

GABRIEL PRESTES



Geometria Elementar.

NOÇÕES INTUITIVAS

DE

Geometria Elementar

4050

95 pg

Segundo anno das escolas preliminares

NOÇÕES INTUITIVAS

DE

Geometria Elementar

POR

Gabriel Prestes

Director da Escola Normal de S. Paulo



S. PAULO

Horacio Belfort Sabino, Editor

Rua Libero Badaró ns. 71 e 73

1895

C. Crestes

Ao distinctíssimo educador brasileiro

Dr. João Köpke

Em homenagem ao seu acrisolado e nobre
amor pelo ensino

Dedica esta obra

O auctor

PREFACIO

Ainda que a Geometria seja uma sciencia abstracta, todavia, como observa Clairaut, as difficuldades que encontram os que comecam a estudal-a procedem, as mais das vezes, do methodo geralmente seguido em seu ensino. Logo no principio se apresenta ao alumno uma serie de definições, de principios preliminares e postulados, cuja utilidade não se comprehende desde logo e que, por isso, só contribuem para fatigar o espirito e para tornar rebarbativo o estudo. (1)

Por muitas vezes tive occasião de verificar por mim mesmo a verdade destas observações, notando o aborrecimento que causa o estudo da Geometria, com especialidade, aos alumnos cujo espirito não se acha bastante

(1) Clairaut—Elementos de Geometria—Prefacio.

desenvolvido e preparado para comprehender a serie de abstracções proprias a esta importantissima parte da Mathematica elementar.

Entretanto a Geometria é talvez de todas as sciencias a que primeiro se deve ensinar, porque as particularidades relativas á fórma e á grandeza dos corpos são indubitavelmente as que predominam nas observações espontaneas das creanças ao mesmo tempo que começam a formar a idéa de numero.

Mas a Geometria, pela natureza deductiva do seu methodo, só pode ser iniciada com proveito quando o espirito chegar ao grau de desenvolvimento preciso, quando a intelligencia adquirir a faculdade de abstracção necessaria para só considerar as propriedades geometricas e deduzir dellas todas as consequencias que, sem applicação pratica immediata, servem comtudo para formar um systema de verdades, homoganeo e logicamente perfeito, indispensavel como disciplina mental e importantissimo pelas suas applicações posteriores.

Como, pois, conciliar as exigencias deste ensino abstracto com a possibilidade de inicial-o desde logo nas escolas?

A mim se me afigura que é indispensavel distinguir no ensino de tal disciplina uma parte concretizavel á altura da intelligencia infantil e uma parte abstracta baseada em observações espontaneas, capaz de desenvolver-se pela simples deducção, mas, nem por isso, independente da primeira.

A Geometria, conforme já o disse Clairaut (2), surgiu forçosamente á medida que as proprias necessidades da vida social a reclamavam, e por conseguinte, tambem no seu ensino me parece logico seguir a mesma ordem, partindo dos casos concretos para as soluções abstractas.

É tambem este o modo de pensar de Lacroix quando aconselha a precedencia do ensino da Geometria sobre o das outras sciencias, por ser o seu objecto o mais proprio a interessar as creanças (3).

Foram estas as considerações que me suggeriram a idéa de pôr ao alcance do entendimento infantil as noções fundamentaes da Geometria, seguindo os passos do grande

(2) Clairaut—obra já citada, pref.

(3) Lacroix—Essais sur l'Enseignement.

Clairaut, mas numa esphera mais modesta :
—no ensino primario.

Seguindo um methodo mais ou menos identico, mas com um fim, ao que me parece, inteiramente pratico, já outros antes de mim tentaram este trabalho de coneretização da Geometria. Alem de outros, tenho noticia dos ensaios de Eduardo Lagout e do mathematico Dalsème, creadores do systema tachymetrico, pelo qual, sem o longo intermedio do estudo das propriedades geometricas, se chega á determinação da medida das linhas, das superficies e dos volumes. Ambos esses trabalhos são excessivamente reduzidos e exclusivamente praticos: o primeiro contém apenas trinta e seis paginas e o segundo consta de sete lições (4), e portanto só com maiores desenvolvimentos poderiam ser adaptados ao ensino escolar, no qual, como se sabe, é mister a maxima cautela em não proceder por saltos, mas methodica e lentamente, sem precipitações mas tambem sem retardamentos injustificados.

Na impossibilidade de obter os dois tra-

(4) Dictionario Pedagogico de Buisson, artigo —*Tachymetria*.

balhos a que acabo de me referir, não pude informar-me minuciosamente do methodo nelles seguido, e, sem outros subsidios, ia dar começo a esta obra quando se me offereceu ensejo de ler um trabalho de Paul Bert, no mesmo genero e mais desenvolvido, publicado sob o titulo de *Premiers Éléments de Géométrie Expérimentale*.

O livro de Paul Bert, porem, segundo de sua fórmula se depreheende, destina-se á leitura das creanças. Essa circumstancia fez com que eu abandonasse a idéa que a principio tivera de adaptal-o ás nossas escolas, pois entendo que os livros para o ensino scientifico, mórmente nas escolas primarias, não devem destinar-se aos alumnos e sim ao professor, conforme já observou Augusto Comte relativamente ao ensino em geral (5).

Destas ultimas considerações resultou este trabalho, destinado a servir de guia aos professores que nelle queiram buscar alguma indicação pratica que porventura lhes aproveite.

Para maior clareza, alem da justificativa

(5) A. Comte—*Synthèse subjective*, pag. VIII.

do methodo seguido, procurei fazer a applicação pratica dos preceitos estabelecidos, figurando-me, as mais das vezes, na posição do professor que tem deante de si uma classe de alumnos cuja attenção é preciso captivar, interessando-os pelo objecto das lições e cuja actividade intellectual é mister encaminhar logica e naturalmente, sem constrangel-a, mas tambem sem abandonal-a a si mesma.

Com receio de graduar mal a materia e afim de não tornar muito extenso e minueioso este primeiro ensaio, limito-me a indicar os assumptos das lições na ordem que, segundo penso, deve ser observada.

Se, entretanto, tiver de fazer uma nova edição deste modesto trabalho, indicarei qual deva ser o assumpto de cada lição de accordo com o que a pratica aconselhar.

Por esse modo serão mais facilmente comprehendidos os processos a seguir em cada assumpto especial e mais claramente se notará a filiação logica que os liga.

Contém este volume a materia correspondente ao segundo anno das escolas preliminares, pois como já disse, o primeiro deve ser consagrado ao desenvolvimento da percepção

pelo ensino intuitivo das fórmulas geometricas, systema de Calkins ou de Prang. Nos volumes que se seguirem a este, tratarei do ensino que, nesta especialidade, deve corresponder ao terceiro e ao quarto annos do curso preliminar e ao primeiro anno do ensino complementar.

Se os intuitos que tenho com a publicação deste trabalho forem satisfeitos, se o meu esforço contribuir um pouco para o progresso do ensino, terei alcançado a maior das recompensas e sentir-me-ei animado a proseguir no plano que formei de dar ás nossas escolas alguns dos livros de que ellas carecem para que o ensino venha a ter a orientação segura e efficaz, resultante do emprego dos processos intuitivos.

G. Prastes.

Noções intuitivas
DE
GEOMETRIA ELEMENTAR

Ordem a seguir no ensino da Geometria

Ao iniciar o ensino da Geometria deve-se ter em vista que, por uma observação natural e espontanea, anterior a todo o ensino systematico, os alumnos já se acham nas condições de reconhecer as diversas especies de grandeza cuja medida constitue o objecto desta sciencia. Com effeito, não ha um só alumno que seja capaz de confundir uma linha com uma folha de papel ou com um copo,

por exemplo. O que o alumno desconhece são os caracteristicos de cada uma dessas grandezas e as suas respectivas denominações geometricas relativas á fórma e á grandeza. Os alumnos não as confundirão nunca, mas, sem a intervenção do professor, não serão capazes de distinguil-as pelos seus caracteristicos especiaes.

Ora a Geometria tem por fim medir essas diversas grandezas : linhas, superficies e volumes e, portanto, o primeiro cuidado do professor deve consistir em completar as primeiras noções que a respeito dellas tiverem os alumnos.

Mas, como faz notar A. Comte, a medida das superficies e dos volumes é sempre indirecta ao passo que a da linha recta pode ser directamente obtida.

« É, pois, preciso explicar em que, na realidade, consiste a medida verdadeiramente geometrica de uma superficie ou de um volume.

« Para isso é necessario considerar que, qualquer que seja a fórma de um corpo, nelle existe sempre um certo numero de linhas, cuja extensão basta para definir com exacti-

dão a grandeza da sua superficie ou do seu volume.

« A Geometria, considerando essas linhas como unicas susceptiveis de medida immediata, propõe-se a deduzir dellas a relação da superficie ou do volume procurado para com a unidade de superficie ou de volume.

« Assim o objecto geral da Geometria, relativamente ás superficies e aos volumes, é propriamente reduzir todas as comparações de superficies e volumes a comparações de linhas ». (6)

Exemplificando : supponhamos que se trata de saber qual o volume de um cubo. Na maioria dos casos seria impossivel determinar-o directamente, e essa mesma determinação, quando possivel, não seria mais do que o resultado de uma justaposição material, sem character scientifico. Mas essa determinação que, directamente, é impossivel ou difficil, obtem-se facilmente com o auxilio da Geometria, multiplicando entre si a extensão de tres arestas adjacentes, reduzindo-se tudo,

(6) Philosophie Positive, vol I, pag. 263.

portanto, á simples medida directa das linhas que caracterizam a grandeza em questão.

Este artificio não é só peculiar á Geometria: ao contrario, constitue o caracteristico dos resultados obtidos por meio das deducções mathematicas que, em ultima analyse, conduzem sempre a uma redução dos casos mais complexos aos mais simples e geraes.

Fica, portanto, assentado como ponto de partida, que as tres grandezas, que vamos estudar, são assimilaveis e que a simples dimensão linear serve para caracterizal-as.

