

B

NOÇÕES
de
Arithmetica pratica e theorica
contendo grande numero de exercicios

escriptas pelo

D^r. FRANCISCO RAPP

PROFESSOR DO CURSO SEGUNDARIO, DIPLOMADO PELO CONSELHO SUPERIOR
DE INSTRUÇÃO DE ZÜRICH;

PROFESSOR EM SCIENCIAS PHYSICAS E MATHEMATICAS PELA UNIVERSIDADE DA
MESMA CIDADE;

EX-PROFESSOR DO GYMNASIO KING'S LYNN (INGLATERRA);
E

PROFESSOR DO INSTITUTO COMMERCIAL, RIO DE JANEIRO

e destinadas

para Gymnasios, Escolas Normaes, Instituições Commerciaes etc.

2ª Edição, muito augmentada.

1902

Prefacio.

A falta, em lingua portugueza, de um livro, contendo grande numero de exercicios e problemas praticos, methodicamente dispostos, determinou a publicação do presente trabalho. Na quasi totalidade dos compendios de arithmetica apenas se encontra um numero excessivamente exiguo de exercicios praticos. Ninguem, entretanto, ignora a grande importancia d'estes exercicios no estudo de qualquer disciplina, maxime na sciencia dos numeros. Assim, quem desejar seriamente aprender a calcular bem e facilmente, não pode limitar—se a saber resolver qualquer problema, mas deve saber—o fazer com rapidez, segurança e certeza, qualidades essas, que só podem ser adquiridas com exercicios continuos, repetidos e pelo emprego opportuno das simplificações e abreviações que os calculos possam offerecer no seu desenvolvimento.

Adoptamos o methodo da redução á unidade, o mais simples e o mais comprehensivel no nosso pensar. Ao principio fazemos o alumno escrever os dados do problema em duas linhas horizontaes, ordenando os seus termos e sobre estes dados, assim dispostos, raciocinar e deduzir as relações que as diferentes quantidades apresentam entre si. Tambem achamos de grande vantagem obrigar o alumno a principio a ir escrevendo esses raciocinios á medida que os fór formulando. Mais tarde será isso desnecessario, porque, já tendo o alumno aprendido a raciocinar mentalmente, lhe bastará fazer um traço de fracção e escrever os dados correctamente no numerador e no denominador; depois do que effectuará as simplificações convenientes, ficando assim os calculos reduzidos ao minimo possivel.

Por serem contrarias ao nosso methodo, evitamos, tanto quanto possivel, as regras e formulas, que são muito uteis sem duvida para engenheiros, negociantes e em geral para aquelles que já aprenderam; mas para quem está iniciando o estudo,

judgamol — as muito prejudiciaes porque vêm sobrecarregar
lhe a memoria em vez de lhe desenvolver o espirito.

Alenta — nos a esperanza de que os nossos illustres
collegas acolherão benevolamente o presente trabalho, onde
encontrarão, convenientemente coordenados, grande numero
de exercicios e problemas praticos, que muito poderão concorrer
para o aproveitamento dos seus alumnos. Aos Srs. professores
e ás Sras. professoras será fornecida a chave, contendo as
soluções de todos os exercicios e problemas, desenvolvidos
de modo que possam, sem perda de tempo, verificar as re-
spostas dos alumnos.

Cumpre — nos finalmente declarar que não tratámos
das progressões e dos logarithmos, porque o nosso modesto
trabalho não passa de simples introduccão ao estudo da
Arithmetica geral.

O autor.

§ 1.

Systema metrico.

Para medir comprimentos, superficies, volumes e
pesos empregam-se agora no Brazil e em quasi todos
os paizes da Europa as unidades do **Systema metrico**.
Para facilitar o estudo d'este systema é bom notar
desde o principio que:

Deca	significa	dez
Hecto	"	cem
Kilo	"	mil
Myria	"	dezmil
Deci	"	a decima parte
Centi	"	a centesima parte
Milli	"	a millesima parte

porque os multiplos e submultiplos se formam por meio
d'estas palavras, antepostas ao nome da unidade prin-
cipal. E' por isso que Decametro quer dizer dez metros,
Kilogrammo mil grammos, centilitro a centesima parte
do litro etc.

Unidades de comprimento.

A unidade principal para medir comprimentos é o metro, isto é a decima millionesima parte do quadrante da terra. Seus submultiplos e multiplos são:

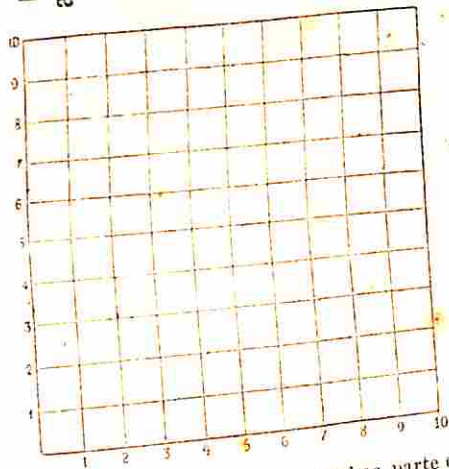
- 1 Metro (*m.*) = 10 Decímetros (*dc.*)
- = 100 Centímetros (*cm.*)
- = 1000 Millímetros (*mm.*)
- 10 Metros = 1 Decametro (*Dm.*)
- 100 Metros = 1 Hectometro (*Hm.*)
- 1000 Metros = 1 Kilometro (*Km.*)
- 10000 Metros = 1 Myriametro (*Mm.*)

Unidades de superficie.

A unidade principal para medir superficies é o metro quadrado, isto é um quadrado cujos lados têm um metro de comprimento. Seus submultiplos e multiplos são:

- 1 Metro quadrado (*mq.*) = 100 Decímetros quadrados (*dmq.*)
- = 10000 Centímetros quadrados (*cmq.*)
- = 1000000 Millímetros quadrados (*mmq.*)
- 100 Metros quadrados = 1 Decametro quadrado (*Dmq.*)
- 10000 Metros quadrados = 1 Hectometro quadrado (*Hmq.*)
- 1000000 Metros quadrados = 1 Kilometro quadrado (*Kmq.*)
- 100000000 Metros quadrados = 1 Myriametro quadrado (*Mmq.*)

- Medidas argrarias.
- 1 Aro (*a.*) = 100 *mq.* = 10 Deciaros (*dca.*)
 - 100 Aros = 1 Hectaro (*Ha.*)
 - 1 Kilometro quadrado (*Kmq.*) = 100 Hectaros (*Ha.*)



Como se vê nas unidades de superficie, uma unidade qualquer vale 100 vezes a unidade imediatamente inferior; um metro quadrado contem por conseguinte 100 decímetros quadrados como o mostra a figura ao lado.

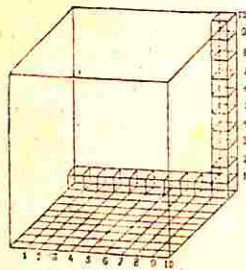
Não se confunda a decima parte de um metro quadrado (= 10 *dmq.*) com um decimetro quadrado; a centesima parte de um metro quadrado (= 1 *dmq.*) com um centimetro quadrado; a millesima parte de um metro quadrado (= 10 *cmq.*) com um millimetro quadrado.

Medidas de volume.

A unidade principal para medir volumes é o metro cubico, isto é um cubo cujas arestas têm um metro de comprimento. Seus submultiplos e multiplos são:

- 1 Metro cubico (*mc.*) = 1000 decímetros cubicos (*dmc.*)
- = 1000000 centímetros cubicos (*cmc.*)
- = 1000000000 milli-metros cubicos (*mmc.*)
- 1000 Metros cubicos = 1 Decametro cubico (*Dmc.*)

1000000 Metros cubicos = 1 Hectometro cubico (*Hmc.*)
 1000000000 Metros cubicos = 1 Kilometro cubico (*Kmc.*)
 1 Stereo (*st.*) = 10 decistereos (*dst.*) = 1 *mc.*
 10 Stereos = 1 Decastereo (*Dst.*) = 10 *mc.*



Cada uma d'estas unidades vale 1000 vezes a unidade immediatamente inferior; um metro cubico contem por exemplo 1000 decimetros cubicos como mostra a figura.

Conven não confundir a decima parte de um metro cubico (= 100 *dmc.*) com um decimetro cubico; a centesima parte de um metro cubico (= 10 *dmc.*) com um centimetro cubico; a millesima parte de um metro cubico (= 1 *dmc.*) com um milimetro cubico.

Medidas de capacidade.

A unidade principal para medir a capacidade de um corpo é o **litro** cuja capacidade equivale ao decimetro cubico. Seus submultiplos e multiplos são:

1 Litro (*L.*) = 10 Decilitros (*dl.*)
 = 100 Centilitros (*cl.*)
 = 1000 Millilitros (*ml.*)
 10 Litros = 1 Decalitro (*Dl.*)
 100 Litros = 1 Hectolitro (*Hl.*)
 1000 Litros = 1 Kilolitro (*Kl.*)

Medidas de peso.

A unidade principal de peso é o **grammo**, isto é, o peso no vacuo de um centimetro cubico d'agua

distillada, na temperatura de 4 graus do thermometro de Celsius (centigrado). Seus submultiplos e multiplos são:

1 Grammo (*g.*) = 10 Decigrammos (*dg.*)
 = 100 Centigrammos (*cg.*)
 = 1000 Milligrammos (*mg.*)
 10 Grammos = 1 Decagrammo (*Dg.*)
 100 Grammos = 1 Hectogrammo (*Hg.*)
 1000 Grammos = 1 Kilogrammo (*Kg.*)
 1 Quintal metrico = 100 Kilogrammos.
 1 Tonelada metrica (*T.*) = 1000 Kilogrammos.

| 1 *dmc.* d'agua pesa 1 *Kg.*
 | 1 *mc.* " " 1 *T.*

§ 2.

Reducções.

Reduzir uma quantidade quer dizer mudar a sua denominação em outra, sem lhe alterar o valor.

Reducir:
 4 *Kg.* a *g.*
 1 *Kg.* têm 1000 *g.*
 4 *Kg.* têm 1000
 × 4
 4000 *g.*

6 mezes a dias
 1 mez têm 30 dias
 6 mezes têm 30
 × 6
 180 dias

Tendo um mez 30 dias, terão 6 mezes 6 vezes 30 dias = 180 dias.

Exercícios:

Reduzir:

- | | | | | | | | | |
|-----|-----|------|------|------|------|------|------------------------|---------------------|
| | a. | b. | c. | d. | e. | f. | g. | h. |
| 1) | 7, | 12, | 19, | 28, | 37, | 51, | 73, | 125 milrêis a réis. |
| 2) | 8, | 15, | 48, | 65, | 77, | 103, | 149, | 234 mezes a dias. |
| 3) | 32, | 57, | 76, | 84, | 122, | 235 | m. a dm., a cm., a mm. | |
| 4) | 45, | 63, | 91, | 135, | 274, | 526 | l. a dl., a cl., a ml. | |
| 5) | 57, | 69, | 85, | 143, | 296, | 387 | duzias a objectos. | |
| 6) | 73, | 94, | 152, | 382, | 519, | 632 | Kg. a g., a dg., a cg. | |
| 7) | 87, | 107, | 163, | 295, | 372, | 426 | minutos a segundos. | |
| 8) | 62, | 94, | 136, | 172, | 228, | 757 | Hmq. a mq., a cmq. | |
| 9) | 29, | 74, | 164, | 238, | 571, | 665 | annos a mezes. | |
| 10) | 66, | 85, | 98, | 102, | 159, | 235 | mc. a dmc., a cmc. | |
| 11) | 44, | 63, | 108, | 197, | 277, | 481 | annos a dias. | |
| 12) | 51, | 72, | 133, | 265, | 365, | 476 | dias a horas. | |
| 13) | 33, | 59, | 82, | 99, | 174, | 244 | Ha. a ares, a mq. | |

Reduzir:

6 dias a minutos.

1 dia tem 24 horas

6 dias têm 24

× 6

144 horas têm ? minutos.

1 hora tem 60 minutos

144 horas têm 144

× 60

8640 minutos.

Solução: Reduzem-se primeiro os 6 dias a 144 horas e depois estas a 8640 minutos.

Exercícios:

Reduzir:

- | | | | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|------|------|------|-----------------------|
| | a. | b. | c. | d. | e. | f. | g. | h. |
| 14) | 9, | 15, | 23, | 36, | 68, | 127, | 285, | 354 dias a minutos. |
| 15) | 14, | 36, | 59, | 93, | 104, | 165, | 217, | 482 horas a segundos. |

- | | | | | | | | | |
|-----|-----|-----|------|------|------|------|------|------------------------|
| | a. | b. | c. | d. | e. | f. | g. | h. |
| 16) | 7, | 18, | 22, | 61, | 94, | 138, | 243, | 335 mc. a cmc. |
| 17) | 15, | 52, | 60, | 86, | 109, | 241, | 374, | 493 £. a d. |
| 18) | 63, | 91, | 154, | 178, | 206, | 271, | 415, | 567 resmas a folhas. |
| 19) | 47, | 69, | 84, | 119, | 126, | 242, | 295, | 411 Dst. a dst. |
| 20) | 52, | 71, | 94, | 145, | 188, | 298, | 306, | 365 grosas a objectos. |
| 21) | 6, | 13, | 35, | 54, | 71, | 89, | 114, | 177 varas a linhas. |
| 22) | 12, | 27, | 43, | 61, | 96, | 139, | 165, | 241 arrobas a onças. |
| 23) | 8, | 19, | 22, | 46, | 53, | 74, | 90, | 135 annos a segundos. |

Reduzir:

8 dias, 14 horas, 42 minutos a minutos

1 dia tem 24 horas

8 dias têm 24

× 8

192 horas

+ 14 "

206 horas têm ? minutos

1 hora tem 60 minutos

206 horas têm 206

× 60

12360 minutos

+ 42

12402 minutos.

Solução: Reduzem-se primeiro os 8 dias a 192 horas que formam com as 14 horas dadas, 206 horas. Estas 206 horas convertemos então em 12360 minutos aos quaes precisamos ainda adicionar os 42 minutos dados.

Exercícios:

Reduzir:

- | | | | | | |
|-----|----------|------------|-------------|-------------|------|
| | | 8 Hm. | 7 Dm. | 6 m. | a m. |
| 24) | 9 Km. | | | | |
| 25) | 18 horas | 35 minutos | 51 segundos | a segundos. | |
| 26) | 21 mezes | 3 semanas | 5 dias | a dias. | |

- 27) 35 Ha. 17 a. 9 da. a da.
- 28) 42° 56' 17" a segundos.
- 29) 63 £. — s. 11 d. a d.
- 30) 25 Kl. 6 Dl. — l. a l.
- 31) 17 horas 36 minutos — segundos a segundos.
- 32) 143 £. 16 s 7 d. a d.
- 33) 427 Dst. 9 st. — mc. a mc.
- 34) 387 annos 11 mezes 24 dias a dias.
- 35) 345 dias 17 horas 23 minutos a minutos.
- 36) 206 annos 181 dias 14 horas a horas.
- 37) 174 Ha. 7 a. — mq. a mq.
- 38) 169 grosas 11 duzias 9 objectos a objectos.
- 39) 273 dias — hora 8 minutos a segundos.
- 40) 107 mc. 5 cmc. — mmc. a mmc.
- 41) 96 resmas 7 mãos 21 folhas a folhas.
- 42) 144 Kg. 17 Hg. 3 g. a g.
- 43) 235 grosas — duzia 10 objectos a objectos.
- 44) 29 libras 14 onças 7 oitavas 66 grãos a grãos.
- 45) 121 moios 43 alqueires 3 selamins a selamins.

Reducção de unidades inferiores a unidades superiores.

Reduzir: 7436 dias a annos.

7 14 23 26 30

247 mezes a 26 dias

{ Tendo um mez 30 dias, terão 7436 dias tantos mezes quantas vezes 30 está contido em 7436, a saber 247 mezes e restam 26 dias.

2 4 7 1 2

20 annos e 7 mezes

{ 247 mezes formarão tantos annos quantas vezes 12 divide este numero, a saber 20 annos e sobram 7 mezes.

Resultado: 20 annos 7 mezes e 26 dias.

Exercicios:

Reduzir:

- 46) { 37000 mm. a m.; 54986 mm. a m.;
- { 953421 mm. a Km.

- 47) 54932 mq. a ares; 645894 mq. a Ha.
- 48) 32685 ml. a l.; 46325 l. a Kl.
- 49) 7328 mst. a st.; 5036 mc. a Dst.; 163250270032 mmc. a mc.
- 50) 625403 mq. a g.; 74021 g. a Kg.; 35629 Kg. a T.
- 51) 3689, 57632, 84231, 97632, 148957 dias a mezes.
- 52) 8325, 43214, 72931, 86537, 525726 minutos a horas.
- 53) 5642, 62450, 692584, 834682, 4375962 mezes a annos.
- 54) 7893, 64593, 78283, 822367, 1598765 horas a dias.
- 55) 8462, 75942, 604325, 5648403, 8248924 dias a annos.
- 56) 1520, 4635, 82349, 89432, 145756 pollegadas a braças.
- 57) 40960, 75439, 149326, 465948, 8932648, onças a arrobas.
- 58) 1438967, 2578365, 4598362, 5122763, 5379928 segundos a dias
- 59) 1276439, 3475641, 2789623, 4982537, 6432624 minutos a annos
- 60) 793562, 832594, 782943, 4328596, 5432987 d. a £.
- 61) { 246543289, 793658445, 864235968, 1735889294, 3721148938
 { segundos a annos.

§ 3.

Numeros complexos.

Numero complexo chama-se o que consta de unidades de diversas grandezas, sendo todas subdivisões de uma unidade principal. Por exemplo: 23 dias 17 horas e 46 minutos.

Adição.

Seja proposto para sommar:

23 annos	9 mezes	25 dias
7 "	4 "	19 "
46 "	7 "	27 "
76 "	20 "	71 "
77 "	10 "	11 "

Escrevem-se todas as unidades da mesma denominação em columnas, isto é, os annos por baixo dos annos, os mezes por

baixo dos mezes etc. Depois adicionam-se as unidades de cada columna separadamente, o que dá: 76 annos, 20 mezes e 71 dias. Os 71 dias formam 2 mezes e restam 11 dias. Estes escrevem-se debaixo dos dias e os 2 mezes juntam-se com os 20 mezes = 22 mezes, que formam 1 anno e sobram 10 mezes. Os 10 mezes escrevem-se por baixo da columna dos mezes e 1 anno junta-se com os 76 annos = 77 annos.

Exercicios:

Formar em I, II, III, IV, V, VI e VII as sommas seguintes:

- 1) $\begin{cases} a + b + c \\ d + e + a \\ a + c + e \end{cases}$ 4) $\begin{cases} b + d + a + c \\ b + c + d + e \\ a + b + c + d + e \end{cases}$
 2) $\begin{cases} a + b + c \\ d + e + a \\ a + c + e \end{cases}$ 5) $\begin{cases} b + d + a + c \\ b + c + d + e \\ a + b + c + d + e \end{cases}$
 3) $\begin{cases} a + b + c \\ d + e + a \\ a + c + e \end{cases}$ 6) $\begin{cases} b + d + a + c \\ b + c + d + e \\ a + b + c + d + e \end{cases}$

I.

- a) 826 Km. 784 m.
 b) 104 " 77 "
 c) 82 " 69 "
 d) 261 " 845 "
 e) 994 " 56 "

II.

- a) 929 annos 252 dias
 b) 763 " 86 "
 c) 47 " 135 "
 d) 552 " 343 "
 e) 1075 " 63 "

III.

- a) 624 £ 17 s. 8 d.
 b) 107 " 9 " — "
 c) 458 " 16 " 7 "
 d) 96 " — " 10 "
 e) 824 " 5 " 4 "

IV.

- a) 157 resmas 19 mãos 23 folhas
 b) 88 " 8 " 16 "
 c) 136 " 14 " 9 "
 d) 74 " 11 " 17 "
 e) 198 " 6 " — "

V.

- a) 312 Kmq. 84 Ha. 91 a. 77 mq
 b) 96 " 27 " 43 " 81 "
 c) 289 " 58 " 94 " 79 "
 d) 74 " 93 " 37 " — "
 e) 468 " 17 " — " 26 "

VI.

- a) 734 braças 9 palmos 7 pollegadas 10 linhas
 b) 673 " 5 " 4 " 9 "
 c) 95 " 7 " — " 3 "
 d) 187 " 2 " 6 " 7 "
 e) 919 " — " 3 " 5 "

VII.

- a) 1475 annos 256 dias 18 horas 37 min. 48 seg.
 b) 987 " 79 " 9 " 23 " 37 "
 c) 76 " 194 " 14 " 15 " 44 "
 d) 694 " 319 " 21 " 49 " 53 "
 e) 2883 " 65 " — " 13 " 21 "

Subtracção.

Seja para subtrahir:

73 annos	15	47	17 dias
— 67 " "	9 " "	23 " "	23 " "
5 " "	6 " "	24 " "	24 " "

Dispõem-se as unidades do subtrahendo por baixo das do minuendo, como na addição e subtrahem-

se os numeros do subtrahendo dos correspondentes do minuendo, começando pelas unidades inferiores. Mas não se podendo tirar 23 dias de 17, toma-se um dos 4 mezes. Este mez converte-se em 30 dias, os quaes juntos aos 17 dias dados, fazem 47 dias. Subtrahindo agora d'estes 47 dias os 23, ficarão 24 dias. Não se podendo tirar 9 mezes dos 3 restantes, toma-se dos 73 annos, 1 anno = 12 mezes, os quaes juntos com os 3, formarão 15 mezes e d'estes subtrahindo agora os 9 mezes, restarão 6. Emfim tirados os 67 annos dos 72, resultarão 5 annos. *10/4*

Exercicios:

Subtrahir em I, II, III, IV, V, VI e VII pag. 14 cada vez:

- 1) $\begin{cases} b & de & a \\ c & " & " \\ d & " & " \end{cases}$ 4) $\begin{cases} a & de & e \\ b & " & " \\ c & " & " \\ d & " & " \end{cases}$
 2) $\begin{cases} b & de & a \\ c & " & " \\ d & " & " \end{cases}$ 5) $\begin{cases} b & " & " \\ c & " & " \\ d & " & " \end{cases}$
 3) $\begin{cases} b & de & a \\ c & " & " \\ d & " & " \end{cases}$ 6) $\begin{cases} c & " & " \\ d & " & " \end{cases}$
 7) $\begin{cases} d & " & " \end{cases}$

Multiplicação.

Seja para multiplicar:

23 £	18 s.	9 d.	
por			45
115	90	40 ⁵	12
92	72		33 s.
1035 £	810 s.		
42 "	33 "		
	843 "	20	
		42 £	
<u>1077 £</u>	3 s.	9 d.	

Multiplica-se cada termo do multiplicando pelo multiplicador, o que dá:

1035 £ 810 s. 405 d. Mas os 405 d. formam 33 s. e restam 9 d. Os 33 s. juntam-se com os 810 s. = 843 s. que precisamos reduzir a £, exactamente

como fizemos na addição de complexos.

Exercícios:

Multiplicar em I, II, III, IV, V, VI e VII pag. 14 cada vez o nº a) por: 4, 7, 10, 15, 26, 39, 65, 78 e 100.

Divisão.

Seja proposto para dividir:

1487 annos 274 dias 17 horas por 32

$$\begin{array}{r} 207 \\ 15 \times 365 + 274 \\ \hline 5749 \\ 254 \\ 309 \\ \hline 21 \times 24 + 17 \\ \hline 521 \\ 201 \\ \hline 9 \end{array} = 46 \text{ an. } 179 \text{ dias } 16 \text{ hor. } \frac{9}{32}$$

Dividimos primeiro as unidades superiores, isto é, os 1487 annos pelo divisor 32, o que dá 46 e restam 15 annos. Estes 15 annos convertemos em $15 \times 365 = 5475$ dias, que, juntos com os 274 dados,

fazem 5749. Dividindo agora os 5749 dias por 32, obtemos 179 dias e sobram 21, os quaes têm $21 \times 24 = 504$ horas. Estas, juntas com as 17 horas dadas, formarão 521 horas, que, divididas por 32, darão 16 horas $\frac{9}{32}$.

Exercícios:

Dividir em I, II, III, IV, V, VI e VII pag. 14 cada vez o nº e) por: 3, 8, 10, 17, 25, 42, 56, 89 e 100.

Para dividir um numero complexo por outro, reduzem-se ambos à mesma subdivisão e effectua-se então a divisão.

Exemplo: Quantas vezes 2 horas, 28 minutos e 45 segundos estão contidos em 8 dias, 21 horas, 12 minutos e 30 segundos?

Reduzidos a segundos, os dous numeros complexos, teremos:

$$\begin{array}{r} 8 \times 24 + 21 \text{ hor.} \\ \hline 213 \times 60 + 12 \text{ min.} \\ \hline 12792 \times 60 + 30 \text{ seg.} \\ \hline 767550 \text{ seg.} \quad 8925 \\ \hline 53550 \quad \underline{86 \text{ vezes.}} \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \times 60 + 28 \text{ min.} \\ \hline 148 \times 60 + 45 \text{ seg.} \\ \hline 8925 \text{ seg.} \end{array}$$

Exercícios:

- Quantas vezes estão contidos:
- 218) 12 seg. em 52 min.
 - 219) 15 " " 23 horas.
 - 220) 36 " " 75 dias
 - 221) 20 min. " 5 dias, 16 hor.
 - 222) 45 hor. " 9 annos, 270 dias.

- 223) 54 min., 18 seg. em 5 dias, 15 hor., 45 min.
224) 8 £. 12 s. 6 d. „ 733 £. 2 s. 6 d.
225) 19 £. — s. 8 d. „ 2969 £. 4 s. — d.
226) 25 £. 7 s. — d. „ 5171 £. 8 s. — d.
227) 42 £. 14 s. 9 d. „ 11325 £. 8 s. 9 d.
-
- 228) Um leiteiro vende diariamente a seus freguezes 270 l. de leite; quantos *Hl.* vendeu nos 3 mezes de Julho, Agosto e Setembro?
229) Uma locomotiva percorre 694 m. por minuto; quantos Km. percorrerá, com a mesma velocidade, em 3 horas e 45 minutos?
230) A circumferencia divide-se em 360 grãos (^o); 1^o tem 60 minutos (^o); 1' = 60 segundos (^o). Quantos segundos tem a semicircumferencia?
231) Quantas a) horas, b) minutos e c) segundos ha nos sete mezes de Fevereiro a Agosto de 1902?
232) Uma pessoa foi educada na França, onde passou 23 annos, 9 mezes e 25 dias; viveu na Inglaterra 16 annos, 8 mezes e 26 dias e morreu no Brazil, onde passou 37 annos, 7 mezes e 19 dias. Que idade tinha?
233) Qual é o consumo annual de café no Rio de Janeiro (515559 habitantes) calculando-se cada habitante consumir mensalmente 850 g.?
234) Um negociante devia a um inglez 473 £. 7 s. e 6 d. Tendo pago 296 £. 16 s. e 8 d., quanto ficou devendo?
235) O anno tem exactamente 365 dias, 5 horas, 48 minutos e 47 segundos. Quantos segundos tem?
236) João tem de idade 7 annos, 8 mezes e 26 dias. O pai é exactamente 5 vezes mais velho. Que idade tem?
237) Carlos tem te idade: 18 annos, 7 mezes e 15 dias. Qual é a idade da irmã, que tem menos 9 annos, 10 mezes e 27 dias?
238) Quinze pessoas jantaram no „Keyser's Royal Hotel“ em Londres, pagando cada uma 18 s. e 6 d. Em quanto importou o jantar?
239) Sete pessoas fazem uma viagem na Inglaterra e com-

- binam pagar as despezas em commum. Quanto toca a cada uma, sendo a despeza total 1937 £ 1 s. e 6 d.?
240) A terra move-se em torno do sol em 365 dias, 5 horas, 48 minutos e 47 segundos. a) De quantos segundos é menor o anno ordinario e de quantos é maior o anno bissexto? b) Em quanto tempo faz a terra 18 giros em torno do sol? —
241) Sendo meio dia no Rio, em Londres são 2hor. 53min. 20seg. em Paris 3hor. 2min. 40seg. da tarde, ao passo que em Washington são 9hor. 45min. e 16seg. da manhã. Que horas serão naquelles 3 lugares, quando no Rio forem 5hor. 30min. e 40seg. da tarde?
242) O som percorre num segundo 333 m. Em quanto tempo chegará à lua, que se acha 384400 Km. distante da terra?
243) Gastando-se 7\$000 por dia, despender-se-ha certa somma em 4 annos, 2 semanas e 6 dias. Em quantos annos, semanas e dias gastar-se-ha a mesma somma, dependendo-se 8\$000 por dia? |
244) Um expresso que anda por minuto 738 m., precisa de 8 horas e 42 minutos para percorrer a distancia entre duas cidades. Qual é a distancia entre os dous lugares, e quanto tempo gastará para fazer o mesmo percurso, outro trem, que, por minuto, percorre sómente 348 m.?

§ 4.

Calculo do tempo.

No calculo do tempo têm-se a considerar 3 quantidades: o principio a duração e o fim de um acontecimento. Passando a apresentar os exemplos mais simples que só tratam de annos e que deviam ser considerados no calculo mental, mostraremos em diversos exemplos como proceder.

Achar a duração de um acontecimento.

Exemplo: N. nasceu a 13 de dezembro de 1791 e morreu a 6 de novembro de 1834. Que idade tinha?

Solução: A 13 de dezembro de 1833 N. tinha 42 annos; a 13 de outubro de 1834 tinha 42 annos e 10 mezes; viveu ainda 18 dias em outubro e 6 dias em novembro; por conseguinte tinha, quando morreu, 42 annos, 10 mezes e 24 dias de idade.

Exercícios:

Que tempo decorreu do dia do descobrimento do Brasil, a 3 de Maio de 1500, até:

- 1) o dia da chegada de Martim Affonso de Souza ao Rio de Janeiro, a 1 de Janeiro de 1502?
- 2) o dia da proclamação da Independencia do Brasil, a 7 de Setembro de 1822?
- 3) o dia da brilhante victoria naval de Riachuelo, a 11 de Junho de 1865?
- 4) o dia da grande victoria de Tuyuty, a 24 de Maio de 1866?
- 5) o dia da passagem de Humaytá, a 20 de Fevereiro de 1867?
- 6) o dia da abolição dos escravos, a 13 de Maio de 1888?
- 7) o dia da proclamação da Republica brasileira, a 15 de Novembro de 1889?
- 8) o dia da promulgação da Constituição da Republica, a 24 de Fevereiro de 1891?

Quanto tempo viveu:

- 9) D. Pedro I., imperador do Brasil, nascido a 12 de Out^o de 1798 e fallec. a 24 de Set^o de 1834?
- 10) D. Pedro II., nasc. a 2 de Dezembro de 1825 e fallec. a 5 de Dez^o de 1891?

- 11) Saldanha Marinho, patriarcha da Republica, nasc. a 4 de Maio de 1817 e fallec. a 28 de Maio de 1895?
- 12) Benjamin Constant, nasc. a 18 de Out^o de 1833 e fallec. a 22 de Jan^o de 1891?
- 13) Deodoro da Fonseca, nasc. a 5 de Agosto de 1827 e fallec. a 23 de Agosto de 1892?
- 14) Floriano Peixoto, nasc. a 30 de Abril de 1839 e fallec. a 29 de Junho de 1895?
- 15) Saldanha da Gama, nasc. a 7 de Abril de 1846 e fallec. a 24 de Junho de 1895?

Achar o dia da morte.

Exemplo: N. nasceu a 20 de março de 1812 e tinha 72 annos, 5 mezes e 23 dias de idade. Quando morreu?

Se elle tivesse vivido exactamente 72 annos, teria morrido a 20 de março de 1884; se, porém, tivesse vivido mais 5 mezes, teria morrido a 20 de agosto do mesmo anno; mas viveu ainda 23 dias, isto é, 11 dias em agosto e 12 em setembro; por conseguinte morreu a 12 de setembro de 1884.

Exercícios:

Achar o dia da morte de:

- 16) Antonio Gonçalves Dias, nasc. a 10 de Agosto de 1823 e fallec. com 41 annos, 2 mezes e 24 dias de idade.
- 17) Fagundes Varella, nasc. a 15 de Agosto de 1843 e fallec. com 31 annos, 6 mezes e 3 dias de idade.?
- 18) Casimiro de Abreu, nasc. a 4 de Jan^o de 1837 e fallec. com 23 annos, 9 mezes e 14 dias de idade.
- 19) Padre Antonio Vieira, nasc. a 6 de Fev^o de 1608 e fallec. com 89 annos, 5 mezes e 12 dias de idade.
- 20) Alvares de Azevedo, nasc. a 12 de Set^o de 1831 e fallec. com 20 annos, 7 mezes e 13 dias de idade.

- 21) Carlos Gomes, nasc. a 11 de Julho de 1839 e fallec. com 57 annos, 2 mezes e 5 dias de idade.
- 22) Mozart, nasc. a 17 de Jan^o de 1756 e fallec. com 35 annos, 10 mezes e 18 dias de idade.
- 23) Beethoven, nasc. a 16 de Dez^o de 1770 e fallec. com 56 annos, 3 mezes e 10 dias de idade.

Achar o dia do nascimento.

Exemplo: N. morreu a 18 de fevereiro de 1886 com 28 annos, 3 mezes e 19 dias de idade. Quando então nasceu?

Se N. tivesse nascido 19 dias antes da sua morte, o seu nascimento teria sido em 30 de janeiro do mesmo anno; se tivesse nascido exactamente 3 mezes antes, o seu nascimento terio sido em 30 de outubro de 1885. Mas N. nasceu 28 annos ainda mais cedo, por consequente nasceu a 30 de outubro de 1857.

Exercicios:

Achar o dia do nascimento de:

- 24) Duque de Caxias, fallec. a 8 de Maio de 1880 com 76 annos, 8 mezes e 13 dias de idade.
- 25) Marquez de Herval (Osorio), fallec. a 4 de Out^o de 1879 com 56 annos, 1 mez e 24 dias de idade.
- 26) Visconde do Rio Branco, fallec. a 31 de Out^o de 1880 com 61 annos, 7 mezes e 15 dias de idade.
- 27) José Bonifacio de Andrade e Silva, fallec. a 6 de Abril de 1838 com 74 annos, 9 mezes e 24 dias de idade.
- 28) Visconde de Taunay, fallec. a 25 de Jan^o de 1899 com 55 annos, 11 mezes e 3 dias de idade.
- 29) A. Herculano, fallec. a 13 de Setembro de 1877 com 67 annos, 5 mezes e 16 dias de idade.
- 30) Kopernico, fallec. a 24 de Maio de 1543 com 70 annos, 3 mezes e 5 dias de idade.
- 31) Galileo, fallec. a 8 de Janeiro de 1642 com 77 annos, 10 mezes e 20 dias de idade.



§ 5.

Divisibilidade dos numeros.

A theoria da divisibilidade estabelece as regras por meio das quaes podemos conhecer se um numero é exactamente divisivel por outros, sem effectuar essas divisões. Esse numero que contem outros uma ou mais vezes sem resto chama-se **multiplo** d'esses outros e estes chamam-se **submultiplos**, **divisores** ou **factores** do primeiro. Toda a theoria da divisibilidade se basea sobre dous theoremas:

Contendo 10, por exemplo, o factor 5, cada multiplo de 10 a saber 20, 30, 40, 50 etc. contem tambem este divisor:

$$\begin{aligned}
 10 &= 2 \times 5 \\
 20 &= 4 \times 5 \\
 30 &= 6 \times 5 \\
 &\text{etc.}
 \end{aligned}$$

logo:

I. Theorema: Cada multiplo de um numero contem tambem os factores d'este numero.

Sendo:

$$\begin{array}{r}
 \text{a) } 35 = 7 \text{ vezes } 5 \\
 + 15 = 3 \text{ vezes } 5 \\
 \hline
 50 = 10 \text{ vezes } 5
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \text{b) } 35 = 7 \text{ vezes } 5 \\
 + 17 = 3 \text{ vezes } 5 + 2 \\
 \hline
 52 = 10 \text{ vezes } 5 + 2
 \end{array}$$

vê-se que:

a) O divisor 5 está contido em 35 sete vezes, em 15 tres vezes, consequentemente na somma 35 + 15 = 50 estará contido 7 + 3 = 10 vezes.

b) O divisor 5 está contido em 35 mas não em 17 ficando o resto 2 e este resto se acha tambem na somma 35 + 17 = 52 dividindo-a por 5.

logo:

II. Theorema: O numero que dividir as parcellas de uma somma, dividirá tambem esta somma; mas o que

não dividir uma das parcelas, também não dividirá a somma.

Numeros divisiveis por:

2, 5 e 10.

Formando os multiplos a) de 2 b) de 5 e c) de 10, recebemos:

a) 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 etc.

b) 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35 etc.

c) 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70 etc.

do que se seguem as regras seguintes:

Para que um numero seja divisivel:

a) por 2 é necessario que seu ultimo algarismo seja 0 ou um numero par.

b) por 5 é necessario que seu ultimo algarismo seja 0 ou 5.

c) por 10 é necessario que seu ultimo algarismo seja 0.

Exercício: Escrever 12 numeros de 4 algarismos divisiveis por 2; 12 divisiveis por 5 e 12 divisiveis por 10.

Por 4 e 25.

É evidente que:

$$73500 = 735 \times 100$$

é multiplo de 4 e 25 por isso 73500 também será divisivel por 4 e 25 (I. Theor.)

$$73578 = 73500 + 78$$

é divisivel por 4 e 25 como multiplo de 100.

quando esta segunda parcella contem 4 ou 25 toda a somma 73578 o conterá (II. Theor.)

logo:

Para que um numero seja divisivel:

a) por 4 é necessario que os seus dous ultimos algarismos sejam 0 ou formem um numero divisivel por 4.

b) por 25 é necessario que os seus dous ultimos algarismos sejam 0 ou formem um numero divisivel por 25.

Exercício: Formar 12 numeros de 5 algarismos divisiveis por 4 e 12 divisiveis por 25

Por 8.

Temos evidentemente:

$$\begin{cases} 537000 = 537 \times 1000 \\ 537836 = 537000 + 836 \end{cases}$$

Sendo 1000 (= 8 × 125) divisivel por 8 achamos por conclusões semelhantes ás precedentes:

Para que um numero seja divisivel por 8 é necessario que os seus tres ultimos algarismos sejam 0 ou formem um numero divisivel por 8.

Exercício: Escrever 12 numeros de 6 algarismos, divisiveis por 8.

Por 3 e por 9.

Sendo 10 (= 9 + 1), 100 (= 99 + 1), 1000 (= 999 + 1) etc. divisiveis por 9 e 3, ficando sempre o resto 1, serão 20, 200, 2000 etc. divisiveis por 3 ou 9, deixando cada vez o resto 2. Os numeros 30, 300, 3000 etc., divididos por 3 ou 9, darão o resto 3 e assim por diante. Logo no exemplo seguinte:

$$\begin{array}{r} 5674 = 5000 + 600 + 70 + 4 \\ \text{será: } 5000 = \text{mult. de } 3 \text{ (ou } 9) + 5 \\ 600 = \text{ " " " " } + 6 \\ 70 = \text{ " " " " } + 7 \\ 4 = \text{ " " " " } + 4 \end{array}$$

e sommando: 5674 = mult. de 3 (ou 9) + (4 + 7 + 6 + 5)

A primeira parcella d'esta somma é multiplo de 3 ou 9, logo divisivel por 3 e por 9. Se a segunda parcella (4 + 7 + 6 + 5) fôr divisivel por 3 ou por 9, a somma das duas parcellas 5674 tambem o será, mas a segunda parte (4 + 7 + 6 + 5) é formada pela somma dos algarismos do numero dado; logo:

Para que um numero seja divisivel

- a) por 3 é necessario que a somma dos seus algarismos seja um multiplo de 3.
- b) por 9 é necessario que a somma dos seus algarismos seja um multiplo de 9.

Exercício: Escrever 12 numeros, de 5 algarismos, divisiveis por 3 e 12, divisiveis por 9.

Por 11.

Sendo 100 (= 99 + 1), 10000 (= 9999 + 1), 1000000 (= 999999 + 1) etc. divisiveis por 11, restando cada vez 1, ficarão sempre 2, quando se divide 200, 20000, 2000000 etc. e 3, quando dividimos 300, 30000, 3000000 por 11 etc. Do outro lado, dividindo 10 (= 11 - 1), 1000 (= 1001 - 1), 100000 (= 100001 - 1) por 11, faltará ainda 1 para serem multiplos de 11, logo em 20, 2000, 200000 duas e em 30, 3000, 300000 faltarão ainda tres unidades etc. para serem divisiveis sem resto por 11. É claro, por consequinte, que no exemplo:

$$25736 = 20000 + 5000 + 700 + 30 + 6$$

será: 20000 = mult. de 11	+ 2
5000 =	" " " - 5
700 =	" " " + 7
30 =	" " " - 3
6 =	" " " 6

sommando: 25736 = mult. de 11 + (6 - 3 + 7 - 5 + 2)

A primeira parcella d'esta somma é divisivel por 11, porque é multiplo de 11. Se a segunda parcella (6 - 3 + 7 - 5 + 2) = (6 + 7 + 2) - (3 + 5) fôr 0 ou divisivel por 11, a somma das duas parcellas 25736 tambem o será; logo:

Para que um numero seja divisivel por 11 é necessario que a differença entre a somma dos algarismos de ordem impar e a dos algarismos de ordem par seja 0 ou multiplo de 11.

Exercício: Escrever 12 numeros, de 5 e 6 algarismos, divisiveis por 11.

Por 6.

6 = 2 x 3. Se o numero 6 estiver contido num numero qualquer, tambem os seus factores 2 e 3 estarão contidos nesse numero e vice-versa; logo:

Para que um numero seja divisivel por 6 é necessario que seja par e divisivel por 3.

Exercício: Escrever 12 numeros, de 5 e 6 algarismos, divisiveis por 6.

Por 12 e por 15.

Sendo 12 = 3 x 4 e 15 = 3 x 5, achamos por conclusões semelhantes ás applicadas ao numero 6:

Para que um numero seja divisivel:

- a) por 12 é necessario que seja divisivel por 3 e por 4.
- b) por 15 é necessario que seja divisivel por 3 e por 5.

Exercício: Escrever 12 numeros, de 6 algarismos, divisiveis por 12 e 12 divisiveis por 15.

Exercícios:

Vêr se os numeros seguintes são exactamente divisiveis por:

- 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 15 e 25.
- 1) 180 - 200 - 336 - 288 - 270 - 864 - 2472.

- 2) 4050 — 2255 — 1620 — 6336 — 3996 — 6180.
- 3) 7200 — 5775 — 9504 — 19575 — 24024 — 41664.
- 4) 42435 — 22176 — 22740 — 57123 — 58641.
- 5) 81576 — 69225 — 108636 — 127842.
- 6) 148995 — 259776 — 388168 — 510510.
- 7) 517176 — 327624 — 600633 — 703530.
- 8) 725760 — 664048 — 798336 — 933240.
- 9) 155925 — 135225 — 1208295 — 1297296 — 2278944.

Achar os factores communs menores de 12, empregando as regras sobre a divisibilidade dos numeros, de:

- | | | |
|-------------------|--------------------|-------------------|
| 10) 12 e 30 | 11) 16 e 64 | 12) 25 e 50 |
| 13) 36 e 90 | 14) 56 e 64 | 15) 27 e 81 |
| 16) 36 e 60 | 17) 45 e 105 | 18) 120 e 180 |
| 19) 160 e 200 | 20) 99 e 297 | 21) 144 e 216 |
| 22) 117 e 162 | 23) 234 e 486 | 24) 288 e 432 |
| 25) 585 e 765 | 26) 1215 e 2475 | 27) 1296 e 3240 |
| 28) 5488 e 7736 | 29) 9240 e 11880 | 30) 15840 e 19800 |
| 31) 4, 8 e 12 | 32) 15, 25 e 30 | |
| 33) 15, 45 e 105 | 34) 14, 28 e 42 | |
| 35) 24, 72 e 96 | 36) 32, 48 e 128 | |
| 37) 48, 120 e 144 | 38) 64, 256 e 1024 | |
| 39) 20, 60 e 120 | 40) 45, 60 e 180 | |

§ 6.

Numeros primos.

Numero primo chama-se a todo o numero que só é divisivel por si mesmo e pela unidade, por exemplo: 2, 3, 5, 7, 11 etc.

Numeros primos entre si são dous ou mais numeros que não têm outro factor commum além da unidade; p. ex. 5, 6 e 7.

Exercício: Escrever todos os numeros primos desde 1 até 200.

Para decompôr um numero em seus factores primos, divide-se esse numero successivamente pelos numeros primos 2, 3, 5, 7, 11 etc. até encontrar no quociente um numero primo.

Exemplo: $360 = 2 \times 180$

$$\begin{array}{r} 2 \times 90 \\ 2 \times 45 \\ 3 \times 15 \\ 3 \times 5 \end{array}$$

$360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$

Outro typo de operação

360		2
180		2
90		2
45		3
15		3
5		5
1		

Exercícios:

Decompôr es numeros seguintes em seus factores primos:

- 1) 32 — 40 — 66 — 72 — 77 — 80 — 100.
- 2) 108 — 114 — 136 — 144 — 165 — 176 — 180.
- 3) 200 — 220 — 232 — 245 — 256 — 288 — 360.
- 4) 440 — 525 — 600 — 672 — 792 — 810 — 896.
- 5) 900 — 1008 — 1155 — 1260 — 1890 — 2560 — 5376.
- 6) 7560 — 2376 — 5775 — 7350 — 6864 — 6336 — 11016.
- 7) 3996 — 6480 — 9504 — 19008 — 29304 — 42471 — 44100

§ 7.

Maximo divisor commum.

Divisor commum de 2 ou mais numeros, chama-se todo o numero que os divide sem resto.

Por exemplo os numeros 12, 18 e 30 têm communs os factores:

$$\left. \begin{array}{l} 2 \\ 3 \\ 6 \end{array} \right\} \text{é o maximo divisor commum}$$

de 12, 18 e 30

porque é o maior de todos.

Para achar, por exemplo, o maximo divisor commum de 680 e 255, divide-se o maior 680 pelo menor 255; este pelo resto 170, o primeiro

$$\begin{array}{r|l} 680 & 255 \\ 170 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 255 & 170 \\ 85 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 170 & 85 \\ 0 & 2 \end{array}$$

resto 170 pelo segundo 85 que é contido em 170 exactamente duas vezes. 85 é o maximo divisor commum.

Demonstração: É claro que:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \ 680 = (2 \times 255) + 170 \\ 2) \ 255 = (1 \times 170) + 85 \\ 3) \ 170 = (2 \times 85) + 0 \end{array} \right\}$$

(3) mostra que 170 é divisivel por 85 (resto 0). Em (2) são as duas parcellas 85 e 170, divisiveis por 85, logo a sua somma 255 tambem (Theor. II). Sendo 85 factor de 170 e 255, elle será tambem divisor de 680; por conseguinte, 85 é divisor commum de 680 e 255 e é o maximo, porque, se tivesse outro factor maior que 85, este devia tambem dividir 170 o que mostra (1) e, por conseguinte, tambem 85 conforme (2). Mas um numero maior do que 85, não pode estar contido em 85; logo não ha maior divisor commum de 680 e 255 do. que 85.

Modelo da operação

$$\begin{array}{r|l} 2 & 1 & 2 \\ 680 & 255 & 170 & 85 \\ 170 & 85 & 0 & \end{array}$$

Exercícios:

Achar o maximo divisor commum de:

- | | |
|---------------------|----------------------|
| 1) 384 e 1296 | 2) 689 e 1573 |
| 3) 283 e 554 | 4) 462 e 973 |
| 5) 1116 e 3007 | 6) 2272 e 3552 |
| 7) 1908 e 2736 | 8) 6906 e 10359 |
| 9) 49608 e 169416 | 10) 4115 e 126025 |
| 11) 73509 e 105181 | 12) 14539 e 25728 |
| 13) 124640 e 145345 | 14) 506088 e 1492128 |

Para achar o maximo divisor commum de 3 ou mais numeros, procura-se primeiramente o de 2 d'elles e depois o maximo divisor do numero achado e do terceiro numero etc. O ultimo divisor achado será o maximo divisor commum de todos os numeros dados.

Exercícios:

Achar o maximo divisor commum de:

- | |
|---------------------------|
| 15) 365, 511 e 803 |
| 16) 232, 290 e 493 |
| 17) 492, 1476 e 1763 |
| 18) 148, 444, 592 e 703 |
| 19) 290, 696, 1160 e 2030 |

§ 8.

Menor multiplo commum.

Chama-se **multiplo commum** de muitos numeros

todo o numero que *contem* aquelles *numeros* *sem* resto, *por exemplo*:

12 é **multiplo commum** de:
2, 3, 4 e 6.

mas tambem:

24
36
48 } são **multiplos communs**
de 2, 3, 4 e 6

etc.) sendo divisiveis por estes numeros.

Vê-se que muitos numeros têm muitos multiplos communs, mas entre todos ha um que é o menor de todos chamado: o **menor multiplo commum**. No exemplo precedente é 12 o menor multiplo de 2, 3, 4 e 6, isto é, não ha numero, menor que 12, divisivel por 2, 3, 4 e 6.

Para achar o menor multiplo de diversos numeros, decompomos estes numeros em seus factores primos. Depois formamos o producto d'estes factores, tomando cada um d'elles tantas vezes quantas apparece no numero, onde se acha repetido maior numero de vezes.

Se tivéssemos de achar o menor multiplo commum de 4, 6, 8, 9 e 15, decompormos estes numeros em seus factores primos:

$$\begin{aligned} 4 &= 2 \times 2 \\ 6 &= 2 \times 3 \\ 8 &= 2 \times 2 \times 2 \\ 9 &= 3 \times 3 \\ 15 &= 3 \times 5 \end{aligned}$$

O menor multiplo
é: $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 360$

O menor multiplo de 4, 6, 8, 9 e 15 deverá conter todos os factores primos de cada um d'estes

numeros, logo deverá conter os factores 2, 3 e 5. Mas este multiplo não pôde conter:

- a) o factor 2 menos de 3 vezes, porque, se assim fosse, não seria divisivel por 8.
- b) o factor 3 menos de 2 vezes para ser divisivel por 9.
- c) o factor 5 menos de uma vez para que seja multiplo de 5.

