Ruy Madsen Barbosa

MATEMÁTICA, METODOLOGIA
e
COMPLEMENTOS
para Professôres Primários

VOLUME III

Ruy Madsen Barbosa

MATEMÁTICA, METODOLOGIA E COMPLEMENTOS PARA PROF. PRIMÁRIOS

*

COMPLEMENTOS

Volume 3

1966

ÍNDICE

-o0o-

CAPÍTULO I

NUMERAÇÕES E IDÉIAS NUMÉRICAS

A. NUMERAÇÕES

A.1. Preliminares:

Na parte teórica e prática da Aritmética temos cuidado do sistema de numeração decimal e dos algarismos hindú-arábicos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Entretanto, é do conhecimento dos leitores, e nós temos inclusive usado na indicação dos capítulos, o sistema de numeração romana. Nas linhas seguintes trataremos dêsse e de alguns outros sistemas.(*)

O sistema decimal (de base 10), assim como os sistemas quinário (de base 5) e vigesimal (de base 20), deve ter origem no costume de contagem com auxílio dos dedos.

Outras bases no entanto foram utilizadas como a base 60 entre os babilônioos, até hoje conservada na divisão da hora em 60 minutos e êstes em 60 segundos. A base 2 foi empregada, por exemplo, nos símbolos do Jekim (atribuído a Fohio, (**) o mais antigo legislador da China). Hoje, os modernos computadores eletrônicos trabalham com o sistema binário.

A.2. Sôbre a Numeração Romana:

O sistema romano usa os sinais:

(*) - Para um tratamento mais completo sugerimos ao leitor consultar a bibliografia.

(**) - Ver LUCAS, Édouard - Récréations Mathématiques - 1891 - Paris - Gauthier Villars.

I	V	X	L	C	D	M ;
(1)	(5)	(10)	(50)	(100)	(500)	(1000)

é um sistema aditivo por justaposição à direita e subtrativo por justaposição à esquerda. Segue as seguintes regras:

1) Um algarismo pode ser repetido até três vêzes na mesma ordem, com exceção dos algarismos: V, L e D (primitivamente era permitida a repetição até 4 vêzes).

2) Um algarismo colocado ao lado de outro de maior valor ser-lhe-á adicionado, quando escrito à direita, e, subtraído, quando escrito à esquerda. (a repetição até 4 vêzes excluía a regra subtrativa).

3) Um algarismo intercalado entre dois de maior valor, tem seu valor subtraído do da direita, e o resultado adicionado da esquerda.

4) Um traço horizontal, colocado acima de um algarismo ou de um grupo de algarismos, torna o seu valor mil vêzes maior.

Os etruscos, povo anterior aos romanos, utilizaram os seguintes sinais:

I	Λ	X	↑ ou ↓ ou ↓
(1)	(5)	(10)	(50)

C ou ⊕	⟨ ⟩	⟨⟩⟨⟩
(100)	(500)	(1000)

Mas, como escreviam da direita para a esquerda, tinham, por exemplo:

IΛ		ΛI
(6)	e	(4)

Os romanos passaram a usar, dos etruscos, os sinais I, Λ, X, ↓ (que formou L), C e sinais como:

ↀ	ↂ
(1000)	(10.000)

de onde obteve-se os sinais

D	ↁ
(500)	(5.000)

e, também

CIƆ	CCIƆƆ
(1.000)	(10.000)

A.3. <u>Sôbre a Numeração Grega</u>:

Os gregos usavam primitivamente um sistema aditivo à direita com os sinais:

Ι	Γ	Δ	Η	Χ	Μ
(1)	(5)	(10)	(100)	(1000)	(10000)

com os quais ainda obtinham:

𐅄	𐅅	𐅆	𐅇
(50)	(500)	(5.000)	(50.000)

Usavam os gregos um outro sistema com as 24 letras do alfabeto e 3 episemas:

ϛ (stigma)	ϟ (coppa)	ϡ (sampi)
(6)	(90)	(900)

α (1) (alpha)	β (2) (Beta)	γ (3) (gamma)	δ (4) (delta)	ε (5) (Epsilon)	ζ (7) (zeta)	
η (8) (eta)	θ (9) (theta)	ι (10) (iota)	κ (20) (kappa)	λ (30) (lambda)	μ (40) (mi)	ν (50) (ni)
ξ (60) (ksi)	ο (70) (Omicron)	π (80) (pi)	ρ (100) (rho)	σ (200) (sigma)	τ (300) (tau)	υ (400) (Upsilon)
φ (500) (Phi)	χ (600) (khi)	ψ (700) (psi)	ω (800) (omega)			

Os 9 primeiros sinais eram usados também para os milhares e para as dezenas de milhar, com uma marca à esquerda ou então pontos por cima do algarismo:

,γ (3.000) $\ddot{\gamma}$ (30.000)

Exemplo: 5368
,ετξη

A.4. <u>Sôbre o sistema babilônico</u>:

Os babilônios usavam os sinais:

Y (1) ≺ (10)

Para 60, 60^2, 60^3, usavam novamente Y , revelando desta forma indícios de <u>sistema de posição</u>.

Exemplo:

$$4994 = 3600 + 1394 = 60^2 + 23 \times 60 + 14$$

Y ≺≺YYY ≺YYY
Y

A.5. <u>Sôbre o sistema binário</u>.

Para êste sistema bastam dois sinais: para o um e para o zero; por exemplo, os próprios algarismos hindu-arábicos 1 e 0.

Assim teríamos:

10	11	100	101	110	111
(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)

Neste sistema a tabela de adição é bastante fácil.

+	0	1
0	0	1
1	1	10

Exemplo:

1001 + 11 (ou 9 + 3)

$$\begin{array}{r} 11 \\ 1001 \\ \underline{11} \\ 1100 \end{array}$$

Da mesma maneira a tabela de multiplicação é fácil:-

x	0	1
0	0	0
1	0	1

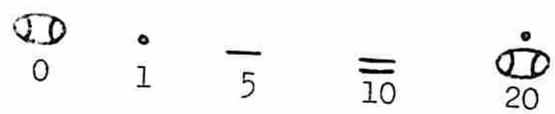
Exemplo:

1011 x 101 (ou 11 x 5)

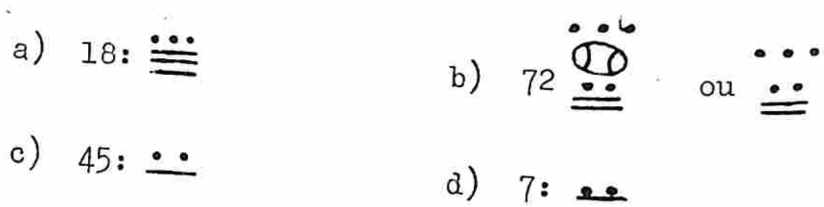
1011
101
———
1011
1011
———
110111 (ou 55)

A.6. Outras numerações.

a. Maias (vigesimal e quinário):

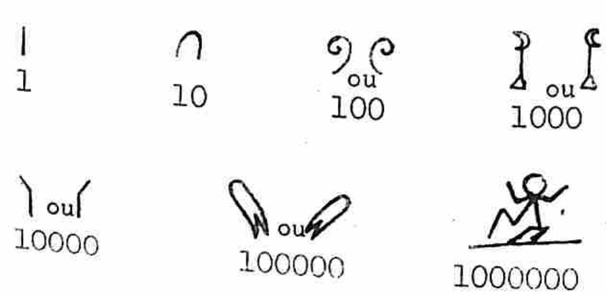


Exemplos:



Observar que no exemplo c) os pontos significam 2 x 20.

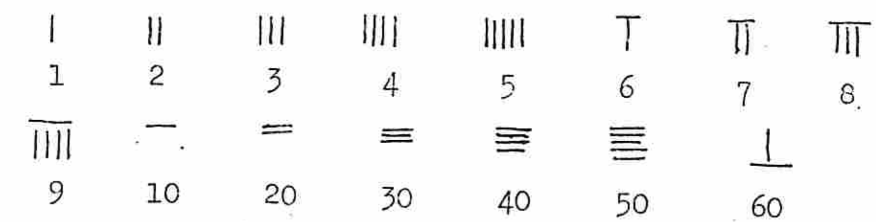
b. Egypcios:



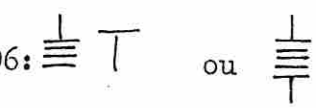
Exemplo:

1 234: 

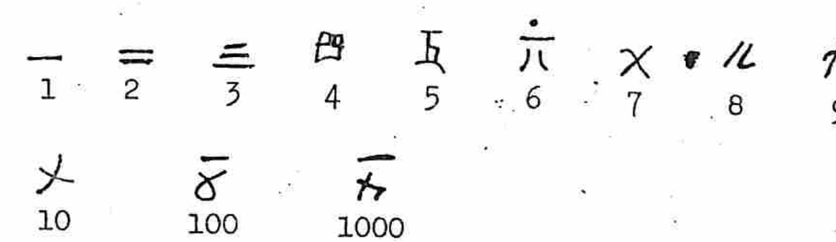
c. Chinêses: Primitivamente os chinêses e japonêses utilizavam numeração lineográfica posicional, e também de base 10, tendo mais tarde utilizado inclusive um sinal para o zero igual ao nosso:



Exemplo:

96: 

Utilizaram depois outros tipos de algarismos, como os seguintes:



Exemplo:

34: 

B. NUMERAIS

B.1. Preliminares.

Qualquer palavra da língua portuguêsa é classificável em uma das dez classes, conforme a nova nomenclatura gramatical brasileira. A classe dos numerais é constituída das palavras que contém idéia de número.

Do ponto de vista matemático a classe dos numerais é considerado mais ampla, agregamos também os símbolos dos números; assim, os algarismos são numerais. Também, como a matemática é universal, qualquer palavra designativa de número, em qualquer língua, é numeral; de onde o leitor, conclui, por exemplo, que: 3, três, trois, ≡ e three são numerais de um mesmo número, de uma mesma idéia.

B.2. Numerais Cardinais.

Na primeira parte do livro introduzimos e estudamos os números com suas denominações no seu aspecto cardinal. Agora, procuraremos complementar aquêles elementos aritméticos fornecendo ao leitor a origem na nossa língua e outros dados que julgamos úteis. Para facilitar a explicação usaremos o sinal ⟵ indicando proveniência do latim:

masc.: um ⟵ ũu ⟵ unu
fem.: uma ⟵ ũa ⟵ una.

Primitivamente o significado de "unus" era "único" "só", e esta significação é ainda empregada.

masc.: dois ⟵ doos ⟵ duos .
fem.: duas ⟵ duas

três ⟵ tres
quatro ⟵ quattor ⟵ quattuor
cinco ⟵ cinque ⟵ quinque
seis ⟵ sex
sete ⟵ septe ⟵ septem
oito ⟵ octo

nove ⟵ novem
dez ⟵ dece ⟵ decem
onze ⟵ ondze ⟵ undece ⟵ undecim
doze ⟵ dodze ⟵ dodece ⟵ duodecim
treze ⟵ tredze ⟵ tredece ⟵ tredecim
quatorze ⟵ | quatordeze ⟵ quattordece ⟵ quattuordecim
catorze ⟵ |
quinze ⟵ quindze ⟵ quindece ⟵ quindecim

{ dezesseis ⟵ dece et sex
{ dezasseis ⟵ dece ac sex

{ dezessete ⟵ dece et septe
{ dezassete ⟵ dece ac septe

{ dezoito ⟵ dece et octo
{ dezóito ⟵ dezooito ⟵ dezaoito ⟵ dece ac octo

{ dezenove ⟵ dece et novem
{ dezanove ⟵ dece ac novem.

Sôbre os numerais: onze, doze, treze, catorze, quinze, já expusemos anteriormente a vantagem metodológica e de uniformização matemática que julgamos importante procurarmos introduzir as denominações: dezeum, dezedois, dezetrês, deze-quatro, e dezecinco.

Aproveitamos para lembrar que justamente a respeito da pronúncia de 14, quer se escreva qu-a-tor-ze ou ca-tor-ze, deve-se ler catorze.

As formas dezasseis, dezassete,(*), dezóito (dezaoito)

(*) A forma dezanove e dezassete são usadas no Brasil, também onde houve influência de imigração italiana: diciassette, diciannove; o mesmo acontecendo com a forma dezóito de diciotto, que se pronuncia ditchióto.

e dezanove (*) são usadas em Portugal e em várias regiões do Brasil onde houve e há grande influência portuguêsa; nos Estados de São Paulo e Minas Gerais estas formas pertencem a dialetos populares, e, portanto, bastante brasileiras.

vinte ← viinte ← viinti ← viginti
trinta ← triinta ← triginta
quarenta ← quareenta ← quaraenta ← quadraginta
cinqüenta ← cinqueenta ← cinquaenta ← cinquaginta ← quinquaginta
sessenta ← sesseenta ← sessaenta ← sexaginta
setenta ← seteenta ← setaenta ← septaginta ← septuaginta
oitenta ← oiteenta ← oitaenta ← octaginta ← octoginta
noventa ← noveenta ← novaenta ← novaginta ← nonaginta

Sôbre a palavra cinqüenta os gramáticos invocando "quinquaginta" dão como errada a forma cincoenta; novamente aqui, cabe a indagação, não seria mais fácil, quer do ponto de vista da metodologia da aritmética, quer da dificuldade de uma criança em escrever corretamente com "qu" e ainda com trema, aceitar-se a forma cincoenta, inclusive já usada por muitos?

duzentos ← ducentos
trezentos ← trecentos
quinhentos ← quingentos.

As formas quatrocentos, seiscentos, setecentos, oitocentos, novecentos, não são oriundas do latim, mas do próprio português por agregação dos cardinais quatro, seis, sete,

(*) A forma dezanove e dezassete são usadas no Brasil, também onde houve influência de imigração italiana: diciassette, diciannove; o mesmo acontecendo com a forma dezóito de diciotto, que se pronuncia ditchióto.

oito e nove a cento:

cem ← cento ← centu.

Sôbre a fixação dos cardinais o leitor deve ter observado que êles não se flexionam; exceção para um e dois, cuja forma feminina é uma e duas. São também exceções as centenas: duzentos, trezentos, etc. que possuem os femininos: duzentas, trezentas, etc..

A separação de cada numeral cardinal em classes de três em três algarismos na numeração escrita com palavras deve ser feita com vírgulas: e, na leitura, com pequena pausa na voz.

Em cada classe unimos as ordens com a conjunção "e", que também deve ser usada entre a penúltima e a última classe.

Exemplifiquemos:

4 325 486

Quatro milhões, trezentos e vinte e cinco mil, e quatrocentos e oitenta e seis.

B.3. Numerais Ordinais.

O ordinal primeiro é proveniente de primairo e êste de primarius; entretanto, a forma latina clássica era primus, que deu origem ao vocábulo primo (forma literária de primeiro), e primo (parentesco em primeiro grau lateralmente), e o feminino prima.

Na própria aritmética usamos "número primo" como especialização, número gozando de propriedade especial de não possuir divisor próprio.

O ordinal segundo vem de secundus, cujo significado anterior era "o seguinte".

O ordinal terceiro vem de terçairo e êste de tertiariu. O ordinal latino clássico era tertius que nos forneceu têrço (*) (numeral fracionário) empregado nas frações e têrça (têrça-feira), dia da semana, como terceiro dia da semana.

Os outros ordinais são:

quarto, quinto, sexto, sétimo, oitavo, nono e décimo;
vigésimo, trigésimo, quadragésimo, qüinquagésimo, sexagésimo, septuagésimo, octogésimo, nonagésimo; (**)
centésimo, ducentésimo, tricentésimo, quadringentésimo, qüingentésimo, sexcentésimo, septingentésimo, octingentésimo, nongentésimo, milésimo, milionésimo, etc.

Exemplo:

14238º

Décimo quarto milésimo, e ducentésimo trigésimo oitavo.

O feminino dos ordinais é formado com a regra usual da troca de "o" por "a".

São também corretas as formas:

primário, secundário, terciário, ou tercionário, quaternário, qüinqüenário, setenário, octonário, etc., bem como as formas pouco usadas e, creio, não devemos reavivar:

noveno (novena) (***), dezeno (dezena), onzeno (onzena) dozeno (dozena), trezeno (trezena)(***), vintena, etc. (****)

(*) - O substantivo têrço (de rezar) tem a mesma origem, é um têrço do rosário.
(**)- O "s" deve ser pronunciado sonoro como se fosse z:vigézimo, etc.
(***)-Não confundir com os substantivos que significam rezar nove (ou treze)dias, em geral seguidos.
(****)- Como substantivos representam grupos de 9, de 10, etc.

Na indicação de papas, reis, capítulos e séculos usa-se o ordinal correspondente caso o número designativo seja de 1 a 10:

Papa Paulo VI	-	Papa Paulo sexto
D. Pedro II	-	D. Pedro Segundo
Capítulo IV	-	Capítulo Quarto
Século IX	-	Século Nono.

Para designação superior a 10 são distinguidos dois casos:

a) Numeral antes do substantivo: usa-se ainda ordinal

Exemplos:

O décimo oitavo capítulo
O vigésimo terceiro João

b) Numeral depois do substantivo: usa-se cardinal.

Exemplos:

João XXIII	-	João Vinte e Três
Século XIX	-	Século dezenove.

B.4. Numerais Fracionários.

Como explicamos no capítulo referente às frações, aprendemos que os numerais fracionários são: meio, têrço, quarto, quinto, sexto, sétimo, oitavo, nono, décimo; e, os outros com o emprêgo do cardinal acrescido da palavra avos (tirada de oitavo).

São corretas as formas: centésimo, ducentésimo, etc..

Para $\frac{1}{1000}$ em diante pode-se usar forma análoga a ordinal: milésimo, milionésimo, etc.; entretanto, não havendo perigo de confusão (*) pode ser usada a forma com a palavra avos.

Exemplo:

$$\frac{1}{4382}$$

quatro mil, e trezentos e oitenta e dois avos (ou antepondo o vocábulo "um" , correspondente ao numerador).

B.5. Numerais Multiplicativos (**)

São usados na nossa língua numerais que dão idéia de multiplicação (ou repetição) do substantivo a que estão ligados.

Para o multiplicativo ligado ao "um" emprega-se simples ou singelo.
Para o "dois" tem-se duplo, dôbro; e, também existem as formas dúplice e dobre. A palavra "bis" (advérbio) (***) tem também o significado de repetição duas vêzes.

Para o "três" tem-se triplo, tríplice, ternário e trino (****).

Para os outros números tem-se: quádruplo, quíntuplo, sêxtuplo, sétuplo, óctuplo, nônuplo, décuplo, undécuplo, duodécuplo.

Não há formas numerais multiplicativas para os outros números, exceto: cêntuplo, ducêntuplo, tricêntuplo, etc.

(*) - Por exemplo: 2/1000 (seria errado dizer: dois mil avos), deve se dizer dois milésimos, ou então: dois, um mil avos.
(**) - Ou proporcionais.
(***)- Bis pode ser também interjeição.
(****)- O substantivo terno não é usado como multiplicativo e sim como grupo de três, conforme o sentido, pode ser considerado numeral distributivo.

A forma dôbro, mais popular, forneceu outras formas populares: tresdôbro, quatrodôbro, etc., no sentido de triplo, quadrúplo, etc.; e, não três vêzes dois, etc., como poderia ser interpretado.

C. Indicação de Idades.

As idades das pessoas são muitas vêzes classificadas de 10 em 10 anos; de onde derivam denominações para as pessoas conforme o intervalo a que estejam; assim, uma pessoa com 60 anos de idade, ou mais que 60 e menos que 70, é denominada sexagenário, nome oriundo do latim sexagenarius.

Nessas diversas denominações, em geral, o vocábulo consta de três partes: a primeira numérica, indicativa do intervalo, a segunda gen (ou gene) indicativa de vida, e a terceira constituída do sufixo ario (ou aria) que indica quantidade.

Tem-se:

40 ⊢— 50: quadragenário
50 ⊢— 60: qüinquagenário
60 ⊢— 70: sexagenário
70 ⊢— 80: setuagenário
80 ⊢— 90: octogenário
90 ⊢— 100: nonagenário

cujos femininos são feitos com a regra usual da troca de "o" em "a".

São usadas também as formas: quarentão, cinqüentão, sessentão, setentão, oitentão, noventão, de femininos em "ona".

Para uma pessoa do intervalo 30 ⊢-- 40, usa-se as palavras: trintenário, trintaneiro, e trintão.

Para o intervalo 100 ⊢-- x usa-se centenário.

D. Outras formas numéricas.

A forma ambos é outro numeral correspondente a dois, a qual é usada muitas vêzes pleonàsticamente: ambos os dois, ambos e dois, ambos de dois, ambos a dois.

Outros numerais, em geral substantivados, são: novena, dezena, centena, cento, milhar, dúzia, par, casal, terno, trinca, quadra, quinta, quintos, etc.(*)

As combinações de formas numéricas com outros vocábulos deram novas palavras.

Parece-me importante aproveitar a oportunidade, e dar como exemplo as designações de ascendentes e descendentes; assim, de avô (ó), obtem-se:

bisavô (ó) - pai do avô (duas vêzes avô)

trisavô (ó) - tresavô (ó) , ou as formas tresbisavô (ó), trisbisavô (ó) - pai do bisavô (três vêzes avô).

tetravô (ó) ou tataravô (ó) - pai do trisavô (quatro vêzes avô).

bisneto (a) - filho do neto (duas vêzes neto)

trineto (a) - ou trisneto (a) - filho do bisneto (três vêzes neto)

tetraneto (a) ou tataraneto - filho do trineto (quatro vêzes neto).

(*) - A palavra cinqüina ou quina indicativa de grupo de cinco, parece-nos de origem italiana, ainda não está incorporada à nossa língua através dos livros, mas já é usável.

CAPÍTULO II

CALENDÁRIO

A. MEDIDA DO TEMPO

A unidade de tempo legal, é o segundo, da símbolo "s ou seg", que é o intervalo de tempo igual à fração 1/86400 do dia solar médio.

Desta unidade principal, são tiradas as unidades secundárias: as mais conhecidas são são dadas pelo quadro abaixo:

minuto	m ou min	60 s
hora	h	3600 s = 60 min.
dia	d ou da	86400s = 14400min = 24h.

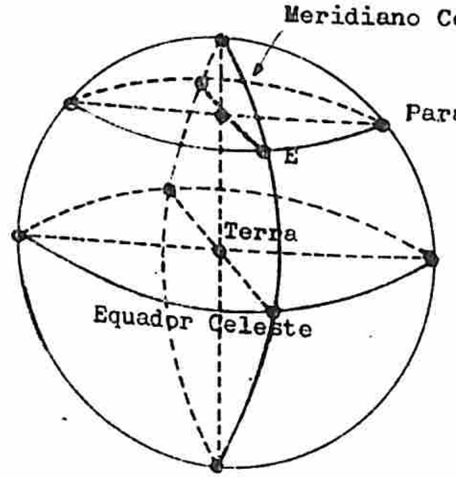
Entretanto, acreditamos que esta definição não seja fàcilmente entendida, me permito entrar em alguns detalhes a respeito.

O movimento da terra, de rotação, se reflete num movimento diário de todos os corpos siderais, aparentando para nós, que vivemos na Terra, que os corpos se movimentam numa esfera (dita esfera celeste), da qual a Terra é o centro.

Neste movimento diurno alguns corpos parecem descrever arcos aparecendo no horizonte (nascimento) e, depois desaparecendo do outro lado do horizonte (ocaso). Outros parecem descrever circunferências paralelamente ao horizonte.

Denomina-se eixo do mundo, a reta em volta da qual gira a esfera celeste.

Passando perpendicularmente ao eixo do mundo e pelo centro da Terra um plano obtemos o horizonte. Os círculos - da esfera celeste paralelos ao horizonte, são denominados paralelos celestes; e, os círculos da esfera, que pertencem a planos verticais ao horizonte e passando pelo eixo do mundo são os "meridianos celestes". O paralelo celeste que pertence ao horizonte chama-se equador celeste. (Ver Figura 97).



Cada estrêla descreve o seu paralelo celeste; e, o tempo gasto por tôdas é o mesmo (*).

Chama-se dia sideral o intervalo de tempo compreendido entre duas passagens consecutivas de uma estrêla pelo mesmo meridiano celeste.

O movimento do sol sôbre a esfera celeste, não se faz entretanto num paralelo celeste, mas sim, da forma ascendente e depois descendente, que é reflexo da inclinação do eixo da terra sôbre o plano do movimento de translação em volta do sol.

(*) Reflexo do movimento de rotação da Terra.

Durante o ano, o sol vai mudando a sua posição no espaço (refelxo do movimento de translação da Terra), descreve vendo na esfera celeste um círculo máximo denominado eclítica. (Fig.98).

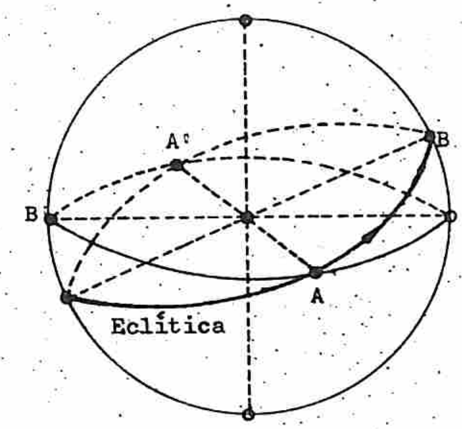


Fig.98

Onde a eclítica intersecciona o equador celeste,tem se os pontos equinociais ou equinócios, (o dia é igual à noite).

Na ascenção (ponto A da figura) tem-se o equinócio de primavera, e o outro (A') é o equinócio de outono. Os outros pontos (B e B') , que dividem a eclítica em 4 partes, - são os solstícios de verão e de inverno.

Descrevendo no seu movimento aparente a eclítica, o sol passa nas regiões da esfera celeste das constelações de: Areis, Touro, Gêmeos, Câncer, Leão, Virgem, Balança, Escor - pião, Sagitário, Capricórnio, Aquário, e Peixes.

Chama-se dia solar o intervalo de tempo compreendido entre duas passagens consecutivas do sol pelo mesmo meridiano celeste. Como o dia tem o seu movimento sôbre a eclítica o dia solar é maior que o dia sideral.

O dia solar é variável por várias causas, como por exemplo, a velocidade do sol sôbre a eclítica (reflexo da velocidade da Terra no movimento de translação), e principalmente da obliqüidade da própria eclítica. Em vista desta variação utiliza-se um dia solar médio.

Chama-se ano trópico ao intervalo compreendido entre duas passagens consecutivas do sol pelo equinócio de primavera (ou ponto vernal).

Encontra-se que o ano trópico possui aproximadamente 365,252238 dias solares médios, de onde, a dificuldade para a instituição do ano civil.

B. CALENDÁRIO

B.1. Calendário.

O ano civil é um ano convencional, com um número exato de dias. Para a indicação de um acontecimento no tempo, dá-se a data do fato, a data nada mais é que o intervalo de tempo entre o acontecimento e um acontecimento importante, usado como origem de contagem. Após um fato importante usado como ponto de referência para as datas, tem-se a era.

Calendário é um conjunto de regras que permitem concordar o ano civil com o ano trópico, datas e estações. Atualmente o vocábulo calendário possui também o sentido restrito de "folhinha", pequeno folhêto, ou almanaque, onde constam indicações numéricas dos dias, dias da semana, fases da lua, etc.

B.2. Ano Civil.

O ano civil adotado no Brasil consta de 365 dias ou

então de 366 com um dia complementar, 29º dia do mês de Fevereiro, o que se dá de quatro em quatro anos.

O ano civil de 366 dias é denominado bissexto. São bissextos os anos cujo número indicativo do ano, contando na era cristã (*) é divisível por 4; são exceções os terminados em 00 cuja parte secular não é divisível por 4 (1700, 1800, 1900, 2100, ...). Com esta convenção em cada quatro anos aumenta-se um dia, mas em cada período de 400 anos não se aumentam 3 dias.

A razão é bastante fácil de ser verificada:

(Número de dias do ano trópico) - (Número de dias do ano civil) =

$$= 365,242238 - 365 =$$
$$= 0,242238 \cong 0,25 - 0,0078 =$$
$$= \frac{1}{4} - 0,0075 - 0,0003 =$$
$$= \frac{1}{4} - \frac{3}{400} - \frac{3}{10.000}$$

O leitor poderá observar na expressão anterior que com os cuidados tomados haverá necessidade ainda de aproximadamente 3 dias não serem bissextos num período de 10 000 anos.

O nosso ano civil é dividido em 12 meses denominados: Janeiro, Fevereiro, Março, Abril, Maio, Junho, Julho, Agôsto, Setembro, Outubro, Novembro, e Dezembro, respectivamente com: 31, 28, 31, 30, 31, 30, 31, 31, 30, 31, 30 e 31 dias.

O ano é ainda separado em 52 semanas e mais um dia, (ou dois), tendo cada semana 7 dias denominados: Domingo, Se

(*) - A partir do nascimento de Jesus Cristo.