Se a simples differenciação das diversas grandezas era impossivel á creança sem o auxilio do professor, no mesmo caso está, e com mais forte razão, esta assimilação mais complexa a que acabo de me referir.

Entretanto, como é esse o verdadeiro caracteristico logico do objecto da Geometria, e como foi essa a marcha que o espirito humano seguiu para estabelecer as verdades e chegar aos resultados que, no dominio dessa sciencia, hoje conhecemos, deve ser essa tambem a orientação a seguir no ensino, embora concreto, para que a creança mais tarde pos-

sa ter uma noção exacta da sciencia que estuda e para que estas primeiras noções, em vez de obstaculos, venham a servir de base ao estudo abstracto.

É claro que estas noções não podem ser dadas theoreticamente porque a intelligencia infantil não as comporta, mas podem ser dadas intuitivamente desde que a parte concreta do ensino seja tal que, naturalmente, o espirito do alumno seja encaminhado no sentido de apprehendel-as, do mesmo modo que o espirito humano foi conduzido a creal-as, natural e logicamente partindo dos casos concretos.

Só assim, obedecendo a uma orientação logica preliminarmente assentada é que o ensino intuitivo será efficaz como processo educativo, aliás apenas conseguirá accumular factos desconnexos e só poderá ser adoptado se suppuzermos que as noções concretas constituem o fim e não o meio, e se pretendemos que o empirismo venha a substituir a sciencia.

Nos compendios de Geometria geralmente adoptados, o alumno exgotta o estudo das linhas com todas as suas propriedades; pas-

sa em seguida ao das superficies e, por ultimo, inicia o estudo dos volumes.

Não ha duvida que esta ordem é determinada pelo preceito didactico de partir-se sempre dos casos mais simples para os mais complexos, e assim deve ser effectivamente no ensino abstracto. Neste primeiro ensino, porem, como já disse, ha vantagem no confronto das tres grandezas que se trata de estudar. Alem disso o *conhecido* para a creança não coincide exactamente com o *mais simples*, porque o espirito infantil impressionado pelos objectos que o rodeiam adquiriu conjuntamente noções relativas ás linhas, ás superficies e aos volumes, e, para completar essas noções, parece-me conveniente confrontal-as constantemente antes de especializar o estudo de cada uma na ordem da sua complexidade crescente.

Em vista destas considerações resolvi-me a seguir no ensino intuitivo da Geometria, quanto possivel, a ordem que passo a traçar :

ENSINO PRELIMINAR

Segundo anno—Idéa geral sobre as tres grandezas—linhas, superficies e volumes—

estudando-as separadamente com o desenvolvimento estritamente preciso para serem comprehendidos os seus caracteristicos e as suas denominações; medida directa, feita por processos espontaneos.

Terceiro anno—Medida indirecta das linhas, estudando-se por meio de applicações as suas propriedades principaes, medida indirecta das superficies e dos volumes deduzida dos processos espontaneos anteriormente estudados, excluindo-se as linhas curvas, as superficies limitadas por linhas curvas e os corpos terminados por superficies curvas.

Quarto anno—Medida indirecta da circumferencia, da area do circulo, do volume dos corpos terminados por superficies curvas.

ENSINO COMPLEMENTAR

Primeiro anno—Demonstração das principaes propriedades geometricas de accordo com o methodo de Clairaut.

Convem notar que este programma é traçado na supposição de que os alumnos do segundo anno tenham idade superior a oito annos e que no primeiro anno de aulas, te-

nham recebido, conjunctamenté com a leitura, o ensino de coisas, tendente a desenvolver a percepção. No caso contrario, este ensino deve ser adiado para anno seguinte, sem que, por isso, se altere a ordem acima indicada.

Da linha recta, das curvas e angulos

O ensino intuitivo que vou iniciar destina-se aos alumnos que tenham apprendido a contar por processos espontaneos.

Para dar a primeira noção systematica sobre a linha recta, reuno os alumnos em frente ao quadro negro.

Tomando um gonigrapho (7), entorto-o em diversas partes e pergunto:



— Qual dos meninos pode endireitar esta regua?

(7) Gonigrapho: regua dobradiça como as escalas de que usam os pedreiros para as suas medidas.

Chamo um dos alumnos e deixo-o endireitar o gonigrapho. Pergunto á classe, tomando a regua pelos extremos e mostrando-a de modo que todos a vejam.



— Achem que a regua está direita?

Passando ao quadro negro traço uma linha torta.

— E esta linha está direita?

— Não, está torta.

Tomando a regua, traço com ella uma recta e chamo um dos alumnos para traçar uma linha igual, tendo eu o cuidado de assentar a regua de modo que a segunda linha seja parallelá á primeira.

Depois mostro á classe um livro de modo que se vejam bem as linhas formadas pela capa, e as accentuo com o giz.

— Veem os meninos neste livro alguma coisa que se pareça com aquellas duas linhas da pedra?

Venha você mostrar no livro as linhas parecidas com aquellas que estão riscadas na pedra.

Onde veem os meninos linhas direitas aqui na sala, parecidas com estas?

— No soalho, no tecto.

Apontando para as linhas traçadas na pedra, digo-lhes:

— As linhas direitas assim como estas chamam-se tambem *linhas rectas*.

Mostro-lhes, em seguida, um metro e formo dialogos sobre o nome e a utilidade de tal objecto e sobre outras medidas que os meninos porventura conheçam: o palmo, a polegada, a braça, o pé.

Comparo-as entre si.

O metro serve para medir fazendas; o metro é mais comprido que a polegada; o palmo é mais curto que o pé; etc.

Mando cortar em um fio um pedaço igual a um palmo.

— Que comprimento tem este fio?

— Tem um palmo.

— Vá o menino medir com esse fio aquella linha que está riscada na pedra.

Acompanho a operação contando: uma vez, duas vezes, tres vezes, quatro vezes, cinco vezes, seis vezes.



— Quantas vezes o fio com o comprimento de um palmo coube nesta linha?

Quantos palmos, então, tem a linha?

Se na linha além do numero inteiro de palmos houver um excesso, mando applicar ainda uma vez o palmo para os alumnos verificarem que o palmo é grande de mais para medir a parte que falta, e pergunto:

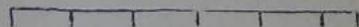
— Podem medir este pedacinho que falta com o palmo?

Porque não o podem medir?

Tendo encaminhado as perguntas de modo a ter a resposta de que o resto da linha não se pode medir com o palmo por ser menor do que elle, digo aos alumnos:

— Precisamos então de uma medida menor do que o palmo para medir o resto da linha.

Vamos ver se a metade do palmo chega para medir este pedacinho.



Se a medida for exacta, pergunto:

— Quantos palmos tem a linha?

— Tem 5 palmos.

— Mas tem mais um pedacinho. Que comprimento tem este pedacinho?

— Tem meio palmo.

— Então qual é o comprimento inteiro da linha?

— É 5 palmos e mais meio palmo.

Se o meio palmo não medir exactamente o resto, digo aos alumnos:

— A metade do palmo ainda não serve para medir o pedacinho da linha que sobrou.

Qual é uma medida mais curta do que a metade do palmo?

— A polegada.

— Vamos então experimentar com a polegada.

Procedo do modo já indicado, e, verificada a exactidão da medida, interrogo a classe inteira sobre o comprimento da linha.

Repito o mesmo exercicio com outro alumno e mando que, todas as vezes que este errar, aquelle que puder emendar dê signal.

Formo em seguida um dialogo com os alumnos até chegar á conclusão de que *para medir o comprimento de uma linha é preciso em-*

pregar o comprimento de um palmo, de uma polegada etc.

— Vou agora mostrar aos meninos as linhas que não são rectas.

Traço na pedra uma linha recta, uma quebrada e uma curva.



Mando os alumnos fazerem com um fio collocado sobre as mesas, linhas, semelhantes ás que se acham traçadas na pedra.

Explico que a linha formada de rectas chama-se *linha quebrada* e que a outra que não tem nem um pedaço direito é uma *linha curva*; e pergunto:

— Quaes os objectos que os meninos podem citar formando uma figura parecida com a linha quebrada?

— As paredes da sala, o contorno dos bancos, etc.

— Quaes os objectos parecidos com a linha curva que os meninos conhecem?

— Os arcos de barril, a roda dos carros, etc.

Mostrando-lhes depois o primeiro an-

gulo formado na linha quebrada, percorro-o com o giz e digo-lhes que *um canto como aquelle, formado por duas linhas, chama-se um angulo*.

Mando fazer angulos ou cantos com os fios em cima das mesas.

— Quantos cantos ou angulos tem a capa do livro? Quantos a pedra? a taboa da mesa?

Tomando um compasso, mando um dos alumnos fazer com elle um angulo para os outros verem.

— Faça com o compasso um angulo maior.

Faça outro menor.

O alumno deve abrir e fechar as pontas do compasso.

Traço um angulo na pedra e mando o alumno ajustar no vertice a charneira do compasso. Para isso aponto-lhe o vertice e indico a charneira, dizendo:

— Ponha esta dobradiça do compasso neste ponto. Firmo-o alli.

— Abra o compasso até fazer um angulo egual a esse que está na pedra. Faça um menor.

Dando o gonigrapho a um alumno:

—Faça um angulo com essa regua. Veja se o angulo é igual ao angulo do compasso.

A outro alumno:

—Aponte quaes são os cantos desta sala.

Abra o seu livro formando um angulo com as capas.

Vá alli ao canto da sala, ajuste as costas do livro na quina daquelle canto. Agora encoste o livro numa das paredes. Abra o livro fazendo um canto igual ao da sala.

A outro alumno:

—Dobre esta folha de papel pela metade.

Abra um pouco a folha.

A folha de papel está formando um angulo?

Faça o angulo maior.

Vá fazer naquelle canto um angulo igual ao angulo formado pelas paredes.

Pergunto a cada alumno da classe de per si.

—Conhece você algum objecto que tenha a fórma de um angulo?

—O machado, os telhados, as esquinas das ruas, etc.

Mostrando um triangulo de madeira:

—Quantos angulos vê neste objecto?

