MANOEL JAIRO BEZERRA

Questões de Exames de Admissão

às Escolas Normais

CARMELA DUTRA e INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

e ao primeiro ano do

COLÉGIO NAVAL, ESCOLA PREPARATÓRIA DE CADETES

e

ESCOLA PREPARATÓRIA DE CADETES DO AR

COMPANHIA EDITORA NACIONAL
SÃO PAULO

150

9110
6

332

QUESTÕES DE EXAMES DE ADMISSÃO

João Baptista C. Gonçalves

Exemplar **Nº** 0253

1956

Obra executada nas oficinas da
São Paulo Editora S/A. — Rua Barão de Ladário, 226
Fones: 9-9087 e 9-9932 — São Paulo, Brasil.

MANOEL JAIRO BEZERRA

Licenciado em Matemática pela Faculdade Nacional de Filosofia. Prof. de Matemática do Colégio Metropolitano. Ex-professor do Colégio Naval. Ex-Prof. do Curso de Técnica de Ensino do Exército. Aprovado no concurso para prof. da Escola de Aeronáutica. Prof. do Colégio Pedro II. Prof. da Prefeitura do Distrito Federal

Questões de Exames de Admissão

às Escolas Normais
Carmela Dutra e Instituto de Educação
e ao primeiro ano do
Colégio Naval, Escola Preparatória de Cadetes
e
Escola Preparatória de Cadetes do Ar

2.ª EDIÇÃO
(Melhorada)

COMPANHIA EDITORA NACIONAL
SÃO PAULO

DO MESMO AUTOR

Curso de Matemática, 1.º ano colegial.
Curso de Matemática, 2.º ano colegial.
Curso de Matemática, 3.º ano colegial.

✦

EDIÇÕES DA
COMPANHIA EDITORA NACIONAL
Rua dos Gusmões, 639 — SÃO PAULO

ÍNDICE

SEGUNDA PARTE

Questões das provas de admissão ao Colégio Naval e ao Normal da Escola Carmela Dutra e do Instituto de Educação, desde o primeiro exame de cada uma dessas escolas até 1953, inclusive, e tôdas as questões resolvidas.

TERCEIRA PARTE

Questões dos exames de admissão às Escolas Normais e às Escolas Preparatórias Militares, realizados em 1954 e 1955, sem resolução porém com as respectivas respostas.

INTRODUÇÃO

Êste livro de exercícios contém tôdas as questões, com suas soluções, dos exames de Admissão aos cursos normais da *Escola Carmela Dutra* e *Instituto de Educação*, desde o primeiro exame até 1953, inclusive. Contém, também, tôdas as questões, com soluções, dos exames já realizados para o primeiro ano do *Colégio Naval* (1951/52/53).

É nosso objetivo ajudar as alunas e alunos que se destinam a essas escolas, dando-lhes, não só oportunidade de resolver, ou, em último caso, aprender a resolução de um grande número de questões do programa, como, também, a possibilidade de ambientá-los com essas provas, e de capacitá-los a avaliar a dificuldade dessas questões em seu conjunto.

Acreditamos, outrossim, que, com o nosso trabalho, estejamos prestando uma colaboração valiosa aos professôres dos Cursos de Preparação para essas escolas, aos mestres que preparam, particularmente, candidatos a êsses estabelecimentos de ensino, e mesmo aos professôres do Curso Ginasial, que terão, neste livro, uma ótima fonte de consulta para exercícios.

Rio de Janeiro — 1956.

NOTA

Nesta 2.ª edição, acrescentamos, a fim de satisfazer uma sugestão de vários professôres, 1 173 exercícios, não resolvidos, 602 de álgebra e 571 de geometria, dados em exames ou não, porém, todos, dentro dos Programas das Escolas Preparatórias Militares e Escolas Normais, e todos com respostas. Êsses exercícios estão apresentados por assuntos, o que poderá tornar o livro mais útil ao Curso Ginasial.

Colocamos, também, na 3.ª parte de nosso trabalho, as questões de 1954 da E. P. C. do Exército e as de 1954 e 1955 do Colégio Naval, do Instituto de Educação e da Escola Carmela Dutra, tôdas sem suas soluções porém com suas respostas.

PRIMEIRA PARTE

QUESTÕES SELECIONADAS, POR ASSUNTOS, PARA RESOLVER

1) ÁLGEBRA

NÚMEROS RELATIVOS

Efetue :

1) $(-2)^3 - (-3)^2 - (-5)^0 + (-2)^1$

2) $(-2)^3 - (-1)^2 + (-3)^2 - (2)^{-2}$

3) $\left(\frac{2}{5}\right)^0 \times (0{,}01)^2 \times (0{,}25)^{1/2}$ (Col. Pedro II - 2.ª Série Ginasial - P. Parcial - 1953)

4) $-5^0 + 3^0 - (-4)^0$ (Col. Pedro II - 2.ª Série Ginasial - P. Parcial - 1953)

5) $(-2)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} : (3)^{-2} + [(-2)^2]^0$

6) $4^{1/2} - (-1)^{10} - (-1)^{17} + 25^{0,5}$

7) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} - \left(-\frac{1}{8}\right)^{0,33\ldots} - \left(+4\right)^{-\frac{1}{2}}$

8) $\dfrac{(-3)^{-5} : [(-\sqrt{3})^4]^{\frac{1}{2}}}{(-3)^{-1} \cdot (-3)^{-3}}$

9) Calcular o quociente do menor dos números -20 e $+8$ por $(-2)^2$.

10) Calcule o quociente do menor,em valor absoluto, dos números $-0{,}5$ e -2, pelo dôbro de $(-0{,}1)^{-1}$.

11) Qual o produto do maior dos números $+2$ e -5 pelo valor absoluto de (-8).

12) Calcule o produto do resultado de $[(-3)^{-1}]^2$ pelo simétrico da diferença entre -9 e o cubo de -3.

13) Calcule o quociente da soma dos números -5, $+8$ e -3 pelo simétrico da diferença entre -2 e -5.

14) Calcule o dôbro do produto de $(-2)^{-1}$ pela metade do simétrico de $(-8)^{\frac{1}{3}}$.

15) Qual a diferença entre o quociente de dois números simétricos e a soma dêsses dois números?

16) Qual a diferença entre o produto de dois números inversos e o quociente de dois números simétricos?

17) Quanto deve somar a $(-2)^{-1}$ para obter o menor número inteiro positivo?

18) Quanto devo subtrair de $\left(\frac{3}{5}\right)^{-1}$ para obter $\left(\frac{5}{3}\right)^{0}$?

19) Por quanto devo multiplicar $\left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{1}{3}}$ para obter $25^{\frac{1}{2}}$?

20) Por quanto devo dividir $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}$ para obter $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$?

21) Qual a diferença entre o resultado de $(-2)^3 - (-8) : (-2)$ e o produto $(-2)(-1)(+1)(-2)(-1)(+2)(-2)$?

22) Qual o produto do resultado de $(-5)^{20} : (+5)^{17}$ pelo inverso do simétrico resultado de $(-5)^{18} : (-5)^{15}$?

23) Um produto de 16 números relativos é igual a $(-1\,854)$. Qual o produto dos 16 números relativos simétricos, respectivamente, dos fatôres do primeiro produto?

24) Qual a soma do produto de sete números relativos com o produto de sete outros números relativos simétricos, respectivamente, dos primeiros?

25) Quantos anos viveu Alexandre, O Grande, nascido em -356 e morto em -323?

26) Escreva, com números relativos, um acontecimento ocorrido 128 anos A. C., sendo as origens, respectivamente, o início da era cristã e o ano do descobrimento do Brasil.

27) Um termômetro marcava 6°, pela manhã, mas, à tarde, a temperatura baixou para $-3°$. Qual a variação de temperatura?

RESPOSTAS:

1) -20	10) 0,025	19) 1
2) $-0,25$	11) ~~1~~ 16	20) 4
3) 0,00005	12) -2	21) 4
4) -1 +1	13) 0	22) 1
5) -30 → 31	14) -1	23) $-1\,854$
6) 7	15) -1	24) 0
7) -2	16) 2	25) 33
8) $-1/9$	17) 1,5	26) -128 e $-1\,628$
9) -5	18) 2/3	27) 9°

EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

Valor numérico — Classificação — Operações

Achar o valor numérico de:

1) $\frac{a}{6^x} + \frac{b^x}{2} + a^0$ para $a=-4$, $b=+3$ e $x=0$
(Col. Pedro II - 2.ª Série Ginasial - P. Parcial - 1953)

2) $\frac{a-3}{2+b}$ para $a=3$ e $b=1$ (E. P. C. do Ar - Concurso 1951)

3) $ab^3-(-b)$ para $a=2^{-1}$ e $b=-2$

4) $ab^3-a^3b-a^0-\frac{3b}{2}$ para $a=-2$ e $b=-\frac{1}{2}$

5) $(a+b)-(a-b)+ab^3-\frac{a^2}{b}$ para $a=b=-2$

6) $\frac{a^2b^3-a^{-3}}{b^{-1}}-(-b)$ para $a=-1$ e $b=-2$

7) $\frac{3}{2}a^2b^{-1}-\frac{1}{2}a^3b^0+(-3a^2)^2$ para $a=-2$ e $b=3$

8) $\dfrac{ab-a^{-2}}{\frac{2}{3}ab^{-1}}-(-a)(-b)-(-b)^0-(-38a)$ para $a=-\frac{1}{2}$ e $b=-2$

9) $\dfrac{ax^2+(2a-x)(x-1)}{3ax-\dfrac{x+1}{x-1}}$ para $a=2x=-1$

(E. Aeronáutica - 1946)

10) $B-[A+(B-C)-(A-B)]$

para $A=15x^5-x^3+17$, $B=x-3x^2+7$ e $C=x-3x^2+8$

11) $5A-[B-6(B-A)]$ para $A=5x^2+10x-16$ e $B=x^2+2x-3$

12) Calcular o valor numérico do polinômio:

$P(x,y)=-x^2+3x-5xy+-\frac{1}{3}xy^2$ para $x=-1$ e $y=-\frac{1}{2}$

(E. P. C. - Exército - Janeiro, 1953)

13) Reduza os têrmos semelhantes e calcule o valor numérico de $x^3+x^2y+2xy^2-y^3-(3x^2y+4xy^2+x^3-7y^3)$

para $x=-1$ e $y=2$

(Col. Pedro II - 2.ª Série Ginasial - P. Parcial - 1954)

14) Calcular o valor numérico para $x=1$ e $y=-1$ e $z=2$, do polinômio que se deve somar a $5x-6y+3z$ para se obter $11x+4y-8z$.

(Col. Pedro II - 2.ª Série Ginasial - P. Parcial - 1954)

15) Se o valor numérico da expressão $5x^2-2y^2$ é 27 e x e y são iguais e negativos, qual será o valor de x e y?

16) Calcular c para que o valor numérico de $-k+\sqrt{k^2-c}$ seja igual a 5, para $k=-1$.

17) Calcular o valor de a para que o valor numérico de a^2+a+1 seja o mesmo que o valor de a^2.

18) Qual o valor de m para que a expressão m^4+m^2+1955 tenha o menor valor numérico?

Classificar as expressões:

19) x^3+2x^2-3x-1

20) $x^2-5x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}$

21) $2x-x^{-2}+1$

22) $\sqrt{x}+\frac{1}{x}+x$

23) $\frac{x^3}{2}+\sqrt{2}\,.\,x+2^{-1}$

24) x^2+y^2+3xy

25) $x^2y+x^3+xy^2$

26) $3x^3+x^2y+5xy^2-y^3$

27) Calcular m para que o polinômio, em x e y, $m\sqrt{x}+y+x-1$ seja racional.

28) Calcular m e p para que o polinômio, em x, mx^3+px^2+x-2 seja do 2.º grau.

29) Calcular m e p para que o polinômio, em x, mx^3+x^2+px-5 seja do 2.º grau.

30) Calcular m e p para que o polinômio, em x e y, $(m-1)x^3+x^2+xy+(p-2)y^2$ seja homogêneo completo.

Reduza os têrmos semelhantes de:

31) $5a+3b-[5a-b-(a-4b)]$

32) $5x^2y-3xy^2-\{x^2y^2-[2xy^2-(3x^2y-x^2y^2)]\}$

33) $3x^2-\frac{3x}{m}-4y-5x^2+xm^{-1}$

34) $5a^2b+3ab^2-4a^2b-\frac{3ab^2}{2}+\frac{ab^2}{2}-2a^2b$

35) Da soma de $7a+5b-9c$ e $13b-12c$ subtrair o polinômio $5a-7b-3c$.

(Col. Pedro II - 2.ª Série Ginasial - P. Parcial - 1954)

Efetuar:

36) $3(x-2)+x-x(2-x)$

37) $x^3+x^2-x^5-2x^2 \,.\, (x-x^3)$

38) $2-2(a-1)+a^2+a^3-a^5-(a-1)$

39) $(2x+3)(3-2x)+2x(2x+3)-2(2x-3)$

40) $(x+2)(x-4)+2-2(x-1)-x(x-4)$

41) $(x^{2m-1} \,.\, y^{1/2} \,.\, z^{-2})(x^{1-2m} \,.\, y^{-2} \,.\, z^3)$

42) $(-4x^2y^{5/2}) \,.\, \left(\frac{x^{-1}y^{-\frac{1}{2}}}{-2}\right)$

43) Efetuar o produto dando a resposta ordenada segundo as potências decrescentes de x: $(x-x^2+x^3-2)(2x^2-1-5x)$

44) Efetuar: $a^{2/3} \,.\, b^{-1} \,.\, c^{1/2} \,.\, b^{-1/3} \,.\, c^{-1} \,.\, a^{-1/6} \,.\, b^2 \,.\, c^{3/2}$

45) Calcular $2x-3\,[x-2(x-y-1)]+6(y+1)+y$ para $x=a^2-a-2$ e $y=10+5a-5a^2$

46) Qual o monômio que devo somar a $2x^3-3x^2+x-1$ para obter um trinômio do 2.º grau?

47) Quanto devo subtrair de $(-2x^{\frac{1}{2}}y^3)^2$ para obter xy^6-x^6y?

48) O produto $(2x^2y^{-3})(3x^my)(-xy^3)$ é do 2.º grau. Qual o valor de m?

49) Calcule o maior valor de m para que o produto $(2xy^{1/2})(-3x^2y^m)$ seja racional fracionário.

50) Por quanto devo multiplicar $(-2x^{3m}y^{-1})^3$ para obter $2xy$?

51) Qual a potência de menor expoente de x pela qual devemos multiplicar o polinômio $x^2-2x^{-1}+3x^{-3}-1$ para obter um polinômio racional inteiro?

52) Sendo $x=a^2-bc$; $y=b^2-ac$ e $z=c^2-ab$ prove que: $(x+y+z)(a+b+c)=ax+by+cz$

53) Efetuando as operações indicadas e reduzindo os têrmos semelhantes da expressão

$$\frac{36a^3b^2-42a^2b^3}{6a^2b^2}-3(2a-b) \text{ obtem-se....}$$

I. Educação – 1956.

RESPOSTAS:

1) $-2{,}5$	7) 150	13) 52
2) 0	8) -39	14) -26
3) -6	9) 12/11	15) -3
4) -4	10) 1	16) -15
5) 14	11) 1	17) -1
6) 12	12) $-19/12$	18) 0

19) Racional inteira do 3.º grau, não homogênea completa, reduzida e ordenada.

20) Racional fracionária.

21) Racional fracionária.

22) Irracional.

23) Racional inteira do 2.º grau, não homogênea, incompleta, reduzida e ordenada.

24) Racional inteira do 2.º grau, homogênea completa, reduzida e não ordenada.

25) Racional inteira do 3.º grau, homogênea incompleta, reduzida e não ordenada.

26) Racional inteira do 3.º grau, homogênea completa, reduzida e ordenada.

27) $m=0$

28) $m=0$ e $p\neq 0$

29) $m=0$ e p qualquer

30) $m=1$ e $p\neq 2$

31) a

32) $2x^2y-xy^2$

33) $-2x^2-2xm^{-1}-4y$

34) $2ab^2-a^2b$

35) $2a+25b-18c$

36) x^2+2x-6

37) $x^5-x^3+x^2$

38) $-a^5+a^3+a^2-3a+5$

39) $2x+15$

40) -4

41) $y^{-3/2}z$

42) $2xy^2$

43) $2x^5-7x^4+6x^3-8x^2+9x+2$

44) $a^{1/2}b^{2/3}c$

45) 0

46) $-2x^3$

47) $3xy^6+x^6y$

48) -2

49) $-\frac{3}{2}$

50) $1/4x^{1-9m}y^4$

51) x^4

52) Basta substituir e efetuar.

53) $-4b$

PRODUTOS NOTÁVEIS

Efetuar :

1) $(x+5)(x+2)$
2) $(x-5)(x-4)$
3) $(x+8)(x-3)$
4) $(x+1)(x-1)$
5) $(2x+3)(2x-3)$
6) $\left(5x^3y^2-\frac{1}{2}\right)\left(5x^3y^2+\frac{1}{2}\right)$
7) $(a+3)(3-a)$
8) $(-x-2)(-x+2)$
9) $(a+b+1)(a+b-1)$
10) $(x+3y+2z)(x-3y+2z)$
11) $(a+b-c)(a-b+c)$
12) $(x+5)(x+5)$
13) $(x^3+3)^2$
14) $(2x^3y^m+3x^2y)^2$
15) $(ab^2-1)(ab^2-1)$
16) $\left(\frac{1}{2}x^{-1}y^2-2x\right)^2$
17) $\left(0{,}33\ldots x^3-3y^{\frac{1}{2}}\right)^2$
18) $(a+b)(a^2-ab+b^2)$
19) $(x+1)(x^2-x+1)$
20) $(x-y)(x^2+xy+y^2)$
21) $(x^2-2)(x^4+2x^2+4)$
22) $(x^2+2)^3$
23) $(x^m+2y^3)^3$
24) $(3a^2-2b)^3$
25) $(0{,}5\,x^2y^{-1}-2xy^2)^3$
26) $(a+2b)^2-(a-2b)^2-2(a+2b)(a-2b)-2(a-4b)(a-4b)-$ $-4(6ab-a^2-6b^2)$
27) $(x-3)(3-x)(x-3)+[(x+5)(x-3)-5(2x^2-5x-3)]-(27-x^3)$
28) $(2x-3)^3-4(1+2x^3-9x^2)-2[(x-1)(x+7)-(x+2)(x-2)]-$ $-42x+25$
29) $(x^2y^2+x^2+y^2)^2-(x^2+y^2)^2-x^2y^2(x^2+y^2)$

(E. P. C. - Exército - 1953)

30) Quanto devemos subtrair de $(a-2)^3$ para obter $(a+3)^3$?

Acrescente à direita de cada binômioaba ixo um monômio tal que o trinômio obtido seja quadrado :

31) x^2+2x
32) $4x^2+9y^4$
33) $x^2y^{-2}+\frac{1}{4}y^2$
34) x^2-8y
35) x^2-x
36) $x^{10}+y^{2m}$

Complete as igualdades :

37) $(x^2 - \text{-----})^2 = \text{-----} - xy + \text{-----}$
38) $(\text{-----} - \text{-----})^2 = x^8 - 2x + \text{-----}$
39) $(a^2 - \text{-----})^3 = a^6 - 6a^4b + \text{-----} - \text{-----}$
40) $(\text{-----} - 2x^m)^3 = \text{-----} - \text{-----} + 12x^{2m} - 8x^{3m}$
41) $(2x^2 - \text{-----})^3 = 8x^6 - \text{-----} - \text{-----} + 6x^2$
42) $(\text{-----} - 2x)^3 = \text{-----} - 8x^3 - 54x + \text{-----}$

RESPOSTAS :

1) $x^2+7x+10$
2) $x^2-9x+20$
3) $x^2+5x-24$
4) x^2-1
5) $4x^2-9$
6) $25x^6y^4-\frac{1}{4}$
7) $9-a^2$
8) x^2-4
9) $(a+b)^2-1$
10) $(x+2z)^2-9y^2$
11) $a^2-(b-c)^2$
12) $x^2+10x+25$
13) x^6+6x^3+9
14) $4x^6y^{2m}+12x^5y^{m+1}+9x^4y^2$
15) $a^2b^4-2ab^2+1$
16) $\frac{1}{4}x^{-2}y^4-2y^2+4x^2$
17) $\frac{1}{9}x^6-2x^3y^{\frac{1}{2}}+9y$
18) a^3+b^3
19) x^3+1
20) x^3-y^3
21) x^6-8
22) $x^6+6x^4+12x^2+8$
23) $x^{3m}+6x^{2m}y^3+12x^my^6+8y^9$
24) $27a^6-54a^4b+36a^2b^2-8b^3$
25) $\frac{1}{8}x^6y^{-3}-\frac{3}{2}x^5+6x^4y^3-8x^3y^6$
26) 0
27) 0
28) 0
29) $x^2y^2(x^2+x^2y^2+y^2)$
30) $-15a^2-15a-35$
31) 1
32) $12xy^2$
33) $\frac{1}{2}x^2$
34) $16x^{-2}y^2$
35) x
36) $2x^5y^m$
37) $(x^2-\frac{1}{2}x^{-1}y)^2$
38) $(x^4-x^{-3})^2$
39) $(a^2-2b)^3$
40) $(1-2x^m)^3$
41) $(2x^2-1)^3$
42) $(3-2x)^3$

FATORAÇÃO — M.D.C. E M.M.C.

Escreva sob a forma de um produto de 2 fatôres:

1) $ax+ay-3x-3y$
2) $x^2+x-132$
3) $a^{10}-49b^{12}$
4) $-m-n+x(m+n)$
5) $1+a^{10}-2a^5$
6) $6x^2-5x+1$
7) $c^2-2bc-a^2+b^2$
8) $4a^4+8a^2b^2+9b^4$
9) $4x^{2m}-\frac{1}{9}$
10) $a^{20}-a^{16}-a^{12}-a^8+a^4-a^2$

Fatorar:

11) x^3+x^2+x+1
12) $a^2-1+2ab+b^2$
13) x^8-y^8
14) x^3-1
15) $12x^3-8x^2-12x+8$
16) x^4-30x^2+225
17) $x^2+34x+289$
18) $am+bm-an-bn$
19) $8x^2-6x+1$
20) a^4+a^2+1
21) $4a^2-x^2+4x-4$
22) $25(x-y)^2-4(x+y)^2$
23) $16x^{6m}-4y^{4a}$
24) c^4-45c^2+100
25) $x^{10}+x^5-20$
26) $64+a^{12}$
27) $4x^4+1$
28) $x^8y^8-15ax^4y^4-100a^2$
29) $4a^3-1-a^2+4a$
30) $4a^2c^2-a^4+2a^2b^2-b^4$
31) $x^2y^2+xy-12$
32) $(x-y)^2+2(y-x)-24$
33) $a^2-9n^2-6mn+10ab+25b^2-m^2$
34) $a^{3m}+1$
35) $a^2-16-x^2+36+12a-8x$

Escrever todos os fatôres de:

36) $x^3+5x^2-4x-20$
37) $(2m+1)^3+(m+2)^3$
38) a^4-b^4
39) x^8-1
40) a^3-3a+2
41) $4a^4-a^2+2a-1$

42) Fatorar: $a^3-a^2b-ab^2+b^3$; a^3-b^3 e $a^3-2a^2b+ab^2$ e, a seguir, dizer qual o m.d.c. dêsses polinômios.
43) Calcular o m.d.c. dos polinômios: x^2+2x+1 e x^3+1
(E. P. C. - Exército - Janeiro, 1953)
44) Calcular o m.m.c. dos polinômios: $2x^2-x-1$ e $2x^3+2x^2-2x-2$
(E. P. C. - Exército - 1953. 3.º Ano)
45) Fatorar os polinômios: a^2+6a-7 e $x^4-2x^3+x^2-8x+8$
(E. P. C. - Exército - Janeiro, 1953. 3.º Ano)
46) Fatorar: $4a^2-4ax-15x^2$
(E. C. Dutra - 3.ª Série Ginasial - P. Mensal - Agôsto, 1953)
47) Fatorar: $x^4-3x^3-7x^2+27x-18$
(E. C. Dutra - 3.ª Série Ginasial - P. Mensal - Agôsto, 1953)
48) Fatorar: $2x^3-3x^2-27$
49) Fatorar: $2x+y^2-x^2-1$
50) Determinar o m.d.c. de $4x^4-x^2+2x-1$ e $2x^3-x^2-2x+1$
(E. P.C. - Exército - 1952. 3.º Ano)
51) Calcular o m.d.c. entre $ab-2a-3b+6$ e $ab-2a$
52) Calcular o m.d.c. entre $a+2$; a^2-4 e $ax+2x$
53) Calcular o m.m.c. entre a^2-b^2 e $a^2-2ab+b^2$
54) Calcular o m.m.c. entre $ax-a$; x^2-2x+1 e $a^2x^2-a^2$
55) O m.d.c. de $5xy^2$, $15x^3$ e $17x^5y^4$ é ...
(C. Naval - 1956)

RESPOSTAS:

1) $(x+y)(a-3)$
2) $(x+12)(x-11)$
3) $(a^5+7b^6)(a^5-7b^6)$
4) $(m+n)(x-1)$
5) $(a^5-1)(a^5-1)$
6) $(2x-1)(3x-1)$
7) $(a+c-b)(c-b-a)$
8) $(2a^2+3b^2+2ab)(2a^2+3b^2-2ab)$
9) $\left(2x^m+\frac{1}{3}\right)\left(2x^m-\frac{1}{3}\right)$
10) $a^2(a^{18}-a^{14}-a^{10}-a^6+a^2-1)$
11) $(x^2+1)(x+1)$
12) $(a+b+1)(a+b-1)$
13) $(x^4+y^4)(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$
14) $(x-1)(x^2+x+1)$
15) $4(x+1)(x-1)(3x-2)$
16) $(x^2-15)^2$
17) $(x+17)^2$
18) $(a+b)(m-n)$
19) $(2x-1)(4x-1)$

20) $(a^2+a+1)(a^2-a+1)$
21) $(2a+x-a)(2a-x+2)$
22) $(7x-3y)(3x-7y)$
23) $4(2x^{3m}+y^{2a})(2x^{3m}-y^{2a})$
24) $(c^2-5c-10)(c^2+5c-10)$
25) $(x^5+5)(x^5-4)$
26) $(a^2+2a+2)(a^2-2a+2)(a^8-4a^4+16)$
27) $(2x^2+2x+1)(2x^2-2x+1)$
28) $(x^4y^4-20a)(x^4y^4+5a)$
29) $(4a-1)(a^2+1)$
30) $(2ac+a^2-b^2)(2ac-a^2+b^2)$
31) $(xy+4)(xy-3)$
32) $(x-y-6)(x-y+4)$
33) $(a+5b+m+3n)(a+5b-m-3n)$
34) $(a^m+1)(a^{2m}-a^m+1)$
35) $(a+x+10)(a-x+2)$
36) $(x+5)(x+2)(x-2)$
37) $9(m+1)(m^2+m+1)$
38) $(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$
39) $(x^4+1)(x^2+1)(x+1)(x-1)$
40) $(a-1)^2(a+2)$
41) $(a+1)(2a-1)(2a^2-a+1)$
42) $a-b$
43) $x+1$
44) $2(x+1)^2(x-1)(2x+1)$
45) $(a+7)(a-1)$ e $(x-1)(x^3-x^2-8)$
46) Sugestão: Fazer $(2a)^2-2x(2a)-15x^2$ *Resp.*: $(2a-5x)(2a+3x)$
47) Sugestão: Fazer $x^4-3x^3-7x^2+21x+6x-18$
Resp.: $(x-1)(x-2)(x+3)(x-3)$
48) $(x-3)(2x^2+3x+9)$
49) $(y+x-1)(y-x+1)$
50) $(2x-1)(x+1)$
51) $b-2$
52) $a+2$
53) $(a^2-b^2)(a-b)$
54) $a^2(x^2-1)(x-1)$
55) xy

FRAÇÕES ALGÉBRICAS

Simplificar :

1) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x+1}$

2) $\dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}$

3) $\dfrac{x^4+x^3-6x^2}{x^3-9x}$

4) $\dfrac{x^5y-xy}{x^2y-xy}$

5) $\dfrac{a+5+ab+5b}{a+5}$

6) $\dfrac{2ab+a^2+b^2-c^2}{2bc-b^2-c^2+a^2}$

(E. Aeronáutica – 1945)

7) $\dfrac{9-x^2}{x^2-6x+9}$

8) $\dfrac{a^4-b^4}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}$

9) $\dfrac{4x^4-x^2+2x-1}{2x^3+x^2-x}$

10) $\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-3x+2}$

Efetuar :

11) $\dfrac{x+7}{x+3}+\dfrac{x-1}{x+3}$

12) $\dfrac{2x}{x^2-1}+\dfrac{x-1}{x+1}$

13) $\dfrac{x^2+4}{x^2-4}-\dfrac{x}{2+x}$

14) $\dfrac{x^2+x-3}{x^2-3x+2}-\dfrac{x+1}{2-x}$

15) $\dfrac{x+2}{x-2}-\dfrac{x-1}{2-x}-\dfrac{2(x^2+1)+5x}{x^2-4}$

16) $\dfrac{x^2-2x-15}{x^2-9}\times\dfrac{x^2-3x}{x^2-5x}$

17) $\dfrac{a+b+ax+bx}{ax+bx}\div\dfrac{x^2-1}{x^2-x}$

18) $\dfrac{x^3-y^3}{x^2+xy+y^2}\times\dfrac{x^2-x-6}{x^3-3x^2}\times\dfrac{x^3}{x^2-xy}$

19) $\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-6x+9}\times\dfrac{x^2-9}{x^3-64}\div\dfrac{x^3+3x^2}{x^3+4x^2+16x}$

20) $\left(\dfrac{y^{-3}}{x^{2/7}z^{-1}}\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(\dfrac{x^{-1}y^{14/3}}{z^{-21/4}}\right)^{2/7}$

(C. P. O. R. – Seleção – Novembro, 1950)

21) Efetuar : $\dfrac{(4a+3b)-2b}{2a-4b}\times\dfrac{(2a-4b)+(2a+7b)}{(4a+3b)(4a+b)}$

22) Efetuar : $\dfrac{(a-2)\,a+1}{(a-1)\,(a+1)} \times \dfrac{(a^2-1)-3\,(a-1)}{(a-2)\,(a+1)}$

23) Efetuar : $\dfrac{(a-1)\,a-2}{a^2-4} \times \dfrac{a^2+(a-2)}{(a-1)\,(a-2)}$

24) Efetuar : $\dfrac{(2a-3b)+3b}{(a-b)-a} \times \dfrac{(a-b)\,b}{(2a-3b)\,.\,2a}$

25) Efetuar : $\dfrac{4a-b}{(a-2b)+a} \times \dfrac{(a-2b)+b}{3a-b} : \dfrac{(a-b)+3a}{3a-b}$

26) $\dfrac{(x-4)\,x+4}{(x-4)\,x+3} \times \dfrac{(x-2)\,x+1}{(x-2)\,(x+2)} \cdot \dfrac{x^3-3x^2+2x}{x^2-x-6}$

Calcular :

27) $\dfrac{a}{2+b} + \dfrac{4-4a+a^2}{b^2+4b+4} : \dfrac{2-a}{2+b}$

28) $\dfrac{x+y}{y} - \dfrac{y}{x+y} - \dfrac{2x}{x+y} + \dfrac{x^3-x^2y}{y^3-x^2y}$

29) Simplificar e efetuar : $\dfrac{x^2-x}{1-2x+x^2} - \dfrac{x+1}{ax^2-a}$

30) $x - \dfrac{x^2-1}{1-\dfrac{x-1}{x}}$ (E. P. C. do Ar - 1952)

31) Efetuar : $\dfrac{a}{a-b} + \dfrac{a}{a+b} + \dfrac{2a^2}{a^2+b^2} + \dfrac{4a^2b^2}{a^4-b^4}$

(Especialistas de Aeronáutica - 1945)

32) $(x^{-2}-y^{-2})^{-1} \times \dfrac{y^2+xy}{x^2\,y^3}$

33) $\dfrac{x^2+xy}{x^2-y^2} \times (x^{-1}-y^{-1})$

34) $(x^{-2}-y^{-2})^{-1} \times \dfrac{y^2-x^2}{x^2}$

35) $\dfrac{3x}{x+2} + \dfrac{x^2-5x+6}{x+2} \div \dfrac{x^3-3x^2}{6x^2 \times 2} - \dfrac{18x-24}{2x+4}$

36) $\dfrac{3xz+3yz}{2x^3-2xy^2} \div \dfrac{3xz+3yz}{2x^2-2xy} + \dfrac{x+y-1}{x+y}$

37) $\left(\dfrac{1}{1+a} - \dfrac{2a}{a^2-1}\right)\left(\dfrac{1}{a}-1\right)$

38) $\dfrac{3a-3}{a+3} + \dfrac{a^2-9}{a+3} \div \dfrac{-a^2+a+12}{2a-8}$

39) $\dfrac{\dfrac{x^2+9x+20}{x^2-25}\,(x-5)^2}{x^2-4x-5}$ (E. Aeronáutica - 1948)

40) $\left(\dfrac{2y}{y-2} - \dfrac{2y^2}{y^2-4} - \dfrac{4}{y+2}\right) : \dfrac{8}{y+2}$ (E. Aeronáutica - 1948)

41) $\dfrac{x+\dfrac{y-x}{1+xy}}{1-\dfrac{xy-x^2}{1+xy}}$ (E. P. C. - Exército - 1953. 3.º Ano)

42) $\dfrac{1}{x+y} : \left[\dfrac{y}{2}\left(\dfrac{1}{x+y} + \dfrac{1}{x-y}\right) \times \dfrac{x^2-y^2}{x^2y+xy^2}\right]$

43) $\dfrac{1}{\left(\dfrac{a}{b}-1\right)\left(\dfrac{a}{c}-1\right)} + \dfrac{1}{\left(\dfrac{b}{a}-1\right)\left(\dfrac{b}{c}-1\right)} + \dfrac{1}{\left(\dfrac{c}{a}-1\right)\left(\dfrac{c}{b}-1\right)}$

44) Completar:

O resultado da operação $2a - \dfrac{ab}{a-b}$ é . . .

(I. Educação - 1956)

45) Completar : $\underline{\qquad\quad} \times \dfrac{2x^m y}{3x} = x$

46) Completar : $\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + xy} : \underline{\qquad\quad} = 2a$

47) Calcular : $\dfrac{\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}}{\dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}} \times \dfrac{2abxy}{-a^2 - b^2}$ para $\begin{cases} x = a + b \\ y = a - b \end{cases}$

48) Calcular o valor numérico de $a^{-3} - \dfrac{1}{27}$

$$\text{para } a = \frac{3}{2m-1} + \frac{2m-2}{2m^2 - m} + \frac{6m^2 - 8m + 2}{m(2m-1)}$$

49) Reduza a fração $\dfrac{a^2 - 3a + 2}{a^2 - 4a + 4}$ à expressão mais simples e, a seguir, calcule o valor numérico para $a = \dfrac{2}{3}$

(E. Aeronáutica - 1948)

50) Calcular $(x^2 + px + q) : (1 + x^2)$ para $x = \dfrac{p}{q-1}$

51) Simplificar a expressão e calcular o valor numérico do resultado para $a = -b$

$$\frac{a^2 - 9}{(a+3)\left[\dfrac{2a^2}{3(a+b)} - \dfrac{4a^2 - 4ab}{2(a^2 - b^2)}\right]}$$

(E. Aeronáutica - 1948)

52) Reduza à expressão mais simples

$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$$

53) Calcular $(x+1)(y+1)$ para :

$$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \text{e} \quad y = \frac{(a+c-b)(a+b-c)}{(a+b+c)(b+c-a)}$$

RESPOSTAS:

1) $\dfrac{x-2}{x-1}$

2) $\dfrac{x+1}{x+2}$

3) $\dfrac{x^2 - 2x}{x-3}$

4) $(x^2+1)(x+1)$

5) $b+1$

6) $\dfrac{a+b+c}{a-b+c}$

7) $\dfrac{3+x}{3-x}$

8) $a-b$

9) $\dfrac{2x^2 - x + 1}{x}$

10) $\dfrac{1}{x+2}$

11) 2

12) $\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

13) $\dfrac{2}{x-2}$

14) $\dfrac{1}{x-1}$

15) 0

16) 1

17) 1

18) $x+2$

19) $\dfrac{1}{x}$

20) $x^{1/7}y^{35/6}$

21) $\dfrac{1}{2a-4b}$

22) $\left(\dfrac{a-1}{a+1}\right)^2$

23) $\dfrac{a+1}{a-2}$

24) $\dfrac{b-a}{2a-3b}$

25) $\dfrac{1}{2}$

26) $\dfrac{1}{x}$

27) $\dfrac{2}{b+2}$

28) 0

29) $\dfrac{ax-1}{ax-a}$

30) $2x - x^3$

31) $\dfrac{4a^2}{a^2 - b^2}$

32) $\dfrac{1}{y-x}$

33) $-\dfrac{1}{y}$

34) y^2

35) 0

36) 1

37) $\dfrac{1}{a}$

38) 1

39) $\dfrac{x+4}{x+1}$

40) $\dfrac{1}{y-2}$

41) y

42) 1

43) 1

44) $\dfrac{2a^2 - 3ab}{a-b}$

45) $\dfrac{3x^2}{2x^m y}$

46) $\dfrac{x-y}{2ax}$

47) $a^2 - b^2$

48) 0

49) $\dfrac{1}{4}$

50) q

51) 0

52) $a+b+c$

53) 2

EQUAÇÃO DO 1.º GRAU

Resolva as equações :

1) $$\frac{7x - \frac{1}{3}}{9x - \frac{3}{4}} = \frac{8}{5}$$
(E. P. C. do Ar - 1952)

2) $$\frac{\frac{x}{2} - (x-1)}{\frac{1}{2} - x} = \frac{2}{3}$$
(E. Aeronáutica - 1948)

3) $5x - 7 + 3 + x = 10x - 2$

4) $2x - \frac{x-1}{3} = 1 - \frac{x+2}{6}$

5) $\frac{3x+5}{2} - \frac{2x-9}{3} = 8$
(C. Pedro II - P. Parcial - 1953)

6) $\frac{2x-a}{2} - a = \frac{a}{2} - ax$

7) $4ax + 1 = ax + x + 3a$

8) $\frac{x-3}{x-1} = \frac{x^2 - 9x + 20}{x^2 + x - 2}$

9) $\frac{1}{x^2 - 1} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x-1}$

10) $\frac{x-1}{1+x} = \frac{x+1}{x-1}$

11) $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{x-1}$

12) $\frac{6x+2}{4x-2} + \frac{3x+2}{2x+1} = \frac{12x^2-4}{4x^2-1}$

13) $\frac{1}{x-3} + \frac{2}{x+3} = \frac{6}{x^2-9}$

14) $\frac{5x-3}{9-x^2} + \frac{3}{x+3} - \frac{2}{3-x} = 0$

15) $\frac{x-1}{1+x} - \frac{4x}{1-x^2} = \frac{x+1}{x-1}$

16) $$2x - \frac{x - \frac{1}{2}}{2} = 2x - 3\left(x - \frac{x+3}{2}\right)$$

17) $\frac{5x-6}{x} - \frac{9x-8}{5x} = \frac{2}{x}$ (Col. Pedro II - 2.ª Série Ginasial - P. Parcial - 1953)

18) Qual é o valor de a na equação : $\frac{2a}{5} - \frac{3}{4} = \frac{3a}{20}$?
(E. P. C. do Ar - 1951)

Achar o valor de x :

19) $$\frac{2x-4}{5} - 6\frac{1}{6} = \frac{20-x}{4} - \frac{x+\frac{1}{2}}{3}$$
(E. Especialistas de Aeronáutica - 1945)

20) $$3x - 2\left(x - \frac{1}{3}\right) - 3\left[x - \frac{x - \frac{1}{4}}{3} - \frac{2(x-3)}{6}\right] = 0$$

21) $\frac{a-1}{x-a} - \frac{2a(a-1)}{x^2-a^2} = -\frac{2a}{x+a}$

22) $$\frac{3x-1}{4} - \frac{2(3-x)}{3} = 5\left[x - \frac{2x+7(4x-5)}{15} - \frac{13}{60}\right]$$
(E. Especialistas de Aeronáutica - 1945)

Resolver e discutir as equações :

23) $\frac{x}{4} + 1 - \frac{x}{12} = x - \frac{5x-4}{6}$

24) $\frac{3x}{20} - \frac{2x-5}{15} + \frac{5}{2} = \frac{x}{10} - \frac{x-34}{12}$

25) $\frac{9x+7}{2} - x + \frac{x-2}{7} = 36$

26) $ax + x = 1$

27) $2x - a = 0$

28) $ax - 2x = a - 2$

29) $a(b-1)x = b(b-1)$

30) $a^2x - 2ab = ax - 2b$

Determinar m para que sejam impossíveis as equações:

31) $2mx - x = 3$

32) $mx - m = x$

33) $m^2x - m(x+1) - (1+2x) = 0$

34) $mx - 7x = m^2 - 7m$

35) $(m^2 - m - 6)\,x = m - 3$

36) Determinar m de modo que a equação $(m^2 - 5m + 4)\,x = m^2 - 7m + 12$ seja indeterminada.

37) Determinar m e k para que a equação $3k(x-1) = 6 - 2mx$ seja indeterminada.

38) Achar m para que a equação $mx + 1 = 2x - m$ tenha uma só solução.

39) Determinar a e b, para que a equação $ax - 2x = b$ seja determinada.

40) Determinar a para que a equação $2x - a = 3a - 1$ tenha uma só solução.

41) Qual o valor de a que torna indeterminada a equação $ax + 2 = a - 2x$?

42) Determinar m para que $\dfrac{x+m}{2} - \dfrac{mx-4}{3} = 2x + 3m$ tenha uma raiz nula.

43) Determinar m para que a unidade seja raiz da equação: $2mx - 3x = 2(x + 3m) - 1$

44) Determinar k para que as equações $2x + 6 = k - 10x$ e $x + 3 = 7 - 5x$ sejam equivalentes.

45) Determinar m e k para que a equação $x^2 + 2kxy = y^2 + (2m+1)\,x$ seja homogênea.

46) Determinar m e k para que seja do 1.º grau a equação: $mx^2 + (m-1)\,x + 2 = m + (k-1)\,x^3$

47) Sabendo que a e b são números ímpares, resolva e discuta a equação: $\dfrac{x-a}{a} - \dfrac{x-b}{b} = \dfrac{x}{b} + \dfrac{b}{a} - 2$

48) Sendo m um número que satisfaz à dupla condição $-1 < m < 1$, verificar que a equação $(m^2 - 1)\,x = m^2 + 1$ apenas admite soluções negativas.

49) Quais são os valores do parâmetro b que tornam nula a solução da equação $bx - \dfrac{b+1}{2} = 0$?

(Exame Aptidão - Portugal - 1942)

50) Discutir a equação $(b + a)\,x = b^2$

(Exame Aptidão - Portugal - 1942)

51) Determine os valores de p e q para que a equação $(5p - 1)\,x + q - 3 = 0$ seja impossível.

(I. Educação - 2.ª P. Parcial - 3.ª Série Ginasial - 25/11/53)

52) Calcule o valor de y na equação $y + \dfrac{y}{m} = n$

(Col. Pedro II - 3.ª Série Ginasial - P. Parcial - 1953)

53) Resolva em relação a a a seguinte fórmula: $C = \dfrac{Ka - b}{a}$

(E. P. C. do Ar - 1951)

54) Calcule o valor de k para que se trone impossível a equação: $k^2y - k^2 = 2k + 2ky$

(E. P. C. - Exército - 1955)

RESPOSTAS:

1) $\dfrac{13}{111}$

2) -4

3) $-\dfrac{1}{2}$

4) 2/11

5) 3

6) $\dfrac{2a}{a+1}$

7) 1

8) 13/4

9) $\dfrac{1}{2}$

10) zero

11) impossível

12) impossível $\left(x = -\dfrac{1}{2}\right)$

13) impossível $(x = 3)$

14) indeterminada menos para $x = \pm 3$ (quando é impossível)

15) indeterminada menos para $x = \pm 1$

16) 17/4

17) 2

18) 3

19) 12
20) impossível
21) impossível ($x=a$)
22) 2
23) impossível
24) indeterminado
25) determinada, $x=9$
26) determinada: $a\neq-1$
impossível: $a=-1$
27) sempre determinada, $x=\frac{a}{2}$
28) determinada: $a\neq2$, $x=1$
indeterminada: $a=2$
29) determinada: $a\neq0$ e $b\neq1$, $x=b/a$
indeterminada: $b=1$
impossível: $a=0$, $b\neq0$ e $b\neq1$
30) determinada: $a\neq0$ e $a\neq1$, $x=\frac{2b}{a}$
indeterminada: $a=1$
impossível: $a=0$, $b\neq0$
31) $m=\frac{1}{2}$
32) $m=1$
33) $m=2$
34) não há valor de m
35) $m=-2$
36) $m=4$
37) $m=3$, $k=-2$
38) $m\neq2$
39) $a\neq2$, b qualquer
40) a qualquer
41) Nenhum
42) $m=\frac{8}{15}$
43) $m=-1$
44) 14
45) $m=\frac{1}{2}$, k qualquer
46) $m=0$, $k=1$
47) sempre determinada e $x=b$
48) De fato, o valor de x é negativo
49) $b=-1$
50) $b\neq-a$: determinada
$b=a=0$: indeterminada
$b=-a\neq0$: impossível
51) $p=\frac{1}{5}$ e $q\neq3$
52) $y=\frac{mn}{m+1}$ para $m\neq-1$
53) $a=\frac{b}{K-c}$ $(K\neq c)$
54) $k=2$

SISTEMAS DE EQUAÇÕES DO 1.º GRAU

Resolver :

1) $\begin{cases}2x-3y=0\\4x+5y=22\end{cases}$

2) $\begin{cases}3x+2y=0\\5x=4y\end{cases}$

3) $\begin{cases}4x-y=2\\8x-2y=4\end{cases}$

4) $\begin{cases}2x-\dfrac{x-y}{2}=2\\3x+2y=5\end{cases}$

5) $\begin{cases}0{,}1x+0{,}5y=0{,}35\\6{,}2x-4y=4{,}2\end{cases}$

6) $\begin{cases}5x+5y=1\\1{,}5x+2{,}5y=1\end{cases}$

7) $\begin{cases}1{,}4x+3{,}7y=10{,}3\\3{,}2x+4{,}1y=9{,}6\end{cases}$

8) $\begin{cases}x+y=2a\\x-y=2b\end{cases}$

9) $\begin{cases}x+y=a+2b\\x-y=a+4b\end{cases}$

10) $\begin{cases}x+y=a\\x=by\end{cases}$

11) $\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1\\\dfrac{x}{b}+\dfrac{y}{a}=1\end{cases}$

12) $\begin{cases}\dfrac{x}{a}-y=1\\\dfrac{y}{m}-x=1\end{cases}$

13) $\begin{cases}3x-11=-4y\\\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{2-y}=0\end{cases}$

14) $\begin{cases}\dfrac{3}{3y-x}=\dfrac{7}{3x-y}\\\dfrac{9}{4x-3}=\dfrac{5}{4y-3}\end{cases}$

(E. Militar - 1939)

15) Determinar k e p para que o sistema
$\begin{cases}kx-6y=5k-3p\\(k-4)x+2y=4k+3\end{cases}$ seja indeterminado.

(E. P. C. - Exército - 1955)

16) Determinar m e p, para que o sistema

$$\begin{cases} 2x+3+y=my-1 \\ 4x-2y+p=2+5y \end{cases}$$ seja indeterminado.

17) Determinar k, para que o sistema

$$\begin{cases} 4x+ky=14 \\ kx+9y=21 \end{cases}$$ seja indeterminado.

(E. P. C. - Exército - Janeiro, 1953 e Seleção 1.º Científico - C. Militar - 1954)

18) Quais os valores de m e p para que o sistema

$$\begin{cases} 2x-3y=p \\ 4x-11=my \end{cases}$$ admita uma única solução.

19) Determine o valor de y no sistema de equações abaixo:

$$\begin{cases} x=2y+7 \\ x+y=-5 \end{cases}$$ (E. P. C. do Ar - Seleção - 1951)

20) Determinar m para que o sistema

$$\begin{cases} 2x=5y+m \\ 3x=2y+1 \end{cases}$$ seja determinado.

21) Determinar m, de modo que o sistema

$$\begin{cases} 2x+3y=m \\ 4x+6y=m-1 \end{cases}$$ seja impossível.

22) Determinar m, para que o sistema

$$\begin{cases} mx-6y=5m-3 \\ 2x+(m-7)y=29-7m \end{cases}$$ tenha uma infinidade de soluções.

23) Determinar k, no sistema abaixo, de modo que as equações sejam incompatíveis

$$\begin{cases} (8k-13)\,x+5y=10k+8 \\ 7x-2y=12k+14 \end{cases}$$ (E. Naval - 1944)

24) Resolver o sistema: $3x-4y+2=5x+y+8=4x-2y+4$

25) Dadas as equações: $a=12x+5y$; $b=2x-y$ e $c=3x+4y$. Determinar a em função de b e c.

26) Para que valor de m o sistema

$$\begin{cases} 2x-5y=3 \\ (m+2)\,x+(4-m)\,y=1+m \end{cases}$$ admite uma solução tal que $y=3x$?

27) Para que valores de a e b o sistema

$$\begin{cases} (a+b)\,x+(a-b)\,y=15 \\ (2a-3b)\,x+(2a-5b)\,y=a+2b \end{cases}$$ admite a solução $\begin{cases} x=3 \\ y=7 \end{cases}$?

Resolver por artifício de cálculo os sistemas:

28) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3} \\ x+y=15 \end{cases}$

29) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3} \\ 2x+3y=26 \end{cases}$

30) $\begin{cases} \dfrac{x}{5}=\dfrac{y}{3} \\ x-y=6 \end{cases}$

31) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6} \\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}=2 \end{cases}$

32) $\begin{cases} \dfrac{3}{x+y}-\dfrac{8}{2x-3y}=3 \\ \dfrac{-6}{x+y}+\dfrac{4}{2x-3y}=-3 \end{cases}$

33) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{4} \\ x+y+z=63 \end{cases}$

34) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{5} \\ 3x-2y+4z=40 \end{cases}$

35) $\begin{cases} x+y=7 \\ x+z=6 \\ y+z=5 \end{cases}$

36) $\begin{cases} 2x=3y=z \\ 2x-3y+5z=30 \end{cases}$

37) $\begin{cases} 4x=5y=2z \\ x+y+z=19 \end{cases}$

38) Resolver o sistema de equações:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{a}-\dfrac{x-y}{b}=4 \\ \dfrac{x}{a-b}+\dfrac{y}{a+b}=2 \end{cases}$$

(E. P. C. - Exército - Janeiro, 1953. 1.º Ano)

39) Determinar os parâmetros a e b de modo que o sistema $\begin{cases} ax - by = 4 \\ 3x + 5y = 1 \end{cases}$ seja indeterminado.

(E. P. C. - Exército - Janeiro, 1953. 1.º Ano)

40) Resolver:

$$\begin{cases} 6x = 4y = 8z \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

41) Determinar m no sistema $\begin{cases} mx - 6y + 3 = 5m \\ 2x - 7(y - m) - 29 = -my \end{cases}$ de modo que os valores de x e y sejam iguais.

42) Dizer qual o aspecto gráfico que tem as soluções dos seguintes sistemas:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 8 \\ 4x + 10y = 16 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - y = 7 \\ 6x - 2y = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x = y \end{cases}$$

(E. P. C. - Exército - Julho, 1953. 1.º Ano)

RESPOSTAS:

1) 3 e 2
2) 0 e 0
3) indeterminado
4) 1 e 1
5) 1 e 1/2
6) $-0{,}5$ e $0{,}7$
7) $-1{,}1$ e $3{,}2$
8) $a+b$ e $a-b$
9) $a+3b$ e $-b$
10) $\dfrac{ab}{b+1}$ e $\dfrac{a}{b+1}$
11) $x = y = \dfrac{ab}{a+b}$
12) $\dfrac{a(m+1)}{1-am}$ e $\dfrac{m(a+1)}{1-am}$
13) impossível
14) 3 e 2
15) $k=3$ e $p=20$
16) $m=4{,}5$ e $p=10$
17) $k=6$
18) $m \neq 6$ e p qualquer
19) -4
20) m qualquer
21) $m \neq -1$
22) $m=3$
23) $k=-9/16$
24) 2 e -2
25) $a=3b+2c$
26) $-55/7$
27) $a=\dfrac{115}{64}$, $b=\dfrac{95}{128}$

28) 6 e 9
29) 4 e 6
30) 15 e 9
31) 3 e 2
32) 1 e 2
33) 14, 21 e 28
34) 4, 6 e 10
35) 4, 3 e 2
36) 3, 2 e 6
37) 5, 4 e 10
38) $x=a-b$, $y=a+b$
39) $a=12$, $b=-20$
40) 4, 6 e 3
41) 21/4
42) Retas coincidentes, paralelas e incidentes.

