Francisco Carlos da [illegible]

47

F. CABRITA

ELEMENTOS

DE

GEOMETRIA

> Ce qu'il y a d'utile en géométrie peut s'apprendre en six mois, le reste est de pure curiosité.
>
> DIDEROT.—*Notice sur Clairaut.*

ESTADOS UNIDOS DO BRAZIL

Typographia e Litographia de Oliveira, Filho & C., rua do Rosario n. 63

CAPITAL FEDERAL

Anno de 1890, 2º da Republica

Quem entregar-se ao trabalho de confrontar estes — *Elementos de Geometria* — com os publicados em 1741 por Clairaut, facilmente reconhecerá nelles uma adaptação do plano traçado por esse «eminente precursor da regeneração do ensino mathematico» ás actuaes exigencias didacticas.

Quem igualmente procurar segui-lo no ensino dessa imprescriptivel disciplina, reconhecerá, como eu, em pouco tempo, o mais suave e franco progresso de seus discipulos na assimilação de tudo quanto ha na Geometria de util e interessante.

Tomando por ponto de partida a medida dos terrenos, seguindo uma rota analoga áquella que deveriam ter seguido os primeiros descobridores, evitando a monotona successão dos theoremas e inuteis demonstrações de verdades do dominio do bom senso, acostumando o espirito a investigar e descobrir, o plano de Clairaut conduz suavemente o leitor ao legitimo destino da Geometria e a tirar de seu estudo todo o proveito necessario e sufficiente.

Estes *elementos* têm por fim aplainar difficuldades que, no apprendizado desta disciplina pelos moldes communs, surgem áquelles que estudam-n'a pela primeira vez ou que aspiram obter os conhecimentos indispensaveis aos usos da vida pratica. Na sua elaboração por vezes afastei-me do alto rigor logico a que deveria estrictamente cingir-me, se outro fosse o fim desta publicação.

Capital Federal, Setembro de 1890.

F. CABRITA.

Elementos de Geometria

PRIMEIRA PARTE

Dos meios que foram mais naturalmente empregados para se conseguir a medida dos terrenos

Um *comprimento* ou uma *distancia* foi naturalmente o que primeiro se tentou medir.

1.—Para medir um comprimento qualquer o expediente fornecido por uma especie de geometria natural consiste em comparar o comprimento de uma medida conhecida com o comprimento cuja medida se quer conhecer. Assim, para medir-se o comprimento de um muro, applica-se successivamente o *metro*, por exemplo, que é uma medida conhecida, de uma extremidade á outra, e diz-se : o muro tem o comprimento de.....tantos metros ; faz-se uma comparação ou medida directa.

2.—Em relação á distancia a percorrer de um ponto A a outro ponto B, (fig. 1) vê-se que póde ser maior ou menor conforme o caminho que se seguir ; e que de todos os caminhos possiveis o mais curto evidentemente é o do meio que não nos obriga a dar volta alguma e que vai direito do ponto A ao ponto B : é o caminho representado por uma *linha recta*, sobre a qual é preciso applicar a medida conhecida para se obter a mais curta distancia.

Linha recta é a linha que marca a mais curta distancia entre dois pontos.

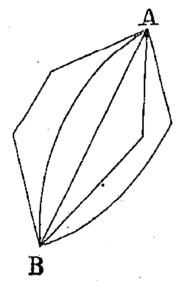

Fig. 1

3.—Além da necessidade de medir a distancia de um ponto a outro, acontece muitas vezes que se é obrigado a medir a distancia de um ponto á uma recta. Estando, por exemplo, um individuo situado na calçada de uma rua, em um ponto A, e querendo passar para a calçada opposta, poderá seguir diversos *caminhos rectos:* AB, AC, AD, AE, etc. E' claro que preferirá elle escolher o caminho mais curto, representado evidentemente pela linha AE, que, em relação a XY, parece ser a que não se inclina mais para um lado do que para outro.

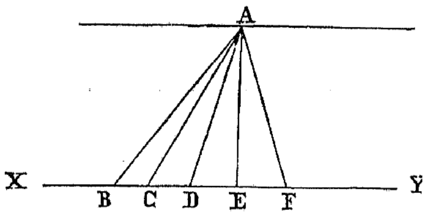

Fig 2.

E' sobre esta linha, á qual se dá o nome de *perpendicular*, que é necessario applicar a medida conhecida para se avaliar a mais curta distancia percorrida de um ponto A a uma recta XY.

Perpendicular é a recta que, cahindo sobre outra, não se inclina mais para um lado do que para outro: mede a mais curta distancia de um ponto a a uma recta.

4.—Uma recta, tal como AE, (fig. 2) não se apresenta sómente no caso que acabámos de figurar. Se observarmos o arranjo particular das partes componentes de diversos objectos, o feitio ou a fórma que affectam o tecto, o soalho, as paredes, as janellas, os caixilhos das vidraças, as portas, os quadros, as mesas, etc., que se acham na nossa sala de aula, veremos que ha uma infinidade de cousas distinctas que têm a mesma fórma; isto é, que são contornadas por quatro linhas rectas perpendiculares entre si, duas a duas, formando uma figura tal como ABCD, (fig. 3) chamada *rectangulo*.

Rectangulo é a figura de quatro lados perpendiculares dois a dois.

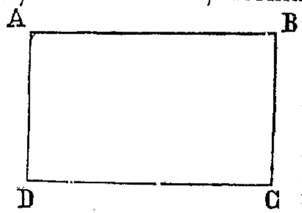

Fig. 3

Póde acontecer, porem, que as quatro perpendiculares, que caracterisam a fórma ou figura denominada rectangulo, sejam, como em EFGH, (fig. 4) iguaes entre si. N'este caso o rectangulo toma o nome particular de *quadrado*

Quadrado é o rectangulo cujos lados são iguaes entre si.

Quem, porem, poderá afiançar que a recta AE (fig. 2) cahindo sobre XY não se inclina realmente mais para a direita do que para a esquerda?

Parecer não é ser. Pelo facto da recta parecer não se inclinar, não se póde concluir que seja rigorosamente perpendicular, por isso que póde se inclinar tão pouco que a nossa vista não perceba e que sejamos illudidos. E' preciso, portanto, que se tenha um processo para traçar perpendiculares com o rigor sufficiente.

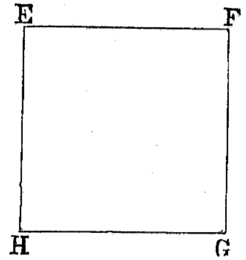

Fig. 4

5.—Nas differentes occasiões, que exigem que se tracem perpendiculares, trata-se ou de *baixar* a perpendicular sobre uma recta (de um ponto tomado fóra dessa recta) ou de *levantar* a perpendicular (de um ponto tomado sobre a propria recta). Supponhamos que do ponto C, tomado na linha AB, se queira *levantar* a recta CD perpendicular a AB. Será preciso que CD não se incline nem para A nem para B. Supondo, pois, primeiro, que C esteja á igual distancia de A e de B e que CD não se incline para lado algum, é claro que cada um dos pontos desta recta será igualmente afastado de A e de B; investigue-se, pois, o meio de achar um ponto qualquer D tal que sua distancia ao ponto A seja igual á sua distancia ao ponto B: porque então tirando por C e por este ponto uma recta CD, esta recta será a perpendicular pedida. Para isso o meio natural de que dispomos é o seguinte: fixa-se a extremidade de um cordel ou a ponta de um compasso no ponto A e, fazendo-se girar a outra ponta ou a outra extremidade do cordel, traça-se a linha arqueada ou o *arco* PDM. Depois, sem mudar a medida, dada pelo cordel ou pela abertura do compasso, faça-se o mesmo no ponto B, isto é,

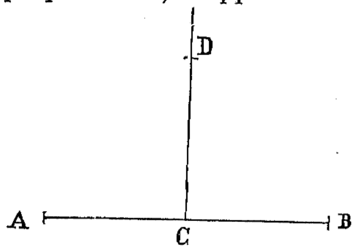

Fig. 5

Processo para levantar uma perpendicular.

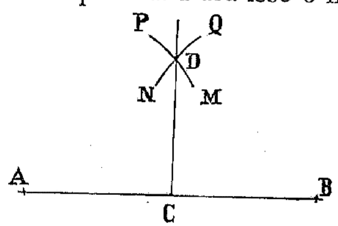

Fig. 6

descreva-se o arco QDN, que, cortando o primeiro no ponto D, dará a posição verdadeira do ponto procurado. E isto porque o ponto D pertencendo tanto ao arco PDM como ao arco QDN descripto por meio de uma medida commum, sua distancia ao ponto A igualará sua distancia ao ponto B; pois CD não se inclinará nem para A nem para B e será perpendicular a AB.

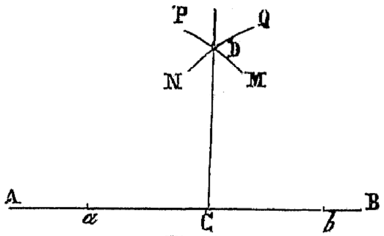

Fig. 7

Se o ponto C (fig. 7) não se achasse á igual distancia de A e de B, seria preciso, antes de tudo, tomar dois pontos *a* e *b* igualmente afastados de C e delles nos servirmos, em lugar de A e de B, para descrever os arcos PDM e QDN.

Processo para baixar uma perpendicular.

6.—O processo de *levantar* uma perpendicular sobre uma recta AB (fig. 7) fornece o de *baixa-la*; porque do ponto E tomado fóra de AB podem-se marcar com a mesma abertura do compasso dois pontos *a* e *b* sobre AB e procurar-se, como no numero precedente, um outro ponto D, cujas distancias ao ponto *a* e ao ponto *b* sejam as mesmas. Por este ponto D e por E se tirará a recta DE que tendo cada extremidade igualmente afastada de *a* e de *b* e portanto não se inclinando mais para um lado de AB do que para outro será perpendicular a AB.

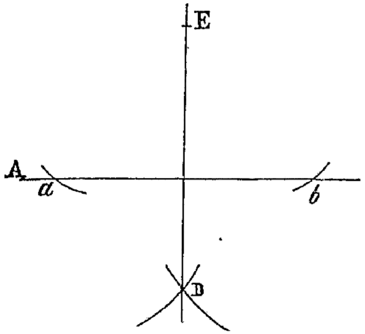

Fig. 8

7.—Da operação precedente resulta a solução de novo problema: *dividir uma recta AB em duas partes iguaes.* Dos pontos A e B (fig. 9) e com uma abertura de compasso visivelmente maior que a metade da recta AB descrevam-se quatro arcos, dois

dos quaes se interceptarão acima de AB em um ponto E e os outros dois abaixo em um ponto D. A recta que passar por estes dois pontos marcará, em C, o meio de AB.

A perpendicular ao meio de uma recta tem todos os seus pontos equidistantes dos extremos dessa recta.

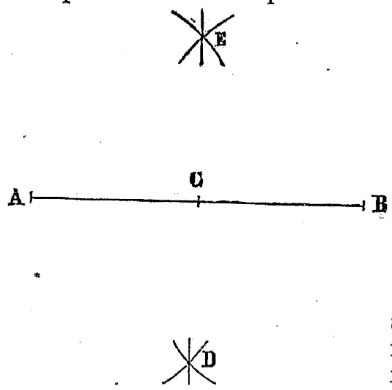

Fig. 9

8. — Conhecido o processo para traçar perpendiculares será agora facil construir com o rigor sufficiente as figuras denominadas rectangulos e quadrados de que falámos no n. 4. Assim, para construir um quadrado ABCD, cujos lados sejam iguaes á linha dada K ou a um comprimento linear dado, 2 $^1/_2$ centimetros, por exemplo, basta tomar sobre a recta XY

Construir um quadrado, sendo dado um de seus lados.

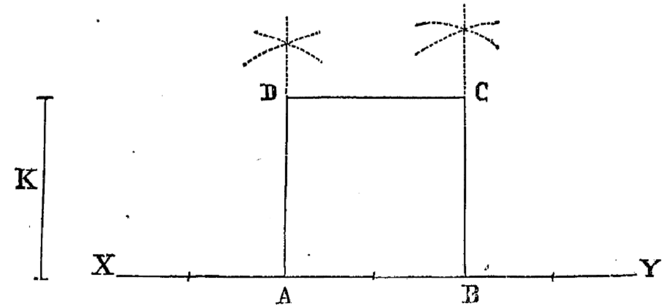

Fig. 10

um intervallo ou uma parte AB igual a K ou a 2 $^1/_2$ centimetros, depois levantar (5) pelos pontos A e B as perpendiculares AD, BC, cada uma igual a K ou a 2 $^1/_2$ centimetros, e finalmente tirar DC.

9. — Si se quizesse traçar um rectangulo FGHI, cujo comprimento (*base* do rectangulo) fosse K e cuja *altura* fosse L, tomar-se-ia FG igual a K, levan-

Construir um rectangulo, dada a base e dada a altura.

tar-se-iam as perpendiculares FI e GH, cada uma igual a L, e finalmente traçar-se-ia IH.

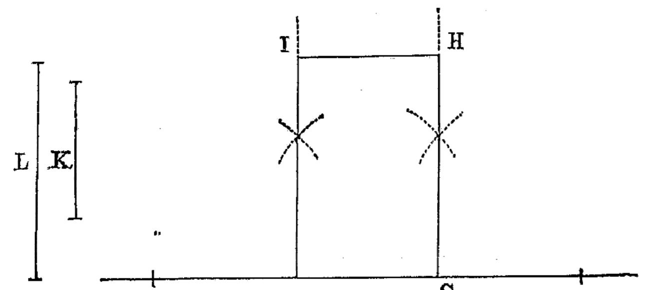

Fig. 11

10.—Se, na figura 11, prolongarmos para a direita e esquerda os lados IH e FG do rectangulo, veremos que estas rectas são taes que seus intervallos têm por medida perpendiculares do mesmo comprimento, isto é, são *parallelas*.

Parallelas são linhas que em toda a extensão guardam entre si a mesma distancia.

Os trilhos de uma estrada de ferro, os sulcos feitos no terreno pelas rodas de um carro, as linhas que limitam lateralmente as ruas, etc., têm a disposição de linhas parallelas. Para traçar parallelas nada parece mais natural que recorrer ao processo de que nos servimos para traçar rectangulos. Seja AB, por exemplo, um dos lados de qualquer canal ou de qualquer rua, á qual se queira dar a largura CA; ou, para enunciar a questão de um modo mais geometrico e mais geral, supponhamos que se queira tirar por C a parallela CD á AB: tomar-se-á á vontade um ponto B na linha AB e se procederá do mesmo modo que, sendo a base AB, se quizesse fazer um rectangulo ABCD que tivesse AC para altura. Então as linhas (rectas) CD e AB, sendo prolongadas indefinidamente, seriam sempre parallelas, ou, o que é a mesma cousa, jámais se encontrariam.

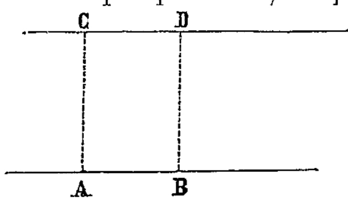

Fig. 12

Rectas parallelas são as que nunca se encontram por mais que se prolonguem.

11.—A regularidade das figuras rectangulares, cujo emprego é mui frequente, conduz-nos muitas vezes á necessidade de determinar a extensão nellas comprehendida, como, por exemplo, quando se quer saber a porção de papel necessaria para forrar as paredes de um quarto, ou a porção de tapete sufficiente para forrar o soalho de uma sala.

Para se conseguir estas especies de determinações, o meio mais simples e mais natural é empregar uma medida commum, que, applicada um certo numero de vezes sobre a superficie a medir, a cubra completamente, ou, o que é a mesma cousa, vêr quantas vezes a superficie considerada contém ou é contida em uma superficie de grandeza fixa e conhecida: methodo inteiramente analogo áquelle de que já nos servimos para determinar o comprimento das linhas (rectas).

E' evidente que a medida commum das superficies deve ser tambem uma superficie.

Medida da superficie de um quadrado.

Supponhamos, para fixar as idéas, que se queira medir a superficie limitada pelos quatro lados do quadrado representado na figura 13, e que tem 4 centimetros de lado. Se pelos pontos de divisão do lado AB tirarmos rectas parallelas á base CB ficará a figura toda dividida em 4 rectangulos, tendo cada um 4 centimetros de base e 1 centimetro de altura.

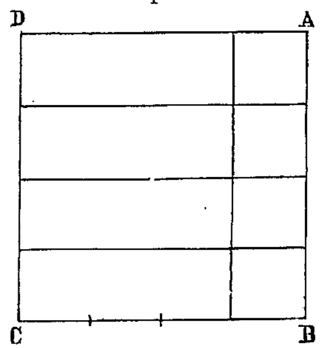

Fig. 13

Se, porém, pela primeira divisão da base CB tirarmos uma parallela á altura AB teremos, á direita da figura, uma facha de 4 rectangulos tendo cada um 1 centimetro de base e 1 centimetro de altura, isto é, teremos 4 quadrados de 1 centimetro de lado. Si pelos outros dois pontos de divisão da base CB tambem tirarmos parallelas a AB ficará a figura toda com mais tres faxas de 4 quadrados de 1 centimetro de lado cada uma. O quadrado todo ABCD conterá, pois, tantos quadrados de 1 centimetro de lado quantas são as unidades da altura pelas unidades da base, isto é, 4×4 ou 16 *centimetros quadrados*.

Centimetro quadrado é o quadrado de um centimetro de lado.

Si em vez de termos dividido a base em 4 centimetros tivessemos dividido em 40 millimetros (cada centimetro tendo 10 millimetros) e pelos pontos de divisão da base e da altura tivessemos tirado rectas parallelas, é claro que ellas se cruzariam em 40×40 quadrados tendo cada um 1 millimetro de lado, isto é, em 1600 *millimetros quadrados*.

Si o lado do quadrado considerado em vez de ser do comprimento de 4 centimetros fosse do comprimento de 4 palmos, ou de 4 varas, ou de 4 decametros, etc., nada obstaria que semelhantemente o decompuzessemos em 4×4 ou 16 quadrados menores tendo, porém, cada um, em cada caso, respectivamente 1 palmo, 1 vara ou 1 decametro de lado. Isto é, teriamos a superficie medida pelo numero 16 palmos quadrados, ou 16 varas quadradas ou 16 decametros quadrados.

Vê-se assim que a unidade de superficie é sempre um quadrado tendo para lado uma unidade linear qualquer: e a *área* é representada pelo numero que indica quantas vezes a figura considerada contém ou é contida no quadrado tomado por unidade.

12. — Reflectindo sobre o que acabámos de dizer, será facil ver que tomando um quadrado para unidade, este quadrado será contido em um outro quadrado tendo para lado:

1.....	1×1 ou	1 vez	6....	6×6 ou	36 vezes
2.....	2×2 ou	4 vezes	7....	7×7 ou	49 vezes
3.....	3×3 ou	9 vezes	8....	8×8 ou	64 vezes
4.....	4×4 ou	16 vezes	9....	9×9 ou	81 vezes
5.....	5×5 ou	25 vezes	10....	10×10 ou	100 vezes

Os numeros 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, etc., são chamados em arithmetica os *quadrados* de 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, etc., porque elles representam o numero de quadrados (área), tendo para lado a unidade de comprimento, contidos na superficie dos quadrados que têm para lados 1, ou 2, ou 3, ou 4, etc. Os numeros 1, 2, 3, 4, etc., que representam a quantidade de unidades de comprimento contidas em cada lado dos quadrados, são chamadas as *raizes* destes quadrados.

A area de um quadrado é igual ao quadrado de um de seus lados.

13.—Supponhamos, para outro exemplo, o rectangulo ABCD tendo 7 metros de altura sobre uma base de 8 metros. Poder-se-á considerar este rectangulo como dividido em 7 faxas *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, contendo, cada uma 8 metros quadrados: a área do rectangulo será, pois, de 7 vezes 8 metros quadrados ou 56 metros quadrados.

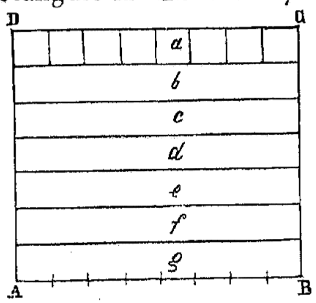

Fig 11

Agora, reflectindo sobre os primeiros elementos do calculo arithmetico, e lembrando que multiplicar dois numeros é tomar um tantas vezes quantas são as unidades do outro, se achará uma verdadeira analogia entre a multiplicação ordinaria e a operação pela qual se mede o rectangulo. Ver-se-á que, semelhantemente ao quadrado (11), multiplicando o numero de metros ou de decimetros, etc., que dá a altura do rectangulo, pelo numero de metros ou de decimetros, etc., que dá sua base, se determinará a quantidade de metros quadrados, ou de decimetros quadrados, etc., que contem sua superficie.

A área de um rectangulo é igual ao producto da base pela altura.

14.—As figuras que se têm a medir nem sempre são regulares como os rectangulos; entretanto muitas vezes ha necessidade de obter sua medida (area), quer se trate de determinar a extensão de uma obra construida sobre um terreno sem regularidade, quer se queira saber quantos decametros quadrados ou ares, por exemplo, são contidos em um terreno irregularmente limitado. E', pois, necessario que ao methodo de determinar a extensão dos rectangulos, se junte o de medir as figuras que não são rectangulares.

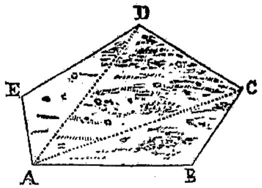

Fig. 15

Vê-se que, na pratica, a difficuldade consiste primeiro na maneira de medir figuras rectilineas, taes como ABCDE, isto é, figuras terminadas por linhas rectas e commummente denominadas *polygonos*; porque, se no contorno do ter-

Polygono é a figura terminada por linhas rectas que se encontram duas a duas.

reno se acharem algumas *linhas curvas* como na figura ABCDEFG (fig. 16), é evidente que estas linhas, divididas em tantas partes quantas fôrem necessarias para evitar todo o erro sensivel, poderão sempre ser tomadas por uma successão de linhas rectas.

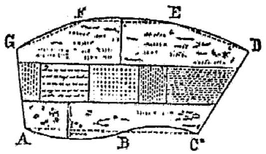

Fig. 16

Isto posto, vê-se que, apezar da infinita variedade de figuras rectilineas, póde-se medi-las todas da mesma maneira, decompondo-as (fig. 14) em figuras de tres lados, chamadas commummente *triangulos*, o que se conseguirá da maneira mais facil e mais commoda tirando (fig. 15) de um ponto qualquer A do contorno da figura ABCDE linhas rectas AC, AD, etc., para os pontos C, D, etc.

Triangulo é o polygono de tres lados.

15. Não se tratará pois senão de ter a medida dos triangulos em que a figura se tiver decomposto. Ora sabe-se que, para descobrir o que se ignora, o meio mais seguro é procurar, si, no que se conhece, ha alguma cousa que tenha relação com o que se quer conhecer. Já vimos que todo o rectangulo ABCD, é igual ao producto de sua base AB pela sua altura CB, e não é difficil de perceber que esta figura cortada transversalmente pela linha AC, chamada *diagonal*, se divide em dois triangulos iguaes; d'ahi se infere que cada um destes triangulos é igual á metade do producto de sua base AB ou DC por sua altura CB ou DA.

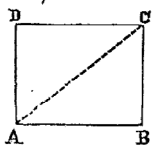

Fig. 17

Diagonal é a recta que une dois vertices, não consecutivos, de um polygono.

Verdade é que nem sempre succede terem os triangulos, cujas areas queremos obter, dois de seus lados perpendiculares um ao outro, como no caso dos triangulos ABC e ADC, (fig. 17) que se distinguem dos outros triangulos pelo nome de *triangulos rectangulos*; nada porém impede reduzi-los todos a triangulos desta especie. Porque si do ponto A, *vertice* de um triangulo qualquer ABC, (fig. 18) se baixar a perpendicular AD sobre a base BC, ficará elle dividido em dois triangulos rectângulos ABD e ADC.

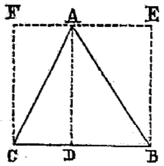

Fig. 18

Reconsiderando o que acabamos de dizer é evi-

dente que, como os dois triangulos ABD e ADC são as metades dos rectangulos AEBD e ADCF, o triangulo proposto ABC será tambem a metade do rectangulo EBCF, que tem BC para base e AD para altura: porém, a area da superficie do rectangulo sendo igual ao producto de sua base BC pela altura EB ou AD, o triangulo ABC terá por medida a metade do producto da base BC pela perpendicular AD, altura do triangulo.

A area de um triangulo é igual á metade do producto da base pela altura.

Têm-se, pois, a maneira de medir todos os terrenos terminados por linhas rectas, por isso que não se encontra terreno algum de fórma polygonal que não possa ser decomposto em triangulos, de cujos vertices sabemos baixar perpendiculares sobre as bases respectivas.

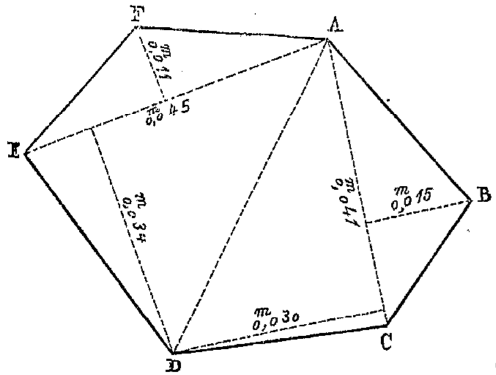

Fig. 19.

Calculo da área do polygono ABCDEF (fig. 19)

$$ABC = \frac{0{,}041}{2} \times 0{,}015 = 0{,}0205 \times 0{,}015 = \overset{m^2}{0{,}0003075}$$

$$ACD = \frac{0{,}041}{2} \times 0{,}030 = 0{,}0205 \times 0{,}030 = 0{,}0006150$$

$$ADE = \frac{0{,}045}{2} \times 0{,}034 = 0{,}0225 \times 0{,}034 = 0{,}0007650$$

$$AEF = \frac{0{,}045}{2} \times 0{,}011 = 0{,}0225 \times 0{,}011 = 0{,}0002475$$

Area pedida. . . . . . $= \overset{m^2}{0{,}0019350}$

ou 1935 millimetros quadrados.

16.—Pela regra que acabamos de deduzir e de empregar para avaliar a área de um triangulo, vê-se que essa avaliação só depende do comprimento de sua base e de sua altura; d'ahi se infere que todos os triangulos, taes como ECB, ACB, que têm uma base commum CB e cujas alturas EF, AD são iguaes, têm a mesma área, apezar de suas superficies serem dispostas de modo differente. As superficies que, apresentando disposições differentes, têm entretanto as mesmas áreas, dizem-se *equivalentes*: são expressas pelo mesmo numero de unidades de superficie.

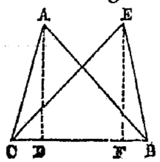
Fig. 20

17.—Para facilitar a comprehensão do principio que dá a medida dos triangulos, julgamos prudente escolher sempre para base um lado sobre o qual pudesse cahir a perpendicular baixada do vertice opposto, o que sempre é possivel fazer quando se trata da medida dos terrenos. Como porém na comparação dos triangulos que têm a mesma base, as perpendiculares baixadas de seus vertices podem cahir fóra do triangulo, como na figura 21, é preciso ver si os triangulos, taes como BCG, estão no caso dos outros até então considerados, isto é, si elles são sempre a metade dos rectangulos ECBF, que têm a perpendicular GH para altura. Isto, porém, é facil de comprehender, notando que o triangulo CGH, somma dos dois triangulos CGB, BGH, é a metade do rectangulo ECHG, somma dos dois rectangulos ECBF, FBHG; e que assim os dois triangulos CGB, BGH, tomados juntos, valem a metade do rectangulo ECHG: ora o triangulo BGH é a metade do rectangulo FBHG; pois, o triangulo proposto BCG é a metade do outro rectangulo ECBF, que tem BC para base e GH para altura.

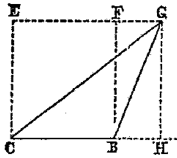
Fig. 21

Um triangulo é a metade de rectangulo da mesma base e da mesma altura.

18.—A proposição instituida no numero 16 pode ainda ser enunciada genericamente nestes termos: os triangulos EBC, ABC, GBC têm áreas iguaes

ou são equivalentes, quando têm uma base commum BC e se acham entre as mesmas parallelas EAG, CBH; isto é, quando seus vertices E, A, G se acham em uma mesma linha recta EAG parallela á base commum CB. Porque então (n. 10) suas alturas, medidas pelas perpendiculares EF, AD, GH, são as mesmas.

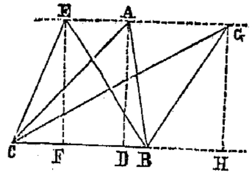
Fig. 22

Os triangulos da mesma base e da mesma altura são equivalentes.

19.—Demos desde já um emprego util a esta proposição; vejamos o partido que della podemos tirar. Retomemos a questão relativa á avaliação da área de um polygono. Seja o mesmo polygono de

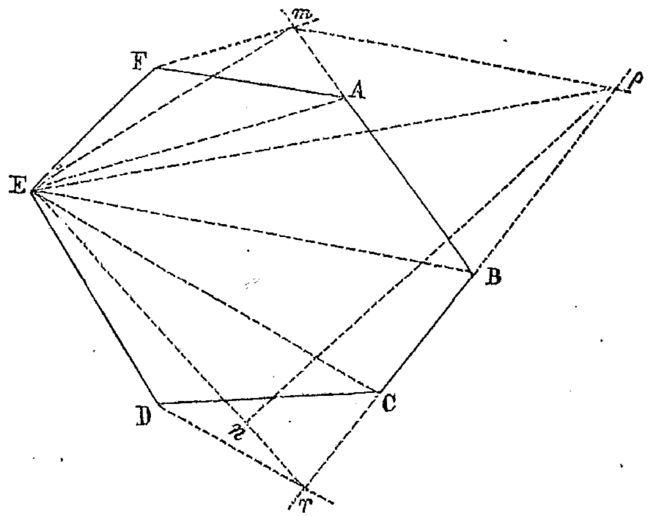
Fig. 23

seis lados ABCDEF da figura 19. Tracemos a diagonal EA e em vez de avaliarmos a área do triangulo FEA, construamos um outro triangulo que lhe seja equivalente, isto é, que tenha a mesma base EA e cujo vertice fique situado com o vertice F na mesma parallela á base. Para isso tiremos por F a parallela *Fm* á base EA, prolonguemos o lado AB do polygono até encontrar em *m* a parallela tirada, e unamos o ponto E a esse ponto m: ficará construido o triangulo EmA equivalente a EFA; e em vez de avaliarmos a área do triangulo EFA, avaliaremos a do seu equivalente EmA, que, com o resto do polygono EABCD, dará um outro polygono $EmBCD$ de menos um lado que o proposto e seu equivalente. Semelhantemente para avaliarmos a área do polygono $EmBCD$ (equivalente ao proposto) tiremos a diagonal EB, por m a parallela mp á essa diagonal, prolonguemos C B até encontrar a parallela no ponto p e finalmente tracemos Ep; ficará o triangulo EmB equivalente ao triangulo EpB, que, com o resto do polygono EBCD, dará um novo polygono $EpCD$ equivalente a $EmBCD$, porém de menos um lado que este. Repetindo a operação, tirariamos a diagonal Er, que divide o polygono $EpCD$ em dois triangulos, e tirando por p uma parallela a Er e prolongando DC até encontrar essa parallela, o ponto de encontro cahiria fóra dos limites do papel; então em vez de construir um triangulo equivalente a Epr construimos um triangulo ErC equivalente ao outro triangulo EDC em que o polygono $EpCD$ está dividido pela diagonal EC. Esse triangulo ErC com o outro EpC constituem um só triangulo Erp equivalente ao polygono proposto.

