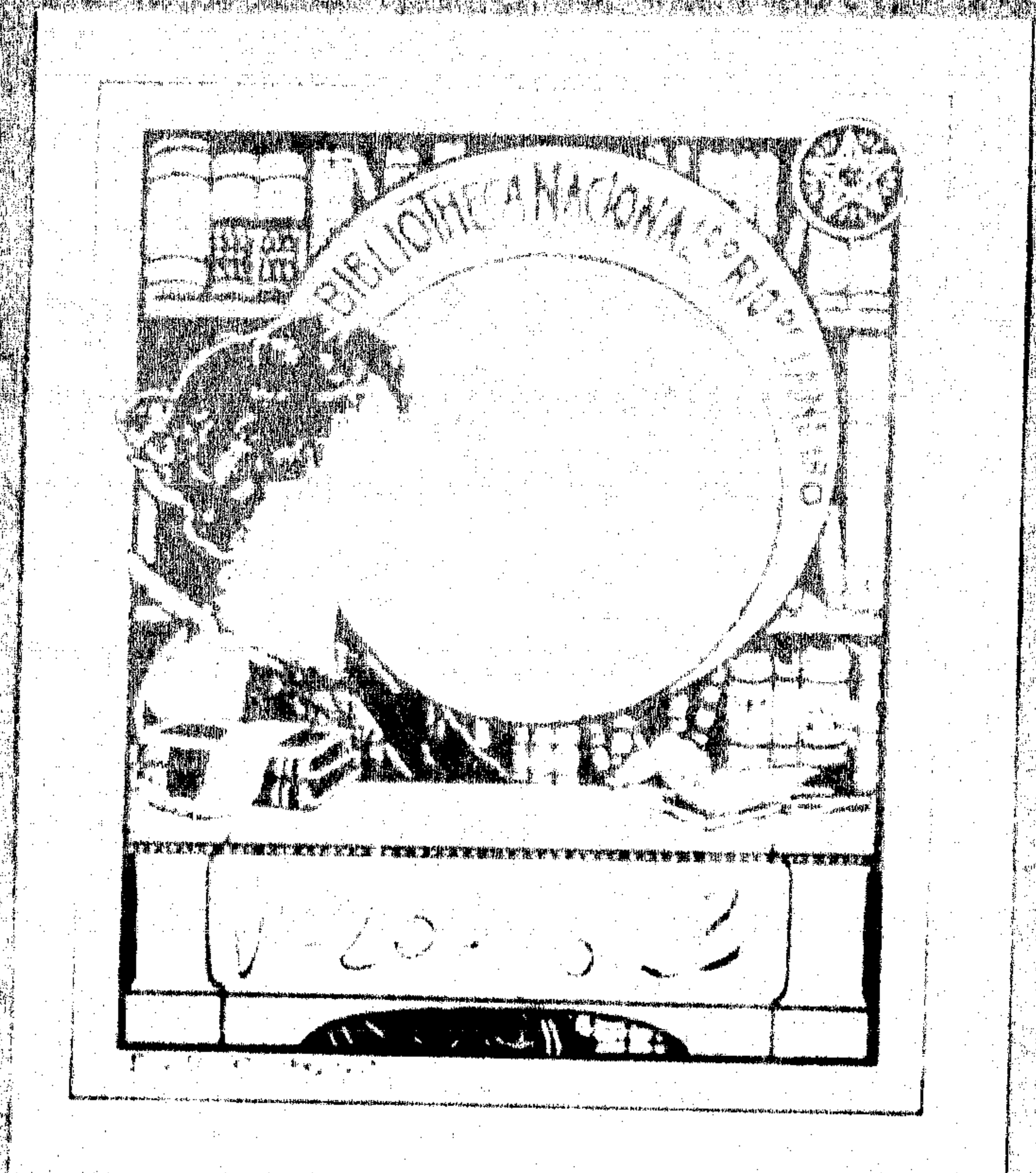

BIBLIOTHECA NACIONAL

PSICO

GEOMETRÍA

OBRAS DE LA DOCTORA MONTESSORI

PUBLICADOS POR ESTA EDITORIAL

METODO DE LA PEDAGOGIA CIENTIFICA.

Aplicada a la educación de la infancia en la «Casa del Bambini» (Casa de los niños). Segunda edición. Un tomo de 295 páginas, ilustrado, encuadernado en tela.

ANTROPOLOGIA PEDAGOGICA.

Un tomo de 500 páginas con 12 figuras y láminas, encuadernado en tela.

MANUAL PRACTICO DEL METODO MONTESSORI.

Segunda edición, ampliada, modificada y completada con las nuevas ideas y regímenes educadores de la autora. Un tomo de 207 páginas, 30 grabados y una lámina en color, encuadernado en tela.

LA AUTO-EDUCACION EN LA ESCUELA ELEMENTAL.

Agotada.

CUADERNO DE DIBUJO MONTESSORI.

Agotado.

PSICO-ARITMETICA.

Obra ilustrada con cerca de 300 figuras en colores y tablas de ejercicios intercaladas en el texto. Un tomo encuadernado,

LA MISA, las prácticas litúrgicas al alcance de los niños.

5

DOCTORA MARIA MONTESSORI

PSICO GEOMETRIA

EL ESTUDIO DE LA GEOMETRÍA BASADO EN LA PSICOLOGÍA INFANTIL

ILUSTRADA CON 265 FIGURAS EN COLORES

VERSIÓN ESPAÑOLA

PRIMERA EDICIÓN DE ESTA OBRA NO PUBLICADA EN OTRO IDIOMA

CASA EDITORIAL ARALUCE

:: CALLE DE LAS CORTES, NÚM. 392. — BARCELONA ::

Talleres Gráficos GARROFÉ, BARCELONA : : Año 1934

I

GENERALIDADES

GENERALIDADES

Los métodos de enseñanza elemental sólo se ocuparon, hasta hoy, de *transmitir* el conocimiento y por ello se encaminan directamente a la *mente* del niño siguiendo consideraciones de orden psicológico.

La mente del niño fué considerada independientemente de todo conocimiento anterior que no tuviera su origen en la escuela; es decir, como si estuviera *vacía*. En efecto, los conocimientos empíricos que puedan ser adquiridos *casualmente* y desordenadamente, tienen escaso valor en la formación de una mente culta — esto es, lógicamente cultivada—. Ello sucede en toda forma de cultura. Es sabido, por ejemplo, que un profesor de piano encontrará deplorable que la mano de su discípulo haya comenzado a tocar sin guía, y su trabajo, ante todo, consistirá en *quitar los defectos*.

Después, en la enseñanza, procederá lógicamente, comenzando por las notas, etc.

Un campo distinto, como el de la geometría o el de la aritmética, se encuentra en idéntico caso. Los maestros comenzarán con las líneas y los ángulos o con los números, y el primer problema que se les plantee será, antes que ningún otro, saber qué es lo más fácil de comprender, ya que a partir de esto deberá comenzar la enseñanza. Recuerdo las discusiones de eminentes profesores en un congreso de matemáticos, los cuales se preguntaban si era más sencillo contar los números en su natural sucesión (números cardinales) o considerarlos según el orden y el lugar que ocupan recíprocamente (números ordinales).

Resueltos con lógica discusión los problemas relativos al procedimiento de los conocimientos sucesivos, restaba únicamente el enseñar; hacer comprender, primero, la cosa más sencilla y enlazar, entonces, el precedente con el subsiguiente por orden de dificultad, pasando de lo conocido a lo desconocido.

Razonamientos posteriores se refieren especialmente a la enseñanza de la geometría y de la aritmética. En efecto, se trata de materias abstractas donde la mente debe asir en primer lugar alguna realidad y proseguir después en un campo puramente lógico. Ahora bien. La realidad inicial es en sí misma abstracta y simbólica; líneas, números. Siendo esto difícilmente comprensible para el niño, se ha recurrido en las primeras clases elementales a representaciones materiales ofreciendo a los sentidos *cantidades en relación con los números, formas completas en relación con la geometría.*

La preocupación de los maestros es, sin embargo, conseguir que pase rápidamente a la abstracción la mente infantil, porque de otro modo se perdería la esencia misma de la enseñanza cuya finalidad es, ante todo, elevar la mente a los campos de la abstracción.

El camino, pues, se basa todo él en el juicio del maestro. El es quien juzga que es lo sencillo y lo difícil, lo que se debe enseñar y cómo, y por fin, pasando — el profesor — de lo sencillo y concreto a combinaciones abstractas de números y signos, cree haber penetrado en la *inteligencia* del niño y haberla conducido.

Pero ¡ con cuanta frecuencia se engaña el maestro ! Sólo excepcionalmente pudo penetrar en la mente infantil. La más de las veces la obra del profesor fué completamente estéril porque no logró interesar al niño. La pretendida abstracción fué casi siempre la respuesta forzada de una facultad simplemente mnemónica sometida a tortura. Las palabras *dificultad, obstáculo, escollo,* se aplican a un lamentable fracaso en la enseñanza de las matemáticas elementales que son los primeros escalones de la cultura. F[illegible]

conjunto de problemas que se presentan a los educadores no se resuelven con un estudio lógico de las dificultades sucesivas. Hay una técnica especial en los métodos de enseñanza. Existen otros obstáculos que todavía hoy no se toman en consideración en el terreno de la práctica. El aprender está sometido a una condición esencial, que el discípulo *quiera* recibir los conocimientos, que pueda prestar *atención* a lo que es igual, que se *interese*. Su *actividad psíquica* es la condición indispensable para el éxito. Todo lo que aburre, lo que descorazona, lo que interrumpe, se convierte en un obstáculo que ninguna preparación lógica de la enseñanza puede superar. Es pues el estudio de las condiciones necesarias para el desarrollo de las actividades espontáneas del individuo, es el arte de despertar la alegría y el entusiasmo por el trabajo, el que hay que tomar por objetivo. El hecho del *interés* que empuje a una espontánea actividad, es la verdadera clave psicológica.

Se puede *comprender* y *comprender claramente* sin llegar a resultado práctico alguno. A este propósito recuerdo una anécdota que oí contar a un niño. Un hombre pedía dinero a un extranjero, rico, pero avaro, que no comprendía bien el idioma. Aquél se esforzaba en exponer con claridad sus razones al saber que el extranjero había de comprenderle con gran dificultad. En efecto, éste, permaneció silencioso durante algún tiempo y al final le dijo: «*comprendo, pero no doy*».

Así, el esfuerzo del hombre que pedía dinero quedaba sin un resultado positivo. Era un fracaso, aún cuando la claridad de exposición fuera impecable. Algo semejante sucede entre maestro y discípulo. Todo lo que el niño ha *comprendido* resulta ineficaz y se esfuma. Puede comprender muchas cosas y forjar en su mente un almacén, un caos de cosas comprendidas, sin que se *despierte* su *Yo* activo con sus energías constructivas de interés y de entusiasmo. El *esfuerzo* del trabajo, del estudio, de aprender, es fruto del interés y nada se asimila sin esfuerzo. No quiero recoger aquí la discusión que tantas veces se ha suscitado a propósito del interés y del *esfuerzo* poniendo en contradicción estos dos aspectos de la misma cosa. En efecto. Muchos han dicho que en educación hay que optar entre *interés* y *esfuerzo*, llamando interés la ejecución grata y esfuerzo la ejecución desagradable.

Pero, esfuerzo es aquello que se realiza activamente usando las propias energías y esto se lleva a cabo cuando existe el interés. Ahora bien, el hombre no es una máquina, actúa cuando es capaz de interés, de generosidad, de entusiasmo, y este hombre vivo, activo y fuerte, por ello, sabrá asumir sobre sí, también, el *esfuerzo desagradable*.

El que en educación logra suscitar un interés que llega a escoger una acción y a seguirla con toda energía, con entusiasmo constructivo, ha despertado al hombre. Ha tocado aquel *soplo* de que habla la Biblia, que convierte en hombre la forma compuesta con barro.

El hombre en el cual se *despertó el interés*, demuestra con frecuencia energías insospechadas. Del mismo modo el niño, cuando actúa bajo la acción del interés, despliega capacidades que permanecían latentes o desconocidas.

Es este nuevo aspecto del niño interesado el que hace cambiar las antiguas *preocupaciones psicológicas* y abre un campo más vivo a los métodos de educación.

Las antiguas ideas no eran erróneas, pero correspondían a un prejuicio elaborado por el adulto. Si se considera al niño como eje de la educación y si la guía está en la *elección hecha por el niño*, más bien que en la lógica del maestro, surgen, necesariamente, principios completamente nuevos en la educación.

PERIODOS SENSITIVOS

Los principios generales de mi método de educación no son completamente desconocidos y varios libros los exponen detalladamente. Aquí, sin embargo, conviene re-

cordarlos, porque tomamos en consideración un hecho psicológico que no se ha hecho destacar.

Esta recordación nos conduce, en primer término, a esclarecer los hechos fundamentales del *interés*. No basta pues *comprender* para sentirnos interesados. El interés tiene su fundamento en la *personalidad*.

A este propósito es especialmente notable la personalidad infantil, porque en su desarrollo psíquico pasa a través de diversos estadios, los cuales tienen también *intereses* diversos. Basta lo expuesto para comprender que la misma cosa claramente presentada despertará interés en una edad, pero no en otra.

Asoma a nuestra mente la posibilidad del hecho de no lograr interesar con una cosa determinada a un niño de seis años que comprende pero permanece indiferente y por lo mismo desatento, y la de presentar después la misma cosa, del mismo modo, a un niño de cuatro años que comprende y contesta con rapidez.

Este hecho sorprendente, que acaso percibieron muchos en la práctica simple de la vida familiar, no ha penetrado en el ambiente de la psicología y en la escuela, donde siempre se creyó que todo procedía según una línea recta, de lo sencillo a lo complejo, de lo concreto a lo abstracto, de lo conocido a lo desconocido, de lo imperfecto a lo perfecto, de lo malo a lo bueno.

Por el contrario, en el período del crecimiento existen centros sucesivos de sensibilidad psíquica, que se apagan para ser substituídos por otros. Un ejemplo, de todos conocido, es el del desarrollo del lenguaje. Existe una edad especial en que se fijan los sonidos del lenguaje hablado, o mejor, la posibilidad de reducirlas. Nosotros pronunciamos bien nuestra lengua porque la oímos y pudimos fijar su reproducción en nuestro período sensitivo del lenguaje. Una vez adultos no podemos jamás adquirir el acento perfecto de un idioma extraño a pesar de nuestra inteligencia, nuestra aplicación y su perfecta comprensión. El niño, pues, actúa con entusiasmo, con interés activo, en todo lo que corresponde a sus períodos sensitivos. Es indudable que si una *adquisición* inicial de cultura se fija en uno de estos períodos, queda como un precedente que abre las puertas de la inteligencia a la continuación. El interés infantil despertado sobre un argumento, es un imán interior permanente respecto a las conquistas sucesivas. Así como en el hombre, el lenguaje fijado sensorialmente y en el mecanismo de la pronunciación durante el período sensitivo permanece siempre como una adquisición que va perfeccionándose, a la par que se desarrolla sucesivamente la vida mental.

Sobre los intereses preexistentes se construyen otros intereses ligados a aquellos lógicamente. Un conocimiento siempre más vasto puede organizarse sobre el primitivo núcleo a medida que tiene lugar el desarrollo mental. Y es evidente que si en las personas existen aptitudes especiales *sensibilidades personales* (y no solamente períodos sensitivos) todo su desarrollo gira alrededor de esta sensibilidad, engendrando lo que se llama *una vocación*.

Ahora bien. Nosotros llamaremos *sensorial* todo cuanto se refiere a los sentidos externos, para distinguir y reservar la palabra *sensitiva* a la actitud interior relativa a los desarrollos sucesivos de la vida y en particular a la personalidad, al *centro*.

La actividad interior es la obra maestra de la naturaleza creadora y nosotros no podemos intervenir en ella directamente. Pero como la mente se construye por medio de una actividad continua que es central (la mente) y periférica (los sentidos, el movimiento) podemos asistir desde el exterior a su labor. La periferia de aquella actividad total nos es accesible. En efecto, es continuo el recurso de los sentidos al ambiente y la actividad motriz se apoya constantemente en él. El niño es, por excelencia, un explorador en constante acción. Sin embargo, no *toma al azar* las imágenes que necesita sino que se dirige a fines determinados y

precisos con una fuerza de voluntad que basta por sí sola para revelarnos se trata de necesidades vitales. El niño persiste en sus elecciones con una constancia invencible. Es ello tan exacto (aun cuando no haya sido el hecho aceptado todavía en el campo de la educación) que el maestro tiene que luchar contra las inclinaciones del niño, cuando le fuerza a seguir la propia línea de conducta.

Al maestro le parece que para que el niño aprenda debe seguir la línea recta que se ha trazado como educador. El niño, en cambio, tiene una manera de aprender, la de la selección espontánea, el ejercicio repetido, la actividad conjunta sensorial y motriz que acompaña a la actividad sensible o psíquica.

Nosotros pues, como educadores, nos hemos de dirigir a la periferia. En vez de abandonar al niño a sus pesquisas en un mundo demasiado complicado, le preparamos, ponemos al alcance de su periferia un mundo más restringido y apropiado a sus necesidades, y tratando de interpretar éstas a través de sus manifestaciones periféricas, correspondemos a su actitud.

Por esto es la nuestra una *educación de la periferia* que sustituye la *educación hacia el centro* de los antiguos métodos.

El centro queda en libertad para que se desarrolle según las energías naturales y no necesitamos conocerlo ni esperar de él adecuadas reacciones.

Hay que respetarlo.

Es así como asistimos a un éxito sorprendente en el terreno cultural que logran conquistar los niños, mientras la revelación de los procedimientos empleados para semejante conquista nos llenan de agradable estupor.

su perfecta comprensión. El niño, pues, actúa con entusiasmo, con interés activo, en todo lo que corresponde a sus períodos sensitivos. Es indudable que si una *adquisición* inicial de cultura se fija en uno de estos períodos, queda como un precedente que abre las puertas de la inteligencia a la continuación. El interés infantil despertado sobre un argumento, es un imán interior permanente respecto a las conquistas sucesivas. Así como en el hombre, el lenguaje fijado sensorialmente y en el mecanismo de la pronunciación durante el período sensitivo permanece siempre como una adquisición que va perfeccionándose, a la par que se desarrolla sucesivamente la vida mental.

Sobre los intereses preexistentes se construyen otros intereses ligados a aquellos lógicamente. Un conocimiento siempre más vasto puede organizarse sobre el primitivo núcleo a medida que tiene lugar el desarrollo mental. Y es evidente que si en las personas existen aptitudes especiales, *sensibilidades personales* (y no solamente períodos sensitivos) todo su desarrollo gira alrededor de esta sensibilidad, engendrando lo que se llama *una vocación*.

Ahora bien. Nosotros llamaremos *sensorial* todo cuanto se refiere a los sentidos externos, para distinguir y reservar la palabra *sensitiva* a la actitud interior relativa a los desarrollos sucesivos de la vida y en particular a la personalidad, al *centro*.

La actividad interior es la obra maestra de la naturaleza creadora y nosotros no podemos intervenir en ella directamente. Pero como la mente se construye por medio de una actividad continua que es central (la mente) y periférica (los sentidos, el movimiento) podemos asistir desde el exterior a su labor. La periferia de aquella actividad total nos es accesible. En efecto, es continuo el recurso de los sentidos al ambiente y la actividad motriz se apoya constantemente en él. El niño es, por excelencia, un explorador en constante acción. Sin embargo, no *toma al azar* las imágenes que necesita sino que se dirige a fines determinados y

precisos con una fuerza de voluntad que basta por sí sola para revelarnos se trata de necesidades vitales. El niño persiste en sus elecciones con una constancia invencible. Es ello tan exacto (aun cuando no haya sido el hecho aceptado todavía en el campo de la educación) que el maestro tiene que luchar contra las inclinaciones del niño, cuando le fuerza a seguir la propia línea de conducta.

Al maestro le parece que para que el niño aprenda debe seguir la línea recta que se ha trazado como educador. El niño, en cambio, tiene una manera de aprender, la de la selección espontánea, el ejercicio repetido, la actividad conjunta sensorial y motriz que acompaña a la actividad sensible o psíquica.

Nosotros pues, como educadores, nos hemos de dirigir a la periferia. En vez de abandonar al niño a sus pesquisas en un mundo demasiado complicado, le preparamos, ponemos al alcance de su periferia un mundo más restringido y apropiado a sus necesidades, y tratando de interpretar éstas a través de sus manifestaciones periféricas, correspondemos a su actitud.

Por esto es la nuestra una *educación de la periferia* que sustituye la *educación hacia el centro* de los antiguos métodos.

El centro queda en libertad para que se desarrolle según las energías naturales y no necesitamos conocerlo ni esperar de él adecuadas reacciones.

Hay que respetarlo.

Es así como asistimos a un éxito sorprendente en el terreno cultural que logran conquistar los niños, mientras la revelación de los procedimientos empleados para semejante conquista nos llenan de agradable estupor.

EL PERIODO PRE-ELEMENTAL

(INFANTIL)

DE 4 A 6 AÑOS DE EDAD

LA GEOMETRIA EN LA CASA DE LOS NIÑOS

Cuando, como en este caso, nos proponemos exponer el método de enseñanza de una materia determinada, precisa reflexionar. En efecto, las distintas disciplinas no marchan aisladas como parece desprenderse de los programas corrientes en las escuelas.

Toda materia de cultura se asemeja a un arroyuelo que tiene su origen en un manantial; aumenta de caudal, desaparece algún trecho oculto bajo las piedras, más allá sale de nuevo a la superficie, se une a otros arroyuelos y se aísla una y otra vez antes de convertirse en río que concluya por labrar su propio cauce.

Es esto análogo, por lo demás, a los orígenes históricos de toda disciplina. Vemos, por ejemplo, a la aritmética y a la geometría tan pronto unidas como separadas antes de adquirir su completo desarrollo y recorrer separadamente su camino propio.

Entremos ahora en materia.

Vamos a estudiar el desarrollo de la geometría en la mente infantil utilizando la ayuda periférica.

Partamos de una época de la vida infantil, en la cual, son *sensibles* las conquistas sensoriales y motrices. Lo que es en síntesis un conjunto de desarrollos; desarrollo de los sentidos, de las coordinaciones motrices del lenguaje.

No preocupan los análisis ni las definiciones, pero el mundo externo se va concretando a través de las sensaciones y de la continua actividad motriz que se ejercita sobre los objetos que le rodean.

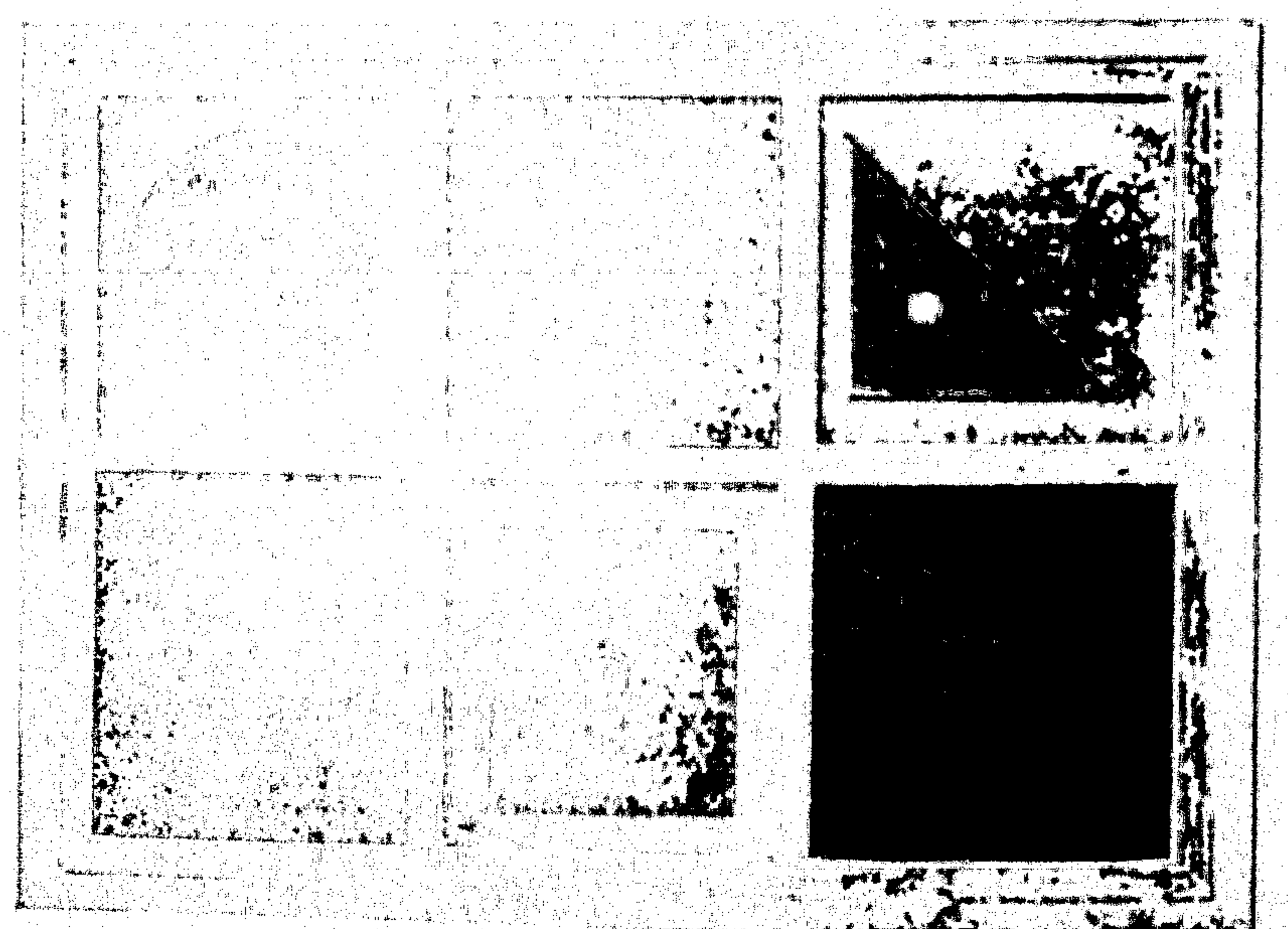
El niño va ordenando las imágenes, establece la diferenciación entre los objetos y se va moviendo con sorprendente posibilidad de perfeccionamiento en la coordinación de movimientos finos y delicados.

Es, pues, alrededor de la edad de cuatro años cuando presentamos en la Casa de los Niños el primer material sistemático de formas geométricas planas.

Permítaseme repetir aquí la descripción hecha ya en mi primer libro.

El material, que tiene por objeto dar al niño la primera representación sensorial de la forma geométrica, consiste en los llamados moldes planos.

Es decir, se trata de planchas de forma geométrica regular, triángulo, cuadrado, rectángulo, círculo, etc., que



MATERIAL DE MOLDES GEOMÉTRICOS

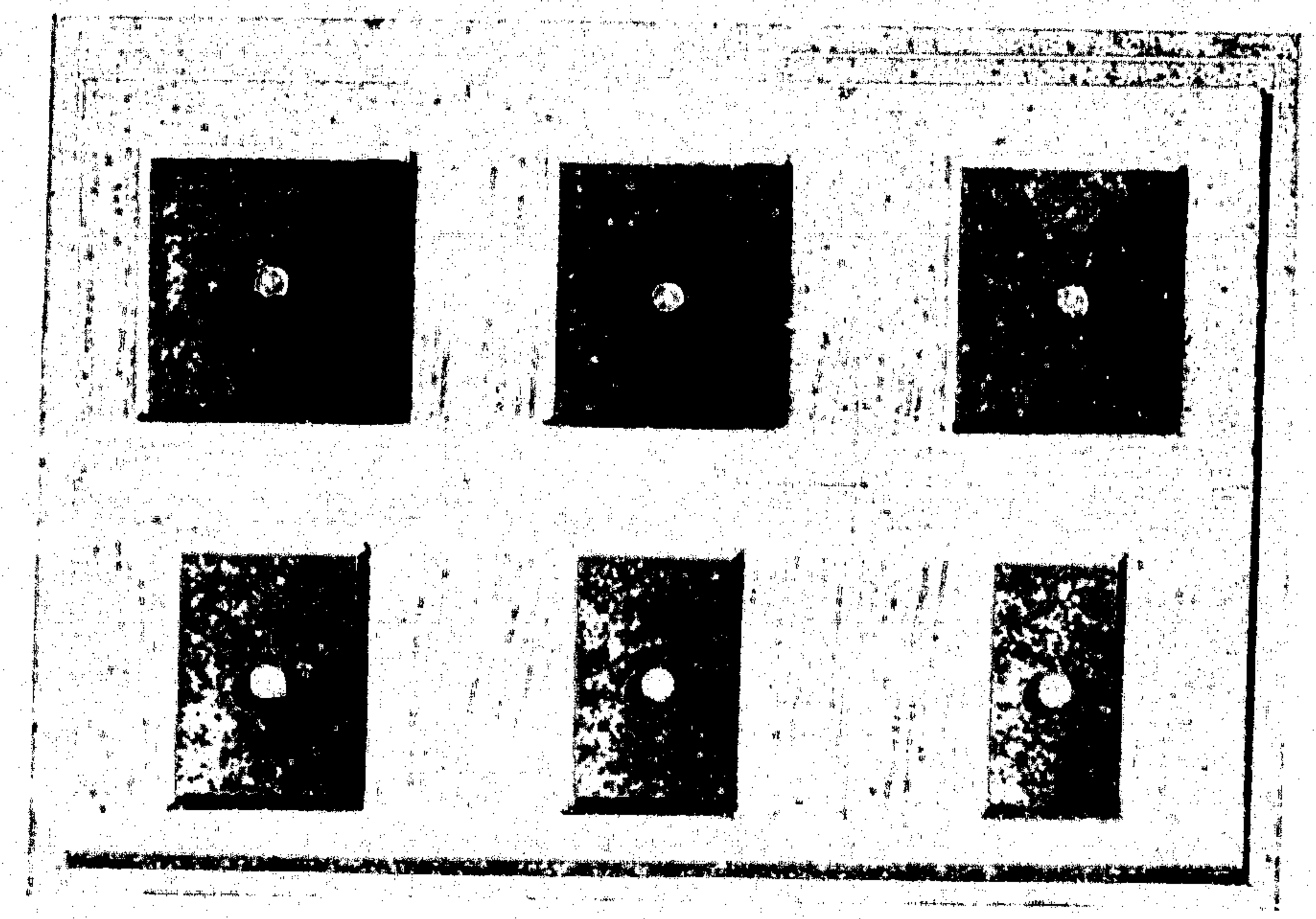
se pueden encajar perfectamente en un marco (otra plancha mayor y siempre cuadrada que puede servir de marco a la figura geométrica a que corresponde, para lo cual presenta el espacio hueco donde ésta encaje exactamente).

A esto le llamamos *moldes geométricos*.

Como las planchas son movibles se pueden colocar y quitar de sus marcos respectivos.

Pero cada plancha solo ajusta en su marco correspondiente y el ejercicio conduce a una comparación constante entre las formas y a un control material sobre sus igualdades y diferencias.

¿Qué hay de idéntico entre la plancha y el marco? La línea de contorno de la plancha y del hueco en que debe encajarse. Porque ambos objetos, en sí mismos, son muy diferentes y hasta, en cierto modo, opuestos. El marco, en



MOLDES GEOMÉTRICOS

su lado externo presenta siempre la misma forma, un cuadrado, mientras las planchas ofrecen contornos externos muy diversos (triángulo, rectángulo, círculo, pentágono, etc.) El cuadrado de los marcos, en cambio, presenta huecos de contornos muy variados que corresponden precisamente a los de las planchas. Además tiene un hueco, una falta de materia.

El aparato se presta a comparación entre las figuras y por lo mismo al estudio induitivo de éstas mediante experiencias de buscar, tantear, acoplar.

He aquí, pues, objetos que atraen la *actividad del niño*, actividad compleja que es conjuntamente la de la mano que aparta, la del ojo que reconoce, la de la mente que juzga. Y un elemento abstracto comienza ya a aparecer como eje en toda acción; aquel contorno común, aquella identidad existente entre objetos diversos y opuestos.

Para llamar su atención sobre el contorno hagamos un ejercicio especial; el niño deberá seguir con el tacto todo el contorno de la plancha geométrica y después el contorno

NIÑOS EJERCITÁNDOSE EN LOS CONTORNOS GEOMÉTRICOS

de la oquedad corresponpondiente al marco. Los movimientos de la mano siguen el contorno y este movimiento ejecutado lentamente, exactamente y con suma atención da una «idea motriz».

El niño puede reconocer «al tacto» la forma del contorno y establecer la relación de identidad que se presenta entre el de la plancha y el del hueco del marco. Estos ejercicios deben proseguir sin la ayuda de la vista, es decir, con los ojos vendados. El niño deberá colocar una serie de planchas en sus marcos respectivos, en dicha forma.

La manera de presentar el material debe ser, en un principio, buscando las formas más regulares y que ofrezcan mayor contraste, por ejemplo: un triángulo equilátero ajustando la plancha a su marco correspondiente. El hueco del marco permite solamente que se coloque la plancha correspondiente ya que otra no encajaría. En efecto, todas las figuras deben estar construídas de tal modo que tengan la misma extensión lineal: 10 centímetros. El triángulo equilátero tiene 10 centímetros de lado y el círculo 10 centímetros de diámetro. De este modo no podrá entrar en el círculo el triángulo por no ser inscrito, ni con mayor razón, el círculo en el triángulo. Esta imposibilidad material de error es el *control de error* colocado en los mismos objetos, razón por la cual el niño, una vez conocido el uso de aquellos, puede trabajar sin necesidad de maestro.

Después de las figuras que ofrecen abierto contraste se pueden utilizar otras conjuntamente, que son diferentes, como el triángulo, el rectángulo, el pentágono, el rombo, el trapecio.

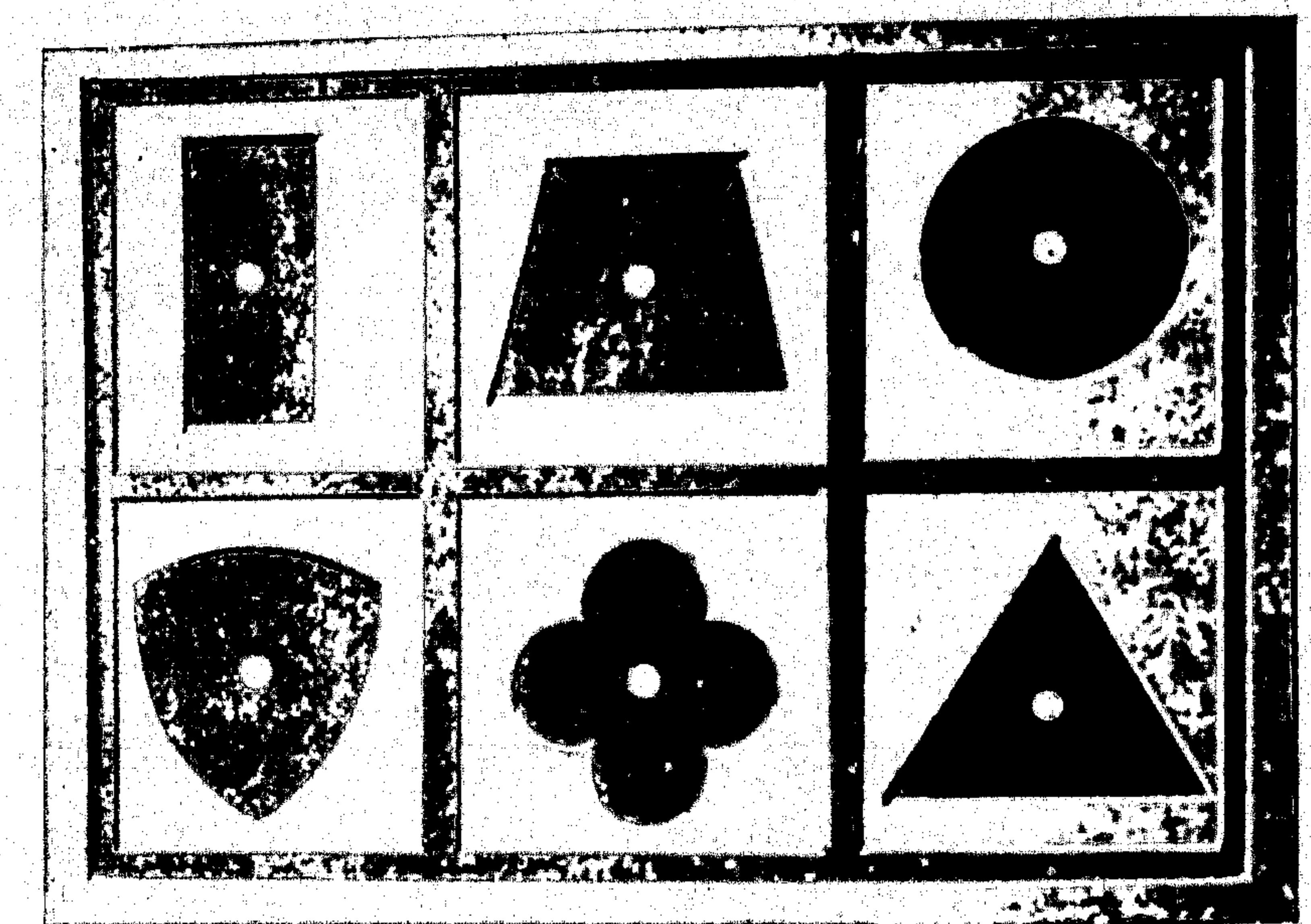
Por fin se le dan seis figuras que representan variedad y gradaciones de la misma forma; seis triángulos diversos (rectángulos isósceles, rectángulo escaleno, equilátero, rectángulo isósceles, obtusángulo isósceles, obtusángulo escaleno).

El cuadrado y cinco rectángulos que tengan un lado constante (10 centímetros) y el otro rebajado sucesivamente en un centímetro hasta llegar al rectángulo que tenga el lado menor de cinco centímetros.

Seis polígonos; del pentágono, construídos todos ellos de tal modo que resulten inscriptibles en un círculo que tiene 10 cm. de diámetro.

Seis círculos de los cuales tenga el mayor diez cm. de diámetro y cinco el menor, y en los cuatro restantes vaya disminuyendo el diámetro de centímetro en centímetro.

También deben reproducirse en el material figuras variadas de contorno curvo; una elipse, un óvalo, dos flores construídas sobre el mismo cuadrado, una sobre un lado y otra sobre un ángulo.



La importancia del marco donde se encajan las formas geométricas, no radica solamente en obtener del mismo material un *control de error* que permite al niño actuar solo en los ejercicios educativos.

El marco llama también su atención sobre las particularidades que diferencian las distintas formas, cuando el niño busca el marco correspondiente a la plancha y le da vueltas entre sus manos para acoplar aquella.

El cuadrado, por ejemplo, se ajusta siempre en cualquier forma que se le coloque, mientras que el rectángulo sólo lo hace cuando se corresponden los lados mayores y menores; de otro modo es imposible.

Al cuadrado, por ejemplo, no se le puede hacer girar dentro del marco tantas veces como a un polígono, y éste, del pentágono al decágono, se desplaza cada vez menos en sus giros sucesivos sobre el centro. El círculo, en cambio, puede girar completamente, sin ninguna interrupción. La elipse se puede ajustar solamente cuando el eje mayor corresponde con la mayor anchura del hueco del marco. En el óvalo, en cambio, no basta con que correspondan aquellos sino que precisa el que el extremo más ancho y el más estrecho correspondan a los idénticos del marco.

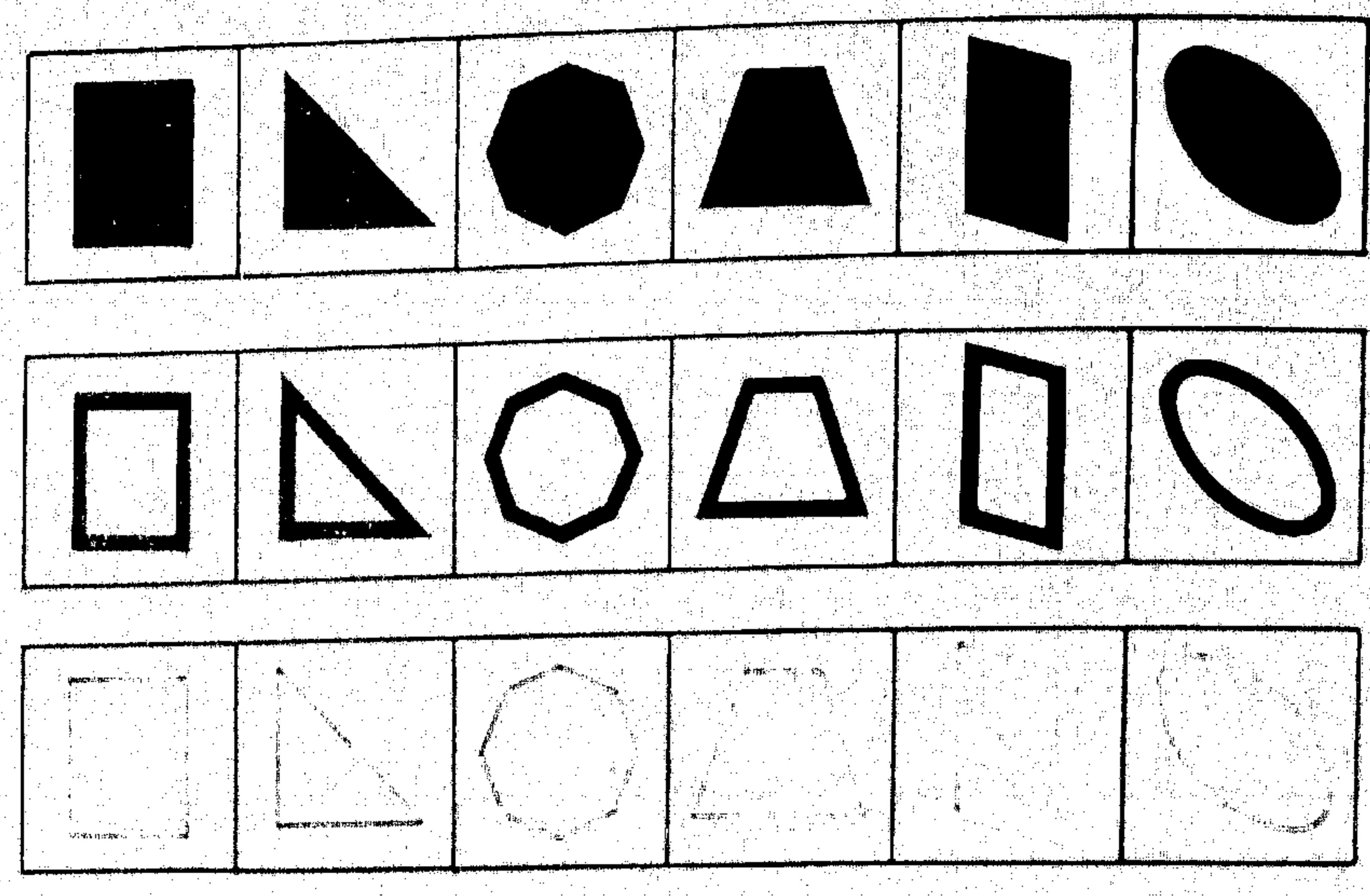
Basta lo expuesto para comprender como el material puede enseñar la diferencia entre las figuras.

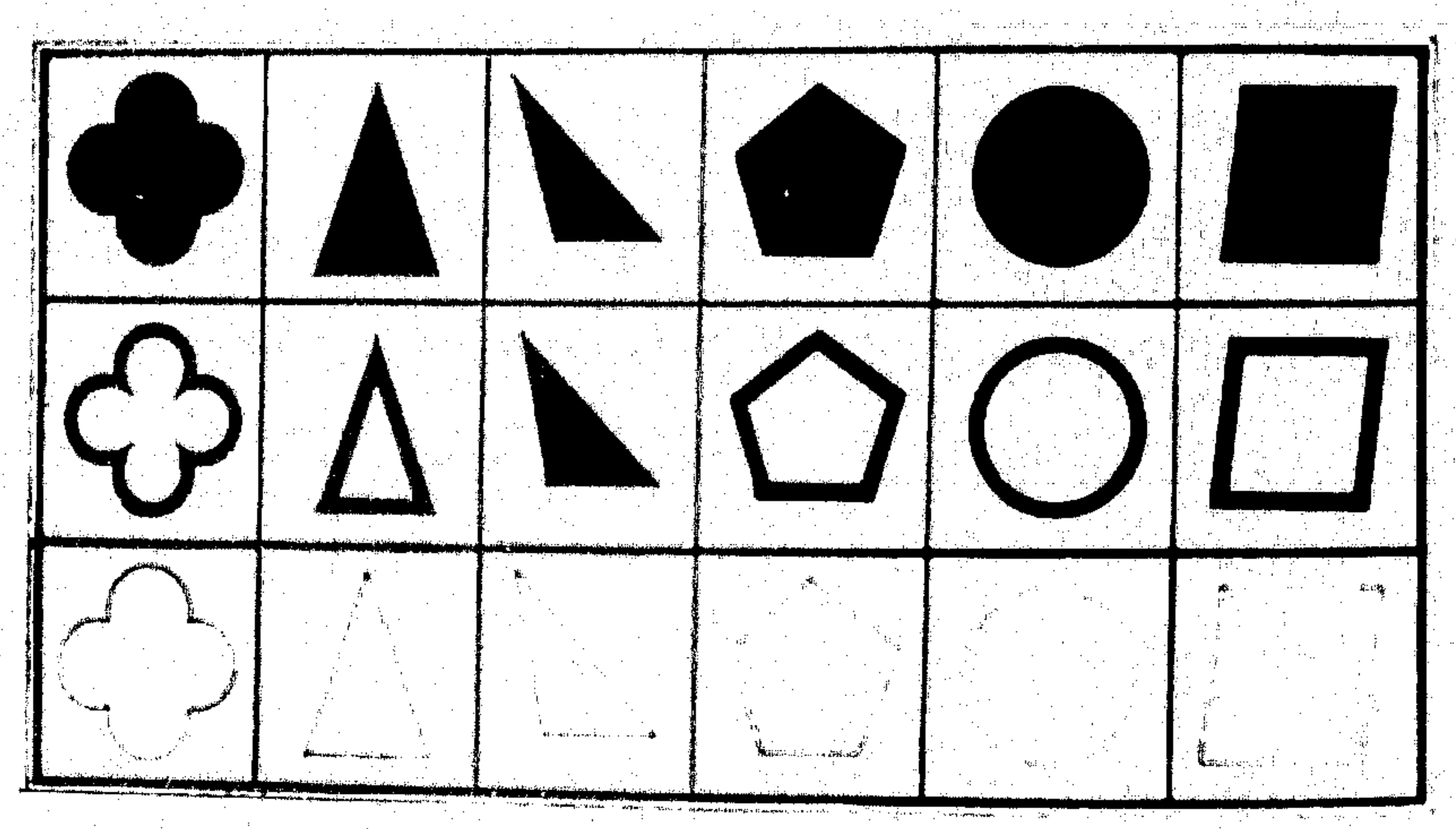
El maestro interviene, no sólo para presentar los ejercicios, sino también para enseñar el nombre de algunas de las formas geométricas que el niño aprendió a distinguir; triángulo, cuadrado, rectángulo, círculo, trapecio, rombo, elipse, pentágono, exágono, octágono.

No se trata solamente pues de un conocimiento que penetra en la mente del niño. En él se *desarrolla* algo que entra a formar parte de su vida mental, es un *sentido geométrico* que se identifica con su organismo psíquico en camino de activa creación.

Los ojos del niño se sienten atraídos por la parte geométrica del ambiente que le rodea; se sienten cautivados por una luz que les penetra sin violencia. El plano de la mesa rectangular, los exágonos del mosaico del pavimiento, los círculos de los platos, los cuadrados de las servilletas, las elipses de los marcos de los cuadros, todo; puertas, ventanas, decoraciones, tienen un nuevo significado. El pequeño niño se siente como asaltado por estas imágenes que penetran en él por una íntima atracción.

Estas *actitudes de la mente*—la observación espontánea fruto de una sensibilidad interior—es algo muy distinto de lo que consideramos *aprehensión lógica de conocimientos*.





CARTONES GEOMÉTRICOS

Unir algún fundamento de una disciplina a los períodos sensitivos, es lo mismo que *preparar en la personalidad*

actitudes que predisponen a comprender, depositar gérmenes permanentes del interés en la inteligencia.

Las figuras geométricas representadas por las planchas se repiten como simples dibujos sobre tres series de cartones cuadrados que tienen las mismas dimensiones que los marcos. En la primera serie se dibujan las planchas con su misma dimensión y colorido, en la segunda serie se reproduce el contorno por una faja coloreada y en la tercera por una línea sútil (ver obra citada).

La línea de contorno, tantas veces percibida gracias a la mano, queda perfectamente aislada y visible.

Infinitos ejercicios y aplicaciones pueden surgir de la combinación de las planchas (que ahora se usan ya sin marco) con los cartones.

Los niños se reunen en grupos para trabajar con este material copioso, disponiendo diversamente los cartones, procurando colocar sobre ellos las planchas correspondientes, o bien intentando recordar una figura y recogiendo los varios dibujos que a ella corresponden, o igualmente buscando en la mezcla confusa de todos los cartones los tres que llevan la misma figura.

Todo esto es el juego de buscar la identidad entre la variedad ; así entre la variedad de forma, como entre la variedad de representaciones de la misma forma.

Este es el ejercicio primordial que pone en relación al niño (entre los tres y cuatro años de edad) con las formas geométricas.

Sus conocimientos son intuiciones de conjunto recibidas a través de una experiencia activa.

DIBUJOS DECORATIVOS GEOMETRICOS

El segundo ciclo está constituído por el juego de figuras geométricas acompañadas de dibujos.

Este dibujo tiene como finalidad la de preparar la mano para la escritura.

Veamos en qué consiste.

Se escogen algunas de las figuras geométricas anteriormente descritas pero construídas con otra materia, esto es, hierro en vez de madera. El hierro se presta por su pesantez y la exactitud de su contorno lineal a servir como elemento para el dibujo al igual que una regla o una escuadra. Las figuras tienen la misma dimensión fundamental (10 cm.) y representan exactamente en forma y tamaño algunas de las ya usadas.

1. — El triángulo equilátero (10 cm. de lado).
2. — Un octógono.
3. — Una flor construida sobre los ángulos.
4. — El cuadrado (10 cm. de lado).
5. — El rectángulo (10 x 5).
6. — El círculo grande (10 cm. de diámetro).
7. — El círculo pequeño (5 cm. de diámetro).
8. — El triángulo de lados curvos.
9. — Una flor (construida en el centro del lado de un cuadrado).
10. — Un trapecio.
11. — Un pentágono.
12. — Una elipse.
13. — Un rombo.
14. — Un óvalo.

Estas figuras deben estar provistas de un marco de hierro de forma cuadrada igual a los de las figuras de madera.

Las 14 figuras se distribuyen sobre dos pupitres donde permanecen siempre expuestas a disposición de los alumnos.

Juntamente a dicho material, que sirve de guía para el dibujo, deben existir materiales de consumo como: hojas de papel de dibujo, grandes como los marcos, de todos los colores posibles y también hojas de tamaño variado, una colección de lápices de colores tan rica en número como en matices (sesenta colores distintos aproximadamente). Es preciso darse cuenta de que los niños han practicado con las planchas de madera muchos ejercicios de dibujo con lápices de color y por ello, no solo tienen el hábito de distinguir las gradaciones más suaves, sino un sentido observador más desarrollado.

Una armonía entre el color y la forma es pues accesible en aquellos niños cuya mano se ha acostumbrado y se hizo hábil para seguir exactamente los contornos.

Sentado que se encuentran en el período sensitivo, se va formando en ellos casi un *temperamento artístico* que permanece aún como energía latente.

Basta darles los materiales necesarios, iniciarles en la técnica de ejecución y después dejar a los niños entregados a sus ejercicios.

Lo que enseñamos con todo esto, no es sino un ejercicio preparatorio de la escritura.

Colocado el marco de hierro sobre una de las hojas de papel cuadradas se les enseña a seguir el contorno interno con un lápiz de color; de este modo queda sobre el papel el dibujo de una figura. Sobre dicho dibujo se procura adaptar la plancha de hierro representada por la figura, en forma tal, que quede exactamente sobrepuesta. Entonces, con otro lápiz de color se traza el contorno de la plancha. Queda de este modo sobre el papel un solo dibujo de doble contorno y las dos líneas se cuerdan los movimientos de la mano alrededor de la plancha de madera y de su marco en los ejercicios precedentes.

Aquello era una *preparación de la mano* para seguir un contorno determinado; aquí es la mano, la que efectivamente dibuja siguiendo aquel contorno. Hecho esto se enseña al niño a rellenar el interior de la figura dibujada valiéndose del rayado, manejando el lápiz como si fuera una pluma cuando se dibujan los trozos. Este ejercicio prepara la mano para manejar la pluma, o mejor dicho, prepara la mano para la ejecución de aquellos movimientos, sin escribir. Llenar de rayas de color las figuras dibujadas es un ejercicio agradable en sí y lleva a una repetición espontánea tan reiterada que la mano es a poco, fuerte y segura y está preparada para escribir perfectamente.

Tal iniciación no tiene por finalidad enseñar el dibujo ni pretende ser uno de los ejercicios de *dibujo libre* tan alabados y defendidos por la moderna pedagogía. Al contrario. Estos dibujos tienen por finalidad sujetar la mano para llevarla a coordinar aquellos movimientos mecánicos, indispensables para la escritura. La mano se siente aprisionada dulcemente, los ejercicios resultan agradables y hacen superar una dificultad práctica bajo un aspecto atrayente.

Aun cuando la finalidad sea hacer una mano hábil para los primeros ejercicios caligráficos, es un dibujo lo que traza, y un dibujo, que servirá para desarrollar un arte decorativo muy artístico. Este arte es verdaderamente el *fruto* de tantas preparaciones indirectas y se puede decir que el ejercicio, que se practicaba sólo para la escritura, era, en cambio, un germen de arte que se desarrolla solo y que bien pronto se hace independiente.

Es pues, de estos dibujos, de los que ahora debemos ocuparnos.

Teniendo como base figuras geométricas y figuras que guardan entre ellas una relación de dimensión (10 cm.) se

consiguen *composiciones* de forma que llevan intuitivamente a una observación más analítica de las mismas figuras y de sus relaciones recíprocas.

Lo primero que se enseña es a no rebasar con los trazos de línea el contorno de la figura. Esto conduce indirectamente a una observación repetida y minuciosa de los contornos.

¡Que diferencia, por ejemplo, entre rellenar un ángulo del triángulo equilátero y uno de los ángulos del octógono! ¡Que bien se pone de relieve por una experiencia prolongada—el número y dirección de los lados—la forma geométrica obtenida!

El cuadrado, el rectángulo, el trapecio, aparecen claramente diferenciados. Siempre con el mismo ángulo y, por lo tanto, con el mismo trabajo de relleno en los dos primeros polígonos mientras el trapecio tiene sus ángulos iguales dos a dos y siempre distintos del ángulo que es constante en todos los rectángulos.

Con estos dibujos pues, que los pequeños ejecutan con agrado y en gran cantidad (diez o más al día durante meses) atraídos por el trabajo en sí, por los colores del papel y de los lápices y por el placer de producir cosas bellas, los niños entre cuatro y cinco años adquieren, por experiencia, la intuición de los caracteres analíticos de las figuras, lados, ángulos, etc.

Bien pronto esta producción formidable de millares de dibujos da lugar a una composición, a una combinación de formas, que es una verdadera *creación* decorativa. Con el triángulo equilátero se forma una estrella cuyas puntas unidas por líneas dan el dibujo de un exágono, exágono mayor que el que da la plancha de hierro exagonal.

De modo análogo con el cuadrado se obtiene un octógono mayor que el de la plancha. Se puede pues dibujar un exágono y un octógono con las planchas respectivas y contienen otros con el triángulo y el cuadrado. El trapecio—que se obtiene cortando por la mitad de su altura el triángulo esquilátero—se presta también a varias combinaciones con el triángulo equilátero, porque superponiendo sucesivamente el trapecio sobre cada uno de los tres lados del triángulo y trazando una línea según la base menor, queda el triángulo equilátero dividido en cuatro pequeños triángulos iguales (figs. 1-2-3-4).

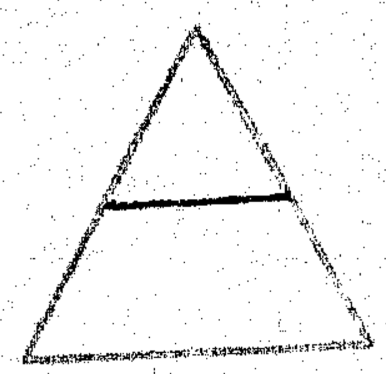


Fig. 1

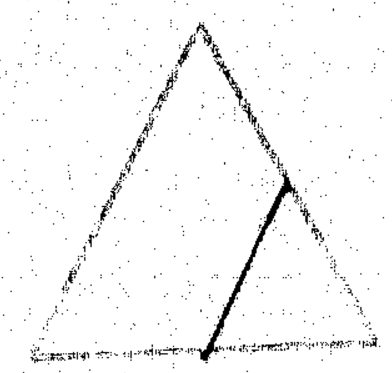


Fig. 2

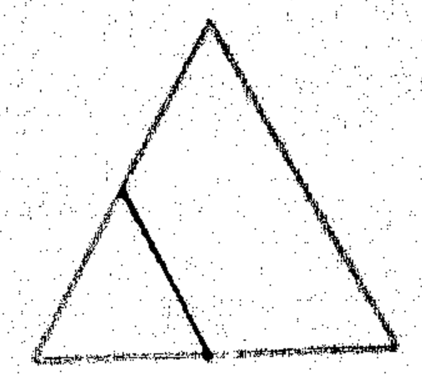


Fig. 3

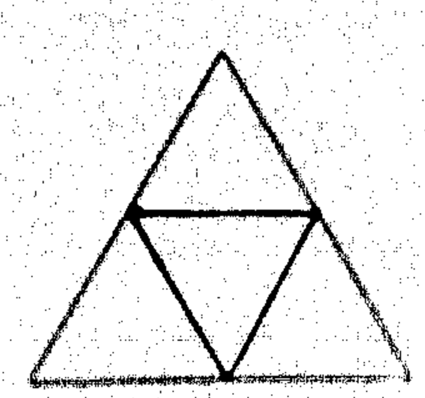


Fig. 4

Basta indicar estas posibilidades, para comprender qu las formas geométricas se prestan a infinitas combinaciones las cuales, conducen a que la conciencia intuitiva del niñ se de cuenta de las relaciones que entre ellas existen. Poc a poco, otros medios y otras técnicas se ponen al alcanc

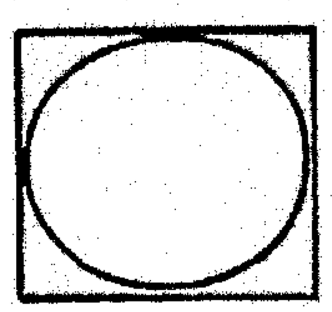


Fig. 5

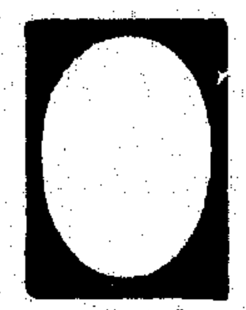


Fig. 6

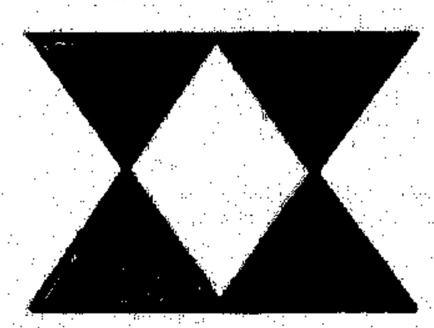


Fig. 7

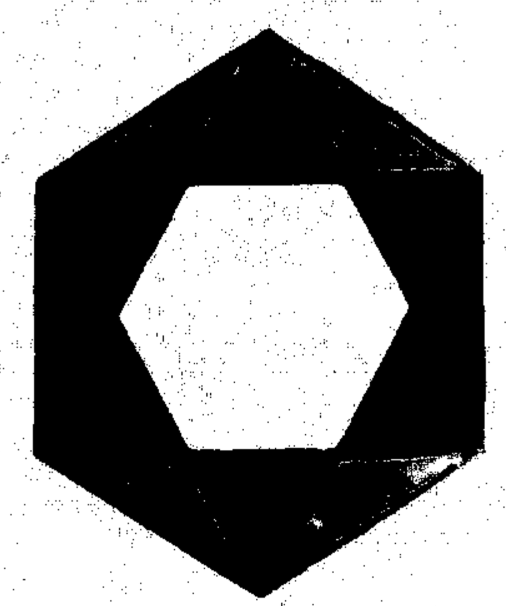


Fig. 8

de los pequeños—acuarelas, tintas de colores, paste etc.—que crean en su mente una variedad de composici nes decorativas y despiertan un sentido de armonía est tica que va desarrollándose en el alma infantil. (Figs. 5 6-7-8).

Al niño se le conduce a la observación minuciosa del detalle—a un análisis—y a combinaciones ligadas con los

caracteres de las figuras geométricas y todo ello sin la exortación y la guía del maestro. Es la creación artística la que se convierte en maestra de geometría y las bellas producciones conseguidas son el estímulo constante y el premio continuo de un progreso impuesto por el propio impulso.

ESTUDIO DIFERENCIAL DE LOS CONTORNOS

Todo cuanto hemos descrito, relativo al período infantil, es una de las verdaderas enseñanzas de la geometría. La preparación antedicha pertenece al período de instrucción prelemental. Se pueden agrupar en tres núcleos los ejercicios desarrollados:

1.° — Tocar el borde de la plancha y el hueco correspondiente del marco para comprobar con el movimiento la identidad del contorno. En figuras distintas atrae la atención sobre la línea y proporciona la intuición abstracta.

2.° — Las tentativas para introducir las planchas en distintos marcos y el hacerlas girar para probar en cuantas posiciones pueden ser ajustadas a los suyos respectivos, proporcionan un conocimiento intuitivo diferencial, muy preciso de las figuras geométricas y sus contornos.

3.° — El dibujo con las planchas de hierro conduce a combinaciones decorativas, de una intuición compleja sobre las recíprocas relaciones entre las distintas figuras.

Después de estos ejercicios, es la consecuencia lógica y necesaria, un estudio de las líneas y los ángulos y una definición exacta de las distintas figuras planas.

El estudio se acompaña con la construcción geométrica lineal y con el relieve decorativo de los distintos elementos (líneas, ángulos, puntos).

Este procedimiento del primer grado elemental, representa, por una parte, el análisis de los distintos elementos de cada figura y por otra, su construcción técnica y precisa, es decir, que transporta a un plano superior y abstracto aquella actividad de los niños concentrada primeramente sobre el manejo de objetos que se mezclan y ordenan sucesivamente. Además, ya no es con el solo nombre de la figura con que se asocia ésta al conocimiento, sino que es la definición la que se presenta como indicación proporcionada al estudio de los caracteres diferenciales entre las diversas figuras. Pero antes de entrar de lleno en semejante estudio, conviene llamar la atención sobre el *plano*—dos dimensiones—iniciando su presentación con ejercicios de cuadratura de la hoja de dibujo. Estas enseñanzas se refieren al primer período de instrucción elemental, pero a éste puede acompañar paralelamente un período elemental sucesivo. Se principia por facilitar al niño instrumentos que sirvan para construir las figuras dibujadas hasta ahora con las planchas como guía; por estudiar las figuras en sus distintas partes (líneas, ángulos) y dar definiciones exactas. Una enseñanza que se apoya sobre amplias nociones intuitivas, conseguidas por una larga experiencia, es algo semejante a la luz que ilumina lo que ya existe y es esto, en realidad, lo que debe ser la definición. La definición debe ser posterior al conocimiento y no a la inversa.

La definición es un paso más allá del conocer, y entonces, corresponde a una tendencia natural de la mente que es, la de precisar y ordenar lo conocido.

Lo mismo puede decirse de los estudios analíticos y constructivos; estos son interesantes como penetración en el detalle de cosas ya conocidas. Practicar un análisis minucioso para determinar las particularidades de cada figura y estudiar sus detalles técnicos para construirla con exactitud es casi un camino natural de la mente, el final de un proceso de desarrollo cuya causa radica en el interés suscitado.

Esta parte no excluye el lado artístico y los niños pue-

en destacar los detalles con motivos decorativos, y combinando los nuevos conocimientos con los antiguos, desenvolver, en una unidad de desarrollo, la construcción de su ultura.

Los primeros instrumentos que se facilitan al niño son a regla, la escuadra y el compás. Primero el compás de ápiz, después el compás con bigotera e igualmente el tiralíneas para trazar líneas con tinta densa (tinta china).

También se le deben facilitar varias plumas como instrumentos de dibujo libre.

Todo esto se les ofrece poco a poco y se verá como los niños discuten minuciosamente todos los detalles, con esa riqueza de imaginación en ellos peculiar y con la paciencia que ponen en todas sus cosas.

LA CUADRATURA DEL PAPEL

MARCOS Y DECORACIONES

El plano sobre el cual se dibuja. — Considerar la hoja de papel como el plano que recibe el dibujo de las figuras (una idea paralela a la de los marcos donde se encajan las planchas) es una manera lógica de iniciar los dibujos constructivos.

Con la regla colocada diagonalmente sobre el papel, en forma que se apoye exactamente en los ángulos opuestos de éste, se trazan dos diagonales que se cortan en el punto central. Tomando éste como centro y utilizando el compás de lápiz se determinan sobre las diagonales cuatro puntos equidistantes de aquel. Uniendo entre ellos estos cuatro puntos, con lo que se formará un rectángulo, queda dibujado el contorno. El contorno queda dibujado con lápiz de color o tinta, mientras el resto de las líneas trazadas se borra.

En vez de cuatro puntos solamente, se pueden tomar otros cuatro a alguna distancia y queda entonces *una doble cuadratura* o un *doble marco*. Apenas se les indica a los niños este nuevo conocimiento, no solamente lo cogen con vivo interés, sino que lo ponen en práctica repetidas veces. Querrán adornar en seguida con marcos, todos sus trabajos y las hojas de sus cuadernos como si la cuadratura fuese el complemento de toda labor de escritura.

Una aplicación espontánea de los niños enseñados por este procedimiento, trajo o creó la decoración de la cuadratura en las líneas y en los ángulos, y es realmente sorprendente la paciencia por ellos demostrada en estos trabajos

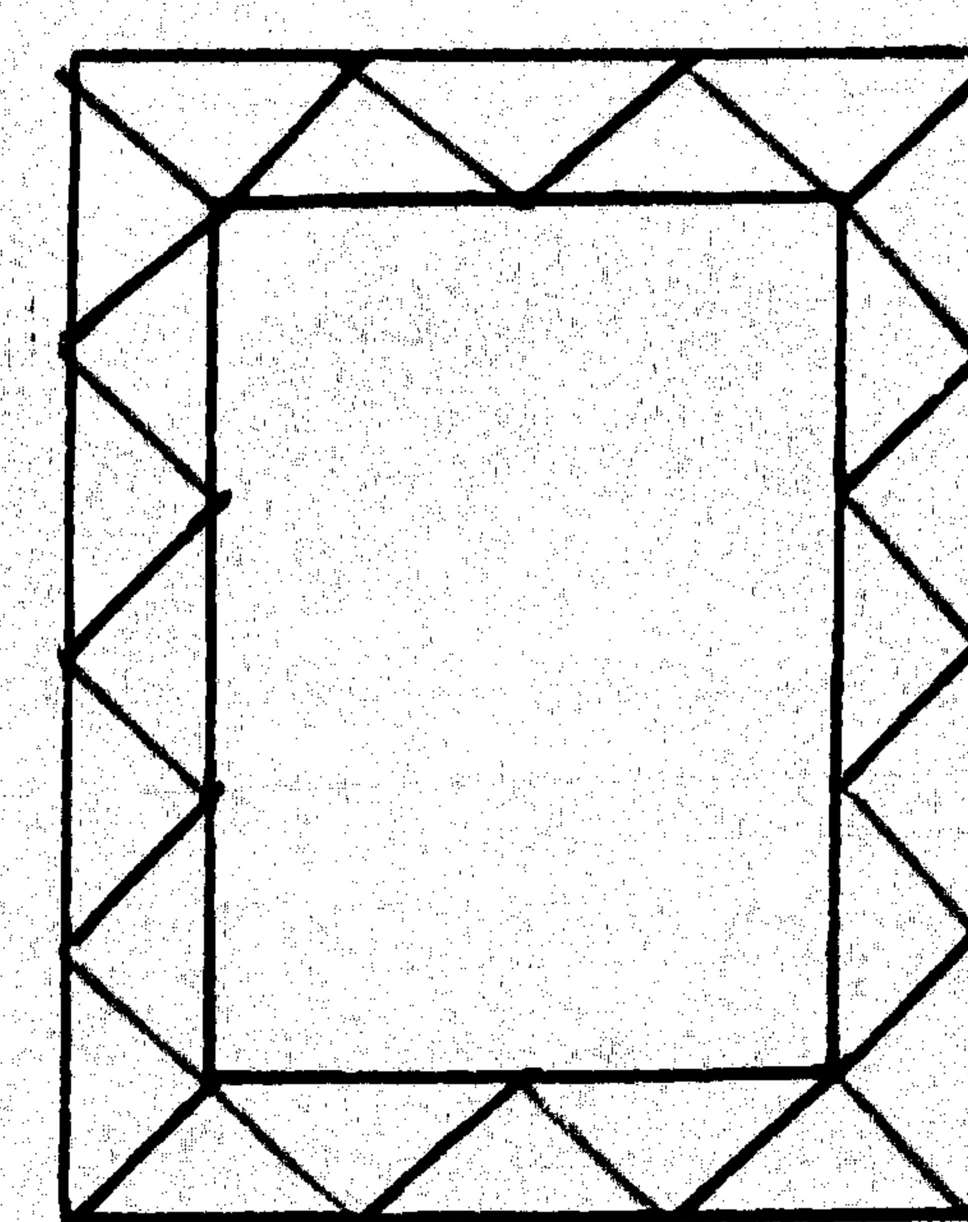


Fig. 9

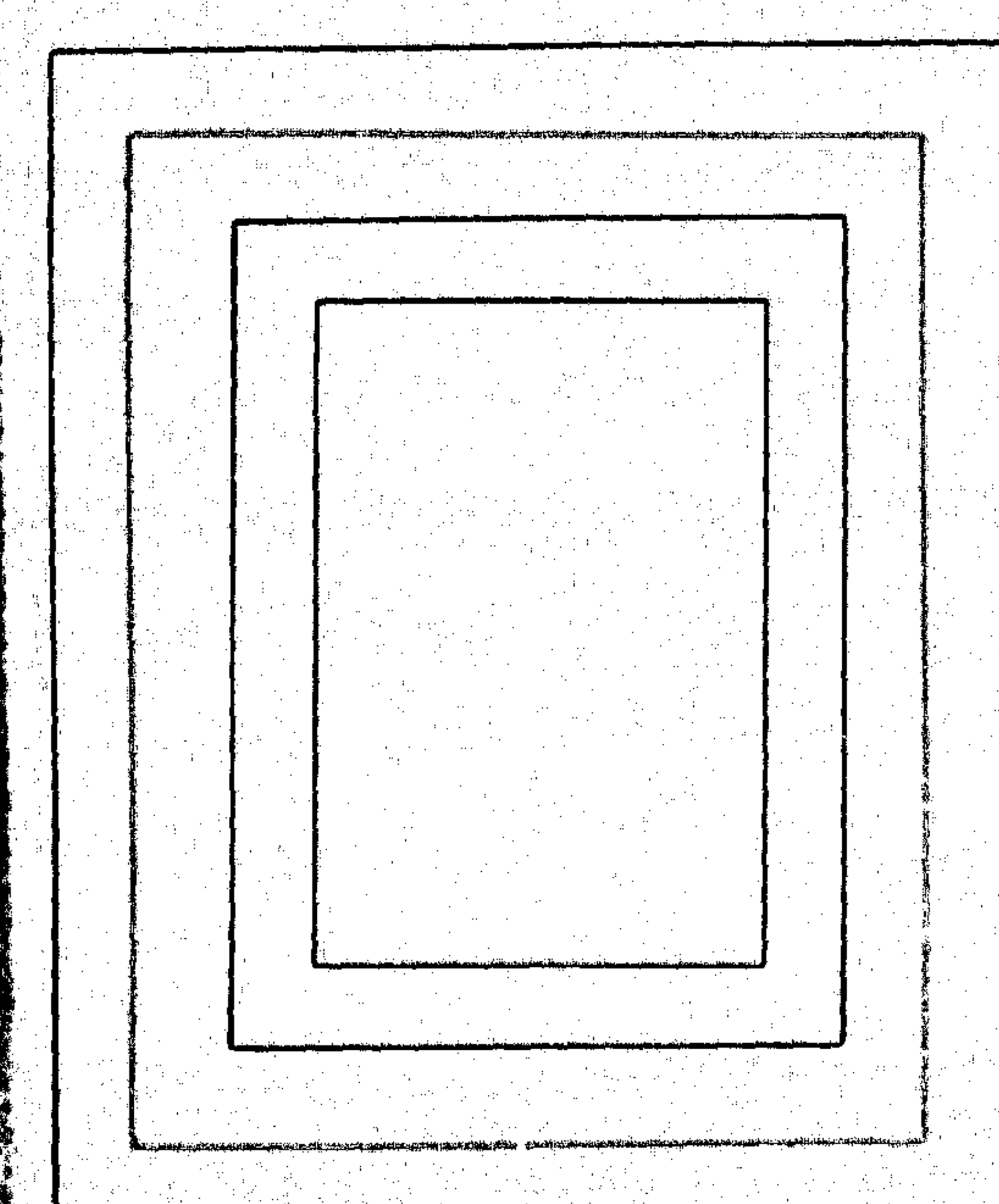


Fig. 10
Paralelas entre sí

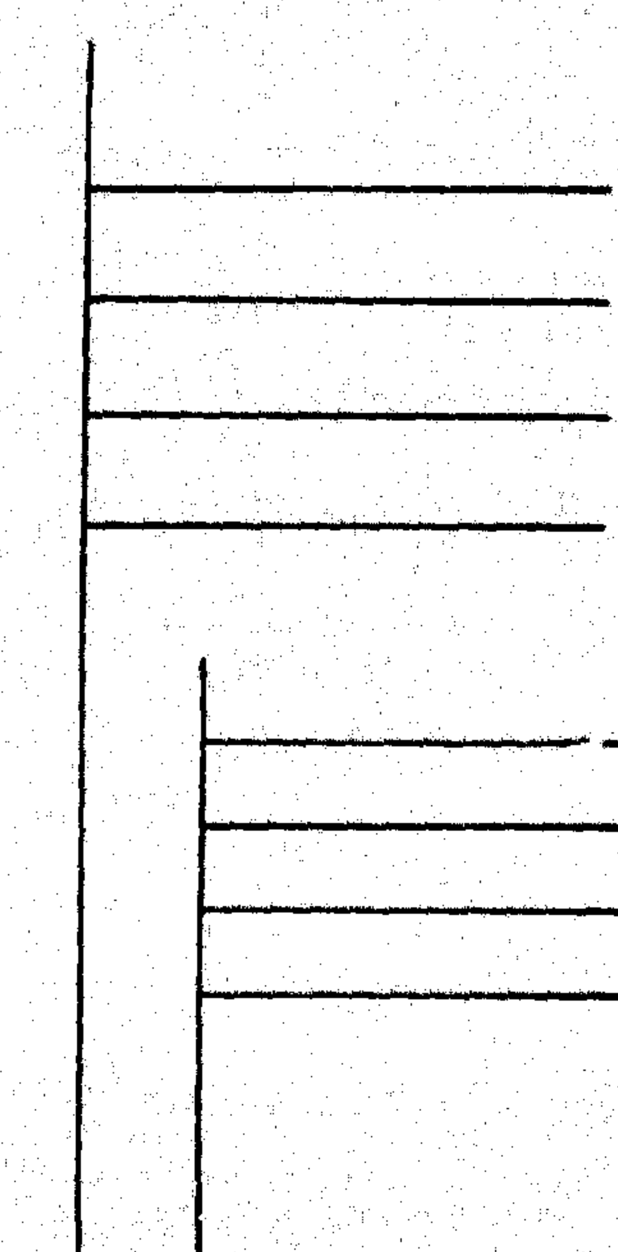


Fig. 11
Líneas paralelas

minuciosos, y admirable la gran variedad de dibujos que supieron imaginar.

Las preparaciones precedentes saturaron en tal forma su imaginación creadora y multiplicaron tanto sus energías, que bastó ofrecerles un nuevo medio para ver depositada en él una riqueza extraordinaria de expresión. Al igual que introduciendo un hilo en una solución cristalina al límite de saturación vemos depositarse sobre él gran número de cristales. (Fig. 9).

La escuadra presenta un ángulo especial, un ángulo recto.

Si se aplica la escuadra sobre el ángulo del marco construído sobre el papel se observa que ambos son idénticos.

Angulo es la figura formada por dos líneas que se encuentran.

Ambas líneas se encuentran en un *punto*.

También las diagonales de la hoja de papel, dibujadas con ayuda de la escuadra se encuentran en un *punto*: el centro, en el cual se fijó la punta del compás.

Si se hace deslizar la escuadra a lo largo de una de las líneas laterales de los marcos se pueden dibujar varias líneas, todas ellas, en la misma dirección; estas son *líneas paralelas* (fig. 10).

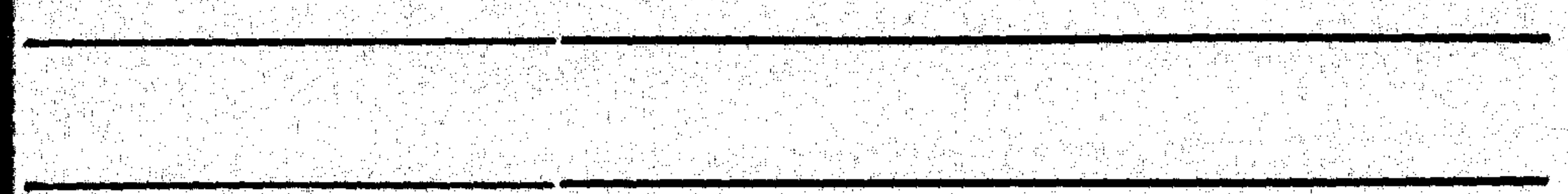
También cuando se dibuja un marco doble, las líneas que forman el doble contorno por ambos lados, son paralelas entre sí (fig. 11).

ELEMENTOS LINEALES

LÍNEAS Y ÁNGULOS

Dos líneas paralelas son igualmente distantes la una de la otra y no se encuentran jamás.

DOS LÍNEAS PARALELAS



Por ello dos líneas paralelas aun cuando se prolonguen no pueden jamás constituir un ángulo.

* * *

Las líneas que no son paralelas si se prolongan se aproximan por un extremo y se alejan por el otro (fig. 12).

Tales líneas son oblicuas.

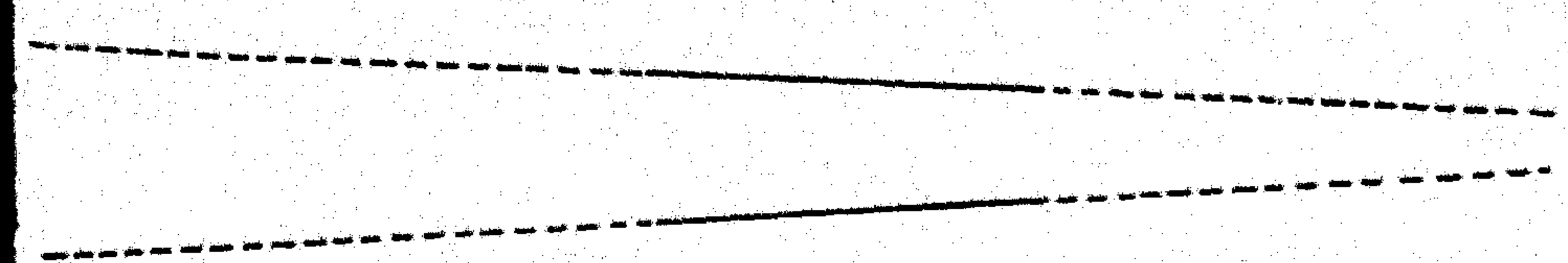


Fig. 12

En la parte que se aproximan concluyen por encontrarse en un punto y forman un ángulo; su dirección en tal caso es *convergente*. Por la parte opuesta se alejan cada vez más y son, en cambio, *divergentes*.

El ángulo mayor de la escuadra es un ángulo recto.

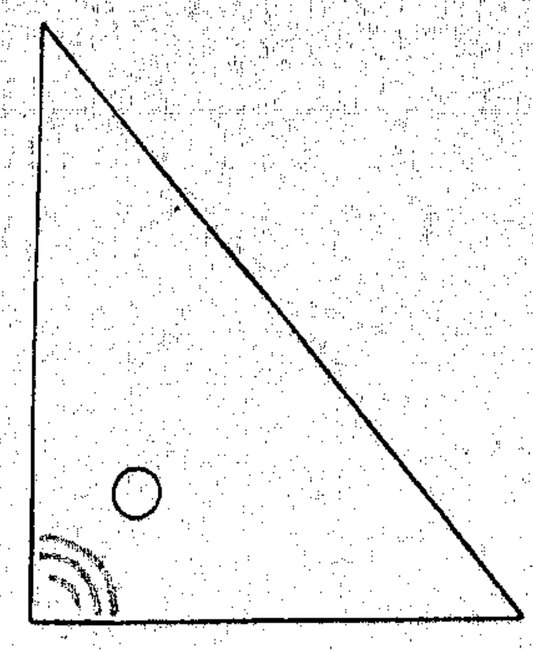


Fig. 13

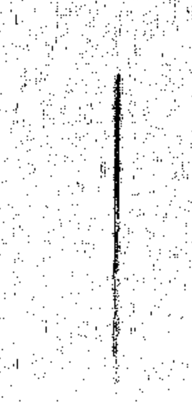


Fig. 14

Las líneas que se encuentran en dirección recta se llaman perpendiculares entre sí (fig. 13 y 14).

Las líneas que no se encuentran perpendicularmente no forman jamás ángulo recto sino ángulos distintos de aquel, es decir, mayores o menores que el recto.

Si forman ángulos menores que el recto, estos se llaman ángulos *agudos* (fig. 15).

Si, en cambio, al encontrarse forman un ángulo mayor que el recto, este ángulo se llama *obtuso* (fig. 16).

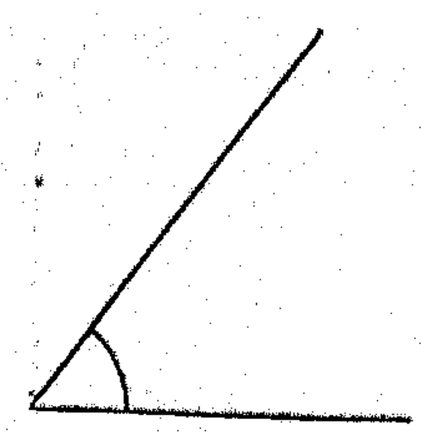


Fig. 15

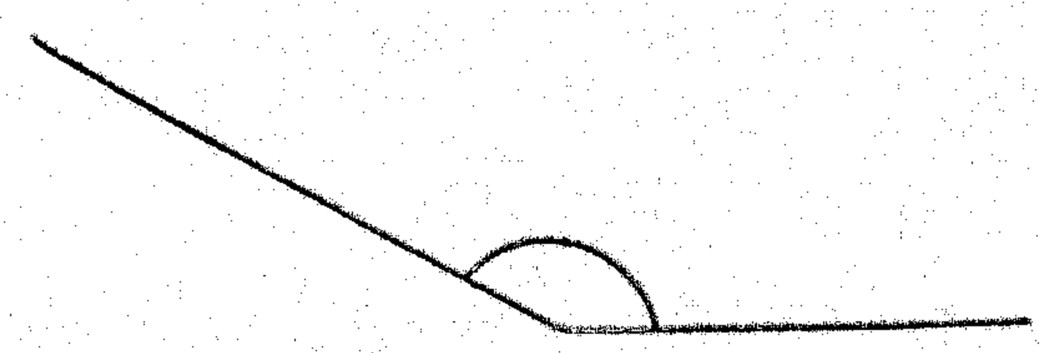


Fig. 16

DETERMINACIONES ELEMENTALES. — FIGURAS

EL TRIÁNGULO

Construcción de figuras. — El triángulo es una figura cerrada compuesta por tres líneas y tiene tres ángulos.

Modo de construir un triángulo regular. — Se traza una línea, se fija la punta del compás en uno de sus extremos y se abre el compás hasta lograr que su abertura sea igual a la longitud de la línea, en forma tal, que la punta del lápiz toque el extremo opuesto de aquella.

Después, girando hacia arriba el compás se describe un arco.

Apoyando después el compás con la misma abertura en el otro extremo de la línea se describe otro arco en la parte superior de aquella.

Los dos arcos se encuentran en un punto.

Uniendo este punto por medio de líneas con los extremos de la trazada primeramente se obtiene un triángulo regular (fig. 17).

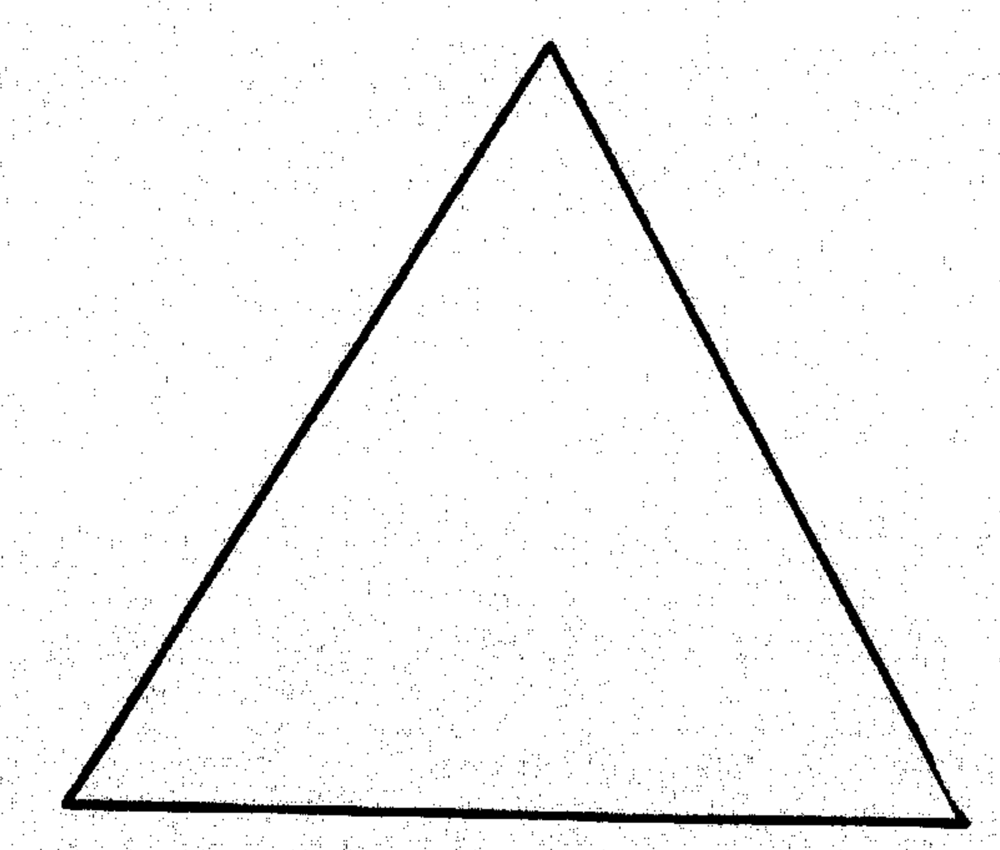


Fig. 17
TRIÁNGULO EQUILÁTERO

El triángulo construído tiene las tres líneas iguales entre sí.

Las líneas que cierran un triángulo se llaman *lados del triángulo*.

El triángulo que—como el de la figura—tiene sus tres lados iguades se llama *equilátero*.

El triángulo que tiene los tres lados iguales tiene también iguales sus tres ángulos y por esto se llama *equiángulo*.

Ahora hagamos otra construcción del triángulo. En vez de abrir el compás con la misma extensión que la línea primeramente trazada, abrámoslo menos, pero de manera que la abertura sea mayor a la mitad de la línea base, después tracemos dos arcos que se cortan en un punto situado sobre aquella. En este caso el triángulo tiene dos lados iguales entre sí, pero menores que la línea trazada primeramente.

Construyamos ahora otro triángulo tomando una abertura de compás mayor que la línea base; éste tendrá dos lados iguales entre sí pero mayores que la línea base.

Cuando un triángulo tiene dos de sus lados iguales entre sí se llama *isósceles*. (figs. 18 y 19).

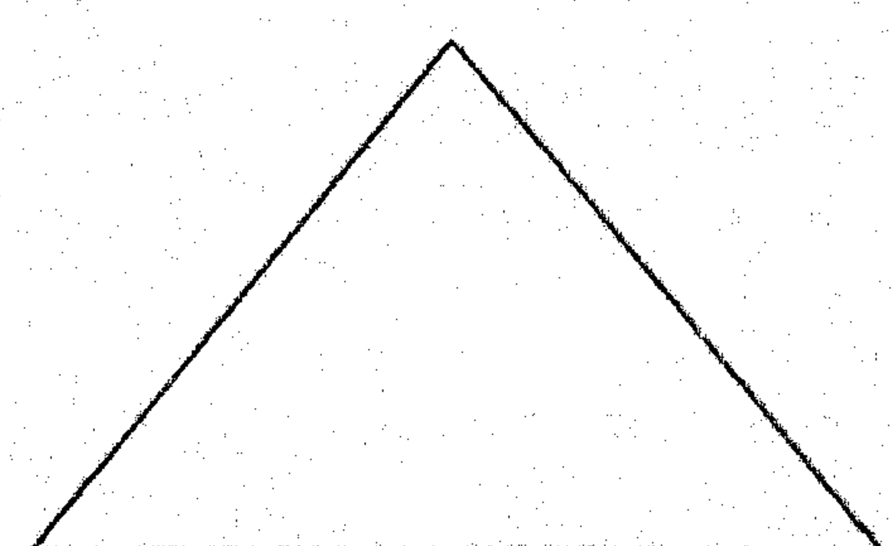


Fig. 18

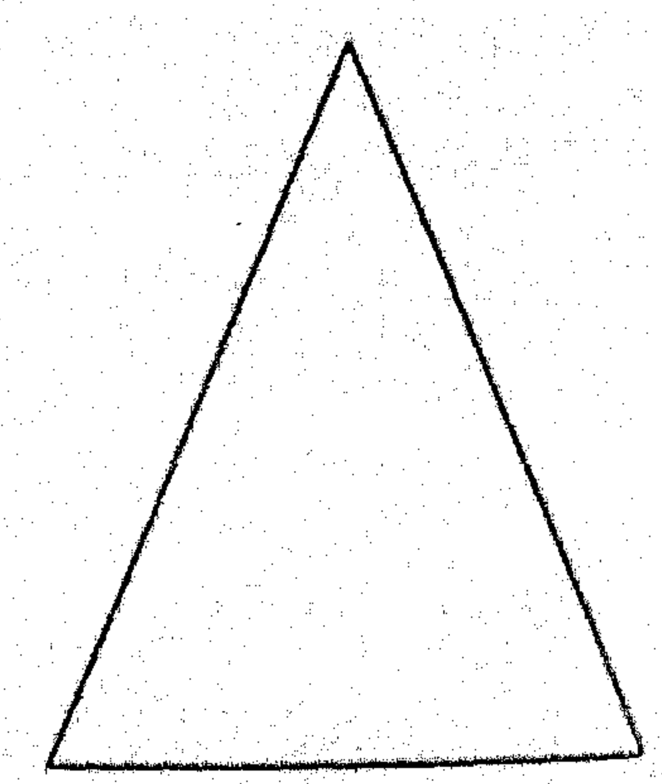


Fig. 19

TRIÁNGULOS ISÓSCELES

Cuando los tres lados de un triángulo son distintos entre sí, es decir, de diversa longitud, el triángulo se llama

Fig. 20
TRIÁNGULO ESCALENO

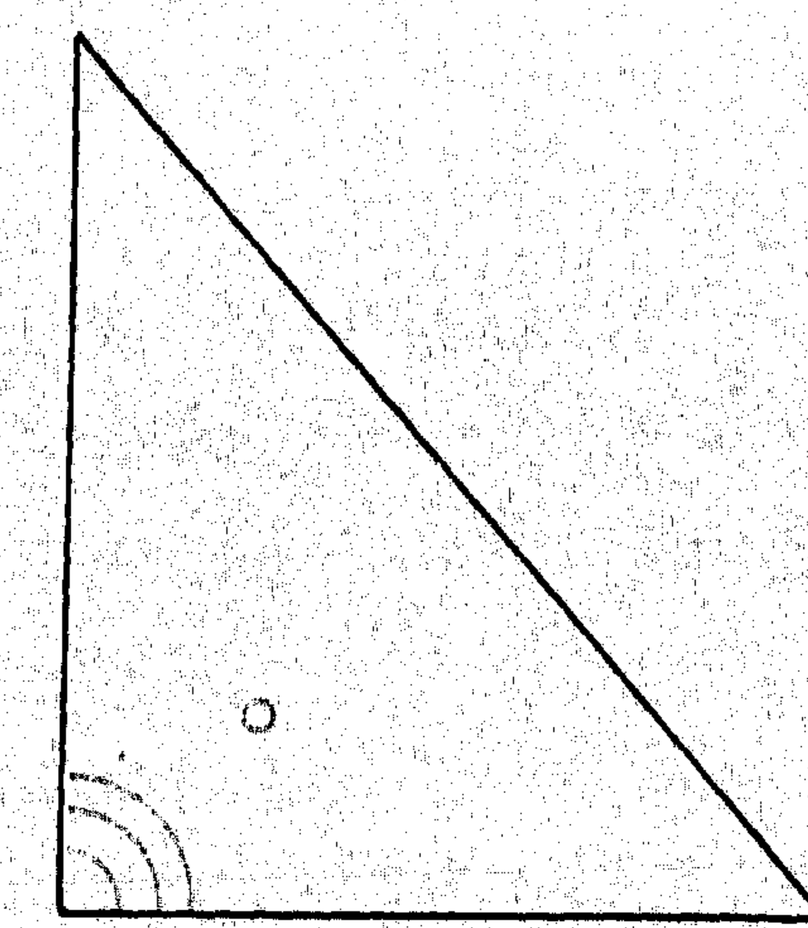


Fig. 21
TRIÁNGULO RECTÁNGULO

escaleno. No hace falta norma especial para dibujarlo, basta trazar tres líneas que se encuentran (fig. 20).

Si un triángulo tiene un ángulo recto, como la escuadra, se llama triángulo rectángulo (Fig. 21).

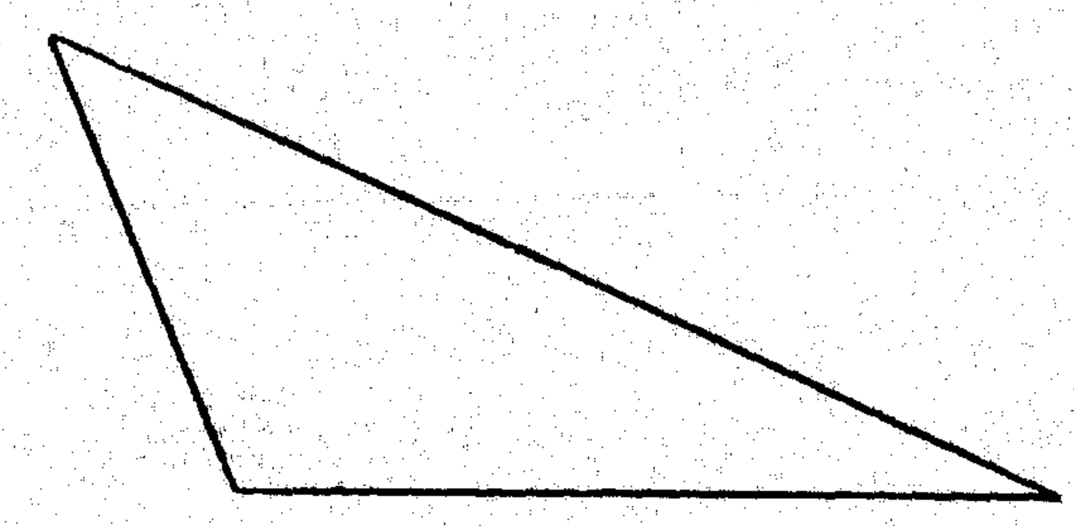


Fig. 22
TRIÁNGULO OBTUSÁNGULO

Si un triángulo tiene un ángulo obtuso se llama triángulo obtusángulo (fig. 22).

Cuando un triángulo no tiene un ángulo recto ni un

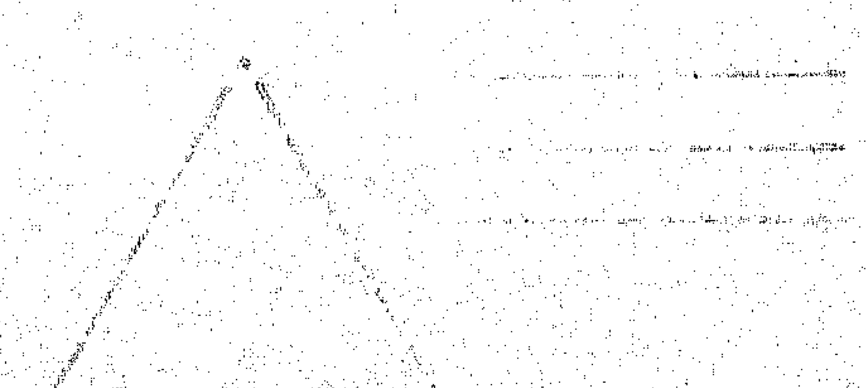


Fig. 23
TRIÁNGULO EQUILÁTERO

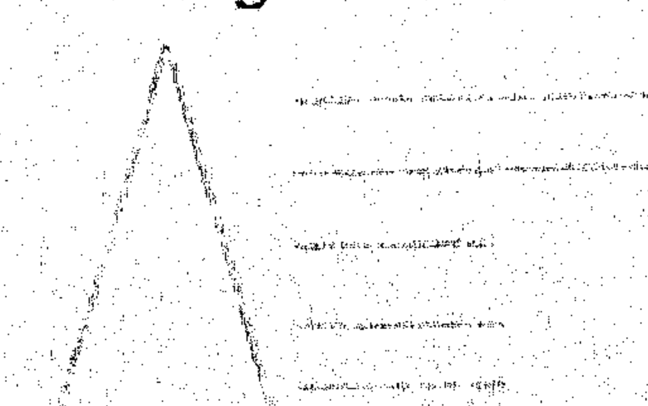


Fig. 24
TRIÁNGULO ISÓSCELES

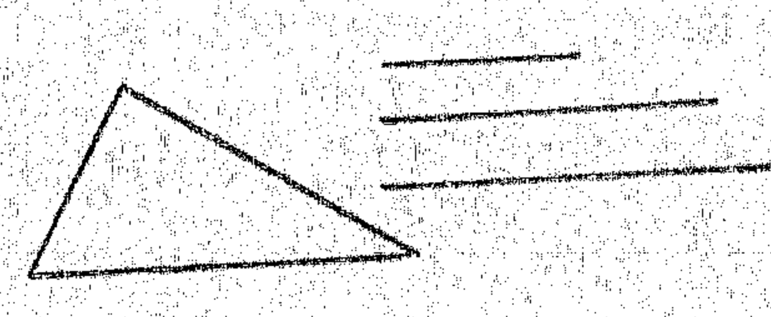


Fig. 25
TRIÁNGULO ESCALENO

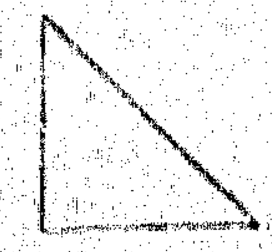


Fig. 26

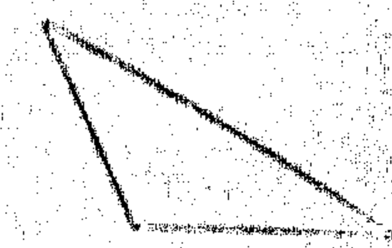


Fig. 27
TRIÁNGULOS RECTÁNGULO Y OBTUSÁNGULO

ángulo obtuso, los tiene todos agudos y se llama *triángulo acutángulo.*

El triángulo es una figura cerrada por tres lados y tiene tres ángulos.

Cuando los tres lados son iguales se tiene el triángulo equilátero (fig. 23).

Cuando sólo dos lados son iguales se tiene el triángulo isósceles (fig. 24).

Cuando los tres lados son desiguales se tiene el triángulo escaleno (fig. 25).

Los triángulos, en general, tienen los tres ángulos agudos y en el equilátero, además, son iguales entre sí. En todos estos casos son triángulos acutángulos.

Si el triángulo tiene un ángulo recto se llama triángulo *rectángulo* (fig. 26).

Si tiene un ángulo obtuso, se llama triángulo *obtusángulo* (fig. 27).

Las formas de triángulo más importantes son dos.

Una es el triángulo equilátero que es igualmente equiángulo. Tiene iguales lados y ángulos. Es la forma más regular entre todos los triángulos (fig. 28).

La otra forma más importante del triángulo es el rectángulo.

Un lado cae perpendicularmente sobre el otro y forma el ángulo *recto* (fig. 29).

Los dos lados que encontrándose forman en el triángulo el ángulo recto toman un nombre especial; se llaman *catetos.*

El tercer lado, el opuesto al ángulo recto toma también un nombre especial; se llama *hipotenusa.*

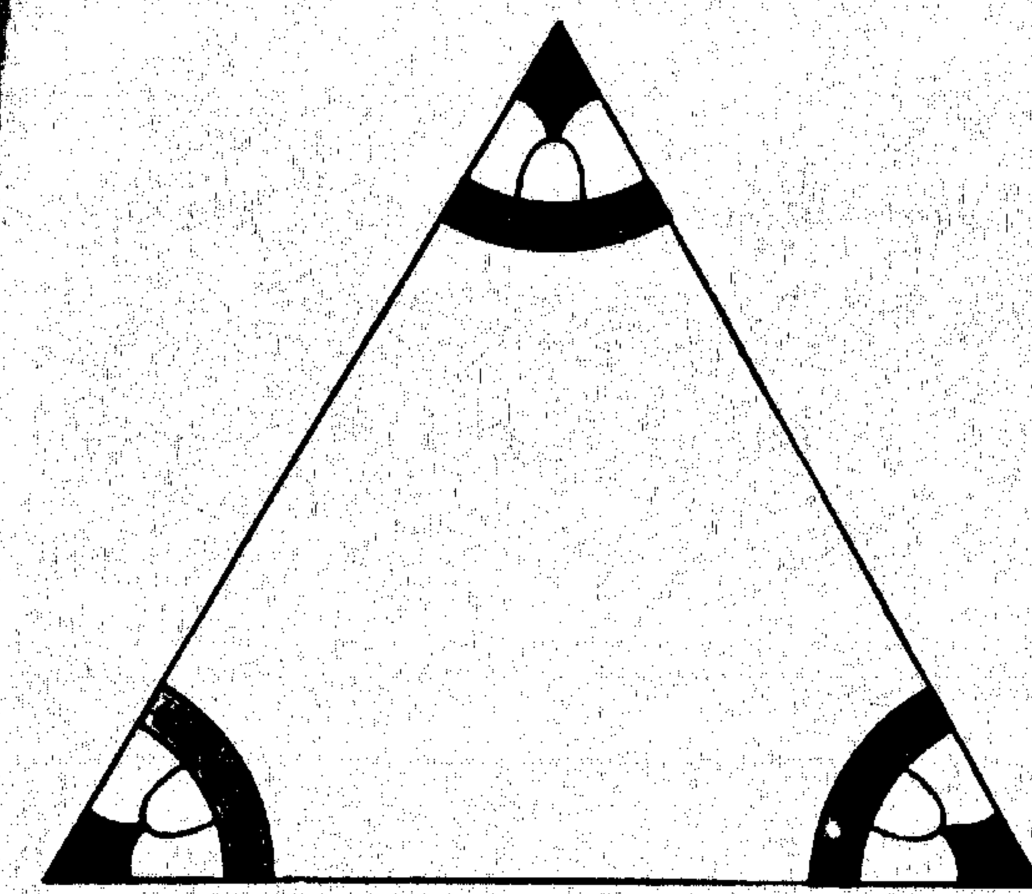


Fig. 28
EQUILÁTERO-EQUIÁNGULO
El más regular de todos los triángulos

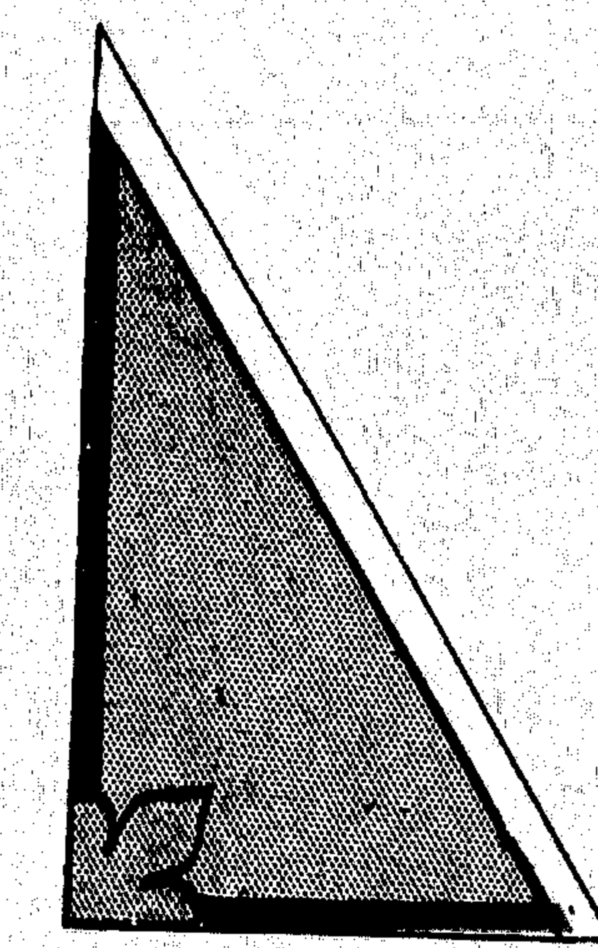
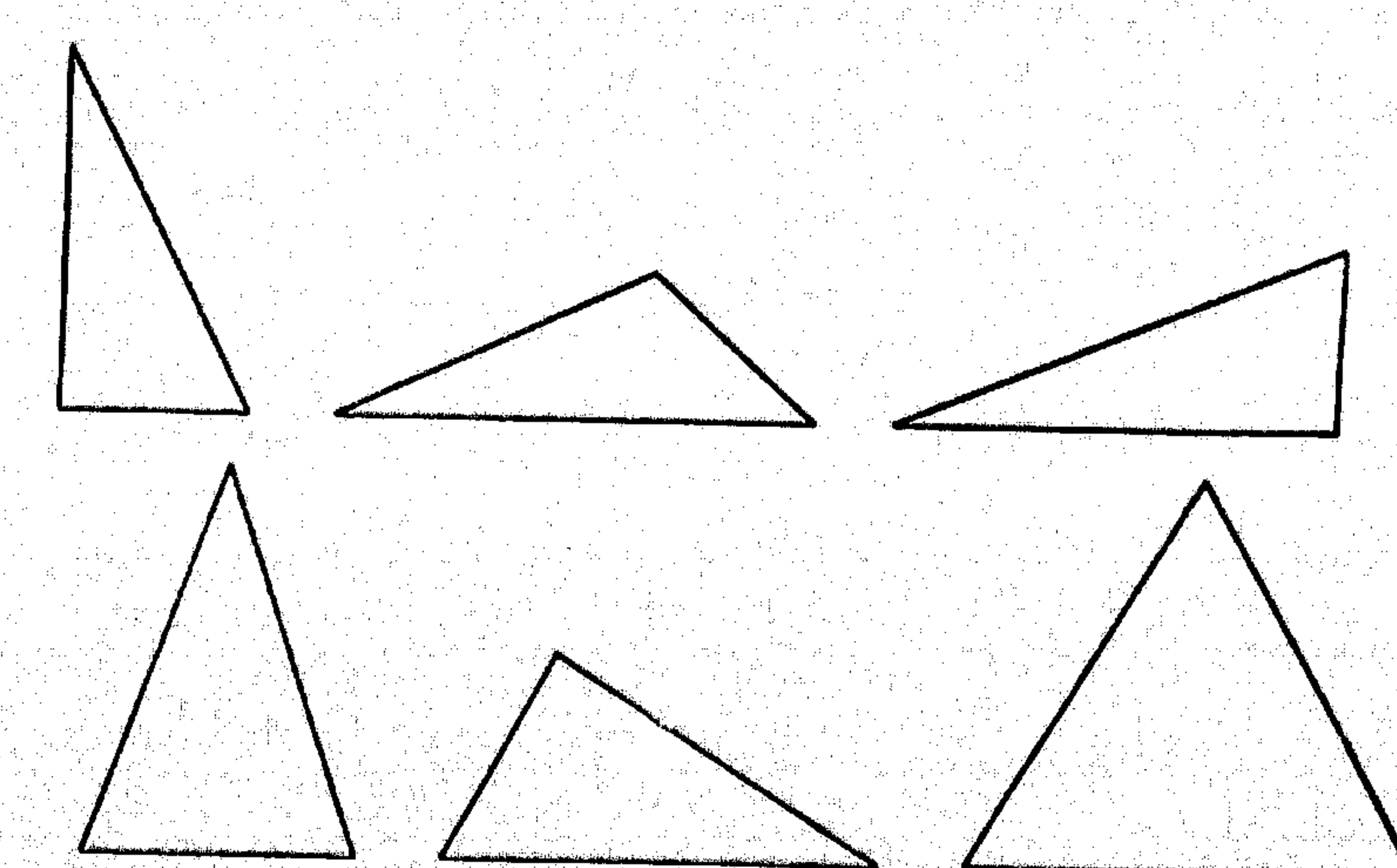


Fig. 29
RECTÁNGULO

En los otros triángulos no reciben denominación especial alguna sus lados. Solamente si se consideran los triángulos apoyados con un lado en la parte inferior y un ángulo que permanece en la superior (como hemos venido construyéndolos con la regla y el compás) entonces la línea inferior se llama: *base* del triángulo; y el punto de encuentro de los lados que constituyen el ángulo que está encima se llama: *vértice* del triángulo.



Figs. 30 al 35

Haciendo girar el triángulo toma siempre el nombre de base el lado inferior y vértice el ángulo opuesto y si continuamos haciéndole girar en forma que sirva de apoyo un lado después de otro, cada uno de estos lados se convierte sucesivamente en base y el ángulo opuesto en vértice (figs. 30, 31, 32, 33, 34, 35).

Si consideramos conjuntamente todos los lados que cierran el triángulo como una línea dividida en tres partes unidas entre sí, entonces a aquel conjunto cerrado, es decir, el contorno entero, recibe el nombre de *perímetro* del triángulo.

El perímetro del triángulo está formado por los tres lados.

OTRA VEZ LOS MOLDES GEOMÉTRICOS

Hay que hacer ahora un estudio de los triángulos y sus nombres respectivos, utilizando nuevamente las planchas de madera y sus marcos respectivos y las tres series de cartones en que aparecen dibujadas las figuras.

Aparte se tendrán carteles, con varios ejemplares de cada uno, que llevarán los siguientes títulos: (fig. 36).

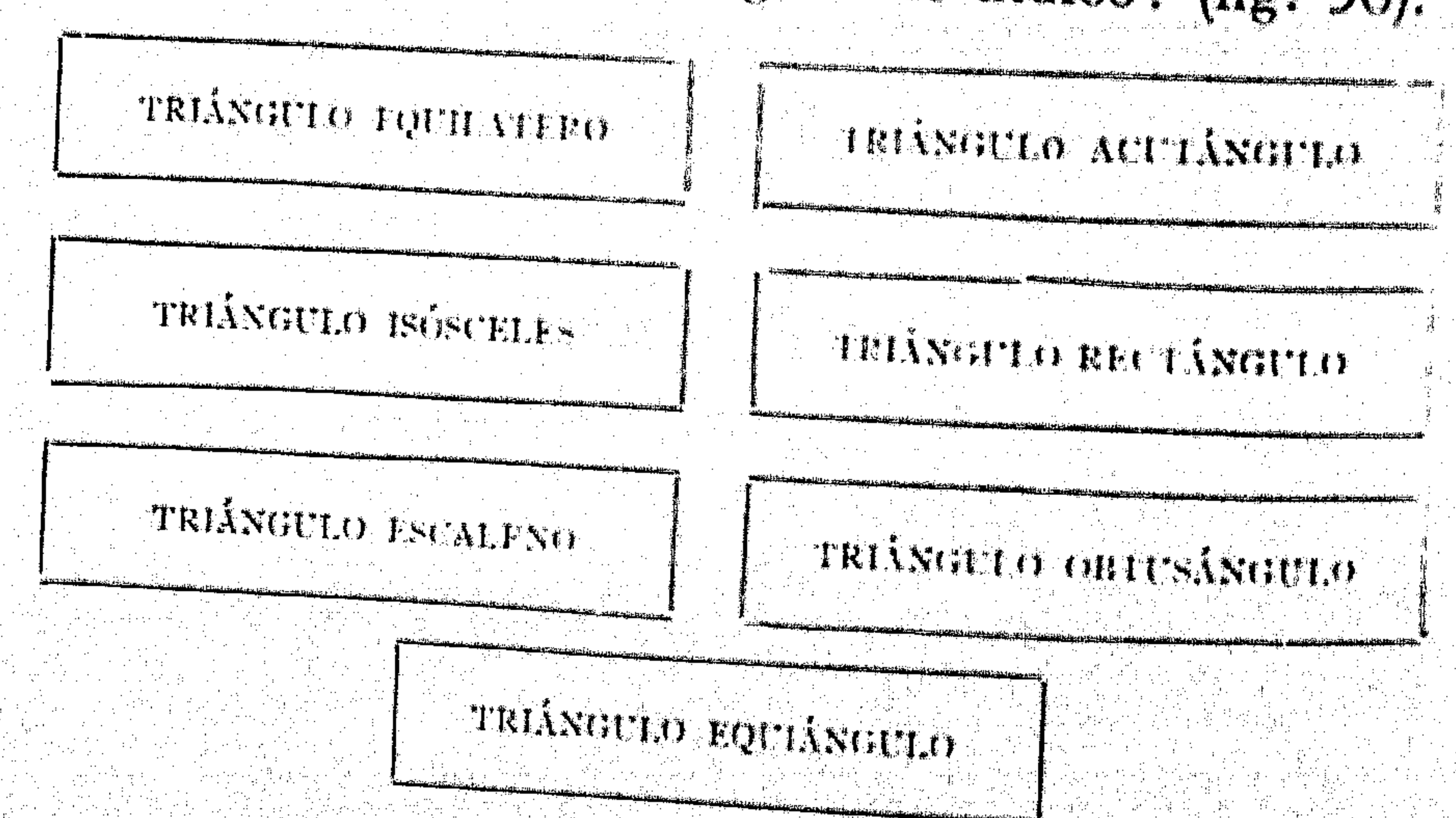


Fig. 36

Se escogen primeramente las planchas triangulares de madera y se colocan al pie de cada una los carteles correspondientes.

Por ejemplo: bajo el triángulo equilátero podemos colocar tres carteles:

triángulo equilátero.
triángulo equiángulo.
triángulo acutángulo.

Bajo el triángulo rectángulo se podrá colocar el siguiente:

triángulo escaleno.

Bajo el isósceles:

triángulo isósceles.
triángulo acutángulo.

La misma combinación de figuras y carteles puede repetirse con la otra serie de cartones.

De aquí resulta claramente cada definición. Por ejemplo: el triángulo equilátero tiene todos los ángulos agudos e iguales entre sí y los lados también iguales

También es posible estudiar las diversas combinaciones entre lados y ángulos, que de otra forma podían originar confusión, porque el triángulo rectángulo puede ser isósceles y escaleno, así como el obtusángulo, etc.

Las diversas denominaciones, según los ángulos y según los lados. quedan así perfectamente claras.

DECORACIONES

El estudio de las líneas y de los ángulos, de las distintas formas de triángulo, etc., se fija mediante dibujos decorativos que hacen resaltar las partes principales y características.

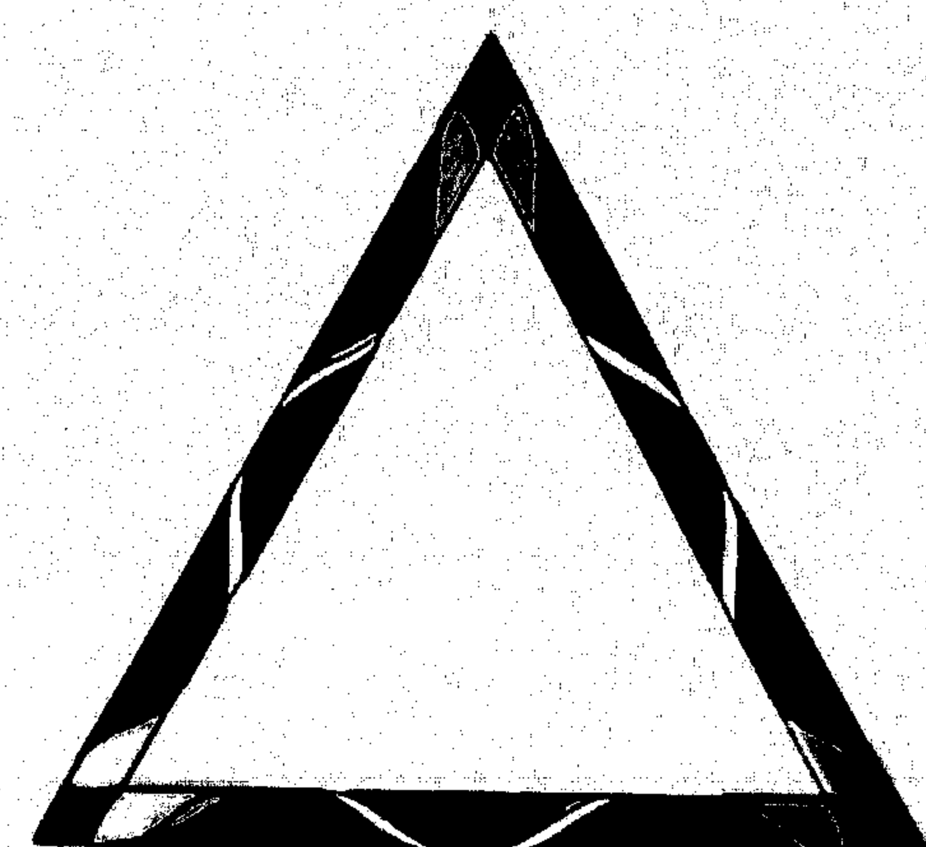


Fig. 37

La figura 28 muestra una decoración que pone de relieve los ángulos iguales de un triángulo equilátero.

