação 5 × 5 minutos e 46 segundos pode ser resolvida de várias maneiras:

1) 5 minutos 45 segundos
× 5
28 minutos 45 segundos

2) $5\frac{3}{4}$
$\times 5$
$28\frac{3}{4}$

3) 345 segundos
× 5
1 725 segundos = 28 minutos 45 segundos

Pode-se dar outros exemplos, pedindo que as crianças os resolvam de três maneiras diferentes.

Seleção de Resposta Razoável Pela Aproximação

Uma extensão do trabalho, na estimativa de respostas, para os alunos superiores é o uso da aproximação, na seleção de respostas para exemplos e problemas, entre um grupo de respostas dadas. Os alunos devem, primeiro, estudar o exemplo ou o problema e fazer uma estimativa da resposta. Depois, deve escolher entre os números dados o mais próximo do que acha que é a resposta. Então, deve resolver o exemplo com papel e lápis, para verificar se sua escolha está correta.

a) 28 × 467 são, mais ou menos:

1 600 1 800 2 000

b) 14 788 — 5 996 são, mais ou menos,

7 000 8 000 9 000

c) 1 978 | 27 são, mais ou menos,

84 70 58

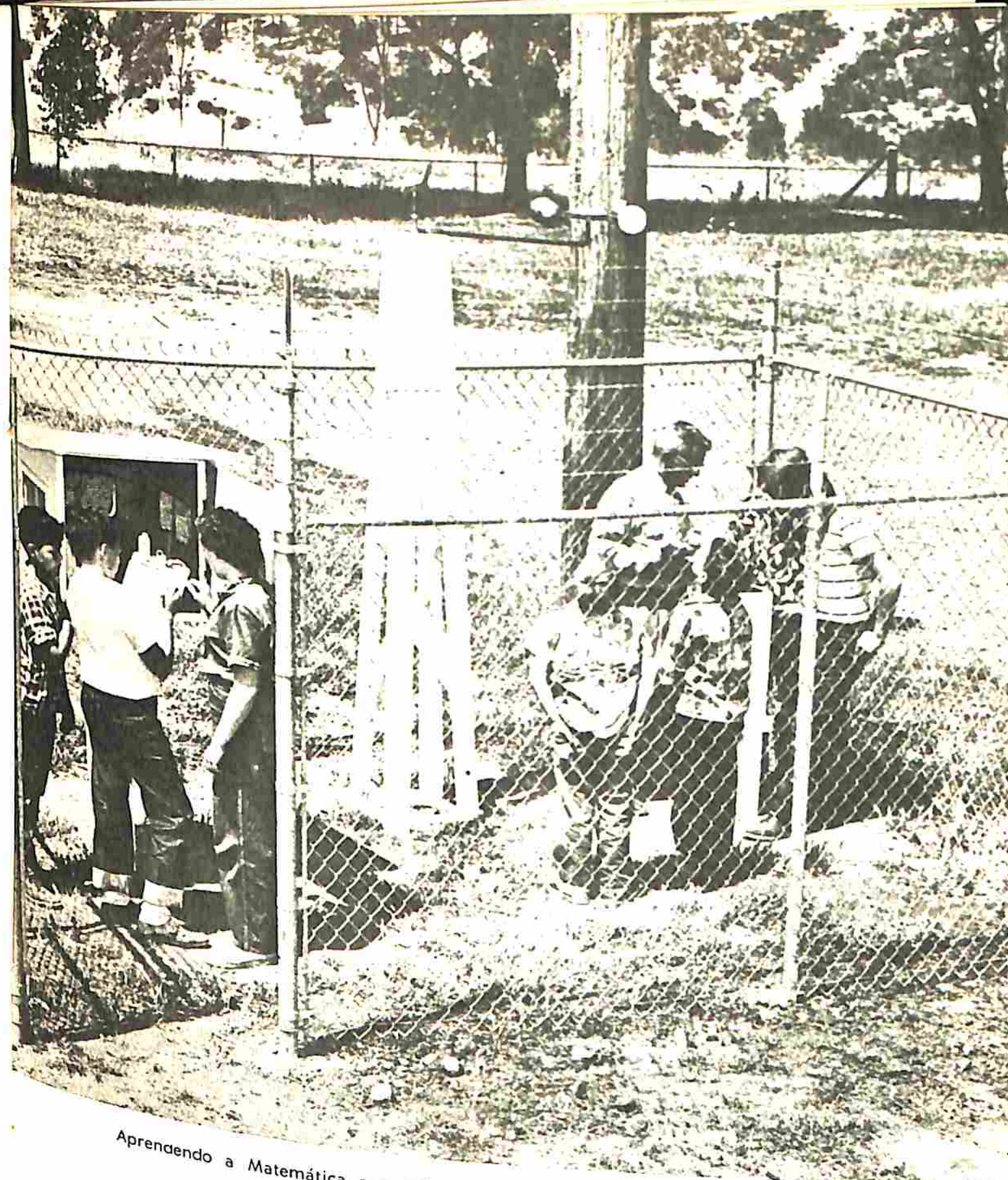
Uso dos Fatôres dos Números na Multiplicação e Divisão

Para ampliar o significado da multiplicação e divisão, as crianças mais capazes podem aprender a trabalhar com fatôres de números.

Assim, para multiplicar 36 por 32, o aluno pode usar dois fatôres de 32, como 4 e 8: 4 × × 36 = 144; 8 × 144 = 1 152. O produto 1 152 é igual ao produto de 32 × 36.

Igualmente, para dividir 1 152 por 32, o aluno pode, novamente, usar os dois fatôres 4 e 8, assim: 1 152 ÷ 4 = 288; 288 ÷ 8 = 36. Êste número é igual ao quociente de 1 152 ÷ 32.

Quando o professor está certo de que o aluno compreende o mé-



Aprendendo a Matemática e a Ciência necessárias em uma Estação Meteorológica.

todo, pode mandá-lo calcular as soluções, como trabalho escrito, de exemplos como os seguintes:

$$256 \,\underline{|\,32} \qquad 1\,200 \,\underline{|\,48}$$

$$\begin{array}{r} 68 \\ \underline{\times\ 24} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 720 \\ \underline{\times\ 56} \end{array}$$

Números Perfeitos

Os gregos chamavam um número que é igual à soma de todos os seus fatôres (exceto êle próprio) um número perfeito. Assim, 6 é um número perfeito porque a soma de todos os seus fatôres, 1, 2 e 3, é 6. Demonstre que 28 é um número perfeito.

3. Recreações com Números

Números Mágicos

a) Escreva o número 12345679 (omita o 8). Escolha qualquer número de 2 a 9. Se escolheu 3, multiplique o número acima por 3 × 9, ou 27. Se escolheu 4, use 4 × 9, ou 36, e assim por diante. Que acha de interessante nos produtos resultantes?

$$\begin{array}{r} 12345679 \\ \underline{\times\ 27} \\ 86419753 \\ \underline{24691358\ \ } \\ (333333333) \end{array}$$

b) Escreva um número com três algarismos, como 265. Multiplique o número por 11, depois por 7, e depois por 13. Que há de interessante no produto final (265 265)? Faça a mesma coisa usando outros números com três algarismos.

c) Multiplique 12345679 por 9. Que há de interessante no produto?

d) Faça uma lista dos produtos de 1 089 multiplicado, em ordem, por todos os números de 1 a 9. Se o seu trabalho está correto, encontrará coisas interessantes na lista de produtos. Por exemplo, compare os dois produtos de 1 089 multiplicado por 1 e por 9.

e) Multiplique 37 037 por 3, por 6 e por 9. Estude os produtos. Continue multiplicando por 12, 15, 18, 21, 24 e 27, até descobrir o modo de dizer qual será o produto.

f) Calcule os números que faltam nos exemplos abaixo. Forme o sistema com os quatro primeiros exemplos. Depois, use êste sistema para calcular as respostas dos três últimos exemplos:

1) 9 × 9 + 7 = 88
2) 9 × 98 + 6 = ?
3) 9 × 987 + 5 = ?
4) 9 × 9 876 + 4 = ?
5) 9 × 98 765 + ? = ?
6) 9 × 987 654 + ? = ?
7) Agora calcule a última linha da série:
(9 × 9 876 543 + 1 = = 88 888 888)

Quebra-Cabeças Numéricos

a) Escolher um número

1) Escolha um número, como 7.

2) Dobre-o.
3) Some qualquer número, como 4, ao número que escolheu.
4) Divida por 2.
5) Subtraia o número que escolheu primeiro.
6) A resposta é 2, se você somou 4, na etapa 3.

Tente somar qualquer outro número, como 6, 8 ou 9, e veja qual é o resultado. (A resposta, sempre, é a metade do número somado.)

b) Um jôgo interessante
Tente êste enigma com dois outros números, como 14 e 47.

1) Escolha qualquer número (como 30).
2) Some a êste o próximo número mais alto.
3) Some 9 ao resultado.
4) Divida a soma por 2.
5) Subtraia 30, ou o número que escolheu primeiro.
6) O resto é 5.
(Chave: somar 1 a 9 [etapa 3] e dividir a soma por 2.)

$$\begin{array}{r} 30 \\ \underline{+\ 31} \\ 61 \\ \underline{+\ \ 9} \\ 70 \\ 35 \\ 5 \end{array}$$

c) Um jôgo com a subtração

1) Escreva três algarismos, de modo que diminuam de 1 da esquerda para a direita; como 876.
2) Inverta o número, 678.
3) Subtraia os números.

$$\begin{array}{r} 876 \\ \underline{-\ 678} \\ 198 \end{array}$$

A resposta é sempre 198.

Tente êste jôgo com outros números.

d) Um jôgo com a multiplicação

1) Escreva qualquer algarismo a seu gôsto. O aluno escreve:
2) Some 5.
3) Multiplique por 3.
4) Subtraia 9.
5) Divida por 3.
6) Subtraia o número que escolheu no início.

$$\begin{array}{r} 6 \\ 5 + 6 = 11 \\ 3 \times 11 = 33 \\ 33 - 9 = 24 \\ 24 \div 3 = 8 \\ 8 - 6 = 2 \end{array}$$

A resposta sempre será 2.

e) O número encontrado é sempre 7

1) Escolha qualquer número na linha abaixo:

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2) Some 9 ao número que escolheu.
3) Dobre a soma.
4) Subtraia 4.
5) Divida por 2.
6) Subtraia o número original.
7) O resultado é sempre 7.

$$\begin{array}{r} 9 + 8 = 17 \\ 2 \times 17 = 34 \\ 34 - 4 = 30 \\ \tfrac{1}{2} \text{ de } 30 = 15 \\ 15 - 8 = 7 \end{array}$$

Quadrados Mágicos

Em um quadrado mágico, a soma dos números em cada fila ou diagonal é sempre a mesma.

a) Verifique se cada um dos seguintes quadrados é um quadrado mágico:

I

8	3	4
1	5	9
6	7	2

II

15	4	5	18
10	12	13	7
14	9	8	14
3	17	16	6

b) Calcule os números que estão faltando nos quadrados mágicos abaixo:

(21)

	7	8	18	
10	16	15		(13)
(14)	12	11	17	
9	19		6	

(20)

(Sugestão: Calcule, primeiro, o total da segunda coluna.)

II

(3)

	13	4		17
(11)	9		11	6
	13	7		(9, 8)
	2		15	5

(15)

c) Verifique se resulta um nôvo quadrado mágico se multiplicar cada número no quadrado pelo número dado em cima. Verifique a resposta.