Construir um polygono equivalente a outro com menos um lado que esse outro.

Reducção de um polygono a um triangulo equivalente.

Por essa construcção vê-se que para avaliar a área do polygono (figs. 19 e 23) podemos diminuir consideravelmente a operação numerica (n. 15) reduzindo todo o calculo á metade do producto da base $Er=0,^{m}0565$ pela altura $pn=0,^{m}0685$ do triangulo Epr:

$$\frac{1}{2}(0,^{m}0565\times 0,^{m}0685)=0,\overset{m^2}{001935}.$$

20.—Observando um rectangulo ABCD (fig. 17) nada nos impede imaginarmos que os dois lados AD e CB em vez de cahirem sobre AB sem se inclinarem mais para um lado do que para outro, caiam sobre AB inclinando-se ambos igualmente para a direita ou para a esquerda e sempre conservando-se parallelos. Entre as figuras rectilineas, cujas superficies já aprendemos a medir, ha então algumas que

se approximam da regularidade dos rectangulos; são as figuras taes como ABCD, (fig. 24) terminadas por quatro lados parallelos dois a dois e não perpendiculares.

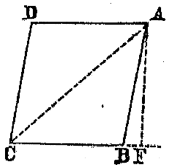

Fig. 24

Parallelogrammo é o polygono de quatro lados parallelos dois a dois;

Estas figuras são chamadas *parallelogrammos*; são mais faceis de medir do que as outras figuras rectilineas, exceptuados os rectangulos. De facto, dividindo o parallelogrammo ABCD em dois triangulos ABC, ACD, estes dois triangulos são visivelmente iguaes: ora, como cada um destes triangulos tem para área a metade do producto da base BC pela altura AF, o parallelogrammo terá para área o producto inteiro da base BC pela altura AF.

sua area é igual ao producto da base pela altura.

21.—Dahi segue-se que todos os parallelogrammos ABCD, EBCF (figs. 25 e 26) que tiverem uma base commum e que se acharem entre as mesmas parallelas, serão equivalentes;

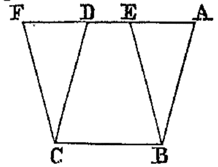

Fig. 25

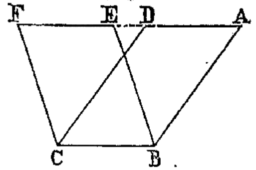

Fig. 26

Dois parallelogrammos da mesma base e da mesma altura são equivalentes.

o que é facil de verificar, mesmo independentemente do que precede, notando que o parallelogrammo ABCD se reduzirá ao parallelogrammo EBCF, se a elle juntarmos o triangulo DCF e ao mesmo tempo da figura toda ABCF tirarmos o triangulo ABE; sendo estes dois triangulos suppostos iguaes, evidente será que o parallelogrammo ABCD não terá mudado de extensão quando reduzido a EBCF. Ora, para certificarmo-nos da igualdade dos triangulos DCF, ABE, bastará imaginar o triangulo DCF deslocando-se ao longo de CB e de modo que DC no deslocamento se conserve parallela á sua primitiva posição até vir se confundir com AB; o ponto C cahirá em B, F em E, D em A e os triangulos coincidirão perfeitamente.

22.—Ha ainda uma outra cathegoria de figuras rectilineas, faceis de medir, que se chamam *polygonos regulares* por terem todos os lados perfeitamente iguaes e igualmente inclinados uns sobre os outros.

Taes são as figuras ABCDEF, ABDEFGH (fig. 27 e 28.)

Supponhamos o polygono regular ABCDEF. Tracemos uma perpendicular ao meio de AB; todos os pontos desta perpendicular *mp* serão equidistantes dos extremos A e B do lado AB (n. 7). Se fizermos o mesmo em relação a BC, todos os pontos da perpendicular *nq* serão equidistantes de B e de C. Então o ponto O de encontro das duas perpendiculares, pertencendo tanto á uma como á outra perpendicular deverá ser tão distante de A quanto de B e de C. Si, portanto, tomarmos um compasso, e com uma abertura igual a OA e centro em O traçarmos um arco, este arco passará necessariamente pelos pontos A,B,C; e si continuarmos a fazer rodar o compasso, o arco ficará maior, e irá passar pelos outros vertices D,E,F, que, pela natureza do polygono, devem estar situados em relação ao ponto O como os pontos A,B e C.

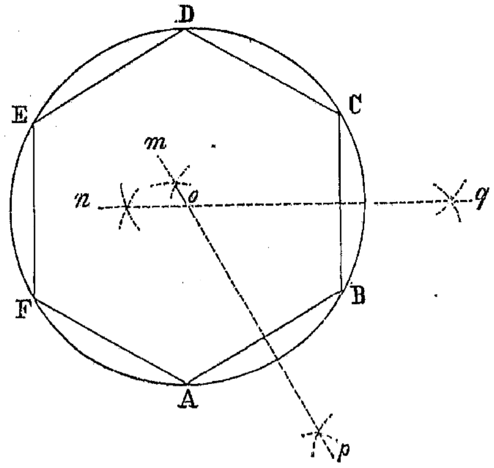

Fig. 27

Circumferencia é uma linha curva completamente fechada cujos pontos são equidistantes de um tomado no interior, que é o centro.

Completada a rotação do compasso, isto é, feita a rotação até o ponto de partida, ficará o polygono cercado por uma linha curva, completamente fechada, que tem todos os seus pontos igualmente distantes de um tomado no interior, chamado *centro da circumferencia*. Neste caso o polygono dir-se-á *inscripto* á circumferencia e a circumferencia *circumscripta* ao polygono.

Descrever um polygono regular de um numero determinado de lados.

E' facil agora ver que para traçar um polygono regular basta que se descreva uma circumferencia, que se a divida em tantas partes iguaes quantos forem os lados que se quizer dar ao polygono e que finalmente tirem-se rectas, AB, BC, CD, etc., (fig. 27) ligando dois a dois os pontos de divisão da circumferencia; ter-se-á assim construido o polygono regular que receberá o nome particular de *quadrado*, ou de *pentagono*, ou de *hexagono*, ou de *heptagono*, ou de *octogono*, ou de *ennеagono*, ou de *decagono*, etc., conforme tiver 4, ou 5, ou 6, ou 7, ou 8, ou 9, ou 10 etc., lados.

Medida da superficie de um polygono regular.

23.—Para ter a medida de um polygono regular, poder-se-ia empregar o processo que já estudámos (n. 15) para todas as figuras rectilineas; porém, percebe-se facilmente que o caminho mais curto consiste em dividir o polygono em triangulos iguaes, que tenham todos o centro C para vertice. Porque, tomando um destes triangulos, CBD por exemplo, e tirando sobre a base BD a perpendicular CK, que então toma o nome particular de *apothema* do polygono, como a área do triangulo é igual ao producto da base BD pela metade de CK, este producto, tomado tantas vezes quantas o polygono tem de lados, dará a área da figura inteira. *A área de um polygono regular*, portanto, é igual á somma de seus lados, isto é, a seu *perimetro* multiplicado pela metade de seu apothema, ou é *igual ao semi perimet o pelo apothema.*

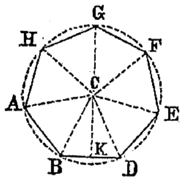

Fig. 28

Apothema é a perpendicular baixada do centro do polygono sobre um de seus lados

24.—Voltando á medida dos terrenos, mostremos que muitas vezes elles são taes que se recusam ás operações prescriptas pelos processos precedentes.

Supponhamos, por exemplo, que ABCDE seja a figura de um campo, de que se queira ter a medida. Segundo se sabe, seria preciso dividir ABCDE em triangulos taes como ABC, ACD, ADE; em seguida medir estes triangulos depois de ter baixado as perpendiculares EF, CH, BG; porém, supponhamos tambem que no interior do terreno ABCDE se ache algum obstaculo como a torre de

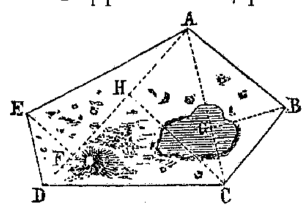

Fig. 29

uma igreja, um morro, um lago, etc., que impeça tirar as linhas de que se tem necessidade; que seria preciso então fazer? que outro caminho seria preciso então seguir para obviar o inconveniente apresentado pelo terreno? O que primeiro se apresenta ao espirito é escolher algum terreno chato, liso, plano, desimpedido, sobre o qual se possa operar livremente e de descrever sobre este terreno triangulos iguaes aos triangulos ABC, ACD, etc., e semelhantemente dispostos. Vejamos como se conseguirá formar os novos triangulos.

Construir um triangulo, dados os tres lados.

25.—Comecemos por suppor que o obstaculo se acha no interior do triangulo ABC, cujos lados são conhecidos, e que se queira traçar sobre o terreno escolhido um triangulo igual e semelhantemente collocado; traçar-se-á primeiro uma recta DE igual ao lado AB; depois tomando um cordel do comprimento de BC e fixando uma de suas extremidades em E, se descreverá o arco LFG, que terá a corda para raio; e por meio de um outro cordel, igual a AC, e de que tambem se fixará

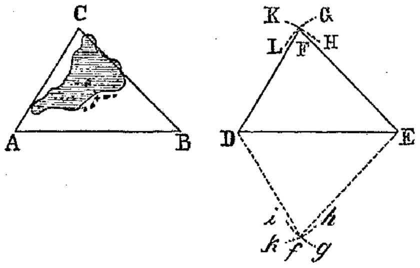

Fig. 30

uma extremidade em D, se traçará o arco KFH, que cortará o primeiro no ponto F; então, tirando as rectas DF e FE, ter-se-á um triangulo DEF igual ao proposto ABC e semelhantemente collocado; o que é evidente: porque os lados DF e EF, que se uniram ao ponto F, sendo respectivamente iguaes aos lados AC e BC, e a base DE tendo sido tomada igual a AB, não seria possivel que a posição das linhas DF e EF sobre DE fosse differente da posição das linhas AC e BC sobre AB. Verdade é que se poderia tomar as linhas D*f* e E*f* abaixo de DE; o triangulo seria ainda o mesmo, porém invertido.

Dois triangulos são iguaes quando têm os tres lados respectivamente iguaes.

26.—Si não se pudesse medir senão dois dos

tres lados do triangulo ABC, (fig. 31) os dois lados AB e BC por exemplo, é claro que com isto só não se poderia determinar um segundo triangulo igual a ABC; porque, ainda que se tomasse DE igual a BC e DF igual a BA, não se poderia dar uma posição determinada a DF em relação a DE. Para vencer esta difficuldade o recurso que se apresenta é simples: faz-se DF inclinar-se sobre DE tanto quanto AB se inclina

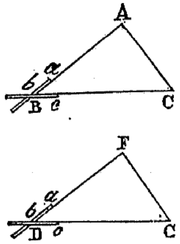

Fig. 31

sobre BC; ou, para falar a linguagem dos geometras, dá-se ao *angulo* FDE a mesma abertura do *angulo* ABC.

Angulo é a inclinação de uma linha sobre outra.

27.—Para executar esta operação, toma-se um instrumento tal como *abc*, (fig. 31) composto de duas regoas que possam girar em torno de *b* e collocam-se estas regoas sobre os lados AB e BC. Pondo pois a regoa *bc* sobre a base DE de modo que o centro *b* corresponda ao ponto D e que a abertura do instrumento fique sempre a mesma, a regoa *ab* dará a posição da linha DF que fará, com a linha DE, o angulo FDE igual ao angulo ABC.

Maneira de fazer um angulo igual a outro.

Tomando então DF com o mesmo comprimento de BA, nada mais faltará que tirar por F e por E a recta FE para ter o triangulo FED inteiramente igual ao triangulo ABC. Pratica simples, que suppõe este principio evidente, que um triangulo é determinado pelo comprimento de dois de seus lados e pela inclinação destes lados; ou, que é a mesma cousa, que um triangulo é igual a um outro, quando dois dos seus lados são respectivamente iguaes e o angulo comprehendido entre estes lados é igualmente aberto nos dois triangulos.

Dois triangulos são iguaes quando têm dois lados iguaes cada um a cada um e igual o angulo por elles formado.

28.—Poder-se-ia ainda fazer o angulo FDE igual ao angulo ABC (fig. 32) da maneira seguinte:

Maneira mais exacta de fazer um angulo igual a outro.

Do centro B e com um intervallo qualquer B*a* descreva-se um arco *abc*, depois do centro D e com o mesmo intervallo trace-se o arco *eif*; nestas condições não teremos mais que procurar um ponto *f* que esteja collocado sobre o arco *eif* da mesma maneira que *a* se acha collocado sobre o arco *cba*. Ora, acharemos facilmente este ponto *f* servindo-nos da recta *ac* que une os extremos do arco *ahc* e tem o nome de *corda* desse arco. E isto porque si do centro *e* e com um intervallo igual a *ac* descrevermos o arco *lfk*, a intersecção dos dois arcos *eif*, *lfk* nos dará o ponto procurado *f*. Tirando então por D e por *f* a recta D*f*F, teremos o angulo FDE igual ao angulo ABC. O que é evidente (n. 25) pois que os triangulos B*ac*, D*fe* serão inteiramente iguaes em todas as suas partes.

Corda de um arco é a recta que une os extremos desse arco.

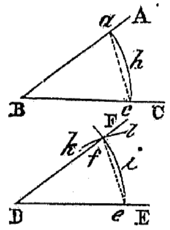

Fig. 32

29.—Quando se quer fazer o triangulo FDE igual ao triangulo ABC (fig. 31) acontece muitas vezes que não se póde medir senão um lado, BC por exemplo: no ponto A existe uma casa, supponhamos. Recorre-se então aos angulos ABC e ACB. Fazendo DE igual a BC, traçam-se as rectas FD e FE de modo que façam com DE os mesmos angulos que AB e AC fazem com BC: então, pelo encontro destas rectas, tem-se o triangulo FDE igual ao triangulo ABC. O principio em que se baseia esta operação é por si tão simples que não precisa ser demonstrado.

Dois triangulos são iguaes quando têm um lado igual adjacente a angulos iguaes, cada um a cada um.

30.—Si dos tres lados do triangulo ABC não se pudesse medir senão a base BC e si se reconhecesse ser o triangulo *isosceles*, isto é, serem os dois lados AB e AC iguaes, é evidente que bastaria medir um dos dois angulos ABC, ACB; porque então o outro seria igual ao primeiro. Com effeito, suppondo a principio os dois lados AB, AC do triangulo ABC rebatidos respectivamente sobre BD e sobre CE, prolongamentos da base BC, e depois levantados para serem reunidos pelas extremidades no ponto A, a igualdade desses dois lados os impederia de percorrer á direita um caminho maior que o percorrido á esquerda; pois sendo reunidos em A elles se inclinariam igualmente sobre a base BC, e o angulo ABC seria igual ao angulo ACB.

Triangulo isosceles é o que tem dois lados iguaes.

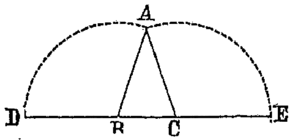

Fig. 33

Em todo o triangulo isosceles os angulos da base são iguaes.

31.—Voltando á medida dos terrenos, vê-se que, quaesquer que sejam os obstaculos que se encontrem no interior, será facil, pela marcha precedente, transportar para um terreno, que se possa percorrer livremente, todos os triangulos que dividirem a superficie que se procura medir.

Supponhamos, por exemplo, que se quizesse medir um bosque, cuja figura fosse ABCDEFG. Primeiramente construiriamos um triangulo igual a ABC, o que poderiamos fazer sem entrar no interior do triangulo, medindo os dois lados AB, BC e o angulo CBA por elles formado. Este triangulo construido daria o angulo BCA e o comprimento de AC, e como nada nos impede de medir o comprimento de CD teriamos do triangulo CAD os lados CD e CA. Quanto ao angulo DCA achariamos tomando primeiro o angulo IKL igual ao angulo DCB, depois o angulo LKO igual ao angulo BCA, o que daria o angulo restante IKO igual ao procurado DCA.

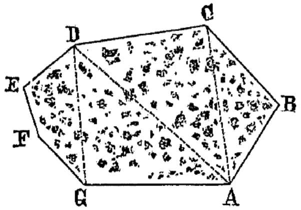

Fig. 34

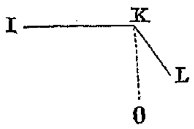

Fig. 35

O triangulo ADC, assim determinado pelos dois lados DC e CA e pelo angulo por elles comprehendido DCA, dar-nos-ia semelhantemente elementos para determinar o triangulo immediato ADG e assim por diante.

32.—A marcha que acabámos de seguir para medir terrenos, nos quaes não se podem traçar linhas, encontra muitas vezes na pratica sérias difficuldades a vencer. E' assim que raramente se encontra um terreno raso, liso, plano, sobre o qual se possa operar livremente, e assaz grande para sobre elle construir triangulos iguaes aos do terreno de que se procura a medida, isto é, a área. E mesmo no caso de se encontrar um terreno plano, sufficientemente extenso para tal fim, o grande comprimento dos lados dos triangulos poderia tornar as operações bastante difficeis: abaixar, por exemplo, uma perpendicular sobre uma recta de um ponto afastado de uns 1,000 metros seria um trabalho extrema-mente penoso, senão impraticavel. Importa, pois, ter um meio que suppra essas grandes operações e difficuldades.

Este meio apresenta-se naturalmente ; vem logo ao espirito representar a figura a medir ABCDE por uma figura *semelhante*, *abcde*, porém menor, na qual,

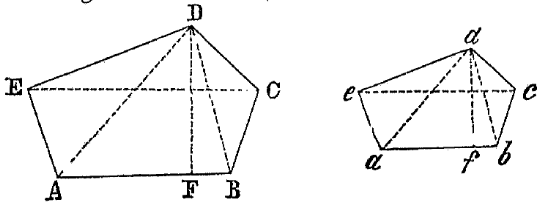

Fig. 36

por exemplo, o lado *ab* seja de 100 centimetros, si o lado AB fôr de 100 metros ; o lado *bc* de 45 centimetros, si BC fôr de 45 metros, etc., e concluir depois que si a extensão da figura reduzida *abcde* é por exemplo de 60 mil centimetros quadrados, a da figura ABCDE deve ser de 60 mil metros quadrados.

Antes de tudo, porém, é preciso saber em que consiste a semelhança geometrica de duas figuras.

33.—Ora, por pouco que sobre isto se reflicta, se reconhecerá immediatamente que as duas figuras ABCDE, *abcde* para serem semelhantes, devem ser taes que os angulos A,B,C,.... da grande sejam respectivamente iguaes aos angulos *a*,*b*,*c*,.... da pequena, e que demais os lados *ab*, *bc*, *cd*,.... da menor contenham tantas unidades de comprimento (centimetros, por exemplo) quantas unidades maiores (metros, por exemplo) os lados AB, BC, CD,... da grande contiverem.

Em que consiste a semelhança de duas figuras.

34.—Para exprimir esta segunda condição, os geometras dizem que é preciso que os lados AB, BC, CD, etc., sejam *proporcionaes* aos lados *ab*, *bc*,*cd*, etc ; ou que o lado AB contenha *ab*, da mesma maneira que BC contem *bc*, etc. ; ou que o lado AB seja tão grande em relação a *ab*, quanto BC o é em relação a *bc*, etc. ; ou ainda que haja a me ma razão ou a mesma relação entre AB e *ab*, que entre BC e *bc*,etc.; ou emfim que AB esteja para *ab* assim como BC está para *bc*, etc. Estas são maneiras diversas de exprimir a mesma cousa, com as quaes, porém, preci-

samos nos familiarisar para entendermos a linguagem dos geometras.

35.—Depois de termos visto em que consiste a semelhança de duas figuras, vejamos a marcha que mais naturalmente deverá se apresentar ao nosso espirito para traçar uma figura semelhante á outra.

Construir um triangulo semelhante a outro.

Tomemos primeiramente o caso mais simples : construir um triangulo semelhante ao triangulo ABC.

Para que o triangulo pedido seja semelhante ao dado é preciso : 1°, que tenha os angulos respectivamente iguaes a BAC, ACB, CBA. Tomemos uma

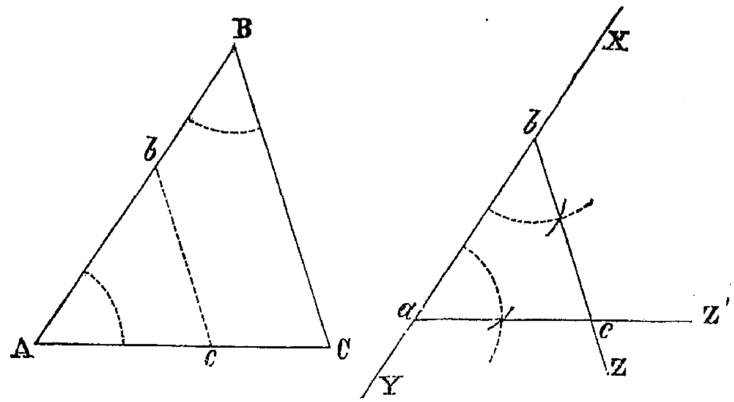

Fig. 37

recta XY ; por um ponto qualquer *b* façamos passar uma outra recta *b*Z que faça com *b*Y um angulo Z*b*Y igual ao angulo CBA do triangulo ; por um outro ponto de XY, *a* por exemplo, façamos passar uma outra recta *a*Z' que faça com *ab* um angulo *ba*Z' igual ao angulo BAC do triangulo. As duas rectas *b*Z e *a*Z', que em relação a *ab* se inclinam desigualmente e em sentidos oppostos, necessariamente se encontrarão em um ponto *c*, ficando assim formado um triangulo, apenas com os angulos *cba* e *bac* respectivamente iguaes aos angulos CBA e BAC do triangulo proposto.

Serão semelhantes estes dois triangulos? Sim, si o terceiro angulo *acb* do primeiro fôr igual ao terceiro angulo *ACB* do segundo, e si os lados forem proporcionaes (ns. 33 e 34).

Para certificarmo-nos da igualdade dos terceiros angulos colloquemos o triangulo *abc* sobre o triangulo dado ABC de modo que o vertice *a* coincida com A e que o lado *ac* caia na direcção de AC em A*c*; o lado *ab* cairá sobre AB em A*b* por serem iguaes os angulos *cab* e CAB, e o terceiro lado *bc* deverá forçosamente tomar a posição *bc* parallela a BC; parallela, porque, sendo iguaes os angulos *abc* ou *Abc* e ABC, as rectas *bc* e BC devem se inclinar igualmente sobre AB.

Mas, si *bc* e BC são parallelas, devem tambem ter a mesma inclinação sobre AC, isto é, formarem com AC angulos iguaes, ou por outra, ser o angulo Acb, que é a reproducção do angulo *acb*, igual ao angulo ACB, como queriamos provar.

Dois angulos de um triangulo sendo iguaes a dois angulos de outro triangulo, os terceiros tambem serão.

36 —Estamos agora em presença de dois triangulos equiangulos; provaremos que os lados são proporcionaes, isto é, que a primeira condição de semelhança (igualdade dos angulos) arrasta a segunda (proporcionalidade dos lados).

Para fixar as idéas supponhamos que entre os lados *ab* e AB dos triangulos *abc*, ABC (fig. 37) haja uma relação determinada: que *ab* seja os $^3/_5$ de AB, ou que a relação $\frac{ab}{AB}$ seja igual a $^3/_5$; precisamos provar que *ac* é tambem os $^3/_5$ de AC, bem como *bc* os $^3/_5$ de BC.

Primeiramente levemos o triangulo *abc* (fig. 37) á posição de A*bc*, e o que dissermos em relação aos lados e angulos do triangulo A*bc* terá evidentemente inteira applicação ao triangulo *abc* que lhe é igual.

Si A*b* é os $^3/_5$ de AB quer isto dizer que A*b* contem uma certa unidade tres vezes e AB contém a mesma unidade cinco vezes; tiremos, pois, pelos pontos de divisão *m*, *n*, *p* (fig. 38) as parallelas *mr*. *ns* e *pt* a *BC*; e pelos pontos *m*, *n*, *b*, *p* tiremos parallelas a AC.

Ficarão assim formados os triangulos A*mr*, *mnd*, *nbe*, *bpf* *p*B*g* todos iguaes entre si por terem um lado igual, A*m*= *mn*= *nb*= *bp*=*p*B, adjacente a dois angulos iguaes, *m*A*r*=*dmn* e A*mr*=*mnd*, *dmn* = *enb* e *mnd* = *nbe*, etc. Donde se conclue serem os lados A*r*, *md* ou *rs*, *ne* ou *sc*, *bf* ou *ct* e *pg* ou *t*C iguaes entre si, isto é, ficar A*c* dividida em tres partes iguaes entre si e AC em cinco partes tambem iguaes entre si ou, em outros termos, d'onde se conclue ser A*c* os $^3/_5$ de AC.

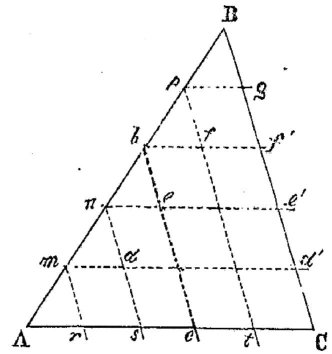

Fig. 38

Semelhantemente se conclue, da comparação dos cinco triangulos formados ao longo de AB, serem os lados *mr* ou seu igual *d'C*, *nd* ou *c'd'*. *be* ou *f'e' pf* ou *gf'* e B*g* iguaes entre si, isto é, ficar *bc* dividida em tres partes iguaes e BC em cinco, ou ser *bc* os $^3/_5$ de BC.

Dois triangulos, que têm dois angulos respectivamente iguaes, são semelhantes; ou dois triangulos equiangulos têm lados proporcionaes (1).

37.—Da proposição que acabámos de demonstrar tira-se naturalmente a solução de um problema muitas vezes util na pratica: ***dividir uma recta em partes iguaes***. Esta questão poderia ser resolvida por tentativas, porém, nunca com tanta segurança quanta nos fornece a exactidão geometrica.

Seja, por exemplo, a recta AB a dividir em 7 partes iguaes. Tire-se uma recta indefinida AX que faça um angulo qualquer XAB com a recta dada. Sobre AX tomem-se successivamente sete partes iguaes com uma abertura de compasso tomada á vontade. Una-se o extremo da setima parte ao ponto B, e pelas outras divisões

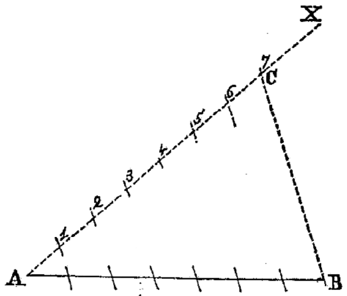

Fig. 39

(1) Foi esta a primeira relação abstracta ou a primeira lei, que instituida por THALES, o mais illustre dos sete sabios da Grecia, deu á Geometria o caracter de sciencia.

de AX tirem-se parallelas á CB: estas parallelas dividirão AB em sete partes iguaes.

38.—Si se quizesse dividir uma recta em duas partes, taes que uma fosse uma fracção determinada da recta inteira, ou, por outra, si se quizesse dividir a recta AB de maneira que a parte A*p* estivesse para a recta inteira AB assim como a recta MN (de 3 centimetros, por exemplo) está para a recta PQ (de 5 centimetros), a solução deste problema ainda se acharia contida no que dissemos na ultima parte do n. 36. Seria preciso traçar a recta AX fazendo com AB um angulo qualquer, tomar sobre AX duas partes *Am* e *An* respectivamente iguaes a MN e a PQ, e em seguida tirar *mp* parallela a *n*B. Ter-se-ia então *Am* ou MN para A*p* assim como *An* ou PQ para AB, isto é, ter-se-ia: $Ap = {}^3/_5$ de AB.

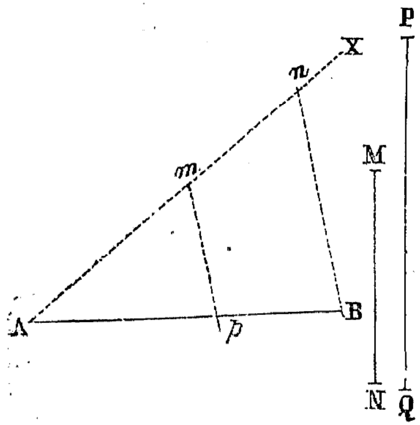

Fig. 40

Os geometras enunciam desta outra maneira o problema que acabámos de resolver: *achar uma quarta proporcional (Ap) a tres rectas dadas* (AB, MN, PQ).

39.—E' evidente que dois triangulos semelhantes ABC, abc, terão não só seus lados proporcionaes, como tambem as perpendiculares CF, cf, que abaixarmos dos vertices C e *c* sobre as bases AB, *ab*, estarão entre si como os lados; o que é facil de ver comparando os triangulos ACF, acf que tambem são semelhantes por terem os angulos caf, CAF e cfa, CFA respectivamente iguaes (n. 35 e 36).