La figura 29 pone de relieve el ángulo recto característica del triángulo rectángulo y el distinto colorido de los

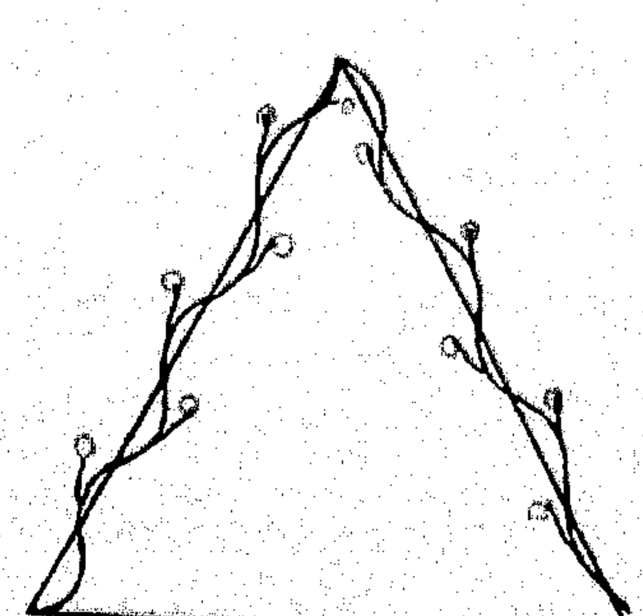


Fig. 38

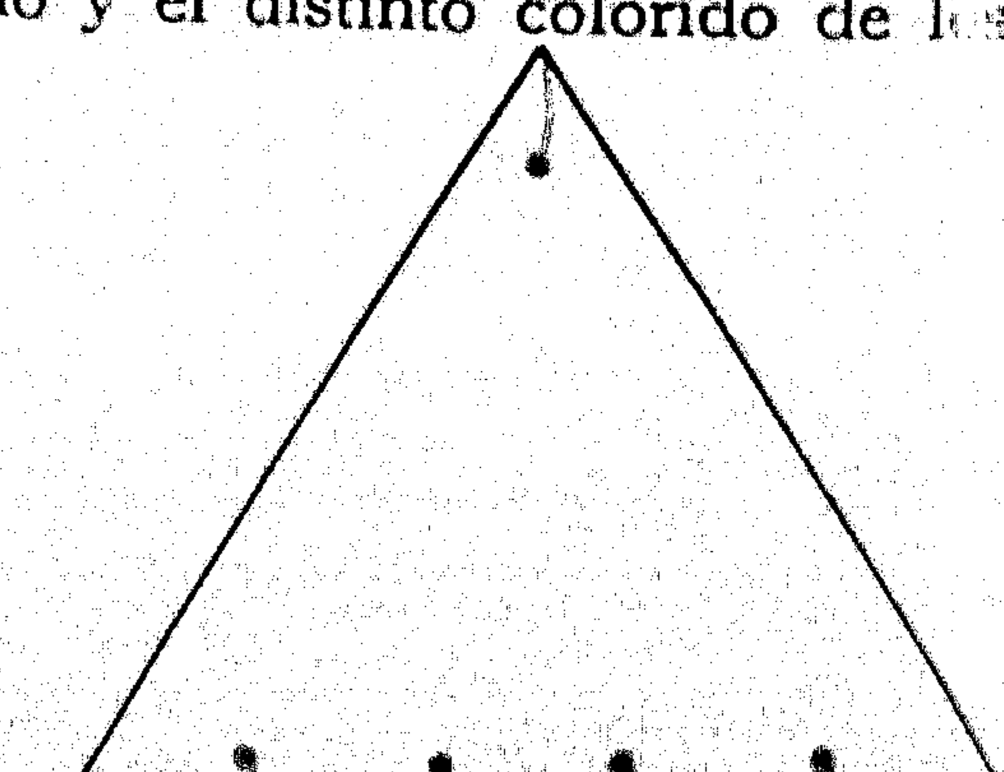


Fig. 39

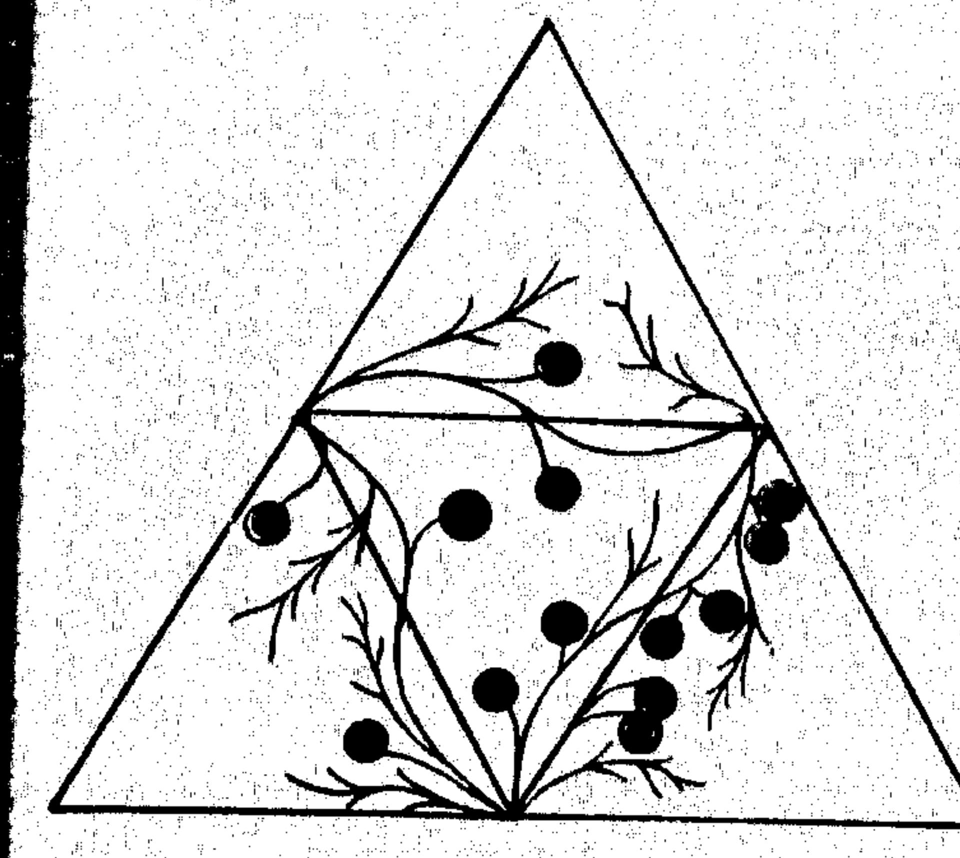


Fig. 40

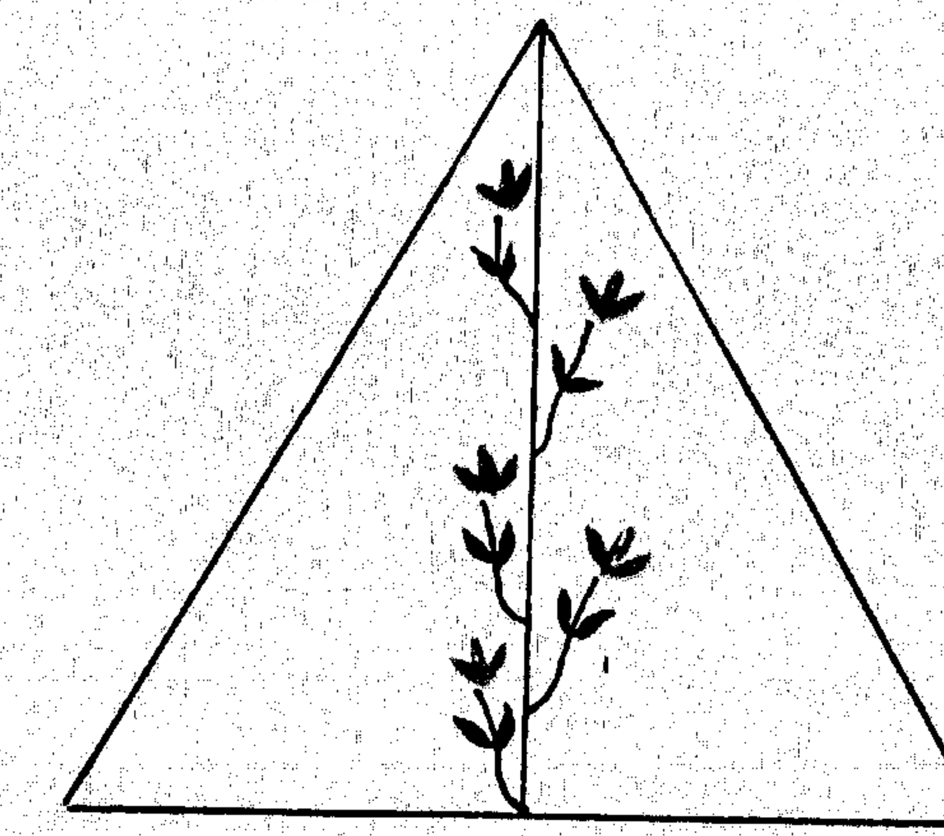


Fig. 41

catetos (ambos de igual color) y de la hipotenusa hace resaltar los caracteres de los lados.

La figura 37 pone de relieve el perímetro, la 39 la base y el vértice, la 40 las medianas y la 41 la altura.

Cada niño hace una colección de construcciones geométricas y decorativas del triángulo y la acompaña de carteles, sobre los cuales, escribe las definiciones, los nombres del todo y de las partes y comienza a formar un álbum de geometría que irá aumentando poco a poco.

EL CUADRADO

El cuadrado es una figura geométrica regular limitada por cuatro lados iguales entre sí: los ángulos del cuadrado son también cuatro y todos ellos son ángulos rectos.

El cuadrado tiene pues:
cuatro lados iguales y
cuatro ángulos rectos.

Construcción del cuadrado.

Tracemos una línea que será el lado sobre el cual construyamos el cuadrado (fig. 42).

Este lado se convertirá pues en la *base* del cuadrado.

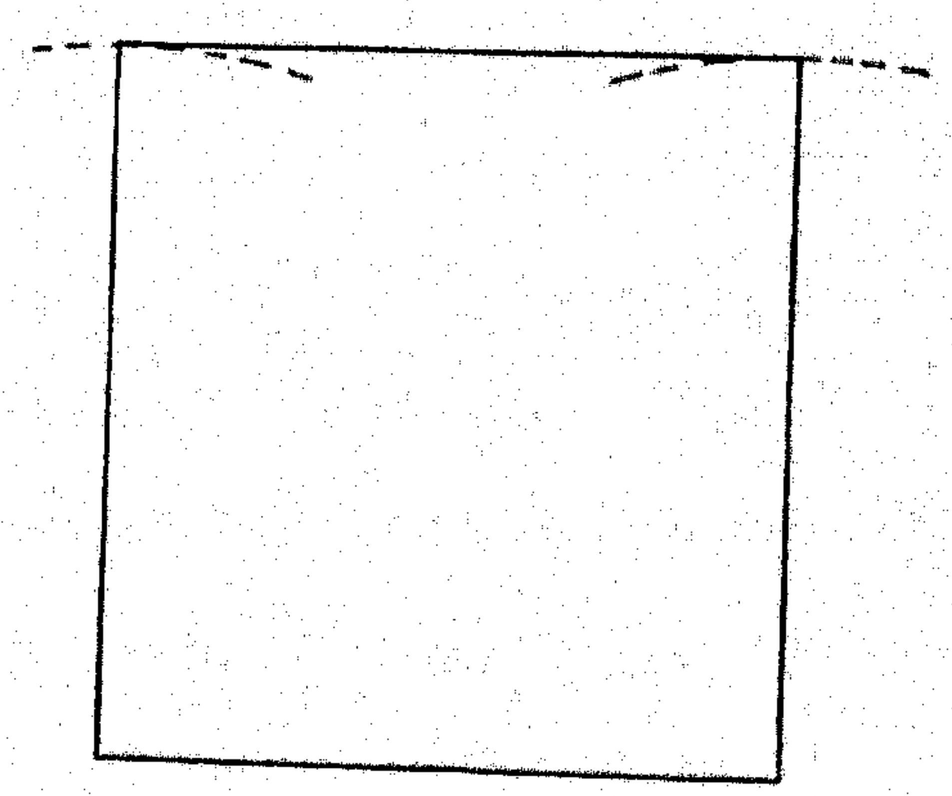


Fig. 42

Utilizando la escuadra alcemos dos perpendiculares en los extremos de la base. Colocada después la punta del compás en uno de dichos extremos, haremos una abertura de aquél igual a la base; con esta medida y tomando como centro los dos extremos, se cortan las dos perpendiculares por sendos arcos. Uniendo los dos puntos así obtenidos se completa el cuadrado.

EL RECTANGULO

Es igualmente una figura de cuatro lados y por esto, como el cuadrado, un *cuadrilátero*. El rectángulo pues, es un cuadrilátero regular que tiene los cuatro ángulos rectos y los lados opuestos iguales dos a dos.

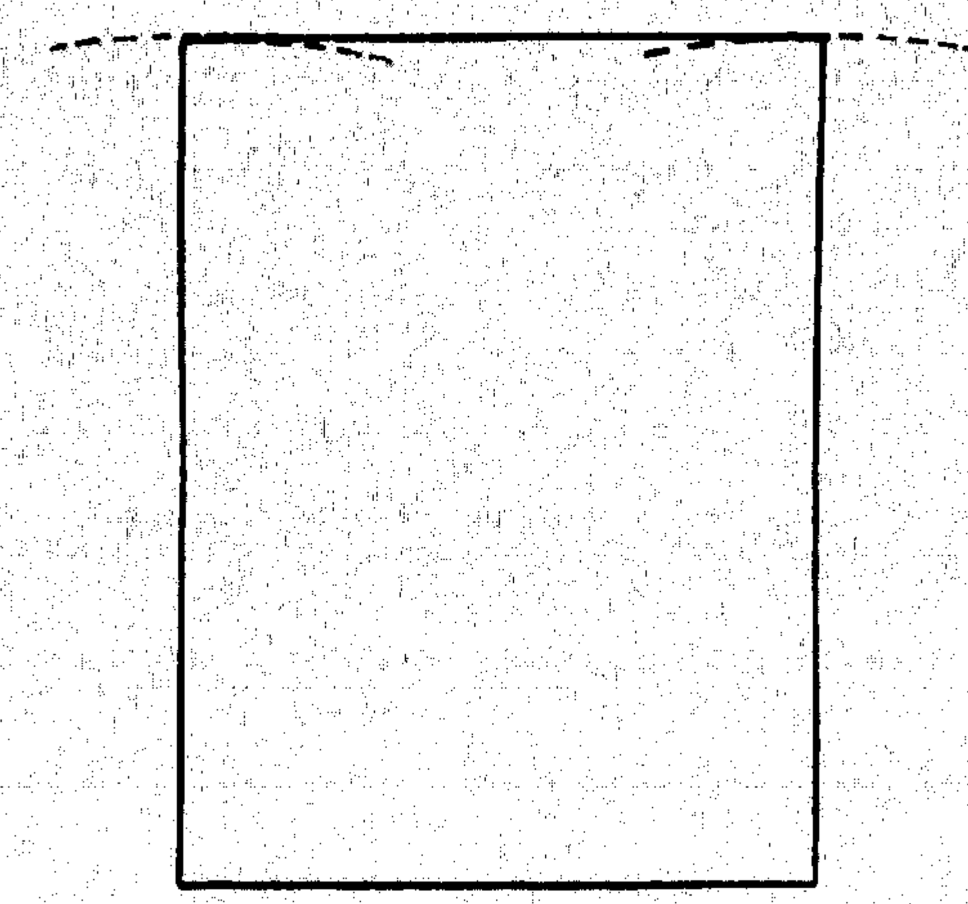


Fig. 43

El rectángulo representado por la figura 43 tiene pues iguales entre sí los lados de derecha e izquierda, que son los mayores, e iguales entre ellos los otros dos lados menores que están arriba y abajo.

El lado del rectángulo que está en la parte inferior será en este caso *la base* del rectángulo.

EL ROMBO

El rombo es un cuadrilátero que tiene sus cuatro lados iguales como en el cuadrado. Los ángulos, sin embargo, son distintos; como si un cuadrado fuese estirado por dos ángulos opuestos. Estos ángulos opuestos son agudos y los otros dos, igualmente opuestos, son obtusos. Por lo tanto el rombo es:

Un cuadrilátero que tiene sus lados **iguales** y sus ángulos opuestos iguales dos a dos.

Construcción del rombo (fig. 44).

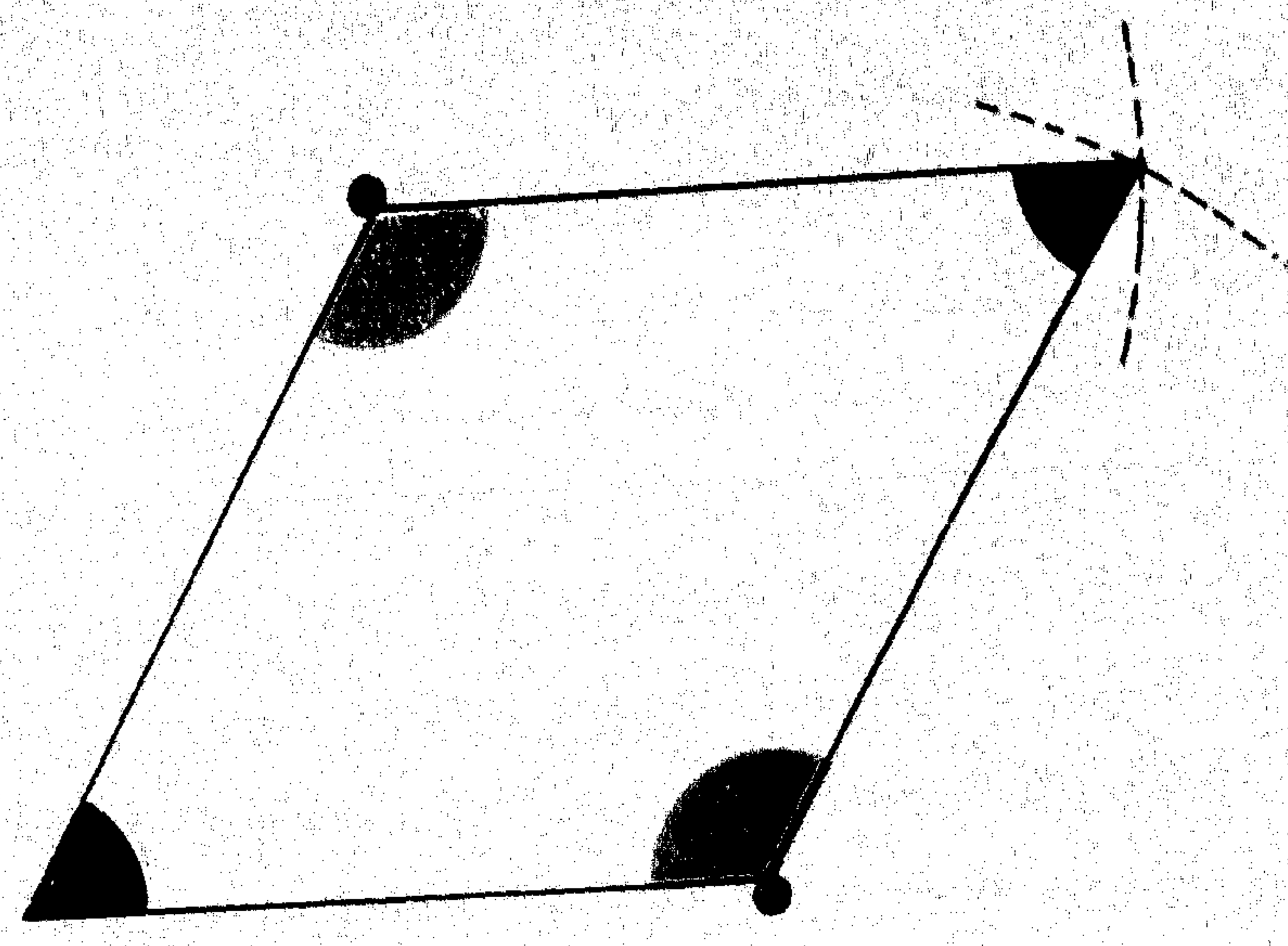


Fig. 44

Se traza primeramente una línea que sirve de base y después una línea oblicua en el extremo de aquélla, que tenga su misma longitud. Se forma de este modo un ángulo constituído por dos líneas de igual longitud que representan dos lados iguales del rombo. Se prepara después el compás dándole una abertura igual al lado y colocándole sucesivamente en los dos extremos libres de los lados del rombo se describen dos arcos que se cortan en un punto.

Uniendo este punto con los extremos de los lados ya dibujados, se obtiene el rombo.

EL ROMBOIDE

El *Romboide* es un cuadrilátero que tiene los lados iguales dos a dos y los ángulos opuestos iguales dos a dos.

Corresponde a un rectángulo (estirado por los ángulos

opuestos) del mismo modo que el rombo correspondía al cuadrado. (fig. 45).

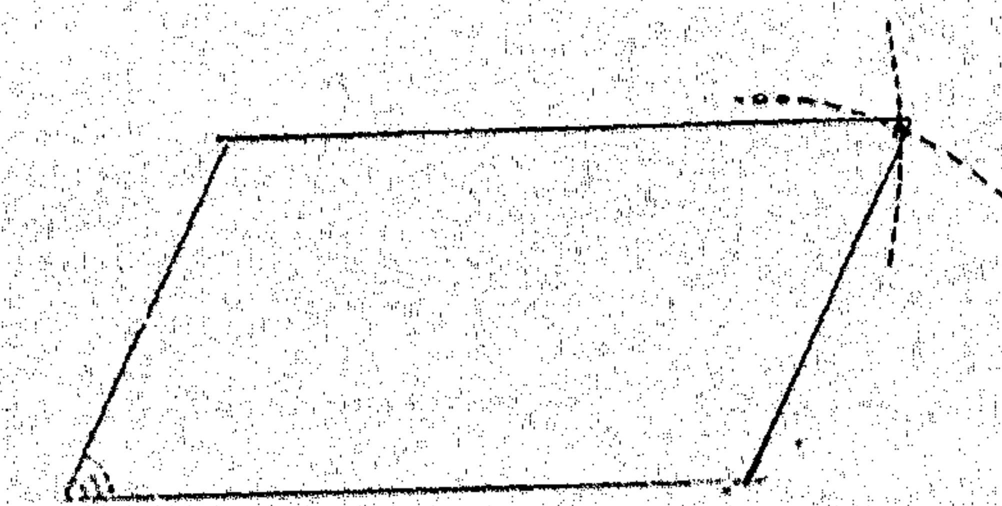


Fig. 45

Construcción del romboide. — Se dibuja primeramente un ángulo con dos líneas de desigual longitud; después se coloca la punta del compás en el extremo del lado mayor con una abertura igual a la longitud del lado menor y se describe un arco. Seguidamente se coloca la punta del compás en el extremo del lado menor con una abertura igual a la longitud del lado mayor y se describe un arco que cortará al anterior en un punto.

Uniendo este punto a los extremos del ángulo por medio de dos líneas queda construído el *romboide*.

LADOS PARALELOS

Todas las figuras anteriores: cuadrado, rectángulo, rombo y romboide, presentan un carácter común, que es el de tener paralelos los lados opuestos. Estos lados están a igual distancia el uno del otro en toda su longitud y pro-

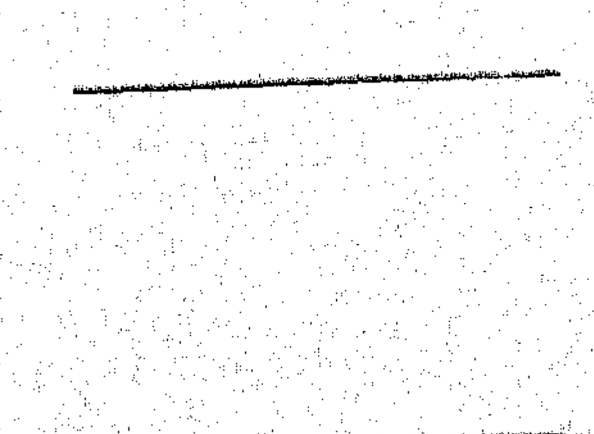


Fig. 46

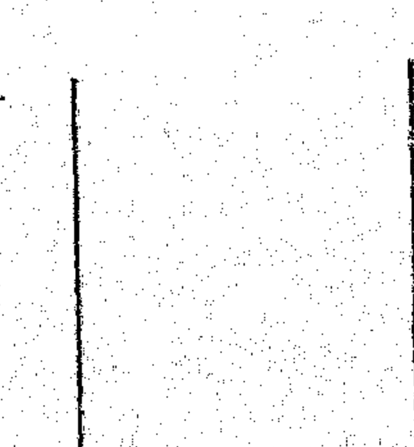


Fig. 47

Un cuadrilátero que tiene sus lados **iguales** y sus ángulos opuestos iguales dos a dos .

Construcción del rombo (fig. 44).

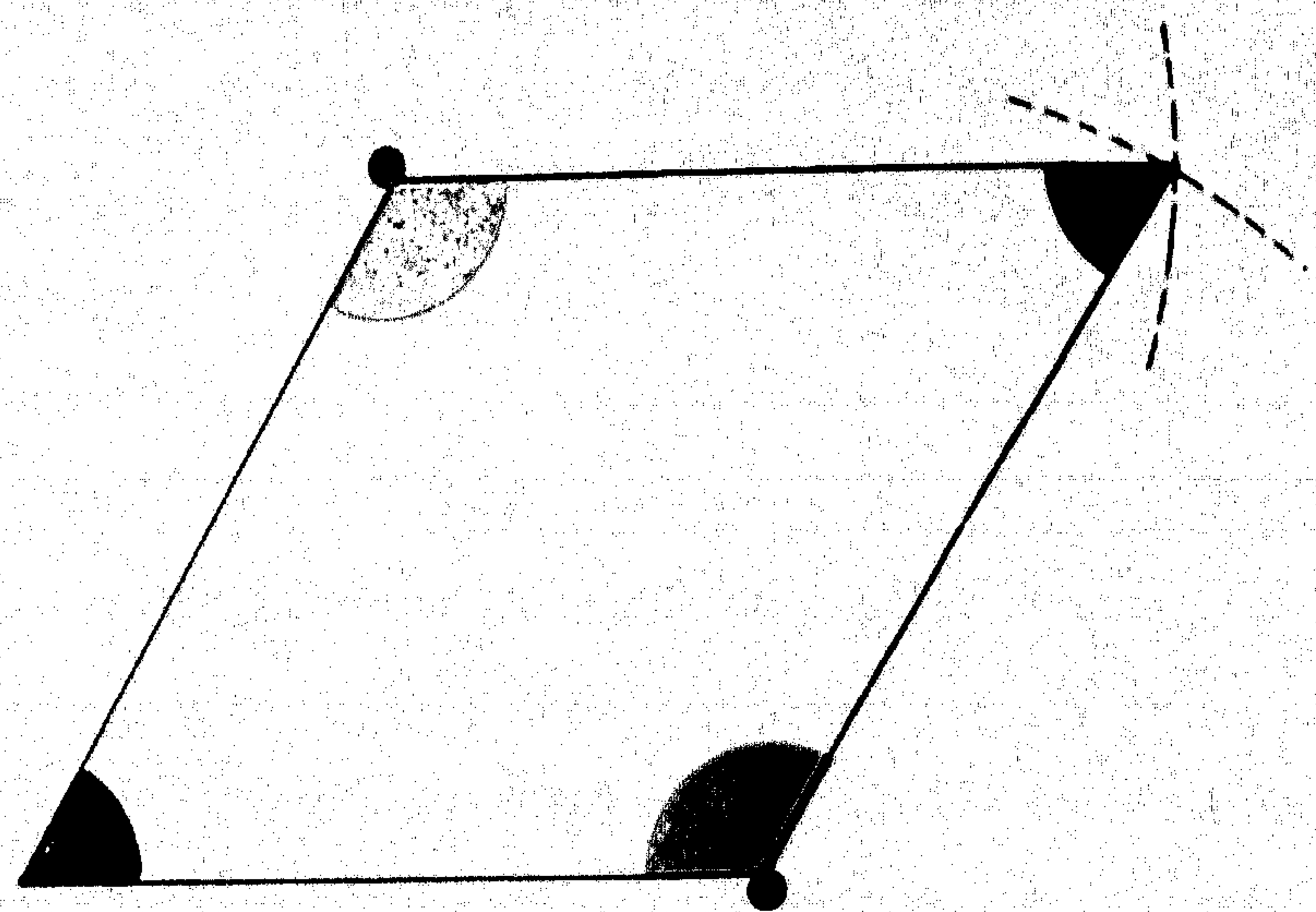


Fig. 44

Se traza primeramente una línea que sirve de base y después una línea oblicua en el extremo de aquélla, que tenga su misma longitud. Se forma de este modo un ángulo constituído por dos líneas de igual longitud que representan dos lados iguales del rombo. Se prepara después el compás dándole una abertura igual al lado y colocándole sucesivamente en los dos extremos libres de los lados del rombo se describen dos arcos que se cortan en un punto.

Uniendo este punto con los extremos de los lados ya dibujados, se obtiene el rombo.

EL ROMBOIDE

El *Romboide* es un cuadrilátero que tiene los lados iguales dos a dos y los ángulos opuestos iguales dos a dos.

Corresponde a un rectángulo (estirado por los ángulos

opuestos) del mismo modo que el rombo correspondía al cuadrado. (fig. 45).

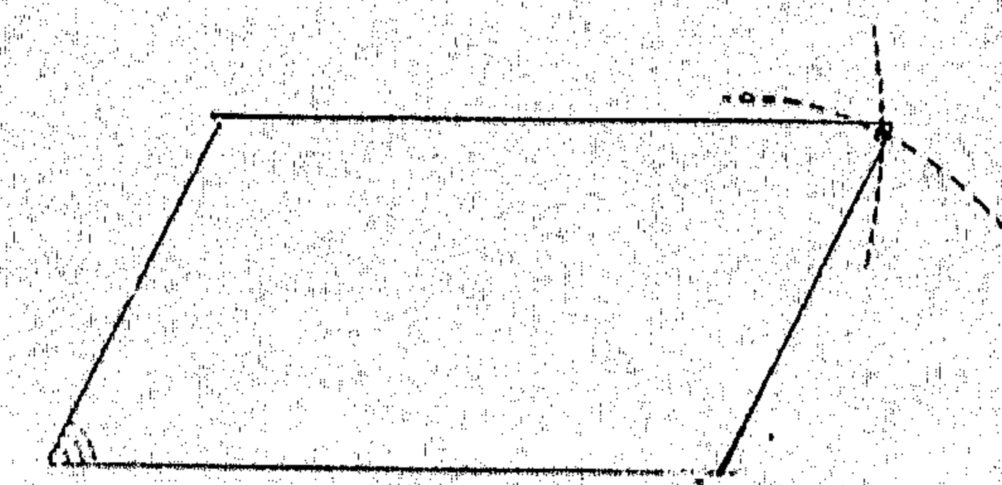


Fig. 45

Construcción del romboide. — Se dibuja primeramente un ángulo con dos líneas de desigual longitud ; después se coloca la punta del compás en el extremo del lado mayor con una abertura igual a la longitud del lado menor y se describe un arco. Seguidamente se coloca la punta del compás en el extremo del lado menor con una abertura igual a la longitud del lado mayor y se describe un arco que cortará al anterior en un punto.

Uniendo este punto a los extremos del ángulo por medio de dos líneas queda construído el *romboide*.

LADOS PARALELOS

Todas las figuras anteriores: cuadrado, rectángulo, rombo y romboide, presentan un carácter común, que es el de tener paralelos los lados opuestos. Estos lados están a igual distancia el uno del otro en toda su longitud y pro-

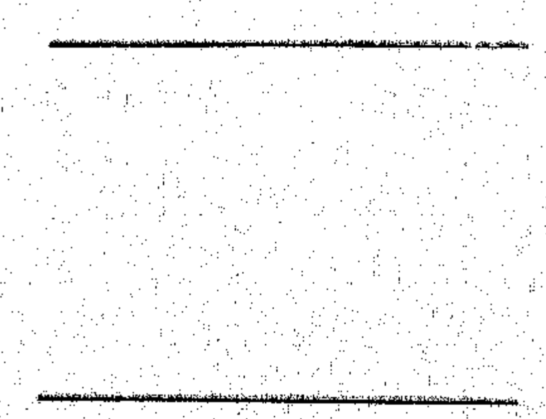


Fig. 46

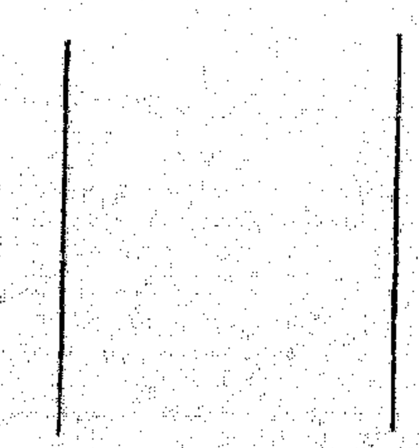


Fig. 47

longados indefinidamente no se encuentran jamás (figs. 46 y 47).

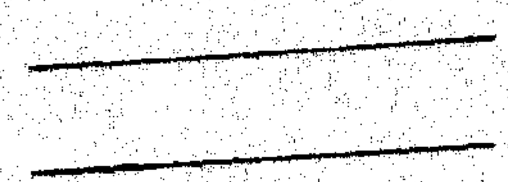


Fig. 48

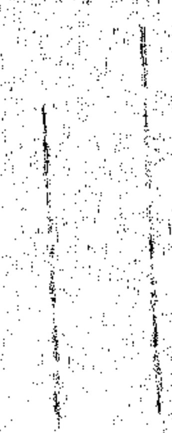


Fig. 49

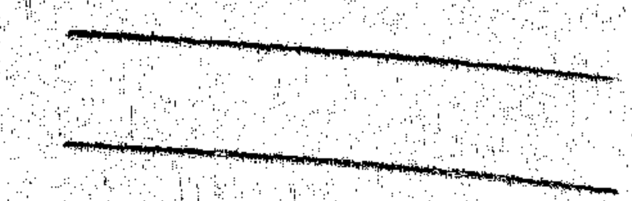


Fig. 50

Para que dos líneas sean paralelas basta con que estén en toda su longitud a igual distancia una de otra y pueden trazarse en todas las direcciones (figs. 48, 49, 50).

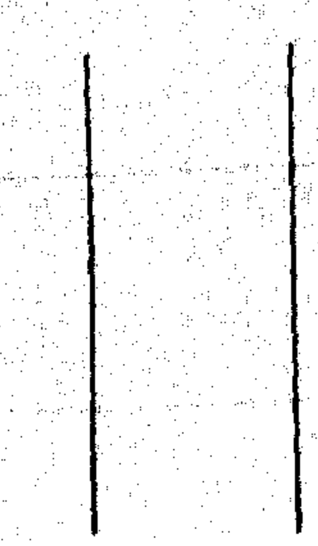


Fig. 51

Fig. 52

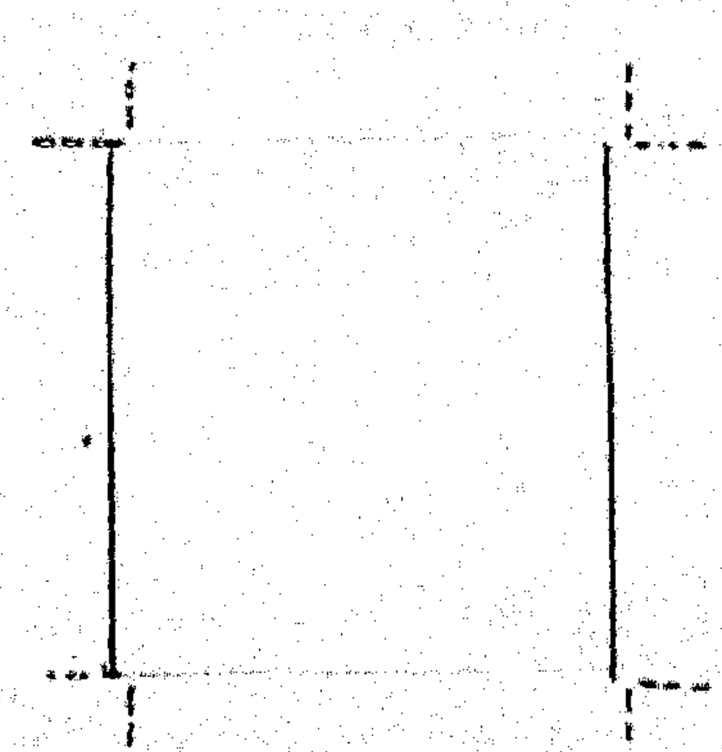


Fig. 53
CUADRADO
Igual distancia y encuentro perpendicular

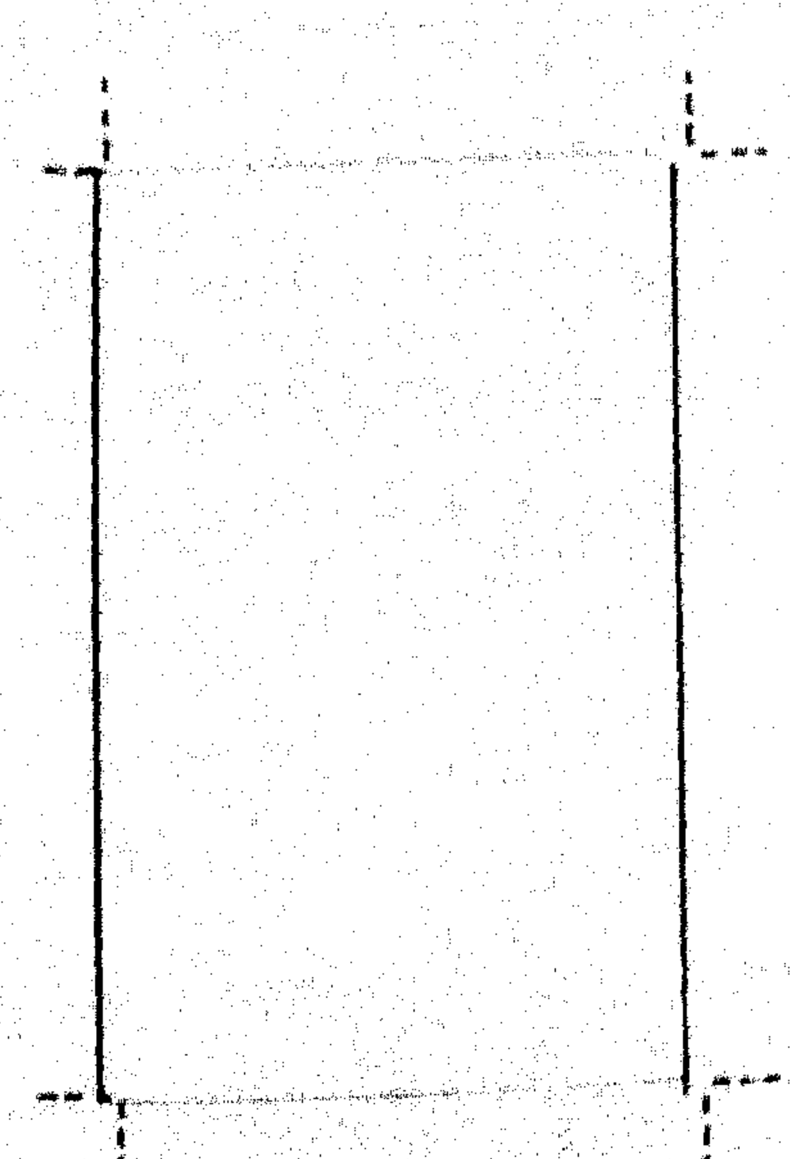


Fig. 54
RECTÁNGULO
Distancia desigual y encuentro perpendicular

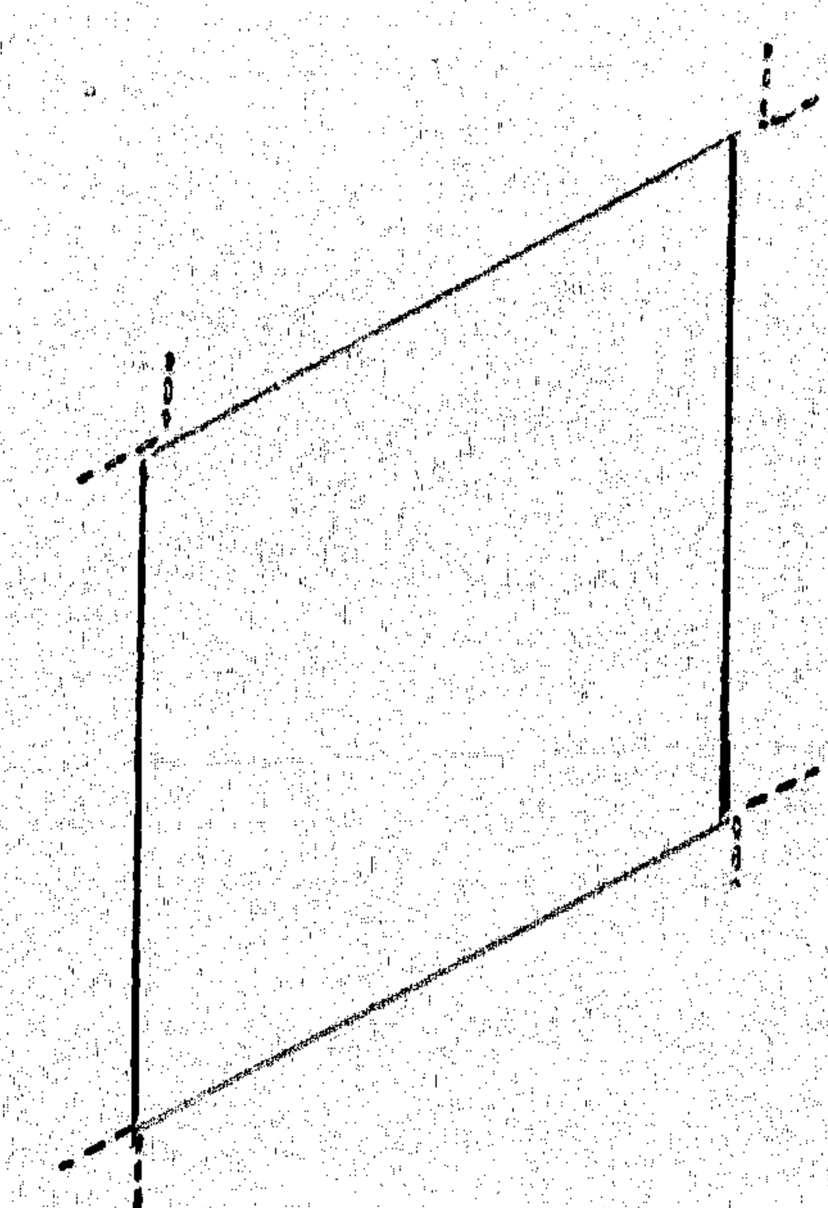


Fig. 55
ROMBO
Igual distancia y encuentro oblicuo

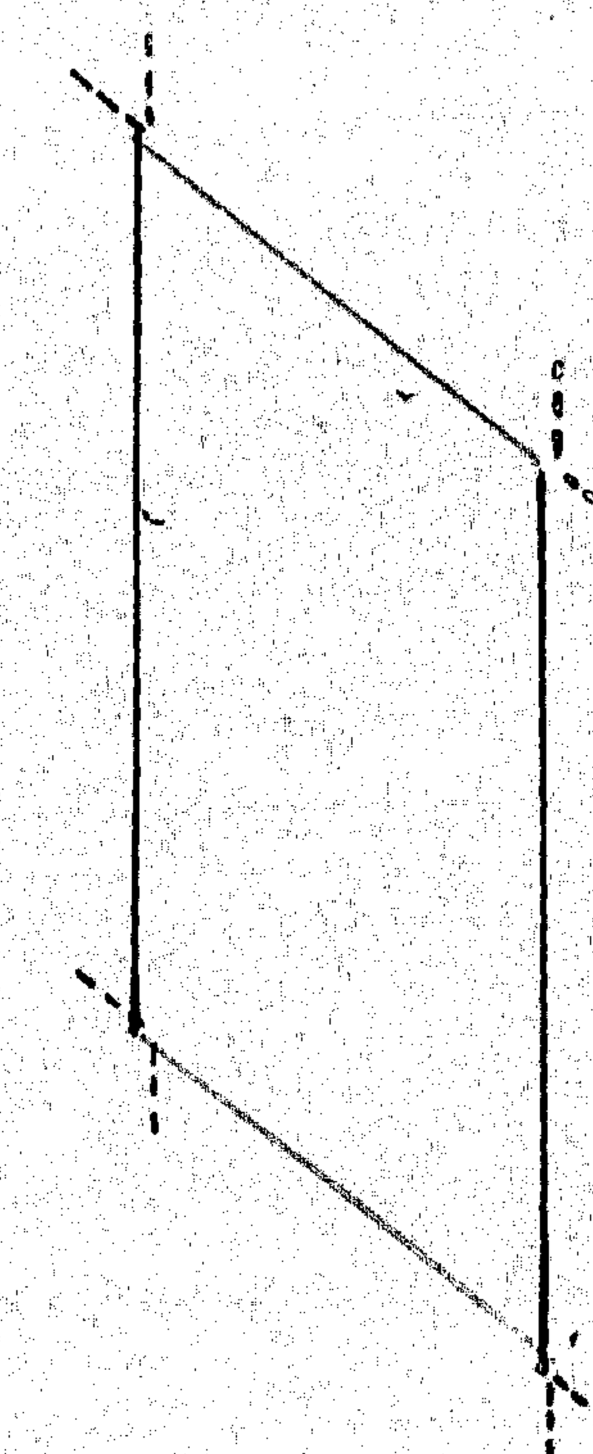


Fig. 56
ROMBOIDE
Distancia desigual y encuentro oblicuo

Las líneas paralelas pueden encontrarse con otras paralelas diversamente separadas entre sí y en dirección perpendicular y oblicua (figs. 51, 52).

Y esto se observa en los cuadriláteros que hemos construído; tienen sus lados paralelos (figs. 53, 54, 55, 56).

Se pueden aplicar estas nociones a los moldes planos y a las tres series de carteles. Mientras existe un solo cuadrado los rectángulos pueden afectar distintas formas, más anchas o más estrechas según la recíproca proporción de sus lados mayores o menores.

EL TRAPECIO

El trapecio es un cuadrilátero que tiene solamente dos lados paralelos y los otros dos presentan la misma inclinación sobre la base, por lo que forman con ella dos ángulos iguales. Al encontrarse con el otro lado forman, también, dos ángulos iguales entre sí, pero mientras los de la base son agudos los otros dos son obtusos (fig. 57).

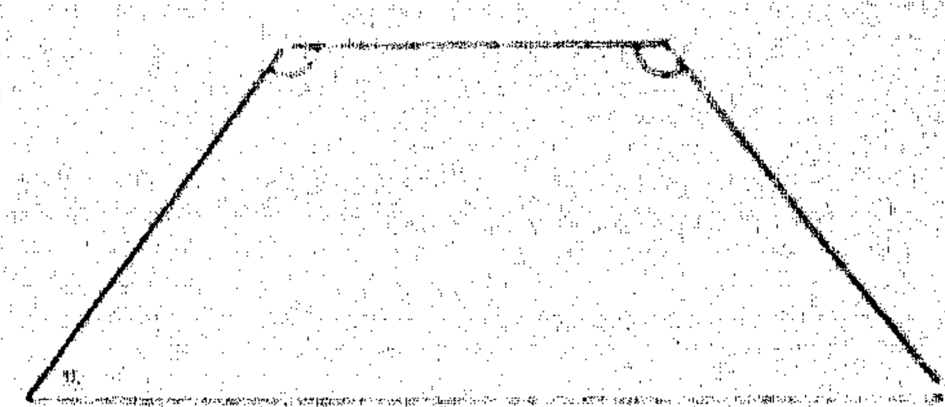


Fig. 57

Los lados paralelos del trapecio ofrecen desigual longitud, mientras los no paralelos, tienen la misma.

En todos los trapecios, los dos lados paralelos se llaman *bases del trapecio*.

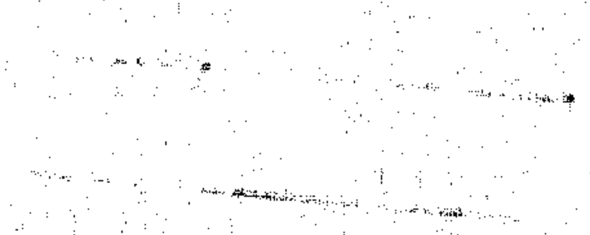


Fig. 58

Construcción del Trapecio. — Para construir un trapecio, construiremos primeramente un triángulo isósceles y

después lo cortaremos transversalmente por medio de una línea paralela a la base del triángulo (fig. 59).

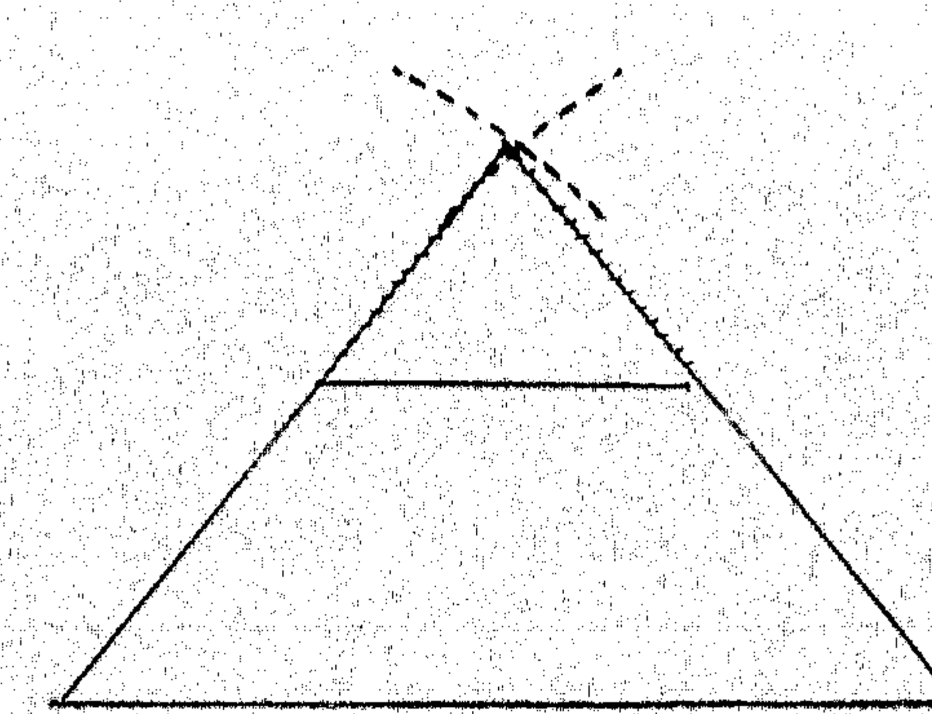


Fig. 59

TRAPEZOIDE

El trapezoide es un trapecio irregular. Una de sus irregularidades consiste en tener uno de los ángulos de la base, recto (fig. 60).

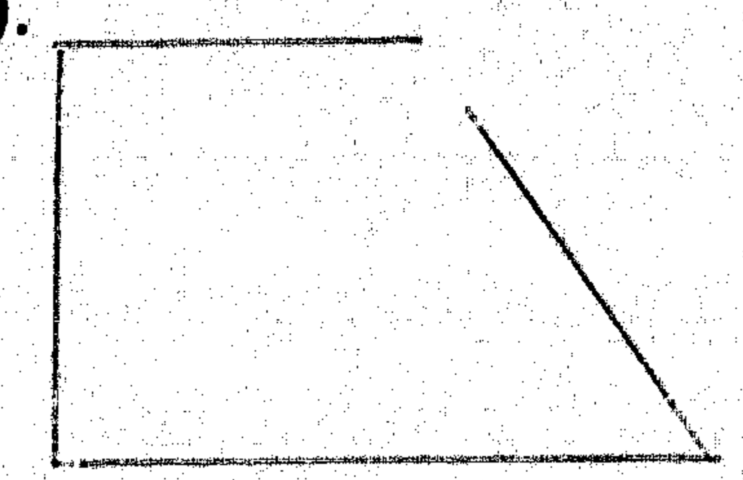


Fig. 60

Construcción del Trapezoide. — Para construir el trapezoide cortaremos transversalmente, con una línea paralela a la base, un triángulo rectángulo (fig. 61).

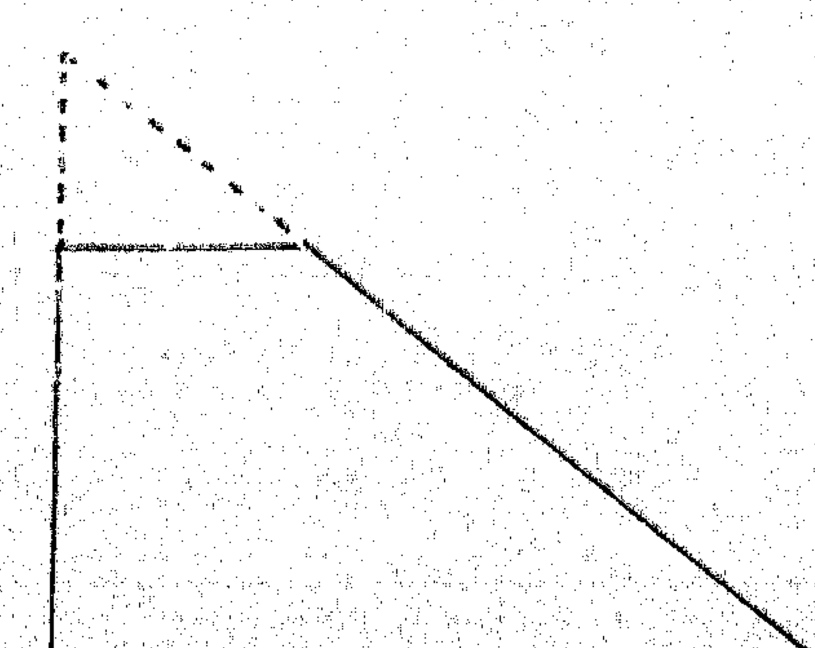


Fig. 61

EL CIRCULO

Figuras 62 y 63.

Si utilizando el compás se hace describir al làpiz un giro completo, queda dibujado un círculo. Dos cosas resaltan en esta fácil construcción. El punto en el cual se apoya el compás, que es el centro del círculo porque toda la línea del círculo es equidistante de este punto, y la amplitud de la abertura del compás ya que ésta representa la

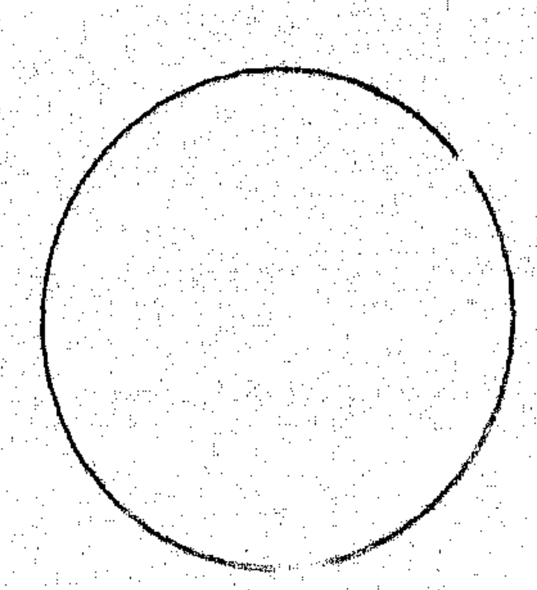


Fig. 62

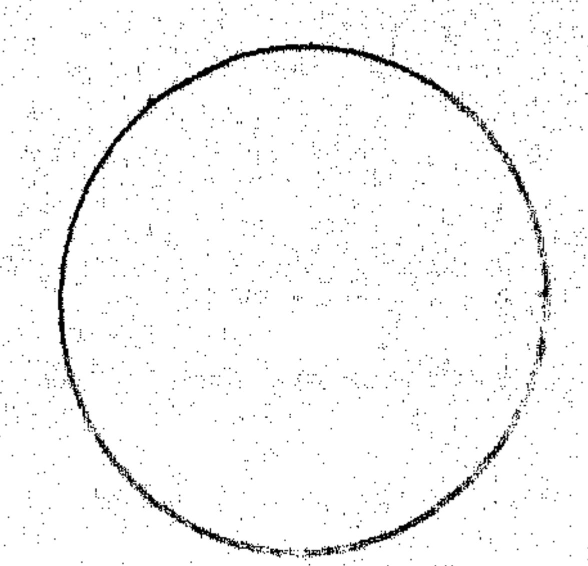


Fig. 63

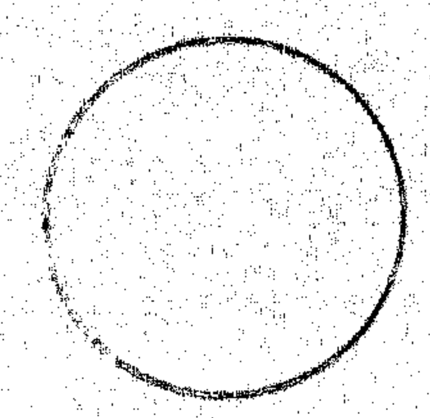


Fig. 64

distancia lineal desde el centro a todos los puntos de la línea trazada.

La línea circular (el círculo dibujado) se llama *circunferencia* del círculo.

La línea que representa la distancia del centro a la circunferencia se llama *radio* del círculo.

El punto central se llama *centro* del círculo.

Ahora vamos a considerar (fig. 64) la línea que atraviesa todo el círculo pasando por el centro. Es doble del radio y se llama *diámetro* del círculo.

El círculo es una figura limitada *por una línea curva equidistante del centro*.

La línea que limita el círculo es una línea curva, mientras las líneas antes consideradas, eran rectas.

Dividimos pues las líneas según su construcción en rectas y curvas (figs. 65, 66).

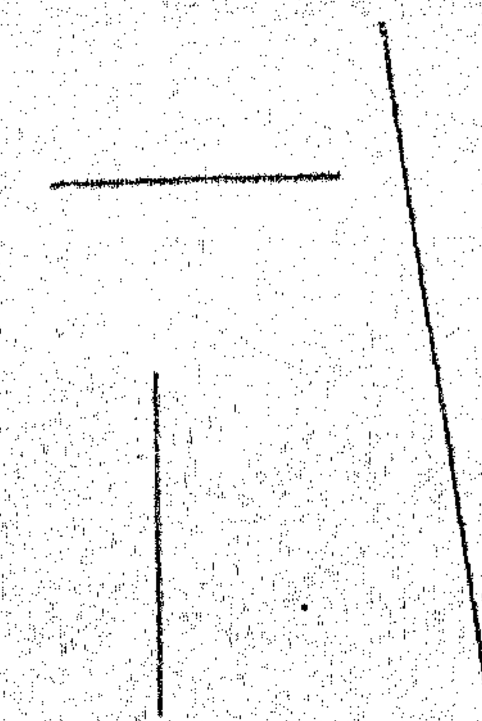


Fig. 65

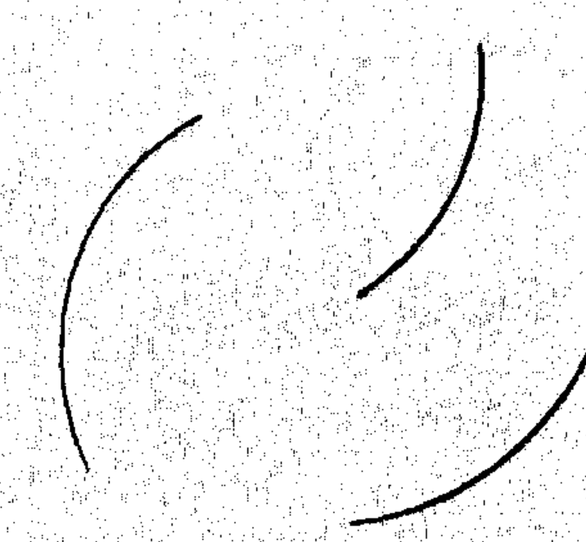


Fig. 66

El estudio del círculo :
circunferencia
centro
radio
diámetro.

Se lleva a cabo mediante construcciones geométricas, dibujos decorativos de las partes indicadas y finalmente con moldes y carteles.

Dibujos decorativos (figs. 67, 68, 69, 70).

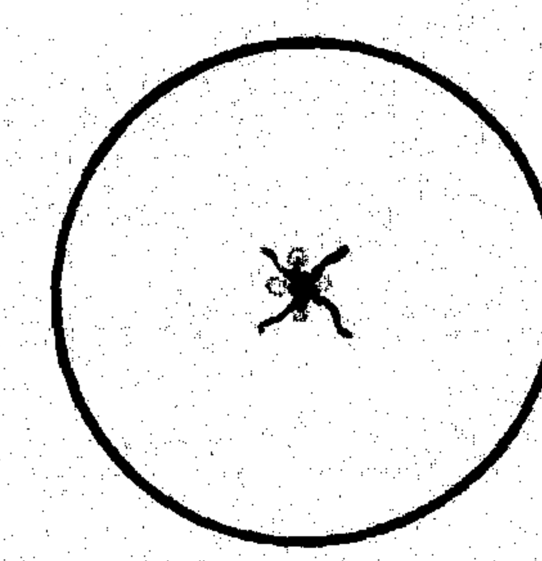


Fig. 67

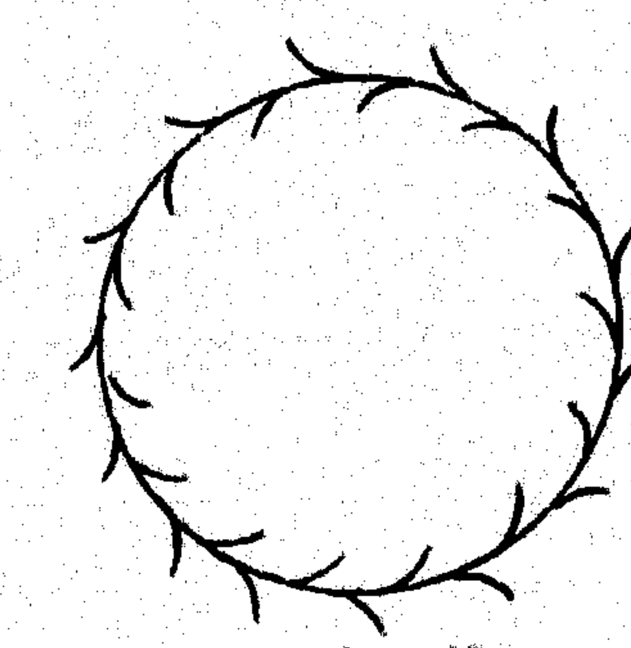


Fig. 68

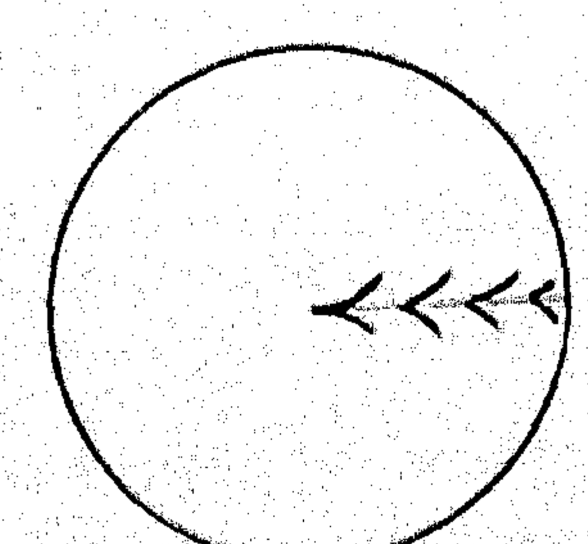


Fig. 69

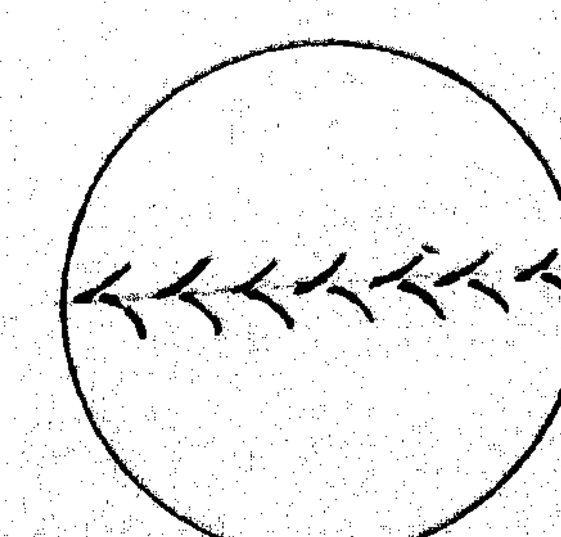


Fig. 70

EXAGONO

El exágono es una figura regular cerrada por seis lados. El exágono tiene los seis ángulos obtusos.

Construcción del exágono (fig. 71).

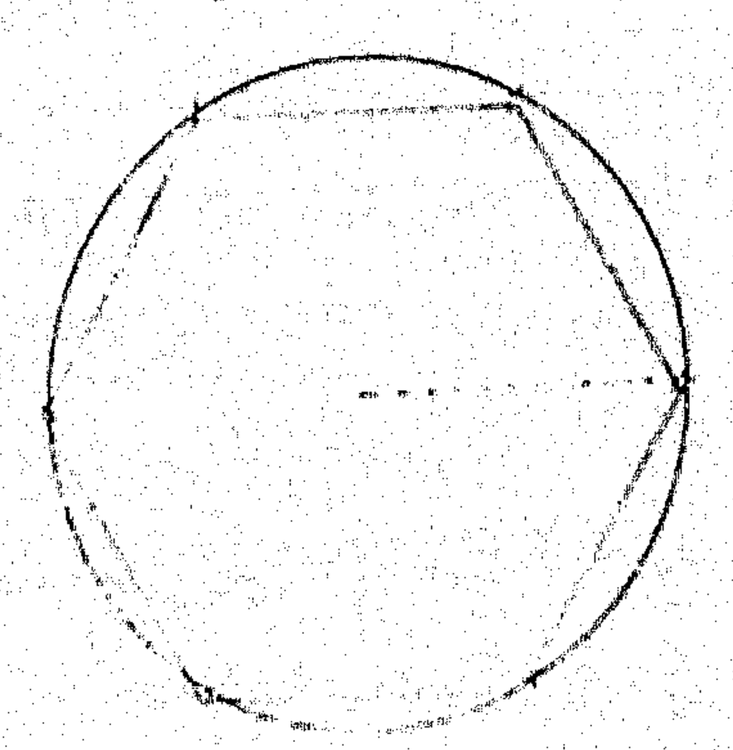


Fig. 71

Para construir un exágono es preciso trazar un círculo y tomando la misma longitud (la del radio) señalar con el compás seis puntos sucesivos sobre la circunferencia, toda vez que los lados del exágono, son iguales al radio (fig. 72).

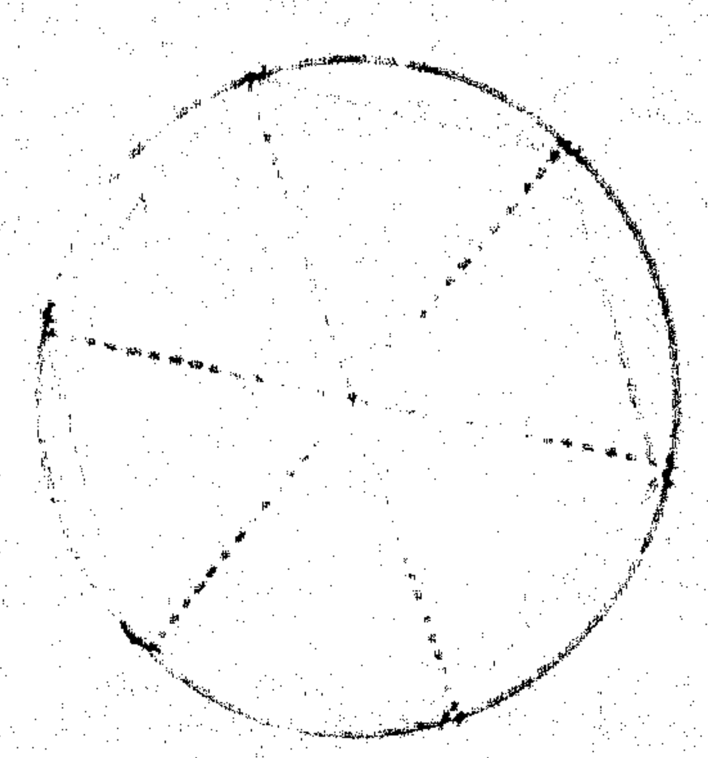


Fig. 72

Si dibujamos pues los radios, resultan seis triángulos iguales, que son equiláteros, porque todos los lados son iguales al radio del círculo.

POLIGONOS

Una figura constituída por muchos lados se llama *Polígono*.
Son polígonos:

el pentágono	—	que tiene	cinco	lados.
el exágono	—	,,	seis	,,
el heptágono	—	,,	siete	,,
el octógono	—	,,	ocho	,,
el eneágono	—	,,	nueve	,,
el decágono	—	,,	diez	,,

El conjunto de líneas que constituyen el contorno de un polígono se llama *perímetro*.

Las varias líneas que lo constituyen se llaman *lados* del polígono; lados del exágono, del octógono, del decágono, etc. Para el estudio de los polígonos se utilizarán los moldes geométricos.

LAS PALABRAS

Los estudios hechos han servido para adquirir un caudal de palabras nuevas que se refieren a conceptos definidos.

Conviene pues reunirlas y clasificarlas bien, sea según las ideas que representan o por orden alfabético.

De este modo se realizan dos trabajos distintos:

un libro de geometría

y un vocabulario relativo a la geometría.

El libro o álbum de geometría puede reunir los dibujos, las definiciones, etc.

En cambio, el vocabulario adoptará la forma corriente.

He aquí un ejemplo de lista de palabras: según las ideas que representan (lista A), y según el orden alfabético (lista B).

Lista A.

Línea — recta
curva
perpendicular
oblicua
paralela
convergente
divergente.

Angulo — recto
agudo
obtuso

Triángulo — equilátero
isósceles
escaleno
equiángulo
rectángulo
obtusángulo
acutángulo.

Cuadrado
rectángulo
Rombo
Romboide
Trapecio
Trapezoide
Pentágono
Exágono
heptágono
octógono
eneágono
decágono

polígono
círculo
circunferencia
perímetro
lado
centro
radio
diámetro
base
vértice.

LISTA B. (*Vocabulario*)

A. — agudo
alternos
altura
ángulo
arco

B. — base
bisectriz

C. — centro
círculo
circunferencia
compás
complementarios
convergente
cuadrado
cuerda
curva

D. — decágono
diagonal
diámetro
divergente

E. — eneágono
equiángulo
equilátero
equivalente
exágono

G. — goniómetro
grado

H. — heptágono

I. — isósceles

L. — lado

M. — mediana

O. — oblícua
obtusángulo
obtuso
octógono
opuestos (por el vértice)

P. — paralela
pentágono
perímetro
perpendicular
polígono

R. — radio
recta
rectángulo (cuadrilátero)
recto
regla
rombo
romboide.

II

INTRODUCCION AL PERIODO ELEMENTAL

INTRODUCCION AL PERIODO ELEMENTAL

El conjunto de ejercicios realizados hasta ahora no son sino los preliminares de un período más avanzado del ciclo elemental.

En efecto, en el primer período elemental con el estudio analítico de las figuras, con la iniciación de un lenguaje científico y preciso para las definiciones, se han obtenido elementos indispensables, términos necesarios de expresión, sin los cuales no sería posible proseguir.

El camino restante está señalado por los razonamientos sobre relaciones entre las distintas figuras, y el lenguaje cocorrespondiente será el relativo al enunciado de problemas y de teoremas.

Lo que exponemos no es un estudio sistemático elemental de la geometría. Ofrecemos solamente los medios para *preparar la mente* con vistas a un estudio sistemático. Estos medios (el material de planchas y cartones) son para la mente una palestra, donde, de modo evidente, puede encontrar relaciones y practicar, no solamente indagaciones y comprobaciones, sino también descubrimientos. El descubrir correlaciones es, seguramente, la cosa más apta para suscitar vivo interés. El teorema en sí no es interesante para un niño que oye su enunciado sin comprenderlo y sin poder apreciar su finalidad y que, a mayor abundamiento, ha de fatigar su mente con el estudio de la resolución que le ha sido dada. En cambio, descubrir por sí una correlación, plantear el teorema correspondiente y poseer las palabras para determinarlo en forma correcta, es algo verdaderamente capaz de exaltar el espíritu.

Basta uno solo de estos descubrimientos para abrir a la mente un camino tan brillante como insospechado. Entonces el interés ha surgido y cuando el interés existe se han asegurado infinitas conquistas.

Nosotros pues, no damos un material para demostrar de modo claro y concreto lo que se enseña de un modo abstracto en las escuelas comunes. Ofrecemos solamente con objetos materiales, figuras geométricas relacionadas entre sí; figuras plásticas y manejables capaces de demostrar o *revelar,* con su aproximación, con la comparación entre ellas, relaciones evidentes. Ello estimula la íntima actividad del espíritu, porque el ojo ve y la mente adivina cosas que un maestro no sabría transmitir a una inteligencia no madura que no se encontrase en un estado de viva actividad. Solamente así se hace posible un trabajo mental, que parece prematuro, superior a la edad infantil.

Pero si se piensa que son complicados los razonamientos abstractos sobre las cosas y no las cosas mismas materialmente observadas, se comprenderá rápidamente que un camino distinto del acostumbrado puede abrir progresos imprevistos al estudio elemental de la geometría.

Que el trabajo superior de la mente tiene su origen en la periferia material, es evidente.

Observada en las cosas la verdad, es *entonces* cuando comienza sobre ellas un trabajo mental razonador y lógico, que puede muy pronto alcanzar los campos de la abstracción.

¿No fué de las cosas, de dónde los primeros geómetras obtuvieron sus conocimientos? ¿No fueron correspondencias y relaciones entre *cosas* las que estimularon alguna mente activa e interesada a formular axiomas, y por consiguiente, teoremas?

¿Cómo obtuvo Pitágoras su famoso teorema que infinitas generaciones se contentaron con hacer uso de él para aplicarlo como quien hace uso de una herencia recibida?

Es difícil de comprender la demostración de aquel teorema para la mayor parte de los escolares, porque su mente está pasiva, cerrada. Pero, ¿quién sabe si sería, en cambio, posible la intuición—como la tuvo Pitágoras mismo—cuando la mente estuviera despierta y llena de energía y las *cosas* exteriores, fuesen por sí mismas evidentes?

Lo que nosotros hacemos pues, es preparar *las condiciones exteriores,* un *ambiente* que ponga en contacto con la *periferia* de la individualidad activa, algunos medios que el *centro* puede utilizar según sus energías.

Es la oferta a la periferia y no la acción directa sobre el centro, lo que caracteriza nuestro método y lo diferencia de los demás. En vez de recurrir al poder de comprensión del razonamiento y a los mecanismos mentales para transmitir una *cosa hecha* a la inteligencia del discípulo, nosotros exponemos a su periferia, que está en contacto con el ambiente, *los medios* que se prestan a un ejercicio expontáneo de la mente.

Es así como las energías psíquicas son libres en su expansión; el niño piensa y reflexiona según su poder natural.

Además del *material,* nosotros le hemos proporcionado palabras—*vocabulario*—y definiciones, pero sólo en cantidad apenas suficiente para que el niño pueda expresarse en *lenguaje científico* cuando tenga que exponer un teorema o manifestar una relación descubierta entre las cosas.

El *lenguaje preparado* es la vía libre de la expresión.

Y de este modo la cultura que se va adquiriendo, en vez de producir fatiga, se convierte en un medio de desarrollo que provoca una *gimnasia mental* vigorizante.

Decíamos al principio, que cuanto vamos exponiendo no se refiere a la manera de hacer *estudiar sistemáticamente la geometría.* Es tan sólo una *gimnasia mental* en torno a la geometría.

Esta prepara la mente *para actuar* más que para *recibir* y la anima con el interés que es siempre un estimulante. La mente así preparada se convirtió en *activa* y cuando llegue la hora de recibir (en las escuelas secundarias) una verdadera enseñanza sistemática de la geometría, el alumno será una *inteligencia* que *avanza al encuentro* con vivo interés, con singular capacidad de comprensión, y tal vez, *dé* mucho en vez de *aprender* mucho. Con ventaja futura hasta para la misma ciencia.

EL MATERIAL AVANZADO DE GEOMETRIA PARA LAS ESCUELAS ELEMENTALES

Volvemos a emplear en este período un material de hierro que se presta también al dibujo. Un material manejable e interesante es el medio periférico para inducir a pensar a la mente, a reflexionar largamente, a razonar, a *meditar* podría decirse.

Estamos acostumbrados, en las escuelas dirigidas con los métodos corrientes, a hacer trabajar la mente con independencia de la periferia. Como es necesario comprender, razonar, y esto se hace solamente con el *centro*, nosotros creemos poder atraer la *mente del niño* sobre una idea gracias a nuestro método.

Muchas verdades se hacen evidentes—*surgen de las mismas cosas*—mirando y observando, manejando y volviendo a manejar.

Particularidades y relaciones que habían pasado durante mucho tiempo inadvertidas, se ofrecen de repente, claras como una revelación y arrojan un rayo de luz en la conciencia. Los descubrimientos los realiza el hombre únicamente en presencia de las cosas—el hombre que sabe ponerse en contacto con ellas—y éstas, de improviso, hacen ver a aquella mente hechos que habían encerrado siempre y que nadie había sabido ver. Es pues de gran importancia preparar un objeto elocuente en su mudo contenido, a la periferia de una mente, para unirla con el interés a dicho objeto.

La elocuencia muda del objeto será como un secreto, revelado a quien proyectó sobre él las energías intelectuales.

Para llegar a este resultado, el proceso es diverso del corriente; no hay que fijar el pensamiento sobre una idea sino manejar un objeto, retenerlo en contacto con los sentidos, desplazarlo constantemente, reproducirlo con imágenes sensibles (dibujos, pinturas, trabajos en papel, etc.) De este modo la mente se pone en contacto y se fija en él utilizando la periferia hasta que ésta reciba todo lo que el objeto puede darle.

La mano toca la evidencia y la mente descubre el secreto.

El primer material avanzado se funda en tres figuras solamente; el triángulo equilátero, el cuadrado y el círculo.

Los tres guardan entre sí una relación de dimensión porque el lado del triángulo, el del cuadrado y el diámetro del círculo tienen 10 cm. de longitud.

El círculo, pues, resulta inscrito en el cuadrado mientras el triángulo desborda el círculo.

Nosotros colocaremos superpuestas las tres figuras, que son centro y origen de todo el material.

Las figuras son, como ya hemos dicho, de hierro y barnizadas de colores. Cada una tiene un marco cuadrado como los que hemos visto en los moldes planos y en las figuras para el dibujo primero de los niños. Solamente que aquí no se tiene únicamente un marco, sino también un sostén, es decir, que el fondo del marco no está hueco como en los materiales primitivos. El fondo y la parte exterior y elevada del marco, tienen colores diversos. Por ejemplo. El fondo blanco, el marco color marrón claro y la figura geométrica del interior, un color distinto, rosa, verbigracia.

He aquí las tres figuras fundamentales (figs. 73, 74 y 75).

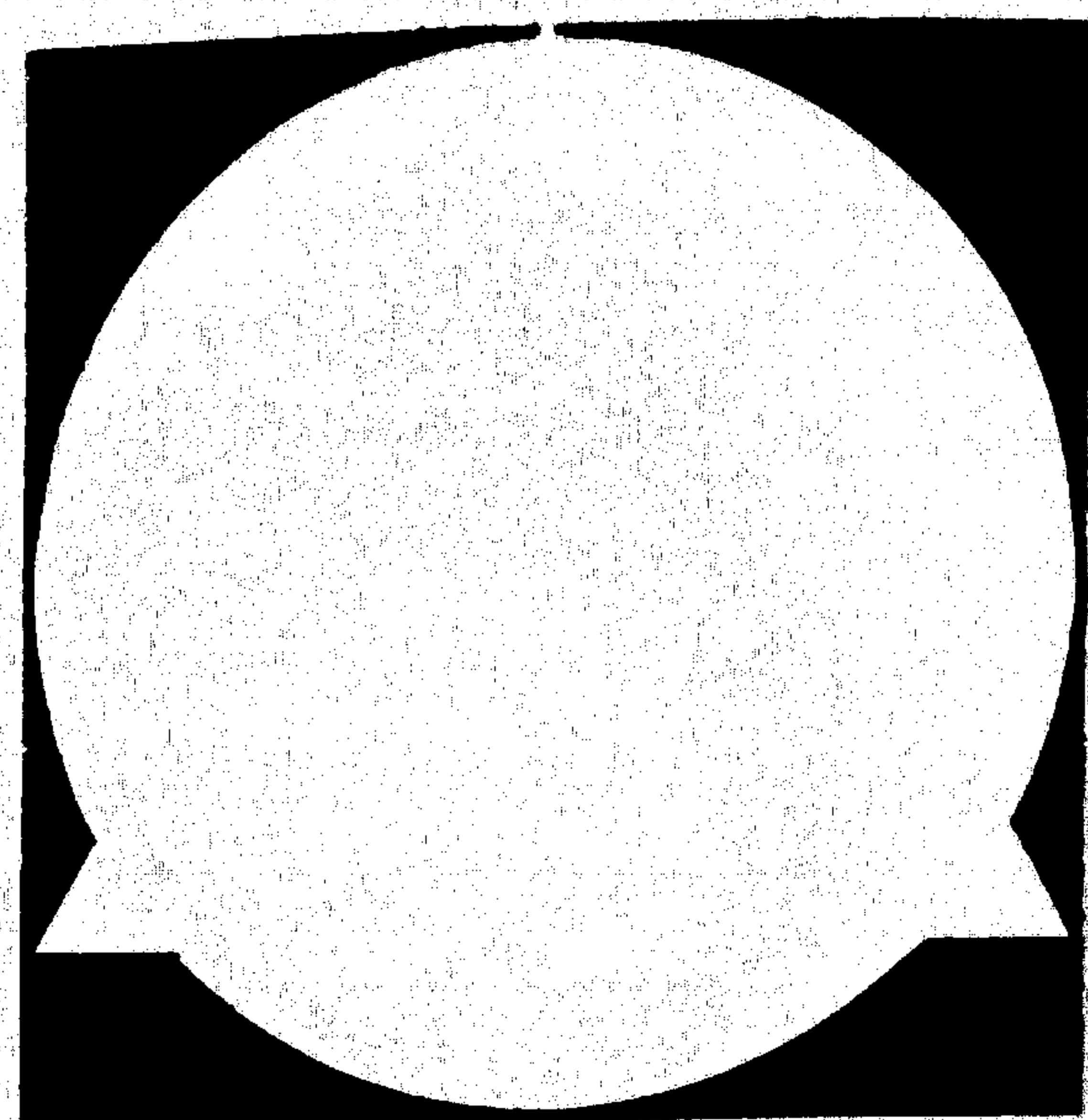


Fig. 73

El fondo del marco tiene una importancia nueva en este material ; es la base constante para referencias. Es la unidad de relación con las fracciones.

En efecto, cada una de dichas figuras va dividida y subdividida y las partes del todo se acoplan en marcos siempre iguales. Así, por ejemplo, el triángulo equilátero, además de entero, se tiene dividido en dos, tres y cuatro partes. Las subdivisiones sirven para reconstruir el triángulo dentro de un marco igual al del triángulo completo.

Así pues, existen cuatro marcos iguales, cuyo fondo re-

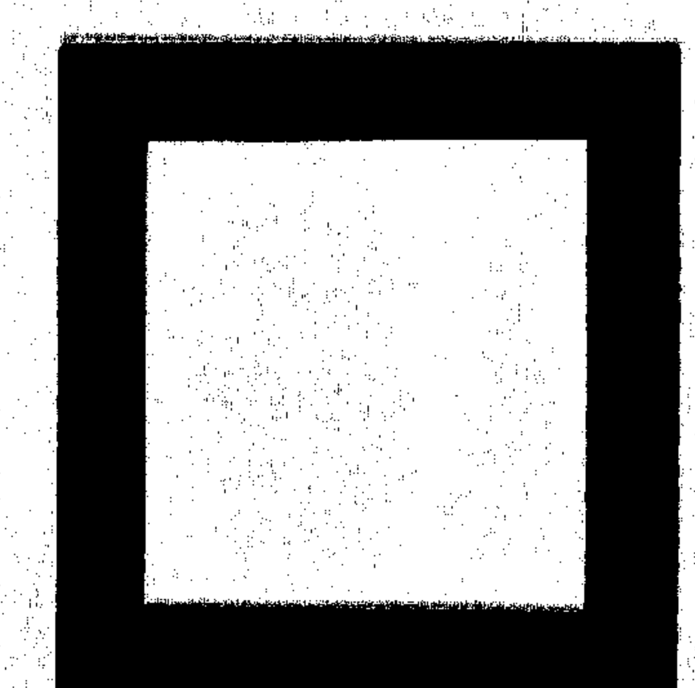


Fig. 74
Ejemplo de un marco con fondo

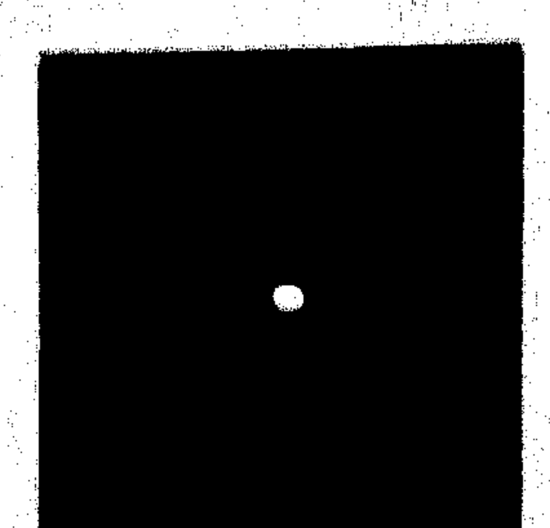


Fig. 75
La figura geométrica que hay que acoplar.
(Está provista de un botón para el manejo)

presenta siempre el mismo triángulo equilátero , y las figuras a acoplar son dos mitades, tres tercios y cuatro cuartos del mismo triángulo (fig. 76, 77 y 78).

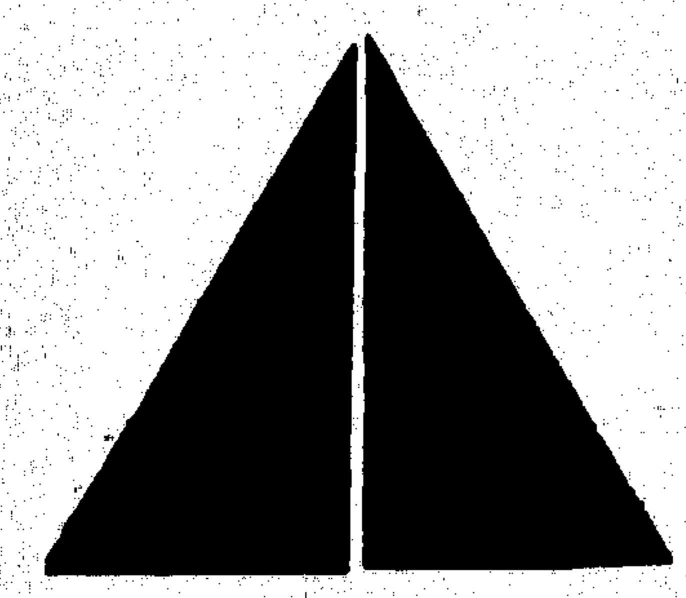


Fig. 76
El triángulo dividido en dos partes

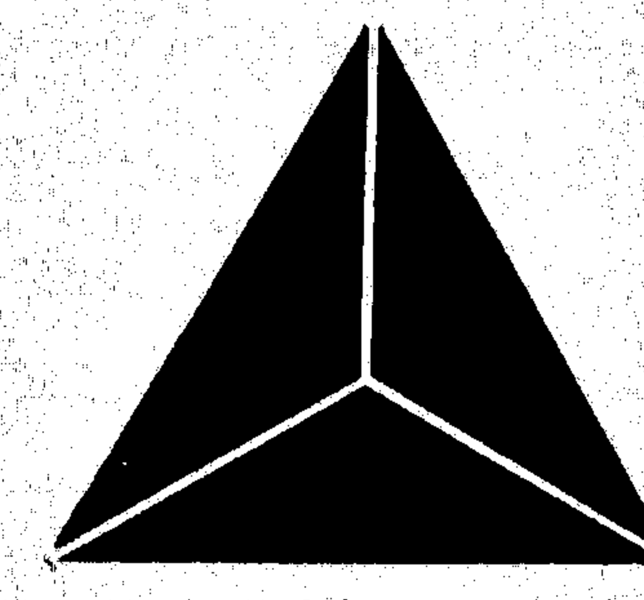


Fig. 77
El triángulo dividido en tres partes

El círculo (figs. 79, 80 y 81) está representado diez veces, estando dividido en sectores radiales, hasta en diez partes.

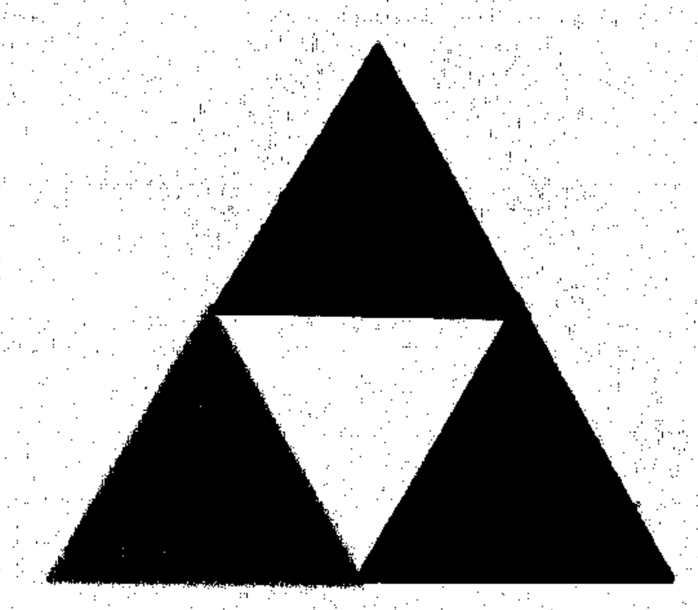


Fig. 78
El triángulo dividido en cuatro partes

El cuadrado está entero y después, sucesivamente, dividido en dos, cuatro, ocho y dieciséis partes en dos series, es decir ; por medio de diagonales, en triángulos cada vez más pequeños y utilizando las medianas en formas cuadrangulares. Para ello existen nueve marcos iguales que pueden contener todas esas subdivisiones del cuadrado.

Además de estas figuras, el material presenta muchas otras.

Por ejemplo, forma parte de él una serie de círculos me-

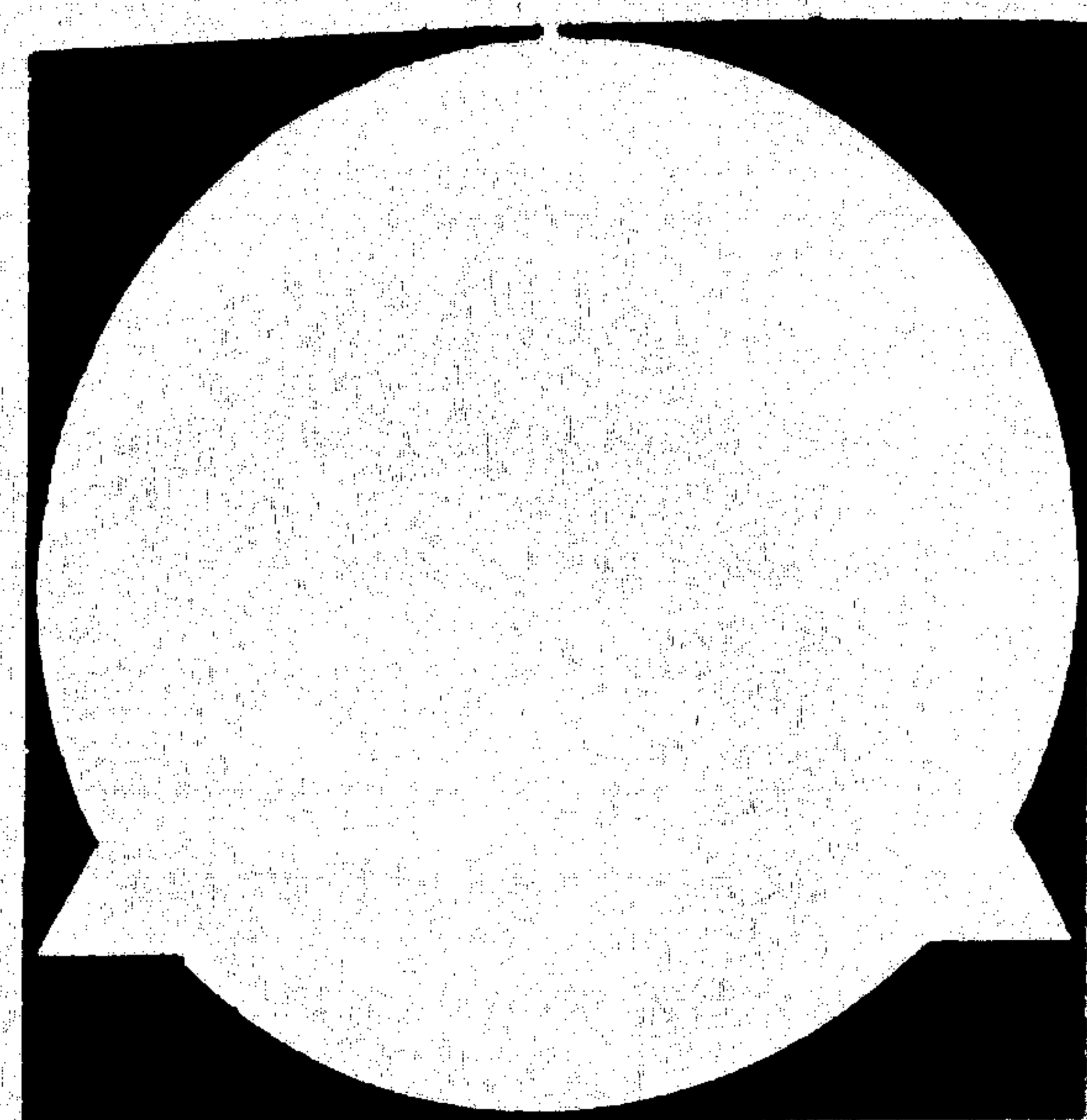


Fig. 73

El fondo del marco tiene una importancia nueva en este material; es la base constante para referencias. Es la unidad de relación con las fracciones.

En efecto, cada una de dichas figuras va dividida y subdividida y las partes del todo se acoplan en marcos siempre iguales. Así, por ejemplo, el triángulo equilátero, además de entero, se tiene dividido en dos, tres y cuatro partes. Las subdivisiones sirven para reconstruir el triángulo dentro de un marco igual al del triángulo completo.

Así pues, existen cuatro marcos iguales, cuyo fondo, re-

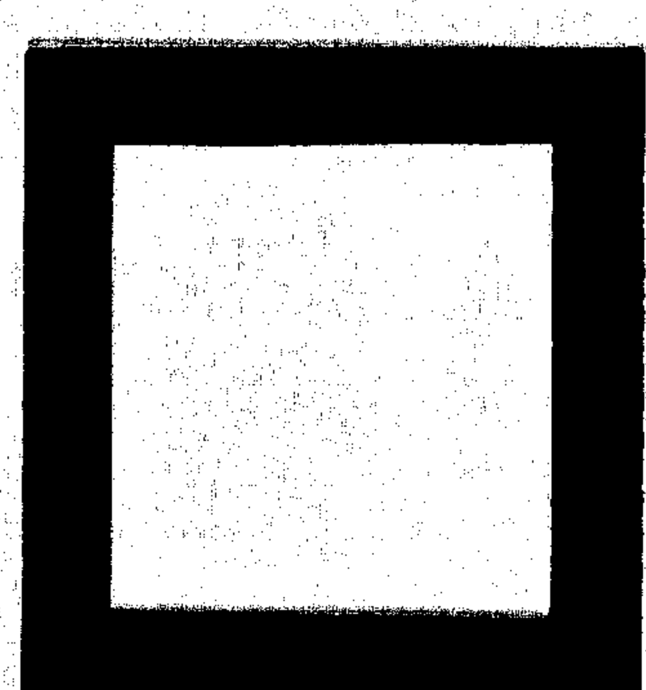


Fig. 74
Ejemplo de un marco con fondo

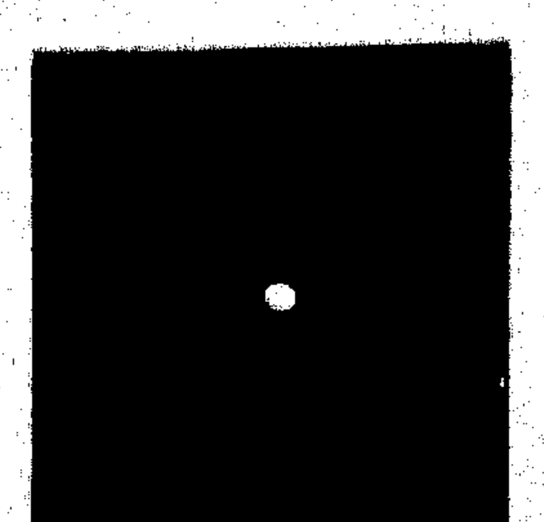


Fig. 75
La figura geométrica que hay que acoplar.
(Está provista de un botón para el manejo)

presenta siempre el mismo triángulo equilátero, y las figuras a acoplar son dos mitades, tres tercios y cuatro cuartos del mismo triángulo (fig. 76, 77 y 78).

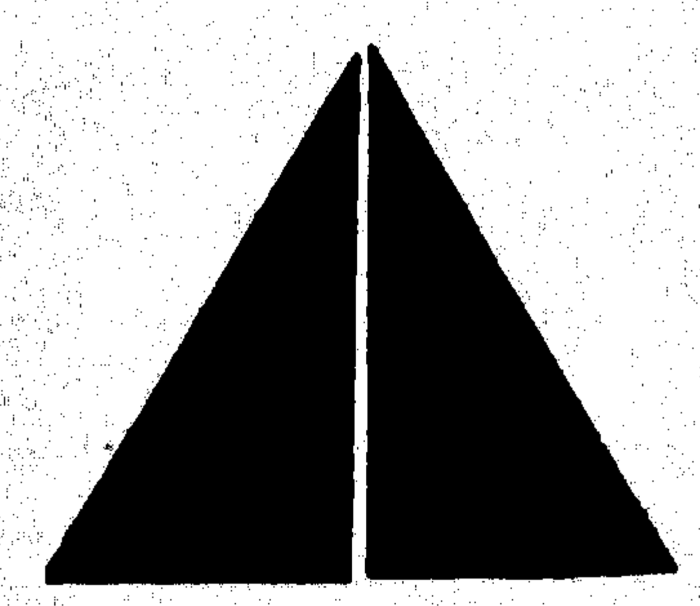


Fig. 76
El triángulo dividido en dos partes

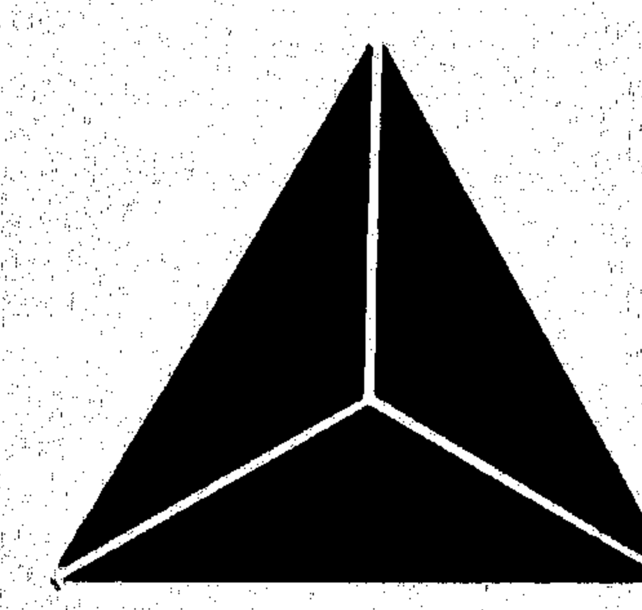


Fig. 77
El triángulo dividido en tres partes

El círculo (figs. 79, 80 y 81) está representado diez veces, estando dividido en sectores radiales, hasta en diez partes.

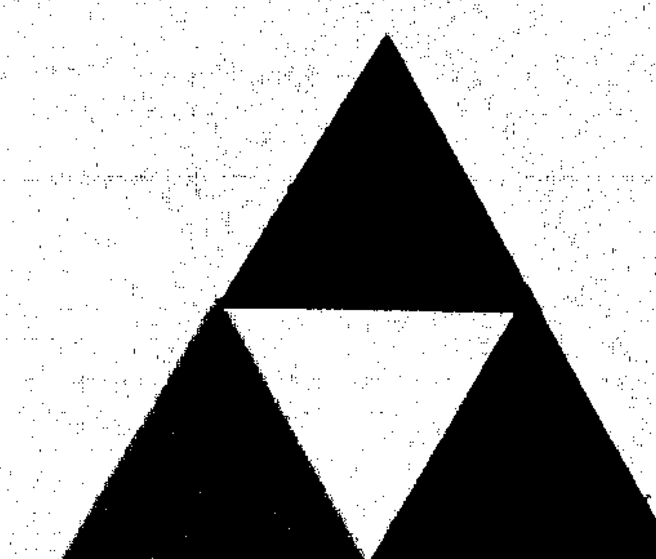


Fig. 78
El triángulo dividido en cuatro partes

El cuadrado está entero y después, sucesivamente, dividido en dos, cuatro, ocho y dieciséis partes en dos series, es decir; por medio de diagonales, en triángulos cada vez más pequeños y utilizando las medianas en formas cuadrangulares. Para ello existen nueve marcos iguales que pueden contener todas esas subdivisiones del cuadrado.

Además de estas figuras, el material presenta muchas otras.

Por ejemplo, forma parte de él una serie de círculos me-

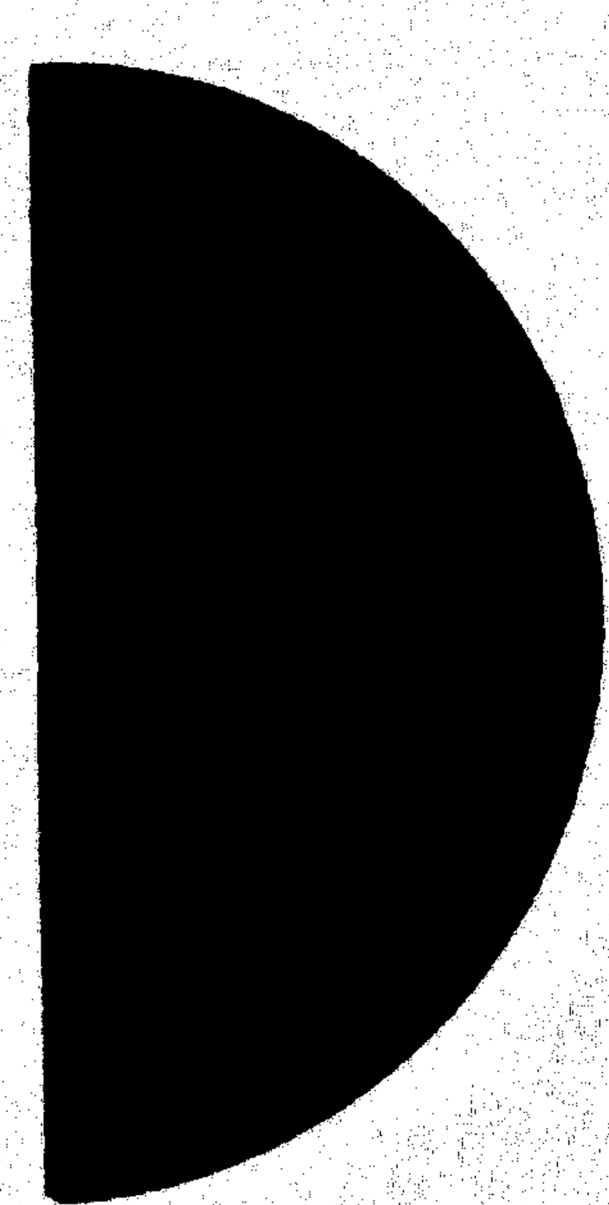
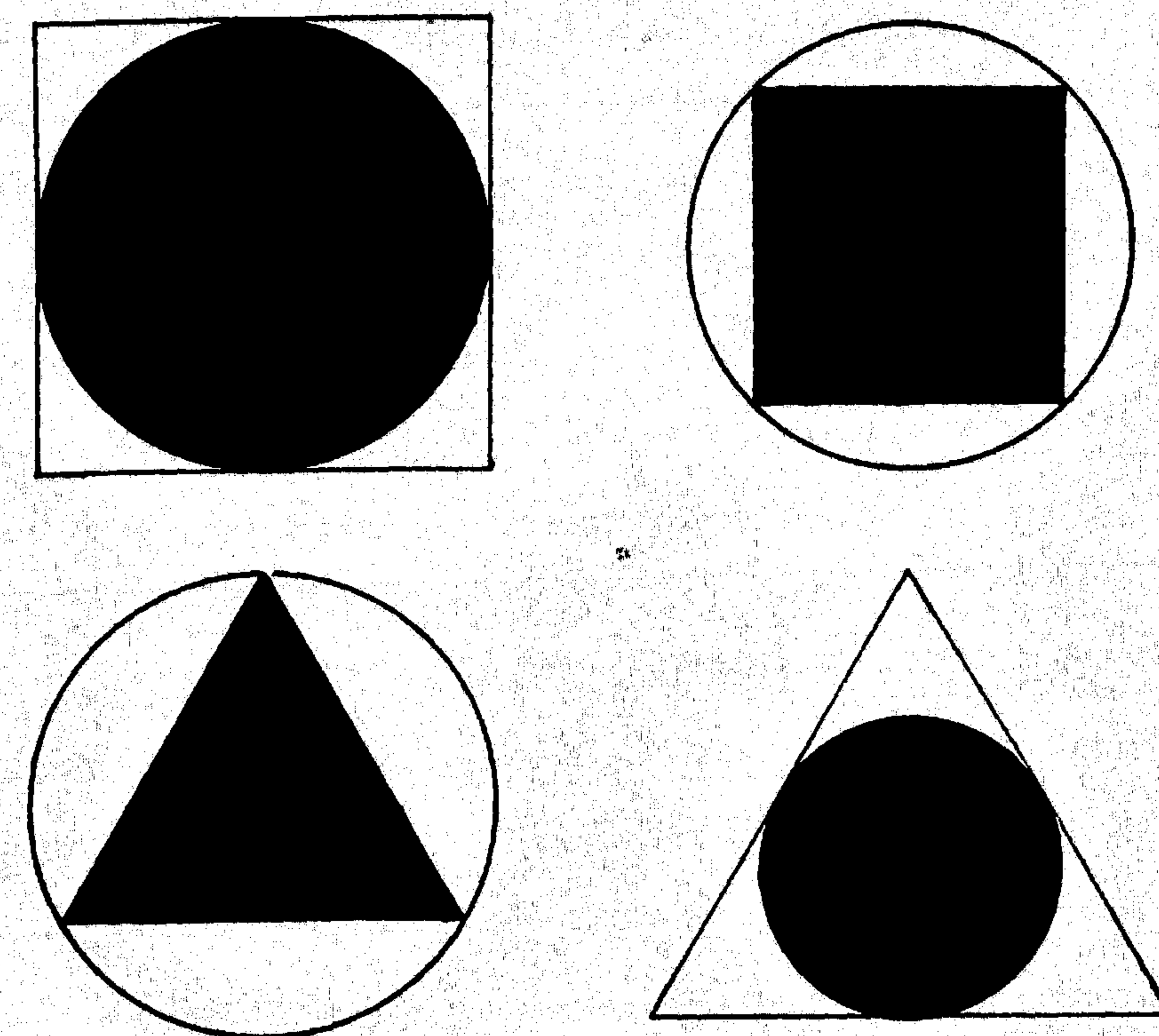


Fig. 79

nores, que aquel que sirve de punto de partida. Estos no se construyen siguiendo un decrecimiento gradual del diámetro, como en el material de los moldes planos, usado por los niños pequeños.

Aquí, los círculos sucesivamente menores, están inscritos en figuras determinadas por el triángulo equilátero, o bien, el diámetro está determinado por el lado de uno de las figuras que provengan de las subdivisiones antes citadas, como, por ejemplo, por el cateto del triángulo rectángulo que es la cuarta parte del cuadrado dividido, según las diagonales.

Cada uno de estos círculos tiene su marco, así que existe una colección de marcos, los cuales, una vez desplaza la la figura correspondiente, ofrecen un fondo blanco representando círculos de diferente diámetro. Dentro de estos círculos pueden colocarse figuras cuadradas o triángulos, que en tal caso son inscritos en el círculo.



ALGUNAS FIGURAS DEL MATERIAL

Basta esta ligera indicación, para comprender como dicho material se presta a interesantes pruebas y confrontaciones.

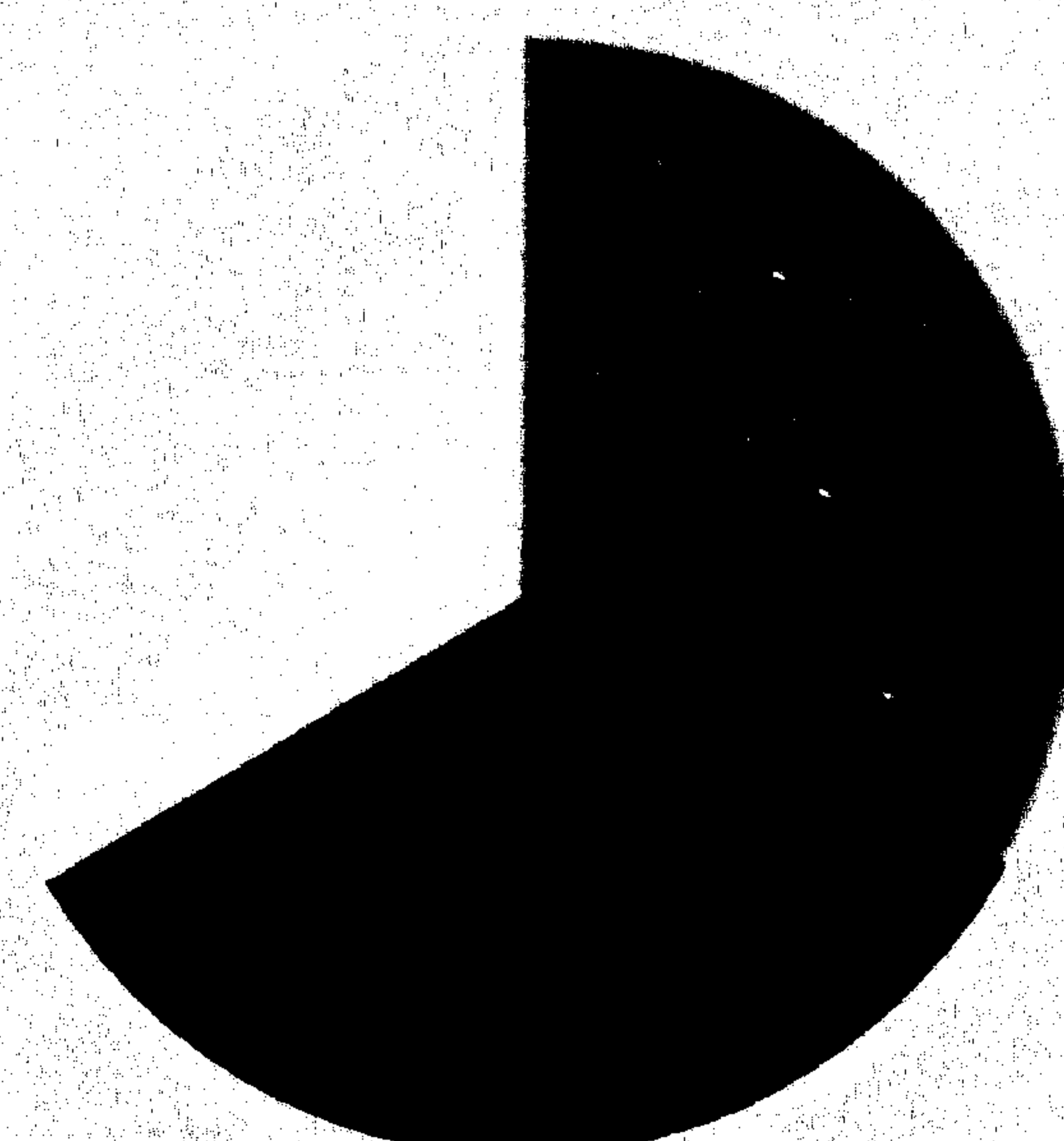


Fig. 80

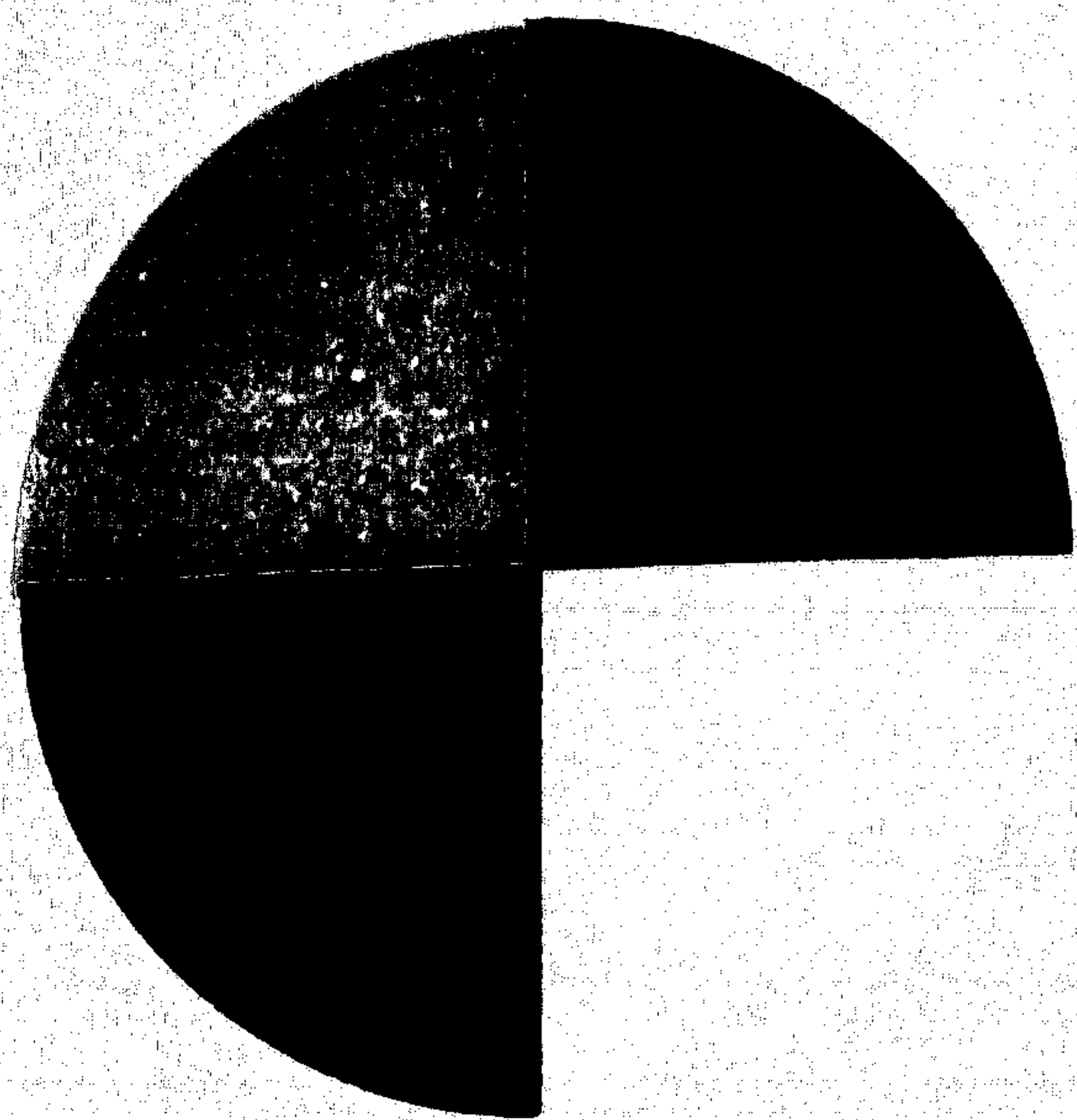


Fig. 81

Queremos llamar la atención sobre el círculo dividido en partes, cuyos sectores separables, exactamente construídos y sólidos en sus contornos, se prestan a la medida de los ángulos y a un estudio objetivo de las fracciones, por que los círculos fundamentales de los marcos (blancos) pueden ser rellenados con sectores de varias dimensiones y tales pruebas y desplazamientos dan lugar a una clara intuición sobre los cálculos de las proporciones.

La evaluación y medida de los ángulos ayuda a estudiar los ángulos de las figuras geométricas que se encuentran entre el material.

Otra parte del material se diferencia un tanto del anteriormente descrito y se presta a reducir muchas y variadas figuras geométricas (como triángulos, rombos, trapecios, polígonos) a un rectángulo equivalente por medio de desplazamientos, de adición y de sustracción de figuras y con éste es posible obtener la demostración indirecta de algunos teoremas como, por ejemplo: todos los triángulos que tienen la misma base y la misma altura son equivalentes. También pueden obtenerse con este último material varias demostraciones del teorema de Pitágoras, que sirven de guía a un razonamiento lógico y se prestan a hacer *escribir* en términos exactos una demostración verdaderamente euclidiana.

Las numerosas aplicaciones de este material nos imponen un orden en la exposición particularizada.

Este orden no significa que, una serie de ejercicios que se irán examinando, deba preceder a otros que se expondrán sucesivamente. Al contrario. En varias ramas y con frecuencia se desarrollarán paralelamente.

Indicaremos aquí el género de los ejercicios.

Uno, es el estudio del material en sí, de los desplazamientos de las figuras en los marcos, etc.

Otro está constituído por trabajos, dibujos y pinturas, reproducciones llevadas a cabo utilizando diversos instrumentos, como escuadra, compás, goniómetro, etc.

Trabajos varios de representación de las figuras, de su correspondencia, la posibilidad de combinar muchas figuras inscritas y circunscritas, dan material suficiente para una abundante creación.

También el uso del compás ha dado lugar a creaciones artísticas y a trabajos exactos y pacientes que sobrepasan nuestra imaginación y revelan la riqueza de energías ordenadoras existentes en el alma infantil.

ESTUDIO DE LAS LINEAS. — DEFINICIONES

TRIANGULO

Si tomamos el triángulo equilátero dividido en dos partes, vemos que cada una de ellas es un triángulo rectángulo (fig. 76).