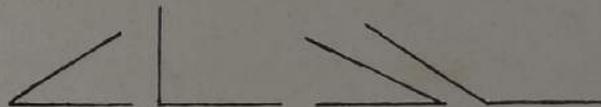
Mostre quaes são os angulos.

Mostrando um hexagono:

—E aqui quantos angulos?

Acompanho com o giz as linhas que formam os angulos.

Antes de passar adeante mando ainda um alumno traçar com a regua um angulo no quadro negro; em seguida irá outro traçar um angulo maior; outro, um angulo menor.



*
**

Em todas as licções deste genero, convem ter em vista:

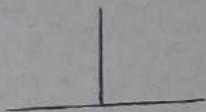
Que não se deve explicar aos alumnos coisa alguma que elles possam descobrir por si mesmos.

Que não se devem dar nem exigir definições com termos rigorosamente exactos; pois é preferivel indicar a denominação propria, ou fazer simples descripções.

De accordo com estes principios, o pro-

fessor deve limitar-se a dar as diversas denominações dos angulos depois de mostrar e fazer conhecer o angulo recto que serve de termo de comparação. Vejamos como se procederá:

Traço dois angulos rectos, por esta fórma:

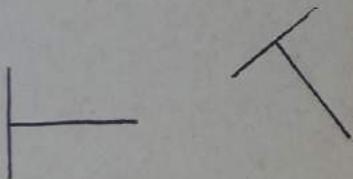


—Qual destes dois angulos é maior?

Corto um pedaço de papel igual ao angulo recto e mando um alumno comparar os dois angulos adjacentes.

—São eguaes.

Traço outros angulos rectos em diferente posição:



Comparo-os todos entre si pelo processo de justaposição já indicado.

—São todos eguaes.

Traço um angulo recto isolado.



—É ainda igual aos primeiros.

Mostrem os meninos angulos eguaes nos livros, nas mesas, etc.

Tracem os meninos angulos eguaes ao canto dos livros aos cantos das mesas; formem angulos eguaes com um compasso, com o gonigrapho.

Só então depois de bem familiarizados com a fórma de taes angulos, é que direi aos alumnos:

—Um angulo como este chama-se *angulo recto*.



Façam os alumnos nas suas lousas um angulo menor do que o angulo recto.

—Façam um angulo maior do que o recto.

Dou a denominação de cada um desses angulos: *angulo agudo*, *angulo obtuso*.

Traço um angulo agudo no quadro negro.

—Façam os meninos um angulo mais *agudo* do que este.

Traço um *obtusos*.

—Façam os alumnos um angulo mais *obtusos*.

Da formação das linhas. Superficies.

Antes de passar alem. cumpre fazer diversos exercicios de recapitulação para tornar mais claras e precisas as noções anteriormente adquiridas pelos alumnos.

Para isso, sirvo-me de diversos objectos de uso escolar, taes como: canetas, lapis, reguas, etc. e, comparando-os entre si, formo com os alumnos um dialogo, obrigando-os a construir phrases sobre o resultado dessas comparações, usando dos termos equivalentes: recto, direito; longo, comprido, extenso.

Mando traçar diversas rectas e comparal-as entre si, medindo-as com o palmo, e com a polegada. Com o auxilio da regua faço os alumnos traçarem linhas quebradas, e com o compasso ou com um cordel, curvas de diversos raios. Mando traçar angulos e ao

—Façam os meninos um angulo mais *agudo* do que este.

Traço um *obtusos*.

—Façam os alumnos um angulo mais *obtusos*.

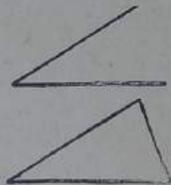
Da formação das linhas. Superficies.

Antes de passar alem. cumpre fazer diversos exercicios de recapitulação para tornar mais claras e precisas as noções anteriormente adquiridas pelos alumnos.

Para isso, sirvo-me de diversos objectos de uso escolar, taes como: canetas, lapis, reguas, etc. e, comparando-os entre si, formo com os alumnos um dialogo, obrigando-os a construir phrases sobre o resultado dessas comparações, usando dos termos equivalentes: recto, direito; longo, comprido, extenso.

Mando traçar diversas rectas e comparal-as entre si, medindo-as com o palmo, e com a polegada. Com o auxilio da regua faço os alumnos traçarem linhas quebradas, e com o compasso ou com um cordel, curvas de diversos raios. Mando traçar angulos e ao

mesmo tempo faço essa figura na pedra. Chamando a atenção dos alumnos, traço em seguida uma recta unindo os extremos dos lados de angulo.



—Façam os alumnos o mesmo.

Quantos angulos tem esta figura?

Quantas linhas tem?

Obtendo as respostas convenientes explico:

—Esta figura chama-se um *triangulo*, porque tem *tres angulos*.

Em seguida, tomando uma regua traço na pedra uma linha pontuada e mostrando-a aos alumnos pergunto:

—Acham que esta linha é recta?

Mando um dos alumnos traçar uma linha como aquella e acompanhando o traçado pergunto:

—Para que lado vae caminhando o giz?

—Para a direita.

Terminado o traçado da linha:

—O giz para que lado caminhou sempre?

—Caminhou sempre para a direita.

Mostrando-lhes a ponta do giz digo-lhes:

—Quando a ponta do giz segue sempre na mesma direcção (á medida que fallo, vou traçando) forma-se uma linha recta.



Fazendo-se uma linha quebrada, o giz vae sempre na mesma direcção? Digam o caminho que segue o giz.

Á medida que vou traçando os alumnos irão respondendo:

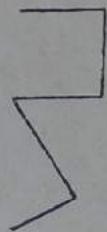
—Para a direita, para baixo, para cima, etc.

—E agora?

Traço nova figura.

—Para a direita, para baixo, para a esquerda, para baixo, para a esquerda.

—Pois bem: quando se faz uma linha quebrada o giz vae ora para um lado ora para outro.



—Qual de vocês pode fazer uma curva com pontinhos?

Você, João.



Muito bem. A ponta do giz seguiu alguma vez um caminho direito?

—Não, senhor:

Mando fazer linhas rectas, linhas quebradas, e linhas curvas, empregando para estas o compasso, e para as outras a regua.

Feita esta recapitulação em que tive em vista completar as noções anteriores, passo a dar-lhes a conhecer os característicos da superficie.

Para isso tomo uma regua e uma plan-

cheta. Faço notar que a quina da regua pode ser visada em toda a sua extensão sem que se encontrem altos e baixos. *A quina da regua é direita ou a quina da regua é recta.*



Faço com que os alumnos observem tambem a regua.

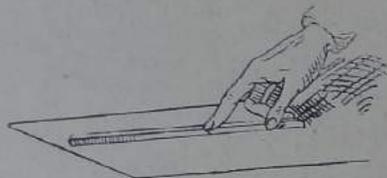
—Qual é mais larga, a regua ou a plancheta?

Qual é mais comprida?

Mando collocar a regua sobre a plancheta para comparar o comprimento; faço medir com a polegada quanto a plancheta é mais larga.

Mando medir o comprimento da plancheta, das mesas, das paredes; mando medir a largura de diversas superficies taes como as das lousas, livros, etc.

Mostro em seguida que nas paredes, nas mesas, na plancheta pode-se applicar a regua em qualquer direcção.



Só então explico o que é superficie plana, dizendo que a parte da plancheta, da parede, das mesas em que a regua fica bem assentada chama-se superficie plana.

Escrevo na pedra os termos equivalentes:
plano, chato, lizo.

E mando formar phrases com essas palavras.

A cada um dos alumnos mando citar objectos que teem superficie plana, perguntando primeiro em relação ás coisas que se acham na escola, depois a respeito das que se veem nas ruas, nos jardins, etc.

Modo de fazer as recapitulações.

Para recapitular as noções anteriores e amplial-as convenientemente, começo mandando traçar as linhas conhecidas, traçar linhas no sentido do comprimento da pedra e no sentido da largura.

Traço uma linha e pergunto como se mede o seu comprimento, e obtida a resposta, explico que as linhas *só se medem ao comprido*.

Faço o mesmo com a plancheta, com relação á capa dos livros, á superficie das pedras, e concluo:

As superficies podem medir-se *de comprido* e *de largo*.

—Façam os alumnos uma recta pontuada, uma curva pontuada.

Escrevo na pedra as palavras:

largo, estreito

e com ellas mando formar phrases: a pedra é larga, o livro é mais largo do que a regua, a linha não é larga, o caminho é estreito, etc.

* *

Cumpre notar que as recapitulações devem ser feitas de modo que não se tornem monotonas pela constante repetição dos mesmos exercicios: é preciso, ao contrario, que, mesmo recapitulando, o professor apresente sempre alguma idéa nova e que, nos exercicios que previamente preparar e escolher para a lição, não se sirva sempre dos mesmos objectos.

O melhor meio de despertar o interesse e captivar a attenção das creanças é servir-se o professor, ora de exercicios de linguagem, ora da applicação pratica das noções apprendidas. O desenho presta-se muito especial e efficazmente para estes exercicios.

Assim, mesmo sem correr o risco de sobrecarregar a memoria e de desviar a attenção das creanças, pode-se ensinal-as desde já a traçar quadrados, losangos e retangulos, fazendo-as applicar as noções que

já adquiriram e applicar no desenho propriedades que mais tarde hão de conhecer.

Para isso é preciso ensinar as creanças a servirem-se da regua e do esquadro.

Supponhamos que desejo fazer a recapitulação traçando um quadrado, um losango e um rectangulo.

Começo traçando no quadro negro uma recta que será a base do quadrado.

Façam os alumnos o mesmo servindo-se das reguas.

Em cada extremo da recta applico o esquadro e levanto perpendiculares.

—Façam os alumnos o mesmo servindo-se de esquadros de madeira ou mesmo de cartão.