Logo, não ha menor multiplo de 4, 6, 8, 9 e 15 do que o producto de: $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 360$.

Dá-se tambem á operação precedente a forma seguinte:

2	4	6	8	9	15
3		3	4	9	15
			4	3	5

O menor multiplo é:
 $2 \times 3 \times 4 \times 3 \times 5 = 360$.

Escrevem-se os numeros 4, 6, 8, 9 e 15 numa linha; 4 pôde-se traçar porque é contido em 8 e cada multiplo de 8 tambem contem o seu submultiplo 4. Depois, procura-se

o menor factor commum de dous ou mais d'estes numeros! Vê-se que 2 é o menor divisor de 8 e 6; escreve-se 2 á esquerda dos numeros e dividem-se aquelles numeros por 2. Os quocientes e os numeros não divisiveis escrevem-se na segunda linha, onde se pôde traçar 3 por ser divisor de 9. Como 9 e 15 se podem ainda dividir por 3, repete-se a mesma operação que se continua até obter-se uma linha em que dous numeros não tenham mais um divisor commum.

O producto de todos os numeros nesta linha e de todos os divisores á esquerda — em nosso exemplo $5 \times 3 \times 4 \times 3 \times 2 = 360$ — é então o menor multiplo pedido.

E' claro que o menor multiplo commum de diferentes numeros primos entre si é o producto d'estes mesmos numeros.

Exercicios:

Achar o menor multiplo de:

- | | |
|--------------------------|---------------------------|
| 1) 12 e 15 | 2) 18 e 24 |
| 3) 24 e 32 | 4) 30 e 36 |
| 5) 3, 4 e 5 | 6) 4, 5 e 6 |
| 7) 4, 5 e 8 | 8) 8, 9 e 12 |
| 9) 6, 10 e 15 | 10) 6, 14 e 21 |
| 11) 8, 12 e 16 | 12) 9, 12 e 18 |
| 13) 10, 15 e 20 | 14) 12, 16 e 20 |
| 15) 9, 15 e 21 | 16) 12, 18 e 24 |
| 17) 20, 25 e 30 | 18) 18, 24 e 30 |
| 19) 32, 48 e 64 | 20) 40, 60 e 80 |
| 21) 2, 3, 4 e 5 | 22) 3, 4, 5 e 6 |
| 23) 6, 8, 10 e 12 | 24) 8, 10, 12 e 16 |
| 25) 10, 15, 25 e 30 | 26) 12, 16, 24 e 28 |
| 27) 14, 21, 42 e 40 | 28) 16, 24, 40 e 30 |
| 29) 8, 10, 16, 15 e 25 | 30) 9, 12, 16, 18 e 20 |
| 31) 10, 12, 14, 16 e 18 | 32) 14, 15, 20, 22 e 28 |
| 33) 18, 24, 30, 35 e 40 | 34) 20, 25, 27, 36 e 45 |
| 35) 12, 18, 32, 45 e 96 | 36) 10, 15, 45, 65 e 117 |
| 37) 40, 48, 56, 60 e 144 | 38) 80, 84, 96, 100 e 105 |
| 39) 15, 26, 39, 65 e 90 | 40) 20, 35, 90, 252 e 280 |

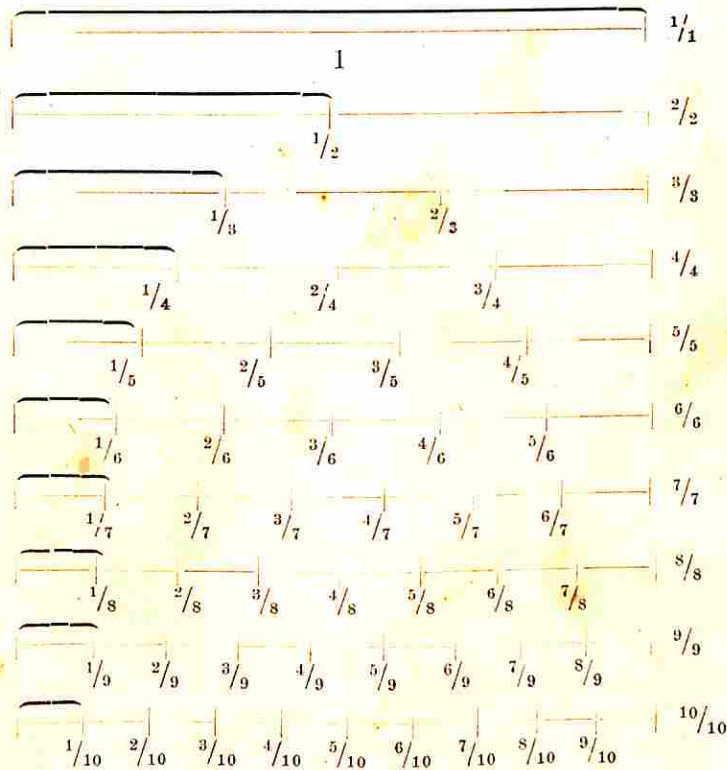
§ 9.

Fracções Ordinarias.

Dividindo uma unidade — uma laranja, por exemplo, — em certo numero de partes iguaes e tomando uma ou mais d'estas partes, encontra-se um

numero que se chama **quebrado** ou **fracção**. Para representar uma fracção precisamos de dous numeros: do **denominador** que indica em quantas partes a unidade está dividida e do **numerador** que mostra quantas d'estas partes se tomaram. Se dividirmos, por exemplo, a unidade em tres partes iguaes e tomarmos duas d'estas partes, a fracção obtida se escreverá:

$$\frac{2}{3} = \text{Numerador} \\ \text{Denominador}$$



Cada uma d'estas rectas representa uma unidade. A primeira não está dividida; a segunda, porém, está dividida em duas partes iguaes, cada uma das quaes é uma meia linha e, portanto, a unidade consta de dous meios ($\frac{2}{2}$). A terceira recta está dividida em tres partes iguaes, cada uma das quaes representa um terço ($\frac{1}{3}$), duas d'ellas dous terços ($\frac{2}{3}$), tres terços ($\frac{3}{3}$) ou a propria unidade etc. etc. Esta consideração nos mostra que:

$$\begin{array}{l} \text{a) A unidade} = \frac{2}{2} \\ \quad \quad \quad = \frac{3}{3} \\ \quad \quad \quad = \frac{4}{4} \\ \quad \quad \quad \cdot \\ \quad \quad \quad \cdot \\ \quad \quad \quad \cdot \\ \quad \quad \quad \cdot \\ \quad \quad \quad \cdot \\ \quad \quad \quad \cdot \\ \quad \quad \quad = \frac{20}{20} \\ \quad \quad \quad \cdot \\ \quad \quad \quad \cdot \\ \quad \quad \quad \cdot \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{a) A unidade} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}} \right\}$$

$$\begin{array}{l} \text{b) sendo} \quad \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5} > \frac{1}{6} \dots\dots \text{será} \\ \text{tambem} \quad \frac{2}{2} > \frac{2}{3} > \frac{2}{4} > \frac{2}{5} > \frac{2}{6} \dots\dots \\ \quad \quad \quad \frac{3}{2} > \frac{3}{3} > \frac{3}{4} > \frac{3}{5} > \frac{3}{6} \dots\dots \\ \quad \quad \quad \text{etc.} \quad \quad \quad \text{etc.} \quad \quad \quad \text{etc.} \end{array}$$

isto é, tendo duas fracções o mesmo numerador e denominadores diferentes, a maior será a que tiver menor denominador.

Numa fracção o numerador pôde ser menor que o denominador, neste caso se diz **propria** ($\frac{3}{7}$), chama-

se porém **impropria** quando o numerador é maior que o denominador ou quando são iguaes os dous termos ($\frac{11}{7}$, $\frac{7}{7}$). **Numero mixto** ou **fracçionario** é qualquer numero inteiro acompanhado de fracção ($7\frac{2}{5}$).

Exercicios:

- 1) Como se deve dividir uma linha recta para obter-se $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{40}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{200}$, etc. e de quantas de cada uma d'estas partes se compõe a dita recta? O alumno deve fazer estas divisões graphicamente.
- 2) Escrever as fracções que se obtêm, dividindo se successivamente em 2, 5, 7, 10 partes iguaes uma certa quantidade de laranjas, e tomando-se 2, 3, 4, 6, 9 e 12 d'estas partes
- 3) Dizer quaes d'estas fracções são próprias e quaes improprias?
- 4) Diversas pessoas dividiram certa somma, recebendo $\frac{1}{5}$ cada uma. Quantas pessoas eram?
- 5) Escrever 10 fracções próprias, 10 improprias e 10 numeros mixtos.
- 6) Que significam as expressões $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{11}{15}$? Demonstral-as em uma linha recta.
- 7) Qual a differença entre $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{5}$?
- 8) Quantos meios, terços, sextos, oitavos, nonos, quinze avos, vinte e um avos, trinta e quatro avos etc. tem uma unidade?
- 9) Quanto falta respectivamente a $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{9}{16}$ para completar a unidade?
- 10) De que numero é a) 8 a metade, b) 12 a terça parte, c) 15 a sexta parte, d) 17 a decima parte?
- 11) Sabendo-se que $\frac{2}{5}$ d'uma linha recta são iguaes a 4 cm., pergunta-se qual o comprimento de toda a recta?
- 12) Entre quantos meninos podem-se dividir 17 laranjas, dando-se a cada um $\frac{1}{4}$ de laranja?
- 13) Uma familia consome diariamente $\frac{1}{6}$ de Kg. de café. Em quanto tempo consumirá 45 Kg.?
- 14) Quantos meios, quartos, quintos, quatorze avos, vinte e cinco avos, trinta e dous avos, quarenta e oito avos têm:

- a) 2 b) 9 c) 15 d) 27 e) 58 f) 65 g) 93
 h) 123 i) 271 unidades?

- 15) Quantas unidades estão contidas em:
 a) $\frac{28}{7}$ b) $\frac{42}{6}$ c) $\frac{63}{7}$ d) $\frac{64}{8}$ e) $\frac{72}{12}$ f) $\frac{39}{13}$
 g) $\frac{105}{15}$ h) $\frac{140}{20}$ i) $\frac{265}{5}$ k) $\frac{234}{9}$ l) $\frac{352}{11}$ m) $\frac{548}{4}$
 n) $\frac{675}{25}$ o) $\frac{690}{30}$ p) $\frac{741}{19}$ q) $\frac{836}{2}$ r) $\frac{836}{4}$ s) $\frac{846}{6}$

- 16) Quantos meses tem $\frac{1}{2}$ anno, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ do anno?
 17) Quantas horas tem $\frac{1}{2}$ dia, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{12}$ do dias?
 18) Quantos dias tem $\frac{1}{2}$ mez, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{15}$ do mez?
 19) Quantos minutos tem $\frac{1}{2}$ hora, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{30}$ da hora?
 20) Quantos cm. tem $\frac{1}{2}$ m., $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{50}$, $\frac{1}{100}$ do m.?
 21) Quantos réis tem $\frac{1}{2}$ milréis, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{50}$, $\frac{1}{100}$ de milréis?
 22) Quantos objectos tem $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{9}{12}$ da duzia?
 23) Quantos l. tem $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{11}{20}$, $\frac{13}{25}$, $\frac{27}{50}$ do HL?
 24) " m. " $\frac{2}{5}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{13}{20}$, $\frac{43}{50}$, $\frac{139}{200}$ do Km?
 25) " segundos " $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{13}{15}$, $\frac{17}{20}$, $\frac{23}{30}$ do minuto?
 26) " g. " $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{17}{20}$, $\frac{19}{25}$, $\frac{33}{50}$, $\frac{81}{100}$ do Kg.?

- Que parte de:
 27) uma semana são: 2, 3, 4, 5, 6 dias?
 28) um anno são: 2, 3, 4, 6, 8 mezes?
 29) um dia são: 2, 4, 6, 8, 12, 16 horas?
 30) um mez são: 2, 3, 5, 6, 10, 15, 12, 20 dias?
 31) uma hora são: 3, 4, 5, 6, 10, 15, 20, 30, 40 minutos?
 32) um HL. são: 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 l.?
 33) um milréis são: 5, 10, 20, 25, 50, 100, 125, 200, 250, 500 réis?
 34) Quantos annos e mezes são: 36 annos $\frac{1}{2}$ + 23 annos e 11 mezes, + 45 annos $\frac{2}{3}$ + 32 annos $\frac{5}{6}$?
 35) Quantos dias e horas são: 12 dias $\frac{1}{6}$ + 20 dias $\frac{7}{8}$ + 45 dias $\frac{5}{12}$ + 64 dias $\frac{3}{4}$ + 16 dias e 11 horas?
 36) Quantas horas e minutos são: 6 horas $\frac{2}{3}$ + $\frac{3}{4}$ da hora + 14 horas $\frac{3}{5}$ + 22 horas $\frac{5}{6}$ + 5 horas $\frac{13}{15}$?

- 37) Quantos minutos e segundos são: 25 minutos, 32 segundos + 26 minutos $\frac{2}{3}$ + 4 minutos $\frac{1}{15}$ + 37 minutos $\frac{13}{20}$ + 8 minutos $\frac{5}{6}$?
 38) Quantos m. e cm. são: 8 m. 46 cm. + 24 m. $\frac{3}{4}$ + 75 m. $\frac{7}{10}$ + 112 m. $\frac{9}{20}$ + $\frac{21}{25}$ do m.?
 39) Quantos HL e l. são: 7 HL. $\frac{2}{3}$ + 21 HL. $\frac{7}{10}$ + 36 HL. 57 l. + 34 HL. $\frac{2}{5}$?
 40) Quantos m. e cm. são: 27 m. $\frac{7}{10}$ - 18 m. $\frac{19}{25}$?
 41) Quantos annos e mezes são: 16 annos, 5 mezes - 8 annos $\frac{3}{4}$?
 42) Quantos HL e l. são: 33 HL. $\frac{2}{5}$ - 16 HL. $\frac{17}{20}$?
 43) Quantos Kg. e g. são: 45 Kg. 451 g. - 27 Kg. $\frac{49}{50}$?
 44) Quantos Km. e m. são: 64 Km. $\frac{23}{125}$ - 29 Km. 848 m.?
 45) Quantos annos e mezes são: 26 annos 3 mezes - 17 annos $\frac{2}{6}$ + 32 annos $\frac{1}{4}$ - 10 annos $\frac{7}{12}$?
 46) Quantos minutos e segundos são: 45 min - 37 min. $\frac{2}{5}$ + 14 min. $\frac{3}{10}$ - 16 min. $\frac{7}{12}$ + 53 min. 29 seg. - 47 min. $\frac{13}{20}$?
 47) Quantos HL e l. são: 12 HL. $\frac{2}{5}$ - 7 HL., 67 l. + 18 HL. $\frac{7}{10}$ - 20 HL. $\frac{9}{20}$ + 25 HL., 46 l. - 6 HL. $\frac{47}{50}$?
 48) Quantos Kg. e g. são: 16 Kg. $\frac{13}{25}$ - 13 Kg. $\frac{37}{50}$ + 28 Kg. $\frac{1}{4}$ - 4 Kg. $\frac{84}{125}$ + 734 g.?
 49) [50] Pergunta-se a quantia gasta, sabendo-se que foi a sexta [nona] parte de 9\$600 [73\$800]?
 51) [52] Quaes são os $\frac{2}{7}$ [$\frac{7}{13}$] de 224 [663]?
 53) [54] A. idade de um filho é 2 annos mais [menos] do que a quarta [terça] parte da idade do pai que tem 48 annos. Que idade terá?
 55) [56] B. perdeu $\frac{2}{5}$ [$\frac{5}{7}$] de 24\$500 [43\$400]. Quanto lhe ficou?
 57) [58] C. ganha por mez 280\$000 [275\$000] e gasta $\frac{5}{7}$ [$\frac{8}{11}$] d'esta quantia. Quanto economisa por anno?
 59) [60] Quanto fica, gastando-se a $\frac{1}{9}$ [$\frac{3}{8}$] parte de 176\$400 [352\$800]?
 61) [62] Tres socios D. E. e F. repartem entre si 855\$000 [1:760\$000]; D. recebe $\frac{2}{3}$ [$\frac{1}{4}$]. E. $\frac{4}{15}$ [$\frac{5}{16}$] d'esta quantia e F. o resto. Quanto recebe cada um?
 63) Pagando-se por um quintal metrico 180\$000, pergunta-se o preço de $\frac{1}{2}$ quintal, de $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{7}{10}$ do quintal, de $4\frac{3}{5}$, $6\frac{5}{6}$ quintaes?

- 64) [65] G. possuía 23\$700 [61\$500]; ganhando mais $\frac{2}{3}$ d'esta quantia, procura-se a quantia que tem agora?
- 66) [67] Sendo o preço de 1 Kg. de uma mercadoria 800 réis [1\$600], pergunta-se o preço de $\frac{1}{2}$ Kg., de $\frac{1}{10}$ e de $\frac{3}{10}$ do Kg.?
- 68) [69] Custando o metro de panno 2\$400 [5\$200], quer-se saber o preço de $\frac{1}{2}$ m., de $\frac{1}{4}$ do m., de 3 m., $\frac{1}{2}$ e 4 m. $\frac{3}{4}$?
- 70) [71] Pagando-se 2370\$000 [3540\$000] pela hectare de terra, quer-se saber o preço de 7 Ha. $\frac{2}{3}$ [13 Ha. $\frac{2}{3}$]?
- 72) [73] H. ganhou $\frac{1}{10}$ [2/5] de certa quantia que possuía e tem agora 10\$600 [66\$500]. Qual era a quantia?
- 74) [75] K. possuía uma certa quantia e depois de haver pago $\frac{2}{5}$ [7/10] d'ella, lhe ficaram 19\$000 [86\$400]. Pergunta-se: a) Qual era esta quantia? b) Quanto pagou?

§ 10.

Reduzir numeros inteiros e mixtos a fracções improprias e fracções improprias a numeros inteiros ou mixtos.

- a) Reduzir inteiros a fracções.
 $3 \text{ unidades} = ? \text{ quintos}$

Sabe-se que: 1 unidade = 5 quintos
 e 3 unidades = $3 \times 5 \text{ quintos} = 15 \text{ quintos}$
 ou $3 = \frac{15}{5}$

- b) Reduzir um numero mixto a fracção impropria:

$3\frac{2}{5} = \frac{?}{5}$
 1 unidade = 5 quintos
 3 unidades = $3 \times 5 \text{ quintos} = 15 \text{ quintos}$
 + 2 quintos = 2 quintos
 $3 \text{ unidades} + 2 \text{ quintos} = 17 \text{ quintos}$
 ou $3\frac{2}{5} = \frac{17}{5}$

- c) Reduzir uma fracção impropria a numero inteiro ou mixto.

$\frac{7}{3} = ? \text{ unidades} + ? \text{ terços.}$

$3 \text{ terços} = 1 \text{ unidade}$

e 7 terços terão tantas unidades quantas vezes 3 terços estão contidos em 7 terços, isto é, 2 unidades e fica 1 terço resto ou:

$\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$

Exercícios:

Reduzir as unidades seguintes:

- | | |
|-------------------------------|-----------------------------------|
| 1) 7, 9, 10 a $\frac{1}{3}$ | 6) 26, 14, 39 a $\frac{1}{11}$ |
| 2) 8, 10, 12 a $\frac{1}{5}$ | 7) 17, 42, 54 a $\frac{1}{15}$ |
| 3) 13, 17, 18 a $\frac{1}{6}$ | 8) 19, 51, 65 a $\frac{1}{18}$ |
| 4) 11, 16, 20 a $\frac{1}{8}$ | 9) 43, 71, 81 a $\frac{1}{26}$ |
| 5) 25, 29, 33 a $\frac{1}{9}$ | 10) 82, 103, 177 a $\frac{1}{31}$ |

Reduzir os numeros mixtos seguintes a fracções improprias:

- | | a. | b. | c. | d. | | a. | b. | c. | d. |
|-----|-----------------|------------------|------------------|------------------|-----|------------------|------------------|-------------------|-------------------|
| 11) | $4\frac{2}{3}$ | $7\frac{1}{5}$ | $12\frac{2}{6}$ | $19\frac{3}{8}$ | 15) | $9\frac{2}{10}$ | $23\frac{3}{17}$ | $41\frac{10}{21}$ | $45\frac{5}{7}$ |
| 12) | $5\frac{2}{5}$ | $10\frac{7}{9}$ | $13\frac{4}{11}$ | $24\frac{3}{7}$ | 16) | $10\frac{7}{18}$ | $41\frac{8}{13}$ | $54\frac{1}{9}$ | $90\frac{5}{17}$ |
| 13) | $16\frac{2}{9}$ | $23\frac{1}{13}$ | $27\frac{3}{11}$ | $9\frac{5}{13}$ | 17) | $7\frac{11}{22}$ | $13\frac{1}{11}$ | $86\frac{3}{8}$ | $77\frac{9}{31}$ |
| 14) | $8\frac{7}{15}$ | $15\frac{5}{9}$ | $31\frac{7}{12}$ | $23\frac{9}{17}$ | 18) | $5\frac{14}{19}$ | $8\frac{7}{25}$ | $64\frac{5}{10}$ | $91\frac{17}{21}$ |

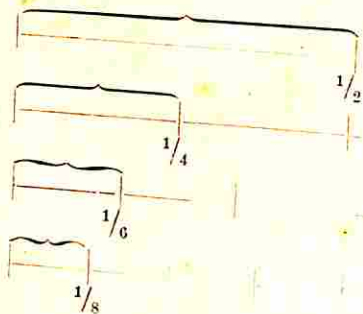
Reduzir as fracções seguintes a numeros inteiros ou a mixtos:

- | | a. | b. | c. | d. | | a. | b. | c. | d. |
|-----|-----------------|-----------------|------------------|------------------|-----|------------------|------------------|------------------|------------------|
| 19) | $\frac{63}{7}$ | $\frac{81}{9}$ | $\frac{57}{3}$ | $\frac{77}{11}$ | 23) | $\frac{100}{17}$ | $\frac{154}{11}$ | $\frac{173}{21}$ | $\frac{189}{10}$ |
| 20) | $\frac{96}{8}$ | $\frac{79}{13}$ | $\frac{121}{11}$ | $\frac{75}{12}$ | 24) | $\frac{95}{12}$ | $\frac{548}{11}$ | $\frac{360}{18}$ | $\frac{690}{31}$ |
| 21) | $\frac{87}{9}$ | $\frac{93}{5}$ | $\frac{91}{13}$ | $\frac{105}{11}$ | 25) | $\frac{231}{9}$ | $\frac{675}{24}$ | $\frac{532}{82}$ | $\frac{751}{20}$ |
| 22) | $\frac{108}{9}$ | $\frac{76}{15}$ | $\frac{113}{11}$ | $\frac{265}{5}$ | 26) | $\frac{711}{19}$ | $\frac{759}{27}$ | $\frac{643}{35}$ | $\frac{858}{22}$ |

§ 11.

Alteração no valor das fracções.

Dividindo a unidade em 4 partes iguaes, a sua metade terá duas d'essas partes; $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$



dividindo-a em 6 partes iguaes, cada metade terá 3 d'ellas e dividindo-a em 8 partes iguaes, cada metade terá 4 d'essas partes. D'aqui se segue que:

$$\frac{1}{4} \left(= \frac{1}{2 \times 2} \right) \text{ é a metade de } \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{6} \left(= \frac{1}{2 \times 3} \right) \text{ é a terça parte de } \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{8} \left(= \frac{1}{2 \times 4} \right) \text{ é a quarta parte de } \frac{1}{2}$$

etc.

etc.

etc. isto é:

Se multiplicarmos o denominador de uma fracção por qualquer numero, a fracção será dividida por esse mesmo numero.

Sendo, como acabamos de ver:

$$\frac{1}{2} \left(= \frac{1}{4:2} \right) \text{ duas vezes maior que } \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2} \left(= \frac{1}{6:3} \right) \text{ trez " " } \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{2} \left(= \frac{1}{8:4} \right) \text{ quatro " " } \frac{1}{8}$$

segue-se:

Se dividirmos o denominador de uma fracção por qualquer numero, a fracção será multiplicada por esse numero.

Comparemos $\frac{2}{9}$ com $\frac{4}{9}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{10}{9}$. . . vê-se que, sendo todas as partes iguaes, $\frac{4}{9}$ contem 2 vezes

mais, $\frac{6}{9}$ tres vezes mais e $\frac{8}{9}$ quatro vezes mais d'estas partes que $\frac{2}{9}$; logo:

$$\frac{4}{9} \left(= \frac{2 \times 2}{9} \right) \text{ é 2 vezes maior que } \frac{2}{9}$$

$$\frac{6}{9} \left(= \frac{2 \times 3}{9} \right) \text{ é 3 " " " "}$$

$$\frac{8}{9} \left(= \frac{2 \times 4}{9} \right) \text{ é 4 " " " "}$$

isto é:

Se multiplicarmos o numerador de uma fracção por qualquer numero, a fracção será multiplicada por esse mesmo numero.

Reciprocamente, sendo

$$\frac{2}{9} \left(= \frac{4:2}{9} \right) \text{ 2 vezes menor que } \frac{4}{9}$$

$$\frac{2}{9} \left(= \frac{6:3}{9} \right) \text{ 3 " " " } \frac{6}{9}$$

$$\frac{2}{9} \left(= \frac{8:4}{9} \right) \text{ 4 " " " } \frac{8}{9}$$

temos:

Se dividirmos o numerador de uma fracção por qualquer numero, a fracção será dividida por esse mesmo numero.

Do que foi dito, segue-se a regra:

Para multiplicar uma fracção por um numero, multiplica-se o numerador ou divide-se o denominador por esse numero; para dividir a fracção por um numero, divide-se o numerador ou multiplica-se o denominador por esse mesmo numero.

Das regras que acabamos de demonstrar, deduz-se um principio da maior importancia. Quando se multiplica o numerador ou divide o denominador de uma fracção qualquer por um numero, a fracção tornar-se-ha esse numero de vezes maior; quando se

divide o numerador ou multiplica o denominador por um numero, a fracção tornar-se-ha esse numero de vezes menor: logo:

Multiplicando ou dividindo ao mesmo tempo ambos os termos pelo mesmo numero, a fracção não muda de valor.

Por meio d'este theorema podemos transformar uma fracção em outra que tenha o mesmo valor que a primeira, mas que seja representada por outros termos. Por exemplo: Para transformar $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ e $\frac{2}{5}$ em vinte avos, precisamos multiplicar o denominador 2 de $\frac{1}{2}$ por 10, o denominador 4 de $\frac{3}{4}$ por 5 e o denominador 5 de $\frac{2}{5}$ por 4; mas, para que as fracções $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ e $\frac{2}{5}$ não mudem de valor, é necessario que multipliquemos os respectivos numeradores pelos mesmos numeros:

$$\begin{array}{l}
 1 \times 10 = 10 \\
 2 \times 10 = 20 \\
 3 \times 5 = 15 \\
 4 \times 5 = 20 \\
 2 \times 4 = 8 \\
 5 \times 4 = 20
 \end{array}$$

Exercicios:

- Multiplicar ambos os termos.
- 1) [2] a) de $\frac{4}{5}$ [13] por: 2, 5, 7, 13, 18, 25, 28, 31, 40
- 3) [4] b) de $\frac{7}{11}$ [15] por: 6, 8, 10, 15, 22, 27, 34, 59
- Dividir ambos os termos
- 5) [6] a) de $\frac{36}{180}$ [72] por: 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 e 36
- 7) [8] b) de $\frac{80}{120}$ [320] por: 2, 4, 5, 8, 10, 20 e 40.

- 9) $\frac{2}{4} = \frac{?}{12}$ 13) $\frac{1}{11} = \frac{?}{44}$ 17) $\frac{23}{36} = \frac{?}{175}$
 10) $\frac{3}{5} = \frac{?}{24}$ 14) $\frac{5}{8} = \frac{?}{56}$ 18) $\frac{31}{47} = \frac{?}{529}$
 11) $\frac{7}{8} = \frac{?}{32}$ 15) $\frac{11}{15} = \frac{?}{165}$ 19) $\frac{53}{79} = \frac{?}{592}$
 12) $\frac{9}{10} = \frac{?}{30}$ 16) $\frac{17}{23} = \frac{?}{69}$ 20) $\frac{75}{91} = \frac{?}{319}$

Reduzir:

- 21) $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ a $\frac{1}{12}$ 22) $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{9}$ a $\frac{1}{18}$
 23) $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{10}$ a $\frac{1}{20}$ 24) $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{8}$ a $\frac{1}{24}$
 25) $\frac{2}{8}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{7}{12}$ a $\frac{1}{24}$ 26) $\frac{2}{7}$ $\frac{9}{14}$ $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{28}$
 27) $\frac{5}{6}$ $\frac{7}{9}$ $\frac{11}{12}$ a $\frac{1}{36}$ 28) $\frac{7}{8}$ $\frac{9}{10}$ $\frac{17}{20}$ a $\frac{1}{40}$
 29) $\frac{3}{7}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{11}{14}$ a $\frac{1}{70}$ 30) $\frac{2}{5}$ $\frac{7}{15}$ $\frac{16}{25}$ a $\frac{1}{75}$
 31) [36] $\frac{2}{3}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{7}{10}$ $\frac{11}{15}$ $\frac{23}{30}$ $\frac{17}{45}$ a $\frac{1}{90}$... a $\frac{1}{270}$
 32) [37] $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{9}{10}$ $\frac{13}{20}$ $\frac{17}{25}$ a $\frac{1}{100}$... a $\frac{1}{400}$
 33) [38] $\frac{3}{7}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{9}{16}$ $\frac{13}{14}$ $\frac{25}{28}$ $\frac{31}{56}$ a $\frac{1}{112}$... a $\frac{1}{560}$
 34) [39] $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{4}{9}$ $\frac{7}{18}$ $\frac{19}{36}$ $\frac{47}{72}$ a $\frac{1}{144}$... a $\frac{1}{216}$
 35) [40] $\frac{5}{9}$ $\frac{2}{8}$ $\frac{11}{12}$ $\frac{19}{21}$ $\frac{13}{24}$ $\frac{41}{42}$ a $\frac{1}{168}$... a $\frac{1}{840}$

Para reduzir duas ou mais fracções ao mesmo denominador, vê-se que este denominador deve ser divisivel por todos os denominadores das fracções dadas; mas, como é de grande vantagem calcular com os menores numeros possiveis, não se toma por denominador commum um multiplo qualquer dos denominadores, porém o seu menor multiplo. Reduzamos, por exemplo, ao mesmo denominador as fracções seguintes: $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{12}$.

$$\begin{array}{r}
 1 \times 6 = 6 \\
 4 \times 6 = 24 \\
 5 \times 4 = 20 \\
 6 \times 4 = 24 \\
 3 \times 8 = 24 \\
 8 \times 3 = 24 \\
 7 \times 2 = 14 \\
 12 \times 2 = 24
 \end{array}$$

2	4	6	8	12
2		4	6	
		2	3	

$$2 \times 2 \times 2 \times 3 = \underline{24}$$

Exercícios:

Reduzir ao mesmo denominador as fracções seguintes:

- | | | | | | |
|--------------------------|---------------|-----------------|--------------------------|---------------|-----------------|
| 41) $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{3}{4}$ | 42) $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{3}{4}$ |
| 43) $\frac{3}{5}$ | $\frac{4}{7}$ | $\frac{1}{2}$ | 44) $\frac{2}{7}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{5}{8}$ |
| 45) $\frac{1}{4}$ | $\frac{5}{6}$ | $\frac{9}{14}$ | 46) $\frac{2}{5}$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{11}{15}$ |
| 47) $\frac{3}{4}$ | $\frac{7}{9}$ | $\frac{11}{12}$ | 48) $\frac{1}{6}$ | $\frac{5}{9}$ | $\frac{13}{15}$ |
| 49) $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{3}{7}$ | 50) $\frac{5}{6}$ | $\frac{4}{7}$ | $\frac{8}{9}$ |
-
- | | | | | | | | |
|----------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|---------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 51) $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{5}{6}$ | 52) $\frac{1}{3}$ | $\frac{5}{6}$ | $\frac{7}{9}$ | $\frac{13}{18}$ |
| 53) $\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{7}{10}$ | $\frac{11}{15}$ | 54) $\frac{3}{4}$ | $\frac{5}{8}$ | $\frac{9}{10}$ | $\frac{13}{20}$ |
| 55) $\frac{2}{7}$ | $\frac{5}{8}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{13}{21}$ | 56) $\frac{5}{6}$ | $\frac{7}{10}$ | $\frac{7}{12}$ | $\frac{14}{15}$ |
| 57) $\frac{2}{3}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{7}{15}$ | $\frac{17}{24}$ | 58) $\frac{1}{12}$ | $\frac{11}{16}$ | $\frac{13}{18}$ | $\frac{17}{24}$ |
| 59) $\frac{5}{9}$ | $\frac{13}{27}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{5}{7}$ | 60) $\frac{3}{8}$ | $\frac{2}{7}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{21}{28}$ |
| 61) $\frac{19}{25}$ | $\frac{47}{75}$ | $\frac{31}{50}$ | $\frac{23}{30}$ | 62) $\frac{9}{10}$ | $\frac{14}{15}$ | $\frac{32}{45}$ | $\frac{7}{12}$ |
| 63) $\frac{7}{30}$ | $\frac{23}{40}$ | $\frac{11}{50}$ | $\frac{59}{60}$ | 64) $\frac{7}{9}$ | $\frac{13}{18}$ | $\frac{29}{48}$ | $\frac{13}{60}$ |

Reciprocamente podemos muitas vezes representar uma fracção por termos menores, dividindo o numerador e o denominador da fracção pelo seu maximo divisor commum. Isto chama-se simplificar a fracção. A operação torna-se muitas vezes mais curta, quando, em vez de procurarmos o maximo divisor commum dos dous termos, dividirmol-os, se for possível, por um factor commum; depois os novos termos por outro divisor commum, se ainda for isto possível, e assim continuaremos a operação até chegarmos a uma fracção de termos primos entre si. Exemplos:

$$\left. \begin{aligned} \frac{9}{15} &= \frac{9:3}{15:3} = \frac{3}{5} \\ \frac{1485}{2475} &= \frac{1485:5}{2475:5} = \frac{297:9}{495:9} = \frac{33:11}{55:11} = \frac{3}{5} \end{aligned} \right\} \frac{27}{45}$$

Exercícios:

Simplificar as fracções seguintes:

- | | | | | | | | |
|------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-------------------|
| | a. | b. | c. | d. | e. | f. | g. |
| 65) | $\frac{12}{16}$ | $\frac{15}{30}$ | $\frac{24}{42}$ | $\frac{36}{60}$ | $\frac{38}{72}$ | $\frac{45}{100}$ | $\frac{66}{121}$ |
| 66) | $\frac{56}{128}$ | $\frac{72}{120}$ | $\frac{49}{231}$ | $\frac{108}{180}$ | $\frac{88}{256}$ | $\frac{162}{288}$ | $\frac{140}{200}$ |
| 67) | $\frac{250}{300}$ | $\frac{384}{512}$ | $\frac{306}{612}$ | $\frac{432}{990}$ | $\frac{535}{1005}$ | $\frac{781}{1023}$ | |
| 68) | $\frac{1331}{2453}$ | $\frac{3465}{4620}$ | $\frac{11088}{12672}$ | $\frac{1575}{189}$ | $\frac{2541}{3234}$ | $\frac{17325}{27720}$ | |
| 69) | $\frac{24255}{31185}$ | $\frac{32400}{51840}$ | $\frac{37125}{47025}$ | $\frac{40656}{62832}$ | $\frac{72072}{94248}$ | | |

E' claro que:

$$\frac{3 \times 4 \times 5}{2 \times 3} = \frac{60}{6} = 10 = \frac{3^1 \times 4^2 \times 5}{2^1 \times 3^1} = \frac{1 \times 2 \times 5}{1 \times 1} = 10$$

isto é: Para dividirmos um producto por um numero, basta dividirmos por este numero um dos factores — se a divisão for exactamente possível — e multiplicarmos o resultado pelos outros factores. Simplificar:

- | | | | |
|--|---|---|---|
| 70) $\frac{6 \times 5}{9}$ | 71) $\frac{8}{4 \times 3}$ | 72) $\frac{5 \times 7 \times 12}{10}$ | 73) $\frac{6 \times 8}{9 \times 14}$ |
| 74) $\frac{4 \times 6 \times 3}{21 \times 12}$ | 75) $\frac{12 \times 7 \times 15}{8 \times 21 \times 5}$ | 76) $\frac{16 \times 20 \times 9}{8 \times 15 \times 7}$ | |
| 77) $\frac{11 \times 21 \times 2}{14 \times 33}$ | 78) $\frac{4 \times 18 \times 20}{12 \times 15 \times 24}$ | 79) $\frac{24 \times 27}{9 \times 16 \times 15}$ | |
| 80) $\frac{36 \times 198}{4 \times 11 \times 27}$ | 81) $\frac{171 \times 1211}{63 \times 19}$ | 82) $\frac{5 \times 13 \times 16}{26 \times 40}$ | |
| 83) $\frac{51 \times 26 \times 10}{34 \times 39 \times 5}$ | 84) $\frac{8 \times 10 \times 12 \times 21}{14 \times 30 \times 28}$ | | |
| 85) $\frac{15 \times 6 \times 14 \times 27 \times 33}{60 \times 9 \times 7 \times 24}$ | 86) $\frac{3 \times 28 \times 5 \times 56 \times 81}{27 \times 42 \times 30 \times 7 \times 13}$ | | |
| 87) $\frac{16 \times 22 \times 36 \times 75 \times 96 \times 49}{49 \times 64 \times 55 \times 72}$ | 88) $\frac{23 \times 57 \times 14 \times 49 \times 11 \times 9}{66 \times 19 \times 63 \times 23 \times 98}$ | | |

§ 12.

Adição.

E' claro que 5 lapis mais 3 pennas mais 4 livros não são iguaes a 12 lapis nem a 12 pennas nem a 12 livros. O mesmo se dá com as fracções e por isso é tambem evidente que 2/3 + 3/4 + 1/5 não são iguaes a 6/3 nem a 6/4 nem a 6/5. Vemos por isto que só podemos sommar fracções que têm o mesmo denominador.

Se tivéssemos para adicionar:

$$\begin{array}{r}
 \frac{2}{12} \\
 + \frac{3}{12} \\
 + \frac{5}{12} \\
 \hline
 \frac{10}{12} \quad \frac{12}{12}
 \end{array}$$

sabemos que 1/12 é a decima-segunda parte da unidade e reunindo 2, 3 e 5 d'estas partes iguaes, teremos (2 + 3 + 5) doze avos ou:

$$\frac{2}{12} + \frac{3}{12} + \frac{5}{12} = \frac{2+3+5}{12} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}.$$

isto é: Para adicionar fracções que têm o mesmo denominador, basta sommar os numeradores e dar a esta somma o denominador commum.

Exercícios:

- 1) 2/7 + 3/7 + 6/7 = ?
- 2) 5/11 + 8/11 + 10/11 = ?
- 3) 7/19 + 10/19 + 16/19 = ?
- 4) 13/25 + 14/25 + 21/25 = ?
- 5) 16/27 + 23/27 + 29/27 = ?
- 6) 17/15 + 31/15 + 41/15 = ?
- 7) 13/30 + 41/30 + 87/30 = ?
- 8) 73/100 + 89/100 + 91/100 = ?

- 9) 5/17 + 6/17 + 9/17 + 12/17 + 14/17 + 16/17 = ?
- 10) 7/53 + 10/53 + 16/53 + 23/53 + 31/53 + 49/53 = ?
- 11) 33/70 + 17/70 + 53/70 + 9/70 + 11/70 + 3/70 = ?
- 12) 16/81 + 5/81 + 29/81 + 53/81 + 14/81 + 76/81 = ?
- 13) 17/100 + 89/100 + 9/100 + 93/100 + 17/100 + 61/100 = ?

Numeros mixtos adicionam-se, sommando primeiro as fracções, depois os inteiros e reunindo as duas sommas.

Exemplo: 2 4/9 + 5 7/9 + 16 8/9 = ?

$$\begin{array}{r}
 \frac{4}{9} = 4 \\
 5 \frac{7}{9} = 7 \\
 16 \frac{8}{9} = 8 \\
 \hline
 23 \phantom{\frac{19}{9}} = 21 \frac{9}{9} \\
 + 2 \frac{1}{9} \\
 \hline
 25 \frac{1}{9}
 \end{array}$$

Exercícios:

Sommar:

- 14) 7 1/9 + 9 5/9 + 12 7/9
- 15) 13 6/11 + 26 10/11 + 6 6/11
- 16) 26 8/19 + 4 + 34 12/19
- 17) 8 3/14 + 13 11/14 + 47 5/14
- 18) 15 7/20 + 49 13/20 + 19 19/20
- 19) 35/44 + 63 29/44 + 58 3/44
- 20) 5 19/36 + 45 31/36 + 10 7/36
- 21) 39 7/25 + 9 17/25 + 24 21/25
- 22) 17 23/47 + 36 24/47 + 7
- 23) 72 + 60 15/56 + 19 39/56

Quando as fracções não têm o mesmo denominador, reduzimol-as primeiro ao mesmo denominador.

Exemplo: 5/6 + 7/10 + 11/12 + 14/15 = ?

$$\begin{array}{r}
 5 \times 10 = 50 \\
 6 \times 10 = 60 \\
 7 \times 6 = 42 \\
 10 \times 6 = 60 \\
 11 \times 5 = 55 \\
 12 \times 5 = 60 \\
 14 \times 4 = 56 \\
 15 \times 4 = 60 \\
 \hline
 203 = 323/60.
 \end{array}$$

Na primeira linha está traçado o numero 6 porque é factor de 12; na segunda linha não precisamos de 2 e 3 porque dividem tambem 12 sem resto e cada multiplo de 12 tambem é divisível por 6, 2 e 3; logo ficará 5 x 12 = 60.

Exercícios:

- 36 $1\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$ 37 $\frac{3}{4} + \frac{5}{6}$ 38 $\frac{13}{20} + \frac{4}{5}$ 39 $\frac{6}{11} + \frac{9}{22}$ 40 $\frac{3}{8} + \frac{4}{7}$ 41 $\frac{1}{5} + \frac{11}{14}$ 42 $\frac{1}{9} + \frac{5}{6}$ 43 $\frac{13}{15} + \frac{17}{20}$
 24 $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$ 25 $\frac{3}{4} + \frac{5}{6}$ 26 $\frac{7}{8} + \frac{9}{12}$ 27 $\frac{13}{20} + \frac{4}{5}$ 28 $\frac{6}{11} + \frac{9}{22}$ 29 $\frac{2}{5} + \frac{1}{4}$ 30 $\frac{3}{8} + \frac{4}{7}$ 31 $\frac{1}{5} + \frac{11}{14}$ 32 $\frac{7}{10} + \frac{1}{2}$ 33 $\frac{1}{9} + \frac{5}{6}$ 34 $\frac{13}{15} + \frac{17}{20}$ 35 $\frac{5}{18} + \frac{7}{8}$

- 54 $\frac{7}{12} + \frac{5}{6} + \frac{3}{4} + \frac{2}{5}$ 55 $\frac{11}{16} + \frac{13}{20} + \frac{3}{8} + \frac{9}{10}$ 56 $\frac{13}{18} + \frac{19}{30} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4}$ 57 $\frac{9}{10} + \frac{5}{9} + \frac{1}{2} + \frac{5}{6}$ 58 $\frac{9}{10} + \frac{14}{15} + \frac{32}{45} + \frac{77}{90}$ 59 $\frac{3}{7} + \frac{1}{6} + \frac{5}{12} + \frac{2}{3}$ 60 $\frac{16}{25} + \frac{3}{10} + \frac{1}{2} + \frac{5}{8}$ 61 $\frac{3}{4} + \frac{11}{16} + \frac{17}{20} + \frac{4}{5}$
 44 $\frac{7}{12} + \frac{5}{6} + \frac{3}{4} + \frac{2}{5}$ 45 $\frac{11}{16} + \frac{13}{20} + \frac{3}{8} + \frac{9}{10}$ 46 $\frac{13}{18} + \frac{19}{30} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4}$ 47 $\frac{9}{10} + \frac{5}{9} + \frac{1}{2} + \frac{5}{6}$ 48 $\frac{1}{4} + \frac{7}{15} + \frac{13}{20} + \frac{11}{12}$ 49 $\frac{9}{10} + \frac{14}{15} + \frac{32}{45} + \frac{77}{90}$ 50 $\frac{3}{7} + \frac{1}{6} + \frac{5}{12} + \frac{2}{3}$ 51 $\frac{16}{25} + \frac{3}{10} + \frac{1}{2} + \frac{5}{8}$ 52 $\frac{3}{4} + \frac{11}{16} + \frac{17}{20} + \frac{4}{5}$ 53 $\frac{23}{28} + \frac{5}{12} + \frac{11}{18} + \frac{7}{9}$

- 70 $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{8} + \frac{8}{9}$ 71 $\frac{5}{6} + \frac{7}{10} + \frac{5}{12} + \frac{14}{15} + \frac{9}{16} + \frac{17}{20}$ 72 $\frac{3}{4} + \frac{1}{5} + \frac{5}{6} + \frac{4}{7} + \frac{8}{15} + \frac{16}{21}$ 73 $\frac{2}{3} + \frac{5}{8} + \frac{13}{18} + \frac{3}{5} + \frac{7}{12} + \frac{19}{30}$ 74 $\frac{9}{16} + \frac{11}{15} + \frac{5}{9} + \frac{7}{10} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5}$ 75 $\frac{1}{8} + \frac{19}{30} + \frac{7}{10} + \frac{2}{3} + \frac{18}{25} + \frac{11}{15}$
 62 $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{8} + \frac{8}{9}$ 63 $\frac{5}{6} + \frac{7}{10} + \frac{5}{12} + \frac{14}{15} + \frac{9}{16} + \frac{17}{20}$ 64 $\frac{3}{4} + \frac{1}{5} + \frac{5}{6} + \frac{4}{7} + \frac{8}{15} + \frac{16}{21}$ 65 $\frac{2}{3} + \frac{5}{8} + \frac{13}{18} + \frac{3}{5} + \frac{7}{12} + \frac{19}{30}$ 66 $\frac{9}{16} + \frac{11}{15} + \frac{5}{9} + \frac{7}{10} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5}$ 67 $\frac{1}{8} + \frac{19}{30} + \frac{7}{10} + \frac{2}{3} + \frac{18}{25} + \frac{11}{15}$ 68 $\frac{19}{24} + \frac{13}{20} + \frac{25}{36} + \frac{7}{9} + \frac{21}{32} + \frac{5}{6}$ 69 $\frac{4}{5} + \frac{5}{7} + \frac{7}{8} + \frac{3}{4} + \frac{1}{3} + \frac{13}{18}$

Numeros mixtos. Exemplo:

$$6\frac{7}{10} + 17\frac{5}{6} + 11\frac{1}{15} = ?$$

6	$\frac{7 \times 3}{10 \times 3} = \frac{21}{30}$
17	$\frac{5 \times 5}{6 \times 5} = \frac{25}{30}$
	$\frac{11 \times 2}{15 \times 2} = \frac{22}{30}$
23	$\frac{2 \times 15}{30} = \frac{30}{30}$
	$\frac{68}{30} = 2\frac{8}{30} = 2\frac{4}{15}$
	$25\frac{4}{15}$

5	10	6	15
	2	6	3
	$5 \times 6 = \underline{30}$		

Exercícios:

- 80 $\frac{6}{8} + \frac{3}{4} + \frac{9}{10} + \frac{1}{6} + \frac{14}{5} + \frac{5}{8} + \frac{10}{7} + \frac{7}{12}$ 81 $\frac{12}{16} + \frac{9}{10} + \frac{16}{5} + \frac{5}{9} + \frac{51}{15} + \frac{7}{18} + \frac{75}{3} + \frac{63}{9} + \frac{7}{20}$ 82 $\frac{46}{7} + \frac{2}{3} + \frac{41}{15} + \frac{52}{9} + \frac{9}{20} + \frac{38}{5} + \frac{5}{16}$ 83 $\frac{7}{18} + \frac{7}{8}$
 84 $\frac{32}{5} + \frac{6}{5} + \frac{25}{2} + \frac{44}{9} + \frac{71}{16} + \frac{9}{7} + \frac{44}{9} + \frac{7}{10} + \frac{714}{15} + \frac{36}{7}$ 85 $\frac{50}{8} + \frac{71}{16} + \frac{9}{7} + \frac{63}{5} + \frac{2}{5} + \frac{5}{8} + \frac{8}{9}$ 86 $\frac{61}{18} + \frac{93}{21} + \frac{4}{20} + \frac{61}{30} + \frac{17}{20} + \frac{81}{20} + \frac{4}{5}$ 87 $\frac{104}{3} + \frac{72}{18} + \frac{52}{84} + \frac{25}{36} + \frac{57}{45} + \frac{4}{5}$ 88 $\frac{41}{15} + \frac{16}{25} + \frac{84}{36} + \frac{57}{45} + \frac{4}{5}$

§ 13.

Subtração.

Como só podemos adicionar fracções que tenham o mesmo denominador, só podemos tambem subtrahir fracções que estejam nas mesmas condições.

Tomemos a differença seguinte:

$$\frac{3}{5} - \frac{2}{5}$$

A unidade está dividida em 5 partes equaes; a primeira fracção contem 3 e a segunda só duas d'essas partes. Tirando estas duas das tres ficará uma d'essas partes ou:

$$\frac{3}{5} - \frac{2}{5} = \frac{3-2}{5} = \frac{1}{5}$$

Fracções, com denominadores differentes, devem ser primeiro reduzidas ao mesmo denominador e então proceder-se-ha como acabamos de ver. Exemplo: $\frac{3}{4} - \frac{2}{3}$.

3	$\times 3$	=	9
4	$\times 3$	=	12
2	$\times 4$	=	8
3	$\times 4$	=	12
			$\frac{1}{12}$

§ 14.

Multiplicação:

a) de uma fracção por um numero inteiro e de um numero inteiro por uma fracção.

Já vimos como se multiplica uma fracção por um numero inteiro. Aquella regra póde-se ainda demonstrar d'este modo:

Para multiplicar $\frac{4}{5}$ por 3 isto é tomar $\frac{4}{5}$ tres vezes como parcella, resultará:

$$\frac{4}{5} \times 3 = \frac{4}{5} + \frac{4}{5} + \frac{4}{5} = \frac{4 + 4 + 4}{5} = \frac{4 \times 3}{5}$$

Multipliquemos agora:

3 por $\frac{4}{5}$.