La línea sobre la cual se unen, va perpendicularmente desde el vértice a la base. Esta es la *altura* del triángulo. Como los dos triángulos rectángulos son iguales y también sus líneas de base son iguales, cada una, pues, es la mitad de la base del triángulo equilátero.

La altura del triángulo es aquella línea que va perpendicularmente del vértice a la base y constituye con la base dos ángulos rectos.

En el triángulo equilátero, la altura divide a la base en dos partes iguales.

Detengámonos ahora un poco sobre la altura. Si el triángulo no fuese de forma recta y regular, la altura no caería en el centro de la base, pero sería siempre la altura del triángulo.

¿Qué es pues la altura? La altura es la distancia desde la base (o desde la prolongación de la base) al punto más alto de la figura y tal distancia se mide con una línea perpendicular a la base. Pongamos un ejemplo (fig. 82).

He aquí un triángulo obtusángulo. Tiene una forma tan irregular que si del vértice se traza una perpendicular

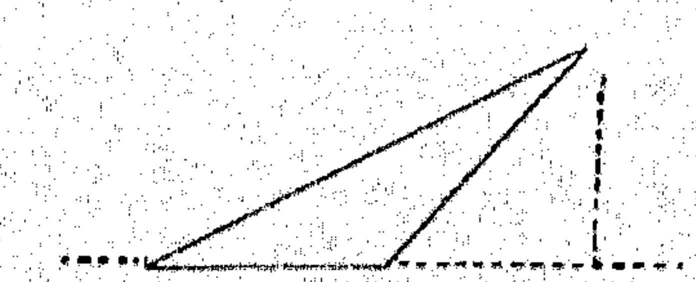


Fig. 82

a la base, cae fuera de ella. Aquella perpendicular pues, que va desde el vértice a la prolongación de la base, es la altura del triángulo.

Ahora supongamos una puerta que tiene el lado superior desplazable, es decir, que se puede subir o bajar a voluntad. Esto se hace porque todos los que por ella pasan han de ser tallados. Pasa un joven y la puerta baja hasta tocar el vértice de la cabeza. Pasa un anciano encorvado, en tal forma que su cabeza está más baja que la espalda, y la puerta desciende hasta tocar el punto más alto de la espalda. Aquel nivel señala para el uno y para el otro la altura necesaria de la puerta para poder pasar. La distancia está determinada por una línea perpendicular trazada

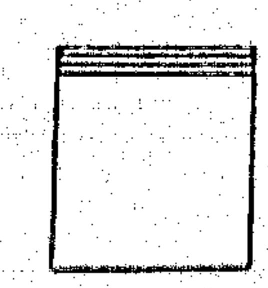
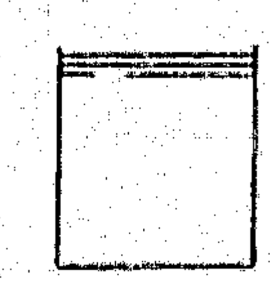
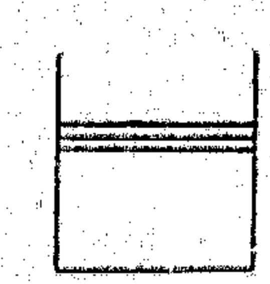
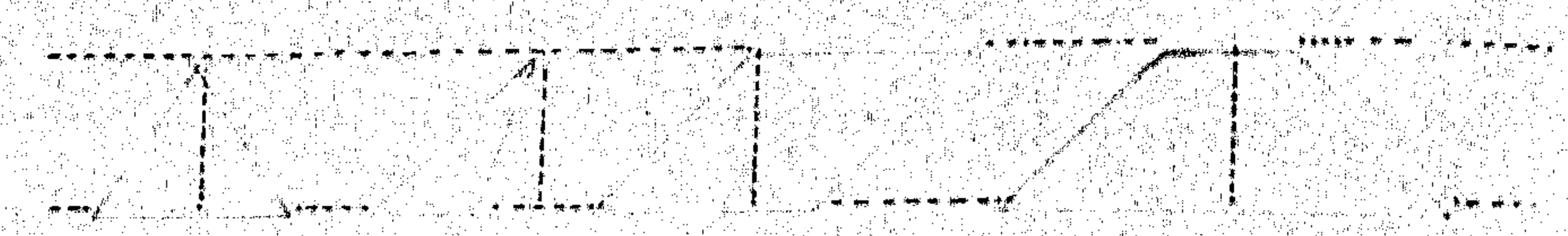




Fig. 83 Fig. 84 Fig. 85

entre el umbral y la parte alta de la puerta y en este caso la altura está limitada por dos *líneas paralelas,* el umbral y el dintel desplazable (Figs. 83, 84, 85). La altura es la perpendicular entre ambas paralelas.

Si observamos ahora, bajo este concepto, varias figuras geométricas construídas entre dos paralelas, diremos que todas ellas tienen la misma altura y la altura está determinada por la distancia, en línea perpendicular entre las dos paralelas (figs. 86, 87, 88, 89).



Figs. 86 a 89

Volvamos ahora al triángulo equilátero, considerando aquel que está dividido en tres partes.

Los tres triángulos iguales que resultan de la división son triángulos obtusángulos e isósceles; por ello tienen los otros tres ángulos opuestos al obtuso, iguales entre sí (fig. 90).

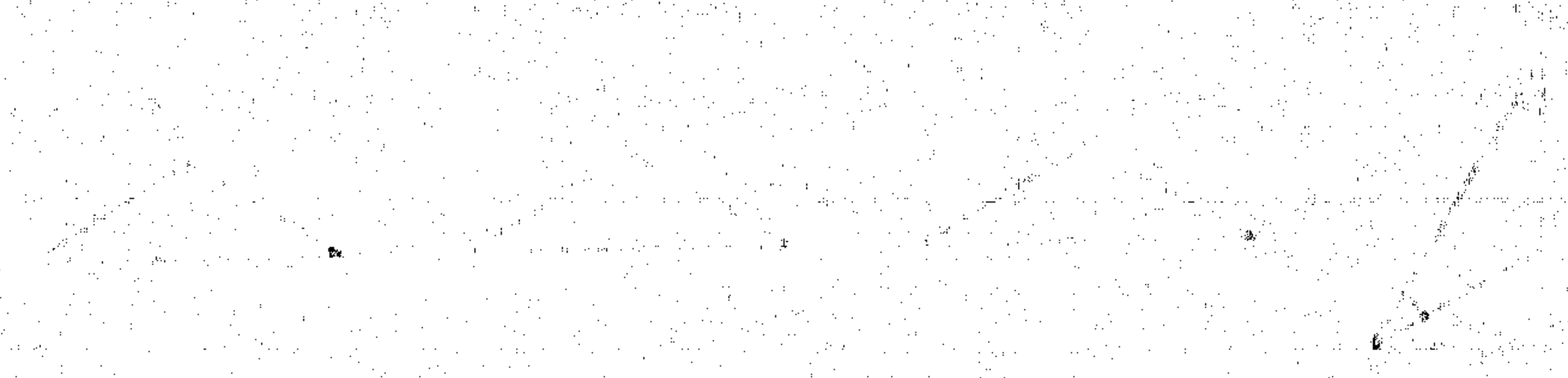


Fig. 90 Fig. 91

Colocando en su puesto en el marco los tres triángulos, de modo que reconstruyamos el triángulo equilátero, se ven las líneas a lo largo de las cuales se unen los tres triángulos obtusángulos. Se unen a lo largo de sus lados iguales.

Sus ángulos agudos, iguales entre sí, se encuentran colocados dos a dos dentro del ángulo del triángulo grande.

La línea (el lado común de los triángulos contenidos dentro del mayor) divide pues el ángulo del gran triángulo equilátero en dos ángulos iguales. La línea que tiene semejante propiedad se llama *bisectriz*.

En el triángulo dividido en tres partes se ven pues las *tres bisectrices*. Son iguales entre sí. Se unen en el centro del triángulo; centro es el punto equidistante de los tres vértices de los ángulos y solamente una figura regular puede tener un punto equidistante de todos los extremos.

Bisectriz. — Es pues la línea que divide el ángulo en dos partes iguales.

En el triángulo equilátero es fácil construirla, porque corresponde a la dirección de la altura y se traza uniendo el vértice con el punto medio del lado opuesto.

En otros casos, sucede tener que construir la bisectriz sin más elementos que el propio ángulo.

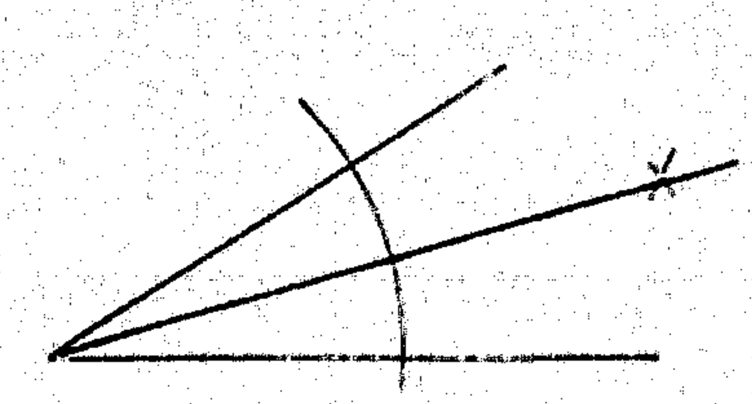


Fig. 92
CONSTRUCCIÓN DE LA BISECTRIZ

Dibujado un ángulo cualquiera, colocaremos la punta del compás en el *vértice* (punto de encuentro de las líneas que constituyen el ángulo) y con una abertura de compás cualquiera se traza un arco que corte los dos lados. Se apoya después la punta del compás, sucesivamente, en los dos puntos de intersección, de un lado y de otro y con la misma abertura se trazan dentro del espacio del ángulo dos arcos que se cortan.

Uniendo dicho punto de intersección con el vértice del ángulo se obtiene la *bisectriz*.

Volviendo ahora al material consideremos el triángulo equilátero dividido en cuatro partes (fig. 93).

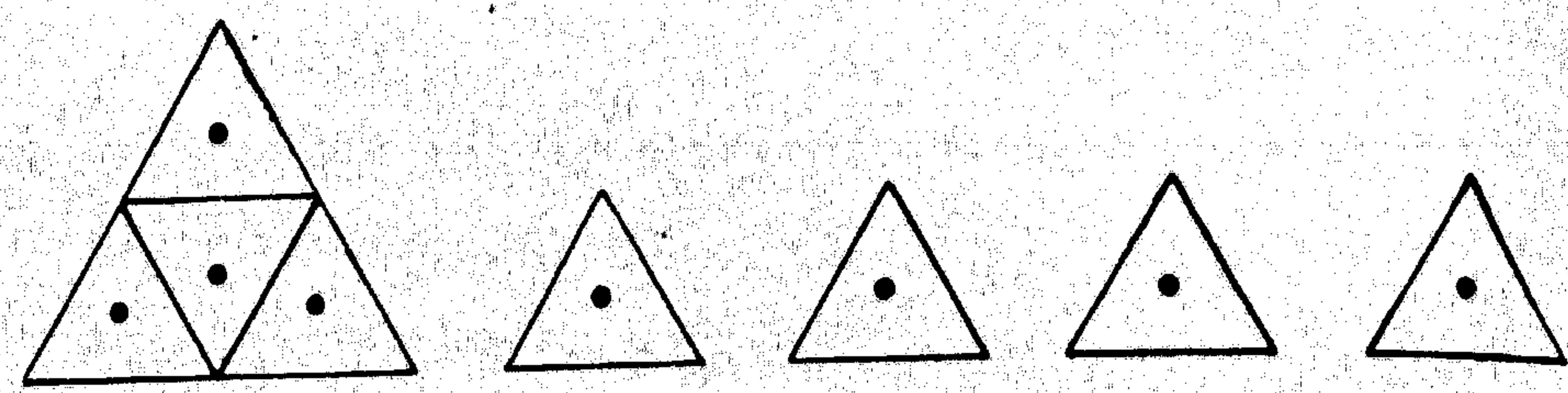


Fig. 93

Separando del marco los cuatro pequeños triángulos se pueden superponer y comprobar que son todos iguales entre sí, así como sus lados, son pues ellos triángulos equiláteros y por lo mismo equiángulos.

En efecto, el ángulo de ellos ajusta perfectamente al ángulo del triángulo grande cuando se colocan dentro del marco.

El triángulo equilátero grande, ha quedado dividido en cuatro pequeños triángulos equiláteros. Dos lados de los pequeños juntos, son iguales al lado del grande; son pues, cada uno, la mitad del lado del triángulo mayor.

El punto, en el cual los lados de los dos pequeños se encuentran, es el punto *central* o *medio* del lado del grande.

La división en cuatro partes está pues hecha, mediante líneas que unen los puntos medios de dos lados opuestos.

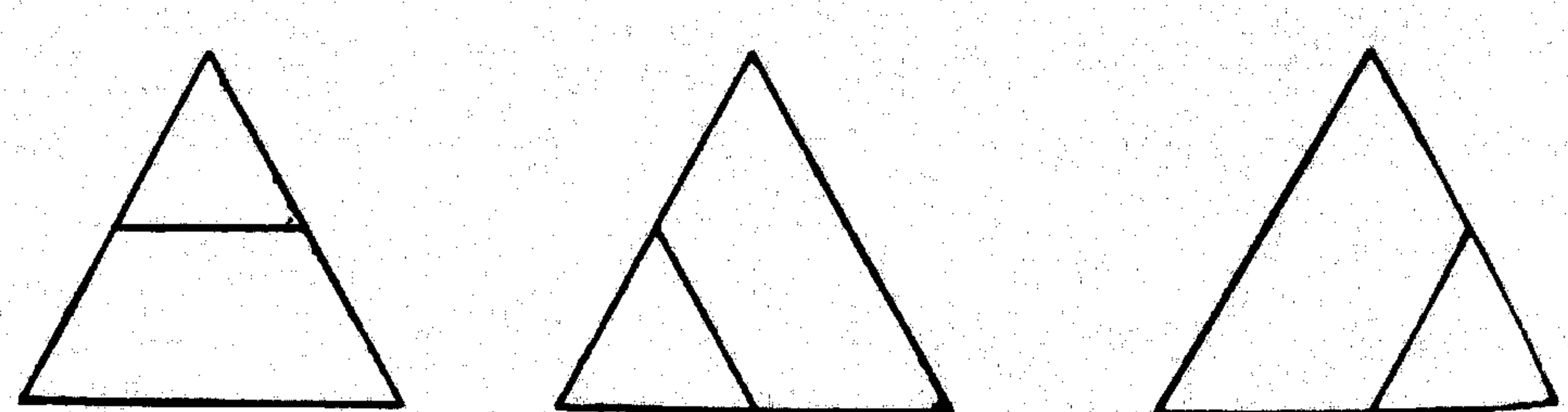


Fig. 94

Las líneas que tienen dicha propiedad, esto es, que unen los puntos medios de dos lados opuestos, se llaman *medianas* (fig. 94).

Modo de encontrar el centro de una línea por medio del compás. Teniendo como característica la mediana, la de unir los puntos medios de los lados de una figura, aprendamos a buscar el punto medio de una línea.

Sea una línea recta.

Para buscar su punto medio se coloca la punta del compás en uno de sus extremos y con una abertura cualquiera que sea suficiente, se describen sendos arcos de círculo por encima y por debajo de dicha línea. Apoyando luego el compás en el otro extremo se trazan otros dos arcos de círculo que corten a los anteriores. Resultan así dos puntos, uno encima y otro debajo de la línea. Uniéndolos por medio de una recta, ésta corta a la línea dada en su punto medio (fig. 95).

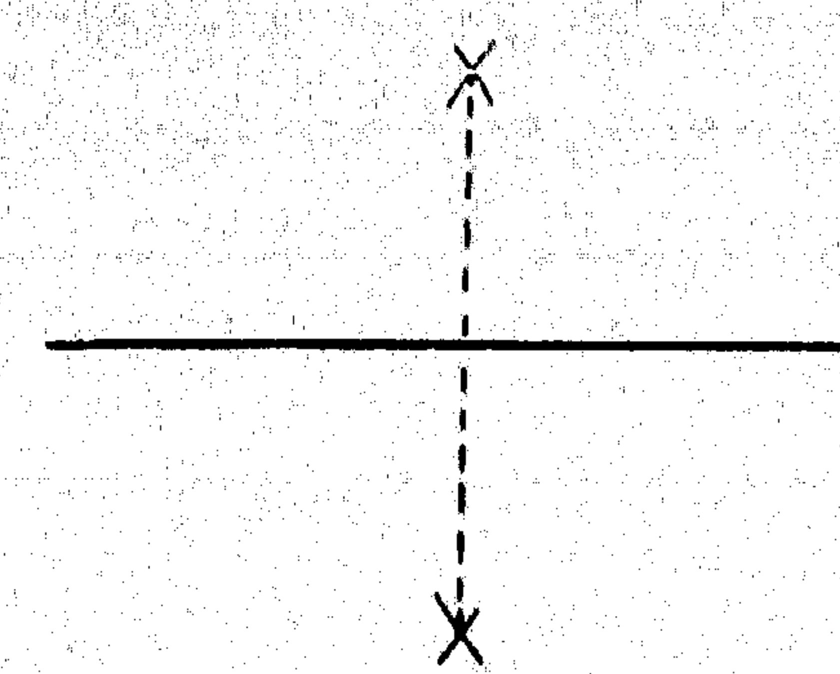


Fig. 95

Estudiemos ahora el CUADRADO.

El cuadro se divide primeramente en dos partes y después cada una de éstas en otras dos y así sucesivamente, de modo que el cuadrado original quede dividido sucesivamente en dos, cuatro, ocho y dieciséis partes.

Pero estas divisiones se hacen en dos formas. En la primera queda el cuadrado subdividido siempre en triángulos, mientras que en la segunda, en cambio, queda subdividido en cuadriláteros.

Consideremos primeramente el cuadrado dividido en dos triángulos. Estos se unen a lo largo de una línea que,

yendo del vértice de un ángulo al del opuesto, divide toda la figura del cuadrado.

Dicha línea se llama *diagonal*.

En el triángulo no puede existir una diagonal, porque la línea que va de un ángulo a otro es el lado y no divide jamás la figura; en el triángulo sólo puede existir la bisectriz de un ángulo.

El cuadrado dividido en cuatro triángulos, demuestra con la unión de los lados de éstos, la existencia de dos diagonales, esto es, de dos líneas que atraviesan el cuadrado de un vértice al otro vértice opuesto.

Es decir, que las dos diagonales del cuadrado dividen a éste en cuatro triángulos iguales.

Las dos diagonales se cortan en el punto central del cuadrado.

Que los triángulos sean iguales, se puede comprobar confrontándoles y superponiéndolos.

Son además rectángulos. En efecto, se puede superponer el ángulo de cada uno de ellos, que está en el centro, con el ángulo recto.

Observemos ahora el cuadrado subdividido en cuadriláteros.

La primera subdivisión da lugar a dos rectángulos iguales entre sí. La línea sobre la cual coinciden en el interior los dos lados mayores va, pues, desde el punto medio de un lado del cuadrado al punto medio de su lado opuesto. Dicha línea es una *mediana* del cuadrado.

Si se observa el cuadrado dividido en cuatro partes, se ve en seguida que las cuatro partes son cuatro cuadrados menores. Estos con sus lados internos coincidentes trazan dos líneas que dividen todo el cuadrado, son las dos *medianas* que se encuentran en ángulo recto.

Estos conocimientos los proporciona el material, pero se deben fijar mediante varios ejercicios.

Los ejercicios serán de construcciones geométricas ejecutadas con instrumentos, ejercicios de recortes de papel de color que se engoman, reproduciendo las grandes figuras subdivididas y ejercicios de pintura con los cuales se da colorido a las figuras dibujadas (figs. 96 y 97).

En fin, también hay ejercicios de decoración de las líneas.

Cada vez que se recorta en papel una figura, ésta se ejecuta siguiendo aquellas *líneas*; es, por lo tanto, sobre las líneas donde hay que fijar la atención cuando se prepara una figura subdividida para pintarla. Y por fin, es precisamente a la línea a la que se contrae el dibujo decorativo, cuya finalidad es ponerla de relieve entre las restantes que constituyen el conjunto de la figura.

Las palabras. — Por lo que al lenguaje se refiere, se ha sumado alguna otra definición.

Y al vocabulario se añadió alguna otra palabra.

Altura
Bisectriz
Mediana
Diagonal.

yendo del vértice de un ángulo al del opuesto, divide toda la figura del cuadrado.

Dicha línea se llama *diagonal*.

En el triángulo no puede existir una diagonal, porque la línea que va de un ángulo a otro es el lado y no divide jamás la figura; en el triángulo sólo puede existir la bisectriz de un ángulo.

El cuadrado dividido en cuatro triángulos, demuestra con la unión de los lados de éstos, la existencia de dos diagonales, esto es, de dos líneas que atraviesan el cuadrado de un vértice al otro vértice opuesto.

Es decir, que las dos diagonales del cuadrado dividen a éste en cuatro triángulos iguales.

Las dos diagonales se cortan en el punto central del cuadrado.

Que los triángulos sean iguales, se puede comprobar confrontándoles y superponiéndolos.

Son además rectángulos. En efecto, se puede superponer el ángulo de cada uno de ellos, que está en el centro, con el ángulo recto.

Observemos ahora el cuadrado subdividido en cuadriláteros.

La primera subdivisión da lugar a dos rectángulos iguales entre sí. La línea sobre la cual coinciden en el interior los dos lados mayores va, pues, desde el punto medio de un lado del cuadrado al punto medio de su lado opuesto. Dicha línea es una *mediana* del cuadrado.

Si se observa el cuadrado dividido en cuatro partes, se ve en seguida que las cuatro partes son cuatro cuadrados menores. Estos con sus lados internos coincidentes trazan dos líneas que dividen todo el cuadrado, son las dos *medianas* que se encuentran en ángulo recto.

Estos conocimientos los proporciona el material, pero se deben fijar mediante varios ejercicios.

Los ejercicios serán de construcciones geométricas ejecutadas con instrumentos, ejercicios de recortes de papel de color que se engoman, reproduciendo las grandes figuras subdivididas y ejercicios de pintura con los cuales se da colorido a las figuras dibujadas (figs. 96 y 97).

En fin, también hay ejercicios de decoración de las líneas.

Cada vez que se recorta en papel una figura, ésta se ejecuta siguiendo aquellas *líneas*; es, por lo tanto, sobre las líneas donde hay que fijar la atención cuando se prepara una figura subdividida para pintarla. Y por fin, es precisamente a la línea a la que se contrae el dibujo decorativo, cuya finalidad es ponerla de relieve entre las restantes que constituyen el conjunto de la figura.

Las palabras. — Por lo que al lenguaje se refiere, se ha sumado alguna otra definición.

Y al vocabulario se añadió alguna otra palabra.

Altura
Bisectriz
Mediana
Diagonal.

yendo del vértice de un ángulo al del opuesto, divide toda la figura del cuadrado.

Dicha línea se llama *diagonal*.

En el triángulo no puede existir una diagonal, porque la línea que va de un ángulo a otro es el lado y no divide jamás la figura ; en el triángulo sólo puede existir la bisectriz de un ángulo.

El cuadrado dividido en cuatro triángulos, demuestra con la unión de los lados de éstos, la existencia de dos diagonales, esto es, de dos líneas que atraviesan el cuadrado de un vértice al otro vértice opuesto.

Es decir, que las dos diagonales del cuadrado dividen a éste en cuatro triángulos iguales.

Las dos diagonales se cortan en el punto central del cuadrado.

Que los triángulos sean iguales, se puede comprobar confrontándolos y superponiéndolos.

Son además rectángulos. En efecto, se puede superponer el ángulo de cada uno de ellos, que está en el centro, con el ángulo recto.

Observemos ahora el cuadrado subdividido en cuadriláteros.

La primera subdivisión da lugar a dos rectángulos iguales entre sí. La línea sobre la cual coinciden en el interior los dos lados mayores va, pues, desde el punto medio de un lado del cuadrado al punto medio de su lado opuesto. Dicha línea es una *mediana* del cuadrado.

Si se observa el cuadrado dividido en cuatro partes, se ve en seguida que las cuatro partes son cuatro cuadrados menores. Estos con sus lados internos coincidentes trazan dos líneas que dividen todo el cuadrado, son las dos *medianas* que se encuentran en ángulo recto.

Estos conocimientos los proporciona el material, pero se deben fijar mediante varios ejercicios.

Los ejercicios serán de construcciones geométricas ejecutadas con instrumentos, ejercicios de recortes de papel de color que se engoman, reproduciendo las grandes figuras subdivididas y ejercicios de pintura con los cuales se da colorido a las figuras dibujadas (figs. 96 y 97).

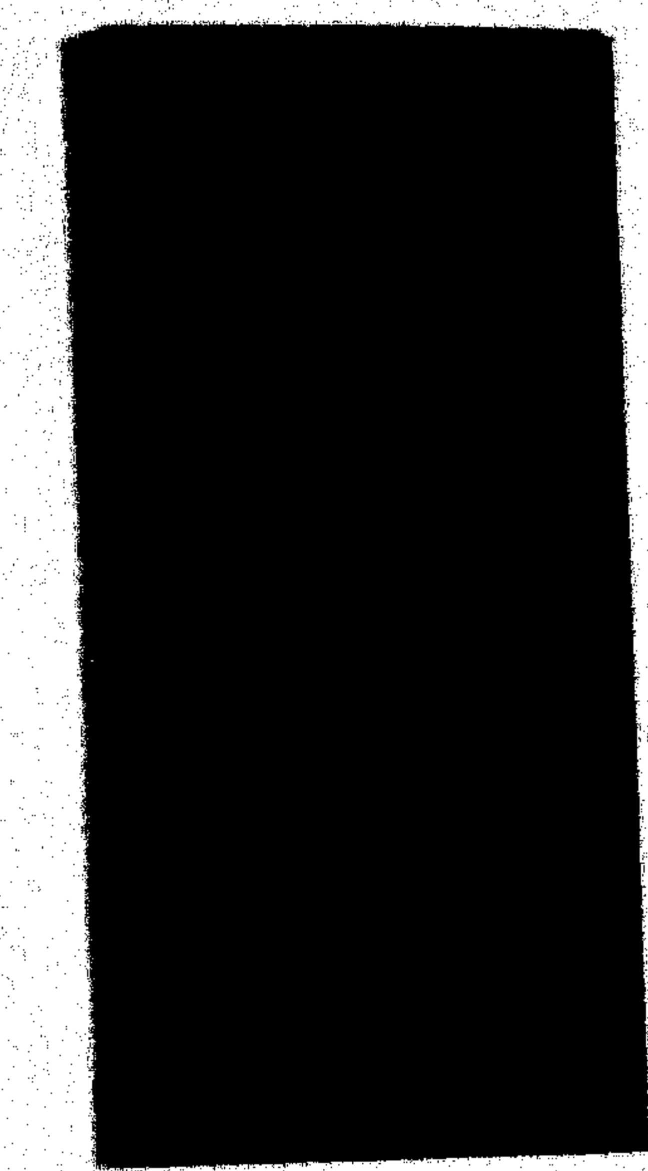
En fin, también hay ejercicios de decoración de las líneas.

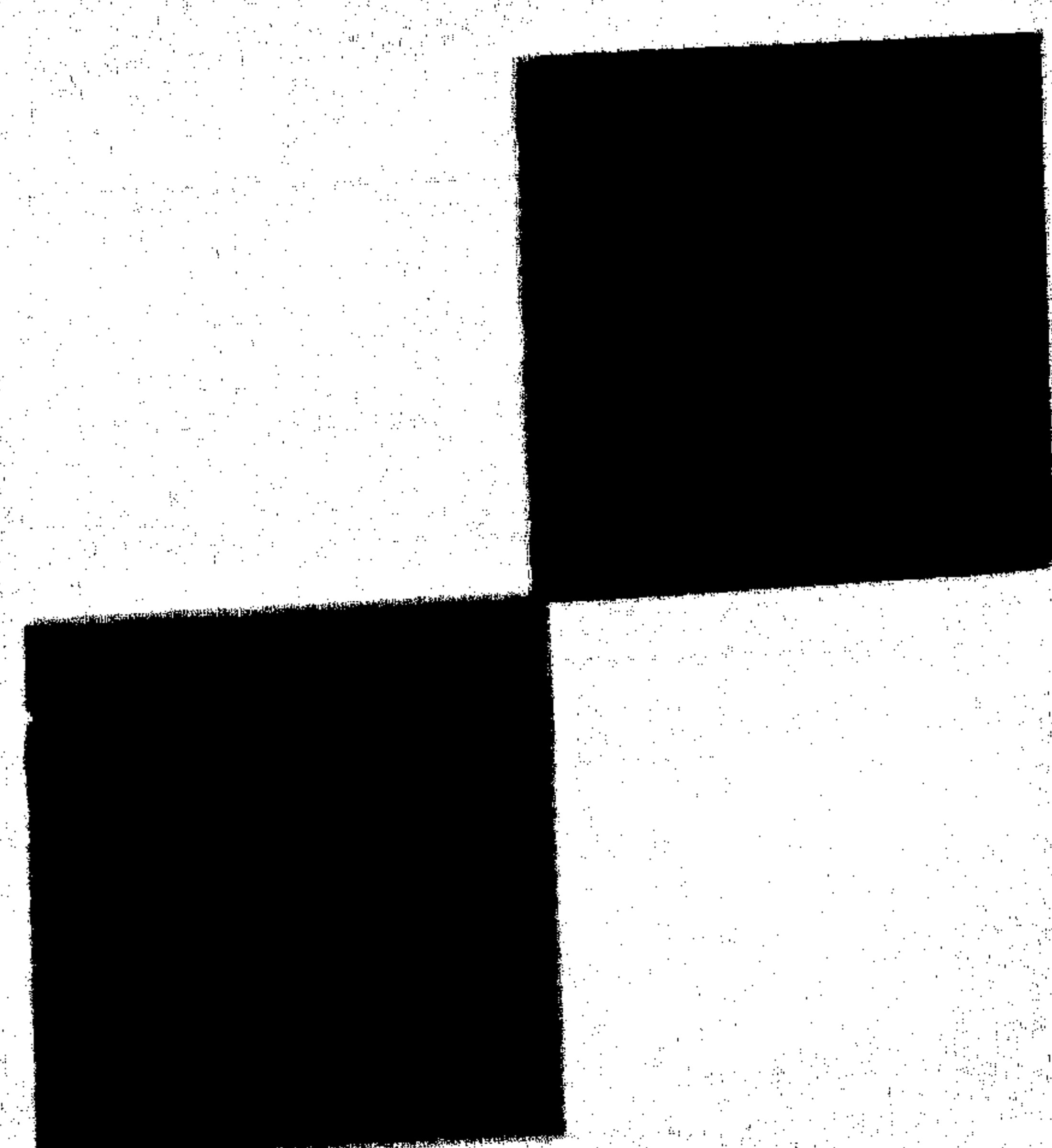
Cada vez que se recorta en papel una figura, ésta se ejecuta siguiendo aquellas *líneas* ; es, por lo tanto, sobre las líneas donde hay que fijar la atención cuando se prepara una figura subdividida para pintarla. Y por fin, es precisamente a la línea a la que se contrae el dibujo decorativo, cuya finalidad es ponerla de relieve entre las restantes que constituyen el conjunto de la figura.

Las palabras. — Por lo que al lenguaje se refiere, se ha sumado alguna otra definición.

Y al vocabulario se añadió alguna otra palabra.

Altura
Bisectriz
Mediana
Diagonal.





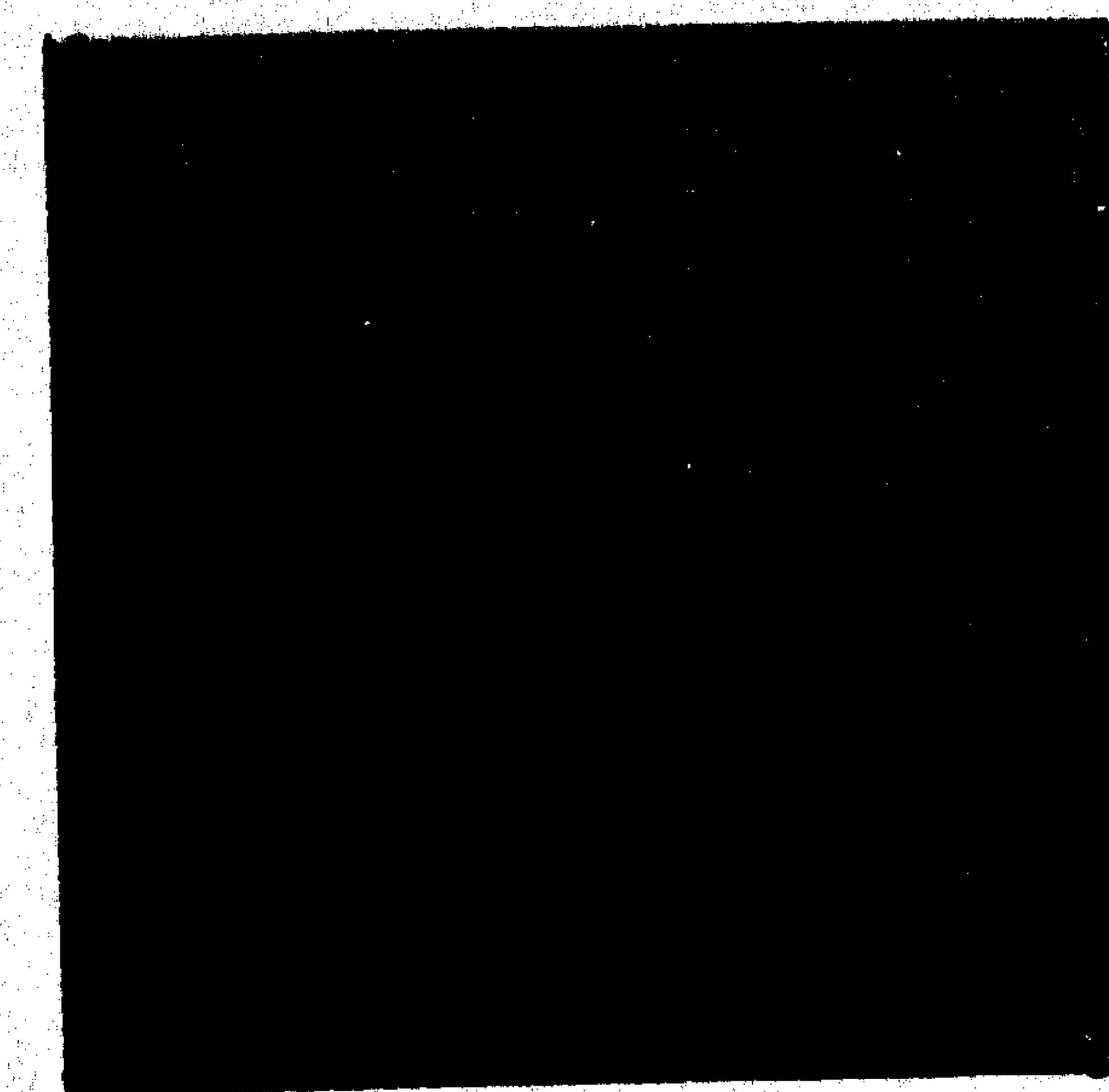


Fig. 97 — a)

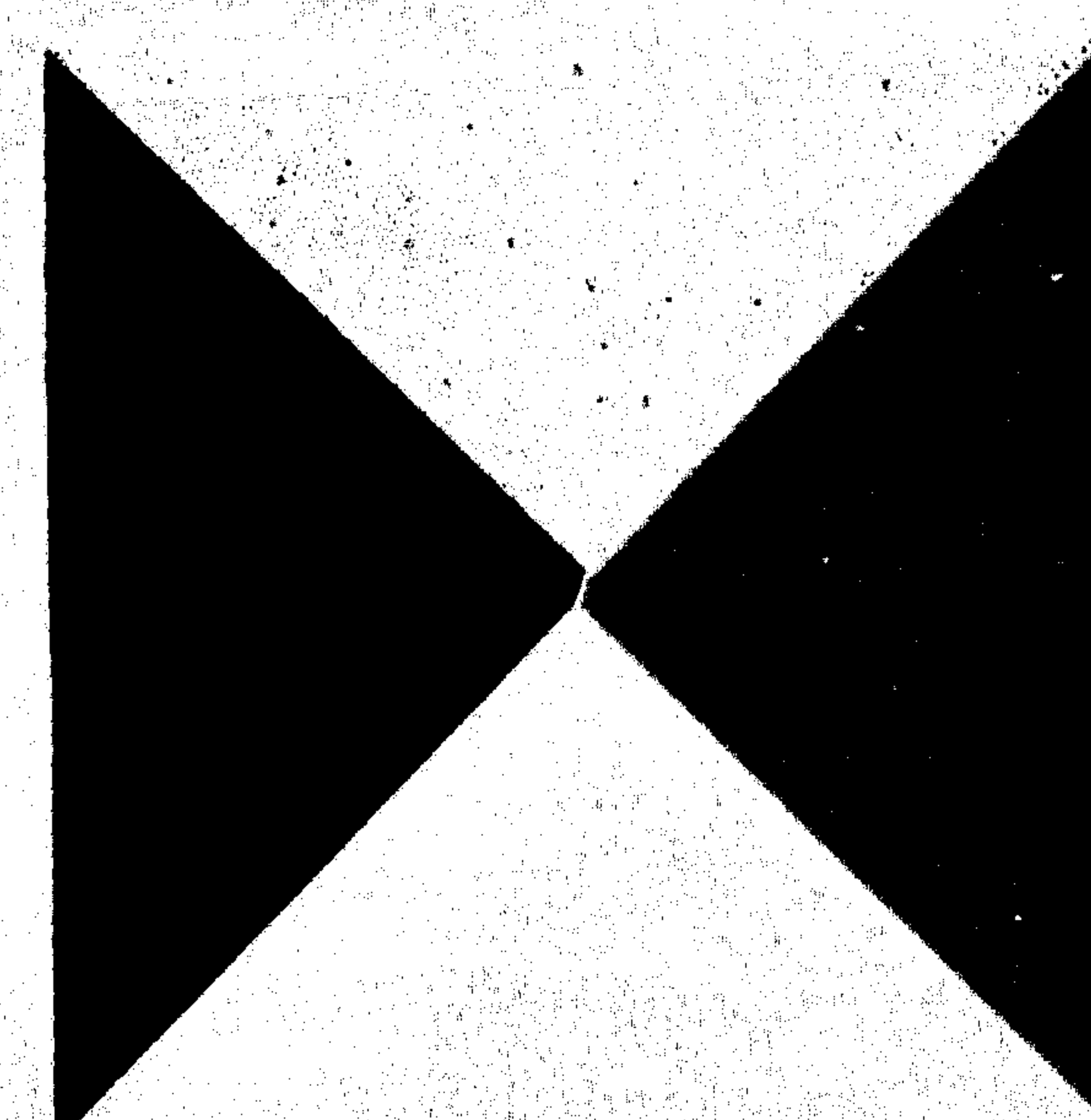


Fig. 97 — b)

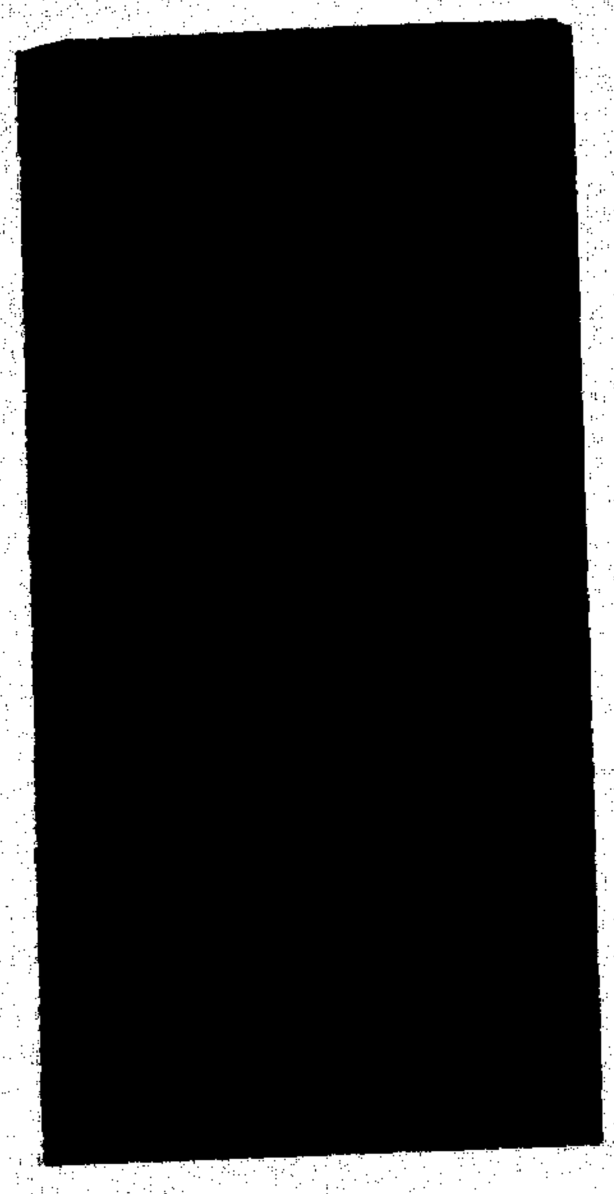


Fig. 96 — a)

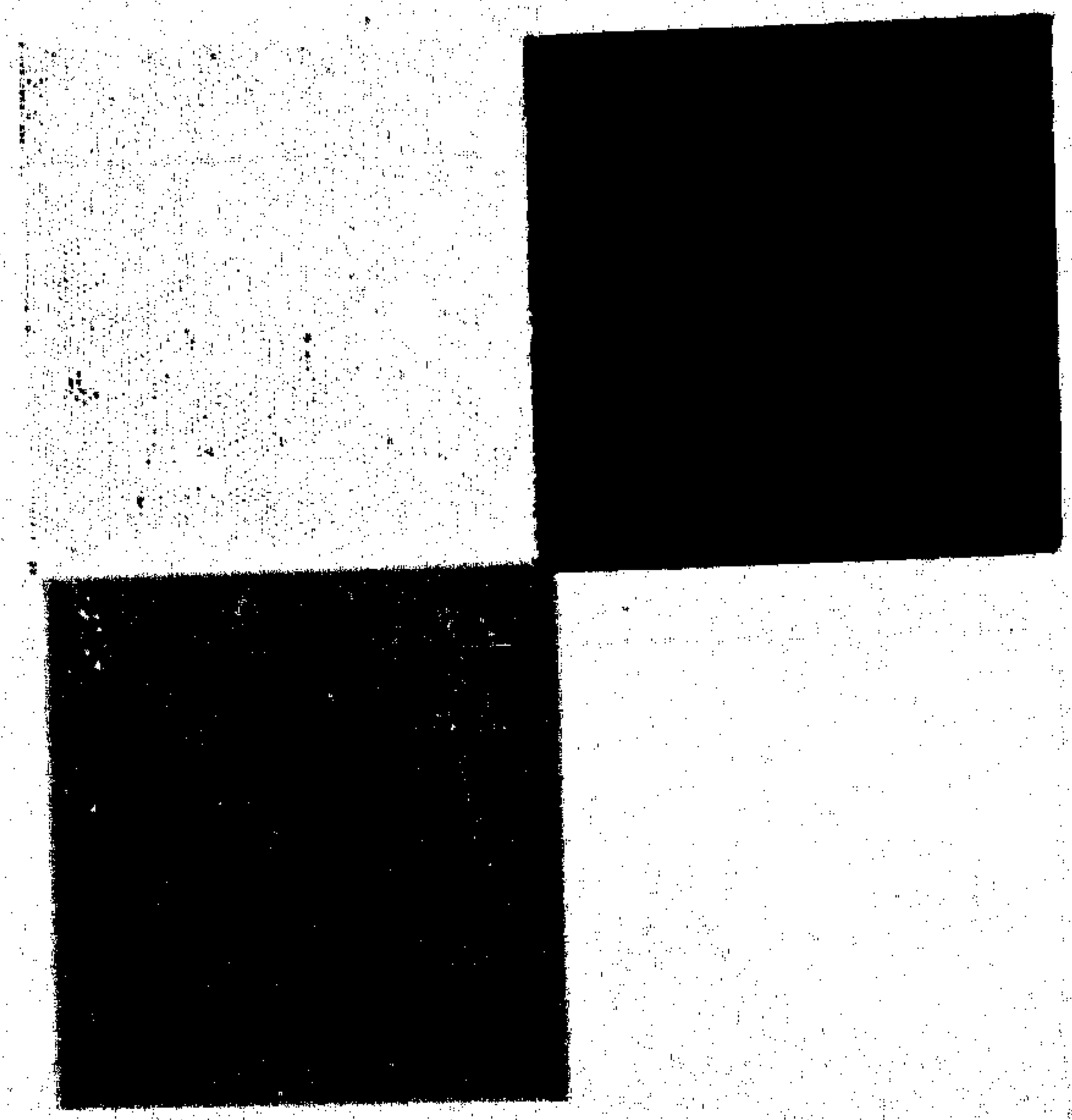


Fig. 96 — b)

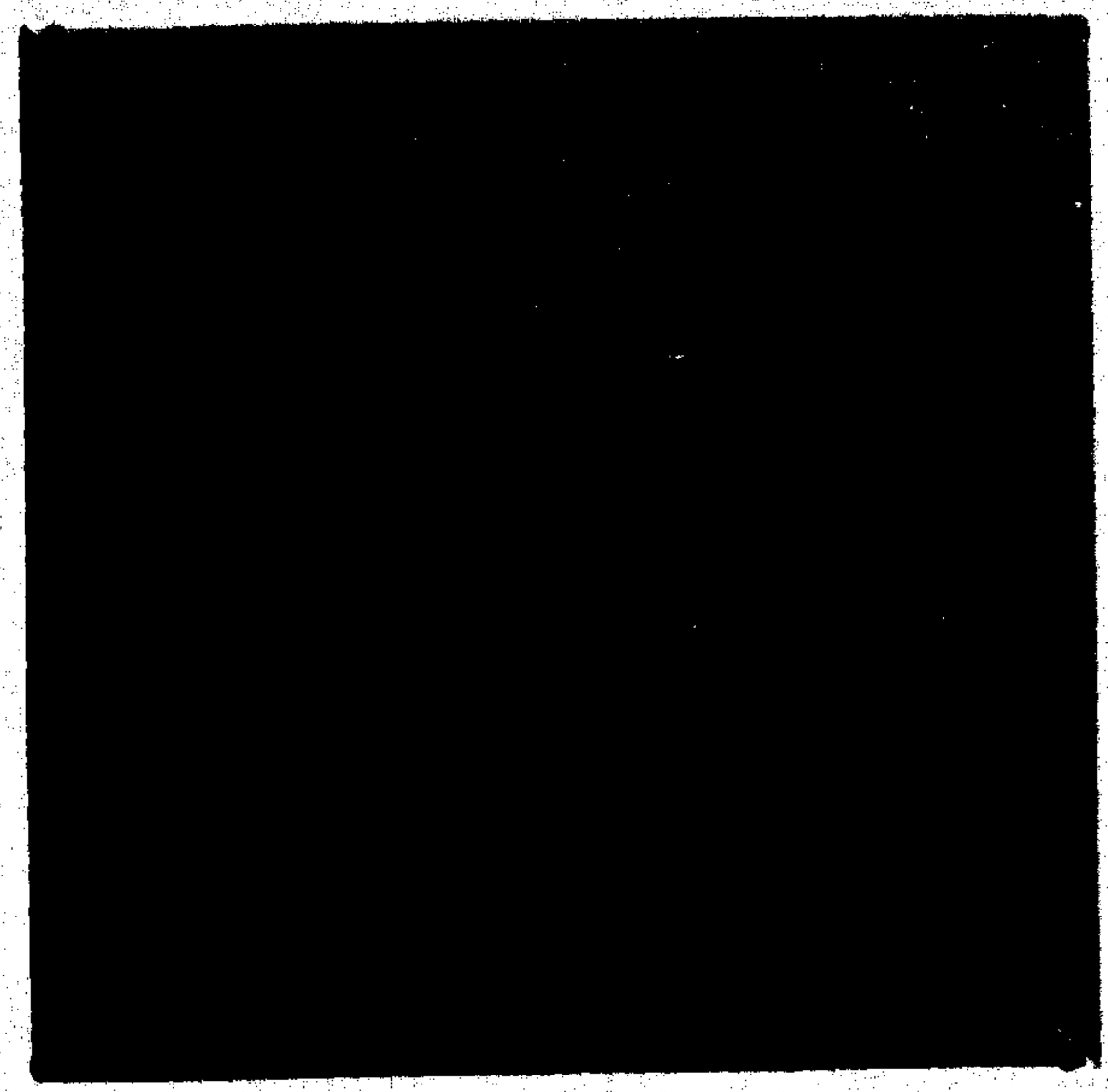


Fig. 97 — a)

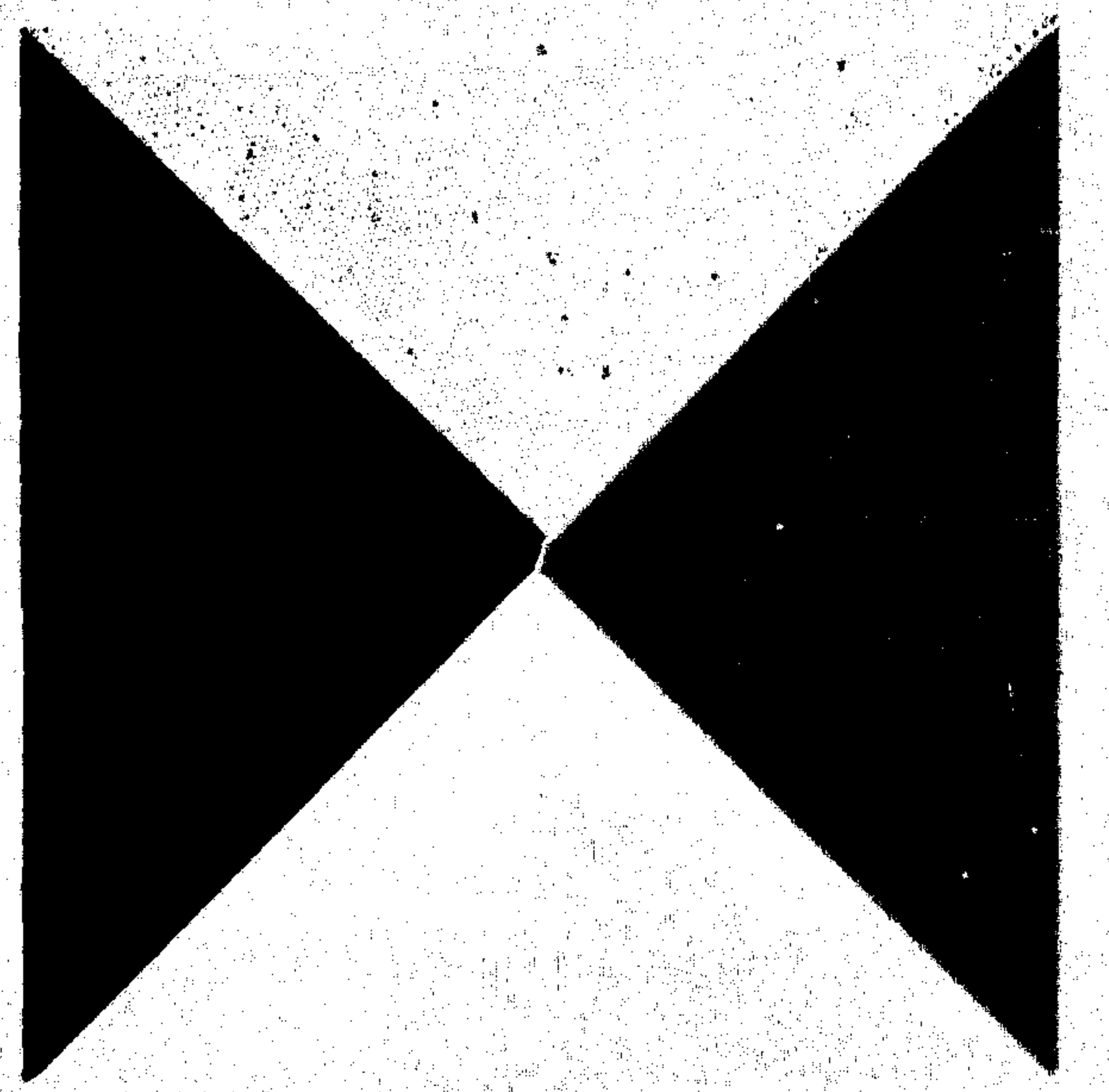


Fig. 97 — b)

III

EL CUADRADO

EL CUADRADO

COMPARACIÓN ENTRE LAS FIGURAS

Consideremos ahora las figuras completas, el espacio que ocupan dentro de sus límites.

En efecto, las figuras ocupan un determinado espacio; llamemos a este espacio, a esta *cantidad de superficie*, *valor* de las figuras.

Estas además son limitadas y estos límites que señalan igualmente los límites de su valor, determinan una *forma*.

Así todas las piezas, las figuras geométricas de los moldes tienen una extensión y una forma: cuadrados, rectángulos, triángulos, círculos. El límite de cada pieza es la línea, pero la línea no existe en sí, es el límite de la figura.

Así cuando el cuadrado se divide en dos rectángulos iguales, se tienen en realidad dos rectángulos. Puestos conjuntamente en el marco se ven divididos, nosotros decimos que aquella división es una línea, la mediana del cuadrado, pero en realidad no es sino el espacio entre los dos rectángulos.

Consideramos pues la línea como una *abstracción*, porque la realidad de la cosa es un *objeto*.

Sin embargo, dibujando el contorno de una figura, es decir, trazando sus límites, debemos siempre dibujar *líneas* del contorno.

Pero es la figura lo que ahora nos interesa; su valor es sobre todo, la *forma*.

El cuadrado está dividido en dos rectángulos iguales, cada rectángulo es pues, la mitad del cuadrado como valor. Los dos rectángulos son iguales entre sí, se pueden superponer y se comprueba su identidad: todos los ángulos y todos los lados se corresponden.

Si dividimos el Cuadrado en cuatro partes por cuatro cuadrados más pequeños, cada uno de éstos es la mitad del rectángulo precedente, lo cual es evidente y se puede comprobar.

Ha resultado pues la misma forma del cuadrado grande. Los cuadrados pequeños tienen nuevo valor, pero la misma forma del grande. Todos los ángulos se corresponden en el grande y en el pequeño; el lado del pequeño es la *mitad* del lado del grande. En cambio, su valor es la cuarta parte.

Las figuras que tienen distinto valor, pero la misma forma, es decir, que se asemejan, se llaman figuras *semejantes*.

Debemos, por ello, distinguir las figuras *iguales* de las figuras *semejantes*.

Si sacamos todas las piezas de la subdivisión del cuadrado en cuadriláteros, se pueden buscar y reunir entre ellas, primero, las figuras *iguales*, después, las *semejantes*.

Lo mismo se puede decir del cuadrado dividido según las diagonales. Los dos primeros triángulos que resultan son iguales entre sí y el valor de cada uno es la mitad del cuadrado.

Con las dos diagonales entre sí y cada uno de ellos tiene como valor la mitad del triángulo precedente, esto es, la cuarta parte del cuadrado.

Así en las sucesivas subdivisiones, se obtienen triángulos más pequeños que son la mitad de los de la serie precedente (figs. 96 y 97).

Colocándolos en la misma posición, en fila, aparecen todos de la misma forma. Si se hiciese una fotografía ampliando los menores hasta darles la misma dimensión del triángulo mayor, se convertiría en idénticos.

No sucedía lo mismo con las subdivisiones del cuadrado en forma cuadrilátera; allí resultaba unas veces un rectángulo, otras un cuadrado.

Veamos ahora la serie de los triángulos.

Son semejantes, pero ¿cuáles con sus caracteres de semejanza? Basta superponer su ángulo mayor para darse cuenta de que dicho ángulo es igual y recto y puede adaptarse a los ángulos del marco del cuadrado.

Además, cada uno de aquellos triángulos tiene los dos lados adyacentes al ángulo recto, es decir, los dos catetos, iguales entre sí.

Podemos decir, pues: Aquellos triángulos tienen un ángulo igual y los lados adyecentes iguales entre sí, luego son semejantes.

Es ya ocasión de hacer unas consideraciones sobre el valor de las figuras.

Existe una serie de figuras cuadrangulares y triangulares que tiene una correspondencia entre sí; el valor respecto al cuadrado del cual derivan.

El rectángulo grande originado por la primera subdivisión siguiendo una mediana, es la mitad del cuadrado grande. Y el triángulo que resulta de la primera subdivisión siguiendo una diagonal, es también la mitad del cuadrado.

Ambos tienen pues el mismo valor, aun cuando sus formas sean tan diversas que, sin este razonamiento, no se encontraría relación alguna entre ellos.

Los sentidos nos dirían solamente que se trata de figuras completamente diversas; son, sin embargo, de igual valor, tienen la misma extensión.

Las figuras que siendo desemejantes tienen el mismo valor se llaman *equivalentes* (aquí, quiere decir igual, tienen pues igual valor).

Esta *igualdad* que se percibe con el razonamiento, en vez de obtenerla con la impresión de los sentidos, que está en contradicción con la apariencia, tiene un interés particular.

Porque la equivalencia es una averiguación que conduce a muchas reflexiones ; no basta con *mirar*, *observar* para percibirla, precisa el razonamiento para *descubrirla*.

Saquemos pues todas las partes correspondientes a las subdivisiones del cuadrado y busquemos las *figuras equivalentes*.

Aquel triángulo que en sus diversos valores tiene siempre la misma forma, ora es equivalente a un rectángulo, ora a un cuadrado (figs. 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105).

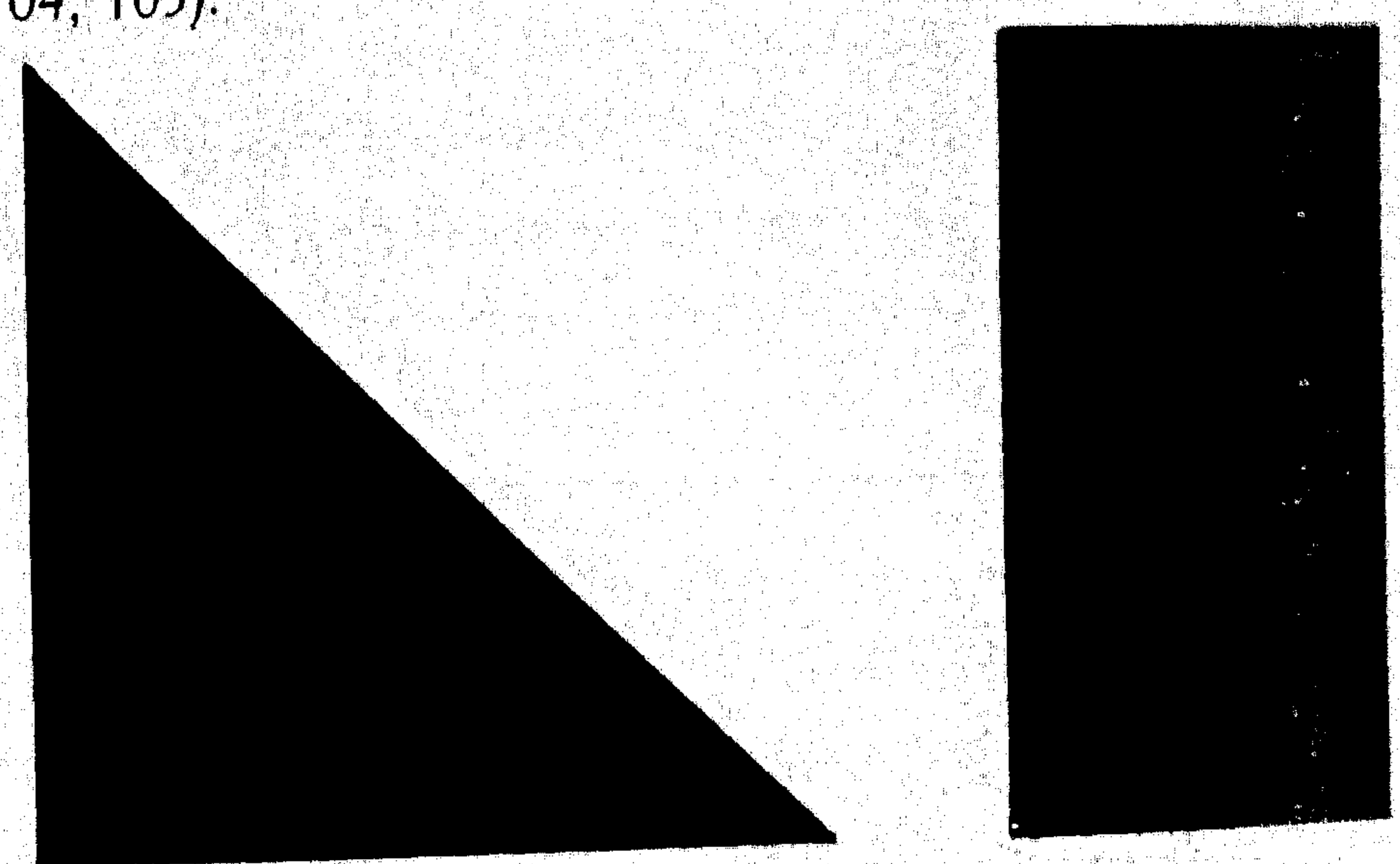


Fig. 98 — a)
Figuras equivalentes

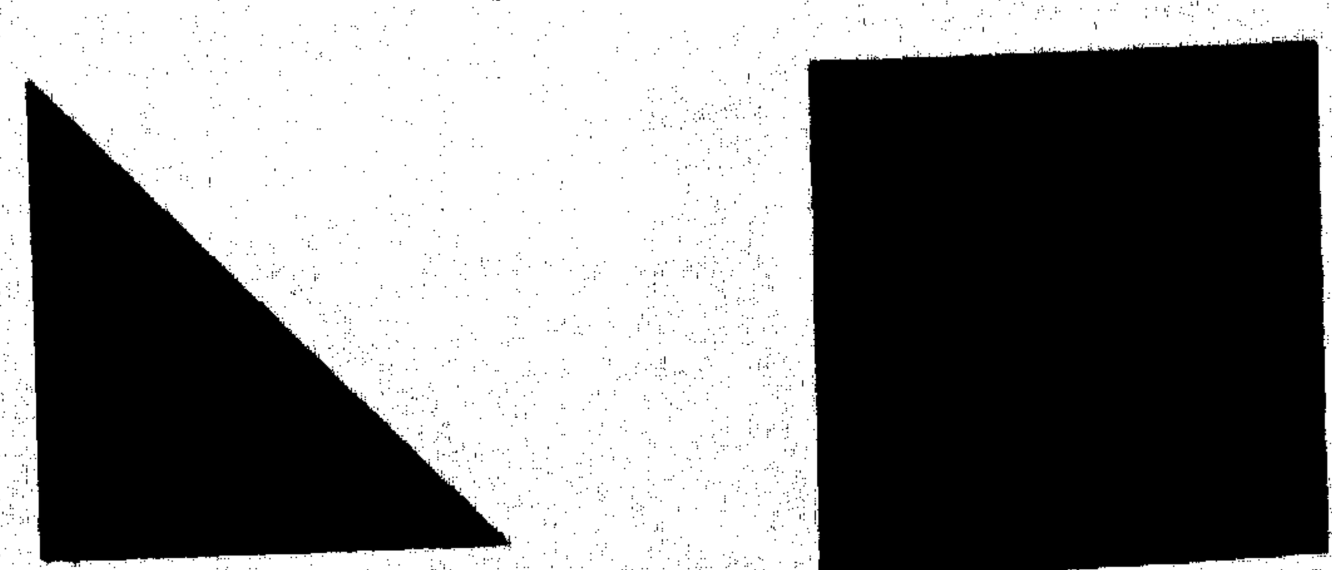


Fig. 98 — b)
Figuras equivalentes

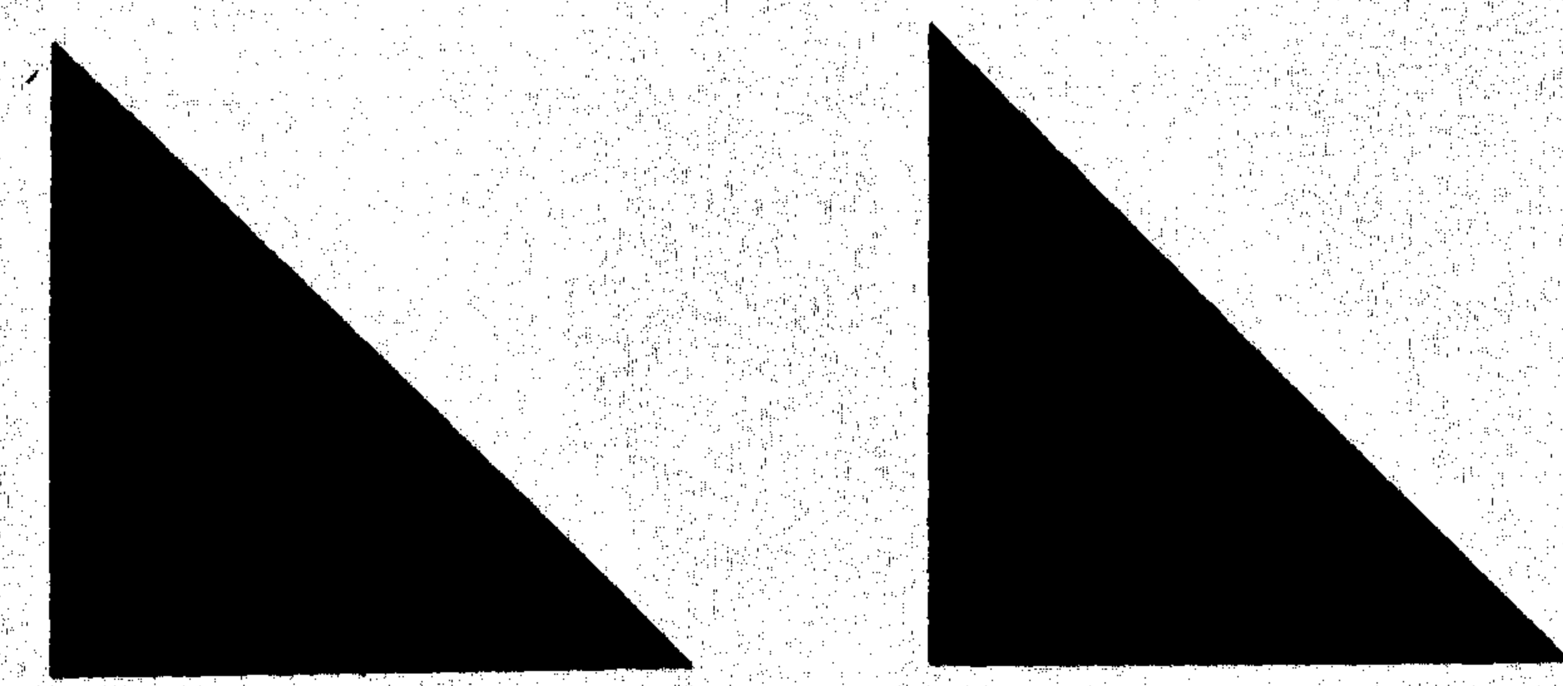


Fig. 99 — a)
Figuras iguales : valor un cuarto

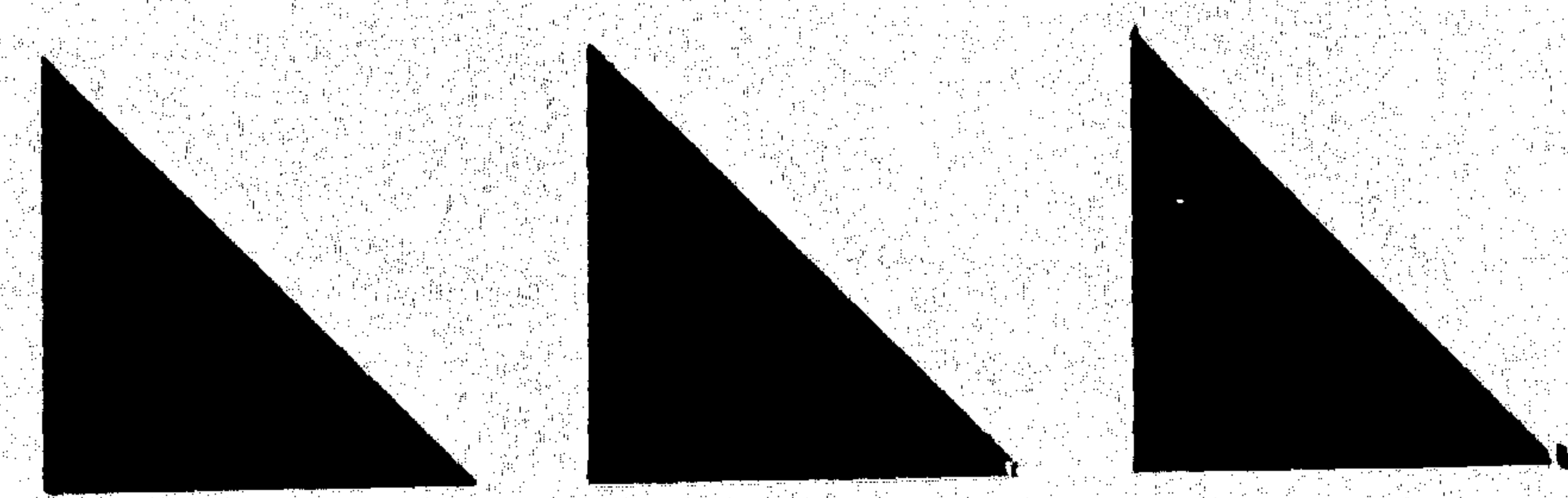


Fig. 99 — b)
Figuras iguales : valor un octavo

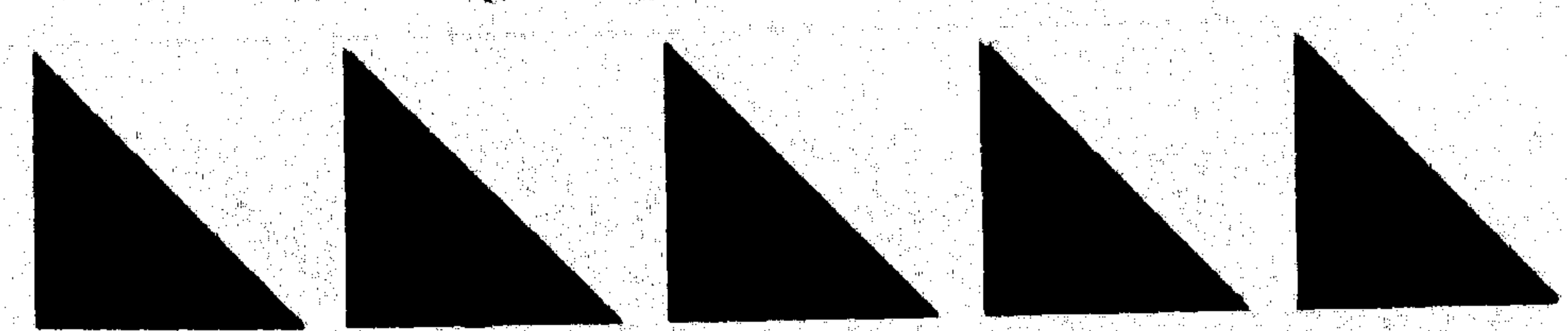


Fig. 99 — c)
Figuras iguales : valor un dieciseisavo

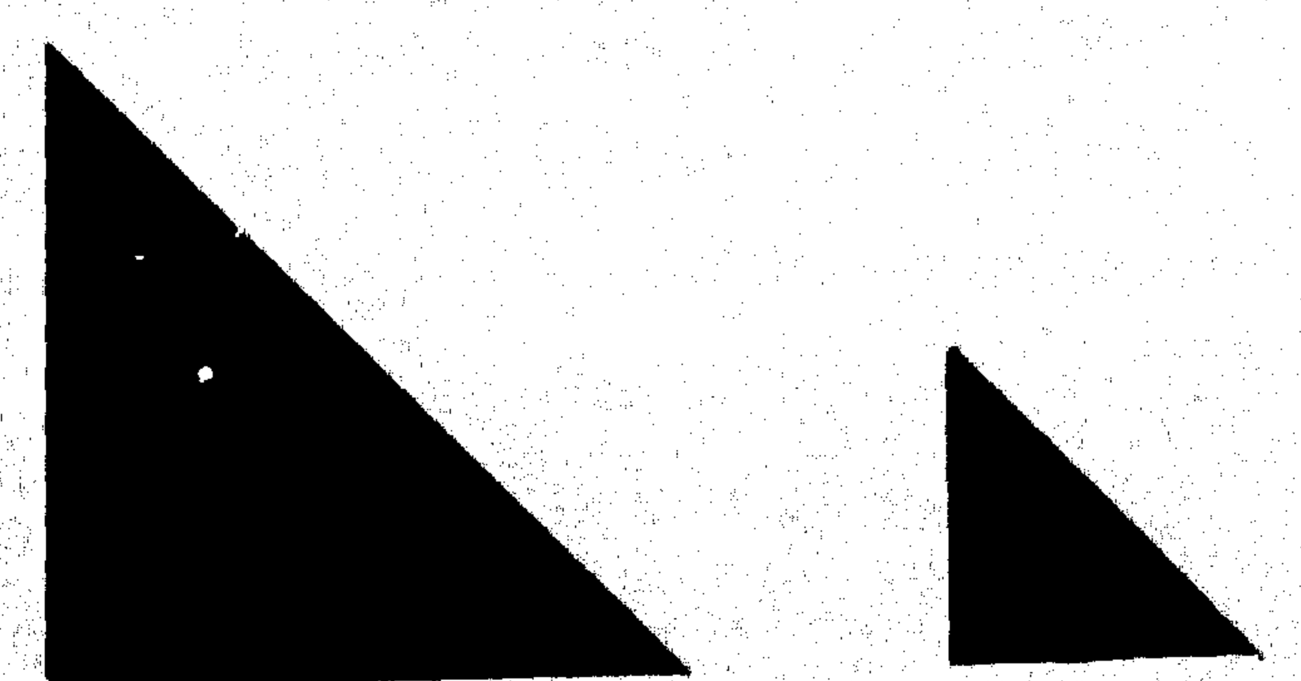


Fig. 100
Figuras semejantes

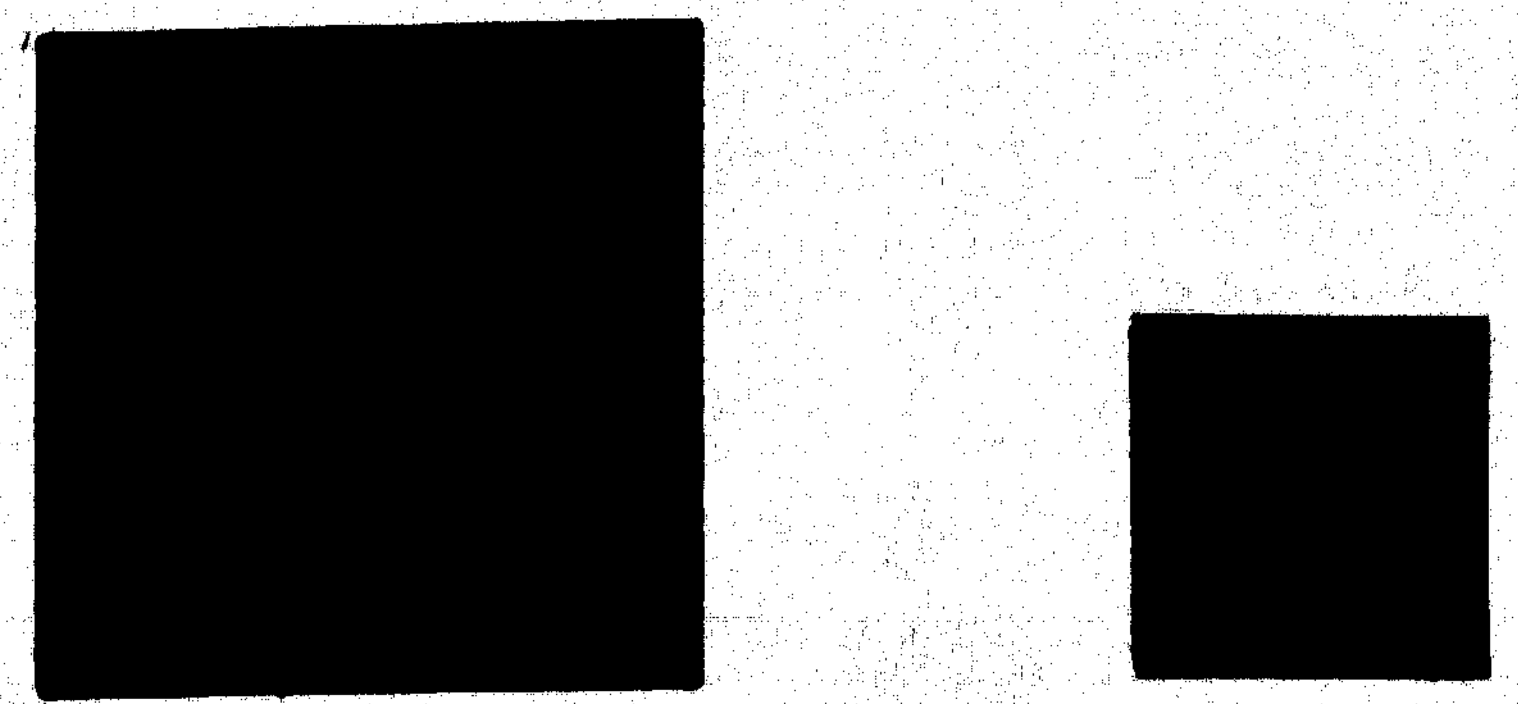


Fig. 101
Figuras semejantes

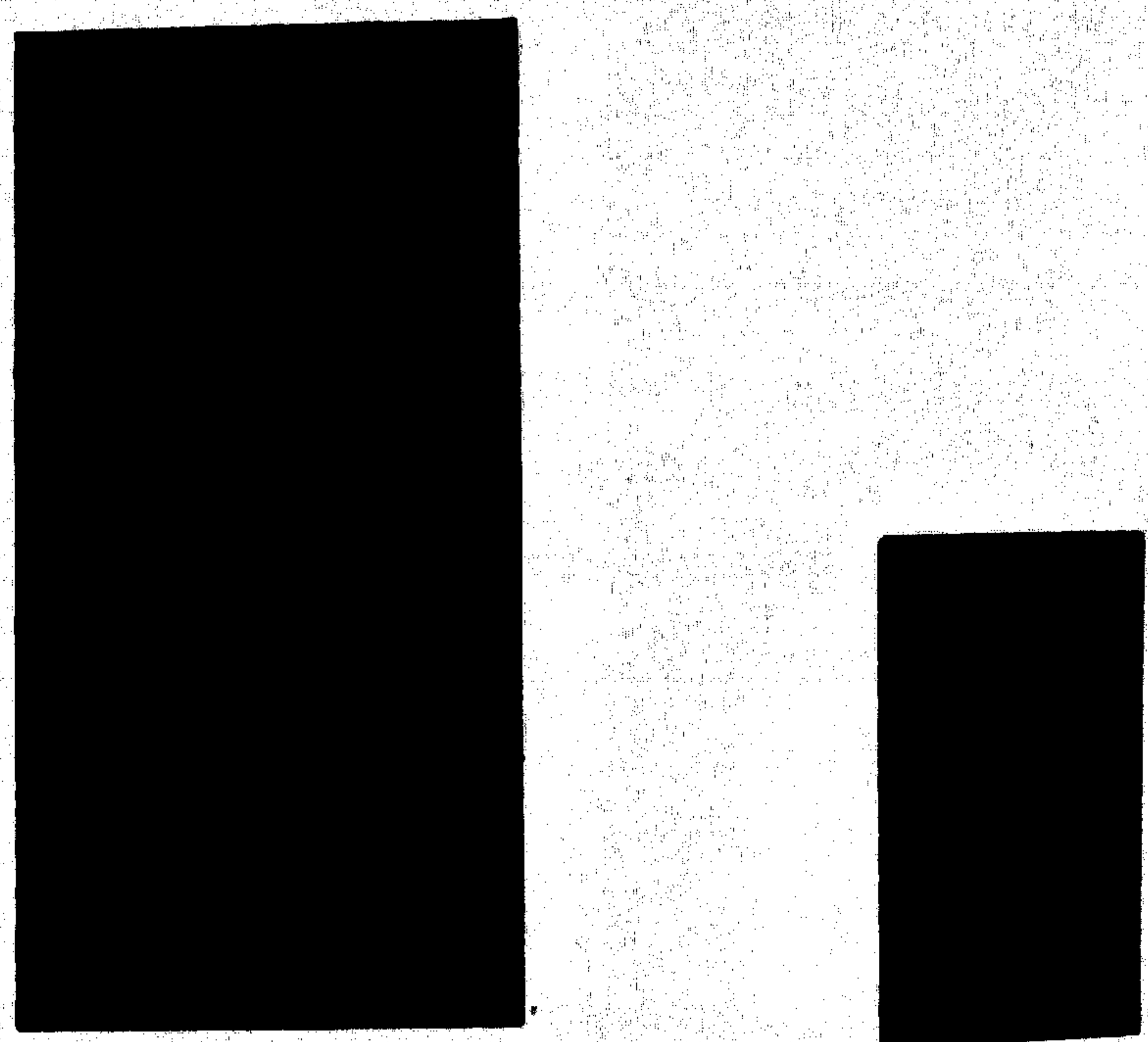


Fig. 102
Figuras semejantes

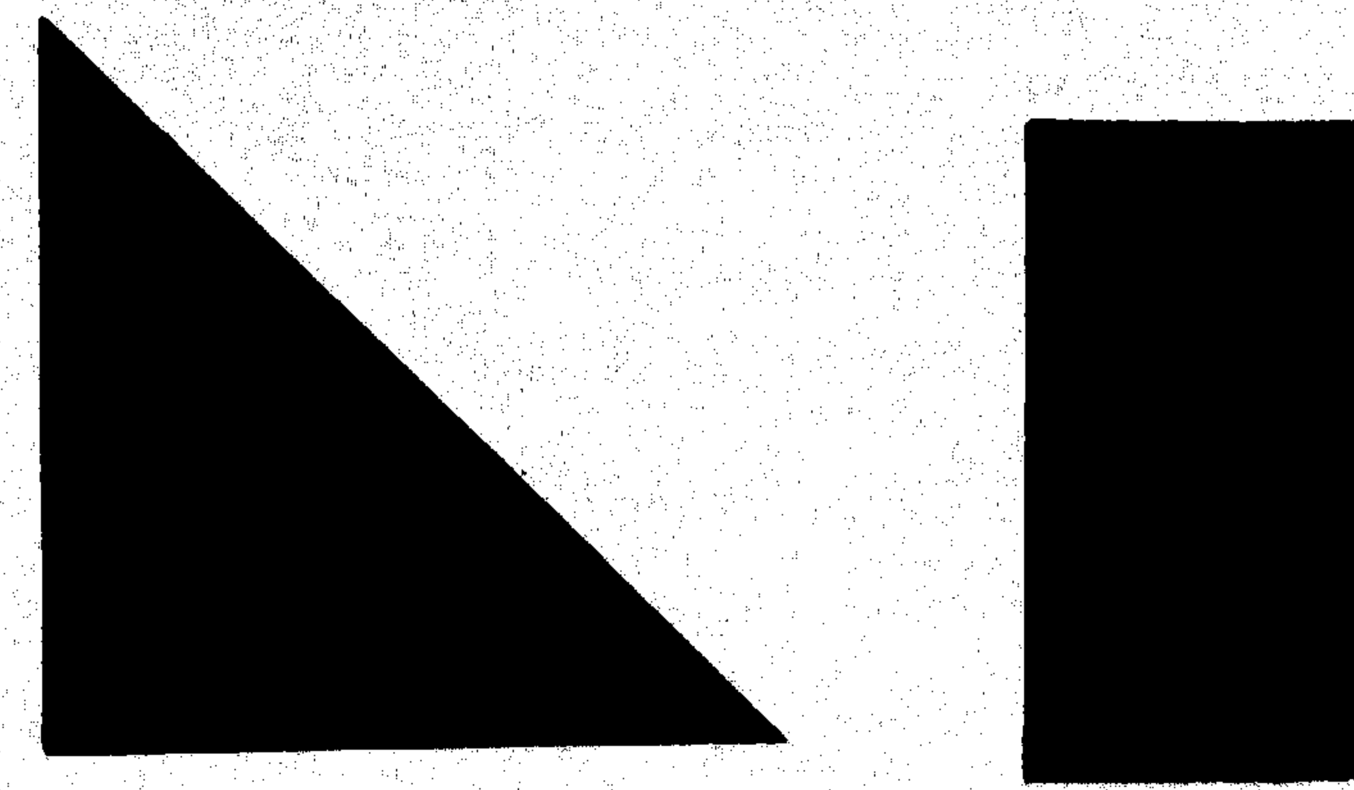


Fig. 103 — a)
Figuras equivalentes

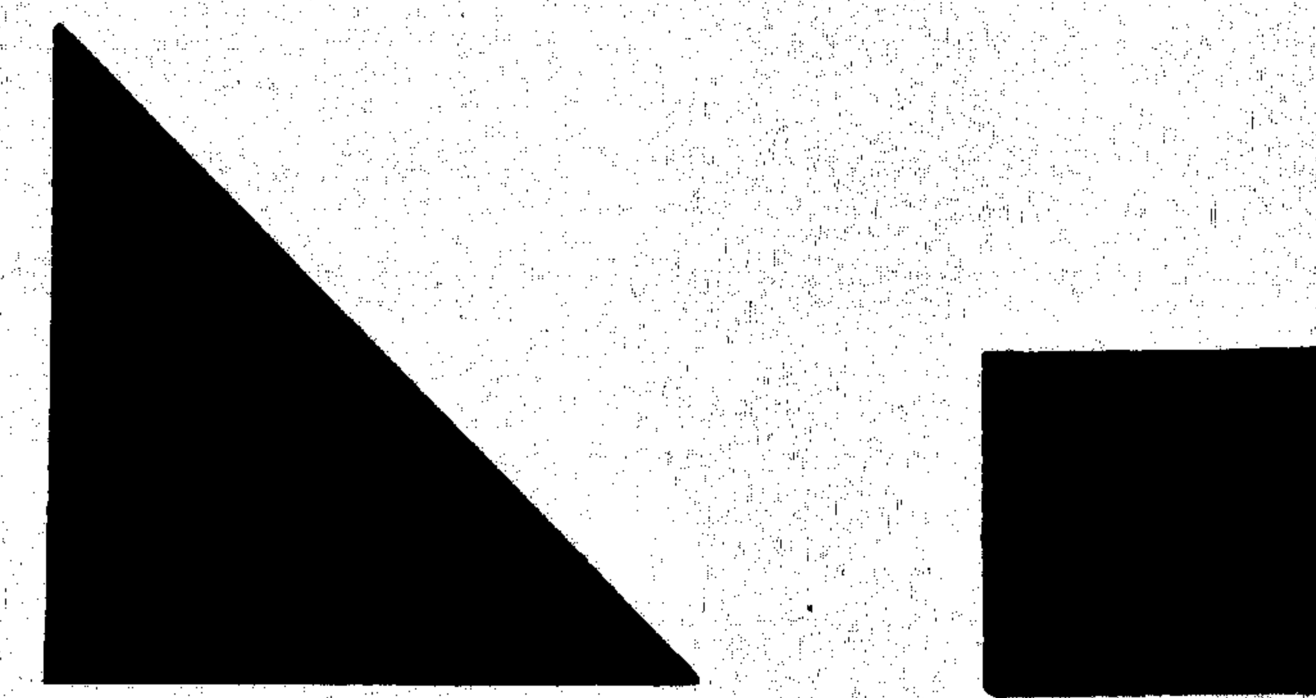


Fig. 103 — b)
Figuras equivalentes

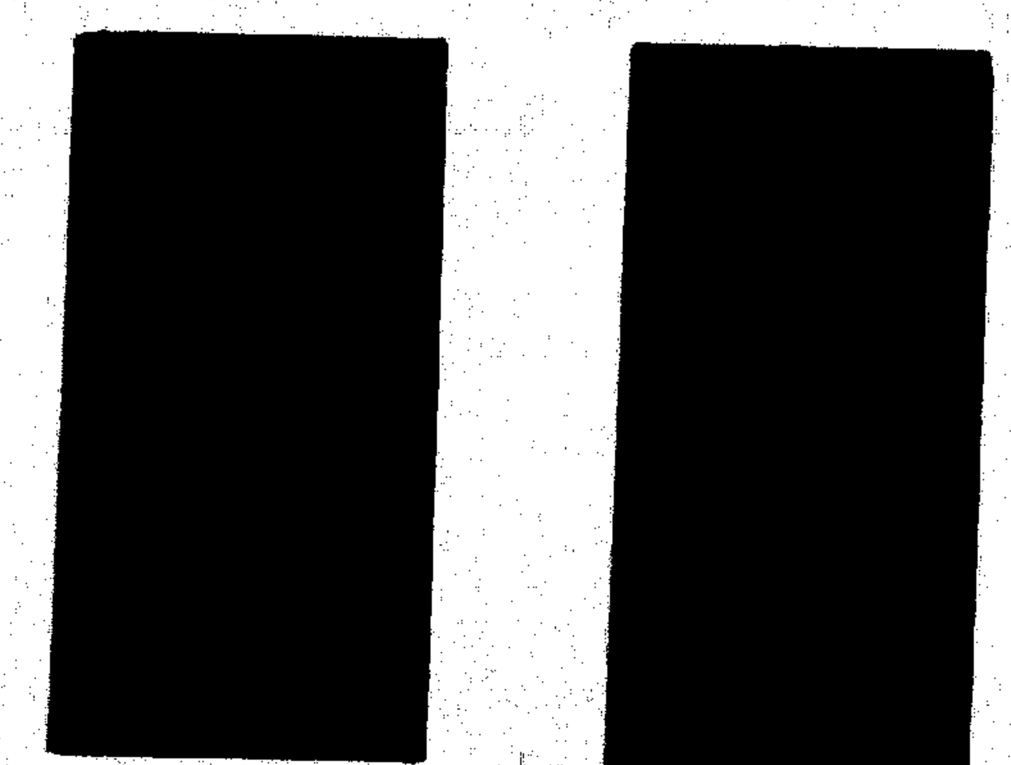


Fig. 104 — a)
Figuras iguales

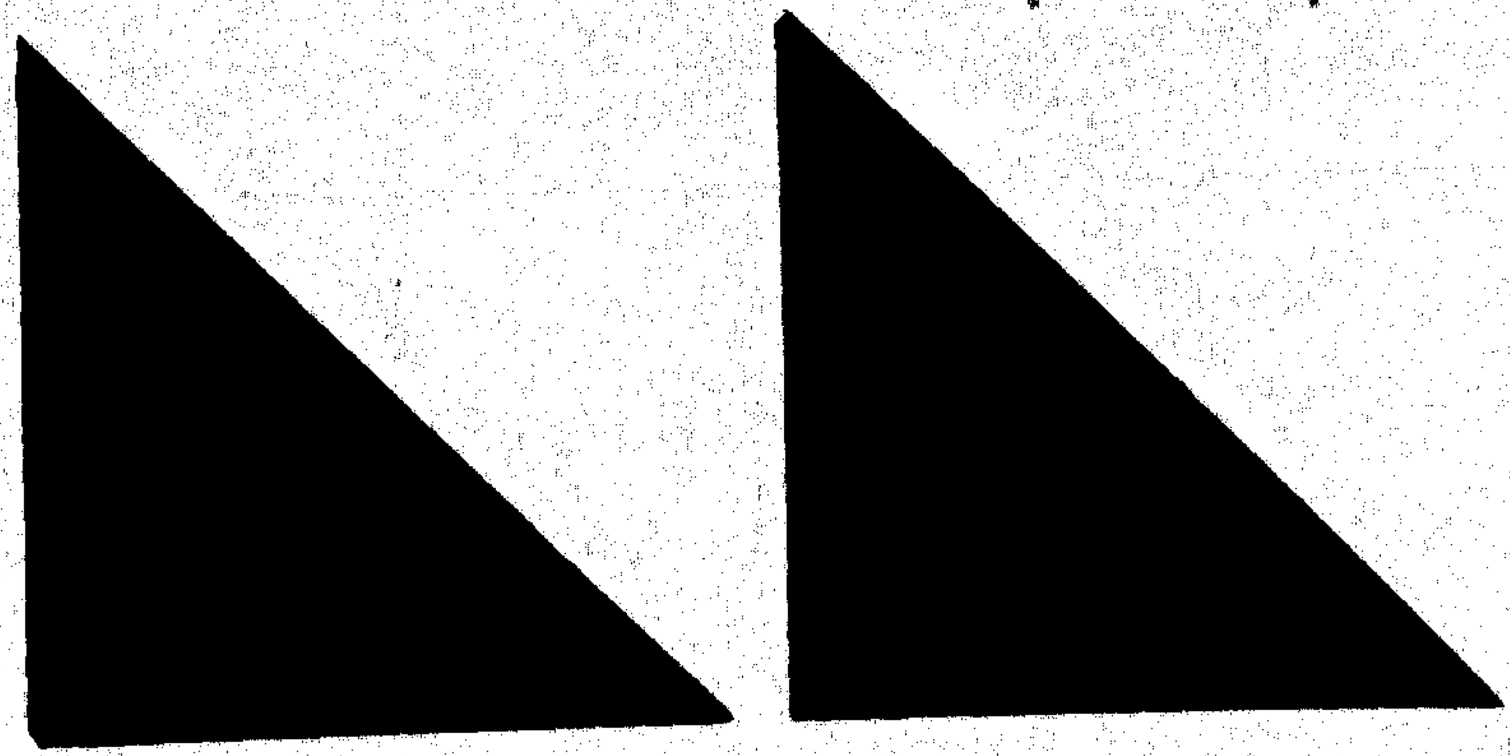


Fig. 104 — b)
Figuras iguales

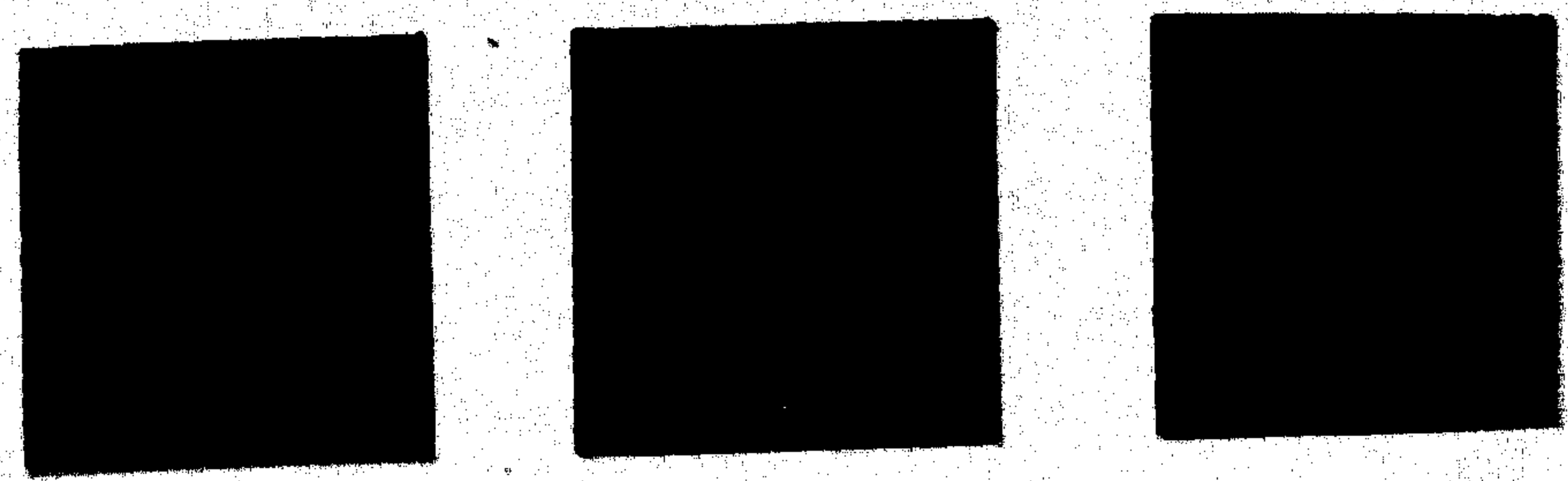


Fig. 105 — a)
Figuras iguales : valor un cuarto del cuadrado

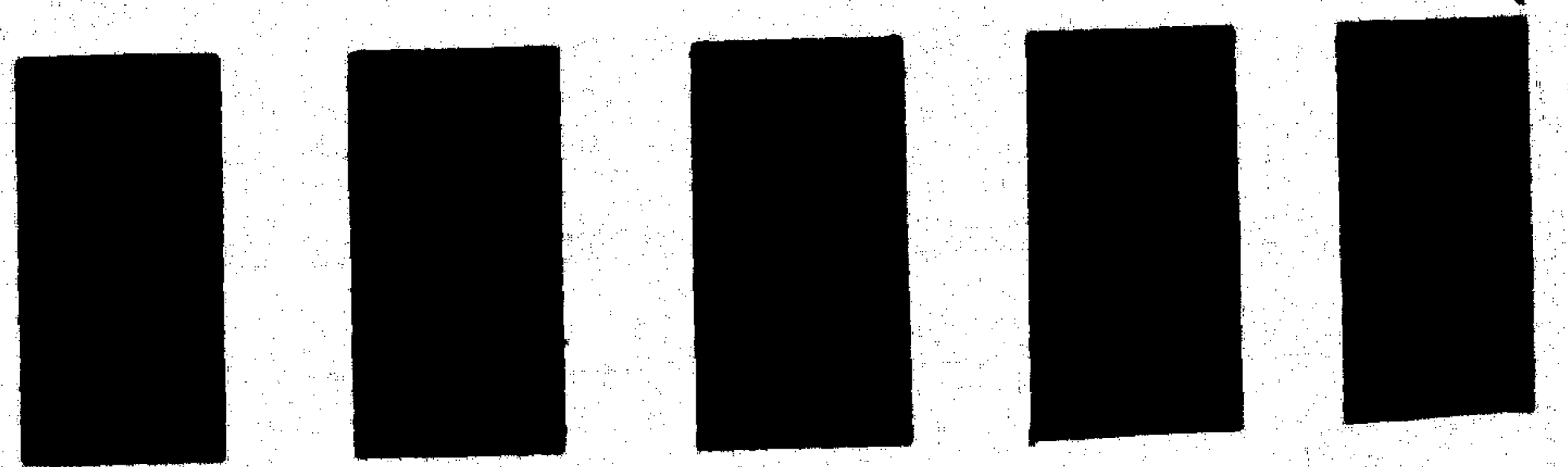


Fig. 105 — b)
Figuras iguales : valor un octavo del cuadrado

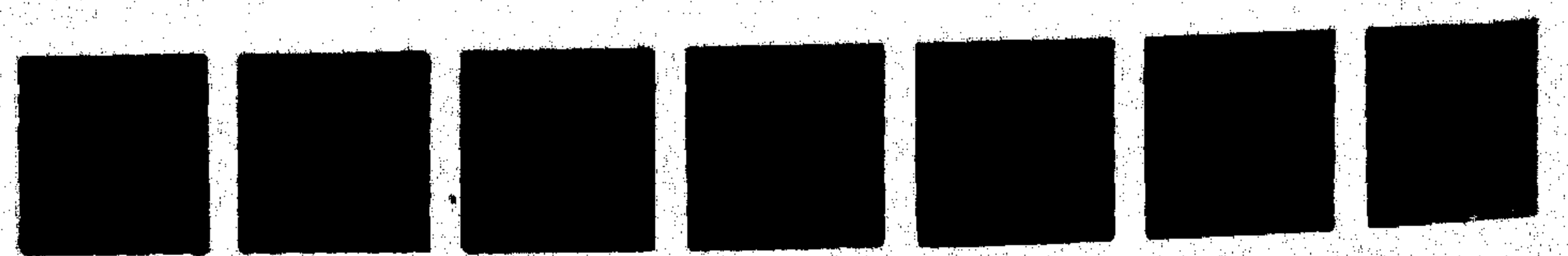


Fig. 105 — c.
Figuras iguales : valor un dieciseisavo del cuadrado

CONSTRUCCION DE LAS FIGURAS EQUIVALENTES

Ahora construiremos las figuras equivalentes procediendo en la siguiente forma (fig. 106).

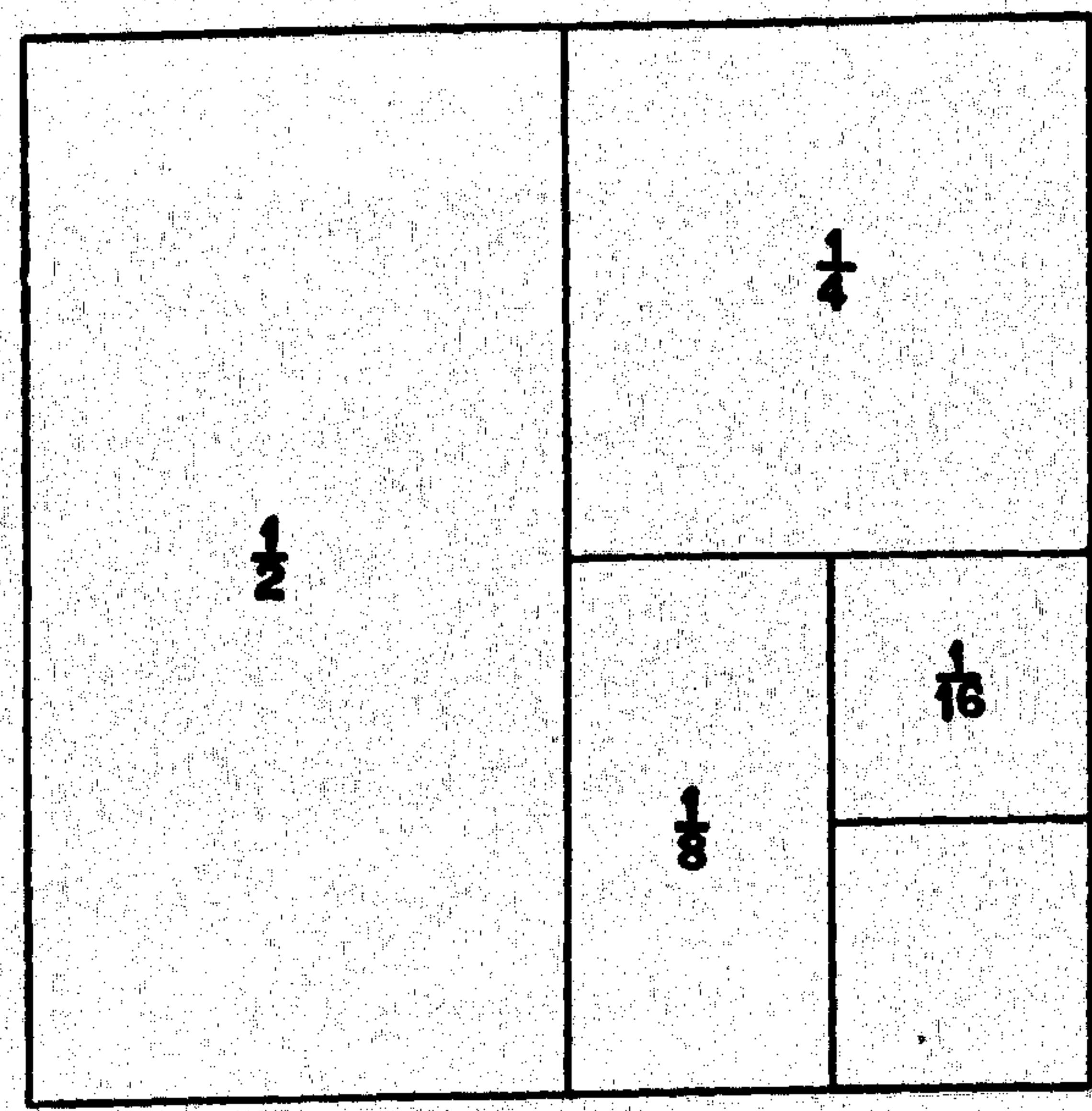


Fig. 106 (1

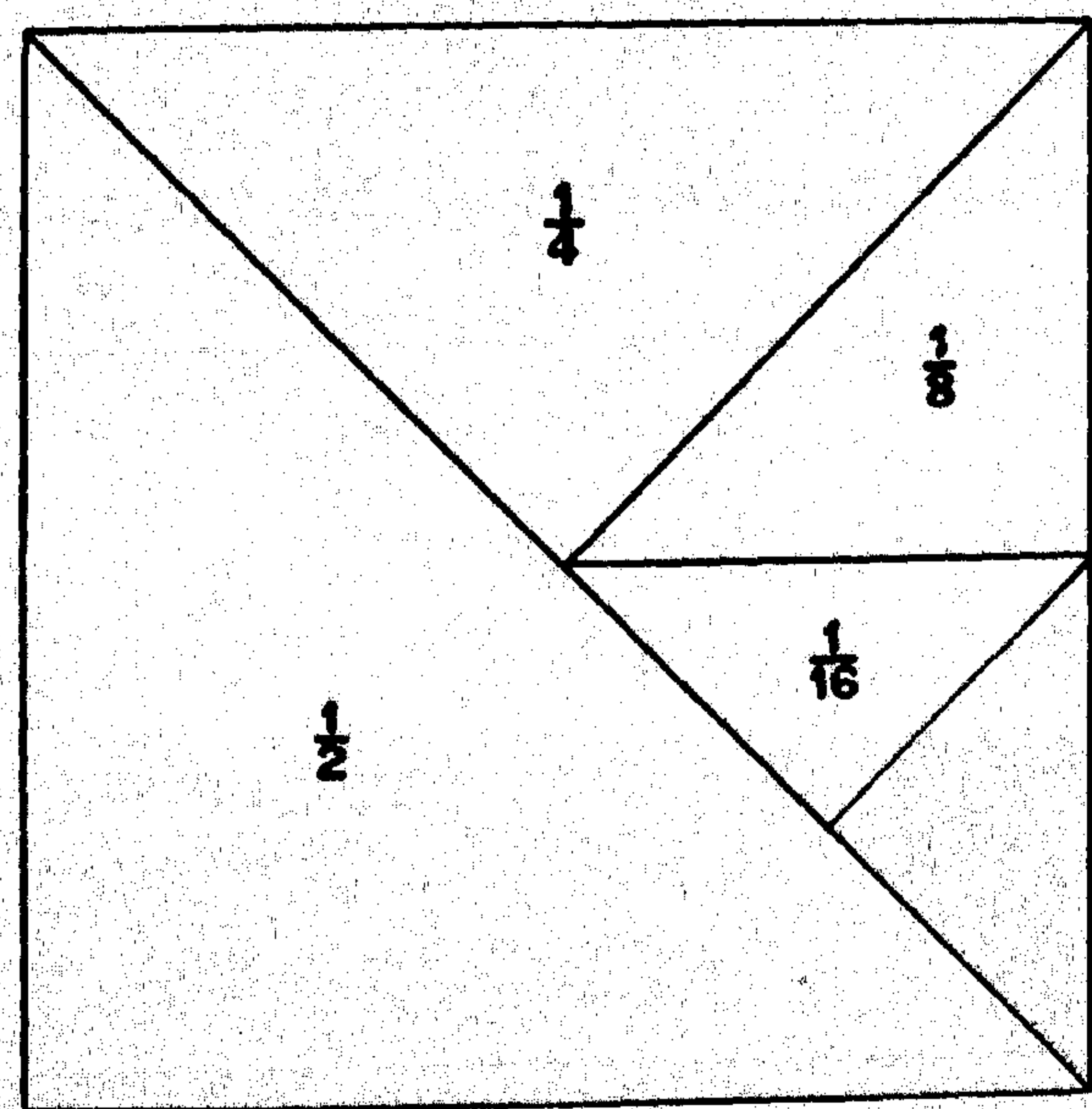


Fig. 106 (2

Se toman dos figuras iguales al cuadrado grande, en dos hojas de papel de color diferente ; en una dibujaremos la mediana y, dejando libre uno de los grandes rectángulos, dividiremos con una línea mediana el otro rectángulo en dos cuadrados, uno de estos en dos rectángulos y uno de estos restángulos en dos cuadrados. Obtenemos, al fin, un pequeño cuadrado (16.ª parte).

Recortando el papel a lo largo de las líneas dibujadas se obtienen cuadrángulos que tienen respectivamente el

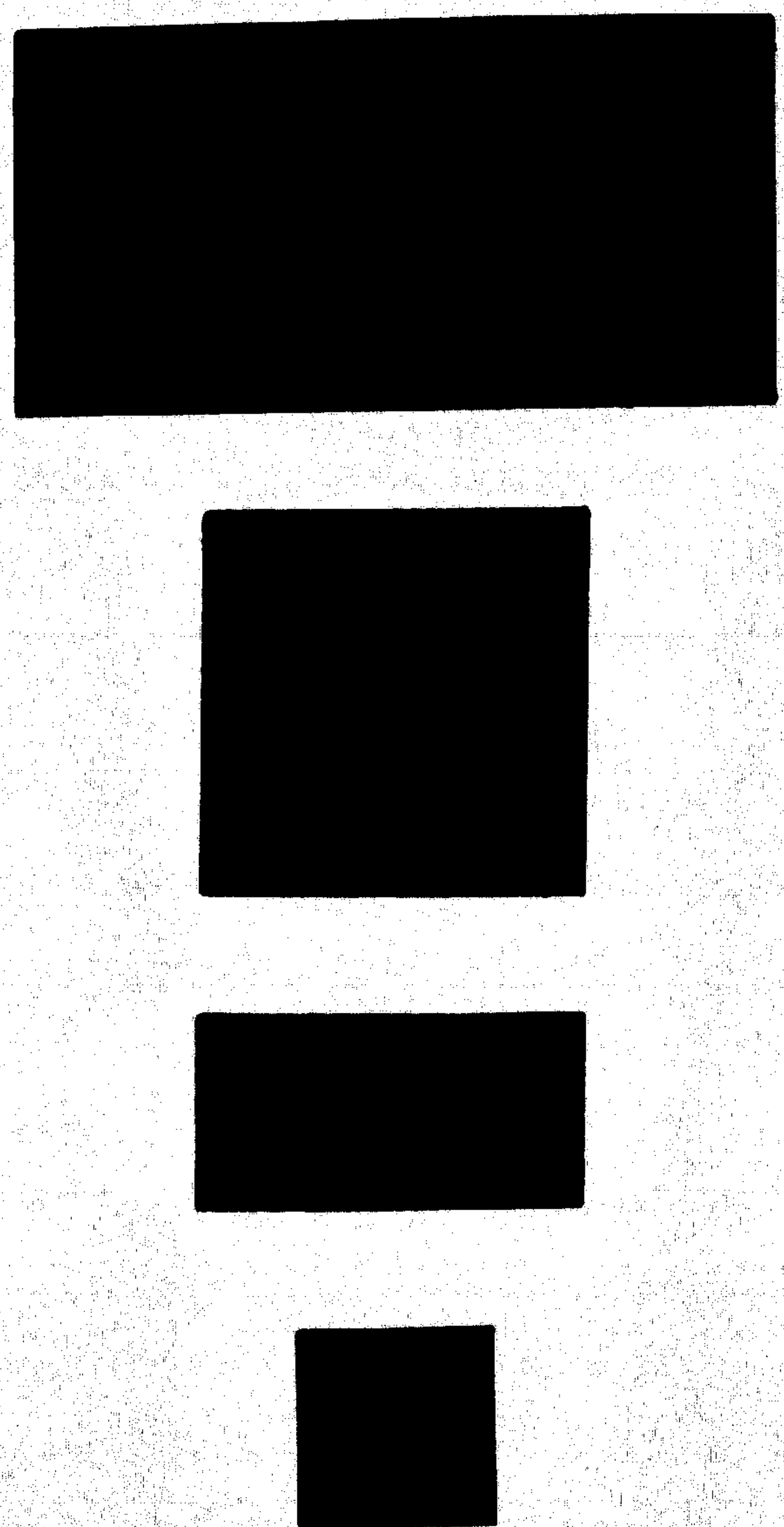


Fig. 107

valor de 1/2 — 1/4 — 1/8 — 1/16 del cuadrado grande. Preparemos ahora el otro cuadrado, dibujando primero una diagonal ; después, dividiendo en dos, uno de los grandes triángulos y, así sucesivamente, dejando siempre intacta una de las dos figuras iguales que, de vez en vez, resultan.

Queda al fin un pequeño triángulo.

Recortando el papel a lo largo de las líneas dibujadas se obtienen triángulos que tienen respectivamente el valor de 1/2 — 1/4 — 1/8 — 1/16 del cuadrado grande.

Peguemos ahora con goma, una debajo de la otra las figuras, en el sentido decreciente de la dimensión. Los

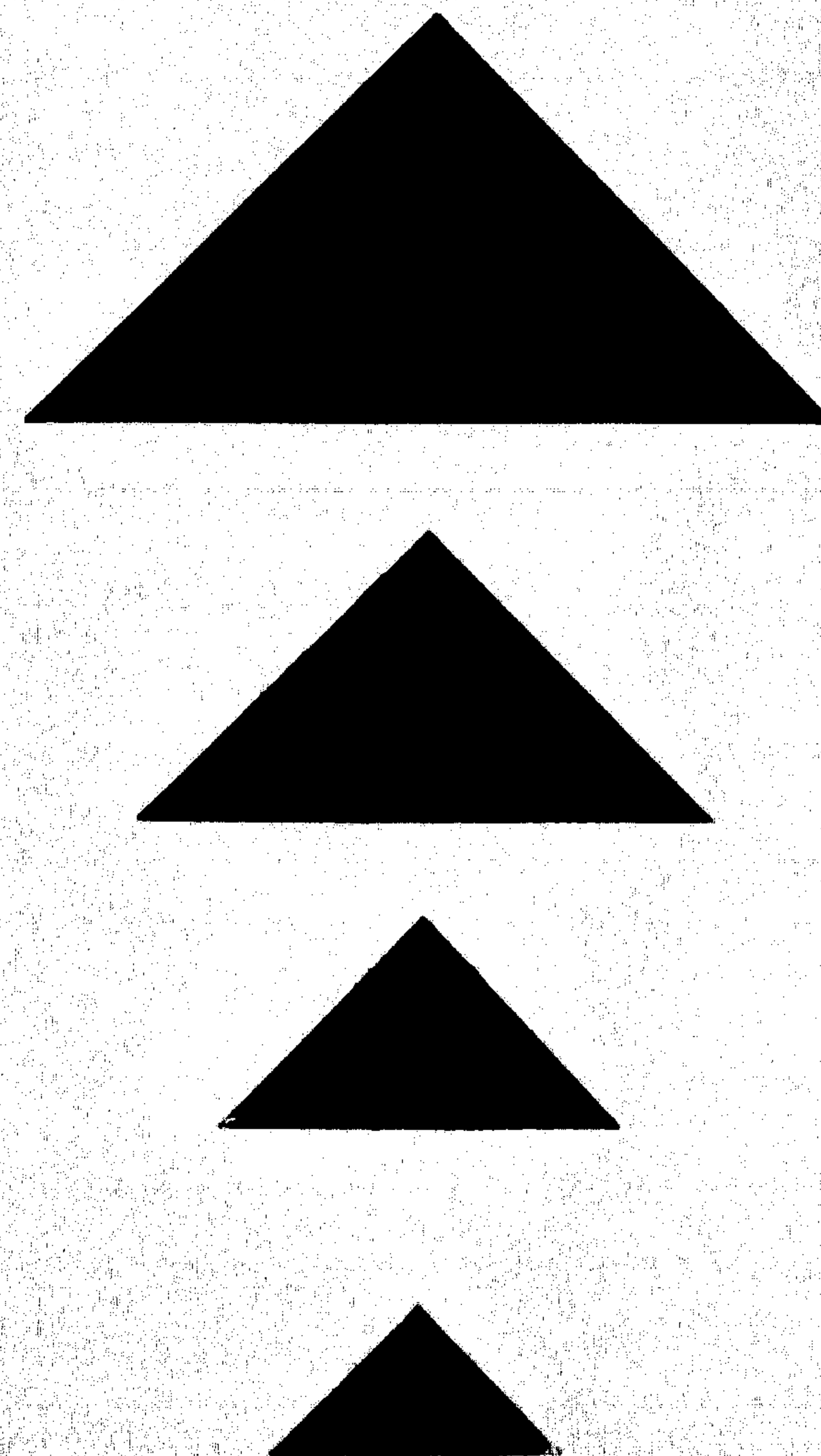


Fig. 108

triángulos a un lado y los rectángulos a otro; poniendo enfrente las figuras equivalentes. (figs. 107 y 108).

Resulta entonces que cada figura inferior es igual a la

Fig. 109

mitad de la inmediatamente superior y que cada figura de la derecha es equivalente a la de la izquierda.

Son varias las posibles combinaciones de construcción con dichas figuras. Los triángulos se prestan a construir una especie de pagoda china (fig. 109) si el triángulo menor se pone arriba y los otros debajo sucesivamente, siendo cada uno el doble del precedente.

No se presta a lo mismo la serie de los cuadrángulos.

Esto quiere decir que aquí se presenta un *problema*. ¿Cómo podríamos obtener *un cuadrado que sea la mitad de otro*?

Del ejercicio hecho sobre figuras equivalentes se ha pasado a otro género de trabajo.

Utilizando el concepto de las equivalencias nos proponemos resolver un problema.

PROBLEMAS Y TEOREMAS

El modo más fácil de resolver este problema es el de recurrir al material y tantear, por medio de desplazamientos de las figuras movibles, dentro de los marcos.

Tomemos dos triángulos que sean cada uno 1/4 del cuadrado y juntémoslos por el lado de la hipotenusa; he aquí un cuadrado que es igual a los dos cuartos, es decir, a la mitad del cuadrado grande.