I (× 3)

17	3	4	13
6	11	11	9
9	8	7	13
5	15	15	2

II (× 6)

$\frac{3}{4}$	$6\frac{1}{4}$	$4\frac{1}{4}$	$6\frac{3}{4}$
$7\frac{1}{4}$	$3\frac{3}{4}$	$5\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{4}$
$7\frac{3}{4}$	$3\frac{1}{4}$	$5\frac{1}{4}$	$1\frac{3}{4}$
$2\frac{1}{4}$	$4\frac{3}{4}$	$2\frac{3}{4}$	$8\frac{1}{4}$

d) Verifique se resulta um nôvo quadrado mágico se dividir cada número, em I, por 2.

e) Verifique se resulta um nôvo quadrado mágico se somar, em II, $1\frac{1}{2}$ a cada número; se subtrair $\frac{1}{2}$.

f). Como fazer um quadrado mágico. (Veja referências na nota ao pé da pág. 514.)

Preenchimento dos Espaços Para Fazer Um Quadrado Mágico

Êste exercício é uma variação interessante dos exercícios precedentes:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

a) Primeiro desenhe um quadrado com 16 divisões, como o do desenho. Numere com algarismos pequenos cada divisão, como mostra o desenho.

Agora, na divisão I escreva a resposta do exemplo 1, abaixo. Continue com as divisões 2 a 16. Quando acabar, verifique se as somas dos números nas linhas, fileiras e diagonais são tôdas as mesmas. Deve ser, se o seu trabalho está correto. Seu quadrado deve ser um quadrado mágico.

1) $2 \times 9 =$

2) $36 \div 9 =$

3) $6 - 1 =$

4) $20 - 5 =$

5) $6\frac{1}{2} + \frac{1}{2} =$

6) $16\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2} =$

7) $24 \div 2 =$

8) $\frac{1}{2}$ de $20 =$

9) $20 - 9 =$

10) 189 |21

11) $\frac{1}{4}$ de $32 =$

12) $7\frac{3}{8} + 6\frac{5}{8} =$

13) 138 |23

14) $92 - 76 =$

15) $\frac{1}{3}$ de $51 =$

16) $1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{4} + \frac{1}{4} =$

b) A soma dos números em cada fila, coluna ou diagonal deve ser 33. Qual os números que devem ser colocados em lugar dos pontos?

.	19	.
.	11	.
17	.	.

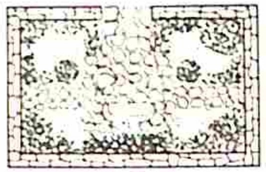
Solução

9	19	5
7	11	15
17	3	13

4. Enriquecendo a Resolução de Problemas e o Desenvolvimento do Vocabulário

Maneira Diferentes Para a Resolução de Problemas

As crianças devem ser desafiadas a descobrir maneiras diferentes para resolver um problema, como teste de sua compreensão das relações numéricas. Assim, para calcular o perímetro do jardim mostrado no diagrama, podem ser usados os seguintes processos:



30 m

45 m

a) 45 m + 30 m + 45 m + 30 m = = 150 m

b) 75 m + 75 m = 150 m

c) 2 × 45 m + 2 × 30 m = 90 m + + 60 m = 150 m

O aluno deve expor, em têrmos gerais, os processos usados, em cada caso, para encontrar a solução do problema.

O aluno pode inventar uma grande variedade de processos para resolver problemas como os seguintes:

a) Três sabonetes são vendidos por Cr$ 450. Quanto custarão 6 sabonetes?

b) Maria comprou 2 quilos de manteiga a Cr$ 200 o quilo, e 4 latas de conserva a Cr$ 180 cada uma. Deu ao dono da loja uma nota de Cr$ 5 000. Quanto recebeu de trôco?

c) Quatro maçãs custam .... Cr$ 400. Quantas maçãs pode-se comprar com Cr$ 500?

d) Calcule o custo de 75 bulbos, se 50 custam Cr$ 200.

e) Qual é a área de um jardim que tem 3 metros a mais no comprimento do que na largura e cujo comprimento é 57 metros?

f) $\frac{5}{8}$ de um tanque contém 640 litros. Quantos litros conterá o tanque quando cheio?

g) Tomás comprou 1 000 cartões de Natal por Cr$ 24 000. Quer vendê-los, em caixas de 20 cartões, por Cr$ 1 000 cada. Quanto lucrará nos 1 000 cartões?

h) À razão de 45 quilômetros por hora, quanto um carro viajará em 20 minutos?

i) Um cêsto contém 156 laranjas. Qual é o seu valor total, se cada dúzia de laranjas custa Cr$ 300?

Relações entre Quantidades — Conceito de Função

Se duas quantidades são relacionadas de maneira que o valor de uma quantidade depende do valor da outra, diz-se que estas quantidades estão *funcionalmente relacionadas*. Esta idéia deve ser explorada nas séries mais adiantadas. Exemplificando: o tempo que um trem leva para viajar 150 quilômetros depende da velocidade com que percorre esta distância. Diz-se que o tempo está em *função* da velocidade. Igualmente, se a área de um relâmpago é 40 metros quadrados, seu comprimento depende de sua largura. O perímetro de um quadrado está em função de um de seus lados. Se o lado do quadrado mede 5 metros, seu perímetro é 4 × 5, ou 20 metros. Muitos exemplos semelhantes do conceito de função ocorrerão ao professor.

Uma experiência interessante, que enriquecerá o trabalho para os alunos mais adiantados, é a resolução do seguinte problema: "Calcular a área de diversos retângulos diferentes, cujo perímetro é 80 cm. Qual é a forma da figura que tem a maior área?" A tabela ao lado mostra valôres diferentes para c, l e A. Pela verificação, o aluno descobrirá que um quadrado tem uma área maior do que qualquer outro retângulo quando o perímetro é constante.

c	l	A
20	20	400
15	25	375
10	30	300
5	35	175
1	39	39

Prove Sua Resposta

O exercício abaixo é interessante para os alunos mais dotados, provando sua capacidade para sentir as relações no processo com frações.

a) Estude os quatro exemplos de multiplicação abaixo:

1) $1\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} =$ 3) $2 \times \frac{3}{4} =$
2) $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} =$ 4) $\frac{5}{6} \times \frac{3}{4} =$

Como pode dizer, sem usar papel ou lápis, em quais dos quatro exemplos os produtos serão maiores que $\frac{3}{4}$? menores que $\frac{3}{4}$? maiores que 1? menores que 1? Multiplique para provar que está certo.

b) Estude os quatro exemplos de divisão abaixo:

1) $\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} =$ 3) $3\frac{1}{8} \div 3\frac{1}{4} =$
2) $1\frac{1}{2} \div 4 =$ 4) $4 \div 1\frac{1}{2} =$

Como pode dizer, sem usar papel e lápis, em qual dos quatro exemplos o quociente será maior que 1? menor que 1? igual a 1? menor que $\frac{1}{2}$? Divida para provar que está certo.

c) Aumentando-se o comprimento e a largura de um retângulo, aumenta-se a área do retângulo?

d) Escreva um exemplo no qual o divisor seja 9, o quociente 17, e o resto 8.

e) Como pode dizer que o produto de 2,5 × 3,6 está próximo de 9?

f) Como pode dizer que o quociente de 18 756 $\underline{|\ 27}$ é menor que 900?

Explorando Problemas

Problemas mais complicados, como os que são dados abaixo, são um desafio para os estudantes mais dotados.

a) João tinha Cr$ 35. Roberto tinha Cr$ 25 mais do que João. Quanto tinham os dois meninos juntos?

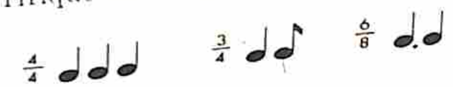
b) A metade de um número é 32 unidades menos do que o número. Qual é o número?

c) Quando se economiza mais, comprando uma blusa de ..... Cr$ 4 800 por $\frac{1}{4}$ do preço ou por $\frac{1}{5}$ do preço?

d) Em um teste de ortografia com 25 palavras, Tomás escreveu 5 palavras de maneira incorreta. Que fração do número total de palavras do teste êle escreveu corretamente?

e) Qual é mais caro, 3 maçãs por Cr$ 400, ou 2 maçãs por Cr$ 200?

f) Qual é a nota que deve ser acrescentada às notas abaixo para completar a cadência? Verifique em canções familiares.



g) Suponhamos que você aumenta o comprimento e a largura de um jardim. Que acontece com seu perímetro? com sua área?

h) Suponhamos que você aumenta o comprimento de um canteiro de flôres e diminui a largura. Que acontece com sua área?

i) A média de dois números é 16. Um dos números é 15. Qual é o outro número?

j) Escreva 3 números diferentes cuja média seja 18.

l) Qual é o comprimento do lado de um quadrado cujo perímetro é 18 cm?

m) Certa manhã João cavalgou de A a C. Depois, cavalgou de volta para B para pro

c) Quatro maçãs custam .... Cr\$ 400. Quantas maçãs pode-se comprar com Cr\$ 500?

d) Calcule o custo de 75 bulbos, se 50 custam Cr\$ 200.

e) Qual é a área de um jardim que tem 3 metros a mais no comprimento do que na largura e cujo comprimento é 57 metros?

f) $\frac{5}{8}$ de um tanque contém 640 litros. Quantos litros conterá o tanque quando cheio?

g) Tomás comprou 1 000 cartões de Natal por Cr\$ 24 000. Quer vendê-los, em caixas de 20 cartões, por Cr\$ 1 000 cada. Quanto lucrará nos 1 000 cartões?

h) À razão de 45 quilômetros por hora, quanto um carro viajará em 20 minutos?

i) Um cêsto contém 156 laranjas. Qual é o seu valor total, se cada dúzia de laranjas custa Cr\$ 300?

Relações entre Quantidades — Conceito de Função

Se duas quantidades são relacionadas de maneira que o valor de uma quantidade depende do valor da outra, diz-se que estas quantidades estão *funcionalmente relacionadas*. Esta idéia deve ser explorada nas séries mais adiantadas. Exemplificando: o tempo que um trem leva para viajar 150 quilômetros depende da velocidade com que percorre esta distância. Diz-se que o tempo está em *função* da velocidade. Igualmente, se a área de um relâmpago é 40 metros quadrados, seu comprimento depende de sua largura. O perímetro de um quadrado está em função de um de seus lados. Se o lado do quadrado mede 5 metros, seu perímetro é 4×5, ou 20 metros. Muitos exemplos semelhantes do conceito de função ocorrerão ao professor.

Uma experiência interessante, que enriquecerá o trabalho para os alunos mais adiantados, é a resolução do seguinte problema: "Calcular a área de diversos retângulos diferentes, cujo perímetro é 80 cm. Qual é a forma da figura que tem a maior área?" A tabela ao lado mostra valôres diferentes para c, l e A. Pela verificação, o aluno descobrirá que um quadrado tem uma área maior do que qualquer outro retângulo quando o perímetro é constante.

c	l	A
20	20	400
15	25	375
10	30	300
5	35	175
1	39	39

Prove Sua Resposta

O exercício abaixo é interessante para os alunos mais dotados, provando sua capacidade para sentir as relações no processo com frações.

a) Estude os quatro exemplos de multiplicação abaixo:

1) $1\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} =$ 3) $2 \times \frac{3}{4} =$

2) $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} =$ 4) $\frac{5}{6} \times \frac{3}{4} =$

Como pode dizer, sem usar papel ou lápis, em quais dos quatro exemplos os produtos serão maiores que $\frac{3}{4}$? menores que $\frac{3}{4}$? maiores que 1? menores que 1? Multiplique para provar que está certo.

b) Estude os quatro exemplos de divisão abaixo:

1) $\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} =$ 3) $3\frac{1}{8} \div 3\frac{1}{4} =$

2) $1\frac{1}{2} \div 4 =$ 4) $4 \div 1\frac{1}{2} =$

Como pode dizer, sem usar papel e lápis, em qual dos quatro exemplos o quociente será maior que 1? menor que 1? igual a 1? menor que $\frac{1}{2}$? Divida para provar que está certo.

c) Aumentando-se o comprimento e a largura de um retângulo, aumenta-se a área do retângulo?

d) Escreva um exemplo no qual o divisor seja 9, o quociente 17, e o resto 8.

e) Como pode dizer que o produto de $2{,}5 \times 3{,}6$ está próximo de 9?

f) Como pode dizer que o quociente de 18 756 $\underline{|\ 27}$ é menor que 900?