As alturas dos triangulos semelhantes estão entre si como seus lados

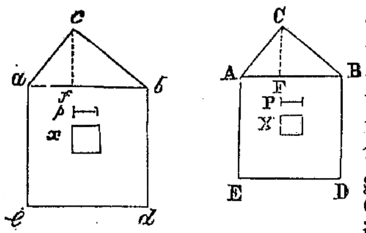

Fig. 41

40.—Quanto ás áreas dos dois triangulos ABC, *abc* vê-se que a do primeiro deverá conter tantos quadrados X feitos sobre a unidade de comprimento P quantos forem os quadrados *x* feitos sobre a unidade *p* contidos no segundo *abc*. Com effeito CF e AB terão tantas partes P quantas forem as partes *p* contidas em *cf* e *ab*; portanto, a metade do producto de CF por AB, área do triangulo ABC, dará o mesmo numero que o resultante da metade do producto de *cf* por *ab*, área de *abc*; com esta differença, porém, que CF e AB contendo partes iguaes a P, seu producto conterá quadrados iguaes a X, e que *cf* e *ab*, contendo partes iguaes a *p*, darão um producto que se contará por quadrados iguaes a *x*.

41.—O que acabámos de dizer sobre as áreas dos triangulos semelhantes serve de prova a uma proposição que ordinariamente é assim enunciada pelos geometras: *as áreas dos triangulos semelhantes são proporcionaes aos quadrados dos lados homologos*; comprehendendo-se por *lados homologos* os que, em triangulos semelhantes, se oppõem a angulos respectivamente iguaes.

O raciocinio feito no numero antecedente leva-nos á esta consequencia, porque o quadrado do numero que mede o lado AB ou o quadrado ABDE construido sobre o lado AB contendo tantas unidades ou tantos quadrados X quantos são os quadrados *x* contidos em *abde*, é evidente que os dois numeros de quadrados X que exprimem a relação do triangulo ABC para o quadrado ABDE, são os mesmos que os numeros de quadrados *x* que dão a relação do triangulo *abc* para o quadrado *abde*; ou, por outra, que o triangulo ABC está para o quadrado ABDE assim como o triangulo *abc* está para o quadrado *abde*.

D'ahi se segue que si, por exemplo, o lado AB fosse duplo do lado *ab*, o triangulo ABC seria quadruplo do triangulo *abc*; si AB fosse triplo de *ab*, o triangulo ABC seria nove vezes maior que o triangulo *abc*; etc.

Com effeito, AB não póde ser duplo de *ab* sem que o quadrado ABDE seja quadruplo de *abde*, ou por outros termos, sendo a relação dos lados homologos *ab* e *AB* de $^1/_2$, a relação das áreas dos dois triangulos *abc* e *ABC* será de $^1/_4$. Si a relação dos lados homologos fosse de $^3/_5$, a relação das áreas seria de $^9/_{25}$, isto é, o triangulo menor seria $^9/_{25}$ do maior.

42.—Para passar presentemente dos triangulos ás outras figuras rectilineas, polygonos, supponhamos que a cada um dos triangulos semelhantes ABD, abd, (fig. 36) se juntam dois outros triangulos ADE e BDC, *ade* e *bdc*, semelhantes dois a dois, ver-se-á que nas figuras totaes ou nos polygonos ABCDE, *abcde*:

Os polygonos semelhantes se decompõem em triangulos semelhantes dois a dois.

1.° Os angulos A,B,C,D,E são os mesmos que os angulos *a,b,c,d,e*; o que é claro, pois que uns e outros são, ou angulos correspondentes (homologos) de triangulos semelhantes, ou angulos compostos destes angulos correspondentes.

2.° Que a relação dos lados homologos ou correspondentes DE, *de*, BC, *bc*, etc., dos polygonos ABCDE, *abcde* é necessariamente a mesma, isto é, que, si a unidade P, por exemplo, contem-se um certo numero de vezes na base AB e uma outra unidade *p* contem-se o mesmo numero de vezes em *ab*, ou melhor, si a base AB contem 5 metros e a base *ab* contém 5 decimetros, P (o metro) e *p* (o decimetro) serão tambem contidos um mesmo numero de vezes em dois lados homologos quaesquer DE e *de*; porque, em virtude da semelhança dos triangulos ABD, *abd* o numero de metros contido em AD deve ser igual ao numero de decimetros contido em *ad*; então considerando estes lados como as bases dos triangulos semelhantes ADE, *ade*, o numero de metros contido em DE será o mesmo que o numero de decimetros contido em *de*;

Dois polygonos semelhantes têm angulos iguaes e lados proporcionaes.

3.° Ver-se-á ainda que si nos dois polygonos tirarmos linhas que se correspondam, ou *linhas homologas*, taes como CE, *ce*, ou as perpendiculares DF, *df*, etc., estas linhas estarão sempre entre si na mesma relação que os lados homologos das duas figuras.

Em polygonos semelhantes a relação de dois lados homologos é a mesma que a de duas linhas homologas quaesquer.

Pois as figuras ABCDE, *abcde* serão inteiramente semelhantes em todas as suas partes.

43.—A relação constante que guardam entre si os lados homologos chama-se *relação de semelhança* ou a *escala* segundo a qual se construiu a segunda figura semelhante á primeira.

Noção de escala.

E' assim que, sendo o lado de uma figura de 42,^{m}5 e o lado homologo da figura semelhante de 0,^{m}17 a relação de semelhança das duas figuras ou a escala segundo a qual se construiu a segunda será de 0,^{m}17 para 42,^{m}5 ou de 17 centimetros para 4250 centimetros, isto é, 4250 unidades lineares do original ficarão na copia, na figura semelhante, reduzidas a 17. A relação, porém, de 17 para 4250, que se pode escrever sob a fórma de fracção ordinaria $\frac{17}{4250}$, simplificada, dá $\frac{1}{250}$; o que semelhantemente significa que uma extensão linear tomada sobre a figura construida é uma quantidade 250 vezes menor que a extensão correspondente ou homologa da original: um millimetro, por exemplo, corresponde a 250 millimetros; e portanto 4 millimetros corresponderão a 4 vezes 250 millimetros ou a 1000 millimetros ou a 1 metro. E si 4 millimetros da figura construida correspondem a 1 metro do terreno ou do original, que lhe é semelhante, 40 millimetros ou 4 centimetros corresponderão a 10 metros; 400 millimetros ou 4 decimetros corresponderão a 100 metros e assim por diante.

Tudo o que dissemos sobre as figuras semelhantes pode-se reduzir a um só e unico principio:— *as figuras semelhantes apenas se differençam pelas escalas segundo as quaes são construidas.*

44.—Agora é facil de perceber que, tendo se de medir um terreno sobre o qual a natureza ou a mão do homem tenha levantado obstaculos á nossa franca passagem para medirmos linhas que se acham no seu interior e que são necessarias á avaliação da área desejada; que, não havendo, proximo do terreno considerado, um outro inteiramente liso, plano, desempedido, para nelle construirmos uma figura perfeitamente igual á do terreno em questão, dispomos de recurso infallivel para vencer todos estes obstaculos, construindo uma figura semelhante áquella de que se deseja avaliar a área. Para isso, como sabemos, é preciso apenas medir os angulos que os lados da figura fazem entre si e medir os comprimentos destes lados; depois traçar no papel angulos iguaes áquelles, tendo para lados comprimentos submultiplos dos primeiros.

Ora, a marcha que seguimos nos ns. 27 e 28 para *construir um angulo igual a outro* não nos dá meio algum de obter a grandeza real de um angulo, a sua verdadeira medida; além disso, querendo-se comparar dois angulos, o unico recurso disponivel é sobrepor um ao outro para ver si são perfeitamente iguaes ou qual delles é o maior, sem entretanto podermos neste caso dizer de quanto um é maior do que o outro, isto é, acharmos a verdadeira relação numerica entre elles.

45.—Foi pois necessario procurar uma medida fixa para os angulos, como já se tinha feito para os comprimentos e para as superficies. E facil foi achar esta medida; porque, imaginando o instrumento formado de duas reguas reunidas em um ponto A de que nos utilisámos no numero 27, suppondo A*b* fixo e A*c* a principio coincidindo com A*b*, para depois fazer A*c* girar em torno de A, é claro que si se adapta á extremidade *c* da regua movel um lapis ou outro qualquer instrumento que torne sensivel o traço do ponto *c*, este traço, que formará um arco de circumferencia, dará exactamente a medida do angulo para cada abertura particular dos lados A*b*, A*c*; isto é, por causa da uniformidade da curvatura do arco de circumferencia, acontecerá necessariamente que a uma abertura dupla, tripla, quadrupla, etc., do angulo *c*A*b* corresponderá um arco duplo, triplo, quadruplo, etc., de *cb*.

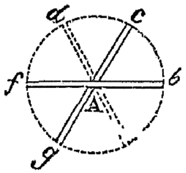

Fig. 42

A medida natural de um angulo é o arco interceptado pelos seus lados.

46.—Supponde pois que a circumferencia *bcdfg* descripta pela revolução completa do ponto *c*, seja dividida em um numero qualquer de partes iguaes, o numero de partes contidas no arco interceptado pelos lados A*c* e A*b* medirá exactamente a inclinação destas linhas ou o angulo *c*A*b* por ellas formado.

Os geometras têm convencionado dividir a circumferencia em 360 partes chamadas *gráos*, cada gráo em 60 minutos, cada minuto em 60 segundos, etc. Assim um angulo *c*A*b*, por exemplo, terá 70 gráos e 20 minutos si o arco *bc* que o mede tiver

Toda a circumferencia divide-se em 360 gráos; cada gráo em 60 minutos; etc.

70 das 360 partes da circumferencia e mais 20 sexagesimas partes de um gráo.

47.—D'ahi se segue que um angulo CAB de 90 gráos, chamado commummente *angulo recto*, é aquelle cujos lados AC e AB interceptam o quarto BC da circumferencia e são perpendiculares um ao outro.

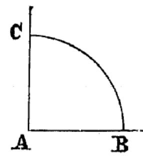

Fig. 43

Chama-se *angulo agudo* todo o angulo menor que um angulo recto, ou que tem menos de 90 gráos. Taes são os angulos CAB, FAG, EAG.

Ao contrario chama-se *angulo obtuso* todo o angulo maior que um angulo recto, ou que tem mais de 90 gráos, como FAB.

48.—E' evidente que a somma dos angulos, taes como GAF, FAE, EAC, CAB, que se podem formar em torno de um ponto e do mesmo lado de uma recta GB, é igual a 180 gráos ou tem dois angulos rectos medidos pela semi-circumferencia. O que é facil de verificar imaginando uma perpendicular a GB levantada pelo ponto A.

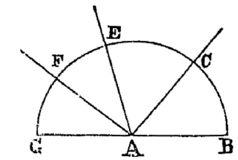

Fig. 44

A somma dos angulos formados em torno de um ponto e do mesmo lado de uma recta é igual a dois rectos.

49.—Do mesmo modo, a somma dos angulos, taes como EAF, FAB, BAC, CAD, DAE, que se podem formar em torno de um ponto que lhes serve de vertice commum, é igual a 360 gráos ou a quatro angulos rectos medidos pela circumferencia inteira BCDEF. O que é facil de verificar imaginando duas perpendiculares cruzando-se no ponto A.

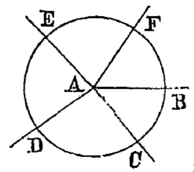

Fig. 45

A somma dos angulos formados em torno de um ponto é igual a quatro rectos.

50.—Depois de termos visto que *um angulo tem por medida o arco interceptado pelos seus lados* ou um certo numero de partes da circumferencia, vejamos como se poderá determinar o numero de gráos e de partes do gráo contidos em um angulo formado no terreno por duas direcções rectilinaes.

D'entre varios instrumentos destinados a este fim o *semi-circulo* ou *graphometro* é o mais simples e de mais facil emprego. E' composto de duas reguas EAC, DAB, de igual comprimento, que se cruzam em A e em cujas extremidades se acham duas *pinnulas* ou peças metallicas rectangulares apresentando duas aberturas, uma das quaes é uma simples fenda e a outra mais larga é atravessada na sua altura por um fio muito fino de seda ou de metal, collocado, por assim dizer, no prolongamento da fenda. Nas duas pinnulas oppostas E e C ou D e B a fenda de uma corresponde á abertura maior da outra e vice-versa. Uma das reguas EC, que se chama *alidade*, é movel em torno de A, e outra BD é fixa e serve de diametro a um semi-circulo BCD dividido em 180 gráos, minutos, etc.

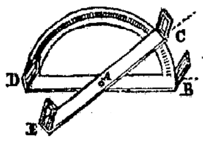

Fig. 46

Supponhamos agora que se queira medir o angulo que fazem duas linhas rectas tiradas do lugar em que nos achamos a dois objectos quaesquer F e G. Colloca-se primeiro a regua fixa DAB de maneira que o olho collocado em D aviste um dos dois objectos F pelas duas pinnulas D e B; depois, sem mover o instrumento, faça-se apenas a alidade girar até que o olho collocado em E aviste o outro objecto G pelas pinnulas E e C. A extremidade C da alidade marcará então sobre o bordo do semi-circulo graduado o numero de gráos, minutos, etc., que contem o angulo proposto GAF.

Uso do instrumento para tomar a grandeza de um angulo no terreno.

51.—Querendo-se transportar para o papel o angulo medido no terreno pelo semi-circulo, ou querendo-se fazer no papel um angulo de um numero determinado de gráos, recorre-se a um outro instrumento K, tendo tambem a fórma de um semi-circulo, dividido em 180 gráos, que se chama *transferidor*, e pondo o centro A sobre o vertice do angulo que se quer traçar e a linha AB sobre a linha AG que se toma para um dos lados do angulo, marca-se o ponto C, que corresponde ao numero de gráos que se quer dar ao angulo proposto; depois por este ponto C e pelo centro A tirando a recta

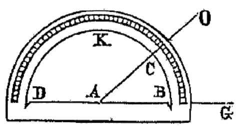

Fig. 47

Uso do transferidor para fazer um angulo de um numero determinado de gráos no papel.

ACO tem-se o angulo OAG, que contem o numero de gráos pedido.

52.—Supponhamos agora que se queira medir a distancia de um ponto A a outro ponto inaccessivel C; o que terá lugar, querendo medir, por exemplo, a largura de um rio, que não se póde atravessar. A partir do ponto A meça-se sobre o terreno uma base qualquer AB e seja de 40^m o comprimento da recta AB tomada arbitrariamente. Do

Distancia de um ponto a outro inaccessivel.

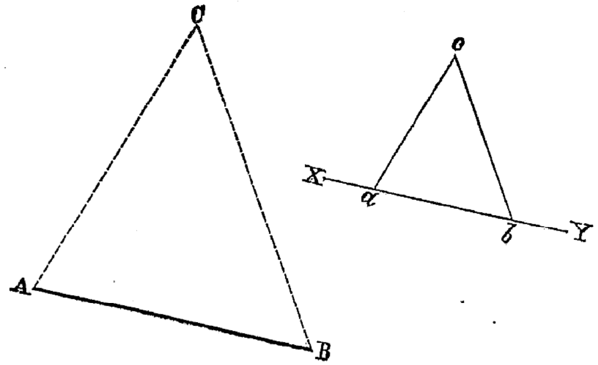

Fig. 48

ponto A visando pelas pinnulas do semi-circulo (n. 50) o ponto inaccessivel C, meça-se o angulo CAB e supponhamos que tenha 72°. Do ponto B visando o mesmo ponto C supponhamos que o angulo CBA tenha 58°. Com estes elementos construa-se agora sobre o papel um triangulo *abc* semelhante ao triangulo do terreno, ABC. Para isso, sobre uma recta XY tome-se um comprimento *ab* submultiplo de AB, 40 millimetros por exemplo; com o transferidor faça-se por *a* passar uma recta que se incline de 72° sobre *ab*, e por *b* uma outra que se incline de 58° sobre *ab*. Estas duas rectas se interceptarão no ponto C e a distancia *ac*, homologa de AC, póde facilmente ser medida com uma regua graduada, o que dá, para *ac*, 45 millimetros e portanto, para AC, 45 metros.

53.—Como na pratica é de alta importancia que os angulos sejam medidos com toda a exactidão, não basta medil-os, mesmo com os instrumentos mais perfeitos; é preciso ainda achar o meio de verificar estas medidas, para fazer a correcção que fôr necessaria.

Ora este meio é simples e facil. Consideremos o triangulo ABC (fig. 48). Sente-se que a grandeza do angulo C deve resultar da dos angulos A e B; porque si augmentasse ou diminuisse um destes angulos ou ambos, a posição das rectas CA e BC mudaria, e por conseguinte variaria o angulo C que estas rectas fazem entre si. Ora, si este angulo depende da grandeza dos angulos A e B, deve-se presumir que o numero de gráos dos angulos A e B determina o numero de gráos do angulo C, e que assim poderá servir de verificação ás operações feitas para determinar os angulos A e B, pois que teremos certeza de termos medido com exactidão estes angulos, si medindo depois o angulo C, acharmos o numero de gráos que lhe convém relativamente á grandeza dos angulos A e B.

Para achar como da grandeza dos angulos A e B se póde concluir a do angulo C, examinemos o que aconteceria a este angulo si os lados AC, BC viessem a se approximar ou a se afastar um do outro.

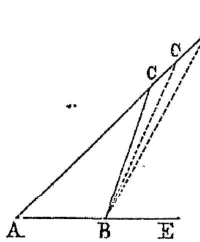

Fig. 49

Supponhamos, por exemplo, que BC, girando em torno do ponto B, se afaste de AB para se approximar de BE; é claro que emquanto BC girar, o angulo B se abrirá ou augmentará continuamente, e que ao contrario o angulo C diminuirá cada vez mais. Esta variação dos angulos B e C faz presumir que o augmento de B é compensado pela diminuição de C e que, sendo assim, a somma dos tres angulos A, B, C deve ser a mesma, qualquer que seja a inclinação dos lados AC e BC sobre a recta AE.

54.—Esta verdade apenas presentida por intuição póde ser demonstrada e completada. Tire-se ID parallela a AC; ver-se-á primeiramente que

os angulos ACB e CBD, chamados *alternos*, são iguaes,

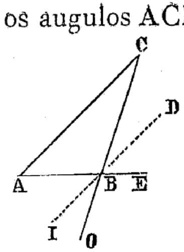

Fig. 50

o que é evidente, pois que as linhas AC e IB sendo parallelas, são igualmente inclinadas sobre CBO e assim o angulo IBO é igual ao angulo ACB; porém, o angulo IBO é tambem igual angulo CBD porque a linha ID não póde se inclinar sobre CO mais de um lado do que do outro. Pois o angulo DBC, igual ao angulo IBO, é igual ao angulo ACB, seu alterno.

55.—Ver-se-á, em segundo lugar, que o angulo CAE é igual ao angulo DBE por causa das parallelas CA e DB. Pois os tres angulos do triangulo podem ser postos ao lado um dos outros, e reunidos em um vertice commum B, isto é, em torno de um ponto B e do mesmo lado de uma recta AE, e então se reconhece que a somma dos tres angulos A, B e C, do triangulo é igual á somma dos tres angulos ABC, CBD, DBE, que por sua vez é igual a dois angulos rectos (n. 48). E como o que acabámos de dizer póde igualmente applicar-se a qualquer triangulo, concluiremos a certeza desta propriedade geral, que a *somma dos tres angulos de um triangulo é constantemente a mesma e sempre igual a dois angulos rectos, isto é, a 180 graus.* (1)

A somma dos angulos de um triangulo é igual a dois rectos.

56 — Para ter, portanto, o valor do terceiro angulo de um triangulo, quando dois tiverem sido medidos, será preciso subtrahir de 180 graus o numero de graus dos outros dois; assim, sendo o angulo A de um triangulo de 72° e o angulo B de 58, o angulo C deverá forçosamente ser de 180—(72 + 58), isto é, de 50°: propriedade esta que dá uma maneira bem commoda de verificar a medida dos angulos de um triangulo, e de que veremos muitas outras utilidades á medida que adiantarmos o nosso estudo. Por emquanto contentar-nos-emos com as consequencias seguintes, mais immediatas.

Sendo $A+B+C=180$ será, por exemplo: $A=180-(B+C)$

(1) Esta lei da constancia dos angulos de um triangulo, na variedade infinita de triangulos existentes, é conhecida por *theorema de Thales,* do nome de seu illustre instituidor.

57.—Um triangulo não póde ter mais de um angulo recto; e com mais forte razão não póde ter mais de um angulo obtuso.

Os angulos que em somma valem um recto chamam-se complementares.

58. Si um dos tres angulos de um triangulo é recto, isto é, si o triangulo considerado é *rectangulo*, a somma dos outros dois angulos é sempre igual a um recto.

O angulo externo a um triangulo é igual á somma dos internos não adjacentes.

59.—Si se prolonga um dos lados do triangulo ABC, (fig. 50) o lado AB por exemplo, o *angulo externo ao triangulo* CBE valerá os dois oppostos internos BCA, CAB que não ficam adjacentes ao externo; porque si ao angulo CBA se ajunta, ou os dois angulos BCA e CAB, ou o angulo CBE, a somma será sempre igual a 180 graus ou a dois angulos rectos (n. 55.)

Somma dos angulos internos de um polygono.

60.—Si a somma dos angulos de um triangulo qualquer é sempre igual a dois rectos, e se um polygono póde ser decomposto em tantos triangulos quantos são os lados menos dois, é facil concluir que a *somma dos angulos de um polygono qualquer é sempre igual a tantas vezes dois rectos quantos são os lados do polygono menos dois.*

Valor de um angulo de um polygono regular.

61.—Sendo o polygono regular, todos os angulos serão iguaes (n. 22), e conhecida pelo numero precedente a somma total dos angulos, para ter o valor de um delles basta evidentemente dividir esta somma pelo numero delles.

E' assim que facilmente sabe-se que um dos dois angulos de um triangulo equilatero (triangulo regular) vale 60 graus; porque a somma dos tres angulos valendo 180°, um delles valerá a terça parte, isto é, 60°.

Um dos angulos de um pentagono regular, por exemplo, vale $^6/_5$ de um recto, ou por outra, $^6/_5$ de 90 graus que são 108 graus. Com effeito, um pentagono decompõe-se em 5 menos 2 ou 3 triangulos cujos angulos valem em somma 3 vezes 2 rectos ou 6 rectos; sendo 5 o numero de angulos do pentagono, cada um delles valerá $^6/_5$ do angulo recto tomado por unidade, e $^6/_5$ de 90 graus dão 108 graus.

Em geral, sendo *n* o numero de lados ou o numero de angulos de um polygono qualquer, *n—2* será o numero de triangulos em que elle se decompõe, quando de um vertice tiram-se diagonaes para todos os outros não consecutivos ao primeiro. Valendo 2 *rectos* a somma dos angulos de cada triangulo, a somma dos angulos do polygono valerá *2 vezes n—2 angulos rectos*. Si, pois, representarmos por *S* esta somma, teremos a seguinte fórmula :

$$S = 2\,(n-2) \quad \text{ou} \quad S = 2n-4$$

para calcular *S*, quando for dado *n*.

A somma dos angulos internos de um polygono qualquer tambem poderia ser obtida tomando-se um ponto no interior do polygono e tirando-se desse ponto rectas para todos os vertices; o polygono ficaria assim decomposto em tantos triangulos quantos fossem os seus lados. Ora, a somma dos angulos de um triangulo sendo igual a dois rectos, teriamos ao todo tantas vezes dois rectos quantos fossem os lados, isto é, *2n rectos*; desta somma subtrahindo-se a somma dos angulos formados em torno do ponto tomado no interior do polygono, isto é, (n. 49) subtrahindo-se *4 rectos*, teriamos *2n - 4*.

Sendo o polygono regular, esta somma *S* ou *2n—4* dividida pelo numero *n* de angulos dará o valor de um delles. Si, pois, representarmos por A o valor de um dos angulos de um polygono regular de qualquer numero *n* de lados, teremos a seguinte fórmula

$$A = \frac{2n-4}{n}$$

para calcular A, quando fôr dado *n*.

Assim, por exemplo, para o heptagono regular,

$$A = \frac{(2\times 7)-4}{7} = \frac{10}{7} \ \text{de}\ 90° \ \text{ou}\ \ 128°...34'...17'',143$$

Construir um polygono regular, dado um de seus lados.

62.—Dahi se tira facilmente o modo de traçar um polygono regular de qualquer numero de lados, dada a grandeza de um desses lados. Calcula-se primeiramente o numero de graus de um de seus angulos e pelos extremos do lado dado fazem-se passar, usando do transferidor, duas rectas que façam com esse lado angulos iguaes ao calculado; tomam-se sobre essas rectas, a partir dos extremos da primeira, partes iguaes a esta, e assim por diante até fechar o polygono.

63.—Entretanto para traçar o hexagono regular póde-se seguir um caminho muito mais curto. Sabe-se (n. 22) que *a todo o polygono regular é sempre possivel circumscrever uma circumferencia*, que evidentemente fica dividida em tantas partes iguaes quantos são os lados do polygono; o lado do hexagono regular, portanto, deve ser a corda de um arco de 60 graus, sexta parte de 360 graus, valor da circumferencia inteira. Suppondo pois que AB seja esta corda e do centro I tirando os raios AI e IB, o angulo AIB valerá 60 graus, e, por serem iguaes os raios AI e IB, o triangulo AIB será isosceles. E sendo o angulo do vertice de 60 graus, os outros dois IAB e ABI valerão em somma 180 menos 60 graus ou 120 graus; mas, sendo iguaes estes dois angulos por ser isosceles o triangulo, cada um delles valerá a metade de 120 graus ou tambem 60 graus cada um. O triangulo AIB será, pois, equiangulo, e portanto equilatero, ou o lado AB do hexagono será igual ao raio AI ou IB da circumferencia circumscripta. Donde se segue que para descrever um hexagono, será preciso abrir o compasso de um intervallo igual ao raio e applical-o seis vezes consecutivas sobre a circumferencia; ter-se-á assim a circumferencia dividida em seis partes iguaes; unidos os pontos de divisão um a um ter-se-á o hexagono regular; unidos os pontos de divisão dois a dois ter-se-á o triangulo equilatero.

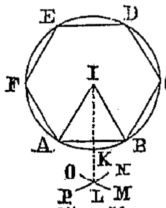

Fig. 51

O lado do hexagono regular é igual ao raio do circulo circumscripto.

Construir um hexagono regular, dado um de seus lados.

64.—Dahi se segue que, para construir um hexagono regular que tenha para lado uma recta dada, basta construir um triangulo equilatero, tal como AIB (fig. 51), sobre a recta dada; o vertice I opposto ao lado dado desse triangulo determinará o centro da circumferencia circumscripta ao hexagono

pedido, sobre a qual se applicará o comprimento AB, que é o lado dado, mais cinco vezes.

Construir um triangulo equilatero d. do um de seus lados.

65.—E para construir sobre uma recta dada um triangulo equilatero basta determinar um ponto tal como I (fig. 51) que diste tanto dos extremos A e B dessa recta quanto A dista de B. O que facilmente conseguir-se-á fazendo centro em A e com uma abertura de compasso igual a AB traçando um pequeno arco; depois fazendo centro em B e com a mesma abertura do compasso, isto é, com o mesmo raio, traçando um outro arco que cortará o primeiro no ponto procurado.

Traçado do dodecagono regular.

66.—Dividida a circumferencia em seis partes iguaes será facil dividil-a em doze, ou construir o dodecagono regular. Para isto se dividirá o arco AKB ou o angulo AIB em duas partes, e AK, corda da metade do arco AKB, será um dos lados do dodecagono.

Divisão de um angulo em duas partes iguaes.

67.—Ora, para dividir o arco AKB em duas partes iguaes AK e KB, se operará do mesmo modo que si se tratasse de dividir a corda AB em duas partes iguaes; isto é descrevendo dos pontos A e B como centros e com uma abertura qualquer do compasso os arcos MLO, NLP; depois tirando, pelo ponto L, intersecção dos dous arcos, e pelo centro I da circumferencia, a recta LI, que dividirá em partes iguaes não só a corda AB como o arco AKB.

Traçado dos polygonos regulares de 24, 48, 96, etc. lados.

68.—Seguindo-se o processo precedente e dividido o arco AK em dois iguaes entre si, a corda de um ou de outro destes arcos será o lado do polygono de 24 lados. Semelhantemente se poderão traçar os polygonos de 48, 96, 192, etc lados, e assim por diante sempre a dobrar.

Traçado do octogono regular.

69.—Agora para descrever um octogono, isto é, um polygono de oito lados, começar-se-á por traçar um quadrado no circulo; o que se conseguirá si, depois de ter tirado dois diametros perpendiculares AIB e CIE, que se cortarão em angulos rectos, liguem-se suas extremidades pelas cordas AC, CB, BE, AE.

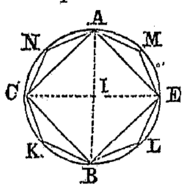

Fig. 52

Porque, attenta a regularidade do circulo e a igualdade dos quatro angulos que formam as perpendiculares AIB, CIE, os quatro lados AC, CB, BE, EA serão necessariamente iguaes e ficarão igualmente inclinados uns sobre os outros: o que não poderá convir senão ao quadrado.

Construido o quadrado se dividirá, pelo processo precedente, cada um dos arcos CKB, BLE, etc, em duas partes iguaes; o que dará o octogono regular CKBLEMAN.

Traçado dos polygonos regulares de 16, 32, 64, etc. lados.

Si semelhantemente dividissemos cada um dos arcos CK, KB, etc, em 2, em 4, em 8, etc partes iguaes, teriamos os polygonos de 16, 32, 64, etc lados.

SEGUNDA PARTE

Do methodo geometrico de comparar as figuras rectilineas

Si se prestou a devida attenção ao que dissemos para mostrar como se chegou a medir os terrenos, deve-se agora reconhecer que as posições das linhas umas em relação ás outras fornecem considerações dignas por si mesmas de reflexão, independentemente da utilidade que na pratica nos podem prestrar; e é de presumir que estas considerações tenham impellido os primeiros geometras a novas descobertas, por isso que não são sómente as necessidades que conduzem os homens a certa ordem de investigações: a curiosidade é muitas vezes um dos maiores motores.

O que naturalmente ainda contribuiu para o progresso da geometria foi o prazer que naturalmente sente o nosso espirito por uma certa precisão rigorosa, sem a qual nunca está satisfeito.

Assim, quando, medindo as figuras, percebeu-se que, em uma infinidade de casos, as escalas e os semicirculos não davam senão valores approximados das linhas ou dos angulos, procuraram-se processos que supprissem a insufficiencia destes instrumentos.

Aqui retomaremos as figuras rectilineas; porém nas operações que fizermos para descobrir suas justas relações, não nos serviremos para cada caso, primeiro, senão da regoa e do compasso, e depois do *calculo*, para fazermos sentir a sua intervenção como verdadeiro instrumento da geometria.