INEQUAÇÕES E SISTEMAS DE INEQUAÇÕES DO 1.º GRAU

Resolva as desigualdades:

1) $\dfrac{x-1}{7} + \dfrac{23-x}{5} > 7 - \dfrac{4+x}{4}$ (E. Aeronáutica - 1945)

2) $\dfrac{3x+7}{9} < \dfrac{5x+1}{18} + \dfrac{17}{6} + x$ (E. Aeronáutica - 1948)

3) $\dfrac{3x}{5} - x > 2$ (E. P. C. do Ar - 1952)

4) $\dfrac{x - \dfrac{x}{2}}{3} < 2x+1$

5) $x - [2 - \{x - (4-x)\}] > 3$

Resolva as inequações:

6) $(x-3)(x-2) < x^2 - 3\left[1 - \dfrac{2x-4}{2}\right]$

7) $(x+2)^2>x^2+5x+4$

8) $2x-1>2(x-3)$

9) $\dfrac{5x-2}{5}>x+1$

10) $3-\dfrac{2x-1}{4}>3\left[x-\dfrac{x+1}{3}\right]$

Resolva as inequações fracionárias:

11) $\dfrac{3}{x-5}>0$

12) $\dfrac{-5}{x+1}>0$

13) $\dfrac{2}{2x-1}<0$

14) $\dfrac{-4}{3x+2}<0$

15) $\dfrac{x-1}{x-2}>0$

16) $\dfrac{x-3}{x+1}<0$

17) $\dfrac{x-2}{x+5}<1$

18) $\dfrac{x-3}{2x+5}<1$

19) $\dfrac{x}{x-1}+3>1-\dfrac{x}{x-1}$

20) $\dfrac{3x-2}{x-3}<2$

21) $\dfrac{x^2+10x+16}{x-1}>10$

22) $\dfrac{16x-4}{x^2-4}-\dfrac{2x+3}{x-2}<1+\dfrac{2-3x}{x+2}$

23) Qual o valor inteiro de x que satisfaz a inequação

$$3<\frac{x+1}{x-3}\ ?$$

24) Qual o maior número inteiro que satisfaz à inequação

$$3x-2>2(2x+3)\ ?$$

25) Qual o menor número inteiro que verifica a inequação

$$5x+1<3(2x+1)\ ?$$

26) Qual a soma dos dois menores números pares que satisfazem à inequação $\dfrac{x-1}{x+3}<1$?

27) Determinar a, de modo que a equação $(a-5)\,x=a+4$ tenha uma raiz positiva.

28) Qual o menor número inteiro que colocado no lugar de m torna positiva a raiz de $2x-2=mx+m$?

29) Calcular m de modo que seja negativa a raiz da equação $(m^2+1)\,x-2m+5=0$ (Exame Aptidão - Portugal - 1941)

30) Qual o maior valor inteiro de a que torna a raiz de $ax-a=4x+5$ negativa ?

31) Quais os valores inteiros de m, que torna negativa a raiz de $(m-2)\,x=m+2$?

32) Qual o maior valor inteiro negativo de m, que torna a raiz de $(m-5)\,x=m+4$ positiva ?

Resolver os sistemas:

33) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}-\dfrac{3x-4}{6}>\dfrac{2x+5}{3} \\ \dfrac{x-4}{5}<\dfrac{x+4}{10} \end{cases}$

34) $\begin{cases} x+\dfrac{4x-5}{3}>\dfrac{3x+1}{5} \\ \dfrac{7x+2}{5}<\dfrac{3x}{2} \end{cases}$

35) $\begin{cases} \dfrac{3x-2}{2}<5 \\ \dfrac{1-x}{5}<\dfrac{x-1}{4} \end{cases}$

(Col. Pedro II - 4.ª Série Ginasial - P. Parcial - 1954)

36) $\begin{cases} 8x-5>\dfrac{15x-8}{2} \\ 2(2x-3)>5x-\dfrac{3}{4} \end{cases}$

27) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2}-\dfrac{x-2}{3}<1 \\ 3x-\dfrac{x+12}{5}<\dfrac{7x-2}{2} \end{cases}$

38) $\begin{cases} 2x-1>x+3 \\ \dfrac{3x}{3}<\dfrac{x+1}{2} \end{cases}$

(Col. Pedro II - 2.ª Série Ginasial - P. Parcial - 1954)

39) Calcular o produto dos dois menores números inteiros que satisfazem ao sistema

$$\begin{cases} x > 3(x+1) \\ 2x > x - 4{,}1 \end{cases}$$

40) Calcule os números inteiros que satisfaçam simultâneamente as desigualdades

$$2x - \frac{x-1}{3} > 5 \quad \text{e} \quad 2x > 2 - 3(3-x)$$

41) Quais os valores inteiros de x que verificam simultâneamente as desigualdades

$$\frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{3} < 1 \quad \text{e} \quad \frac{x}{2} - \frac{x+1}{4} < \frac{2x-5}{6}$$

Resolver os sistemas:

42) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{x-5} > 1 \\ x - 3 < 2(x-1) \end{cases}$

43) $\begin{cases} \dfrac{x-2}{x-3} < 1 \\ x - \dfrac{x}{2} > 3x \end{cases}$

44) $\begin{cases} \dfrac{5}{x+1} > 0 \\ \dfrac{3}{x+2} < 0 \end{cases}$

45) $\begin{cases} 3x > 1 - 2x \\ x - 2 < 2x + 1 \\ 3x > 2x \\ x > 2\left(x - \dfrac{1}{4}\right) \end{cases}$

46) Dar o menor número inteiro que satisfaz a inequação:

$$\frac{x}{4} - \frac{x+2}{6} < \frac{x+2}{9}$$

(I. Educação - 4.ª Série Ginasial - 1.ª P. Parcial - 25/6/51)

47) Indique os valores de x que satisfazem à inequação $2x - 3 > 3(x-2)$

(E. P. C. do Ar - Admissão - 1951)

48) Determine os valores inteiros que verificam o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{y-3}{4} < \dfrac{2y+3}{2} - 3 \\ \dfrac{3y-1}{10} < 5 - \dfrac{4y-2}{5} \end{cases}$$

(E. P. C. - Exército - 1955)

R e s p o s t a s :

1) $x > 8$
2) $x > -\frac{38}{17}$
3) $x < -5$
4) $x > -\frac{6}{11}$
5) $x > 3$
6) $x > \frac{15}{8}$
7) $x < 0$
8) inidentidade
9) impossível
10) $x < \frac{17}{10}$
11) $x > 5$
12) $x < -1$
13) $x < \frac{1}{2}$
14) $x > -\frac{2}{3}$
15) $x < 1$ ou $x > 2$
16) $-1 < x < 3$
17) $x > -5$
18) $x < -8$ ou $> x - \frac{5}{2}$
19) $x < \frac{1}{2}$ ou $x > 1$
20) $-4 < x < 3$
21) $x > 1$
22) $x < -2$
23) 4
24) -9
25) -1
26) -2
27) $a > 5$ ou $a < -4$
28) -1
29) $m < \frac{5}{2}$
30) 3
31) -1, 0 e 1
32) -5
33) $x < -\frac{3}{2}$
34) $x > 4$
35) $1 < x < 4$
36) impossível
37) $-2 < x < 5$
38) impossível
39) 12
40) 3, 4, 5 e 6
41) 8, 9 e 10
42) $x > 5$
43) $x < 0$
44) impossível
45) $\frac{1}{5} < x < \frac{1}{2}$
46) -19
47) $x < 3$
48) 2, 3 e 4

CÁLCULO DOS RADICAIS

Simplificar os radicais:

1) $\sqrt[3]{\sqrt{x}}$

2) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$

3) $\sqrt[8]{x^4}$

4) $\sqrt[6]{x^2y^6}$

5) $\sqrt[5]{a^{10}b^{12}c^2}$

6) $\sqrt[6]{64a^8b^2}$

7) $\sqrt[3]{a\sqrt{b}}$

8) $\sqrt[6]{64\sqrt[5]{a^2}}$

9) $\sqrt{a^3+2a^2+a}$

Introduzir no radical

10) $a\sqrt[m]{b}$

11) $2a^2\sqrt[3]{3a}$

12) $3a^3\sqrt{2ab}$

13) $3\sqrt{\frac{1}{3}}$

Colocar em ordem crescente:

14) $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{2}$ e $\sqrt[6]{3}$

(Col. Pedro II - 2.ª Série Ginasial - P. Parcial - 1954)

15) $\sqrt[6]{40}$, $\sqrt[3]{5}$ e $\sqrt{3}$

Mostre qual é o maior:

16) $\sqrt[3]{2}$ ou $\sqrt[6]{5}$

17) $\sqrt{5}$ ou $\sqrt[4]{10}$

18) $2\sqrt{3}$ ou $3\sqrt{2}$

19) $2\sqrt[3]{3}$ ou $3\sqrt{2}$

(Col. Pedro II - 4.ª Série Ginasial - P. Parcial - 1954)

20) Simplifique a expressão:

$x\sqrt{xy^3}+y\sqrt{x^3y}$ (E. P. C. do Ar - 1951)

21) Reduzindo a expressão:

$\sqrt{28}-\sqrt{75}+2\sqrt{27}-\sqrt{7}+\sqrt{12}$ obtém-se ....

(I. Educação - 1.ª P. Parcial - 4.ª Série Ginasial - 1951)

22) Efetuar: $\sqrt{24}+\sqrt{54}-\sqrt{96}+\sqrt{6}$

(Col. Pedro II - 2.ª Série Ginasial - P. Parcial - 1954)

Efetuar:

23) $\sqrt{80}+\sqrt{125}+\sqrt{45}+\sqrt{20}-14\sqrt{5}$

24) $2\sqrt{3}+3\sqrt{27}-6\sqrt{\frac{1}{3}}$

25) $2\sqrt{2}+2\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}-\frac{7}{2}\sqrt{2}$

26) $\sqrt[6]{125\,000}+\sqrt[5]{\sqrt{32}}+2\sqrt{18}-24\sqrt{\frac{1}{2}}$

27) $\sqrt[5]{\sqrt{243}}+\sqrt{\frac{3}{4}}+\sqrt{\frac{1}{3}}-\frac{5}{6}\sqrt{3}$

28) *a)* $\sqrt{6}\times\sqrt{12}\times\sqrt{18}$ *b)* $\sqrt{2}\times\sqrt[3]{4}$

(Col. Pedro II - 2.ª Série Ginasial - P. Parcial - 1953)

29) $\sqrt{\sqrt{18}} : 3^{1/2}$

(Col. Pedro II - 2.ª Série Ginasial - P. Parcial - 1954)

30) Sublinhe a letra "C" se o cálculo estiver "certo" e a letra "E" se estiver "errado".

A) $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5}$ C E

B) $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{7}=\sqrt[3]{14}$ C E

C) $\dfrac{\sqrt[4]{12}}{\sqrt{2}}=\sqrt[4]{3}$ C E

D) $\sqrt[4]{3}\times\sqrt[3]{2}=\sqrt[7]{6}$ C E

E) $\sqrt{18}+\sqrt{2}+\sqrt{8}=6\sqrt{2}$ C E

(E. P. C. - Exército - 1952)

31) Reduza $\sqrt{\dfrac{a\sqrt{b}}{\sqrt[3]{ab}}}\cdot\sqrt[4]{b}$ à expressão mais simples.

(E. P. C. - Exército - 1955)

Efetuar :

32) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$

33) $(2+\sqrt{3})^2$

34) $(2\sqrt{5}-\sqrt{6})^2$

35) $(3-2\sqrt{2})^2$

36) $(2\sqrt{5}+3\sqrt{2})(2\sqrt{5}-3\sqrt{2})$

37) $(\sqrt{3}+3)(3-\sqrt{3})$

38) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{3}-\sqrt{5})$

39) $\sqrt{2}\times\sqrt{3+\sqrt{2}}$

40) $\sqrt{3+\sqrt{2}}\times\sqrt{3-\sqrt{2}}$

41) $\sqrt{2-\sqrt{3}}\times\sqrt{2+\sqrt{3}}$

42) $\sqrt{2}\times\sqrt{2-\sqrt{3}}\,.\,(1+\sqrt{3})$

43) Prove que $\sqrt{3}+1$ e $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ são iguais.

44) Prove a igualdade : $\sqrt{3-\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}$

45) Verifique a identidade

$$\sqrt{2}\,.\,\sqrt{2+\sqrt{2}}\,.\,\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\,.\,\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}=2$$

Calcule o valor das expressões :

46) $\sqrt[6]{x^3}\div\sqrt[4]{x^2}$

47) $\sqrt[6]{125a^3}\div\sqrt[6]{5a}$

48) $\dfrac{2\sqrt[6]{27}}{\sqrt[4]{9}}$ (E.P.C. do Ar - 1951)

49) $\sqrt[3]{6a^2}:\sqrt[6]{36a^3}$

50) $\sqrt[4]{8}:\sqrt[3]{4}$

51) Por quanto devo multiplicar o resultado de

$$\frac{1}{3}\sqrt{27}+3\sqrt[6]{27}+\sqrt{108}-9\sqrt[5]{\sqrt{243}}$$

para obter a unidade?

52) Resolva o sistema : $\begin{cases}2\sqrt{2}x-y=3\sqrt{2}\\2x-\sqrt{2}y=1\end{cases}$

53) Resolva o sistema : $\begin{cases}\sqrt{2}x-\dfrac{x-\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}>\sqrt{6}\\[2ex] x-\dfrac{2\sqrt{3}x-\sqrt{6}}{\sqrt{3}}>3x-3\sqrt{2}\end{cases}$

54) Resolva : $\dfrac{3x\sqrt{\dfrac{1}{3}}}{\sqrt{3}+4\sqrt{\dfrac{1}{3}}}=6$

Racionalizar o denominador de :

55) $\dfrac{6}{\sqrt{2}}$; $\dfrac{15\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$; $\dfrac{4}{\sqrt[3]{2^2}}$ (Col. Pedro II - 2.ª Série Ginasial - P. Parcial - 1954)

56) $\dfrac{x}{\sqrt[5]{x^2}}$ (E. P. C. Ar - 1956)

57) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$

58) $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}$

59) $\dfrac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$ (E. P. C. - Exército - Janeiro, 1953)

60) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ (E. P. C. - Exército - Julho, 1953)

61) $\dfrac{3}{\sqrt{7}-2}$

(E. P. C. - Exército - 1952)

62) $\dfrac{2}{4-\sqrt{2}}$

(E. P. C. do Ar - 1951)

63) $\dfrac{12\,(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

(E. P. C. Exército - 1955)

64) $\dfrac{12}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5}}$

65) $\dfrac{10\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

66) $\dfrac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

67) $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3-\sqrt{5}}}$

68) $\dfrac{7\sqrt{2}}{\sqrt{3+\sqrt{2}}}$

69) $\dfrac{4}{\sqrt[4]{5}-1}$

70) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}$

(E. P. C. - Exército - 1953)

71) Efetuar : $\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\dfrac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

72) Provar que $\dfrac{\sqrt{8}-2}{2-\sqrt{2}}$ é igual a $\sqrt{2}$

73) Verificar a igualdade

$$\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}$$

(E. P. C. - Exército - 1953)

74) Verificar a igualdade

$$\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$$

(E. P. C. - Exército - 1953)

75) Efetuar : $\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}-\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\right):(30+2\sqrt{15})$

76) Efetuar :

$$\sqrt[3]{192a}-\frac{24a}{\sqrt[3]{9a^2}}+\frac{5}{3a}\sqrt[3]{81a^4}-\frac{a}{b}\sqrt[3]{\frac{24b^3}{a^2}}+\sqrt[6]{9a^2}$$

77) Efetuar : $\left(\dfrac{a^{\frac{1}{m}}x^m}{a^{\frac{1}{n}}x^n}\right)^{\frac{1}{m-n}}\times\sqrt[mn]{a}$

78) Calcular a expressão :

$$(3+2\sqrt{5})^2-(3\sqrt{3}-2\sqrt{5})^2+(3\sqrt{2})^2-\sqrt{720}+\sqrt{2160}$$

(E. P. C. - Exército - Julho, 1953)

79) Completar :

a) $\sqrt{2}\times\sqrt[4]{\ldots}=\sqrt{6}$

b) $\sqrt{-9}$ é um número ....

c) $\sqrt{2}$ é um número ....

d) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{\sqrt{a}}}=\sqrt[\ldots]{a}$

e) $(1-\sqrt{3})^2$ ...... $(\sqrt{3}-1)^2$

(E. P. C. - Exército - Julho, 1953)

80) Considerando x um número qualquer, colocar o sinal no lugar da reticência :

$$\frac{x^2}{7+(x+1)^2}\ \ldots\ 0$$

(E. P. C. - Exército - Julho, 1953)

81) Efetuar as operações indicadas e simplificar :

$$\sqrt{\frac{a+b+c}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}}\times\sqrt{\frac{ab+ac+bc}{\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}}}$$

(C. Militar - Seleção 1.º Científico - 1954)

Respostas:

1) $\sqrt[6]{x}$

2) $\sqrt[8]{2}$

3) $\sqrt{x}$

4) $y\sqrt[3]{x}$

5) $a^2b^2\sqrt[5]{b^2c^2}$

6) $2a\sqrt[3]{ab}$

7) $\sqrt[6]{a^2b}$

8) $2\sqrt[15]{a}$

9) $(a+1)\sqrt{a}$

10) $\sqrt[m]{a^m b}$

11) $\sqrt[3]{24a^7}$

12) $\sqrt{18a^7b}$

13) $\sqrt{3}$

14) $\sqrt[6]{3} < \sqrt[3]{2} < \sqrt{5}$

15) $\sqrt[3]{5} < \sqrt{3} < \sqrt[6]{40}$

16) $\sqrt[6]{5}$

17) $\sqrt{5}$

18) $3\sqrt{2}$

19) $3\sqrt{2}$

20) $2xy\sqrt{xy}$

21) $3\sqrt{3}+\sqrt{7}$

22) $2\sqrt{6}$

23) 0

24) $9\sqrt{3}$

25) 0

26) 0

27) $\sqrt{3}$

28) 36 e $2\sqrt[6]{2}$

29) $\sqrt[4]{2}$

30) devemos sublinhar: E - C - C - E - C, respectivamente.

31) $\sqrt[3]{ab}$

32) $5+2\sqrt[3]{6}$

33) $7+4\sqrt{3}$

34) $26-4\sqrt{30}$

35) $17-12\sqrt{2}$

36) 2

37) 6

38) -2

39) $\sqrt{6+2\sqrt{2}}$

40) $\sqrt{7}$

41) 1

42) 2

43) Basta elevar ao quadrado.

44) idem

45) multiplica o 4.º fator pelo 3.º e o resultado pelo 2.º e o novo resultado pelo 1.º fator.

46) 1

47) $\sqrt[3]{5a}$

48) 2

49) $\sqrt[6]{a}$

50) $\sqrt[12]{2}$

51) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

52) 5/2 e $2\sqrt{2}$

53) impossível

54) $x=14$

55) $3\sqrt{2}$; $3\sqrt{10}$; $2\sqrt[3]{2}$

56) $\sqrt[5]{x^3}$

57) $\dfrac{\sqrt[5]{x^2}}{x}$

58) $\sqrt[4]{108}$

59) $\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}$

60) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3}$

61) $\sqrt{7}+2$

62) $\dfrac{4+\sqrt{2}}{7}$

63) $48+12\sqrt{15}$

64) $3\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{30}$

65) $2\sqrt{21}+3\sqrt{6}-\sqrt{14}-8$

66) $\sqrt{2-\sqrt{3}}$

67) $\sqrt{6+2\sqrt{5}}$

68) $\sqrt{42-14\sqrt{2}}$

69) $\sqrt[4]{125}+\sqrt[4]{5}+\sqrt{5}+1$

70) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{4}}{x-2}$

71) $\sqrt{6}+\sqrt{5}$

72) Basta racionalizar

73) idem

74) idem

75) $-\dfrac{1}{4}$

76) 0

77) x

78) $24\sqrt{15}$

79) *a)* 9; *b)* imaginário; *c)* irracional; *d)* 2mn; *e)* =

80) $\geq$

81) abc

EQUAÇÃO DO 2.º GRAU

Resolver :

1) $5x^2=0$

2) $14x^2+7x=0$

3) $\dfrac{x^2+2}{9}=3$

(E. P. C. - Exército - 1953)

4) $x^2+1=0$

5) $4x^2+17x+4=0$

(Maratona Intelectual - 1953)

6) $a^4m^2x^2-a^6m^4=0$

7) $ax^2+2ax-px=0$

8) $x^2-8ax+15a^2=0$

9) $ab(x^2+1)=(a^2+b^2)x$

10) $\dfrac{(a^2-b^2)(x^2+1)}{a^2+b^2}=2x$

(E. Naval)

11) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{3}{2}$

12) $6x^{-2}-17x^{-1}+12=0$

(E. Aeronáutica)

13) $x=\dfrac{3}{4-\dfrac{3}{4-x}}$

14) $\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{3}{x-1}=\dfrac{3}{(x-2)(x-1)}$ (E. P. C. - Exército - Julho, 1953)

15) $\dfrac{x-2}{x+1}+\dfrac{x-3}{x-1}=1$

16) $\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{4}{x-1}=5$

17) $k^2x^2-2pkx+p^2-q^2=0$

(E. P. C. - Exército - 1955)

18) $\dfrac{x+a}{x-a}+\dfrac{x+b}{x-b}=-2$

(E. P. C. - Exército - 1953)

19) Determine o valor da maior raiz da equação $3x^2+4x-2=0$

(E. P. C. do Ar - 1951)

20) Calcule o valor da raiz de maior valor absoluto na equação $2x^2+3x-2=0$

21) Calcular m na equação $mx^2-3x+m-1=0$ de modo que a unidade seja sua raiz.

22) Sabendo que $-\dfrac{3}{5}$ é raiz da equação $5mx^2-5x-1=0$, calcule o valor de m.

23) Sem efetuar o produto dos primeiros membros das equações: $(x-2)(x+2)=0$ e $(2x+1)(3x-5)=0$ calcule suas raízes.

24) Verifique se -2 é raiz de $2x^2-5x-18=0$

25) Sem resolver a equação $9x^2-6ax+a^2-4=0$ diga se $\dfrac{a-2}{3}$ é uma de suas raízes.

26) Determine os valores de k para os quais a equação: $(9k-12)x^2-(2k+7)x+k+5=0$

1.º) tem raízes simétricas;

2.º) tem uma só raiz nula. (E. P. C. - Exército - 1955)

27) Determinar m e p de modo que sejam nulas as raízes da equação: $m(x^2-x+1+m)+px=x+2$

(E. P. C. - Exército - 1953)

28) Que valores pode assumir o parâmetro k para que a equação abaixo tenha uma das raízes nulas?

$$x^2-6x+k^2-3k-4=0$$

(E. P. C. - Exército - Julho, 1953. 3.º Ano)

29) Determinar m e p na equação $(m-p)x^2+(m-2)x-4=0$ de modo que suas raízes sejam simétricas.

30) Calcule m e p para que a equação $2x^2-5px+2m-4=0$ tenha uma e sòmente uma raiz diferente de zero.

31) Qual o valor de m para que a equação $(m-1)x^2+3mx-2m=0$ tenha uma só raiz não nula.

32) Determinar k de modo que as raízes da equação $5x^2+9x+k=0$ sejam reais e desiguais.

(E. P. C. - Exército - 1953)

33) Achar m para que as raízes de $4x^2+(m+1)x+m+6=0$ sejam reais e iguais.

34) Achar m para que a equação $4x^2-4x+2m-1=0$ não possua raízes reais.

35) Determinar os valores de m para que a equação abaixo tenha raízes iguais:

$$x^2-(m-1)x+m-2=0$$

(E. P. C. - Exército - Julho, 1953)

36) Determinar m para que a equação $x^2-m(x-1)=2-x$ tenha uma raiz dupla.

37) Achar m para que a equação $(2m+1)x^2+4mx+2(m-1)=0$ tenha duas raízes distintas.

38) Qual a condição para que as raízes da equação $mx^2+nx+p=0$ sejam imaginárias? (E. P. C. do Ar - 1951)

39) Determinar k de sorte que a equação $(x-k)^2+3(x-2k)=0$ tenha uma raiz igual a zero.

(Col. Militar - Seleção 1.º Científico - 1954)

40) a) Calcular m na equação $x^2-(m-1)x+m-2=0$ de modo que as raízes sejam reais e iguais.

b) Calcular m na equação : $x^2-3x+2(m-1)=0$ de modo que as raízes sejam reais e desiguais.

(Col. Pedro II - 4.ª Série Ginasial - 2.ª P. Parcial - 1954)

41) Qual o maior número inteiro que torna as raízes da equação $x^2-3x+m-1=0$ reais e desiguais.

42) Calcule o maior valor inteiro de m para o qual a equação $x^2+3x-m-5=0$ não tenha raízes reais.

43) Calcule o menor valor inteiro de m para que as raízes de $(1-m)x^2-2x+1=0$ sejam reais e desiguais.

44) Dada a equação $3x^2-7x+1=0$, determinar $x'+x''$ e $x'.x''$, sem resolver a equação. (E. P. C. do Ar - 1952)

45) Calcule a soma dos quadrados das raízes da equação $x^2-2x+6=0$

(I. Educação - 2.ª P. Parcial - 4.ª Série Ginasial - 1953)

46) Sem resolver a equação $3x^2-2x-5=0$, calcule a soma dos inversos de suas raízes.

47) Calcule a soma dos cubos das raízes de $3x^2+6x-1=0$

48) Sem resolver a equação $x^2-2(a-b)x+(a-b)^2=0$ calcule a média aritmética e a média geométrica de suas raízes.

49) Sem resolver a equação $2x^2-4x+1=0$ achar a soma dos quadrados de suas raízes.

50) Calcular h na equação $(h+3)x^2-2(h+1)x+h-10=0$ de modo que a soma dos inversos das raízes seja $\frac{1}{3}$.

(E. Aeronáutica - 1942)

51) Dada a equação $x^2-5x+q=0$, achar q de modo que :

a) uma das raízes seja 3 ;

b) a soma dos inversos das raízes seja $\frac{5}{4}$.

(Col. Militar - Admissão - 1945)

52) Determinar m, na equação $x^2-mx+6=0$, de modo que a soma dos inversos dos quadrados de suas raízes seja $\frac{13}{36}$.

53) Achar m, para que a equação $2x^2+mx+1=0$ tenha a soma dos quadrados de suas raízes igual a $\frac{5}{4}$.

54) Calcular m na equação $2x^2-mx+x+8=0$ de modo que a soma das raízes seja 5.

(Col. Pedro II - 4.ª Série Ginasial - P. Parcial - 1953)

55) Calcular m de modo que as raízes da equação $x^2-mx+6=0$ satisfaçam a condição : $3x'+2x''=13$

(E. C. Dutra - 4.ª Série Ginasial - 1953)

56) Calcular m de modo que a média harmônica das raízes de $2x^2-x+m=0$ seja igual a 10.

57) Sendo a e b as raízes da equação $2x^2-4x+1=0$ calcule o valor de : $(a+b)^2-a^2-b^2+a^3+b^3$

58) Sem resolver as equações abaixo diga qual o sinal de suas raízes :

a) $2x^2-8x+5=0$
b) $3x^2+5x+1=0$
c) $5x^2-2x+8=0$
d) $2x^2-x-3=0$
e) $x^2+x-12=0$
f) $m^2x^2-2x+1=0$
g) $x^2+m^2x+1=0$
h) $-5x^2+9x-4=0$

59) Sem resolver a equação $5x^2+22x-15=0$ diga :

a) se as raízes têm o mesmo sinal ; porque?

b) qual o sinal da maior raiz ; porque?

(E. P. C. Exército - 1952)

60) Reconheça os sinais da seguinte equação :

$ax^2+a^3x+a^2+b^2=0$ (E. P. C. - Exército - 1955)

61) Calcular m na equação $mx^2-3x+1=0$ de modo que suas raízes sejam positivas.

62) Calcular o menor valor inteiro de m para o qual as raízes da equação $mx^2+3x-1=0$ são positivas.

63) Calcular m de modo que as raízes da equação $2x^2+3x+m=0$ sejam reais, iguais e negativas.

64) Calcular o valor inteiro de m para o qual a equação $2x^2+3x+m=0$ tem raízes reais, desiguais e negativas.

65) Calcular o maior valor inteiro de m para o qual as raízes de $mx^2-3x+1=0$, sejam reais, desiguais e de sinais contrários.

66) Calcular m de modo que a equação $(m-2)x^2+2x-1=0$ tenha raízes de sinais contrários sendo a maior, em valor absoluto, negativa.

Formar as equações cujas raízes são :

67) 2 e -5

68) $-0{,}5$ e $0{,}4$

69) $-2/3$ e $9/16$
(Col. Pedro II - Art. 91)

70) $2m$ e 0

71) $\pm k$

72) $\dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

73) $2+\sqrt{3}$ e $2-\sqrt{3}$
(Col. Pedro II - 4.ª Série Ginasial - P. Parcial - 1953)

74) Escreva a equação do 2.º grau cuja maior raiz é nula e cujo valor absoluto da menor raiz é $(3\sqrt{2})^2$.

75) Compor a equação do 2.º grau cujas raízes são os valores absolutos de x e y no sistema $\begin{cases} 2x+2y=3 \\ 3xy=1 \end{cases}$

76) Estabelecer a equação do 2.º grau cujo produto de suas raízes é 1 e a maior é $2+\sqrt{3}$

77) Armar a equação do 2.º grau, que tenha para soma de suas raízes a raiz da equação

$$\frac{(3-x)^2}{2}-5x-\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=-37{,}325-\frac{x-1}{5}$$

e para soma dos inversos das raízes $\dfrac{5}{6}$.

(E. Aeronáutica - Exame Seleção. C. Prévio - 5/1/49)

78) Ache os valores de a, para que as equações $x^2-ax+8=0$ e $x^2-5x+6=0$ tenham uma raiz comum.

79) Determinar m para que a unidade seja raiz comum das equações $x^2-3mx+m=0$ e $x^2-5x+4=0$

80) Calcular m para que as equações $x^2-6x+m=0$ e $x^2-11x+6m=0$ tenham uma raiz comum.

81) Determinar c na equação $x^2-10x+c=0$, de modo que uma raiz seja o quádruplo da outra.

82) Determinar c na equação, de modo que suas raízes sejam consecutivas : $x^2-7x+c=0$

83) Determinar b na equação $2x^2+bx+1=0$ de modo que uma de suas raízes seja a metade da outra.

84) Que valores se deverão atribuir a m, na equação $x^2+mx+8=0$, para que uma das raízes seja dupla da outra? (Aptidão ao Inst. Sup. de Agronomia - Portugal - 1942)

85) Determinar a, de modo que uma das raízes de $ax^2-8x+3=0$ seja o triplo da outra.

86) Calcular m para que a equação $x^2-6x+m-1=0$ tenha o quociente de suas raízes igual a 2.

87) Calcular o menor valor de m na equação $mx^2-(3m-1)x+$ $+m=0$ de modo que a razão entre suas raízes seja 1/4.

88) Calcular m de modo que as raízes da equação abaixo existam e sejam inversas.

$$2x^2+5x+2m-3=0$$

89) Determinar m, de modo que uma das raízes da equação $(m-1)x^2-8x+3=0$ seja o inverso da outra.

90) Dada a equação $2x^2-3x+4=0$, cujas raízes são x' e x'', forme outra equação cujas raízes são $\dfrac{1}{x'}$ e $\dfrac{1}{x''}$

91) Dada a equação $x^2-14x+25=0$, formar outra equação cujas raízes sejam, respectivamente, a média aritmética e a média geométrica das raízes da equação dada.

92) Dada a equação $x^2-2px+q^2=0$, forme ouyra equação do 2.° grau cujas raízes sejam, respectivamente, a média aritmética e a média geométrica das raízes da equação dada. (E. P. C. – Exército – 1955)

93) Completar :

a) A equação incompleta do 2.° grau que tem uma raiz nula é da forma -------------- $= 0$

b) Quando a soma das raízes da equação do 2.° grau fôr nula, a equação é do tipo -------------- $= 0$

c) Supondo $a>0$ e sendo x' e x'' as raízes de $ax^2+bx+c=0$ quando $x' \cdot x''<0$ teremos $\dfrac{c}{-a}$ ------ 0

94) Complete : (E. P. C. – Exército – 1953)

a) A soma das raízes da equação $3x^2+5x-9=0$ é ------

b) Quando $b=0$ as raízes da equação $ax^2+bx+c=0$ são ----------

c) A equação cujas raízes são 3 e -7 é ----------

d) A equação $(x-2)(x+5)=0$ tem para raízes -------- e ----------

(I. Educação – 2.ª P. Parcial – 4.ª Série – 23/11/53)

95) Determine c na equação $4x^2-12x+c=0$ de modo que a diferença das raízes seja nove. (C. Naval – 1956)

RESPOSTAS:

1) 0 e 0
2) 0 e $-\dfrac{1}{2}$
3) $x=\pm 5$
4) não existem raízes
5) -4 e $-\dfrac{1}{4}$
6) $x=\pm am$
7) 0 e $\dfrac{p-2a}{a}$
8) $5a$ e $3a$
9) $\dfrac{a}{b}$ e $\dfrac{b}{a}$
10) $\dfrac{a+b}{a-b} \cdot \dfrac{a-b}{a+b}$
11) 3 e $\dfrac{4}{3}$
12) 3/4 e 2/3
13) 3 e 1
14) $x=3$ (1 é raiz extranha, pois anula o m.m.c.)
15) 0 e 5
16) 3 e 3/2
17) $\dfrac{p \pm q}{k}$
18) 0, $\dfrac{a+b}{2}$
19) $\dfrac{-2+\sqrt{10}}{3}$
20) -2
21) $m=2$
22) $m=-10/9$

23) 3, -2 e $-\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{5}{3}$
24) É. (Basta substituir x por -2)
25) Sim
26) $-3{,}5$ e -5
27) $m=2$, $p=-1$ ou $m=1$, $p=2$
28) 4 ou -1
29) $m=2$ e $p<2$
30) $m=2$ e $p\neq 0$
31) não há valor de m
32) $k<81/20$
33) $m=-5$ ou $m=19$
34) $m>1$
35) $m=3$
36) $m=3$
37) $m>-1$ e $m\neq -\dfrac{1}{2}$
38) $n^2<4mp$
39) 0ou 6
40) $m=3$ e $m<17/8$
41) 3
42) -8
43) 2
44) 7/3 e 1/3
45) -8
46) $-0{,}4$
47) -10
48) $a-b$ e $a-b$
49) 3
50) $-16/5$
51) 6 e 4
52) ± 5
53) ± 3
54) 11
55) 35/6 e 5
56) 5
57) 6

58) *a*) positivas; *b*) negativas; *c*) não tem raízes reais; *d*) de sinais contrários sendo a maior em valor absoluto positiva; *e*) de sinais contrários sendo a maior em valor absoluto negativa; *f*) positivas; *g*) negativas; *h*) positivas.

59) *a*) Não; porque o produto $\dfrac{c}{a}<0$; *b*) a *maior* raiz é positiva, porque um número positivo é maior do que um negativo; a maior raiz, *em valor absoluto*, é negativa porque a soma $\dfrac{-b}{a}<0$.

60) Se $a>0$, negativas; se $a<0$, de sinais contrários sendo a maior em valor absoluto negativa.

61) $m \geq \dfrac{9}{4}$
62) -2
63) 9/8
64) 1
65) -1
66) $m>2$
67) $x^2+3x-10=0$
68) $10x^2+x-2=0$
69) $48x^2+5x-18=0$
70) $x^2-2mx=0$
71) $x^2-k^2=0$
72) $x^2-3x+1=0$
73) $x^2-4x+1=0$
74) $x^2+18x=0$
75) $6x^2-9x+2=0$
76) $x^2-4x+1=0$
77) $x^2-5x+6=0$
78) $a=17/3$ ou $a=6$
79) 1/2
80) $m=0$ ou $m=5$
81) 16
82) 12
83) ± 3
84) ± 6
85) 4
86) 9
87) 2/11
88) 2,5
89) 4
90) $4x^2-3x+2=0$
91) $x^2-12x+35=0$

92) $x^2-(p+q)x+pq=0$

93) $ax^2+bx=0$; $ax^2+c=0$; $\frac{c}{-a}>0$

94) $-5/3$ e -3; reais e simétricas se $\frac{c}{a}<0$; $x^2+4x-21=0$; 2 e -5

95) $c=-72$

SISTEMAS DE EQUAÇÕES DO 2.º GRAU

Resolver :

1) $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x+y=7 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2-y^2=8 \\ x+y=4 \end{cases}$

Resolver os sistemas redutíveis ao 2.º grau :

4) $\begin{cases} x^2-y^2=15 \\ x^2-y^2+xy=31 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ xy=3 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 9x^2+2y^2=17 \\ 4x^2-3y^2=-8 \end{cases}$

7) $\begin{cases} \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=2 \\ \frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}=16 \end{cases}$

8) $\begin{cases} \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=\frac{25}{7} \\ x=\frac{48}{y} \end{cases}$

(E. Militar - 1937)

9) $\begin{cases} x^2+y^2-(x+y)=48 \\ x+y+xy=31 \end{cases}$

(E. Militar - 1940)

10) $\begin{cases} 2x+y=7 \\ x+\sqrt{y}=4 \end{cases}$

RESPOSTAS:

1) 2 e 3; 3 e 2
2) 4 e 3; 3 e 4
3) 3 e 1
4) 5 e 3; -5 e -3
5) $x=\pm3$ e $y=\pm1$; $x=\pm1$ e $y=\pm3$
6) $x=\pm1$ e $y=\pm2$
7) $\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{3}$
8) 8 e 6; -8 e -6
9) 3 e 7; 7 e 3
10) $x=3$, $y=1$

PROBLEMAS DO 1.º GRAU

1) Um pai diz a seu filho : hoje, a sua idade é $\frac{2}{7}$ da minha e há 5 anos era $\frac{1}{6}$. Qual a idade do pai e qual a do filho? (E. P. C. - Exército - 1953)

2) Uma pessoa possui 2 cavalos e uma sela que vale Cr$ 150,00. Colocando a sela no primeiro cavalo, vale êste o dôbro do segundo. Colocando-a no segundo, vale êste Cr$ 300,00 menos do que o primeiro. Quanto vale cada cavalo? (Maratona Intelectual - 1953)

3) A soma dos dois algarismos de um número é o maior número de um algarismo. Qual é êsse número, se quando lhe somamos 45 obtemos um outro número escrito com os mesmos algarismos?

4) Dois operários fazem, juntos, um trabalho em 12 dias. Um dêles sòzinho faz êsse trabalho em 20 dias. Em quantos dias o outro fará, também só, o mesmo trabalho?

5) Que horas são, se o que ainda resta para terminar o dia é $\frac{2}{3}$ do que já passou?

6) Um pai tem 32 anos e o seu filho 14 ; quando aconteceu ou acontecerá que a idade de um seja o triplo da do outro?

7) Num quintal há, galinhas e coelhos. Ao todo 45 cabeças e 106 pés. Quantos coelhos há no quintal?

8) Uma torneira enche um tanque em 12 horas e outra em 18 horas. Em quantas horas e minutos as duas juntas encherão o tanque?

9) A que horas, entre 3 e 4 horas, os ponteiros do relógio se encontram?

10) Em que instante, entre 4 e 5 horas, os ponteiros de um relógio estão opostos?

11) Em que instante, entre 5 e 6 horas, os ponteiros de um relógio formam um ângulo reto?

12) Dois correios partem, no mesmo instante e no mesmo sentido, de dois locais A e B, distantes de 6km. Sabendo que têm velocidades respectivamente iguais a 7km/h e 5km/h, pergunta-se quanto tempo levará o que partiu de A para alcançar o outro?

13) Dois trens partem, no mesmo instante, e em sentidos opostos, de duas cidades A e B, com velocidades respectivamente iguais a 60km/h e 50km/h. Sabendo-se que a distância entre as duas cidades é 330km, pergunta-se a que distância de A se encontrarão?

14) Um navio parte de um pôrto com a velocidade de 8 nós (milhas por hora); duas horas e meia após parte, do mesmo pôrto, outro navio no mesmo sentido e com a velocidade de 12 nós. No fim de quantas horas o segundo alcançará o primeiro?

15) A tripulação de um escaler emprega 3 horas em remar 16 milhas rio abaixo e em regressar. Em remar 12 milhas rio acima, emprega o mesmo tempo que em remar 4 milhas rio abaixo. Achar a velocidade do rio.

16) Resolver o seguinte problema: Num depósito, há viaturas de 4 rodas e de 6 rodas, ao todo 40 viaturas e 190 rodas. Quantas viaturas há de cada espécie, no depósito? (A solução deve ser algébrica).
(E. P. C. - Exército - Julho, 1953. 1.º Ano)

17) Resolva o problema: Há 18 anos, a idade de uma pessoa era o duplo de uma outra; em 9 anos a idade da primeira passou a ser 5/4 da da segunda. Que idade tem as duas atualmente? (E. P. C. - Exército - 1952)

18) Resolva o seguinte problema: Determinar um número de 3 algarismos compreendido entre 400 e 500, sabendo que a soma dos seus algarismos é 9 e que o número invertido é igual a 36/47 do número primitivo.
(E. P. C. - Exército - 1955)

19) Tem-se galinhas e carneiros, ao todo 21 cabeças e 50 pés. Quantos animais há de cada espécie?
(Col. Pedro II - Artigo 91 - 1949)

20) Um n.º foi dividido em 3 partes, sendo a 2.ª o dôbro de 1.ª e a 3.ª o dôbro da 2.ª. Se o n.º fôsse duplicado a 2.ª parte aumentaria de uma unidade. Calcule êsse n.º.
(I. Educação - 1956)

RESPOSTAS:

1) 35 e 10 anos
2) Cr$ 600,00 e Cr$ 1 050,00
3) 27
4) 30 dias
5) 14h 24min
6) 5 anos atraz
7) 8
8) 7h 24min
9) 3h 16min $\frac{4}{11}$
10) 4h 54min 32s $\frac{8}{11}$
11) 5h 10min $\frac{10}{11}$ e 5h 43min $\frac{7}{11}$
12) 3 horas
13) 180km
14) 5 horas
15) 4 nós
16) 25 e 15
17) 24 e 21
18) 423
19) 17 galinhas e 4 carneiros
20) 3,5

PROBLEMAS DO 2.º GRAU

1) Determine dois números cuja soma seja (-2) e o produto seja (-15). Solução algébrica.
(E. P. C. - Exército - 1952)

2) Dois números inteiros estão entre si na razão $\frac{5}{7}$ e a diferença entre seus quadrados excede de 5 centenas o quádruplo do menor. Calcular os números.
(E. P. C. - Exército - 1953)

3) A soma de dois números é 7 e o primeiro mais a raiz quadrada do segundo é 5. Achar os números.

4) A soma dos quadrados de dois números inteiros e positivos é 41. Achar êsses números, sabendo-se que são consecutivos.

5) A diferença dos quadrados de dois números inteiros é 32. O triplo do menor excede o dôbro do maior de 3 unidades. Achar os números.

6) Qual o menor dos dois números cuja soma é 2 e o produto é $\frac{5}{9}$?

7) A diferença de dois números é uma dezena. Qual o menor dos dois números, se êle excede a raiz quadrada do maior de 2 unidades.

8) Qual é o número que, diminuido de duas unidades, é igual ao valor absoluto de sua têrça parte?

9) Qual é o número cujo valor absoluto de sua têrça parte é igual a 7 menos o dôbro dêsse mesmo número?

10) Pôr em equação e resolver o seguinte problema: Qual o número que é sempre igual à diferença entre o valor absoluto de seu dôbro e 15 unidades?

11) Pôr em equação e resolver o seguinte problema: Qual é o número que é igual ao valor absoluto da diferença entre o seu triplo e 12 unidades?

12) A soma de dois números é 14 e a soma dos seus quadrados, 100. Quais são os números?

(E. P. C. - Exército - Julho, 1953)

13) João, que fêz um percurso de 30km, teria gasto 4 horas menos se aumentasse sua velocidade de 2km/h. Qual a velocidade de João?

14) Duas torneiras enchem um tanque, juntas, em 6 horas. A primeira gasta 5 horas mais do que a segunda para fazê-lo sòzinha. Quanto tempo gastará, isoladamente, a segunda para encher o tanque?

15) O produto dos dois algarismos de um número é 12. Trocando a posição dos algarismos, obteremos um outro número que excede o primitivo de 36 unidades. Qual o número?

16) Um indivíduo, que fêz uma viagem de 630km, teria gasto menos 4 dias se caminhasse mais 10km por dia. Quantos dias gastou na viagem e quantos quilômetros caminhou por dia? (E. N. Engenharia - 1936)

17) Determinar um número de dois algarismos, tal que, dividindo-o pela soma dos algarismos, é igual ao quociente 4; e que o produto dêstes algarismos mais 52 é igual ao número, escrito em ordem inversa.

(C. P. O. R. - Seleção - Novembro, 1950)

RESPOSTAS:

1) -5 e 3	**7)** 6	**12)** 6 e 8
2) 25 e 35	**8)** 3	**13)** $3km/h$
3) 4 e 3	**9)** 3 e $\frac{21}{5}$	**14)** 10h
4) 4 e 5		**15)** 26
5) 7 e 9	**10)** 15 e -5	**16)** 18d e 35km/d
6) $\frac{1}{3}$	**11)** 6 e 3	**17)** 48

---

2) GEOMETRIA

ÂNGULOS

1) Um ângulo mede 63°. Calcule seu complemento em graus e grados.

2) Um ângulo mede 130gr. Calcule seu suplemento em graus e grados.

3) Um ângulo mede 314° 24′. Calcule o seu replemento em graus e grados.

4) Um ângulo mede 44° 9′ 36″. Calcule, em graus e grados, seu complemento, suplemento e replemento.

5) Calcular, em graus, o complemento, o suplemento e o replemento do ângulo 38″.

6) Um ângulo mede 35,92gr. Calcular seu complemento, suplemento e replemento.

7) Um ângulo mede 9,4gr. Calcule, em grados e em graus, o complemento, o suplemento e o replemento dêsse ângulo.

8) Um ângulo x mede 34° 45′ 30″. Calcular os ângulos $A=2x$, $B=3x$ e $C=5x$.

9) O ângulo $x=30°\ 18'\ 40''$. Calcule o suplemento do ângulo $A = \frac{x}{2}$.

10) Qual o complemento de um ângulo cuja medida é dez vêzes menor do que 109° 5′ 20″?

11) Um ângulo $A=0{,}5$ grados. Qual o suplemento de um ângulo B, que é 20 vêzes menor do que A?

12) A diferença de dois ângulos é 9° 32′ 24″. Qual a diferença de seus complementos, em grados?

13) A diferença dos suplementos de dois ângulos é 60,6gr. Qual a diferença entre êsses ângulos?

14) A diferença entre dois ângulos adjacentes, de lados exteriores em linha reta, é 20°,5. Quantos minutos possui o menor dêsses dois ângulos?

15) Dois ângulos opostos pelo vértice somam 81° 3′ 4″. Qual o replemento de cada um dêsses ângulos?

16) Dois ângulos opostos pelo vértice somam 180°. Como são as retas que formam êsses ângulos?

17) Duas retas incidentes formam 4 ângulos tais que a soma dos dois menores é a metade de um dos ângulos obtusos formados. Calcular o maior dêsses ângulos.

18) Calcular o ângulo que aumentado de 20′ é igual ao seu complemento.

19) Calcular o ângulo que excede seu complemento de 40″.

20) Qual o ângulo que diminuido de seu complemento é a metade de seu suplemento?

21) Por um ponto P de uma reta r traçam-se, do mesmo lado de r, duas semi-retas. Calcular os três ângulos formados sabendo-se que suas medidas, expressas em graus, são números consecutivos.

22) Qual a medida, em graus, do ângulo agudo que os ponteiros formam às duas horas?

23) Qual a medida sexagesimal do menor dos ângulos que os ponteiros fazem às 3h 30min?

24) Dois ângulos são complementares; os $\frac{2}{3}$ do maior excedem os $\frac{3}{4}$ do menor de 69°. Quais são os ângulos?

25) O dôbro do complemento de um ângulo aumentado de 36° é igual ao seu suplemento. Calcular o ângulo.

26) Ache o ângulo cujos $\frac{2}{3}$ do seu suplemento menos os $\frac{3}{5}$ do seu complemento são iguais ao ângulo aumentado de sua trigésima parte.

27) Qual é o ângulo que, somado à metade do seu replemento, excede o seu suplemento de $\frac{3}{4}$ do seu complemento?

28) Dois ângulos m e n são adjacentes de lados exteriores em linha reta e, expressos em graus, são respectivamente iguais a $3x-40$ e $2x+60$. Ache o ângulo m.

29) Os ângulos a, b, c e d estão situados num mesmo plano e em tôrno de um ponto e, expressos em graus, são, respectivamente, iguais a $3x-20$, $2x+60$, $3x+40$ e $4x+40$. Calcule o maior dêsses ângulos.

Na fig. 1, calcular os elementos indicados, para cada uma das hipóteses feitas a seguir :

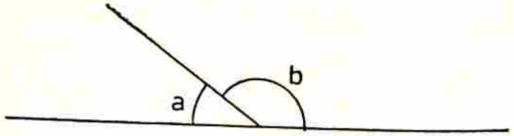


Fig. 1

30) Se $b-a=20^\circ$. Achar o menor dos ângulos.

31) Se $a=\dfrac{3}{5}b$. Achar b.

32) Se o dôbro do menor é o complemento da quinta parte do maior, qual a medida do menor?

33) Se, expressos em graus, $a=5x-60$ e $b=4x+42$. Achar b.

34) Prove que as bissetrizes de 2 ângulos adjacentes suplementares formam um ângulo reto.

35) Prove que as bissetrizes de 2 ângulos opostos pelo vértice formam um ângulo meia volta.

36) Sendo $\widehat{AOB}=30^\circ$, prove que existe uma semi-reta OC, interior ao ângulo, tal que : $\widehat{AOC}=2\,\widehat{BOC}$.

37) Pelo vértice O de $\widehat{AOB}$ traçam-se duas semi-retas interiores OC e OD. Prove que, se $\widehat{AOC}=\widehat{BOC}$ e $\widehat{DOB}>\widehat{DOA}$, então $\widehat{DOC}$ é a semi-diferença entre os ângulos $\widehat{DOB}$ e $\widehat{DOA}$.

38) Prove que o ângulo formado pelas bissetrizes de dois ângulos adjacentes é igual à semi-soma dêsses ângulos.

ÂNGULOS — PARALELAS

1) Duas paralelas cortadas por uma transversal formam um ângulo de $38^\circ\ 45'\ 12''$. Calcular os outros ângulos da figura.

2) A soma dos ângulos agudos, formados por 2 retas paralelas cortadas por uma terceira, mede 240,24 grados. Achar o valor dos ângulos obtusos.

3) Um dos ângulos, que uma transversal forma com duas paralelas, vale 3/5 de seu adjacente. Qual o valor, em graus e minutos, dos oito ângulos da figura?

4) A diferença entre dois ângulos colaterais externos formados por duas paralelas e uma secante mede 36°. Achar o menor dêsses ângulos.

5) Duas paralelas cortadas por uma transversal formam dois ângulos correspondentes representados, em graus, por $5x+20$ e $2x+50$, respectivamente. Calcular êsses ângulos. (Col. Pedro II - 3.ª Série Ginasial - P. Parcial - 1953)

Na figura 2, calcular os elementos indicados, para cada uma das hipóteses feitas a seguir :

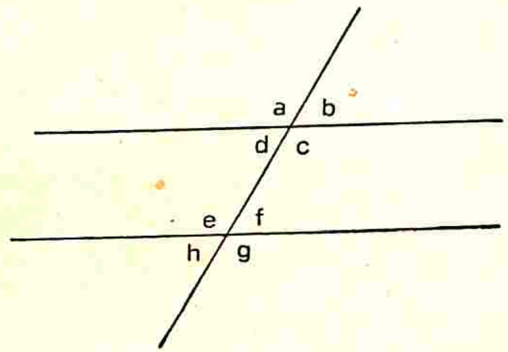


Fig. 2

6) Calcular o ângulo formado pelas bissetrizes dos ângulos b e c.

7) Se $c-f=60^\circ$. Calcular h.

8) Se $a=5h$. Calcular c.

9) Se a soma dos ângulos agudos mede 124°, achar a.

10) Se dois ângulos colaterais externos diferem de 20°, achar b.

11) Se, expressos em graus, $d=2x+10$ e $e=8x-30$, achar d.

12) Se, expressos em graus, $a=5x-30$ e $g=3x+20$, achar g.

13) Duas retas r e s cortadas por uma transversal formam ângulos alternos internos, expressos em graus, por $2m+30$ e $3m-20$. Calcular m, para que r e s sejam paralelas.

14) Três retas, 2 a 2 concorrentes, formam 8 ângulos, dos quais a soma dos 4 agudos é 288°. Pode acontecer que 2 dessas retas sejam paralelas?

15) Uma reta r intercepta uma reta x formando dois ângulos adjacentes que diferem de um ângulo reto. A reta s, incidente a x, que forma com x ângulos agudos complementares é paralela a r?

RESPOSTAS:

ÂNGULOS

1) 27° e 30gr
2) 63° e 70gr
3) 45° 36′ e 56gr
4) 45° 50′ 24″; 135° 50′ 24″; 315° 50′ 24″ e 58,93gr; 158,93gr; 358,93gr
5) 89° 59′ 22″; 179° 59′ 22″ e 359° 59′ 22″
6) 64,08gr; 164,08gr e 364,08gr
7) 90,6gr; 190,6gr; 390,6gr e 81° 32′ 24″; 171° 32′ 24″; 351° 32′ 24″
8) 69° 31′; 104° 16′ 30″; 173° 47′ 30″
9) 172° 25′ 20″
10) 79° 5′ 28″
11) 199,975gr
12) 10,6gr
13) 54° 32′ 24″
14) 4 785′
15) 319° 28′ 28″
16) perpendiculares
17) 144°
18) 44° 50′
19) 45° 20″
20) 72°
21) 59°, 60° e 61°
22) 60°
23) 75°
24) 144° e 36°
25) 36°
26) 60°
27) 30°
28) 56°
29) 120°
30) 80°
31) 112° 30′
32) 30°
33) 130°

ÂNGULOS — PARALELAS

1) 4 de 38° 45′ 12″ e 4 de 141° 14′ 48″
2) 139, 96gr
3) 22° 30′ e 157° 30′
4) 72°
5) 70°
6) 90°
7) 60°
8) 150°
9) 149°
10) 80°
11) 50°
12) 95°
13) 50°
14) Não
15) Sim

ÂNGULOS — TRIÂNGULOS

1) O ângulo do vértice de um triângulo isósceles mede 32° 15′ 32″. Quanto medem os ângulos da base?
(Col. Pedro II - 3.ª Série Ginasial - P. Parcial - 1953)

2) Um dos ângulos da base de um triângulo isósceles mede 35° 6′. Calcular o ângulo do vértice.