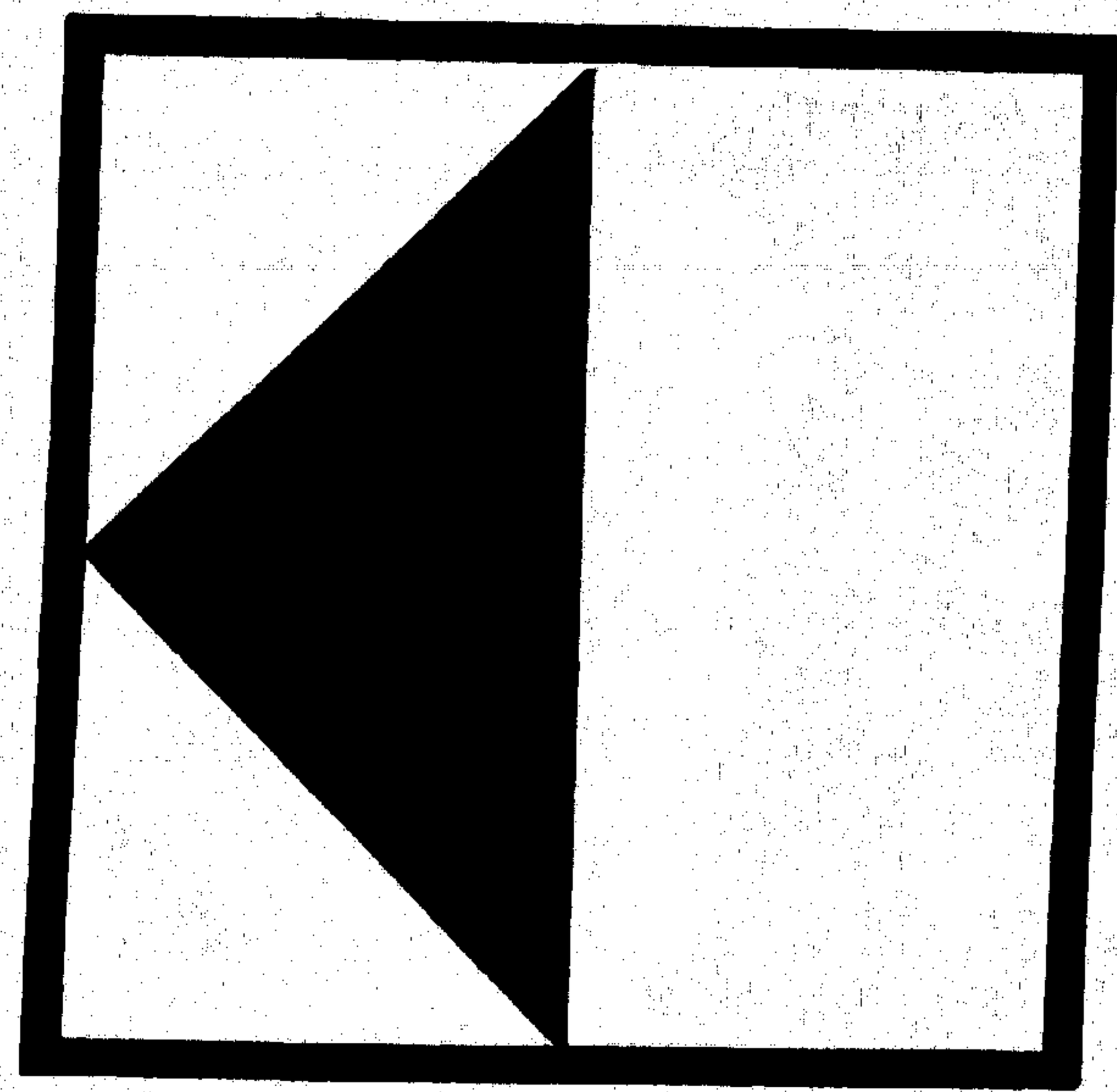


Fig. 110

El problema está resuelto.

Juntemos los dos triángulos, dispuestos como un cuadrado en el marco del grande y observaremos que encaja allí perfectamente. Sus cuatro vértices tocan los cuatro puntos medios de los lados del cuadrado grande (fig. 110).

Cuando una figura está contenida en otra, de modo que regularmente la encuentre en las partes opuestas, se llama figura *inscrita* y la de fuera, *circunscrita*.

Los puntos de contacto permiten entonces poner en relación definida ambas figuras.

Si, en este caso, el cuadrado menor que está en la parte interna tuviese sus lados dispuestos paralelamente al cuadrado externo y a igual distancia, como un marco, no sería *inscrito*, sería *concéntrico* porque todos los lados y los ángulos estarían igualmente dispuestos alrededor de un punto central.

Una figura concéntrica no guarda relaciones definidas con las otras porque podrían ser infinitas las figuras concéntricas, una dentro de la otra.

En cambio la figura *inscrita* es una sola y por ello determinada. Sólo existe un cuadrado cuyos vértices toquen el punto medio de los lados de otro cuadrado.

Intentando pues, hallar el cuadrado que sea la mitad del otro, hemos encontrado otra cosa que se nos revela; hemos pues hecho un descubrimiento. Y esta *verdad hallada* se puede comunicar a los demás enunciando un teorema.

Teorema. Si tenemos dos cuadrados, uno inscrito y otro circunscrito, el inscrito es igual a la mitad del circunscrito.

Observemos por qué correspondencia de partes así sucede.

Los triángulos que son la cuarta parte del gran cuadrado tienen como hipotenusa el lado de aquel. Observemos dos triángulos opuestos situados en el marco (fig. 111); éstos tienen los vértices que se tocan en el centro del cuadrado y las hipotenusas que tocan los lados externos.

Desplazándolos de modo que formen el cuadrado inscrito, vuelven los vértices hacia la mitad del lado del cuadrado y se encuentran con la hipotenusa en el sentido de

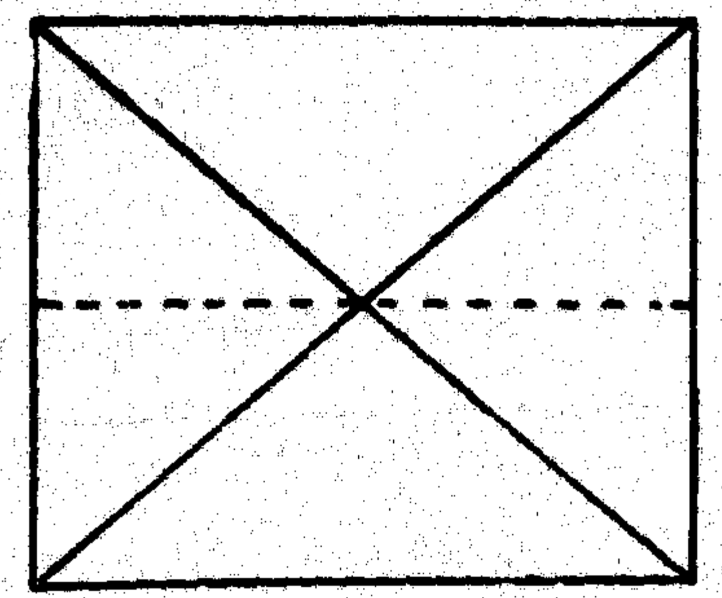


Fig. 111

la mediana. La mediana del cuadrado grande es pues, la diagonal del pequeño. Podemos, por lo tanto, formular otro teorema en los siguientes términos:

Teorema. — Si un cuadrado tiene la diagonal igual al lado de otro cuadrado es equivalente a la mitad de este último.

Para encontrar el cuadrado equivalente a la mitad del cuadrado grande y sustituirlo al rectángulo obtenido con la mediana, precisa tomar dos de los triángulos que valen cada uno la cuarta parte del cuadrado grande y juntándolos por la hipotenusa construir el cuadrado.

Así se puede hacer para encontrar un cuadrado en vez del rectángulo que representa la 8.ª parte. Se toman dos triángulos que valgan 1/16 y se unen por la hipotenusa.

De este modo podemos poner en parangón triángulos y cuadrados, esto es, todas las figuras semejantes entre sí y equivalentes (fig. 112).

Con el número de triángulos que entran en el cuadrado se tienen los triángulos n.° 2, 4, 8 y 16 y con los mismos

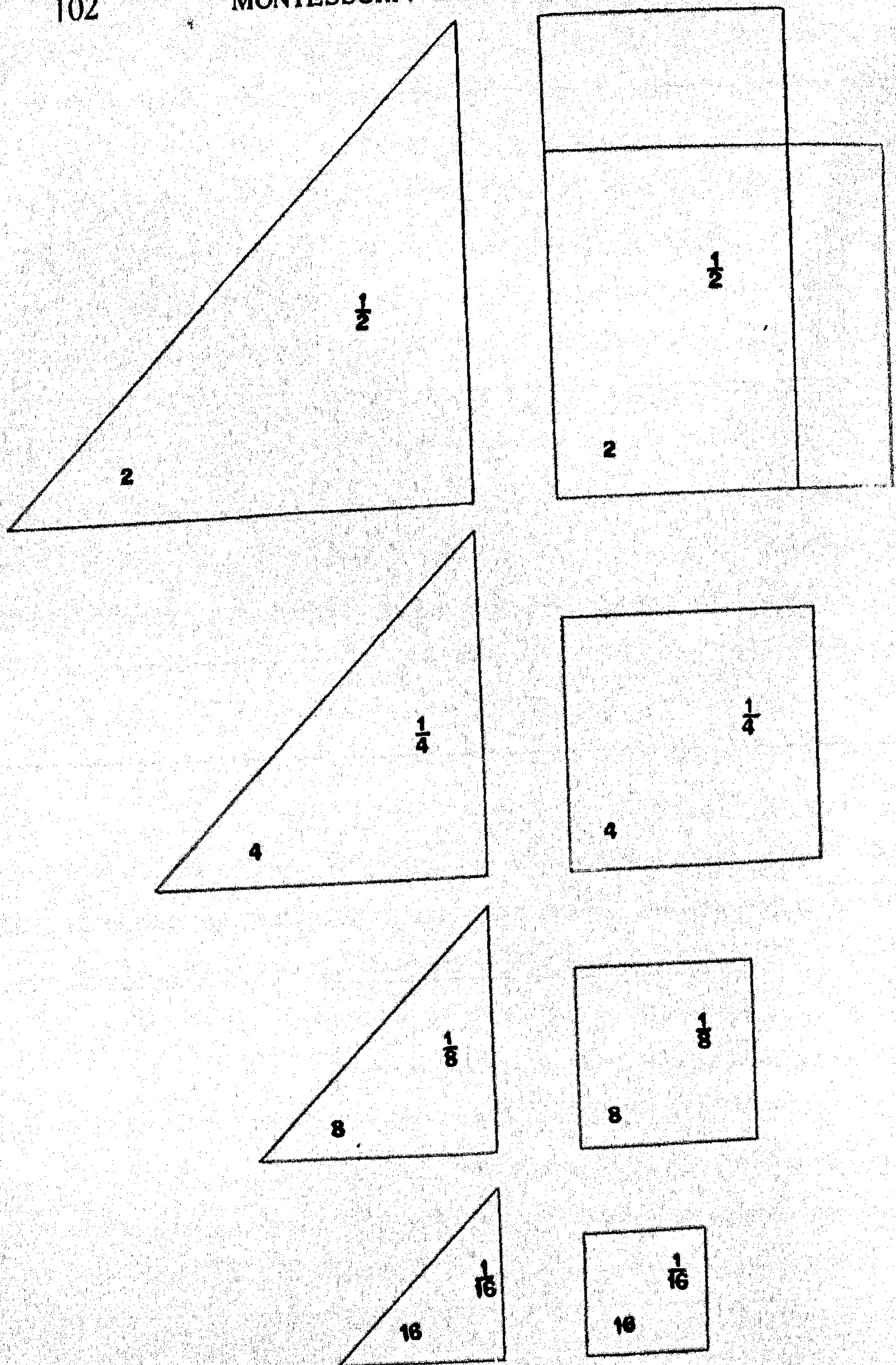


Fig. 112

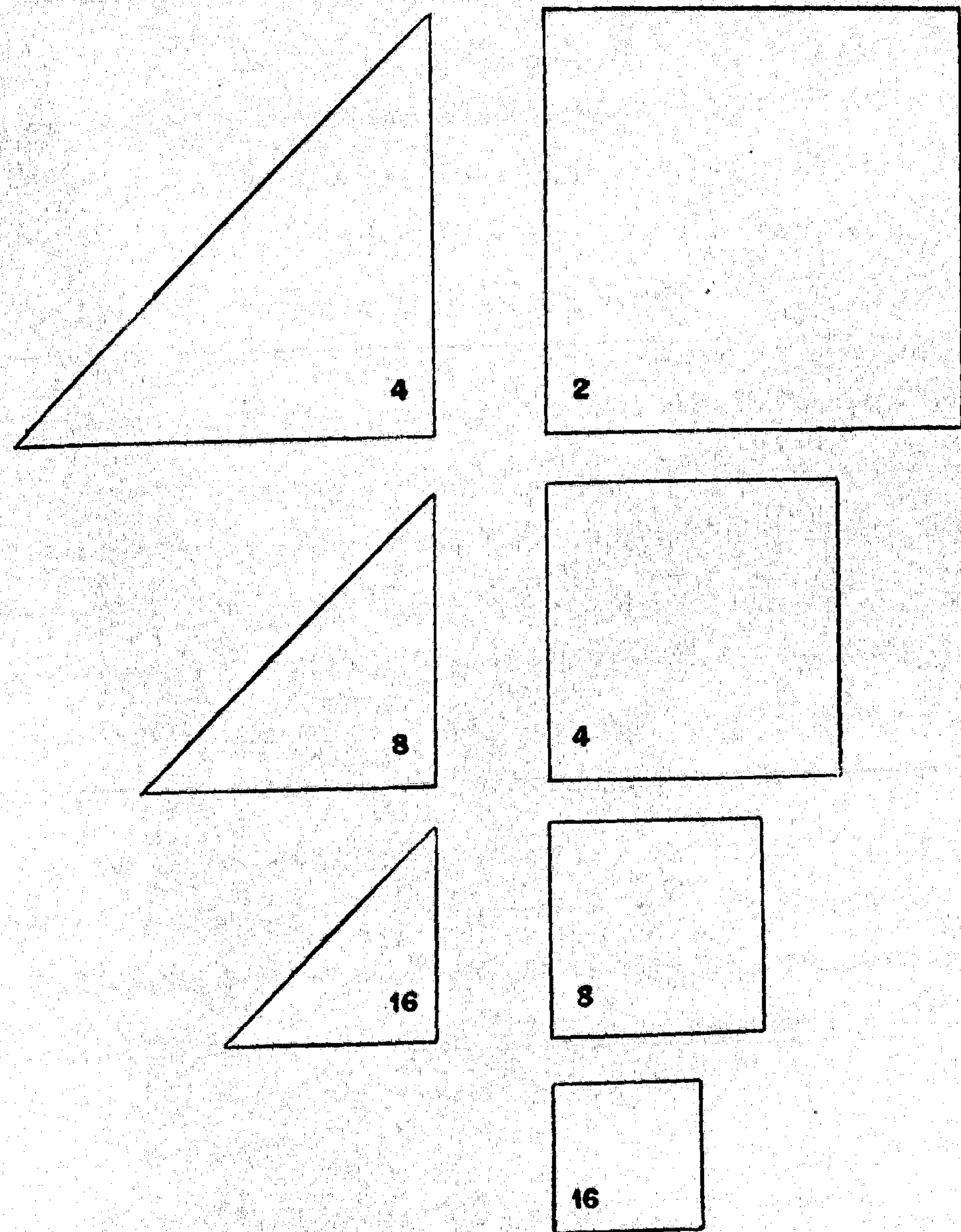


Fig. 113

números están señalados los cuadrados respectivamente equivalentes (cuadrados 2, 4, 8 y 16).

Para construir el cuadrado 2 precisan dos triángulos 4. Para construir el cuadrado 8 hacen falta dos triángulos 16.

Cada cuadrado tiene el lado igual al cateto del triángulo inferior y para observar mejor esta correspondencia co-

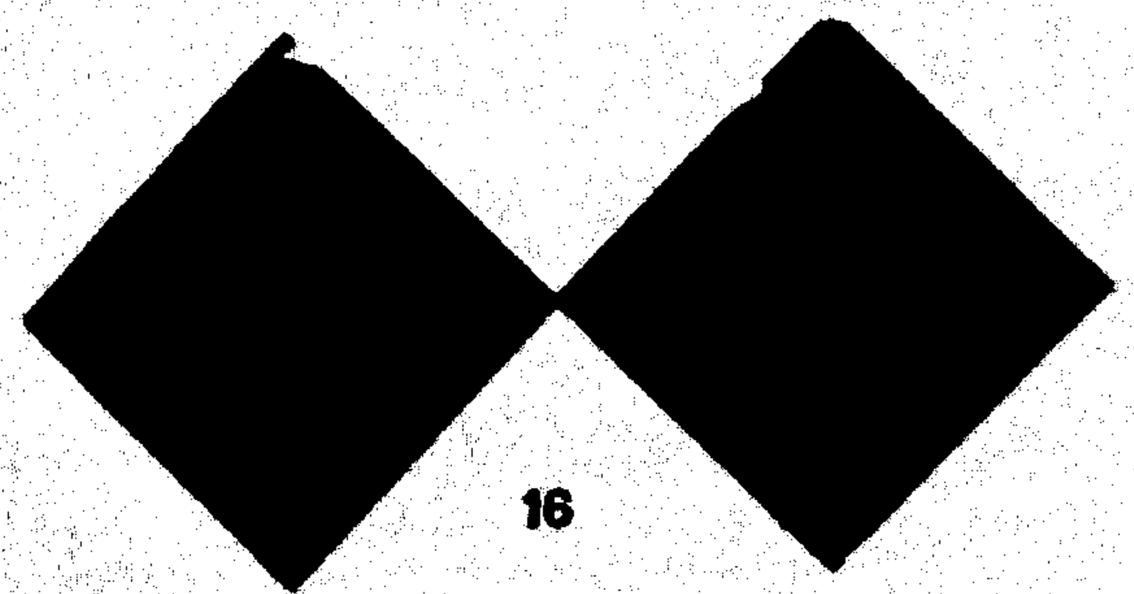
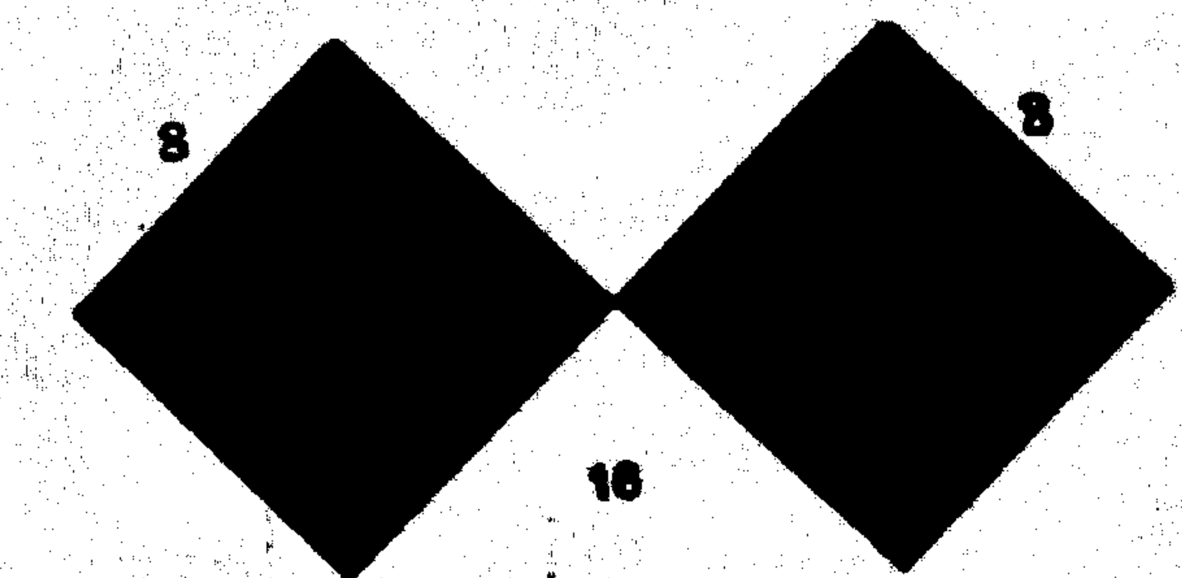


Fig. 114

locaremos las figuras unas al lado de otras según el valor igual de esos lados y catetos (fig. 113).

Esta correspondencia nos sugiere una construcción; construir dos cuadrados iguales y colocarlos sobre los catetos del triángulo inferior. Por ejemplo: dos cuadrados 8 colocados sobre el triángulo 16 (fig. 114).



4

Fig. 115

Ahora bien, la suma de éstos dos cuadrados (que son los cuadrados 8) es equivalente al cuadrado superior 4.

Veamos ahora que tiene éste de común con el triángulo 16. El triángulo 16 tiene la hipotenusa igual al lado del cuadrado 4, como también tiene el cateto igual al lado del cuadrado 8. (fig. 115).

El cuadrado 4 se puede colocar sobre la hipotenusa del triángulo 16.

Teniendo varias figuras se puede combinar la misma construcción respecto a los otros triángulos: 8 y 4.

Alrededor de los catetos del triángulo 8 se puede adaptar dos cuadrados 4 y en la hipotenusa el cuadrado 2.

Mientras dos cuadrados 2 se adaptan a los catetos del triángulo 4 a cuya hipotenusa corresponde el cuadrado grande 1.

Si esto se repite en varios casos podemos pues establecer el hecho como constante y anunciarlo bajo forma de teorema.

TEOREMA: En un triángulo rectángulo isósceles la suma de los cuadrados construídos sobre los catetos es equivalente al cuadrado construído sobre la hipotenusa.

El estudio de las correspondencias que existen entre figuras equivalentes se puede hacer manejando todos aquellos triángulos semejantes y todos los cuadrados que tienen valores determinados.

Como indica la figura 112 cada hipotenusa del triángulo inferior es igual al cateto del triángulo superior y esta igualdad es evidente adaptando el triángulo según dicha correspondencia.

Una vez comprobada esta correspondencia constante entre triángulos, que son uno la mitad de otro, se puede continuar la construcción. Se ve entonces que se llega con un triángulo pequeño a tocar el primer triángulo grande (fig. 116). Un ciclo ha terminado y concluye de modo exacto.

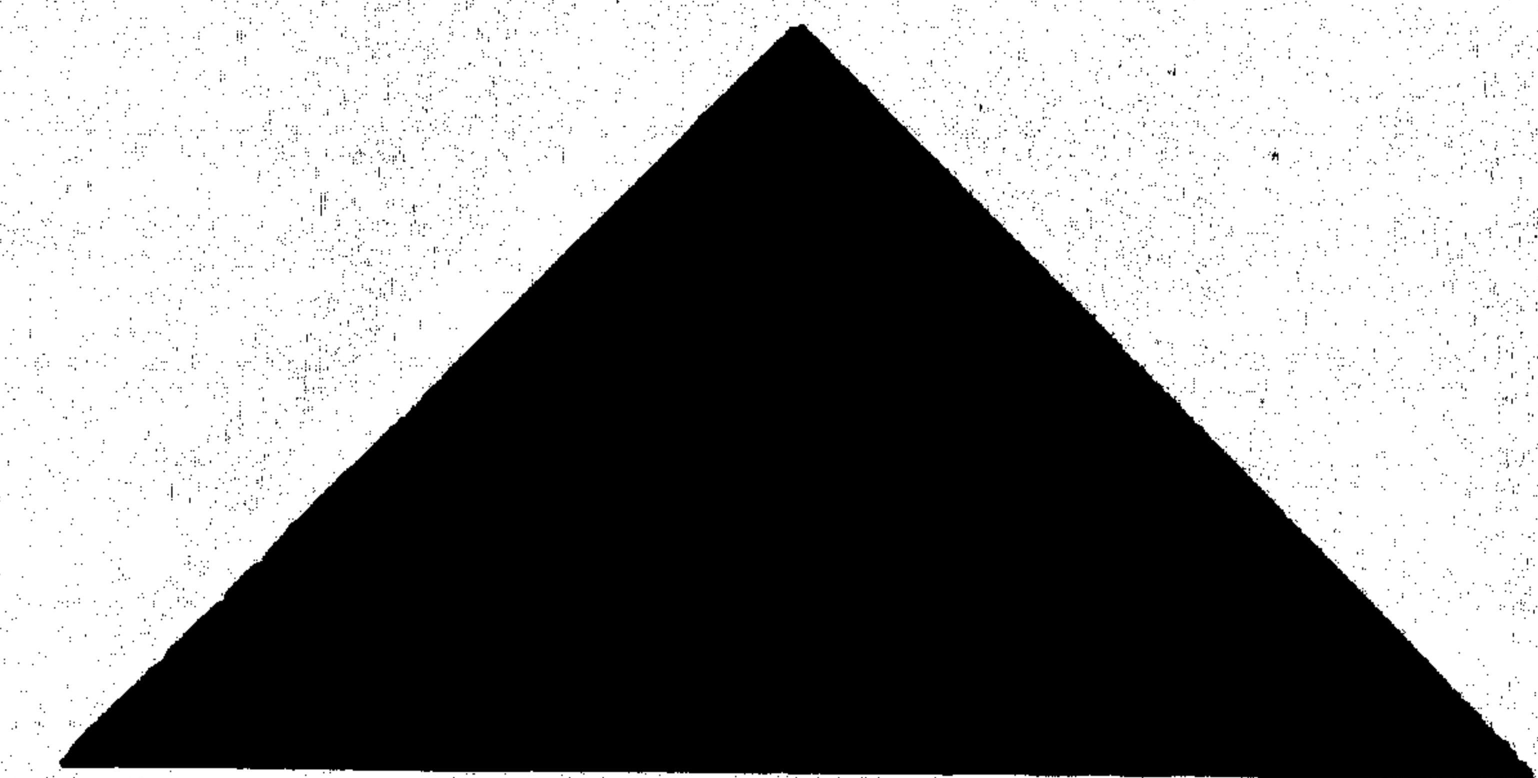


Fig. 116

Han sido precisos para ello siete triángulos. Ha resultado un punto central, alrededor del cual, todos los triángulos giran en caracol.

Ahí está el ángulo recto del triángulo grande y después los ángulos agudos de todos los demás.

Sabemos ya que aquellos ángulos agudos, aunque pertenecientes a figuras de valor tan diversos, son, sin embargo, iguales entre sí. En efecto, cada uno de aquellos ángulos es la mitad de un ángulo recto, porque pertenecen a las subdivisiones de un cuadrado, por medio de las diagonales, que son también bisectrices, del ángulo recto del cuadrado.

Alrededor de aquel punto hay un ángulo recto, más

seis medios rectos; es decir, un recto más tres rectos. En total cuatro rectos.

En efecto, si observamos, resulta que dos ángulos adyacentes forman un ángulo recto.

Las líneas de los dos catetos del triángulo grande se prolongan en línea recta con otros lados de los triángulos que giran en caracol sobre un punto central y forman una cruz, constituyendo cuatro ángulos rectos.

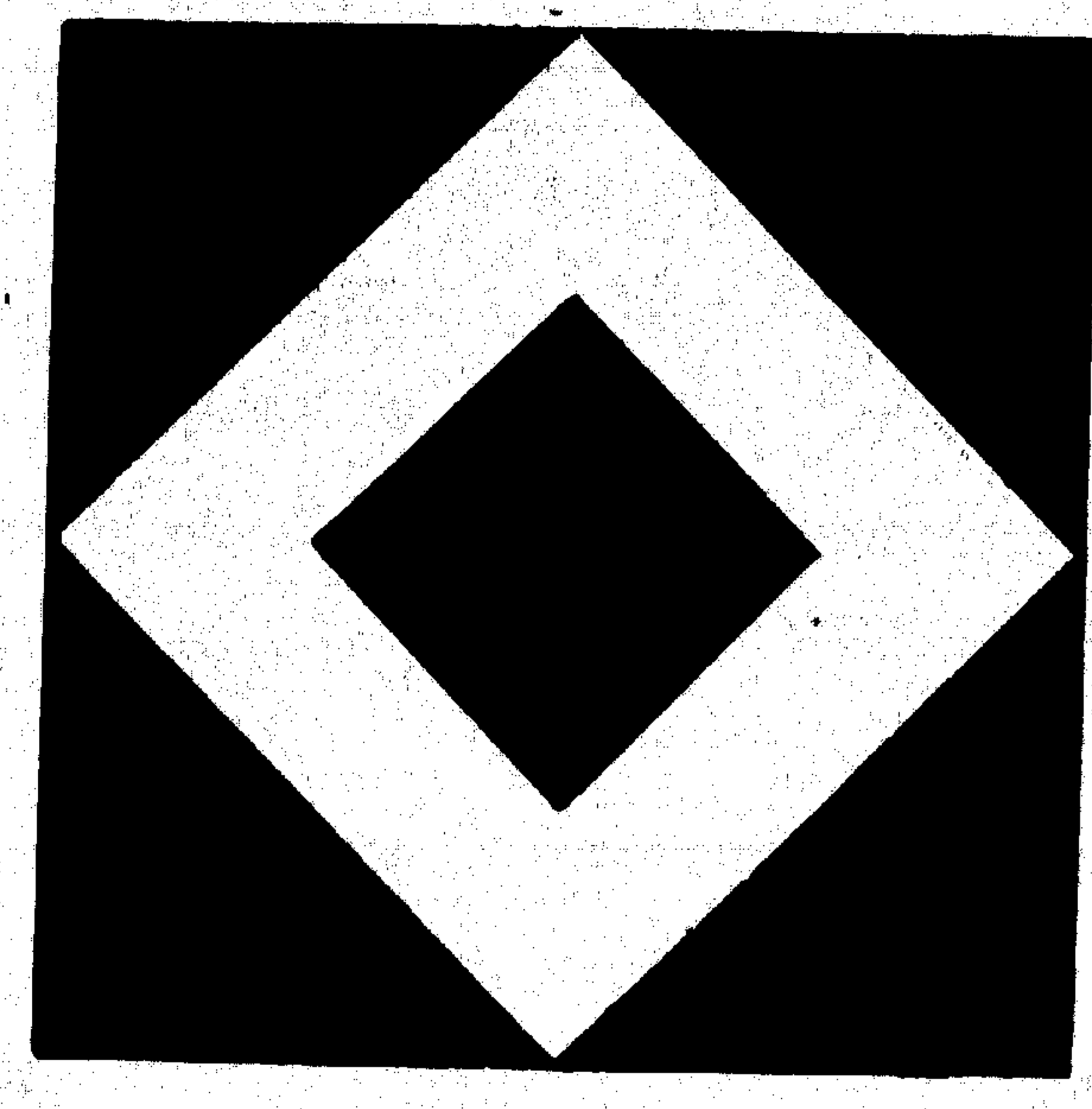


Fig. 117

También tienen correspondencias entre ellos los cuadrados; el lado del cuadrado superior corresponde a la diagonal del inferior porque son cada uno la mitad del otro en la serie del mayor al menor y cada inferior está inscrito en el superior; el cuadrado 16 en el 8, el 8 en el 4, el 4 en el 2 y el 2 en el 1 (fig. 117).

Superpuestos en esta forma constituyen un conjunto armonioso y decorativo.

Los mismos cuadrados se pueden disponer en otra forma, haciendo resaltar que la diagonal del uno, se puede superponer al lado del otro.

Continuando la construcción y superposición de los cuadrados se llega a obtener un pequeño cuadrado cuyo lado toca el del mayor del cual se ha partido. Lo que se ve dispuesto en caracol alrededor de un punto central son án-

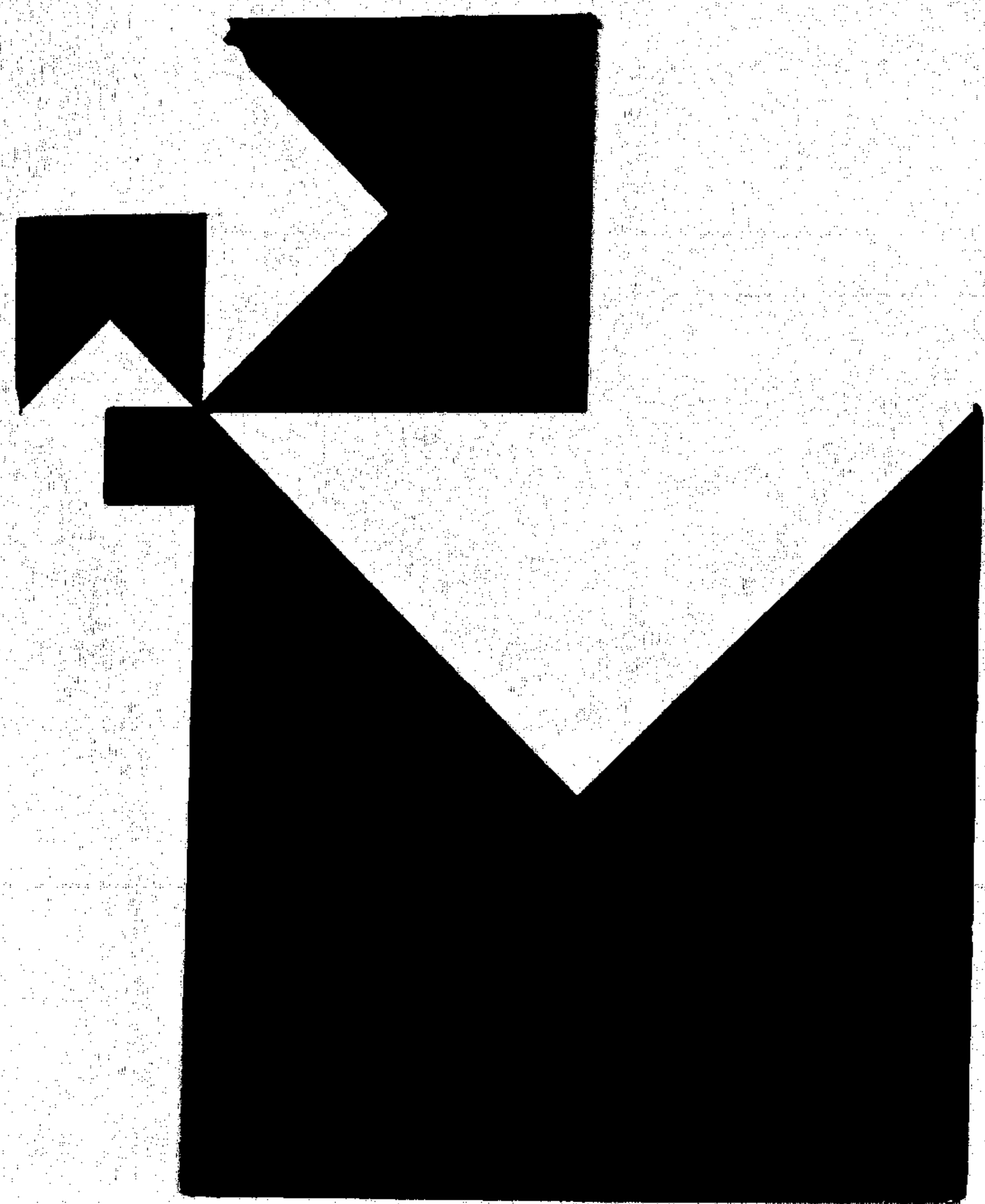


Fig. 118

gulos agudos, mitad de un recto cada uno y se reproduce el mismo hecho observado para los triángulos; aquí, sin embargo, el hecho de que cada uno de los ángulos agudos es mitad de un recto, está demostrado por la misma figura.

* * *

Lo que se ha descrito sobre combinaciones, desplazamientos, construcción y reproducción de figuras que provienen de dividir en partes el mismo cuadrado, sirve para demostrar, cómo es posible el desarrollo de una gimnasia mental sobre la geometría que conduce a descubrir axiomas, a resolver problemas y a establecer teoremas, todo ello con la ayuda de escasas nociones sobre lados y ángulos y de pocas palabras técnicas.

Ello proviene de la actividad proporcionada por el interés y del hecho de tener al alcance de la mano un material adecuado.

Es la larga observación, el repetido manejo de las figuras lo que conduce poco a poco—y a veces rápidamente—a observar relaciones importantes en sí y que son demostrables.

Desde los teoremas referentes al cuadrado inscrito, a un caso del teorema de Pitágoras, a la comprobación de que el espacio alrededor de un punto suma cuatro rectos, son las enseñanzas aquí obtenidas.

Pero cada uno puede encontrar nuevas y numerosas relaciones.

«No se puede mirar sin descubrir algo nuevo» decía un niño a propósito de este material.

Y sobre este particular quiero reproducir aquí un diálogo, escuchado por casualidad.

«—¿Sabrías decirme lo que significa aquella figura donde hay un cuadrado, cuyo lado es la mitad de la diagonal de otro?

»—¿El lado mitad de la diagonal? ¡Ah! ¡Tú has hecho un descubrimiento!

»—¿Dime, ¿qué es lo que significa?

»—Aguarda, tú ignoras que has hecho un descubrimiento. Ninguno de nosotros había observado que el lado de aquel cuadrado era la mitad de la diagonal.»

Debo pues establecer un teorema.

TEOREMA: Un cuadrado que tiene el lado igual a la mitad de la diagonal de otro cuadrado, es equivalente a la mitad de éste.

El otro permanecía silencioso aguardando una respuesta a su curiosidad, completamente inconsciente de haber hecho una revelación.

Palabras a añadir al vocabulario.

Altura
Bisectriz
Mediana
Diagonal.
Igual
Semejante
Equivalente

IV

EL TRIANGULO

EL TRIANGULO

EL TRIÁNGULO EQUILÁTERO

El triángulo equilátero (con el lado igual al del cuadrado e igual al diámetro del círculo, las tres figuras tomadas como base en nuestras indagaciones geométricas) va dividido en dos, tres, cuatro partes iguales por medio de sencillas construcciones (fig. 119).

En el primer caso, uniendo el vértice opuesto con el

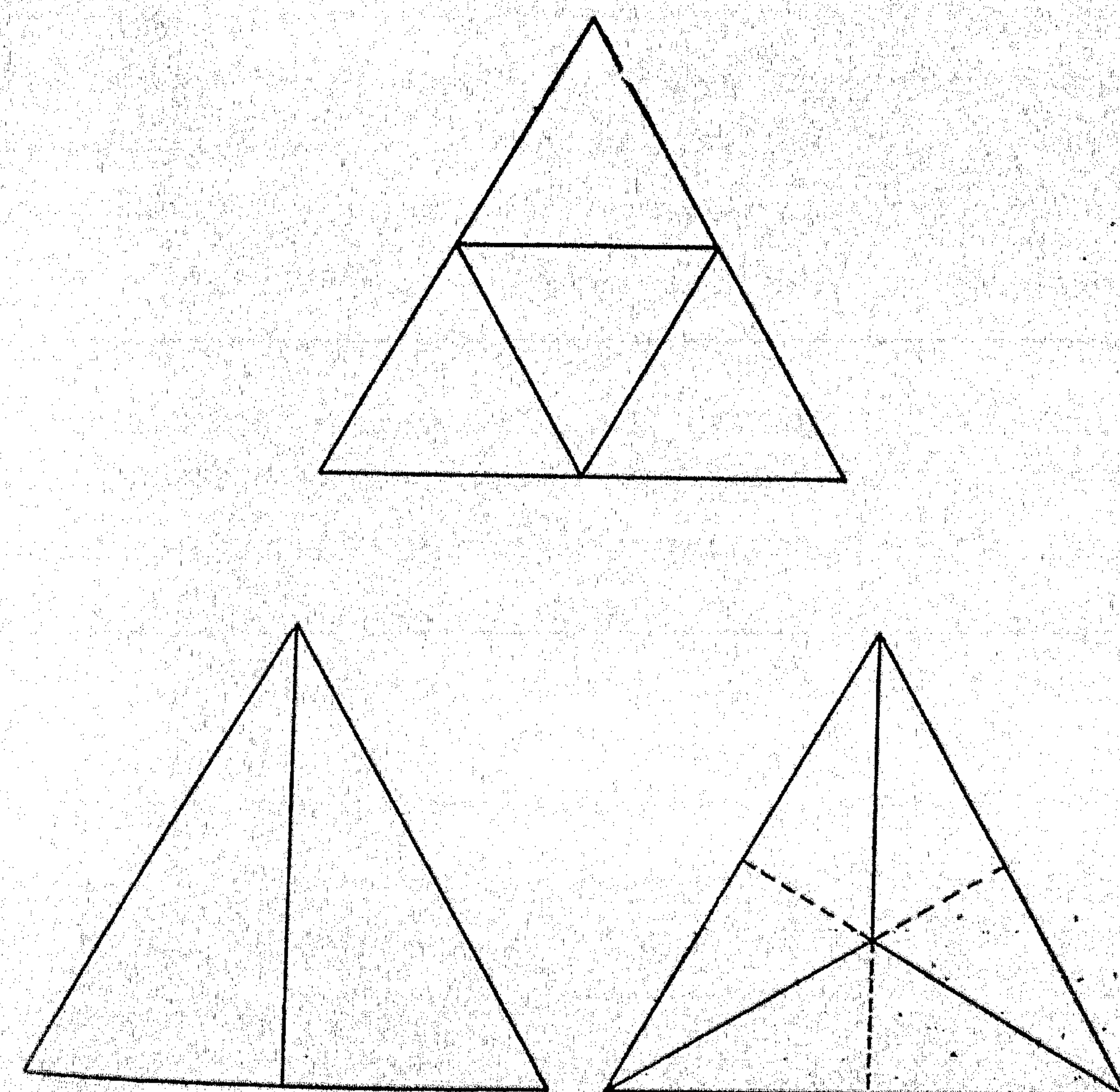


Fig. 119

punto medio de la base (altura) el triángulo queda dividido en dos partes iguales ; en el segundo, uniendo los tres vértices con el punto medio de la base opuesta se obtienen las tres bisectrices que limitan los tres triángulos iguales en el punto de su intersección ; en el tercero, uniendo directamente los puntos medios de cada lado con el opuesto se obtienen los cuatro triángulos iguales.

Ya hemos visto que en el primer caso resultan dos triángulos rectángulos que tienen uno de los catetos mitad del otro. En el segundo caso tres triángulos obtusángulos isósceles. En el tercero, cuatro triángulos equiláteros.

Las sumas de estos grupos de triángulos, siendo iguales al triángulo único de partida, son equivalentes entre sí.

Con las mismas subdivisiones, combinando las figuras se pueden construir otras y representar sumas de ellos equivalentes al mismo triángulo. Por ejemplo, trazando una

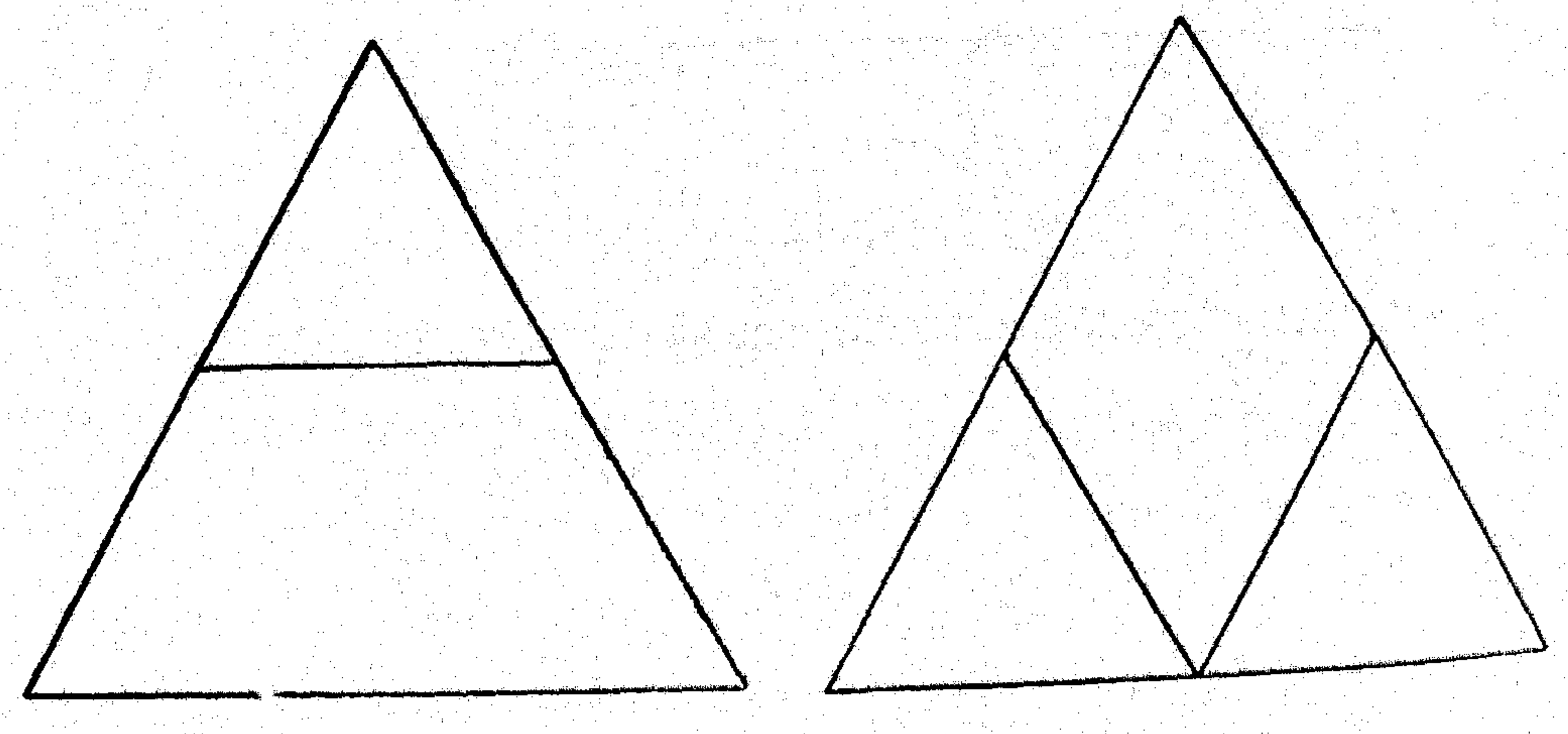


Fig. 120

sola mediana en vez de tres, el triángulo queda dividido transversalmente en un triángulo equilátero y un trapecio el cual, es igual a la suma de tres triángulos equiláteros pequeño o igual a la diferencia entre el grande y el pequeño equilátero.

Si, en cambio, se trazan las otras dos medianas, el triángulo grande queda dividido en un rombo y dos triángulos equiláteros pequeños. El rombo es igual a la mitad del triángulo grande (fig. 120).

También el triángulo rectángulo es igual a la mitad del triángulo grande (fig. 119).

Es pues posible establecer varias equivalencias de figuras y de grupos haciendo adiciones y sustracciones.

Esto se puede estudiar moviendo y agrupando las figu-

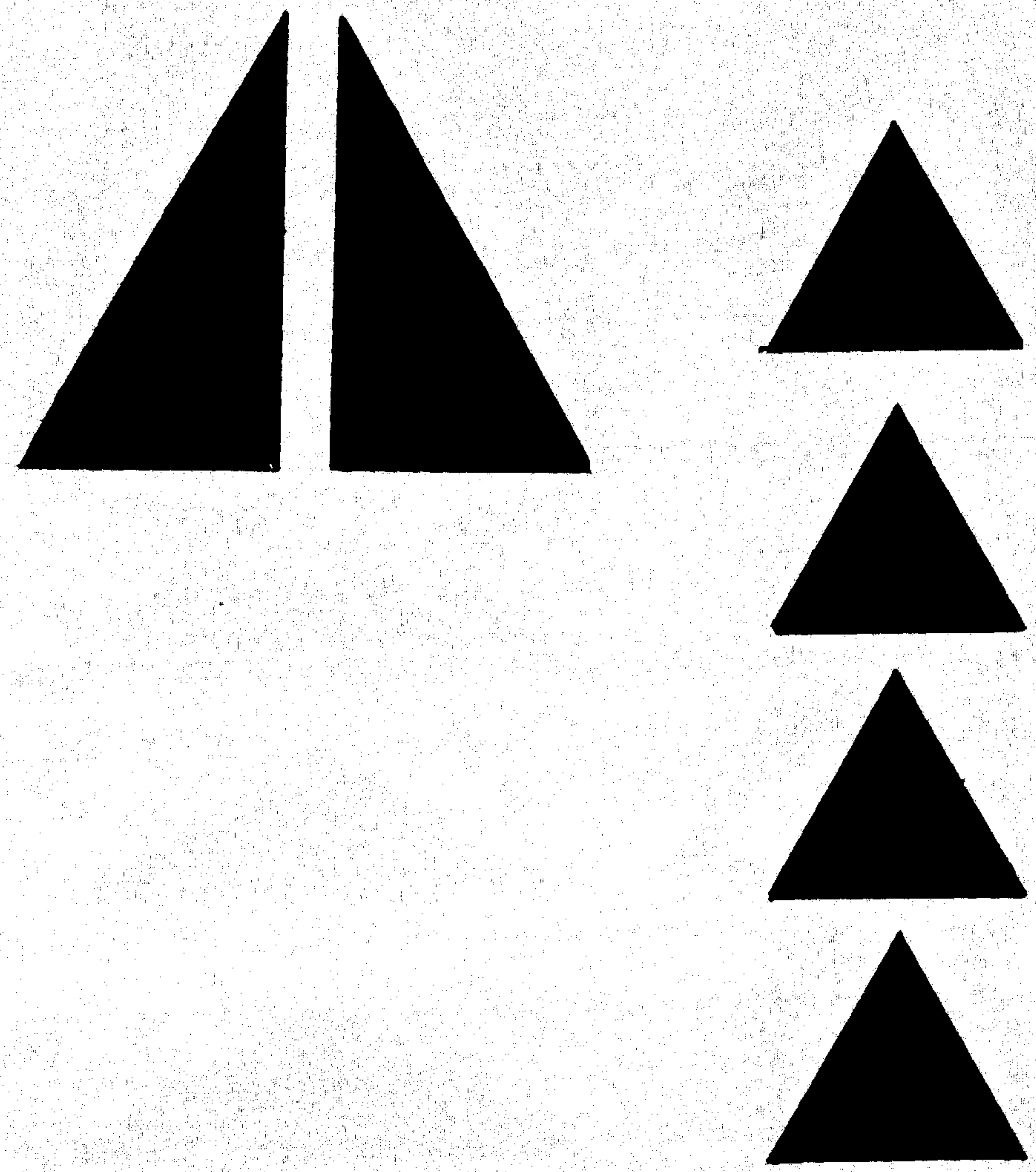


Fig. 121

ras dentro del marco del triángulo o también construyendo las figuras y los grupos equivalentes con papel de color.

Denominaremos estas figuras con números y letras para facilitar la exposición.

Llamaremos 1 al triángulo equilátero base y lo indicaremos con la letra t mayúscula. T1.

En cambio llamaremos 4 al triángulo equilátero pequeño que entra cuatro veces en el grande y lo indicaremos con la minúscula t4.

Llamaremos 2 al triángulo rectángulo que entra dos veces en T1 y 3 al triángulo que entre tres veces en T1 (fig. 121).

OPERACIONES

Es fácil encontrar muchas equivalencias con el desplazamiento de piezas del material y también equivalencias de grupos, lo que lleva consigo adiciones y sustracciones.

Los marcos, las superposiciones de piezas, etc., dan prueba evidente de correspondencia de valores.

Nosotros, sin embargo, queremos hacer otro trabajo: un trabajo de razonamiento en vez de la simple comprobación material.

A dicho fin, preparamos algunos cuadros que corresponden a equivalencias, sean de figura o de grupo, indicando en este último caso con signos de adición o sustracción las agrupaciones.

Se debe escribir lo que se ve y exponer razonamientos.

Operación 1.ª

Separando del triángulo T1 el pequeño t4 de la parte superior, queda un trapecio cuya base es igual a la del T1 y cuya altura es la del triángulo t4 que fué separado (fig. 122).

Operación 2.ª

El triángulo T1 es igual a la suma de dos rombos compuestos cada uno con dos t4. Aquellos tienen la altura de T1 en el sentido de la diagonal mayor y en el sentido de la diagonal menor la anchura del rombo corresponde a un lado del triángulo t4, o lo que es lo mismo, a la mitad del lado T1 (fig. 125).

Operación 3.ª

El trapecio es igual a la suma de los tres triángulos que quedan en T1.

Los ángulos inferiores del trapecio son iguales así como los de los triángulos equiláteros; en la parte superior, en cambio, los ángulos son dobles porque se suman en ellos dos ángulos de los triángulos equiláteros (fig. 123).

Operación 4.ª

El triángulo T1 es igual a dos t4, más un rombo. El rombo está formado por los otros dos t4 unidos en una sola figura.

El rombo en el sentido de la diagonal mayor es alto como T1 y tiene doble altura que los t4 (fig. 124).

Operación 5.ª

El rombo y el triángulo 2 son equivalentes porque cada uno es la mitad del triángulo T1 (fig. 126).

También se puede demostrar directamente su equivalencia porque en el 2 está contenido un 4 y el resto es igual a medio rombo cortado según la diagonal mayor (fig. 126).

Sobre esto se puede razonar aún largamente.

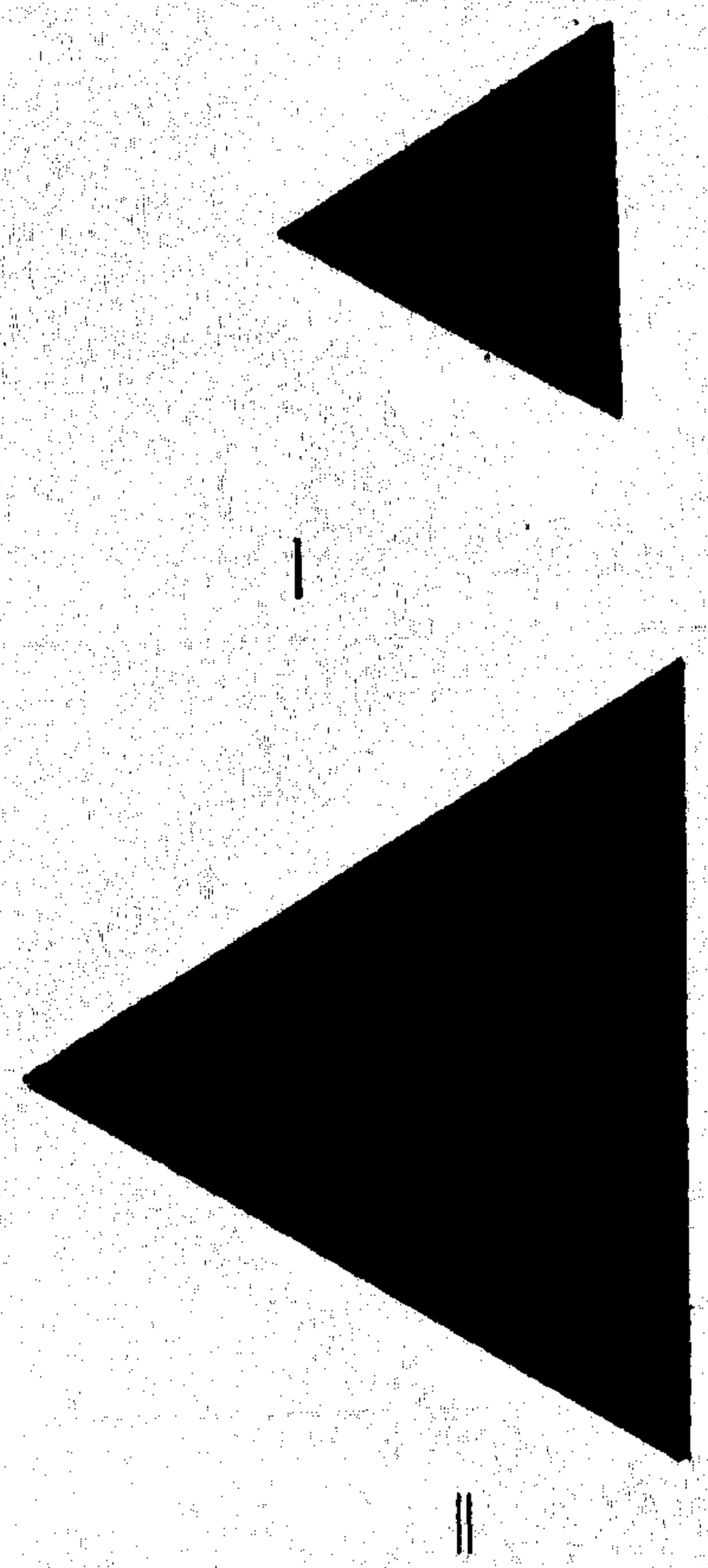


Fig. 122 — Operación 1.ª
Sustracción

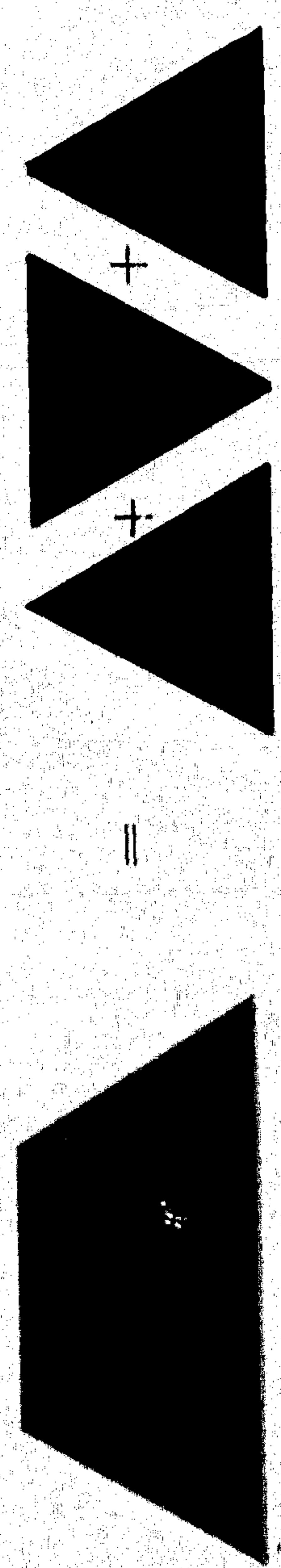


Fig. 123 — Operación 3.ª
Suma (equivalencia)

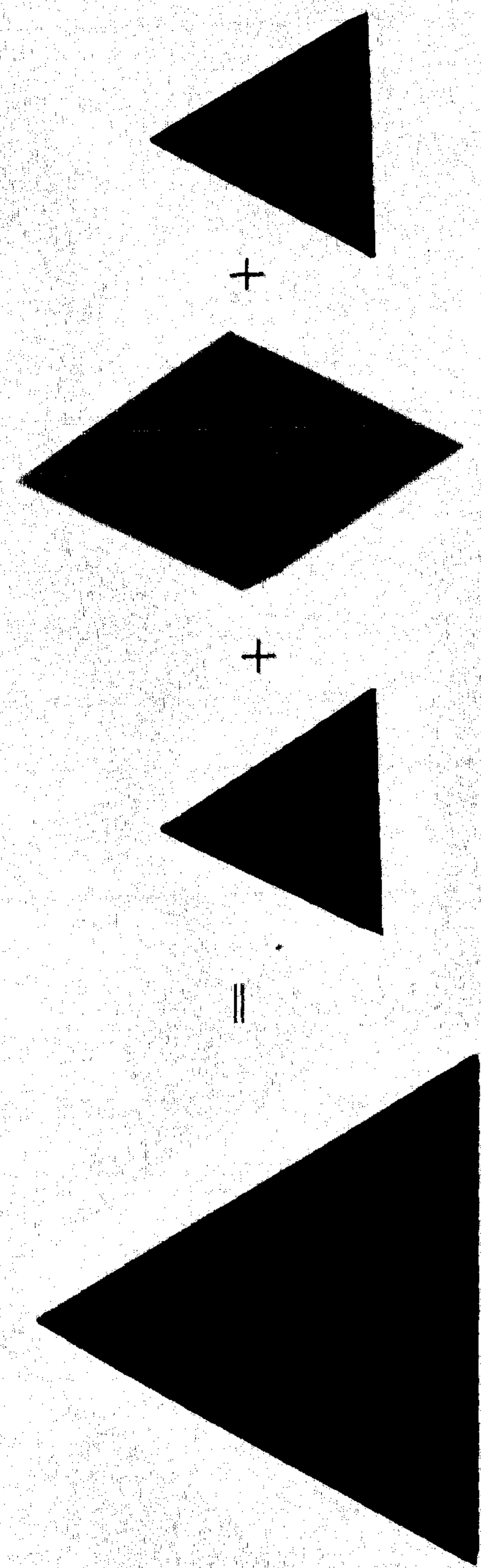


Fig. 124 — Operación 4.ª Suma (equivalencia)

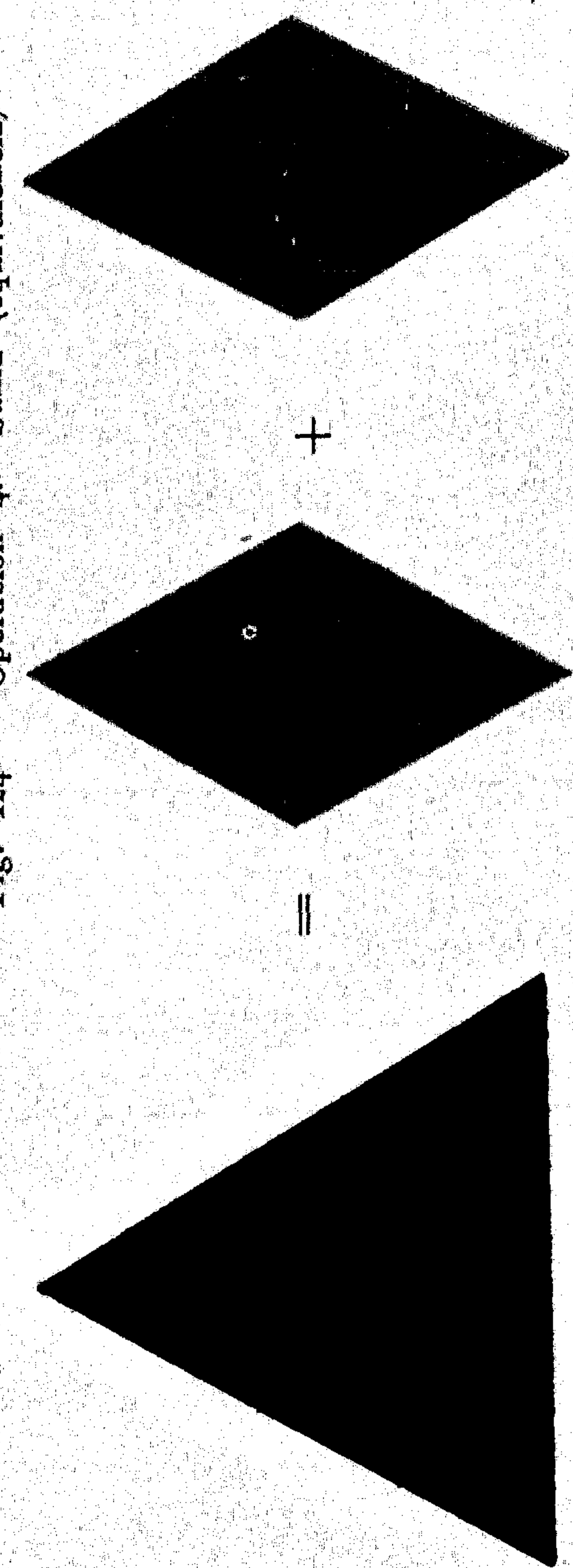


Fig. 125 — Operación 2.ª Una suma (equivalencias)

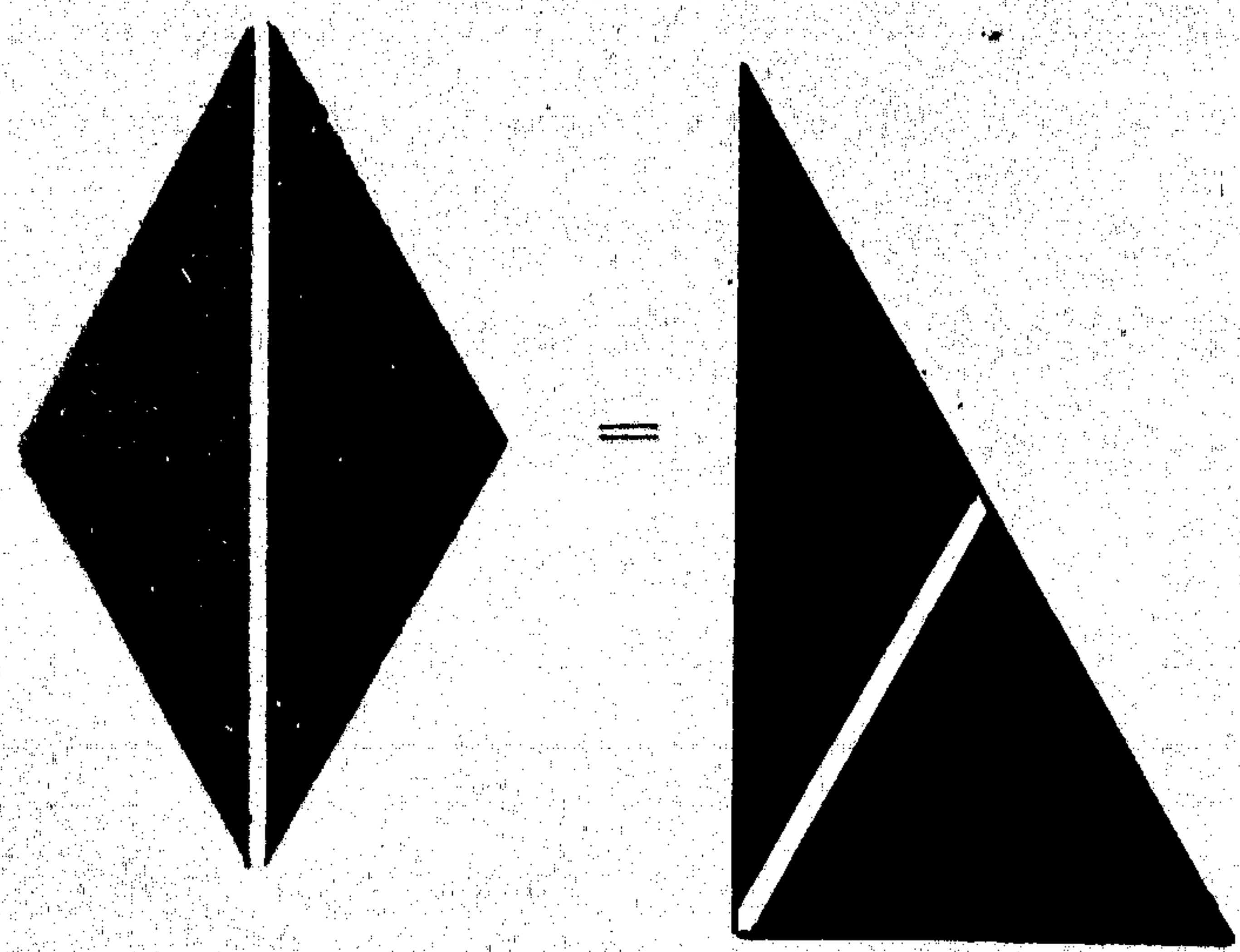


Fig. 126 Operación 5.ª
Una equivalencia

TRIANGULOS EN EL CIRCULO

Si ahora se toman un marco del círculo (que tiene el diámetro igual al lado del cuadrado y del triángulo T 1) y se colocan dentro de él los pequeños triángulos t 4 éstos se adaptan dentro de él y cubren una buena parte del círculo.

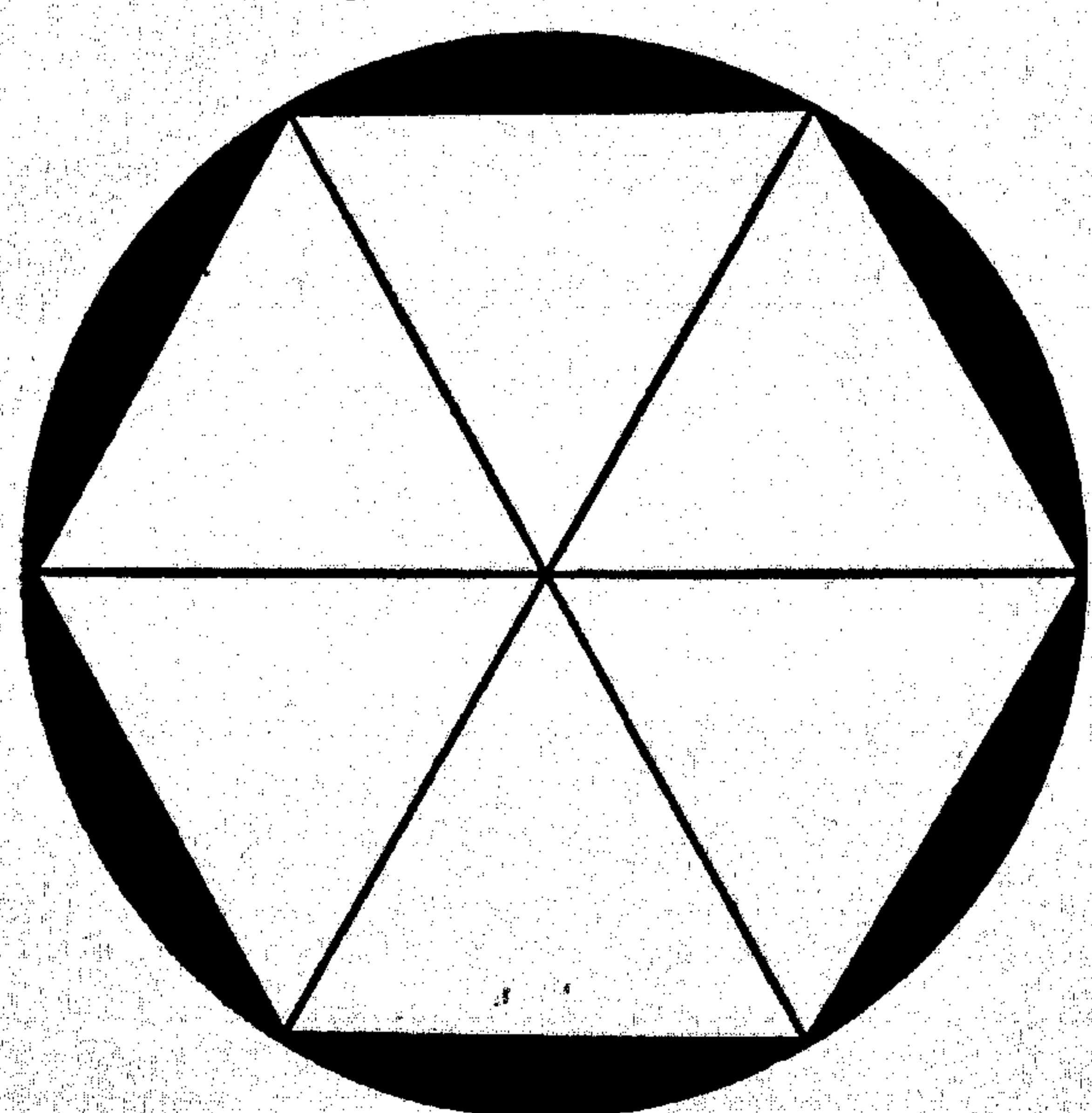


Fig. 127

Esto nos induce a construir otros triángulos t 4 y, he aquí, que con dos más de éstos se ocupa por completo el espacio del círculo.

Los seis triángulos, con el vértice en el centro, forman junto a la circunferencia el perímetro de un exágono. Este exágono, puesto que todos sus vértices tocan la circunferencia, está inscrito en el círculo (fig. 127).

Construyendo ahora un rombo con dos t 4 se puede formar tres rombos con los seis t 4 que constituyen el exágono inscrito en el círculo.

De este modo podemos obtener una equivalencia de grupos. 3 rombos sumados son equivalentes al exágono

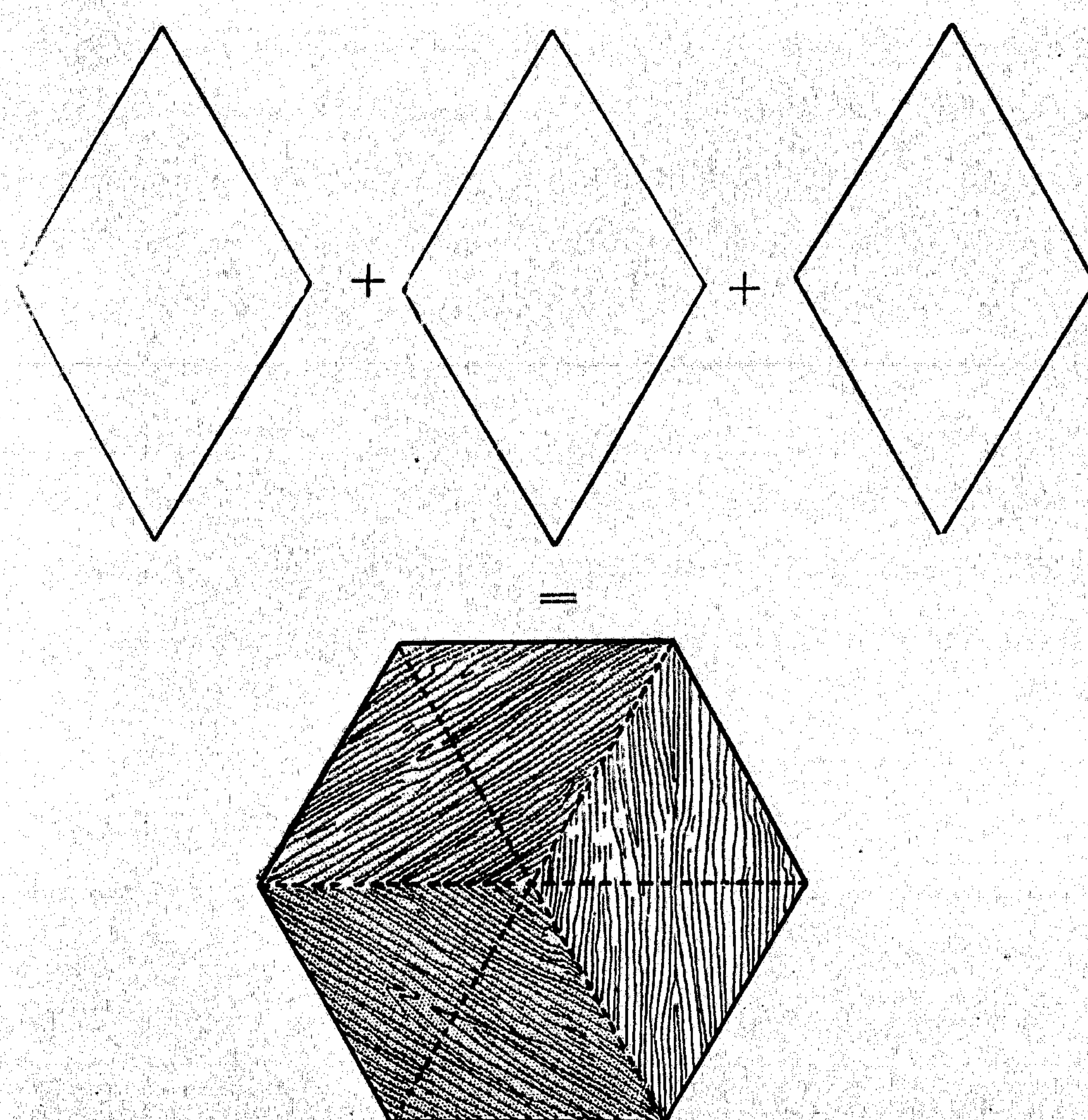


Fig. 128

inscrito en el círculo (fig. 128): exágono que llamaremos e.

Reflexionando sobre el hecho de que seis t 4 entran exactamente en el círculo y constituyen un exágono regular se puede resolver el siguiente problema.

El triángulo t 4 tiene el lado igual a la mitad del lado T 1. Y el lado T 1 corresponde al diámetro del círculo.

Cada lado de t 4 es, pues, igual al radio del círculo. El radio del círculo adaptado a lo largo de la circunferencia, está contenido en ella seis veces con suficiente aproximación.

Otra observación a hacer es, sobre la relación de valor entre el exágono y el triángulo T1.

Siendo seis triángulos t 4 del exágono y cuatro los del T1 resulta que el exágono es 4 + 2, es decir un T1 más medio T1 que es igual a un T1 más un rombo (fig. 129).

E 1

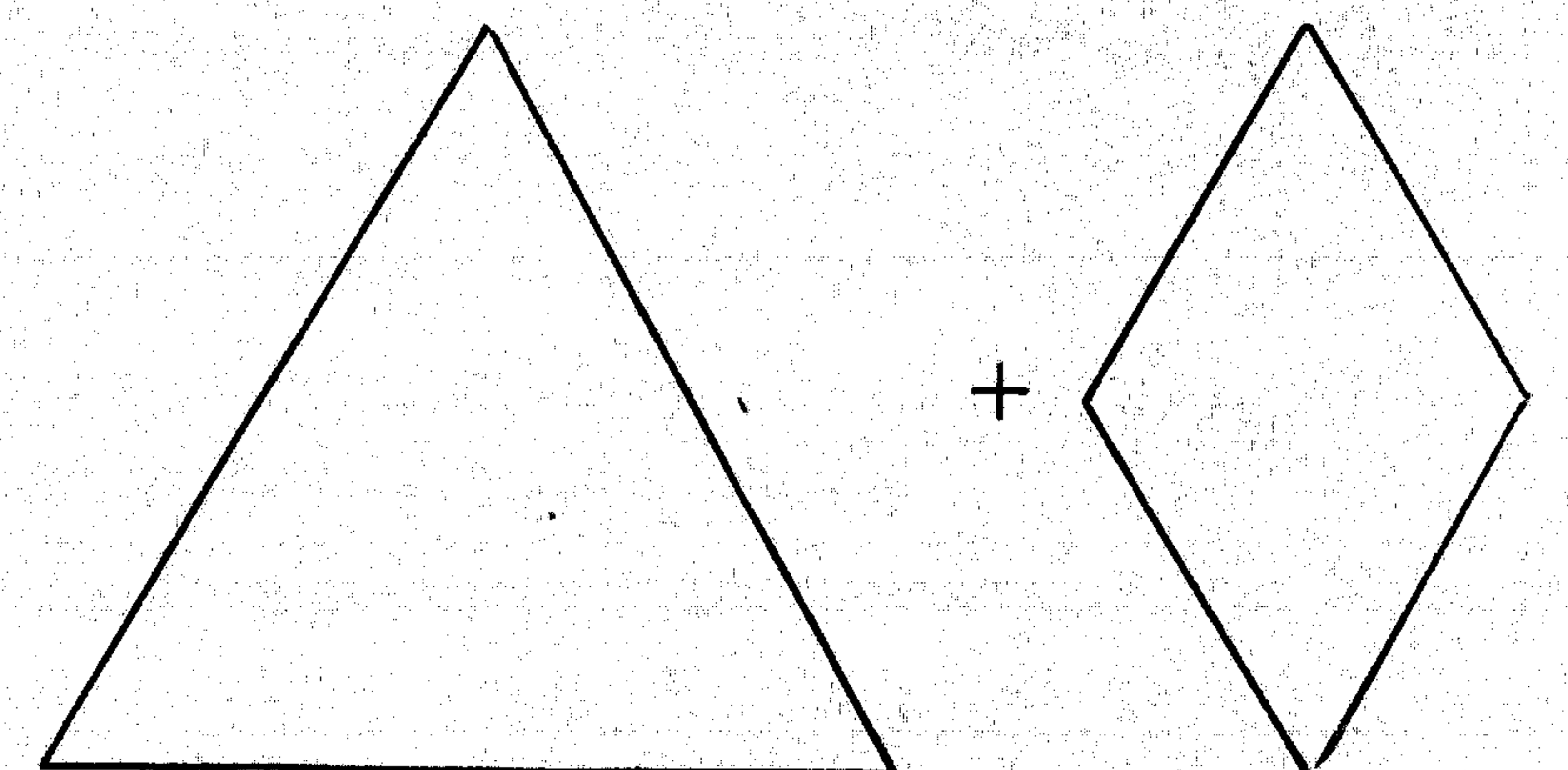


Fig. 129

EL TRIANGULO DIVIDIDO EN TRES PARTES

Si se toma del material de hierro el marco del triángulo equilátero (T1) dividido en tres partes y se sacan éstas (los tres triángulos obtusángulos isósceles) para disponerlos fuera del marco, apoyando su lado mayor (que corresponde a los tres lados de T1) a lo largo de los lados

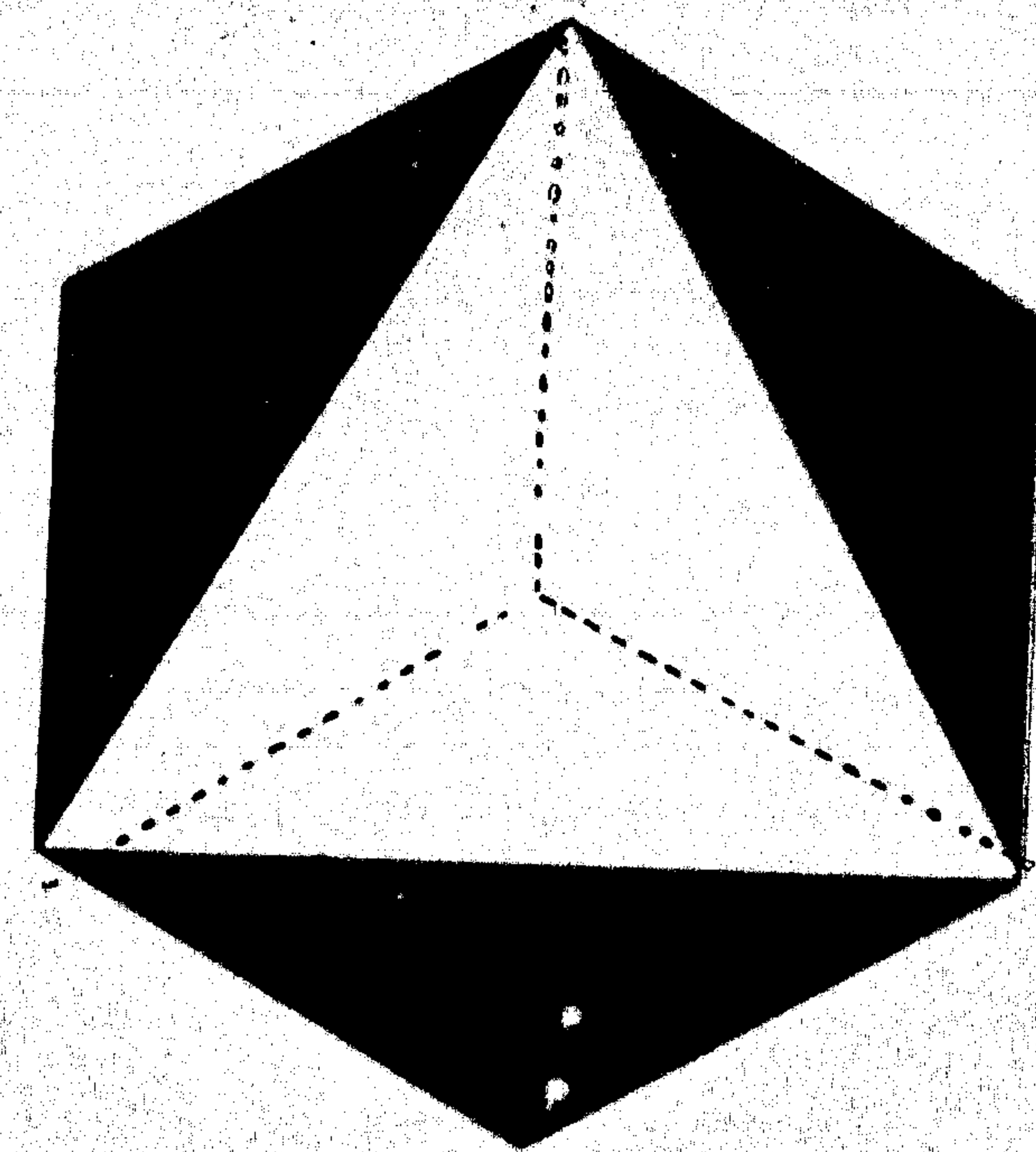


Fig. 130

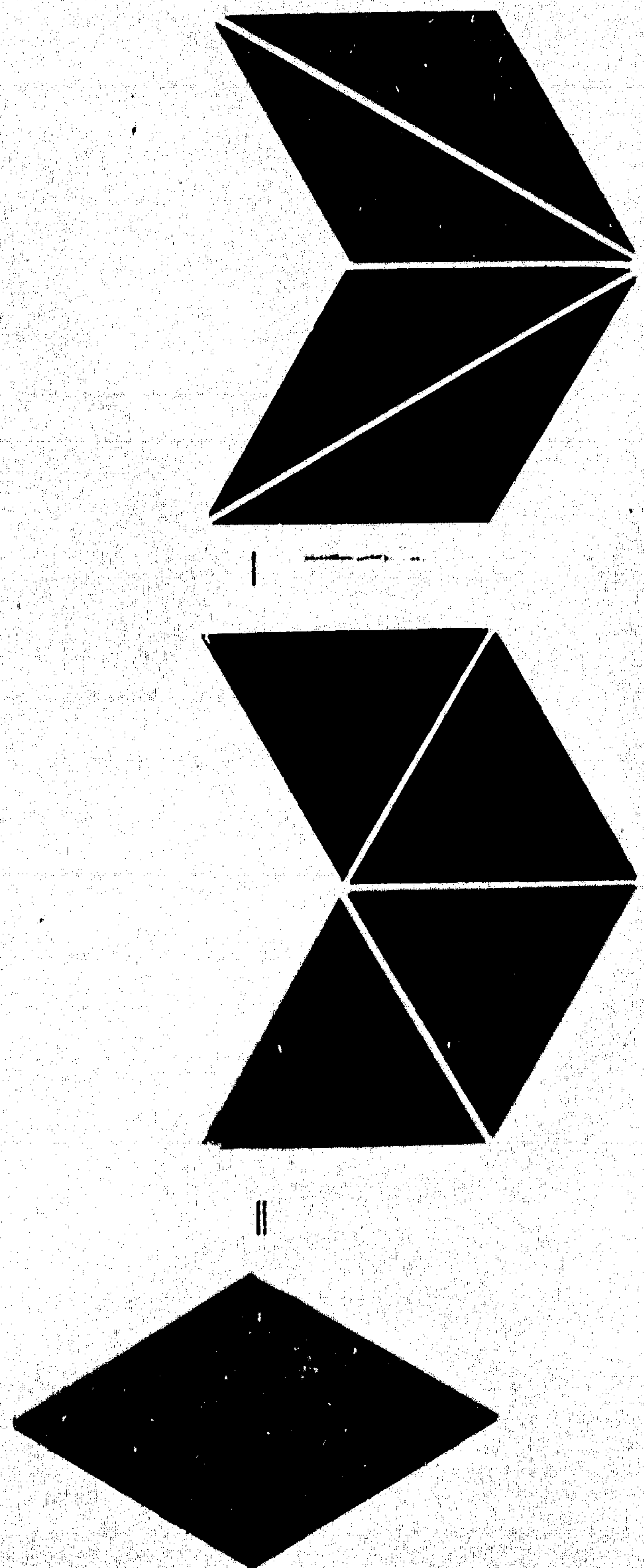
del triángulo, resulta un exágono (fig. 130) que llamaremos E.

El perímetro está constituído por los seis lados iguales de los tres triángulos isósceles en que el T1 está dividido.

Sobre el valor de este exágono respecto al triángulo T1 no hay duda alguna; aquél es la suma de dos triángulos: el que quedó dentro, todo entero, y el que está situado en la parte exterior dividido en tres partes.

Este exágono es de distinto valor que el construído primeramente disponiendo seis triángulos t 4 dentro del marco del círculo. En efecto, aquél equivalía a vez y media el triángulo T1, éste, en cambio, equivale a dos triángulos T1.

Los dos exágonos son pues semejantes, porque tienen la misma forma, pero no son equivalentes. La diferencia entre ellos es de medio triángulo T1, por lo tanto, su diferencia es un rombo formado por dos t 4, o tambien es uno de aquellos triángulos que corresponden a la mitad de T1.



Se puede pues establecer una equivalencia de grupos haciendo una sustracción razonada, es decir (fig. 131): El exágono mayor, menos *el* exágono menor, es igual a rombo.

La equivalencia no puede percibirse con los sentidos, es sólo un razonamiento sobre la construcción de las figuras el que nos lleva a dicha conclusión.

Ahora hagamos una prueba, un experimento.

El exágono menor estaba inscrito en el círculo C.

¿En qué relación está el círculo C con el exágono mayor E?

Si se apoya el círculo sobre el exágono, entra exactamente y toca la parte media de cada lado del exágono. Respecto a éste, pues, sucede lo contrario, es el círculo la figura inscrita mientras el exágono es circunscrito al círculo.

Los dos exágonos son pues uno inscrito y el otro circunscrito en el mismo círculo. Desde ahora en adelante los podremos considerar bajo este aspecto llamándoles Ec y Ei (exágono circunscrito y exágono inscrito) (fig. 132).

Ahora los dos exágonos, el circunscrito y el inscrito,

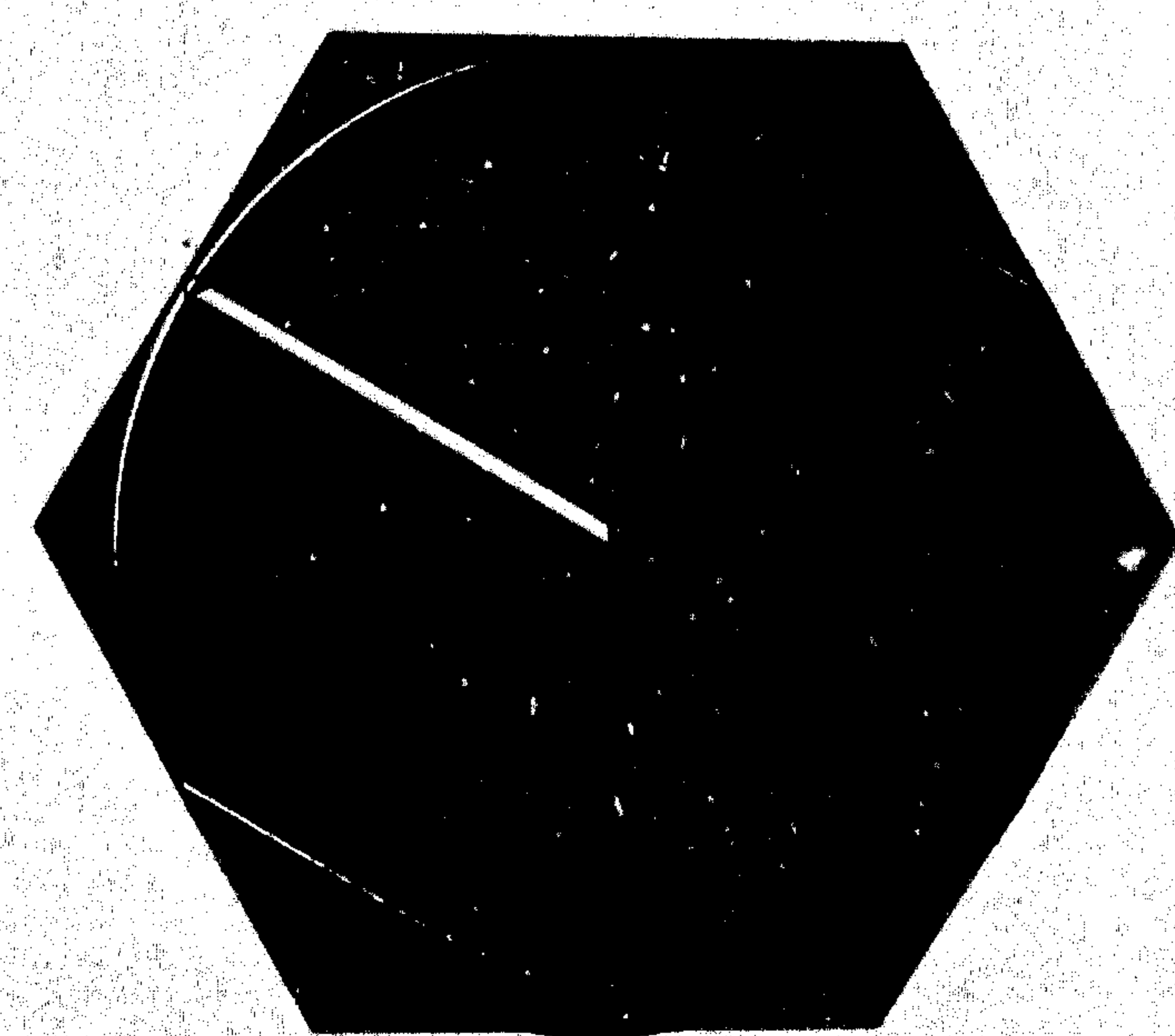


Fig. 132

se pueden representar del mismo modo, como construídos con tres rombos (fig. 133).

Estos rombos son también distintos entre sí.

El rombo más pequeño del Ei (fig. 131) está compues-

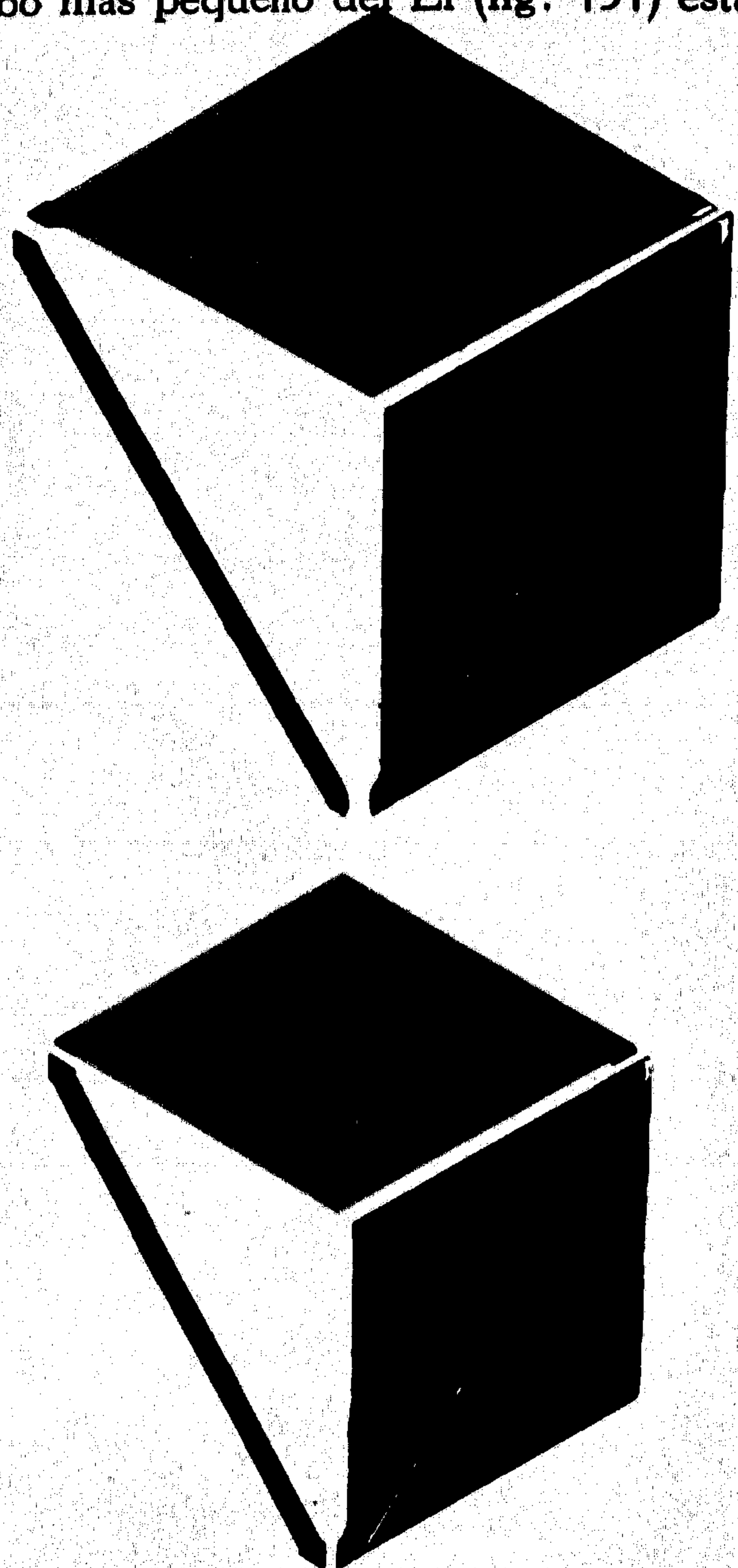


Fig. 133

to por dos triángulos equiláteros t 4 y es por ello igual a medio triángulo T1. En cambio el rombo mayor de Ec es decir, el del exágono circunscrito, está compuesto por dos triángulos obtusángulos que valen cada uno de ellos 1/3 de T1 y por lo mismo es igual a 2/3 del gran triángulo equilátero.

Nuestro triángulo grande T 1 se obtiene trazando las diagonales mayores de los tres rombos que constituyen el Ec y es la mitad de éste (fig. 133).

Hagamos lo mismo en el exágono inscrito: trazando las diagonales mayores de los tres rombos obtendremos también un triángulo equilátero, que no es nuestro triángulo grande T1, ni ninguna de sus subdivisiones.

Es una nueva figura que se presenta y debemos estudiar.

EL NUEVO TRIANGULO EQUILATERO

Este triángulo que es equilátero porque tiene iguales los tres lados (siendo éstos las diagonales mayores de los rombos iguales) tiene los tres vértices en correspondencia con los del exágono inscrito, por eso este triángulo está inscrito en el círculo.

Mientras el triángulo grande, teniendo el lado igual al diámetro del círculo, cae con los vértices fuera del círculo.

Tenemos pues ahora un triángulo equilátero inscrito que es igual por construcción a la mitad del exágono inscrito.

Veamos sus relaciones con el triángulo grande T1.

El exágono es igual a seis triángulos pequeños equiláteros t4; el triángulo es mitad del exágono y equivale a tres de los triángulos equiláteros pequeños.

En cambio, el triángulo grande es igual a 4 de los triángulos t4.

El triángulo equilátero inscrito es, pues, equivalente a los 3/4 del T1 y la diferencia entre los dos, es igual a uno de los pequeños triángulos t4.

TEOREMA. — El triángulo equilátero inscrito en un círculo equivale a 3/4 del triángulo equilátero que tiene como lado el diámetro del círculo.

Ahora construiremos equivalencias de grupos en relación con dicho teorema.

El triángulo equilátero T1 (que tiene el lado igual al diámetro del círculo) menos el triángulo equilátero inscrito en el círculo, es igual al triángulo equilátero pequeño t4 (cuarta parte del 1.°) (fig. 134).

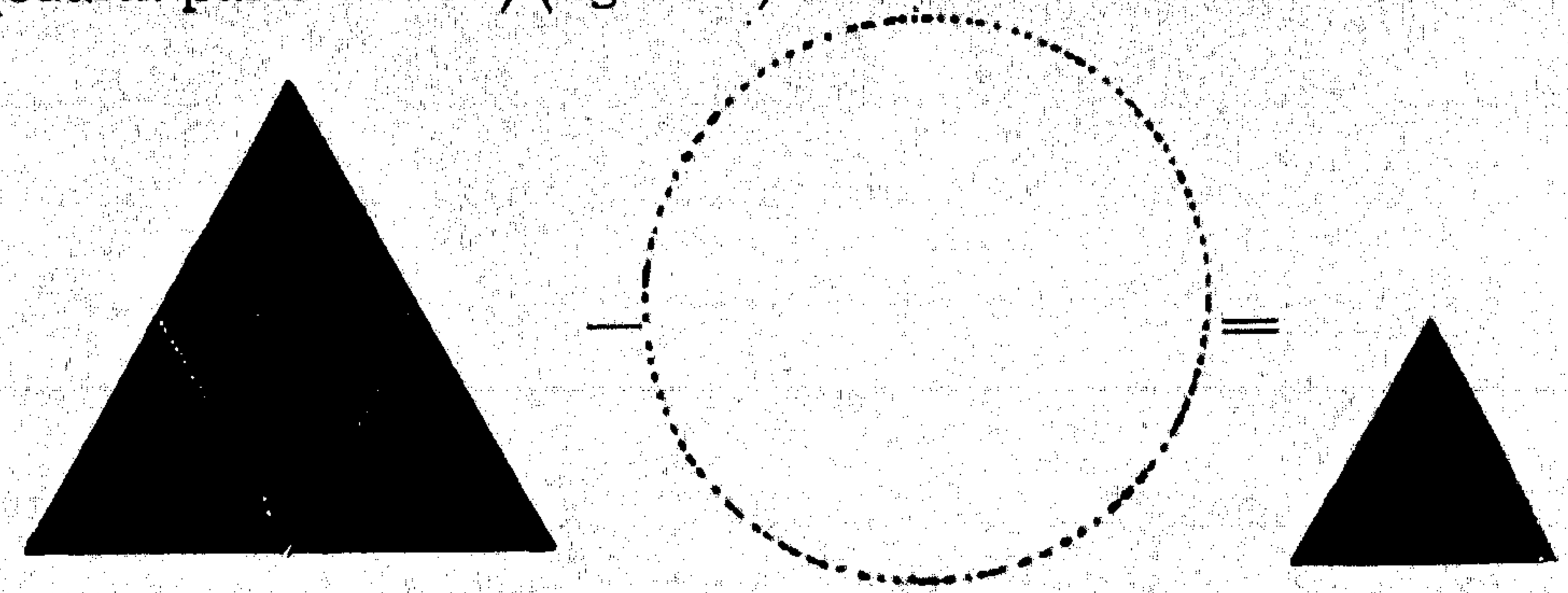


Fig. 134

¿Es posible encontrar una relación entre los lados de dos triángulos equiláteros que son cada uno la mitad de los exágonos inscrito y circunscrito en el mismo círculo?

La figura 133 nos demuestra en el exágono menor correspondencia con el lado del triángulo inscrito. Este corresponde a la diagonal mayor de sus rombos.

Ahora bien, estos rombos están construídos con dos de los pequeños triángulos t4.

Esto se puede observar directamente en la figura 1...

Tal línea corresponde a la altura del triángulo grande T1 (fig. 124).

Observando y razonando hemos pues hallado la relación entre los lados de los dos triángulos.

Se puede pues enunciar el siguiente

TEOREMA. — Si de dos triángulos equiláteros, el lado de uno de ellos corresponde a la altura del otro aquél es equivalente a los 3/4 de este último (fig. 135).

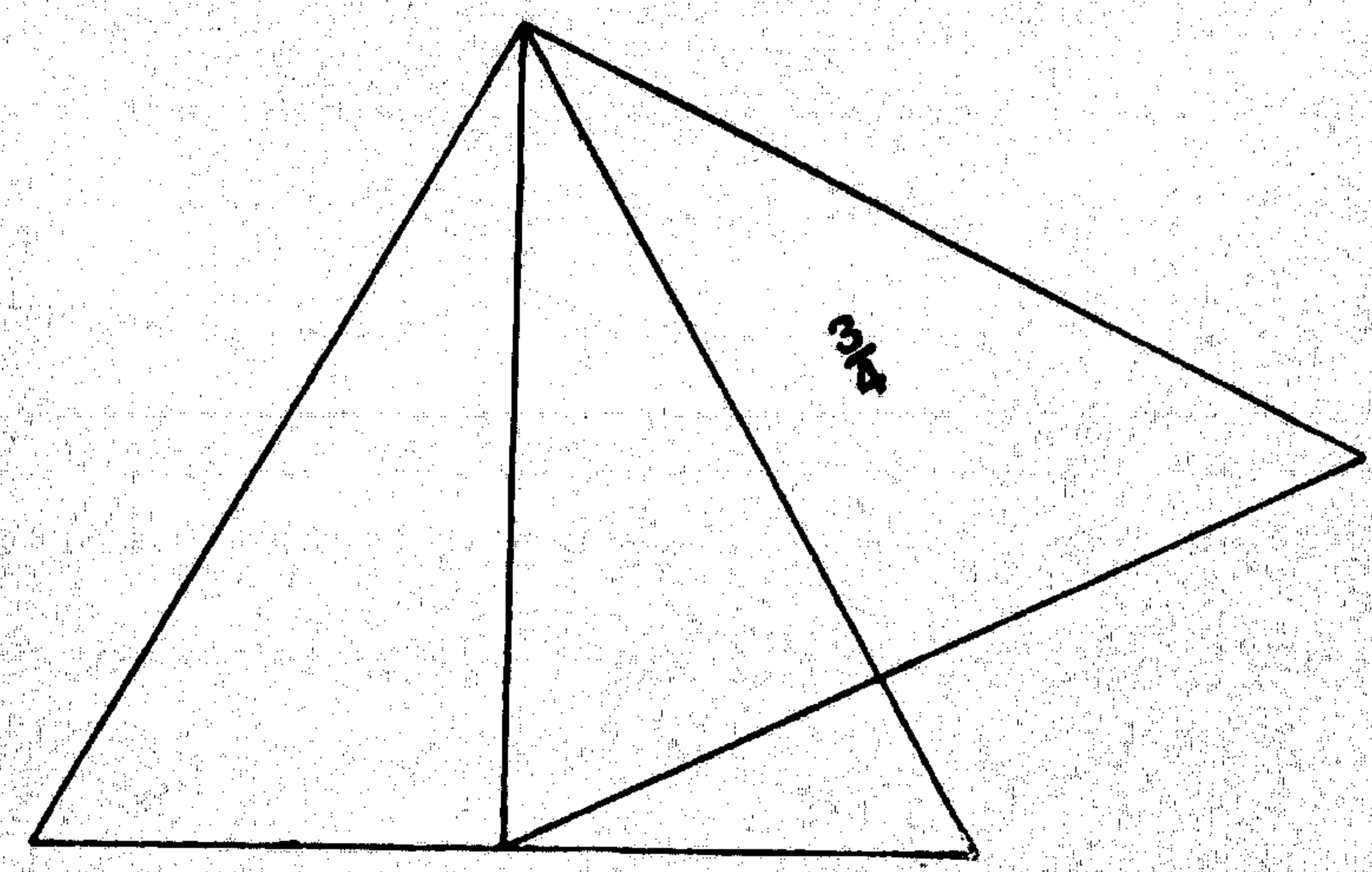


Fig. 135

Encontrada esta relación constante, podemos sucesivamente construír un triángulo equilátero sobre la altura del precedente, construyendo una serie circular, del mismo modo, que la construída por los cuadrados.

Después de cinco triángulos se encuentran dos triángulos equiláteros que tienen la base sobre la misma línea recta (fig. 136).

Si se suman los ángulos situados alrededor del punto

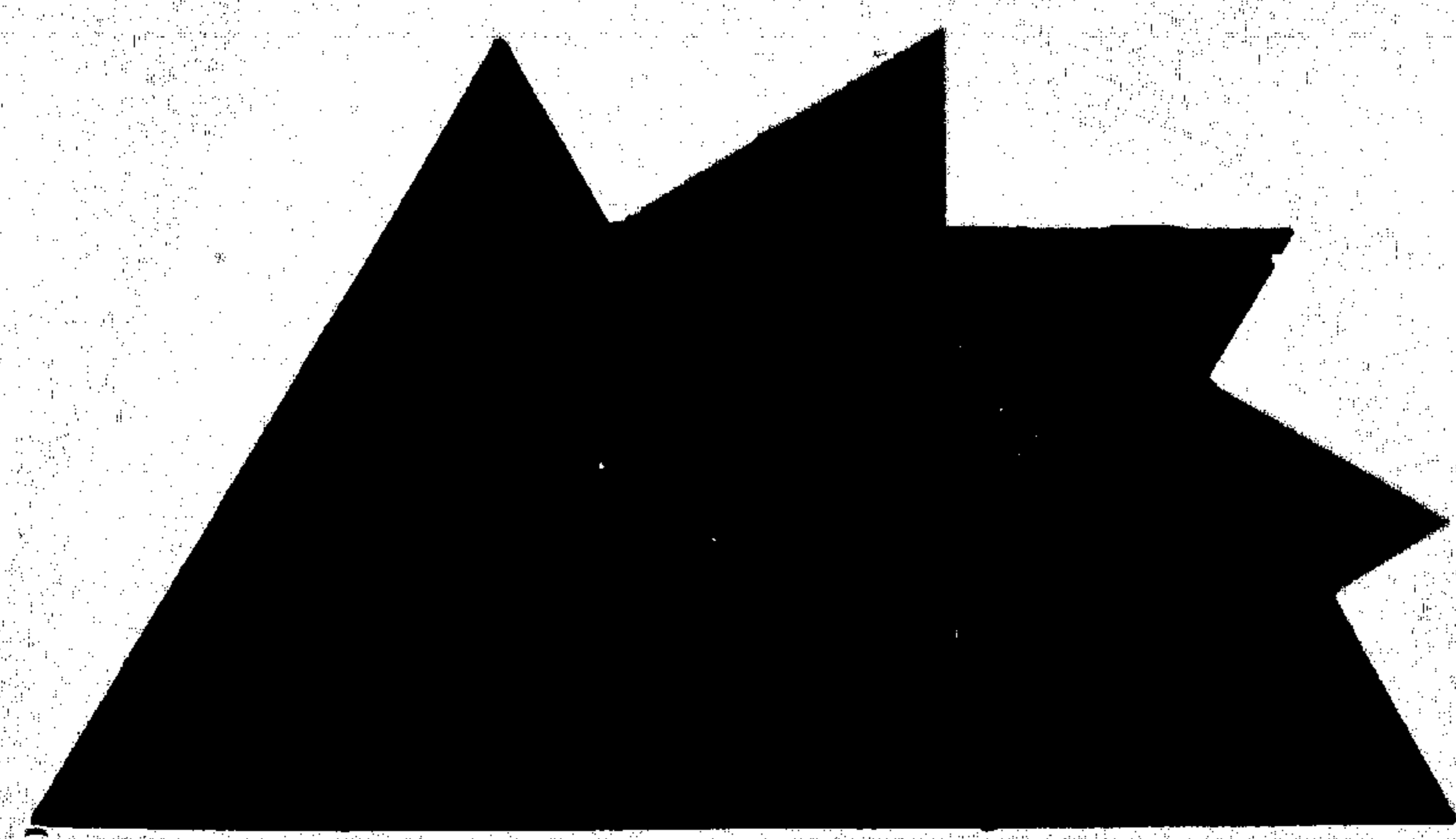


Fig. 136

central se hallan tres ángulos completos de un triángulo equilátero, porque quitando los superpuestos quedan tres ángulos situados el uno junto al otro.

La suma de los tres ángulos del triángulo equilátero es pues igual a dos ángulos rectos.

Y ahora se nos ocurre preguntar ¿qué se hallaría utilizando el círculo igualmente para el cuadrado?

La figura del cuadrado, con el lado igual al diámetro, la vemos envolver exactamente el círculo como una figura circunscrita (fig. 137).

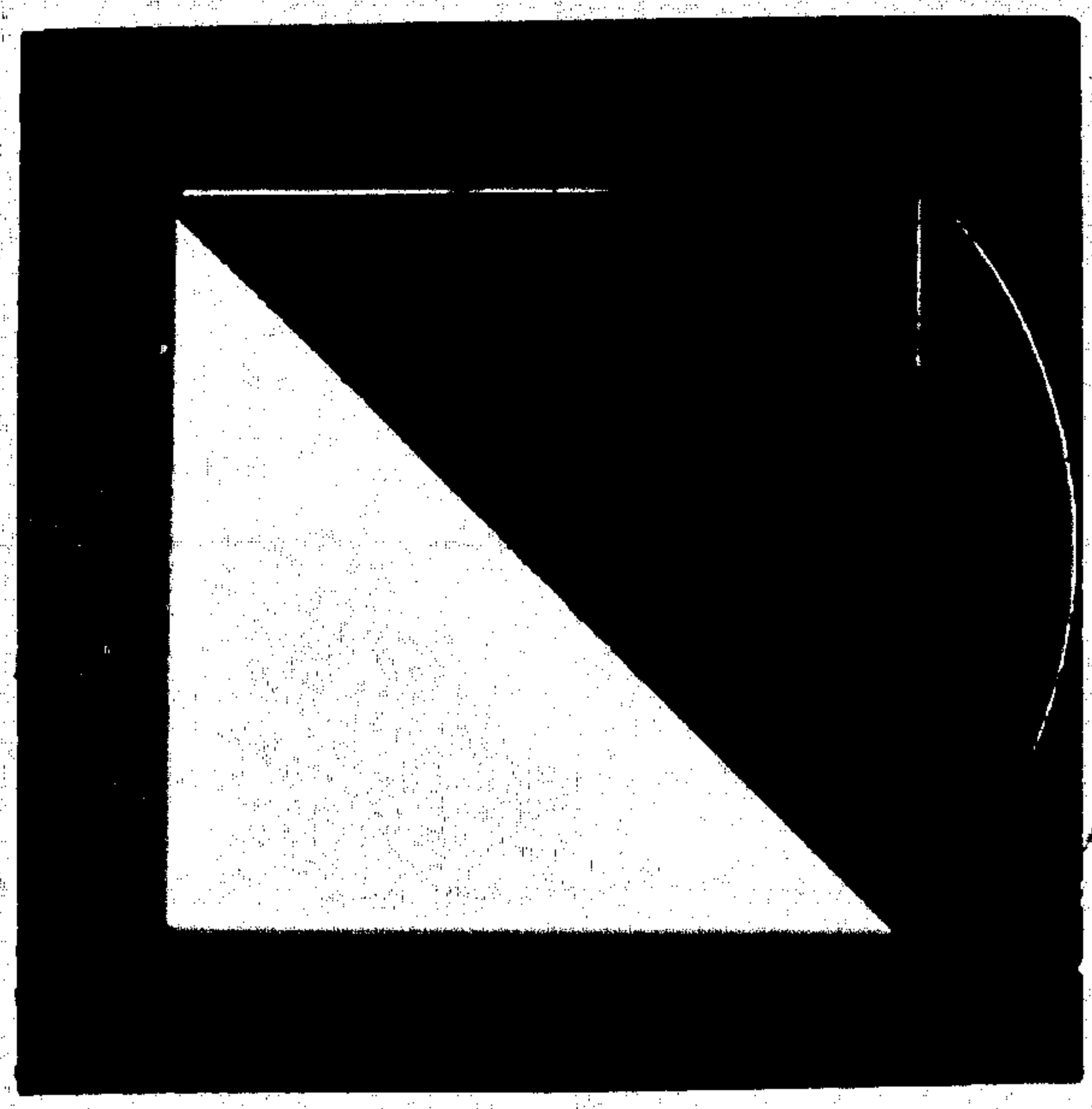


Fig. 137

Y su mitad construída con los triángulos de 1/4 entra exactamente en el círculo; es inscrita.

He aquí pues un teorema:

TEOREMA. — El cuadrado inscrito en un círculo, es equivalente a la mitad del cuadrado circunscrito.

¿Y por qué sucede así?

¿Cómo se puede demostrar por razonamiento?

La diagonal del cuadrado mitad es igual al lado del

cuadrado doble, las dos líneas pues son diámetros del círculo.

Es evidente que el círculo inscrito en este cuadrado menor tendría a su vez un cuadrado más pequeño inscrito en su interior que sería su mitad, esto es, el cuadrado que está contenido cuatro veces en el mayor de todos.

Y entre un cuadrado y otro inscritos habría un círculo.

Tenemos todos estos círculos en el material de hierro.

¿Qué relación hay entre ellos?

La figura 138 nos muestra dos cuadrados uno mitad del otro, dispuestos con sus lados paralelamente. Estos no son inscritos sino concéntricos. Y ahora tenemos también una relación entre ellos en esta posición; son inscrito y circunscrito a un círculo.

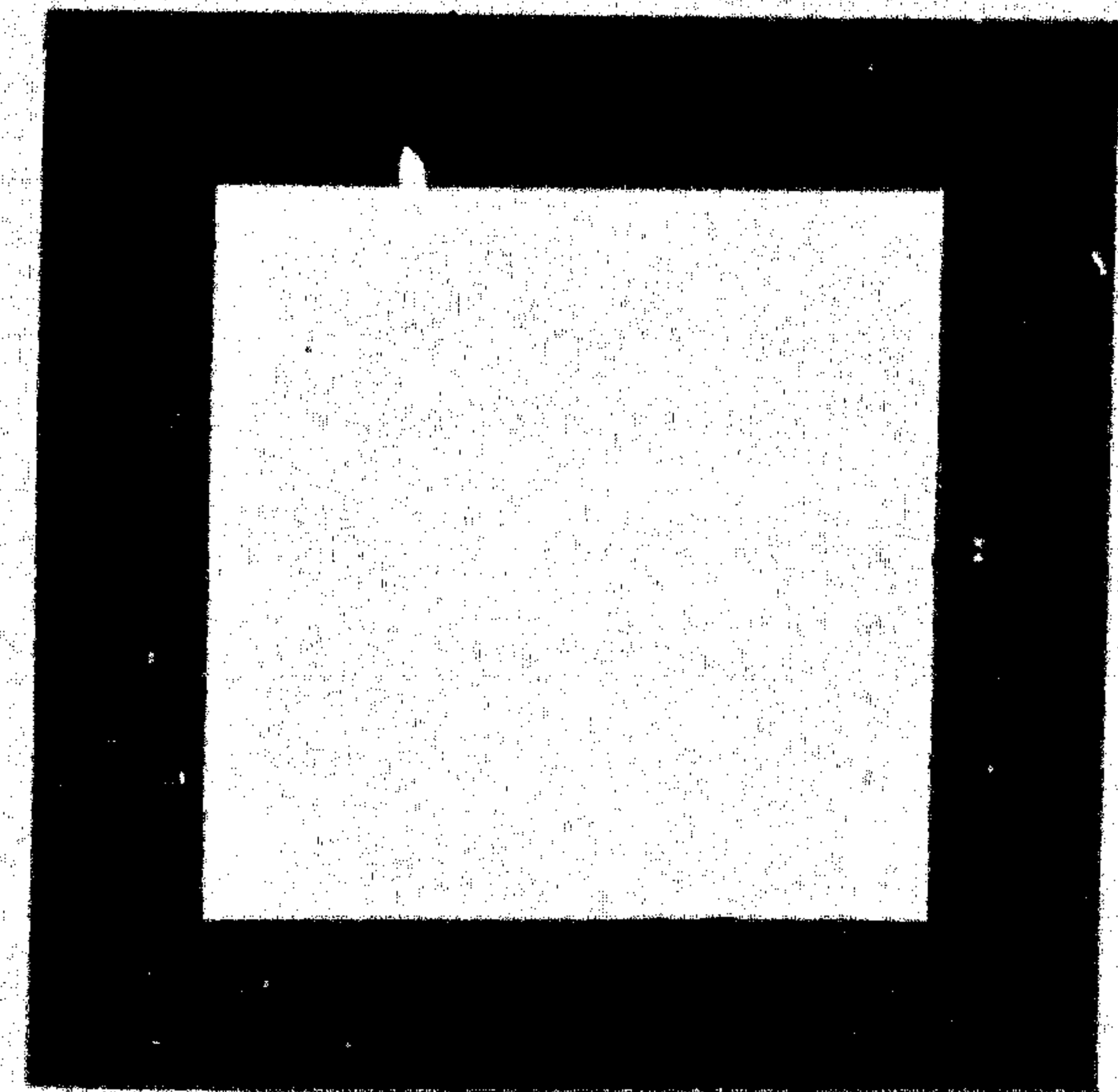


Fig. 138

Las figuras dispuestas así paralelamente, dejan entre una y otra un marco que también está determinada porque, evidentemente, equivale al cuadrado que está en el interior.

Los marcos, cuyo valor es sabido, pueden también tener importancia si no desde el punto de vista geométrico, desde el artístico.

Acaso ellos podrán dar algún concepto positivo, matemático, de las más armoniosas proporciones entre figuras superpuestas, o entre el cuadro y el marco.

Para la mente que raciocina sobre las figuras, existe siempre la misma labor de reflexión y de cálculo ; de adiciones y sustracciones de aquellas y una comprobación de equivalencias entre los grupos.

El ojo, sin embargo, puede juzgar de la armonía entre formas superpuestas que tienen un valor de relación recíproco.

Esto sería un estudio sensorial, añadido a un trabajo de la mente sobre equivalencias geométricas. Trabajo sensorial de «juicio estético» distinto de las primeras impresiones sensoriales que hacían seleccionar al niño las figuras geométricas para cambiarlas, entre sí, en infinitas formas.