Gunda-feira, Terça-feira, Quarta-feira, Quinta-feira, Sexta-feira, e Sábado.

B.3. Um pouco de História.

Primitivamente o calendário romano constava de um ano de 304 dias de 10 meses: Março, Abril, Maio, Junho, Quintilis, Sextilis, Setembro, Outubro, Novembro e Dezembro, sendo 6 meses com 30 dias e quatro com 31. Mais tarde Numa Pompílio acrescentou os meses de Janeiro e Fevereiro, (*) totalizando 355 dias, e, mais tarde foi ainda acrescentado um outro mês, de 11 dias.

No ano 708 da era romana, (**) o imperador Júlio César, realizou nova reforma do calendário, denominada reforma juliana.

Instituiu o novo calendário que o ano da reforma tivesse 445 dias (ano da confusão); os outros anos teriam 365 dias, e de quatro em quatro anos seria intercalado mais um dia dando origem ao chamado ano bissexto, O mês de Janeiro passaria a ser o primeiro, de onde o desacôrdo numérico dos nomes com a ordenação.

Essa denominação surgiu do fato do dia intercalado ser introduzido entre o dia 23 e o dia 24 de Fevereiro, que era o sexto dia antes de Março; assim, tinha-se um dia contado duas vêzes: "ante diem sextum kalendas martias" e "ante diem bissextum kalendas martias"(***).

(*) - Desta forma Fevereiro ficou sendo o último mês do ano.
(**) - Da fundação de Roma.
(***)- Os romanos dividiam cada mês em três partes: calendas, nonas e idos. O sexto dia antes das calendas de Março era de comemoração da expulsão de Tarquínio Soberbo, dia da Regífuga.

Após essa reforma, em homenagem a Júlio César, o cônsul Marco Antonio fêz com que se decretasse que o mês quintilis se chamasse Julius (Julho).

O senado, mais tarde, em homenagem ao imperador Augusto César, denominou o mês sextilis de Agusustus (Agôsto); mas para que o mês do imperador não tivesse menor número de dias que o de Julius, o seu mês ficou, também, com 31 dias, e, para isto, parece, retiraram do mês de Fevereiro.

O calendário, assim instituído, correspondia em tomar o ano civil com 365 dias e um quarto, portanto, maior que o ano trópico.

Para corrigir o êrro, o papa Gregório XIII (Reforma Gregoriana) em 1582 decretou, que o dia 5 de Outubro de 1582 se chamasse 15 de Outubro de 1582; suprimindo, desta forma, 10 dias, pois o êrro já era nessa data aproximadamente igual a 10 dias e instituindo a supressão de 3 bissextos em cada período de 400 anos.

Desta forma, hoje ainda seguida por nós, decorre o fato de que, quando atingirmos o ano 4.000 estaremos novamente com um ano de diferença.

B.4. Sôbre os meses.

Vimos que os meses Julho e Agôsto são denominados em homenagem aos imperadores romanos.

O nome Janeiro (Januarius) vem de "Janus", deus da dupla face, o qual via o passado e o futuro. Fevereiro - (Februaris), de Februa, comemoração aos mortos, (*) Março - (Mars) vem de Marte, deus da guerra, Abril (Apriles), abrir, mês de abertura das flôres, Maio (maia), deusa, mãe da deu-

(*) - Ou de Febris - mês de febres.

da Mercúrio. Junho (Juno), esposa do deus Júpiter, Os outros nomes indicam a antiga ordenação dos meses.

B.5. Sôbre os dias da semana.

Pelo fato do ano possuir 52 semanas e um dia, cada ano começa por um dia da semana seguinte ao dia da semana em que começou o ano anterior. É dêste fato que decorre que os aniversários, por exemplo, cada ano, vão se realizando, assumindo, sucessivamente, todos os dias da semana. Porém no ano bissexto os que aniversariam depois de 29 de Fevereiro terão o seu aniversário deslocado mais um dia da semana.

Por motivos de astrologia, os dias da semana possuiem denominações ligadas aos planetas conhecidos (*).

Essas denominações ainda são conservadas total ou parcialmente em várias línguas; por exemplo: Sunday (inglêsa) Sountag (Alemão) para o domingo; Monday (inglêsa), Lundi (francêsa), Lunedi (italiana) para a segunda-feira; Mardi (francêsa), Martes (espanhola) Martedi (italiana) para a terça-feira, etc.

Na consagração aos planetas, cada hora do dia era destinada a um planeta; a primeira hora é que dava o nome ao dia da semana.

A ordem das consagrações seguia a ordem das distâncias aos planetas; desta forma, como o dia possui 24 horas, e 24 dividido por 7 dá 3 e sobra 3, cada dia da semana começava com a hora do planeta que ocupa o quarto lugar na ordenação por distâncias, que é: Lua, Mercúrio, Vênus, Sol, Marte Júpiter, e Saturno.

(*) Inclua-se o sol e a lua como planetas (exceto a Terra).

Por esta razão a ordem dos dias da semana é:

Lua, Marte, Mercúrio, Júpiter, Vênus, Saturno e Sol.

Na nossa língua, entretanto, as denominações são completamente diferentes: o dia do sol para nós é o domingo, de dies domenica, dia do senhor.

O vocábulo feira parece ter dois motivos: proveniente de férias (feriado) e de feira (mercado).

Houve tempo em que a semana posterior à Páscoa era de férias, daí a primeira féria (domingo, dia do senhor), e os outros, segunda féria, têrça féria, etc..

Outra derivação de feira, decorre das trocas comerciais que ocorriam nas feiras, no período da denominação árabe em Portugal: segundo dia de feira, terceiro dia, etc..

O vocábulo sábado parece provir de assabti (árabe), ou xabbath (hebráico) que significa descanso.

B.6. Outras unidades de tempo.

São empregadas também como unidades para contagem de tempo, as designações seguintes:

semestre	-	seis meses
trimestre	-	três meses
quadrimestre	-	quatro meses
bimestre	-	dois meses
quinzena	-	quinze dias
dezena	-	dez dias
biênio	-	dois anos
triênio	-	três anos.

quadriênio - quatro anos
qüinqüênio (ou lustro) - cinco anos
decênio (ou década) - dez anos
século - cem anos
milênio - mil anos.

*

CAPÍTULO III

ALGUNS PROBLEMAS FAMOSOS

A. Preliminares

Entre os problemas de aritmética, alguns são bastante conhecidos, infelizmente, pela ojeriza que despertaram; entre êstes podemos citar o problema das torneiras e o problema do cão e da lebre.

No meu entender, tais e outros problemas, devem ser abolidos do ensino primário, e apelo aos ilustres mestres do ensino secundário que os excluam dos exames de admissão. Os raciocínios bastante particulares, para não dizermos às vêzes difíceis , exigidos para o sêu ensino, tornam penosa e talvez pouco vantajosa a sua aprendizagem. No caso específico das provas de admissão o mal se agrava,pois os alunos que tiveram a "sorte" de terem recebido ensinamentos que lhes permitiram "decorar" os cálculos a seguir , bem se sairão; entretanto, os outros, raramente perceberão o processo a empregar.

O mesmo não se verifica para cursos mais avançados, para alunos de maior idade; é imprescindível que o professor primário conheça bem a Aritmética e os problemas atinentes a ela; o conhecimento do mestre deve ser superior àquêle a transmitir; e, diga-se de passagem, o professor precisa precaver-se para a resolução de problemas, questões e testes de caráter matemático, tão comuns em almanaques,etc.

tantas vêzes trazidos pelos meninos, sequiosos por agradarem os seus queridos mestres.

Procuraremos, nas linhas a seguir, tratar de problemas dêste gênero, raciocinando o tanto quanto possível com o leitor.

E. <u>Problema dos trens</u>.

Êste problema apresenta dois tipos fundamentais: trens no mesmo sentido e trens em sentidos opostos. Em qualquer dos tipos é costume dar-se as velocidades de cada trem e a distância que os separa e faz-se duas perguntas: o tempo até encontrarem-se (ou para o mais veloz alcançar o menos veloz), e o ponto de encontro.

Para podermos expor, mais fàcilmente, façamos através de exemplos numéricos:

<u>Problema 1:</u> Dois trens partem simultâneamente das cidades A e B, distantes 100 km uma da outra, no mesmo sentido, com as velocidades de 60 e 40 km/h, respectivamente. Depois de quanto tempo um alcançará o outro, e em que lugar?

Inicialmente cabe uma ressalva, um cuidado, uma "pegadinha""" como comumente os alunos o dizem. Excluindo-se a interpretação de <u>alcançar</u>, pode acontecer dos dois trens nunca ficarem juntos, pois bastaria que o sentido de percurso fosse de B para A. Vejamos o caso normal:

Como o primeiro trem vai a 60 km/h e o outro a 40 km/h, em cada hora de percurso o primeiro ganha 20 quilômetros (diferença de velocidades).

Para ganhar 100 quilômetros gastará 100 : 20 = 5 , cinco horas. Alcançará, portanto, um ponto, após cinco horas de percurso de qualquer dos trens.

Distância da cidade A: 5 x 60 = 300, trezentos quilômetros.

ou

Distância da cidade B: 4 x 40 = 200, duzentos quilômetros,

que confere, pois 300- 200 = 100.

<u>Problema 2:</u> Dois trens partem simultâneamente das cidades A e B, distantes 240 km uma da outra, em sentidos opostos, com velocidades de 50 e 30 km/h , respectivamente. Depois de quanto tempo se encontrarão, e em que lugar?

Cabe, novamente aqui, a ressalva que deixamos ao espírito arguto dos leitores.

A distância entre os trens diminue por hora de 50 + 30 = 80, oitenta quilômetros; portanto, para ficar nula a distância, gastar-se-á 240 ÷ 80 = 3, três horas. Os trens se encontrarão num ponto depois de qualquer trem percorrer três horas, isto é:

Distância da cidade A: 3 x 50 = 150, cento e cinquenta quilômetros

Distância da cidade B: 3 x 30 = 90, noventa quilômetros

que confere, pois 150 + 90 = 240.

ALGÈBRICAMENTE a solução é a mesma:

Seja C o ponto de encontro; tem-se

$$AC = v \times t$$

$$BC = v' \times t$$

$$d = AC + BC = v \times t \pm v' \times t = (v \pm v') \times t$$

de onde:

$$\boxed{t = \frac{d}{v \pm v'}}$$

ou, no problema 1:

$$t = \frac{100}{60 - 40} = 5 \quad \text{(cinco horas)}$$

e, no problema 2:

$$t = \frac{240}{50 + 80} = 3 \quad \text{(três horas)}$$

GRÀFICAMENTE o processo leva a encontrar primeiramente o ponto de encontro.

Problema 1: (Fig.99)

Construção: Dados $\begin{cases} AB = d \\ AD = v \\ BE = v' \end{cases}$

Reta DE até cruzar com AB em C.

Solução $\begin{cases} AC = 300 \\ BC = 200 \end{cases}$

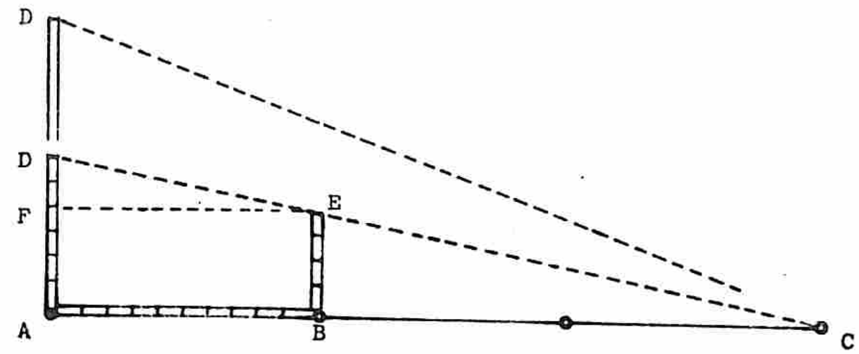


Fig. 99

Problema 2:

Construção: Dados $\begin{cases} AB = d \\ AD = v \\ BE = v' \end{cases}$

Reta DE cruzando AB em C.

Solução $\begin{cases} AC = 150 \\ BC = 90 \end{cases}$

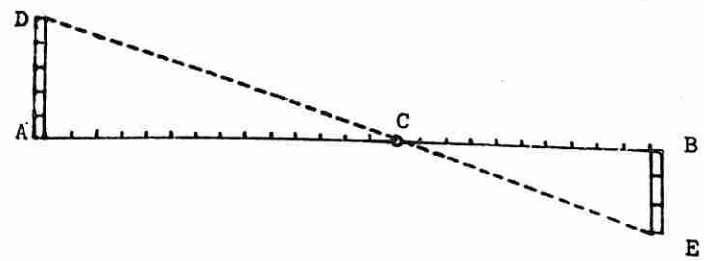


Fig.100

Justificativa:

$$\triangle ADC \sim \triangle CBE \Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{v'}{v} \Rightarrow \frac{BC + AC}{AC} = \frac{v + v'}{v}$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{AC} = \frac{v + v'}{v} \Longrightarrow AC = v \times \frac{d}{v + v'} = v \times t$$

CARTESIANAMENTE o problema dos trens possui outra solução gráfica baseada na representação retilínea de uma função linear. Usa-se um sistema de eixos cartesianos perpendiculares:

$$\begin{cases} \text{eixo horizontal} \longrightarrow \text{eixo dos tempos: } t \\ \text{eixo vertical} \longrightarrow \text{eixo dos espaços: } y \end{cases}$$

Para o 1º trem o movimento é dado pela função linear:

$$y = v \times t = 60 \times t$$

Para o 2º trem: $y = d + v' \times t = 100 + 40 \times t$

As velocidades correspondem às inclinações. A intersecção das duas semiretas representativas possui como coordenadas as respostas do problema.

$$\begin{cases} t = 5 \\ y = 300 \end{cases}$$

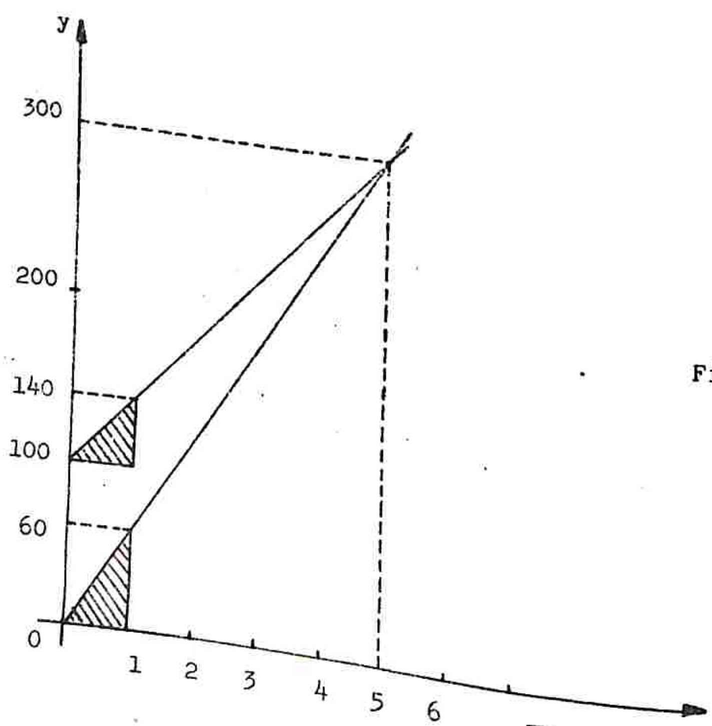


Fig.99

Fig. 101

Para o problema 2 as funções lineares dos movimentos são as seguintes, onde usou-se velocidade negativa para o segundo trem:

$$\begin{cases} y = v \times t = 50 \times t \\ y = d + v' \times t = 240 - 30 \times t \end{cases}$$

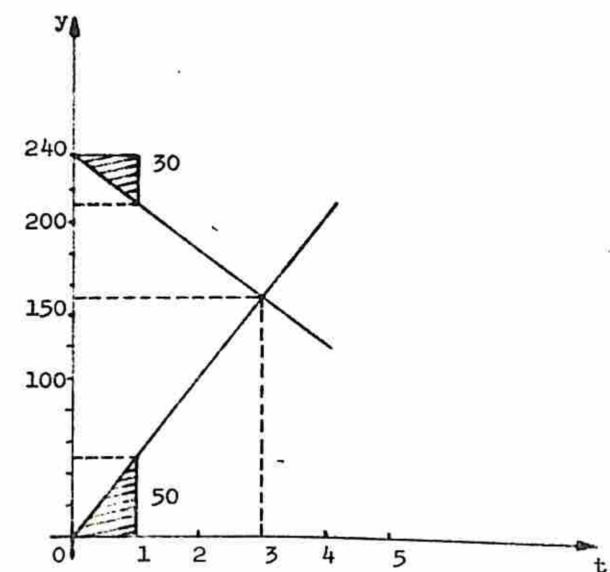


Fig.102

<u>Nota</u>: Quando os trens não partem simultâneamente o problema é transformável num dos dois tipos fundamentais.

C. <u>Problema das torneiras</u> (ou do tanque).

O problema das torneiras, é outro curioso, no qual se dá às vazões de duas torneiras, ambas enchendo (ou esvaziando), ou uma enchendo e outra esvaziando um tanque. A capacidade do reservatório pode ser dada ou não, cuja influência no problema é mínima. Pede-se o tempo gasto para se encher (ou esvaziar) o tanque.

O leitor poderá para facilidade de entendimento interpretá-lo como outra forma do problema dos trens.(*)

Façamos exemplos numéricos:

<u>Problema 1</u>: Uma torneira, quando aberta, enche um tanque em 3 horas; outra esvazia-o em 8 horas. Abrindo-se, simultâneamente, em quanto tempo o tanque ficará cheio?(**).

Como a primeira torneira enche-o em 3 horas, em uma hora encherá só 1/3 do reservatório, se aberta só. Idem, a segunda, também isoladamente, por esvaziar o tanque em 8 horas, em uma hora esvazia 1/8 do mesmo.

Abertas, simultâneamente, em uma hora o tanque se encherá apenas de

isto é: $\frac{1}{3} - \frac{1}{8}$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{8} = \frac{8-3}{24} = \frac{5}{24}$$

As duas enchem 5/24 do tanque em uma hora; portanto, 1/24 do tanque, que é 1/5 da quantidade anterior, são incluídos 1/5 do tempo, isto é, em 1/5 de hora.

(*) - Com o cuidado requerido: uma torneira enchendo e outra esvaziando como trens no mesmo sentido; torneiras enchendo(ou esvaziando) como trens em sentidos opostos.

(**)- Anàlogamente o problema do tanque estar cheio e a torneira que esvazia ter maior vazão.

Para encherem todo o tanque, ou 24/24, levarão 24 vêzes mais, isto é:

$$24 \times \frac{1}{5} \text{ ou } \frac{24}{5} \text{ de hora,}$$

que podemos obter com a divisão abaixo:

24	5
4	4 h. 48 min.
60	
240	
40	
0	

ou, no caso, como 1/5 de hora é 60 : 5 = 12, doze minutos,- teremos em 24 vêzes êste tempo:

$$24 \times 12 = 288$$

e 288 minutos são 4h 18 min, obtidos com divisão por 60.

Caso seja dada a capacidade do reservatório, por exemplo 120 litros, a resposta seria a mesma, e talvez mais fácil de ser resolvido (ou pelo menos entendido).

Em uma hora a primeira enche 120 ÷ 3 = 40, quarenta litros.

Em cada hora, abertas simultâneamente, teremos 40 - 15 = 25, vinte e cinco litros a mais no tanque; portanto, para encher 120 litros, teremos gasto em horas: 120 : 25 ou

120	25
20	4h 48 min
x60	
1200	
200	
00	

Problema 2:

Duas torneiras, quando abertas sòzinhas, enchem (ou esvaziam) um reservatório em 4 e 5 horas, respectivamente.- Abertas simultâneamente, em quanto tempo ficará cheio (ou vazio)?

O raciocínio inicial é o mesmo; assim chegaremos a:

A primeira enche em uma hora 1/4 do reservatório, e a segunda enche em uma hora 1/5 do reservatório; portanto, juntas, em uma hora enchem uma fração do tanque igual a:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{5+4}{20} = \frac{9}{20}$$

De onde concluímos que 1/20 do tanque são enchidos em 1/9 de hora (6 min 40 seg).

Para encher todo o tanque, isto é, 20/20 do tanque, gastar-se-á 20 vêzes mais, portanto:

$$20 \times \frac{1}{9} = \frac{20}{9}$$

$$\begin{array}{r|l}
20 & 9 \\ \cline{2-2}
2 & \text{2 h 13 min 20 seg} \\
\underline{\times 60} & \\
120 & \\
30 & \\
3 & \\
\underline{\times 60} & \\
180 & \\
00 &
\end{array}$$

ou:

$$\begin{array}{rr|l}
\text{6 min} & \text{40 seg} & \\
 & \times 20 & \\ \hline
\text{120 min} & \text{800 seg} & 60 \\ \cline{3-3}
 & 200 & \text{13 min} \\
\text{13 min} & \underline{60}\ \text{seg} & \\ \hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
\text{133 min} & 60 \\ \cline{2-2}
\text{13 min} & \text{2 h}
\end{array}$$

Na prática o problema 1 será resolvido dividindo-se o produto dos números de horas pela diferença, e o problema 2 dividindo-se o produto pela soma.

Analogamente, aqui, a capacidade do tanque não influe na resposta, apenas pode mudar os cálculos.

Quando é aberta uma torneira antes, é o problema transformável num dos anteriores; assim, no problema 1 caso a primeira torneira fôsse aberta uma hora antes, teríamos ainda:

Em 1/5 de hora o tanque se enche de 1/24; mas, agora o todo é

$$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

para ser enchido, que pode ser reduzido ao mesmo denominador 24.

$$\frac{2}{3} = \frac{16}{24}$$

logo, para encher 16/24 gastar-se-á 16 vêzes mais,

$$16 \times \frac{1}{5} = \frac{16}{5}$$

ou

```
16    |_5________
 1     3 h 12 min
x60
 60
 10
  o
```

e, finalmente, para tempo total

$$3 \text{ h } 12 \text{ min} + 1\text{h} = 4 \text{ h } 12 \text{ min}.$$

A resolução se assemelha a esta quando se pede o tempo gasto para se encher uma parte do tanque, por exemplo 2/3.

O problema pode se complicar, um pouco mais, colocando-se várias torneiras, mas a marcha a seguir é a mesma.

Uma forma mais simples, e do nível do curso primário é o problema das torneiras com a capacidade do reservatório e a vazão em litros de cada torneira, com os exemplos numéricos seguintes, que não apresentam dificuldade de resolução:

Problema 3:

Uma torneira joga num tanque 40 litros por hora, outra retira 10 litros por hora; tendo o reservatório capacidade para 90 litros, abrindo-se simultâneamente as torneiras, quanto tempo demorará para se encher o tanque?

Por hora ficam no tanque 40 - 10 = 30, trinta litros; portanto, para encher 90 litros, serão necessárias 90 : 30 = 3, três horas.

Anàlogamente, seria resolvido o problema das duas enchendo (ou esvaziando).

Observação:

Para confirmar as minhas declarações, me permitam, os leitores, transcrever a seguir o enunciado de um SUPER PROBLEMA DE TORNEIRAS de um livro atual de admissão, o qual deve ter sido inserido porque alguns professôres secundários de matemática insistem em colocá-los em suas provas;pasmem os leitores:

"Uma torneira enche 1/4 de um tanque em 5 horas e outra enche os 2/5 do resto em 12 horas. Em quanto tempo as torneiras, abertas juntas, poderão encher o tanque?"

Tenho testemunhos de alguns professôres, que já abandonaram o "hábito" de incluir em exames de admissão - "problemas de torneiras",ou parecidos, levados por várias - causas, entre elas podemos citar a seguinte:

" --- ... no momento em que coloquei o enunciado no quadro, um candidato, satisfeito, exclamou: êste eu sei, minha professora ensinou hoje pela manhã como se faz."...

D. Problema do Relógio.

Outro tipo de problema semelhante aos anteriores é o problema do relógio, no qual se dá uma hora (ou o mostrador) e pede-se a que horas os dois ponteiros estarão numa posição especial, por exemplo justapostos, opostos, etc.... O raciocínio do problema dos trens pode perfeitamente ser aplicado.

Problema 1:

É Meio-dia, a que horas os ponteiros estarão novamente juntos?

As velocidades dos ponteiros são fáceis de serem determinadas; assim, o ponteiro grande, o dos minutos, anda 60 intervalos (60 marcas) por hora; e, o ponteiro pequeno, o das horas, anda 5 intervalos (5 marcas) por hora.

Como é Meio-dia, para ficarem novamente juntos, a distância entre êles é de 60 intervalos.

Com êstes dados o problema é idêntico ao dos dois trens:

Em cada hora o grande ganha 60 - 5 = 55, cincoenta e cinco intervalos; logo, para ganhar 60 levará

60 : 55

```
 60        |_55______
  5         1 h 5 min 27 seg. 15/55
 x60
 300 min.                ou
  25
 x60
1500 seg          1 h 5 min 27 3/11 seg.
 400
  15
```

CINEMÀTICAMENTE, o problema pode ser resolvido pelo conceito de velocidade angular, assim temos:

velocidade do ponteiro grande = 360° por hora = w
velocidade do ponteiro pequeno = 30° por hora = w'
Ângulos descritos pelos ponteiros num tempo t:

$$x = w \times t$$

$$y = w' \times t$$

portanto:

$$x - y = (w - w') \times t$$

ou

$$t = \frac{x - y}{w - w'} = \frac{360}{330}$$

```
 360       |_330_____
  30        1 h 5 min 27 3/11 seg.
 x60
1800
 150
 x60
9000                 90     3
2400                ---- = ---
 090                330    11
```

Outros enunciados:

Problema 2:

Depois das seis horas, a que horas estarão os ponteiros justapostos?

Problema 3:

São 3 horas; a que horas estarão os ponteiros em posições opostas?

Problema 4.

São oito horas; a que horas estarão os ponteiros formando ângulo reto?

E. Problema do cão e da lebre.

No meu julgamento êste é um problema que deveria - ser abolido até mesmo das primeiras séries ginasiais, ou - quando muito dado como curiosidade. A êste problema e às formas análogas "gato e rato", "tigre e cangurú", "pulga e pulguinha", etc., críticas podem ser feitas até mesmo ao fato do cão saltar, será que êle não prefere correr?!

Problema:

Uma lebre é perseguida por um cão, tem 90 pulos de dianteria (pulos de lebre). Enquanto a lebre dá 5 pulos, o cão dá 4; 5 pulos do cão equivalem a 7 pulos da lebre. Quantos pulos deve dar o cão para alcançar a lebre?

Como 5 pulos do cão valem 7 da lebre, um pulo do cão vale 7/5 pulos da lebre; portanto, 4 pulos do cão valem 4 vêzes mais:

$$4 \times \frac{7}{5} = \frac{28}{5}$$

isto é, 28/5 pulos da lebre.

Enquanto o cão dá 4, a lebre dá 5 pulos; logo, em cada 4 pulos do cão, êle ganha:

$$\frac{28}{5} - 5 = \frac{28 - 25}{5} = \frac{3}{5}$$

isto é, 3/5 pulos da lebre; de onde verificamos que para ganhar 3 pulos, precisa fazer 5 vêzes mais, isto é 5 x 4 = 20, vinte pulos (do cão).

Para o cão conseguir alcançar a lebre precisa ganhar 90 pulos da lebre, portanto 90 : 3 = 30, trinta vêzes o anterior, ou 30 x 20 = 600, seiscentos pulos.

Póde-se raciocinar de outra maneira, independentemente das frações:

Como 5 pulos do cão valem 7 da lebre, 4 x 5 = 20 pulos do cão valem 4 x 7 = 28 da lebre; mas enquanto o cão deu 20 pulos, a lebre deu 5 x 5 = 25.

Concluímos daí que cada vez que o cão dá 20 pulos, êle ganha 28 - 25 = 3 pulos da lebre.

Para ganhar 90, o cão precisa dar tantos 20 pulos quanto é 90 ÷ 3. que é 30; portanto 30 x 20 = 600 pulos.