3) Um dos ângulos externos da base de um triângulo isósceles mede 102° 52′. Calcular o menor ângulo do triângulo.

4) Em um triângulo retângulo dois ângulos somam 158° 12′ 30″. Calcular os ângulos do triângulo.

5) Calcular o ângulo agudo formado pelas bissetrizes dos ângulos de um triângulo retângulo isósceles.

6) Calcular o ângulo obtuso formado pelas bissetrizes de dois ângulos de um triângulo equilátero?

7) Em um triângulo retângulo um ângulo agudo é $\frac{3}{4}$ do outro. Qual o valor do menor dos ângulos do triângulo?

8) Em um triângulo retângulo, os ângulos, em grados, medem, respectivamente, x, $3x$ e $4x$. Calcular o maior ângulo agudo.

9) Em um triângulo, o ângulo externo do maior ângulo é igual a êsse ângulo. Qual o valor de cada ângulo se o maior excede o menor de 67° 38′ 40″?

10) Num triângulo escaleno um dos ângulos da base excede o outro de 12° e o ângulo externo do terceiro ângulo mede 154°. Calcular o maior ângulo.

11) Num triângulo acutângulo um dos ângulos mede 87°. A diferença entre os dois menores ângulos é 25°. Calcular os ângulos do triângulo.

12) Ache os ângulos de um triângulo ABC sabendo-se que o ângulo A é a metade de B, e êste, o dôbro de C.

13) Em um triângulo isósceles, o ângulo do vértice é $\frac{1}{5}$ do ângulo formado pelas bissetrizes dos ângulos da base. Qual o valor do menor ângulo interno?

14) Num triângulo acutângulo ABC a bissetriz BM e a altura BH fazem um ângulo de 20°. Ache o maior dos ângulos do triângulo se um dêles mede 60°.

15) Num triângulo retângulo a mediana, relativa à hipotenusa, forma com a bissetriz de um dos ângulos agudos um ângulo de 126°. Calcular os ângulos agudos do triângulo.

16) Num triângulo retângulo a mediana relativa à hipotenusa forma com essa hipotenusa um ângulo de 120°. Determinar os ângulos agudos do triângulo retângulo.

(E. P. C. - Exército - Julho, 1953. 3.º Ano)

17) Num triângulo isósceles o ângulo externo desigual é igual à quinta parte da soma dos dois outros ângulos externos. Qual a medida do ângulo interno desigual?

18) Num triângulo retângulo isósceles, calcular o ângulo que forma as bissetrizes externas de dois ângulos externos desiguais.

19) As medidas dos ângulos de um triângulo são em graus, números consecutivos, calcular o ângulo oposto à base, que é o maior lado.

20) Num triângulo ABC a diferença entre dois de seus ângulos é 40°. Achar o ângulo formado pela bissetriz e a altura traçadas do vértice do terceiro ângulo.

21) Num triângulo retângulo, o ângulo formado pela bissetriz e a altura, traçadas do vértice do ângulo reto, mede 24°. Qual o valor do menor ângulo interno?

22) Em um triângulo retângulo, a mediana e a altura traçadas do vértice do ângulo reto formam um ângulo de 18°. Calcule os ângulos internos do triângulo.

23) Num triângulo ABC, a bissetriz externa CF forma com a bissetriz interna BF um ângulo de 10° e a altura AH forma com a bissetriz interna AS um ângulo de 30°. Calcular os ângulos do triângulo.

24) Num triângulo ABC, o ângulo A mede 43° 20′ 12″. Calcular o ângulo formado pela bissetriz interna de B com a bissetriz externa de C.

25) Num triângulo retângulo, o ângulo formado pela altura e bissetriz traçadas do vértice do ângulo reto mede 31° 48′ 57″. Calcular o ângulo formado pela altura e a mediana traçadas, também, do vértice do ângulo reto.

26) Em um triângulo, um ângulo mede 20° 15′ 30″. Calcular o ângulo formado pelas bissetrizes internas dos dois outros ângulos.

27) Num triângulo, o ângulo formado pelas bissetrizes internas dos dois menores ângulos mede 155°. Calcular o maior ângulo do triângulo.

28) Se $a+x=180°$, prove que $x=y$ (fig. 3).

29) Se $a = \frac{3}{2}y$ e $x = \frac{5}{6}a$, calcule x (fig. 3).

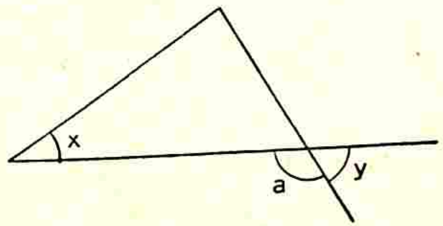


Fig. 3

30) Provar que num triângulo ABC, em que $\hat{B}=3\hat{C}$ o ângulo x formado pela bissetriz e a altura, traçadas do vértice A, é igual ao ângulo C.

31) Provar que, num triângulo retângulo, o dôbro do maior ângulo agudo excede o ângulo x, formado pela altura e mediana traçadas do vértice do ângulo reto.

32) Prove que, em qualquer triângulo, um ângulo qualquer é igual ao dôbro do ângulo formado pelas bissetrizes dos dois outros ângulos, diminuido de 180°.

33) Num triângulo isósceles ABC de base AC, traça-se a altura AH relativa ao lado BC. Provar que o ângulo HAC é igual à metade do ângulo ABC.

34) Duas semi-retas Ox e Oy formam um ângulo de 60°. Sôbre Ox marquemos os pontos A e B tais que $OA=k$ e $OB=2k$. Consideremos, também, um ponto C, de Oy tal que $OC=3k$. Provar que o triângulo ABC é isósceles.

RESPOSTAS:

1) 73° 52′ 14″
2) 109° 48′
3) 25° 44′
4) 90°, 68° 12′ 30″ e 11° 47′ 30″
5) 45°
6) 120°
7) 27°
8) 75gr
9) 90°, 22° 21′ 22″ e 67° 38′ 40″
10) 83°
11) 87°, 59° e 34°
12) 45°, 90° e 45°
13) 20°
14) 80°
15) 36° e 54°
16) 60° e 30°
17) 120°
18) 67° 30′
19) 61°
20) 20°
21) 21°
22) 90°, 54° e 36°
23) 20°, 110° e 50°
24) 21° 40′.6″
25) 63° 37′ 54″
26) 100° 7′ 45″
27) 130°
28) $a+y=180° \therefore a+y=a+x \therefore x=y$
29) 60°

POLÍGONOS: ÂNGULOS — DIAGONAIS

1) Calcular a soma dos ângulos internos e a dos ângulos externos de um decágono.

2) Qual é o polígono convexo cuja soma dos ângulos internos é 1 800°?

3) A soma dos ângulos internos de um polígono excede a soma de seus ângulos externos de 540°. Qual o número de lados dêsse polígono?

4) A soma dos ângulos internos de um polígono convexo aumentada da soma dos ângulos externos dêsse polígono é igual a 1 800 grados. Qual é o polígono?

5) Qual é o polígono regular cujo ângulo externo mede 45°?

6) Quantos lados tem o polígono regular cujo ângulo interno mede 156°?

7) Qual é o polígono regular cujo ângulo interno é igual ao ângulo externo?

8) Quantos lados tem o polígono regular cujo ângulo interno é o dôbro do externo?

9) Qual é o polígono regular cujo ângulo interno aumentado de um ângulo reto é igual ao seu ângulo externo?

10) Quantos lados tem o polígono regular cujo ângulo externo é 1/12 da soma dos ângulos internos.

11) Qual o polígono regular cujos ângulos interno e externo, respectivamente, são expressos, em graus, por $3x+15$ e $16x-25$?

12) Qual o valor de x se os ângulos interno e externo de um polígono regular, expressos em graus, medem, respectivamente, $6x-2$ e $13x+49$?

13) Qual o polígono convexo cuja soma dos ângulos internos excede a soma dos ângulos externos de um ângulo de meia volta?

14) Ache o polígono convexo cuja soma dos ângulos internos é igual a 1 080°. (E. P. C. - Exército - Janeiro, 1953)

15) A soma dos ângulos internos de um polígono regular convexo é 24 vêzes maior que seu ângulo externo. Dizer quantos lados tem o polígono. (E. P. C. - Exército - Julho, 1953)

16) Quantos lados tem um polígono regular convexo cujo ângulo interno mede 144°. (E. Naval - 1952)

17) O ângulo interno de um polígono regular convexo é o triplo de seu ângulo externo. Dizer quantos lados tem o polígono. (E. P. C. - Exército - Julho, 1953. 3.° Ano)

18) O ângulo interno de um polígono regular é o quádruplo de seu ângulo externo. Calcule o número de lados dêsse polígono. (E. P. C. - Exército - 1955)

19) Achar os ângulos do pentágono convexo $ABCDE$, sabendo que $\hat{A}=\hat{B}$, $\hat{C}=\hat{D}=\hat{A}+22^\circ\ 30'$ e $\hat{A}=2\hat{E}$.

20) Seja uma linha poligonal aberta $ABCDE$, onde : $\hat{B}=150^\circ$, $\hat{C}=100^\circ$ e AB paralelo a DE. Calcular o ângulo D.

21) Em um polígono regular as mediatrizes de dois lados consecutivos formam um ângulo de 36°. Determinar o polígono.

22) $ABCDE$ é um pentágono convexo em que AE é paralelo a BC, $\hat{C}-\hat{A}=40^\circ$ e $\hat{D}-\hat{B}=30^\circ$. Calcular $\hat{E}$.

23) Quantas diagonais tem um icoságono convexo?

24) Quantos lados tem o polígono convexo de 27 diagonais?

25) Qual o polígono convexo cujo número de lados é igual ao de diagonais?

26) Quantos lados tem o polígono cujo número de diagonais é o dôbro do número de lados?

27) O ângulo interno de um polígono regular convexo mede $157^\circ\ 30'$. Quantas diagonais tem o polígono?

28) Quantas diagonais distintas tem um polígono regular convexo cujo ângulo externo mede 40°?

29) Calcule a soma dos ângulos internos de um polígono regular, cujo número de diagonais excede o de lados de 25 unidades.

30) Em um polígono regular convexo as mediatrizes de dois lados consecutivos fazem um ângulo de 50 grados. Calcule o número de diagonais distintas do polígono.

31) Em um polígono regular, cujos vértices A, B e C são consecutivos, a diagonal AC forma com o lado BC um ângulo de 30°. Quantas diagonais distintas do polígono tem um de seus extremos no vértice A?

32) As mediatrizes de dois lados consecutivos de um polígono regular convexo formam um ângulo de 40°. Quantas diagonais distintas podemos traçar de cada um dos vértices dêsse polígono?

33) Num polígono convexo os $\frac{3}{5}$ do número de diagonais distintas excede a metade do número de lados do polígono de 16 unidades. Ache a soma dos ângulos internos do polígono.

34) Provar que nenhum polígono convexo pode possuir mais de 3 ângulos agudos.

35) Em qualquer polígono convexo, excetuando o triângulo, qualquer ângulo interno é menor do que a soma dos outros ângulos internos. Provar.

Respostas:

1) $1\,440^\circ$ e 360°
2) dodecágono
3) 7
4) eneágono
5) octógono
6) 15
7) quadrado
8) 6
9) octógono
10) 12
11) octógono
12) 7
13) pentágono
14) octógono
15) 8
16) 10
17) 8
18) 10
19) 110°, 110°, $132^\circ\ 30'$, $132^\circ\ 30'$ e 55°
20) 110°
21) decágono
22) 110°
23) 170
24) 9
25) pentágono
26) 7
27) 104
28) 27
29) $1\,440^\circ$
30) 20
31) 3
32) 6
32) $1\,440^\circ$

ÂNGULOS — QUADRILÁTEROS

1) Dois ângulos consecutivos de um paralelogramo medem, respectivamente, 45° e 135°. Calcular os outros ângulos.

2) Dois ângulos opostos de um paralelogramo medem, juntos, 67°. Calcular o valor dos outros ângulos.

3) Um ângulo de um rombóide mede 38° 18′ 20″. Qual o valor de um de seus ângulos obtusos?

4) Dois dos ângulos de um losango são complementares. Qual o valor do maior de seus ângulos?

5) Um ângulo externo de um losango mede 136° 25′. Qual a medida de cada um de seus ângulos agudos?

6) Em um rombóide, o menor de seus ângulos internos é a metade do maior. Calcular a medida de seus ângulos.

7) Num rombóide, um dos ângulos externos mede 100° 20′ 10″. Achar o menor dos ângulos internos.

8) Num trapézio isósceles, um dos ângulos externos mede 100° 10′. Ache os ângulos internos.

9) Num trapézio retângulo, o menor ângulo é $\frac{3}{7}$ do maior. Ache os ângulos internos.

10) Num quadrilátero, a soma de dois de seus ângulos internos é 190°. Calcular o ângulo formado pelas bissetrizes internas dos dois outros ângulos.

11) Num quadrilátero $ABCD$, $A+B=200°$. Calcular o ângulo formado pelas bissetrizes externas, traçadas de C e D.

12) Num quadrilátero, dois ângulos consecutivos medem, respectivamente, 50° 20′ 42″ e 58° 9′ 18″. Calcular o ângulo formado pelas bissetrizes dos dois outros ângulos internos.

13) Calcular o valor dos ângulos obtusos de um losango, sabendo-se que uma de suas diagonais forma com um dos lados um ângulo de 12° 30′.

14) A bissetriz de um ângulo obtuso de um losango forma com um dos lados um ângulo de 63°. Calcule o valor de cada ângulo agudo.

15) Qual a medida do ângulo formado pelas bissetrizes de dois ângulos consecutivos de um losango?

16) Em um trapézio isósceles um ângulo obtuso mede 132°. Calcular o ângulo agudo formado pelas bissetrizes dos ângulos internos da base maior.

17) Em um trapézio retângulo formado pelas bissetrizes dos ângulos internos, adjacentes à base maior, mede 105°. Calcular o maior ângulo do trapézio.

18) Em um quadrilátero os ângulos, expressos em graus, são representados, respectivamente, por: $3x+80$, $40-3x$, $90-5x$ e $2x+120$. Calcular quantos graus tem o maior de seus ângulos.

19) A diferença entre o maior e o menor ângulo de um trapézio retângulo é 18°. Qual o valor do ângulo obtuso formado pelas bissetrizes dos ângulos de sua base menor?

20) Em um losango $ABCD$, o ângulo A mede 120°. Os pontos médios de AB e AD são, respectivamente, P e Q. Calcular os ângulos internos do triângulo PAQ.

21) Provar que é reto o ângulo formado pelas bissetrizes de dois ângulos consecutivos de um rombóide.

22) Provar que, o ângulo formado pelas bissetrizes do menor e do maior ângulo, de um trapézio retângulo, mede 90°.

23) Provar que, em um trapézio isósceles, os ângulos pertencentes a uma mesma base são iguais.

24) Provar que, um trapézio isósceles, o ângulo formado pelas bissetrizes dos ângulos da base maior é igual a um dos ângulos da base menor.

RESPOSTAS:

1) 45° e 135°
2) 146° 30′
3) 141° 41′ 40″
4) 135°
5) 43° 35′
6) 60°, 60°, 120° e 120°
7) 79° 39′ 50″
8) 79° 50′ e 100° 10,
9) 90°, 90°, 54° e 126°
10) 95°
11) 80°
12) 54° 15′
13) 155°
14) 54°
15) 90°
16) 48°
17) 120°
18) 140°
19) 94° 30′
20) 30°, 120° e 30°

ÂNGULOS NO CÍRCULO

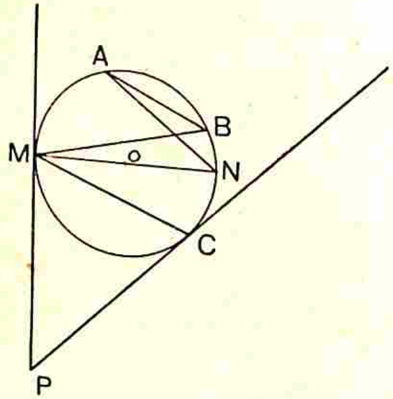


Fig. 4

Na figura 4, PM e PC são tangentes, MN é um diâmetro, AB é o lado de um pentágono regular e MC o lado de um triângulo equilátero. Calcular :

1) o ângulo AOB
2) o ângulo ACB
3) o ângulo MCP
4) o ângulo MPC
5) o ângulo MBC
6) o ângulo formado pela corda MC com o prolongamento da corda NC.
7) o ângulo agudo formado pelas cordas AN e BM.
8) o ângulo formado pelas secantes MA e CB.
9) Prove que o triângulo MCP é equilátero.
10) Se, na figura 4, o arco MC excede o arco AB de 30°, calcular êsses arcos sabendo que o ângulo formado pelas cordas AC e BM mede 100°.

11) Se, na figura 55, o arco AB é a metade do arco MC, e o ângulo formado pelas secantes MA e CB mede m graus, prove que o arco AB mede $2m$ graus.
12) A corda AB de uma circunferência é o lado do do octógono regular inscrito. Das extremidades A e B traçam-se tangentes à circunferência. Calcular o ângulo que as duas tangentes formam na sua intersecção.
13) A corda MN de uma circunferência é o lado de um hexágono regular inscrito. Calcular os ângulos agudos MON e MPN, sendo O o centro da circunferência e P um de seus pontos.
14) Numa circunferência, AB é o lado do hexágono regular inscrito e BC é o lado do pentágono regular inscrito. Calcular os ângulos internos do triângulo ABC.

Em uma circunferência AB, BC e CD são, respectivamente, os lados do hexágono, pentágono e quadrado inscritos nessa circunferência. Calcular :

15) o ângulo ADB
16) o ângulo ADC
17) o ângulo ABD
18) o ângulo agudo formado pelas cordas AC e BD
19) o ângulo formado pelas secantes AB e CD
20) o ângulo formado pelas tangentes traçadas por A e B
21) o ângulo ex-inscrito formado pela corda AC e o prolongamento da corda CD.
22) o ângulo formado pela corda AB e a tangente traçada por B.
23) o ângulo formado pela secante CD com a tangente traçada por B.
24) As tangentes a uma circunferência, nos pontos A e B, formam um ângulo de 54°. C é um ponto pertencente ao menor dos arcos AB. Calcular o ângulo ACB.

25) Um ângulo inscrito é formado por um diâmetro e uma corda e mede 48°. Calcular o valor do arco subtendido pela corda.

26) Duas secantes se interceptam formando um ângulo de 50°. O menor dos arcos interceptados pelas secantes mede 80°. Calcular o valor do maior arco interceptado pelas secantes.

27) Calcular o ângulo inscrito formado por duas cordas que são, respectivamente, o lado do hexágono regular e do triângulo equilátero inscritos.

28) Os lados de um ângulo inscrito são, respectivamente, o diâmetro e uma corda que subtende um arco igual à metade do arco subtendido pelos lados do ângulo inscrito. Calcular o ângulo inscrito.

29) Duas cordas se cortam formando um ângulo agudo de 75°. Um dos arcos subtendidos pelos lados dêsse ângulo é o dôbro do outro. Qual o maior dos arcos?

Na figura 5 :

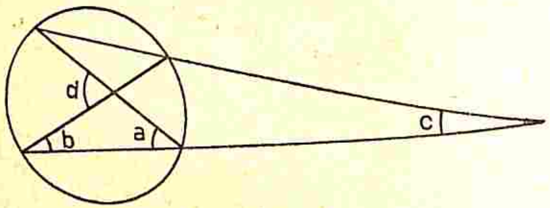


Fig. 5

30) Calcular o ângulo a sabendo-se que o arco subtendido pelos seus lados mede 65°.

31) Calcular o ângulo d sabendo-se que os arcos compreendidos entre seus lados medem, respectivamente, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{5}$ da circunferência.

32) Calcular os arcos subtendidos pelos lados do ângulo c sabendo-se que $c = 10°$ e $d = 68°$.

33) Calcular o ângulo d, sabendo-se que a, b e c, expressos em graus, são respectivamente, $\frac{3x+5}{2}$, $x-10$ e $\frac{2x+25}{3}$.

34) As bases de um trapézio inscrito num semicírculo subtendem arcos que valem, respectivamente, 1/8 e 1/3 da circunferência. Calcular os ângulos internos do trapézio.
(E. P. C. do Ar - 1952)

35) Os lados de um ângulo externo E interceptam sôbre a circunferência arcos AB e CD. Sabendo-se que as cordas AB e CD, são, respectivamente, os lados do triângulo equilátero e do octógono regular inscritos na circunferência determinar o valor do ângulo externo E.
(E. P. C. - Exército - Julho, 1953)

36) Um trapézio está inscrito numa semi-circunferência. Determinar os ângulos dêsse trapézio sabendo-se que suas bases são, respectivamente, os lados de um decágono regular e do triângulo equilátero, inscritos na circunferência. (E. P. C. - Exército - Julho, 1953. 3.° Ano)

37) Complete os espaços em branco nos itens a seguir :

a) As bissetrizes de dois ângulos adjacentes suplementares formam entre si um ângulo de ----------.

b) A soma dos ângulos externos de um polígono regular convexo é igual a ----------.

c) Dois ângulos opostos pelo vértice são ----------.
(E. P. C. - Exército - Julho, 1953)

38) Em cada item abaixo, está escrita uma proposição que poderá ser verdadeira ou não. Responda com a palavra *certo* ou *errado*, conforme o caso, adiante de cada uma :

a) Num triângulo, os lados são a, b e c. Se fôr verificada a desigualdade $a^2 < b^2 + c^2$, sendo a o maior lado, o triângulo é acutângulo ----------.

b) Numa circunferência o ângulo central tem por medida metade do arco compreendido entre seus lados ------- -----------

c) As diagonais de um losango cortam-se ao meio formando ângulos agudos -----------

(E. P. C. - Exército - Julho, 1953)

39) Provar que, se A, B, C e D são vértices de um quadrilátero e pertencem a uma circunferência, então os ângulos opostos são suplementares.

40) Prove que cordas paralelas traçadas pelas extremidades de um diâmetro são iguais.

41) Provar que os ângulos DAC e DBC, determinados pelas diagonais AC e BD de um quadrilátero inscritível, são iguais.

42) Provar que os 4 vértices de um retângulo pertencem a uma mesma circunferência.

RESPOSTAS:

1) 72°
2) 36°
3) 60°
4) 60°
5) 60°
6) 90°
7) 54°
8) 24°
9) 3 ângulos medem 60°
10) 115° e 85°
11) $2m = 2x - x = = x = \overset{\frown}{AB}$
12) 135°
13) 60° e 30°
14) 30°, 36° e 114°
15) 30°
16) 66°
17) 69°
18) 75°
19) 33°
20) 150°
21) 111°
22) 30°
23) 63°
24) 126°
25) 84°
26) 180°
27) 90°
28) 60°
29) 100°
30) 32° 30′
31) 96°
32) 78° e 58°
33) 55°
34) 2 de 41° 15′ e 2 de 138° 45′
35) 37° 30′
36) 39°, 39°, 141° e 141°
37) 90°, 360° e iguais
38) certo, errado, errado

LINHAS PROPORCIONAIS — SEMELHANÇA

1) Determinar a posição do ponto P que divide o segmento $AB = 45\text{cm}$ na razão de secção $\frac{2}{7}$.

2) Determinar a posição do ponto P que divide o segmento $AB = 48\text{cm}$ na razão da secção igual a $-\frac{5}{3}$.

3) Dividir, internamente, o segmento $AB = 40\text{cm}$ na razão $\frac{3}{5}$.

4) Dividir, externamente, o segmento de 60cm na razão $\frac{2}{3}$.

5) Calcular a razão de secção, em que foi dividido o segmento AB, por um ponto P, sabendo-se $\overline{AP} = 15\text{cm}$ e $PB = 45\text{cm}$.

6) Dado sôbre uma reta o segmento $\overline{AB} = 60\text{cm}$, calcular o segmento PA, dessa reta, sabendo-se que P divide AB, externamente, na razão $\frac{3}{5}$.

7) Dado sôbre uma reta o segmento $AB = 20\text{cm}$, calcular o segmento MA, dessa reta, sabendo-se que M divide AB, internamente na razão $\frac{3}{2}$.

8) Dividir, harmônicamente, o segmento $AB = 12\text{cm}$ na razão 2.

9) Um segmento $AB = 180\text{cm}$ foi dividido harmônicamente pelos pontos M e P. Calcular o segmento aditivo AM sabendo-se que a razão harmônica é 4.

10) Os pontos M e P são conjugados harmônicos em relação aos extremos de um segmento $AB = 42\text{m}$. A razão harmônica é 2/5. Calcular AM e AP.

11) Os pontos M e P são conjugados harmônicos em relação a A e B. Sabendo-se que $AM = 40\text{cm}$ e $BP = 234\text{cm}$, calcular AP.

12) Em uma divisão harmônica M e P são conjugados harmônicos de A e B. Sabendo-se que $BM = 21\text{m}$ e $BP = 77\text{m}$, calcular AM.

13) Na figura abaixo, o segmento $AB = 9\text{cm}$ está dividido harmônicamente pelos pontos C e D. Sabendo-se que $AC = 4\text{cm}$, pede-se determinar a distância DA.

(E. P. C. - Exécito - Julho, 1953)

14) Sôbre um eixo marcam-se 4 pontos A, B, C e D, conjugados harmônicos e o ponto M, meio de AB. Sendo $AB = +39\text{cm}$ e $\dfrac{CA}{CB} = -\dfrac{8}{5}$, calcular MC e MD.

(E. Aeronáutica - 1942)

15) Um segmento $\overline{AB}$ está dividido por um ponto M em 2 segmentos de 6m e 12m. Prolonga-se AB até o ponto P, conjugado harmônico de M. Calcule PA.

16) O segmento $AB = 15\text{cm}$ está dividido harmônicamente pelos pontos M e P. Calcular o menor dos 4 segmentos da divisão, sabendo-se que o segmento total $BP = 45\text{cm}$.

17) O segmento $\overline{AB} = 8\text{cm}$ foi dividido harmônicamente pelos pontos M e P; calcular os quatro segmentos da divisão harmônica, sabendo-se que $\overline{MP} = 6\text{cm}$.

18) Duas transversais são interceptadas por um feixe de 3 paralelas. Os segmentos determinados sôbre as transversais pelas duas primeiras paralelas medem, respectivamente, 5cm e 8cm. Calcular o comprimento que as duas últimas paralelas determinam sôbre a segunda transversal, sabendo-se que elas determinam sôbre a primeira um segmento igual a 15cm.

19) Um feixe de 4 paralelas determina sôbre uma transversal r segmentos de 2, 3 e 4 centímetros e sôbre uma transversal s três outros segmentos cuja soma mede 54cm. Achar os três segmentos determinados sôbre a transversal s.

20) Um feixe de 4 paralelas determina sôbre uma transversal segmentos de 2cm, 3cm e 5cm e sôbre outra transversal segmentos cuja soma dos quadrados de suas medidas é igual a 342 cm^2. Calcular os três segmentos dessa segunda transversal.

21) Um feixe de 4 paralelas determina sôbre uma transversal r segmentos de 3cm, 4cm e 5cm e sôbre uma transversal s 3 segmentos cuja soma dos produtos de suas medidas, tomadas duas a duas, é igual a 188cm^2. Calcular os 3 segmentos da transversal s.

22) Num triângulo de lados 5m, 10m e 13m determinar a razão em que a bissetriz interna do maior ângulo do triângulo divide o lado oposto a êsse ângulo.

23) Os lados de um triângulo medem, respectivamente, 20cm, 22cm e 30cm. Calcular os segmentos em que a bissetriz interna divide o lado maior.

(E. P. C. - Exército - 1952. 3.° Ano)

24) Os lados de um triângulo medem 2m, 6m e 10m. Calcule o menor dos segmentos em que a bissetriz interna divide o maior lado.

25) Os lados de um triângulo medem 7, 9 e 12cm respectivamente. Calcular o maior segmento determinado sôbre o lado oposto pela bissetriz do menor ângulo interno.

26) Num triângulo, a bissetriz de um ângulo C determina sôbre o lado oposto BA os segmentos $BN = 5\text{cm}$ e $NA = 4\text{cm}$. Determinar os lados BC e CA, adjacentes ao ângulo C, sabendo-se que a soma dêsses lados é de 27cm.

(E. P. C. - Exército - Julho, 1953)

27) Num triângulo de 12m de perímetro, as medidas dos lados são, em metros, números consecutivos. Calcular, com aproximação de 0,01, os segmentos determinados por uma das bissetrizes internas sôbre o maior lado.

28) Num triângulo ABC de lados 4cm, 7cm e 9cm, respectivamente, a bissetriz externa, traçada do vértice A oposto ao maior lado BC, divide externamente o lado BC. Achar os segmentos dessa divisão.

29) Num triângulo ABC os lados são : $AB=6$m e $BC=4$m. Calcule de quanto é preciso prolongar o lado AB para que êle encontre a bissetriz externa do vértice C.

(E. P. C. - Exército - 1955)

30) Do vértice A, de um triângulo ABC, traçam-se as bissetrizes interna e externa, que interceptam o suporte do lado BC em dís pontos D e F, respectivamente. Sabendo-se que o lado BC mede 12m e que $\overline{DE}=5$m, calcular os segmentos determinados pelas bissetrizes traçadas de A.

31) Em um triângulo ABC de 20m de perímetro, traça-se de A a bissetriz externa, que divide o lado BC em dois segmentos subtrativos iguais a 18m e 14m, respectivamente. Calcular os lados do triângulo.

32) A bissetriz interna AD de um triângulo ABC divide o lado BC em dois segmentos de 12cm e de 24cm. Calcular a distância dos pontos de intersecção das bissetrizes interna AD e externa AE com o suporte de BC.

33) O lado BC de um triângulo ABC, de 1,26m de perímetro, mede 36cm. Calcular os dois outros lados sabendo-se que a distância entre as intersecções das bissetrizes interna e externa com o suporte de BC é igual a 4,8dm.

34) Em um triângulo isósceles, a base AB é maior do que a altura h e a diferença entre ambas é igual a 5m. A bissetriz de um dos ângulos iguais determina sôbre o lado oposto dois segmentos cuja razão é igual a $\frac{5}{6}$, sendo o maior dêsses segmentos adjacente à base. Calcular o valor da base.

(E. Naval - 1947)

35) Num triângulo dois lados medem, respectivamente, 32cm e 40cm. Sôbre o primeiro, a 8cm do vértice comum a êsses lados, toma-se um ponto D. Calcular os segmentos que a paralela ao terceiro lado, passando por D, determina sôbre o lado de 40cm.

36) A paralela a um dos lados de um triângulo divide os outros dois na razão 3/5. Calcular os comprimentos dos

segmentos seterminados por essa paralela sôbre êsses dois lados, que medem, respectivamente, 24cm e 40cm.

37) Num triângulo ABC, $\overline{AB}=7$cm. Por um ponto D de AB traça-se uma paralela ao lado BC, que intercepta o lado AC num ponto E. Sabendo que $\overline{AD}=4$cm e $\overline{DE}=5$cm, calcule o lado BC.

38) Os lados de um triângulo medem 1,5cm, 1,2cm e 0,9cm. Determinar os lados de um segmento triângulo semelhante ao primeiro, sabendo-se que a razão de semelhança é $\frac{2}{5}$.

(E. C. Dutra - 4.ª Série Ginasial - 2.ª P. Parcial - 24/11/50)

39) Quais os lados de um triângulo de perímetro 9,5m semelhante a um outro de lados respectivamente iguais a 4dm, 60cm e 0,9m?

40) O perímetro de um triângulo é 315cm e um de seus lados mede 42cm. Qual o perímetro do triângulo semelhante cujo lado homólogo ao dado é 56cm?

41) São dados dois triângulos semelhantes T e T'. Sendo um lado l, de T, igual ao segmento áureo do lado l', de T', homólogo de l, determinar a razão entre os perímetros de T e T'.

42) Um triângulo retângulo tem um ângulo de 38°, sua hipotenusa é igual a k e o perímetro mede 3dm; um outro triângulo retângulo tem o perímetro igual a 60cm e um ângulo externo igual a 128°. Qual o valor da hipotenusa dêsse segundo triângulo?

43) As bases de um trapézio isósceles medem, respectivamente, 8m e 20m, e a altura 6m. Calcular as alturas dos triângulos formados, prolongando-se os lados não paralelos do trapézio.

44) As bases de um trapézio medem 28 e 42cm, respectivamente, e a altura mede 12cm. A 3,6cm acima da base maior traça-se uma paralela às bases. Calcular o comprimento do segmento dessa paralela compreendido entre os lados não paralelos do trapézio.

(E. C. Dutra - 4.ª Série Ginasial - 2.ª P. Parcial - 24/11/50)

45) Divide-se o lado BC de um trapézio em dois segmentos BF e CF, proporcionais a 3 e 2 e, pelo ponto de divisão F, traça-se uma reta EF paralela às bases. Calcular EF sabendo que $\overline{AB}=38{,}5$m e $DC=12{,}45$m. (E. Militar - 1937)

46) Num trapézio, a base média mede 26m, a base menor 20m e a altura 18m. Calcular o segmento da paralela, compreendido entre os lados não paralelos do trapézio, sabendo-se que êle é o dôbro da sua distância à base menor.

47) Os lados de um retângulo $ABCD$ medem, respectivamente 12cm e 15cm; a diagonal BD corta o segmento CE, que une o vértice ao meio do lado AD, num ponto F. Achar as distâncias de F aos lados AD e CD do retângulo.

48) Calcular o perímetro do quadrado inscrito em um triângulo isósceles, cuja base tem 18cm e a altura 12cm.

49) Em um triângulo isósceles, a base é igual a 10m e a altura é igual a 6m. Quais as dimensões do retângulo inscrito nesse triângulo, se a altura dêsse retângulo é a quinta parte de sua base?

50) Em um triângulo de base 12m e altura 10m está inscrito um retângulo cuja base é o dôbro da altura. Calcular a base do retângulo.

51) Em um triângulo retângulo a razão entre os catetos é 3/4. Calcular as dimensões de um retângulo, que só tem um ponto em comum com a hipotenusa, que está inscrito no triângulo e cujo perímetro é 42cm.

52) Complete os espaços em branco, nos itens a seguir :

a) Dois pontos C e D dividem harmônicamente um segmento AB, quando é verdadeira a relação $\dfrac{CA}{CB}=$ -----

b) Se dois triângulos ABC e $A'B'C'$ são tais que $\hat{A}=\hat{A}'$ e $\hat{B}=\hat{B}'$, pode-se afirmar que são ----------.

c) A razão de semelhança de duas figuras iguais é -----.

d) As áreas de dois polígonos semelhantes estão entre si como os ---------- de 2 lados homólogos quaisquer.
(E. P. C. - Exército - 1951 e 1953)

53) Prove que dois triângulos retângulos, que têm um ângulo agudo igual, são semelhantes.

54) Em um trângulo ABC, $AB=AC=5$cm e o ângulo desigual mede 50°. Prove que o triângulo isósceles MPQ, cujo ângulo formado por dois lados diferentes mede 65°, é semelhante ao triângulo ABC.

55) Prove que dois polígonos regulares de mesmo número de lados são semelhantes.

56) Prove que dois lados consecutivos de um paralelogramo são inversamente proporcionais às alturas relativas a êsses lados.

57) Em um triângulo retângulo está inscrito um quadrado cujo lado DE está sôbre a hipotenusa BC do triângulo. Sendo $BD<BE$, prove que o lado do quadrado é média geométrica entre os segmentos BD e EC da hipotenusa.

RESPOSTAS:

1) P interno ao segmento $PA=10$cm e $PB=35$cm
2) P externo ao segmento $PA=120$cm e $PB=72$cm
3) $PA=15$cm e $PB=25$cm
4) $PA=120$cm e $PB=180$cm
5) 1/3
6) 90cm
7) 12cm
8) 8cm, 4cm, 24cm, 12cm
9) 144cm
10) 12cm e 28cm
11) 90cm
12) 12m
13) 36cm
14) 4,5cm e 84,5cm
15) 18m
16) 6cm
17) 2cm, 6cm, 4cm e 12cm
18) 24cm
19) 12cm, 18cm e 24cm
20) 6cm, 9cm e 15cm
21) 6cm, 8cm e 10cm
22) 1/2 ou 2
23) 14,28cm e 15,72cm
24) 2,5m
25) 4m

26) 15cm e 12cm
27) 2,14cm e 2,86m
28) 21cm e 12cm
29) 24m
30) 2m, 10m, 3m e 15m
31) 4m, 7m e 9m
32) 48cm
33) 30cm e 60cm
34) 15m
35) 10cm e 30cm
36) 9cm e 15cm ; 15cm e 25cm
37) 8,75cm
38) 3,75cm ; 3cm ; 2,25cm
39) 20dm, 30dm e 45dm
40) 420cm
41) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$
42) $2k$
43) 4m e 10m
44) 37,8cm
45) 22,87m
46) 30m
47) 4cm e 5cm
48) 28,8cm
49) 7,5m e 1,5m
50) 7,5m
51) 9cm e 12cm
52) *a*) $\dfrac{CA}{CB}=\dfrac{DA}{DB}$; *b*) semelhantes; *c*) a unidade; *d*) os quadrados.
53) 2 ângulos iguais.
54) um ângulo igual compreendido entre lados proporcionais.
55) decompor os polígonos em triângulos isósceles semelhantes.
56) semelhança de triângulos retângulos.
57) semelhança de triângulos retângulos *BDG* e *FEC*.

RELAÇÕES MÉTRICAS NOS TRIÂNGULOS RETÂNGULOS

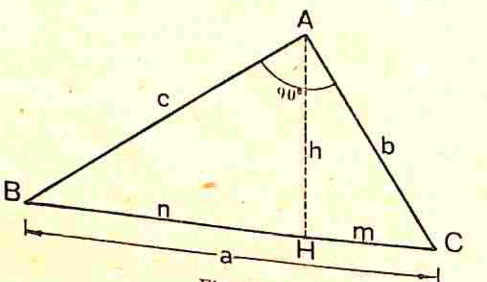


Fig. 6

Na figura 6, calcular os elementos pedidos para cada uma das hipóteses a seguir :

1) Se $b=3$cm e $c=4$cm, calcular a, h, m e n.
2) Se $a=13$cm e $b=5$cm, calcular c, h, m e n.
3) Se $m=9$cm e $n=16$cm, calcular a, b, c e h.
4) Se $a=10$cm e $m=3{,}6$cm, calcular b, c, h e n.
5) Se $b=12$cm e $m=7{,}2$cm, calcular a, c, h e n.
6) Se $h=24$cm e $m=32$cm, calcular a, b, c e n.
7) Se $a=25$cm e $h=12$cm, calcular b, c, m e n.
8) Se $b=30$cm e $h=24$cm, calcular a, c, m e n.
9) Se $b=45$cm e $n=48$cm, calcular a, c, h e m.
10) Se $a=5$cm e $b+c=7$cm, calcular b, c, h, m e n.
11) Se $a=20$cm e $c-b=4$cm, calcular b, c, h, m e n.
12) Se $a=10$cm e o perímetro é 24cm, calcular b, c, h, m e n.
13) Se $a=25$cm e $bc=300\text{cm}^2$, calcular b, c, h, m e n.
14) Se $a=15$cm e $\dfrac{b}{c}=\dfrac{3}{4}$, calcular b, c, h, m e n.
15) Se $a=50$cm e $\dfrac{m}{n}=\dfrac{9}{16}$, calcular b, c, h, m e n.
16) Se $h=2{,}4$cm e $b+c=7$cm, calcular a, b, c, m e n.
17) Se $h=2{,}4$cm e $c-b=1$cm, calcular a, b, c, m e n.
18) Se $h=12$cm e $b+m=24$cm, calcular a, b, c, m e n.
19) Se $h=36$cm e $b-m=18$cm, calcular a, b, c, m e n.
20) Se $a-b=4$cm e $a-c=2$cm, calcular a, b e c.
21) Se $a+h=37$cm e $b+c=35$cm, calcular a, b e c.
22) Se $a+b+c=24$cm e $a^2+b^2+c^2=200\text{cm}^2$, calcular a, b e c.
23) Num triângulo retângulo, tem-se a altura igual a 4,8cm e a hipotenusa igual a 10cm. Pedem-se os catetos.
(Col. Pedro II - Art. 91 - 5/10/51)

24) Num triângulo retângulo cujos ângulos agudos são iguais à hipotenusa, mede 4,5m. Calcular o perímetro.

25) Inscreve-se um círculo num triângulo de lados 5m, 8m e 9m. Determinar as distâncias dos vértices do triângulo aos pontos de contacto.

(E. P. C. - Exército - Janeiro, 1953)

26) Calcule a altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo, cujos catetos medem : 5m e 12m.

(E. P. C. - Exército - 1955)

27) Calcular o perímetro de um triângulo retângulo sabendo que um cateto mede 12m e a projeção do outro cateto sôbre a hipotenusa é 5,4m.

(Col. Pedro II - Extern. - 2.ª P. Parcial - 4.ª Série - 1954)

28) Calcular os catetos de um triângulo retângulo e isósceles cuja hipotenusa mede $4\sqrt{2}$ m.

29) Calcular a mediana relativa à hipotenusa de um triângulo cujos catetos medem 6m e 8m, respectivamente.

30) A que altura uma escada de 13m toca em um muro, se o pé da escada está a 5m dêsse muro?

31) Dá-se um triângulo retângulo cujos catetos medem 18 e 24 metros. Pede-se calcular :

a) a altura relativa à hipotenusa ;

b) a distância do ponto de encontro das medianas ao vértice do ângulo reto ;

c) os segmentos determinados sôbre a hipotenusa pela bissetriz interna do ângulo reto.

(E. Naval - Admissão - 20/2/51)

32) Num triângulo retângulo ABC os catetos AB e AC medem respectivamente, 4m e 3m. Sendo D um ponto da hipotenusa tal que $BD = 2$m, calcular a distância do ponto D ao vértice do ângulo reto.

33) Em um triângulo retângulo um cateto é o dôbro do outro. Qual a razão entre o maior e o menor dos segmentos, determinados pela altura sôbre a hipotenusa?

34) Calcular a diagonal de um quadrado de $8\sqrt{2}$ m de perímetro.

35) Calcular a altura de um triângulo equilátero de $6\sqrt{3}$ m de lado.

36) Calcular o perímetro de um triângulo equilátero cuja altura mede $2\sqrt{3}$ m.

37) Calcular o perímetro do quadrado cuja diagonal mede $2\sqrt{2}$ m.

38) Em um triângulo retângulo e isósceles o maior lado mede $3\sqrt{2}$ m. Calcular a soma dos outros dois lados.

39) Em um triângulo retângulo ABC o maior lado BC é o dôbro do menor AB. Calcular a hipotenusa do triângulo sabendo que o lado AC mede $4\sqrt{3}$ m.

40) Num triângulo retângulo, a bissetriz do ângulo reto determina sôbre o lado oposto segmentos proporcionais a 3 e 4. Sabendo que a hipotenusa mede 15m, calcular os catetos.

41) Num triângulo retângulo, a mediana relativa à hipotenusa mede 6,5m. Calcular a hipotenusa.

42) Num trângulo retângulo, as projeções dos catetos sôbre a hipotenusa medem, respectivamente, 6,4m e 3,6m. Calcular o segmento que une o meio da hipotenusa ao vértice do ângulo reto.

43) Num triângulo retângulo um ângulo mede 50 grados. Calcular a mediana relativa ao maior lado, sabendo que um dos catetos mede $\sqrt{2}$ metros.

44) Achar a altura de um trapézio cujo ângulo agudo é 45° e o lado não paralelo, adjacente a êsse ângulo, mede $\sqrt{2}$ m.

45) Calcular a altura de um losango cujas diagonais medem 12m e 16m. (E. P. C. - Exército - Janeiro, 1953)

46) Achar a altura de um paralelogramo que tem um ângulo de 30°, sabendo-se que o lado que forma com a base êsse ângulo mede 6cm.

47) Achar a altura de um paralelogramo, onde dois lados consecutivos medem, respectivamente, 8cm e 6cm e a diagonal maior é igual a 12cm.

48) Calcular o perímetro de um trapézio isósceles cuja base maior é 22m, cuja altura é 8m e cujos lados não paralelos são iguais à base menor.

49) Calcular o perímetro de um trapézio isósceles cuja base maior mede 20m, a base menor 10m e um dos ângulos internos 45°.

50) Calcular o perímetro de um trapézio isósceles que tem um ângulo de 60° e cujas bases medem 40m e 30m, respectivamente.

51) Um trapézio isósceles tem um dos lados não paralelos igual a $4\sqrt{3}$ metros e o seu maior ângulo mede 120°. Calcular sua altura.

52) Num trapézio isósceles, a soma dos lados não paralelos é igual a 20cm, a base menor mede 6cm e forma com os lados não paralelos ângulos de $\frac{2\pi}{3}$ radianos. Achar a base maior do trapézio.

53) Num trapézio retângulo, as bases medem 10m e 6m, respectivamente, e o maior lado não paralelo mede 5m. Qual o perímetro do trapézio?

54) Um dos ângulos de um trapézio isósceles mede 60°. A base menor mede 8m e um dos lados não paralelos 6m. Qual o perímetro?

55) Em um trapézio isósceles, a base maior mede 22m, a altura 8m e a soma dos lados não conhecidos é o triplo da base menor. Calcular a base menor.

56) $ABCD$ é um quadrilátero cujos ângulos B e D são retos e no qual $AB = 6$m, $BC = 8$m, $CD = 5$m. Calcular o lado AD.

(E. P. C. - Exército - Julho, 1953. 1.° Ano)

57) Em um trapézio retângulo as bases medem 9m e 4m, respectivamente, e as diagonais são perpendiculares. Calcular a altura.

58) Os lados de um retângulo medem 30cm e 40cm. Calcular os lados de um retângulo semelhante cuja diagonal mede 10cm.

59) Quantos metros tem o perímetro de um losango cujas diagonais medem 14cm e 48cm, respectivamente.

60) Um trapézio isósceles com 48m de perímetro e no qual uma das bases é o triplo da outra, está circunscrito a um círculo. Achar os lados do trapézio.

(E. P. C. - Exército - 1953)

61) O perímetro de um triângulo retângulo é 24m e o raio do círculo inscrito nesse triângulo é 2m. Calcular os lados do triângulo.

62) Os raios de dois círculos medem 15 e 20m e a distância dos seus centros tem 35m. Calcular o segmento da tangente comum, compreendido entre os pontos de contacto.

63) Determinar o raio do círculo circunscrito ao triângulo isósceles cujos lados são: $AB = AC = 10$m e $BC = 16$m.

(E. P. C. - Exército - 1953)

64) Determinar m na equação $x^2 - (2m - 1)x + m^2 - m = 0$ de modo que suas raízes estejam na mesma razão que o menor e o maior lado de um triângulo inscrito em um semicírculo e em que um ângulo externo mede 150°.

65) Determinar o raio do círculo inscrito num triângulo isósceles de 3m de base e 3,6m de altura.

66) Calcular o perímetro de um trapézio circunscrito a uma circunferência, sabendo-se que a soma das bases é 13m.

67) Qual o perímetro de um trapézio circunscrito a um círculo se a base média do trapézio mede 5 metros?

68) Calcular o perímetro de um trapézio circunscrito a um círculo, sabendo-se que a base média do trapézio mede 12m.

69) Um trapézio isósceles está circunscrito a um círculo de 2m de raio. Calcular o perímetro do trapézio sabendo-se que dois de seus ângulos são complementares.

70) Um triângulo isósceles está inscrito numa semicircunferência. Seus lados medem 5cm, 5cm e 8cm, respectivamente. Determinar o raio dessa circunferência. (Aproxime a resposta até décimo de milímetro).

(E. P. C. - Exército - Julho, 1953. 3.º Ano)

71) Os raios de dois círculos medem 15m e 20m e a distância dos seus centros tem 25m. Calcular a corda comum.

(E. P. C. - Exército - 1953)

72) Demonstre que um triângulo retângulo, que tem um ângulo de 30°, o menor cateto é a metade da hipotenusa.

73) Provar, que num triângulo retângulo, se o maior ângulo fôr o triplo do menor, o maior lado será o dôbro do menor.

74) Prove que, num triângulo retângulo que possui um ângulo de 30°, se a hipotenusa mede a metros, os catetos medirão $\frac{a}{2}$ e $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

75) Prove que num triângulo retângulo :

a) a hipotenusa é igual ao semi-perímetro do triângulo menos o raio do círculo inscrito ;

b) a hipotenusa é igual à soma dos catetos menos o diâmetro do círculo inscrito ;

c) a soma dos catetos é igual ao semi-perímetro mais o raio do círculo inscrito.

76) Provar, que num triângulo isósceles existe a seguinte relação :

$$h = \frac{2b^2r}{b^2 - 4r^2}$$

entre o lado desigual b, a altura h, relativa a êsse lado, e o raio r do círculo inscrito.

77) Provar que se um triângulo retângulo tem seus catetos iguais a b e c e a altura relativa à hipotenusa a igual a h, todo triângulo retângulo cujos catetos são $b+c$ e h, tem para hipotenusa $a+h$.

78) Prove que num trapézio isósceles, que tem um ângulo de 45° a altura é igual à semi-diferença das bases.

79) Prove que num trapézio isósceles, que tem um ângulo de 60°, cujas bases são respectivamente B e b $(B>b)$, seu perímetro é $3B-b$.

80) Prove que todo trapézio isósceles, que tem um ângulo de 30° e é circunscrito a um círculo de raio R, tem seu perímetro igual a $16R$.

81) Dados dois números a e b $(a>b)$ provar que todo triângulo cujos catetos são respectivamente a semi-diferença e a média proporcional dêsses números tem sua hipotenusa igual à média aritmética dos números dados.

RESPOSTAS:

1) 5cm; 2,4cm; 1,8cm e 3,2cm
2) 12cm; 4,61cm; 11,08cm e 1,92cm
3) 25cm; 15cm; 20cm e 12cm
4) 6cm; 8cm; 4,8cm e 6,4cm
5) 20cm; 16cm; 9,6cm e 12,8cm
6) 50cm; 30cm; 40cm e 18cm
7) 15cm; 20cm; 9cm e 16cm
8) 50cm; 40cm; 18cm e 32cm
9) 75cm; 60cm; 36cm e 27cm
10) 3cm; 4cm; 2,4cm; 1,8cm e 3,2cm
11) 12cm; 16cm; 9,6cm; 7,2cm e 12,8cm
12) 6cm; 8cm; 48cm; 3,6cm e 6,4cm
13) 15cm; 20cm; 12cm; 9cm e 16cm
14) 9cm; 12cm; 7,2cm; 5,4cm e 9,6cm
15) 30cm; 40cm; 24cm; 18cm e 32cm
16) 5cm; 3cm; 4cm; 1,8cm e 3,2cm
17) 5cm; 3cm; 4cm; 1,8cm e 3,2cm
18) 25cm; 15cm; 20cm; 9cm e 16cm
19) 75cm; 45cm; 60cm; 27cm e 48cm
20) 10cm, 6cm e 8cm
21) 25cm; 15cm e 20cm
22) 10cm; 6cm e 8cm
23) 6cm e 8cm
24) 10,8m

25) 2m, 3m e 6m
26) 4,61m
27) 36m
28) 4m
29) 5m
30) 12m
31) 14,4m ; 10m e 12,85m
32) 2,67cm
33) 4
34) 4m
35) 9m
36) 12m
37) 8m
38) 6m
39) 8m
40) 9m e 12m
41) 13m
42) 5m
43) 1m
44) 1m
45) 9,6m
46) 3cm
47) 5,3cm
48) 52m
49) 44,14m
50) 6m
51) 20m
52) 16cm
53) 24m
54) 34m
55) 10m
56) $5\sqrt{3}$ m
57) 6m
58) 6cm e 8cm
59) 1
60) 6m, 18m, 12m e 12m
61) 6m, 8m e 10m
62) $20\sqrt{3}$ m
63) 8,33m
64) 2 e -1
65) 1m
66) 26m
67) 20m
68) 48m
69) $16\sqrt{2}$ m
70) 4,16cm
71) 24m

RELAÇÕES MÉTRICAS NOS CÍRCULOS

1) Calcular a ordenada de um ponto de uma circunferência que determina sôbre o diâmetro correspondente, segmentos de 4cm e 16cm.

2) Da extremidade de um diâmetro de 20cm traça-se uma corda, cuja projeção sôbre o mesmo diâmetro mede 5cm. Calcular o comprimento dessa corda.

3) Num círculo duas cordas se cortam. Os dois segmentos de uma têm, respectivamente, 8cm e 3cm. Calcular os segmentos da outra, cujo comprimento total é igual a 14cm.

4) De um ponto P exterior a uma circunferência traçam-se duas secantes r e s. As distâncias do ponto P aos pontos de intersecção de r com à circunferência medem, respectivamente, 12cm e 3cm. Calcular a maior das distâncias de P aos pontos de intersecção de s com a circunferência, sabendo que a menor dessas distâncias é 4cm.

5) De um ponto exterior a um círculo traçam-se uma secante e uma tangente. A parte interna da secante mede 5cm e a externa 4cm. Qual o comprimento dessa tangente?

6) Duas cordas se cortam. O produto dos segmentos de uma é 60cm^2. Calcular os segmentos da outra cujo comprimento total é 17cm.