LOS MARCOS

El primer ejercicio es el de superponer figuras semejantes, cuya relación recíproca de valor es conocida y disponerlas paralelamente de manera equidistante, en forma tal que quede entre ambas un marco.

He aquí, por ejemplo, dos cuadrados de los cuales el interior es la mitad del otro sobre el cual está superpuesto (fig. 138).

Es evidente que el marco y el cuadro son equivalentes.

Los mismo sucede con el triángulo (fig. 139) ; el interior es la mitad del mayor sobre el cual está superpuesto, por lo tanto, el marco es equivalente al triángulo.

(No sabemos aún, prácticamente, determinar un triángulo equilátero que sea la mitad de otro, pero lo sabremos en seguida).

De lo anterior se puede deducir, que el marco equiva-

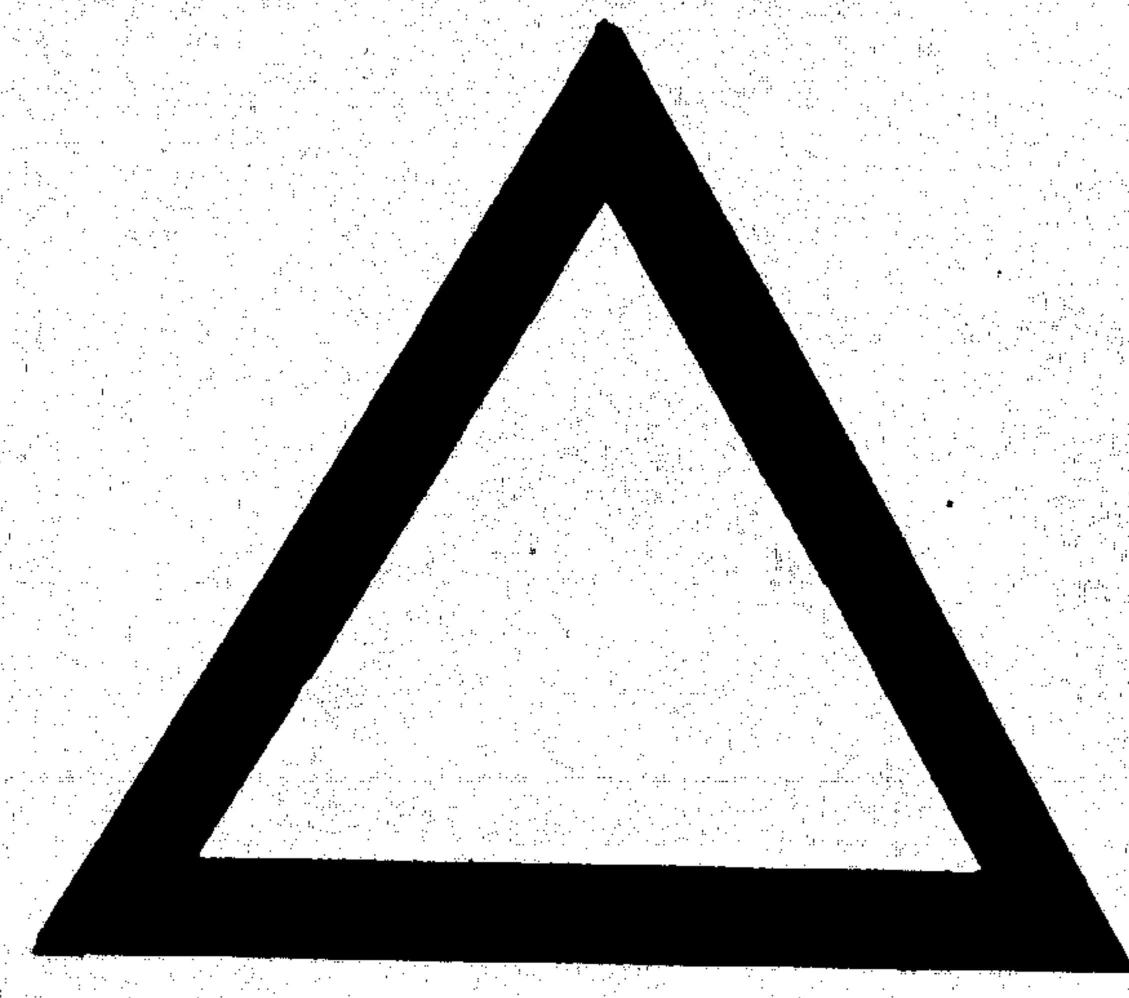


Fig. 139

lente al cuadro guarda la proporción de un marco verdadero, pero no la de un dibujo decorativo, porque en ese caso, el marco decorativo resultaría demasiado macizo, pesado.

Observemos ahora los triángulos equiláteros que guardan entre sí la relación de 3/4.

El menor es en este caso un triángulo equilátero inscrito en un círculo que tiene el diámetro igual al lado del triángulo equilátero mayor. El triángulo equilátero menor tiene el lado igual a la altura del mayor.

Como vimos anteriormente (fig. 135) su diferencia es igual a 1/4, es decir, un triángulo equilátero que sea la cuarta parte del primero.

Superpongamos pues los tres triángulos que representan 1 — 3/4 — 1/4.

Y como construyendo sucesivamente triángulos equiláteros sobre la altura del precedente, se puede obtener una serie, repitamos sobre cada triángulo decreciente la misma superposición de figuras (fig. 140).

La figura 1.ª en su contorno exterior representa el gran triángulo T1 sobre el cual está superpuesto el 3/4 ; entonces el marco que se forma es equivalente a 1/4 de la parte interna. El triángulo pequeño que está en el centro representa la diferencia entre los dos o sea 1/4.

Se observa pues que el marco exterior y el pequeño triángulo del centro son equivalentes. Pero, sumados, forman medio triángulo (1/4 + 1/4 = 2/4 = 1/2).

La parte entre el pequeño triángulo central y el marco estrecho exterior, es, pues, equivalente a la mitad del triángulo completo.

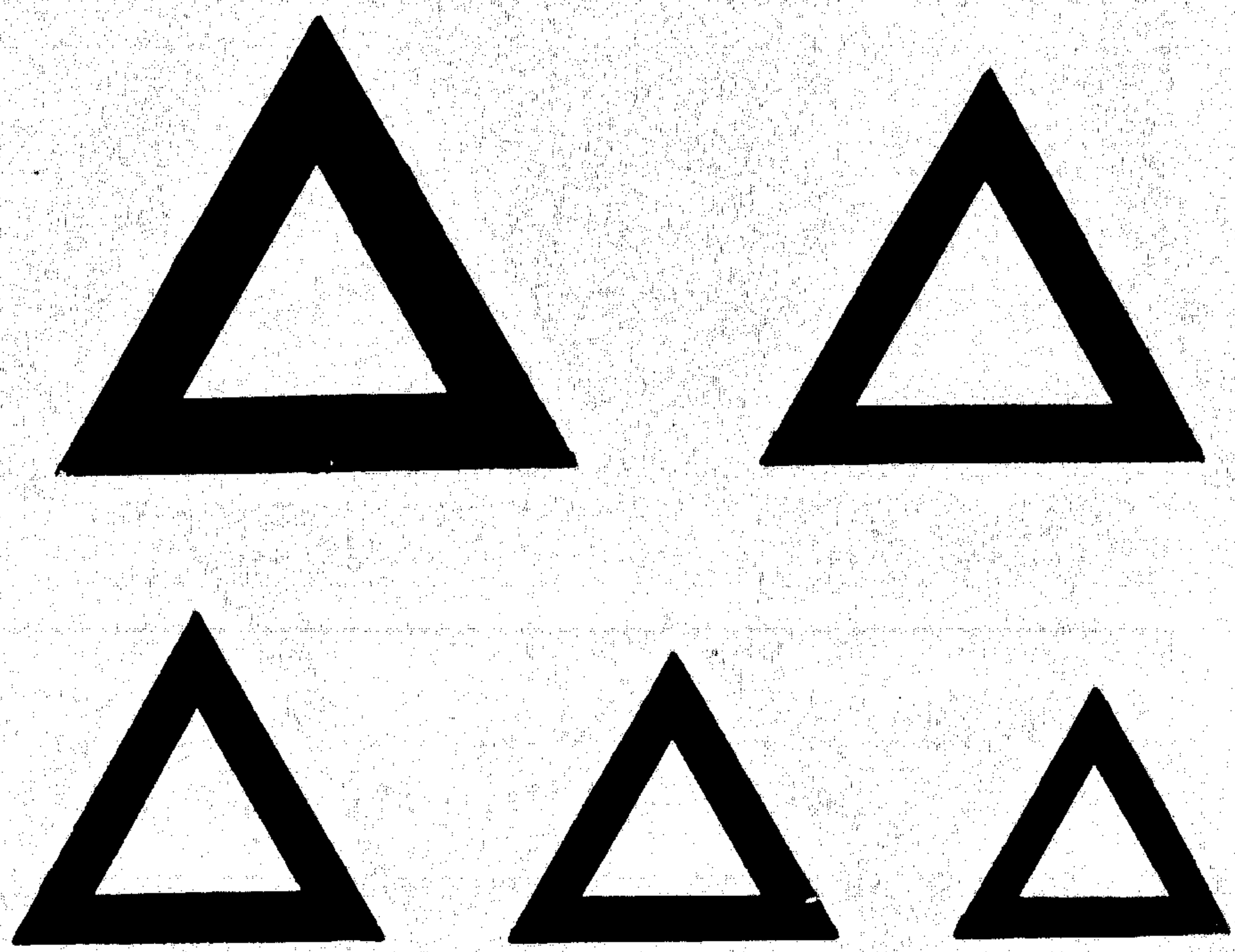


Fig. 140

El mismo razonamiento podemos hacer en toda la s... de los cinco triángulos. Y la distribución de las part... 1/4 acumulado en el centro v 1/4 extendido en torno... los límites exteriores, con 1/2 entre ambos, aparece m... armoniosa y decorativa.

Busquemos ahora otras combinaciones entre figuras diversas.

Consideremos el gran triángulo equilátero T1 dividido

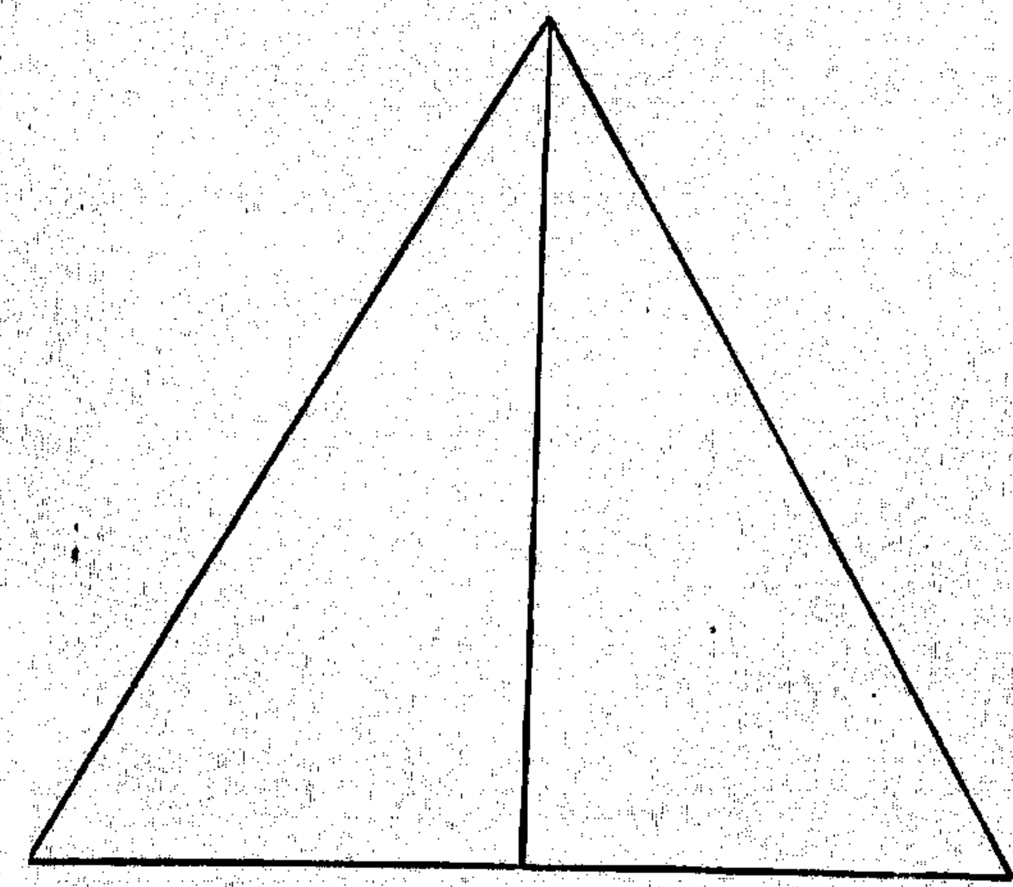


Fig. 141

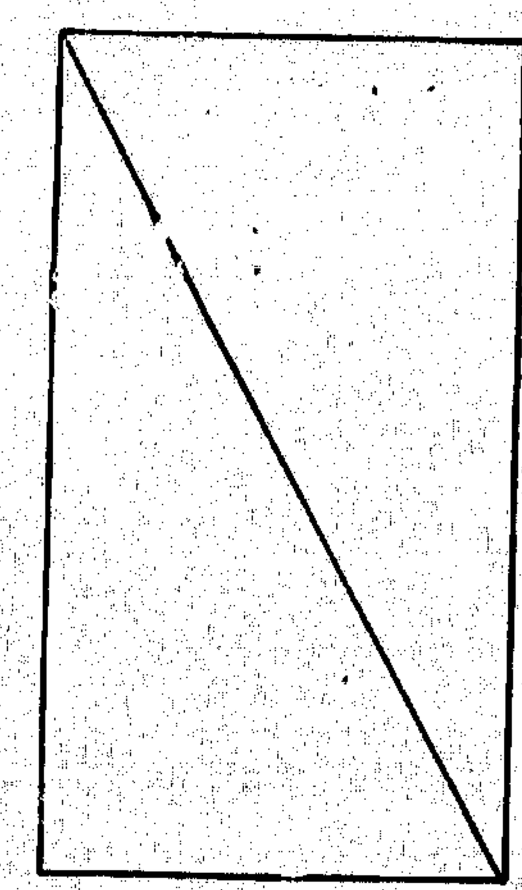


Fig. 142

en dos partes iguales en el sentido de su altura (fig. 141).

Si los dos triángulos resultantes se colocan (fig. 142) unidos por la hipotenusa, uno con la base abajo y el otro con la base encima, se obtiene un rectángulo.

Dicho rectángulo es equivalente al triángulo T1 y sus lados son: el mayor igual a la altura de T1 y el menor igual a la mitad del lado.

Este rectángulo tiene pues el lado mayor igual al lado del triángulo inscrito en el círculo C y está a su vez inscrito en el círculo porque tiene el lado menor igual al radio de aquél (fig. 143).

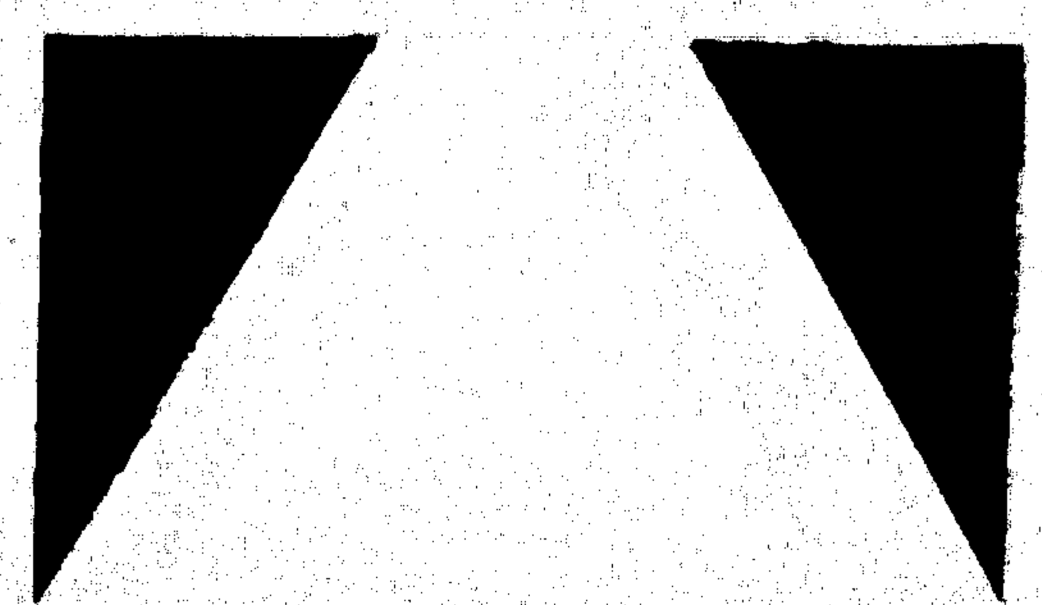


Fig. 143

Dicho rectángulo pues, tiene una forma particular y armónica por estar inscrito en un círculo cuyo radio es igual a uno de los lados.

Su forma es determinada.

Hasta ahora se consideraba, especialmente, un rectángulo cuyo lado mayor era doble del menor (mitad del cuadrado) y que se llamaba *rectángulo regular*.

Se puede llamar, en cambio, ***rectángulo estético*** el inscrito en el círculo.

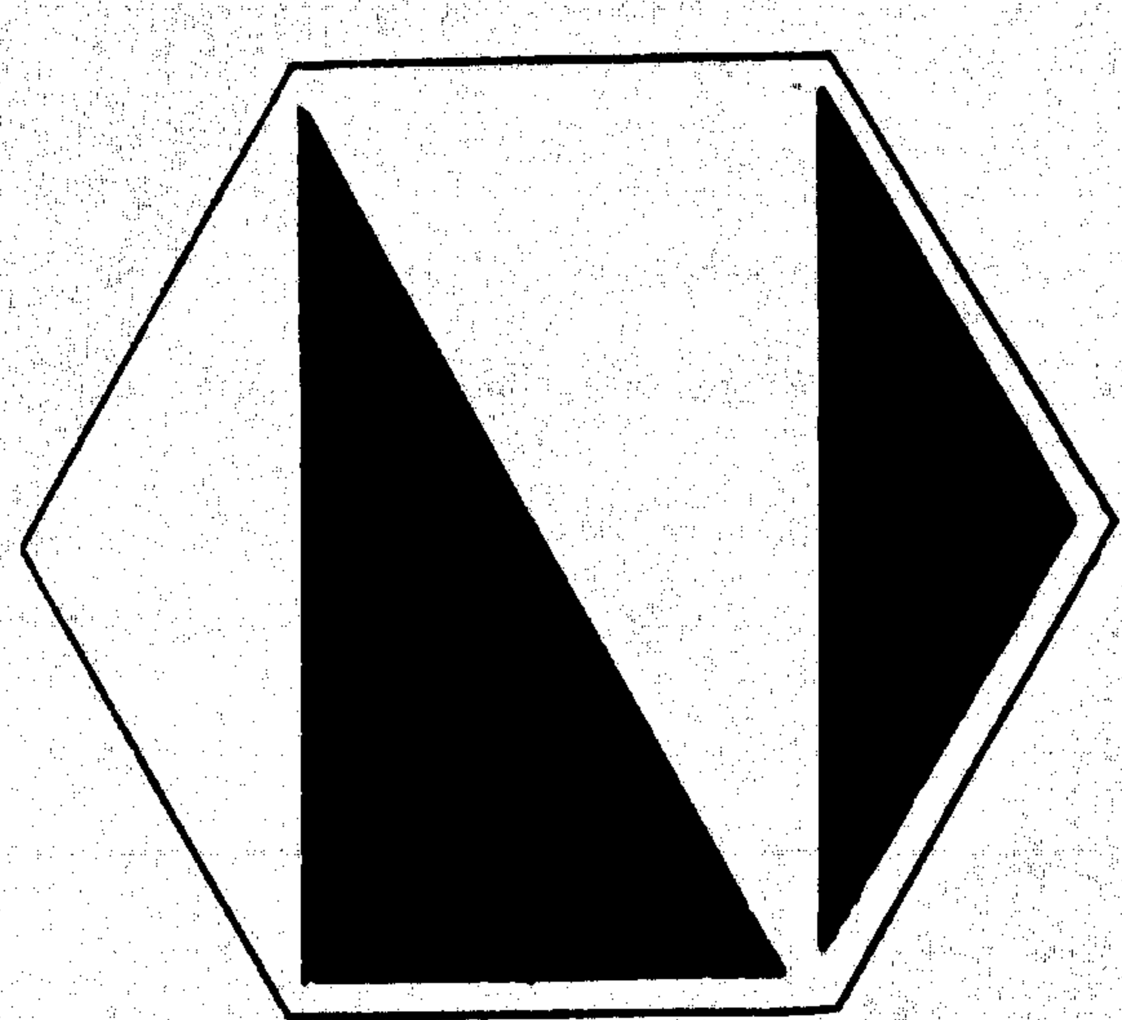


Fig. 144

Lo vemos frecuentemente en las decoraciones del Giotto.

Ahora bien, el lado menor siendo igual al radio lo es también al de un exágono inscrito.

Los dos triángulos obtusángulos que completan el exágono son una nueva aparición entre nuestras figuras. A cuando tengan la misma forma que aquellos que eran tercera parte del triángulo grande, son más pequeños p que su suma es equivalente a la mitad del triángulo ; p que el exágono inscrito Ei es vez y media T1 (fig. 144).

$$Ei = T1 + 1/2\ T1 \text{ de donde}$$
$$Ei - T1 = 1/2\ T1.$$

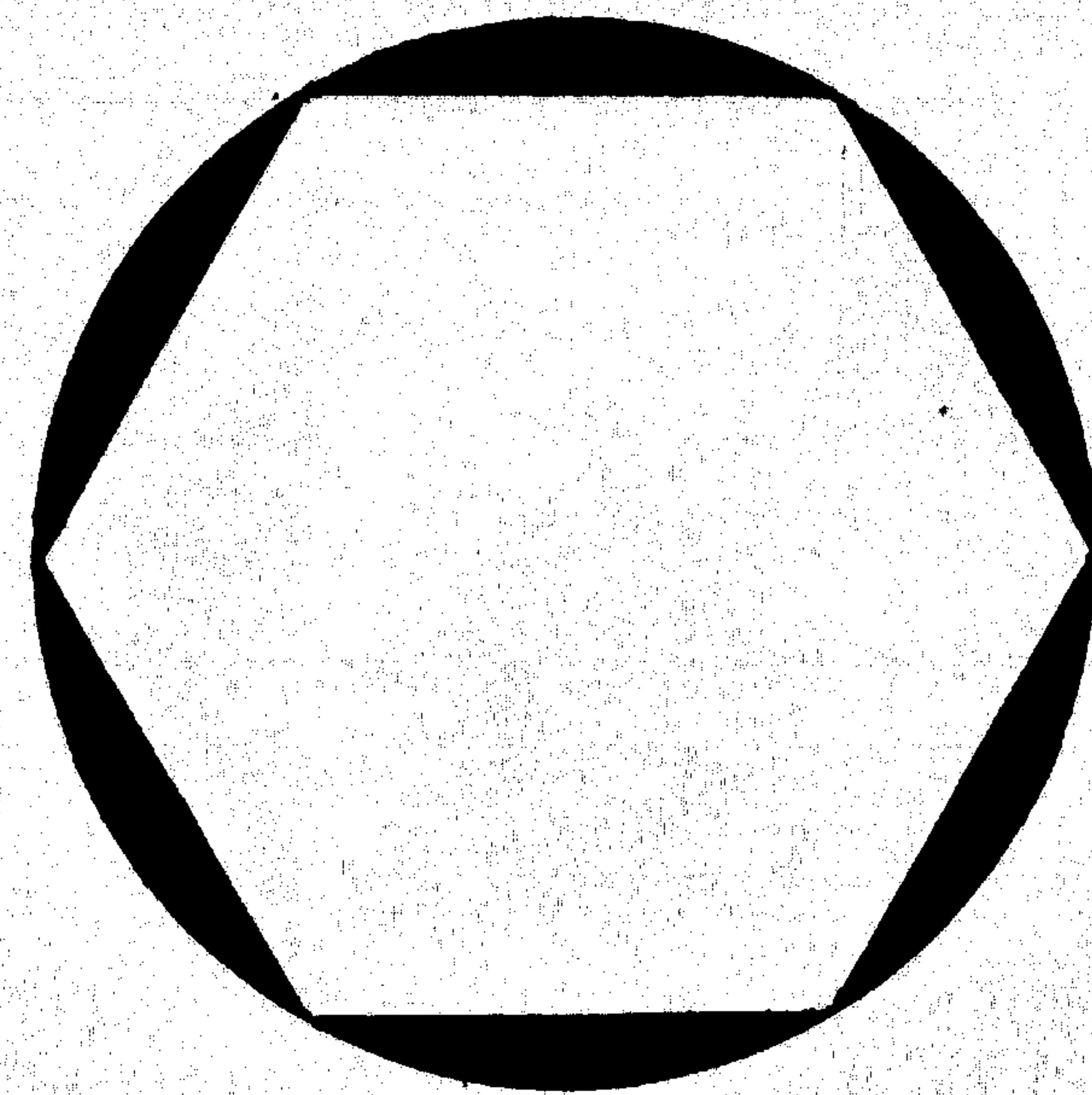


Fig. 145

El contorno del exágono inscrito y el valor que queda si se separa el rectángulo equivalente al triángulo grande T1 los pone de relieve la figura 145.

Los dos triángulos, transportados dentro del rectángulo, según su lado mayor dan la fig. 146.

Siendo igual este lado al lado mayor del rectángulo,

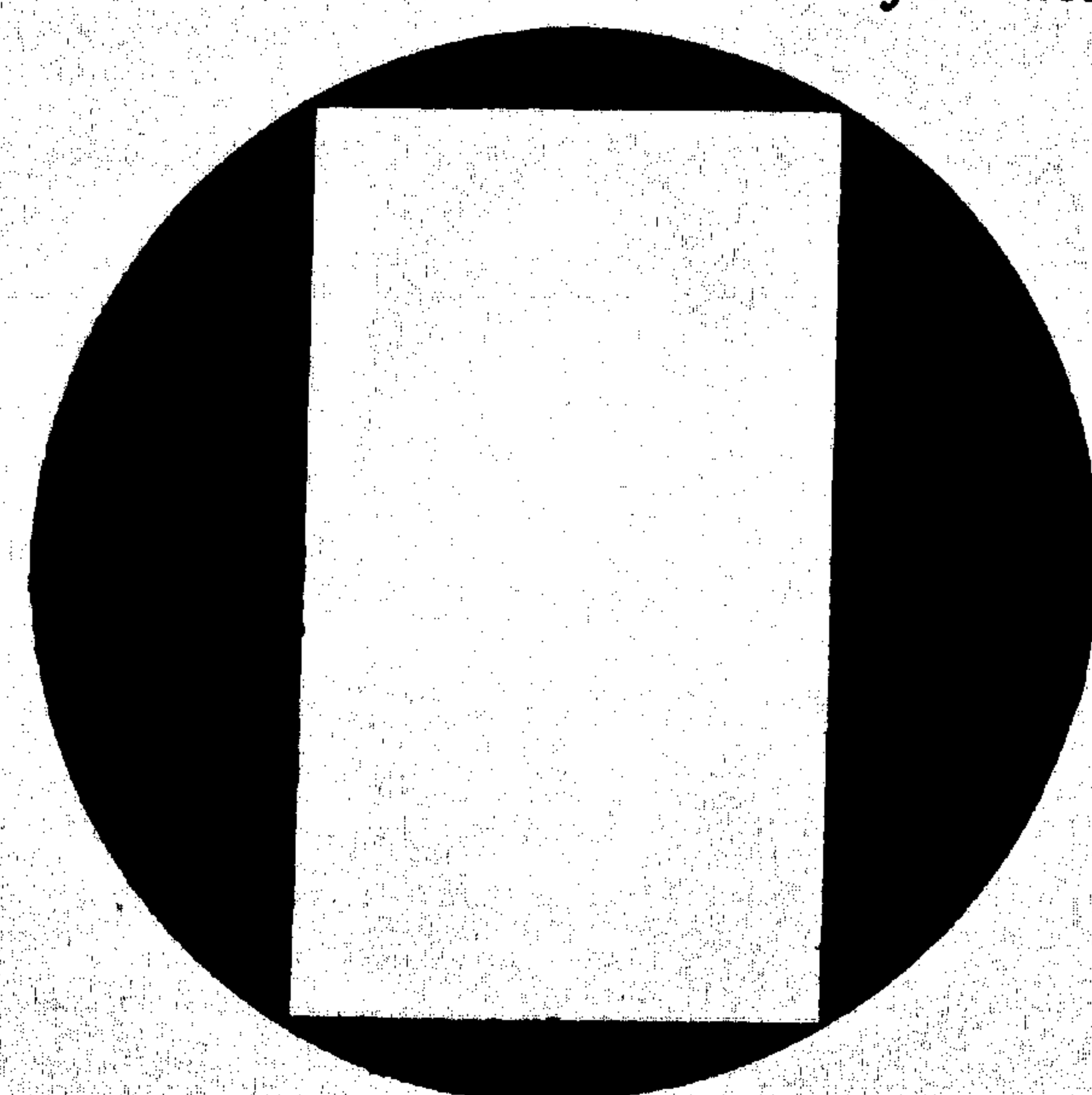


Fig. 146

está contenido en él y los dos triángulos forman un rombo inscrito en el rectángulo.

Tal correspondencia de proporciones da al rombo inscrito en el rectángulo una armonía perfecta y su conjunto se encuentra frecuentemente utilizado en las decoraciones del Giotto.

TEOREMAS ANALOGOS

Volvamos ahora a los dos triángulos que guardan entre sí la relación de valor de uno a tres cuartos y como relación entre los lados, la de tener uno como lado la altura del otro.

Como ya vimos, su diferencia es igual al triángulo equivalente a 1/4 del grande T1 (fig. 147).

Los tres triángulos equiláteros se pueden entonces colocar sobre la hipotenusa y los otros dos sobre los catetos.

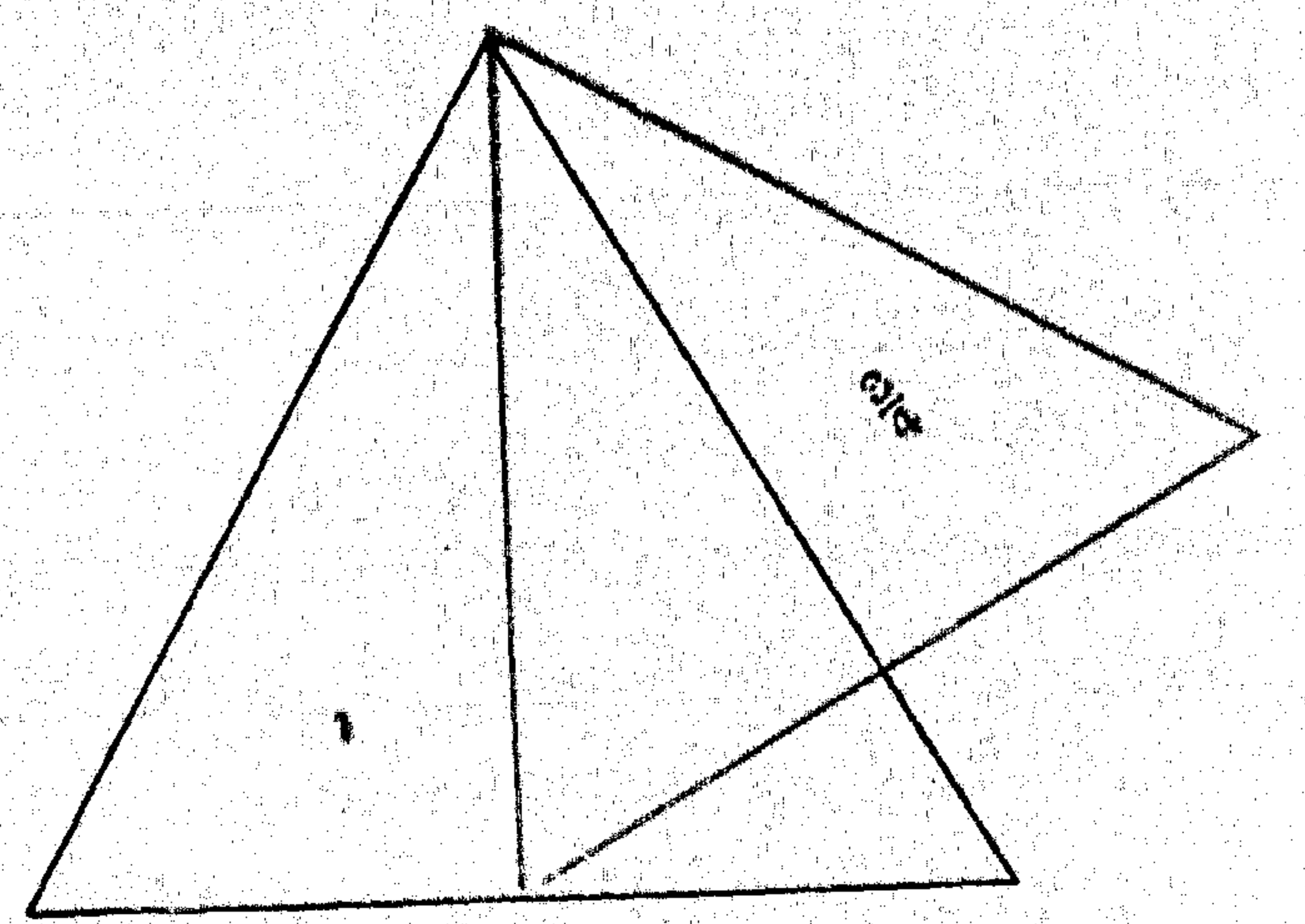


Fig. 147 (1

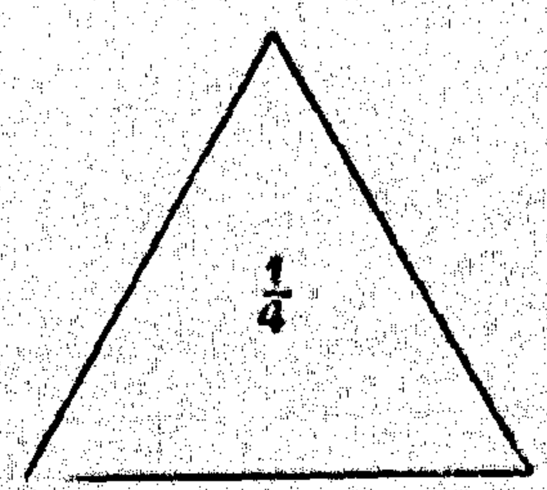


Fig. 147 (2

Hagamos ahora la suma gráficamente (fig. 149) y obtendremos 3/4 + 1/4 = 1.

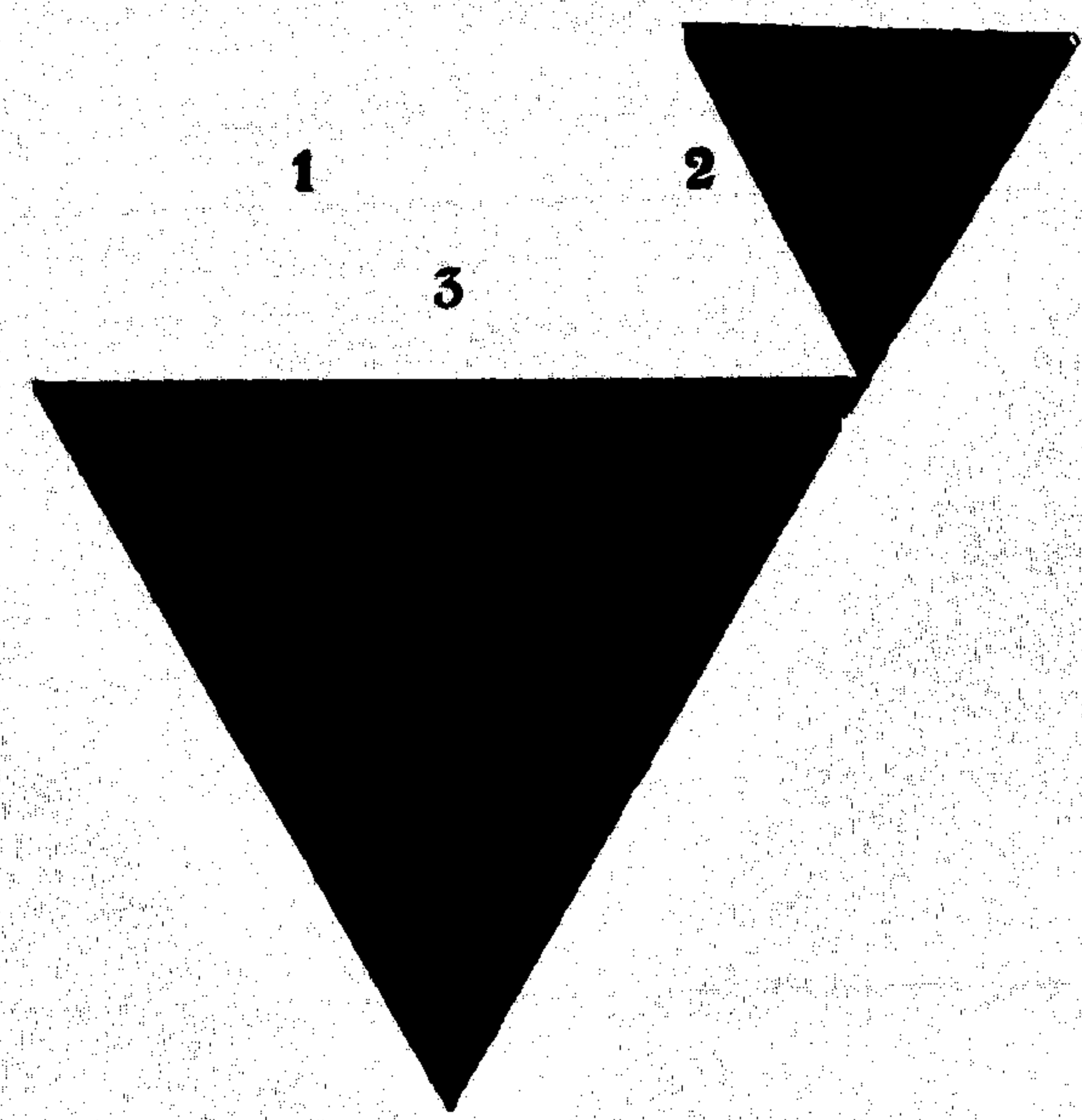


Fig. 148

1. Altura del triángulo grande. — 2. Mitad del lado del triángulo grande. — 3. Lado del triángulo grande

O también : El triángulo equilátero grande T1 es igual al triángulo 3/4 construído sobre la altura más el triángulo equilátero 1/4 construído sobre la mitad del lado.

Esta construcción combinada nos sugiere un teorema análogo al hallado para los cuadrados y que puede expresarse así :

TEOREMA. — El triángulo equilátero construído sobre la hipotenusa es equivalente a la suma de los triángulos equiláteros construídos sobre los catetos.

Este teorema se refiere, en el caso de los cuadrados, a un triángulo rectángulo isósceles.

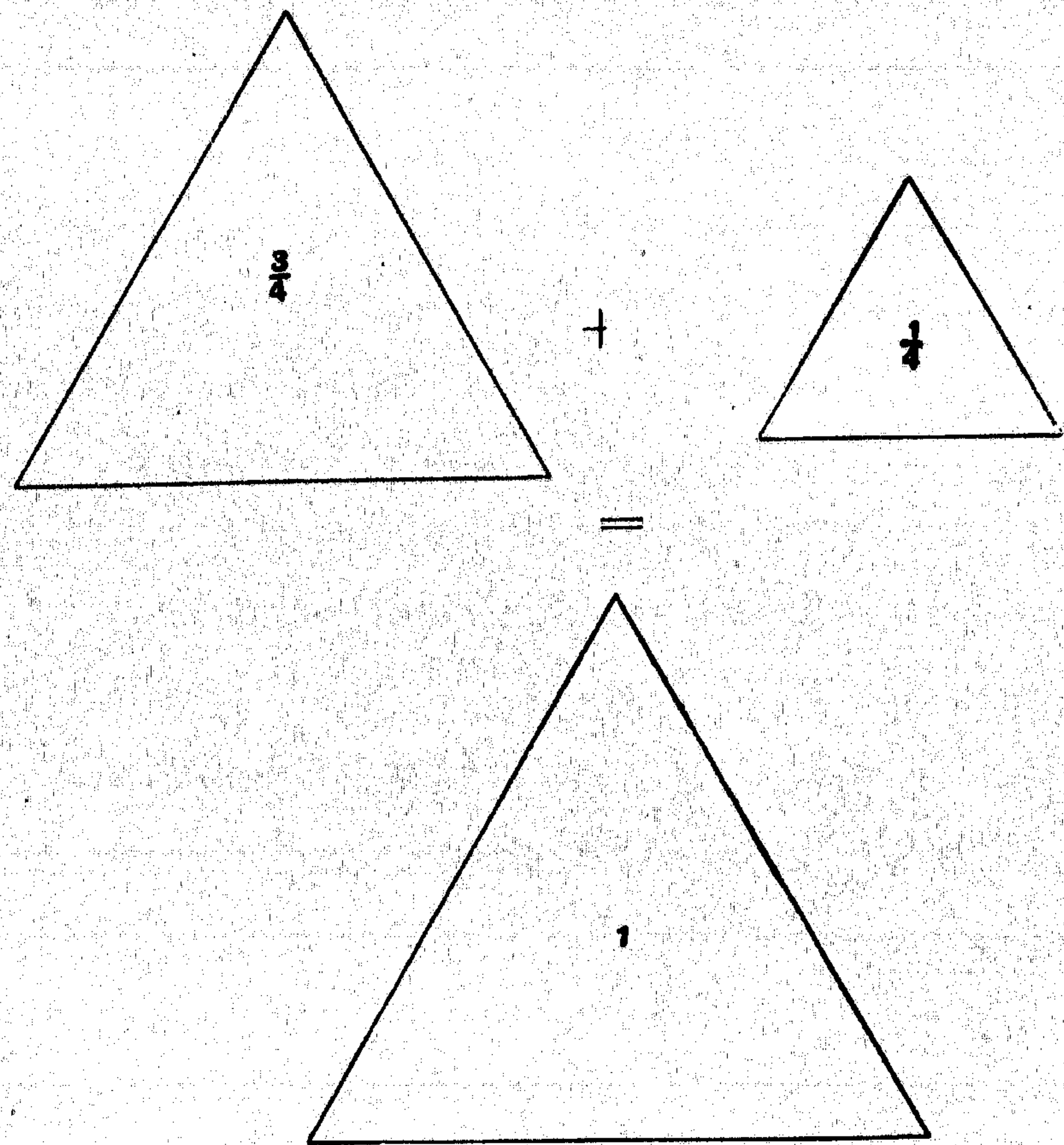


Fig. 149

Aquí se refiere a un triángulo rectángulo escaleno cuya hipotenusa es igual al doble de uno de los catetos.

Con mayor razón, la equivalencia puede aplicarse tratándose de triángulos al caso más sencillo, aquel en que los dos catetos del triángulo rectángulo son iguales.

En este caso, el triángulo equilátero construído sobre la hipotenusa es igual a dos veces el triángulo equilátero construídos sobre un cateto. Así pues, el triángulo equilátero construído sobre el cateto es igual a la mitad del triángulo construído sobre la hipotenusa y se ha encontrado un modo práctico de hallar un triángulo equilátero que sea la mitad de otro (fig. 150).

Podemos pues ahora construír una serie en torno a un punto central como se ha hecho con el cuadrado y con los

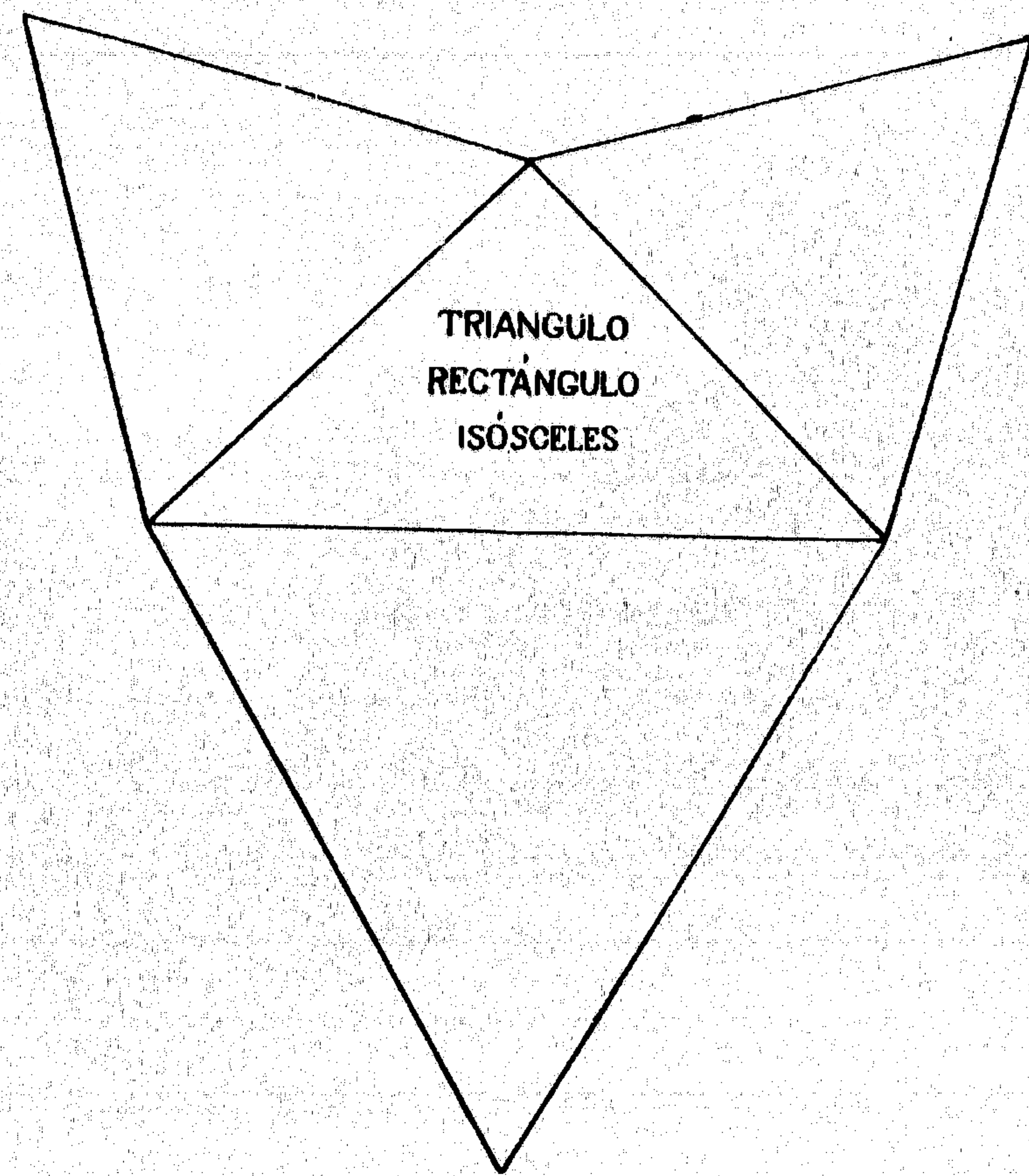


Fig. 150

triángulos rectángulos isósceles que eran la mitad de los cuadrados sucesivos.

Aquí se parte de una figura que representa los triángulos equiláteros construídos sobre la 4.ª parte del cuadrado dividido por la diagonal.

La cuarta parte del cuadrado, así obtenido, es un triángulo isósceles que tiene la hipotenusa igual al lado del cuadrado.

El triángulo equilátero construído sobre ella es pues el triángulo grande T1.

El triángulo construído sobre el cateto es equivalente a su mitad $\frac{T1}{2}$

Y como dicho cateto es a su vez la hipotenusa de otro triángulo rectángulo isósceles (1/8 del cuadrado) se puede hallar otro triángulo equilátero mitad del $\frac{T1}{2}$ es decir, que sea 1/4 del triángulo grande.

Siendo muy conocido este triángulo se puede comprobar si corresponde verdaderamente al $\frac{T1}{4}$ y se observa que, efectivamente, así sucede.

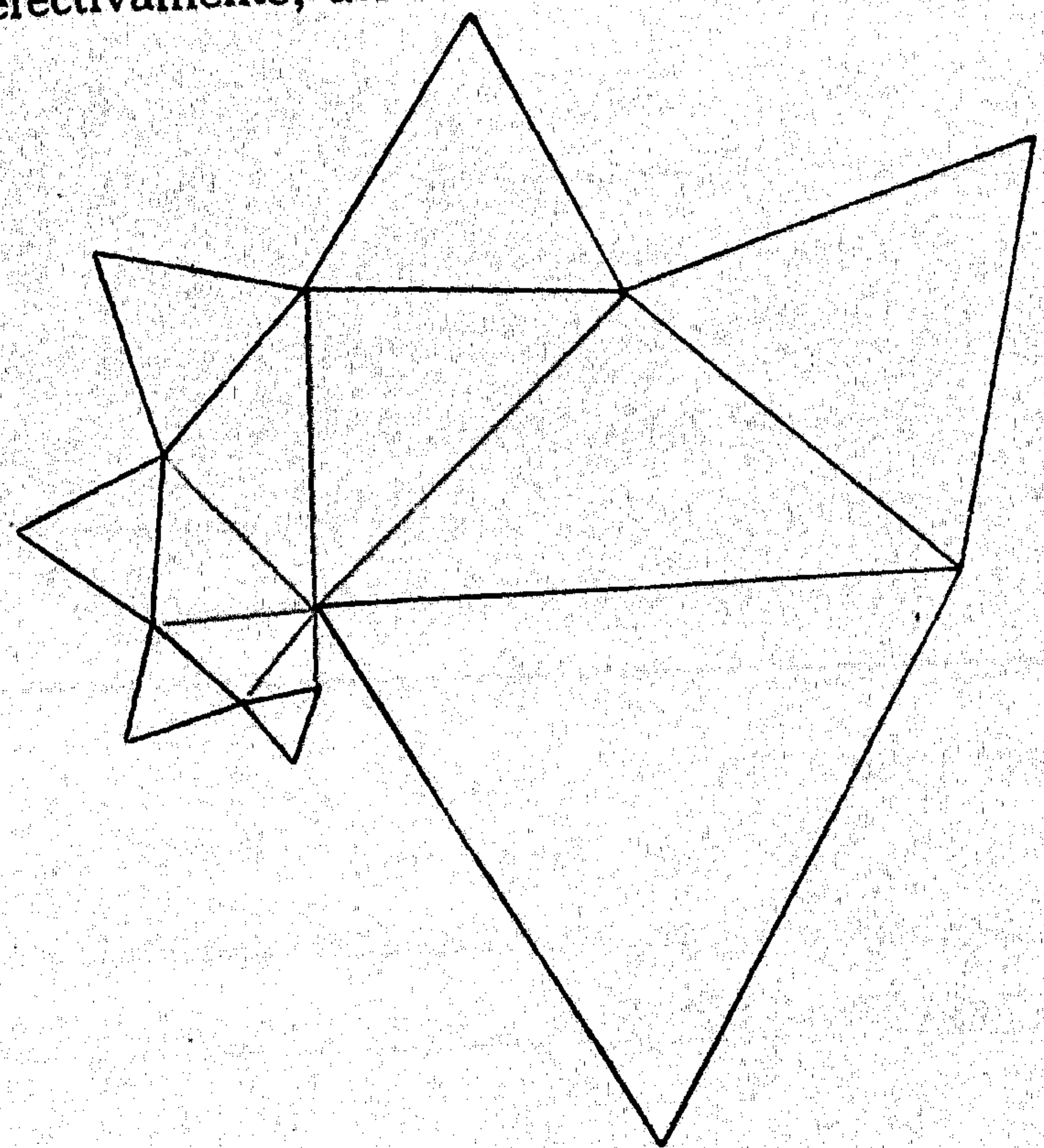


Fig. 151

Está pues probada la generalidad del teorema por lo que se refiere a los triángulos equiláteros.

Se puede ahora construír el ciclo, sabiendo que todo triángulo equilátero construído sobre los catetos sucesivos es mitad del precedente (fig. 151).

Y con ello se ha encontrado una estrecha relación entre los cuadrados y los triángulos equiláteros, que tienen el mismo lado.

V

EL CIRCULO

EL CIRCULO

También en el círculo hay que distinguir las líneas y el espacio de las superficies.

Las líneas limitan el espacio.

El círculo (espacio) está limitado por una línea (circunferencia).

La porción de círculo que llega al centro y está limitada por dos radios y por un trozo de circunferencia interpuesto entre ambos se llama *sector*.

En cambio, si un trozo de círculo se separa por una línea que no pasa por el centro, dicho trozo se llama *segmento*.

En este caso la línea que va de un punto a otro, cortando la circunferencia se llama *cuerda* ; mientras el trozo de circunferencia que va de un extremo a otro de la cuerda se llama arco.

Si una línea que atraviesa el círculo sin pasar por el centro se prolonga fuera de la circunferencia se llama *secante*.

Una línea, en cambio, que toque en un punto a la circunferencia y el resto esté fuera, es decir, sin cortarla, se llama *tangente*.

El punto que está en el interior del círculo y dista igualmente de todos los puntos de la circunferencia se llama *centro* (figs. 152, 153 y 154).

También las circunferencias que se cortan se llaman entre sí, *secantes*.

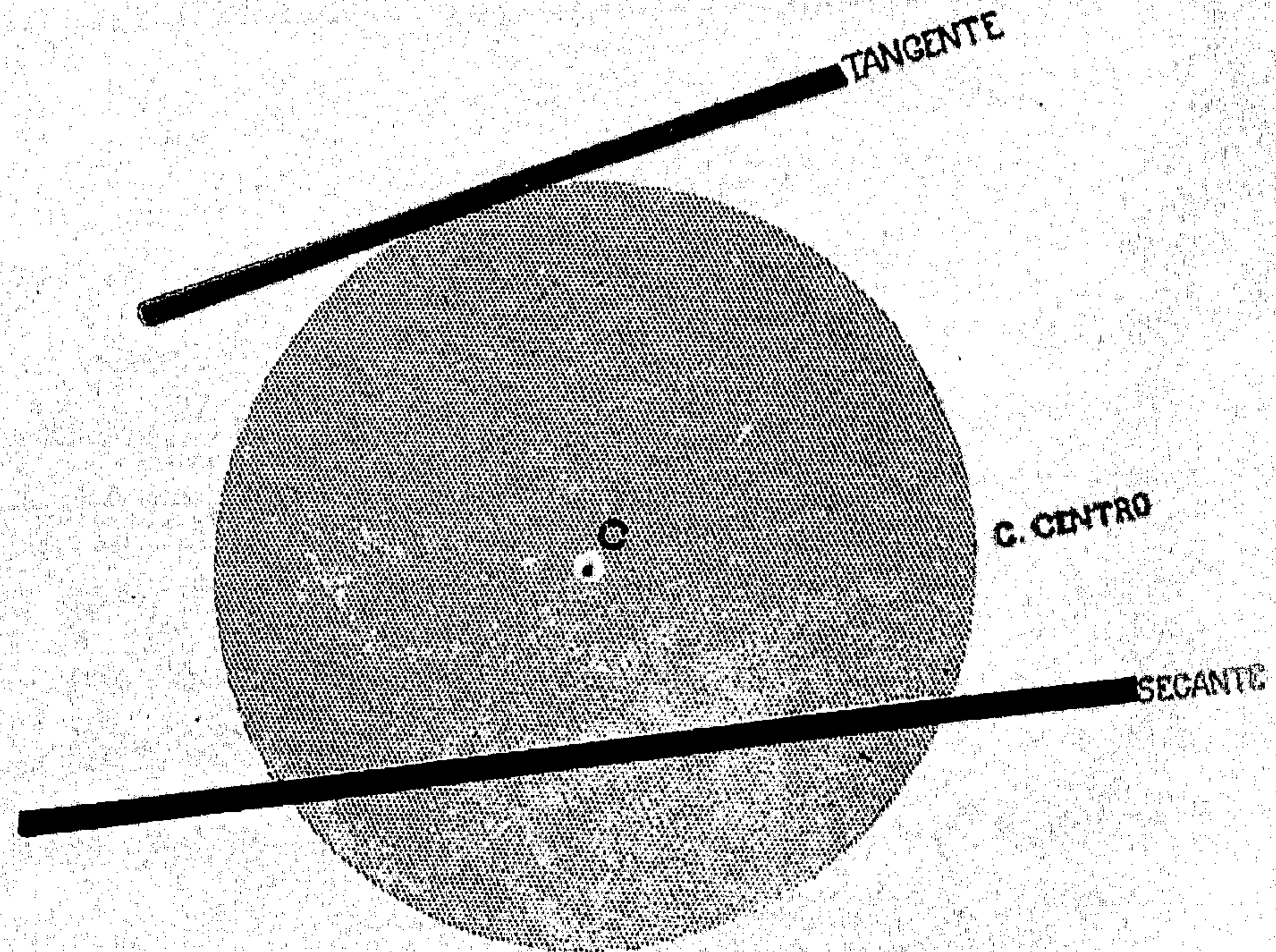


Fig. 152

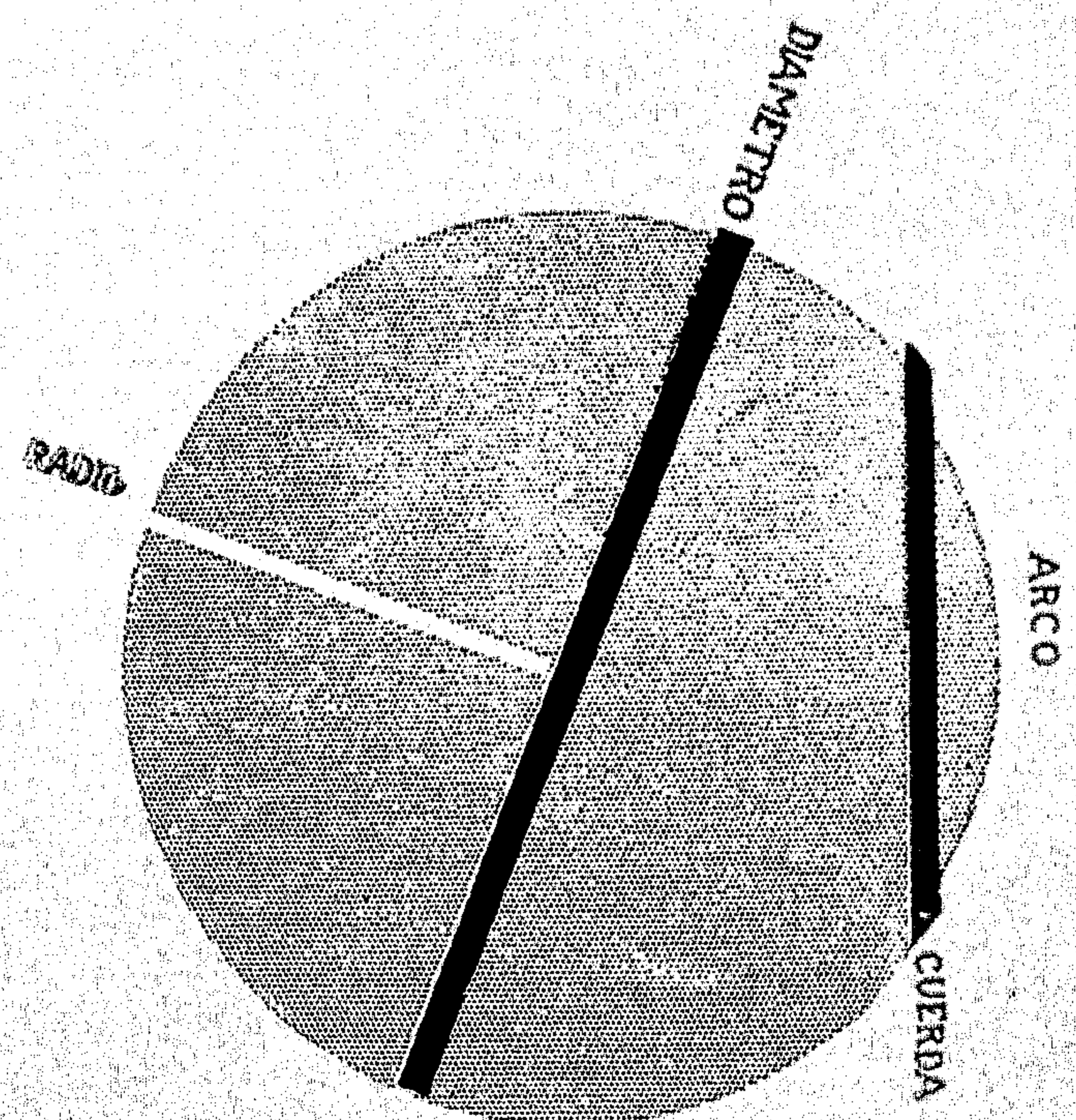


Fig. 153

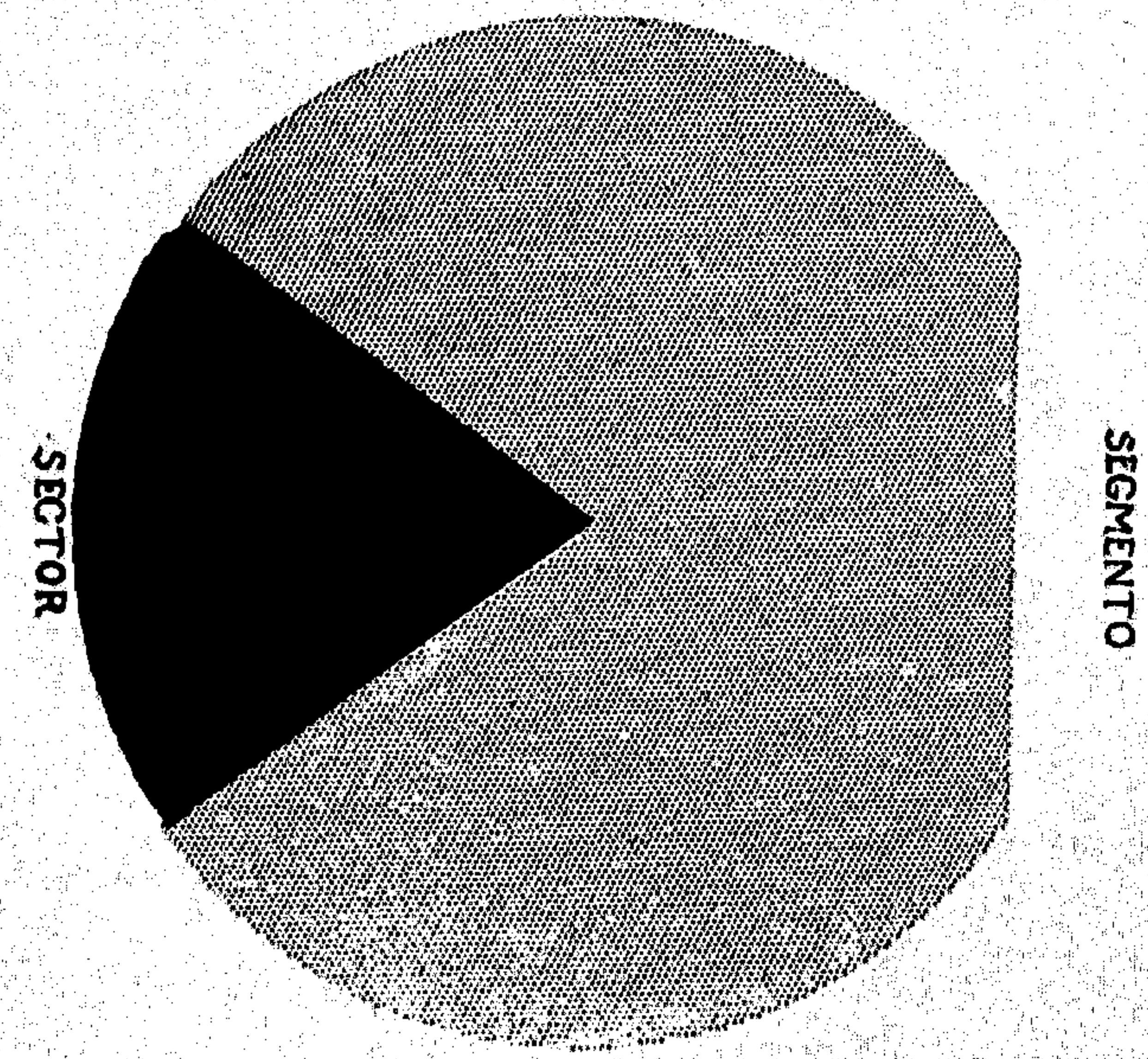


Fig. 154

Mientras dos circunferencias, que solamente tienen un punto de contacto, se llaman tangentes (fig. 155).

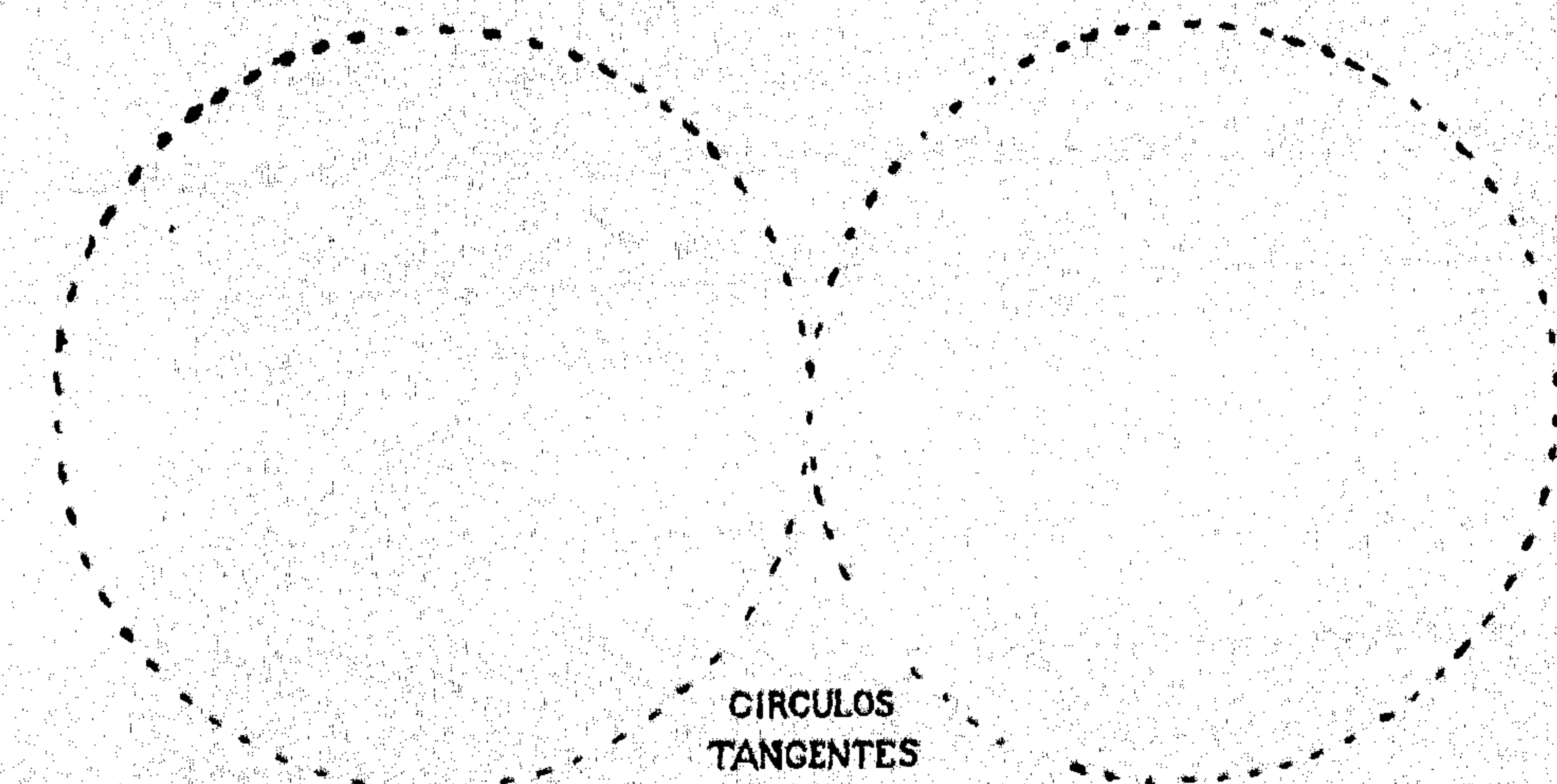


Fig. 155 (1

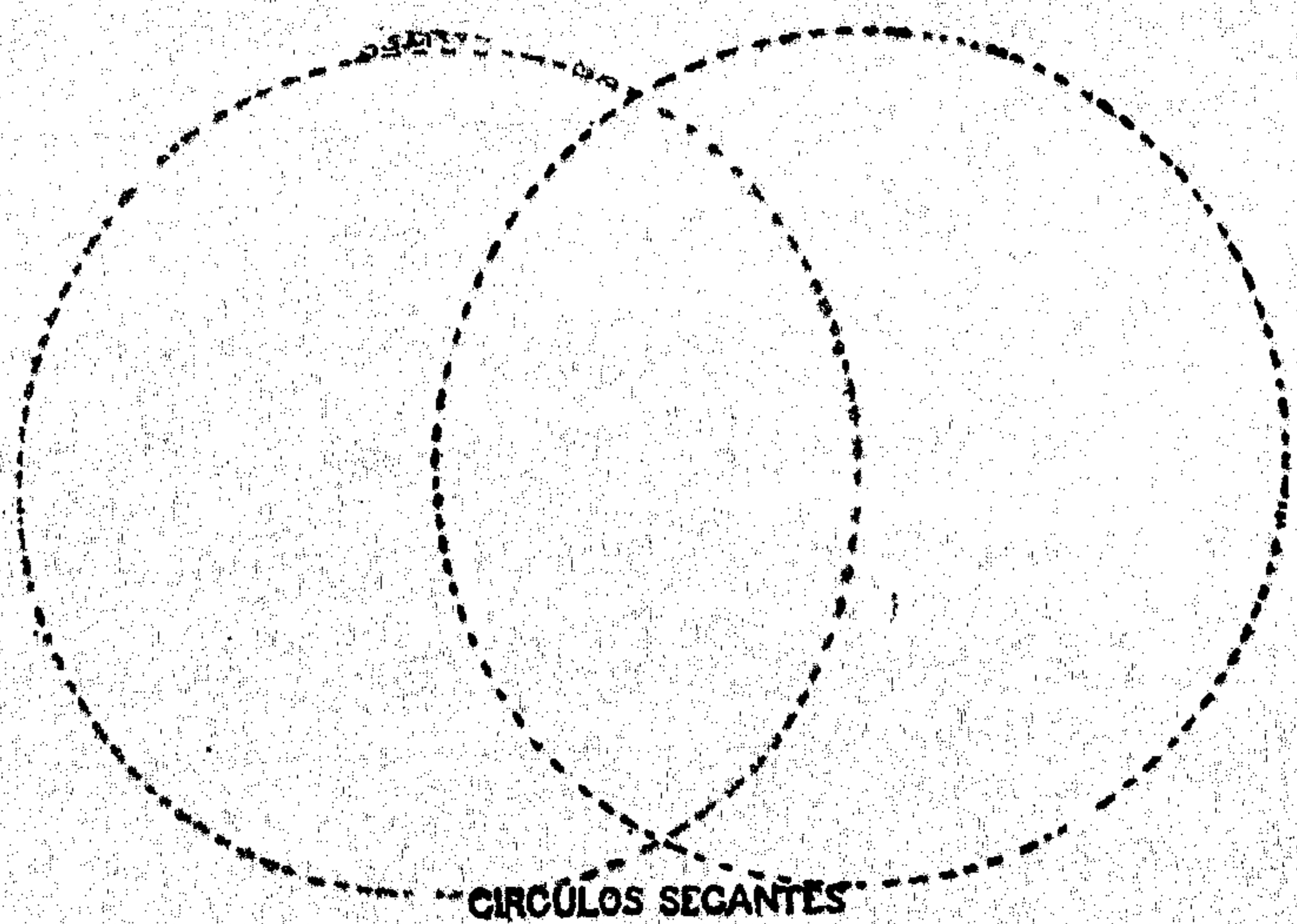


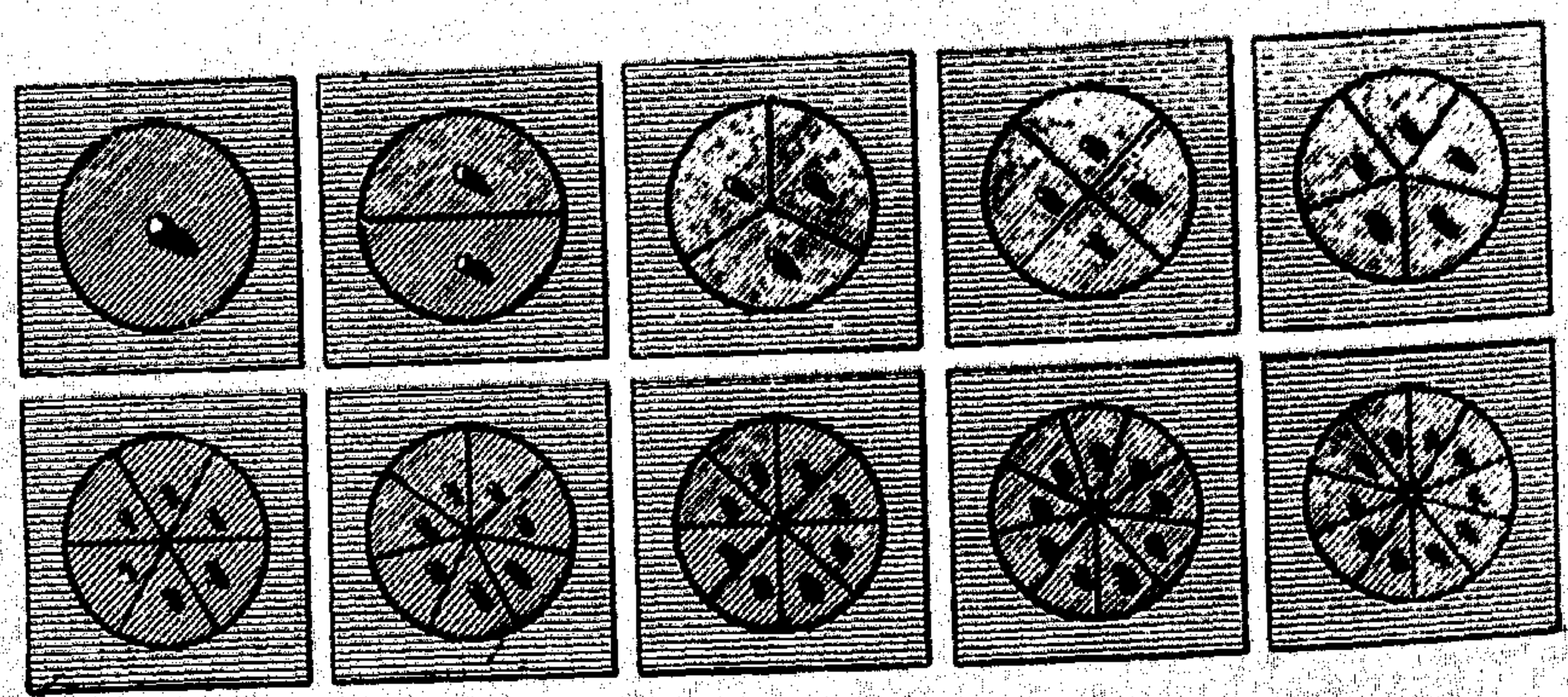
Fig. 155 (2

EL MATERIAL

En nuestro material de hierro la parte relativa al círcu lo está constituída principalmente por el círculo subdivi dido en partes iguales.

Existen además muchos círculos menores que son circu los inscritos en varias figuras del sistema.

Los círculos subdivididos están distribuídos en diez marcos iguales (el círculo del fondo tiene siempre 10 cm. de diámetro) ; en estos hay un círculo entero (1) y despu sucesivamente el círculo dividido en 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10 partes iguales por radios que parten del centro.



Los sectores del círculo, resultantes de dichas divisiones, son objetos de hierro exactamente construídos y manejables por medio de un botón de presión.

Estos representan 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10 del círculo.

Uniendo los extremos de los radios se obtendrían otros tantos polígonos inscritos en el círculo ; triángulo, cuadrado, pentágono, exágono, heptágono, octógono, eneágono y decágono.

Los lados de los polígonos son siempre más numerosos y más cortos. Se podría imaginar un polígono de cien lados en el que apenas se distinguirían estos y su dirección. En efecto, los ángulos serían cada vez más obtusos hasta no poderse llegar a percibir sus lados.

Si después, los lados en vez de ser ciento, fueran mil, y aun más, se llegaría fácilmente a una línea continua.

Así precisamente puede considerarse el círculo con respecto a los polígonos ; una figura cerrada por un número infinito de lados tan pequeños (puntos) que constituyen una línea contínua.

Para indicar las subdivisiones del círculo, de modo exacto y poderlas señalar por medio de números, se estableció el dividirlo en 360 partes iguales que se llaman grados.

Por esto, el círculo resulta, no solamente una figura geométrica, sino un módulo o medida.

Consideremos los radios que limitan un sector del círculo, esto se puede evaluar exactamente en grados.

Como los radios forman un ángulo y en el círculo entran cuatro ángulos rectos en torno al centro, así todo ángulo posible entre los lados que pudieran superponerse a dos radios de un círculo, estando el círculo dividido en grados, puede ser medido (figs. 156 y 157).

Poniendo el vértice del ángulo sobre el centro de un círculo los dos lados encierran una sección de la circunfe-

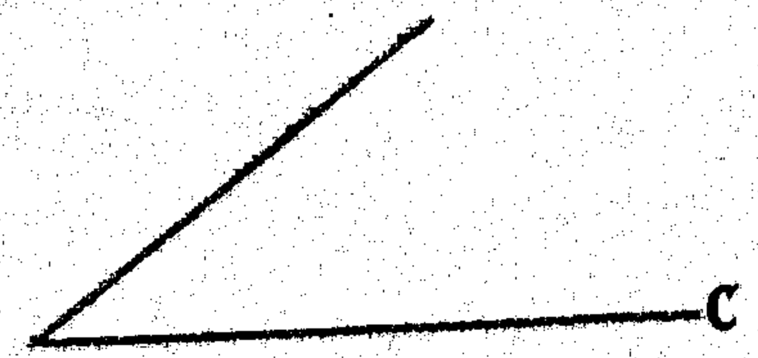


Fig. 156

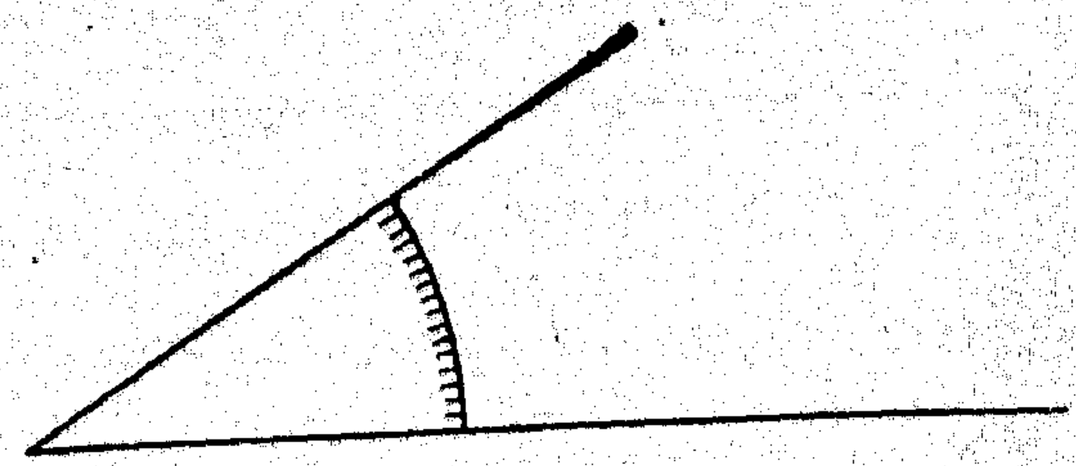


Fig. 157

rencia y por ello un determinado número de grados, lo que permite tener una *medida* del ángulo (fig. 158).

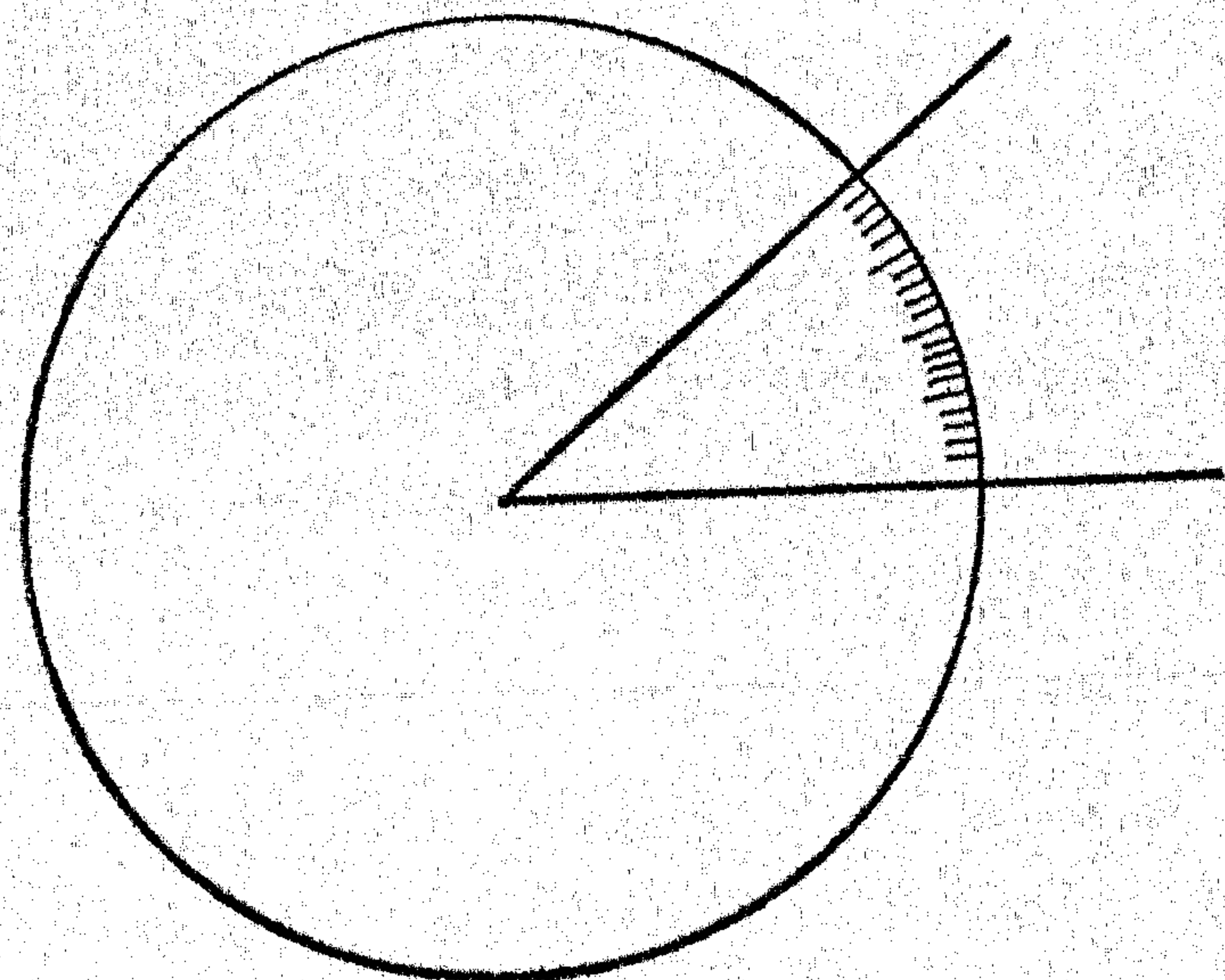


Fig. 158

Las subdivisiones en diverso número de grados permite evaluar exactamente la porción de círculo comprendida entre dos radios y distinguirla con un número. Ahora bien, la mitad del círculo mide 180° y el ángulo recto, que es la cuarta parte de aquel 90° (fig. 159). Un ángulo agudo mide menos de 90° y un ángulo obtuso más de 90°.

La suma de dos ángulos rectos, que corresponde a un semicírculo, mide 180°.

Para medir los ángulos se utiliza un instrumento llamado semicírculo graduado o goniómetro, el cual consiste en un semicírculo subdividido en 180 partes (fig. 160).

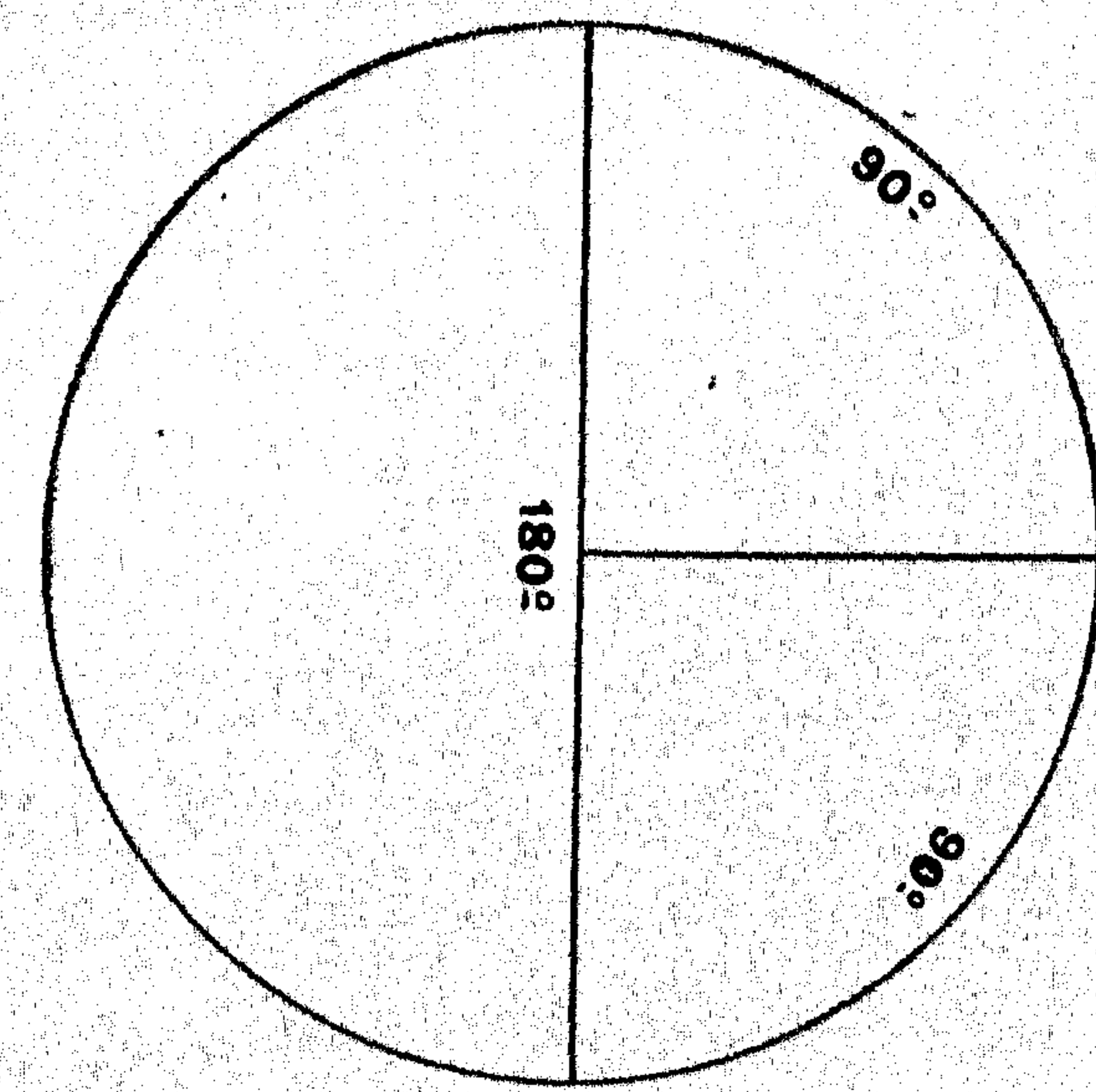


Fig. 159

Sobre la línea base que representa un diámetro, están en los extremos los números 0 y 180. Para medir un ángulo es necesario que uno de sus lados se superponga al radio que va desde el centro c al cero.

El otro lado cae entonces sobre una de las subdivisiones y leyendo los grados se tiene la medida del ángulo.

El goniómetro o semicírculo graduado ha de estar cons-

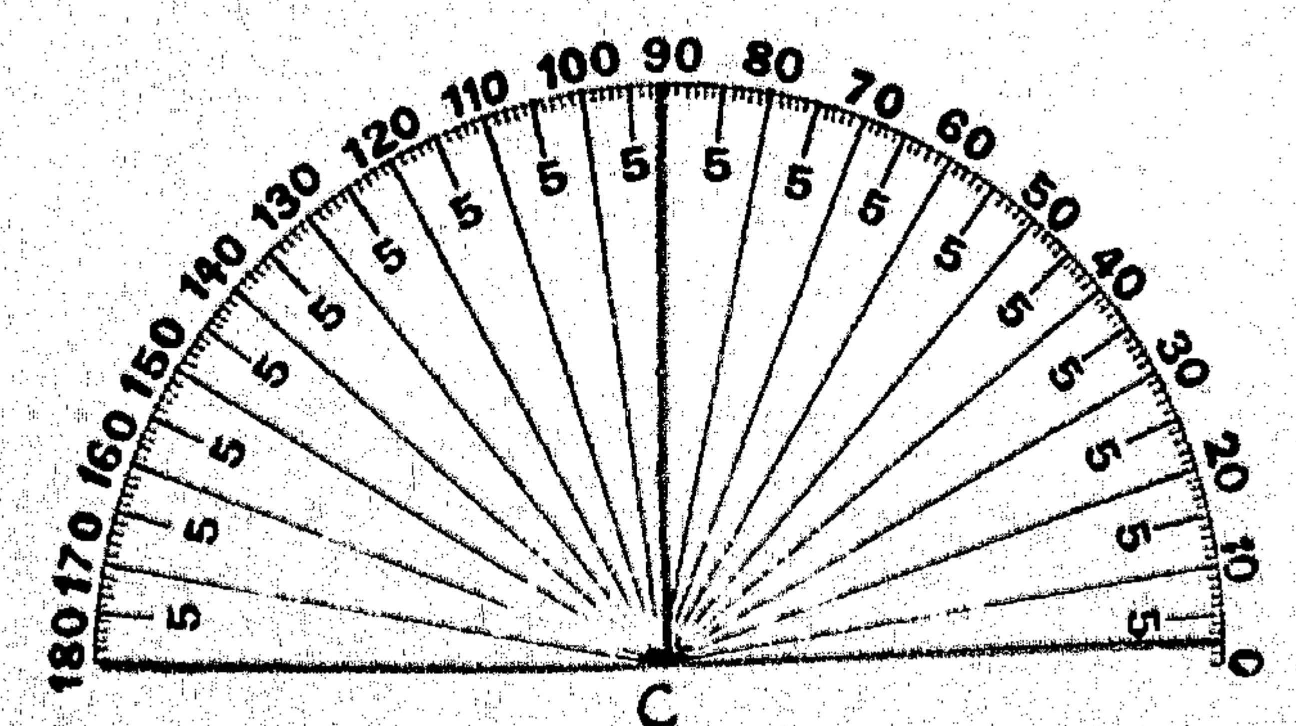


Fig. 160

truído de una materia transparente para poderlo superponer a los ángulos que se quieren medir. Cuando no es de sustancia transparente consta de una faja que es la semicircunferencia graduada y está vacío en el centro para que se pueda ver la dirección de los lados de los ángulos cuya medida se desea.

Nosotros, sin embargo, comenzamos el estudio de los ángulos midiendo estos en *objetos desplazables* en vez de dibujos. Entonces el objeto se puede superponer al goniómetro y éste puede estar constituído por un simple trazado de líneas, consistente en un círculo que lleve marcados los grados sobre la circunferencia y varios radios.

En efecto, el goniómetro puede estar construído como un círculo completo que lleva señalados los 360°.

Entonces el diámetro marca en sus extremos 0° y 180° y las subdivisiones son de 0° a 180° en la parte superior y de 180° a 360° en la inferior.

En el material tenemos dos goniómetros; un simple cartón con el círculo dividido en 360° y un marco igual a los círculos de hierro. El marco lleva las subdivisiones en 360° sobre una faja circular de acero.

En el fondo existe un radio que marca el nivel del cero y los segmentos pueden ser colocados encima con un lado sobre la línea del cero para ser medidos.

Ahora bien; el círculo dividido en dos partes no es un ángulo porque está señalado por una línea recta, pero puede considerarse como la suma de dos ángulos rectos; la mitad del círculo, pues mide 180 (fig. 161).

La tercera parte del círculo mide un ángulo de 120° (360 : 3 = 120) y es un ángulo obtuso (mayor que un ángulo recto) (fig. 162).

La cuarta parte del círculo mide 90° y representa el ángulo recto cuyos lados se encuentran perpendicularmente en el centro de aquél (fig. 163).

Todos los otros ángulos formados por partes menores

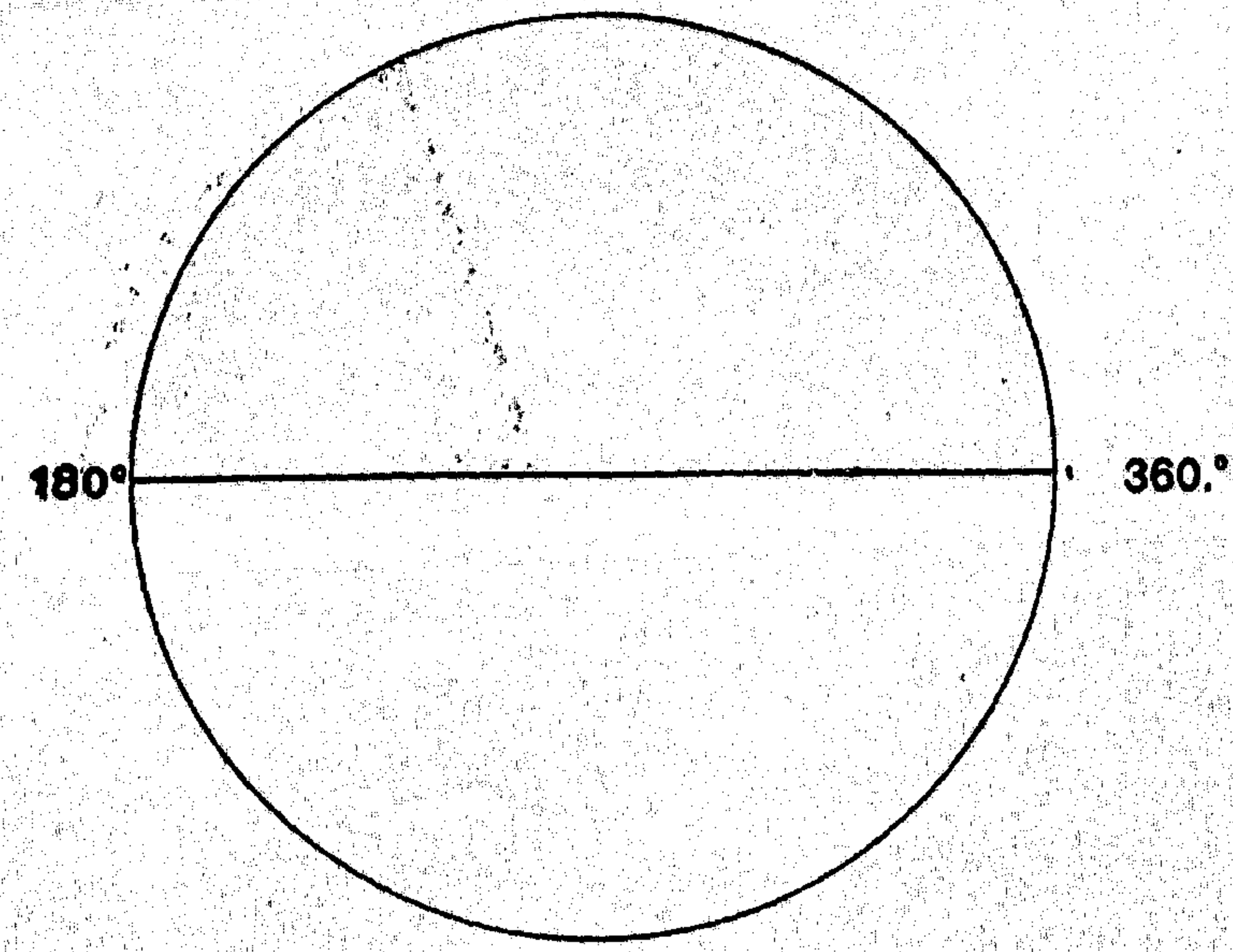


Fig. 161
$^1/_2$ círculo mide 180°

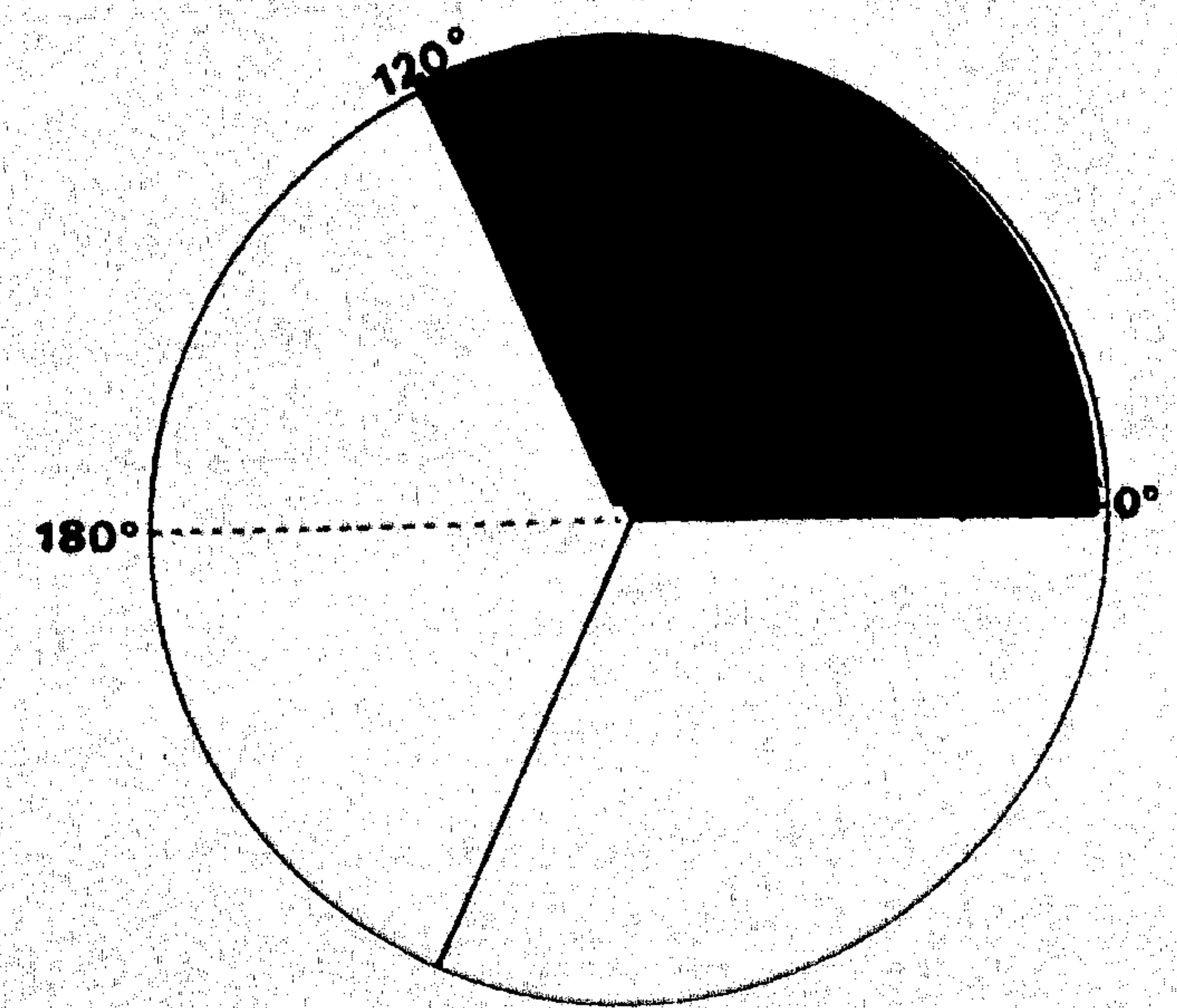
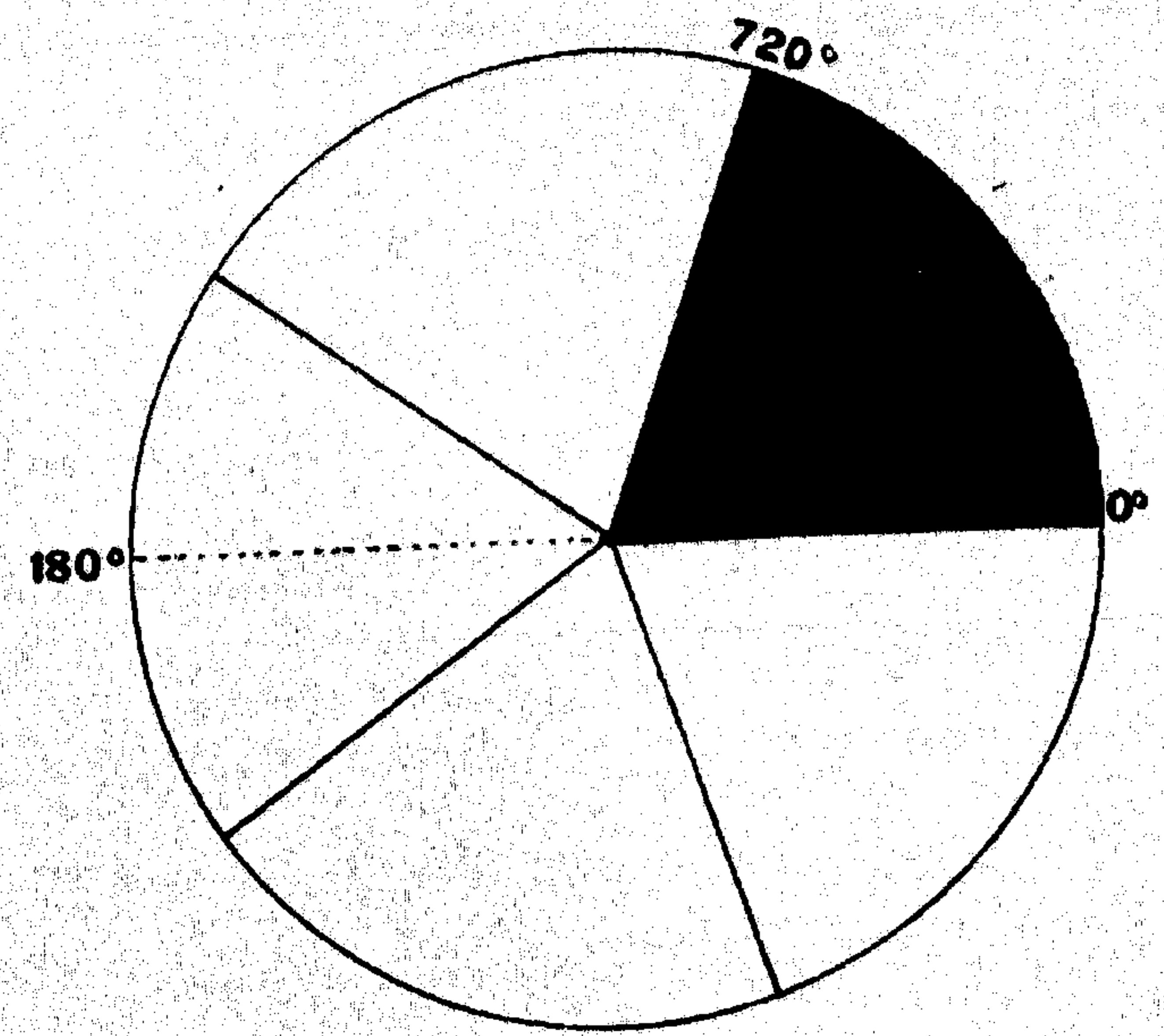


Fig. 162
$^1/_3$ de círculo mide 120°



Filg. 163
$^1/_4$ de círculo mide 90°

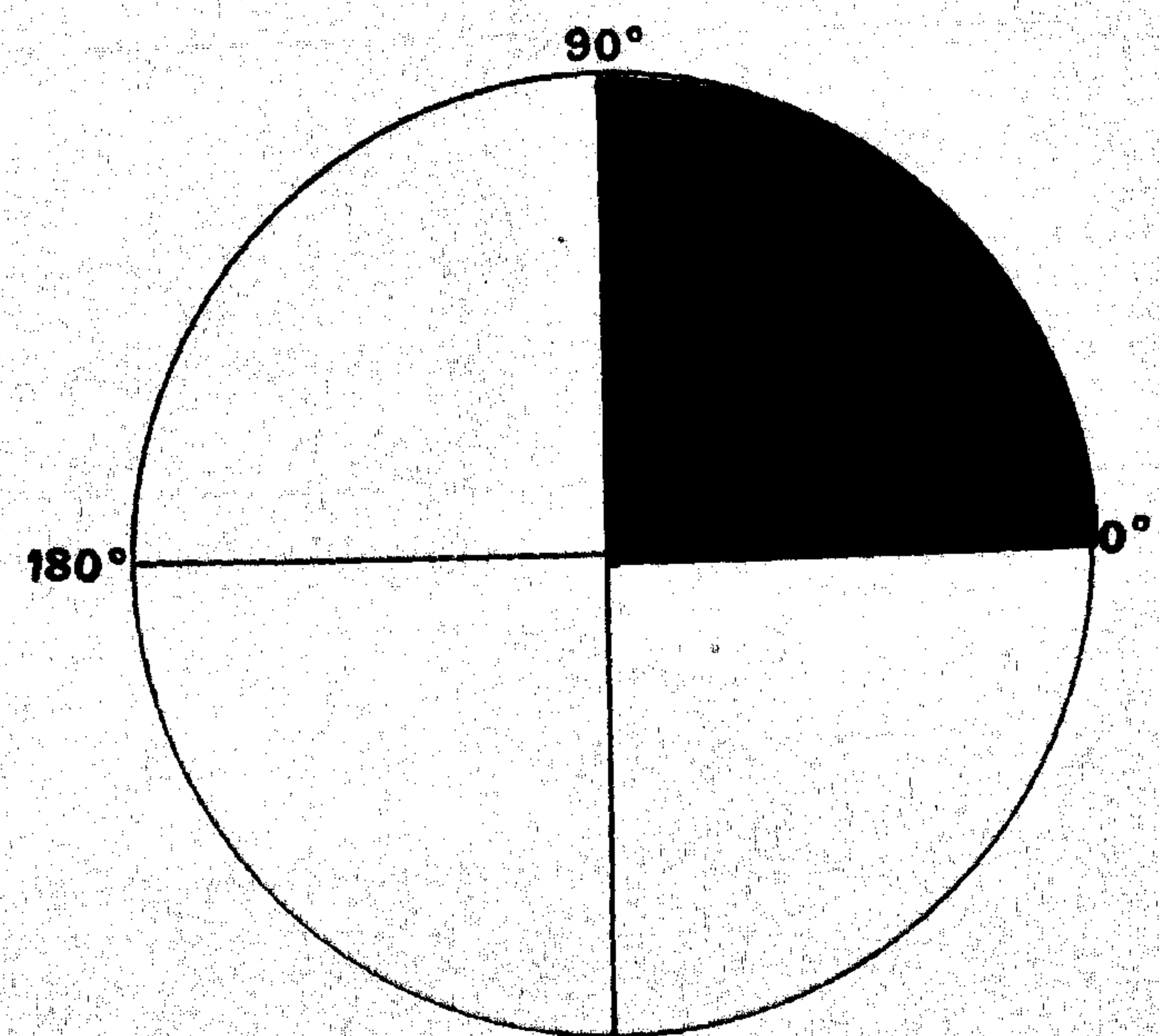


Fig. 164
$^1/_5$ de círculo mide 72°

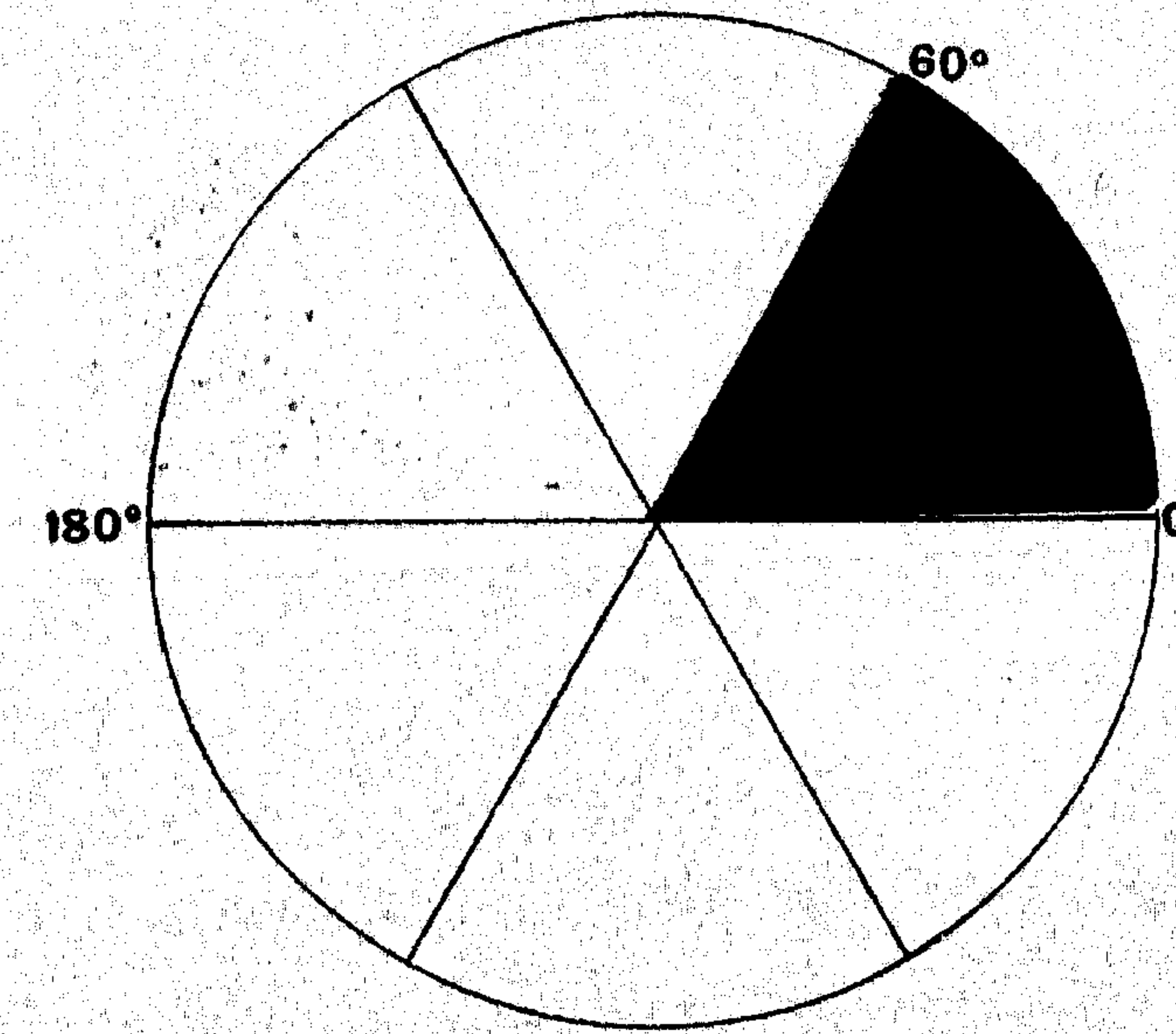


Fig. 165
$^1/_6$ de círculo mide 60°

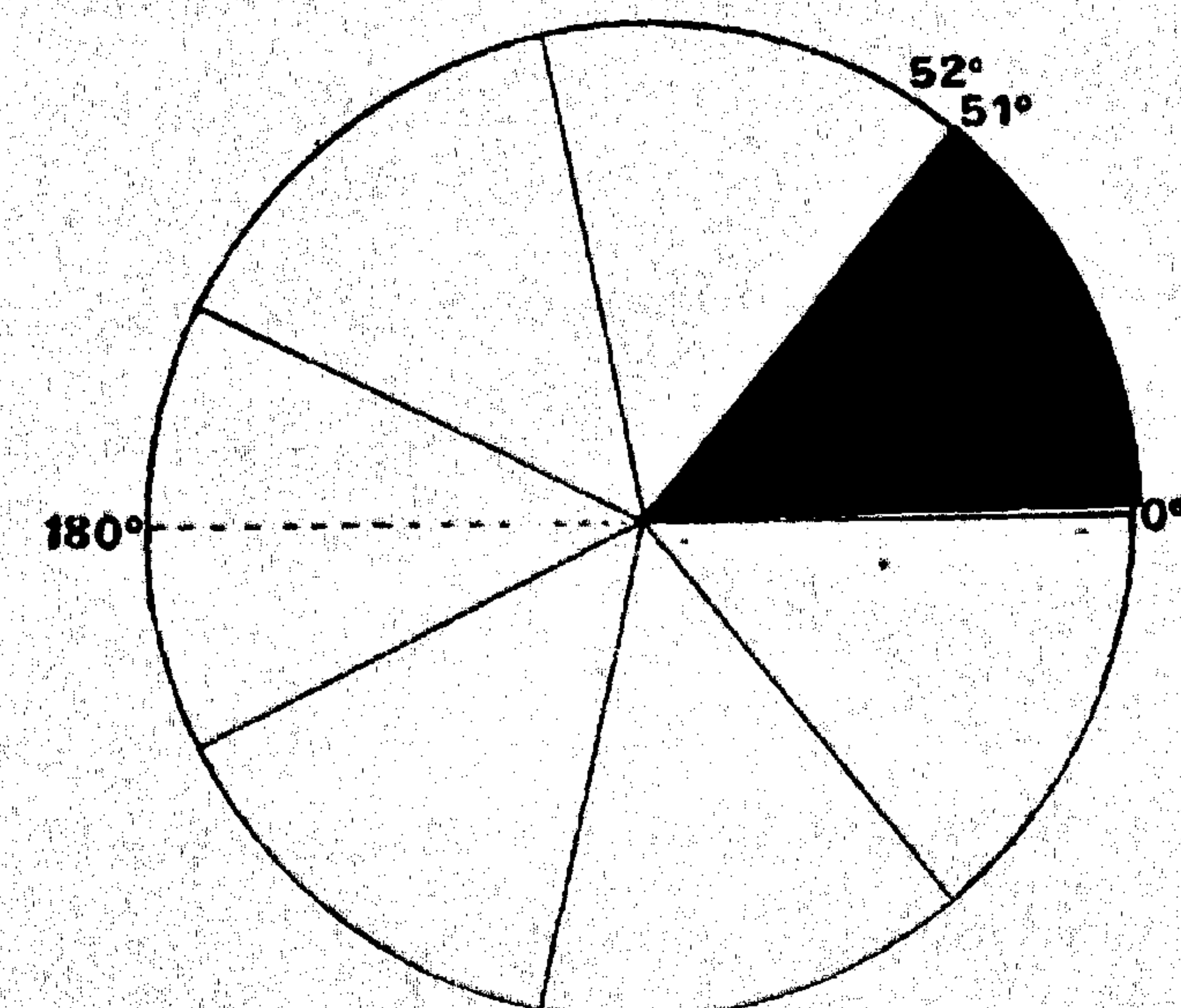


Fig. 166
La 7.ª parte del círculo mide cerca de 51° y medio
(entre 51° y 52°)

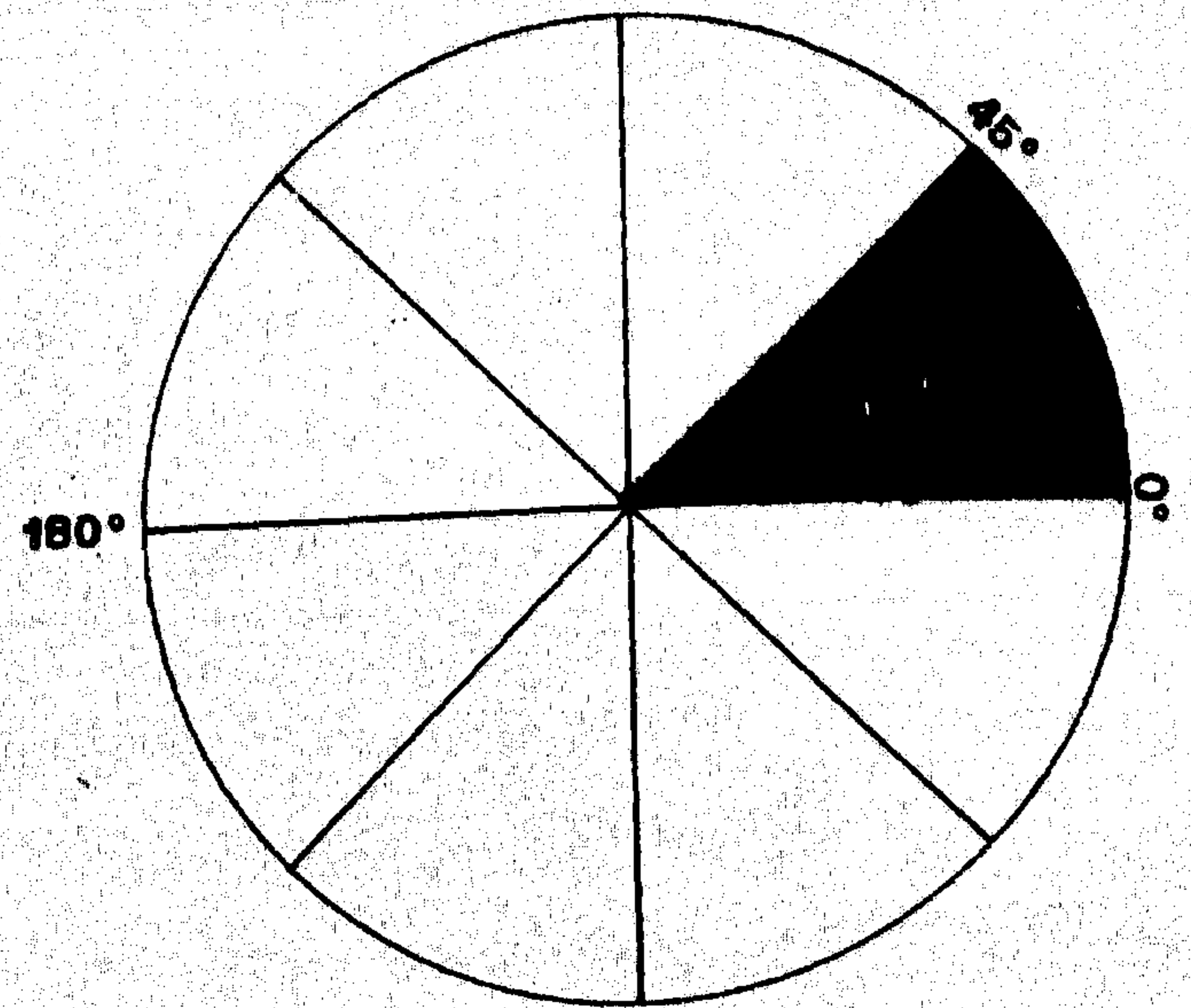


Fig. 167
1/8 de círculo mide 45°

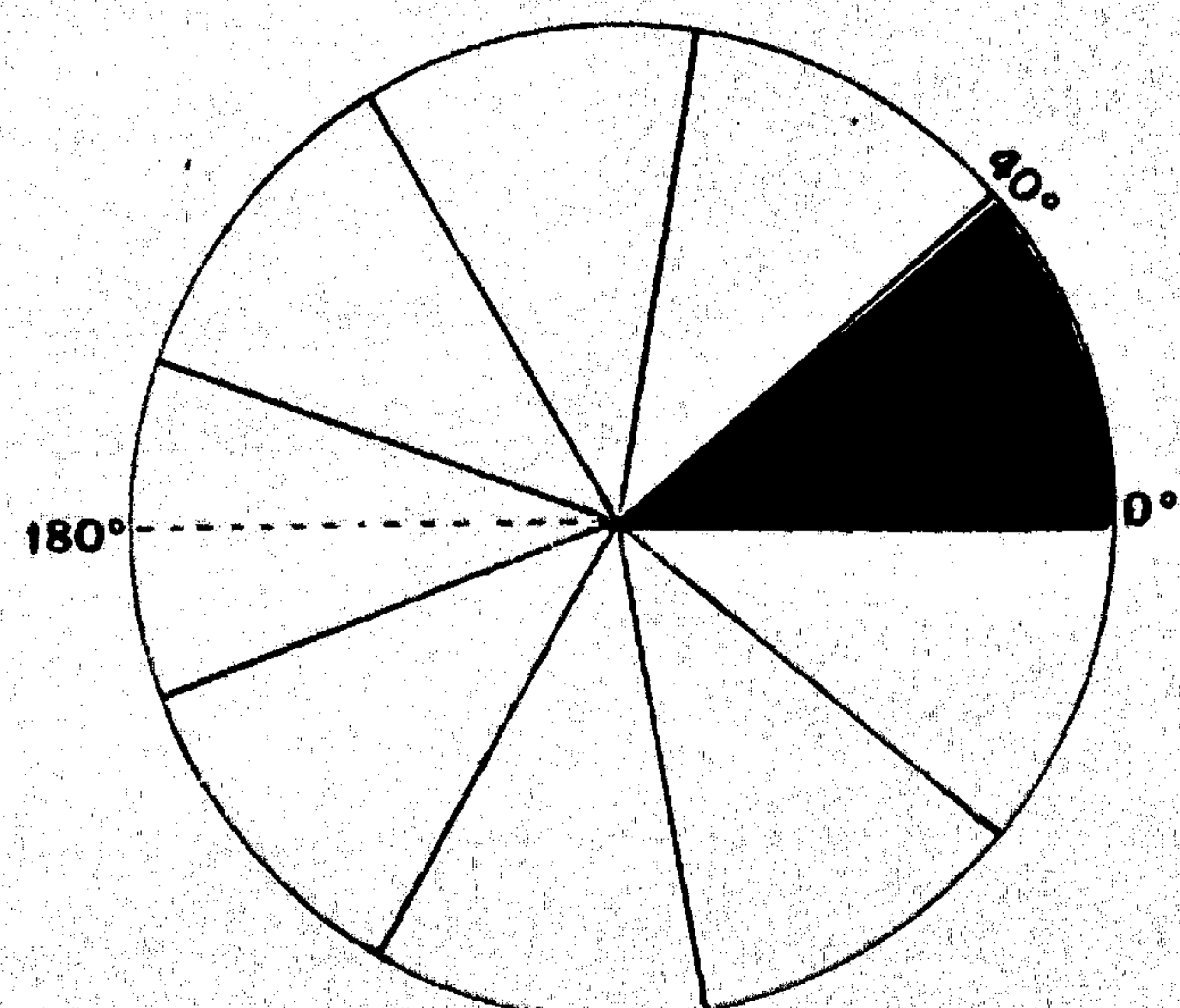


Fig. 168
1/9 de círculo mide 40°

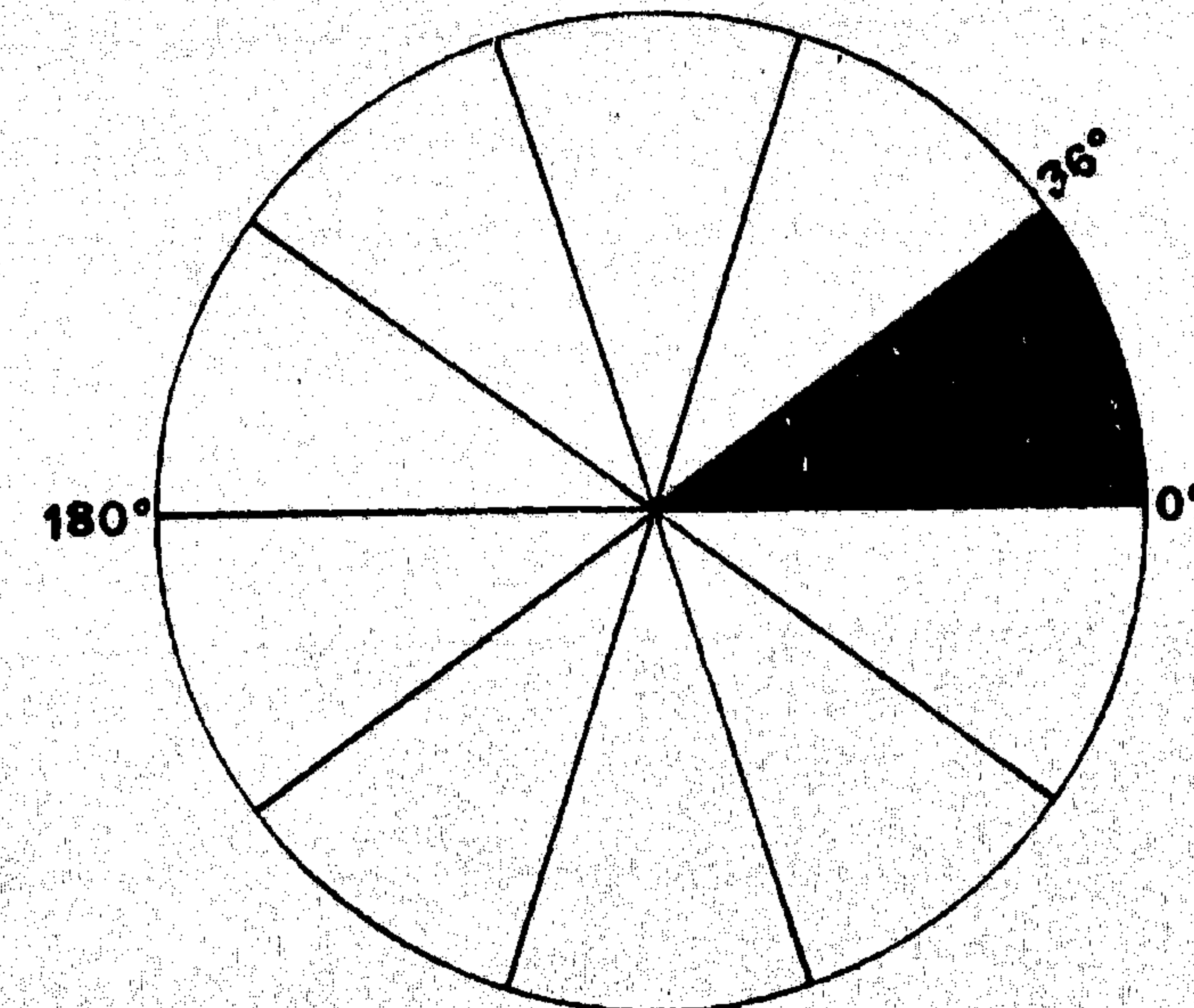


Fig. 169
1/10 de círculo mide 36°

de 1/4 del círculo son ángulos agudos. La quinta parte mide 72° y la sexta parte 60° (figs. 164 y 165).