Explorando Problemas

Problemas mais complicados, como os que são dados abaixo, são um desafio para os estudantes mais dotados.

a) João tinha Cr\$ 35. Roberto tinha Cr\$ 25 mais do que João. Quanto tinham os dois meninos juntos?

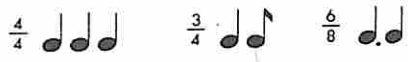
b) A metade de um número é 32 unidades menos do que o número. Qual é o número?

c) Quando se economiza mais, comprando uma blusa de ..... Cr\$ 4 800 por $\frac{1}{4}$ do preço ou por $\frac{1}{5}$ do preço?

d) Em um teste de ortografia com 25 palavras, Tomás escreveu 5 palavras de maneira incorreta. Que fração do número total de palavras do teste êle escreveu corretamente?

e) Qual é mais caro, 3 maçãs por Cr\$ 400, ou 2 maçãs por Cr\$ 200?

f) Qual é a nota que deve ser acrescentada às notas abaixo para completar a cadência? Verifique em canções familiares.



g) Suponhamos que você aumenta o comprimento e a largura de um jardim. Que acontece com seu perímetro? com sua área?

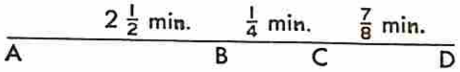
h) Suponhamos que você aumenta o comprimento de um canteiro de flôres e diminui a largura. Que acontece com sua área?

i) A média de dois números é 16. Um dos números é 15. Qual é o outro número?

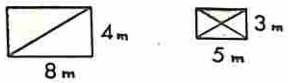
j) Escreva 3 números diferentes cuja média seja 18.

l) Qual é o comprimento do lado de um quadrado cujo perímetro é 18 cm?

m) Certa manhã João cavalgou de A a C. Depois, cavalgou de volta para B para pro curar um objeto que havia perdido. Depois, voltou para D. Que distância percorreu ao todo?



n) Calcular a área da parte sombreada de cada retângulo adiante:



o) Uma garrafa e uma rôlha custam Cr$ 115. A garrafa custa Cr$ 45 mais que a rôlha. Calcule o custo de cada uma.

p) Se 6 metros de fita são divididos em pedaços com 20 centímetros, quantos pedaços serão formados?

q) Quantas toalhas de 1,20 m de comprimento podem ser feitas com 7,20 m de fazenda? (Largura constante.)

r) Se o perímetro de um tapête é 30 m e sua largura é 6 m, qual é o comprimento? (9 m.)

s) Se a área de um pátio é 180 metros quadrados e seu comprimento é 15 metros, qual é a largura? (12 m.)

t) A média de três números é 86. Dois dos números são 78 e 88. Qual é o terceiro número? (92.)

Problemas Para Investigação e Pesquisa

Problemas como os da lista abaixo, com freqüência, aparecem nos livros ao final das unidades de trabalho. Podem ser determinados para certos alunos em separado, especialmente para os mais capazes, para investigação e relatório. Tais problemas podem ser usados, também, como base para uma discussão em classe, com grupos que estão progredindo ràpidamente.

a) Que é *papel*-moeda? Quais os tipos de papel-moeda que existem?

b) Onde se encontram máquinas que fazem trôco automàticamente?

c) Procure saber por que as lojas fazem liquidação. Veja se pode encontrar anúncios de liquidação nos jornais.

d) Como a Aritmética pode ajudá-lo a verificar se as suas refeições são saudáveis?

e) Por que precisamos de unidades de medir tanto grandes como pequenas?

f) Por que alguns selos antigos valem mais do que outros?

g) Procure o preço de assinaturas de revistas para meninos e meninas; dos jornais locais.

h) Quanto é pago por selos usados de Natal?

i) Procure saber os meios de mandar dinheiro pelos Correios. Quais os meios mais seguros?

j) Por que um restaurante deve cobrar mais pelos alimentos servidos do que o que pagou por êles?

l) Quais as informações contidas em um horário de ônibus,

de trens ou de aviões? Por que é necessário um guia?

m) Por que as lojas usam planos de pagamento mensais?

n) Prove que nem todos os mapas são desenhados na mesma escala.

o) Quais são os diferentes meios usados para pagar às pessoas pelo trabalho que realizam?

p) De onde vem o dinheiro gasto para sustentar as bibliotecas públicas?

q) Como as frações são usadas na cozinha e na medida de alimentos?

r) Por que muitos tipos de alimentos são vendidos a quilo, em vez de a metro?

Problemas Sem Números

Problemas como os que são dados abaixo desenvolvem a capacidade do aluno em expressar com palavras as regras que aprendeu para aplicar na solução de problemas. Pode-se mandá-lo ilustrar cada situação dando um problema original sôbre ela.

a) Como pode ser calculado o pêso médio dos meninos de uma equipe de basquetebol?

b) Dizer como calcular o perímetro de um pátio.

c) Que devemos saber para calcular a área do quadro-negro de nossa sala de aula?

d) Como pode ser calculada a distância entre dois lugares no mapa?

e) Que deve saber para fazer uma escala do assoalho da sala de aula?

f) Se conhece o preço por artigo, e o número total de artigos comprados, como calcula o custo total?

g) Se conhece o custo total e o número de artigos adquiridos, como deve calcular o preço por artigo?

h) Se conhece a velocidade de viagem e a distância percorrida, como deve calcular o tempo?

i) Se conhece a distância percorrida e o tempo, como deve calcular a velocidade?

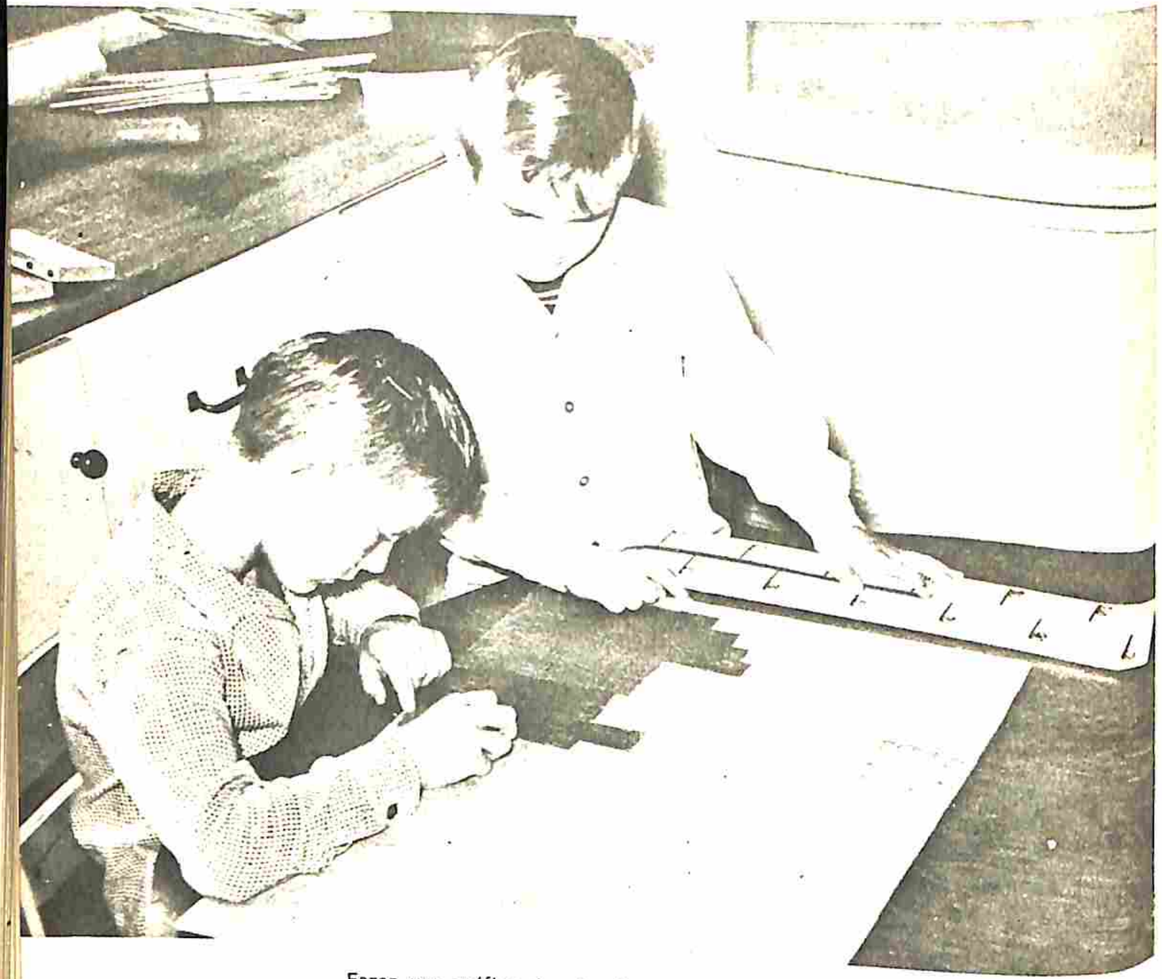
j) Se conhece a velocidade e o tempo, como deve calcular a distância?

Desenvolvimento do Vocabulário

O poder para usar a linguagem da Aritmética pode ser desenvolvido de muitas maneiras. Um dos métodos mais valiosos é o estudo do vocabulário em níveis diferentes, incluindo a definição, ilustração ou uso de uma expressão em uma sentença. O primeiro nível é o mais difícil; o terceiro é o mais fácil. Exercícios como os seguintes são um exemplo:

a) Defina, ilustre ou use as seguintes expressões e têrmos em sentenças :

número misto	estimativa
total	perímetro
quociente	aproximação
linha de tempo	área
exato	



Fazer um gráfico é estimulante para os alunos.

b) Dê os nomes das unidades usadas para medir quantidades grandes e pequenas de cada uma das seguintes coisas:

carvão	drogas
distância	líquidos
gasolina	laranjas
fazenda	terra
tempo	especiarias
trigo	leite

c) Defina, ilustre ou use em sentenças os seguintes vocábulos sôbre alimentos e valôres de alimentos:

caloria	serviço
vitaminas	xícara
quilo	colherada

d) Organize as seguintes unidades de medir em grupos relacionados. Coloque, em cada grupo, em primeiro lugar as unidades menores:

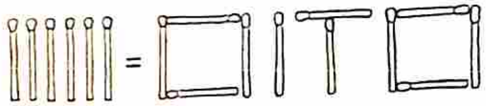
xícara	dia
tonelada	centímetro cúbico
centímetro	milímetro
metro	decímetro
quilômetro	hora
semana	quarto
grama	segundo
barril	mês
litro	minuto

e) Dê o nome de quatro unidades, no mínimo, usadas para medir o seguinte: pêso, valor, tempo, líquidos, distância, área, cereais.

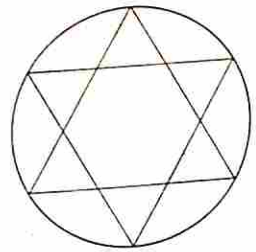
5. Métodos Variados de Enriquecimento

Quebra-Cabeças Geométricos

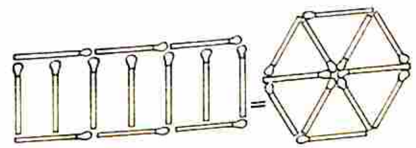
a) Ponha 6 fósforos na mesa. Coloque-os a 2 centímetros um do outro. Acrescente 5 fósforos, formando oito.



b) Desenhe um círculo com 5 cm em um pedaço de papel. Desenhe uma estrêla dentro do círculo, como mostra o modêlo, usando uma linha contínua, sem tornar a traçar qualquer linha.



c) No primeiro desenho, abaixo, são formadas seis áreas iguais, com 13 fósforos. Pode formar seis áreas iguais com um fósforo a menos?



d) Como uma bússola pode ajudar-nos a dizer os pontos cardeais? Desenhe a face de uma bússola mostrando a agulha apontada para Sudoeste.

e) Desenhe uma gravura com a escala de um termômetro de 45° acima de zero a 20° abaixo de zero. Use a escala para calcular quantos graus a temperatura diminui, caindo de 45° para 20°.