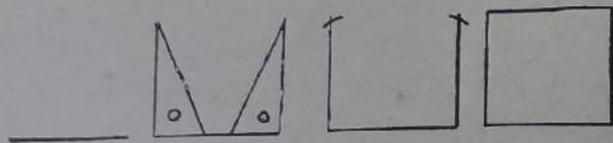
Tomo em seguida um fio, ou a regua e marco o comprimento da base.

Façam os alumnos o mesmo servindo-se das suas reguas ou de fios.

Com o comprimento da base determino alturas eguaes nas perpendiculares.

E por ultimo uno entre si os extremos das duas perpendiculares.

Eis graphicamente reproduzidas as diversas phases da operação indicada:



Concluido o desenho explico que a figura traçada chama-se um quadrado.

Verifico se todos os alumnos fizeram o desenho correctamente e aquelles que tiverem errado irão á pedra fazer de novo a figura, sendo emendados pelos alumnos que tiverem feito melhor desenho.

Faço em seguida recapitulação relativamente aos angulos:

—Quantos angulos tem o quadrado? São agudos esses angulos? São eguaes ou deseguaes os angulos? Como se chamam?

Diga um dos alumnos tudo o que observou sobre os angulos do quadrado.

—Quantas linhas formam o quadrado? São eguaes ou deseguaes? Que angulos formam?

Explico que as linhas que formam o quadrado chamam-se *lados*.

—Diga outro alumno tudo o que sabe a respeito do quadrado.

Quaes são os objectos que teem superficies parecidas com o quadrado?

Querendo traçar um losango, procedo do seguinte modo.

Começo mostrando aos alumnos um quadrado e um losango de madeira ou de cartão.

—Qual destes dois objectos é mais parecido com a figura traçada na pedra?

Os alumnos apontam-me o quadrado de madeira.

—Quantos angulos tem a figura da pedra? Quantos lados? os lados são eguaes?

Ajusto o quadrado e o losango de madeira ou cartão pelas diagonaes para que os alumnos vejam que os cantos de um não coincidem com os do outro e mando que os alumnos digam as differenças que notam entre elles.

Acceito como exactas as respostas que se basearem nos caracteristicos geometricos das duas figuras, embora não sejam expressas em termos precisos.

Previno os alumnos de que vamos agora fazer uma figura parecida com o losango que

lhes mostro indicando-lhes a respectiva denominação.

Traço uma linha horizontal na pedra e mando-os fazer o mesmo nas lousas.

Tomo o comprimento dessa linha com um fio; dobro-o ao meio e com o fio assim dobrado marco a metade da linha traçada.

—Façam os alumnos o mesmo servindo-se tambem de um fio.

No meio da linha applico o esquadro e traço uma perpendicular.

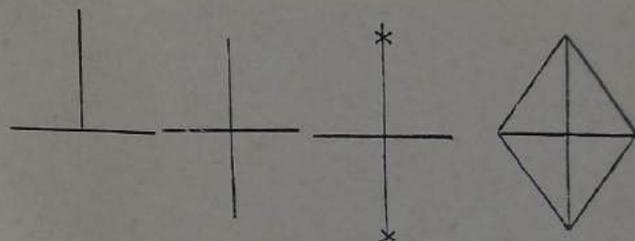
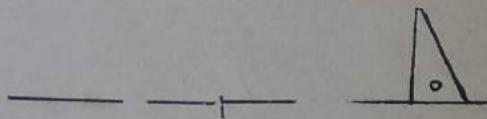
Verifico se os alumnos acompanharam bem a operação.

Com uma regua prolongo a perpendicular para a parte inferior da linha.

Com um fio tomo na perpendicular distancias eguaes a partir do ponto de encontro das duas linhas.

Uno os extremos das linhas entre si e terei formado o losango.

Eis o resumo graphico da operação:



Para ensinar os que tiverem errado procedo como já indiquei com relação ao desenho do quadrado.

Estes mesmos exercicios podem ainda ser feitos com linhas pontuadas e com o goniographo, de modo que sem esforço os alumnos se tornem capazes de distinguir os caracteristicos das duas figuras.

Terminado o desenho mando apagar as duas diagonaes e digo-lhes que aquella figura chama-se losango.

—Quantos angulos tem o losango? Quantos lados? São eguaes todos os quatro angulos?

Mando medir os lados.

—São eguaes os lados do losango? Quaes são os angulos maiores?

Venha mostrar os angulos maiores. Como se chamam esses angulos?

Venha outro menino mostrar os angulos menores. Como se chamam?

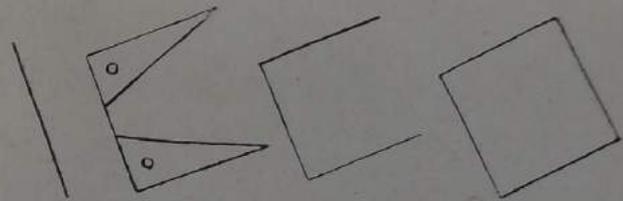
Vejam se conseguem dividir os losangos que traçaram em dois triangulos. Dividam-n-o agora em quatro triangulos.

Em outras recapitulações posteriores, pode-se reproduzir este mesmo exercicio com accrescimo do rectangulo cuja construcção se faz por um processo identico ao que empregamos para o quadrado.

Convem, nesse caso, fazer com que os alumnos por si mesmos cheguem á conclusão de que as duas figuras differem pela altura, quando tiverem a mesma base. Para isso mostrem-se aos alumnos um rectangulo de madeira ou cartão e um quadrado tambem de madeira ou cartão da mesma base do rectangulo. Faça-se com que os alumnos comparem entre si os angulos e lados de uma e de outra figura.

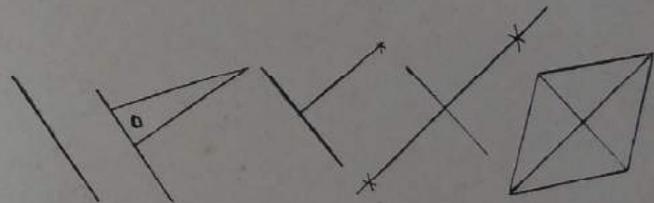
Afim de que o alumno não se habitue a ver e traçar estas figuras sempre numa só posição, o professor deve traçal-as dando ás bases diversas inclinações procedendo pelo modo seguinte:

Com o quadrado:



Do mesmo modo com o rectangulo.

Com o losango, em vez da base, parte-se da diagonal e essa é a linha que se terá de inclinar.



É exesusado advertir que estes exercicios têm o unico intuito de facilitar as recapitulações e que, portanto, não podem dispensar o ensino de desenho a mão livre.

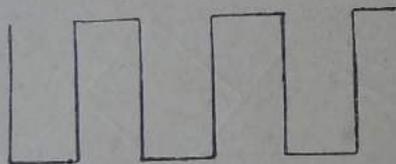
*
* *

Para que, nas diversas recapitulações que se terá de fazer, o professor possa apresentar sempre figuras novas e attrahentes, reuno

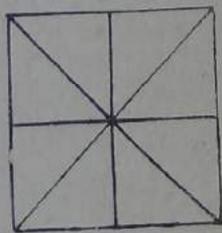
Depois do desenho dê o professor a denominação da figura fazendo os alumnos observarem os seus caracteristicos.

em seguida algumas combinações de linhas que os alumnos poderão executar com a simples applicação das noções até aqui adquiridas.

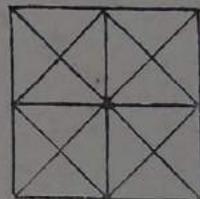
Tracem-se duas linhas acompanhando as margens parallelas de uma regua; a igual distancia entre essas linhas, tracem-se perpendiculares com o esquadro. Apague-se alternadamente nas duas linhas o traço comprehendido entre as perpendiculares.



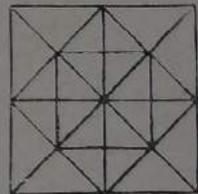
Marque-se o meio de cada lado de um quadrado e tirem-se as diagonaes; tirem-se rectas unindo entre si os pontos que marcam o meio dos lados oppostos.



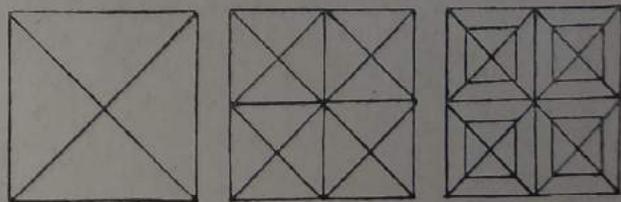
Partindo da figura anterior, unam-se entre si os extremos das perpendiculares aos lados.



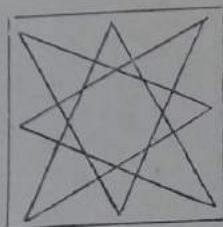
Partindo da figura anterior, faça-se o mesmo com relação ao segundo quadrado formado no interior do primeiro.



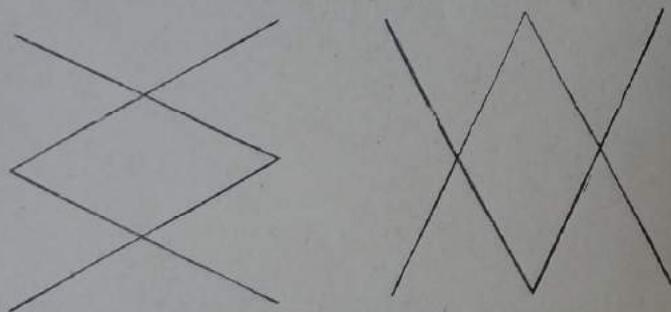
Resumo graphico de outra combinação:



Marque-se um ponto no meio de cada lado de um quadrado. Tirem-se rectas de cada um desses pontos para os vertices do lado opposto:



Resumo graphico das phases de outra combinação para formar um losango:



Acredito que bastam estas applicações para tornar attrahentes as recapitulações durante o anno. No caso contrario deve o professor imaginar outras, tendo em vista a necessidade de filial-as todas entre si, a fim de que os alumnos não as reproduzam materialmente.

