

GASPAR DE FREITAS

**LIÇÕES PRÁTICAS DE
ARITMÉTICA, GEOMETRIA E DESENHO**

Para uso de tôdas as classes primárias

COM O PROGRAMA DO

EXAME DE ADMISSÃO



Livraria FRANCISCO ALVES

150
GASPAR DE FREITAS

LIÇÕES PRÁTICAS DE

**ARITMÉTICA
GEOMETRIA
E DESENHO**

CENAT
DIGITALIZADO

(Com grande número de exercícios)

Para uso de tôdas as classes primárias

COM O PROGRAMA DO

EXAME DE ADMISSÃO

ao CURSO SECUNDÁRIO e ao CURSO COMERCIAL

27.^a EDIÇÃO



1957

LIVRARIA FRANCISCO ALVES
EDITORA PAULO DE AZEVEDO LTDA.
166, RUA DO OUVIDOR — RIO DE JANEIRO
S. PAULO | BELO HORIZONTE
292, Rua Libero Badaró | Rua Rio de Janeiro, 655

ARITMÉTICA

(Ciência que se ocupa dos números, ensinando-nos a calcular por meio de algarismos)

1.º PONTO — Quantidade. Unidade. Número

1. **Quantidade** ou *grandeza* é tudo aquilo que pode aumentar ou diminuir. Exemplos: *um saco de café, um monte de pedras, etc.*

Também se pode dizer que *quantidade* ou *grandeza* é tudo aquilo que se pode pesar, medir ou contar.

2 e 3. Dá-se particularmente o nome de *quantidade* à *grandeza* expressa em números. Assim: *um monte de pedras* é propriamente uma *grandeza*, e *um cento de pedras* é propriamente uma *quantidade*.

4. As palavras *grandeza* e *quantidade* empregam-se geralmente como sinônimas.

5. As quantidades podem ser homogêneas e heterogêneas.

6. **Quantidades homogêneas** são as quantidades da mesma espécie. Exemplo: 2 livros, 4 livros, 7 livros.

7. **Quantidades heterogêneas** são as de espécies diferentes. Exemplo: 2 livros, 3 cadeiras e 4 laranjas.

8 e 9. Só se podem somar quantidades homogêneas.

10. As *grandezas* também podem ser contínuas e descontínuas.

11. **Grandezas contínuas** são as que constam de partes ligadas entre si. Exemplos: *uma folha de papel, uma tábua, um copo, etc.*

12. **Grandezas descontínuas** são as que constam de partes distintas, isto é, separadas uma das outras. Exemplos: *uma porção de tábuas, um monte de pedras, um cesto de laranjas, etc.*

A *grandeza* descontínua é uma reunião de *grandezas* contínuas.

13. *Medir uma grandeza* é compará-la com outra *grandeza* conhecida e da mesma espécie, à que se dá o nome de *unidade*.

14 e 15. **Unidade** é a *grandeza* conhecida com a qual se comparam tôdas as outras *grandezas* da mesma espécie. A palavra *unidade* quer dizer *uma só coisa*.

16. A *unidade* pode ser determinada e indeterminada.

17. Chama-se *determinada* quando é fornecida pela natureza da *grandeza* que se quer medir. Assim: num monte de tábuas a *unidade* é a tábua, num monte de pedras a *unidade* é a pedra.



505



18. Chama-se *indeterminada* ou *arbitrária* quando pode ser tomada maior ou menor. Assim, para medir um comprimento, a unidade pode ser o quilômetro, o metro, o palmo, o pé, a polegada, etc.

19 e 20. Nas grandezas descontínuas a unidade é sempre determinada. Nas grandezas contínuas a unidade é arbitrária.

21. As unidades também podem ser simples e coletivas.

22. *Unidade simples* é a que representa uma só coisa que não pode ser dividida em partes inteiras.

23. *Unidade coletiva* é a que representa uma reunião de unidades simples. Exemplos: *dezena, dúzia, quarteirão, cento* ou *centena, grossa, milho* ou *milhar, etc.*

24 e 25. Os ovos contam-se geralmente às dúzias, e as laranjas aos centos.

26 e 27. Se dissermos comprei 144 lápis, estamos empregando a unidade simples; se dissermos comprei uma grossa de lápis, estamos empregando a unidade coletiva.

1. Que é *quantidade* ou *grandeza*? — 2 e 3. A que se dá particularmente o nome de *quantidade*? — Dê exemplos de grandezas e de *quantidades*. — 4. Como se empregam geralmente as palavras *grandeza* e *quantidade*? — 5. Como podem ser as *quantidades*? — 6. Que são *quantidades homogêneas*? Dê exemplos. — 7. Que são *quantidades heterogêneas*? Dê exemplos. — 8 e 9. As *quantidades homogêneas* podem ser somadas? — ... e as *heterogêneas*? — 10. Como podem ser as *grandezas*? — 11. Que são *grandezas contínuas*? Dê exemplos. — 12. Que são *grandezas descontínuas*? Dê exemplos. — 13. Que é *medir* uma *grandeza*? — 14 e 15. Que é *unidade*? — Que significa a palavra *unidade*? — 16. Como pode ser a *unidade*? — 17. Quando é que se chama *determinada*? Dê exemplos. — 18. Quando é que se chama *indeterminada* ou *arbitrária*? Dê exemplos. — 19 e 20. Qual é a *unidade das grandezas descontínuas*? — E a das *grandezas contínuas*? — 21. Como podem ser ainda as *unidades*? — 22. Que é *unidade simples*? — 23. Que é *unidade coletiva*? — Dê exemplos. — 24 e 25. Como se contam geralmente os ovos? — ... e as *laranjas*? — 26 e 27. Se dissermos comprei duas dúzias de sardinhas, empregamos a *unidade simples* ou a *coletiva*? — E se dissermos comprei 24 sardinhas?

1. Número é o que exprime a medida de uma grandeza; é o que exprime quantas unidades há numa quantidade.

2. Os números dividem-se em pares e ímpares; simples e compostos; concretos e abstratos; consecutivos e não consecutivos; primos e múltiplos; inteiros, quebrados e mistos; etc.

3. *Números pares* são os que terminam em 2, 4, 6, 8 ou 0. Os números pares, sendo divididos por 2, não deixam resto. Exemplos de números pares: 8, 52, 104, 1 000, 1 006, etc.

4. *Números ímpares* são os que terminam em 1, 3, 5, 7, ou 9. Os números ímpares, sendo divididos por 2, deixam resto 1. Exemplos de números ímpares: 21, 63, 85, 207, 409, etc.

5 a 7. *Números simples* ou *dígitos* são os que constam de um só algarismo. Os números simples ou dígitos são nove: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.

8. *Números compostos* são os que constam de 2 ou mais algarismos: 10, 275, 40 572, etc.

9. *Números concretos* são os que vêm acompanhados do nome dos seres a que se referem. Exemplos: 7 laranjas, 28 alunos, 15 casas, etc.

10. *Números abstratos* são os que não vêm acompanhados de nome algum. Exemplos: 7, 28, 15, etc.

11 a 14. *Números consecutivos* são os que diferem do seu antecedente ou do seu conseqüente apenas em uma unidade. Exemplo: 4, 5, 6.

Uma série de números consecutivos pode ser crescente ou decrescente; é crescente quando vai aumentando, e decrescente quando vai diminuindo.

Série crescente: 5, 6, 7, 8, 9, etc.

Série decrescente: 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, etc.

15. *Números não consecutivos* são os que diferem do seu antecedente ou do seu conseqüente em mais de uma unidade. Exemplo: 14, 19, 25, 31, etc.

16 e 17. *Número primo* é o que só pode ser dividido exatamente por si ou por 1. Exemplo: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, etc.

18. *Números primos entre si* são os que só têm para divisor comum a unidade. Ex.: 21 e 25; 33 e 34, etc.

19 a 21. *Número múltiplo* é o que resulta da *multiplicação* de dois ou mais números diferentes de 1 e por isso pode ser dividido exatamente por esses números. Assim: 15 é número múltiplo, porque é o produto de 3 por 5, podendo, portanto, ser dividido por 3 e por 5; diz-se que 15 é múltiplo de 3 e de 5. Do mesmo modo, 20 é múltiplo de 4 e de 5; 12 é múltiplo de 2, 6, 3 e 4; etc.

22. *Número inteiro* é o que se compõe de unidades inteiras; exemplo: 4 laranjas, 5 livros, etc.

23. *Número quebrado* ou *fração* é uma ou mais partes iguais da unidade. Exemplo: 2/3 de uma melancia são duas partes de uma melancia dividida em 3 partes iguais; 3/4 de hora, etc.

24 e 25. *Número misto* é o que se compõe de um número inteiro e de uma fração. Exemplo: 5 quilos e meio (5 1/2), 3 horas e um quarto (3 1/4), etc.

26 e 27. A *série dos números inteiros* não tem limites porque, por muito elevado que seja um número, é sempre possível acrescentar-lhe uma unidade e, portanto, formar outro número ainda maior.

1. Que é número? — 2. Como se dividem os números? — 3. Quais são os números pares? Dê exemplos. — 4. Que são números ímpares? Dê exemplos. — 5 a 7. Que são números sim-

ples? — Que outro nome têm os números simples? — Dê exemplos de números simples. — 8. Que são números compostos? — Dê exemplos. — 9. Que são números concretos? Dê exemplos. — 10. Que são números abstratos? Dê exemplos. — 11 a 14. Que são números consecutivos? Dê exemplos. — Como pode ser a série de números consecutivos? — Dê exemplo de uma série crescente. — Dê exemplo de uma série decrescente. — 15. Que são números não consecutivos? Dê exemplos. — 16 e 17. Que é número primo? Dê exemplos. — Quais são os números primos até 35? — 18. Que são números primos entre si? Dê exemplos. — 19 a 21. Que é número múltiplo? Dê exemplos. — Por que é que 8 é número múltiplo? — Dê mais exemplos de números múltiplos. — 22. Que é número inteiro? Dê exemplos. — 23. Que é número quebrado ou fração? Dê exemplos de frações. — 24 e 25. Que é número misto? Dê exemplos. — Que outro nome tem? — 26 e 27. Quantos são os números inteiros? — Por que é que a série de números inteiros é ilimitada?

2.º PONTO — Algarismos. Numeração: unidades das diversas ordens, leitura e escrita dos números inteiros

1 e 2. **Algarismos** são sinais com que abreviadamente se representam os números. Há duas espécies de algarismos: *arábicos* e *romanos*.

3 e 4. Os **algarismos arábicos** são 10: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 0. Chamam-se arábicos porque foram os árabes que os introduziram na Europa.

5 a 8. Os 9 primeiros algarismos arábicos chamam-se *significativos* porque cada um tem o seu valor determinado. Também se chamam *dígitos* (do latim *digitus*, que significa *dedo*), porque foi pelos dedos que o homem começou a contar.

9 a 13. O último algarismo arábico chama-se *cifra* ou *zero*, que quer dizer *nada*, porque por si só não representa valor algum; quando se emprega serve para indicar que o número não tem unidades de certa ordem. O seu emprêgo é, pois, indispensável na numeração porque ocupa os lugares onde não há valores para representar.

14 e 15. Os algarismos romanos constam de 7 letras maiúsculas do nosso alfabeto. Essas letras são:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1 000

16. É bom notar que número e algarismo não são a mesma coisa. O número exprime a medida de uma grandeza e pode ser representado por um ou mais algarismos. Algarismos são sinais que servem para representar os números. Assim, 524 é um número composto de 3 algarismos.

Damos na página 12 as regras a que é preciso atender na numeração romana.

1 e 2. Que são *algarismos*? — Quantas espécies de algarismos há e como se chamam? 3 e 4. Quantos e quais são os algarismos arábicos? — Por que se chamam arábicos? — 5 a 8. Que nomes se dão aos 9 primeiros algarismos arábicos? — Por que se chamam significativos? — Por que se chamam dígitos? — Onde provém a palavra dígito? — 9 a 13. Que nome se dá ao último algarismo arábico? — Que quer dizer a palavra zero? — Que valor representa por si só? — Para que serve então? — O seu uso é indispensável na numeração? — Por quê? — 14 e 15. De que constam os algarismos romanos? — Quantas e quais são essas letras e que valores têm? — 16. Que diferença há entre número e algarismo?

1. **Numeração** é a arte de exprimir e representar todos os números.

2. A numeração divide-se em falada e escrita.

3. **Numeração falada** é a arte de exprimir todos os números com uma pequena quantidade de palavras, convenientemente escolhidas e combinadas.

4. **Numeração escrita** é a arte de representar ou escrever todos os números com uma pequena quantidade de sinais.

5. **Numeração falada.** — Os 9 primeiros números exprimem unidades simples.

6. O número que segue a 9 chama-se *dez*, *dezena*, ou *unidade de 2.ª ordem*. Por outras palavras, *dez unidades simples formam uma dezena*.

7 e 8. A *dezena* é uma unidade coletiva. É uma unidade de 2.ª ordem. Os nomes das dezenas são: dez, vinte, trinta, quarenta, cinqüenta, sessenta, setenta, oitenta, noventa.

9 e 10. O número que segue a 99 chama-se *cem*, *centena* ou *unidade de 3.ª ordem*. Por outras palavras, *dez dezenas formam uma centena*.

11 e 12. A *centena* é uma unidade coletiva; é uma unidade de 3.ª ordem. Os nomes das centenas são: cem, duzentos, trezentos, quatrocentos, quinhentos, seiscentos, setecentos, oitocentos e novecentos.

13 a 15. O número que segue a 999 chama-se *mil, milhar, milheiro* ou *unidade de 4.ª ordem*. Por outras palavras: *dez centenas formam um milhar*.

16 a 20. Dêste modo de grupar os números se deduz o **princípio fundamental da numeração**, que é o seguinte: *dez unidades de uma ordem qualquer formam uma unidade de ordem imediatamente superior*. Assim:

- 10 unidades formam uma dezena;
- 10 dezenas formam uma centena;
- 10 centenas formam um milhar; etc.

21. *A reunião de 3 ordens ou casas forma uma classe*.

22 a 26. Mil unidades de uma classe qualquer formam uma classe imediatamente superior. Assim:

- 1 000 unidades simples formam um milhar;
- 1 000 milhares formam um milhão;
- 1 000 milhões formam um bilhão, etc.

27. **Nomes das ordens:** unidade, dezena, centena.

28. **Nomes das classes:** unidades, milhares, milhões, bilhões, trilhões, quadrilhões, quintilhões, sextilhões, setilhões, octilhões, nonilhões, decilhões, etc.

- 1. Que é *numeração*? — 2. Como se divide a numeração?
- 3. Que é *numeração falada*? — 4. Que é *numeração escrita*?
- 5. Quais são os números que exprimem *unidades simples*? — 6. Como se chama o número que segue a 9? — 7 e 8. A *dezena* é unidade simples ou coletiva? — Diga os nomes das dezenas. — 9 e 10. Como se chama o número que segue a 99? — *Dez* de-coletiva? — Diga os nomes das *centenas*. — 13 a 15. Como se chama o número que segue a 999? — *Dez centenas* o que for-mam? — Diga os nomes dos milhares. — 16 a 20. Que prin-cípio se deduz dêste modo de grupar os números? — Diga o prin-cípio fundamental da numeração. Explique isso. — *Quantas de-zenas há em uma centena?* — E em 27 centenas? — E em 1 mi-lhar? — 21. Que nome se dá à reunião de 3 ordens ou casas? — 22 a 26. Mil unidades de uma classe qualquer o que formam? Explique isso. — Um milhão quantos milhares tem? — E 15 mi-lhões? — E 76 milhões? — Quantos milhões há em 1 bilhão? — 27. Diga os nomes das diversas ordens. — 28. ...das diversas classes.

1. Numeração escrita. Na numeração arábica bas-tam 10 sinais para representar todos os números.

2. Os sinais que representam os números chamam-se *algarismos*.

3. O **princípio fundamental da numeração escrita** é o seguinte: *qualquer algarismo escrito à esquerda de outro representa unidades 10 vezes maiores do que se occupasse o lugar dêste outro*.

4. Os algarismos significativos têm 2 valores: *absoluto e relativo*.

5 e 6. *Valor absoluto* de um algarismo é o que é atribuído à sua forma. *Valor relativo* ou de posição, é o que depende do lugar que êle occupa no número.

7 a 10. Assim, no número 77, o valor absoluto de cada algarismo é 7, mas o 7 que fica à esquerda, como occupa a casa das dezenas, tem o valor relativo de 70 (que são 7 dezenas). No número 754, o valor relativo do 7 é 700.

11. O zero não tem valor algum, nem absoluto nem relativo; serve para ocupar as casas ou classes onde não há valores para representar.

12. Para escrever números inteiros, colocam-se se-guidamente, da esquerda para a direita, os algarismos que exprimem centenas, dezenas e unidades de cada classe, substituindo-se por zeros as ordens que faltarem. Assim, o número 3 milhões, 5 milhares e 2 unidades es-creve-se 3 005 002.

- 1. Na numeração arábica, de quantos sinais precisamos para escrever todos os números? — 2. Como se chamam os sinais que representam os números? — 3. Qual é o princípio fundamental da numeração escrita? — 4. Quantos valores têm os algarismos significativos? — 5 e 6. Que é *valor absoluto* de um algarismo? — Que é *valor relativo* de um algarismo e que outro nome tem? — 7 a 10. Qual é o valor relativo de 7 no número 710? — Qual é o valor relativo de 8 no número 871? — E no número 284? — Qual é o valor relativo do zero no número 710? — 11. Para que serve o zero? — 12. Qual é a regra para escrever números inteiros?

Exercício 1 — *Escrever os seguintes números:* oitocentos e trinta e um; vinte mil e quatro; dez mil e cinco; três milhões e trinta e dois; um trilhão e um bilhão; um quadrilhão e quinhentos; dois bilhões e setenta; duzentas e quarenta dezenas; cem dezenas; cinco trilhões e cinco dezenas; cinqüenta milhares de centenas; oito dezenas de milhar; quarenta e sete centenas de milhão.

Leitura de números

1 e 2. Para ler um número de 2 ou 3 algarismos, nomeia-se sucessivamente cada algarismo a começar pela esquerda, acrescentando-se-lhe o nome da ordem ou casa que ocupa. Assim, o número 657 lê-se: 6 centenas, 5 dezenas e 7 unidades, ou seiscentos e cinqüenta e sete unidades, visto já sabermos que 6 centenas são seiscentos, e 5 dezenas são cinqüenta.

3 a 9. Para ler um número com mais de 3 algarismos, é preciso dividi-lo em grupos ou classes de 3 algarismos, da direita para a esquerda, podendo a última classe à esquerda ter menos de 3 algarismos; em seguida dá-se a cada classe a sua denominação, também da direita para a esquerda, na seguinte ordem: *unidades, milhares, milhões, bilhões, trilhões, quadrilhões*, etc.; começando depois pela esquerda, lê-se cada classe, acrescentando-se-lhe a sua respectiva denominação.

Seja o número 53 456 827 450 674 952 071. De acôrdo com a regra, dividimo-lo em classes de 3 algarismos, da direita para a esquerda, e leremos: 53 quintilhões, 456 quadrilhões, 827 trilhões, 450 bilhões, 674 milhões, 952 milhares e 71 unidades.

10. **Escrita e leitura de quantias.** — A palavra *quantia* significa qualquer quantidade de dinheiro.

11 e 12. A unidade do sistema monetário brasileiro é o **Cruzeiro**, que se divide em *100 centavos*.
13 e 14. O **Cruzeiro**, que corresponde ao antigo *mil réis*, foi instituído pelo Decreto-lei n.º 4 791, de 5 de Outubro de 1942.

15 a 17. **Escrita de quantias.** — Para indicar que um número exprime dinheiro brasileiro, emprega-se a primeira da palavra *Cruzeiro* ligada ao cifrão). Para separar a parte inteira (cruzeiros) da parte decimal (centavos) foi adotada a vírgula. Assim: a quantia 2 cruzeiros escreve-se Cr\$ 2,00; a quantia trinta cruzeiros e trinta centavos escreve-se Cr\$ 30,30.

18. **Leitura de quantias.** — Para ler um número expresso em cruzeiros, lê-se primeiro a parte inteira acrescentando-se-lhe a palavra *cruzeiro* ou *cruzeiros*, e depois a parte decimal (se houver) acrescentando-se-lhe

a palavra *centavos*. Assim: Cr\$ 50,00 lê-se 50 cruzeiros; Cr\$ 5,80 lê-se 5 cruzeiros e oitenta centavos.

Conversão da antiga moeda na moeda atual. — Para escrever em cruzeiros as quantias escritas em réis, escreve-se antes do número o símbolo *Cr\$*, substitui-se o cifrão por vírgula e subprime-se o último algarismo. Se houver pontos a separar classes de algarismos, devemos substituí-los por pequenos espaços. Assim:

\$050	equivale a	Cr\$ 0,05 (5 centavos)
\$100	" "	Cr\$ 0,10 (10 centavos)
\$200	" "	Cr\$ 0,20 (20 centavos)
\$300	" "	Cr\$ 0,30 (30 centavos)
\$400	" "	Cr\$ 0,40 (40 centavos)
\$500	" "	Cr\$ 0,50 (50 centavos)
\$600	equivale a	Cr\$ 0,60 (60 centavos)
1\$000	" "	Cr\$ 1,00 (1 cruzeiro)
5\$000	" "	Cr\$ 5,00 (5 cruzeiros)
500\$000	" "	Cr\$ 500,00 (500 cruzeiros)
1:000\$000	" "	Cr\$ 1 000,00 (mil cruzeiros)
5:000\$000	" "	Cr\$ 5 000,00 (5 mil cruzeiros)
1 000:000\$000	" "	Cr\$ 1 000 000,00 (1 milhão de cruzeiros)

Não há moeda de valor inferior a 10 centavos. Nos pagamentos e recebimentos, se houver frações de 10 centavos, desprezam-se as que forem inferiores a 5 centavos, e consideram-se como 10 centavos as que forem iguais ou superiores a 5 centavos.

1 e 2. Qual é a regra para ler um número de 2 ou 3 algarismos? — Como se lê o número 756? — 3. Como se lê um número com mais de 3 algarismos? — 4. Como se lê o número 3 704 694 518? — 5. Diga os nomes das 12 primeiras classes. — 6. Leia o número 827 345. — 7. Qual a classe e a ordem mais elevadas de um número de 5 algarismos? — 8. Idem de um número de 3 algarismos? — 9. (O professor fará idêntica pergunta relativamente a números de 15, 13, 7, 11, 17, etc. algarismos). — 10. Que significa a palavra *quantia*? — 11. Qual é a unidade do sistema monetário brasileiro? — 12. Como se divide o cruzeiro? — 13 e 14. A que corresponde o cruzeiro e quando foi instituído? — 15. Que símbolo se emprega para indicar que um número exprime dinheiro brasileiro? — 16. Como é constituído esse símbolo? — 17. Que sinal se emprega para, nos números, separar cruzeiros de centavos? — 18. Como se lê um número expresso em cruzeiros?

Exercício 2 — Ler os seguintes números: 375; 8 094; 52 801; 600 002; 107 204; 1 123 540; 37 054 009; 72 000 004 967; 375 027 694 823; 6 907 405 286 734; Cr\$ 0,02 Cr\$ 0,10 Cr\$ 0,12 Cr\$ 2,50 Cr\$ 105,20 Cr\$ 800,00 Cr\$ 5 040,00 Cr\$ 28 000,02 Cr\$ 180 200,00 Cr\$ 5 998 002,00.

Exercício 3 — Escrever as seguintes quantias: dez centavos — cinqüenta centavos — trinta centavos — doze centavos — vinte e quatro centavos — quarenta centavos — trinta e dois centavos — cem centavos — um cruzeiro e cinqüenta centavos — cem cruzeiros — mil cruzeiros — dois mil cruzeiros e dois centavos — duzentos e cinqüenta cruzeiros — 17 mil cruzeiros e 10 centavos — 35 mil e 2 cruzeiros — 37 mil cruzeiros e 20 centavos — um milhão de cruzeiros — um milhão e 25 cruzeiros.

1 e 2. Numeração romana. — Os *algarismos romanos* constam, como já vimos, de 7 letras maiúsculas do nosso alfabeto. Essas letras são:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1 000

3 a 10. Para escrever números romanos é preciso atender às seguintes regras:

1) Somente as letras I, X, C, M podem repetir-se, não podendo, porém, ser escritas seguidamente mais de 3 vêzes.

2) As letras V, L, D, não podem repetir-se;

3) Uma letra à direita de outra de valor maior ou igual soma-se com a precedente; assim: VI, 6; XI, 11; LX, 60; II, 2; XX, 20; CCC, 300; MM, 2 000;

4) Uma letra à esquerda de outra de valor maior subtrai-se da que fica à esquerda. Assim: IV, 4; IX, 9; XL, 40; XC, 90; CD, 400; CM, 900, etc.

5) Uma letra entre duas de valores maiores subtrai-se da que fica à direita e o resultado soma-se com a que fica à esquerda. Assim: XIV, 14; XIX, 19; CXC, 190, etc.

6) Um traço horizontal em cima de uma ou mais letras multiplica o valor delas por 1 000. Assim: \overline{V} , 5 000; \overline{XII} , 12 000; \overline{XL} , 40 000; \overline{VII} II, 7 002.

1 e 2. De que constam os algarismos romanos? — Quantas e quais são essas letras? — 3 a 10. Quantas e quais são as letras que se repetem? — Quantas vêzes se podem repetir? — Quantas e quais são as que não se repetem? — Que indica uma letra à direita de outra de valor maior ou igual? — Que indica uma letra à esquerda de outra de valor maior? — E no meio de outras de valores maiores? — Que indica um traço horizontal em cima de uma ou mais letras? — A que regras é preciso atender para escrever números romanos.

Exercício 4 — 1 e 2. Escrever em coluna vertical os 9 primeiros números, em algarismos arábicos e romanos. — Escrever dezenas em algarismos arábicos e romanos. — 3. Escrever as centenas em algarismos arábicos e romanos. — 4. Escrever os milhares até dez mil em algarismos arábicos e romanos. — 5. Ler os seguintes números romanos: $\overline{MCMXXIV}$, \overline{MDCCC} , \overline{VDLV} , \overline{LXXX} , \overline{CIX} , \overline{CI} , $\overline{MDCCCXXII}$. — 6. Escrever os seguintes números em algarismos romanos: 5 000, 1 500, 7 001, 22 004, 40 356, 70 007, 100 100.

3.º PONTO — Sinais aritméticos — As 4 operações sobre inteiros — Provas real e dos nove

1 e 2. Sinais aritméticos são figuras usadas em aritmética para indicar abreviadamente as operações ou mostrar a relação entre duas ou mais quantidades. Os principais são os seguintes, cuja leitura damos entre parênteses: sinal da soma + (*mais*), sinal da subtração — (*menos*), sinal da multiplicação × (*vêzes* ou *multiplicado por*), sinal da divisão ÷ ou : (*dividido por*), sinal de igualdade = (*igual a*) e os sinais de desigualdade > (*maior que*) e < (*menor que*).

3. Além destes, há os seguintes:

=? (*igual a quanto?*), : (*está para*), :: (*assim como*), ∴

(*portanto*), $\sqrt{\quad}$ (*raiz quadrada*), $\sqrt[3]{\quad}$ (*raiz cúbica*), e os sinais de agregação: () (*parênteses*), { } (*chaves*), $\overline{\quad}$ (*vinculo*), que indicam que se deve operar com o resultado que se acha dentro deles.

4 e 5. As 4 operações sobre inteiros. — As operações fundamentais de aritmética são 4: *soma* ou *adição*, *subtração*, *multiplicação* e *divisão*. Dá-se a estas operações o nome de fundamentais porque servem de base para efetuar todos os cálculos.

6 a 9. *Soma* ou *adição* é a operação que tem por fim reunir o valor de 2 ou mais números em 1 só. Os números que se somam chamam-se *parcelas*; o resultado da operação tem o nome de *soma* ou *total*. O sinal +, colocado entre duas quantidades, indica que essas quantidades devem ser somadas; ex.: $4 + 5 = 9$ (lê-se 4 mais 5 é igual a 9).

10. Uma soma não se altera quando se troca a ordem das parcelas: $4 + 5$ é o mesmo que $5 + 4$.

11 a 13. *Subtração* é a operação que tem por fim tirar um número de outro. O número de que se tira outro chama-se *minuendo*; o que se tira chama-se *subtraendo*; o resultado da operação chama-se *resto*, *excesso* ou *diferença*.

14. O sinal —, colocado entre duas quantidades, indica que da primeira quantidade deve ser tirada a segunda. Assim: $9 - 5$ (lê-se 9 menos 5).

15. O minuendo é igual ao subtraendo somado com o resto. Desta consideração deduz-se uma segunda definição de subtração:

16. *Subtração* é a operação pela qual, sendo dada a soma de dois números e um deles, se encontra o outro. A subtração é, pois, o inverso da adição.

17 a 20. **Multiplicação** é a operação pela qual se repete um número tantas vezes quantas são as unidades do outro. O número que se repete chama-se *multiplicando*; o número que indica quantas vezes o multiplicando se repete chama-se *multiplicador*; o resultado da operação chama-se *produto*. O multiplicando e o multiplicador também se chamam *fatores* do produto.

21. O sinal da multiplicação é \times ou \cdot que se lê *multiplicado por* ou *vêzes*; assim, 4×5 ou $4 \cdot 5$, lê-se 4 multiplicado por 5 ou 4 vêzes 5.

22. A multiplicação pode ser considerada uma soma de parcelas iguais, em que uma das parcelas é o multiplicando e o número delas é o multiplicador. Com efeito $4 \times 5 = 5 + 5 + 5 + 5 = 20$.

23. A ordem dos fatores não altera o produto; 4×5 é o mesmo que 5×4 .

24. Para multiplicar um número inteiro por 10, 100, 1 000, 10 000, etc. (unidade seguida de zeros), basta acrescentar a êsse número tantos zeros quantos tiver o multiplicador. Assim: $7 \times 100 = 700$.

25. Para multiplicar números terminados em zeros, escrevem-se os algarismos significativos debaixo dos algarismos significativos, multiplicam-se somente estes algarismos e acrescentam-se no produto tantos zeros quantos houver nos dois fatores.

Exemplo: 873500
 89000

78615
69880

77741500000

26. Quando algum algarismo central do multiplicador fôr zero, despreza-se êsse zero e passa-se a fazer a primeira algarismo do produto debaixo do seu correspondente do multiplicador. Exemplo:

7856
203

23568
15712

1594768

Dividindo-se o produto pelo multiplicando, encontra-se o multiplicador.
Dividindo-se o produto pelo multiplicador, encontra-se o multiplicando.

27. Para multiplicar um número por outro composto só de nozes, podemos deixar de fazer a multiplicação, acrescentando ao 1.º tantos zeros quantos forem os nozes do 2.º, e do número assim obtido tirar o 1.º. Assim: $8354 \times 99 = 835400 = 8354 = 827046$.

28 e 29. Para multiplicar por 11 um número de 2 algarismos, basta somar os 2 algarismos e escrever o resultado entre eles.

Assim: $27 \times 11 = 297$. Quando a soma dos 2 algarismos exceder a 9 acrescenta-se a dezena ao algarismo das dezenas do número que se multiplica. Assim: $78 \times 11 = 858$.

Para se poder efetuar qualquer multiplicação é preciso saber de cor a tabuada de multiplicar, que se aprende facilmente na Tabela ou

Tábua de Pitágoras

Tábua de Pitágoras¹ é uma tabuada de multiplicar, formada do seguinte modo:

Na primeira linha horizontal escrevem-se os números de 1 a 10 (ou até onde se desejar); Na segunda linha horizontal escreve-se a soma de cada um desses números com eles próprios (na direção dos números da primeira linha); Na terceira escreve-se o número que se obtém somando cada número da segunda linha com o seu correspondente da primeira; Na quarta escreve-se o resultado da soma de cada número da terceira com o seu correspondente da primeira; e assim sucessivamente até onde se desejar.

Os números ficam assim dispostos em linhas horizontais e em linhas verticais. A primeira linha horizontal e a primeira linha vertical são iguais.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Aplicação. — Para se achar o produto de dois números, procura-se um deles na primeira linha horizontal e o outro na primeira linha vertical; no cruzamento das duas linhas encontrar-se-á o produto procurado.

30 a 34. **Divisão** é a operação que tem por fim achar quantas vezes um número contém outro. O número que se divide tem o nome de *dividendo*; o número pelo qual o dividendo se divide chama-se *divisor*; o resultado da operação tem o nome de *quociente*; a quan-

¹ Pitágoras — filósofo e matemático grego do século VI a. C.

tidade que em algumas divisões fica por dividir tem o nome de resto. O sinal de divisão é \div ou $:$ que se lê *dividido por*.

35. A divisão é uma subtração abreviada. Para achar quantas vezes o número 15 contém o número 5, basta fazer 3 subtrações sucessivas, donde se conclui que o número 15 contém 3 vezes o número 5; logo o quociente é 3.

36. Há outras definições de divisão:

Divisão é a operação pela qual, sendo dados o produto de dois números e um deles, se procura o outro.

Divisão é a operação que tem por fim repartir um número dado chamado dividendo em tantas partes iguais quantas forem as unidades de um outro número dado chamado divisor.

37. A divisão que não deixa resto chama-se *divisão exata*.

38. Para dividir por 10, 100, 1 000, 10 000, etc., um número inteiro terminado em zeros, basta cortar à direita do dividendo tantos zeros quantos forem os zeros do divisor. Assim: $786000 \div 100 = 7860$.