7) Da extremidade de um diâmetro traça-se uma corda de 6m, cuja projeção sôbre o mesmo diâmetro é 3m. Calcular o raio.

8) O raio de um círculo mede 17m ; calcular os segmentos que uma ordenada de 15m determina sôbre o diâmetro correspondente.

9) Pelas extremidades de um diâmetro traçam-se duas cordas cujas projeções sôbre êsse mesmo diâmetro medem 4m e 9m respectivamente. Sabendo que a primeira corda mede 8m, calcular a outra.

10) A flecha de uma corda de um círculo de 5m de raio mede 2m. Calcular a corda.

11) Num círculo de 20m de diâmetro, uma corda mede 16m. Calcular a flecha dessa corda.

12) Uma corda de um círculo mede 10m e sua flecha 1m. Calcular o raio.

13) Num círculo, de 24m de raio, uma corda mede 12m. Calcular a corda do arco duplo

14) Num círculo de 10m de raio, uma corda mede 8m. Calcular a flecha da córda do arco duplo.

15) De um ponto exterior a um círculo partem duas secantes ; uma mede 8m e sua parte externa 3m. Sabendo-se que a segunda secante mede 12m, calcular sua parte externa.

16) De um ponto situado a 10m do centro de um círculo, de 6m de raio, traça-se uma secante cuja parte externa é igual à interna. Calcular essa secante.

17) De um ponto situado a 20m do centro de um círculo, de 24m de diâmetro, traça-se uma tangente. Calcular a medida da tangente.

18) A potência de um ponto interior a uma circunferência é $56m^2$. Calcular o raio da circunferência sabendo que o ponto dista 13m do centro.

19) Qual a potência de um ponto distante de 25m do centro de uma circunferência, cujo diâmetro mede 30m.

20) Um círculo tem um diâmetro AB igual a 8m. Prolonga-se êsse diâmetro de um segmento BC igual a 1m. Qual a potência do ponto C?

21) Numa circunferência, uma corda de 60m tem uma flecha de 10cm. Determinar o diâmetro da circunferência.

(E. P. C. - Exército - Julho, 1953)

22) Inscreve-se um círculo num triângulo de lados 5m, 8m e 9m. Determinar a distância dos vértices do triângulo aos pontos de contacto. (E. P. C. - Exército - Janeiro, 1953)

23) Num círculo duas cordas se cortam; os segmentos de uma corda medem 3cm e 6cm, respectivamente; um dos segmentos da outra mede 2cm. Calcular o outro segmento.

(E. P. C. do Ar - 1952)

24) AB igual a 30m é uma corda de uma circunferência de 25m de raio. Calcular a corda que subtende o arco metade do arco AB.

(E. P. C. - Exército - Janeiro, 1953)

25) Num círculo de raio 25m, traçam-se a corda $AB=30m$ e a corda BC perpendicular ao diâmetro que passa por A. Calcular a corda BC.

(E. P. C. - Exército - Janeiro, 1953)

26) Num círculo de centro O e raio 6m, duas cordas AB e CD cortam-se no ponto M. Sabendo-se que $AM=5m$ e $OM=4m$, calcular BM. (E. P. C. - Exército - Julho, 1953)

27) O raio de um círculo mede 2,5m. A que distância do centro devemos traçar uma tangente à circunferência dêsse círculo para que ela seja igual a 6m?

(I. Educação - 2.ª P. Parcial - 4.ª Série Ginasial - 23/11/53)

28) Num círculo de raio 10m traça-se uma corda de 16m perpendicular a um diâmetro. Calcule os dois segmentos que ela determina sôbre o diâmetro.

(I. Educação - 2.ª P. Parcial - 4.ª Série Ginasial - 23/11/53)

29) Num círculo de raio 12m um arco AB mede 120°. Achar a distância de B ao diâmetro que passa por A.

30) Dois círculos de diâmetros 27m e 12m são tangentes exteriormente. Calcular o comprimento das tangentes exteriores comuns.

31) Duas circunferências são exteriores. A distância dos centros mede 15m e os raios medem, respectivamente, 4m e 3m. Calcular os segmentos que a tangente interior comum determina sôbre o segmento que une os centros das circunferências.

32) Duas circunferências, de raio 5m e 3m, são exteriores. Sabendo-se que a distância dos centros é 18m, calcular de quanto se deve prolongar a distância dos centros para encontrara a tangente exterior comum.

33) Duas circunferências são exteriores. Seus raios medem respectivamente 18m e 3m. A distância dos centros é 20m. Calcular o comprimento das tangentes exteriores comuns.

34) Em um círculo, uma corda corta um diâmetro segundo um ângulo de 45°. A soma dos quadrados dos segmentos da corda é igual a $50m^2$. Calcular o raio do círculo.

35) Num círculo de 10m de diâmetro, uma corda corta um diâmetro formando um ângulo de 45°. Calcular os segmentos determinados pelo diâmetro, na corda cujo comprimento total é 8m.

36) Calcular o perímetro de um trapézio, inscrito em um círculo de 5m de raio. A base maior do trapézio coincide com o diâmetro e a base menor é o dôbro de um dos lados.

37) Um trapézio está inscrito em um círculo de 10m de raio e cujo centro está sôbre a base maior do trapézio. Calcular a altura do trapézio, sabendo que a base menor é igual a um dos lados não paralelos.

38) Pela extremidade A de um raio OA de $\sqrt{3}$ m traça-se uma corda AB. A projeção de AB sôbre AO é AH. Calcule AB, sabendo-se que $AB = OH$. (C. Naval - 1956)

39) Provar que todo trapézio inscrito em um círculo é isósceles.

40) Provar que as tangentes interiores comuns de dois círculos exteriores se interceptam sôbre a linha dos centros dêsses círculos.

41) Provar que a menor distância de um ponto exterior a um círculo a êsse círculo é a parte externa da secante que passa por aquêle ponto e pelo centro.

42) Provar que o centro do círculo circunscrito a um triângulo retângulo é o ponto médio da hipotenusa.

43) Provar que as tangentes, traçadas de um ponto qualquer do prolongamento da corda comum de duas circunferências secantes, são iguais.

44) Dois círculos são tangentes exteriormente em T e AB é uma de suas tangentes comuns. Prolongando-se AT e BT êsses prolongamentos interceptarão as circunferências dos círculos em C e D, respectivamente. Provar que $\dfrac{AT}{BT} = \dfrac{BD}{AC}$ (A e B são pontos das circunferências).

45) Os arcos AB e AC de uma circunferência medem 120°, cada um. Provar que a corda que une os meios dêsses arcos fica dividida em três partes iguais pelas cordas AB e AC.

46) De um ponto P exterior a um círculo traçam-se duas tangentes PA e PB cuja medida é m. Sendo C um ponto qualquer da circunferência tal que $\widehat{ACB} < 180°$, provar que o triângulo, limitado pelas tangentes PA e PB e pela tangente que passa por C, tem para perímetro 2m.

47) Num círculo de raio R, um diâmetro corta uma corda AB em um ponto C. Provar que $AC^2+BC^2=2R^2$, se a corda AB formar um ângulo de 45° com o diâmetro.

RESPOSTAS:

1) 8cm	11) 4m	21) 100cm
2) 10cm	12) 13m	22) 2m, 3m e 6m
3) 12cm e 2cm	13) $6\sqrt{15}$ m	23) 9cm
4) 9cm	14) 4m	24) $10\sqrt{10}$ m
5) 6cm	15) 2m	25) 48m
6) 12cm e 5cm	16) $8\sqrt{2}$ m	26) 4m
7) 6m	17) 16m	27) 4m
8) 9m e 25m	18) 15m	28) 16m e 4m
9) 12m	19) 400m²	29) $3\sqrt{3}$ m
10) 8m	20) 9m²	30) 18m

31) 6,4m e 8,6m (usar semelhança de triângulos)

32) 27m	34) 5m	37) $5\sqrt{3}$ m
33) 20m	35) 7m e 1m	38) 1,27m
	36) 24,6m	

POLÍGONOS REGULARES

1) Calcular o lado de um quadrado inscrito em uma circunferência de 2π metros de comprimento.

2) Qual o apótema de um quadrado de $8\sqrt{2}$ m de perímetro?

3) O apótema de um quadrado mede 6,5m. Qual o seu perímetro?

4) Qual o raio do círculo circunscrito a um quadrado de $4\sqrt{2}$m de perímetro?

5) Qual o raio do círculo inscrito em um quadrado de 8m de perímetro?

6) Qual o lado do triângulo equilátero inscrito em um círculo cujo raio mede $2\sqrt{3}$ metros?

7) Qual o apótema do triângulo equilátero inscrito em um círculo cujo comprimento de sua circunferência mede 628m?

8) Qual o perímetro do triângulo equilátero inscrito em um círculo circunscrito a um quadrado de $2\sqrt{6}$m de lado?

9) Qual o raio do círculo circunscrito a um triângulo equilátero de $6\sqrt{3}$m de perímetro?

10) Num círculo, estão inscritos um quadrado e um triângulo equilátero. O perímetro do triângulo é $12\sqrt{6}$m. Calcular o perímetro do quadrado.

11) Qual o raio do círculo inscrito em um triângulo equilátero de $4\sqrt{3}$m de lado?

12) Um círculo inscrito em um quadrado, está circunscrito a um triângulo equilátero. A diagonal do quadrado mede $4\sqrt{2}$m. Calcular o apótema do triângulo equilátero.

13) Um quadrado está circunscrito a um círculo, inscrito em um triângulo equilátero. O apótema do quadrado mede $\sqrt{6}$m. Calcular o lado do triângulo.

14) Um trapézio está inscrito em um círculo, de 1m de raio e cujo centro está no interior do trapézio. Sabendo-se que as bases do trapézio são os lados do quadrado e do triângulo equilátero inscritos no círculo, calcular a altura do trapézio.

15) Um trapézio está inscrito em um círculo, de 2m de raio e cujo centro pertence a uma das bases do trapézio.

Calcular a altura do trapézio, sabendo que uma das bases é o lado do triângulo equilátero inscrito no círculo.

16) Um trapézio está inscrito em um círculo, de 2m de raio e cujo centro está no exterior do trapézio. As bases do trapézio são os lados do quadrado e do triângulo equilátero inscritos no círculo. Qual a altura do trapézio?

17) Num quadrado cujo lado mede 6m, inscreve-se um círculo; nesse círculo inscreve-se um triângulo equilátero e nesse triângulo inscreve-se um círculo. Qual a diferença entre os raios dos dois círculos?

18) Num círculo estão inscritos um quadrado e um triângulo equilátero. A diagonal do quadrado mede 4m. Calcular a altura do triângulo equilátero.

19) Calcular o apótema do hexágono regular inscrito em um círculo de $4\sqrt{3}$m de diâmetro.

20) Calcular o lado do hexágono regular inscrito em um círculo cujo comprimento da circunferência é 1 256cm.

21) Um hexágono regular e um triângulo equilátero estão inscritos no mesmo círculo. O perímetro do segundo é $12\sqrt{3}$m. Qual o perímetro do primeiro?

22) Qual o raio do círculo circunscrito a um hexágono regular de $2\sqrt{3}$m de apótema?

23) Calcular o raio do círculo inscrito em um hexágono regular, sabendo-se que o lado do triângulo equilátero circunscrito a êsse mesmo círculo mede 2m.

24) A altura de um trapézio inscrito em um círculo, cujo centro está no interior do trapézio, mede, com aproximação de $0{,}01$,π metros. As bases do trapézio são os lados de um quadrado e de um hexágono regular inscritos no mesmo círculo que o trapézio. Calcular o raio do círculo.

25) Um hexágono regular está inscrito em um círculo de 20m de diâmetro. Calcular o perímetro do triângulo formado

prolongando-se, nos dois sentidos, os lados não consecutivos do hexágono.

26) Um hexágono regular, de $2\sqrt{3}$ m de apótema, está inscrito em um círculo. Qual o lado de um hexágono regular inscrito em um outro círculo cujo perímetro é a metade do perímetro do primeiro?

27) O raio do círculo inscrito em um hexágono regular mede $\sqrt{3}$ m. Qual o raio do círculo circunscrito a êsse hexágono?

28) Calcular o lado do decágono regular inscrito em um círculo cujo raio é $(\sqrt{5}+1)$ metros.

29) Calcular o apótema do decágono regular inscrito em um círculo de 100cm de raio.

30) O lado de um decágono regular inscrito em um círculo mede 61,8m. Qual o raio do círculo?

31) Calcular o raio do círculo inscrito em um decágono regular de 618cm de perímetro.

32) Num círculo circunscrito a um hexágono regular de apótema $\sqrt{3}$ m, está inscrito um decágono regular. Calcular o apótema do decágono.

33) Num triângulo equilátero está inscrito um círculo e nesse círculo está inscrito um outro triângulo equilátero. Sabendo que o lado do menor triângulo mede $6\sqrt{3}$ m, calcular o lado do maior.

34) O lado de um quadrado inscrito em um círculo mede $2\sqrt{2}$ m. Calcular o lado do quadrado circunscrito a êsse círculo.

35) Dois hexágonos regulares estão, respectivamente, inscrito e circunscrito a um mesmo círculo. O perímetro do inscrito é $12\sqrt{3}$ m. Qual o perímetro do circunscrito?

36) O lado de um quadrado inscrito em um círculo mede $2\sqrt{6}$ m. Calcular o lado do triângulo equilátero circunscrito ao mesmo círculo.

37) Um círculo está inscrito a um hexágono regular e circunscrito a um triângulo equilátero. O lado do triângulo mede $3\sqrt{3}$ m. Achar o lado do hexágono.

38) O lado de um hexágono regular inscrito em um círculo mede 2m. Qual o perímetro do quadrado circunscrito ao mesmo círculo?

39) O lado de um triângulo equilátero circunscrito a um círculo mede 2m. Calcular o lado do triângulo equilátero inscrito no mesmo círculo.

40) O lado de um quadrado circunscrito a um círculo mede $2\sqrt{2}$ m. Qual o lado do quadrado inscrito nesse círculo?

41) O lado de um hexágono regular circunscrito a um círculo mede 4m. Qual o perímetro do triângulo equilátero inscrito nesse círculo?

42) O perímetro de um quadrado circunscrito a um círculo mede $4\sqrt{3}$ m. Calcular o lado do triângulo equilátero circunscrito ao mesmo círculo.

43) Um quadrado e um hexágono regular estão circunscritos a um mesmo círculo. O lado do hexágono mede $3\sqrt{3}$ m. Qual o lado do quadrado?

44) Calcular o raio do círculo inscrito em um triângulo equilátero inscrito em um círculo circunscrito a um quadrado de $10\sqrt{2}$ m de lado.

45) Um triângulo isósceles tem seu lado desigual medindo $2\sqrt{3}$ m e seu ângulo desigual 120°. Calcular a soma dos outros lados.

46) Num triângulo ABC : $AB=AC\neq BC$, $\widehat{ABC}=30°$ e $BC=1{,}732$m. Calcular AB.

47) A base de um triângulo isósceles mede 3,708m e o ângulo do vértice (o que se opõe à base) vale 36°. Calcular o perímetro dêsse triângulo. Faça :

$\sqrt{5} = 2{,}236$ (E. P. C. - Exército - 1955)

48) Num triângulo ABC, o maior lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois. Calcular o maior lado BC, sabendo-se que o lado AC mede $2\sqrt{2}$ m e que o ângulo $\widehat{ACB}$ mede 45°.

49) Calcular as medidas das diagonais de um hexágono regular convexo circunscrito a um círculo de $2\sqrt{3}$ m de raio.

50) Um hexágono regular convexo tem 5m de lado. Qual o comprimento de sua menor diagonal?

51) Ligando-se os pontos médios consecutivos de um quadrado inscrito em um círculo de 2m de raio, encontra-se um novo quadrado. Calcular o lado do novo quadrado.

52) Calcular o perímetro de um decágono regular inscrito num círculo de 4m de raio. (E. P. C. - Exército - 1953. 3.° Ano)

53) $ABCDEF$ é um hexágono regular inscrito num círculo de raio 5m. Calcular o lado e o apótema do hexágono regular que se obtém ligando sucessivamente os pontos médios dos lados do hexágono $ABCDEF$.

(E. P. C. – Exército – Janeiro, 1953. 1.° Ano)

54) Num círculo de $8\sqrt{3}$ metros de raio está inscrito um triângulo equilátero ABC. Do ponto D, meio de BC, traça-se DE perpendicular a AB. Calcular BE.

55) Num círculo estão inscritos um quadrado e um triângulo equilátero; noutro círculo, um hexágono regular. O lado do quadrado é igual ao apótema do hexágono e o lado dêste tem 2m. Pede-se o lado do triângulo.

(E. Militar - Curso Intendência – 1947)

56) Num círculo de raio igual a $4\sqrt{3}$ metros está inscrito um triângulo equilátero ABC. Calcular o lado do triângulo equilátero que se obtém unindo-se os pontos médios dos lados do triângulo ABC.

57) Num círculo de $2\sqrt{3}$ m de raio está inscrito um hexágono regular. Calcular o perímetro do polígono que se obtém unindo-se os pontos médios dos lados do hexágono.

58) Pelo centro de um círculo circunscrito a um triângulo equilátero de altura $h = 15$m, traça-se uma paralela a um dos lados do triângulo. Calcular o perímetro do trapézio formado.

59) Qual a razão entre os perímetros de dois triângulos, um inscrito e outro circunscrito à mesma circunferência?

60) Calcular a distância entre dois lados paralelos de um hexágono regular convexo de $12\sqrt{3}$ m de perímetro.

61) Deduzir, empregando a fórmula que dá o apótema de um polígono regular de n lados, as expressões dos apótemas, do triângulo equilátero, quadrado e hexágono regular, em função do raio do círculo circunscrito.

62) Deduzir, empregando a fórmula do lado do polígono de $2n$ lados em função do de n lados, as expressões dos lados do hexágono, octógono e dodecágono regulares.

63) Provar que o lado de um quadrado circunscrito a um círculo é o dôbro do lado do hexágono regular inacrito nesse círculo.

64) Provar que o lado do triângulo equilátero inscrito em um círculo é a metade do lado do triângulo equilátero circunscrito a êsse círculo.

65) Provar que os lados do hexágono regular circunscrito e do triângulo equilátero, inscrito, num mesmo círculo, guardam entre si a razão 3/2.

66) Um hexágono regular de p metros de perímetro está inscrito em um círculo. Prove que o lado do triângulo que se obtém prolongando-se, nos dois sentidos, os lados do hexágono é igual a $p/2$.

67) Deduza as expressões dos apótemas do triângulo equilátero, quadrado e hexágono regular em função dos lados respectivos.

68) Num círculo de raio R está inscrito um quadrado. Prove que o perímetro do quadrilátero, que se obtém unindo-se os pontos médios dos lados do quadrado é igual a $4R$.

69) Um quadrado tem seu lado igual a m. Sôbre uma de suas diagonais constrói-se outro quadrado de lado igual a essa diagonal. Prove que a diagonal do novo quadrado é igual a 2m.

70) Num círculo de 2m de raio foram traçadas duas cordas paralelas. Sabendo-se que uma das cordas é o lado do quadrado e a outra o lado de um hexágono regular inscritos no mesmo círculo, mostre que a distância entre essas cordas é, aproximadamente, a quarta parte do comprimento da circunferência dêsse círculo.

71) Calcular os lados não paralelos do trapézio inscrito em um círculo de raio igual a 1m, sabendo-se que o centro do círculo está no interior do trapézio e que as bases são, respectivamente, os lados do triângulo equilátero e do hexágono regular inscritos nesse círculo.

RESPOSTAS:

1) $\sqrt{2}$ m
2) $\sqrt{2}$ m
3) 52m
4) 1m
5) 1m
6) 6m
7) 50m
8) 18m
9) 2m
10) 32m
11) 2m
12) 1m
13) $6\sqrt{2}$ m
14) 1,207m
15) 1m
16) 0,414m
17) 1,5m
18) 3m
19) 3m
20) 200cm
21) 24m
22) 4m
23) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ m
24) 2m
25) 90m
26) 2m
27) 2m
28) 2m
29) 95cm
30) 100m
31) 95cm
32) 1,90m
33) $12\sqrt{3}$ m
34) 4m
35) 24m
36) 12m
37) $2\sqrt{3}$ m
38) 16m
39) 1m
40) 2m
41) 18m
42) 3m
43) 9m
44) 5m
45) 4m
46) 1m
47) 15,708m
48) 4m
49) 8m e $4\sqrt{3}$ m
50) $5\sqrt{3}$ m

51) 2m
52) 24,72m
53) $l = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ m e $a = 3{,}75$m
54) 6m
55) $3/2\sqrt{2}$ m
56) 6m
57) 18m
58) $\frac{70\sqrt{3}}{3}$ m
59) $\frac{1}{2}$
60) 6m
61) $\frac{R}{2}$, $\frac{R\sqrt{2}}{2}$ e $\frac{R\sqrt{3}}{2}$
62) R; $R\sqrt{2-\sqrt{2}} \cong 0{,}765R$ e $R\sqrt{2-\sqrt{3}} \cong 0{,}518R$

. . . .

. . . .

67) $2a\sqrt{3}$; $2a$ e $2/3\,a\sqrt{3}$

. . . .

. . . .

70) $\sqrt{3} + \sqrt{2} \cong \pi$
71) 1,414m

ÁREAS

1) Calcular a área de um retângulo de 10m de diagonal e 28m de perímetro.

2) Calcular o perímetro de um retângulo de 240m² de área, sabendo-se que suas dimensões estão entre si na razão 3/5.

3) Calcular a área de um triângulo retângulo, cuja hipotenusa mede 10m e o perímetro 24m.

4) Calcular a área de um triângulo isósceles, cuja base mede 8m e o perímetro 18m.

5) Calcular a área de um triângulo equilátero de 2m de lado.

6) Calcular a área do triângulo equilátero, inscrito em um círculo de 2m de raio.

7) Um triângulo é equivalente a um retângulo de dimensões iguais a 8m e 5m, respectivamente. Sendo a base do triângulo igual a 16m, calcular sua altura.
(C. I. O. R. M. - 1.º exame admissão)

8) Calcular a área de um quadrado de 20m de perímetro.
9) Calcular a área do quadrado de $4\sqrt{2}$ m de diagonal.
10) Calcular a área do quadrado inscrito em um círculo de 2m de diâmetro.
11) Calcular a área do losango de 20m de perímetro, sabendo que sua diagonal menor mede 6m.
12) Qual a área de um losango de 8m de perímetro e que possui um ângulo de 120°?
13) Qual a área de um rombóide, que tem um ângulo de 45° formado pelos lados que medem, respectivamente, 10m e 4m?
14) Dois lados consecutivos de um paralelogramo medem, respectivamente, 10m e 4m. Calcular a área do paralelogramo, sabendo que um dos seus ângulos mede 60°.
15) Qual a área do paralelogramo, que tem um ângulo de 30° e cujos lados que o formam medem, respectivamente, 6m e 10m?
16) Qual a área de um trapézio retângulo cuja base média mede 12m e cujo menor dos lados não paralelos é igual a 4m?
17) Em um trapézio de 6m de altura, a diferença das bases é 24m e uma delas é o triplo da outra. Calcular a área.
18) Um icoságono regular tem *a* metros de lado e *b* metros de apótema. Qual a sua área?
19) Um círculo tem para comprimento de sua circunferência 25,12m. Qual a sua área?
20) Qual a área da coroa circular de 3m de largura e cujo raio do menor círculo que a limita mede 1m?
21) Um setor circular de 40° pertence a um círculo de 30cm de raio. Calcular a área do setor.
22) Um segmento circular de 30° pertence a um círculo de 12m de raio. Calcular sua área.

23) Calcular a área do hexágono regular, inscrito em um círculo de 2m de raio.
24) Calcular a área do triângulo equilátero, inscrito em um círculo de 2m de raio.
25) Qual a área do quadrado, inscrito em um círculo de 5m de raio?
26) O perímetro de um hexágono regular, inscrito em um círculo, mede $6\sqrt{3}$ m. Calcular a área do quadrado, inscrito no mesmo círculo.
27) O apótema de um triângulo equilátero, inscrito em um círculo mede 3m. Calcular a área do hexágono, inscrito no mesmo círculo.
28) A área de um hexágono regular, inscrito em um círculo, mede 8m². Calcular a área do triângulo equilátero, inscrito no mesmo círculo.
29) A área de um quadrado inscrito, em um círculo, mede 2m². Calcular a área do hexágono regular, inscrito no mesmo círculo.
30) A área de um hexágono regular, inscrito em um círculo, mede $12\sqrt{3}$ m². Calcular a área do hexágono regular, circunscrito ao mesmo círculo.
31) O perímetro de um triângulo equilátero, inscrito em um círculo, mede $24\sqrt{3}$ m. Calcular a área do hexágono regular circunscrito ao mesmo círculo.
32) A área de um hexágono regular circunscrito a um círculo mede $27\sqrt{3}$ m². Qual a área do quadrado inscrito nesse círculo?
33) Calcular a área de um trapézio isósceles, cujas bases medem, respectivamente, 14m e 6m e o seu perímetro 30m.
34) Num trapézio retângulo as bases medem, respectivamente, 10m e 6m e o maior dos lados não paralelos mede 5m. Calcular a área.

35) Em um trapézio isósceles a base menor mede 8m, a altura 5m e o segmento da base média, compreendido entre os pontos de intersecção com as diagonais, é igual a 3m. Calcular a área do trapézio.

36) Calcular a área de um trapézio, circunscrito a um círculo de 314cm² de área, sabendo-se que a soma dos lados não paralelos dêsse trapézio é 62cm.

37) Calcular a área de um trapézio isósceles, cujas bases medem, respectivamente; 12m e 8m, sabendo-se que um dos ângulos do trapézio mede 45°.

38) Num trapézio isósceles a base média é 12m, o perímetro 44m e um dos ângulos do trapézio é 135°. Qual a área?

39) Um trapézio isósceles está circunscrito a um círculo; sabendo-se que o perímetro do trapézio mede 40m e que um ângulo externo mede 135°, calcular a área do trapézio.

40) Qual é a área do círculo, inscrito num setor circular de 60°, pertencente a um círculo de 3m de raio?

41) Calcular o perímetro de um quadrado inscrito numa circunferência de círculo de 3,14m² de área.
(Col. Pedro II - Ext. - 2.ª P. Parcial - 4.ª Série Gin. - 1953)

42) Calcular a área do quadrado, inscrito em um círculo de área igual a 12,56m².
(E. Militar - 1939)

43) Um trapézio inscrito em um círculo de 10m de raio, tem sua base menor igual a 10m. Calcular a área do trapézio sabendo-se que o centro do círculo está sôbre sua base maior.

44) Calcular a área de um trapézio isósceles circunscrito cujo perímetro é 24m e cujo menor ângulo mede 30°.

45) Calcular a área de um paralelogramo cuja diagonal maior mede $2\sqrt{109}$ m e dois lados consecutivos 12m e 10m.

46) Um quadrado está inscrito em um círculo de π metros quadrados de área. Qual a área do quadrado?

47) A base de um retângulo é 24m. Calcular a base de um outro retângulo semelhante ao primeiro e cuja área é 16/9 da do primeiro.

48) Calcular as dimensões de um retângulo de 75m² de área, se estas dimensões estão na razão de 1 para 3.

49) Um retângulo tem 5m de base e 2m de altura. Calcular a área de um retângulo semelhante cuja altura mede 10m.

50) As diagonais de dois retângulos semelhantes medem 5m e 35m. A área do menor é 12m². Calcular a área do maior.

51) A área de um polígono mede 1 200m². Calcule a área de um polígono semelhante sabendo que a razão de semelhança do primeiro para o segundo é de 5 para 2.

52) Calcular a área de um trapézio isósceles, cuja base maior mede 20m, um dos lados iguais, 5m e um dos ângulos agudos 45°.
(E. P. C. - Exército - 1952. 3.° Ano)

53) A hipotenusa de um triângulo retângulo mede 45cm e a soma dos catetos é igual a 63cm. Calcule a área do triângulo.
(I. Educação - 2.ª P. Parcial - 4.ª Série Ginasial - 25/11/53)

54) O apótema de um quadrado, inscrito num círculo, mede 3m. Calcular a área do triângulo equilátero, cuja altura é igual ao lado do hexágono regular circunscrito ao mesmo círculo.
(E. Aeronáutica - 1948)

55) Calcular a base maior de um trapézio cuja área mede 0,68m², tendo a altura 0,80m e a base menor 0,50m.
(E. P. C. do Ar - 1952)

56) Qual o comprimento de uma circunferência, cujo raio é o lado maior de um retângulo que tem de área 35cm² e, de semi-perímetro, 12cm?
(Colégio Militar - Seleção para o C. Científico)

57) Num círculo de diâmetro 12cm estão inscritos um triângulo equilátero e um hexágono regular. O apótema do triângulo é igual a 3cm. Calcule a área do hexágono.
(I. Educação - 2.ª P. Parcial - 4.ª Série Ginasial - 1953)

58) Num triângulo retângulo um cateto mede 8dm e sua projeção sôbre a hipotenusa mede 6,4dm. Determinar a área do círculo circunscrito ao triângulo.
(E. P. C. - Exército - Julho, 1953. 1.º Ano)

59) O lado de um triângulo equilátero é igual ao apótema do hexágono inscrito num círculo de raio igual a 6cm. Calcular a área do triângulo equilátero.
(E. P. C. - Exército - Julho, 1953. 3.º Ano)

60) Dois lados consecutivos de um paralelogramo medem, respectivamente, 12cm e 9cm e formam um ângulo de 120°. Calcule a área do paralelogramo.
(I. Educação - 2.ª P. Parcial - 4.ª Série Ginasial - 1953)

61) Calcular a área do círculo, inscrito no triângulo equilátero, cujo lado mede 12m. (E. P. C. - Exército - Janeiro, 1953. 1.º Ano)

62) Qual a área do trapézio inscrito em um círculo de 6m de raio, sabendo-se que o centro do círculo está sôbre a base maior, e a base menor mede 6m.

63) A área do trapézio $ABCD$, cujas bases medem 7m e 3m, é 18m². Achar a área do triângulo BCD.

64) P é um ponto da base BC de um triângulo ABC tal que $BP=3$m e $PC=2$m. A área do triângulo APC é 5m². Calcular a área do triângulo APB.

65) Num trapézio a área é igual a 32m², e uma das bases é 10m. Determinar o comprimento de um segmento de reta, unindo os lados não paralelos, que é paralelo a esta base e que dista desta 1m. Sabe-se que a altura do trapézio é 4m.
(C. P. O. R. - 19/11/50)

66) Num triângulo retângulo os lados são proporcionais a 3, 4 e 5. Sabendo-se que o perímetro é 60m, determinar a área dêste triângulo.
(C. P. O. R. - 1950)

67) Um quadrado tem de diagonal 16cm. Sôbre cada lado, exteriormente ao quadrado, constrói-se um triângulo equilátero. Calcular a área da figura total assim formada.
(I. Educação - 2.ª P. Parcial - 4.ª Série Ginasial - 1953)

68) O perímetro de um triângulo é de 24dm. A circunferência retificada do círculo, inscrito nesse triângulo, é 12,56dm. Determinar a base do retângulo de área equivalente à dêsse triângulo, sabendo-se que a altura do retângulo é de 4dm ($\pi=3{,}14$). (E. P. C. - Exército - Julho, 1953. 3.º Ano)

69) As alturas de um triângulo são, em metros, $6x$, $4x$ e $3x$ e o perímetro 18 metros. Calcular os lados.

70) A base maior de um trapézio, circunscrito a um círculo, mede 12m e os lados não paralelos 5m e 8,5m. Calcular a área.

71) As bases de um trapézio medem 20m e 12m e a altura 6m. Calcular a área do menor triângulo formado prolongando-se os lados não paralelos.

72) As áreas de dois triângulos equiláteros são $140\sqrt{3}$ e $35\sqrt{3}$ metros quadrados, respectivamente. Qual a razão entre suas alturas?

73) A área de um pentágono regular mede 18m². Calcular a área do pentágono regular cujo perímetro é 3 vêzes menor.

74) Um eneágono regular tem 26m de perímetro e 78m² de área. Calcular o perímetro do círculo, inscrito no polígono.

75) Calcular a área do quadrado, inscrito em um triângulo isósceles de 16m de base e 36m de perímetro.

76) Calcular a área do quadrado, inscrito em um triângulo equilátero de 2m de lado.

77) A potência de um ponto, em relação a um círculo, é 400m². A distância dêsse ponto ao centro é 25m. Calcular a área do círculo.

78) Se o raio de um círculo é o triplo do raio de outro, a área do primeiro é ...... vêzes a área do segundo.
(I. Educação - Seleção 1956)

79) As tangentes de um círculo de raio 6m, traçadas de um ponto exterior formam um ângulo de 60°. Calcular a

área da superfície compreendida entre o círculo e as tangentes.

(E. P. C. - Exército - Janeiro, 1952)

80) Três círculos se tangenciam dois a dois e seus raios são iguais a 0,5m. Calcular a área da figura interior, compreendida entre os três círculos. (C. P. O. R. - 19/11/50)

81) Calcular a área do triângulo, cujo cateto menor corresponde ao raio duma circunferência de comprimento igual a 125,6m e cujo cateto maior é igual à diagonal de um retângulo que tem para lados 15m e 20m.

(E. Aeronáutica - 1948)

82) As diagonais de um losango medem 18m e 12m; acrescentar um mesmo comprimento a cada uma delas, de maneira que a superfície do novo losango formado seja dupla da do primeiro.

(E. Militar - 1946)

83) Num círculo estão inscritos um quadrado e um triângulo equilátero; noutro círculo, um hexágono regular. O lado do quadrado é igual ao apótema do hexágono e o lado dêste tem 2m. Pede-se o lado do triângulo.

(E. Militar - Intendência - 1947)

84) Os catetos de um triângulo retângulo medem 3m e 4m. A que distância do vértice deve-se traçar uma paralela à hipotenusa, para que a área do trapézio obtido seja igual a 5,75m².

85) Dois círculos de raios iguais a 6cm têm a distância entre os seus centros igual ao seu raio. Calcular a área da superfície comum aos dois círculos.

86) Duas circunferências exteriores têm seus raios, respectivamente, iguais a 18m e 3m e a distância entre os seus centros mede 25m. Calcular a área do trapézio, cujos vértices são os centros das circunferências e os pontos de contacto dessas circunferências com uma de suas tangentes comuns exteriores.

87) Dá-se um triângulo retângulo cujos catetos medem 18 e 24 metros. Pede-se calcular:

a) a altura relativa à hipotenusa;

b) a distância do ponto de encontro das medianas ao vértice do ângulo reto;

c) os segmentos determinados sôbre a hipotenusa pela bissetriz interna do ângulo reto;

d) a área do círculo inscrito no triângulo dado.

e) as dimensões do retângulo de 96m² de área, inscrito no triângulo dado e tal que seu lado maior assente sôbre o cateto menor. (E. Naval - 20/2/51)

88) O menor dos lados de um trapézio retângulo é a base menor. Calcular a sua área sabendo-se que seus lados são números inteiros e consecutivos.

89) Calcular a área de um triângulo equilátero circinscrito a uma circunferência, sabendo-se que um arco dessa circunferência, de 45°, tem um comprimento igual a 3,14cm.

90) O perímetro de um polígono x é 20m e o de um polígono y, semelhante a x é 30m. Calcular a área de x sabendo que a de y é 72m².

91) Um triângulo ABC, retângulo em A, é equivalente ao triângulo isósceles ABD. Sabendo-se que $AB = 8$m, $AC = 6$m e que o ponto M é a intersecção de AD com BC, calcular a área do triângulo ABM.

92) Um triângulo ABC tem 12m de base. Traçando DE paralelo à base BC, obtém-se um trapézio $BCDE$ equivalente ao triângulo ADE. Calcular o lado comum a êsses dois polígonos equivalentes.

93) No triângulo ABC, o lado $BC = 4$m. Por um ponto D do lado AC traça-se DE paralela a BC. Calcular o segmento DE de modo que o triângulo ABC fique dividido em duas partes que estejam entre si, como 2 está para 3.

94) As bases de um trapézio têm 10m e 20m, respectivamente; a altura mede 8m. Calcular o comprimento do segmento, paralelo às bases, que divida o trapézio em duas partes equivalentes.

95) As bases de um trapézio medem 9m e 6m, respectivamente; calcular a medida do segmento paralelo às bases que divide o trapézio em duas partes proporcionais a 2 e 3.

96) Em um triângulo ABC, $BC=12$m a mediana $AM=5$m e a sua área é 24m^2. Calcular o menor lado do triângulo.

97) As bases de um trapézio medem 12m e 10m e a altura 6m. Calcular a área do quadrilátero formado unindo-se os meios dos lados adjacentes do trapézio.

98) Um quadrado $ABCD$ está circunscrito a um círculo de 5m de raio. Com centro em A e raio AB traça-se um arco de circunferência AD. Calcular a área da figura BCD assim formada.

99) Com centro em 0 traçam-se dois círculos de raios respectivamente iguais a 12m e 8m. Do mesmo ponto O traçam-se duas semi-retas formando um ângulo de 90°. Calcular a área da porção de plano, comum ao ângulo e ao círculo maior.

100) Um losango $ABCD$ tem seu ângulo interno $A=60°$ e suas diagonais, respectivamente iguais a 60cm e 40cm, se interceptam num ponto I. Com centro em A e raio AI traça-se uma circunferência, que intercepta o lado AB no ponto M. Calcular a área da figura MBI formada.

101) Um trapézio isósceles tem um ângulo de 45° e bases respectivamente iguais a 60cm e 20cm. Com centro no ponto médio da base menor, traça-se uma circunferência de diâmetro igual à base menor do trapézio. Calcular a área de porção do trapézio não pertencente ao círculo limitado pela circunferência traçada.

102) Num trapézio retângulo $ABCD$, onde C é o maior ângulo, $B=45°$, a base maior mede 23m e a altura 10m. Com centro em A e raio AD traça-se uma circunferência Calcular a área da porção de trapézio não pertencente ao círculo da circunferência traçada.

103) Por um ponto P, exterior a um círculo de raio R e distante de $2R$ da circunferência dêsse círculo, traçam-se uma tangente e uma secante, passando pelo centro. A distância de P ao ponto de contacto da tangente é 8m. Calcular a área do setor do círculo cujo ângulo é de 45°.

104) Um trapézio está circunscrito a um círculo. A base maior e os lados oblíquos medem, respectivamente, 24cm, 10cm e 17cm. Calcule a área do octógono regular inscrito no círculo.

105) Calcule a área de uma coroa circular, sabendo que a corda AB, do círculo maior tangente ao menor mede 8m. Faça $\pi=3{,}14$. (E. P. C. - Exército - 1955)

106) Calcule a área do triângulo equilátero circunscrito a um círculo de $2\sqrt{3}$ m de raio.

107) Qual a área do quadrado circunscrito a um círculo de 2m de raio?

108) Avaliar a área do hexágono regular circunscrito a um círculo de 1m de raio.

109) A área de um quadrado inscrito em um círculo mede 4m^2. Qual a área do octógono regular inscrito no mesmo círculo?

110) A área de um dodecágono regular inscrito em um círculo é 48m^2. Calcular a área do decágono regular inscrito no mesmo círculo.

111) Um setor circular está circunscrito a um círculo de 2m de raio. Calcular a área do setor.

112) Um círculo tem $36\pi\text{m}^2$ de área. Calcular a área do segmento circular dêsse círculo, cuja corda que o limita mede $6\sqrt{3}$ m.

113) Uma coroa circular tem uma corda de seu círculo maior, tangente ao menor, igual a k metros. Calcular a área da coroa em função de k.

114) Exprimir a área de um hexágono regular em função da altura h de um triângulo equilátero cujos vértices coincidem com 3 dos vértices do hexágono.

115) Deduzir as expressões das áreas do quadrado, do hexágono regular e do triângulo equilátero, em função do raio do círculo circunscrito.

116) Deduzir as expressões das áreas do quadrado, do hexágono regular e do triângulo equilátero, em função de seus respectivos apótemas.

117) Um triângulo retângulo possui um ângulo de 60°. Seu menor lado mede c. Calcular sua área em função de c.

118) Um triângulo retângulo tem um ângulo de 45° e sua hipotenusa mede $2a$. Deduzir a expressão de sua área em função de a.

119) Um ângulo externo de um triângulo retângulo mede $\frac{2\pi}{3}$ radianos e a hipotenusa mede a. Qual a expressão da área do triângulo em função da hipotenusa?

120) Exprimir, em função do raio, a área do segmento circular que tem para corda o lado do quadrado, inscrito no círculo do segmento.

121) Um setor circular de 60° pertence a um círculo de raio R. Exprimir, em função de R, a área do círculo, inscrito no setor.

122) Calcular a área de um triângulo equilátero, inscrito em um quadrado de lado a, devendo um dos vértices do triângulo coincidir com um dos vértices do quadrado.

123) Calcular a relação entre a área do hexágono regular, circunscrito a um círculo, e a área do triângulo equilátero, inscrito no mesmo círculo.

124) Traçando, no interior de um quadrado, sôbre cada lado, semicircunferências, determinamos uma rosácea de quatro fôlhas. Qual a razão entre a área da rosácea e a do quadrado?

RESPOSTAS:

1) $48m^2$
2) $64m$
3) $24m^2$
4) $12m^2$
5) $1{,}73m^2$
6) $3\sqrt{3}\ m^2$
7) $5m$
8) $25m^2$
9) $16m^2$
10) $2m^2$
11) $24m^2$
12) $2\sqrt{3}\ m^2$
13) $20\sqrt{2}\ m^2$
14) $20\sqrt{3}\ m^2$
15) $30m^2$
16) $48m^2$
17) $144m^2$
18) $10abm^2$
19) $50{,}24m^2$
20) $47{,}10m^2$
21) $314m^2$
22) $1{,}68m^2$
23) $6\sqrt{3}\ m^2$
24) $3\sqrt{3}\ m^2$
25) $50m^2$
26) $6m^2$
27) $54\sqrt{3}\ m^2$
28) $4m^2$
29) $2{,}60m^2$
30) $16\sqrt{3}\ m^2$
31) $128\sqrt{3}\ m^2$
32) $27m^2$
33) $30m^2$
34) $24m^2$
35) $55m^2$
36) $620cm^2$
37) $20m^2$
38) $60\sqrt{2}\ m^2$
39) $50\sqrt{2}$
40) πm^2
41) $6{,}28m$
42) $8m^2$
43) $75\sqrt{3}\ m^2$
44) $18m^2$
45) $72m^2$
46) $2m^2$
47) $32m$
48) $5m$ e $15m$
49) $250m^2$
50) $588m^2$
51) $192m^2$
52) $58m^2 (\sqrt{2}=1{,}41)$
53) $486cm^2$
54) $8\sqrt{3}\ m^2$
55) $1{,}2m$
56) $14\pi cm$
57) $54\sqrt{3}\ cm^2$
58) $78{,}50dm^2$
59) $27/4\ \sqrt{3}\ cm^2$
60) $54\sqrt{3}\ cm^2$
61) $12\pi m^2$
62) $27\sqrt{3}\ m^2$
63) $5{,}40m^2$
64) $7{,}50m^2$
65) $7m$
66) $150m^2$
67) $21{,}84m^2$
68) $6dm$
69) $4m$, $6m$ e $8m$
70) $27m^2$
71) $54m^2$
72) 2
73) $2m^2$
74) $12\pi m^2$
75) $19{,}86m^2$
76) $0{,}92m^2$
77) $225\pi m^2$
78) $40\sqrt{2}\ m$
79) $24{,}60m^2$
80) $0{,}0403m^2$
81) $250m^2$
82) $6m$
83) $3/2\ \sqrt{2}\ m$
84) $1/5\ \sqrt{6}\ m$
85) $44{,}22cm^2$
86) $210m^2$
87) $14{,}4m$; $10m$; $12{,}8$ e $17{,}2m$; $36\pi m^2$; $12m$ e $8m$
88) $18m^2$
89) $48\sqrt{3}\ cm^2$
90) $162m^2$
91) $16m^2$
92) $6\sqrt{2}\ m$
93) $\frac{4}{5}\sqrt{10}\ m$
94) $15{,}81m$
95) $7{,}32m$
96) $5m$
97) $33m^2$
98) $21{,}50m^2$
99) $62{,}80m^2$
100) $64{,}50cm^2$

RESPOSTAS:

101) $643cm^2$

102) $101{,}50m^2$

103) $8\pi m^2$

104) $32\sqrt{2}\ cm^2$

105) $50{,}24m^2$

106) $12m^2$

107) $16m^2$

108) $2\sqrt{3}\ m^2$

109) $4\sqrt{2}\ m^2$

110) $20\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\ m^2 \cong 47m^2$

111) $6\pi m^2$

112) $22{,}11m^2$

113) $\frac{k\pi}{2}\ m^2$

114) $\frac{2h^2\sqrt{3}}{3}$

115) $2R^2$, $\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$

116) $4a^2$, $2a^2\sqrt{3}$ e $3a^2\sqrt{3}$

117) $\frac{c^2\sqrt{3}}{2}$

118) a^2

119) $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$

120) $\frac{\pi - 2}{4}R^2$

121) $\frac{\pi R^2}{9}$

122) $(2\sqrt{3} - 3)\,a^2$

123) 3/8

124) $\frac{\pi - 2}{2}$

SEGUNDA PARTE

QUESTÕES DAS PROVAS DE ADMISSÃO

Escola Carmela Dutra
Instituto de Educação
Colégio Naval

(Resolvidas)

I) ESCOLA NORMAL CARMELA DUTRA

Prova de Matemática

(Exame de Admissão à primeira série do Cursò Normal, realizado em 2/12/1946).

PRIMEIRA ÉPOCA

1.ª QUESTÃO: Calcular a área de um trapézio isósceles do qual uma das bases é b e um dos lados não paralelos é m.

Sabe-se que m contém tantas unidades quantos são os números de 4 algarismos divisíveis por todos os números de 1 algarismo.

b é dado pela condição de que as equações

$$x^2 - 10x + b = 0$$
$$y^2 - 11y + 2b = 0$$

tenham uma raiz comum.

O perímetro do trapézio é igual ao número de lados de um polígono convexo que tem 170 diagonais distintas.

A área é dada em m^2.

2.ª QUESTÃO: Determinar K no sistema

$$Kx - 2y = K + 2$$
$$3x + (5 - K)y = 2K + 2$$

de modo que:

1.º) *as equações sejam incompatíveis;*

2.º) *o sistema seja indeterminado.*

3.ª Questão: Defina a divisão de um segmento em média e extrema razão; deduza a fórmula do segmento áureo e justifique a construção.

RESOLUÇÃO

1.ª) 1) Cálculo de m:

Para calcularmos os números de 4 algarismos divisíveis por todos os números de 1 algarismo (é evidente que está excluído o zero, que não é divisor de nenhum número), basta acharmos primeiro o m.m.c. dos números de 1 algarismo, e, após, achar os múltiplos dêsse m.m.c. que possuam 4 algarismos.

m.m.c. (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) = 2 520.

Seus múltiplos de 4 algarismos são 2 520, 5 040 e 7 560.

Então:

$$m = 3$$

2) Cálculo de b:

Seja a uma raiz comum às duas equações, então

$$\begin{cases} a^2 - 10a + b = 0 \\ a^2 - 11a + 2b = 0 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} a^2 - 10a + b = 0 \\ -a^2 + 11a - 2b = 0 \end{cases}$$

Somando vem $a = b \therefore b^2 - 10b + b = 0 \therefore b^2 - 9b = 0 \therefore b = 9.$

3) Cálculo do perímetro do trapézio ($2p$):

$$2p = n \quad \therefore \quad \frac{n(n-3)}{2} = 170 \therefore n^2 - 3n = 340$$

$$n = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 1\,360}}{2} = \frac{3 \pm 37}{2}$$

$$n_1 = 20 \qquad n_2 = -17 \text{ (estranha)}$$

$n = 20$ portanto, $2p = 20.$

4) Cálculo da área do trapézio:

$$S = \frac{b + b'}{2} \times h$$

Se $b = 9$ $\quad b' = 20 - 9 - 6 = 5$

e

$$S = \frac{9 + 5}{2} \times h$$

Mas $\quad h = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$

$\therefore S = 7\sqrt{5}$ ou $S = 7 \times 2{,}23 = 15{,}61\text{m}^2$

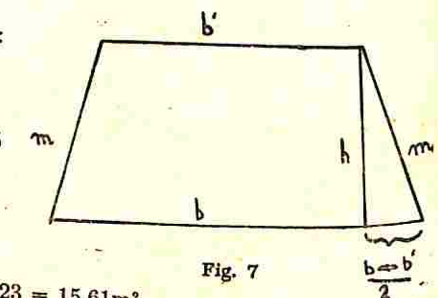


Fig. 7

2.ª) 1) *As equações sejam incompatíveis.*

A condição para que o sistema seja incompatível é:

$$\frac{k}{3} = \frac{-2}{5-k} \neq \frac{k+2}{2k+2}$$

$\therefore 5k - k^2 = -6 \qquad 2k^2 + 2k \neq 3k + 6$

$\therefore k^2 - 5k - 6 = 0 \qquad 2k^2 - k - 6 \neq 0$ temos $\begin{cases} k' = 2 \\ k'' = -\frac{3}{2} \end{cases}$

Resolvendo $\begin{cases} k' = 6 \\ k'' = -1 \end{cases}$ E se se anula para $k = 2$ ou $k = -\frac{3}{2}$

Então $2k^2 - k - 6 \neq 0$ para $k \neq 2$ e $k \neq -\frac{3}{2}$

Portanto: $k = 6$ e $k = -1$ são os valores que tornam as equações incompatíveis.

2) *O sistema é indeterminado.*

A condição é $\dfrac{k}{3} = \dfrac{-2}{5-k} = \dfrac{k+2}{2k+2}$

$\therefore k^2 - 5k - 6 = 0 \quad$ e $\quad 2k^2 - k - 6 = 0$

que nos dá

$k = 6$ e $k = -1 \qquad k = 2$ e $k = -\frac{3}{2}$

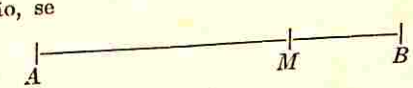
Não existem, pois, valores que tornem o sistema indeterminado.

3.ª) Diz-se que um ponto M divide um segmento $\overline{AB}$ em "média e extrema razão", quando sua distância a uma das extremidades A do segmento é média proporcional entre sua distância ao outro extremo e o segmento $\overline{AB}$.

O maior dos dois segmentos determinados pelo ponto M, diz-se "segmento áureo".

Assim, na figura abaixo o ponto M dividirá o segmento AB em média e extrema razão, se

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{MA}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$$



e o maior segmento $\overline{MA}$ é o segmento áureo.

Dedução da fórmula do segmento áureo. — Seja um segmento $\overline{AB} = l$ e seja x o segmento áureo. Tem-se pela definição:

$$\frac{l}{x} = \frac{x}{l - x}$$

$$x^2 = l^2 - lx \qquad x^2 + lx - l^2 = 0$$

e $$x = \frac{-l \pm \sqrt{l^2 + 4l^2}}{2} = \frac{-l \pm l\sqrt{5}}{2}$$

e o valor positivo de x será:

$$x = \frac{l}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right) \cong 0{,}618l$$

Justificação da construção do segmento áureo. — Seja um segmento $\overline{AB} = l$, determinamos o segmento $\overline{MA} = x$ que seja média proporcional entre l e $l - x$.

Tracemos por B o segmento

$$\overline{BO} = \frac{l}{2} \text{ perpendicular a } \overline{AB}.$$

Com centro em 0, teremos a circunferência de ráio $\frac{l}{2}$ e tracemos o suporte de $\overline{AO}$ que interceptará a circunferência em C e D. O diâmetro $\overline{CD}$ é igual a l, e como $\overline{AB}$ é tangente a circunferência e é média proporcional entre a secante inteira e sua parte externa, temos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} \quad \text{ou} \quad \frac{l}{\overline{AC}} = \frac{l + \overline{AC}}{l}$$

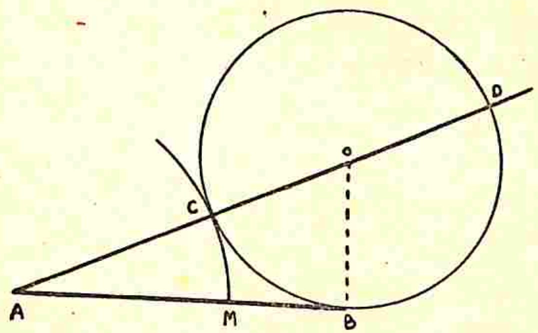


Fig. 8

Empregando a propriedade das proporções "a diferença entre os 2 primeiros têrmos está para o 2.°, assim como a diferença entre os 2 últimos está para o 4.°", teremos:

$$\frac{l - \overline{AC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{l}$$

Mas, $\overline{AC} = \overline{AM}$ e como $\overline{AM}$ é média proporcional entre o segmento $\overline{AB}$ e o segmento $\overline{MB}$, então, por definição, $\overline{AM} = x$ é o segmento áureo de $\overline{AB}$ e temos: $$\frac{l - x}{x} = \frac{x}{l}.$$

NOTA: Neste primeiro concurso, todos foram reprovados nesta prova de Matemática.

SEGUNDA ÉPOCA

(Realizada em 15/3/1947).

Resolva, no papel almaço, as questões propostas, indicando todos os cálculos necessários à sua resolução. Utilize para rascunho uma fôlha de papel anexa. As questões resolvidas apenas no papel de rascunho não serão consideradas.

Prova sorteada n.° 3

1.ª QUESTÃO: I) Calcular

a) O número de divisores de 240;

b) A raiz quadrada inteira de 4 318,52;

c) O número de algarismos necessários para escrever todos os números inteiros desde 1 até 136 (inclusive).