ALGÈBRICAMENTE podemos equacionar o problema da seguinte maneira:

x saltos do cão = (90 + y) saltos da lebre

mas salto do cão = 7/5 saltos da lebre

ou que $\frac{7}{5} x = 90 + y$

ou ainda

$$7x = 450 + 5y$$

Temos também que:

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{5} \quad \text{ou} \quad y = \frac{5}{4} x$$

Substituindo teremos:

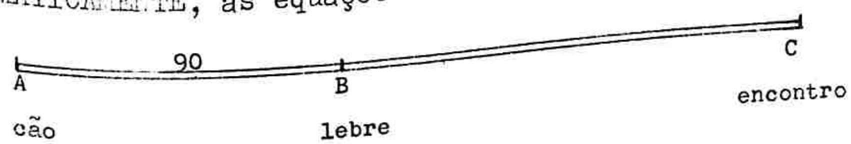
$$7x = 450 + \frac{25}{4} x$$

$$\text{ou} \quad 7x - \frac{25}{4} x = 450$$

$$\text{ou} \quad 3x = 1800$$

$$\text{ou} \quad x = 600 .$$

CINEMÀTICAMENTE, as equações de movimento são:



$$\begin{cases} AC = v \times t \\ BC = v' \times t \end{cases} \quad \text{com} \begin{cases} v = 4p \\ v' = 5p' \end{cases} \quad \text{com} \begin{cases} 5p = 7p' \\ \text{ou } p = 7/5\ p' \end{cases}$$

de onde $\begin{cases} v = 28/5\ p' \\ v' = 5\ p' \end{cases}$

Substituindo

$$\begin{cases} AC = 4p \times t = 28/5\ p' \times t \\ BC = 5p' \times t \end{cases}$$

e, subtraindo: $90\ p' - 3/5\ p' \times t$ ou $t = 150$ unidades

portanto:

$$\begin{cases} AC = 4p \times 150 = 600\ p \\ BC = 5p' \times 150 = 750\ p' \end{cases}$$

Nota: Colocado o problema em termos de velocidade o leitor observa novamente que o mesmo é uma variação difícil do problema dos trens.

F. O problema das velas.

Bastante curiosa é também uma outra forma do problema dos trens, conhecido como problema das velas, no qual dá-se os tempos de queima de cada vela, e atendendo à espessura e material, seus comprimentos, e pede-se o momento exato em que ambas terão o mesmo comprimento (altura).

Enunciado:

Uma vela de 30 cm de altura queima-se em 2 horas; outra de 20 cm, por ser mais grossa (ou de melhor qualidade) gasta 5 horas para se queimar. Acêsas simultâneamente, em qual instante estarão da mesma altura?

Extinguindo-se em 2 horas, a primeira vela, a sua velocidade de queima é 30 : 2 = 15, isto é 15 cm/h. Do mesmo modo, a velocidade da segunda é de 20 : 5 = 4, 4 cm/h.

Em cada hora a primeira ganha 15-4 = 11, onze centímetros , portanto para ganhar 30-20 = 10 levará 10 : 11, ou:


```
 10      |11
x60      0 h 54 min 32  8/11 seg
600
 50
  6
 x60
360
 30
  8
```

e, as velas terão queimado $\frac{10}{11} \times 15$ e $\frac{10}{11} \times 4$ cm, isto é 13,6 e 3,6 cm aproximadamente.

A solução gráfica é também neste problema bastante simples, como poderá ser observado na figura 103.

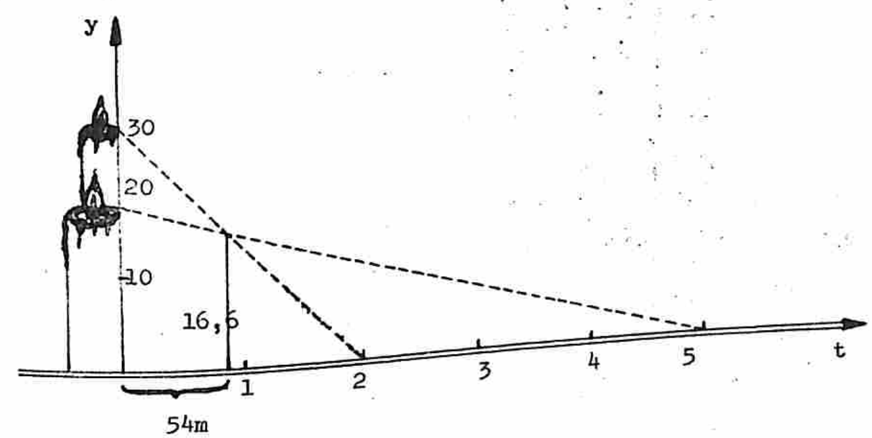


Fig. 103

G. Problema dos herdeiros.

É um problema que, conforme os livros ou revistas , assume vários enunciados pitorescos,com herança de camelos ou de bois, etc., cuja resolução pode assumir um aspecto misterioso e atraente. Vejamos um enunciado com camelos:

Enunciado:

Dezessete camelos foram deixados como herança para três filhos, devendo receber o primeiro filho a metade, o segundo a têrça parte e o terceiro um nono. Quantos camelos deverá receber cada filho?

Aparentemente não é possível, visto que 17 : 2 é 8, 17 : 3 é 5 é 17 : 9 é 1, e sobraram partes de camelos e não pretende-se, é claro, dar como herança partes de camelo.

A solução "mágica" é a seguinte:

Um vizinho, muito amigo do falecido, trouxe um camelo, para evitar que os manos brigassem. Com o novo camelo a herança ficou com um total de 18 camelos; portanto, fazendo a divisão conforme o desejo do falecido, teremos:

18 : 2 = 9, para o mais velho
18 : 3 = 6, para o do meio
18 : 9 = 2, para o mais nôvo

Mas, como 9 + 6 + 2 = 17, sobrou um camelo, e o bom vizinho voltou para sua casa puxando o seu camelo, satisfeito pela boa ação realizada.

ALGÈBRICAMENTE o problema é pôsto da seguinte forma:

Para o primeiro $\longrightarrow$ $x/2$,

Para o segundo $\longrightarrow$ $x/3$,

Para o terceiro $\longrightarrow$ $x/9$.

Total

$$T = \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{9} = \frac{17x}{18}$$

Entretanto T deve ser igual a 17, e $17x/18$ é 17 só quando x é 18, o que é absurdo, logo a soma das partes não é igual ao todo.

Vejamos a diferença:

$$x' = x - \frac{17x}{18} = \frac{x}{18} .$$

isto é, 1/18 do todo; de onde a explicação para a devolução do camelo do vizinho (18 : 18 = 1).

Continuando a repartição, conforme os desejos do pai, teremos:

Para o primeiro $x'/2$,

Para o segundo $x'/3$,

Para o terceiro $x'/9$.

Novamente o total parcial não é igual ao todo e sobra:

$$x'' = x' - \frac{17x'}{18} = \frac{x'}{18} \quad \text{ou} \quad \frac{x}{18^2}$$

O processo de repartição deve continuar; assim teremos:

Para o primeiro filho

$$\frac{x}{2} + \frac{x'}{2} + \frac{x''}{2} + \frac{x'''}{2} + \ldots\ldots\ldots$$

$$= \frac{1}{2}\,(x + x' + x'' + x''' + \ldots\ldots\ldots\ldots)$$

$$= \frac{1}{2}\,(x + \frac{x}{18} + \frac{x}{18^2} + \frac{x}{18^3} + \ldots\ldots)$$

onde obtivemos uma soma de têrmos em progressão geométrica decrescente ilimitada, de primeiro têrmo x = 17 e razão q = = 1/18 cuja soma é dada pela fórmula: $\frac{x}{1\ q}$

$$S = \frac{17}{1 - \frac{1}{18}} = 18$$

portanto, substituindo, teremos:

$$\frac{1}{2} \text{ de } 18 = 9.$$

Analogamente, o segundo deverá receber:

$$\frac{x}{3} + \frac{x'}{3} + \frac{x''}{3} + \ldots.$$

$$= \frac{1}{3}\left(x + x' + x'' + \ldots\ldots..\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(x + \frac{x}{18} + \frac{x}{18^2} + \ldots.\right)$$

$$= \frac{1}{3} \text{ de } 18 = 6.$$

Idem, o terceiro:

$$\frac{1}{9} \text{ de } 18 = 2.$$

Para os que desconhecem as progressões geométricas e suas fórmulas, o cálculo final pode ser feito aritmèticamente:

Para o primeiro filho:

$$\frac{1}{2}\left(17 + \frac{17}{18} + \frac{17}{18^2} + \frac{17}{18^3} + \ldots\ldots\right)$$

ou

$$\begin{array}{l} 8{,}5 \\ 0{,}4722\ldots.. \\ 0{,}0262\ldots.. \\ 0{,}0014\ldots.. \\ \ldots\ldots\ldots.. \\ \ldots\ldots\ldots.. \\ \hline 8{,}9999\ldots.. \end{array}$$

cuja soma se aproxima indefinidamente de 9; é o caso da dízima de período 9.

Analogamente, repetindo as operações para o segundo e terceiro filhos, obteremos:

$$5{,}999\ldots = 6$$
$$1{,}999\ldots = 2.$$

Também fácil é explicar a solução por empréstimo, da seguinte maneira:

$$x = 17 \Longrightarrow x + 1 = 18$$

$$\text{Partes} \left\{ \begin{array}{l} \frac{x+1}{2} \\ \\ \frac{x+1}{3} \\ \\ \frac{x+1}{9} \end{array} \right.$$

<u>Total utilizado:</u>

$$\frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{3} + \frac{x+1}{9} = \frac{17(x+1)}{18}$$

Resto:

$$x + 1 - \frac{17(x+1)}{18} = \frac{x-1}{18} = \frac{18}{18} = 1$$

H. Problemas de médias.

A maior parte das pessoas falham nos problemas onde se deve usar a média harmônica, e não a média aritmética(*); um caso bastante freqüente é aquêle da questão da velocidade média. Veremos dois problemas ilustrativos:

Problema 1:

Um lambretista consegue subir uma ladeira de um quilometro, com a velocidade de 20 km/h. Pergunta-se a velocidade que deverá usar na descida, para conseguir uma média de 60 km/h ?

Problema 2:

Um lambretista faz uma viagem; na primeira hora usa a velocidade de 100 km/h, mas na segunda hora, como estava chovendo, reduziu a velocidade para 20 km/h. Pergunta-se a velocidade média.

Raciocinem os leitores, por obséquio, antes de continuarem a leitura.

Análise I:

Acreditamos que muitos tenham respondido ao problema 1: 100 km/h, visto que o seu raciocínio tenha sido o seguinte:

(*) - Ler Iniciação à Estatística, do autor.

Subiu a 20 km/h, se descer a 100 km/h, terá a média de 60 km/h, pois, a média (aritmética) entre 20 e 100 é

$$\frac{20 + 100}{2} = 60$$

Raciocinemos de outra forma:

Vejamos o tempo que o lambretista gastou na subida; êste tempo é igual ao comprimento de um quilômetro dividido pela velocidade 20 km/h:

1/20 h ou ou 60/20 min ou 3 min

Vejamos, agora, o tempo que gastaria se fizesse todo o percurso (2 quilometros) com a velocidade pedida de 60 km/h:

2/60 h ou 120/60 min ou 2 minutos.

Ora, para conseguir a média de 60 km/h, êle deve fazer o percurso total em dois minutos; mas, só na subida gastou 3 minutos; portanto, é impossível o problema.

Qual é o raciocínio correto?

Evidentemente é o segundo, pois que, à luz dos conceitos da média aritmética, e harmônica, verificaremos que assim o é:

Pediu-se que o lambretista fizesse a média de 60 km/h, e isto exige que o velocista percorra todo o percurso no mesmo tempo que gastaria, caso conseguisse manter constante a sua velocidade e igual a 60 km/h.

Concluimos, disto, que exige, igualdade de tempos, e - mas tempo é obtido dividindo-se espaço por velocidade, e - então o tempo total no primeiro caso seria obtido adicio -

-nando-se inversos; deve ser, portanto, a média harmônica entre 20 e a velocidade pedida igual a 60. Pela fórmula teremos:

$$\frac{\frac{1}{20} + \frac{1}{x}}{2} = \frac{1}{60}$$

De onde tiramos, multiplicando por 2:

$$\frac{1}{20} + \frac{1}{x} = \frac{1}{30}$$

e, transpondo:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{30} - \frac{1}{20}$$

ou que, $1/x$ é negativo, o que é absurdo, confirmando a resposta encontrada no segundo raciocínio.

Análise II:

Agora sim, devem ter acertado, a média, é de fato a média aritmética:

$$\frac{100 + 20}{2} = 60$$

De fato, na primeira hora de percurso o lambretista percorreu 100 km, e na segunda hora mais 20 km, isto é 120 km.

A sua velocidade média é dada pela distância percorrida (120 km), dividida pelo tempo gasto (2 horas), isto é, 60, que é a velocidade constante que deveria usar para percorrer os mesmos 120 km nas mesmas duas horas.

Problema III:

Um automobilista X vai da cidade A à cidade B com a velocidade de 60 km/h. Simultâneamente um outo automobilista Y vai da cidade A à cidade B com a velocidade de 80 km/h. Chegados à cidade B, voltam à cidade A; entretanto, o X volta com a velocidade de 100 km/h, pensando recuperar o tempo perdido na ida; o outro, Y, no entanto, mais cauteloso, prudente, permanece, com a velocidade de 80 km/h.

Pergunta-se qual automobilista chegou primeiro à cidade A.

Penso, a primeira resposta para a maioria das pessoas será: chegam juntos, visto que a média (aritmética) do automobilista X ser:

$$\frac{60 + 100}{2} = 80$$

igual à velocidade do automobilista Y. Ou, então, raciocinando que o automobilista X, na ida, perdia 20 km/h e na relação à Y, mas na volta recuperou 20 km/h; portanto, a recuperação compensou a perda, e, conseqüentemente, chegarão juntos!

Análise III:

No entanto a resposta está errada, novamente, como no problema 1, êste é um problema de média harmonica.

Velocidade média do primeiro automobilista:

$$\frac{1}{X_H} = \frac{\frac{1}{60} + \frac{1}{100}}{2} \quad \text{ou} \quad X_H = 75 \text{ km/h}$$

Velocidade média do segundo automobilista:

$$\frac{1}{Y_H} = \frac{\frac{1}{80} + \frac{1}{80}}{2} \quad \text{ou} \quad Y_H = 80 \text{ km/h.}$$

Conseqüência:

$$Y_H > X_H$$

Conclusão:

Como a velocidade média do segundo automobilista é maior que a velocidade média do primeiro, então o segundo chegará antes.

Exemplo:

Seja a distância entre as duas cidades igual a 720 km. Tempo do primeiro automobilista:

$$t_x = \frac{1440}{75} = 19\text{h } 12 \text{ min}$$

ou tempo de ida: $\frac{720}{75} = 12\text{h}$

e, tempo de volta: $\frac{720}{100} = 7\text{h } 12 \text{ min}$

tempo total : 12 h + 7h 12min = 19 h 12 min

Tempo do segundo automobilista:

$$t_y = \frac{1440}{80} = 18\text{h}$$

Vantagem do segundo = 1h 12 min.

*

CAPÍTULO IV

CÁLCULO RÁPIDO, CURIOSIDADES E PASSATEMPOS

A. Cálculo Rápido.

As operações aritméticas apresentam, em alguns casos, certas particularidades que possibilitam a organização de regras práticas que, memorizadas, permitem ao calculista, a obtenção dos resultados rapidamente.

Há também, como no caso da multiplicação, processos que possibilitam o cálculo ultra-rápido. Com o auxílio do cálculo mental êsses processos adquirem, muitas vêzes, grande potência, fornecendo ao espectador ou ao aluno, um prodigioso ou místico.

Outros cálculos, se são eficazes em rapidez, são interessantes e despertam bastante a curiosidade.

Nas linhas seguintes procurarei dar uma visão de alguns dêstes cálculos, tanto quanto possível razoável, visto ser um assunto cuja exposição oral seria a mais adequada.

A.1. Sôbre a Subtração:

A.1.1. Iniciemos estudando a subtração de números invertidos de dois algarismos, por exemplo : 85 - 58.

Esta é uma operação mentalmente fácil: Subtraimos mentalmente os valôres dos algarismos e multiplicamos por 9; assim, 8 - 5 = 3, e 3 x 9 = 27. Resposta 27.

A explicação da regrinha também é fácil:

Seja o número ab; portanto, o invertido será ba:

$$\begin{aligned} ab &= 10a + b \\ ba &= 10b + a \\ \hline ab - ba &= 9a - 9b = 9(a - b) \end{aligned}$$

Exemplos:

1. 72 - 27 = ? 7 - 2 = 5, 5 x 9 = 45
2. 86 - 68 = ? 8 - 6 = 2, 2 x 9 = 18.

A.1.2. Anàlogamente, para 3 algarismos a regra é simples e mais atrativa; seja subtrair 872 menos o invertido 278.

Fazemos 8 - 2 = 6, 6 x 9 = 54; portanto:

872 - 278 = 594

isto é,: subtraimos os valôres dos algarismos extremos, multiplicamos por 9, e os algarismos dêste produto colocando - ao lado do algarismo 9.

A explicação é a seguinte:

$$\begin{aligned} abc &= 100a + 10b + c \\ cba &= 100c + 10b + a \\ \hline abc - cba &= 99a - 99c = 99(a - c) \end{aligned}$$

e a multiplicação por número formado só de noves por número de um algarismo fornece o final da regra (*).

Exemplos:

1. 732 - 237 = ? 7 - 2 = 5, 5 x 9 = 45
   portanto 495.

(*) - Veremos essa multiplicação nos ítens seguintes.

2. 583 - 385 = ? 5 - 3 = 2, 2 x 9 = 18
   portanto 198.

A.1.3. Há ocasiões em que, por causa de registros sucessivos, o minuendo está escrito abaixo do subtraendo; é óbvio que o calculista poderá, com um pequeno esfôrço, efetuar o cálculo como é comumente feito, mas de "cima para baixo" como na subtração seguinte:

$$\begin{array}{lr} \text{Registro 1:} & 257 \; - \\ \text{Registro 2:} & 829 \\ \hline & 527 \end{array} \Big\downarrow$$

Entretanto, eu vou expor um processo que supera a dificuldade de fazer o cálculo de "cima para baixo":

Faça o cálculo como normalmente o faz, isto é, de "baixo para cima"; na última ordem da esquerda, evidentemente, a conta não será possível, não faz mal, faça-o como se alguém lhe "emprestasse" dez unidades (um algarismo de uma ordem imaginária da esquerda).

Por exemplo:

$$\begin{array}{r} 27 \; - \\ 84 \\ \hline 43 \end{array} \Big\downarrow$$

onde fizemos 8 para 12; agora, tira-se o valor do último algarismo de 10 e o outro de 9:

três para dez, 7; quatro para nove, 5; portanto 57.

No exemplo dado anteriormente, teríamos ràpidamente:

Registro 1: 257 -
Registro 2: 829

428
572

Outros exemplos:

1. 34265 − 83147

51118
48882

2. 135 − 4286

5849
4151

Expliquemos a subtração 84 - 27 do exemplo:

Temos:

$$84 - 27 = 100 - 100 + 84 - 27$$
$$= 100 - (100 + 27 - 84)$$
$$= 100 - 43.$$

êste cálculo final corresponde a subtrair o último valôr de 10 e os outros de 9; em vários livros textos é até chamado "cálculo do complemento aritmético".

A.2. Sôbre a multiplicação

A.2.1. Multiplicação de número só de algarismos 9 por número de um algarismo.

Coloca-se algarismos 9, tanto quanto houver no número

menos um, multiplica-se o valor do outro por 9 e coloca - se os algarismos do produto ao lado dos 9.

Exemplos:

1. 999999 x 4 = ?

Fazemos 4 x 9 = 36, e colocamos ao lado de cinco algarismos 9:

3 999 996

2. 999 x 8 = ?

Fazemos 8 x 9 = 72; temos:

7 992

A.2.2. Multiplicação de um número só de algarismos 9 por número de algarismos iguais.

Escrevemos os dois números; na direção em que não há correspondência de algarismos; coloca-se algarismos 9 no produto:

Assim, para 66 666 x 999

66 666
999

99

Para os algarismos da direita, faz-se o complemento aritmético do número formado pelos algarismos iguais, em correspondência

66 666
999

99 334

Para os algarismos do produto da esquerda, coloca-se a parte do número formado por algarismos iguais que estão em correspondência, mas diminuida de uma unidade.

$$\begin{array}{r} 66\ 666 \\ 999 \\ \hline 66\ 599\ 334 \end{array}$$

Exemplos:

1. $\begin{array}{r} 777 \\ 99 \\ \hline 76\ 923 \end{array}$

2. $\begin{array}{r} 22 \\ 9\ 999 \\ \hline 219\ 978 \end{array}$

3. $\begin{array}{r} 999 \\ 333 \\ \hline 332\ 667 \end{array}$

4. $\begin{array}{r} 99 \\ 999 \\ \hline 98\ 901 \end{array}$

Nota: No caso da multiplicação por um só 9, a regra é ainda aplicável, mas é o mesmo que proceder como fizemos em 1.2.1.

Exemplo:

8888 x 9

Tenho quatro 8, portanto escrevo três 9; e, faço 9 x 8 = 72; coloco o 7 e o 2, um de cada lado dos 9:

79 992

A.2. Multiplicação de número de 2 algarismos e terminados em 5.

Adiciona-se os valôres dos algarismos das dezenas; se é par o final do produto é 25, se é ímpar, o final é 75. Toma-se a metade (exata ou inexata) dessa soma e adiciona-se ao produto dêles próprios, o que vai constituir a parte da esquerda do produto:

Exemplos:

1. 25 x 65

2 + 6 = 8 (par), o final será 25, metade de 8 é 4, com 2 x 6 = 12, temos 16; portanto o produto é:

1625

2. 35 x 85

3 + 8 = 11 (ímpar), o final será 75, metade de 11 é 5, com 3 x 8 = 24, temos 29; portanto o produto é:

2975

Essa regra é válida mesmo para o caso de mais algarismos, mas não torna o cálculo mais fácil.

A justificativa é a seguinte:

$$a5 = (10 \times a + 5)$$
$$b5 = (10 \times b + 5)$$

$$P = (10 \times a + 5) \times (10 \times b + 5) = a \times b \times 10^2 + (a+b) \times$$
$$\times 5 \times 10 + 25$$

1º caso: $a + b$ é par, $a + b = 2 \times k$.

$$P = a \times b \times 10^2 + k \times 10^2 + 25$$
$$= (a \times b + k) \times 10^2 + 25.$$

2º caso: a+b é ímpar, a+b = 2 x k + 1.

$$P = a \times b \times 10^2 + k \times 10^2 + 5 \times 10 + 25$$

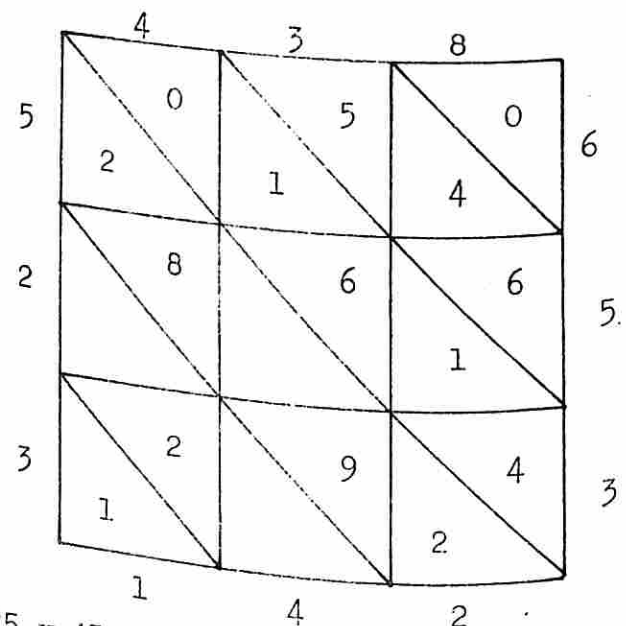
$$P = (a \times b + k) \times 10^2 + 75$$

A.2.4. <u>Multiplicação por quadriculado</u>.

O processo que vou expôr consiste de um dispositivo quadriculado, onde em cada quadrícula coloca-se o produto dos valôres dos algarismos da linha e coluna correspondente, separando as dezenas das unidades. Feitos todos os produtos, adiciona-se em diagonal (da esquerda para a direita descendente).

A vantagem ou diferença da multiplicação usual, consiste em deixar para adicionar no final as dezenas dos produtos parciais nas ordens imediatamente superiores.

A figura abaixo é um exemplo para a multiplicação: 325 x 438.



325 x 438 = 142 350

A.2.5. <u>Multiplicação por cruzes</u>.

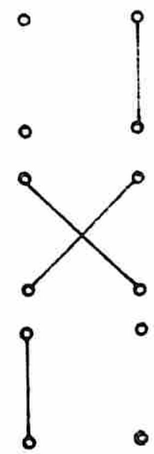
Êste, para mim, é o processo que permite, com certa prática de retenção na memória, efetuar-se multiplicações mais ràpidamente, o qual temos oportunidade de usá-lo por muitas vêzes e com grande sucesso.

A.2.5. <u>Esquemas para 2 algarismos:</u>

1ª operação:

2ª operação:

3ª operação:



<u>Exemplo</u>:

$$\begin{array}{r} 45 \\ \underline{23} \\ 1\ 035 \end{array}$$

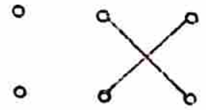
1ª) Faço 3 x 5 = 15, coloco 5 e vai 1.

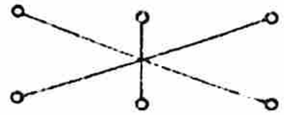
2ª) Faço 3 x 4 = 12 com 2 x 5 = 10; temos 22, com 1, 23, coloco 3, e vai 2.

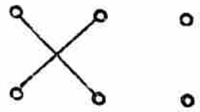
3ª) Faço 2 x 4 = 8. 10; coloco 10.

A.2.5.b - <u>Esquema para 3 algarismos</u>:

1ª operação: 

2ª operação: 

3ª operação: 

4ª operação: 

5ª operação: 

Exemplo:

$$\begin{array}{r} 234 \\ \underline{325} \\ 76\ 050 \end{array}$$

1ª) Faço 5 x 4 = 20, coloco 0 e vai 2.

2ª) Faço 5 x 3 = 15, com 2 x 4 = 8, temos 23, com 2, 25; coloco 5 e vai 2.

3ª) Faço 5 x 2 = 10, 3 x 4 = 12, com 2 x 3 = 5, temos 28, com 2, 30; coloco 0 e vai 3.

4ª) Faço 2 x 2 = 4, com 3 x 3 = 9, temos 13, com 3, 16, coloco 6 e vai 1.

5ª) Faço 3 x 2 = 6, com 1, 7; coloco 7.

Analogamente o leitor poderá preparar outros esquemas.

A.3. <u>Sôbre a Divisão</u>

A.3.1. Algumas divisões podem ser feitas por intermédio de multiplicações; assim

1ª. Dividir por 5, é multiplicar por 2 e mudar a vírgula uma ordem para a esquerda, pois 1/5 = 2/10, ou reciprocamente.

<u>Exemplo</u>:

3764 : 5 = ? = 752,8

Faço mentalmente: 2 x 4 = 8; 2 x 6 = 12; coloco 2 e vai 1; 2 x 7 = 14, com 1 tenho 15; coloco 5 e vai 1; 2 x 3 = 6, com 1, tenho 7; coloco 7. Coloco uma vírgula antes do 8.

Nota: Para divisão por 50, 500, etc., ainda multiplica-se - por 2, mas desloca-se a vírgula mais ordens.

2ª. Dividir por 25, é multiplicar por 4 e mudar a vírgula duas ordens a esquerda, pois 1/25 = 4/100.

Exemplo:

3 764,8 : 25 = 150,592

Faço mentalmente: 4 x 8 = 32, coloco 2 e vai 3; 4x4 = 16, com 3 tenho 19; coloco 9 e vai 1; 4 x 6 = 24, com 1 tenho 25; coloco 5 e vai 2; 4 x 7 = 28, com 2 tenho 30, coloco 0 e vai 3; 4 x 3 = 12, com 3 tenho 15, coloco 15. Coloco a vírgula deslocada duas ordens para a esquerda.

3ª) Dividir por 125, é multiplicar por 8 e mudar a vírgula três ordens para a esquerda, pois 1/125 = 8/1000.

Exemplo:

2358 : 125 = 18,864

Faço mentalmente 8 x 8 = 64; coloco 4 e vai 6; 8 x 5 = 40, com 6 tenho 46; coloco 6 e vai 4; 8 x 3 = 24, com 4 tenho 28; coloco 8 e vai 2; 8 x 2 = 16, com 2 tenho 18, coloco 18. Coloco a vírgula contando três ordens da direita para a esquerda.

A.3.3. As divisões por 9, 99, 999, etc., apresentam um procedimento fácil e rápido a ser aplicado.

Explicaremos para divisão por 99:

Seja a divisão 2345 : 99

23	45
	23
23	68

Separo o número em classes de 2 algarismos (*) da direita para a esquerda.

Desloco o número, com exceção da última classe, escrevendo-o embaixo de si próprio, ainda com as divisões em classe. Faço êste deslocamento novamente com o nôvo número tantas vêzes quanto seja possível. No exemplo só desloquei uma vez (o 23). Adiciono os números dentro das colunas. A soma da coluna da direita (das últimas classes) é o resto da divisão por 99; o número obtido na outra soma é o quociente. No exemplo temos quociente 23 e resto 68.