Se multiplicarmos 3 por 4 teremos 12; mas multiplicar 3 por um numero que é 5 vezes menor que 4. O resultado que procuramos deverá ser tambem 5 vezes menor isto é igual a $\frac{12}{5} = \frac{3 \times 4}{5}$ e temos a

REGRA: Para multiplicar uma fracção por um numero inteiro, ou um numero inteiro por uma fracção, multiplica-se o numerador da fracção por esse numero e dá-se ao producto o mesmo denominador.

E' de grande vantagem dividir o numerador e o denominador pelos factores communs, quando os ha, antes de obter o producto; por exemplo:

$$a) \frac{7}{9} \times 6 = \frac{7 \times 6}{9} = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$$

$$b) 11\frac{1}{12} \times 12 = \frac{11 \times 12}{12} = 11.$$

Exercicios:

- | | | |
|------------------------------|------------------------------|-------------------------------|
| 1) $\frac{3}{4} \times 5$ | 10) $\frac{12}{17} \times 4$ | 19) $15 \times \frac{9}{10}$ |
| 2) $\frac{5}{6} \times 7$ | 11) $\frac{13}{20} \times 8$ | 20) $16 \times \frac{11}{14}$ |
| 3) $\frac{7}{8} \times 6$ | 12) $\frac{4}{9} \times 15$ | 21) $18 \times \frac{13}{14}$ |
| 4) $\frac{8}{9} \times 12$ | 13) $\frac{3}{8} \times 8$ | 22) $9 \times \frac{5}{9}$ |
| 5) $\frac{4}{5} \times 4$ | 14) $\frac{7}{11} \times 11$ | 23) $14 \times \frac{13}{14}$ |
| 6) $\frac{9}{11} \times 8$ | 15) $3 \times \frac{1}{7}$ | 24) $20 \times \frac{14}{15}$ |
| 7) $\frac{3}{7} \times 14$ | 16) $5 \times \frac{3}{10}$ | 25) $18 \times \frac{19}{24}$ |
| 8) $\frac{15}{16} \times 12$ | 17) $6 \times \frac{7}{12}$ | 26) $21 \times \frac{25}{28}$ |
| 9) $\frac{4}{15} \times 10$ | 18) $10 \times \frac{3}{4}$ | 27) $11 \times \frac{26}{33}$ |

b) de um numero mixto por um numero inteiro e reciprocamente.

Multiplicar, por exemplo, $5\frac{7}{9}$ por 3 é repetir $5\frac{7}{9}$ tres vezes:

$$\begin{aligned} 5\frac{7}{9} \times 3 &= 5\frac{7}{9} + 5\frac{7}{9} + 5\frac{7}{9} \\ &= (5 + 5 + 5) + (\frac{7}{9} + \frac{7}{9} + \frac{7}{9}) \\ &= (5 \times 3) + (\frac{7}{9} \times 3) \\ &= 15 + \frac{7 \times 3}{9} \\ &= 15 + 2\frac{1}{3} = \underline{17\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

Como tambem é:

$$3 \times 5\frac{7}{9} = 3 \times \frac{52}{9} = \frac{3 \times 52}{9} = \underline{17\frac{1}{3}}$$

segue a regra:

Para multiplicar um numero mixto por um numero inteiro, ou um numero inteiro por um mixto, multiplicam-se os inteiros e depois a fracção pelo numero inteiro e reúnem-se estes productos.

Exercícios:

- | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|--|
| 28) $3 \frac{2}{3} \times 6$ | 38) $10 \frac{5}{9} \times 15$ | 48) $9 \times 11 \frac{5}{12}$ |
| 29) $2 \frac{3}{4} \times 6$ | 39) $11 \frac{1}{5} \times 25$ | 49) $14 \times 7 \frac{5}{8}$ |
| 30) $4 \frac{2}{5} \times 10$ | 40) $4 \frac{7}{12} \times 18$ | 50) $16 \times 11 \frac{7}{24}$ |
| 31) $5 \frac{5}{6} \times 9$ | 41) $5 \frac{7}{10} \times 15$ | 51) $18 \times 15 \frac{5}{6}$ |
| 32) $6 \frac{7}{8} \times 10$ | 42) $6 \frac{5}{7} \times 21$ | 52) $11 \times 7 \frac{5}{11}$ |
| 33) $7 \frac{1}{2} \times 26$ | 43) $9 \times 2 \frac{2}{3}$ | 53) $13 \times 9 \frac{11}{13}$ |
| 34) $10 \frac{3}{7} \times 14$ | 44) $14 \times 3 \frac{1}{2}$ | 54) $15 \times 3 \frac{9}{10}$ |
| 35) $3 \frac{3}{4} \times 6$ | 45) $16 \times 7 \frac{5}{12}$ | 55) $12 \times 8 \frac{2}{7}$ |
| 36) $8 \frac{5}{9} \times 12$ | 46) $7 \times 4 \frac{19}{28}$ | 56) $6 \times 13 \frac{5}{8}$ |
| 37) $9 \frac{7}{8} \times 24$ | 47) $10 \times 6 \frac{7}{10}$ | 57) $20 \times 11 \frac{1}{15}$ |

c) de duas fracções:

Seja para multiplicar: $\frac{9}{10}$ por $\frac{2}{3}$. Sabemos que $\frac{9}{10} \times 2 = \frac{9 \times 2}{10}$. Mas, no exemplo proposto, não temos de multiplicar $\frac{9}{10}$ por 2 mas sim por $\frac{2}{3}$ que é 3 vezes menor do que 2; logo o producto obtido estará evidentemente 3 vezes maior, e, para corrigir este augmento, devemos multiplicar tambem o denominador de $\frac{9 \times 2}{10}$ por 3. D'onde se segue

$$\frac{9}{10} \times \frac{2}{3} = \frac{9 \times 2}{10 \times 3} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$$

Para multiplicar fracções, multiplicam-se os numeradores e os denominadores e divide-se o primeiro producto pelo segundo.

Exercícios:

- | | | |
|---|---|---|
| 58) $\frac{2}{3} \times \frac{1}{5}$ | 66) $\frac{7}{12} \times \frac{6}{21}$ | 74) $\frac{15}{44} \times \frac{6}{25}$ |
| 59) $\frac{3}{4} \times \frac{5}{6}$ | 67) $\frac{9}{16} \times \frac{10}{21}$ | 75) $\frac{21}{25} \times \frac{7}{18}$ |
| 60) $\frac{1}{5} \times \frac{5}{7}$ | 68) $\frac{10}{11} \times \frac{22}{45}$ | 76) $\frac{12}{37} \times \frac{19}{24}$ |
| 61) $\frac{7}{8} \times \frac{1}{24}$ | 69) $\frac{5}{18} \times \frac{9}{10}$ | 77) $\frac{10}{27} \times \frac{13}{30}$ |
| 62) $\frac{5}{9} \times \frac{12}{25}$ | 70) $\frac{11}{15} \times \frac{25}{33}$ | 78) $\frac{31}{45} \times \frac{15}{31}$ |
| 63) $\frac{7}{11} \times \frac{3}{14}$ | 71) $\frac{4}{17} \times \frac{17}{22}$ | 79) $\frac{19}{36} \times \frac{9}{20}$ |
| 64) $\frac{7}{10} \times \frac{15}{28}$ | 72) $\frac{9}{20} \times \frac{16}{33}$ | 80) $\frac{23}{40} \times \frac{15}{16}$ |
| 65) $\frac{10}{21} \times \frac{21}{40}$ | 73) $\frac{3}{11} \times \frac{16}{21}$ | 81) $\frac{9}{18} \times \frac{32}{57}$ |

d) de uma fracção por um numero mixto e de duas fracções mixtas.

Para multiplicar uma fracção por um numero mixto ou duas fracções mixtas, reduzem-se os numeros mixtos a fracções e applica-se a regra precedente.

Exercícios:

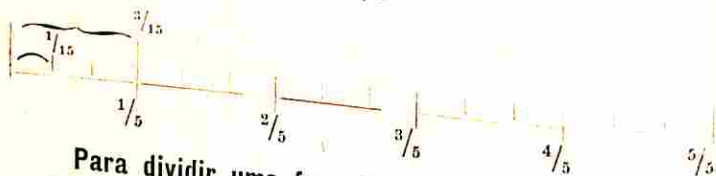
- | | | |
|--|---|--|
| 82) $1 \frac{2}{3} \times \frac{3}{10}$ | 94) $\frac{13}{36} \times 8 \frac{2}{11}$ | 106) $6 \frac{3}{10} \times 1 \frac{5}{49}$ |
| 83) $2 \frac{1}{4} \times \frac{5}{6}$ | 95) $\frac{7}{9} \times 3 \frac{7}{8}$ | 107) $1 \frac{7}{20} \times 4 \frac{1}{6}$ |
| 84) $4 \frac{1}{2} \times \frac{1}{6}$ | 96) $\frac{21}{22} \times 4 \frac{5}{7}$ | 108) $8 \frac{1}{4} \times 6 \frac{8}{9}$ |
| 85) $2 \frac{1}{6} \times \frac{4}{7}$ | 97) $\frac{9}{14} \times 3 \frac{4}{15}$ | 109) $3 \frac{1}{9} \times 4 \frac{1}{8}$ |
| 86) $5 \frac{3}{4} \times \frac{14}{23}$ | 98) $\frac{16}{27} \times 11 \frac{7}{10}$ | 110) $5 \frac{5}{6} \times 3 \frac{1}{7}$ |
| 87) $7 \frac{2}{5} \times \frac{5}{7}$ | 99) $\frac{18}{23} \times 7 \frac{5}{12}$ | 111) $7 \frac{1}{7} \times 6 \frac{3}{10}$ |
| 88) $3 \frac{5}{8} \times \frac{4}{9}$ | 100) $\frac{19}{30} \times 6 \frac{4}{11}$ | 112) $4 \frac{7}{8} \times 8 \frac{4}{9}$ |
| 89) $9 \frac{1}{13} \times \frac{52}{59}$ | 101) $\frac{9}{47} \times 10 \frac{4}{9}$ | 113) $6 \frac{3}{4} \times 2 \frac{4}{9}$ |
| 90) $6 \frac{1}{9} \times \frac{6}{11}$ | 102) $\frac{31}{59} \times \frac{253}{62}$ | 114) $2 \frac{27}{34} \times 11 \frac{3}{38}$ |
| 91) $\frac{3}{8} \times 8 \frac{4}{9}$ | 103) $2 \frac{2}{3} \times 3 \frac{3}{4}$ | 115) $7 \frac{1}{5} \times 5 \frac{5}{12}$ |
| 92) $\frac{3}{4} \times 6 \frac{2}{9}$ | 104) $4 \frac{1}{5} \times 2 \frac{2}{9}$ | 116) $3 \frac{17}{20} \times 6 \frac{13}{22}$ |
| 93) $\frac{7}{11} \times 9 \frac{5}{8}$ | 105) $3 \frac{1}{4} \times 9 \frac{1}{2}$ | 117) $11 \frac{7}{18} \times 15 \frac{3}{5}$ |

§ 15.

Divisão.

a) de uma fracção por um numero inteiro (vide pag. 42)

Dividamos, por exemplo, $\frac{4}{5}$ por 3. Dividir $\frac{4}{5}$ por 3 quer dizer tomar a terça parte de $\frac{4}{5}$; mas a terça parte de $\frac{4}{5}$ é $\frac{4}{15}$ e por conseguinte a terça parte de $\frac{4}{5} = \frac{4}{15} = \frac{4}{5 \times 3}$; isto é:



Para dividir uma fracção por um numero inteiro, multiplica-se o denominador da fracção pelo numero inteiro e dá-se ao producto o mesmo numerador.

Exercícios:

- | | | |
|-------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1) $\frac{3}{4} : 5$ | 7) $\frac{20}{23} : 16$ | 13) $\frac{7}{12} : 9$ |
| 2) $\frac{4}{5} : 6$ | 8) $\frac{13}{15} : 13$ | 14) $\frac{10}{17} : 36$ |
| 3) $\frac{7}{8} : 14$ | 9) $\frac{18}{23} : 24$ | 15) $\frac{24}{25} : 40$ |
| 4) $\frac{9}{11} : 15$ | 10) $\frac{25}{27} : 35$ | 16) $\frac{36}{41} : 45$ |
| 5) $\frac{10}{13} : 20$ | 11) $\frac{28}{29} : 21$ | 17) $\frac{48}{53} : 60$ |
| 6) $\frac{18}{29} : 12$ | 12) $\frac{30}{37} : 45$ | 18) $\frac{66}{79} : 55$ |

b) de um numero mixto por um numero inteiro.

Reduz-se o numero mixto á expressão fraccionaria e depois emprega-se a regra precedente.

Exemplo: $2\frac{2}{3} : 6 = \frac{8}{3} : 6 = \frac{4}{3 \times 3} = \frac{4}{9}$.

Exercícios:

- | | | |
|--------------------------|----------------------------|----------------------------|
| 19) $3\frac{3}{7} : 12$ | 25) $14\frac{4}{9} : 13$ | 31) $9\frac{3}{14} : 27$ |
| 20) $4\frac{2}{3} : 7$ | 26) $17\frac{1}{10} : 18$ | 32) $11\frac{7}{15} : 32$ |
| 21) $6\frac{3}{4} : 9$ | 27) $18\frac{2}{11} : 50$ | 33) $19\frac{2}{7} : 35$ |
| 22) $8\frac{2}{3} : 10$ | 28) $20\frac{5}{8} : 15$ | 34) $31\frac{5}{13} : 42$ |
| 23) $10\frac{5}{7} : 25$ | 29) $24\frac{14}{15} : 22$ | 35) $7\frac{4}{29} : 54$ |
| 24) $12\frac{4}{5} : 28$ | 30) $25\frac{1}{18} : 33$ | 36) $11\frac{11}{17} : 66$ |

c) de um numero inteiro por uma fracção ou por um numero mixto.

Dividamos 5 por $\frac{2}{3}$.

Dividindo 5 por 2, resulta $\frac{5}{2}$; não devemos, porém, dividir 5 por 2, mas por $\frac{2}{3}$, isto é, por um numero 3 vezes menor. O resultado estará 3 vezes maior, logo:

$$5 : \frac{2}{3} = \frac{5 \times 3}{2} = 7\frac{1}{2}.$$

Para dividir um numero por uma fracção, multiplica-se esse numero pela fracção invertida.

Sendo o divisor um numero mixto reduz-se este primeiro á expressão fraccionaria e depois emprega-se a regra precedente; por exemplo:

$$5 : 2\frac{1}{2} = 5 : \frac{5}{2} = 5 \times \frac{2}{5} = \frac{5 \times 2}{5} = 2.$$

Exercícios:

- | | | |
|-------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 37) 4 : $\frac{8}{9}$ | 43) 15 : $\frac{10}{19}$ | 49) 30 : $\frac{18}{23}$ |
| 38) 6 : $\frac{10}{13}$ | 44) 16 : $\frac{12}{25}$ | 50) 32 : $\frac{24}{25}$ |
| 39) 5 : $\frac{10}{11}$ | 45) 18 : $\frac{9}{10}$ | 51) 35 : $\frac{21}{29}$ |
| 40) 8 : $\frac{12}{13}$ | 46) 20 : $\frac{15}{16}$ | 52) 48 : $\frac{36}{47}$ |
| 41) 9 : $\frac{12}{17}$ | 47) 21 : $\frac{3}{14}$ | 53) 56 : $\frac{48}{53}$ |
| 42) 12 : $\frac{6}{7}$ | 48) 28 : $\frac{7}{15}$ | 54) 77 : $\frac{66}{73}$ |

- | | | |
|-----------------------|------------------------|-------------------------|
| 55) 14 : 3 1/2 | 61) 20 : 10 5/6 | 67) 75 : 1 7/8 |
| 56) 17 : 5 2/3 | 62) 32 : 3 3/7 | 68) 91 : 7 2/9 |
| 57) 36 : 6 3/4 | 63) 52 : 5 4/7 | 69) 84 : 11 7/9 |
| 58) 15 : 2 2/5 | 64) 27 : 6 6/7 | 70) 99 : 3 3/10 |
| 59) 22 : 8 4/5 | 65) 18 : 3 3/8 | 71) 85 : 6 9/11 |
| 60) 30 : 4 1/6 | 66) 49 : 2 5/8 | 72) 57 : 7 11/12 |

d) de uma fracção por outra e de numeros mixtos.

Seja, por exemplo, $\frac{1}{9}$ a dividir por $\frac{2}{3}$. Dividindo $\frac{1}{9}$ por 2, resulta $\frac{4}{9} \times 2$, porém, não se deve dividir por 2 mas por $\frac{2}{3}$, isto é, por um numero 3 vezes menor. O resultado estará por conseguinte 3 vezes

maior a saber: $\frac{4}{9} \times \frac{3}{2} = \frac{2}{3}$, isto é:

Para dividir uma fracção por outra, multiplicam-se os termos da primeira pelos da segunda invertidos.

Quando o dividendo ou o divisor ou ambos são numeros mixtos, reduzem-se estes primeiramente a expressões fraccionarias e depois emprega-se a mesma regra; por exemplo:

$$3\frac{1}{3} : 4\frac{1}{9} = \frac{10}{3} : \frac{4}{9} = \frac{10 \times 9}{3 \times 4} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$$

Exercicios :

- | | | |
|-----------------------|-----------------------|-------------------------|
| 73) 2/5 : 7/10 | 83) 4/9 : 5/6 | 93) 17/20 : 3/10 |
| 74) 7/10 : 2/5 | 84) 5/6 : 4/9 | 94) 3/10 : 17/20 |
| 75) 5/6 : 2/3 | 85) 4/7 : 5/12 | 95) 3/5 : 8/15 |
| 76) 2/3 : 5/6 | 86) 5/12 : 4/7 | 96) 3/15 : 3/5 |

- | | | |
|-----------------------|------------------------|---------------------------|
| 77) 3/8 : 1/6 | 87) 3/7 : 5/14 | 97) 9/20 : 6/11 |
| 78) 1/6 : 3/8 | 88) 5/14 : 3/7 | 98) 6/11 : 9/20 |
| 79) 3/4 : 7/8 | 89) 3/11 : 7/11 | 99) 7/25 : 14/35 |
| 80) 7/8 : 3/4 | 90) 7/11 : 3/11 | 100) 11/35 : 7/25 |
| 81) 5/8 : 3/10 | 91) 2/9 : 9/12 | 101) 39/100 : 7/10 |
| 82) 3/10 : 5/8 | 92) 7/12 : 2/9 | 102) 7/10 : 39/100 |

- | | | |
|-------------------------|--------------------------|---------------------------|
| 103) 2 1/2 : 1/3 | 109) 4 4/5 : 3/10 | 115) 6 2/7 : 11/14 |
| 104) 2 1/3 : 1/2 | 110) 4 3/10 : 4/5 | 116) 6 11/14 : 2/7 |
| 105) 3 2/3 : 5/6 | 111) 6 1/8 : 7/10 | 117) 8 4/9 : 8/27 |
| 106) 3 5/6 : 2/3 | 112) 5 9/10 : 7/8 | 118) 8 8/27 : 4/9 |
| 107) 3 3/4 : 3/5 | 113) 6 2/3 : 8/9 | 119) 3 3/20 : 3/5 |
| 108) 3 3/5 : 3/4 | 114) 6 8/9 : 2/3 | 120) 3 3/5 : 3/20 |

- | | | |
|-------------------------|--------------------------|----------------------------|
| 121) 2/9 : 3 1/3 | 126) 2/8 : 5 1/4 | 131) 3/10 : 5 2/5 |
| 122) 3/6 : 2 1/2 | 127) 3/8 : 2 1/12 | 132) 13/15 : 5 4/7 |
| 123) 2/3 : 3 1/6 | 128) 7/10 : 2 5/8 | 133) 11/12 : 3 1/18 |
| 124) 3/4 : 4 1/8 | 129) 7/8 : 4 1/12 | 134) 7/18 : 3 11/12 |
| 125) 4/5 : 4 1/5 | 130) 8/9 : 6 2/3 | 135) 10/25 : 2 7/20 |

- | | | |
|----------------------------|----------------------------|-------------------------------|
| 136) 2 2/3 : 2 1/3 | 142) 5 5/7 : 3 3/14 | 148) 9 5/8 : 4 7/12 |
| 137) 2 1/6 : 8 2/3 | 143) 3 3/14 : 5 5/7 | 149) 4 7/12 : 9 5/8 |
| 138) 3 3/4 : 5 5/8 | 144) 2 7/9 : 7 1/12 | 150) 14 2/5 : 11 11/20 |
| 139) 3 1/8 : 3 3/4 | 145) 7 1/12 : 2 7/9 | 151) 17 1/7 : 19 1/5 |
| 140) 4 1/5 : 3 9/10 | 146) 3 2/7 : 2 7/10 | 152) 19 1/5 : 6 7/20 |
| 141) 3 9/10 : 4 4/5 | 147) 2 7/10 : 3 3/7 | 153) 21 7/9 : 12 2/3 |

§ 16.

Os exemplos seguintes servirão para applicar todas as regras, já demonstradas, sobre as fracções. Damos, entretanto, um exemplo resolvido que servirá de norma para a resolução dos outros:

$$2 + 3\frac{3}{4} + 4\frac{5}{6} = \frac{9^9 + 10}{12} = 9\frac{19}{12}$$

$$6 + \frac{2}{\frac{8}{9} \times \frac{3}{4}} = 6 + \frac{2 \times 9 \times 4}{8 \times 3} = 9$$

$$= \frac{127}{12 \times 9} = \frac{127}{108} = \underline{\underline{1\frac{19}{108}}}$$

Exercícios:

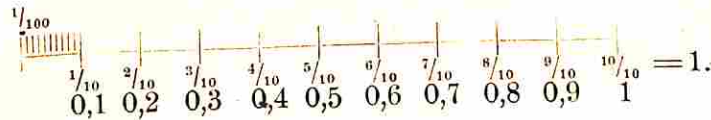
- 1) $\frac{9}{3 + \frac{3}{5}}$ 2) $\frac{5\frac{1}{3}}{8}$ 3) $\frac{7\frac{3}{5}}{19}$ 4) $\frac{6\frac{2}{3}}{15}$ 5) $\frac{6}{7 - \frac{5}{7}}$
- 6) $\frac{\frac{4}{5}}{9 - \frac{3}{5}}$ 7) $\frac{6\frac{1}{2}}{3\frac{2}{5} + 1\frac{3}{4}}$ 8) $\frac{4\frac{3}{8}}{15 - \frac{5}{12}}$ 9) $\frac{17\frac{1}{18} - \frac{1}{9}}{\frac{2}{3} + \frac{1}{6}}$
- 10) $\frac{\frac{4}{5} - \frac{2}{15}}{\frac{5}{6} - \frac{5}{36}}$ 11) $\frac{4\frac{1}{6} + 5\frac{1}{3}}{1 + 3\frac{3}{5} + 4\frac{9}{10}}$ 12) $\frac{7\frac{1}{4} - 3\frac{4}{5}}{6\frac{2}{5} - 2\frac{7}{8}}$
- 13) $\frac{10 - 2\frac{11}{12}}{7\frac{1}{6} - 3\frac{7}{8}}$ 14) $\frac{2}{5 + 4 + \frac{2}{3}}$ 15) $\frac{3}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2}}}$
- 16) $\frac{8}{4 - \frac{2}{3 - \frac{3}{5}}}$ 17) $\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}$ 18) $\frac{11}{2 - \frac{1}{3 - \frac{2}{3}}}$
- 19) $\frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}}}$ 20) $\frac{7\frac{1}{5} - 1\frac{1}{2} + 4\frac{1}{11}}{6\frac{1}{5} - 2\frac{1}{4} + 11\frac{7}{11}}$
- 21) $\frac{10\frac{7}{8} - 6\frac{6}{7} + 2\frac{5}{6} - 4\frac{4}{5}}{7\frac{9}{10} - 6\frac{13}{15} + 5\frac{7}{8} - 4\frac{6}{17}}$ 22) $\frac{\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6}}{\frac{3}{4} \times \frac{3}{5}}$
- 23) $\frac{1\frac{3}{11} + 5\frac{1}{5}}{35\frac{3}{5} \times \frac{3}{11}}$ 24) $\frac{3\frac{1}{2} + 2\frac{1}{3}}{\frac{3}{4} \times 9\frac{1}{6}}$ 25) $\frac{4\frac{1}{5} \times 3\frac{3}{4}}{3\frac{1}{8}}$
- 26) $\frac{8\frac{1}{2} \times 6\frac{1}{4}}{7\frac{1}{2}}$ 27) $\frac{1\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{4}}{9 \times \frac{3}{4}}$ 28) $\frac{5\frac{3}{4} \times 7\frac{1}{5}}{6 \times 4\frac{3}{5}}$

- 29) $\frac{1\frac{1}{2} \times 2\frac{2}{3}}{1\frac{1}{4} \times 3\frac{1}{5}}$ 30) $\frac{5\frac{1}{4} \times 3\frac{3}{7}}{3\frac{1}{5} \times \frac{5}{9}}$ 31) $\frac{5\frac{2}{3} \times 7\frac{1}{2}}{3\frac{1}{3} \times 4\frac{1}{4}}$
- 32) $\frac{3\frac{2}{3} \times 5\frac{3}{4}}{7\frac{1}{3} \times 3\frac{1}{7}}$ 33) $\frac{25 \times 18\frac{3}{4}}{4\frac{1}{6} \times 12\frac{1}{5}}$
- 34) $\frac{18}{3}$ 35) $3 - \frac{1}{3 - \frac{1}{3}}$ 36) $5 + \frac{1}{5 - \frac{1}{5}}$
- $4 \times \frac{1}{2 - 1\frac{1}{2}}$ $4 - \frac{1}{4 - \frac{1}{4}}$ $7 - \frac{1}{7 - \frac{1}{7}}$
- 37) $\frac{15}{5 - \frac{3}{4} - 3 - \frac{2}{3}}$ 38) $\frac{2 - \frac{1}{2} \times 3 - \frac{1}{3}}{2 + \frac{1}{2} \times 3 + \frac{1}{3}}$
- $\frac{7 - \frac{4}{7} + 4 - \frac{2}{5}}{3 + \frac{1}{3} \times 4 + \frac{1}{4}}$ $\frac{3 - \frac{1}{3} \times 4 - \frac{1}{4}}{3 - \frac{1}{3} \times 4 - \frac{1}{4}}$
- 39) $\frac{8\frac{3}{4}}{15 - 5\frac{1}{2}} + \frac{11\frac{1}{12} - \frac{1}{4}}{\frac{2}{3} + \frac{1}{6}} + \frac{4\frac{1}{2}}{3 - 2\frac{1}{2}} + \frac{1\frac{1}{2} \times 2\frac{2}{3}}{6\frac{1}{4} \times 6\frac{2}{5}}$
- 40) $\frac{1}{12\frac{1}{37}} + \frac{10\frac{1}{2} \times 4\frac{1}{6}}{7\frac{1}{2}} + \frac{5 - 1\frac{11}{24}}{32\frac{1}{4} - 16\frac{5}{16}} + \frac{4\frac{1}{2} \times 2\frac{2}{3}}{1\frac{1}{4} \times 12\frac{1}{5}} + \frac{8\frac{1}{3} + 10\frac{2}{3}}{3 + 10\frac{1}{5} + 14\frac{7}{10}}$

§ 17.

Fracções Decimais.

As fracções cujos denominadores são 10, 100, 1000, 10000, etc. (potencias de 10) chamam-se decimais. Conforme a significação do denominador de uma fracção obtêm-se estas fracções, dividindo-se a unidade em dez, cem, mil, dez mil etc. partes iguaes. Um decimo será, por conseguinte, a decima parte da unidade; um centesimo, a centesima parte da unidade ou a decima parte de um decimo; um millesimo, a millesima parte da unidade ou a decima parte de um centesimo.



Segue-se que vale:

$$1 \text{ unidade} = 10 \text{ decimos}$$

$$1 \text{ decimo} = 10 \text{ centesimos}$$

$$1 \text{ centesimo} = 10 \text{ millesimos etc.}$$

isto é: uma unidade de uma ordem decimal é igual a 10 unidades da ordem immediatamente inferior.

Mas, como sabemos que:

$$10 \text{ unidades} = 1 \text{ dezena}$$

$$10 \text{ dezenas} = 1 \text{ centena}$$

$$10 \text{ centenas} = 1 \text{ milhar}$$

vê-se que os numeros decimaes obedecem na sua nomenclatura á mesma lei que os numeros inteiros. isto é, o primeiro algarismo decimal escripto á direita de um numero inteiro, d'elle separado por uma virgula — a virgula decimal — representará decimos; o seguinte numero á direita, centesimos, o terceiro, millesimos etc., e para saber onde começa a fracção basta attender á collocação da virgula.

Quando um numero decimal não tem inteiros. põe-se um zero á esquerda da virgula.

Escreve-se consequentemente como mostra a tabella seguinte:

• Decenas de milhares.
• Milhares.
• Centenas.
• Decenas.
• Unidades.
• <u>Virgula.</u>
• Decimos.
• Centesimos.
• Millesimos.
• Decimos millesimos.
• Centesimos millesimos.
• Millesimos.

Por exemplo:

$\frac{1}{10} = 0,1$	$\frac{2}{10} = 0,2$
$\frac{1}{100} = 0,01$	$\frac{3}{100} = 0,03$
$\frac{1}{1000} = 0,001$	$\frac{4}{1000} = 0,004$
$\frac{1}{10000} = 0,0001$	$\frac{5}{10000} = 0,0005$
etc.	etc.

Do que foi dito segue-se a maneira de escrever um numero decimal. Se nos fossem, por exemplo, propostas as fracções $\frac{37}{100}$ e $\frac{531}{1000}$ para que as escrevessemos sob forma decimal, teriamos:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{37}{100} &= \frac{30+7}{100} = \frac{30}{100} + \frac{7}{100} = \frac{3}{10} + \frac{7}{100} = \underline{0,37} \\ \frac{531}{1000} &= \frac{500+30+1}{1000} = \frac{500}{1000} + \frac{30}{1000} + \frac{1}{1000} = \underline{0,531} \end{aligned} \right.$$

Exercicios:

Escrever sob forma de fracção decimal:

- 1) a) $\frac{9}{10}$, b) $\frac{7}{10}$, c) $\frac{8}{10}$, d) $\frac{6}{100}$, e) $\frac{1}{100}$, f) $\frac{9}{100}$,
 g) $\frac{2}{1000}$, h) $\frac{5}{1000}$, i) $\frac{4}{1000}$, k) $\frac{7}{1000}$, l) $\frac{6}{1000}$,
 m) $\frac{8}{10000}$, n) $\frac{3}{10000}$, o) $\frac{9}{10000}$, p) $\frac{13}{100}$, q) $\frac{17}{100}$,
 r) $\frac{27}{100}$, s) $\frac{31}{1000}$, t) $\frac{49}{1000}$, u) $\frac{73}{1000}$, v) $\frac{93}{1000}$,
 x) $\frac{153}{1000}$, y) $\frac{764}{1000}$, z) $\frac{791}{1000}$, a') $\frac{3245}{1000}$, b') $\frac{7361}{1000}$,

- c') $\frac{15}{10000}$, d') $\frac{63}{10000}$, e') $\frac{721}{10000}$, f') $\frac{473}{10000}$, g') $\frac{5031}{10000}$,
 h') $\frac{7832}{10000}$, i') $\frac{9321}{100000}$, k') $\frac{2527}{100000}$, l') $\frac{5}{710}$, m') $\frac{9}{9100}$,
 n') $38\frac{3}{1000}$, o') $107\frac{1}{100000}$, p') $383\frac{5}{100000}$, q') $76\frac{17}{10000}$,
 r') $59\frac{317}{100000}$

Ha duas maneiras de ler um numero decimal, por exemplo:

73,5143 lê-se: **73 unidades, 5 decimos, 1 centesimo, 4 millesimos e 3 decimos-millesimos.**

Ou, como são: 5 decimos = 5000 decimos millesimos.
 1 centesimo = 100 " "
 4 millesimos = 40 " "
 3 decimos " "
 millesimos = 3 " "

pode-se ler: **73 unidades e 5143 decimos millesimos.**

Exercicios:

Para ler: 0,7 — 0,02 — 5,03 — 6,32 — 0,003 — 7,006 —
 83,053 — 0,75
 124,836 — 0,059 — 314,704 — 16,0008 — 519,0032 —
 54,009 — 69,00007 — 7,00014 — 4,00346
 15,02345 — 36,00502 etc. etc.

Reduzir decimaes a mesma denominação.

Sendo: $\left\{ \begin{array}{l} \frac{7}{10} = \frac{70}{100} = \frac{700}{1000} = \frac{7000}{10000} = \dots \end{array} \right.$
 ou $\left\{ \begin{array}{l} 0,7 = 0,70 = 0,700 = 0,7000 = \dots \end{array} \right.$
 conclue-se:

Uma fracção decimal não muda de valor, ajuntando ou suprimindo á sua direita um ou mais zeros.

Sendo assim, podemos reduzir numeros decimaes a mesma denominação, dando simplesmente a todos os numeros decimaes por acrescimento de zeros o mesmo numero de algarismos, por exemplo:

$$\left. \begin{array}{l} 0,3245 = 0,3245 \\ 0,89 = 0,8900 \\ 0,379 = 0,3790 \\ 0,6 = 0,6000 \\ 4 = 4,0000 \end{array} \right\}$$

Exercicios:

Reduzir:

- 2) a centesimos:** a) 0,5, b) 0,2, c) 0,7, d) 0,8, e) 0,9, f) 0,24, g) 0,37, h) 4, i) 5, k) 9, l) 12, m) 52, n) 7,3, o) 10,6, p) 34,1, q) 85,36.
3) a millesimos: a) 0,03, b) 0,07, c) 0,04, d) 0,09, e) 0,6, f) 0,31, g) 0,5, h) 0,1, i) 0,37, k) 0,42, l) 0,348, m) 7, n) 13, o) 14,16, p) 46,37, q) 65,8, r) 7,2, s) 100, t) 21,9, u) 54,234, v) 6,74.
4) a decimos: a) 0,40, b) 0,90, c) 0,20, d) 0,100, e) 0,4000, f) 0,70000, g) 3,400, h) 4,5, i) 16,70, k) 45,8000.

5) e 6) Reduzir os exemplos de n° 2 e n° 3 a decimos-millesimos e a millionesimos.

Reduzir a mesma denominação:

	<u>13</u>	<u>14</u>	<u>15</u>	<u>16</u>
7)	0,3	0,57	5,089	e 0,432
8)	0,457	3,4	0,83	e 0,1
9)	12,64	0,723	0,9	e 9,0256
10)	0,8	0,45	4,072	e 0,56783
11)	7,329	2,5	0,56493	e 0,28
12)	2,6	7,0024	0,63	e 4,325

Na pratica reduzem-se muitas vezes fracções decimaes, supprimindo á direita uma ou mais algarismos; mas, quando o primeiro dos numeros supprimidos é 5, 6, 7, 8 ou 9, então adiciona-se uma unidade ao algarismo precedente por exemplo:

{	6,59753	reduzido a 4 algarismos dec.	=	6,5975
	"	a 3	"	= 6,598
	"	a 2	"	= 6,60
	"	a 1	"	= 6,6

Exercicios:

Reduzir as fracções seguintes:

17) á 3 algarismos decimaes

18) á 2 " "

19) á 1 algarismo decimal.

- a) 0,2438, b) 7,52692, c) 4,63275, d) 2,18963, e) 0,67493,
 f) 6,47558, g) 0,23728, h) 9,2586, i) 0,89999, k) 4,8347,
 l) 2,63842, m) 1,75326, n) 0,54396, o) 6,7568, p) 0,3947,
 q) 8,4285, r) 14,3926, s) 5,76489.

§ 18.

Conversão de fracções decimaes em fracções ordinarias e vice-versa.

Sendo a fracção decimal unicamente um caso particular da fracção ordinaria, nenhuma dificuldade apresentará a redução de uma fracção decimal a fracção ordinaria. Exemplo:

$$13,75 = 13 \frac{75}{100} = 13 \frac{3}{4}$$

Exercicios:

Reduzir a fracções ordinarias:

- 1) a) 0,5, b) 0,2, c) 0,75, d) 0,125, e) 0,25, f) 3,05, g) 0,025,
 h) 9,008, i) 14,04, k) 7,32, l) 0,064, m) 0,45, n) 25,005,
 o) 6,075, p) 4,250, q) 13,275, r) 56,675, s) 0,875, t) 5,0125,
 u) 0,032, v) 32,28, x) 46,3125, y) 0,556, z) 12,072.

Para reduzir uma fracção ordinaria á decimal, $\frac{5}{8}$ por exemplo, divide-se 5 por 8 o que dá zero por quociente. Depois, convertendo as 5 unidades em 50 decimos e dividindo estes por 8, obtêm-se 6 decimos por quociente e para resto 2 decimos. Estes 2 decimos, depois de convertidos em 20 centesimos, dividimos por 8, o que dá 2 centesimos e o resto 4 centesimos = 40 millesimos, os quaes, divididos por 8, dão exactamente 5 millesimos. Por conseguinte:

$$\frac{5}{8} = 0,625.$$

Operação:
$$\begin{array}{r} 50 \quad | \quad 8 \\ \underline{20} \quad 0,625. \\ 40 \\ \underline{0} \end{array}$$

Exercicios:

Transformar as fracções seguintes em fracções decimaes:

- 2) a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{1}{4}$, c) $\frac{1}{5}$, d) $\frac{3}{4}$, e) $\frac{2}{5}$, f) $\frac{7}{8}$, g) $\frac{3}{8}$, h) $\frac{9}{16}$,
 i) $\frac{19}{16}$, k) $\frac{11}{20}$, l) $\frac{17}{20}$, m) $\frac{8}{25}$, n) $\frac{16}{25}$, o) $\frac{21}{32}$, p) $\frac{9}{32}$,
 q) $\frac{19}{40}$, r) $\frac{7}{40}$, s) $\frac{11}{50}$, t) $\frac{9}{64}$, u) $\frac{39}{80}$, v) $\frac{8}{125}$, x) $\frac{75}{128}$,
 y) $\frac{47}{160}$, z) $\frac{9}{200}$, a') $\frac{13}{250}$, b') $\frac{31}{256}$, c') $\frac{5}{256}$, d') $\frac{83}{320}$,
 e') $\frac{153}{400}$, f') $\frac{93}{512}$, g') $\frac{7}{512}$, h') $\frac{4}{625}$, i') $\frac{457}{640}$, k') $\frac{77}{1024}$,
 l') $\frac{9}{1024}$.

§ 19.

Fracções decimaes periodicas.

Convertendo certas fracções ordinarias em fracções decimaes, reproduz-se algumas vezes indefinidamente certo numero de algarismos que se reproduzem, formado por esses algarismos que se reproduzem, dá-se o nome de **periodo**. Quando o periodo começa logo depois da virgula como em 0,333 . . . ou em 0,454545 . . . , a fracção chama-se **periodica simples**, no caso contrario periodica composta como: 0,43232

Exemplo: Reduzir $\frac{1}{3}$ a fracção decimal.

$$\begin{array}{r} 10 \overline{) 3} \\ 10 \quad 0,333 \dots \\ \underline{10} \\ 10 \end{array}$$

Lembrando-se do processo da conversão de fracções ordinarias em fracções decimaes e da divisibilidade dos numeros, é facil comprehender que:

- a) A fracção ordinaria (simplificada) cujo denominador fôr composto somente dos factores 2 ou 5, ou 2 e 5, dará uma fracção decimal não periodica.
- b) A fracção ordinaria (simplificada) cujo denominador não tiver nem o factor 2 nem o factor 5, dará uma fracção periodica simples.
- c) A fracção ordinaria (simplificada) cujo denominador tiver os factores 2 e 5, além de outros, dará uma fracção periodica composta.

Exercicios :

- Reduzir a fracções decimaes e achar o periodo de:
- 1) a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{5}{6}$ c) $\frac{7}{9}$ d) $\frac{8}{9}$ e) $\frac{6}{7}$ f) $\frac{3}{11}$ g) $\frac{7}{12}$
 - h) $\frac{5}{33}$ i) $\frac{1}{66}$ k) $\frac{4}{111}$ l) $\frac{5}{99}$ m) $\frac{47}{1111}$ n) $\frac{13}{150}$

- o) $\frac{13}{33}$ p) $\frac{9}{37}$ q) $\frac{50}{99}$ r) $\frac{31}{165}$ s) $\frac{47}{1198}$ t) $\frac{19}{75}$
- u) $\frac{11}{333}$ v) $\frac{7}{150}$ x) $\frac{1}{999}$ y) $\frac{17}{1375}$ z) $\frac{211}{49500}$

Reciprocamente pôde-se reduzir uma fracção periodica a fracção ordinaria. Alguns exemplos mostrarão como proceder.

a) **Periodicas simples.** Reduzir 0,3333 . . . a fracção ordinaria.

Representando por x a fracção ordinaria desconhecida que corresponde a 0,333 . . . será:

$$x = 0,3333 \dots$$

$$\text{Multiplicando por 10 é: } 10x = 3,3333 \dots$$

$$\text{Subtrahindo a primeira da segunda igualdade: } 9x = 3$$

$$x = \frac{3}{9} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

2) Reduzir 0,234234 . . . a fracção ordinaria.

$$x = 0,234234 \dots$$

$$\text{Multiplicando por 1000 é: } 1000x = 234,234234 \dots$$

$$\text{Subtrahindo as 2 igualdades: } 999x = 234$$

$$x = \frac{234}{999} = \underline{\underline{\frac{26}{111}}}$$

Vê-se que:

Para achar a fracção ordinaria equivalente a uma periodica simples, toma-se para numerador um dos periodos (234) e para denominador o numero formado por tantos noes quantos são os algarismos do periodo. (999).

Exercicios :

Reduzir a fracções ordinarias as periodicas simples seguintes:

- | | | |
|-----------------|-----------------|------------------|
| 2) 0,1111 . . . | 6) 0,7777 . . . | 10) 0,1212 . . . |
| 3) 0,2222 . . . | 7) 0,0303 . . . | 11) 0,4545 . . . |
| 4) 0,4444 . . . | 8) 0,2727 . . . | 12) 0,1515 . . . |
| 5) 0,6666 . . . | 9) 0,2424 . . . | 13) 0,7272 . . . |

- | | | |
|------------------|--------------------|---------------------|
| 14) 0,8181.... | 19) 0,321321.... | 24) 0,00120012.... |
| 15) 0,045045.... | 20) 0,432432.... | 25) 0,40324032.... |
| 16) 0,123123.... | 21) 0,114114.... | 26) 0,0004500045... |
| 17) 0,021021.... | 22) 0,00720072.... | 27) 0,1232112321... |
| 18) 0,531531.... | 23) 0,00510051.... | 28) 0,0212102121... |

b) **Periodos compostos.** Reduzir 0,56666... a fracção ordinaria.

Seja x a fracção ordinaria equivalente a 0,5666...
tem-se: $x = 0,5666\dots$

Multiplicando ambos os lados primeiramente por 10 e depois por 100, obtem-se:

$$10x = 5,666\dots$$

$$100x = 56,666\dots$$

Subtraindo:

$$90x = 56 - 5$$

$$x = \frac{56 - 5}{90} = \frac{51}{90} = \frac{17}{30}$$

2) Reduzir 0,85135135.... a fracção ordinaria.

$$x = 0,85135135\dots$$

Multiplicando ambos os lados primeiramente por 100 e depois por 100000 (para obter á direita das virgulas exactamente os mesmos algarismos 135135....)
tem-se:

$$100x = 85,135135\dots$$

$$100000x = 85135,135135\dots$$

$$99900x = 85135 - 85$$

$$x = \frac{85135 - 85}{99900} = \frac{85050}{99900} = \frac{63}{74}$$

Vê-se pois que:

Para achar a fracção ordinaria equivalente a uma periodica composta, toma-se para numerador a parte não periodica unida ao primeiro periodo (85135) menos a parte não periodica (85) e para denominador es-

crevem-se tantos noves, quantos fôrem os algarismos de um periodo (tres), juntando-se lhes tantos zeros quantos fôrem os algarismos da parte não periodica. (dous).

Exercicios:

Reduzir a fracções ordinarias:

- | | | |
|-----------------|-------------------|------------------------|
| 29) 0,8333.... | 37) 0,0363636.... | 45) 0,323636.... |
| 30) 0,8555.... | 38) 0,42525.... | 46) 0,1184242.... |
| 31) 0,6222.... | 39) 0,0108108.... | 47) 0,0124545.... |
| 32) 0,7444.... | 40) 0,583333.... | 48) 0,42567567.... |
| 33) 0,2888.... | 41) 0,316666.... | 49) 0,0004545.... |
| 34) 0,1444.... | 42) 0,813333.... | 50) 0,32291666.... |
| 35) 0,4333.... | 43) 0,416666.... | 51) 0,3571428571428... |
| 36) 0,01515.... | 44) 0,25333.... | 52) 0,00243243.... |

E' bem decorar a tabella seguinte:

$\frac{1}{2} = 0,5$	$\frac{1}{5} = 0,2$	$\frac{1}{8} = 0,125$
$\frac{1}{4} = 0,25$	$\frac{2}{5} = 0,4$	$\frac{3}{8} = 0,375$
$\frac{3}{4} = 0,75$	$\frac{3}{5} = 0,6$	$\frac{5}{8} = 0,625$
$\frac{1}{3} = 0,333\dots$	$\frac{1}{6} = 0,1666\dots$	$\frac{1}{9} = 0,111\dots$
$\frac{2}{3} = 0,666\dots$	$\frac{5}{6} = 0,8333\dots$	$\frac{2}{9} = 0,222\dots$

§ 20.

Adição e Subtracção.

Sendo a fracção decimal unicamente um caso especial da fracção ordinaria, é claro que a adição e a subtracção de fracções decimaes praticam-se da mesma maneira como se trabalhássemos com as fracções ordinarias; mas, como é muito facil reduzir

decimais ao mesmo denominador, a operação tornar-se-ha mais simples, por exemplo:

$$\left. \begin{array}{r} 7,302 = 7,302 \\ + 0,52 = 0,520 \\ + 4,2 = 4,200 \\ \hline 12,022 = 12,022 \end{array} \right\} \text{ e } \left\{ \begin{array}{r} 12,643 = 12,643 \\ - 7,5 = 7,500 \\ \hline 5,143 = 5,143 \end{array} \right.$$

Como os zeros que se acrescentam não influem no resultado, bastará collocar os decimais uns debaixo dos outros de maneira que as virgulas se acham em linha vertical e depois procede-se como se os números fossem inteiros.

Adicionar:

- | | | | | | | | |
|----|----------|---|----------|---|----------|---|-----------|
| | <u>7</u> | | <u>8</u> | | <u>9</u> | | <u>10</u> |
| 1) | 0,342 | + | 6,4 | + | 4,32 | + | 0,5624 |
| 2) | 7,08 | + | 7,5362 | + | 0,9873 | + | 0,47 |
| 3) | 9,4 | + | 14,002 | + | 7,406 | + | 9,644 |
| 4) | 8,3231 | + | 0,57 | + | 6,6 | + | 0,9 |
| 5) | 7,659 | + | 2,832 | + | 7,893 | + | 5,4671 |
| 6) | 24,5 | + | 0,7414 | + | 2,5 | + | 4,232 |

Exercicios:

Reduzir as fracções seguintes a fracções decimais de 4 algarismos e adicionar:

- | | | | | | | | |
|-----|-----------------|---|-----------------|---|-----------------|---|------------------|
| 11) | $\frac{1}{2}$ | + | $\frac{3}{4}$ | + | $\frac{5}{8}$ | + | $\frac{7}{16}$ |
| 12) | $\frac{1}{5}$ | + | $\frac{13}{25}$ | + | $\frac{9}{20}$ | + | $\frac{11}{40}$ |
| 13) | $\frac{13}{20}$ | + | $\frac{27}{50}$ | + | $\frac{7}{8}$ | + | $\frac{21}{40}$ |
| 14) | $\frac{9}{15}$ | + | $\frac{5}{13}$ | + | $\frac{6}{7}$ | + | $\frac{93}{125}$ |
| 15) | $\frac{7}{17}$ | + | $\frac{19}{33}$ | + | $\frac{27}{40}$ | + | $\frac{26}{45}$ |
| 16) | $\frac{37}{90}$ | + | $\frac{46}{75}$ | + | $\frac{23}{45}$ | + | $\frac{76}{81}$ |
| 17) | $\frac{13}{16}$ | + | 0,437 | + | $\frac{28}{55}$ | + | 6,3894 |
| 18) | $\frac{17}{56}$ | + | 7,3 | + | $\frac{61}{77}$ | + | 2,432 |

Subtrahir:

- | | | | |
|-----|---------|--|--|
| 19) | 0,73 | | |
| | - 0,42 | | |
| 20) | 4,85 | | |
| | - 2,73 | | |
| 21) | 0,963 | | |
| | - 0,745 | | |
| 22) | 8,015 | | |
| | - 5,36 | | |

- | | | | | | | | |
|-----|-----------|-----|-------------|-----|------------|-----|-----------|
| 23) | 10,543 | 24) | 7,374 | 25) | 6,075 | 26) | 5,386 |
| | - 4,67 | | - 5,466 | | - 3,487 | | - 4,478 |
| 27) | 45,6 | 28) | 64,32 | 29) | 57,2 | 30) | 89,401 |
| | - 17,4324 | | - 26,452 | | - 39,576 | | - 77,5689 |
| 31) | 74,5 | 32) | 82,00032 | 33) | 46,4 | | |
| | - 0,00064 | | - 65,006007 | | - 37,00089 | | |

Reduzir as fracções seguintes a fracções decimais de 5 algarismos e subtrahir.

- | | | | | | | | |
|-----|-------------------|-----|-------------------|-----|-------------------|-----|---------------------|
| 34) | $\frac{49}{50}$ | 35) | $\frac{17}{25}$ | 36) | $\frac{37}{36}$ | 37) | $\frac{64}{75}$ |
| | - $\frac{17}{32}$ | | - $\frac{5}{16}$ | | - $\frac{11}{35}$ | | - $\frac{19}{30}$ |
| 38) | $\frac{23}{29}$ | 39) | $\frac{67}{85}$ | 40) | $\frac{97}{120}$ | 41) | $\frac{217}{225}$ |
| | - $\frac{39}{51}$ | | - $\frac{43}{77}$ | | - $\frac{51}{95}$ | | - $\frac{174}{225}$ |

§ 21.

