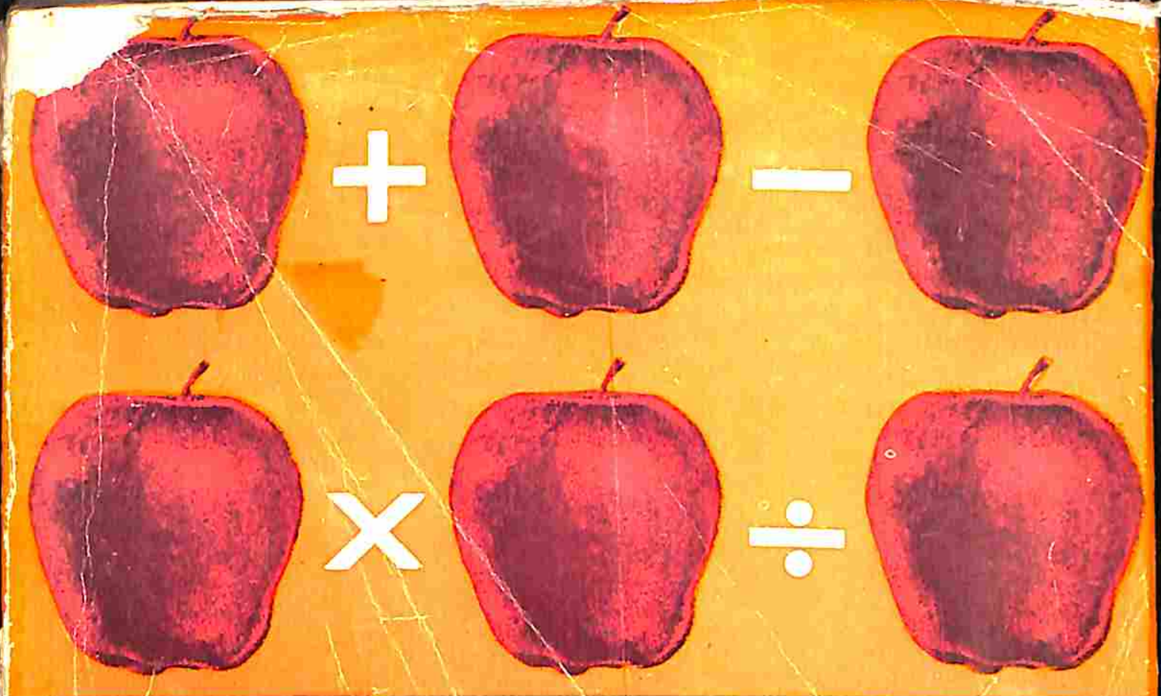


o ensino da aritmética pela compreensão

Foster E. Grossnickle
Leo J. Brueckner

FUNDO DE CUL[illegible]

O ENSINO DA ARITMÉTICA PELA COMPREENSÃO

A Aritmética tem sido a causadora da maioria dos pesadelos que incomodam o sono inocente das crianças; os nossos avós sonhavam quando meninos com a Branca de Neve, as crianças de hoje sonham com números fracionários e quando o professor não tem bom aspecto o problema ainda se agrava mais. Tendo ou não tendo bom aspecto é o professor que geralmente contribui para o agigantamento do pesadelo porque persiste em dar as suas aulas de Aritmética lançando mão de processos que contrariam frontalmente as experiências anteriores das crianças. Se os conhecimentos que as crianças vão ter que aprender ao longo do currículo escolar dependessem tanto da Aritmética como dependem do Canto Coral, então o professor de Aritmética podia até ser esquecido e desprezado, mas não é isso que acontece. Na realidade a Aritmética é o ponto de partida para a Matemática que no seu último nível da abstração constitui a base de tôda a tecnologia moderna e cuja assimilação só é possível através da compreensão dessa base matemática. Uma criança que está habituada a receber uma série de conhecimentos através dos modernos meios de comunicação, como sejam a televisão, o cinema e as revistas coloridas infantis, não vai aceitar de modo nenhum que lhe queiram ensinar Aritmética através do quadro negro e do giz. Foi, pois, com o fim de tornar mais objetivo e profícuo o ensino da Aritmética que a Editôra Fundo de Cultura traduziu e publicou êste livro esperando assim conciliar a divergência entre os processos de ensinar tão importante matéria e as reais necessidades das crianças.

Todos os professôres reconhecem que os alunos aprendem melhor a Matemática quando a compreendem e quando a Aritmética tem significação matemática para êles. Reconhecem também que os alunos apresentam resultados distintos e assimilam de modos diferentes. Defrontam-se, assim, com dois problemas primaciais: primeiro, como selecionar, organizar e apresentar a matéria de modo que tôdas as crianças com diferentes níveis intelectuais possam encontrar e compreender a significação da Aritmética; segundo, como usar os processos de ensino e auxílios audiovisuais para atender às diferenças individuais com eficiência. Além disso, os professôres devem tomar em consideração as atividades extra que favorecem a evolução

2.00

O ENSINO DA ARITMÉTICA PELA COMPREENSÃO

Ed. Vilela

B.H^te 10-5-00

VOLUME 2

Primeira edição brasileira: dezembro de 1965
Traduzida de:
DISCOVERING MEANINGS IN ARITHMETIC
Holt, Rinehart and Winston — New York

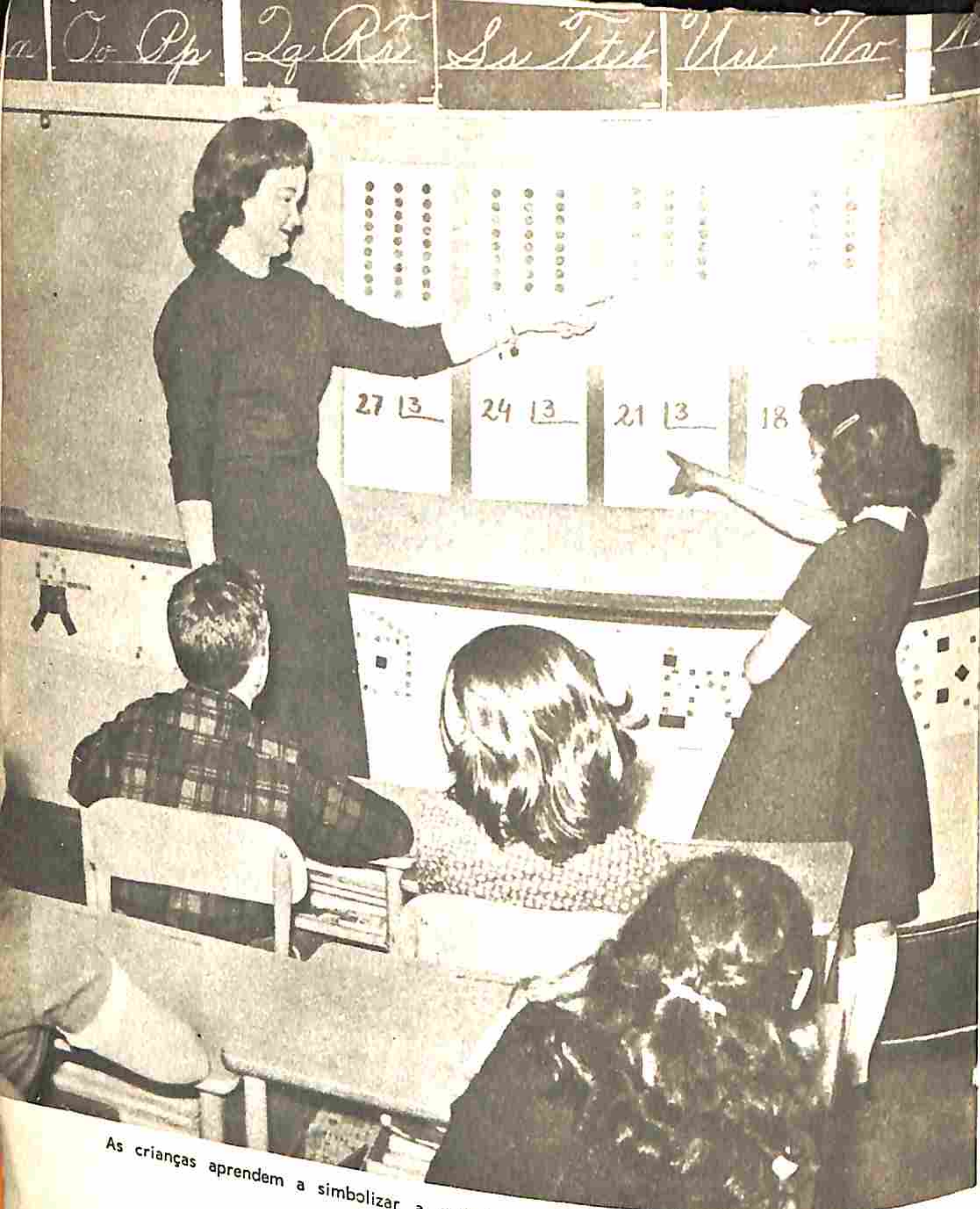
Esta obra foi traduzida e publicada em colaboração com o Setor de Recursos Técnicos da Aliança — Agência Norte-Americana para o Desenvolvimento Internacional — USAID.

O ENSINO DA ARITMÉTICA PELA COMPREENSÃO

FOSTER E. GROSSNICKLE
Professor de Matemática da Universidade Estadual de Jersey City, Jersey City, N. J.

LEO J. BRUECKNER
Emérito Professor de Educação, Universidade de Minnesota

EDITÔRA FUNDO DE CULTURA
BRASIL PORTUGAL



As crianças aprendem a simbolizar a divisão quando compreendem seu significado.

9

Divisão de Números Inteiros

A RELAÇÃO ENTRE divisão, multiplicação, adição e subtração já foi vista no Capítulo 8. Êste Capítulo trata do processo da divisão de números inteiros. São os seguintes os tópicos incluídos:

a. Significação do processo
b. Ensino dos fatos fundamentais
c. Divisão por divisor de um algarismo
d. Divisão por divisor de dois algarismos
e. Compreensão das relações entre multiplicação e divisão.

Aprendizagens Necessárias Para Compreensão dos Fatos da Divisão

Há três coisas que o aluno deve compreender na aprendizagem dos fatos de divisão:

1) A linguagem da divisão
2) A significação do processo
3) A colocação dos algarismos no quociente.

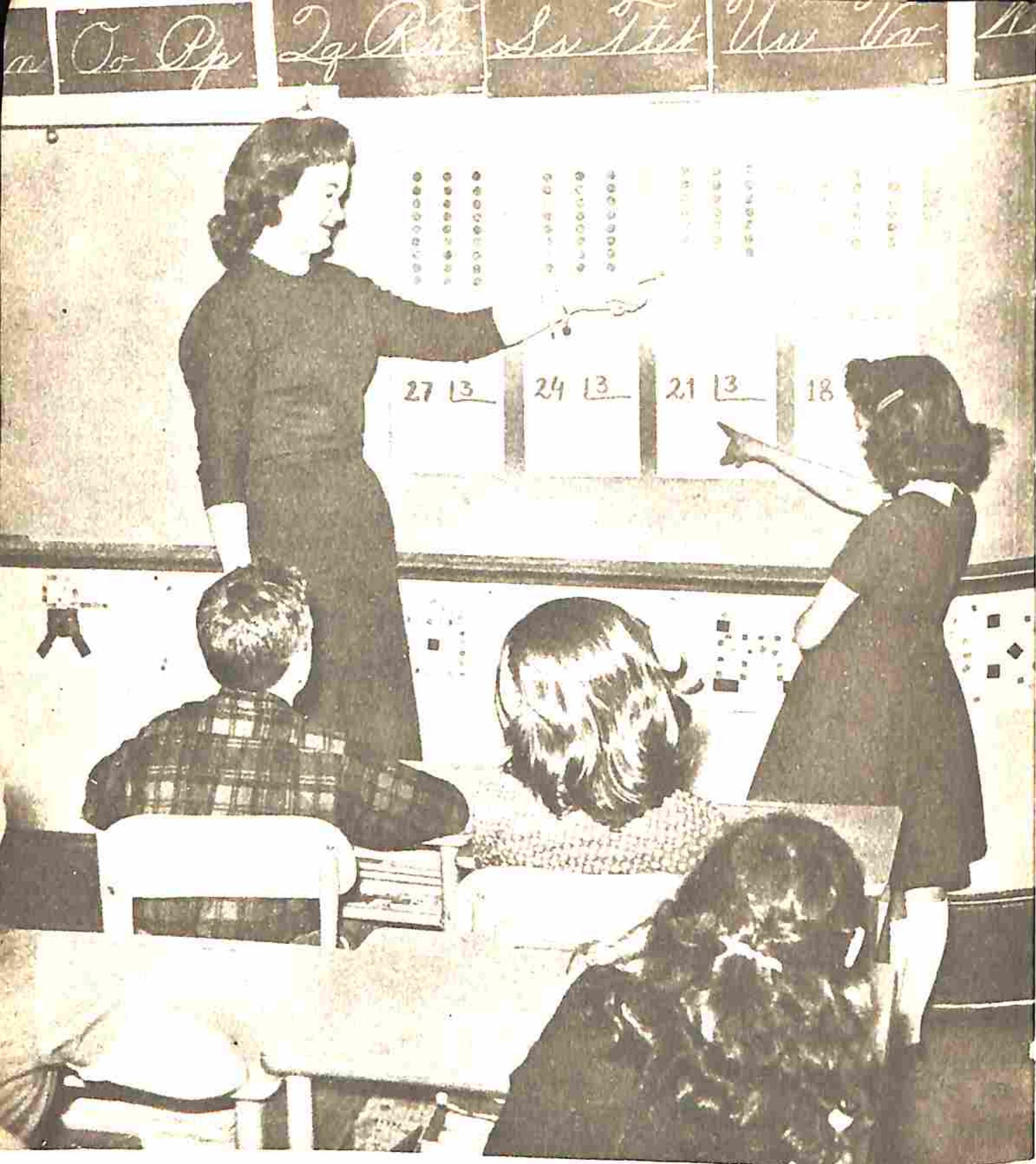
O terceiro item presume que os algarismos do quociente sejam escritos acima do dividendo, como em $\begin{array}{r}4\\ 3\overline{)\,12}\end{array}$. Se o quociente é escrito à direita do dividendo, como 3) 12 (4 — ou abaixo do divisor, como é usado no Brasil, $\begin{array}{l|l}12 & 3 \\ \cline{2-2} & 4\end{array}$ — não há problema quanto à colocação do quociente. Esta forma 3) 12 (4 não é convencional, nem é usada atualmente.

A linguagem usada na descrição dos fatos de divisão corresponde à linguagem usada na multiplicação. No início da aprendizagem da multiplicação, o aluno interpreta o fato 3×4 como "3 grupos de 4 são 12." Deveria interpretar o fato correspondente de divisão, $\begin{array}{l|l}12 & 4 \\ \cline{2-2} & 3\end{array}$, como "Em 12 há três grupos de 4", ou "Quantos grupos de 4 há em 12?" Expressões como "4 em 12" ou "12 dividido por 4" não têm significação nenhuma no início da aprendizagem do processo.

SIGNIFICAÇÃO DO PROCESSO

Os Dois Conceitos de Divisão

A divisão é usada para mostrar:



As crianças aprendem a simbolizar a divisão quando compreendem seu significado.

9

Divisão de Números Inteiros

A RELAÇÃO ENTRE divisão, multiplicação, adição e subtração já foi vista no Capítulo 8. Êste Capítulo trata do processo da divisão de números inteiros. São os seguintes os tópicos incluídos:

a. Significação do processo
b. Ensino dos fatos fundamentais
c. Divisão por divisor de um algarismo
d. Divisão por divisor de dois algarismos
e. Compreensão das relações entre multiplicação e divisão.

Aprendizagens Necessárias Para Compreensão dos Fatos da Divisão

Há três coisas que o aluno deve compreender na aprendizagem dos fatos de divisão:

1) A linguagem da divisão
2) A significação do processo
3) A colocação dos algarismos no quociente.

O terceiro item presume que os algarismos do quociente sejam escritos acima do dividendo, como em $\begin{array}{r}4\\3\overline{)12}\end{array}$. Se o quociente é escrito à direita do dividendo, como 3) 12 (4 — ou abaixo do divisor, como é usado no Brasil, $\begin{array}{l|l}12 & 3\\ \cline{2-2} & 4\end{array}$ — não há problema quanto à colocação do quociente. Esta forma 3) 12 (4 não é convencional, nem é usada atualmente.

A linguagem usada na descrição dos fatos de divisão corresponde à linguagem usada na multiplicação. No início da aprendizagem da multiplicação, o aluno interpreta o fato 3×4 como "3 grupos de 4 são 12." Deveria interpretar o fato correspondente de divisão, $\begin{array}{l|l}12 & 4\\ \cline{2-2} & 3\end{array}$, como "Em 12 há três grupos de 4", ou "Quantos grupos de 4 há em 12?" Expressões como "4 em 12" ou "12 dividido por 4" não têm significação nenhuma no início da aprendizagem do processo.

SIGNIFICAÇÃO DO PROCESSO

Os Dois Conceitos de Divisão

A divisão é usada para mostrar:

1) O número de grupos iguais formados

2) O número compreendido em cada um dos vários grupos iguais.

No primeiro caso, a divisão é conhecida como *medida*; e no segundo, como *partilha*. Êsses têrmos fazem pouco sentido para muitos dos professôres principiantes. O professor deveria pensar na divisão como um processo de encontrar o número de grupos iguais a serem formados ou o número em cada um dos grupos iguais. A solução de problemas ajuda a esclarecer estas duas idéias.

"1. Quantos grupos de 4 alunos cada podem ser formados com 12 alunos?"

Neste problema, o tamanho do grupo é conhecido, mas o número de grupos não. A resposta pode ser encontrada subtraindo-se 4 de 12, repetidamente. Uma vez que a divisão é uma forma abreviada de subtração, a resposta pode ser encontrada também dividindo-se 12 por 4. A resposta mostra que 12 é três vêzes maior que 4. Êste uso da divisão mostra a *razão* entre dois números. O conceito de razão na divisão pode ser usado para mostrar quantas vêzes um número é maior que o outro.

A segunda idéia da divisão é ilustrada pelo problema seguinte:

"2. Três grupos serão formados com 12 alunos. Quantos alunos haverá em cada grupo?"

Neste problema, o número de grupos iguais é conhecido, mas o número em cada grupo não. Uma solução longa, mas razoável, consiste em repartir os alunos em três grupos iguais. Um aluno iria para o ponto X, outro para o ponto Y, e o terceiro iria para o ponto Z. O processo seria repetido até que os 12 alunos estivessem repartidos entre os três grupos. Então, o número de alunos em cada grupo seria encontrado. Nesta forma de divisão, o grupo inicial seria repartido em certo número de grupos iguais.

Na solução do problema 2, os alunos foram separados para se encontrar o número de grupos formados. Esta é uma solução demorada mas prontamente compreensível. A maneira rápida de encontrar a solução é dividir 12 por 3. O quociente dá o número em cada grupo. O raciocínio da criança deve ser o seguinte: "Se três grupos contêm 12 alunos, um grupo contém 4 alunos." Assim, não haverá dúvidas quanto à interpretação da resposta. *Todo problema de divisão com idéia partitiva envolve a procura de uma relação.* Se 5 selos custam Cr$ 40, qual é o preço de um sêlo? O preço de 5 selos é Cr$ 40, que corresponde à afirmativa de que um sêlo custa Cr$ 8. Em forma abreviada, o aluno pensará: "Se 5 selos custam Cr$ 40, 1 sêlo custará Cr$ 8."

Muitos alunos experimentam grande dificuldade em interpretar corretamente a resposta. Grande parte dessa dificuldade é resultante de incompreensão dos dois conceitos da divisão. Todo problema de divisão inclui duas coisas: primeira, o número do grupo total; segunda, o problema deve dar ou o número em um grupo ou o número de grupos iguais. Por conseguinte, se o número em um grupo é conhecido, o quociente mostra o número de grupos. Se o número de grupos é conhecido, o quociente será o número de objetos em um grupo.

b. ENSINO DOS FATOS FUNDAMENTAIS

Introdução da Divisão Por 3

O Capítulo 8 mostrou como introduzir a multiplicação por 3. Vamos agora apresentar êstes fatos em divisão. O aluno pode usar os mesmos materiais para descobrir um fato em cada um dos dois processos.

Para introduzir o fato $6\,\underline{|\,3}$, cada aluno pode mostrar seis círculos com tiras de 3 círculos cada uma, e o professor poderá fazer perguntas como:

"Quantos círculos há ao todo?"

"Quantos círculos há em um grupo?"

"Quantos grupos de 3 círculos (quadrados ou triângulos) há em 6 círculos?"

"Quantos grupos de 3 há em 6?"

"Quanto há em cada grupo?"

"Quantos grupos são?"

"Vocês estão procurando o número de grupos ou quantos grupos há em cada grupo?"

"No fato $6\,\underline{|\,2}$ / 3, qual o número que mostra o número de grupos? Qual mostra o número em cada grupo?"

O professor, então, faz um registro de experiência, como se segue:

6 círculos | 3 círculos
2

6 quadrados | 3 quadrados — **6 | 3**
2 — **2**

6 triângulos | 3 triângulos
2

A classe lê o primeiro fato apresentado assim: "Em 6 círculos há dois grupos de 3 círculos." O último fato é lido assim: "Em 6 há dois grupos de 3."

Agora, o professor pode levar a classe a descobrir outra maneira de provar que há dois grupos de 3 em 6. O aluno subtrai 3 de 6, como no exemplo acima. Em cada subtração se forma um grupo de 3. Assim, o aluno demonstra o fato pelo uso de ma-

6	**| 3**	
− 3		**1**
3		
− 3		**1**
		2

teriais exploratórios e pelo processo de subtração.

Em seguida, o aluno vira as duas tiras com desenhos geométricos de modo que se possa ver grupos de 2. O aluno lê o fato e o professor faz a representação simbólica no quadro-negro. Êste processo é usado até o aluno descobrir que há dois fatos fundamentais para cada número que tenha dois fatôres diferentes. Assim, as divisões para o número 15 são 15 $\begin{array}{|l}3\\\hline 5\end{array}$ e 15 $\begin{array}{|l}5\\\hline 3\end{array}$. O número que representa o número de grupos e o número que indica o tamanho de cada grupo trocam de lugar. Nesse exemplo, se o 3 representa o número em cada grupo, o 5 representará o número de grupos. Ao contrário, se há 5 em cada grupo, haverá, então, três grupos.

O passo seguinte na aprendizagem de um fato de divisão consiste em levar o aluno a rever o fato de multiplicação correspondente. Para o fato 6 $\begin{array}{|l}3\\\hline 2\end{array}$ o aluno diz que dois grupos de 3 são 6 e escreve o fato de multiplicação. De modo semelhante vai verificando a relação entre divisão e multiplicação para os outros agrupamentos dos fatôres de 6. Para um grupo de números como 2, 3 e 6, como no exemplo ao lado, há quatro fatos fundamentais, que são os seguintes:

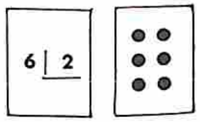
2	3	6

$2 \times 3 = 6$ $\qquad$ $3 \times 2 = 6$

6 $\begin{array}{|l}2\\\hline 3\end{array}$ $\qquad$ 6 $\begin{array}{|l}3\\\hline 2\end{array}$

Se o aluno relaciona os dois processos, ganha muito maior compreensão do que se os processos fôssem ensinados separadamente.

O aluno confecciona fichas para os fatos de divisão, como fêz em multiplicação. O diagrama apresenta os dois lados da ficha, cada um mostrando o fato 6 $\underline{|\,2}$. O aluno usa essas fichas para estudar os fatos de divisão como foi sugerido para multiplicação (pág. 236).



O aluno não tem dificuldade nenhuma na colocação do quociente quando o número dividido é formado de um algarismo apenas, como 6 $\underline{|\,2\,}$. A dificuldade aparece quando o número dividido é composto de dois algarismos, como em 3 $\underline{|\,12}$ (usual na América do Norte). O aluno deveria compreender por que o 4 é escrito acima do 2 e não do 1, ou sôbre o espaço entre 1 e 2. No exemplo dado, é necessário reagrupar 12 como 12 unidades para se poder efetuar a divisão. Isto esclarece por que o 4 no quociente é escrito no lugar das unidades.

Uso de Quadrados e Tiras Retangulares

O uso de tiras com desenhos geométricos ajuda o aluno a en-

contrar a resposta para exemplos como o fato 12 $\underline{|\,3\,}$. Mas êsses materiais não ajudam na colocação dos algarismos no quociente. Êsses materiais podem ser usados da mesma maneira como são usados na adição e subtração. Para representar o número 12, o aluno usa uma tira retangular com 10 quadrados e 2 quadrados representando unidades. Êle vê que é impossível formar grupos de 3 da fita de uma dezena. Logo, é necessário reagrupar a dezena em 10 unidades que, somadas às duas, fazem 12. Agora é possível reorganizar essas unidades em grupos de 3 de modo a formar um total de quatro grupos. O 4 deve ser escrito no lugar das unidades porque êle representa 4 unidades.

O professor pode representar o mesmo fato no quadro Valor do Lugar. Um dos alunos faz a demonstração para a classe. A classe diz como uma dezena é reagrupada com 2 unidades de modo a formar 12 unidades. E então as 12 unidades são separadas em grupos de 3.

Em seguida, o professor apresenta o processo no quadro-negro. O desenho abaixo mostra que há quatro grupos de 3 em 12. Êsses quatro grupos estão todos no lugar das unidades e fazem um total de 12 unidades.

Os mesmos processos usados na fixação dos fatos da multiplicação se aplicam também à divisão. O uso de fichas, jogos, contagens de 3 em 3 e as atividades descritas no livro-texto devem ser utilizados para ajudar o aluno no domínio dos fatos da divisão.

Um aluno demonstra domínio dos fatos de divisão quando é capaz de:

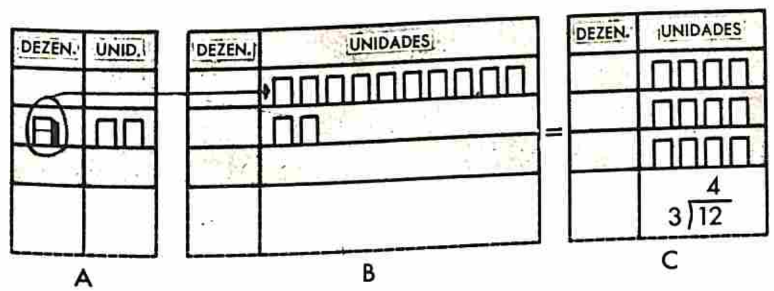
1) Mostrar a resposta de um fato pelo uso de materiais ou de desenho.

2) Achar a resposta pela subtração ou pela distribuição.

3) Dar o fato alterando a ordem dos fatôres, como em 12 $\begin{array}{|l}3\\\hline 4\end{array}$ ou 12 $\begin{array}{|l}4\\\hline 3\end{array}$.

4) Dar o fato correspondente de multiplicação.

5) Fazer uma representação simbólica de um fato de multiplicação ou divisão.



6) Dar a resposta ao fato com segurança e sem hesitação.

7) Usar o fato num problema e interpretar a resposta.

Cálculo de Uma Parte do Número

A classe aprendeu a interpretar a divisão como uma subtração abreviada. Nessa interpretação da divisão o tamanho do grupo é conhecido e é necessário procurar o número de grupos a serem formados. Depois que as crianças compreendem bem esta idéia, o professor vai levá-las à compreensão do outro conceito. O problema, agora, é procurar uma parte fracionária do número. O número de grupos é dado e é necessário procurar a quantidade, o número em cada um dos grupos iguais.

O professor pede ao aluno que reparta 6 círculos ou quadrados em grupos iguais. Há 2 círculos em cada grupo.

O professor escreve no quadro:

6 círculos $\underline{|\,3}$
2 círculos

6 quadrados $\underline{|\,3}$
2 quadrados

6 triângulos $\underline{|\,3}$
2 triângulos

$\frac{1}{3}$ **de 6 = 2 ou 6** $\underline{|\,3}$
2

O aluno lê o primeiro exemplo como: "Em 6 círculos há 3 grupos de 2 círculos", ou "6 círculos divididos em 3 grupos iguais são 2 círculos." A forma mais breve eventualmente usada é: "Um têrço de 6 é 2." O aluno organiza suas 6 figuras geométricas em grupos iguais, distribuindo-as em três pilhas iguais. Isto é o mesmo que achar um têrço de um número.

As duas notações mostram como o fato pode ser escrito. Uma notação mostra a forma fracionária, e a outra, a forma convencional. É pena que a mesma notação seja usada para expressar as duas explicações da divisão.

De modo semelhante, o aluno divide outros múltiplos de 3, desde 6 a 27, inclusive, em três grupos iguais para encontrar um têrço de cada. Alguns alunos descobrirão ràpidamente a relação entre as duas aplicações da divisão e não será necessário o uso de materiais concretos. O professor deve assegurar-se de que os alunos compreendem bem a diferença entre as duas aplicações. Pelas respostas dadas às perguntas que se seguem, o professor pode verificar se o aluno compreende esta forma de divisão:

"Em quantos grupos foram divididos os círculos?"

"Que foi encontrado, o número de grupos ou o número de círculos?"

"Se Cr$ 6 fôssem divididos em três partes iguais, a resposta seria 2 ou Cr$ 2?"

"Dividir um número por 3 é o mesmo que achar a parte fracionária dêste número?"

Para testar a compreensão da diferença entre as duas formas de divisão, pode-se verificar a habilidade do aluno em identificar a idéia contida em um problema. O professor leva a classe a ler o problema e responder às seguintes questões:

1) "Foi dado o tamanho do grupo?"

2) "Foi dado o número de grupos?"

Considerar o seguinte problema:

"Formaram-se três equipes com 15 jogadores. Quantos jogadores ficaram em cada equipe?"

O aluno identifica o 15 como sendo o grupo grande, que será dividido em grupos iguais, menores. Raciocina então: "Tenho o número de grupos ou o número em cada grupo?" O número de grupos é 3. Há 15 jogadores em 3 grupos. É o mesmo que 5 jogadores em cada grupo, ou

3 grupos com 15 jogadores correspondem a um grupo de 5 jogadores 15 $\underline{|\,3}$
5

Como foi mencionado anteriormente, todo problema envolvendo partilha representa uma razão.

Haverá sempre alguns alunos na classe incapazes de perceber a diferença entre as duas aplicações de divisão. Êsses alunos poderão usar materiais concretos para encontrar a resposta de um dado problema. Pelo modo de usar o material pode-se saber se compreendem ou não o processo. Assim, para representar o conceito de razão indicado pelo fato 12 $\underline{|\,3}$ o aluno deveria verificar, pela subtração repetida de 3 quadrados de 12 quadrados, que a resposta é 4. Quando subtrai um grupo de 3 quadrados o aluno pensa: "Isto é um grupo ou uma pilha." Quando todos os quadrados são divididos em pilhas, êle conta o número de pilhas. Para representar o conceito partitivo êle pode distribuir os quadrados um a um pelos 3 grupos e contar o número de quadrados em cada grupo. A resposta será 4 quadrados. O problema de divisão ou sua aplicação social determina qual dos dois tipos de divisão está sendo usado.

Pode haver muitos alunos que não sejam capazes de distinguir os dois tipos de divisão. O mesmo acontece com outros conceitos quantitativos mais difíceis. Nem todos os alunos numa classe dominam um conceito difícil, especialmente quando o conceito é introduzido pela primeira vez. Aprendizagem é um processo de crescimento.

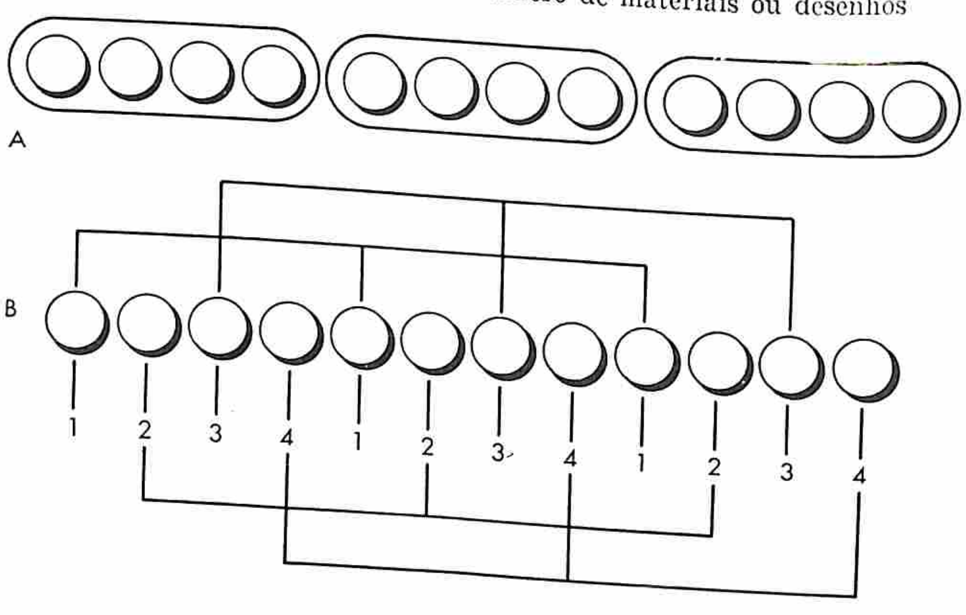
Na multiplicação já foi feita a descrição de como introduzir os fatos com zero (pág. 234). Plano semelhante pode ser usado na divisão. É muito difícil ser preciso dividir zero por um número, exceto quando aparece um número com dois ou mais algarismos, como em 40 $\underline{|\,2}$. Neste caso, o aluno divide as dezenas. Assim, não havendo unidades para serem divididas, êle escreve zero no quociente. Depois de algumas experiências êle descobre que quociente de zero dividido por um número qualquer é zero. Pode escrever sob a forma de divisão todos os fatos envolvendo zero. Êstes fatos constituem uma coleção ou família. O aluno deve conhecer a generalização que governa êste grupo de fatos.

Ampliação do Ensino dos Fatos Fundamentais de Divisão

O professor continua na quarta série o ensino da divisão, introduzindo os fatos de divisão correspondentes aos de multiplicação já estudados nesse grau. Uma tabela como a de 4, utilizada na multiplicação, pode ser usada para a introdução dos fatos correspondentes em divisão. Por outro lado, os fatos fundamentais dos processos podem ser estudados simultâneamente. Em uma aula o aluno pode ver os quatro fatos derivados de uma combinação de números diferentes, como 4×5. São êles: $4 \times 5 = 20$, $5 \times 4 = 20$, $20 \,|\, \underline{4}$, 5 e $20 \,|\, \underline{5}$, 4.

É importante a introdução de cada conceito de divisão. Para mostrar o conceito de razão em $20 \,|\, 4$, o aluno pensa: "Quantos grupos de 4 há em 20?" À medida que êle se familiariza com o processo vai simplificando a linguagem, até dizer: "Quantos 4 há em 20?" Para mostrar o conceito de partilha, o raciocínio seria: "Quantos em cada um dos 4 grupos iguais, se são 20?" Esta é uma linguagem usada para expressar uma idéia que poderia ser simplificada para: "Um quarto de 20."

A classe deve usar um grande número de materiais ou desenhos



para demonstrar a diferença entre as duas idéias de divisão. O diagrama A mostra o conceito de razão para $12 \,|\, \underline{4}$, e o diagrama B mostra o conceito partitivo. O aluno deve ser capaz de interpretar o resultado. Assim, o diagrama A mostra 3 grupos iguais de 4 discos em 12 discos, e o diagrama B mostra que há 3 discos em cada um dos 4 grupos iguais formados com 12 discos.

Dramatização do Processo

A dramatização oferece um meio efetivo de demonstrar a significação de um processo. Um grupo de alunos faz a pantomima de um processo e a classe identifica o processo representado na demonstração.

São necessárias cinco demonstrações diferentes para dramatizar os quatro processos. Os alunos que fazem a dramatização devem compreender que nenhum processo será repetido. Uma representação de multiplicação pode ser confundida com adição, mas pode-se usar um exemplo de adição em que não haja possibilidade de multiplicação. O grupo que faz a pantomima deve fazê-lo de modo que a classe possa perceber a diferença entre adição e multiplicação e entre subtração e divisão.

Suponhamos que oito alunos estejam participando de uma pantomima. Devem reunir-se fora da sala para combinar o tipo de representação que vão fazer.

Adição. Os oito alunos formam três grupos desiguais, como 2, 1 e 5. O primeiro grupo caminha em frente à classe, seguido pelo grupo de 1 aluno. Entra então o grupo de 5 alunos, e os 8 formam uma linha reta, dispersando-se depois de alguns segundos.

Subtração. Os oito alunos formam uma fila na frente da classe. Um grupo retira-se. Êsse grupo que se retira não deve ser igual ao grupo que fica.

Multiplicação. Os oito alunos se reúnem fora da sala e entram em grupos iguais, como grupos de 2, por exemplo. Fazem uma linha reta em frente à classe.

Divisão. São necessárias duas representações para demonstrar os dois sentidos de divisão:

1. Razão. Os oito alunos fazem uma fila em frente à classe. Vão-se retirando 2 a 2 e colocando-se em posições diferentes. Devem formar quatro grupos, cada um contendo dois alunos.

2. Partilha. Os oito alunos formam uma fila. Dividem-se em dois grupos, saindo um a um para cada grupo, até formarem dois grupos contendo quatro alunos cada um.

Nem a ordem de apresentação nem a demonstração do processo têm que ser necessàriamente iguais ao que foi descrito. Êste plano é apenas para mostrar como a classe compreende os processos básicos.

Divisão com Resto

Do ponto de vista da eficiência em divisão, tanto é importante para o aluno saber quantos grupos de 2 há em 8 como em 9. Oito é um múltiplo de 2, mas 9 não é. Há 90 fatos de divisão em que o número dividido é múltiplo do divisor, mas há 360 fatos em que o dividendo não é múltiplo do divisor.

Os fatos que envolvem múltiplos do divisor podem ser considerados como *fatos da divisão exata,* como $\begin{array}{r|l} 12 & 3 \\ \cline{2-2} & 4 \end{array}$. Os fatos envolvendo dividendos que não são múltiplos do divisor são os fatos de *divisão aproximada,* como $\begin{array}{r|l} 5 & 3 \\ \cline{2-2} & 1\,r\,2 \end{array}$. Os puristas matemáticos objetam ser lícito o uso da expressão *divisão aproximada* aplicada ao exemplo $\begin{array}{r|l} 15 & 3, \\ \cline{2-2} & 5 \end{array}$ ou da expressão *divisão não-aproximada* aplicada ao exemplo $\begin{array}{r|l} 9 & 2 \\ \cline{2-2} & 4\,r\,1 \end{array}$.

A tabela mostra o número de fatos em que os números divididos são múltiplos do divisor formado de um algarismo apenas, e o número de fatos em que o dividendo não é múltiplo.

Dividir por 1 é mais teórico; logo, há 80 fatos envolvendo múltiplos e 360 em que ocorre a situação reversa. É necessário que o aluno saiba os fatos exatos tanto quanto os de divisão aproximada, para que possa realmente dominar o processo da divisão.

Tabela A. Número de Fatos de Divisão Exata e Aproximada

Divisor	*Número de Fatos Exatos*	*Número de Fatos de Divisão Aproximada*
1	10	0
2	10	10
3	10	20
4	10	30
5	10	40
6	10	50
7	10	60
8	10	70
9	10	80
Total	90	360

Ensino dos Fatos de Divisão Aproximada

O aluno pode usar materiais que o ajudem a descobrir a resposta para o agrupamento em que haja resto. Para achar o número de grupos de 2 em 5, êle pode usar 5 discos e separá-los em grupos de 2 discos cada um. Êste agrupamento mostra que há 2 grupos de 2 e que ainda sobra 1 disco. O número que sobra não é bastante para formar um nôvo grupo. Por conseguinte, o resto deve ser sempre menor do que o divisor. O professor registra a experiência ao lado.

$$\begin{array}{r|l} 5 & 2 \\ \cline{2-2} 4 & 2\,r\,1 \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$

Do mesmo modo, o aluno usa materiais para descobrir outro agrupamento de 2 em que haja resto. Continua usando materiais até que descubra a maneira de escrever os fatos de 2. Deverá fazer as seguintes descobertas:

1) Os números pares podem ser divididos por 2 sem deixar resto.

2) Os números ímpares, quando divididos por 2, deixam resto 1.

3) É preciso pensar no número par imediatamente anterior a qualquer número ímpar, antes de efetuar a sua divisão por 2.

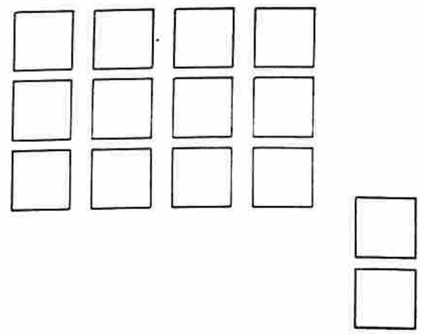
O professor pode seguir o mesmo plano para a introdução de outros fatos de divisão aproximada, como a tabela dos fatos de 3. O professor pode permitir que o aluno use materiais concretos para fazer a representação visual, ou usar ambos os processos até que o aluno seja capaz de perceber as relações entre os fatos exatos e os de divisão aproximada. Muitos professôres acham aconselhável que o aluno escreva todos os números em seqüência até 10 vêzes o divisor. Então, o aluno circula os múltiplos do divisor, como mostrado para o 3.

0 — 1 — 2 — 3 — 4
5 — 6 — 7 — 8 — 9
10 — 11 — 12 — 13 — 14
15 — 16 — 17 — 18 — 19
20 — 21 — 22 — 23 — 24
25 — 26 — 27 — 28 — 29

Os números entre os múltiplos do divisor podem ser considerados como *intermediários.* Para achar o quociente de um número intermediário, o aluno deve pensar no múltiplo do divisor imediatamente anterior a êle. Para o exemplo $\begin{array}{r|l} 14 & 3 \\ \cline{2-2} & \end{array}$, o aluno pode raciocinar assim: "O número imediatamente menor de 14, que pode ser dividido por 3 sem deixar resto, é 12."

$$\begin{array}{r|l} 14 & 3 \\ \cline{2-2} 12 & 4\,r\,2 \\ \cline{1-1} 2 & \end{array}$$

Poderá provar que sua resposta é correta pensando assim: "Em 15 há 5 grupos de 3; logo, em 14 só pode haver quatro grupos de 3 com um resto." O aluno pode usar também as fitas retangulares e os quadrados para demonstrar o fato $\begin{array}{r|l} 14 & 3 \\ \cline{2-2} & 4\,r\,2 \end{array}$. Toma uma fita de 1 dezena e 4 unidades para representar 14. Não é possível demonstrar a divisão até que a dezena seja reagrupada em 10 unidades, perfazendo um total de 14 unidades. Agora é possível dividir as 14 unidades em três grupos contendo 4 unidades cada um, havendo um resto de duas unidades. Quando o aluno escreve êste fato, deve ser capaz de interpretar o 2 e o 12 representados neste exemplo.



O Resto na Divisão

Em primeiro lugar, o aluno deve escrever o resto no quociente como um número inteiro e não sob a forma fracionária, por duas razões: primeira, se o resto é expresso como um resto e não como uma fração, é mais fácil verificar a correção, pela multiplicação e adição do resto ao produto do divisor pelo quociente; segunda, é sempre necessário ou aconselhável reduzir a fração a seus têrmos mais simples. Esta operação é evitada se o resto é considerado simplesmente como resto.

O resto pode ser expresso de três maneiras diferentes, de acôrdo com o problema:

1) Como resto.

2) Como fração que será parte do quociente.

3) Como fração que será parte do quociente e então arredondado para o número inteiro mais próximo.

Os exemplos seguintes ilustram estas interpretações:

"1) Se 14 livros de histórias forem igualmente distribuídos entre 3 crianças, quantos livros receberá cada uma?" A resposta mostra que cada criança recebe 4 livros e ainda sobram 2.

```
14 | 3
12   4 r 2
 2
```

"2) Uma corda de 9 metros de comprimento foi dividida em 4 pedaços iguais. Qual é o comprimento de cada pedaço?" A resposta é $2\frac{1}{4}$ m, e não 2 m, com 1 metro de resto. A fração $\frac{1}{4}$ é parte essencial do quociente.

```
9 | 4
8   2 1/4
```

"3) Se 3 laranjas são vendidas por Cr$ 100, qual será o preço de uma laranja?" O preço médio de uma laranja é Cr$ $33\frac{1}{3}$, mas o preço que se paga será no mínimo Cr$ 34,00. Neste caso, o número misto do quociente é arredondado para o inteiro seguinte.

As ilustrações demonstram que a maneira de interpretar o resto depende da aplicação da divisão no problema. À vista do exposto, é aconselhável expressar o resto simplesmente como resto, nas séries mais elementares.

c. DIVISÃO POR DIVISOR DE UM ALGARISMO

O Reagrupamento Não É Necessário

A divisão por um número simples pode incluir exemplos como 80 | 2 , ou 76 | 2 , em que há necessidade de um reagrupamento. Se o aluno sabe os fatos exatos não encontrará dificuldade na solução de exemplos do primeiro tipo. Na solução de exemplos como êstes é bom uma revisão dos conhecimentos sôbre o valor posicional dos algarismos. Em 64 | 2 , o aluno identifica 64 como 6 dezenas e 4 unidades, e divide um grupo de cada vez. O quociente será 3 dezenas e 2 unidades, ou 32 unidades. Na introdução desta nova dificuldade, o aluno pode usar as tiras retangulares e os quadrados para objetivar a solução. Se êle compreende bem o valor posicional dos algarismos do dividendo, não haverá necessidade de usar materiais concretos.

Divisão Com Reagrupamento

A divisão por número de um algarismo envolvendo reagrupamento apresenta dificuldades que não aparecem quando não há reagrupamento. Para dividir 72 | 3 , é preciso reagrupar uma das dezenas em unidades, ficando 6 dezenas e 12 unidades. Se o trabalho não é todo registrado, os alunos terão que lidar com números não-vistos. Se, pelo contrário, todo o trabalho é escrito, trabalharão sòmente com números vistos. Por conseguinte, se um número necessita ser reagrupado para que se complete o processo, é possível usar-se tanto a forma *longa* como a forma *simplificada* de divisão.