II) Calcular o menor número pelo qual se deve multiplicar o m.m.c. dos números 144, 270 e 320, afim de que o produto seja o quadrado de um número inteiro.

2.ª QUESTÃO: Num quadrado, cujo lado mede 6 metros, inscreve-se um círculo; nesse círculo inscreve-se um triângulo eqüilátero e nesse triângulo inscreve-se um círculo. Pede-se calcular:

1) A diagonal do quadrado;

2) O apótema e a área do triângulo eqüilátero;

3) A área da coroa circular, limitada pelos dois círculos.

3.ª Questão:

1) Compor a equação do 2.º grau cujas raízes são

$$x' = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad x'' = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2) Calcular m de modo que as raízes da equação

$$x^2 + 3(x+1) = m(x+2)$$

sejam:

a) reais e iguais;
b) simétricas.

Nota: Valores atribuídos às questões:

Primeira questão: 30 pontos.
Segunda questão: 40 pontos.
Terceira questão: 30 pontos.

RESOLUÇÃO

1.ª) 1) Calcular:

a) Decompondo 240 em fatôres temos:

$$240 = 2^4 \times 3 \times 5$$

O número de divisores será o produto dos expoentes dos fatôres primos aumentados de uma unidade ou seja:

$$(4+1) \times (1+1) \times (1+1) = 20$$

b) A raiz quadrada inteira de 4 318,52 é a raiz de sua parte inteira Logo:

```
√43.18 | 65
 36    |------
 ----- | 125 × 5
  71.8 |
  62 5 |
 ----- |
   9 3 |
```

Resposta: 65

c) De 1 a 9 são 9 números de 1 algarismo = 9 algarismos
De 10 a 99 são 90 números de 2 algarismos = 180 algarismos
De 100 a 136 são 37 números de 3 algarismos = 111 algarismos

Total: 300 algarismos

2) Calculemos o m.m.c. (144,270,320):
Fatorando cada um dêsses números, temos

$$144 = 2^4 \times 3^2; \quad 270 = 2 \times 3^3 \times 5 \quad \text{e} \quad 320 = 2^6 \times 5$$

logo: $$\text{m.m.c.} = 2^6 \times 3^3 \times 5$$

Afim de que seja quadrado, os expoentes dos seus fatôres devem ser pares. O menor número pelo qual se deve multiplicar o m.m.c. será pois:

$$3 \times 5 = 15$$

2.ª) $\overline{AB} = l_4 = 6m$

1) Cálculo da diagonal do quadrado:

$$d = l\sqrt{2} = 6\sqrt{2} = 6 \times 1{,}414 = 8{,}484$$

Resposta: 8,484m

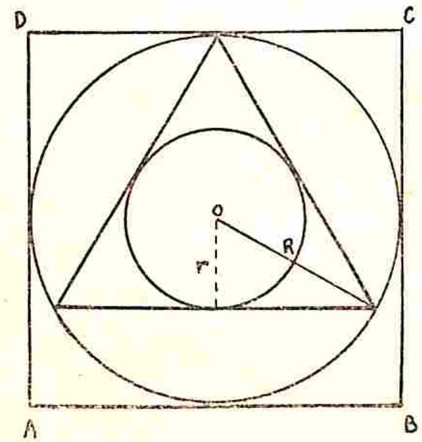


Fig. 9

2) Cálculo do apótema e da área do triângulo eqüilátero:

$$a_3 = r = \frac{R}{2} \qquad S_3 = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$$

$$R = a_4 = \frac{l_4}{2} = \frac{6m}{2} = 3m$$

$$a_3 = \frac{3m}{2} = 1{,}5m \quad \text{e} \quad S_3 = \frac{3 \times (3m)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{27\sqrt{3}}{4}\,m^2$$

$$S_3 = \frac{27 \times 1{,}732}{4}\,m^2 = 11{,}70m^2$$

3) Cálculo da área da coroa circular:

$$S_{\text{coroa}} = \pi(R^2 - r^2) = \pi[(2r)^2 - r^2] = \pi \times 3r^2 = 3\pi r^2 = 3 \times 3{,}14 \times (1{,}5)^2 =$$

$$= 21{,}1\,950 \qquad \textit{Resposta:}\ 21{,}1\,950\text{m}^2$$

3.ª) $$x' + x'' = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = 2$$

$$x' \cdot x'' = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

E a equação pedida será:

$$x^2 - 2x + \frac{1}{4} = 0 \quad \text{ou} \quad 4x^2 - 8x + 1 = 0$$

2) Preparando a equação, temos:

$$x^2 + 3x + 3 = mx + 2m \therefore x^2 + (3 - m)x + 3 - 2m = 0 \qquad (1)$$

a) Para que as raízes sejam reais e iguais é necessário que:

$$\Delta = 0 \quad \text{ou} \quad b^2 - 4ac = 0$$

Temos: $(3 - m)^2 - 4(3 - 2m) = 0$

$$9 - 6m + m^2 - 12 + 8m = 0 \quad \text{ou} \quad m^2 + 2m - 3 = 0$$

Resolvendo, temos: $m' = -3$ e $m'' = 1$

Resposta: $m = -3$ ou $m = 1$

b) Para que as raízes sejam simétricas é necessário que a equação não possúa, apenas, o têrmo linear e que as raízes sejam reais (o têrmo quadrático e o têrmo independente da equação tenham sinais contrários).

Isto é:

$$3 - m = 0 \therefore m = 3$$

É fácil de ver que para $m = 3$ a equação (1) não possui apenas o têrmo linear e que os dois outros têrmos têm sinais contrários.

Nota: Nesta segunda época foram aprovados, após todos os exames, 30 candidatos — 28 moças e 2 rapazes. Êsses 30 alunos constituíram pois a primeira turma do Curso Normal da Escola Carmela Dutra.

Prova de Matemática

(Exame de admissão ao Curso Normal, realizado em 1948).

PRIMEIRA ÉPOCA

1.ª Questão: Resolver $\dfrac{x}{6} + \dfrac{y}{4} = \dfrac{2}{3}$

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$$

2.ª Questão: A soma de dois números é 100 e o produto, 1 875. Determinar êstes números.

3.ª Questão: Qual é o número, cujos $\dfrac{2}{5}$ mais os $\dfrac{3}{7}$, mais 54 é igual ao próprio número, mais 72?

4.ª Questão: Efetuar $\dfrac{(x + y)^2}{x - y} \div \dfrac{x + y}{(x - y)^2}$

5.ª Questão: Efetuar

$$a^{\frac{2}{3}} \times b^{-4} \times c^{-2} \times b^{-\frac{2}{5}} \times a^{-5} \times b^{-2} \times a^{-7} \times c^{-\frac{1}{5}}$$

6.ª Questão: Desenvolver $(a^8b^5 + c^3d^6)^3$

7.ª Questão: Fatorar $ab - ac + b^2 - bc$.

8.ª Questão: Sendo N um número que admite 96 divisores, determinar x sabendo-se que $N = 2^x \times 3^2 \times 5^3$.

9.ª Questão: Dadas as raízes da equação do 2.º grau; $\dfrac{2 \pm \sqrt{2}}{5}$, compor a equação.

10.ª Questão: Resolver o sistema $3x - \frac{1}{4} > 20 - \frac{2x}{3}$

$$2(2x - 3) > 5x - \frac{3}{4}$$

11.ª Questão: Extrair a raiz quadrada de 12 a menos de $\frac{1}{3}$.

12.ª Questão: Fatorar $(b - c)^2 - d^2$.

13.ª Questão: Resolver $\frac{x}{x-2} - \frac{3}{x-1} = \frac{3}{(x-2)(x-1)}$

14.ª Questão: Calcular a taxa a que deve ser colocada o capital de Cr\$ 80,00, para que no fim de 11 anos produza Cr\$ 22,00 de juros.

15.ª Questão: Racionalizar o denominador da fração:

$$\frac{2}{\sqrt{7} + \sqrt{5}}$$

16.ª Questão: Simplificar $\frac{35 + 5x + 7y + xy}{5 + y}$

17.ª Questão: Fatorar $12a^5b^8 - 6a^6b^7 + 180a^8b^6 - 9a^7b^9$.

18.ª Questão: Determinar a média proporcional de $\frac{9}{25}$ e $\frac{4}{49}$.

19.ª Questão: Reduzir ao mesmo índice os radicais $\sqrt{a^3}$, $\sqrt[3]{ab}$ e $\sqrt[5]{b^2}$.

20.ª Questão: O produto de dois números é 324 e o m.d.c. dêsses números é 3. Determinar o m.m.c. dêsses números.

21.ª Questão: Qual é o polígono, cujo número de lados é igual a $\frac{1}{6}$ do número de diagonais?

22.ª Questão: Num círculo estão inscritos um quadrado e um hexágono regular. A diagonal do quadrado mede 4m. Calcular o perímetro do hexágono regular.

23.ª Questão: Os raios de dois círculos concêntricos medem 5m e 2m, respectivamente. Calcular a área da coroa circular.

24.ª Questão: Um triângulo é eqüivalente a um retângulo, cujas dimensões medem 6m e 8m, respectivamente. A base do triângulo é igual à diagonal do retângulo. Calcular a altura do triângulo.

25.ª Questão: A altura de uma pirâmide é igual a 8m, a base é um retângulo de 128m de perímetro, sendo uma das dimensões do retângulo o triplo da outra. Calcular o volume dessa pirâmide.

Nota: 4 (quatro) pontos para cada questão; mínimo para passar — 50 pontos.

RESOLUÇÃO

1.ª) Da 2.ª equação $y = 2x$.

Substituindo na 1.ª equação teremos:

$$\frac{x}{6} + \frac{2x}{4} = \frac{2}{3} \qquad 2x + 6x = 8 \therefore x = 1$$

$$\text{e } y = 2x = 2$$

Resposta: $x = 1$ e $y = 2$

2.ª) $S = 100$ e $P = 1\,875$.

Os dois números serão as raízes da equação

$$x^2 - Sx + P = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 - 100x + 1\,875 = 0$$

Temos:

$$x = \frac{100 \pm \sqrt{10\,000 - 7\,500}}{2} = \frac{100 \pm 50}{2} \therefore x_1 = 75 \text{ e } x_2 = 25$$

Resposta: Os números são 75 e 25

3.ª) Seja x o número.

Então: $$\frac{2x}{5} + \frac{3x}{7} + 54 = x + 72$$

$$14x + 15x + 1\,890 = 35x + 2\,520 \therefore -6x = 630$$

$$\therefore x = -105$$

Resposta: O número é -105

4.ª) $\frac{(x+y)^2}{x-y} \times \frac{(x-y)^2}{x+y} = x^2 - y^2$

5.ª) $a^{\frac{2}{3}-5-7} \times b^{-4-\frac{2}{5}-2} \times c^{-2-\frac{1}{5}} = a^{-\frac{34}{3}}\, b^{-\frac{32}{5}}\, c^{-\frac{11}{5}}$

6.ª) $(a^8b^5 + c^3d^6)^3 = a^{24}b^{15} + 3a^{16}b^{10}c^3d^6 + 3a^8b^5c^6d^{12} + c^9d^{18}$

7.ª) $ab - ac + b^2 - bc = a(b - c) + b(b - c) = (b - c) \quad (a + b)$

8.ª) $(x + 1)\,(2 + 1)\,(3 + 1) = 96$

$x + 1 = 96 \div 12 = 8 \therefore x = 8 - 1 = 7$

9.ª) $S = \dfrac{2 + \sqrt{2}}{5} + \dfrac{2 - \sqrt{2}}{5} = \dfrac{4}{5}$

$P = \dfrac{2 + \sqrt{2}}{5} \times \dfrac{2 - \sqrt{2}}{5} = \dfrac{2}{25}$

e a equação será: $x^2 - \dfrac{4}{5}x + \dfrac{2}{25} = 0$

ou $25x^2 - 20x + 2 = 0$

10.ª) $\begin{cases} 36x - 3 > 240 - 8x \\ 16x - 24 > 20x - 3 \end{cases} \therefore \begin{cases} 44x > 243 \\ -4x > 21 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} x > \dfrac{243}{44} \\ x < -\dfrac{21}{4} \end{cases}$

e o sistema é impossível.

11.ª) $\sqrt{\dfrac{12 \times 3^2}{3^2}} = \dfrac{\sqrt{108}}{3}$

Acha-se a raiz inteira de 108 e tem-se para resultado

$$\frac{10}{3} \text{ ou } 3\frac{1}{3}.$$

12.ª) $(b - c)^2 - d^2 = (b - c + d)\,(b - c - d)$.

13.ª) O m.m.c. dos denominadores é: $(x - 2)\,(x - 1)$; a equação só é satisfeita para os valores de x que não anulem o m.m.c., isto é, os valores de x diferentes de 2 e 1.

Eliminando os denominadores, vem:

$$x^2 - x - 3x + 6 = 3 \qquad x^2 - 4x + 3 = 0$$

cujas raízes são: $x_1 = 3$ e $x_2 = 1$.

Como o valor de x_2 não satisfaz a equação dada, pois anula o m.m.c. dos denominadores, a resposta será então: $x = 3$.

14.ª) $i = \dfrac{100j}{ct} = \dfrac{100 \times 22}{80 \times ,11} = \dfrac{5}{2}$

a taxa é pois de 2,5%.

15.ª) $\dfrac{2}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} = \dfrac{2\,(\sqrt{7} - \sqrt{5})}{(\sqrt{7} + \sqrt{5})\,(\sqrt{7} - \sqrt{5})} = \dfrac{2\,(\sqrt{7} - \sqrt{5})}{2} = \sqrt{7} - \sqrt{5}$

16.ª) $\dfrac{35 + 5x + 7y + xy}{5 + y} \quad \dfrac{5\,(7 + x) + y\,(7 + x)}{5 + y} = \dfrac{(7 + x)\,(5 + y)}{5 + y} = 7 + x$

17.ª) $12a^5b^8 - 6a^6b^7 + 180a^8b^6 - 9a^7b^9 = 3a^5b^6\,(4b^2 - 2ab + 60a^3 - 3a^2b^3)$.,

18.ª) $\sqrt{\dfrac{9}{25} \times \dfrac{4}{49}} = \sqrt{\dfrac{36}{1\,225}} = \dfrac{6}{35}$

19.ª) Tem-se: $\sqrt[20]{a^{45}}$, $\sqrt[30]{a^{10}b^{10}}$ e $\sqrt[30]{b^{12}}$

20.ª) Sabemos que o produto de dois números é igual ao produto do m.m.c. dêsses números pelo m.d.c.

Então, o m.m.c. dos números será:

$$324 \div 3 = 108$$

21.ª) $n = \dfrac{D}{6}$ ou $6n = D$.

Como $D = \dfrac{n\,(n - 3)}{2}$,

vem: $6n = \dfrac{n\,(n - 3)}{2} \therefore n^2 - 15n = 0$

Resolvendo, vem: $n = 0$ ou $n = 15$.

Mas, $n = 0$ não satisfaz, logo: $n = 15$, o polígono é o pentadecágono.

22.ª) O perímetro do hexágono é $6l_6 = 6R$.

A diagonal do quadrado é $d = 2R = 4m \therefore R = 2m$ e $2p = 6R = 12m$.

23.ª) $S = \pi\,(R^2 - r^2) = \pi\,(25 - 4) = 21\pi$

ou $S = 21 \times 3{,}14 \therefore S = 65{,}94\text{m}^2$.

24.ª) Área do retângulo $= 6\text{m} \times 8\text{m} = 48\text{m}^2$.

Logo, a área do triângulo é também 48m^2.

A base do triângulo que é a diagonal de um retângulo é

$$b = d = \sqrt{36 + 64} = 10.$$

Se a base é 10m, a altura será:

$$h = \frac{2S}{b} = \frac{96\text{m}^2}{10\text{m}} = 9{,}6\text{m}$$

25.ª) O volume da pirâmide é: $V = \dfrac{B \times H}{3}$, Calculemos sua base: o perímetro da mesma é 128m, logo:

$$b + h = 64 \quad \text{e} \quad b = 3h$$
$$\therefore\ 4h = 64 \quad \text{e} \quad h = 16 \ \therefore\ b = 48,$$
$$B = bh = 48 \times 16 = 768$$

Se $B = 768\text{m}^2$ e $H = 8\text{m}$ $\quad V = \dfrac{768\text{m}^2 \times 8\text{m}}{3} = 2\,048\text{m}^3.$

Nota: Não houve segunda época.

Prova de Matemática

(Realizada em 3/2/1949).

PRIMEIRA ÉPOCA

1.ª Questão: Resolver o sistema $2\sqrt{2}\,x + y = 6\sqrt{2}$

$$3x + \sqrt{2}\,y = 5$$

2.ª Questão: Numa circunferência de raio 5m, dar o valor do lado do dodecágono regular convexo nele inscrito.

3.ª Questão: Quais os lados de um triângulo de perímetro 10,5m semelhante a um outro triângulo de lados iguais a 3dm, 50cm e 0,7m, respectivamente?

4.ª Questão: Achar a área de um trapézio isósceles cuja base maior é 22cm, cuja altura é 8cm e cujos lados não paralelos são iguais à base menor.

5.ª Questão: Qual a equação do 2.º grau que tem para raízes $3 - \sqrt{2}$ e $3 + \sqrt{2}$?

Nota: Valor de cada questão: 20 pontos.

RESOLUÇÃO

1.ª) Multiplicando a 1.ª equação por $-\sqrt{2}$ vem:

$$\begin{array}{r} -4x - \sqrt{2}\,y = -12 \\ 3x + \sqrt{2}\,y = 5 \\ \hline -x \quad\quad = -7 \end{array} \quad \therefore\ x = 7$$

Substituindo êsse valor na 1.ª equação temos:

$$14\sqrt{2} + y = 6\sqrt{2} \ \therefore\ y = -8\sqrt{2}$$

Resposta: $x = 7$ e $y = -8\sqrt{2}$

2.ª) Sabemos que a fórmula que dá o lado L do polígono de $2n$ lados é:

$L = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - l^2}}$ $\quad$ lado do hexágono $= l = R = 5m$

$$L = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - R^2}} = \sqrt{2R^2 - R^2\sqrt{3}} = \sqrt{R^2(2 - \sqrt{3})} =$$
$$= R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

ou aproximadamente: $L = 0{,}518 \times R = 2{,}590$

Resposta: $L = 2{,}59$

3.ª) Lados do triângulo (conhecidos):

3dm; 50cm = 5dm e 0,7m = 7dm

Perímetro do triângulo de lados desconhecidos a, b e c:

2p = 10,5m = 105dm

Se os dois triângulos são semelhantes os lados homólogos são proporcionais.

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{7} = \frac{105}{15} = 7$$

(Os perímetros estão entre si como suas linhas homólogas).

$$a = 3 \times 7 = 21$$
$$b = 5 \times 7 = 35$$
$$c = 7 \times 7 = 49$$

Respostas: 21dm, 35dm e 49dm.

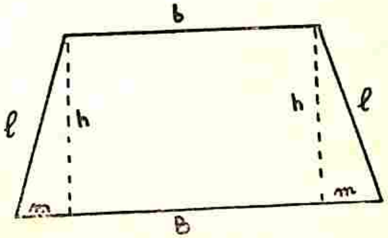


Fig. 10

4.ª) $h = 8\text{cm} \quad B = 22\text{cm} \quad l = b \quad S = ?$

$$S = \frac{(B + b)\,h}{2}$$

Cálculo de b (na figura):

$$b^2 = l^2 = h^2 + m^2 = h^2 + \left(\frac{B - b}{2}\right)^2 = 64 + \left(\frac{22 - b}{2}\right)^2$$

$$\therefore\ b^2 = 64 + \frac{484 - 44b + b^2}{4}$$

$$\therefore\ 4b^2 = 256 + 484 - 44b + b^2 \ \therefore\ 3b^2 + 44b - 740 = 0$$

$$\therefore\ b = \frac{44 \pm \sqrt{1\,936 + 8\,880}}{6} = \frac{-44 \pm 104}{6}$$

$$\therefore\ b_1 = \frac{-74}{3} \quad b_2 = 10$$

Como a base não pode ser negativa tem-se: $b = 10$

Então: $S = \frac{(22+10)8}{2} = 128$

Resposta: 128cm²

5.ª) $S = 3 - \sqrt{2} + 3 + \sqrt{2} = 6$

$P = (3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2}) = 9 - 2 = 7$

A equação será: $x^2 - 6x + 7 = 0$.

NOTA: 60 alunas foram aprovadas nesta prova e 4 delas obtiveram a nota 100.

SEGUNDA ÉPOCA

(Realizada em 8/3/1949).

1.ª QUESTÃO: Num círculo circunscrito a um hexágono regular de apótema $\sqrt{3}$ cm, está inscrito um decágono regular. Achar a área do decágono.

2.ª QUESTÃO: Num triângulo de lados 5,7 e 11cm, respectivamente, determinar os segmentos que a bissetriz interna do ângulo maior determina sôbre o lado oposto a êsse ângulo.

3.ª QUESTÃO: Determinar m na equação:

$$y^2 - my + 3 = 0$$

sabendo-se que uma das raízes é o triplo da outra.

4.ª QUESTÃO: Resolver o sistema

$$\frac{5}{3}y + \frac{3}{5} < 3y + 1$$

$$\frac{4}{5}y < 2 - \frac{5y-1}{4}$$

5.ª QUESTÃO: Efetuar

$$\left(\frac{5}{\sqrt{3}+1} + \frac{3}{\sqrt{3}-1}\right) \times \frac{2}{4\sqrt{3}-1}$$

NOTA: Cada questão tem o valor de 20 pontos.

RESOLUÇÃO

1.ª) Temos: $a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \therefore R\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

E o raio do círculo circunscrito ao hexágono e ao decágono será: R = 2.

A área do decágono é: $S = pa$ (I)

Cálculo do lado do decágono – (l_{10})

l_{10} é o segmento áureo do raio R, ou:

$$l_{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \times R$$

aproximadamente: $l_{10} = 0{,}618R = 1{,}236$cm.

Cálculo do apótema do decágono:

$$a_{10} = \frac{\sqrt{4R^2 - l^2_{10}}}{2} = \frac{\sqrt{4R^2 - (0{,}618)^2 \times R^2}}{2} = \frac{R\sqrt{4 - 0{,}618^2}}{2}$$

$\therefore a_{10} = \frac{2\sqrt{3{,}617\,976}}{2} = 1{,}902$cm ou ($a_{10} = 0{,}95R = 1{,}90$)

Substituindo l_{10} e a_{10} em (I), vem:

$$S = 5l_{10} \times a_{10} = 6{,}18 \times 1{,}902$$

Ou, aproximadamente, $S = 11{,}7\,420$cm².

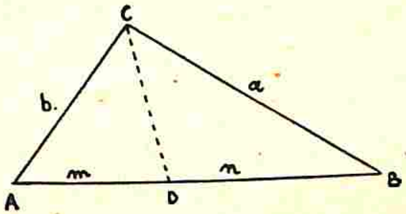


Fig. 11

2.ª) $b = 5$cm $a = 7$cm e $c = 11$cm.

A bissetriz do ângulo maior determina evidentemente dois segmentos sôbre o maior lado.

Pelo teorema da bissetriz interna temos:

$$\frac{m}{b} = \frac{n}{a}$$

e como $m + n = 11$, podemos, empregando uma propriedade das proporções, escrever:

$$\frac{m}{5} = \frac{n}{7} = \frac{11}{12}$$

Donde: $m = 5 \times \frac{11}{12}$ e $n = 7 \times \frac{11}{12}$

ou, aproximadamente,

$$m = 4{,}58\text{cm} \quad \text{e} \quad n = 6{,}42\text{cm}.$$

3.ª) Podemos escrever:

$$y_2 = 3y_1$$
$$y_1 + y_2 = m$$
$$y_1 y_2 = 3$$

Substituindo o valor de y_2 na segunda equação, vem:

$$y_1 + 3y_1 = m \qquad y_1 = \frac{m}{4} \qquad \text{e} \qquad y_2 = \frac{3m}{4}$$

Substituindo êsses valores na 3.ª equação, temos:

$$\frac{m}{4} \times \frac{3m}{4} = 3 \ \therefore\ \frac{3m^2}{16} = 3$$

$$\therefore\ 3m^2 = 48 \quad \text{ou} \quad m^2 = 16 \quad \text{e} \quad m = \pm 4$$

4.ª) Eliminando os denominadores, e resolvendo, vem:

$$25y + 9 < 45y + 15$$
$$16y < 40 - 25y + 5$$

Donde $\begin{cases} -20y < 6 \\ 41y < 45 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 20y > -6 \\ 41y < 45 \end{cases}$

Temos:

$$y > -\frac{3}{10}$$

$$y < \frac{45}{41}$$

E as soluções do sistema são os valores de y que satisfazem a relação:

$$-\frac{3}{10} < y < \frac{45}{41}$$

5.ª) Reduzindo ao mesmo denominador as frações entre parênteses, temos:

$$\frac{5(\sqrt{3}-1)+3(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} \times \frac{2}{4\sqrt{3}-1} = \frac{5\sqrt{3}-5+3\sqrt{3}+3}{2} \times$$

$$\times \frac{2}{4\sqrt{3}-1} = \frac{8\sqrt{3}-2}{4\sqrt{3}-1} = \frac{2(4\sqrt{3}-1)}{4\sqrt{3}-1} = 2$$

Nota: A maior nota desta prova foi 75. Foram aprovadas 14 alunas.

Prova de Matemática

(Realizada em 3/2/1950).

PRIMEIRA ÉPOCA

1.ª Questão: Achar m de modo que as raízes da equação

$$x^2 - 4x + (5m - 1) = 0$$

sejam reais e desiguais.

2.ª Questão: Um trapézio está inscrito em um semi-círculo de diâmetro 12m. A projeção de um dos lados não paralelos do trapézio sôbre o diâmetro é igual a 3m. Achar a área do trapézio.

3.ª Questão: Resolver o sistema

$$\begin{cases} 2x - \dfrac{y}{a} = 0 \\[2ex] \dfrac{x}{a+1} - \dfrac{y}{a-1} = 1 \end{cases}$$

4.ª Questão: A soma dos quadrados de dois números inteiros é 41. Três vêzes um deles é igual ao dôbro do outro mais duas unidades. Achar os números.

5.ª Questão: Achar o perímetro de um triângulo eqüilátero circunscrito a um círculo, sabendo-se que a área do hexágono regular, inscrito no mesmo círculo, é igual a $24\sqrt{3}$ metros quadrados.

RESOLUÇÃO

1.ª) Para que as raízes sejam reais e desiguais deve-se ter:

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0$$

Então: $16 - 4(5m - 1) > 0$ ou $16 - 20m + 4 > 0$

$$\therefore\ -20m > -20 \ \therefore\ 20m < 20 \quad \text{e} \quad m < 1$$

2.ª) Evidentemente, o enunciado do problema pode merecer reparos, quanto à posição do trapézio. Entretanto, o problema só poderá ter solução considerando a base maior do trapézio coincidindo com o diâmetro do semi-círculo.

Se $\overline{AM} = 3m$ e $\overline{AD} = 2R = 12m$, $\overline{MD} = 9m$

Como a ordenada $\overline{BM}$ é média proporcional entre os segmentos que determina sôbre o diâmetro, então:

$$\overline{BM}^2 = h^2 = \overline{AM} \times \overline{MD} \quad \therefore \quad h^2 = 3m \times 9m = 27m^2$$

$$\text{e } h = 3\sqrt{3}\,m$$

Empregando o teorema de Pitágoras:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AM}^2 + h^2 \quad \therefore \quad \overline{AB}^2 = 9 + 27 = 36 \quad \therefore \quad \overline{AB} = 6$$

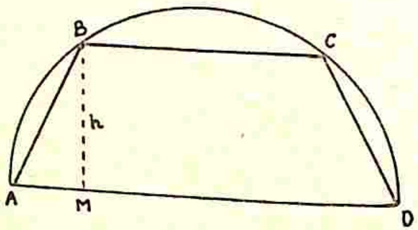


Fig. 12

Como todo trapézio inscrito em um círculo é isósceles, $\overline{AB} = \overline{CD} = 6m$ e, portanto, a base menor $\overline{BC}$ também é igual a $6m$, pois nada mais é do que um dos lados do semi-hexágono regular $ABCD$.

A área do trapézio será, portanto,

$$S = \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2} \times \overline{BM} = \frac{12m + 6m}{2} \times 3\sqrt{3}\,m = 27\sqrt{3}\,m^2$$

ou, aproximadamente: $S = 46{,}76\text{m}^2$.

3.ª) Tirando o valor de y na 1.ª equação:

$$2ax - y = 0 \quad \therefore \quad y = 2ax$$

Substituindo na 2.ª equação:

$$\frac{x}{a+1} - \frac{2ax}{a-1} = 1 \quad \therefore \quad ax - x - 2a^2x - 2ax = a^2 - 1$$

Multiplicando ambos os membros por -1 e reduzindo:

$$2a^2x + ax + x = 1 - a^2$$

$$\therefore \quad x = \frac{1 - a^2}{2a^2 + a + 1} \quad \text{e} \quad y = \frac{2a - 2a^3}{2a^2 + a + 1}$$

4.ª) Sejam x e y os dois números. Temos:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 41 \\ 3y = 2x + 2 \end{cases}$$

Tirando o valor de y na 2.ª equação: $y = \dfrac{2x + 2}{3}$

Substituindo na 1.ª equação:

$$x^2 + \frac{4x^2 + 8x + 4}{9} = 41$$

Eliminando o denominador, transpondo e reduzindo, vem:

$$13x^2 + 8x - 365 = 0$$

Resolvendo: $x = \dfrac{-8 \pm \sqrt{64 + 18\,980}}{26} = \dfrac{-8 \pm 138}{26}$

$$x_1 = \frac{130}{26} = 5 \quad \text{e} \quad x_2 = -\frac{146}{26} \quad \text{(não satisfaz)}$$

Como os números são inteiros, temos:

$$x = 5 \quad \text{e} \quad y = \frac{2 \times 5 + 2}{3} = 4$$

Resposta: Os números são 5 e 4

5.ª) $2p = 3L_3 = 3R_1\sqrt{3}$.

Sendo L_3 o lado do triângulo eqüilátero e R_1 o raio do círculo circunscrito a êsse triângulo.

$$S_6 = pa = 3R \times \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$$

Sendo p e a, o semi-perímetro e o apótema do hexágono e R o raio do círculo circunscrito a êsse hexágono e inscrito no triângulo eqüilátero.

Como $\dfrac{3R^2\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}$

vem: $3R^2\sqrt{3} = 48\sqrt{3} \therefore R^2 = 16$ e $R = 4$

R, sendo o raio do círculo inscrito no triângulo eqüilátero, é, portanto, o seu apótema.

Então: $R = a_3 = \dfrac{R_1}{2} \therefore \dfrac{R_1}{2} = 4$ e $R_1 = 8$

E o perímetro pedido é: $2p = 3 \times 8 \times \sqrt{3}$

Resp.: $24\sqrt{3}$ metros ou aproximadamente 41,57m.

NOTA: Assim como em 1948, não houve segunda época em 1950. Das 493 candidatas, que fizeram esta prova apenas 96 foram aprovadas (nota mínima, 50). A maior nota foi 95. Duas alunas apenas obtiveram esta nota).

Prova de Matemática

(Realizada em 8/1/1951).

PRIMEIRA ÉPOCA

1.ª QUESTÃO: Efetuar

$$\frac{2y}{y+3} + \frac{y^2-1}{y-1} : \frac{y^2+4y+3}{6}$$

2.ª QUESTÃO: Fatorar $4a^2 + 9b^2 - 25 - 12ab$

3.ª QUESTÃO: Determinar k para que as raízes da equação

$$kz^2 + (2k-1)z + k - 3 = 0$$

sejam reais e iguais.

4.ª QUESTÃO: Efetuar $\dfrac{\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} \left(\dfrac{2}{5}\right)^{-3}}{\left(\dfrac{1}{125}\right)^{-\frac{1}{3}} : \left(\dfrac{1}{36}\right)^{0}}$

5.ª QUESTÃO: Resolver o sistema

$$\frac{y-1}{y-5} > 1$$

$$\frac{3y-4}{2} - \frac{7y-6}{4} < 0$$

6.ª QUESTÃO: Racionalizar o denominador de

$$\frac{12}{\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{5}} =$$

7.ª QUESTÃO: Qual o valor do ângulo A, assinalado na figura abaixo, sabendo-se que o ângulo central $\hat{B} = 56°$ e $\hat{C} = 18°$.

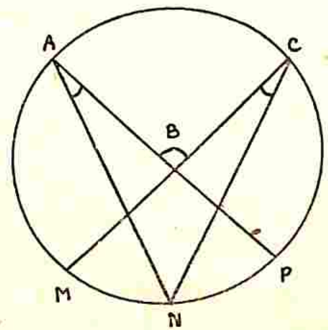


Fig. 13

8.ª QUESTÃO: Na figura adiante $PT = 9$cm é tangente ao círculo de centro 0, e $PA = 3$cm. Calcular o raio do círculo. (Fig. 14)

9.ª QUESTÃO: Demonstrar que o segmento determinado pelos pontos de contato da tangente comum a dois círculos tangentes exteriormente é a média geométrica dos diâmetros dêsses círculos.

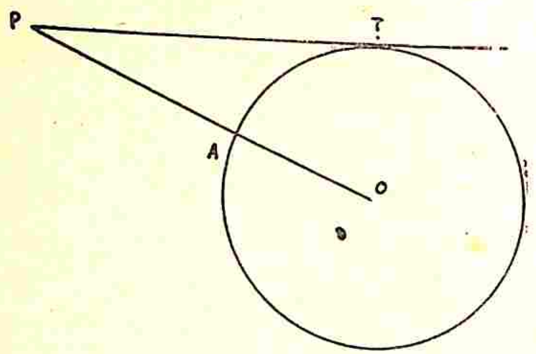


Fig. 14

10.ª Questão: Calcular a área do quadrado inscrito em um triângulo isósceles de 6cm de base e 0,16m de perímetro.

11.ª Questão: A diferença entre um número de dois algarismos e outro escrito com os mesmos algarismos, mas em outra ordem, é 36. Calculá-los, sabendo-se que o número das dezenas do primeiro é igual ao inteiro consecutivo ao dôbro do número de unidades dêsse mesmo número.

12.ª Questão: As diagonais de um losango formam com um lado, ângulos que guardam a razão $\frac{1}{2}$. Sendo a maior diagonal igual a 20m, calcular o perímetro e a área do losango.

Observação: As oito primeiras questões tinham valor 5 e as quatro últimas valor 15. Êste critério adotado dificultou muito a prova.

RESOLUÇÃO

1.ª) Temos:
$$\frac{2y}{y+3}+\frac{(y+1)(y-1)}{y-1}\times\frac{6}{(y+3)(y+1)}=$$
$$=\frac{2y}{y+3}+\frac{6}{y+3}=\frac{2y+6}{y+3}=\frac{2(y+3)}{y+3}=2$$

2.ª) Podemos escrever:
$$4a^2-12ab+9b^2-25=(2a-3b)^2-25=(2a-3b+5)(2a-3b-5)$$

3.ª) Devemos ter $\triangle = 0$, ou:
$$(2k-1)^2-4k(k-3)=0 \therefore 4k^2-4k+1-4k^2+12k=0$$
ou:
$$8k=-1 \quad \text{e} \quad k=\frac{-1}{8}$$

4.ª) Desenvolvendo temos:
$$\frac{\frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}\times\frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^{3}}}{\frac{1}{\left(\frac{1}{125}\right)^{\frac{1}{3}}}:1}=\frac{\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{64}}}\times\frac{1}{\frac{8}{125}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{125}}}}=\frac{8\times\frac{125}{8}}{\frac{1}{\frac{1}{5}}}=\frac{125}{5}=25$$

5.ª) Resolvendo as inequações:
$$\begin{cases}\frac{y-1}{y-5}-1>0\\ 6y-8-7y+6<0\end{cases} \therefore \begin{cases}\frac{4}{y-5}>0\\ -y<2\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}y-5>0\\ y>-2\end{cases}$$

Então temos:
$$\begin{cases}y>5\\ y>-2\end{cases} \therefore y>5$$

6.ª) Multiplicando ambos os têrmos da fração por $\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5}$ temos:
$$\frac{12(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5})}{3+2\sqrt{6}+2-5}=\frac{12(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5})}{2\sqrt{6}}$$

Multiplicando agora ambos os têrmos pela $\sqrt{6}$ vem:
$$\frac{12(\sqrt{18}+\sqrt{12}-\sqrt{30})}{12}$$

ou simplificando: $3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{30}$

7.ª) O ângulo inscrito $\hat{A}=\frac{\overset{\frown}{NP}}{2}$ e $\overset{\frown}{MP}=\hat{B}=56^\circ$
$$\therefore \overset{\frown}{NP}=\overset{\frown}{MP}-\overset{\frown}{MN}=56^\circ-MN$$

Mas, $C = \frac{\widehat{MN}}{2} = 18^\circ \therefore \widehat{MN} = 36^\circ$

Então: $\widehat{NP} = 56^\circ - 36^\circ = 20^\circ$ e $\hat{A} = \frac{20^\circ}{2} = 10^\circ$

8.ª) Prolonguemos $\overline{PO}$ até o ponto B pertencente à circunferência. Como a tangente é média proporcional entre a secante inteira e sua parte externa, temos:

$$\overline{PT}^2 = \overline{PB} \times \overline{PA}$$

$$\therefore 81 = (3 + 2R) \times 3 \quad \text{ou} \quad 9 + 6R = 81$$

$$\therefore 6R = 72 \text{ e } R = 12$$

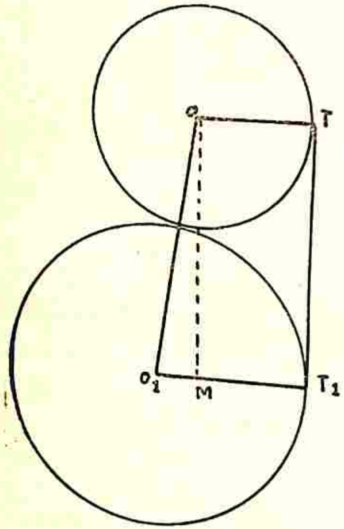


Fig. 15

9.ª) Supondo dois círculos de raios R e r, sendo $R > r$ e traçando a tangente TT_1, demonstremos que

$$\overline{TT_1}^2 = 2R \times 2r = 4Rr$$

Para isso tracemos OM perpendicular a $\overline{O_1T_1}$. Empregando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo OMO_1 temos:

$$\overline{OM}^2 = \overline{TT}^2{}_1 = \overline{OO}^2{}_1 - \overline{MO}^2{}_1 =$$
$$= (R + r)^2 - (R - r)^2$$

$$\therefore \overline{TT}^2{}_1 = 4Rr \qquad \text{c.q.d.}$$

10.ª) $\overline{AB} = b = 6\text{cm} \quad \overline{AC} = \overline{BC} = l$

e $2p = 16\text{cm} \therefore 2l = 10\text{cm}$ e $l = 5\text{cm}$

$$\overline{DB} = \frac{b}{2} = 3\text{cm}$$

Então, do triângulo retângulo CBD, temos:

$$\overline{CD}^2 = 25 - 9 = 16 \therefore \overline{CD} = 4\text{cm}$$

Calculemos o lado a do quadrado.

Como $\overline{HG}$ é paralelo a $\overline{AB}$, pelo teorema linear de Thales, temos que os triângulos ABC e HGC são semelhantes.

Então: $\frac{b}{a} = \frac{\overline{CD}}{\overline{CD} - a}$ ou $\frac{6}{a} = \frac{4}{4 - a}$

$$\therefore 4a = 24 - 6a \quad \text{ou} \quad 10a = 24 \quad \text{e} \quad a = 2{,}4\text{cm}$$

A área do quadrado será portanto:

$$S = a^2 = 5{,}76\text{cm}^2$$

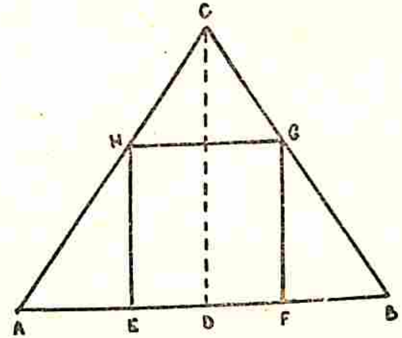


Fig. 16

11.ª) Sejam: x — algarismos das dezenas
y — algarismos das unidades

Podemos escrever:

$$\begin{cases} 10x + y - (10y + x) = 36 \\ x = 2y + 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 9x - 9y = 36 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

Dividindo a primeira equação por -9 e somando temos: $y = 3$
Substituindo em $x = 2y + 1$ obtemos $x = 7$.
Os números pedidos serão 73 e 37.

12.ª) Sejam m e n os ângulos formados, pela diagonal maior e pela menor respectivamente. Temos:

$$m + n = 90^\circ$$

e
$$\frac{m}{n} = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad n = 2m$$

$$\therefore m + 2m = 90^\circ \therefore m = 30^\circ \quad \text{e} \quad n = 60^\circ$$

Seja $\overline{BD}$ a diagonal maior igual a $20m$, logo a semi-diagonal maior $\overline{BO} = 10m$. No triângulo retângulo AOB, $\overline{AO}$ é o cateto oposto ao ângulo de 30°, logo será igual a metade da hipotenusa $\overline{AB}$, lado l do losango.

Empregando o teorema de Pitágoras vem:

$$l^2 = \frac{l^2}{4} + 100 \quad \therefore \quad 4l^2 = l^2 + 400 \quad \text{ou} \quad 3l^2 = 400$$

e

$$l = \frac{20}{\sqrt{3}} = \frac{20\sqrt{3}}{3}$$

Portanto, $$2p = 4l = \frac{80\sqrt{3}}{3} = 46{,}186m$$

e

$$S = \frac{D \times d}{2}$$

Mas, $D = 20m$ e $d = l$

$$\therefore S = \frac{20 \times \frac{20\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{200\sqrt{3}}{3}$$

Ou, aproximadamente: $S = 115{,}40m^2$

NOTA: De cêrca de 570 candidatas, que prestaram esta prova, apenas 29 foram aprovadas. A nota maior foi 80.

SEGUNDA ÉPOCA

(Realizada em 19/2/1951).

1.ª QUESTÃO: Calcular o valor numérico de $\dfrac{ba^{-2} - ab^{-2}}{a^2 - (-b)^{-3}}$ para $a = -2$ e $b = -1$.

2.ª QUESTÃO: Quais os valores inteiros de y que verificam, simultaneamente, as desigualdades:

$$\frac{y-3}{4} + 3 < \frac{2y+3}{2}$$

$$\frac{4y-2}{5} - 5 < \frac{1-3y}{10}$$

3.ª QUESTÃO: Resolver a equação

$$1 + \frac{2y-5}{4} - \frac{3-y}{2} = 1 + y - \frac{11}{4}$$

4.ª QUESTÃO: Qual o valor de a que torna impossível a equação:

$$a^2y - a^2 = 2a + 2ay$$

5.ª QUESTÃO: Efetuar e simplificar $\left(\sqrt[3]{\sqrt{5ab}}\right)^2 \times \sqrt[3]{25a^2b^2}$

6.ª QUESTÃO: Racionalizar o denominador da fração:

$$\frac{38}{3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}$$

7.ª QUESTÃO: Qual a equação do 2.º grau que tem para raízes

$$\frac{1}{\sqrt{3} - 1} \quad \text{e} \quad \frac{1}{\sqrt{3} + 1}$$

8.ª QUESTÃO: Escrever todos os fatôres do binômio:

$$256y^8 - z^8$$

9.ª QUESTÃO: Completar a igualdade $\dfrac{2t^3}{3z^8} \div \text{———} = \dfrac{t}{9z^3}$

10.ª QUESTÃO: Num triângulo retângulo isósceles, calcular o ângulo que forma as bissetrizes internas de dois ângulos desiguais.

11.ª QUESTÃO: Na figura abaixo, calcular o ângulo M sabendo-se que o ângulo A é igual a 20º e o ângulo E é igual a 70º.

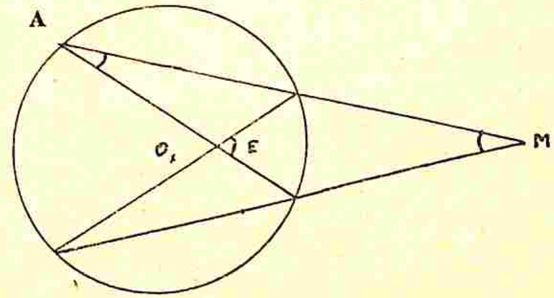


Fig. 17

12.ª Questão: Resolver a equação: $y^2 - \dfrac{a^2+b^2}{ab}y + 1 = 0$

13.ª Questão: A soma dos quadrados de dois números positivos é 130 e a têrça parte de seu produto é 11. Quais são êsses números?

14.ª Questão: Os lados de um trapézio retângulo são 5, 3, 5 e 9. Quanto vale o segmento que une os meios dos lados iguais?

15.ª Questão: Num círculo de centro O e raio R os diâmetros AB e CD são ortogonais. Prolonga-se AB de um segmento BP igual a R. Exprimir, em função de R, o segmento determinado por P e pela interseção de PC com o círculo do centro O.

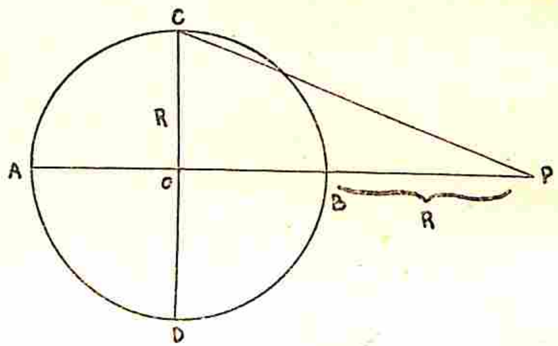


Fig. 18

Nota: Valor das questões:

Cada uma das 10 primeiras questões, 5 pontos.
Cada uma das 5 últimas questões, 10 pontos.

RESOLUÇÃO

1.ª) $$\frac{(-1)(-2)^{-2}-(-2)(-1)^{-2}}{(-2)^2-(1)^{-3}} = \frac{(-1)\left(\frac{1}{4}\right)-(-2)(1)}{4-1} = \frac{-\frac{1}{4}+2}{3} = \frac{7}{12}$$

Resposta: $\frac{7}{12}$

2.ª) Eliminando os denominadores:

$$\begin{cases} y - 3 + 12 < 4y + 6 \\ 8y - 4 - 50 < 1 - 3y \end{cases} \therefore \begin{cases} -3y < -3 \\ 11y < 55 \end{cases} \therefore \begin{cases} y > 1 \\ y < 5 \end{cases}$$

ou $$1 < y < 5$$

Resposta: 2, 3 e 4

3.ª) Eliminando os denominadores, temos:

$$4 + 2y - 5 - 6 + 2y = 4 + 4y - 11$$

Transpondo, vem:

$$0 = 0 \quad \text{(identidade)}$$

Resposta: a equação é indeterminada.

4.ª) Resolvendo temos:

$$a^2y - 2ay = a^2 + 2a \ \therefore \ (a^2 - 2a)\,y = a^2 + 2a$$

ou $$a\,(a-2)\,y = a\,(a+2)$$

A equação será impossível se o coeficiente de y fôr nulo e o segundo membro fôr diferente de zero.

Ora, o coeficiente de y se anula para:

$$a = 0 \quad \text{ou} \quad a = 2$$

Mas, $a = 0$ não satisfaz, porque anula, também, o segundo membro; então $a = 2$.

Resposta: $a = 2$

5.ª) Temos: $\sqrt[3]{(\sqrt{5ab})^2} \times \sqrt[3]{(5ab)^2} = \sqrt[3]{5ab} \times \sqrt[3]{(5ab)^2} = 5ab$

Resposta: $5ab$

6.ª) Multiplicando ambos os têrmos pelo conjugado do denominador, isto é, $3\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$, temos:

$$\frac{38\,(3\sqrt{3} + 2\sqrt{2})}{27 - 8} = \frac{38\,(3\sqrt{3} + 2\sqrt{2})}{19} = 2\,(3\sqrt{3} + 2\sqrt{2})$$

Resposta: $6\sqrt{3} + 4\sqrt{2}$

7.ª) Calculemos a soma e o produto das raízes

$$S = \frac{1}{\sqrt{3}-1} + \frac{1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1}{3-1} = \sqrt{3}$$

$$P = \frac{1}{\sqrt{3}+1} \times \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2}$$

A equação pedida será: $x^2 - \sqrt{3}\,x + \dfrac{1}{2} = 0$

Resposta: $2x^2 - 2\sqrt{3}\,x + 1 = 0$

8.ª) $256y^8 - z^8 = (16y^4 + z^4)(16y^4 - z^4) = (16y^4 + z^4)(4y^2 + z^2)(4y^2 - z^2) =$
$= (16y^4 + z^4)(4y^2 + z^2)(2y + z)(2y - z)$

9.ª) Basta determinarmos o quociente de

$$\frac{2t^3}{3z^8} \div \frac{t}{9z^3}$$

que é:

$$\frac{2t^3}{3z^8} \times \frac{9z^3}{t} = \frac{6t^2}{z^5}$$

Resposta: $\dfrac{2t^3}{3z^8} \div \dfrac{6t^2}{z^5} = \dfrac{t}{9z^3}$

10.ª) Se o triângulo ABC (Fig. 19) é retângulo e isósceles, temos:

$$\hat{A} = 90^\circ \quad \text{e} \quad \hat{B} = \hat{C} = 45^\circ$$

Se AM é bissetriz, $M\hat{A}B = 45^\circ$.

Se BM é bissetriz, $M\hat{B}A = 22^\circ 30'$.

E o ângulo pedido $\hat{M}$ será:

$$\hat{M} = 180^\circ - (45^\circ + 22^\circ 30') = 112^\circ 30'$$

Resposta: $112^\circ\ 30'$

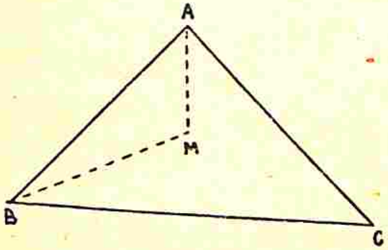


Fig. 19

11.ª) O ângulo M é a semi-diferença dos arcos compreendidos entre os seus lados

$$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD}}{2}$$

$$\frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2} = 70^\circ$$

$$\therefore\ \overset{\frown}{AB} + CD = 140^\circ$$

Como $\hat{A} = \dfrac{\overset{\frown}{CD}}{2}$, $\overset{\frown}{CD} = 2\hat{A} = 40^\circ \ \therefore\ \overset{\frown}{AB} = 140^\circ - 40^\circ = 100^\circ$

Então $\hat{M} = \dfrac{100^\circ - 40^\circ}{2} = 30^\circ$

Resposta: 30

12.ª) Eliminando os denominadores:

$$aby^2 - (a^2 + b^2)\,y + ab = 0$$

Calculemos $\triangle$:

$$\triangle = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - 4a^2b^2 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4 = (a^2 - b^2)^2$$

$$y = \frac{a^2 + b^2 \pm (a^2 - b^2)}{2ab} \ \therefore\ y_1 = \frac{a^2 + b^2 + a^2 - b^2}{2ab} = \frac{2a^2}{2ab} = \frac{a}{b}$$

$$y_2 = \frac{a^2 + b^2 - a^2 + b^2}{2ab} = \frac{2b^2}{2ab} = \frac{b}{a}$$

Resposta: $\dfrac{a}{b}$ e $\dfrac{b}{a}$

13.ª) Sejam os números x e y, yemos:

$$x^2 + y^2 = 130$$
$$xy = 33$$

Multiplicando a 2.ª equação por 2 e somando com a 1.ª, temos:

$$(x + y)^2 = 196 \ \therefore\ x + y = = \pm 14$$

Tendo a soma e o produto de x e y, podemos escrever:

$$x^2 - 14x + 33 = 0 \quad \text{e} \quad x^2 + 14x + 33 = 0$$

Resolvendo essas equações, temos:

$$x_1 = 11 \quad x_2 = 3 \quad \text{e} \quad x_1 = -11 \quad x_2 = -3$$

As soluções negativas não satisfazem. E, se $x = 11$, $y = 3$ e se $x = 3$, $y = 11$.

Resposta: Os números são 3 e 11

14.ª) É fácil concluir que: $\overline{AD} = 3$, $\overline{DC} = \overline{BC} = 5$ e $\overline{AB} = 9$.

Calculemos a diagonal BD. No triângulo DAB temos:

$$DB^2 = DA^2 + AB^2 = 9 + 81 = 90 \ \therefore\ \overline{DB} = 3\sqrt{10}$$

No triângulo $\overline{DCB}$, $\overline{EF}$ unindo os pontos médios de $\overline{DC}$ e de $\overline{BC}$ é a metade do terceiro lado DB.

Logo: $\quad EF = \dfrac{DB}{2} = \dfrac{3\sqrt{10}}{2} \qquad EF = 4{,}7$

Resposta: 4,7

15.ª) Seja E o ponto de interseção de PC com o círculo.

Temos: $\overline{PC} \times \overline{PE} = \overline{PA} \times \overline{PB}$ ①

No triângulo COP: $\overline{PC}^2 = R^2 + (2R)^2 = 5R^2$

$\therefore \overline{PC} = R\sqrt{5}$

Então, substituindo em ①

$$R\sqrt{5} \times \overline{PE} = 3R \times R$$

$$\therefore PE = \frac{3R^2}{R\sqrt{5}} = \frac{3R}{\sqrt{5}} = \frac{3R\sqrt{5}}{5}$$

Resposta: $\frac{3R\sqrt{5}}{5}$

NOTA: Foram aprovadas 43 alunas nesta prova.