Trabalho em Aritmética Fora da Sala de Aula

Há muitas experiências na natureza que oferecem excelentes oportunidades, aplicando-as em situações concretas, para enriquecer o estudo de Aritmética. Eis algumas:

a) Medir as mudanças no comprimento da sombra, nas diferentes horas do dia.

b) Planejar um jardim escolar.

c) Calcular a largura de lotes nas vizinhanças.

d) Calcular o comprimento de quarteirões da cidade.

e) Marcar um pedaço de terra igual a um metro quadrado em qualquer terreno próximo.

f) Calcular a área do recreio da escola.

g) Verificar as dimensões da quadra de basquete da escola.

h) Fazer a estimativa do tempo necessário para caminhar um quarteirão, depois verificar com um relógio. É interessante fazer diversas tentativas.

i) Fazer um mapa demonstrando os riscos do trânsito, baseando-se em uma pesquisa nas vizinhanças da escola.

Uma Mesa em Um Canto Para a Aritmética

Em uma mesa em um canto da sala de aula, o professor e as crianças podem colocar materiais interessantes, relacionados com a Aritmética, como jogos, quebra-cabeças numéricos, trabalhos feitos com números, álbuns, instrumentos de medir, coleções de moedas antigas, gravuras mostrando o uso dos números, placas de automóveis usadas, pesos comerciais, e coisas semelhantes. Em algumas escolas é possível conseguir gravuras, amostras e coleções de material aritmético em bibliotecas, museus e casas de comércio. Para aumentar o atrativo do cantinho de Aritmética, podem ser usados uma pequena biblioteca e um quadro com boletins. Ambos podem ficar aos cuidados de uma comissão de crianças. Tôdas as crianças podem trazer material para a escola, para ser colocado no canto de Aritmética. O material pode ser inspecionado de tempos em tempos e podem ser tomadas medidas para tornar o cantinho mais interessante e atraente.

Clubes de Matemática

Na maioria dos ginásios e em número crescente de escolas elementares, existem *Clubes de Matemática* formados por crianças com um interêsse especial em Aritmética e em outros ramos da Matemática. Geralmente um professor é padrinho do grupo.

Os programas são escolhidos de acôrdo com o interêsse das crianças. Os clubes recorrem, livremente, às fontes da escola e da comunidade para conseguir conferencistas que possam falar-lhes sôbre os desenvolvimentos importantes do emprêgo da Matemática e sôbre as exigências do comércio, indústria e ciências.

Com freqüência, tais clubes incumbem-se de uma parte dos programas das reuniões escolares. Algumas vêzes, patrocinam exibições de filmes sôbre a Matemática, discussões e até debates. Um bom clube pode fazer muito para enriquecer o trabalho em Aritmética nas escolas elementares.

QUESTÕES, PROBLEMAS E TÓPICOS PARA DISCUSSÃO

1. Que significa *enriquecimento* da aprendizagem de Aritmética? Examine um livro para determinar o material que oferece para enriquecer o trabalho em uma determinada série.
2. De que maneira o trabalho pode ser enriquecido para tôdas as crianças?
3. Quais são as maneiras especiais para enriquecer o trabalho, em Aritmética, para as crianças mais capazes? Por que isto é interessante?
4. Qual das finalidades do enriquecimento, relacionadas na pág. 507, considera mais importante? Quais outras finalidades acrescentaria?
5. Quais são alguns dos processos, para enriquecer o trabalho com operações numéricas, que têm sido descritos nos capítulos precedentes?
6. Como avalia os quatro tipos de provisões, para as crianças mais capazes, que são discutidos nas págs. 514 e 515?
7. Por que a biblioteca é o *coração do enriquecimento* para as crianças mais capazes? Sugira meios para algum aluno de capacidade superior usar a biblioteca.
8. Como um professor pode identificar um aluno que tem marcada aptidão para a Aritmética? Que pode dizer sôbre uma criança assim?
9. Comente a unidade sôbre navegação, das págs. 512 e 513. Conhece unidades semelhantes? Como podem tais unidades ser desenvolvidas pelo corpo docente? Pode sugerir títulos para outras?
10. Avalie a lista de tópicos para estudo das crianças mais capazes dada nas págs. 513 e 514. Quais são seus valôres e limitações? Pode acrescentar outros?
11. As crianças mais capazes, nas quinta e sexta séries, devem ter oportunidade para

explorar os ramos mais difíceis da Matemática nessas séries? Como isto pode ser feito?

12. Quais as adições que podem ser feitas aos métodos gerais do enriquecimento que estão incluídos na Seção *f* dêste capítulo? Quais os materiais que eliminaria? Quais os que considera de maior valor?

SUGESTÕES PARA LEITURA

Brueckner, L. J., Grossnickle, F. E., and Reckzeh, J. *Developing Mathematical Understandings in the Upper Grades.* Philadelphia: The John C. Winston Co., 1957. Chapter 14.

"Education of the Gifted in Schools and Colleges," *Fifty-seventh Yearbook of the National Society for the Study of Education.* Chicago: University of Chicago Press, 1958. Chapters 8 to 11.

Hogben, Lancelot. *Mathematics for the Millions.* New York: W. W. Norton and Co., Inc., 1937.

Marks, J. L., Purdy, C. R., and Kinney, L. B. *Teaching Arithmetic for Understanding.* New York: McGraw-Hill Book Co., 1958. Chapter 14.

McWilliams, E. M., and Brown, K. E. *The Superior Pupil in the Junior High School.* U. S. Department of Health, Education, and Welfare. Bulletin No. 4, 1955.

National Education Association, *Education of the Gifted,* Washington, D. C., 1950.

Newman, J. R. *The World of Mathematics.* New York: Simon and Shuster, Inc., 1956.

Spitzer, H. F. *Practical Classroom Procedures for Enriching Arithmetic.* St. Louis: Webster Publishing Co., 1956.

"The Gifted Child in the Elementary School," *Twenty-sixth Yearbook of California Elementary School Administrators Association,* 1954.

"The Gifted Child: Another Look," Monograph 10. San Francisco: The California Elementary School Administration Association.

Witty, P. A. *The Gifted Child.* Boston: D. C. Heath and Co., 1951.

APÊNDICE

Como Preparar os Materiais Essenciais ao Ensino

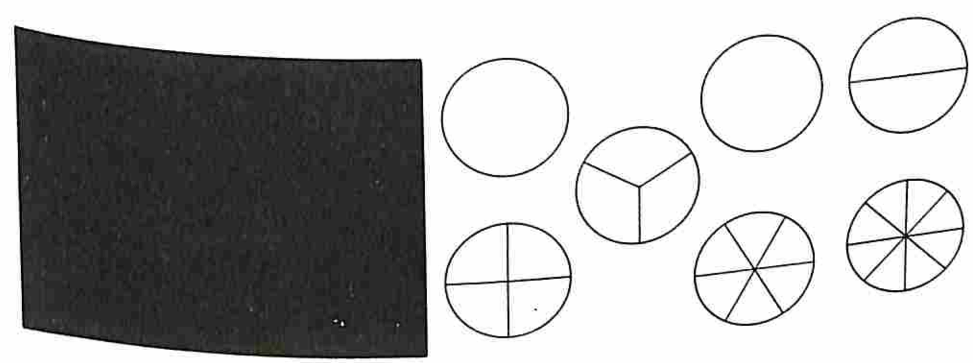
O PROFESSOR DEVE SUPRIR a sua sala de aula com material comercial ou feito em classe. As instruções apresentadas a seguir capacitarão o professor a fazer a maioria do material para a sala de aula usado para o ensino de Aritmética e que é descrito neste texto.

Flanelógrafo

Um flanelógrafo pode ser feito cobrindo-se um pedaço de papelão ou material semelhante (60 cm × 75 cm) com flanela que tenha boa aderência. Faça discos fracionários, forrados com flanela, com cêrca de 25 cm de diâmetro. Corte os discos em meios, terços, quartos, sextos e oitavos. Conserve dois discos inteiros.

Quadro "Valor do Lugar"

O quadro "Valor do Lugar" pode ser feito de papelão ou cartolina. Nas primeiras séries o professor usa o quadro "Valor do Lugar" dividido em três partes separadas. Cada parte é usada para representar uma ordem no sistema de numeração, como unidades, dezenas e centenas. Nas séries mais adiantadas, um

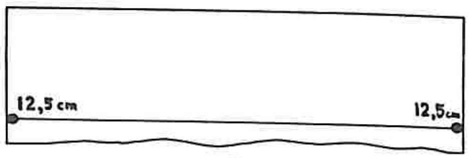


quadro só pode ser dividido em três seções ou partes para mostrar as ordens determinadas. Desde que o mesmo professor raramente ensina em tôdas as séries, as instruções para fazer cada tipo são dadas a seguir.

Quadro "Valor do Lugar" Para o Curso Primário

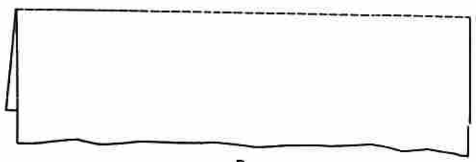
Use três fôlhas de cartolina com 65 cm × 50 cm.

Os passos que devem ser seguidos para fazer as pregas para colocar os cartões são:



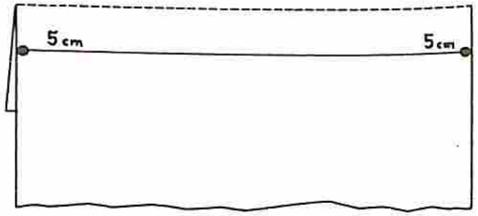
A

1) Coloque o papel sôbre uma mesa. Meça 12,5 cm contando da parte de cima da fôlha, ao longo de cada lado, e marque com pontos. Ligue os pontos com uma linha, como em A.



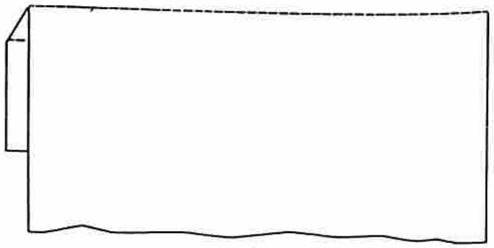
B

2) Dobre a fôlha ao longo da linha marcando bem a dobra, como mostra a ilustração B.



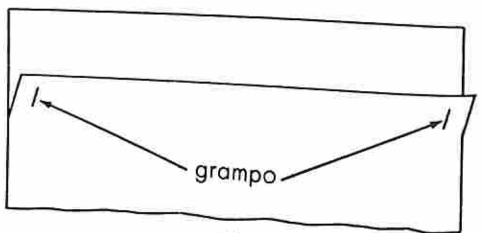
C

3) Meça 5 cm na dobra, de cada lado, e junte os pontos com uma linha, como em C.



D

4) Dobre a fôlha ao longo desta linha marcando bem a dobra, como em D.