Processo Para Divisão

Tôdas as experiências feitas com relação aos processos de divisão, longo ou simplificado, evidenciaram o fato de que os alunos atingem um índice de correção muito maior pelo processo longo do que pelo simplificado. Um dos Autores[1] provou isto através de três investigações independentes. Para certos tipos de exemplo (fáceis — veja pág. 278), o tempo necessário para a solução dos exemplos pelo processo longo foi maior do que o tempo gasto para o processo simplificado, mas o número de erros nesse processo foi maior do que naquele.

As investigações citadas foram conduzidas num programa baseado na aprendizagem de rotina. Os resultados foram tão favoráveis ao processo longo, desde o 5º grau ao 15º (do 13º ao 15º, já no curso colegial), que é bem provável que, qualquer que seja o tipo de programa oferecido, os alunos que aprenderem pelo processo longo terão maior possibilidade de acêrto. Nenhuma experiência evidenciou, entretanto, até que ponto podem os alunos dominar a divisão pelo uso de um ou de outro processo.

Os professôres objetam, freqüentemente, o registro de todo o trabalho efetuado num exemplo como 58 | 2 . Se há alunos numa classe que o podem resolver satisfatòriamente pelo pro-

---

[1] GROSSNICKLE (Foster E.), "An Experiment with a One-Figure Divisor in Short and Long Division", *Elementary School Journal*, 34:496-506; 590-599.

—, "Appraising the Program for Teaching Division", *National Elementary Principal*, 16:361-368.

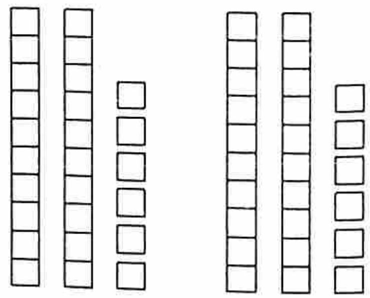
—, "The Incidence of Error in Division with a One-Figure Divisor", *Journal of Educational Research*, 29: 509-511.

cesso simplificado, o professor deve permitir o seu emprêgo. Não é necessário que todos os alunos efetuem uma operação pelo mesmo processo. Por outro lado, o processo longo de divisão por um número é a forma-padrão de ensino. O professor não precisa referir-se ao processo como processo longo de divisão, mas simplesmente como a maneira de efetuar uma divisão. Tôda a classe deve aprender a divisão pelo convencional processo longo. Os alunos que descobrirem que não é necessário dividir por aquêle processo usarão o processo abreviado.

O Ensino da Divisão Com Reagrupamento

Suponhamos que 52 alunos de uma classe precisam ser divididos em dois grupos iguais. O problema será encontrar o número de alunos em cada grupo. Os alunos podem usar vários caminhos para chegar à resposta. Alguns alunos pensarão em 52 como 50 e 2. Os alunos já sabem que 25 é metade de 50. Logo, 26 é metade de 52. O aluno pode pensar também: "Metade de 40 é 20 e metade de 12 é 6. Logo, metade de 52 é 20 + 6, ou 26."

Se os alunos são capazes de encontrar uma resposta para o problema, quer dizer que já estão prontos para aprender o processo da divisão. O professor introduz, então, uma seqüência de atividades para levar a classe a

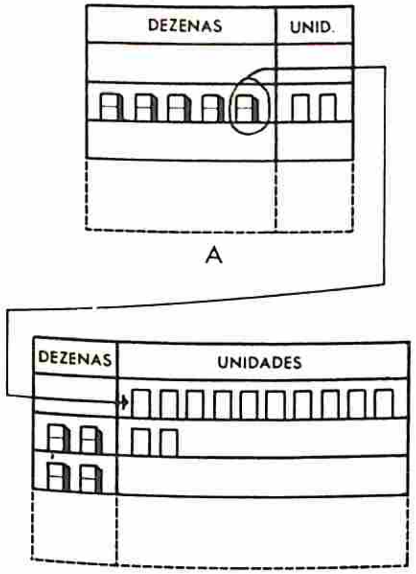


descobrir como efetuar a divisão $52 \underline{|\ 2\ }$

1. Os alunos podem usar as tiras retangulares e os quadrados como mostra o desenho. As cinco tiras de dezena e as duas unidades serão divididas em dois grupos iguais. É possível colocar duas tiras de dezena e 1 unidade em cada grupo. O aluno reagrupa a dezena como 10 unidades. As unidades serão distribuídas em dois grupos formando um total de duas dezenas e seis unidades em cada grupo. Embora o aluno que procede assim não tenha descoberto os passos usados na solução convencional da divisão, descobriu, entretanto, um meio de resolver o problema.

2. Demonstrar o trabalho diante da classe usando o quadro Valor do Lugar. Um aluno representa 52 como 5 dezenas e 2 unidades. Êle divide os cinco feixes de dezenas em 2 grupos iguais e sobra 1 feixe.

O aluno abre o feixe de 10 fichas e forma 10 unidades totalizando 12 unidades. Êle divide as



A

B

C

12 fichas em dois grupos iguais de 6 cada um.

3. Fazer uma representação visual no quadro-negro. Deixar que a classe interprete os passos seguidos na representação. A classe diz o que representa cada número. O quadro A mostra como representar num quadro Valor do Lugar os algarismos no número 52. O quadro B mostra as 4 dezenas divididas em dois grupos iguais e a dezena que sobra, reagrupada como 10 unidades fazendo um total de 12 unidades. O quadro C mostra as fichas que representam 52, divididas em dois grupos iguais.

4. Mostrar a representação simbólica da divisão como é dada ao lado. Êste pequeno x debaixo do 2 mostra que êle *desceu* para formar 12 unidades juntamente com a dezena que tinha sobrado. Na forma escrita, segue-se a mesma seqüência observada na visualização. Chamar a atenção para a semelhança dos dois processos.

$$\begin{array}{l|l} 52 & \underline{2\ } \\ \underline{4^x} & 26 \\ 12 & \\ \underline{12} & \end{array}$$

5. Deixar a classe ler a apresentação dada no livro-texto. O exemplo que o aluno resolveu usando materiais concretos deve ser o mesmo apresentado no livro-texto. Os números podem ser usados em situação social diferente, mas devem ser os mesmos em cada exemplo. A experiência com materiais exploratórios e visuais torna o aluno capaz de ler e interpretar as etapas apresentadas no desenvolvimento.

6. Levar a classe a explicar as etapas de um ou dois modelos já resolvidos. Êsses modelos podem ser dados pelo livro-texto ou passados no quadro-negro pelo professor.

7. Deixar que os alunos resolvam os exemplos dados no livro.

Posteriormente o aluno aprenderá a tirar a prova da operação. No exemplo $72 \underline{|\ 3\ }$, a classe verifica que o quociente 24 é correto porque o produto de 3 e 24 é 72. O produto do divisor pelo quociente é sempre igual ao número dividido se êsse número é múltiplo do divisor.

O exemplo a ser apresentado em seguida incluirá um resto na resposta, como no exemplo 46 | 3 . O aluno registra o resto, em exemplos como êsse, do mesmo modo como fêz nos fatos de divisão aproximada. Êle deve saber não sòmente quanto sobra, mas também o que representa êsse resto. Pelo uso de materiais concretos, êle já deve saber que o resto é menor do que o número necessário para formar um nôvo grupo ou aumentar de uma unidade o tamanho de cada grupo. Em qualquer dos casos, o resto deve ser menor do que o divisor.

O aluno deve aprender como usar o resto na verificação da divisão pela multiplicação. O resto somado ao produto do quociente pelo divisor é igual ao número dividido. O emprêgo da prova pela multiplicação é válido em todos os casos exceto um, quando o resto encontrado é igual ou maior do que o divisor. A ilustração mostra que a prova está certa, mas o quociente é incorreto. Os alunos usam, freqüentemente, êste tipo de resto. É por esta razão que os professôres exigem dos alunos que comparem, em todo o desenvolvimento da operação, cada resto com o divisor.

```
76 |4        18
4ˣ  18r4    ˣ4
36          72
32          +4
 4          76
```

Sistematização da Seqüência dos Passos na Divisão

Muitos livros-texto de Aritmética dão um sumário dos passos necessários no processo de divisão. Num exemplo como êste ao lado os passos são:

```
72 |3
6'  24
12
12
```

1. Dividir as 7 dezenas de 72 por 3. Pensar: "7 | 3 dá 2 e há um resto." Escrever 2 no lugar das dezenas.

2. Multiplicar as 2 dezenas por 3. Escrever 6 debaixo de 7 dezenas.

3. Subtrair. O resto é 1 dezena.

4. Comparar o resto 1 com o divisor 3.

5. Abaixar as 2 unidades e escrever ao lado de 1 dezena fazendo 12 unidades. Escrever ˣ debaixo do 2 para indicar que êste número foi usado.

6. Dividir 12 por 3. Escrever 4 no lugar das unidades no quociente.

7. Multiplicar 4 por 3 e escrever o produto debaixo das 12 unidades.

8. Subtrair. O resto é zero.

Depois de encontrar o primeiro algarismo do quociente, o processo é repetido. A seqüência dos passos consiste em dividir, multiplicar, subtrair, comparar, abaixar o algarismo seguinte e repetir os mesmos passos. É evidente que esta seqüência pode ser difícil para os alunos mais lentos. Freqüentemente o professor

tenta fazer com que o aluno siga esta seqüência antes de compreender o significado de cada passo. Neste caso, êle aprende o processo mecânicamente. O sumário dos passos deverá ser focalizado depois que o aluno compreende cada um, porque assim nem será necessário uma lista tão específica como a que foi apresentada.

Erros na Divisão com o Divisor de Um Algarismo

Qualquer que seja o método usado para o ensino de um processo difícil como é a divisão, os alunos erram na execução do mesmo. Um dos Autores[2] fêz uma análise dos erros cometidos por alunos da quinta à oitava série em divisões por número simples. Tornou-se evidente que a compreensão não foi considerada durante a aprendizagem porque os alunos cometeram 57 diferentes espécies de erros indicando que aprenderam a dividir pelo processo de tentativas e erros.

Alguns erros eram pouco freqüentes, mas havia dois tipos constantes em cada série. Eram erros relacionados a combinações resultantes do uso do zero.

Os erros eram causados por combinações falhas em divisão, multiplicação e subtração. Alguns dêsses erros eram esporádicos e outros constantes. Um êrro é esporádico se o aluno dá uma vez o produto ou o quociente errado na multiplicação ou divisão, mas de outra vez êle dá a resposta correta. O aluno sabe como corrigir êsses erros esporádicos. Êle precisa é de mais exercício ou prática com o fato em que comete êrro esporádico. Um êrro é constante se o aluno dá a resposta errada várias vêzes a um mesmo fato. O plano apresentado na pág. 492 mostra como proceder com erros constantes de combinações. O professor leva o aluno a descobrir as respostas para os grupos desconhecidos, e depois fixá-los.

O zero pode aparecer no quociente em três posições diferentes:

1. Zero final no dividendo e no quociente, como 60 | 2 = 30

2. Zero intermediário no quociente, como 214 | 2 = 107

3. Zero final no quociente sòmente, com resto, como 461 | 2 = 230 r 1

A maioria dos erros com zero decorria de inabilidade dos alunos em colocar o zero no quociente. O terceiro exemplo apresentou o maior número de erros. Os alunos quase sempre davam o quociente 23 r 1 como resposta do exemplo 461 | 2. O aluno que persiste neste êrro demonstra

[2] Grossnickle (Foster E.), "Errors and Questionable Habits of Work in Long Division With a One-Figure Division", *Journal of Educational Research*, 29:355-68.

pouca compreensão do valor posicional e de nosso sistema de numeração. O professor não insistirá em como corrigir a resposta de um determinado exemplo envolvendo zero no quociente. Ao invés, deve levar o aluno a examinar a resposta e verificar se ela é razoável. Neste caso, o aluno deverá saber que a resposta seria maior que 200, logo a resposta 23 r 1 não é razoável. O 2 do quociente deve estar no lugar das centenas, e o quociente será 230 e não 23.

Os erros causados pela dificuldade em descer o algarismo podem ser evitados se o aluno marcar o algarismo usado com um sinalzinho (×). Com relação aos materiais concretos não há uma série onde êles não sejam utilizados. Alguns alunos não precisam de usá-los e outros têm que usá-los mais tempo para garantir maior correção.

Como Medir a Habilidade em Dividir por Divisor de Um Algarismo

Depois que o aluno aprende a dividir por número de um algarismo e tem alguma prática no processo, já será capaz de demonstrar sua habilidade na efetuação do processo. O teste abaixo pode ser usado com esta finalidade. Foi empregado para determinar o grau de eficiência dos alunos que fazem divisão pelo processo longo e pelo processo simplificado.[3] O teste é composto de duas partes. A Primeira Parte contém *exemplos fáceis*, e a segunda, *exemplos difíceis*.

[3] Veja nota ao pé da pág. 273.

TESTE PARA MEDIR A EFICIÊNCIA EM DIVISÃO POR DIVISORES DE UM ALGARISMO

Primeira Parte

a) 2844 | 3	*f)* 5785 | 8	*l)* 6595 | 7
b) 7826 | 5	*g)* 7589 | 9	*m)* 3703 | 5
c) 1714 | 2	*h)* 27822 | 4	*n)* 7838 | 6
d) 45663 | 7	*i)* 2761 | 6	*o)* 2297 | 3
e) 1546 | 4	*j)* 8389 | 9	*p)* 5900 | 2

Segunda Parte

a) 4031 | 7	*f)* 2031 | 6	*l)* 21431 | 8
b) 21211 | 9	*g)* 2230 | 9	*m)* 6124 | 7
c) 5100 | 7	*h)* 50300 | 8	*n)* 5102 | 8
d) 2215 | 8	*i)* 4101 | 6	*o)* 31352 | 7
e) 31121 | 9	*j)* 4220 | 9	*p)* 2303 | 9

Exemplo fácil em divisão é aquêle em que não é necessário o reagrupamento para subtrair um produto de um dividendo parcial. Num exemplo difícil êste reagrupamento é necessário. A solução dos exemplos *a* nas duas partes mostra esta diferença.

Fácil

```
2844 | 3
27     948
 14
 12
  24
  24
```

Difícil

```
4031 | 7
35     575 r 6
 53
 49
  41
  35
   6
```

Não é necessário reagrupar e subtrair no exemplo à esquerda, mas o é no da direita.

O aluno que dá uma solução correta aos exemplos das duas partes do teste demonstra competência no processo e domínio dos fatos fundamentais. Um aluno que atinge o máximo de pontos neste teste provàvelmente compreende a maioria do trabalho. É possível, entretanto, conseguir o máximo e ter uma compreensão limitada do processo. O teste mede a habilidade do aluno em computar a divisão. O aluno que compreende bem o processo de divisão pode responder a questões relacionadas à solução de um exemplo como o item *i* da Primeira Parte:

```
2761 | 6
24     460 r 1
 36
 36
   1
```

1) Qual é o valor posicional de cada algarismo no dividendo?

2) Por que o quociente deve ser um número de três algarismos?

3) Por que o quociente deve ser maior do que 100 e menor do que 500?

4) Por que começamos a dividir da esquerda e não da direita como em adição, subtração e multiplicação?

5) O produto de 6 vêzes o primeiro algarismo do quociente é 24. Que valor representa êste 24?

6) O resto da subtração 27 menos 24 é 3. Que valor representa êste 3?

7) Por que abaixamos o 6 para o lado do 3, formando o número 36?

8) Que valor representa êste 36?

9) Por que o resto de cada subtração deve ser menor do que 6?

10) Por que foi preciso escrever zero no quociente no lugar das unidades?

11) Que representa o último resto 1?

12) Por que o resto final deve ser menor do que o divisor?

13) Como é possível provar a solução para mostrar que a resposta está correta?

14) Como você pode mostrar que 46 r 1 não é uma resposta sensata?

15) Por que é preciso somar o resto ao produto do divisor e do quociente para encontrar o dividendo?

16) Use os números dados e faça um problema envolvendo divisão. Diga qual a idéia de divisão representada pelo problema.

Há poucos alunos das quarta e sexta séries capazes de dar uma resposta correta a tôdas estas perguntas. Quanto maior o número de perguntas semelhantes que o aluno é capaz de responder sôbre divisão por um algarismo, maior é a sua compreensão do processo. A habilidade em responder a uma lista extensa de questões sôbre divisão por número de um algarismo representa um desenvolvimento considerável de compreensão matemática.

O Método Subtrativo de Divisão

Um estudo recente, feito por Van Engen e Gibb,[4] comparou o desenvolvimento em divisão de dois grupos iguais da quarta série. Em um dos grupos, os alunos aprenderam a dividir pelo processo convencional; no outro, os alunos aprenderam a dividir pelo processo de *subtrações sucessivas*. Neste processo, o aluno usa sucessivas subtrações para encontrar o quociente. Usando-se êste processo, o exemplo 52 | 2 pode ser resolvido como se vê ao lado. O quociente é igual à soma dos números na coluna à direita, ou 26.

52	2
20	10
32	
20	10
12	
10	5
2	
2	1
	26

Não há um padrão fixado para a divisão por êste processo. Outro aluno no grupo pode dar uma segunda solução. Se êle não está seguro do número de grupos de 2 em 12, pode usar um agrupamento no qual tenha mais certeza, como grupos de 2 em 6. Repete o processo para encontrar o número de grupos de 2 que há no outro.

52	2
40	20
12	
12	6
	26

Van Engen e Gibb[5] apontam vantagens e desvantagens dêste processo de divisão comparado com o processo convencional. As vantagens podem ser expressas como:

1. Há apenas uma idéia geral (subtração) em todo o desenvolvimento do processo.
2. Desaparecem as dificuldades com zero no quociente.
3. Não há diferença na maneira de proceder com divisores de um algarismo ou formado de vários algarismos.
4. Não é preciso dar ênfase aos fatos de divisão aproximada porque não são necessários no método subtrativo.
5. Não é preciso ensinar os passos do processo de divisão.
6. O processo é flexível, enquanto o processo convencional é rígido.

Os Autores apontam também três desvantagens para o processo:

1. O processo é nôvo para os professôres e, por conseguinte, será difícil a sua introdução na sala de aula.
2. O processo não é tão conciso quanto o convencional.
3. O processo faz uso extensivo de produtos que são múltiplos de 10 e 100.

Os resultados da experiência são difíceis de interpretar. De modo geral não houve diferença significante nos resultados apresentados pelos dois grupos. Alguns aspectos foram mais favoráveis a um grupo e outros favoreceram mais a outro grupo, como se pode ver pelo seguinte sumário dos resultados:[6]

> No fim do programa da quarta série de Aritmética, espera-se que a idéia de medida seja mais fácil para aquêles que aprenderam pelo processo subtrativo e a divisão partitiva mais fácil para aquêles que aprenderam pelo processo convencional.
>
> As crianças de nível intelectual mais baixo têm menos dificuldade em compreender a divisão se aprenderem pelo processo de subtrações sucessivas.
>
> Aparentemente não há diferença de resultado entre grupos de alto nível intelectual além daquela esperada, quando inteligência e desenvolvimento aritmético são controlados.

A maioria das vantagens apresentadas aplica-se também ao processo convencional quando ensinado de maneira adequada. O aluno deve saber que a divisão é uma forma abreviada de subtrações sucessivas e deve saber também como encontrar a resposta para um exemplo por meio de subtrações sucessivas. Não há razão pela qual um aluno que aprenda o fato 12 | 2 / 6 não seja capaz de demonstrar que há 6 grupos de 2 em 12 por meio de subtrações sucessivas ou pelo processo exemplificado ao lado. É verdade que muitos professôres não usam esta forma para demonstrar um exemplo de divisão. O aluno deve ser encorajado a usar processos dêste tipo para demonstrar a sua compreensão. Por outro lado, não pode limitar a sua aprendizagem a êste tipo. O homem inventou o processo convencional, que tem sobrevivido ao tempo, porque é conciso. Êste padrão de exercício deve seguir as experiências com material exploratório. Assim, quando o aluno usa tiras e quadrados para dividir

12	2
10	5
2	
2	1
	6

[4] VAN ENGEN (Henry) e GIBB (E. G.), *General Mental Functions Associated with Division*, Cedar Falls, Iowa: State Teachers College, 1956, pág. 181.

[5] *Ibid.*, págs. 14-15.

[6] *Ibid.*, págs. 87-88.

52 em dois grupos iguais a fim de encontrar o quociente, como no exemplo $52 \underline{|\ 2\ }$, êle forma 2 grupos de 10 e tem uma dezena restante. Reagrupa a dezena com as duas unidades fazendo 12 unidades, e divide então as unidades. O processo convencional segue êste padrão na divisão de um grupo em dois grupos iguais. O método subtrativo tem significação quando o aluno sabe usar os símbolos.

O aluno que usa o processo subtrativo, usa um processo menos imaturo do que aquêle que usa o processo convencional. O professor prevê que o aluno usará o processo convencional em outras operações. Êle pode lançar mão de recursos que facilitem a aprendizagem como no exemplo ao lado, antes de ser capaz de operar em um nível mais elevado. O mesmo se aplica à divisão.

$$\begin{array}{r} {}^{6}\cancel{7}\ {}^{12}\cancel{2} \\ -\ 3\ 8 \\ \hline 3\ 4 \end{array}$$

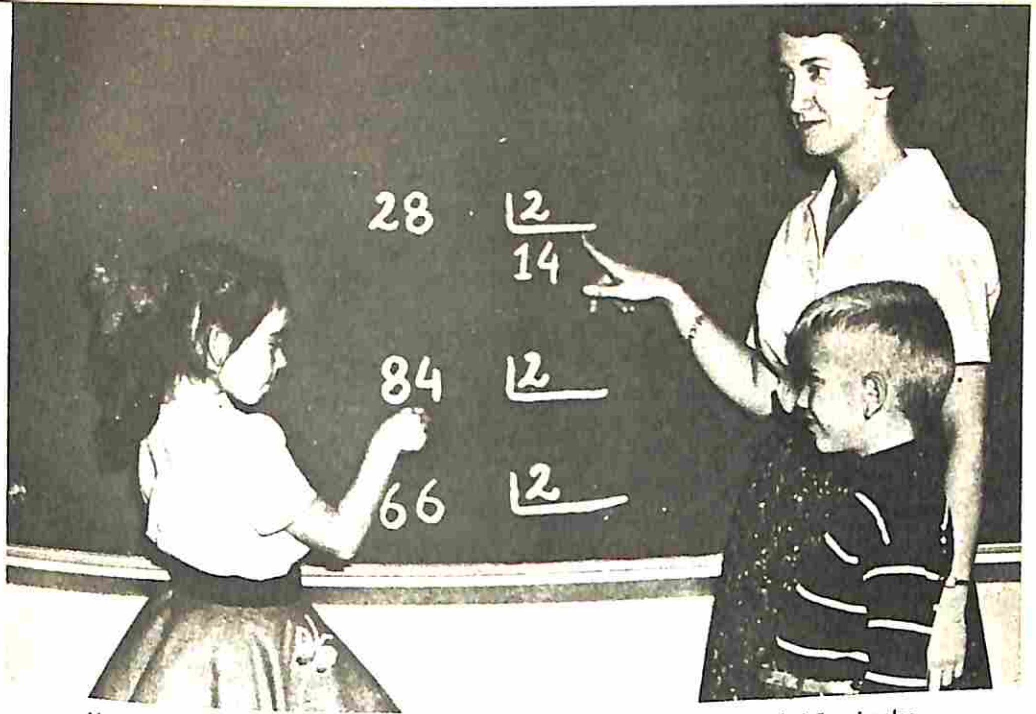
A maior dificuldade na aprendizagem da divisão provém da ausência de exercícios bem graduados. Se o aluno aprende a dividir pelo processo subtrativo, o número de algarismos no quociente deve ser controlado cuidadosamente. Se êle emprega o processo convencional, o divisor deve ser controlado principalmente se tem dois ou mais algarismos. Assim sendo, é necessário controlar o quociente em um caso e o divisor no outro. Em ambos os casos deve haver uma graduação de dificuldades bem controlada para que a aprendizagem do processo de divisão se torne mais fácil. Não há o que escolher entre os dois processos para justificar a preferência de um sôbre o outro.

d. DIVISÃO POR DIVISOR DE DOIS ALGARISMOS

Em Que Série Iniciar

Convencionou-se introduzir a divisão por dois algarismos na quinta série, no todo ou em parte. Há dois decênios atrás o trabalho era dado na quarta série. O processo não é tão difícil que não possa ser ensinado na quarta série, mas, como Brownell[7] esclarece, a maioria dos alunos não adquiriu ainda habilidade suficiente para efetuar os outros processos usados na divisão antes da quinta série. Do ponto de vista de prontidão para divisão com dois algarismos no divisor, é aconselhável que se introduza o processo na quinta série.

Apesar de haver concordância quanto à época de introduzir a divisão por dois algarismos, os livros-texto variam muito no grau de dificuldade dos exemplos apresentados. Em divisão por dois algarismos há uma amplitude de dificuldade muito maior do que em qualquer outro dos processos básicos. É muito mais difícil dividir no exemplo $810 \underline{|\ 17\ }$ do que no exemplo $483 \underline{|\ 21\ }$. No primeiro exemplo, o quociente estimado deve ser corrigido para se chegar ao quociente verdadeiro. É preciso, também, transportar a reserva na multiplicação e reagrupar na subtração. Nenhuma dessas habilidades é necessária no segundo exemplo. Desde que a divisão por dois algarismos é um processo difícil, é aconselhável que seja ensinada em dois anos, de modo a evitar muitas aprendizagens novas em uma mesma série. Os exemplos nos quais é preciso corrigir o quociente são mais difíceis do que aquêles em que o quociente estimado é o verdadeiro. Pesquisa feita[8] já provou isto. Embora o estudo tenha sido realizado com um programa em que se dava ênfase a aprendizagem mecânica, é provável que os mesmos resultados fôssem obtidos de uma experiência com alunos que usam os processos convencionais para estimativa do quociente, num programa baseado em compreensão. Os autores sugerem que a divisão por dois algarismos seja espaçada em dois anos de aprendizagem. Em uma série, o quociente estimado é o verdadeiro. Na série seguinte, o trabalho consiste em procurar o quociente quando o estimado não é o verdadeiro.



Uma professôra está mostrando a crianças da segunda série uma divisão simples.

Divisão Por Três Algarismos

Os autores sugerem que a introdução de divisão por divisor de três algarismos seja adiada até a sétima série. Não é porque a divisão por três algarismos seja necessàriamente mais difícil do que a divisão por dois

[7] BROWNELL (William A.), "Arithmetical Readiness as a Practical Classroom Concept", *Elementary School Journal,* 52:15-22.

[8] BRUECKNER (L. J.) e MELBYE (H. O.), "Relative Difficulty of Types of Examples in Division with Two-Figure Divisors", *Journal of Educational Research,* 3:3 401-414.

algarismos. Há muitos exemplos envolvendo divisão por três algarismos consideràvelmente mais fáceis para resolver do que uma divisão por dois algarismos, como nos exemplos acima. É muito mais fácil dividir no exemplo A do que em B. Divisão por três algarismos é mais difícil do que por dois em virtude do tamanho dos números. Por esta razão mais o fato de que um aluno de escola elementar raramente encontra um problema que envolva divisão por três algarismos, os autores recomendam que ela seja iniciada na sétima série. Nesta série, o aluno já dominou completamente a divisão por número de dois algarismos. É relativamente fácil aprender a dividir por um divisor formado de vários algarismos.

A		B	
846	201	72	16

Métodos de Estimativa do Quociente

Há, pelo menos, dez maneiras diferentes para a estimativa de cada algarismo do quociente.[9] A variação vem principalmente do uso do *algarismo-chave*. O algarismo-chave de um divisor formado de dois algarismos é o que representa as dezenas. O algarismo-chave pode ser considerado tanto no seu valor absoluto como no relativo. Assim, no divisor 34, o *algarismo-chave* pode ser tanto 3 como 30. Os autores recomendam o uso do valor absoluto a fim de capacitar o aluno a usar aproximadamente o mesmo processo de estimativa para divisor de um algarismo e divisor de dois ou mais algarismos.

Dois dos processos mais comuns são os chamados *método aparente* e *método do arredondamento*. O primeiro pode ser designado como método de *regra única*, e o segundo, método de *duas regras*. De acôrdo com o método aparente, o valor do algarismo-chave permanece inalterado qualquer que seja o algarismo das unidades. Assim, para os divisores de 21 a 29, o algarismo-chave é 2. Pelo método aparente, o aluno arredonda o divisor para a dezena menor.

Pelo processo de arredondamento, o algarismo-chave permanece inalterado se o algarismo das unidades é 5 ou menos. Se o algarismo das unidades é 6 ou mais, o algarismo das dezenas é acrescido de uma dezena. Para os divisores de 21 a 25, o algarismo-chave é 2; para os divisores de 26 a 29, o algarismo-chave é 3. O aluno, usando o método de arredondamento, aproxima a dezena inferior se o algarismo das unidades é 5 ou menos de 5, e aproxima para a dezena superior se o algarismo das unidades é 6 ou mais de 6.

[9] GROSSNICKLE (F. E.), "Methods of Estimation of Quotient in Long Division by Teacher-Training Students", *Elementary School Journal*, 35:448-453.

Vantagens e Desvantagens dos Diferentes Métodos

Grossnickle,[10] Morton,[11] Osborne[12] e Upton[13] realizaram estudos sôbre o mérito relativo dos dois diferentes processos de estimativa do quociente. Estas pesquisas não estão de acôrdo quanto ao grau de correção alcançado pelos dois processos no cálculo do quociente verdadeiro. O método de duas regras leva ao verdadeiro quociente numa porcentagem maior de estimativas do que o processo de uma regra só. Por outro lado, há duas vantagens favoráveis ao processo de regra única: primeira, o aluno aprende apenas uma regra; segunda, é mais fácil perceber a necessidade de corrigir o quociente e também mais fácil fazer a correção pelo processo aparente.

[10] GROSSNICKLE (F. E.), "How to Estimate the Quotient Figure in Long Division", *Elementary School Journal*, 32:299-306.

[11] MORTON (R. L.), "Estimating Quotient Figures when Dividing by Two-Place Numbers", *Elementary School Journal*, 43:141-148.

[12] OSBORNE (W. J.), "Division by Dichotomy as Applied to Estimation of Quotient Figures", *Elementary School Journal*, 50:326-330.

[13] UPTON (C. B.), "Making Long Division Automatic", *Tenth Yearbook National Council of Teachers of Mathematics*, págs. 251-89. Nova Iorque: Bureau of Publications, Teachers College, Columbia University, 1935.

Vejamos cuidadosamente os exemplos A e B:

A		B	
81	24	142	26
96	4	104	4

A maneira de pensar para a estimativa do quociente é a mesma em ambos os processos para o exemplo A. O aluno estima o quociente em 4 e multiplica. O produto pode ser escrito ou encontrado mentalmente. Imediatamente o aluno descobre que 4 é muito porque o produto do quociente pelo divisor é maior do que o dividendo. Para corrigir o quociente, o aluno *diminui 1* e continua o processo até encontrar o quociente verdadeiro. Os alunos usando ambos os métodos descobrem a necessidade da correção e fazem-na da mesma maneira.

Em B, o aluno usando o processo de duas regras pensa em 3 como algarismo-chave e estima o quociente em 4. Êle não tem meio de saber se o quociente é correto ou não até que faça a subtração e compare o resto com o divisor. Isto pode resultar em erros sérios, como ocorre no exemplo ao lado.

1476	36
108	311
39	
36	
36	
36	

Um estudo experimental[14] sôbre o mérito dos dois processos provou que não

[14] GROSSNICKLE (F. E.), "An Experiment with Two Methods of Estimation of the Quotient", *Elementary School Journal*, 37:668-677.

há diferença significativa entre os resultados obtidos por alunos no uso dos dois processos. Moser [15] verificou que os alunos novatos que usavam o método aparente conseguiram o mesmo resultado alcançado. A evidência experimental provou que os dois métodos, pelos que usavam o processo de arredondamento, produzem o mesmo resultado. À luz dêsses resultados mais o fato de que o método aparente envolve apenas um modo de proceder, os autores recomendam que êste seja o adotado para encontrar-se o quociente verdadeiro.

Hartung [16] recentemente advogou a adoção de um outro processo para estimativa de quociente, no qual o arredondamento é sempre feito para cima. Assim, o algarismo-chave para os divisores de 21 a 29 seria sempre 3. Se o quociente estimado não é correto, o algarismo é aumentado e não diminuído, como acontece no método aparente. A fim de evitar que o aluno apague o trabalho feito, quando a estimativa é errada, o resto é considerado como um nôvo dividendo parcial. O método pode ser visto no exemplo ao lado. O aluno arredonda o divisor para 50 e avalia o quociente em 5. O resto 63 é considerado como um nôvo dividendo, e o processo continua. O quociente é a soma dos dois algarismos à direita, ou 6 com o resto 20.

```
278 | 43
215   5
---
 63   1
 43
---   ---
 20   6
```

Êste processo levará a umas poucas respostas corretas mais do que o método aparente. O aluno pode achar êste processo mais adequado para determinar o quociente formado de um algarismo só. Se o quociente é um número de dois algarismos, êle pode deparar com dificuldades iguais ou maiores do que as encontradas no emprêgo de um processo mais convencional.

Introdução da Divisão por Dois Algarismos

Há duas aprendizagens novas para o aluno quando êle começa a dividir por divisor de dois algarismos: como estimar o quociente e onde escrever o primeiro algarismo do quociente. O significado e a seqüência dos passos são os mesmos tanto na divisão por um algarismo como por mais de um.

O aluno usa o algarismo-chave para efeito da estimativa. No exemplo 72 | 24, o aluno pensa em 7 | 2 para estimar quantos grupos de 24 há em 72.

Há duas maneiras para determinar a posição do primeiro algarismo no quociente. Primeira, achar a posição dêle pelos valôres reagrupados dos algarismos do dividendo. No exemplo 72 | 24, não é possível dividir 7 dezenas, como dezenas, em 24 partes iguais; por isso reagrupam-se as 7 dezenas em 70 unidades, às quais somamos duas unidades fazendo um total de 72. Essas unidades podem ser divididas em 24 partes iguais. O quociente de 3 unidades será escrito no lugar das unidades. Segunda, localizar o lugar do primeiro algarismo do quociente pela multiplicação do divisor por uma potência de 10, para determinar o número de ordens que o quociente deve conter. No exemplo citado, o quociente deve ser inferior a 10 porque $10 \times \times 24 = 240$. Uma vez que 72 é maior que 24 e menor que 240, o quociente deverá ser maior que 1 e menor que 10. Por conseguinte, o quociente terá apenas um algarismo. O aluno faz a estimativa do quociente como 3 e escreve êste número no lugar das unidades. Êle deve ter habilidade bastante para usar os dois processos.

[15] MOSER (Harold E.), "Two Procedures for Estimating Quotient Figures whem Dividing by Two-Place Numbers", *Elementary School Journal*, 49:516-522.

[16] HARTUNG (M. L.), "Estimating the Quotient in Division", *The Arithmetic Teacher*, 4:100-111.

Como Descobrir Meios de Encontrar Uma Resposta

O professor pode apresentar à classe um problema que os alunos não possam resolver pelo processo convencional. Neste caso, é preciso que êles descubram um caminho, usualmente mais longo do que o processo convencional, para chegar à resposta. Suponhamos que a classe não tenha aprendido ainda a dividir com divisor de dois algarismos. O professor pode deixar que os alunos procurem a solução de um problema como o seguinte:

"Um ônibus cobra Cr$ 1 260 para transportar 28 alunos. Êles vão dividir igualmente a despesa. Quanto pagará cada um?"

O aluno pode ver pela multiplicação por 10 e por 100 que o preço por pessoa será mais de Cr$ 10 e menos de Cr$ 100. Um aluno pode achar que o preço seja Cr$ 20. Usamos esta quantia como quociente, como na solução ao lado. É evidente que o preço será pelo menos ... Cr$ 20 mais. Haveria, então, um resto de Cr$ 140 para ser dividido entre 28 alunos. O trabalho pode ser completado como mostra o exemplo. A despesa por aluno será de Cr$ 45.

```
1260 | 28
 560   20
----
 700   20
 560
----
 140    4
 112
----
  28    1
  28   ---
----   45
```

O preço é Cr$ 45 por aluno.

O exemplo citado demonstra que a classe pode descobrir uma solução que não segue o processo convencional. O professor pode dizer à classe que muitas pessoas usam um processo mais curto e mais rápido para dividir. Para a aprendizagem dêste processo é aconselhável começar com exemplos mais simples antes de apresentar um difícil, como o que foi usado neste problema.

Divisores Múltiplos de 10

O professor faz uma revisão da multiplicação envolvendo de-

zenas. O aluno deve saber que $10 \times 3 = 30$ e que o seu correspondente em divisão é 30 |10.
3

A criança pode pensar na quantidade de dezenas de botões em um certo número de botões, como 30, por exemplo. O aluno escreve o 3 no lugar das unidades porque não pode haver 10 grupos de 10 em 30. A solução completa será escrita no quadro-negro.

30 |10
30 3

Na introdução da divisão por dois algarismos, o professor defronta-se com o problema do material a ser usado. De modo geral, o uso de materiais exploratórios deve ser evitado nesta fase da divisão. A função dos materiais suplementares é ajudar a criança a compreender a significação do processo e a seqüência das etapas na efetuação da operação. Êstes aspectos já devem ter sido dominados na divisão por um algarismo. O uso de materiais concretos na divisão por divisor de dois algarismos não ajudará nesse sentido por causa do tamanho dos números envolvidos. Por conseguinte, materiais concretos serão desnecessários na divisão por dois algarismos.

As primeiras experiências envolverão divisores múltiplos de 10, como 20, 30 etc. O professor pode apresentar um problema como o seguinte: "Quantos grupos de 20 há em 60?" O fato de o problema não ter significação social não tem importância. O problema para o aluno é saber como usar o algarismo-chave para a estimativa.

A classe pode seguir caminhos diversos para descobrir a solução. Possìvelmente a classe sabe que a resposta é 3 grupos. Os alunos podem demonstrar a solução da maneira seguinte:

1) Somar 20 tantas vêzes até encontrar a soma 60.

2) Subtrair 20 de 60 até que o resto seja zero.

3) Multiplicar 20 por números consecutivos até que o produto seja 60.

4) Algum aluno poderá pensar: "Há seis grupos de 10 em 60. Haverá a metade de grupos de 20, isto é, 3."

Se o aluno não fôr capaz de dar pelo menos uma das respostas sugeridas, êle não tem compreensão bastante do processo para continuar o trabalho em divisão. Se a classe já tem prontidão, o professor escreve o exemplo no quadro. O aluno sabe que o quociente é 3. O problema, agora, é descobrir um meio rápido de encontrar o quociente. O professor leva-o a comparar o algarismo das dezenas em cada um dos números dados. O aluno descobre que pode encontrar o quociente, pensando: "6 |2 ". Experimente, então, esta descoberta em outros exemplos, como 80 |20, 60 |30, 80 |40.

60 |20
60 3

O exemplo seguinte contém três algarismos no dividendo, como 120 |20. O aluno pensa:

"12 |2 ". O problema, agora, é localizar êste algarismo do quociente. O aluno pensa: "$10 \times 20 = 200$." O quociente deve ser inferior a 10, logo, terá apenas um algarismo. O aluno pode pensar também: "Em 120 há 12 dezenas. Como dezenas, elas não podem ser divididas em 20 partes iguais. Reagrupemos as dezenas em 120 unidades. O quociente será 6 unidades."

A etapa seguinte incluirá exemplos em que o dividendo não é múltiplo do divisor, como: 43 |20, 57 |20, 123 |20, 137 |20. O aluno escreve o resto em cada operação, como no exemplo ao lado.

54 |20
40 2r14
14

Agora, o aluno deve estar pronto para dividir por um número que não seja múltiplo de 10, como 21. Em todos os exemplos, o quociente estimado deve ser o verdadeiro e deve constar de um algarismo apenas, como em 63 |21. Neste exemplo o aluno poderá pensar: "Provàvelmente o número de grupos de 21 em 63 é o mesmo de 2 em 6."

Há uma grande variedade de dificuldades em exemplos de divisão nos quais o quociente estimado não é o verdadeiro, e o divisor não é múltiplo de 10:

1) 63 |21 Dividendo composto de dois algarismos, múltiplos do divisor

2) 126 |21 Dividendo composto de três algarismos, múltiplos do divisor

3) 65 |21 Resto no quociente

4) 75 |21 Fato de divisão aproximada para estimativa

5) 72 |24 Reserva na multiplicação

6) 74 |23 Reagrupamento na subtração.

7) 142 |34 Combinação dos itens 5 e 6

8) 335 |35 O quociente aparente parece ser 10 ou mais.

Em exemplos dêsse último tipo, o quociente parece ser 10 ou mais. Neste caso, o aluno multiplica mentalmente por 10 e compara o produto com o número a ser dividido. Desde que o dividendo não é 10 vêzes o divisor, êle avalia o quociente em 9. Naturalmente, 9 não é o quociente verdadeiro em tôdas as estimativas dêsse tipo, como se pode ver no exemplo 215 |27. Êstes exemplos são muito difíceis para a maioria das crianças na escola elementar. Os autores recomendam que os exemplos em que haja necessidade de corrigir o quociente estimado para encontrar o verdadeiro sejam introduzidos numa série diferente daquela em que é introduzida a divisão, na qual o quociente estimado é o verdadeiro.

Já discutimos a estimativa do quociente quando êle tem apenas um algarismo. Para a estimativa quando há número de dois ou mais algarismos seguem-se os mesmos processos. No exemplo ao lado, o aluno tem que decidir se o quociente é maior ou menor que 10. Desde que $10 \times 21 = 210$, o quociente será maior do que 10. Pensará, então: "4 |2". O 2 no quociente representa dezenas e será escrito no lugar das dezenas.

$$\begin{array}{r|l} 483 & 21 \\ \underline{42} & 23 \\ 63 & \\ \underline{63} & \end{array}$$

Depois que o aluno se familiariza com a estimativa de quociente de dois algarismos, êle pode usar processos semelhantes para verificar se o quociente terá três algarismos. Neste caso, multiplica o divisor por 100 e compara o produto com o dividendo.

Classificação das Estimativas do Quociente

É muito mais fácil encontrar o quociente verdadeiro em alguns exemplos do que em outros. Pelo uso do método aparente, para estimativa do quociente, os diferentes tipos de estimativa podem ser classificados como segue:

1) O quociente é evidente, como 243 |23 .
10 r 13

2) O quociente estimado é o verdadeiro, como 142 |34.

3) O quociente verdadeiro é uma unidade menor do que o estimado, e a necessidade de correção é evidente, como 90 |36 .

4) O quociente verdadeiro é uma unidade a menos do que o estimado, mas a necessidade de correção não é evidente, como 142 |36.

5) O quociente estimado deve ser diminuído de duas ou mais unidades para encontrar o verdadeiro, como 180 |26.

6) O quociente exige muitas correções, como, por exemplo, quando o divisor está entre 13 e 19, como 82 |17 ou 110 |17.

O quociente é evidente quando o dividendo está na mesma década ou em década menor do que a do divisor. Em tais exemplos, o primeiro quociente é 1 ou zero. Todos os zeros no quociente representam estimativas evidentes. Em muitos casos, quando o quociente é 1 o aluno não precisa usar o algarismo-chave para efeito de estimativa. Compara o dividendo com o divisor e, intuitivamente, decide que o quociente é 1.

No terceeiro tipo, o quociente verdadeiro é uma unidade menor do que o quociente estimado e a necessidade de correção é evidente, como no exemplo 81 |23. O aluno estima o quociente como 4, mas é evidente que 4×3 é maior do que o 1 em 81. Se a necessidade de corrigir o quociente é clara, o número de dezenas do dividendo parcial é múltiplo do algarismo-chave. Se o divisor é 23, o quociente estimado para cada um dos dividendos seguintes deve ser corrigido para se encontrar o quociente verdadeiro, mas esta necessidade de correção é clara, $\underline{4}2$, $\underline{6}5$, $\underline{8}6$, $\underline{10}3$, $\underline{12}7$, $\underline{14}4$, $\underline{16}8$ e $\underline{18}9$. O número de dezenas sublinhado em cada dividendo é um múltiplo de 2. Algumas vêzes, vê-se logo que o quociente precisa ser corrigido, mas diminuir uma unidade de apenas não é bastante para se encontrar o quociente verdadeiro. No exemplo 142 |28, o quociente estimado é 7. É claro que o 2 no lugar das unidades não contém 7×8. O aluno experimenta 6, mas o produto de 6×28 é maior do que 142, logo é necessário experimentar 5 para encontrar o quociente verdadeiro. O quociente verdadeiro tem 2 unidades menos do que o quociente estimado e, pelo menos em uma das tentativas, a necessidade de correção não é evidente.

Na quarta classificação, o quociente verdadeiro tem uma unidade de menos do que o quociente estimado, mas a necessidade de correção não é clara, como em 132 |24. Em exemplos como êste, o número de dezenas do dividendo parcial não é múltiplo do divisor. Se não é evidente que o quociente deve ser corrigido, o aluno pode escrever o produto do quociente e do divisor debaixo do dividendo parcial, comparar êsses dois números e, então, apagar o trabalho. Pode, também, multiplicar mentalmente e comparar o produto com o dividendo parcial. O primeiro processo é longo e desaponta o aluno; o segundo é difícil de executar. Em qualquer dos casos, esta fase da divisão é difícil para a criança da escola elementar.

A sexta classificação inclui os divisores de 13 a 19, inclusive. Qualquer que seja o método de estimativa usado, a maioria das estimativas deve ser corrigida para se encontrar o quociente verdadeiro. Usando-se o método aparente para o exemplo ao lado, o primeiro quociente estimado é 9, mas o quociente verdadeiro é 6, ou 3 unidades menos. Usando-se o processo de arredondamento, o quociente estimado é 4, mas o quociente verdadeiro é 6, isto é, mais 2.

97 |16

Correção do Quociente

Há dois tipos de estimativa que podem ser corrigidos pela redução de 1 no quociente estimado, seja a necessidade de correção evidente ou não. No exemplo 152 |34, o aluno estima o quociente como 5. Desde que $5 \times 30 = 150$, é evidente que 5×34 será maior do que 152. O professor pode mostrar êste fato à classe. Muitos alunos perceberão que o algarismo das unidades do dividendo é menor do que 5 vêzes 4. Êsses alunos podem corrigir o quociente sem escrever o produto do quociente pelo divisor debaixo de 152. Os alunos que não puderem fazer os cálculos mentalmente, escreverão todos os números e depois apagarão para fazer as correções devidas.