Prova de Matemática

(Concurso de admissão ao Curso Normal, realizado em 19/2/1953).

1.ª QUESTÃO: É dada a expressão

$$\frac{\sqrt{2^6} \times \sqrt{8} \times \sqrt[3]{16}}{4^2 \times \sqrt[4]{32} \times \sqrt{2}}$$

Escreva essa expressão sob a forma $\sqrt[m]{2^n}$ sendo m e n números inteiros, positivos e primos entre si.

2.ª QUESTÃO: Pôr em equação e resolver o seguinte problema: O valor absoluto da têrça parte de um número é igual a 1 menos a sexta parte dêsse mesmo número. Qual é êsse número?

3.ª QUESTÃO: São dados os polinômios:

$$A = 7y^2 - 16y + 15$$
$$B = 2y - 1$$
$$C = y - 3$$

Calcular $A - B^2 - 2C^2$ e decompor o resultado obtido em dois fatôres.

4.ª QUESTÃO: Resolver a equação

$$\frac{y+1}{m} + \frac{y+3}{m+1} = 4$$

5.ª QUESTÃO: Num triângulo isósceles ABC o ângulo externo em (A) é igual a um quinto da soma dos outros dois ângulos externos (em B e em C). Calcular os ângulos internos dêsse triângulo.

6.ª QUESTÃO: Demonstrar o seguinte teorema: O ângulo inscrito num círculo tem por medida a metade do arco compreendido entre seus lados.

7.ª QUESTÃO: Sabendo-se que a equação $y^2 - (m+3)y + 12 = 0$ tem as duas raízes positivas, calcular m de modo que uma das raízes seja o triplo da outra.

8.ª QUESTÃO: Numa circunferência de raio R um arco de $4^\circ 30'$ mede 1,57dm. Calcular a área do círculo.

$$(\pi = 3{,}14)$$

9.ª QUESTÃO: Um triângulo retângulo tem 30m² de área e 30m de perímetro. Calcular os raios dos círculos inscrito e circunscrito a êsse triângulo.

10.ª QUESTÃO: São dados dois triângulos semelhantes T e T', sendo S a área do primeiro e S' a área do segundo. O lado l', do triângulo T', é igual ao segmento áureo do lado l, homólogo, do triângulo T. Determinar a razão entre S e S'.

Racionalizar o denominador da fração resultante.

RESOLUÇÃO

1.ª) Temos:

$$\frac{2^3 \times \sqrt{2^3} \times \sqrt[3]{2^4}}{2^4 \times \sqrt[4]{2^5} \times \sqrt{2}} = \frac{2^3 \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt[3]{2}}{2^4 \times 2\sqrt[4]{2} \times \sqrt{2}} =$$

$$= \frac{2^5 \sqrt[3]{2} \times \sqrt{2}}{2^5 \sqrt[4]{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{2}} = \frac{\sqrt[12]{2^4}}{\sqrt[12]{2^3}} = \sqrt[12]{2}$$

Resposta: $\sqrt[12]{2}$

2.ª) $\left|\frac{x}{3}\right| = 1 - \frac{x}{6}$

Elevando ao quadrado ambos os membros, vem:

$$\frac{x^2}{9} = 1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{36} \therefore 4x^2 = 36 - 12x + x^2$$

$$\therefore 3x^2 + 12x - 36 = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 + 4x - 12 = 0$$

Resolvendo obtemos:

$$x = 2 \quad \text{ou} \quad x = -6$$

Resposta: 2 ou -6

3.ª) Substituindo os valores de A, B e C em $A - B^2 - 2C^2$ temos:

$$7y^2 - 16y + 15 - (4y^2 - 4y + 1) - 2(y^2 - 6y + 9) =$$

$$= 7y^2 - 16y + 15 - 4y^2 + 4y - 1 - 2y^2 + 12y - 18 = y^2 - 4$$

Fatorando, temos: $y^2 - 4 = (y + 2)(y - 2)$

Resposta: $(y + 2)(y - 2)$

4.ª) Eliminando os denominadores (supondo $m \neq 0$ e $m \neq -1$)

$$my + m + y + 1 + my + 3m = 4m^2 + 4m$$

$$\therefore 2my + y = 4m^2 - 1 \therefore (2m + 1)y = (2m + 1)(2m - 1)$$

E, para $m \neq -\frac{1}{2}$ $\quad y = 2m - 1$

Resposta: $y = 2m - 1$

5.ª) O problema tem duas soluções:

1) Se A é o ângulo do vértice.

Fazendo $B = C = x$, vem $A = 180° - 2x$.

Mas, foi dado que:

$$180° - A = \frac{1}{5}(180° - B + 180° - C)$$

Substituindo A, B e C por seus valores, vem:

$$180 - (180 - 2x) = \frac{180 - x + 180 - x}{5}$$

$$\therefore 2x = \frac{360 - 2x}{5} \therefore 10x = 360 - 2x \therefore x = 30$$

Então $A = 180 - 60 = 120$

Resposta: 120°, 30° e 30°

2) Se A é um dos ângulos da base.

Fazendo $A = B = x$, vem $C = 180 - 2x$.

Mas, $180 - A = \frac{1}{5}(180 - B + 180 - C)$:

Substituindo,

$$180 - x = \frac{180 - x + 180 - (180 - 2x)}{5}$$

$$\therefore 900 - 5x = 180 - x + 180 - 180 + 2x$$

$$\therefore -6x = -720 \therefore x = 120$$

Então $A = 120°$ e $B = 120°$ o que é impossível pois um triângulo não pode ter 2 ângulos obtusos.

Resposta: Impossível.

Observação: Em nossa opinião, como foi enunciada a questão, qualquer uma das soluções deveria ser aceita.

6.ª) A demonstração dêste teorema (os 3 casos) pode ser encontrada em qualquer livro da 3.ª série ginasial.

7.ª) Temos:

$$\begin{cases} y_2 = 3y_1 \\ y_1 + y_2 = m + 3 \\ y_1 \cdot y_2 = 12 \end{cases}$$

Substituindo o valor de y_2 na terceira equação:

$$y_1 \times 3y_1 = 12 \therefore 3y_1^2 = 12 \therefore y_1^2 = 4 \therefore y_1 = \pm 2$$

Mas, se as raízes são positivas (-2 não satisfaz)

$$y_1 = 2 \therefore y_2 = 3 \times 2 = 6$$

Substituindo êsses valores na 2.ª equação obtemos:

$$2 + 6 = m + 3 \therefore m = 5$$

Resposta: $m = 5$

8.ª) A área do círculo é: $S = \pi R^2$.

Calculemos R.

A fórmula do comprimento de um arco é:

$$l = \frac{\pi R n}{180°} \therefore \frac{\pi R \times 270'}{180° \times 60'} = 1{,}57$$

Simplificando a fração temos:

$$\frac{\pi R}{40} = 1{,}57 \therefore R = \frac{62{,}8}{\pi} = 20dm$$

Então $S = 3{,}14 \times 20^2 = 1\,256$ *Resposta:* $1\,256\ dm^2$

9.ª) Cálculo do raio r do círculo inscrito.

$$S = pr \therefore r = \frac{S}{p} \quad \text{mas,} \quad p = 30 \div 2 = 15$$

$$\therefore r = \frac{30}{15} = 2m$$

Cálculo do raio R do círculo circunscrito.

Se um triângulo retângulo está inscrito em um círculo, sua hipotenusa é o diâmetro dêsse círculo. Calculemos então a hipotenusa $a = 2R$.

Podemos formar o sistema:

$$\begin{cases} \frac{bc}{2} = 30 \therefore bc = 60 \\ a + b + c = 30 \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases} \quad \text{(onde } a, b \text{ e } c \text{ são os lados do triângulo)}$$

Da 2.ª equação: $b + c = 30 - a$

Elevando ao quadrado, ambos os membros, temos:

$$b^2 + 2bc + c^2 = 900 - 60a + a^2$$

Mas $b^2 + c^2 = a^2$ e $2bc = 120$

Logo, $a^2 + 120 = 900 - 60a + a^2$

$$\therefore 60a = 780 \therefore a = 13$$

Se $a = 13$, $2R = 13$ e $R = 6{,}5m$

Resposta: $r = 2m$ e $R = 6{,}5m$

10.ª) Se l' é o segmento áureo de l, temos:

$$l' = \frac{l(\sqrt{5} - 1)}{2}$$

Se os triângulos T e T' são semelhantes, suas áreas estão entre si como os quadrados de seus lados homólogos. Então:

$$\frac{S}{S'} = \frac{l^2}{\left[\frac{l(\sqrt{5}-1)}{2}\right]^2} = \frac{l^2}{\frac{l^2(\sqrt{5}-1)^2}{4}} = \frac{4}{(\sqrt{5}-1)^2} = \frac{4}{6 - 2\sqrt{5}} = \frac{2}{3 - \sqrt{5}}$$

Racionalizando, temos:

$$\frac{S}{S'} = \frac{2(3 + \sqrt{5})}{9 - 5} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \qquad \textit{Resposta: } \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

NOTA: Foram aprovadas 114, das 345 inscritas, nesta prova.

II) INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

Prova de Matemática

(Concurso de admissão ao curso normal, realizado em 8-1-1951).

PRIMEIRA ÉPOCA

1.ª QUESTÃO: Calcule o valor numérico do polinômio

$$8a^2b^3 + 4a^{-1}b^2 - 5ab^0 \quad \text{para} \quad a = -1 \quad \text{e} \quad b = \frac{1}{2}$$

2.ª QUESTÃO: Reduza os têrmos semelhantes da expressão

$$3a + 2b + [-5a + b - (-2a + 3b)]$$

3.ª QUESTÃO: Decomponha o trinômio $x^2 - 7x - 30$ em um produto de fatôres binômios do primeiro grau.

4.ª QUESTÃO: Decomponha num produto de dois fatôres binômios o polinômio

$$2 - b - 2a + ab$$

5.ª QUESTÃO: Resolva a equação

$$\frac{x + 1}{2} - \frac{x - 1}{4} = 1\frac{3}{4}$$

6.ª QUESTÃO: Determine os valores de m para que a equação abaixo tenha solução $2mx + 7 = 4x$

7.ª QUESTÃO: Resolva o sistema

$$\begin{aligned} 6x - y &= 4 \\ 2x + 3y &= -2 \end{aligned}$$

8.ª Questão: Racionalise o denominador da fração

$$\frac{3}{4\sqrt{3} - 5}$$

9.ª Questão: As retas r e s são paralelas. Calcule os ângulos x, y e z sabendo que

$$2x + y + z = 240°.$$

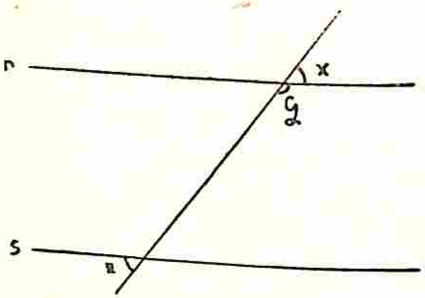


Fig. 20

10.ª Questão: A área de um pentágono regular é o quádruplo da área de outro pentágono regular. O perímetro do primeiro é 40m. Calcule o lado do segundo.

11.ª Questão: Efetúe as operações abaixo indicadas dando o resultado na sua expressão mais simples

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} - \frac{2x}{x^2 - 1}$$

12.ª Questão: Reduza

$$\sqrt{32} + \frac{4\sqrt{48}}{\sqrt{6}} - \sqrt[4]{2\,500} - (\sqrt{2})^3$$

à sua expressão mais simples.

13.ª Questão: Calcule os valores de m para que as raízes da equação

$$x^2 - (m+6)\,x + (m+9) = 0$$

sejam reais e iguais.

14.ª Questão: Um segmento de reta AB mede 1 260m. De A parte para B um móvel com a velocidade de 10 metros por minuto. Seis minutos depois parte de B para A outro móvel com a velocidade de 6 metros por minuto. Calcule a distância de B ao ponto de encontro dos dois móveis.

15.ª Questão: A soma dos ângulos internos de um polígono convexo é 1 080°. Calcule o número de diagonais dêsse polígono.

16.ª Questão: Na figura abaixo tem-se

$$AB = 18m \qquad AC = 27m \qquad BC = 15m$$

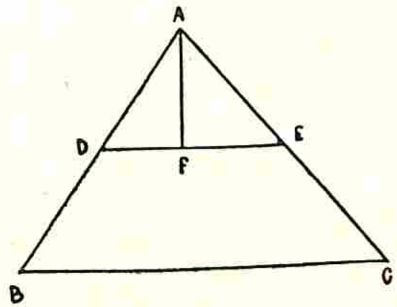


Fig. 21

Sôbre AB, a partir de A, toma-se $AD = 6m$ e traça-se DE paralela a BC. Sendo AF a bissetriz do ângulo A, calcule os segmentos DF e FE.

17.ª Questão: Num círculo de raio 11m um diâmetro divide uma corda em dois segmentos de 6m e 12m, respectivamente. Calcule os dois segmentos em que o diâmetro fica dividido pela corda.

18.ª Questão: Num círculo está inscrito um hexágono regular de 60m de perímetro. Calcule a altura do triângulo eqüilátero inscrito no mesmo círculo.

19.ª Questão: Num trapézio isósceles a base maior mede 14m, a base média 10m e a área 30m². Calcule o perímetro dêsse trapézio.

20.ª Questão: Deduza a fórmula da área de um hexágono regular em função do raio do círculo circunscrito.

Nota: Cada uma das 10 primeiras questões: valor 4 pontos. Cada uma das 10 ultimas questões: valor 6 pontos. A nota mínima de aprovação, como na Escola Carmela Dutra, é 50 pontos. E a duração da prova: 2 horas.

RESOLUÇÃO

1.ª) Temos: $8 \times (-1)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 4(-1)^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 5(-1)\left(\frac{1}{2}\right)^0 =$

$$= 8 \times 1 \times \frac{1}{8} + 4 \times (-1) \times \frac{1}{4} - 5 \times (-1) \times 1 = 1 - 1 + 5 = 5$$

Resposta: 5

2.ª) Temos: $3a+2b+[-5a+b+2a-3b] = 3a+2b-5a+b+2a-3b = 0$

Resposta: 0

3.ª) Procura-se dois números cujo produto é 30 e a diferença é 7, e escreve-se:

$$x^2 - 7x - 30 = (x-10)(x+3)$$

Resposta: $(x-10)(x+3)$

4.ª) Temos: $2 - b - 2a + ab = 2 - b - a(2-b) = (2-b)(1-a)$

Resposta: $(2-b)(1-a)$

5.ª) Temos:

$$2x + 2 - x + 1 = 7$$
$$\therefore x = 4$$

Resposta: $x = 4$

6.ª) Temos:

$$2mx - 4x = -7$$
$$\therefore (2m-4)x = -7$$

Para que tenha solução, seja determinada, é necessário que:

$$2m - 4 \neq 0 \;\therefore\; 2m \neq 4 \text{ e } m \neq 2$$

Resposta: $m \neq 2$

7.ª) Multiplicando a primeira por 3 e somando com a segunda.

$$\begin{array}{r} 18x - 3y = 12 \\ 2x + 3y = -2 \\ \hline 20x \quad\;\; = 10 \end{array} \quad \therefore x = \frac{1}{2}$$

Substituindo na segunda:

$$2 \times \frac{1}{2} + 3y = -2 \;\therefore\; 3y = -3 \text{ e } y = -1$$

Resposta: $x = \frac{1}{2}$ e $y = -1$

8.ª) Multiplicando ambos os têrmos pelo conjugado $4\sqrt{3}+5$, vem:

$$\frac{3(4\sqrt{3}+5)}{(4\sqrt{3})^2 - 5^2} = \frac{12\sqrt{3}+15}{48-25}$$

Resposta: $\frac{12\sqrt{3}+15}{23}$

9.ª) Temos: $x = z$ (alternos externos)

$x + y = 180°$ (adjacentes suplementares).

Substituindo na igualdade dada, ou seja, em $x+x+y+z = 240°$ vem:

$$x + 180° + x = 240° \;\therefore\; x = 30°$$

Então: $z = x = 30°$ e $y = 180° - x = 150°$

Resposta: $x = 30°$, $y = 150°$ e $z = 30°$

10.ª) Sejam S e S' as áreas dos dois pentágonos.

Temos: $S = 4S'$

Se o perímetro do primeiro é 40m, seu lado é 8m. Como dois polígonos regulares de mesmo número de lados são semelhantes, e, as áreas de dois polígonos semelhantes estão entre si como o quadrado de suas linhas homólogas.

Então: $\frac{S}{S'} = \frac{8^2}{x^2}$ ou $\frac{4S'}{S'} = \frac{64}{x^2} \;\therefore\; 4 = \frac{64}{x^2}$

ou $x^2 = \frac{64}{4} = 16 \;\therefore\; x = 4$

Resposta: 4m

11.ª) O m.m.c. $= (x+1)(x-1)$, então

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} - \frac{2x}{x^2-1} = \frac{x-1-x-1-2x}{(x+1)(x-1)} = \frac{-2x-2}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{-2(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{-2}{x-1}$$

Resposta: $\frac{2}{1-x}$

12.ª) Temos: $\sqrt{2^4 \times 2} + 4\sqrt{48:6} - \sqrt[4]{2^2 \times 5^4} - \sqrt{2^3} =$

$$= 4\sqrt{2} + 4\sqrt{8} - \sqrt{2 \times 5^2} - \sqrt{2^2 \times 2} =$$
$$= 4\sqrt{2} + 4 \times 2\sqrt{2} - 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

Resposta: $5\sqrt{2}$

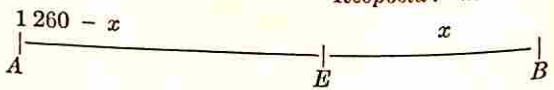
13.ª) Para que as raízes sejam reais e iguais, $\triangle = 0$.

Logo,
$$(m + 6)^2 - 4 \times 1\,(m + 9) = 0$$
$$m^2 + 12m + 36 - 4m - 36 = 0$$
$$m^2 + 8m = 0$$

Equação incompleta do 2.º grau, que resolvemos colocando m em evidência.
$$m\,(m + 8) = 0$$
$$\therefore\ m = 0 \text{ e } m + 8 = 0$$

Resposta: $m = 0$ e $m = -8$

14.ª)



Seja E o ponto de encontro e $\overline{EB} = x$.

O tempo gasto para percorrer $\overline{AE}$ é $\dfrac{1\,260 - x}{10}$.

O tempo gasto para percorrer $\overline{BE}$ é $\dfrac{x}{6}$ —

Como o tempo gasto por A é 6 minutos mais do que o gasto por B, podemos escrever:
$$\frac{1\,260 - x}{10} = \frac{x}{6} + 6$$
$$3\,780 - 3x = 5x + 180 \ \therefore\ 8x = 3\,600$$
$$x = \frac{3\,600}{8} = 450$$

Resposta: 450m

15.ª) A soma dos ângulos internos é:
$$Si = 180^\circ\,(n - 2) = 1\,080^\circ$$
$$\therefore\ 180n - 360 = 1\,080 \ \therefore\ 180n = 1\,440 \ \therefore\ n = 8$$

E o número de diagonais será:
$$D = \frac{n\,(n - 3)}{2} = \frac{8 \times 5}{2} = 20$$

Resposta: 20

16.ª) Calculemos primeiro os lados do triângulo ADE.

Se DE paralelo a BC, pelo teorema linear de Thales,
$$\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{ADE} \ \therefore\ \frac{BC}{DE} = \frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD} \text{ ou } \frac{15}{DE} = \frac{27}{AE} = \frac{18}{6} = 3$$

Então: $DE = 5m$ e $AE = 9m$

Conhecidos os lados do triângulo ADE, temos, pelo teorema da bissetriz interna:
$$\frac{DE}{AD} = \frac{FE}{AE} \text{ ou } \frac{DF}{6} = \frac{FE}{9} = \frac{DF + FE}{6 + 9} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

Então: $DF = 6 \times \dfrac{1}{3} = 2$ e $FE = 9 \times \dfrac{1}{3} = 3$

Resposta: $DF = 2m$ e $FE = 3m$

17.ª) Chamemos um dos segmentos do diâmetro de x, o outro segmento dêsse diâmetro será: $2R - x$ ou $22 - x$.

Mas, como sabemos que o produto dos segmentos de uma corda é igual ao produto dos segmentos da outra, temos:
$$x\,(22 - x) = 6 \times 12 \ \therefore\ 22x - x^2 = 72$$
$$x^2 - 22x + 72 = 0$$

Resolvendo, temos: $x_1 = 18$ e $x_2 = 4$

Um segmento é 18m o outro é 4m, e vice-versa.

Resposta: $18m$ e $4m$

18.ª) Sendo R o raio do círculo, temos:
$$l_6 = R = 60m \div 6 = 10m$$

O lado do triângulo eqüilátero é dado pela expressão:
$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{10\sqrt{3} \times \sqrt{3}}{2} = 15$$

Resposta: $15m$

19) A base média
$$b_m = \frac{B + b}{2} \ \therefore\ \frac{14 + b}{2} = 10$$

A base menor é, portanto:
$$b = 20 - 14 = 6$$

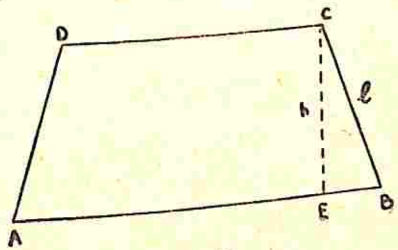


Fig. 22

A área do trapézio é:

$$S = b_m \times h \therefore 10h = 30 \therefore h = 3$$

$$AD = CB = l \qquad EB = \frac{B-b}{2} = \frac{14-6}{2} = 4$$

Do triângulo CEB, temos:

$$l^2 = h^2 + EB^2 = 9 + 16 = 25 \therefore l = 5$$

O perímetro pedido será:

$$2p = B + b + 2l = 14 + 6 + 10 = 30$$

Resposta: $30m$

20.ª) A área de um polígono regular qualquer é:

$S = pa$ (semi-perímetro vêzes o apótema)

Mas, $p = 3l_6 = 3R$ e $a = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$ (R = raio do círculo)

Então: $S_6 = 3R \times \dfrac{R\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{2}$

NOTA: Nesta prova foram aprovadas apenas 6 alunas e a maior nota foi 82.

SEGUNDA ÉPOCA

(Realizado em 19/2/1951).

1.ª QUESTÃO: Sendo
$$P = -3a^2 + 5ab - 14b^2$$
$$Q = -9a^2 - ab + 6b^2$$
$$R = 6a^2 + 5ab - 8b^2$$
calcule $-P + (-Q + R)$

2.ª QUESTÃO: Decomponha em um produto de fatôres do 1.º grau a expressão:

$$x^2 - y^2 + 2yz - z^2$$

3.ª QUESTÃO: Simplifique a expressão:

$$\frac{a^2-1}{x^2-y^2} \div \frac{a^2-3a+2}{3x+3y}$$

4.ª QUESTÃO: Resolva a equação:

$$\frac{bx-a}{6} - \frac{b-ax}{4} = \frac{2ax-b}{3}$$

5.ª QUESTÃO: Calcule os números inteiros que satisfaçam, simultâneamente, as desigualdades:

$$2x - \frac{x-3}{4} > 6$$
$$\frac{3x+7}{2} - 1 > 2x$$

6.ª QUESTÃO: Resolva o sistema $\begin{cases} 4x - 3y = -1 \\ 8x - 9y = -5 \end{cases}$

7.ª QUESTÃO: Resolva a equação

$$\frac{x^2-3}{4} - 3 = 1 - \frac{x^2+1}{6}$$

8.ª QUESTÃO: Simplifique a expressão:

$$3a\sqrt{a} - 8\sqrt{a^3} + \frac{2}{a}\sqrt{64a^5}$$

9.ª QUESTÃO: Racionalize o denominador da fração $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$

10.ª QUESTÃO: Componha a equação do 2.º grau cujas raízes são:

$$x' = 1 + \sqrt{2} \quad \text{e} \quad x'' = 1 - \sqrt{2}$$

11.ª QUESTÃO: Calcule m e p para a equação

$$3x^2 - 9px + (2m-3) = 0$$

ter uma, e sòmente uma, raiz diferente de zero.

12.ª QUESTÃO: Duas retas paralelas cortadas por uma transversal formam dois ângulos colaterais internos que podem ser representados por $3x - 50°$ e $2x + 10°$. Calcule o menor dêsses ângulos.

13.ª QUESTÃO: Três dos ângulos internos de um pentágono convexo medem respectivamente 108°, 100° 20′ e 91° 40′.

Calcule o maior dos outros dois sabendo que êle tem 20° mais que o outro.

14.ª Questão: Um segmento AB está dividido por um ponto M em 2 segmentos de 12m e 24m. Prolonga-se êsse segmento até o ponto N, conjugado harmônico de M. Calcule NA.

15.ª Questão: Os 2 catetos de um triângulo retângulo medem 18m e 24m. Calcule o maior dos segmentos determinados sôbre a hipotenusa pela bissetriz do ângulo reto.

16.ª Questão: Os arcos compreendidos entre 2 secantes a uma circunferência de círculo de raio R, são representados, em graus, pelos números $\frac{\pi R}{2}$ e $\frac{\pi R}{3}$. Calcule o ângulo dessas secantes.

17.ª Questão: Num círculo está inscrito um triângulo eqüilátero de lado $l = 173$m. Calcule o perímetro do decágono regular inscrito nesse círculo.

18.ª Questão: Calcule a área do círculo no qual está inscrito um quadrado de área igual a 50m².

19.ª Questão: As bases de um trapézio isósceles medem, respectivamente, 8m e 20m, e a altura 6m. Calcule a área do triângulo formado pela base menor e os prolongamentos dos lados não paralelos.

20.ª Questão: Um hexágono regular $ABCDEF$ está inscrito em um círculo. Prolongam-se, nos dois sentidos, os lados AB, CD e EF, que se vão cortar nos pontos M, N e P. Demonstre que o triângulo MNP é eqüilátero.

Nota: De 1 a 10 – 4 pontos cada.
De 11 a 20 – 6 pontos cada.

RESOLUÇÃO

1.ª) Temos:

$$3a^2 - 5ab + 14b^2 + (9a^2 + ab - 6b^2 + 6a^2 + 5ab - 8b^2) =$$
$$= 3a^2 - 5ab + 14b^2 + 15a^2 + 6ab - 14b^2 = 18a^2 + ab$$

Resposta: $18a^2 + ab$

2.ª) Temos:

$$x^2 - y^2 + 2yz - z^2 = x^2 - (y^2 - 2yz + z^2) =$$
$$= x^2 - (y - z)^2 = (x + y - z)(x - y + z)$$

Resposta: $(x + y - z)(x - y + z)$

3.ª) Fatorando cada têrmo das frações, temos:

$$\frac{(a+1)(a-1)}{(x+y)(x-y)} \times \frac{3(x+y)}{(a-1)(a-2)} = \frac{3(a+1)}{(x-y)(a-2)}$$

Resposta: $\frac{3a + 3}{ax - 2x - ay + 2y}$

4.ª) Eliminando os denominadores:

$$2bx - 2a - 3b + 3ax = 8ax - 4b$$
$$\therefore\ 2bx - 5ax = 2a - b\ \therefore\ (2b - 5a)x = 2a - b$$
$$\therefore\ x = \frac{2a - b}{2b - 5a}$$

Resposta: $x = \frac{2a - b}{2b - 5a}$

5.ª) Temos:

$$\begin{cases} 8x - x + 3 > 24 \\ 3x + 7 - 2 > 4x \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 7x > 21 \\ -x > -5 \end{cases}$$
$$\therefore \begin{cases} x > 3 \\ x < 5 \end{cases} \therefore\ 3 < x < 5$$

Resposta: 4

6.ª) Multiplicando a primeira por -3 e somando com a segunda temos:

$$\begin{array}{r} -12x + 9y = 3 \\ 8x - 9y = -5 \\ \hline -4x \quad = -2 \end{array} \quad \therefore\ x = \frac{1}{2}$$
$$\therefore\ 8 \times \frac{1}{2} - 9y = -5 \text{ ou } -9y = -9\ \therefore\ y = 1$$

Resposta: $x = \frac{1}{2}$ e $y = 1$

7.ª) Eliminando os denominadores:

$$3x^2 - 9 - 36 = 12 - 2x^2 - 2\ \therefore\ 5x^2 = 55\ \therefore\ x^2 = 11$$
$$\text{e } x = \pm\sqrt{11}$$

Resposta: $x_1 = \sqrt{11}$ e $x_2 = -\sqrt{11}$

8.ª) Temos:

$$3a\sqrt{a} - 8\sqrt{a^2 \cdot a} + \frac{2}{a}\sqrt{2^6 \cdot a^4 \cdot a} = 3a\sqrt{a} - 8a\sqrt{a} + \frac{16a^2}{a}\sqrt{a} =$$
$$= 3a\sqrt{a} - 8a\sqrt{a} + 16a\sqrt{a} = 11a\sqrt{a}$$

Resposta: $11a\sqrt{a}$

9.ª) Multiplicando ambos os têrmos da fração pelo conjugado do denominador, $2 + \sqrt{3}$, temos:

$$\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{(2+\sqrt{3})^2}{2^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{4+4\sqrt{3}+3}{4-3} = 7+4\sqrt{3}$$

Resposta: $7 + 4\sqrt{3}$

10.ª) Calculemos a soma e o produto das raízes:

$$S = 1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2} = 2$$

$$P = (1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) = 1-2 = -1$$

A equação pedida será $x^2 - Sx + P = 0$

Resposta: $x^2 - 2x - 1 = 0$

11.ª) Para a equação ter uma e sòmente uma raiz diferente de zero, deverá ter uma e sòmente uma raiz nula. Então, não deve possuir *apenas* o têrmo independente.

$$\therefore\ 2m - 3 = 0 \quad \text{e} \quad -9p \neq 0$$

$$\therefore\ m = \frac{2}{2} \quad \text{e} \quad p \neq 0$$

Resposta: $m = \frac{3}{2}$ e $p \neq 0$

12.ª) Como os ângulos colaterais internos são suplementares, temos:

$$3x - 50 + 2x + 10 = 180$$

$$\therefore\ 5x = 220 \ \therefore\ x = 44$$

$$3x - 50 = 132 - 50 = 82 \quad \text{e} \quad 2x + 10 = 88 + 10 = 98$$

Resposta: 82°

13.ª) A soma dos ângulos internos do pentágono é:

$$Si = 180^\circ(5-2) = 540^\circ$$

A soma dos três ângulos dados é:

$$108^\circ + 100^\circ\,20' + 91^\circ\,40' = 300^\circ$$

Sejam x e y os dois outros ângulos, temos:

$$x + y = 540^\circ - 300^\circ = 240^\circ$$

e $y = x - 20^\circ \ \therefore\ x + x - 20 = 240 \ \therefore\ 2x = 260^\circ$ e $x = 130^\circ$

Resposta: 130°

14.ª) Se M e N são conjugados harmônicos, dividem pois o segmento AB harmonicamente. Então,

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB}$$

$$\therefore\ \frac{12}{24} = \frac{x}{x+36} \ \therefore\ 24x = 12x + 432 \ \therefore\ 12x = 432 \ \therefore\ x = 36$$

Resposta: $NA = 36m$

15.ª) Pelo teorema de Pitágoras, a hipotenusa será:

$$a^2 = 18^2 + 24^2 = 324 + 576 = 900 \qquad a = 30m$$

Sejam m e n os segmentos determinados sôbre a hipotenusa, pela bissetriz do ângulo reto.

Temos: $\begin{cases} m + n = 30 \\ \frac{m}{18} = \frac{n}{24} = \frac{m+n}{18+24} = \frac{30}{42} = \frac{5}{7} \end{cases}$

$$\therefore\ m = 18 \times \frac{5}{7} = \frac{90}{7} \quad \text{e} \quad n = 24 \times \frac{5}{7} = \frac{120}{7}$$

Calculando com aproximação 0,1 vem:

$$m = 12{,}9 \quad \text{e} \quad n = 17{,}1$$

Resposta: $17{,}1m$

16.ª) O ângulo dessas secantes é um ângulo excêntrico exterior, o qual tem por medida a semi-diferença dos arcos compreendidos entre os seus lados.

O arco $\frac{\pi R}{2}$ corresponde a 90° e o de $\frac{\pi R}{3}$ corresponde a 60°.

Então: $M = \frac{90^\circ - 60^\circ}{2} = 15^\circ$

Resposta: 15°

17.ª) Seja L_{10} o lado do decágono e $2p$ o seu perímetro.

$$L_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1) \cong 0{,}618R$$ (R é o raio do círculo circunscrito).

$$L_3 = R\sqrt{3} = 173 \ \therefore\ 1{,}73R = 173 \ \therefore\ R = 100m$$

Então: $L_{10} = 0{,}618 \times 100 = 61{,}8$

e $2p = 10L_{10} = 10 \times 61{,}8 = 618$

Resposta: $618m$

18.ª), A área do círculo de raio R é: $S = \pi R^2$.

A área do quadrado é: $S_4 = L^2 = (R\sqrt{2})^2 = 2R^2$.

$$\therefore\ 2R^2 = 50 \ \therefore\ R^2 = 25$$

Então: $S = 25\pi = 25 \times 3{,}14 = 78{,}50$

Resposta: $78{,}50m^2$

19.ª) $B = \overline{AB} = 20m$; $b = \overline{DC} = 8m$ $h = \overline{FG} = 6m$

Seja S a área do triângulo DEC. (Fig. 17)

$$S = \frac{\overline{DC} \times \overline{EF}}{2} \quad \text{e} \quad EF = x$$

Como DC é paralelo AB, pelo teorema linear de Thales, temos que os triângulos ABE e DCE são semelhantes.

Logo, $$\frac{AB}{DC} = \frac{GE}{EF} \quad \text{ou} \quad \frac{20}{8} = \frac{x+6}{x}$$

$$\therefore\ 20x = 8x + 48 \ \therefore\ 12x = 48 \ \text{e} \ x = 4$$

Logo, $$S = \frac{8 \times 4}{2} = 16$$

Resposta: $16m^2$

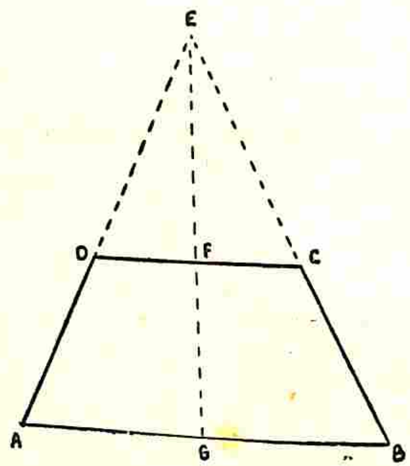


Fig. 23

20.ª) $\widehat{PED} = \widehat{PDE} = \widehat{NCB} = \widehat{NBC} = \widehat{MAF} = \widehat{MFA} = 60°$ por serem suplementos dos ângulos do hexágono regular, cuja medida é

$$I = \frac{180° (6-2)}{6} = 120°$$

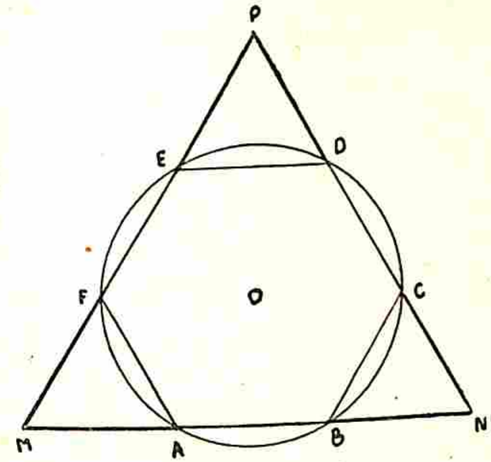


Fig. 24

Se dois dos ângulos de cada um dos triângulos AMF, EPD e BNC, medem 60°, então, também (Fig. 24)

$$\hat{M} = \hat{N} = \hat{P} = 60°$$

Portanto, êsses triângulos são eqüiláteros e como $\overline{AF} = \overline{BC} = \overline{ED}$ por serem lados do hexágono regular, logo os triângulos são também iguais.

E o triângulo MNP é eqüilátero, pois os seus lados são iguais ao triplo do lado do hexágono.

Prova de Matemática

(Realizada em 29/2/1952).

1.ª Questão: Calcule o quociente da soma dos números -9, $+6$, -2, $+3$, -16 pelo simétrico da diferença entre -7 e $+2$.

2.ª QUESTÃO: Calcule o valor da expressão

$$Aa^2 - [B - (Ba - C)] + B \quad \text{sendo} \quad A = a + 1$$
$$B = 1 - a - a^2$$
$$C = a - 1$$

3.ª QUESTÃO: Reduza à expressão mais simples:

$$\frac{a - a^2}{a^2 - 1} \div \left(\frac{a}{a + 1} - a\right)$$

4.ª QUESTÃO: Resolva a inequação $2 - \frac{x - 18}{3} < x$

5.ª QUESTÃO: Resolva o sistema $\begin{cases} ax + by = ab \\ x - \ y = b \end{cases}$

6.ª QUESTÃO: Simplifique a expressão $\sqrt[5]{32\sqrt{c^5}}$ de modo que o resultado só apresente radical do 2.º grau.

7.ª QUESTÃO: Simplifique a expressão $\sqrt{x^3 + x^2y - xy^2 - y^3}$ de modo que não fiquem fatôres quadrados sob radical.

8.ª QUESTÃO: Escreva a equação do 2.º grau cujas raízes são dois números reais inversos um do outro e de soma igual a $-\frac{5}{2}$.

9.ª QUESTÃO: Dê a maior raiz da equação $\frac{8}{x} - \frac{5}{x + 3} = 3$

10.ª QUESTÃO: Calcule o menor valor de p de modo que uma das raízes da equação $x^2 - (p+2)x + 8 = 0$ seja o dôbro da outra.

11.ª QUESTÃO: Qual é o polígono convexo em que a soma dos ângulos internos é igual à soma dos ângulos externos?

12.ª QUESTÃO: O ângulo A de um triângulo ABC inscrito num círculo mede 40º. Calcule o ângulo formado pelas tangentes ao círculo, traçadas por B e C.

13.ª QUESTÃO: Qual é o polígono em que o número de diagonais é o triplo do número de lados?

14.ª QUESTÃO: Duas secantes a um círculo formam um ângulo de 25º e os arcos por elas compreendidos dão por soma 152º. Calcule o número de graus do arco menor.

15.ª QUESTÃO: Calcule a hipotenusa de um triângulo retângulo em que um dos catetos mede 5m e a altura relativa à hipotenusa 3m.

16.ª QUESTÃO: De um ponto P, fóra de um círculo, traçam-se uma tangente PA, ao círculo, e uma secante. O segmento externo da secante mede 4dm e o interno é igual a PA. Calcule o comprimento de PA.

17.ª QUESTÃO: As áreas de dois triângulos eqüiláteros são $108\sqrt{3}$ decímetros quadrados e $3\sqrt{3}$ decímetros quadrados. Qual é a razão entre as alturas dos dois triângulos?

18.ª QUESTÃO: O ângulo A, de um triângulo ABC, mede 45º; o lado AB tem 6m e o lado AC, 12m. Sôbre AB, a partir de A, toma-se $AD = 2m$ e traça-se DE paralela a AC. Calcule a área do trapézio $DACE$.

19.ª QUESTÃO: Um losango está inscrito num círculo cuja área é igual a π metros quadrados. Calcule a área do losango.

20.ª QUESTÃO: Exprima a área S do triângulo eqüilátero em função do apótema a.

NOTA: Tôdas as questões têm valor 5 pontos.

RESOLUÇÃO

1.ª) $-9 + 6 - 2 + 3 - 16 = -18$

$-7 - (2) = -9$ simétrico de -9 : $+9$

quociente: $(-18) \div (+9) = -2$

2.ª) $Aa^2 - [B - (Ba - C)] + B = Aa^2 - [B - Ba + C] + B =$
$= Aa^2 - B + Ba - C + B = Aa^2 + Ba - C$

Substituindo A, B e C por seus valores:

$$(a+1)\,a^2+(1-a-a^2)\,a-(a-1) = a^3+a^2+a-a^2-a^3-a+1 = 1$$

3.ª) Temos: $\dfrac{a\,(1-a)}{(a+1)\,(a-1)} \div \dfrac{a-a^2-a}{a+1} = \dfrac{-a}{a+1} \div \dfrac{-a^2}{a+1} =$

$$= \frac{-a}{a+1} \times \frac{a+1}{-a^2} = \frac{1}{a}$$

4.ª) Eliminando o denominador

$$6 - x + 18 < 3x \;\therefore\; -4x < -24$$
$$\therefore\; 4x > 24 \text{ e } x > 6$$

5.ª) Resolvendo por adição:

$$\begin{array}{l} ax + by = ab \\ bx - by = b^2 \\ \hline ax + bx = ab + b^2 \quad \therefore\; (a+b)\,x = b\,(a+b) \\ \therefore\; x = b \end{array}$$

Substituindo o valor de x na 2.ª equação vem:

$$b - y = b \;\therefore\; -y = b - b \text{ ou } y = 0$$

Solução:

$$x = b$$
$$y = 0$$

6.ª) $\sqrt[5]{32\,\sqrt{c^5}} = \sqrt[5]{2^5\,\sqrt{c^5}} = 2\,\sqrt[10]{c^5} = 2\,\sqrt{c}$

7.ª) Fatorando o radicando temos:

$$\sqrt{x^2(x+y) - y^2(x+y)} = \sqrt{(x+y)\,(x^2-y^2)} = \sqrt{(x+y)\,(x+y)\,(x-y)} =$$
$$= \sqrt{(x+y)^2\,(x-y)} = (x+y)\,\sqrt{x-y}$$

8.ª) A soma S das raízes é: $-\dfrac{5}{2}$

Se uma raiz é inverso da outra, o produto P dessas raízes é a unidade. Pois, se

$$x_2 = \frac{1}{x_1},\quad x_1x_2 = 1$$

A equação pedida será da forma:

$$x^2 - Sx + P = 0 \text{ ou } x^2 + \frac{5}{2}\,x + 1 = 0$$

ou ainda:

$$2x^2 + 5x + 2 = 0$$

9.ª) Resolvendo:

$$8x + 24 - 5x = 3x^2 + 9x \;\therefore\; 3x^2 + 6x - 24 = 0$$

ou $x^2 + 2x - 8 = 0$ cujas raízes são: $x_1 = -4$ e $x_2 = 2$,

A maior raiz é, portanto: 2.

10.ª) Temos:

$$x^2 = 2x_1$$
$$x_1 + x_2 = p + 2$$
$$x_1x_2 = 8$$

Substituindo x_2 na 2.ª equação:

$$x_1 + 2x_1 = p + 2 \;\therefore\; x_1 = \frac{p+2}{3}, \text{ logo } x^2 = \frac{2p+4}{3}$$

levando êsses valores na 3.ª equação:

$$\frac{p+2}{3} \times \frac{2p+4}{3} = 8 \;\therefore\; \frac{2p^2+8p+8}{9} = 8$$
$$\therefore\; 2p + 8p + 8 = 72 \;\therefore\; p^2 + 4p - 32 = 0$$

resolvendo, vem: $p = -8$ e $p = 4$

Portanto, o menor valor de p será: -8.

11.ª) Temos: $Si = Se$ ou $180°\,(n-2) = 360°$

$$180°\,n - 360° = 360° \;\therefore\; n = 4$$

e o polígono pedido é um *quadrilátero*.

12.ª) O ângulo P pedido é um ângulo circunscrito e tem por medida:

$$P = \frac{\widehat{BAC} - \widehat{BC}}{2}$$

$$\hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2} = 40° \;\therefore\; \widehat{BC} = 80°$$

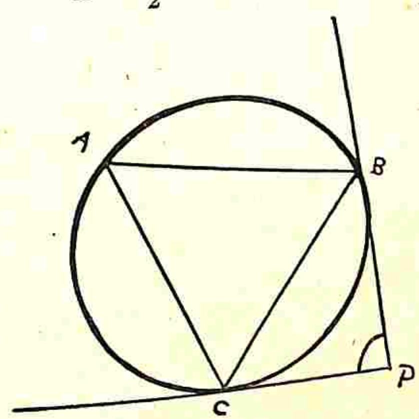


Fig. 25

logo:

$$\widehat{BAC} = 360° - 80° = 280°$$

$$\therefore \ P = \frac{280° - 80°}{2} = 100°$$

13.ª) Seja n o n.º de lados do polígono, temos:

$$\frac{n\,(n-3)}{2} = 3n \ \therefore \ n^2 - 3n = 6n \ \therefore \ n^2 - 9n = 0$$

cujas raízes são: $n = 0$ e $n = 9$.

E o polígono pedido será o *eneágono* $(n = 9)$.

14.ª) Temos: $\hat{P} = \dfrac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2} = 25°$

Calculemos CD

$$\widehat{AB} + \widehat{CD} = 152°$$

$$\widehat{AB} - \widehat{CD} = 50°$$

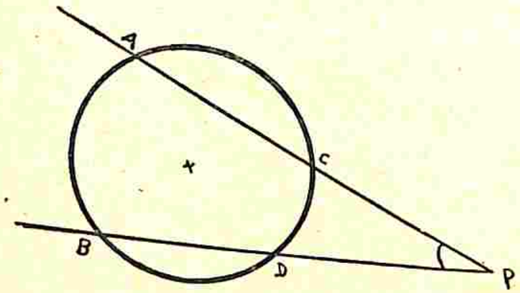


Fig. 26

Somando, membro a membro, obtemos:

$$2\widehat{AB} = 202° \ \therefore \ \widehat{AB} = 101°$$

E o arco pedido CD será $152° - 101° = 51°$.

15.ª) Temos: $c = 5\text{m}$ e $h = 3\text{m}$ e sabemos que:

$$\begin{cases} b^2 = a^2 - c^2 \\ bc = ah \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} b^2 = a^2 - 25 \\ 5b = 3a \end{cases}$$

Resolvendo o sistema vem: $b = \dfrac{3a}{5}$

$$\therefore \ \frac{9a^2}{25} = a^2 - 25 \ \therefore \ 9a^2 = 25a^2 - 625$$

ou $$16a^2 = 625 \ \therefore \ a^2 = \frac{625}{16} \ \therefore \ a = \frac{25}{4} = 6{,}25$$

A hipotenusa será, pois: 6,25m.

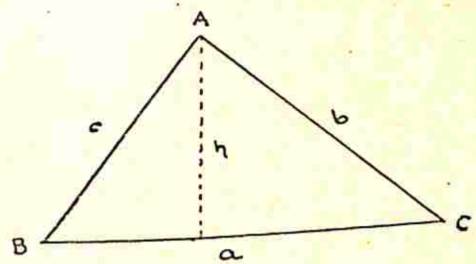


Fig. 27

16.ª) $PB = 4dm \quad BC = PA$ (Fig. 28)

Sabemos que: $\overline{PA}^2 = \overline{PC} \times \overline{PB}$

$$\therefore \ \overline{PA}^2 = (\overline{BC} + \overline{PB})\,PB$$

ou $$PA^2 = (\overline{PA} + 4) \times 4$$

$$\therefore \ x^2 = 4x + 16 \ \therefore \ x^2 - 4x - 16 = 0$$

$$\therefore \ x = \frac{4 \pm \sqrt{16+64}}{2} = \frac{4 \pm 4\sqrt{5}}{2} = 2 \pm 2\sqrt{5}$$

Logo o segmento $\overline{PA}$ será: $2+2\sqrt{5}\ dm$ ou aproximadamente $6{,}46dm$.

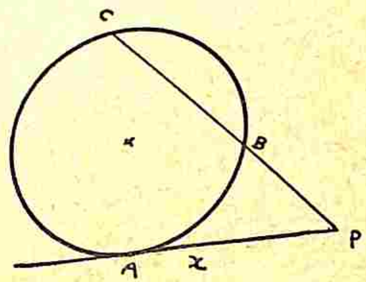


Fig. 28

17.ª) Como sabemos que polígonos regulares de mesmo número de lados são semelhantes e que as áreas de dois polígonos semelhantes estão entre si como os quadrados de suas linhas homólogas. Temos:

$$\frac{108\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \frac{H^2}{h^2} \ \therefore \ \frac{H^2}{h^2} = 36$$

e a razão pedida será: 6.

18.ª) A área do trapézio será: $S = \dfrac{AC + DE}{2} \times h$

Mas
$$\overline{AC} = 12m$$
$$\overline{AB} = 6m$$
$$\overline{AD} = 2m$$
$$\overline{BD} = 4m$$

Como DE é paralelo a AC, temos: $\triangle ABC \sim \triangle DBE$.

$$\therefore \frac{\overline{AC}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} \quad \text{ou} \quad \frac{12}{\overline{DE}} = \frac{6}{4} \quad \therefore \overline{DE} = 8m$$

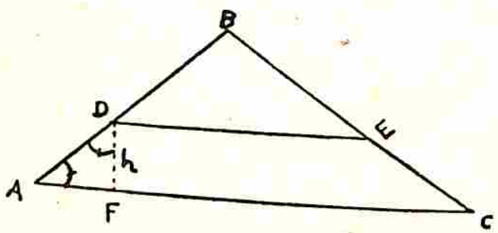


Fig. 29

No $\triangle$ retângulo AFD, $A = 45°$, logo $D = 45°$ e portanto $\overline{AF} = h$.
Pelo teorema de Pitágoras: $h^2 + h^2 = AD^2$ $\therefore$ $2h^2 = 4$ e $h = \sqrt{2}$.
Substituindo êsses valores na expressão da área temos:

$$S = \frac{12 + 8}{2} \times \sqrt{2} = 10\sqrt{2}\,m^2$$

ou, aproximadamente: $14{,}14m^2$.

19.ª) A nosso ver, a inclusão desta questão na prova de admissão ao Normal do Instituto de Educação, não foi uma idéia feliz, por várias razões que deixamos de comentar.

Várias alunas responderam que era *impossível* o que foi considerado errado *pela banca julgadora*, que aceitou a solução que considerava o losango como um quadrado ("o quadrado é um losango de ângulos iguais").

Dentro dêsse ponto de vista a solução seria:

$$S = \frac{D \times d}{2} \quad \text{mas,} \quad D = d = 2R \quad \therefore \quad S = \frac{4R^2}{2} = 2R^2$$

Mas
$$\pi R^2 = \pi \quad \therefore \quad R = 1$$

e a área pedida será: $S = 2m^2$.

20.ª) Sabemos que a área de um polígono regular é: $S = pa$

$$\therefore \quad S_3 = \frac{3l}{2} \cdot a \quad \text{ou} \quad S_3 = \frac{3R\sqrt{3}}{2} \cdot a \qquad (1)$$

Mas, $$a_3 = \frac{R}{2} \quad \therefore \quad R = 2a$$

Substituindo em (1) vem:

$$S_3 = \frac{3 \times 2a\sqrt{3}}{2} \cdot a = 3a^2\sqrt{3}$$

Nota: Nesta prova, em mais de 900 candidatas, foram aprovadas menos de 100 e a maior nota foi 95.

Prova de Matemática

(Realizada em 19/2/1953).

1.ª Questão: A raiz cúbica de certo número N é 4,41; a raiz quadrada dêsse mesmo número é 9,23.

Calcule, aproximadamente, com uma só operação, a $\sqrt[6]{N}$ e justifique a marcha adotada na resolução do problema.

2.ª Questão: Pôr em equação e resolver o seguinte problema: Qual é o número que é igual ao valor absoluto de seu dôbro diminuido de 15?

3.ª Questão: São dados os polinômios

$$A = x^2 - 3x + m$$
$$B = hx^2 - 5$$
$$C = px + 3$$

Calcular m, h e p de modo que a soma $2A - B + C$ seja igual a zero.

4.ª Questão: Resolver a equação

$$\frac{x - 1}{1 + a} + \frac{x + 1}{3 + a} = 2$$

5.ª Questão: Num triângulo retângulo ABC a diferença entre os ângulos agudos é de 38°.

Calcule os dois ângulos formados pela hipotenusa BC com a mediana AM relativa à hipotenusa.

6.ª Questão: Defina o que é um postulado e enuncie dois postulados que se apresentem em Geometria.

7.ª Questão: É dada a equação

$$x^2 - 8x + 9 = 0$$

e sem resolvê-la, formar e resolver outra equação cujas raízes sejam respectivamente, a média aritmética e a média geométrica das raízes da equação dada.

8.ª Questão: Num círculo de raio R foram inscritos um triângulo eqüilátero de lado l e um quadrado de lado l'.

Calcular, aproximadamente, o número de graus do arco que retificado é igual a $\frac{1}{5}$ do segmento $l + l'$.

9.ª Questão: Demonstrar o seguinte teorema relativo ao círculo: "O diâmetro é maior do que qualquer outra corda".

10.ª Questão: Num triângulo eqüilátero de 15cm de lado foi inscrito um retângulo de 60cm² de área. Calcular as dimensões dêsse retângulo.

RESOLUÇÃO

1.ª) 1.ª *solução:* $\sqrt{4{,}41} = 2{,}1$.

Porque $\sqrt{\sqrt[3]{N}} = \sqrt[6]{N}$

logo, $\sqrt{4{,}41} = \sqrt[6]{N}$

Resposta: 2,1

(O resultado não é aproximado e sim exato)

2.ª *solução:* 9,23 ÷ 4,41 = 2,09 (aproximadamente).

Porque: $\sqrt{N} \div \sqrt[3]{N} = \sqrt[6]{N^3} : \sqrt[6]{N^2} = \sqrt[6]{N}$

Resposta: 2,09

2.ª) Seja x o número.