(*) - Para divisor 999, separa-se de 3 em 3 algarismos.

Exemplos:

1) 41 287 : 999

41	287
	41
41	328

Quociente = 41
Resto = 328

2) 7 345 : 9

		2	
7	3	4	5
	7	3	4
		7	3
			7
8	1	6	19 -
			18 = 2 x 9
			1

Quociente = 816
Resto = 1

3) 29 876 : 99

	1	
2	98	76
	2	98
		2
3	01	176
		99
		77

Quociente = 301
Resto = 77

B. Curiosidades Aritméticas.

Há cálculos que conduzem a resultados curiosos, bem como outros são feitos de tal forma para conduzirem a resul tados desejados, permitindo desta maneira o aspecto de adivinhação para aquêle que desconhece, ou não percebe as relações entre os operandos. Como é um assunto bastante extenso me limitarei a dar alguns exemplos que julgamos mais atraentes.

B.1. Produtos cujos resultados possuem só algarismos iguais.

a) Escreva os algarismos

1 2 3 4 5 6 7 8 9

pergunte a um aluno qual o algarismo que prefere. Feita a escôlha, multiplique (mentalmente) o valor do algarismo por 9, e solicite ao paciente (ou colega) que faça a multiplicação do número 1 2 3 4 5 6 7 8 9 pelo produto obtido. O resultado conterá sòmente o algarismo escolhido.

Exemplo:

Seja o algarismo preferido 6. Como $9 \times 6 = 54$, pede-se que se faça a multiplicação 123456789×54. O resultado é formado só de algarismos 6, como se observa no cálculo seguinte.

$$\begin{array}{r} 12345679 \\ \times\ 54 \\ \hline 49382716 \\ 61728395 \\ \hline 666666666 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 123456789 \\ \times\ 54 \\ \hline 493827156 \\ 617283945 \\ \hline 6666666606 \end{array}$$

Caso se inclua o algarismo 8 no produto, obtém-se no produto uma vez o algarismo 0.

A explicação pode ser baseada no seguinte produto particular:

$$12345679 \times 9 = 12345679 \times (10 - 1)$$

$$= 123456790 - 12345679 = 111\ 111\ 111$$

b) Uma variante, é usando o número 37 e a progressão aritmética

: 3 : 6 . 9. 12 . 18 . 21 . 24 . 27

Escolhido o algarismo, mande multiplicar 37 pelo têrmo da progressão de igual ordem.

Assim, seja 7 o preferido; solicite para multiplicar 37 por 21:

$$\begin{array}{r} 21 \\ \times\ 37 \\ \hline 147 \\ 63 \\ \hline 777 \end{array}$$

Obtém-se sempre um número formado com 3 algarismos iguais ao pedido.

A razão desta curiosidade reside no fato do número 111 possuir por fatôres 3 e 37:

$$3 \times 37 = 111$$

B.2. Resultados constituídos só de algarismos iguais.

a) Peça a um aluno que diga quantos algarismos 1 êle deseja. Mande multiplicar por 9 o número formado pela sucessão natural até o algarismo anterior ao escolhido; determinado o produto, peça para adicionar tantas unidades quantos al garismos 1 foram pedidos.

Exemplo:

Seja 5 o número de algarismos 1 pedidos; mande multiplicar 0 por 1234:

$$\begin{array}{r} 1234 \\ \times\ 9 \\ \hline 11106 \end{array}$$

Adicionando em seguida 5 unidades, obtém-se:

$$\begin{array}{r} 11105 \\ 5 \\ \hline 11111 \end{array} +$$

b) Peça a um aluno que diga quantos algarismos 8 êle deseja. Analogamente à curiosidade anterior, mande multiplicar pela sucessão dos naturais mas invertida (começando com 9).

Exemplo:

Seja quatro oitos, o pedido. Mande fazer 9 x 987, e em seguida adicionar 5 (nove menos quatro).

$$\begin{array}{r} 987 \\ \times\ 9 \\ \hline 8\ 883 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8\ 883 \\ 5 \\ \hline 8\ 888 \end{array} +$$

B.3. A soma antecipada:

Convide um aluno para escrever no quadro 3 números de 4 algarismos (por exemplo); embaixo escreva outros três, de tal forma que cada um seja obtido restando de 9 os algarismos dos números já escritos.

Peça ao aluno para adicionar as 6 parcelas; enquanto isto, anote em outro lugar do quadro para que a classe - tôda veja a soma: 29 997, onde o 2 e o 7 são obtidos de 3 x 9 = 27, e a quantidade de noves dependente do número de algarismos.

Exemplo:

$$\begin{array}{r} 3246 \\ 1802 \\ 9134 \\ \hline 6753 \\ 8197 \\ 0865 \\ \hline 29997 \end{array} +$$

Esta é uma curiosidade que o professor pode utilizar em qualquer classe desde que conheçam a operação da adição, e o professor poderá variar o total de parcelas.

É uma aplicação fácil do que vimos em 1.2.1.

B.4. Adivinhação de um número pensado.

Várias são as formas desta curiosidade. Pede-se para o paciente escolher um número, e, com operações padronizadas, conduz-se os cálculos até um resultado onde, com pequena regra, surge o número pensado e, portanto, "adivinhando".

a) Vejamos uma fora:

1) Pense um número,

2) Multiplique por 5,

3) Adicione 6 unidades ao resultado,

4) Multiplique a soma por 4,

5) Adicione 9 ao resultado,

6) Multiplique por 5 a última soma,

7) Diga o resultado

Subtraia 165 do resultado ;cancele dois zeros da direita; o que sobrou é o número pensado.

<u>Exemplo</u>: Pensado: 8

2) 5 x 8 = 40

3) 40 + 6 = 46

4) 46 x 4 = 184

5) 184 + 9 = 193

6) 193 x 5 = 965

$$\begin{array}{r} 965 \\ -\ 165 \\ \hline 800 \end{array}$$

800 cancelando 00 fornece 8.

A justificativa de qualquer destas adivinhações é análogo; assim, para esta forma, teremos:

Seja N o número pensado.

Pelo 2) 5 x N

Pelo 3) 5 x N + 6

Pelo 4) (5 x N + 6) x 1 = 20 x N + 24

Pelo 5) 20 x N + 24 + 9 = 20 x N + 33

Pelo 6) (20 x N + 33) x 5 = 100 x N + 165

Portanto, subtraindo 165,: 100 x N; e cancelar dois zeros é dividir por 100 : N.

b) Outra adivinhação curiosa é a da idade e mês do nascimento; vejamos uma forma:

1) Escreva o número de ordem do mês de nascimento,

2) Multiplique por 2,

3) Adicione 5 unidades,

4) Multiplique por 50,

5) Adicione a idade,

6) Subtraia 360,

7) Adicione 110,

8) Diga o resultado.

<u>Exemplo</u>:

Seja a idade do aluno 12 anos e Setembro o mês de nascimento (mês 9); fazendo os cálculos indicados, teremos sucessivamente:

2) 2 x 9 = 18

3) 18 + 5 = 23

4) 50 x 23 = 1150

5) 1150 + 12 = 1162

6) 1162 - 360 = 802

7) 802 + 110 = 912

No resultado 912 estão visíveis 9 e 12.

C. <u>Passatempos Aritméticos</u>.

Muitos são os passatempos aritméticos (*) tão comuns em livros específicos, revistas e almanaques, e facilmente colecionáveis pelo prezado leitor.

(*)- Muitos já foram propostos na parte metodológica.

Por isto, me limitarei a tratar sucintamente de um, o qual reputo de grande valia na recreação da aprendizagem, que é aquêle dos poliláteros mágicos e quadrados mágicos.

Os leitores já devem ter, algumas vêzes, visto o interessante quadrado, da figura abaixo, onde efetuando-se as somas: a) em linha, b) em coluna e c) em diagonal, obtém-se a soma 15.

			15
2	9	4	15
1	5	3	15
6	1	8	15
15	15	15	15

Fig. 105

Êste quadrado e outros semelhantes, denominados mágicos, são conhecidos desde antiguidade; algumas vêzes lhes eram atribuídas certas propriedades místicas, de onde talvez o nome, e os usavam até como amuletos contra a peste, contra o "mau olhado", etc..

Para os astrólogos os quadrados mágicos 3 x 3, 4x4, 5 x 5, 6 x 6, 7 x 7, 8 x 8, e 9 x 9, simbolizavam os 7 planetas conhecidos.

A soma constante é denominada "constante mágica", e para quadrados mágicos ordinários (com a sucessão dos n naturais) é fácil de ser determinada pela fórmula:

$$K = n\,(1 + n^2)\,/2$$

Exemplos:

1) $\begin{cases} n = 4 \\ K = 4(1 + 16)/2 = 34 \end{cases}$

2) $\begin{cases} n = 3 \\ K = 3\ (1 + 9)/2 = 15 \end{cases}$

4	9	6	15
5	16	3	10
11	2	13	8
14	7	12	1

Fig. 106

Analogamente, denomino k-látero mágico de ordem n a um polilátero de k lados, em que cada lado foi dividido em n celas, e em cada cela é colocado um número tal, que a soma dos números em cada lado seja constante.

Exemplo: quadrilátero mágico de ordem 3
constante mágica = 18.

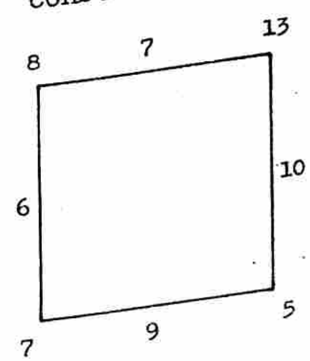


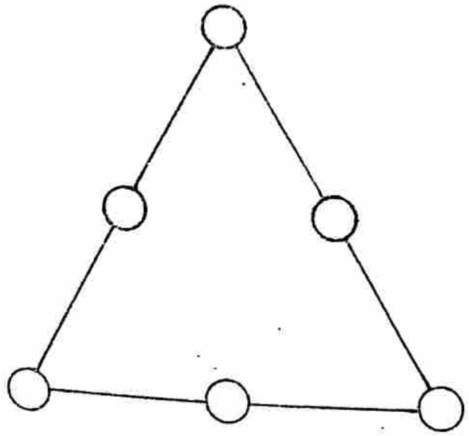
Fig. 107

Os quadrados e poliláteros mágicos além de serem grandes elementos recreativos da aprendizagem, de modo particular da adição e das sucessões, podem ser utilizados para despertarem o gôsto pela Aritmética, e como ótimos elementos formativos de bons hábitos e atitudes, como a paciência e a perseverança.

Assim, depois de dados alguns exemplos em classe, como curiosidades, o professor pode propor como exercícios de torneios para casa, onde até mesmo tôda a família poderá colaborar, num ambiente de cooperação com um centro de interêsse. É claro que, o professor pode empregar somente poliláteros, pois os quadrados são bem mais difíceis.

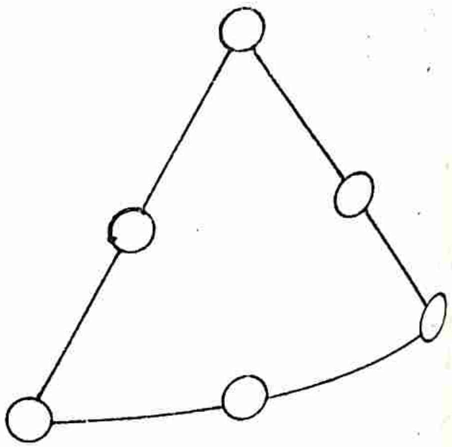
Para facilitar a tarefa, proporei alguns:

a) <u>Triláteros Mágicos:</u>



1) Fig. 108

Sucessão: 1, 2, 3, 4, 5, 6
Constante Mágica = 12 (ou 11, ou 10, ou 9)



2) Fig. 109

Sucessão: 3,5,7,9,11,13
C.M. = 21 (ou 27, ou 23, ou 25)

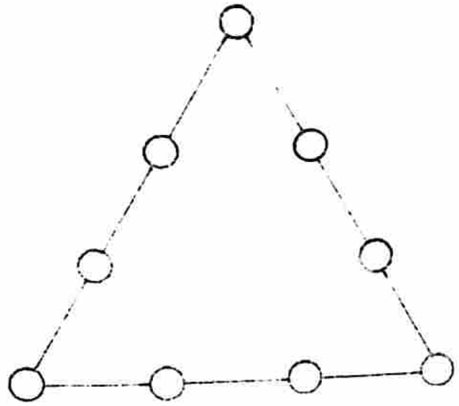


Fig. 110

Sucessão: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
C. M. = 17 (ou 20, ou 21, ou 19)

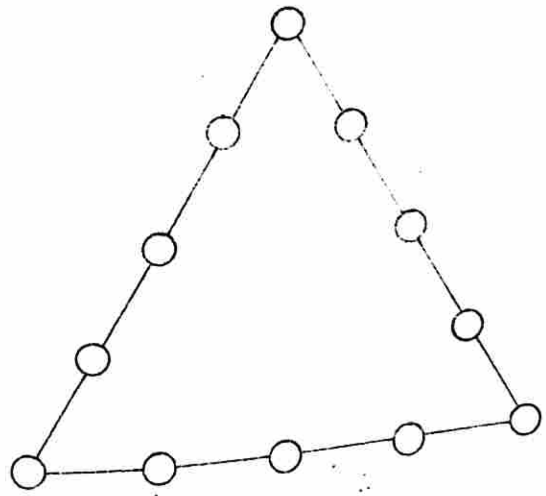
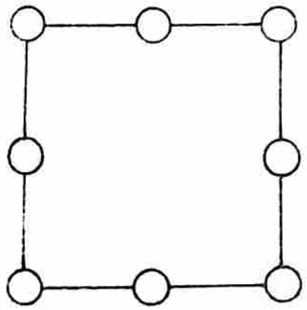


Fig. 111

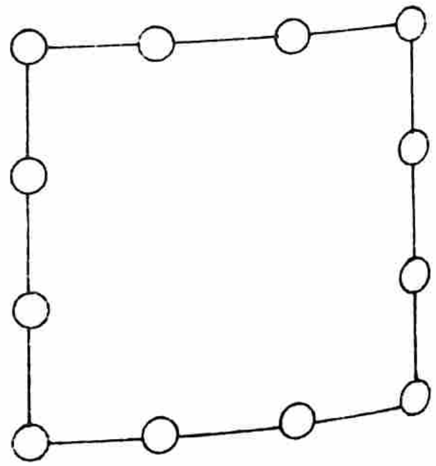
Sucessão: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12
C.M. = 29 (ou 30, ou 35, ou 36).

b) Quadriláteros Mágicos



1) Fig.112

Sucessão: 5,6,7,8,9,10,11,12
C.M. = 26



2) Fig. 113

Sucessão: 1,2,3,4,5,6,7,8,9,
10,11,12
C.M.= 22 (ou 26,ou 30,ou 27)

c) Pentalátero Mágico.

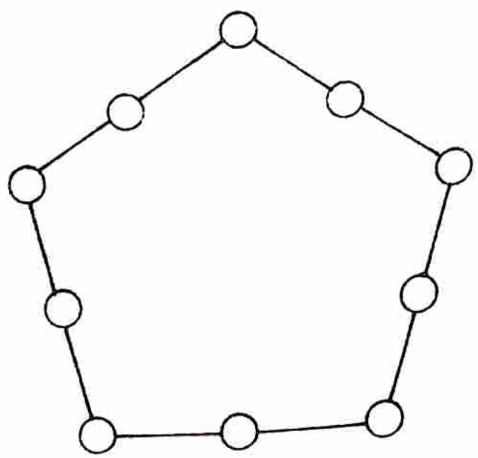


Fig. 114

Sucessão: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
C.M. = 19 (ou 17, ou 16, ou 14).

CAPÍTULO V

SISTEMA MÉTRICO

A. Unidades antigas

As medições, que possuem sua origem no comércio e nas construções, e também por necessidades militares, tiveram seu início há milhares de anos. Parece que o corpo humano forneceu os primeiros padrões para medidas, de modo particular, para as de comprimento.

O antebraço, por exemplo, forneceu o côvado babilônico, que corresponde no sistema métrico a 52,33 centímetros.

O côvado (cúbico), comprimento do antebraço desde o cotovêlo à extremidade do dedo médio, era usado por vários povos, mas com várias extensões, parece mesmo que os hebreus possuiam dois padrões cúbicos, um sagrado, e outro profano, menor.

Destas noções poderão os leitores deduzir aproximadamente as dimensões da famosa Arca de Noé; tem-se em Gên. 6-15: Deus disse-lhe: "Constroe uma arca de madeiras aplainadas, com 300 côvados de comprimento, 50 de largura e 30 de altura", (Gên. 6-14) "unta-a com breu por dentro e por fora".

Havia ainda desde a antiguidade o palmo, o dígito;o primeiro era o comprimento entre os dedos polegar e mínimo, quando aberta ao máximo a mão.

Os egípcios, ao tempo das pirâmides, usavam um côvado com subdivisões centesimais; mas adotavam para facilidade dos trabalhadores outra escala dividida em 7 palmos e êste com 4 dedos; e, como o dedo era tomado em largura, acredito que o palmo egípcio correspondia a uma mão com os dedos unidos (sem o polegar).

O pé humano foi utilizado como unidade de comprimento, e é ainda empregado entre os povos de língua inglêsa (*). Vários pés já serviram de padrões, especialmente os pés reais; outras vêzes mediam vários pés e usavam a média.

O dedo polegar forneceu a polegada, sua largura; mais tarde, o rei Eduardo II da Inglaterra, determinou que a polegada seria o comprimento de três grãos de cevada, colocados um em seguida do outro, tirados do centro de uma espiga e secos.

O rei Henrique I, da Inglaterra, introduziu a jarda, comprimento que ia do seu nariz à extremidade do dedo polegar, quando com o braço direito esticado e levantado para a frente.

Na Grécia era usada a estádia, pequena e grande, correspondendo respectivamente a 80 e 133 passos. Seus nomes são provenientes do fato de equivalerem a 1/600 dos estádios onde se realizavam os jogos.

No Brasil eram usadas as seguintes unidades de comprimento: vara (4,1 metros), a braça (2 varas), a corda

---

(*) yard (jarda), de símbolo yd, aproximadamente 0,914m; foot (pé), de símbolo ft, 1/3 yd ou 0,305m; inch (polegada), símbolo in, 1/12 ft ou 0,0254m.

(15 braças), a quadra (4 cordas), o palmo (1/5 da vara), a polegada (1/8 do palmo; 0,027 m), a linha (1/12 da polegada), o côvado (3 palmos; 0,66m), o pé (12 polegadas), a toeza (6 pés), a jarda (4,15 palmos).

B. Padrões

É claro que as unidades são artibrárias para referir uma grandeza; entretanto, deve-se tomar para fins científicos e para fins comerciais, unidades fixadas de uma só vez, que não variem de lugar para lugar, de pessoa para pessoa, ou com o tempo, e também que facilitem os cálculos.

Resulta que a fixação de uma unidade de medida deve atender a várias condições, como por exemplo, as duas seguintes:

a) Deve ser perfeitamente definida;

b) Seu emprêgo seja cômodo.

A realização material de uma unidade chama-se padrão, e a definição passa a ser dada em base no padrão. Quando se faz, nessas condições, um padrão fundamental, que serve de exemplo para aferição de outros e serve de base para a definição da unidade, diz-se que o padrão é protótipo.

As cópias dos padrões protótipos chamam-se padrões primários, e sucessivamente, secundários, terciários, etc.. Da importância do padrão protótipo, como ponto de referência, para a definição da unidade e exemplo rigoroso para as cópias, segue a necessidade de satisfazer, entre outras condições, as duas seguintes:

a) Constância - invariabilidade;

b) Possibilidade de serem reproduzidos com precisão.

C. O Metro

A primeira tentativa para organizar um sistema de medidas que fosse decimal (base 10), é devida ao padre Gabriel Mouton, vigário de Lyon (1670). A unidade escolhida seria denominada miliare, e corresponderia a um arco da superfície da terra, cujo ângulo central fôsse de um minuto (sexagésima parte do grau) e corresponde a 1852 metros, hoje milha marítima.

As subdivisões chamar-se-iam: centúria, decúria, virga, vírgula, décima, centésima, e milésima.

A idéia de se tomar uma unidade igual a um comprimento sôbre a superfície do globo terrestre, teve vários seguidores, de modo especial, entre os membros da Academia de Ciências de Paris.

Em 1735 foi organizada uma comissão que se dirigiria ao Equador, tendo no entanto ido ao Peru por questões de revolução, levando como unidade para as medidas, a toeza de ferro, que foi conhecida como Toeza do Peru ou Toeza da Academia. Uma outra comissão se dirigiu para a Lapônia.(*)

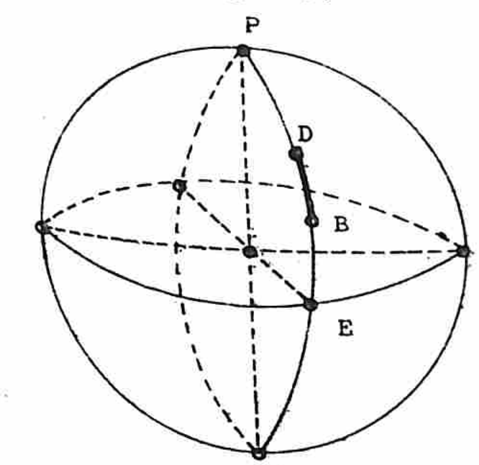
Dos trabalhos anteriores nada ficou resolvido. Sòmente em 1791 iniciou-se a medida de uma parte do meridiano que passa por Barcelona e Dunquerque, medições que seriam realizadas, por três comissões: a de Barcelona com Méchain, a de Dunquerque com Delambre, e a central com Borda, Condorcet, Lagrange, Lavoisier, Prony e Berthollet. Parece que Monge também constituiria a comissão mas não pôde continuar, visto ter que se dedicar a problemas de artilharia e da fabricação de material; Condorcet suicidou-se para não ir à guilhotina (época da revolução francêsa); o próprio Lavoisier foi

(*) - Norte da Suécia, Noruega e Rússia.

executado em 1794, ficando na comissão o físico Laplace.

As comissões de Dunquerque e de Barcelona deveriam medir na direção de Roger respectivamente, 380 000 e 170000 toezas aproximadamente.

A nova unidade, o metro (do grego metron, que significa medida), seria a décima milionésima parte do quadrante terrestre.(Fig.115).



$$1\,m = \frac{1}{10\,000\,000}\,\widehat{EP}$$

Fig. 115

Em 1795,pela Lei Germinal, foi mandado construir um padrão provisório, que possibilitaria a construção de modelos para laboratórios. O padrão foi construído em 1799,na forma prismática e de platina.

Em 1872, na "Conférence International des Poids et Mesures", verificou-se com cálculos astrônomos Arago e Biot que o metro arquivado era menor em 0,2 decimilímetros; a causa não foi esclarecida, se por falha dos dados entregues aos construtores, pois Méchain só entregou os seus dados em 1789, ou por cálculos, ou por êrro na construção.

Sendo impossível refazer os padrões já disseminados, tomou-se o comprimento do padrão construído como unidade.

Em 1875, foi instituído o Bureau International des Poids et Mesures, para construir e guardar os padrões definitivos, o qual instalou-se em Sèvres, no Pavilhão Bréteuil.

O padrão protótipo do metro foi construído então com todos os cuidados possíveis, do qual passamos a dar alguns elementos:

a) <u>Material</u>: platina (90%);

b) <u>Forma</u>: Em barra com secção transversal em forma de X (ou H) (Fig. 116);

c) <u>Pêso</u>: 3 kg;

d) <u>Medidas</u>: secção transversal inscritível num quadrado de 20 milímetros, área, 1,5 centímetros quadrados, secção longitudinal: 102 cm;

e) <u>Temperatura para comparações</u>: zero graus centígrados (dilatação);

f) <u>Apoios</u>: o padrão metro está apoiado sôbre dois cilindros distantes um do outro 571 milímetros, tendo cada um, um centímetro de diâmetro mínimo; êstes apoios diminuem o contato com outra superfície; entretanto, causam três flexões da barra, dirigidas de cima para baixo, uma no centro entre os cilindros, e duas nas extremidades, livres. A face inferior com as flexões (por pequenas que sejam) diminui, enquanto que a superior aumenta; intermediária existe uma faixa invariável com as flexões, denominada <u>fibra neutra</u>, que fica na parte superior da junção co X (ou H);

g) <u>Traços</u>: na fibra neutra estão marcados dois traços, os quais determinam exatamente o comprimento denominado <u>metro</u>.

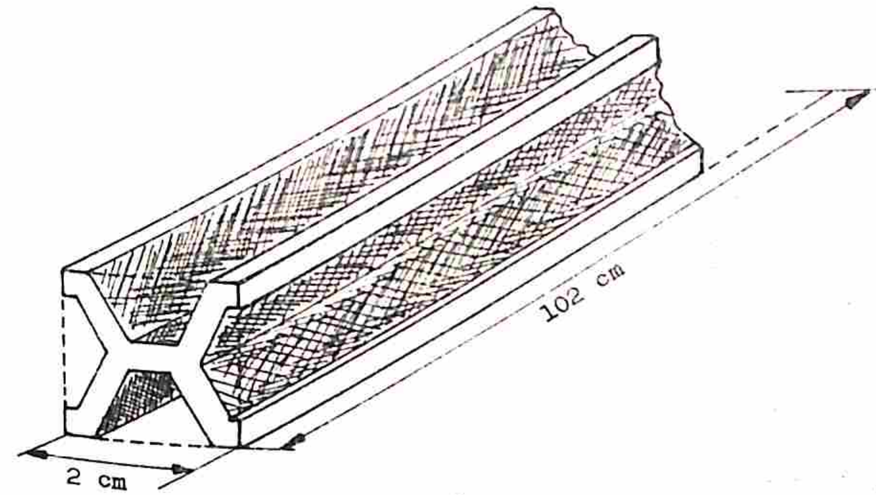


Fig. 116

Muitos países adotaram o sistema métrico, quer por influência política, quer pelas condições práticas de cálculo, visto ser decimal, idêntico ao sistema de numeração.

Por razões políticas outros também não o adotaram, como é o caso da Inglaterra, que adota a jarda, igual aproximadamente a 0,914399 metros (1 m = 1,093614 yd).

No Brasil, pela lei de 1862 ficou substituído o antigo sistema de pesos e medidas pelo sistema métrico decimal. Porém, somente 12 anos depois, que a lei entrou em vigor, pela lei de 1874, do imperador D. Pedro II, e subscrita também pelo ministro da agricultura e comércio, João Lins Vieira Cansanção de Sinimbú (de Alagoas). A aceitação do sistema foi gradativa, mais pelas imposições legais nas transações e pela via cultural, tanto que houve inclusive resistência armada em Pernambuco, Alagoas e Paraíba, quando grupos armados destruiam os padrões de metros, de quilos e de litros, denominados "quebra-quilos".

Em 1939, a 16 de Junho, ficou estabelecido, pela lei 4257 do presidente Getúlio Vargas, que seriam adotadas no Brasil as resoluções da convenção de 1872.

Portanto, no Brasil, a unidade de comprimento é o metro, cuja definição simples, é: "O metro é o comprimento do Metro Padrão Internacional, depositado no Pavilhão Bréteuil em Sèvres, na Repartição Internacional de Pesos e Medidas", e seu valor é aproximadamente igual à décima-milionésima parte do quadrante terrestre."

A definição legal é: "O metro é igual à distância a 0º centígrados dos eixos dos dois traços médios, gravados sôbre a barra de platina iridiada, depositada na Repartição Internacional de Pesos e Medidas, e considerada como protótipo do metro pela Convenção Gerál de Pesos e Medidas, à pressão normal e suportada por dois rolos com um diâmetro mínimo de um centímetro, situados simètricamente num mesmo plano horizontal a 571 milímetros um do outro".

Em 1962, o Instituto Nacional de Pesos e Medidas, de conformidade com o Sistema Internacional de Unidades, adotou no Brasil como legais as unidades do sistema métrico decimal: Metro (m), quilograma (kg), segundo (s), não permitindo mais o uso de unidades que não sejam as legais em: documentos, contratos, propaganda, comercial, invólucros e envoltórios de mercadorias; entretanto, o novo Sistema Internacional de Unidades adota como padrão o comprimento de onda emitido por um isótopo de Krypton, de pêso atômico 86, cuja precisão é bem maior que aquela do padrão de platina iridiada. Os padrões em uso, no entanto, são cópias por processo sucessivo do padrão de platina iridiada,

isso julgamos por enquanto útil conservar a definição.