39. Para dividir por 10, 100, 1 000, 10 000, etc., um número que não termina em zeros, basta separar com quantos forem os zeros do divisor, tantos algarismos à esquerda da vírgula, à direita do dividendo, tantos algarismos = 8,97. O número à esquerda da vírgula indica o quociente; o que fica à direita indica o resto.

40. Na divisão é preciso notar o seguinte: — 1) O resto é sempre menor que o divisor; — 2) Numa divisão exata, o resto é zero; — 3) Numa divisão exata, o dividendo é igual ao divisor multiplicado pelo quociente; — 4) Numa divisão não exata, o dividendo é igual ao divisor multiplicado pelo quociente incompleto e mais o resto ($D = d \times q + r$).

Deixamos propositadamente de dar as regras para efetuar as 4 operações por nos parecer que este ensino só é eficiente quando ministrado praticamente.

41. Nota. — Rigorosamente, as operações fundamentais são apenas duas, visto que a multiplicação é uma soma abreviada, e a divisão uma subtração abreviada.

- 1. Que são sinais aritméticos? — 2. Quais são os principais?
- 3. Que outros sinais conhece? — 4. Quantas e quais são as operações fundamentais de aritmética? — 5. Por que se chamam fundamentais? — 6. Que é soma ou adição? — 7. Como se chamam os números que se somam? — 8. E o resultado da opera-

- ção? — 9. Qual é o sinal da soma e como se lê? — 10. Altera-se o total de uma soma quando se muda a ordem das parcelas? — 11. Que é subtração? — 12. Como se chamam os termos da subtração? — 13. Que nomes se dão ao resultado? — 14. Qual é o sinal da subtração e como se lê? — 15. A que é igual o minuendo? — 16. Dê outra definição de subtração. — 17. Que é multiplicação? — 18. Como se chamam os seus termos? — 19. E o resultado? — 20. Que nome se dá ao multiplicando e multiplicador, conjuntamente? — 21. Qual é o sinal da multiplicação e como se lê? — 22. Como pode ser considerada a multiplicação? — 23. Altera-se o produto quando se muda a ordem dos fatores? — 24. Como se multiplica um número inteiro pela unidade seguida de zeros? — 25. Como se multiplicam números terminados em zeros? — 26. Como se multiplica quando algum algarismo central do multiplicador for zero? — 27. Como se abrevia a multiplicação de um número por outro composto só de nozes? — 28 e 29. Como se abrevia a multiplicação de um número de dois algarismos por 11? — Que é preciso fazer quando a soma dos dois algarismos exceder a 9? — 30 a 34. Que é divisão? — Como se chamam os termos da divisão? — Como se chama o resultado? — Aponte, numa divisão, o dividendo, divisor, quociente e resto. — Qual é o sinal da divisão e como se lê? — 35. Como pode ser considerada a divisão? — 36. Dê outras definições de divisão. — 37. Como se chama a divisão que não deixa resto. — 38. Como se divide um número terminado em zeros por 10, 100, 1 000, etc.? — 39. E se o número não terminar em zeros? — 40. Que é preciso notar na divisão? — 41. Quantas são, em rigor, as operações fundamentais? Explique.

Prova das 4 operações

- 1. Prova de uma operação é uma segunda operação que tem por fim verificar se a primeira está certa.
- 2. As provas mais usadas são a *real* e a *dos nozes*.
- 3. Prova real da soma. — Somam-se tôdas as parcelas menos uma e do 1.º total subtrai-se o 2.º; se a operação estiver certa, a diferença deve ser igual à parcela excluída. Exemplo:

871643	0
234052	—
386348	0
523705	

2015748
1144105

871643

- 4. Prova real da subtração. — Soma-se o subtraendo com o resto; se a operação estiver certa, o resultado deve ser igual ao minuendo. Exemplo:

2035748	
1164105	2
871643	2
2035748	

5. Prova real da multiplicação. — Divide-se o produto por um dos fatores; se a multiplicação estiver certa, a divisão será exata e o quociente igual ao outro fator. Exemplo:

$$\begin{array}{r}
 687504 \\
 8079 \\
 \hline
 6187536 \\
 4812528 \\
 5500032 \\
 \hline
 5554344816 \\
 5431281 \\
 6187536 \\
 00000 \\
 \hline
 687504 \\
 8079 \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 3 \ 0 \\
 6 \ 0 \\
 \hline
 3 \ 0 \\
 6 \ 0 \\
 \hline
 \end{array}$$

7. Prova dos nove da soma¹. — Tiram-se os nove de tôdas as parcelas e, separadamente, os nove da soma; se os dois resultados forem iguais, é provável que a operação esteja certa.

8. Prova dos nove da subtração. — Tiram-se os nove do minuendo e, separadamente, do subtraendo e do resto; se os dois resultados forem iguais, é provável que a operação esteja certa.

9. Prova dos nove da multiplicação. — Traçam-se duas retas de modo que formem 4 ângulos; no primeiro escrevem-se os nove fora do multiplicando; no 2.º, os nove fora do multiplicador; no 3.º, os nove fora do produto que se obter multiplicando os nove fora do multiplicando pelos nove fora do multiplicador; no 4.º os nove fora do produto total. Se os dois últimos resultados forem iguais, é provável que a operação esteja certa.

10. Prova dos nove da divisão. — Traçam-se duas retas de modo que formem 4 ângulos; no 1.º escrevem-se os nove fora do divisor; no 2.º, os nove fora do quociente; no 3.º, os nove fora do produto que se obtiver multiplicando os nove fora do divisor pelos nove fora do quociente, somados com os nove fora do resto, se o houver; no 4.º, os nove fora do dividendo. Se os dois últimos resultados forem iguais, é provável que a operação esteja certa.

¹ Veja as operações da pág. 17, as quais aplicamos também as provas dos nove.

11. Nota. — A prova dos nove indica apenas probabilidade e não certeza, porque, se houver um erro de 9, ou múltiplo de 9, esta prova não o acusa.

Em lugar da prova dos nove pode empregar-se a prova dos setes, dos onze, etc., que consiste em tirar os setes, ou onze, etc. (conforme o caso), análogamente ao que se faz na prova dos nove.

12 a 17. É preciso recapitular o seguinte:

O minuendo é igual ao subtraendo somado com o resto.

Se do minuendo tirarmos o resto, encontraremos o subtraendo.

Dividindo o produto de 2 fatores por um deles, encontraremos o outro.

O dividendo é igual ao divisor multiplicado pelo quociente e mais o resto (se o houver).

Numa divisão exata, se multiplicarmos o quociente pelo divisor, acharemos o dividendo.

Numa divisão não exata, se multiplicarmos o quociente pelo divisor e ao produto juntarmos o resto da divisão, acharemos o dividendo.

1. Que é prova de uma operação? — 2. Quais são as provas mais usadas? — 3. Como se tira a prova real da soma? — 4. ...da subtração? — 5. ...da multiplicação? — 6. ...da divisão? — 7. Como se tira a prova dos nove da soma? — 8. ...da subtração? — 9. ...da multiplicação? — 10. ...da divisão? — 11. Podemos confiar na prova dos nove? Por quê? — 12 a 17. A que é igual o minuendo e o resto? — Sabendo o produto de 2 fatores e um deles, como acharemos o outro? — A que é igual o dividendo? — Sabendo o divisor e o quociente de uma divisão exata, como encontraremos o dividendo? — E se a divisão não for exata?

Exercício 5 — Efetuar e tirar as provas (real e dos nove):

$$\begin{aligned}
 6 + 60 + 604 + 7895 + 4444 + 603 + 2 &= \\
 806954073 - 38069473 &= \\
 4937689 \times 4507 &= \\
 49376894 \div 4507 &=
 \end{aligned}$$

Exercício 6 — Efetuar e tirar as provas (real e dos nove):

$$\begin{aligned}
 \text{Cr\$ } 980,00 + \text{Cr\$ } 98,00 + \text{Cr\$ } 9,80 + \text{Cr\$ } 0,98 &= \\
 \text{Cr\$ } 980,00 - \text{Cr\$ } 0,98 &= \\
 794264042 \times 998460 &= \\
 7942640420 \div 998460 &=
 \end{aligned}$$

Exercício 7 — Efetuar e indicar a regra:

$$\begin{array}{l|l}
 83500 \times 420 = & 75346 \times 999 = \\
 921300 \times 100 = & 43 \times 11 = \\
 2853000 \div 100 = & 87 \times 11 = \\
 6743 \div 1000 = & 3 \times 7 \div 3 = \\
 2758 \times 99 = & 4 \times 5 \times 8 \div 5 =
 \end{array}$$

Exercício 8 — Resolver as seguintes questões:

A soma de dois números é 5873; um deles é 941. Qual será o outro?

a + 5 234 = 14 802. Qual é o valor de a?

a + b + c = 584 297; b + c = 423 501. Qual é o valor de a?

$a - 42\ 356 = 58\ 305$. Qual é o valor de a ?
 $42\ 835 - a = 23\ 497$. Qual é o valor de a ?

Exercício 9 — Resolver as seguintes questões:

O produto de dois números é 25 241; um deles é 43. Qual será o outro?
 $a \times 585 = 7\ 605$. Qual é o valor de a ?
 $729 \times a = 41\ 553$. Qual é o valor de a ?
Numa divisão exata, o divisor é 927 e o quociente 57. Qual será o dividendo?

Numa divisão não exata, o resto é 93, o quociente é 444, e o divisor é 143. Qual será o dividendo?
Um aluno dividiu um número por 275 e achou 340 de resto. Estará certa a operação? Por quê?
 $d = 973$; $q = 89$; e $r = 967$. Qual será o valor de D ? (D , d , q e r representam, respectivamente, dividendo, divisor, quociente e resto).

(Veja 17.º Ponto — Problemas sobre as 4 operações).

Potenciação

1. Potência de um número é o produto de dois ou mais fatores iguais a esse número. Assim: 2×2 ; $2 \times 2 \times 2$; $2 \times 2 \times 2 \times 2$; etc. são potências de 2.
2 a 4. Um produto de dois fatores iguais chama-se 2.ª potência; um produto de três fatores iguais chama-se 3.ª potência; um produto de quatro fatores iguais chama-se 4.ª potência; etc.
5 a 8. Para indicar abreviadamente uma potência de um número escreve-se esse número apenas uma vez, e à sua direita e um pouco acima um outro número chamado expoente, que indica o grau da potência. Assim: em lugar de escrevermos 3×3 , podemos escrever 3^2 ; em lugar de $4 \times 4 \times 4$, podemos escrever 4^3 ; em lugar de $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$, podemos escrever 2^5 ; etc.
O expoente é, pois, o número que indica a potência, isto é, o número que indica quantas vezes um outro número entra como fator. O número afetado pelo expoente tem o nome de base. Assim, em 2^5 , o número 2 é a base da potência, e 5 é o expoente.
9. A 2.ª e 3.ª potência têm nomes especiais: a 2.ª potência chama-se quadrado, e a 3.ª chama-se cubo.
10 e 11. Quadrado de um número é o produto que se obtém multiplicando esse número por si mesmo. Assim, o quadrado de 1 ou 1^2 é $1 \times 1 = 1$; o quadrado de 2 ou 2^2 é $2 \times 2 = 4$; o quadrado de 3 ou 3^2 é $3 \times 3 = 9$; o quadrado de 4 ou 4^2 é $4 \times 4 = 16$; o quadrado de 5 ou 5^2 é $5 \times 5 = 25$; o quadrado de 6 ou 6^2 é $6 \times 6 = 36$; o quadrado de 7 ou 7^2 é $7 \times 7 = 49$; o quadrado de 8 ou 8^2 é $8 \times 8 = 64$; o quadrado de 9 ou 9^2 é $9 \times 9 = 81$; etc.
12 e 13. Cubo de um número é o produto que se obtém multiplicando 3 fatores iguais a esse número (multiplica-se o 1.º pelo 2.º, e o resultado pelo 3.º). Assim: o cubo de 5 ou 5^3 é $5 \times 5 \times 5 = 125$; etc.

14. Para elevar um número qualquer a uma certa potência, multiplica-se esse número por si mesmo tantas vezes quantas forem as unidades do expoente. Assim: $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$.
15. A primeira potência de um número qualquer é o próprio número. Assim: $8^1 = 8$.

16 e 17. Qualquer número afetado do expoente zero é igual a 1. Assim: $4^0 = 1$; $8^0 = 1$; $15^0 = 1$; etc.

1. Que é potência de um número? Dê exemplos. — 2. Que é 2.ª potência de um número? Dê exemplos. — 3. ...3.ª potência de um número? Dê exemplos. — 4. ...5.ª potência? Dê exemplos. — 5. Como se indica abreviadamente uma potência? Dê exemplos. — 6. Que é expoente? — 7. Que é base? — 8. Na potência 8^3 qual é o expoente e qual é a base? — 9. Quais as potências que têm nomes especiais e quais são estes? — 10. Que é quadrado de um número? — 11. Diga os quadrados de todos os números inferiores a 11. — 12. Que é cubo de um número? — 13. Qual é o cubo de 3? — 14. Como se eleva um número qualquer a uma certa potência? Dê exemplos. — 15. Qual é a 1.ª potência de 5? — 16. A que é igual um número afetado do expoente zero? — 17. A que é igual 5^0 ? — Diga os cubos de todos os números inferiores a 11.

Exercício 10 — Achar as seguintes potências: 8^3 , 7^2 , 5^4 , 6^5 , 9^0 e 13^1 ; $15 \times 7^2 \times 3^3$; $3^4 \times 2^3 \times 5^1 \times 1^5$; $3^5 \times 9^0 \times 6^2 \times 2^0$; $10^2 \times 8^3 \times 3^1$.

4.º PONTO — Divisibilidade por 10, 2, 5, 9, 3 e 11

1 e 2. Um número é divisível por outro quando a divisão se faz exatamente, isto é, sem deixar resto.

3. A divisibilidade de um número por outro reconhece-se por meio dos caracteres de divisibilidade.

4 a 10. Caracteres de divisibilidade são certos sinais que os números apresentam e nos permitem verificar se um número qualquer é exatamente divisível por outro.

Por 10. — Para que um número seja divisível por 10 é preciso que termine em zero.

Por 2. — Para que um número seja divisível por 2 é preciso que termine em 2, 4, 6, 8 ou 0.

Por 5. — Para que um número seja divisível por 5 é preciso que termine em zero ou 5.

Por 9. — Para que um número seja divisível por 9 é preciso que a soma dos valores absolutos dos seus algarismos seja divisível por 9. Assim: o número 5472 é divisível por 9 porque, somando os seus algarismos ($5 + 4 + 7 + 2 = 18$), obtemos um número divisível por 9.

Por 3. — Para que um número seja divisível por 3 é preciso que a soma dos valores absolutos dos seus algarismos seja divisível por 3. Assim: 546 é divisível por 3 porque $5 + 4 + 6 = 15$, e 15 é divisível por 3.

Por 11. — Para que um número seja divisível por 11 é preciso que a soma dos valores absolutos dos alga-

rismos das ordens ímpares, menos a soma dos valores absolutos dos algarismos das ordens pares, seja zero, 11 ou múltiplo de 11.

Os algarismos das ordens ímpares são o 1.º, 3.º, 5.º, 7.º, etc., contando da direita para a esquerda; os outros, 2.º, 4.º, 6.º, etc., são os das ordens pares.

Seja o número 354739. A soma dos algarismos das ordens ímpares é $9 + 7 + 5 = 21$; a soma dos algarismos das ordens pares é $3 + 4 + 3 = 10$. Tirando da 1.ª soma a 2.ª, temos $21 - 10 = 11$, o que prova ser o número 354739 divisível por 11.

Quando o número não for divisível por 11 a diferença entre as duas somas será o resto da divisão desse número por 11.

11. Nota. — Se a soma dos valores absolutos dos algarismos das ordens ímpares for inferior à soma dos valores absolutos dos algarismos das ordens pares, acrescenta-se-lhe tantas vezes 11 quantas forem necessárias para que fique igual ou superior à 2.ª soma.

1. Quando é que um número é divisível por outro? — 2. De exemplo de um número divisível por outro. — 3. Como se reconhece que um número é divisível por outro? — 4. Que são caracteres de divisibilidade? — 5. Que é necessário para que um número seja divisível por 10? — 6. ...por 2? — 7. ...por 5? — 8. ...por 9? — 9. ...por 3? — 10. ...por 11? — 11. Como se procede quando a soma dos valores absolutos dos algarismos das ordens ímpares for inferior à soma dos valores absolutos dos algarismos das ordens pares?

Exercício 11 — Determinar, por meio dos caracteres da divisibilidade, todos os divisores dos seguintes números, explicando porpelo professor). 72, 360, 3 960, 11 880 (e de outros fornecidos

Exercício 12 — Formar números de 5 algarismos que sejam divisíveis por 10, outros por 2, outros por 5, outros por 3, outros por 9, outros por 11, e outros por 10, 2, 5, 9, 3 e 11, ao mesmo tempo. Explique.

Qual o resto da divisão do número 83 641 por 10? — por 2? — por 5? — por 9? — por 3? e por 11? (O professor deverá fazer idênticos exercícios, empregando outros números).

Divisibilidade por 1, 4, 6, 7, 8, 12, 14, 15, 20, 21, 25, 100, 125.

Por 1. — Todos os números são divisíveis por 1.

Por 4. — Para que um número seja divisível por 4 é necessário que os 2 últimos algarismos da direita, sejam zeros ou formem um número divisível por 4. Ex.: 516.

Os números divisíveis por 4 terminam em 00, 04, 08, 12, 16, 20, etc.

Por 6. — Para que um número seja divisível por 6 é necessário que seja divisível por 2 e por 3. Por outras palavras, é necessário que seja par e divisível por 3.

Por 7 (3 algarismos). — Para que um número de 3 algarismos seja divisível por 7 é necessário que o algarismo das unidades, mais 3 vezes o das dezenas, mais duas vezes o das centenas dêem em soma um número divisível por 7. Assim: o número 343 é divisível por 7 porque $3 + (3 \times 4) + (2 \times 3) = 3 + 12 + 6 = 21$, que é divisível por 7.

Por 7 (mais de 3 algarismos). — Para que um número de mais de 3 algarismos seja divisível por 7 é preciso que a soma das classes ímpares menos a soma das classes pares seja igual a zero, 7 ou múltiplo de 7.

Se a soma das classes ímpares for inferior à soma das classes pares, acrescenta-se-lhe tantas vezes 7 quantas forem necessárias para que fique igual ou maior que a 2.ª soma.

Por 8. — Para que um número seja divisível por 8 é necessário que os 3 últimos algarismos da direita formem um número divisível por 8 ou sejam zeros.

Por 12. — Para que um número seja divisível por 12 é necessário que seja divisível por 3 e por 4.

Por 14. — Os números divisíveis por 2 e por 7 são divisíveis por $2 \times 7 = 14$.

Por 15. — Os números divisíveis por 3 e por 5 são divisíveis por $3 \times 5 = 15$.

Por 20. — Os números divisíveis por 4 e por 5 são divisíveis por $4 \times 5 = 20$.

Por 21. — Os números divisíveis por 3 e por 7 são divisíveis por $3 \times 7 = 21$.

Por 25. — Para que um número seja divisível por 25 é necessário que os dois últimos algarismos da direita sejam zeros ou formem um número divisível por 25. Por outras palavras, é preciso que termine em dois zeros, 25, 50 ou 75.

Por 50. — Para que um número seja divisível por 50 é necessário que os 2 últimos algarismos da direita sejam zeros, ou 50.

Por 10, 100, 1 000, etc. — Para que um número seja divisível por 10, 100, 1 000, etc. (1 seguido de zeros), é necessário que termine em tantos zeros quantos forem os do divisor.

Por 125. — Para que um número seja divisível por 125 é preciso que os 3 últimos algarismos da direita formem um número divisível por 125.

5.º PONTO — Números primos. Regras para reconhecer se um número é primo

1 e 2. Números primos são os que só podem ser divididos exatamente por si mesmo e por 1. Ex.: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, etc.

3. Como se vê, o número primo só admite 2 divisores: ele próprio e a unidade.

4 e 5. Achar a série dos números primos até um determinado limite. Para achar todos os números primos até um determinado limite, escrevem-se à direita

dos números 1 e 2 todos os números ímpares consecuti-
vos até ao limite dado. Depois cancelam-se ou riscam-se
os números de 3 em 3, a partir de 3 *exclusive*; depois,
de 5 em 5 a partir de 5 *exclusive*; em seguida, de 7 em
7, de 11 em 11, etc., até chegar a um número primo cujo
quadrado seja maior que o limite dado. Os números não
cancelados constituirão a série procurada.

Suponhamos que queremos achar todos os números
primos até 99. Fazendo de acôrdo com a regra, temos:

1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29,
31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 53, 55, 57, 59,
61, 63, 65, 67, 69, 71, 73, 75, 77, 79, 81, 83, 85, 87,
89, 91, 93, 95, 97, 99.

Os números não cancelados são primos: 1, 2, 3, 5,
7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71,
79, 83, 89 e 97.

6. Este processo de achar os números primos tem o nome de
crivo de Eratóstenes, assim chamado porque Eratóstenes¹, seu
inventor, escrevia os números em pergaminho, e, em vez de riscá-
los ou cancelá-los, cortava-os com um canivete, fazendo no perga-
minho furos redondos, semelhantes aos de um crivo.

7 e 8. Para reconhecer se um número é primo basta
dividi-lo sucessivamente pela série natural dos números
primos (2, 3, 5, 7, 11, etc.), até que o quociente seja
menor que o divisor; se tôdas as divisões deixarem resto,
o número será primo. Por outras palavras, basta veri-
ficar se êle é divisível por algum dos números primos
cujo quadrado não seja superior ao número dado; se não
fôr divisível por nenhum dêsses números, será primo.

Seja o número 989.

Para saber se o número 989 é primo, basta verificar se êle é
divisível por algum dos números primos cujo quadrado não seja
superior a êsse número; se não fôr divisível por nenhum dêsses
números será primo. Ora, os números primos cujos quadrados não
são superiores a 989 são os números primos de 1 a 31 (por que
 $31 \times 31 = 961$ e $32 \times 32 = 1024$); basta verificar, portanto, se 989
é divisível por 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31.

Não é divisível por 2 porque é ímpar.

¹ Eratóstenes — matemático, filósofo e geógrafo grego, nas-
cido no ano 276 a. C. em Cirene (cid. e colônia grega estabelecida
na África, a O. do Egito) e falecido em Alexandria no ano 196
a. C.

Não é divisível por 3 porque a soma dos seus algarismos não
forma um número divisível por 3.

Não é divisível por 5 porque não termina em zero nem em 5.

Não é divisível por 7 porque somando o algarismo das uni-
dades, mais 3 vezes o das dezenas, mais 2 vezes o das centenas
não se obtém um número divisível por 7.

Não é divisível por 11 porque a soma dos algarismos das or-
dens ímpares, menos a soma dos algarismos das ordens pares, não
dá zero, nem 11, nem um múltiplo de 11.

Não é divisível por 13, 17 e 19, porque deixa resto ($989 \div 13 =$
 $= 76$ e resta 1; $989 \div 17 = 58$ e restam 3; $989 \div 19 = 52$ e resta 1).

É divisível por 23 porque não deixa resto; $989 \div 23 = 43$.

Resposta: — O número 989 não é primo porque é divisível
por 23.

Números primos inferiores a 5 430

Lista dos números inferiores a 10 052 não divisíveis por 2, 3, 5, 7,
nem 11, com indicação do seu menor divisor (d)

Nota. — Os números inferiores a 10 052, não encontrados nesta
tabela, não sendo divisíveis por 2, 3, 5, 7 ou 11, são primos.

N	d	N	d	N	d	N	d	N	d
169	13	703	19	1079	13	1391	13	1751	17
221	13	713	23	1081	23	1403	23	1763	41
247	13	731	17	1121	19	1411	17	1769	29
289	17	767	13	1139	17	1417	13	1781	13
299	13	779	19	1147	31	1457	31	1807	13
323	17	793	13	1157	13	1469	13	1817	23
361	19	799	17	1159	19	1501	19	1819	17
377	13	817	19	1189	29	1513	17	1829	31
391	17	841	29	1207	17	1517	37	1843	19
403	13	851	23	1219	23	1537	29	1849	43
437	19	871	13	1241	17	1541	23	1853	17
481	13	893	19	1247	29	1577	19	1891	31
493	17	899	29	1261	13	1591	37	1909	23
527	17	901	17	1271	31	1633	23	1919	19
529	23	923	13	1273	19	1643	31	1927	41
533	13	943	23	1313	13	1649	17	1927	41
551	19	949	13	1333	31	1651	13	1937	13
559	13	961	31	1339	13	1679	23	1943	29
589	19	989	23	1343	17	1681	41	1957	19
611	13	1003	17	1349	19	1691	19	1961	37
629	17	1007	19	1357	23	1703	13	1963	13
667	23	1027	13	1363	29	1711	29	2021	43
689	13	1037	17	1369	37	1717	17	2033	19
697	17	1073	29	1387	19	1739	37	2041	13

NÚMEROS NÃO DIVISÍVEIS POR 2, 3, 5, 7 E 11

N	d	N	d	N	d	N	d	N	d
2047	23	2587	13	3139	43	3679	13	4187	53
2059	29	2599	23	3149	47	3683	29	4189	59
2071	19	2603	19	3151	23	3713	47	4199	13
2077	31	2623	43	3161	29	3721	61	4223	41
2117	29	2627	37	3173	19	3737	37	4237	19
2119	13	2641	19	3193	31	3743	19	4247	31
2147	19	2669	17	3197	23	3749	23	4267	17
2159	17	2701	37	3211	13	3757	13	4303	13
2171	13	2743	13	3233	53	3763	53	4307	59
2173	41	2747	41	3239	41	3781	19	4309	31
2183	37	2759	31	3247	17	3791	17	4313	19
2197	13	2771	17	3263	13	3799	29	4321	29
2201	31	2773	47	3277	29	3809	13	4331	61
2209	47	2809	53	3281	17	3811	37	4343	43
2227	17	2813	29	3287	19	3827	43	4351	19
2231	23	2831	19	3293	37	3841	23	4369	17
2249	13	2839	17	3317	31	3859	17	4379	29
2257	37	2867	47	3337	47	3869	53	4381	13
2263	31	2869	19	3341	13	3887	13	4387	41
2279	43	2873	13	3349	17	3893	17	4393	23
2291	29	2881	43	3379	31	3901	47	4399	53
2323	23	2899	13	3383	17	3937	31	4427	19
2327	13	2911	41	3397	43	3953	59	4429	43
2329	17	2921	23	3401	19	3959	37	4439	23
2353	13	2923	37	3403	41	3961	17	4453	61
2363	17	2929	29	3419	13	3973	29	4469	41
2369	23	2941	17	3427	23	3977	41	4471	17
2407	29	2951	13	3431	47	3979	23	4489	67
2413	19	2977	13	3439	19	3991	13	4511	13
2419	41	2993	19	3473	23	4009	19	4531	23
2449	31	2987	29	3481	59	4031	29	4537	13
2461	23	2993	41	3497	13	4033	37	4541	19
2479	37	3007	31	3503	31	4043	13	4553	29
2483	13	3013	23	3523	13	4061	31	4559	47
2489	19	3029	13	3551	53	4063	17	4573	17
2491	47	3043	17	3569	43	4069	13	4577	23
2501	41	3053	43	3587	17	4087	61	4579	19
2507	23	3071	37	3589	37	4097	17	4589	13
2509	13	3077	17	3599	59	4117	23	4601	43
2533	17	3097	19	3601	13	4121	13	4607	17
2537	43	3103	29	3611	23	4141	41	4619	31
2561	13	3107	13	3629	19	4163	23	4633	41
2567	17	3127	53	3649	41	4171	43	4661	59
2573	31	3131	31	3653	13	4181	37	4667	13
2581	29	3133	13	3667	19	4183	47	4681	31

NÚMEROS NÃO DIVISÍVEIS POR 2, 3, 5, 7 E 11

N	d	N	d	N	d	N	d	N	d
4687	43	4843	29	4997	19	5149	19	5287	17
4693	13	4847	37	5017	29	5161	13	5293	67
4699	37	4849	13	5029	47	5177	31	5311	47
4709	17	4853	23	5041	71	5183	71	5317	13
4717	53	4859	43	5053	31	5191	29	5321	17
4727	29	4867	31	5057	13	5207	41	5329	73
4747	47	4883	19	5063	61	5213	13	5339	19
4757	67	4891	67	5069	37	5219	17	5353	53
4769	19	4897	59	5083	13	5221	23	5359	23
4771	13	4901	13	5111	19	5239	13	5363	31
4777	17	4913	17	5123	47	5249	29	5371	41
4811	17	4927	13	5129	23	5251	59	5377	19
4819	61	4979	13	5141	53	5263	19	5389	17
4841	47	4981	17	5143	37	5267	23	5429	61

1. Que são números primos? — 2. Diga os números primos inferiores a 30. — 3. Quantos divisores admite um número primo qualquer? — 4. Como podemos achar todos os números primos até um determinado limite? — 5. Procure a série dos números primos até 115. — 6. Como se chama este processo de achar números primos? — 7. Como poderemos reconhecer se um número qualquer é primo? — 8. Verifique pelos dois processos se o n.º 127 é primo. (Repetir a perg. empregando outros números).

Exercício 13 — Achar todos os números primos até 135 pelo crivo de Eratóstenes. Verificar pelos dois processos se o número 177 é primo.

6.º PONTO — Número múltiplo. Decomposição de um número em seus fatores primos

1 e 2. Número múltiplo é o que resulta da multiplicação de dois ou mais números diferentes de 1 e por isso pode ser dividido exatamente por esses números. Assim: 21 é número múltiplo porque é o produto de 3 e 7, podendo, portanto, ser dividido exatamente por 3 e por 7; diz-se que 21 é múltiplo de 3 e de 7. Do mesmo modo, 48 é múltiplo de 3, 6, 9 e 2; 35 é múltiplo de 5 e de 7; etc.

3 e 4. Fatores de um número são os números que, multiplicados entre si, produzem o referido número. Assim: 3 e 7 são fatores de 21; 5 e 7 são fatores de 35; etc.

5. Os fatores de um número podem ser números primos ou números múltiplos. Se são números primos chamam-se *fatores primos*; se são números múltiplos chamam-se *fatores múltiplos*.

6. Qualquer número múltiplo é igual a um produto de fatores primos.

7. Fatorar um número é *decompô-lo em todos os seus fatores primos*, isto é, achar todos os seus *fatores primos*.

8. Para efetuar a *decomposição de um número em seus fatores primos* — divide-se o número dado pelo menor número primo (superior a 1) que o divide exatamente; divide-se depois o quociente pelo menor número primo que o divide exatamente; e assim sucessivamente até o quociente dar 1. Os diversos divisores empregados são os fatores primos do número dado. Exemplo:

Os fatores primos do n.º 924 são
2, 2, 3, 7 e 11.

924		2
462		2
231		3
77		7
11		11
1		

- 1 e 2. Que é número múltiplo? — Cite dez números múltiplos.
- 3 e 4. Que são fatores de um número? — Quais são os fatores de 15? de 25? de 35? (etc.)
- 5. Como podem ser os fatores de um número?
- 6. Os números múltiplos contêm fatores primos?
- 7. Que é fatorar um número?
- 8. Qual é a regra para fatorar um número?

Exercício 14 — Fatorar os seguintes números: 60, 210, 198, 385, 429, 630, 1 386, 5.005, 190 575, 197 846 e 9 063 873.

7.º PONTO — Máximo divisor comum

1. Divisor de um número é aquele que o divide exatamente, isto é, sem deixar resto. Assim, 9 é divisor do número 18, porque o divide exatamente; 2, 4 e 5 são divisores de 20, porque 20 pode ser dividido exatamente por 2, 4 e 5.

2. O divisor de um número também é chamado *fator, sub-múltiplo* ou *parte aliquota* desse número.

3. Divisor comum de dois ou mais números é o número que divide esses números sem deixar resto. Assim: 5 é divisor comum de 10, 15 e 20, porque estes números, divididos por 5, não deixam resto.

4. Máximo divisor comum de dois ou mais números é o maior número inteiro que divide esses números sem

deixar resto. Assim: 3 é o m. d. c. de 9 e 12, porque é o maior número que divide 9 e 12 ao mesmo tempo.

5. Há dois *processos* para achar o m. d. c. de dois ou mais números: o das *divisões sucessivas* e o da *decomposição em fatores primos*.

6. Para achar o m. d. c. de dois números pelas *divisões sucessivas*, divide-se o número maior pelo menor, depois o menor pelo primeiro resto, em seguida o primeiro resto pelo segundo, e assim sucessivamente até que a divisão não deixe resto; o último divisor será o m. d. c.

Assim, para o achar o m. d. c. de 96 e 27 procede-se do seguinte modo:

Quociente		2	1	1	4					
	96		27		15		12		3	m. d. c.
Resto	15		12		3		0			

7. Quando por este processo, se quer achar o m. d. c. de três ou mais números, procura-se o m. d. c. dos dois números maiores, depois o m. d. c. do 3.º número e do m. d. c. achado, e assim sucessivamente; o último divisor será o m. d. c. dos números dados. Assim: para achar o m. d. c. de 80, 120 e 180, procura-se primeiramente o m. d. c. de 180 e 120, que é 60, e depois o m. d. c. de 60 e 80, e encontraremos 20, que é, portanto, o m. d. c. de 80, 120 e 180.