Multiplicação e Divisão de uma fracção decimal por uma potencia de 10.

Sendo: $6,452 = \frac{6452}{1000}$ e

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{6452}{1000} \times 10 = \frac{6452 \times 10}{1000} = 64,52 \\ \frac{6452}{1000} \times 100 = \frac{6452 \times 100}{1000} = 645,2 \\ \frac{6452}{1000} \times 1000 = \frac{6452 \times 1000}{1000} = 6452 \end{array} \right.$$

segue-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} 6,452 \times 10 = 64,52 \\ 6,452 \times 100 = 645,2 \\ 6,452 \times 1000 = 6452 \\ 6,452 \times 10000 = 64520 \end{array} \right.$$

isto é:

Para multiplicar um numero decimal por 10, 100, 1000, 10000 etc. muda-se a virgula um, dous, tres etc. algarismos para a direita.

Sabe-se que $542,6 = \frac{5426}{10}$ e que:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{5426}{10} : 10 = \frac{5426}{10 \times 10} = 54,26 \\ \frac{5426}{10} : 100 = \frac{5426}{10 \times 100} = 5,426 \\ \frac{5426}{10} : 1000 = \frac{5426}{10 \times 1000} = 0,5426 \end{array} \right\}$$

ou:

$$\left. \begin{array}{l} 542,6 : 10 = 54,26 \\ 542,6 : 100 = 5,426 \\ 542,6 : 1000 = 0,5426 \\ 542,6 : 10000 = 0,05426 \end{array} \right\}$$

isto é:

Para dividir um numero decimal por 10, 100, 1000 etc. muda-se a virgula um, dous, tres etc. algarismos para a esquerda.

Exercicios:

- | | | | |
|-----------|---|--------|--------------------|
| 1) 0,7 | × | 10 | 8) 7543,25 : 100 |
| 2) 7,378 | × | 100 | 9) 7543,25 : 10000 |
| 3) 0,346 | × | 10000 | 10) 9,6 : 100 |
| 4) 6,5932 | × | 1000 | 11) 362 : 10 |
| 5) 4,89 | × | 100 | 12) 17,43 : 10000 |
| 6) 4,89 | × | 1000 | 13) 0,28 : 100 |
| 7) 4,89 | × | 100000 | 14) 0,6 : 10000 |

Exercicios:

Exemplo: Reduzir:

$$\begin{array}{l} 0,6 \text{ do hectolitro a litros.} \\ \hline 1 \text{ hectolitro tem } 100 \text{ litros} \\ 0,6 \text{ do " " } 0,6 \times 100 \text{ litros} \\ \hline \text{" } \underline{60 \text{ litros.}} \end{array}$$

Reduzir:

- 15) 0,8; 0,02; 0,025; 0,0576; 0,475; 3,7 do *Hl.* a *l.*, a *dl.*
- 16) 0,7; 0,45; 0,875; 0,006; 0,6375; 0,5425; 0,04003 do *m.* a *dm.*, a *cm.*, a *mm.*
- 17) 0,6; 0,06; 0,75; 0,325; 0,005; 0,8125 do *g.* a *dg.*, a *mg.*
- 18) 0,63; 0,422; 0,5004; 0,0025; 0,47375 do *mq.* a *dmq.*
- 19) 0,78; 0,235; 0,8612; 0,0006 do *Ha.* a *ares.*
- 20) 0,9; 0,45; 0,263; 0,2245; 0,00321; 0,000078 do *mc.* a *dmc.*
- 21) 0,5; 0,31; 0,825; 0,3375; 0,00042 do *mc.* a *cmc.*
- 22) 0,4; 0,72; 0,452; 0,2765; 0,00361 do *cmc.* a *mmc.*
- 23) 0,574; 0,2935; 0,000364; 0,0040005 da *T.* a *Kg.*, a *Hg.*, a *Dg.*, a *g.*
- 24) 0,69; 0,04; 0,0008; 0,0036 do *Ha.* a *mq.*
- 25) 0,5875; 0,73; 0,06; 0,00004 do *Kl.* a *Dl.*, a *l.*

Exemplo: Reduzir:

$$\begin{array}{l} 6\frac{1}{2} \text{ litros a hectolitros.} \\ \hline 100 \text{ litros} = 1 \text{ hectolitro} \\ 1 \text{ litro} = \frac{1}{100} \text{ do hectolitro} \\ \hline 6\frac{1}{2} \text{ l.} = 6,5 \text{ litros} = \frac{6,5}{100} \text{ " " } \\ \hline = \underline{0,065} \text{ " } \end{array}$$

Reduzir:

- 26) 800; 685; 500; 250; 145; 65; 100; 70; 50; 40; 6; 2 réis a milréis.
- 27) 6; $2\frac{1}{2}$; $5\frac{1}{4}$; $7\frac{1}{8}$ *m.* a *Dm.*, a *Hm.*
- 28) 8; $5\frac{1}{2}$; $9\frac{3}{4}$; $7\frac{7}{8}$ *cm.* a *dm.*, a *m.*
- 29) 25; $64\frac{1}{2}$; $7\frac{1}{5}$; $413\frac{1}{4}$ *l.* a *Dl.*, a *Kl.*

- 30) 536; 875; $1212\frac{1}{2}$; $27\frac{3}{8}$ Kg. a T.
 31) 47; $213\frac{1}{2}$; $6318\frac{1}{4}$; $2\frac{3}{4}$ Dg. a Hg., a Kg.
 32) 44; $7\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; $6\frac{3}{8}$ cmq. a dmq., a mg.
 33) $5611\frac{1}{2}$; $927\frac{5}{8}$ mg. a Dmq., a Hmq., a Kmq.
 34) $317\frac{1}{4}$; $6\frac{2}{5}$; ares a Ha.
 35) $25\frac{1}{5}$; $1247\frac{1}{8}$ Ha. a Kmq.
 36) 814; $68\frac{1}{2}$; $7\frac{1}{8}$ dmc. a mc.
 37) 6; $416\frac{3}{4}$ mmc. a cmc., a dmc., a mc.
 38) (32 dm. + $9\frac{1}{2}$ cm.) a m.
 39) (144 m. + $7\frac{3}{4}$ cm.) a Km.
 40) ($268\frac{2}{5}$ L. + 19 ml.) a Hl.
 41) ($1824\frac{1}{2}$ g. + 5 dg.) a Kg.
 42) ($45\frac{1}{4}$ a. + 5,3 dca. + $27\frac{5}{8}$ mq.) a Ha.

§ 22.

Multiplicação.

a) de um numero decimal por um numero inteiro.

Veamos a multiplicação de: 5,42 por 24. Sabe-se que 542 é 100 vezes maior que 5,42. Multiplicando 542 por 24, obtem-se, por conseguinte, um resultado 100 vezes maior que o producto que se procura. Logo será este:

$$\frac{542 \times 24}{100} = \frac{13008}{100} = \underline{\underline{130,08}}$$

isto é:

Para multiplicar um numero decimal por um numero inteiro, multiplicam-se os 2 numeros como se fossem inteiros e no producto separam-se, com a virgula, tantos algarismos á direita, quantos ha no factor decimal.

Exercicios:

- | | | | | | |
|-------------|---|------|---------|---|----------|
| 1) 0,72 | × | 18 | 14) 36 | × | 0,024 |
| 2) 0,8 | × | 27 | 15) 63 | × | 0,065 |
| 3) 0,524 | × | 21 | 16) 210 | × | 16,4 |
| 4) 0,74 | × | 376 | 17) 464 | × | 7,021 |
| 5) 0,93 | × | 2387 | 18) 96 | × | 16,034 |
| 6) 2,6005 | × | 9 | 19) 184 | × | 5,006 |
| 7) 5,402 | × | 84 | 20) 638 | × | 49,03 |
| 8) 28,76 | × | 64 | 21) 72 | × | 63,004 |
| 9) 6,034 | × | 56 | 22) 365 | × | 126,08 |
| 10) 14,0059 | × | 366 | 23) 46 | × | 0,007 |
| 11) 0,26 | × | 5937 | 24) 104 | × | 0,0009 |
| 12) 0,0048 | × | 42 | 25) 76 | × | 0,00059 |
| 13) 0,0006 | × | 73 | 26) 232 | × | 0,000204 |

b) de dois numeros decimais:

Seja dado o seguinte exemplo: $5,32 \times 7,562$.
 O numero 532 é 100 vezes maior que 5,32 e o numero 7562 é 1000 vezes maior que 7,562. Multiplicando 532 por 7562 obter-se-ha um producto 100 \times 1000 = 100000 vezes maior que o producto de $5,32 \times 7,562$; logo achar-se-ha este, dividindo 532 \times 7562 por 100000, isto é, separando com a virgula á direita d'este producto tantos algarismos, quantos decimais ha nos dois factores.

Para multiplicar dois numeros decimais multiplicam-se os 2 numeros como se fossem numeros inteiros, e, no producto, separam-se com a virgula tantos algarismos quantos ha á direita dos dois factores.

Exercicios:

- | | | | | | |
|-----------|---|------|------------|---|--------|
| 27) 7,4 | × | 5,3 | 32) 0,32 | × | 0,7 |
| 28) 5,6 | × | 3,76 | 33) 0,095 | × | 0,63 |
| 29) 52,7 | × | 5,04 | 34) 956,2 | × | 14,038 |
| 30) 35,23 | × | 0,72 | 35) 18,462 | × | 6,006 |
| 31) 0,5 | × | 0,8 | 36) 0,724 | × | 0,04 |

37) 456,0042	×	6,004		42) 1,08	÷	63,024
38) 0,003	×	7,02		43) 0,009	÷	0,056
39) 9,07	×	0,478		44) 0,562	÷	0,00062
40) 85,005	×	2,09		45) 0,00234	÷	0,005492
41) 246,0305	×	46,005		46) 4,04006	÷	0,0023

47) 0,4	×	3,76	×	200	
48) 3,2	×	0,04	×	6,66	
49) 0,7	×	14,34	×	5,08	÷ 300
50) 12,6	×	2,005	×	0,54	÷ 0,06
51) 0,4	×	0,04	×	0,004	÷ 0,0004
52) 0,62	×	0,62	×	0,46	÷ 0,46

§ 23.

Divisão.

Seja dado, por exemplo: $5,4 : 34,235$. Sabe-se que:

$$\begin{aligned}
 5,4 : 34,235 &= \frac{54}{10} : \frac{34235}{1000} \\
 &= \frac{5400}{1000} : \frac{34235}{1000} \\
 &= \frac{5400}{1000} \times \frac{1000}{34235} \\
 &= \frac{5400}{34235} = 0,1577...
 \end{aligned}$$

Para dividir um numero decimal por outro, igualam-se com zeros o numero de algarismos decimaes, suprimem-se as virgulas e dividem-se depois os dous numeros como se fossem inteiros, exactamente como fizemos, reduzindo fracções ordinarias a fracções decimaes. Quando o dividendo ou o divisor é um numero inteiro, reduz-se este a fracção decimal e depois emprega-se a regra precedente.

Por exemplo: $54 : 34,235 = 54,000 : 34,235$

$$\begin{array}{r}
 54000 \overline{) 34235} \\
 197650 \\
 \hline
 264750 \\
 251050 \\
 \hline
 114050
 \end{array}$$

Exercícios:

1) 0,9	:	0,6	22) 0,36	:	0,06
2) 0,64	:	0,16	23) 4,045	:	0,0026
3) 0,24	:	0,52	24) 27,2	:	0,026
4) 0,83	:	0,7	25) 34,23	:	0,0052
5) 0,92	:	0,8	26) 0,84	:	0,00054
6) 0,7	:	0,35	27) 0,58	:	72
7) 2,34	:	0,642	28) 14,42	:	96
8) 4,6	:	0,47	29) 0,0024	:	2,4
9) 9,27	:	0,657	30) 17,28	:	0,0012
10) 6	:	4,7	31) 0,03096	:	0,000072
11) 9	:	5,64	32) 0,7644	:	0,0052
12) 12	:	6,15	33) 0,000615228	:	307
13) 15	:	7,294	34) 1,0191	:	0,00079
14) 144	:	0,56	35) 0,00019517	:	673
15) 5,6	:	4	36) 2	:	0,0002
16) 7,56	:	26	37) 212	:	0,0053
17) 12,423	:	15	38) 617325	:	0,00025
18) 20,537	:	242	39) 32,105	:	0,00064
19) 436	:	0,7	40) 26986,14	:	0,00009
20) 524	:	0,234	41) 21354,956	:	700
21) 8652,24	:	400	42) 21,6558	:	6000

§ 24.

Exercícios e problemas mixtos sobre as fracções decimaes e ordinarias.

Damos, em primeiro lugar, alguns exercicios mais complicados sobre as fracções decimaes que,

entretanto, nenhuma dificuldade apresentam e por isso nos dispensam de mais explicações:

1) $24,75 + \frac{33,6}{2,8} - \frac{5,25}{7} = ?$ 2) $21 - \frac{7,54}{58} - \frac{0,6351}{0,73} = ?$

3) $\frac{7,436628}{15-8,976} + \frac{7-3,08059}{6,587-4,367} = ?$ 4) $\frac{0,6}{0,002} + \frac{4540,57}{0,4681} - \frac{46,8}{0,234} = ?$

5) $\frac{2,7426}{0,42} + \frac{28,9}{8,5} + \frac{14,340744}{2,64} - \frac{1,62945}{4,5} = ?$ 6) $\frac{15 \times 2,6 - 11,8}{8,4 - 7,6} = ?$

7) $\frac{5,75 \times 14,4}{3 \times 9,2 \times 2,5} = ?$ 8) $\frac{1,41}{0,6} + \frac{12,37}{18,005 - 35,25 \times 0,42} = ?$

9) $\frac{9}{3,2 - 0,0375 \times 25} = ?$ 10) $\frac{15 - \frac{463,98}{56,24}}{\frac{89,4726}{36,82} - 0,5 \times 4,68} = ?$

Para resolver problemas em que apparecem fracções decimaes e ao mesmo tempo fracções ordinarias, o methodo mais simples é converter todas as fracções decimaes em ordinarias e proceder conforme as regras destas. O resultado poderá depois ser reduzido a fracção decimal. Quem entretanto dispuzer de bastante pratica, operará ao mesmo tempo tanto com as fracções ordinarias, como com as fracções decimaes, segundo for mais conveniente. E'claro que as fracções periodicas não podem deixar de ser convertidas em fracções ordinarias. Apresentamos um exemplo em que são applicados ambos os methodos, e recommendamos ao alumno que analyse cada parcella de per si:

$$\frac{4,375}{3-2\frac{3}{8}} + \frac{7/12 - 0,25}{0,66\dots + 0,1666\dots} + \frac{4,5}{3} + \frac{1,5 \times 2\frac{2}{3}}{6,25 \times 6,4} = ?$$

$$2 - 1\frac{1}{2}$$

$$\frac{4375}{1000} + \frac{7/12 - 1/4}{2/3 + 1/6} + \frac{10}{6} + \frac{15/10 \times 8/3}{625/100 \times 64/10} =$$

$$\frac{4375}{1000} \times \frac{8}{5} + \frac{1 \times 6}{3 \times 5} + \frac{10}{2} \times \frac{6}{2} + \frac{15 \times 8 \times 100 \times 10}{10 \times 3 \times 625 \times 64} =$$

$$7 + \frac{2}{5} + \frac{3}{4} + \frac{1}{10} = 7 \frac{8+15+2}{20} =$$

8 1/4 = 8,25.

2º methodo:

$$\frac{4,375}{5/8} + \frac{1/3}{5/6} + \frac{4,5}{6} + \frac{1,5 \times 8/3}{6,25 \times 6,4} =$$

$$\frac{0,875}{5} \times 8 + \frac{1 \times 6}{3 \times 5} + \frac{4,5}{2} + \frac{0,5}{3} \times \frac{1,5 \times 8}{6,25 \times 6,4} =$$

$$7 + 0,4 + 0,75 + 0,1 = \underline{\underline{8,25.}}$$

- 11) $\frac{8,03 + 5\frac{2}{3} + 0,7835 + 4,0649}{8/9} = ?$
- 12) $\frac{13,04 + 8\frac{2}{5} + 0,567 + 4\frac{7}{25} + 0,976 + 8,857}{5,6} = ?$
- 13) $\frac{10,75 + 4\frac{1}{4}}{3,05 - 1\frac{1}{5}} = ?$ 14) $\frac{6\frac{3}{4} + 2\frac{5}{6}}{14375 \times 0,16} = ?$
- 15) $\frac{35 - 14\frac{3}{5}}{24} + 1,74 = ?$ 16) $\frac{23,76}{0,2875 + \frac{75,4}{16}} - 7 \times 0,08 = ?$

$$17) \frac{19,605 - \frac{6,25}{\frac{1}{2}}}{64,5 - \frac{0,36}{1\frac{1}{2}}} = ? \quad 18) \frac{4\frac{11}{10} \times 6,3336}{12\frac{1}{4} - \frac{0,37875}{\frac{3}{50}}} = ?$$

$$19) \frac{\frac{22,75}{9\frac{2}{7}} + \frac{3}{4} \times 12,275}{2\frac{9}{25} - 0,375} = ?$$

$$20) \frac{\frac{1\frac{2}{3}}{5\frac{1}{2}} \times 16,90128}{\frac{2,376}{2\frac{1}{4}} + 2,376 \times 2\frac{1}{4}} = ?$$

- 21) [22] Um l. [g.] custa 7\$460 [2\$380]; quanto custará 1 Hl. [1 Kg.]?
- 23) [24] Uma sala tem 8,65 [11,85] m. de largura e o seu comprimento é 4,75 [7,65] m. maior; achar esse comprimento (e a superfície da sala).
- 25) [26] Um leiteiro vendeu: $17\frac{1}{2}$ l., $9\frac{3}{4}$ l., $12\frac{7}{8}$ l. e $6\frac{1}{4}$ l. [$13\frac{7}{10}$ l., $48\frac{1}{4}$ l., $26\frac{3}{8}$ l. e $35\frac{1}{5}$ l.] de leite a 560 réis o litro. Que quantia recebeu?
- 27) Um agrimensor achou para limites d'um terreno: 39,65 m., 53,8 m., $86\frac{3}{4}$ m., 64 m. e $107\frac{1}{2}$ m. Qual o comprimento do perímetro?
- 28) Um balão subiu 375,62 m., depois desceu 93,7 m. subiu outra vez 168,55 m. e cahiu de novo 216,85 m. Quantos metros se acha acima do solo?
- 29) [30] As peças d'uma machina têm os pesos seguintes: 1,216 T., 435 Kg., $78\frac{1}{2}$ Kg., 1,08 T., 249 Kg., $46\frac{1}{2}$ Kg. Quanto se deve pagar pela fundição de todas as peças, ao preço de 540 \$ 000 por tonelada?
- 31) [32] A um negociante sobraram diversos retalhos de fazenda, a saber: 2,25 m., $1\frac{2}{3}$ m., 3,5 m. e $1\frac{3}{4}$ m. [1,2 m., $2\frac{3}{4}$ m., 3,1 m. e $4\frac{3}{5}$ m.]. Vendeu todos os retalhos a 7 \$ 200 [12 \$ 400] o metro. Quanto recebeu?
- 33) [34] Converter as diversas parcelas em fracções decimales e effectuar: 47 m., 4 dm. 3 cm. 7 mm. + 138,34 m. — $16\frac{21}{40}$ m. + 9 dm. 7 cm. + 29 m. — 74 m. 5 dm. 8 mm.

- + 86 mm. [58 m. 5 cm. + 8 dm. 7 cm. 4 mm. — 29,376 m. + $195\frac{11}{25}$ m. — $89\frac{27}{30}$ m. + $74\frac{1}{2}$ mm. — 35 m. 5 cm. — $\frac{2}{10}$ dm.]
- 35) [36] Duas cidades obrigam-se a construir uma estrada de 71,4 [106,25] Km. de comprimento. A primeira deve fazer 29500 [68750] m. Quantos Km. deverá fazer a outra cidade, e quaes serão as despezas de cada uma, custando o Km. 1:680 \$ 000 [2:110 \$ 000]?
- 37) [38] A. B. e C. tiveram uma herança na importancia de 93:750 \$ 000 [178:560 \$ 000]. A. recebeu $\frac{1}{15}$ [$\frac{1}{10}$], B. $\frac{3}{10}$ [$\frac{5}{12}$] d'aquella quantia e C. o resto. Quanto recebeu cada um? Pede-se a verificação do resultado.
- 39) [40] Quanto custarão $237\frac{3}{4}$ [426,6] Hl., sabendo-se que 1 Hl. custa 56 \$ 000 [62 \$ 500].
- 41) [42] Valendo o g. de ouro 2\$972, quanto se deverá pagar por 5 [$3\frac{1}{2}$] oitavas do mesmo metal?
- 43) [44] Um negociante comprou fazendas na importancia de 2:648 \$ 000 [3:253 \$ 500] e vendendo-as, ganhou $\frac{3}{20}$ [$\frac{1}{15}$] do preço da compra. Por quanto as vendeu?
- 45) A. recebeu 3 remessas de café, pesando 215,8 Kg., 178,5 Kg. e 196,2 Kg. Vendeu logo $\frac{2}{5}$. Quantos Kg. vendeu e quantos ficaram? Quanto produziu o dito café, vendido a 1 \$ 060 o Kg.?
- 46) [47] Um terreno tem a forma de um quadrado, cujo lado é igual a $64\frac{3}{4}$ [$78\frac{1}{5}$] m. Quantos metros tem o seu perímetro, e qual é sua superfície?
- 48) [49] Percorrendo-se numa hora 3,9 [4,8] Km., em quantas horas, minutos e segundos se percorrerão 17,94 [37] Km.?
- 50) [51] De uma peça de fazenda de 42,5 m., venderam-se: $5\frac{1}{2}$ m., $6\frac{3}{4}$ m., $8\frac{7}{10}$ m., $11\frac{1}{5}$ m. [12 m., 9 m. 6 dm., 7 m. 5 cm., 85 cm.] a 8 \$ 400 [15 \$ 600] o metro. a) Quantos metros se venderam ao todo? b) Quantos sobraram? c) Quanto pagaram os diversos compradores e d) Quanto produzirão os m. restantes, vendidos ao mesmo preço?
- 52) [53] O peso de um litro de mercurio é de 13,598 Kg. Qual é o peso de 18,5 [$36\frac{3}{4}$] l. e quantos litros representam 1699,75 [3188,731] Kg.?

- 54) [55] Consumindo diariamente uma familia $\frac{3}{8}$ Kg. [150 g.] de café, em quantas semanas e dias consumirá 24 Kg. e 750 g. [$7\frac{1}{2}$ Kg.]?
- 56) [57] Um trem percorreu numa hora 52,2 [48,24] Km. Que velocidade tinha por segundo?
- 58) [59] Quatro pessoas repartiram entre si certa quantia. Coube á primeira $\frac{3}{10}$ [$\frac{5}{16}$]; á segunda $\frac{1}{15}$ [$\frac{7}{20}$]; á terceira $\frac{1}{4}$ [$\frac{1}{8}$] e á quarta o resto na importancia de 5:676 \$000 [7:599 \$000]. Qual era a quantia e quanto recebeu cada uma d'ellas?
- 60) [61] Bebendo uma familia por dia $3\frac{3}{4}$ [$4\frac{2}{3}$] l. de vinho, bastar-lhe-ha certa porção para 18 semanas e 6 dias [36 semanas e 4 dias]. Em quanto tempo consumirá a mesma quantidade de vinho, bebendo diariamente $4\frac{1}{2}$ [$3\frac{1}{2}$] l.?
- 62) [63] Pesando o litro de ouro [prata] 19,258 [10,474] Kg. achar o peso em grammos de 10 cmc.
- 64) Segundo os calculos de Delambre, a luz precisa de 8,22 minutos para percorrer a distancia do sol á terra, que é de 148675800 Km. Quantos metros percorre por segundo?
- 65) A terra move-se ao redor do sol fazendo um percurso de 963466131 Km. em 365 dias, 5 horas, 48 minutos e 47 segundos. Quantos Km. percorre em um dia (24 horas)?
Reduzem-se primeiro 5 horas, 48 minutos e 47 segundos á fracção decimal do dia (4 algar. dec.)
- 66) O diametro do sol é 108,7 vezes maior do que o da terra, e este 3,66636 vezes maior do que o da lua. Quantas vezes é o diametro do sol maior do que o da lua?
- 67) Com um Kg. de ouro puro cunham-se 60,82 peças de 20 \$000, ou 279 peças de 10 marcos, ou 136,57 libras esterlinas, ou $172\frac{2}{3}$ peças de 20 francos, ou 664,6 dollars. Calcular o valor de 20 \$000 em relação a cada uma das outras moedas.

§ 25.

Regra de Tres Simples.

Chama-se **regra de tres simples** a operação pela qual se procura uma quantidade (x) dependente de tres outras conhecidas, por exemplo:

$$\begin{array}{r} 7 \text{ m. de fazenda custam } 22\$400 \\ 12 \text{ m. } \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad x \end{array}$$

Os dous termos da mesma especie, ambos conhecidos (7 m e 12 m) denominam-se **termos principaes**, e os outros dous, (22\$400 e x) um dos quaes é desconhecido, são seus **relativos**.

Para resolver taes problemas recommendamos ao alumno que os escreva de modo que na primeira linha horizontal venha o termo principal e o seu relativo conhecido, e na segunda linha o outro principal e o seu relativo desconhecido de maneira que os termos principaes se acham um debaixo do outro e da mesma forma os relativos. Raciocinando então, passa-se do primeiro termo principal para a unidade e depois desta para o segundo termo principal, por exemplo:

$$\begin{array}{r} 7 \text{ m. de faz. custam } 22\$400 \\ 12 \text{ m. } \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad x \\ \hline 1 \text{ m. } \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \frac{22,4}{7} \\ \hline 12 \text{ m. } \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \frac{22,4 \times 12}{7} \end{array}$$

38\$400.

custando 7 m. 22\$400, é claro que 1 m. custará a setima parte, isto é $\frac{22,4}{7}$ como 12 m. custarão 12 vezes mais do que 1 m., o preço de 12 m. será: $\frac{22,4}{7} \times 12 = \frac{22,4 \times 12}{7}$

Neste caso o termo relativo augmenta ou diminue todas as vezes que o seu principal augmenta ou diminue, porque quanto mais metros compramos, tanto mais teremos de pagar e tornando-se o numero de metros 2, 3, 4 etc vezes **maior** ou menor, o seu custo total tambem se tornará 2, 3, 4 etc. vezes **maior** ou menor. Diz-se então que o termo principal e o seu relativo estão em dependencia **directa**. Ha tambem casos em que, tornando-se o termo principal 2, 3, 4 etc. vezes **maior** ou menor, o seu relativo se torna ao contrario 2, 3, 4 etc. vezes **menor** ou maior. Principal e relativo se acham em dependencia **inversa**, por exemplo:

Para fazer certo trabalho:

16 operarios precisam de 27 dias
 12 " " " X "

1 " precisa de 27×16 "

12 " precisarão de $\frac{27 \times 16}{12}$

= **36 dias.**

Se em qualquer dos casos apparecerem fracções, raciocinaremos como precedentemente, considerando as fracções e numeros mixtos como se fossem numeros inteiros e depois applicaremos as regras sobre as fracções, por exemplo:

$\frac{7}{10}$ do m. de faz. custam 2\$800
 $5\frac{1}{4}$ m. " " custarão x

{ precisando 16 oper. de 27 dias, é claro que 1 oper. precisa de 16 vezes mais tempo para fazer o mesmo trabalho, isto é, de 27×16 dias.
 como 12 oper. fazem por dia 12 vezes mais trabalho do que 1 oper. precisam 12 vezes menos tempo, isto é: $\frac{27 \times 16}{12}$ dias.

1 m. de faz. custa $\frac{2,8}{7/10}$

$5\frac{1}{4}$ m. " " custarão $\frac{2,8 \times 5\frac{1}{4}}{7/10} = \frac{28 \times 21 \times 10}{10 \times 4 \times 7} = \underline{\underline{21\$000.*}}$

Este processo é conhecido pelo nome de **methodo de redução á unidade**.

Exercicios:

- 1) Um m. de certa fazenda custa 3\$800; quanto custarão a) 7 m. b) 11 m. c) 19 m. d) 26 m. e) 35 m. da mesma fazenda?
- 2) Se 50 Kg. de banha custam 63\$000, qual será o preço de a) 14 Kg. b) 35 Kg. c) $52\frac{1}{2}$ Kg.?
- 3) [4] Pelo sacco, contendo 60 Kg. de feijão preto, pagam-se 18\$000 [22\$000]; quanto se pagará por 45 [$31\frac{1}{4}$] Kg.?
- 5) [6] Em quantos dias fariam 8 [16] operarios o mesmo trabalho que 36 [10] operarios fizeram em 18 [32] dias?
- 7) [8] Achar o valor de 875 [1734] Kg. de café á razão de 13\$000 [11\$000] a arroba (15 Kg.)
- 9) [10] Sabe-se que 60 Kg. de arroz custam 24\$000 [28\$000]. Qual será o preço de $19\frac{1}{2}$ [$12\frac{3}{4}$] Kg.?
- 11) [12] O salario annual de um eopeiro importa em 780\$000 [864\$000]; quanto ganhará em $3\frac{1}{4}$ [$4\frac{5}{6}$] mezes?
- 13) [14] Uma caixa de 60 Kg. de batatas vende-se por 23\$400 [26\$500], quanto custarão $32\frac{1}{2}$ [$50\frac{1}{4}$] Kg.?
- 15) [16] Se uma obra póde ser feita por 18 [39] homens em 30 [41] dias, em quanto tempo será feita por 24 [26] homens?

*) Tambem se pode raciocinar da maneira seguinte:
 Custando $\frac{7}{10}$ do m. 2\$800, $\frac{1}{10}$ do m. custará a setima parte, lo: o:

$\frac{2,8}{7}$ e 1 m. custará 10 vezes mais, isto é: $\frac{2,8 \times 10}{7}$; $\frac{1}{4}$ do m. custará 4 vezes menos logo $\frac{2,8 \times 10}{7 \times 4}$ e $5\frac{1}{4}$ m. = $21\frac{1}{4}$ m. custarão 21 vezes mais, isto é $\frac{2,8 \times 10 \times 21}{7 \times 4} = \frac{28 \times 10 \times 21}{10 \times 7 \times 4} = 21\$000.$

- 17) [18] N. ganha por anno 5:340\$000 [6:240\$000]; quanto ganhará em $7\frac{1}{2}$ [$8\frac{3}{4}$] mezes?
- 19) [20] O thermometro de Réaumur marca $22\frac{1}{2}$ grãos; a quantos grãos correspondem no thermometro de Celsius (centigrado) e no de Fahrenheit? *)
- 21) [22] 136 francos valem 106\$080 [130\$560]; quanto valem 102 [245] francos?
- 23) [24] Se, gastando-se por dia 4\$500 [6\$300], certa somma é sufficiente para 36 [25] dias, pergunta-se em quantos dias se gastará a mesma somma, fazendo-se uma despeza diaria de 5\$400 [7\$500].
- 25) [26] 60 Kg. de assucar custam 42\$400 [45\$600]; quanto custarão $8\frac{3}{4}$ [$13\frac{1}{2}$] Kg.?
- 27) [28] Se $4\frac{1}{2}$ [$5\frac{1}{4}$] m. custam 31\$500 [45\$500], quer-se saber o preço de $13\frac{1}{2}$ [$21\frac{3}{5}$] m.?
- 29) [30] Ganhando uma pessoa, em $6\frac{2}{3}$ [$8\frac{4}{5}$] mezes, 2:560\$000 [5:720\$000], quanto ganhará por anno?
- 31) [32] Valendo $\frac{2}{3}$ [$\frac{3}{5}$] do m. de certa fazenda 3\$200 [4\$500], qual será o preço de $\frac{3}{4}$ [$\frac{2}{3}$] do m.?
- 33) [34] Quanto custarão $\frac{3}{4}$ [$11\frac{1}{2}$] Kg. de fumo em rolo, sabendo-se que $7\frac{1}{2}$ [$5\frac{3}{4}$] Kg. custam 17\$200 [18\$400]?
- 35) [36] Se $17\frac{1}{4}$ [$28\frac{1}{2}$] dollars valem 77\$970 [125\$440]; quanto valem $22\frac{1}{2}$ [$15\frac{3}{4}$] dollars?
- 37) [38] Achar o valor de $52\frac{1}{2}$ [$62\frac{2}{5}$] marcos, sabendo-se que $32\frac{1}{2}$ [$104\frac{1}{4}$] marcos valem 44\$160 [116\$750].
- 39) [40] A $133\frac{1}{4}$ grãos, no thermometro de Fahrenheit, quantos grãos correspondem no de Réaumur e no de Celsius?
- 41) [42] Fazendo 22 [34] jornaleiros certa obra em 28 [49] dias, em quantos dias 16 [28] jornaleiros farão a mesma obra?

*) Actualmente usam-se tres thermometros: o de Celsius (centigrado), o de Réaumur e o de Fahrenheit. O primeiro dividiu o intervallo entre os 2 pontos fixos, correspondentes á temperatura de gelo fundente e de agua fervendo, em 100, o segundo em 80 e o terceiro em 180 grãos, de modo que: $100^{\circ} C. = 80^{\circ} R. = 180^{\circ} F.$ Precisa-se ainda notar que o de Fahrenheit tem o ponto zero 32° abaixo da temperatura do gelo fundente e por isso a temperatura de agua fervendo marca 212° nelle.

- 43) [44] Alcatifa-se uma sala com 18,5 [24,5] m. de tapete, que tem 2,4 [2,25] m. de largura; quantos metros seriam precisos, se o tapete tivesse 1,6 [1,75] m. de largura?

§ 26.

Regra de tres composta.

Quando a quantidade que se procura não depende somente de tres outras, porém de mais quantidades conhecidas, a regra de tres chama-se **composta**, por exemplo:

$$\begin{array}{r} 9 \text{ operarios ganham em } 7 \text{ dias } 283\$500 \\ 6 \text{ " " ganharão " } 4 \text{ " } x \end{array}$$

Para resolver taes problemas, raciocinamos de modo que todas as quantidades da primeira linha, a excepção da ultima, fiquem reduzidas á unidade e depois passa-se successivamente para os termos da segunda linha:

$$\begin{array}{r} 9 \text{ oper. ganh. em } 7 \text{ dias } 283\$500 \\ 6 \text{ " " " } 4 \text{ " } x \\ \hline 1 \text{ " " " } 7 \text{ " } 9 \\ \hline 1 \text{ " " " } 1 \text{ " } 9 \times 7 \\ \hline 6 \text{ " " " } 1 \text{ " } 9 \times 7 \\ \hline 6 \text{ " " " } 4 \text{ " } 9 \times 7 \end{array}$$

1 oper. ganha 9 vezes menos do que 9 operarios.
1 op. ganhará em 1 dia a setima parte do que ganha em 7 dias.
6 op. ganharão em 1 dia 6 vezes mais do que 1 operario.
Os 6 oper. ganharão em 4 dias 4 vezes mais do que em 1 dia.

$$= \frac{283,5 \times 6 \times 4}{9 \times 7} = 108\$000.$$

Outro exemplo:

Faz-se um fosso de:

40 m. de comp.	5 m. de larg.	2 m. de prof.	em 15 dias por	16	operarios
60 m.	3 m.	"	24 "	\times	"
1 m.	5 m.	"	15 "	$\frac{16}{40}$	"
1 m.	1 m.	"	15 "	$\frac{16}{40 \times 5}$	"
1 m.	1 m.	"	15 "	$\frac{16}{40 \times 5 \times 2}$	"
1 m.	1 m.	"	1 "	$\frac{16 \times 15}{40 \times 5 \times 2}$	"
60 m.	1 m.	"	1 "	$\frac{16 \times 15 \times 60}{40 \times 5 \times 2}$	"
60 m.	6 m.	"	1 "	$\frac{16 \times 15 \times 60 \times 6}{40 \times 5 \times 2}$	"
60 m.	6 m.	"	1 "	$\frac{16 \times 15 \times 60 \times 6 \times 3}{40 \times 5 \times 2}$	"
60 m.	6 m.	"	24 "	$\frac{16 \times 15 \times 60 \times 6 \times 3}{40 \times 5 \times 2 \times 24}$	"

$$\frac{16 \times 15 \times 60 \times 6 \times 3}{40 \times 5 \times 2 \times 24} = 27 \text{ operarios.}$$

Exercícios:

- 1) [2] Ganhando 8 [12] operarios durante 12 [15] dias a quantia de 432 \$ 000 [864 \$ 000], quanto ganharão 14 [22] operarios em 20 [24] dias?
- 3) [4] Ganhando 9 [22] obreiros 630 \$ 000 [1:540 \$ 000] em 14 dias, em quantos dias 16 [25] obreiros ganharão 2:000 \$ 000 [5:000 \$ 000], percebendo a mesma diaria?
- 5) [6] Quantos homens são necessarios para ganharem em 40 [30] dias a quantia de 9:000 \$ 000 [12:000 \$ 000], sabendo-se que 36 [27] homens ganham em 15 [42] dias a quantia de 2:430 \$ 000 [4:536 \$ 000]?
- 7) [8] 2:800 \$ 000 [4:600 \$ 000] rendem em $\frac{3}{4}$ [$1\frac{2}{3}$] do anno 126 \$ 000 [345 \$ 000]; quanto renderão nas mesmas condições 3:500 \$ 000 [2:400 \$ 000] em $\frac{2}{3}$ [$\frac{3}{4}$] do anno?
- 9) [10] 3 m. $\frac{1}{2}$ [$13\frac{3}{4}$] de certa fazenda de 1,65 [1,12] m. de largura, importam em 74 \$ 800 [239 \$ 200]; qual será o custo de 5 m. $\frac{1}{4}$ [27 m. $\frac{1}{2}$] da mesma facenda, tendo 1,15 [1,4] m. de largura?
- 11) [12] Uma fazenda de 9 m. 6 dm. [19 m 8 dm.] de comprimento e de 1 m. $\frac{1}{4}$ [1 m. e 32 cm.] de largura custa 32 \$ 500 [64 \$ 800]. Quanto custarão 4 m. e 8 dm. [15 m. e 4 dm.], tendo a fazenda a largura de 1 m. $\frac{1}{5}$ [1 m. e 21 cm.]?
- 13) [14] Numa fabrica trabalharam 86 [153] operarios que ganharam 10:320 \$ 000 [16:632 \$ 000] em 4 semanas de 6 dias. Foram dispensados 22 [34] e os restantes trabalharam só 5 dias por semana. Quanto terá o fabricante de pagar-lhes em 2 [3] semanas?
- 15) [16] Um fabricante paga 18:576 \$ 000 [25:272 \$ 000] aos seus 172 [234] operarios em 24 dias, trabalhando 10 horas por dia. Quantos homens poderá occupar d'ora em diante, reduzindo o numero de dias a 20 [16] e a 8 as horas de trabalho, não querendo gastar mais de 10:800 \$ 000 [7:200 \$ 000]?
- 17) [18] Precisa-se de 6 [12] jornaleiros durante 15 [20] dias, trabalhando 9 [10] horas por dia, para abrirem um fosso de 720 [360] m. de comprimento. Quantos homens, traba-

lhando 8 [9] horas por dia, são necessarios para abrirem outro fosso de 640 [540] m. nas mesmas condições?

19) [20] Para calçar um largo de 90 [75] m. de comprimento e de 52 [40] m. de largura, precisa-se de 15 [12] operarios durante 24 [15] dias. Em quanto tempo poderiam 9 [16] operarios calçar uma praça de 54 [60] m. de comprimento e de 39 [20] m. de largura?

21) [22] Um aterro de 450 [630] m. de comprimento, 8 m. [7 m. 1/2] de largura e 6 [5] m. de altura foi construido em 30 [27] dias por 168 [175] operarios, trabalhando 10 horas diarias. Em quanto tempo poderiam construir um aterro de 360 [440] m. de comprimento, 7 m. 1/2 [9 m.] de largura e 5 [7] m. de altura, 200 [240] operarios, trabalhando 9 [11] horas por dia?

§ 27.

Cambio.

Querendo-se pagar certa somma numa cidade qualquer na Europa, em Paris, por exemplo, recorre-se a um banco ou casa commercial, de séde entre nós, é entrega-se-lhe, em moeda brasileira, a quantia correspondente á dita somma e recebe-se uma letra de cambio equivalente ao valor que se pretende em moeda franceza. Em Paris será a letra paga pelo banco, pela casa commercial ou pela pessoa contra quem fôr sacada. Nesta transacção ha dous valores de moedas: o da moeda brasileira e o da praça estrangeira. Precisa-se, pois, conhecer a relação entre estas duas moedas. Esta relação entre as moedas de duas praças commerciaes não é uma quantidade constante, mas sim variavel. Uma das cidades dá sempre uma quantia fixa (o certo), a outra, porém,

dá ora mais, ora menos, isto é, a quantia variavel (o incerto) Assim entre Rio e Londres dá-se sempre o mil reis como quantia certa e o numero de pence que lhe corresponde, é a quantia incerta. Entre Rio e Berlin a quantia determinada é um marco, entre Rio e Paris um franco, entre Rio e Nova-York um dollar etc. e o numero de réis que equivale a um marco, a um franco, a um dollar etc. é a quantia incerta. O valor que numa cidade tem certa quantia, pagavel em outra, chama-se **taxa de cambio**. Diz-se porém:

O cambio entre Rio e Berlin está a 976 quando 1 *ℳ* equivale a 976 réis nessa occasião.

Paris está a 820 quando 1 Fr. equivale a 820 réis nessa occasião.

Nova-York está a 4120 quando 1 dollar equivale a 4\$120 réis nessa occasião.

Lisbôa*) está a 350 quando 100 rs. fortes equivale a 350 réis fracos nessa occasião.

Londres está a 10 1/8 quando 10 1/8 *d* equivale a 1000 réis nessa occasião.

I. Reducção da moeda estrangeira á moeda brasileira.

a) Reduzir a moeda allemã, franceza, portugueza e norte-americana á moeda brasileira.

1º. Exemplo: A quanto corresponde, em moeda brasileira, a quantia de 3275 *ℳ* 60 *¢* ao cambio de 980?

*) Portugal tem as mesmas moedas que o Brasil, somente o peso e por conseguinte o valor d'ellas é duplo do das moedas brasileiras. Para distinguir chama-se moeda forte a moeda portugueza e moeda fraca a moeda brasileira.

Exercícios:

A quanto corresponde, em moeda brasileira, a quantia de

- 14) 8 s. e 6 d. ao cambio de $13\frac{1}{2}$?
- 15) 13 s. " 5 d. " " $15\frac{3}{4}$?
- 16) 17 s. " 9 d. " " $16\frac{1}{8}$?
- 17) 12 £ 14 s. 9 d. ao cambio de $17\frac{1}{4}$?
- 18) 46 " 8 " 4 " " " $12\frac{11}{32}$?
- 19) 279 " 15 " — " " " $14\frac{7}{16}$?
- 20) 468 " — " 8 " " " 16 ?
- 21) 542 " — " — " " " $11\frac{7}{8}$?
- 22) 631 " 12 " 6 " " " $18\frac{3}{8}$?
- 23) 784 " 7 " 9 " " " $19\frac{1}{2}$?

II. Reducção da moeda brasileira á moeda estrangeira.

a) Reduzir a moeda brasileira á moeda allemã, franceza, portugueza e norte-americana.

1º Exemplo: A quanto corresponde, em moeda norte-americana, a quantia de 5:461\$500, ao cambio de 4928 ?

$$\begin{array}{r} 4928 \text{ réis valem } 1 \text{ dollar} \\ 5461500 \text{ " " " X " " } \\ \hline 1 \text{ real vale } \frac{1}{4928} \text{ "} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5461500 \text{ réis valem } \\ \begin{array}{r} 124125 \\ 496500 \\ 5461500 \\ 4928 \\ 448 \\ 112 \end{array} \\ \hline = \underline{\underline{1108 \text{ doll. } 44 \text{ cts.}}} \end{array}$$

2º Exemplo: Quanto valem, em Lisbôa, 9:502\$350 de nossa moeda, estando o cambio a 390?

$$\begin{array}{r} 390 \text{ réis fracos valem } 100 \text{ réis fortes} \\ 9502350 \text{ " " " X " " } \\ \hline \end{array}$$

$$1 \text{ real fraco vale } \frac{100}{390} \text{ " "}$$

$$\begin{array}{r} 9502350 \text{ reis fracos valem } \\ \begin{array}{r} 24365 \\ 73095 \\ 100 \times 9502350 \\ 390 \\ 3 \end{array} \\ \hline = \underline{\underline{2:436\$500.}} \end{array}$$

Exercícios:

Reduzir:

- 24) 3:645\$600 a francos ao cambio de 560 " " " " " 765
- 25) 6:485\$700 " " " " " 954
- 26) 12:198\$330 " " " " " 950
- 27) 5:897\$500 " marcos " " " 1155
- 28) 8:794\$500 " " " " " 705
- 29) 10:908\$300 " " " " " 2968
- 30) 7:648\$000 " dollars " " " 4422
- 31) 13:624\$600 " " " " " 5048
- 32) 19:106\$700 " " " " " ao cambio de 360
- 33) 15:426\$000 " moeda forte " " " 280
- 34) 18:357\$600 " " " " " 385
- 35) 33:713\$700 " " " " " " "

b) Reduzir a moeda brasileira á moeda ingleza.

Estes problemas só differem dos precedentes em ser preciso transformar em shillings e libras, o numero de pence achado.

Exemplo: Em quanto importam, em dinheiro inglez, ao cambio de $9\frac{3}{4}$, 12:918\$800 de moeda brasileira?

officialmente para o cambio par). Tem-se, pois, de calcular o valor em libras, shillings e pence que corresponde áquella quantia, ao cambio de 27, e depois achar-se em nossa moeda o equivalente ao cambio do dia.

Exemplo: A importancia d'um despacho é de 600\$000, sendo 12 o cambio do dia. Quanto se deve pagar, sendo a quarta parte em ouro?

$$\frac{600\$000}{4} = 150\$000 \text{ em ouro e } 450\$000 \text{ " papel.}$$

Ao cambio de 27 d., uma libra esterlina vale: $\frac{240}{27} = 8\$889$ e, por conseguinte, a 150\$000 correspondem tantas £ quantas vezes 8,889 está contido em 150, isto é: $\frac{150}{8,889}$. Agora, em vez de comprar-se esta quantidade de ouro, simplifica-se a transacção, calculando-se o correspondente em réis (ao cambio do dia) a saber:

$$\begin{array}{l} 1 \text{ £ corresponde a } 20\$000 \\ 150 \text{ " " " " } \\ 8,889 \text{ " " " " } \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{ao cambio do} \\ \text{dia} = 12 \end{array} \right. \times$$

$$x = \frac{150}{8,889} \times 20 = \frac{20}{8,889} \times 150 = 2,25 \times 150 = 337\$500.$$

Deve-se pagar: $450\$000 + 337\$500 = \underline{787\$500}$.

Os commerciantes calculam a quantidade que devem pagar em ouro por meio de um multiplicador que tiram d'uma tabella. Para comprehender estes multiplicadores, calculemos as importancias que cor-

respondem, por exemplo, a 150\$000 a pagar em ouro, sendo o cambio do dia successivamente: a) 10 d., b) 12 d., c) 15 d., d) 14 d. etc. etc.

Acharemos:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \frac{24 \text{ (val. da £ ao cambio de 10)}}{8,889 \text{ (val. da £ ao cambio de 27)}} \times 150 = 2,7 \times 150. \\ \text{b) } \frac{20 \text{ (val. da £ ao cambio de 12)}}{8,889 \text{ (val. da £ ao cambio de 27)}} \times 150 = 2,25 \times 150. \\ \text{c) } \frac{16 \text{ (val. da £ ao cambio de 15)}}{8,889 \text{ (val. da £ ao cambio de 27)}} \times 150 = 1,8 \times 150. \\ \text{d) } \frac{17,143 \text{ (val. da £ ao cambio de 14)}}{8,889 \text{ (val. da £ ao cambio de 27)}} \times 150 = 1,929 \times 150. \\ \text{etc. etc.} \end{array}$$

Exercicios:

- 58) Calcular os multiplicadores (3 algarismos decimaes), correspondentes ao cambio de: a) 8. b) 9. c) 16. d) $12\frac{1}{2}$. e) $13\frac{1}{2}$. f) $11\frac{1}{4}$. g) $15\frac{1}{4}$. h) $9\frac{3}{8}$. i) $14\frac{7}{16}$.

Achar a quantia a pagar dos despachos seguintes, sendo a quarta parte em ouro:

- | | | | |
|-----|------------|---------------------|-------------------|
| 59) | 400\$000 | ao cambio do dia de | 12 |
| 60) | 600\$000 | " " " " | 15 |
| 61) | 760\$000 | " " " " | 9 |
| 62) | 856\$000 | " " " " | 10 |
| 63) | 1:248\$000 | " " " " | $16\frac{7}{8}$ |
| 64) | 1:376\$000 | " " " " | $12\frac{1}{2}$ |
| 65) | 1:532\$000 | " " " " | $10\frac{3}{8}$ |
| 66) | 927\$600 | " " " " | $10\frac{11}{32}$ |
| 67) | 1:635\$200 | " " " " | $11\frac{3}{8}$ |
| 68) | 1:864\$800 | " " " " | $12\frac{1}{4}$ |
| 69) | 2:345\$500 | " " " " | $13\frac{1}{2}$ |
| 70) | 2:783\$300 | " " " " | $14\frac{1}{16}$ |

§ 28.

Juros.