D. Outras unidades.

Relacionamos abaixo outras unidades, ou antigas ou pelo menos não muito conhecidas no Brasil, ou conhecidas em determinadas regiões, como nas rurais, que julgamos ser do conhecimento do professor:

Itinerárias:

Légua brasileira (3000 braças)	≅ 6 500 m.
Légua marítima (3 milhas)	≅ 5 555 m.
Légua comum, ou postal	≅ 4 000 m.
Milha terrestre	≅ 1 609,3 m.
Milha marítima	≅ 1 852 m.
Miriâmetro	≅ 10 000 m

Volume e capacidade:

Pipa (180 medidas)	≅ 480 ℓ
Tonel (2 pipas)	= 960 ℓ
Canada ou Medida (4 garrafas)	≅ 2,66 ℓ
Quartilho (1 garrafa)	≅ 0,66 ℓ
Alqueire (cereais)(4 quartas)	≅ 36,27 ℓ
Quarta (4 selamins)	≅ 9,07 ℓ
Selamin	≅ 2,27 ℓ
Galão (galão americano)	≅ 3,785 ℓ
Galão (galão inglês)	≅ 4,546 ℓ
Quartos ou quarts (amerciano)	≅ 0,946 ℓ
Pintos ou pints	≅ 0,473 ℓ

Massa (Pêso)

Grão (grain)	≃	0,064 g.
Onça (avoir, ounce)	≃	28,68 g.
Libra (pound)	≃	459 g.
Tonelada(*)	=	793 162 g.
Oitava	≃	3,58 g.
Quintal (4 arrobas)(*)	≃	58 750 g.
Arroba (32 libras)	≃	14 689 g.
Arroba métrica	=	15 000 g.

Agrárias:

No sistema métrico decimal são legais:

centiare (ca) $\Longleftrightarrow$ 1 m^2

are (a) $\Longleftrightarrow$ 100 m^2 (decâmetro quadrado)

hectare (ha) $\Longleftrightarrow$ 10 000 m^2 (hectômetro quadrado)

Antigamente as denominações eram: aros e hectaros.

Não pertence ao sistema métrico decimal, mas são ainda de uso dos sitiantes e fazendeiros, o alqueire, que varia de um estado para outro:

Alqueire paulista	≃	23 449 m^2
Alqueire mineiro	≃	46 898 m^2
e a Geira (400 braças quadradas)	≃	1 876 m^2

(*) Não condundir com a tonelada e quintal do sistema métrico equivalentes a 1 000 000 g. e 100 000 g.

O alqueire de terra era o espaço para plantar um alqueire de milho (unidade de capacidade), e, portanto, variava conforme o processo empregado para plantar o milho. Assim, em São Paulo, o alqueire possuia 5 000 braças quadradas, aproximadamente 24 000 m^2, o qual era dividido em 4 quartas, cada quarta em 8 pratos, cada prato em 600 covas, e em cada cova 5 grãos de milho.

Nota: Existia ainda unidades de capacidade relacionadas com a espiga (de milho):

1 carro = 12 cargueiros = 24 alqueires e

1 alqueire = 4 mãos = 60 atilhos = 240 espigas.

E. QUADROS DAS UNIDADES

E.1. COMPRIMENTO (*)

	Nomes	Símbolos	Valôres em metros
Múltiplos	Quilômetro	km	1 000
	Hectômetro	hm	100
	Decâmetro	dam	10
Unidade	Metro	m	1
Submúltiplos	Decímetro	dm	0,1
	Centímetro	cm	0,01
	Milímetro	mm	0,001
De precisão	micron		0,001 mm
	milimícron	m	0,001
	angstron	Å	0,1 m

(*) A denominação miriâmetro para 10 quilômetros não é mais empregada

E.2 - SUPERFÍCIE

E.2.1.

	Nomes	Símbolos	Valores em m^2
Múltiplos	quilômetro quadrado	km^2	1 000 000
	hectômetro quadrado	hm^2	10 000
	decâmetro quadrado	dam^2	100
Unidade	metro quadrado	m^2	1
Submúltiplos	decímetro quadrado	dm^2	0,001
	centímetro quadrado	cm^2	0,0001
	milímetro quadrado	mm^2	0,000001

E.2.2. AGRÁRIAS

	Nomes	Equivalentes	Símb.	Valôres em m^2
Múltiplo	hectare	hectômetro quadrado	ha	10 000
Unidade	are	decâmetro quadrado	a	100
Submúltiplo	centiare	metro quadrado	ca	1

E.3. - VOLUME

E.3.1.

	Nomes	Símbolos	Valôres em m^3
Múltiplos	quilômetro cúbico	km^3	1 000 000 000
	hectômetro cúbico	hm^3	1 000 000
	decâmetro cúbico	dam^3	1 000
Unidade	metro cúbico	m^3	1
Submúltiplos	decímetro cúbico	dm^3	0,001
	centímetro cúbico	cm^3	0,000 001
	milímetro cúbico	mm^3	0,000 000 001

E.3.2 - PRÁTICAS DE LENHA (volume aparente)

	Nomes	Equivalente	Símbolos	Valôres em m^3
Múltiplo	decastéreo	---	dast	10
Unidade	estéreo	metro cúbico	st	1
Submúltiplo	decistéreo	---	dst	0,1

E.3.3 - CAPACIDADE

	Nomes	Símbolos	Valôres em litros
Múltiplos	quilolitro	kl	1 000
	hectolitro	hl	100
	decalitro	dal	10
Unidade	litro	l	1
Submúltiplos	decilitro	dl	0,1
	centilitro	cl	0,01
	mililitro	ml	0,001

Nota: Um litro eqüivale, aproximadamente a 1 dm^3.

E.4 - MASSA

	Nomes	Símbolos	Valôres em gramas
Múltiplos	tonelada	t	1 000 000
	quintas	q	100 000
	quilograma	kg	1 000
	hectograma	hg	100
	decagrama	dag	10
Unidade	grama	g	1
Submúltiplos	decigrama	dg	0,1
	centigrama	cg	0,01
	miligrama	mg	0,001

Notas: A unidade principal do sistema é o quilograma, mas emprega-se na prática o grama.

A massa de um decímetro cúbico de água destilada é aproximadamente igual a um quilograma.

*

CAPÍTULO VI

VOLUMES

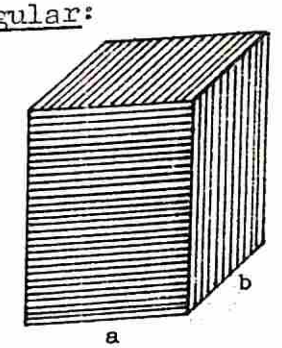
De maneira análoga, às superfícies planas, para os corpos, entendemos o conceito de equicomposição e o de equivalência; e, entendemos volume como a medida de um corpo em relação a uma unidade. A unidade escolhida é o volume de um cubo que possua por aresta a unidade de comprimento; assim, no sistema métrico decimal é o metro cúbico (m^3), isto é, o volume de um cubo de um metro de aresta, usando-se também os seus múltiplos e sub-múltiplos (Ver Cap. V).

A. Formulário para os principais Corpos Geométricos.

A.1. Paralelepípedo Reto de base retângular:

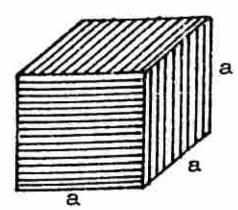
$$V = a.b.c$$

onde a,b e c são medidas das suas três dimensões: comprimento, largura e altura.



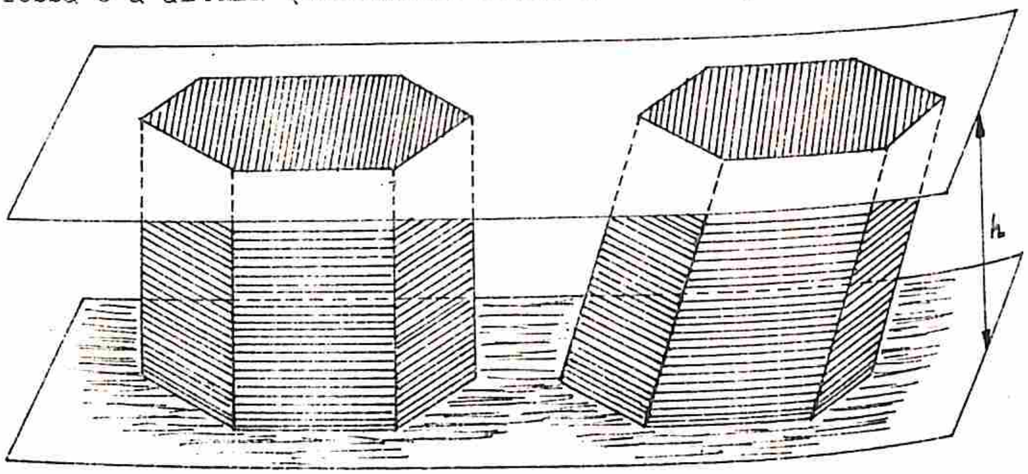
A.2. Cubo:

$$V = a^3$$



A.3-Prismas

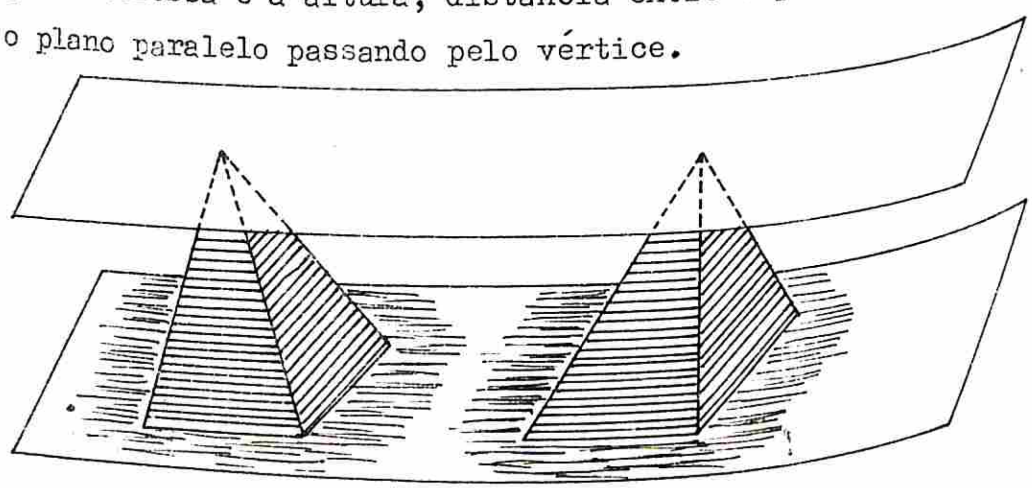
V = B.h - Para qualquer prisma o volume é dado pela fórmula anterior: Área da base multiplicado pela altura; mas, é interessante observar que o prisma pode ser oblíquo, o que inte ressa é a altura (distância entre as bases paralelas).



A.4. Pirâmide:

$$V = 1/3\ B.h$$

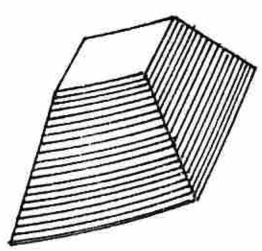
Onde B é a área da base e h a altura, aqui também o que interessa é a altura, distância entre o plano da base e o plano paralelo passando pelo vértice.



A.5. Tronco de Pirâmide, de bases paralelas

$$V = \frac{h}{3}\left(B + b + \sqrt{B\,b}\right)$$

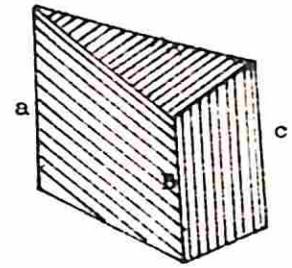
onde h é a altura, distância entre as bases, B e b áreas das bases.



A.6. Tronco de Prisma Triangular Reto.

$$V = 1/3\ B\ (a + b + c)$$

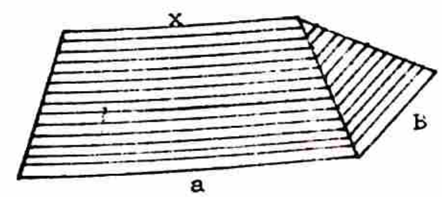
onde B é a área da base, a,b, e c são as medidas das arestas laterais.



A.7. Cunha

$$V = 1/\ B\ h\ (2a + x)$$

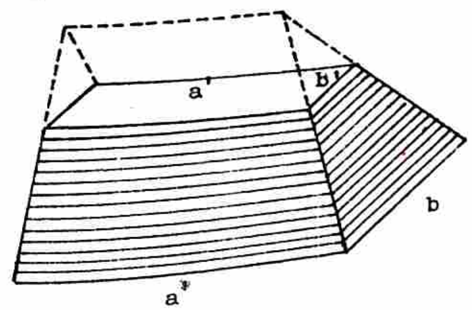
onde b e a são as medidas do retângulo da base, h a altura, e x a medida da aresta principal da cunha.



A.8. Obelisco.

$$V = \frac{1}{6}\ h\ \left|(2a + a')b + (2a + a)b'\right|$$

onde a e b são as medidas do retângulo da base inferior, a'e b'as da base superior, e h a altura.



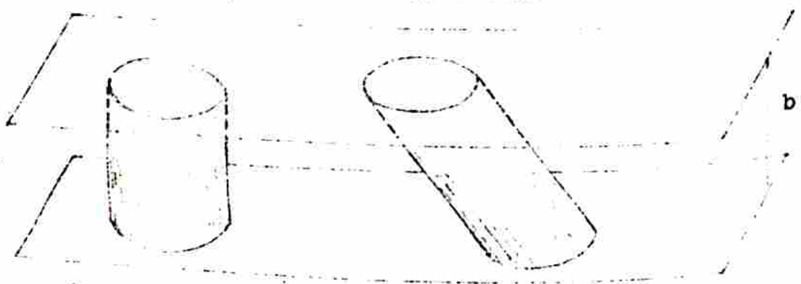
A.8. - Tetraedro Regular

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

A.9. - Volume do Cilindro

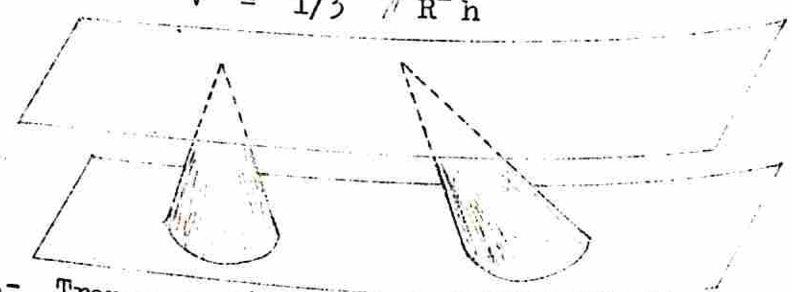
$$V = B.h$$
$$= \pi R^2.h$$

onde R é o raio e h a altura.



A.10. - Cône

$$V = 1/3\ \pi R^2 h$$



A.11.- Tronco de Cône

$$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)$$

A.12. - Esfera

$$V = 4/3\ \pi R^3$$

B. Metodologia dos Volumes.

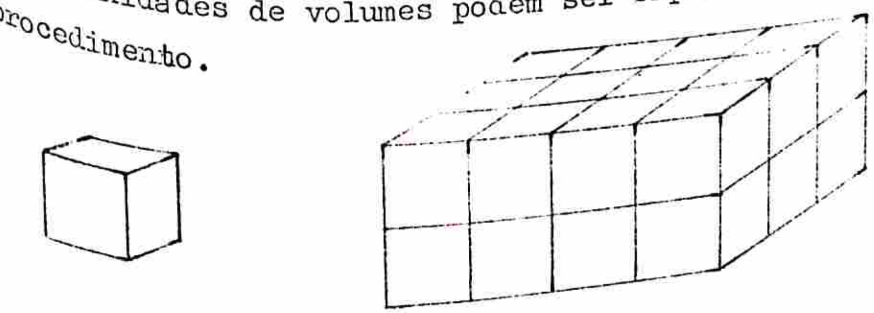
B.1. Sôbre o conceito.

A aprendizagem dos volumes é análoga à das áreas. O procedimento inicial pode ser aquele de preencher caixas com pequenos cubos, ressaltando novamente a necessidade para comparação, de se utilizar a mesma unidade, de onde a introdução do metro cúbico, múltiplos e submúltiplos, principalmente êstes.

B.2. Volume do paralelepípedo.

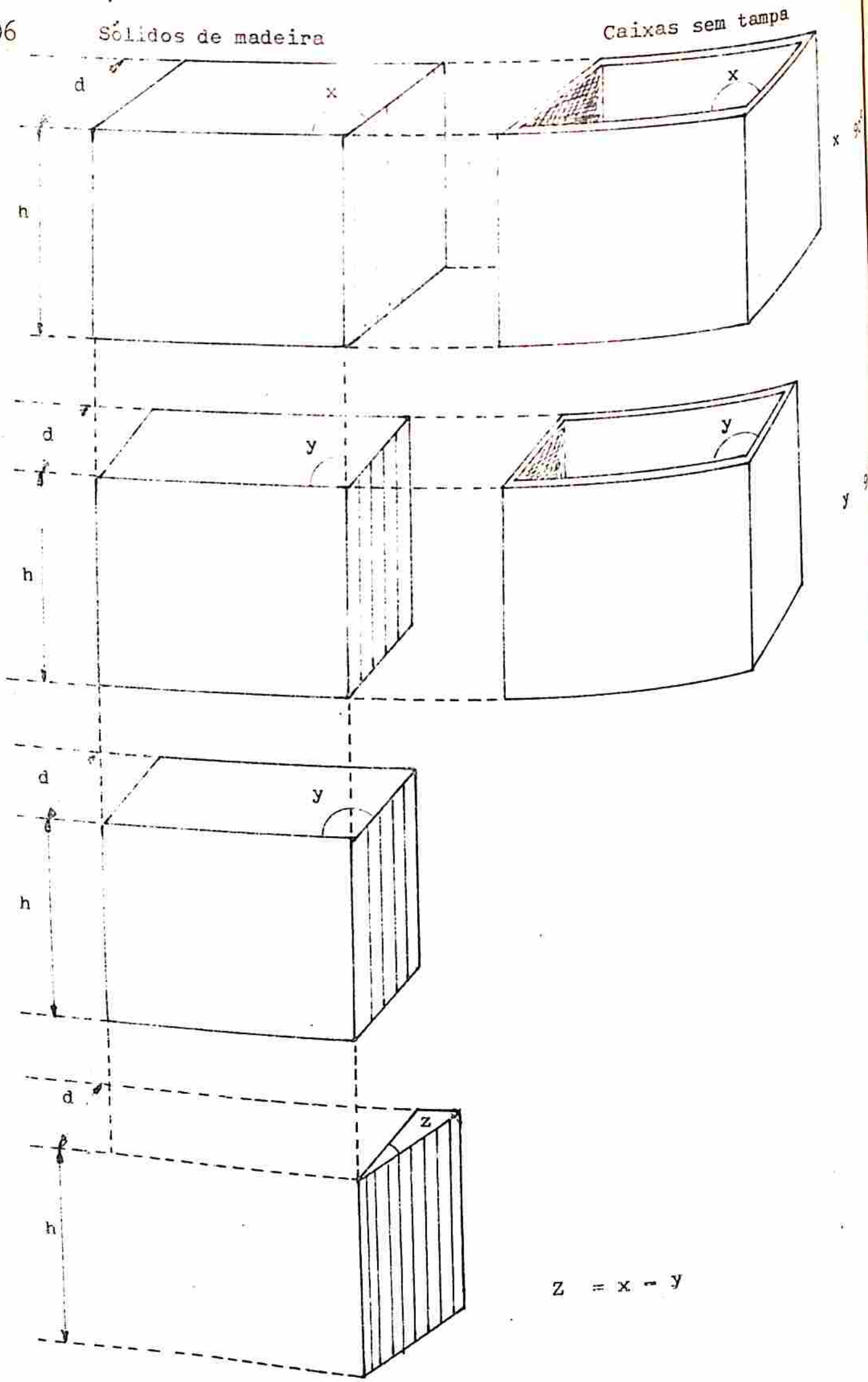
É claro que para se determinar o volume de um paralelepípedo reto de base retangular, o aluno deverá ser conduzido a observar que o número de cubos que preenchem a caixa é igual ao número de cubos que existem em cada camada e depois observando que a área da base é igual ao produto do comprimento pela largura.

Como para as áreas, as próprias regras de transformação de unidades de volumes podem ser explicadas pelo mesmo procedimento.



B.3. Prisma reto de base paralelogramo

Para o volume do prisma reto com paralelogramo por base podem ser usados sólidos de madeira como indicamos nas figuras seguintes para as equicomposições.



Utilização

a) Por preenchimento da caixa 1, mostrar que o sólido 1 é composto dos sólidos 3 e 4.

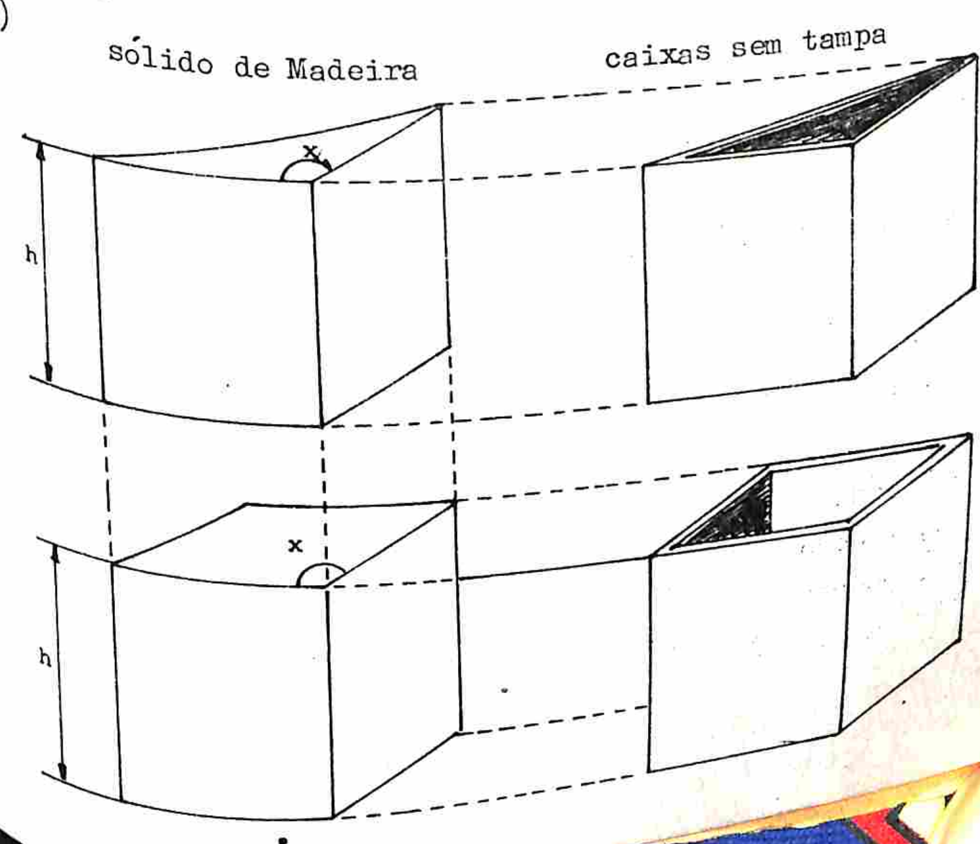
b) Por preenchimento da caixa 2, mostrar que o sólido 2 é composto dos sólidos 3 e 4.

c) Observar de a e b a equicomposição dos sólidos 1 e 2, de onde a equivalência e concluir que o volume do sólido 2 é igual ao volume do sólido 1, e como o volume é base x altura, o do sólido 1 também é base x altura, pois suas bases possuem áreas iguais e suas alturas são iguais.

Prisma reto triangular

Material

1)



Utilização: a) Por preenchimento da caixa 1 mostrar que os 2 prismas retos triangulares são equivalentes.

b) Por preenchimento da caixa 2 mostrar que o prisma reto de base paralelograma é composto dos dois prismas retos triangulares.

c) Concluir que um prisma reto triangular é equivalente à metade do prisma reto de base paralelogramo, portanto o seu volume também é metade, e que isso se verifica porque sua área da base é metade, logo, também para o prisma reto triangular o volume é base x altura:

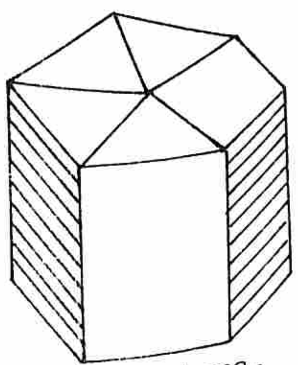
$$V = \frac{B \times h}{2}$$

e como $b = B/2$ será $V = b\,h$ onde B é do sólido 2 e b do sólido 1.

8. Prisma reto de base qualquer.

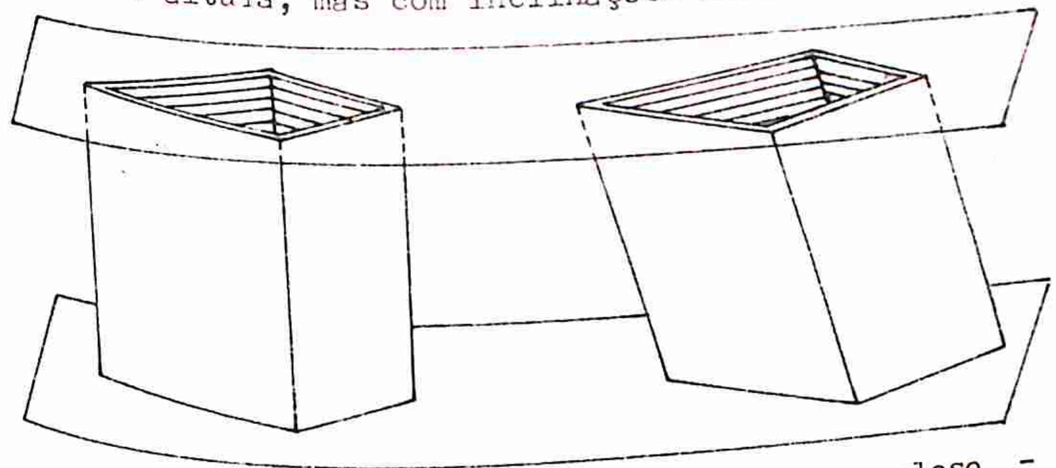
Dividir com giz a base em vários triângulos, como indica a figura, mostrando que o prisma reto de base qualquer é composto de vários prismas retos triangulares.

Levar os alunos a concluir que o volume será portanto a soma dos volumes de cada prisma, e como cada um é base x altura, podemos primeiro somar as áreas da base e depois multiplicar uma só vez pela altura; mas, quando somamos as áreas das bases obtemos a área de base do prisma reto qualquer, logo o volume é também base x altura.



Observação:

É interessante mostrar que para qualquer prisma o que interessa é a área da base e a altura (distância entre os planos das bases paralelas), podendo os sólidos serem oblíquos, usando para isso caixas (sem tampa superior), de igual base e altura, mas com inclinações diferentes.



Preenche-se um dêles com material granuloso - (feijão, milho, etc.), ou pulvurulento (areia, etc.), ou mesmo se possível com água; e, depois transporta-se de um para outro mostrando que as quantidades são iguais.

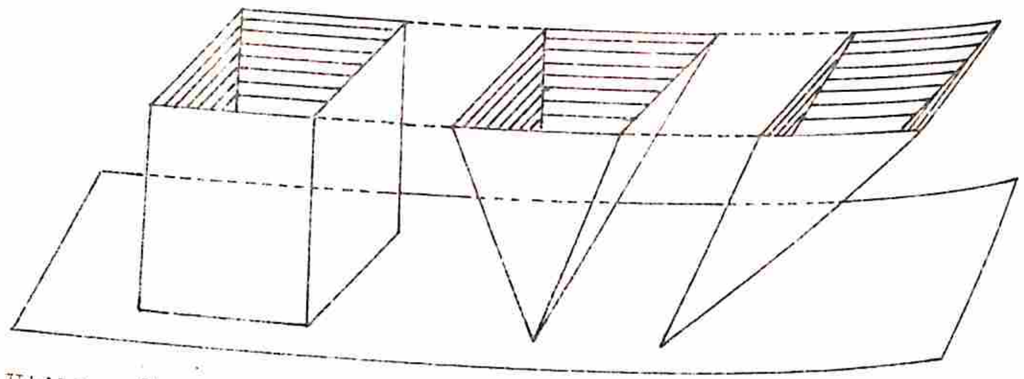
9. Pirâmide

Primeira experiência

Material: a. Pirâmide regular quadrangular sem a base

b. Prisma reto quadrangular sem uma das bases (com igual base a altura da pirâmide)

c. Vasilha com material granulado ou pulvurulento, etc.



Utilização: a) Mostrar a igualdade da base e altura

b) Preencher a pirâmide com o corpo granuloso do vasilhame; e, após cada operação despejar dentro do prisma até que fique cheio.

c) Observar que foram precisas 3 vêzes.