8. Para achar o m. d. c. de dois ou mais números pelo processo da *decomposição*, decompõe-se cada um dos números dados em seus fatores primos, e depois forma-se o produto continuado de todos os fatores primos comuns a esses números, tomados respectivamente com o menor expoente; o resultado será o m. d. c. procurado.

Achar o m. d. c. de 80, 120 e 180.
Decompondo-se cada um destes números em fatores primos temos:

$$80 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 = 2^4 \times 5.$$

$$120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^3 \times 3 \times 5.$$

$$180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3^2 \times 5.$$

Os fatores primos comuns elevados ao menor expoente são 2² e 5, e como o m. d. c. é o produto de todos os fatores primos comuns elevados ao menor expoente, temos:

$$\text{o m. d. c. de 80, 120 e 180 é } 2^2 \times 5 = 2 \times 2 \times 5 = 20.$$

9. Quando se encontra a unidade como m. d. c. de dois ou mais números é porque esses números considerados em conjunto são primos entre si.

10. Números primos entre si no seu conjunto são os que têm como único divisor comum a unidade.

11. Dados dois números, se o maior contiver o menor, será este o m. d. c.

- O divisor de um número qualquer é divisor de todos os múltiplos desse número.

- Todo número que dividir dois outros dividirá também a soma ou a diferença destes.

- O produto de todos os fatores primos comuns a dois ou mais números é o m. d. c. desses números.

1. Que é divisor de um número? Dê exemplos. — 2. Que outros nomes tem? — 3. Que é divisor comum de dois ou mais números? Dê exemplos. — 4. Que é máximo divisor comum de dois ou mais números? Dê exemplos. — 5. Quantos processos há para achar o m. d. c. e como se chamam? — 6. Qual é a regra para achar o m. d. c. de dois números pelas divisões sucessivas? — 7. E no caso de serem três ou mais números? — 8. Como se acha o m. d. c. de dois ou mais números pelo processo da decomposição? — 9. Qual é o m. d. c. de dois ou mais números primos entre si? — 10. Que são números primos entre si? — 11. Dados dois números se o maior contiver o menor, qual será o m. d. c.? Dê exemplos.

Exercício 15 — Achar, pelos dois processos, o m. d. c. dos seguintes números: 180 e 960; 177 e 320; 960 e 360; 855 e 1 350; 960, 321 e 450; 128 e 868; 147, 231 e 308; 3 960, 8 712 e 990. — Dizer qual é o m. d. c. de 13 e 15, e qual o de 5 e 20 e por quê.

8.º PONTO — Mínimo múltiplo comum

1. Múltiplo de um número é o dobro, o triplo, o quádruplo, o quádruplo, o sêxtuplo, etc. desse número.

2. Múltiplo comum de dois ou mais números é o que contém esses números como fatores. Assim: 12 é o múltiplo comum de 2, 3, 4 e 6.

3. Mínimo múltiplo comum de dois ou mais números é o menor número que pode ser dividido exatamente por esses números. Assim: 30 é o m. m. c. de 2, 3 e 5, porque é o menor número que pode ser dividido exatamente por 2, 3 e 5.

4. Para achar o m. m. c. de dois ou mais números há dois processos:

5. 1.º processo — Escrevem-se todos os números dados em linha horizontal, separados por vírgulas, e à

direita traça-se uma linha vertical; procura-se o menor número primo que divida exatamente pelo menos um dos números dados e escreve-se esse número à direita e na mesma direção dos números dados; dividem-se por ele todos os números dados que forem divisíveis, e debaixo deles escrevem-se os respectivos quocientes; os números que não forem divisíveis repetem-se. Faz-se com a 2.ª linha o mesmo que se fez com a primeira, e assim sucessivamente até obter 1 em todos os quocientes. O produto continuado de todos os divisores será o m. m. c. procurado. Exemplo:

	8, 10, 15 e 18	2
	4, 5, 15 e 9	2
	2, 5, 15 e 9	2
	1, 5, 15 e 9	3
	1, 5, 5 e 3	3
	1, 5, 5 e 1	5
	1, 1, 1 e 1	

O m. m. c. de 8, 10, 15 e 18 é
 $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3^2 \times 5$
 $\times 5 = 360.$

6. 2.º processo — Decompõe-se cada número em seus fatores primos e, em seguida, forma-se o produto de todos os fatores primos, tomados respectivamente com o maior expoente; o resultado será o m. m. c. Exemplo:

8 = 2 × 2 × 2 = 2³
10 = 2 × 5
15 = 3 × 5
18 = 2 × 3 × 3 = 2 × 3²
m. m. c = 2³ × 3² × 5 = 360

Os fatores primos que entram na composição destes números são 2, 3 e 5, e como o m. m. c. é o produto de todos os fatores primos elevados ao maior expoente, temos:

7. Dados dois números desiguais, se um dividir o outro, o maior será o m. m. c. entre eles. Ex.: o m. m. c. de 4 e 16 é 16, porque 4 é divisor de 16.

8 e 9. Quando dois números são primos entre si, o m. m. c. entre eles é o produto desses números. Ex.: o m. m. c. entre 5 e 7 é 35.

10. Quando se procura o m. m. c. entre diversos números, suprimem-se os que forem fatores de outros. Suponhamos que queremos achar o m. m. c. de 4, 8, 16, 18 e 21; como 4 e 8 são fatores de 16, basta procurar o m. m. c. de 16, 18 e 21.

1. Que é múltiplo de um número? Dê exemplos. — 2. Que é múltiplo comum de dois ou mais números? Dê exemplos. — 3. Que é m. m. c. de dois ou mais números? Dê exemplos. — 4. Por quantos processos se pode achar o m. m. c. de dois ou mais números? — 5. Em que consiste o 1.º processo? — 6. E o 2.º? — 7. Dados dois números desiguais, se um dividir o outro, qual será

o m. m. c.? Dê exemplos. — 8. Qual é o m. m. c. de dois números primos entre si? Dê exemplos. — 9. Qual é o m. m. c. de 8 e 9? — 10. Como se procede quando, ao procurar-se o m. m. c., há números que são fatores de outros? Dê exemplos.

Exercício 16 — Achar pelos dois processos, o m. m. c. de 6, 8 e 16; 5, 7, 15 e 18; 6, 24 e 30; 3, 4, 7 e 9; 5, 10 e 20; 8, 12, 16, 20 e 24; 7, 21, 30 e 35; 792, 2 420 e 900.

— Achar o m. d. c. e o m. m. c. de 352, 1 860 e 2 340, e dos números *a*, *b*, *c*, sendo $a = 2^2 \times 3 \times 5$, $b = 2^3 \times 3^2 \times 5$, e $c = 2^4 \times 3 \times 7^2$.

9.º PONTO — Fração ordinária. Fração própria. Fração imprópria; número misto

1 e 2. Fração ou quebrado é uma ou mais partes da unidade considerada dividida em partes iguais.

3 e 4. Há duas espécies de frações, que diferem no modo de escrever e no número de partes em que a unidade está dividida: *frações ordinárias* e *frações decimais*.

5 a 8. A fração ordinária consta de 2 números, separados por um traço horizontal ou inclinado. O número de baixo chama-se *denominador* e indica em quantas partes foi dividida a unidade; o número de cima chama-se *numerador* e indica quantas dessas partes foram tomadas. Assim: a fração $\frac{3}{5}$ indica que a unidade foi dividida em 5 partes e se tomaram 3.

9. O numerador e o denominador são chamados os *termos da fração*.

10 e 11. Se dividirmos uma maçã em 7 partes iguais, cada parte será $\frac{1}{7}$ da maçã, e duas partes serão $\frac{2}{7}$.

12. Para representar uma fração, escreve-se primeiramente um traço horizontal, depois, em cima, o número de partes que se tomaram, e em baixo o número de partes em que a unidade está dividida.

13 e 14. Para ler uma fração enuncia-se primeiro o numerador e em seguida o denominador, a que se acrescenta a palavra *avos* (terminação da palavra *oitavos*). Há as seguintes exceções:

1.º Quando o denominador fôr 2, 3, 4, 5, 6, 7 ou 9 dá-se-lhe, respectivamente, o nome de meio, terça, quarto, quinto, sexto, sétimo ou nono.

2.º Quando o denominador fôr 10, 100, 1 000, etc. (unidade seguida de zeros) lê-se décimos, centésimos, milésimos, etc.

3.º Quando o denominador fôr 11, 12, 20 ou 30 é costume dar-lhe, respectivamente, o nome de undécimos, duodécimos, vigésimos, trigésimos.

15. Também se pode ler uma fração enunciando o numerador e o denominador, separados pela palavra *sobre*. Assim: $\frac{3}{5}$ pode ler-se 3 quintos ou 3 sobre 5.

16. As frações ordinárias podem ser *próprias* ou *impróprias*.

17 e 18. Fração própria é a que tem o numerador menor que o denominador. Ex.: $\frac{3}{5}$. Chama-se fração própria porque vale menos do que a unidade.

19 e 20. Fração imprópria é a que tem o numerador maior do que o denominador ou igual a elle. Ex.: $\frac{3}{3}$ e $\frac{5}{5}$. Chama-se fração imprópria porque tem a forma de fração, mas vale uma unidade ou mais do que uma unidade.

21. Quando uma fração imprópria vale mais do que uma ou mais unidades inteiras, diz-se que equivale a um número misto, isto é, a um número inteiro e uma fração.

22. Número misto é o que se compõe de um número inteiro e de uma fração. Ex.: $3\frac{2}{5}$, $7\frac{1}{2}$, $6\frac{1}{4}$, etc.

1. Que é fração? — 2. Que outro nome tem? — 3. Quantas espécies de frações há? — 4. Em que diferem? — 5. De que consta a fração ordinária? — 6. Como se chama o número de baixo e o que indica? — 7. Como se chama o de cima e o que indica? — 8. Dê um exemplo e explique-o — 9. Que nome se dá ao numerador e denominador conjuntamente? — 10. Se dividirmos um pão em 4 partes iguais, cada parte o que será? — 11. E 3 partes? — 12. Como se representa uma fração? — 13. Como se lê uma fração? — 14. Quantas e quais são as exceções a esta regra? — 15. Há ainda outro modo de ler frações ordinárias? — 17. Que é fração própria? Dê ex. — 18. Por que se chama própria? — 19. Que é fração imprópria? Dê ex. — 20. Por que se chama imprópria? — 21. A que equivale a fração imprópria, quando o seu valor excede uma ou mais unidades inteiras? — 22. Que é número misto?

Exercício 17 — Ler as seguintes frações: $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{100}$, $\frac{9}{1\ 000}$, $\frac{3}{11}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{19}{30}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{8}{8}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{13}{20}$, $\frac{23}{30}$, $\frac{19}{21}$, $5\frac{1}{3}$, $19\frac{3}{5}$, $192\frac{1}{10}$

— Escrever: um meio, dois terços, cinco nonos, sete décimos, quatorze quinze avos, três vigésimos, cinco undécimos, um milésimo, nove duodécimos, onze centésimos, dezessete milésimos.



meios, cinco quintos, quatro inteiros e dois terços, seis inteiros e cinco dezenove avos, 135 inteiros e um dezesseis avos.

— *Escrever 5 frações próprias, 5 frações impróprias e 5 números mistos.*

10.º PONTO — Simplificação de frações e redução ao mesmo denominador. Comparação de frações

1. **Simplificar uma fração** é substituí-la por outra que tenha o mesmo valor e os termos menores.

2. A simplificação de frações é de grande importância nos cálculos, porque nos conduz a operar com números menores, e também porque nos habilita a apreciar melhor os valores que as frações representam.

3 e 4. Quando uma fração não pode simplificar-se mais, diz-se que está reduzida à *expressão mais simples* ou que é *irredutível*. Ex.: $\frac{5}{7}$, $\frac{11}{12}$, etc. Para que uma fração seja irredutível, é necessário que os seus termos sejam primos entre si.

5. *Fração redutível* é a que pode ser substituída por outra com o mesmo valor e com os termos menores. Ex.: $\frac{8}{16}$, que pode ser substituída por $\frac{4}{8}$, $\frac{2}{4}$ e $\frac{1}{2}$.

6. Para simplificar uma fração, dividem-se sucessivamente ambos os termos por divisores comuns, aplicando os caracteres de divisibilidade.

7. Para simplificar uma fração, reduzindo-a diretamente à sua *forma mais simples*, temos 2 processos:

1.º Decompõem-se em fatores primos ambos os termos da fração e cancelam-se os fatores que forem comuns ao numerador e ao denominador. Ex.:

$$\frac{420}{630} = \frac{2 \times 2 \times 3 \times 7}{2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7} = \frac{2}{3}$$

2.º Dividem-se ambos os termos da fração pelo seu m. d. c. Seja a fração $\frac{420}{630}$:

	1	2
630	420	210
	210	000

$$\frac{420}{630} = \frac{420 \div 210}{630 \div 210} = \frac{2}{3}$$

8 e 9. **Reduzir duas ou mais frações ao mesmo denominador** é convertê-las em outras frações equivalentes, tendo todas o mesmo denominador.

Frações equivalentes são as que têm o mesmo valor, como $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{6}{12}$.

10. **Regras.** — 1.ª Para reduzir duas ou mais frações ao mesmo denominador, multiplicam-se ambos os termos de cada fração pelo denominador ou denominadores das outras. Ex.:

$\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{5}$

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 5}{3 \times 5} = \frac{10}{15}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 3}{5 \times 3} = \frac{9}{15}$$

Em lugar de $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{5}$ podemos empregar $\frac{10}{15}$ e $\frac{9}{15}$.

$\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$ e $\frac{1}{4}$

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 5 \times 4}{3 \times 5 \times 4} = \frac{40}{60}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 3 \times 4}{5 \times 3 \times 4} = \frac{36}{60}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \times 3 \times 5}{4 \times 3 \times 5} = \frac{15}{60}$$

Em lugar de $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, e $\frac{1}{4}$ podemos empregar $\frac{40}{60}$, $\frac{36}{60}$ e $\frac{15}{60}$.

2.ª (Regra geral): Para reduzir duas ou mais frações ao mínimo denominador comum, reduzem-se todas as frações dadas à expressão mais simples, e procura-se o m. m. c. a todos os denominadores. O m. m. c. será o denominador de todas as frações. Em seguida divide-se o m. m. c. pelo denominador de cada fração e multiplica-se o quociente obtido pelo numerador, escrevendo-se o produto sobre o denominador comum.

Sejam as frações $\frac{2}{6}$, $\frac{4}{10}$ e $\frac{5}{7}$; simplificando as frações redutíveis ($\frac{2}{6}$ e $\frac{4}{10}$), temos $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$ e $\frac{5}{7}$. Procurando o m. m. c. de 3, 5 e 7, encontraremos 105, que escreveremos no denominador de todas as frações: dividindo depois este número pelo denominador de cada fração e multiplicando o quociente obtido pelo numerador correspondente, temos $\frac{35}{105}$, $\frac{42}{105}$ e $\frac{75}{105}$.

11 a 14. **Comparação de frações.** — Para compararmos os valores de duas ou mais frações, é preciso que elas tenham os mesmos numeradores ou os mesmos denominadores.

— Quando duas ou mais frações tiverem numeradores iguais, será maior a que tiver menor denominador (e vice-versa). Assim: $\frac{5}{9}$ é maior que $\frac{5}{11}$, porque, quando

a unidade está dividida em 9 partes iguais, essas partes são maiores do que quando a unidade está dividida em 11 partes.

— Quando duas ou mais frações tiverem denominadores iguais, será maior a que tiver maior numerador. Assim: $\frac{5}{7}$ é maior que $\frac{4}{7}$, porque, considerando-se a unidade dividida em partes iguais, em ambas as frações, a primeira fração é maior porque tomamos mais partes.

Para comparar frações que não têm o mesmo denominador nem o mesmo numerador, é preciso reduzi-las ao mesmo denominador (ou ao mesmo numerador).

15 a 21. É preciso saber o seguinte:

1.º — Quando o numerador for igual ao denominador, a fração é igual a 1.

2.º — Quando o numerador for a metade do denominador, a fração é igual a $\frac{1}{2}$ (um meio).

3.º — Quando o numerador for a terça parte do denominador a fração é igual a $\frac{1}{3}$ (um terço).

4.º — Quando o numerador for o dobro do denominador, a fração é igual a 2; etc.

1. Que é simplificar uma fração? — 2. Que importância tem a simplificação de frações? — 3. Que é fração irredutível? Dê ex. — 4. Que é necessário para que uma fração seja irredutível? — 5. Que é fração redutível? Dê ex. — 6. Como se simplificam frações? — 7. Quantos processos há para reduzir frações à sua forma mais simples e em que consistem? — 8. Que é reduzir frações ao mesmo denominador? — 9. Que são frações equivalentes? — 10. Quantas regras há para reduzir duas ou mais frações ao mesmo denominador e em que consistem? — 11. Que é necessário para que se possam comparar duas ou mais frações? — 12. Se tivermos duas ou mais frações com o mesmo numerador, qual delas será a maior? Dê ex. — 13. E se elas tiverem o mesmo denominador? Dê ex. — 14. Como se comparam frações quando elas não têm numeradores nem denominadores iguais? — 15 a 21. Quando é que a fração é igual a 1? — a $\frac{1}{2}$? — a $\frac{1}{3}$? — a $\frac{1}{4}$ — a 2? — a 3? — a 4?

Exercício 18 — 1.º) Simplificar as seguintes frações: $\frac{10}{20}$, $\frac{84}{96}$, $\frac{120}{135}$, $\frac{231}{273}$, $\frac{110}{130}$.

— 2.º) Reduzir à expressão mais simples pelos dois processos: $\frac{175}{225}$, $\frac{561}{627}$, $\frac{1100}{1155}$, $\frac{272}{368}$, $\frac{735}{903}$.

— 3.º) Reduzir as seguintes frações ao mesmo denominador (pelos dois processos): $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{7}$; $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{4}{5}$ e $\frac{7}{11}$.

— 4.º) Reduzir ao mínimo denominador comum pelo processo do m. m. c.: $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{5}{7}$ e $\frac{7}{14}$; $\frac{4}{6}$, $\frac{3}{9}$ e $\frac{2}{7}$; $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{5}{6}$

Exercício 19 — 1.º) Comparar as seguintes frações, dizendo qual a maior e qual a menor e por quê: $\frac{7}{8}$, $\frac{7}{9}$ e $\frac{7}{11}$; $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{5}$ e $\frac{3}{7}$; $\frac{5}{6}$, $\frac{5}{9}$ e $\frac{5}{7}$; $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$ e $\frac{6}{7}$; $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$ e $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{8}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{8}$ e $\frac{6}{8}$; $\frac{3}{7}$, $\frac{2}{5}$ e $\frac{1}{6}$; $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{7}$ e $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$ e $\frac{6}{7}$. Escrever o penúltimo grupo de frações em ordem decrescente, e o último em ordem crescente.

2.º) Escrever 5 frações iguais a 1; 5 iguais a $\frac{1}{2}$; 5 iguais a $\frac{1}{3}$; 5 iguais a $\frac{1}{4}$; 5 iguais a 2; 5 iguais a 3; e 5 iguais a 4.

11.º PONTO — Extração de inteiros. Conversão de um inteiro em fração

1. Como já vimos, a fração imprópria vale uma unidade inteira, ou mais do que uma.

2 a 5. Para extrair os inteiros de uma fração imprópria, divide-se o numerador pelo denominador. Se não houver resto, a fração é igual a um número inteiro; se houver resto, a fração é igual a um número misto. Assim: $\frac{9}{3} = 3$; $\frac{10}{3} = 3 \frac{1}{3}$; $\frac{17}{14} = 1 \frac{3}{14}$.

Quando uma divisão deixa resto, completa-se o quociente acrescentando-se-lhe uma fração em que o resto da divisão seja o numerador, e o divisor o denominador.

6. Conversão de números inteiros e mistos em frações. — Qualquer inteiro pode ser escrito em forma de fração, dando-se-lhe para denominador a unidade. Assim: $6 = \frac{6}{1}$; $9 = \frac{9}{1}$, etc.

7 e 8. Qualquer número inteiro pode ser convertido em meios, terços, quartos, quintos, etc., isto é, em uma fração imprópria com o denominador 2, 3, 4, 5, 6, etc. Para isso, basta multiplicar o inteiro pelo denominador e escrever o produto sobre o denominador. Assim: convertendo 2 em sétimos, temos:

$$2 = \frac{2 \times 7}{7} = \frac{14}{7}.$$

9 e 10. Para converter um número misto em fração (imprópria), multiplica-se o número inteiro pelo denominador, e o produto, somado com o numerador, escreve-se sobre o denominador. Assim:

$$5 \frac{1}{5} = \frac{5 \times 5 + 1}{5} = \frac{26}{5}.$$

1. A que é igual uma fração imprópria? — 2. Como se extraem os inteiros de uma fração imprópria? — 3. Quando é que a fração imprópria é igual a um número inteiro? — 4. Quando

é igual a um número misto? Dê ex. — 5. Como se completa o quociente das divisões que deixam resto? — 6. Como se escreve um número inteiro em forma de fração? Dê ex. — 7. Como se converte um número inteiro em meios, terços, quartos, quintos, etc. Dê ex. — 8. Converta 3 em quintos. — 9. Como se converte um número misto em fração? Dê ex. — 10. Converta $3\frac{1}{3}$ em fração.

Exercício 20 — 1.º) *Extraír os inteiros das seg. frações:* $\frac{4}{3}$, $\frac{10}{4}$, $\frac{15}{5}$, $\frac{187}{11}$ e $\frac{7825}{1043}$.

— 2.º) *Escrever os seguintes números em forma de fração:* 7, 5, 4, 3, 11, 15, 80, 105, 1 004, 928, 75 836 e 1 587 004.

— 3.º) *Transformar os seguintes números em meios, terços, nonos, etc.:* 5, 8, 15, 21, 45, 107, 2 024 e 35 207.

— 4.º) *Converter em fração imprópria:* $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{4}$, $4\frac{1}{7}$, $6\frac{1}{5}$, etc.

— 5.º) *Completar o quociente das seguintes divisões:* $8 \div 3$, $71 \div 12$, $123 \div 4$, $10\,529 \div 35$.

12.º PONTO — As 4 operações sôbre frações ordinárias¹

1 a 4. **Soma de frações.** — Para somar frações ordinárias, há 3 casos para considerar:

1.º — Somar frações, tendo tôdas o mesmo denominador;

2.º — Somar frações com denominadores diferentes;

3.º — Somar frações com números inteiros ou mistos;

1.º caso. Para somar frações com o mesmo denominador, somam-se os numeradores e escreve-se o resultado sôbre o denominador comum.

$$\text{Assim: } \frac{4}{11} + \frac{2}{11} + \frac{5}{11} = \frac{11}{11} = 1.$$

2.º caso. Para somar frações com denominadores diferentes, reduzem-se tôdas as frações ao mínimo denominador comum e depois somam-se os numeradores e escreve-se o resultado sôbre o denominador comum. Assim: $\frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5}$. Como podemos simplificar a fração $\frac{4}{5}$, temos: $\frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{1}{2}$. Reduzindo estas frações ao mínimo denominador comum, teremos:

$$\frac{20}{30} + \frac{18}{30} + \frac{15}{30} = \frac{53}{30} = 1\frac{23}{30}.$$

¹ Para tirar as provas reais das operações sôbre frações ordinárias, procede-se como nas operações sôbre inteiros.

3.º caso. Para somar frações com números inteiros ou mistos, escrevem-se os números inteiros sob a forma de fração e convertem-se os números mistos em frações impróprias; reduzem-se depois tôdas as frações ao mínimo denominador comum, somam-se os numeradores e escreve-se o resultado sôbre o denominador comum.

$$\text{Assim: } 5\frac{1}{3} + 3 + \frac{2}{5} = \frac{16}{3} + \frac{2}{5} = \frac{80}{15} + \frac{6}{15} = \frac{86}{15} = 5\frac{11}{15}.$$

5. Para somar uma fração com um inteiro há a seguinte regra particular: multiplica-se o inteiro pelo denominador e ao resultado junta-se o numerador.

$$\text{Assim: } 6 + \frac{2}{3} = \frac{6 \times 3 + 2}{3} = \frac{20}{3}.$$

1. Quantos e quais são os casos para considerar na soma de frações ordinárias? — 2. Como se somam frações com o mesmo denominador? Dê ex. — 3. Como se somam frações com denominadores diferentes? Dê ex. — 4. Como se somam frações com números inteiros ou mistos? Dê ex. — 5. Qual é a regra particular para somar uma fração com um n.º inteiro?

Exercício 21 — *Efetuar as seguintes somas, indicando as parcelas e o total:* $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{3}{3}$; $\frac{3}{4} + \frac{2}{8} + \frac{5}{6} + \frac{1}{2}$; $2\frac{1}{5} + \frac{8}{10} + 6 + 3\frac{1}{4}$; $8 + 4\frac{1}{5}$; $6\frac{2}{3} + 9\frac{1}{4}$.

1 a 5. **Subtração de frações.** — Para subtrair frações ordinárias há 4 casos para considerar:

1.º — Subtrair frações, tendo ambas o mesmo denominador;

2.º — Subtrair frações com denominadores diferentes;

3.º — Subtrair uma fração de um número inteiro ou misto;

4.º — Subtrair um número inteiro ou misto de uma fração imprópria.

1.º caso. Para subtrair frações com o mesmo denominador, subtraem-se os numeradores e escreve-se o resultado sôbre o denominador comum.

$$\text{Assim: } \frac{5}{9} - \frac{3}{9} = \frac{2}{9}.$$

2.º caso. Para subtrair uma fração de outra, sendo os denominadores diferentes, reduzem-se as frações ao

mínimo denominador comum, e depois subtraem-se os numeradores, escrevendo-se o resultado sobre o denominador comum.

$$\text{Assim: } \frac{7}{8} - \frac{3}{5} = \frac{35}{40} - \frac{24}{40} \text{ ou } \frac{35 - 24}{40} = \frac{11}{40}.$$

3.º e 4.º casos. Para subtrair uma fração de um número inteiro ou misto, ou para subtrair um número inteiro ou misto de uma fração imprópria, escrevem-se os inteiros ou mistos sob a forma de fração e procede-se como nos casos antecedentes.

$$\text{Assim: } 8 - \frac{3}{5} = \frac{8}{1} - \frac{3}{5} = \frac{40}{5} - \frac{3}{5} = \frac{37}{5} = 7 \frac{2}{5} \\ - 2 = \frac{37}{5} - \frac{2}{1} = \frac{37}{5} - \frac{10}{5} = \frac{27}{5} = 5 \frac{2}{5}.$$

6. Para subtrair uma fração de um inteiro há a seguinte *regra particular*: multiplica-se o inteiro pelo denominador e do produto subtrai-se o numerador.

$$\text{Assim } 8 - \frac{3}{5} = \frac{8 \times 5 - 3}{5} = \frac{37}{5} = 7 \frac{2}{5}.$$

1. Quantos e quais são os casos para considerar na subtração de frações ord.? — 2. Como se subtraem frações com o mesmo denominador? Dê ex. — 3. Como se subtraem frações quando os denominadores forem diferentes? Dê ex. — 4. Como se subtrai uma fração de um número inteiro ou misto? Dê ex. — 5. Como se subtrai um número inteiro ou misto de uma fração? Dê ex. — 6. Qual é a regra particular para subtrair uma fração de um número inteiro? Dê ex.

Exercício 22 — Efetuar as seguintes subtrações (indicando o minuendo, subtraindo e resto) e tirar a prova: $6/7 - 4/7$; $4/5 - 2/3$; $8 \frac{1}{4} - 3/5$; $8 \frac{1}{4} - 3/4$; $8 - 4/3$; $8 - 2 \frac{1}{3}$; $8 \frac{1}{2} - 2 \frac{1}{3}$; $5 \frac{1}{4} - 2$; $7 - 2/5$.

1 a 6. **Multiplicação de frações ordinárias.** — Para multiplicar frações ordinárias há 3 casos para considerar:

- 1.º — Multiplicar fração por inteiro ou inteiro por fração;
- 2.º — Multiplicar fração por fração;
- 3.º — Multiplicar números mistos ou uma fração por um número misto.

1.º caso. Para multiplicar fração por inteiro ou inteiro por fração, multiplica-se o inteiro pelo numerador e escreve-se o produto sobre o denominador.

$$\text{Assim: } 4 \times \frac{3}{7} = \frac{12}{7} = 1 \frac{5}{7}; \quad \frac{5}{7} \times 4 = \frac{20}{7} = 2 \frac{6}{7}.$$

No caso do denominador ser divisível pelo inteiro há a seguinte *regra particular*: divide-se o denominador pelo inteiro e conserva-se o numerador.

$$\text{Assim: } \frac{5}{8} \times 4 \text{ ou } 4 \times \frac{5}{8} = \frac{5}{8 \div 4} = \frac{5}{2} = 2 \frac{1}{2}.$$

Dividindo o denominador por um número qualquer, a fração fica multiplicada por esse número.

2.º caso. Para multiplicar duas ou mais frações, multiplicam-se os numeradores entre si e o mesmo se faz com os denominadores.

$$\text{Assim } \frac{3}{7} \times \frac{5}{8} = \frac{15}{56}; \quad \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{7} = \frac{8}{105}.$$

3.º caso. Para multiplicar números mistos ou frações por números mistos, convertem-se os mistos em frações impróprias.

$$\text{Assim: } 3 \frac{1}{4} \times 2 \frac{1}{3} = \frac{13}{4} \times \frac{7}{3} = \frac{91}{12} = 7 \frac{7}{12};$$

$$\frac{3}{5} \times 2 \frac{1}{4} = \frac{3}{5} \times \frac{9}{4} = \frac{27}{20} = 1 \frac{7}{20}.$$

7. Para elevar uma fração a uma potência qualquer, elevam-se ambos os termos a essa potência, como no seguinte exemplo:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3^3}{4^3} = \frac{27}{64}.$$

8 e 9. **Multiplicação cancelada.** — Efetuar uma multiplicação de frações ordinárias por cancelamento é riscar os numeradores e denominadores iguais, e dividir os numeradores e os denominadores por um divisor comum, quando fôr possível. É um meio prático de abreviar muito os cálculos, e por isso devemos empregar o

cancelamento em qualquer multiplicação de frações, sempre que seja possível.

Ex.: 1/2 x 1/3 x 1/5 x 1/1 = 1/30

Como o numerador da 1.ª fração é igual ao denominador da último, cancelam-se estes termos, que por isso desaparecem. Procedese de igual modo com o numerador da 3.ª fração e com o denominador da 1.ª. Como o numerador da 2.ª fração é o denominador da 3.ª são divisíveis por 3, dividem-se por este número. Multiplicando o restante, achamos a resposta 1/8.

1. Quantos e quais são os casos para considerar na multiplicação de frações? — 2. Como se multiplica fração por inteiro ou inteiro por fração? Dê ex. — 3. Como se procede no caso do denominador ser divisível pelo inteiro? Dê ex. — 4. Que acontece a uma fração quando se divide o denominador por um n.º qualquer? — 5. Como se multiplicam frações entre si? — 6. Como se multiplicam números mistos ou frações por números mistos? — 7. Como se eleva uma fração a uma potência qualquer? Dê ex. — 8 e 9. Em que consiste a multiplicação por cancelamento? Dê ex. — Por quê devemos empregar o cancelamento?

Exercício 23 — Efetuar as seg. operações, indicando o multiplicando, multiplicador e produto: 3 x 2/5; 5/7 x 4; 5/9 x 3; 4 x 5/2; 3/5 x 2/7; 2/9 x 1/3 x 3/4; 5 1/3 x 1 2/7; 3/5 x 2 1/4 x 3; (7/8)²; (6/7)²; (5/6)³; (2/3)⁴; 2/5 x 3/4 x 5/6 x 4/7; 11/7 x 3/8 x 8/6 x 7/11; 15/18 x 9/14 x 7/45 x 6/3; 21/36 x 50/8 x 9/37 x 24/7 x 11/10.

1 a 6. Divisão de frações ordinárias. — Para dividir frações ordinárias há 3 casos para considerar:

- 1.º — Dividir fração por inteiro;
2.º — Dividir inteiro por fração ou fração por fração;
3.º — Dividir números mistos ou uma fração por um número misto.

1.º caso. Para dividir uma fração por um número inteiro multiplica-se o inteiro pelo denominador e conserva-se o numerador.

Assim: 3/4 ÷ 2 = 3/8

Multiplicando o denominador por um número qualquer, a fração dividida por esse número.

Quando o numerador fôr divisível pelo inteiro, divide-se o numerador e conserva-se o denominador.

Assim: 4/7 ÷ 2 = 2/7

2.º caso. Para dividir inteiro por fração ou fração por fração, inverte-se a fração divisora e multiplica-se.

Assim: 4 ÷ 2/3 = 4 x 3/2 = 6; 3/5 ÷ 2/7 = 3/5 x 7/2 = 21/10

3.º caso. Quando um ou ambos os termos da fração forem números mistos, convertem-se em frações impróprias.

Assim: 4 1/3 ÷ 2 1/5 = 13/3 ÷ 11/5 = 13/3 x 5/11 = 65/33 = 1 32/33

2 1/6 ÷ 4/5 = 13/6 ÷ 4/5 = 13/6 x 5/4 = 65/24 = 2 17/24

7. Nota. — Na divisão, podem cancelar-se os denominadores iguais, ou divisíveis pelo mesmo número, e o mesmo se pode fazer com os numeradores.