Havendo necessidade de tomar emprestada uma quantia de dinheiro, recorre-se a um **capitalista**, que a fornece mediante um certo lucro. A quantia emprestada denomina-se **capital** e quem a toma emprestada, é o **devedor**. Findo o tempo convencionado, o devedor restituirá, além do capital emprestado, mais certa quantia, que é o lucro, pelo emprestimo. Esta quantia, verdadeiro aluguel do dinheiro, chama-se **juro** ou **premio** e está na razão directa do capital e do tempo, isto é, **quanto maior é o capital emprestado e quanto maior o tempo, tanto mais juros se tem de pagar**. Chama-se **taxa** ou **porcentagem** o juro da unidade de capital, sendo esta ordinariamente 100, emprestada durante um anno. Abreviadamente se diz, por exemplo, 8 por cento (assim escripto 8%) para indicar que o capital 100, emprestado durante um anno, rende 8. Na nossa moeda isto significa que 100\$000 rendem 8\$000 de juros por anno. Ha por conseguinte nos problemas de juros quatro quantidades: **capital**, **taxa**, **tempo** e **juro**, das quaes pode-se determinar uma, conhecendo-se as tres outras, problemas estes, que não differem dos de que trata a regra de tres.

I. Achar os juros.

a) Juros por um anno.

Exemplo: Quaes são os juros annuaes do capital de 7:365\$600, sendo a taxa $6\frac{1}{4}\%$.

$$\begin{array}{r}
 100\$000 \text{ de cap. rend. } 6\frac{1}{4} \text{ de juros} \\
 7:365\$600 \quad " \quad " \quad " \quad " \quad " \quad " \\
 \hline
 1\$000 \quad " \quad " \quad " \quad \frac{6\frac{1}{4}}{100} \quad " \quad " \\
 \hline
 7:365\$600 \quad " \quad " \quad " \quad \frac{6\frac{1}{4} \times 7365,6}{100} \quad " \quad " \\
 \hline
 = \frac{25 \times 7365,6^{1841,4}}{4 \times 100} = \underline{460\$350}
 \end{array}$$

{ 1\$000 rende naturalmente a centesima parte do que rendem 100\$000.
 { 7365\$600 rendem 7365,6 vezes mais do que rende 1\$000.

Exercicios:

- Achar os juros annuaes de:
- | | | |
|-------------------------|----------------|-------------------------------|
| 1) [2] a) 600\$000 | b) 840\$000 | c) 976\$000 a 10% [6] |
| 3) [4] a) 1:400\$000 | b) 1:900\$000 | c) 2:600\$000 " 5% [8] |
| 5) [6] a) 4:260\$000 | b) 7:540\$000 | c) 15:680\$000 " 7% [9] |
| 7) [8] a) 1:800\$000 | b) 2:780\$000 | c) 3:160\$000 " 7,5% [8,5] |
| 9) [10] a) 5:740\$000 | b) 6:256\$000 | c) 7:824\$000 " 4½% [6½] |
| 11) [12] a) 3:175\$000 | b) 4:928\$000 | c) 5:355\$000 " 6½% [7½] |
| 13) [14] a) 50\$000 | b) 88\$000 | c) 136\$000 " 9¾% [11½] |
| 15) [16] a) 5:760\$000 | b) 6:450\$000 | c) 8:280\$000 " 5⅓% [9⅓] |
| 17) [18] a) 10:496\$000 | b) 12:076\$000 | c) 14:384\$000 " 4,75% [7,25] |
| 19) [20] a) 342\$500 | b) 865\$800 | c) 1:574\$700 " 10²/₅% [6²/₅] |
| 21) [22] a) 7:469\$600 | b) 9:238\$400 | c) 13:276\$800 " 5,5% [6,5] |
| 23) [24] a) 18:235\$600 | b) 20:730\$400 | c) 24:793\$600 " 3¼% [12½] |

Certas taxas facilitam o calculo dos juros, a saber:

{	1% ^o	significa a centesima parte do capital	"	"	"
	10% ^o	"	"	decima	"
	20% ^o	"	"	quinta	"
	25% ^o	"	"	quarta	"
	50% ^o	"	"	metade	"

*) Nem sempre é mais simples eliminar todos os factores communs nos termos da fracção, o que se dá especialmente quando o denominador encerra uma potencia de 10. Assim em nosso exemplo deixou-se de eliminar o factor 2 commum aos termos 1841,4 e 4 por ser mais simples dividir de uma só vez 1841,4 por 4.

e por conseguinte achar-se-hão os juros de um capital a 1%, 10%, 20%, 25% e 50%, dividindo-o respectivamente por 100, 10, 5, 4 e 2. Do mesmo modo se comprehenderá que:

5%	é a metade	de 10%
2½%	" " quarta parte	" "
15%	" 10% + 5%	" "
30%	" 3 vezes 10%	" "
40%	" 4 " "	" "
75%	" 3 " 25%	" "

Assim, por exemplo, os juros annuaes de 8:549\$600 a 10%, 20%, 25%, 50%, 5%, 2½%, 15%, 30% e 75% serão:

- a 10% = $\frac{8549,6}{10} = 854\$960$
- a 20% = $\frac{8549,6}{5} = 1:709\920
- a 25% = $\frac{8549,6}{4} = 2:137\400
- a 50% = $\frac{8549,6}{2} = 4:274\800
- a 5% = $\frac{854,96}{2} = 427\$480$
- a 2½% = $\frac{854,96}{4} = 213\$740$
- a 15% = $854,96 + 427,48 = 1:282\$440$
- a 30% = $3 \times 854,96 = 2:564\$880$
- a 75% = $3 \times 213,4 = 6:412\$200$

Exercicios:

- 25) Achar igualmente os juros annuaes de:
- a) 860\$000
 - b) 1:730\$000
 - c) 2:476\$000
 - d) 3:879\$000
 - e) 4:548\$500
 - f) 5:732\$400
- sendo a taxa successivamente para cada quantia: 10%, 20%, 25%, 50%, 5%, 2½%, 15%, 30%, 40% e 75%.

Emfim convem muitas vezes calcular primeiro os juros de 1% e depois multiplical-os pela taxa, por exemplo:

$$7\% \text{ de } 2:436\$700 = ?$$

$$1\% \text{ " " " } = 24,367$$

$$7\% \text{ " " " } = 24,367 \times 7 = \underline{170\$569}$$

Quando a taxa é um numero mixto (ou fracção), pode-se transformal-o em numero decimal e depois multiplicar os juros de 1%. Usa-se tambem o processo que se vê no seguinte exemplo:

$$2\frac{3}{4}\% \text{ de } 3:723\$600 = ?$$

1%	"	"	= 37,236	
2%	"	"	= 37,236	$\times 2 = 74,472$
½%	"	"	= 18,618	
1/4%	"	"	= 9,309	
2¾%	"	"	= 4	$\underline{102\$399}$

Exercicios:

- 26) Calcular do mesmo modo os juros annuaes de:
- a) 680\$000
 - b) 1:865\$000
 - c) 2:736\$000
 - d) 2:956\$000
 - e) 3:472\$800
 - f) 6:584\$600

sendo a taxa successivamente: 3%, 4%, 7%, 9%, 11 1/4%, 2 1/2%
3 3/4% e 4 3/4%.

Em muitos casos não se adopta cem para base da porcentagem mas sim mil que se annota assim: 0/00.

Exercicios:

27) Achar os juros annuaes de:

a) 2:560\$000

b) 9:784\$000

c) 15:676\$000

sendo successivamente a taxa: 1/000, 2/000, 3/000, 5/000, 1 1/2/000,
2 1/4/000 e 3 3/4/000.

b) Juros por annos.

Exemplo: Quaes são os juros do capital de 7:568\$800 a 7 1/2% em 6 annos 2/3?

100\$000 rend. em 1 anno 7 1/2 de jur.

7:568\$800 " " 6 2/3 " X " "

1\$000 " " 1 " 7 1/2 " "

{ 1\$000 rende a centesima parte do que rendem 100\$000 no mesmo tempo.

7:568\$800 " " 1 " $\frac{7 1/2 \times 7568,8}{100}$ "

{ 7568\$800 rendem 7568,8 vezes mais do que rende 1\$000 no mesmo tempo.

7:568\$800 " " 6 2/3 " $\frac{7 1/2 \times 7568,8 \times 6 2/3}{100}$

$= \frac{15 \times 7568,8 \times 20}{2 \times 100 \times 3} = \underline{\underline{3:784\$400.}}$

{ 7568\$800 rendem em 6 2/3 annos, 6 2/3 vezes mais do que em um anno.

Exercicios:

Achar os juros de:

28) 700\$000 a 5% em 3 annos

- 29) 1:300\$000 a 6% em 7 annos
- 30) 850\$000 " 4 1/2% " 6 "
- 31) 2:460\$000 " 6 2/3% " 10 "
- 32) 2:125\$000 " 8 1/2% " 2 1/2 "
- 33) 1:588\$000 " 9% " 6 1/4 "
- 34) 6:276\$000 " 10% " 5 3/4 "
- 35) 14:789\$000 " 7 1/3% " 15 "
- 36) 12:380\$000 " 5 3/4% " 6 2/3 "
- 37) 9:645\$600 " 7,5% " 4 1/3 "
- 38) 15:286\$400 " 6,25% " 8 1/2 "
- 39) 18:325\$800 " 12 1/2% " 7 1/3 "
- 40) 34:729\$600 " 11 1/4% " 17 1/2 "

c) Juros por annos e mezes.

Transformam-se os annos em mezes.

Exemplo: Achar os juros do capital de 8:537\$600 a 8 1/4% em 4 annos e 7 mezes.

100\$000 rend. em 12 mezes 8 1/4 de jur.

8:537\$600 " " 55 " X " "

1\$000 " " 12 " $\frac{8 1/4}{100}$ " "

{ 1\$000 rende em 12 mezes a centesima parte do que rendem 100\$000 no mesmo tempo.

1\$000 " " 1 " $\frac{8 1/4}{100 \times 12}$ " "

{ 1\$000 rende em 1 mez a decima segunda parte do que rende em 12 mezes.

8:537\$600 " " 1 " $\frac{8 1/4 \times 8537,6}{100 \times 12}$

{ 8:537\$600 rendem em 1 mez, 8537,6 vezes mais do que rende 1\$000 no mesmo tempo.

8:537\$600 " " 55 " $\frac{8 1/4 \times 8537,6 \times 55}{100 \times 12}$

{ 8:537\$600 rendem em 55 mezes, 55 vezes mais do que rendem em 1 mez.

- 62) 8:340\$000 a 7% de 1º de Janº a 1 de Maio.
 63) 9:576\$000 " 5²/₅% " 1 " Março " 16 " Setº
 64) 11:932\$000 " 10¹/₂% " 5 " Junho " 23 " Outº
 65) 15:862\$500 " 6²/₃% " 13 " Fevº " 19 " Maio.

No commercio calculam-se os juros por dia pela regra seguinte: **Multiplica-se o capital pelo numero dos dias e divide-se o producto pelo divisor fixo respectivo.** Os divisores fixos dependem da taxa e são tirados de uma tabella. Para comprehender estes divisores, calculemos os juros de um capital, seja de 500\$000, durante certo numero de dias, 42, por exemplo, sendo a taxa successivamente a) 1%, b) 1¹/₄%, c) 1¹/₂%, d) 1³/₄%, e) 2% etc. etc.

$$a) \text{ de } 1\% : \frac{1 \times 500 \times 42}{100 \times 360} = \frac{500 \times 42}{36000} ;$$

divisor fixo de 1% = 36000.

$$b) \text{ " } 1\frac{1}{4}\% : \frac{1\frac{1}{4} \times 500 \times 42}{4 \times 100 \times 360} = \frac{500 \times 42}{28800} ;$$

divisor fixo de 1¹/₄% = 28800.

$$c) \text{ " } 1\frac{1}{2}\% : \frac{1\frac{1}{2} \times 500 \times 42}{2 \times 100 \times 360} = \frac{500 \times 42}{24000} ;$$

divisor fixo de 1¹/₂% = 24000.

$$d) \text{ " } 1\frac{3}{4}\% : \frac{1\frac{3}{4} \times 500 \times 42}{4 \times 100 \times 360} = \frac{500 \times 42}{20571} ;$$

divisor fixo de 1³/₄% = 20571.

$$e) \text{ " } 2\% : \frac{2 \times 500 \times 42}{100 \times 360} = \frac{500 \times 42}{18000} ;$$

divisor fixo de 2% = 18000.

etc. etc.

Exercícios:

- 66) Calcular uma tabella de divisores fixos para as taxas de
 a) 2¹/₄%, b) 2¹/₂%, c) 3%, d) 3³/₄%, e) 4%, f) 4¹/₂%,
 g) 5%, h) 6%, i) 6¹/₄%, k) 7¹/₂%, l) 8%, m) 9%,
 n) 10% e o) 12%.

Achar por meio dos respectivos divisores fixos os juros de:

- | | |
|--|--|
| 67) 162\$000 a 12% em 45 dias | 68) 432\$000 a 4% em 63 dias |
| 69) 736\$000 " 4 ¹ / ₂ % " 117 " | 70) 895\$000 " 6% " 96 " |
| 71) 916\$000 " 9% " 131 " | 72) 1:062\$000 " 7 ¹ / ₂ % " 176 " |
| 73) 1:184\$000 " 5% " 252 " | 74) 1:237\$500 " 8% " 261 " |

II. Achar a taxa.

Para conhecer bem o resultado de uma transacção commercial não basta deduzir simplesmente o custo do preço da venda, ou vice versa, mas sim deve-se procurar tambem saber qual a relação entre o lucro e o capital empregado; para isso verifica-se qual o ganho ou a perda que houve em cada 100\$000 de capital empregado. Seja, por exemplo, uma transacção commercial em que com 92:800\$000 de capital se ganharam 11:600\$000 e outra onde com 67:600\$000 se obteve um lucro de 8:619\$000. Não se pode concluir que, sendo 11:600\$000 maior do que 8:619\$000, houve maior vantagem no primeiro negocio do que no segundo. Com effeito, é necessario procurar saber quanto se ganhou em ambas as transacções com um dado capital, por exemplo com 100\$000. Vejamos agora qual das transacções deu maiores vantagens. Para isso resolvemos o Exemplo: Que lucro produz um capital de 100\$000, sabendo-se que 92:800\$000 deram 11:600\$000.

- 114) 1:944\$000 que produzem 222\$750 de jur. em 2 an. 1 mez.
- 115) 2:124\$000 " " 38\$940 " " " 2 mez. 28 dias
- 116) 4:008\$000 " " 100\$200 " " " 4 " 24 "
- 117) 1:980\$000 " " 564\$300 " " " 2 an. 4 mez. [15 dias.
- 118) 4:980\$000 " " 456\$500 " " " 1 an. 2 mez. [20 dias.

III. Achar o capital.

Exemplo: Qual o capital que rendeu 117\$000 de juros, a 24% em: a) 75 dias, b) 3 mezes 1/3 e c) 1 anno 1/4?

a) 24\$000 de jur. são produzidos em 360 dias por 100\$000 de cap.
 117\$000 " " " " " 75 " " " X " "

1\$000 de jur. é produzido

em 360 dias por $\frac{100}{24}$

de cap. {1\$000 de jur. é produzido por 24 vez. menos capital do que 24\$000 no mesmo tempo.

1\$000 de jur. é produzido

em 1 dia por $\frac{100 \times 360}{24}$

de cap. {1\$000 de jur. é produzido em 1 dia por 360 vezes mais capital do que em 360 dias.

117\$000 de jur. são produzidos

em 1 dia por $\frac{100 \times 360 \times 117}{24}$

de cap. {117\$000 de jur. são produzidos em 1 dia por 117 vez. mais cap. do que som. 1\$000 de jur. 1 dia.

117\$000 de jur são produzidos

em 75 dias por $\frac{100 \times 360 \times 117}{24 \times 75}$

de cap. {117\$000 de jur. são produzidos em 75 dias por um cap. 75 vezes menor do que em 1 dia.

$$= \frac{100 \times \overset{4}{360} \times \overset{5}{117}}{24 \times \underset{3}{75}} = \underline{\underline{2:340\$000.}}$$

Nos outros casos procedemos:

b) 24\$000 são produzidos em 12mez. por 100\$000 de cap.
 117\$000 " " " 3 1/3 " " " X " "

$$x = \frac{100 \times 12 \times 117}{24 \times 3 \frac{1}{3}} = \frac{100 \times 12 \times 117 \times 3}{24 \times 10} = \underline{\underline{1:755\$000}}$$

e finalmente:

c) 24\$000 são produzidos em 1 an. por 100\$000 de cap.
 117\$000 " " " 1 1/4 " " " X " "

$$x = \frac{100 \times 117}{24 \times 1 \frac{1}{4}} = \frac{100 \times 117 \times 4}{24 \times 5} = \underline{\underline{390\$000.}}$$

Exercícios:

- 119) [120] Qual será o capital que em um anno produz 191\$700 [142\$500] de juros a 9% [7 1/2%]?
- 121) [122] Achar o capital que a 6 1/4% [8 1/2%] rendeu 1:786\$500 [605\$200] em 9 [3 1/3] annos.
- 123) [124] Procurar o capital que a 8% [11 1/4%] produziu 134\$400 [99\$000] de juros em 7 [5 1/2] mezes.
- 125) [126] Qual é o capital capaz de em 1 anno, 7 mezes e 15 dias [2 annos, 4 mezes e 15 dias] a taxa de 7 1/2% [8 1/4%] produzir 339\$300 [1:542\$800] de juros?
- 127) [128] Um pai quer deixar á sua filha um rendimento de 240\$000 [350\$000] por mez. Qual o capital preciso, sendo a taxa de 4 1/2% [5 1/4%]?
- 129) [130] Um credor recebeu numa fallencia a quantia de 450\$000 [1:470\$000] ou 37 1/2% [61 1/4%] da divida. De quanto era esta?
- 131) [132] Qual é o capital que a 4 1/2% [11 1/4] produzirá os mesmos juros annuaes que 32:400\$000 [23:625\$000] a 5 1/4% [7 1/5%]?
- 133) [134] Uma pessoa seguiu a vida, pagando um premio

semestral de 1:088 \$ 500 [1:923 \$ 000] ou 6,22% [5,128%] da apolice. Qual foi a importancia do seguro?

135) [136] No correr do anno, o numero dos habitantes de uma cidade augmentou de 2³/₄% [3¹/₂%] sobre a população, sendo esse acrescimo de 462 [872] almas. Quantos habitantes tinha no começo do anno e quantos no fim?

137) Um capitalista collocou sua fortuna da seguinte maneira: a primeira parte, emprestada a 4% lhe rende 584 \$ 000, a segunda a 5% lhe dá 1:105 \$ 000 e a terceira, collocada a 6% produz 2:238 \$ 000. Qual é sua fortuna?

138) [139] Um individuo possui 43:560 \$ 000 [56:650 \$ 000] collocados a 5% [9%]. Diminuindo a taxa de 1¹/₂% [3³/₄%], quer-se saber quanto precisa juntar ao seu capital para ter agora o mesmo rendimento que d'antes?

IV. Achar o tempo.

Exemplo: Em que tempo rende o capital de 3:784 \$ 400 a 7¹/₂% os juros de 946 \$ 100?

100 \$ 000 de cap. rendem 7¹/₂% de jur. em 1 anno
3:784 \$ 400 " " " 946 \$ 100 " " X "

1 \$ 000 de cap. rende 7¹/₂% de jur. em 1 × 100 annos

1 \$ 000 de cap. rende 7¹/₂% de jur. em 1 × 100 annos

3:784 \$ 400 de cap. rendem 7¹/₂% de jur. em 1 × 100 annos

3:784 \$ 400 de cap. rendem 7¹/₂% de jur. em 1 × 100 × 3784,4 annos

3:784 \$ 400 de cap. rendem 7¹/₂% de jur. em 1 × 100 × 946,1 annos

$$\frac{100 \times 946,1 \times 2}{15 \times 3784,4} = 10$$

$$\frac{10}{3} = 3 \text{ an. } 1/3 = 3 \text{ an. e } 4 \text{ mez.}$$

As fracções do anno reduzem-se naturalmente a mezes e dias.

Exercicios:

140) [141] Quanto tempo será preciso para que o capital de 1:390 \$ 000 [3:120 \$ 000] produza a 8¹/₂% [5³/₄%] os juros de 236 \$ 300 [598 \$ 000]?

142) [143] Em quanto tempo o capital de 3:674 \$ 000 [2:560 \$ 000] a 6¹/₄% [4,5%] rende 183 \$ 700 [23 \$ 040]?

144) [145] Quantos annos, mezes e dias serão precisos para que 2:162 \$ 500 [3:766 \$ 400] a 9% [9³/₄%] produzam 242 \$ 200 [1:530 \$ 100] de juros?

146) Em quantos annos, mezes e dias um capital se duplicará (Juros-Capital), sendo a taxa a) 5% b) 6¹/₄% c) 9¹/₂% e d) 6³/₄%?

147) [148] Em quanto tempo um capital collocado a 7¹/₂% dará juros iguaes ao duplo [a 5³/₄] do capital?*

Problemas mixtos.

149) Um capitalista possui 156:000 \$ 000 collocados da seguinte maneira: 1/4 a 5%; 1/6 a 6¹/₄%; 3/8 a 8¹/₂% e o resto a 9%. a) Qual o seu rendimento annual? b) Quanto pôde gastar por dia, querendo economisar 3:240 \$ 000?

150) Uma pessoa tinha uma fortuna de 64:000 \$ 000 collocada a 7¹/₄%. Perde 6:000 \$ 000. A quanto % precisa collocar o resto da fortuna para continuar a ter o mesmo rendimento annual?

151) Um individuo devia pagar 2:400 \$ 000 no dia 30 de Junho e a mesma importancia em 31 de Dezembro. Pagou ambas as quantias no fim de Março do anno seguinte. Quanto pagou, juntando ainda os juros a 6% sobre os pagamentos em atrazo?

152) Uma pessoa colloca 1:000 \$ 000 a 6%; a esse capital

* O alumno applicado já deve ter achado as relações, que existem entre as 4 quantidades; J (juro), C (capital), i (taxa) e t (tempo):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{I) } j = \frac{100}{C \times i \times t} \\ \text{II) } c = \frac{100 \times j}{i \times t} \\ \text{III) } i = \frac{100 \times j}{C \times t} \\ \text{IV) } t = \frac{100 \times j}{C \times i} \end{array} \right.$$

junta successivamente mais 1:000\$000 no fim de cada anno. Quanto terá de juros simples no fim de 5 annos?

153) Um capitalista empresta seus capitaes a 10%, mas exige sempre o pagamento dos juros adiantado. Que quantia empresta realmente em vez de cada 100\$000? A que taxa empresta seus capitaes, recebendo pelo capital de 90\$000 os juros de 10\$000?

154) Outro capitalista exige tambem pagamento adiantado dos juros, mas pede sómente 8%. Quanto % pede na realidade?

155) Quanto paga de uma pessoa que toma 10:000\$000 emprestados a 9%, pagando os juros adiantados?

156) [157] Em que epoca serão os juros simples eguaes ao capital, sendo este emprestado a 6% [4½%], no dia 1º de Janeiro de 1901?

158) [159] Um capital duplicou a juros simples em 10 [25] annos. A quanto % foi collocado?

O capital de 100\$000, emprestado a 6%, eleva-se com os juros até o fim do anno a 106\$000. Querendo-se ter, por consequinte, depois de um anno, em capital e juros, a quantia de 106\$000, precisa-se agora collocar 100\$000? Empréstado-se 100\$000 a 6% durante 2 annos, o capital com os juros será depois esse tempo igual a 112\$000 ou a 112\$000 depois de 2 annos correspondem hoje 100\$000. Em um anno e

meio, o capital com os juros será 109\$000 $(6 + \frac{6}{2})$;

em 1 anno $\frac{1}{4}$ será 107\$500 $(6 + \frac{6}{4})$; em 3 annos

será 118\$000; em 4 mezes (terça parte do anno) será 102\$000 $(\frac{6}{3})$ etc. Estas considerações mostram como

achar-se a quantia necessaria para ter-se, em capital

e juros, depois de certo tempo e com uma taxa dada, uma somma fixada.

Exemplo: Um capital emprestado a 8½% elevar-se-ha com os juros depois de 1 anno e 8 mezes 1:457\$680; achar esse capital.

$$100\$000 \text{ hoje será depois de 1 anno } \frac{1}{2} = 100 + 8\frac{1}{2} + \frac{8\frac{1}{2} \times 2}{3} \\ = 100 + 8\frac{1}{2} + 5\frac{2}{3} = 114\frac{1}{6}$$

114 ¹ / ₆ com jur. correspondem a	100\$000 agora
1:457\$680 " " " " "	x " "
1\$000 " " " " "	100 " "
	114 ¹ / ₆ " "
	100 × 1457,68 " "
1:457\$680 " " " " "	114 ¹ / ₆ " "
	$\frac{100 \times 1457,68}{114\frac{1}{6}} = 1:276\800

Acha-se, semelhantemente, o preço da compra de um objecto, conhecendo-se o preço da venda e a porcentagem do lucro ou do prejuizo que houve. Repetimos que a porcentagem do lucro ou da perda se refere sempre ao preço da compra e que:

- Vender com 8% de lucro quer dizer que:
 - a 100\$000, preço da compra corresp. 108\$000
 - (100 + 8), preço da venda.
- Vender com 8% de prejuizo quer dizer que:
 - a 100\$000, preço da compra corresp. 92\$000
 - (100 - 8), preço da venda.

Exemplo: Quanto se pagou por uma fazenda, que foi vendida por 148\$800: a) ganhando-se 14²/₇% e b) perdendo-se 14²/₇%

a) A $114\frac{2}{7}$, preço da venda corresp. 100\$000, preço da compra

" 148\$800	" " " "	" " " "	" " " "	x	" " "
" 1\$000	" " " "	" " " "	" " " "		" " "
" 148\$800	" " " "	" " " "	" " " "		" " "
					$\frac{100}{114\frac{2}{7}}$
					$\frac{100 \times 148,8}{114\frac{2}{7}}$
					$= \frac{100 \times 148,8 \times 7}{800} = \underline{\underline{130\$200}}$

b) A $85\frac{5}{7}$ ($100 - 14\frac{2}{7}$), preço da venda corresp. 100\$000, preço da compra

A 148\$800	" " " "	" " " "	" " " "	x	preço da compra
					preço da compra
					x
					$x = \frac{100 \times 148,8}{85\frac{5}{7}} = \frac{100 \times 148,8 \times 7}{600} = \underline{\underline{173\$600}}$

Exercícios :

Achar o custo de uma mercadoria que se vendeu por:

- | | |
|---|---|
| <p>160) 67\$500 ganhando 8%
 161) 39\$600 " 10%
 162) 75\$600 " 12$\frac{1}{2}$%
 163) 52\$800 " 14$\frac{2}{7}$%
 164) 85\$400 " 16$\frac{2}{3}$%
 165) 94\$400 " 18%
 166) 109\$500 " 25%
 167) 114\$800 " 33$\frac{1}{3}$%</p> | <p>168) 23\$500 perdendo 6%
 169) 58\$000 " 3$\frac{1}{3}$%
 170) 76\$500 " 15%
 171) 83\$600 " 8$\frac{1}{3}$%
 172) 93\$800 " 6$\frac{2}{3}$%
 173) 156\$000 " 2$\frac{1}{2}$%
 174) 135\$200 " 7$\frac{1}{2}$%
 175) 205\$600 " 11$\frac{1}{9}$%</p> |
|---|---|

- 176) [177]** A somma do capital e dos juros correspondentes a um anno a 6% [$8\frac{3}{4}$ %] é 1:971\$600 [2:914\$500]. Qual foi o capital e quaes os juros?
- 178) [179]** Qual é o capital que, emprestado a 7% [9%], depois de 2 [$1\frac{1}{2}$] annos será com os seus jurós, igual a 1:482\$000 [2:497\$000]?

- 180) [181]** N. comprou um predio e ficou devendo 15:000\$000 [20:000\$000] que, segundo o contracto da compra, devia pagar, sem juros, no fim de 4 annos. N., entretanto, ganha certa quantia e propõe ao vendedor pagar-lhe a somma que, emprestada a 5 [$6\frac{1}{4}$ %] será, com os juros, exactamente igual a 15:000\$000 [20:000\$000] no fim dos 4 annos. Qual será essa somma?
- 182) [183]** Vendendo-se certa fazenda, ganharam-se 68\$000 [148\$500] ou 20 [18%] sobre o preço da compra. Qual foi o custo da fazenda e por quanto foi vendida?

Juros compostos.

Succede muitas vezes, que quem empresta dinheiro, não precisa dos juros na epoca do vencimento, e por isso accumula estes juros ao capital para juntos produzirem novos juros. Os juros obtidos d'este modo chamam-se **juros compostos** ou **capitalizados** ou **juros de juros**. O processo para achar os juros compostos é simples: Calculam-se no fim do primeiro anno os juros do capital emprestado, e juntam-se ao capital; esta somma forma o novo capital emprestado durante o segundo anno, procuram-se depois os seus juros para accumulal-os novamente, e esta somma forma então o novo capital emprestado durante o terceiro anno, e assim por diante. Para obterem-se os juros compostos, basta subtrahir-se o capital dado da ultima quantia assim calculada. Ha tabellas que muito facilitam o calculo d'esses juros. Apresentamos duas d'essas tabellas, que se referem a 5% e a 6%, tomando em ambos os casos 100\$000 como o capital emprestado:

5 0/0.

I.	Cap. 100 \$ 000			
	Jur. 5 \$ 000			
II.	105 \$ 000	Cap. no principio do	<u>2º an.</u>	
	Jur. 5 \$ 250			
III.	110 \$ 250	" " " "	<u>3º an.</u>	
	Jur. 5 \$ 513			
IV.	115 \$ 763	" " " "	<u>4º an.</u>	
	Jur. 5 \$ 788			
V.	121 \$ 551	" " " "	<u>5º an.</u>	
	Jur. 6 \$ 078			
VI.	127 \$ 629	" " " "	<u>6º an.</u>	
	Jur. 6 \$ 381			
VII.	134 \$ 010	" " " "	<u>7º an.</u>	
	Jur. 6 \$ 701			
VIII.	140 \$ 711	" " " "	<u>8º an.</u>	
	Jur. 7 \$ 036			
IX.	147 \$ 747	" " " "	<u>9º an.</u>	
	Jur. 7 \$ 387			
X.	155 \$ 134	" " " "	<u>10º an.</u>	
	Jur. 7 \$ 757			
	162 \$ 891	" " " "	<u>11º an.</u>	

6 0/0.

I.	Cap. 100 \$ 000			
	Jur. 6 \$ 000			
II.	106 \$ 000	Cap. no principio do	<u>2º an.</u>	
	Jur. 6 \$ 360			
III.	112 \$ 360	" " " "	<u>3º an.</u>	
	Jur. 6 \$ 742			
IV.	119 \$ 102	" " " "	<u>4º an.</u>	
	Jur. 7 \$ 146			
V.	126 \$ 248	" " " "	<u>5º an.</u>	
	Jur. 7 \$ 575			

6 0/0.

VI.	133 \$ 823	Cap. no principio do	<u>6º an.</u>
	Jur. 8 \$ 029		<u>7º an.</u>
VII.	141 \$ 852	" " " "	<u>8º an.</u>
	Jur. 8 \$ 511		<u>9º an.</u>
VIII.	150 \$ 363	" " " "	<u>10º an.</u>
	Jur. 9 \$ 022		<u>11º an.</u>
IX.	159 \$ 385	" " " "	<u>12º an.</u>
	Jur. 9 \$ 563		<u>13º an.</u>
X.	168 \$ 948	" " " "	<u>14º an.</u>
	Jur. 10 \$ 137		<u>15º an.</u>
	179 \$ 085	" " " "	<u>16º an.</u>

Exercicio: Continuar o calculo até 20 annos.

Para explicação do uso de taes tabellas, damos os seguintes exemplos:

100 \$ 000 a 5 0/0 em 6 annos rendem	134 \$ 010
400 \$ 000 " " " " " "	$4 \times 134,01 = 536 $ 040$
250 \$ 000 " " " " " "	$2\frac{1}{2} \times 134,01 = 335 $ 025$
620 \$ 000 " " " " " "	$6\frac{1}{5} \times 134,01 = 830 $ 862$
475 \$ 000 " " " " " "	$4\frac{3}{4} \times 134,01 = 636 $ 548$

Obtem-se tabellas de 1 \$ 000 em vez de 100 \$ 000, mudando a virgula decimal dous algarismos para a esquerda

1 \$ 000 a 5 0/0 em 6 annos rende	$\frac{1}{100} \times 134,01 = 1,3401$
7 \$ 000 " " " " " "	$7 \times 1,3401 = 9,381$
228 \$ 500 " " " " " "	$228,5 \times 1,3401 = 306,213$
etc.	etc.

Exercicios:

Quanto produzirão a juros compostos, sendo a taxa 5 0/0 [6 0/0]:

184) [185]	600 \$ 000 em 4 annos?
186) [187]	900 \$ 000 " 6 "
188) [189]	550 \$ 000 " 5 "

190	[191]	725 \$000	em 8 annos?
192	[193]	463 \$000	" 10 "
194	[195]	675 \$000	" 7 "
196	[197]	342 \$000	" 3 "
198	[199]	858 \$500	" 9 "
200	[201]	254 \$000	" 15 "
202	[203]	1:206 \$000	" 12 "

§ 29.

Regra de companhia.

Quando duas ou mais pessoas se unem afin de fornecer o capital necessario para uma ou mais transacções commerciaes, formam uma **sociedade** ou **companhia**. Os individuos que constituem a dita sociedade, chamam-se **socios** e sujeitam-se não só aos lucros, como tambem aos prejuizos que possa haver. Ordinariamente os lucros ou prejuizos são divididos entre os socios conforme as clausulas do contracto social, mas, em geral, são repartidos:

- a) **proporcionalmente aos capitaes com que os socios entraram, quando os tempos são iguaes.**
- b) **proporcionalmente ao tempo, quando as entradas são iguaes.**

A regra de companhia ensina a repartir pelos socios os lucros ou as perdas que houver. Esta regra chama-se **simples**, quando as entradas de todos os socios ou os tempos, em que giram os capitaes, são iguaes, ou, mais geralmente, quando a operação depende sómente de um factor, e denomina-se **composta**,

quando nem os capitaes nem os tempos são iguaes, ou, geralmente, quando a operação depende de mais factores. São variadissimos os problemas que se referem a esta regra, mas do exposto se vê que todos se baseiam sobre a:

I. **Divisão de um numero em partes proporcionaes a dous, ou mais numeros dados.**

Seja, por exemplo, 56 a dividir em duas partes, proporcionaes a 3 e a 4, isto é, devemos procurar dous numeros taes que um se componha de 3 partes e o outro de 4, todas iguaes entre si e tendo para somma 56. Dividiremos por conseguinte 56 por $3+4=7$, que dará uma d'estas partes, a saber 8, e, como a primeira porção pedida deve ter 3, e a segunda 4 d'estas partes, ellas serão respectivamente:

$$8 \times 3 = \underline{24}$$

$$\text{e } 8 \times 4 = \underline{32}. \quad \text{Outro}$$

Exemplo: Dividir o numero 345 em partes proporcionaes a 3, 5 e 7.

Repartindo $3+5+7=15$ em tres partes proporcionaes a 3, 5 e 7, será 3 a primeira parte, 5 a segunda e 7 a terceira; mas, estando 15 contido 23 vezes em 345, será:

a	1 ^a parte	=	$3 \times 23 =$	<u>69</u>
"	2 ^a "	=	$5 \times 23 =$	<u>115</u>
"	3 ^a "	=	$7 \times 23 =$	<u>161</u>

Prova: Somma = 345.

Exercicios:

- 1) [2] A. e B. querem dividir 100 \$000 de modo que A. receba 20 \$000 [17 \$000] mais do que B.; quanto toca a cada um?

Tiram-se primeiramente 20 de 100 e divide-se o resto em 2 partes iguaes.

- 3) [4] Por 2 objectos pagaram-se 53\$200 [86\$500]. Lembrando-se que um custou 9\$600 [27\$900] mais do que o outro, quer-se saber o preço de cada um.
- 5) [6] A. e B. devem repartir entre si a quantia de 137\$700 [209\$300] e sabe-se que a parte de A. é de 28\$500 [46\$300] maior que a parte de B. Quanto recebe cada um?
- 7) [8] Dividir o numero 792 [3240] em 3 partes proporcionaes aos numeros 7, 11 e 15 [14, 23, 35].
- 9) [10] Dividir 1105 [1356] em 4 partes proporcionaes a 3, 5, 9 e 17 [4, 8, 14 e 22].
- 11) [12] Dividir o numero 243 [735] em 3 partes proporcionaes a $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{6}$ [$\frac{2}{5}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{20}$].
Reduzem-se as fracções ao mesmo denominador e depois divide-se o numero dado em partes proporcionaes aos numeradores.
- 13) [14] Tres trabalhadores A. B. e C. receberem por uma obra, feita em commum, 270\$000 [393\$600]. A trabalhou 17 [21] dias, B. 18 [26] dias e C. 25 [35] dias. Quanto recebeu cada um, ganhando todos a mesma diaria?
- 15) [16] Num „pic-nic“ tomaram parte 74 pessoas; houve 10 [5] homens mais do que mulheres e 5 [3] crianças menos do que mulheres. Quantos homens, mulheres e crianças fizeram o „pic-nic“?
Em primeiro lugar tiram-se os 15 homens e as 5 mulheres que ha mais do que crianças e divide-se o resto em 3 partes iguaes.
- 17) [18] O dono de uma officina quer repartir pelos seus officiaes uma gratificação de 1:200\$000 [1:800\$000]. Na officina de machinas estão occupados 28 [18] homens; na fundição 19 [25] e na repartição dos caldeireiros 33 [32] homens. Que quantia cabe a cada uma das 3 secções?
- 19) [20] Dividir 840\$000 [2:784\$600] entre duas pessoas de modo que a primeira receba duas vezes mais que a segunda.
- 21) [22] Repartir 165\$000 [312\$000] de maneira que a primeira parte seja os $\frac{2}{3}$ [$\frac{5}{8}$] da segunda parte.
Sendo a segunda parte igual a $1 = \frac{6}{6}$, a primeira será $\frac{4}{6}$ e prenumeradores 5 e 6 das duas fracções.
- 23) [24] Dividir 1:176\$000 [1:417\$000] entre 4 pessoas de modo que A. receba tantas vezes 4\$000 [3\$000] quantas

- B. receber 6\$000 [5\$000], C. 8\$000 [7\$000] e D. 10\$000 [11\$000].
- 25) [26] Repartir 594\$000 [1:716\$000] entre 4 pessoas A., B., C., D., de maneira que a parte de B. seja o dobro da de A., a parte de C. seja o triplo da de B. e a parte de D. seja o quadruplo da de C. Quanto receberá cada uma?
Recebendo A. uma parte, B. receberá duas, $C. 3 \times 2 = 6$ e D. receberá $4 \times 6 = 24$, isto é, divide-se a quantia dada proporcionalmente a 1, 2, 6 e 24.
- 27) [28] Dividir 945\$000 [1:020\$500] entre 3 pessoas A. B. e C. de modo que B. receba duas [3] vezes mais do que A. e C. duas [3] vezes mais do que B. Quanto recebe cada uma?
- 29) [30] Dividir 850\$000 [1:568\$000] entre 3 pessoas A. B. e C. de maneira que B. receba $\frac{1}{2}$ [$\frac{1}{5}$] da parte de A. e C. $\frac{1}{3}$ [$\frac{1}{8}$] da parte de B.
Recebendo A. uma parte = $1 = \frac{6}{6}$, B. receberá $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ e C. $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ e divide-se a quantia dada proporcionalmente aos numeradores 6, 3 e 1.
- 31) [32] Repartir 1:272\$000 [1:445\$000] entre A., B., C. e D. de modo que B. receba $1\frac{1}{2}$ [$1\frac{1}{2}$] vezes mais do que A; C. $\frac{2}{3}$ [$\frac{7}{11}$] da parte de B e D. $1\frac{1}{4}$ [$1\frac{1}{2}$] vezes mais do que C.
- 33) [34] Dividir 765\$000 [1:364\$000] entre A., B., C. e D. de maneira que, A. receba $3\frac{1}{2}$ [$2\frac{3}{4}$]; B. 4 [$4\frac{1}{4}$]; C. $4\frac{1}{2}$ [$6\frac{1}{2}$]; e D. 5 [$8\frac{1}{2}$]. Quanto recebeu cada um?
- 35) [36] Repartir 2:000\$000 [1:600\$000] de modo que A. receba 25% [35%] mais 50\$000 [20\$000]; B. 30% [25 $\frac{1}{4}$ %] mais 100\$000 [56\$000] e C. o resto. Quanto toca a cada um? Quanto % da importancia cabe a cada um?
- 37) [38] Quatro pessoas devem dividir uma certa somma de maneira que:
A. receba $\frac{1}{3}$ + 95\$000 [$\frac{1}{5}$ + 36\$400]
B. „ $\frac{1}{4}$ + 75\$000 [$\frac{1}{4}$ + 78\$500]
C. „ $\frac{1}{8}$ + 140\$000 [$\frac{1}{8}$ + 85\$000]
D. „ $\frac{1}{12}$ + 150\$000 [$\frac{2}{10}$ + 57\$600]
- a) Achar aquella somma. b) Quanto recebe cada um?
Sendo $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} = \frac{11}{24}$, vê-se que, para a somma inteira, ainda faltam $\frac{13}{24}$; estes são formados pela somma: $95$000 + 75$000 + 140$000 + 150$000 = 460$000. Sabendo-se agora que $\frac{11}{24} = 160$000$, deduz-se facilmente o valor de $\frac{13}{24}$, depois o de $\frac{21}{24}$ etc. etc.$

II. Regra de sociedade simples.

O conhecimento da divisão de um numero em partes proporcionaes a outros numeros, habilita-nos a achar a solução de todos os problemas de companhia. Vamos dar alguns exemplos propriamente denominados de companhia e mostrar o methodo mais usado no commercio, methodo que aliás em nada differe da divisão de um numero em partes proporcionaes a outros numeros dados.

Exemplo: Tres pessoas A. B. e C. formaram uma sociedade, entrando a primeira A. com 26:400\$000, a segunda B. com 18:300\$000 e a terceira C. com 34:500\$000. Tiveram um lucro de 11:880\$000.
a) Como dividiram esta quantia? b) Quanto % ganhou cada um?

1ª Solução: As entradas de todos foram:
26:400\$000 + 18:300\$000 + 34:500\$000
= **79:200\$000.**

Cada socio recebeu do lucro a parte proporcional á sua entrada; por conseguinte:

A. recebeu: $\frac{1}{n} \times$	} A. entrou com 26400 79200 = $\frac{1}{3}$ da quantia total
11:880\$000 = 3:960\$000	
B. recebeu: $\frac{61}{264} \times$	
11:880\$000 = 2:745\$000	B. entrou com 18300 79200 = $\frac{61}{264}$
C. recebeu: $\frac{115}{264} \times$	C. entrou com 34500 79200 = $\frac{115}{264}$
11:880\$000 = 5:175\$000	
Prova: 11:880\$000.	

2ª Solução: As entradas de todos foram: **79:200\$000.**
79:200\$000 deram um lucro de 11:880\$000
1\$000 deu " " " $\frac{11880}{79200} = \frac{3}{20}$

por conseguinte:

A. ganhou: 26400 $\times \frac{3}{20} =$ 3:960\$000	}
B. " 18300 $\times \frac{3}{20} =$ 2:745\$000	
C. " 34500 $\times \frac{3}{20} =$ 5:175\$000	
Prova: 11:880\$000.	

b) Com 100\$000 ganharam-se $100 \times \frac{3}{20} = 15$; logo o capital de cada socio rendeu 15%.

2º Exemplo: Tres socios A. B. e C. entraram num negocio com capitaes iguaes e estiveram: o primeiro 3 annos e 6 mezes, o segundo 2 annos e 4 mezes e o terceiro 1 anno e 10 mezes. Perderam 4:600\$000. Qual foi o prejuizo de cada um dos socios?

Em primeiro lugar reduzem-se os tempos a mezes

A. teve seu capital empregado: 3 annos e 6 mezes = 42 mezes	
B. " " " " 2 " " 4 " = 28 "	
C. " " " " 1 " " 10 " = 22 "	
	92 "

1ª Solução: Repartimos o prejuizo de 4:600\$000 entre A. B. e C. proporcionalmente ao numero de mezes: 42, 28 e 22; logo:

A. perderá	$\frac{100}{4600} \times \frac{42}{92} =$ 2:100\$000
B. " "	$\frac{100}{4600} \times \frac{28}{92} =$ 1:400\$000
C. " "	$\frac{100}{4600} \times \frac{22}{92} =$ 1:100\$000
	Prova: 4:600\$000.

2ª Solução: Procuramos o prejuizo em 1 mez:
 Em 92 mezes perderam-se 4:600 \$ 000
 " 1 " " " $\frac{4600000}{92} = 50 \$ 000.$
 por conseguinte:

- | | | |
|------------|-----------|---------------------|
| A. perderá | 50 × 42 = | 2:100 \$ 000 |
| B. " " | 50 × 28 = | 1:400 \$ 000 |
| C. " " | 50 × 22 = | 1:100 \$ 000 |

Exercicios:

a) Repartir entre os socios o lucro ou prejuizo verificado.
 b) Achar quanto % ganhou-se ou perdeu-se nos seguintes problemas:

- 39) A. entrou com 250 \$ 000
 B. " " 300 \$ 000
 C. " " 380 \$ 000
 D. " " 470 \$ 000
 Lucro: 210 \$ 000

- 41) A. entrou com 720 \$ 000
 B. " " 475 \$ 000
 C. " " 825 \$ 000
 D. " " 680 \$ 000
 Lucro: 162 \$ 000

- 43) A. entrou com 20:000 \$ 000
 B. " " 18:000 \$ 000
 C. " " 15:000 \$ 000
 D. " " 25:000 \$ 000
 Lucro: 10:000 \$ 000

- 45) A. entrou com 200 \$ 000
 B. " " 300 \$ 000
 C. " " 400 \$ 000
 D. " " 600 \$ 000
 Prejuizo: 52 \$ 500

- 40) A. entrou com 325 \$ 000
 B. " " 850 \$ 000
 C. " " 565 \$ 000
 D. " " 760 \$ 000
 Lucro: 300 \$ 000

- 42) A. entrou com 1:260 \$ 000
 B. " " 1:080 \$ 000
 C. " " 2:040 \$ 000
 D. " " 1:420 \$ 000
 Lucro: 290 \$ 000

- 44) A. entrou com 16:650 \$ 000
 B. " " 13:300 \$ 000
 C. " " 15:400 \$ 000
 D. " " 12:250 \$ 000
 Lucro: 2:160 \$ 000

- 46) A. entrou com 660 \$ 000
 B. " " 520 \$ 000
 C. " " 740 \$ 000
 D. " " 480 \$ 000
 Prejuizo: 100 \$ 800

- 47) A. entrou com 16:500 \$ 000
 B. " " 28:800 \$ 000
 C. " " 32:500 \$ 000
 D. " " 22:200 \$ 000
 Prejuizo: 12:500 \$ 000

- 49) A. entrou com 875 \$ 000
 B. " " 1:375 \$ 000
 C. " " 1:125 \$ 000
 D. " " 1:625 \$ 000
 Prejuizo: 750 \$ 000

- 48) A. entrou com 1:800 \$ 000
 B. " " 1:260 \$ 000
 C. " " 2:340 \$ 000
 D. " " 2:160 \$ 000
 Prejuizo: 945 \$ 000

- 50) A. entrou com 2:275 \$ 000
 B. " " 3:150 \$ 000
 C. " " 1:485 \$ 000
 D. " " 4:250 \$ 000
 Prejuizo: 1:440 \$ 000

Repartir o lucro ou prejuizo dado entre os socios, sabendo-se que entraram com quantias iguaes, a saber:

- 51) A. durante 4 annos
 B. " " 3 " "
 C. " " 2 " "
 D. " " 1 " "

Lucro: 650 \$ 000

- 52) A. durante 1 anno 2 mez.
 B. " " 10 " "
 C. " " 4 " "
 D. " " 6 " "

Prejuizo: 290 \$ 000

- 53) A. durante 6 annos
 B. " " 5 " " 6 mez.
 C. " " 4 " " 8 " "
 D. " " 2 " " 9 " "

Lucro: 1:816 \$ 000

- 54) A. durante 3 annos 5 mez.
 B. " " 2 " " 7 " "
 C. " " 1 anno 9 " "
 D. " " 2 annos 3 " "

Prejuizo: 870 \$ 000

- 55) [56] Uma pessoa deixou sua fortuna a 3 individuos: A. deve receber 18:000 \$ 000 [20:000 \$ 000], B. 33:000 \$ 000 [38:000 \$ 000] e C. 45:000 \$ 000 [26:000 \$ 000]; mas verificou-se que o testamenteiro deixou de pagar uma divida de 7:200 \$ 000 [5:250 \$ 000]. Qual a redução que soffrerá cada herdeiro e quanto receberá cada um?
 Dividem-se 7:200 \$ 000 proporcionalmente a 18, 33 e 45.

No fim de dous annos verificou-se um lucro de 11:250\$000 que se deve dividir pelos 3 socios.

Em primeiro lugar veremos o tempo durante o qual cada socio teve seu capital empregado:

A empregou 14:500\$000 durante 2 annos ou 24 mezes
 B " 18:000\$000 " 14 "
 C " 25:000\$000 " 6 "

Sabe-se que o lucro de:

14:500\$000 em 24 mezes corresp. ao
 de 14:500\$000 \times 24 = 348:000\$000 em 1 mez.
 18:000\$000 em 14 mezes corresp. ao
 de 18:000\$000 \times 14 = 252:000\$000 em 1 mez.
 25:000\$000 em 6 mezes corresp. ao
 de 25:000\$000 \times 6 = 150:000\$000 em 1 mez.

Os 3 capitaes produzem o mesmo resultado que 750:000\$000 em 1 mez.

Assim a operação é semelhante á de sociedade simples, a saber:

750:000\$000 produzindo 11:250\$000 de lucro

1\$000 producirá $\frac{11250}{750000} = \frac{3}{200}$ e

A. receberá 348000 $\times \frac{3}{200} = 5:220$000$

B. " 252000 $\times \frac{3}{200} = 3:780$000$

C. " 150000 $\times \frac{3}{200} = 2:250$000$

Prova: 11:250\$000.

Outro

Exemplo: Tres empreiteiros A., B., C. fizeram uma obra pela qual receberam 7:930\$000. A. forneceu 28 operarios, durante 20 dias, trabalhando 10 horas

por dia; B. 20 operarios, durante 15 dias, trabalhando 12 horas por dia, e C. 15 operarios, durante 25 dias, trabalhando 8 horas por dia. Quanto recebeu cada um dos 3 empreiteiros?