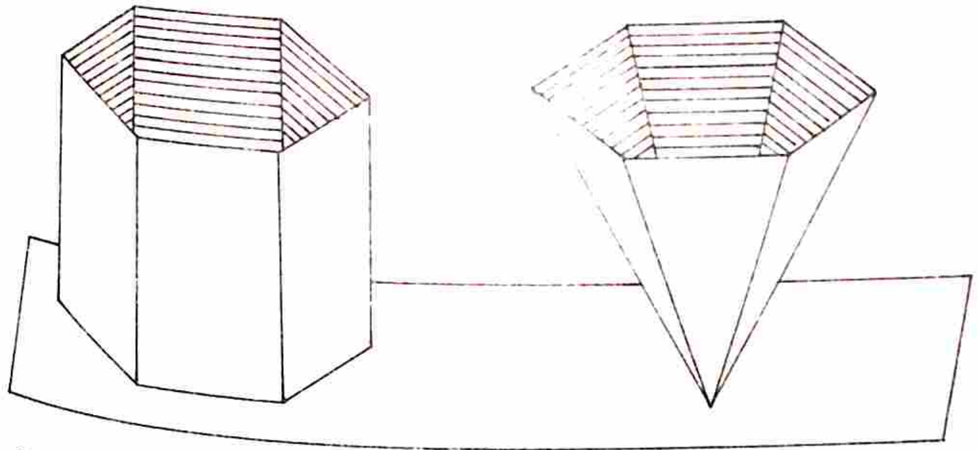
d) Concluir que o volume da pirâmide é 1/3 do volume do prisma, e como êsse é dado por base x altuta, obter finalmente que o volume da pirâmide é 1/3 do produto da sua base pela altura.

Segunda experiência

Repetir a experiência com prisma reto epiramide oblíquo, mas de bases ainda quadrangulares, obtendo a mesma conclusão; serve para mostrar que a fórmula independe da inclinação, e sim somente da base e da altura.

Terceira experiência

Repetir a experiência 1 para prisma e pirâmide com outros polígonos por bases.

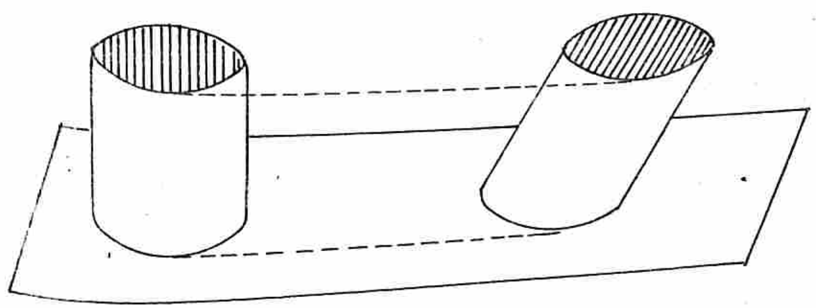


10. Cilindro

a) Levar os alunos a perceberem que o cilindro pode ser pensado como um prisma cujo número de lados é muito grande, portanto, o volume é também base x altura, ou área do circulo x altura, isto é:

$$V = \pi R^2 h.$$

b) Fazer a experiência com preenchimento de dois cilindros de igual base e altura, um reto e um oblíquo, com material granuloso, etc., mostrando que a fórmula é a mesma, só que a altura é a distância entre os planos paralelos das bases.



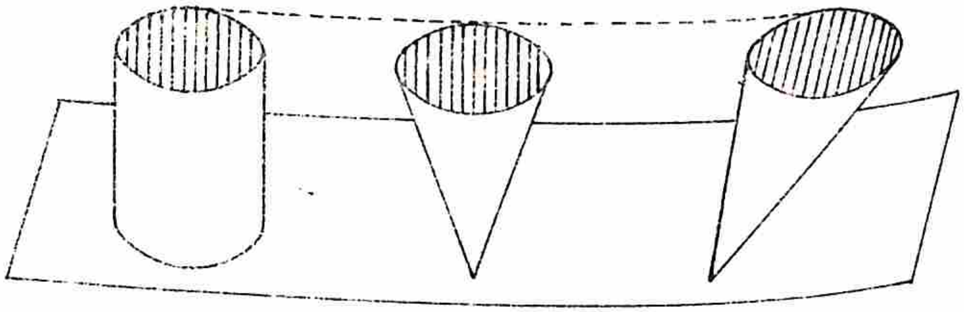
11. Cone

Fazer experiências análogas àquelas feitas para as pirâmides, usando:

1. cilindro reto com cone reto
2. cilindro reto com cone oblíquo

obtendo V = 1/3 Base x altura, ou

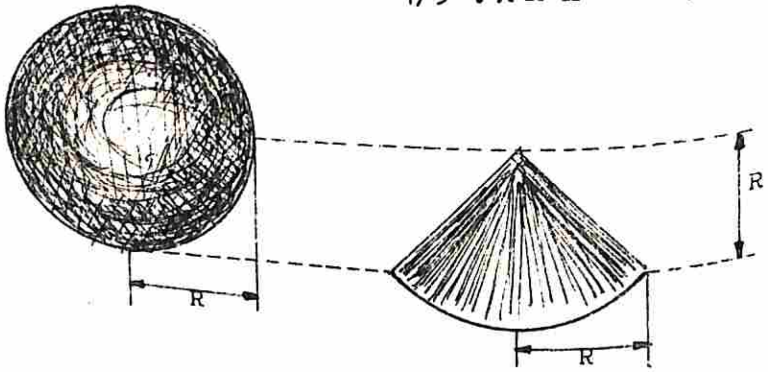
$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$



12. Esfera

Usar uma bola com um furo, e um cone (sem tampa), com raio e altura iguais ao raio da esfera, (furado no vértice como um funil para facilitar).
Por preenchimento observar que precisamos transportar o conteúdo de 4 cones para encher a bola, de onde

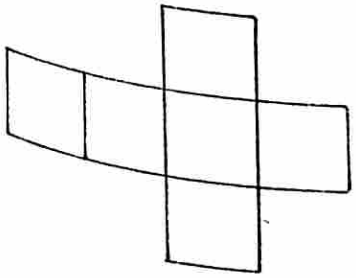
$V = 4 \times$ Volume do cone $= 4/3 . \pi R^2 h = 4/3 \pi R^3$



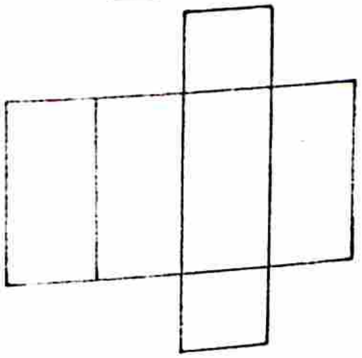
C. PLANIFICAÇÕES

Daremos a seguir, o que se nos apresenta de interesse tanto para o professor preparar o seu material didático, como para ser transmitido ao aluno, as planificações de alguns principais sólidos.

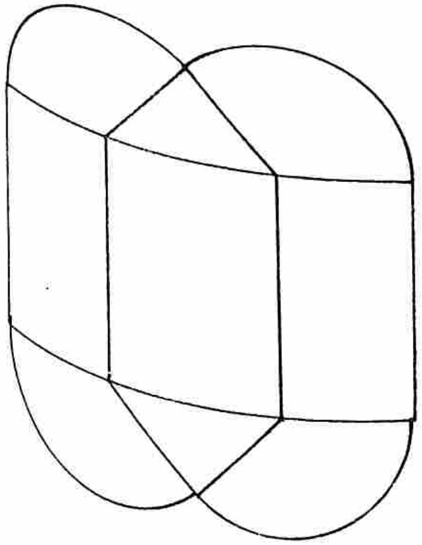
C.1. CUBO



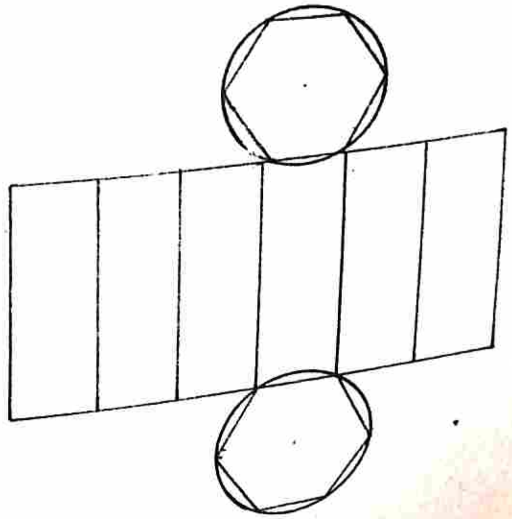
C.2. PARALELEPÍPEDO RETO QUADRANGULAR



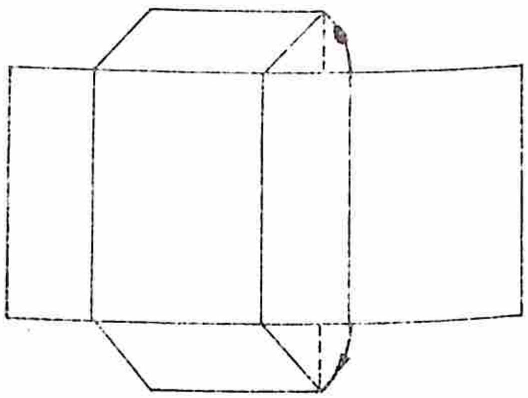
C.3. PRISMA RETO TRIANGULAR



C.4. PRISMA RETO EXAGONAL

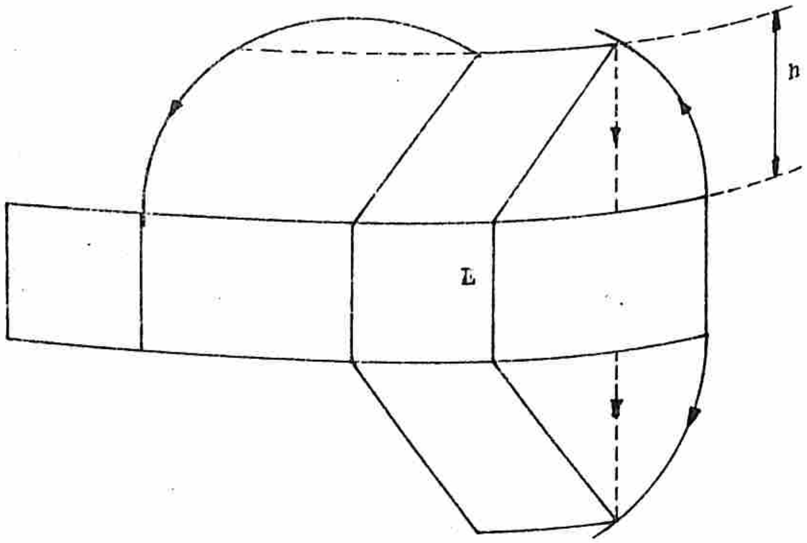


C.5. PRISMA RETO DE BASE PARALELOGRAMO

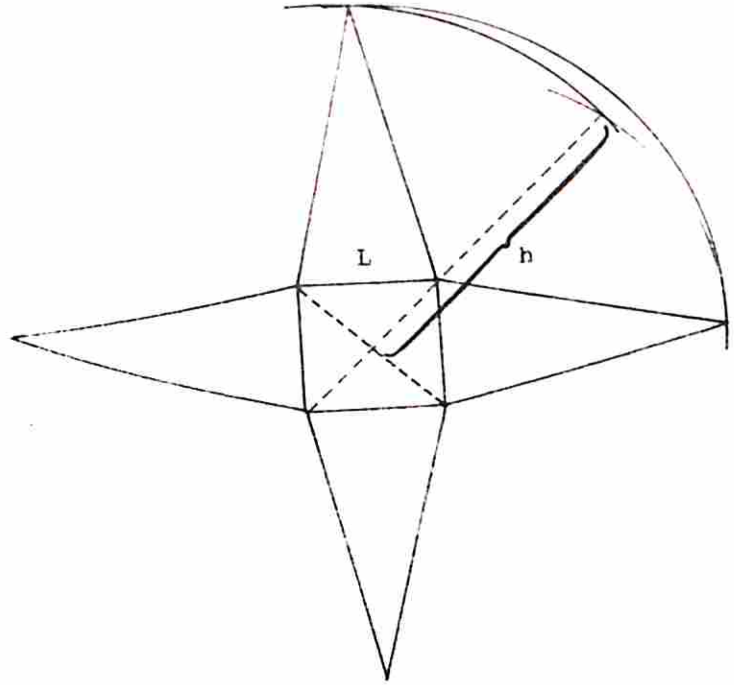


C.6. PARALELEPÍPEDO OBLÍQUO DE BASE QUADRADA

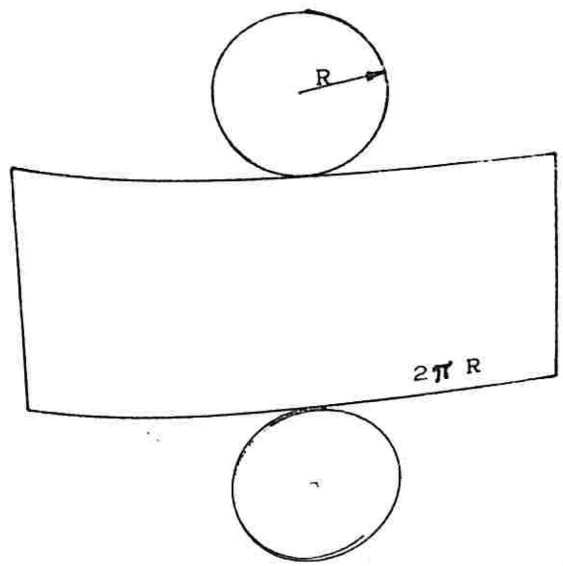
lado da base L, altura h



C.7. PIRÂMIDE RETA QUADRANGULAR .. lado L. altura h.

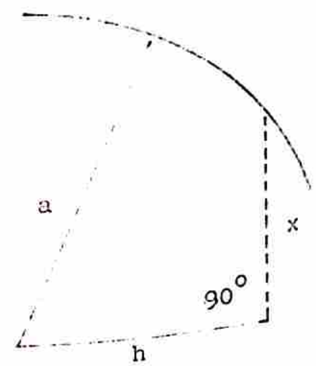


C.8. CILINDRO

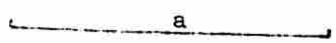


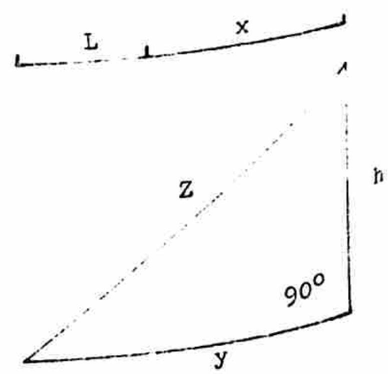
C.9. PIRÂMIDE OBLÍQUA QUADRANGULAR

lado L, altura h.



Escolhe-se uma medida a   h

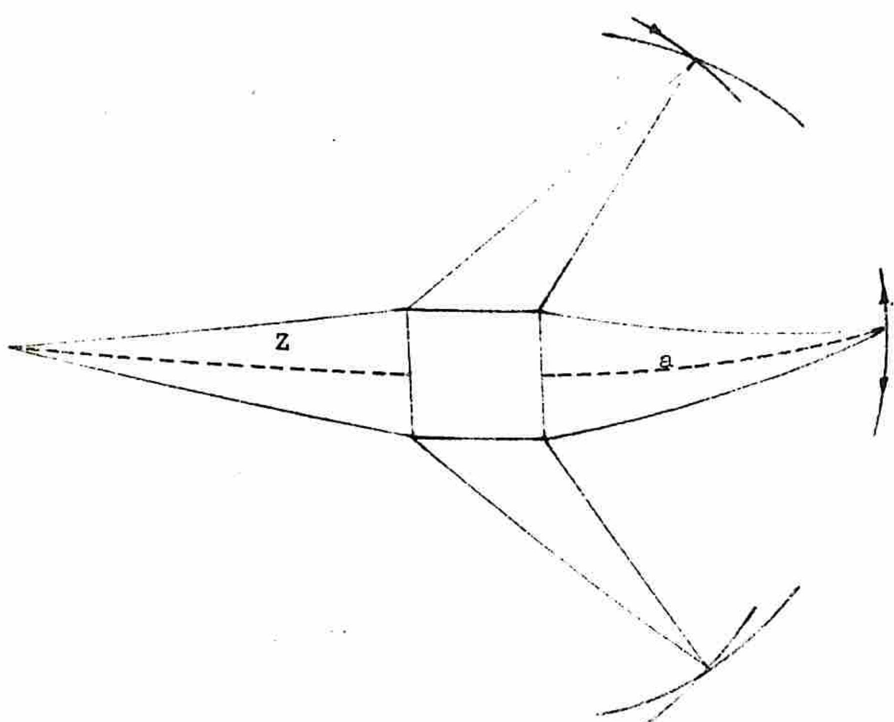




Determina-se com a construção ao lado o valor $x = \sqrt{a^2 - h^2}$ (ou por cálculo)

Determina-se a soma $y = x + L$

Faz-se a construção ao lado para se determinar $z = y^2 + h^2$



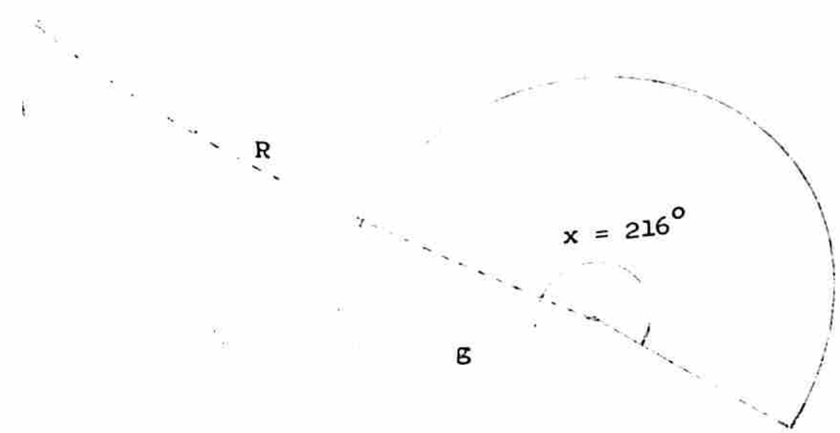
C.10. CONE

Raio R, altura h. (exemplo com R = 3 e h = 4)

Com a construção determina-se g(geratriz) ou por cálculo (no exemplo g = 5) $g = \sqrt{h^2 + R^2}$

Calcula-se o ângulo $x = \dfrac{360^\circ . R}{g}$

(no exemplo $x = 216^\circ$)



CAPÍTULO VII

ÁREAS

Não forneceremos neste capítulo uma teoria sôbre as superfícies e áreas; que os leitores encontrarão em tratados especiais ou até mesmo alguma coisa em livros didáticos elementares; mas, procuraremos lembrar aos professôres primários ou futuros professôres alguns conceitos e fórmulas importantes e daremos depois o que nos afigura conveniente, o aspecto metodológico, com os dados complementares aos fins propostos, que serão também úteis para o curso ginasial.

A. CONGRUÊNCIA, EQUICOMPOSIÇÃO e ÁREA

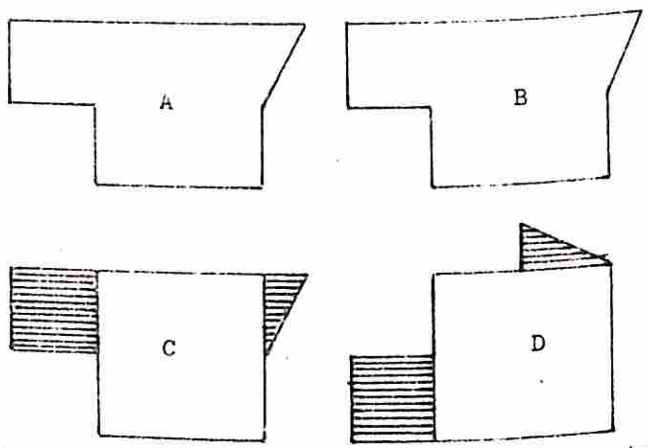
A.1. Congruência.

Dadas duas figuras A e B (como as desenhadas) são congruentes quando é possível fazê-as coincidir, pensando um movimento que transporte uma sôbre a outra. O que corresponde e pensarmos que elas possuem os seus elementos, respectivamente, com medidas iguais (lados e ângulos, no caso de polígonos).

Comumente diz-se que figuras congruentes são as figuras iguais, o que a rigor não é correto, pois são conjuntos de pontos diferentes.

A.2. Equicomposição.

Há entretanto figuras que mesmo sem serem congruentes, caso pudéssemos separá-las em figuras parciais, poderíamos fazê-las coincidir, como é o caso das figuras C e D, dispondo as partes convenientemente. Essas figuras são denominadas <u>equicompostas</u>; isto é, compostas de figuras congruentes (ou por vício de linguagem, compostas de figuras iguais).



Intuitivamente, de uma maneira elementar, observamos que as equicompostas são figuras com formas diferentes, mas com as superfícies tendo "extensões iguais"; entretanto, não esqueçamos que em particular as figuras congruentes são equicompostas.

Indicamos: $C < > D$

e lemos C é equicomposta com D.

É imediato que a equicomposição goza das seguintes propriedades:

Reflexiva: $A < > A$

Simétrica: $A < > B \Longrightarrow B < > A$

Transitiva: $(A < > B) \wedge (B < > C) \Longrightarrow A < > C$

e pelo que vimos no Vol.I, podemos afirmar que a <u>relação de</u>

<u>equicomposição</u> é uma <u>relação de equivalência</u>, de onde o uso de dizermos equivalentes para figuras equicompostas, isto é, figuras equicompostas se equivalem sob a noção de extensão das superfícies.

Dêsses conceitos resultam também os correlatos: figuras prevalente e supervalente; assim uma figura A é prevalente a B se a figura B é composta de uma figura equivalente a A e de pelo menos outra figura C, e indicamos:

$$A < B$$

A.3. - <u>Área</u>

Do exposto o leitor observou que cada superfície, com suas particulares formas, fornece uma grandeza que é a sua extensão.

A medida dessa grandeza é a área, isto é, área da <u>superfície</u>, de onde, a necessidade de se escolher uma unidade de medida, aquela que servirá para comparação, para referência.

Resulta também que figuras equivalentes possuem a mesma área, e que uma figura é prevalente a outra, ela possui área menor que aquela, e anàlogamente para supervalente.

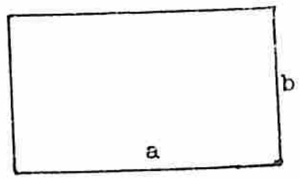
A unidades escolhida é a área de um quadrado que possua por lado a unidade de comprimento; assim, no sistema métrico decimal é o metro quadrado (m^2), isto é, a área de um quadrado de um metro de lado, usando-se também os seus múltiplos e sub-múltiplos (Ver Cap. V).

Desta forma, quando se diz que a área de uma figura é 15 m^2, isto significa que a figura é equivalente a uma outra composta de 15 quadrados de cujos lados medem 1 metro.

B.- FORMULÁRIO para as PRINCIPAIS FIGURAS PLANAS.

B.1. RETÂNGULO

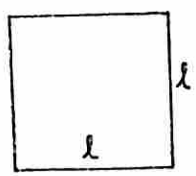
$A = a \times b$



Onde a e b são as duas dimensões medidas do comprimento e largura, ou frente e fundo, ou base e altura, etc.

B.2. QUADRADO

$A = \ell^2$

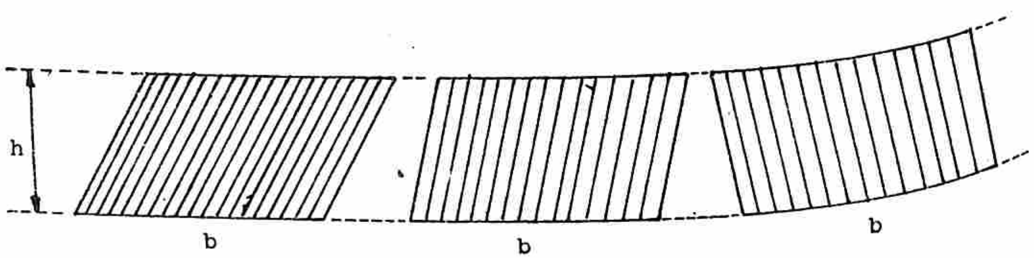


onde ℓ é a medida do lado.

B.3. PARALELOGRAMO

$A = b \times h$

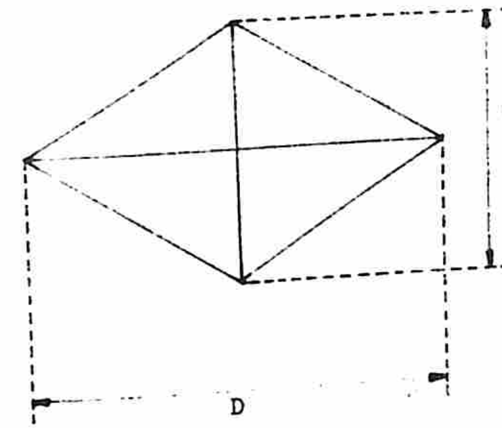
Onde b é a medida da base e h é a altura, mas entenda-se de uma maneira geral, h a distância entre as retas de dois lados paralelos, isto é, a largura da faixa.



portanto, qualquer paralelogramo de igual base (medida igual), da faixa, possui a mesma área.

B.4. LOSANGO

$$A = \frac{D \times d}{2}$$

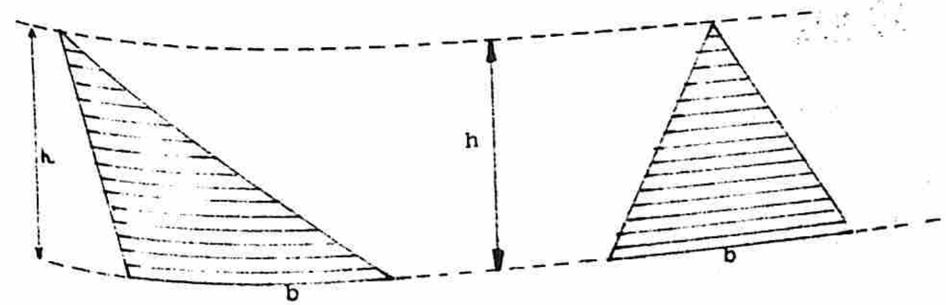


Onde D e d são as medidas das diagonais.

B.5. TRIÂNGULO

$$A = \frac{b \times h}{2}$$

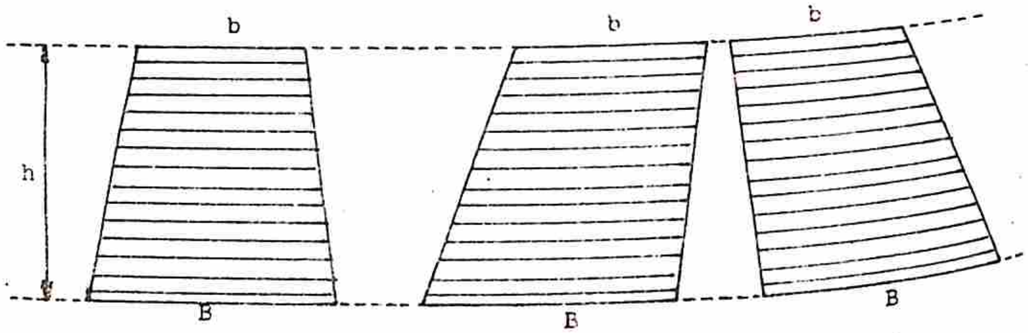
onde b é a medida da base (um dos lados), e h é da altura - (altura relativa ao lado considerado); vale a mesma observação relativa à faixa, feita para os paralelogramos.



B.6. TRAPÉZIO

$$A = \frac{(B + b) \times h}{2}$$

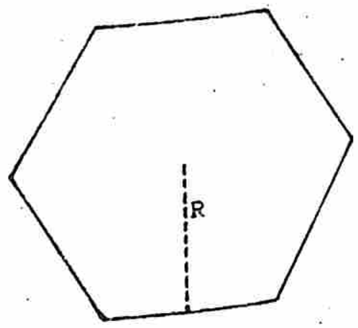
Onde B e b são as medidas das bases (maior e menor) e h da altura (distância entre os lados paralelos), e, vale a mesma observação da faixa.



B.7. POLÍGONO REGULAR

$$A = p \times a$$

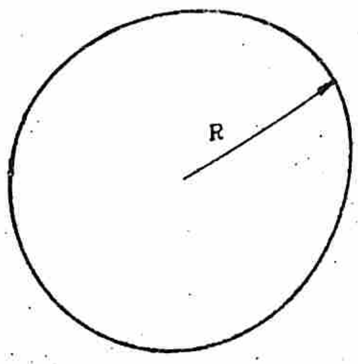
onde p é o semi-perímetro e a, a medida do apótema (distância comum do centro aos lados).