*
* *

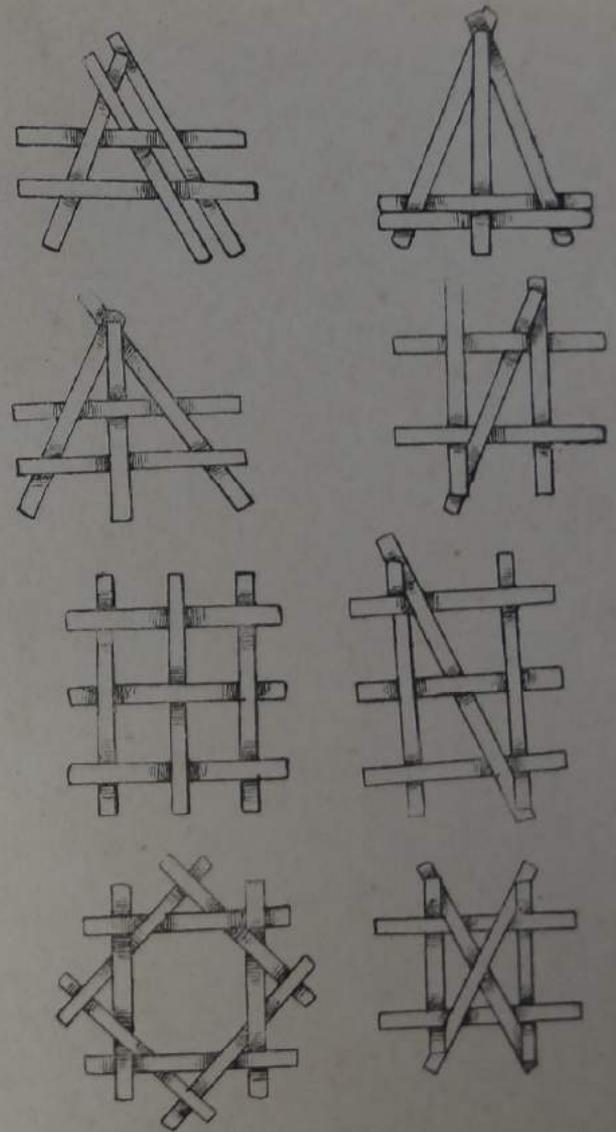
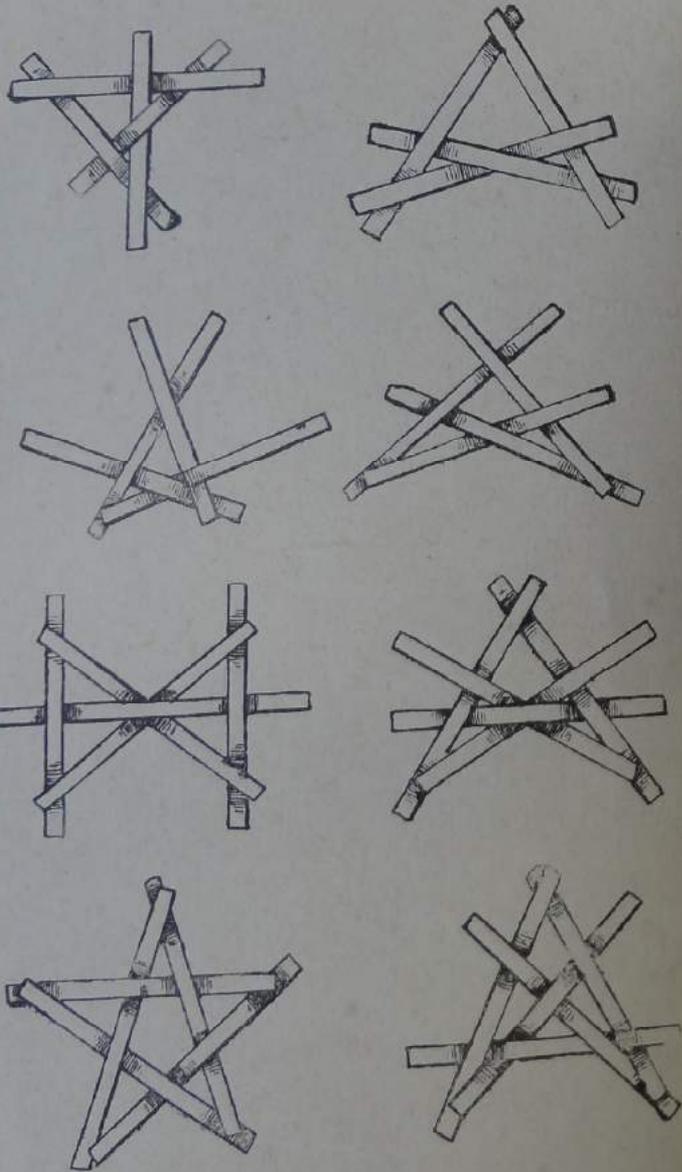
Para concretizar estas diversas figuras e combinações de linhas, o professor pode

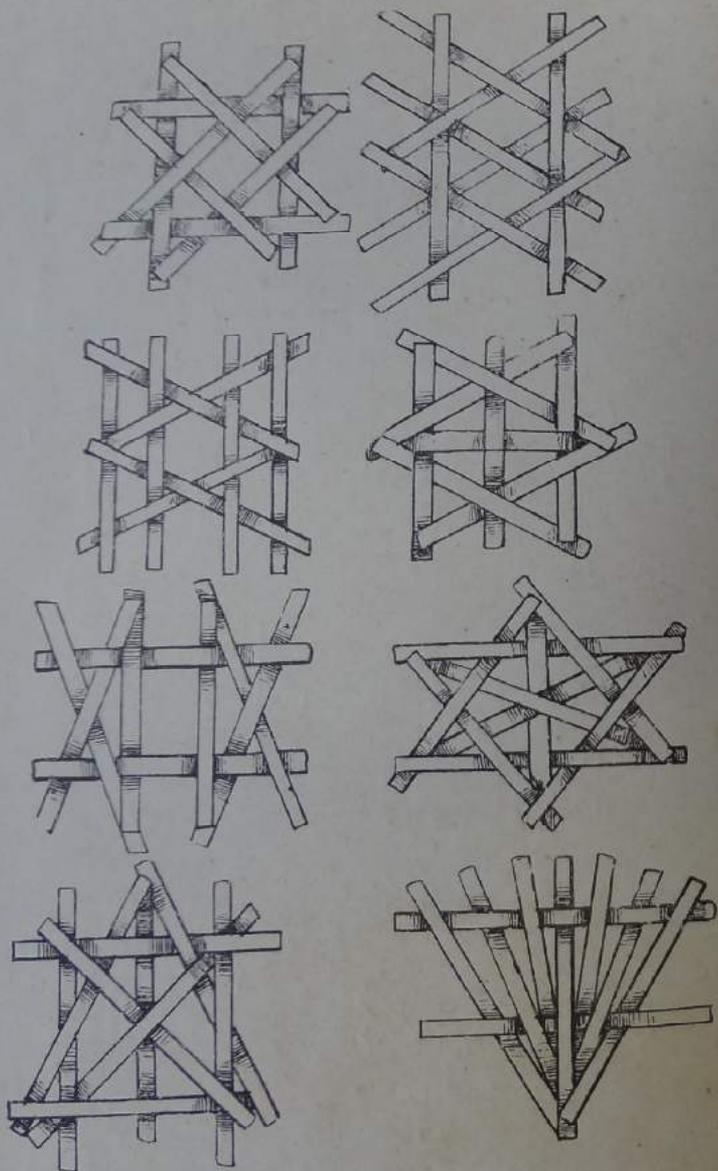
ainda usar do entrelaçamento de pequenas varas, systema Fræbel, do qual dou em seguida alguns exemplos.

Cada uma destas combinações de varas entrelaçadas presta-se para a recapitulação da materia até aqui ensinada, e mais para dar concretamente as noções concernentes á posição relativa das linhas, fazendo-se o alumno descobrir: quaes as perpendiculares, isto é, *as que não pendem mais para um do que para outro lado*; quaes as obliquas, isto é, *as que pendem mais para um lado do que para outro*, e as parallelas, isto é, *as que estão sempre igualmente distantes uma da outra*.

Por estes caracteriscos as creanças poderão adquirir noções exactas sobre a posição relativa das linhas, para o que já estão convenientemente preparadas pelos exercicios anteriores do desenho.

Estas noções deverão ser constantemente recapituladas quando se offerecer ensejo nas licções seguintes.





Medida directa das superficies

Uma vez firmada a noção de superficie plana, resta ensinar como se medem essas superficies, e, como convem que os alumnos comprehendam que medir não é mais do que comparar entre si grandezas da mesma natureza, é preciso ensinar-lhes como se faz a medida directa, na qual, como já vimos com a medida das linhas, essa condição é plenamente satisfeita.

Para chegar a esse resultado, mando medir numa folha de papel o comprimento de uma polegada; assignalados os pontos que determinam essa extensão corto no papel uma fita com a largura acima referida. Mando medir na fita novamente o comprimento de uma polegada.

Dobro a parte correspondente a esse

comprimento e corto-a, obtendo assim um quadrado igual a uma polegada quadrada.

Por este quadradinho de papel corto outros em numero sufficiente para dar um a cada alumno.

Mostrando-lhes de novo que o quadradinho de papel mede uma polegada de comprimento e outra de largo, explico-lhes que aquelle quadrado é uma *polegada quadrada*.

Cortando um fio com o comprimento de um palmo, mando um alumno riscar no quadro negro *um palmo quadrado*; mando cortar numa folha de papel um palmo quadrado.

Faço a respeito diversas perguntas.

—Um palmo quadrado que comprimento tem? Que largura? E uma polegada quadrada?

O palmo quadrado é uma superficie plana?

Colloque esse palmo quadrado de papel em cima da mesa.

Muito bem. Porque é que o palmo quadrado é uma superficie plana? Veja se a regua se ajusta bem em cima. Então porque é que o palmo quadrado é uma superficie plana?