1. Quantos e quais são os casos para considerar na divisão de frações ordinárias? — 2. Como se divide uma fração por inteiro? Dê ex. — 3. Que acontece a uma fração quando se multiplica o denominador por um número qualquer? — 4. Como se divide fração por inteiro quando o numerador fôr divisível pelo inteiro? — 5. Como se divide inteiro por fração ou fração por fração? Dê ex. — 6. Como se efetua a divisão quando um ou ambos os termos forem números mistos? — 7. Pode empregar-se o cancelamento na divisão? De que modo? — 8. Como se tiram as provas da multiplicação e divisão de frações?

Exercício 24 — Efetuar as seguintes divisões (indicando o dividendo, divisor e quociente) e tirar a prova: 2/5 ÷ 3; 6/11 ÷ 3; 5 ÷ 3/4; 2/5 ÷ 4/7; 3 1/4 ÷ 2 1/3; 2 1/5 ÷ 5; 2/7 ÷ 3/14.

Fração de fração — Frações compostas

1. Fração de fração é uma ou mais partes iguais de uma fração. Assim: se dividirmos um bôlo em 4 partes iguais, cada parte será a quarta parte (1/4) do bôlo; se tomarmos a quarta parte do bôlo e a dividirmos por sua vez em 3 partes iguais, cada parte será 1/3 de 1/4, que é uma fração de fração.

2. Para achar o resultado de uma fração de fração, multiplicam-se ambas as frações.

Assim: 1/5 de 2/3 = 2/15; 1 1/5 de 1/7 = 6/5 x 1/7 = 6/35.

3. *Fração composta* é a que tem em um ou em ambos os termos um número misto ou uma fração.

Ex.: $\frac{2\frac{1}{5}}{3/4}$, $\frac{2}{4\frac{1}{5}}$, $\frac{2}{2/3}$, etc.

4. Para converter uma fração composta em uma fração simples, divide-se o numerador pelo denominador.

Assim: $\frac{2\frac{1}{5}}{3/4} = 2 \frac{1}{5} \div \frac{3}{4} = \frac{11}{5} \times \frac{4}{3} = \frac{44}{15} = 2 \frac{14}{15}$;

$\frac{2}{4\frac{1}{5}} = 2 \div 4 \frac{1}{5} = 2 \div \frac{21}{5} = 2 \times \frac{5}{21} = \frac{10}{21}$; etc.

1. Que é fração de fração? Explique e dê ex. — 2. Como se acha o resultado de uma fração de fração? — 3. Que é fração composta? Dê ex. — 4. Como se converte uma fração composta em fração simples?

Exercício 25 — Efetuar as seguintes operações: $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{4}$, $2\frac{2}{3}$ de $4\frac{1}{5}$; $\frac{5\frac{1}{2}}{3\frac{1}{4}}$; $\frac{5}{3\frac{2}{9}}$; $\frac{5\frac{1}{6}}{4}$; $\frac{3/4}{2/3}$; $\frac{2/5 + 3/4 + 2\frac{1}{9}}{11 - 4\frac{1}{5}}$;

$\frac{5/7 \times 4\frac{1}{5} \times 5/8}{8\frac{1}{3} \div 3\frac{1}{4}}$.

Revisão de frações ordinárias

Exercício 26 — Efetuar:

$3\frac{1}{4} + 2\frac{1}{3} + 4\frac{1}{2} =$
 $5\frac{1}{5} - 3\frac{1}{4} =$
 $3\frac{1}{5} \times 3\frac{5}{7} =$
 $3\frac{1}{5} \div 2\frac{1}{10} =$
 $(3/5)^2 =$

Exercício 27 — Efetuar:

$4\frac{1}{3} + 2 + 6\frac{1}{4} =$
 $7\frac{1}{5} - 3\frac{11}{33} =$
 $9\frac{1}{3} \times \frac{1}{14} =$
 $7\frac{1}{5} \div 4\frac{3}{15} =$
 $(7/8)^2 =$
 $3/5$ de $5/7 =$

Exercício 28 — Efetuar:

$6/8 + 5/15 + 3/9 =$
 $9 - 2/6 =$
 $5 \times 3\frac{1}{4} =$
 $9 \div 3/7 =$
 $4/9$ de $1/3 =$
 $7\frac{2}{3} + 5 =$
 $3/8$ de $5/9 =$

Exercício 29 — Efetuar:

$5\frac{1}{5} + 3/4 + 6\frac{2}{6} =$
 $6\frac{3}{7} - 3/4 =$
 $8 \times 5\frac{3}{4} =$
 $8\frac{1}{5} \div 3\frac{3}{20} =$
 $5\frac{5}{7}$ de $2/3$ de $1/4 =$
 $7\frac{2}{3} - 5\frac{1}{4} =$
 $4/5 + 3 \div 1/6 =$

Exercício 30 — Efetuar:

$9 + 4\frac{1}{6} + 5/10 =$
 $8\frac{1}{5} - 3 =$
 $9\frac{1}{5} - 3 =$
 $9\frac{1}{5} \times 7\frac{1}{4} =$
 $9\frac{3}{7} \div 3 =$
 $(3\frac{4}{5})^2 =$
 $4/5$ de $7\frac{1}{8} =$

Exercício 31 — Efetuar:

$6\frac{1}{7} + 2 + 4\frac{1}{3} + 2/5 =$
 $6\frac{1}{7} - 2 =$
 $6\frac{1}{7} \times 7 =$
 $6\frac{1}{7} \div 1/7 =$
 $7\frac{1}{5} \times 3\frac{1}{4} =$
 $9 \div 4\frac{1}{3} =$

Exercício 32 — Efetuar:

$7\frac{1}{9} + 2/5 + 17 =$
 $7\frac{2}{7} - 4/5 =$
 $6\frac{2}{3} + 3/5 - 1/7 =$
 $9\frac{1}{3} \times 5 + 1/4 =$
 $5\frac{1}{4} \div 3\frac{1}{2} =$
 $(4/7)^2 =$

Exercício 33 — Efetuar:

$4\frac{1}{11} + 7 + 3 + 2\frac{1}{5} =$
 $11 - 2\frac{1}{3} =$
 $11 \times 6\frac{1}{5} =$
 $11 \div 3\frac{1}{7} =$
 $5\frac{1}{4}$ de $2\frac{1}{3} =$

Exercício 34 — Efetuar:

$11/13 + 2\frac{1}{5} + 4 =$
 $9\frac{1}{5} + 3/7 - 2/5 =$
 $9\frac{1}{5} \times 2/10 =$
 $5/10 \div 4\frac{1}{5} =$
 $(3/7)^2 =$

Exercício 35 — Efetuar:

$7/14 + 5/15 + 9/81 + 2 =$
 $6\frac{1}{5} - 2/7 + 4\frac{1}{3} =$
 $9\frac{4}{3} \times 6/11 =$
 $3 \div 3/5 =$
 $2\frac{1}{3} + 3/5 \times 15/17 =$
 $9\frac{1}{3} - 4\frac{1}{7} + 5/4 \div 3/8 =$

13.º PONTO — Número misto decimal. Fração decimal. As 4 operações sobre decimais.

1 e 2. Número misto decimal é um número constituído por um inteiro e por uma fração decimal. Ex.: 5,75 (5 inteiros e 75 centésimos). O número inteiro é separado da fração decimal por uma vírgula chamada *vírgula decimal*.

3 e 4. Fração decimal é uma ou mais partes iguais da unidade dividida na razão décupla, isto é, em 10, 100, 1000, etc. partes iguais. Ex.: 0,55 (55 centésimos). Na fração decimal o número inteiro, substituído por um zero.

5 a 7. Nas frações decimais, a *unidade* divide-se em 10 décimos; o *décimo*, em 10 centésimos; o *centésimo*, em 10 milésimos; o *milésimo*, em 10 décimos milésimos; o *décimo milésimo*, em 10 centésimos milésimos; o *centésimo milésimo*, em 10 milionésimos; o *milionésimo*, em 10 décimos milionésimos, etc.

É em virtude da divisão na razão décupla que estas frações receberam o nome de decimais.

Disto se deduz que os nomes das casas decimais, a partir da vírgula, são os seguintes: *décimos*, *centésimos*, *milésimos*, *décimos milésimos*, *centésimos milésimos*, *milionésimos*, *décimos milionésimos*, etc.

8. Podemos ler uma fração decimal de 2 modos:
 1) Lê-se a fração decimal como se fosse um número inteiro e acrescenta-se-lhe o nome da última ordem da fração. Assim: 0,526 lê-se 526 milésimos.

2) Enuncia-se sucessivamente o número e o nome de cada ordem da fração. Assim: 0,526, lê-se 5 décimos, 2 centésimos e 6 milésimos.

9. Podemos ler o número decimal também de 2 modos:

1.º Lê-se todo o número como se fôsse inteiro e acrescenta-se-lhe o nome da última ordem da fração. Assim: 5,25 lê-se 525 centésimos.

2.º Lê-se primeiramente o número inteiro e depois a parte decimal, acrescentando-se-lhe o nome da última ordem da fração. Assim: 5,25 lê-se 5 inteiros e 25 centésimos.

10. Para escrever uma fração decimal, escreve-se primeiramente o zero, seguido de vírgula decimal e em seguida o número como se fôsse inteiro, tendo-se o cuidado de colocar zeros nas ordens onde não houver valores para representar.

11. Propriedades das frações e números decimais:

1.ª As frações e os números mistos decimais não se alteram quando à sua direita se acrescenta ou suprime um ou mais zeros. Assim $1,2 = 1,20 = 1,200$, etc. Baseados nesta propriedade, podemos reduzir duas ou mais frações decimais à mesma denominação, sem lhes alterar o valor, bastando para isso acrescentar um ou mais zeros. Assim, para reduzir as frações 0,75 e 0,8 à mesma denominação basta acrescentar um zero à segunda.

2.º Deslocando a vírgula decimal uma, duas, três, etc., casas para a direita, a fração decimal fica multiplicada por 10, 100, 1 000, etc., isto é, fica 10, 100, 1 000, etc. vezes maior.

3.ª Deslocando a vírgula decimal uma, duas, três, etc. casas para a esquerda, a fração decimal fica dividida por 10, 100, 1 000, isto é, fica 10, 100, 1 000, etc. vezes menor.

12. Diferenças entre as frações ordinárias e as decimais. — 1.ª Na fração ordinária a unidade pode estar dividida em qualquer número de partes iguais, ao passo que na fração decimal a unidade está sempre dividida em 10 partes iguais ou numa potência de 10. — 2.ª A fração ordinária é sempre representada por 2 números (numerador e denominador), ao passo que a fração decimal escreve-se apenas com um número; o denominador da fração decimal fica oculto e deduz-se do número de algarismos existentes depois da vírgula.

1. Que é número misto decimal? Dê ex. — 2. Que é que separa o número inteiro da fração decimal? — 3. Que é fração decimal? Dê ex. — 4. Na fração decimal que é que substitui o número inteiro? — 5. Como se divide a unidade e suas subdivisões em frações decimais? — 6. Por que é que estas frações se chamam decimais? — 7. Quais os nomes das diferentes casas decimais, a partir da vírgula? — 8. Por quantos modos podemos ler uma fração decimal? Explique com ex. — 9. Por quantos modos podemos ler um número decimal? Explique com ex. — 10. Como se escreve uma fração decimal? Dê ex. — 11. Quais são as propriedades das frações decimais? Dê ex. — 12. Em que diferem as frações ordinárias das decimais?

Exercício 36 — Ler as seguintes frações: 0,5; 0,08; 0,15; 0,185; 0,0835; 0,18753; 8,01589635. Escrever as seguintes frações: 1 décimo; 4 centésimos; 9 milésimos; 35 centésimos; 2 milésimos; 105 milésimos; 97 décimos; 14 milésimos; 18 décimos milésimos; 1208 centésimos milésimos; 200 milionésimos.

1. Adição. — Para efetuar uma soma de decimais, escrevem-se as frações ou os números decimais uns debaixo dos outros, de modo que as vírgulas fiquem em coluna vertical, isto é, décimos debaixo de décimos, centésimos debaixo de centésimos, milésimos debaixo de milésimos, etc.; depois, somam-se todas as parcelas como se fôsses números inteiros e escreve-se no resultado uma vírgula na direção das vírgulas das parcelas.

Assim: a soma $0,45 + 1,753 + 0,5832$ dispõe-se do seguinte modo:

	0,45
	1,753
	0,5832

	2,7862

Exercício 37 — Efetuar as seguintes adições: $0,83 + 0,4257 + 0,083 + 0,002$; $37,9 + 3,79 + 379 + 0,0053$; $98,5 + 9,85 + 5,5 + 20 + 0,2$; somar 5 décimos, 5 centésimos, 5 milésimos e 5 milionésimos.

2. Subtração. — Para subtrair uma fração decimal de outra, escreve-se o subtraendo debaixo do minuendo, de modo que as vírgulas fiquem em coluna vertical; se o minuendo tiver menos casas decimais que o subtraendo, acrescentam-se-lhe zeros até igualar o número de casas decimais; depois faz-se a subtração como se fôsses números inteiros e escreve-se no resultado uma vírgula na direção das vírgulas dos termos da subtração.

Assim: a subtração $85,75 - 0,0825$ dispõe-se do seguinte modo:

	85,7500
	0,0825

	85,6675

Outro exemplo, com o minuendo número inteiro: 12 - 0,525:

$$\begin{array}{r} 12,000 \\ - 0,525 \\ \hline 11,475 \end{array}$$

Exercício 38 — Ejetuar as seguintes subtrações: 35,007 - 0,253; 85 - 0,85; 0,5 - 0,0005; 2 inteiros menos 3 milionésimos; 25 centésimos menos 25 décimos milionésimos.

3. Multiplicação. — Para multiplicar decimais, procede-se como se fôsssem números inteiros (sem preocupação com a vírgula) e no produto separam-se com a vírgula tantas casas decimais quantas houver em ambos os fatores, antepondo-se zeros se o produto não contiver número suficiente de algarismos.

$$\begin{array}{r} 2,425 \\ \times 0,23 \\ \hline 7275 \\ 4850 \\ \hline 0,55775 \end{array}$$

Regra particular. — Para multiplicar uma fração ou um número misto decimal por 10, 100, 1 000, etc., basta deslocar a vírgula uma, duas, três, etc. casas para a direita. Assim: 0,387 x 100 = 38,7; 3,87 x 100 = 387.

Exercício 39 — Ejetuar as seguintes multiplicações: 8,5 x 4,25; 9 x 0,375; 18,27 x 19; 425,695 x 0,07850; 23,5 x 1000; 2 centésimos vezes 1 milésimo; 20 vezes 12 milionésimos.

Para elevar uma fração decimal a uma potência qualquer, procede-se como no caso de números inteiros, bastando apenas atender à vírgula. Assim: (0,35)^2 = 0,35 x 0,35 = 0,1225.

5. Divisão decimal (regra geral). — Para dividir decimais, suprime-se a vírgula no divisor (se a tiver), e depois muda-se no dividendo a vírgula para a direita tantas casas quantas forem as casas decimais do divisor¹, (acrescentando-se zeros ao dividendo, se fôr necessário); em seguida divide-se como no caso de números inteiros, e separam-se no quociente tantas casas decimais quantas houver no dividendo.

Do exposto se deduz que quando o divisor fôr inteiro não há necessidade de fazer alteração alguma nos termos da divisão; pratica-se a divisão como nos números inteiros, devendo-se apenas ter o cuidado de separar no quociente tantas casas decimais quantas houver no dividendo.

Seja: 6,25 ÷ 2,5. Multiplicando o dividendo e o divisor por 10, o quociente não se altera e temos: 62,5 ÷ 25 = 2,5.

¹ Isto equivale a multiplicar o dividendo e o divisor pelo mesmo número (a fim de tornar o divisor inteiro), o que não altera o quociente.

Outros exemplos:

$$\begin{aligned} 12,5 \div 0,25 &= 1250 \div 25 = 50; \\ 0,525 \div 0,005 &= 525 \div 5 = 105; \\ 0,525 \div 0,5 &= 5,25 \div 5 = 1,05. \\ 8,672 \div 8 &= 1,084. \end{aligned}$$

Quando a divisão não é exata, pode-se continuar a operação, escrevendo um zero depois do resto, e assim sucessivamente depois de cada novo resto.

Regra particular. — Para dividir uma fração decimal (ou um número misto decimal) por 10, 100, 1 000, etc. desloca-se a vírgula uma, duas, três, etc. casas para a esquerda. Assim: 0,625 ÷ 0,125;

Exercício 40 — Ejetuar as seg. divisões: 0,625 ÷ 1,25; 0,625 ÷ 125; 62,5 ÷ 1,25; 6,25 ÷ 0,125; 458,9 ÷ 1000; 21 ÷ 0,3; 2,1 ÷ 0,3; 2,10 ÷ 0,3; 2,10 ÷ 3; 1,05 ÷ 0,15; 10,5 ÷ 0,15; 105 ÷ 1,5; 754,2 ÷ 18; 7542 ÷ 0,18; 0,391 ÷ 0,17; 4,25 ÷ 0,017; dividir um milésimo por um décimo.

7 a 10. Aproximação do quociente das divisões não exatas. — Quando se faz uma divisão não exata, pode-se obter o quociente com a aproximação decimal que se desejar, bastando para isso acrescentar zeros ao dividendo.

Suponhamos que desejamos dividir 85 por 6 com a aproximação de 0,001. Como 0,001 tem 3 casas decimais, acrescentaremos 3 zeros ao dividendo e dividiremos 85,000 por 6.

$$\begin{array}{r} 85,000 \mid 6 \\ 25 \\ \hline 10 \\ 40 \\ 40 \\ \hline 4 \end{array}$$

11. Praticamente, efetua-se a divisão dada sem acrescentar zeros ao dividendo, e, depois de obter o último resto, escreve-se uma vírgula a seguir ao quociente e um zero à direita do resto; continua-se a divisão acrescentando-se um zero a cada resto sucessivo até obter a aproximação desejada.

$$\begin{array}{r} 85 \mid 6 \\ 25 \\ \hline 10 \\ 40 \\ 40 \\ \hline 4 \end{array}$$

— Ejetuar as seguintes divisões, aproximando o quociente até milésimos: 85 ÷ 6; 157,3 ÷ 12; 0,5824 ÷ 0,15.

Revisão de frações decimais

Exercício 41 — Ejetuar:

$$\begin{aligned} 9,05 + 0,435 + 0,6 + 12,1 &= \\ 8,04 - 0,735 &= \\ 6,054 \times 0,5 &= \\ 8,25 \div 0,3 &= \\ (6,15)^2 &= \end{aligned}$$

Exercício 43 — Ejetuar:

$$\begin{aligned} 6,409 + 0,3046 + 16,1 + 3,642 &= \\ 16,1 - 3,642 &= \\ 6,341 \times 0,00039 &= \\ 11 \div 0,435 &= \\ (15,3)^2 &= \end{aligned}$$

Exercício 42 — Ejetuar:

$$\begin{aligned} 6 + 0,45 + 45 + 6,9034 &= \\ 8 - 0,15 &= \\ 0,495 \times 9 &= \\ (2,698)^2 &= \end{aligned}$$

Exercício 44 — Ejetuar:

$$\begin{aligned} 5,5 + 3 + 0,478 &= \\ 15,57 - 9 &= \\ 87,5 \times 100 &= \\ 8,75 \div 100 &= \end{aligned}$$

Exercício 45 — Efetuar:

$$18 + 0,3 + 0,097 =$$

$$15,347 - 7 =$$

$$17 \times 2,524 =$$

$$2,524 \div 10 =$$

Exercício 46 — Efetuar:

$$1,8 + 18 + 0,18 + 3 =$$

$$9,25 - 0,0005 =$$

$$9,84 \times 0,5003 =$$

$$9,84 \div 100 =$$

Exercício 47 — Efetuar:

$$44 + 4,4 + 0,44 + 0,044 =$$

$$4 - 0,3256 =$$

$$19,237 \times 0,5 =$$

$$19,388 \div 52,4 =$$

Exercício 48 — Efetuar:

$$6,58 + 4 + 3,275 =$$

$$6,58 - 4 =$$

$$98,76 \times 0,287 =$$

$$366,8 \div 524 =$$

$$(5,23)^2 =$$

1. Como se adicionam decimais? Dê ex. — 2. Como se subtraem? Dê ex. — 3. Como se multiplicam? Dê ex. — 4. Como se multiplica uma fração ou um número misto decimal por 10, 100, 1 000, etc.? Dê ex. — 5. Como se dividem decimais? Dê ex. — 6. Como se divide uma fração ou um número misto decimal por 10, 100, 1 000, etc.? — 7. Como se aproxima o quociente de uma divisão não exata? — 8. Quantos zeros é preciso acrescentar para obter a aproximação de 0,01? — 9. ...de 0,001? — 10. ...de 0,1? — 11. Como se obtém a aproximação, praticamente?

14.º PONTO — Conversão das frações ordinárias em decimais e vice-versa. Dízimas periódicas

1. Converter uma fração ordinária em uma fração decimal é transformá-la em uma fração decimal com o valor da fração ordinária dada.

2. Para converter fração ordinária em decimal, divide-se o numerador pelo denominador, acrescentando ao numerador tantos zeros quantos forem necessários para que se possa fazer a divisão, e no quociente separam-se tantas casas decimais quantos forem os zeros acrescentados. Seja converter $\frac{3}{4}$ em fração decimal

$$\begin{array}{r} 30 \quad | \quad 4 \\ \quad \quad 20 \quad \underline{\quad} \quad 0,75 \\ \quad \quad \quad \quad \quad 00 \end{array}$$

3 e 4. Casos especiais da conversão de frações ordinárias em decimais. — 1.º Quando o numerador for igual ao denominador, o quociente é igual a 1. Assim: $\frac{9}{9} = 1$, $\frac{15}{15} = 1$, etc.

2.º Quando o numerador for múltiplo do denominador, o quociente será um número inteiro maior do que a unidade. Assim: $\frac{8}{4} = 2$, $\frac{15}{5} = 3$, etc.

5. Converter uma fração decimal em uma fração ordinária é transformá-la em uma fração ordinária com o valor da fração decimal dada.

6. Para converter fração decimal em ordinária, escreve-se no numerador a fração decimal sem a vírgula, e no denominador a unidade seguida de tantos zeros

quantos forem os algarismos da fração decimal dada; depois simplificam-se os termos da fração resultante se tiverem um divisor comum. Assim: $0,75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$.

7. Para converter um número misto decimal em fração ordinária imprópria, há duas regras:

1.ª — Escreve-se no numerador o número misto decimal sem a vírgula, e, no denominador, a unidade seguida de tantos zeros quantas forem as casas decimais do número dado; depois simplificam-se os termos da fração resultante se tiverem um divisor comum. Assim: $4,75 = \frac{475}{100} = \frac{19}{4} = 4\frac{3}{4}$.

2.ª — Escreve-se o número inteiro seguido de uma fração ordinária que tenha para numerador (sem a vírgula) a fração decimal que acompanha o número dado, e, para denominador, a unidade seguida de tantos zeros quantas forem as casas decimais do número dado; depois simplificam-se os termos da fração ordinária resultante se tiverem um divisor comum. Assim: $4,75 = \frac{475}{100} = 4\frac{3}{4}$.

8 a 14. Dízimas — são frações decimais. Convertendo frações ordinárias em decimais, podemos obter *dízimas exatas*, *dízimas periódicas simples* e *dízimas periódicas compostas*.

Dízima exata é a que provém de uma divisão exata e por isso exprime exatamente o valor da fração ordinária a que corresponde. Assim, a fração ordinária $\frac{3}{4} = 0,75$ (dízima exata).

Dízima periódica simples é a que consta de períodos que se repetem indefinidamente, porque a dízima provém de uma divisão que deixa sempre resto. Assim: a fração ordinária $\frac{2}{11} = 0,272727\dots$ (dízima periódica simples).

Dízima periódica composta é aquela que, além dos períodos repetidos indefinidamente, tem uma parte não periódica logo depois da vírgula. Assim: a fração ordinária $\frac{5}{6} = 0,83333\dots$ (dízima periódica composta, em que 8 é a parte não periódica e 3 o período).

Período é o algarismo ou grupo de algarismos que se repete indefinidamente; pode constar de 1, 2 ou mais algarismos.

15 a 17. Modo prático de conhecer que espécie de dízima produzirá uma fração ordinária irredutível:

1.º Quando o denominador de uma fração irredutível for constituído apenas pelos fatores primos 2 ou 5, ou ambos, uma

ou mais vezes, essa fração produzirá uma dízima exata, com um número de algarismos decimais igual ao maior expoente dos fatores primos do denominador.

Assim: a fração $\frac{3}{20} = \frac{3}{2 \times 2 \times 5} = \frac{3}{2^2 \times 5} = 0,15$ (dízima exata.)

2.º) Quando o denominador de uma fração irredutível não contiver nem o fator 2 nem o fator 5, essa fração produzirá uma dízima periódica simples.

Assim: $5/11 = 0,454545\dots$ (periódica simples).

3.º) Quando o denominador de uma fração irredutível for constituído por um dos fatores 2 ou 5, ou ambos, juntamente com outros fatores primos, produzirá uma dízima periódica composta, sendo o número de algarismos da parte não periódica igual ao maior dos

expoentes dos fatores 2 ou 5. Assim: $\frac{5}{12} = \frac{5}{2 \times 2 \times 3} = \frac{5}{2^2 \times 3} = 0,41666\dots$ (dízima periódica composta).

18. Geratrizes. — Geratriz de uma dízima periódica (simples ou composta) é a fração ordinária que, transformada em decimal, produz essa dízima.

19. Para achar a geratriz de uma periódica simples, escreve-se no numerador um dos períodos e no denominador tantos zeros quantos forem os algarismos do período, simplifica-se depois a fração resultante se os seus termos tiverem um divisor comum.

Assim: $0,381381\dots = \frac{381}{999} = \frac{127}{333}$.

20. No caso da periódica simples estar unida a um número inteiro, procede-se do seguinte modo: $5,2727\dots = 5 \frac{27}{99} = 5 \frac{3}{11}$.

21. Para achar a geratriz de uma periódica composta, escreve-se no numerador a parte não periódica seguida de um dos períodos e deste número subtrai-se a parte não periódica; no denominador escrevem-se tantos zeros quantos forem os algarismos do período, seguidos de tantos zeros quantos forem os algarismos da parte não periódica; depois simplifica-se a fração resultante, se for redutível.

Assim: $0,23444\dots = \frac{234 - 23}{900} = \frac{211}{900}$.

22. No caso da periódica composta estar unida a um número inteiro, procede-se por um dos seguintes modos: $5,23444\dots =$

$= 5 \frac{234 - 23}{900} = 5 \frac{211}{900}$ ou $5,23444\dots = \frac{5234 - 523}{4711} = \frac{4711}{4711} = 5 \frac{211}{900}$.

O 1.º processo deve ser preferido por ser mais simples.

1. Que é converter uma fração ordinária em uma fração decimal? — 2. Como se converte uma fração ordinária em decimal? Dê ex. — 3. Quando é que a fração ordinária é igual à unidade? Dê ex. — 4. Quando é igual a um número inteiro? Dê ex. — 5. Que é converter uma fração decimal em uma fração ordinária?

6. Como se converte uma fração decimal em ordinária? Dê ex. — 7. Como se converte um número misto decimal em fração imprópria? Dê ex. — 8. Que são dízimas? — 9. Convertendo frações ordinárias em decimais, que espécies de dízimas podemos obter? — 10. Que é dízima exata? Dê ex. — 11. Que é dízima periódica simples? Dê ex. — 12. Que é dízima periódica composta? Dê ex. — 13. Que é período? — 14. De quantos algarismos pode constar? — 15. Quando é que uma fração ordinária irredutível produz uma decimal exata? Dê ex. — 16. ...periódica simples? Dê ex. — 17. ...periódica composta? Dê ex. — 18. Que é geratriz de uma dízima periódica? — 19. Como se acha a geratriz de uma periódica simples? Dê ex. — 20. Como se procede no caso do período estar unido a um número inteiro? Dê ex. — 21. Como se acha a geratriz de uma periódica composta? Dê ex. — 22. Como se procede no caso da periódica composta estar unida a um número inteiro? Dê ex.

Exercício 49 — Converter em decimais: $1/4, 2/5, 3/8, 5/16, 7/20, 4/25$ e $7 \frac{1}{2}$.

— Converter em frações ordinárias: $0,4; 0,5; 0,08; 0,10; 0,00016$ e $5,75$.

Exercício 50 — Escrever cinco periódicas simples e cinco periódicas compostas, sublinhando o 1.º período em cada uma delas. — Dizer que espécie de dízimas produzirão as seguintes frações: $3/10, 3/4, 7/20, 4/5, 2/7, 1/3, 2/9, 5/6, 4/15, 5/12, 3/16, 4/75$, e por que.

Exercício 51 — Escrever cinco frações ordinárias que produzam decimais exatas, cinco que produzam periódicas $0,0303\dots$; produzam periódicas compostas.

— Achar as geratrizes das seguintes periódicas $0,222\dots; 0,512512\dots; 2,6565\dots; 0,455\dots; 0,32525\dots; 0,35444\dots; 0,2753131\dots; 6,215353\dots$.

Revisão de frações ordinárias e decimais

Exercício 52 — Efetuar, dando os resultados em frações ordinárias e em frações decimais:

$7 \frac{1}{3} + 2,35 + 7/9 + 3 =$
 $7,3 - 3/4 =$
 $9 \frac{2}{3} \times 0,425 =$
 $8 \frac{3}{4} \div 0,54 =$
 $6,75 \div 3/12 =$

Exercício 53 — (Idem):

$0,333\dots + 2/3 + 5 \frac{1}{4} =$
 $3 \frac{2}{5} - 0,23535\dots =$
 $7,63 \times 6/7 =$
 $4/9 \div 0,215 =$

Exercício 54 — (Idem):

$15 + 2,130 + 10/11 + 2,68 =$
 $14/14 - 0,36 =$
 $10/11 - 0,007 =$
 $9,375375\dots \times 1/6 =$
 $8,2323\dots \div 4,151515\dots =$

Exercício 55 — (Idem):

$4 \frac{5}{10} + 0,285 + 3/4 =$
 $6,54 - 5/8 =$
 $9,27 \times 4/15 =$
 $4/15 \div 2/3 =$

Exercício 56 — (Idem):

$0,444\dots + 2,2929\dots + 3 =$
 $6 \frac{1}{3} - 4,5 =$
 $9 \frac{2}{3} \times 0,65 =$
 $4 \frac{2}{9} \div 0,58 =$

Exercício 57 — (Idem):

$2,378989 + 5/11 =$
 $14,0054747\dots - 8 =$
 $8,04657657 \times 3/5 =$
 $8,254003003\dots \div 6/7 =$

15.º PONTO — Expressões. Exercícios de expressões com frações ordinárias e decimais para aplicação das regras de conversão

1. Expressão, em Aritmética, é uma quantidade qualquer representada por meio de números; chama-se também *expressão numérica*.

2. Nas expressões numéricas usam-se os sinais de agregação, de que já tratamos no princípio do 3.º Ponto. Esses sinais são: os *parênteses*, os *colchetes*, as *chaves* e o *vínculo*, que equivale aos parênteses e por isso é pouco empregado. Os *colchetes* ligam quantidades já agregadas por parênteses: as *chaves* ligam quantidades já agregadas por colchetes.

3. Para achar o resultado de uma expressão numérica, fazem-se primeiro as multiplicações e as divisões, se as houver, e da soma dos números positivos subtrai-se a soma dos números negativos. Se houver sinais de agregação, resolve-se primeiramente o que estiver dentro dos *parênteses*, em seguida o que estiver dentro dos *colchetes*, e depois o que estiver dentro das *chaves*.

Números positivos são os que têm antes o sinal + (mais).

Números negativos são os que têm antes o sinal - (menos).

Exercícios 58 a 63 — Sublinhar com um traço as quantidades positivas e com dois traços as quantidades negativas:

$$8 + 2 - 5 - 3 + 6 + 2 - 9 + 12 =$$

$$17 - 2 - 3 - 5 + 4 - 1 + 16 =$$

$$9 + 6 - 4 - 5 - 2 + 3 - 5 + 7 =$$

$$4 \times 7 + 21 \div 2 - 5 \times 2 + 3 \times 4 \div 2 - 4 \times 2 - 3 =$$

$$(4 \times 5 + 2) + [(35 \div 7 + 4) \times (17 - 6)] + 9 =$$

$$(6 + 3) (21 \div 7) - 20 + 8 =$$

1. Que são expressões numéricas? — 2. Que sinais se usam nas expressões numéricas? Mencione-os. — 3. Como se acha o resultado de uma expressão numérica? — 4. Que são quantidades positivas? — 5. Que são quantidades negativas? — 6. Como se procede no caso de haver sinais de agregação?

Modelos

$$2 + 3 - 2 + 4 - 1 + 7 - 3 - 2 = 16 - 8 = 8.$$

$$5 \times 8 + 20 \div 5 - 2 \times 3 - 8 \div 2 + 8 - 2 + 3 = 40 + 4 -$$

$$- 6 - 4 + 8 - 2 + 3 = 55 - 12 = 43.$$

$$[(5 \times 6 + 3) - (8 \div 4 - 1)] \times 5 = [33 - 1] \times 5 = 32 \times 5 =$$

$$= 160.$$

Não havendo sinal de operação junto dos sinais de agregação, subentende-se o sinal x.