B.8. CÍRCULO

$$A = \pi R^2$$

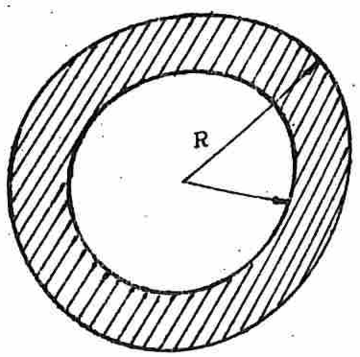
onde R é a medida do raio e π o número 3,1415926535....



B.8. CORÔA CIRCULAR

$$A = \pi (R^2 - r^2)$$

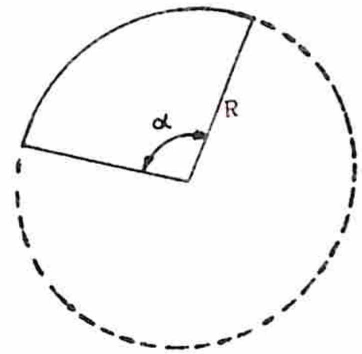
onde R e r são as medidas dos raios.



B.10. SECTOR CIRCULAR

$$A = \pi R^2 \frac{\alpha}{360^\circ}$$

onde α é a medida em graus do ângulo central do sector.



METODOLOGIA DAS ÁREAS

C.1. Sôbre o conceito.

A aprendizagem de áreas, pela sua grande aplicabilidade em questões reais apresenta por si só, forte motivação, o que pode ser explorado pelos professores com real proveito; entretanto, isto não dispensa-o de levar a criança ao entendimento correto do conceito, ainda mais, se a tarefa é facilitada.

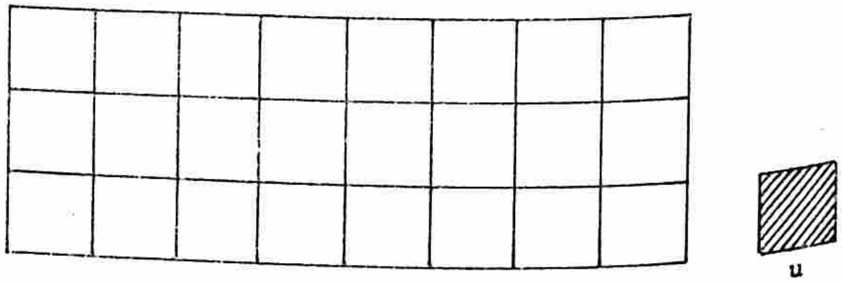
Uma forma interessante de iniciar o assunto é aquela de dar aos alunos exercícios práticos de cobrir um cartão retangular com pequenos cartões quadrangulares, pedindo-os que comparem superfícies em têrmos do número de quadradinhos utilizados.

O professor levará os alunos a perceberem que as comparações devem ser feitas com quadradinhos "iguais", que será a unidade de medida, unidade de área.

Depois, fixando o conceito, fácil será explicar a vantagem de se adotar uma unidade conhecida por todos, portanto, utilizando-se o quadrado de lado igual a um metro. Is to é, o metro quadrado, múltiplos e sub-múltiplos.

C.2. A área do retângulo e quadrado.

A área do retângulo, evidentemente, deve ser obtida, conduzindo os alunos a perceberem que o número de quadradinhos unidades pode ser obtido multiplicando-se o número dêles em cada linha (medida da base) pelo número de linhas (medida da altura).



u

8 x 3 = 24
A = 24u

Em particular, na área do quadrado não há dificuldades.

As próprias regras de transformação de unidades de área do sistema métrico podem ser explicadas com os mesmos meios.

Os exercícios de fixação de aprendizagem não devem ser fornecidos na totalidade em forma preparada, dando-se as dimensões, uma grande maioria dêles devem ser práticos, o aluno, efetua as medidas necessárias dos objetos, de cartões, de partes da sala, da mesa, da cortina, etc. o que deverá acontecer também para as outras figuras. Isto não significa que se excluirá os problemas que já fornecem as dimensões necessárias, pois êsses contribuem para a memorização e mecanização do cálculo correspondente.

Os outros possuem a vantagem de colocar os alunos

diante de uma situação [illegible] problemática, eles deverão [illegible] sar para discernir entre [illegible] possíveis medições; [illegible] nesses surgirão com certeza, questões interessantes de medidas, e a notável familiarização com as técnicas de manejo de instrumentos.

C.3. As outras figuras.

Como preparação, sugerimos a prática recreativa dos "quebra-cabeça" com os poliminós, que constituem em cobrir perfeitamente uma dada superfície com um conjunto de figuras compostas de quadradinhos unidos (os poliminós); dos quais daremos exemplo e sugestões no fim do capítulo.

Essa prática apresenta a grande vantagem de habituar os alunos a descobrirem relações de equicomposição entre figuras planas; aliás, a própria forma de aprendizagem do descobrimento das fórmulas utiliza: composição, superposição e em consequencia equicomposição.

O ideal será atingido se os alunos munidos de vários cartões, êles mesmos descobrirem as equivalências; em caso contrário cabe ao professor conduzir o raciocínio dos alunos e as decomposições, superposições convenientes para resultar a equicomposição desejada.

Para facilitar o trabalho do professorado daremos a seguir elementos para êsse mistér.

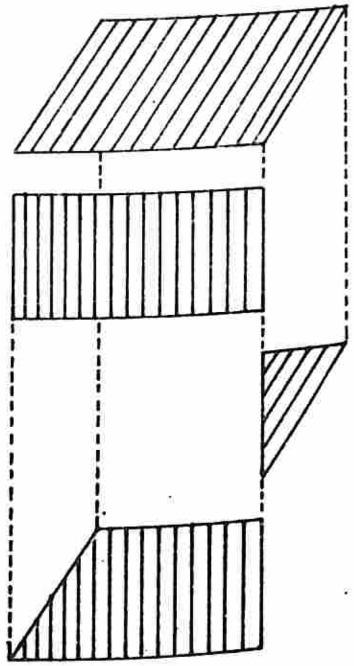
C.3.1. Paralelogramo

Material: a) Um paralelogramo (pouco inclinado) (em cartões coloridos).

b) Um retângulo, base e altura iguais.

c) Um triângulo retângulo obtido cortando-se um paralelogramo congruente ao primeiro.

d) Um trapézio (idem).



__Utilização:__

Primeiramente (para tôdas as experimentações) mostrar as dimensões iguais.

a) Por superposição obter a composição do paralelogramo no trapézio e triângulo.

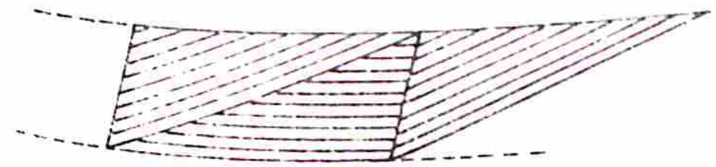
b) Por superposição, obter a composição do retângulo.

c) Perceber a equicomposição entre o paralelogramo e o retângulo, de onde a área do paralelogramo ser igual à área do retângulo (medida da base pela medida da altura), que são também do paralelogramo; portanto, a área do paralelogramo é igual ao produto da medida da sua base pela medida da altura

__Complementação:__

Para o curso ginasial, ou para uma situação especial,

julgamos convenie[illegible] a conclusão é geral, mesmo que o paralelogramo [illegible], necessitando-se apenas mostrar uma equicomp[illegible] preliminar com um paralelogramo pouco oblíquo, como esclarece a figura. O procedimento fornece também a importante conclusão da igualdade da área para qualquer paralelogramo com igual base dentro da faixa.



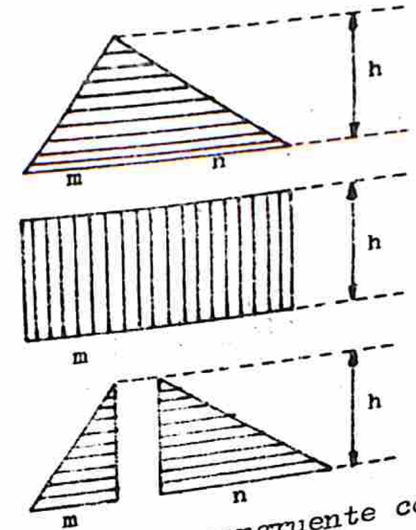
C.3.2. __Triângulo__

Primeira experimentação:

__Material:__ a. um triangulo

b. um retângulo (com igual base e altura)

c. dois triângulos retângulos obtidos cortando-se um triângulo congruente com o dado em a.

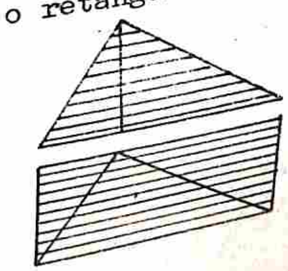


__Utilização:__

Mostrar preliminarmente que o retângulo e triângulo possuem base e altura iguais.

a) Por superposição obter a composição do triângulo

b) Por superposição obter a composição do retângulo



c) Perceber que o triângulo é equicomposto (equivalente) com a metade do retângulo, de onde a área do triângulo ser a metade da área do retângulo, e como possuem base e alturas iguais resulta a fórmula conhecida.

Observação:

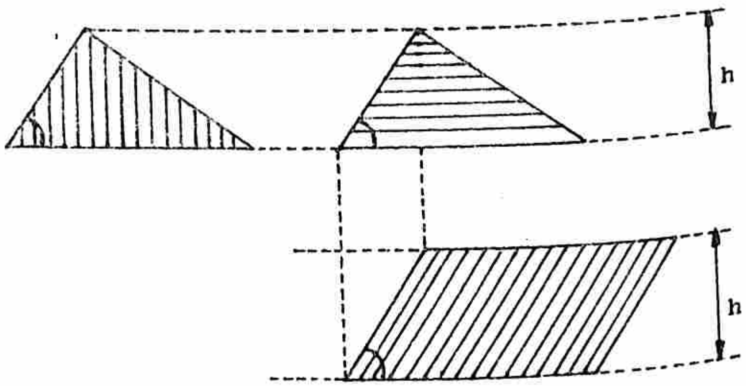
Estas equicomposições só se verificam quando o pé da altura pertence ao segmento da base.

Segunda experimentação:

<u>Material</u>:

a) Dois triângulos congruentes

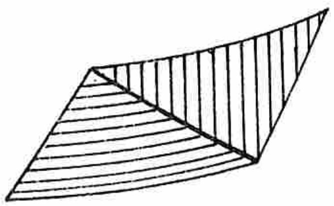
b) um paralelogramo de base e altura iguais, e também com mesmo ângulo da base.



<u>Utilização</u>:

a. Por superposição mostrar a congruência dos triângulos (Igualdade).

b. Por superposição mostrar a composição do paralelogramo.



c. Perceber a equivalência de um dos triângulos com metade do paralelogramo, etc.

Observação:

Julgando conveniente, o professor pode mostrar a validade do resultado também para triângulo retângulo.

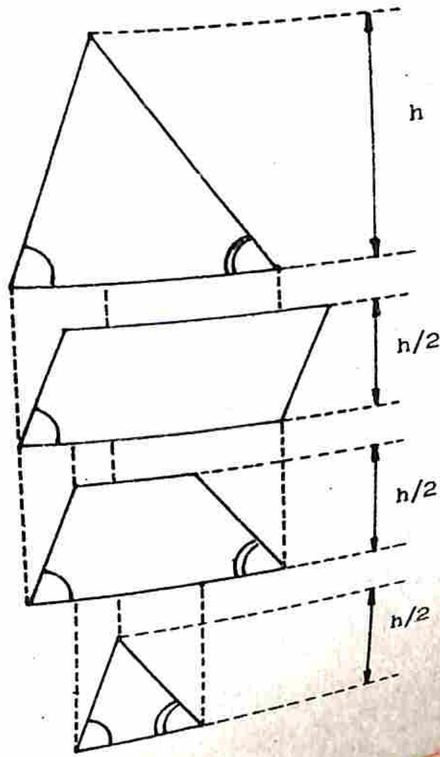
Terceira experimentação: (preferível)

<u>Material</u>: a. um triângulo

b. um paralelogramo com base igual e altura igual à metade, e igual ângulo de base

c. um trapézio (obtido cortando-se um triângulo congruente ao primeiro, paralelamente à base, na metade da altura)

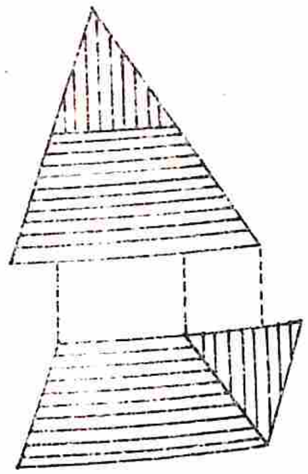
d. um triângulo (o que ficou com o corte dado em c.)



Utilização:

a. Por superposição obter a composição do triângulo grande (trapézio e triângulo pequeno)

b. Por superposição obter a composição do paralelogramo (trapézio e triângulo pequeno).



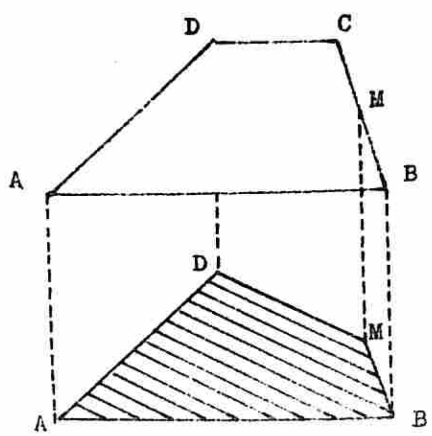
c. Perceber a equicomposição entre o triângulo e o paralelogramo, de onde a igualdade das áreas; e como a altura do paralelogramo é a metade da altura do triângulo resulta a fórmula: base x metade da altura, etc.

C.3.3. Trapézio

Primeira experimentação:

Material: a. um trapézio

b. um quadrilátero obtido cortando-se um trapézio congruente (igual) ao dado, do vértice D ao ponto médio M do lado BC.

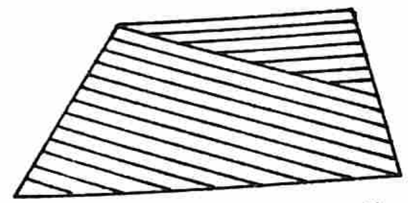


c. um triângulo, aquêle que se obtém em b. quando se cortou o trapézio.

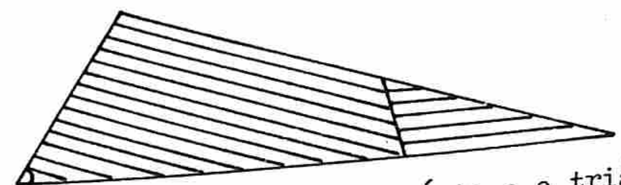
d. um triângulo de base igual à soma das bases do trapézio, altura igual à altura do trapézio, com ângulo da base igual ao ângulo da base do trapézio.

Utilização:

a. Por superposição mostrar a composição do trapézio: quadrilátero e triângulo



b. Por superposição mostrar a composição do triângulo dado em d: quadrilátero e triângulo.

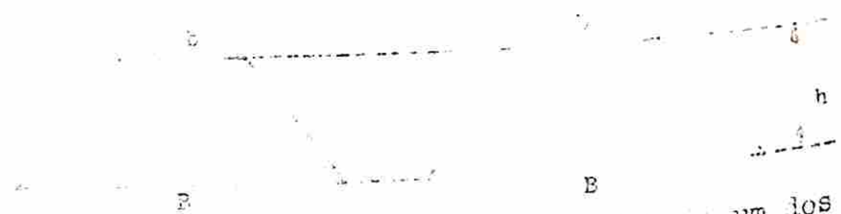


c. Perceber a equicomposição entre o trapézio e o triângulo, de onde a equivalência, e a igualdade das áreas; isto é, a área do trapézio é igual à área do triângulo, portanto, igual ao produto da sua base pela altura dividido por 2, mas a sua base é a soma das bases do trapézio, e a sua altura é igual a altura do trapézio, portanto, segue a fórmula.

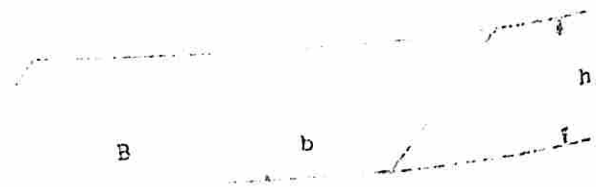
Segunda experimentação:

Material:

a. dois trapézios congruentes



b. um paralelogramo de altura igual a de um dos trapézios, mas com base igual à soma das bases, e com ângulo igual ao do trapézio.

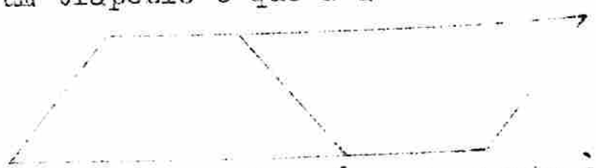


Soma das bases

Utilização:

a. Por superposição mostrar a congruência (igualdade) dos trapézios

b. Por superposição mostrar a composição do paralelogramo, observando que a base do paralelogramo é a soma das bases de um trapézio e que a altura é igual



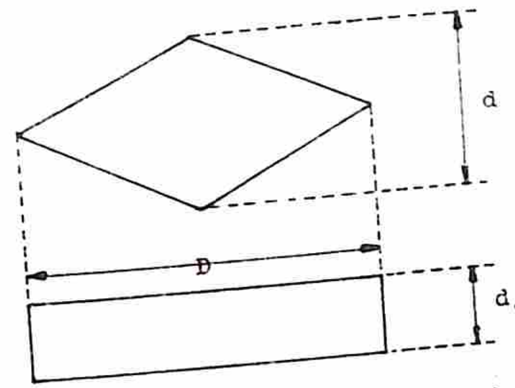
c. Perceber que um trapézio é equivalente à metade do paralelogramo e portanto sua área é metade da área do paralelogramo, ou ainda, que a fórmula é produto da soma das bases pela altura e dividido por dois.

C.3.4. Losango

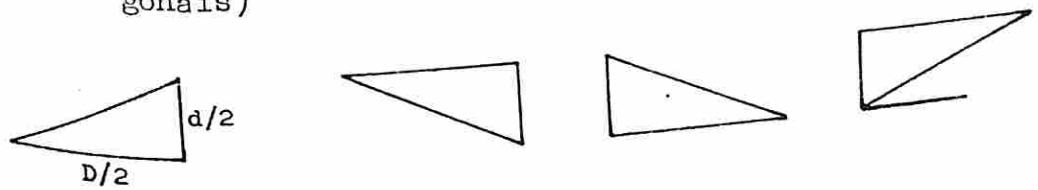
Primeira experiência

Material: a. um losango

b. um retângulo com comprimento igual a uma diagonal (D), largura igual à metade da outra diagonal (D/2)

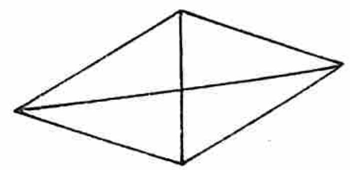


c. quatro triângulos retângulos congruentes (iguais), com catetos respectivamente iguais às metades das diagonais (obtidos cortando-se um losango nas diagonais)

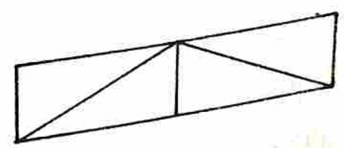


Utilização:

a. Por superposição mostrar a composição do losango (4 triângulos)



b. Por superposição mostrar a composição do retângulo (os 4 triângulos), mas evidentemente as dimensões do retângulo.



c. Ressaltar a equicomposição entre o retângulo e o losango, portanto, sua equivalência, de onde a igualdade da área do losango e do retângulo, ou que a área do losango é igual ao produto de uma diagonal pela metade da outra, etc.

Segunda experiência:

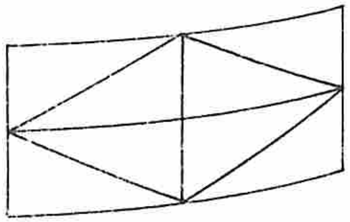
<u>Material</u>:

a. losango

b. um retângulo de dimensões iguais às diagonais.

c. oito triângulos congruentes (iguais)

<u>Utilização</u>:



a. Por superposição mostrar a composição do losango: quatro triângulos.

b. Por superposição mostrar a composição do retângulo: oito triângulos

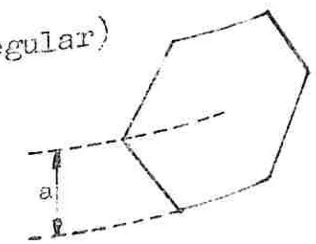
c. ressaltar que o losango é equivalente à metade do retângulo, portanto sua área é a metade da área do retângulo, etc.

C.3.5. <u>Polígomo Regular</u>.

Realizar experimentações como a seguinte para outros polígonos regulares, obtendo sempre o mesmo resultado.

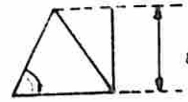
Primeira experiência (para um exágono regular)

<u>Material</u>:

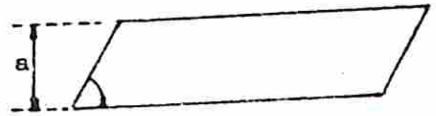


a. um exágono regular

b: seis triângulos congruentes (iguais) que se obtém cortando-se um outro exágono de todos os vértices até o centro.



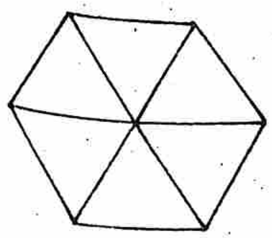
c. um paralelogramo com base igual à metade do perímetro, e altura igual ao apótema (altura comum aos triângulos).

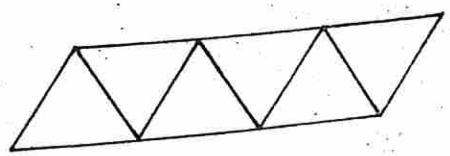


<u>Utilização</u>:

a. Por superposição mostrar a composição do polígono (6 triângulos) observando que a altura dos triângulos é o apótema.

b. Por superposição mostrar a composição do paralelogramo (os 6 triângulos)



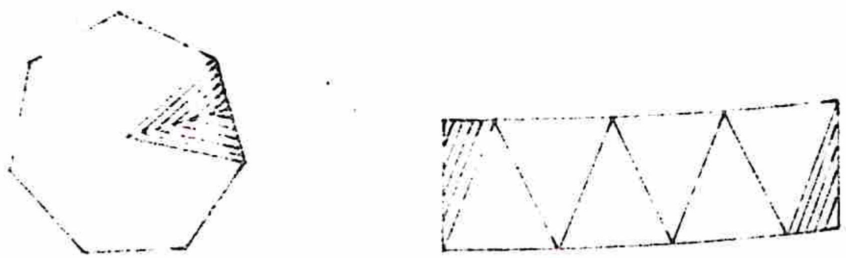


c. ressaltar a equicomposição entre o polígono e o paralelogramo, de onde a equivalência, e portanto a área do polígono regular ser igual à área do paralelogramo, que é igual à base pela altura, mas a base é a metade do perímetro

tro (semi-perímetro), e a altura do paralelogramo é o apótema de onde...

Observação:

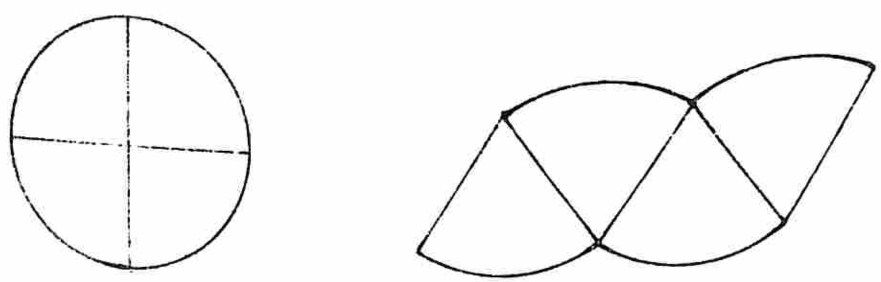
É interessante realizar experiências depois com o octógono regular, obtendo o mesmo resultado; e, seria conveniente para número ímpar de lados, quando a equicomposição é com um retângulo;



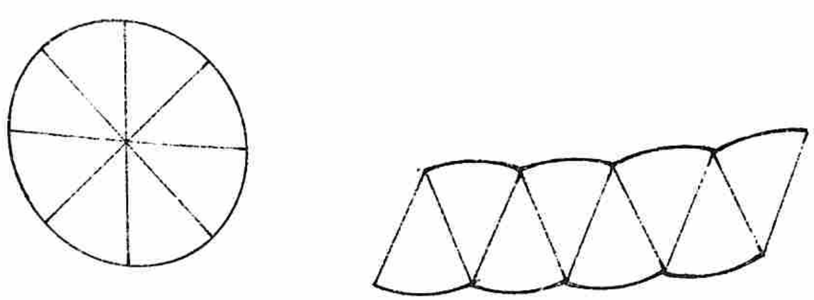
C.3.6. Círculo

Utilizar várias experiências sucessivas como para os polígonos, mas com sectores circulares, mostrando uma equicomposição aproximada com um paralelogramo, mas que melhora quando aumentamos o número de divisões.

1.



2.



Observação:

Ressaltar que a base do paralelogramo é aproximadamente igual à metade da soma dos arcos, portanto igual ao semi-perímetro ($\pi \times R$), e a altura do paralelogramo é igual ao raio (R) de onde a fórmula:

$$A = \pi \times R \times R = \pi \times R^2.$$

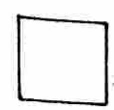
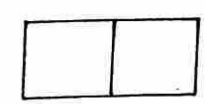
D. RECREAÇÕES DE ÁREAS COM POLIMINÓS.

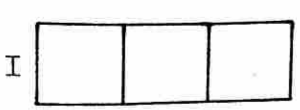
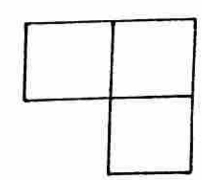
Poliminós são blocos (de cartões ou madeira) constituídos de quadrados unidos pelo menos por um lado.

O quebra-cabeça consiste em cobrir uma figura maior (um cartão ou tabuleiro) com um determinado conjunto de poliminós, que, pelo visto, consiste em mostrar uma composição dita verdadeira.

Para as crianças, pode ser adotada também outra forma, pelo menos no começo, deixando-as utilizar qualquer conjunto de poliminós. O interessante é que as crianças encontram várias soluções para um mesmo problema. Também é motivador a cronometragem dos tempos gastos para as soluções.