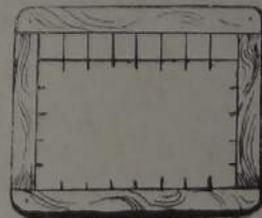
E a polegada quadrada tambem é uma superficie plana?

—Agora cada um de vocês vae medir a sua pedra com a polegada quadrada.

Reparem no que eu faço.

Tomo uma das lousas e colloco a polegada quadrada num dos cantos, prendo-a entre o indice e o polegar e apresento-a aos alumnos. Traço com a outra mão uma recta formando com a moldura da pedra um rectangulo de uma polegada de largura.

No rectangulo assim formado, vou ajustando o quadradinho de papel, marcando ao mesmo tempo com traços verticaes quadradinhos correspondentes a uma polegada quadrada.



Repito a mesma operação até haver per-

corrido com o quadradiuho de papel toda a superficie da pedra.

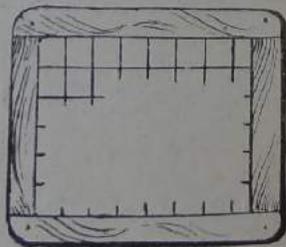
Mando contar os quadrados em que a superficie se acha dividida e pergunto:

—Quantas polegadas quadradas cabem na pedra?

Qual é então a medida da superficie da pedra?

Os alumnos devem ter acompanhado esta operação. Passo a verificar se todos fizeram correctamente a medida, ensinando de novo a fazel-a os que tiverem errado.

Se acontecer que a polegada quadrada não possa medir exactamente a superficie da pedra, ficando uma parte a medir, como o demonstra a figura abaixo, pergunto aos meninos, depois de contar os quadros que a pedra contém:



—Quantas polegadas quadradas tem a superficie da pedra?

—Tem 42.

—Muito bem. Mas não ficou um pedaço da pedra sem medir?

Pode-se medir esse pedaço que falta com a polegada?

Porque não o podemos medir?

—Porque a polegada é maior.

—E com o palmo quadrado pode-se medir?

—Então o que é preciso para medir?

Muito bem... Para medir o pedaço que falta é preciso outro quadrado de papel menor de que a polegada quadrada.

Afim de obter esta resposta que eu acima repeti o professor deve insistir variando as perguntas, e percorrendo a classe toda.

Se ninguém responder, voltará ao caso da linha recta medida pelo palmo e deixando um resto que será medido pela polegada. Com este confronto os alumnos ficarão nas condições de responder ou de comprehender a resposta que o professor dará por elles.

Superficies curvas

Tendo conseguido dar aos alumnos a noção de superficie plana, resta generalizar esta noção de modo a fazel-a abranger todas as superficies.

Antes disso, porem, recapitulo as lições passadas afim de avivar no espirito das créanças as idéas fundamentaes. Alem dos meios de recapitulação já indicados, utilizo-me aqui dos tres solidos mais simples: cubos, parallelepipedos e pyramides, afim de facilitar o estudo dos volumes, com o qual terminarei o ensino deste primeiro anno.

A respeito de cada um pergunto:

—Quantas superficies tem?

Quantas linhas?

Quantos angulos formam as linhas?

Á medida que um alumno contar as li-

nhas correspondentes ás arestas, vou cobrin-do-as com o giz para tornal-as mais perce-ptiveis.

A proposito das linhas, explico:

Quando duas superficies se encontram formam uma linha; mostro isso no cubo, no parallelepido, na pyramide.

Mando dobrar ao meio uma folha de pa-pel e abrindo-a de modo a ter um angulo, mostro a linha formada.

—Indiquem os meninos as linhas forma-das por duas superficies: na mesa, na sala, nos armarios, etc.

Traço um cubo na pedra.

—Façam os alumnos em suas pedras o mesmo que eu.

Pelo processo já indicado, traço um quadrado.

Marco o meio da base superior.

Nesse ponto, levanto uma perpendicular, servindo-me do esquadro.

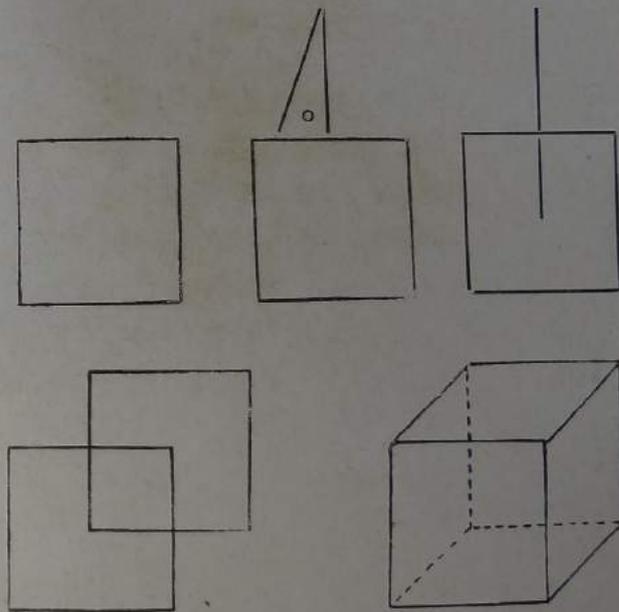
Prolongo essa perpendicular para o in-terior do quadrado.

Marco nessa perpendicular, a partir do ponto de encontro, duas partes eguaes á me-tade do lado do primeiro quadrado.

Sobre esta perpendicular, como base, construo um outro quadrado.

Uno entre si os vertices dos dois qua-drados e terei assim formado o cubo.

Resumo graphico da operação:



Corrijo o desenho dos alumnos pelo mo-do que já indiquei a proposito do quadrado.

—Mostrem-me agora os meninos qual dos tres solidos se parece com a figura traçada na pedra.

Meça um dos alumnos todas as linhas que o solido tem.

São eguaes.

Corte num papel um quadrado egual a uma das faces. Compare-o com as outras faces. Todas as superficies do cubo são eguaes.

Digo-lhes então que um corpo assim chama-se um cubo, e que as linhas que o limitam chamam-se arestas.

—O cubo quantas arestas tem?

Quantas superficies? São eguaes as arestas? E as superficies? As superficies são quadrados ou são losangos? Os lados do quadrado são entre si perpendiculares ou obliquos?

Diga um dos alumnos tudo quanto sabe a respeito do cubo.

Explico aos alumnos que cada uma das superficies planas chama-se *face*.

—Quantas faces tem o cubo?

Conhecem alguma coisa parecida com o cubo?

E este, quantas faces tem?

Fazendo estas perguntas mostro-lhes ao mesmo tempo a pyramide triangular.

—Que fórma tem cada face?

Quantas arestas tem?

São eguaes as faces?

Feitos esses exercicios, passo a generalizar a primitiva noção que dei a respeito das superficies.

Tomo uma folha de papel e recapitulo a parte relativa ás superficies planas.

A superficie plana pode-se medir de comprido e de largo; tem comprimento e largura; pode-se ajustar na superficie plana uma regua em todos os sentidos.

Fazendo agora da folha de papel um cylindro mostro que a regua já não pode ser applicada em todos os sentidos.

Explico que a superficie como a do papel enrolado em que não se pode applicar uma regua em todos os sentidos, chama-se superficie *curva*.

Mostro aos alumnos um cylindro, oco; applico a regua ao comprido e em seguida no sentido longitudinal.

—A regua ajusta-se bem na superficie?

Em que sentido se ajustou?

Muito bem. E de lado ajusta-se tambem?

Então a superfície desse objecto é curva ou plana?

Veja agora a superfície de dentro.

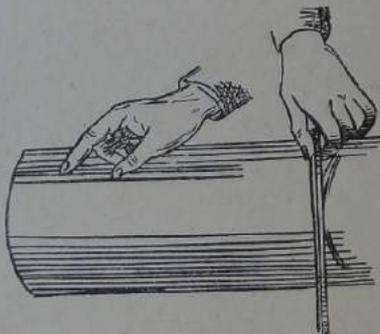
É curva ou plana? Porque que é curva?

Escrevo na pedra separadamente.

<i>Superfície de dentro</i>		<i>Superfície de fora</i>
<i>Superfície interior</i>		<i>Superfície exterior</i>

Explico que a superfície de dentro chama-se *superfície interior* ou *interna* (escrevo também esta palavra) e que a superfície de fora chama-se também exterior.

Citem os alumnos objectos que teem a superfície exterior plana. Objectos que teem a superfície interna plana. Objectos que teem a superfície interior curva.



Mostrando-lhes o cylindro novamente explico que os corpos que teem a superfície curva como aquelle mas que teem duas faces

planas (tomo um cylindro inteiriço) chamam-se cylindros.



Mande os alumnos mostrarem as faces planas do cylindro.

—Este lapis é um cylindro?

Citem os alumnos outros cylindros.

Quem é capaz de me dizer agora o que é um cylindro?

Diga você.

Mostro-lhe uma esphera.

—A superfície desta bola é curva ou plana?

Veja se pode ajustar a regua em qualquer sentido.

Essa bola tem superfície interna?



Explico então que os corpos como aquelle inteiramente redondos chamam-se tambem *espheras*.

Citem os meninos alguns objectos redondos como a esphera.

Escrevo na pedra estas duas palavras:

redondo *esphérico*

Explico que redondo e esphérico significam a mesma coisa.

Mando formar pequenas phrases: a laranja é quasi redonda; a bola de borracha é esphérica etc.

Escrevo as palavras:

cylindro

cylindrico

rolo

roliço

Explico que *cylindrico* é o que tem a fórma do *cylindro*, accentuo a semelhança de de um rolo a um *cylindro*.

Faço a proposito os mesmos exercicios de linguagem já indicados em relação á esphera.

Recapitulação abstracta

—Quantas especies de linhas o menino conhece? Quaes são? Quando se traça uma linha recta o giz vae sempre na mesma direcção? E quando se traça uma linha quebrada ou curva?

Quando se mede uma linha que é que se procura saber: o comprimento ou a largura? Quando uma linha se encontra com outra, assim: o que é que se forma?

Traço na pedra um angulo para auxiliar a resposta.