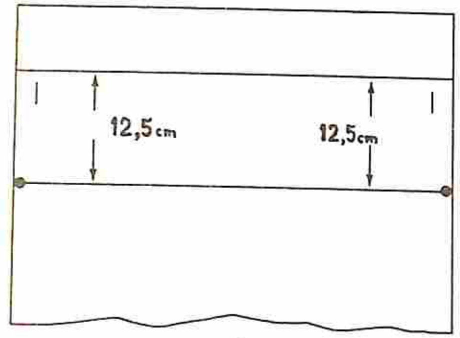


E

5) Coloque o papel sôbre a mesa, horizontalmente. Levante a primeira dobra e prenda-a. Terá assim a primeira prega. Prenda-a com firmeza com um

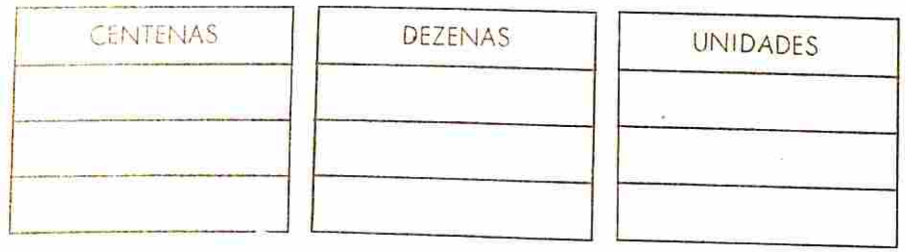
ganchinho, para que fique como em E.

6) Agora, para fazer a segunda prega, meça 12,5 cm da parte de cima da primeira prega, em cada lado da cartolina, e marque com pontos. Ligue os pontos com uma linha, como em F. Forme a próxima prega repetindo o processo aqui descrito.



F

7) Repita a instrução apresentada no item 6 até conseguir três pregas no quadro "Valor do Lugar".



8) Faça mais dois quadros semelhantes, seguindo as instruções de 1 a 7 acima, a fim de ter um total de três quadros com pregas.

9) Cada quadro necessita, agora, de um suporte na parte de trás. Use papelão para os suportes, e êstes devem ser, pelo menos, do mesmo tamanho do quadro.

Ponha a parte de trás do quadro "Valor do Lugar" sôbre o papelão e corte-o do mesmo tamanho. Depois, una as extremidades do quadro "Valor do Lugar" e do papelão. Pode-se cobrir a emenda com fita adesiva para melhorar a aparência do suporte.

10) Finalmente use um lápis de desenho branco ou um pequeno pincel com tinta branca para escrever na parte de cima de cada quadro ou de cada seção o nome da ordem que representa, como é mostrado acima.

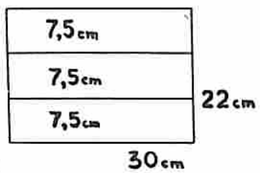
Como Fazer Fichas para o Quadro "Valor do Lugar"

O professor necessita de 20 fôlhas de papel-manilha, vermelho, com 22 cm × 30 cm, para fazer as fichas.

Necessita, também, de elásticos para unir os feixes de cartões. Use elásticos para os feixes das dezenas.

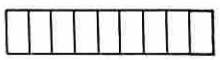
1) No cortador de papel você pode cortar 5 fôlhas ao mesmo tempo.

2) Marque o papel com um espaço de 7,3 cm e corte três tiras como em A.



A

3) De cada tira de 7,3 cm × × 30 cm corte 9 fichas com 3,3 cm, como mostra o desenho em B.

B


4) Desde que pode conseguir 27 fichas de cada fôlha, você terá um total de 540 fichas. É um suprimento adequado para as operações nas primeiras séries.

5) Para cortar estas fichas, tome 5 tiras de 7,3 cm por 30 cm, marque 3,3 cm no comprimento e corte de uma vez. Cada grupo de 5 fichas vai sendo colocado ao lado. Quando completar 10 fichas, fazer um feixe de uma dezena. As crianças podem ajudar a fazer os feixes de dezenas.

6) Para fazer um feixe com centenas, separe 10 feixes de 10 dezenas e coloque-os juntos, passando à volta um elástico. Faça mais de um feixe de uma centena e deixe alguns feixes de dezenas.

7) Com êste material você terá feixes de centenas, dezenas e algumas fichas de unidades. Guarde as fichas em uma caixa.

Quadro "Valor do Lugar" Feito Com Uma Só Peça

O quadro "Valor do Lugar" para as séries mais adiantadas pode ser feito de uma só peça, dividida em três seções. O professor, nas primeiras séries, pode também preferir usar um quadro "Valor do Lugar" desta espécie. Êste quadro pode ser feito de cartolina ou papelão. Um papelão de 50 cm × 65 cm é conveniente para fazê-lo. Os passos para sua feitura são os seguintes:

1) Coloque o papelão sôbre a mesa tendo o lado com 65 cm na sua direção. Meça 12 cm partindo da extremidade superior e trace uma linha paralela à extremidade. Dobre o papelão, bem firmemente, nesta marca.

2) Repita os passos 1 e 2 apresentados na pág. 539.

3) Divida a fôlha em sentido longitudinal, formando três separações iguais em cada prega. No ponto de interseção das pregas coloque um ganchinho ou, melhor, um grampo.

4) Comece da direita e escreva os nomes Unidades, Dezenas e Centenas, para serem usados para mostrar números inteiros. Começando da esquerda, escreva Unidades, Décimos e Centésimos, para mostrar decimais. O mesmo quadro pode ser usado para números inteiros e decimais, tendo-se o cuidado de mudar apenas os nomes nas três diferentes seções.

5) Coloque na extremidade do quadro "Valor do Lugar" um gancho, que permita pendurá-lo.

Use cartões de aproximadamente 5 cm × 7 cm para colocar nas pregas a fim de representar os números. Paus de picolés e varetas podem substituir as fichas.

Nos níveis mais adiantados não é necessário usar um feixe de 10 fichas para representar cada algarismo à esquerda de uma determinada ordem. Cartões de diferentes côres podem ser usados para mostrar os valôres representados nas respectivas ordens ou casas. Assim, se um cartão vermelho representa uma unidade na ordem das unidades, um azul pode representar uma dezena na ordem das dezenas, e um verde pode representar uma centena na ordem das centenas. Da mesma maneira, cartões coloridos podem ser usados para representar os lugares à direita das unidades.

Num nível mais alto de compreensão do valor relativo, um cartão da mesma côr poderá ser usado para representar os algarismos em um número dado.

Se todos os cartões forem vermelhos, três dêles colocados no lugar das unidades representam 3 unidades; três no lugar das dezenas, 30, e no lugar das centenas, 300.

O aluno que chega a êste nível de compreensão do valor do lugar está pronto para interpretar o valor de um algarismo em um número. Assim, êle pode saber que um 3 duas casas à esquerda das unidades representa 300, como no número 347.

Coleções de Partes Fracionárias Para as Crianças

Cada criança nas séries mais adiantadas deve ter uma coleção de círculos para usar quando trabalhando com frações ordinárias. Êsses círculos podem ser feitos de cartolina, flanela ou papel-manilha. Cada criança deve ter aproximadamente 12 círculos com o diâmetro de 12 cm mais ou menos. Êle deve usar dois dêsses círculos para representar inteiros. Pode cortar dois outros para representar metades. Os círculos restantes devem ser cortados aos pares para representar terços, quartos, sextos e oitavos. Em séries menos adiantadas, não é necessário ter partes representando terços e sextos. Neste caso, oito discos circulares são necessários.

O professor deve dar ao aluno um modêlo de um-têrço. Depois o aluno dobra um-têrço para formar duas partes iguais, sendo cada uma igual a um-sexto.

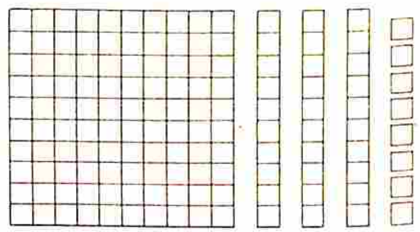
O raio do círculo pode ser usado para dividir o círculo em seis partes iguais. Desenhe um círculo e marque um ponto na circunferência. Abra o compasso com uma abertura igual ao raio. Partindo da marca da circunferência, marque, sucessivamente, cinco outros pontos. Ligue os seis pontos com o centro do círculo. Cada setor marcado é um-sexto do círculo. Corte agora os sextos nas linhas que você traçou.

Quadrados Retangulares e Tiras

Cada criança, nas várias séries, deve possuir quadrados e tiras retangulares que serão usados para objetivar o trabalho com números inteiros e decimais. Uma fôlha de papel-manilha de 20 cm × 25 cm pode ser dividida em quadrados de 2 cm × 2,5 cm, dando, assim, às crianças os quadrados necessários e as tiras retangulares. Siga as seguintes instruções para o provimento do aluno:

1) Faça 3 quadrados contendo 100 quadrados de 2 cm × 2,5 cm
2) 20 tiras de 10 quadrados (2 cm × 2,5 cm) cada uma
3) 60 quadrados (2 cm × 2,5 cm) cortados assim:
   a) 15 quadrados simples
   b) 5 tiras de 2 quadrados
   c) 5 tiras de 3 quadrados
   d) 5 tiras de 4 quadrados.

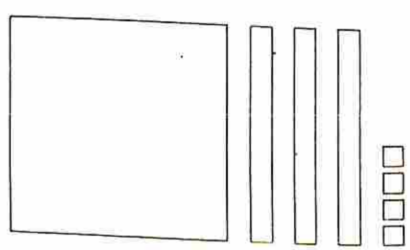
A criança pode usar o lado do quadrado que foi quadriculado e as tiras para representar números inteiros.

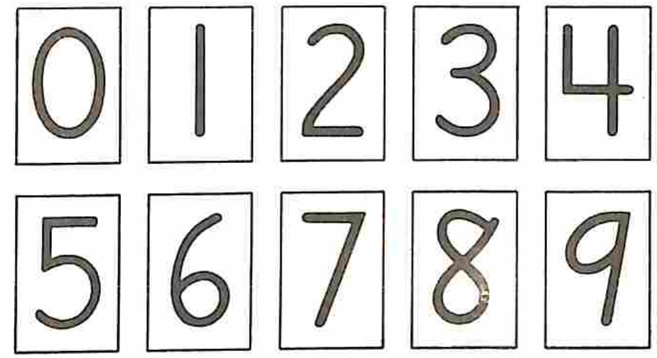


O diagrama mostra o número 138. As 8 unidades podem ser representadas por 8 quadrados pequenos, dois grupos de 4 quadrados, ou qualquer outra combinação tendo a soma 8.

A criança pode usar um quadrado que não foi quadriculado para representar decimais. Um quadrado sem ter sido quadriculado representa um inteiro; uma tira completa, com dez, representa um-décimo, e um quadrado pequeno representa um-centésimo.

O diagrama mostra como representar o número decimal 1,34.



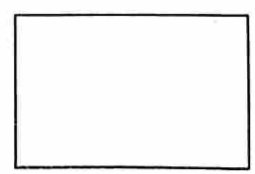


Levar a criança a guardar, separadamente, os quadrados cortados e as tiras retangulares em dois envelopes. A criança deve ter local adequado onde possa manipular êsse material exploratório em classe.

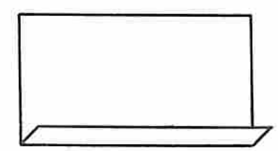
Cartões "Todos Mostram"

Cada criança deve ter 10 cartões de 5 cm × 7 cm. O cartão deve conter um dos 10 algarismos. Os algarismos devem ser escritos de tal maneira que haja um espaço de 2 cm separando-os da extremidade inferior do cartão. Os algarismos devem ser escritos de maneira legível, tão grande quanto o tamanho do cartão, como é mostrado acima.

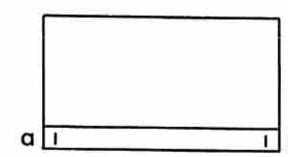
As crianças devem sempre organizar os cartões na sua carteira, na ordem mostrada, quando participam do jôgo chamado *Todos Mostram*.