Acontece muitas vezes que se tem necessidade ou de ajuntar em uma mesma figura muitas outras que lhe sejam semelhantes, ou de decompor uma figura em outras da mesma especie: o que se póde fazer operando primeiro sobre rectangulos, por isso que todas as figuras rectilineas não são mais que conjunctos de triangulos e cada triangulo é sempre a metade de um rectangulo que tem a mesma base e a mesma altura.

70.—Para comparar os rectangulos, R e *r*, por exemplo, é preciso saber transformar um rectangulo qualquer *(r)* em um outro (R') que tenha a mesma superficie que o primeiro *(r)* e uma altura differente (AB). Porque então, em vez de comparar os dois rectangulos R e *r* compararemos os dois rectangulos R e R', (sendo R' equivalente a *r*) que não differirão senão pelas suas bases; maior será evidentemente aquelle que tiver maior base, e conterá o menor tantas vezes quantas a sua base contiver a do menor; o que ordinariamente se enuncia assim: *dois rectangulos que têm a mesma altura estão na mesma relação que suas bases.* Proposição esta que póde ser confirmada pelo calculo de um modo muito simples:

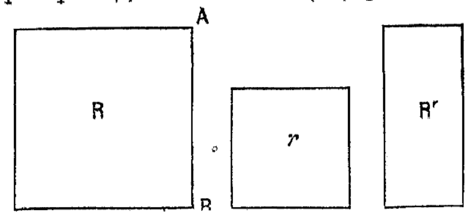

Fig. n. 53

Dois rectangulos da mesma altura estão entre si como suas bases, ou vice-versa: dois rectangulos da mesma base estão entre si como suas alturas.

71—Sejam *S* e *s* as areas de dois rectangulos cujas bases sejam *B* e *b* e cuja altura commum seja *H*. Sabe-se que $S=B\times H$ e que $s=b\times H$ Dividindo ordenadamente estas igualdades, teremos

$$\frac{S}{s}=\frac{B\times H}{b\times H}$$

ou, como H que multiplica e H que divide simplifica, teremos

$$\frac{S}{s}=\frac{B}{b}$$

72—Para ajuntar ou sommar dois rectangulos (R e R') bastará apenas pôr um ao lado do outro, ou construir um terceiro rectangulo, tendo para base a somma das bases dos rectangulos dados e a mesma altura que a delles. Semelhantemente não será difficil subtrair o menor do maior.

73.—Para dividir um rectangulo em um numero determinado de partes iguaes será necessario dividir sua base em um numero igual de partes iguaes e levantar perpendiculares pelos pontos de divisão ou traçar parallelas á altura. E para achar quantas vezes um rectangulo contem outro (ambos sempre da mesma altura) será preciso applicar a menor base sobre a maior e ver quantas vezes a primeira se contem na segunda.

Transformar um rectangulo em um outro que tenha uma altura dada.

74—Agora seja proposto transformar o rectangulo ABCD em um outro BFEG, que tenha a mesma superficie, e cuja altura seja BF. Sendo a area de um rectangulo o producto da base pela altura, será preciso que o rectangulo procurado BFEG, cuja altura tem de ser maior que BC, tenha sua base menor que AB; isto é, sendo a altura BF, do rectangulo procurado, o dobro, o triplo, o quadruplo, etc da altura BC do rectangulo dado ABCD, será preciso que a base GB do rectangulo procurado, seja $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$, etc da base do rectangulo dado, para que os dois tenham a mesma area; ou ainda por outros termos, para que os rectangulos ABCD e BFEG sejam equivalentes será preciso que a base BG de um seja contida na base AB do outro como a altura BC na altura BF.

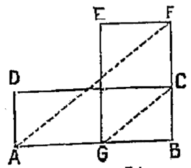

Fig. n. 54.

Portanto não se terá mais do que dividir a linha AB de maneira que AB esteja para GB como BF para B C, o que se fará (n. 38) tirando A F e pelo ponto C aparallela CG.

Outro modo de fazer a transformação precedente.

75.—Para transformar o rectangulo ABCD em um outro BFEG equivalente que tenha uma altura dada BF, póde-se empregar um processo menos natural que o precedente, porem mais commodo.

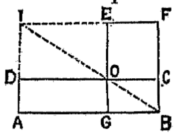

Fig. 55

Tendo prolongado AD até seu encontro I com a parallela á AB tirada pelo ponto F, tirar-se-á a diagonal BI; pelo ponto O em que ella corta o lado DC, tirar-se-á GOE parallela a FB, e o rectangulo BFEG será equivalente ao rectangulo dado ABCD.

Para proval-o, bastará fazer vêr que, tirando dos rectangulos ABCD, BFEG a parte commum OCBG, o retangulo ADOG equivalerá ao rectangulo EOCF.

Ora, attendendo á igualdade dos dois triangulos IBF, IBA, vêr-se-á que tirando destes triangulos quantidades iguaes, os restos serão iguaes. Porem, o triangulo IAB se reduzirá ao rectangulo ADOG, si delle tirarmos os triangulos IDO e OGB; semelhanlemente, o triangulo IBF se reduzirá ao rectangulo EOCF si d'elle tirarmos os triangulos IEO, OBC respectivamente iguaes aos dois primeiros.

Pois os dois rectangulos ADOG, EOCF, restos dos dois triangulos ABI, IFB, serão iguaes entre si em superficie, bem como os rectangulos, ABCD, BFEG.

76.—Esta segunda maneira de transformar um rectangulo em um outro confirma o principio estabelecido na primeira, porque os triangulos, IAB e OGB sendo manifestamente semelhantes, a base AB do maior estará para a base GB do menor como a altura IA está para a altura OG ou como BF para BC. Pelo calculo tambem poderia ser confirmado o referido principio; porque, suppondo B e H a base e a altura do primeiro rectangulo, *b* e *h* a base e a altura do segundo que, por hypothese, deve ter a mesma area S que o primeiro, teriamos para este $S = B \times H$; para o outro $S = b \times h$. Porem, duas cousas ($B \times H$ e $b \times h$) iguaes a uma terceira (S) são iguaes entre si, portanto

As bases de dois rectangulos equivalentes estão entre si na razão inversa de suas alturas.

$$B \times H = b \times h$$

E, quando o producto de dois numeros é igual ao producto de dois outros, estes quatro numeros formam uma proporção em que os factores do primeiro producto occupam os extremos, os factores do segundo os meios, isto é,

$$\frac{B}{b} = \frac{h}{H}$$

77.—Do exposto se deverá concluir que, quando quatro rectas forem taes que a primeira esteja para a segunda como a terceira para a quarta, o rectangulo, que tiver para altura e para base a primeira e a quarta destas rectas, será equivalente ao rectangulo, que tiver para altura e para base a segunda e a terceira.

78.—Quando se tiver dois quadrados a ajuntar sua somma se fará da mesma maneira que a de dois rectangulos, pois que o quadrado não é mais que um rectangulo em que a altura e a base são iguaes. Transformar-se-á, pois, um dos quadrados, o menor por exemplo, em um rectangulo que tenha para altura o lado do maior e postos um ao lado do outro formarão assim um só rectangulo valendo a somma dos quadrados dados. Poder-se-ia dar tambem a altura do pequeno quadrado a todos dois, ou uma outra altura tomada á vontade. Quando, porem, se quer fazer a somma de dois quadrados quaesquer, póde-se exigir que esta somma seja representada tambem por um quadrado, isto é, póde-se propor fazer um quadrado igual a dois outros: problema cuja solução será facil de achar da maneira seguinte

Somma de dois quadrados quaesquer.

79. - Supponhamos primeiramente que os dois quadrados ABCD, CBFE cuja somma se pretende obter sejam iguaes entre si; neste caso o quadrado resultante ACFG será o dobro de um dos quadrados dados. Tirando as diagonaes AC e CF que dividem os quadrados ao meio, os triangulos ABC e CBF valerão juntos um dos quadrados dados. Pois, transportando abaixo de AF os dois outros triangulos DCA e CEF por meio de rotações, uma em torno de A, outra em torno de F, far-se-á um quadrado ACFG cujo lado AC será a diagonal do quadrado ABCD, e cuja superficie será evidentemente igual a dos dois quadrados dados.

Construir um quadrado duplo de um outro.

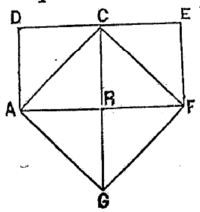

Fig. 56.

Construir um quadrado igual á somma de dois outros.

80.—Supponhamos agora que se queira fazer um quadrado igual á somma dos dois quadrados desiguaes ADCd, CFEf ou, o que é a mesma cousa, que se queira transformar a figura ADFEfd em um só quadrado.

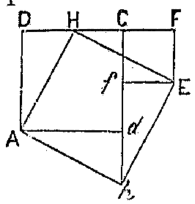

Fig. 57

Seguindo o espirito do methodo precedente, procuraremos si não é possivel achar na linha DF um ponto H tal,

1° Que tirando as rectas AH e HE e fazendo girar os triangulos ADH, EFH em torno dos pontos A e E até que venham tomar as posições Adh, Efh, esses dois triangulos se reunam em h;

2° Que os quatro lados AH, HE, Eh, hA sejam iguaes e perpendiculares entre si.

Ora, este ponto H se achará fazendo DH igual ao lado CF ou EF. Porque da igualdade supposta entre DH e CF segue-se primeiramente que si se faz girar ADH em torno do vertice A de sorte que se lhe dê a posição Adh, o ponto H, coincidindo com h ficará distante do ponto C de um intervallo igual a DF.

Da mesma igualdade supposta entre DH e CF segue-se ainda que HF será igual a DC e que assim o triangulo EFH, girando em torno de E para tomar a posição Efh, fará com que o ponto H coincida ainda com h a uma distancia de C igual tambem a DF.

Pois a figura ADFEfd está transformada em uma outra de quatro lados AHEh. Resta ver si estes quatro lados são iguaes e perpendiculares entre si.

Ora, a igualdade destes quatro lados é evidente pois que Ah não é mais que AH na nova posição do triangulo ADH, e Eh não é mais que HE: além disso AH é igual a HE como lados de triangulos iguaes ADH e HFE oppostos aos angulos rectos. ADH e HFE.

Quanto ao perpendicularismo dos lados basta provar que o angulo HAh é recto. De facto, o angulo HAh é igual ao angulo DAd, porque tem com este a parte commum HAd e mais dAh que é a nova posição do angulo DAH.

81.— Observando-se que os dois quadrados

ADCd e CFEf são feitos, um sobre AD, lado medio do triangulo ADH, o outro sobre CF, igual a DH, lado menor do mesmo triangulo; e que o quadrado AHEh, igual aos outros dois, é descripto sobre o grande lado AH, opposto ao angulo recto e que commummente se chama *hypotenusa* do triangulo rectangulo, descobrir-se-á logo esta famosa propriedade dos triangulos rectangulos que o *quadrado da hypotenusa é igual á somma dos quadrados dos outros dois lados.* (1)

Hypotenusa é o maior lado do triangulo rectangulo: oppõe-se ao angulo recto.

O quadrado da hypotenusa é igual á somma dos quadrados dos outros dois lados.

Os lados do angulo recto de um triangulo rectangulo chamam-se lados cathetos.

Maneira simples de reduzir dois quadrados a um só.

82.—Pois, quando de dois quadrados não se quizer fazer senão um só, será inutil pôl-os um ao lado do outro e de decompol-os como se fez no numero 80. Bastará collocar seus lados AD e DH de de modo que façam um angulo recto e depois tirar a recta AH, pois que então esta recta será o lado do quadrado procurado AHIE.

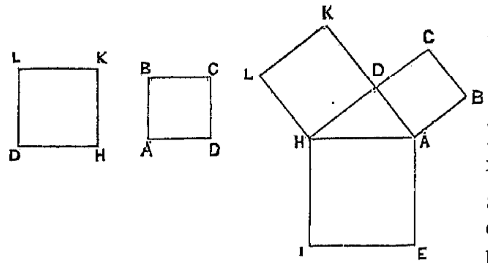

Fig. 58

Sommar duas figuras semelhantes.

83.—Si tivessemos duas figuras semelhantes DAFGM, DHPON e nos propuzessem construir uma terceira, igual em superficie á somma das duas primeiras, não seria preciso senão pôr as bases AD, HD destas figuras sobre os dois lados de um angulo recto ADH, (fig. 60) e a hypotenusa AH do triangulo ADH seria a base da figura pedida.

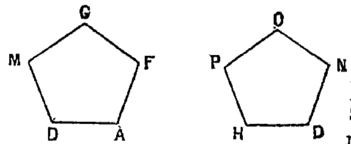

Fig. 59

(1) Esta famosa proposição é conhecida pelo nome de *theorema de Pythagoras*. E' tal o uso que della se faz, tão fecunda a sua applicação, que só por si bastaria para glorificar a memoria desse illustre discipulo de Thales.

Para proval-o, imaginemos os quadrados ABCD, DHKL, AHIE, construidos sobre as bases das tres figuras semelhantes, ver-se-á primeiramente que o quadrado AHIE vale só por si os dois outros quadrados. Ora as figuras semelhantes estão entre si como os quadrados de seus lados homologos; pois os tres quadrados ABCD, DHKL, AHIE serão respectivamente as mesmas partes das figuras DAFGM, DHPON, AHQRS.

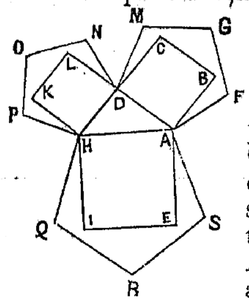

Fig. 60

Si construirmos tres figuras semelhantes sobre os tres lados de um triangulo rectangulo, a area da figura construida sobre a hypotenusa será igual á somma das areas das figuras construidas sobre os cathetos.

Donde será facil concluir que a figura AHQRS é igual á somma das outras duas. Com effeito, supponhamos, por exemplo, que cada um destes quadrados fosse a metade da figura pela qual está comprehendido, ninguem duvidaria que a figura AHQRS fosse igual ás duas outras pois que sua metade valeria só por si as metades das duas figuras DHPON, DAFGM.

O mesmo succederia si os quadrados ABCD, DHKL, AHIE fossem os dois terços, os tres quartos, etc das figuras DAFGM, DHPON, AHQRS.

84.—A proposição que acabámos de instituir póde tambem ser deduzida pelo calculo de um modo simples: sejam S, S′, S″, as areas das tres figuras e a, b, c os lados do triangulo rectangulo, que são tambem lados homologos das figuras.

Sendo as areas das figuras semelhantes proporcionaes aos quadrados dos lados homologos, será:

$$\frac{S}{a^2}=\frac{S'}{b^2}=\frac{S''}{c^2}$$

ou, segundo uma propriedade das proporções:

$$\frac{S}{a^2}=\frac{S'+S''}{b^2+c^2}$$

e como $a^2 = b^2 + c^2$, segue-se que $S = S' + S''$

Sommar muitos quadrados.

85.—Si nos propuzessem sommar tres, quatro ou mais quadrados, isto é, construir o quadrado equivalente á somma de muitos quadrados, a marcha seria sempre a mesma. Suppondo a, b, c, d, etc os lados dos quadrados, formariamos com a e b um triangulo retangulo e construindo sobre a hypotenusa um quadrado, seria este equivalente á somma dos dois primeiros. Com a hypotenusa achada e o lado c formariamos outro triangulo rectangulo e o quadrado construido sobre a sua hypotenusa seria equivalente á somma dos tres primeiros quadrados e assim successivamente.

Differença de dois quadrados

86.— Si o problema fosse construir o quadrado equivalente á differença de dois, cujos lados fossem a e b, suppondo $a > b$, construiriamos um triangulo rectangulo em que a fosse a hypotenusa e b um dos cathetos; o quadrado construido sobre o outro catheto resolveria o problema.

Somma de polygonos semelhantes.

87.—Querendo determinar o polygono semelhante a muitos outros e cuja area seja a somma de todos, tomaremos em cada polygono um lado que seja homologo do lado de cada um dos outros. Sobre estes procederemos como no numero 85, e sobre a ultima hypotenusa achada construiremos um polygono semelhante a qualquer dos propostos.

Differença de dois polygonos semelhantes.

88.—Para determinar um polygono semelhante a dois outros e que tenha uma area igual á differença delles, procederemos como no numero 86, tomando um dos lados de um dos polygonos para hypotenusa do triangulo rectangulo e o seu homologo no outro para um dos cathetos.

89.—Si finalmente quizessemos construir um quadrado ou um polygono quatro, cinco, seis, etc vezes maior que um outro, seguiriamos ainda marcha analoga a dos numeros 85 ou 87, porque achar por exemplo, um quadrado cinco vezes maior que um outro e o mesmo que determinar a somma de cinco quadradros iguaes ao quadrado proposto. Si entretanto, for proposto o problema inverso, construir um quadrado ou um polygono que seja a quinta, a sexta;

etc parte de um outro dado, ou de um modo mais geral, dado um quadrado ou um polygono, construir outro que lhe seja equivalente e cuja area esteja para a do primeiro n'uma relação dada, será preciso, alem da marcha anteriormente indicada, lembrarmo-nos da maneira de achar uma quarta proporcional a tres rectas dadas. Na terceira parte, porem, deste curso daremos um processo mais directo e mais commodo para resolver problemas desta natureza.

90.—Todas estas questões não são mais do que applicações do famoso *theorema de Pythagoras*. E aqui, a Geometria, utilisando-se do seu poderoso instrumento, o *calculo*, dá-nos margem para investigações de subido valor em todo o tirocinio da mathematica.

Representemos por A, B, C os valores dos angulos de um triangulo; por *a*, *b*, *c* os comprimentos dos lados que lhes são respectivamente oppostos. Si o triangulo for retangulo, teremos, por aquelle theorema :

$$a^2 = b^2 + c^2$$

E extrahindo a raiz quadrada a ambos os membros :

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

Igualdade esta que nos fornece meio facil de calcular o valor da hypotenusa de um triangulo rectangulo quando forem conhecidos os comprimentos dos lados cathetos.

A hypotenusa é igual á raiz quadrada da somma dos quadrados dos cathetos.

Sendo, porem, $a^2 = b^2 + c^2$

será $\qquad b^2 = a^2 - c^2$

e $\qquad c^2 = a^2 - b^2$

E extrahindo a raiz quadrada, teremos :

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Um catheto é igual á raiz quadrada da differença entre o quadrado da hypotenusa e o quadrado do outro catheto

Fórmulas estas que nos fornecem tambem meio facil de calcular o valor de um catheto, quando forem conhecidos os comprimentos da hypotenusa e do outro catheto.

91.—Assim, supponhamos que se conheça o lado *a* de um triangulo equilatero e que se queira, com este elemento dado, calcular a sua area.

Para orientarmo-nos, tracemos a figura. Ora, a area de um triangulo é igual á metade do producto da base, que no caso presente é conhecida e igual a *a*, pela altura H que não nos foi dada e que portanto devemos procurar obter. Sabe-se que no triangulo equilatero a altura cae no meio da base ; então a altura procurada é catheto do triangulo rectangulo ABC, cuja hypotenusa AC é conhecida, é *a*, e cujo outro catheto DC é um meio da base BC ou $^1/_2$ a ; teremos portanto :

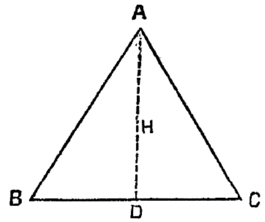

Fig. 61

$$H = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}}$$

ou fazendo a subtracção indicada :

$$H = \sqrt{\frac{3\,a^2}{4}}$$

ou, extrahindo a raiz quadrada do factor $\frac{a^2}{4}$, que é quadrado perfeito :

A altura de um triangulo equilatero é igual á metade do lado pela raiz quadrada de 3.

$$H = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

Conhecido o valor da altura, um meio da base multiplicada por este valor dar-nos-á a area pedida, que representaremos por S ; então teremos :

$$S = \frac{a}{2} \times \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

ou multiplicando as duas fracções :

A area de um triangulo equilatero é igual a um quarto do quadrado do lado pela raiz quadrada de 3.

$$S = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$$

Fórmula esta pela qual será sempre facil calcular a area de um triangulo equilatero conhecido o lado, ou vice versa.

92.—Para fazermos uma outra applicação do *theorema de Pythagoras*, supponhamos que se pretenda calcular o comprimento da diagonal de um quadrado, conhecido o comprimento l do lado.

Ora, a diagonal e dois lados de um quadrado formam um triangulo rectangulo e isosceles em que a diagonal do quadrado ou hypotenusa do triangulo,

A diagonal de um quadrado é igual ao lado do quadrado multiplicado pela raiz quadrada de 2.

$$d = \sqrt{l^2 + l^2}$$

ou

$$d = \sqrt{2\, l^2}$$

ou

$$d = l\sqrt{2}$$

Dividindo por l ambos os membros desta ultima igualdade, virá :

$$\frac{d}{l} = \sqrt{2}$$

Ora, a $\sqrt{2}$ é um ***numero incommensuravel;*** dahi se deduz que ***a diagonal de um quadrado e o seu lado são linhas incommensuraveis***, isto é, não têm medida commum exacta : não ha unidade alguma, por menor que seja, que se contendo na diagonal um certo numero de vezes, se contenha no lado um outro numero exacto de vezes e vice-versa. Si o lado do quadrado fosse igual á unidade linear, a diagonal seria igual somente á raiz quadrada de *dois;* de modo que este numero $\sqrt{2}$, cujo valor é impossivel de ser expresso exactamente em unidades e partes da unidade, é, entretanto, rigorosamente representado por uma grandeza geometrica perfeitamente definida.

93.—Reconhecida, porém, a existencia de linhas incommensuraveis com outras, póde sobrevir qualquer suspeita sobre a veracidade das proposições que nos serviram para provar a proporcionalidade das figuras semelhantes. Vimos que, comparando estas figuras, temos sempre supposto haver uma relação exacta entre seus lados, isto é, uma medida commum entre elles : hypothese que agora poderá fazer restringir algumas verdades estabelecidas na primeira parte deste curso. E' preciso pois que, voltando sobre nossos passos, examinemos si as proposições alludidas são ainda verdadeiras para o caso de lados ou elementos geometricos incommensuraveis.

94.—Retomemos primeiro o que ficou dito no n. 36, e vejamos si realmente triangulos, taes como *abc*, *ABC*, (fig. 62) que têm angulos iguaes, têm seus lados proporcionaes.

Supponhamos, por exemplo, que a base do primeiro sendo *ab*, a do segundo seja uma recta AB, igual á diagonal de um quadrado construido sobre *ab*, e vejamos si, nesta hypothese, a relação de AC para *ac* é a mesma que a de AB para *ab*.

Ora, por maior que seja o numero de partes em que se supponha *ab* dividido, AB, que lhe é incommensuravel, não poderá conter uma destas partes um certo numero de vezes exactamente. E' entretanto facil de perceber que quanto maior for o numero de partes em que imaginarmos *ab* dividido, menor será uma dellas, e mais AB se approximará de ser medido exactamente com uma dessas partes. Supponhamos *ab* dividido em 100 partes; sendo, por hypothese, AB a diagonal de um quadrado cujo lado é *ab* ou 100, será (n. 92):

$$AB = 100 \times \sqrt{2} = 100 \times 1{,}141 = 141$$

ou

$$AB = 100 \times \sqrt{2} = 100 \times 1{,}142 = 142,$$

isto é, o numero de partes contido em AB estará comprehendido entre 141 e 142.

Contentemo-nos com 141 e desprezemos o pequeno resto. E' claro que, pelos pontos de divisão de *ab* tirando parallelas a *bc*, e pelos pontos de divisão de AB tirando parallelas a BC, AC conterá tambem 141 das partes de *ac*.

Supponhamos *ab* dividido em 1000 partes; será:

$$AB = 1000 \times \sqrt{2} = 1000 \times 1{,}414 = 1414$$

ou

$$AB = 1000 \times \sqrt{2} = 1000 \times 1{,}415 = 1415,$$

isto é, o numero de partes contido em AB estará comprehendido entre 1414 e 1415. Não tomemos senão 1414 e desprezemos ainda o resto; acharemos da mesma maneira que AC conterá 1414 das millesimas partes de *ac*, e que, em geral, AC conterá sem-

pre tantas partes de *ac* com um resto, quantas forem as partes de *ab* contidas em AB com o mesmo resto.

Demais estes restos, como acabamos de observar, serão tanto menores quanto maior for o numero de partes em que suppuzermos *ab* dividido. Pois, será permittido desprezal-os suppondo *ab* dividido em um numero de partes infinitamente grande, e então se poderá dizer que o numero de partes de *ac* que se contem em AC é igual ao numero das partes de *ab* que se contem em AB, e que assim

$$\frac{AC}{ac} = \frac{AB}{ab}$$

Temos pois rigorosamente demonstrado que quando dois triangulos têm os mesmos angulos ou são equiangulos, têm seus lados proporcionaes, quer haja ou não haja uma medida commum entre elles. **Os triangulos e as figuras semelhantes têm lados proporcionaes, mesmo no caso de serem estes lados incommensuraveis.**

A proposição (n. 42) d'onde se tira a proporcionalidade das rectas que se correspondem em figuras semelhantes, se justificaria da mesma maneira.

95.—Ver-se-á por analogos raciocinios que as proposições explicadas nos numeros 40, 41, 42 da primeira parte, em que se fez ver que as areas dos triangulos e das figuras semelhantes estão entre si na mesma relação que os quadrados de seus lados homologos, são sempre verdadeiras, mesmo no caso de serem incommensuraveis os lados destas figuras.

Tomemos, por exemplo, os triangulos semelhantes ABC, *abc*, cujas alturas supporemos incommensuraveis com suas bases.

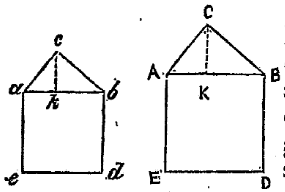

Fig. 62

Neste caso não haverá quadrado algum, por menor que seja, que possa servir de medida commum a estes triangulos e aos quadrados construidos sobre suas bases, isto é, as areas *abc*, *abde* serão incommensuraveis entre si, assim como as areas ABC e ABDE; porém, não será menos verdade que o triangulo ABC estará para o quadrado ABDE como o triangulo *abc* está para o quadrado *abde*.

E' o que facilmente se reconhecerá observando que quanto menores forem as partes da escala (n. 43) de que nos servirmos para medir AB e CK mais approximados serão os numeros que exprimirem a relação da area do triangulo ABC para a area do quadrado ABDE. Pois, dividindo sempre a escala do triangulo *abc* no mesmo numero de partes e despresando os restos, ver-se-á que os mesmos numeros servirão sempre para exprimir a relação do triangulo ABC para o quadrado ABDE, e do triangulo *abc* para o quadrado *abde*.

Imaginando a escala dividida em um numero infinitamente grande de partes iguaes, os restos se tornarão absolutamente despresiveis, e se poderá dizer que os numeros que exprimem a relação do triangulo *abc* para o quadrado *abde* exprimem tambem a relação do triangulo ABC para o quadrado ABDE e que assim.

$$\frac{ABC}{abc} = \frac{AB^2}{ab^2}$$

96.—Esta proposição, *as areas de dois triangulos semelhantes estão entre si como os quadrados dos lados homologos*, podia já ter sido mui facilmente instituida com auxilio do calculo, da maneira seguinte:

Sejam os mesmos triangulos *abc*, ABC, que por serem semelhantes, darão:

$$\frac{ab}{AB} = \frac{ac}{AC}$$

Mas, (n. 39) em triangulos semelhantes, as alturas estão entre si como quaesquer lados homologos:

$$\frac{ck}{CK} = \frac{ac}{AC}$$

Multiplicando ordenadamente estas duas igualdades teremos:

$$\frac{ab}{AB} \times \frac{ck}{CK} = \frac{ac}{AC} \times \frac{ac}{AC}$$

ou

$$\frac{1/_2\ ab \times ck}{1/_2\ AB \times CK} = \frac{ac^2}{AC^2},$$

isto é,

$$\frac{\text{area } abc}{\text{area } ABC} = \frac{ac^2}{AC^2}$$

97.—Tambem o calculo póde auxiliar vantajosamente á Geometria na generalisação da proposição anterior a quaesquer polygonos semelhantes. Imaginemos decompostos os polygonos (fig. 36) em triangulos semelhantes pelas suas diagonaes homologas, teremos:

$$\frac{\text{area } BCD}{\text{area } bcd} = \frac{BC^2}{bc^2}$$

$$\frac{\text{area } ABD}{\text{area } abd} = \frac{AB^2}{ab^2} = \frac{BC^2}{bc^2}$$

$$\frac{\text{area } ADE}{\text{area } ade} = \frac{AE^2}{ae^2} = \frac{BC^2}{bc^2}$$

Como, porém, estas razões são iguaes entre si, a somma dos antecedentes deve estar para a dos consequentes assim como qualquer antecedente para seu consequente, isto é,

$$\frac{\text{area } BCD + \text{area } ABD + \text{area } ADE}{\text{area } bcd + \text{area } abd + \text{area } ade} = \frac{BC^2}{bc^2}$$

ou

$$\frac{\text{area } ABCDE}{\text{area } abcde} = \frac{BC^2}{bc^2}$$

98.—Representando por S e S' as areas de dois polygonos semelhantes, por $\frac{m}{p}$ a *relação de semelhança* (n. 43), da igualdade a que acabámos de chegar deduz-se reciprocamente :

$$\frac{m}{p} = \sqrt{\frac{S}{S'}}$$

Pois quando se quizer *amplificar* ou *reduzir* um polygono em uma relação dada, a *escala* a adoptar para ampliar ou reduzir os lados deste polygno é igual a raiz quadrada da relação dada.

Por exemplo, si a area do novo polygono tiver de ser a centesima parte da do polygono dado, será preciso fazer seus lados dez vezes menores que os lados homologos do polygono dado.

TERCEIRA PARTE

Medida das figuras circulares e suas propriedades

Depois de se ter conseguido medir todas as especies de figuras rectilineas, é natural que se tenha tentado medir as figuras limitadas por linhas curvas.

Os terrenos e em geral as superficies de que se tem necessidade de avaliar as areas nem sempre são terminadas por linhas rectas.