Exercícios 64 a 77 — Efectuar as seguintes expressões:

$$8 + 2 - 5 - 3 + 6 + 2 - 9 + 12 =$$

$$17 - 2 - 3 - 5 + 4 - 1 + 16 =$$

$$9 + 6 - 4 - 5 - 2 + 3 - 5 + 7 =$$

$$4 \times 7 + 21 \div 3 - 5 \times 2 + 3 \times 4 \div 2 - 4 \times 2 - 3 =$$

$$(4 \times 5 + 2) + [(35 \div 7 + 4) \times (17 - 6)] + 9 =$$

$$(6 + 3) (21 \div 7) - 20 + 8 =$$

$$\frac{2}{5} \times \frac{3}{8} \div \frac{3}{4} + 1 \frac{1}{2} - \frac{5}{6}$$

$$R. \frac{13}{15}$$

$$\left(2 + \frac{4}{7} \right) \times \left(5 - \frac{1}{3} \right) \div 5 \frac{1}{3}$$

$$R. 2 \frac{1}{4}$$

$$\left(9 - \frac{3}{4} \right) \div \left(4 - \frac{1}{3} \right) \div 2 \frac{1}{4}$$

$$0,4 \times 0,7 + 2,1 \div 0,03 - 0,5 \times 0,02 + 3,5 \times 0,4 \div 0,2 =$$

$$(0,4 \times 0,5 + 0,02) (3,5 \div 7 - 0,003) + 15,8 - (8,34 \div 2) =$$

$$2,9 \text{ de } \frac{5}{8} + \frac{6 \frac{3}{5}}{4 \frac{2}{5}} - 2 \frac{1}{2} \div 0,8 =$$

$$0,75 + \frac{3}{4} \div \frac{3}{9} - 0,25 - 2 \frac{1}{5}$$

$$R. \frac{11}{20}$$

$$\left(0,5 + \frac{2}{3} - 0,444... \right) \times \frac{3}{5} \div \frac{1}{4} - \frac{3}{4}$$

$$R. \frac{59}{60}$$

$$0,625 \div \frac{3}{4} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \div \frac{19}{25} \times 0,25333...$$

$$R. 1 \frac{1}{5}$$

O professor deverá completar esta lista de expressões e exigir as soluções em frações ordinárias e em frações decimais.

16.º PONTO — Sistema métrico decimal. Unidades principais. Múltiplos e submúltiplos

Metro, sua definição

1. Sistema métrico decimal é o conjunto de pesos e medidas que tem por base o metro.

2 e 3. A criação do metro teve por fim organizar um sistema de medidas, fácil, simples e comum a todas as nações, porque, antigamente, havia um grande número de medidas, que, de lugar para lugar, variavam de tamanho e até de nome, o que acarretava fraudes e embarços para o comércio. Acresce ainda que as medidas antigas não se dividiam na razão decimal, tornando, portanto, os cálculos muito difíceis.

4 e 5. Histórico. — Em 1790, uma comissão de matemáticos franceses, nomeada pela Academia de Ciências de Paris, querendo dar um valor fixo e uniforme à unidade de comprimento, mediu, pelo meridiano de Paris, a distância de Dunquerque (na França) a Barcelona (na Espanha), que são os dois pontos extremos da Europa, seguindo aquele meridiano; e, achada esta medida, calculou o quadrante da terra, isto é, a quarta parte da circunferência terrestre, ou seja a distância do Equador ao Polo.

Em seguida, dividiu o comprimento obtido em dez milhões de partes iguais¹. Cada uma destas partes foi denominada *metro*, que é, portanto, a *décima milionésima parte de um quarto do meridiano terrestre*.

O sistema métrico é adotado na maior parte das nações do globo. Começou a ser usado em Portugal em 1852, e no Brasil em 1862 (decreto de 26 de Junho).

6. **Unidades principais do sistema decimal:** *metro linear* (para medir comprimentos), *metro quadrado* (para medir superfícies), *metro cúbico* (para medir volumes), *litro* (para medir capacidades) e *quilograma* (para avaliar pesos).

Há também o *are* (para avaliar superfícies agrárias), o *estéreo* (para medir lenha) e o *franco*, não adotado no Brasil (para avaliar dinheiro).

7. Os símbolos das unidades do sistema métrico são, na ordem em que aqui estão escritas, as seguintes: *m*, *m²*, *m³*, *l*, *kg*, *a*, *st* e *fr*.

8. **Múltiplos e submúltiplos decimais.** — *Múltiplos decimais de uma unidade principal* são as unidades que valem 10, 100, 1 000, 10 000... vezes mais que a unidade principal.

9 a 11. Para designar os **múltiplos² decimais** empregam-se os seguintes prefixos gregos: *deca*, *hecto*, *quilo*, *miria*, que significam, respectivamente 10, 100, 1 000, 10 000, e cujos símbolos são *da*, *h*, *k*, *ma*.

12. *Submúltiplos decimais de uma unidade principal* são as unidades que valem 10, 100, 1 000 vezes menos que a unidade principal.

13 a 15. Para designar os **submúltiplos² decimais** antepõem-se às unidades principais os prefixos de origem latina: *deci*, *centi* e *mili*, que significam, respectivamente, *décima parte*, *centésima parte* e *milésima parte*, e cujas abreviaturas são *d. c. m.*

— Os múltiplos e submúltiplos são *unidades secundárias*.

16 e 17. *Medidas efetivas e fictícias.* — Das medidas do sistema métrico, umas existem materialmente,

¹ Medições feitas posteriormente demonstraram que o comprimento da quarta parte do meridiano é de 10 002 008 metros atuais e não 10 000 000, como erradamente se calculou.

² Tanto os múltiplos como os submúltiplos se escrevem com inicial minúscula. Somente nas unidades de trabalho mecânico e energia se usa o *M* como símbolo de *mega*, que significa 1 000 000.

outras não. As primeiras chamam-se *efetivas* (metro, litro, grama, estéreo, franco, etc.), e as segundas chamam-se *fictícias* (quilômetro, metro quadrado, etc.).

1. Que é sistema métrico? — 2. Por que foi criado o sistema métrico decimal? — 3. Quais as desvantagens dos antigos sistemas de medidas? — 4. Conte como se originou o metro? — 5. Que é metro? — 6. Quais as unidades principais do sistema métrico decimal? — 7. Como se abreviam? — 8. Que são múltiplos decimais de uma unidade principal? — 9. Como se designam os múltiplos? — 10. Que significam estas palavras e como se abreviam? — 11. Quais são os múltiplos do metro — do litro? — do grama? — 12. Que são submúltiplos decimais de uma unidade principal? — 13. Como se designam os submúltiplos? — 14. Que significam estas palavras e como se abreviam? — 15. Quais são os submúltiplos do metro? — do litro? — do grama? — 16. Que são medidas efetivas? — Dê ex. — 17. Que são medidas fictícias? Dê exemplos.

SISTEMA LEGAL BRASILEIRO DE UNIDADES DE MEDIDA

Unidades legais, seus múltiplos e submúltiplos usuais¹

Metro linear (unidade de comprimento)

(seus múltiplos e submúltiplos usuais)

1 a 3. **Metro linear** ou simplesmente metro, é, aproximadamente, a *décima milionésima parte de um quarto do meridiano terrestre* (V. pág. 58, nota); é a unidade de comprimento. O símbolo do metro é *m*.

O metro pode ser feito, materialmente, de diversas substâncias (madeira, metal, pano, etc.); às vezes tem a forma de uma régua, outras vezes é dobradiço, outras vezes é uma fita que se enrola automaticamente, e fica guardada numa caixinha redonda.

4. **Múltiplos do metro** e seus respectivos símbolos²: *decâmetro* (dam), que vale 10 m; *hectômetro* (hm), que vale 100 m; e *quilômetro* (km), que vale 1 000 m.

Submúltiplos do metro e seus respectivos símbolos²: *decímetro* (dm), que vale 0,1 do metro; *centímetro* (cm), que vale 0,01 do metro; e *milímetro* (mm), que vale 0,001 do metro.

¹ De acordo com o Decreto n. 4 257.

² Os símbolos devem ser escritos em seguida aos números, no mesmo alinhamento, e sem ponto abreviativo. Mesmo que haja parte fracionária, o símbolo só deve ser colocado à direita desta última. Nos símbolos não se emprega a letra *s* para indicar plural. Assim: 10 km; 10,5 km; etc.

O metro tem ainda os seguintes submúltiplos, que são adotados em micrografia (descrição dos objetos estudados com auxílio do microscópio):

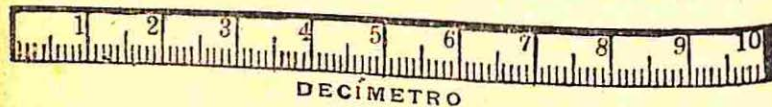
- o *micron*^s (μ), que vale 1 milésimo do milímetro (0,000 001 m);
- o *milimicron* ($m\mu$) = 0,000 000 001 m;
- o *decimilimicron* ($dm\mu$) = 0,000 000 000 1 m; e
- o *micromicron* ($\mu\mu$) = 0,000 000 000 001 m.

5 a 9. A numeração das medidas de comprimento obedece aos mesmos princípios da numeração decimal⁴: cada unidade vale 10 vezes mais ou 10 vezes menos que a sua imediata. Assim: o quilómetro vale 10 hectómetros, o hectómetro vale 10 decâmetros, o decâmetro vale 10 metros, o metro vale 10 decímetros, o decímetro vale 10 centímetros, o centímetro vale 10 milímetros; o milímetro é um décimo do centímetro, o centímetro é um décimo do decímetro, o decímetro é um décimo do metro, o metro é um décimo do decâmetro, etc.

10 a 16. Para avaliar grandes distâncias terrestres⁵, a unidade empregada é o quilómetro (1000 metros).

17. Quando um número qualquer indica metros, o 1.º algarismo depois da vírgula representa decímetros, o 2.º representa centímetros e o 3.º representa milímetros. Assim: 35,235 m lê-se 35 metros e 235 milímetros.

Quando um número qualquer indica quilómetros, o 1.º algarismo depois da vírgula representa hectómetros, o 2.º representa centímetros e o 3.º representa milímetros. Assim: 35,235 km lê-se 35 quilómetros e 235 metros.



- Qual é a unidade de comprimento? — 2. Que é o metro?
- De que é feito, materialmente, e que formas pode ter? — 4. Diga os múltiplos e submúltiplos do metro e seus respectivos símbolos. — 5. A que princípios obedece a numeração das medidas de comprimento? Explique. — 6. Diga o valor do km em hm, dam,

3 O plural de *micron* é *micra*.

4 Veja princípio fundamental da numeração escrita, págs. 8 e 9.

5 Para avaliar distâncias marítimas emprega-se a milha marítima internacional (mi), que vale 1 852 m, ou a milha náutica, que vale 1 853,25 m. O quilómetro e a milha são medidas itinerárias (adotadas para medir estradas, canais, etc.).

m, dm, cm e mm. — 7 a 9. (Repetir a pergunta relativamente às outras unidades). — 10. Qual é a unidade para avaliar grandes distâncias terrestres? — 11. Quantos metros tem o km? — 12. Qual é a unidade para avaliar as distâncias no mar? — 13 e 14. Quanto vale a milha marítima? — e a milha náutica? — 15. Quais as medidas itinerárias? — 16. Que são medidas itinerárias? — 17. Quando um número indica metros, que representa o 1.º algarismo depois da vírgula? — e o 2.º? — e o 3.º? Dê ex. — 18. (Repetir a pergunta supondo a vírgula, sucessivamente, em cada um dos múltiplos e submúltiplos).

Exercício 78 — 1.º Ler os seguintes números: 8,5 m; 25,35 dam; 4,0675 m; 5,527 km; 8,5 hm; 3656,73 dm; 56,2 cm.

— 2.º Escrever os seguintes números referindo-se a metros: 25 m e 25 cm; 25 m e 5 mm; 8 dm; 5 cm; 12 mm; 526 dm; 5 dam e 5 dm; 2 hm e 3 m; 9 km e 73 m; 8 km 7 hm e 6 cm.

3.º Escrever os números antecedentes com a unidade hm. 4.º Converter em km: 8357 m; 9529,8 m; 457856 cm; 3,98 km; 654,36 hm; 23 dm; 492 dam.

— 5.º Fazer as seguintes operações, reduzindo todos os números à unidade metro: 45 dm + 386 mm + 24 km; 37 mm + 258 dam + 23 dm; 525 cm + 87 hm; 29 km + 29 hm; 235 dm — 235 mm; 827 hm × Cr\$ 1,40 cada metro; 825 dm × Cr\$ 6,50 cada metro; 876 km ÷ 12.

Metro quadrado (unidade de superfície)

(seus múltiplos e submúltiplos usuais)

1 e 2. Metro quadrado (unidade de superfície ou de área¹) é a área de um quadrado que tem um metro de lado. O símbolo do metro quadrado é m².

3. Múltiplos do metro quadrado e seus respectivos símbolos: decâmetro quadrado (dam²), área de um quadrado que tem 1 dam de lado; hectómetro quadrado (hm²), área de um quadrado que tem 1 hm de lado; quilómetro quadrado (km²), área de um quadrado que tem 1 km de lado.

Submúltiplos do metro quadrado e seus respectivos símbolos: decímetro quadrado (dm²), área de um quadrado que tem 1 dm de lado; centímetro quadrado (cm²), área de um quadrado que tem 1 cm de lado; milímetro quadrado (mm²), área de um quadrado que tem 1 mm de lado.

4 e 5. Os múltiplos do m² empregam-se para avaliar grandes superfícies (países, estados, províncias, florestas, distritos, etc.) e por isso se chamam medidas topográficas.

¹ A palavra *área* não significa apenas superfície, mas também a medida de uma superfície.

6. Os submúltiplos do m² empregam-se para avaliar pequenas superfícies, como a de uma página, a de um clichê, etc.

"Para o decâmetro quadrado podem-se usar a denominação are e o símbolo a quando utilizado nas medidas agrárias." (Veja Medidas Agrárias na pág. seg.)

7 a 9. A numeração das medidas de superfície é centesimal, isto é, cada unidade vale 100 vezes mais ou 100 vezes menos que a sua imediata. Assim: 1 km² = 100 hm²; 1 hm² = 100 dam²; 1 dam² = 100 m²; 1 m² = 100 dm²; 1 dm² = 100 cm²; 1 cm² = 100 mm². Por outras palavras: o mm² é um centésimo do cm², o cm² é um centésimo do dm², o dm² é um centésimo do m², o m² é um centésimo do dam², e assim sucessivamente.

10 e 11. Quando um número qualquer indica m², os dois primeiros algarismos depois da vírgula exprimem dm², os dois a seguir exprimem cm², os outros dois a seguir exprimem milímetros quadrados. Assim: 8,875463 m² lê-se 8 m² 87 dm² 54 cm² e 63 mm² ou 8 m² e 875 463 mm².

Quando um número qualquer indica km², os dois primeiros algarismos depois da vírgula representam hm², os dois a seguir representam dam², e assim sucessivamente, de 2 em 2 algarismos; quando o número de algarismos decimais fôr ímpar, acrescenta-se um zero. Assim: 42,0287564 km² ou 42,02875640 km² lê-se 42 km² 2 hm² 87 dam² 56 m² e 40 dm² ou 42 km² e 2 875 640 dm².

1 e 2. Qual é a unidade de superfície ou de área? — Que é o metro quadrado? — 3. Diga os múltiplos e submúltiplos do metro quadrado (e seus respectivos símbolos), mencionando o comprimento dos lados. — 4. Para que servem os múltiplos do metro quadrado? — 5. Como se chamam estas medidas? — 6. Em que se empregam os submúltiplos do metro quadrado? — 7. Como é a numeração das medidas de superfície? Explique. — 8. Diga o valor do km² em hm, dam, m, dm, cm e mm (quadrados). — 9. (Repetir a pergunta relativamente às outras unidades) — 10. Quando um número indica metro quadrado, que representam os dois primeiros algarismos depois da vírgula? — e os dois a seguir? — 11. (Repetir a pergunta supondo a vírgula sucessivamente em cada um dos múltiplos e submúltiplos).

Exercício 79 — 1.º) Ler os seguintes números: 23,05 m² 0,5 m²; 8,625 m²; 5,003 dam²; 18,525 hm²; 125,6 km²; 125,057 km².

— 2.º) Escrever os seguintes números com a unidade m²: 2 m² 35 dm² e 18 cm²; 48 dam² 7 dm² e 6 mm²; 8 dm²; 5 hm² e 3 dm²; 45 km² e 28 cm²; 3 km² e 3 mm²; 2 mm²; 356 cm²; 297 dm².

— 3.º) Escrever os números antecedentes com a unidade km². — 4.º) Converter em km²: 95,7 cm² 857 dm² 258,09 km² 0,078 km².

— 5.º) Fazer as seguintes operações, reduzindo todos os números à unidade metro quadrado: 235,567 dam² + 82,635 hm² + 4,23564 km²; 256,275 km² — 56,3 hm²; 85 dam × 857 dm + 287,035 dam² × Cr\$ 3,50 cada metro; 95,067 dam² ÷ 3.

Medidas agrárias. O are.

Medidas agrárias são as que se usam para avaliar a superfície de campos, florestas, etc.

A sua unidade principal é o are (a), que equivale ao decâmetro quadrado. Vale, portanto, 100 metros quadrados.

O are só tem um múltiplo — o hectare (ha), que vale 100 ares, e um submúltiplo — o centiare (ca), que vale a centésima parte do are (0,01 a).

O hectare é igual ao hectômetro quadrado (10 000 m²). O are é igual a 100 m².

O centiare é igual ao metro quadrado.

A numeração das medidas agrárias é centesimal, isto é, o múltiplo vale 100 vezes mais e o submúltiplo 100 vezes menos que a unidade principal. Por outras palavras: o hectare é igual a 100 ares, e o are é igual a 100 centiares.

Nas medidas agrárias, é preciso contar de dois em dois algarismos; se o número de algarismos decimais fôr ímpar, acrescenta-se um zero. Assim: 84,5 a = 84,50 a.

A palavra agrária provém do latim *ager*, campo. A arte de medir superfícies agrárias chama-se *agrimensura*. Quem executa as medições agrárias é o *agrimensor*.

Para converter medidas agrárias em metros quadrados, basta transformar as medidas agrárias em centiares e mudar esta denominação para metros quadrados. Assim: 45,8075 ha = 458075 ca ou 458075 m².

Inversamente, para converter medidas de superfície em medidas agrárias, basta transformar as medidas de superfície em m² e substituir esta denominação por ca. Assim: 4235,56 dam² = 423556 m² = 423556 ca.

No interior do Brasil ainda se usa a antiga medida agrária denominada *alqueire*, que terá de desaparecer em virtude do Decreto n. 4 257. Há o *alqueire paulista* (100 braças × 50 = 5 000 braças quadradas), que vale 24 200 m² (quase 2 1/2 hectares), e o *alqueire mineiro* (100 × 100 braças = 10 000 braças quadradas), que vale o dobro daquele, isto é, 48 400 m² (quase 5 hectares). A braça vale 2,2 m.

Metro cúbico (unidade de volume)

(seus múltiplos e submúltiplos usuais)

1. Metro cúbico (m³) é o volume de um cubo que tem um metro de aresta.

“Para o metro cúbico podem-se usar a denominação *estéreo* e símbolo *st*, quando utilizado nas medidas de volume aparente de lenha.”

2 e 3. Múltiplos do metro cúbico. — O QUADRO I anexo ao Decreto 4 257 só menciona um múltiplo do metro cúbico — o *quilómetro cúbico* (km^3), que é o volume de um cubo cuja aresta tem o comprimento de 1 km; equivalente a 1 000 000 000 de metros cúbicos.

Submúltiplos do m^3 : *decímetro cúbico* (dm^3), volume de um cubo que tem 0,1 m de aresta; *centímetro cúbico* (cm^3), volume de um cubo que tem 0,01 m de aresta; *milímetro cúbico* (mm^3), volume de um cubo que tem 0,001 m de aresta.

4 a 6. A numeração das medidas de volume é *milésimal*, isto é, cada unidade vale 1 000 vezes mais ou 1 000 vezes menos do que a sua imediata. Assim: $1 \text{ m}^3 = 1 000 \text{ dm}^3$; $1 \text{ dm}^3 = 1 000 \text{ cm}^3$; $1 \text{ cm}^3 = 1 000 \text{ mm}^3$. Por outras palavras: o mm^3 é um milésimo do cm^3 ; o cm^3 é um milésimo do dm^3 ; o dm^3 é um milésimo do m^3 .

7 e 8. Quando um número qualquer indica m^3 , os três primeiros algarismos depois da vírgula representam dm^3 , os três a seguir representam cm^3 , e os outros três a seguir exprimem mm^3 . Assim: $87,684327 \text{ m}^3$ lê-se 87 m^3 684 dm^3 e 327 cm^3 ; $542,237825630 \text{ m}^3$ lê-se 542 m^3 237 dm^3 825 cm^3 e 630 mm^3 .

Nas medidas de volume é preciso contar de três em três algarismos; quando o número de algarismos decimais não fôr 3 ou múltiplo de 3, acrescenta-se um ou dois zeros, conforme o caso.

1. Que é o metro cúbico? — 2. Diga os múltiplos e submúltiplos do metro cúbico, mencionando o comprimento das arestas. — 3. São usados os múltiplos do m^3 ? — 4. Como é a numeração das medidas de volume? Explique. — 5. Diga o valor do metro cúbico em dm, cm e mm (cúbicos). — 6. (Repetir a perg. relativamente às outras unidades). — 7. Quando um n.º indica metros cúbicos, que representam os três primeiros alg. depois da vírgula? — e os três a seguir? — 8. (Repetir a perg. supondo a vírgula sucessivamente em cada uma das outras medidas).

Exercício 80 — 1.º Ler os seguintes números: $2,235 \text{ m}^3$ $12,25 \text{ m}^3$ $535,5634 \text{ m}^3$ $14,563279453 \text{ m}^3$.

— 2.º Escrever os seguintes números com a unidade m^3 : 2 m^3 e 56 dm^3 ; 9 m^3 e 9 cm^3 ; 6 dm^3 ; 85 cm^3 e 12 mm^3 ; 2 m^3 2 dm^3 e 2 cm^3 .

— 3.º Escrever os números antecedentes com a unidade dm^3 .
4.º Converter em dm^3 : 95 cm^3 ; 12 km^3 ; $0,5678 \text{ hm}^3$; $78,4 \text{ m}^3$.

— 5.º Fazer as seguintes operações, reduzindo todos os números à unidade m^3 : $57,2875 \text{ m}^3 + 56,52 \text{ dm}^3 + 9,84 \text{ m}^3$; $967,8563 \text{ m}^3 - 785,26 \text{ dm}^3$; $3,5 \text{ m} \times 4,20 \text{ m} \times 0,6 \text{ m}$; $785,30 \text{ dm}^3 \div 5$.

Medidas para lenha. O estéreo

Medidas para lenha. — A unidade destinada a medir lenha é o estéreo, que é igual ao metro cúbico. Consta de um estrado horizontal, do tamanho de um metro quadrado, e 2 ou 4 montantes verticais com 1 metro de altura cada um.

O estéreo só tem um múltiplo — o *decastéreo* (*dast*), que vale 10 estéreos ou 10 metros cúbicos, e um submúltiplo — o *decistéreo* (*dst*), que vale um décimo do estéreo ou do metro cúbico (0,1 st ou 0,1 m^3).

Estas medidas são pouco usadas. A sua numeração é *decimal*, isto é, cada unidade vale 10 vezes mais ou 10 vezes menos que a sua imediata. Assim: 1 decastéreo = 10 estéreos, 1 estéreo = 10 decistéreos. Por outras palavras: 1 decistéreo é um décimo do estéreo, 1 estéreo é um décimo do decastéreo.

Litro, sua relação com o metro cúbico

(seus múltiplos e submúltiplos usuais)

1 e 2. Litro (símbolo *l*) é a unidade de capacidade (para líquidos); é igual ao *decímetro cúbico*.

“Litro é o volume de 1 quilograma de água destilada e isenta de ar, à temperatura de 4°C e sob a pressão atmosférica normal.” É a “unidade utilizável para medidas de capacidade, bem como para medidas de volume de gases e líquidos, cereais e materiais pulverulentos ou granulados.” “Para fins legais o litro pode ser considerado como equivalente a 1 decímetro cúbico.” (Do QUADRO I anexo ao Decr. 4 257, ed 16-6-939).

Múltiplos do litro. — O QUADRO I anexo ao Decr. 4 257 só menciona 2 múltiplos do litro: o *decalitro* (*dal*), que vale 10 litros; e o *hectolitro* (*hl*), que vale 100 litros.

Submúltiplos do litro: *decilitro* (*dl*), que vale 0,1 do litro; *centilitro* (*cl*), que vale 0,01 do litro; e *mililitro* (*ml*), que vale 0,001 do litro.

4 a 6. A numeração das medidas de capacidade é *decimal*, isto é, cada unidade vale 10 vezes mais ou 10 vezes menos que a sua imediata. Assim: $1 \text{ hl} = 10 \text{ dal}$, $1 \text{ dal} = 10 \text{ l}$, $1 \text{ l} = 10 \text{ dl}$, $1 \text{ dl} = 10 \text{ cl}$, $1 \text{ cl} = 10 \text{ ml}$. Por outras palavras: 1 ml é um décimo do *cl*, 1 cl é um décimo do *dl*, 1 dl é um décimo do litro, etc.

7 e 8. Quando um número qualquer indica litros, o 1.º algarismo depois da vírgula representa *dl*, o 2.º re-

1 Capacidade de um recipiente qualquer é o volume que esse recipiente pode conter (ou é capaz de conter).

presenta *cl*, e o 3.º representa *ml*. Assim: 58,256 l lê-se 58 litros e 256 mililitros ou 5 dal, 8 l, 2 dl, 5 cl e 6 ml.

Quando um número qualquer indica *hl*, o 1.º algarismo depois da vírgula representa *dal*, o 2.º representa *l*, o 3.º representa *dl*, etc. Assim: o número 325,8763 hl lê-se 325 hl e 8763 cl.

9. Converter unidades de capacidade em unidades de volume. — Sendo o litro igual ao decímetro cúbico, para converter unidades de capacidade em unidades de volume, basta substituir a denominação *litro* pela denominação *dm³*, e depois proceder como se procede nas medidas de volume.

Suponhamos que queremos converter o número 87,2567 hl em *m³*; reduzindo-o a litros, temos 8725,67 l; substituindo *litro* por *dm³*, temos: 8725,67 *dm³*; para termos *m³* basta andar com a vírgula 3 casas para a esquerda: 8,72567 *m³*.

10. Converter unidades de volume em unidades de capacidade: — transforma-se o número dado em *dm³* (se a unidade a que o número se referir fôr outra) e substitui-se a denominação *dm³* por litro, procedendo-se depois como nas medidas de capacidade.

Suponhamos que queremos converter 35,827 *m³* em hl. Transformando este número em *dm³*, temos 35,827 *m³* = 35827 *dm³*; substituindo-se *dm³* por *l*, temos 35827 l; para obtermos hl, basta andar com a vírgula duas casas para a esquerda: 358,27 hl.

11. Relação entre as medidas de capacidade e as de volume:

LITRO = decímetro cúbico.

MILILITRO = centímetro cúbico.

1. Que é litro? — 2. A que é igual? — 3. Diga os múltiplos e submúltiplos do litro. — 4. Como é a numeração das medidas de capacidade? Explique. — 5. Diga o valor do hl em dal, l, dl, des). — 6. (Repetir a pergunta relativamente às outras unidades). — 7. Quando um número indica litros, que representa o 1.º algarismo depois da vírgula? — e o 2.º? — e o 3.º? — 8. (Repetir a pergunta supondo a vírgula sucessivamente em cada uma das outras unidades). — 9. Como se convertem unidades de capacidade em unidades de volume? Dê ex. — 10. Como se convertem unidades de volume em unidades de capacidade? Dê ex. — 11. Qual é a relação entre as medidas de capacidade e as de volume?

Exercício 81 — 1.º) Ler os seguintes números: 0,25 l; 5,28 dal; 4,005 hl; 20,003 dal; 34,00027 hl.

— 2.º) Escrever os seguintes números com a unidade litro: 2 litros e meio; 3 l e 8 ml; 4 dal e 6 l; 37 dal e 37 ml.

— 3.º) Escrever os números antecedentes com a unidade hl.

— 4.º) Converter em l: 5,08 dal; 94,5 hl; 275 cl; 27564 dal; 4,80 hl.

5.º) Reduzir os seguintes números ao *m³* e depois ao *dm³*: 327 l; 5469 dal; 5876 hl; 2791 dl; 6824 cl.

— 6.º) Reduzir os seguintes números ao hl: 15 *m³* 0,12 *m³* 5,95 *m³* 2,037 *m³* 87 *cm³*.

— 7.º) Fazer as seguintes operações, reduzindo todos os números à unidade principal: 85 dal + 57 dl + 37,06 hl + 2 l + 275 cl; 8978635 ml — 46,235 hl; 87697 cl — 27 dal; 87 hl a Cr\$ 8,50 cada litro; 487635 dl ÷ 15.

Quilograma (unidade legal de massa)

(seus múltiplos e submúltiplos usuais)

1 e 2. Quilograma (símbolo *kg*) é a unidade legal de massa (ou de pêso, como se diz vulgarmente). É, aproximadamente, o pêso de um decímetro cúbico de água destilada na sua maior densidade, isto é, na temperatura de 4 graus centígrados.

A definição exata de *quilograma* é: "Massa do protótipo internacional do quilograma de platina iridiada que foi sancionado pela 1.ª Conferência Geral de Pesos e Medidas e que se acha depositado na Repartição Internacional de Pesos e Medidas."

3. Múltiplos e submúltiplos do quilograma. — Para formação dos múltiplos e submúltiplos toma-se como base o *grama*, que é igual a 0,001 do quilograma.

Por lei, o quilograma só tem um múltiplo, a *tonelada* (t), que vale 1 000 kg ou 1 000 000 de gramas.

Os submúltiplos do quilograma são: o *hetograma* (hg), que vale 100 gramas; o *decagrama* (dag), que vale 10 gramas; o *grama* (g), que vale 0,001 do quilograma, e os submúltiplos do grama: *decigramma* (dg), que vale 0,1 g; *centigramma* (cg), que vale 0,01 g; e *miligramma* (mg), que vale 0,001 g.

"A massa de 2 decigramas pode ser denominada *quilate* quando utilizada nas medidas relativas a pedras preciosas e metais preciosos."

4 a 6. Excetuando a tonelada, que vale 1 000 kg ou 1 000 000 g, a numeração das medidas de pêso é *decimal*, isto é, cada unidade vale 10 vezes mais ou 10 vezes menos que a sua imediata. Assim: 1 kg = 10 hg = 100 dag, 1 dag = 10 g, 1 g = 10 dg, 1 dg = 10 cg, 1 cg = 10 mg. Por outras palavras: 1 mg é um décimo

do cg, 1 cg é um décimo do dg, 1 dg é um décimo do g, 1 g é um décimo do dag, etc.

7 e 8. Quando um número qualquer indica g, o 1.º algarismo depois da vírgula representa dg, o 2.º representa cg, e o 3.º representa mg. Assim. 28,825 g lê-se 28 gramas e 825 miligramas.

Quando um número qualquer indica toneladas, o 3.º algarismo depois da vírgula representa kg, etc. Assim: 25,638 t lê-se 25 toneladas e 638 quilogramas.

9 a 15. As unidades de peso podem ser convertidas em unidades de capacidade e de volume.

Relação entre medidas de peso, capacidade e volume: Tonelada = 1 000 litros = metro cúbico;
quilograma = litro = decímetro cúbico;
grama = mililitro = centímetro cúbico.

16 a 19. A tonelada emprega-se para avaliar pesos grandes, como *carvão de pedra, cargas de navios, etc.*

O quilograma é a unidade de peso mais usada na vida ordinária (açougues, mercearias, etc.).

Os submúltiplos do grama são muito usados nos laboratórios, farmácias e ourivesarias.

1. Qual é a unidade de peso? — 2. Que é o quilograma? — 3. Diga os múltiplos e submúltiplos do kg. — 4. Como é a numeração das medidas de peso? Explique. — 5. Diga o valor da tonelada em kg, hg, dag, g, dg, cg e mg. — 6. (Repetir a pergunta relativamente às outras unidades). — 7. Quando um número indica gramas, que representa o 1.º algarismo depois da vírgula? — o 2.º? — o 3.º? — 8. (Repetir a pergunta supondo a vírgula sucessivamente em cada uma das outras unidades). — 9. Em que se podem converter as unidades de peso? — 10. Quais são as relações entre as medidas de peso, capacidade e volume? — 11 a 15. A que é igual a t? — o kg? — o g? — 16 a 19. Que uso tem a t? — o kg? — os submúltiplos do g?

Exercício 82 — 1.º) Ler os seguintes números: 852,03 g 28,23 kg 5,257 t 0,525 g 27,86 dag.

— 2.º) Escrever os seguintes números com a unidade g: 2 g e 2 mg; 5 cg; 8 t e 8 kg; 3 kg e 3 mg; 57 dag e 57 cg.

— 3.º) Escrever os números antecedentes com a unidade hg.

— 4.º) Converter em cg: 5,25 kg 8,3789 hg 2,763482 kg 9,736 dag.

— 5.º) Reduzir os seguintes números, sucessivamente, ao litro, hl, dm³, m³ e cm³: 5,532 kg 87634,07 hg 623589,25 g 963542,8765 dag 697571231,63 dg.