Temos: $x = |2x - 15|$

Elevando ao quadrado, ambos os membros, temos:

$$x^2 = 4x^2 - 60x + 225$$

$$3x^2 - 60x + 225 = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 - 20x + 75 = 0$$

Resolvendo, temos: $x_1 = 15$ e $x_2 = 5$

Resposta: 15 ou 5

3.ª) Substituindo os valores de A, B e C em $2A - B + C = 0$ temos: $2x^2 - 6x + 2m - hx^2 + 5 + px + 3 = 0$

Preparando a equação:

$$(2 - h)\,x^2 + (p - 6)\,x + 2m + 8 = 0 \qquad \text{(I)}$$

Para que a (I) se verifique (para qualquer valor de x) é necessário que

$$2 - h = 0$$
$$p - 6 = 0$$
$$2m + 8 = 0$$

Resposta: $h = 2$, $p = 6$ e $m = -4$

Nota: Em nossa opinião essa questão não devia ter sido dada).

4.ª) Eliminando os denominadores ($a \neq -1$ e $a \neq -3$), vem:

$$3x - 3 + ax - a + x + 1 + ax + a = 2a^2 + 8a + 6$$

$$\therefore\ 4x + 2ax = 2a^2 + 8a + 8$$

$$\therefore\ 2\,(2 + a)\,x = 2\,(a + 2)^2$$

para $a \neq -2$ $\qquad x = \dfrac{2\,(a+2)^2}{2\,(a+2)} = a + 2$

Resposta: $a + 2$

5.ª) Tracemos a altura AH. O ângulo HAM formado pela mediana com a altura é a diferença dos ângulos B e C (propriedade conhecida).

Então, no triângulo retângulo AHM, o ângulo HAM mede $B - C = 38°$. Logo, o ângulo AMH medirá: $90° - 38° = 52°$.

Se um dos ângulos pedidos mede 52°, e os dois são adjacentes suplementares, então o outro medirá: $180° - 52° = 128°$.

Resposta: 52° e 128°

Nota: Podia resolver achando primeiro os ângulos B e C.

6.ª) Postulado é a proposição geométrica aceita sem demonstração.

1.º *exemplo:* Em um plano podemos traçar uma infinidade de retas.

2.º *exemplo:* Dois pontos distintos determinam uma reta.

7.ª) Sejam x_1 e x_2 as raízes da equação dada e y_1 e y_2 as raízes da equação que queremos formar.

Temos: $$y_1 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$y_2 = \sqrt{x_1 x_2} = \sqrt{9} = 3$$

Para formar a nova equação precisamos da soma e do produto.

$$y_1 + y_2 = 4 + 3 = 7 \quad \text{e} \quad y_1 y_2 = 4 \times 3$$

E a equação pedida será:

$$y_2 - 7y + 12 = 0$$

cujas raízes são, como já vimos, 4 e 3.

8.ª) Temos: $l = R\sqrt{3}$ e $l' = R\sqrt{2}$

A expressão do comprimento de um arco é $\frac{\pi Rn}{180}$

$$\therefore \frac{\pi Rn}{180} = \frac{1}{5}(l + l') = \frac{R\sqrt{3} + R\sqrt{2}}{5} = \frac{R(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{5}$$

$$\therefore \frac{\pi Rn}{180} = \frac{R(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{5}$$

Simplificando: $\pi n = 36(\sqrt{3} + \sqrt{2})$.

Como $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ é, aproximadamente, igual a π, vem:

$$n = \frac{36(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{\pi} = 36$$

Resposta: 36°

9.ª) Esta demonstração é encontrada nos livros da 3.ª série ginasial.

10.ª) Sejam x e y as dimensões do retângulo $ABCD$ inscrito no triângulo eqüilátero MNP de base MN suporte de AB.

A altura do triângulo eqüilátero será:

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{2}$$

Temos:

$$xy = 60 \qquad \text{(I)}$$

Como os triângulos MNP e CPD de altura h e $h - y$ são semelhantes, podemos escrever:

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{CD}} = \frac{h}{h-y} \quad \text{ou} \quad \frac{15}{x} = \frac{\frac{15\sqrt{3}}{2}}{\frac{15\sqrt{3}}{2} - y} \qquad \text{(II)}$$

Resolvendo o sistema constituído pelas equações (I) e (II), obtemos a equação

$$15\sqrt{3}\,x^2 - 225\sqrt{3}\,x + 1\,800 = 0$$

ou

$$\sqrt{3}\,x^2 - 15\sqrt{3}\,x + 120 = 0$$

cujas raízes são imaginárias.

Concluímos, então, que o problema é *impossível*. (Um retângulo de 60m² de área não pode estar inscrito em um triângulo eqüilátero de 15m de lado).

Nota: Esta prova foi anulada.

Prova de Matemática

(Realizada em 28/2/1953).

1.ª Questão: Some as frações

$$\frac{y^2 - 9}{y^2 - 5y + 6} + \frac{y - y^2}{2y^2 - 6y + 4}$$

simplificando-as prèviamente.

2.ª Questão: Resolva a inequação

$$\frac{y - \frac{3y-2}{2}}{2} < -\frac{1}{3}$$

3.ª Questão: Calcule o valor numérico do polinômio

$$8y^2 - 18yz^{-2} - 3y^{-2}z - z^3 - 65 \quad \text{para} \begin{cases} y = 2^{-1} \\ z = -3 \end{cases}$$

4.ª Questão: Num trapézio retângulo a altura mede 8m e as bases medem, respectivamente, 5m e 11m. Calcule o perímetro do trapézio.

5.ª QUESTÃO: Num triângulo de lados $a = 7$cm, $b = 9$cm e $c = 10$cm, traça-se a bissetriz interna que parte do vértice A. Calcule a razão em que esta bissetriz divide o lado oposto.

6.ª QUESTÃO: Dada a equação $2y^2 - 6y + 1 = 0$ cujas ráízes são y' e y'' forme outra equação cujas raízes sejam $\frac{1}{y'}$ e $\frac{1}{y''}$.

7.ª QUESTÃO: Num círculo de 5dm de raio, inscreve-se um retângulo. Determine a área dêsse retângulo, sabendo-se que a razão entre a base e a altura é $\frac{3}{4}$.

8.ª QUESTÃO: Num círculo de 4m de diâmetro traça-se uma corda igual ao raio. Calcule as áreas dos dois segmentos circulares em que o círculo ficou dividido por essa corda.

9.ª QUESTÃO: Determine m de modo que o sistema abaixo não admita solução.

$$\begin{cases} m(x + y) = 5 - y \\ m(y - x + 1) = 12 - 2(3x + 2y) \end{cases}$$

10.ª QUESTÃO: Sôbre os lados de um quadrado $ABCD$, em seu exterior, constróem-se triângulos eqüiláteros. Ligando os vértices dêsses triângulos, opostos aos lados do quadrado, forma-se um novo quadrado $EFGH$. Sabendo que lado do quadrado $ABCD$ mede 1m, calcule o lado do quadrado $EFGH$.

RESOLUÇÃO

1.ª) Fatorando os têrmos das frações temos:

$$\frac{(y+3)(y-3)}{(y-2)(y-3)} + \frac{y(1-y)}{2(y-2)(y-1)}$$

Simplificando, obtemos:

$$\frac{y+3}{y-2} - \frac{y}{2(y-2)}$$

Efetuando a subtração, vem:

$$\frac{2y+6-y}{2(y-2)} = \frac{y+6}{2y-4} \qquad \textit{Resposta:}\ \frac{y+6}{2y-4}$$

2.ª) Temos: $\frac{2y-3y+2}{4} < \frac{-1}{3}$

$$\therefore\ \frac{-y+2}{4} < -\frac{1}{3}\ \therefore\ -3y+6 < -4 \text{ ou } -3y < -10$$

$$3y > 10 \qquad \textit{Resposta:}\ y > \frac{10}{3}$$

3.ª) Substituindo:

$$8\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 18\left(\frac{1}{2}\right)(-3)^{-2} - 3\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}(-3) - (-3)^3 - 65$$

Efetuando:

$$8\times\frac{1}{4} - 18\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{9} - 3\times4\times(-3) - (-27) - 65 = 2-1+36+27-65 = -1$$

Resposta: -1

4.ª) Seja um trapézio retângulo $ABCD$, onde $AB = 11$m, $CD = 5$m e $AD = 8$m. (O lado AD é a própria altura).

Precisamos calcular o lado BC. Tracemos a altura CE. Fica formado um triângulo retângulo cuja hipotenusa é BC. Logo, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$\overline{BC}^2 = \overline{EB}^2 + \overline{CE}^2\ \therefore\ \overline{BC}^2 = 6^2 + 8^2 = 100\ \therefore\ \overline{BC} = 10$$

E o perímetro pedido será:

$$11 + 5 + 8 + 10 = 34$$

Resposta: 34m

5.ª) Sejam m e n os segmentos determinados pela bissetriz interna sôbre o a. Temos, então:

$$\frac{m}{n} = \frac{9}{10}$$

pois, de acôrdo com o "teorema da bissetriz interna", a bissetriz de um ângulo interno de um triângulo determina sôbre o lado oposto segmentos aditivos, proporcionais aos outros dois lados.

Resposta: $\frac{9}{10}$ ou $\frac{10}{9}$

6.ª) Temos que: $y' + y'' = -\frac{b}{a} = \frac{6}{2} = 3$

$$y'y'' = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$$

Calculemos agora a soma e o produto das raízes da equação pedida:

$$\frac{1}{y'} + \frac{1}{y''} = \frac{y'+y''}{y'\,y''} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$$

$$\frac{1}{y'} \cdot \frac{1}{y''} = \frac{1}{y'\,y''} = 2$$

E a nova equação será: $x^2 - 6x + 2 = 0$.

7.ª) A diagonal do retângulo é o diâmetro do círculo

$$2R = 10$$

Podemos então formar o sistema:

$$\begin{cases} b^2 + h^2 = 100 \\ \dfrac{b}{h} = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

Resolvendo: $b = \frac{3}{4}h$

$$\therefore \frac{9}{16}h^2 + h^2 = 100 \therefore 9h^2 + 16h^2 = 1\,600$$

$$h^2 = 64 \therefore h = 8$$

Logo, $b = \frac{3}{4} \times 8 = 6$

E a área será: $S = 6 \times 8 = 48$ *Resposta:* 48 dm^2

8.ª) A expressão da área do segmento circular é $S = \frac{R}{2}(l - h)$.

Sendo R o raio do círculo, l o comprimento do arco e h a metade da corda do arco duplo.

Se a corda traçada é igual ao raio, ela é o lado do hexágono regular inscrito e o arco que o subentende mede $360° \div 6 = 60°$.

Logo, $l = \frac{\pi R n}{180} = \frac{\pi \times 2 \times 60}{180} = \frac{2\pi}{3}$

Como o arco duplo é 120°, a corda do arco duplo é o lado do triângulo eqüilátero inscrito. E

$$h = \frac{l_3}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Então a área do menor segmento é:

$$S = \frac{2}{2}\left(\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}\right) = 2{,}09 - 1{,}73 = 0{,}36$$

A área do outro segmento determinado será:

$$S' = \pi R^2 - S = 4\pi - 0{,}36 = 12{,}56 - 0{,}36 = 12{,}20$$

Resposta: $0{,}36m^2$ e $12{,}20m^2$

9.ª) Preparando o sistema obtemos:

$$\begin{cases} mx + (m+1)\,y = 5 \\ (6-m)\,x + (m+4)\,y = 12 - m \end{cases}$$

Para que não admita solução, isto é, seja impossível, é necessário que:

$$\frac{m}{6-m} = \frac{m+1}{m+4} \neq \frac{5}{12-m} \qquad \text{(I)}$$

Da igualdade das 2 primeiras frações, vem:

$$m^2 + 4m = 6m + 6 - m^2 - m$$

ou

$$2m^2 - m - 6 = 0$$

Resolvendo obtemos as raízes: $m =$ e $m = -\frac{3}{2}$

Mas o valor $m = 2$ não satisfaz pois torna a segunda fração de (I) igual à terceira.

Como $-\frac{3}{2}$ satisfaz a (I), será o valor pedido.

Resposta: $m = -\frac{3}{2}$

10.ª) A diagonal do quadrado $EFGH$ de lado L é a soma do lado do quadrado $ABCD$ com o dôbro da altura de um dos triângulos eqüiláteros traçados. (O que pode ser visto construindo a figura).

Mas, a diagonal é também $EG = L\sqrt{2}$.

Logo, $L\sqrt{2} = l + 2h$ ou $L\sqrt{2} = l + 2 \times \frac{l\sqrt{3}}{2}$

Como $l = 1$, então:

$$L\sqrt{2} = 1 + \sqrt{3} \therefore L = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\,(\sqrt{3}+1)}{2}$$

$$\therefore L = \frac{1{,}41\,(1{,}73+1)}{2} = 1{,}924\,6$$

Resposta: 1,92m

NOTA: Foram aprovadas 152, das 751 inscritas.

III) COLÉGIO NAVAL

MINISTÉRIO DA MARINHA
DIRETORIA DO ENSINO NAVAL
COLÉGIO NAVAL

(Concurso de admissão ao primeiro ano, realizado em 14/2/1951). Duração da prova: 3 horas).

Prova de Matemática

INSTRUÇÕES

I) Os candidatos devem ler com atenção as questões formuladas.

II) Os candidatos podem estar seguros de que as questões dadas são fáceis e estão dentro do programa fixado para o Concurso, bem como terem a certeza de que o tempo dado é mais do que satisfatório para a resolução correta do questionário.

III) É aconselhado que os candidatos procurem resolver em ordem cronológica as questões que souberem, deixando para o fim as que não tiverem podido resolver imediatamente.

Os candidatos devem ter em mente que o relógio está em funcionamento, não sendo, por isso, de bom alvitre a perda de tempo em tentativa de solução de questão que não souberem resolver ràpidamente.

É lembrado que as questões julgadas mais fáceis têm o mesmo valor que as demais.

IV) As perguntas constantes do presente questionário devem ser resolvidas como indicado no exemplo abaixo: "Qual a área de um quadrado de lado igual a $\sqrt{3}$ pés? (3 pés quadrados)

Resp.: ------------------

Os candidatos deveriam calcular no papel de rascunho ou nas fôlhas grampeadas ou ainda mentalmente o valor da área do quadrado dado ($S = a^2 = (\sqrt{3})^2$ pés quadrados = 3 pés quadrados) e colocar êsse valor como acima indicado, no espaço próprio para a resposta.

V) Sempre que fôr necessário o emprêgo de π deverá ser anotado o valor 3,14.

VI) A correção do questionário será feita levando em conta exclusivamente as respostas indicadas nos lugares apropriados.

VII) É augurado o melhor resultado possível a todos os candidatos.

VIII) Boa sorte.

QUESTIONÁRIO

1.ª Questão: Converter $\frac{27}{4}$ da jarda em jardas, pés e polegadas.

2.ª Questão: Quantos graus, minutos e segundos há em 25 347″?

3.ª Questão: Sendo o comprimento do meridiano terrestre igual a 40 000 quilômetros, qual o comprimento, em metros, do arco de 1′?

4.ª Questão: Calcular o produto de 0,2 [36] por $1\frac{5}{6}$.

5.ª Questão: A importância de Cr$ 30 000,00 foi dividida em partes proporcionais a 2, 3 e 5. Qual a maior parte?

6.ª Questão: Fatorar $x^2 - 2xy + y^2 - a^2$.

7.ª QUESTÃO: Multiplicar $\sqrt{24}$ por $\sqrt[4]{36}$ e simplificar o resultado.

8.ª QUESTÃO: Resolver o sistema $\begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{-1} \\ 2x + y + 3z = 8 \end{cases}$

9.ª QUESTÃO: Para quais valores de a e b será indeterminado o sistema $\begin{cases} 2x - 3y = a \\ 4x + by = 10 \end{cases}$

10.ª QUESTÃO: Resolver o sistema de inequações

$$\begin{cases} x + 3 > 2x - 1 \\ \dfrac{x+1}{2} > \dfrac{2x}{3} \end{cases}$$

11.ª QUESTÃO: Resolver a inequação $\dfrac{4x-7}{x-1} > 1$

12.ª QUESTÃO: Determinar a maior raiz da equação

$$x^2 - 8ax + 15a^2 = 0, \quad \text{se} \quad a > 0$$

13.ª QUESTÃO: Determinar o valor de m para que a equação $2x^2 + 4x + m = 0$ tenha raízes reais e iguais.

14.ª QUESTÃO: Que valor se deve dar a c na equação $x^2 - 20x + c = 0$ para que uma das raízes seja o triplo da outra?

15.ª QUESTÃO: Que valor se deve dar a b na equação $x^2 + bx + 10 = 0$ para que uma das raízes seja igual a 5?

16.ª QUESTÃO: Qual o maior de dois números cuja soma é 2 e cujo produto é $\dfrac{3}{4}$?

17.ª QUESTÃO: Roberto tem 24 anos e Paulo 10 anos. No fim de quantos anos a idade de Roberto será o triplo da de Paulo?

18.ª QUESTÃO: A soma dos ângulos internos de um polígono regular é igual a 1 260°. Determinar o valor do ângulo externo.

19.ª QUESTÃO: Os lados de um triângulo medem 10, 15 e 20 metros. Calcular o menor dos segmentos em que a bissetriz interna divide o maior lado.

20.ª QUESTÃO: Um triângulo cujos lados medem 12, 18 e 20 metros é semelhante a outro cujo perímetro mede 10 metros. Calcular o maior dos lados do triângulo menor.

21.ª QUESTÃO: Num triângulo retângulo a hipotenusa mede 10 metros. Calcular o menor dos catetos, sabendo que um dos segmentos determinados pela altura sôbre a hipotenusa mede 6,4 metros.

22.ª QUESTÃO: A hipotenusa de um triângulo retângulo mede $\sqrt{10}$ metros e um dos catetos é o triplo do outro. Calcular o valor do cateto maior.

23.ª QUESTÃO: Uma tangente a um círculo e uma secante partem de um mesmo ponto; a tangente mede 4 metros e a secante 8 metros. Calcular a parte externa da secante.

24.ª QUESTÃO: O apótema de um quadrado inscrito num círculo mede $5\sqrt{2}$ metros. Calcular o lado do triângulo eqüilátero inscrito.

25.ª QUESTÃO: O lado de um triângulo eqüilátero inscrito num círculo mede $5\sqrt{3}$ metros. Calcular o comprimento da circunferência do círculo.

26.ª QUESTÃO: Os arcos compreendidos entre os lados de um ângulo excêntrico exterior medem 150° e 10°. Calcular, a menos de um centésimo por falta, a medida do ângulo em radianos.

27.ª QUESTÃO: Uma pista tem 20 metros de raio. Determinar o número de voltas que deve dar um móvel para percorrer 6 280 metros.

28.ª QUESTÃO: A base média de um trapézio tem 10 pés e o perímetro 28 pés. Calcular o maior dos lados não paralelos sabendo que a sua diferença é igual a 2 pés.

29.ª QUESTÃO: A área de um polígono mede dez metros quadrados. Determinar a área do polígono semelhante cujo perímetro é três vêzes maior.

30.ª QUESTÃO: Um polígono regular tem 40 metros quadrados de área e 8 metros de perímetro. Calcular a área do círculo inscrito.

RESOLUÇÃO

1.ª) 1 jarda = 3 pés = 3 × 12 polegadas = 36 polegadas

$$\frac{27}{4} \text{ da jarda} = 6\,\frac{3}{4} \text{ de jarda}$$

Mas, $\frac{3}{4}$ jarda é $\frac{3}{4} \times 36$ polegadas = 27 polegadas = 2 pés e 3 polegadas.

Resposta: 6 jardas, 2 pés e 3 polegadas.

2.ª)
```
25 347″ |_60
 134     422′ |_60
  147    002    7°
   27
```

Resposta: 7° 2′ 27″

3.ª) 40 000km = 40 000 000m corresponde a 360° ou 360×60′ = 21 600′. Um minuto corresponderá a:

$$40\,000\,000m \div 21\,600 = 1\,851\,\frac{23}{27} \text{ metros}$$

4.ª) $0{,}2\,[36\,] \times 1\,\frac{5}{6} = \frac{236-2}{990} \times \frac{11}{6} = \frac{234}{990} \times \frac{11}{6} = \frac{13}{30}$

5.ª) $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = \frac{x+y+z}{2+3+5} = \frac{30\,000}{10} = 3\,000$

A maior parte será: 5 × 3 000 = 15 000

Resposta: Cr.$15 000,00

6.ª) $x^2 - 2xy + y^2 - a^2 = (x-y)^2 - a^2 = (x - y + a)\,(x - y - a)$

7.ª) $\sqrt{24} \times \sqrt[4]{36} = \sqrt{2^2 . 2 . 3} \times \sqrt[4]{2^2 . 3^2} = = 2\sqrt{6} \times \sqrt{6} = 12$

8.ª) Igualando as frações a m, temos:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{Z}{-1} = m$$

Tirando os valores de x, y e z, vem:

$$x = 2m, \quad y = 3m \quad \text{e} \quad Z = -m$$

Substituindo, obtemos:

$$4m + 3m - 3m = 8 \quad \therefore \quad m = 2$$

E, portanto, $x = 4$, $y = 6$ e $Z = -2$

9.ª) Para que o sistema seja indeterminado devemos ter:

$$\frac{2}{4} = \frac{-3}{b} = \frac{a}{10}$$

Então: $2b = -12$ e $4a = 20$

Donde, $b = -6$ e $a = 5$

10.ª) Temos: $\begin{cases} -x > -4 \\ 3x + 3 > 4x \end{cases} \therefore \begin{cases} x < 4 \\ -x > -3 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x < 4 \\ x < 3 \end{cases}$

Resposta: $x < 3$

11.ª) Passando 1 para o primeiro membro (não pode eliminar o denominador) temos:

$$\frac{4x-7}{x-1} - 1 > 0 \qquad \frac{4x-7-x+1}{x-1} > 0 \qquad \frac{3x-6}{x-1} > 0$$

Temos duas hipóteses:

$$\text{ou} \begin{cases} 3x - 6 > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 3x - 6 < 0 \\ x - 1 < 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x > 2 \\ x > 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 2 \\ x < 1 \end{cases}$$

$$\therefore \quad x > 2 \qquad x < 1$$

Resposta: $x > 2$ ou $x < 1$

12.ª) Resolvendo a equação achamos as raízes:

$$x_1 = 5a \text{ e } x_2 = 3a$$

Se $a > 0$, $5a > 3a$. Então a maior raiz é $x_1 = 5a$.

13.ª) Se as raízes são iguais, temos:

$$b^2 - 4ac = 0$$
$$16 - 8m = 0 \quad \therefore \quad m = 2$$

14.ª) Temos:

$$x_2 = 3x_1$$
$$x_1 + x_2 = 20$$
$$x_1x_2 = c$$

Então: $x_1 + 3x_1 = 20 \;\therefore\; x_1 = 5$ e $x_2 = 15$

E temos: $c = 5 \times 15 = 75$

15.ª) Se uma das raízes é 5, a equação dada é satisfeita para $x = 5$.

Então: $25 + 5b + 10 = 0 \;\therefore\; 5b = -35$ e $b = -7$

16.ª) Para achar dois números de soma S e produto P, basta achar as raízes da equação: $x^2 - Sx + P = 0$

Temos então:

$$x^2 - 2x + \frac{3}{4} = 0 \text{ ou } 4x^2 - 8x + 3 = 0$$

Resolvendo a equação achamos

$$x_1 = \frac{3}{2} \text{ e } x^2 = \frac{1}{2}$$

A maior raiz será portanto: $\frac{3}{2}$.

17.ª) Chamando de x o número de anos, temos que

$$24 + x = 3\,(10 + x) \;\therefore\; 24 + x = 30 + 3x$$
$$\therefore\; 2x = -6 \text{ e } x = -3$$

Interpretando a solução negativa encontrada, concluímos que isso aconteceu há 3 anos passados.

18.ª) $S_i = 180^\circ\,(n - 2) = 1\,260^\circ$

$$\therefore\; 180n - 360 = 1\,260 \;\therefore\; 180n = 1\,620$$
$$\therefore\; n = 9$$

E o ângulo externo valerá: $360^\circ \div 9 = 40^\circ$.

19.ª) A bissetriz interna divide o maior lado em dois segmentos x e $20 - x$ proporcionais aos outros dois lados. Logo,

$$\frac{x}{10} = \frac{20 - x}{15} \;\therefore\; 3x = 40 - 2x \;\therefore\; x = 8$$

Os segmentos medem 8m e 12m. E o menor é pois de 8 metros.

20.ª) Se os triângulos são semelhantes, seus lados homólogos são proporcionais. Podemos então escrever, chamando de x, y e z os lados desconhecidos:

$$\frac{x}{12} = \frac{y}{18} = \frac{Z}{20} = \frac{x + y + z}{12 + 18 + 20} = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}$$

E o maior será: $Z = 20 \times \frac{1}{5} = 4$

Resposta: 4 metros

21.ª) Se a hipotenusa é 10m e um dos segmentos determinados sôbre ela, pela altura, é 6,4m, o outro segmento medirá:

$$10 - 6{,}4 = 3{,}6$$

3,6m sendo menor do que 6,4m será a projeção do menor cateto.

E, como qualquer cateto é média proporcional entre a hipotenusa e sua projeção sôbre ela, vem:

$$b^2 = 10 \times 3{,}6 = 36 \;\therefore\; b = 6$$

Resposta: $b = 6m$

22.ª) Sejam b e c os catetos e seja $b = 3c$.

Pelo teorema de Pitágoras temos:

$$c^2 + 9c^2 = \quad \therefore\; c^2 = 1 \text{ e } c = 1$$

Então o maior cateto será $b = 3 \times 1 = 3$.

Resposta: 3m

23.ª) Sabemos que se de um ponto exterior de uma circunferência traçarmos uma tangente e uma secante a uma circunferência, o segmento da tangente limitado pelo ponto e pela circunferência é média proporcional entre os segmentos determinados pela secante. Assim, sendo x a parte externa, vem:

$$8x = 16 \;\therefore\; x = 2$$

Resposta: 2m

24.ª) Sabemos que $a_4 = \dfrac{R\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$

$$\therefore\; R\sqrt{2} = 10\sqrt{2} \;\therefore\; R = 10$$

E, $l_3 = R\sqrt{3} = 10\sqrt{3} = 10 \times 1{,}732 = 17{,}32$

Resposta: 17,32m

25.ª) Sabemos que $l_3 = R\sqrt{3} = 5\sqrt{3} \;\therefore\; R = 5$.

E o comprimento da circunferência, será:

$$c = 2 \times 3{,}14 \times 5 = 31{,}4$$

Resposta: 31,4m

26.ª) O ângulo excêntrico exterior tem por medida a semi-diferença dos arcos compreendidos entre os seus lados.

$$X = \frac{150^\circ - 10^\circ}{2} = 70^\circ = 70 \times \frac{\pi}{180} \text{ radianos} = \frac{7 \times 3{,}14}{18} \text{ radianos.}$$

Resposta: 1,22 radianos

27.ª) O comprimento da pista será:

$$C = 2 \times 3{,}14 \times 20m = 125{,}6m$$

Para percorrer 6 280m o movel deve dar $6\,280m \div 125{,}6m = 50$ voltas.

28.ª) Se a base média do trapézio tem 10 pés a soma das bases: $B + b = 20$ pés.

Como o perímetro é 28 pés, a soma dos lados não paralelos:

$$L + l = 28 \text{ pés} - 20 \text{ pés} = 8 \text{ pés}$$

Temos então: $L + l = 8$
$L - l = 2$

Somando vem: $2L = 10 \quad L = 5$

O maior dos lados não paralelos é pois 5 pés.

29.ª) Se dois polígonos são semelhantes suas áreas estão entre si como os quadrados de suas linhas homólogas e como estas estão entre si como os perímetros, temos:

$$\frac{S}{S'} = \frac{(2p)^2}{(2p')^2} \quad \text{ou} \quad \frac{S}{10} = \frac{9}{1} \quad \therefore \quad S = 90$$

Resposta: $90m^2$

30.ª) A área de qualquer polígono regular é igual ao produto do seu semi-perímetro pelo seu apótema.

Ou,

$$S = p \cdot a$$

Como o apótema de um polígono regular é por definição o raio do círculo inscrito nesse polígono, então temos:

$$4 \times r = 40 \quad \therefore \quad r = 10m$$

E a área do círculo será:

$$S = \pi r^2 = 3{,}14 \times 100m^2 = 314m^2$$

Observação: Todos os alunos que acertaram, no mínimo, 12 questões foram considerados aprovados em Matemática.

Prova de Matemática

(Realizada em 1952. Duração da prova: 3 horas).

INSTRUÇÕES

I) A prova se compõe de 30 ítens envolvendo as matérias de Aritmética, Álgebra e Geometria.

II) Suas soluções são rápidas, em média 6 min. por ítem, num total de 3 horas para a prova tôda.

III) Deverão ser respondidas nos locais indicados para as respostas, sendo porém feitos todos os cálculos no papel de rascunho, quando necessário.

IV) O papel de rascunho deve acompanhar a prova.

V) Sempre que fôr necessário o emprêgo de π deverá ser tomado o valor 3,141 6.

VI) A correção do questionário será feita, levando em conta exclusivamente as respostas indicadas nos lugares apropriados.

VII) Tôdas as questões têm o mesmo valor.

VIII) As perguntas do presente questionário devem ser resolvidas de acôrdo com o exemplo abaixo:

"Qual a área do quadrado de lado igual à $\sqrt{5}$ dm

Resp.: -------$5dm^2$---------

IX) O cálculo pode ser feito mentalmente ou no rascunho.

X) Assine e date esta fôlha nos locais indicados antes de começar a escrever as questões.

QUESTIONÁRIO

1.ª Questão: Determinar a fração eqüivalente a $\frac{7}{15}$, cuja soma dos têrmos é 198.

2.ª Questão: Que espécie de dízima gera a fração $\frac{25}{147}$?

3.ª Questão: Calcular a raiz quadrada de $1\frac{11}{15}$ a menos de $\frac{1}{7}$, por falta.

4.ª Questão: Converter em penny o complexo £10 – 15 – 1.

5.ª Questão: No fim de quanto tempo os juros produzidos por um certo capital são iguais aos $\frac{3}{8}$ do capital à taxa de 15 % ao ano?

6.ª Questão: Efetuar a multiplicação $(x^2 - 5x + 9)(x + 3)$.

7.ª Questão: Fatorar $8z(x - y) - 3(x - y)$.

8.ª Questão: Discutir as soluções da equação $px + q = 0$.

9.ª Questão: Resolver a desigualdade $x - \frac{5}{3} > \frac{2x-3}{2} + 7$.

10.ª Questão: Um número é composto de três algarismos, cuja soma é 18. O algarismo das unidades é o dôbro do das centenas e o das dezenas é a soma do das unidades e das centenas. Qual o número?

11.ª Questão: Determinar o valor de k para que o sistema seja indeterminado:

$$3x = ky$$
$$12y = kx - 1.$$

12.ª Questão: Simplificar a expressão

$$\sqrt{16x^3y} - \sqrt{25xy^3} - (x - 5y)\sqrt{xy}$$

13.ª Questão: Formar a equação do 2.º grau cujas raízes sejam $-\frac{m}{2}, \frac{n}{3}$.

14.ª Questão: Determinar c na equação $64x^2 - 160x + c = 0$, de modo que uma raiz seja o triplo da outra.

15.ª Questão: Determinar os três números consecutivos cuja soma é igual ao produto dos maiores.

16.ª Questão: Quanto vale o ângulo interno de um polígono regular de 9 lados?

17.ª Questão: Quantos lados tem um polígono regular cujo ângulo exterior mede 15°?

18.ª Questão: O perímetro de um triângulo é de 120m; um dos lados tem 45m. Qual o perímetro do triângulo semelhante cujo lado homólogo ao dado é de 30m.

19.ª Questão: Calcular o perímetro de um losango cujas diagonais têm 48m e 96m.

20.ª Questão: Do meio de um segmento AB (de 12cm) eleva-se uma perpendicular (de 2cm) e faz-se passar uma circunferência pelas extremidades da perpendicular e do segmento. Calcular o raio da circunferência.

21.ª Questão: Por um ponto situado a 100dm do centro de um círculo de 6m de raio, traça-se uma tangente a êste círculo. Qual o comprimento desta tangente?

22.ª Questão: Qual é o comprimento do arco de um setor de 28,48m² de superfície, e de 7,12m de raio?

23.ª Questão: $\left[2^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} - 1\,207^{0} + 4^{\frac{3}{2}}\right]$

24.ª Questão: As duas bases de um trapézio têm 20m e 30m e a altura 12m. Calcular a superfície do triângulo formado pela menor base e os prolongamentos dos lados não paralelos.

25.ª Questão: Para ladrilhar uma sala de 303,10m² empregaram-se em número igual, triângulos eqüiláteros e hexágonos regulares de 0,10m de lado cada um. Quantos ladrilhos houve de cada espécie?

26.ª Questão: Calcular a circunferência de um círculo circunscrito a um quadrado de 128m² de superfície.

27.ª Questão: Duas cidades A e B distam de 200km. As 8 horas parte de A para B um trem com a velocidade de 30km por hora e, duas horas mais tarde, parte de B para A um outro trem com a velocidade de 40km por hora. A que distância de A dar-se-á o encontro dos dois trens?

28.ª Questão: Duas torneiras enchem um tanque em 4 horas. Uma delas sòzinha, enchê-lo-ia em 7 horas. Em quantos minutos a outra, sòzinha, encheria o tanque?

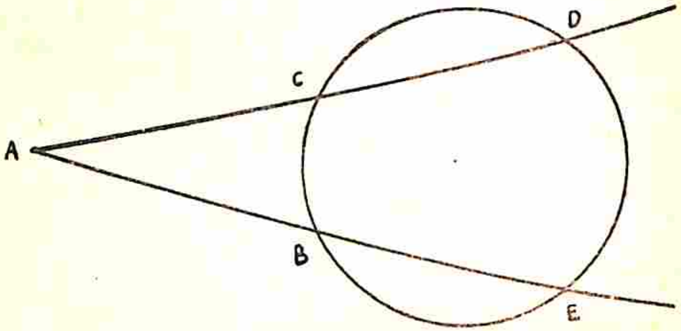


Fig. 30

29.ª QUESTÃO: Um triângulo tem para lados 20cm, 30cm e 40cm. Do vértice oposto ao maior lado traçam-se as bissetrizes interna e externa do ângulo correspondente. Calcular a distância entre os pés dessas bissetrizes.

30.ª QUESTÃO: Na figura acima, o ângulo A tem 15° mais do que o arco BC. Calcular o ângulo A sabendo que a razão dos arcos BC e DE é de 1 para 4.

RESOLUÇÃO

1.ª) Seja $\frac{x}{y}$ a fração. Temos:

$$\begin{cases} x + y = 198 \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{7}{15} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x + y = 198 \\ \dfrac{x}{7} = \dfrac{y}{15} = \dfrac{x+y}{7+15} = \dfrac{198}{22} = 9 \end{cases}$$

Donde: $x = 7 \times 9 = 63$ e $y = 15 \times 9 = 135$

Resposta: $\frac{63}{135}$

2.ª) Sabemos que uma fração gera uma dízima finita (fração terminada), uma dízima periódica simples, ou uma dízima periódica composta conforme o seu denominador, decomposto em fatôres primos, só contenha os fatôres 2 e 5 (ou um deles apenas), só contenha os fatôres diferentes de 2 e 5, ou contenha fatôres que não sejam todos diferentes de 2 e 5.

Como o denominador da fração dada é $147 = 3 \times 7^2$, e só contém fatôres diferentes de 2 e 5, então a fração gera uma *dizima* periódica simples.

3.ª) Temos: $\sqrt{1\frac{11}{15} \times 7^2} \div 7 = \sqrt{\frac{26}{15} \times 49} \div 7 = \sqrt{\frac{1\,274}{15}} \div 7 =$

$$= \sqrt{84\frac{14}{15}} \div 7$$

Como a raiz quadrada de $84\frac{14}{15}$ com aproximação de uma unidade, por falta é 9.

Temos que a raiz pedida será: $\frac{9}{7}$ ou $1\frac{2}{7}$

4.ª) £ 10 = 10 × 20 shilings = 200 shilings
200 shilings + 15 shilings = 215 shilings
215 shilings = 215 × 12 pence = 2 580 pence
2 580 pence mais um penny dá 2 581 pence.

5.ª) A fórmula que permite calcular o tempo é: $t = \frac{100j}{ci}$; mas, $j = \frac{3}{8}c$, então vem:

$$t = \frac{100 \times \frac{3}{8}c}{c \times 15} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$$

Resposta: 2 anos e meio

6.ª) $(x^2 - 5x + 9)(x + 3) = x^3 - 5x^2 + 9x + 3x^2 - 15x + 27 = x^3 - 2x^2 - 6x + 27$

7.ª) Colocando $x - y$ em evidência temos:

$$8Z(x - y) - 3(x - y) = (x - y)(8Z - 3)$$

8.ª) Temos: $px = -q$.
Se $p \neq 0$, a equação é determinada e $x = -\frac{q}{p}$.
Se $p = q = 0$, a equação é indeterminada.
Se $p\ 0$ e $q \neq 0$, a equação é impossível.

9.ª) Eliminando os denominadores e fazendo a transposição e redução dos têrmos, vem: $6x - 10 > 6x - 9 + 42$

$\therefore 6x - 6x > 10 - 9 + 42$ ou $0 > 43$

o que é absurdo. *Resposta:* a inequação é *impossível*

10.ª) Sejam x, y e z respectivamente os algarismos das unidades, das dezenas e das centenas.

Equacionando o problema temos:

$$x + y + z = 18$$
$$x = 2z$$
$$y = x + z$$

Substituindo o valor de x na terceira equação temos:

$$y = 2z + z = 3z$$

Substituindo os valores de x e y na primeira equação, vem:

$$2z + 3z + z = 18 \quad \therefore \quad z = 3$$

$$x = 2 \times 3 = 6 \quad \text{e} \quad y = 3 \times 3 = 9$$

Resposta: o número é 396

11.ª) Preparando o sistema temos:

$$3x - ky = 0$$
$$-kx + 12y = -1$$

Para que êle fôsse indeterminado seria necessário que:

$$\frac{3}{-k} = \frac{-k}{12} = \frac{0}{-1}$$

Ora é fácil de ver que não se verificam essas igualdades, pois a terceira fração $\frac{0}{-1}$ é eqüivalente a zero e, não há valor de k que torne a primeira fração nula.

Resposta: não há valor de k que satisfaça. (O problema é impossível)

12.ª) Temos: $\sqrt{16x^3y} - \sqrt{25xy^3} - (x - 5y)\sqrt{xy} =$
$= 4x\sqrt{xy} - 5y\sqrt{xy} - x\sqrt{xy} + 5y\sqrt{xy} = 3x\sqrt{xy}$

13.ª) Calculemos a soma S e o produto P das raízes.

$$S = -\frac{m}{2} + \frac{n}{3} = -\frac{-3m + 2n}{6}$$

$$P = -\frac{m}{2} \times \frac{n}{3} = -\frac{mn}{6}$$

A equação pedida será:

$$x^2 - \frac{-3m + 2n}{6}x - \frac{mn}{6} = 0$$

Ou,

$$6x^2 + (3m - 2n)x - mn = 0$$

14.ª) Temos:

$$\begin{cases} x_2 = 3x_1 \\ x_1 + x_2 = \dfrac{160}{64} = \dfrac{5}{2} \\ x_1x_2 = \dfrac{c}{64} \end{cases}$$

$$\therefore \quad x_1 + 3x_1 = \frac{5}{2} \quad \text{ou} \quad 8x_1 = 5 \quad \text{e} \quad x_1 = \frac{5}{8} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{15}{8}$$

Então: $\dfrac{5}{8} \times \dfrac{15}{8} = \dfrac{c}{64}$ ou $\dfrac{75}{64} = \dfrac{c}{64}$

Resposta: $c = 75$

15.ª) Sejam x, $x + 1$ e $x + 2$ êsses números.

Devemos ter: $x + x + 1 + x + 2 = (x + 1)(x + 2)$

$$\therefore \quad 3x + 3 = x^2 + 3x + 2 \quad \therefore \quad x^2 = 1 \quad \text{e} \quad x = \pm 1$$

Resposta: 1, 2, 3 ou $-1, 0$ e 1

16.ª) $\hat{I} = \dfrac{180^\circ\,(n - 2)}{n} = \dfrac{180^\circ \times 7}{9} = 140^\circ$

17.ª) $\hat{E} = \dfrac{360^\circ}{n} \quad \therefore \quad 15^\circ = \dfrac{360^\circ}{n} \quad \therefore \quad n = \dfrac{360^\circ}{15^\circ} = 24$ *Resposta:* 24 lados

18.ª) Sabemos que os perímetros de 2 polígonos semelhantes estão entre si como duas quaisquer de suas linhas homólogas.

Logo,

$$\frac{120}{2p} = \frac{45}{30}$$

$$2p = \frac{120 \times 30}{45} = 80$$

Resposta: 80m

19.ª) $2p = 4l$, $\overline{AC} = 48m$ e $\overline{BD} = 96m$

Temos: $\overline{BO} = 48m$ e $\overline{OC} = 24m$

Pelo teorema de Pitágoras temos no triângulo BOC (Fig. 31)

$$l^2 = \overline{BO}^2 + \overline{OC}^2$$

ou

$$l^2 = 2\,304 + 576 = 2\,880$$

$$l = \sqrt{2\,880} = 53{,}6m$$

$$\therefore \quad 2p = 4 \times 53{,}6m = 214{,}4m$$

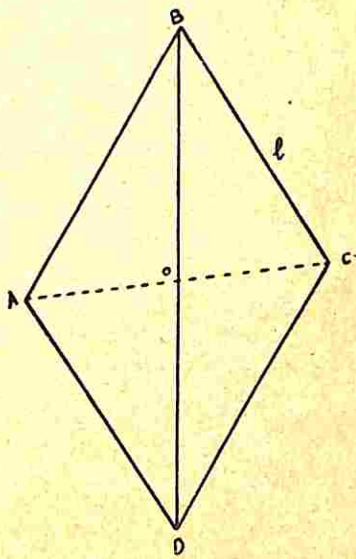


Fig. 31

20.ª) $\overline{AB} = 12cm$ $\quad \overline{CD} = 2cm.$

No triângulo retângulo OCB, temos:

$$\overline{OB}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{CB}^2 \text{ (Fig. 32)}$$

$$\therefore \quad R^2 = (R - 2)^2 + 36$$

$$\therefore \quad R^2 = R^2 - 4R + 4 + 36$$

$$\therefore \quad 4R = 40$$

Resposta: 10m

21.ª) $\overline{OA} = R = 6m$ (Fig. 33)

$\overline{PQ} = 100dm = 10m.$

Temos, por uma das relações métricas no círculo,

$$\overline{PT}^2 = \overline{PB} \times \overline{PA}$$

$$\therefore \overline{PT}^2 = 16 \times 4 = 64 \qquad \overline{PT} = 8$$

Resposta: $8m$

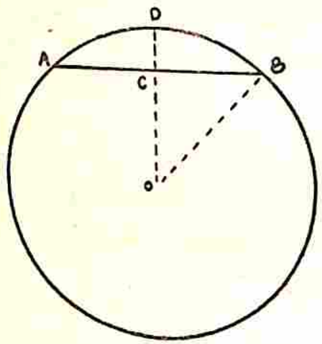


Fig. 32

22.ª) Uma área de πR^2 corresponde a $360°$, logo uma área de $28{,}48m^2$ corresponde a n graus.

$$\text{E, } n = \frac{28{,}48 \times 360}{\pi R^2}$$

O comprimento do arco de n graus será:

$$l = \frac{\pi R n}{180} = \frac{\pi R}{180} \times \frac{28{,}48 \times 360}{\pi R^2} =$$

$$= \frac{2 \times 28{,}48}{7{,}12} = 2 \times 4 = 8$$

Resposta: $8m$

23.ª) Temos: $\frac{1}{2} + 2^2 - 1 + \sqrt{4^3} = \frac{1}{2} + 4 - 1 + \sqrt{64} =$

$$= \frac{1}{2} + 4 - 1 + 8 = 11 + \frac{1}{2} = 11\,\frac{1}{2}$$

NOTA: $a^{-m} = \left(\frac{1}{a}\right)^m$

Resposta: 11,5

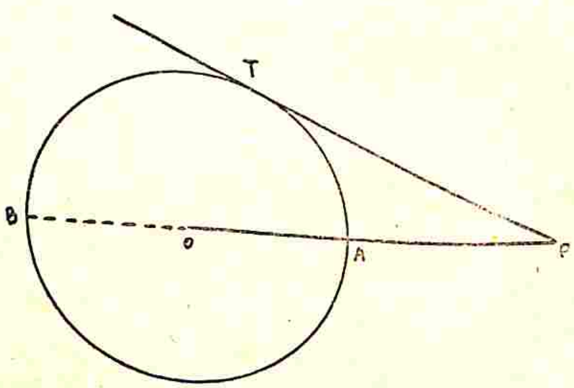


Fig. 33

24.ª) Temos de calcular a área do triângulo DEC.

$$S = \frac{\overline{DC} \times \overline{EF}}{2} = \frac{\overline{DC} \times h}{2}$$

Os triângulos ABE e DCE são semelhantes, pelo teorema de Thales, logo:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{GE}}{\overline{EF}} \text{ ou } \frac{30}{20} = \frac{12 + h}{h}$$

$$\therefore 3h = 24 + 2h \quad \therefore h = 24$$

$$\text{E} \quad S = \frac{20 \times 24}{2} = 240$$

Resposta: $240m^2$

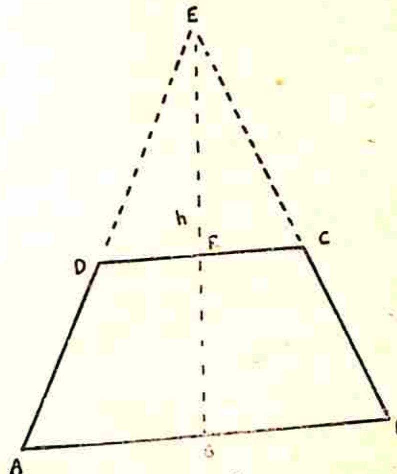


Fig. 34

25.ª) Área da sala $= 303{,}10m^2 = 30\,310dm^2$.

Lado de cada triângulo eqüilátero ou hexágono regular é igual a $0{,}10m = 1dm$.

Área de cada ladrilho triangular:

$$S = \frac{L^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}\,dm^2$$

Área de cada ladrilho hexagonal:

$$S = \frac{3L^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Seja x o número de ladrilhos, de cada espécie, usados. Temos:

$$\frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{3\sqrt{3}}{2}x = 30\,310$$

$$\therefore 7\sqrt{3}\,x = 121\,240$$

$$x = \frac{121\,240}{7 \times 1{,}732} = \frac{121\,240}{12{,}124} = 10\,000$$

Resposta: 10 000 ladrilhos

26.ª) O comprimento da circunferência é dado pela expressão: $c = 2\pi R$

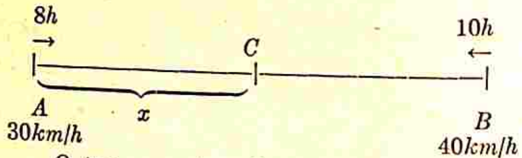
A área do quadrado é:

$$S = L^2 = (R\sqrt{2})^2 = 2R^2 = 128m^2$$

$$\therefore R^2 = 64m^2 \text{ e } R = 8m$$

Logo: $c = 2 \times 3{,}1414 \times 8 = 50{,}2656m$.

27.ª)



$AB = 200km$

O tempo gasto pelo trem que parte de A para ir até C é:

$$t = \frac{e_1}{v} = \frac{x}{30}$$

E o tempo gasto pelo trem que parte de B para ir até C é:

$$t = \frac{e}{v} = \frac{200 - x}{40}$$

Como o trem que partiu de A gasta mais duas horas, para ir até C do que o que parte de B, então podemos escrever:

$$\frac{x}{30} = \frac{200 - x}{40} + 2$$

$$\therefore\ 4x = 600 - 3x + 240 \ \therefore\ 7x = 840$$

$$\text{e}\quad x = 120km$$

28.ª) Seja x o tempo que a outra torneira gasta para encher o tanque, sòzinha.

Em uma hora ela enche $\frac{1}{x}$ do tanque.

Se as 2 juntas enchem o tanque em 4 horas, em uma hora encherão um quarto do tanque. E se a primeira sòzinha enche em 7 horas, em uma hora encherá um sétimo do tanque.

Logo, podemos escrever

$$\frac{1}{7} + \frac{1}{x} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore\quad 4x + 28 = 7x$$

$$\therefore\ x = \frac{28}{3}\ \text{hora} = 9\frac{1}{3}\ \text{hora} = 9h\,20m = 560\text{minutos}$$

29.ª) Sejam m e n os segmentos aditivos determinados pela bissetriz interna e r e s os segmentos subtrativos determinados pela bissetriz externa. Temos, empregando os "teoremas das bissetrizes interna e externa". (Fig. 35)

$$\frac{m}{20} = \frac{n}{30} \quad \text{e} \quad \frac{r}{20} = \frac{s}{30}$$

ou,

$$\frac{m}{20} = \frac{40 - m}{30} \quad \text{e} \quad \frac{r}{20} = \frac{40 + r}{30}$$

$$\therefore\ 3m = 80 - 2m \quad \text{e} \quad 3r = 80 + 2r$$

$$\therefore\ m = 16 \qquad\qquad r = 80$$

E temos:

$$\overline{MN} = m + r$$

$$\therefore\ \overline{MN} = 96cm$$

30.ª) Chamando o arco BC de x, temos:

$$\hat{A} = x + 15^\circ$$

Se a razão dos arcos BC e DE é de 1 para 4, $\widehat{DE} = \widehat{4BC} = 4x$.

Como A é um ângulo excêntrico exterior, tem por medida a semi-diferença dos arcos compreendidos entre os seus lados.

$$\hat{A} = \frac{\widehat{DE} - \widehat{BC}}{2} = \frac{3x}{2}$$

$$\therefore\ x + 15 = \frac{3x}{2} \ \therefore\ 2x + 30^\circ =$$

$$= 3x \ \therefore\ x = 30^\circ$$

E, o ângulo $\hat{A} = 30^\circ + 15^\circ = 45^\circ$.

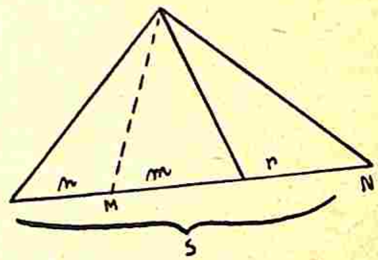


Fig. 35

Prova de Matemática

(Realizada em 1/1953).

INSTRUÇÕES

I) Duração: 3 horas.

II) As questões devem ser respondidas nos lugares indicados para as respostas, porém, todos os cálculos devem ser feitos no espaço destinado ao rascunho.

III) Tomar $\pi = 3{,}14$.

IV) A correção será feita levando em conta apenas as respostas nos lugares indicados.

V) Tôdas as questões têm o mesmo valor.

QUESTIONÁRIO

1.ª QUESTÃO: O produto de 2 números é 2 160 e o m.d.c. é 6. Calcular o m.m.c. dêsses números.

2.ª QUESTÃO: Efetuar $\dfrac{0{,}133\,3\ldots \div 0{,}2}{\dfrac{1}{1{,}2}}$

3.ª QUESTÃO: Paulo e Antônio têm juntos Cr$ 123,00. Paulo gastou $\frac{2}{5}$ e Antônio $\frac{3}{7}$ do que possuiam, ficando com quantias iguais. Quanto possuia cada um?

4.ª QUESTÃO: Efetuar $\dfrac{12^\circ\,14'' + 5^\circ\,18'\,6''}{4}$

5.ª QUESTÃO: Calcular dois números sabendo-se que a diferença é 14 e que estão entre si na razão $\frac{3}{5}$.

6.ª QUESTÃO: Dividir o número 205 em partes inversamente proporcionais a 2, $\frac{1}{3}$ e $\frac{5}{3}$.

7.ª QUESTÃO: Doze máquinas trabalhando 8 horas por dia, fazem 9 000m de fazenda em 15 dias. 15 máquinas quanto necessitarão trabalhar por dia para fazer 6 000m de fazenda em 10 dias? (Resposta em horas, minutos e segundos).

8.ª QUESTÃO: O capital de Cr$ 6 300,00 foi dividido em 2 partes. A primeira parte colocada a 3 % a.a. rendeu durante 4 anos os mesmos juros que a segunda parte durante 6 anos a 2,5 % a.a. Calcular o valor de cada parte.

9.ª QUESTÃO: Calcular $\sqrt{21}$ com êrro inferior a $\frac{1}{8}$.

10.ª QUESTÃO: Efetuar o produto

$$(x^2 + 2 - x)\,(x^2 - 1)$$

dando a resposta ordenada segundo as potências decrescentes de x.

11.ª QUESTÃO: Determinar o m.d.c. das expressões

$$x^2 - 1 \quad \text{e} \quad x^2 + 2x - 3$$

12.ª QUESTÃO: Calcular o valor numérico da expressão

$$\frac{a^2 - b}{2} + \frac{b^3 - a^4}{3} + 3a^3b \quad \text{para} \quad a = -1,\ b = 2$$

13.ª QUESTÃO: Resolver a equação $\dfrac{x}{4} - \dfrac{2x-1}{3} = \dfrac{x+1}{6}$

14.ª QUESTÃO: Resolver a desigualdade

$$\frac{1 - 3x}{2} - x > \frac{x+1}{3} + 1$$

15.ª QUESTÃO: Resolver o sistema $\begin{cases} y = 5 + 3x \\ 2x - 3y = -8 \end{cases}$

16.ª QUESTÃO: Em uma bolsa há Cr$ 35,50 em moedas de Cr$ 2,00 e de Cr$ 0,50. Sabendo-se que o total de moedas é 26, calcular o número de moedas de cada valor.