—Quantas especies de superficies conhece? Na superficie plana pode-se ajustar uma regua em todos os sentidos? Nas superficies curvas pode-se ajustar a regua? O cubo tem superficies curvas ou planas? O cylindro? Esta esphera tem superficie interna? A superficie plana só se pode medir de comprimento? Para medir o comprimento da linha precisa-se de um fio com o comprimento de um palmo, de uma polegada, não é? E para medir uma superficie plana? Não se lembram como foi que medimos a superficie das pedras? Então com que foi que nós medimos?

Sim, medimos com a superficie de papel de uma polegada quadrada.

Então para medir o comprimento da linha precisamos de outro comprimento: o palmo, o metro; e para medir a superficie precisamos de outra superficie: o palmo quadrado, a polegada quadrada, etc.

Quantos angulos tem o quadrado? Quantos lados? Os lados que formam o quadrado são eguaes ou deseguaes? São perpendiculares ou obliquos? E o rectangulo quantos lados tem? Eguaes? O losango que differença tem do quadrado? Como se chamam os

angulos do quadrado? E os do rectangulo? Que angulos tem o losango?

Se os alumnos não puderem responder, recorro novamente ás diversas figuras de madeira, para que se recordem das noções adquiridas, caso que não se dará se o ensino tiver sido auxiliado constantemente pelo desenho.

Mando fazer com o gonigrapho um triangulo e um rectangulo e um quadrado, transformando-o depois em um losango, fazendo-os notar todas as differenças caracteristicas dessas figuras.

Diversos solidos

Antes de dar a noção dos volumes, cumpre, em primeiro lugar, completar o conhecimento que já nas lições anteriores, os alumnos adquiriram relativamente a alguns solidos.

Como se sabe, o caracteristico dos corpos, em relação ao seu volume, é terem tres dimensões: altura, largura e espessura. São estas, pois, as noções que intuitivamente se terá de dar aos alumnos antes de tratar da medida directa dos volumes.

Como da esphera e do cylindro, os alumnos já adquiriram noções bastante claras e, como a medida directa desses corpos é impossivel, tratarei aqui somente dos corpos terminados por superficies planas.

Começo pelo cubo que é o mais simples. Mostrando-o novamente aos alumnos, recapitulo as noções anteriormente apprendidas.

- Quantas superficies planas tem o cubo? Como mais se chamam essas superficies? Que fórma tem as faces? Quantos angulos tem cada face? São eguaes ou deseguaes as seis faces?

Tomo o cubo juntamente com um parallelepipedo da mesma base e assento-os na mesa, de modo que se possam comparar entre si as suas dimensões.

— Que differença notam entre o cubo e este outro objecto? É só na altura que elles são differentes? As faces do cubo que fórma tem? E as deste outro tambem são quadradas?

Ensino que este objecto parecido com o cubo mas que tem quatro faces formadas de rectangulos, chama-se parallelepipedo.

— Citemos alumnos objectos que tenham a fórma de parallelepipedos.

Desenhem na pedra um cubo.

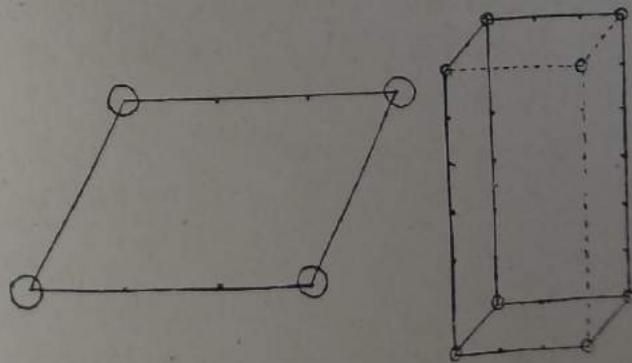
Para que nenhum dos alumnos se engane no desenho, traço tambem na pedra a mesma figura, pelo processo já indicado.

Em vez de desenhar o parallelepipedo, o que seria inconveniente porque teriamos de partir da base, e os alumnos se confundiriam com o quadrado desenhado em perspectiva, limito-me a fazer a construcção material dessa figura servindo-me de oito pedaços de cortiça e de doze pedaços de arame.

Com quatro arames eguaes e quatro pedaços de rolha formo um quadrado.

Sobre as vertices desse quadrado colloco em posição vertical outros quatro arames tambem eguaes, porem, maiores do que os do quadrado. Nas extremidades destes arames formo outro quadrado.

Resumo graphico da operação:



Dando em seguida o parallelepipedo de madeira ao primeiro alumno da classe, mando cortar numa folha de papel um quadrado igual á base; ao alumno seguinte mando verificar com esse quadrado de papel se a base superior é igual á inferior; ao seguinte mando cortar um rectangulo igual a uma das faces lateraes e aos outros faço comparar esse rectangulo com as faces lateraes.

—Diga um dos meninos o que sabe a respeito do parallelepipedo.

Pelo mesmo processo acima indicado construo uma pyramide, mostro que a figura formada é igual na fórma á pyramide de madeira.

Faço notar todas as particula idades dessa figura: a base é um quadrado, tem cinco faces; as faces lateraes são formadas por triangulos.

Ensino que aquella figura chama-se pyramide.

—Citem os alumnos os objectos que já viam com aquella fórma.

Ponho em confronto o prisma triangular e o parallelepipedo; mostro que a principal differença entre ambos consiste em que o

primeiro tem as bases triangulares e o segundo tem as bases formadas por quadrados.

Faço perguntas sobre o prisma.

—Quantas faces tem? Que fórma tem as faces?

Traço na pedra um prisma e para que os alumnos possam fazer o mesmo, observo a seguinte ordem.

Traço um triangulo com a base horizontal.

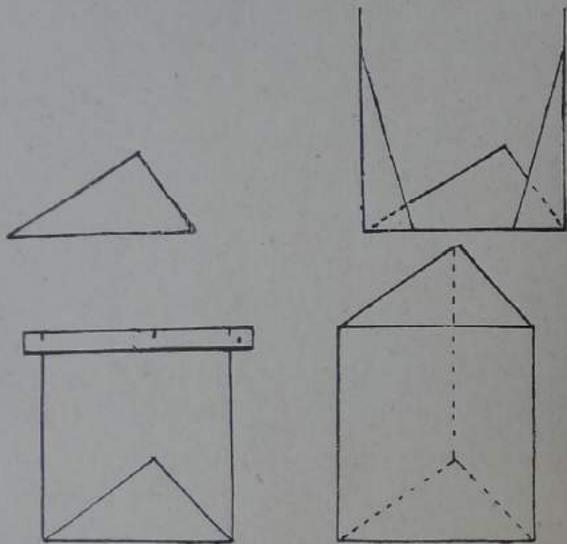
Nos vertices da base applico o esquadro e levanto perpendiculares de igual extensão.

Marco na regua tres pontos correspondentes á posição das perpendiculares e do terceiro vertice do triangulo.

Applico a regua na extremidade das perpendiculares e determino o ponto correspondente á terceira perpendicular que vou levantar.

Uno este ponto ao terceiro vertice do triangulo tomado para base, e prolongo a linha assim formada, tomando nella uma extensão igual ao comprimento das duas outras perpendiculares.

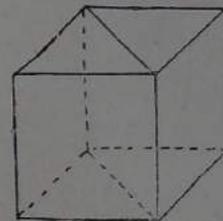
Uno entre si as extremidades das perpendiculares e terei assim formado o prisma. Eis o resumo graphico da operação:



Isto feito, explico aos alumnos que a figura que traçámos chama-se um prisma.

Como recapitulação, mostro ainda que apagando a metade do cubo, forma-se tambem um prisma. Para isso tiro duas diagonaes parallelas na base inferior e superior do cubo que a principio tracei na pedra e apago a parte correspondente á metade do cubo.

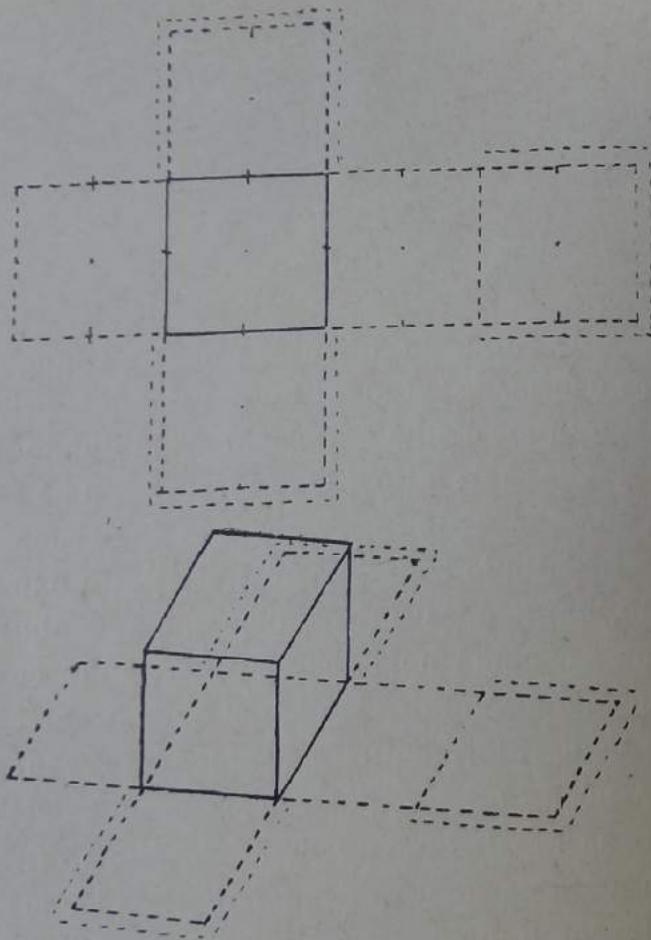
Separo em dois o cubo de madeira e o parallelepipedo, e recapitulo.



—O cubo, de quantos prismas triangulares é formado? Juntando-se estes dois prismas o que é que se forma? E juntando-se estes dois mais altos? Que fôrma teem as faces do cubo? Que fôrma teem as do prisma?