— 6.º) Reduzir os seguintes números ao grama e depois ao dm³: 287,53 l; 56714721,06 dl; 596,57 cm³; 271684,024 mm³; 6,0087 m³.

— 7.º) Efetuar as seguintes operações: 2,825 kg + 3,543 hg + 2,96 t + 525 g; 3 g + 4,5 hg + 6,3 dag; 27,5 kg a 12\$500 cada quillo; 27,024 t ÷ 12.

Sistema monetário brasileiro

1. A unidade do sistema monetário brasileiro é o *Cruzeiro* (veja pág. 10).

2 e 3. Os múltiplos do Cruzeiro são as moedas de 2 e 5 cruzeiros e as cédulas de 10, 20, 50, 100, 200, 500 e 1 000 cruzeiros¹.

4 e 5. O Cruzeiro tem 3 submúltiplos, que são as moedas de 10, 20 e 50 centavos.

6 e 7. As moedas de 1, 2 e 5 cruzeiros são feitas de bronze de alumínio, e as de 10, 20 e 50 centavos são de cupro-níquel.

8 e 9. O sistema monetário brasileiro tem, pois, 6 espécies de moedas metálicas e 7 espécies de cédulas¹.

10 e 11. As cédulas têm tôdas o mesmo formato (67 mm x 156 mm).

1. Qual é a unidade do sistema monetário brasileiro? — 2 e 3. Quais os múltiplos que são moedas e quais os que são cédulas? — 4 e 5. Quais os submúltiplos do cruzeiro? — São moedas ou cédulas? — 6 e 7. De que metal são feitas as moedas de 1, 2 e 5 cruzeiros? — De que metal são feitas as moedas de 10, 20 e 50 centavos? — 8 e 9. Quantas espécies de moedas metálicas tem o sistema monetário brasileiro? — Quantas espécies de cédulas? — 10 e 11. As cédulas são tôdas do mesmo formato? — Qual é o formato?

Exercícios sobre quantias (V. pág. 11).

O franco

Franco. — O franco, moeda de prata que pesa 5 gramas, é a unidade monetária do sistema métrico. Só foi adotado pela França, Bélgica e Suíça.

Para exprimir os múltiplos do franco não se empregam os prefixos gregos *deca, hecto, etc.*, mas sim os números 10, 100, 1 000, etc. Diz-se 10 francos, 100 francos, 1 000 francos, etc.

O franco tem 2 submúltiplos decimais: o *décimo*, que vale a décima parte de um franco (0,1 fr), e o *centimo*, que vale a centésima parte de um franco (0,01 fr).

Unidades de tempo

A unidade legal de tempo é o *segundo* cujo símbolo é *s* ou *seg.* Os seus principais múltiplos são

minuto (*m* ou *min*) = 60 s.

hora (*h*) = 60 m = 3 600 s.

dia (*d* ou *da*) = 24 h = 1 440 m = 86 400 s.

As outras unidades de tempo usadas na prática são a *semana* (7 dias), o *mês* (30 ou 31 dias), *ano* (365 dias), *século* (100 anos), *milénio* (1 000 anos), etc.

¹ Também circularão cédulas de 5 cruzeiros, "até que seja possível a cunhagem dos moedas desse valor".

17.º PONTO — Problemas sôbre as 4 operações e sôbre a avaliação de comprimento, superfície, volume, capacidade e pêso

1. Um negociante recebeu Cr\$ 125,00 de um freguês, Cr\$ 132,00 de outro e Cr\$ 178,00 de outro. Quanto recebeu ao todo?
2. Um negociante pagou Cr\$ 185,00 a um fornecedor, Cr\$ 230,00 a outro e Cr\$ 17,50 a outro. Quanto pagou ao todo?
3. Em que ano terá 60 anos uma pessoa que nasceu em 1892?
4. Uma pessoa nasceu em 1897 e morreu com 22 anos. Em que ano morreu?
5. Um homem comprou uma casa por Cr\$ 43 000,00 e quer ganhar Cr\$ 7 300,00. Por quanto deve vendê-la?
3. Qual é a freqüência de um colégio que tem 65 alunos de manhã, 35 de tarde e 23 de noite?
7. Um indivíduo foi à quitanda com Cr\$ 5,50; comprou Cr\$ 2,20 de verduras e Cr\$ 1,10 de frutas. Com quanto ficou?
8. O leiteiro mandou fazer um terno por Cr\$ 480,00, para pagar em 2 prestações. Na 1.ª prestação deu Cr\$ 235,00; quanto deve pagar na 2.ª?
9. Um negociante tinha no cofre Cr\$ 7 500,00, fez pagamentos na importância de Cr\$ 6 228,00 e recebeu contas na importância de Cr\$ 3 050,00. Quanto ficou no cofre, depois destas operações?
10. Um indivíduo vendeu por Cr\$ 25 800,00 uma casa que lhe custou Cr\$ 19 500,00. Quanto ganhou?
11. Um negociante vendeu por Cr\$ 575,00 uma peça de pano ganhando Cr\$ 82,00. Quanto tinha custado a peça de pano?
12. A República Brasileira foi proclamada em 1889. Há quantos anos se deu esse acontecimento?
13. O poeta Camões nasceu em 1524 e morreu em 1580. Quantos anos viveu?
14. Napoleão I (Bonaparte) nasceu em Ajácio e morreu na ilha de S. Helena, em 1821, com 52 anos. Em que ano nasceu?
15. Numa subtração, o subtraendo é 452 892 e o resto 825 614. Qual é o minuendo?
16. Um indivíduo comprou uma casa por Cr\$ 41 500,00 e gastou Cr\$ 14 500,00 em concertos. Algum tempo depois vendeu-a por Cr\$ 59 200,00. Quanto ganhou?
17. Comprei 7 cadeiras a Cr\$ 64,50 cada uma. Quanto gastei?
18. Se 3 pares de meias custam Cr\$ 18,00, quantos pares de meias poderei comprar com Cr\$ 48,00?
19. Quantas horas, minutos e segundos tem um ano?
20. Quanto ganha por ano um pedreiro, cujo salário é de Cr\$ 47,50 por mês?
21. Quanto economizará por ano o indivíduo que faz mensalmente uma economia de Cr\$ 125,00?
22. Quanto receberá de trôco o indivíduo que deu uma nota de Cr\$ 1 000,00 para pagar a seguinte fatura: 8 cadeiras a Cr\$ 47,50, 3 mesas a Cr\$ 145,00 e 2 tapetes a Cr\$ 35,00?
23. Uma herança de Cr\$ 23 400,00 deve ser dividida por 3 herdeiros. Quanto receberá cada um?

24. Qual o preço de uma camisa, sabendo-se que uma dúzia custa Cr\$ 712,00?
25. Quanto pode gastar por mês e por dia, uma pessoa cuja renda anual é de Cr\$ 8 400,00?
26. Um negociante comprou 24 peças de fazenda por Cr\$ 840,00; vendeu a 6.ª parte por Cr\$ 190,00 e o resto a Cr\$ 50,00 cada peça. Quanto lucrou?
27. Dividir Cr\$ 278,00 por duas pessoas, de modo que uma tenha o dôbro da outra mais Cr\$ 8,00.
- 27 A. Para fazer um trabalho gastaram-se 2 h e 1/4, depois 3 h e 3/4 e depois 4 h e 1/2. Que tempo se gastou ao todo?
28. Qual será o minuendo, sabendo-se que o subtraendo é $8\frac{2}{5}$ e o resto $5\frac{3}{4}$?
29. Qual a fração à qual faltam $\frac{2}{11}$ para ser igual à unidade?
30. Se eu der $\frac{4}{7}$ do que tenho, com quanto fico?
31. Se eu der $\frac{2}{7}$ mais $\frac{3}{11}$ do que eu tenho, com quanto fico?
32. Gastei $\frac{5}{9}$ do que possuía; depois ganhei Cr\$ 17,00, ficando com Cr\$ 53,00. Quanto possuía?
33. Um rapaz ganha uma certa quantia, da qual gasta $\frac{3}{5}$ e guarda Cr\$ 120,00. Quanto ganha? Quanto gasta?
34. Um proprietário pagou $\frac{2}{5}$ da sua dívida, que era de Cr\$ 950,00. Quanto deve ainda?
35. Qual é a distância (em quilômetros) do Rio de Janeiro a S. Paulo, por estrada de ferro, sabendo-se que do Rio a Belém são 62 km, de Belém a Barra Mansa 920 hm, de Barra Mansa a Taubaté 19 100 dam, e de Taubaté à cidade de S. Paulo 153 km?
36. Se um metro de fazenda custa Cr\$ 6,50, qual será o preço de $17,25$ m?
37. Quanto custam 2,700 kg de carne a Cr\$ 4,90 cada quilo?
38. Dividir 65 em 3 partes de modo que a 1.ª seja o triplo da 2.ª, e a 2.ª seja o triplo da 3.ª.
39. Dividir Cr\$ 73,00 entre duas pessoas de modo que uma tenha o quádruplo da outra e mais Cr\$ 13,00.

Áreas e volumes

Nota. — Para resolver os problemas 40 a 56 é preciso saber o seguinte:

A área de um retângulo ou de um paralelogramo acha-se multiplicando o comprimento da base pela altura (Área = $B \times A$).

A área de um quadrado é igual ao quadrado de um dos lados (Área = L^2).

A área de um triângulo obtém-se multiplicando a base pela altura e dividindo o produto por 2 (Área = $\frac{B \times A}{2}$).

A área de um trapézio é igual à semi-soma das bases multiplicada pela altura (Área = $\frac{B + b}{2} \times A$).

A área de um polígono regular obtém-se multiplicando o perímetro pelo apótema e dividindo o produto por 2.

A área de um círculo é igual ao quadrado do raio multiplicado pelo número 3,1416, representado em matemática pela letra grega π (pi).

O volume de um paralelepípedo retângulo obtém-se multiplicando o comprimento pela largura e o resultado pela altura.

O volume de um cubo é igual ao cubo do comprimento da aresta.

O volume de um cilindro é igual à área da base multiplicada pela altura ($V = \pi r^2 \times A$, visto que a base é um círculo).

40. Qual é a superfície de uma sala retangular que tem 8,5 m de comprimento e 3,80 m de largura?

41. Se quisermos assoalhar a sala de que falamos no problema 40 com tábuas de 4,25 m de comprimento e 0,25 m de largura, de quantas tábuas precisaremos?

42. Qual é a superfície de um terreno que tem um decâmetro e meio de largura e 2 decâmetros e meio de comprimento e cuja forma é a de um paralelogramo?

43. Qual é a superfície de um terreno quadrado que tem 12,8 m de lado?

44. Qual é a superfície de um terreno de forma triangular que tem 25,8 m de comprimento e 15 m de altura?

45. Qual é a superfície de um trapézio, cujas bases medem respectivamente 12,5 e 3,5 m e a altura 5 metros?

46. Qual é a área de um decágono regular, sabendo-se que o apótema mede 0,94 m e cada lado mede 1,5 m?

47. Qual é a área de uma mesa redonda que tem 1,20 m de diâmetro?

48. Qual é o volume de uma sala que tem 12 m de comprimento, 5 m de largura e 4,5 m de altura?

49. Qual é o volume de um tijolo que tem 0,20 m de comprimento, 0,18 m de altura e 0,15 m de largura? (forma de paralelepípedo).

50. Qual é o volume de um cubo cuja aresta mede 0,25 m?

51. Qual é o volume de uma parede que mede 0,30 m de grossura, 90 dm de altura e 40 m de comprimento?

52. Qual é o volume de um cano cilíndrico que tem 5 m de comprimento e 0,40 m de diâmetro?

53. Quanto receberá um pedreiro pela construção de um muro de 56,30 m de comprimento, 1,90 m de altura e 0,30 m de espessura a Cr\$ 18,50 cada metro cúbico?

54. Um reservatório com 382,5 m³ de volume, tem 12,5 m de comprimento e 6,8 m de largura. Qual será a profundidade?

55. Quantos m³ de ar haverá numa sala que tem 8 m de comprimento, 35 dm de largura e 450 cm de altura? — Quanto pesará esse ar, sabendo-se que 1 metro cúbico de ar pesa 1,293 kg?

56. Quantos litros de água levará uma caixa retangular que tem 1,80 m de comprimento, 3,5 m de largura e 1,20 m de profundidade? — Qual seria o peso dessa água?

57. Se pudéssemos encher de água a sala de que falamos no problema 55, quantos hectolitros levaria?

58. Quantos cm³ de água levará um vaso cuja capacidade é de 15,6 l?

59. Calcular o valor de 4 t 98 kg e 18 g de uma mercadoria que custa Cr\$ 85,00 cada quilograma.

Medidas inglesas¹

Comprimento: Milha marítima = 2 029 jardas ou 1 855 m; milha = 1 760 jardas ou 1 609,3 m; jarda = 3 pés ou 0,914399 m; pé = 12 polegadas ou 0,30480 m; polegada = 25,400 mm. As frações de polegadas são avaliadas em meios, quartos, oitavos, etc.

Superfície: As medidas de superfície são os quadrados das medidas de comprimento. Usam-se principalmente as seguintes: jarda quadrada = 9 pés quadrados ou 0,836126 m²; pé quadrado = 144 polegadas quadradas ou 9,2903 dm²; polegada quadrada = 6,4516 cm².

Para medição de superfícies agrárias usam-se as seguintes: milha quadrada = 640 jeiras ou 259,00 ha; jeira (acre) = 4 roods ou 0,40468 ha; rood = 40 square poles ou 10,117 a; square pole = 30 1/4 square yard ou 25,293 m².

Volume: As medidas de volume são os cubos das medidas de comprimento. Usam-se principalmente as seguintes: jarda cúbica = 27 pés cúbicos (3³); pé cúbico = 1 728 polegadas cúbicas (12³) ou 0,028217 m³.

Capacidade: (para secos e líquidos): galão = 4 quartas ou 4,5459631 l; quarta = 2 pints ou 1,136 l. Para secos usam-se as seguintes: peck = 2 galões; bushel (alqueire) = 8 galões.

Peso: tonelada = 20 quintais ou 1 016,0 kg; quintal = 4 quartas ou 50,80 kg; quarta = 28 libras ou 12,70 kg; libra = 16 onças = 7 000 grãos ou 453,59243 g; onça = 16 dracmas ou 28,350 g; dracma = 1,772 g; grão = 0,0648 g.

Um kg vale cerca de 2 libras e 1/5; um grama vale cerca de 15 grãos e meio.

— Nas ourivesarias emprega-se a onça troy = 480 grãos ou 31,1035 g.

Unidades monetárias: libra esterlina = 20 soldos; soldo = 12 dinheiros; dinheiro = 4 farthings.

As frações do dinheiro são avaliadas em quartos, oitavos, etc.

Nomes e abreviaturas em inglês: milha — mile, mi. [mail]; jarda — yard, yd. [iard]; pé, pés — foot, feet, ft. [fut, fit]; polegada — inch, in [intch]; quadrada — square, sq. [squere]; jeira — acre, ac. [éicar]; rood, roods, rd. [rud, rudg]; pole [poul]; cúbica — cubic [kiúbic]; galão — gallon, gal. [gá'l'n]; quarta — quart, qt. [kuór]; pints [péints]; alqueire — bushel, bs. [báchel]; quintal — centweight, cwt, [centwéit]; quartas — quarter, qr. [kuórter]; libra — pound, lb. [pá'nd]; onça — ounce, oz. [áu'ns]; dracmas — drams, dr. [dra'ms]; grão — grain, gr. [gré'n]; esterlina — sterling, £ [star'ling]; sóido — shilling, s. [shí'ling]; farthings [far'sings].

— É preciso notar que a representação da pronúncia das palavras inglesas não pode ser rigorosa sem o emprego de sinais especiais.

Números complexos

Número complexo é o que consta de 2 ou mais números referentes a unidades diversas, mas todas da mesma espécie e formadas irregularmente, isto é, sem base determinada.

¹ Exigidas no exame de admissão ao curso comercial.

Os números complexos (ou derivados de complexos) podem ser reduzidos: 1) a unidades inferiores; 2) a unidades superiores; 3) a frações (ordinárias e decimais).

As frações também podem ser reduzidas a complexos.

1) Reduzir 15 £ 18 s 10 d a dinheiros: $15£ \text{ e } 18s = 15 \times 20s + 18s = 318s$; $318s + 10d = 318 \times 12 + 10 = 3826d$.

2) Reduzir 28 926 horas a anos: $28\ 926h \div 24 = 1\ 205$ dias e 6 horas; $1\ 205 \text{ dias} \div 30 = 40$ meses e 5 horas; $40 \text{ meses} \div 12 = 3$ anos e 4 meses. Logo 28 926 horas são 3 anos, 4 meses, 5 dias e 6 horas. (A resposta é o último quociente acompanhado dos vários restos na ordem inversa).

3) Reduzir 15s e 10 d a fração de £: $15s \text{ e } 10d = 15 \times 12d + 10d = 190d$. Escreve-se no numerador o n.º complexo, depois de reduzido à infima espécie, e, no denominador, o número das mesmas unidades que a unidade superior contiver. Como a libra é igual a $20 \times 12d = 240d$, temos: $15s \text{ e } 10d = 190/240 = 19/24$ da libra. Quando a fração resultante for redutível, é necessário simplificá-la.

Para reduzir complexo a fração decimal, reduz-se o complexo a fração ordinária, e converte-se esta em decimal. Assim: $£\ 32-4-6 = 7734/240 \text{ } £\ 32,225$.

Para transformar fração ordinária em complexo, divide-se o numerador pelo denominador, depois de reduzido à espécie imediatamente inferior, se for preciso, e o mesmo se faz com cada resto seguinte. Seja a fração $19/24$ da £:

$$\begin{array}{r} 19 \\ \times 20s \\ \hline 380s \\ 140 \\ \times 12d \\ \hline 240d \\ 000 \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} 24 \\ \hline 15s\ 10d \end{array} \right.$$

Para converter fração decimal em complexo, multiplica-se a fração pelo número que indica em quantas partes se divide imediatamente a unidade; os inteiros contidos no produto exprimem quantas dessas partes estão contidas na fração decimal dada; procede-se do mesmo modo com a fração decimal restante e assim sucessivamente. Exemplo:

$$\begin{array}{r} £\ 0,225 = £\ 0-4-6 \\ \times 20 \\ \hline 4,500 \\ 12 \\ \hline 6,000 \end{array}$$

Operações sobre complexos

Aos Srs. professores deixamos a tarefa de ensinar praticamente as 4 operações sobre complexos. Depois de ensinadas, exigirão que os alunos digam como se fazem.

Efetuar as seg. operações: $5a\ 7m\ 20d + 7a\ 9m\ 16d + 15a\ 11m\ 14d$; $10a\ 10m\ 10d + 19a\ 9m\ 19d + 14a\ 4m\ 25d + 16a\ 6m\ 28d$; $20^\circ\ 20'\ 20'' + 15^\circ\ 35'\ 55'' + 40^\circ\ 40'\ 50'' + 16^\circ\ 16'\ 56''$; $£\ 8-10-5 + £\ 20-17-9 + £\ 19-19-8 + £\ 14-14-4$; $5yd\ 2ft\ 10in + 7yd\ 2ft\ 11in + 6yd\ 1ft\ 9in$; $5tn\ 15\ cwt\ 3\ qr\ 20\ lb + 6\ tn\ 10\ cwt\ 2\ qr\ 10\ lb\ 15\ oz + 5\ tn\ 12\ cwt\ 1\ qr\ 25\ lb\ 12\ oz$.

$38\ f\ 16\ s\ 10\ d - 30\ f\ 18\ s\ 11\ d$; $85^\circ\ 50'\ 55'' - 30^\circ\ 56'\ 50''$;
 $8\ d\ 6\ h\ 7\ m\ 4\ s - 5\ d\ 8\ h\ 6\ m\ 12\ s$.

$18\ a\ 9m\ 20d\ 15h \times 6$; $8\ £\ 10s\ 11d \times 8$; $5\ yd\ 2ft\ 11in \times 12$.
 $280\ f\ 14\ s\ 8\ d \div 8$; $18\ semanas\ 4\ d$; $22\ h \div 12$; $180^\circ\ 6' 50'' \div 15$; $80\ yd\ 2\ ft\ 10\ in \div 18$.

GEOMETRIA

(Ciência que estuda as propriedades das linhas, das superfícies e dos volumes)

Definições preliminares

1. *Corpo* é tudo o que ocupa um lugar no espaço (um livro, um lápis, uma cadeira, etc.).

2. *Espaço* é a extensão, indefinida em tôdas as direções, que encerra todos os corpos.

3 a 5. *Corpo geométrico* é a porção de espaço ocupada por um corpo. Assim: um livro é um corpo, e o lugar que êle ocupa no espaço é um corpo geométrico. O corpo tem 3 dimensões: *comprimento*, *largura* e *altura*.

6 a 8. A *altura* tem às vèzes o nome de *espessura* ou *grossura*, e outras vèzes o de *profundidade*. Chama-se *espessura* quando é muito pequena relativamente às outras duas dimensões, e *profundidade* quando é uma cavidade, vazia ou cheia, vista de cima para baixo. Assim: diz-se a *espessura de uma folha de papel*, e a *profundidade de um buraco*, de um poço, de um tanque, etc.

9. *Superfície* é a parte externa de um corpo, isto é, a parte que o separa do espaço ou dos outros corpos. Assim: colocando uma caixa de fósforos, por exemplo, em cima de uma mesa a superfície superior da caixa separa esta do espaço, e a inferior separa-a da mesa.

10. A superfície só tem duas dimensões: *comprimento* e *largura*.

11. Nos corpos redondos como as esferas, as laranjas, etc., não é possível distinguir comprimento e largura.

12. *Área* é o número que exprime a medida de uma superfície. Quando dizemos que uma sala tem 32 metros quadrados, êste número é a área da sala. (Veja na página 69, como se acham as áreas).

13. *Volume* é o número que exprime a medida de um corpo. Quando dizemos que uma sala tem 160 metros cúbicos, êste número é o volume da sala. (Veja na pág. 69 como se acham os volumes dos diferentes corpos).

14 e 15. *Linha* é o encontro de duas superfícies. As arestas de uma caixa de fósforos, por exemplo, são linhas. A linha só tem uma dimensão, que é o *comprimento*.

16 e 17. *Comprimento* é a dimensão da linha; é também o número que exprime a medida da linha.

18 e 19. *Ponto* é o encontro de duas linhas, isto é, o lugar onde elas se cortam ou encontram. Na linguagem vulgar, dá-se o nome de ponto a um pequeno sinal produzido pela ponta aguçada de um lápis, de um giz, etc.

20 e 21. O ponto geométrico não tem dimensão alguma; é grosseiramente representado pela intersecção de duas linhas, como indica a fig. 1.

× B

Fig. 1 — Ponto

1. Que é corpo? Dê ex. — 2. Que é espaço? — 3. Que é corpo geométrico? — 4. Qual a diferença entre corpo e corpo geométrico? Dê ex. 5. Quantas dimensões tem o corpo geométrico e como se chamam? — 6. Que outros nomes tem a altura? — 7. Quando se chama espessura? Dê ex. — 8. Quando se chama profundidade? Dê ex. — 9. Que é superfície? Dê ex. — 10. Quantas dimensões tem a superfície e como se chamam? — 11. Quais são os corpos em que não é possível distinguir comprimento e largura? Dê ex. — 12. Que é área? Dê ex. — 13. Que é volume? Dê ex. — 14. Que é linha? Dê ex. — 15. Quantas dimensões tem a linha? — 16. Que é comprimento? — 17. Em que sentidos se emprega a palavra comprimento? — 18. Que é ponto? — 19. Que é ponto, na linguagem vulgar? — 20. Quantas dimensões tem o ponto geométrico? — 21. Como é representado?

1.º PONTO — Linhas

1. A *linha* pode ser considerada como o encontro de duas superfícies ou como uma série de pontos.

2 e 3. *Linha reta* é aquela cujos pontos seguem sempre a mesma direção. Pode ser representada por um fio bem esticado.

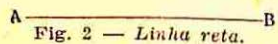


Fig. 2 — Linha reta.

4 a 6. Entre 2 pontos só se pode traçar uma *linha reta*, que é o *caminho mais curto* entre eles. Para traçar linhas retas usa-se a *régua*.

7. *Linha curva* é aquela cujos pontos mudam constantemente de direção.

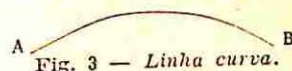


Fig. 3 — Linha curva.

8. *Linha quebrada* ou *poligonal* é a linha formada por duas ou mais porções de retas.

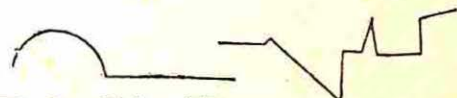


Fig. 5 — Linha mista.

Fig. 4 — Linha quebrada.

9. *Linha mista* é a formada de porções de retas e de curvas.

10. As linhas curvas, quebradas e mistas podem ser fechadas e abertas.

11. *Linha fechada* é aquela cujas extremidades se unem.

12. *Linha aberta* é aquela cujas extremidades não se unem.

13. *Linha horizontal* é a reta que tem a direção da superfície da água tranqüila. Uma vara boiando num tanque está em posição horizontal.

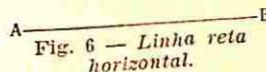


Fig. 6 — Linha reta horizontal.

Fig. 7 — Linha reta vertical

14. *Linha vertical* é a reta que tem a direção do fio de prumo.

Fig. 8 — Linha reta inclinada.

15. *Linha inclinada* é a reta que não é horizontal, nem vertical.

16 e 17. *Paralelas* são as linhas que, situadas no mesmo plano, nunca se encontram porque seguem sempre igual direção. Os trilhos dos bondes e locomotivas são paralelos.

18. *Paralelas equidistantes* são três ou mais linhas paralelas situadas a igual distância uma das outras. *Paralelas não equidistantes* são três ou mais linhas paralelas que não ficam a igual distância umas das outras.

Fig. 9 — Paralelas equidistantes.

Fig. 10 — Paralelas não equidistantes.

19. *Perpendicular* é a reta que encontra outra, sem pender nem para um lado nem para outro.

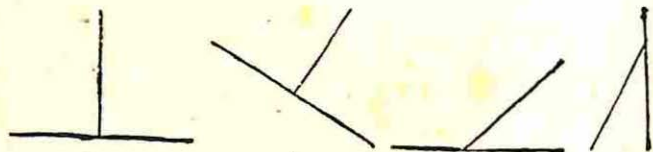


Fig. 11 e 12 — Retas perpendiculares Fig. 12 e 13 — Retas oblíquas

20. É preciso não confundir perpendicular com vertical. A reta vertical só pode ter a direção do fio de prumo; mas a reta perpendicular a outra pode tomar qualquer direção.

21. *Obliqua* é a reta que encontra outra, inclinándose-se mais para um lado do que para outro.

22 e 23. *Convergentes* são as linhas que partem de diversos pontos para um só. O ponto comum para onde parte as linhas chama-se *ponto de convergência*.

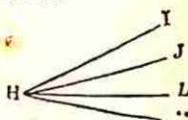


Fig. 15 — Linhas convergentes (se as considerarmos partindo dos pontos I, J, L, M para H), ou divergentes (se as considerarmos partindo do ponto H para os pontos I, J, L, M).

24 e 25. *Divergentes* são as linhas que partem de um ponto para diversos. O ponto donde partem estas linhas chama-se *ponto de divergência*.

Modo prático de explicar e tomar a lição: 1) Traçar no quadro negro, e explicar, todas as figuras; 2) Traçar as figuras e exigir a definição; 3) Dar a definição e exigir o traçado das figuras; 4) Exigir definição e traçado.

- 1. Como pode ser considerada a linha? — 2. Que é linha reta? — 3. Como é representada? — 4. Quantas linhas retas se podem traçar entre 2 pontos? — 5. Qual é a propriedade da linha reta? — 6. Qual é o instrumento destinado a traçar linhas retas? — 7. Que é linha curva? — 8. Que é linha quebrada ou polygonal? — 9. Que é linha mista? — 10. Como podem ser as linhas curvas, quebradas e mistas? — 11. Que é linha fechada? — 12. Que é linha aberta? — 13. Que é linha horizontal? — 14. Que é linha vertical? — 15. Que é linha inclinada? — 16. Que são linhas paralelas? — 17. Dê ex. de linhas paralelas. — 18. Que são paralelas equidistantes? ...paral. não equidist.? — 19. Que são linhas perpendiculares? — 20. Que diferença há entre linhas perpendiculares e linhas verticais? — 21. Que são linhas oblíquas? — 22. Que são linhas convergentes? — 23. Que é ponto de convergência? — 24. Que são linhas divergentes? — 25. Que é ponto de divergência?

2.º PONTO — Ângulos

1 a 4. *Ângulo* é a figura formada por duas linhas que se encontram. Se ambas as linhas forem retas, o ângulo será *retilíneo*; se ambas forem curvas, o ângulo será *curvilíneo*; se uma fôr curva e outra reta, o ângulo será *mistilíneo*.

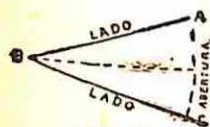


Fig. 15 *Ângulo retilíneo*



Fig. 16 *Ângulo curvilíneo*

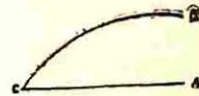


Fig. 17 *Ângulo mistilíneo*

5 a 8. Pode-se também definir *ângulo* do seguinte modo: o afastamento entre duas linhas que se encontram. Estas linhas são os lados do ângulo; o ponto onde elas se encontram é o *vértice* do ângulo; e o espaço compreendido entre os lados, é a *abertura* do ângulo.

9. A reta que parte do vértice do ângulo retilíneo e o divide em duas partes iguais chama-se *bissetriz*.

10 a 12. Para designar um ângulo, é costume empregar 3 letras: uma no vértice e uma sobre cada lado, lendo-se sempre em 2.º lugar a letra do vértice. Assim: o ângulo retilíneo da fig. 15 lê-se ABC.

13. Quando um ângulo estiver isolado, basta empregar uma letra, no vértice, e designar o ângulo apenas por esta letra.

14. *A grandeza dos ângulos não depende do comprimento dos seus lados, que são indefinitos, mas sim do seu maior ou menor afastamento.*

15. Os ângulos, quanto à sua grandeza, dividem-se em *retos, agudos e obtusos*.

16. *Ângulo reto* é o que tem os lados perpendiculares (Fig. 18).

17 a 22. Todos os ângulos retos são iguais; todos medem 90 graus. O grau divide-se em 60 minutos e o minuto em 60 segundos. Para exprimir graus, minutos e segundos, empregam-se, respectivamente, os seguintes sinais: ° ' ". Assim: 45° 40' 4" lê-se 45 graus, 40 minutos e 4 segundos.

23. *Ângulo agudo* é o ângulo menor do que o ângulo reto (Ângulo EFG da fig. 19).

24. *Ângulo obtuso* é o ângulo maior do que o ângulo reto (Ângulo DFE da fig. 19).

25 a 27. Tanto nos ângulos agudos como nos obtusos, os lados são oblíquos entre si. O ângulo agudo tem menos de 90°, e o obtuso tem mais de 90°.

28 a 30. *Ângulos complementares* são aqueles cuja soma vale um ângulo reto (90°). Assim: os ângulos HIJ + JIK da fig. 20 são complementares.

31 a 33. *Ângulos suplementares* são os que, em soma, valem 2 ângulos retos (180°). Assim: os ângulos DFE + EFG da fig 19 são suplementares.

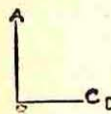


Fig. 18
Ângulo reto

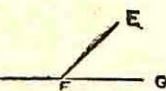


Fig. 19
Ângulos adjacentes suplementares

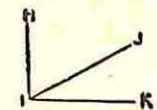


Fig. 20
Ângulos adjacentes complementares

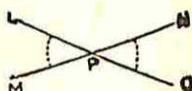


Fig. 21
Ângulos verticalmente opostos

34 e 35. *Ângulos adjacentes* são 2 ângulos que têm o mesmo vértice e um lado comum. Os ângulos das fig. 19 e 20 são adjacentes. A palavra *adjacente* quer dizer *que estão juntos*.

36 e 37. Dois ângulos são *opostos pelo vértice* quando os lados de um são os prolongamentos dos lados do outro.

38 a 42. Os ângulos medem-se com um instrumento chamado *transferidor*, que é um semicírculo de metal ou de celulósido

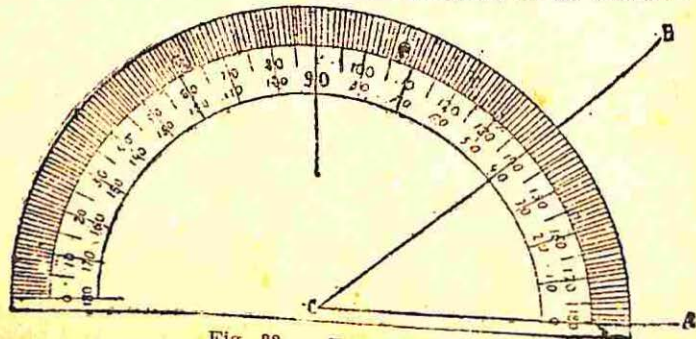


Fig. 22 — Transferidor

de pequenas dimensões, quando se destina a medir ângulos num papel, ou de madeira e de maiores dimensões, quando é destinado a medir ângulos nos quadros negros. A parte curva do transferidor chama-se *limbo* e tem duas gradações, em sentido inverso, que vão de 0° a 180°. O diâmetro deste semicírculo, que liga as divisões 0° e 180°, chama-se *linha de fé*.