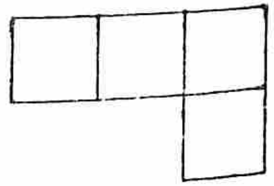
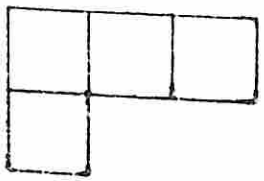
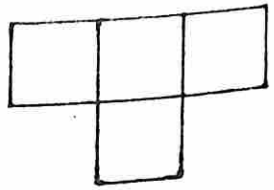
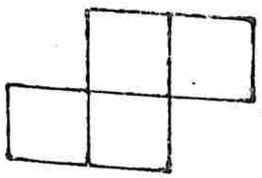
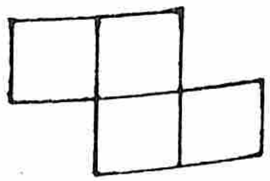
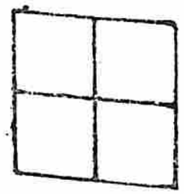
Poliminós quanto ao número de quadrados (os menores)

Monominó  Dominó 

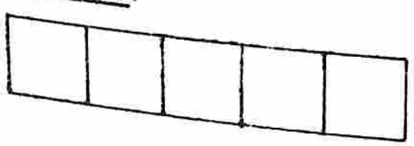
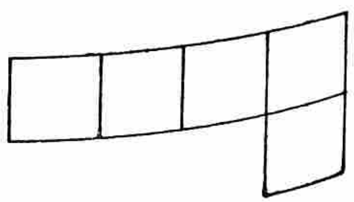
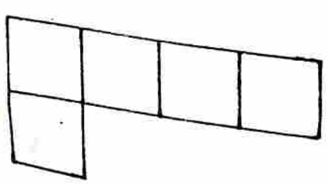
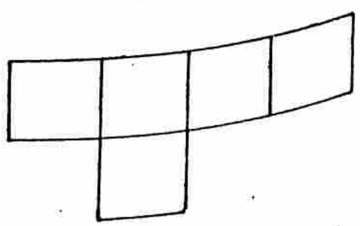
Triminós Tipo I  Tipo II 

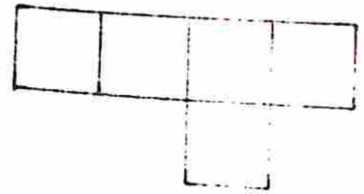
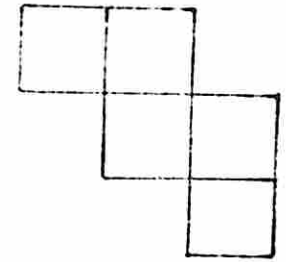
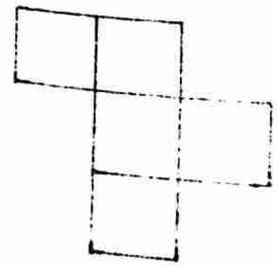
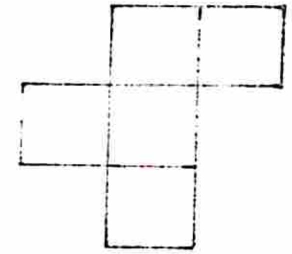
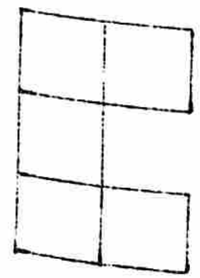
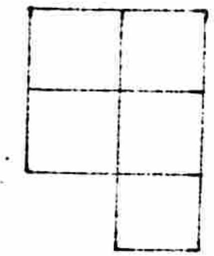
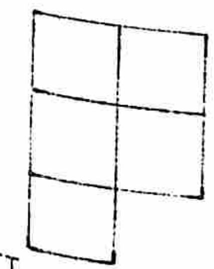
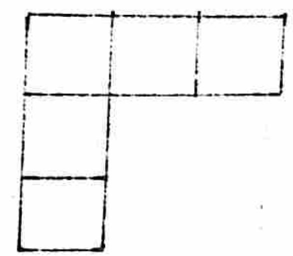
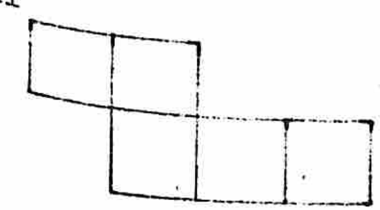
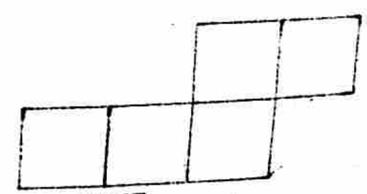
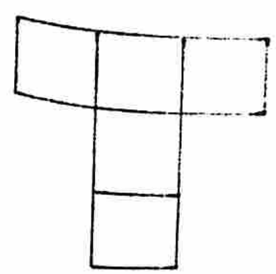
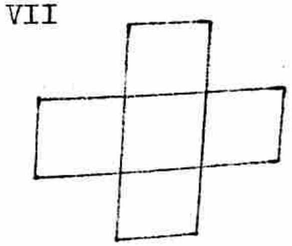
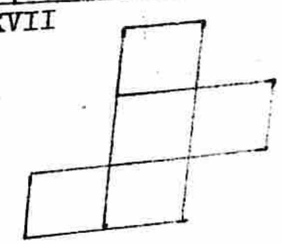
Tetraminós:

I

II

III

IV

V

VI

VII


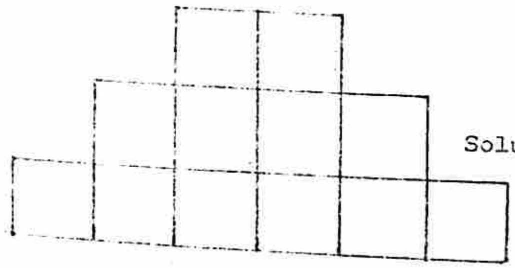
Pentaminós:

I

II

III

IV


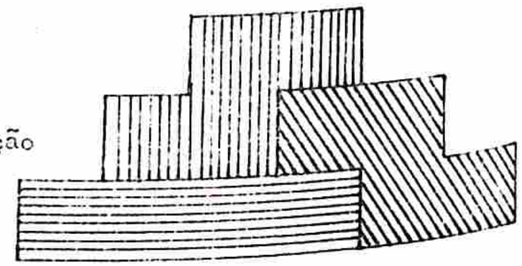
V

VI

VII

VIII

IX

X

XI

XII

XIII

XIV

XV

VII

XVII


Exemplos:

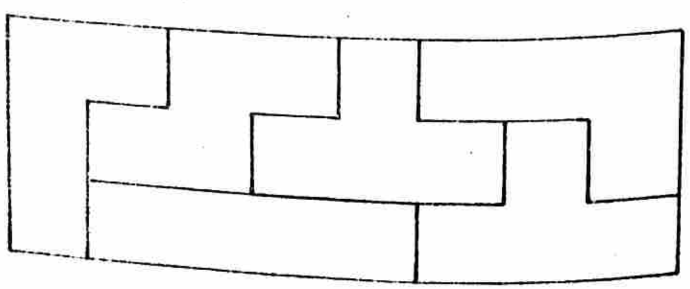
1. Cobrir a figura triangular com tetraminós sendo um V, um VI e um I.



Solução

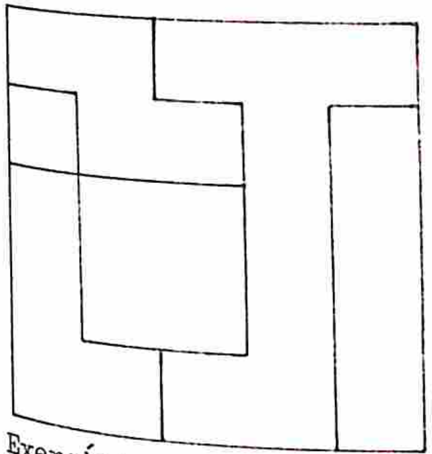


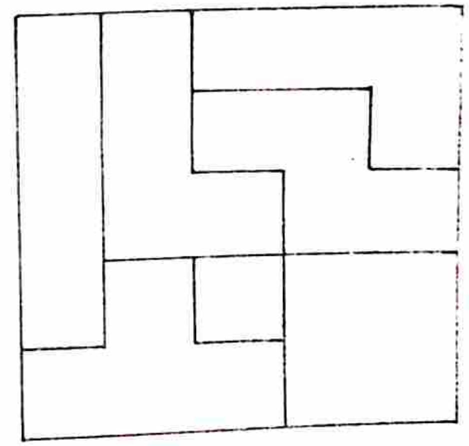
2. Cobrir um tabuleiro 3x8 com tetraminós, sendo dois do tipo II, um V, um I, dois IV.



3. Cobrir um tabuleiro 5 x 5, com um monominó, e tetraminós: um I, um II, um III, um IV, um VI e um VII.

Entre outras soluções possíveis apresentamos duas encontradas por crianças de 6 e 7 anos.





Exercícios Propostos:

1. Compor um tabuleiro 4 x 4 usando só tetraminós do tipo I.
2. Compor um 4 x 4, usando só tetraminós do tipo VII.
3. Compor um 4 x 4, usando só tetraminós do tipo IV.
4. Compor um 4 x 4, usando dois tetraminós do tipo II e dois III.
5. Compor um 4 x 4 usando um tetraminó do tipo I, um II, um III e um VII.
6. Compor um 4 x 4 com um monominó, um pentaminó do tipo II, um III, e um IX.
7. Compor um 4 x 4 com um monominó, um pentaminó do tipo V, um IX e um XV.
8. Compor um 5 x 5 com pentaminós: um tipo IV, um V, dois XV e um XVII.
9. Compor um 5 x 5 com pentaminós, sem repetir.
10. Compor um 6 x 6 usando um monominó, e só pentaminós diferentes.

E. ALGUNS CASOS ESPECIAIS

Desenvolveremos, ainda que sucintamente, sob êste tópico as explicações e fórmulas para alguns casos especiais - para o cálculo de áreas.

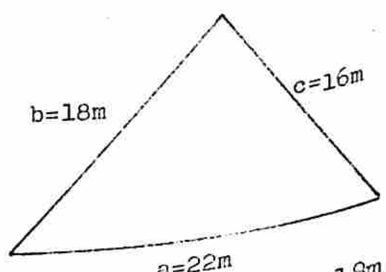
E.1. Sôbre o triângulo:

Vimos que a área do triângulo pode ser obtida calculando-se o semi-produto da medida da base pela da altura; é claro, que, para assim procedermos, necessitamos possuir essas duas dimensões, o que nem sempre acontece.

Não raro, professoras primárias de escolas rurais já defrontaram -se com situações, em que sitiantes ou chacareiros recorrem a elas para calcular a área de um terreno triangular fornecendo outros elementos, por exemplo as medidas dos três lados: a, b, e c; o que lhes parece natural, aliás, diga-se de passagem, que a medição da altura na prática não é simples e em geral imprecisa, pois depende da localização exata de uma perpendicular.

Para êste caso a fórmula é

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$



onde p é o semi-perímetro.

Exemplo: Terreno triangular com os lados medindo 22m, 18m e 16 m. Teremos:

$$p = 1/2(22+18+16) = 28 \text{ e } A = \sqrt{28.6.10.12} \simeq 142,$$

isto é, aproximadamente 142 m^2.

No caso do triângulo ser equilátero a fórmula se simplifica passando a ser:

$$A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

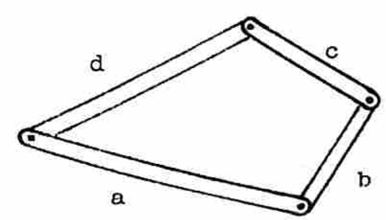
Exemplo: Cálculo da área de um terreno triangular equilátero cujos lados medem 12 m cada um:

$$A = \frac{12^2\sqrt{3}}{4} \simeq 62,35 \text{ m}^2$$

E.2. Sôbre o quadrângulo:

Várias professoras já me trouxeram uma dificuldade comum, aquela de determinar a área de um terreno quadrangular conhecendo-se as medidas dos 4 lados.

Ao leigo pode parecer extranho, mas a verdade é que: É impossível calcular-se a área de um quadrângulo conhecendo-se só as medidas dos quatro lados. Entretanto, não é difícil perceber que com as quatro medidas podemos obter quantos quadrângulos quizermos e com áreas visìvelmente diferentes, bastando para isso construirmos um quadrilátero com articulações nas extremidades, que permitam mudar a forma.



É portanto, necessário, pelo menos mais um elemento, por exemplo uma medida em diagonal; dessa maneira transforma-se o problema em cálculo da área de dois triângulos, dos quais se conhece os lados.

No caso do quadrilátero ser um trapézio, isto é, se tivermos além das quatro medidas dos lados, mais essa informação de que dois lados são paralelos, então é possível calcular-se a área pela fórmula:

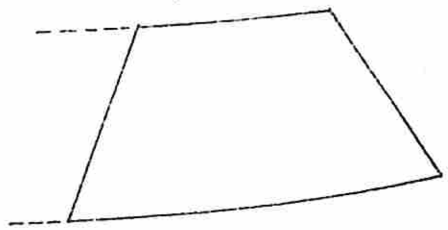
$$A = \frac{B + b}{B - b} \sqrt{(p-B)(p-b)\left[p-(b+x)\right]\left[p-(b+y)\right]}$$

onde: B = base maior

b = base menor

x e y lados não paralelos

p = semi-perímetro



Exemplo: Cálculo da área de um terreno quadrangular cujos lados medem 6m, 13m, 20 m e 15m, sabendo-se que o de 6 e o de 20 são paralelos.

$$A = \frac{20 + 6}{20 - 6} \sqrt{(27-20)(27-6)(27-19)(27-21)} =$$

$$= 156 \text{ m}^2.$$

E.3. Superfície compreendida entre uma curva, uma reta, e duas perpendiculares à reta.

É um caso que aparece na prática, por exemplo, de um lote de terreno cujo fundo é irregular, uma rua ou uma estrada curva, ou mesmo um córrego, etc. Entre outros processos, dois que merecem destaque:

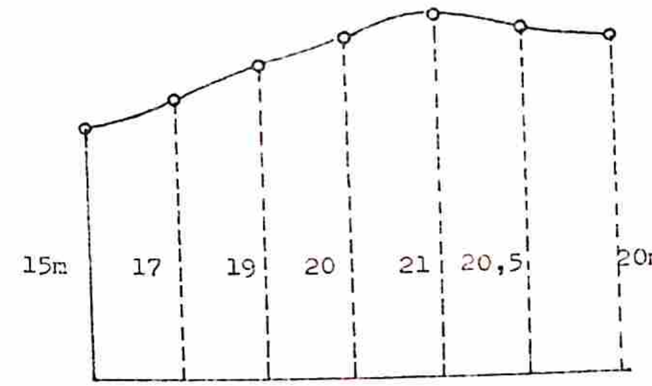
I. Da fórmula de Simpson:

Divide-se a superfície em várias faixas com ordenadas equidistantes e aplica-se a Fórmula Aproximada de Simpson:

$A \cong h/3(E + 2I + 4P)$ onde: h = frente : nº de faixas

E = soma das ordenadas extremas, I = soma das ordenadas de ordem ímpar (sem extremas), P = soma das ordenadas de ordem par (sem extremas).

Exemplo:



h = 30 : 5 = 5

E = 15 + 20 = 35

I = 19 + 21 = 40

P = 17 + 20 + 20,5 = 57,5

$A \cong 5/3\ (35 + 80 + 230)$

$A \cong 575 \text{ m}^2$

II. Da Fórmula de Poncelet

$$A \cong h\left(2P + \frac{E - EC}{4}\right)$$

onde: h = frente : nº de faixas

E = soma das ordenadas extremas

EC = soma das ordenadas contíguas extremas

P = soma das ordenadas de ordem par.

No exemplo teríamos: h = 5, P = 57,5, E = 35 e EC = 37,5

portanto:

$A \cong 5\ (115 - 2,5 : 4)$

$A \cong 576,875 \text{ m}^2$

B I B L I O G R A F I A

1. ABDON, Célia Côrtes - Primeiros Passos na Matemática - Vol. I, II , III e IV - Rio de Janeiro - Conquista - 1.960.
2. AGUAYO, A. M. - Didática da Escola Nova - tradução - S. Paulo - C. Editôra Nacional |1.956|.
3. AGUAYO, A. M. - Pedagogia Científica - tradução - São Paulo. C. Editôra Nacional - |1.951|.
4. AMARAL, Persides Pires do - Ensine com Êxito - 1º, 2º, 3º e 4º Ano São Paulo - Livraria Francisco Alves - 1.963.
5. AVELINE, Suelly - Meu Caderno de Matemática - 1º, 2º, 3º, 4º e 5º Ano Primário - Pôrto Alegre - Ed. Globo - |1.956|.
6. AZANHA, José M.P., F. Brotero e L. Siniscalco - O rendimento na solução de problemas aritméticos na escola primária (um estudo experimental) - In: Pesquisa e Planejamento - São Paulo - Boletim do Centro Regional de Pesquisas Educacionais - Ano IV - Vol. 4 - 1.960.
7. BABÁ, Elza - Introdução do Conceito de Número e Numeral de um Número - In: Matemática Moderna para o Ensino Secundário - São Paulo - G.E.E.M. - |s.d.|.
8. BACKHEUSER, Everardo - Como Se Ensina A Aritmética (Fundamentos Psicopedagógicos) - Rio de Janeiro - Edição da Livraria Globo - 1.946.
9. BANKS, J. Houston - Elements of Mathematics - Boston - Allyn and Bacon, Inc. 1.961.
10. BECHARA, Lucília: Alguns dados sôbre o desenvolvimento de um moderno planejamento de Matemática iniciado em 1.912. In: Matemática Moderna para o Ensino Secundário - S. Paulo - G.E.E.M.- |s.d.|
11. BERRA, Alberto E. Sagastume - Lecciones de Álgebra Moderna - La Plata - Universidad Nacional de La Plata - 1.961.
12. BEZERRA, Manoel Jairo - Didática Especial de Matemática - M.E.C. - 1.962.
13. BEZERRA, Manoel Jairo - O material didático no ensino da matemática - Rio de Janeiro - M.E.C. |1.962|
14. BOLL, Marcel - Les étapes des Mathématiques - "Que Sais-je" - Paris - Presses Universitaires de France - 1.948.
15. BORTOLOTTI, Ettore e D. Gigli - Aritmética Prática - In: Enc. delle Matematiche Elementari - Vol. I., P. I - Milano - Ed. Hoepli - 1.950.
16. BUSSELL, A. H. - Rapids Calculations - London - Cassell & Co. Ltd. - 1.961.

17. CAMPOS, Ismael França - Metodologia do Cálculo - In: Anais do 3º Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática - Ministério da Educação e Cultura - 1.959.

18. CAMPOS, Maria dos Reis e outros - Matemática na Escola Elementar- Rio de Janeiro - Instituto Nacional de Estudos Pedagógicos - 1.955.

19. CARAÇA, Bento de Jesus - Lições de Álgebra e Análise - Vol. I-Lisboa - |s.e.| - 1.959.

20. CARVALHO, Thales Mello - Matemática - 1º ano - São Paulo - C. Editôra Nacional - |s.d.|

21. CASTRO, Luiz G.C. e outros - Programa para o ensino primário fundamental - 1º , 2º , 3º e 4º Ano - S. Paulo - Livraria Francisco Alves - 1.949.

22. CASTRUCCI, Dr. Benedito e Dr. G. S. Lima Filho - Matemática para a primeira série ginasial - S. Paulo - L. Francisco Alves - 1.960.

23. CIPOLLA, Michelle - La Matematica Elementare (Conferenze) - Firenze - Dott. Luigi Macri - Editore - 1.950.

24. CIPOLLA, Mechelle - Matematica Recreativa - In: Enc. delle Matematiche Elementari - Vol. III, P. II - Milano - Ed. Hoepli- |1.950|.

25. CIPOLLA, Michelle e Vincenzo Amato - Elementi di Aritmetica Razionale - Torino - Società Editrice Internazionale |1.955|.

26. COMBEROUSSE, Charles de - Cours de Mathématiques - Tome Premier : Aritmétique - Paris - Gauthier - Villars - 1.876.

27. COUTINHO, Ismael de Lima - Pontos de Gramática Histórica Biblioteca Brasileira de Filologia - Rio de Janeiro - Livraria Acadêmica - 1.962.

28. DANTZIG, Tobias - Número - A Linguagem da Ciência - Tradução - Lisboa - Editorial Aster - |s.d.|

29. D'AVILA, Antônio - Práticas Escolares - São Paulo - Edição Saraiva - 1.949.

30. DAVIS, David R. - The Teaching of Mathematics - London - Addison-Wesley - 1.960.

31. DEANS, Edwina - Elementary School Mathematics (New Directions) - Washington - U.S. Department of Health, Education, and Welfare - Bulletin 13 - 1.963.

32. DINIZ, Souza - Curso de Português - Gramática Moderna - Rio de Janeiro - Livraria Francisco Alves - |s.d.|

33. DUTTON, Wilbur H.and L.J.Adms-Arithmetic for Teachers - Englewood Cliffs, N.J. - Prentice Hall, Inc. 1.961.

34. FARIA, Ernesto - Gramática Superior da Língua Latina - Biblioteca Brasileira de Filologia - Rio de Janeiro - Livraria Acadêmica - 1.958.

35. FOUCHÉ, André - A pedagogia das matemáticas - tradução - São Paulo - C. Editôra Nacional. |1.957|

36. GALANTE, Carlos - Matemática - 1ª Série - São Paulo - Ed. do Brasil S/A - 1.961.

37. GARDINER, Martin - Divertimentos Matemáticos - Tradução - São Paulo - Instituição Brasileira de Difusão Cultural S/A. 1962.-

38. GATEÑO, Dr. C. - Aritmética con numeros en color - Livro 1, 2, 3, 4 - Tradução - Madrid - Editado por Cuisinaire de España - 1.962.

39. GHERSI, Italo - Matemática Dilettevole e Curiosa - Milano - Ed. - Hoepli - 1.951.

40. GIGLI, Duilio - Aritmética Generale - In: Enciclopedia delle Matematiche Elementari. - V.I, P.I - Milano - Ed. Hoepli -1950.

41. GLENN, William H. and Donovan A. Johnson - Fun with Mathematics - - St. Louis - Webster Publishing Company - 1.960.

42. GLEEN,William H. and Donovan A. Johnson - Numbers Patterns - St. Louis - Webster Publishing Company - 1.960.

43. GOES, Carlos e H. Palhana - Gramática da Língua Portuguêsa para o Ensino Médio - Rio de Janeiro - Livraria Francisco Alves - - |1.961|.

44. GRÉCO, Pierre, Grize, Papert et Piaget - Problèmes de la Construction du Nombre - Paris - PresesUniversitaires de France - - 1.960.

45. JOHNSON, Richard E. - First Course in Abstract Algebra - Englewood Cliffs, N.J. - Prentice Hall, Inc. - |1.960|

46. KARLSON, Paul - A magia dos números - tradução - Pôrto Alegre -Ed. Globo - |1.961|

47. LACAZ NETO, Francisco A. - Matemática (destinado para a 1a Série) - São Paulo - L. Francisco Alves - 1.959.

48. LAYTON, K.I. - College Aritmetic - New York - John Wiley & Sons - - |1.959|

49. LENTIN, A. et. J. Rivaud - Éléments d'Algèbre Moderne - Paris - Librairie Vuibut - 1.961.

50. LOPES, Helena, M.A. Passos e R.S. Ferreira - Aritmética - Programa de Emergência do Ministério de Educação e Cultura -1.962.

51. LUCAS, Edoward - Récréations Mathématiques - Paris - Gauthier Villars - 1.891.

52. MALANE, Birkhoff - A survey of modern algebra - New York - The Macmillan Company - 1.941.

53. MARKS, John, C. RichardPurdy and L.B. Kinney - Teaching Arithmetic for Understanding - New York - McGraw Hill Book - 1958.

54. MELLO E SOUZA- Diabruras da Matemática - Rio de Janeiro - Ed. Getúlio Costa - |1.944|.

55. MELLO E SOUZA - Folclore da Matemática - Rio de Janeiro - Conquista - 1.954.

56. MENDES DE ALMEIDA, Napoleão - Gramática Metódica da LínguaPortuguêsa - S. Paulo - Ed. Saraiva - 1964.

57. MONTEIRO, A. Aniceto e J. da Silva Paulo - Aritmética Racional - Lisboa - Livraria Avelar Machado - 1.945.

58. MONTEIRO, L. H. Jacy - Álgebra Moderna - Vol. I - São Paulo - Impressora "L.P.M." - 1.963.

59. MOREIRA, J. Roberto - Teoria e prática da escola elementar (introdução ao estudo social do ensino primário) - Rio de Janeiro - Centro Brasileiro de Pesquisas educacionais - 1960

60. NORTHROP, E.P. - Fantasies et Paradoxes Mathématiques - tradição- - Paris - Dunod - 1.956.

61. PELEGRINO, Mário Romeu - Metodologia da Aritmética - Limeira - Edições "Lêtras da Província" - 1.961.

62. PENTEADO JÚNIOR, Onofre de Arruda - O ensino do Cálculo - (vários artigos) - In: Revista de Pedagogia nº 5, 8, 9, 10, e 13 - São Paulo.

63. PEREIRA, Waldecyr C. de Araújo - Os números em côres e o ensino da aritmética - In: Anais do 3º Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática - M.E.C. - 1.959.

64. PIAGET, Jean - Introduction à l'épistémologie génétique - Tome I: La pensée mathématique - Paris - Presses Universitaires de France - 1.950.

65. PIAGET, Jean - Psicologia da Inteligência - tradução - Rio de Janeiro - Ed. Fundo de Cultura S/A - |1.958|.

66. PIAGET, Jean et Alina Szeminska - La Genèse du nombre chez l'enfant - Neuchatel - Delachaux & Niestlé S.A. - |1.941|.

67. PINHEIRO, Lúcia Marques e outros colaboradores - Ensinando Matemática a Crianças - 1º volume - Rio de Janeiro - Centro Brasileiro de Pesquisas Educacionais- 1.960.

68. QUEIRÓS, Brisolva de Brito e outros - Didática do Ensino Primário - Rio de Janeiro - Conquista - 1.960.

69. PÔRTO, Rizza Araújo - Ver , sentir, descobrir a Aritmética - (Belo Horizonte) - PABAEE - 1.961.

70. QUEYSANNE, M. e A. Delachet - A Álgebra Moderna - tradução - São Paulo - Difusão Européia do Livro - |1.956|

71. REED, H.B. - Psicologia de las Materias de Enseñanza Primaria - tradução - México - UTEHA - |1.949|

72. REICHMANN - The Fascination of Numbers - London - University Pa- pervacks - Methuen - 1.963.

73. RUDE, Adolf - La Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales - Tomo Cuarto de El Tesoro del Maestro - tradução - Barcelona - Editorial Labor S/A - |s.d.|.

74. RUIZ, Santiago Hernandes - Metodología de la Aritmetica en la Escuela Primaria - México - Editorial Atlante S/A - 1.959.

75. RUSSELL, Bertrand - Introdução à Filosofia Matemática - tradução - Rio de Janeiro - Zahar Editôres - |1.963|

76. SAID ALI, M. - Gramática Histórica da Língua Portuguêsa - S. Paulo - C. Melhoramentos de S. Paulo - |1.931|

77. SANGIORGI, Osvaldo - Matemática I: Curso Moderno para Cursos Ginasiais - São Paulo - C. Editôra Nacional - |1.964|

78. SAWYER, W. W. - Mathematician's Delight - Penguin Books - Harmondsworth - |1.950|.

79. SEDGWICK, Wit & H. W. Tyler - História da Ciência - Rio de Janeiro - Ed. Globo - |1.952|

80. SILVA, Caio de Figueiredo - Metodologia do Cálculo na Escola Primária - Pontos mimeografados - S. Carlos.

81. SILVEIRA BUENO, Francisco - Gramática Normativa da Língua Portuguêsa - S. Paulo - Ed. Saraiva - 1.963.

82. SILVEIRA, Souza da - Lições de Português - Coleção Brasileira de Filologia Portuguêsa - Rio de Janeiro - Livros de Portugal- - 1.960.

83. STERN, Catherine - Children Discover Aritmetic - London - George G. Harrap e Co. Ltd. - |1.953|

84. THORNDIKE, Edward Lee - A nova metodologia da Aritmética - tradução - Pôrto Alegre - Edição da Livraria do Globo - 1.936. -

85. TRENCH, Claedmar - Raciocine com a Criança - 1º, 2º, 3º e 4º grau- - S. Paulo - |s.e.| - 1.961.

86. VASCONCELOS, Dr. J. Leite de - Lições de Filologia Portuguêsa - Coleção Brasileira de Filologia Portuguêsa - Rio de Janeiro - Livros de Portugal - 1.959.

87. WENTWORTH, Jorge y D. E. Smith - Aritmética Moderna - Libro I e II - tradução - Boston - Ginn Y Compañia - |1.944|

88. XAVIER, Odila Barros - Sugestões para Programas em Curso de Aperfeiçoamento de Professôres Primários - In: Anais do II Congresso Nacional de Ensino da Matemática - Pôrto Alegre - Faculdade de Filosofia da Universidade do Rio Grande do Sul- - 1.957.

Nota: Deixemos de relacionar, por ser muito extensa, a série integral de trabalhos constantes dêstes Anais.

*

OUTROS TRABALHOS DO AUTOR

1. Cinemática (Mecânica Racional) - Fascículo II - São Paulo - Matemática Editôra S/A - 1959.
2. Cinemática (Mecânica Racional) - Fascículo I - São Paulo - Matemática Editôra S/A - 1960.
3. Iniciação à Estatística - Matemática Editôra S/A - São Paulo - 1a edição - 1961 - 2a edição - 1963.
4. Probabilidades como Algoritmo Demonstrativo do Cálculo Combinatório, e Binômio de Vandermonde e Aplicações - mimeografado - tese de doutoramento - Campinas - 1961.
5. Introdução Elementar aos Cursos Modernos de Matemática: Conjuntos. - (pontos de aula) - mimeografado (esgotado) - pela F. F.C.L. de Araraquara - 1962.
6. Introdução Elementar de Matrizes no Curso Colegial - pelo G.E.E.M. - In : Introdução da Matemática Moderna na Escola Secundária - São Paulo - publicação do IBECC - 1963.
7. Um Curso Moderno Elementar de Análise Combinatória - pela F.F.C.L. de Araraquara - 1963.- Editôra "L.P.M."
8. Cálculo de Diferenças Finitas - a ser publicado pela Núcleo de Física e Matemática da Universidade do Pará - Belém - 1964
9. Um Curso Elementar de Geometria Analítica - Editôra "L.P.M."- 1965

*

Do mesmo autor:

G. Analítica c/ Programação Linear
Análise Combinatória
Estatística
Progressões
Matemática, Metodologia e Complementos
p/ Professores Primários
vol. I - Aritmética Teórico-prática
vol. II - Metodologia da Aritmética

"L. P. M."
imprimiu
rua maria antonia, 103
tel. 35-3304