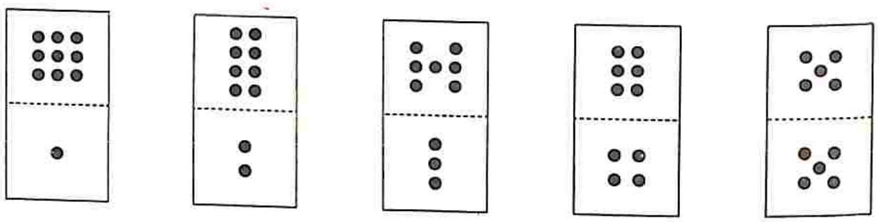
A. Antes de dobrar



B. Depois de dobrar



C. Depois de prêso

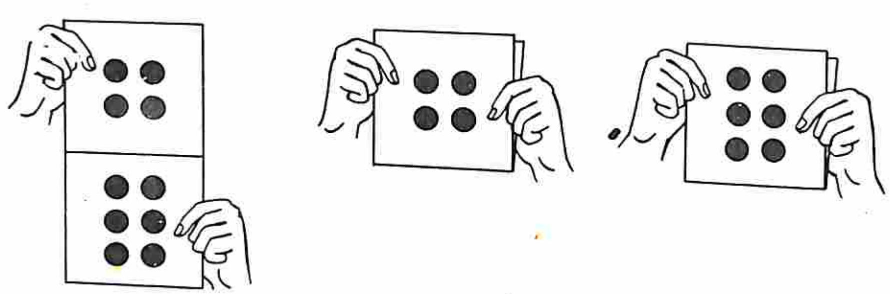


Os dez cartões são adequados para a prática dos fatos fundamentais em adição até 18, excetuando os de resultado 11. Quando a resposta do fato fundamentar é 11, dois cartões contendo o algarismo 1 são necessários. Êsses cartões podem ser usados na prática dos fatos fundamentais em cada um dos quatro pro cessos. Assim, para o agrupamento 4×8, a criança deverá mostrar 32 no porta-cartões; para o agrupamento $54 \underline{|\ 9\ }$, a criança deve mostrar 6.

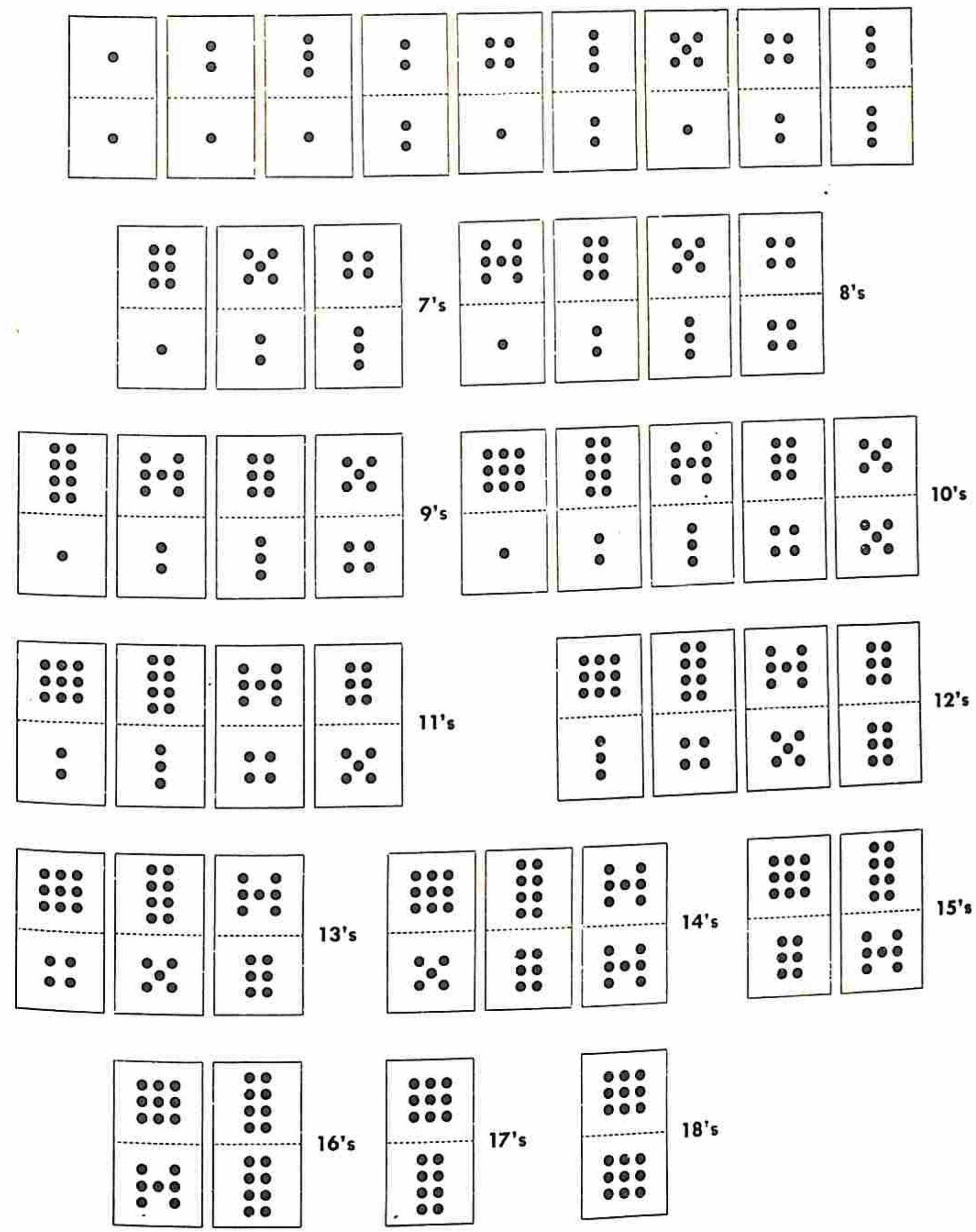
Para participar do jôgo *Todos Mostram*, cada criança deve possuir um porta-cartão. Para fazer porta-cartão, use uma fôlha de papel-manilha de 10×15 cm. Dobre a extremidade inferior, como mostra o desenho B. Esta dobra deve ser de 2 cm aproximadamente. Grampeie as extremidades laterais e aí você terá um porta-cartão firme, como mostra a ilustração C.

Cartões de Percepção Dobrados

O cartão dobrado oferece uma maneira efetiva de demonstrar fatos numéricos relacionados que podem ser aprendidos partindo de um agrupamento. A ilustra-



Fichas dobráveis para fatos numéricos



Um grupo de professôres realiza experiências com novos modos de usar os recortes fracionários.

ção da pág. 544, ao alto, mostra os cartões dobrados para conjuntos de 10.

Para fazer cada cartão, usar uma fôlha de papel-manilha de 10 cm × 20 cm, de preferência vermelho. Dobrar na metade. Em cada metade do cartão, desenhar ou colar círculos de 2,5 cm, de preferência de côr branca. Se os círculos forem desenhados, podemos usar moedas como modêlo. Círculos vermelhos em cartões amarelos são também satisfatórios. Para fazer uma coleção de 54 cartões dobrados, precisamos de 45 fôlhas de 10 cm × 20 cm de papel-manilha e aproximadamente 500 círculos.

Como Usar os Cartões Dobrados

Há dois usos para os cartões dobrados. O aluno pode usar o cartão individualmente, ou pode ser usado pela classe para uma demonstração.

Quando usado com o propósito de demonstração em classe, o professor ou aluno deve colocar-se na frente da classe segurando o cartão, que assim será visto por todos. O demonstrador mostra-o como na ilustração abaixo. A seqüência a seguir é apresentada à pág. 548.

1) Dobre para trás o grupo de 3 círculos. Quantos círculos você vê? (7.) Mostrar.

2) Abre e vê 7, e quantos mais? Mostrar.

3) Segure o cartão aberto, na posição mostrada.

4) Quantos ao todo? (10.)

5) Feche para fazer desaparecer 3. Que fato de subtração com o minuendo 10 êste cartão representa?

$$\begin{array}{r} 10 \\ -\ 3 \\ \hline 7 \end{array}$$

Mostrar o cartão.

6) Vire o cartão para o outro lado para que seja visto o conjunto 3 e 7. Depois repita o processo para adição e subtração.

Cartões de Relação

Os cartões de relação consistem de três números usados em um fato fundamental, como 2, 3 e 5 em adição e subtração, e 2, 3 e 6 em multiplicação e divisão. Se os números são diferentes, quatro fatos fundamentais podem-se originar de cada coleção de números. Assim, para os números 2, 3 e 5, os dois fatos de adição são $2 + 3 = 5$ e $3 + 2 = 5$, e os dois fatos de subtração são $5 - 2 = 3$ e $5 - 3 = 2$. Para os números 2, 3 e 6, os dois fatos de multiplicação são $2 \times 3 = 6$ e $3 \times 2 = 6$; os dois de divisão, $6 \,\underline{|\,2\,}\,$ 3 e $6 \,\underline{|\,3\,}\,$ 2.

Para fazer êstes cartões com números relacionados, usar cartolina ou outro material semelhante com as dimensões de 10 cm × 30 cm. Usar lápis ou tinta para fazer as divisões no papel. Dividir o papel em três partes, como mostra a ilustração.

Depois, em cada cartão escreva os três números de cada coleção. Prepare uma fôlha de papel para cobrir qualquer um dos três números. Após cobrir um

Um grupo de professôres realiza experiências com novos modos de usar os recortes fracionários.

ção da pág. 544, ao alto, mostra os cartões dobrados para conjuntos de 10.

Para fazer cada cartão, usar uma fôlha de papel-manilha de 10 cm × 20 cm, de preferência vermelho. Dobrar na metade. Em cada metade do cartão, desenhar ou colar círculos de 2,5 cm, de preferência de côr branca. Se os círculos forem desenhados, podemos usar moedas como modêlo. Círculos vermelhos em cartões amarelos são também satisfatórios. Para fazer uma coleção de 54 cartões dobrados, precisamos de 45 fôlhas de 10 cm × 20 cm de papel-manilha e aproximadamente 500 círculos.

Como Usar os Cartões Dobrados

Há dois usos para os cartões dobrados. O aluno pode usar o cartão individualmente, ou pode ser usado pela classe para uma demonstração.

Quando usado com o propósito de demonstração em classe, o professor ou aluno deve colocar-se na frente da classe segurando o cartão, que assim será visto por todos. O demonstrador mostra-o como na ilustração abaixo. A seqüência a seguir é apresentada à pág. 548.

1) Dobre para trás o grupo de 3 círculos. Quantos círculos você vê? (7.) Mostrar.

2) Abre e vê 7, e quantos mais? Mostrar.

3) Segure o cartão aberto, na posição mostrada.

4) Quantos ao todo? (10.)

5) Feche para fazer desaparecer 3. Que fato de subtração com o minuendo 10 êste cartão representa?

$$\begin{array}{r} 10 \\ -\,3 \\ \hline 7 \end{array}$$

Mostrar o cartão.

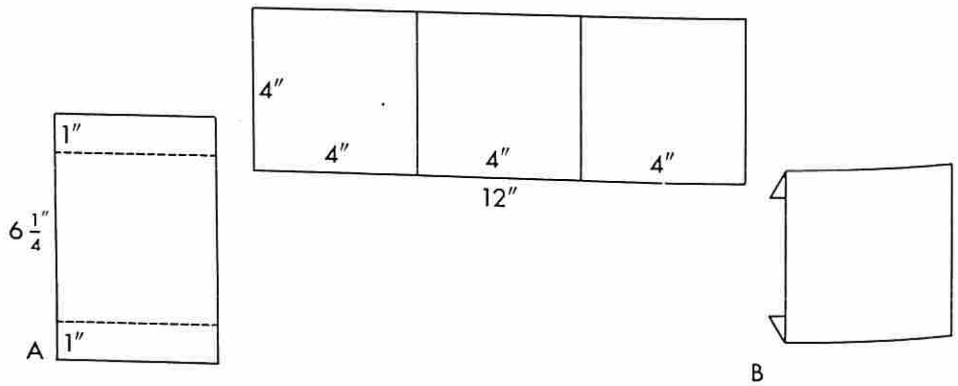
6) Vire o cartão para o outro lado para que seja visto o conjunto 3 e 7. Depois repita o processo para adição e subtração.