Se a necessidade de correção não é evidente, como no exemplo $135 \,\underline{|\, 36}$, o aluno escreve o produto do quociente pelo divisor e compara com o dividendo. Para corrigir êle apaga os números incorretos. O professor deve estimular o aluno a computar mentalmente para ver se o produto é menor que o dividendo. Alguns alunos são capazes de operar mentalmente, mas a maioria obtém mais sucesso com os números escritos. Por conseguinte, uma certa quantidade de tentativas é parte do trabalho de divisão se o quociente estimado tem que ser corrigido para se encontrar o quociente verdadeiro e esta correção não é evidente.

Divisores de 13 a 19

Os divisores de 13 a 19 são os mais trabalhosos. Não é difícil encontrar o quociente em todos os casos que envolvem êsses divisores, como $155 \,\underline{|\, 14}$, que é um exemplo fácil, mas em geral a dificuldade é maior do que em qualquer outra década. Um meio de facilitar o trabalho do aluno é organizar uma tabela para um determinado divisor, como 17, por exemplo. Ao lado está uma parte da tabela. O aluno não é obrigado a memorizar a tabela como faz com os fatos fundamentais da multiplicação. Deve familiarizar-se com êstes produtos de modo a fazer uma estimativa que seria real ou muito próxima.

$1 \times 17 = 17$
$2 \times 17 = 34$
$3 \times 17 = 51$
|
$9 \times 17 = 153$.

Muitos alunos acharão melhor escrever o produto de 5 vêzes o divisor para facilitar a estimativa. Para o divisor 16, o aluno escreve $5 \times 16 = 80$ para guiar a estimativa. No exemplo ao lado êle pode ver que o primeiro quociente parcial é 5 e que o segundo poderá ser 6 ou 7. Êste processo é aconselhável até que o aluno possa dispensar tal auxílio.

$912 \,\underline{|\, 16}$
$\underline{80}$
112

Auxílios em Outros Processos de Divisão

Uma das razões pelas quais o processo de divisão se torna mais difícil é porque envolve multiplicação e subtração. Os alunos cometem muitos erros tanto na multiplicação como na subtração e na estimativa do quociente. Um dos melhores meios de desenvolver no aluno a habilidade de multiplicação e subtração é fazê-lo dividir. À medida que êle vai dividindo, os processos de multiplicação e subtração vão sendo focalizados. Para isto o aluno pode fazer divisões em que é dado o quociente. Êle efetua a operação para provar que o quociente está correto. No exemplo abaixo, o quociente é 78 e o resto 28. O aluno completa o trabalho. Se o resto não fôr 28, êle sabe que cometeu algum êrro na multiplicação, na subtração ou em ambos os casos. Exercícios dêste tipo são muito bons, principalmente se o divisor envolve as décadas maiores e se cada algarismo do quociente é 4 ou mais.

$5332 \,\underline{|\, 68}$
78r28

Tabela Para Alunos Mais Lentos

Alunos de aprendizagem mais lenta acham o processo de divisão muito difícil. Não se pode exigir que êles resolvam o processo da mesma maneira que os outros. O uso de uma tabela sempre ajuda o aluno lento a obter maior sucesso do que o que obteria sem uso de nenhum auxílio.

A tabela ao lado foi organizada para o divisor 27. Essa tabela é típica para qualquer divisor. Os números dentro dos parênteses indicam a ordem em que deve ser organizada a tabela. O aluno começa com o divisor, e vai calculando dobros até que a tabela contenha 8 vêzes o divisor. Escreve, então, 10 vêzes o divisor e vê metade dêsse produto para encontrar 5 vêzes o divisor.

(1)	1	27
(2)	2	54
(3)	4	108
(6)	5	135
(4)	8	216
(5)	10	270

Nem todos os produtos das multiplicações de 1 a 9 são dados, mas o aluno já tem bastante para trabalhar com um mínimo de tentativas. O aluno usa a tabela para encontrar o quociente em exemplos do tipo $92 \,\underline{|\, 27}$, $145 \,\underline{|\, 27}$, e $243 \,\underline{|\, 27}$. Depois de aprender a fazer e a usar a tabela, êle já deu um grande passo em divisões com dois algarismos no divisor. Não é preciso fazer uma tabela para o divisor 21; mas, para os divisores em que uma grande porcentagem de estimativa não dá o quociente verdadeiro, a tabela é um grande auxiliar.

Prova da Divisão

Se o dividendo é múltiplo do divisor, o produto do divisor pelo quociente é igual ao dividendo. Se o dividendo não é múltiplo do divisor, a soma do resto e do produto do divisor pelo quociente é igual ao dividendo. Um dos meios de tirar a prova da divisão é multiplicar o divisor pelo quociente, somar o resto ao produto e, então, comparar a soma com o dividendo. Um estudo feito em que os alunos tiveram que tirar a prova de 175 000 exemplos demonstrou a ineficácia do processo.[17] Nessa investigação a prova foi tirada pela multiplicação, num programa em que a aprendizagem era baseada na mecânica e não na compreensão.

[17] GROSSNICKLE (Foster E.), "To Check or Not to Check", *Elementary School Journal*, 36:35-39.

Os alunos tiraram a prova de modo mecânico, como se pôde determinar pelos meios usados. Os alunos forçavam a prova. Se o produto do divisor pelo quociente não era igual ao dividendo, a operação-prova era alterada de modo que os números do produto ficassem iguais ao dividendo. Os alunos não refaziam a divisão para encontrar um quociente diferente. Êles mudavam a multiplicação de modo que o produto ficasse igual ao dividendo. Assim, tirar a prova da divisão pela multiplicação em um programa baseado na mecânica é tão ineficaz na correção dos resultados quanto o não-emprêgo da prova.

Pelos resultados desta investigação, pode-se concluir que é tão importante ensinar a significação da prova como é o ensino da função e significado do processo. O aluno deve compreender a função da prova, por que é usada, a relação entre os processos inversos envolvidos, e como aplicar esta verificação. A verificação se transforma, neste caso, numa parte do processo da aprendizagem. Parece perda de tempo mandar os alunos tirar a prova de tôdas as operações. Talvez seja útil a verificação em exemplos alternados, ou em cada terceiro ou quarto exemplo. Em certo dia todos os exemplos são verificados, em outros nenhuma prova é tirada. A prova tirada de maneira mecânica e sem sentido deve ser eliminada do programa de Aritmética.

Um meio efetivo de verificação é arredondar os números e dar uma resposta aproximada para ver se é razoável. Assim, no exemplo 2635 | 56, o aluno pode ver que o quociente ficará entre 50 e 40. Se êle pensa em 56 como 50 e em 2 635 como 2 600, êle avalia o quociente em 50. Se êle pensa em 56 como 60, a estimativa recairá em 40. Uma resposta entre 40 e 50 será razoável. Êste tipo de verificação não garante correção na efetuação da operação, mas ajuda o aluno a ver lógica na resposta. Os autores recomendam êste tipo de atividade principalmente para os alunos superiores.

Teste-Diagnóstico para Divisão Por Dois Algarismos

Depois que o aluno aprendeu a dividir por dois algarismos em todos os tipos de exemplos, o professor deve aplicar um teste-diagnóstico. Um teste como o que segue pode ser usado para êste fim. O Capítulo 16 descreve as características de um teste-diagnóstico e mostra como usá-lo.

	a	b	c
1)	140 | 20	740 | 30	678 | 40
2)	534 | 23	5160 | 56	1074 | 34
3)	1720 | 43	1417 | 35	6528 | 32
4)	846 | 24	1638 | 45	3659 | 67
5)	1629 | 35	4644 | 56	3115 | 38
6)	1880 | 26	2811 | 38	3213 | 48
7)	723 | 14	9123 | 16	1552 | 18

Uma operação descritiva dos exemplos em cada item é a seguinte:

1) O divisor é múltiplo de 10.

2) O quociente estimado é o quociente verdadeiro.

3) O zero aparece no quociente.

4) O quociente verdadeiro é um menos do que o estimado, e a necessidade de correção é evidente.

5) Igual ao item 4, mas a necessidade de correção não é evidente.

6) O quociente verdadeiro é, pelo menos, dois menos do que o quociente estimado.

7) O divisor está entre 13 e 19.

Supõe-se que o aluno use o método aparente para a estimativa do quociente.

O leitor pode concluir que grande parte da discussão pertinente ao processo da divisão é baseada na aprendizagem conectionista e atomística. Em parte isto é certo. Os autores sustentam firmemente o ponto de vista que a significação do processo e as idéias nêle envolvidas são conceituais. Tais conceitos são elaborados através de uma grande variedade de experiências, como foi visto em várias partes do Capítulo. Por outro lado, aprender a efetuar uma divisão pelo processo convencional envolve uma aquisição de habilidades maiores do que a necessária para a compreensão da estrutura do sistema de numeração. A gradação dos exemplos de acôrdo com a dificuldade provou ser efetiva na aprendizagem de como dividir na forma convencional.

e. COMPREENSÃO DAS RELAÇÕES ENTRE MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO

Princípio Básico a Ser Aprendido

O aluno que não é capaz de descobrir a relação entre processos inversos demonstra uma compreensão matemática muito limitada. No estudo dos fatos fundamentais êle aprendeu como identificar os quatro fatos fundamentais derivados de três números, como na ilustração A. Deveria ser capaz, também, de escrever os quatro exemplos com os números em B.

A | 3 | 4 | 12 | B | 8 | 14 | 112 |

Êstes números podem ser apresentados como na ilustração, ou na forma convencional: 112 | 8 .
14

No último caso, o aluno deve ser capaz de escrever os dois exemplos de multiplicação correspondentes.

Os alunos mais espertos descobrirão logo o princípio básico que se aplica a êstes números, como são apresentados na ilustração. Se um dos fatôres é oculto, como o 3, o produto 12 e o outro fator podem ser vistos. É possível encontrar o outro fator, dividindo 12 por 4. O princípio matemático interessado pode ser expresso assim: *Se o produto de dois números e um dos números são dados, o outro número pode ser encontrado dividindo-se o produto pelo número dado.*

Atividades de Enriquecimento em Multiplicação e Divisão

Uma boa atividade para enriquecer o programa de multiplicação consiste em os alunos organizarem exemplos pela ordem de tamanho do produto, como:

A)	57 × 6	57 × 8	57 × 12	57 × 22	57 × 2
B)	36 × 15	71 × 15	14 × 15	83 × 15	27 × 15

O aluno pode tentar organizar pelo exame mental, antes de efetuar as multiplicações. Se não fôr capaz, multiplica então e depois organiza. O professor estimulará os alunos superiores a expressar a generalização que se aplica ao primeiro conjunto de exercícios. Para ilustrar, no conjunto A, uma forma concisa de generalização é a seguinte: Se um número é multiplicado por vários números desiguais, quanto menor o multiplicador, menor será o produto.

Pode-se fazer a mesma coisa em divisão. O professor deixa que os alunos organizem os exemplos, de acôrdo com o tamanho do número faltoso, por uma simples observação. Em seguida, êles efetuam as operações e verificam se a organização está correta.

Se o aluno não foi capaz de descobrir, mentalmente, o padrão de organização, efetua primeiro as operações e depois ordena-as de acôrdo com o elemento encontrado. Os seguintes exemplos mostram que o divisor, o quociente e o dividendo podem variar:

A)	144 | 9 → ?	144 | 12 → ?	144 | 48 → ?	144 | 16 → ?
B)	144 | ? → 8	144 | ? → 48	144 | ? → 3	144 | ? → 16
C)	240 | 16 → ?	960 | 16 → ?	256 | 16 → ?	112 | 16 → ?
D)	576 | ? → 24	144 | ? → 24	312 | ? → 24	720 | ? → 24

Os alunos mais espertos devem ser capazes de expressar generalizações já aprendidas sôbre frações. A generalização que se aplica ao item A pode ser expressa assim: Se as frações têm o mesmo numerador e denominadores diferentes, quanto maior o denominador, menor será o valor da fração. Para os exemplos em C: Se as frações têm denominadores iguais e numeradores diferentes, quanto maior o numerador, maior será o valor da fração.

Sòmente os alunos de nível mental superior terão habilidade para aplicar estas generalizações em divisão.

QUESTÕES, PROBLEMAS E TÓPICOS PARA DISCUSSÃO

1. Use o fato 18 | 6 e faça problemas para representar as duas idéias de divisão.
2. Que idéia de divisão se aplica na redução de metro a decímetro?
3. Escreva quatro exemplos com os números ao lado: | 180 | 12 | 15 |
4. Mostre como você dramatizaria as duas aplicações de divisão.
5. Use o fato 13 | 3 e faça problemas para representar cada tipo de resto.
6. Mostre por que você ensinaria ou não ensinaria a divisão pelo processo simplificado quando o divisor é formado de um algarismo só.
7. Mostre como encontrar o quociente no exemplo .... 235 | 6 usando o método subtrativo.
8. Faça uma avaliação do método subtrativo de divisão.
9. Faça uma lista de pelo menos 12 compreensões diferentes para que o aluno possa dominar completamente o processo de divisão.
10. Discuta as vantagens e desvantagens de se ensinar tôdas as fases de divisão por dois algarismos em uma mesma série.
11. Faça uma pesquisa sôbre os processos de estimativa de quociente adotados pelos alunos de sua classe. Dê, pelo menos, três diferentes métodos de estimativa.
12. Faça uma lista das vantagens e desvantagens do método de regra única e do método de duas regras usados para a estimativa do quociente.
13. Use o método aparente de estimativa do quociente para o divisor 27 e organize exemplos em que o quociente estimado será:
    a) Evidente
    b) Verdadeiro
    c) Uma unidade maior do que o quociente verdadeiro, mas a necessidade de correção é evidente
    d) A mesma coisa, mas a necessidade de correção não é evidente
    e) Dois mais do que o quociente verdadeiro
    f) Três mais do que o quociente verdadeiro.
14. Enumere alguns recursos de que você, como professor, lançaria mão para fazer com que os alunos atentos possam obter sucesso na divisão por um divisor de dois algarismos.
15. Dê sugestões para o enriquecimento do programa de divisão para os alunos mais bem dotados.

SUGESTÕES PARA LEITURA

Brueckner, L. J., Grossnickle, F. E. and Reckzeh, J. *Developing Mathe-*

matical Understandings in the Upper Grades. Philadelphia: The John C. Winston Co., 1957. pp. 157-73.

Clark, John and Eads, Laura. *Guiding Arithmetic Learnings.* Yonkers: World Book Co., 1954. Chapter 5.

Grossnickle, Foster E. "An Experiment with a One-figure Divisor in Short and Long Division," *Elementary School Journal,* 32:299-306; 509-599.

——— "An Experiment with Two Methods of Estimation of the Quotient," *Elementary School Journal,* 37:668-677.

Hartung, Maurice. "Estimating the Quotient Figure in Division," *The Arithmetic Teacher,* 4:110-111.

Moser, Harold E. "Can We Teach Pupils to Distinguish the Measurement and Partition of Ideas in Division?" *The Mathematics Teacher,* 45:94-97.

Smith, Rolland R. "Meaningful Division," *The Mathematics Teacher,* 43:12-18.

Spitzer, Herbert F. *The Teaching of Arithmetic.* Boston: Houghton Mifflin Co., 1954. Chapter 5.

Van Engen, H. "Which Way Arithmetic?" *The Arithmetic Teacher,* 2:131-140.

Van Engen, Henry and Gibb, E. G. *General Mental Functions Associated with Division.* Cedar Falls, Iowa: Iowa State Teachers College, 1956.

10

Adição e Subtração de Frações

MUITAS OPERAÇÕES envolvendo frações diferem em alguns aspectos daquelas com números inteiros. Um aluno que compreende os princípios básicos das relações entre inteiros precisa descobrir como êsses princípios operam com frações ordinárias, para que êle possa proceder efetivamente com esta nova espécie de número.

Neste Capítulo discutiremos os seguintes tópicos:

a. Significado de fração ordinária
b. Materiais para o ensino de frações ordinárias
c. Desenvolvimento dos conceitos sôbre frações ordinárias
d. Adição de frações ordinárias
e. Subtração de frações ordinárias

a. SIGNIFICADO DE FRAÇÃO ORDINÁRIA

Uma Fração Exprime Diferentes Idéias

No Capítulo 2 mostrou-se que o homem descobriu o uso das frações ordinárias bem depois de aprender a usar os números inteiros. A fração ordinária é um nôvo tipo de número. Como assinalou Newsom, não há um inteiro que satisfaça a definição de 1 dividido por 2, não há um inteiro que, quando multiplicado por 2, tenha como produto 1. Assim tornou-se necessário expandir o sistema de numeração para satisfazer esta nova situação. Newsom[1] expressou muito bem esta idéia do seguinte modo:

> Os estudantes devem compreender... que a evolução das idéias numéricas está intimamente relacionada com as exigências das várias operações. No caso de 1 dividido por 2, o número nôvo criado é uma das frações; tem um nome: um-meio, e é escrito, convenientemente, como $\frac{1}{2}$. Naturalmente em uma apresentação a estudantes elementares, uma fração pode ser descrita como uma ou mais partes iguais da unidade, ou, talvez, uma das par-

[1] NEWSOM (C. V.), "Mathematical Background Needed by Teachers of Arithmetic", *Fiftieth Yearbook of the National Society for the Study of Education,* II:241, Chicago: University of Chicago Press, 1951.

tes iguais de diversas unidades. Bàsicamente, porém, não deve ser esquecido que *uma fração é um número nôvo, criado para completar os inteiros.*[2]

Newsom argumentou, com prudência, que o estudo inicial da fração ordinária deve operar com uma fração como parte igual de um todo. Êste é o conceito de fração, geralmente, mais compreensível devido às aplicações sociais.

Tôda fração ordinária é uma divisão indicada, o que significa que uma fração é o quociente de dois números inteiros. O Capítulo 9 demonstrou que a divisão representa duas idéias básicas, isto é, o conceito partitivo e a comparação ou razão. Assim, o quociente deve representar uma ou mais partes iguais nas quais é dividido o número, ou a razão entre dois números. Cada fração, que representa uma ou mais partes iguais nas quais um inteiro ou um grupo é dividido, tem o mesmo significado que uma divisão partitiva. A metade de uma barra de doce significa uma das duas partes iguais em que foi dividida a barra. A fração $\frac{1}{2}$ significa um inteiro dividido em duas partes iguais. A fração designa o tamanho das partes iguais. Isto é divisão partitiva.

A *fração unitária* que representa uma divisão partitiva tem só um significado. A fração unitária tem 1 como numerador, como $\frac{1}{4}$.

A fração que representa uma divisão partitiva tem dois significados se o numerador da fração é maior do que 1, como na fração $\frac{3}{4}$. Pensemos em $\frac{3}{4}$ como representando uma parte fracionária de 1 m de fita. A fração $\frac{3}{4}$ pode representar 3 das 4 partes iguais em que foi dividido um metro. O todo é dividido em partes iguais e um certo número dessas partes é considerado. A fração $\frac{3}{4}$ pode, também, representar uma das 4 partes iguais em que 3 foi dividido. Nesta situação, um pedaço de fazenda com 3 m de comprimento é dividido em 4 partes iguais. O 3 é dividido em 4. Assim, na interpretação do significado de uma fração devem ser considerados tanto o número de partes como o tamanho das partes.

O segundo significado de uma fração indica a comparação de duas quantidades. Se João tem Cr$ 2 e Ricardo Cr$ 3, podemos comparar as duas quantias pela subtração ou pela divisão. Podemos dizer que João tem Cr$ 1 menos que Ricardo, ou que Ricardo tem Cr$ 1 mais que João. As duas quantias podem ser comparadas também pela divisão. Neste caso, dizemos que João tem dois-terços da quantia de Ricardo. Assim, a fração $\frac{2}{3}$ expressa a razão entre as duas quantias. A fração $\frac{2}{3}$ é o quociente de 2 dividido por 3. O quociente representa o conceito de uma fração expressa como razão.

[2] Grifos dos Autores.

Uso Social das Frações

A expressão *uso social das frações* refere-se às frações que são usadas nas atividades da vida diária. Tais frações são metades, quartos e oitavos, largamente usadas nos Estados Unidos porque representam partes das unidades de medir do Sistema Inglês.

O Capítulo 14 mostra que o Sistema Inglês de Medidas difere do sistema de numeração decimal, porque êsse último tem uma base decimal. Com exceção do sistema métrico, muito poucas são as medidas divididas decimalmente. A maioria das medidas comuns ao Sistema Inglês de Medidas é dividida *binàriamente*. Assim, a polegada é dividida em metades, quartos, oitavos e dezesseis avos. Há 16 onças numa libra, daí a parte fracionária de uma libra ser expressa na escala binária. A mesma divisão aplica-se a certas medidas de líquidos, e a certas medidas de capacidade. Assim, pode-se compreender com facilidade por que frações envolvendo metades, quartos e oitavos constituem a grande maioria das aplicações sociais das frações ordinárias nos Estados Unidos.

É importante que o professor compreenda que as frações que representam divisão partitiva, ou parte de uma unidade de medir, podem ser somadas ou subtraídas. Assim, $\frac{1}{8}$ de polegada e $\frac{1}{4}$ de polegada podem ser combinados. Por outro lado, frações que representam razão não são somadas ou subtraídas. Se a razão entre o comprimento de dois lápis é $\frac{3}{4}$ e a razão entre o comprimento de dois outros lápis é $\frac{5}{6}$, não é possível somar ou subtrair essas razões e ter uma resposta que se ajuste à situação descrita. As frações que representam medidas podem ser combinadas, mas as frações que representam razões não podem ser combinadas.

Vamos considerar as frações mostradas nos seguintes exemplos e decidir se êstes exemplos podem ou não ocorrer em problemas da vida diária:

1.	2.	3.	4.	5.
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$

As frações dadas, com exceção dos meios, podem ter outros numeradores além de 1. Um número misto pode ser substituído por uma fração imprópria desde que o denominador da fração do número misto seja o mesmo do denominador dado, como, por exemplo, substituindo $2\frac{3}{4}$ por $\frac{11}{4}$

As frações do exemplo 1 podem aparecer quando as medidas são expressas como partes fracionárias. Assim sendo, a fração adquire uma significação social.

As frações do exemplo 2 podem aparecer em instrumentos de medir, como um copo. As medidas em um copo para medir são graduadas em terços e quar-

tos. Entretanto, a pessoa que usa um copo de medir nunca tem necessidade de somar os ingredientes medidos em duas unidades não-relacionadas.

Provàvelmente as frações nos exemplos 3, 4 e 5 não ocorrerão num problema de significação social.

Ainda que o menor denominador-comum usado na adição das frações dos exemplos dados acima não exceda de 24, exceto no exemplo 3, a maioria dos exemplos não é indicativa de aplicações sociais das frações em nossos afazeres diários. Estas frações não têm significação social quando agrupadas como foram indicadas. Cada uma das frações podia representar uma situação social, mas o agrupamento de frações com denominadores diferentes destrói a utilidade social das frações num dado exemplo.

A função ou uso de uma fração determinaria a espécie de fração a ser ensinada. Visto que sòmente frações que representam medidas podem ser combinadas, sòmente frações que são expressas na escala binária de medidas devem ser somadas ou subtraídas, dependendo da significação social do problema. O quociente de quaisquer dois inteiros pode representar uma razão, mas não somamos nem subtraímos razões. Por conseguinte, a utilidade social das frações afetaria o seu ensino sòmente em se tratando de processos de adição e subtração.

Diferenciação de Currículo em Frações

As operações com frações podem-se tornar bastante difíceis para muitos alunos da escola elementar. Adição e subtração de frações com denominadores diferentes, tais como $\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{8}$ envolvem um processo difícil. O aluno pode encontrar grande dificuldade em substituir essas frações pelas frações equivalentes com denominadores iguais, como é necessário para se achar a soma de frações ou a diferença entre elas. Já foi citado que as frações para serem combinadas, como em adição ou subtração, devem corresponder ou representar uma unidade de medida. Sôbre tais condições, as frações teriam naturalmente denominadores iguais. Se os denominadores são diferentes, um dos denominadores seria o denominador-comum, como acontece com $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$. Isto não é difícil para os alunos nas quarta e quinta séries, que são as séries convencionais para o ensino de adição de frações, permitindo que os

alunos consigam sucesso na adição de tais frações.

O critério da utilidade social deve ser aplicado às frações que são ensinadas a alunos de aprendizagem lenta. A êsses alunos seria dado trabalho envolvendo adição ou subtração daquelas frações que têm aplicações sociais.

Os alunos que progridem ràpidamente na Aritmética não ficariam limitados ao estudo das frações socialmente usadas. Como afirmou Newsom, fração é um nôvo tipo de número. Há certos princípios matemáticos básicos que governam as operações com frações. O aluno bem sucedido em Aritmética pode expandir seu conhecimento de conceito de número para estudos ulteriores dos fundamentos matemáticos e características desta nova espécie de número. Todavia, o currículo relacionado com o estudo de frações seria diferenciado a fim de ajudar no ajustamento do trabalho à capacidade e habilidade do aluno.

Distribuição do Ensino da Adição e Subtração de Frações

O Capítulo 9 mostrou que o ensino da divisão de inteiros seria estendido ao longo das diversas séries. Dêste modo, a aquisição de um grande número de novas aprendizagens necessárias ao domínio do processo não seria acumulada em uma única série. O mesmo plano seria seguido no ensino da adição e subtração de frações. A quinta é a série convencional para a introdução do ensino sistemático da adição e subtração de frações ordinárias. É possível o ensino de todos os tipos de exemplos nessa série. Há uma grande lista de dificuldades dentro das quais o aluno descobre como adicionar frações com o mesmo denominador, como $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{3}$, e frações com denominadores diferentes, como $\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{8}$.

Foi mostrado que as frações úteis a serem adicionadas ou subtraídas representam partes de uma unidade de medida. Tais frações podem ter denominadores iguais ou denominadores diferentes. Com frações de denominadores diferentes, um dos denominadores deve ser denominador-comum, como $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{8}$. Exemplos desta espécie não só são socialmente significativos mas são também fáceis para o aluno adicionar ou subtrair.[3] Os Autores sugerem que o trabalho de adição e subtração de frações ordinárias na quarta série seja restrito a frações com os mesmos denominadores e a frações com denominadores diferentes, porém relacionados. O último grupo consta de frações que pertencem à mesma coleção ou família, como metades, quartos e oitavos. O trabalho nôvo em adição e subtração de frações na série se-

[3] BRUECKNER (L. J.) e GROSSNICKLE (F. E.), *Making Arithmetic Meaningful*, Filadélfia: The John C. Winston Company, 1953, pág. 89.

guinte incluirá todos os tipos de frações com denominadores diferentes. De acôrdo com êste plano de extensão do ensino dêstes processos, o aluno terá menos dificuldade em adquirir o domínio na maneira de trabalhar com as frações planejadas para cada série, do que ter todo o trabalho acumulado em uma única série.

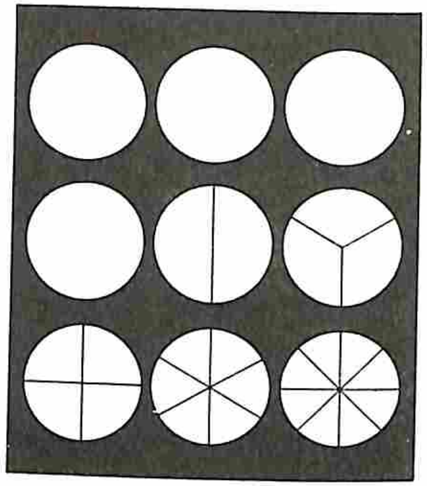
b. MATERIAIS PARA O ENSINO DE FRAÇÕES ORDINÁRIAS

Flanelógrafo com Partes Fracionárias

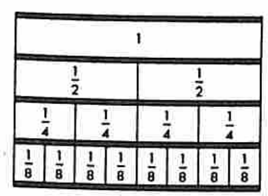
A pág. 109 dá uma descrição das espécies de materiais necessários, para o professor e para o aluno, a fim de que o ensino de frações seja efetivo nas quinta e sexta séries.

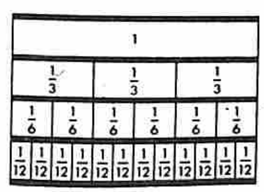
Os círculos teriam aproximadamente 25 cm de diâmetro e seriam cobertos de flanela de ambos os lados, ou teriam algum material como pêlo ou lanugem para que os discos e as partes fracionárias aderissem fàcilmente ao flanelógrafo. É desejável que os discos tenham côres diferentes de um lado e de outro, como verde de um lado e vermelho do outro lado.

O material deve incluir quatro discos inteiros e também coleções de partes fracionárias do círculo cortadas em metades, terços, quartos, sextos e talvez oitavos. Os diâmetros de todos os dis-



cos devem ser os mesmos a fim de mostrar a equivalência de certas partes fracionárias.

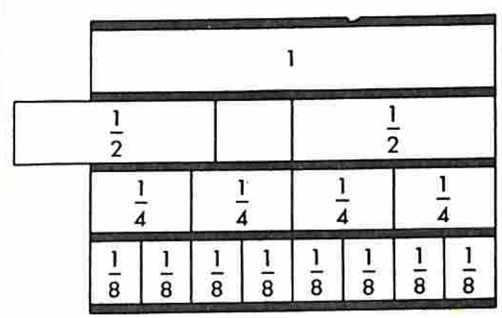




O quadro pode consistir de um cartaz mostrando o inteiro dividido em uma coleção de partes fracionárias na escala binária, como metades, quartos etc.

Depois, outro cartaz será feito para representar o inteiro dividido em terços, sextos e doze avos, como foi mostrado atrás. Cartazes dêstes tipos são materiais visuais. Ambos os tipos são de fácil confecção, têm boa apresentação e são de baixo custo.

O quadro fracionário mais desejável é o quadro com as partes fracionárias móveis. A construção do quadro inclui encaixe para as partes, como mostra a gravura. As partes são móveis. Desta forma, o aluno pode remover uma parte para mostrar metade e subtraí-la por outra para representar dois-quartos ou quatro-oitavos. Deve haver uma coleção de partes para representar as duas famílias de frações mencionadas no quadro fracionário. As



frações representadas nesse quadro apresentam o inteiro na forma retangular. Cada parte fracionária é também um retângulo. O material afetando essa forma é interessante para que o aluno não associe a fração sòmente com o círculo. Cada parte fracionária de um disco circular é uma seção do círculo. Se o aluno lida exclusivamente com partes fracionárias que são seções de círculo, há possibilidade de êle formar associação incorreta entre a forma do objeto e seu valor fracionário.

O material do aluno deve conter as partes fracionárias correspondentes às que o professor usa para demonstração no flanelógrafo. A pág. 425 apresenta instruções para a confecção de partes fracionárias para o material do aluno. Um envelope de papel é aconselhável para guardar o material. Cada aluno deve ter sua coleção de partes fracionárias.

Valor dos Materiais Exploratórios no Ensino de Frações

Dois estudos experimentais registrados mostram o valor relativo do ensino de frações ordinárias com material exploratório e sem êle. Howard[4] relatou os resultados dêstes primeiros estudos. Êle fêz a experiência com 15 classes de quinta e sexta séries para verificar se havia diferença significativa nos resultados que fôsse devida ao uso de materiais exploratórios na adição de frações.

Foram usados três diferentes métodos de apresentação nos grupos A, B e C. Com a cooperação

[4] HOWARD (Charles A.), "Three Methods of Teaching Arithmetic", *California Journal of Educational Research*, 1:25-29.

dos professôres, no grupo A foi mostrado aos alunos como executar a operação que envolvia a adição de frações. Não foram usados auxílios suplementares de aprendizagem, mas foi dada muita prática em computação. Aos alunos dêsse grupo dava-se ênfase ao *como* e não ao *porquê* dos passos em um processo.

Os professôres no grupo B levaram tempo considerável para introduzir cada nôvo passo. Os alunos usavam materiais manipulativos e cartazes. Êsses alunos não fizeram exercícios repetidos de computação. O trabalho prático constava da solução de problemas orais.

No grupo C o processo foi uma combinação dos processos seguidos nos outros dois grupos. Os professôres introduziram cuidadosamente cada nôvo passo. Os alunos usaram materiais manipulativos e cartazes. Depois de compreendido o significado do processo, os alunos praticaram a adição em exemplos envolvendo frações.

Após um período de 16 semanas de ensino, foram dados testes aos alunos dos três grupos. Os testes incluíam a solução de problemas orais e solução de exemplos envolvendo adição de frações. Os resultados foram os seguintes:

1) Não houve diferença significativa nos resultados entre os grupos.

2) Depois das férias de verão o mesmo teste foi aplicado. Os alunos do grupo C apresentaram então um número de pontos significativa e estatìsticamente mais alto que os outros dois grupos. Os alunos do grupo C mostraram maior retenção das aprendizagens adquiridas sôbre frações do que os alunos dos outros dois grupos.

Neureiter e Troisi[5] relataram os resultados do segundo estudo em relação ao uso de materiais suplementares no ensino de frações ordinárias. Êles trabalharam com alunos das quinta e sexta séries. Em um dos grupos nenhum material manipulativo foi usado, mas no outro grupo o material foi usado. Os resultados podem ser resumidos assim:

1) Os testes em que as operações foram feitas com frações na forma abstrata não revelaram pràticamente diferença alguma entre os dois grupos.

2) Os testes em que as questões foram formuladas para tentar a compreensão das várias relações e princípios envolvidos nas frações revelaram nítida diferença no grupo que usou o material.

3) Os testes em que as questões se referiam à solução de problemas em situações concretas revelaram também marcante diferença a favor do grupo que usou o material.

[5] NEUREITER (Paul) e TROISI (Nicholas), "Ol' Man 'Rithmetic", *New York State Education*, 39:599-602.

Os alunos comparam seu trabalho em frações com a demonstração.

Há grande semelhança nos resultados obtidos com êstes grupos experimentais. Estas experiências provaram que os materiais exploratórios são eficientes em um programa que dá ênfase à aprendizagem pela compreensão. Por conseguinte, êstes auxílios são essenciais para desenvolver o significado e a compreensão em Aritmética.

c. DESENVOLVIMENTO DOS CONCEITOS SÔBRE FRAÇÕES ORDINÁRIAS

Uso de Figuras Recortadas para Desenvolver o Conceito de Fração

O Capítulo 5 mostrou que o aluno deve começar o estudo de frações nas primeira e segunda séries. Nas séries seguintes a compreensão de frações será enriquecida. Foi mostrado à pág. 303 que a quinta série é a tradicional para o início sistemático do estudo de frações. O desenvolvimento das frações ordinárias neste Capítulo apresenta uma maneira sistemática de como proceder com a adição e a subtração de frações para as quinta e sexta séries.

É de grande importância que o aluno tenha compreensão do significado das frações antes de adicioná-las ou subtraí-las. As atividades descritas às págs. 309-314 ajudam na aquisição da prontidão para operar com frações.

O professor leva o aluno a usar suas figuras recortadas para descobrir certas partes fracionárias. O professor dirige cada aluno para achar duas metades em seu material e comparar o tamanho dessas duas partes. O aluno põe uma metade sôbre a outra para mostrar que as duas metades são iguais.

Depois, demonstra que um inteiro é igual a duas metades, colocando as duas metades sôbre o inteiro. O professor agora leva o aluno a registrar a relação da metade com o inteiro. O aluno escreve essa relação por extenso e na forma abreviada. A forma longa é a descrição verbal do significado de metade. A forma curta é a representação simbólica dêste fato.

Uma metade é igual a uma das duas partes iguais de um inteiro.
½

Depois, o aluno faz a representação simbólica mostrando que há duas metades em um inteiro. A representação ao lado mostra êste fato. O objetivo desta atividade não é ensinar adição de frações, mas fazer a representação simbólica de uma experiência significativa.

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2} \\ + \frac{1}{2} \\ \hline 1 \end{array}$$

De maneira semelhante o professor introduz o significado de quartos. O aluno seleciona as partes que representam quartos em seu material. Usa estas partes fracionárias para responder questões como as seguintes:

1) Um inteiro é igual a quantos quartos?

2) Quantos quartos são iguais a meio ou metade?

3) Tendo uma metade, quantos quartos são necessários para igualar a um inteiro?

4) Por que a soma de uma metade e um-quarto é menos do que um inteiro?

5) Por que a soma de uma metade e três-quartos é maior do que um inteiro?

Depois que os alunos acharem a resposta para cada questão usando seu material, o professor os leva a demonstrar cada resposta com as partes fracionárias no flanelógrafo. Enquanto o aluno demonstra cada fato, um registro escrito é feito no quadro-negro. Destas demonstrações os alunos chegam a descobrir:

1) Um inteiro é igual a duas metades.

2) Um inteiro é igual a quatro-quartos.

3) As duas metades de um inteiro são iguais.

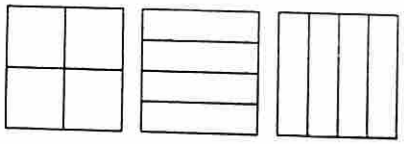
4) Os quatro-quartos de um inteiro são iguais.

5) Dois-quartos e uma metade são iguais a um inteiro.

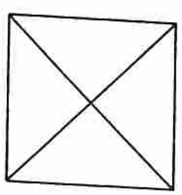
6) Leitura da fração na forma longa e na forma curta. Para a fração ¼, a leitura na forma longa seria: "Uma das quatro partes iguais de um inteiro." A leitura na forma curta seria: "Um-quarto."

A fim de descobrir quantos alunos compreenderam que as metades de um inteiro são iguais, o professor levará alguns alunos a fazer divisão de uma maçã e de uma barra de chocolate em metades. Para a experiência, o professor pode selecionar uma maçã que não seja muito simétrica e uma barra de chocolate que tenha marcadas as partes iguais. Muito provàvelmente os alunos decidirão que é possível dividir a barra de chocolate em metades porque tem a marcação sôbre ela. Antes de a maçã ser cortada em duas partes, o professor deve dar ênfase ao fato de que a maçã deve ser cortada em metades. Os alunos que têm boa compreensão do têrmo *metade* dirão que a maçã não pode ser dividida *exatamente* em metades. Os alunos que fazem esta descoberta compreendem o significado do têrmo *metade*.

Muitos professôres começam a lição da maneira descrita acima, levando o aluno a dividir a barra de chocolate e a maçã em metades por serem *coisas concretas*. A maçã não é o material adequado para se mostrar que as metades são perfeitamente iguais. É comum ouvir-se a criança pedir a *metade maior* de uma maçã dividida. Na aprendizagem inicial do significado de *metade*, é aconselhável que o aluno use material que seja igual em tamanho, como os discos de papel. Depois o professor deve usar materiais como maçãs para testar a compreensão do aluno quanto à fração.



O passo seguinte no desenvolvimento dos conceitos de metade e quartos será demonstrar cada fração usando papel dobrado ou um desenho. Nas demonstrações anteriores o aluno identifica estas partes fracionárias em seu material. Agora, êle deve representar estas frações. O aluno descobrirá diferentes maneiras de representar quartos. Muitos alunos dobrarão o papel ou farão um desenho para representar metades e quartos, como é mostrado acima. O professor deve encorajar o aluno a mostrar outros meios de dividir um quadrado ou um retângulo para repre-



sentar metades e quartos. O segundo diagrama mostra como representar estas partes pelo traçado das diagonais.

Desenvolvimento do Sentido de Oitavos

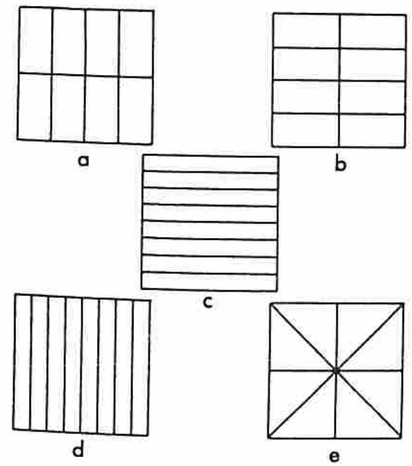
Um meio muito eficiente de introduzir oitavos é levar a dobrar uma fôlha retangular de papel formando metades, quartos e oitavos. Descobrirá que um-oitavo é metade de um-quarto, ou que um-quarto é igual a dois-oitavos. De modo análogo, descobrirá as relações entre metades, quartos e oitavos.

O aluno usará seu material para mostrar a equivalência entre as frações na coleção de frações dividida pelo sistema binário. Mostrará que um inteiro é igual a: oito-oitavos, uma metade e quatro-oitavos, dois-quartos e quatro-oitavos, e um-quarto e seis-oitavos. Depois, fará o registro escrito da experiência. O registro escrito de uma metade e quatro-oitavos será expresso como é mostrado ao lado. A finalidade desta representação não é ensinar ao aluno como adicionar frações, mas levá-lo a fazer a representação simbólica de uma experiência.

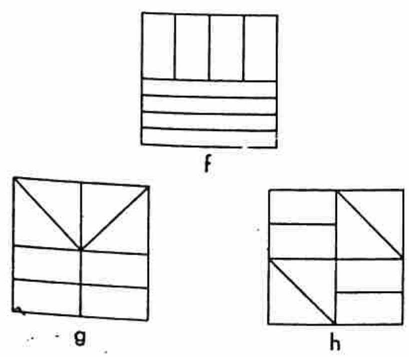
$$\begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \hline 1 \end{array}$$

Depois, o professor levará os alunos à descoberta de diferentes meios de representar um-oitavo em um quadrado ou retângulo. Uma atividade desta espécie pode constituir desafio para o aluno mais adiantado a fim de mostrar sua compreensão do significado de oitavo. O professor pode levar o aluno a mostrar oitavos usando os seguintes meios:

Os diagramas a-e mostram um quadrado, que tem a mesma forma e tamanho, dividido em oito partes iguais. Os diagramas



f-h abaixo mostram partes que incluem o mesmo espaço, mas essas partes não têm necessàriamente a mesma forma. O aluno que desenvolve êste conceito compreende que um-oitavo de um quadrado inclui espaço igual a um-oitavo do espaço abrangido pelo quadrado. Naturalmente o têrmo técnico é *área*, mas o professor não o usará porque não teria significado para a maioria dos alunos na introdução de frações nesta série.



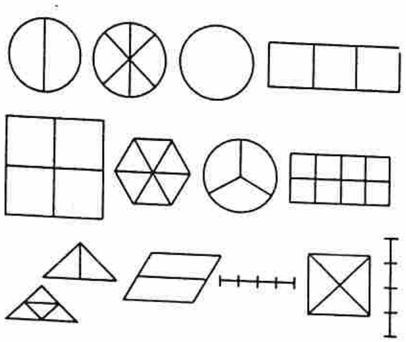
O aluno deve descobrir que um-oitavo é metade de um-quarto, e que um-oitavo é um-quarto da metade. Êle dividirá o quadrado em metades ou quartos. Depois, dividirá cada uma destas partes de maneira que forme oitavos. Assim terá certeza de que uma das partes pequenas é um-quarto da metade ($1/8$), como em f, ou metade de um-quarto ($1/8$), como em h. Os diagramas f-h indicam os meios que o aluno pode descobrir para representar um-oitavo.

Os alunos que compreendem o significado de um-oitavo devem ser capazes de reproduzir dois ou mais dos desenhos apresentados nos diagramas a-e. Sòmente dos alunos superiores podem-se esperar as representações de oitavos, como é mostrado nos diagramas f-h. O aluno que reproduz um-oitavo como mostram êstes diagramas não depende do uso dos materiais objetivos. Êle usa seu conhecimento sôbre relações fracionárias para fazer a representação em diagrama de uma dada fração.

Depois que o aluno se familiariza com metades, quartos e oitavos, vai lidar com terços e sextos. Em seu material, descobrirá que um-têrço é igual a dois-sextos, e que dois-terços têm o mesmo valor que quatro-sextos. Êle vai descobrir também que um inteiro é igual a: três-terços ou seis-sextos, uma metade e três-sextos, dois-terços e dois-sextos, uma metade, um-têrço e um-sexto. Depois o aluno fará o registro escrito de cada um dêstes agrupamentos.

Identificação das Partes

Logo que o aluno adquire compreensão na família das metades e dos terços, estará pronto para identificar diferentes partes fracionárias nas figuras geométricas. Livros que contêm desenhos geométricos, como os mostrados abaixo, são eficientes para determinar a habilidade do aluno em identificar as diferentes partes fracionárias. Êle deve colorir uma parte de cada figura e escrever essa parte como uma fração. Depois terá uma outra coleção das mesmas figuras. Nessa coleção a parte a ser colorida de cada figura será indicada pela forma simbólica. Se fôsse colorir dois-terços de um retângu-



lo dividido em sextos, êle coloriria quaisquer quatro das seis partes para representar dois-terços do retângulo mostrado. Colorindo qualquer parte fracionária da figura, o aluno demonstra que é capaz de reproduzir aquela fração.

Comparação de Frações

A atividade final na seqüência dos passos para desenvolver o significado de frações é a comparação de frações. O aluno compara metades com terços, quartos, sextos e oitavos. Êle usa suas partes fracionárias para fazer as comparações. Para mostrar que um-têrço tem valor menor que um-meio, êle superpõe a parte fracionária que representa um-têrço à parte fracionária que representa um-meio. Depois, escreve as frações unitárias no quadro-negro por ordem de tamanho, começando com as maiores.

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{8}$$

O aluno deve ter descoberto em seu trabalho com frações que o número expresso abaixo da linha indica o número de partes iguais em que o inteiro é dividido. Da seqüência acima, êle deve descobrir que quanto maior é o número de partes em que o inteiro é dividido, menor se torna o tamanho de cada uma das partes.

Os alunos mais adiantados serão capazes de aplicar a generalização acima para expressar frações que respondem às duas condições seguintes:

1) Uma fração que tenha valor menor que um-quarto, porém maior do que um-sexto.

2) Uma fração que tenha valor menor do que um-oitavo, porém maior do que um-doze avos.

Êles poderão apresentar três frações, cada uma tendo valor menor do que um-sexto, porém maior do que um-décimo.

As especificações dadas são amostras que o professor pode usar como padrões para formular outras especificações de uma fração. Os alunos mais capazes poderão indicar ou representar a fração para demonstrar a compreensão da generalização pertinente ao valor da fração.

Desenvolvimento de Compreensões Sôbre Frações

O essencial para o sucesso em se tratando de qualquer fase da Aritmética computacional é a certeza de que o aluno está pronto para esta fase particular de trabalho. Muitos professôres levam os alunos a começar adição ou subtração de frações antes que estejam prontos para êste tipo de trabalho. A prontidão para adição ou subtração de frações implica em que o aluno tenha uma base rica de experiências com frações. Êle será capaz de responder a perguntas variadas referentes a relações entre frações. Talvez, para achar respostas para tais questões, use seu material ou diagramas. Em muitos casos, poderá ser incapaz de dar estas respostas por se tratar de fração na forma simbólica. O aluno não terá o domínio das frações até que possa descobrir relações e comparações entre duas frações sem o uso de recursos suplementares. Por outro lado, a prontidão para êste tipo de trabalho será adquirida com o uso dêsses recursos suplementares para responder a perguntas como as que se seguem:

1) Em um inteiro há quantas metades? terços? quartos? sextos? oitavos?