Para fazer em 1 dia, trabalhando 10 horas, o mesmo trabalho que fazem 28 homens em 20 dias, precisa-se de $28 \times 20 = 560$ operarios e para acabar a mesma obra em 1 hora, precisa-se de $28 \times 20 \times 10 = 5600$ homens. Da mesma maneira, 20 operarios, trabalhando 12 horas por dia, farão em 15 dias tanto trabalho quanto $20 \times 15 \times 12 = 3600$ homens em 1 hora, e finalmente 15 operarios, trabalhando 8 horas por dia, farão em 25 dias tanto trabalho quanto $15 \times 25 \times 8 = 3000$ homens em 1 hora: logo:

28	oper. trabal.	20 dias a 10 hor.	=	5600	oper. trabal.	1 hora.
20	"	"	"	"	"	"
15	"	"	"	"	"	"
15	"	15 " " 12 " "	=	3600	"	"
15	"	" " 25 " " 8 " "	=	3000	"	"
				Somma:	12200	"

Ora:

se 12200 operarios ganham 7:930\$000
 1 " ganhará $\frac{7930000}{12200} = 650$ reis.

por conseguinte:

A. ganhará $5600 \times 650 = 3:640$000.$
 B. " $3600 \times 650 = 2:340$000.$
 C. " $3000 \times 650 = 1:950$000.$

Prova: 7:930\$000.

Exercicios:

- N. emprestou á mesma taxa 4 quantias, a saber:
- 73) I) 570\$000 por 6 mezes
 II) 840\$000 " 5 "
 III) 1:250\$000 " 8 "
 IV) 710\$000 " 10 "
 A somma de todos os juros era de 103\$000. a) Quanto rende cada uma das quantias?
 b) Quanto %?
- 74) I) 450\$000 por $\frac{2}{3}$ do an.
 II) 700\$000 " $\frac{1}{2}$ " "
 III) 850\$000 " $\frac{3}{4}$ " "
 IV) 1:150\$000 " $\frac{1}{4}$ " "
 A somma de todos os juros era de 126\$000. a) Quanto rende cada um dos capitaes?
 b) Quanto %?

Responder ás mesmas perguntas, sabendo-se que N. tinha emprestado á mesma taxa as seguintes quantias:

- 75) I) 1:260 \$ 000 por 1 anno $\frac{1}{4}$
 II) 1:570 \$ 000 „ $\frac{3}{4}$ do anno.
 III) 1:840 \$ 000 „ 1 anno $\frac{2}{3}$
 IV) 2:410 \$ 000 „ 7 mezes.

Somma dos juros: 578 \$ 000.

- 76) I) 1:350 \$ 000 por 4 mezes
 II) 1:500 \$ 000 „ 7 „
 III) 1:875 \$ 000 „ 8 „
 IV) 2:820 \$ 000 „ 5 „

Somma dos juros: 225 \$ 000.

- 77) I) 2:800 \$ 000 por $\frac{1}{2}$ do anno
 II) 1:750 \$ 000 „ $\frac{2}{3}$ „ „
 III) 2:450 \$ 000 „ $\frac{5}{6}$ „ „
 IV) 1:925 \$ 000 „ 4 mezes.

Somma dos juros: 525 \$ 000.

- 78) I) 1:560 \$ 000 por 1 anno $\frac{2}{3}$
 II) 1:640 \$ 000 „ 2 „ $\frac{1}{12}$
 III) 1:480 \$ 000 „ $\frac{3}{4}$ do anno
 IV) 1:250 \$ 000 „ 2 annos.

Somma dos juros 702 \$ 000.

79) [80] Quatro empreiteiros A. B. C. e D. concertam diversos saveiros pelo preço de 6:840 \$ 000 [7:650 \$ 000]:

	8 officiaes por 10 dias.	14 officiaes por 15 dias.]
A. fornece	8	14
B. „	12	18
C. „	15	20
D. „	10	16
Quanto recebe cada empreiteiro?	15	16

81) [82] A. e B. formaram uma sociedade por 6 annos. A. entrou com 35:000 \$ 000 [60:000 \$ 000] e B. no principio com 25:000 \$ 000 [50:000 \$ 000] e 3 annos depois com mais 15:000 \$ 000 [30:000 \$ 000]. Repartir entre os socios o lucro de 48:600 \$ 000 [82:500 \$ 000].

83) [84] A. e B. fizeram uma sociedade que durou 2 [$\frac{2}{3}$] annos; A. entrou com 40:000 \$ 000 [56:000 \$ 000] e 8 [10] mezes depois com mais 15:000 \$ 000 [24:000 \$ 000]; B. entrou com 75:000 \$ 000 [68:000 \$ 000] mas 10 [12] mezes depois, retirou 10:000 \$ 000 [18:000 \$ 000]. Ganharam 21:450 \$ 000 [19:380 \$ 000]. Qual foi o lucro de cada um?

§ 30.

Desconto.

No commercio é costume fazer-se um abatimento, denominado **desconto**, sobre a importancia total de uma conta. Isto acontece, geralmente, quando se paga á vista, ou quando se fazem grandes compras. Neste ultimo caso, nem sempre o pagamento é feito a dinheiro á vista, sendo então uso dar o comprador ao vendedor um documento, denominado **letra**, pagavel em dia determinado. Esta letra representa uma importancia a receber num dia fixado, e póde ser transferida, isto é, passar de um possuidor para outro. E' claro que, se o pagamento da letra tiver de realizar-se antes do seu vencimento, a somma a pagar não será a que nella se acha escripta, mas a que re-

presenta no dia em que se quer pagar, depois de deduzido o desconto a fazer, correspondente ao tempo que falta para o seu vencimento. Vê-se, pois, que uma letra tem dous valores: o **nominal** que nella se acha escripto e que será pago no dia de vencimento, e o **actual**, que ella tem no momento em que é descontada. O valor actual, por conseguinte, varia com o tempo, approximando-se tanto mais do valor nominal, quanto menos tempo falta para o dia de vencimento. Do exposto conclue-se que o desconto será igual aos juros da importancia da letra, a uma taxa convencionada, durante o tempo que falta para o seu vencimento. Para calcular esses juros toma-se o valor nominal ou o valor actual para base e d'ahi provêm dous modos de descontar uma letra: o **desconto por fóra** denominado tambem **desconto commercial** que é o juro do valor nominal, e o **desconto por dentro** ou **desconto racional** que é o juro do valor actual da letra. Sendo o valor nominal sempre maior do que o actual, o desconto por fóra tambem será maior do que o desconto por dentro. Das duas especies de desconto o commercial é preferido as racional, apesar de não ser inteiramente exacto, porque se considera o valor nominal da letra como a quantia emprestada, o que não é equitativo. Quando, entretanto, falta pouco tempo para o vencimento da letra, a differença entre os dous descontos é insignificante.

Supponhamos agora que queremos pagar uma letra de 100\$000 a vencer-se em um anno e que o possuidor da letra desconte 6% por fóra. Segundo o que ficou dito, temos que procurar os juros do valor

nominal da letra, isto é, de 100\$000 em um anno e fital-os d'esta quantia. Sendo esses juros 6\$000, vemos que no:

desconto a 6% por fóra:
 94\$000, valor actual, equivalem a 100\$000 depois de um anno.

No desconto por dentro calcula-se, como já se viu, o valor exacto actual que equivale a uma somma pagavel mais tarde. Agora já sabemos que 100\$000 emprestados a 6% elevam-se com os juros até o fim do anno a 106\$000 ou no:

desconto a 6% por dentro:
 100\$000, valor actual, equivalem a 106\$000 depois de um anno.

Os problemas de desconto não são, pois, senão calculos de juros.

I. Desconto por fóra (commercial).

Sendo o **desconto por fóra** os juros do valor nominal, procuram-se estes juros e tiram-se d'aquelle valor. Esta differença nos dará então o valor actual.

Exemplo: Qual é o valor actual de uma letra de 3:840\$000 a que ainda faltam 2 mezes e 12 dias para o vencimento, sendo o desconto 8³/₄% ao anno? Em

Em	100\$000 cap.	o desconto em	12 ³ / ₄ mezes	é	8 ³ / ₄ %	x
" 3:840\$000	" " "	" " "	2 ² / ₅ " "	" "	" "	x
x =	$\frac{8\frac{3}{4} \times 3840 \times 2\frac{2}{5}}{100 \times 12}$	=	$\frac{35 \times 3840 \times 12}{4 \times 100 \times 12 \times 5}$	=	67\$200.	
Valor actual	= 3:840\$000 - 67\$200 =		3:772\$800.**)			

^{*)} Em vez de reduzir os 2 mezes e 12 dias a mezes, podem ser transformados em 72 dias, mas neste caso o seu termo homogeneo na primeira linha não será 12 mezes, mas sim 360 dias.
^{**)} O valor actual tambem se pode calcular directamente, lembrando-se do que acima foi dito a respeito do desconto commercial:

Exercícios :

- 1) [2] Um individuo deve a outro uma factura de 346 \$ 000 [768 \$ 000]. Pagando-se a dinheiro à vista, fez-se um abatimento de 4 [5]%. a) Em quanto importa o abatimento? b) Quanto pagou?
- 3) [4] Pagando-se a importancia de uma factura de 576 \$ 000 [1:248 \$ 000], descontam-se 3½% [4½]. Qual é o desconto e quanto se pagou?
- 5) [6] S. & Comp^a. venderam 20000 [36000] saccos de aniamem para café a 920 reis o sacco, fazendo-se 3¼% [2¾] de desconto. Qual foi o abatimento e quanto receberam?
- 7) [8] Uma letra no valor de 2:860 \$ 000 [3:640 \$ 000] é descontada 6 mezes ⅔ [4] antes do dia de vencimento á razão de 9% [7½] ao anno. A quanto monta o desconto e quanto se paga?
- 9) [10] Para pagar uma factura na importancia de 975 \$ 000 [1:350 \$ 000] foi concedido um prazo de 3 [4] mezes ou um desconto de 8 [9]%. Quanto se deve pagar a) agora b) depois de um mez c) depois de dous mezes?
- 11) [12] Uma divida de 2:450 \$ 000 [3:580 \$ 000] paga-se 48 [36] dias antes do seu vencimento. Que redução vai-se fazer, combinando-se um desconto de 12% [10%]?
- 13) [14] N. deve pagar uma letra de 1:276 \$ 000 [2:128 \$ 000] no dia 1º de Agosto. Quanto pagará a) no dia 1º de Maio, b) em 1º de Junho e c) em 1º de Julho, descontando ½% [¾%] ao mez?
- 15) [16] Uma letra de 2:400 \$ 000 [3:500 \$ 000] pagavel a 20 de Junho [16 de Outubro] desconta-se a 14 de Abril [4 de Agosto]. Quanto se paga ao portador, sendo o desconto 9% [8½] ao anno?

Procuraremos primeiramente os juros de 100 \$ 000 a 8½% durante 2 mezes e 12 dias (2 mezes ⅔) que serão: $\frac{83\frac{1}{4} \times 22\frac{2}{5}}{12} = \frac{35 \times 12}{4 \times 12 \times 5} = 1\frac{1}{4}$.

Estes juros devem ser descontados de 100 \$ 000, o que dará 98¾ valor actual de 100 \$ 000 d'aqui a 2 mezes ⅔; por consequente: 100 \$ 000, valor nom. corresp. a 98¾, valor actual

$$x = \frac{98\frac{3}{4} \times 3840}{100} = \frac{393 \times 3840}{1 \times 100} = 3:772 \text{ \$ } 800.$$

- 17) [18] Um commerciante vendeu a N. fazendas, na importancia de 12:000 \$ 000 [13:500 \$ 000] pagavel nas seguintes condições: 3:000 \$ 000 [5:000 \$ 000] dinheiro à vista, 4:000 \$ 000 [5:000 \$ 000] depois de 4 [6] mezes e o resto 3 mezes depois d'este ultimo pagamento. No fim de dous [3] mezes, N. propõe pagar a divida com um desconto de 12% [9%] que o commerciante aceitou. Quanto paga?
- 19) [20] A que taxa foi descontada uma letra de 830 \$ 000 [1:264 \$ 000], pagando-se 755 \$ 300 [1:106 \$ 000] um anno antes do vencimento?
- 21) [22] A que taxa foi descontada uma letra de 2:250 \$ 000 [3:540 \$ 000], pagando-se 2:160 \$ 000 [3:481 \$ 000] tres [2] mezes antes do vencimento?
- 23) [24] A que taxa descontaram-se 5:760 \$ 000 [7:360 \$ 000] recebendo 5:630 \$ 000 [7:235 \$ 000] 54 [81] dias antes do vencimento?
- 25) [26] Quantos dias antes do vencimento se deve pagar uma factura de 10:000 \$ 000 [9:600 \$ 000] para se obter um desconto de 250 \$ 000 [120 \$ 000] sendo esse desconto 12% [10%]?

II. Desconto por dentro (racional.)

Quando é longo o tempo entre o dia do pagamento e o do vencimento, não se deve calcular o valor actual por meio do desconto por fóra, mas sim por meio do desconto por dentro, por ser o unico exacto.

Exemplo: De accordo com uma clausula de um testamento, A. é obrigado a pagar a B. depois de 3 annos e 6 mezes, a quantia de 4:750 \$ 000. Precisando este de dinheiro, propõe a A. descontar

aquella somma com um abatimento de $7\frac{1}{2}\%$ ao anno, o que é acceito. Quanto tem que receber?

$$\left\{ \begin{array}{l} 100\$000 \text{ rendem a } 7\frac{1}{2}\% \text{ em 3 annos } \frac{1}{2} = 7\frac{1}{2} \times 3\frac{1}{2} = \frac{15}{2} \times \frac{7}{2} = 3\frac{3}{4} \times 7 \\ = 26\frac{1}{4} \text{ de juros; logo o valor futuro de } 100\$000 \text{ será } 126\frac{1}{4}. \end{array} \right.$$

$$126\frac{1}{4} \text{ valor futuro} = 100\$000, \text{ valor actual } (*)$$

$$4:750\$000 \quad " \quad " \quad = \quad X \quad " \quad "$$

$$X = \frac{100 \times 4750}{126\frac{1}{4}} = \frac{100 \times 4750 \times \frac{950}{505}}{101} = \underline{\underline{3:762\$380. (**)}}$$

Prova: $3:762\$380$ rendem a $7\frac{1}{2}\%$ em 3 annos $\frac{1}{2}$: $7\frac{1}{2} \times 3762,38 \times 3\frac{1}{2} =$

$$\frac{3}{15} \times \frac{1881,19}{3762,38} \times 7 = \frac{2 \times 100 \times 2}{20} = 987\$620 \text{ de juros, que, somados ao valor actual } 3:762\$380,$$

devem dar o valor nominal: $4:750\$000$.

Exercicios:

27) [28] Que quantia emprestada a 8% [9%] se eleva com os juros, depois de 2 annos $\frac{1}{2}$ [$3\frac{3}{4}$] a $1:050\$000$ [$1:712\$000$]?

29) [30] Qual foi o capital que, com os juros de 6% [$7\frac{1}{2}\%$] em 1 anno $\frac{1}{3}$ [$2\frac{1}{6}$] produzin $2:656\$800$ [$2:176\$200$]?

Achar o valor actual de:

- 31) $900\$000$ pagavel em 1 anno com 12% de desconto.
- 32) $1:350\$000$ " " 1 " " $8\frac{1}{3}\%$ " "
- 33) $840\$000$ " " 2 annos com 10% de desconto.
- 34) $1:200\$000$ " " 3 " " 6% " "
- 35) $1:029\$000$ " " 2 " $\frac{1}{2}$ " 9% " "
- 36) $1:260\$000$ " " 1 " $\frac{3}{4}$ " 8% " "
- 37) $1:500\$000$ " " 3 " $\frac{1}{2}$ " 12% " "

* O alumno notará que **desconto por dentro** é o mesmo que calcular o capital quando se conhece a somma d'elle e dos juros (vêde pagina 123.)

** Se calculassemos o desconto por fóra, achariamos:

$$\frac{7\frac{1}{2} \times 4750 \times 3\frac{1}{2}}{100} = \frac{15 \times 4750 \times 7}{2 \times 100 \times 2} = 1:246\$880$$

e o Valor actual seria: $4:750\$000 - 1:246\$880 = 3:503\$120$. A differença entre os 2 valores actuaes é, pois: $3:762\$380 - 3:503\$120 = 259\$260$, differença esta que mostra quanto convem aos banqueiros descontar por fóra.

38) $2:400\$000$ pagavel em 2 annos $\frac{2}{3}$ com $7\frac{1}{2}\%$ de desconto.

39) $4:860\$000$ " " 3 " $\frac{3}{4}$ " $9\frac{1}{2}\%$ " "

40) $3:850\$000$ " " 4 " $\frac{4}{5}$ " $11\frac{1}{4}\%$ " "

41) $6:275\$000$ " " 5 " $\frac{1}{2}$ " $12\frac{1}{2}\%$ " "

42) $4:770\$000$ " " 4 " $\frac{1}{5}$ " $9\frac{3}{4}\%$ " "

43) [44] Quanto vale hoje uma letra de $5:850\$000$ [$8:470\$000$] pagavel em um anno e 10 mezes [3 annos e 4 mezes] deduzindo $10\frac{1}{2}\%$ [$6\frac{3}{4}\%$]?

45) [46] Que quantia é preciso collocar a juros de 6% [8%] no dia 1º de Janeiro de 1901 para ter, com os juros simples, em 1º de Janeiro de 1911 [1º de Abril de 1906] a importancia de $10:000\$000$?

47) [48] Achar o valor actual de uma letra de $2:680\$000$ [$4:675\$000$] pagavel em 288 [315] dias e descontada por dentro a 9% [$7\frac{1}{2}\%$].

Seudo os juros de $100\$000$ em 360 dias = $9\$000$, estes serão em

$$288 \text{ dias} = \frac{9 \times \frac{72}{360}}{\frac{10}{10}} = 7\frac{1}{2} \text{ etc. etc.}$$

49) [50] Calcular uma tabella dos valores actuaes de $100\$000$ pagaveis em 1, 2, 3, 4 . . . até 10 annos, sendo o desconto por dentro á razão de 5% [6%].

51) [52] Calcular uma tabella dos valores actuaes de $1\$000$ pagaveis em 6, 7, 8, 9 . . . até 15 annos, sendo o desconto por dentro á razão de 5% [6%].*

* Por meio d'essas tabellas acha-se facilmente o valor actual de qualquer importancia com o desconto e tempo respectivos, multiplicando-se a dita importancia pelo factor correspondente da tabella. por exemplo:

	$100 \times 1 = 0,952$
O valor actual de $1\$000$ a 5% em 1 anno será	$\frac{100}{105} \times 1 = 0,909$
" " " " " " 2 annos "	$\frac{100}{110} \times 1 = 0,909$
" " " " " " 3 " "	$\frac{100}{115} \times 1 = 0,870$
" " " " " " 4 " "	$\frac{100}{120} \times 1 = 0,833 \text{ etc.}$

Tendo agora de achar o valor actual de $2:350\$000$ a 5% em 2 annos, por exemplo, multiplicaremos simplesmente 2350 pelo factor respectivo $0,909$ da tabella, que dará: $2:136\$150$.

53) [54] Achar o valor nominal de uma letra, sabendo-se que foi descontada por dentro com 12% [10%] ao anno, faltando 1 anno $\frac{1}{4}$ [9 mezes] para o seu vencimento e que o portador recebeu 2:086 \$ 960 [4:241 \$ 860].

$$\begin{array}{r} A \quad 100 \$ 000 \text{ valor act. corresp. } 115 \$ 000, \text{ valor nom.} \\ \frac{100}{2:086,960} = \frac{115}{x} \end{array}$$

55) [56] Uma letra de 1:260 \$ 000 [2:058 \$ 000] foi descontada por dentro, pagando-se 900 \$ 000 [1:680 \$ 000] 2 annos $\frac{2}{3}$ [2 annos $\frac{1}{2}$] antes do seu vencimento. Qual foi a taxa de desconto?

$$\begin{array}{r} A \quad 900 \$ 000 \text{ val. act. corresp. } 1:260 \$ 000 \text{ val. nom.} \\ \frac{900}{100} = \frac{1260}{x} \end{array}$$

$$x = \frac{1260 \times 100}{900} = 140.$$

Correspondendo 40 \$ 000 de desconto a 2 annos $\frac{2}{3}$, acharemos o de um

$$\text{anno} = \frac{40}{2\frac{2}{3}} = \frac{40}{\frac{8}{3}} \times 3 = 15\%.$$

57) [58] A que taxa descontou-se por dentro uma letra de 4:280 \$ 000 [5:640 \$ 000], recebendo 3:642 \$ 550 [4:126 \$ 830] 1 anno $\frac{3}{4}$ [3 an. $\frac{1}{3}$] antes do vencimento.

59) [60] Uma letra de 2:430 \$ 000 [3:175 \$ 000] foi descontada por dentro a 9 $\frac{1}{3}$ % [11 $\frac{1}{4}$ %] e soffreu o desconto de 630 \$ 000 [675 \$ 000]. Quanto tempo faltava para o seu vencimento?

$$\frac{(2:430 \$ - 630 \$) 1:800}{100} = \frac{630}{x}$$

61) [62] Achar o valor actual de 1:000 \$ 000 pagavel em 6 [9] mezes e deduzindo a) 6% de desconto racional e b) 6% de desconto commercial.

63) [64] Qual é o valor actual de 2:450 \$ 000 pagaveis em 2 annos $\frac{1}{2}$ [3 annos $\frac{1}{3}$] e descontados com 9% a) por dentro b) por fóra?

65) [66] Quer-se pagar agora a quantia de 5:600 \$ 000 a vencer em 45 [75] dias. Quanto se pagará, descontando-se 12% a) por dentro b) por fóra?

67) [68] Um individuo possui uma letra no valor de 5:400 \$ 000 [6:840 \$ 000] pagavel em 6 [8] mezes e quer liquidal-a; um banqueiro offerece pagar com 10% [11 $\frac{1}{4}$ %] de desconto por fóra, outro offerece comprar com 10 $\frac{1}{2}$ % [12%] de desconto por dentro. Qual das duas offertas é

mais vantajosa para o portador da letra e qual é a differença?

69) [70] Uma pessoa aluga um predio; o proprietario pede 2:250 \$ 000 [3:600 \$ 000] de aluguel, pagos adiantados, de uma só vez, ou 2:300 \$ 000 [3:650 \$ 000], pagos adiantados por semestres, ou ainda 2:340 \$ 000 [3:670 \$ 000], pagos adiantados por trimestres. Qual das 3 propostas é a mais vantajosa para o inquilino, tomando como taxa de desconto 6%?

71) [72] Um individuo quer comprar uma chacara; o proprietario pede 60:000 \$ 000 [75:000 \$ 000] pagaveis nas seguintes condições: 20:000 \$ 000 [25:000 \$ 000] a dinheiro á vista, 20:000 \$ 000 [25:000 \$ 000] depois de 4 [6] mezes e 20:000 \$ 000 [25:000 \$ 000] quatro [6] mezes depois d'este ultimo pagamento. O comprador offerece 58:000 \$ 000 [72:000 \$ 000] a dinheiro á vista. Pergunta-se em quanto fica o proprietario prejudicado, accetando esta proposta e calculando com 7% [8%] de desconto por dentro?

73) [74] A. compra um predio pelo preço de 40:000 \$ 000. Paga 20:000 \$ 000 á vista e obriga-se a pagar sem juros 10:000 \$ 000 depois de um anno e o resto depois de 2 annos. Seis mezes depois da compra propõe pagar os 20:000 \$ 000 com desconto de 10% [9%]. Quanto pagará, calculando o abatimento a) por dentro b) por fóra?

75) [76] Qual é a taxa do desconto a) por fóra, b) por dentro, sabendo-se que em vez de 5:600 \$ 000 [6:050 \$ 000] pagaveis depois de 1 anno $\frac{3}{4}$, já se pagaram 5:000 \$ 000 3 mezes depois do accete da letra?

Ao concluir este capitulo, achamos conveniente explicar o sentido de algumas expressões usuaes no commercio.

Peso bruto significa o peso da mercadoria encaixotada ou empacotada.

Peso liquido é o peso da mercadoria só, sem involucro.

Tara é o peso da embalagem ou do encaixotamento da mercadoria.

É evidente que: **O peso liquido será sempre igual ao peso bruto menos a tara.**

Corretagem é certa quantia ou certa porcentagem a pagar a quem serve de intermediário numa transacção commercial. No segundo caso, calcula-se sobre o preço da compra (venda) antes de deduzir o desconto, se houver.

Comissão é a porcentagem que recebe o commerciante, quando faz compras ou vendas por ordem de outrem. Calcula-se ordinariamente sobre o preço da compra ou venda. Negociantes ha, que calculam a comissão sobre o preço da compra (venda) augmentado das despesas feitas pelo commissario.

Bom peso é a quantidade que em certas mercadorias o comprador póde deduzir sem precisar pagal-a.

Exemplo: Um negociante, no Rio, comprou a outro, em Pernambuco, 100 fardos de algodão, pesando 8366 Kg. bruto, ao preço de 13\$500 por 15 Kg. liquidos, com um desconto de 2 1/2%. Tara 5%. O Kg. liquido foi classificado na Alfandega a 810 rs., e os direitos foram 7% sobre esta importancia, mais 10% additionaes. Pagou-se mais por fardo: 800 rs. pela braçagem, 1\$000 pela inspecção, 400 rs. de corretagem, 300 rs. de transporte e 3\$000 de frete. O algodão foi segurado na „Union Insurance Co. of Canton“ no valor de 400 £., pagando o premio de 1/6% ao cambio de 10 1/2 d., e mais 1 shilling pelo sello. Houve mais 16\$410 de despesas de reboque e gratificações.

Tirar a factura que o commissario remetteu

ao comprador, tendo ainda levado 3% de comissão sobre a importancia total.

Factura de 100 saccos de algodão, embarcados para o Rio de Jan. no vapor Itacolomy, por conta e ordem dos Srs. B. e C. Rio.

B. & C.	100 fardos de algodão				
Rio.	de Pernambuco:				
	Peso br ^o 8366 Kg.			7 : 153	200
	Tara 5% 418 „			178	830
	Liq ^o 7948 „ ^{15/100} \$500			6 : 974	370
	Desconto 2 1/2%				
	Despesas :				
	Direitos \$ 7948 Kg. a				
	810 rs. = 6 : 437 \$ 880				
	7% de „	450	650		
	10% additionaes	45	070		
	por fardo :				
	{ braçagem 800 rs.,				
	{ insp. 1\$000, corret.				
	{ 400 rs, transp. 300rs,	550	000		
	{ frete 3\$000 = 5\$500				
	Seguro \$/£. 400. 1/6%				
	= £. o. 13.4 + 1 s. de				
	sello = £ o. 14. 4 ao c.	16	380		
	de 10 1/2				
	Reboque e grati-	16	410	1 : 078	510
	ficações			8 : 052	880
				241	580
				8 : 294	460.
	Comissão 3%				

Exercícios :

- 1) Um negociante tem de pagar 2 letras, uma de 500 \$ 000 no dia 1º de Abril, e a outra, também de 500 \$ 000, em 1º de Agosto. Qual será o prazo medio?
- 2) A. deve pagar a B. no dia 1º de Maio 4:000 \$ 000, e em 1º de Novembro 5:000 \$ 000. Quando deverá pagar as duas quantias juntas?
- 3) A. deve pagar a B. em 1º de Maio 5:000 \$ 000 e em 1º de Novembro 4:000 \$ 000. Quando precisará pagar as duas quantias de uma só vez?
- 4) Em que dia será o vencimento commum de 2:800 \$ 000, pagaveis a 1º de Fevereiro, e de 7:200 \$ 000, pagaveis a 1º de Agosto?
- 5) Querendo-se pagar de uma só vez: 5:440 \$ 000, a vencer no dia 16 de Junho, e 2:560 \$ 000, a vencer em 1º de Outubro, calcular-se o dia do vencimento commum.
- 6) Devendo-se 750 \$ 000, pagaveis a 21 de Janeiro, e 1:050 \$ 000, pagaveis a 1º de Junho, quer-se liquidar todo o debito de uma só vez. Em que dia?
Achar o prazo medio e o dia do vencimento de:
- 7) 650 \$ 000 pag. a 21 de Abril e 825 \$ 000 pag. a 1º de Julho.
- 8) 825 \$ 000 " " 21 " " 650 \$ 000 " " 1º " "
- 9) 575 \$ 000 " " 24 " Maio " 725 \$ 000 " " 2 " Agosto
- 10) 620 \$ 000 pag. a 10 de Junho e 760 \$ 000 pag. a 13 de Setembro.
- 11) 810 \$ 000 pag. a 5 de Agosto e 720 \$ 000 pag. a 4 de Dezembro.
- 12) 1:240 \$ 000 pag. a 7 de Janeiro e 2:360 \$ 000 pag. a 19 de Maio.
- 13) 1:825 \$ 000 pag. a 16 de Março e 1:650 \$ 000 pag. a 6 de Julho.
- 14) 2:376 \$ 000 pag. a 18 de Setembro e 3:672 \$ 000 pag. a 21 de Novembro.

Acontece no commercio dever um negociante a outro certa somma pagavel em dia determinado, e, antes do dia do pagamento, antecipar-lhe uma ou mais prestações por conta da somma a pagar. Não

sendo, porém, justo o prejuizo de nenhum d'elles, precisa-se calcular por quanto tempo se deverá adiar o pagamento do resto da divida, de modo que os juros da somma que resta pagar, compensem os juros perdidos pela antecipação dos pagamentos adiantados.

.II. Exemplo: A. deve pagar 1:000 \$ 000 depois de tres mezes. Pagando 400 \$ 000 á vista, pergunta-se quando deverá pagar os 600 \$ 000 restantes?

Com effeito:
400 \$ 000 rend. certos juros em 3 mezes
600 \$ 000 " os mesmos " " X "

$$x = \frac{3 \times 400}{600} = \underline{2 \text{ mezes.}}$$

Pagando A. 400 \$ 000 á vista, perde os juros d'esta somma por 3 mezes e por isso ficará depois dos 3 mezes tanto tempo com os 600 \$ 000 restantes, quanto precisa para que seus juros equivalhão aos juros de 100 \$ 000 por 3 mezes.

logo pagará os 600 \$ 000 restantes 2 mezes depois dos 3.

Exercícios :

- 15) Um negociante comprou mercadorias por 850 \$ 000, pagaveis depois de 4 mezes. Pagando 250 \$ 000 a dinheiro á vista, pergunta-se quando deverá pagar os 600 \$ 000 restantes?
- 16) Se o negociante tivesse pago 400 \$ 000 á vista, quando pagaria os 450 \$ 000 restantes?
- 17) A. deve pagar 4:560 \$ 000 a vencerem em 6 mezes. Paga 1:260 \$ 000 á vista. Quanto tempo ainda poderá ficar com o resto?
- 18) Se A. pagasse 2:160 \$ 000 á vista, quando pagaria os 2:400 \$ 000 restantes?

III. Exemplo: A. deve a B. a importancia de 5:000 \$ 000 a vencer depois de 6 mezes. No fim de 2 mezes A. pagou por conta d'essa quantia 1:500 \$ 000 e um mez depois 1:700 \$ 000. Quanto tempo depois

dos 6 mezes A. ainda poderá ficar com os 1:800\$000 restantes?

Raciocinaremos assim:

Pagando A. 1:500\$000 quatro mezes antes do seu vencimento, perde os juros de 1:500\$000 por 4 mezes.

Pagando A. 1:700\$000 tres mezes antes do seu vencimento, perde os juros de 1:700\$000 por 3 mezes.

Já vimos que os juros de:

$$\begin{cases}
 1:500\$000 \text{ em 4 mezes} = \text{jur. de } 1500 \times 4 = 6:000\$000 \\
 \text{em 1 mez.} \\
 1:700\$000 \text{ em 3 mezes} = \text{jur. de } 1700 \times 3 = 5:100\$000 \\
 \text{em 1 mez.}
 \end{cases}$$

A somma dos jur. do dinh. pago adiantado, isto é, de 3:200\$000. } = jur. de 11:100\$000 em 1 mez.

e por conseguinte:

11:100\$000	rend. certos jur. em 1 mez.	Equivalendo os juros das quantias pagas aos jur. de 11:100\$000 em 1 mez. A. poderá ficar com 1:800\$000 restantes até que seus jur. compensem os de 11:100\$000 em 1 mez.
1:800\$000	os mesmos	
$x = \frac{11100}{1800} = 6 \text{ mezes } 1/6.$		

logo A. precisa pagar 1:800\$000, 6 mezes e 5 dias depois dos 6 mezes estipulados, ou 12 mezes e 5 dias depois do dia em que foi feito a transacção.

Exercícios:

19) Um negociante comprou mercadorias pelo preço de 3:600\$000 ao prazo de 6 mezes. Um mez depois da compra pagou adiantado 1:200\$000 e tres mezes mais tarde 1:400\$000. Quando pagará 1:000\$000 restante?

20) A. compra no dia 1º de Maio fazendas por 2:650\$000, pagaveis a 1º de Agosto. Sob condição de demorar parte do pagamento, A. paga 800\$000 a 16 de Junho e 1:000\$000 a 16 de Julho. Quando liquidará toda a divida?

21) A. deve a B. 2:500\$000 a vencer depois de 3 mezes. No fim de um mez, A. pagou por conta d'essa quantia 1:000\$000 e 40 dias mais tarde 600\$000. Quando liquidará todo o debito?

22) Devem-se pagar 4:375\$000 depois de 8 mezes. Dous mezes depois de feita a transacção, o devedor dá 1:750\$000 sob condição de demorar o pagamento da quantia restante. Achar esse prazo.

23) Uma divida de 6:000\$000 deve-se liquidar depois de um anno. No correr do anno pagam-se 1:500\$000, depois de 3 mezes, 1:200\$000 depois de 6 mezes e 2:000\$000 depois de 10 mezes. Quando se deve saldar o debito?

Procede-se muito semelhantemente, quando se trata de achar o prazo medio de diversas quantias, pagaveis em diferentes épocas.

IV. Exemplo: A. deve pagar a B.:

- em 6 de Abril 720\$000
- " 28 " " 820\$000
- " 14 " Junho 660\$000

Achar o dia do vencimento commum d'estes tres pagamentos.

Se A. pagasse os 820\$000 no dia 6 de Abril, perderia os juros d'esta quantia por 22 dias.

Se A. pagasse os 660\$000 em 6 de Abril, perderia os juros de 660\$000 por 68 dias.

Já sabemos que os juros de:

$$\begin{aligned}
 &820\$000 \text{ em 22 dias} \\
 &= \text{jur. de } 1\$000 \text{ em } 820 \times 22 = 18040 \text{ dias} \\
 &660\$000 \text{ em 68 dias} \\
 &= \text{jur. de } 1\$000 \text{ em } 660 \times 68 = 44880 \text{ dias} \\
 &= \text{" " } 1\$000 \text{ " } 62920 \text{ " }
 \end{aligned}$$

Por conseguinte A. poderá ficar com todo o dinheiro: 720\$000 + 820\$000 + 660\$000 = 2:200\$000 até que os juros equivalhão aos juros de 1\$000 durante 62920 dias, ou:

1:740\$000 rend. certos juros em 1 mez
 1:000\$000 " os mesmos juros " x "

$$x = \frac{1740}{1000} = \underline{\text{1 mez e 22 dias.}}$$

A. deverá pagar a quantia restante 1 mez e 22 dias antes do 1º de Dezembro, isto é, a 9 de Outubro.

Exercícios:

- 30) A. deve pagar a B. hojo 3:000\$000 e 6 mezes depois mais 6:000\$000. Falta ao primeiro pagamento, mas 4 mezes depois paga 4:500\$000. Quando deve pagar o resto?
- 31) A. deve pagar a B. no dia 1º de Fevereiro 750\$000 e em 1º de Junho 850\$000. Não paga os 750\$000, mas sim 1:000\$000 em 1º de Abril. Quando pagará o resto?
- 32) A. deve pagar a B. no dia 1º de Junho 750\$000 e em 1º de Setembro 1:250\$000. Paga em 1º de Junho 450\$000, em 1º de Julho 650\$000 e em 1º de Agosto 400\$000. Quando tem de pagar a quantia restante?
- 33) A. deve pagar a B. em 1º de Março 1:400\$000, em 1º de Maio 1:600\$000 e em 1º de Setembro 1:800\$000. Faltando ao primeiro pagamento, dá em 1º de Abril 1:200\$000, em 1º de Maio 800\$000 em 1º de Junho 1:600\$000. Quando pagará o resto?
- 34) A. deve pagar a B.: em 1º de Janeiro 850\$000, em 16 de Fevereiro 1:160\$000, em 1º de Abril 760\$000 e em 1º de Julho 1:870\$000. Paga em 1º de Janeiro 600\$000, em 1º de Março 1:200\$000, em 16 de Abril 640\$000 e em 1º de Maio 1:600\$000. Quando deve saldar o seu debito?
- 35) Devem-se pagar 6:000\$000 em 2 mezes, 6:000\$000 em 6 mezes, 8:000\$000 em 9 mezes e 10:000\$000 em um anno. Quando se poderá fazer um só pagamento?

- 36) A. deve pagar 2:000\$000 em 10 de Março, 5:000\$000 em 15 de Abril, e 3:000\$000 em 25 de Maio. Convenciona com o credor pagar as 3 sommas de uma só vez. Em que dia será?
- 37) A. compra um predio a B. por 75:000\$000. Paga 25:000\$000 á vista e convenciona pagar 6 mezes depois 25:000\$000 e os outros 25:000\$000 no fim de um anno. 4½ mezes depois da transacção, precisando B. de dinheiro, pede a A. que lhe antecipe 30:000\$000 com a condição de retardar o pagamento do resto da divida, o que foi acceito. Quanto tempo além de um anno, A. poderá ainda ficar com a quantia restante?
- 38) B. entra para uma sociedade commercial com 20:000\$000. pagaveis nos seguintes prazos: 30% á vista, 3 mezes depois 15%, 6 mezes mais tarde 20%, 9 mezes depois 25% e um anno depois o resto. Tendo effectuado o primeiro pagamento, foi preciso que B. fizesse de uma só vez todas as outras entradas. Quando teria de realizal-a sem prejuizo?
- 39) Uma pessoa comprou um predio por 72:000\$000. Depois de ter pago 54:000\$000 ficaram por liquidar 18:000\$000, a vencer em 8 mezes, mas, preferindo pagar já 8:000\$000 com a condição de prolongar o prazo do pagamento dos 10:000\$000 restantes, quando deverá fazer esse pagamento?

§ 32.

Razões e Proporções.

1) Razões. Duas quantidades da mesma especie, 12 e 4 por exemplo, podem ser comparadas de duas maneiras: a) póde-se perguntar quantas unidades uma tem mais do que a outra ou b) quantas vezes uma está contida na outra. Em nosso exemplo vê-se

que 12 tem 8 unidades mais do que 4 e que contém 4 vezes. Procura-se, pois, na primeira hypothese a diferença entre os 2 números dados e na segunda o seu quociente. O resultado da comparação chama-se no primeiro caso **razão por diferença**, ou simplesmente **diferença** e no segundo **razão por quociente**, ou simplesmente **razão**. A diferença em nosso exemplo é, por conseguinte, $12 - 4 = 8$ e a razão $12 : 4 = 3$, que se lê: A razão de 12 para 4 é igual a 3. As duas quantidades comparadas 12 e 4 denominam-se **termos** da comparação; o primeiro termo 12 é o **antecedente**, o outro 4 o **consequente**. As razões por diferença são de pouca importancia e, por isso, d'ellas não nos occupamos, mas sómente das razões por quociente. Como já sabemos que uma fracção não muda de valor quando se multiplicam ou se dividem ambos os termos pelo mesmo numero, segue-se que tambem **uma razão por quociente não mudará de valor, multiplicando ou dividindo ambos os termos pelo mesmo numero**, porque realmente uma razão é o quociente indicado entre 2 números, isto é, uma fracção. Esta verdade serve para reduzir as razões ou relações á expressão mais simples, o que é muitas vezes necessario para formar melhor juizo d'ellas. Perguntando-se, por exemplo, em que relação se acham as alturas do Corcovado (480 m.) e a de Petropolis (800 m.), vê-se que esta é: $480 : 800$ ou dividindo por 10 ambos os termos: $48 : 80$ ou ainda dividindo por 16 os termos:

a) **3 : 5.**

Emfim esta ultima relação ganha ainda mais em clareza, tomando um dos termos = 1, o que se consegue, quer dividindo-os pelo antecedente 3:

b) **1 : 1 2/3**

quer pelo consequente 5:

c) **3/5 : 1.**

Quando um dos termos ou ambos são fracções ou números mixtos, reduzimol-os a fracções que tenham o mesmo denominador, e depois multiplicam-se estas pelo denominador commum, por exemplo:

1) $1\frac{1}{3} : 2 = \frac{4}{3} : \frac{6}{3} = 4 : 6 = \mathbf{2 : 3}$. b) **1 : 1 1/2**. c) $\frac{2}{3} : \mathbf{1}$.

2) $4\frac{1}{6} : 3\frac{3}{4} = \frac{25}{6} : \frac{15}{4} = \frac{50}{12} : \frac{45}{12} = 50 : 45 = \mathbf{10 : 9}$.

b) **1 : 9/10.**

c) **1 1/9 : 1.**

Exercícios :

1) Achar o quociente das razões seguintes:

- | | | | |
|------------|-------------|------------------|------------------|
| a) 24 : 6 | e) 28 : 8 | i) 8 : 4/3 | n) 10 : 2,5 |
| b) 76 : 4 | f) 75 : 200 | k) 7 1/2 : 5 | o) 7,5 : 1,25 |
| c) 11 : 22 | g) 44 : 176 | l) 6 2/3 : 5/6 | p) 16,92 : 0,036 |
| d) 24 : 36 | h) 6/7 : 3 | m) 5 1/4 : 9 3/8 | q) 7,68 : 25,6 |

2) Reduzir as seguintes razões de tal maneira que:

- a) os seus termos sejam representados pelos números inteiros menores possiveis
 b) o antecedente seja igual a 1.
 c) o consequente seja igual a 1.

- | | | |
|-------------|----------------|--------------------|
| a) 45 : 135 | g) 10 : 5/6 | n) 6 3/4 : 9 |
| b) 64 : 48 | h) 4/5 : 8 | o) 3/4 : 4 1/2 |
| c) 60 : 75 | i) 8/9 : 4 | p) 7/10 : 4 1/5 |
| d) 54 : 81 | k) 5 : 17 1/2 | q) 5/9 : 8 1/3 |
| e) 48 : 112 | l) 11 : 13 3/4 | r) 12 1/2 : 18 3/4 |
| f) 3 : 3/5 | m) 12 1/2 : 5 | s) 7 1/3 : 5 1/4 |

- | | |
|-------------------|------------------|
| t) 4 1/3 : 4 1/15 | a') 0,4 : 0,5 |
| u) 8 3/4 : 7 1/2 | b') 0,72 : 0,54 |
| v) 7/26 : 15/26 | c') 2,7 : 1,85 |
| x) 3/6 : 3/4 | d') 0,792 : 0,36 |
| y) 7/9 : 14/27 | e') 4,32 : 0,96 |
| z) 3/8 : 2/5 | f') 0,08 : 0,4 |

- 3) Campanha está 900 m. e Itabira 800 m. acima do nível do mar. Qual a relação entre estas alturas?
- 4) A extensão do rio Amazonas é de 5400 Km., a do Purús de 3000 Km. Em que razão estão estas duas extensões?
- 5) Na estrada de ferro Oeste de Minas verificou-se no mez de Fevereiro de 1901 um lucro de 19:250\$000 e no mez seguinte 24:750\$000. Em que razão estão os lucros d'estes 2 mezes?
- 6) São Paulo está 759 m. e lagoa Dourada (Minas) 1056 m. sobre o nível do mar. Em que razão estão estas alturas?
- 7) B. comprou certa fazenda por 137\$500 e a vendeu por 165\$000. Em que razão está o preço da compra para o preço da venda?
- 8) Em que razão está o valor de uma libra esterlina para o de um milreis ao cambio de 12 1/2?
- 9) A. percebe 3:600\$000 de ordenado por anno, e B. 375\$000 por mez. Em que razão estão os honorarios d'estes 2 empregados?
- 10) Qual será esta razão, recebendo cada um uma gratificação annual de 300\$000, e quanto % dos seus ordenados representa este augmento?
- 11) [12] Em que razão está o preço da compra para o preço da venda, ganhando 25% [12 1/2%]?

a) Razões directas e inversas. No problema:

1 m. de fazenda custa 3\$000
 7 m. " " " " X.

procura-se o preço de 7 m. conhecendo o de 1 m. Este preço depende naturalmente da quantidade de metros que se quer comprar. Raciocinaremos: 7 m. são 7 vezes 1 m. e, por conseguinte, custarão 7 vezes o preço de 1 m., isto é, $7 \times 3\$000 = 21\000 . Vê-se, pois, que 21\$000 é tantas vezes maior que 3\$000, quantas vezes 7 m. é maior do que 1 m. ou a razão entre 21\$000 e 3\$000 é a mesma que entre 7 e 1.

Diz-se por isso: **O numero de metros e os respectivos preços estão em razão directa.**

Correspondendo igualmente a:

- mais trabalho, mais ordenado
- mais capital, mais juros
- maior numero de operarios, maior feria
- mais tempo, maior trabalho etc. etc.

vê-se que: trabalho e ordenado, capital e juros, numero de operarios e feria, tempo e trabalho, etc. etc. estão em razão directa.

No problema:

1 operario faz certo trabalho em 18 dias
 3 oper. fazem o mesmo " " " X "

Pede-se o numero de dias necessarios para que 3 operarios façam o mesmo trabalho que 1 operario, sabendo-se que este precisa de 18 dias. Como 3 operarios trabalham diariamente 3 vezes mais do que 1 operario, não precisarão de 3 vezes mais dias para fazer a dita obra, mas sim da terça parte dos dias de que precisa 1 operario, isto é, $\frac{1}{3} \times 18 = 6$ dias. Emquanto se forma 3 de 1 por meio da multiplicação por 3, o numero 6 de dias, se obtem de 18 por meio da divisão por 3, isto é, pela operação inversa. Por conseguinte o numero dos dias de trabalho não está em razão directa do numero dos operarios, mas sim em razão inversa.

Sabendo-se tambem que corresponde a:

- mais capital, menos tempo para render certos juros
 - mais horas de trabalho, menos dias de jornal,
 - maior comprimento, menor largura etc. etc.
- vê-se que capital e tempo, horas e dias de trabalho, comprimento e largura etc. estão em razão inversa.

Exercícios:

- 13) [14] Um homem faz certo trabalho em 8 horas [15 dias]; um menino faz o mesmo trabalho em 12 horas [21 dias]. Em que razão está a capacidade do homem para a do menino?
- 15) [16] Em que razão estão os valores das duas fracções $\frac{1}{15}$ e $\frac{1}{25}$ [$\frac{8}{15}$ e $\frac{8}{25}$]?
- 17) [18] Um capitalista tinha collocados 2 capitaes, que lhe renderam ambos os mesmos juros, a saber: o primeiro em 2 annos $\frac{1}{2}$ [$7\frac{1}{2}$], e o segundo em 3 annos $\frac{3}{4}$ [$6\frac{1}{4}$]. Em que razão está o primeiro capital para o segundo?
- 19) [20] As larguras de 2 rectangulos, que têm a mesma superficie, são respectivamente 88 m. [82,5 m.] e 110 m. [137,5 m.]. Em que razão está o comprimento do primeiro para o do segundo?
- 21) [22] A., trabalhando durante 24 [22] dias, ganha tanto como B. em 32 [33] dias. Em que razão está a capacidade de A. para a de B.?

b) Razões compostas. Muitas vezes uma razão é formada de duas ou mais razões; então chama-se **razão composta**.

Exemplo: Dous operarios A. e B. abrem um fosso sob as mesmas condições de ordenado. A. trabalha 20 dias, a 8 horas e B. 24 dias, a 10 horas por dia. Em que razão estão os salarios a que A. e B. têm direito?

Se A. e B. trabalhassem o mesmo numero de horas por dia, seus salarios estariam na razão de

$$20 : 24.$$

Se trabalhassem o mesmo numero de dias, seus salarios estariam na razão de

$$8 : 10.$$

A. trabalha 20 dias a 8 horas = $20 \times 8 = 160$ horas
 B. " 24 " " 10 " = $24 \times 10 = 240$ "

logo os salarios de A. e B. estão na razão de:

$$(20 \times 8) : (24 \times 10) = 160 : 240 = 2 : 3.$$

A razão dos salarios forma-se, por conseguinte:

a) da razão dos dias, 20 : 24, durante os quaes

A. e B. trabalham,

b) da razão das horas diarias de trabalho

$$8 : 10,$$

e para compôr uma razão com estas duas, multiplicaram-se os antecedentes 20×8 e depois os consequentes 24×10 . É evidente pois, que, quando o resultado de um problema depender de 2 ou mais razões, formar-se-ha d'ellas uma razão só, tomando-se como antecedente o producto dos antecedentes, e como consequente o producto dos consequentes.

II. Proporções: Quando duas razões iguaes são ligadas pelo signal de igualdade, formam uma **proporção**.

Assim, sendo iguaes as duas razões

$$15 \text{ e } 21 \text{ e } 5 \text{ e } 7 \text{ podemos escrever } 15 = \frac{21}{5} \text{ o que tambem}$$

é representado por $15 : 5 :: 21 : 7$ e lido 15 está para 5, assim como 21 está para 7. Ha, pois, 4 termos em uma proporção; o primeiro e o ultimo chamam-se **extremos**, o segundo e terceiro, **meios**.

Exercícios: Escrever 12 proporções.