Muitas vezes as figuras curvilineas e as figuras mixtas, isto é, as limitadas em parte por linhas rectas e em parte por linhas curvas, podem se reduzir a figuras inteiramente rectilineas, como já dissemos algures; porque si se tivesse de medir uma figura tal como ABCDEFG poder-se-ia tomar o lado AD por uma successão de duas, tres, etc linhas rectas; substituindo depois a recta FD pela curva FED ter-se-ia a figura rectilinea ABCDEFG, que differiria tão pouco da figura mixta, que uma poderia ser tomada pela outra sem erro sensivel. Operar-se-ia pois sobre estas figuras segundo os methodos precedentes. Os geometras, porem, não se satisfazem plenamente com estas especies de operações approximadas, e tentam sempre a investigação de processos rigorosos para satisfação de seus fins. Aliás, casos ha em que a transformação de uma figura curvilinea ou mixta em uma outra inteiramente rectilinea exige que se divida

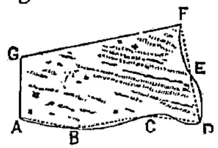

Fig. 63

seu contorno em tão crescido numero de partes que

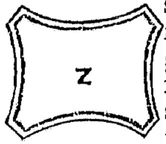

Fig. 64

se torna inexequivel o methodo commum. Tambem não se deveria tentar seguil-o, tendo-se de medir uma superficie tal como Z, ou um circulo inteiro; seria preciso seguir um outro caminho para determinar a medida destas sortes de superficies. Aqui não nos occuparemos senão daquellas cujos contornos são limitados por arcos de circumferencia.

99.—Supponhamos em primeiro lugar que se queira medir a *superficie limitada por uma circumferencia*, isto é, obter a area de um *circulo*. Observar-se-á que, inscrevendo-lhe um polygono regular, quanto maior for o numero de lados deste polygono, tanto mais a sua superficie se approximará do circulo. Ora, vimos (n. 23) que a area de um polygono regular é igual a tantas vezes o producto de um lado pela metade do apothema, quantos são os lados; ou, o que é a mesma cousa, que esta area tem por medida o producto do *semi perimetro pelo apothema*. E quanto maior for o numero de lados do polygono regular inscripto ao circulo, tanto mais sua area, seu contorno e seu apothema se approximarão da area, do contorno e do raio do circulo. Quando, pois, imaginarmos o polygono regular com um numero infinitamente grande de lados, poderemos conceber o semi perimetro, o apothema e a area do polygono confundidos respectivamente com a semi circumferencia, o raio e a area do circulo. Donde se conclue que *area de um circulo tem por medida o producto da semi circumferencia pelo raio.*

Area do circulo.

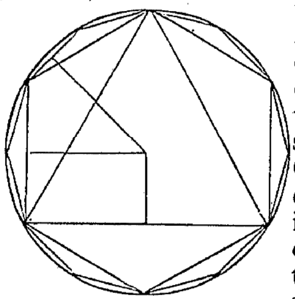
Fig. 65

Chamando, pois, S a area de um circulo qualquer, C o comprimento de sua circumferencia e R o de seu raio, teremos:

$$S = \frac{C}{2} \times R$$

100. Comparada esta fórmula com a que dá a area de um triangulo qualquer, que é

$$S = \frac{B}{2} \times H$$

vê-se que um circulo é equivalente a um triangulo que tem para base o comprimento da circumferencia do circulo e para altura o raio desse circulo, ou equivalente á metade do rectangulo da circumferencia pelo raio.

Equivale a um triangulo tendo para base a circumferencia e para altura o raio.

101.—O raio de um circulo é facil de medir-se: é uma linha recta. O mesmo, porem, não succede com a circumferencia, que para ser medida precisa que primeiro a desenvolvamos em linha recta.

Materialmente desenvolver-se-ia uma circumferencia em linha recta, isto é, *rectificar-se-ia* uma circumferencia, applicando sobre ella um fio, de maneira a cobril-a completamente. O comprimento deste fio, estendido em linha recta, seria o comprimento da circumferencia.

Rectificada uma circumferencia, e sobre ella applicado o seu diametro, reconhece-se que este não se contem um certo numero de vezes sobre ella exactamente, isto é, que entre estas duas linhas não ha uma medida commum ou que a circumferencia e o seu diametro são linhas incommensuraveis. A relação, portanto, entre ellas só póde ser obtida approximadamente, e com tal approximação que se quizer.

A circumferencia e o diametro são incommensuraveis.

E' claro que si se soubesse exactamente a relação de uma certa circumferencia para seu raio ou seu diametro, saber-se-ia a de todas as circumferencias para seus raios ou seus diametros, por isso que esta relação deve ser a mesma para todas as circumferencias.

Com effeito, si imaginarmos diversas circumferencias concentricas e em cada uma inscripto um mesmo polygono regular qualquer, esses polygonos evidentemente serão semelhantes e seus perimetros serão proporcionaes aos apothemas respectivos; porque as bases dos triangulos em que os polygonos se dividem são proporcionaes ás suas alturas (n. 39) e portanto a relação entre as sommas dos lados de cada polygono deve ser a mesma que entre essas alturas, que são os apothemas.

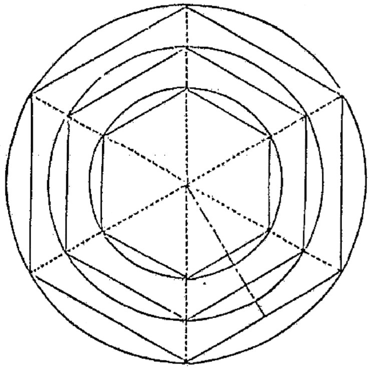

Fig. 66

Imaginando agora que o numero de lados desses polygonos vae se duplicando, os seus perimetros convergirão para as circumferencias, seus apothemas para os raios destas circumferencias, e quaesquer que sejam os estados destes polygonos durante a variação do numero de lados, é claro que sempre seus perimetros serão proporcionaes aos apothemas respectivos, portanto as circumferencias (limites destes perimetros) serão tambem proporcionaes aos seus raios (limites dos apothemas.)

Esta lei que *toda circumferencia varia proporcionalmente ao diametro* mostra como as circumferencias se *succedem*, isto é, como a variação de uma circumferencia depende da variação de seu diametro ou vice-versa : é uma *lei de sucessão.*

Esta lei, porem, póde ser enunciada desta outra maneira : a *relação da circumferencia para o diametro é constante* ; então ella exprime a semelhança ou como se assemelham, ou ainda o que têm de commum as differentes circumferencias e os diametros respectivos : é uma *lei de semelhança.*

102. - ARCHIMEDES, o celebre geometra de Syracusa, que viveu 250 annos antes de Christo, procurando a rectificação da circumferencia, foi o primeiro que teve a gloria de determinar a relação constante entre ella e seu diametro.

Partindo do hexagono, duplicando successivamente o numero de lados, e parando nos polygonos regulares, inscripto e circumscripto, de 96 lados, entre cujos perimetros a circumferencia deve estar comprehendida, provou elle que o dia-

metro de uma circumferencia tendo 7 partes, o numero destas partes contidas em toda a circumferencia está comprehendido entre 21 e 22, e que esse numero approxima-se mais de 22 do que de 21 ; isto é, que a relação $\frac{C}{2R}$ de uma circumferencia C para seu diametro 2R é proximamente igual a $\frac{22}{7}$, ou que a circumferencia contem proximamente o diametro 3 vezes e mais $^1/_7$.

A relação constante da circumferencia para seu diametro é mui proximamente igual a $^{22}/_7$

Esta relação de $\frac{22}{7}$, que, convertida em fracção decimal, dá 3,142 é a mais simples que se tem achado e de sufficiente exactidão na maioria das applicações praticas.

O numero que, com maior ou menor approximação, exprime esta relação $\frac{C}{2R}$ é geralmente representado nos calculos pela lettra grega π: de modo que se tem sempre

e representada nos calculos pela lettra grega π.

$$\frac{C}{2R} = \pi$$

donde se tira :

$$C = 2\,\pi\,R$$

Fórmula está que permitte calcular C (circumferencia rectificada), quando for dado o valor de R, raio, ou vice-versa.

103.—Substituindo-se este valor de C na fórmula

$$S = \frac{C}{2} \times R,$$

que dá a area do circulo, tem-se :

$$S = \pi\,R^2$$

Fórmula esta que permitte calcular a area de um circulo, quando tambem for dado o raio, R, ou vice-versa.

104.—E' evidente que os circulos gozam da propriedade geral de todas as figuras semelhantes, isto é, suas areas estão na mesma relação que os quadrados de seus lados homologos; porem como, para applicar esta proposição aos circulos não se poderá tomar seus lados, será preciso servir-mo-nos dos raios; então ver-se-á que os circulos têm suas areas proporcionaes aos quadrados de seus raios.

As areas dos circulos estão entre si como os quadrados de seus raios.

Com effeito, representando por S e S′ as areas de dois circulos cujos raios sejam R e R′, ter-se-á, para o primeiro:

$$S = \pi R^2$$

e para o segundo:

$$S' = \pi R'^2$$

Dividindo ordenadamente estas igualdades, virá:

$$\frac{S}{S'} = \frac{R^2}{R'^2}$$

105.—Os circulos, por causa de sua semelhança, gozarão tambem, como as figuras semelhantes da propriedade de poderem ser sommados por meio de um triangulo retangulo (n. 83): a area do circulo que tem para raio a hypothenusa é igual á somma das areas dos circulos que tem para raio cada um dos cathetos. Sendo a a hypothenusa, b e c os cathetos de um triangulo rectangulo, a area S do circulo, que tem para raio a hypotenusa, é

Somma de dois circulos

$$S = \pi a^2.$$

ou por ser

$$a^2 = b^2 + c^2$$

será:

$$S = \pi (b^2 + c^2)$$

que é a somma das areas πb^2, πc^2 dos circulos que têm para raios os cathetos b e c.

106.—Si se tivesse de medir a superficie de uma corôa ou annel circular V, que é a parte de circulo comprehendida entre duas circumferencias concentricas, a marcha que se apresentaria espontaneamente seria de medir separadamente as superficies dos dois circulos e da maior area subtrahir a menor. Ora, supponhamos que R seja o raio do circulo maior, e r o do menor; a area S do primeiro será:

Area da corôa ou annel circular, ou differença de dois circulos.

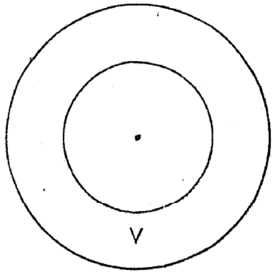

Fig. 67

$$S = \pi R^2$$

A area s do segundo será:

$$s = \pi r^2$$

Subtrahindo ordenadamente, teremos:

$$S - s = \pi (R^2 - r^2)$$

Pois, a area da corôa ou annel circular é π ou 3,142 vezes a differença dos quadrados dos raios.

107.—Quando se tratar de medir um figura Y composta de arcos de circulos differentes e de linhas rectas, ou uma figura Z unicamente composta de arcos de circulo, toda a difficuldade se reduzirá a medir segmentos de circulo, isto é, espaços taes como ABCE (fig. 70) terminados por um arco ABC e pela corda AC. Porque as figuras inteiramente compostas de arcos de circulo, ou de arcos e linhas rectas, podem todas ser consideradas como figuras rectilineas, augmentadas ou diminuidas de certos segmentos.

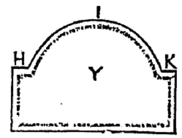

Fig. 68

Segmento é a porção de circulo comprehendida entre um arco e sua corda.

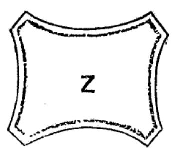

Fig. 69.

108.—A medida de um segmento

qualquer ABCE é facil de achar-se quando se sabe a do circulo; porque, si se tiram as rectas AO e CO para o centro O do arco, se formará uma figura ABCO, chamada *sector*, que será uma fracção do circulo e cuja area estará para a do circulo como o arco ABC está para a circumferencia inteira, e que por conseguinte terá por medida (n. 99) *a metade do arco ABC pelo raio AO*: ora o sector estando determinado, não será preciso senão tirar de sua area a do triangulo ACO para ter a do segmento.

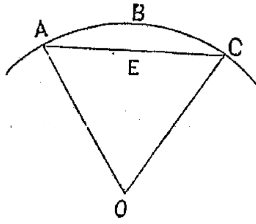

Fig. 70

Sector é a porção de circulo limitada por um arco e sua corda.

Tem por area a metade do arco rectificado pelo raio.

109. O comprimento do raio do sector é facil de medir-se; o arco, entretanto, que o limita, precisa ser rectificado para se poder medil-o. Como, porém, se póde saber o numero de gráos que elle contem, e como evidentemente o seu comprimento está para o da circumferencia inteira como o numero de gráos (n) que elle contem está para o numero de gráos (360) contidos na circumferencia, teremos para rectificar o arco ou medir o seu comprimento a fórmula:

Rectificação de um arco.

$$C = \frac{\pi R}{180} \cdot n,$$

tirada da proporção evidente:

$$\frac{C}{2\pi R} = \frac{n}{360}$$

em que C representa o comprimento procurado, $2\pi R$ o comprimento da circumferencia, e n o numero de gráos do arco que se quer medir em unidades lineares.

110.—Sendo, porem, a area do sector a metade do arco *rectificado* pelo raio, teremos, representando por S essa area:

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi R}{180} \cdot n\right). R \quad \text{ou} \quad S = \frac{\pi R^2}{360} \cdot n$$

Fórmula esta que permitte calcular a area de um sector, dado o raio e o numero de gráos de seu arco.

111.—Como acontece muitas vezes que, tratando-se de medir uma figura tal como Y, (fig. 68) não se tem o centro do arco HIK, e que entretanto sem este centro não se poderia medir a figura, pois que o processo precedente exige o conhecimento do raio, é preciso que procuremos o meio de determinar o centro de um arco de circulo qualquer.

Achar o centro de um arco de circulo qualquer.

Seja ABC o arco de circulo proposto; si se tomam á vontade dois pontos A e B sobre este arco e destes pontos como centros se descrevem quatro arcos, dois na parte superior, dois na inferior, os dois primeiros com um raio qualquer, e os dois outros ou com o mesmo raio, ou com outro raio tomado arbitrariamente, é claro que o centro procurado do arco ABC estará (n. 7) sobre a recta OP, que passa pelos pontos de intersepção desses arcos.

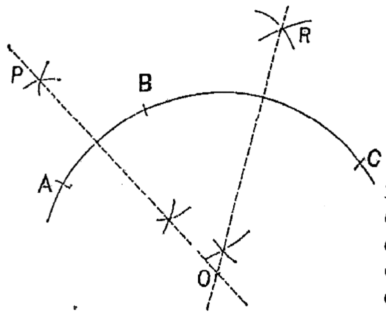

Fig. 71

Escolhendo depois um terceiro ponto C sobre o arco ABC, e servindo-nos de B e de C da mesma maneira por que nos servimos de A e de B, teremos uma recta OR, sobre a qual deverá tambem se achar o centro procurado. Pois, este centro será o ponto de intercepção O das rectas OP, OR.

112.—Assim, qualquer que seja a posição relativa de tres pontos, não em linha recta, poder-se-á sempre ligal-os por um arco de circulo, ou, o que é a mesma coisa, qualquer que seja a grandeza dos lados AC, BC de um triangulo ABC em relação á sua base, poder-se-á sempre circumscrever um circulo a este triangulo, isto é, determinar um ponto equidistante de seus vertices.

A todo triangulo é sempre possivel circumscrever um circulo.

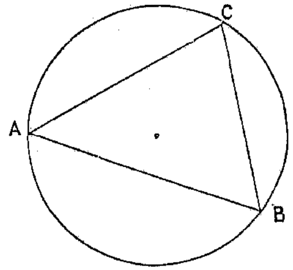

Fig. 72

113.—O methodo que acabámos de dar para circumscrever um circulo a um triangulo sendo applicado successivamente a differentes triangulos ABC, AEB, AGB, mais ou menos elevados em relação á base AB, percebe-se que passando de um triangulo ACB, cujo angulo do vertice é muito agudo, para outros triangulos AEB, AGB, cujos angulos dos vertices são mais abertos, o centro do circulo circumscripto se approxima continuamente de AB, e que este centro passa depois para baixo de AB, quando o angulo do vertice AGB attinge a uma certa abertura. Ora, vendo passar este centro abaixo de AB, depois de ter visto acima, deve vir ao espirito, parece, procurar de que especie deve ser o angulo AFB ou o triangulo AFB, (fig. 74) quando o circulo circircumscripto tiver seu centro sobre a propria base AB.

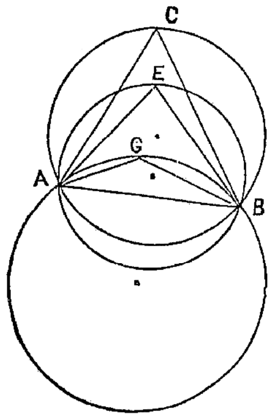

Fig. 73

Para conhecer a natureza do angulo AFB, se começará por notar que neste caso particular a porção do circulo circumscripto ao triangulo deve ser exactamente um semi-circulo; com effeito, o centro do circulo devendo se achar sobre a base

AB, cujas extremidades estão por hypothese na circumferencia, o centro C não poderá deixar de estar situado precisamente no meio de AB, de sorte que AB será necessariamente um diametro.

Ver-se-á então que de qualquer ponto F do simi-circulo tirando rectas FA, FB para as extremidades do diametro o angulo AFB será recto. Porque, tirando FO, os dois triangulos AFO, FOB serão isosceles; pois os dois angulos AFO, OFB serão respectivamente iguaes aos angulos FAO, FBO, ou o angulo total AFB valerá a somma dos dois angulos FAO, FBO; porem os tres angulos AFB, FAO, FBO são angulos do triangulo AFB e valem em somma dois rectos, portanto o angulo AFB vale um recto.

O angulo cujo vertice está na circumferencia e cujos lados se apoiam nas extremidades de um diametro diz-se inscripto num semicirculo.

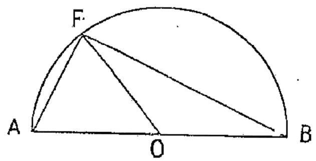

Fig. 74

Assim si se descreve sobre a base AB um triangulo rectangulo qualquer, este triangulo terá a propriedade de ser inscripto n'um circulo cujo centro está no meio da base.

Todo o angulo inscripto num semicirculo é recto.

114.—Esta propriedade do circulo, que o angulo que tem seu vertice na semi-circumferencia e cujos lados se apoiam nas extremidades de um diametro, é sempre recto, leva-nos naturalmente a indagar si as outras partes do circulo, que não o semicirculo, não terão alguma propriedade analoga: si, por exemplo, os angulos ACB, AEB, AFB, cujos vertices estão na circumferencia e cujos lados se apoiam nas extremidades de uma corda qualquer, isto é, si os angulos ACB, AEB, AFB, inscriptos n'um mesmo segmento ACEFBA, não serão todos iguaes entre si, assim como o são os angulos inscriptos n'um mesmo semi-circulo.

Angulos inscriptos num segmento.

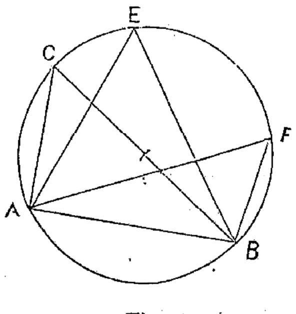

Fig. 75

Para certificarmo-nos começaremos por procurar o valor de um destes angulos e veremos depois si os outros têm o mesmo valor.

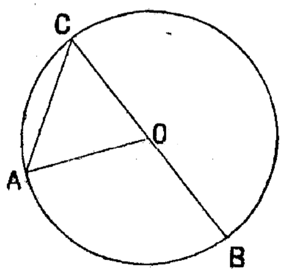

Fig. 76

Tomaremos, por exemplo, o angulo ACB cujo lado CB passa pelo centro do circulo ou cujo lado CB é diametro.

Como já sabemos medir um angulo central AOB por meio de seu arco AB (1ª parte, n. 45) attendendo ser este angulo AOB externo ao triangulo ACO e portanto igual á somma dos angulos internos não adjacentes (n. 59) será:

$$AOB = ACO + CAO$$

Mas o triangulo ACO é isosceles porque os lados AO e CO são iguaes entre si como raios do mesmo circulo, e os angulos da base ACO e CAO são iguaes; portanto, será:

$$AOB = 2 \times ACO$$

Donde virá, dividindo por 2 ambos os membros:

$$ACO = \frac{1}{2} AOB$$

Ora, o angulo central AOB tendo por medida o arco AB comprehendido entre seus lados, o angulo inscripto ACO ou ACB terá por medida a metade do arco AB comprehendido entre seus lados.

115.—Medido o angulo ACB, para saber se elle é igual a cada um dos outros angulos que têm seu vertice no mesmo segmento, é preciso examinar se um destes angulos tomado á vontade, AEB, por exemplo, é tambem a metade do angulo central

AOB. Ora, o angulo AEB tem o centro do circulo entre seus lados; então tirando o diametro ED, será

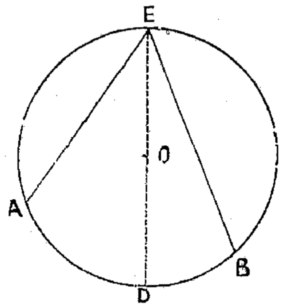

Fig. 77.

$$AEB = AED + DEB$$

Os angulos AED e DEB em que o angulo AEB se decompõe, estão nas condições do angulo ACB do numero precedente: têm um lado passando pelo centro do circulo; portanto cada um delles tem para valor a metade do arco que lhe corresponde, e o angulo AEB tem para valor a metade do arco AD mais a metade do arco DB ou simplesmente a metade do arco todo ADB, que mede o angulo cental AOB.

116.—Si examinámos o caso do angulo inscripto ter 1° um de seus lados passando pelo centro, 2° o centro entre seus lados, devemos examinar si, quando o angulo, como AFB, tiver o centro do circulo fóra de sua abertura e de um de seus lados, terá ainda por medida metade do arco AB comprehendido entre seus lados.

Angulo inscripto é o que tem seu vertice na circumferencia e seus lados são cordas.

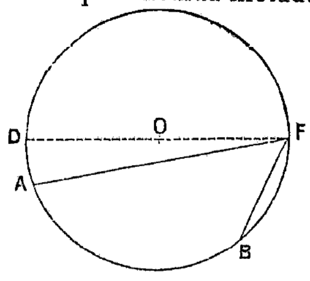

Fig. 78.

Certamente que sim. Neste caso o angulo AFB não será mais que a differença entre DFB e DFA, a sua medida portanto não será mais do que a metade da differença do arco DB e do arco DA, isto é, a metade do arco AB, que mede o angulo central AOB.

Tem sempre por medida metade do arco comprehendido entre seus lados.

E assim todos os angulos inscriptos num segmento são iguaes.

117.—Depois de ter visto que qualquer angulo inscripto ABE (fig. 79) tem sempre por medida a metade do arco AE comprehendido entre seus lados, e sabendo-se que a grandeza de um angulo não depende da grandeza de seus lados e sim da maior ou menor inclinação que elles têm entre si, é facil de reconhecer que augmentando o angulo ABE successivamente, de modo a passar pelos diversos estados de grandeza

ABE, ABF, ABG, ABH... as suas medidas sempre se obterão tomando successivamente a metade de AE, de AF, de AG, de AH... e que os valores dessas medidas irão crescendo, a despeito do decrescimenta das partes EB, FB, GB, HB... de um de seus lados, ou á proporção que o ponto E vai se approximando do ponto B. Ora, quando o ponto E vier a coincidir com o ponto B, o elemento E B terá desapparecido, mas o lado do angulo terá uma posição notavel, BX, em relação ao circulo: tocará a circumferencia em um unico ponto, e por esse motivo terá o nome de *tangente*. Neste momento, o angulo ABE, primitivamente inscripto, isto é, formado por duas cordas, passará a ser um angulo ABX formado por corda e tangente e terá ainda por medida a metade do arco AEFGH... B.

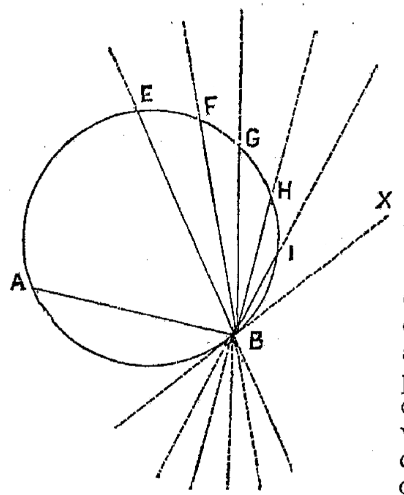

Fig. 79

Tangente é a recta que toca a circumferencia apenas em um ponto, ou que tem com a circumferencia um unico ponto de contacto.

O angulo formado por corda e tangente é chamado angulo do segmento: é medido pela metade do arco do segmento.

118.—A tangente a um circulo goza da importante propriedade de ser perpendicular ao raio que passa pelo ponto de contacto. Com effeito a recta AB, sendo tangente ao circulo, toca a circumferencia em um só ponto C e tem todos os outros pontos fóra do circulo; de maneira que o caminho mais curto do centro á tangente é marcado pelo raio

A tangente é perpendicular ao extremo do raio que passa pelo ponto de contacto.

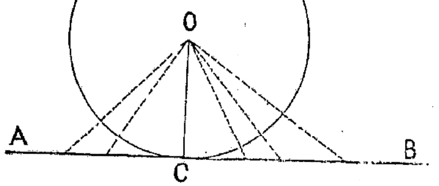

Fig. 80

OC, o que equivale a dizer que OC é perpendicular a AB ou vice-versa.

119.—Por esta propriedade da tangente é tambem facil de provar que todo o angulo formado por corda e tangente como ABX ou ABY tem por medida metade do arco ACB ou ADB do segmento por elle abrangido. Porque o angulo ABX é a somma do angulo inscripto ABC, cuja medida é a metade de AC, e do angulo recto CBX que é medido pela metade da semi-circumferencia CEB. O angulo ABY é a differença entre o angulo recto CBY, medido pela semi-circumferencia CADB, e o angulo inscripto CBA, medido pela metade do arco AC.

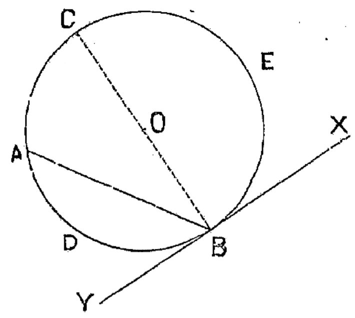

Fig. 81.

120.—Das propriedades precedentemente estudadas podem ser deduzidas outras propriedades notaveis do circulo, e de grande utilidade.

Para proceder por ordem na descoberta destas novas propriedades, começaremos por observar que por serem iguaes dois angulos quaesquer EDC, EBC, que se apoiam sobre o mesmo arco, segue-se que os triangulos DAE, BAC têm os angulos iguaes, isto é, (1ª parte, n. 36, theorema de Thales) são semelhantes. Estes triangulos são equiangulos, porque os angulos EDC e EBC, que têm a mesma medida, metade do arco EC, são iguaes; os angulos DEB e DCB, que têm a mesma medida, metade do arco DB, são tambem iguaes; e os terceiros angulos DAE e BAC são iguaes como verticalmente oppostos ou em virtude da propriedade estabelecida na 1ª parte n. 35.

Propriedade de duas cordas que se intercepram.

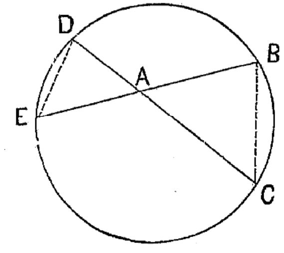

Fig. 82.

Ora, em triangulos equiangulos e portanto semelhantes, os lados homologos, isto é, oppostos a angulos respectivamente iguaes, são proporcionaes, portanto, o lado EA, que se oppõe ao angulo EDA, está para o lado AC, que se oppõe ao angulo ABC, assim como o lado DA, que se oppõe ao angulo DEA, está para o lado AB, que se oppõe ao angulo ACB, isto é:

$$\frac{EA}{AC} = \frac{DA}{AB} \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

O que prova que, n'um circulo, *duas cordas quaesquer se cortam em partes inversamente proporcionaes;* ou, attendendo que a proporção (1), pela propriedade fundamental, póde-se escrever:

$$EA \times AB = AC \times DA$$

fica provado que, quando n'um circulo duas cordas quaesquer se cruzam *o rectangulo construido sobre as partes da primeira é igual ao rectangulo construido sobre as partes da segunda.*

121.—Se as duas cordas BE e DC se cortassem perpendicularmente e uma dellas fosse um diametro DC, é claro que as duas partes AB e AE da outra corda BE seriam iguaes entre si; de sorte que a propriedade precedente se enunciaria assim, neste caso particular: si sobre um diametro DC de um circulo se levanta uma perpendicular AB, chamada *ordenada ao diametro*, essa ordenada será média proporcional aos segmentos do diametro, isto é, será:

Ordenada ao diametro é a perpendicular abaixada de um ponto da circumferencia sobre um diametro.

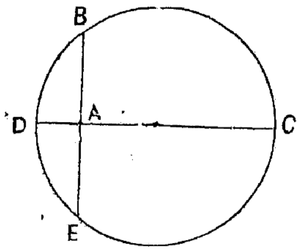

Fig. 83.

$$\frac{AD}{BA} = \frac{BA}{AC}$$

ou, por ser

$$BA^2 = AD \times AC$$

E' média proporcional aos segmentos do mesmo diametro.

teremos este outro enunciado: *o quadrado contsruido sobre uma ordenada a um diametro é equivalente ao rectangulo construido sobre os segmentos do mesmo diametro.*

122.—Esta propriedade fornece um meio facil de transformar um rectangulo em um quadrado. Seja ACFE o rectangulo proposto; prolongar-se-á AC até D, de modo que seja AE = AE, e descrever-se-á o semi-circulo DBC cujo diametro seja DC.

Transformar um rectangulo em um quadrado.

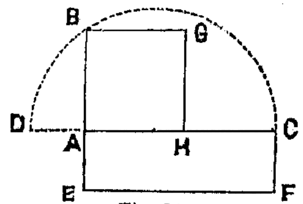

Fig. 84.

Prolongando depois o lado EA até seu encontro com a semi-circumferencia ter-se-á em AB o lado do quadrado procurado ABGH, equivalente ao rectangulo dado ACFE.

123.—Este problema é muitas vezes enunciado desta outra maneira: achar uma recta que seja média proporcional a duas outras dadas; o que evidentemente equivale a determinar a ordenada AB ou o lado do quadrado por meio dos lados AC e AE do rectangulo.

Achar a recta que é média proporcional a duas outras.