47. Para medir um ângulo qualquer, basta fazer coincidir o centro do transferidor com o vértice do ângulo e a linha de fé com um dos lados; o número indicado no limbo pelo outro lado do ângulo, será a medida do ângulo.

1. Que é ângulo? — 2 a 4. Que é âng. retilíneo? — curvilíneo? — mistilíneo? — 5. Dê outra definição de ângulo? — 6. Que são lados do ângulo? — 7. Que é vértice? — 8. Que é abertura? — 9. Que é bissetriz de um ângulo? — 10 a 12. Como se designa um ângulo? — onde se colocam essas letras? — qual a que se lê em 2.º lugar? Dê ex. — 13. Quando é que um ângulo pode ser designado apenas por uma letra? — 14. De que depende a grandeza dos ângulos? — 15. Como se dividem os ângulos quanto à sua grandeza? — 16. Que é âng. reto? — 17 e 18. Os âng. retos têm diferentes grandezas? — qual é a sua medida? — 19 a 21. Como se divide o grau? — o minuto? — o segundo? — 22. Escreva 20 graus, 20 minutos e 20 segundos. — 23. Que é âng. agudo? — 24 ... obtuso? — 25. Como são os lados nos âng. agudos e obtusos? — 26 e 27. Um âng. de 91° é reto, agudo ou obtuso? — e um de 89° 30'? — 28. Que são âng. complementares? — quantos graus têm? — 29. Qual é o complemento do âng. de 30°? — 30. (Repetir a perg. relativamente a outros ângulos, maiores e menores). — 31. Que são âng. suplementares? — quantos graus têm? — 32. Qual é o suplemento do ângulo de 120°? — 33. (Repetir à perg. relativamente a outros âng. maiores e menores). — 34. Que são ângulos adjacentes? — 35. Que significa a palavra *adjacentes*? — 36 e 37. Que são âng. opostos pelo vértice? — 38 a 42. Com que instrumento se medem os ângulos? — Descreva o transferidor. Como se chama a parte curva do transf.? Como está graduada? Como se chama o diâmetro do transferidor? — 43. Como se medem os ângulos?

Exercício 1 — Se houver 8 âng. iguais em torno de um ponto, quanto valerá cada um deles? — Se em torno de um ponto, de lado de uma reta, houver 6 âng. iguais, quanto valerá cada um? — Se uma reta encontrar outra reta, formando um ângulo de 30°, quanto valerá o outro ângulo adjacente?

O professor exercitará os alunos na leitura de ângulos.

3.º PONTO — Triângulos

1 a 3. *Triângulo* ou *trilátero* é a figura formada por 3 linhas que se cortam ou tocam duas a duas. As linhas que formam o triângulo são os *lados* do triângulo, e os pontos onde elas se encontram são os *vértices*.

4 a 6. A palavra *triângulo* quer dizer 3 ângulos, e *trilátero*, 3 lados. Cada triângulo tem 3 ângulos, 3-lados e 3 vértices.

7 a 9. Se prolongarmos os lados de um triângulo, teremos 3 ângulos internos e 6 ângulos externos (2 ângulos externos em cada vértice).

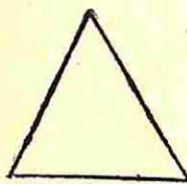


Fig. 23
Triângulo equilátero

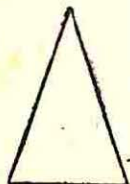


Fig. 24
Triângulo isósceles



Fig. 25
Triângulo escaleno

Ângulo externo é o ângulo formado por um lado e pelo prolongamento de outro. Há as seguintes espécies de triângulos:

10. *Triângulo acutângulo* é o que tem todos os ângulos agudos (Fig. 26).

11. *Triângulo obtusângulo* é o que tem um ângulo obtuso (Fig. 28).

12. Os triângulos acutângulos e obtusângulos são chamados *obliquângulos* porque cada um dos seus lados é oblíquo em relação aos outros

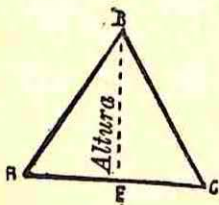


Fig. 26 — Triângulo acutângulo

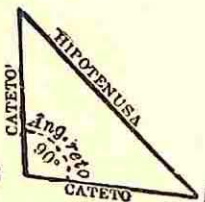


Fig. 27 — Triângulo retângulo

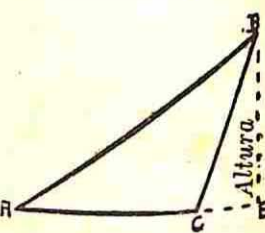


Fig. 28
Triângulo obtusângulo

13 a 15. *Triângulo retângulo* é o que tem um ângulo reto. No triângulo retângulo, os lados que formam o ângulo reto chamam-se *catetos*, e o lado oposto ao ângulo reto, *hipotenusa* (Fig. 27).

16 a 20. *Triângulo equilátero* é o que tem todos os lados iguais; *isósceles* ou *simétrico* é o que tem somente 2 lados iguais; *escaleno* é o que tem os 3 lados desiguais. Os triângulos equiláteros são também *equiângulos* (ângulos iguais).

21 a 23. *Base* de um triângulo é o lado sobre o qual se supõe que o triângulo poussa. Pode-se tomar como base qualquer dos lados. No triângulo isósceles é costume dar o nome de base ao lado desigual.

24 a 26. *Altura* de um triângulo é a perpendicular baixada do vértice sobre a base. Num triângulo podemos tirar 3 alturas, pois qualquer lado pode ser tomado como base. Cada triângulo tem 3 alturas; no triângulo obtusângulo, duas alturas caem fora do triângulo, sobre o prolongamento da base.

27 a 31. *Mediana* de um triângulo é a reta que parte do vértice e o liga ao meio do lado oposto. Cada triângulo tem 3 medianas, que se cortam no mesmo ponto. No triângulo equilátero as alturas também são as medianas.

32 e 33. A soma dos 3 ângulos internos de um triângulo é igual a 2 ângulos retos ou 180°, donde se conclui que um triângulo não pode ter mais de um ângulo reto, nem mais de um obtuso, nem um ângulo reto e um obtuso, ao mesmo tempo.

34 a 37. Num triângulo equilátero, cada ângulo vale 60°. Num triângulo obtusângulo, um ângulo é obtuso e os outros são agudos. Num triângulo retângulo, um ângulo é reto e os outros são agudos. A soma dos ângulos agudos de um triângulo retângulo é igual a 90°.

38 a 40. *Classificação dos triângulos*: Quanto a *grandeza* dos seus âng.: *acutângulo*, *obtusângulo* e *retângulo*; ao *comprimento* relativo dos seus lados: *equilátero*, *isósceles* e *escaleno*;

1. Que é triângulo ou trilátero? — 2. Que são lados do triângulo? — 3. Que são vértices? — 4. Que significa a palavra triângulo? — 5. ...trilátero? — 6. Quantos lados, ângulos e vértices tem um triângulo? — 7. Como se obtêm os âng. externos de um triâng.?
8. Quantos âng. externos pode haver no triângulo? — 9. Que são âng. externos? — 10. Que é triângulo acutângulo? — 11. ...obtusângulo? — 12. Que nome se dá aos triângulos acutângulos e obtusângulos? — Por quê? — 13. Que é triângulo retângulo? — 14. Que são catetos? — 15. Que é hipotenusa? — 16 a 18. Que é triângulo equilátero? — ...isósceles ou simétrico? — ...escaleno? — 19. Que é triângulo equiângulo? — 20. Quais são os triângulos equiângulos? — 21. Que é base de um triâng.?
22. Qual o lado que se toma como base? — 23. Qual o lado que, no triângulo isósceles, se considera geralmente como

base? — 24. Que é altura de um triângulo? — 25. Quantas alturas tem um triângulo? — 26. As 3 alturas encontram-se? — 27. Que é mediana de um triângulo? — 28. Quantas medianas tem um triângulo? — 29. As medianas encontram-se? — 30. Em que triângulos as alturas são também medianas? — 31. Qual é a diferença entre alturas e medianas? — 32. A que é igual a soma dos 3 ângulos internos de um triângulo? — 33. Que se conclui desse princípio? — 34. Num triângulo equilátero, quanto vale cada ângulo? — 35 e 36. Como são os âng. de um triângulo obtusângulo? — ...e de um triângulo retângulo? — 37. A que é igual a soma dos ângulos agudos de um triângulo retângulo? — 38 a 40. Como se classificam os triâng. quanto à grandeza de seus âng.? — ...quanto ao comprimento relativo de seus lados?

Exercício 2 — Dos ângulos de um triângulo, um vale 35° e outro 65°; quanto vale o 3.º ângulo? que espécie de triâng. é este? — Quanto vale a soma dos 2 ângulos agudos de um triângulo retângulo? — Num triângulo isósceles, um ângulo vale 30°; quanto vale cada um dos outros?

O professor exercitará os alunos na leitura dos ângulos do triângulo.

4.º PONTO — Quadriláteros*

1 a 3. *Quadrilátero* é a figura formada por 4 linhas que se tocam ou cortam duas a duas, ou a superfície limitada por estas 4 linhas. As linhas que formam o quadrilátero são os *lados* do quadrilátero, e os pontos onde elas se encontram são os *vértices*.

4 e 5. A palavra *quadrilátero* significa *quatro lados*. Cada quadrilátero tem 4 lados, 4 ângulos e 4 vértices.

6 a 8. Se prolongarmos os lados de um quadrilátero, teremos 4 ângulos internos e 8 ângulos externos (2 ângulos externos em cada vértice).

9 e 10. *Diagonal* é a reta que liga 2 vértices não consecutivos. Cada quadrilátero tem *duas diagonais*.

11 a 13. Os quadriláteros podem ser *côncavos* (com um ângulo reentrante) ou *convexos* (com todos os ângulos salientes).

14 a 17. Há as seguintes espécies de quadriláteros convexos: *quadrilátero simples* — os que não têm lados paralelos; *paralelogramos* — quadriláteros que têm os lados paralelos dois a dois; e *trapézios* — quadriláteros que só têm dois lados paralelos que são as *bases* do trapézio.

18 a 22. Os paralelogramos ainda se dividem em: *paralelogramos simples* — os que têm os lados e ângu-

los iguais dois a dois; *retângulos* — paralelogramos que têm todos os ângulos retos e os lados iguais dois a dois; *quadrados* ou quadriláteros regulares — paralelogramos que têm todos os ângulos retos e os lados iguais; *losangos* ou *rombos* — paralelogramos que têm todos os lados iguais sem que os ângulos sejam retos.

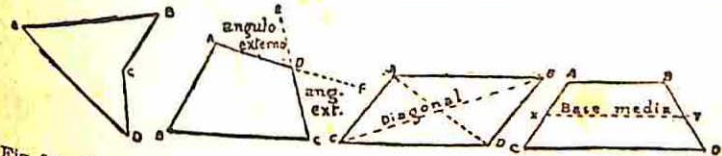


Fig. 29 - Quadrilátero côncavo Fig. 30 - Quadrilátero simples Fig. 31 - Paralelogramo Fig. 32 - Trapézio isósceles

23 a 27. Os trapézios também se dividem em: *trapézio isósceles* ou *simétrico* — o que tem os lados não paralelos iguais; *trapézio retângulo* — o que tem um lado perpendicular às bases; *trapézio escaleno* — o que não é isósceles, nem retângulo.

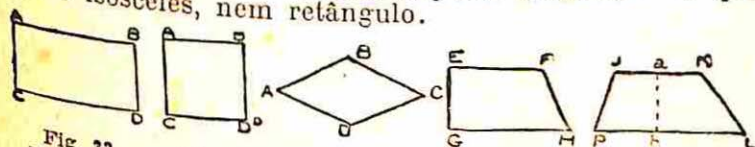


Fig. 33 Retângulo Fig. 34 Quadrado Fig. 35 Losango ou rombo Fig. 36 Trapézio retângulo Fig. 37 Trapézio escaleno

28 a 33. *Base* de um quadrilátero é qualquer dos seus lados. Nos paralelogramos é costume considerar duas bases: a *inferior*, sobre a qual se supõe que o quadrilátero pousa, e a *superior*, oposta à inferior. No trapézio, chamam-se *bases* aos lados paralelos e *base média* à reta que liga os meios dos lados não paralelos; o comprimento da base média é igual à semi-soma das bases.

34. *Altura* de um paralelogramo é a perpendicular que liga a base superior à inferior.

35. *Propriedades do paralelogramo*: 1.ª) os lados opostos são iguais e paralelos; 2.ª) os ângulos opostos são iguais; 3.ª) as diagonais cortam-se mutuamente ao

meio; 4.^a) traçando-se apenas uma diagonal, o paralelogramo fica dividido em 2 triângulos iguais, donde se conclui que a soma dos ângulos internos de um paralelogramo é igual a 4 retos (e o mesmo acontece com os outros quadriláteros).

1. Que é quadrilátero? — 2. Que são lados do quadrilátero?
3. Que são vértices? — 4. Que significa a palavra quadrilátero? — 5. Quantos lados, ângulos e vértices tem um quadrilátero? — 6. Como se obtêm os ângulos externos de um quadrilátero? — 7. Quantos âng. externos pode haver no quadrilátero? — 8. Que são âng. externos? — 9. Que é diagonal? — 10. Quantas diagonais tem o quadrilátero? — 11. Como podem ser os quadriláteros? — 12. Que são quadriláteros côncavos? — 13. ...convexos? — 14. Mencione as diferentes espécies de quadriláteros convexos? — 15 a 17. Que é quadrilátero simples? — ...paralelogramo? — trapézio? — 18. Como se dividem os paralelogramos? — 19 a 22. Que é paralelogramo simples? — ...retângulo? — ...quadrado? — ...losango ou rombo? — 23. Como se dividem os trapézios? — 24 a 27. Que é trapézio simples? — ...trapézio isósceles ou simétrico? — ...trapézio retângulo? — ...trapézio escaleno? — 28. Que é base de um quadrilátero? — 29. Quantas bases é costume considerar nos paralelogramos e como se chamam? — 30 e 31. Que é base inferior? — ...superior? — 32. Que são bases de um trapézio? — e base média? — 33. A que é igual o comprimento da base média? — 34. Que é altura de um quadrilátero? — 35. Quais são as propriedades do paralelogramo?

Exercício 3 — *A que é igual a soma dos ângulos internos de um quadrilátero? Explique. A que é igual a soma de 2 ângulos consecutivos de um paralelogramo? — A que é igual a soma dos 2 ângulos oblíquos de um trapézio retângulo? — Qual é a base média de um trapézio, cuja base inferior é 7 m e a superior é 5 m?*

5.º PONTO — Polígonos em geral

1. *Polígono* é uma porção de superfície plana completamente limitada por linhas (retas ou curvas) que se cortam ou tocam duas a duas.

2 e 3. As linhas que formam os polígonos são os lados do polígono; os pontos onde elas se encontram são os vértices.

4 e 5. A palavra *polígono* significa muitos ângulos. O número de ângulos internos de um polígono qualquer é igual ao número de seus lados.

6 e 7. Se prolongarmos os lados de um polígono, teremos dois ângulos externos em cada vértice.

8. *Diagonais* de um polígono são as retas que ligam dois vértices não consecutivos do polígono (Fig. 38).

9. *Perímetro* de um polígono é a soma dos comprimentos de todos os seus lados.

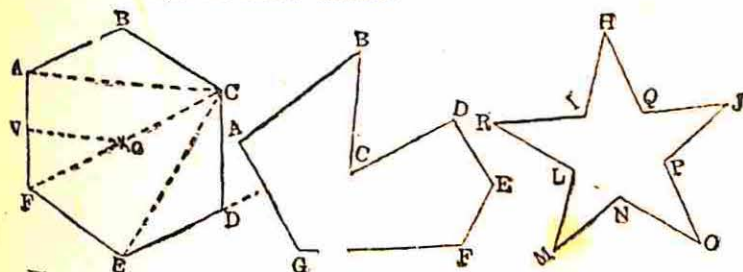


Fig. 38 — Polígono regular (com apótema e diagonais)

Fig. 39 — Polígono côncavo

Fig. 40 — Polígono estrelado regular

10 e 11. Os polígonos designam-se pelo número de seus lados; assim: polígono de 16 lados, polígono de 20 lados, etc. Há, porém, alguns que têm nomes especiais; os principais são os seguintes:

Triângulo	3 lados	Eneágono	9 lados
Quadrilátero	4 "	Decágono	10 "
Pentágono	5 "	Undecágono	11 "
Hexágono	6 "	Dodecágono	12 "
Heptágono	7 "	Pentadecágono .	15 "
Octógono	8 "	Icoságono	20 "

12 e 13. O polígono que tem todos os lados iguais é *equilátero*; o que tem todos os ângulos iguais é *equiângulo*.

14. *Polígono regular* é o que tem todos os lados e todos os ângulos iguais. Os polígonos regulares são equiláteros e equiângulos. O triângulo equilátero ou equiângulo e o quadrado são polígonos regulares.

15. A perpendicular tirada do centro de um polígono regular sobre qualquer dos lados chama-se *apótema* (Reta OV da Fig. 38).

16. *Polígono irregular* é o que tem lados e ângulos desiguais.

17 e 18. *Polígono convexo* é o que tem todos os ângulos salientes. *Ângulo saliente* é o que tem o vértice para fora do polígono.

19 e 20. *Polígono côncavo* ou *não convexo* é o que tem pelo menos um ângulo reentrante. *Ângulo reentrante* é o que tem o vértice para dentro do polígono (na Fig. 39, o ângulo BCD é reentrante).

21 e 22. Nos polígonos convexos, tôdas as diagonais são internas; nos polígonos côncavos, umas são internas e outras externas.

23 a 25. *Polígono estrelado* é o polígono côncavo que tem os ângulos alternadamente salientes e reentrantes. Os polígonos estrelados podem ser regulares (se os lados e ângulos forem respectivamente iguais) ou *irregulares* (no caso contrário). A Fig. 40 é um polígono estrelado regular.

1. Que é polígono? — 2. Que são lados do polígono? — 3. Que são vértices? — 4. Que significa a palavra polígono? — 5. A que é igual o número de ângulos internos de um polígono? — 6 e 7. Como se obtêm os ângulos externos de um polígono? — 8. Quantos em cada vértice? — 9. Que são diagonais de um polígono? — 10. Como se designam os polígonos? Dê ex. — 11. Diga os polígonos que têm nomes especiais. — 12. Que é polígono equilátero? — 13. Que é polígono equiângulo? — 14. Que é polígono regular? Dê ex. — 15. Que é apótema? — 16. Que é polígono irregular? — 17 e 18. Que é polígono convexo? — 19. Que é polígono reentrante? — 20. Que é polígono côncavo ou não convexo? — 21 e 22. Como são as diagonais nos polígonos convexos? — 23 a 25. Que são polígonos estrelados e como se dividem? — Que são polígonos estrelados regulares? e estrelados irregulares.

Exercício 4 — Qual o perímetro de um pentadécágono regular, sabendo-se que um dos lados é igual a 1,5 m? — Em que finais ficarão decomposto um polígono, se tirarmos tôdas as diagonais? — Quantas diagonais se podem traçar num triângulo? — Pode-se traçar um triângulo retilíneo côncavo? — Qual o menor número de lados com que se pode abranger uma porção de superfície? — Quantos ângulos tem um dodecágono? — Achar o perímetro de um retângulo, sabendo-se que a base mede 1,85 m e a altura $\frac{3}{5}$ da base.

6.º e 7.º PONTO — Circunferência e círculo. Polígonos inscritos e circunscritos

1 a 3. *Circunferência* é uma linha curva fechada, cujos pontos estão todos a igual distância de um ponto interior chamado centro. *Círculo* é a superfície plana limitada pela circunferência.

4. *Centro* da circunferência ou do círculo é o ponto interior que fica a igual distância de todos os pontos da circunferência.

5. *Arco* é uma porção qualquer da circunferência.

6 a 8. *Corda* de um arco é a reta que liga as extremidades dêste arco. A cada corda correspondem sempre dois arcos, cuja soma é a circunferência.

9 e 10. *Diâmetro* do círculo ou da circunferência é qualquer reta que liga dois pontos da circunferência, passando pelo centro. Por outras palavras, é a corda que passa pelo centro da circunferência. É a maior corda que se pode tirar numa circunferência.

11 a 15. Numa circunferência pode-se tirar uma infinidade de diâmetros, todos do mesmo tamanho. Cada diâmetro divide a circunferência e o círculo ao meio. Metade de uma circunferência é uma semicircunferência; metade de um círculo é um semicírculo.

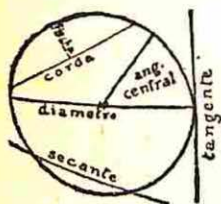


Fig. 41

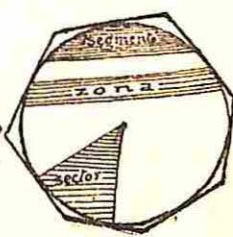


Fig. 42

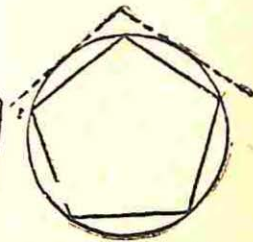


Fig. 43
Polígono inscrito e ang. circunscrito

16 a 19. *Raio* do círculo ou da circunferência é a reta que liga qualquer ponto da circunferência ao centro. O raio é metade do diâmetro. Numa circunferência pode-se tirar uma infinidade de raios, todos do mesmo tamanho.

20 e 21. *Flecha* é a reta que liga o meio da corda ao meio do arco. Qualquer flecha, sendo prolongada passará pelo centro da circunferência.

22 e 23. *Tangente* a uma circunferência é qualquer linha que toca a circunferência num ponto, chamado *ponto de tangência* ou de *contato*.

Podemos tirar tangentes retas a qualquer linha curva e tangentes curvas a qualquer linha reta.

24. *Secante* a uma circunferência é qualquer linha que corta a circunferência em dois pontos.

Dois linhas, retas ou curvas, que se cortam, são chamadas *secantes*.

25. *Ângulo central* é qualquer ângulo que tem o vértice no centro do círculo ou da circunferência e cujos lados são raios (Fig. 41).

26 e 27. *Ângulo inscrito* é o que fica dentro da circunferência e com o vértice sobre ela. Os lados de um ângulo inscrito retilíneo são cordas da circunferência (Fig. 45).

28. *Ângulo circunscrito* é o que tem o vértice fora do círculo e da circunferência e cujos lados são tangentes à circunferência (Fig. 43).

29. *Setor circular* é a porção de círculo compreendida entre dois raios e o arco que liga as extremidades destes raios (Fig. 42).

30. *Segmento circular* é a porção de círculo que fica entre o arco e a corda (Fig. 42).

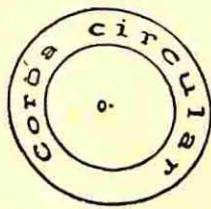


Fig. 44
Circunferências concêntricas. Coroa circular

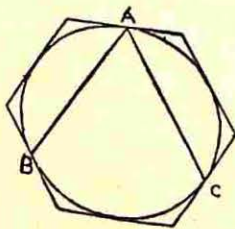


Fig. 45
Ângulo inscrito e polígono circunscrito

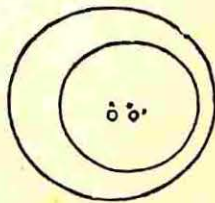


Fig. 46
Circunferências excêntricas

31. *Zona circular* é a porção de círculo situada entre duas cordas paralelas e os dois arcos que ligam as extremidades destas cordas (Fig. 42).

32 e 33. *Coroa circular* é a porção de círculo compreendida entre duas circunferências concêntricas, isto

é, entre duas circunferências que têm o mesmo centro (Fig. 44).

34. As circunferências que não têm o mesmo centro chamam-se *excêntricas* (Fig. 46).

35 e 36. *Polígono inscrito* é o que fica dentro da circunferência com os vértices sobre ela. Os lados de um polígono inscrito retilíneo são cordas da circunferência (Fig. 43).

37. *Polígono circunscrito* é o que tem os vértices fora do círculo e da circunferência e cujos lados são tangentes à circunferência (Fig. 45).

38. A circunferência considera-se dividida em 360 partes iguais chamadas graus.

39 e 40. Traçando-se 2 diâmetros perpendiculares, a circunferência e o círculo ficam divididos em 4 partes iguais chamadas quadrantes. *Quadrante* é, pois, a 4.ª parte do círculo ou da circunferência.

1. Que é circunferência? — 2. Que é círculo? — 3. Qual a diferença entre círculo e circunferência? — 4. Que é centro do círculo ou da circunferência? — 5. Que é arco? — 6 e 7. Que é corda? — que outro nome tem? — 8. Quantos arcos correspondem a uma corda? Explique. — 9. Que é diâmetro? — 10. Qual é a maior corda que se pode traçar numa circunferência? — 11 e 12. Quantos diâmetros podemos traçar numa circunferência? — Qual deles é o maior? — 13. Que é que divide a circunferência e o círculo ao meio? — 14 e 15. Que é uma semi-circunferência? e um semi-círculo? — 16. Que é raio? — 17. Que relação há entre o diâmetro e o raio? — 18. Quantos raios podemos traçar numa circunferência? — 19. Qual deles será o maior? — 20. Que é flecha? — 21. Por onde passará a flecha, se a prolongarmos? — 22. Que é tangente a uma circunferência? — 23. Que é ponto de contato ou de tangência? — 24. Que é secante a uma circunferência? — 25. Que é ângulo central? — 26. Que é ângulo inscrito? — 27. Que são, relativamente à circunferência, os lados de um âng. inscrito retilíneo? — 28. Que é âng. circunscrito? — 29. Que é setor circular? — 30. Que é segmento circular? — 31. Que é zona circular? — 32. Que é coroa circular? — 33. Trace duas circunferências concêntricas e indique a coroa circular. — 34. Que são circunferências excêntricas? — Trace. — 35. Que é polígono inscrito? — 36. Que são, relativamente à circunferência, os lados de um polígono inscrito? — 37. Que é polígono circunscrito? — 38. Como se divide a circunferência? — 39 e 40. Que é quadrante? — Como se obtém?

Exercício 5 — Qual o comprimento do raio de um círculo, sabendo-se que o diâmetro é 9 m? — Qual o compr. do diâmetro, sabendo-se que o raio é 6,5 m? — A quantos graus, minutos e segundos corresponde 1/3 da circunferência? — 1/4? — 1/5? — 1/6? — 1/9? — Um arco de 180° que porção é da circunferência?

8.º PONTO — *Elipse, oval, parábola, hipérbole, espiral, hélice.*

1 a 3. *Elipse* é uma linha curva, plana, fechada, na qual a soma das distâncias de qualquer de seus pontos a dois pontos interiores fixos chamados focos é sempre a mesma (Fig. 47).

4. *Distância focal* é a distância entre os focos.

5. *Linha dos focos* é a reta que liga os dois focos.

6. *Centro da elipse* é o ponto situado sobre a linha dos focos e a igual distância d'êles.

7. A elipse tem 2 eixos: *eixo maior* e *eixo menor*.

8. *Eixo maior* é a reta que liga os focos, prolongada em ambos os sentidos até encontrar a elipse.

9. A soma das distâncias de um ponto qualquer da elipse aos focos é igual ao eixo maior.

10. As extremidades do eixo maior são os *polos da elipse*.

11. *Eixo menor* é a reta que cai perpendicularmente ao centro do eixo maior e liga 2 pontos da elipse.

12 e 13. *Vértices* da elipse são as extremidades dos seus eixos, isto é, os pontos onde êles tocam a elipse.

14 e 15. *Raios vectores* são as retas que ligam os focos a qualquer ponto da elipse. A soma de 2 raios vectores (tirados dos focos para um só ponto da elipse) é sempre igual ao eixo maior.

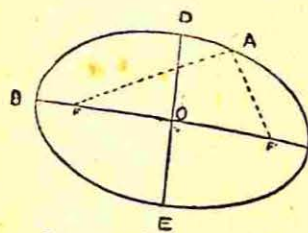


Fig. 47 — *Elipse*

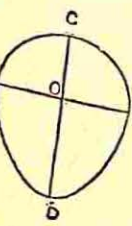


Fig. 48 — *Oval*

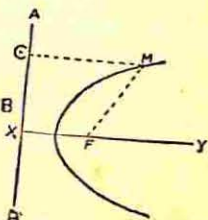


Fig. 49 — *Parábola*

16. *Raios da elipse* são as retas que ligam o centro a qualquer ponto da elipse.

17. *Diâmetro da elipse* é qualquer reta que liga dois pontos da elipse passando pelo centro.

18. *Excentricidade* de uma elipse é uma fração que tem por numerador o comprimento da distância focal e por denominador o comprimento do eixo maior.

19 a 21. Quando a excentricidade é grande, a elipse é alongada; no caso contrário, é arredondada. Quando a excentricidade é nula, os focos confundem-se com o centro e deixa de haver elipse; teremos então uma circunferência.

22. O plano limitado pela elipse é a *superfície elíptica*.

23. Há muitos objetos de forma elíptica: mesas, espelhos, bandejas, rótulos, etc. As curvas descritas pela Terra e pelos outros planetas em volta do Sol são elipses, nas quais o Sol occupa um dos focos.

1. Que é elipse? — 2. Que são focos da elipse? — 3. Quantos focos tem a elipse? — 4. Que é distância focal? — 5. Que é linha dos focos? — 6. Que é centro da elipse? — 7. Quantos eixos tem a elipse e como se chamam? — 8 e 9. Que é eixo maior? — a que é igual? — 10. Que são polos da elipse e quantos são? — 11. Que é eixo menor? — 12. Que são vértices da elipse? — 13. Quantos são? — 14. Que são raios vectores? — 15. A que é igual a sua soma? — 16. Que são raios da elipse? — 17. Que é diâmetro da elipse? — 18. Que é excentricidade da elipse? 14 a 21. Como é a elipse quando a excentricidade é grande? — e quando é pequena? — e quando é nula? — 22. Que é superfície elíptica? — 23. Mencione objetos de forma elíptica? — Quantos focos tem a elipse? — Quantos centros? — Quantos eixos? — Quantos polos? — Quantos vértices? — Quantos raios vectores? — Quantos raios da elipse? — Quantos diâmetros?

— *Desenhar uma elipse*, indicando os focos, o centro, os eixos, os polos, os vértices, os raios vectores, os raios da elipse e os diâmetros, e definir cada um d'êstes termos. — *Desenhar uma elipse* e explicar a sua definição.

1 e 2. *Oval* é uma curva plana, fechada, formada por uma semi-circunferência, dois grandes arcos e um pequeno arco. Esta curva chama-se *oval* porque a sua forma se assemelha à de um ovo (Fig. 48).

3. A oval tem 2 eixos: eixo grande e eixo pequeno.

4 e 5. *Eixo pequeno* é o diâmetro da semicircunferência que forma a oval. *Eixo grande* é a reta que cai perpendicularmente ao meio do eixo menor e liga dois pontos da oval.

6. O plano limitado pela oval é a *superfície oval*.

7. Fabricam-se espelhos, medalhas, etc. com forma oval.

1. Que é oval? — 2. Por que se dá a esta curva o nome de oval? — 3. Quantos eixos tem a oval e como se chamam? — 4.

Qual é o eixo pequeno? — 5. Qual é o grande? — 6. Que é superfície oval? — 7. Mencione objetos de forma oval.

— Desenhar uma oval, indicando a semi-circunferência, a semi-elipse, os dois eixos, os dois grandes arcos e o pequeno arco. — Desenhar uma oval e explicar a definição.

1 a 3. **Parábola** é uma curva plana aberta, cujos pontos ficam todos equidistantes de um ponto fixo chamado *foco* e de uma reta fixa chamada *diretriz* (A reta AB da fig. 49 é diretriz).

4. A parábola só tem um *eixo*, que é a perpendicular tirada do foco sobre a diretriz.

5. *Vértice* da parábola é o ponto onde o eixo encontra a parábola. A distância entre o foco e o vértice é a *distância focal*.

6. *Raio vector* é a reta que liga um ponto qualquer da parábola ao foco.

7. *Diâmetro* da parábola é qualquer reta tirada da parábola, paralelamente ao eixo.

8. *Parâmetro* da parábola é a distância entre o foco e a diretriz.

9. Os espelhos dos telescópios e, em geral, os refletores dos holofotes dos automóveis, locomotivas, navios, faróis, etc., são parabólicos.

1. Que é parábola? — 2. Que é foco da parábola? — 3. Que é diretriz? — 4 a 8. Que é eixo da parábola? — vértice? — distância focal? — raio vector? — diâmetro? — parâmetro? — 9. Mencione objetos de forma parabólica. — Quantos focos tem a parábola? — Quantos centros? — Quantos eixos? — Quantos vértices? — Quantos raios vectores? — Quantos diâmetros? — Desenhar uma parábola e explicar a definição.

1 a 3. **Hipérbole** é uma curva, plana, aberta, na qual a diferença de suas distâncias a dois pontos fixos é constante. Os dois pontos fixos chamam-se *focos*; a distância entre os focos é a *distância focal* (Fig. 50).

4 a 5. A hipérbole é composta de duas partes chamadas *ramos da hipérbole*.

6. A hipérbole tem dois eixos: *eixo transverso* e *eixo não transverso* ou imaginário.

7 a 9. *Eixo transverso* é a reta que passa pelos focos. *Eixo não transverso* ou *imaginário* é a reta que cai perpendicularmente ao meio do eixo transverso. (Na fig. 50,

a reta *yx* é o eixo *transverso*, e a reta *vz* é o eixo *não transverso*).