La 7.ª parte mide 51° y 1/2 (fig. 166)
La octava parte 45° (fig. 167)
La novena parte 40° (fig. 168)
La décima parte 36° (fig. 169).

Los ángulos en las figuras

Ahora, con la medida directa o con razonamientos y cálculos, se pueden estudiar los ángulos en las figuras.

He aquí (fig. 170) el exágono compuesto de seis triángulos equiláteros ; el ángulo del triángulo equilátero es pues la 6.ª parte del círculo o sea 60°.

Los ángulos del triángulo equilátero miden cada uno 60°.

En la figura (171) se ve que tres ángulos forman 180°

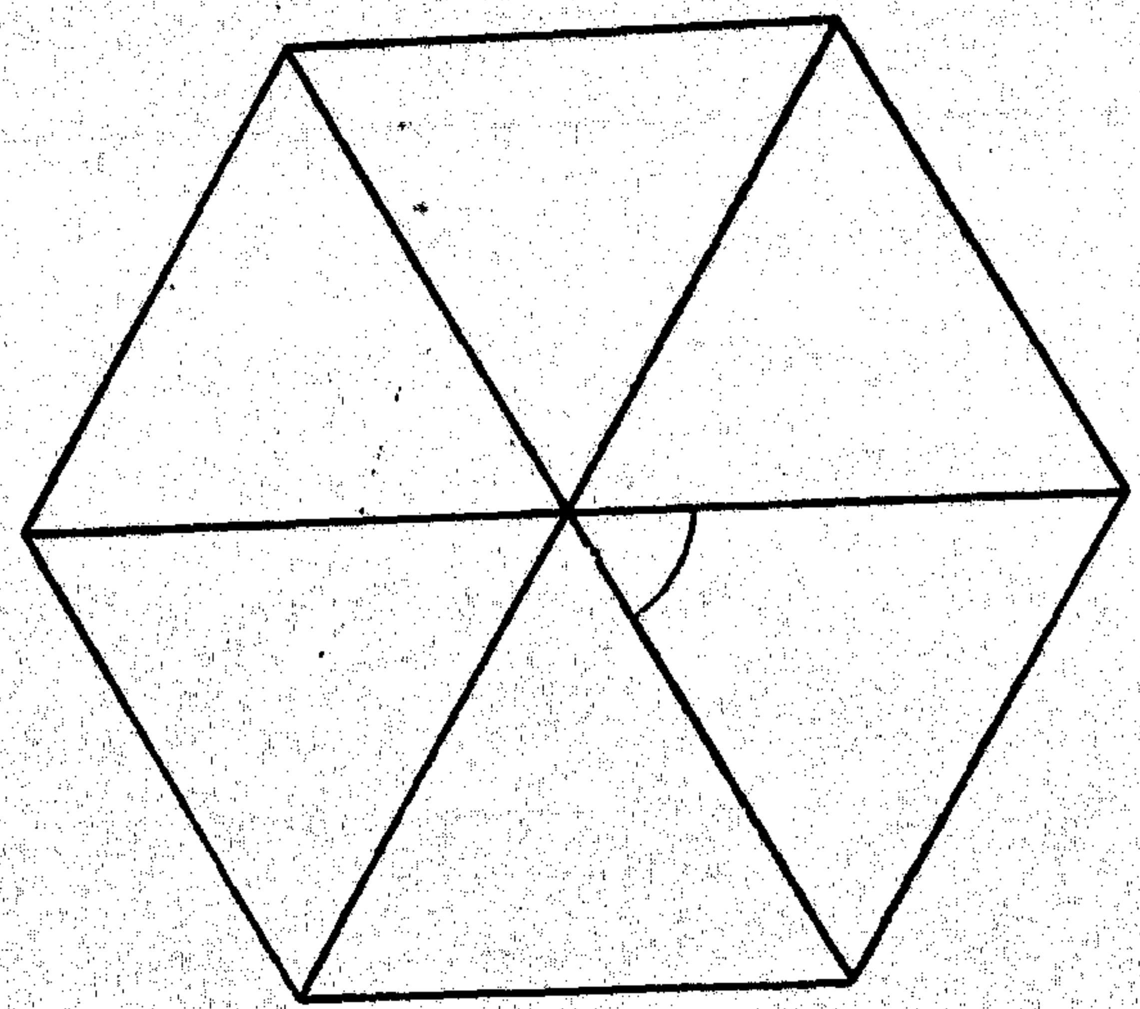


Fig. 170

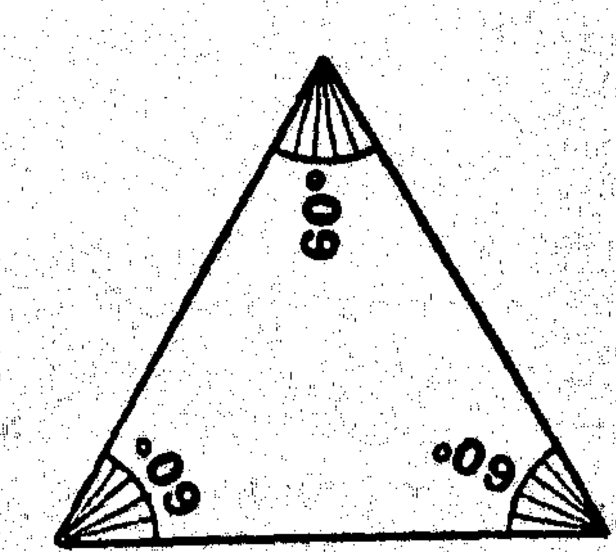


Fig. 171

luego : la suma de los ángulos de un triángulo equilátero es igual a dos ángulos rectos.

Esto se halla confirmado por el cálculo de los grados, $60^\circ + 60^\circ + 60^\circ = 180^\circ = 2 \times 90^\circ$.

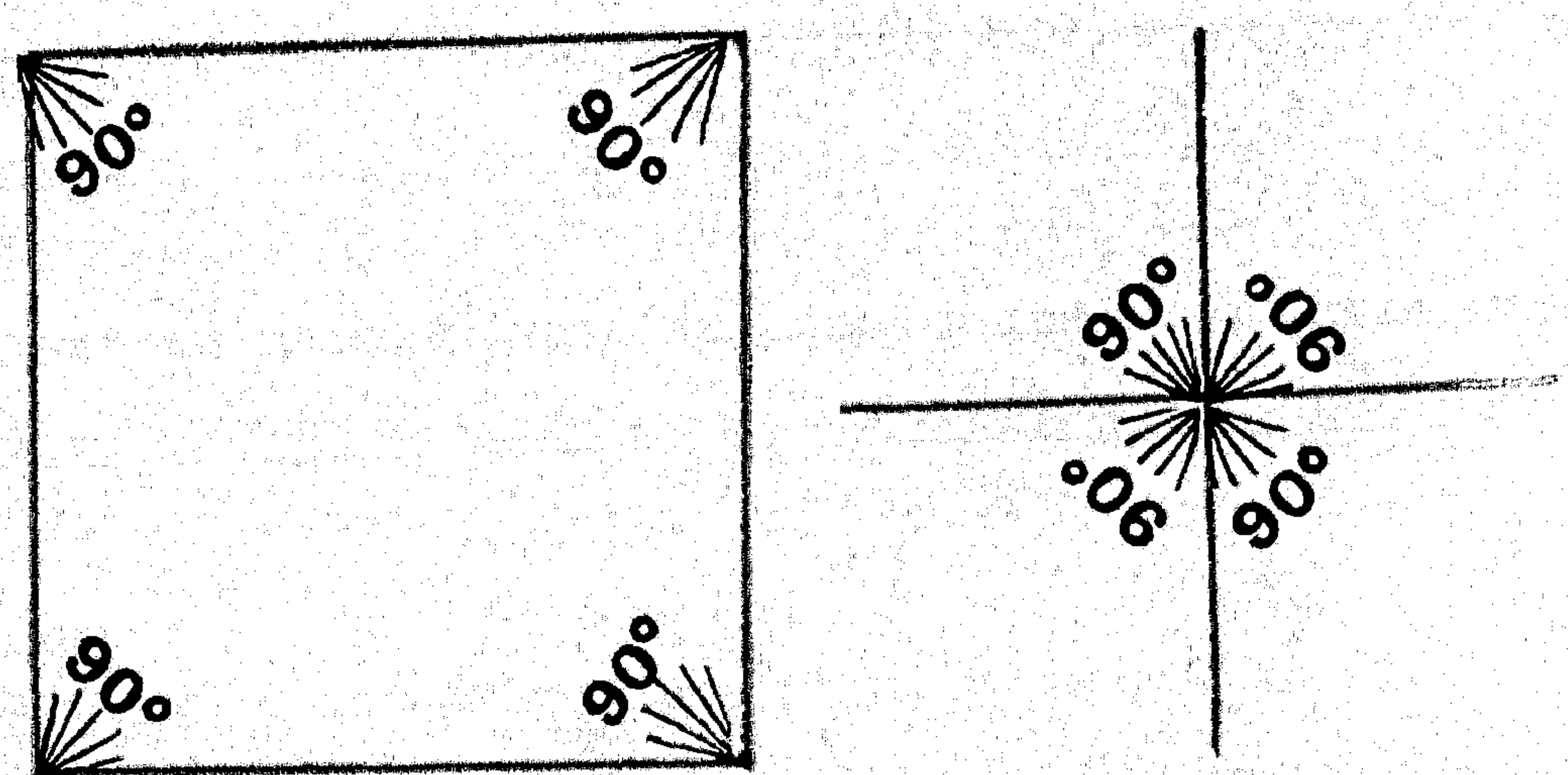


Fig. 172

Un cuadrado o un rectángulo tiene todos los ángulos rectos (fig. 172) y, por lo tanto, su suma es igual a todos los grados del círculo $4 \times 90^\circ = 360^\circ$.

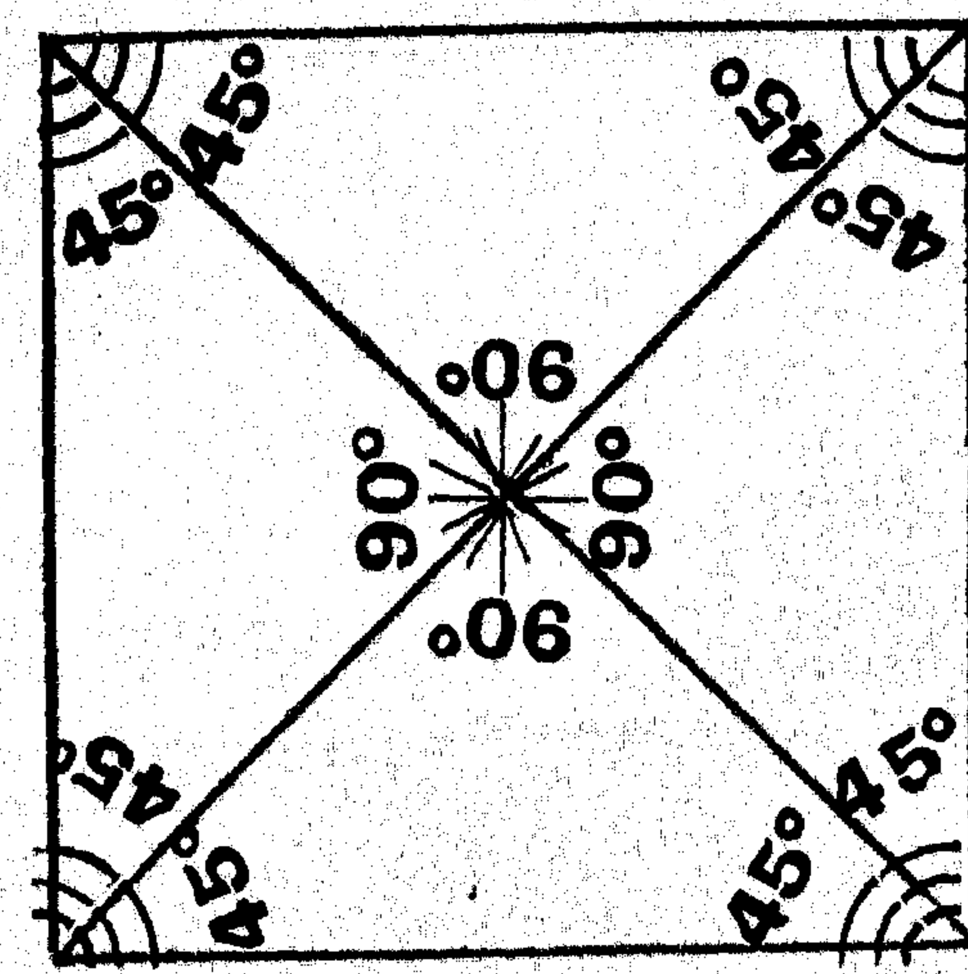


Fig. 173

La suma de todos los ángulos de un cuadrado es pues igual a la suma de los ángulos rectos que se forman alrededor de dos rectas que se encuentran perpendicularmente.

En el cuadrado dividido por las diagonales (fig. 173) se distinguen cuatro triángulos rectángulos isósceles.

Estos tienen los ángulos adyacentes iguales a la mitad de un recto, porque las diagonales son, al mismo tiempo, bisectrices de los ángulos del cuadrado.

Los ángulos de la base corresponden por ello a la 8ª parte del círculo que es igual a 45°.

Consideremos aparte uno de los triángulos (fig. 174).

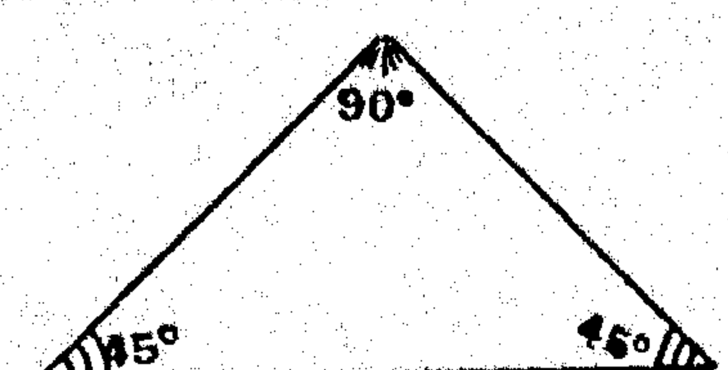


Fig. 174

Este tiene un ángulo recto y dos ángulos que son cada uno igual a la mitad del recto ; por lo tanto, la suma de los ángulos es igual a dos ángulos rectos.

$$90^\circ + 45^\circ + 45^\circ = 180^\circ. \qquad 180^\circ = 2 \times 90^\circ.$$

Si dividimos en dos partes el triángulo equilátero (fig. 175) resultan dos triángulos rectángulos escalenos determinados por la altura. La altura divide el ángulo del vértice en dos partes iguales, o lo que es lo mismo, es su bisectriz.

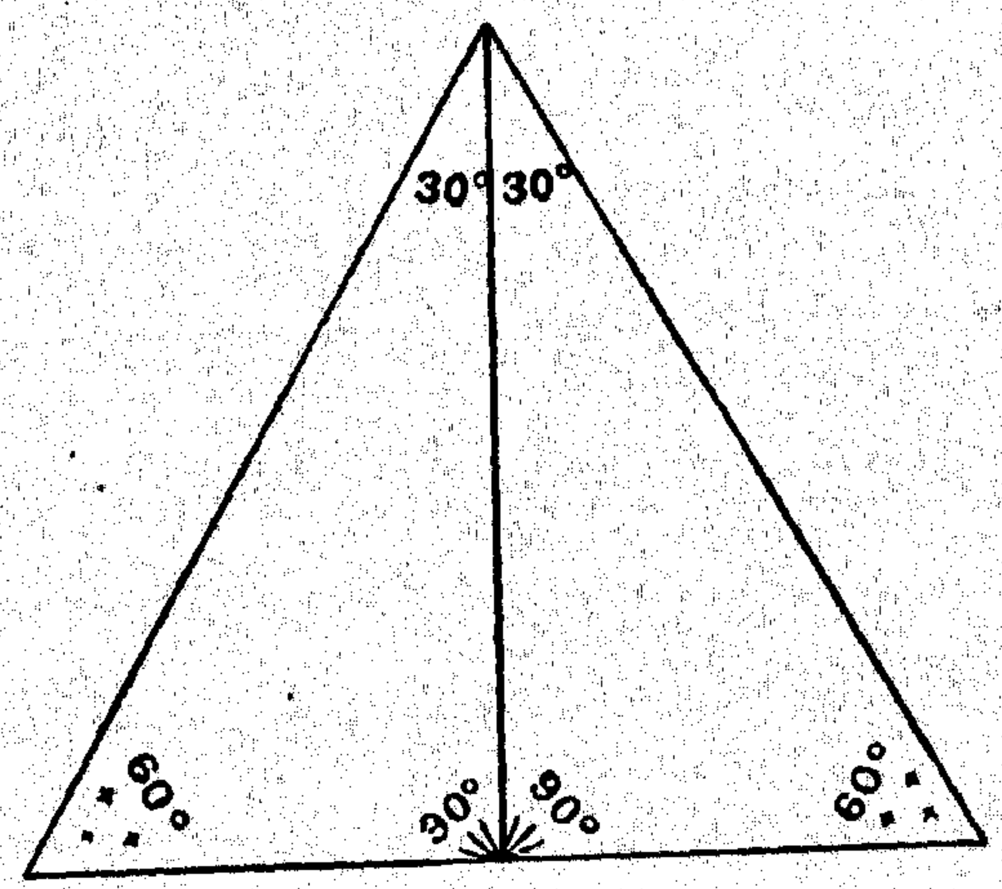


Fig. 175

Siendo de 60° el ángulo del triángulo equilátero, cada una de sus mitades, medirá 30°.

El triángulo rectángulo escaleno tiene pues, un ángulo recto, más dos ángulos, uno de 60° y el otro de 30° o sea 90°. También pues en este caso la suma de los ángulos es igual a dos rectos.

Hemos pues determinado un

TEOREMA. — La suma de los tres ángulos de un triángulo es siempre igual *a dos rectos* (fig. 176).

Como cualquier figura de cuatro lados se puede siem-

Fig. 176

pre dividir en dos triángulos por medio de una diagonal (fig. 177) resulta que : *La suma de los ángulos de cualquier cuadrilátero es igual a cuatro rectos.*

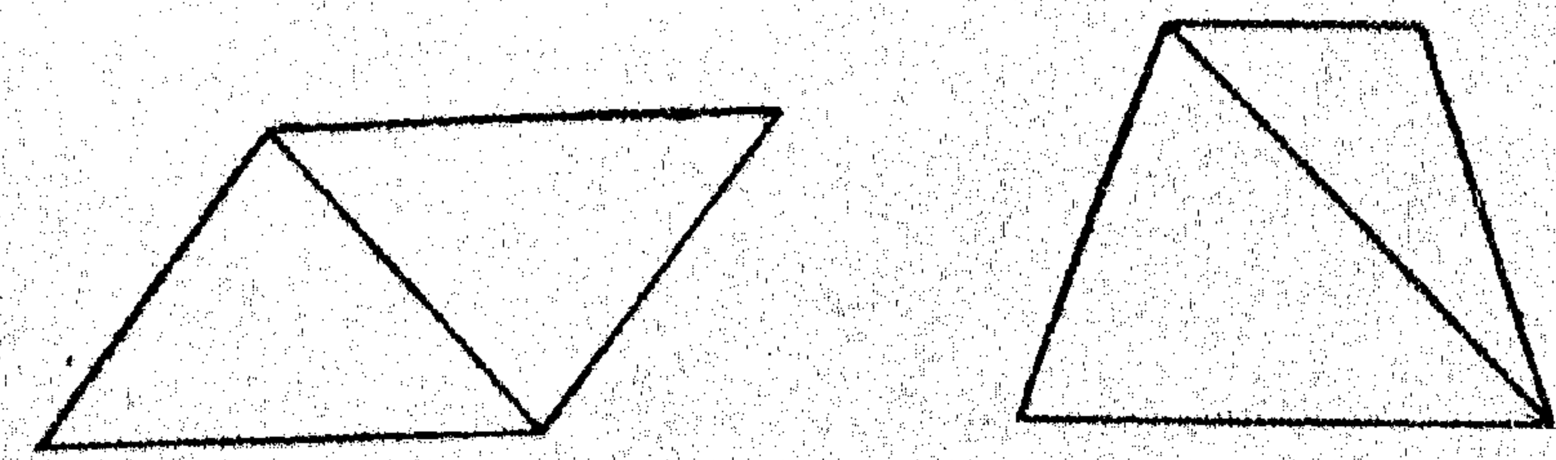


Fig. 177

Esto se puede demostrar con las medidas y con el razonamiento.

En efecto, todo teorema se presenta primero con un descubrimiento, pero a continuación, el razonamiento y la busca de las pruebas conducen a una demostración completa y satisfactoria del teorema.

Estudiemos los ángulos del trapecio igual a los tres cuartos de nuestro triángulo equilátero grande (fig. 178).

Los dos ángulos de la base miden cada uno 60° porque son ángulos de los triángulos equiláteros.

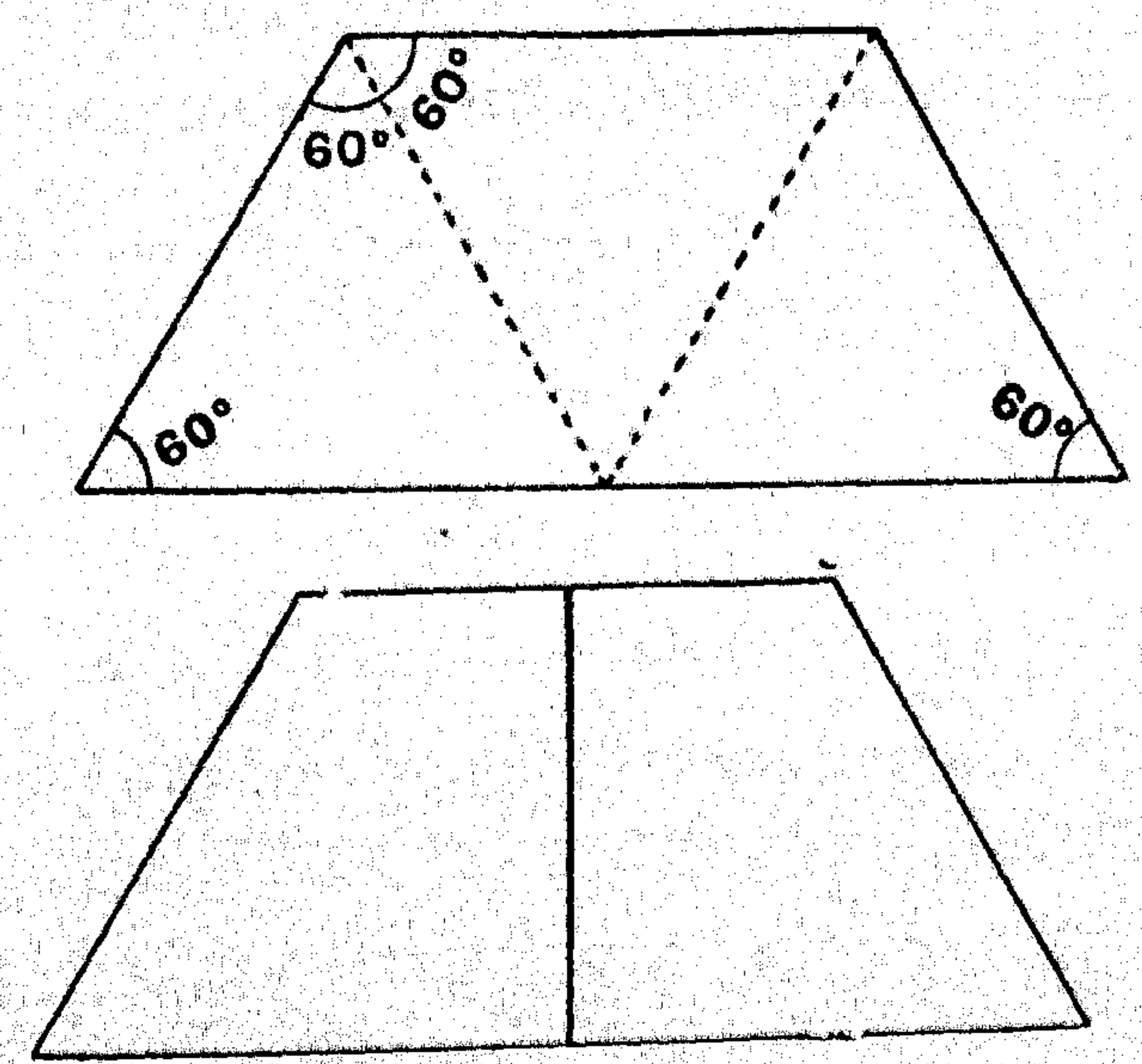


Fig. 178

Los ángulos de arriba son cada uno, la suma de dos ángulos del triángulo equilátero. $60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$.

El ángulo de 120° corresponde a $1/3$ del círculo. Los ángulos de 60° corresponden a $1/6$ del círculo. Ahora bien; $120^\circ + 120^\circ + 60^\circ + 60^\circ = 3 \times 120^\circ = 360^\circ$, es decir, cuatro rectos. O lo que es igual la totalidad de grados del círculo. Es decir $1/3 + 1/3 + 1/6 + 1/6 = 1$.

Consideremos ahora la mitad de aquel trapecio obtenida con una mediana perpendicular a las dos bases (fig. 179).

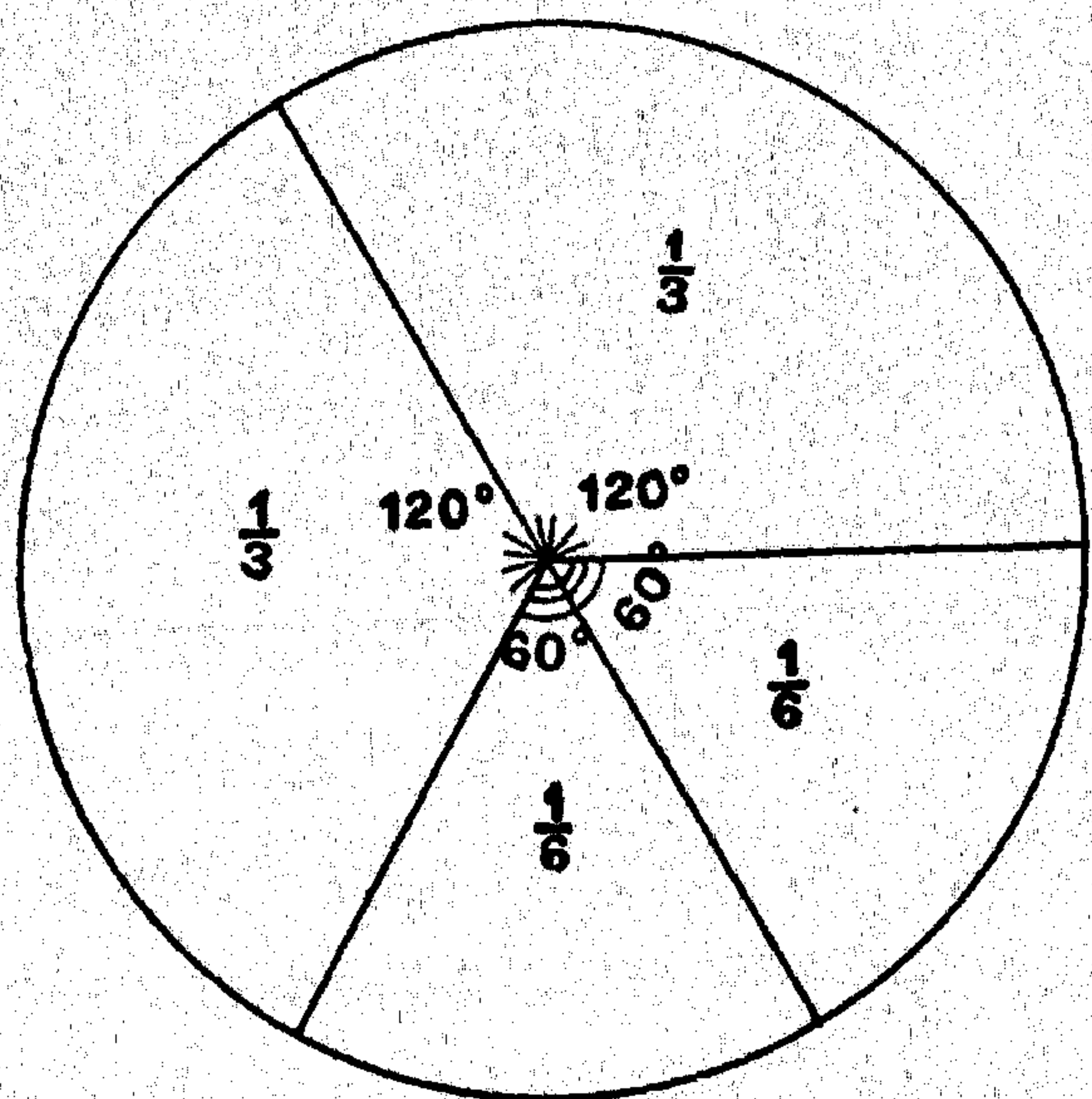


Fig. 179 (1

Esta forma, con aquéllas, dos ángulos rectos $90^\circ + 90^\circ$ los otros dos ángulos del trapezoide son iguales a los del trapecio de donde proviene, esto es, 120° y 60°.

Tendremos pues $90^\circ + 90^\circ + 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$ $180^\circ = 4 \times 90^\circ$. Es decir que su suma es igual a cuatro rectos.

Los ángulos de 90° coresponden a $1/4$ del círculo.

Los de 120° a $1/3$ del círculo.

Los de 60° a $1/6$.

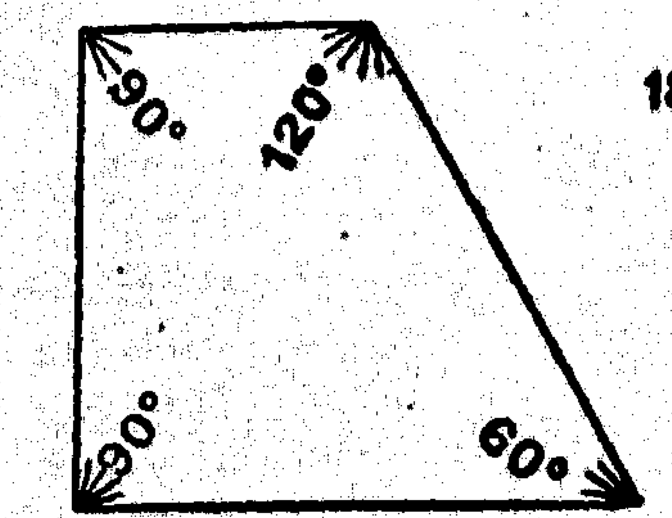


Fig. 179 (2

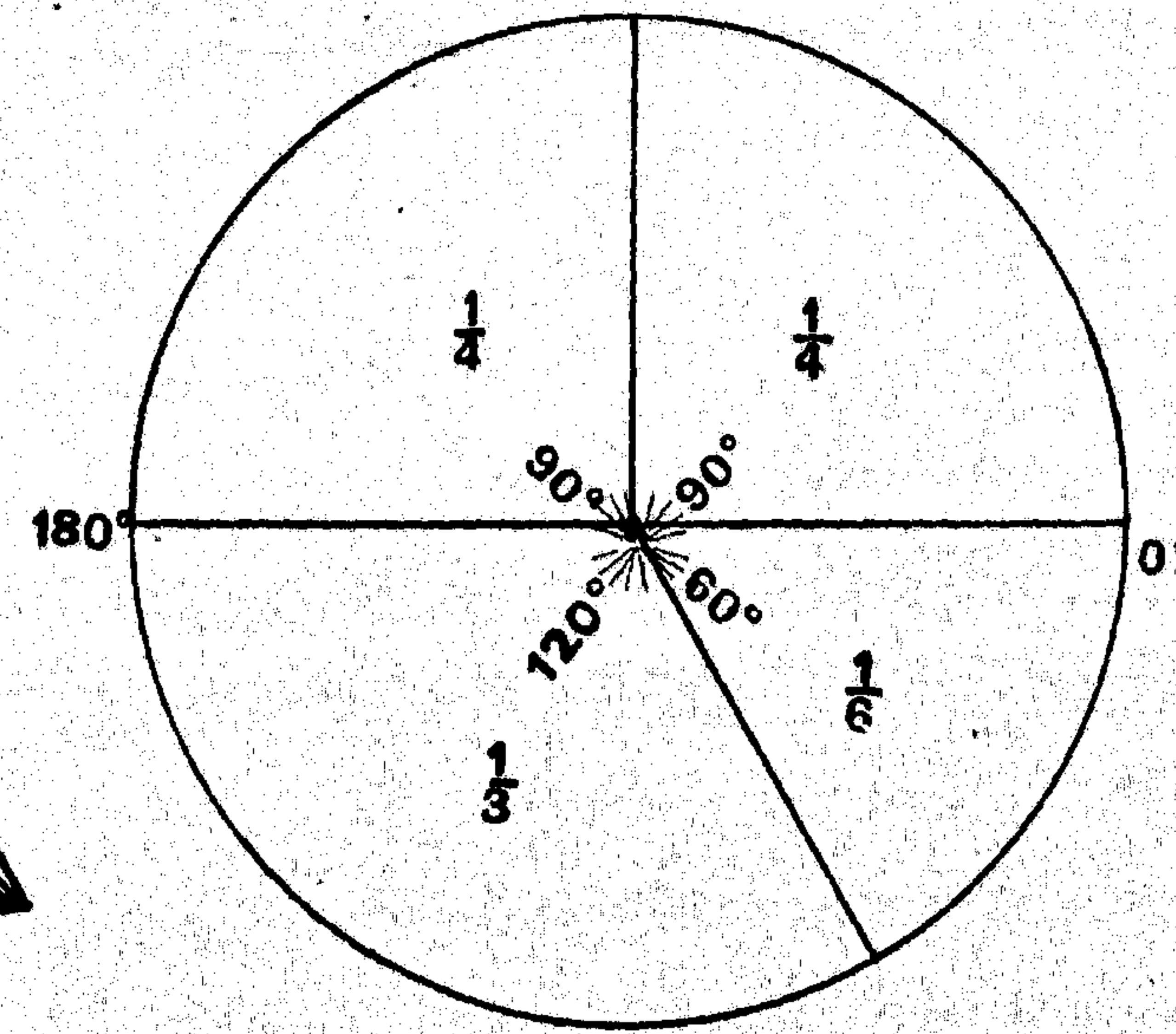


Fig. 179 (3

Las porciones de círculo correspondientes a los grados de los ángulos forman sumadas un círculo entero.

$1/4 + 1/4 + 1/3 + 1/6 = 1$.

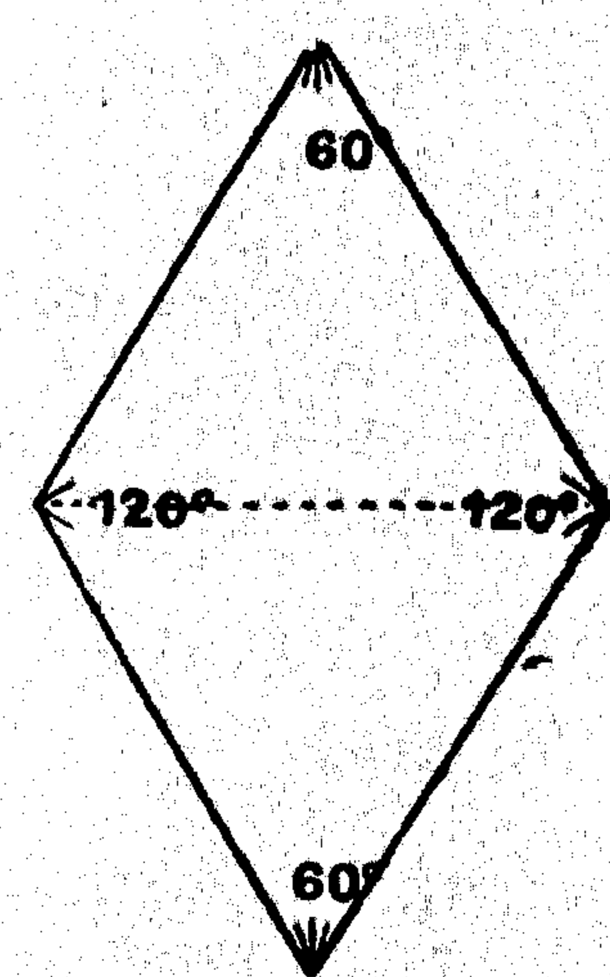


Fig. 180 (1

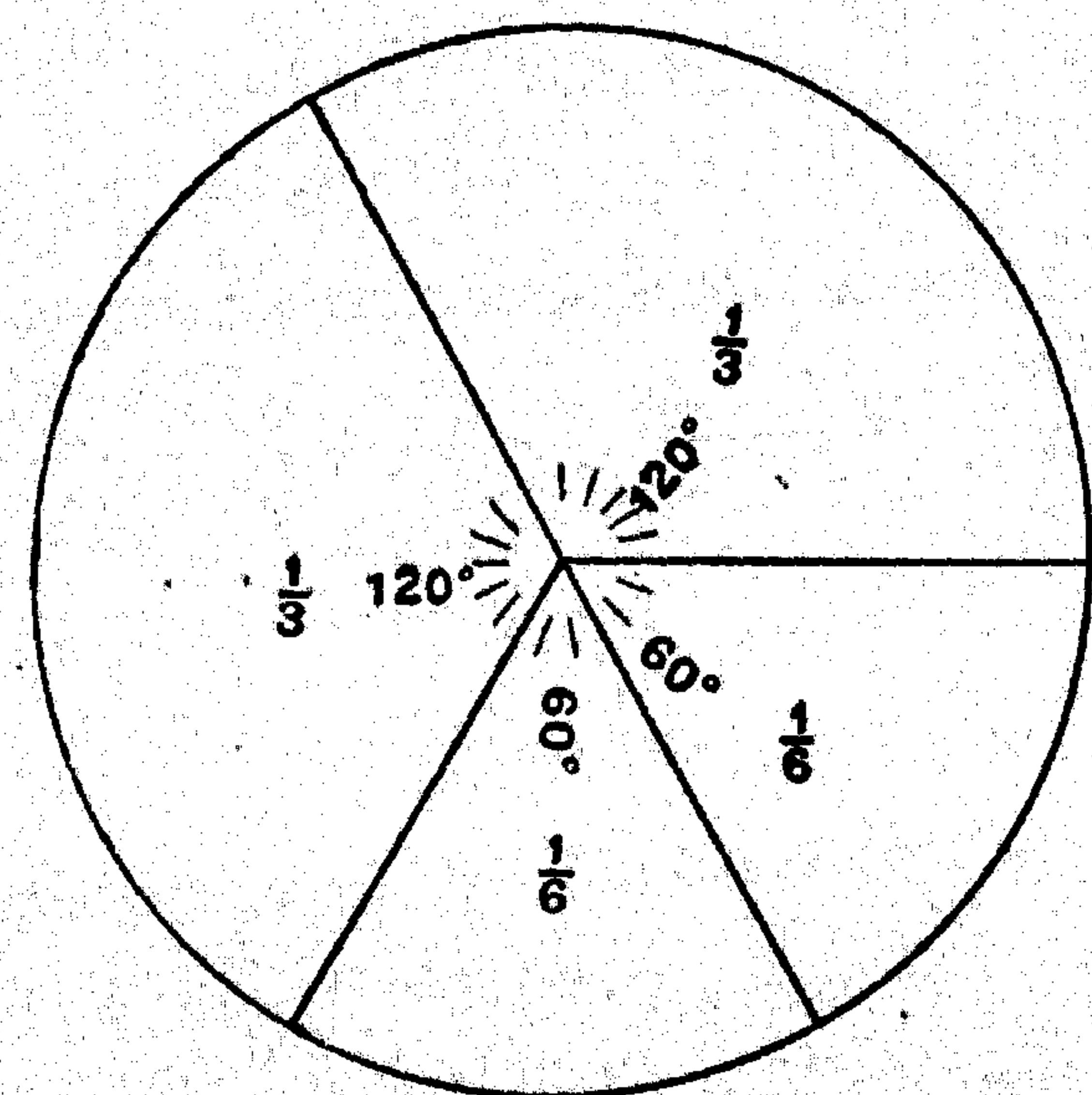


Fig. 180 (2

En el rombo, constituído por dos triángulos equiláteros existen dos ángulos de 60° y dos ángulos dobles, es decir, de 120° porque allí corresponden dos ángulos del triángulo equilátero (fig. 180).

Son por lo tanto 120° + 120° + 60° + 60° = 120° + 120° = 3 × 120° = 360.

Y como partes del círculo corresponden a 1/3 + 1/3 + 1/6 + 1/6 = 1.

Consideremos ahora un trapecio desde el punto de vista de las líneas y los ángulos que lo constituyen (fig. 181).

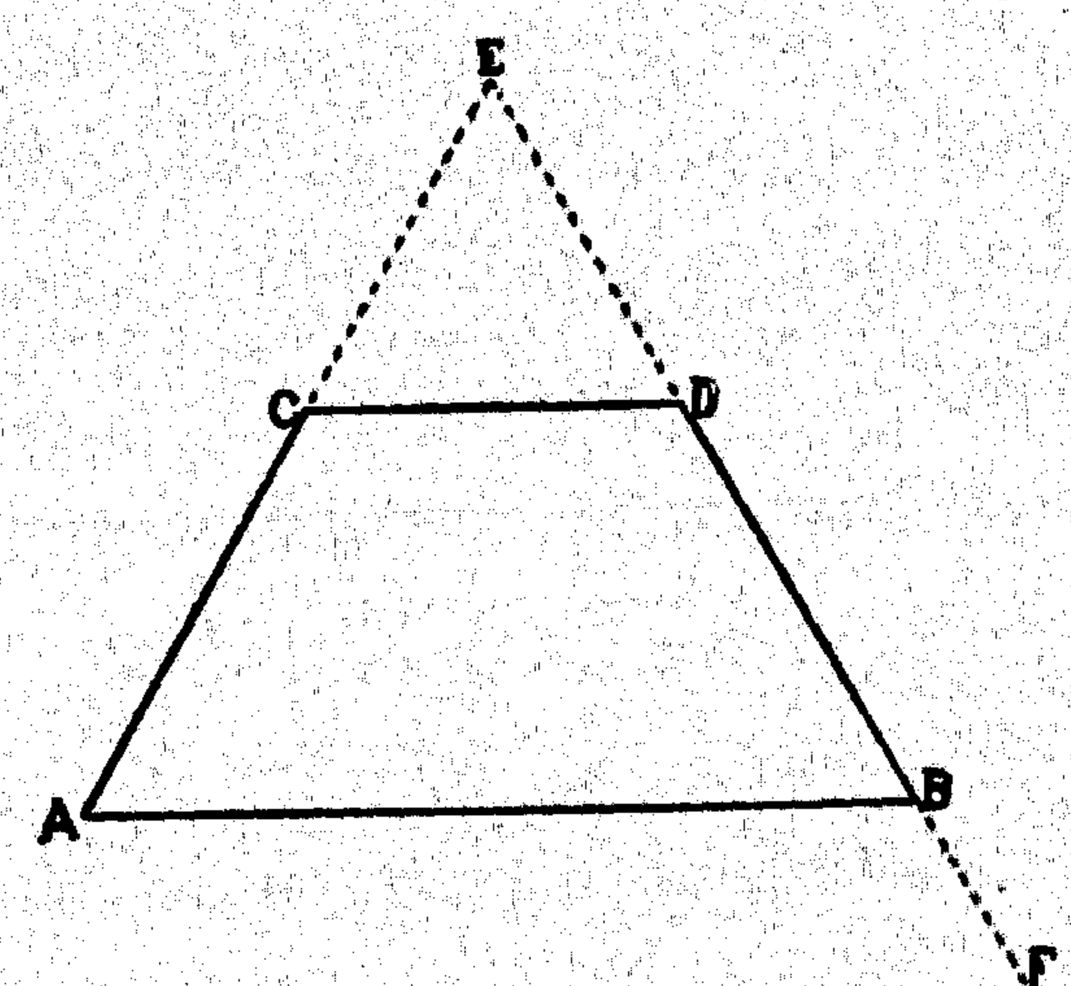


Fig. 181

Antes que nada es necesario indicar de algún modo las líneas, porque el decir: la base inferior, la base superior, el lado de la derecha, el lado de la izquierda, hace confuso el razonamiento.

Para ello pondremos letras mayúsculas en la extremidad de cada línea a la que designaremos por dichas letras. Por ejemplo: la línea AB, la línea CD, la línea EB.

En cambio, a los ángulos basta indicarlos con una sola letra cuando están constituídos por el encuentro de dos líneas determinadas. Por ejemplo, el ángulo M (fig. 182).

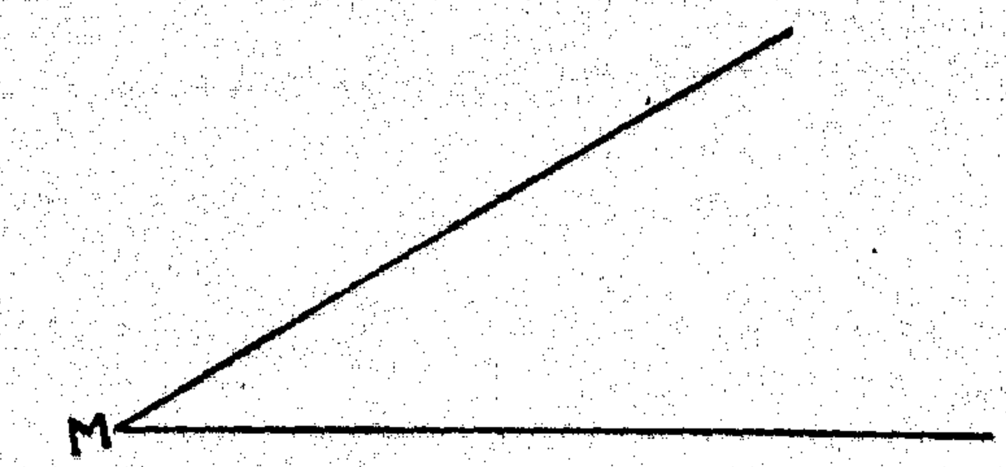


Fig. 182

Pero, cuando hay dos o más ángulos alrededor de un punto, es preciso distinguirlos (fig. 183).

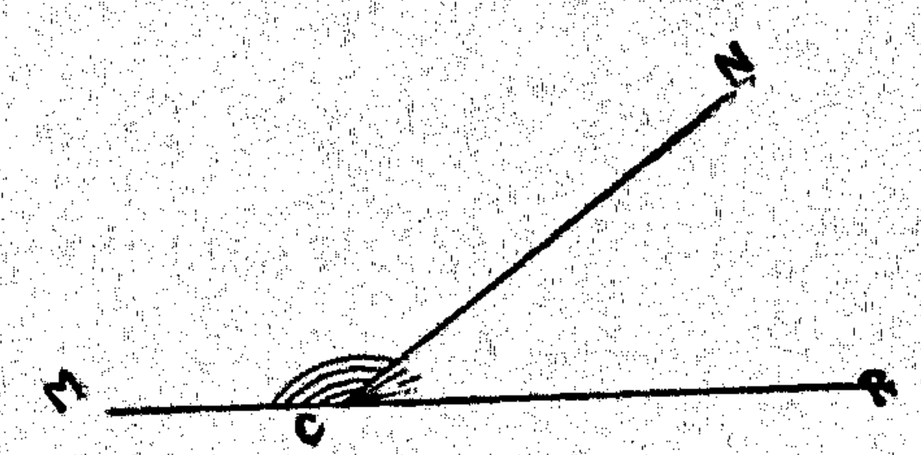


Fig. 183

En ese caso indicaremos las líneas que lo constituyen, por ejemplo: ángulo MCN, ángulo NCR, colocando en el centro la letra situada en el vértice del ángulo.

Hay que determinar de igual modo la manera de distinguir las figuras cerradas (figs. 184 y 185).

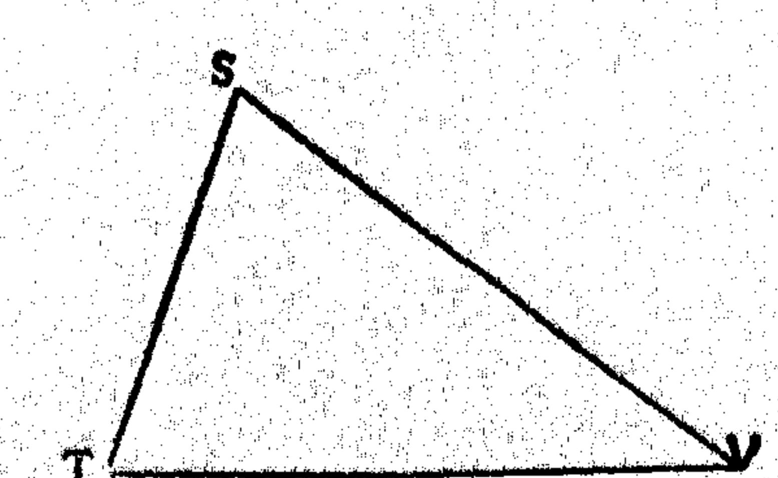


Fig. 184

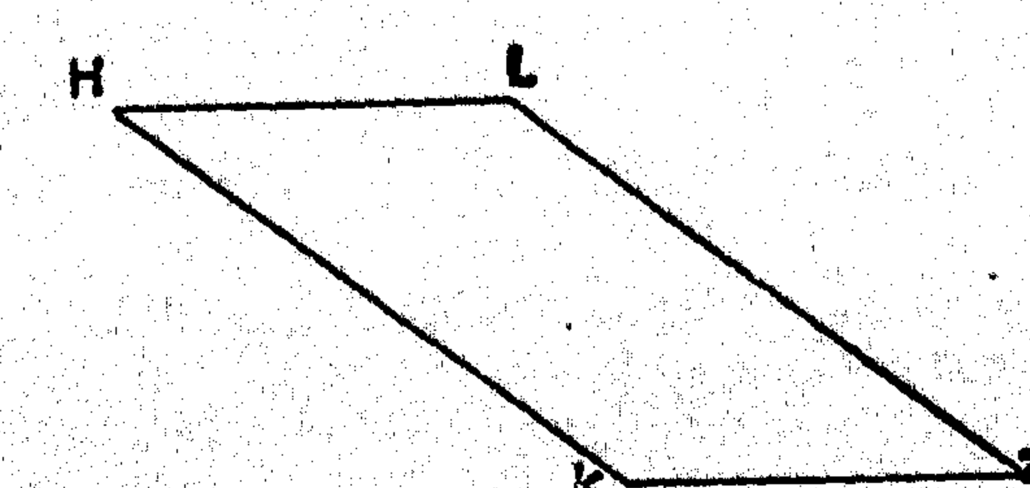


Fig. 185

Estas se designarán poniendo letras mayúsculas en los vértices de todos sus ángulos e indicando el conjunto de estas letras, por ejemplo: el triángulo STV, el rombo HLZK.

Sentado esto, razonemos sobre el trapecio CDBA (fig. 181). En él hemos prolongado el lado DB hasta constituir la línea EF.

Para la construcción del trapecio se sabe que el lado CD es paralelo a AB.

Sabemos igualmente por construcción (ya que el trapecio se ha obtenido del triángulo equilátero grande) que los dos ángulos de la base CAB y ABD son iguales entre sí y miden 60°.

También el ángulo superior prolongación de las líneas CE ED que está situado sobre CD, es decir, el CDE es un ángulo de 60° porque se trata de un triángulo equilátero pequeño y CDE es igual a 60°.

Ahora consideremos las líneas independientemente del trapecio, es decir, las dos bases paralelas: CD, AB y el lado DB (fig. 186) que corta a ambas formando ángulos.

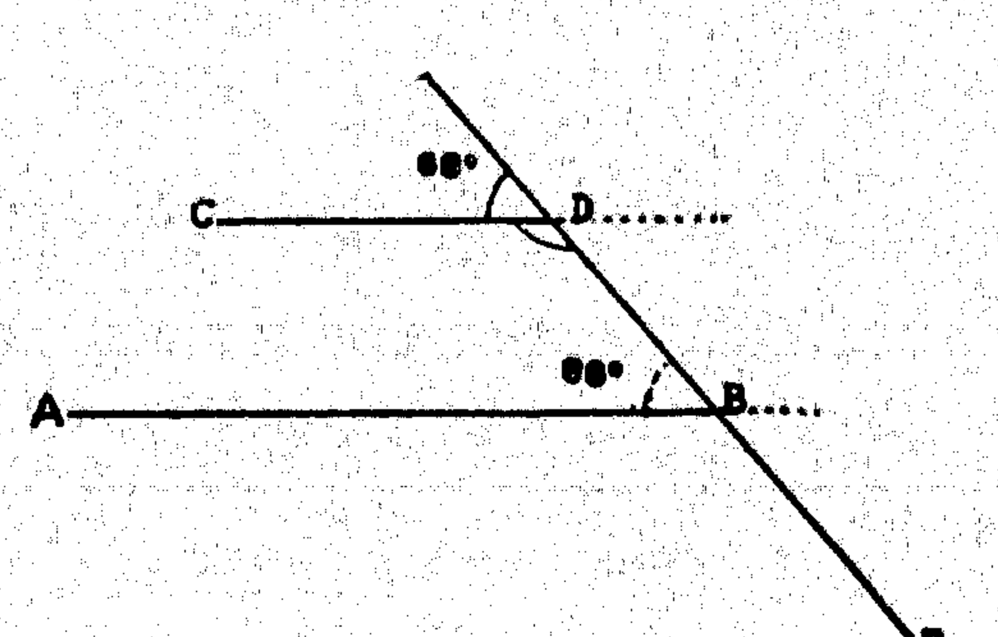


Fig. 186

Nosotros sabemos que aquellos ángulos son de 60° y de 120°.

Ahora dibujaremos solamente líneas que se cortan según aquella dirección y que se convierten en líneas paralelas (fig. 187), CH y AL cortadas por una inclinada transversal EF.

Las tres líneas se cortan en dos puntos, D y B formande dos series de ángulos.

La dirección de estas líneas es clara; es la misma de los lados del trapecio primitivo y forman ángulos de 60° y 120°.

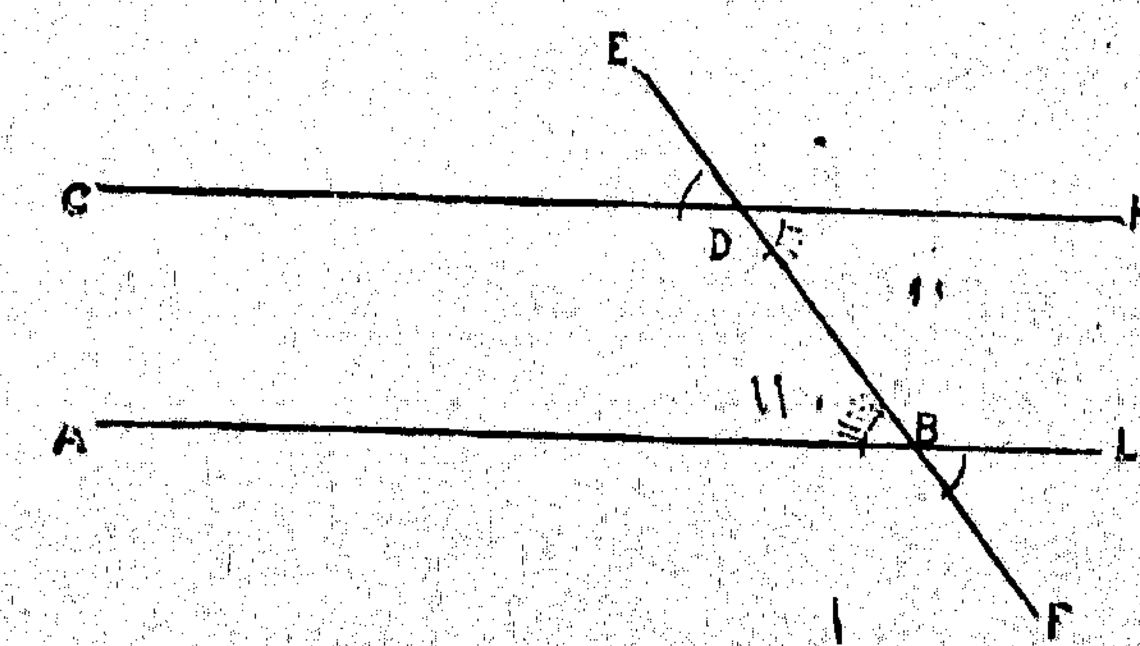


Fig. 187 (1

Alrededor de los dos puntos son iguales los ángulos opuestos dos a dos.

Así en torno a D: EDC = HD[redacted] = HDB

Yen torno a B: DBA = LBF.

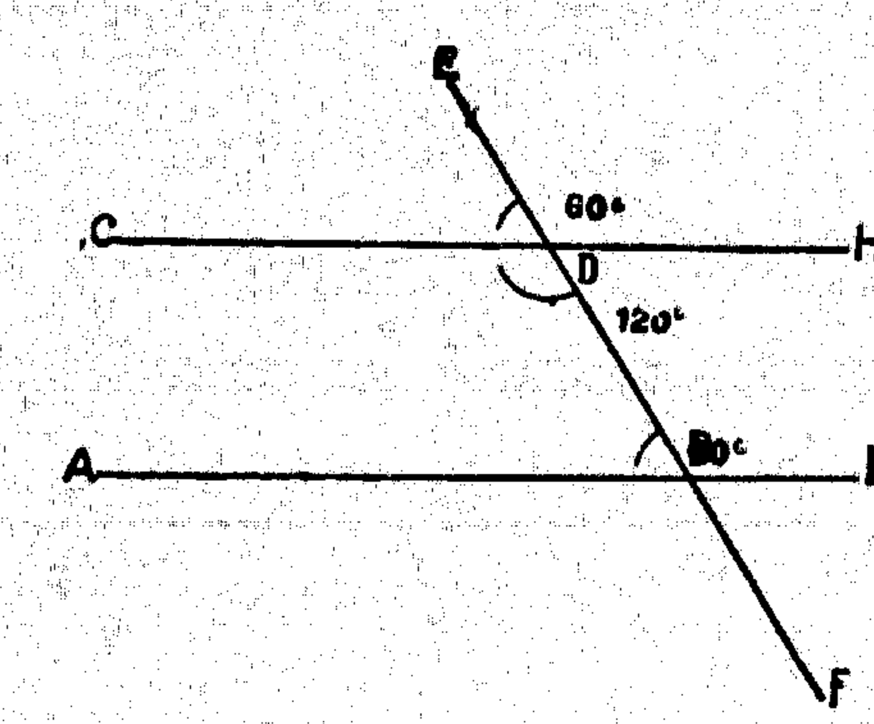


Fig. 187 (2

De donde se deduce que el ángulo HDB es igual al DBA por ser ángulos opuestos por el vértice.

Los ángulos así dispuestos se llaman alternos internos y el hecho se expresa del siguiente modo: *Los ángulos alternos internos trazados o comprendidos entre dos líneas paralelas son iguales.*

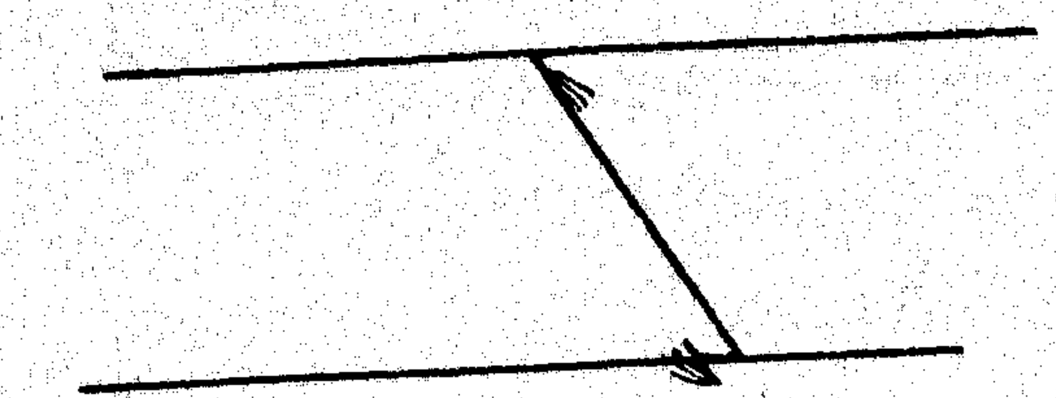


Fig. 188

En cambio los ángulos (fig. 189) ABC y DBF que resultan de líneas que se cortan en un punto con la misma inclinación se llaman *opuestos por el vértice* y su relación se expresa así: *Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.*

Hemos considerado hasta aquí los ángulos agudos de 60°, pero sucede lo mismo si estudiamos los obtusos que se forman al mismo tiempo (fig. 189).

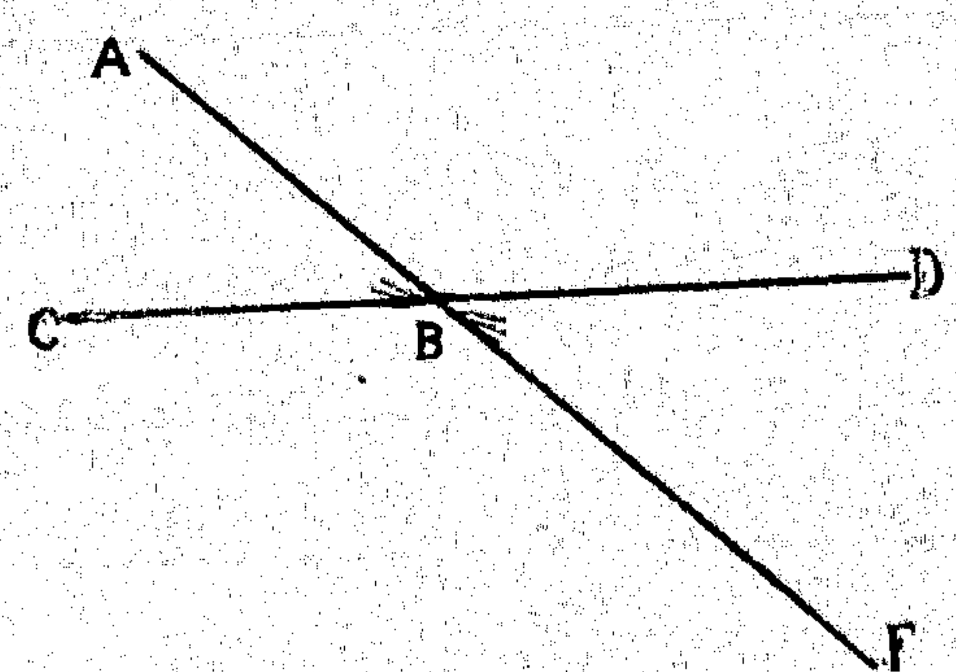


Fig. 189

Los ángulos opuestos por el vértice son iguales entre sí.
Los ángulos alternos internos son iguales entre sí.

Esto se observa siempre que dos líneas se cortan entre sí formando ángulos, o siempre que una línea corta a dos paralelas (figs. 190¹ y 190²).

Traslademos ahora al círculo dos líneas que se cortan entre sí. Supongamos dos líneas que se cortan en el centro del círculo siguiendo una dirección cualquiera (fig. 191).

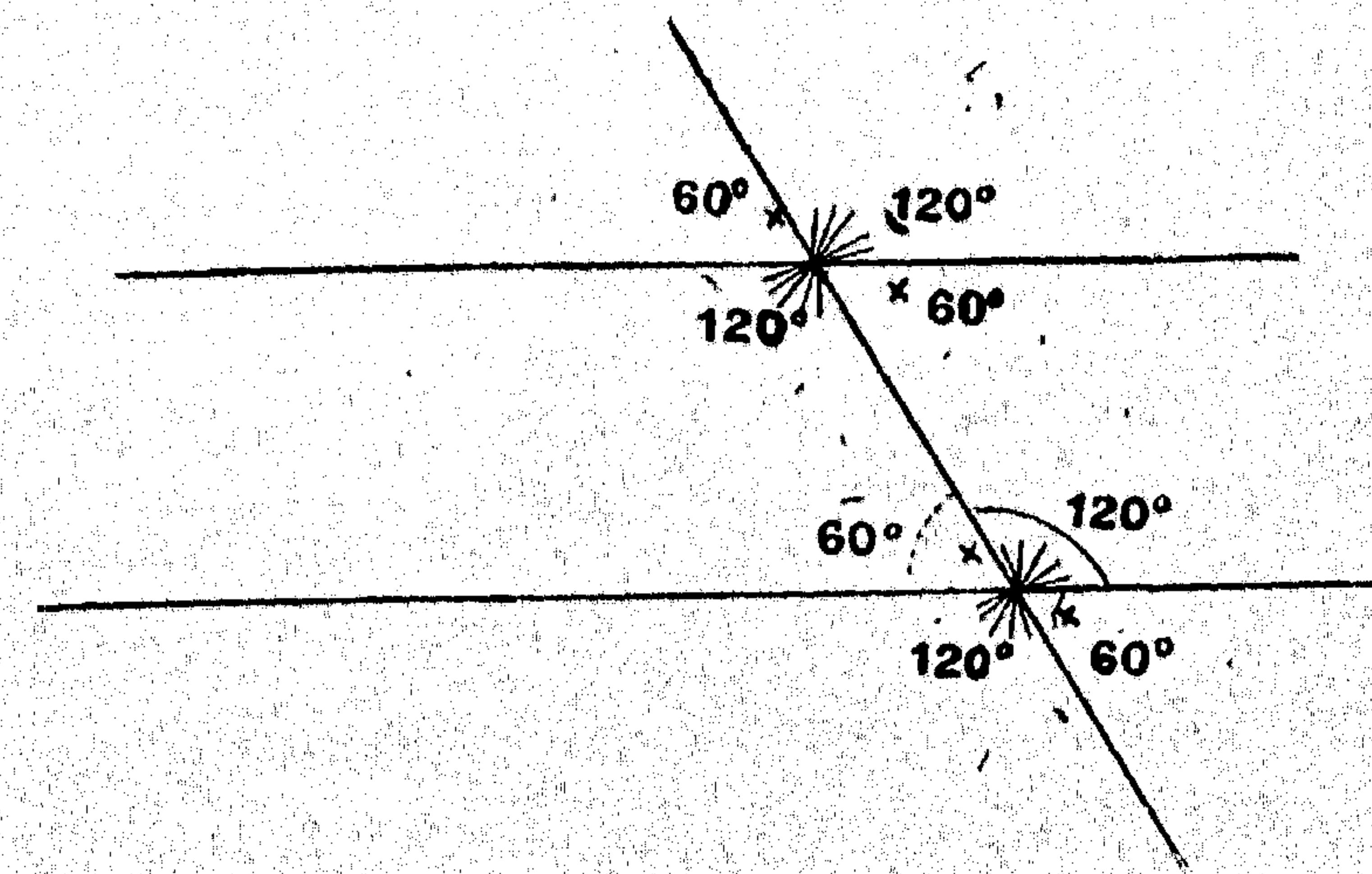


Fig. 190 (1

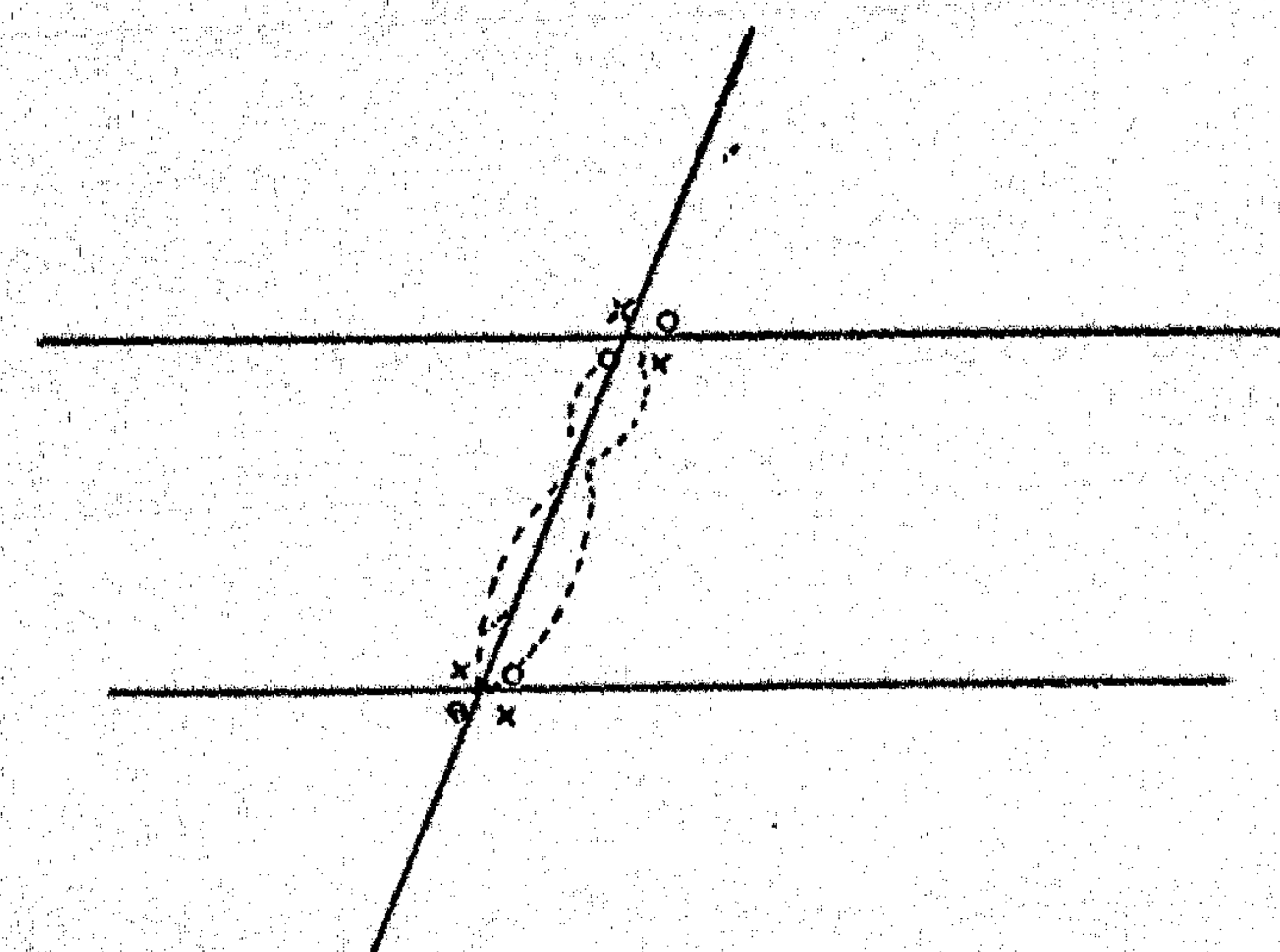


Fig. 190 (2

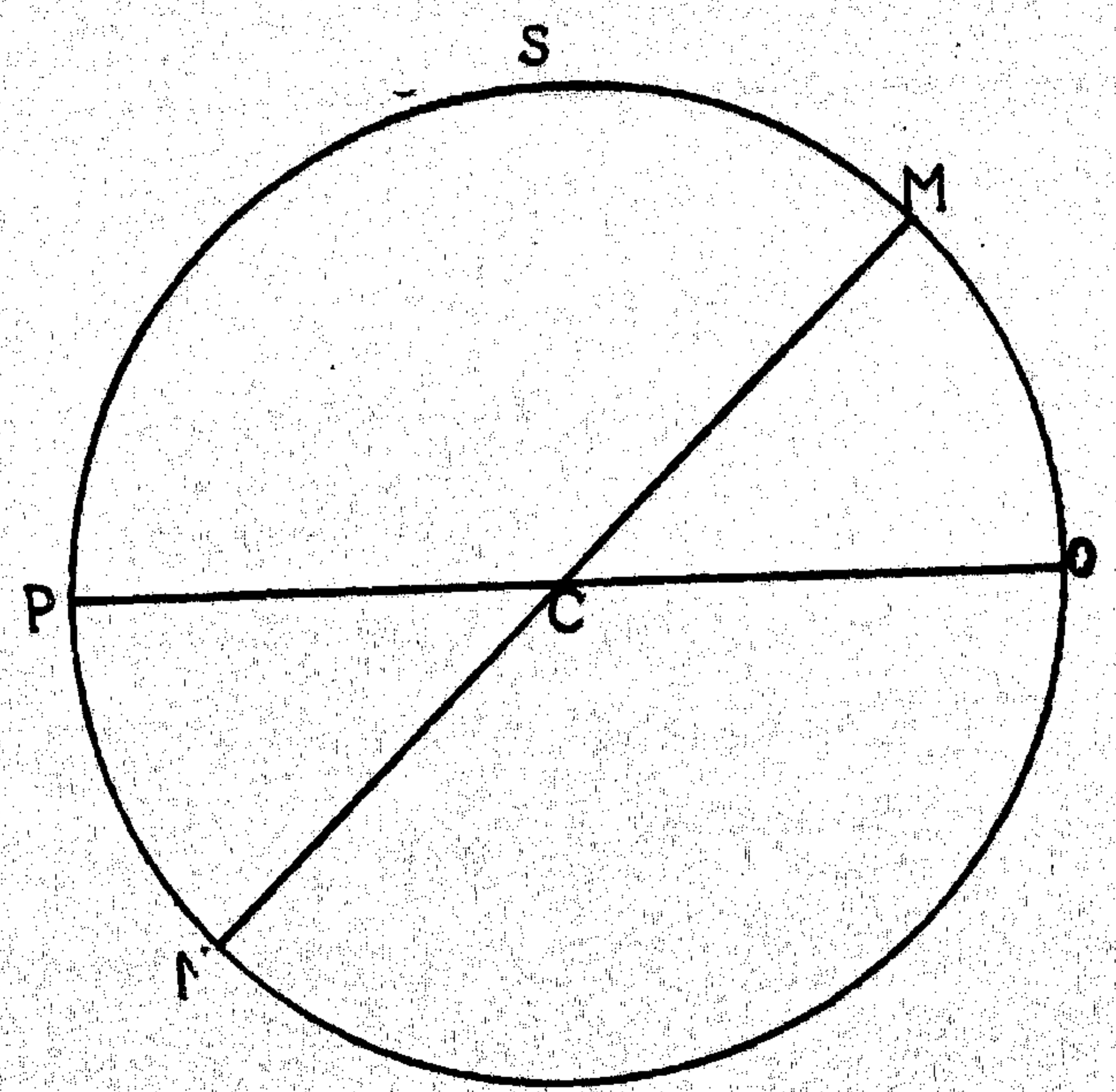


Fig. 191 (1

Las líneas OP y MN son dos diámetros que se cortan en el centro. Forman ángulos opuestos por el vértice iguales entre sí, es decir MCO = PCN y MCP = OCN.

Sin embargo, es también evidente el hecho de que dos ángulos adyacentes suman un semicírculo y son MCO + OCN = MCP + PCN.

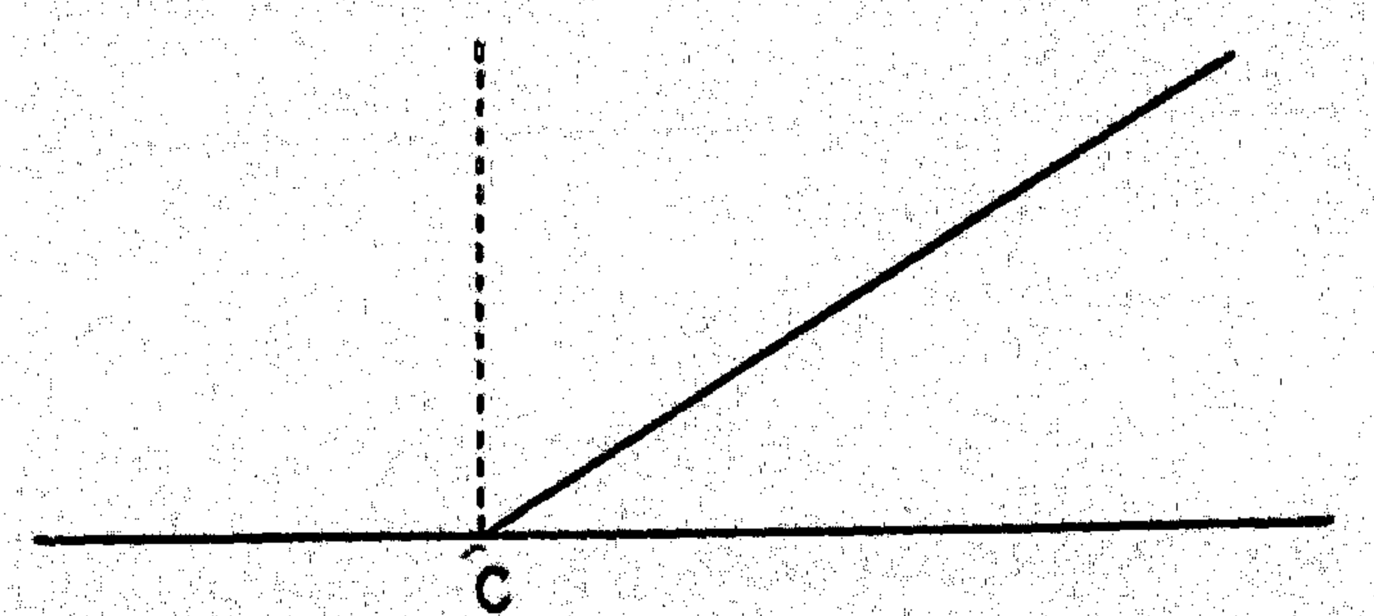


Fig. 191 (2

Los ángulos que sumados ocupan 180° y comprenden por lo tanto dos ángulos rectos se llaman entre sí: *Angulos complementarios*.

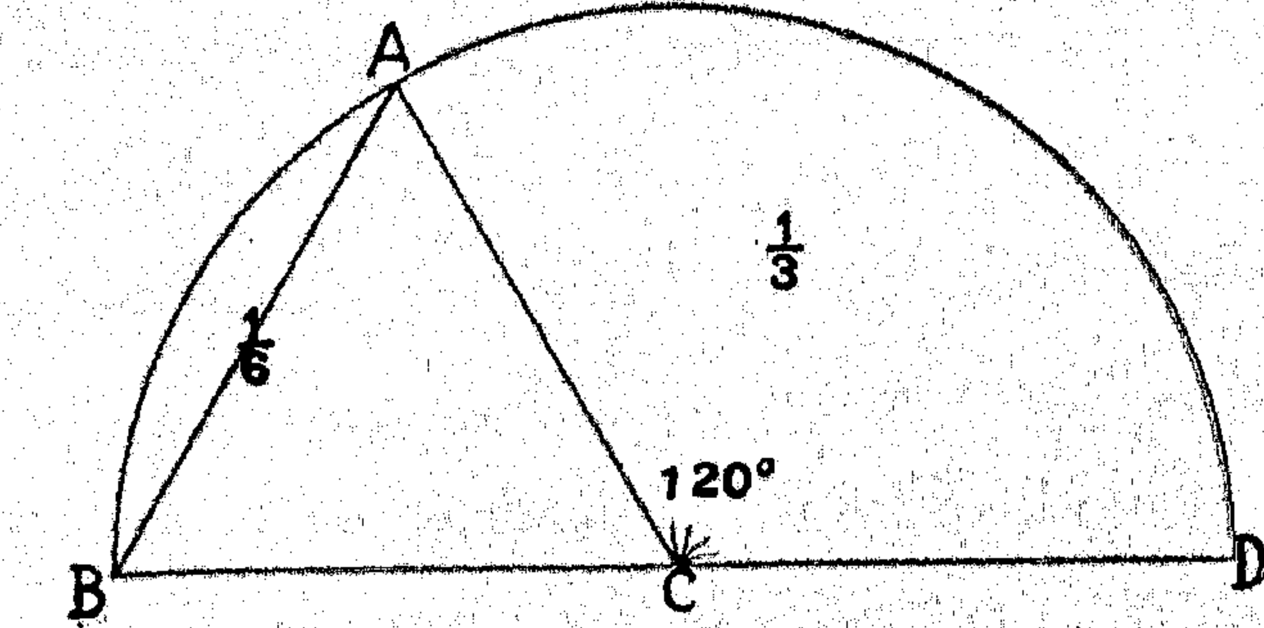


Fig. 192 (1

Si tenemos pues (fig. 192) un triángulo equilátero cualquiera BAC podemos conocer en seguida el valor del ángulo externo ACD.

Será el suplemento del ángulo del triángulo el cual tiene 60°, o lo que es igual, que aquel vale 180° — 60° = 120°.

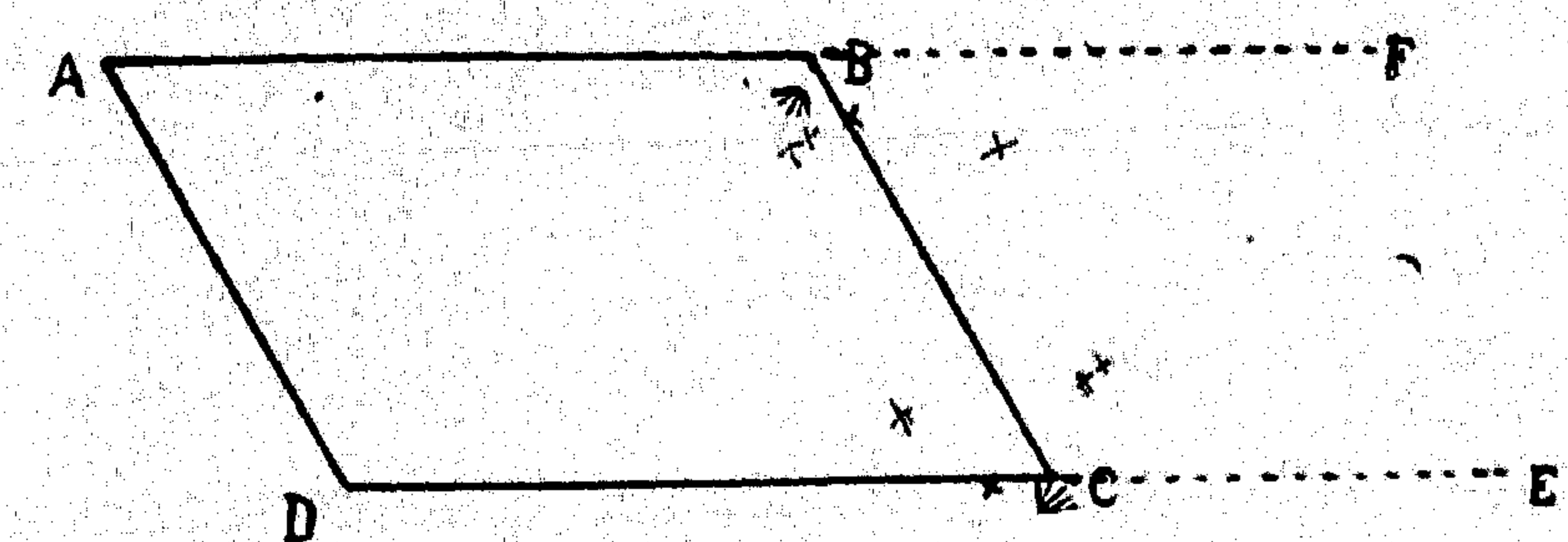


Fig. 192 (2

Ahora observemos un rombo cualquiera, el cual tiene los lados opuestos paralelos que se podrían prolongar en el sentido BF o CE (fig. 192 (2). En tal caso BC es una secante que corta dos paralelas.

Los ángulos alternos internos son iguales: FBC = BCD y también ABC = BCE.

Pero los ángulos adyacentes son suplementarios y por lo tanto los dos ángulos que se encuentran en los dos extremos de un lado del rombo son complementarios.

Los ángulos opuestos son iguales.

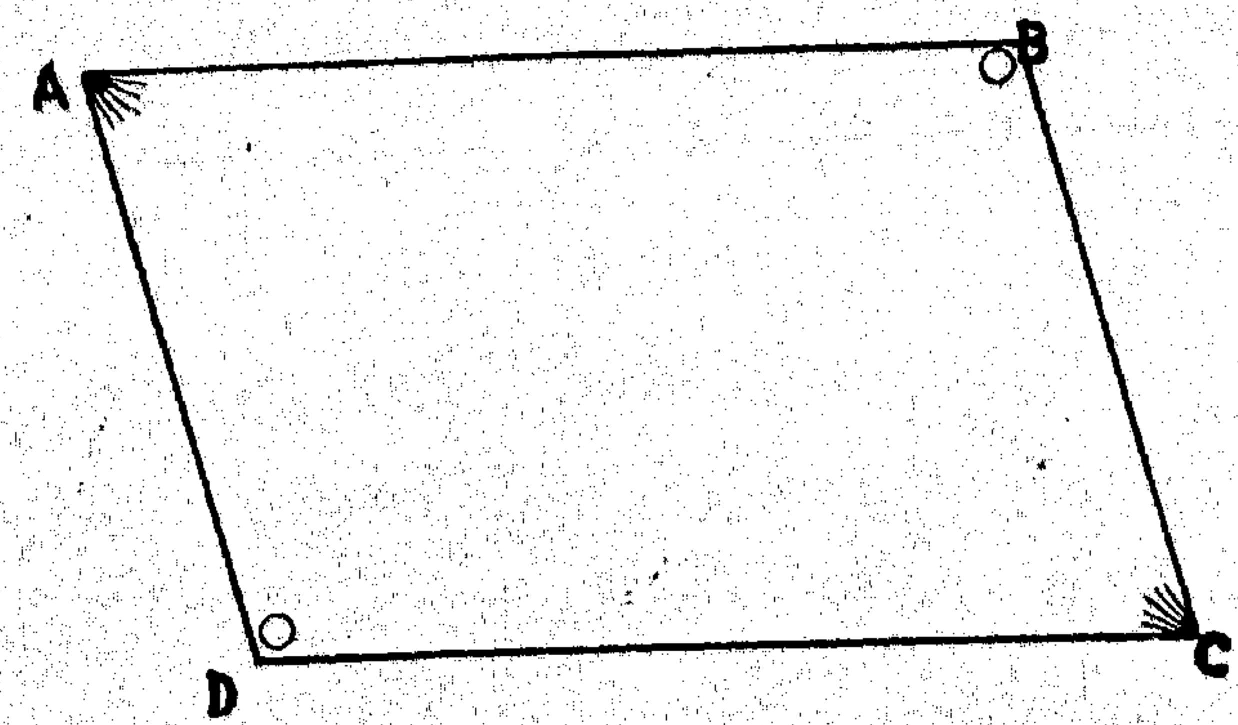


Fig. 192 (3

Es decir $A = C$
$B = D$

$A + B = 2$ rectos.
$B + C = 2$ rectos
$C + D = 2$ rectos
$D + A = 2$ rectos.

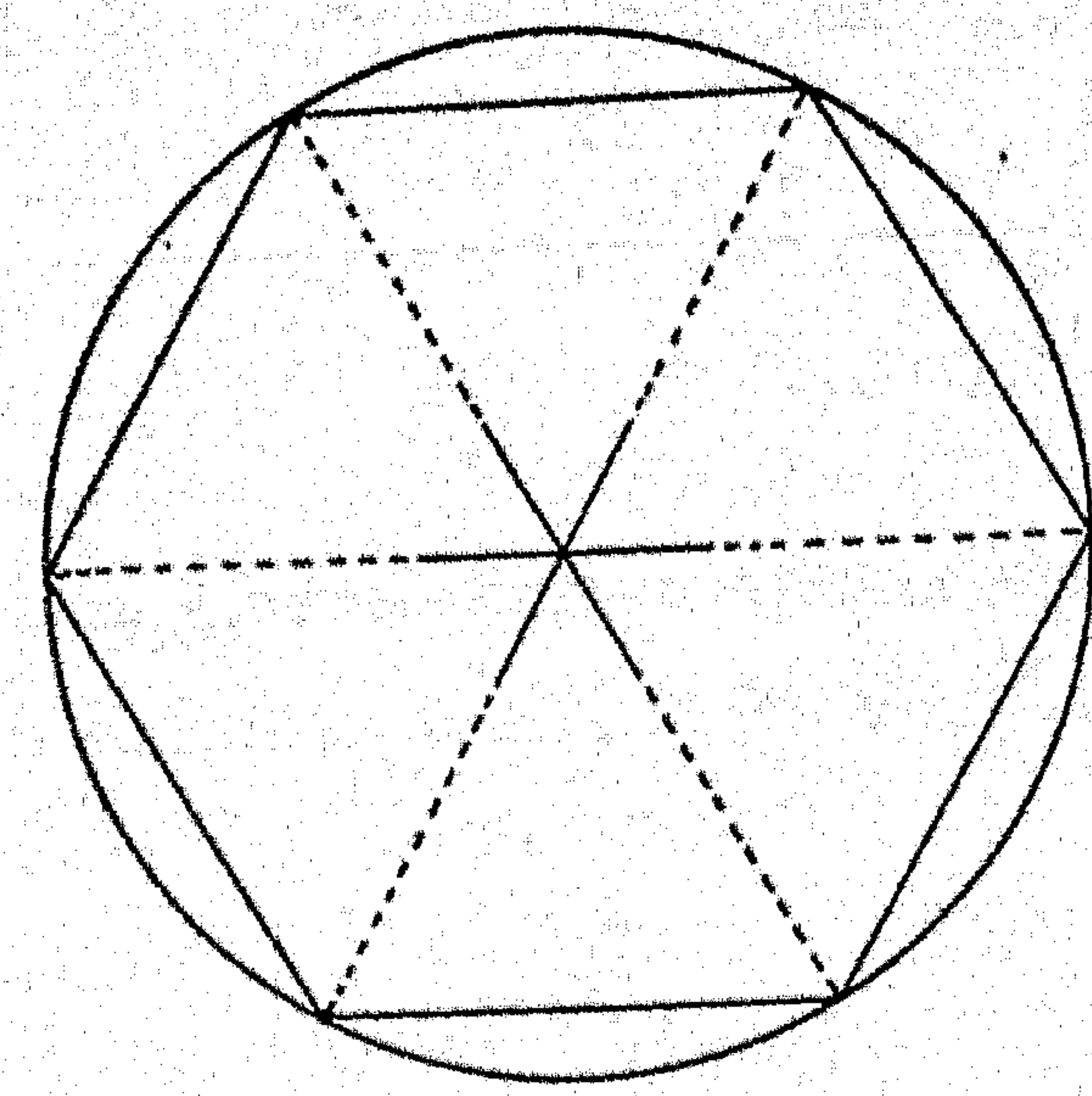


Fig. 193

Estudiemos ahora el exágono (fig. 193).

Este tiene cada ángulo igual a dos veces un ángulo del triángulo equilátero que tiene el radio por lado; en efecto, el exágono es la suma de seis de estos triángulos.

Cada ángulo mide pues 120°.

Todos los ángulos miden $120° \times 6 = 720°$.

Y para saber cuantos ángulos rectos suman hay que dividir esta suma por 90°.

$$720 : 90° = 8.$$

Si ahora, en cambio, contamos todos los ángulos de los seis triángulos equiláteros tendremos que en cada triángulo la suma de sus ángulos es igual a 2 rectos, luego la suma total de los ángulos de los seis triángulos será $6 \times 2 = 12$.

Para deducir de ésta el número de ángulos rectos que constituyen en conjunto la suma de los ángulos del exágono, habrá que restar los que concurren en el centro, los cuales, todos juntos, son igual a 4 rectos.

Sustrayendo esto de la suma de los ángulos de los triángulos se tiene $12 — 4 = 8$.

De este modo podemos averiguar a cuantos ángulos rectos corresponde la suma de los ángulos de un polígono cualquiera.

En efecto, cada polígono se puede reducir a un número de triángulos igual al número de lados, uniendo todos los vértices del polígono con el centro del círculo.

Sea, por ejemplo, un octógono (fig. 194).

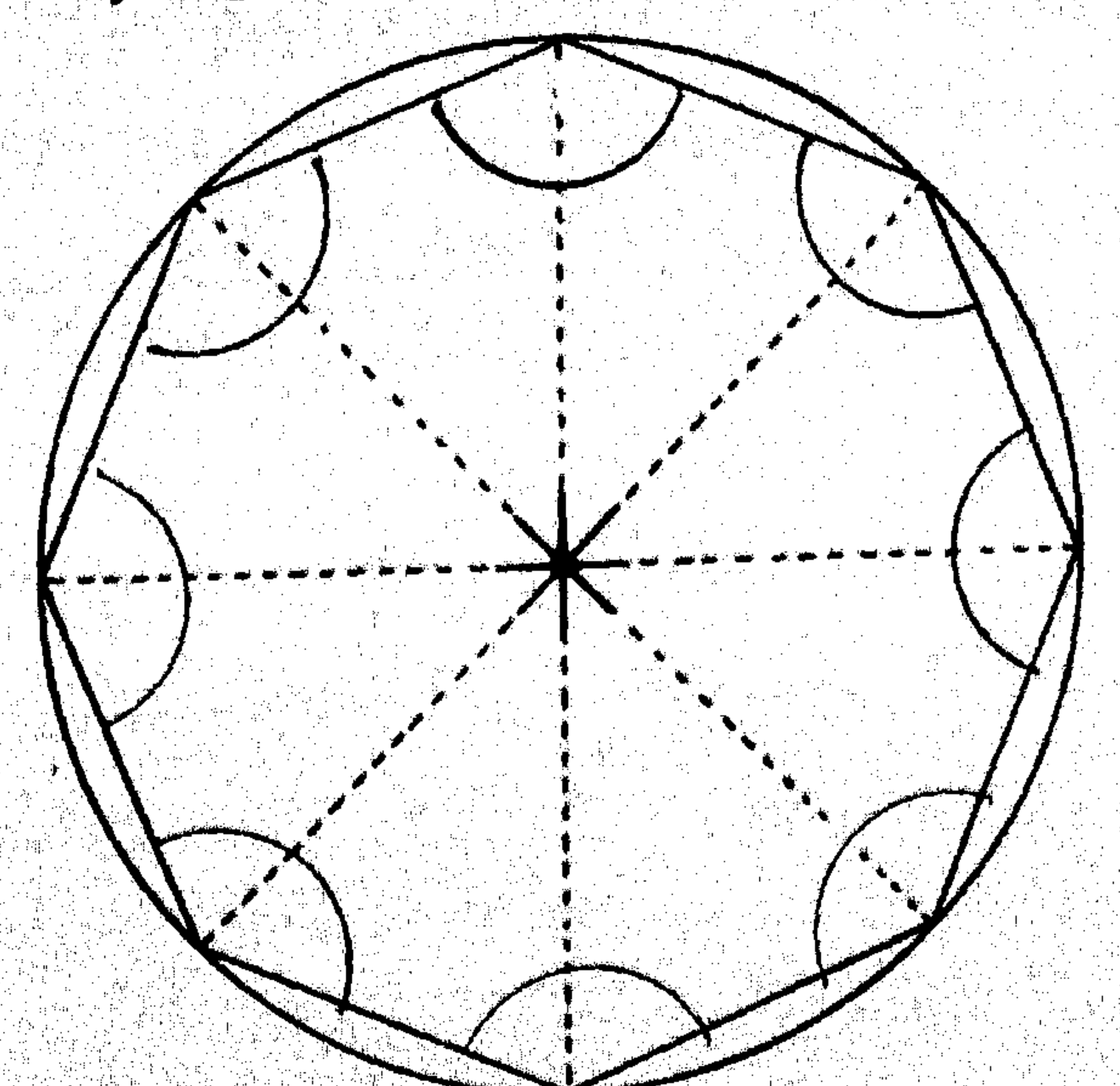


Fig 194

Este se puede descomponer en ocho triángulos que tienen el vértice en el centro. Como la suma de los ángulos de cualquier triángulo es igual a dos rectos, tendremos que la suma de los ángulos de los ocho triángulos es igual a $2 \times 8 = 16$ ángulos rectos.

De esto habrá que restar el grupo de ángulos que se forman alrededor del centro, porque no forman parte de los ángulos del octógono y cuya suma es siempre igual a 4 rectos.

Los ángulos del octógono suman pues $16 - 4 = 12$ rectos.

Este resultado se puede obtener igualmente calculando los grados.

El ángulo que es la octava parte del círculo mide 45°, es decir, la mitad de un recto.

Cada triángulo del octógono es isósceles, porque tiene dos lados iguales al radio del círculo. Por lo tanto, los dos ángulos de la base de cada triángulo son iguales entre sí. ¿Cuánto miden?

Es fácil calcularlo. Los tres ángulos juntos miden 180°. Si de 180° se restan 45, $180° - 45° = 135°$. Ahora hay que hallar la mitad de 135 para saber cuanto vale uno de los ángulos de la base del triángulo.

Pero como no es esto lo que nos interesa sino el doble porque cada ángulo del octógono es igual a dos ángulos de la base del triángulo, es aquella pues la medida del ángulo del octógono o sea 135°.

Todos los ángulos juntos miden $135 \times 8 = 1080$.

Dividamos esto por 90, medida de un ángulo recto.

$$1080 : 90 = 12.$$

Se puede pues enunciar como

TEOREMA. — La suma de los ángulos de un polígono regular es igual a tantas veces dos rectos como lados tiene menos 4 rectos.

Con esto se puede calcular rápidamente que un polígono de 10 lados (un decágono) tiene 20 ángulos rectos menos 4 rectos o sea 16 ángulos rectos.

Un polígono de cien lados tendría 200 menos 4 ángulos rectos o sea 196.

Cuando se quieren pues medir *sumas de ángulos*, no se recurre a los *grados*, sino a los ángulos rectos.

El ángulo recto es *una medida de referencia* una *unidad* de medida.

Tiene muchas características que le distinguen. Es el único ángulo formado por dos perpendiculares. Mide 90°, la cuarta parte del círculo.

Convertir el ángulo recto en unidad de medida, equivale a tomar la cuarta parte del círculo en lugar del grado que es la 160.ª parte.

El grado pues, sirve para medir ángulos aislados.

El ángulo recto es la unidad de referencia, cuando se trata de calcular muchos ángulos sumados conjuntamente.

Conviene reflexionar sobre el hecho de que 4 rectos son medidos conjuntamente. por el círculo completo.

Para tener una visión clara del valor de una suma de ángulos, podemos pues recurrir a *círculos enteros*.

De este modo lograremos un criterio sensible de la suma de los ángulos de los polígonos.

Hemos calculado, por ejemplo, que la suma de los ángulos de un exágono es igual a 8 rectos ; estará pues representada por dos círculos y que la suma de los ángulos de un octógono es igual a 12 rectos, así que podrá representarse por tres círculos. Que la suma de los ángulos de un decágono equivale a 16 rectos, así que podrá representarse por 4 círculos.

Si queremos calcular los ángulos de un polígono de veinte lados, tendremos que sumar 40 rectos menos 4 o sea 36. $36 : 4 = 9$. Luego será igual a nueve círculos.

Crece pues el número de círculos necesarios para medir los ángulos, al mismo tiempo que crece el número de lados de un polígono.

Si imaginásemos un polígono de tantos lados que cada sector correspondiente del círculo donde estuviera inscrito midiese sólo 2° este polígono tendría 360 : 2 = 180 lados.

Y por ello sus ángulos medirían en conjunto:

$$\frac{180 \times 2 - 4}{4} = \frac{360 - 4}{4} = \frac{356}{4} = 89 \text{ círculos.}$$

Finalmente, si los lados fueran tantos que correspondieran a 1° los ángulos serían 360 × 2 — 4 = 720 — 4 = 716 rectos.

716 : 4 = 179 o sea 179 círculos cuya representación sería un dibujo casi inconcebible de círculos.

Una figura que representamos dá la idea de un número de círculos entre 35 y 40.

Explicación de las figuras: (que hallaremos en páginas sucesivas)

Fig. 195 — representa la suma de los tres ángulos de un triángulo equilátero cuyos lados caen sobre una línea recta, siendo dicha suma igual a dos rectos.
Medio círculo, es pues, la medida de la suma.

Fig. 196 — lo mismo sucede con un triángulo rectángulo y con cualquiera otro triángulo.

Fig. 197 — representa la suma de los cuatro ángulos de un cuadrado reunidos; su medida es un círculo

Fig. 198 — lo mismo sucede con los ángulos de un cuadrilátero cualquiera.

Fig. 199 — representa la suma de los ángulos de un exágono, medida por dos círculos.

Fig. 200 — los ángulos de un octógono se hallan medidos por tres círculos.

Fig. 201 — los ángulos de un decágono por 4 círculos.

Fig. 202 — los ángulos de un polígono de 20 lados por 9 círculos.

Fig. 203 — círculos que medirían los ángulos de un polígono cuyo lado abarcase en el círculo 3.°

Y si los lados fuesen menores de un grado y el círculo se dividiese en 1000 partes etc. el número de círculos se multiplicaría hasta el infinito.

Así es un número INFINITO de círculos que deberían medir la mitad del círculo; idea transcedental profunda y fascinadora para la mente de un niño, pero accesible y clara.

La figura 204 representa un semicírculo (circunscrito a un trapecio). En él está inscrito medio exágono (la otra mitad está señalada por líneas de puntos).

AOB — Con este ángulo se representa el que mide 60°, esto es, la porción de círculo que comprende el lado del exágono.
El ángulo pues depende del número de lados.

BCD — Es igual al ángulo suplementario de AOB, como se ve claramente en la figura.

Por lo tanto, el ángulo de todo polígono es el ángulo suplementario del que está en relación con su lado.

Si se trata pues de un octógono, el ángulo en relación con el lado, es de 360°: 8 = 45.

El ángulo del polígono es su suplementario 180 — 45 = 135.

Si se trata de un decágono, tendremos, que el ángulo en relación con su lado será 360° : 10 = 36.

El ángulo del polígono será 180° — 36° = 144°.

Mientras más disminuye el ángulo en relación con el lado más crece el ángulo del polígono, es decir, cuando aumenta el número de lados del polígono, aumenta el valor de sus ángulos.