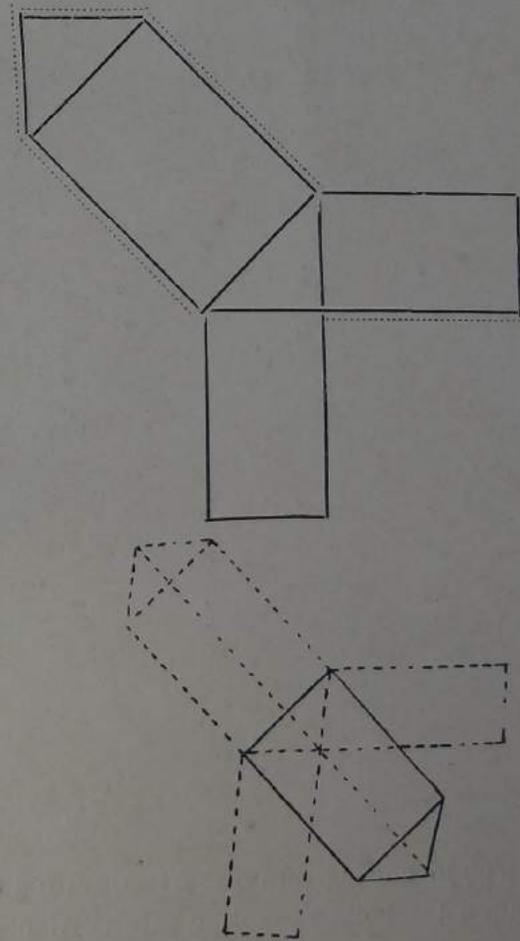
Insistindo sobre o objecto desta exposição, em licções subseqüentes, posso ainda empregar como meio de recapitulação a construção dos solidos em papel ou em cartão, que contribuirá não só para dar ás creanças uma noção precisa das relações que existem entre as arestas e entre as faces, como tambem para preparal-as a comprehender mais tarde em que consiste a medida da area lateral de taes corpos.

Tratando-se do cubo, a operação reduz-se a fazer seis quadrados eguaes da fôrma seguinte:

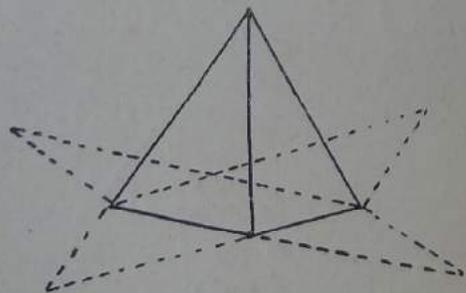
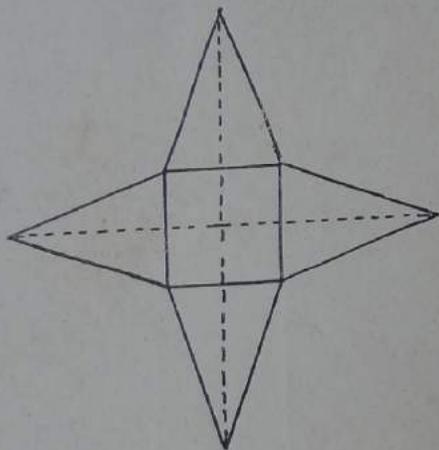


Tratando-se do paralelepipedo, a operação é a mesma com a diferença, porém, de ser preciso formar no traçado dois quadrados eguaes para a base e rectangulos eguaes para as outras quatro faces.

Tratando-se de um prisma será este o traçado a seguir:



Traçado para a construcção da pyramide. Sobre os lados de um quadrado tracem-se triangulos isosceles de altura igual.



Tendo conseguido que os alumnos construam estes solidos, sob a minha direcção, corto um molde de papel para a construcção

de um cubo equivalente a uma polegada cubica. Por este modelo os alumnos cortarão outros para, em casa, fazerem cubos de cartão que me hão de servir quando tratar da medida directa dos volumes, em falta de outros de madeira em numero sufficiente.

Medida directa dos volumes

Antes de tratar da determinação directa dos volumes, cumpre systematizar as noções que os alumnos naturalmente adquiriram pela sua propria observação.

Com esse fim, procedo do modo seguinte:

Colloco juntos sobre a mesa um cubo e um parallelepipedo da mesma base.

—Como se chamam estes dois corpos em relação á sua fôrma?

—Cubo e parallelepipedo.

—De que lado está o parallelepipedo: á direita ou á esquerda?

—Á direita.

—Muito bem. Qual o maior?

—O parallelepipedo.

Colloco dois livros em pé sobre a mesa.

—E destes dois livros qual o mais grosso:
é o da direita?

—Não, é o da esquerda.

—Qual o mais largo?

—É também o da esquerda.

—Venha mostrar a largura do livro.

Mostre agora a grossura.

Meça com o fio a largura do parallelepipedo e do cubo.

São eguaes? Meça a grossura de ambos.

Tambem são eguaes ou um é mais grosso do que o outro?

Meça a altura dos dois: qual o mais alto?

—É o parallelepipedo.

—Muito bem. Diga-me outra vez qual é o maior.

É o parallelepipedo?

E porque é que elle é maior?

—Porque é mais alto.

—Se o menino tivesse de pôr os dois numa caixa qual é que occupava menor logar?

—O cubo.

Explico que o objecto que occupa *maior* logar diz-se que tem *maior volume*.

—Qual occupa maior logar o armario ou esta mesa? Então qual é que tem menor volume? Qual tem maior volume, este tinteiro ou o lapis? Este lapis ou o cubo? O banco ou a mesa?

Para ver se o parallelepipedo tinha mais volume do que o cubo o que foi que fizemos?

—Medimos a largura, a grossura e a altura.

—Então para se saber se um objecto tem maior volume do que outro em quantos sentidos é que se mede?

—Em tres.

—E a linha em quantos? E a superficie?

Escrevo na pedra as seguintes palavras:

logar

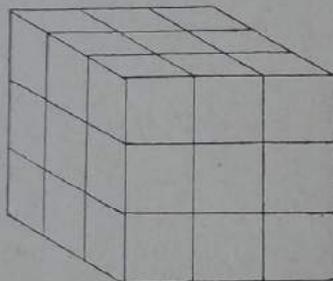
espaço

Explico aos alumnos que em vez de se dizer o corpo occupa muito logar pode-se tambem dizer: o corpo occupa muito espaço.

Citem os alumnos os objectos que mais espaço occupam na sala.

Passo em seguida a dar uma idéa da medida dos volumes.

Tomo os cubos de cartão feitos pelos alumnos, ou cubos de madeira que cada escola deve ter, e colloco-os de modo a formar um cubo maior.



Explico que cada cubo pequeno é uma polegada cubica.

—Todos os cubos assim empilhados o que é que formam?

Formam um outro cubo?

Qual é o volume de cada cubo pequeno?

—É uma polegada cubica.

—Muito bem.

Vamos ver agora qual é o volume do cubo grande.

Mando um dos alumnos tirar e contar os cubos pequenos.

—O cubo grande que o menino desmanchou quantos cubos pequenos tinha?

—Cada cubo pequeno que volume tinha?

—Então o cubo grande quantas polegadas cubicas tinha de volume?

Sigo agora um processo inverso.

Tomo um cubo de papelão, construido por mim de modo a conter um determinado numero de polegadas cubicas, e, como fiz quando tratei das superficies, mando medil-o directamente collocando-se dentro em ordem os pequenos cubos de polegada.

Para firmar bem estas noções construo, com o auxilio de arames e de pedaços de cortiça, um palmo cubico, um decimetro cubico, etc., e faço por ultimo uma recapitulação geral, mandando os alumnos construir os mesmos volumes.

—A linha em quantos sentidos se mede?

—As superficies em quantos se podem medir?

Os corpos quaesquer, para se conhecer se teem muito ou pouco volume, em quantos sentidos se medem?

Explico por ultimo que como as linhas só se medem de comprido diz-se que as linhas teem uma só dimensão.

Que como as superficies se medem de comprido e de largo, diz-se que as superficies tem duas dimensões.

—Quantas dimensões teem as linhas?
Quantas teem as superficies? Quaes são?
Quantas teem os volumes? Quaes são?

Conclusão

É este, ao meu ver, o desenvolvimento que se deve dar ao primeiro anno de ensino da Geometria, porque neste golpe de vista geral o alumno terá abrangido o objecto inteiro da sciencia cujo nome elle ainda ignora, mas que sem extranheza ouvirá quando chegar ao estudo das propriedades das figuras. Oxalá se firmem no espirito das creanças, desde logo, estes primeiros principios, na apparencia tão simples, mas na realidade, difficeis e aridos quando a especialização deductiva obscurece a ligação logica que os unifica, e quando á intelligencia falta a base solida dos primeiras noções adquiridas racional e methodicamente!

Antes de pôr termo a esta parte do meu trabalho, cumpre-me deixar aqui a declara-

ção final de que não tive em vista crear um molde inflexivel do qual o professor não se deva afastar. Ao contrario, quiz apenas indicar os pontos que, perante a logica, me pareceram essenciaes; e que ao professor servirão de advertencia para methodizar o seu ensino.

Em geral as perguntas que figurei não são acompanhadas de respostas, porque, para approximar-me da verdade, teria de suppor respostas verdadeiras e respostas erradas em maior numero. Estas ultimas são as que verdadeiramente orientam o professor sobre a marcha a seguir, porque denunciam o estado de espirito das creanças, e, alem disso, suggerem recursos que difficilmente poderiam ser lembrados em um trabalho desta ordem.

Indiquei, por isso, apenas o que me pareceu essencial, deixando ao professor o cuidado de desenvolver, de accordo com as condições de cada escola, os processos que aqui deixo esboçados.

Sirva esta declaração para attenuar os defeitos que, em maior escala, teria o meu

trabalho aos olhos dos que quizessem ver nelle um manual de normas invariaveis, ou uma especie de formulario, a priori, para remediar os males do ensino.