Multiplicando na proporção:

$$15 = \frac{21}{5}$$

ambas as razões por 5×7 :

$$\frac{15 \times 5 \times 7}{5} = \frac{21 \times 5 \times 7}{7} \text{ ou}$$

$$15 \times 7 = 21 \times 5$$

o que mostra que o producto dos extremos é igual

ao dos meios. Verificando-se isto em qualquer proporção, deduz-se a propriedade fundamental da theoria das proporções: **Em toda a proporção, o producto dos extremos é igual ao dos meios.**

Esta regra permite calcular facilmente um termo desconhecido x de uma proporção, conhecendo-se os outros tres, por exemplo:

$$5 : 3\frac{3}{4} :: 0,08 : x$$

$$5 x = 3\frac{3}{4} \times 0,08$$

$$x = \frac{3\frac{3}{4} \times 0,08}{5} = \frac{3 \times 0,08}{4 \times 5} = \underline{\underline{0,06}}$$

Exercicios:

Achar o termo desconhecido x nas seguintes proporções:

- | | |
|---|---|
| 23) 35 : 5 :: 42 : x | 31) $3\frac{3}{4} : 7 :: x : 5\frac{2}{5}$ |
| 24) 35 : x :: 42 : 12 | 32) $7\frac{1}{2} : 6\frac{3}{4} :: \frac{2}{3} : x$ |
| 25) 16 : 24 :: 10 : x | 33) 0,6 : x :: 0,12 : 0,2 |
| 26) 9 : 27 :: 4 : x | 34) x : $\frac{5}{6} :: 0,876 : 7,3$ |
| 27) x : 16 :: 11 : 8 | 35) $\frac{2}{3} : 7\frac{1}{2} :: x : 0,045$ |
| 28) 5 : 12 :: x : 6 | 36) 0,075 : $1\frac{1}{3} :: 47,25 : x$ |
| 29) $\frac{1}{4} : x :: 1 : 20$ | 37) $33\frac{1}{3} : x :: 7,35 : 0,315$ |
| 30) x : $\frac{1}{2} :: \frac{2}{3} : \frac{1}{6}$ | |

Por meio das proporções podem-se resolver todos os problemas, já resolvidos pelo methodo de redução á unidade. Vamos agora mostrar em alguns exemplos como proceder para achar o resultado, empregando o methodo das proporções. Para este fim dispomos os dados do modo como sempre fizemos, isto é, escrevemos na primeira linha todos os termos que se referem ao termo relativo conhecido, e na segunda linha os que se referem ao termo relativo desconhecido x de maneira que os termos (principaes) da mesma especie se achem um abaixo do outro e x

no fim. Então precisa-se sómente examinar se cada termo principal está para o relativo em razão directa ou inversa. Nos exemplos, que apresentamos, figuramos x sendo sempre o quarto termo e, portanto, as razões directas dos termos principaes se formarão como a razão dos relativos, isto é, de cima para baixo e as razões inversas em sentido contrario, isto é, de baixo para cima. Os seguintes exemplos melhor ainda esclarecerão o exposto.

I. Regra de tres simples.

Exemplo de pag. 87.

7 m. de faz. custam 22\$400	
12 " " " " x	
7 : 12 :: 22,4 : x	a mais m. de faz. corresponde maior custo; o numero de m. e o preço estão em razão directa.
7 x = 12 × 22,4	
x = $\frac{12 \times 22,4}{7}$	= 38\$400

Exemplo de pag. 88. Para fazer certa obra

16 oper. precis. de 27 dias	
12 " " " " x	
12 : 16 :: 27 : x	mais oper. precisam de menos dias para fazer certa obra; o num. de oper. e o de dias estão, pois, em razão inversa.
12 x = 16 × 27	
x = $\frac{16 \times 27}{12}$	= 36 dias.

Exemplo de pag. 98. Quanto valem 9 : 502\$350 de moeda brasileira, em Lisboa, estando o cambio a 390?

390 reis fracos valem 100 reis fortes

9502350 " " " X " "

390 : 9502350 :: 100 : x

390 x = 9502350 × 100

x = $\frac{9502350 \times 100}{390} = \underline{2 : 436 \$ 500.}$

Exercícios:

Achar, por meio de proporções, as soluções dos problemas de paginas 89, 90, 91, 96, 98, 99 e 100.

II. Regra de tres composta.

Exemplo na pag. 91.

9 oper. ganh. em 7 dias 283 \$ 500

6 " " " 4 " X

O resultado d'este problema depende não sómente da razão do numero de operarios, mas tambem da razão do numero dos dias de trabalho, isto é, depende da razão composta d'estas duas razões. Começaremos por formar estas, e depois multiplicaremos entre si não só os antecedentes como tambem os consequentes; os dous productos formarão com a razão dos 2 termos relativos, a proporção pedida:

Razão do num. de oper.: 9 : 6 trabalhando mais oper., maior será o ganho; o num. dos oper. e o ganho estão em razão directa.

" " " " dias: 7 : 4 em mais dias de trabalho ganha-se mais; o num. de dias e o ganho estão em razão directa.

Agora temos a proporção:

(9 × 7) : (6 × 4) :: 283,5 : x

(9 × 7) x = 6 × 4 × 283,5

x = $\frac{6 \times 4 \times 283,5}{9 \times 7} = \underline{108 \$ 000.}$

Outro exemplo: Para abrir um fosso de 360 m. de comprimento precisa-se de 12 jornaleiros durante 20 dias, trabalhando 10 horas por dia. Quantos homens poderiam abrir 540 m., trabalhando durante 16 dias, a 9 horas por dia?

360 m. foram abertos em 20 dias a 10 hor. por 12 jornal.

540 " " " " 16 " " 9 " " X "

O resultado depende a) da razão do numero de metros b) da razão do numero de dias em que se trabalha e c) da razão do numero de horas diarias.

Formemos estas razões:

- a) 360 : 540 quanto mais m. se quer abrir num certo tempo, tanto mais jornaleiros são precisos; a razão entre m. e jornal. é directa.
- b) 16 : 20 quanto mais dias se trabalha, menos jornaleiros são necessários para abrir o mesmo num. de m.; dias e jornal. estão em razão inversa.
- c) 9 : 10 quanto mais horas diarias se trabalha, menos jorn. se precisam para abrir o mesmo num. de m.; horas e jornal. estão em razão inversa.

Agora façamos os productos dos antecedentes, consequentes e a proporção:

(360 × 16 × 9) : (540 × 20 × 10) :: 12 : x

(360 × 16 × 9) x = 540 × 20 × 10 × 12

x = $\frac{540 \times 20 \times 10 \times 12}{360 \times 16 \times 9} = \underline{25 \text{ jornaleiros.}}$

Exercícios:

Resolver, pelo methodo das proporções, os exercicios de paginas 93 e 94.

III. Juros.

a) Pedem-se os juros.

Exemplo na pag. 108.

100\$000	rend. em	1	ano	7½	de juros	7:568\$800
"	"	"	"	6⅔	"	"
"	"	"	"	X	"	"

Formamos as razões a) dos capitales e b) dos annos

- a) 100 : 7568,8 | maior capital renderá mais juro: capital e juros estão em razão directa.
- b) 1 : 6⅔ | em mais tempo, os juros serão maiores: tempo e juros estão em razão directa.

A proporção será:

$$(100 \times 1) : (7568,8 \times 6\frac{2}{3}) :: 7\frac{1}{2} : x$$

$$100x = \frac{7568,8 \times 6\frac{2}{3} \times 7\frac{1}{2}}{100} = \underline{\underline{3:784\$400.}}$$

b) Pedem-se a taxa.

Exemplo: O capital de 5:409\$000 rendeu 96\$160 em 2 mezes e 20 dias. A quanto % esteve collocado?

5:409\$000	rend. em	2⅔	mezes	96\$160	de jur.	5:409\$000
100\$000	"	"	"	12	"	"
"	"	"	"	X	"	"

As razões serão: 5409 : 100 | mais capital produz mais juros; cap. e juros estão em razão directa.

2⅔ : 12 | a mais tempo corresp. mais juros: tempo e juros estão em razão directa.

e a proporção:

$$(5409 \times 2\frac{2}{3}) : (100 \times 12) :: 96,16 : x$$

$$5409 \times 2\frac{2}{3} x = \frac{100 \times 12 \times 96,16}{3}$$

$$x = \frac{100 \times 12 \times 96,16 \times 3}{5409 \times 8} = \underline{\underline{8\%}}$$

c) Pedem-se o capital.

Exemplo: Qual será o capital que a 8½% rendeu 605\$200 em 3 annos e 4 mezes? de jur. são produz. em 1 anno por 100\$000 de cap.

605\$200	rend. em	3⅓	annos e mezes	8½	de jur.	605\$200
"	"	"	"	X	"	"
"	"	"	"	"	"	"

Formamos as razões:

- 8½ : 605,2 | mais juros são produzidos por mais capital no mesmo tempo: razão directa.
- 3⅓ : 1 | a mais tempo corresp. menos capital para render os mesmos juros: razão inversa.

D'ahi deduz-se a proporção:

$$(8\frac{1}{2} \times 3\frac{1}{3}) : (605,2 \times 1) :: 100 : x$$

$$x = \frac{605,2 \times 100 \times 2 \times 3}{17 \times 10} = \underline{\underline{2:136\$000.}}$$

d) Pedem-se o tempo.

Exemplo: Em que tempo rende o capital de 3:784\$400 a 7½% os juros de 946\$100?

3:784\$400	rend. em	7½	de jur.	946,1	de jur.	3:784\$400
"	"	"	"	X	"	"
"	"	"	"	"	"	"

As razões são: 3784,4 : 100

- 7½ : 946,1 | a mais capital corresp. menos tempo para produzir os mesmos juros; cap. e tempo estão em razão inversa.
- a mais juros corresp. mais tempo para o mesmo capital: razão directa.

A proporção será:

$$(3784,4 \times 7\frac{1}{2}) : (100 \times 946,1) :: 1 : x$$

$$3784,4 \times 7\frac{1}{2} \times x = 100 \times 946,1$$

$$x = \frac{100 \times 946,1}{3784,4 \times 7\frac{1}{2}} = \frac{100 \times 946,1 \times 2}{3784,4 \times 15} = \underline{\underline{3 \text{ annos e } 4 \text{ mezes.}}}$$

Exercícios:

Resolver, pelo methodo das proporções, os exercicios de paginas: 108, 28) e 109, 110, 111, 112, 115, 117 etc. etc.

Julgando que o methodo das proporções não apresentará mais difficuldades ao alumno, seremos mais resumidos d'aqui em diante.

As proporções dos exemplos serão:

$$\text{pag. 123. } \left\{ \begin{array}{l} 114\frac{1}{6} : 1457,68 :: 100 : x \\ x = \frac{1457,68 \times 100}{114\frac{1}{6}} = \underline{\underline{1 : 276\$800.}} \end{array} \right.$$

$$\text{pag. 124. } \left\{ \begin{array}{l} 85\frac{5}{7} : 148,8 :: 100 : x \\ x = \frac{148,8 \times 100}{85\frac{5}{7}} = \underline{\underline{173\$600.}} \end{array} \right.$$

IV. Desconto por dentro.

Sendo o caculo de desconto por fóra identico ao dos juros, resolvemos sómente os exemplos dados no paragrapho que trata do desconto por dentro, lembrando que o valor futuro de uma letra está sempre na razão directa do valor actual.

$$\text{Exemplo de pag. 145 e 146 } \left\{ \begin{array}{l} 126\frac{1}{4} : 4750 :: 100 : x \\ x = \frac{4750 \times 100}{126\frac{1}{4}} = \underline{\underline{3 : 762\$380.}} \end{array} \right.$$

$$\text{Exemplo de pag. 148. } \left\{ \begin{array}{l} 900 : 100 :: 1260 : x \\ x = \frac{1260}{9} = \underline{\underline{140}} \text{ etc.} \end{array} \right.$$

Este exemplo tambem se póde resolver da maneira seguinte:
Desconto = 1 : 200\$000 — 900\$000 = 360\$000.

900\$000	rend. em	$\frac{2}{3}$ an.	360\$000
100\$000	"	1 "	x
—————			
(900 × $\frac{2}{3}$)	:	(100 × 1)	:: 360 : x
5			
40			
$x = \frac{100 \times 360}{900 \times \frac{2}{3}}$	=	$\frac{100 \times 360 \times 3}{900 \times 8}$	= <u>15 0/0.</u>

V. Regra de sociedade.

Cada socio recebe do lucro a parte proporcional á sua entrada, isto é, a somma total do capital entre os socios está para o capital parcial de cada um, na mesma razão que todo o lucro está para a parte do lucro (x, y, z . . .) que cabe a cada socio.

No exemplo de pagina 132 acha-se por consequente o lucro x de A. pela proporção:

$$79200 : 26400 :: 11880 : x \\ x = \frac{26400 \times 11880}{79200} = \underline{\underline{3 : 960\$000.}}$$

o lucro y de B.:

$$79200 : 18300 :: 11880 : y \\ y = \frac{18300 \times 11880}{79200} = \underline{\underline{2 : 745\$000.}}$$

o lucro z de C.:

$$79200 : 34500 :: 11880 : z \\ z = \frac{34500 \times 11880}{79200} = \underline{\underline{5 : 175\$000.}}$$

Exemplo de pag. 133.

Dividimos a perda de 4 : 600\$000 entre A., B. e C. proporcionalmente aos mezes 42, 28 e 22, isto é, correspondendo o prejuizo de 4 : 600\$000 a 42 + 28 + 22 = 92 mezes, estes estão para 42 mezes na mesma razão que 4 : 600\$000 está para a perda que cabe a A. ou:

$$92 : 42 :: 4600 : x \\ x = \frac{42 \times 4600}{92} = \underline{\underline{2 : 100\$000.}}$$

Igualmente se achará a perda de B.:

$$92 : 28 :: 4600 : y$$

$$y = \frac{28 \times 4600}{92} = \underline{\underline{1 : 400\$000.}}$$

Do mesmo modo para a perda de C. tem-se:

$$92 : 22 :: 4600 : z$$

$$z = \frac{22 \times 4600}{92} = \underline{\underline{1 : 100\$000}}$$

Exemplo de pag. 137 e 138.

Depois de reduzidas as entradas ás suas equivalentes em um mez, é facil comprehender as 3 proporções:

$$750000 : 348000 :: 11250 : x$$

$$x = \frac{348 \times 11250}{750} = \underline{\underline{5 : 220\$000.}}$$

$$750000 : 252000 :: 11250 : y$$

$$y = \frac{252 \times 11250}{750} = \underline{\underline{3 : 780\$000.}}$$

$$750000 : 150000 :: 11250 : z$$

$$z = \frac{15 \times 11250}{75} = \underline{\underline{2 : 250\$000.}}$$

Exercicios:

Resolver, pelo methodo das proporções, os exercicios de paginas: 134, 135, 136, 137, 139 e 140.

§. 33.

Misturas e Ligas.

I. Misturas.

No commercio de seccos e molhados, frequentemente misturam-se generos da mesma especie (café, chá, vinho etc.) mas de diferentes qualidades, e então é necessario achar o preço d'esta mistura para poder vendel-a a um preço razoavel, sem soffrer prejuizo.

Exemplo: Compoz-se uma mistura contendo: 92 l. de vinho a 760 réis, 134 l. a 820 réis, e 226 l. a 940 réis. Quanto valerá um litro d'esta mistura? Facil é vêr que:

92 l. a 760 reis valem	92 × 760 = 69\$920.
134 l. " 820 " "	134 × 820 = 109\$880.
226 l. " 940 " "	226 × 940 = 212\$440.
392\$240.	
452 l. da mistura valem, pois,	392240
1 l. " " valerá:	452 = 868 réis aproximadamente.

Exercicios:

- 1) [2] Um negociante mistura 1 l. de vinho a 1\$500 [2\$800] com 1 l. a 2\$700 [3\$600]. Qual é o valor de 1 l. da mistura?
- 3) [4] A. mistura 5 l. de vinho a 1\$700 [2\$400] com 5 l. a 2\$500 [4\$300]. Quanto custa um l. da mistura?
- 5) [6] Um individuo mistura 13 l. [17] de vinho a 940 réis com 2 l. [3] de agua. Quanto vale 1 l. da mistura?
- 7) [8] Um negociante mistura 15 [24] Kg. de café a 820 [860] réis com 30 [42] Kg. a 780 [740] réis. Qual será o valor de 10 Kg. da mistura?
- 6) [10] Outro negociante mistura 30 [15] Kg. de fumo a

b) Segundo o que acabamos de ver, devem-se misturar:

	120 l. da I ^a qualidade com 70 l. da II ^a				
ou	12 l. " " " "	7	" " " "		
ou ainda	1 l. " " " "	$\frac{7}{12}$	" " " "		
portanto:	54 l. " " " "	$\frac{54 \times 7}{12}$	$=$	<u>$31\frac{1}{2}$ l.</u>	

c) Conforme a) obtem-se vinho a 800 reis o l., misturando 120 l. da I^a qualidade com 70 l. da II^a ou 12 da I^a com 7 da II^a. Em $12 + 7 = 19$ l. da mistura, temos, pois, 12 l. da I^a e 7 l. da II^a qualidade e, por conseguinte, na mistura de 950 l. entrarão:

$$\frac{950 \times 12}{19} = 600 \text{ l. da I}^{\text{a}} \text{ qualidade e}$$

$$\frac{950 \times 7}{19} = 350 \text{ l. " II}^{\text{a}} \text{ "}$$

Exercícios:

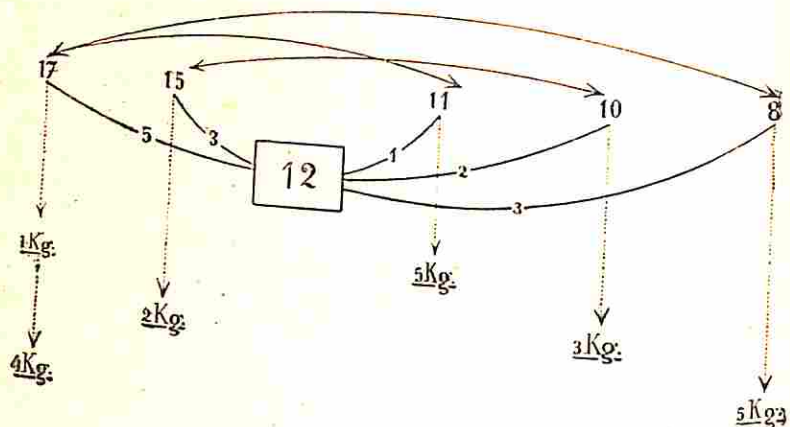
- 21) [22]** Um negociante tem 2 qualidades de assucar: a I^a vale 7\$000 [7\$200] a arroba, e a II^a 4\$000 [4\$800]. Quer mistural-as de modo que a arroba da mistura custe 6\$000 [5\$600]. Quantas arrobas de cada qualidade devem entrar na mistura de 60 [100] arrobas?
- 23) [24]** A. possui 2 qualidades de chá; o Kg. da I^a custa 14\$700 [12\$800] e o Kg. da II^a 10\$800 [6\$500]. Quantos Kg. da II^a qualidade deve misturar com 20 [48] Kg. da I^a para obter uma mistura que valha 12\$000 [10\$000]?
- 25) [26]** Uma pessoa comprou 2 qualidades de café: a I^a custou-lhe 1\$200 [810 rs.] o Kg. e a II^a 760 [630] réis. Quer fazer uma mistura de 440 [200] Kg. ao preço de 1\$000 [750 rs.] o Kg. a) Quanto precisa tomar de cada

qualidade? b) Quanto lhe custou cada uma? c) Por quanto venderá o Kg., querendo ganhar 20 %?

- 27) [28]** Quantos l. de agua se devem deitar em 72 l. de vinho a 1\$040 [1\$800] cada um, para obter-se vinho que valha 800 [1\$500] réis o l.?
- 29) [30]** Um hoteleiro tem 2 qualidades de vinho de mesa, uma a 900 [800] réis o l. e outra a 1\$700 [2\$000]. Quer mistural-as de modo que o l. valha 1\$200 [1\$500]. Quantos l. deve tomar para uma mistura de 8,4 [5,7] Hl.?
- 31) [32]** Um negociante de molhados tem uma qualidade de vinho que vende a 1\$600 [2\$000] o litro. Deita-lhe agua de modo que o preço baixe a 1\$200 [1\$600] o l. a) Que porção de agua contem 1 l. da mistura? b) Que porção de agua corresponde a 1 l. de vinho? c) Quanto % de agua e d) quanto % de vinho contem a mistura?
- 33) [34]** A. serve-se de 2 qualidades de vinho para fazer uma mistura de 1 Hl. Da qualidade superior, que vale 1\$800 [2\$400] o litro, mistura 1 l. com 3 l. [4 l.] da qualidade inferior, do preço de 1\$000 [1\$200]. a) De quantos l. de cada qualidade precisa para 1 Hl. b) Quanto custará 1 Hl. da mistura? c) Quanto custará um l. d'ella? d) Quanto % de cada qualidade contem a mistura? e) Quanto % A. ganhará, vendendo o l. a 1\$500 [1\$800]?

Quando as substancias que se misturam, são mais de duas, ha muitos methodos para resolver taes problemas, que por isso são indeterminados. O methodo mais simples é compôr aos pares, 2 preços, dos quaes um é superior e o outro inferior ao preço do mixto, e depois proceder como na pagina 179.

Exemplo: Um negociante tem 5 qualidades de chá: um de 17\$000 o Kg., outro de 15\$000, o terceiro de 11\$000, o quarto de 10\$000 e o quinto de 8\$000. Como se devem misturar estas variedades, para que o Kg. custe 12\$000?



A figura junta serve para maior clareza. Na primeira linha encontram-se todos os preços 17, 15, 11, 10 e 8 de 1 Kg. das diferentes qualidades, de modo que os preços inferiores ao pedido de 12\$000 são um pouco afastados dos preços superiores. Neste intervalo se acha na segunda linha o preço pedido de 12\$000. Os números nas curvas indicam as diferenças respectivas entre o custo pedido e o das qualidades, quer inferiores, quer superiores.

Misturamos primeiramente chá de 17\$000 com chá de 11\$000 de modo a obtermos chá de 12\$000. Conforme o exposto na pag. 179, precisamos misturar:

1 Kg. de 17\$000 com 5 Kg. de 11\$000.

Do mesmo modo, misturando chá de 15\$000 com chá de 10\$000, será preciso misturar:

2 Kg. de 15\$000 com 3 Kg. de 10\$000

e enfim, misturando chá de 17\$000 com chá de 8\$000, para obter chá de 12\$000, precisaremos formar o mixto de:

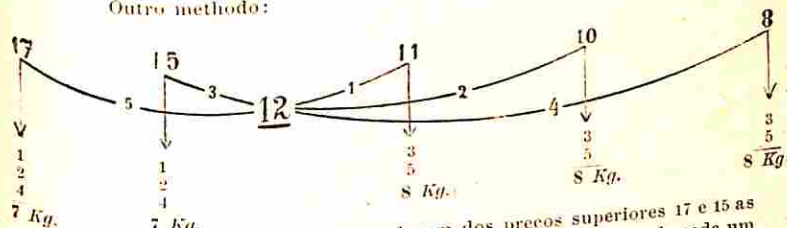
4 Kg. de 17\$000 com 5 Kg. de 8\$000.

Juntando agora as 3 misturas feitas, obteremos:

(1 + 4) Kg.	= 5 Kg. de 17\$000	= 85\$000	Prova: 15\$000 = 30\$000 11\$000 = 55\$000 10\$000 = 30\$000 8\$000 = 40\$000 240\$000 20 Kg. custarão 1 Kg. custará $\frac{240}{20} = 12$000$
2 "	" "	15\$000	
5 "	" "	11\$000	
3 "	" "	10\$000	
5 "	" "	8\$000	

Querendo-se formar 1 Kg. só da mistura, tomar-se-ha:

Outro methodo:



Escrevemos por baixo de cada um dos preços superiores 17 e 15 as diferenças 1, 2, e 4 entre 12 e cada preço inferior, e por baixo de cada um dos preços inferiores 11, 10 e 8 as diferenças 3 e 5 entre 12 e cada preço superior; somamos então em cada columna estas diferenças e obtemos:

7 Kg.	a 17\$000	= 119\$000
7 "	" 15\$000	= 105\$000
8 "	" 11\$000	= 88\$000
8 "	" 10\$000	= 80\$000
8 "	" 8\$000	= 64\$000
38 Kg.		456\$000

1 Kg. custará $\frac{456}{38} = 12$000$.

o que dará também a mistura pedida, porque, vendendo:		
1 Kg. de 17\$000 por 12\$000	perde-se 5\$000	} Perda total 8\$000
1 " " 15\$000 " "	" " 3\$000	
1 " " 11\$000 " "	ganha-se 1\$000	} Lucro total 7\$000
1 " " 10\$000 " "	" " 2\$000	
1 " " 8\$000 " "	" " 4\$000	

Misturando 1 Kg. de cada uma das 5 qualidades e vendendo o Kg. d'esta mistura a 12\$000, teríamos, por um lado, um prejuizo de 8\$000 e, por outro lado, um lucro de 7\$000. Para que o lucro compense o prejuizo, precisamos misturar 7 Kg. de cada uma das qualidades superiores com 8 Kg. de cada uma das qualidades inferiores, porque então perdemos: $7 \times 5 + 7 \times 3 = 56$000$ e ganhamos: $8 \times 1 + 8 \times 2 + 8 \times 4 = 56$000$.

}	$\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$	Kg. da I ^a	qualidade	
	$\frac{2}{20} = \frac{1}{10}$	"	"	II ^a
	$\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$	"	"	III ^a
	$\frac{3}{20} = \frac{3}{20}$	"	"	IV ^a
	$\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$	"	"	V ^a

E' evidente que, para preparar uma mistura de certo numero de Kg., basta multiplicar estas fracções por aquelle numero.

Exercícios :

- 35) [36] A. possui 3 qualidades de vinho com as quaes faz um *HL*. tomando 1 [1] *l.* da I^a a 2\$400 [2\$800], 2 [3] *l.* da II^a a 1\$800 [1\$600] e 3 [4] *l.* da III^a a 1\$200 [1\$100].
 a) Quantos litros de cada qualidade entram no *HL*. da mistura? b) Qual é o valor do *HL*? c) Quanto custará 1 *l.* da mistura? d) Quanto vale a porção de vinho de cada qualidade que entra na mistura? e) Quanto % de cada qualidade contem a mistura? f) Como precisa vender 1 *l.*, querendo ganhar 12½ [20] %?
- 37) [38] Um negociante tem 3 qualidades de fumo; uma de 2\$300 [2\$600], outra de 3\$000 [3\$400] e a terceira de 3\$700 [3\$800] o *Kg.* Quer preparar uma mistura de 84 [100] *Kg.* a 2\$700 [3\$000]. a) Quantos *Kg.* de cada qualidade são precisos para estes 84 [100] *Kg.*, querendo tomar da II^a e III^a qualidades o mesmo numero de *Kg.*? b) Que porção de cada qualidade entra num *Kg.* da mistura?
- 39) [40] Um individuo comprou café de 4 typos, pagando respectivamente pela arroba: 13\$200, 12\$600, 11\$900 e 11\$600 [12\$800, 12\$400, 11\$800 e 11\$400]. Quer preparar 92 [100] arrobas a 12\$000. Quanto entra de cada qualidade na mistura, tomando a mesma quantidade dos cafés de 13\$200 e 12\$600 [12\$800 e 12\$400] e a mesma quantidade dos de 11\$900 e 11\$600 [11\$800 e 11\$400]?

- 41) [42] A um negociante restavão 40 [75] *Kg.* de assucar a 340 [320] réis e 25 [60] *Kg.* a 360 [340] réis o *Kg.* Comprou uma certa porção a 280 [270] réis que quer juntar ao que tinha de resto, de maneira que a mistura custe 300 réis o *Kg.* Quantos *Kg.* a 280 [270] réis precisa tomar?
- 43) [44] Uma pessoa mistura:
 1,5 *l.* de mercadoria a 1\$200 [1,5 *l.* a 2\$000]
 com 2,5 *l.* " " " 1\$800 [2 *l.* " 2\$500]
 e " 3,4 *l.* " " " 2\$500 [2,5 *l.* " 2\$800]
 Quer aproveitar 75 [90] *l.* a 1\$200 [2\$000] na mistura.
 a) Quantos *l.* a 1\$800 [2\$500] e a 2\$500 [2\$800] precisa tomar? b) Quanto custará um *HL* da mistura? c) Por quanto deverá vender 1 *l.*, querendo ganhar 20%?

II. Ligas.

Muitos metaes no estado natural não servem para a manufactura. O ouro puro, por exemplo, é tão molle que os artigos com elle assim feitos, são de pouca duração. Por isso, e para lhe dar lhe certas propriedades, juntam-se dous ou mais metaes por meio de fusão e esta reunião de metaes chama-se *liga*. Ao ouro e á prata junta-se ordinariamente cobre. Para poder avaliar tal liga, precisa-se saber qual é a quantidade de ouro ou de prata, e qual a quantidade de cobre existentes. Supponha-se que a liga tenha 1000 partes de peso; o numero de partes de ouro puro, ou de prata pura, que se acha naquelas mil, denomina-se *titulo* ou *toque* da liga. Assim, diz-se que uma liga de ouro ou de prata tem 800 millesimos de toque (0,800), quando em 1000 *g.* da liga, 800 *g.* são de ouro puro, ou de prata pura e 200 *g.* de cobre, ou de outro metal. Do mesmo modo diz-se que um objecto de ouro ou de prata

tem 0,825 de titulo, quando em 1000 g. encontram-se 825 g. de ouro puro ou de prata pura, e 175 g. de outro metal. Vê-se, pois, que neste modo de avaliação, o ouro (prata) na sua maior pureza, é designado pelo toque de 1000 millesimos.

Ha ainda outro modo de avaliação:

por quilates, grãos e oitavas. O ouro puro é de 24 quilates, isto é, **24 quilates correspondem a 1000 millesimos**. O quilate tem 4 grãos, e o grão, 8 oitavas. Ouro de 18 quilates é o que contem 18 partes de ouro e 6 partes de outro metal etc.

A pureza da prata avalia-se por dinheiros, grãos e quartos. A prata pura é de 12 dinheiros, isto é, **12 dinheiros correspondem a 1000 millesimos**. O dinheiro tem 24 grãos e o grão, 4 quartos. Prata de 9 dinheiros é a que contem 9 partes de prata e 3 partes de outro metal etc.

Segundo o exposto, facil é converter quilates e dinheiros em millesimos, e vice-versa.

1º Exemplo: Qual é o titulo, expresso em millesimos, de uma barra de ouro de 18 quilates, 3 grãos e 5 oitavas?

Reduzimos primeiramente 18 quilates, 3 grãos e 5 oitavas a 605 oitavas e igualmente 24 quilates a 768 oitavas.

24 quil. = 768 oitavas corresp. a 1000 millesimos

$$\begin{array}{ccccccc} 605 & & & & & & \\ & \text{''} & & \text{''} & & \text{''} & \text{X} & & \text{''} \\ \hline 768 : 605 :: 1000 : x \\ x = \frac{605 \times 1000}{768} = \underline{\underline{0,788.}}^*) \end{array}$$

*) As fracções de millesimos menores que 1/2, são desprezadas, as iguaes ou maiores do que 1/2 augmentam os millesimos de uma unidade.

2º Exemplo: Calcular o toque em dinheiros, grãos e quartos de uma barra de prata de 860 millesimos.

Temos: 1000 milles. corresp. a 12 dinh.

$$\begin{array}{ccccccc} 860 & & & & & & \\ & \text{''} & & \text{''} & & \text{''} & \text{X} & & \text{''} \\ \hline 1000 : 860 :: 12 : x \end{array}$$

$$x = \frac{860 \times 12}{1000} = 10,32 \text{ dinh.}$$

$$\left. \begin{array}{l} 0,32 \text{ dinh.} = \frac{0,32 \times 24 \text{ grãos}}{7,68} \\ 0,68 \text{ grãos} = \frac{0,68 \times 4 \text{ quartas}}{2,72} \end{array} \right\} = \underline{\underline{10 \text{ dinh. } 7 \text{ grãos e } 3 \text{ quart.}}}$$

Exercícios:

- 45) Quantas partes de cobre contem uma liga de ouro cujo titulo é a) 0,800 b) 0,750 c) 0,917 d) 0,675?
 - 46) Avaliar por millesimos os toques de: a) 15 quilates b) 20 quil. c) 17 quil. 1/4 d) 11 dinh. e) 8 dinh. f) 9 dinh. 16 grãos g) 16 quil. 3 grãos 5 oitav. h) 18 quil. e 7 oitav. i) 21 quil. 2 grãos 3 oitav. k) 9 dinh. 3 quart. l) 11 dinh. 17 grãos 1 quart. m) 10 dinh. 21 grãos e 2 quart.
 - 47) As moedas de ouro brasileiras, portuguezes e inglezes têm o mesmo toque, a saber 22 quilates. A quantos millesimos correspondem?
 - 48) Avaliar por quilates, grãos e oitavas os titulos de: a) 0,875 b) 0,750 c) 0,650 d) 0,900 e) 0,836.
 - 49) Exprimir em dinheiros, grãos e quartos os toques de: a) 0,750 b) 0,600 c) 0,725 d) 0,857 e) 0,915.
 - 50) Calcular o peso de ouro que se acha nas seguintes ligas: a) 80 g. do titulo de 0,750 b) 150 g. do titulo de 0,820 c) 175 g. " " " 0,900 d) 200 g. " " " 0,640 e) 680 g. " " " 0,680 f) 730 g. " " " 0,917
- Em 1000 g. ha 750 g. de ouro puro; em 50 g. ha x etc.

51) Quantos g. de ouro puro contem uma moeda brasileira

de 20\$000, sabendo-se que pesa 17,930 g. do toque de 0,917?

- 52) O titulo da libra esterlina é de 22 quilates, e o peso de 7,981 g. Qual será a quantidade de ouro necessaria para se cunharem 250 libras?
- 53) O toque de 1 Kg. de ouro (prata) puro é 1,000. Qual será o titulo da liga que se obtém, fundindo-se 1 Kg. de ouro puro com 1 Kg. de cobre; ou que quantidade de ouro contem 1 Kg. d'esta liga? Qual será o titulo de uma liga composta de 1 Kg. de prata e de 9 Kg. de cobre?
- 54) Achar o toque das ligas compostas de:
- | | |
|-----------------------------------|-------------------------------------|
| a) 84 g. de ouro e 16 g. de cobre | b) 132 g. de prata e 44 g. de cobre |
| c) 39 g. " " 11 g. " " | d) 162 g. " " 78 g. " " |
| e) 9 g. " " 1 g. " " | f) 214,5 g. " " 45,5 g. " " |
- Em (84 + 16) g. = 100 g. de liga ha 84 g. de ouro; em 1000 g. ha x.
1,471 g. de cobre. Pedese o titulo d'esta moeda.
- 55) A corôa portugueza compõe-se de 16,264 g. de ouro e 1,471 g. de cobre. Pedese o titulo d'esta moeda.
- 56) [57] Um ourives fez um objecto de ouro pesando 320 g. [450]. Além do ouro empregou 80 g. [171] de cobre. Qual será o toque do objecto?
- 58) Um dollar tem 1,67 g. de peso, e contem 0,167 g. de cobre. Achar o titulo d'esta moeda.
- 59) [60] Um copo de prata do toque de 0,750 [0,625] tem o peso de 430 [640] g. Quantos g. de cobre contem?
- 61) Achar o peso das seguintes ligas, sabendo que existem:
- | |
|--|
| a) 135 g. de ouro puro e que o titulo é de 0,750 |
| b) 160 g. " " " " " " " " 0,640 |
| c) 63 g. " " " " " " " " 0,720 |
- 750 g. de ouro corresp. a 1000 g. da liga; 135 g. de ouro corresp. a x.
- 62) As moedas de ouro allemãs têm o titulo de 0,900 e a peça de 20 marcos contem 7,169 g. de ouro puro. Calcular o peso bruto de uma moeda de 20 marcos.
- 63) O toque das moedas de prata brasileiras é de 0,917. A peça de 2\$000 contem 23,383 g. de prata. Qual será o peso bruto d'esta moeda?

- 64) Uma moeda de 20 francos pesa 6,4516 g. e seu titulo é de 0,900. Quantas peças se podem cunhar com 29,0322 Kg. de ouro puro?
- 65) Um ourives faz uma pulseira com 15 dollars que comprou ao cambio de 12 d. Quanto custará ella augmentado o seu valor metallico de 30% pela mão de obra?
- 66) Quer-se trocar 1440 g. de prata do titulo de 11 dinheiros por ouro do toque de 0,600. Quantos g. de ouro obtêm-se, desprezando o cobre da liga, e considerando que o ouro puro vale 15½ vezes mais do que a prata pura?

Quasi todos os problemas sobre as ligas são muito semelhantes aos de mistura. Aos problemas para achar o preço de uma mistura de generos de diversas qualidades, correspondem os problemas para achar o toque da barra, que se obtém pela fusão de differentes barras de ouro ou de prata conhecendo-se-lhes os titulos e os pesos.

Exemplo: Derreteram-se juntamente 3 barras de prata: uma de 1,4 Kg. do titulo de 0,900; outra de 0,48 Kg. de 0,625 e a terceira de 2,6 Kg. de 0,750. Qual será o toque da liga d'estas barras?

Em 1,4 Kg. de 0,900 ha $0,900 \times 1,4 = 1,26$ Kg. de prata

" 0,48 " " 0,625 " $0,625 \times 0,48 = 0,3$	" " " "
" 2,6 " " 0,750 " $0,750 \times 2,6 = 1,95$	" " " "
" 4,48 " de liga haverá	3,51 " " " *)
" 1 " " " " "	3,51 " " " "
	4,48 " " " "

= 0,783 Kg. de prata pura.

*) Sendo o toque da 1ª barra = 0,900, esta terá em cada Kg. 0,900 Kg. de prata pura, logo em 1,4 Kg. terá $0,9 \times 1,4 = 1,26$ Kg. — Do mesmo modo conclue-se que haverá na:

IIª barra : $0,625 \times 0,48 = 0,3$ Kg. de prata

IIIª " : $0,750 \times 2,6 = 1,95$ Kg. " "

No peso total da liga de 4,48 Kg. haverá: $1,26 + 0,3 + 1,95 = 3,51$ Kg. de prata pura.

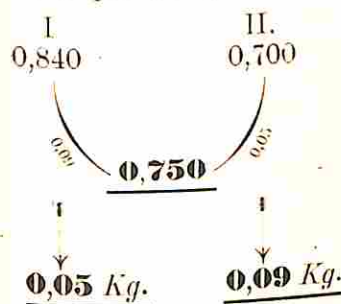
Exercícios :

- 67) Derreteram-se 12 Kg. de prata do título de 0,625, com 8 Kg. de 0,750. Achar o toque da liga.
- 68) Fundiu-se uma barra de ouro de 1,8 Kg. de peso do toque de 0,750 com outra de 1,2 Kg. de 0,580. Qual será o título d'esta liga?
- 69) Achar o título de uma liga de ouro formada de 160 g. de 14 quilates, 90 g. de 17 quilates, 145 g. de 22 quilates e 85 g. de ouro puro.
- 70) Fundiram-se juntamente 4 barras de prata: a primeira de 740 g. de peso, com 0,820 de título; a segunda de 1,24 Kg. com 0,750; a terceira de 2,180 Kg. com 0,640; e a quarta de 700 g. de prata pura. Pede-se o toque d'esta liga.
- 71) De que título será uma liga de 100 dollars com 33 g. de cobre, sabendo-se que o peso de um dollar é de 1,67 g. do toque de 0,900?
- 72) Fundiram-se conjuntamente: 1,450 Kg. de prata do toque de 0,740; 2,260 Kg. de 0,850, com 840 g. de cobre. Qual é o título d'esta liga?
- 73) Qual é o toque respectivo a cada metal de uma liga obtida pela fundição de 140 g. de ouro puro, 40 g. de prata pura e 20 g. de cobre?

Aos problemas para calcular em que proporção se devem misturar generos de diferentes preços para obter-se um preço dado, correspondem, na liga, os problemas para calcular as porções que se devem tomar de diversas barras de títulos conhecidos, para com ellas formar uma nova liga de toque dado.

Exemplo: Uma pessoa tem 2 barras de ouro, cujos toques são 0,840 e 0,700. Quer fundir uma terceira barra, cujo título seja 0,750. a) Em que razão deve ligar as 2 primeiras barras? b) Que

porção da segunda barra deve ligar com 0,340 Kg. da primeira, querendo obter uma liga do mesmo toque de 0,750? c) Que porção da primeira barra e que porção da segunda entra numa liga de 0,560 Kg. do toque de 0,750?



a) Num Kg. da primeira barra acham-se 0,840-0,750 = 0,09 Kg. de ouro puro mais do que num Kg. da barra pedida.

Num Kg. da segunda barra acham-se 0,750 - 0,700 = 0,05 Kg. de ouro

puro menos do que num Kg. da terceira barra. Para que o excesso compense a deficiencia, precisa ligar 0,05 Kg. da Iª barra com 0,09 Kg. da IIª, porque então terá ouro puro para mais: 0,05 Kg. × 0,09 e para menos: 0,09 Kg. × 0,05

Vê-se, pois, que uma liga effectuada nesta razão, dará outra do título pedido de 0,750.

Prova: 0,05 Kg. do toque de 0,840 contem 0,05 × 0,840 = 0,042 Kg. de ouro puro

0,09 " " " " 0,700	0,09 × 0,700 = 0,063 " " " "
0,14 " da liga contem	0,105 " " " "
	0,140 = 0,750.

b) Do que se acaba de ver, verifica-se que se devem ligar: 0,05 Kg. da Iª barra com 0,09 Kg. da IIª ou 5 " " " " " 9 " " " " ou ainda: 1 " " " " " 9 × 0,340 " " portanto: 0,340 " " " " = 0,612 Kg.

c) Conforme a obtem-se uma liga do titulo de 0,750, fundindo-se 0,05 Kg. da primeira barra com 0,09 Kg. da segunda. Em $0,05 + 0,09 = 0,14$ Kg. da liga temos, pois, 0,05 Kg. da I^a barra e 0,09 Kg. da II^a e, por conseguinte, na liga de 0,560 Kg. entrarão:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{0,560 \times 0,05}{0,14} = \underline{0,2} \text{ Kg. da I}^{\text{a}} \text{ barra} \\ \frac{0,560 \times 0,09}{0,14} = \underline{0,36} \text{ " " II}^{\text{a}} \text{ " } \end{array} \right.$$

Por estes exemplos vê-se que os problemas de liga se resolvem do mesmo modo que os de mistura; e, por isso, deixamos de dar mais explicações. Lembraremos sómente ao alumno que o toque do ouro puro ou prata pura é igual a 1,000, e o de cobre igual a 0.

Exercícios:

- 74) Um ourives quer juntar a 3 Kg. de prata do toque de 0,930, uma porção do titulo de 0,630 para obter prata do toque de 0,750. Achar o peso d'aquella porção.
- 75) Tenho duas barras de ouro cujos titulos são 0,900 e 0,750. Quantos g. da segunda barra preciso ligar com 15 g. da primeira para obter uma liga que tenha 0,840 de toque?
- 76) Que porção de prata pura se deve ligar a uma barra com $\frac{3}{4}$ do Kg. de peso e 0,640 de titulo para que se tenha prata de 0,800 de toque?
- 77) Um ourives tem duas barras de prata, cujos titulos são 0,560 e 0,840. Quer fundir um copo com 350 g. de peso e de 0,760 de toque. Quanto deve tomar de cada uma das duas barras?
- 78) Que porção de ouro puro se deve ligar a 75 g. de ouro do toque de 0,550, para eleva-lo ao titulo de 0,750?

- 79) Que porção de cobre se deve ligar a uma barra de ouro com o peso de 0,42 Kg. e do titulo de 0,900 para se obter uma barra do toque de 0,700?
- 80) Que porção de cobre precisamos juntar a 12 Kg. $\frac{1}{2}$ de prata, do titulo de 0,875, para obtermos prata de 0,625 de toque?
- 81) Um ourives tem 3 barras de ouro, cujos toques são 0,650, 0,800 e 0,860. Quer fazer uma barra com o peso de 360 g. e cujo titulo seja 0,750. Que porção de cada uma das 3 barras precisa tomar?
- 82) Quanto deve elle tomar das 3 barras para que a nova liga tenha o peso de 810 g.?

§. 34

Potencias e Raizes.

I. Potencias:

Potencia de um numero é o producto de dous ou mais factores iguaes a esse numero. Quando são 2 os factores iguaes, o producto chama-se segunda potencia, quando são tres, terceira potencia e assim por diante; por conseguinte:

A 1 ^a potencia de 3 será	3	= 3	escripto 3.
" 2 ^a " " "	3×3	= 9	" 3 ² .
" 3 ^a " " "	$3 \times 3 \times 3$	= 27	" 3 ³ .
" 4 ^a " " "	$3 \times 3 \times 3 \times 3$	= 81	" 3 ⁴ .
etc.	etc.		etc.

O pequeno numero escripto acima e a direita do factor, denomina-se expoente e indica quantas vezes o factor entra no producto, isto é, o grão da potencia. Pode-se ler uma potencia de duas maneiras:

7^5 , por exemplo, lê-se: 7 elevado a 5, ou quinta potencia de 7. *A segunda potencia tem tambem o nome de quadrado e a terceira o de cubo.* Assim 5^2 lê-se: 5 elevado ao quadrado, ou o quadrado de 5 e 5^3 diz-se 5 ao cubo, ou o cubo de 5.

Exercicios:

- 1) Quaes são os quadrados de todos os numeros de 1 até 12?
- 2) Calcular e decorar os cubos dos numeros de 1 até 12.
- 3) Ler e calcular: a) 13^2 b) 16^3 c) 4^6 d) 7^4 e) 3^8 f) 10^9
 g) 9^5 h) 2^{10} i) $(\frac{1}{2})^2$ k) $(\frac{2}{3})^3$ l) $(\frac{3}{5})^4$ m) $(\frac{1}{2})^{58}$
 n) $(\frac{2}{4})^3$ o) $(\frac{6}{3})^6$ p) $0,5^3$ q) $0,034^2$ r) $0,01^5$ s) $1,02^4$
 t) $0,25^6$.

Quando temos de formar o quadrado da somma de 2 numeros, $(5 + 2)$ por exemplo, devemos multiplicar $(5 + 2)$ por si mesmo, logo teremos $(5 + 2)(5 + 2)$. Segundo a definição da multiplicação, multiplicar $(5 + 2)$ por $(5 + 2)$ quer dizer repetir $(5 + 2)$ como parcella $(5 + 2)$ vezes, isto é repetir $(5 + 2)$ primeiro 5 vezes e depois mais 2 vezes ou:

$$(5 + 2)^2 = (5 + 2)5 + (5 + 2)2 =$$

$$5 + 2 + 5 + 2 + 5 + 2 + 5 + 2 + 5 + 2 \quad (5 \text{ vezes})$$

$$+ 5 + 2 + 5 + 2 \quad (2 \text{ vezes})$$

Na primeira linha tanto 5 como 2 são repetidos, como parcella, 5 vezes; por conseguinte $= 5 \times 5 + 2 \times 5$. Na segunda linha 5 e 2 apparecem, como parcella, 2 vezes ou $= 5 \times 2 + 2 \times 2$. Temos pois:

$$(5 + 2)^2 = 5 \times 5 + 2 \times 5 + 5 \times 2 + 2 \times 2 \text{ e sendo}$$

$$2 \times 5 = 5 \times 2$$

$$= 5^2 + 2(5 \times 2) + 2^2. \text{ logo:}$$

*) Os numeros mixtos reduzem-se primeiramente a fracções.

I Theorema: O quadrado de uma somma de dois numeros é igual ao quadrado do primeiro mais duas vezes o producto do primeiro multiplicado pelo segundo, mais o quadrado do segundo.*)

Por meio d'este theorema, pode-se achar o quadrado d'um numero composto, por exemplo:

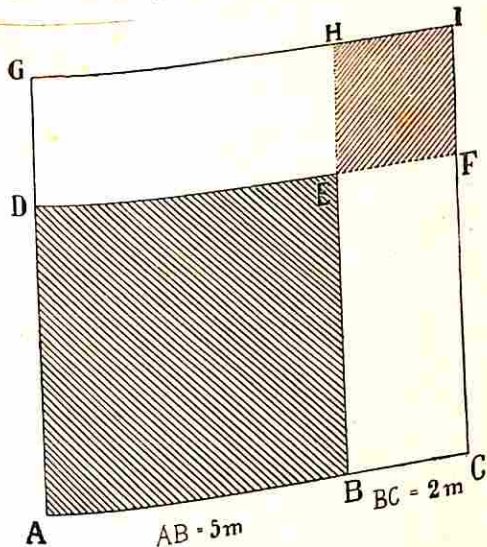
$$41^2 = (40 + 1)^2 = 40^2 + 2 \times 40 \times 1 + 1^2 =$$

$$1600 + 80 + 1 = 1681.$$

Exercicios:

- 4) Achar por meio do theorema I: a) 21^2 b) 31^2 c) 51^2
 d) 61^2 e) 71^2 f) 81^2 g) 91^2 h) 22^2 i) 43^2 k) 73^2 l) 101^2
 m) 1001^2 .

Para o cubo da somma de 2 numeros ha tambem um theorema de grande importancia. Formemos o cubo de $(7 + 4)$, por exemplo:



*) É facil reconhecer a exactidão d'este theorema por meio de construcção graphica. Seja $A B = 5 m$ e $B C = 2 m$, e construímos os 2 quadrados por cima de $A B$ e de $A C$. Então o quadrado $A C I G = (5 + 2)^2$ é igual ao:

Quadrado	$A B E D = 5^2 m^2 = 25 m^2$, mais o
Rectangulo	$B C D E = 2 \times 5 = 10$ " "
	$D E F G = 5 \times 2 = 10$ " "
Quadrado	$E F G H = 2^2 = 4$ " "
	$= 40 m^2$

$$\begin{aligned}
(7+4)^3 &= (7+4)(7+4)(7+4) = (7+4)^2(7+4) \\
&= (7^2+2 \times 7 \times 4+4^2)(7+4) \\
&= (7^2+2 \times 7 \times 4+4^2)7+(7^2+2 \times 7 \times 4+4^2)4 \\
&= 7^3+2 \times 7^2 \times 4+4^2 \times 7 \\
&\quad + 7^2 \times 4+2 \times 4^2 \times 7+4^3 \\
&= \underline{7^3+3 \times 7^2 \times 4+3 \times 4^2 \times 7+4^3}. \quad \text{logo:}
\end{aligned}$$

II Theorema: O cubo de uma somma de 2 numeros é igual ao cubo do primeiro, mais 3 vezes o quadrado do primeiro multiplicado pelo segundo, mais 3 vezes o primeiro multiplicado pelo quadrado do segundo, mais o cubo do segundo.