124.—Póde-se ainda achar uma média proporcional entre duas rectas de uma outra maneira deduzida da propriedade do circulo explicada no n. 121. Supponhamos que AC seja a maior das duas rectas dadas, e AD a menor; levantar-se-á BD perpendicular a AC, e o ponto B em que ella encontra a semi-circumferencia traçada sobre AC como diametro, dará a recta AB média proporcional entre AD e AC. Porque, tirando BC é claro que o triangulo ABC será rectangulo em B. Pois este triangulo será semelhante ao rectangulo ABD, por ter o angulo ABC = ADB como rectos, o angulo A commum, e portanto o terceiro angulo ACB = ABD.

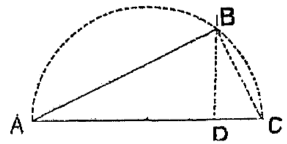

Fig. 85.

Mas, em triangulos semelhantes os lados homologos, isto é, os lados oppostos a angulos iguaes, são proporcionaes, então será:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AD}$$

isto é, AB (catheto do triangulo rectangulo) é mêdia proporcional entre AC (hypotenusa) e AD (segmento da hypothenusa correspondente ao catheto AB).

Qualquer catheto é média proporcional entre a hypotenusa e o segmento correspondente.

125.—Si se quizesse transformar uma figura rectilinea qualquer em um quadrado, não seria preciso, para reduzir este problema ao do n. 122, senão fazer desta figura um rectangulo equivalente; o que seria muito facil, porque as figuras rectilineas não são mais que rêdes de triangulos, e cada triangulo sendo a metade de um rectangulo da mesma base e da mesma altura, todos os rectangulos provenientes dos triangulos não serão mais que um só rectangulo dando-se-lhes a todos a mesma altura.

Transformar uma figura rectilinea em um quadrado.

126.—As figuras cujos contornos encerrarem arcos de circulo, poderão tambem ser transformadas em quadrados equivalentes, quando se tiver medido o comprimento dos arcos de que elles se compuzerem; porque então poder-se-á transformar estas figuras, como as rectilineas, em rectangulos e estes em quadrados.

127.—O calculo, entretanto, supprindo as construcções graphicas, em geral morosas, a que dão lugar as transformações indicadas nos dois numeros precedentes, ensina-nos a executal-os com a maxima brevidade e todo o rigor. E' assim que, sendo dada a figura que se deseja transformar em outra equivalente, estabelece-se uma igualdade (equação) entre as suas areas, uma conhecida e outra desconhecida.

Para fixar as idéas, tomemos alguns exemplos:

Applicações.

1.° *Transformar um pentagono dado em um quadrado.*—Dado o pentagono, qualquer que elle seja, sabemos determinar a sua area; seja de $0,^{m2}3589$. Transformal-o em um quadrado é achar o quadrado equivalente, isto é, o quadrado que tenha a mesma

arêa que a do pentagano; mas, para construir este quadrado basta conhecer o comprimento de um lado, que, emquanto não conheço, represento pela lettra x. Ora, a area do quadrado, cujo lado é x, é x^2, que deve ser igual á area $0,^{m2}3589$ do pentagono, isto é,

$$x^2 = 0,3589$$

Extrahindo a raiz quadrada a ambos os membros, virá:

$$x = \sqrt{0,3589}$$

ou

$$x = 0^m,59$$

2.° *Transformar o mesmo pentagono em um triangulo equilatero.*—Ora, a area do triangulo iquilatero (n. 91) é $\frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$ em que a representa o lado; a area do pentagono é $0,^{m2}3589$ e para que o triangulo seja equivalente ao pentagono é preciso que se tenha:

$$\frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} = 0,\ 3589$$

Para resolver esta equação, isto é, para que a fique sosinho no primeiro membro, é preciso primeiro multiplicar ambos os membros por 4, o que dá:

$$a^2 \cdot \sqrt{3} = 4 \times 0,3589$$

Depois, dividir ambos os membros pela $\sqrt{3}$, o que dá:

$$a^2 = \frac{4 \times 0{,}3589}{\sqrt{3}}$$

Finalmente, extrahir a raiz de ambos os membros, o que dá :

$$a = \sqrt{\frac{4 \times 0{,}3589}{\sqrt{3}}}$$

ou

$$a = \sqrt{\frac{1{,}4356}{1{,}7321}} = \sqrt{0{,}8288} = 0{,}^{m}91$$

E conhecido o lado do triangulo equilatero, é facil construil-o.

3° *Transformar o circulo de raio = 0,m75 no quadrado equivalente.*—A area do circulo é πR^2 ou, para o caso de $R = 0{,}75$ será $\pi \times 0{,}75^2$ ou $3{,}142 \times 0{,}75^2$ Chamando x o lado do quadrado pedido teremos :

$$x^2 = 3{,}142 \times 0{,}75^2$$

donde

$$x = \sqrt{3{,}142 \times 0{,}75^2}$$

ou

$$x = 0{,}75 \times \sqrt{3{,}142}$$

ou ainda

$$x = 0{,}75 \times 1{,}772 = 1{,}^{m}329$$

Um quadrado que esteja para outro numa razão dada.

128.—Tira-se ainda da propriedade do circulo explicada no numero 120 um processo bem facil para fazer um quadrado que esteja para um quadrado dado n'uma razão dada, ou, em outros termos, construir um quadrado que se contenha ou seja contido em outro dado, como um numero qualquer m se

contem ou é contido em outro numero p : problema cuja resolução ficou promettida no numero 89.

Pelo calculo, este problema resolver-se-ia com extrema presteza, pois bastaria determinar o termo incognito da proporção

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{m}{p}$$

em que a representa o lado do quadrado, e x o lado do quadrado pedido.

A resolução, entretanto, deste problema, apenas com os recursos da Geometria, exige mais de uma operação graphica. Supponhamos, por exemplo, que se queira fazer um quadrado que esteja para o quadrado ABCD como a recta M está para P. Dividir-se-á, como se aprendeu na 1ª parte, n. 38, o lado CB de maneira que CB esteja para BE assim como a recta M para a recta P; tirando depois a parallela EF a AB, o rectangulo ABEF terá a mesma superficie que o quadrado pedido; pois não se tratará mais do que transformar este rectangulo em um quadrado equivalente.

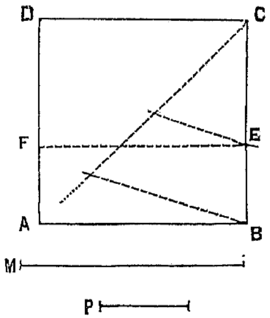

Fig. 86

Um polygono que esteja numa razão dada com outro semelhante.

129.— Semelhantemente, querendo-se fazer um polygono HIRLM que esteja para um polygono semelhante ABCDE na razão da recta M para a recea P, começar-se-á por fazer sobre o lado AB do polygono dado ABCDE o quadrado ABGF; depois se procurará um outro quadrado HIOQ que esteja para o quadrado ABGF como a recta M esta para P. E então descrevendo sobre o lado HI deste quadrado um polygono HLKIM

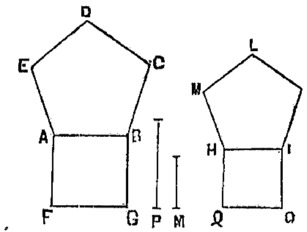

Fig. 87

semelhante ao primeiro, este novo polygono será o pedido. Esta construcção se basêa evidentemente na proporção do numero 97 da 2ª parte.

Si fosse dada a relação numerica das duas areas, isto é, si nos propuzessem construir um polygono que fosse os $^4/_9$ de um outro dado, bastaria sobre os $^2/_3$ do comprimento de um seus lados construir um polygono semelhante ao dado, lembrando que 4 e 9 são os quadrados de 2 e 3, ou que 2 e 3 são as raizes quadradas de 4 e 9.

Um circulo que esteja para outro numa relação dada.

130.—Si se quizesse fazer um circulo cuja area estivesse para a de um circulo dado como M para P, seria preciso construir um quadrado que estivesse para o quadrado do raio do circulo dado, como M para P, e o lado deste novo quadrado seria o raio do circulo pedido.

Pelo calculo, bastaria resolver a equação :

$$\frac{\pi x^2}{\pi R^2} = \frac{m}{p} \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{R^2} = \frac{m}{p}$$

Propriedade de duas secantes que se encontram.

131.—Voltando ao numero 120 e reflectindo sobre a lei, que então instituimos, e segundo a qual duas cordas se interceptam n'um circulo, é natural que indaguemos si esta lei subsistirá ainda no caso em que as duas cordas não se interceptam, nem são parallelas, isto é, no caso em que, prolongadas, se encontram em um ponto A, fóra do circulo, como BC e ED.

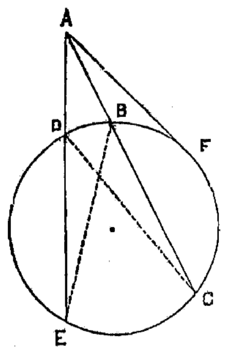

Fig. 88.

Ora, ligando os pontos B e E, C e D, ficam claramente formados dois triangulos ACD, ABE, semelhantes, por terem o angulo A commum, os angulos C e E iguaes como angulos inscriptos que têm a mesma medida, metade do arco BD; seus lados homologos são pois proporcionaes, isto é,

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AB}{AD} \; \ldots\ldots \; (1)$$

O que prova que *as secantes* AE e AC *são inversamente proporcionaes ás suas partes externas.*

Mas, a proporção (1) póde se escrever desta maneira :

$$AE \times AD = AC \times AB$$

O que prova que o *rectangulo construido sobre uma secante (AE) e a sua parte externa é equivalente ao rectangulo construido sobre a outra secante e a sua parte externa*, quando estas secantes concorrem em um ponto fóra do circulo.

Propriedade da tangente e da secante que se encontram.

132.—Si imaginarmos a secante AC tomando um movimento de rotação em torno do ponto A, os pontos B e C irão se approximando e em todas as posições da secante AC, durante esse movimento, a proporção supra será verdadeira; portanto, quando a secante AC se reduzir á tangente AF, ter-se-á:

$$\frac{AE}{AF} = \frac{AF}{AD}$$

ou

$$AF^2 = A\,E \times AD$$

Isto é, *a tangente é media proporcional entre a secante e a sua parte externa*, ou por outros termos, *o quadrado construido sobre a tangente é equivalente ao rectangulo construido sobre a secante e a sua parte externa.*

Traçar uma tangente por um ponto dado

133.—A proposição supra nos ensinando a determinar o valor do quadrado da tangente, não nos ensina, entretanto, a tirar esta tangente de um ponto, isto é, não nos ensina a determinar o ponto de contacto. Para isto, porém, basta lembrar que a tangente é perpendicular ao raio que passa pelo ponto de contacto. Assim não se tratará mais do que determinar um ponto F tal que o angulo OFA seja recto.

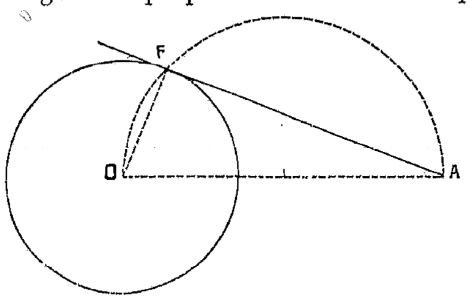

Fig. 89.

Então sobre OA, como diametro, descreva-se um semi-circulo que cortará a circumferencia dada no ponto procurado.

QUARTA PARTE

Da medida dos volumes e das superficies dos corpos

Pelos principios estabelecidos nas tres primeiras partes deste curso, vimos que *a medida e a comparação das áreas das superficies planas, limitadas por linhas rectas ou curvas, reduzem-se sempre a simples comparações de linhas rectas;* que para determinar a área de uma figura, rectilinea, curvilinea ou mixta, basta operar sobre certas linhas rectas, que constituem determinados elementos da figura considerada.

E' natural que agora nos occupemos da medida dos *volumes*, isto é, das porções de espaço occupadas por um corpo, ou das extensões limitadas, e que têm tres dimensões, *comprimento*, *largura e profundidade.*

A medida da porção de espaço occupado por um corpo foi sem duvida tambem uma das primeiras necessidades para as quaes se volveu a attenção dos geometras. Questões da vida pratica, quotidiana, como estas: saber quantos tijolos são precisos para fazer um muro de 15^m de comprimento, $1^m,70$ de altura e $0^m,22$ de largura; saber a porção d'agua que pode ser contida em um reservatorio circular de certa profundidade; a porção de ar contido em uma sala, e mil outras questões deste genero levariam qualquer pessoa a esta nova ordem de investigações.

Para estudar as extensões que têm tres dimensões (volumes), da mesma maneira por que estudámos as extensões dotadas apenas de duas dimensões (superficies), começaremos por examinar as fórmas dos espaços completamente terminados por planos, chamadas *polyedros*.

134.—Para medir a extensão de uma superficie, isto é, para determinar a sua *área*, ou a sua *quadratura*, tomámos sempre um quadrado para termo de comparação. Para medir o espaço occupado por um corpo, isto é, seu volume, devemos tambem tomar para termo de comparpção, um volume bem simples, facil de ser concebido, como o *cubo*, que é a porção de espaço, tal como X, que tem o comprimento, a largura e a profundidade ou altura iguaes entre si, ou que é uma figura terminada por seis quadrados perfeitamente iguaes, chamados *faces* do cubo.

Noção da unidade de volume.

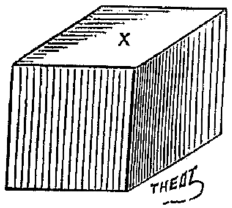

Fig. 90.

Cubar um corpo ou achar a sua *cubatura* é determinar o seu volume, ou ver quantas vezes o espaço por elle occupado contém ou é contido em um um cubo tomado por *unidade*.

O cubo sendo uma figura regular, bem facil de ser concebida, para se fixar na mente o seu tamanho, o seu volume, basta fixar o tamanho de uma de suas dimensões que são iguaes entre si.

Bem concebida a fórma de um cubo qualquer, todo o mundo fará idéa perfeita do que seja *um cubo de um metro de aresta*, entendendo-se por *aresta* o lado de um dos quadrados que formam as faces.

D'ahi provém a variedade de uuidades que podem ser tomadas para a avaliação dos volumes.

Na avaliação das superficies temos o metro quadrado, o decimetro quadrado, a vara quadrada, o kilometro quadrado, o palmo quadrado... emfim um quadrado tendo para lado uma unidade linear. Na avaliação dos volumes temos, semelhantemente, o metro cubico, o decimetro cubico, a vara cubica, o palmo cubico... emfim um cubo tendo para aresta uma unidade linear.

135.—Fixada a noção da unidade de volume, comecemos por indagar como se poderá medir o volume de um grande cubo, com um pequeno.

Volume de um cubo.

A analogia desta questão com aquella em que se tratou de instituir a área de um quadrado, dar-nos-á um meio facil de leval-a a effeito.

Supponhamos, por exemplo, que a aresta do cubo que se quer medir contenha 5 vezes a do menor, tomado por unidade. Dividamos o cubo em 5 camadas, no sentido de uma de suas faces. Cada camada terá espessura igual a do pequeno cubo. As bases destas camadas contendo 5 vezes 5 vezes uma das faces do pequeno cubo, cada camada conterá 5 vezes 5 pequenos cubos.

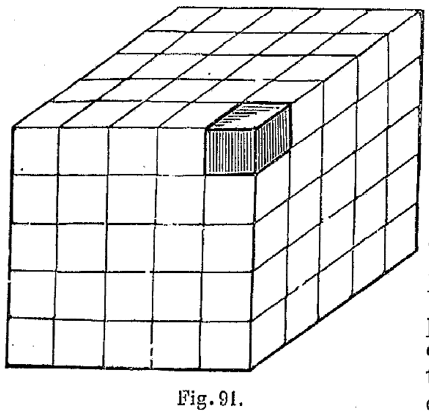
Fig. 91.

Pois as 5 camadas conterão em somma 5 vezes 5 vezes 5 pequenos cubos: multiplicação que, como se sabe, se indica 5^3.

Seguindo o mesmo caminho, e attendendo que 2 vezes 2 vezes 2 fazem 8, que 3 vezes 3 vezes 3 fazem 27, etc., ver-se-á que si qualquer das arestas do cubo considerado contivesse a aresta do pequeno

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 vezes,

o cubo considerado conteria:

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729 pequenos cubos.

D'ahi é que vem a dizer-se que 8 é o cubo de 2, 27 o cubo de 3, 64 o cubo de 4, etc., isto é, o numero de pequenos cubos (unidades de volume) contidos em um grande cubo, cujo lado é 2, 3, 4... vezes o lado do pequeno.

Tomando por unidade o *decimetro cubico*, isto é, um cubo tendo para aresta um decimetro, o *decametro cubico*, isto é, o cubo que tem para aresta um decametro ou 100 decimetros, terá necessariamente $100 \times 100 \times 100$ ou 1000000 de decimetros cubicos.

Tomando por unidade o palmo cubico, isto é, o cubo que tem para aresta um palmo, a *vara cubica*, isto é, o cubo que tem para aresta uma vara ou 5 palmos, terá $5 \times 5 \times 5$ ou 5^3 ou 125 palmos cubicos, etc.

136.—Os volumes, porém, que mais commummente se tem a medir não são limitados por seis quadrados iguaes, como no caso do *cubo*, tambem chamado *hexaedro regular*; mais geralmente são limitados por seis rectangulos ABCD. CBGF, CFED, DEHA, GFEH, ABGH.

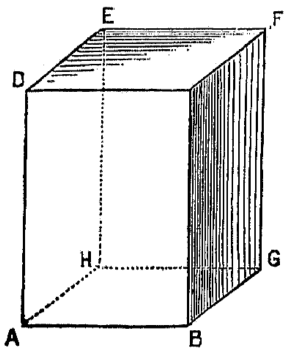

Fig. 92.

São então chamados *parallelepipedos rectangulos*; são limitados nas suas extremidades por dois rectangulos ABGH, DCFE, chamados *bases* do parallelepipedo, e lateralmente por quatro outros rectangulos, que têm particularmente o nome de *faces*; as faces oppostas AHED e BGFC, ABCD e HGFE, conservando em todos os seus pontos a mesma distancia uma da outra são chamadas *faces parallelas*, da mesma maneira que as linhas foram denominadas *linhas parallelas* quando conservavam em toda a extensão a mesma distancia entre seus pontos.

137.—Para medir o volume de um parallelepipedo rectangulo é natural que se deva seguir a mesma marcha que seguiu-se para medir o volume do cubo, que não é mais que um parallelepipedo rectangulo cujas arestas são todas iguaes entre si. Volume do parallelepipedo rectangulo.

Começar-se-á, pois, por medir separadamente o comprimento BG (fig. 93), a largura AB e a altura AD, quer em metros, quer em decimetros, quer em centimetros, etc.; multiplicar-se-ão os tres numeros achados, e o producto exprimirá o numero de metros cubicos, ou de decimetros cubicos, ou de centimetros cubicos, etc., contido no parallelepipedo.

Exemplifiquemos. Supponhamos que o comprimento BG seja de 4 metros, a largura AB de 5 e a altura AD de 6.

A recta AD sendo dividida em 6 partes iguaes, tiremos por cada um dos pontos de divisão planos parallelos á base: o parallelepipedo ficará assim dividido em 6 outros parallelepipedos, tendo cada um 4 metros de comprimento (BG), 5 de largura (AB) e 1 de altura (Aa).

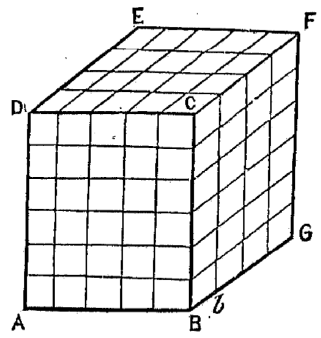

Fig. 93

Dividamos o lado BG em 4 partes iguaes, e pelos pontos de divisão tiremos planos parallelos á face anterior ABCD. Cada um daquelles 6 parallelepipedos ficará dividido em 4 outros, tendo, cada um destes, 5 metros de largura (AB), 1 metro de altura (Aa) e 1 metro de comprimento (Bb).

Dividindo, emfim, a aresta AB em 5 partes iguaes e pelos pontos de divisão tirando planos parallelos á face lateral BGFC, ficará cada um dos 6×4 ou dos 24 parallelepipedos, anteriormente determinados, decomposto em 5 outros parallelepipedos rectangulos de 1 metro de comprimento, 1 de largura e 1 de altura, isto é, em 5 cubos de um metro de aresta. Pois o parallelepipedo considerado conterá $6 \times 4 \times 5$ ou 120 metros cubicos

138.—De modo que, qualquer que seja o comprimento *a* de um parallelepipedo rectangulo, a sua largura *b* e a sua altura *c*, obter-se-á sempre seu volume

$$V = a.\ b.\ c,$$

producto dos comprimentos de tres arestas contiguas.

Mas, o producto do comprimento pela largura do parallelepipedo dá a area do rectangulo que lhe serve de base; de modo que tambem se póde dizer que *o volume do parallelepipedo rectangulo é o producto da area da base pela altura*; então representando por B a area da base, por H a altura, será o volume

$$V = B \times H$$

139.—Póde-se conceber o cubo ou um parallelepipedo rectangulo qualquer como gerado por um quadrado ou por um rectangalo ABGH (fig. 92) movendo-se parallelamente a si mesmo de modo que dois de seus vertices oppostos A e G ou B e H percorram cada um os pontos de uma das duas rectas AD e GF ou BC e HE perpendiculares ao plano do rectangulo ABGH ; este retangulo, pelo movimento que acabámos de imaginar e que se denomina *movimento de translação*, gerará o parallelepipedo ABGHDCFE.

Geração do parallelepipedo rectangulo.

140.—E' quasi inutil advertir que por uma *recta perpendicular a um plano* entende-se uma recta que, cahindo sobre este plano, não se inclina mais para um lado do que para outro. E que semelhantemente, um plano que, cahindo sobre outro, não se inclina mais para um lado do que para outro deste plano, lhe é *perpendicular* : estas duas definições são analogas a que demos de uma recta perpendicular á outra.

Recta perpendicular a um plano.

Plano perpendicular a outro.

Da primeira dessas definições deduz-se que *toda a recta AB, que é perpendicular a um plano X, deve ser perpendicular a qualquer outra AC, AD, AE, etc, que passar por seu pé neste plano.*

Propriedade da perpendicular a um plano.

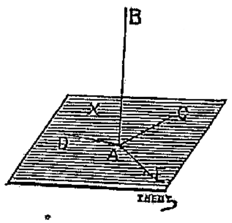

Fig. 94

Com effeito, é evidente que si ella se inclinasse sobre uma destas, inclinar-se-ia para um lado do plano ; pois não poderia ser-lhe perpendicular. Para concluirmos que uma recta AB e um plano X são perpendiculares entre si basta, portanto, reconhecermos ser a recta perpendicular a duas outras existentes no plano e conduzidas pelo seu pé.

Da definição de plano perpendicular a outro, segue-se que para um plano ser perpendicular a outro basta que elle contenha uma recta perpendicular a esse outro.

Condições para um plano ser perpendicular a outro.

141.—Dois planos que se interceptam dividem o espaço em quatro partes, cada uma das quaes tem

Noção de angulo diedro e

a denonimação de *angulo diedro*: assim angulo diedro é a porção indefinida do espaço comprehendida entre dois planos que têm um limite commum; os dois planos chamam-se *faces* do angulo, e o seu limite commum denomina-se *aresta*.

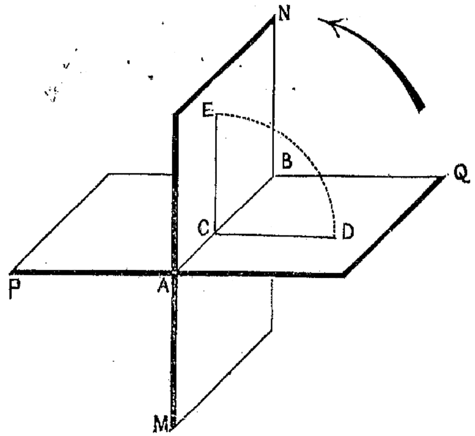

Fig. 95

Si imaginarmos o plano MN, que corta o plano PQ segundo a recta AB, a principio coincidindo com PQ e depois insensivelmente girando em torno de AB, no sentido da flecha, estes dois planos irão formando diversos angulos diedros correspondentes a cada posição do plano MN em relação a PQ.

Durante a rotação do plano MN em torno de AB, a perpendicular CD á intersecção commum irá formando com a sua primitiva posição, angulos rectilineos que marcarão as inclinações relativas dos dois planos, sem deixar de ser pependicular a AB.

Este angulo rectilineo, formado por duas perpendiculares, CD, CE, á aresta AB de um angulo diedro QABN e tiradas por um mesmo ponto C desta aresta, e cada uma em uma das faces do angulo diedro, denomina-se *angulo plano correspondente ao angulo diedro* e é a sua medida natural.

142.—Quando tres ou mais planos concorrem todos n'um ponto e se interceptam dois a dois formando angulos diedros, a porção indefinida do espaço comprehendida por elles tem o nome de *angulo polyedro*. O ponto de concurrencia dos planos denomina-se *vertice* do angulo polyedro; os angulos planos que o formam são as *faces*, e as linhas de intersecção destas as *arestas*.

de angulo polyedro.

Os angulos polyedros recebem os nomes particulares de angulos *triedros*, *tetraedros*, *pentaedros*, etc., conforme são formados por tres, quatro, cinco, etc., faces.

Feita esta pequena digressão, voltemos ao assumpto capital de nossas investigações.

Divisão do parallelepipedo em dois prismas triangulares equivalentes.

143.—Retomemos o parallelepipedo rectangulo ABGHDCFE da figura 92. Pelas diagonaes de suas bases ABGH e DCFE façamos passar um plano ADFG; este plano dividirá o parallelepipedo em duas partes ou em dois outros corpos iguaes entre si em volumes e chamados *prismas triangulares*: têm para bases dois triangulos e para faces tres rectangulos, iguaes respectivamente cada um a cada um.

Pela geração do parallelepipedo se concebe facilmente a equivalencia dos dois prismas. A diagonal AG (que não foi traçada na fig. 92) do rectangulo ABGH divide-o em dois triangulos ABG e AGH, perfeitamente iguaes; e no movimento de translação do rectangulo ABGH para gerar o parallelepipedo, cada um destes triangulos gera um dos prismas triangulares ABGDCF e AGHDFE (fig. 96).

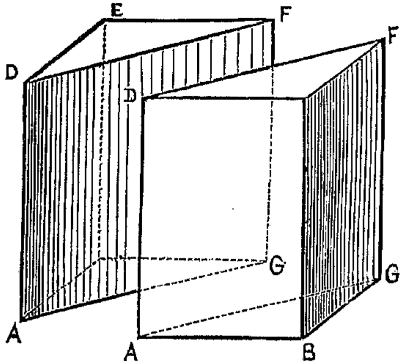

Fig. 96.

Parallelipipedo recto.

144.—Nem sempre um parallelepipedo tem para bases dois rectangulos e as arestas lateraes são perpendiculares ás bases; casos ha em que as bases são apenas dois parallelogrammos iguaes e as arestas lateraes são ainda perpendiculares ás bases; em taes casos o parallelepipedo denomina-se *parallelepipedo recto*; é então gerado pelo movimento de translação de um parallelogrammo.

145.—Imaginemos um parallelogrammo AB-

Parallelepipedo recto transformado no parallelepipedo rectangulo equivalente.

CD. Transformemos este parallelogrammo em um rectangulo equivalente ABC'D', e concebamos a figura ABCD' em uma segunda posição parallela á primeira, depois de um movimento de translação ao longo de duas perpendiculares ao plano do papel levantadas por dois vertices oppostos, A e C, por exemplo.

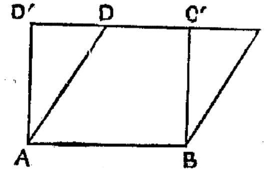

Fig. 97.

Neste movimento, o parallelogrammo gerará um *parallelepipedo recto*, o rectangulo gerará um *parallelepipedo rectangulo*; os dois triangulos iguaes ADD' e BCC' gerarão dois *prismas triangulares* iguaes, um á direita e outro á esquerda; a figura toda ABCD' gerará um *prisma quadrangular* recto.

Si deste prisma quadrangular tirarmos o prisma triangular da direita, ficará o parallelepipedo rectangulo; si tirarmos o prisma triangular da esquerda, ficará o parallelepipedo recto; ora, si de um mesmo volume tirarmos quantidades iguaes, os volumes restantes deverão necessariamente ser iguaes, e portanto *o parallelepipedo recto é equivalente ao parallelepipedo rectangulo de base equivalente e da mesma altura.*

D'ora em diante entenderemos por corpos equivalentes aquelles que, affectando fórmas differentes, occupam, entretanto, no espaço indefinido que os cerca, porções iguaes, isto é, têm volumes iguaes.

Parallelepipedo obliquo, e

146.—Um parallelepipedo pode ter ainda para bases parallelogrammos iguaes e parallelos, e, entretanto, suas arestas lateraes não serem perpendiculares ás bases, e sim igualmente inclinadas em relação ás mesmas bases; então recebe o nome de *parallelepipedo obliquo*, e seu volume obtem-se pela mesma regra que a do parallelepipedo rectangulo ou do parallelepipedo recto: *é o producto da area da base pela altura.*

sua transformação no parallelepipedo recto equivalente.

Para proval-o, basta demonstrar que *qualquer parallelepipedo obliquo ABCDKLMN é equivalente a um parallelepipedo recto ABCDEFGH da mesma base e da mesma altura.*

Os dois parallelepipedos se interceptando produzem dois prismas triangulares iguaes, um BLF CMG á direita, outro AKEDNH á esquerda; são iguaes estes dois prismas triangulares porque os elementos do primeiro são respectivamente iguaes aos elementos do segundo, ou porque podem ser concebidos como gerados pelo movimento de translação dos triangulos iguaes AKE e BLF movendo-se o primeiro ao longo de KN e de AD, o segundo ao longo de LM e de BC, que são arestas iguaes do parallelepipedo obliquo.

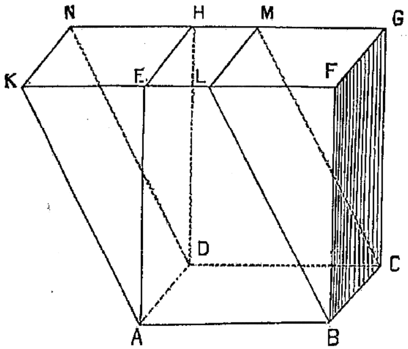

Fig. 98.