2) Que é maior: um inteiro ou oito-oitavos?

3) Quantos quartos são necessários para fazer um-meio?

4) Que é metade da metade?

5) Que é metade de um-quarto?

6) Quantas vêzes um-meio é maior que um-quarto?

7) Quantos quartos há em $\frac{3}{4}$?

8) Três-quartos é quantas vêzes maior que $\frac{1}{4}$?

9) Que é maior: $\frac{7}{8}$ ou um inteiro? Quanto mais?

10) Que é maior: $\frac{1}{2}$ ou $\frac{3}{8}$? Quanto uma fração é maior que a outra?

11) Metade é igual a quantos sextos?

12) Um-têrço é igual a quantos sextos?

13) Um-têrço é quantas vêzes maior que um-sexto?

14) Dois-terços é igual a quantos sextos?

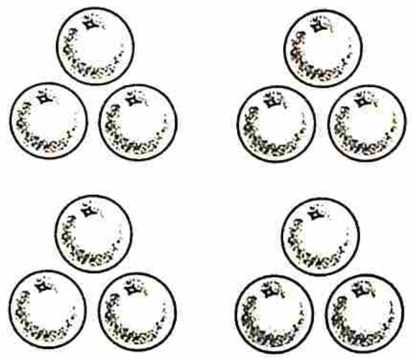
15) Três-quartos é igual a quantos oitavos?

As questões acima são típicas e o aluno será capaz de resolvêlas. Essas questões envolvem relações e comparações de frações. À proporção que o aluno dá uma resposta à questão, fará a verificação usando materiais objetivos ou fazendo a representação gráfica das frações. Consideremos a questão 10. O aluno deve achar quanto a metade é maior que três-oitavos. É uma questão difícil de ser respondida se as frações são apresentadas na forma simbólica. O exemplo pode ser escrito como é apresentado ao lado. O aluno requer consideráveis habilidades em computação com frações para resolver o exemplo. Por outro lado, pode usar o seu material para achar a resposta. Se superpõe as partes que representam três-oitavos à que representa metade, poderá achar a parte fracionária necessária que colocada junto aos três-oitavos irá igualá-la.

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \underline{\quad}$$

Fração Como Parte de Um Grupo

A fração pode representar parte de uma unidade ou de um grupo. Assim, $\frac{1}{4}$ de uma laranja significa uma das quatro partes iguais da laranja inteira. Da mesma forma, $\frac{1}{4}$ de uma dúzia de laranjas significa uma das quatro partes iguais em que as 12 laranjas foram divididas. Achar a parte fracionária de um grupo, assim como $\frac{1}{4}$ de uma dúzia de laranjas, é o mesmo que dividir 12 laranjas em 4 grupos iguais de 3 laranjas cada um, como é mostrado adiante. A pág.

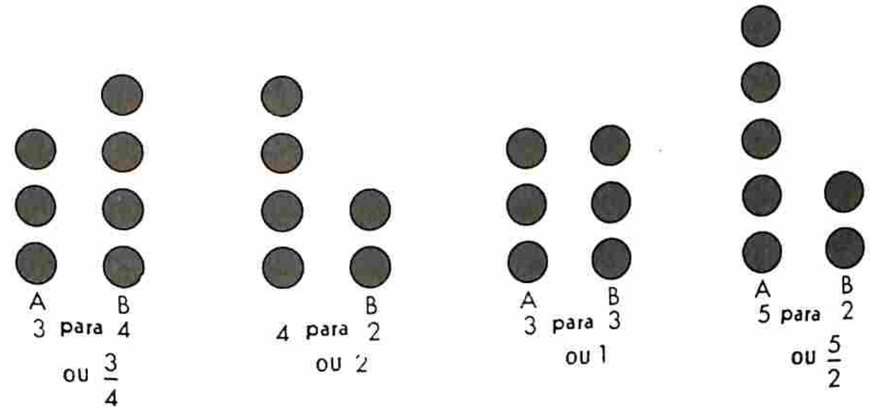


261 mostra que uma das aplicações da divisão é achar o tamanho de uma parte igual em que o número foi dividido. Divisão partitiva é o mesmo que achar a parte fracionária de um número. Assim, achar $\frac{1}{4}$ de 12 é o mesmo que dividir 12 por 4. O problema de achar a parte fracionária de um número será amplamente discutido no próximo capítulo. O aluno descobrirá que multiplicar por $\frac{1}{4}$ é o mesmo que dividir por 4. Êste é um princípio matemático básico da multiplicação e divisão.

Fração Como Uma Razão

Razão é o quociente de dois números. A razão representa um dos dois modos usados para comparar dois números. No diagrama seguinte a razão de A para B está indicada. O diagrama mostra que a razão de dois números pode ser expressa como:

1) Uma fração própria
2) Um número inteiro
3) Uma fração imprópria.



O desenho do diagrama representa 3 discos em A e 4 discos em B. As duas quantidades podem ser comparadas por divisão. O número da pilha menor é $\frac{3}{4}$ do número da pilha maior. Do mesmo modo, o número da pilha maior é $\frac{4}{3}$ do número da pilha menor. Cada uma destas frações é formada pela divisão de um número por outro número. Portanto, a fração $\frac{3}{4}$ significa que $\frac{3}{4}$ é o quociente de 3 dividido por 4.

O conceito de razão não deve ser introduzido até que a classe compreenda que uma fração é uma parte de um inteiro. Quando o aluno usa a fração para comparar duas quantidades, êle aplica os valôres numéricos para transmitir um conceito quantitativo. É muito fácil para um aluno descobrir que um lápis de 12,5 cm de comprimento é mais comprido que um lápis de 7,5 cm. Contudo, expressar os comprimentos dêsses lápis como razão requer um alto nível de pensamento quantitativo.

O mesmo padrão para introduzir o conceito de razão de uma fração seria seguido como foi feito para introduzir o conceito de que uma fração pode representar uma parte de um inteiro. Primeiramente, os alunos usariam objetos, como marcadores, para mostrar dois grupos. Êles poderiam pôr 2 discos em uma pilha e 3 discos na outra. Depois, comparariam as quantidades. Afirmarão que em uma pilha há um disco a menos. Resumindo, êste fato pode ser representado pela fração $\frac{2}{3}$. Esta fração mostra a *razão* do número da pilha menor para o número da pilha maior.

Em seguida, o professor levará os alunos a adicionar mais dois discos à pilha menor. Para que o valor da razão se mantenha o mesmo entre as duas pilhas, os alunos descobrirão que devem adicionar 3 discos à outra pilha. A razão entre as duas primeiras quantidades é $\frac{2}{3}$. A razão entre as duas segundas quantidades é $\frac{4}{6}$. Estas duas frações têm o mesmo valor. Êles aprenderam prèviamente que quatro das seis partes iguais de um inteiro têm o mesmo valor que duas das três partes iguais daquele inteiro. Agora, descobrem que a razão de 4 coisas para 6 coisas tem o mesmo valor que a razão de 2 coisas para 3 coisas.

Em segundo lugar, os alunos devem fazer o desenho para mostrar o conceito de razão de uma fração, como $\frac{2}{3}$. Podem fazer um grupo de dois desenhos geométricos e um outro grupo de três desenhos. De maneira semelhante, os alunos podem representar outras razões.

Finalmente os alunos devem expressar a razão do número em cada dois grupos de objetos, pessoas ou coisas vistos na sala de aula. Podem expressar a razão do número de cadeiras em uma fileira para o número de cadeiras da sala. Do mesmo modo, podem expressar a razão do número de meninos na classe para o número de meninas e vice-versa. Neste nível de desenvolvimento do conceito, os alunos devem ser capazes de mostrar o significado de qualquer razão, assim como $\frac{3}{4}$ ou $\frac{4}{3}$, pela manipulação de objetos, por representação gráfica, ou por um problema que compare duas quantidades semelhantes. O professor não se deve esquecer de que a maioria dos alunos na escola primária precisa ter grande variedade de experiências significativas para compreender e usar a fração expressando razão.

Vocabulário de Frações

Há certas palavras técnicas que o aluno deve compreender para lidar eficazmente com frações ordinárias. A lista das palavras técnicas que necessita compreender na adição e subtração de frações inclui: *numerador, denominador, têrmos, simplificação, fração própria, fração imprópria* e *número misto.*

Significação de Numerador e Denominador

A pág. 308 descreve o uso que o aluno pode fazer de seu material para achar como o tamanho da parte fracionária depende do número de partes iguais em que o inteiro é dividido. Quando o aluno registra a parte fracionária de um inteiro, descobre que o número abaixo da linha, como $\overline{3}$ indica o número de partes iguais em que o inteiro está dividido. Êste número que indica o número de partes iguais é chamado de *denominador*. O número acima da linha, como $\underline{2}$, mostra quantas destas partes são tomadas e é chamado *numerador*. O numerador e o denominador são os *têrmos da fração.*

A pág. 312 sugere que o aluno ordene as frações por ordem de tamanho para descobrir como o valor da fração decresce ou diminui em uma fração unitária, quando o denominador vai aumentando. Na série abaixo, cada fração sucessiva diminui em valor:

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{12}$$

De maneira semelhante, o aluno deve usar seu material para descobrir que o valor de uma fração aumenta desde que o denominador de cada fração permaneça o mesmo.

Na série das frações abaixo, cada fração sucessiva aumenta em valor:

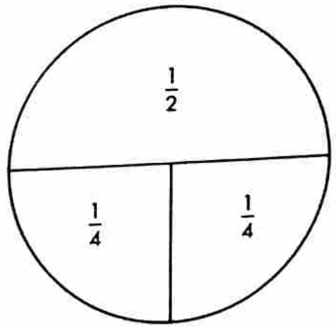
$$\frac{1}{8} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{4}{8} \quad \frac{5}{8} \quad \frac{6}{8} \quad \frac{7}{8}$$

As duas ilustrações provam que é necessário considerar ambos, o numerador e o denominador, para determinar o valor de uma fração. O uso de duas quantidades variáveis em uma fração é causa das muitas dificuldades de o aluno compreender frações ordinárias.

Ainda que o aluno comece seu estudo de frações com materiais visuais e objetivos, deve ser capaz de fazer generalizações concernentes ao valor das frações e à compreensão das relações entre os têrmos da fração. O princípio básico é essencial para o entendimento matemático da fração.

Simplificação de Frações aos Menores Têrmos

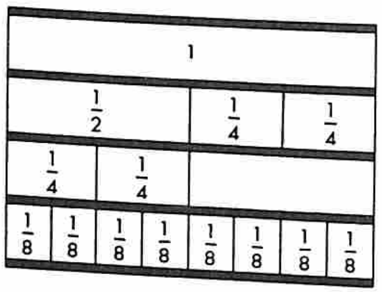
A fração $\frac{3}{4}$ está expressa nos *menores têrmos,* mas a fração $\frac{2}{4}$ não está expressa nos menores têrmos. A fração $\frac{2}{4}$ pode ser *simplificada* à fração equivalente $\frac{1}{2}$. A fração está expressa nos menores têrmos se o 1 é o maior número que divide o numerador e o denominador sem deixar resto.



O diagrama mostra que a fração $\frac{1}{2}$ tem o mesmo valor que a fração $\frac{2}{4}$. A fração $\frac{2}{4}$ pode ser simplificada a têrmos menores, dividindo-se o numerador e o denominador por 2. A divisão mostra como a fração $\frac{2}{4}$ pode ser reduzida a têrmos menores. Contudo, o processo da divisão não indica o significado da redução. *Ao simplificar uma fração encontramos outra com menor número de partes, mas as partes são maiores.*

O uso de material variado é um meio efetivo de levar o aluno a descobrir o significado da simplificação de uma fração. O aluno deve usar seu material para mostrar a equivalência de frações em uma série, como metades, quartos e oitavos. O quadro de equivalência é outro excelente auxílio que mostra a equivalência de frações.

O cartaz fracionário mostra as frações em uma série dividida na escala binária. Neste cartaz o aluno pode colocar dois-quartos abaixo ou sôbre uma metade para provar a equivalência de $\frac{2}{4}$ e $\frac{1}{2}$. Materiais móveis desta espécie são auxílios eficientes para a instrução inicial dos alunos lentos.



Depois de os alunos terem usado materiais visuais e exploratórios para mostrar a equivalência de frações, o professor deve levá-los a fazer descobertas relacionadas com as frações; os alunos irão identificar frações equivalentes, como $\frac{4}{8}$, $\frac{2}{4}$ e $\frac{1}{2}$, e levantar questões dos seguintes tipos:

"Em quantas partes iguais está um inteiro dividido em cada uma das frações?"

"Quantas partes são consideradas em cada fração?"

"Quando um número de partes se torna menor, o que acontece ao tamanho de cada parte?"

"É o valor da fração mudado, quando a fração é simplificada?"

O aluno usa as partes recortadas, o cartaz fracionario e/ou outros auxílios suplementares para mostrar a equivalência de certas frações. A equivalência entre as duas formas não é estruturada pelo aluno até que êle descubra como expressar esta relação dentro da estrutura do sistema de numeração. O professor deve ajudar o aluno a descobrir como os têrmos da fração $\frac{4}{8}$ podem ser reduzidos à fração equivalente $\frac{1}{2}$. É claro que os têrmos da fração $\frac{4}{8}$ devem ser divididos por 4 para se ter o quociente igual a $\frac{1}{2}$. O exemplo deve ser escrito na forma apresentada. Do mesmo modo, qualquer fração redutível pode ser expressa em têrmos menores pela divisão do numerador e denominador pelo mesmo número até que 1 seja o mais alto fator de ambos os têrmos da fração.

$$\frac{4 \div 4}{8 \div 4} = \frac{1}{2}$$

Dois meios diferentes podem ser usados para simplificar a fração $\frac{12}{16}$ aos menores têrmos:

A. $\frac{12 \div 2}{16 \div 2} = \frac{6}{8}$ $\quad \frac{6 \div 2}{8 \div 2} = \frac{3}{4}$

B. $\frac{12 \div 4}{16 \div 4} = \frac{3}{4}$

Em A, duas divisões dos têrmos são necessárias para reduzir $\frac{12}{16}$ aos menores têrmos. Em B, sòmente uma divisão é necessária, porque 4 é o fator comum mais alto de 12 e 16. Em A, o fator comum mais alto dos têrmos da fração $\frac{12}{16}$ não é usado em primeiro lugar para reduzir a fração aos menores têrmos, donde ser necessária mais de uma divisão para reduzir essa fração aos menores têrmos. O professor deve encorajar os alunos adiantados a achar o maior número que divide ambos os têrmos da fração sem deixar resto. Se o aluno não é capaz de descobrir êste fator, dividirá ambos os têrmos da fração por algum número, como 2, 3, 4 ou 5, para ter certeza de encontrar o fator comum do numerador e denominador.

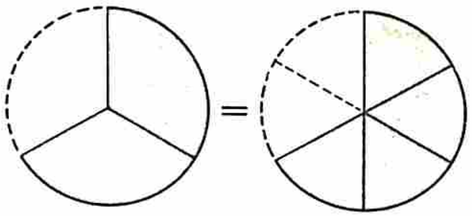
O importante princípio matemático a ser aprendido sôbre simplificação pode ser assim estabelecido: *Quando dividimos o numerador e o denominador de uma fração pelo mesmo número, não alteramos seu valor.*

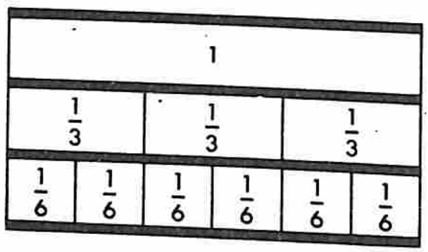
O aluno deve compreender que o zero não é incluído como divisor. No trabalho com os fatos básicos, o aluno aprendeu que é impossível multiplicar ou dividir por zero. Dividindo-se ambos os têrmos de uma fração pelo mesmo número, como 4 na fração $\frac{4}{4}$, é o mesmo que dividir a fração por 1. Desde que o número multiplicado ou dividido por 1 dá um produto ou quociente igual àquele número, conclui-se que, multiplicando-se ou dividindo-se os têrmos de uma fração pelo mesmo número, dá um produto ou quociente igual àquela fração. Por outro lado, adicionando-se ou subtraindo-se 1 de um número altera-se seu valor. Logo, não é possível adicionar ou subtrair o mesmo número aos têrmos de uma fração sem mudar o seu valor. Com poucas ilustrações pode-se provar que se o mesmo fôr adicionado aos têrmos de uma fração ou dêles subtraído, o valor da fração é alterado.

Divisão e multiplicação são processos inversos. Se é possível dividir ambos os têrmos de uma fração pelo mesmo número sem mudar o seu valor, é possível também multiplicar ambos os têrmos da fração pelo mesmo número para achar uma fração equivalente. Os diagramas mostram que $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$. O trabalho pode ser assim estruturado:

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 2}{3 \times 2} = \frac{4}{6}$$

Desde que as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{6}$ são iguais em valor, a fração $\frac{2}{3}$ é *mudada para têrmos mais elevados*, resultando a fração $\frac{4}{6}$. *A mudança de uma fração para têrmos mais elevados tem como resultado uma fração com maior*





número de partes, sendo estas partes menores em tamanho.

O princípio matemático que é aplicado na mudança de uma fração para têrmos mais elevados pode ser assim anunciado:

Quando multiplicamos o numerador e o denominador de uma fração pelo mesmo número, não alteramos seu valor.

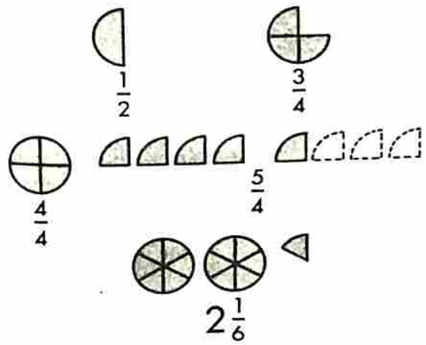
Os dois princípios básicos que se aplicam às frações podem ser estabelecidos como regra. Essa regra ou princípio é o seguinte: *O numerador e o denominador de uma fração podem ser multiplicados ou divididos pelo mesmo número sem alterar o valor da fração.* Essa regra pode ser considerada como a *regra áurea* de frações. Como foi mostrado à pág. 318, essa regra áurea aplica-se apenas aos processos de multiplicação e de divisão.

Frações Próprias e Impróprias e Números Mistos

Os têrmos *fração própria, fração imprópria* e *número misto* não têm relação com a estrutura do sistema de numeração decimal. Êsses conceitos são usados para designar certos tipos

de frações ou números. Através do conhecimento do sistema de numeração o aluno não descobrirá o significado dêstes têrmos. Todavia, o professor pode usar ou o método indutivo ou o dedutivo para levar o aluno a compreender o significado dêsses têrmos.

Usando o método indutivo, o professor leva o aluno a representar certas frações próprias com as partes recortadas. A sala de aula deve estar provida de gráficos ou cartazes, como o exemplo abaixo, que apresenta mais de uma fração própria.



Segue-se a discussão para determinar as características de uma fração própria. Os alunos descobrirão que o numerador de uma fração própria pode ser 1 ou mais que 1 para qualquer fração com exceção de meio, mas o numerador da fração é sempre menor que o denominador. Através da discussão, os alunos farão a descoberta de que a fração tem valor menor que o inteiro. Depois, os alunos farão a identificação das frações próprias em uma série, como $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{11}{10}$ etc.

Adotando o método dedutivo, o professor dá a definição de fração própria e leva a classe a ilustrar frações próprias com as partes recortadas e desenhos. Os alunos mostram por que a fração $\frac{4}{4}$, por exemplo, não pode ser classificada como fração própria, mas como fração imprópria. Depois, os alunos identificam as frações próprias em uma lista de frações do tipo dado acima.

Do mesmo modo, o método indutivo ou dedutivo pode ser usado para apresentar o significado de uma fração imprópria ou de um número misto. Depois da apresentação de todos os conceitos, o aluno deve ser capaz de classificar uma fração própria, uma fração imprópria, ou um número misto, em uma série como a seguinte:

$$\frac{5}{6} \quad \frac{7}{6} \quad \frac{8}{8} \quad 1\frac{1}{4} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{4}{5} \quad 4\frac{1}{3} \quad \text{etc.}$$

A atividade final no desenvolvimento dos três conceitos deve incluir atividades que envolvam características e generalizações relacionadas com êsses conceitos.

1) O numerador de uma fração própria é sempre menor que o denominador.

2) O numerador de uma fração própria com o maior valor é sempre uma unidade menor que o denominador.

3) O numerador e o denominador de uma fração imprópria podem ser iguais. Então, o valor da fração é igual a um inteiro.

4) O numerador de uma fração imprópria deve ser igual ou maior que o denominador.

5) Se o numerador é uma unidade maior que o denominador, uma fração imprópria tem o menor valor possível para uma fração maior do que um número inteiro.

6) Se o numerador é um múltiplo do denominador, o valor da fração é um número inteiro.

7) Um número misto é maior que um inteiro.

8) Um número misto é maior que uma fração própria.

9) Uma fração imprópria que não é igual a um número inteiro pode ser transformada em um número misto.

d. ADIÇÃO DE FRAÇÕES ORDINÁRIAS

Classificação de Exemplos na Adição de Frações

As frações para serem somadas ou subtraídas podem ser classificadas de acôrdo com a relação entre os denominadores. Esta classificação é a seguinte:

1) Frações com denominadores iguais, como $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$.

2) Frações com denominadores diferentes mas relacionados, como $\frac{1}{2} + \frac{3}{8}$.

3) Frações com denominadores diferentes e não-relacionados, como (a) $\frac{1}{3} + \frac{3}{4}$, ou (b) $\frac{1}{4} + \frac{1}{6}$.

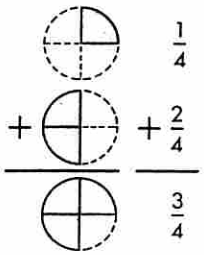
No grupo 2, um dos denominadores é um fator comum da fração. No grupo 3, parte (a), o menor denominador comum (m.m.c.) é o produto dos denominadores, como 12. Na parte (b), o produto 24 é um denominador-comum, mas não é o m.m.c.

Adição de Frações Com Denominadores Iguais — Somas Não-Redutíveis

Há seqüências diferentes para a apresentação dos vários tipos de exemplos na adição de frações. Os autores advogam o ensino da adição de frações com denominadores iguais e somas inferiores a um inteiro no início do estudo do processo, e depois com somas iguais ou maiores que um inteiro. A soma de duas frações de denominadores diferentes expressas em seus têrmos mais simples não pode, nunca, ser igual a um inteiro. Apenas duas frações de denominadores iguais podem ter uma soma igual a um inteiro. A seqüência para adição de frações inclui números mistos e frações próprias.

O aluno pode usar suas partes recortadas para procurar a soma de frações com denominadores iguais, como $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{4}$. Baseado em seu trabalho com êstes materiais, encontra o total. O caminho para encontrar a soma, em forma simbólica, pode ser

nôvo para o aluno. Êle precisa aprender a encontrar a soma, no exemplo, com o uso de materiais, antes de saber como somar frações em forma simbólica. Deve descobrir que a soma de duas frações com denominadores iguais é igual à soma de seus numeradores. Desde que a soma de 1 laranja e 2 laranjas é igual a 3 laranjas, então a soma de 1 quarto e 2 quartos é igual a 3



quartos, ou $\frac{3}{4}$. O aluno que compreende bem a adição sabe-a uma operação que se realiza para encontrar o número de objetos em um grupo que seja igual ao total formado pela combinação de dois ou mais grupos. Neste exemplo, o aluno deve calcular o número de quartos. O denominador indica a espécie de partes que vão ser somadas. O numerador indica quantas dessas partes vão ser combinadas. O aluno compreende a estrutura da adição de frações porque relaciona êste tipo de adição com a adição de números inteiros. O professor não deve esperar que todos os alunos compreendam a estrutura do processo, principalmente na etapa de introdução do trabalho.

O passo seguinte deve ser pedir ao aluno para dizer por que a resposta é razoável ou lógica. Êle deve poder responder a questões como as seguintes:

1) Por que a soma deve ser menor do que 1 inteiro?

2) Quanto a soma é menor do que um inteiro?

3) Quanto a soma é maior do que $\frac{1}{2}$?

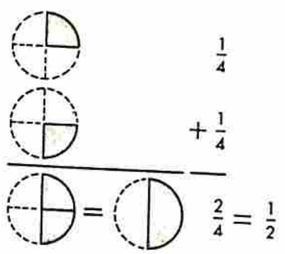
4) Qual deve ser o valor de duas frações com o mesmo denominador para que a soma seja 1 inteiro?

5) Como é calculado o numerador de uma fração que expressa uma soma? e o denominador?

6) Pode ser simplificada a fração que expressa a soma?

Adição de Frações com Denominadores Iguais — Soma Redutível

O processo para calcular a soma redutível de duas frações é o mesmo usado para calcular uma soma não-redutível. O nôvo passo para a solução consiste na redução da resposta aos têrmos mais simples. A representação visual dada abaixo mostra os passos dados para somar $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{4}$. A classe identifica cada passo dado na solução gráfica, e depois na solução simbólica. Nesta fase do estudo de frações, o aluno deve estar familiarizado com o processo de redução, antes de operar com a adição de frações, com uma soma redutível.

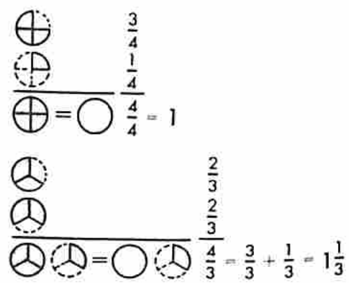


Os professôres, algumas vêzes, consideram $\frac{2}{4}$ uma resposta incorreta para a soma $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{4}$. É convencional expressar as frações, na resposta, nos têrmos mais simples. As instruções para a administração de um teste ou um exercício devem indicar se a fração, na resposta, deve ser expressa nos têrmos mais simples.

Adição de Frações Iguais com Uma Soma Igual ou Maior Que Um Inteiro

Uma fração imprópria, que é a soma de duas frações com o mesmo denominador, pode ser igual: (1) a um número inteiro; (2) a um número misto, contendo uma fração que é redutível; e (3) a um número misto, contendo uma fração que não é redutível. O nôvo passo, em cada tipo, consiste na transformação da fração imprópria na soma a um inteiro ou a um número misto.

O aluno deve saber como calcular a soma de duas frações com o mesmo denominador, como as que são mostradas no desenho. Deve aprender como ex-



pressar essa soma, como um inteiro ou um número misto. Para certificar-se de que o aluno sabe como transformar a fração na soma, peça-lhe para realizar a seguinte seqüência de atividades:

1) Usar suas partes recortadas para calcular a resposta.

2) Dizer os passos dados na representação visual.

3) Explicar a seqüência na representação simbólica. (Notar, cuidadosamente, a redução da fração imprópria, na soma, a um número misto.)

4) Explicar a seqüência no desenvolvimento dado no livro-texto.

5) Dizer se a resposta é lógica.

Para provar que a resposta é lógica, o aluno deve responder a questões como as seguintes:

1) Por que $\frac{4}{3}$ não podem ser representados por 1 inteiro?

2) Por que a soma deve ser maior que 1 inteiro?

3) Por que a soma deve ser menor que 2 inteiros?

4) A soma é maior ou menor que $1\frac{1}{2}$?

5) A fração, na resposta, é redutível?

Um plano semelhante é seguido para calcular a soma de duas frações com o mesmo denominador, como $\frac{3}{4}$, na qual a fração, na resposta, é redutível.

No estudo inicial do tópico, o aluno deve usar a forma longa, para a transformação de uma fração imprópria em um número misto. Assim, para transformar a fração $\frac{7}{3}$ em um número misto, o aluno deve usar a seguinte forma:

$$\frac{7}{3}=\frac{3}{3}+\frac{3}{3}+\frac{1}{3},$$
$$\text{ou } 1+1+\frac{1}{3}=2\frac{1}{3}.$$

Deve continuar a usar êste método até descobrir uma maneira mais rápida para realizar a transformação. Para ajudá-lo a descobrir uma maneira de reagrupar a fração imprópria, o professor deve formular questões como as seguintes:

Quantos terços há em um inteiro?

Quantos terços há em 2 inteiros?

Como pode dizer que 7 terços não podem ser expressos com um número inteiro?

Quais das frações seguintes podem ser expressas como um número inteiro:

$$\frac{9}{3}?\ \frac{10}{3}?\ \frac{8}{3}?\ \frac{12}{3}?\ \frac{6}{3}?$$

Como pode transformar em número inteiro ou em número misto qualquer fração expressa em terços sem subtrair $\frac{3}{3}$?

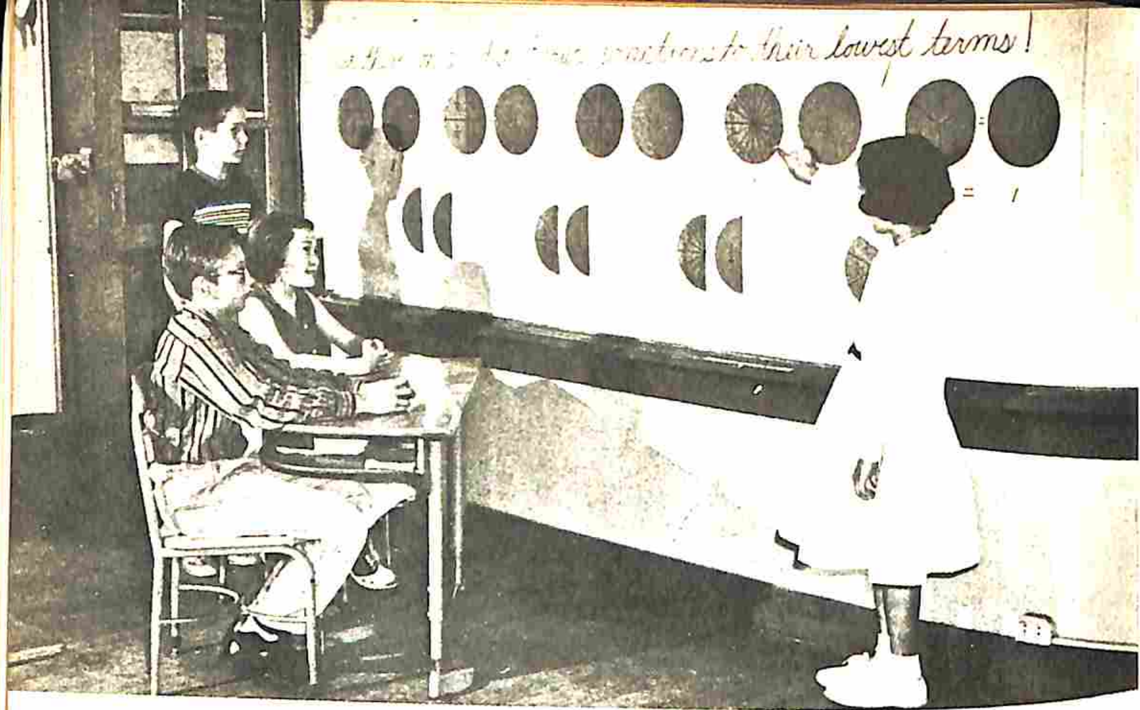
O aluno que não descobrir a regra para decompor uma fração imprópria, dividindo o numerador pelo denominador, deve continuar a usar o princípio subtrativo, que êle compreende.

Adição de Números Mistos Quando a Soma É Uma Fração Própria ou Imprópria

Os exemplos A, B e C representam três tipos de números mistos, em relação à sua soma.

A	B	C
$1\frac{1}{3}$	$2\frac{1}{3}$	$1\frac{2}{3}$
$+2\frac{1}{3}$	$+2\frac{2}{3}$	$+2\frac{2}{3}$
$3\frac{2}{3}$	$4\frac{3}{3}$	$3\frac{4}{3}$

Em A, a soma das frações é uma fração própria; em B, a soma das frações é uma fração imprópria igual a um inteiro; em C, a soma das frações é uma fração imprópria, com valor maior que um inteiro. Em A, não é necessário reagrupamento na soma; em B e C, é necessário reagrupamento. O reagrupamento da soma é um passo nôvo.



Como objetivar frações equivalentes em um quadro ou mural.

Alguns professôres exigem do aluno que dê a soma, como é mostrado no exemplo ao lado. Esta solução envolve demasiado trabalho com números não-vistos, para os alunos que estão aprendendo o processo. O aluno deve escrever cada passo dado na solução, até aprender a usar métodos de transformação da soma em forma abreviada.

$$\begin{array}{r} 1\frac{3}{4} \\ +1\frac{3}{4} \\ \hline 3\frac{1}{2} \end{array}$$

Para certificar-se de que o aluno compreendeu como somar nos exemplos mostrados acima, êle deve realizar as seguintes atividades:

1) Demonstrar a resposta com partes recortadas.

2) Explicar os passos dados no diagrama.

3) Explicar os passos dados no livro-texto.

4) Explicar os passos dados na representação simbólica.

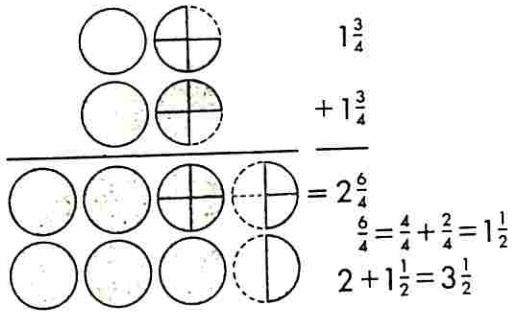
5) Demonstrar que a resposta é lógica.

6) Estabelecer uma regra para somar dois números mistos.

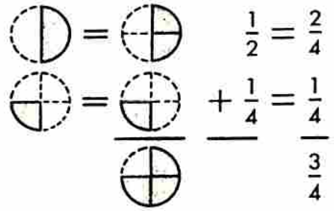
Logo que o aluno demonstre que compreende o trabalho na forma simbólica, não deve usar auxílios suplementares para calcular as respostas dos exemplos dêste tipo.

Adição de Frações Com Denominadores Diferentes Mas Relacionados

Frações com denominadores diferentes mas relacionados têm denominadores diferentes, mas



um dos denominadores é o denominador-comum, como no exemplo $\frac{1}{2} + \frac{3}{8}$. O aluno deve fazer muitos exercícios com equivalência de frações usando material concreto, antes de começar a somar frações. Estas atividades exploratórias criam a prontidão para o trabalho de somar frações com denominadores diferentes. Baseando-se no conhecimento do aluno sôbre frações equivalentes, êle deve saber que $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ e que é possível expressar as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ como frações com denominadores iguais, como a seguir é mostrado.



Para somar frações com denominadores diferentes mas relacionados, o professor deve seguir a mesma seqüência de atividades usada para somar frações com denominadores iguais. Um dos princípios matemáticos em adição expõe que só podem ser somadas quantidades semelhantes. O aluno que compreende esta generalização conclui que alguns dos princípios que governam as operações com inteiros aplicam-se às frações ordinárias.

Depois que o aluno usa material exploratório e visual na adição de frações da mesma família, deve descobrir que o maior dos dois denominadores em um exemplo é o denominador-comum da fração. O aluno experimentará pouca dificuldade na transformação de uma fração em fração equivalente, quando estas são representativas de uma situação social. Baseando-se nestas frações familiares, o aluno deve descobrir o método matemático para transformar frações com denominadores diferentes mas relacionados em frações equivalentes. O aluno identifica o denominador maior 12, no exemplo $\frac{2}{3}+\frac{5}{12}$, como denominador-comum. Se compara, pela divisão, 12 com 3, a razão ou quociente é 4. Êsse quociente mostra que há quatro vêzes tantas partes iguais em um inteiro que é dividido em doze avos e em terços. Entretanto, ambos os têrmos da fração $\frac{2}{3}$ devem ser multiplicados por 4, para expressar a fração com 12 avos. É importante para o aluno compreender a aplicação desta regra áurea das frações, quando é aplicada na transformação de uma fração em fração equivalente expressa em têrmos mais elevados.

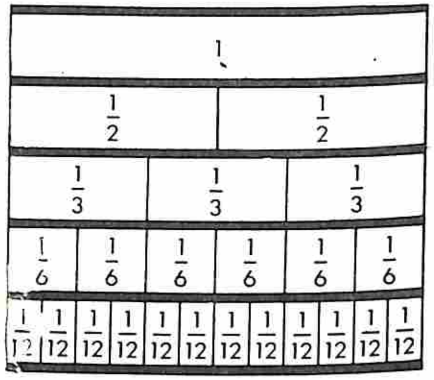
Adição de Frações Com Denominadores Diferentes e Não-Relacionados — O M.M.C. É o Produto

Os exemplos ao lado ilustram dois tipos de frações com denominadores classificados como diferentes e não-relacionados. Em A, o m.m.c. é o produto; em B, o m.m.c. não é o produto. Exemplos dos tipos A e B raramente representam uma situação social. Entretanto, deve ser salientada, principalmente na adição de tais frações, a compreensão matemática das operações. (Veja pág. 302, para a diferenciação do currículo.)

A	B
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$+\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{6}$

O aluno descobre que, para somar as frações exemplificadas ao lado, o maior denominador não é o denominador-comum. O quadro de frações mostra que cada fração pode ser expressa como sextos, como se deduz do quadro abaixo.

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}=\frac{3}{6} \\ +\frac{1}{3}=\frac{2}{6} \\ \hline \frac{5}{6} \end{array}$$



O professor deve levar o aluno a escrever uma série de frações equivalente a cada uma das frações. Assim, algumas frações em série iguais a $\frac{1}{2}$ são: $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$; iguais a $\frac{1}{3}$: $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{4}{12}$. O aluno, prontamente, pode ver que sextos são comuns em ambas as séries. Baseando-se em alguns exercícios, deve concluir que o produto dos denominadores é o denominador-comum.

O aluno deve ser capaz de dizer se uma resposta é razoável. A soma de $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ é $\frac{5}{6}$. Esta resposta é razoável porque $\frac{1}{2}+$ $+\frac{1}{2}=1$. Desde que $\frac{1}{3}$ é menor que $\frac{1}{2}$, a soma de $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ deve

ser menor que 1. A fração é um pouco menor que 1, daí a razoabilidade da resposta.

O M.M.C. Não É o Produto dos Denominadores

O produto dos denominadores de quaisquer duas frações é, sempre um denominador-comum. O produto será o m. m. c. apenas quando os números são primos entre si. O número 1 é o maior fator comum dos números primos. O produto dos denominadores $\overline{6}$ e $\overline{8}$ é 48, mas o m.m.c. é 24. Desde que 2 é um fator comum tanto de 6 como de 8, o produto dos denominadores será duas vêzes maior que o m.m.c.

O professor não deve usar material exploratório e visual, na apresentação da adição de frações, em exemplos como os que apresentamos ao lado. O aluno usa êste material para descobrir operações matemáticas em situações socialmente úteis.

$$\begin{array}{r} \frac{1}{6}=\frac{8}{48} \\ +\frac{1}{8}=\frac{6}{48} \\ \hline \frac{14}{48}=\frac{7}{24} \end{array}$$

O aluno pode usar o produto dos denominadores como um denominador-comum.. Êste método é correto, mas a soma das frações será redutível. Se 24 é usado como um denominador-comum, a soma não será redutível.

O aluno deve escrever algumas frações equivalentes em série para cada fração dada. Algumas frações equivalentes para $\frac{1}{6}$ são: $\frac{2}{12}$, $\frac{3}{18}$, $\frac{4}{24}$, $\frac{5}{30}$, $\frac{6}{36}$; para $\frac{1}{8}$: $\frac{2}{16}$, $\frac{3}{24}$, $\frac{4}{32}$, $\frac{5}{40}$, $\frac{6}{48}$. As séries devem provar que as frações $\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{8}$ podem ser expressas como 24 ou 48 avos.

O aluno deve compreender o princípio de que o produto de quaisquer dois denominadores não-relacionados é um denominador-comum. Depois de calcular o produto de dois denominadores, deve examinar o exemplo, cuidadosamente, para verificar se um denominador menor pode ser usado como denominador-comum. Se, com o exame, não encontra um denominador menor, usa o produto dos denominadores como denominador-comum.

Adição de Três ou Mais Frações com Denominadores Diferentes

A discussão prévia girou sôbre a adição de duas frações. Pode ser necessário somar mais de duas frações ou números mistos. Se as frações têm denominadores iguais ou desiguais mas relacionados, o aluno não deve experimentar dificuldade para calcular um denominador - comum.

$$\begin{array}{r} \frac{7}{8}=\frac{21}{24} \\ \frac{3}{4}=\frac{18}{24} \\ \frac{1}{6}=\frac{4}{24} \\ \hline \end{array}$$

No exemplo ao lado, os denominadores são desiguais mas relacionados, e o denominador-comum está oculto. Neste caso, o aluno deve escolher o maior denominador e multiplicá-lo por números consecutivos, começando com 2, até que um dos produtos seja o denominador-comum. No exemplo dado, o maior denominador é 8. O aluno deve multiplicar 8 por 2, mas 16 não é um denominador-comum. Em seguida, multiplica 8 por 3. O produto 24 é o m.m.c. Então, deve tornar a escrever cada fração como uma fração equivalente.

Teste-Diagnóstico na Adição de Frações

Um teste-diagnóstico indica o lugar em que o aluno tem dificuldade com um determinado tópico. Para que um teste desta espécie seja digno de confiança, deve conter, no mínimo, três exemplos particulares de cada dificuldade. (Veja o Capítulo 16 para outras características dêste teste.)

Damos a seguir exemplo de um teste para diagnóstico da adição de frações iguais. O professor dá um teste desta espécie depois que a classe tenha completado a adição de frações iguais. O teste é dividido em duas partes.

PARTE A (a soma das frações é menor que 1)

	a	b	c	
I.	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{8}$	Sem redução na soma.
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{8}$	
II.	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	Redução na soma.
	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{4}$	
III.	$2\frac{1}{3}$	$3\frac{1}{4}$	$5\frac{1}{8}$	Dois números mistos com frações do mesmo tipo do nº I.
	$1\frac{1}{3}$	$1\frac{2}{4}$	$1\frac{4}{8}$	
IV.	$3\frac{1}{8}$	$7\frac{1}{4}$	$4\frac{3}{8}$	Dois números mistos com frações do mesmo tipo do nº II.
	$1\frac{3}{8}$	$2\frac{1}{4}$	$5\frac{3}{8}$	
V.	$4\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$	6	Adição de uma fração ou um número misto e um inteiro.
	2	3	$2\frac{1}{4}$	

PARTE B (a soma das frações é igual ou maior que 1)

	a	b	c	
I.	$\frac{5}{8}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	A soma é igual a 1.
	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	
II.	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{8}$	A soma é maior que 1, sem redução.
	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{4}{8}$	
III.	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{3}{4}$	Igual ao nº II, com redução.
	$\frac{7}{8}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{3}{4}$	
IV.	$2\frac{3}{4}$	$7\frac{5}{8}$	$3\frac{5}{6}$	Dois números mistos, com frações iguais às do tipo nº II.
	$1\frac{2}{4}$	$4\frac{6}{8}$	$4\frac{2}{6}$	
V.	$6\frac{7}{8}$	$7\frac{3}{4}$	$2\frac{5}{6}$	Igual ao nº IV, com redução.
	$3\frac{5}{8}$	$1\frac{3}{4}$	$4\frac{5}{6}$	
VI.	$3\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{4}$	$6\frac{5}{8}$	Igual ao nº IV, a soma é a mesma do tipo nº I.
	$1\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{4}$	$7\frac{3}{8}$	

Se o aluno dá solução incorreta para um exemplo da mesma fila, provàvelmente o êrro foi casual. Deixe que o aluno corrija seu trabalho. Se êle errou dois ou mais exemplos em qualquer grupo, é bom que êle resolva um dos exemplos dizendo em voz alta o que está fazendo. Desta forma é possível averiguar onde está o êrro ou a falta de compreensão do processo.

Padrões Estruturais em Adição de Frações

Para cada uma das tres classificações maiores na adição de frações, são possíveis: seis exemplos, nos quais a soma das frações em cada exemplo é menor que 1; seis exemplos, nos quais a soma das frações é maior que 1. As frações do grupo A abaixo representam um exemplo de seis frações iguais, nas quais a soma é menor que 1; no grupo B, a soma das frações, em cada exemplo, é maior que 1.

A.	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{3}$	$6\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$3\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{3}$	$3\frac{1}{4}$
B.	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$3\frac{2}{3}$	$1\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$
	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$4\frac{2}{3}$	$2\frac{3}{4}$	$1\frac{2}{3}$	$4\frac{3}{4}$

O leitor deve ser capaz de descobrir a diferença na estrutura, em qualquer grupo, de quaisquer dois exemplos. O mesmo modêlo é seguido para formar 12 exemplos para frações com denominadores diferentes mas relacionados, e para frações com denominadores diferentes e não-relacionados.

Há outros exemplos possíveis para frações com o mesmo denominador, para os quais não há exemplos semelhantes nas frações com denominadores diferentes. Assim, é possível haver duas frações com o mesmo denominador com soma igual a um inteiro, como $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$.

e. SUBTRAÇÃO DE FRAÇÕES ORDINÁRIAS

Subtração e Adição de Frações Paralelas

O aluno que pode somar no exemplo A pode também subtrair no exemplo B. O ensino da subtração de frações deve seguir paralelamente ao ensino da adição. Depois que o aluno aprender a somar frações com denominadores iguais, com somas menores que 1, deve aprender a subtrair frações com denominadores iguais e números mistos, nos casos em que não há necessidade de reagrupamento.

A	B
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$+\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$

A seqüência de etapas no trabalho de subtração de frações é a seguinte:

1) Subtração de frações com denominadores iguais, sem decomposição.

2) O mesmo caso, mas com decomposição.

3) Subtração de frações com denominadores diferentes mas relacionados; todos os tipos.

4) Subtração de frações com denominadores diferentes e não-relacionados; todos os tipos.

Para o ensino da subtração de frações, o professor pode seguir as mesmas etapas sugeridas, para o ensino da adição, na pág. 303.