10. *Centro* da hipérbole é o ponto onde os dois eixos se cortam (Ponto *o* da fig. 50).

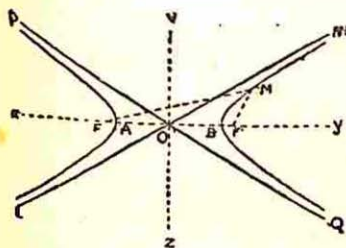


Fig. 50 — Hipérbole

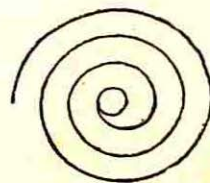


Fig. 51 — Espiral

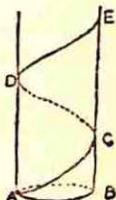


Fig. 52 Hélice

11. *Vértices* da hipérbole são os pontos onde o eixo transverso corta a hipérbole. A hipérbole tem, portanto, dois vértices (Pontos *A* e *B* da fig. 50).

12. A porção do eixo transverso compreendida entre os dois vértices tem o nome de *eixo real*.

13. *Raios vectores* são as retas que ligam os focos a qualquer ponto da hipérbole (Retas *MF* e *MF'* da fig. 50).

14. A diferença das distâncias de um ponto qualquer da hipérbole aos focos é igual ao eixo real; por outras palavras, a diferença entre dois raios vectores, tirados de um ponto qualquer da hipérbole, é sempre igual ao eixo real.

15. *Parâmetro* da hipérbole é a reta que cai perpendicularmente ao eixo transverso, passando por qualquer dos focos e terminando na curva.

16. *Assintotas* são duas retas que passam pelo centro da hipérbole, aproximando-se indefinidamente dos seus ramos sem nunca os encontrar (Retas *LN* e *PQ* da fig. 50).

1. Que é hipérbole? — 2. Que são focos da hipérbole? — 3. Que é distância focal? — 4 e 5. De quantas partes se compõe a hipérbole e como se chamam? — 6. Quantos eixos tem a hipérbole e como se chamam? — 7 a 9. Que é eixo transverso? — Que é eixo não transverso? — Que outro nome tem? — 10. Que é centro da hipérbole? — 11. Que são vértices da hipérbole? — 12. Que

é eixo real? — 13. Que são raios vectores? — 14. A que é igual a diferença entre dois raios vectores tirados do mesmo ponto? — 15. Que é parâmetro da hipérbole? — 16. Que são assíntotas? — Quantos ramos tem a hipérbole? — Quantos focos? — Quantos eixos? — Quantos centros? — Quantos vértices? — Quantos raios vectores?

— Desenhar uma hipérbole, indicando os ramos, os focos, os eixos, o centro, os vértices, os raios vectores e as assíntotas.
— Desenhar uma hipérbole e explicar a definição.

1 e 2. Espiral é uma curva plana descrita por um ponto que se afasta uniformemente de um ponto interior fixo chamado *polo da espiral* (Fig. 51).

3 e 4. A circunferência fixa de que o polo da espiral é centro chama-se *olho da espiral*. Cada volta da espiral tem o nome de *espira*.

5. As molas que fazem mover os relógios têm a forma de uma espiral. A espiral é muito empregada como ornamento, principalmente em certos objetos de ferro, como grades, portões, sacadas, extremidades de corrimãos, etc.

1. Que é espiral? — 2. Que é polo da espiral? — 3. Que é olho da espiral? — 4. Que é espira? — 5. Dê ex. de objetos que tenham forma de espiral.
— Desenhar uma espiral, indicando a curva que a forma, o polo, o olho e a espira.

1. Hélice é uma linha curva gerada por um ponto que se desloca em volta de um cilindro, elevando-se uniformemente sobre elle (Fig. 52).

2. A rósca de um sacarrolhas, a de um parafuso, a haste de certas trepadeiras, etc., dão-nos idéia de uma hélice.

1. Que é hélice? — 2. Dê ex. de objetos que tenham mais ou menos a forma de hélice.
— Desenhar uma hélice.

9.º PONTO — Poliedros

1. *Poliedros* são corpos limitados por superfícies planas (Fig. 54).

2 a 5. As superfícies planas que limitam os poliedros chamam-se *faces*; o encontro de duas faces chama-se *aresta*; o ponto onde três ou mais arestas se encontram chama-se *vértice*; as retas que ligam dois vértices não situados na mesma face chamam-se *diagonais*.

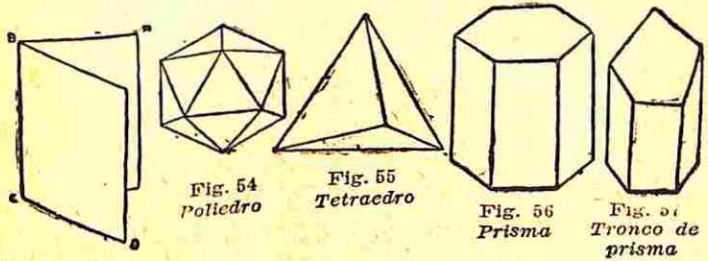
6 a 8. O ângulo formado por duas faces sucessivas, isto é, por duas faces que se encontram, chama-se *ângulo diedro* (Fig. 53). O ângulo formado por três faces cujas arestas se encontram no mesmo ponto chama-se *ângulo triedro*. O ângulo formado por mais de três faces cujas arestas se encontram no mesmo ponto tem o nome de *ângulo poliédrico*.

9 e 10. Um ângulo triedro tem 3 ângulos diedros. Um ângulo poliédrico tem tantos ângulos diedros quantas forem as arestas.

11. Em qualquer sala ou quarto encontramos exemplos de ângulos diedros e triedros. Assim: duas paredes que se encontram formam um ângulo diedro; uma parede e o assoalho formam também um ângulo diedro; duas paredes que se encontram formam com o assoalho um ângulo triedro.

12. Designa-se um ângulo diedro pro duas letras colocadas na aresta, ou por 4 letras, uma em cada face e duas na aresta, ficando no meio as duas da aresta.

13 a 18. Os *ângulos diedros* também podem ser *retos, agudos e obtusos*. Nos ângulos diedros retos, os planos caem perpendicularmente; nos agudos e obtusos, caem obliquamente. Quando um plano cai obliquamente sobre outro, forma 2 ângulos diedros adjacentes, um agudo e outro obtuso. Os ângulos diedros adjacentes têm a aresta e uma face comuns.



Ângulo diedro
Fig. 53

A superfície plana é designada geralmente pelo nome de *plano*.

Superfície plana ou *plano* é a superfície sobre a qual se podem traçar linhas retas em qualquer direção e em toda a sua extensão. Se apoiarmos a aresta de uma régua sobre um plano, todos os pontos da régua tocarão o plano. Os tampos das mesas, os quadros negros, os espelhos comuns, etc. são planos.

Dois planos são *paralelos* quando nunca se encontram, por mais que se prolonguem. As paredes de uma sala retangular ou quadrada são planos paralelos 2 a 2; o assoalho e o tórro de uma sala também são planos paralelos; etc.

Dois planos são *perpendiculares* entre si quando se encontram formando ângulos diedros adjacentes retos. Uma parede e o assoalho são planos perpendiculares.

Planos secantes são planos que se cortam.

19 e 20. Os poliedros designam-se pelo número de suas faces. Há, porém, alguns que têm nomes especiais:

Tetraedro	4 faces	Decaedro	10 faces
Pentaedro	5 "	Dodecaedro	12 "
Hexaedro	6 "	Pentadecaedro ..	15 "
Heptaedro	7 "	Icosaedro	20 "
Octaedro	8 "		

21 e 22. *Tetraedro* é o corpo geométrico limitado por 4 faces triangulares (Fig. 55). Quando tôdas as faces são triângulos equiláteros iguais chama-se *tetraedro regular*.

23. Num tetraedro há 4 faces, 4 vértices e 6 arestas. O tetraedro não tem diagonais.

24. Os poliedros podem ser *regulares* e *irregulares*.

25 e 26. *Poliedro regular* é aquêle cujas faces e ângulos são iguais. *Poliedro irregular* é aquêle cujas faces e ângulos não são todos iguais.

27. Há apenas 5 poliedros que podem ser *regulares*: *tetraedro*, *octaedro* e *icosaedro* (limitados por triângulos equiláteros); *hexaedro regular* ou *cubo* (limitado por quadrados); e *dodecaedro* (limitado por pentágonos regulares).

28. Os principais poliedros são os *prismas* e as *pirâmides*, nos quais todos os outros podem ser decompostos.

29. *Prisma* é o poliedro que tem duas faces formadas por polígonos iguais e paralelos e as outras faces formadas por paralelogramos (Fig. 56).

30 a 33. As duas faces iguais e paralelas são as *bases*; a distância entre elas é a *altura*. Os paralelogramos laterais formam a *superfície lateral*; a soma das superfícies das bases com a superfície lateral é a *superfície total*.

34. Os prismas podem ser *retos* e *obliquos*.

35. *Prisma reto* é o que tem as arestas laterais perpendiculares às bases, isto é, aquêle cujas faces laterais são retângulos.

36. *Prisma obliquo* é o que não tem as arestas laterais perpendiculares às bases, isto é, aquêle cujas faces laterais não são retângulos.

37. *Tronco de prisma* ou *prisma truncado* é uma porção de prisma compreendida entre uma base e uma secção não paralela à base (Fig. 57).

Se a secção fosse paralela à base, não ficaria um tronco de prisma, mas sim um prisma menor.

38. Os prismas classificam-se, de acôrdo com os polígonos das bases, em: *triangulares* (se as bases forem triângulos), *quadrangulares* (se as bases forem quadriláteros), *pentagonais* (se as bases forem pentágonos), *hexagonais*, etc.

39. Os prismas, cujas bases são paralelogramos, chamam-se *paralelepípedos*.

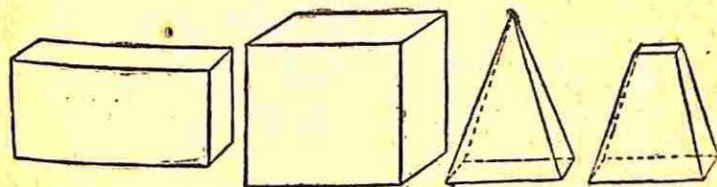


Fig. 58
Paralelepípedo

Fig. 59
Cubo

Fig. 60
Pirâmide

Fig. 61
Tronco de pirâmide

40. *Paralelepípedo* é, pois, o poliedro limitado por 6 paralelogramos, que são paralelos 2 a 2 (Fig. 58).

41 a 43. Os paralelepípedos podem ser *retos* e *obliquos*; são *retos* quando as arestas forem perpendiculares às bases, e *obliquos* quando as arestas forem oblíquas às bases.

44. Os paralelepípedos retos, cujas bases são retângulos, chamam-se *paralelepípedos retângulos*.

45. As 3 arestas que concorrem num mesmo vértice do paralelepípedo retângulo são as *dimensões* do paralelepípedo: *comprimento*, *largura* e *altura*.

46. As pedras usadas geralmente no calçamento das ruas têm a forma de paralelepípedos.

47. O mais importante dos paralelepípedos retângulos é o *cubo* ou *hexaedro regular*.

48. *Cubo* é o poliedro limitado por 6 faces quadradas iguais (Fig. 59).

49 a 51. Num cubo há 6 faces, 12 arestas, 8 vértices e 4 diagonais iguais, que se cortam num mesmo ponto.

52. *Pirâmide* é o poliedro limitado por um polígono qualquer e por triângulos que têm um vértice comum. (Fig. 60).

53 e 54. O polígono é a base da pirâmide. Os triângulos são as faces laterais.

55 e 56. O vértice comum a todas as faces laterais é o vértice da pirâmide. A perpendicular tirada do vértice à base é a altura da pirâmide.

57. A mais simples de todas as pirâmides é o *tetraedro*, que é uma pirâmide triangular.

58 e 59. As faces laterais somadas dão a *superfície lateral*; a superfície da base e a superfície lateral somadas dão a *superfície total*.

60 e 61. *Pirâmide regular* é a que tem por base um polígono regular e cuja altura cai no centro da base. Nas pirâmides regulares, as faces são triângulos isósceles iguais.

62 e 63. *Tronco de pirâmide* ou *pirâmide truncada* é a porção de pirâmide compreendida entre a base e uma secção qualquer, paralela ou oblíqua à base (Figura 61). No 1.º caso diz-se que a pirâmide é truncada paralelamente à base; no 2.º caso diz-se que a pirâmide é truncada obliquamente à base.

64. As pirâmides classificam-se, de acôrdo com os polígonos das bases, em *triangulares*, *quadrangulares*, *pentagonais*, *hexagonais*, etc.

1. Que são poliedros? — 2 a 5. Que são faces do poliedro? — arestas? — vértices? — diagonais? — 6. Que é ângulo diedro? — 7. Que é ângulo triedro? — 8. Que é ângulo poliédrico? — 9. Quantos âng. diedros há num ângulo triedro? — 10. E num âng. poliédrico? — 11. Dê ex. de âng. diedros e triedros. — 12. Como se designa um âng. diedro? — 13. Como podem ser os âng. diedros? — 14 a 16. Quando é que o âng. diedro é agudo? — reto? — obtuso? — 17. Quando é que dois planos formam âng. diedros adjacentes? — 18. Que são âng. diedros adjacentes? — 19. Como se designam os poliedros? — 20. Diga os poliedros que têm nomes especiais. — 21. Que é *tetraedro*? — 22. Que é *tetraedro regular*? — 23. Quantas faces, vértices, arestas e diagonais tem o *tetraedro*? — 24. Como podem ser os poliedros? — 25. Que é poliedro regular? — 26. Que é poliedro irregular? — 27. Quais os poliedros que

- podem ser regulares? — 28. Quais são os principais poliedros? — 29. Que é *prisma*? — 30. Que são bases do prisma? — 31. Que é altura do prisma? — 32. Que é sup. lateral? — 33. Que é sup. total? — 34. Como se podem ser os prismas? — 35. Que é *prisma reto*? — 36. Que é *prisma oblíquo*? — 37. Que é tronco de prisma ou prisma truncado? — 38. Como se classificam os prismas? Dê ex. — 39. Como se chamam os prismas cujas bases são paralelogramos? — 40. Que é *paralelepípedo*? — 41. Como podem ser os paralelepípedos? — 42 e 43. Quando são retos? — Quando são oblíquos? — 44. Que são paralelepípedos retângulos? — 45. Quais são as dimensões do paralelepípedo retângulo? — 46. Que forma têm geralmente as pedras usadas no calçamento das ruas? — 47. Qual é o mais importante dos paralelepípedos retângulos? — 48. Que é *cubo*? — 49. Quantas faces, arestas, vértices e diagonais tem o cubo? — 50 e 51. Qual é a maior das faces? — Qual a maior das arestas? — 52. Que é *pirâmide*? — 53. Que é base da pirâmide? — 54. Que são faces laterais da pirâmide? — 55. Que é vértice da pirâmide? — 56. Que é altura da pirâmide? — 57. Qual é a mais simples das pirâmides? — 58. Que é superfície lateral da pirâmide? — 59. Como se obtém a superfície total? — 60. Que é pirâmide regular? — 61. Como são as faces nas pirâmides regulares? — 62. Que é tronco de pirâmide ou pirâmide truncada? — 63. Como pode ser essa secção? — 64. Como se classificam as pirâmides?

10.º PONTO — Principais corpos redondos

1 e 2. Os principais corpos redondos são os seguintes: *esfera*, *ovóide*, *elipsóide*, *cone* e *cilindro*. Dá-se a estes corpos o nome de *sólidos de revolução* por serem gerados ou produzidos por figuras planas girando em torno de uma reta, chamada eixo de revolução.

3. *Esfera* ou globo é o sólido gerado pela revolução de um semicírculo em torno de um diâmetro fixo.

4 a 9. O diâmetro fixo representa o *eixo da esfera*, cujas extremidades são chamadas *polos da esfera*. O centro do semicírculo gerador da esfera é também o centro da esfera. *Raio da esfera* é a reta que liga um ponto qualquer da superfície esférica ao centro. *Diâmetro da esfera* é a reta que liga dois pontos da superfície esférica, passando pelo centro. Numa esfera pode-se tirar uma infinidade de raios e diâmetros. Os raios e diâmetros da esfera são iguais, respectivamente, aos raios e diâmetros do semicírculo gerador.

10. Metade de uma esfera chama-se *hemisfério*.

11. A esfera também pode ser definida assim: o sólido limitado por uma superfície curva, cujos pontos são todos equidistantes de um ponto interior chamado centro da esfera.

12. **Ovóide** é o sólido gerado pela revolução de uma superfície semi-oval em torno do seu eixo grande.

13. **Elipsóide** é o sólido gerado pela revolução de uma elipse em torno de um dos seus eixos.

14. **Cone reto de base circular** é o corpo produzido pela revolução de um triângulo retângulo em volta de um dos catetos (Fig. 62).

Dizemos cone reto de base circular porque também há cone de base não circular, elíptica, por exemplo.

15 a 18. O lado fixo do triângulo gerador do cone é o *eixo* ou *altura do cone*. A hipotenusa, cujo movimento gera a superfície lateral do cone, é a *geratriz*, ou *apótema* do cone. O círculo descrito pelo outro cateto é a *base do cone*.

19. Uma superfície cônica planificada tem a forma de um setor circular, cujo raio é a *geratriz* do cone e o arco a circunferência da base do cone.

20. Os cones podem ser *retos* ou *obliquos*.

21 e 22. **Cone reto** é aquêle cuja altura cai no centro da base. **Cone oblíquo** é aquêle cuja altura não cai no centro da base.

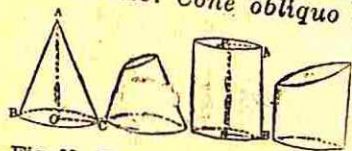


Fig. 62 Cone
Fig. 63 Tronco de cone
Fig. 64 Cilindro
Fig. 65 Tronco de cilindro

23. **Tronco de cone** ou **cone truncado** é a porção de cone compreendida entre a base e uma secção qualquer paralela ou oblíqua à base (Figura 63).

24. O tronco de cone pode ser, portanto, de bases paralelas ou não.
25. Os funis têm forma cônica; os dedais têm a forma de um cone truncado.

26. **Cilindro reto de base circular** ou **cilindro circular reto** é o corpo produzido pela revolução de um retângulo em torno de um dos lados (Fig. 64).

27 a 29. O lado fixo do retângulo gerador do cilindro é o *eixo* ou *altura do cilindro*. O lado paralelo ao fixo, cujo movimento descreve a superfície lateral do cilindro, é a *geratriz do cilindro*. Os círculos descritos pelos outros dois lados são as *bases do cilindro*.

No corpo vulgarmente chamado cilindro, a *altura* é a menor distância entre as duas bases; o *eixo* é a reta que une os centros das duas bases.

30. Os cilindros também podem ser *retos* e *obliquos*.

31 e 32. **Cilindro reto** é aquêle cuja geratriz é perpendicular às bases. **Cilindro oblíquo** é aquêle cuja geratriz é oblíqua às bases.

33. **Tronco de cilindro** ou **cilindro truncado** é a porção de cilindro compreendida entre uma base e uma secção não paralela à base (Fig. 65).

34. Os lápis, os canos, os poços, etc. têm geralmente a forma cilíndrica.

35. A *esfera*, o *ovóide* e o *elipsóide* são limitados por uma superfície curva. O *cone* é limitado por uma superfície curva e por uma superfície plana. O *cilindro* é limitado por uma superfície curva e por duas superfícies planas.

1. Quais são os principais corpos redondos? — 2. Que nome se dá a estes corpos e por quê? — 3. Que é *esfera* ou *globo*? — 4 a 9. Que é *eixo* da esfera? — Polos da esfera? — Raio da esfera? — Diâmetro da esfera? — Quantos raios se podem tirar numa esfera? — Quantos diâmetros? — 10. Que é *hemisfério*? — 11. Dê outra definição de esfera. — 12. Que é *ovóide*? — 13. Que é *elipsóide*? — 14. Que é *cone* reto de base circular? — 15 a 18. Que é *eixo* ou *altura* do cone? — Que é *geratriz* do cone? — Que outro nome tem? — Que é *base* do cone? — 19. Que forma tem uma superfície cônica planificada? — 20. Como podem ser os cones? — 21 e 22. Que é *cone* reto? — Que é *cone* oblíquo? — 23. Que é *tronco* de cone ou *cone* truncado? — 24. Como podem ser, então, os troncos de cone? — 25. Dê exemplos de objetos de forma cônica? — 26. Que é *cilindro*? — 27 a 29. Que é *eixo* ou *altura* do cilindro? — Que é *geratriz* do cilindro? — Que são *bases* do cilindro? — 30. Como podem ser os cilindros? — 31 e 32. Que é *cilindro* reto? — Que é *cilindro* oblíquo? — 23. Que é *tronco* de cilindro ou *cilindro* truncado? — 34. Dê ex. de objetos de forma cilíndrica. — 35. Dizer como é limitado cada um dos corpos redondos.

DESENHO GEOMÉTRICO

Convém que os Srs. Professores exijam continuamente dos alunos a representação das figuras geométricas, tanto nas aulas como nas sabatinas.

ÍNDICE

Aritmética

	PÁGS.		PÁGS.
1. Quantidade. Unidade. Número	3	Fração de fração — Frações compostas .	43
2. Algarismos. Numeração	6	13. Decimais. Operações sobre frações decimais	43
3. Operações sobre inteiros. Provas	13	14. Conversão das ordinárias em decimais e vice-versa. Dízimas periódicas	50
4. Divisibilidade por 10, 2, 5, 9, 3 e 11	21	15. Exercícios sobre expressões em que entram ordinárias e decimais	54
Divisibilidade por 1, 4, 6, 7, 8, 12, 14, 15, 20, 21, 25, 100, 125	22	16. Sistema métrico decimal. Unidades principais. Múltiplos e submúltiplos. Metro, sua definição	55
5. Números primos. Regras	23	Sistema legal brasileiro de unidades de medida. Sistema monetário brasileiro 57 a 67	67
6. Número múltiplo. Decomposição de um número em seus fatores primos	27	Medidas agrárias, 61; Medidas para lenha, 63; O franco	67
7. Máximo divisor comum	28	17. Problemas sobre as 4 operações e sobre a avaliação de comprimento, superfície, volume, capacidade e peso	68
8. Mínimo múltiplo comum	30	Medidas inglesas — Números complexos.	71
9. Fração ordinária; número misto	32		
10. Simplificação de frações e redução ao mesmo denominador. Comparação de frações	34		
11. Extração de inteiros. Conversão de um inteiro em fração	37		
12. As 4 operações sobre frações ordinárias ..	38		

Geometria

Definições preliminares	73	8. Elipse, oval, parábola, hipérbole, espiral, hélice	90
1. Linhas	74	9. Poliedros	94
2. Ângulos	77	10. Principais corpos redondos	99
3. Triângulos	79		
4. Quadriláteros	82	Desenho Geométrico	101
5. Polígonos em geral ..	84		
6 e 7. Circunferência e círculo	86		

ÍNDICE ALFABÉTICO

A	Espaço, 73.
Adição ou soma, 13.	Espiral, 94.
— de frações decimais, 47.	Estéreo, 63.
— de " ordinárias, 38.	Expressões numéricas, 54.
Algarismos, 6.	F
Alqueire, 61.	Fatoração, 28.
Ângulo, 77.	Fatores de um número, 28.
— central, 88.	Fatores do produto, 14.
— inscrito, 88.	Flecha, 87.
— diedro, 95.	Focos da elipse, 90.
Arco, 87.	Focos da parábola, 92.
Are, 61.	Fração, 5 e 32.
Áreas e volumes (regras para achar), 69.	— decimal, 45.
Arestas, 94.	— ordinária, 32 e seg.
Aritmética, 3.	— de fração, 43.
Assíntotas, 93.	— composta, 43.
B	Franco, 67.
Bissetriz, 77.	G
C	Geometria, 73.
Capacidade, 63.	Gramma, 65.
Catetos, 80.	Grandeza, 3.
Cilindro, 100.	Grau, 77.
Círculo, 86.	H
Circunferência, 86.	Hectare, 61.
Cone, 100.	Hélice, 94.
Conversão de fr. ordinárias em decimais e vice-versa, 50.	Heptaedro, 96.
Corpo, 73.	Hexaedro, 96.
Crivo de Eratóstenes, 24.	Hipérbole, 92.
Cruzeiro, 10 e 67.	Hipotenusa, 80.
D	I
Decaedro, 96.	Icosaedro, 96.
Decimais, 45.	L
Diagonal, 82 e 94.	Leitura de números, 10.
Diâmetro, 87.	— de quantias, 10.
— da elipse, 90.	Limbo, 79.
— da parábola, 92.	Linhas, 74.
Divisão, 15.	Litro, 63.
Divisibilidade, 21.	Losango ou rombo, 83.
Dízimas, 51.	M
Dodecaedro, 85.	Máximo divisor comum, 28.
E	Mediana, 81.
Elxos da oval, 91.	Medidas agrárias, 61.
— da hipérbole, 92.	— de capacidade, 63.
— da elipse, 90.	— de comprimento, 57.
Elipse, 90.	— de peso, 65.
Elipsóide, 100.	— de superfície, 59.
Eratóstenes, 24.	— de volume, 61.
Esfera, 99.	— efetivas, 56.
	— fictícias, 56.
	— inglesas, 71.
	— itinerárias, 58.

INDICE ALFABÉTICO

INDICE

Aritmética

	PÁGS.		PÁGS.
1. Quantidade. Unidade. Número	3	Fração de fração — Frações compostas ..	43
2. Algarismos. Numeração	6	13. Decimais. Operações sobre frações decimais	45
3. Operações sobre inteiros. Provas	13	14. Conversão das ordinárias em decimais e vice-versa. Dízimas periódicas	50
4. Divisibilidade por 10, 2, 5, 9, 3 e 11	21	15. Exercícios sobre expressões em que entram ordinárias e decimais	54
5. Divisibilidade por 1, 4, 6, 7, 8, 12, 14, 15, 20, 21, 25, 100, 125	22	16. Sistema métrico decimal. Unidades principais. Múltiplos e submúltiplos. Metro, sua definição	55
6. Números primos. Regras	23	Sistema legal brasileiro de unidades de medida. Sistema monetário brasileiro 57 a	67
7. Número múltiplo. Decomposição de um número em seus fatores primos	27	Medidas agrárias, 61; Medidas para lenha, 63; O franco	67
8. Máximo divisor comum	28	17. Problemas sobre as 4 operações e sobre a avaliação de comprimento, superfície, volume, capacidade e peso	68
9. Mínimo múltiplo comum	30	Medidas inglesas — Números complexos.	71
10. Fração ordinária; número misto	32		
11. Simplificação de frações e redução ao mesmo denominador. Comparação de frações	34		
12. Extração de inteiros. Conversão de um inteiro em fração	37		
13. As 4 operações sobre frações ordinárias ..	38		

Geometria

Definições preliminares	73	8. Elipse, oval, parábola, hipérbole, espiral, hélice	90
1. Linhas	74	9. Poliedros	94
2. Ângulos	77	10. Principais corpos redondos	99
3. Triângulos	79	Desenho Geométrico	101
4. Quadriláteros	82		
5. Polígonos em geral ..	84		
6 e 7. Circunferência e círculo	86		

A

Adição ou soma, 13.
 — de frações decimais, 47.
 — de " ordinárias, 38.
 Algarismos, 6.
 Alqueire, 61.
 Ângulo, 77.
 — central, 88.
 — inscrito, 88.
 — diedro, 95.
 Arco, 87.
 Are, 61.
 Áreas e volumes (regras para achar), 69.
 Arestas, 94.
 Aritmética, 3.
 Assíntotas, 93.

B

Bissetriz, 77.

C

Capacidade, 63.
 Catetos, 80.
 Cilindro, 100.
 Círculo, 86.
 Circunferência, 86.
 Cone, 100.
 Conversão de fr. ordinárias em decimais e vice-versa, 50.
 Corpo, 73.
 Crivo de Eratóstenes, 24.
 Cruzeiro, 10 e 67.

D

Decaedro, 96.
 Decimais, 45.
 Diagonal, 82 e 94.
 Diâmetro, 87.
 — da elipse, 90.
 — da parábola, 92.
 Divisão, 15.
 Divisibilidade, 21.
 Dízimas, 51.
 Dodecaedro, 85.

E

Eixos da oval, 91.
 — da hipérbole, 92.
 — da elipse, 90.
 Elipse, 90.
 Elipsóide, 100.
 Eratóstenes, 24.
 Esfera, 99.

Espaço, 73.
 Espiral, 94.
 Estéreo, 63.
 Expressões numéricas, 54.

F

Fatoração, 28.
 Fatores de um número, 28.
 Fatores do produto, 14.
 Flecha, 87.
 Focos da elipse, 90.
 Focos da parábola, 92.
 Fração, 5 e 32.
 — decimal, 45.
 — ordinária, 32 e seg.
 — de fração, 43.
 — composta, 43.
 Franco, 67.

G

Geometria, 73.
 Grama, 65.
 Grandeza, 3.
 Grau, 77.

H

Hectare, 61.
 Hélice, 94.
 Heptaedro, 96.
 Hexaedro, 96.
 Hipérbole, 92.
 Hipotenusa, 80.

I

Icosaedro, 96.

L

Leitura de números, 10.
 — de quantias, 10.
 Limbo, 79.
 Linhas, 74.
 Litro, 63.
 Losango ou rombo, 83.

M

Máximo divisor comum, 28.
 Mediana, 81.
 Medidas agrárias, 61.
 — de capacidade, 63.
 — de comprimento, 57.
 — de peso, 65.
 — de superfície, 59.
 — de volume, 61.
 — efetivas, 56.
 — fictícias, 56.
 — inglesas, 71.
 — itinerárias, 58.

Metro, 57.
— cúbico, 61.
— quadrado, 59.
Micon, 58.
Mínimo múltiplo comum, 30.
Multiplicação, 14.
— cancelada, 41.
— de frações, 40.
— de frações decimais, 48.
Múltiplo, 5 e 27.
Múltiplos e submúltiplos, 56.

N

Numeração, 7 a 12.
Número, 4.
— quebrado ou fração, 5.
— misto, 5.
Números múltiplos, 5 e 27.
— primos, 5 e 23.
— " entre si, 5 e 30.
— decimais, 45.

O

Octaedro, 96.
Operações sobre inteiros, 13.
— frações decimais, 45.
— frações ordinárias, 38.
Oval, 91.
Ovóide, 100.

P

Parábola, 92.
Paralelepipedo, 97.
Paralelogramo, 83.
Parâmetro, 92 e 93.
Pentadecaedro, 96.
Pentaedro, 96.
Perímetro, 85.
Pirâmide, 98.
Pitágoras, 15.
Poliedros, 94. . .
Polígono, 84.
— circunscrito, 86.
— inscrito, 86.
Ponto, 74.
Potenciação, 20.
Prisma, 96.
Proças das 4 operações, 17.

Q

Quadrado, 83.
Quadrilátero, 83.
Quantidade, 3.
Quilate, 65.

Quilograma, 65.
Quociente, 15.

R

Raio, 87.
Raios vectores, 90, 92, 93.
Relação entre medidas de peso, capacidade e volume, 66.
Retângulo, 83.
Rombo ou losango, 83.

S

Secante, 88.
Setor circular, 88.
Segmento circular, 88.
Simplificação de frações, 34.
Sinais aritméticos, 13.
Sinais de agregação, 54.
Sistema métrico decimal, 55.
Sistema legal brasileiro de unidades de medida, 57.
Soma ou adição, 13.
Submúltiplo, 56.
Subtração, 13.
Superfície, 73.

T

Tábua de Pitágoras, 15.
Tangente, 87.
Tetraedro, 96.
Transferidor, 78.
Trapézio, 83.
Triângulos, 79.
Tronco de cilindro, 101.
— de cone, 100.
— de pirâmide, 98.

U

Unidade, 4.
Unidades de comprimento, 57.
— de superfície, 59.
— de volume, 61.
— monetárias, 12 e 67.

V

Vértice, 77, 80, 85, 94.
— da elipse, 90.
— da hipérbole, 93.
— da parábola, 92.
— do ângulo, 77.
Volume, 73.
Volumes e áreas (regras para achar), 69.

Z

Zona circular, 88.

Extrato do Catálogo da Livraria Francisco Alves

GASPAR DE FREITAS

Ciências Físicas e Naturais

Geografia e História do Brasil

Gramática Portuguesa

Aritmética, Geometria e Desenho

Instrução Moral e Cívica, com a Constituição de 1946

Exercícios de Gramática e Modelos de Análise, com Noções de Redação

JOÃO RIBEIRO e RAJA GABAGLIA

Exame de Admissão para os Ginásios (Português, Aritmética, Geografia e História do Brasil)

MÁRIO DA VEIGA CABRAL

A Geografia e a História no Exame de Admissão

MÁXIMO DE MOURA SANTOS

Curso de Admissão (Português, Aritmética, Geografia e História do Brasil)

ANTÔNIO TRAJANO

Aritmética Elementar

" Progressiva

CECIL THIRÉ

Aritmética para Admissão

CECIL THIRÉ e J. B. MELO E SOUSA

Manual de Admissão (Aritmética, Português, Geografia e História do Brasil)

NELSON COSTA

Leitura e Exercícios para Admissão

O. BILAC e M. BONFIM

Livro de Leitura para o curso de Admissão

Remeteremos nosso catálogo gratis, a quem o pedir