Para se achar, por meio d'este theorema, o cubo de um numero composto, tem-se:

$$\begin{aligned}
91^3 &= (90+1)^3 = 90^3+3 \times 90^2 \times 1+3 \times 90 \times 1^2+1^3 \\
&= 729000+24300+270+1 = \underline{753571}.
\end{aligned}$$

Exercicios:

- 5) Calcular do mesmo modo: a) 21^3 b) 31^3 c) 41^3 d) 51^3
e) 61^3 f) 71^3 g) 81^3 h) 12^3 i) 23^3 k) 101^3 l) 102^3 .

II. Raizes: especialmente a raiz quadrada.

Muitas vezes conhecemos a potencia de um numero x, e seu expoente, e queremos achar x, por exemplo $x^3 = 125$. Então procuramos o numero x, que, elevado á terceira potencia, produza 125. O numero x chama-se **raiz terceira** de 125 e o expoente 3 de x é o **gráo** ou o **indice** da raiz. A operação para procurar a raiz de um numero denomina-se **extracção da raiz d'esse numero** e indica-se pelo signal $\sqrt{\quad}$, chamado **radical**. O numero dado escreve-se debaixo do signal e o gráo ou indice por cima. O nosso exemplo se escreverá, por conseguinte: $x = \sqrt[3]{125} = 5$, visto que $5^3 = 125$.

Do mesmo modo será a **raiz quarta de 16** aquelle numero x, que, elevado á quarta potencia, dará 16; escripto $x = \sqrt[4]{16} = 2$, visto que $2^4 = 16$. A segunda raiz dá-se tambem o nome de **raiz quadrada**, indicada simplesmente $\sqrt{\quad}$ e á terceira o de **raiz cubica**.

Exercicio: Achar: $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{49}$, $\sqrt{36}$, $\sqrt{16}$, $\sqrt{64}$,
 $\sqrt{25}$, $\sqrt{81}$, $\sqrt{100}$, $\sqrt{1600}$, $\sqrt{4900}$, $\sqrt{10000}$.

Nem todos os numeros são quadrados, porque, sendo $\sqrt{4} = 2$ e $\sqrt{9} = 3$, é claro que $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, e $\sqrt{8}$ se acham entre 2 e 3, isto é, não podem ser numeros inteiros. etc.

Formando os quadrados de todos os numeros menores que 10:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Numeros:	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrados:	1	4	9	16	25	36	49	64	81

vê-se que os quadrados dos numeros simples têm ou um ou dous algarismos, ou por outra, **que as raizes quadradas de todos os numeros de 1 ou 2 algarismos terão um só algarismo.**

Considerando os numeros de 2 algarismos e seus quadrados:

Numeros:	10 (o menor)	...	99 (o maior)
Quadrados:	100	...	9801

vê-se, que as raizes quadradas de todos os numeros de 3 e 4 algarismos têm sómente 2 algarismos, porque $100^2 = 10000$ (5 algar.).

Do mesmo modo conclue-se que tendo o quadrado:

$\left\{ \begin{array}{l} 5 \text{ ou } 6 \text{ algarismos, sua raiz terá } 3 \text{ algarismos} \\ 7 \text{ " } 8 \text{ " " " " } 4 \text{ " } \\ 9 \text{ " } 10 \text{ " " " " } 5 \text{ " } \\ \text{etc.} \quad \text{etc.} \quad \text{etc.} \end{array} \right.$

D'isto se segue que facilmente é possível saber quantos algarismos terá a raiz de um numero, dividindo-se este, da direita para a esquerda, em classes de 2 algarismos e o numero d'estes classes nos indicará o numero dos algarismos da raiz. Por exemplo as raizes de:

$\left\{ \begin{array}{l} 1 \ 51 \ 29 \text{ e } \ 64 \ 48 \ 09 \text{ terão } 3 \text{ algarismos.} \\ 1 \ 52 \ 27 \ 56 \text{ " } 36 \ 04 \ 80 \ 16 \text{ " } 4 \text{ " } \text{etc.} \end{array} \right.$

a) Extração da raiz quadrada de um numero de 3 ou 4 algarismos.

Para extrahir a raiz quadrada de um numero de 3 ou 4 algarismos, dividimol-o da direita para a esquerda, em classes de 2 algarismos, e, obtendo assim 2 classes, vemos que a sua raiz deverá conter dezenas e unidades. Se o numero fôr quadrado perfeito, compôr-se-ha 1º) do quadrado das dezenas da raiz 2º) do dobro do producto das dezenas pelas unidades 3º) do quadrado das unidades.

Exemplo:

$20^2 = \sqrt{\begin{array}{r} 6 \ 25 \\ 4 \ 00 \\ \hline 2 \ 25 \\ 2 \ 00 \\ \hline 25 \\ 25 \end{array}} = 20 + 5$ $2 \times 20 \times 5 = 200$ $5^2 = 25$	<p>Operação abreviada.</p> $\sqrt{6 \ 25} = 25.$ $2^2 = 4$ $2 \times 2 \times 5 = 20$ $5^2 = 25$
--	---

Como ha só 6 centenas, e, como nestas está contido o quadrado das dezenas, a raiz não poderá ter mais de 2 dezenas = 20 e 20² = 400. Tirando estes 400 do numero dado, ficarão 225. Nesta differença está con-

tido o dobro do producto das dezenas pelas unidades e mais o quadrado das unidades. Como já conhecemos o numero das dezenas, que é 2 = 20, o dobro será 40, e, dividindo os 225 por estes 40, obtemos o numero das unidades, que será = 5 e sobram 25, quadrado das 5 unidades; a raiz é portanto 20 + 5 = 25.

Exercícios:

Extrahir a raiz quadrada dos seguintes numeros:

- | | | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 6) 256 | 7) 441 | 8) 2116 | 9) 3249 | 10) 8464 |
| 11) 3844 | 12) 7056 | 13) 784 | 14) 5476 | 15) 1156 |
| 16) 9801 | 17) 1521 | 18) 9216 | 19) 676 | 20) 361 |
| 21) 4225 | 22) 2809 | 23) 7569 | 24) 1089 | 25) 4761 |
| 26) 6561 | 27) 324 | 28) 841 | 29) 6084 | 30) 2116 |

b) Extração da raiz quadrada de um numero de mais de 4 algarismos.

Exemplo:

$600^2 = \sqrt{\begin{array}{r} 41 \ 60 \ 25 \\ 36 \ 00 \ 00 \\ \hline 5 \ 60 \ 25 \\ 4 \ 80 \ 00 \\ \hline 80 \ 25 \\ 16 \ 00 \\ \hline 64 \ 25 \\ 64 \ 00 \\ \hline 25 \\ 25 \end{array}} = 600 + 40 + 5 = \underline{645}$ $2 \times 600 \times 40 = 48000$ $40^2 = 1600$ $2 \times 640 \times 5 = 6400$ $5^2 = 25$	<p>Operação abreviada:</p> $\sqrt{41 \ 60 \ 25} = \underline{645}$ $6^2 = 36$ $2 \times 6 \times 4 = 48$ $4^2 = 16$ $2 \times 64 \times 5 = 640$ $5^2 = 25$
--	--

Em primeiro lugar dividimos o numero dado em classes de 2 algarismos 41 60 25, e isso nos mostra que a raiz tem 3 algarismos, isto é, conterá centenas, dezenas e unidades.

O quadrado das centenas está contido nos 41 dezenas de milhar. O quadrado perfeito mais proximo é 360000 e a raiz quadrada de 360000 é 600. Subtrahindo 600² = 360000 do numero dado, ficam 50025.

Nesta differença está contido o dobro do producto das centenas pelas dezenas e mais o quadrado das dezenas. Como já conhecemos um factor do producto, a saber 6 centenas = 600, o dobro será 2 × 600 = 1200, dividimos simplesmente 50025 por 1200 para obter o outro factor, isto é, o numero das dezenas que é 4 dezenas = 40. Em fim tiramos o quadrado das dezenas 40² = 1600. Para achar as unidades da raiz, consideramos as centenas mais as dezenas como um numero

só = 640 e sejam x as unidades ainda desconhecidas. Agora vê-se que no resto 6425 ainda está contido $(640 + x)^2$ menos 640^2 , que acabamos de extrahir, isto é. $2 \times 640 \times x$ mais x^2 . Dividindo, por conseguinte, 6425 por $2 \times 640 = 1280$, acha-se x, que é 5, e sobram 25 que é justamente o quadrado das 5 unidades. A raiz pedida é pois 645.

Exercícios:

Extrahir a raiz quadrada dos seguintes numeros:

- | | | | |
|-----------------------|-----------------------|---------------------|-------------------|
| 31) 15129 | 32) 54756 | 33) 385641 | 34) 42436 |
| 35) 103684 | 36) 552049 | 37) 92416 | 38) 664225 |
| 39) 60516 | 40) 362404 | 41) 151321 | 42) 499849 |
| 43) 204304 | 44) 37636 | 45) 644809 | 46) 288369 |
| 47) 931225 | 48) 811801 | 49) 236196 | 50) 269361 |
| 51) 1522756 | 52) 9126441 | 53) 6115729 | |
| 54) 17665209 | 55) 41396356 | 56) 4020025 | |
| 57) 4601025 | 58) 22287841 | 59) 36048016 | |
| 60) 5499025 | 61) 2735716 | 62) 49014001 | |
| 63) 69522244 | 64) 12510369 | 65) 4120900 | |
| 66) 29408929 | 67) 82119844 | 68) 23609881 | |
| 69) 64032004 | 70) 72335025 | 71) 9162729 | |
| 72) 152399025 | 73) 1866585616 | | |
| 74) 5476296004 | 75) 8101440064 | | |

c) Extracção da raiz quadrada de uma fracção.

Elevar uma fracção ordinaria ao quadrado quer dizer multiplicar-a por si mesmo, isto é, o numerador pelo numerador e o denominador pelo denominador. D'isto se segue que para achar a raiz quadrada d'uma fracção, extrahe-se a raiz de ambos os termos e, quando os 2 termos ou o denominador não são quadrados, torna-se este quadrado.

Um numero mixto se transforma primeiramente em fracção.

Exercícios:

Qual é a raiz quadrada de:

- | | | | |
|--------------------------------|--------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| 76) $\frac{86}{49}$ | 77) $\frac{64}{81}$ | 78) $\frac{9}{100}$ | 79) $\frac{169}{289}$ |
| 80) $\frac{441}{625}$ | 81) $\frac{529}{1024}$ | 82) $\frac{841}{1296}$ | 83) $\frac{729}{1681}$ |
| 84) $\frac{2025}{3136}$ | 85) $\frac{3721}{7396}$ | 86) $6\frac{1}{4}$ | 87) $14\frac{11}{25}$ |
| 88) $19\frac{39}{49}$ | 89) $84\frac{1}{36}$ | 90) $93\frac{1}{36}$ | 91) $154\frac{23}{49}$ |

Quando se tem de extrahir a raiz quadrada de uma fracção decimal cujo numero de algarismos decimaes é par, por exemplo:

$$\sqrt{840,3762} = \sqrt{\frac{8403762}{10000}} = \frac{\sqrt{8403762}}{100}$$

extrahe-se a raiz do numero inteiro 8403762 e divide-se depois o resultado por 100, isto é, separa-se no resultado, com a virgula, metade do numero de algarismos decimaes.

Se o numero de algarismos decimaes fôr impar, junta-se á direita um zero, o que não altera o valor, e procede-se como acima. Temos, pois, a regra: Para extrahir a raiz quadrada de um numero decimal, torna-se par o numero dos algarismos decimaes e extrahe-se então a raiz como se fosse numero inteiro; na raiz assim obtida, separa-se, com a virgula, metade do numero dos algarismos decimaes, que tem o numero dado.

Exercícios:

Extrahir a raiz quadrada dos seguintes numeros?

- | | | | |
|----------------------|----------------------|------------------------|----------------------|
| 92) 0,36 | 93) 0,2401 | 94) 0,3844 | 95) 7,29 |
| 96) 21,1600 | 97) 0,56250 | 98) 73,96 | 99) 9,4249 |
| 100) 0,8836 | 101) 88,36 | 102) 0,004489 | 103) 0,043264 |
| 104) 18,14760 | 105) 0,000144 | 106) 144,072009 | 107) 9,030025 |

d) Extracção da raiz quadrada de um numero qualquer.

Como já sabemos, nem todos os numeros são quadrados. Sendo $2^2 = 4$ e $3^2 = 9$, vê-se, que $\sqrt{7}$, por exemplo, se acha entre 2 e 3 etc. A raiz quadrada de taes numeros só se pode calcular approximadamente, considerando-os como numeros decimaes,

juntando á direita tantos zeros quantos forem necessarios para a approximação pedida. Querendo, por exemplo, achar $\sqrt{7}$ com 3 algarismos decimaes, juntamos 6 (o dobro) zeros:

$$\begin{array}{r} \sqrt{7,00\ 00\ 00} = \underline{\underline{2,645}} \\ 2^2 = 4 \\ \underline{30} \quad 4 \\ 2 \times 2 \times 6 = 24 \\ \underline{60} \quad 2 \times 264 \times 5 = 2640 \\ 6^2 = 36 \\ \underline{240} \quad 52 \quad 5^2 = 25 \\ 2 \times 26 \times 4 = 208 \\ \underline{320} \\ 4^2 = 16 \end{array}$$

Considerando que o quarto algarismo decimal será maior do que 5, juntamos no terceiro mais uma unidade e o resultado mais proximo será: **2,646**. Prova: $2,646 \times 2,646 = 7,001316$.

Exercicios:

Extrahir a raiz quadrada dos seguintes numeros até 3 algarismos decimaes.

108) 12	109) 46	110) 92	111) 137
112) 250	113) 360	114) 1000	115) 1901
116) 5,89	117) 0,6854	118) 0,327	119) 17,468
120) 34,1	121) 8,003	122) 80,03	123) 800,3
124) $\frac{3}{7}$	125) $\frac{9}{11}$	126) $26\frac{2}{3}$	127) $10\frac{5}{12}$

III. Raiz cubica.

Ao producto de 3 factores iguaes, chama-se cubo; um dos factores é a raiz cubica do numero.

Exercicio: Achar $\sqrt[3]{27}$, $\sqrt[3]{343}$, $\sqrt[3]{64}$, $\sqrt[3]{729}$, $\sqrt[3]{125}$,
 $\sqrt[3]{1000}$, $\sqrt[3]{512}$, $\sqrt[3]{8000}$, $\sqrt[3]{216000}$, $\sqrt[3]{1000000}$.

Formando os cubos de todos os numeros inteiros até 10, teremos o quadro seguinte:

Numeros:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cubos:	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

que mostra existirem entre 1 e 1000 sómente 10 cubos. Além d'isso, vê-se que os cubos dos numeros simples têm um, dous ou tres algarismos, ou por outra, **que as raizes cubicas de todos os numeros de 1, 2 ou 3 algarismos terão um só algarismo.**

Considerando os numeros de 2 algarismos e seus cubos:

Numeros:	10 (o menor)	99 (o maior)
Cubos:	1000	970299

vê-se, **que as raizes cubicas de todos os numeros de 4, 5 e 6 algarismos têm sómente 2 algarismos, porque $100^3 = 1000000$.** (7 algar.)

Do mesmo modo conclue-se que, tendo o cubo:

{	7, 8 ou 9 algarismos, sua raiz cubica terá 3 algar.
	10, 11 " 12 " " " " " 4 "
	13, 14 " 15 " " " " " 5 "
	etc. etc. etc.

Pode-se, pois, facilmente saber quantos algarismos terá a raiz cubica de um numero, dividindo-se este numero, da direita para a esquerda, em classes de 3 algarismos, e o numero d'estas classes nos indicará o numero dos algarismos da raiz. Por exemplo, as raizes cubicas de:

3 375, 54 872 e 753 571	terão 2 algarismos
9 663 597 e 281 011 375	" 3 "
etc. etc. etc.	

a) **Extracção da raiz cubica de um numero de 4, 5 ou 6 algarismos.**

Em primeiro lugar, divide-se o numero em classes de 3 algarismos, principiando da direita para a esquerda, e, obtendo-se 2 classes, conclue-se que a sua raiz conterà dezenas e unidades. Já sabemos que, quando a raiz tem 2 algarismos, o seu cubo compôr-se-ha a) do cubo das decenas b) do triplo do quadrado das dezenas multiplicado pelas unidades c) do triplo das dezenas multiplicado pelo quadrado das unidades e d) do cubo das unidades.

Estas partes devem ser extrahidas do cubo para achar-lhe a raiz.

Exemplo:

$$\begin{array}{r} \sqrt[3]{328\ 509} = 60 + 9 = \underline{69}. \\ 60^3 = \underline{216\ 000} \\ 3 \times 60^2 \times 9 = \underline{112\ 509} \quad 10800 \\ 3 \times 60 \times 9^2 = \underline{15\ 309} \\ 9^3 = \underline{729} \end{array}$$

Operação abreviada:

$$\begin{array}{r} \sqrt[3]{328\ 509} = \underline{69}. \\ 6^3 = \underline{216} \\ 3 \times 6^2 \times 9 = \underline{1125} \quad 108 \\ 3 \times 6 \times 9^2 = \underline{1530} \\ 9^3 = \underline{729} \end{array}$$

O cubo das dezenas deve estar contido nos 287 milhares e o maior cubo perfeito nelles contido, é 216000 que é 60³. Subtrahindo estes 216000 do numero dado, ficam 112509. Nesta differença estão contidos o triplo do quadrado das dezenas multiplicado pelas unidades, mais o triplo das dezenas multiplicado pelo quadrado das unidades e mais ainda o cubo das unidades; quantias estas que vamos tirar successivamente. Conhecendo já o numero das dezenas, que é 6 = 60, o quadrado será 60 × 60 = 3600, e o triplo 3 × 3600 = 10800. Este numero vem a ser um dos factores de um producto de 2 factores que está contido em 112509; portanto, dividindo 112509 por

10800, achamos o numero das unidades o que dá 9 e 10800 × 9 = 97200. Tiramos agora 97200 de 112509, ficam 15309 que contém ainda o producto 3 × 60 × 9² = 14580, mais o cubo de 9 = 729, quantias estas que, subtrahidas successivamente, darão 0. A raiz cubica de 328509 é, por conseguinte = 69.

Exercicios:

Extrahir a raiz cubica dos seguintes numeros:

128) 1728	129) 54872	130) 140608	131) 3375
132) 753571	133) 474552	134) 262144	135) 12167
136) 97336	137) 658503	138) 24389	139) 68921
140) 175616	141) 314432	142) 389017	143) 857375
144) 35937	145) 6859	146) 17576	147) 551368

b) **Extracção da raiz cubica de um numero de mais de 6 algarismos.**

Exemplo:

$$\begin{array}{r} \sqrt[3]{159\ 220\ 088} = 500 + 40 + 2 = \underline{542}. \\ 500^3 = \underline{125\ 000\ 000} \\ 3 \times 500^2 \times 40 = \underline{34\ 220\ 088} \quad 750000 \\ 3 \times 500 \times 40^2 = \underline{30\ 000\ 000} \\ 40^3 = \underline{4\ 220\ 088} \\ 3 \times 540^2 \times 2 = \underline{2\ 400\ 000} \\ 3 \times 540 \times 2^2 = \underline{1\ 820\ 088} \\ 2^3 = \underline{64\ 000} \\ 3 \times 540^2 \times 2 = \underline{1\ 756\ 088} \quad 874800 \\ 3 \times 540 \times 2^2 = \underline{1\ 749\ 600} \\ 2^3 = \underline{6\ 488} \\ 2^3 = \underline{6\ 480} \\ 2^3 = \underline{8} \\ 2^3 = \underline{8} \end{array}$$

Dividimos primeiramente o numero dado em classes de 3 algarismos, e, como o nosso exemplo tem 3 classes, logo se reconhece que a sua raiz terá 3 algarismos, isto é, conterà centenas, dezenas e unidades. O maior cubo perfeito contido nos 159 milhões é 125000000, cuja raiz cubica é 500. Tirando 500³ = 125000000 do numero dado, ficam 3420088.

Operação abreviada:

$$\begin{array}{r} \sqrt[3]{159\ 220\ 088} = \underline{542}. \\ 5^3 = \underline{125} \\ \underline{342} \quad 75 \end{array}$$

Nesta differença estão contidos o triplo do quadrado das centenas multiplicado pelas dezenas, mais o triplo das centenas multiplicado pelo

$$\begin{array}{r}
 3 \times 5^2 \times 4 = \frac{342}{300} \overline{)75} \\
 \underline{422} \\
 3 \times 5 \times 4^2 = \frac{240}{1820} \\
 \underline{64} \\
 4^3 = 64 \\
 3 \times 54^2 \times 2 = \frac{17560}{17496} \overline{)8748} \\
 \underline{648} \\
 3 \times 54 \times 2^2 = \frac{648}{8} \\
 \underline{8} \\
 2^3 = 8
 \end{array}$$

quadrado das dezenas e mais ainda o cubo das dezenas. Como já conhecemos as centenas, dividimos a diferença obtida pelo triplo do quadrado d'estas, isto é, por $3 \times 500^2 = 750000$ e vemos que o numero das dezenas é igual a $4 = 40$.

Agora podemos subtrahir successivamente os 2 productos: $3 \times 500^2 \times 40 = 3000000$ e $3 \times 500 \times 40^2 = 2400000$ e depois ainda o cubo das dezenas $40^3 = 64000$, que dará o resultado 1756088.

Para achar as unidades da raiz, consideramos as centenas

mais as dezenas como um numero só = 540 e sejam x as unidades ainda desconhecidas. Temos, pois, a extrahir ainda do resto 1756088 o cubo da somma $(540 + x)$ ou $(540 + x)^3$ menos 540^3 que acabamos de extrahir, isto é, naquelle resto ainda estão contidos: $3 \times 540^2 \times x$, mais $3 \times 540 \times x^2$ mais x^3 . Dividindo, por consequente, 1756088 por $3 \times 540^2 = 874800$, acha-se x, que é 2 e que nos auxiliará agora a extrahir successivamente $3 \times 540^2 \times 2 = 1749600$, depois $3 \times 540 \times 2^2 = 6480$, e, enfim, $2^3 = 8$; logo a raiz pedida é 542.

Exercicios:

Extrahir a raiz cubica dos seguintes numeros:

- | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------|
| 148) 9663597 | 149) 5639752 | 150) 46656000 |
| 151) 1157625 | 152) 18399744 | 153) 28934443 |
| 154) 86350888 | 155) 40707584 | 156) 225866529 |
| 157) 74618461 | 158) 348913664 | 159) 155720872 |
| 160) 529475129 | 161) 196122941 | 162) 281011375 |
| 163) 733870808 | 164) 377933067 | 165) 605495736 |
| 166) 8998912 | 167) 997002999 | 168) 110592000 |
| 169) 92959677 | 170) 442450728 | 171) 129554216 |
| 172) 1879080904 | 173) 9447457544 | |
| 174) 27162324216 | 175) 69173457625 | |
| 176) 217298593728 | 177) 266384654504 | |
| 178) 730702323343 | 179) 147281603041 | |
| 180) 512576216027 | 181) 160288833718161 | |
| 182) 345992762255427 | 183) 539989486253568 | |

c) Extracção da raiz cubica de uma fracção.

Para elevar uma fracção ordinaria ao cubo, eleva-se o numerador e tambem o denominador, e por isso, para extrahir a raiz cubica de uma fracção ordinaria, ter-se-ha de extrahir-a de ambos os termos. Ordinariamente é mais vantajoso transformar a fracção ordinaria em fracção decimal e depois extrahir a raiz d'esta.

A extracção da raiz cubica de uma fracção decimal, ou de um numero qualquer, que não seja cubo, effectua-se semelhantemente á extracção da raiz quadrada, dando ao numero 3 vezes mais casas decimaes do que se deseja obter na raiz, e então extrahe-se a raiz como se fosse numero inteiro; na raiz assim obtida, separa-se finalmente, com a virgula, a terça parte do numero de algarismos decimaes, que tem o numero dado.

Exemplos: Achar a raiz cubica de: a) 0,72

b) 72 até 4 casas decimaes.

Querendo a raiz com 4 algarismos decimaes, damos aos numeros $3 \times 4 = 12$ algarismos decimaes, isto é, juntamos a 0,72 mais 10 zeros e a 72 mais doze zeros.

a)

$$\begin{array}{r}
 \sqrt[3]{720\ 000\ 000\ 000} = 89628 \dots \\
 \underline{512} \\
 2080\ 192 \\
 \underline{1728} \\
 3520 \\
 \underline{1944} \\
 15760 \\
 \underline{729} \\
 150310\ 23763 \\
 \underline{142578} \\
 77320
 \end{array}$$

a) **Res. 0,8963.**

$3 \times 8^2 \times 9 = 1728$

$3 \times 8 \times 9^2 = 1944$

$9^3 = 729$

$3 \times 89^2 \times 6 = 77320$

$$\begin{array}{r}
 3 \times 89 \times 6^2 = \quad 77320 \\
 \quad \quad \quad \quad 9612 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 6^3 = \quad 677080 \\
 \quad \quad \quad \quad 216 \\
 \hline
 3 \times 896^2 \times 2 = \quad 6768640 \quad 2408448 \\
 \quad \quad \quad \quad 4816896 \\
 \hline
 3 \times 896 \times 2^2 = \quad 19517440 \\
 \quad \quad \quad \quad 10752 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 2^3 = \quad 195066880 \\
 \quad \quad \quad \quad 8 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 195066872
 \end{array}$$

b) $\sqrt[3]{72\,000\,000\,000\,000} = 416016 \dots$
 $4^3 = 64$ b) Res. 4,1602.

$$\begin{array}{r}
 3 \times 4^2 \times 1 = \quad 80 \quad 48 \\
 \quad \quad \quad \quad 48 \\
 \hline
 3 \times 4 \times 1^2 = \quad 320 \\
 \quad \quad \quad \quad 12 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 1^3 = \quad 3080 \\
 \quad \quad \quad \quad 1 \\
 \hline
 3 \times 41^2 \times 6 = \quad 30790 \quad 5043 \\
 \quad \quad \quad \quad 30258 \\
 \hline
 3 \times 41 \times 6^2 = \quad 5320 \\
 \quad \quad \quad \quad 4428 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 6^3 = \quad 8920 \\
 \quad \quad \quad \quad 216 \\
 \hline
 3 \times 416^2 \times 0 = \quad 87040 \quad 519168 \\
 \quad \quad \quad \quad 0 \\
 \hline
 3 \times 416 \times 0^2 = \quad 870400 \\
 \quad \quad \quad \quad 0 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 0^3 = \quad 8704000 \\
 \quad \quad \quad \quad 0 \\
 \hline
 3 \times 4160^2 \times 1 = \quad 87040000 \quad 51916800 \\
 \quad \quad \quad \quad 51916800 \\
 \hline
 3 \times 4160 \times 1^2 = \quad 351232000 \\
 \quad \quad \quad \quad 12480 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 1^3 = \quad 3512195200 \\
 \quad \quad \quad \quad 1 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 3512195199
 \end{array}$$

Exercícios:

Extrahir a raiz cubica até 3 algarismos decimaes, de:

184) $\frac{1}{8}$	185) $\frac{64}{343}$	186) $4\frac{17}{27}$	187) $11\frac{25}{64}$
188) 23456	189) 39,304	190) 0,074088	191) 2
192) 0,244141	193) $\frac{18}{27}$	194) $\frac{7}{8}$	195) $\frac{3}{4}$
196) $\frac{1}{9}$	197) $\frac{104}{243}$	198) 0,00009	199) 4

- 200) [201]** Um terreno quadrado tem 13 *Ha.* 10 *a.* e 44 *mq.* [22 *Ha.* 27 *a.* e 84 *mq.*] de superficie. Calcular o lado d'este terreno.
- 202) [203]** Um quadrado tem 25 [75] *m.* de lado. Qual será o lado de outro quadrado, cuja superficie seja 8 [15] vezes maior?
- 204) [205]** Um proprietario possui 2 terrenos, que têm a fórma de quadrados, cujos lados são respectivamente 60 [80] *m.* e 125 [148] *m.* Combina com outro proprietario ceder-lhos, se este lhe der, de sua propriedade, um só quadrado, que seja equivalente aos seus dous terrenos. Achar o lado d'este terreno.
- 206) [207]** Os dous lados de um triangulo rectangulo são 12 *m.* e 16 *m.* [20 e 30]. Calcular o comprimento da hypotenusa.
- 208) [209]** Um cubo tem 360944128 [107171875] *cmc.* de capacidade. Quantos metros terá a aresta d'esse cubo?
- 210) [211]** Deve-se fazer um tanque cubico para agua, que contenha 2740 [15620] *l.* Qual será a altura?
- 212) [213]** Ha 2 tanques, um da capacidade de 2980 [5680] litros e o outro de 3870 [6480] *l.* Quer-se fazer um só tanque cubico da capacidade d'aquelles dous; achar a altura.
- 214) [215]** Um tanque tem o comprimento de 4 *m.*, 6 *dm.* [7 *m.* e 8 *dm.*], a largura de 2 *m.* e 8 *dm.* [4 *m.*] e a altura de 1 *m.* [1 *m.* e 6 *dm.*] Calcular o comprimento de outro tanque cubico de igual capacidade.

§ 35.

Exercícios de recapitulação.

- 1) Reduzir a horas: a) $7\frac{1}{2}$ min. b) $3\frac{3}{4}$ min. c) $22\frac{1}{2}$ min. d) $18\frac{3}{4}$ min. e) $26\frac{1}{4}$ min.
- 2) Reduzir a *mq.*: a) $\frac{1}{2}$ Ha. b) $\frac{3}{4}$ Ha. c) $\frac{5}{8}$ Ha. d) $\frac{9}{10}$ Ha.
- 3) Multiplicar: 12 dias, 9 horas, 32 min. e $10\frac{1}{2}$ seg. por $3\frac{1}{2}$.
- 4) " : $2\frac{5}{8}$ Km. $236\frac{1}{2}$ m. por $4\frac{1}{4}$.
- 5) Quanto custarão no Rio de Janeiro:
 - a) 86 £ 8 s., ao cambio de $10\frac{5}{16}$?
 - b) 3560 *Al.* " " " 1 \$ 142?
 - c) 4850 *Frs.* " " " 925?
 - d) 436 *dollars* 50 *cts.* " 4 \$ 853?
- 6) A quantos grãos no thermometro de Celsius correspondem $16,8^{\circ}$ R.?
- 7) A quantos grãos no thermometro de Réaumur correspondem $108,5^{\circ}$ F.?
 S) Calcular: $\frac{\frac{4}{5} \times 5,2 \times 1\frac{3}{4} \times 0,05}{\frac{7}{10} \times 0,75 \times 2,6 \times \frac{2}{3}} = ?$
- 9) Uma pessoa compra uma casa por 36:000 \$ 000. Calcula $1\frac{1}{8}\%$ para o imposto predial e 75 \$ 000 para a penna d'agua e pequenos concertos annuaes. Quer ganhar 10% liquidos. Que aluguel deverá cobrar mensalmente?
- 10) [11] Achar a raiz quadrada [cubica] de 511225 [4492125] decompondo o numero em seus factores primos.
- 12) [13] Para preparar polvora, na Inglaterra [França] tomam-se 75 [73,7] partes de salitre, 10 [10,7] de enxofre e 15 [15,6] de carvão. Quantos *Kg.* de cada materia são precisos para fabricar uma tonelada e meia?
- 14) [15] Calcular o premio de seguro de 46:580 \$ 000 [236:800 \$ 000] a $2\frac{3}{4}$ [$1\frac{5}{8}\%$]
- 16) [17] Para fazer certa obra são necessarios 84 m. 6 dm. [74 m. 50 cm.] de panno de $\frac{3}{4}$ [$\frac{3}{5}$] m. de largura. Quantos metros serão precisos, se a fazenda tiver mais 15 cm. de largura?
- 18) [19] Reduzir 1 s. [1 d.] á fracção decimal da libra esterlina.

- 20) [21] Quantos annos, mezes e dias viveu Kepler [Newton] nasc. a 27 de Dezembro de 1571 [25 de Dezembro de 1642] e fallecido a 15 de Novembro de 1631 [20 de Março de 1727]?
- 22) [23] Na casa da moeda no Rio, quer-se fundir 5000 [8000] peças de prata do valor de 2 \$ 000 [1 \$ 000] e do peso de 25,5 [12,75] g. cada uma. De que quantidade de prata pura e de cobre se precisa (titulo = 0,917)?
- 24) O tempo que decorre entre duas luas novas é de 29 dias, 12 horas e 44 minutos. Quantos minutos são?
- 25) A renda de Correio brasileiro em 1899 foi de 7691:828 \$ 000, entretanto que em 1900 não passou de 5950:115 \$ 000. De quantos % foi a renda neste anno menor do que naquelle?
- 26) S. no Rio de Janeiro vendeu em consignação 208 saccos de farinha: 60, pesando 2995 *Kg.* a 8 \$ 000 cada 45 *Kg.*, e 148, pesando 7467 *Kg.* a 7 \$ 500 cada 45 *Kg.* Deu 2% de desconto e tirou 5% de garantia e commissão sobre o preço da venda. Despendeu: armazenagem relativa a um mez, a 260 réis cada sacco; seguro contra fogo $\frac{1}{8}\%$; telegramma 5 \$ 460 e sellos 2 \$ 200. Facturar esta consignação.
- 27) [28] Quantos grãos, minutos e segundos da divisão sexagesimal são $72^{\circ} 48'$ e $25''$ [$94^{\circ} 36'$ e $50''$] da divisão decimal?
- 29) [30] Se um capitalista pudesse obter $1\frac{1}{2}$ [$2\frac{1}{4}\%$] de juros mais, o seu rendimento augmentaria de 2 \$ 400 [4 \$ 500] por dia. Qual é o capital collocado?
- 31) O perimetro de um triangulo é de 234 m., e sabe-se que os lados estão na razão de 2:3:4. Calcular os lados.
- 32) Fundiram-se juntamente 330 g. de ouro puro e 150 g. de cobre. Qual é o titulo (em quilates e grãos) da liga obtida?
- 33) Qual é o capital que, emprestado a $9\frac{1}{2}\%$, depois de um anno e 3 mezes, será igual a 7:562 \$ 750?
- 34) [35] As despezas para fabricar um objecto são de 16 \$ 380 [21 \$ 771]. O vendedor quer ganhar 16 [20]% e fazer ao

- comprador um desconto de 5%. Qual será o preço da venda d'este objecto?
- 36) [37] A. e B. associaram-se para um negocio. A. dá 9:000\$000 [11:000\$000] e B. 5:000\$000 [7:000\$000]. Convencionaram que do lucro de 1:750\$000 [2:670\$000], cada um dos socios receberia, em primeiro lugar, 6 [8]‰ do seu capital e do resto A. devia receber $\frac{2}{3}$ [$\frac{2}{3}$] e B. $\frac{1}{3}$ [$\frac{1}{3}$]. a) Quanto toca a cada um? b) Quantos % rendeu o capital empenhado neste negocio? c) Quantos % lucrou cada um dos dous socios?
- 38) Um individuo possui tres letras: uma de 2:640\$000, pagavel a 1º de Setembro; outra de 4:800\$000, pagavel a 21 de Setembro; e a terceira de 3:600\$000, pagavel a 21 de Outubro. Converte estas letras numa só, pagavel no prazo medio. Qual será o valor da letra a 11 de Setembro, descontando por fóra 10‰ ao anno?
- 39) As moedas de bronze brasileiras são cunhadas com 95 partes de cobre, 4 partes de estanho e uma parte de zinco. Na casa da moeda quer-se fabricar 2000000 de peças de 40 réis, 1500000 de peças de 20 réis e 1000000 de moedas de 10 réis. Que quantidade de cobre, de estanho e de zinco é necessaria para cunhar estas moedas, sabendo-se que a peça de 40 réis pesa 12 g., a de 20 réis 7 g. e a de 10 réis 3,5 g.?
- 40) Os angulos d'um quadrilatero estão na razão de 2:5:7:11. Achar estes angulos (grãos e min.)
- 41) [42] Um proprietario quer vender uma casa. A. propõe pagar-lhe 33:200\$000 [52:000\$000] á vista; B. oferece-lhe 15:000\$000 [24:000\$000] á vista e 20:000\$000 [30:000\$000] pagaveis um anno depois, sem juros. Qual das duas propostas é mais vantajosa para o proprietario, calculando 9 [8]‰ de juros?
- 43) Ganhando-se 9‰, em que razão está a) o preço da compra para o lucro? b) o lucro para o preço da compra? c) o preço da compra para o preço da venda? d) o preço da venda para o preço da compra? e) o preço da venda para o lucro? f) o lucro para o preço da venda?

- 44) [45] Um commerciante no Rio deve pagar um despacho na importancia de 1:324\$000 [3:765\$000] sendo 75% em papel e 25% em ouro. Quanto pagará, ao cambio do dia $10\frac{1}{2}$ [$11\frac{23}{32}$]?
- 46) [47] Quantos *cmc.* occuparão 173,25 [108,8] Kg. de mercurio, sabendo-se que 1 l. pesa 13,596 Kg.?
- 48) [49] Que quantidade de cobre é necessario fundir com 10 [14] Kg. de ouro puro para obter ouro do toque de 0,750 [0,840]?
- 50) [51] Um tanque enche-se em $5\frac{1}{2}$ horas [3 horas e 40 min.] por um tubo, que fornece 18 [25] l. de agua por minuto. Quer-se fazer um tanque cubico, que contenha $2\frac{1}{4}$ [$6\frac{3}{4}$] vezes mais capacidade; calcular o comprimento.
- 52) Uma sociedade, que se estabeleceu com o capital de 1500:000\$000, teve um lucro de 154:750\$000. Conforme os estatutos, pagou, em primeiro lugar, aos accionistas 5% de juros do capital. O resto do lucro foi dividido da seguinte maneira: 60% aos accionistas, 20% para o fundo de reserva, e 20% percentagem da directoria. Esta resolveu tirar da sua porcentagem 5% para gratificações aos empregados. a) Como se repartiu o lucro? b) Quanto recebeu A., que possui 300 acções do valor nominal de 200\$000 cada uma? c) Quantos % rendeu o capital d'um accionista?
- 53) [54] Quantas moedas de 10\$000 do peso de 8,965 g. [2\$000 do peso de 25,5 g.], poderá a casa da moeda cunhar com uma barra de 8 Kg. 221 g. de ouro puro [11 Kg. 692 g. de prata pura] depois de tel-a reduzida ao titulo legal de 0,917?
- 55) Uma pessoa colloca 1:000\$000 a 6% e junta, no fim de cada anno, além dos juros vencidos, mais 1:000\$000. Que quantia terá depois de 5 annos?
- 56) [57] Calcular o valor em ouro, que tem uma moeda de 10\$000 em dinheiro allemão (americano).
- 58) [59] Um vendedor de molhados comprou 6 [9] Hl. de vinho pelo preço de 450\$000 [756\$000]. Adquiriu a quantidade necessaria de garrafas de $\frac{3}{4}$ *dmc.* a 90 [80] réis cada uma, e com as rolhas e o engarrafamento do vinho despendeu mais 38\$000 [48\$000]. a) Quantas

- garrafas comprou? b) A que preço precisa vender a garrafa d'este vinho, querendo ganhar 20% sobre as despesas? c) Que porção de agua deve deitar nos 6 [9] *Ill.* para poder vender a garrafa da mistura a 800 [900] réis, desprezando o valor do supprimento das garrafas que foram precisas a mais? d) Em quanto importou este pequeno prejuizo?
- 60) [61] Quantos grãos, minutos e segundos da divisão decimal são $94^{\circ} 21' 54''$ [72^o 28' 57''] da divisão sexagesimal?
- 62) Fundiram-se conjunctamente 3 barras: a) 210 *g.*, contendo 14 partes de prata pura e 6 de cobre; b) 160 *g.*, contendo 12 partes de prata e 4 de cobre; c) 100 *g.*, contendo 18 partes de prata e 7 de cobre. Achar o titulo d'esta liga.
- 63) [64] Um individuo comprou 48 [84] apolices geraes de 5% da divida publica, ao preço de 756 \$000 [798 \$000]. a) Quanto poderá gastar por mez, vivendo somente d'este rendimento? b) Quantos % rende o seu capital?
- 65) [66] Qual é o capital que, emprestado a 6 [5] %, no fim de 8 [6] annos com os juros compostos, se elevará a 13:388 \$340 [16:751 \$250]?
- 67) [68] Calcular o valor em prata de 5 *Fr.* [1 *s.*] em moeda brasileira.
- 69) A exportação de café foi em 1891 de 4125742 saccas de 60 *Kg.* e em 1900 de 11543125 saccas. De quantos % augmentou a exportação e de quanto foi o augmento medio por anno?
- 70) Deve-se pagar um despacho na importancia de 3:475 \$800. O governo exige 25% em ouro. A taxa de cambio do dia é de $11\frac{3}{4}$ e o banco que fornece o cheque em ouro leva de porcentagem $\frac{1}{16}$. Quanto se despendeu com o despacho?
- 71) B & Ca no Rio mandaram para Marselha 50 saccas de café com 60 *Kg.* cada uma. O consignatario vendeu-as a 38,50 *Fr.* cada 50 *Kg.* com um desconto de 1%. Despendeu: seguro maritimo 13,50 *Fr.*; frete por tonelada 40 *Fr.* mais 10% addicionaes; corretagem da venda $\frac{1}{2}$ %; despesas miudas 15,15 *Fr.* e levou de commissão 2% sobre o preço da venda. B. & Ca haviam pago aqui:

- pela arroba de café 7 \$000; ao ensaccador 2 \$000 por sacca; pelo embarque 60 \$600. a) Tirar a factura do consignatario. b) Quantos % ganharam nesta transacção B. & Ca, estando o cambio a 11 *d.*?
- 72) O capital da Ca Fiação e Tecidos "Corcovado" constituiu-se por meio da emissão de 22500 acções a 200 \$000 cada uma. No anno de 1900 o lucro da companhia pela manufactura e renda das propriedades foi de 1081:936 \$109 e as despesas com a conservação e reparação da fabrica e das casas, impostos de consumo, descontos e diversás despesas geraes foram de 474:401 \$818. De conformidade com os estatutos, levaram 3% do lucro liquido para o fundo de reserva e 5% para o fundo de deterioramento. Além d'isso a companhia pagou de porcentagem e imposto sobre dividendos 33:750 \$000 e levou á conta de lucros suspensos 75:181 \$548. O resto foi dividido pelos accionistas. a) Qual foi o dividendo por accção? b) Quanto recebeu S. que possui 116 acções? c) Quantos % rendeu este capital de S., tendo comprado $\frac{3}{4}$ das suas acções a 165 \$000 cada uma e o resto a 145 \$000?

Medidas antigas e suas Relações Métricas

Unidades de Comprimento.

	Metros
Meridiano	40.000.000,0
Legua brasileira de sesmaria	6.600,0
Legua de 18 ao grão	6.172,8
Legua de 20 ao grão	5.555,5
Legua ingleza	4.827,9
Legua franceza	4.444,4
Legua de correio	4.000,0
Milha brasileira (1000 braças)	2.200,0
Milha geographica (841 ³ / ₄ braças)	1.851,83
Braça (10 palmos)	2,20
Vara (5 palmos)	1,10
Toesa (6 pés)	1,98
Passo (5 pés)	1,65
Jarda (4 ¹ / ₁₀ palmos)	0,91
Covado (3 ¹ / ₁₀ palmos)	0,68
Pé de rei (12 pollegadas)	0,33
Palmo (8 pollegadas)	0,22
Pollegada (12 linhas)	0,0275
Linha (12 pontos)	0,0023
Ponto	0,0002

Unidades de Superficie.

	Metros quadrados
Legua quad. brasil. (9000000 braças ²)	43.560.000
" " maritima (9 milhas ²)	30.864.135,8025
Milha " brasil. (1000000 braças ²)	4.840.000
" " geographica (841 ³ / ₄ braças ²)	342.934,4225
Braça " (4 varas quad.)	4,84
Vara " (25 palmos ²)	1,21
Pé " (144 pollegadas ²)	0,1089
Palmo " (64 pollegadas ²)	0,0484
Pollegada quad. (144 linhas ²)	0,00075625
Sesmaria (5625 geiras)	10.890.000
Alqueire de terra (32 pratos)	34.848

	Metros quadrados
Quarta de terra (8 pratos)	8,712
Geira (400 braças quad.)	1,936
Prato de terra (225 braças ²)	1,089

Medidas de volume.

	Metros cubicos
Braça cubica	10,648
Palmo cubica	0,010648

Medidas de capacidade.

Para seccoos:

	Litros
Moio (15 fangas)	2,176,20
Fanga (4 alqueires)	145,08
Alqueire (4 quartas)	36,27
Quarta (4 selamins)	9,07
Selamin	2,27
Sacca (3 alqueires)	109,00
Sacco (2 alqueires)	73,00

Para molhados:

Tonel (2 pipas)	958,32
Pipa (15 almudes ou 180 medidas)	479,16
Almude (12 medidas)	31,944
Medida (canada, 4 garrafas)	2,662
Garrafa (quartilho, 4 martellos)	0,666
Martello	0,166
Meio Martello	0,083

Medidas de peso.

	Grammos
Tonelada (13 ¹ / ₂ quintaes)	793,238,4
Quintal (4 arrobas)	58,758,0
Arroba (32 libras)	14,689,6
Libra (2 marcos)	459,05
Marco (8 onças)	229,525
Onça (8 oitavas)	28,691
Oitava (3 escropulos)	3,586
Escropulo (6 quilates)	1,195
Quilate (4 grãos)	0,195
Grão	0,050

Quadro das moedas de varios paizes.

Nomes dos paizes e das moedas	Valor das moedas mais usuaes e peso em grammos	Titulo	Valor par em moeda brasileira
Brasil.	Ouro { 20 \$ 000 (17,92968 g.) 10 \$ 000	916 ² / ₃	20 \$ 000
	Prata { 2 \$ 000 (25,5 g.) 1 \$ 000	"	1 \$ 835
Allemanha.	Ouro 20 marcos (7,9649 g.)	900	8 \$ 723
	Prata 5 " (27,777 g.)	"	1 \$ 962
França, Belgica, Suissa e Italia.	Ouro 20 francos (6,4516 g.)	900	7 \$ 066
	Prata 5 " (25 g.)	"	1 \$ 767
Inglaterra.	Ouro 1 libra (7,998 g.)	916 ² / ₃	8 \$ 889
	Libra estecilia = 20 shillings a 12 pence.	925	2 \$ 053
Portugal.	Ouro 10 \$ 000 fortes (17,735 g.)	916 ² / ₃	19 \$ 783
	Mil reis moeda forte.	"	899 reis
Estados Unidos.	Ouro 10 dollars (16,718 g.)	900	18 \$ 310
	Dollar 100 cents.	"	1 \$ 831
Hespanha.	Ouro 25 pesetas (8,065 g.)	900	8 \$ 832
	Peseta nova 100 centesimos	"	1 \$ 766
Rep. Argentina	Ouro 5 pesos (8,064 g.)	900	8 \$ 832
	Piso 100 centavos	"	1 \$ 766

Papel.

Resma de papel de impressão	tem 20 mãos.
Mão	” 25 folhas.
Resma de papel almaço	” 17 mãos.
Mão	” 5 cadernos.
Cadernos	” 5 folhas.

Indice.

	Pag.
§ 1. Systema metrico	5
§ 2. Reducções	9
§ 3. Numeros complexos	13
§ 4. Calculo do tempo	19
§ 5. Divisibilidade dos numeros	23
§ 6. Numeros primos	28
§ 7. Maximo divisor commum	29
§ 8. Menor multiplo commum	31
§ 9. Fracções ordinarias	34
§ 10. Reducção de numeros inteiros e mixtos a fracções ordinarias e vice-versa	40
§ 11. Alteração no valor das fracções ordinarias	41
§ 12. Adição das fracções ordinarias	48
§ 13. Subtracção ” ” ”	51
§ 14. Multiplicação ” ” ”	54
§ 15. Divisão ” ” ”	58
§ 16. Exercicios de recapitulação	61
§ 17. Fracções decimaes	63
§ 18. Conversão de fracções decimaes em ordinarias e vice-versa	68
§ 19. Fracções decimaes periodicas	70
§ 20. Adição e subtracção de fracções decimaes	73
§ 21. Multiplicação e divisão de uma fracção deci- mal por uma potencia de 10	75
§ 22. Multiplicação de fracções decimaes	78
§ 23. Divisão de fracções decimaes	80
§ 24. Exercicios e problemas mixtos sobre as fracções decimaes e ordinarias	81

	Pag.
§ 25. Regra de tres simples	87
§ 26. " " " composta	91
§ 27. Cambio	94
I) Reducção da moeda estrangeira á moeda brasileira	95
II) Reducção da moeda brasileira á moeda estrangeira	98
Pagamentos em ouro	101
§ 28. Juros	104
I) Achar os juros	104
a) por um anno	104
b) por annos	108
c) por annos e mezes	109
d) por dias	110
II) Achar a taxa	113
III) " o capital	118
IV) " o tempo	120
Formulas	121
Juros compostos	125
§ 29. Regra de companhia	128
I) Divisão de um numero em partes proporcionaes a 2 ou mais numeros dados	129
II) Regra de sociedade simples	132
III) " " " composta	137
§ 30. Desconto	141
I) Desconto por fóra	143
II) " " dentro	145
Expressões usuaes no commercio	149
§ 31. Prazo médio	153
§ 32. Razões e proporções	161
I) Razões:	
a) Razões directas e inversas	164
b) " compostas	166
II) Proporções	167
Resolução, pelo methodo das proporções, dos problemas:	
I) da regra de tres simples	169
II) " " " " composta	170

	Pag.
III) dos juros	172
IV) do desconto	174
V) da regra de sociedade	175
§ 33. Misturas e ligas	177
I) Misturas	185
II) Ligas	193
§ 34. Potencias e raizes	193
I) Potencias	196
II) Raizes: especialmente a raiz quadrada	
Extracção da raiz quadrada de:	198
a) um numero de 3 ou 4 algarismos	199
b) " " " mais de 4 algarismos	200
c) uma fracção	201
d) um numero qualquer	202
III) Raiz cubica	
Extracção da raiz cubica de:	204
a) um numero de 4, 5 ou 6 algarismos	205
b) um numero de mais de 6 algarismos	207
c) uma fracção e de um numero qualquer	210
§ 35. Exercicios de recapitulação	