Há cinco tipos de exemplos que envolvem números mistos. São os seguintes:

1. $7\frac{1}{3}$ 4		**Subtração de um inteiro de um número misto.**
2. $6\frac{3}{4}$ $2\frac{1}{4}$		**Sem necessidade de reagrupamento para subtrair.**
3. $3\frac{1}{2}$ $1\frac{1}{2}$		**Resto zero, na subtração das frações.**
4. 4 $2\frac{1}{3}$		**Subtração de um número misto de um inteiro.**
5. $5\frac{1}{3}$ $2\frac{2}{3}$		**Decomposição necessária para subtrair.**

O aluno não experimenta dificuldade para resolver exemplos dos tipos 1, 2 e 3. Os tipos 4 e 5 apresentam uma dificuldade nova. O aluno deve aprender, nos exemplos desta classificação, a reagrupar um dos números para subtrair.

Subtração de Uma Fração de Um Número Inteiro

É convencional transformar 3 em $2\frac{4}{4}$ para subtrair $\frac{11}{4}$ de 3 pelo método da decomposição. Para conseguir prontidão para êste passo, o aluno deve aprender a subtrair uma fração de 1 inteiro, como $1 - \frac{1}{4}$. Pode-se utilizar uma situação problemática: o cálculo, por exemplo, da parte restante de um bôlo depois de ter sido retirada uma-quarta parte. A classe descobre maneiras para encontrar a resposta, ou para provar a resposta. Algumas das atividades sugeridas incluem as seguintes:

1) Usar partes recortadas

2) Demonstrar no flanelógrafo

3) Usar uma régua

4) Fazer um diagrama

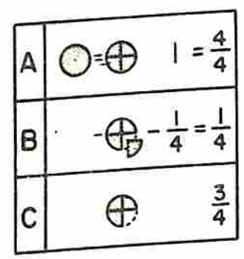
5) Deduzir com base no conhecimento do significado de um inteiro

(desde que $1 = \frac{4}{4}$, $\frac{1}{4}$ retirado de $\frac{4}{4}$ restam $\frac{3}{4}$)

6) Fazer a representação simbólica do exemplo.

Visualização da Decomposição na Subtração de Frações

A pág. 203 mostra que a subtração abrange dois conceitos básicos, a saber: o subtrativo e o de comparação. O aluno aprende êstes conceitos no estudo inicial do processo de subtração. No momento em que está pronto para operar com subtração de frações envolvendo decomposição, a diferença entre os dois conceitos não será um fator vital na representação visual do processo. Por conseguinte, a mesma representação visual pode ser usada para abranger ambos os conceitos de subtração.



O diagrama mostra uma representação visual do exemplo $1 - \frac{1}{4}$. A mostra 1 decomposto como $\frac{4}{4}$. B mostra $\frac{1}{4}$ retirado de $\frac{4}{4}$. C mostra a resposta, ou $\frac{3}{4}$.

Subtração de Um Número Misto de Um Número Inteiro

Um professor apresentou a subtração de um número misto de um inteiro, pedindo à classe para procurar a resposta para o seguinte problema: "Um cozinheiro tinha 3 quilos de açúcar. Depois de usar $1\frac{3}{4}$ do açúcar, quantos quilos sobraram?" A classe sugeriu as seguintes soluções:

"Se êle usasse 2 quilos, sobraria 1 quilo. Desde que êle usou $\frac{1}{4}$ menos que 2 quilos, deve haver $\frac{1}{4}$ mais que 1 quilo sobrando, ou $1\frac{1}{4}$ quilo."

"Somar 1 quilo a $1\frac{3}{4}$. A soma é $2\frac{3}{4}$. Somar $\frac{1}{4}$ de quilo a mais, fazendo 3 quilos. 1 quilo $+ \frac{1}{4} =$ $= 1\frac{1}{4}$ quilo."

"Subtrair 1 quilo de 3 quilos, ou 2 quilos. Agora, subtrair $\frac{3}{4}$ de quilo de 2 quilos. A resposta é $1\frac{1}{4}$ quilo."

"Se êle usasse $1\frac{1}{2}$ quilo, sobraria $1\frac{1}{2}$ quilo. Agora, subtrair $\frac{1}{4}$ de $1\frac{1}{2}$. A resposta é $1\frac{1}{4}$ quilo."

Êstes alunos encontraram a resposta usando diversos métodos diferentes. Deve-se notar que nenhuma das soluções segue o processo convencional. Então, o professor levou a classe a descobrir como subtrair êstes números pelo método da decomposição.

Êste professor não usou nem material exploratório nem representação visual porque os alunos puderam raciocinar, inteligentemente, com números. O professor sugeriu que os alunos lessem o desenvolvimento dado no livro-texto. Depois, cada aluno leu a explicação dada em seu texto, e o professor mandou os alunos dizer o significado de cada passo, como é mostrado ao lado.

$$\begin{array}{rcl} 3 & = & 2\frac{4}{4} \\ -\ 1\frac{3}{4} & = & 1\frac{3}{4} \\ \hline \end{array}$$

A maioria dos professôres achará o método descrito acima pouco eficiente para suas classes. O seguinte método é recomendado para a maioria das classes:

1) Usar partes recortadas para calcular a resposta.

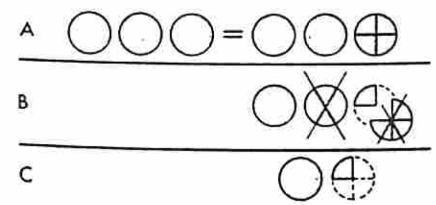
2) Fazer desenho para mostrar a resposta.

3) Mostrar os passos seguidos no processo pela demonstração no flanelógrafo.

4) Fazer uma visualização do processo.

5) Levar a classe a explicar a representação simbólica.

6) Levar a classe a explicar os passos dados na apresentação do livro-texto.



O diagrama mostra os passos dados na visualização do processo. A mostra 3 decomposto como $2\frac{4}{4}$. B mostra $1\frac{3}{4}$ subtraído de $2\frac{4}{4}$. C mostra que a resposta é $1\frac{1}{4}$. O aluno deve explicar cada representação no diagrama.

O processo acima usa o método de decomposição na subtração. Algumas escolas ensinam a subtração pelo método das adições iguais. A operação abaixo mostra como transformar os números, para subtrair $1\frac{3}{4}$ de 4 pelo método das adições iguais. O Capítulo 7 mostra a dificuldade da compreensão dos alunos para os passos no processo de subtração pelo método das adições iguais. Depois que a classe compreende o processo da subtração de número misto de um inteiro, o professor poderá levar os alunos mais bem dotados a formular uma regra concisa que governe êste tipo de subtração. Por exemplo:

$$\begin{array}{rcl} 3 & \longrightarrow & 3\frac{4}{4} \\ -\ 1\frac{3}{4} & \longrightarrow & 1\frac{3}{4} \\ \hline \end{array}$$

Para subtrair um número misto de um número inteiro, toma-se 1 do número inteiro, expressando-o sob forma fracionária, em que o denominador seja igual ao denominador da fração do número misto. Efetua-se, então, a subtração.

Subtração de Dois Números Mistos — Necessidade de Decomposição

Um professor de alunos adiantados pediu à classe que desse sugestões para a solução do seguinte problema: "Um pedaço de barbante com $2\frac{3}{4}$m foi cortado de um barbante com $5\frac{1}{4}$m de comprimento. Qual é o comprimento do pedaço restante?" É um problema difícil para resolver sem o uso de papel e lápis. A classe deu as seguintes soluções:

"Somar $\frac{2}{4}$ a $5\frac{1}{4}$. Depois, subtrair $2\frac{3}{4}$ de $5\frac{3}{4}$. A resposta é 3. Agora, subtrair os $\frac{2}{4}$ somados. A resposta é $2\frac{1}{2}$m."

"Mudar $2\frac{3}{4}$ para 3. Subtraindo 3 de $5\frac{1}{4}$ são $2\frac{1}{4}$. Depois, somar mais $\frac{1}{4}$. A soma é $2\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$, ou $2\frac{1}{2}$ m."

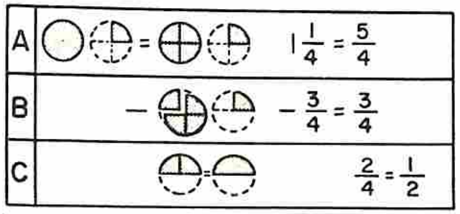
"Se o pedaço tivesse 5m de comprimento, a parte restante teria $2\frac{1}{4}$. Agora somar $\frac{1}{4}$ mais. A resposta é $2\frac{1}{2}$ m."

Novamente os alunos não descobriram o método usado no processo convencional. O grupo demonstrou que podia operar com símbolos; daí, não terem sido usados auxílios suplementares. Depois do período de descobertas, o professor deixou que os alunos lessem o desenvolvimento dado no livro-texto. A classe explicou os passos dados na seqüência, à medida que o professor escrevia no quadro-negro a solução.

$$\begin{array}{r} 5\frac{1}{4} = 4\frac{5}{4} \\ -\,2\frac{3}{4} = 2\frac{3}{4} \\ \hline 2\frac{2}{4} = 2\frac{1}{2} \end{array}$$

Quando o trabalho ficou completo, um aluno exclamou: "Arre! É mais fácil do que o método que usamos para tentar encontrar a resposta".

Em muitas classes, êste plano não dá resultado. O professor deve usar materiais concretos no desenvolvimento do processo. O professor, primeiro, deixa a classe calcular a resposta de um problema que envolva a subtração de $\frac{3}{4}$ de $1\frac{1}{4}$. As mesmas atividades dadas na pág. 334 aplicam-se a esta situação. O aluno pode usar uma régua para verificar a resposta.



O diagrama mostrado acima apresenta a visualização do processo. A mostra $1\frac{1}{4}$ reagrupado como $\frac{5}{4}$. B mostra $\frac{3}{4}$ subtraído de $\frac{5}{4}$. C mostra que a resposta é $\frac{2}{4}$ ou $\frac{1}{2}$.

Para subtrair, em um exemplo do tipo $4\frac{1}{3} - 1\frac{2}{3}$, é imprescindível expressar $4\frac{1}{3}$ como 3 e $1\frac{1}{3}$, ou $3\frac{4}{3}$. O número misto $1\frac{2}{3}$ deve ser transformado em fração imprópria. Os alunos, com freqüência, têm dúvidas sôbre esta transformação na decomposição do minuendo. O professor deve dar exercícios dê⸱ ⸱ tipo antes de ensinar exemplos, em subtração, nos quais é necessária esta habilidade. Para frações com denominadores 2, 3, 4, 6 e 8, o aluno pode necessitar transformar os números mistos em frações impróprias, para subtrair dois números mistos, quando a fração-minuendo é menor do que a fração-subtraendo.

Meios: nenhum
Terços: $1\frac{1}{3}$
Quartos: $1\frac{1}{4}$, $1\frac{1}{2}$
Sextos: $1\frac{1}{6}$, $1\frac{1}{2}$, $1\frac{3}{6}$, $1\frac{4}{6}$
Oitavos: $1\frac{1}{8}$, $1\frac{2}{8}$, $1\frac{3}{8}$, $1\frac{4}{8}$, $1\frac{5}{8}$, $1\frac{6}{8}$.

Desde que $\frac{1}{2}$ tem o maior valor possível em uma fração com o denominador 2, nunca será necessário decompor um número misto com a fração $\frac{1}{2}$. No exemplo $5\frac{1}{2} - 2\frac{3}{4}$, $5\frac{1}{2}$ deve ser expresso como $5\frac{2}{4}$. Então, $5\frac{2}{4}$ é decomposto em 4 e $1\frac{2}{4}$, ou $4\frac{6}{4}$. $\frac{1}{2}$ foi transformado em $\frac{2}{4}$.

Há três tipos diferentes de exemplos em subtração de números mistos nos quais a fração do minuendo é menor do que a fração do subtraendo. As frações podem ter denominadores iguais, diferentes mas relacionados, ou diferentes e não-relacionados. Se as frações têm denominadores diferentes, os exemplos devem ser reduzidos, primeiro, a frações com denominadores iguais. Os passos devem ser escritos como mostra o exemplo acima.

$$\begin{array}{r} 7\frac{1}{2} = 7\frac{3}{6} = 6\frac{9}{6} \\ -\,1\frac{2}{3} = 1\frac{4}{6} = 1\frac{4}{6} \end{array}$$

O professor usa um teste-diagnóstico na subtração de frações da mesma maneira que foi dada na pág. 330 para a adição de frações. A pág. 489 dá um teste, para diagnóstico, na subtração de frações.

QUESTÕES, PROBLEMAS E TÓPICOS PARA DISCUSSÃO

1. Fração representa uma divisão indicada. Diga se cada um dêstes exemplos representa o conceito partitivo ou de comparação:
   a) João gastou três-quartos de sua mesada.
   b) Maria tem a metade da idade de sua irmã.
   c) Jane usou $\frac{3}{4}$ de metro de fita.
   d) Três-quartos do auditório estavam cheios.
   e) O cachorrinho está meio crescido.
   f) Dois-terços dos meninos estão presentes.
2. Demonstre como diferenciar o currículo para atender às diferenças individuais.
3. Faça uma lista do material exploratório recomendado para o ensino de frações ordinárias na terceira série.
4. Escreva um plano de aula para a apresentação da adição de duas frações com denominadores diferentes mas relacionados, como $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$.
5. A razão de dois números pode ser uma fração imprópria, uma fração própria ou um inteiro. Dê a razão por que o mesmo número não pode ser somado ou subtraído dos têrmos de uma fração sem alterar o seu valor.
6. Que significa a redução da fração aos têrmos mais simples, ou aos têrmos mais elevados? Quais os princípios matemáticos envolvidos?
7. Por que a soma de duas frações com denominadores diferentes expressas nos têrmos mais simples não pode ser igual a um inteiro?
8. Um exemplo deve conter, apenas, frações unitárias e uma das frações deve ser $\frac{1}{2}$. Faça todos os exemplos possíveis, com uma soma igual a um inteiro, se as outras frações incluem $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$. Resposta: 6 exs.

9. Dê dois exemplos de adição de frações semelhantes para cada um dos modelos seguintes:

a. $\frac{3}{4} + \frac{1}{2}$ b. $1\frac{2}{3} + \frac{5}{6}$ c. $\frac{7}{12} - \frac{3}{8}$ d. $4\frac{1}{4} - 2\frac{3}{4}$

10. Prove que a soma ou diferença de duas frações com denominadores diferentes expressas nos têrmos mais simples nunca envolve redução, se os denominadores são frações expressas na escala binária, como 2, 4, 8 etc.

11. Faça um teste para diagnóstico na subtração de frações com denominadores iguais.

12. Use o padrão apresentado nos grupos A e B da pág. 332 para selecionar exemplos. Faça uma série de exemplos correspondentes para frações com denominadores diferentes e não-relacionados.

13. Escreva uma regra concisa para a subtração de dois números mistos, nos quais é necessário decompor um dos números para subtrair.

14. Demonstre como subtrair, no exemplo $6\frac{1}{2} - 4\frac{2}{3}$, pelo método de adições iguais.

SUGESTÕES PARA LEITURA

Brueckner, L. J., Grossnickle, F. E., and Reckzeh, J. *Developing Mathematical Understandings in the Upper Grades.* Philadelphia: The John C. Winston Co., 1957. pp. 174-187.

Clark, John and Eads, Laura. *Guiding Arithmetic Learning.* New York: World Book Co., 1954. pp. 135-162.

Glenn, William H. "Help Children Discover Fraction Facts," *The Arithmetic Teacher*, 4: 250-255.

Reiss, Anita P. "A New Rationale for the Teaching of Fractions," *Harvard Educational Review*, 25: 105-125.

Sauble, Irene. "Enrichment of the Arithmetic Course," *The Sixteenth Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematic.* New York: Bureau of Publications, Teachers College, Columbia University, 1941. pp. 168-172.

Spencer, P. L. and Brydegaard, M. *Building Mathematical Concepts in the Elementary School.* New York: Henry Holt and Co., Inc., 1952. Chapter 7.

Thiele, C. L. "Arithmetic in the Middle Grades," *Fiftieth Yearbook of the National Society for the Study of Education.* Chicago: University of Chicago Press, 1951. pp. 86-92.

11

Multiplicação e Divisão de Frações Ordinárias

Os ALUNOS, com freqüência, acham mais difícil compreender a resposta encontrada na multiplicação e divisão de frações ordinárias que a resposta encontrada na multiplicação e divisão de inteiros. Se dois inteiros, maiores do que 1, são multiplicados, o produto é maior do que cada um dos inteiros. Se duas frações próprias são multiplicadas, o produto é menor do que cada uma das frações. O quociente de um inteiro (exceto 0) dividido por outro inteiro, exceto 1, é menor do que o número dividido. O quociente de qualquer número (exceto 0) dividido por uma fração própria é maior do que o número dividido. Assim, as leis que governam a multiplicação e divisão de inteiros parece não se aplicarem à divisão de frações. Um dos problemas essenciais que o aluno enfrenta, na multiplicação e divisão de frações, é compreender como essas operações podem ser enquadradas no sistema de numeração. Quando os alunos entendem de multiplicação e divisão de frações, fica eliminada a aparente inconsistência.

Neste Capítulo discutiremos os seguintes tópicos:

a. Multiplicação de fração e número inteiro
b. Multiplicação de fração por fração
c. Divisão de número inteiro por fração
d. Divisão de fração por fração
e. Três tipos de problemas em frações.

A palavra *fração* é usada acima para indicar número misto, do mesmo modo que fração própria.

a. MULTIPLICAÇÃO DE FRAÇÃO E NÚMERO INTEIRO

Três Tipos de Exemplos na Multiplicação de Frações

Há três tipos de exemplos na multiplicação de frações. São:

1) Multiplicação de fração por número inteiro, como $3 \times \frac{3}{4}$.

2) Cálculo da parte fracionária de um número, como $\frac{2}{3} \times 6$, ou $\frac{2}{3}$ de 6.

3) Multiplicação de fração por fração, como $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$.

O primeiro e o segundo tipos estão estreitamente relacionados do ponto de vista matemático. Assim, como o produto de 3×4 é o mesmo produto de 4×3, o produto de $4 \times \frac{2}{3}$ é o mesmo produto de $\frac{2}{3} \times 4$.

Multiplicação de Fração por Número Inteiro

O aluno encontra pouca dificuldade em conciliar a multiplicação de fração por número inteiro com a multiplicação de dois inteiros maiores que 1. Em cada caso, o produto é maior que o multiplicando. Assim, como o produto de 2×6 pode ser encontrado somando 6 duas vêzes, o produto de $2 \times \frac{3}{4}$ pode ser encontrado somando $\frac{3}{4}$ duas vêzes.

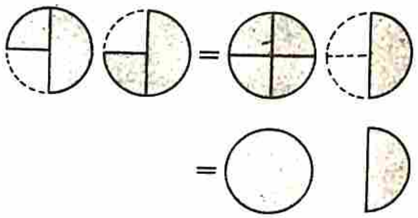
Pode-se usar um problema como êste para apresentar a multiplicação de fração por número inteiro:

"Uma fita mede $\frac{3}{4}$ de metro de comprimento. Quanto de fita é necessário para perfazer dois pedaços do mesmo tamanho?"

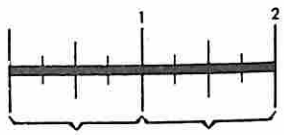
O professor pode deixar que a classe tente descobrir meios de achar a resposta. A classe deve sugerir alguns dos métodos seguintes:

1) Medir um pedaço de fita com $\frac{3}{4}$ de metro de comprimento e calcular o comprimento de dois pedaços.

2) Usar recortes de partes fracionárias para encontrar a resposta.



3) Calcular a resposta com um desenho semelhante ao que é mostrado abaixo.



4) Encontrar a resposta pela adição.

5) Pensar: "$\frac{3}{4}$ de metro são $\frac{1}{4}$ menor do que 1 metro. Os dois pedaços de $\frac{3}{4}$ cada um devem ser $\frac{1}{2}$ menos do que 2 metros, ou $1\frac{1}{2}$ m."

6) Pensar: "$\frac{3}{4}$ são iguais a $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$; $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$; $1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$. A soma de $\frac{3}{4}$ de metro mais $\frac{3}{4}$ de metro é $1\frac{1}{2}$."

O professor deve incentivar os alunos mais adiantados a sugerir várias maneiras de resolver o problema. Tôda a classe, entretanto, deve tentar os processos sugeridos nos itens 2, 3 e 4. A classe deve ler também e explicar cada etapa apresentada no livro-texto. Os alunos mais lentos devem igualmente calcular a resposta para o problema por meio de medidas, como sugere o item 1.

Depois, o professor mostrará como a mesma resposta pode ser encontrada pela multiplicação. A operação é a seguinte:

$$2 \times \frac{3}{4} = \frac{6}{4} = 1\frac{2}{4} \text{ or } 1\frac{1}{2}$$

$$\text{ou } 2 \times \frac{3}{4} = \frac{2 \times 3}{4} = \frac{6}{4} = 1\frac{2}{4} \text{ ou } 1\frac{1}{2}$$

O segundo modo é recomendado para a multiplicação de frações. Baseando-se em alguns exemplos escritos nesta forma, o aluno deve descobrir como multiplicar fração por número inteiro. O método é o seguinte:

1) Multiplicar o numerador da fração pelo inteiro e dividir êste produto pelo denominador.

2) Expressar a fração, no produto, na forma mais simples.

Estabelecidas as regras, a classe será levada a descobrir o princípio básico pertencente à multiplicação de fração por número inteiro:

Multiplicando-se o numerador de uma fração por número inteiro, a fração fica multiplicada por êsse número.

Há Lógica na Resposta?

O professor deve evitar, cuidadosamente, que o trabalho, na multiplicação de frações, se torne mecânico. É bem possível que o aluno desenvolva a habilidade de multiplicar frações por um inteiro e não saiba se a resposta é lógica ou não. Vamos considerar o exemplo $3 \times \frac{3}{4}$. O aluno deve dar a solução mostrada abaixo. O cálculo está correto. O aluno que não pode dizer se a resposta é razoável é incapaz de raciocinar, inteligentemente, com as quantidades envolvidas. Para

$$3 \times \frac{3}{4} = \frac{3 \times 3}{4} = \frac{9}{4} \text{ ou } 2\frac{1}{4}$$

provar que a resposta $2\frac{1}{4}$ é razoável, o aluno deve raciocinar do seguinte modo: "A fração $\frac{3}{4}$ é maior que $\frac{1}{2}$, mas é menor que 1. $3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ou $1\frac{1}{2}$, e $3 \times 1 = 3$. Assim, o produto de 3 e $\frac{3}{4}$ deve ser maior do que $1\frac{1}{2}$, e menor do que 3. Desde que $2\frac{1}{4}$ está entre êstes dois resultados, a resposta é razoável."

A maioria dos alunos que tem a necessária experiência para operar com a multiplicação de frações é capaz de multiplicar por $\frac{1}{2}$ ou por 1. Em quase todos os casos, o aluno pode multiplicar mentalmente por êstes números. A maioria dos alunos, na série em que o tópico é ensinado, pode calcular o produto de 8 e $\frac{1}{2}$ sem escrever a operação. Naturalmente não é necessário também escrever a operação para calcular o produto de um número multiplicado por 1. Por conseguinte, para obter um meio de verificar se a resposta é razoável, arredonda-se a fração própria para $\frac{1}{2}$ ou 1. Atribui-se um dêsses valôres à fração mais próxima, e depois multiplica-se, usando a fração com o seu nôvo valor. O aluno pode determinar se uma fração é maior ou menor que $\frac{1}{2}$ dividindo o denominador por 2 e comparando êsse quociente com o numerador da fração. Assim, $\frac{4}{9}$ é menor que $\frac{1}{2}$ porque 4 é menor que a metade de 9.

O padrão de raciocínio usado para determinar se a resposta de um exemplo, relacionado com a multiplicação de fração e inteiro, é lógica é ilustrado nos seguintes exemplos:

1. $3 \times \frac{7}{8} = 2\frac{5}{8}$

Raciocine: "$\frac{7}{8}$ como 1; o produto deve ser um pouco menor que 3. (3×1)."

2. $4 \times \frac{2}{5} = 1\frac{3}{5}$

Raciocine: "$\frac{2}{5}$ como $\frac{1}{2}$; o produto deve ser um pouco menor que 2. $(4 \times \frac{1}{2})$."

3. $\frac{3}{5} \times 6 = 3\frac{3}{5}$

Raciocine: "$\frac{3}{5}$ como $\frac{1}{2}$; o produto deve ser um pouco maior que 3. $(\frac{1}{2} \times 6)$."

4. $\frac{5}{6} \times 8 = 6\frac{2}{3}$

Raciocine: "$\frac{5}{6}$ como 1; o produto deve ser menor que 8, porém maior que 4. (1×8) ou $(\frac{1}{2} \times 8)$."

Tirar a prova, para determinar se uma resposta é razoável ou não, é recomendado, especialmente, para os alunos mais adiantados. Não é aconselhável mandar o aluno provar as respostas de todos os exemplos em um exercício prático. O professor deve mandar o aluno tirar a prova de alguns exemplos. De acôrdo com êste plano, o professor deve escolher, ao acaso, certos exemplos em um exercício prático, e mandar o aluno dar seu raciocínio para demonstrar que a resposta é razoável.

Outro tipo eficiente de prova, para o aluno mais capaz, é mandá-lo calcular a resposta por um método diferente do que foi usado na solução. Assim, para resolver o exemplo $3 \times \frac{5}{8}$, a solução deve ser a seguinte: $\frac{3 \times 5}{8} = \frac{15}{8}$, ou $1\frac{7}{8}$. Desde que $\frac{5}{8}$ são iguais à soma de $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{8}$, uma prova eficiente é a seguinte: $3 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{8}$, que é igual a $1\frac{1}{2} + \frac{3}{8}$, ou $1\frac{7}{8}$. Igualmente o aluno superior pode descobrir outras maneiras para provar o exercício. Logo que saiba como dividir frações, deve usar o processo da divisão em um exemplo de multiplicação de frações.

Multiplicação de Número Inteiro Por Fração

O aluno aprendeu na multiplicação de inteiros que alterando a ordem dos números, em exemplos como 3×4 e 4×3, não afeta o produto. Por conseguinte, os produtos dos dois exemplos $6 \times \frac{3}{4}$ e $\frac{3}{4} \times 6$ são iguais. Mesmo que as respostas dos dois exemplos sejam as mesmas, cada exemplo representa uma multiplicação diferente da fração $\frac{3}{4}$, como demonstram os seguintes problemas:

"1) Uma caixa de doce contém $\frac{3}{4}$ de quilo. Qual é o pêso dos doces em 6 destas caixas?" $6 \times \frac{3}{4}$.

"2) Uma caixa contém 6 quilos de doce. Qual é o pêso de $\frac{3}{4}$ dêsse doce?" $\frac{3}{4} \times 6$.

Uma das aplicações de frações mais usadas consiste no cálculo da parte fracionária de um número, como $\frac{1}{4}$ de 12. Uma caixa contém 12 garrafas de refrigerante. Se $\frac{1}{4}$ das garrafas está vazio, quantas garrafas estão vazias? A ilustração mostra que 3 garrafas estão vazias. A mesma resposta pode ser encontrada dividindo 12 por 4.

Ao estudar a multiplicação e divisão, o aluno aprendeu que calcular um-quarto de um número é o mesmo que dividir o número por 4. Assim, calcular a parte fracionária de um número representa uma *divisão partitiva*. A notação convencional, empregada para representar o cálculo da parte fracionária de um número, é a forma similar usada para representar a multiplicação de uma fração, como $\frac{1}{3} \times 8$ ou $\frac{3}{4} \times 10$. O símbolo da multiplicação, num exemplo do tipo $\frac{2}{3} \times 12$, significa que 12 deve ser dividido em três partes iguais e duas dessas partes são consideradas. Assim, $\frac{2}{3} \times 12$ é igual a 8, porque uma das três partes iguais de 12 é 4, daí duas dessas partes são iguais a 8.

A maneira de ler o sinal de multiplicação depende da sua aplicação no exemplo, como demonstram as seguintes ilustrações:

1) 3×4 "Três grupos de 4, ou três 4."

2) $3 \times \frac{5}{6}$ "Três vêzes $\frac{5}{6}$."

3) $\frac{3}{4} \times 5$ "Três-quartos de 5."

4) $1\frac{1}{2} \times 6$ "Uma vez e meia 6."

5) 2 cm × 4 cm "Dois centímetros por 4 centímetros."

O exemplo 2 indica uma fração multiplicada por inteiro. O exemplo 3 indica parte fracionária de um inteiro. O modo de resolver os exemplos é o mesmo. Assim, as soluções dos exemplos 2 e 3 são:

(2) $3 \times \frac{5}{6} = \frac{3 \times 5}{6} = \frac{15}{6}$, ou $2\frac{1}{2}$

(3) $\frac{3}{4} \times 5 = \frac{3 \times 5}{4} = \frac{15}{4}$, ou $3\frac{3}{4}$

O aluno deve compreender a relação entre a multiplicação por fração e por inteiro. Um desenvolvimento intuitivo dos dois tipos de multiplicadores pode ser derivado de uma tabela do tipo dado ao lado. O primeiro fator, em cada exemplo, é metade do anterior, mas o segundo é constante. Por conseguinte, cada produto sucessivo é metade do anterior. O aluno sabe que $1 \times 4 = 4$, como demonstra o passo 4 na tabela. Então, deve compreender que $\frac{1}{2} \times 4$ deve ser 2 e não 8. Thiele[1] assinalou que alunos que aprenderam freqüentemente, de maneira mecânica, dão 8 como produto de $\frac{1}{2} \times 4$.

(1) $8 \times 4 = 32$
(2) $4 \times 4 = 16$
(3) $2 \times 4 = 8$
(4) $1 \times 4 = 4$
(5) $\frac{1}{2} \times 4 = 2$
(6) $\frac{1}{4} \times 4 = 1$
(7) $\frac{1}{8} \times 4 = \frac{1}{2}$

[1] Thiele (C. L.), "Arithmetic in the Middle Grades", *Fiftieth Yearbook of the National Society for the Study of Education*, II:90. Chicago: University of Chicago Press, 1951.

Multiplicação de Número Misto e Número Inteiro

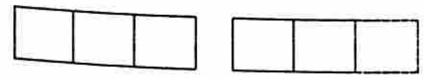
O aluno que pode multiplicar em exemplos como $3 \times \frac{3}{4}$ e $\frac{2}{3} \times 8$, pode, também, multiplicar em exemplos como $3 \times 4\frac{1}{2}$ e $2\frac{1}{3} \times 6$, provando que é capaz de expressar um número misto como fração imprópria. Na adição de frações, o aluno sempre achou necessário transformar a fração imprópria, na soma, em número misto sem, entretanto, achar necessário transformar número misto em fração imprópria. Na subtração, em um exemplo do tipo mostrado, o aluno aprendeu a decompor $7\frac{1}{3}$ em $6\frac{4}{3}$. Tinha que transformar o número misto $1\frac{1}{3}$ na fração equivalente $\frac{4}{3}$. Excetuando-se êstes casos, o aluno não encontrava situações em que fôsse necessário decompor um número misto em fração imprópria, para então efetuar operações. Em muitos casos de multiplicação de número misto por inteiro, o número misto é transformado em fração imprópria.

$$\begin{array}{r} 7\frac{1}{3} \\ -\ 4\frac{2}{3} \\ \hline \end{array}$$

Os passos que devem ser dados para ensinar ao aluno a transformação de fração imprópria em número misto são os seguintes:

1) Levar o aluno a usar seus recortes fracionários para calcular os equivalentes fracionários de números como $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{4}$ e $1\frac{2}{3}$.

2) Levar o aluno a fazer um desenho para mostrar o valor fracionário de um número como $1\frac{2}{3}$. O desenho mostra que $1\frac{2}{3}$ é igual a $\frac{5}{3}$.



3) Levar o aluno a demonstrar como transformar fração imprópria em número misto.

4) Levar o aluno a descobrir o método para realizar a operação inversa, dada no item 3.

5) Levar o aluno a escrever um exemplo de transformação, em todos os seus passos, de número misto em fração imprópria. Assim, $3\frac{1}{4}$ é igual a $3 \times \frac{4}{4} = \frac{12}{4}$; $\frac{12}{4} + \frac{1}{4} = \frac{13}{4}$. Depois que o aluno compreendeu o processo, pode usar o método abreviado. Assim, para transformar $6\frac{3}{4}$ em fração imprópria, o aluno deve pensar: $\frac{(4 \times 6)}{4} + \frac{3}{4}$, ou $\frac{27}{4}$. Êste processo pode ser expresso em uma regra, do seguinte modo:

Para transformar um número misto em fração imprópria, multiplica-se o número inteiro pelo denominador da fração; soma-se a êste produto o numerador da fração e conserva-se o mesmo denominador.

Êste processo representa uma maneira adulta para transformar um número misto em fração imprópria. É lógico que o professor não deve começar a ensinar o processo dando a regra à classe. Em vez disso, a classe deve descobrir os passos dados na operação, e depois formular a regra.

É possível multiplicar número misto por inteiro de duas maneiras diferentes. Primeira, expressar o número misto como fração imprópria, e depois multiplicar, como é mostrado em A. Segunda, multiplicar a fração do número misto pelo inteiro, como $2 \times \frac{2}{3}$; depois, multiplicar os inteiros e calcular a soma dos produtos, como é mostrado em B.

A. $2 \times 4\frac{2}{3} = 2 \times \frac{14}{3}$

ou $\frac{2 \times 14}{3} = \frac{28}{3} = 9\frac{1}{3}$

B.
$$\begin{array}{rl} 4\frac{2}{3} & \\ \times\ 2 & \\ \hline 1\frac{1}{3} & (2 \times \frac{2}{3}) \\ +\ 8 & (2 \times 4) \\ \hline 9\frac{1}{3} & \end{array}$$

Todos os exemplos que envolvem a multiplicação de inteiro e número misto podem ser resolvidos por ambos os métodos. Se o número misto tem um valor maior que 10, como $18\frac{3}{4}$, o método mostrado em B é muito mais fácil e mais rápido do que o método mostrado em A.

$$\begin{array}{r} 14\frac{1}{2} \\ \times 5 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 46 \\ \times\ 3\frac{3}{4} \\ \hline \end{array}$$

Os autores sugerem que o método B deva ser usado, para multiplicar, se um dos números é representado por dois algarismos, como foi mostrado atrás.

O professor deve levar os alunos mais capazes a tentar compreender os princípios matemáticos envolvidos no método B. No exemplo abaixo, $25\frac{3}{4}$ pode ser expresso como $25 + \frac{3}{4}$. Cada um dêsses números deve ser multiplicado por 6. Aqui se aplica o mesmo princípio envolvido na multiplicação de 36 por 4. O número 36 é igual a $30 + 6$. O produto de 36 e 4, como é mostrado abaixo, é igual à soma dos pro-

$$\begin{array}{rl} 25\frac{3}{4} & \\ \times 6 & \\ \hline 4\frac{1}{2} & (6 \times \frac{3}{4}) \\ +\ 150 & (6 \times 25) \\ \hline 154\frac{1}{2} & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 30 + 6 \\ \times 4 \\ \hline \end{array}$$

dutos de 4×30 e 4×6. Assim, 4×36 representa a multiplicação de uma soma indicada por um número. A pág. 254 expõe a regra que governa esta operação. Essa regra, também, aplica-se à multiplicação de número misto por inteiro. Um número misto, como $25\frac{3}{4}$, pode representar uma soma indicada, como $25 + \frac{3}{4}$.

O professor deve levar a classe a explicar por que os algarismos dos produtos ocupam a posição mostrada na solução de $6 \times 25\frac{3}{4}$. O aluno deve compreender que uma fração própria é parte da unidade e, então, uma fração ordinária não tem um lugar assinalado no sistema de numeração.

b. MULTIPLICAÇÃO DE FRAÇÃO POR FRAÇÃO

Representação Simbólica do Processo

"Uma receita pede $\frac{1}{2}$ xícara de açúcar. Se é usada metade da receita, que parte da xícara de açúcar é necessária?"

A pág. 313 sugere que um programa de prontidão para o ensino de operações com frações deve capacitar o aluno a dar a resposta do problema acima. O aluno pode usar seus recortes para provar a resposta, ou pode fazer um desenho para mostrar que a

$$\frac{1}{2} \text{ de } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$\text{ou } \frac{1 \times 1}{2 \times 2} = \frac{1}{4}$$

resposta é $\frac{1}{4}$ de xícara. A maneira simbólica para calcular a metade de $\frac{1}{2}$ é mostrada acima. A forma para escrever um exemplo na multiplicação de duas frações deve ser a seguinte:

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{2 \times 4}{3 \times 5} = \frac{8}{15}$$

Os alunos usam recortes fracionários para descobrir produtos ou quocientes em operações com frações.

A regra para a multiplicação de duas frações pode ser exposta assim:

Escreva o produto dos numeradores como numerador da resposta, e o produto dos denominadores como denominador da resposta. Expresse a resposta na forma mais simples.

O aluno experimenta pouca dificuldade na multiplicação de duas frações. O professor deve certificar-se de que o trabalho não é feito mecânicamente. O aluno deve ser capaz de explicar por que o produto de duas frações, como $\frac{1}{2}$ e $\frac{5}{8}$, é menor do que ambas as frações. Deve poder dar respostas a questões do seguinte tipo:

1) Mudando a ordem das frações, no exemplo $\frac{1}{2} \times \frac{5}{8}$, a resposta é alterada?

2) No exemplo dado, o valor da fração no produto é maior ou menor que o valor de cada fração?

3) Se uma das frações fôr multiplicada por 1, qual será o produto?

4) Sendo cada fração menor que 1, multiplicando-se $\frac{5}{8}$ por um número menor que 1, o produto será maior ou menor que $\frac{5}{8}$?

5) Multiplicar uma fração por $\frac{1}{2}$ é o mesmo que dividir a fração em quantas partes iguais?

Redução — Não-Cancelamento

Há duas maneiras para resolver um exemplo do tipo $\frac{2}{3} \times \frac{5}{6}$ como é mostrado em A e em B:

A. $\frac{2}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{2 \times 5}{3 \times 6} = \frac{10}{18}$, ou $\frac{5}{9}$

B. $\frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{3} \times \frac{5}{\underset{3}{\cancel{6}}} = \frac{1 \times 5}{3 \times 3} = \frac{5}{9}$

Em A, a fração, na resposta $\frac{10}{18}$, é reduzida a $\frac{5}{9}$, dividindo-se ambos os têrmos da fração por 2. Em B, a fração, no produto, é reduzida antes da multiplicação. Êste resultado é obtido dividindo o numerador da fração $\frac{2}{3}$ por 2, e o denominador da fração $\frac{5}{6}$ por 2.

Cancelamento é o têrmo convencional, usado, na multiplicação de frações, para representar o princípio da redução. O exemplo B mostra que o cancelamento é uma outra palavra para redução. Em vez de ensinar um conceito nôvo, o professor deve mandar o aluno designar a operação usando a expressão "redução" ou "dividir antes de multiplicar".

O cancelamento é baseado no princípio matemático de que a ordem, na qual os processos de multiplicação e divisão são realizados, não afeta a resposta se o produto dos dois números é dividido por um terceiro número. Os números podem ser multiplicados e o produto dividido pelo terceiro número, ou um dos dois fatôres pode ser dividido pelo terceiro número e o dido pelo terceiro número e o quociente multiplicado pelo outro fator. A resposta é a mesma

quando a ordem das operações é mudada, como demonstram os seguintes exemplos:

$$\frac{3 \times 8}{4} = \frac{24}{4}, \text{ ou } 6$$

$$\frac{3 \times \overset{2}{\cancel{8}}}{\cancel{4}} = 3 \times 2, \text{ ou } 6$$

C. DIVISÃO DE NÚMERO INTEIRO POR FRAÇÃO

Tipos de Exemplos na Divisão de Frações

Assim como há três casos de multiplicação de frações, há também três casos na divisão de frações.

São os seguintes:

1) Dividir inteiro por fração, como $6 \div \frac{3}{4}$.

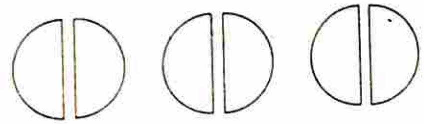
2) Dividir fração por inteiro, como $\frac{3}{4} \div 2$.

3) Dividir fração por fração, como $\frac{2}{3} \div \frac{1}{2}$.

A divisão de frações é um processo difícil, por duas razões: primeira, é difícil para o aluno compreender os passos dados na operação; segunda, o aluno encontra poucas situações em que o processo é usado. O número de aplicações sociais envolvendo a divisão por uma fração é limitado.

Divisão de Número Por Fração Unitária

O aluno experimenta pouca dificuldade na divisão de inteiro por fração unitária.

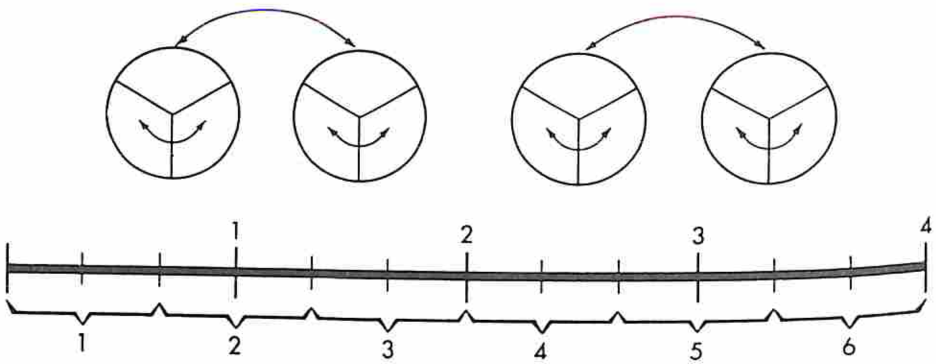


O diagrama mostra três discos divididos em meios. O aluno sabe que em um inteiro há dois meios; então, em três inteiros há seis meios. Igualmente, dois inteiros podem ser divididos em terços e quartos. O aluno pode verificar a resposta usando seus recortes ou com um diagrama. Depois, o professor deve mostrar a representação simbólica do processo. Assim, a maneira para calcular a resposta para o exemplo abaixo, usando a forma simbólica, é a seguinte:

$$3 \div \frac{1}{2} = 3 \times 2, \text{ ou } 6$$

A ilustração demonstra que *dividir por $\frac{1}{2}$ é o mesmo que multiplicar por 2. Para dividir número inteiro por fração, inverter a fração e multiplicar.* A forma inversa de $\frac{1}{2}$ é $\frac{2}{1}$, ou 2.

Os autores chegaram à conclusão que muitos alunos falham ao diferenciar entre multiplicação por uma fração e divisão por uma fração. Se é pedido ao estudante que dê um problema no qual seja necessário dividir



por $\frac{3}{4}$, êle pode enunciar um problema do seguinte tipo: "Em um recipiente cabem 4 xícaras de farinha. Se forem usados $\frac{3}{4}$ do recipiente, quantas xícaras foram usadas?" Êsse problema representa uma aplicação da multiplicação por uma fração e não da divisão por uma fração.

Divisão de Inteiro Por Fração

O aluno aprendeu a dividir por fração unitária. Agora, deve aprender a dividir por qualquer fração, como $\frac{2}{3}$. A classe deve descobrir maneiras diferentes para encontrar a resposta para problemas como o seguinte:

"Quantos pedaços de $\frac{2}{3}$ de metro podem ser cortados de um pedaço de fita com 4 metros de comprimento?"

Algumas das sugestões para a solução podem ser as seguintes:

1) Calcular a resposta, medindo.

2) Fazer um desenho para encontrar a resposta. (Mostrar uma linha e um círculo desenhados.)

3) Subtrair, repetidamente, $\frac{2}{3}$ de 4, ou somar $\frac{2}{3}$ tantas vêzes quantas forem necessárias para conseguir uma soma igual a 4.

4) Pensar: "$4 \div \frac{1}{3}$ são 12; daí, dividindo por $\frac{2}{3}$ será a metade de 12, ou 6."

5) Pensar: "$3 \times \frac{2}{3}$ são 2; logo, há três $\frac{2}{3}$ em 2. Em 4 haverá o dôbro de $\frac{2}{3}$ contidos em 2, ou seja 6."

6) Pensar: "Em 1 metro há 3 terços de metro, e em 4 metros haverá 12 terços de metro; em 12 terços há 6 vêzes 2 terços."

7) Transformar os metros em centímetros, e dividir.

A classe deve realizar as atividades sugeridas nos itens 1, 2 e 3. É muito importante para o aluno ter experiências significativas com material visual e objetivo ao procurar o quociente de inteiro dividido por fração. Depois, deve ler e explicar as etapas no desenvolvimento dado no livro-texto. Provàvelmente o texto mostra, em forma simbólica, como encontrar a resposta da divisão de 4 por $\frac{2}{3}$ da seguinte maneira:

$$4 \div \frac{2}{3} = 4 \times \frac{3}{2}, \text{ ou}$$

$$\frac{4 \times 3}{2} = \frac{12}{2}, \text{ ou } 6$$

Os alunos sabem que a resposta é 6. Esta resposta pode ser calculada invertendo o divisor, Com $\frac{2}{3}$ para $\frac{3}{2}$, e depois multiplicando. A regra para a operação pode ser exposta como se segue:

Para dividir um número inteiro por uma fração, inverter a fração e multiplicar.

Muitos alunos que não compreendem a regra descobrirão que obtiveram a resposta correta. Agora, o professor deve levar o aluno a verificar se a resposta é razoável. O aluno sabe como dividir por 1 e por $\frac{1}{2}$. A fração $\frac{2}{3}$ tem o valor entre êstes dois números. Assim, o quociente de $4 \div \frac{2}{3}$ deve ser maior que $4 \div 1$, e menor que o quociente de $4 \div \frac{1}{2}$, ou 8. Desde que 6 é maior que 4 e menor que 8, a resposta é razoável. O aluno que compreende por que a resposta é razoável, adquiriu maior compreensão da divisão de inteiro por fração que os alunos conseguem na escola elementar. Esta afirmativa é especialmente verdadeira para o aluno da sexta série, que é a série tradicional para a apresentação da divisão por frações.

Os alunos mais capazes devem descobrir a relação entre a multiplicação e a divisão de frações. Em A, o produto de dois números, 9 e $\frac{2}{3}$, é 6. Em B, o produto 6 e um dos números, $\frac{2}{3}$, são dados. O número que deve ser calculado é o segundo fator, ou 9. A resposta em A é razoável, porque um número menor que 1 é *somado* 9 vêzes; em B, um número menor que 1 é *subtraído* de 6 várias vêzes. A resposta deve ser maior que 6; então, 9 é uma resposta razoável.