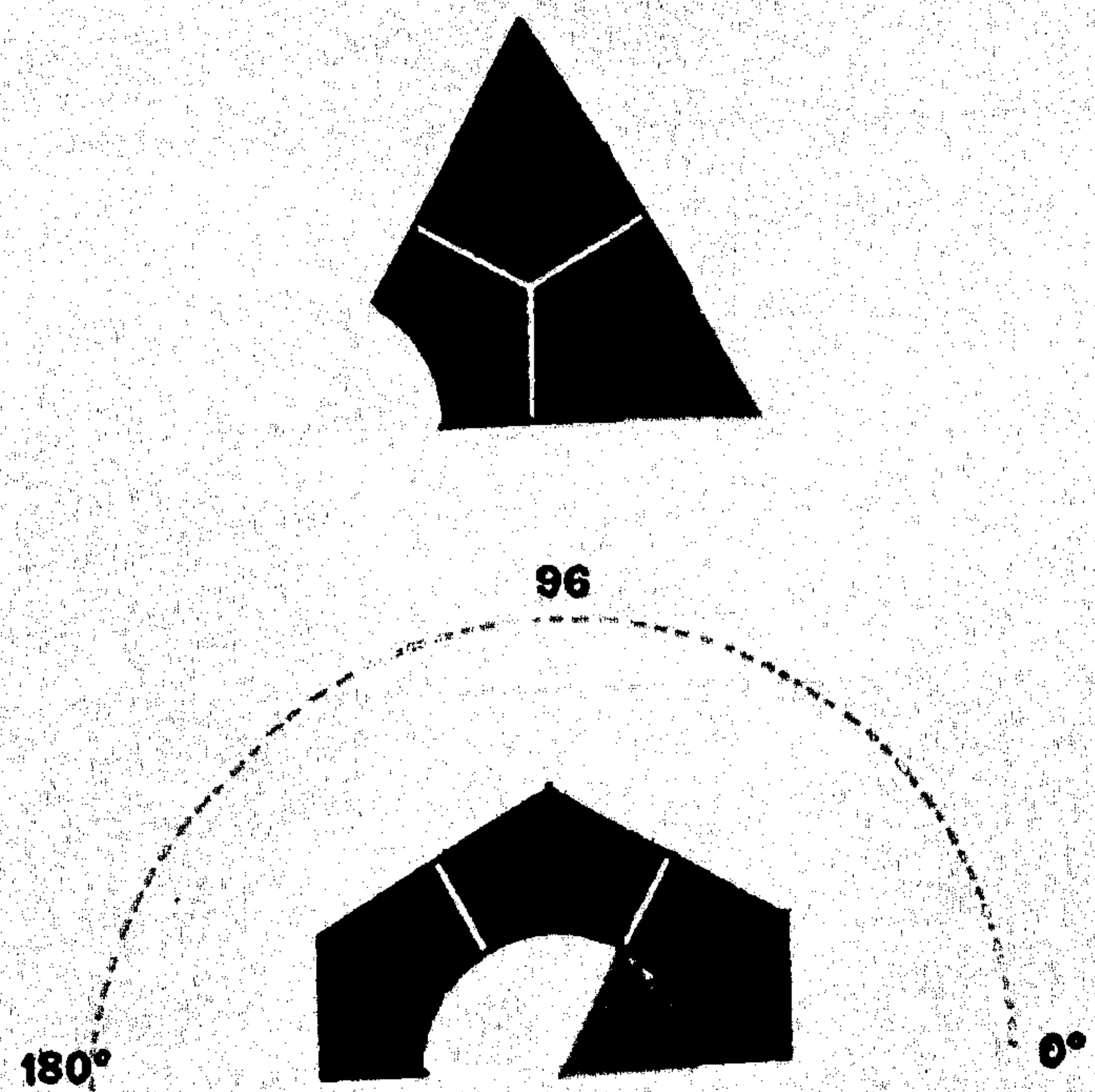


Fig. 195

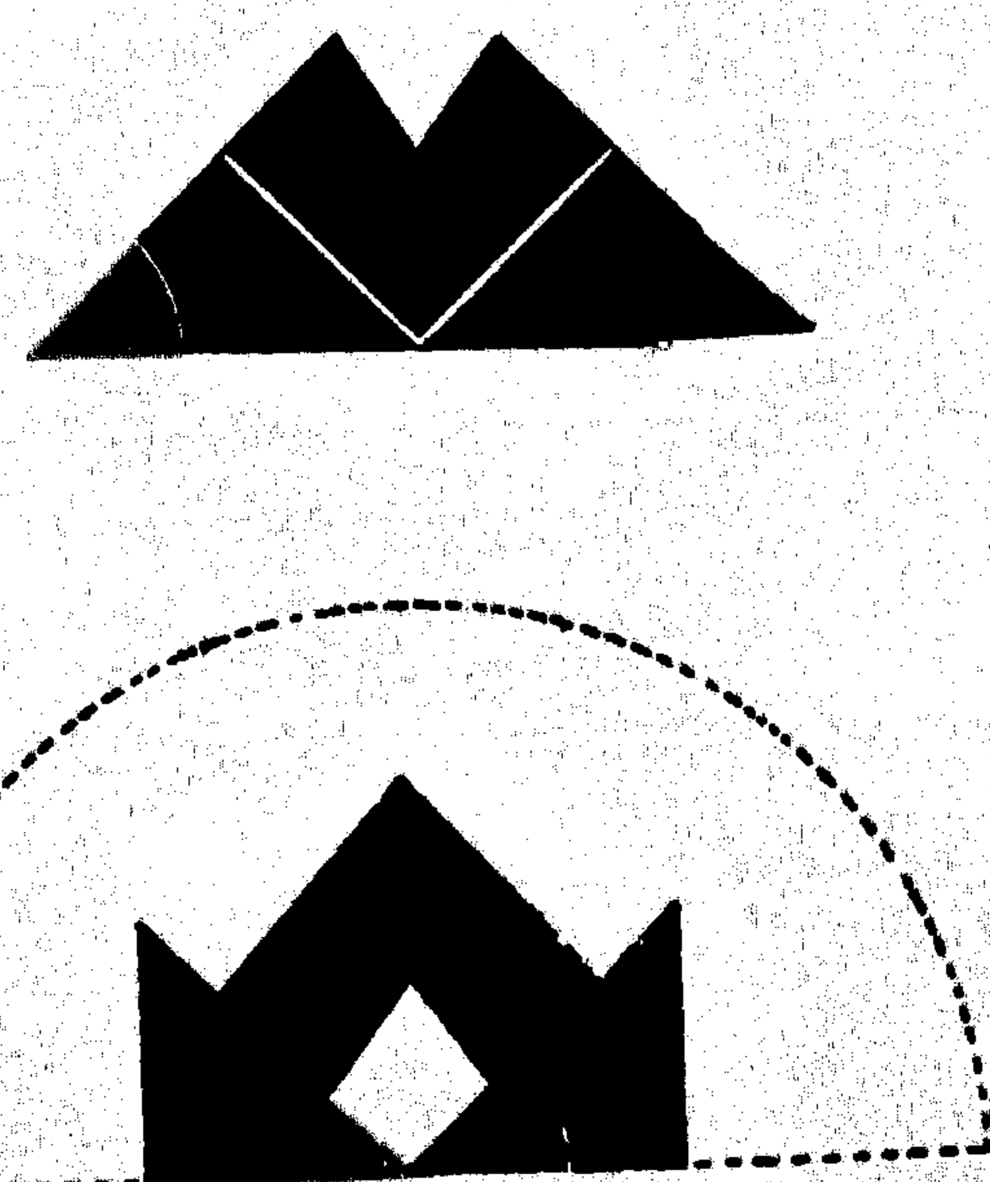


Fig. 196

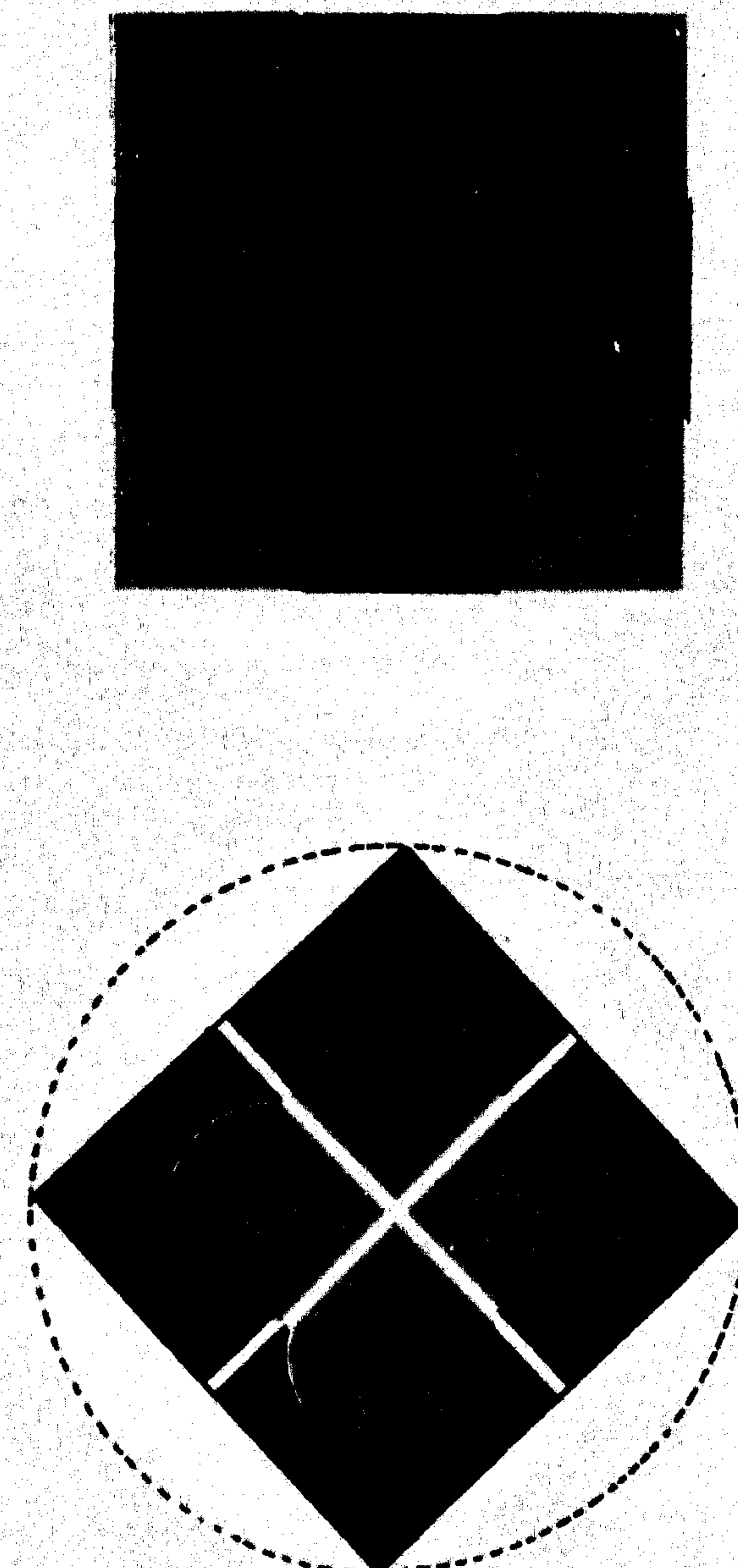


Fig. 197

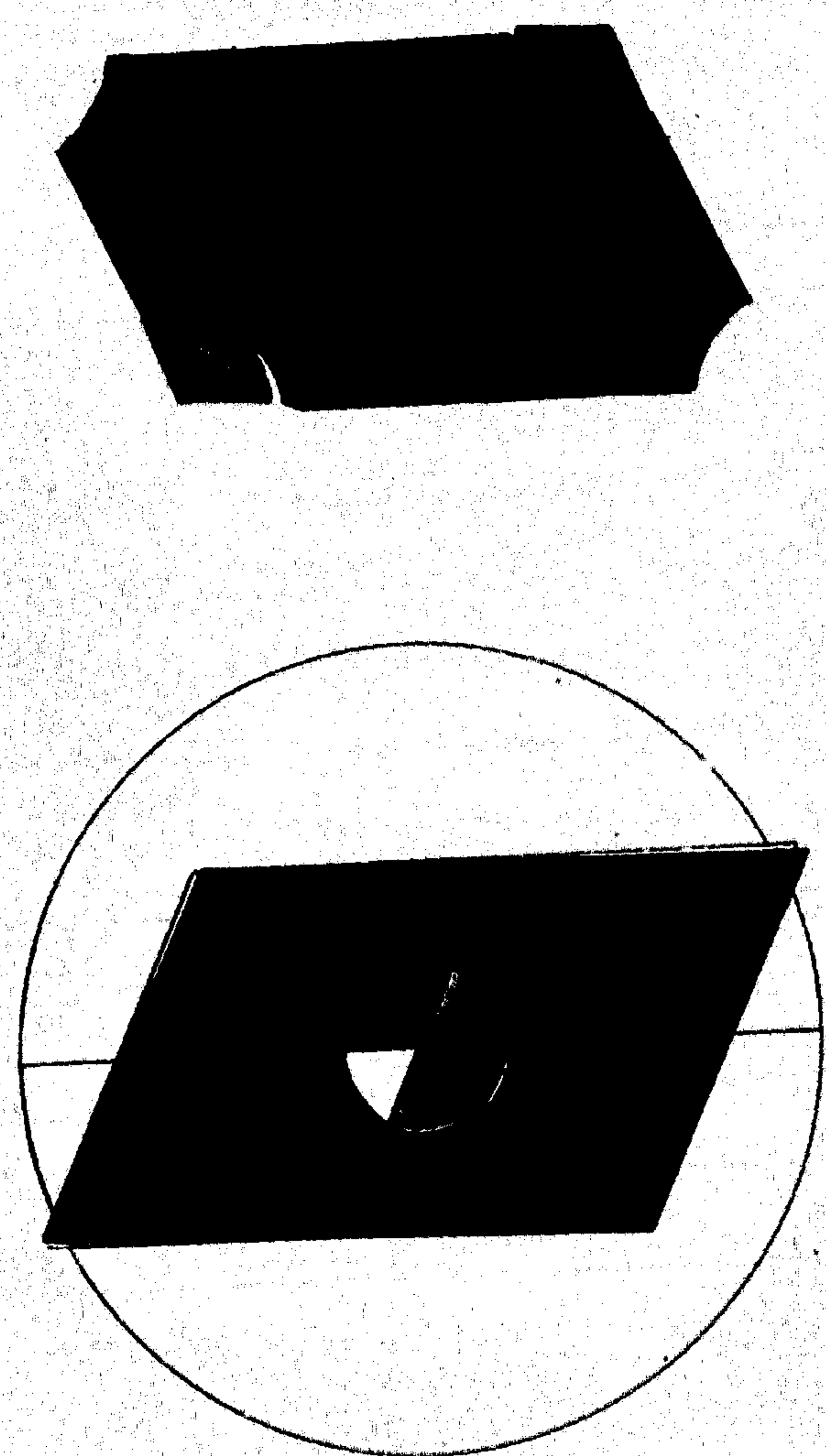


Fig. 198

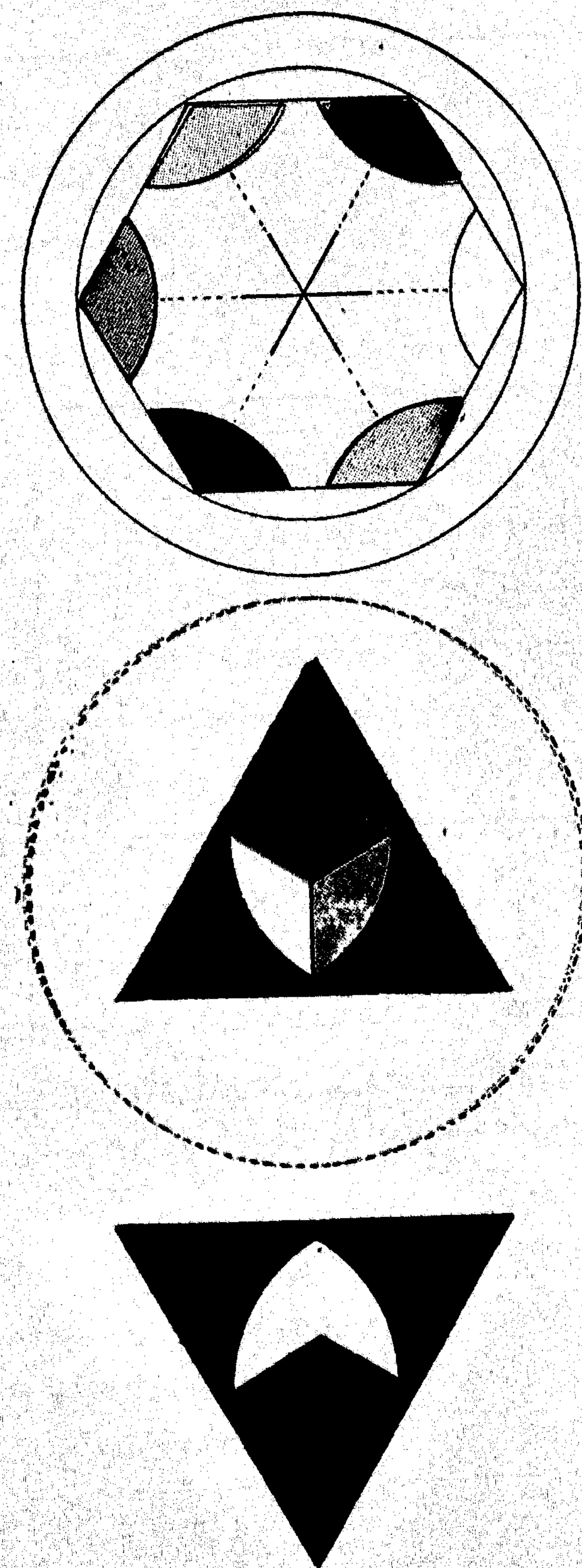


Fig. 199

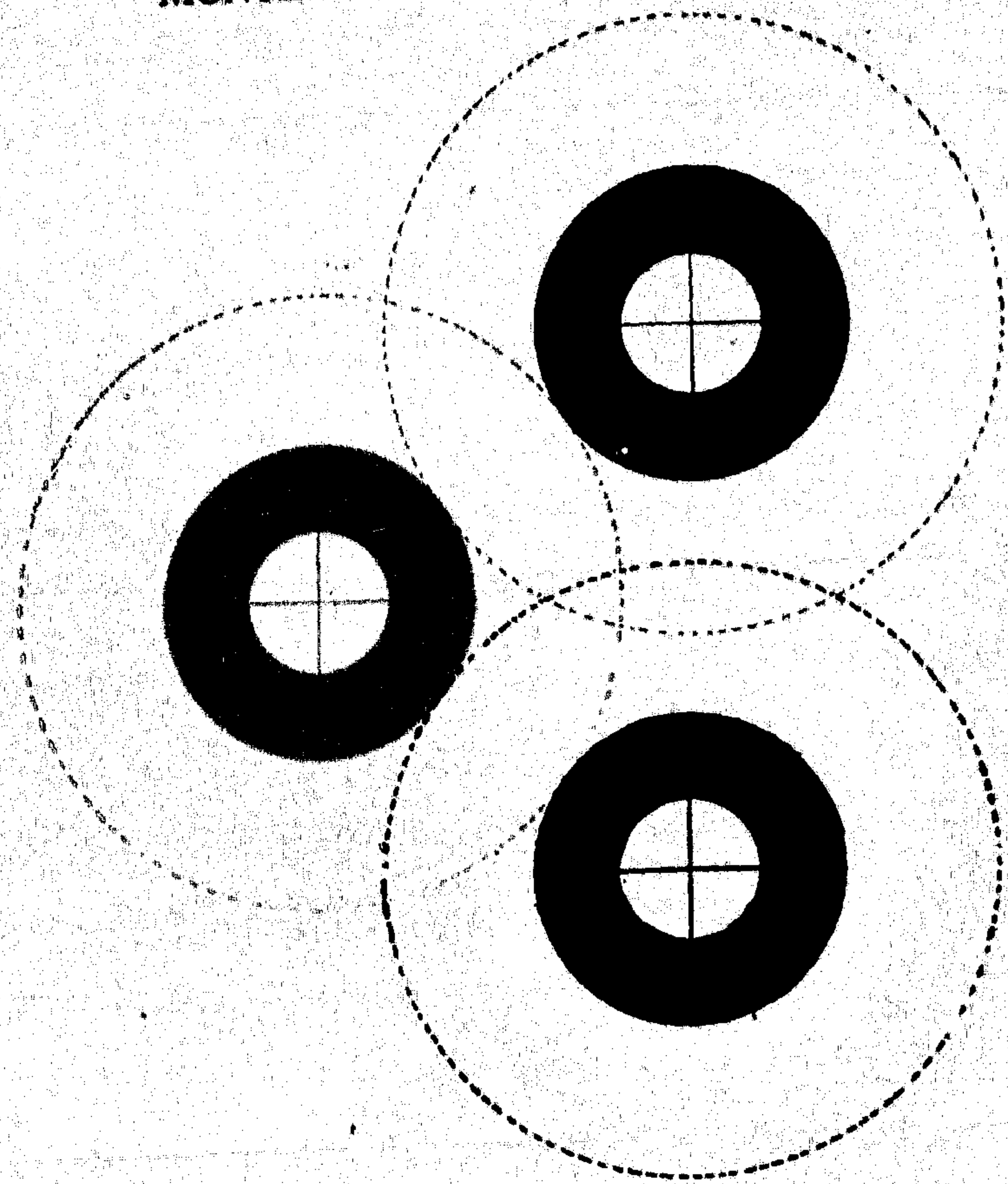


Fig. 200

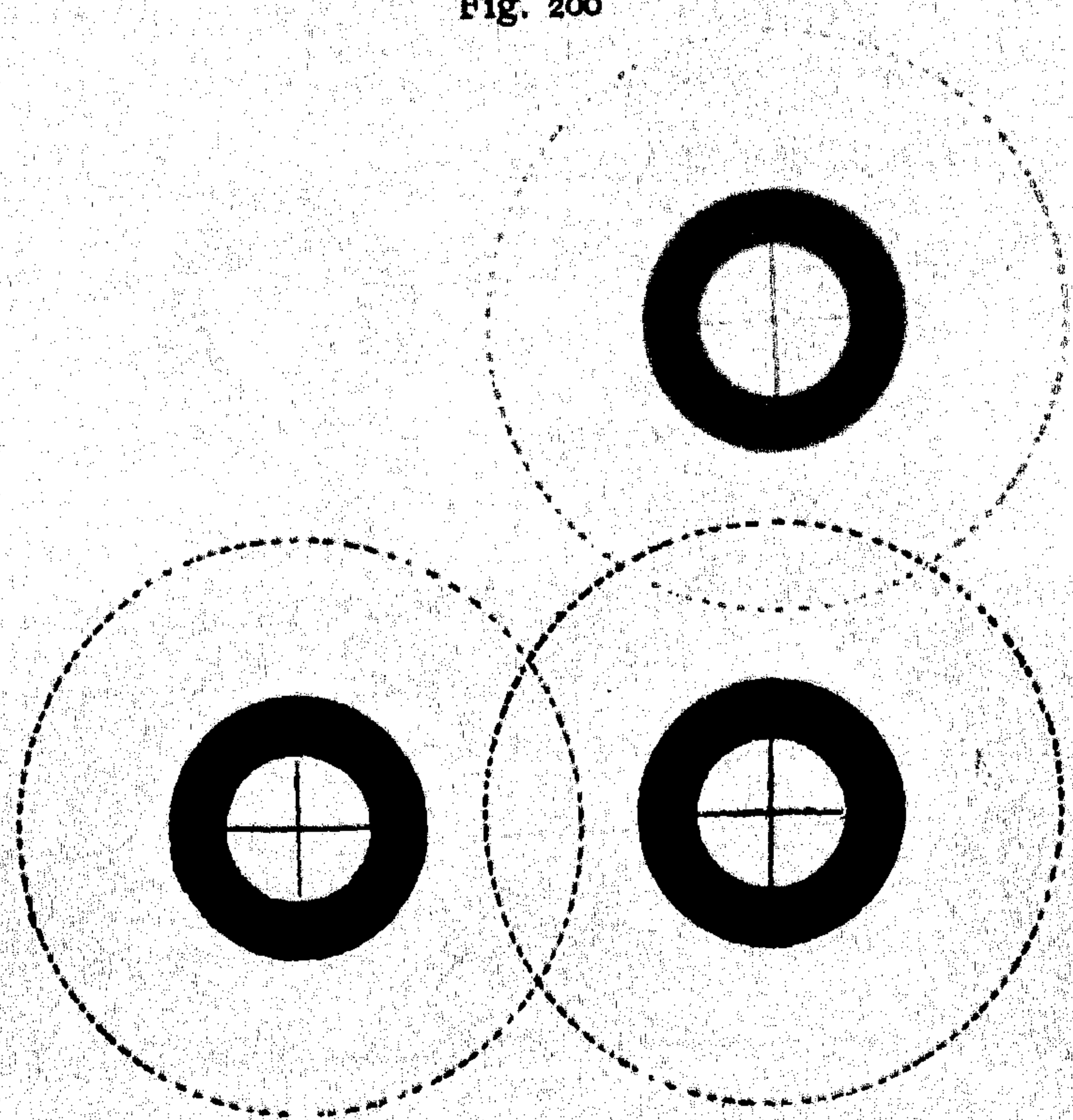


Fig. 201

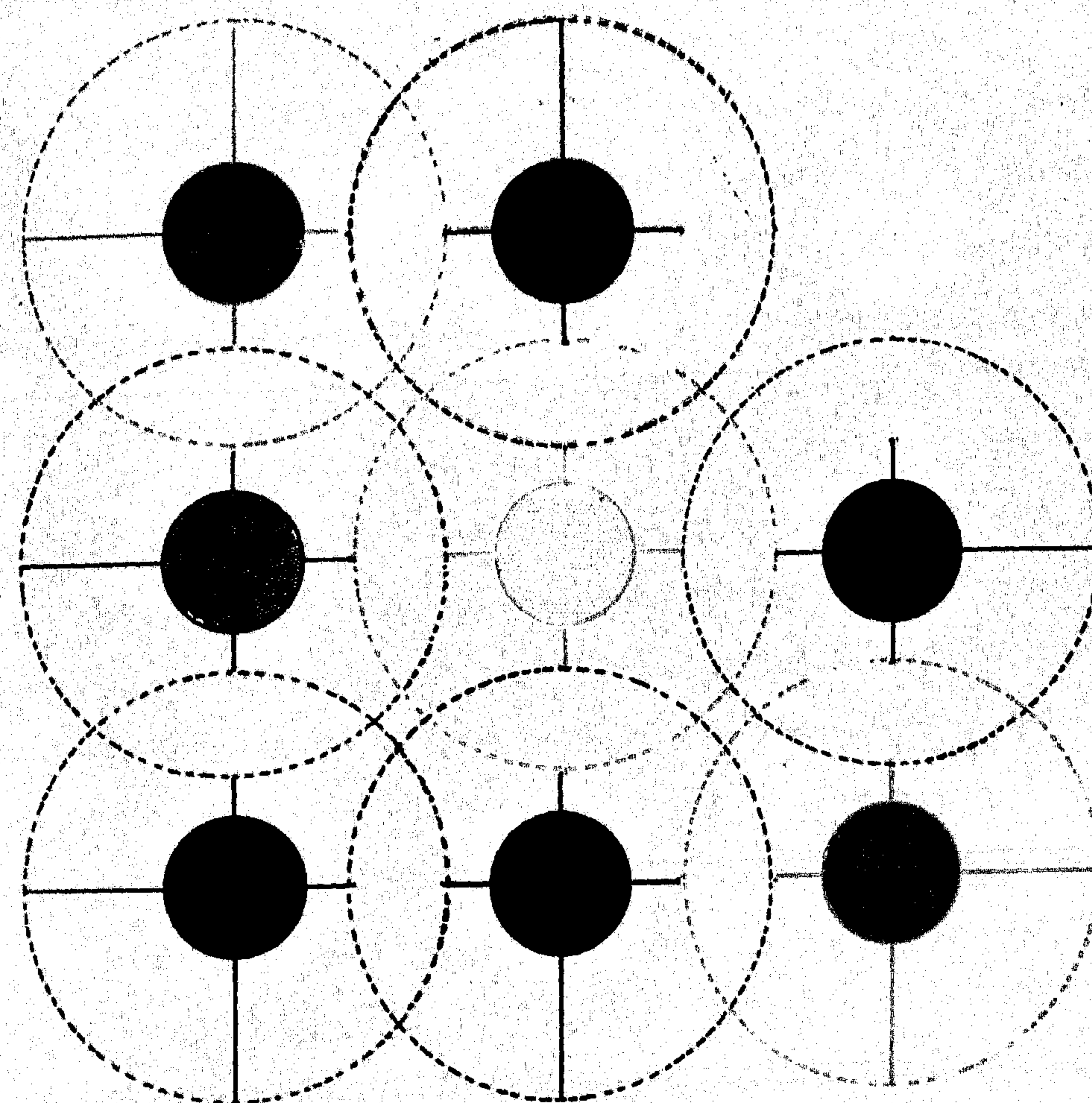


Fig. 202

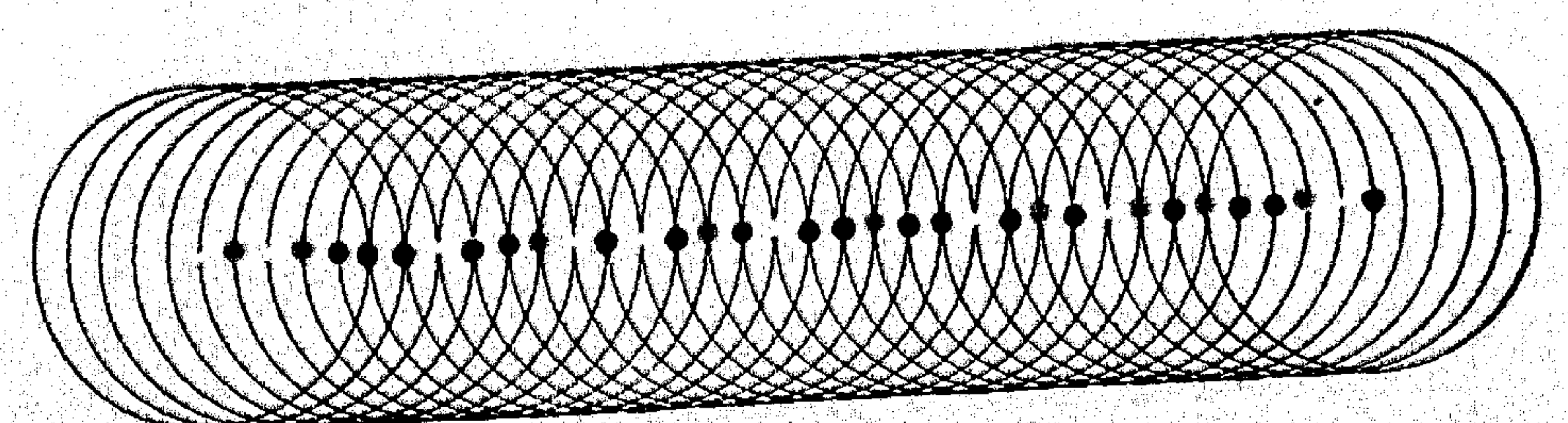


Fig. 203

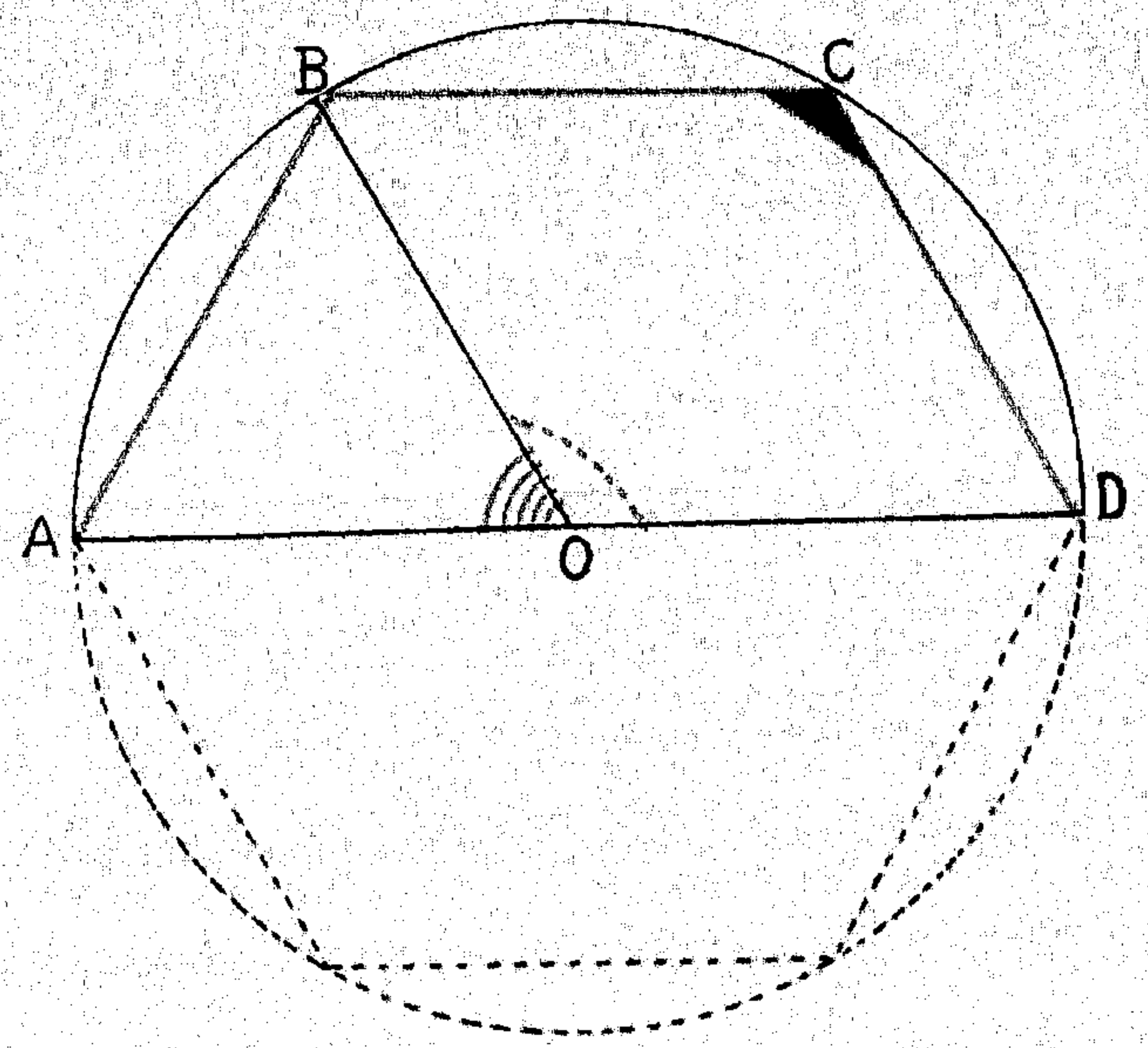
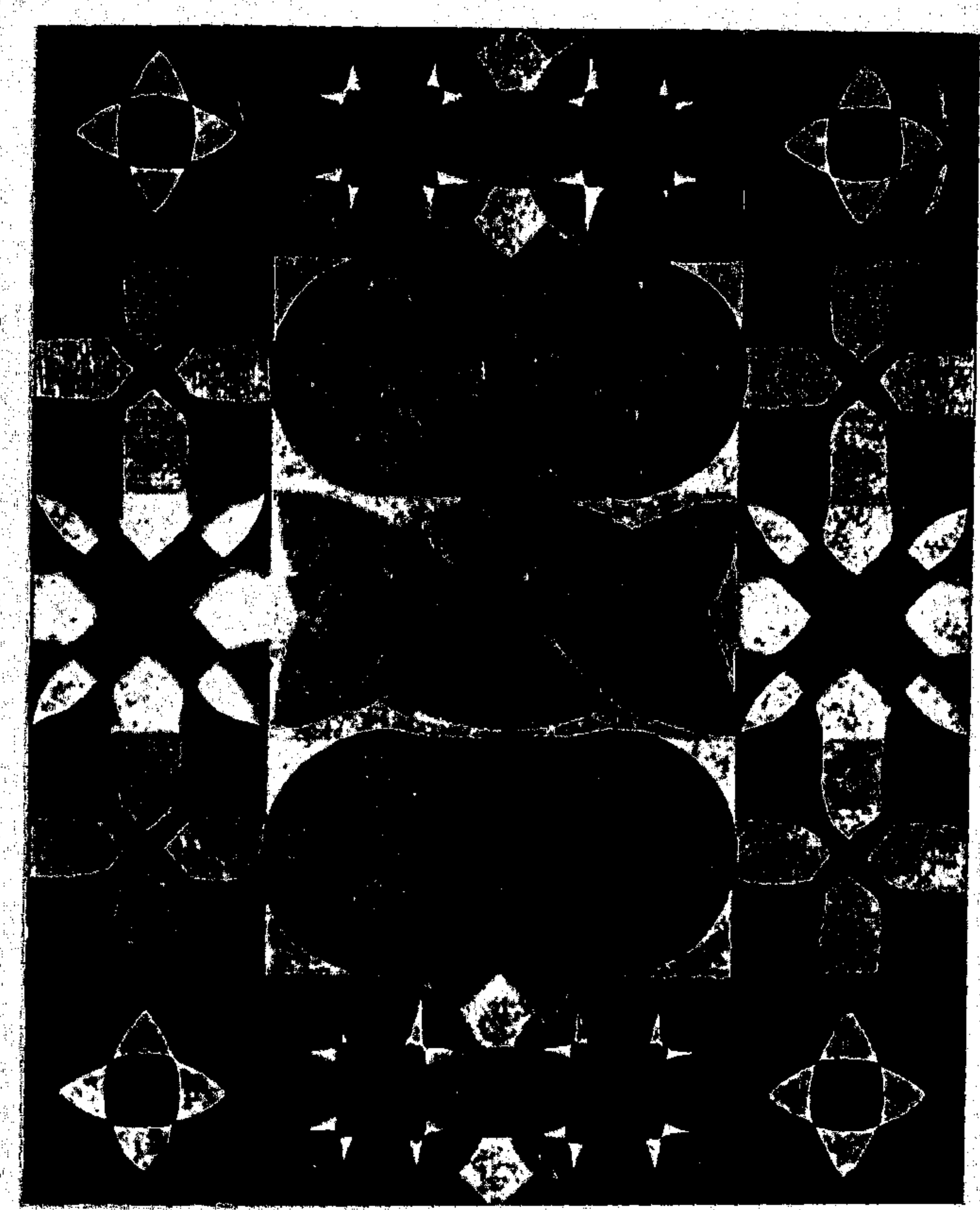


Fig. 204

DIBUJOS DECORATIVOS

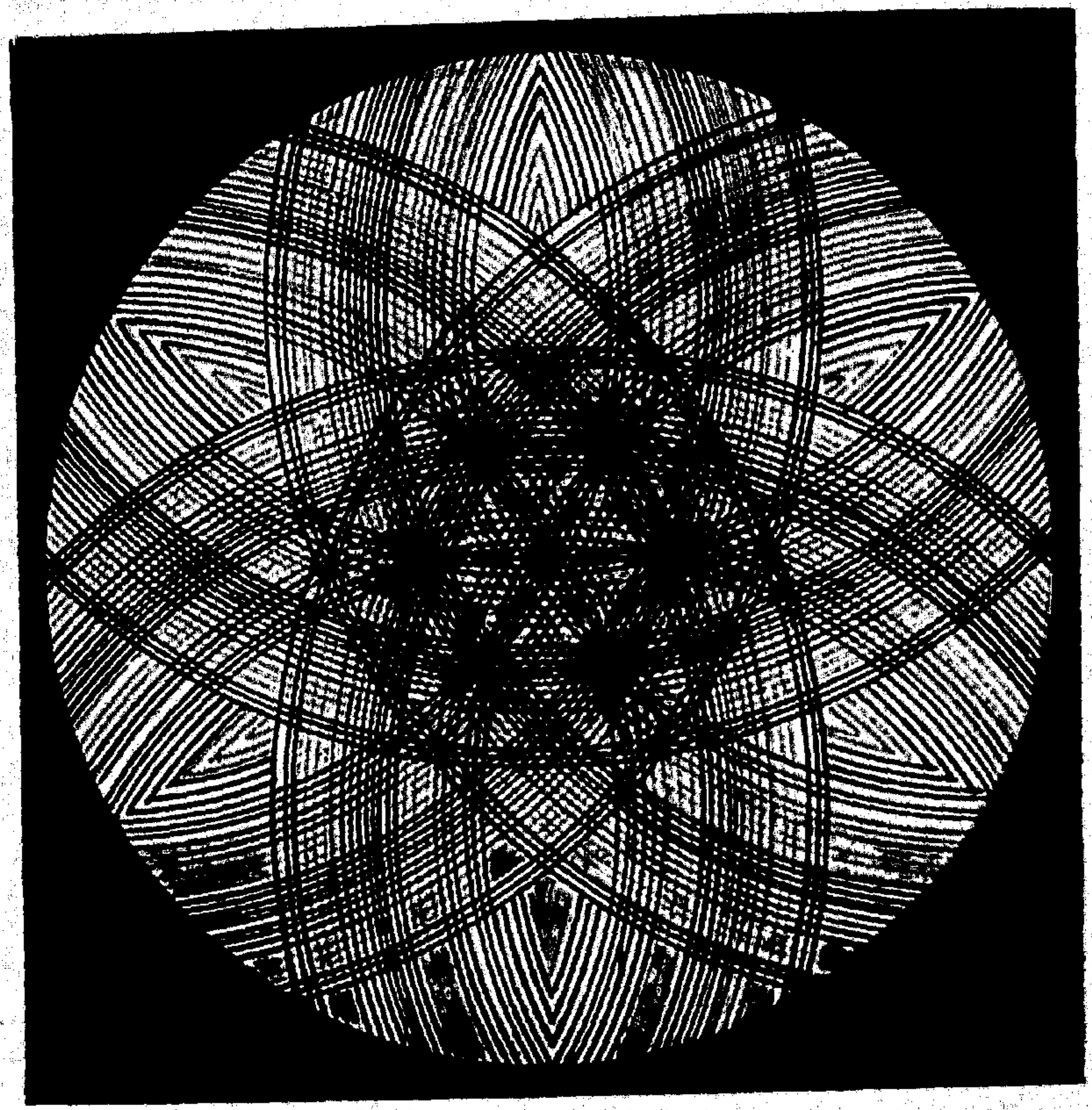
Una de las aplicaciones espontáneas de tantas reflexiones es una verdadera explosión de dibujos decorativos. Las representaciones estéticas aparecen como inspiraciones de un entusiasmo intelectual que se expresa en un conjunto de formas y de colores, armoniosas en su admirable exactitud.

EJEMPLO DE GEOMETRIA ARTISTICA



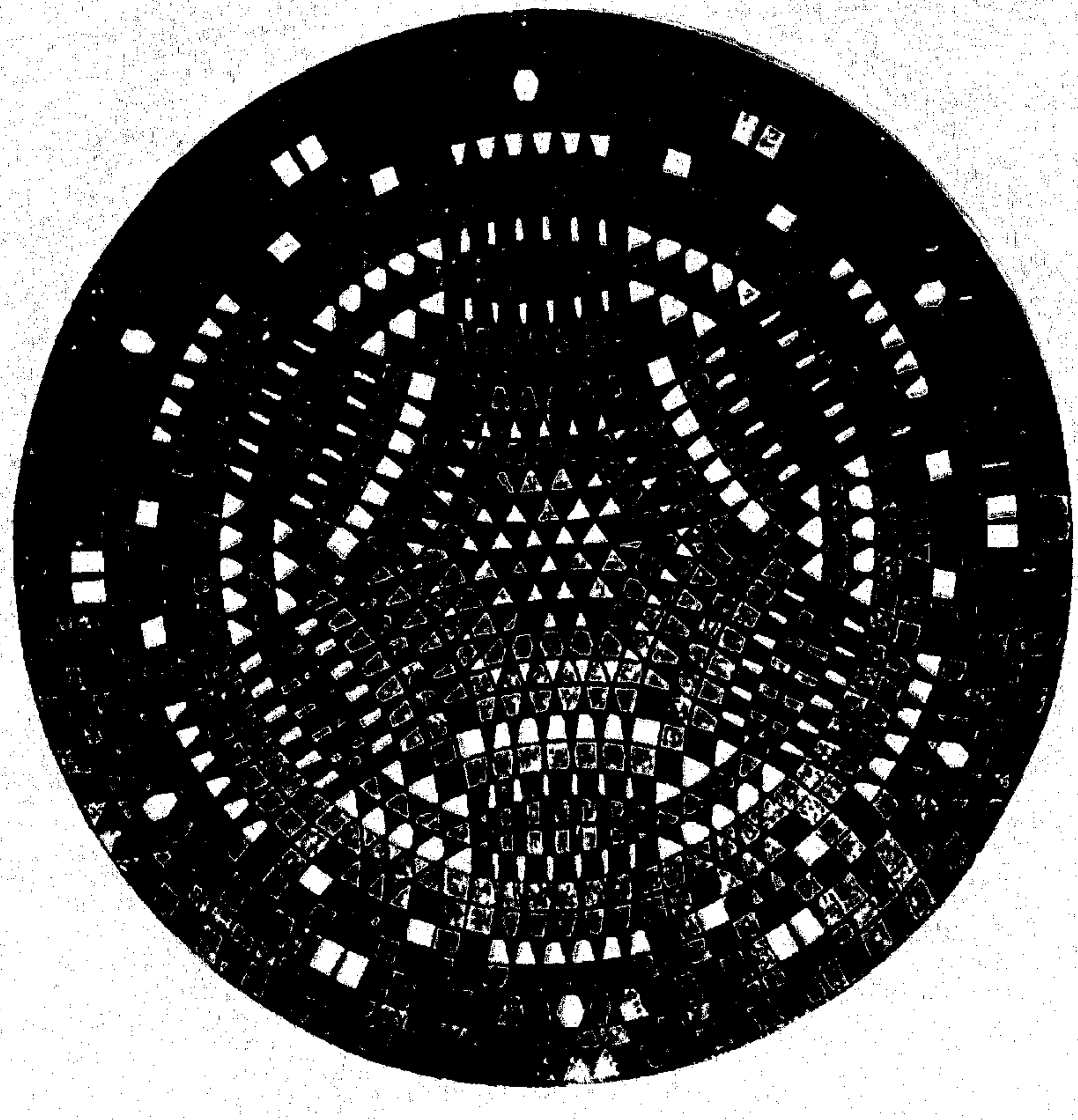
Creación espontánea hecha por niños de 7 a 9 años, utilizando para su ejecución piezas del material Montessori
(Escuelas Holandesas)

EJEMPLO DE GEOMETRIA ARTISTICA



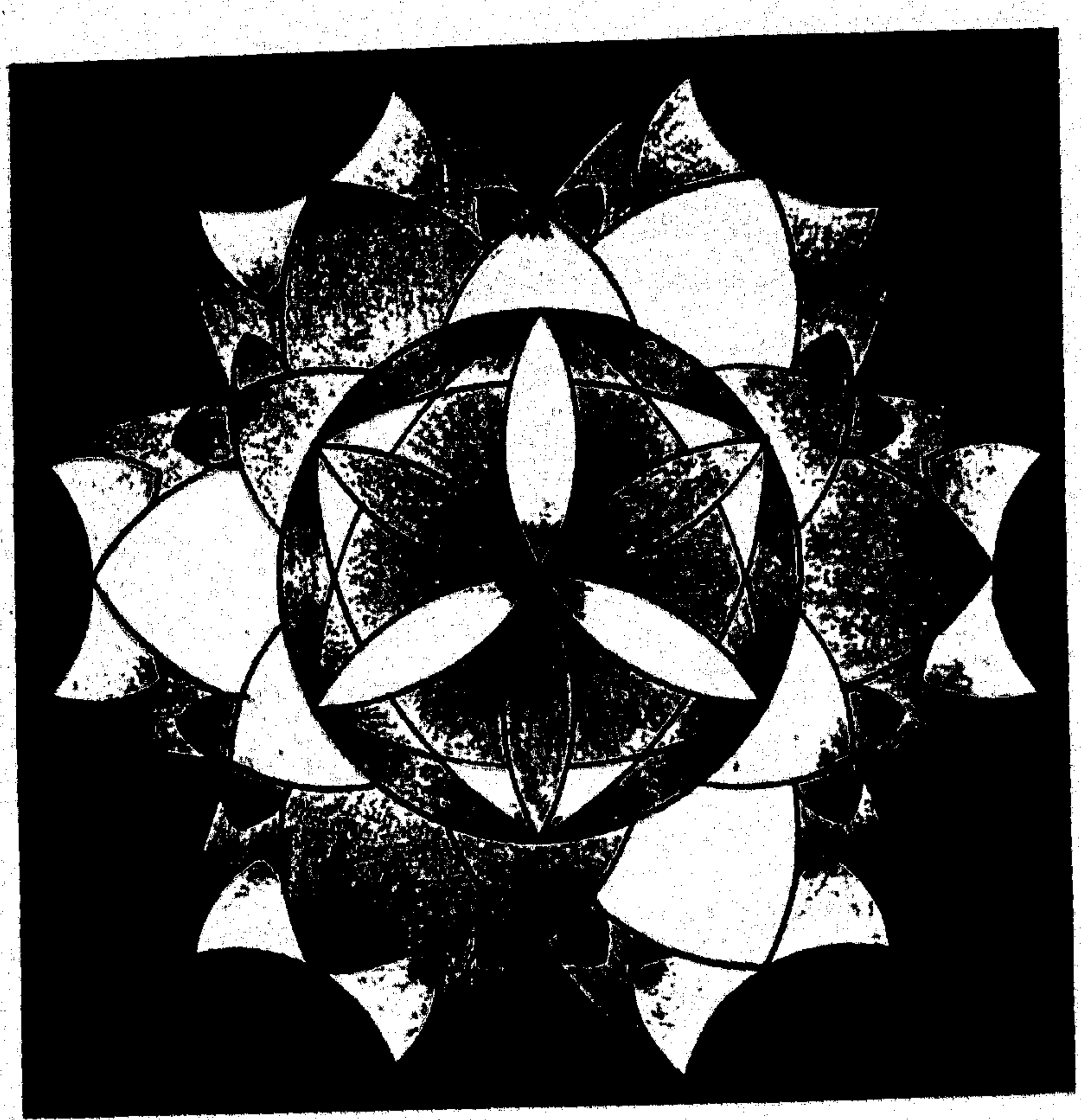
Dibujo espontáneo ejecutado por niños de 7 a 9 años
(Escuelas Holandesas)

EJEMPLO DE GEOMETRIA ARTISTICA



Creación espontánea ejecutada por niños de 7 a 9 años
(Escuelas Holandesas)

EJEMPLO DE GEOMETRIA ARTISTICA



Reproducción de un dibujo espontáneo obtenido por niños de 1 a 9 años, utilizando para su trazado piezas movibles del material Montessori

FRACCIONES

La fracción es una parte de la unidad.

Su límite máximo es la unidad, porque al llegar a valer uno, la cantidad deja de ser fracción.

Una fracción es, pues, una de las partes (una fracción, un fragmento) de la unidad fragmentada, es decir, dividida.

La fracción se representa como la unidad dividida en partes, por ejemplo 1/2, 1/3, 1/4, 1/5 etc.

Las fracciones 1/4, por ejemplo, representa una de las cuartas partes en que está dividida la unidad.

Mientras más se divide la unidad más pequeño es el resultado de su subdivisión.

La misma cosa dividida en dos partes o sea en 1/2 da una fracción de la unidad mucho más grande que 1/20.

En las fracciones existen siempre dos números y una señal intermedia que indica subdivisión. El número situado sobre la señal se llama «numerador». El que está debajo de ella se llama «denominador».

Mientras mayor sea el denominador más pequeña es la fracción.

Nada se presta a representar sensiblemente las fracciones, como el círculo y los ángulos que con él pueden medirse. El grado es 1/360 como fracción de círculo.

Teniendo la posibilidad de dividir el círculo (la unidad) en tantas pequeñas partes iguales es posible por medio de ellas. indicar las fracciones del círculo. Por ejemplo: 1/2 = 180°. 1/4 = 90°. 1/6 = 60°.

De esta forma se hace posible representar las fracciones con dibujos y razonar sobre el particular.

En el material existen diez círculos de hierro divididos en partes.

en dos	partes	cada	una de	1/2
tres	"	"	"	1/3
cuatro	"	"	"	1/4
cinco	"	"	"	1/5
seis	"	"	"	1/6
siete	"	"	"	1/7
ocho	"	"	"	1/8
nueve	"	"	"	1/9
diez	"	"	"	1/10.

Si mezclamos el conjunto, comprendido el círculo entero, tenemos una cantidad de objetos igual a la suma de:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$$

Estos se pueden mezclar y después agrupar colocando juntos los trozos iguales, los cuales llenarán siempre el marco de un círculo.

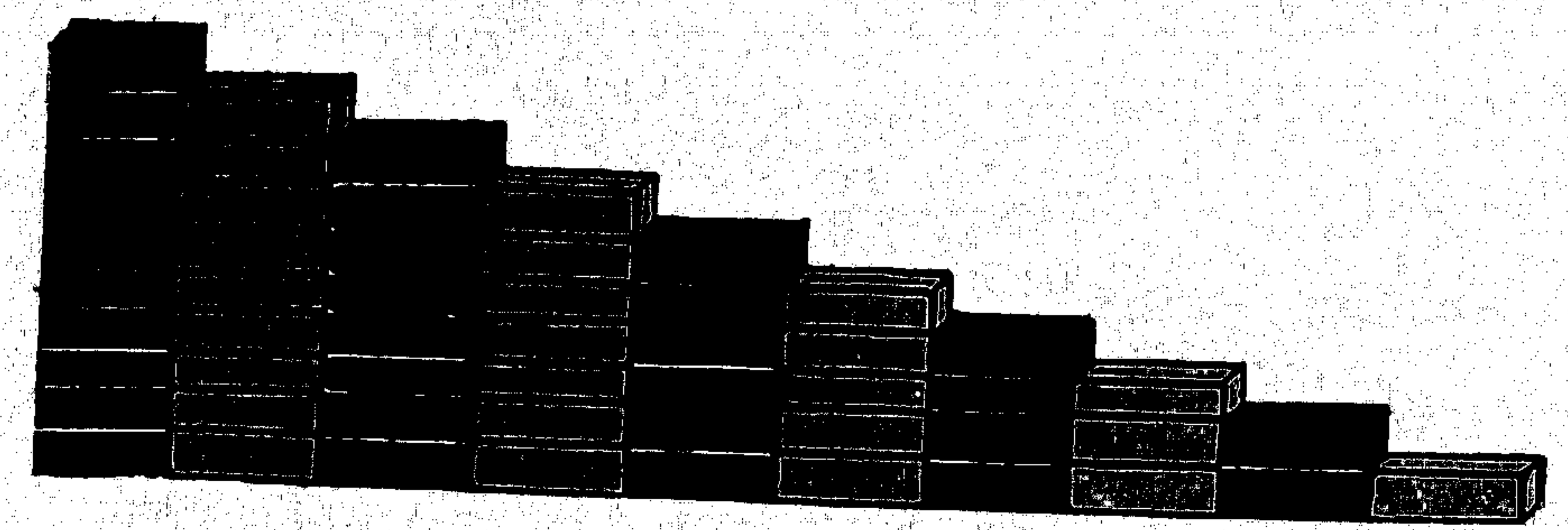
Cada uno de los trozos se puede también colocar sobre el goniómetro, que es un marco como los otros, con el fondo del mismo círculo, pero el marco está dividido en 360. Aplicando el extremo de un trozo—una fracción—de círculo, en correspondencia con el cero se le puede evaluar en grados leyendo el número que marca el otro extremo en la graduación del marco.

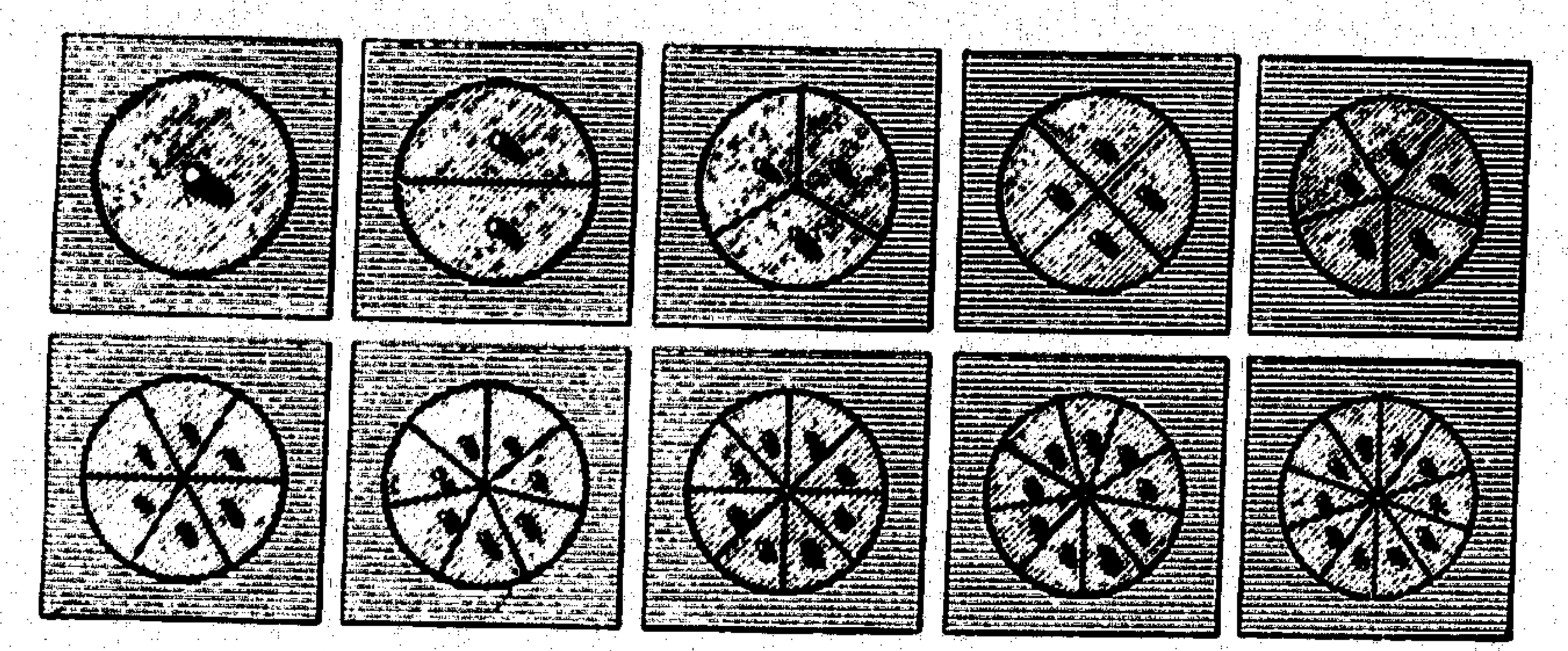
De este modo se pueden hallar las fracciones iguales para agruparlas como se ha dicho, midiéndolas en vez de superponerlas.

Esta subdivisión del círculo en fracciones nos hace recordar el sistema de los bastones de los niños, de uno a diez. Allí los bastones representan los grupos sucesivos de unidades en la serie natural de los números: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 en un trozo solo (el bastón subdividido en partes iguales y por medio de colores alternados). Aquí en cambio, todas las fracciones iguales de una unidad están agrupadas en el marco.

Allá se veía una gradación de bastones siempre más largos.

Aquí, poniendo en fila lo círculos llenos con sus fracciones, según su número, se tiene siempre la misma figura u objeto invariable en su disminución, pero en el interior hay subdivisiones más pequeñas que se asemejan a una estrella radiada, cuyos radios parten del centro siempre en





mayor número, determinando segmentos de círculo cada vez menores.

Estas fracciones que son cantidad y en nuestro caso también figuras, pueden sumarse.

Si tomo juntas tres fracciones de la unidad dividida en cinco partes tengo tres trozos iguales, uno junto al otro.

Lo mismo sucede con cualquier otra fracción.

Tomemos por ejemplo la 8.ª parte del círculo (1/8 = 45°).

Si tomo cuatro fracciones obtengo una suma de 4/8, es decir, cuatro fracciones de la unidad dividida en 8 partes (fig. 205).

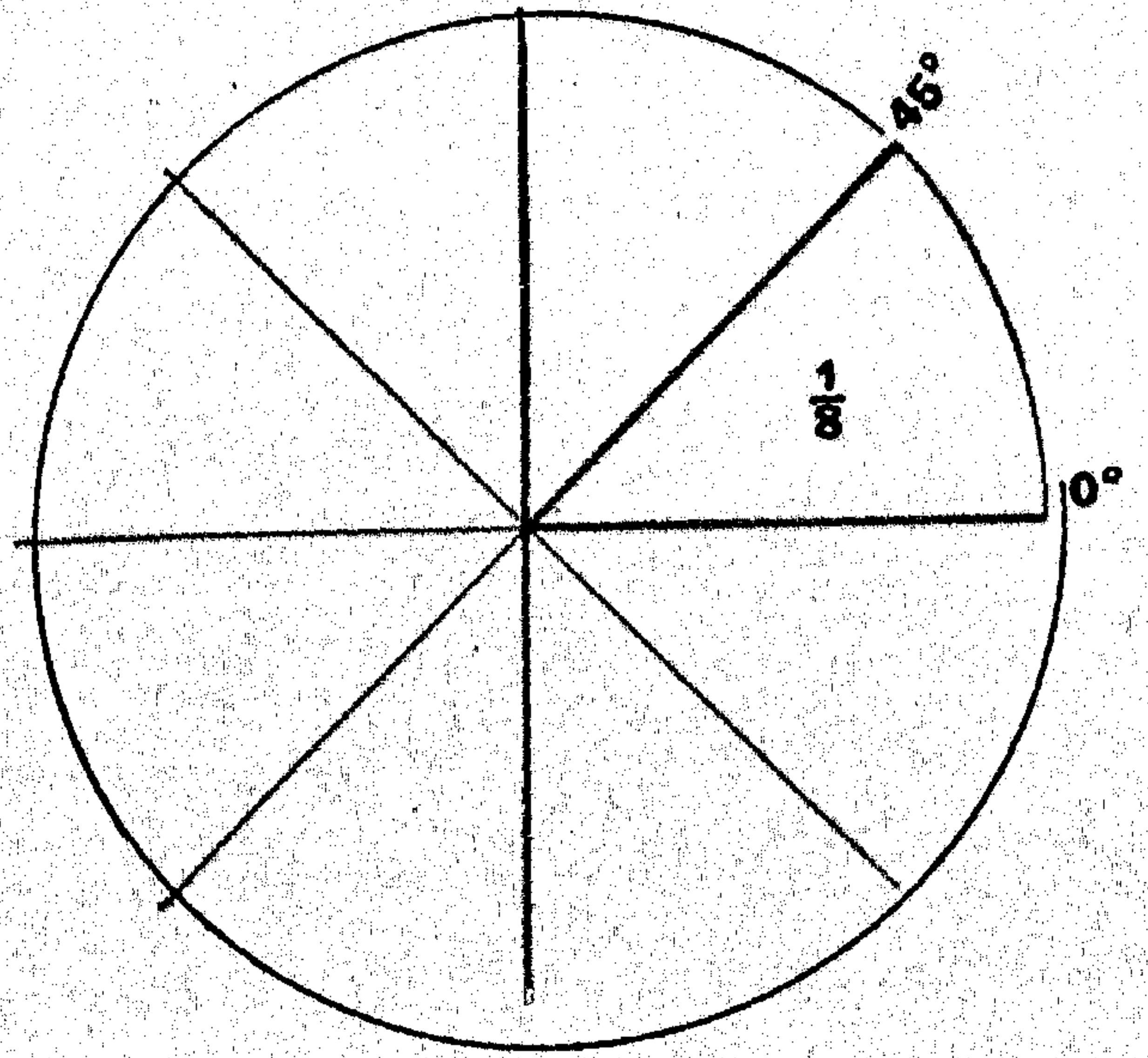


Fig. 205 (1
360° : 8 = 45°

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8}$$

Fig. 205 (2
DOS LÍNEAS PARALELAS

Para sumar entre sí fracciones iguales (es decir que tienen el mismo denominador) basta sumar los numeradores y dar a dicha suma el denominador común.

1/10 + 1/10 + 1/10 + 1/10 + 1/10 + = 5/10.
1/7 + 1/7 + 1/7 + = 3/7.

Lo mismo sucede si se suman grupos de fracciones iguales.

Por ejemplo. Si a la suma de octavos ya realizada 4/8 se uniesen otras tres fracciones iguales (es decir otros tres trozos del círculo dividido en 8 partes) o sea: 1/8 + 1/8 + 1/8 = 3/8.

Los dos grupos se pueden sumar juntos; el primer grupo de cuatro trozos más el segundo de tres, dan un total de siete trozos 4/8 + 3/8 = 7/8.

Así para sumar fracciones que tienen el mismo denominador (es decir, que son iguales) basta sumar los numeradores y dar al resultado el denominador común. 4/8 + 3/8 = 7/8.

También esta suma 7/8 es una fracción, puesto que no llega a constituir una unidad.

4/8; 3/5; 3/8; 3/7; 5/10 etc. son todas fracciones aun cuando sus numeradores tengan más de una unidad.

Dichas fracciones representan siempre una parte de la unidad.

Así se ve claramente colocando los trozos dentro del

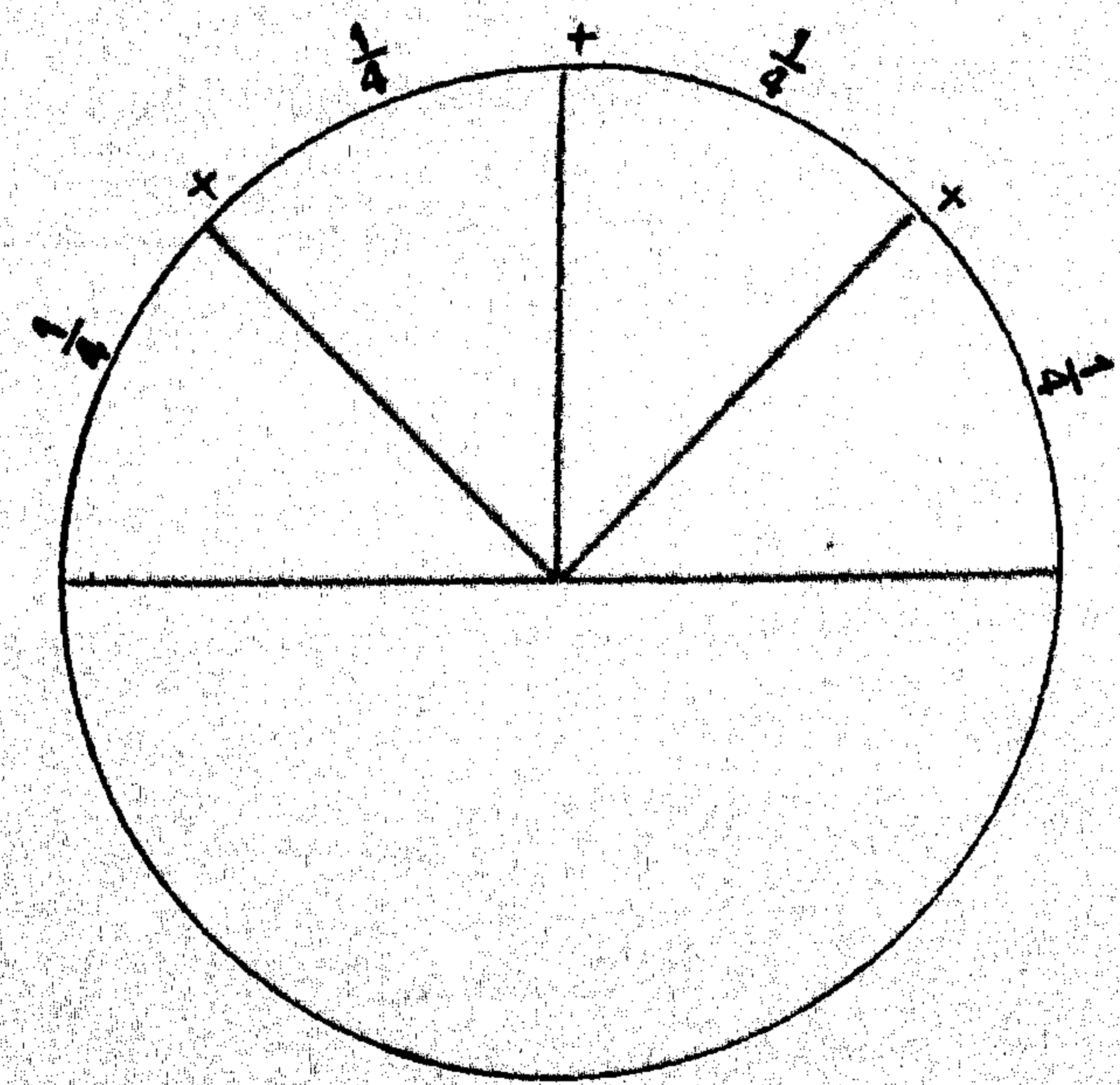


Fig. 206 (1

círculo, es decir, sumando las fracciones y depositándolas en el hueco del círculo que representa la unidad.

Con la suma 4/8 (fig. 206) se quiere significar una fracción de la unidad 8/8.

Pero se ve inmediatamente que 4/8 no son otra cosa sino una mitad. Luego aquella fracción 4/8 es realmente 1/2.

Sin embargo, nosotros diremos 4/8 porque aquel do-

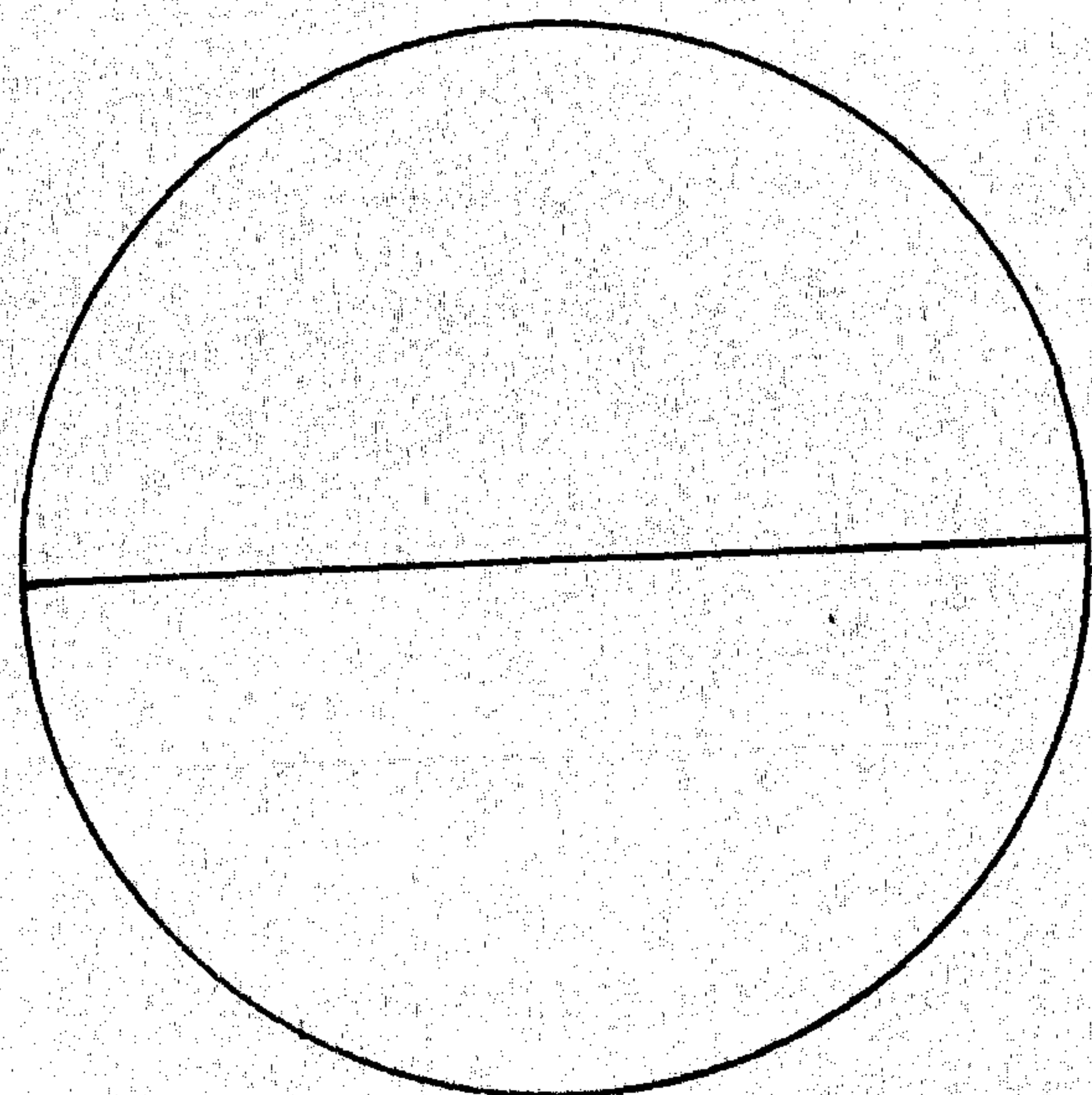


Fig. 206 (2

ble número (numerador y denominador) representa una *fracción* de la unidad, como si fuera de una sola pieza.

El primer trabajo que precisa después de haber colocado los trozos en el fondo del círculo consiste en estudiar si es posible sustituirles por equivalentes de mayor tamaño o hasta por uno solo.

Trabajando poco a poco, se ve que los cuatro trozos de 8 se pueden sustituir por dos trozos de cuatro porque éstos llenan exactamente el espacio ocupado por 4/8 y son fracciones, también, iguales entre sí: 1/4 + 1/4 = 2/4 (fig. 207).

¿Qué se ha hecho en este caso con los números? Se han *reducido*, encontrando otros más pequeños. En vez de 4/8 hemos puesto 2/4.

La operación realizada fué la de dividir por el mismo número 2 el numerador y denominador: 4 : 2 = 2; 8 : 2 = 4.

Se observa en seguida un hecho que parece una contradicción.

Dividiendo los dos términos de una fracción se obtienen números más pequeños y cantidades mayores.

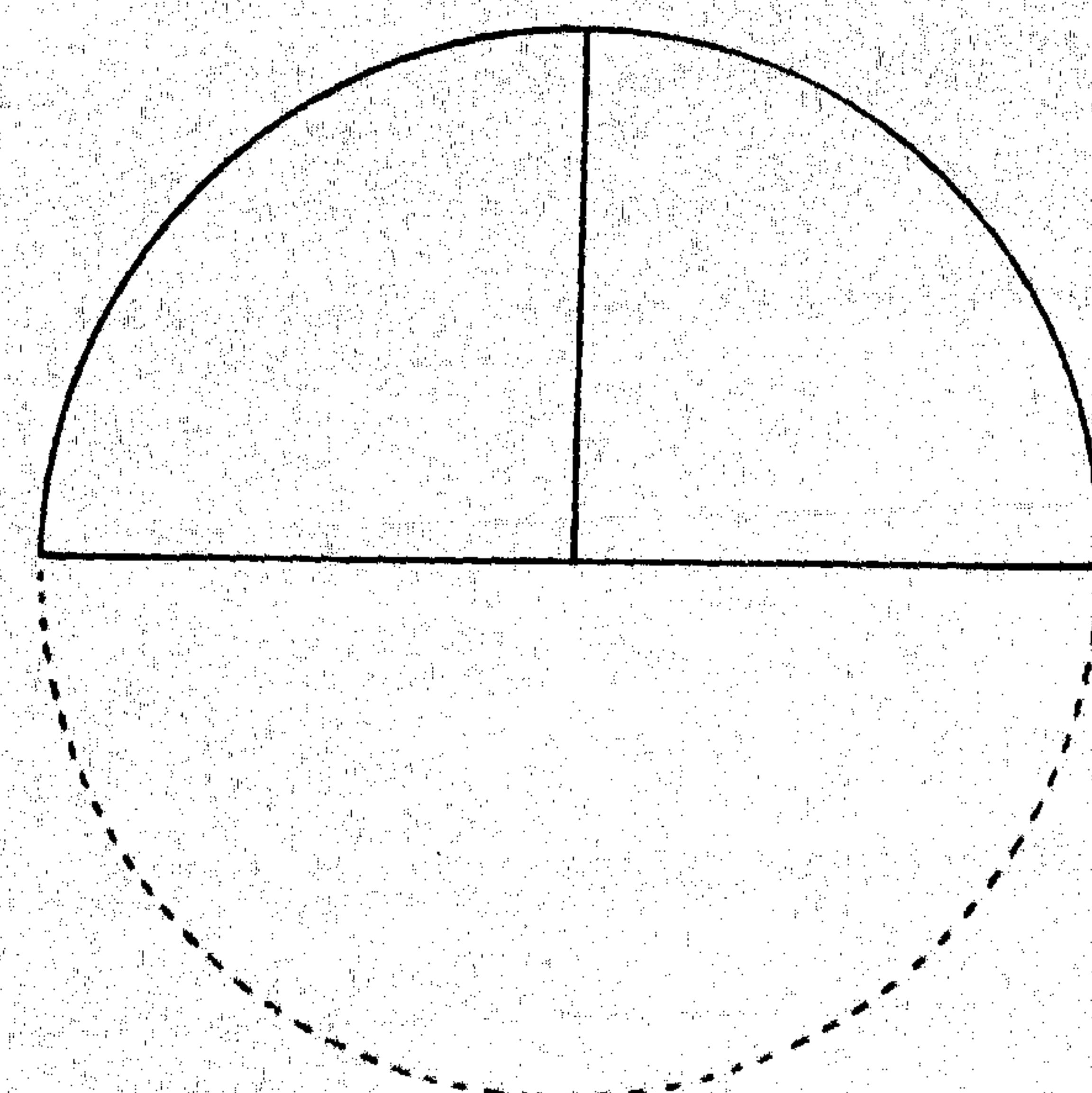


Fig. 207

En efecto, una fracción es una parte de la unidad y si la unidad está *dividida en pocas partes*, éstas son más grandes.

Ahora bien, la fracción 2/4 es todavía reducible. En efecto, podemos quitar las dos partes y substituirlas por una mitad.

Los números sufren la siguiente transformación :

(2 : 2 = 1. 4 : 2 = 2) 2/4 = 1/2.

La suma 4/8 se puede reducir sucesivamente: 4/8 = 2/4 = 1/2.

Una mitad da en un solo trozo la misma cantidad que 4 trozos de ocho y no se puede reducir más.

El modo más directo de averiguar si se puede transformar en un solo trozo, una suma de trozos más pequeños, consiste en dividir si es posible los dos términos de la fracción por un número igual al numerador $4/8 = \dfrac{4 : 4}{8 : 4} = 1/2$.

Ahora se pueden realizar muchas pruebas sobre el material, que hacen ver los hechos sencillamente; hechos (relación de las fracciones entre sí y de las fracciones con la unidad) que son complicados para ser descritos y que parecen una contradicción para quién está acostumbrado a calcular con números enteros.

Tomemos el fondo de un círculo para depositar en él la fracción 5/10.

Colocaremos uno junto al otro cinco de los segmentos del círculo dividido en diez partes, los cuales ocupan el espacio de un semicírculo; luego se ve que 5/10 = 1/2.

Con los números se ve que numerador y denominador se pueden dividir por 5. $5/10 = \dfrac{5 : 5}{10 : 5} = 1/2$.

Si las fracciones no son sustituibles por otras que den la misma suma no se pueden reducir.

Por ejemplo 2/3.

Esta corresponde a dos trozos del círculo dividido en tres partes (fig. 208) puesto el uno junto al otro y no se puede expresar aquella porción del círculo cubierta por dos trozos, de otro modo que con la fracción 2/3 de la unidad.

Lo mismo sucede si se trata de la fracción 3/7 (fig. 209). Los trozos no pueden sustituirse con otros de mayores dimensiones y el trozo cubierto del fondo es una fracción del círculo que no se puede representar más que como 3/7 del completo.

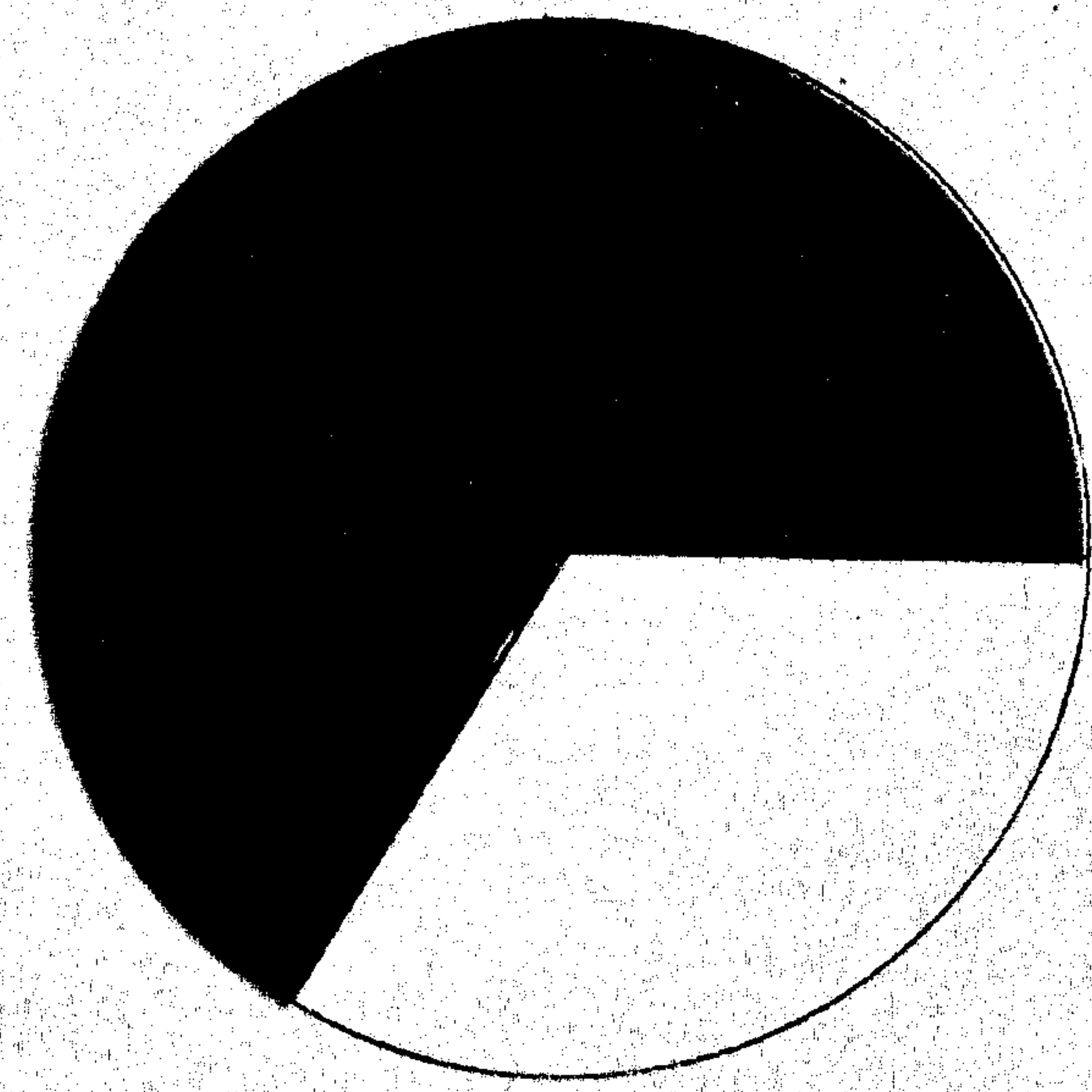


Fig. 208

Cuando las fracciones tienen el mismo denominador se pueden sumar juntas, sumando los numeradores porque aquellas representan grupos de trozos (fracciones) iguales entre sí.

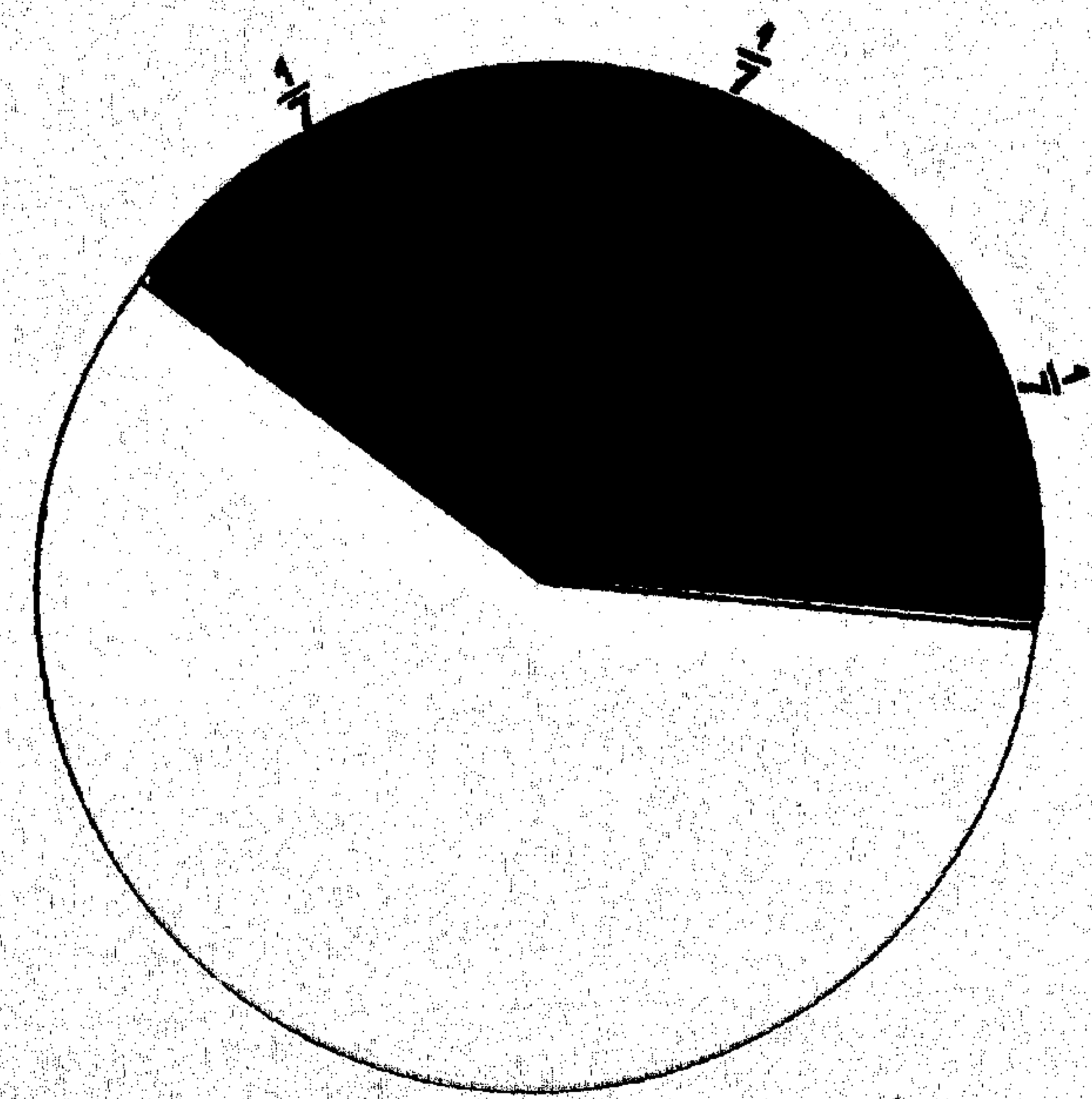


Fig. 209

Pero si se toman fracciones de valor diverso, como por ejemplo 1/3 + 1/4 + 1/6, la suma no se puede llevar a cabo en la forma predicha.

Nos encontramos frente a un problema que hay que resolver previamente.

Trabajemos con el material.

Tomaremos tres sectores del círculo, uno de 1/3 otro de 1/4 y otro de 1/6 y los colocaremos sobre el fondo de un círculo, el uno junto al otro.

Su disposición nos hace comprender una cosa: que el conjunto de los sectores constituye una verdadera fracción, toda vez que es menor que la unidad y hasta deja en el fondo del círculo un buen espacio vacío.

El espacio vacío aparece como 1/4 del círculo y midiéndolo con un trozo de 1/4 se ve que es realmente así, es decir, que el conjunto de aquella fracción es igual a 3/4 del total.

Es preciso, sin embargo, llegar a este resultado comprobado con el material y los sentidos, por medio del razonamiento y de operaciones aritméticas sobre las fracciones.

El problema en este caso es el siguiente: precisa reducir aquellas fracciones de modo que sean iguales entre sí y después sumarlas. Y como el ser iguales significa que deben tener el mismo denominador, toda la dificultad por resolver se encierra en *encontrar el denominador común*.

Las fracciones a sumar serán 1/3 + 1/4 + 1/6.

Entretanto se puede observar que dos de ellas son, la una la mitad de la otra: 1/3 y 1/6.

En este caso los denominadores de las dos fracciones pueden igualarse sustituyendo la fracción 1/3 por dos fracciones 1/6, es decir:

1/6 + 1/3 = 1/6 + 2/6 = 3/6.

Así tenemos ahora en el círculo los siguientes trozos:

1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/4.

Y como 3/6 constituyen la mitad del círculo podemos sustituir esta fracción por 1/2.

Los trozos serán ahora dos solamente: 1/2 + 1/4.

Estas dos fracciones distintas se pueden sustituir con trozos iguales entre sí porque en vez de 1/2 se puede colocar 2/4.

En el círculo encontraremos ahora las siguientes fracciones 1/4 + 1/4 + 1/4 = 3/4.

En toda esta labor de sustitución hemos efectuado dos reducciones al mismo denominador.

Primero reduciendo 1/6 + 1/3 todo en sextos y convirtiéndolo en 1/6 + 2/6.

Después reduciendo a cuartos 1/2 + 1/4, es decir: 1/2 + 1/4 = 2/4 + 1/4.

Ahora sumemos las siguientes fracciones 1/2 + 1/4 + 1/8. Colocaremos ante todo las tres fracciones (los sectores) en un círculo de fondo.

Se comprueba que los tres trozos no cubren el círculo por lo que la suma es una verdadera fracción.

Ahora es preciso que los tres trozos escogidos se conviertan en trozos iguales y para ello necesitamos partirlos, subdividirlos.

Ningún trozo podrá ser mayor que el más pequeño, toda vez que éste podrá, si así conviniera, hacerse menor pero nunca más grande.

Nuestra observación se concentrará pues sobre el trozo más pequeño.

¿Pueden sectores iguales al más pequeño sustituir a los mayores? En este caso, sí.

Se puede colocar 2/8 en vez de 1/4 y 4/8 en vez de 1/2. Las primitivas fracciones 1/2 + 1/4 + 1/8 han sido sustituidas por 4/8 + 2/8 + 1/8 = 7/8.

Sumemos ahora 1/2 + 2/5 o lo que es igual:

1/2 + 1/5 + 1/5

La fracción más pequeña es 1/5.

Veamos si la otra fracción es reducible a quintos.

No es reducible a quintos. Colocando juntas fracciones 1/5 no se llega jamás a formar 1/2.

Para reducir a fracciones iguales es preciso pues, subdividir también el trozo menor o sea 1/5.

Tomemos sectores correspondientes al círculo dividido en 10 partes, es decir en trozos de 1/10.

Entonces todas las fracciones pueden ser subdivididas en décimos. En efecto 1/5 = 2/10, 1/2 = 5/10.

Efectuadas las sustituciones, sobre el fondo del círculo se encuentran todos los décimos uno junto al otro y se pueden sumar. En sustitución de las primitivas fracciones se encuentran ahora grupos de décimos que las sustituyen o sea: 1/2 + 2/5 = 5/10 + 4/10 = 9/10.

De 2 y 5 que eran los denominadores primitivos se ha logrado uno común que es el producto de aqullos 2 × 5 = 10.

Y por la misma cantidad que al denominador se ha multiplicado el numerador o sea:

$$1/2 + 2/5 = \frac{1 \times 5}{2 \times 5} + \frac{2 \times 2}{5 \times 2} = 5/10 + 4/10 = 9/10.$$

FRACCIONES DE FRACCION

Supongamos que ahora queremos tomar la fracción de una fracción. Por ejemplo, la mitad de 1/3.

Entonces se debe dividir en dos partes el trozo que representa 1/3 o hallar en vez suya dos trozos que lo sustituyan. Es claro que 2/6 pueden sustituir 1/3. Entonces la mitad de 1/3 es igual a 1/6 (fig. 210).

Para hallar la mitad se ha multiplicado el denominador por dos.

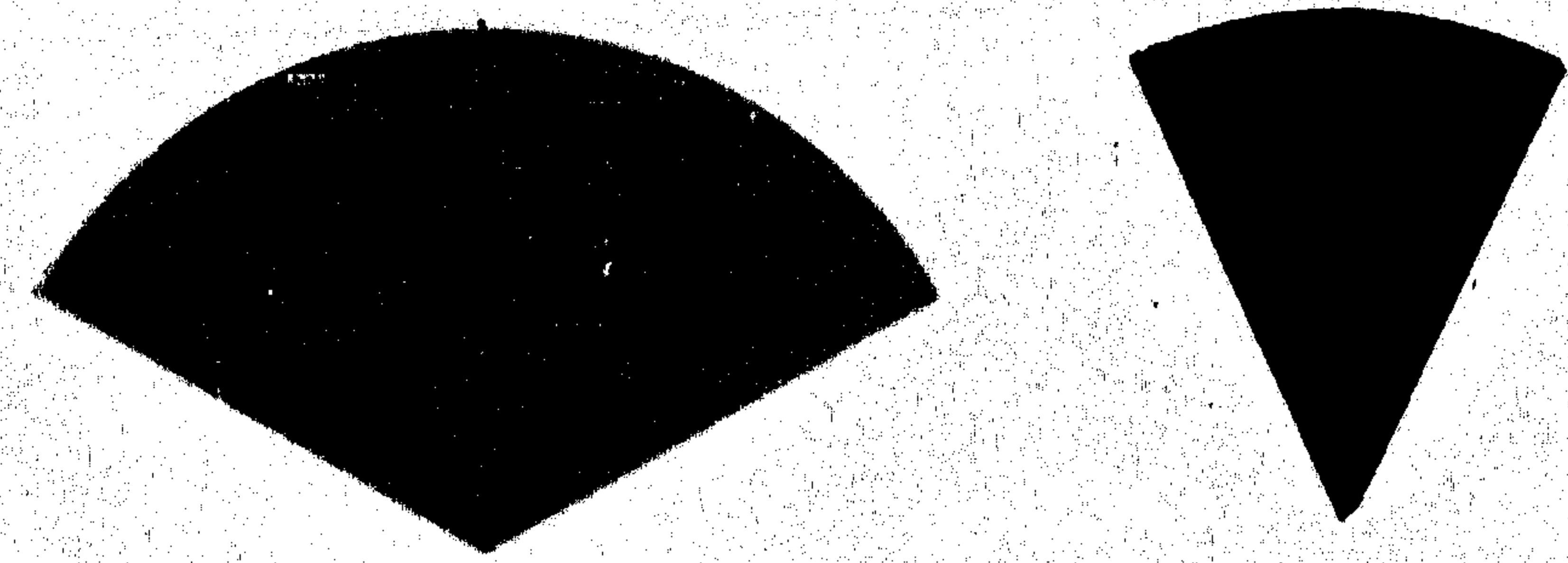


Fig. 210

Para dividir se multiplica el denominador.

Y el hecho se representa como una multiplicación por una fracción. Por ejemplo, un tercio multiplicado por un medio y se representa del siguien modo:

$$1/3 \times 1/2 = 1/6.$$

Busquemos, en cambio, un tercio de un tercio (fig. 211). La tercera parte de un tercio es un noveno. 1/3 × 1/3 = 1/9.

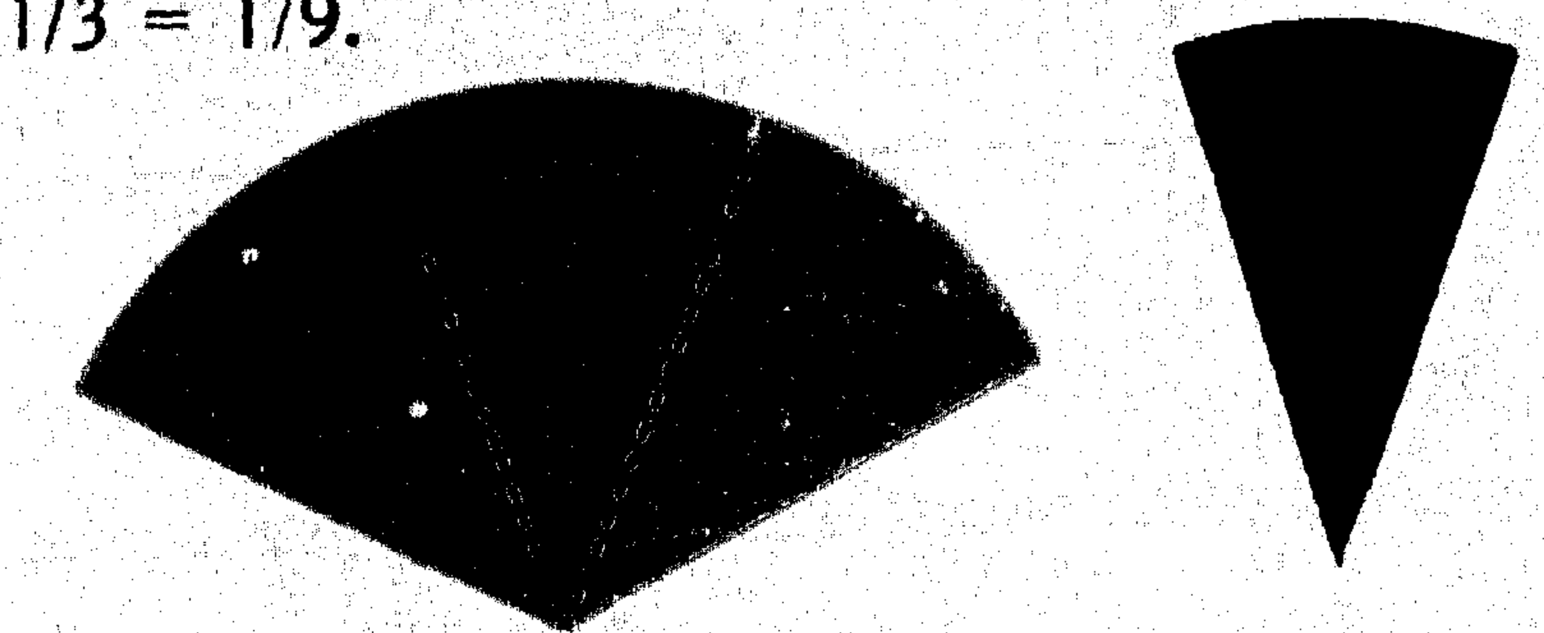


Fig. 211

Otro ejemplo.

Tomar un quinto de una mitad (fig. 212). Un quinto de una mitad: 1/5 × 1/2 corresponde a 1/10.

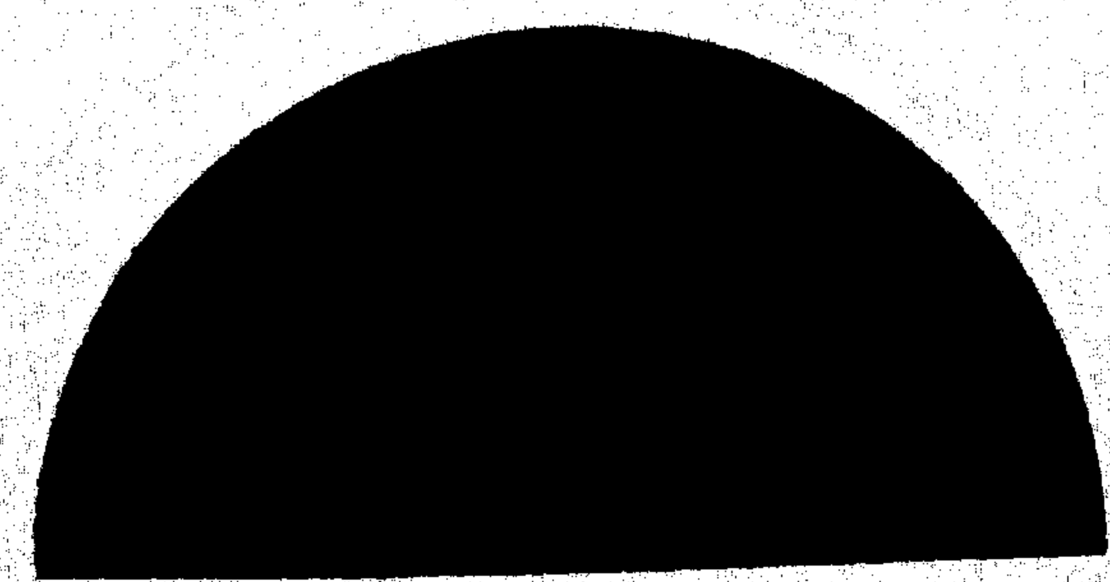


Fig. 212

EL CONTROL DEL ERROR

Para comprobar cualquier sector del material en caso de duda, respecto a la fracción de círculo que representa, se mide con el goniómetro.

Igualmente se pueden colocar sobre el goniómetro, uno junto al otro, los trozos que se quieren sumar, colocando el primero de ellos junto al cero.

En tal forma, la suma en *grados* está indicada por la cifra del semicírculo graduado que corresponde al extremo opuesto al cero.

Por ejemplo 1/3 + 1/4 + 1/6 (fig. 213).

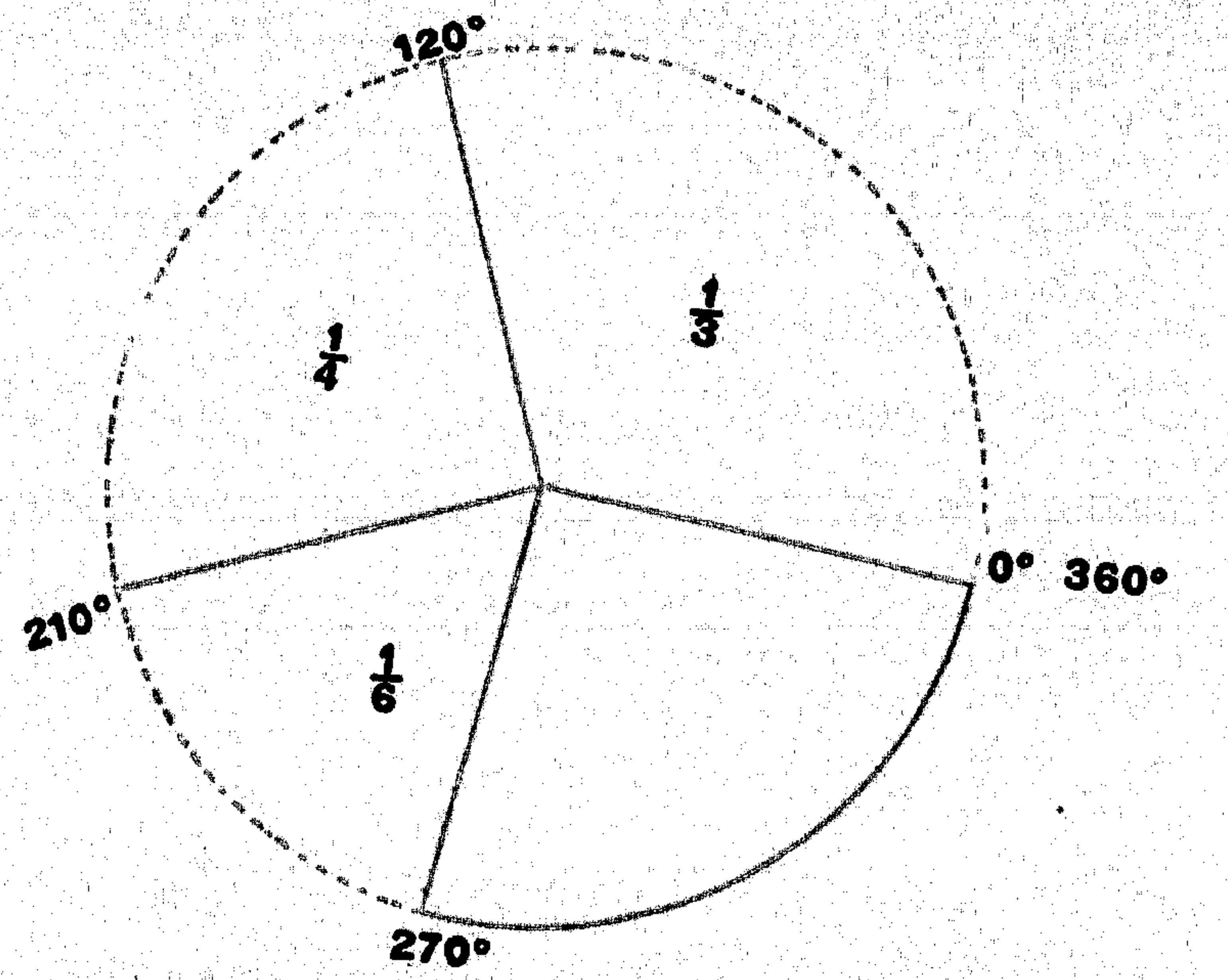


Fig. 213 (1

Las fraciones van de 0 a 120 (1/3 = 120°)
de 120 a 210 (1/4 = 90°)
de 210 a 270 = (1/6 = 60°).

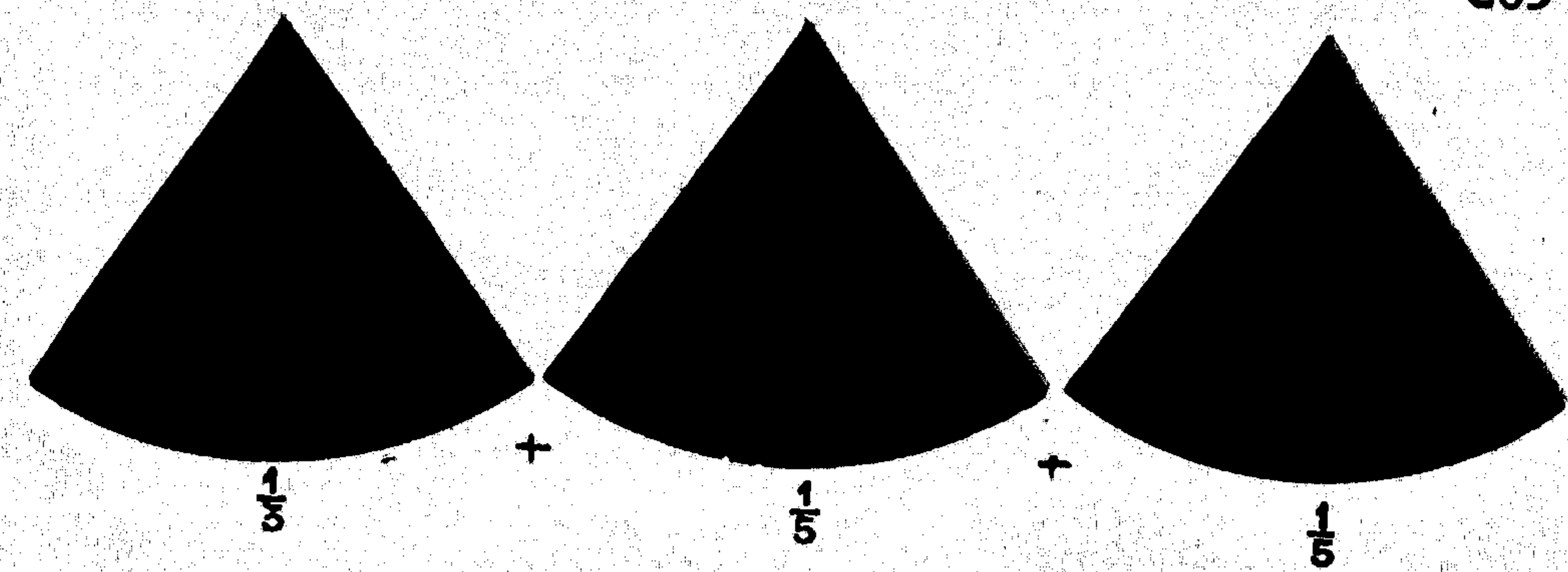


Fig. 213 (2

El espacio entre 270 y 360 es igual a 360 — 270 = 90, esto es, corresponde a la cuarta parte del círculo.

Los tres sectores ocupan 3/4 del círculo.

FRACCIONES DECIMALES

El material consiste en un marco de círculo, semejante al del goniómetro, donde las subdivisiones son 100 en lugar de 360 (fig. 214). En él pues, están marcados, no los grados de un círculo, sino las centésimas de una unidad.

Las décimas y centésimas partes de una unidad son *fracciones decimales*.

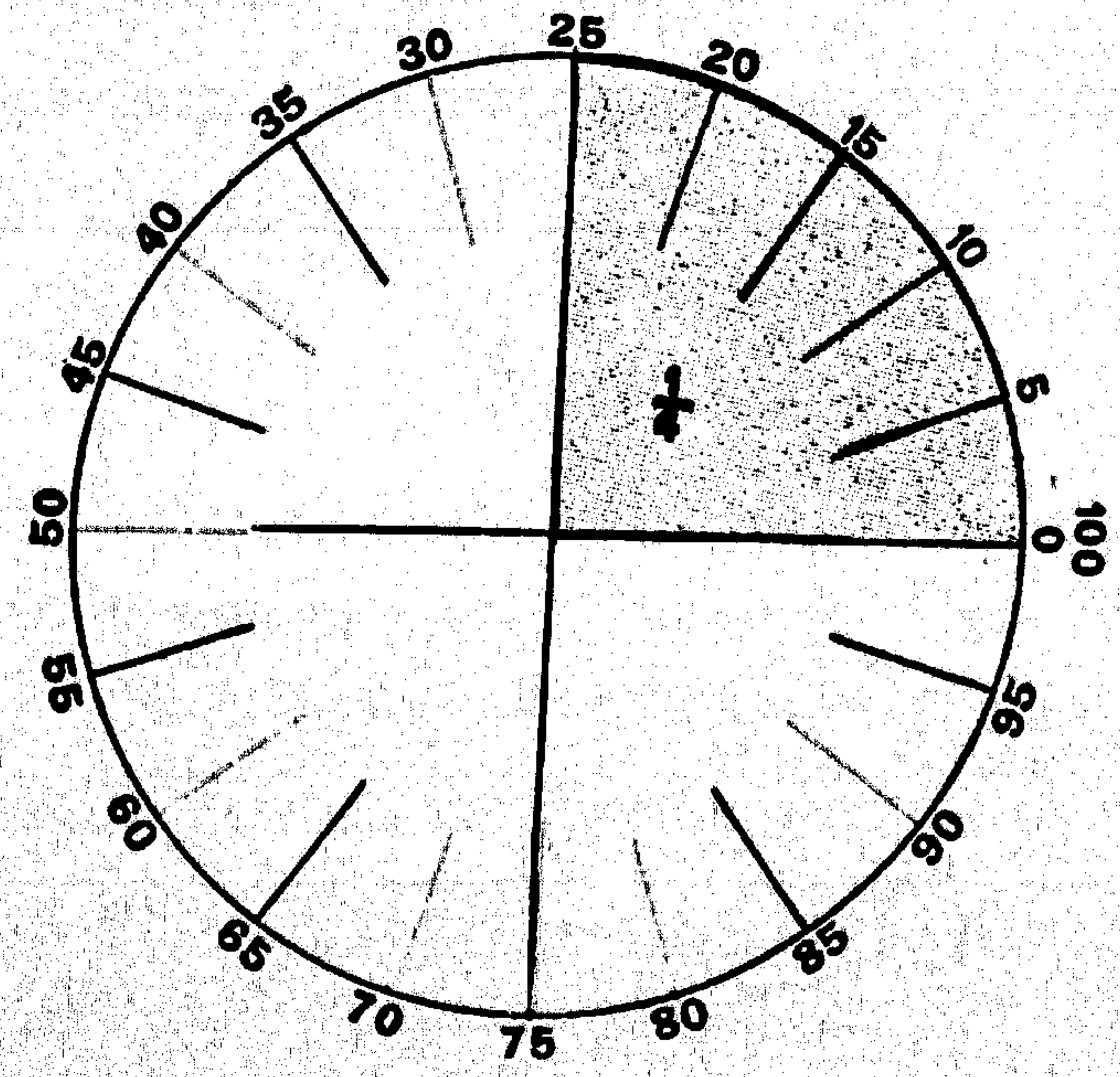


Fig. 214

EL CONTROL DEL ERROR

Para comprobar cualquier sector del material en caso de duda, respecto a la fracción de círculo que representa, se mide con el goniómetro.

Igualmente se pueden colocar sobre el goniómetro, uno junto al otro, los trozos que se quieren sumar, colocando el primero de ellos junto al cero.

En tal forma, la suma en *grados* está indicada por la cifra del semicírculo graduado que corresponde al extremo opuesto al cero.

Por ejemplo 1/3 + 1/4 + 1/6 (fig. 213).

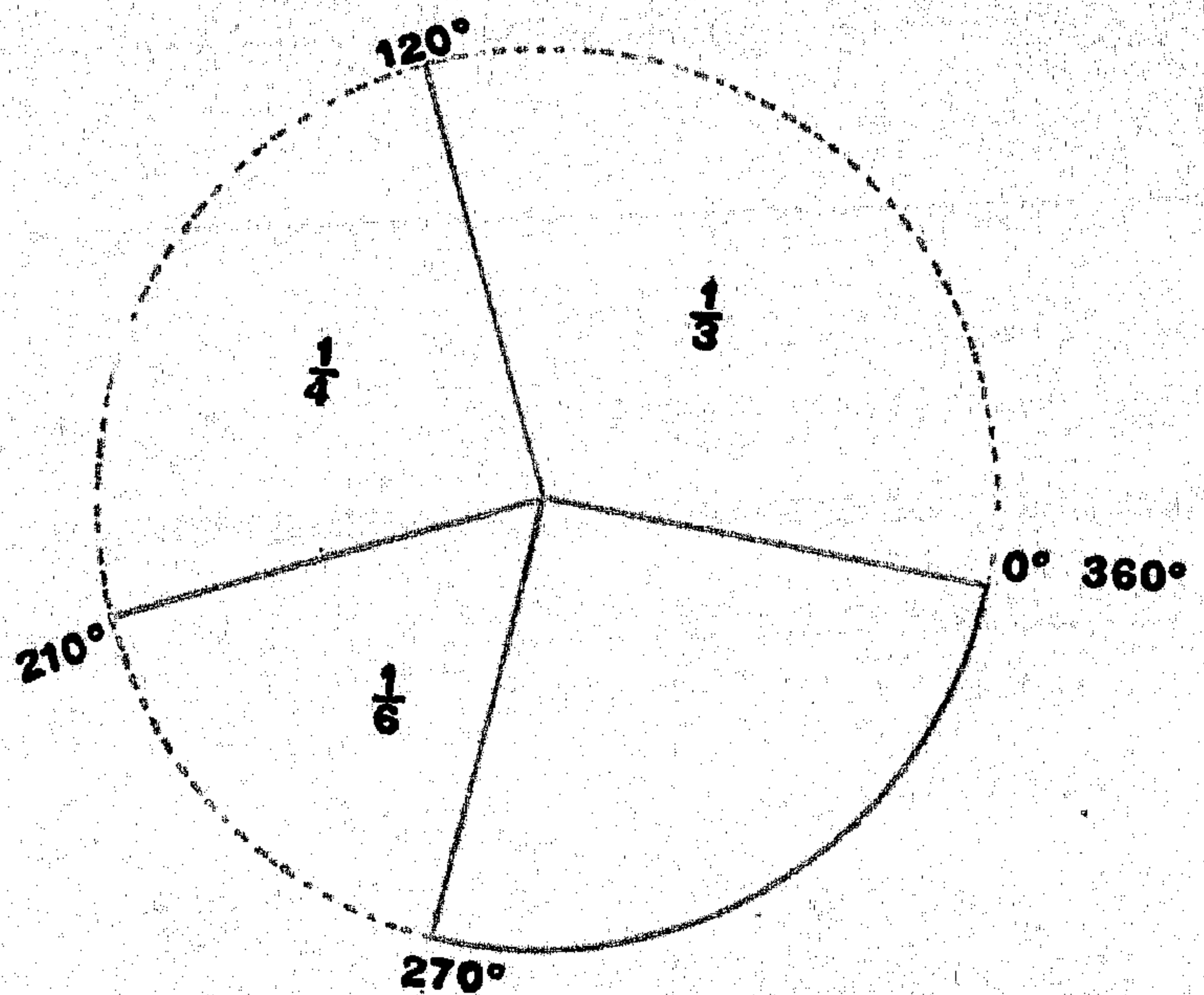


Fig. 213 (1

Las fraciones van de 0 a 120 (1/3 = 120°)
de 120 a 210 (1/4 = 90°)
de 210 a 270 = (1/6 = 60°).

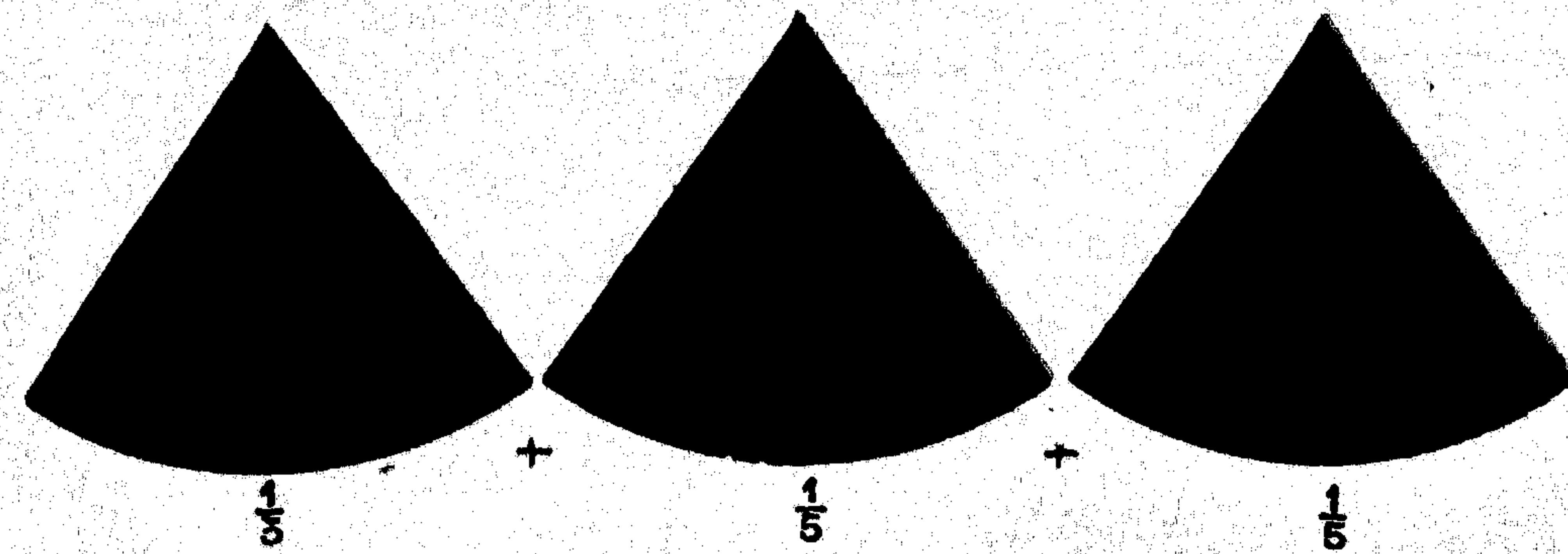


Fig. 213 (2

El espacio entre 270 y 360 es igual a 360 — 270 = 90, esto es, corresponde a la cuarta parte del círculo.

Los tres sectores ocupan 3/4 del círculo.

FRACCIONES DECIMALES

El material consiste en un marco de círculo, semejante al del goniómetro, donde las subdivisiones son 100 en lugar de 360 (fig. 214). En él pues, están marcados, no los grados de un círculo, sino las centésimas de una unidad.

Las décimas y centésimas partes de una unidad son *fracciones decimales.*

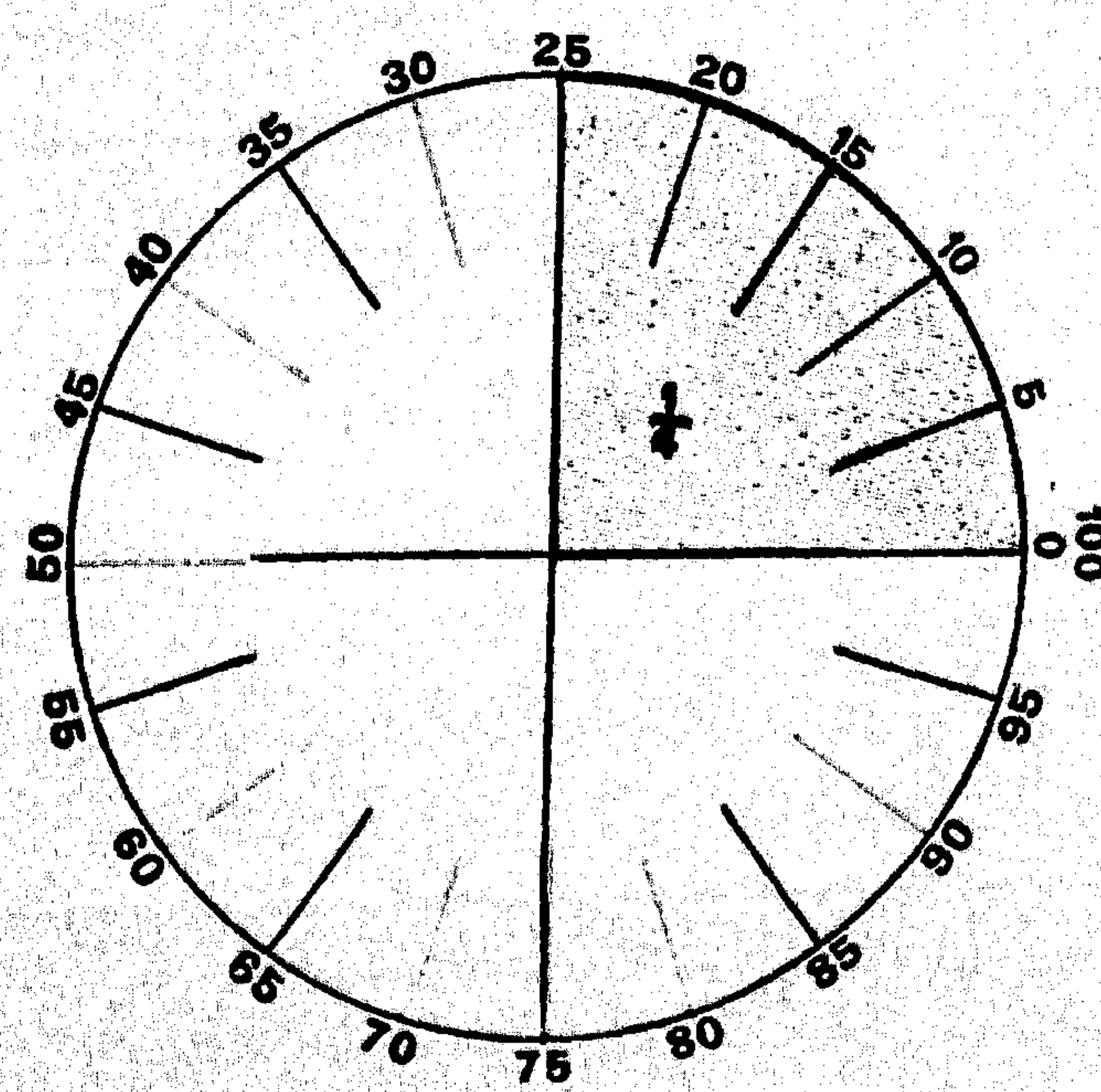


Fig. 214

Sobre el marco se ve que 1/4 de círculo corresponde a 25/100 de unidad; que un medio es 50/100 y 3/4 son 75/100. Y midiendo cada sector se vería a cuantas centésimas de unidad corresponden.

Las fracciones decimales se escriben como número decimal colocando como unidad el cero y a continuación y separadas por una coma las cifras indicando la fracción. Por ejemplo: 0'25; 0'50; 0'75.

Las fracciones 1/2, 1/4, 3/4, 5/10 etc. se llaman *fracciones ordinarias.*

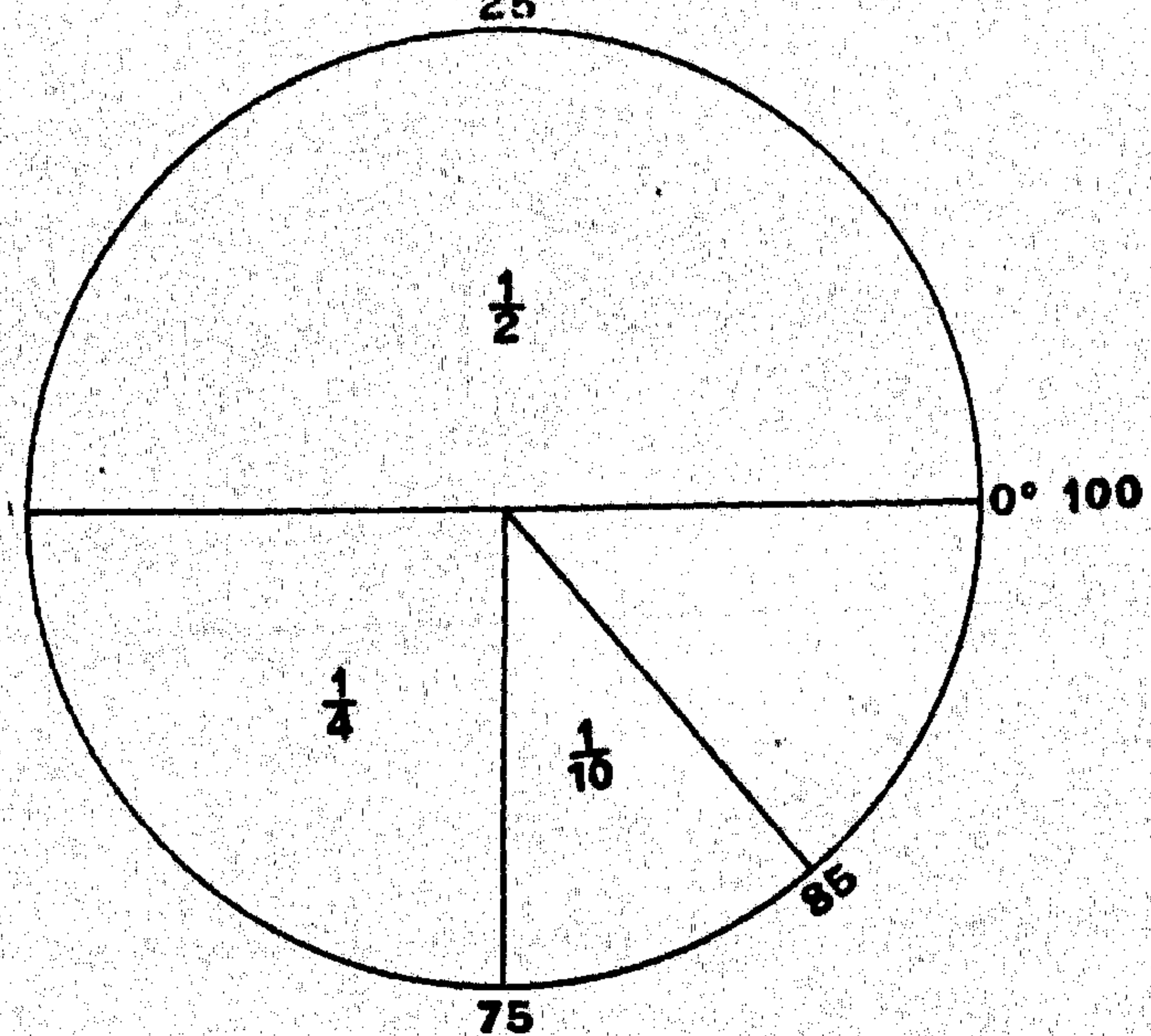


Fig. 215

Una fracción ordinaria se puede siempre reducir a número decimal 1/2 = 0'50. 1/4 = 0'25, 1/3 = 0'75.