Si da figura total tirarmos o prisma triangular da direita ficará o parallelepipedo obliquo considerado; si da figura total tirarmos o prisma triangular da esquerda ficará o parallelepipedo recto; ora, de um mesmo corpo, que é o representado pela figura toda, tirando-se volumes iguaes, os volumes restantes deverão necessariamente ser iguaes; portanto, o parallelepipedo obliquo é equivalente ao recto da mesma base e da mesma altura.

Pois, o volume de qualquer parallelepipedo obtem-se sempre multiplicando-se a area de sua base pela sua altura, isto é, obtem se sempre pela fórmula: **Volume de qualquer parallelepipedo.**

$$V = B \times H.$$

147.—Conhecido o volume de um parallelepipedo qualquer, e observando-se que no movimento de translação de um quadrado ou de um rectangulo ou de um parallelogrammo para gerar um parallelepipedo recto ou obliquo, os dois triangulos iguaes, em que se pode dividir por uma diagonal o quadrádo ou o rectangulo ou o parallelogrammo, geram dois prismas triangulares equivalentes, segue-se que **Volume do prisma triangular.**

o volume de qualquer destes prismas vem a ser a metade do volume do parallelepipedo.

Ora, sendo B a area da base do parallelepipedo e H sua altura, o volume do prisma triangular será a metade de B por H; porém a metade de B é a area do triangulo que serve de base ao prisma, logo *todo o prisma triangular tem por volume o producto da area de sua base pela sua altura*, ou todo o prisma triangular é equivalente á metade de um parallelepipedo de base dupla e de altura igual a do prisma.

148.—Um prisma, porém, nem sempre tem para base um triangulo ou, por outra, nem sempre é gerado pelo movimento de translação de um triangulo. Pode ser gerado por um polygono qualquer caminhando parallelamente a si mesmo e seguindo os pontos de duas rectas parallelas tiradas no espaço por dois de seus vertices não consecutivos. E' um corpo limitado por dois polygonos iguaes e parallelos e por tantos rectangulos (prisma recto, como Y) ou por tantos parallelogrammos (prisma obliquo) quantos são os lados desses polygonos que lhes servem de bases. **Prismas em geral.**

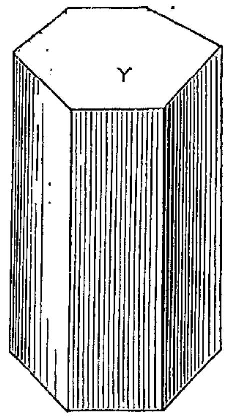

Fig. 99.

Si o polygono gerador for por exemplo um pentagono ABCDE (fig. 100) obrigado a seguir os pontos de duas perpendiculares AJ e DG ao seu plano, gerar-se-á um *prisma pentagonal recto*, tal como ABCDEJIHGF.

Si o polygono gerador for o mesmo pentagono reproduzido em *abcde* (fig. 100) obrigado, porém, a seguir os pontos de duas obliquas *aj* e *dg* ao seu plano, gerar-se-á um *prisma pentagonal obliquo*, tal como *abcdejihgf*.

Os pentagonos KLMNO e *klmno* representam uma das posições dos pentagonos geradores em seus respectivos movimentos de translação, e são por conseguinte respectivamente iguaes ás bases dos prismas, ou representam secções feitas nos mesmos prismas por planos parallelos ás suas respectivas bases.

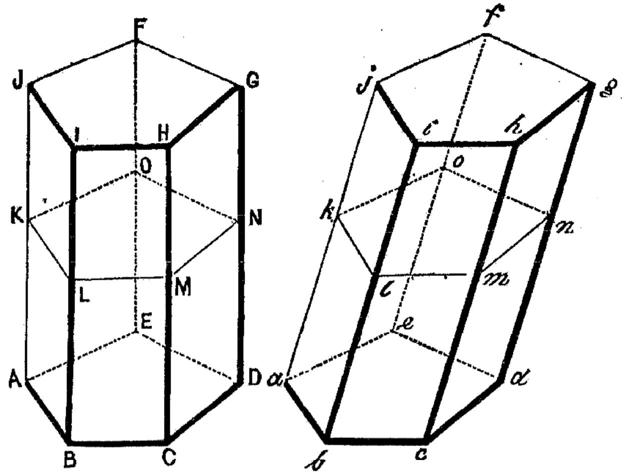

Fig. 100.

149.—Assim como para avaliarmos a area de um polygono ABCDEF (fig. 101) o dividimos em triangulos por meio de diagonaes tiradas de um vertice A para os outros não consecutivos, com o fim de reduzir a instituição da area do polygono a Volume de qualquer prisma.

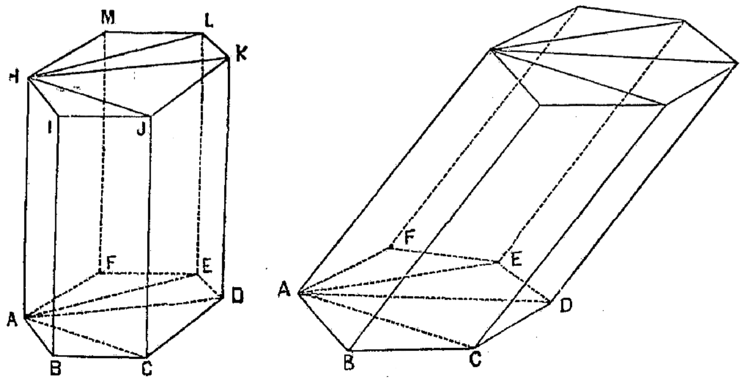

Fig. 101.

do triangulo, assim tambem para avaliarmos o volume de um prisma o dividiremos em prismas triangulares ABCHIJ, ACDHJK, etc., por meio de planos

diagonaes tirados por uma aresta AH e cada uma das outras não consecutivas. A somma dos volumes destes prismas triangulares dar-nos-á o volume de todo o prisma.

Ora, o volume de cada prisma triangular sendo o producto da area do triangulo que lhe serve de base pela altura commum, o volume de todo o prisma será o producto da somma das areas dos triangulos, em que o polygono de sua base se decompõe, por esta altura commum.

Portanto, qualquer que seja o polygono da base *o volume de um prisma é igual ao producto da area de sua base pela sua altura*

150.—Reflectindo-se sobre o estudo que acabámos de fazer, tem-se que o volume de qualquer parallelepipedo ou de qualquer prisma obtem-se sempre pela seguinte regra: mede-se primeiro em metros quadrados ou em decimetros quadrados ou em centimetros quadrados, etc., a area da base do corpo considerado; depois multiplica-se o numero achado pelo numero de metros, de decimetros, ou de centimetros, etc., que a altura desse corpo contém, e o producto dá o numero de metros cubicos, ou de decimetros cubicos ou de centimetros cubicos, etc., contidos no espaço occupado pelo corpo, e é por conseguinte sua medida.

151.—Quer-se, por exemplo, calcular a porção d'agua que pode conter um reservatorio com a fórma de um prisma hexagonal regular de $0^m,75$ de altura ou profundidade, sendo de 1^m o lado da base hexagonal.

A area da base do prisma considerado sendo 6 vezes a area do triangulo equilatero de 1^m de lado é igual a

$$\frac{6^{m^2}\sqrt{3}}{4} \text{ ou a } \frac{3^{m^2}\sqrt{3}}{2}$$

Sendo o volume de um prisma $V = B \times H$, ter-se-á:

$$V = \frac{3.\sqrt{3}}{2} \times 0{,}75 = 1^{m^3},946 \text{ ou } 1946 \textit{ litros} \text{ d'agua.}$$

152.—Tendo visto tudo o que é concernente aos parallelepipedos e aos prismas em geral, examinemos agora as *pyramides*, isto é, os corpos limitados por um certo numero de triangulos que partem todos de um mesmo vertice V e que terminam em uma base polygonal qualquer. Pyramides.

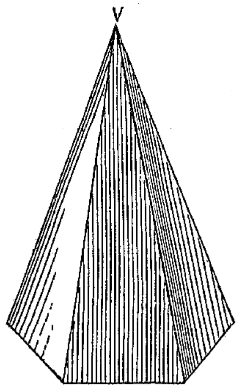

Fig. 102.

E' necessario considerar estas especies de corpos, não só porque se encontram em alguns edificios como, por exemplo, nas torres de algumas igrejas e em outras obras, senão tambem porque todos os corpos terminados por planos (*polyedros*, em geral) podem ser decompostos em pyramides, assim como as figuras rectilineas se decompõem em triangulos.

A decomposição de um polyedro em pyramides se concebe facilmente imaginando um ponto qualquer em seu interior e tirando deste ponto rectas para os differentes vertices do polyedro.

Ha no mercado figuras de madeira, de papel, de arame, etc., que, representando polyedros de differentes generos, muito poderão concorrer para a facil comprehensão destas e de outras decomposições.

153.—Distinguem-se as pyramides umas das outras pelo nome do polygono que lhes serve de base, assim ha pyramides triangulares, tambem conhecidas pelo nome de *tetraedos*, pyramides quadrangulares, pentagonaes, hexagonaes, etc. Suas especies

Quando a pyramide tem por base um polygono regular de qualquer numero de lados e a sua altura, isto é, a perpendicular baixada do vertice sobre a base, cae no centro desta base, a pyramide denomina-se *pyramide regular*.

154.— Cortando-se uma pyramide por um plano parallelo á base, a secção determina um polygono semelhante ao da base, e tem-se em ABCDEF GH o que se chama um *tronco de pyramide* ou uma *pyramide truncada*. Secção feita em uma pyramide.

Para pôr em evidencia a semelhança do polygono ABCD da base da pyramide com o polygono EFGH determinado pela secção, basta observar que achando-se EF e AB em planos parallelos não podem se encontrar, e como se acham no mesmo plano, isto é, no plano da face triangular VAB, são rectas parallelas entre si. Semelhantemente FG é parallela a BC, GH parallela a CD, HE parallela a DA.

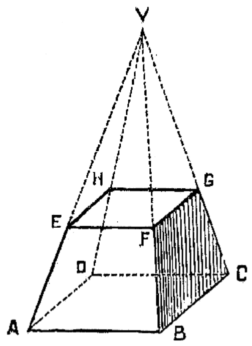

Fig. 103

Os angulos da secção e os da base tendo seus lados respectivamente parallelos são pois iguaes dois a dois, isto é, os dois polygonos são equiangulos e portanto satisfazem á segunda condição de semelhança: têm lados proporcionaes. De facto, o triangulo VEF é semelhante ao triangulo VAB; então

$$\frac{EF}{AB} = \frac{VF}{VB} \dots\dots\dots (1)$$

Mas, os triangulos VFG e VBC tambem são semelhantes; então

$$\frac{VF}{VB} = \frac{FG}{BC}$$

Comparando estas duas proporções, que têm a razão commum $\frac{VF}{VB}$, tem-se :

$$\frac{EF}{AB} = \frac{FG}{BC}$$

e assim por diante para os outros lados dos dois polygonos.

Relação entre as areas da secção e da base.

155.— O tronco de pyramide é a differença entre a pyramide total VABCD, cuja altura é VQ, e a pyramide parcial VEFGH, cuja altura é VP. Ora, os triangulos semelhantes VPF e VQB dão a proporção :

$$\frac{VP}{VQ} = \frac{VF}{VB}$$

que comparada com a proporção (1) dá :

$$\frac{EF}{AB} = \frac{VP}{VQ} \cdots\cdots (2)$$

Mas, lembrando que as areas dos polygonos semelhantes ABCD e EFGH estão entre si como os quadrados de dois lados homologos, isto é, que

$$\frac{\text{area EFGH}}{\text{area ABCD}} = \frac{EF^2}{AB^2}$$

em virtude da igualdade (2) será :

$$\frac{\text{area EFGH}}{\text{area ABCD}} = \frac{VP^2}{VQ^2}$$

Portanto, as areas da secção e da base de uma pyramide estão entre si como os quadrados das alturas das pyramides, total e parcial, que determinam o tronco. O que significa que si VQ contiver VP duas, tres, quatro, etc vezes, a area da base conterá a area da secção quatro, nove, dezeseis, etc vezes.

Decomposição de um tetraedro em prismas exteriores e interiores.

156.— Isto posto, imagine-se um tetraedro VABC. Divida-se a sua altura em partes iguaes e tirem-se planos MNV, JKL, GHI, DEF parallelos

á base ABC pelo vertice V e pelos pontos de divisão da altura. Ficará assim o tetraedo dividido nos troncos DEFABC, GHIDEF, JKLGHI e no tetraedo VJKL.

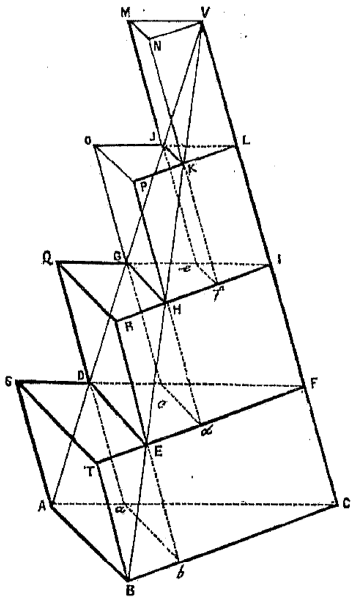

Fig. 104.

Pelos pontos A, D, G, J e B, E, H, K tirem-se rectas parallelas á aresta VC e conduzam-se por estas parallelas, tomadas duas a duas, planos, que prolongados encontrarão os triangulos determinados pelas secções parallelas á base.

Deste modo formam-se os prismas MNVJKL, OPLGHI, QRIDEF, STFABC, exteriores ao tetraedro considerado, e os prismas JKLefI, GHIcdF DEFabC, interiores ao mesmo tetraedo; e é evidente que o prisma interior correspondente a cada tronco é igual ao exterior immediatamente superior.

Differença entre as sommas dos prismas exteriores e interiores.

157—Representemos por E, E', E'', E''' os volumes dos prismas exteriores e por I, I', I'' os volumes dos prismas interiores, e seja D a differença entre a somma dos primeiros e a somma dos segundos, teremos:

$$D = (E + E' + E'' + E''') - (I + I' + I'')$$

ou

$$D = E + E' + E'' + E''' - I - I' - I''$$

e como

$$E' = I,\ E'' = I' \text{ e } E''' = I'', \text{ teremos: } D = E$$

Isto é, *a differença entre a somma dos volumes dos prismas exteriores e a somma dos volumes dos prismas interiores a um tetraedro é igual ao prisma exterior que tem por base a base do tetraedro.*

158.—Evidentemente, porém, indica-nos a figura que a porção de espaço occupada pelo tetraedro ou o seu volume é menor que a somma dos volumes dos prismas exteriores e maior que a somma dos volumes dos prismas interiores, isto é, o volume do tetraedro está comprehendido entre as duas referidas sommas; portanto, quanto menor for a differença entre estas duas sommas tanto mais o volume do tetraedro se approximará de ser igual a qualquer dellas. Ora, esta differença, que é representada pelo prisma exterior STFABC, pode-se tornar tão pequena quanto se quizer dividindo a altura do tetraedro em tão grande numero de partes quanto se quizer.

Tetraedro considerado como o limite de uma daquellas sommas.

159.— Si tivermos, pois, dois tetraedros da mesma base e da mesma altura, deverão elles ter volumes iguaes.

Tetraedros equivalentes.

Com effeito, dividindo-se a altura commum aos dois tetraedros em um numero infinitamente grande de partes iguaes e construindo em cada tetraedro prismas exteriores correspondentes, estes prismas,

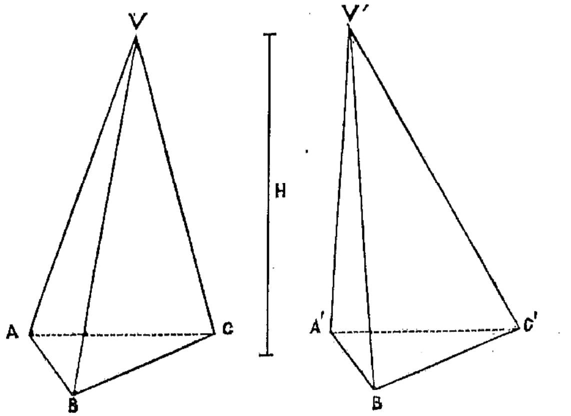

Fig. 105.

comprehendidos entre planos parallelos e equidistantes, terão necessariamente a mesma altura; as secções que lhes servem de bases, estando respectivamente á mesma distancia do vertice, serão iguaes cada uma a cada uma (n. 155): os prismas exteriores correspondentes são pois equivalentes, por terem a mesma base e a mesma altura e, portanto, os mesmos volumes; por conseguinte, a somma dos volumes dos prismas exteriores do primeiro tetraedro (fig. 105) é igual á dos prismas exteriores do segundo, e, em virtude do que ficou explanado no numero antecedente, o volume do primeiro tetraedro é igual ao do segundo.

Pois, sem conhecer quaes os volumes dos tetraedros, sabe-se já com certeza que, tendo elles a mesma base e a mesma altura, esses volumes devem ser iguaes ou os tetraedros equivalentes.

160.—Mas, é claro que si, em uma pyramide qualquer VABCDE, tirarmos pela aresta VA e pelas outras arestas não consecutivas á primeira, planos secantes VAC, VAD, estes planos dividirão a pyramide em tantas pyramides triangulares ou tetraedros, quantos são os lados da base ABCDE menos dois, ou quantos são os triangulos em que a base, que é um polygono, se decompõe pelas diagonaes AC, AD.

Decomposição de uma pyramide em tetraedros.

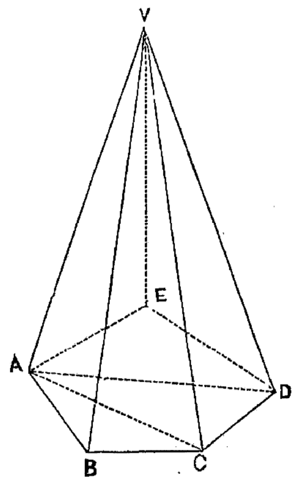

Fig. 106.

Si, portanto, pudermos descobrir o meio de calcular o volume de uma pyramide triangular (tetraedro) teremos o meio de calcular o volume de uma pyramide qualquer, por isso que bastará decompol-a em tetraedros, avaliarmos os volumes destes tetraedros pela regra que tivermos descoberto, e sommar esses volumes.

161.—Procuremos, pois, determinar o volume de uma pyramide triangular ou tetraedro.

Seguindo sempre o methodo que temos adoptado, de partir daquillo que se conhece para chegar ao que se quer conhecer, comparemos a fórma da pyramide triangular com a do prisma triangular, cujo volume já sabemos avaliar.

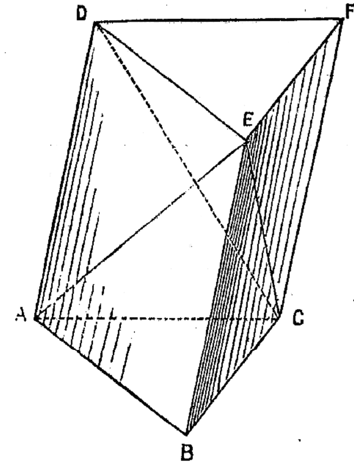

Fig. 107

Ver-se-á que, tendo-se um prisma triangular ABCDEF, será sempre possivel, fazendo passar um plano pelos vertices E, A, C, destacar uma pyramide triangular EABC.

E, inversamente, tendo-se uma pyramide triangular EABC, será sempre possivel, tirando-se pelos vertices A e C desta pyramide as rectas AD, CF paralellas á aresta BE, e pelo vertice E tirando um plano parallelo á base ABC da pyramide, formar um prisma triangular ABCDEF, da mesma base e da mesma altura que a pyramide.

Decomposição de um prisma triangular em tres pyramides equivalentes.

Este prisma é formado da pyramide triangular EABC e da pyramide quadrangular EACFD, que represento aqui ao lado, cujo vertice é E e cuja base é a face posterior ACFD do prisma.

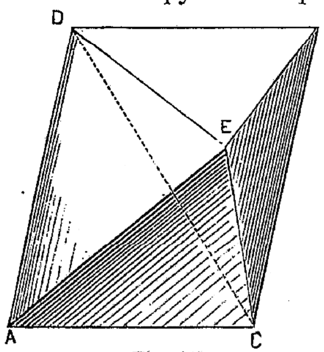

Fig. 108

Si pelos pontos D, E, C se fizer passar um novo plano, este dividirá a pyramide quadrangular em duas pyramides triangulares EACD, ECFD, representadas na fig. 109; suas alturas serão iguaes, pois que ellas têm seu vertice no mesmo ponto E e suas bases sobre um mesmo plano ACFD.

Estas bases ACD e DCF serão tambem iguaes como metades do parallelogrammo ACFD.

As pyramides EACD, ECFD serão pois equivalentes por terem a mesma base e a mesma altura.

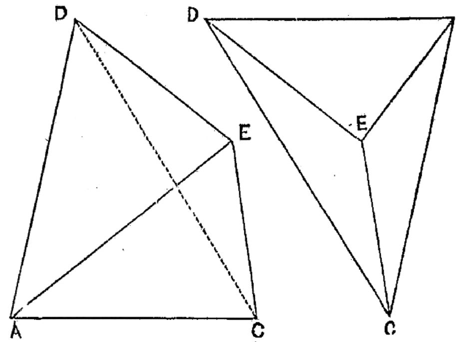

Fig. 109

Porem, a segunda podendo ser considerada como tendo para base o triangulo DEF, igual ao triangulo ABC, e seu vertice considerado em C, terá a mesma base e a mesma altura que o prisma, e será equivalente á primeira pyramide EABC.

Pois, as tres pyramides EABC, EACD, ECFD, em que o prisma se decompõe, serão equivalentes; e cada uma, portanto, equivalente ao terço do prisma triangular.

Volume da pyramide triangular ou tetraedro.

162.—Ora, o volume de um prisma triangular é o producto da area da base pela altura; logo *o volume da pyramide triangular será o terço do producto da area da base pela altura*, que no prisma e na pyramide são as mesmas.

Volume de qualquer pyramide.

163.—Mais geralmente, *o volume de uma pyramide qualquer tem por medida o terço do producto da area de sua base por sua altura*, porque si se divide em triangulos a base da pyramide e si se tiram planos pelo vertice e por cada uma das diagonaes desta base, a pyramide ficará dividida em pyramides triangulares da mesma altura; o volume de cada uma destas ultimas sendo medido pelo terço do producto de sua base por sua altura, a somma de seus volumes ou o volume da pyramide considerada será evidentemente igual ao terço do producto da somma de suas bases pela altura commum, isto é, ao terço do producto da base da pyramide considerada por sua altura.

164.—Designando por V, B, H os tres numeros que medem respectivamente o volume de uma pyramide, a area de sua base e o comprimento de sua altura, tem-se a formula geral

$$V = \frac{1}{3} B . H$$

Pois, *toda pyramide é o terço do prisma da mesma base e da mesma altura; duas pyramides quaesquer de bases equivalentes e da mesma altura são equivalentes; duas pyramides estão entre si como os productos das bases pelas alturas; duas pyramides da mesma base estão entre si como suas alturas; duas pyramides da mesma altura estão entre si como suas bases.*

Volume do tetraedro regular.

165.—Quando uma pyramide triangular ou um tetraedro é regular póde-se obter o seu volume em funcção de sua aresta *a*; questão esta analoga a que foi resolvida na 2ª parte, quando se tratou de instituir a area de um triangulo regular, apenas em funcção do lado.

Um tetraedro regular é comprehendido sob quatro triangulos equilateros iguaes. Sua base tem pois para expressão (n. 91)

$$\frac{a^2 \sqrt{3}}{4}.$$

Sua altura é o lado do angulo recto, lado catheto, de um triangulo rectangulo tendo para segundo catheto o raio do circulo circumscripto ao triangulo da base, isto é $\frac{a}{\sqrt{3}}$, e para hypothenusa a aresta *a* do tetraedro.

Esta altura é, por conseguinte,

$$\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Tem-se pois, para o volume do tetraedro regular em funcção de sua aresta

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \times \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

Si o tetraedro considerado tivesse, por exemplo, 1 metro de aresta, seu volume seria

$$V = \frac{1^{m3}\sqrt{2}}{12} = \frac{1^{m3},4142136}{12} = 0^{m3},117851$$

Superficies lateraes e totaes dos polyedros.

166.—Depois de ter instituido o volume de um prisma qualquer, o de uma pyramide, e o de um polyedro qualquer pela sua decomposição em pyramides, deveriamos passar á determinação das areas das superficies lateraes ou totaes destes corpos.

Attendendo, porém, serem elles limitados por superficies planas, cujas areas já foram instituidas na primeira parte deste curso, não será difficil obter a somma destas areas, que dará para cada caso a area da superficie lateral ou total (quando incluidas as bases) de cada um dos referidos corpos.

Area da superficie total de um cubo.

167.—Assim, por exemplo, sabendo-se que a area de um quadrado é o quadrado de um de seus lados, a area da superficie total de um cubo, cuja aresta seja *a*, será $6a^2$, pois que o cubo é formado por seis quadrados iguaes.

Area da superficie lateral de um prisma recto.

168.—A superficie lateral de um prisma recto se compõe de tantos rectangulos quantos são os lados do polygono de sua base, e todos estes rectangulos, cujas bases são os lados deste polygono, têm a mesma altura, que é a do prisma.

Si designarmos pois por a, b, c, d... os comprimentos dos lados da base e por H a altura commum, as areas dos diversos rectangulos que compõem a superficie lateral do prisma serão expressas pelos productos a.H, b.H, c.H, etc. Esta superficie lateral terá pois para valor

$$(a + b + c + d + \ldots).H$$

Porém, a somma dos comprimentos dos lados é o perimetro da base do prisma, pois a *area da superficie lateral de um prisma recto é igual ao producto do perimetro de sua base pela sua altura.*

Juntando a este producto as areas das duas bases parallelas ou o dobro de uma dellas, ter-se-á a area da superficie total do prisma recto.

Area da superficie total de um tetraedro regular.

169.—A pyramide triangular regular ou tetraedro regular sendo formado de quatro triangulos regulares e iguaes entre si, sua área total será o producto por 4 da área de um destes triangulos. Ora, a área de um triangulo regular, é ...... $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Pois, a area da superficie total de um tetraedro regular, cuja aresta é o proprio lado do triangulo, será

$$a^2\sqrt{3}.$$

Area da superficie lateral de uma pyramide regular.

170.—Uma pyramide regular qualquer tem para faces tantos triangulos isosceles, iguaes entre si, quantos são os lados de sua base. A area da superficie lateral de uma pyramide regular se obterá, pois, multiplicando a area de um destes triangulos pelo numero de lados da base da pyramide.

Designando por a o comprimento de um destes lados e por h a altura commum dos triangulos das faces, altura essa que tem então o nome de *apothema* da pyramide, será $\frac{a}{2}.h$ a area de uma das faces. Si for n o numero de lados da base, será $\frac{na}{2}.h$ a area da da superficie lateral da pyramide, isto é, *a area da superficie lateral de uma pyramide regular é o semi perimetro da base pelo apothema.*

Corpos redondos

171.—Depois de ter medido todos os corpos terminados por planos, vamos procurar o caminho para a instituição da medida dos corpos cujas superficies são curvas. E como não temos tratado na terceira parte senão das figuras cujos contornos não en-

cerram outras curvas senão a circumferencia, não examinaremos aqui senão os corpos cujas curvaturas são circulares, chamados *corpos redondos.*

No exame destes corpos teremos dois objectos a considerar: a medida de suas superficies e a medida de seus volumes; porque estas superficies sendo ou inteiramente curvas, ou em parte planas e em parte curvas, não poderemos reduzir sua medida ao que dissemos na primeira parte, como acabámos de fazer para os corpos terminados unicamente por planos.

Cylindro; geração da superficie cylindrica.

172.—O mais simples de todos os corpos redondos é o *cylindro recto, de base circular*; é um corpo limitado por tres superficies, das quaes duas, que lhe servem de bases, são planas, circulares, iguaes e parallelas, sendo a terceira curva e supposta gerada por uma recta que caminha no espaço, percorrendo os pontos de uma das circumferencias das bases; ou é um corpo gerado por um circulo que se move parallelamente a si mesmo, e de tal modo que todos os pontos da circumferencia deste circulo descrevem rectas parallelas, chamadas *arestas* do cylindro.

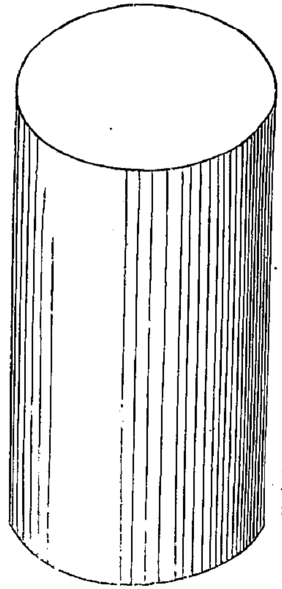

Fig. 110.

Geração do cylindro

173.—O cylindro tambem pode ser gerado por um rectangulo ABCD que faz uma rotação completa em torno de um de seus lados, AD por exemplo. Neste movimento de rotação do rectangulo os pontos B e C descrevem as circumferencias das bases, os lados AB e DC descrevem os circulos destas bases, o lado BC descreve a superficie cylindrica e qualquer ponto E ou F ou G do rectangulo descreve uma circumferencia tendo para raio respectivamente as perpendiculares EL, DF, MG ao eixo de rotação AD que marca a altura do cylindro.

174.—Consideremos um cylindro e inscrevamos em cada uma das suas bases um polygono regular qualquer; imaginemos planos passando pelos lados correspondentes destes dois polygonos; teremos assim um prisma regular inscripto ao cylindro.

Cylindro concebido como limite de um prisma, e

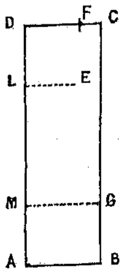

Fig. 111.

A area da superficie lateral deste prisma obtem-se, como se sabe (n. 168), multiplicando o perimetro da base pela altura do prisma. Duplicando-se successivamente o numero de lados dos polygonos inscriptos nas bases do cylindro ou o numero de faces do prisma considerado, os perimetros dos polygonos resultantes vão tendendo para um limite fixo que é a circumferencia de uma das bases do cylindro; a altura do prisma, assim duplicado successivamente, fica constantemente igual á altura do cylindro; e a area da superficie lateral do prisma vai tendendo tambem para um limite fixo, que é a area da superficie lateral do cylindro.

determinação da area da sua superficie lateral,

Pois, a *area da superficie lateral de um cylindro é o producto da circumferencia de sua base pela sua altura.*

175.—Chamando R o raio desta circumferencia, o seu comprimento é $2\pi R$. Então, chamando S a area da superficie lateral de um cylindro, R o raio de sua base, e H a sua altura, ter-se-á:

$$S = 2\pi R.H$$

Juntando á esta area lateral as areas dos dois circulos das bases ou o dobro $2\pi R^2$ da area de um delles, ter-se-á para a area total do cylindro:

$$T = 2\pi R.H + 2\pi R^2$$

ou, pondo $2\pi R$ em evidencia:

$$T = 2\pi R\,(H + R)$$

176.—A formula

$$S = 2\pi R \times H$$

comparada com a que dá a area de um rectangulo, mostra-nos que a superficie lateral de um cylindro equivale a de um rectangulo que tenha para base a circumferencia da base do cylindro rectificada e para altura a propria altura do cylindro.