A. $9 \times \frac{2}{3} = 6$

B. $6 \div \frac{2}{3} = 9$

Por que Invertemos o Divisor e Multiplicamos

Desde que o currículo em Aritmética coloca a divisão por fração própria na sexta série, é quase certo que a maioria da classe não compreenderá a base matemática da inversão do divisor e da multiplicação. Contudo, o professor deve compreender os princípios matemáticos que governam a operação.

O exemplo $4 \div \frac{2}{3}$ pode ser escrito na forma $4 \,\underline{|\, \frac{2}{3}}$. Sendo divisão por uma fração muito difícil, transforma-se o exemplo para tornar o divisor um inteiro. O número 1 é o número mais fácil para se usar como divisor. Assim, multiplicam-se tanto o divisor como o dividendo pelo mesmo número, para transformar o divisor em 1. Êste número é $\frac{3}{2}$. Dois números, como $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{2}$, que têm como produto a unidade, são *recíprocos*. Assim, o recíproco de 7 é $\frac{1}{7}$ e o recíproco de $\frac{3}{4}$ e $\frac{4}{3}$.

No exemplo $4 \,\underline{|\, \frac{2}{3}}$, se $\frac{2}{3}$ é multiplicado por $\frac{3}{2}$, então 4 deve ser multiplicado também por $\frac{3}{2}$, para que se não altere o quociente. Multiplica-se o divisor $\frac{2}{3}$ por $\frac{3}{2}$, e o dividendo 4 por $\frac{3}{2}$. O trabalho pode ser representado do seguinte modo:

$$4 \times \frac{3}{2} \;\underline{\Big|\; \frac{3}{2} \times \frac{2}{3}} \text{ ou } 6 \;\underline{|\;\; 1 \quad}$$

A multiplicação de uma fração por sua forma inversa (recíproca) sempre produz um produto igual a 1. Não é necessário escrever esta operação porque qualquer número dividido por 1 é igual ao próprio número. Assim, apenas é escrita a multiplicação do número pela fração invertida, como $4 \times \frac{3}{2}$. Esta representação é uma maneira abreviada da operação completa. O exemplo demonstra que, invertendo o divisor e multiplicando-o, torna-se 1 o divisor real.

Os princípios matemáticos que governam a operação da inversão do divisor e a posterior multiplicação são os seguintes:

1) *Tanto o divisor como o dividendo podem ser multiplicados pelo mesmo número sem alterar o valor do exemplo.*

2) *O produto de uma fração multiplicada pela fração invertida é 1.*

3) *Invertendo o divisor e o multiplicando, torna-se 1 o divisor real.*

Duker [2] sugeriu que os alunos devem aprender a seguinte regra: "... para dividir por uma fração, multiplicamos o dividendo pela recíproca do divisor". Esta regra é igual à regra dada acima, exceto que Duker substituiu a palavra *inverter* pela palavra *recíproca*. *Recíproca* é o têrmo matemàticamente mais preciso, mas o uso favorece o têrmo *inverter*. Até que a palavra *recíproca* seja usada mais amplamente que agora, o têrmo *inverter* é preferível.

O mesmo processo usado na divisão de inteiro por fração é aplicado na divisão de inteiro por número misto. O número misto é transformado em fração imprópria. Depois, a operação segue o mesmo processo usado para dividir por fração própria. Assim, para dividir no exemplo $6 \div 1\frac{1}{2}$, o trabalho deve ser feito como é mostrado abaixo.

$$6 \div 1\tfrac{1}{2} = 6 \div \tfrac{3}{2}$$

$$6 \div \tfrac{3}{2} = 6 \times \tfrac{2}{3} \text{ ou } 4$$

O quociente de um inteiro dividido por número misto pode ser inteiro, fração própria ou fração imprópria, que pode ser transformada em número misto. Os seguintes exemplos ilustram

[2] DUKER (S.), "Rationalizing Division of Fractions", *The Arithmetic Teacher*, 1:22.

os três tipos de quocientes, na ordem dada:

1. $5 \div 2\frac{1}{2} = 5 \div \frac{5}{2} = 5 \times \frac{2}{5}$, ou 2
2. $2 \div 2\frac{1}{2} = 2 \div \frac{5}{2} = 2 \times \frac{2}{5}$, ou $\frac{4}{5}$
3. $6 \div 2\frac{1}{2} = 6 \div \frac{5}{2} = 6 \times \frac{2}{5} = \frac{12}{5}$, ou $2\frac{2}{5}$

O professor deve levar os alunos a descobrir os seguintes princípios relacionados com o divisor, dividendo e quociente:

1) Se o divisor é maior que o dividendo, o quociente é menor que 1.

2) Se o divisor é menor que o dividendo, o quociente é maior que 1.

3) Se o divisor é igual ao dividendo, o quociente é 1.

Divisão de Fração Por Inteiro

A resposta de um exemplo do tipo $\frac{3}{4} \div 2 = \frac{3}{8}$ parece razoável para o aluno, porque o quociente é menor que o dividendo. Na divisão de números inteiros, chegou à conclusão de que o quociente é sempre menor que o dividendo, excluindo um divisor por 1.

Se o divisor é inteiro e o dividendo é fração, o exemplo pode representar ou o conceito partitivo ou o de razão, como foi concluído em operações com a divisão de inteiros. Provàvelmente, a maioria das aplicações sociais da divisão de fração por inteiro representa a divisão partitiva, como na divisão de $\frac{1}{2}$ quilo de manteiga em duas partes iguais. Calcular a razão entre duas quantidades, como $\frac{1}{2}$ quilo, que é parte fracionária de 2 quilos, representa comparação em divisão.

Se necessário, o aluno deve usar seus recortes para encontrar as respostas para exemplos como os seguintes:

$$\tfrac{1}{2} \div 2 = \tfrac{1}{4}$$

$$\tfrac{2}{3} \div 2 = \tfrac{1}{3}$$

$$\tfrac{3}{4} \div 2 = \tfrac{3}{8}$$

As mesmas respostas podem ser encontradas multiplicando as frações por $\frac{1}{2}$, como é mostrado:

$$\tfrac{1}{2} \div 2 = \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2}, \text{ ou } \tfrac{1}{4}$$

$$\tfrac{2}{3} \div 2 = \tfrac{2}{3} \times \tfrac{1}{2} = \tfrac{2}{6}, \text{ ou } \tfrac{1}{3}$$

$$\tfrac{3}{4} \div 2 = \tfrac{3}{4} \times \tfrac{1}{2}, \text{ ou } \tfrac{3}{8}$$

A parte importante no desenvolvimento dêste processo consiste em levar o aluno a descobrir a relação entre multiplicação e divisão. À pág. 349 demonstrou-se que dividir por $\frac{1}{2}$ é o mesmo que multiplicar por 2. Em têrmos gerais, dois princípios básicos relacionados com a multiplicação e a divisão podem ser expostos do seguinte modo:

Dividir por uma fração unitária é o mesmo que multiplicar *pela fração invertida (recíproca) ou pelo denominador da fração.*

Dividir por um número inteiro é o mesmo que multiplicar pela forma invertida do inteiro (recíproca) ou por 1 dividido pelo inteiro.

O professor deve proporcionar à classe muitas oportunidades para descobrir a relação entre a multiplicação e divisão de números, como $\frac{1}{2}$ e 2, $\frac{1}{3}$ e 3, $\frac{1}{4}$ e 4, e assim por diante. O aluno que necessita pode usar recortes ou diagramas para chegar à descoberta das relações entre multiplicação por um inteiro e divisão pela recíproca, ou ainda para verificação das respostas. As duas regras básicas, já expostas com êstes dois processos, constituem os elementos essenciais pertinentes ao significado e compreensão matemáticos em operações com um divisor fracionário. O aluno que não conclui que dividir por um número, como n, é o mesmo que multiplicar pela forma invertida, ou $\frac{1}{n}$, agirá de maneira puramente mecânica nas operações com divisão de frações.

Atividades de Enriquecimento Para os Alunos Mais Capacitados

Todos os alunos que aprenderam a dividir uma fração por inteiro devem ser capazes de multiplicar a fração pela recíproca do divisor. Os estudantes mais habilitados poderão descobrir outras maneiras para dividir uma fração por inteiro. Êsses alunos devem descobrir, nos exemplos dados, um modêlo para dividir.

$\frac{1}{2} \div 3 = \frac{1}{6}$ $\qquad$ $\frac{5}{8} \div 2 = \frac{5}{16}$

$\frac{3}{4} \div 2 = \frac{3}{8}$ $\qquad$ $\frac{2}{3} \div 4 = \frac{2}{12}$ ou $\frac{1}{6}$

Os exemplos demonstram que, para dividir uma fração por inteiro, multiplica-se o denominador da fração pelo inteiro ou divisor e escreve-se o produto, na resposta, como denominador da fração, com o numerador permanecendo inalterado. À pág. 341 demonstra-se que, multiplicando-se o numerador de uma fração por número inteiro, multiplica-se a fração por aquêle número. Segue-se, então, que, *multiplicando-se o denominador de uma fração por número inteiro, divide-se a fração por aquêle número.*

Os alunos mais capacitados devem compreender os dois princípios básicos operando com fração e número inteiro. As regras são:

1) Multiplicando-se o numerador de uma fração por número inteiro, multiplica-se a fração por aquêle número.

2) Multiplicando-se o denominador de uma fração por número inteiro, divide-se a fração por aquêle número.

Com outras experiências, os alunos mais adiantados podem descobrir como a divisão do numerador ou denominador de uma fração por número inteiro afeta a fração. O professor deve restringir o trabalho dêste tipo aos alunos que tenham uma compreensão muito desenvolvida de frações.

d. DIVISÃO DE FRAÇÃO POR FRAÇÃO

Currículos Diferentes

À pág. 302 demonstrou-se como diferenciar o currículo na adição e subtração de frações. Os alunos mais lentos devem somar ou subtrair frações com significação social. O mesmo critério da utilidade social aplica-se à divisão de frações. É uma questão discutível a de incluir no currículo, para os alunos mais lentos, a divisão de fração por fração. Há muito poucas aplicações sociais da divisão de fração por fração. Esta afirmativa é verdadeira, especialmente se uma fração própria é dividida por outra fração própria maior. Se a divisão de frações é ensinada aos alunos lentos, deve ser ensinada primàriamente como informação. A realização e o grau de compreensão dos alunos mais lentos, nesta fase da Aritmética, são muito limitados.

A divisão de duas frações próprias tem valor do ponto de vista matemático. O aluno que compreende o trabalho operando com frações, descobrirá que o processo de divisão pode ser realizado tanto com frações como com inteiros.

O Quociente É Razoável na Divisão de Frações?

O aluno que aprendeu como dividir número inteiro por fração experimentará pouca dificuldade para dividir fração por fração. Êle aprendeu a inverter o divisor e, depois, multiplicar. Êste mesmo princípio aplica-se à divisão de fração por fração, como no exemplo $\frac{1}{2} \div \frac{3}{4}$. Invertendo o divisor e, depois, multiplicando, o exemplo torna-se $\frac{1}{2} \times \frac{4}{3}$. O quociente é $\frac{2}{3}$.

É evidente que a maioria dos alunos, em uma classe típica de sexta série, não compreenderá os passos dados na operação da divisão em um exemplo do tipo $\frac{1}{2} \div \frac{3}{4}$. Não apenas o exemplo quase não tem significação social, como os passos dados, na solução, são difíceis para o aluno compreender. Assim, o trabalho, na divisão de fração por fração, freqüentemente, torna-se uma operação mecânica. O aluno não pode compreender os passos dados na solução, mas é capaz de descobrir se a resposta é razoável. A habilidade para determinar se o quociente de duas frações é razoável depende da compreensão que o aluno tem das três generalizações seguintes:

1) *O quociente de um número dividido por êle mesmo é 1, como* $7 \underline{|\ 7\ }$.

2) *O quociente de um número dividido por número menor é maior que 1, como* $24 \,\underline{|\, 6\,}$.

3) *O quociente de um número dividido por número maior é menor que 1, como* $5 \,\underline{|\, 12\,}$.

Êstes três princípios aplicam-se ao divisor fracionário tanto como ao divisor inteiro. O aluno que compreende êstes princípios e o valor relativo de duas frações divididas deve ser capaz de generalizar sôbre o quociente, como é mostrado nos seguintes exemplos:

1) $\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ O quociente é maior que 1 (Princípio 2)

2) $\frac{2}{3} \div \frac{5}{6}$ O quociente é menor que 1 (Princípio 3)

3) $2\frac{1}{2} \div 3\frac{1}{4}$ O quociente é menor que 1 (Princípio 3)

4) $\frac{7}{8} \div \frac{7}{8}$ O quociente é 1 (Princípio 1)

A habilidade para determinar se a resposta é razoável capacita o aluno a corrigir erros que, de outro modo, não seriam percebidos. No exemplo $\frac{2}{3} \div \frac{3}{4}$, o aluno pode inverter a fração errada. Êste êrro é comum. Se a fração $\frac{2}{3}$ é invertida, em vez de $\frac{3}{4}$, a solução torna-se $\frac{3}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{8}$, ou $1\frac{1}{8}$. O aluno que sabe que a fração $\frac{2}{3}$ é menor que a fração $\frac{3}{4}$, e compreende o princípio 3, conclui que a resposta não é razoável. Então, deve procurar o êrro na solução.

Uma maneira eficiente para incentivar os alunos mais capazes na divisão de frações é levá-los a decidir se o quociente será igual, maior ou menor que 1, antes de dividir. Êle deve ser capaz de comparar os valôres das duas frações e de aplicar a generalização relacionada com o quociente dêsses números. Êste tipo de trabalho destina-se ao aluno de habilidade superior para operar com divisão de frações. O aluno, na sexta série, que é capaz de determinar se um quociente é razoável, mas é incapaz de explicar os passos dados para a solução, atingiu uma compreensão adequada do trabalho na divisão de frações.

O Método do Denominador-Comum

A maneira convencional para dividir por uma fração é inverter o divisor e multiplicar. Como foi assinalado, êste método é difícil para a compreensão da maioria dos alunos. Uma investigação[3] demonstrou que os alunos mais atrasados, que reduzem as frações ao mesmo denominador e, depois, dividem, preferem êste método ao método da inversão.

De acôrdo com o método do denominador-comum, as frações devem ser reduzidas a frações com denominadores iguais. Na

[3] BROWNELL (W. A.), "Two Kinds of Learning in Arithmetic", *Journal of Educational Research,* 31:656-664.

multiplicação de frações, tanto o numerador como o denominador são multiplicados.

$$\frac{1}{2} \div \frac{3}{8} = \frac{4}{8} \div \frac{3}{8} = \frac{4 \div 3}{8 \div 8} = \frac{4}{3}, \text{ ou } 1\frac{1}{3}$$

Depois, na divisão, tanto o numerador como o denominador são divididos. Desde que os denominadores são iguais, o quociente dos denominadores é 1. Assim, para dividir frações iguais, divide-se os numeradores.

O método do denominador-comum pode ser usado para dividir, em qualquer exemplo, na divisão de frações, como é mostrado abaixo:

$$1.\ 6 \div \frac{3}{4} = \frac{24}{4} \div \frac{3}{4} = \frac{24 \div 3}{4 \div 4} = \frac{24}{3}, \text{ ou } 8$$

$$2.\ 4 \div 1\frac{1}{2} = \frac{8}{2} \div \frac{3}{2} = \frac{8 \div 3}{2 \div 2} = \frac{8}{3}, \text{ ou } 2\frac{2}{3}$$

$$3.\ \frac{3}{4} \div \frac{5}{6} = \frac{9}{12} \div \frac{10}{12} = \frac{9 \div 10}{12 \div 12} = \frac{9}{10}$$

$$4.\ 4\frac{1}{2} \div 3\frac{1}{3} = \frac{9}{2} \div \frac{10}{3} = \frac{27}{6} \div \frac{20}{6} = \frac{27 \div 20}{6 \div 6} = \frac{27}{20}, \text{ ou } 1\frac{7}{20}$$

$$5.\ 3\frac{1}{2} \div 4 = \frac{7}{2} \div \frac{8}{2} = \frac{7 \div 8}{2 \div 2} = \frac{7}{8}$$

O método demonstrado na pág. 356 não causa nenhuma dificuldade na divisão com dividendos maiores que o divisor. Quando ocorre a situação inversa, o aluno, freqüentemente, troca dividendo e divisor. No exemplo $\frac{3}{4} \div \frac{5}{6}$,

$$\frac{3}{4} \div \frac{5}{6} = \frac{9}{12} \div \frac{10}{12} = \frac{9 \div 10}{12 \div 12} = \frac{10}{9}, \text{ ou } 1\frac{1}{9}$$

o aluno pode dar a solução incorreta, como é mostrado. Êle não tem meios para decidir se a resposta está certa, a não ser que possa usar o método, dado na pág. 355, para verificar se a resposta é razoável. Se compreende o princípio que um número dividido por número maior produz quociente menor do que 1, sabe que a resposta está errada. O aluno que compreende êste princípio deve usar o método da inversão, que é mais fácil e mais curto, na divisão de frações, que o método do denominador-comum. Até que a experiência evidencie a superioridade do método do denominador-comum sôbre o método da inversão, o método convencional da inversão deve ser usado para dividir por uma fração.

Divisão de Números Mistos

Os números mistos são divididos do mesmo modo que as frações. Os números mistos devem ser transformados em frações impróprias, depois, divididos. Os exemplos abaixo mostram a forma que deve ser usada em operações com números mistos:

1. $6 \div 2\frac{1}{2} = 6 \div \frac{5}{2} = 6 \times \frac{2}{5} = \frac{12}{5}$, ou $2\frac{2}{5}$

2. $4\frac{1}{2} \div 3 = \frac{9}{2} \div 3 = \frac{9}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{9}{6}$, ou $1\frac{1}{2}$

3. $1\frac{1}{2} \div 3\frac{2}{3} = \frac{3}{2} \div \frac{11}{3} = \frac{3}{2} \times \frac{3}{11} = \frac{9}{22}$

4. $3\frac{1}{2} \div 1\frac{1}{4} = \frac{7}{2} \div \frac{5}{4} = \frac{7}{\cancel{2}_{1}} \times \frac{\cancel{4}^{2}}{5} = \frac{14}{5}$, ou $2\frac{4}{5}$

e. TRÊS TIPOS DE PROBLEMAS EM FRAÇÕES

Relações Entre Frações Ordinárias, Decimais e Porcentagem

Há três tipos de problemas na multiplicação e divisão de frações ordinárias. Os problemas que representam êstes modelos podem envolver frações decimais ou porcentagem. Os familiares *três casos de porcentagem* exemplificam os três tipos de problemas na multiplicação e divisão de frações ordinárias.

As três aplicações das frações na multiplicação e divisão são as seguintes:

1) Calcular uma parte fracionária de um número

2) Calcular a razão entre dois números

3) Calcular um número, sendo dada uma parte fracionária.

As três aplicações das frações podem ser ilustradas pelos seguintes problemas:

"1) Uma equipe ganhou $\frac{4}{5}$ dos jogos disputados. Se a equipe jogou 20 partidas, quantos jogos ganhou?"

$$\frac{4}{5} \text{ de } 20 = \frac{4}{5} \times 20 = 16$$

"2) Uma equipe jogou 20 partidas e ganhou 16. Qual a fração de jogos ganhos?"

$16 \div 20 = \frac{4}{5}$, a razão de dois números

"3) Uma equipe ganhou $\frac{4}{5}$ dos jogos disputados. Se a equipe ganhou 16 jogos, quantos jogou?"

Se $\frac{4}{5}$ do número de jogos $= 16$,

$\frac{1}{5}$ do número de jogos $= 4$ $(16 \div 4)$,

$\frac{5}{5}$ do número de jogos $= 20$ (5×4).

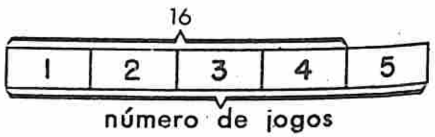
Se 0,8 substituir a fração $\frac{4}{5}$ nos problemas acima, então os problemas representarão os tipos de frações encontrados na multiplicação e divisão de decimais. Se 80% substituir a fração $\frac{4}{5}$, os problemas representarão exemplos de problemas de porcentagem.

	Parte Fracionária	Um Número	Outro Número
1.	$\frac{4}{5}$	?	20
2.	?	16	20
3.	$\frac{4}{5}$	16	?

Como objetivar o conceito de razão com recortes fracionários no flanelógrafo.

Os exemplos dos três problemas podem ser organizados como é mostrado na tabela. Em cada problema, dois dos três elementos envolvidos são conhecidos. Falta o terceiro número. Está claro que uma *fórmula*, como a fórmula de porcentagem $\frac{c \times i}{100}$, é um meio eficiente para ajudar o aluno a encontrar o número que falta.

Problemas do tipo 1 e 2 constituem a aplicação mais familiar e mais usada de frações, decimais e porcentagem. O terceiro tipo de problema tem aplicação social limitada. A maioria dos alunos, na escola elementar, acha êste tipo de problema difícil para resolver. Um diagrama, geralmente, auxilia na solução de um problema dêste tipo. Uma solução, em diagrama, para problema do tipo 3 é dada abaixo:



Desde que 4 partes do diagrama representam 16 jogos, 1 parte representa 4 jogos, 5 partes representam 20 jogos. O diagrama ajuda a objetivar os passos dados para a solução do problema acima. Cada parte, no diagrama, corresponde ao valor da fração $\frac{1}{5}$ na resposta.

QUESTÕES, PROBLEMAS E TÓPICOS PARA DISCUSSÃO

1. Indique como faria para que o aluno compreendesse por que o produto de duas frações próprias é menor que ambas as frações e por que o quociente de um inteiro dividido por fração própria é maior que o inteiro.
2. Dê um problema que ilustre a multiplicação de fração por inteiro e vice-versa.
3. Demonstre por que a multiplicação de inteiro por fração própria representa uma divisão partitiva.
4. Diga o significado das seguintes exposições: O uso do símbolo da multiplicação $\times$ freqüentemente cria uma linguagem problemática para o aluno. Exemplifique.
5. Um aluno resolveu o exemplo $\frac{4}{5} \times \frac{5}{4}$ como é mostrado. Qual foi a causa do êrro? Que deve ser feito para evitar que o aluno cometa um êrro desta espécie?

   $$\frac{\cancel{4}}{\cancel{5}} \times \frac{\cancel{5}}{\cancel{4}} = 0$$
6. A solução do exemplo abaixo representa um dos métodos mais antigos usado para dividir por uma fração. O método consiste em tornar o divisor um inteiro,

multiplicando o numerador pelo denominador da fração.

$12 \,|\, \frac{3}{4}$ $\qquad$ $4 \times 4 \times 12 \,|\, \frac{3}{4}$

$48 \,|\, 3$

O produto será o numerador. Multiplique o dividendo pelo denominador da fração e, depois, divida.

Quais os princípios matemáticos envolvidos neste método? Use êste método nas seguintes divisões:

(a) $15 \,|\, \frac{3}{8}$ $\qquad$ (b) $9 \,|\, \frac{2}{3}$

(c) $12 \,|\, 1\frac{1}{2}$ $\qquad$ (d) $10 \,|\, 2\frac{2}{3}$

7. Que princípios matemáticos tornam possível a inversão do divisor fracionário para depois multiplicar? Poderia racionalizar o processo para sua classe na escola elementar? Dê as razões.
8. Demonstre como diferenciaria o currículo, na divisão de frações, para os alunos mais lentos e para os mais capacitados.
9. Avalie o método do denominador-comum para dividir com um divisor fracionário. Use êste método nas seguintes divisões:

   (a) $\frac{1}{2} \div \frac{7}{8}$ $\qquad$ (b) $6 \div \frac{2}{5}$

   (c) $\frac{2}{3} \div \frac{4}{5}$ $\qquad$ (d) $1\frac{1}{2} \div 2\frac{1}{4}$
10. Olhe os exemplos e diga se o quociente em cada um dêles será maior ou menor que 1:

    (a) $\frac{7}{8} \div \frac{5}{6}$ $\quad$ (b) $\frac{3}{4} \div \frac{8}{9}$ $\quad$ (c) $\frac{5}{6} \div \frac{4}{5}$

    (d) $\frac{2}{3} \div \frac{3}{4}$ $\quad$ (e) $\frac{11}{12} \div \frac{9}{10}$ $\quad$ (f) $\frac{5}{8} \div \frac{7}{15}$
11. Faça um teste-diagnóstico para determinar se um aluno é capaz ou não de dividir, em todos os tipos de exemplos, com divisores fracionários.
12. Escreva os quatro exemplos possíveis usando os seguintes grupos de números:

    $\boxed{\frac{1}{2}}\boxed{\frac{1}{3}}\boxed{\frac{1}{6}}$ $\qquad$ $\boxed{\frac{2}{3}}\boxed{\frac{1}{4}}\boxed{\frac{1}{6}}$ $\qquad$ $\boxed{12}\boxed{\frac{3}{4}}\boxed{9}$

SUGESTÕES PARA LEITURA

Brueckner, L. J., Grossnickle, F. E., and Reckzeh, J. *Developing Mathematical Understandings in the Upper Grades.* Philadelphia: The John C. Winston Co., 1957. pp. 187-202.

Buckingham, B. R. *Elementary Arithmetic: Its Meaning and Practice.* Boston: Ginn and Company, 1947. pp. 264-305.

Christofferson, H. C. "Division by a Fraction Made Meaningful," *The Mathematics Teacher*, 41: 32-35.

Clark, John and Eads, Laura. *Guiding Arithmetic Learnings.* Yonkers: World Book Co., 1954. pp. 163-179.

Grossnickle, Foster E. "How to Use a Fractional Divisor," *Journal of Education*, 137:17-19.

Hannon, Herbert. "Why Invert the Divisor?" *The Arithmetic Teacher*, 4: 262-265.

Reiss, Anita P., "A New Rationale for the Teaching of Fractions," *Harvard Educational Review*, pp. 105-125.

Spitzer, Herbert. *The Teaching of Arithmetic*. Boston: Houghton Mifflin Co., 1954. pp. 217-240.

Thiele, C. L. "Arithmetic in the Middle Grades," *Fiftieth Yearbook of the National Society for the Study of Education*. II: 86-92. Chicago: University of Chicago Press, 1951.

12

Frações Decimais

As frações decimais tiveram sua origem no comêço do século XVII. Embora as frações decimais não fôssem usadas, amplamente, até dois séculos atrás, sua invenção tornou possível a realização de operações até então pràticamente impossíveis com frações ordinárias. O uso de frações decimais tornou possível a extensão do princípio do valor do lugar em nosso sistema de numeração, permitindo que um número com valor menor que um, porém maior que zero, pudesse ser expresso. A vírgula decimal (,) identifica a casa das unidades na escala numérica.

A vírgula decimal não é uma simples vírgula ou sinal. A vírgula decimal representa uma realização significativa na história do raciocínio do homem, que o capacitou a operar, eficientemente, com quantidades.

Êste Capítulo trata dos seguintes tópicos:

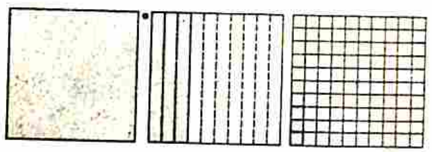
a. Introdução do conceito decimal
b. Adição e subtração de decimais
c. Multiplicação de decimais
d. Divisão de decimais
e. O significado de porcentagem.

O têrmo *decimais* é uma forma abreviada da expressão *frações decimais*. O professor deve fazer com que os alunos usem a expressão *frações decimais* na apresentação do tópico. Depois que o aluno compreender a diferença entre frações decimais e frações ordinárias, a forma abreviada (decimais) pode ser usada para a designação de frações decimais.

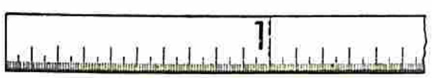
a. INTRODUÇÃO DO CONCEITO DECIMAL

Material Para Apresentação das Frações Decimais

Cada aluno deve ter sua coleção de materiais com quadrados e tiras retangulares, semelhante aos materiais usados nas operações com inteiros. Um dos lados de um quadrado grande é dividido em 100 quadrados pequenos, representando 100. O lado contrário é liso. Êsse quadrado grande pode representar um inteiro, ou 1. O mesmo tipo de quadrado é usado na apresentação de frações decimais. Uma faixa lisa, com área correspondente a um-décimo do quadrado grande, representa 0,1 e um pequeno quadrado representa 0,01. O número representado no diagrama usando êste material é 1,34.



Uma régua graduada em décimos e centésimos é outro auxiliar eficiente na apresentação das frações decimais. Se, entretanto, tivermos que usar apenas um tipo de material, os quadrados e tiras retangulares são básicos e essenciais.



Para fins de demonstração, a sala de aula deve ter um quadro Valor do Lugar para mostrar a casa das unidades, décimos e centésimos.

UNIDADES

DÉCIMOS	CENTÉSIMOS

Um velocímetro de automóvel com mostrador falso é também um material que pode ser usado na sala de aula. Uma haste móvel atarrachada no mostrador pode-se mover ao longo dos algarismos dispostos no dial, numa seqüência decimal partindo de zero.

Um quadro de frações pode ser usado para demonstrar a relação entre as frações ordinárias e decimais. O quadro pode ser feito de madeira ou de papelão, como é mostrado na pág. 304. As tiras nos painéis móveis devem ser divididas como indica a ilustração.

Ensino do Significado de Fração Decimal

Cada aluno seleciona um quadrado grande em seu material, e identifica o quadrado como representante de um inteiro, ou 1. Depois escolhe uma tira retangular e identifica o seu valor. Para certificar-se de que o aluno sabe o valor que a tira retangular apresenta, o professor manda-o colocar no quadrado o número de tiras que dê para completar um inteiro. Então, o aluno expressa, no quadro-negro, o valor de uma tira como fração ordinária. Agora, o professor mostra como êste número pode ser expresso de outra forma como fração decimal. Do mesmo modo, o aluno demonstra o valor de 2 tiras, 3 tiras e mais.

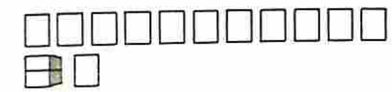
$\frac{1}{10}$ uma fração ordinária
0,1 uma fração decimal

Escreve êstes valôres no quadro-negro tanto ordinária como decimal. Continua o processo até demonstrar o valor de 10 décimos. A notação em A mostra 10 décimos expressos como fração ordinária. A notação em B mostra 10 décimos expressos como fração decimal. Em cada notação, a fração é também reagrupada como número inteiro.

A. $\frac{10}{10} = 1$
B. $1{,}0 = 1$

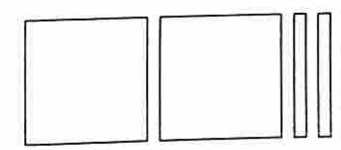
É muito importante para o aluno descobrir a relação entre as frações ordinárias e decimais. Êle não deve encarar as decimais como um tópico nôvo em Aritmética. A novidade é apenas o modo de escrever. Para estar seguro de que êle compreende que as frações ordinárias e as decimais podem ter o mesmo valor, deve demonstrar a equivalência das duas formas. Deve designar uma forma como fração ordinária, e a outra como fração decimal.

Em seguida, o professor leva a classe a descobrir como é possível representar 11 décimos. O aluno usa seu material para provar que êste número pode ser representado tanto na forma agrupada como na forma não-agrupada, usando tanto frações ordinárias como decimais. Usando frações ordinárias, a forma não-agrupada é $\frac{11}{10}$, e a forma agrupada é $1\,\frac{1}{10}$. O diagrama contendo 11 quadradinhos mostra o número não-agrupado. Não é possível escrever 11 décimos co-



mo um número não-agrupado, em forma simbólica. A pág. 43 demonstra que cada algarismo em um número escrito tem um valor de lugar.

Não é necessário usar uma tira para simbolizar a vírgula decimal, quando o aluno trabalha com seu material, para mostrar um *decimal misto*, como 2,3. Êle deve indicar um espaço de, aproximadamente, 5 cm entre os quadrados, que representam inteiros, e as tiras, que representam os décimos. O diagrama mostra como representar 2,3.



Se o material da classe contém um velocímetro ou um ciclômetro do tipo descrito, o professor pode deixar que um membro da classe demonstre como os números no mostrador mudam de natureza conforme o aluno gira a haste. O mostrador deve estar colocado em zero.

Depois que o aluno compreende o que sejam décimos, pode completar séries em exercícios do seguinte tipo:

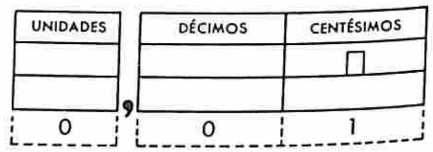
1) 0,3 — 0,5 — 0,7 — 0,9 —
2) 0,2 — — 0,5 — — 0,8 — — 1,1
3) 1,2 — 1,4 — — 1,7 — — 2,0
4) 0,1 — 0,9 — 1,7 — 2,5 — 3,3 —

Tanto é importante para o aluno descobrir como transformar um número agrupado, como 2,1, em não-agrupado, como 21 décimos, como o é fazer a mudança na ordem inversa. Alguns alunos podem necessitar muitos exercícios, usando seu material, para descobrir a equivalência entre os dois valôres relacionados. Assim, 2 é igual a 20 décimos. O número 2 também pode ser decomposto como 1 e 10 décimos. De acôrdo com esta exposição, vê-se que há maneiras diferentes para decompor um número. No início do estudo, o aluno deve aprender como decompor um número na unidade equivalente, maior ou menor. Assim, 2 unidades são iguais a 20 décimos, e vice-versa.

Quando um aluno demonstra que compreendeu o significado dos décimos, está pronto para explorar o significado dos centésimos. O professor pede ao aluno que separe um quadrado pequeno em seu material. O aluno faz uma estimativa de seu valor e verifica a estimativa, demonstrando que 10 dos quadrados menores são iguais a uma tira. Assim, o valor de 1 quadrado pequeno é $\frac{1}{1}$ do valor de uma tira, ou $\frac{1}{100}$ do valor do quadrado grande. Depois o professor representa um centésimo, usando o quadro Valor do Lugar. O lugar vazio na casa dos décimos mostra que não há décimos naquela casa. O zero, em 0,01, indica o número de décimos na casa dos décimos.

$$\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$$

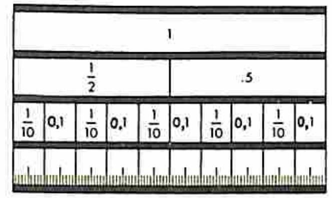
$$\frac{1}{100} = 0{,}01$$



Uma régua, graduada em centésimos, é também um bom material instrutivo.

O aluno usa seu material para demonstrar o valor de diferentes números expressos em centésimos. É importante, para êle, descobrir que 10 centésimos, ou 0,10, têm o mesmo valor que um décimo, ou 0,1, e vice-versa. Para lidar com centésimos, o professor deve usar o mesmo plano sugerido para os décimos.

Depois que o aluno teve uma grande variedade de experiências significativas com material exploratório e visual, deve ser ca-



paz de fazer as seguintes generalizações relacionadas às frações decimais:

1) Uma casa à direita da casa das unidades representa os décimos.

2) Duas casas à direita da casa das unidades representam os centésimos.

3) O denominador de uma fração decimal não é escrito. O denominador de uma fração ordinária equivalente é 10 ou uma potência de 10.

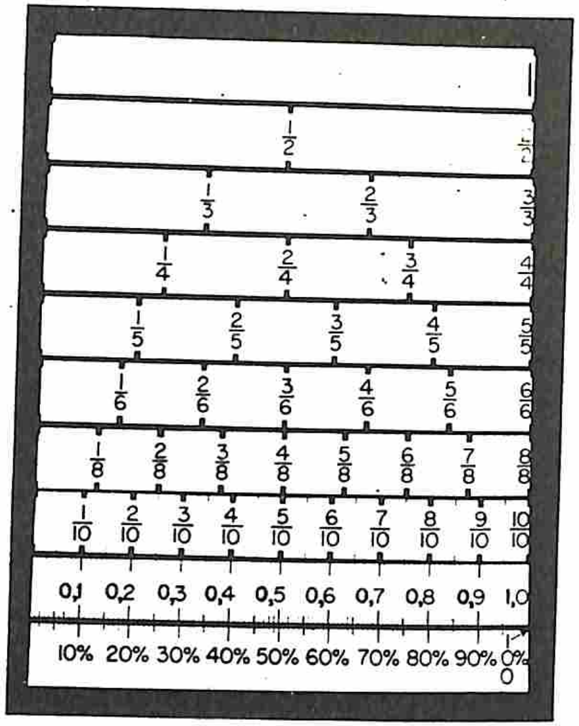
4) O número de casas decimais em uma fração decimal é igual ao número de zeros no deminador de uma fração ordinária equivalente.

Introdução do Significado de Milésimos

Não é necessário usar material exploratório para introduzir o significado dos milésimos. Há duas razões para esta declaração: Primeira, o valor de 1 inteiro é 1 000 vêzes o valor de 0,001. O material para demonstrar esta relação será de pouco valor para capacitar o aluno a descobrir o valor comparativo dêstes números. Segunda, o aluno deve ser capaz de descobrir o padrão de relação que existe entre duas casas consecutivas no sistema de numeração, baseando-se no seu conhecimento dêste sistema nas atividades com inteiros. O aluno que não descobre esta relação operando com as unidades, dezenas e centenas, provàvelmente não será ajudado, neste assunto, pelo uso de material exploratório. Se o aluno necessita materiais para operar com os milésimos, é porque considera os decimais como um sistema específico. Tal aluno demonstra que sua compreensão do sistema de numeração quase não cresceu. Seu trabalho, nesta fase, deve ser dirigido apenas para a aplicação das decimais que encontrará em sua vida diária. Provàvelmente um número expresso em centésimos, no sistema monetário, é suficiente para demonstrar as aplicações decimais para um aluno com êste nível de maturidade matemática. Não se espera um conhecimento completo de decimais com três ou mais casas da parte dos alunos lentos.

A Vírgula Decimal Identifica a Casa das Unidades

Os professôres, com freqüência, levam o aluno a identificar a casa que um algarismo ocupa em uma decimal, baseando-se na posição da vírgula decimal. Assim, o 2, na casa dos centésimos no número 21,02, está duas casas à direita da vírgula. O 2, na ca-



sa das dezenas, está duas casas à esquerda da vírgula. Cada algarísmo 2 dista igualmente duas casas da vírgula. Entretanto, o 2 à esquerda preenche a casa das *dezenas*, mas o 2 à direita preenche a casa dos *centésimos*. Desde que há uma relação entre as casas correspondentes em cada lado da vírgula, como dezenas e décimos, centenas e centésimos, estas casas correspondentes devem estar colocadas à mesma distância do ponto de referência. O diagrama mostra a organização simétrica das casas, no sistema de numeração, com as casas correspondentes estabelecidas em relação à casa das unidades. *A casa das unidades é o ponto de referência para a identificação de um lugar na escala numérica.* Assim, o lugar das centenas fica duas casas à esquerda da casa das unidades, e o lugar dos centésimos fica duas casas à direita da casa das unidades.

A função da vírgula decimal é identificar o lugar das unidades em um número. Em uma *decimal simples*, como 0,64, o algarismo das unidades é zero. Em uma *decimal mista*, como 3,75, sempre é dado o algarismo das unidades. A posição de 5 no número 3,75 deve ser expressa como duas casas à direita da casa das unidades e não como duas casas à direita da vírgula.

Escrita de Decimais Sob Ditado

Um mínimo do tempo da aula deve ser usado para o aluno adquirir a habilidade de escrever decimais sob ditado. As razões desta exigência são as seguintes: primeira, é muito difícil adquirir precisão na escrita de números mistos sob ditado, devido ao uso comum do têrmo *e* na leitura de um número inteiro, como quatrocentos e cinqüenta para o número 450. Segunda, é difícil distinguir entre as terminações das casas correspondentes em cada lado da casa das unidades, como centenas e centésimos. Terceira, o método comercial não segue êste plano. Na prática comercial, cada algarismo é lido sem seu valor posicional. O número 2,375 é lido como 2-vírgula-3-7-5. Uma aplicação familiar é a leitura convencional do valor numérico de π, como 3-vírgula-1-4-1-6. O aluno deve ser capaz de escrever um decimal ditado em décimos, centésimos e, talvez, milésimos.

b. ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE DECIMAIS

Seqüência Para o Ensino de Frações Ordinárias e Decimais

É evidente que a operação com frações decimais é muito mais fácil para o aluno que a operação com frações ordinárias. Durante muitos anos, Johnson[1] advogou o ensino das frações decimais antes das frações ordinárias. Do ponto de vista da facilidade na operação, especialmente na adição e subtração, a seqüência tradicional do ensino dessas frações é defeituosa.

Prontidão Para Adição e Subtração de Decimais

Para ter sucesso na adição e subtração de decimais, o aluno deve ter no mínimo dois conhecimentos essenciais: ser capaz de realizar essas operações com inteiros, e compreender um dos princípios básicos da Matemática que se aplica a êstes dois processos, isto é, sòmente quantidades iguais podem ser somadas ou subtraídas.

Quando o aluno usou seu material para aprender o significado de uma fração decimal, percebeu que $0,2 + 0,3$ são $0,5$. Do

[1] JOHNSON (J. T.), "Decimal versus Common Fractions", *The Arithmetic Teacher*, 3:201-203.

mesmo modo fêz outras combinações de décimos com décimos, e centésimos com centésimos. O professor pode deixar o aluno usar seu material para verificar as respostas nos exemplos mostrados ao lado. Em A, a soma é menor que um inteiro, mas em B, a soma deve ser reagrupada. O aluno deve tirar a prova da solução usando frações ordinárias.

A	B
0,4	0,6
+ 0,3	+ 0,8

Depois de somar algumas frações decimais expressas em décimos e centésimos, a classe deve fazer as seguintes generalizações:

1) Os decimais são somados do mesmo modo que os inteiros.

2) Se os números a serem somados são expressos em centésimos, a soma será em centésimos; se expressos em décimos, a soma será em décimos.

3) Só podem ser somados números em casas iguais.

É muito fácil para o aluno compreender a segunda generalização em um exemplo do tipo A, mostrado acima. Êle pode não compreender êste princípio em um exemplo do tipo B. No exemplo 0,6 + 0,8, a soma é 14 décimos. Quando êsse número é escrito como 1,4, a soma é reagrupada. Cada algarismo em um número escrito tem um valor posicional.

O professor não deve salientar a regra "conservar a vírgula decimal em uma coluna" na adição e subtração de decimais. Tal prática favorece o mecanismo e não a compreensão. É prudente, entretanto, salientar que décimos são somados com décimos e, igualmente, outros valôres iguais são combinados.

Decimais Expressos em Unidades Diferentes

O exemplo 0,3 + 0,86 + 0,125 representa a adição de decimais expressas em unidades diferentes. O currículo que pede exemplos dêste tipo contém material obsoleto. Tais exemplos não têm aplicação social. As frações que devem ser somadas ou subtraídas representam unidades de medir. Não é possível haver uma situação social na qual seja necessário expressar uma medida em décimos, outra em centésimos e outra em milésimos, combinadas como no exemplo acima.

Nenhuma medida é sempre exata. Se uma linha é registrada como tendo 0,6 m de comprimento, o maior êrro possível é 0,05 m. Aproximando em décimos, o comprimento de uma linha com 0,55 m é expressa como 0,6 m. Igualmente, na aproximação, o comprimento de uma linha entre 0,60 m e 0,65 m é expresso como sendo 0,6 m. Assim, quando o comprimento de uma linha é expresso como 0,6 m, o comprimento pode ser 55 cm a 65 cm. Êste fato pode ser registrado como 0,6 ± 0,05. Quando uma medida é expressa em centésimos, o maior êrro possível é 0,005. Assim, 0,62 m pode ser escrito como

0,62 ± 0,005 m. Do mesmo modo, 0,620 m pode ser escrito como 0,620 ± 0,0005 m. Êstes exemplós ilustrativos demonstram que a possibilidade de êrro é diferente em medidas expressas em vários graus de precisão.

A resposta do exemplo ao lado é 1,800, e não 1,8. Cada um dos números é expresso em milésimos, então, a soma deve ser expressa em milésimos. Se a soma fôsse dada como 1,8, o êrro máximo seria 100 vêzes o êrro máximo em 1,800.

0,725
0,454
0,621
1,800

O aluno não pode somar $\frac{1}{10} + \frac{3}{100} + \frac{9}{1\,000}$, a menos que reduza tôdas as frações ao mesmo denominador, como $\frac{100}{1\,000} + \frac{30}{1\,000} + \frac{9}{1\,000}$. Entretanto, o aluno, com freqüência, recebe licença e, até, estímulo para somar frações expressas em unidades diferentes. O professor que dá exemplos dêste tipo está desvirtuando uma das importantes funções das frações decimais.

Muitos professôres de Aritmética sentem que é necessário ensinar às suas classes a adição e subtração de decimais mistas, porque alguns testes padronizados na Aritmética incluem exemplos com decimais dêste tipo. Existem, também, concursos, por exemplo, para o serviço público, que, com freqüência, incluem questões que envolvem decimais expressas em unidades diferentes. Como esta prática persiste, o professor pode sentir-se justificado ao ensinar a adição e subtração de tais exemplos.

A	B
0,300	0,3
0,860	0,9
0,125	0,1
1,285	1,3

Para somar no exemplo 0,3 + 0,86 + 0,125, o aluno deve transformar todos os números em milésimos como é mostrado em A. Do ponto de vista estritamente matemático, os números devem ser arredondados para o número de menor precisão, ou décimos, como é mostrado em B. A maioria dos alunos, na escola elementar, não compreende a base dêste método. Assim, o professor deve seguir o plano dado em A.

c. MULTIPLICAÇÃO DE DECIMAIS

Multiplicação de Decimal Por Inteiro

Há três tipos de exemplos na multiplicação de decimais que correspondem aos três tipos na multiplicação de frações ordinárias:

1) Multiplicação de decimal por número inteiro

2) Multiplicação de número inteiro por decimal

3) Multiplicação de decimal por decimal.

O aluno deve usar sua coleção de quadrados e tiras retangulares, para calcular a resposta de alguns exemplos, na multiplicação de decimal por número inteiro. Deve usar êste material até descobrir como resolver êstes exemplos sem tal auxílio. O professor deve levar a classe a calcular a resposta para o seguinte problema:

"Ricardo anda de bicicleta 1,3 milha para ir à escola. Que distância percorre, na ida e na volta, todos os dias?"

O aluno deve encontrar a resposta para êsse problema usando diferentes maneiras. As principais incluem o seguinte:

$$\begin{array}{r} 1,3 \\ \times\ 2 \\ \hline 2,6 \end{array}$$

1) Usar seu material.