Cartões de Relação

Os cartões de relação consistem de três números usados em um fato fundamental, como 2, 3 e 5 em adição e subtração, e 2, 3 e 6 em multiplicação e divisão. Se os números são diferentes, quatro fatos fundamentais podem-se originar de cada coleção de números. Assim, para os números 2, 3 e 5, os dois fatos de adição são $2 + 3 = 5$ e $3 + 2 = 5$, e os dois fatos de subtração são $5 - 2 = 3$ e $5 - 3 = 2$. Para os números 2, 3 e 6, os dois fatos de multiplicação são $2 \times 3 = 6$ e $3 \times 2 = 6$; os dois de divisão, $6 \begin{array}{|l} 2 \\ \hline 3 \end{array}$ e $6 \begin{array}{|l} 3 \\ \hline 2 \end{array}$.

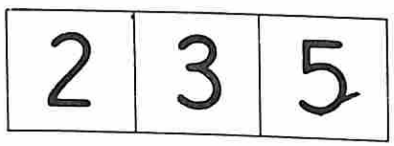
Para fazer êstes cartões com números relacionados, usar cartolina ou outro material semelhante com as dimensões de 10 cm × 30 cm. Usar lápis ou tinta para fazer as divisões no papel. Dividir o papel em três partes, como mostra a ilustração.

Depois, em cada cartão escreva os três números de cada coleção. Prepare uma fôlha de papel para cobrir qualquer um dos três números. Após cobrir um número, a criança deve dizer o número que foi coberto e escrever todo o fato. O papel para cobrir qualquer um dos números é feito como mostra os desenhos A e B da ilustração abaixo.

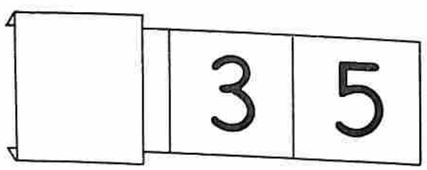


Os passos para usar os cartões são os seguintes:

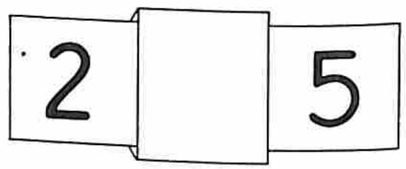
1) Mostre o cartão todo, como é apresentado na ilustração.



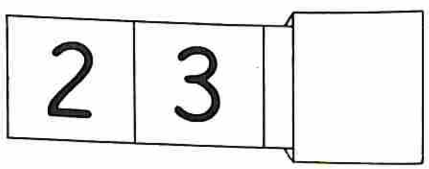
2) Coloque o papel sôbre o cartão.



3) Cubra um dos números.



4) Mova o papel para cobrir qualquer um dos outros números.



Índice Geral

PREFÁCIO 9

1. INTRODUÇÃO: O PROGRAMA MODERNO DE ARITMÉTICA 11
   a. Que É um Programa Moderno de Aritmética? 11
   b. Quais os Principais Problemas Encontrados Pelo Professor de Aritmética? 13
   c. Qual É a Natureza do Comportamento Matemático? 19
   d. Quais São os Aspectos de Higiene Mental do Programa de Aritmética? 22
   Sugestões Para Leitura 23

2. SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL 26
   a. Necessidade de Um Processo Para Operar Com Conjuntos 26
   b. Características Essenciais do Sistema de Numeração 27
   c. Como o Homem Descobriu a Base Decimal 30
   d. Comparação dos Sistemas de Numeração Romano e Arábico 32
   e. Uso do Ábaco 34
   f. Extensão de Nosso Sistema de Numeração 46
   Questões, Problemas e Tópicos Para Discussão 53
   Sugestões Para Leitura 55

3. ORGANIZAÇÃO DO PROGRAMA DE ARITMÉTICA 56
   a. Mudanças no Currículo de Aritmética 56
   b. Conteúdo do Currículo Moderno de Aritmética 58
   c. Seleção do Conteúdo do Currículo 61
   d. Organização do Currículo 68
   Questões, Problemas e Tópicos Para Discussão 84
   Sugestões Para Leitura 85

4. A SALA DE AULA COMO UM LABORATÓRIO DE APRENDIZAGEM 87
   a. Natureza de Um Laboratório de Aprendizagem 87
   b. Princípios de Aprendizagem e Ensino 89
   c. Materiais Para Guiar e Dirigir a Aprendizagem 104
   Questões, Problemas e Tópicos Para Discussão 125
   Sugestões Para Leitura 127

5. PRIMEIROS PASSOS NO ENSINO DA ARITMÉTICA 128
   a. Aritmética nas Primeiras Séries 128
   b. Contagem 138

c. Ensino da Leitura e Escrita dos Números 145
d. Agrupamentos e Valor do Lugar 155
e. Comunicação das Idéias Quantitativas 160
f. Experiências Envolvendo Aplicações Sociais dos Números .. 166
Questões, Problemas e Tópicos Para Discussão 169
Sugestões Para Leitura 170

6. ENSINO DOS FATOS FUNDAMENTAIS NA SEGUNDA SÉRIE 172
a. Fatos Fundamentais e Ordem de Seu Ensino 173
b. Ensino dos Fatos de Adição 179
c. Ensino dos Fatos de Subtração 181
d. Adição e Subtração de Números de Dois Algarismos 188
e. Problemas Orais 190
Questões, Problemas e Tópicos Para Discussão 194
Sugestões Para Leitura 194

7. ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS 196
a. Agrupamento dos Fatos Básicos de Adição e Subtração 197
b. Conceitos Transmitidos Pela Subtração 203
c. Adição de Números de Dois Algarismos Com Reserva 206
d. Somas Elevadas 208
e. Subtração Composta 213
f. Descoberta de Relações Entre a Adição e a Subtração 223
Questões, Problemas e Tópicos Para Discussão 226
Sugestões Para Leitura 227

8. MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS 228
a. Número de Fatos Fundamentais de Multiplicação 229
b. Ensino dos Fatos de Multiplicação 230
c. Formação de Tabelas 241
d. Multiplicação Por Número Simples 247
e. Multiplicação Por Número de Dois ou Mais Algarismos 254
Questões, Problemas e Tópicos Para Discussão 257
Sugestões Para Leitura 258

9. DIVISÃO DE NÚMEROS INTEIROS 261
a. Significação do Processo 261
b. Ensino dos Fatos Fundamentais 263
c. Divisão Por Divisor de Um Algarismo 272
d. Divisão Por Divisor de Dois Algarismos 282
e. Compreensão das Relações Entre Multiplicação e Divisão 295
Questões, Problemas e Tópicos Para Discussão 297
Sugestões Para Leitura 298

10. ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE FRAÇÕES 299
a. Significado de Fração Ordinária 299
b. Materiais Para o Ensino de Frações Ordinárias 304
c. Desenvolvimento dos Conceitos Sôbre Frações Ordinárias 308

d. Adição de Frações Ordinárias 322
e. Subtração de Frações Ordinárias 332
Questões, Problemas e Tópicos Para Discussão 337
Sugestões Para Leitura 338

11. MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO DE FRAÇÕES ORDINÁRIAS .. 339
a. Multiplicação de Fração e Número Inteiro 339
b. Multiplicação de Fração por Fração 346
c. Divisão de Número Inteiro por Fração 349
d. Divisão de Fração por Fração 355
e. Três Tipos de Problemas em Frações 358
Questões, Problemas e Tópicos Para Discussão 360
Sugestões Para Leitura 361

12. FRAÇÕES DECIMAIS 363
a. Introdução do Conceito Decimal 363
b. Adição e Subtração de Decimais 369
c. Multiplicação de Decimais 371
d. Divisão de Decimais 375
e. Significado da Porcentagem 386
Questões, Problemas e Tópicos Para Discussão 389
Sugestões Para Leitura 390

13. PENSAMENTO QUANTITATIVO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS 391
a. Natureza do Pensamento Quantitativo em Relação à Resolução de Problemas 392
b. Desenvolvimento da Habilidade em Resolver Problemas 394
c. Pensamento Quantitativo na Computação 399
d. Ensino da Resolução de Problemas às Crianças 401
e. Necessidade do Ensino da Leitura em Aritmética 409
Questões, Problemas e Tópicos Para Discussão 419
Sugestões Para Leitura 420

14. COMO ENSINAR MEDIDAS 422
a. Que É Medida 422
b. Ensino do Significado de Medida 425
c. Processo de Medir 436
d. Operações com Medidas 439
Questões, Problemas e Tópicos Para Discussão 445
Sugestões Para Leitura 446

15. AVALIAÇÃO EM ARITMÉTICA 447
a. Processo de Avaliação........ 447
b. Seleção e Construção de Instrumentos de Apreciação 448
c. Métodos de Apreciação 452
d. Interpretação dos Resultados dos Métodos de Apreciação 462

e. Avaliação do Programa de Ensino 465
f. Aperfeiçoamento do Programa de Aritmética 468
Questões, Problemas e Tópicos Para Discussão 469
Sugestões Para Leitura 471
16. DIAGNÓSTICO E ORIENTAÇÃO CORRETIVA EM ARITMÉTICA 473
a. Uso de Testes no Ensino 473
b. Diferenças Individuais e Específicas 475
c. Níveis de Diagnóstico 479
d. Técnicas de Diagnóstico 482
e. Tratamento das Dificuldades de Aprendizagem 498
Questões, Problemas e Tópicos Para Discussão 503
Sugestões Para Leitura 505
17. ENRIQUECIMENTO DA APRENDIZAGEM EM ARITMÉTICA 506
a. Natureza do Enriquecimento 506
b. Propósitos do Enriquecimento 507
c. Como Enriquecer a Aprendizagem de Operações Numéricas Para Tôdas as Crianças 508
d. Uso da Biblioteca 509
e. Atividades Especiais Para as Crianças Mais Capazes 514
f. Processos Gerais de Enriquecimento 515
Questões, Problemas e Tópicos Para Discussão 534
Sugestões Para Leitura 535
APÊNDICE — COMO PREPARAR OS MATERIAIS ESSENCIAIS AO ENSINO 537

Índice das Fotos e Respectiva Origem

Pág.

8 — San Diego County Schools, San Diego, Calif.
14 — County Supt. of Schools, Bakersfield, Calif.
17 — County Supt. of Schools, Bakersfield, Calif.
24 — San Diego County Schools
32 — Acme Photo
40 — Bernardine Bailey
47 — Seattle Public Schools
51 — Courtesy Bell Telephone Laboratories
93 — Fresno County Schools, Fresno, Calif.
99 — Los Angeles County Schools, Los Angeles, Calif.
106 — Public Schools, Portland, Oregon
115 — San Diego County Schools, San Diego, Calif.
123 — County Supt. of Schools, Bakersfield, Calif.
139 — Public Schools, Portland, Oregon
153 — Bergenfield Schools, Bergenfield, N. J.
159 — Bergenfield Schools, Bergenfield, N. J.
165 — County Supt. of Schools, Bakersfield, Calif.
167 — Public Schools, Portland, Oregon
175 — Seattle Public Schools
187 — Palisade School, 4, Fort Lee, N. J.
191 — Public Schools, Portland, Oregon
201 — Bergenfield Public Schools, Bergenfield, N. J.
211 — Los Angeles County Schools, Los Angeles, Calif.
222 — Seattle Public Schools
229 — Olivetti Corporation of America
235 — Monroe Calculating Machine Company
251 — Bergenfield Schools, Bergenfield, N. J.
260 — Palisade School, 4, Fort Lee, N. J.
283 — Abington Township Schools, Abington, Penna
307 — Bergenfield Schools, Bergenfield, N. J.
327 — Pasadena City Schools, Pasadena, Calif.
347 — Public Schools, Portland, Oregon
359 — Los Angeles City Schools

PÁG.