17.ª QUESTÃO: A soma de dois números é 13 o primeiro mais a raiz quadrada do 2.º é 7. Calcular êsses números.

18.ª QUESTÃO: Escrever a equação do 2.º grau sabendo-se que a soma das raízes é A e a diferença é B.

19.ª QUESTÃO: Determinar m de modo que as equações

$$mx - y - x + 2 = 0$$
$$2mx - 3y - x + 4 = 0$$

representem retas paralelas.

20.ª QUESTÃO: Efetuar $\dfrac{1}{x^2 - 1} - \dfrac{x}{x^2 - 2x + 1} =$

21.ª QUESTÃO: Em um trapézio a soma das bases é 13m, a base menor mais a altura é 8m e a base maior mais a altura é 11m. Determinar sua área.

22.ª QUESTÃO: Calcular a área de um retângulo sabendo-se que sua diagonal é 5m e o perímetro 14m.

23.ª Questão: Dado sôbre uma reta o segmento $\overline{AB} = 11$cm calcular o segmento $\overline{MA}$ dessa reta, sabendo-se que M divide $\overline{AB}$ externamente na razão $\frac{3}{4}$.

24.ª Questão: Os lados de um triângulo medem 6m, 8m e 11m. Quais são os lados de um triângulo semelhante sabendo-se que o lado homólogo ao de 6m vale 3m

25.ª Questão: O comprimento da circunferência externa de uma coroa circular é de 9,42m. Sabendo-se que a diferença dos raios das circunferências externa e interna é 0,5m, calcular a área dessa coroa.

26.ª Questão: Os lados de um triângulo valem 6, 9 e 12cm. Calcular os segmentos determinados sôbre o lado oposto pela bissetriz do maior ângulo interno.

27.ª Questão: Na figura ao lado sabe-se que

$$\widehat{ACD} = 85^\circ$$

$$\widehat{AOD} = 120^\circ$$

Calcular o ângulo $\widehat{BAO}$. (Fig. 30)

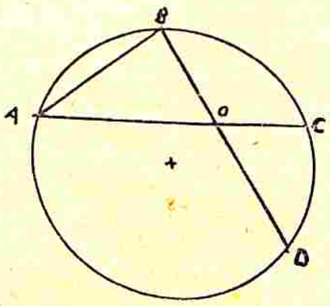


Fig. 36

28.ª Questão: Na figura, a é a hipotenusa, b e c os catetos; h, é a altura em relação a a e h_1 perpendicular a c. Exprimir h_1 em função de a, b e c. (Fig. 31)

29.ª Questão: Num triângulo isósceles os lados iguais valem 10m cada um, a projeção de um dos lados iguais sôbre o 3.º lado é 6m. Calcular a área dêsse triângulo.

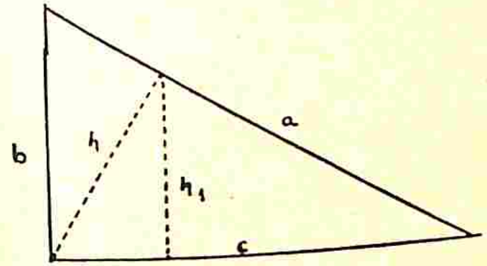


Fig. 37

30.ª Questão: No círculo abaixo o diâmetro $\overline{AB}$ vale 5m. A projeção da corda $\overline{AC}$ sôbre o diâmetro: $\overline{AD} = 1{,}8$m. Calcular a corda $\overline{BC}$. (Fig. 38)

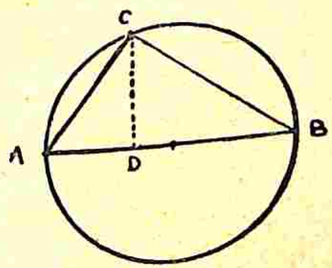


Fig. 38

RESOLUÇÃO

1.ª) Sabemos que o m.m.c. de 2 números é o quociente da divisão de seu produto pelo seu m.d.c., logo:

$$\text{m.m.c.} = 2\,160 \div 6 = 360$$

2.ª) Desenvolvendo temos:

$$\frac{\frac{13-1}{90} \div \frac{2}{10}}{1 \div \frac{12}{10}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{10}{12}} = \frac{4}{5}$$

3.ª) Se Paulo gastou $\frac{2}{5}$ do seu dinheiro ficou com os $\frac{3}{5}$; e Antônio que gastou $\frac{3}{7}$ do seu dinheiro ficou com $\frac{4}{7}$ do mesmo. Como $\frac{3}{5}$ do dinheiro de Paulo corresponde a $\frac{4}{7}$ do de Antônio, $\frac{1}{5}$ corresponderá a $\frac{4}{21}$ e todo o dinheiro de Paulo, $\frac{5}{5}$, eqüivalerá a $\frac{20}{21}$ do dinheiro de Antônio.

Então, $\frac{20}{21} + \frac{21}{21} = \frac{41}{21}$ corresponderá à quantia que os dois têm juntos, isto é, Cr$ 123,00.

Se $\frac{41}{21}$ corresponde a Cr$ 123,00, $\frac{1}{21}$ corresponderá a Cr$ 123,00 ÷ 41 = Cr$ 3,00.

Paulo que possui $\frac{20}{21}$ terá 20 × Cr$ 3,00 = Cr$ 60,00 e Antônio que possui $\frac{21}{21}$ terá 21 × Cr$ 3,00 = Cr$ 63,00.

4.ª) Temos:

$$\frac{17° 18' 20''}{4} = 4° 19' 35''$$

5.ª) Sejam os números a e b, temos:

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$$

Como numa proporção, "a diferença dos dois primeiros têrmos está para o primeiro assim como a diferença dos dois últimos está para o terceiro" temos:

$$\frac{14}{a} = \frac{5-3}{3} \quad \therefore \quad a = \frac{3 \times 14}{2} = 21$$

Se o menor é 21, o maior: 21 + 14 = 35.

6.ª) É o mesmo que dividir 205 em partes diretamente proporcionais a $\frac{1}{2}$, 3 e $\frac{3}{5}$ ou a $\frac{5}{10}$, $\frac{30}{10}$, $\frac{6}{10}$, ou ainda é o mesmo que dividir 205 em partes a, b, c proporcionais a 5, 30 e 6

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{30} = \frac{c}{6} = \frac{205}{41} = 5$$

$$\therefore \quad a = 25, \; b = 150 \; \text{e} \; c = 30$$

7.ª) 12 máquinas – $8h$ – $15d$ – $9\,000m$

15 máquinas – x – $10d$ – $6\,000m$

$I \qquad I \qquad D$

$$\therefore \; x = 8 \times \frac{12 \times 15 \times 6\,000}{15 \times 10 \times 9\,000} = \frac{32}{5}\,h$$

ou

$$x = 6h\,24m\,0s$$

8.ª) Sejam a e b essas duas partes. Temos:

$$a + b = 6\,300 \qquad (1)$$

Da fórmula $j = \frac{cit}{100}$, podemos tirar:

$$\frac{a \times 3 \times 4}{100} = \frac{b \times 2,5 \times 6}{100} \quad \therefore \quad 40 = 3b$$

A primeira parte a é pois igual a $\frac{3}{4}$ da segunda;

$\frac{3}{4} + \frac{4}{4} = \frac{7}{4}$ corresponde a Cr$ 6 300,00;

$\frac{1}{4}$ valerá Cr$ 6 300,00 ÷ 7 = Cr$ 900,00.

E as 2 partes serão:

3 × Cr$ 900,00 = Cr$ 2 700,00

e

4 × Cr$ 900,00 = Cr$ 3 600,00

9.ª) $\frac{\sqrt{21 \times 8^2}}{8} = \frac{\sqrt{1\,344}}{8}$

A raiz quadrada inteira de 1 344 é 36, e $\sqrt{21}$ com aproximação de $\frac{1}{8}$ será: $\frac{36}{8}$.

10.ª) Temos:

$$\begin{array}{r} x^2 - x + 2 \\ x^2 - 1 \\ \hline x^4 - x^3 + 2x^2 \\ -x^2 + x - 2 \\ \hline x^4 - x^3 + x^2 + x - 2 \end{array}$$

11.ª) Fatorando as expressões:

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$$
$$x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$$

e, de acôrdo com a regra, o m.d.c. $= x - 1$.

12.ª) Temos, substituindo:

$$\frac{1-2}{2} + \frac{8-(1)}{3} + 3(-1) \times 2 =$$
$$= -\frac{1}{2} + \frac{7}{3} - 6 = \frac{-3 + 14 - 36}{6} = -\frac{25}{6} = -4\frac{1}{6}$$

13.ª) Eliminando os denominadores:

$$3x - 8x + 4 = 2x + 2 \therefore -7x = -2 \therefore x = \frac{2}{7}$$

14.ª) Eliminando os denominadores:

$$3 - 9x - 6x > 2x + 2 + 6$$
$$\therefore -17x > 5 \therefore 17x < -5 \therefore x < -\frac{5}{17}$$

15.ª) Resolvendo por substituição:

$$2x - 3(5 + 3x) = -8 \therefore 2x - 15 - 9x = -8$$
$$\therefore -7x = 7 \therefore x = -1$$

substituindo o valor de x, vem:

$$y = 5 + 3 \times (-1) = 2$$

solução: $x = -1,\ y = 2$

16.ª) Seja x o número de moedas de Cr$ 2,00
e y o número de moedas de Cr$ 0,50

$$\begin{cases} x + y = 26 \\ 2x + 0{,}5y = 35{,}5 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x + y = 26 \\ -4x - y = -71 \end{cases}$$
$$\overline{-3x = -45} \quad \therefore \quad x = 15$$

e

$$y = 26 - 15 = 11$$

Existem pois 15 moedas de Cr$ 2,00 e 11 de Cr$ 0,50.

17.ª) Sejam x e y os números. Temos:

$$x + y = 13$$
$$x + \sqrt{y} = 7 \therefore \sqrt{y} = 7 - x$$

e elevando ao quadrado, ambos os membros, vem:

$$y = 49 - 14x + x^2$$

substituindo: $x + 49 - 14x + x^2 = 13$

$$\therefore x^2 - 13x + 36 = 0$$

resolvendo achamos: $x_1 = 9$ e $x_2 = 4$

As soluções do sistema são:

$$x = 9 \text{ e } y = 4 \text{ ou } x = 4 \text{ e } y = 9$$

E os números pedidos são 4 e 9.

18.ª) Temos:

$$x_1 + x_2 = a$$
$$x_1 - x_2 = b$$

Somando: $2x_1 = a + b \therefore x_1 = \dfrac{a + b}{2}$

Subtraindo: $2x_2 = a - b \therefore x_2 = \dfrac{a - b}{2}$

Temos então: $x_1 + x_2 = a$ e $x_1 x_2 = \dfrac{a^2 - b^2}{4}$

e a equação pedida será:

$$x^2 - ax + \frac{a^2 - b^2}{4} = 0 \text{ ou } 4x^2 - 4ax + a^2 - b^2 = 0$$

19.ª) Para que essas equações representem retas paralelas é necessário que o sistema por elas formado seja impossível.

Preparando o sistema, temos:

$$(m - 1)x - y = -2$$
$$(2m - 1)x - 3y = -4$$

e para que seja impossível é necessário que:

$$\frac{m-1}{2m-1} = \frac{1}{3} \neq \frac{-2}{-4} \text{ ou } \frac{m-1}{2m-1} = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{2}$$

basta pois, que: $\dfrac{m-1}{2m-1} = \dfrac{1}{3}$

$$\therefore 3m - 3 = 2m - 1 \therefore m = 2$$

20.ª) Calculemos o m.m.c. dos denominadores:

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$$
$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \text{ e o m.m.c.} = (x + 1)(x - 1)^2$$

Podemos então escrever

$$\frac{(x-1)-x(x+1)}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{x-1-x^2-x}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{-(x^2+1)}{(x+1)(x-1)^2}$$

ou

$$-\frac{x^2+1}{x^3-x^2-x+1}$$

21.ª) Temos:

$$S = \frac{B+b}{2} \times h$$

Mas, $B + b = 13$ e $B + h = 11$
$b + h = 8$

Somando membro a membro, vem:

$$B + b + 2h = 19 \therefore 13 + 2h = 19 \therefore h = 3$$

substituindo, temos:

$$S = \frac{13}{2} \times 3 = 19{,}50m^2$$

22.ª) Temos: $S = bh$.

Considerando um dos triângulos retângulos determinados pela diagonal, vem:

$$b^2 + h^2 = 25$$

mas,

$$b + h = 7 \therefore b = 7 - h$$

substituindo: $49 - 14h + h^2 + h^2 = 25$

$$\therefore h^2 - 7h + 12 = 0$$

resolvendo esta equação, temos:

$$h = 4 \text{ ou } h = 3$$

E, para $h = 4$, $b = 3$; e, para $h = 3$, $b = 4$.

Logo

$$S = 4 \times 3 = 12m^2$$

23.ª) Se a razão é $\frac{3}{4}$, $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{3}{4}$ e $\overline{MA} < \overline{MB}$, logo, M está à esquerda de $\overline{AB}$, isto é, mais próximo de A.

Fazendo $\overline{MA} = x$, temos:

$$\frac{x}{11+x} = \frac{3}{4} \therefore 4x = 33 + 3x \therefore x = 33cm$$

24.ª) Se os dois triângulos são semelhantes seus lados homólogos são proporcionais, logo.

$$\frac{6}{3} = \frac{8}{x} = \frac{11}{y} = 2$$

$$\therefore 2x = 8 \text{ e } x = 4 \text{ e } 2y = 11 \therefore y = 5{,}5$$

Os lados do triângulo serão pois: $3m$, $4m$ e $5{,}5m$.

25.ª) A área da coroa é: $S = \pi(R^2 - r^2)$.

Temos: $2\pi R = 9{,}42 \therefore R = \frac{9{,}42}{6{,}28} = 1{,}5$

Mas, $R - r = 0{,}5 \therefore 1{,}5 - r = 0{,}5 \therefore r = 1$

Logo, $S = \pi(2{,}25 - 1) = 3{,}14 \times 1{,}25 = 3{,}925\,0m^2$

26.ª) Chamemos de m o menor dos segmentos determinados. Pelo teorema da "bissetriz interna", temos:

$$\frac{m}{6} = \frac{12-m}{9}$$

$$\therefore 9m = 72 - 6m \therefore 15m = 72 \therefore m = 4{,}8$$

Os segmentos pedidos serão então: $4{,}8cm$ e $7{,}2cm$.

27.ª) É fácil de ver, na figura apresentada, que $\widehat{BAO}$ é um ângulo inscrito.

$$\therefore \widehat{BAO} = \frac{\widehat{BC}}{2}$$

Temos: $\widehat{ACD} = \frac{\widehat{AD}}{2} = 85^\circ \therefore \widehat{AD} = 170^\circ$

e $\widehat{AOD} = \frac{\widehat{BC} + \widehat{AD}}{2} = 120^\circ \therefore \widehat{BC} + \widehat{AD} = 240^\circ$

ou, $\widehat{BC} + 170^\circ = 240^\circ \therefore \widehat{BC} = 70^\circ$

e, portanto, $\widehat{BAO} = \frac{70^\circ}{2} = 35^\circ$

28.ª) Na figura do problema vemos que h_1 é a altura relativa à hipotenusa do triângulo retângulo de hipotenusa c e catetos h e m (projeção de c sôbre a), então

$$ch_1 = mh \therefore h_1 = \frac{mh}{c}$$

mas, no triângulo retângulo de lados a, b e c, temos:

$$c^2 = am \therefore m = \frac{c^2}{a}$$

e

$$bc = ah \therefore h = \frac{bc}{a}$$

Substituindo, em h_1, m e h por seus valores, obtemos:

$$h_1 = \frac{\frac{c^2}{a} \times \frac{bc}{a}}{c} \therefore h_1 = \frac{bc^2}{a^2}$$

29.ª) Temos: $\overline{AB} = \overline{AC} = 10m$. (Fig. 39)

Seja $\overline{BD} = 6m$

Se o triângulo é isósceles, $\overline{AD}$, altura traçada do vértice, é também mediana.

$$\therefore \overline{BC} = 2\overline{BD} = 12m$$

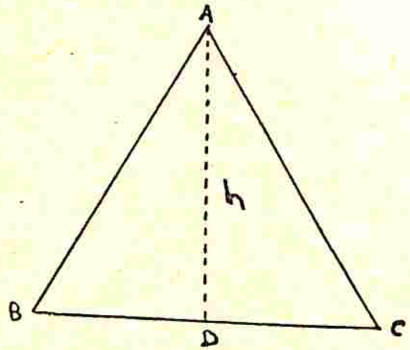


Fig. 39

E, usando o teorema de Pitágoras no triângulo BDA, vem:

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BD}^2 = 100 - 36 = 64 \quad \therefore \quad \overline{AD} = 8$$

Logo: $$S = \frac{BC, \times AD}{2} = \frac{12 \times 8}{2} = 48m^2$$

30.ª) Temos, por uma das relações métricas no círculo:

$$CB^2 = AB \times BD$$

$$\overline{AB} = 5 \text{ e } \overline{BD} = \overline{AB} - \overline{AD} = 5 - 1{,}8 = 3{,}2$$

$$\therefore BC^2 = 5 \times 3{,}2 = 16 \quad \therefore \quad BC = 4m$$

TERCEIRA PARTE

QUESTÕES DE EXAMES DE ADMISSÃO

Instituto de Educação (1954/55)
Escola Carmela Dutra (1954/55)
Colégio Naval (1954/55)
E. P. C. do Exército (1954)

I) INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

Prova escrita de Matemática

(Realizada em 4/2/1954)

QUESTIONÁRIO

1.ª Questão: Calcule o quociente do menor dos números: -18 e $+9$ por $(-3)^2$.

2.ª Questão: Reduza os têrmos semelhantes da expressão:

$$2a^2 - \frac{2a}{b} - 4m - 3a^2 + ab^{-1}.$$

3.ª Questão: Transforme a seguinte expressão num produto de fatôres do primeiro grau: $\frac{4}{9}x^2y^3 - 25\,a^2y$

4.ª Questão: Efetue: $\dfrac{3x}{a-x} - \dfrac{x^2-3ax}{x^2-a^2}$

5.ª Questão: Resolva a equação: $\dfrac{x+a}{3} - \dfrac{3(2a-x)}{4} = a$

6.ª Questão: Dê o maior número inteiro que satisfaça a inequação: $2-3x>7$

7.ª Questão: Resolva o sistema: $\begin{cases} x + 6y = 0 \\ 4x + 15y = -3 \end{cases}$

8.ª Questão: Efetue a expressão:

$$64^{2/3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} + \left(\frac{1}{3}\right)^{0} - 2^9$$

9.ª Questão: Simplifique a expressão: $3\sqrt{10} - \dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}-3}$

10.ª QUESTÃO : Dê a soma e o produto das raízes da seguinte equação, sem resolvê-la :

$$\frac{2a+3}{7}x^2 - \frac{6a+9}{14}x + 1 = 0$$

11.ª QUESTÃO : Dê o número de lados do polígono que possui 44 diagonais.

12.ª QUESTÃO : Dê o número de lados do polígono convexo no qual a soma dos ângulos internos excede de 720° a soma dos ângulos externos.

13.ª QUESTÃO : Num trapézio isósceles a soma dos lados não paralelos é igual a 20cm e a base menor, que mede 6cm, forma ângulo de 120° com cada um dêsses lados não paralelos. Calcule a base maior.

14.ª QUESTÃO : De um ponto M fora de um círculo, traçam-se duas tangentes e, por um ponto qualquer do menor dos arcos determinados pelos pontos de tangência, traça-se outra tangente. Sabendo-se que o comprimento de cada uma das primeiras tangentes, do ponto M ao ponto de contacto, é de 15cm, dê o perímetro do triângulo formado pelas três tangentes.

15.ª QUESTÃO : Num triângulo retângulo a bissetriz do ângulo reto determina sôbre a hipotenusa segmentos proporcionais a 3 e 4. Sabendo-se que a hipotenusa mede 20cm, calcule os catetos.

16.ª QUESTÃO : A altura do triângulo equilátero inscrito num círculo mede 3cm. Calcule o apótema do quadrado inscrito no círculo.

17.ª QUESTÃO : Diga a que é igual, num círculo de raio R, o comprimento do arco cujo ângulo central, em graus, mede $\frac{180}{\pi}$.

18.ª QUESTÃO : Um hexágono regular está inscrito num círculo cuja área mede 12,56cm². Calcule a área do hexágono.

19.ª QUESTÃO : As bases de um trapézio estão entre si na razão de 5 para 3. Sabendo-se que a área do trapézio é 32m², calcule as áreas dos triângulos que se obtêm prolongando os lados não paralelos.

20.ª QUESTÃO : Usando a fórmula do lado do polígono regular inscrito de $2n$ lados em função do de n lados, deduza a expressão do lado do octógono regular inscrito num círculo de raio R.

NOTA : Cada questão vale 5 pontos. Não será aproveitado o rascunho. De cêrca de 1 500 candidatas, foram aprovadas apenas 228 nesta prova.

RESPOSTAS :

1) -2

2) $\frac{-a^2b - a + 4bm}{b}$

3) $y\left(\frac{2}{3}xy - 5a\right)\left(\frac{2}{3}xy + 5a\right)$

4) $\frac{4x^2}{a^2 - x^2}$

5) $x = 2a$

6) -2

7) $x = -2$ e $y = \frac{1}{3}$

8) 1

9) -10

10) $S = \frac{3}{2}$ $P = \frac{7}{2a+3}$

11) $n = 11$

12) 8

13) 16cm

14) 30cm

15) 16cm e 12cm

16) 1,41cm

17) R

18) 10,38cm²

19) 18m² e 50m²

20) $l_8 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

Prova de Matemática

(Realizada em 11/2/1955)

QUESTIONÁRIO

1.ª QUESTÃO : Efetue as operações indicadas na expressão seguinte, dando o resultado sob a forma mais simples :

$$\left[\frac{2+a}{2-a} - \frac{2-a}{2+a}\right] \div \frac{8}{6-3a}$$

2.ª QUESTÃO: Efetue as operações indicadas na expressão seguinte, dando o resultado sob a forma mais simples:

$$\sqrt{6}\times\sqrt{12}+\frac{\sqrt{250}}{\sqrt{5}}-\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\right]^{-1}+\sqrt[6]{125}+\left[\sqrt{2}\right]^{3}$$

3.ª QUESTÃO: Calcule m e p de forma que o sistema seguinte seja impossível:

$$\begin{cases} 3x+2y=4m+4 \\ 6x-(p+2)\,y=1 \end{cases}$$

4.ª QUESTÃO: Calcule m na equação $x^2-16x+(3m+12)=0$, de forma que uma raiz seja $\frac{1}{3}$ da outra.

5.ª QUESTÃO: Resolva a equação: $\frac{x-3}{5}-\frac{5}{x-3}=\frac{24}{5}$

6.ª QUESTÃO: Um triângulo e um trapézio de mesma altura têm a mesma área. Calcule a base média do trapézio sabendo que a base do triângulo mede 18cm.

7.ª QUESTÃO: O perímetro de um triângulo equilátero inscrito em um círculo mede $12\sqrt{3}$ cm. Calcule a área dêsse círculo.

8.ª QUESTÃO: As diagonais de dois retângulos semelhantes medem 13m e 39m. A área do primeiro é 60m². Calcule a área do segundo.

9.ª QUESTÃO: Sabendo que dois dos lados de um triângulo isósceles medem 41m e 18m, calcule a altura relativa à base.

10.ª QUESTÃO: O menor dos lados de um trapézio retângulo é a base menor. Calcule o perímetro do trapézio sabendo que os lados dêsse quadrilátero são números inteiros consecutivos.

11.ª QUESTÃO: Num círculo de raio $2m$, a altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo inscrito, determina sôbre essa hipotenusa um segmento igual ao apótema do triângulo equilátero inscrito no mesmo círculo. Calcule o perímetro dêsse triângulo.

12.ª QUESTÃO: Demonstre o *teorema*: "Quando duas secantes se cortam fora do círculo, o produto dos dois segmentos de uma, a partir do ponto de intersecção, é igual ao produto dos dois segmentos da outra".

NOTA: As 11 primeiras questões valem 8 pontos cada uma e a questão 12 vale 12 pontos. 449 aprovadas em 1 800 (6 notas 100).

RESPOSTAS:

1) $\frac{3a}{2+a}$

2) $13\sqrt{2}$

3) $p=-6$ e $m\neq-\frac{7}{8}$

4) $m=12$

5) $x_1=28$ e $x_2=2$

6) 9cm

7) 50,24cm²

8) 540m²

9) 40m

10) 18 unidades de comprimento

11) 9,46m

12) Ver "relações métricas nos círculos" – 3.ª série ginasial

Prova de Matemática

(Realizada em 15/4/1955)

(2.ª Época)

QUESTIONÁRIO

1.ª QUESTÃO: Efetue as operações indicadas na expressão seguinte dando o resultado sob a forma mais simples:

$$\frac{1-\dfrac{a-1}{a+1}}{\dfrac{1}{a+1}-\dfrac{1}{a-1}}$$

2.ª Questão: Efetue as operações indicadas na expressão seguinte dando o resultado sob a forma mais simples:

$$4\sqrt[4]{2500} + \frac{2}{(\sqrt{50})^{-1}} + \frac{30}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$$

3.ª Questão: Decomponha em fatôres do primeiro grau a expressão: $x - xy - 1 + y^2$

4.ª Questão: Resolva a equação:

$$\frac{x+a}{a-b} + \frac{2b-2x}{b-a} = \frac{x+b}{a+b} - \frac{x-a}{a+b}$$

5.ª Questão: Calcule o maior valor de m que torna reais e iguais as raízes da equação: $x^2 + (m+2)x + (3m-2) = 0$

6.ª Questão: Dê o valor do ângulo central do polígono regular no qual o número de lados é 2/3 do número de diagonais.

7.ª Questão: Traçam-se as tangentes a um círculo nas extremidades de um diâmetro AB. Por outro ponto da circunferência traça-se outra tangente que encontra as duas primeiras nos pontos C e D, respectivamente. Dê o número de graus do ângulo $C\hat{O}D$.

8.ª Questão: Um dos lados de um triângulo mede $13\sqrt{2}$ cm e opõe-se a um ângulo de 45°. Dê o diâmetro do círculo circunscrito a êsse triângulo.

9.ª Questão: Dê a área do triângulo retângulo isósceles cujo perímetro é igual a 20,46m.

10.ª Questão: Os lados de um triângulo ABC medem: $AB = 5$m, $BC = 9$m e $AC = 11$m. Por um ponto D de AB traça-se DE paralela a BC, sendo E o ponto em que essa paralela encontra o lado AC. Calcule o segmento DB, sabendo, ainda, que $DE = CE$.

11.ª Questão: Calcule a área de um trapézio retângulo, sabendo que a base menor mede 3m e que a diagonal

que parte do vértice do ângulo agudo da base maior forma com essa base um ângulo de 30° e mede 10m.

12.ª Questão: Demonstre o *teorema*: "Dois triângulos são semelhantes quando têm um ângulo igual compreendido entre lados proporcionais".

Nota: As 11 primeiras questões valem 0 pontos cada uma e a questão 12.ª vale 12 pontos.

Respostas:

1) $1 - a$
2) $-30\sqrt{3}$
3) $(1-y)(x-y-1)$
4) $\frac{b}{3}$
5) 6
6) 60°
7) 90°
8) 26m
9) 18m^2
10) 2,25m
11) $29{,}1250\text{m}^2$

II) ESCOLA NORMAL CARMELA DUTRA

Prova escrita de Matemática

(Realizada em 10/2/1954)

INSTRUÇÕES

I) Utilize, se necessário, as fôlhas em branco para a resolução das questões.

II) Escreva a resposta de cada questão no espaço indicado em seguida a seu enunciado.

III) *Não serão consideradas* as questões cujas respostas não estiverem no lugar acima indicado.

IV) *Não serão consideradas* as questões cujos cálculos auxiliárea não figurem no rascunho.

V) Tôda raiz quadrada não exata deve ser tomada, apenas, com dois algarismos decimais exatos. Exemplo: $\sqrt{2} = 1{,}41$.

VI) Para o número π, basta tomar 3,14.

Qualquer sinal inutilizará a prova.

QUESTIONÁRIO

Primeira Parte — 10 Questões

1.ª Questão: Escreva o polinômio homogêneo completo do 4.° grau em x e y, de coeficientes iguais a um.

2.ª Questão: Qual é a fração cujo triplo do seu quadrado é igual à sua sexta parte?

3.ª Questão: Efetue e simplifique:

$$\frac{a+x}{a+1} + \frac{a+x}{a-1} + \frac{2a+2x}{a^2-1}$$

4.ª Questão: Desenvolva e simplifique:

$$(0{,}333\ldots x^4 + 6x^{-2}y^3)^2$$

5.ª Questão: Efetue:

$$\frac{(-2)^{-5} \div \left[(-\sqrt{2})^4\right]^{1/2}}{(-2)^{-1} \cdot (-2)^{-3}}$$

6.ª Questão: Racionalize os denominadores e simplifique:

$$\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

7.ª Questão: Nó triângulo isósceles ABC:

$$\overline{AC} = \overline{BC} = 30\text{cm}$$
$$\overline{AB} = 12\text{cm}$$

Pelos pontos M e N que dividem $\overline{AB}$ em 3 segmentos iguais traçam-se paralelas $\overline{MM'}$ e $\overline{NN'}$ ao lado $\overline{BC}$. Calcule o perímetro do quadrilátero $MM'NN'$.

8.ª Questão: Ligam-se os meios P e Q dos lados opostos de um quadrado aos vértices. Sabendo que o lado do quadrado mede $2m$, calcular a área do quadrilátero $PQRS$ assim formado.

9.ª Questão: Numa circunferência a corda AB é o lado do triângulo equilátero inscrito e a corda AC é o lado do quadrado inscrito. Calcule o ângulo AMC, formado pela tangente à circunferência em A e pelo prolongamento de BC.

10.ª Questão: Demonstre que, quando os lados de dois polígonos regulares são cordas de arcos suplementares, o apótema de um é a metade do lado do outro.

Nota: Valor de cada questão: 5 pontos.

Segunda Parte — 5 Questões

11.ª Questão: Qual é o valor negativo de a que torna indeterminado o sistema:

$$\begin{cases} a^2x-3y=3+x \\ ax+2y+2=0 \text{ ?} \end{cases}$$

12.ª Questão: A equação $x^2+3x+p=0$ não tem raízes reais. Subtraindo-se uma unidade do 1.º membro, a nova equação passa a ter duas raízes reais e desiguais. Sendo p um número inteiro, determine o seu valor.

13.ª Questão: O diâmetro de uma circunferência coincide com o raio de outra. A área compreendida entre as duas é de 12dm². Qual é o comprimento da menor circunferência?

14.ª Questão: De um ponto A distante 10cm do centro de um círculo de raio igual a 6cm traçam-se as tangentes $\overline{AT}$ e $\overline{AT'}$. Calcule o perímetro do triângulo ATT'.

15.ª Questão: Pelo centro O do círculo circunscrito a um triângulo equilátero traça-se uma paralela a um de seus lados. Calcule o perímetro do trapézio assim formado, sabendo-se que o raio do círculo mede 10cm.

Nota: Valor de cada questão: 10 pontos.

Respostas:

1) $x^4+y^4+x^2y^2+xy^3+x^3y$

2) 1/18

3) $\dfrac{2a+2x}{a-1}$

4) $1/9x^8+4x^2y^3+36x^{-4}y^6$

5) $-\dfrac{1}{4}$

6) $\dfrac{7\sqrt{2}-4\sqrt{5}}{2}$

7) 44cm

8) 1m²

9) 15°

10) De fato, sejam AB e BC as cordas de dois arcos suplementares de uma circunferência de centro 0. O triângulo ABC retângulo está inscrito no semicírculo e sua hipotenusa $AC=2R$.

O apótema do polígono regular, cujo lado é BC, é o segmento OM (M é o meio de BC), perpendicular a BC. Então OM é paralelo a AB e pelo teorema linear de Thales $\triangle ABC \cong \triangle OMC$ e como $OC = \dfrac{AC}{2}$, logo $OM = \dfrac{AB}{2}$

11) −2

12) 3

13) 6,8dm

14) 25,6cm

15) 40,36cm

Prova de Matemática

(Realizada em 11/2/1955

INSTRUÇÕES

I) Escreva o resultado de cada questão no espaço indicado em seguida ao seu enunciado.

II) *Não serão consideradas as questões cujos resultados não forem escritos da forma acima exigida.*

III) Utilize as fôlhas em branco para o rascunho que é obrigatório.

IV) Os valores de π, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$, etc., devem ser tomados com duas decimais exatas.

QUESTIONÁRIO

1.ª Questão: Efetue as operações indicadas na expressão seguinte, dando o resultado sob a forma mais simples:

$$\left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}\right) \div \frac{6}{5a+5b}$$

2.ª Questão: Efetue as operações indicadas na expressão seguinte, dando o resultado sob a forma mais simples:

$$\sqrt[4]{144} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{5\sqrt{12}\,.\,\sqrt{45}}{6\sqrt{5}} + \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

3.ª Questão: Calcule m e p de forma que o sistema seguinte seja indeterminado:

$$\begin{cases} 6x+(m-1)\,y=4 \\ 9x-2y=p+1 \end{cases}$$

4.ª Questão: Calcule m na equação: $x^2-mx+108=0$ de forma que uma das raízes seja $\frac{3}{4}$ da outra.

5.ª Questão: Resolva a equação: $\frac{2-x}{4} - \frac{2}{2-x} = \frac{1}{2}$.

6.ª Questão: Duas circunferências concêntricas formam uma coroa de 10cm de largura. Calcule a diferença entre os comprimentos das duas circunferências.

7.ª Questão: O lado de um quadrado inscrito em um círculo mede $3\sqrt{2}$ metros. Calcule o comprimento da corcunferência.

8.ª Questão: A área de um polígono mede 1 800m². Calcule a área de um polígono semelhante sabendo que a razão de semelhança do primeiro para o segundo é de 3 para 2.

9.ª Questão: Em um triângulo ABC, a bissetriz do ângulo A encontra o lado BC num ponto D situado a $\frac{1}{4}$ do comprimento dêsse lado a partir de B. Calcule quantas vêzes o lado AC contém o lado AB.

10.ª Questão: Num retângulo a perpendicular traçada de um vértice a uma das diagonais divide essa diagonal em dois segmentos de 36cm e 64cm. Calcule o perímetro do retângulo.

11.ª Questão: Um dos catetos de um triângulo retângulo vale os $\frac{3}{4}$ do outro. Calcule o perímetro do triângulo semelhante cuja hipotenusa mede 40m.

12.ª Questão: Demonstre o *teorema*: "Quando duas cordas se cortam no interior do círculo, o produto dos dois segmentos de uma é igual ao produto dos dois segmentos da outra".

(Faça a demonstração no espaço abaixo).

Nota: As 11 primeiras questões valem 8 pontos cada uma e a questão 12 vale 12 pontos.

Respostas:

1) $\frac{10ab}{3(a-b)}$

2) $-2\sqrt{3}$

3) $m=-\frac{1}{3}$ e $p=5$

4) $m=\pm 21$

5) $x_1=4$ e $x_2=-2$

6) 62,8cm

7) 18,84m

8) 800m²

9) $AC=3AB$

10) 280cm

11) 96m

12) Ver "Relações métricas nos círculos" — 3.ª Série Ginasial".

Prova de Matemática

(Realizada em 15/4/1955)

QUESTIONÁRIO

1.ª Questão: Efetuar as operações indicadas na expressão seguinte, dando o resultado sob a forma mais simples:

$$\frac{\dfrac{a+b}{ab} + \dfrac{a}{b^2}}{\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{b^2}}$$

2.ª Questão: Efetue as operações indicadas na expressão seguinte, dando o resultado sob a forma mais simples:

$$\sqrt[6]{512} - \left(\frac{1}{\sqrt{50}}\right)^{-1} + \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2} - 1}$$

3.ª Questão: Decomponha em fatôres do primeiro grau a expressão: $a(a-1) - b(b+1)$

4.ª Questão: Resolva a equação:

$$\frac{x+b}{a+b} - 1 = \frac{x-a}{b-a} - \frac{x-a}{a^2-b^2}$$

5.ª Questão: Calcule o menor dos valores de m que tornam reais e iguais as raízes das equações:

$$x^2+2(m+1)x+5m+1=0$$

6.ª Questão: Dê a soma dos ângulos internos do polígono convexo no qual o número de diagonais é o triplo do número de lados.

7.ª Questão: Calcule a área de um triângulo isósceles sabendo que a base mede 6cm e que um dos ângulos adjacentes à base é a têrça parte da soma dos outros dois.

8.ª Questão: Um dos lados de um triângulo mede $18\sqrt{3}$ cm e opõe-se a um ângulo de 60°. Dê o diâmetro do círculo circunscrito a êsse triângulo.

9.ª Questão: Um triângulo equilátero de apótema $6\sqrt{2}$ está circunscrito a um círculo. Calcule o perímetro do quadrado inscrito nesse círculo.

10.ª Questão: Dois triângulos são semelhantes. Os lados do primeiro são iguais, respectivamente, a 3, 4 e 5. Calcule o perímetro do segundo sabendo que êle é expresso pelo mesmo número que representa a sua área.

11.ª Questão: Calcule a área de um trapézio isósceles circunscrito num círculo, cujas bases medem respectivamente, 8m e 18m.

12.ª Questão: Demonstre o *teorema*: "Dois triângulos são semelhantes quando têm os três lados proporcionais".

Nota: As 11 primeiras questões valem 8 pontos cada uma e a questão 12 vale 12 pontos.

Respostas:

1) a
2) 6
3) $(a+b)(a-b-1)$
4) a
5) zero
6) 1 260°
7) $9cm^2$
8) 36cm
9) 48
10) 24
11) $156m^2$

III) COLÉGIO NAVAL

Prova de Matemática

(Realizada em Janeiro de 1954)

INSTRUÇÕES

I) Os candidatos podem estar certos de que as questões formuladas estão dentro do programa para o Concurso, e de que o tempo dado é suficiente para a solução de tôdas as questões.

II) O julgamento das questões será feito em vista sòmente do que estiver contido nos espaços destinados à sua resolução.

III) A 1.ª e a 2.ª questões são compostas de 10 ítens cada uma, valendo cada ítem 1 (um) ponto e a 3.ª é composta de 5 ítens, valendo cada um dêles 2 (dois) pontos.

IV) A duração da prova será de 3 (três) horas.

V) Caso seja necessário, use os valores :

$$\pi = 3{,}14\ ;\ \sqrt{2} = 1{,}41\ ;\ \sqrt{3} = 1{,}73\ ;\ \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0{,}62$$

QUESTIONÁRIO

1.ª Questão :

a) Calcule o valor de :

$$\left[8^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{2}} + 0{,}017^{0}\right] \times \frac{1}{0{,}888\ldots}$$

b) Efetue $\sqrt{200} \times \sqrt[3]{108}$ e simplifique o resultado.

c) Extraia a raiz quadrada de $2\frac{1}{5}$ a menos de $\frac{1}{3}$, por falta.

d) Dê a razão $\frac{c}{\sqrt[7]{b^4}}$ com o denominador racionalizado.

e) Na equação $x^2 - 5x + c = 0$, que valor se deve atribuir a "c" para que uma das raízes seja 2?

f) Decomponha em três fatôres $16x^4 - 1$

g) Resolva a equação : $6x^{-2} - 5x^{-1} + 1 = 0$

h) Forme a equação do 2.º grau cujas raízes são $1 \pm \sqrt{2}$

i) Determine a raiz da equação : $1 + \frac{x}{a} = 1 - \frac{x}{b}$

j) Resolva o sistema :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 16 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

2.ª Questão :

a) Determine os valores de "x" que verifiquem o sistema :

$$\begin{cases} \dfrac{4x-9}{7} < x - 3 \\[2mm] \dfrac{3x+10}{4} > 2x - 5 \end{cases}$$

b) Ache as raízes do sistema :

$$\begin{cases} \dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{5} = 2 \\[2mm] \dfrac{2x+1}{3} - \dfrac{y-3}{2} = 2 \end{cases}$$

c) Divida o ângulo de $28° \ 47' \ 18''$ em partes proporcionais a 1, 2 e 3. Calcule, apenas, o maior dos ângulos.

d) Um tanque de forma esférica, tem de raio interno $\sqrt[3]{\dfrac{3}{\pi}}$ metros. Qual a sua capacidade em dal?

e) Uma circunferência de círculo tem de comprimento 6,28m. Calcule, em ha, a área do triângulo equilátero inscrito nesse círculo.

f) Qual o valor do ângulo interno de um polígono regular convexo cujo número de diagonais é igual ao número de lados?

g) Um segmento de reta, de 10cm de comprimento, foi dividido em média e extrema razão por um seu ponto interior. Calcule o valor do segmento áureo.

h) Calcule em ca, a área de um trapézio isósceles, sabendo-se que as bases medem 10m e 12m e que um dos lados não paralelos forma, com a base, um ângulo de $\dfrac{\pi}{4}$ radianos.

i) Os catetos de um triângulo retângulo inscrito num círculo medem 6m e 8m. Calcule o comprimento da mediana relativa à hipotenusa.

j) Doze marinheiros pintaram o casco de um contra-torpedeiro em 4 dias e 4 horas. Quantos marujos, da mesma capacidade de trabalho, serão necessários para pintar o mesmo casco em 6 dias e 6 horas?

3.ª Questão:

a) Qual a propriedade que lembra a figura? Demonstre a proposição no caso particular apresentado. (A figura apresentada era de um ângulo inscrito em que um dos lados era um diâmetro.)

b) Sendo $a>0$, discuta a equação $ax^2+c=0$.

c) Qual o valor a atribuir ao parâmetro "m" para que os sistemas

$$\begin{cases} mx+2my=1 \\ mx+3my=2 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x=a \\ y=-a \end{cases}$$ sejam equivalentes?

d) Dá-se um triângulo retângulo que tem um ângulo de 30° e cuja hipotenusa mede "a". Institua a fórmula para o cálculo da sua área em função de "a".

e) Demonstre o teorema de Pitágoras.

Respostas:

1.ª Questão

a) 9

b) $60\sqrt[6]{2}$

c) 4/3

d) $\dfrac{c\sqrt[7]{b^3}}{b}$

e) 6

f) $(4x^2+1)(2x+1)(2x-1)$

g) $x_1=3$ e $x_2=2$

h) $x^2-2x-1=0$

i) zero

j) $x=5$ e $y=3$

2.ª Questão

a) Todos entre 4 e 6

b) $x=4$ e $y=5$

c) $14° \ 23' \ 39''$

d) 400dal

e) 0,00012975ha

f) 108°

g) 6,2cm

h) 11ca

i) 5m

j) 8 marujos

3.ª Questão

a) (Ver livro 3.ª série ginasial)

b) $\triangle = -4ac$

1) Se $c=0$, $\triangle=0$ e as raízes da equação são reais e iguais

2) Se $c<0$, $\triangle>0$ e as raízes da equação são reais e diferentes

3) Se $c>0$, $\triangle<0$ e as raízes não existem no campo real

c) $m=-\dfrac{1}{a}$

d) $S=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{8}$

e) (Ver livro 4.ª série ginasial)

Prova de Matemática

(Realizada em Janeiro 1955)

QUESTIONÁRIO

1.ª QUESTÃO : Determinar os divisores comuns de 132 e 144.

2.ª QUESTÃO : Racionalize o denominador de $\dfrac{5 + \sqrt{2}}{3 - \sqrt{2}}$

3.ª QUESTÃO : Se o diâmetro de um círculo mede 10m, qual o comprimento do arco compreendido entre os lados de um ângulo central de 1 radiano.

4.ª QUESTÃO : Reduza a horas, minutos e segundos a fração 1/7 do dia.

5.ª QUESTÃO : Escreva a equação do 2.º grau cujas raízes coincidem com as raízes do sistema

$$\begin{cases} x+y=5 \\ 2xy=1 \end{cases}$$

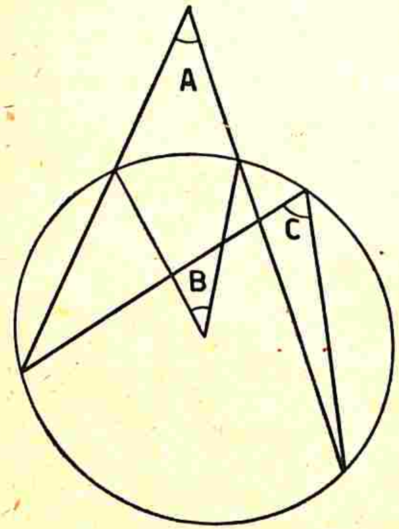


Fig. 40

6.ª QUESTÃO: Em um triângulo os lados b e c são iguais a 5m e o ângulo B mede 30°. Qual o valor do lado a?

7.ª QUESTÃO: Ache a fração ordinária equivalente a

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{-2} + \frac{5}{2} \times 7^{-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

e reduza a número decimal, aproximado a décimos.

8.ª QUESTÃO : Exprima o ângulo B em função de A e C.

9.ª QUESTÃO : Resolva : $1 - \dfrac{x-5}{3} > \dfrac{x-2}{4} + 2$

10.ª QUESTÃO : Uma fábrica trabalhando durante 9 dias à razão de 8h por dia produz 75 toneladas de um certo material. Pede-se de quantas horas se deve prorogar o expediente diário para que a mesma fábrica produza 65 toneladas do mesmo material.

11.ª QUESTÃO : Na figura 42, $CD = DB$, $\hat{A} = 90°$. Prove que $AD = \dfrac{BC}{2}$

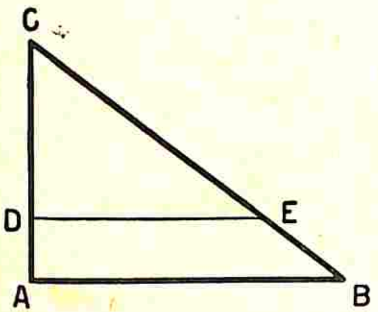


Fig. 41

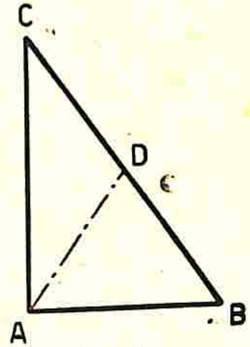


Fig. 42

12.ª QUESTÃO : Calcular o valor de m para que o sistema

$$\begin{cases} mx+2y=7 \\ 13x+26y=9 \end{cases}$$ seja impossível.

13.ª QUESTÃO: Um ângulo de 25° foi medido com deficiência por um certo instrumento, como se valesse 22° 56′ 48″; qual a percentagem de êrro?

14.ª QUESTÃO : Na figura 41, $CA = 3m$, $AB = 4m$ e $DE \parallel AB$. Pede-se o comprimento CD de modo que o triângulo CDE seja equivalente ao quadrilátero $DABE$.

15.ª QUESTÃO : A soma das idades de A e B é de 35 anos. Daqui a 5 anos a idade de A será o dôbro da de B. Calcular as idades de A e B.

16.ª Questão: Se a area do trapézio é de quatro decâmetros quadrados dois metros quadrados e vinte e quatro decímetros quadrados e se as duas bases medem 5 e 3 m. Qual a altura em mm?

17.ª Questão: Efetue: $3\sqrt[3]{a^3b^4} + 5a\sqrt[3]{b^4} + b\sqrt[3]{a^4b}$

18.ª Questão: Calcular a altura de uma pirâmide triangular cuja base está inscrita numa circunferência de raio $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ m e cujo volume é $2\sqrt{3}\,\text{m}^3$.

19.ª Questão: Prove que se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $\frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b}$

20.ª Questão: Se o m.d.c. entre a e b é 12 e o m.m.c. entre os mesmos números é 24, quais, entre os números 2, 3, 150, 5, 30 e 50, são divisores e múltiplos de a e b?
Duração: 3 horas.

Respostas:

1) 1, 2, 3, 4, 6 e 12
2) $\frac{17+8\sqrt{2}}{7}$
3) 5m
4) 3h 25m 42s $\frac{6}{7}$
5) $2x^2 - 10x + 1 = 0$
6) $5\sqrt{3}$ m ou 8,65m
7) 6,3
8) $B = 2(C - A)$
9) $x < 2$
10) 2h 24m

11) Basta traçar pelos vértices dos ângulos agudos paralelas aos catetos. Obtém-se um retângulo em que uma diagonal é a hipotenusa. Como as diagonais de um retângulo cortam-se ao meio e são iguais a mediana é a metade da hipotenusa.

Respostas:

12) $m = 1$
13) $8\frac{16}{75}$ %
14) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ m ou 2,12m
15) 25 e 10
16) 100 560mm
17) $9ab\sqrt[3]{b}$
18) 6m

19) Propriedade das proporções (Ver 3.ª Série Ginasial – Ary Quintella).

20) 2 e 3 são divisores.

ESCOLAS PREPARATÓRIAS DE CADETES DO EXÉRCITO

Prova de Matemática — 1.º Ano

(Realizada em Março de 1954)

INSTRUÇÕES

I) Procure trabalhar com rapidez, mas sem atropêlo.

II) Não se distraia, não fale, quando se enganar risque o que julgar errado e escreva mais adiante o que julgar correto.

III) A ordem de levantar, finda a prova, obedeça imediatamente.

IV) Esta prova consta de 8 fôlhas.

V) Tempo: 4 horas.

VI) Preencha o talão abaixo e aguarde a ordem de começar.

VII) Não assine esta prova.

VIII) Assine *unicamente* no talão abaixo.

QUESTIONÁRIO

1.ª Questão: Efetuar as operações:

$$6a\sqrt{63ab^3} - 3\sqrt{112a^3b^3} + 2ab\sqrt{343ab} - 56\sqrt{28a^3b}$$

2.ª Questão: Resolver: $\frac{x+3}{2} + \frac{x+4}{3} + \frac{x+5}{4} = 16$

3.ª Questão: Resolver a inequação: $\frac{3x}{4} - 9 < \frac{2x}{7} + 4$

4.ª Questão: Tornar racional o denominador da fração

$$\frac{5-7\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$$

5.ª Questão: Rezolver o sistema:

$$\begin{cases} \frac{7+x}{5} - \frac{2x-y}{4} = 3x-5 \\ \frac{5x-7}{2} + \frac{4x-3}{6} = 18-5x \end{cases}$$

6.ª Questão: Sem resolver a equação $x^2+3x-10=0$, diga:

1.º) Se as raízes têm o mesmo sinal; porque?

2.º) Qual o sinal da maior raiz; porque?

7.ª Questão: Resolver:

$$x^2 - \frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}x + 1 = 0$$

8.ª Questão: Dois indivíduos têm: o primeiro 45 anos e o segundo 15. Depois de quantos anos a idade do 2.º será um quarto da idade do 1.º?

9.ª Questão: Formar a equação do 2.º grau cujas raízes são $a \pm \sqrt{b}$

10.ª Questão: Determinar o maior valor inteiro de K, para o qual são reais e desiguais as raízes da equação:

$$3x^2-5x+K=0$$

11.ª Questão: Um feixe de quatro paralelas determina sôbre uma secante três segmentos de 6m, 8m e 10m, respectivamente. Calcular os segmentos determinados pelo mesmo feixe sôbre outra secante, cujo comprimento total entre as paralelas extremas é de 96m.

12.ª Questão: As bases de um trapézio têm, respectivamente, 30m e 20m e a altura 5m. Calcular as alturas dos triângulos obtidos ao se prolongarem os lados não paralelos.

13.ª Questão: A base de um triângulo tem 11m e os outros dois lados 20m e 13m, respectivamente. Calcular a projeção do maior lado sôbre a base.

14.ª Questão: De um ponto situado a 3m da circunferência de um círculo, traça-se uma tangente de 9m. Calcular o raio.

15.ª Questão: O apótema de um hexágono regular inscrito em um círculo mede 1,5m. Calcular os lados e os apótemas do triângulo equilátero e do quadrado, inscritos no mesmo círculo. $\sqrt{3} = 1{,}732$

16.ª Questão: Calcular o comprimento de um arco de 30° 30′ em um círculo de 10m de raio.

17.ª Questão: Calcular o lado de um quadrado cuja área é igual à área de um retângulo, cujas dimensões têm respectivamente 3m e 12m.

18.ª Questão: Um retângulo está inscrito em um círculo de 5m de raio. O perímetro do retângulo tem 28m. Calcular a área do retângulo.

19.ª Questão: Calcular a área de um trapézio inscrito em um semicírculo de 2m de raio, cujas bases são, respectivamente, o lado do triângulo equilátero e o do hexágono regular inscritos no mesmo círculo.

20.ª Questão: Calcular a área de um segmento de 60° em um círculo de 3m de raio.

Respostas:

1) $10ab\sqrt{7ab}$
2) $x=11$
3) $x<28$
4) $6\sqrt{3}-13$
5) $x=3$ $y=2$

6) 1.º) Não; porque o seu produto $P<0$; 2.º) O sinal da maior é positivo porque todo número positivo é maior do que um negativo. O sinal da maior, em valor absoluto, é negativo, porque a soma $S<0$;

7) $x_1=\dfrac{a+b}{a-b}$ $x_2=\dfrac{a-b}{a+b}$
8) há 5 anos atrás
9) $x^2-2ax+a^2-b=0$
10) $k=2$
11) 24m, 32m e 40m
12) 10m e 15m
13) 16m
14) 12m
15) $l_3=3$m $a_3=0{,}866$m
$l_4=2{,}438$m $a_4=1{,}219$m
16) 5,32m
17) 6m
18) 48m²
19) 2m²
20) 0,82m²

$\sqrt{2} = 1,414$

$\sqrt{3} = 1,732$

São Paulo Editora S/A., imprimiu.