2) Calcular a resposta pela adição.

3) Resolver o problema usando frações ordinárias.

4) Estudar o desenvolvimento dado no livro-texto.

5) Multiplicar como números inteiros e, depois, calcular a posição da vírgula, no produto, pela aproximação.

6) Calcular a posição da vírgula, no produto, baseando-se em seu conhecimento do valor do lugar.

É lógico que nem todos os alunos serão capazes de realizar as seis atividades sugeridas. Por outro lado, todos os alunos devem poder executar as atividades dadas nos itens 1-4 e, provàvelmente, também a do item 5. A atividade do item 6 depende de boa compreensão do sistema de numeração para que o aluno a utilize.

O aluno aprendeu que a função da vírgula é identificar a casa das unidades. Assim, a vírgula não afeta o valor absoluto dos algarismos de um número. As decimais são somadas, subtraídas, multiplicadas e divididas como inteiros. A determinação da posição da vírgula, na resposta, é o elemento que difere da operação com inteiros.

Para calcular a posição da vírgula, no produto, pelo uso da aproximação, o aluno deve pensar do seguinte modo: "O produto de $2 \times 1,3$ deve ser maior que 2 (2×1) e menor que 4 (2×2). Assim, o produto deve ser 2,6."

Para calcular a posição da vírgula, no produto, usando o valor do lugar, o pensamento deve ser o seguinte: "O produto de unidades e décimos é décimos, ou uma casa decimal."

Baseando-se em alguns exemplos relacionados com a multiplicação de décimos e centésimos, o aluno descobrirá como encontrar a posição da vírgula de maneira rápida. Deve perceber que o produto, a contar da direita, contém tantas casas decimais quanto os números multiplicados. O cálculo da posição da vírgula, no produto, por êste método pode tornar-se uma operação mecânica. O professor não deve deixar a classe memorizar uma regra destituída de significação como meio para calcular a posição da vírgula, no produto. Cada aluno deve descobrir esta regra por si mesmo. Depois, quando aplicar êste

método, deve verificar se a resposta é razoável, pela aproximação ou pelo valor relativo. Os alunos mais capazes devem ser encorajados a usar ambos os métodos.

Multiplicação de Número Inteiro Por Decimal

Quando o aluno aprendeu os fatos fundamentais na multiplicação, descobriu que a mudança dos fatôres não altera o produto. Êste é um princípio básico da multiplicação. Assim, o produto de $3 \times 0,4$ é o mesmo produto de $0,4 \times 3$. É fácil para o aluno verificar o exemplo $3 \times 0,4$, pela adição de $0,4 + 0,4 + 0,4$. O exemplo $0,4 \times 3$ relaciona-se com a divisão partitiva. O 3 deve ser dividido em 10 partes iguais e quatro dessas partes devem ser consideradas.

O aluno aprendeu, na multiplicação de decimal por inteiro, que as decimais são multiplicadas do mesmo modo que os inteiros. O elemento nôvo, na multiplicação de decimais, é encontrar a posição da vírgula, no produto. Para encontrar a posição da vírgula, num exemplo do tipo mostrado, o professor pode levar a classe a realizar as seguintes atividades:

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times\ 0,4 \\ \hline 4,8 \end{array}$$

1) Resolver o exemplo usando frações ordinárias.

2) Usar a aproximação. Pensar: "0,4 é um pouco menor que um meio; então, o produto deve ser um pouco menor que 6."

3) Trocar os fatôres e calcular o produto de $12 \times 0,4$.

4) Usar o valor do lugar. *O produto de unidades e décimos é décimos.* Então, o produto de $0,4 \times 12$ é 48 décimos, ou 4,8.

A solução de vários exemplos diferentes de multiplicação de inteiro por decimal deve levar o aluno a descobrir que o produto contém tantas casas decimais quanto o multiplicador. A série acima dá uma prova indutiva para demonstrar como a mudança da posição da vírgula em um dos fatôres afeta o produto. Se um dos dois fatôres é número inteiro, o número de casas decimais no produto é igual ao número de casas decimais do outro fator.

$$\begin{array}{rcl} 20 \times 3 & = & 60 \\ 2 \times 3 & = & 6 \\ 0,2 \times 3 & = & 0,6 \\ 0,02 \times 3 & = & 0,06 \end{array}$$

Multiplicação de Decimal Por Decimal

O professor pode apresentar a multiplicação de decimal por decimal com o seguinte problema:

"Um tambor comporta 42,5 l de água. Quantos litros serão necessários para encher 1,5 tambor com a mesma capacidade?"

A classe pode encontrar a posição da vírgula, no produto, pela aproximação. A resposta deve ser maior que 42 litros e menor que 84 (2×42) litros. A úni-

$$\begin{array}{r} 42,5 \\ \times\ 1,5 \\ \hline 2125 \\ 425 \\ \hline 63,75 \end{array}$$

ca resposta razoável é 63,75 litros.

Desde que décimos são multiplicados por décimos, o produto deve ser em centésimos. *O produto de décimos e décimos é centésimos, ou duas casas decimais.* O exemplo demonstra, também, que há tantas casas decimais no produto quantas há na soma do número de casas decimais dos dois fatôres. Esta generalização é a base do seguinte método para multiplicar decimais:

1) Multiplicar como com números inteiros.

2) Calcular a soma dos números de casas decimais nos dois fatôres.

3) Separar, da direita para a esquerda, tantas casas decimais quantas são encontradas nos dois números.

As atividades acima podem-se tornar mecânicas. O aluno deve aproximar a resposta para verificar se é razoável. Os estudantes mais hábeis devem usar o princípio do valor relativo para verificar se a resposta é razoável.

Os alunos, freqüentemente, são incapazes de compreender o tamanho do produto na multiplicação de frações decimais, como é mostrado ao lado. Um aluno pode dizer que a resposta deve conter duas casas decimais. Se não pode oferecer uma explicação melhor, demonstra uma compreensão limitada do processo. O professor deve levar o aluno a resolver o exemplo com frações ordinárias. O produto de duas frações próprias é menor que ambos os fatôres, porque cada fator é menor que 1. O mesmo princípio aplica-se à multiplicação de frações decimais.

$$\begin{array}{r} 0{,}3 \\ \times\ 0{,}3 \\ \hline 0{,}09 \end{array}$$

Multiplicação Por 10 ou Potência de 10

É muito comum encontrar estudantes que multiplicam por uma potência de 10 da maneira mostrada ao lado.

$$\begin{array}{r} 4{,}25 \\ \times\ 100 \\ \hline 425{,}00 \end{array}$$

O aluno, no curso primário, deve aprender a multiplicar por 10, ou uma potência de 10, sem escrever a operação. Precisa saber como multiplicar por êstes números para aprender como dividir por decimal.

No início do estudo, o aluno deve escrever a operação como no exemplo estampado lateralmente. Bascando-se em exemplos semelhantes, descobre como multiplicar, por 10 ou 100, sem escrever e de maneira abreviada. Esta afirmativa é verdadeira, especialmente para os estudantes mais capazes. Se um aluno é incapaz de descobrir que, movendo a vírgula decimal uma casa para a direita, em um número, multiplica o número por 10, deve resolver o exemplo pela forma mais longa. Para multiplicar qualquer decimal por uma potência de 10 move-se para a direita tantas casas quantas a

$$\begin{array}{r} 0{,}76 \\ \times\ 10 \\ \hline 7{,}60 \end{array}$$

potência de 10 indica. Para multiplicar por 1 000, move-se a vírgula três casas para a direita. Assim, $1\,000 \times 3{,}14 = 3\,140$.

Um exercício contendo exemplos do tipo mostrado nos itens 1 e 2 abaixo proporciona a prática que o aluno necessita na multiplicação por uma potência de 10. Em 1, o aluno multiplica por uma potência de 10; em 2, descobre a potência de 10 pela qual é necessário multiplicar a decimal para ter um produto igual a um número inteiro.

1. Multiplicar por 10 e por 100:

(a) 7,5 (b) 0,35 (c) 1,4 (d) 0,03

2. Calcular os números que faltam:

(a) $\ldots \times 3{,}5 = 35$

(b) $\ldots \times 0{,}75 = 75$

(c) $\ldots \times 0{,}01 = 1$

O aluno que pode multiplicar uma decimal por 10, ou potência de 10, deve ser capaz de realizar a operação inversa, isto é, dividir uma decimal por uma potência de 10. Os dois processos devem ser ensinados simultâneamente.

d. DIVISÃO DE DECIMAIS

Tipos de Divisão de Decimais

Há quatro tipos de exemplos na divisão de decimais:

1) Divisão de decimal por inteiro, como 6,2 | 2 .

2) Divisão de dois inteiros com decimal no quociente, como 2 | 5 .

3) Divisão de inteiro por decimal, como 4 | 0,2 .

4) Divisão de decimal por decimal, como 0,35 | 0,5 .

O terceiro tipo, divisão de inteiro por decimal,[2] é o mais difícil. Exceto para o tipo 3, é possível, para o aluno, resolver exemplos que representam os outros três tipos com um alto grau de precisão e não compreender o trabalho. O terceiro tipo corresponde à divisão de inteiro por fração em operações com frações ordinárias.

Pode ocorrer decimal apenas no divisor, apenas no quociente, tanto no dividendo como no quociente, no divisor e no quociente, no divisor e no dividendo, e em todos os três lugares, isto é, divisor, dividendo e quociente. Os seis lugares nos quais uma decimal pode ocorrer são os seguintes:

1) Apenas no divisor, como

$$\begin{array}{l|l} 6 & 0{,}3 \\ \hline & 20 \end{array}$$

2) Apenas no quociente, como

$$\begin{array}{l|l} 1 & 2 \\ \hline & 0{,}5 \end{array}$$

3) Tanto no dividendo como no quociente, como

$$\begin{array}{l|l} 0{,}24 & 2 \\ \hline & 0{,}12 \end{array}$$

4) Tanto no divisor como no quociente, como

$$\begin{array}{l|l} 1 & 2{,}5 \\ \hline & 0{,}4 \end{array}$$

[2] GROSSNICKLE (Foster E.), "Types of Errors in Division of Decimals", *Elementary School Journal*, 42:184-194.

5) Tanto no divisor como no dividendo, como 0,8 | 0,4 .
0,2

6) No divisor, no dividendo e no quociente, como 0,2 | 0,4 .
0,5

Os quatro tipos de exemplos acima podem ser reduzidos a dois tipos, se o divisor é transformado em número inteiro, pela multiplicação por uma potência de 10. Êsses tipos de exemplos são os dois primeiros dos quatro dados acima, representados pelos exemplos 0,6 | 2 e 1 | 4 .
0,3 0,25
Se o divisor é um número inteiro, pode ocorrer uma decimal em dois lugares apenas. São:

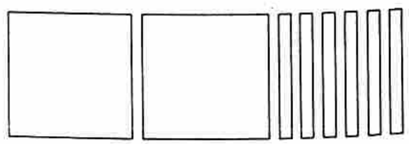
1) Apenas no quociente, como 1 | 4 .
0,25

2) Tanto no dividendo como no quociente, como 0,6 | 2 .
0,3

Se um divisor decimal é transformado em inteiro pela multiplicação por uma potência de 10, segue-se que o dividendo deve ser multiplicado pela mesma potência para conservar inalterado o valor do quociente. O exemplo $0,1 \div 0,4$ pode ser escrito em forma de fração ordinária, como $\frac{0,1}{0,4}$. Depois, o aluno deve ver que ambos os têrmos podem ser multiplicados pelo mesmo número sem alterar o valor da fração. Assim, $\frac{10 \times 0,1}{10 \times 0,4} = \frac{1}{4}$. Desde que o número de tipos de exemplos é reduzido de quatro para dois, e o número de lugares, na divisão, em que pode ocorrer uma decimal é reduzido de seis para dois, o trabalho torna-se muito simplificado pela transformação do divisor em inteiro. As páginas seguintes mostram como desenvolver um plano dêste tipo, desde que o aluno saiba como multiplicar decimal por uma potência de 10, para transformar o divisor em inteiro.

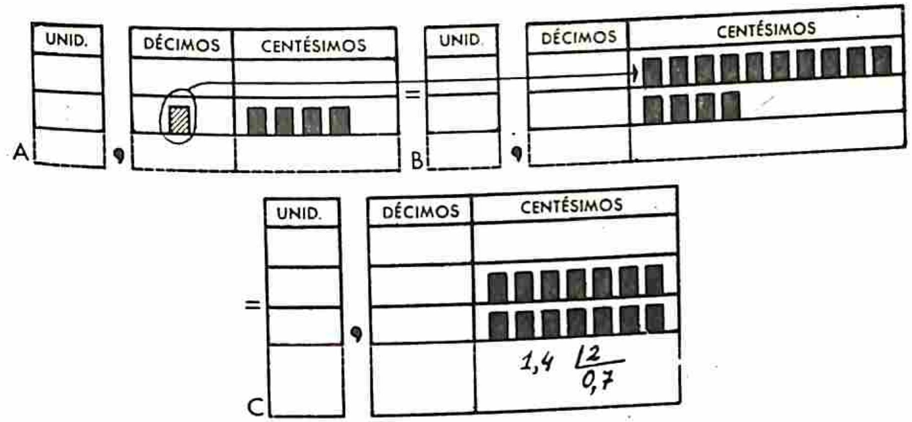
Divisão de Decimal por Inteiro

O aluno deve usar seu material para descobrir como dividir decimal por número inteiro. Para dividir, no exemplo 2,6 | 2 , o aluno representa 2,6 como é mostrado e, depois, separa as fichas em dois grupos iguais.



Faz depois a representação simbólica da experiência no quadro-negro. Êle divide decimais como divide inteiros. Desde que os décimos são divididos por unidades, o quociente será em décimos.

Uma classe tem pouca dificuldade para dividir nos exemplos em que não é necessário reagrupamento. Quando o número tem que ser reagrupado, como nos exemplos 1,4 | 2 ou 0,14 | 2 , o trabalho torna-se mais difícil de



ser compreendido. Para fazer a classe compreender como dividir em um exemplo do tipo 0,14 | 2 , o professor deve levar os alunos a realizar as seguintes atividades:

1) Usar seu material para calcular a resposta. Salientar o reagrupamento necessário para fazer a representação.

2) Pedir aos alunos para explicarem os passos dados na visualização do exemplo.

3) Ler o desenvolvimento dado no livro-texto e dizer a significação de cada passo dado, na seqüência.

4) Demonstrar a relação entre a multiplicação e a divisão no exemplo determinado.

5) Dizer por que o quociente deve ser menor que um inteiro ou um décimo.

6) Determinar, pelo conhecimento de valor do lugar, a posição da vírgula no quociente. Desde que os centésimos são divididos pelas unidades, o quociente deve ser em centésimos, ou duas casas decimais.

O item 2 pede a visualização do processo, como demonstra o desenho. Uma visualização retrata os passos dados na solução. O diagrama A mostra o dividendo. Desde que 1 décimo não pode ser dividido em partes iguais como décimos, deve ser decomposto em 10 centésimos, perfazendo um total de 14 centésimos, como é mostrado em B. O diagrama C mostra 14 centésimos divididos em dois grupos iguais de 7 centésimos cada, ou 0,07. A casa vazia no diagrama mostra que não há décimos na casa dos décimos. O zero no quociente mostra êste fato.

0,14 | 2
0,07

Os itens 4, 5 e 6 são destinados aos alunos que desenvolveram grande discernimento e compreensão do trabalho de dividir decimal por inteiro.

Há muitos tipos diferentes de estrutura em exemplos nos quais o divisor é um inteiro e o dividendo é um decimal. Alguns dêstes tipos são:

1) 4,6 | 2 — Decimal misto; não há necessidade de decomposição.
2) 1,2 | 2 — Igual ao n.° 1, mas com decomposição necessária.
3) 0,4 | 2 — Fração decimal; não há necessidade de decomposição.
4) 0,12 | 2 — Igual ao n.° 3, mas a decomposição é necessária.
5) 0,2 | 5 — Apenas uma parte do número decomposto é dada.
6) 0,3 | 7 — Igual ao n.° 5, mas o valor exato da decimal não pode ser calculado.

Os exemplos dos tipos dados nos itens 4-6, com freqüência, causam dúvidas ao aluno devido ao uso do zero. Um estudo[3] dos tipos de erros na divisão de decimais, nas séries mais adiantadas, demonstrou que 15 por cento de todos os erros resultam do uso inadequado do zero. É muito importante para o aluno compreender a função do zero nos exemplos do tipo mostrado. *Êle precisa compreender o processo de reagrupamento no dividendo.* O zero não apresenta dificuldades especiais na divisão. O aluno que não compreende o reagrupamento conta principalmente com uma regra para calcular a posição da vírgula no quociente. A aplicação de uma regra de maneira mecânica é menos satisfatória, na divisão de decimais, para o trabalho eficiente.

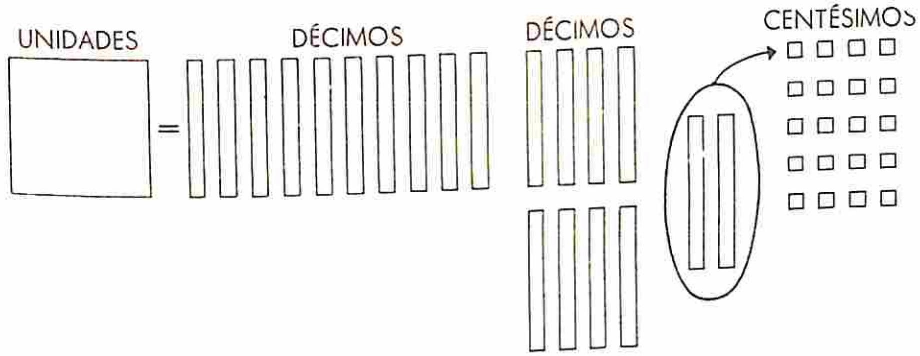
Divisão de Dois Inteiros com Um Decimal no Quociente

Pode ocorrer um decimal no quociente no cálculo da razão entre dois números, se um dos números não é múltiplo do outro, ou se o número menor é dividido pelo número maior. Uma das aplicações familiares da razão entre dois números é o cálculo da porcentagem. Outra aplicação da divisão de dois inteiros com um decimal no quociente é o cálculo da fração decimal equivalente a uma fração ordinária, como $\frac{2}{5}$.

Um quadro de frações, ou uma régua decimal, pode ser usado para demonstrar as frações decimais equivalentes a frações ordinárias, como $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, ou $\frac{1}{8}$. Entretanto, nem o quadro nem a régua tornarão o aluno capaz de compreender o trabalho da transformação de frações ordinárias em decimais. Seu material servirá como um auxílio para atingir esta meta.

O aluno aprendeu que tôdas as frações indicam uma divisão. Assim, a fração $\frac{1}{2}$ significa que 1 deve ser dividido por 2. Êste fato pode ser escrito na forma convencional da divisão, como

[3] GROSSNICKLE (Foster E.), "Kinds of Errors in Division of Decimals and Their Constancy", *Journal of Educational Research*, 37:110-117.

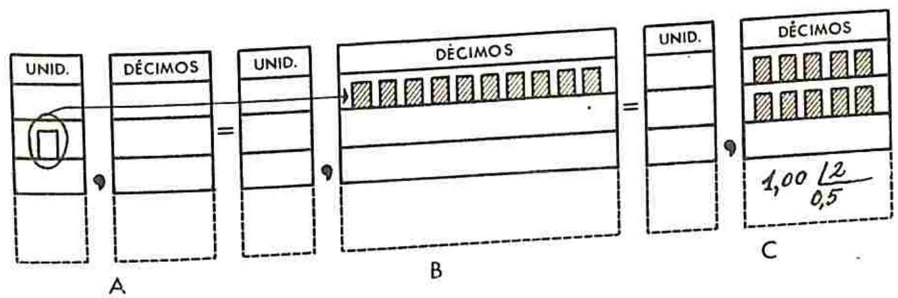


1 | 2 . O aluno usa seu material para calcular o quociente. Um quadrado grande representa o 1. É lógico que 1 não pode ser dividido em duas partes iguais; então, 1 deve ser reagrupado em 10 décimos. Depois, é possível dividir os décimos em duas partes iguais e apresentar na forma simbólica como é mostrado. O professor deve fazer uma visualização do processo e levar a classe a explicar os passos dados para a solução. O diagrama A mostra 1 inteiro; o diagrama B mostra 1 reagrupamento em décimos; C mostra 10 décimos divididos em duas partes iguais.

1 | 2 = 1,0 | 2
0,5

O mesmo padrão descrito deve ser seguido para transformar a fração $\frac{1}{4}$ em fração decimal. O aluno escreve a fração na forma de divisão, como 1 | 4 . Depois, apresenta 1 com um quadrado grande. Verifica que 1 deve ser reagrupado em 10 décimos. É possível formar quatro grupos de 2 décimos cada um, e ainda haverá 2 décimos que não podem ser divididos como décimos. Êstes 2 décimos devem ser decompostos em 20 centésimos. Os 20 centésimos, então, podem ser divididos em quatro grupos, cada um com 5 centésimos. Os 20 centésimos, então, podem ser divididos em quatro grupos, cada um com 5 centésimos. O trabalho com símbolos

1 | 4 = 1,00 | 4
8 0,25
20
20



segue às atividades que o aluno já realizou com seu material.

Depois que o aluno prova, com seu material, que compreende os passos dados na transformação, deve ler o desenvolvimento dado no livro-texto e explicar a seqüência dos passos apresentados. Para os alunos que não são capazes de explicar a seqüência, o professor demonstra como fazer a decomposição usando o quadro Valor do Lugar. Esta demonstração deve ser seguida pela visualização de processos semelhantes ao da fração $\frac{1}{2}$.

Arredondamento do Quociente

É impossível calcular o valor decimal exato de certas frações ordinárias, como $\frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{7}$. A forma convencional para expressar o valor decimal de $\frac{1}{3}$ é $0{,}33\frac{1}{3}$. Entretanto, a maioria das frações cujo valor decimal exato não pode ser calculado é arredondada. Com freqüência, os professôres mandam os alunos arredondar o quociente para os centésimos mais próximos. O número fixo de casas decimais que deve ser conservado não pode ser estabelecido arbitràriamente. O número de decimais no quociente depende do problema. No início do estudo, o arredondamento para centésimos é satisfatório para expressar o quociente.

O decimal a ser arredondado deve ser expresso em uma casa decimal a mais do que o número de casas decimais da resposta. Depois, o mesmo plano seguido para arredondar um inteiro aplica-se a um decimal. Se o algarismo na casa que vai ser arredondada é menor que 5, abandona-se êsse algarismo. Se é 5 ou mais, aumenta-se uma unidade ao algarismo da esquerda. Assim, o centésimo mais próximo de 0,473 é 0,47, mas de 0,475 é 0,48. A expressão para o centésimo mais próximo pode ser simbolizada como 0,01, e para o décimo mais próximo como 0,1.

Divisão de Número Inteiro Por Decimal

A divisão por um divisor fracionário é uma das fases mais difíceis das frações ordinárias. A divisão de inteiro por decimal é a fase mais difícil da divisão, como demonstra o número de erros cometidos no processo. Um estudo[4] dos erros resultantes na divisão de decimais, em um grupo de 761 alunos das séries mais adiantadas, demonstrou que 44 por cento dos erros ocorrem em exemplos relacionados com a divisão de inteiro por decimal. Um aluno que não compreende o trabalho na divisão de decimais pode ter sucesso na colocação, corretamente, da vírgula no quociente, em exemplo do tipo mostrado em A. Pode descolocar

[4] Ver nota na pág. 375.

a vírgula de maneira mecânica e localizar corretamente a posição da vírgula no quociente. No exemplo B, o dividendo não tem uma posição indicada para a qual deve ser deslocada a vírgula. Assim, o aluno que desloca a vírgula, com freqüência, de modo puramente mecânico age da maneira que é mostrada. A ilustração mostra que é importante, para o aluno, em operações com divisores decimais, compreender o trabalho.

A

0,48 | 1,2
0,4

B

9 | 0,3
3

Método de Colocação da Vírgula no Quociente

Aproximadamente 10 artigos diferentes, sôbre os métodos de encontrar a posição da vírgula no quociente, foram escritos em revistas profissionais. Um dos artigos[5] recentes recomendou a transformação de exemplos para tornar o divisor um inteiro.

Os métodos diferentes usados para calcular a posição da vírgula decimal no quociente podem ser descritos como se segue:

1) Deslocamento mecânico da vírgula no divisor e dividendo, como foi descrito acima.

2) Transformação do exemplo para tornar o divisor um inteiro, como 6 | 0,3 = 60 | 3 .

3) O método subtrativo.

4) Uso da aproximação.

5) Uso do valor do lugar.

O dividendo em uma divisão corresponde ao produto em uma multiplicação. O produto de dois fatôres contém tantas casas decimais quanto a soma das casas decimais dos fatôres. Assim, a soma do número de casas decimais, no divisor e quociente, deve ser igual ao número de casas decimais do dividendo. Por isso o número de casas decimais do dividendo, menos o número de casas decimais do divisor, é igual ao número de casas decimais do quociente. Êste princípio é a base do método subtrativo para localizar a vírgula no quociente.

De acôrdo com o quinto método, o aluno usa seu conhecimento do valor relativo para calcular a posição da vírgula no quociente. No exemplo 5 | 0,2, o raciocínio deve ser: "Dividindo unidades por décimos, a resposta é décimos."

O professor deve escolher um dos cinco métodos dados, ou improvisar um método para apresentar a divisão de inteiro por decimal. É lógico que o primeiro e o último métodos não são satisfatórios no início do ensino de um tópico. O primeiro método é uma operação mecânica, e o último é muito difícil para a compreensão da maioria dos alunos na escola elementar. Assim, no começo do ensino, deve ser usado apenas um dos três métodos. É

[5] GROSSNICKLE (Foster E.), "How to Find the Position of the Decimal Point in the Quotient", *Elementary School Journal*, 52:452-457.

importante compreender que *o método a ser usado na divisão com divisor decimal é de grande relevância apenas na introdução da aprendizagem.* O professor pode apresentar todos os métodos, especialmente com o propósito de ampliar o programa, para os estudantes mais capacitados.

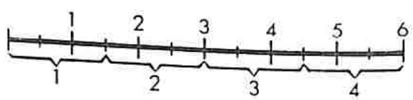
Os autores recomendam com entusiasmo o segundo método, para a apresentação da divisão de inteiro por decimal, pelas seguintes razões: Primeira, a transformação do exemplo para tornar o divisor um inteiro reduz o número de tipos de exemplos, na divisão de decimais, de quatro para dois (veja pág. 375). Segunda, o aluno pode compreender o princípio matemático envolvido. Êste princípio é o mesmo que se aplica à expressão de uma fração equivalente, multiplicando ambos os têrmos por um inteiro (veja pág. 376). Terceira, o método é fácil de apresentar. A maioria dos alunos acha fácil seguir os passos dados em seqüência. Por estas razões, parece aconselhável apresentar a divisão de inteiro por decimal com a transformação do exemplo para tornar o divisor um inteiro.

Transformação do Divisor em Inteiro

A classe pode descobrir diversos meios de calcular a resposta de um problema relacionado com a divisão por um inteiro. Pode ser usado um problema do seguinte tipo para apresentar o processo: "Quantos pedaços de fita de 1,5 metro podem ser cortados de uma fita com 6 metros de comprimento?" Algumas das maneiras que podem ser sugeridas são as seguintes:

1) Calcular a resposta medindo 1,5 metro em uma tira com 6 metros de comprimento.

2) Calcular a resposta em um desenho.



3) Usar frações ordinárias para calcular a resposta.

4) Pensar: "Em 3 metros há dois pedaços; então, em 6 metros há duas vêzes êsses pedaços, ou 4."

5) Subtrair 1,5 de 6 tantas vêzes quantas forem possíveis.

Depois que a classe descobriu que a resposta é 4 pedaços, o professor demonstra, no quadro-negro, como calcular a resposta pela divisão. Desde que cada fração é uma divisão indicada, cada divisão indicada é uma fração. Assim, $6\,\underline{|\;1{,}5}$ pode ser expressa como $\frac{6}{1{,}5}$. Agora é necessário multiplicar ambos os têrmos da fração por um número para tornar o denominador um inteiro. Neste exemplo, qualquer número par pode ser usado como multiplicador. Entretanto, 10 é o menor número, que pode ser usado

como multiplicador, que transformará sempre em um inteiro um divisor expresso em décimos.

$$\frac{10 \times 6}{10 \times 1.5} = \frac{60}{15} = \begin{array}{r|l} 60 & 15 \\ \hline \underline{60} & 4 \end{array}$$

O professor deve certificar-se de que o aluno é capaz de expor o princípio que torna possível multiplicar os têrmos da fração por um número sem alterar o valor da fração.

Os passos que devem ser dados, no início do estudo, para resolver um exemplo relacionado com a divisão de inteiro por decimal são os indicados abaixo:

1) Escrever o exemplo de divisão como uma fração ordinária.

2) Multiplicar ambos os têrmos da fração por 10 ou 100 para tornar o divisor um inteiro. O trabalho inicial deve ser limitado a divisores expressos em décimos e centésimos.

3) Dividir os dois inteiros.

4) Verificar a resposta com um ou mais dos seguintes métodos:

a) usar frações ordinárias;

b) multiplicar o divisor decimal e o quociente para verificar se o produto é igual ao dividendo;

c) fazer uma aproximação da resposta para verificar se é razoável.

O aluno segue o plano dado até descobrir, na divisão, um método mais curto para usar. Pode descobrir que não é necessário transformar o exemplo para tornar o divisor um inteiro. Êle deve saber que a vírgula não afeta o processo da divisão. No exemplo mostrado, sabe que, multiplicando tanto o divisor como o dividendo por 10, desloca a vírgula uma casa para a direita em cada número. Êle pode indicar a mudança de posição como é mostrado. Um aluno que descobre êste método abreviado compreende o trabalho e pode usá-lo. Outros alunos devem continuar a usar o método de tornar o divisor um inteiro, como foi descrito.

$$12\,\underline{|\;0{,}3} = 120\,\underline{|\;3}\quad 40$$

Os mesmos princípios da diferenciação do currículo, para os alunos mais lentos em frações ordinárias, que foram dados na pág 302 devem ser aplicados, com êsses alunos, na divisão de decimais. Os alunos mais capazes devem procurar calcular a posição da vírgula, no quociente, pela aproximação e pelo uso do método subtrativo.

Divisão de Decimal por Decimal

Uma vez que o aluno compreende como dividir inteiro por decimal, não encontra dificuldades em compreender como dividir decimal por decimal, como no exemplo $0{,}36\,\underline{|\;0{,}4}$. Em cada caso, êle transforma o exemplo para tornar o divisor um inteiro. É lógico que o aluno deve saber por qual potência de 10 deve multiplicar, tanto o divisor como o dividendo, para efetuar esta transformação. Esta potência de 10 é indicada pelo número de casas decimais no divisor.

As principais dificuldades que o aluno enfrenta, na divisão de decimais, são a colocação do primeiro algarismo do quociente e a localização da posição da vírgula no quociente. Uma investigação[6] provou que a dificuldade do processo de divisão é fator importante para o sucesso com a divisão de decimais. A habilidade do aluno para operar com a vírgula é o principal fator que afeta o sucesso nesta fase da aprendizagem. Assim, o professor deve usar um teste, com exemplos fáceis do ponto de vista da divisão, para medir a habilidade do aluno na divisão de decimais.[7] O teste dado adiante mede a habilidade de um aluno para dividir em exemplos de cada um dos tipos possíveis, desde que não haja um zero entre a vírgula e o primeiro algarismo significativo, tanto no divisor como no dividendo, e que o valor decimal exato do quociente possa ser calculado:

TESTE DE DIVISÃO DE DECIMAIS

A. Divisão de decimal por inteiro

1) 9,3 | 3 3) 1,8 | 4 5) 0,36 | 8
2) 0,81 | 3 4) 0,48 | 6 6) 0,1 | 4

B. Divisão de dois inteiros com decimal no quociente

1) 3 | 6 2) 6 | 45 3) 1 | 50

C. Divisão de inteiro por decimal

1) 9 | 0,3 3) 75 | 2,5 5) 3 | 7,5
2) 3 | 0,4 4) 5 | 2,5

D. Divisão de decimal por decimal

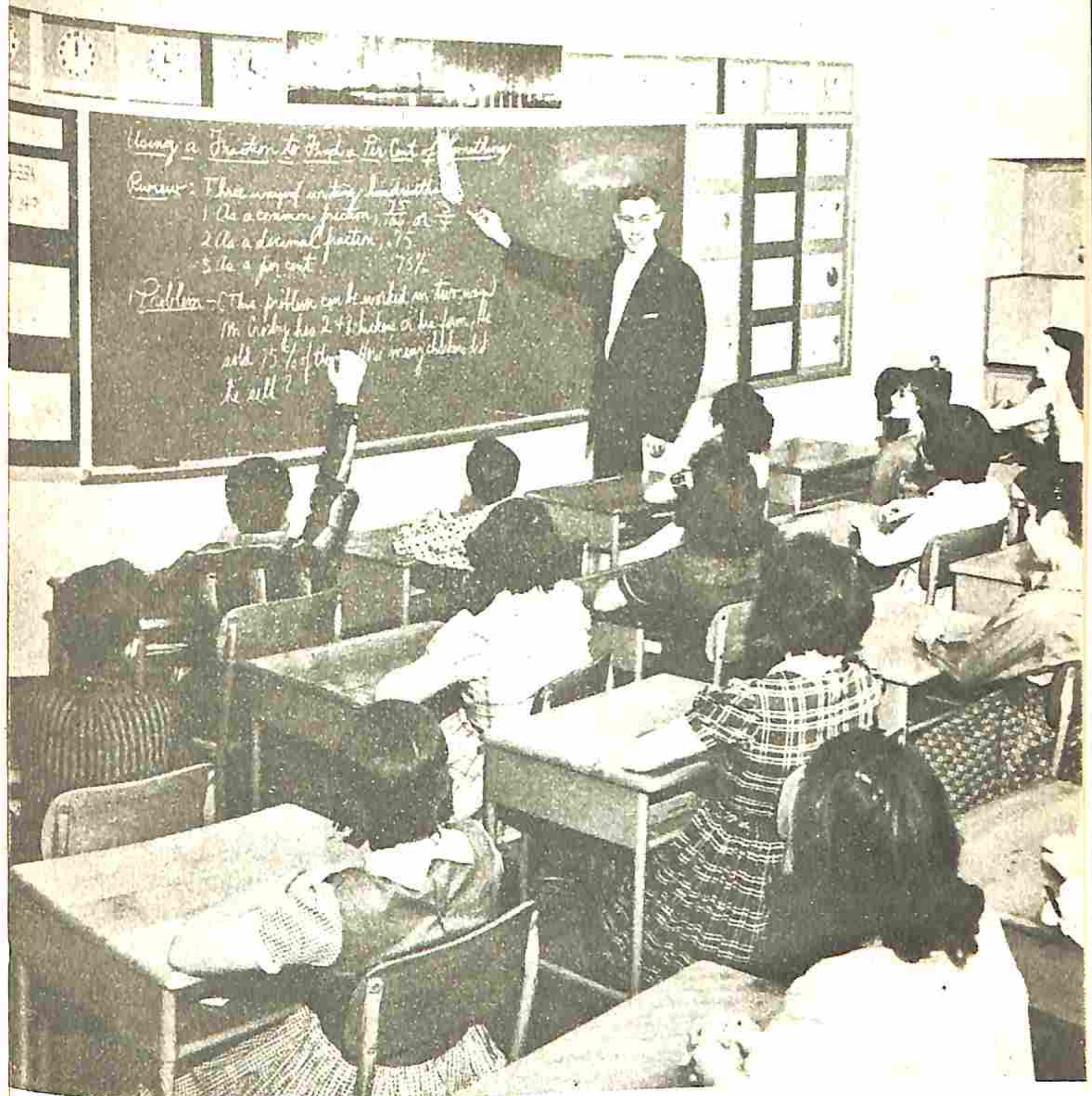
1) 7,2 | 0,2 3) 1,05 | 1,5 5) 0,12 | 2,4
2) 5,84 | 0,8 4) 0,172 | 0,4 6) 44,1 | 0,21

O professor pode organizar um teste-diagnóstico, em qualquer fase da divisão de decimais, usando os modelos dados no teste, o qual proporciona três exemplos de cada tipo. Assim, para A. 1, dois outros exemplos do tipo 9,3 | 3 são 6,4 | 2 e 6,9 | 3 .

Desde que o principal problema, na divisão de decimais, é a colocação da vírgula no quociente, e não o processo da divisão em si, um modo eficiente de ensino consiste em mandar o aluno colocar a vírgula quando são dadas as figuras do quociente. Igualmente um exemplo de multiplicação deve ter o produto expresso sem a vírgula. Exemplos do seguinte tipo são adaptados para exercícios, no estudo da localização da vírgula na resposta, na multiplicação e divisão de decimais.

[6] Ver a nota da pág. 378.

[7] GROSSNICKLE (Foster E.), "Some Factors Affecting a Test Score in Division of Decimals", *Journal of Educational Research*, 36:338-342.



O uso do quadro-negro permite à classe trabalhar num problema sôbre porcentagem juntamente com o professor.

Colocar a vírgula nas seguintes respostas:

a) 0,3 × 0,8 = 24

b) $0{,}42 \,\underline{|\; 6\;}$
$\quad\quad 7$

c) $1{,}3 \,\underline{|\; 0{,}2\;}$
$\quad\quad 65$

d) 2,5 × 0,25 = 625

e. SIGNIFICADO DA PORCENTAGEM

A Linguagem da Porcentagem

Os autores acreditam que a apresentação da porcentagem deve ser adiada até a série convencional, a sétima série. Esta recomendação é feita não por causa da dificuldade da porcentagem, mas para capacitar o aluno a adquirir a destreza necessária em frações ordinárias e decimais e obter sucesso na porcentagem. Não há um princípio matemático nôvo, apresentado na porcentagem, que o aluno não tenha encontrado em seu trabalho com inteiros e frações. Porcentagem é, predominantemente, uma linguagem nova para o aluno dominar. O professor, que sente, na sexta série, que a classe está pronta para a porcentagem, deve agir de acôrdo com um plano para apresentar o tópico.

Uma maneira eficiente para apresentar a porcentagem é mandar a classe expressar a razão, em um certo esporte, entre o número de jogos ganhos e o número de partidas. Se uma das equipes ganhou sete das dez partidas realizadas, o aluno escreve êste fato no quadro-negro, como é mostrado em a). Depois, o professor manda a classe dizer como deve ser escrito êste fato de forma abreviada:

a) 7 de 10

b) $\frac{7}{10}$

c) 0,7

Se nenhum dos alunos escreve êste fato como uma fração, o professor pergunta a qualquer aluno como a expressão 7 de 10 pode ser escrita em fração. O aluno deve ler a fração $\frac{7}{10}$ com o significado de 7 de 10. Igualmente o aluno escreve o fato como decimal, e interpreta 0,7 com o significado de 7 de 10.

Em seguida, o professor pede à classe para fazer uma tabela em que mostre, em 100 jogos, o número de jogos ganhos pela equipe, e a razão das vírgulas é a mesma que 7 tirado de 10. A classe escreve o número de partidas ganhas, para os primeiros 50 jogos, em cada múltiplo de 10 partidas jogadas, como é mostrado:

7 de 10
14 de 20
21 de 30
28 de 40
35 de 50

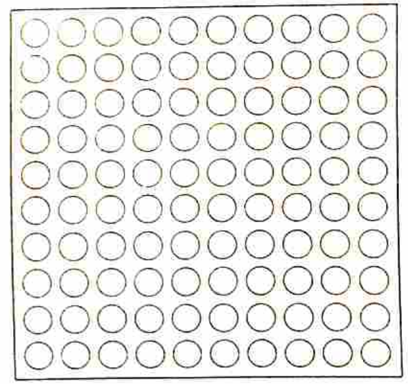
Se uma equipe ganhou 35 dos 50 jogos, na mesma razão ganharia 70 de 100 jogos. O último fato pode ser escrito nas quatro formas seguintes:

1) A maneira longa, como 70 de 100

2) Como fração ordinária, ou $\frac{70}{100}$

3) Como fração decimal, ou 0,70

4) Como porcentagem, ou ... 70%.



Quadro de Cem

O aluno descobre que há 100 partes no *quadro de cem*. O professor escolhe uma das partes e pede ao aluno para expressar a relação entre essa parte e as 100 partes necessárias para preencher o quadro. As quatro maneiras para expressar ésta relação são as seguintes:

1) A maneira longa, ou 1 de 100

2) Como fração ordinária, ou $\frac{1}{100}$

3) Como fração decimal, ou 0,01

4) Como porcentagem, ou 1%.

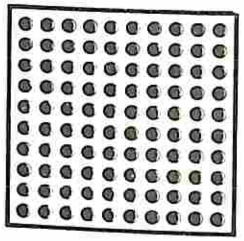
Cada uma destas relações numéricas é interpretada com o mesmo significado da forma longa, ou "1 de 100".

O professor pede à classe para interpretar a relação de 2 partes, de 3 partes, e assim até 100, nas quatro formas dadas. Depois, a classe dá cinco maneiras de expressar uma fileira de 10 partes no quadro de cem. Êste fato pode ser expresso das seguintes maneiras: (1) 10 de 100; (2) $\frac{10}{100}$; (3) $\frac{1}{10}$; (4) 0,10, ou 0,1; (5) 10%.

De modo semelhante, o professor pede à classe para representar diferentes partes fracionárias, como a metade dos pedaços, no quadro de cem. O aluno é estimulado a um bom raciocínio se o professor o desafia a dar tantas maneiras quantas possíveis para expressar o fato representado. As diferentes maneiras são: (1) 50 de 100; (2) $\frac{50}{100}$; (3) 0,50; (4) 0,5; (5) $\frac{1}{2}$; (6) 50%.

Depois, pede à classe para indicar maneiras diferentes para expressar o total de partes no quadro de cem. As maneiras diferentes são: (1) 100 de 100; (2) $\frac{100}{100}$; (3) 1,00; (4) 1 inteiro; (5) 100%. Então, o aluno interpreta tal exposição como "100 por cento", ou um resultado de 100 por cento em um teste.

Após o aluno identificar a porcentagem com o uso do quadro de cem, êle reproduz diferentes porcentagens usando seu material. Um dos quadrados maiores é adaptado para êste fim. O lado quadriculado do quadrado contém 100 quadrinhos. O professor pede ao aluno para representar neste quadrado diferentes porcentagens, como 1%, 5%, 20%, e assim por diante. O aluno marca o número necessário de quadrinhos para representar a porcentagem pedida. O professor pode mostrar êste fato colocando duas camadas de pedacinhos no quadro de cem. Desde



Cálculo da Porcentagem de Um Número

A pág. 358 dá os três tipos de problemas, em frações ordinárias, decimais e porcentagens. A primeira aplicação é o cálculo da porcentagem de um número, como 4% de 50. Calcular uma porcentagem menor do que 100 é o mesmo que calcular uma parte fracionária de um número.

A classe pode usar o quadro de cem para calcular uma determinada porcentagem de 100. O professor continua com exemplos do tipo 6% de 100, até que o aluno descubra que a resposta é igual ao número da porcentagem. Depois, muda o número ou *base* para um múltiplo de 100, como 200. Para calcular 4% de 200, o aluno raciocina: "4% de 100 são 4; assim, 4% de 200 devem ser o dôbro, ou 8." O professor pode mostrar êste fato... que 4% de 100 são 4 pedacinhos ou 4 espaços, os quatro espaços conterão 8 pedacinhos. O aluno pode usar tanto frações ordinárias como frações decimais para calcular a resposta. Desde que 4% significam $\frac{4}{100}$ e 0,04, a resposta do problema pode ser calculada do seguinte modo:

1) $\frac{4}{100} \times 200 = \frac{800}{100}$, ou 8

2) $0{,}04 \times 200 = 200 \times 0{,}04 = 8{,}00$

O aluno usa, para calcular a porcentagem, tanto frações decimais como frações ordinárias em exemplos do tipo mostrado. Desde que porcentagem significa centésimos, ou duas casas decimais, o aluno poderá descobrir que é mais fácil expressar uma determinada porcentagem como centésimos. Então, multiplica o número dado por esta decimal.

QUESTÕES, PROBLEMAS E TÓPICOS PARA DISCUSSÃO

1. Faça uma lista do material visual e exploratório que considera essencial para o ensino de decimais.
2. Diga por que você usaria ou não o dinheiro para a introdução do conceito de decimais.
3. Qual o tipo de material objetivo que recomenda para introduzir o conceito de milésimos?
4. Um professor, em sua escola, pediu a um aluno para identificar a posição de um algarismo, em um número, com referência à vírgula. Demonstre como convencer a êsse professor que o ponto de referência deve ser a casa das unidades.
5. Um aluno subtraiu, no exemplo 7,2 − 1,342, como é mostrado. O que sugere para prevenir erros dêste tipo?

$$\begin{array}{r} 1{,}342 \\ -\ 7{,}2 \\ \hline \end{array}$$

6. Um aluno elevou ao quadrado 0,25 (0,25 × 0,25) e calculou o produto como 0,0625. Desde que o produto tem um valor menor que 0,25, considerou a resposta incorreta. Como pode fazê-lo compreender que o produto deve ser menor que um dos fatôres?
7. Dê um problema, na divisão de decimais, para exemplificar cada tipo.
8. Faça uma apreciação do método subtrativo para calcular, no quociente, a posição da vírgula.
9. Demonstre como ensinaria, ou não ensinaria, o aluno a usar sinais (como ^) para ajudá-lo a localizar a posição da vírgula no quociente.
10. Dê as respostas dos seguintes itens:
    a) o produto de: (1) décimos e décimos, (2) dezenas e décimos, (3) décimos e centésimos, (4) centenas e décimos,
    b) o quociente de: (1) décimos divididos por décimos, (2) centésimos divididos por décimos, (3) décimos divididos por centésimos, (4) dezenas divididas por décimos.
11. Faça três exemplos com a mesma estrutura de cada um dos seguintes:
    a) $0{,}14 \,\underline{|\ 4\ }$ b) $8 \,\underline{|\ 0{,}4\ }$
    c) $0{,}72 \,\underline{|\ 1{,}5\ }$
12. Escreva quatro exemplos que possam ser feitos com os números em cada quadro:

0,3	0,5	0,8
0,2	8	1,6
12	0,5	24

13. Use decimais e escreva um problema para representar,

em multiplicação e divisão, cada uma das três utilidades dos decimais.