Superficie cylindrica comparada com a de um rectangulo.

Com effeito, não é difficil de conceber que todo o cylindro, tal como os vemos nas columnas dos edificios, póde ser desdobrado ou desenvolvido em um rectangulo com as dimensões indicadas.

177.—A concepção do cylindro como limite de prismas rectos cujo numero de faces cresce indefinidamente, tornando-se infinitamente estreitas, dá-nos immediatamente a medida do seu volume. Porque sendo o volume de um prisma o producto da area do polygono da base pela altura, *o volume do cylindro será o producto da area do circulo que lhe serve de base*, que é o limite do polygono, *pela sua altura*, que é a mesma do prisma. Sendo R o raio da base do cylindro, a area do circulo desta base será πR^2, e sendo H a sua altura, seu volume será:

Volume do cylindro

$$V = \pi R^2.H$$

178.—Depois do cylindro o mais simples dos corpos redondos é o *cone* recto, de base circular: é um corpo limitado por duas superficies, das quaes a primeira, que lhe serve de base, é plana e perfeitamente circular, sendo a segunda curva, e supposta gerada por uma recta que caminha no espaço, percorrendo os pontos da circumferencia da base e obrigada a girar em torno de uma perpendicular ao centro desta base, passando constantemente por um ponto V desta perpendicular.

Cone; geração da superficie conica.

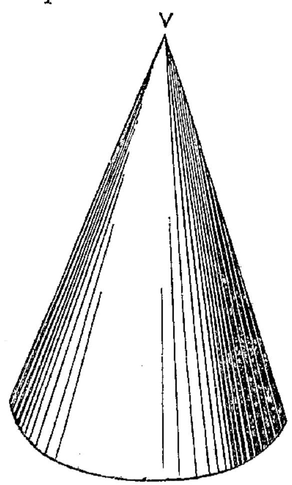

Fig. 112.

179.— O cone tambem póde ser gerado por um triangulo rectangulo que faz uma rotação completa em torno de um de seus lados cathetos, VO por exemplo.

Geração do cone.

Neste movimento de rotação do triangulo AVO, o ponto A descreve a circumferencia da base, o catheto AO o circulo da base, a hypothenusa AV, que passa a ser a *aresta* do cone, descreve a superficie conica, e qualquer ponto E, F ou G do triangulo descreve uma circumferencia tendo para raio respectivamente as perpendiculares EO, FC, GD ao eixo de rotação VO, que marca a altura do cone.

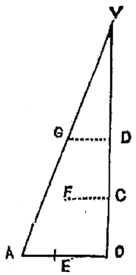

Fig. 113.

Cone concebido como limite de uma pyramide, e determinação da area da sua superficie lateral

180.—Consideremos um cone e inscrevamos ao circulo de sua base um polygono regular qualquer; imaginemos planos passando pelo vertice V do cone e por cada um dos lados deste polygono; teremos assim uma pyramide regular inscripta ao cone.

A area da superficie lateral desta pyramide obtem-se, como se sabe, (n. 170) multiplicando o semi-perimetro do polygono da base pelo apothema da pyramide. Duplicando-se successivamente o numero de lados deste polygono ou o numero de faces da pyramide, os perimetros dos polygonos resultantes vão tendendo para um limite fixo que é a circumferencia da base do cone; o apothema da pyramide vae successivamente augmentando e tendendo a confundir-se com uma das arestas do cone; e a superficie lateral da pyramide vae tendendo por sua vez para um limite fixo que é a superficie lateral do cone.

Pois, *a area da superficie lateral de um cone é o producto da semi-circumferencia da sua base pela sua aresta.*

181.—Chamando R o raio desta circumferencia, o seu comprimento é $2\pi R$, e a metade deste comprimento é πR.

Então, chamando S a area da superficie lateral do cone, R o raio de sua base, e A o comprimento de uma aresta, ter-se-á:

$$S = \pi R \cdot A$$

Juntando á esta area lateral a area do circulo da base, que é πR^2, ter-se-á para a area total do cone:

$$T = \pi RA + \pi R^2$$

ou, pondo πR em evidencia:

$$T = \pi R (A + R)$$

182.—Si, em vez de ser conhecida a aresta A do cone, que é a hypothenusa do triangulo gerador, fosse conhecida a altura H, que é um catheto deste triangulo, e o raio da base, que é o outro catheto, poderiamos, pelo theorema de Pythagoras, fazer

$$A = \sqrt{R^2 + H^2}$$

Então a area da superficie lateral do cone se avaliaria pela formula

$$S = \pi R \cdot \sqrt{R^2 + H^2}$$

183.—A formula

$$S = \pi R \cdot A$$

Superficie conica comparada com a de um triangulo.

comparada com a que dá a area de um triangulo, mostra-nos que a superficie lateral de um cone é equivalente á de um triangulo tendo para base a circumferencia da base do cone rectificada e para altura a aresta desse cone.

Volume do cone

184.—A concepção do cone como o limite de pyramides inscriptas cujo numero de faces cresce indefinidamente, tornando-se infinitamente estreitas, dá-nos immediatamente a medida do seu volume. Porque, sendo o volume de uma pyramide o terço da area do polygono de sua base pela sua altura; *o volume do cone será o terço da area do circulo que lhe serve de base*, que é o limite do polygono da base da pyramide, *pela altura do cone*, que a mesma da pyramide.

Sendo R o raio da base do *cone*, a area do circulo desta base será πR^2; e, sendo H a sua altura, seu volume será:

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 . H$$

Cone comparado com o cylindro.

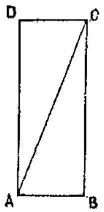

Fig. 114

185.—Dahi se infere que o volume gerado pelo triangulo ABC, ou o volume do cone, é um terço do volume gerado pelo rectangulo ABCD, ou do volume do cylindro, da mesma base e da mesma altura; e que o volume gerado pelo outro triangulo ADC deve ser *dois terços* do volume gerado pelo rectangulo ABCD.

Cone truncado ou tronco de cone, e seu volume.

186.—Tem-se algumas vezes necessidade de medir um corpo como BCDEFGH, que se chama *cone truncado* ou *tronco de cone*: é a parte que fica de um cone AFGH quando delle se tira um cone menor ABCDE, por meio de uma secção parallela á base FGH.

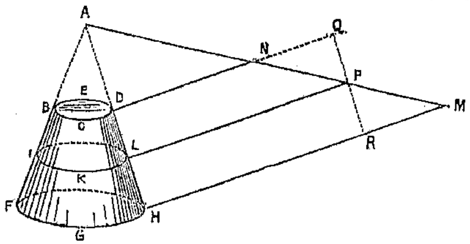

Fig. 115

E' evidente que o volume deste corpo será a differença entre os volumes dos dois cones ABCDE e AFGH.

Area da sua superficie lateral.

187.—Quanto á avaliação de sua superficie póde-se achar um meio mais simples que o de medir separadamente as superficies dos dois cones e de subtrahir a area da menor da area da maior; empregar-se-á para isto a marcha seguinte, que é facil de conceber-se.

Levante-se por H, perpendicularm nte a AH, a recta HM, igual em comprimento á circumferencia FGH, e tire-se AM. A area do triangulo AHM, tendo por medida $^1/_2$ HM $\times$ AH, é igual á area do coneAFGH (n. 180):

Tire-se agora a recta DN parallela a HM; esta recta DN será igual á circumferencia BCDE rectificada, porque, em virtude da semelhança dos triangulos ADN e AHM, haverá a mesma proporção entre AH e HM que entre AD e DN e a mesma que entre os raios das duas circumferencias FGH e BCDE; pois a area do triangulo ADN, tendo por medida $^1/_2$ DN $\times$ AD, será igual á area do cone ABCDE. A area, portanto, do trapezio DNHM,

que é a differença dos dois triangulos AHM e ADN, será igual á area da supercie lateral do cone truncado.

Ora, este trapezio se póde fácilmente transformar em um rectangulo equivalente DQRH, cortando NM em duas partes iguaes e tirando por P a perpendicular QR a HM, que dará o triangulo accrescido NQP, igual ao triangulo subtrahido PRM.

Pois, si pelo ponto P se tira á HM a parallela LP, que cortará DH em duas partes iguaes, LP será o comprimento da circumferencia IKL da secção equidistante das duas bases do tronco; e a area do rectangulo DQRH, tendo por medida o producto da base, HR ou LP, pela altura, QR ou DH será igual á area do tronco. Isto é, *a area da superficie lateral do cone truncado é igual ao producto da circumferencia da secção feita a igual distancia das suas bases pela sua aresta.*

188.—A circumferencia IKL é a *média* entre as circumferencias BCDE e FGH, porque ella excede á menor BCDE, ou á recta DN, de uma quantidade NQ igual á quantidade RM, de que ella é excedida pela maior circumferencia FGH, ou pela recta HM.

De modo que, conhecidos os raios R e R' das circumferencias das bases do cone truncado, o raio r da circumferencia média ou equidistante destas bases obter-se-á tomando a semi-somma dos dois primeiros, isto é, fazendo $r = {}^1/_2\,(R + R')$. Chamando, pois, S a area da superficie lateral de um tronco de cone, cuja aresta seja *a*, ter-se-á:

$$S = 2\pi r.a \quad \text{ou} \quad S = \pi(R + R').a$$

189.—O ultimo dos corpos redondos de que trataremos nestes Elementos denomina-se *esphera*: é limitado por uma unica superficie curva chamada *superficie espherica*, que tem todos os seus pontos a igual distancia de um, tomado no interior, que é o *centro*. Esphera

190.—A esphera é gerada pela rotação completa de um semi-circulo ABCD girando em torno de seu diametro AD. Nesta rotação a semicircumferencia gera a superficie espherica, e qual- sua geração quer ponto B ou C desta semi-circumferencia gera uma circumferencia que tem para raio a perpendicular BE ou CF ao eixo de rotação AD.

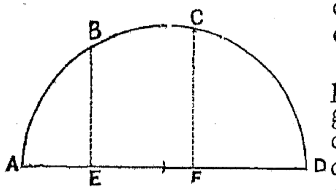

Fig. 116

Por sua vez qualquer perpendicular BE ou CF gera um circulo, que tendo seu raio menor que o da esphera, chama-se *circulo minimo*, em opposição aos circulos que têm para raios o proprio raio da esphera e que se chamam *circulos maximos*. Qualquer circulo maximo é determinado por uma secção feita na esphera por um plano passando pelo centro da esphera.

191.—Este modo de conceber a *superficie espherica* gerada pela rotação completa de uma semi-circumferencia, e a *esphera* gerada pela rotação completa do semi-circulo correspondente, indica-nos o caminho a seguir na instituição da *area da superficie espherica* e do *volume da esphera*. Basta que estabeleçamos uma certa filiação entre o que pretendemos instituir e o que fizemos para instituir a area do circulo e a rectificação da circumferencia ; isto é, procurar primeiro a superficie gerada por uma linha polygonal regular ABCD insripta na semi-circumferencia geradora da superficie espherica, e depois o volume gerado pelo semi-polygono regular ABCD, inscripto no semi-circulo gerador da esphera.

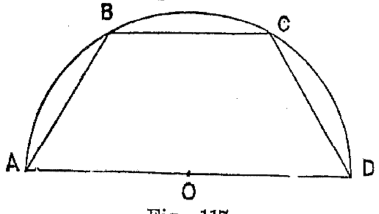

Fig. 117

192.—Ora, é claro que a area da superficie gerada pela linha polygonal ABCD, girando em torno de um eixo fixo AD, depende do conhecimento da area da superficie gerada por um dos lados desta linha polygonal ; por isso que a somma destas areas dará a primeira.

193.—Para caminharmos com methodo, procuremos pois, em primeiro lugar, *a area da superficie*

Area da superficie gerada por uma recta movendo-se em torno de um eixo fixo.

gerada por uma recta AB que gira em torno de outra fixa XY, existentes no mesmo plano.

Si AB for parallela a XY, evidentemente a superficie gerada por AB será a de um cylindro, e a area procurada será igual á circumferencia de uma das bases, 2π. AC ou 2π. BD, ou á circumferencia equidistante destas bases, 2π.LK, multiplicada pela aresta AB ou pela altura CD; isto é, a area gerada por AB será:

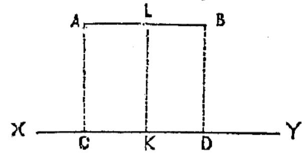

Fig. 118

$$2\pi LK\ .\ CD$$

Si AB não for parallela a XY e encontrar ou não XY, no primeiro caso, teremos a superficie de

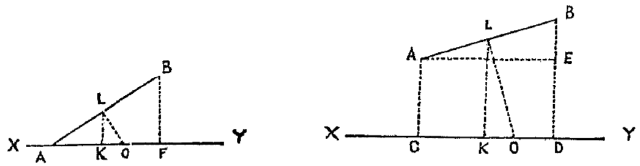

Fig. 119

um cone e no segundo a de um cone truncado; em qualquer delles a area gerada por AB será semelhantemente

$$2\pi LK.AB$$

Porém, tirando-se AE parallela a CD e LO perpendicular a AB, os triangulos ABE e KLO serão semelhantes e os lados perpendiculares serão proporcionaes; isto é, ter-se-á:

$$\frac{LK}{AE} = \frac{LO}{AB}, \text{ d'onde } LK \times AB = LO \times AE$$

Portanto, a expressão 2πLK.AB pode ser substituida por

$$2\pi LO.AE \text{ ou } 2\pi LO.CD$$

Isto é, qualquer que seja a posição de AB em relação a XY, *a area procurada é igual ao producto da circumferencia que tem para raio a perpendicular levantada do meio da recta movel até encontrar o eixo fixo, pela projecção desta recta sobre o eixo*, entendendo-se por projecção de uma recta AB sobre outra XY a parte CD desta outra comprehendida entre os pés das perpendiculares AC, BD, baixadas dos extremos da primeira sobre a segunda.

Area da superficie gerada pela rotação de uma linha polygonal regular

194.—Determinada a area da superficie gerada por um elemento da linha polygonal ABCD facil é determinar a area gerada pela rotação de toda a linha polygonal.

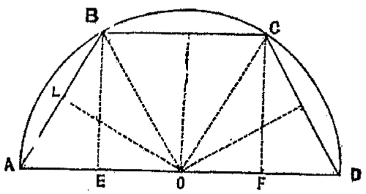

Fig. 112.

Com effeito, sabe-se já que

$$\text{area AB} = 2\pi\text{LO.AE}$$
$$\text{area BC} = 2\pi\text{LO.EF}$$
$$\text{area CD} = 2\pi\text{LO.FD}$$

Sommando-se, ter-se-á:

$$\text{area ABCD} = 2\pi\text{LO}\ (\text{AE} + \text{EF} + \text{FD}) = 2\pi\text{LO.AD}$$

Isto é, *a area gerada por uma linha polygonal regular girando em torno de um eixo fixo, existentes no mesmo plano, é igual ao producto da circumferencia inscripta á esta linha polygonal pela projecção desta linha sobre o eixo.*

Area da superficie espherica.

195.—Suppondo agora que o numero de lados da linha polygonal vai se duplicando, emquanto a semi-circumferencia a ella circumscripta gira em torno de seu diametro para gerar a superficie espherica, a linha quebrada gera uma area que tende para um limite independente da lei segundo a qual seus lados tendem para zero.

Com effeito, no producto 2πLO.AD, que mede esta area, o primeiro factor tem sempre por limite 2πOA, que é a circumferencia cuja metade gera a

superficie espherica, e o segundo factor AD é invariavel.

E' este limite da area gerada pela linha polygonal regular inscripta que se chama *area da superficie espherica* e que, portanto, *se avalia multiplicando a circumferencia geradora*, que é a circumferencia de um circulo maximo, *pelo diametro*.

196.—Representando, pois, por S a area de uma superficie espherica, por R o seu raio, ter-se-á:

$$S = 2R\pi.2R \quad \text{ou} \quad S = 4\pi R^2$$

Mas, lembrando que πR^2 é a area de um circulo cujo raio é R, podemos dizer que *a area de uma superficie espherica é igual ao quadruplo da area de um circulo maximo.*

197.—Representando por D o diametro da esphera, e attendendo que $R = \frac{1}{2}D$, em vez de escrever-se $S = 4\pi R^2$, poder-se-á escrever $S = \pi D^2$; d'onde se conclue que *a area da superficie espherica tambem é igual a do circulo que tem para raio o diametro da esphera.*

198.—Instituida a area da superficie espherica, seguiremos caminho analogo para a instituição do volume da esphera.

Volume gerado pela rotação de um triangulo.

Começaremos por estudar o volume gerado por um semi-polygono regular ABCD girando em torno do diametro AD. Como, porém, um polygono regular se decompõe em triangulos AOB, BOC, COD, começaremos por estudar *o volume gerado por um triangulo girando em torno de um eixo fixo tirado em seu plano e por um de seus vertices.*

199.—Distinguiremos neste estudo tres casos:

Caso em que o triangulo gerador tem um lado sobre o eixo de rotação.

1.° Um dos lados AB do triangulo ABC confundido com o eixo de rotação XY. Conforme a altura CD, que corresponde ao lado AB, cae no interior ou fóra do triangulo ABC, o volume gerado por este triangulo é a somma ou a differença dos volumes dos cones gerados pelos triangulos rectangulos ACD, BCD.

Ao mesmo tempo, o cylindro gerado pela rotação do rectangulo ABB'A', que tem a mesma base e a mesma altura que o triangulo dado ABC é a somma

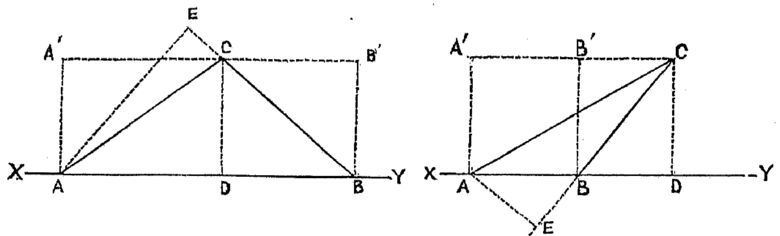

Fig. 121

ou a differença dos cylindros gerados pela rotação do rectangulos ADCA', BDCB', de que o rectangulo ABB'A' é a propria somma ou differença. Aliás, o cone ACD é o terço do cylindro ADCA', e o cone BCD o terço do cylindro BDCB' (n. 185). Pois, n'um e n'outro caso, o volume gerado pelo triangulo ABC é o terço do cylindro ABB'A', e tem-se:

$$\text{vol. ABC} = \frac{1}{3}\pi \text{CD}^2.\text{AB}$$

ou

$$\text{vol. ABC} = \frac{1}{3}\pi \text{CD.CD.AB}$$

Porém, CD.AB é o dobro da area do triangulo ABC, e como para ter a area de um triangulo é indifferente tomar-se para base este ou aquelle lado, será o producto CD.AB = BC.AE, e, portanto, o

$$\text{vol. ABC} = \frac{1}{3}\pi \text{CD.BC.AE}$$

Ora, πCD.BC exprime (n. 181) a area lateral do cone BCD ou a area da superficie gerada pelo lado BC na rotação do triangulo ABC. Por conseguinte

$$\text{vol. ABC} = \text{area BC}.\frac{\text{AE}}{3}$$

Caso em que o triangulo gerador tem apenas de commum com o eixo um vertice, e o lado opposto a este vertice não é parallelo ao eixo.

2.° Supponhamos que o lado AB do triangulo não tendo mais que o vertice A sobre o eixo XY, o lado BC prolongado venha encontrar o eixo em um ponto D.

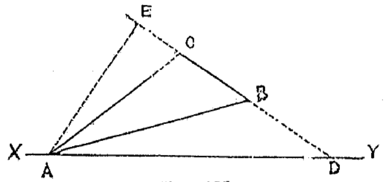

Fig. 122

O triangulo ABC sendo a differença dos triangulos ACD, ABD, o volume por elle gerado é a differença dos volumes gerados por estes triangulos.

Tem-se, pois, pelo primeiro caso, anteriormente estudado:

$$\text{vol. ABC} = (\text{area DC}-\text{area DB})\,\frac{\text{AE}}{3} = \text{area BC}.\frac{\text{AE}}{3}$$

Caso em que o triangulo gerador tem de commum com o eixo um vertice, sendo o lado opposto a este vertice parallelo ao eixo.

3°. Supponhamos emfim que o lado AB do triangulo não tendo de commum com o eixo XY senão o vertice A, o lado BC seja parallelo a este eixo.

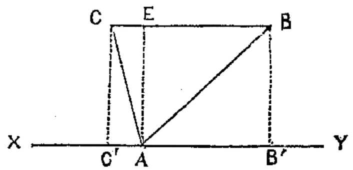

Fig. 123.

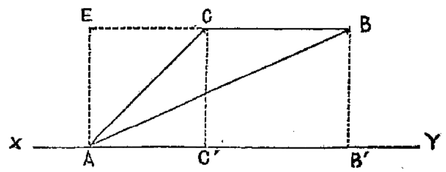

Fig. 124

Então o volume gerado pelo triangulo ABC é a somma ou a differença dos volumes gerados pelos triangulos ABE, ACE.

Ora, o volume gerado pelo triangulo ABE é os dois terços do cylindro gerado pelo rectangulo AB'BE (n. 185) e o volume gerado pelo triangulo ACE os dois terços do cylindro gerado pelo rectangulo AC'CE. Pois, n'um e n'outro caso o volume gerado pelo triangulo ABC é os dois terços do cylindro gerado pelo rectangulo B'C'CB, que exprime a somma ou differença dos rectangulos AB'BE e AC'CE ; e tem-se ainda :

$$\text{vol.ABC} = \frac{2}{3}\pi AE^2 . BC \text{ ou vol.ABC} = \text{area } BC . \frac{AE}{3},$$

porque $2\pi AE$, BC exprime a area lateral do cylindo gerado pelo retangulo B'C'CB ou a area da superficie descripta pelo lado BC na rotação do triangulo ABC.

Resumo dos tres casos.

200.—Comparados os resultados a que chegámos em cada um dos tres casos estudados, reconhece-se que *o volume gerado por um triangulo, girando em torno de um eixo tirado em seu plano e por um de seus vertices, é sempre igual ao producto da area descripta pelo lado opposto ao vertice fixo pelo terço da altura relativa a este lado-*

Volume gerado pela rotação do um semi-polygono regular.

201.—Conhecida a maneira de calcular o volume gerado por cada um dos triangulos em que um semi-polygono regular se póde decompor, calcular-se-á o volume gerado pelo proprio semi-polygono sommando os volumes gerados pelos triangulos. Assim (fig. 120).

$$\text{vol. } AOB = \text{area } AB . \frac{OL}{3}$$

$$\text{vol. } BOC = \text{area } BC . \frac{OL}{3}$$

$$\text{vol. } COD = \text{area } CD . \frac{OL}{3}$$

Sommando, vem:

$$\text{vol. } OABCD = (\text{area } AB + \text{area } BC + \text{area } CD) . \frac{OL}{3}$$

ou

$$\text{vol. } OABCD = \text{area } ABCD . \frac{OL}{3}$$

Isto é, *o volume gerado pelo semi-polygono OABCD é igual ao producto da area que descreve a linha polygonal pelo terço de seu apothema.*

Volume da esphera.

202.—Duplicando successivamente o numero de lados do semi-polygono regular inscripto no semicirculo gerador da esphera, os volumes descriptos pelos differentes semi polygonos irão tendendo para um limite fixo, que é o volume da esphera, a area que descreve cada uma das linhas polygonaes consideradas vae tendendo tambem para um limite fixo, que é a area da superficie espherica, e o apothema de cada um dos semi-polygonos vae tendendo para o raio da esphera ; de modo que, no limite, tem-se *o volume da esphera igual ao producto da area da sua supercie por um terço de seu raio.*

203.—Representando então por V o volume de uma esphera, e por R o seu raio, ter-se-á :

$$V = 4\pi R^2 . \frac{R}{3} \quad \text{ou} \quad V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Representando por D o diametro desta esphera e attendendo que $R = \frac{1}{2} D$, ter-se-á :

$$V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3 \quad \text{ou} \quad V = \frac{1}{6}\pi D^3$$

Estas fórmulas dão o volume, quando conhecido o raio ou o diametro da esphera, e vice-versa. Assim póde-se *achar o raio da esphera cujo volume é de um metro cubico*. Bastará substituir V pelo seu valor, o que dá:

$$1 = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \text{d'onde} \quad R = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} = 0^m,620$$

Semelhança das espheras

204.—As espheras são todas evidentemente semelhantes umas ás outras, assim como todas as figuras que não exigem para sua construcção mais que um elemento rectilineo, como são os circulos, as circumferencias, os quadrados, os triangulos equilateros, os cubos, os tetraedros regulares, etc.

205.—Comparadas as areas, S, S', etc, de *duas ou mais espheras* de raios differentes R,R', etc, reconhece-se que ellas *estão entre si como os quadrados dos raios ou dos diametros* De facto, sendo $S = 4\pi R^2$, $S' = 4\pi R'^2$, será: Comparação de suas areas.

$$\frac{S}{S'} = \frac{R^2}{R'^2} \text{ ou } \frac{S}{S} = \frac{4R^2}{4R'^2}$$

O que significa que sendo o raio da esphera menor os $\frac{3}{5}$, por exemplo, do raio da esphera maior, ou, o que é a mesma cousa, que, sendo $\frac{3}{5}$ a escala segundo a qual foi construida a esphera menor, sua superficie deve conter tantos quadrados (9) construidos sobre seu raio (3), quantos forem os quadrados (25) construidos sobre o raio (5) da maior e contidos na sua superficie.

206.—Semelhantemente *os volumes, V,V', etc, de duas ou mais espheras, de raios differentes, R,R', etc, estão entre si como os cubos de seus raios ou de seus diametros.* Com effeito, sendo $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ ou $V = \frac{1}{6}\pi D^3$, $V' = \frac{4}{3}\pi R^3$ ou $V' = \frac{1}{6}\pi D'^3$, será: Comparação de seus volumes.

$$\frac{V}{V'} = \frac{R^3}{R'^3} \quad \text{ou} \quad \frac{V}{V'} = \frac{D^3}{D'^3}$$

O que significa que o volume da esphera menor deve conter tantos cubos construidos sobre seu raio, ou sobre seu diametro quantos forem os cubos construidos sobre o raio ou sobre o diametro da maior e contidos em seu volume.

207.—Estas leis, que reduzem a comparação das espheras á simples comparação dos quadrados ou dos cubos de duas linhas, applicam-se a quaesquer corpos semelhantes.

Basta reflectir sobre as condições necessarias para que dois corpos sejam semelhantes, e attender que *a avaliação das superficies dos corpos, isto é, de suas quadraturas, e a avaliação de seus volumes, isto é, de suas cubaturas, se reduzem á simples combinação de linhas rectas,* para se reconhecer a generalisação daquellas leis a quaesquer corpos semelhantes.

208.—Com effeito, dois corpos terminados por planos, isto é, dois polyedros, da mesma natureza e do mesmo numero de faces, dizem-se semelhantes, quando os angulos formados pelas arestas do primeiro são os mesmos que os correspondentes no segundo, e quando as arestas de um são proporcionaes ás correspondentes do outro. Polyedros,

Dois cylindros rectos são semelhantes quando gerados pela rotação de rectangulos semelhantes, isto é, quando suas alturas estão entre si como os raios de suas bases. cylindros,

Semelhantemente, dois cones rectos são semelhantes quando gerados pela rotação de triangulos rectangulos semelhantes, isto é, quando suas alturas estão entre si como os raios de suas bases. e cones semelhantes.

Supponhamos agora dois corpos semelhantes quaesquer, quer sejam terminados por planos polyedros, quer sejam limitados por superficies curvas, corpos redondos. Supponhamos mais que a relação das linhas homologas dos corpos semelhantes considerados seja igual a $\frac{1}{10}$ isto é, que cada linha do primeiro seja $\frac{1}{10}$ da sua homologa no segundo, ou por outra, que cada decimetro medido no primeiro corpo corresponda homologamente a 10 decimetros ou a um metro medido no segundo. A superficie do primeiro corpo se medirá por decimetros quadrados e a do segundo por metros quadrados. Relação das areas dos corpos semelhantes.

As linhas, porém, que se tiver de empregar para medir a superficie do primeiro e a de um quadrado construido sobre uma de suas arestas terão tantos decimetros quantos os metros contidos nas linhas homologas que se tiver de empregar para medir a superficie do segundo e o quadrado construido sobre a aresta homologa.

D'onde se conclue que o producto das linhas que entram na medida da superficie do primeiro corpo, e do quadrado construido sobre um de seus elementos rectilineos, deve dar tantos decimetros quadrados quantos os metros quadrados contidos no producto das linhas homologas que entram na medida da superficie do segundo corpo, e do quadrado construido sobre o seu elemento rectilineo, homologo ao do primeiro.

Isto é, que *as superficies de dois corpos semelhantes estão entre si como os quadrados de seus lados homologos.*

209.—Um raciocinio inteiramente analogo, applicado aos volumes de dois corpos semelhantes, dar-nos-ia a proposição fundamental da comparação destes corpos: *os volumes de dois corpos semelhantes estão entre si como os cubos de seus lados homologos.* Relação dos volumes.

Querendo-se, pois, *amplificar* ou *reduzir* um polyedro, em uma relação dada, a *escala* a adoptar para amplificar ou reduzir as arestas deste polyedro será igual á raiz cubica da relação dada. Por exemplo, si o volume do novo polyedro tiver de ser a millesima parte do polyedro dado, será preciso que suas arestas sejam dez vezes menores que as arestas homologas do polyedro dado (n. 98).

210.—Em resumo, pode-se dizer dos corpos semelhantes, como se disse das figuras planas (n. 43), que elles não differem senão pelas escalas segundo as quaes são construidos; isto é, que « a diversidade das fórmas semelhantes se reduz, sob todos os aspectos geometricos, á de suas escalas ». Lei de Clairaut, seu enunciado formulado por Aug. Comte.