368 — Pasadena City Schools, Pasadena, Calif.
385 — Bergenfield Schools, Bergenfield, N. J.
407 — San Diego County Schools, San Diego, Calif.
415 — County Supt. of Schools, Bakersfield, Calif.
415 — Pasadena City Schools, Pasadena, Calif.
427 — Public Schools, Portland, Oregon
433 — Fresno County Schools, Fresno, Calif.
441 — Los Angeles County Schools, Los Angeles, Calif.
450 — San Diego County Schools
456 — Nathan Eckstein Junior High School, Seattle, Wash.
462 — Public Schools, Portland, Oregon
494 — Abington Township Schools, Abington, Penna
510 — Los Angeles County Schools
517 — San Diego County Schools
523 — San Diego County Schools
532 — Los Angeles County Schools

intelectual de tôdas as crianças e, de modo particular, das crianças mais bem dotadas. Êste livro mostra ao professor o caminho mais aconselhável para resolver a contento os dois problemas enunciados e, por isso, consta dos seguintes tópicos:

1) Análise sistemática dos métodos de seleção e organização de um programa de Aritmética;

2) Análise das operações numéricas a serem ensinadas, tendo em vista as experiências anteriores da criança, a fim de se conseguir maior rendimento na aprendizagem;

3) Descrição do conteúdo de um programa de Aritmética nas diferentes séries da escola primária;

4) Apresentação de processos eficientes para a diversificação das matérias para alunos da mesma classe mas de aptidões intelectuais diferentes, e de atividades que promovam um progresso rápido aos alunos mais capacitados.

Uma das razões que provocam os tais pesadelos e, por que não dizer, uma repugnância pela Aritmética e, mais tarde, pela Matemática, reside no fato de esta matéria ser ensinada sem o recurso de casos concretos tirados da experiência cotidiana do aluno. Quando isto acontece êste deixa de ter interêsse pela disciplina e tôda a assimilação da mesma fica comprometida porque o aluno deixa de colaborar e freqüenta as aulas porque há um exame da matéria no fim do período. A fim de impedir que êste livro fôsse mais um tratado de didática da Aritmética, os autores tiveram a preocupação de baseá-lo nos resultados de pesquisas realizadas sôbre os problemas com que se defrontam os professôres de Aritmética. Ao invés de entrar em detalhes inúteis, apresentam sòmente sumários dos resultados e discutem as respectivas implicações. No final de cada capítulo há uma seção que tem por fim orientar discussões sôbre as idéias principais do capítulo através de um questionário, de tópicos e de problemas.

Se com a edição desta obra nós conseguirmos ajudar os professôres brasileiros a ensinar Aritmética com o mínimo de esfôrço e de tempo e, o que é mais importante, fazer com que as crianças passem a gostar desta disciplina e a estudá-la com a mesma dedicação com que estudam as outras, teremos alcançado os nossos objetivos e a certeza de que ela não constituirá motivo de pesadelo nos sonhos e nos exames.

Capa de SALVADOR MONTEIRO

ESTANTE DE PEDAGOGIA

A EDUCAÇÃO SUPERIOR NAS REPÚBLICAS AMERICANAS — **Harold R. W. Benjamin**

A ESCOLA SECUNDÁRIA MODERNA — **Lauro de Oliveira Lima** (2.ª ed.)

A ESCOLA SOB MEDIDA — **Edouard Claparède** — Com estudos complementares de Jean Piaget, Louis Meyland e Pierre Bouvert (2.ª ed.)

A PROFESSÔRA, O ALUNO E SEUS PROBLEMAS — **Charlotte Buhler**

ADMINISTRAÇÃO MODERNA DE ESCOLAS SECUNDÁRIAS — **Harl R. Douglass** (2 vols.)

ANTROPOLOGIA E EDUCAÇÃO — Coordenado por **Frederick C. Gruber**

COMO ESTUDAR A CRIANÇA — Um Manual Para Professôres — **Millie Almy** e **Ruth Cunningham**

EDUCAÇÃO MODERNA — Seus Métodos e Objetivos — **T. Raymont**

ENSINANDO ESTUDOS SOCIAIS NA ESCOLA PRIMÁRIA — **Ralph C. Preston**

ENSINANDO NA ESCOLA PRIMÁRIA — **Klausmeier, Dresden, Davis** e **Wittich** (2 vols.)

INTRODUÇÃO À DIDATICA GERAL — Dinâmica da Escola — Prof. **Imídeo Giuseppe Nérici** (3.ª ed.)

JOGOS PARA RECREAÇÃO INFANTIL — Prof.ª **Ethel Bauzer de Medeiros** (2.ª ed. refundida — 2 vols.)

JOHN DEWEY — Sua Contribuição para a Tradição Americana — **Irwin Edman**

LUTANDO CONTRA AS TREVAS — Minha Professôra Anne Sullivan Macy — **Helen Keller** — Introdução de Nella Brady Hehney (2.ª ed.)

MEDIDAS E TESTES EM EDUCAÇÃO — **James M. Bradfield** e **H. Stewart Moredock** (2 vols.)

PRINCÍPIOS BÁSICOS DE PRATICA DE ENSINO — **Harold P. Adams** e **Frank G. Dickey**

PROBLEMAS ENTRE PAIS E FILHOS — **Susan Isaacs**

RECURSOS AUDIOVISUAIS NA ESCOLA — **Walter Arno Wittich** e **Charles Francis Schuller**

UMA NOVA ERA EM EDUCAÇÃO — **I. L. Kandel** — Apresentação do Prof. Anísio Teixeira.

ESTANTE DE PEDAGOGIA

A EDUCAÇÃO SUPERIOR NAS REPÚBLICAS AMERICANAS — **Harold R. W. Benjamin**

A ESCOLA SECUNDÁRIA MODERNA — **Lauro de Oliveira Lima** (2.ª ed.)

A ESCOLA SOB MEDIDA — **Edouard Claparède** — Com estudos complementares de Jean Piaget, Louis Meyland e Pierre Bouvert (2.ª ed.)

A PROFESSÔRA, O ALUNO E SEUS PROBLEMAS — **Charlotte Buhler**

ADMINISTRAÇÃO MODERNA DE ESCOLAS SECUNDÁRIAS — **Harl R. Douglass** (2 vols.)

ANTROPOLOGIA E EDUCAÇÃO — Coordenado por **Frederick C. Gruber**

COMO ESTUDAR A CRIANÇA — Um Manual Para Professôres — **Millie Almy** e **Ruth Cunningham**

EDUCAÇÃO MODERNA — Seus Métodos e Objetivos — **T. Raymont**

ENSINANDO ESTUDOS SOCIAIS NA ESCOLA PRIMÁRIA — **Ralph C. Preston**

ENSINANDO NA ESCOLA PRIMÁRIA — **Klausmeier, Dresden, Davis** e **Wittich** (2 vols.)

INTRODUÇÃO À DIDÁTICA GERAL — Dinâmica da Escola — Prof. **Imídeo Giuseppe Nérici** (3.ª ed.)

JOGOS PARA RECREAÇÃO INFANTIL — Prof.ª **Ethel Bauzer de Medeiros** (2.ª ed. refundida — 2 vols.)

JOHN DEWEY — Sua Contribuição para a Tradição Americana — **Irwin Edman**

LUTANDO CONTRA AS TREVAS — Minha Professôra Anne Sullivan Macy — **Helen Keller** — Introdução de Nella Brady Hehney (2.ª ed.)

MEDIDAS E TESTES EM EDUCAÇÃO — **James M. Bradfield** e **H. Stewart Moredock** (2 vols.)

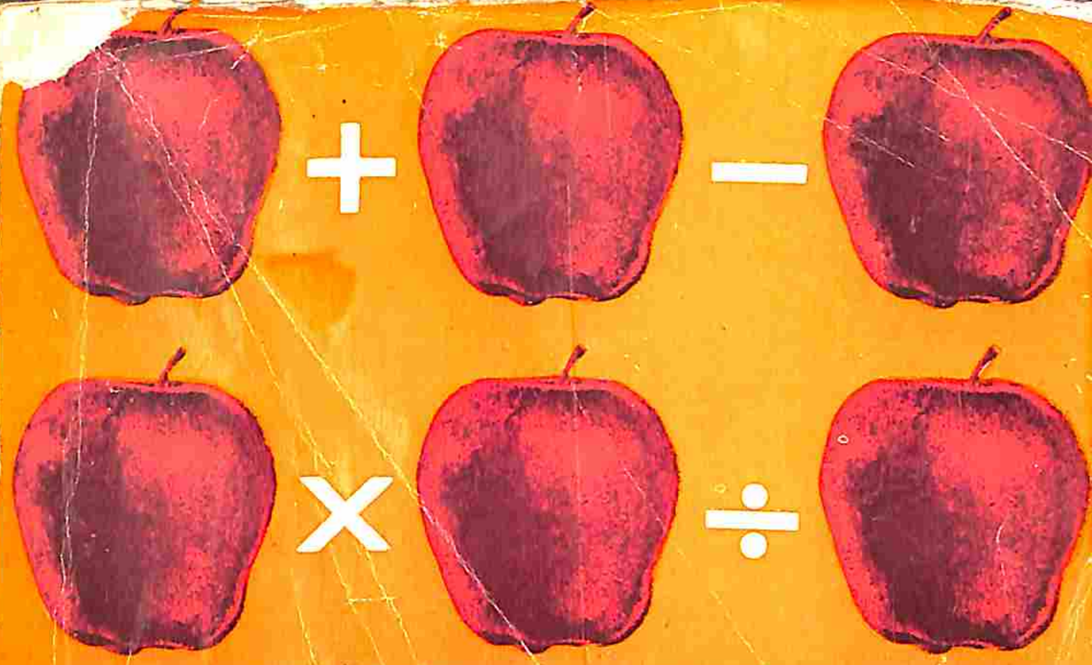
PRINCÍPIOS BÁSICOS DE PRÁTICA DE ENSINO — **Harold P. Adams** e **Frank G. Dickey**

PROBLEMAS ENTRE PAIS E FILHOS — **Susan Isaacs**

RECURSOS AUDIOVISUAIS NA ESCOLA — **Walter Arno Wittich** e **Charles Francis Schuller**

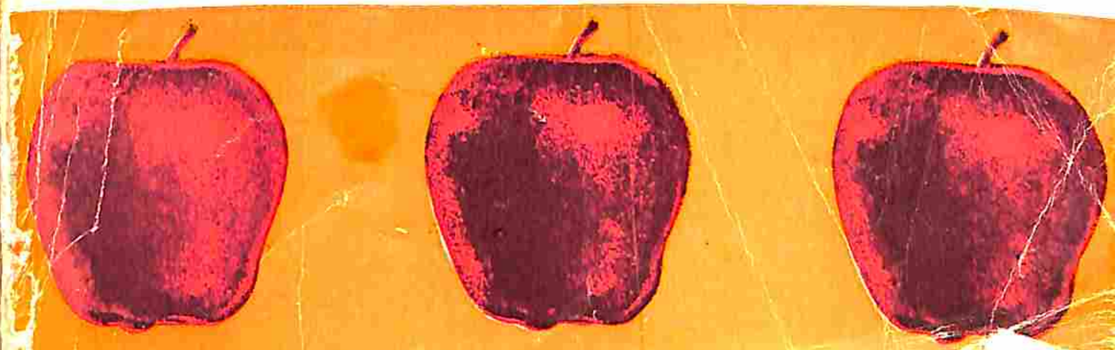
UMA NOVA ERA EM EDUCAÇÃO — **I. L. Kandel** — Apresentação do Prof. Anísio Teixeira.

o ensino da aritmética



o ensino da aritmética pela compreensão

Foster E. Grossnickle
Leo J. Brueckner



FUNDO DE CUL[illegible]A