14. Faça um mural didático de algumas das aplicações sociais das decimais e porcentagem encontradas em jornais e revistas.

SUGESTÕES PARA LEITURA

Arnold, Frank C. "The Decimal Is More than a Dot," *The Arithmetic Teacher*, 2: 80-82.

Brueckner, L. J., Grossnickle, F. E., and Reckzeh, J. *Developing Mathematical Understandings in the Upper Grades*. Philadelphia: The John C. Winston Co., 1957. pp. 202-239.

Buckingham, B. R. *Elementary Arithmetic: Its Meaning and Practice*. Boston: Ginn and Company, 1947. pp. 306-350.

Clark, John and Eads, Laura. *Guiding Arithmetic Learning*. Yonkers: World Book Co., 1954. pp. 180-204.

Grossnickle, Foster E. "How to Find the Position of the Decimal Point in the Quotient," *Elementary School Journal*, 52: 452-457.

Johnson, John T. "Decimal versus Common Fractions," *The Arithmetic Teacher*, 3: 201-203.

Shuster, Carl N. "Decimalization of English Measures and Computation With Approximate Data," *Twentieth Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics*, New York: Bureau of Publications, Teachers College, Columbia University, 1948. pp. 233-257.

13

Pensamento Quantitativo e Resolução de Problemas

O PENSAMENTO QUANTITATIVO ocorre quando o indivíduo usa o número, de alguma maneira, ao tratar com os elementos de uma situação que conduzem à análise ou descrição matemática. Para ilustrar, um indivíduo está *pensando* quantitativamente quando conta para achar o número de objetos em um grupo, quando seleciona e aplica um instrumento de medida a algum aspecto de uma situação, quando lê e interpreta um gráfico ou tabela, ou quando usa adequado processo matemático ao analisar uma situação real da vida.

O pensamento quantitativo se realiza em diferentes níveis de maturidade. A criancinha pensa quantitativamente a um nível relativamente baixo, enquanto que o cientista nuclear, quando tratando com seus problemas especiais, aplica conceitos matemáticos e métodos de pensamentos altamente abstratos e que estão além da compreensão da maioria dos indivíduos. O nível ao qual uma pessoa pensa é claramente determinado pelo seu fundo de conhecimentos e de experiências e pela sua capacidade de pensar com números. A habilidade de pensar quantitativamente resulta de experiências, incidentais ou planejadas, que o indivíduo tem na sua vida diária.[1] A primeira função de um programa de Aritmética é prover experiências que desenvolvam na criança a habilidade de pensar através de situações problemáticas que encontra e lidar com as mesmas inteligente e habilidosamente. A resolução de problemas é o mais alto nível de pensamento quantitativo.

Neste Capítulo discutiremos os seguintes tópicos:

a. Natureza do pensamento quantitativo em relação à resolução de problemas
b. Desenvolvimento da habilidade em resolver problemas
c. Pensamento quantitativo na computação

[1] Reler a discussão sôbre comportamento matemático no Capítulo 1.

d. Ensino da resolução de problemas às crianças
e. Necessidade do ensino da leitura em Aritmética.

a. NATUREZA DO PENSAMENTO QUANTITATIVO EM RELAÇÃO À RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Propósito do Pensamento Quantitativo

A resolução de problemas é a mais alta forma de pensamento reflexivo. Um programa de Aritmética, como o apresentado neste livro, que dá ênfase à significação e à compreensão, é largamente baseado na resolução de problemas. O pensamento quantitativo é a base para a eficiência na resolução de problemas. Quando a sala de aula é considerada como um laboratório de aprendizagem, a instrução é conduzida de tal maneira que as relações básicas são discutidas e formuladas através de experimentos com as coisas e com o seu aspecto quantitativo. A criança é conduzida a descobrir as relações matemáticas. Tais descobertas levam-na a analisar e interpretar suas experiências, a testar sua compreensão, a organizar sua aprendizagem, e a fazer generalizações que podem ser subseqüentemente aplicadas em novas situações. O real interêsse em Aritmética cresce com a resolução de problemas que tratam de assuntos do interêsse da criança.

Níveis de Pensamento Quantitativo

Quando o professor dá à criança a oportunidade de usar material exploratório, tal como blocos, para achar a resposta para uma questão como "Quantos blocos são 2 blocos mais 3 blocos?", a criança é levada a aplicar um tipo simples de pensamento quantitativo. O objetivo da instrução em Aritmética deve ser levar, gradativamente, a criança a usar processos mais maduros de pensamento quantitativo. Embora o uso de processos imaturos seja característico da aprendizagem inicial, a criança deve ser encorajada a prosseguir em direção a níveis mais altos de raciocínio.

O pensamento quantitativo está também envolvido na expressão de idéias numéricas, quer em exposições orais ou escritas, quer em exemplos de trabalhos ou na leitura de materiais diversos. Quando se pede a uma criança que responda a questões sôbre um gráfico, tabela ou mapa, na área de estudos sociais, ela tem de usar tipos especiais de habilidades de leitura e estudos envolvendo pensamento quantitativo, as quais devem ser desenvolvidas e praticadas como uma parte do programa geral de Aritmética.

Exemplos e Problemas

Na instrução aritmética se faz, geralmente, uma distinção entre exemplos e problemas. *Exemplo* é uma expressão na qual a operação a ser usada é indicada, como em 27 × 48. Tradicionalmente, o têrmo *problema* é usado para identificar uma declaração verbal ou escrita incluindo uma questão cuja resposta a criança deve encontrar pelo pensamento através da situação que o problema apresenta e pela efetuação de cálculos usando os números dados no problema. Por exemplo, o problema "Qual é a área de um terreno que tem 30 m de comprimento e 3 m de largura?", exige pensamento cuidadoso de uma criança de quinta série, enquanto pode ser resolvido fàcilmente por uma de oitava série (terceira série ginasial) sôbre as bases de uma resposta a que já está habituada.

Geralmente o propósito dos problemas é mostrar à criança como os processos numéricos são usados na vida diária e demonstrar como pode ela descobrir e aplicar relações e conceitos quantitativos em situações práticas. Ao mesmo tempo, os problemas proporcionam prática no desempenho das computações. Antigamente, davam-se à criança listas enormes de problemas para ela resolver e muitas vêzes tais problemas eram desinteressantes e difíceis. Êste tipo de resolução de problemas degenerou-se numa forma disfarçada de exercício de computação. Os problemas eram freqüentemente agrupados de acôrdo com os processos nêles usados, os quais eram, às vêzes, indicados nos títulos de tais listas. Isto eliminava a necessidade de qualquer pensamento quantitativo da parte da criança. Ao invés de pensamento real, ela recorria a simples truques numéricos. Os problemas eram muitas vêzes classificados como problemas de uma, duas e três dificuldades, e a solução dos mesmos era considerada uma forma de ginástica mental, quase completamente mecânica em sua natureza.

Nos últimos anos, o valor do trabalho na solução dos tipos tradicionais de problemas tem sido desafiado. O problema típico, oral ou escrito, contém tôdas as informações necessárias à obtenção da resposta, ao passo que na vida diária os dados requeridos para a solução de algum problema similar, surgido de uma situação da vida social fora da escola, devem ser reunidos, organizados e analisados para se encontrar a solução. E a resolução de tais problemas é um processo mais complicado que a solução de problemas escritos dos livros-texto.

A habilidade de pensamento quantitativo envolvido na solução de problemas reais será tanto mais desenvolvida quanto mais experiências tiver a criança com os genuínos problemas que surgem na vida diária. É difícil pagem na vida diária. É difícil para a escola proporcionar participação direta em um grande número de experiências da vida real devido ao grande número de cri-

[2] Moser (H. E.), "Levels of Learning", *The Arithmetic Teacher*, 3:220-225.

anças na classe. Por isso, torna-se-lhe necessário substituir tais experiências por outras pràviamente planejadas, como as experiências contidas nos livros-texto, as quais dão às crianças oportunidade de pensamento quantitativo semelhante ao que é necessário em situações reais.

Fehr[3] assinala que o pensamento envolvido na solução de problemas reais encontrados na vida diária não é tão lógico e sistemático como às vêzes se acredita. Êle assim expressa seu ponto de vista: "A resolução de problemas reais envolve a visão do problema como um todo, familiaridade com os elementos da situação problemática, análise dessa situação, percepção das relações, aquisição de um padrão de ligações, estimativa, verificação e reorganização. Raramente resolvemos um problema real através de passos dedutivos organizados. A estrutura dedutiva é geralmente feita depois do discernimento da solução já encontrada."

b. DESENVOLVIMENTO DA HABILIDADE EM RESOLVER PROBLEMAS

Elementos de Um Problema Real

Psicològicamente falando, os problemas surgem das necessidades dos indivíduos. A criança encontra um problema matemático quando defronta uma situação quantitativa com a qual não pode lidar como habitualmente. Quando o problema interessa à criança, ela é levada a seguir passos para explorá-lo e solucioná-lo. Tais passos envolvem pensamento reflexivo e podem incluir experimentos. A riqueza de experiências do indivíduo ao tratar com os aspectos quantitativos de situações sociais e sua capacidade mental são fatôres importantes que determinam o sucesso da criança ao lidar com o problema.

Os elementos de uma situação problemática são:

1) Um objetivo a ser atingido.

2) Um obstáculo no caminho a ser seguido para se atingir o objetivo.

3) As possíveis respostas habituais não são apropriadas ou adequadas para atingir o objetivo.

4) Várias soluções possíveis (hipóteses) são propostas e testadas.

5) Uma conclusão definitiva é obtida.

Uma Ilustração da Resolução de Problemas nas Situações da Vida

A seguinte descrição da resolução de um problema numa classe de segunda série demonstra os modos pelos quais um grupo de crianças resolveu um problema numa situação particular que surgiu na sala de aula.

Num certo período do ano verificou-se considerável número de entradas atrasadas, especialmente na parte da manhã. Diàriamente o professor comentava o fato com as crianças, tornando-as cientes da situação. Certa manhã o professor levantou a seguinte questão: "Que poderíamos fazer para reduzir o número de entradas tardias em nossa sala?" Várias sugestões foram apresentadas pelas crianças e discutidas pelo grupo. Decidiu-se, finalmente, que cada criança deveria responder por si mesma à seguinte questão: "Quando deverei eu sair de casa para chegar a tempo na escola?"

Para obter as informações desejadas, as crianças decidiram que três atividades seriam necessárias:

1. O preparo do desenho de um mapa do distrito ou zoneamento escolar.

2. A localização, neste mapa, das residências dos alunos. Cada criança localizaria sua própria casa e contaria o número de quarteirões que teria de andar para chegar à escola.

3. A determinação do tempo necessário para se andar um quarteirão. Um grupo de crianças, usando um cronômetro, caminharia através de um quarteirão e calcularia o tempo necessário para tal percurso.

Realizado êste trabalho, a classe se reuniria para discutir as próximas atividades. Decidiu-se que 3 minutos seriam suficientes para a caminhada de um quarteirão. Depois, contando de 3 em 3, cada criança achou o número aproximado de minutos requeridos para o percurso da casa até a escola. Então, recorrendo-se a um relógio, cada criança determinou a hora de sair de casa e registrou êsse horário em frente a seu nome, numa lista com todos os nomes das crianças da classe. Subseqüentemente, mais que o prazer das crianças que haviam planejado a solução, houve um sensível decréscimo nas entradas atrasadas.

Orientação na Resolução de Problemas

Dentre os fatôres que contribuíram para o êxito da orientação destas crianças na resolução de seus problemas, incluem-se os seguintes:

1) O problema era do interêsse das crianças.

2) Era um problema solucionável.

3) O problema foi claramente definido em têrmos tais que cada criança o entendeu.

4) As crianças apresentaram as sugestões possíveis e as avaliaram.

5) Os alunos elaboraram um plano para a solução do problema e reuniram e organizaram os dados necessários.

[3] FEHR (Howard F.), "The Role of Insight in the Learning of Mathematics", *The Mathematics Teacher*, 47: 392.

6) Muitas operações foram usadas para a obtenção dos dados.

7) As crianças foram orientadas pelo professor no planejamento da solução e no estabelecimento de conclusões, quando as ocasiões o exigiram.

8) Os alunos usaram a solução a que chegaram ao tratarem com a situação que o problema original apresentou e viram que tinham sido bem sucedidos.

O professor de Aritmética deve guiar as atividades de aprendizagem das crianças de tal maneira que a habilidade de lidar com problemas reais seja sistemática e cuidadosamente desenvolvida através de experiência real, com a solução de problemas reais dentro do interêsse das crianças. Pela observação do comportamento das crianças na solução de situações problemáticas que estejam relacionadas a qualquer dêstes conceitos, o professor pode descobrir os pontos fortes e fracos das crianças na utilização dos processos matemáticos. E então, pelo arranjo de adequadas situações de aprendizagem, poderá seguir os passos que conduzirão ao aperfeiçoamento e domínio de tais conceitos. O ponto importante do qual o professor deverá lembrar-se é a habilidade das crianças para resolver problemas, que pode ser melhor desenvolvida através de experiências significativas.

Situações Concretas Como Base do Pensamento Quantitativo

Na vida da escola surgem muitas situações concretas que oferecem excelentes oportunidades para experiências em pensamento quantitativo, resolução de problemas e uso das operações numéricas. Exemplos:

1) Confecção de mapas

2) Registro de pesos e alturas das próprias crianças

3) Registro da temperatura diária

4) Compra de selos na agência de correio da escola

5) Uso do cronômetro para medida do tempo gasto em corridas ou em outro tipo de competições

6) A aprendizagem do manejo de uma máquina de calcular ou de um ábaco

7) Coleção de ilustrações dos usos de frações e decimais

8) O preparo de um plano para um mural.

Para exemplificar, uma classe de segunda série coletou Cr$ 374 para comprar dois presentes de Natal para um menino e uma menina. A classe defrontou-se com o seguinte problema: "Quanto podemos gastar em cada presente?" Sob a orientação do professor, as crianças dividiram os Cr$ 374 em duas partes iguais. Experimente visualizar os processos que êles usaram na divisão do dinheiro.

Problemas Que as Crianças Enfrentam na Aprendizagem da Aritmética

O professor não deve descuidar dos problemas relacionados à aprendizagem das operações aritméticas que são do interêsse de muitas crianças. Elas necessitam de orientação e ajuda para resolver, inteligentemente, tais problemas. As situações seguintes são ilustrativas:

1) "Que posso fazer que me ajudará a lembrar os fatos de adição? Como deverei estudá-los?"

2) "Como poderei encontrar os pontos fracos em meu trabalho de divisão? Que posso fazer para vencê-los?"

3) "Quero apresentar um trabalho sôbre certa área especial de Aritmética. Onde poderei encontrar, por exemplo, materiais informativos sôbre a história de nosso sistema de numeração?"

4) "Não entendo a subtração de frações. Onde poderei encontrar alguma ajuda?"

5) "Estive ausente das aulas durante quatro semanas por motivo de doença. Que posso fazer para planejar o meu trabalho de recuperação?"

6) "Às vêzes cometo erros nas multiplicações com zero. Por que será que erro? Como poderei achar as causas dos meus erros?"

O Capítulo 16 trata de processos especiais de diagnóstico e dificuldades de aprendizagem. O método da resolução de problemas é sempre desejável.

Problemas Que Surgem Durante as Atividades da Sala de Aula

Diàriamente surgem na classe questões sôbre assuntos de genuíno interêsse das crianças. A consideração de tais questões vitaliza o ensino de Aritmética e oferece muitas oportunidades para experiência em pensamento quantitativo. As crianças devem usar processos vários de investigação para a obtenção das informações necessárias. O professor pode fazer muito para desenvolver nas crianças o desejo e a habilidade de procurar, de maneira independente, respostas para questões tais como as seguintes:

1) "Que devemos saber para calcular o preço da remessa dêste pacote pelo correio?"

2) "Como é o sistema para expressar o tempo usado pelos navegantes?"

3) "Qual é o sistema usado na numeração das casas e edifícios de nossa cidade?"

4) "Como é o sistema de numeração usado para classificar os livros das bibliotecas?"

5) "Como podemos encontrar o diâmetro de um tronco de árvore?"

Pensamento Quantitativo na Vida Diária

Há muitas ocasiões na vida diária em que o número é usado para transmissão ou interpretação de idéias. Podemos considerar o uso do número em tais casos como aritmética mental. Os exemplos seguintes sugerem tipos de situações nas quais a aritmética mental é usada:

1) Aquêle melão pesa cêrca de 2 quilos. (Estimativa em medidas.)

2) Na última semana tivemos 97,28 mm de chuva. De acôrdo com êste dado, teremos cêrca de 400 mm neste mês. (Aproximação.)

3) A temperatura hoje está a 14°, isto é, cêrca de 10° abaixo do normal. (Comparação; diferença.)

4) Nós podemos ir ao Rio de avião despendendo cêrca de $\frac{1}{10}$ do tempo que se despende indo de automóvel. (Razão.)

5) Terei que usar duas vêzes mais tanta manteiga quanto a receita do bôlo pede. (Razão.)

6) Aquêle campo tem cêrca de 20 acres. (Conceito de área.)

7) O pêso médio de uma galinha é quilo e meio. (Vocabulário técnico.)

8) A 60 km por hora, gastaremos cêrca de 9 horas para ir a São Paulo, que está a 540 km de distância daqui. (Relação de distância-velocidade-tempo.)

9) O peru está sendo vendido a Cr$ 1.200 o quilo. Com Cr$ 5.000 posso comprar um peru pesando cêrca de 4 quilos. (Relação de custo-pêso.)

10) Quanto é 25×78? (Pensar: "$\frac{1}{4}$ de $7\,800 = ?$"; uso de uma maneira rápida de computação.)

11) A população de um Estado é cêrca de 3,5 milhões. (Arredondamento de números.)

A habilidade de fazer e entender tais afirmações requer muito mais que uma atenção momentânea. Os materiais de pensamento necessários para interpretar as relações envolvidas são diretamente relacionados à compreensão que a criança tem do sistema de numeração. Em outras palavras, o pensamento quantitativo funcional é requerido.

Em muitas unidades do currículo de estudos sociais e ciências naturais, é indispensável a habilidade de lidar com fatôres matemáticos. O programa de Aritmética amplamente concebido deve proporcionar situações para o desenvolvimento sistemático de uma compreensão de conceitos e inter-relação dos elementos matemáticos que são requeridos para se tratar efetivamente com o trabalho em tôdas as áreas do currículo escolar primário. Horn mostrou que os conceitos matemáticos contidos nos materiais de leitura causam às vêzes considerável dificuldade às crianças. O leitor interessado poderá consultar as referências abaixo para detalhes.[4]

c. PENSAMENTO QUANTITATIVO NA COMPUTAÇÃO

Resolução de Problemas Relacionados à Aprendizagem das Operações Numéricas

A aprendizagem de novas dificuldades em uma operação numérica deve basear-se na resolução de problemas. Primeiramente o professor deve colocar a criança face a uma situação social problemática na qual surja a necessidade para uma nova operação. Os livros-texto geralmente introduzem uma nova dificuldade em uma situação social de modo que as crianças possam ver como ela é usada. A nova dificuldade envolvida deve ser claramente identificada a fim de que as crianças saibam qual o objetivo a ser atingido e desejem atingi-lo. As crianças podem fazer ilustrações com outros exemplos nos quais surge a mesma dificuldade. Elas devem compreender que suas respostas habituais e os já estabelecidos padrões de comportamento não são, em si, adequados para a solução do problema.

Às crianças pode, então, ser dada oportunidade para sugestões de processos ou métodos possíveis para o encontro da resposta. Tais sugestões podem ser baseadas nas experiências prévias ou no desenvolvimento do pensamento reflexivo. Estes planos podem ser experimentados informalmente a fim de tornar a tarefa mais significativa. Então, sob a direção do professor, as notações a serem aprendidas devem ser desenvolvidas com a classe de uma tal maneira que as crianças entendam a seqüência dos passos seguidos na solução. O discernimento será demonstrado pela habilidade das crianças em responder a questões que testem sua compreensão e habilidade de aplicar o processo na solução de novos problemas. A descrição da lição sôbre subtração na pág. 90 é excelente ilustração concreta de uma experiência que envolve o pensamento quantitativo funcional da criança na aprendizagem de uma operação numérica.

Identificação de Relações Entre Números

Quando a Aritmética é ensinada como fatos numéricos isolados e como operações numéricas não-relacionadas, a aprendizagem se torna mais difícil devido à falta de estrutura e organização. Nos capítulos precedentes os Autores discutiram muito a importância de se pôr em relêvo as relações entre os fatos e os processos nu-

[4] "The Teaching of Arithmetic", *Fiftieth Yearbook of the National Society for the Study of Education*, 11:8-18. Chicago: University of Chicago Press, 1951.

YOUNG (W. E.), "Language Aspects of Arithmetic", *School Science and Mathematics*, 57:172.

méricos. O pensamento quantitativo requerido para encontrar os elementos faltosos nas expressões abaixo se faz necessário para a criança testar seus conhecimentos dos números e processos.

1) $3 + 2 = ?$	7) $? \times 8 = 16$
2) $3 + ? = 5$	8) $? \div 4 = 7$
3) $? + 2 = 5$	9) $15 \div ? = 5$
4) $3 - ? = 0$	10) $\frac{1}{2} \div ? = 2$
5) $? - 6 = 8$	11) $3 \div ? = \frac{1}{2}$
6) $2 \times ? = 10$	12) $3\frac{1}{2} - ? = 2$

A percepção de relações entre grupos de números relacionados, um importante elemento no pensamento quantitativo, é exigida em exercícios tais como os seguintes:

1) Escreva todos os fatos numéricos que você pode descobrir em cada um dos grupos de números relacionados como se vê abaixo.

a) 4   7   11

(Respostas:

$$\begin{array}{r}4\\+7\\\hline 11\end{array}\quad\begin{array}{r}7\\+4\\\hline 11\end{array}\quad\begin{array}{r}11\\-7\\\hline 4\end{array}\quad\begin{array}{r}11\\-4\\\hline 7)\end{array}$$

b) 3   6   18

(Respostas:

$$\begin{array}{r}3\\\times 6\\\hline 18\end{array}\quad\begin{array}{r}6\\\times 3\\\hline 18\end{array}\quad\begin{array}{r|l}18 & 3\\\hline 0 & 6\end{array}\quad\begin{array}{r|l}18 & 6\\\hline 0 & 3\end{array}$$

$\frac{1}{3}$ de $18 = 6$ $\frac{1}{6}$ de $18 = 3$)

2) Procure os algarismos faltosos nos exemplos abaixo:

$$\text{a)}\ \begin{array}{r}75\\+\,2\,\text{-}\\\hline 102\end{array}\qquad\text{b)}\ \begin{array}{r}62\\\text{- - -}\\\hline 26\end{array}$$

$$\text{c)}\ \begin{array}{r}2\,\text{-}\,2\\\times\ 3\\\hline 7\,2\,6\end{array}\qquad\text{d)}\ \begin{array}{l|l}1\,\text{-}\,7 & 4\\\hline - & 4\\\overline{\quad} & \\ 2\ - & \\ - & \\ - & \\ 3 & \end{array}$$

3) Escreva problemas originais baseados em exemplos como os seguintes:

a) $7\frac{1}{2} + 3\frac{1}{3}$ b) Cr\$ 27 − Cr\$ 15

c) $\frac{1}{2}$ de $14 =$ d) $4 \times 7\frac{1}{2} =$

Aritmética Mental

Tendo como base um limitado estudo sôbre o uso nos negócios, Hall [5] assentou que a maioria dos problemas aritméticos que surgem na vida é resolvida mentalmente, sem necessidade de papel e lápis. Êle diz que uma maior ênfase na aritmética mental tem os seguintes valôres:

1) Reforça a importância do valor do lugar e a compreensão da *base 10* de nosso sistema de numeração.

2) Põe em foco as relações entre os números e isto assegura compreensão e economia de tempo na adição.

[5] HALL (Jack V.), *Solving Problems Mentally.* Cedar Falls: Bureau of Exterior Service, Iowa State Teachers College, 1954, págs. 9-10.

3) Facilita o encontro de respostas aproximadas para os problemas aritméticos, desde que, na vida, a Aritmética não lida exclusivamente com computação.

4) Ajuda as crianças a dirigir imediatamente sua atenção para as condições dos problemas, uma vez que há pouca ou nenhuma escrita necessária.

5) Torna o professor capaz de compreender o tipo do pensamento quantitativo da criança, quando esta é encorajada a explicar, oralmente, a solução de um problema.

6) Facilita a introdução de novos processos aritméticos em tôdas as séries, porque a atenção da criança pode focalizar cada dificuldade separadamente.

7) Enriquece o programa regular de números quando usado como base para testes e jogos numéricos.

Frances Flournoy [6] sugere que exercícios como os seguintes desenvolverão a habilidade, na efetuação das computações, em aritmética mental:

1) Aprendizagem de formas práticas e simplificadas para a adição, subtração, multiplicação e divisão de pequenos números sem o auxílio de papel e lápis.

2) Prática na solução de problemas, lidos no livro-texto pela criança, com números pequenos para respostas exatas, sem papel e lápis.

3) Prática na solução mental de problemas com números simples, lidos pelo professor e ouvidos pela criança.

4) Aprendizagem de quando usar números arredondados e de quando usar números exatos.

5) Prática na estimativa de respostas de problemas.

6) Experiência em selecionar as medidas de referência mais usuais; aprendizagem de como usar as mesmas e de como interpretar as medidas não-familiares.

7) Prática em leitura e uso de tabelas, gráficos e escalas.

d. ENSINO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ÀS CRIANÇAS

Objetivos do Trabalho com Problemas Escritos

Por muitos anos, um dos principais objetivos da instrução em Aritmética tem sido ensinar às crianças resolver problemas escritos. Os propósitos dêste trabalho são:

1) Verificar a prontidão da criança para um nôvo trabalho a ser feito.

2) Determinar quão eficientemente ela usa os fatos numéricos e as habilidades computacionais.

3) Verificar e apurar seus conceitos sôbre as relações matemáticas.

[6] FLOURNOY (Frances), "Developing Ability in Mental Arithmetic", *The Arithmetic Teacher*, 4:147-150.
PETTY (Olan), "Non-Pencil-and-Paper Solution of Problems", *The Arithmetic Teacher*, 3:229-235.

4) Estimular o desenvolvimento de sua habilidade em aplicar processos numéricos e pensamentos quantitativos.

5) Desenvolver sua habilidade de fazer estimativas e aproximações.

6) Estender sua experiência aritmética e sua sensibilidade ao papel do número na vida diária.

Tipos de Problemas Escritos

Como já se disse prèviamente, a solução de problemas reais que surgem na vida da escola e da comunidade oferece o mais valioso tipo de treino de pensamento quantitativo. Os problemas aritméticos que os livros-texto apresentam descrevem situações semelhantes àquelas que surgem na vida diária. Para resolvê-los, a criança é levada a proceder passo a passo para encontrar a resposta, como faria na solução de um problema real. As situações descritas devem ser de tal forma relacionadas que apresentem, num cenário natural, as relações quantitativas a serem desenvolvidas na instrução aritmética. A experiência adquirida na solução de vários problemas sôbre aspectos de uma situação provàvelmente se transfere para novas situações a serem encontradas.

Outros tipos adicionais de problemas encontrados em livros-texto consistem de grupos baseados em tópicos, gravuras, tabelas, gráficos, diagramas e outras formas de apresentação de informações quantitativas. Um tópico sôbre o qual um grupo de problemas é baseado pode referir-se a algum aspecto da Aritmética, tais como encontrar o perímetro de retângulos ou aplicações de decimais. Quando os problemas são agrupados de acôrdo com algum tópico, é possível prover experiência de pensamento sôbre um amplo aspecto da Aritmética. Quando os problemas são baseados em tabelas, gráficos, diagramas ou alguma outra forma de apresentação de dados, oferecem excelente prática na leitura de materiais semelhantes encontrados em variadas fontes impressas em tôdas as áreas curriculares.

Às vêzes, grupos de problemas não-relacionados são encontrados nos livros-texto com o objetivo de prática na resolução de problemas ou com o propósito de teste. Êstes grupos são indubitàvelmente de menor valor que outros baseados nas situações descritas ou aquêles arranjados por tópicos.

Análise na Solução de Problemas

Para ler problemas inteligentemente, a criança deve ser capaz de analisá-los em seus elementos essenciais. Primeiramente ela deve ser capaz de identificar a questão-chave do problema para a qual se procura uma resposta. Segundo, ela deve determinar os fatos que são dados no problema. Terceiro, deve descobrir as relações entre o que é dado e o que se procura. Um problema sempre envolve a descoberta de alguma quantidade oculta, ou o uso de um conceito ou quantidade em uma situação que é descrita ou que possa ser fàcilmente imaginada. Às vêzes, os fatos necessários para a resolução de um problema são encontrados em sentenças que acompanham o problema, ilustrações, gráficos, tabelas ou diagramas. A habilidade de ler êstes tipos de materiais está, assim, envolvida na resolução de problemas.

A criança deve ser levada a procurar, no problema, um padrão que lhe seja familiar e que possa usar para chegar à solução. Ela pode ràpidamente perceber, por exemplo, que um determinado problema requer a *união* de dois números, processo que aprendeu através de repetidas experiências envolvendo a adição dos números.

Quando uma criança menos dotada intelectualmente é capaz de ler um problema e identificar a questão a ser respondida e o processo a ser usado para achar a resposta, ela se sente segura.

Os problemas devem ser expressos em linguagem simples e clara, de modo que a dificuldade de leitura não seja o principal fator envolvido. Numa classe de quinta série de nível intelectual mais baixo, em vez de se pedir às crianças para resolver problemas apropriados para crianças de inteligência normal, deve-se-lhes dar problemas adequados às crianças que estejam em uma ou duas séries inferiores à quinta. Às vêzes, essas crianças mais lentas necessitam de ajuda especial na leitura dos problemas escritos. O tipo de resposta [7] nas soluções de problemas deve ser verificado cuidadosamente. Exercícios adequados de prática podem ser encontrados nos livros-texto e livros de exercícios para as séries inferiores, ou em tipos especiais de material suplementar. Depois que a criança experimenta sucesso na resolução dêstes problemas mais fáceis, ela se sente mais disposta para atacar tipos mais difíceis encontrados em seu próprio livro-texto.

Variedade de Soluções Possíveis na Resolução de Problemas

A habilidade de sugerir diversas maneiras de resolver um problema é bom índice da compreensão que a criança tem da situação apresentada no problema. Para ilustrar:

Quando uma classe foi levada a descobrir diferentes métodos de calcular o perímetro de uma tábua retangular, os seguintes procedimentos foram propostos:

1) Usar um cordão para achar a distância em volta da tábua e medir o cordão com uma régua.

2) Medir o perímetro com uma trena.

---

[7] ULLRICH (Anna), "Labeling Answers to Arithmetic Problems", *The Arithmetic Teacher*, 2:148-153.

3) Usar uma régua ou trena para encontrar o comprimento de cada lado. Depois, somar os comprimentos dos quatro lados.

4) Encontrar o comprimento e a largura da tábua, somar êstes dois números e depois multiplicar a soma por 2.

5) Somar duas vêzes o comprimento e duas vêzes a largura.

Está visto que tais procedimentos vão desde os mais simples métodos objetivos, usados por qualquer criança, até os dois planos que mostram um alto nível de pensamento quantitativo. Às crianças mais bem dotadas deve-se mostrar como expressar, por meio de fórmula, os planos 4 e 5, e depois dar-lhes alguns problemas para resolverem, problemas nos quais tais fórmulas possam ser aplicadas. Indubitàvelmente o pensamento requerido para descobrir várias maneiras de resolver um dado problema é muito mais valioso que o usado na solução de um grupo de problemas, todos envolvendo o mesmo princípio básico.

Orientação na Resolução de Problemas

Para ajudar as crianças na resolução de grupos de problemas isolados, o professor deve fazer perguntas que as ajudem a descobrir a relação entre os fatos dados e a quantidade oculta a ser encontrada. Podemos ilustrar a técnica de perguntas a ser usada para ajudar as crianças a entender e resolver os seguintes problemas:

"1) Maria quer comprar 9 laranjas para uma festa. Ela pode comprá-las à razão de 3 por Cr$ 150. Quanto custariam as laranjas que Maria deseja?"

Que é que o problema pede seja encontrado?

Quantas laranjas Maria quer comprar?

Que você deve saber para encontrar o preço de 9 laranjas?

O problema lhe diz quanto custa uma laranja?

Que significa a expressão "à razão de"?

O problema diz alguma coisa que você pode usar para encontrar o preço de uma laranja? Qual é a questão oculta a que você deve responder?

Como pode você encontrar o custo de uma laranja?

Sabendo o custo de uma laranja e o número de laranjas que Maria deseja, como você encontraria o custo de tôdas as laranjas? De que depende a resposta da questão?

"2) Um jardim tem 12 m de comprimento e 10,5 m de largura. Qual é o perímetro do jardim?"

Qual é a pergunta do problema?

Que se entende pela palavra *perímetro*?

Que deve você saber para encontrar a distância à volta do jardim?

Que significa a palavra *dimensão*?

Que informações o problema lhe dá sôbre o jardim?

Quantos lados tem o jardim? Faça um desenho do jardim mostrando suas dimensões.

Quando se sabe o comprimento e a largura de um jardim, como se faz para encontrar a distância à volta dêle? De que depende a distância à volta do jardim?

Como será expresso o perímetro?

Os exemplos dados acima ilustram os tipos de questões que o professor deve dar para ajudar as crianças a encontrarem a resposta para qualquer problema que não possam resolver. Deve-se dar especial atenção à significação dos têrmos usados no problema e às relações básicas nêle envolvidas, ajudando-se as crianças a descobrir tais relações. Deve-se ainda levar as crianças a ver que a resposta para a questão do problema sempre depende dos fatos ou informações que são dados e da situação que o problema apresenta.

A resolução de problemas [8] não pode ser ensinada como uma habilidade, uma vez que as condições nos problemas que se referem a situações sociais geralmente variam de problema para problema. A habilidade da criança em resolver problemas depende de sua inteligência, de suas habilidades de leitura, de sua compreensão das operações numéricas, e do conjunto de experiências que possui. O professor deve dar, contudo, especial ajuda no desenvolvimento do vocabulário, da leitura e dos processos de lidar com problemas tais como os descritos nas páginas que se seguem.

Identificação de Tipos Básicos de Problemas

Há conceitos fundamentais que ajudam a criança na identificação da operação a ser usada para a solução do problema. As relações básicas entre os números dados na exposição do problema podem ser determinadas pelo estudo da situação representada. Os principais tipos de problemas sôbre as quatro operações são:

1) *Problemas de adição*

a) Dois ou mais grupos são combinados para formar um grupo maior. Ex.: Maria tem três bonecas grandes e quatro bonecas pequenas. Quantas bonecas ela tem ao todo?

b) Algum ou alguns grupos são adicionados a um dado grupo formando um grupo maior. Ex.: Breno tinha Cr$ 5. Seu pai lhe deu Cr$ 10. Com quantos cruzeiros Breno ficou?

[8] SPITZER (H. P.) e FLOURNOY (Frances), "Developing Facility in Solving Verbal Problems", *The Arithmetic Teacher*, 3:177-183.

2) *Problemas de subtração,* que bàsicamente procuram diferenças entre números:

a) O tipo *resto.* Ex.: Maria tinha Cr$ 10. Gastou Cr$ 5. Quantos cruzeiros ela ainda tem?

b) O tipo *quantos mais são necessários.* Ex.: Artur quer comprar um brinquedo que custa Cr$ 500. Êle tem Cr$ 250. De quanto êle ainda precisa?

c) O tipo *comparação.* Ex.: João tem Cr$ 25. Dick tem Cr$ 15. Quanto dinheiro João tem a mais que Dick?

d) O tipo *número faltoso.* Ex.: Sara tinha 15 moedas. Cinco eram moedas de Cr$ 1, e as outras, de Cr$ 2. Quantas moedas de Cr$ 2 Sara tinha?

e) O tipo *quantos se foram.* Ex.: João tinha Cr$ 20. Gastou algum dinheiro e ficou com Cr$ 8. Quanto dinheiro êle gastou?

Finalmente a criança deve chegar à generalização de que a subtração é o processo que se deve usar quando a soma de dois números e um dêsses dois números são dados e se procura o outro número.

3) *Problemas de multiplicação,* nos quais usamos uma maneira abreviada para se encontrar um grupo igual à soma de vários grupos iguais. Ex.: Há 5 meninos num time. Quantos meninos há em 4 times?

4) *Problemas de divisão*

a) Achar o número de grupos iguais formados (bàsicamente subtração). Ex.: Quantos cadernos de Cr$ 50 posso eu comprar com Cr$ 200? (Cr$ 200 — Cr$ 50 — Cr$ 50 — Cr$ 50 — Cr$ 50; 4 cadernos).

b) Achar o tamanho de um grupo. Ex.: Há 20 crianças no pátio. Elas vão organizar-se em dois grupos para jogar. Quantas crianças ficarão em cada grupo?

Especialmente nas primeiras séries, o professor deve reforçar as idéias gerais que a adição envolve: *combinação* ou *união* de dois ou mais números, bem como a idéia geral da subtração: separação de um número em dois conjuntos. A criança deve também ser levada a ver que a multiplicação é um método abreviado de se encontrar o total de um certo número de grupos semelhantes, enquanto a divisão é, bàsicamente, um processo abreviado de subtração.

Deve-se pedir às crianças que usem fichas, diagramas, desenhos, dramatizações e outros recursos semelhantes para demonstrarem a significação da situação e o método de encontrar a resposta. A manipulação de objetos é uma valiosa ajuda na aprendizagem.

Uma boa maneira de se verificar a compreensão que a criança tem dêstes tipos de problemas é pedir que escreva problemas ilus-

Fazendo um mapa.

trando cada um dêstes tipos. Pode-se também apresentar à criança um grupo de diferentes tipos de problemas e pedir-lhe que identifique o processo a ser usado na procura da resposta, bem como explique como pode ela identificar tal processo pela análise do problema. Êstes tipos de problemas podem também constituir a base de exercícios orais. Problemas com pequenos números podem ser ditados pelo professor, ilustrando tipos selecionados de exemplos. Nos seus papéis as crianças devem escrever sòmente as respostas. Uma rápida verificação permitirá ao professor identificar os tipos sôbre os quais há ainda alguma confusão.

Desenvolvimento de Conceitos Matemáticos Básicos Para a Resolução de Problemas

Sob a direção do professor, as crianças descobrem prontamente muitos dos conceitos e relações matemáticos que são envolvidos na resolução de problemas. Um dos mais simples dêsses conceitos é a relação entre litro, meio litro e quarto de litro. Para desenvolver tais conceitos, o professor deve providenciar vasos ou recipientes adequados. E depois, despejando o conteúdo de um recipiente pequeno em outro maior e vice-versa, as relações serão descobertas. Tais conceitos são aplicados na solução de problemas que envolvem a mudança de unidades pequenas para unidades maiores ou vice-versa.

Da mesma maneira, outras relações como as seguintes podem ser desenvolvidas:

Centavo-cruzeiro
Are-hectare-alqueire
Milímetro-centímetro-decímetro-metro
Segundo-minuto-hora
Milímetro quadrado-centímetro quadrado-decímetro quadrado-metro quadrado.

Relações mais difíceis como as seguintes devem também ser desenvolvidas através de muitas e variadas experiências significativas:

Custo-número de objetos-preço
Distância-velocidade-tempo
Perímetro-comprimento-largura
Quociente-divisor-dividendo
Escala-tamanho do diagrama.

Todos êstes conceitos básicos estão envolvidos na resolução de problemas. Por exemplo, as crianças devem reconhecer relações tais como as seguintes para o conceito distância-velocidade-tempo:

1) *Distância* = velocidade $\times$ tempo, ou $d = vt$

2) *Velocidade* = distância $\div$ tempo, ou $v = d \div t$, ou $v = d/t$.

3) *Tempo* = distância $\div$ velocidade, ou $t = d \div v$, ou $t = d/v$.

Em uma série mais adiantada, a fórmula dada em 1 pode ser resolvida usando lêtras, sem primeiro transformá-la nas fórmulas dadas em 2 e 3. Um alto nível de pensamento quantitativo é requerido quando as crianças aprendem a resolver problemas envolvendo qualquer dos conceitos acima enumerados, substituindo-se os valôres por lêtras dadas nas fórmulas básicas, como é feito nos processos algébricos.

e. NECESSIDADE DO ENSINO DA LEITURA EM ARITMÉTICA

Habilidades de Leitura Requeridas em Aritmética

Estudantes bons ou fracos na resolução de problemas não diferem significativamente em habilidades de leitura específica usadas na leitura de materiais literários, como os incluídos no Teste Geral de Leitura de Gates.[9] Contudo, êles diferem significativamente em habilidades de leitura específica requeridas na resolução de problemas, habilidades de leitura estas comumente incluídas entre as *dificuldades na resolução de problemas*. Evidentemente é necessário dar especial atenção ao ensino de crianças que são fracas em habilidades de leitura específica envolvidas na resolução de problemas.

Os modernos livros-texto de Aritmética, bem como os livros de exercícios, contêm às vêzes grande variedade de excelentes exercícios de leitura, os quais desenvolvem as habilidades de leitura requeridas pelo trabalho em Aritmética, especialmente nos campos de vocabulário e resolução de problemas. No planejamento do trabalho corretivo, os professôres não devem hesitar sôbre o uso dêsses exercícios, sempre que os mesmos forem convenientes. Deve-se começar com exercícios que estejam abaixo do nível de dificuldade de problemas que as crianças podem resolver razoàvelmente bem e, então, progredir gradualmente para exercícios mais difíceis, encontrados nos livros-texto e nos livros de exercícios das séries que se sucedem.

O esquema abaixo relaciona uma série de habilidades de leitura que um bem elaborado programa de Aritmética deve estabelecer:

1) Habilidade de ler números e compreender sua significação

a) Compreensão do valor de lugar em números arábicos, como 327 ou 3,463

[9] TREACY (J. P.), "The Relationship of Reading Skills to the Ability to Solve Problems", *Journal of Educational Research*, 38:86-98.
HANSEN (C. W.), "Factors Associated with Successful Achievement in Problem Solving in Sixth Grade Arithmetic", *Journal of Educational Research*, 38:117-118.

b) Significação do 0 em números tais como 20, 9603, 0,6, 4,0 e 3,06

2) Leitura usada na aprendizagem das operações numéricas

a) Conhecimento dos símbolos das operações, como +, −, × etc.

b) Estudo de exemplos-modelos e explicações de processos novos no livro-texto

3) Conhecimento do vocabulário de Aritmética

a) Significação de têrmos matemáticos técnicos, tais como algarismo, adicionar e numerador

b) Significação do vocabulário quantitativo relacionado às aplicações sociais da Aritmética, tais como selos, preço, taxa, densidade de população, área etc.

4) Habilidades básicas envolvidas na leitura e resolução de problemas no livro-texto

a) Compreensão da significação dos itens e declarações contidos em um problema e a habilidade de visualizar a situação apresentada

b) Leitura necessária para o desenvolvimento dos passos geralmente seguidos na resolução de problemas:

(1) Qual a questão que o problema me pede para responder?

(2) Que fatos são dados no problema? Há necessidade de outras informações?

(3) Que passos seguir para resolver o problema? (É necessário ver, num problema, as relações entre os fatos para determinar os passos a serem seguidos na procura da resposta.)

(4) É a minha resposta razoável?

c) Localização da informação não-declarada no problema, mas necessária à sua solução:

(1) Exame de tabelas, gráficos, mapas, gravuras etc.

(2) Consulta ao índice do livro-texto

(3) Verificação de horários, fórmulas, planos, mapas etc.

5) Habilidades de leitura envolvidas no uso de instrumentos de medir

a) Leitura do calendário, relógio, termômetro, régua

b) Enriquecimento de significações devido ao conhecimento do sentido histórico e social de inventos usados em medidas, tais como dinheiro, relógios ou termômetros

6) Leitura e interpretação de vários tipos de tabelas estatísticas, tais como as encontradas nos livros-texto, livros de referência e outras fontes impressas

7) Leitura e interpretação de gráficos onde quer que sejam encontrados

8) Leitura e interpretação de elementos quantitativos incluídos em diagramas, cartazes, horários, mapas, planos e gravuras

9) Habilidades de leitura envolvidas na obtenção de informações seguras contidas em fontes impressas no estudo das aplicações sociais da Aritmética.

Ensino da Leitura de Tabelas

Para ensinar as crianças como ler tabelas, os livros-texto contêm, às vêzes, grupos de problemas onde as crianças devem localizar os dados necessários em uma tabela que acompanha os problemas.

A tabela é uma forma concisa e sistemática de apresentar informações fatuais. Ao ler uma tabela, como a que se vê logo abaixo, a criança deve ser levada a ver que, nela, pode perceber as relações entre os números mais prontamente que se tivesse de ler um parágrafo no qual os dados fôssem discutidos. O ensino da leitura de tabelas, como as encontradas nos livros de referência e em outros materiais impressos, deve ser considerado um elemento integral de instrução na resolução de problemas.

PADRÕES PARA UMA CORRIDA DE 45 M
(em segundos)

Idades	Meninos	Meninas
13	7,8	8,8
12	8,2	9,0
11	8,6	9,4
10	9,0	9,8

Para ter capacidade de ler uma tabela, a criança deve entender como a mesma é construída e ser capaz de interpretar os dados. A fim de achar respostas para questões baseadas nos dados de uma tabela, as crianças têm de pensar quantitativamente à semelhança do que fazem quando se empenham na resolução de problemas. Antes de se pedir às crianças que resolvam um grupo de problemas baseados nos dados de uma tabela, deve-se discutir tais dados para esclarecer seu conteúdo significativo e reduzir as dificuldades de leitura dos problemas. Por exemplo, uma questão pode chamar a atenção da classe para o cabeçalho da tabela acima. A significação de *padrão* e de *uma corrida de 45 m* deve ser discutida. O uso de padrões em esporte deve ser assinalado. Depois, levar as crianças a ver que, à esquerda da tabela, estão, em seqüência, as idades de crianças geralmente encontradas das quinta à oitava séries. Os alunos devem descobrir que, para cada idade, o tempo é dado em segundos para ambos, meninos e meninas. Uma questão pode ser levantada: Como os décimos de segundo são medidos? O funcionamento de um cronômetro pode ser demonstrado, se houver, é claro, algum cronômetro possível. Os padrões para meninos e meninas de 10 anos devem ser comparados e, depois, a comparação deve ser feita com outras idades. Pela leitura dos dados para meninos e meninas de diferentes idades, podem-se