Una suma de fracciones se leería aquí del mismo modo que en el goniómetro, colocando el primer sector a partir del cero y los restantes a continuación. La cifra decimal del marco correspondiente al extremo opuesto al cero indica la suma de las fracciones. Por ejemplo (fig. 215): 1/2 + 1/4 + 1/10, o sea 50/100 + 25/100 + 10/100 = 0'50 + 0'25 + 0'10.

1/2 + 1/4 + 1/10 sumados son iguales a la siguiente fracción decimal de la unidad: 0'85.

VI

APLICACIONES DE LA EQUIVALENCIA

LA SUPERFICIE

Aplicaciones prácticas

Una aplicación práctica de la Geometría es la de la medida de las superficies.

El origen mismo de la Geometría, su nombre, provienen del concepto de «medir» el terreno. De la palabra geometría la primera parte *geo* quiere decir tierra y *metros* medida.

En tiempos antiquísimos, los egipcios sintieron el problema de medir los terrenos que se encuentran a lo largo de las orillas del Nilo y dichos terrenos eran muy fértiles.

Pero cada año, el Nilo, saliéndose de madre los inundaba y borraba de ese modo los hitos o señales que los habitantes tenían para dividir la propiedad.

Entonces se pensó en las *medidas* que permitirían establecer en cada caso los límites de las tierras.

Si queremos medir una superficie, por ejemplo, el rectángulo ABCD (fig.216) comenzaremos por medir los dos lados CD = 8 y AC = 4.

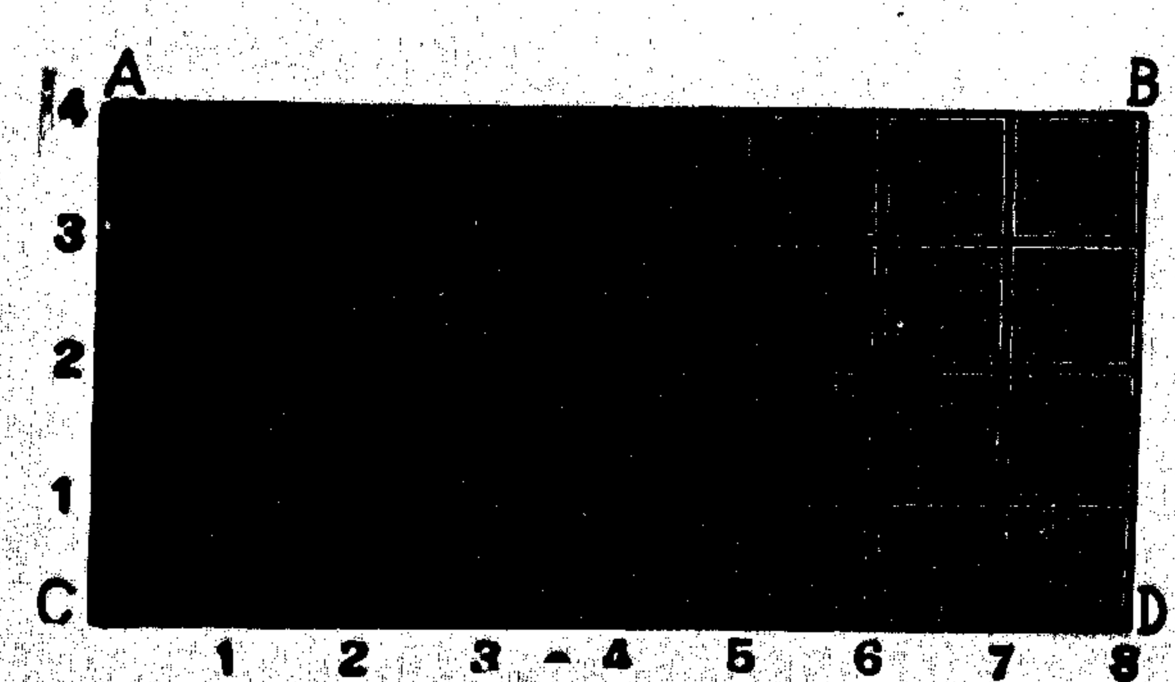


Fig. 216

La extensión del rectángulo se puede considerar como si un lado AB dejando una señal tras de sí (por ejemplo de tinta) se desplazase hacia abajo hasta llegar a CD. Hubiera recorrido de arriba abajo el trozo AC.

Luego AB × AC.

Aquella línea de longitud ha recorrido un camino cuya longitud es 4.

Luego 8 × 4 = 32.

Pero ¿32 qué? 32 cuadrados.

La superficie, en efecto, resulta dividida en 32 cuadrados iguales, en correspondencia con las líneas que limitan el rectángulo.

La superficie se calcula pues, midiendo los dos lados del rectángulo y multiplicando los números de unidades que indican la longitud de cada uno. El producto no es en longitud sino en cuadrados. En vez de preocuparnos ahora de medidas, consideremos el hecho en sí mismo.

Las superficies se obtienen multiplicando los dos lados.

Diremos en general que la superficie del rectángulo se obtiene multiplicando un lado por otro y la del cuadrado se obtiene multiplicando el lado por sí mismo.

Ahora bien ¿cómo se obtiene la superficie de otras figuras; de un triángulo, de un rombo, de un trapecio, de un pentágono y, en general, de un polígono?

Aquel medio sencillo y claro de multiplicar un lado por otro sirve para un rectángulo solamente.

Hay pues que resolver una dificultad antes de llegar a resolver prácticamente el cálculo de la superficie de otras figuras. La dificultad consiste en esto:

Hay que hallar un rectángulo equivalente a cualquier figura.

Volvamos pues a la cuestión de las equivalencias para

un fin exclusivamente práctico; el de hallar un rectángulo equivalente a un triángulo.

a un rombo

a un trapecio

a un pentágono o a cualquier otro polígono regular sea de 6, 7, 8, 9 o 10 lados.

En el material de moldes de hierro hay representadas muchas demostraciones relativas a esto.

Ahora midamos la superficie del cuadrado MNPQ (fig. 217) cuyos lados son 6 + 6 = 12 de largo.

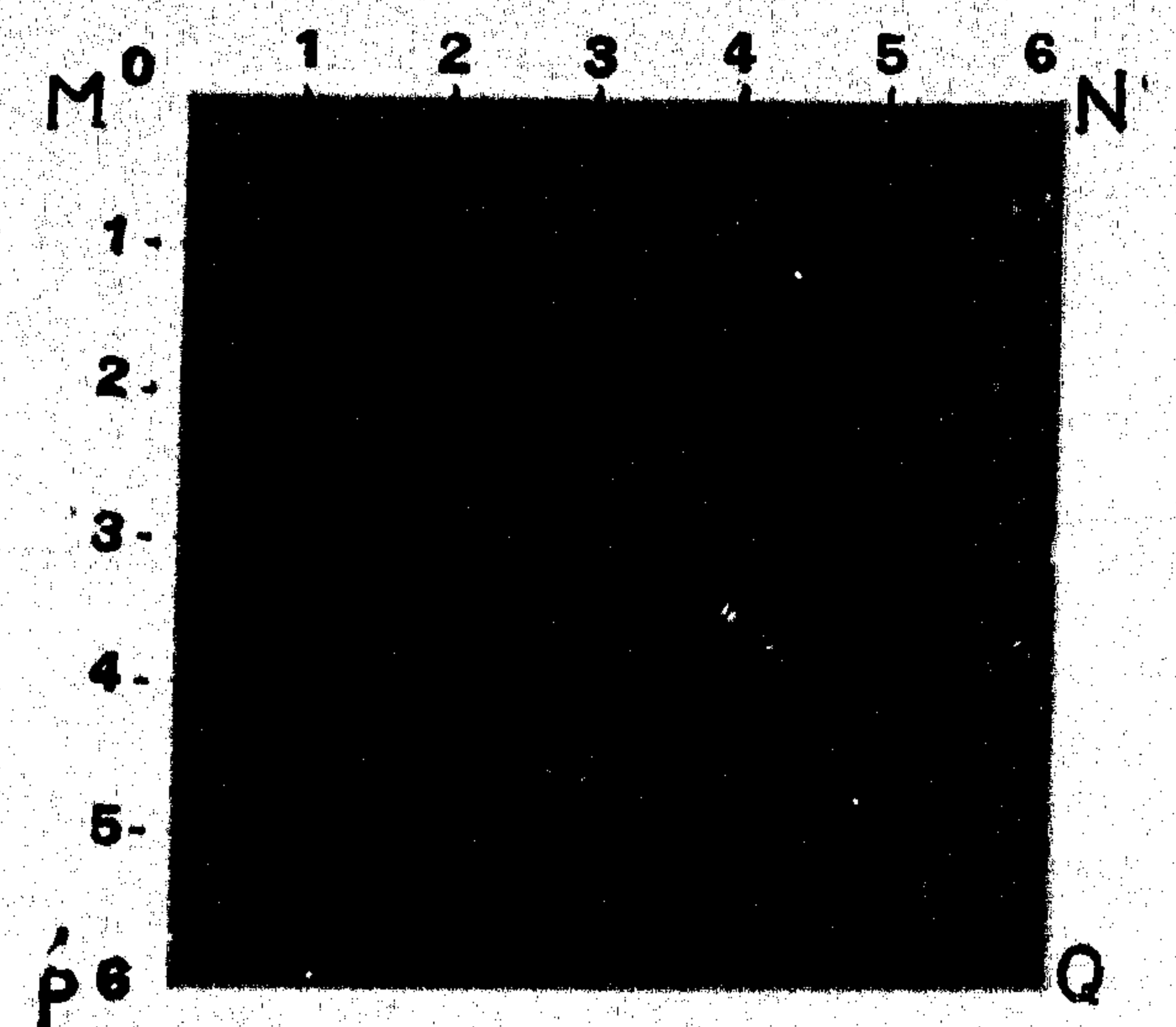


Fig. 217

Para obtenerla, basta que midamos un lado, con una medida de longitud, supongamos sea con un centímetro.

Encontramos que el lado corresponde a 6 cm. Multiplicamos un lado por el otro 6 × 6 = 36.

La superficie es de 36 centímetros cuadrados.

$6 \text{ cm.} \times 6 \text{ cm.} = 36 \text{ cm}^2$.

Hemos comprobado que el cuadrado tiene una superficie mayor que el rectángulo cuyos lados eran 8 × 4 = 32.

Este cálculo facilita grandemente la medida de las superficies porque, si sobre un terreno hubieran de superponerse tantos metros cuadrados, con los accidentes que el mismo terreno puede presentar, sería imposible lograrlo.

Aun queriendo medir el pavimento de una habitación sería mucho más difícil superponer tantos metros cuadrados que medir simplemente dos líneas, la longitud y anchura del pavimento.

Si el pavimento tiene 7 metros de largo y 5 de ancho, la superficie se encuentra en seguida con la multiplicación de ambas cifras 7 m. × 5 m. = 35 m^2.

La superficie del pavimento es de 35 metros cuadrados.

Si, en cambio, fuese la linde del jardín, lo que hay que medir, la faja cultivada que está a lo largo de la pared de la finca, el procedimiento sería análogo. Longitud 15 metros, anchura 2 metros. La superficie de la faja es igual a 15 m. × 2 m. = 30 metros cuadrados.

Varias figuras tienen su marco y además otro que corresponde al rectángulo equivalente.

La figura viene repetida en dos formas; entera (triángulo, rombo, trapecio, polígono) y después subdividida en forma que se la pueda colocar exactamente dentro del rectángulo equivalente.

Las líneas y los ángulos del rectángulo guardan relación con las de la figura a la cual es equivalente y dicha relación nos permite conocer los procedimientos prácticos para calcular la superficie de cualquier figura, según sus propias líneas.

Examinemos ahora el material.

TRIANGULO

Como hemos observado, una línea perpendicular a su base, divide el triángulo equilátero en dos triángulos que

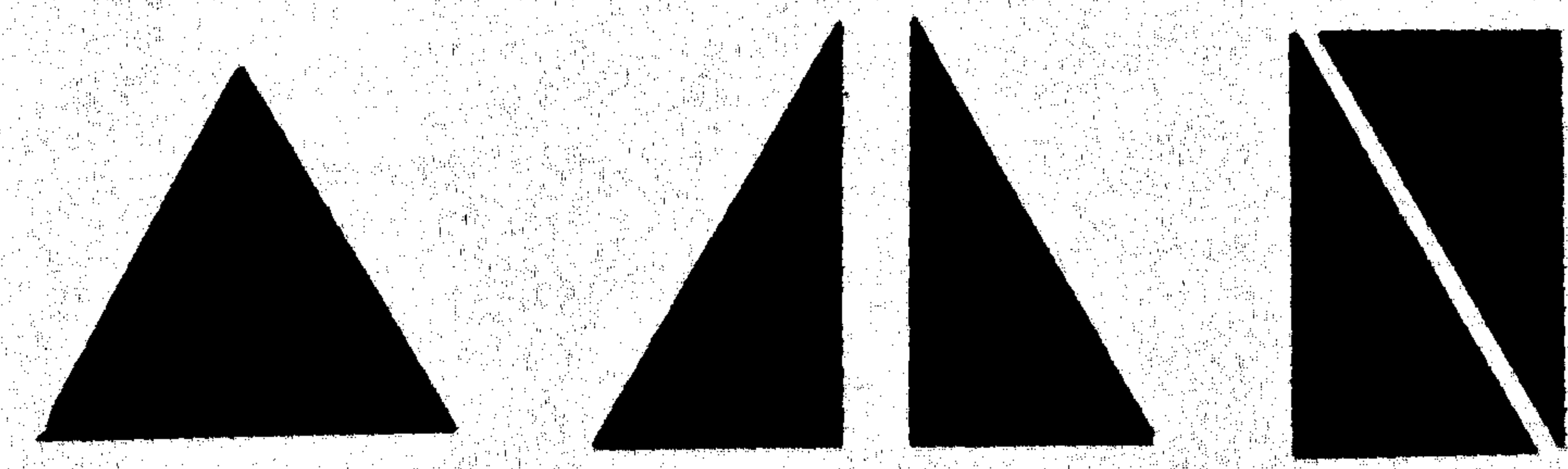


Fig. 218

forman unidos un rectángulo (fig. 218). Este tiene un lado igual a la mitad de la base y el otro, igual a la altura.

En este otro caso (fig. 219) el triángulo está dividido transversalmente por la mitad de su altura; se ve entonces que el pequeño triángulo, dividido en dos partes en sen-

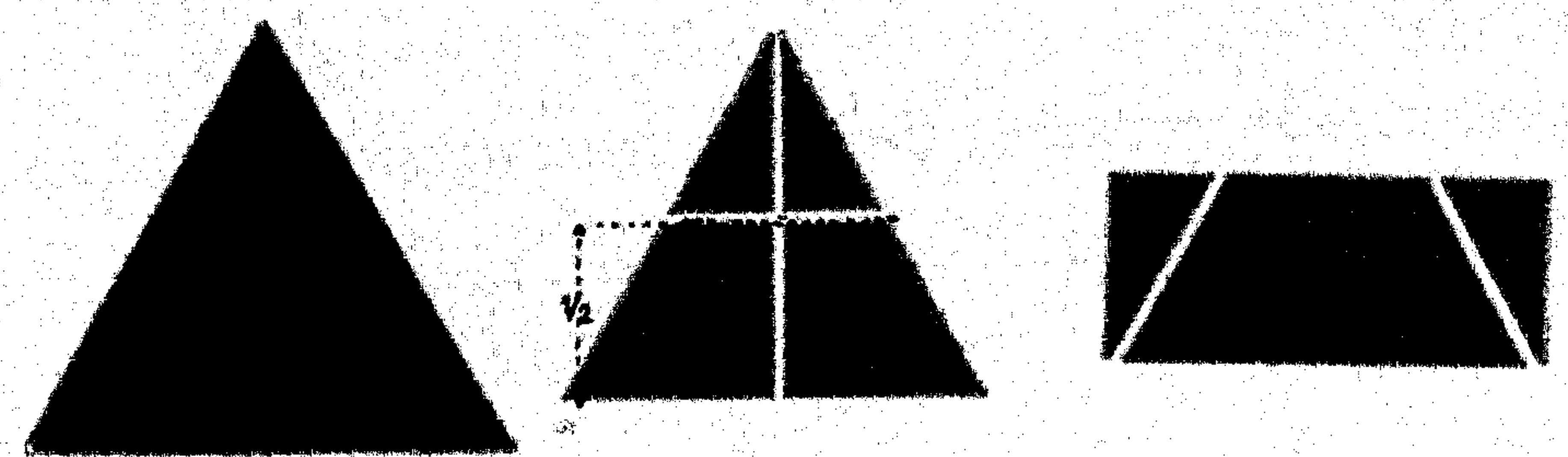


Fig. 219

tido de su altura, completa con el trapecio mismo, un rectángulo.

Este tiene un lado igual a la base, y el otro igual a la mitad de la altura del triángulo primitivo y su área por lo tanto es igual a la base por la mitad de la altura.

Los dos rectángulos obtenidos son equivalentes al mismo triángulo y lo representan en la superficie, pero los dos rectángulos no son iguales (fig. 220) porque tienen sus lados de diversa longitud y altura.

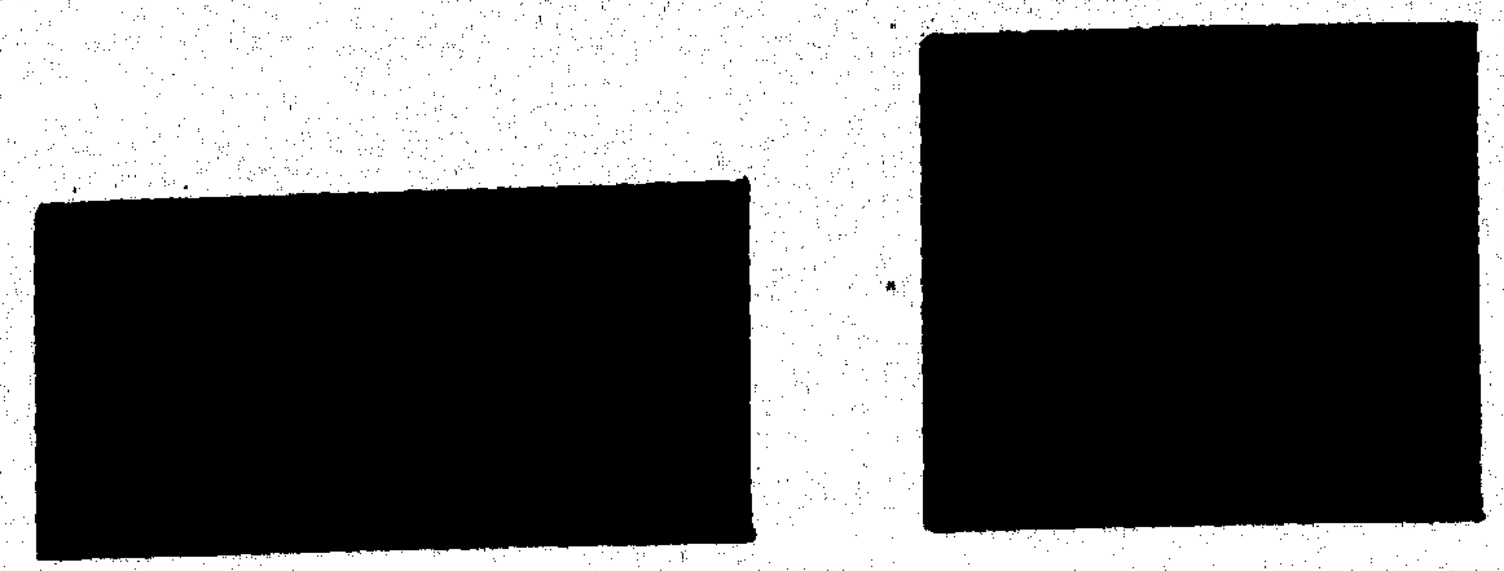


Fig. 220

Sin embargo, siempre sucede que entran en el cálculo dos límites; la base y la altura.

Lo mismo se observa en un triángulo rectángulo donde uno de los catetos es la altura del triángulo (fig. 221).

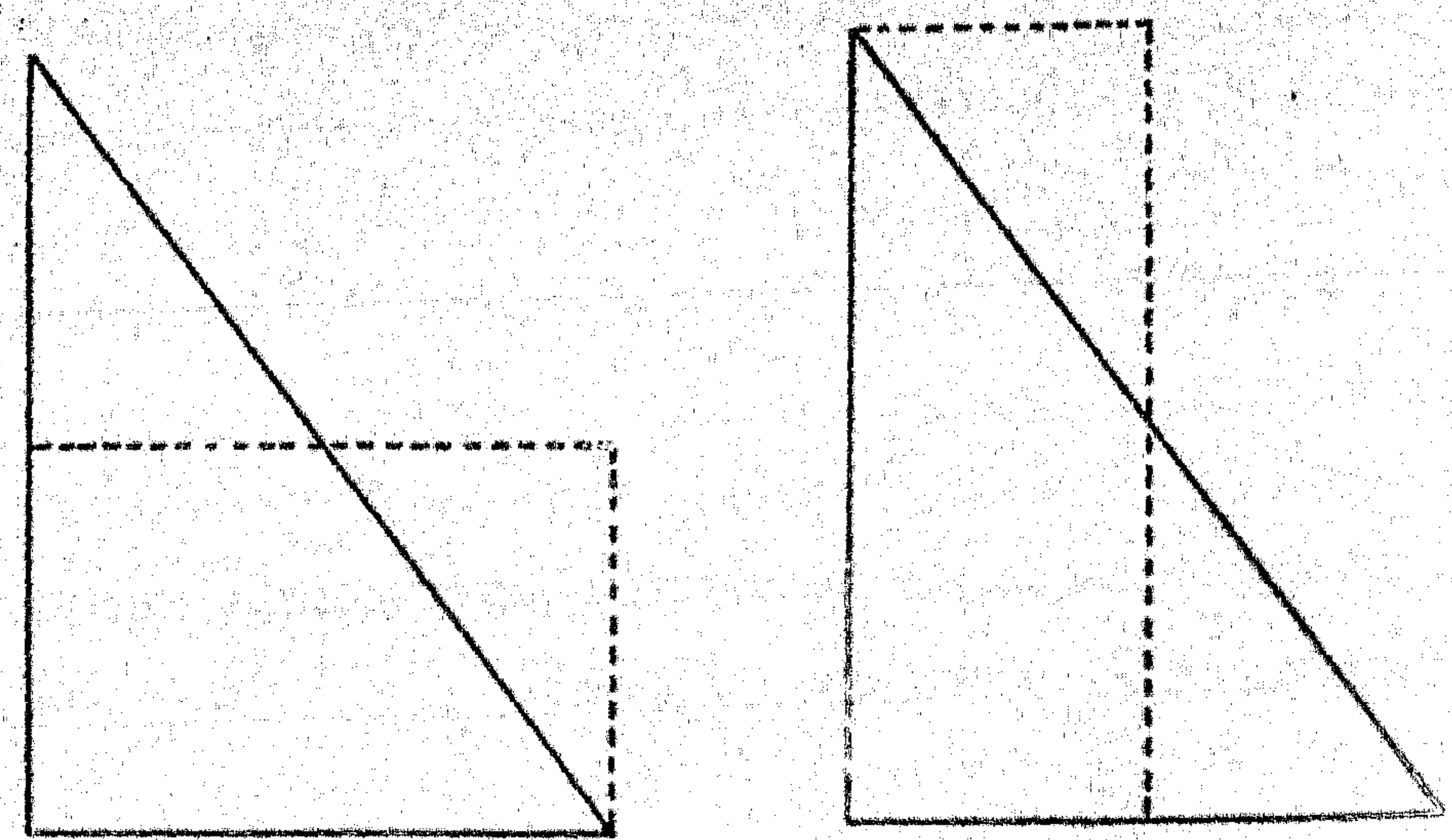


Fig. 221

Se puede pues establecer, que el área de un triángulo es igual a la mitad del producto de la base por la altura.

$$\frac{\textit{Base} \times \textit{altura}}{2}$$

Se pueden pues distinguir dos casos; o mitad de la base por la altura o altura por mitad de la base.

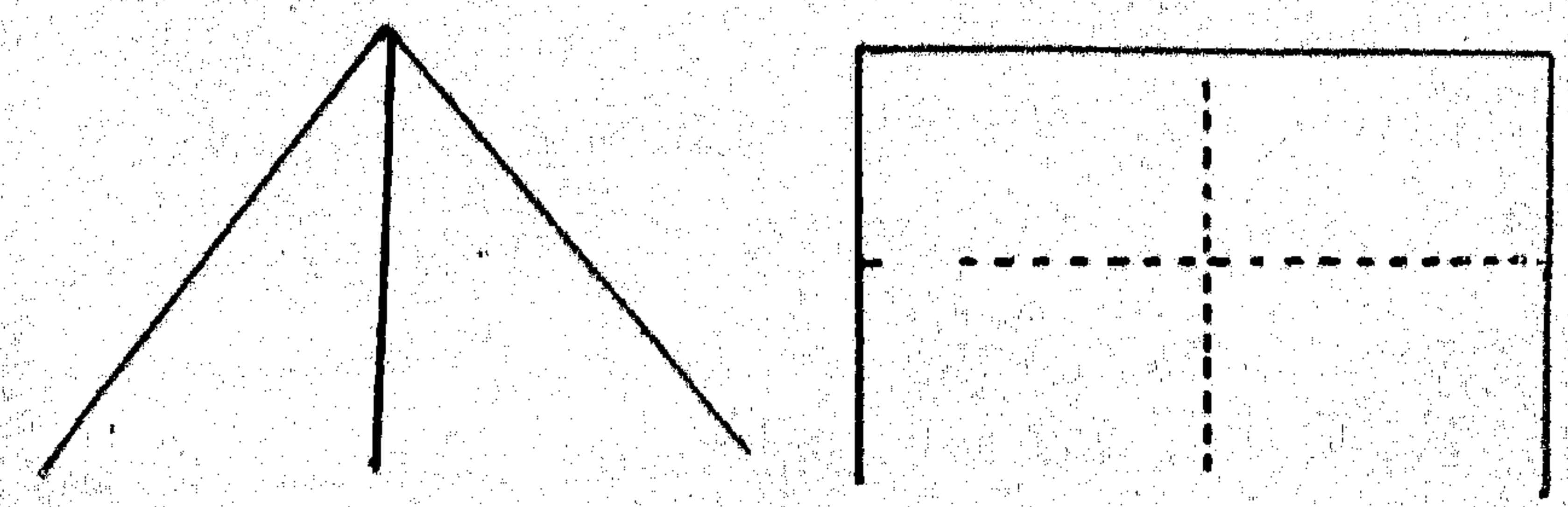


Fig. 222

El triángulo es igual a la mitad de un rectángulo que tiene un lado igual a su altura y el otro igual a su base (divididos ambos por sus medianas) (fig. 222).

EL ROMBO

Si con la altura quitamos al rombo (fig. 223) el triángulo ABC y lo aplicamos por el lado AB a lo largo del lado DE, obtendremos como resultado un rectángulo equivalente.

Este tiene como lados la base y la altura del rombo y por lo tanto *la superficie del rombo se calcula multiplicando la base por la altura.*

Lo mismo sucede con el romboide.

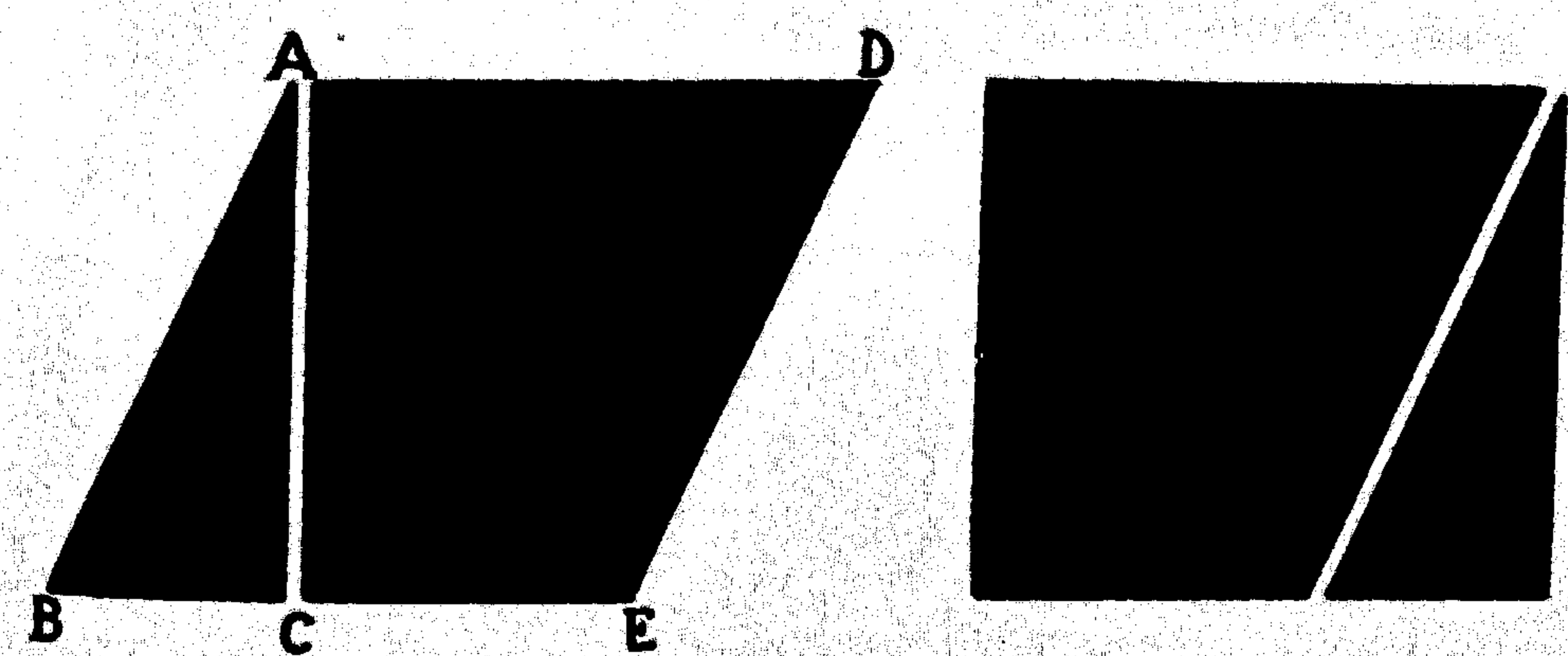


Fig. 223

El material de moldes permite desplazar los trozos en los marcos equivalentes proporcionando la demostración material de la equivalencia entre un rombo y un rectángulo.

Consideremos ahora el romboíde MABC (fig. 224).

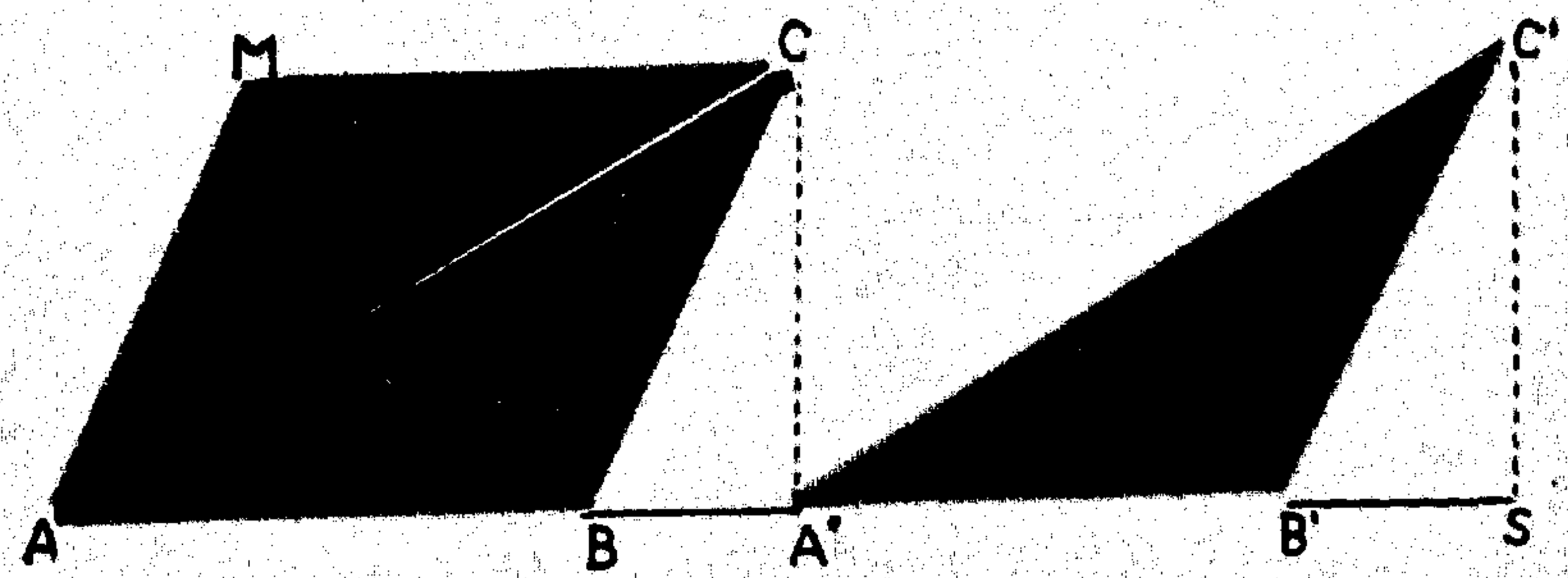


Fig. 224

La diagonal AC lo divide en dos triángulos obtusángulos y escalenos.

Separemos el triángulo ACB, colocándolo aparte y en la posición A' B' C'. Es evidente que este triángulo, mitad del romboide, tiena un área igual a la mitad del producto de la base por la altura del romboide.

Por lo tanto, el área del triángulo A' B' C' es igual al producto de la base A' B' por la altura C' S. partido por dos, al igual que en los casos anteriores.

Y como un triángulo puede siempre considerarse la mitad de un cuadrilátero, sea cuadrado, rectángulo, rombo o romboide, resulta que en todo caso el área de un triángulo se obtiene con el semiproducto de la base por la altura.

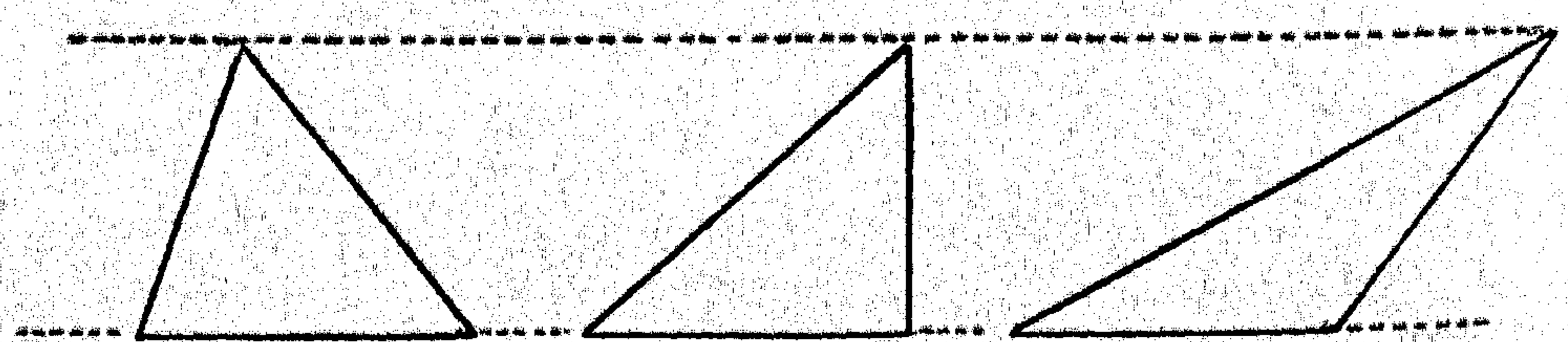


Fig. 225

Teorema. — Todos los triángulos que tienen igual base e igual altura son equivalentes (fig. 225).

TRAPECIO

En el material existen las siguientes combinaciones para demostrar la equivalencia entre el trapecio y el rectángulo.

1.ª — El trapecio regular que resulta del triángulo equilátero al que se le substrae la cuarta parte, con un pequeño triángulo equilátero opuesto a la base (fig. 226).

Aquel es igual a la suma de tres triángulos. Dos de éstos, unidos, tienen la base igual a la base mayor del trapecio AB; el otro tiene la base igual a la base menor del trapecio CD. En cambio, los tres triángulos tienen la misma altura, que es la altura del trapecio.

Colocados los tres, uno a continuación del otro, de-

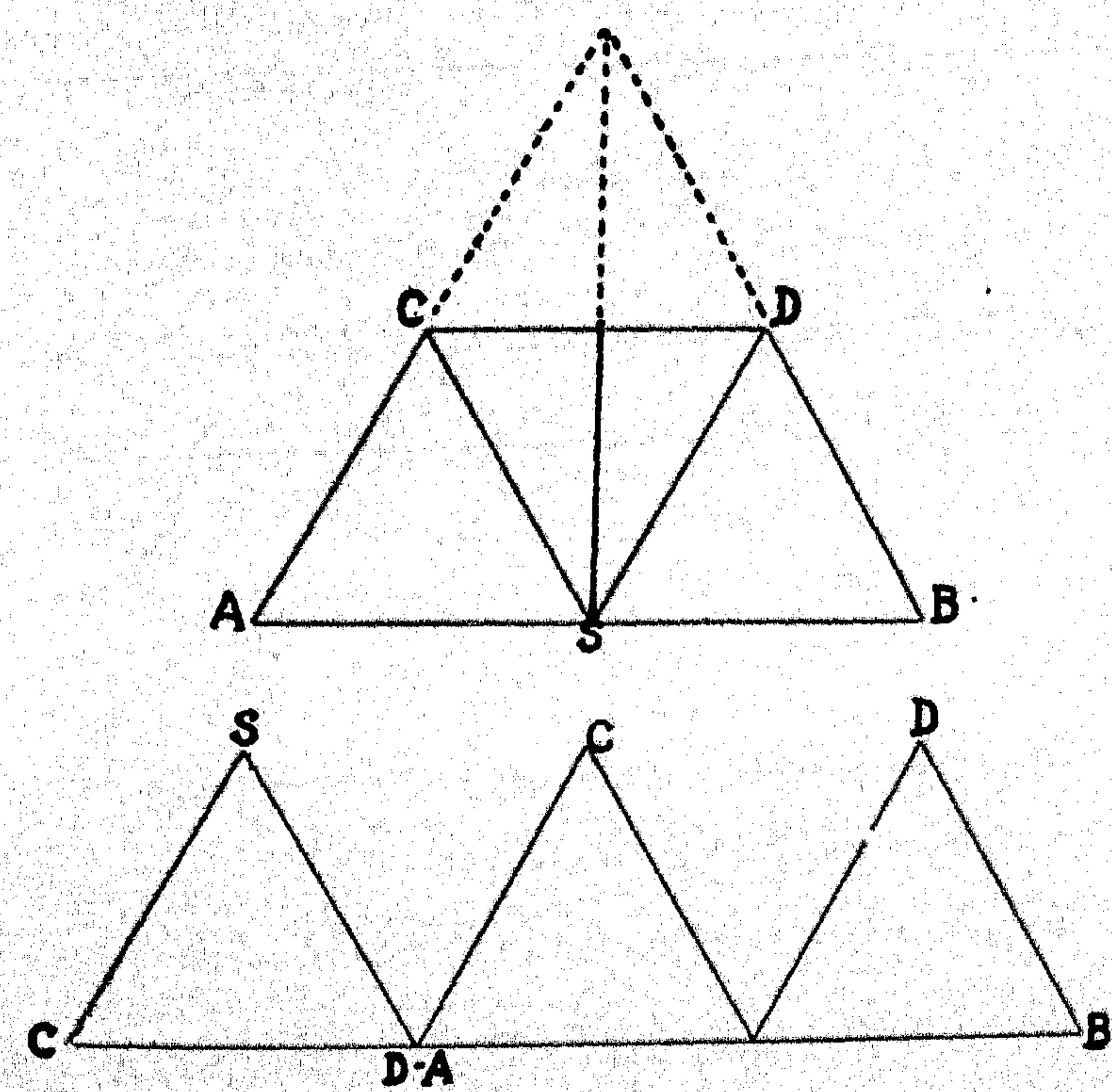


Fig. 226

muestran claramente como la suma de sus áreas es igual a CD + AB multiplicado por la mitad de la altura.

También un trapezoide (fig. 227) dividido igualmente en tres triángulos uno de los cuales tiene la base igual a la

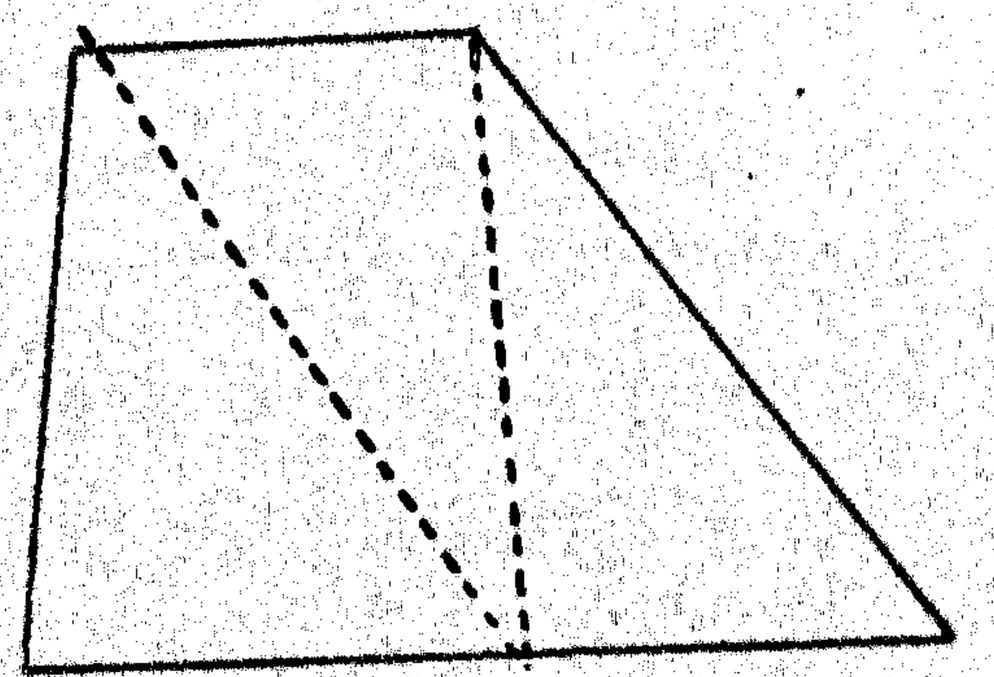


Fig. 227

menor del trapecio y el vértice sobre la base mayor, es siempre igual a tres triángulos que tienen la misma altura del trapecio y como suma de sus bases, la suma de las dos bases del trapecio.

OTRA DEMOSTRACIÓN:

El trapecio cortado según la altura AB (fig. 228) queda dividido en dos trozos que pueden ser colocados en el marco rectangular MNOP.

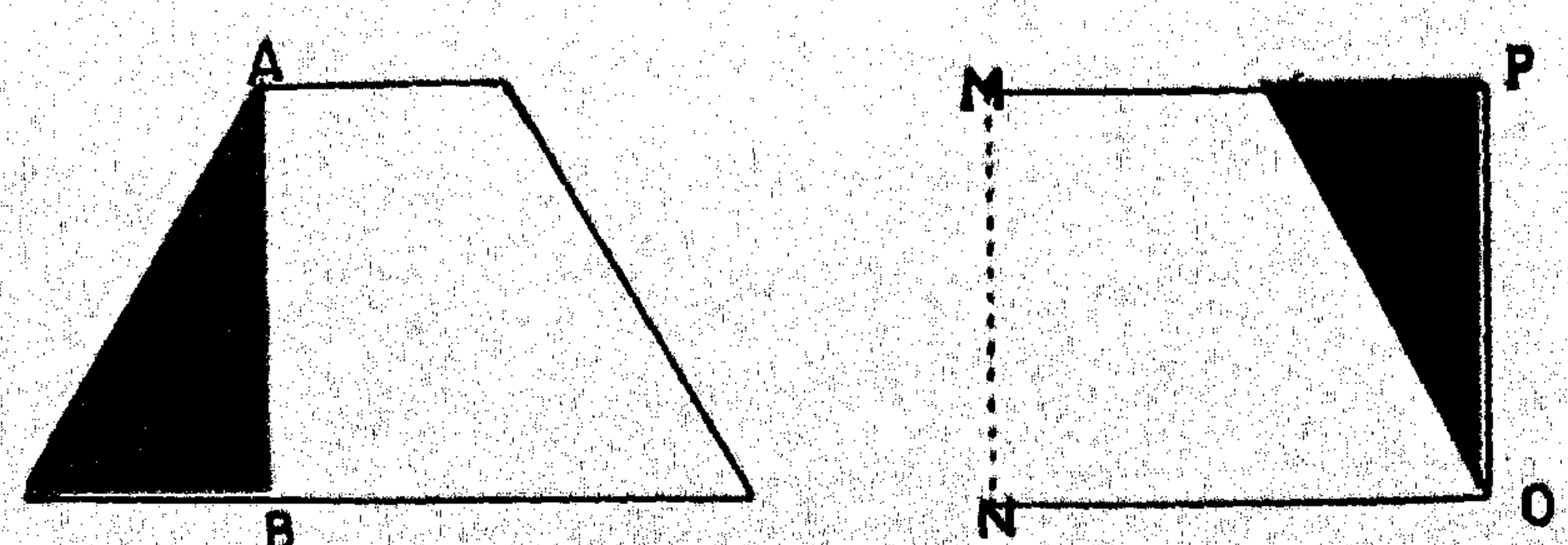


Fig. 228 (1

Así hemos hallado un rectángulo equivalente al trapecio. Este rectángulo tiene uno de los lados iguales a la altura del trapecio MN.

Veamos ahora si se puede determinar la relación entre el otro lado NO y los lados del trapecio.

Si se consideran unidos los dos lados iguales NO + MP se ve que son iguales a la suma de las dos bases del trapecio, una de las cuales está distribuída, una parte en NO y la otra se ha añadido a la base menor para formar MP.

Por lo tanto uno de los lados NO es igual a la mitad de la suma de las bases del trapecio.

OTRA DEMOSTRACIÓN:

El trapecio dentro de su marco está dividido en cuatro trozos. Primeramente, está dividido transversalmente por una mediana MN que pasa por el centro de la altura SR. De este modo resultan dos trapecios, uno superior y otro inferior, que tiene la misma altura (fig. 228 (2).

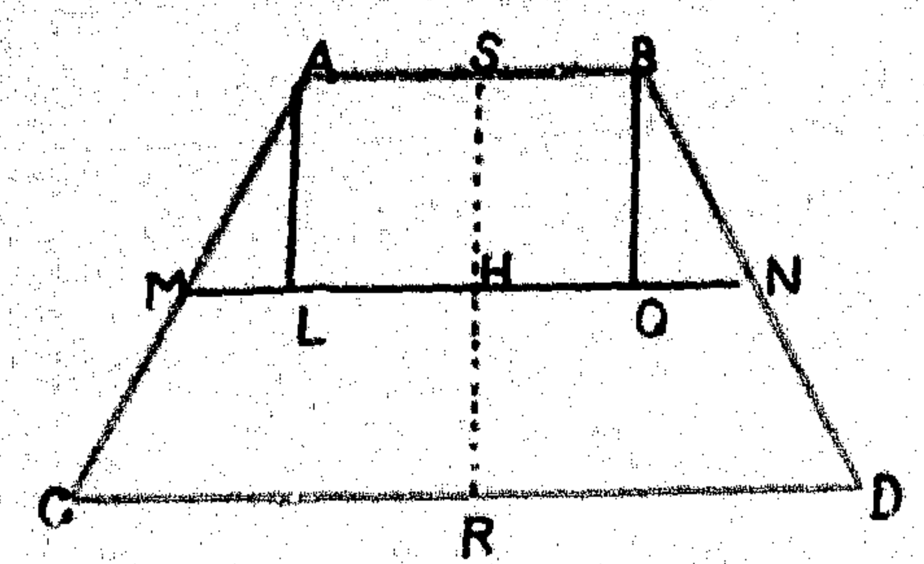


Fig. 228 (2

El superior está subdividido en un rectángulo y dos pequeños triángulos laterales, separados por medio de las perpendiculares AL y BG.

Los cuatro trozos se pueden colocar dentro del marco rectangular, es decir, el trapecio MCDN y el rectángulo ALGB. Sobre el lado CV del marco entran en toda su

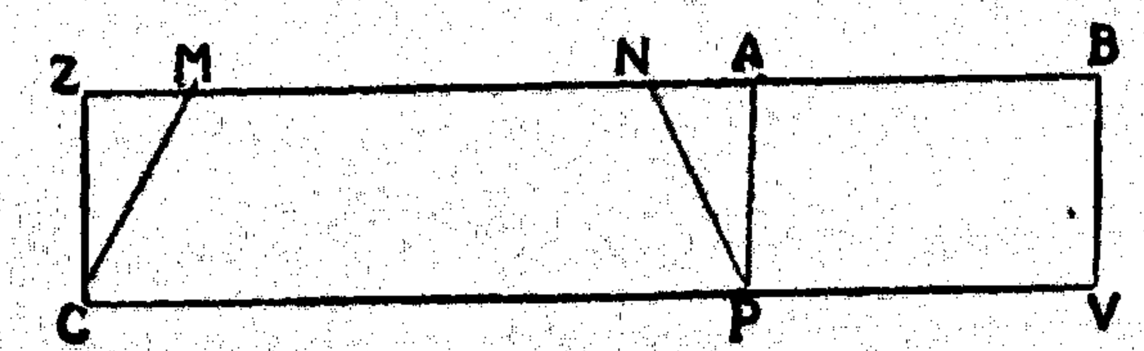


Fig. 228 (3

longitud las dos bases del trapecio primitivo, es decir CD y AB. Quedan vacíos dos espacios triangulares rellenos con los triángulos ALM y BGN.

Ahora bien. El rectángulo largo tiene un lado igual a la suma de las dos bases del trapecio y el otro igual a la mitad de su altura.

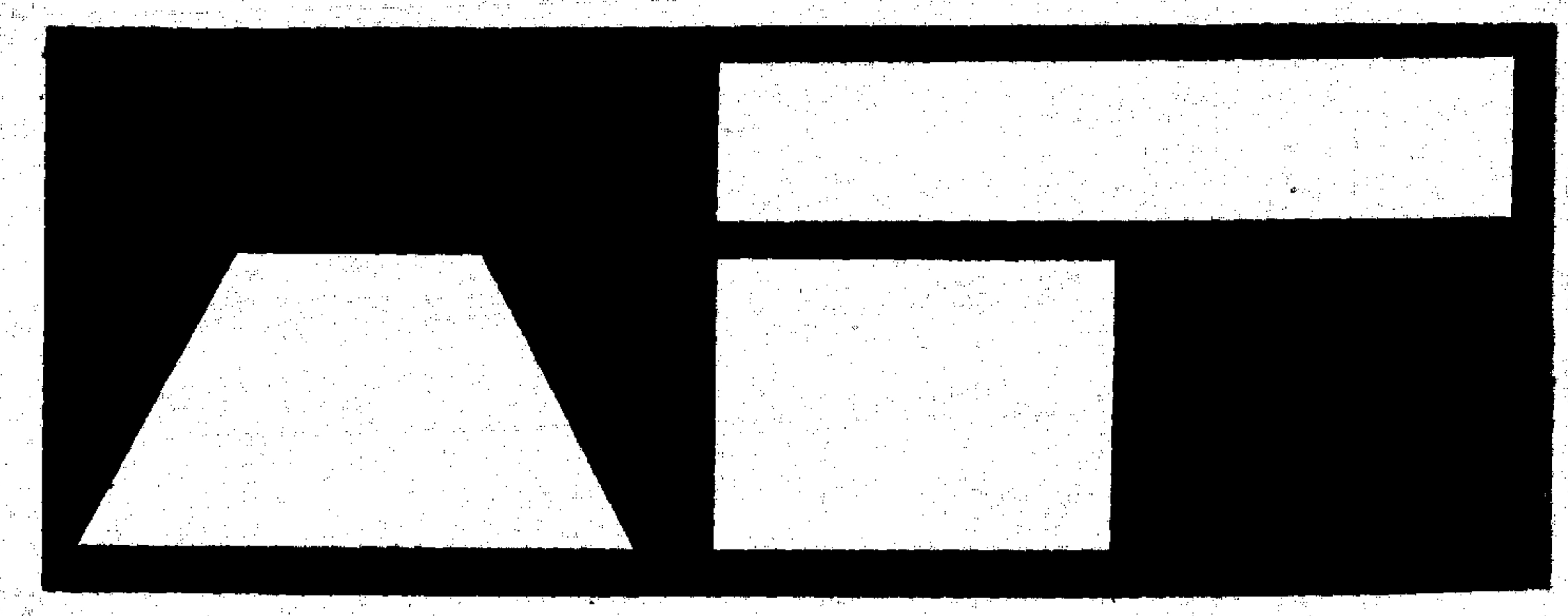


Fig. 228 (4

Las dos figuras son equivalentes.

Y son equivalentes entre ellos los dos rectángulos que tienen la suma de las bases y la mitad de la altura como lados o también la altura y la semisuma de las bases.

Siendo cada área igual a $\dfrac{\text{suma de las bases} \times \text{altura}}{2}$

AREA DEL POLIGONO

Este pentágono (fig. 229) se uuede descomponer en cinco triángulos iguales: a, b, c, d, e.

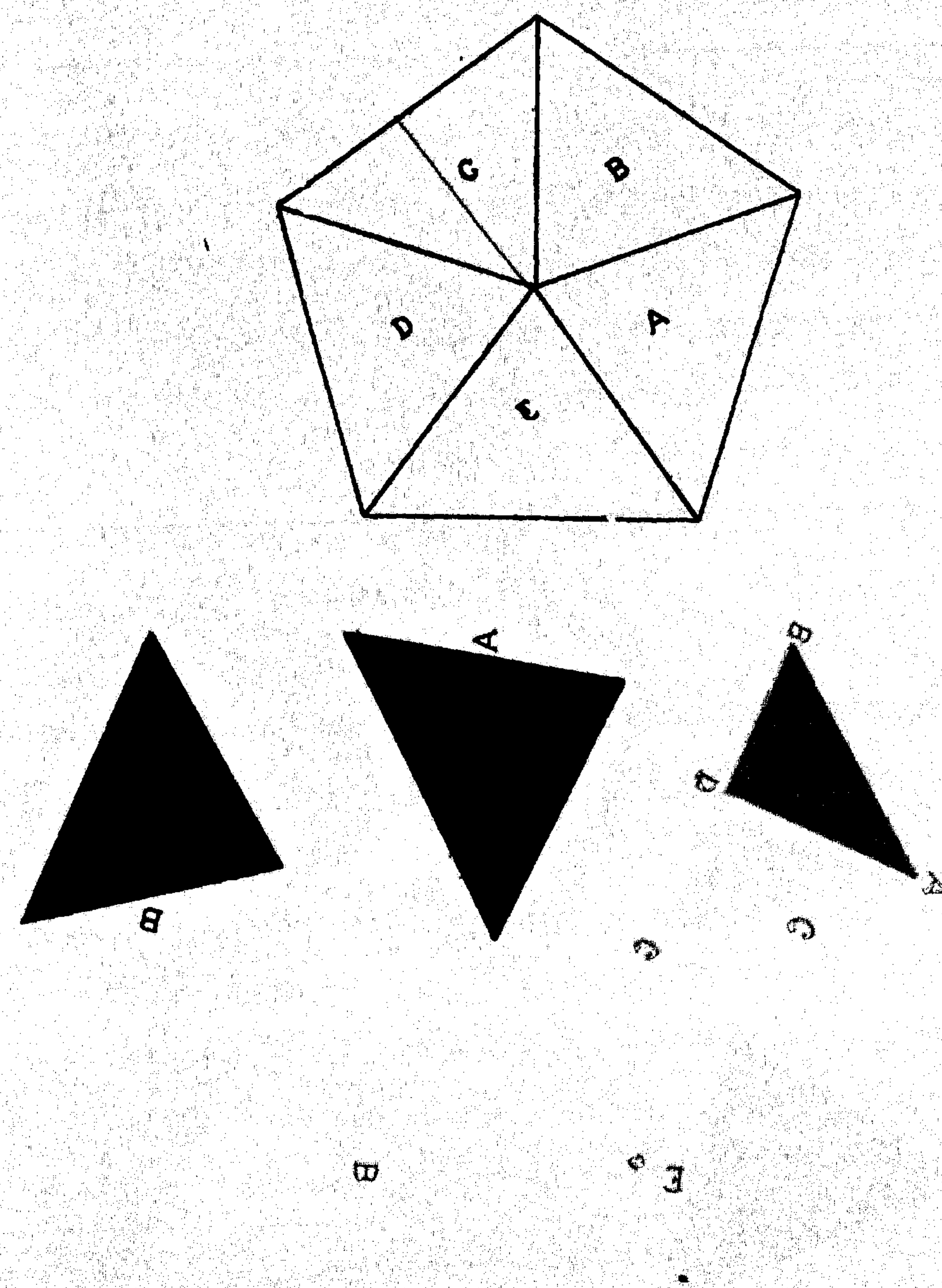


Fig. 229

El área de cualquiera de estos triángulos, el ABC por ejemplo, sería igual a la base BC multiplicada por la altura AD dividida por dos e igualmente en los demás.

Unamos ahora los triángulos (fig. 230) en un marco rectangular preparado a propósito; para lograr que entren los cinco triángulos, es necesario que uno de ellos esté dividido según la altura.

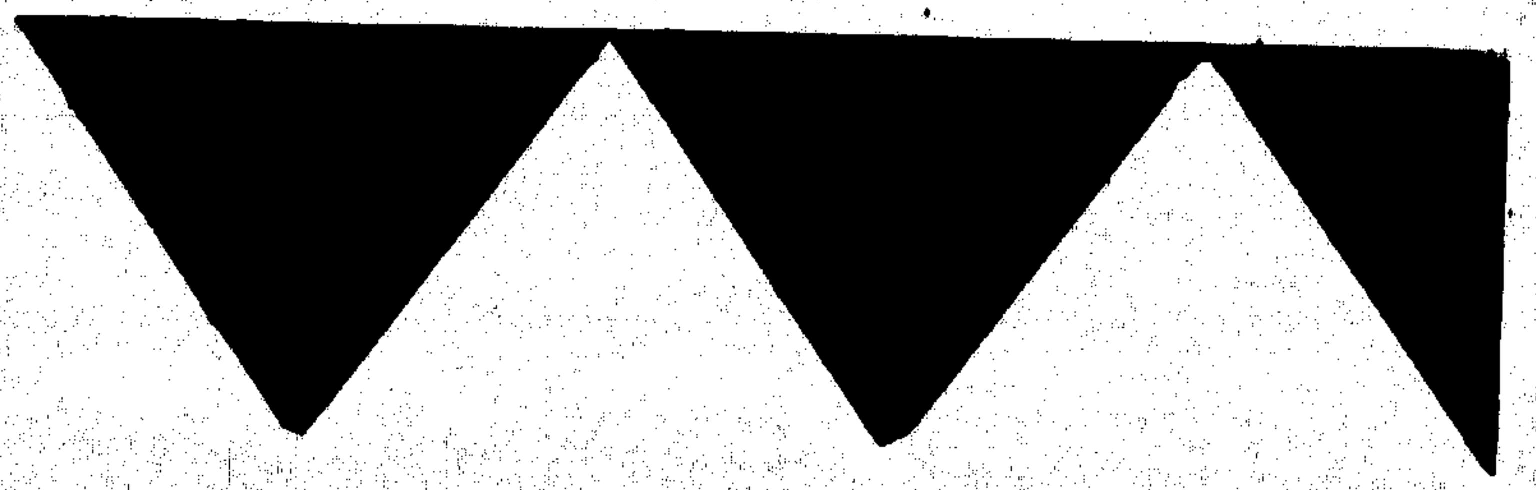


Fig. 230

El marco rectangular (equivalente al pentágono) tiene uno de los lados igual a la altura del triángulo y el otro, igual a la mitad de la suma de las bases de todos los triángulos, es decir, a la mitad del perímetro del pentágono.

Existe otra solución con el material.

Los triángulos están todos divididos transversalmente por una línea paralela a la base y trazada a una distancia de ésta igual a la mitad de la altura, así que cada triángulo queda dividido en un trapecio y en un triángulo pequeño que tienen ambos la misma altura (fig. 231).

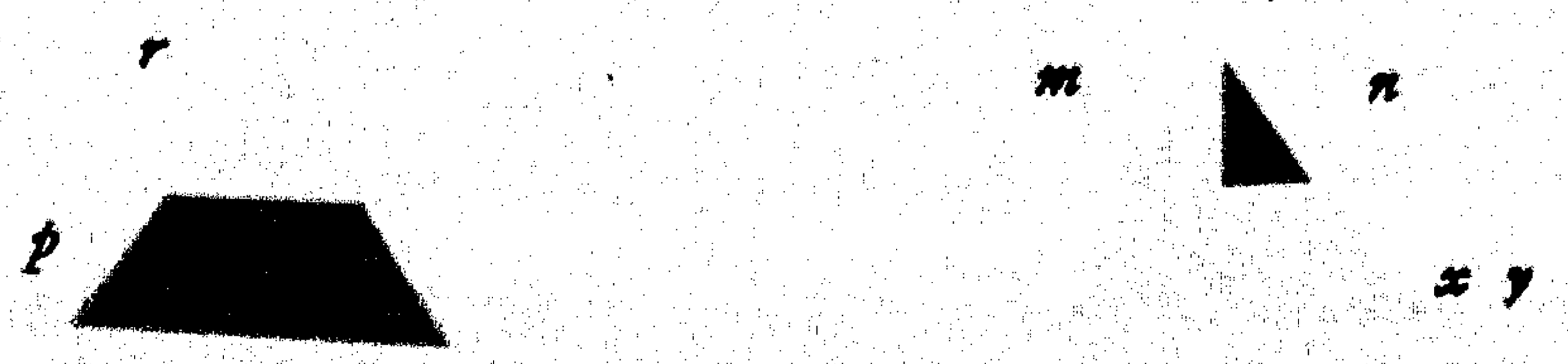


Fig. 231

Colocando todas las bases de los triángulos sobre una misma línea dentro de un marco N (fig. 232) quedan los trapecios uno junto a otro y dejan entre sí un espacio relleno por los triángulos puestos con la base en alto.

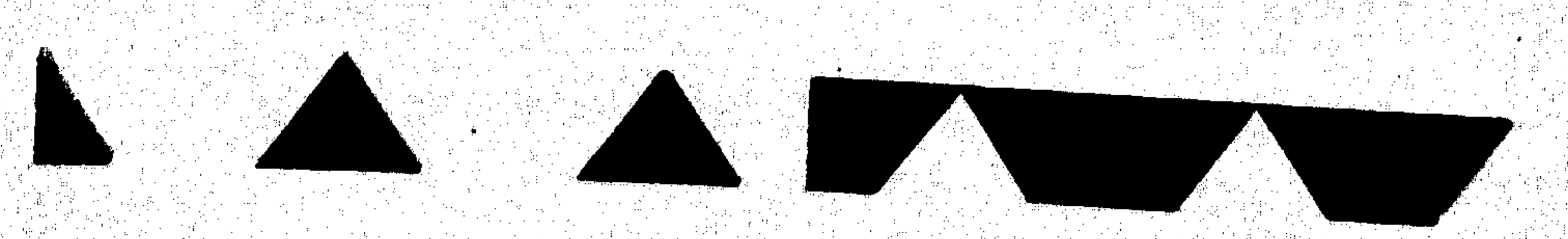


Fig. 232

Restan, además, dos espacios triangulares más pequeños que se rellenan con los dos pequeños triángulos m-n obtenidos partiendo por la mitad el triángulo superior, por medio de la altura.

Así la línea divisoria x-y corresponde a la altura de los trapecios *p*-y a la de los triángulos *r*, es decir, a la mitad de la altura de uno de los cinco triángulos en que fué dividido el pentágono.

El marco rectangular N tiene pues un lado igual a la suma de las bases de los cinco triángulos (perímetro del pentágono) y el otro corresponde a la mitad de la altura de los triángulos.

Observando ahora la línea que corresponde a la altura de un triángulo de los componentes del pentágono, éste dentro del polígono es una línea que va perpendicularmente desde el centro a uno de los lados y lo divide en dos partes iguales.

Esta línea que une el centro con el punto medio de un lado se llama *apotema*.

El área de un polígono se obtiene multiplicando el perímetro por la apotema dividida por dos, es decir: el área de un polígono es igual al perímetro por la mitad de la apotema o a la mitad del perímetro por la apotema.

Lo que se ha dicho para el pentágono puede repetirse para el exágono, el decágono y para cualquier polígono regular.

Todos pueden ser divididos en triángulos iguales y como sabemos, el área de un triángulo se obtiene averiguando la de uno de los triángulos que lo constituyen y multiplicándola por el número de éstos.

O también, sumando todas las bases de los triángulos—

es decir, el perímetro—y multiplicando la suma por la mitad de la altura que es la apotema del polígono.

En el material tenemos las subdivisiones de un decágono tanto en triángulos completos como en triángulos divididos transversalmente. El decágono, en dicha forma, puede adaptarse exactamente dentro de dos marcos rectangulares distintos, uno de los cuales tiene un lado que corresponde al perímetro completo y el otro a la altura entera.

AREA DEL CIRCULO

Basta también un simple razonamiento para comprender que el área de cualquier polígono regular de veinte, cincuenta, cien lados, se halla multiplicando el perímetro por la mitad de la apotema. El perímetro representa la suma de las bases de los triángulos en los cuales puede descomponerse el polígono: un triángulo por cada lado.

Y esto se podría siempre representar con el material, colocando los triángulos en que se descompone el polígono dentro de un rectángulo equivalente.

Pero ¿cómo procederíamos para calcular el área de un círculo?

Un círculo se puede considerar como un polígono de infinito número de lados tan infinitamente pequeños que quedan reducidos a puntos sucesivos de una línea contínua.

Pero sería imposible distinguir triángulos, ni lados ni apotemas.

En el círculo nos encontramos solamente con la circunferencia, que es una línea contínua y el radio que es igual a la apotema.

Es pues solamente con el razonamiento y no con el material, como podemos averiguar el área del círculo.

El área del círculo nos la da claramente, según hemos visto en los polígonos, el producto de la circunferencia por el radio dividido por dos.

$$\text{Area del círculo} = \frac{\text{circunferencia} \times \text{radio}}{2}$$

Practicamente ¿cómo puede medirse la circunferencia?

Tracemos una línea larga sobre una hoja de papel. Tomemos entonces el círculo del material que es una rueda de hierro con radio 5 cm. (su diámetro, que es nuestra medida fundamental, es de 10 cm.)

Hagamos una pequeña señal en un punto cualquiera de la circunferencia y tomemos otro en el extremo de la línea trazada sobre el papel.

Después, colocando el punto señalado sobre la circunferencia sobre el de la línea, teniendo la rueda derecha perpendicularmente, haremos avanzar a ésta siguiendo la línea hasta que describa una vuelta completa, en cuyo momento, el punto señalado en la circunferencia estará sobre la línea.

Dicho punto señalará sobre la línea el extremo opuesto de aquel trozo que tiene por longitud la de la circunferencia.

Midamos con el doble decímetro y obtendremos la circunferencia del círculo cuyo radio es de 5 cm.

Es preciso obtener la medida exacta y para ello se repetirá la operación varias veces. La longitud medida exactamente, es de 31'4 cm. es decir, 31 centímetros, cuatro milímetros y una pequeña cantidad imperceptible. Vamos a ver la relación que guarda esta magnitud con el diámetro. En efecto, el diámetro del círculo es una magnitud fácil de medir, cosa que no sucede con la circunferencia. Pero se puede establecer una relación constante entre ambas líneas lo que nos podría colocar en situación de conocer indirectamente la longitud de la circunferencia.

Veamos cuantas veces el diámetro entra en la circunferencia. Para ello precisa una división:

$$\frac{\text{Circunferencia}}{\text{diámetro}} = \frac{\text{Circunferencia}}{\text{dos radios}}$$

lo que es igual, si tenemos en cuenta las cifras halladas: $\frac{31'4}{10} = 3'14$.

La relación entre la circunferencia y el diámetro es 3'14, o lo que es igual, la circunferencia es igual al diámetro multiplicado por 3'14. Si se miden todos los círculos del material se encuentra siempre la misma relación. Quien tome las medidas justas llegará a obtener unas cifras decimales, pero nunca una cantidad exacta.

La relación fué calculada en 3'141595.

Considerando suficiente para nuestros cálculos el valor 3'14, deberemos retenerlo en la memoria para saber, que medido el diámetro de un círculo, la longitud de la circunferencia se obtiene multiplicando esta medida por el número 3'14.

Circunferencia = diámetro × 3'14.

Area del círculo. — De aquí se deduce que para obtener el área de un círculo es suficiente conocer la longitud de su radio.

En efecto, el área es igual a la mitad del producto de la circunferencia por el radio, analogamente a cuanto se dijo para los polígonos.

Es decir: $\text{Area del círculo} = \frac{\text{Circunferencia} \times \text{radio}}{2}$

Pero la circunferencia es igual al diámetro multiplicado por 3'14 y siendo el diámetro igual al doble del radio tendremos:

$$\text{Area del círculo} = \frac{2R \times 3'14 \times R}{2}$$

Simplificando esta fracción tendremos: un 2 que multiplica y que divide, puede pues eliminarse y queda:

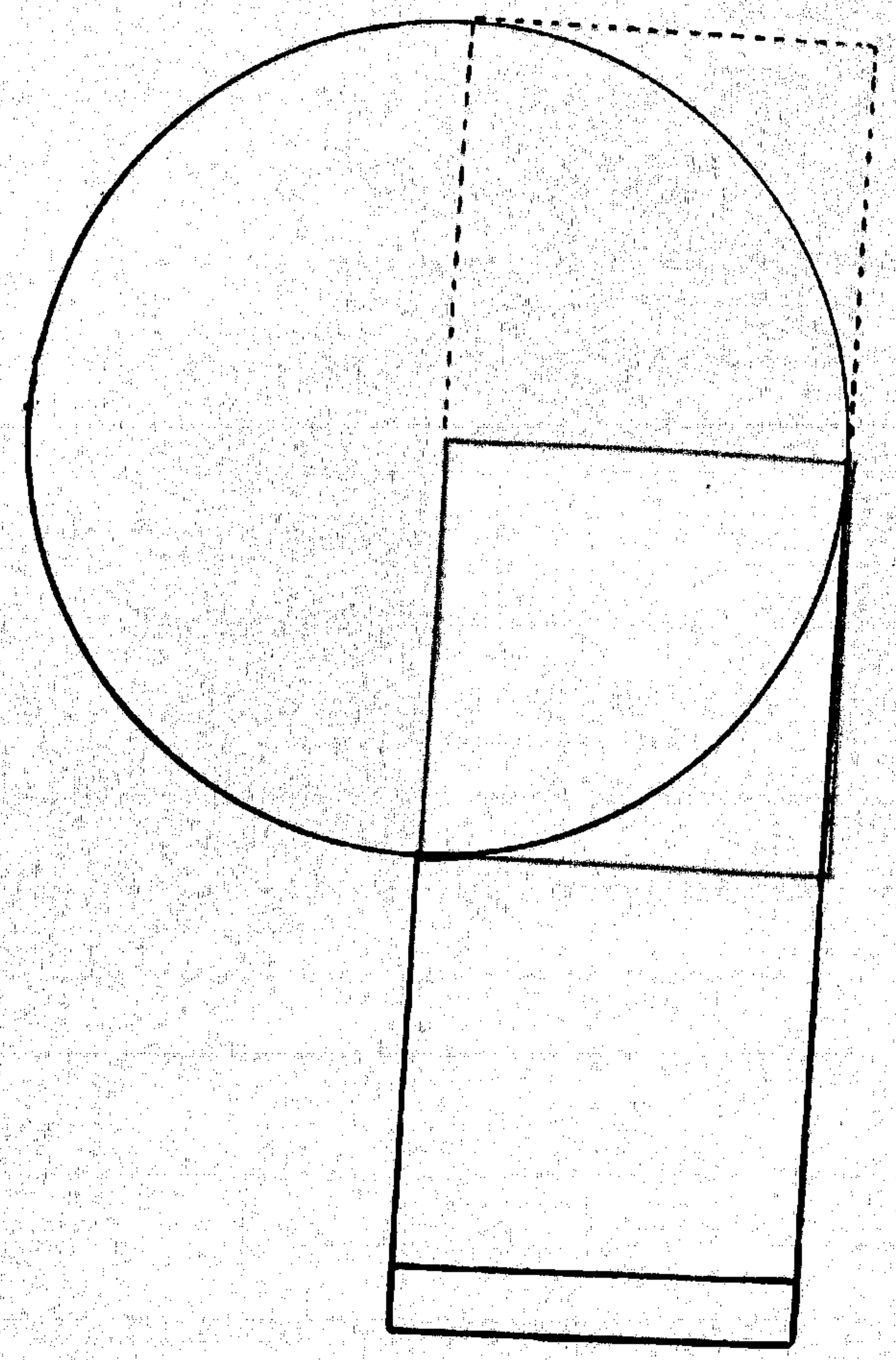


Fig. 233

Area círculo = R × 3'14 × R.

Pero R × R es igual a un cuadrado que tenga el lado igual al radio, o sea:

Area círculo = $R^2 \times 3'14$.

Y si indicamos el número 3'14 por la letra griega que se ha convenido en que lo expresa tendremos:

Area círculo = πR^2.

El cuadrado del radio por π es igual a tres veces el cuadrado del radio más un trozo $\frac{14}{100}$ (fig. 233).

$$\frac{\text{Circunferencia}}{\text{diámetro}} = \frac{\text{Circunferencia}}{\text{dos radios}}$$

lo que es igual, si tenemos en cuenta las cifras halladas: $\frac{31'4}{10} = 3'14$.

La relación entre la circunferencia y el diámetro es 3'14, o lo que es igual, la circunferencia es igual al diámetro multiplicado por 3'14. Si se miden todos los círculos del material se encuentra siempre la misma relación. Quien tome las medidas justas llegará a obtener unas cifras decimales, pero nunca una cantidad exacta.

La relación fué calculada en 3'141595.

Considerando suficiente para nuestros cálculos el valor 3'14, deberemos retenerlo en la memoria para saber, que medido el diámetro de un círculo, la longitud de la circunferencia se obtiene multiplicando esta medida por el número 3'14.

Circunferencia = diámetro × 3'14.

Area del círculo. — De aquí se deduce que para obtener el área de un círculo es suficiente conocer la longitud de su radio.

En efecto, el área es igual a la mitad del producto de la circunferencia por el radio, analogamente a cuanto se dijo para los polígonos.

Es decir: $\text{Area del círculo} = \frac{\text{Circunferencia} \times \text{radio}}{2}$

Pero la circunferencia es igual al diámetro multiplicado por 3'14 y siendo el diámetro igual al doble del radio tendremos:

$$\text{Area del círculo} = \frac{2R \times 3'14 \times R}{2}$$

Simplificando esta fracción tendremos: un 2 que multiplica y que divide, puede pues eliminarse y queda:

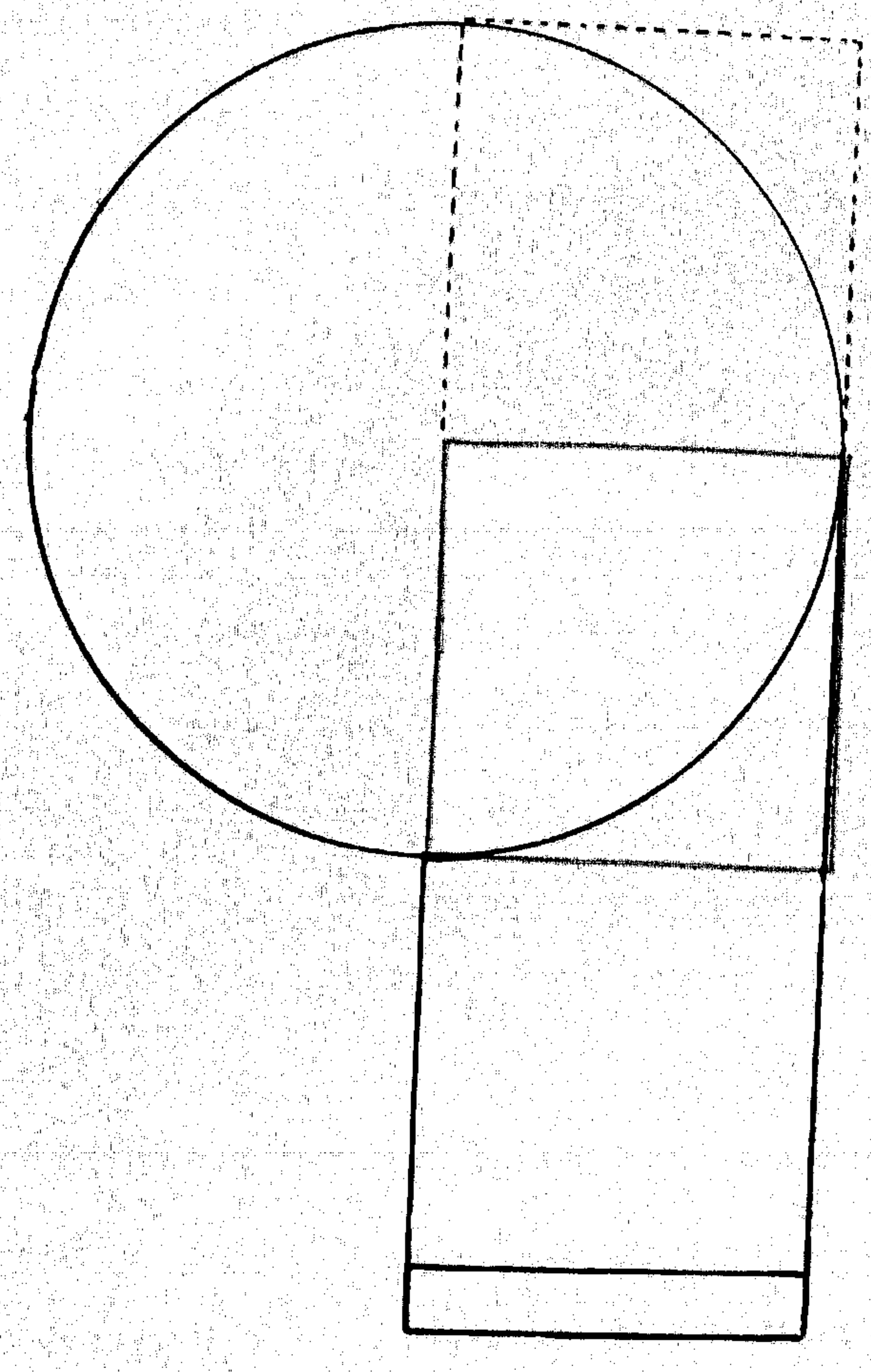


Fig. 233

Area círculo = R × 3'14 × R.

Pero R × R es igual a un cuadrado que tenga el lado igual al radio, o sea:

Area círculo = R^2 × 3'14.

Y si indicamos el número 3'14 por la letra griega que se ha convenido en que lo expresa tendremos:

Area círculo = πR^2.

El cuadrado del radio por π es igual a tres veces el cuadrado del radio más un trozo $\frac{14}{100}$ (fig. 233).

VII

RAZONAMIENTOS

RAZONAMIENTOS SOBRE LOS ANGULOS

FIGURAS

Pitágoras que vivió hace cerca de 2500 años, se fijó especialmente en el ángulo recto y fué suya la primera distinción entre ángulo recto, agudo y obtuso.

Consideremos ahora las particularidades del ángulo recto. Este es único, absoluto.

Existe una sola dirección perpendicular entre dos rectas. Desde un punto de una recta se puede levantar únicamente una perpendicular.

En cambio, pueden existir oblicuas en infinitas direcciones y todas ellas forman ángulos que no son rectos sino agudos—los menores que un recto—y obtusos—los mayores que un recto—(fig. 234).

La dirección perpendicular es relativa a la dirección de la recta respecto a la cual se considera la perpendicular.

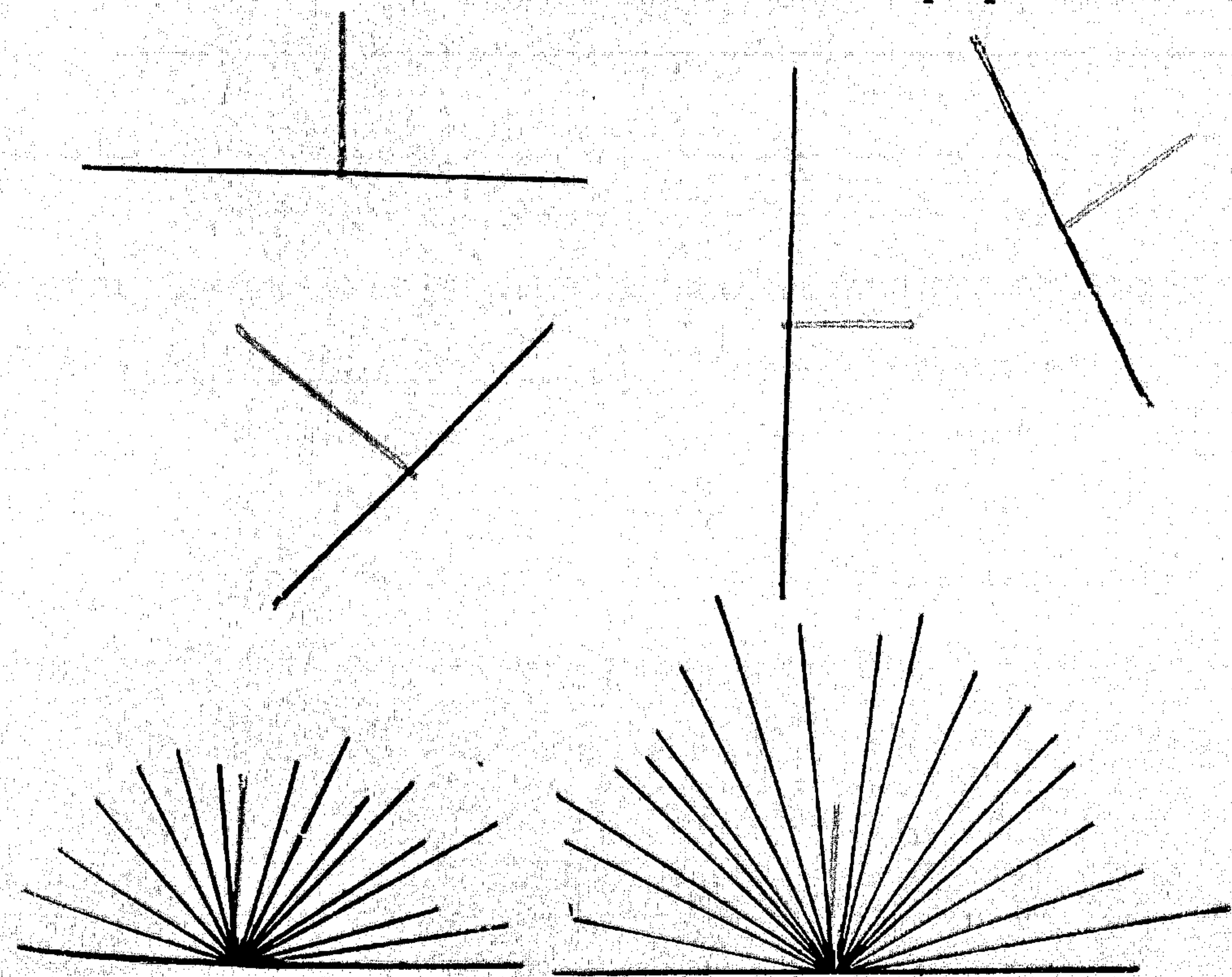


Fig. 234

Existen, sin embargo, dos direcciones absolutas las cuales son entre sí perpendiculares. Se llaman dirección *horizontal* y dirección *vertical*.

La dirección horizontal es aquella que va de derecha a izquierda y vertical la que va de arriba a abajo.

Para determinarlas exactamente se precisan aparatos. La horizontal se determina con el nivel de agua porque la superficie del agua toma siempre la dirección horizontal.

Para determinar la vertical se utiliza la plomada (fig. 235) porque el peso atado a la extremidad del hilo, al ser atraído por la tierra, distiende a éste verticalmente.

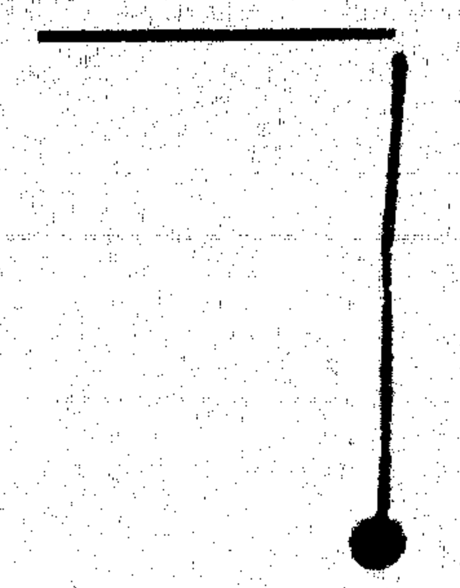


Fig. 235

Existe pues un ángulo recto determinado no solamente por el número de grados (90°) sino también por la dirección de los lados.

Es éste el ángulo recto *normal* que se forma entre el pavimento y las paredes de las habitaciones o entre el piso y los lados de un armario etc.

Las dos direcciones se equilibran y por ello permanecen estables las cosas construídas sobre ellas como base. Si las paredes no fueran perpendiculares sino inclinadas a uno u otro lado, se caerían (salvo construcciones excepcionales de torres inclinadas).

El ángulo recto pues, presenta caracteres que le hacen el más importante de todos los ángulos (fig. 236).

Fig. 236

EL TRIANGULO RECTANGULO

El triángulo que tiene un ángulo recto es también un triángulo que reune caracteres especiales que lo distinguen de los demás y esto, no solamente por tener un ángulo recto, sino por las relaciones que, derivadas de este hecho, presentan los otros elementos del mismo triángulo entre sí.

Entretanto y distintamente a lo que sucede con los demás triángulos se tiene que uno de los ángulos (el recto) es igual a la suma de los otros dos del mismo triángulo.

Si llamamos r al ángulo recto y a y b a los otros dos tendremos una igualdad o ecuación

$$r = a + b.$$

De donde resulta que conocido uno de los dos ángulos a o b el otro se halla mediante la diferencia. $a + b = r$ de donde $a = r - b$: $b = r - a$.

Pitágoras encontró una especial relación entre los lados del triángulo y comenzó por trazar la altura del triángulo rectángulo (fig. 237) que cae desde el ángulo recto sobre la hipotenusa.

La altura AL divide el triángulo BAC en dos triángulos rectángulos semejantes, es decir, de la misma forma.

Siendo semejantes tienen sus ángulos iguales y los lados proporcionales entre sí.

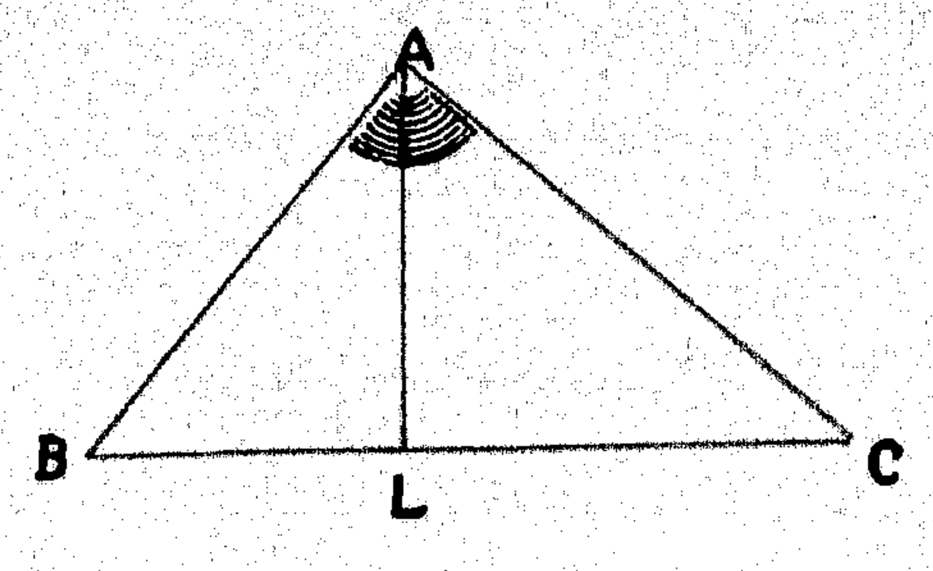


Fig. 237

Es decir, los dos catetos de un triángulo guardan igual proporción que los dos catetos del otro triángulo y del mismo modo existe proporción entre cateto e hipotenusa entre sí, de ambas figuras.

En efecto, serían como fotografías ampliadas del menor o como fotografías reducidas del mayor. Ello es común a los lados de todas las figuras que son semejantes entre sí (como ya hemos visto) (fig. 238).

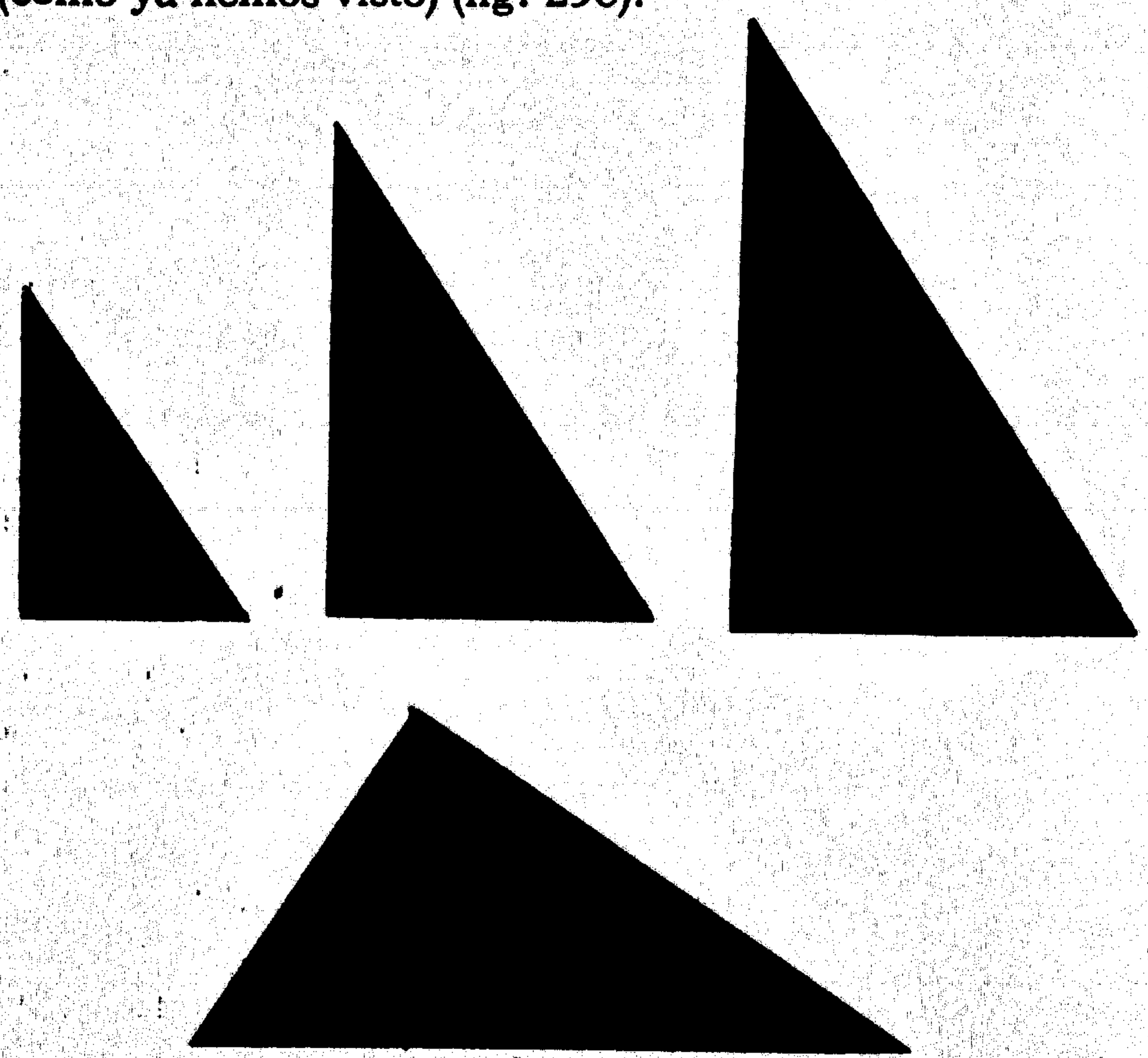


Fig. 238

Volvamos ahora al caso especial, tratado por Pitágoras, del triángulo rectángulo.

Los dos triángulos en que resulta dividido el BAC (fig.

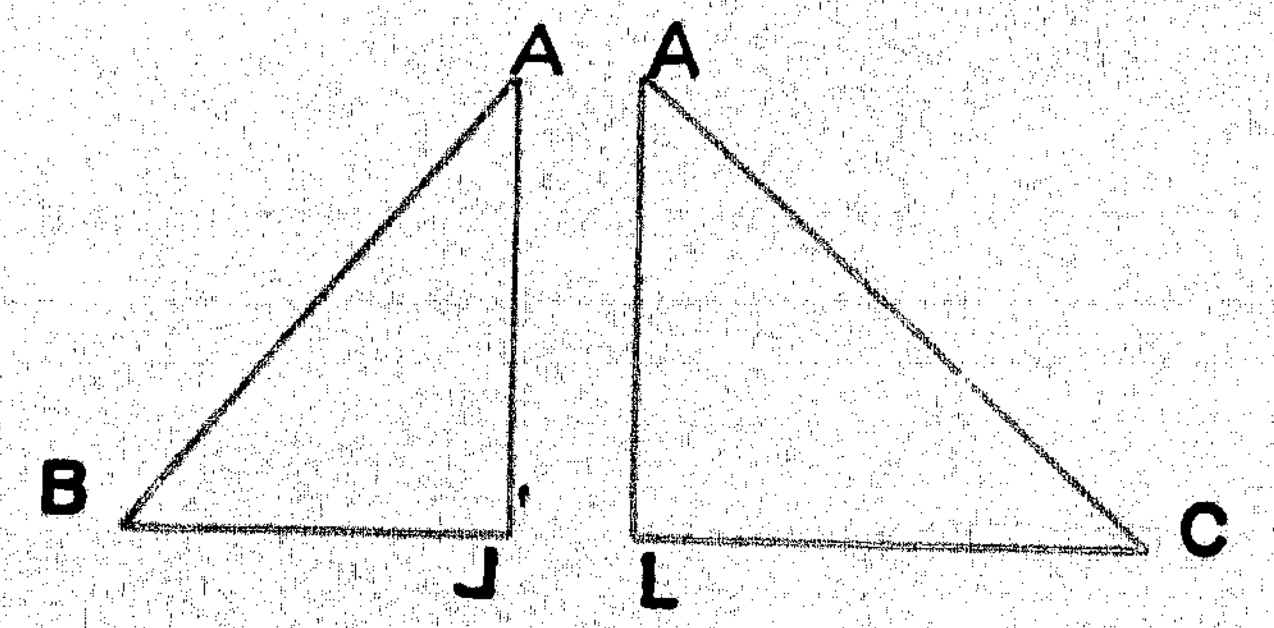


Fig. 239

237) por medio de la altura AL son BLA y ALC y están dispuestos en tal forma que el cateto mayor de BLA y el cateto menor de ALC son la misma línea, es decir, la altura del triángulo.

Luego el cateto mayor de uno es igual al cateto menor de otro (fig. 239).

Y como quiera que los catetos están en la misma proporción recíproca, es decir, el cateto menor de uno es a su cateto mayor, como el cateto menor del otro es a su cateto mayor, podremos decir que entre el cateto BL y la altura AL hay la misma proporción que entre la altura y el cateto LC.

Lo que se expresa en la siguiente forma:

$$BL : LA :: LA : LC$$

Es decir, que la altura ha dividido a la hipotenusa en partes proporcionales a sí misma.

De dicha proporción resulta que el cuadrado LA (fig.

240) es equivalente al rectángulo que tiene como lados BL o LC.

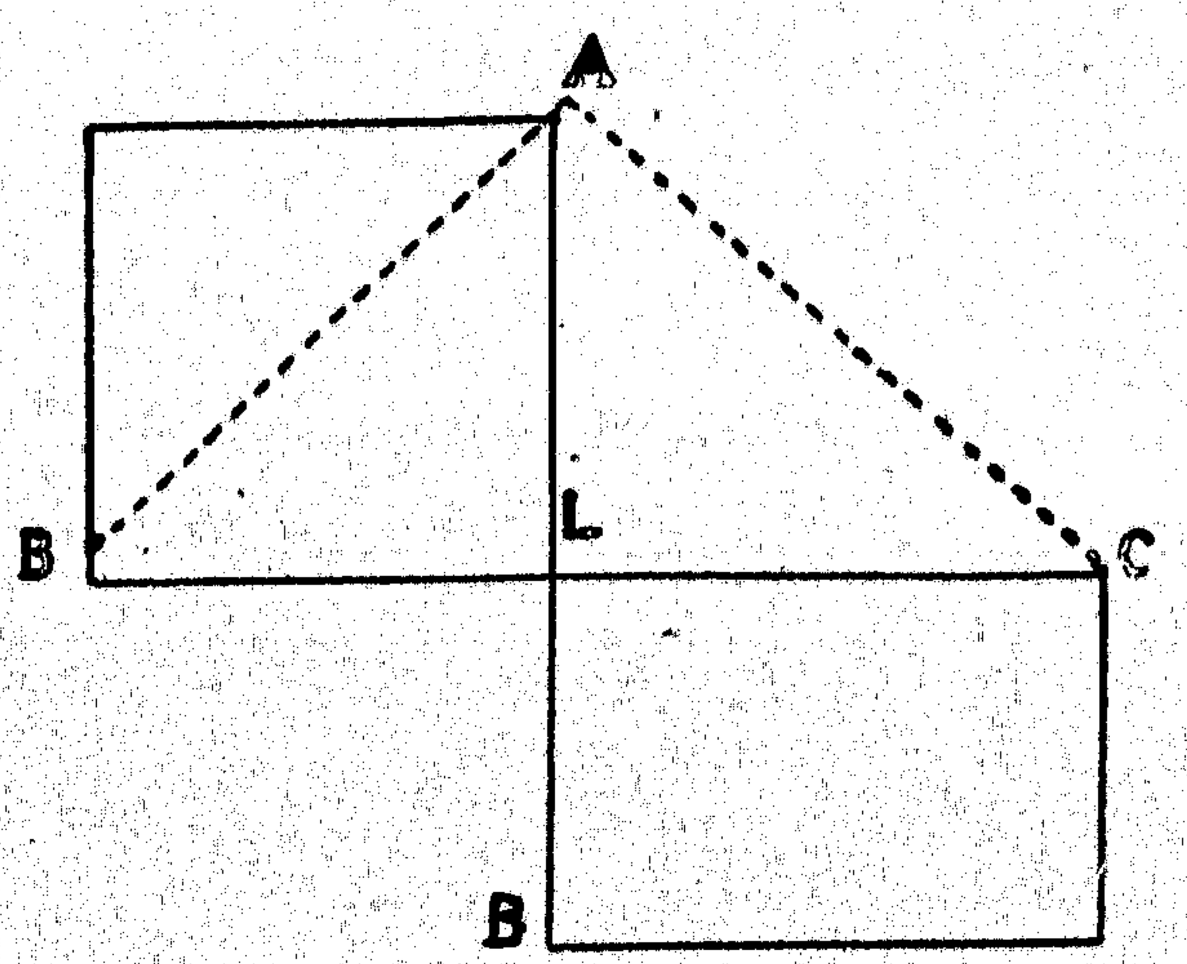


Fig. 240

OTROS RAZONAMIENTOS SOBRE EL ANGULO RECTO

Hemos visto que el ángulo se mide con una circunferencia (en grados) cuando el vértice del ángulo coincide con el centro de aquélla.

Así en la figura (fig. 241) el ángulo BCD que es recto

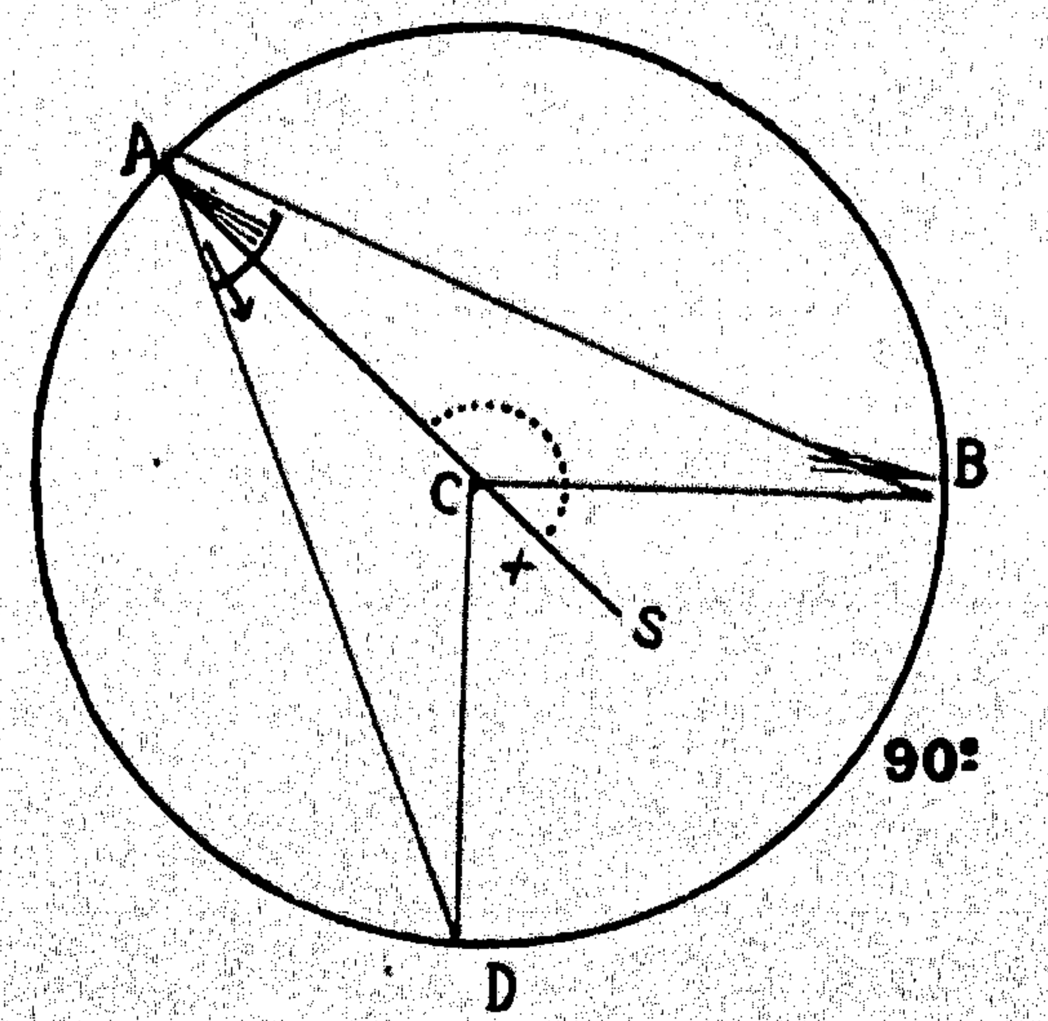


Fig. 241

viene medido por una cuarta parte de la circunferencia.

Consideremos ahora otro ángulo, el $\widehat{BAD}$, cuyo vértice no está en el centro sino sobre la circunferencia, en A.

Deseamos saber la relación existente entre $\widehat{BAD}$ y $\widehat{BCD}$.

Para resolver este problema geométrico recurrimos a una construcción ; unamos A con C por medio de una línea que se prolonga hasta S.

Consideremos ahora el triángulo ACB. Es isósceles porque dos de sus lados AC y CB son radios de la misma circunferencia y por ello los ángulos de la base ($\hat{A}$ y $\hat{B}$) son iguales entre sí.

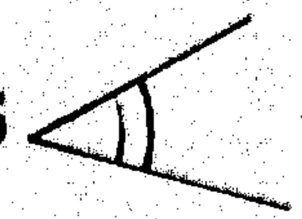
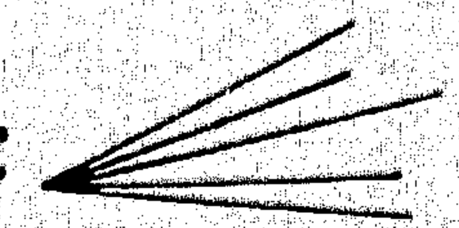
Observemos ahora el ángulo $\widehat{BCS}$.

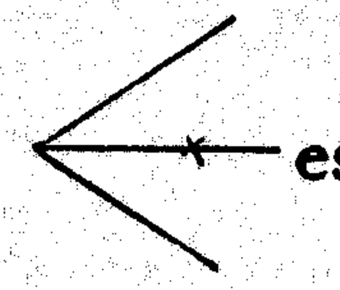
Este se llama *ángulo externo del triángulo* (del triángulo ACB). Todo ángulo externo es igual a la suma de los dos ángulos no adyacentes del triángulo, puesto que si la suma de los tres ángulos es igual a dos rectos, la línea AS que es recta, señala dos rectos.

El ángulo $\widehat{ACB}$  más el ángulo externo $\widehat{BCS}$

suman dos rectos.

Y como $\widehat{ACB}$  pertenece al triángulo, es evidente que el ángulo externo es igual a la suma de los otros dos.

Pero como quiera que en este caso los otros dos ángulos son iguales entre sí resulta el $\widehat{BCS}$  doble de $\widehat{BAC}$ 

Si se repite el mismo razonamiento en el otro lado se demuestra que el ángulo $\widehat{SCD}$  es doble del $\widehat{CAD}$

Resulta de todo ello que el ángulo $\widehat{BCD}$ que tiene su vértice en el centro, es doble del ángulo correspondiente al mismo arco del círculo, pero que tenga el vértice en la circunferencia.

En este caso pues, el ángulo cuyo vértice está en la circunferencia es la mitad de un ángulo recto y mide por ello 45° ($\frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$).

¿Qué sucedería pues, si en vez de partir de un ángulo recto se partiese de *dos ángulos rectos*, es decir, de una línea recta como es precisamente el diámetro? (fig. 242).

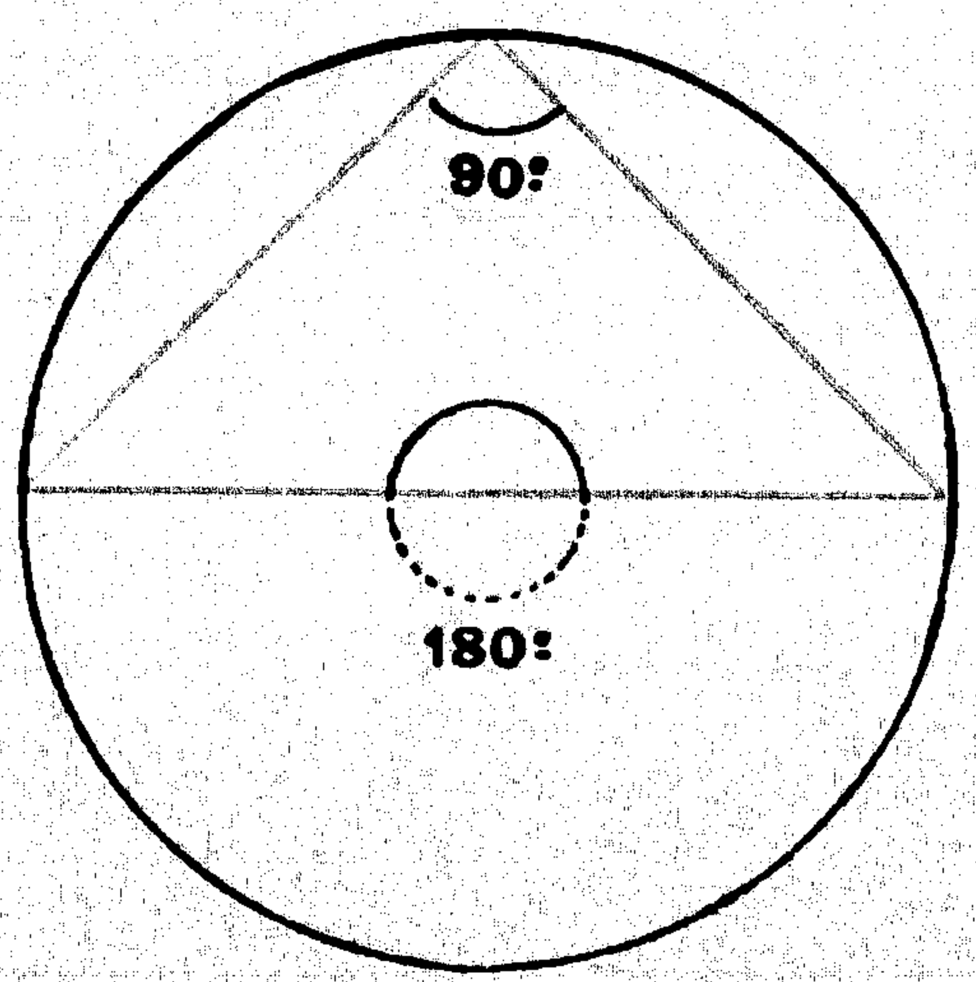


Fig. 242

Entonces resultaría que el ángulo, teniendo los mismos extremos de los lados pero el vértice en la circunferencia sería la mitad de dos rectos, es decir, un ángulo recto.

Por lo tanto, todos los ángulos que tienen los extremos de sus lados en los extremos del diámetro y el vértice sobre la circunferencia, son rectos.

Cuanto se ha dicho puede generalizarse. Hemos sentado una premisa y hemos obtenido una consecuencia.

La premisa era: que un ángulo cuyo vértice está en la circunferencia vale la mitad del que tiene su vértice en el centro—cuando abarcan entre sus lados el mismo arco.

Cierto es, que partimos del ángulo recto para hacer esta demostración, pero como no se ha recurrido a dicha magnitud de ángulo para efectuarla, resulta que la demostración es independiente de dicha condición y, por lo tanto, general.

Se puede pues volver sobre el argumento resolviendo en diversos casos el mismo problema (fig. 243).

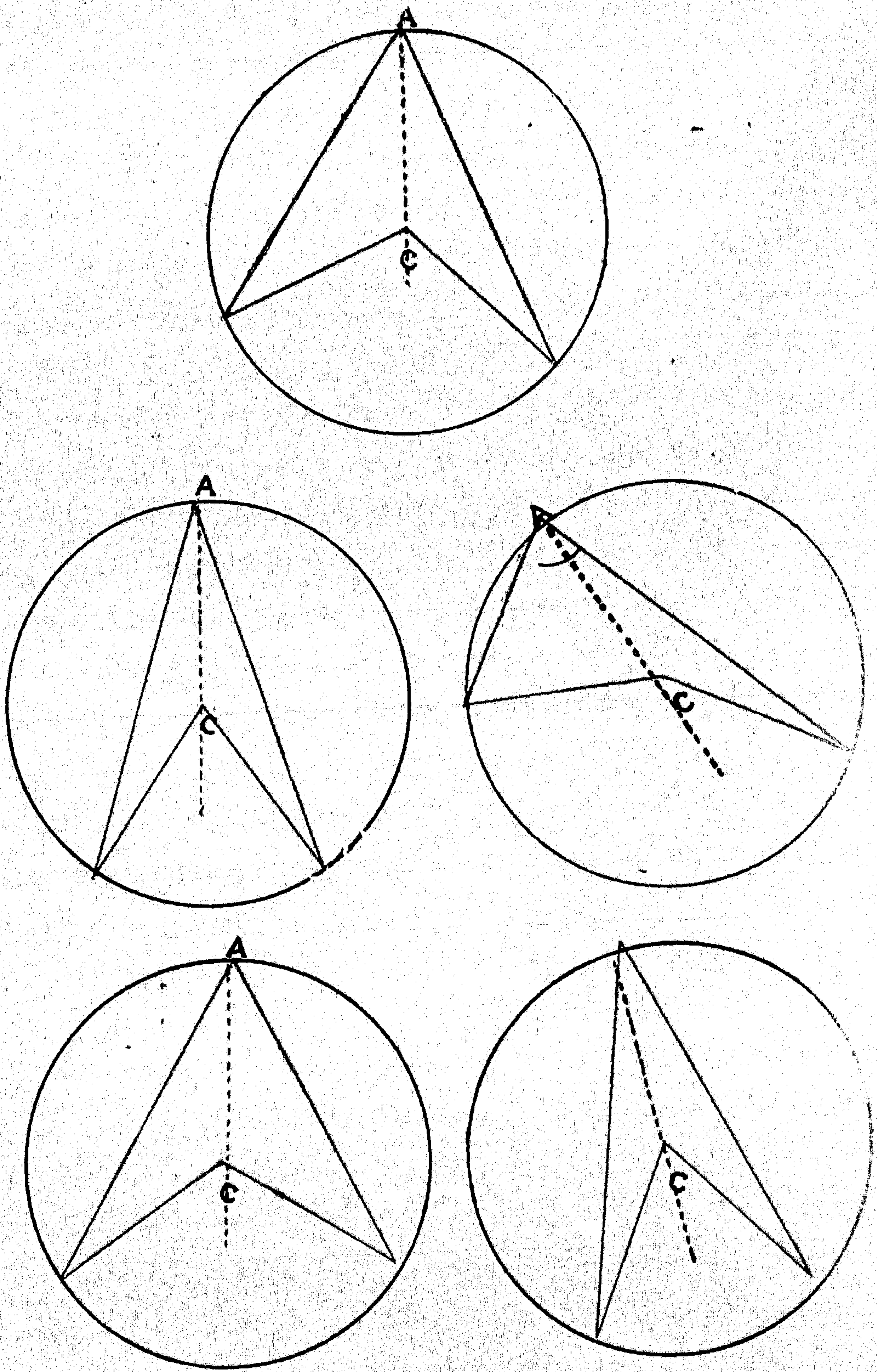


Fig. 243

También podemos hacer la deducción de que un ángulo cuyo vértice está en la circunferencia y que el arco comprendido entre sus lados abarca una semicircunferencia es recto, sea cualquiera el lugar de aquélla que ocupe el vértice (fig. 244).

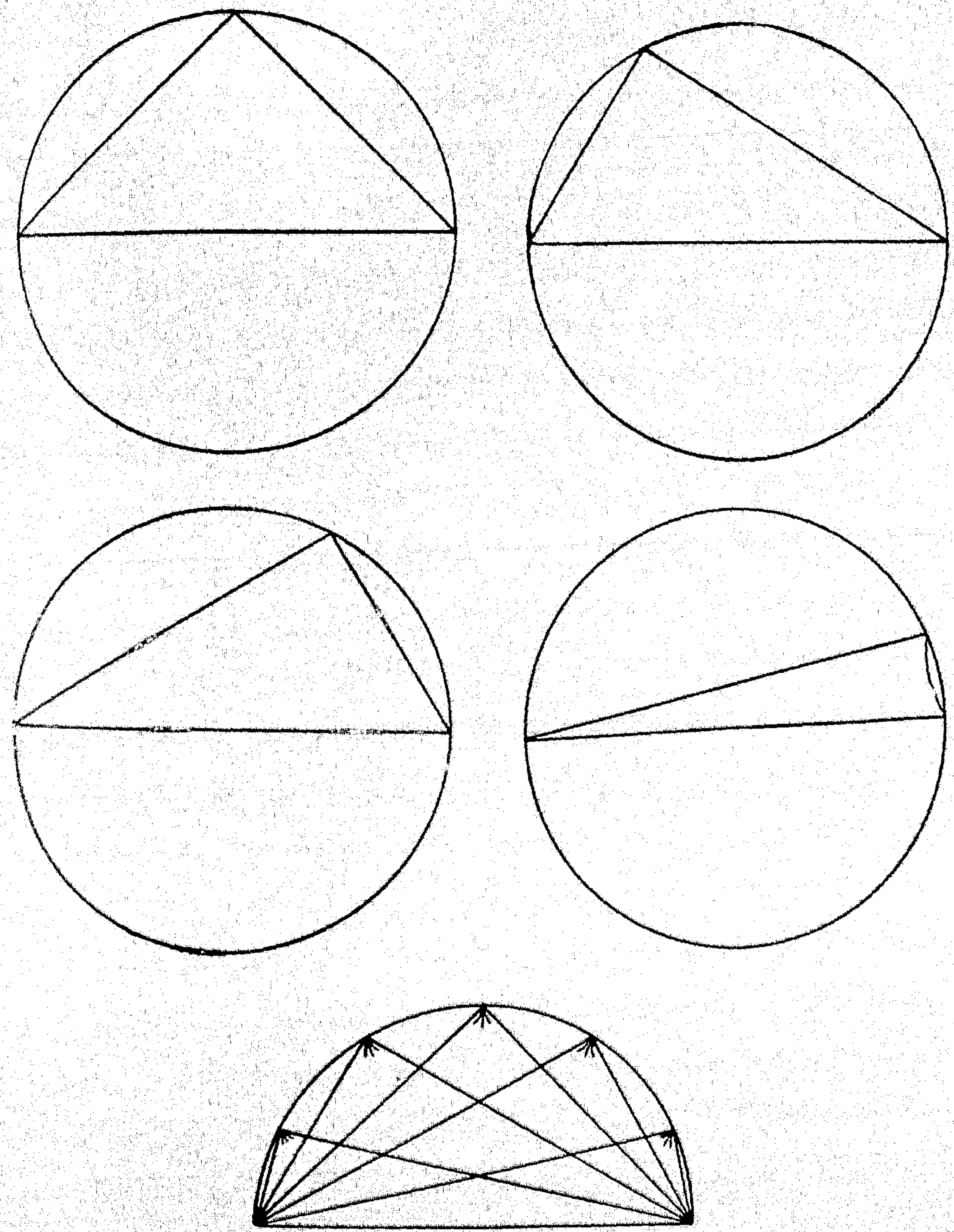


Fig. 244

Como se ve, todos los ángulos de las figuras R. son rectos.

Se pueden pues establecer los dos teoremas siguientes:

Teorema 1.° — El ángulo inscrito en la circunferencia (es decir, con el vértice sobre ella) es igual a la mitad del ángulo en el centro (o lo que es igual, con el vértice en el centro) que comprende el mismo arco entre sus lados.

Teorema 2.° — El ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.

Por lo tanto, el ángulo inscrito que comprende entre sus lados más que una semicircunferencia es obtuso y el que comprende menos de una semicircunferencia es agudo (fig. 245).

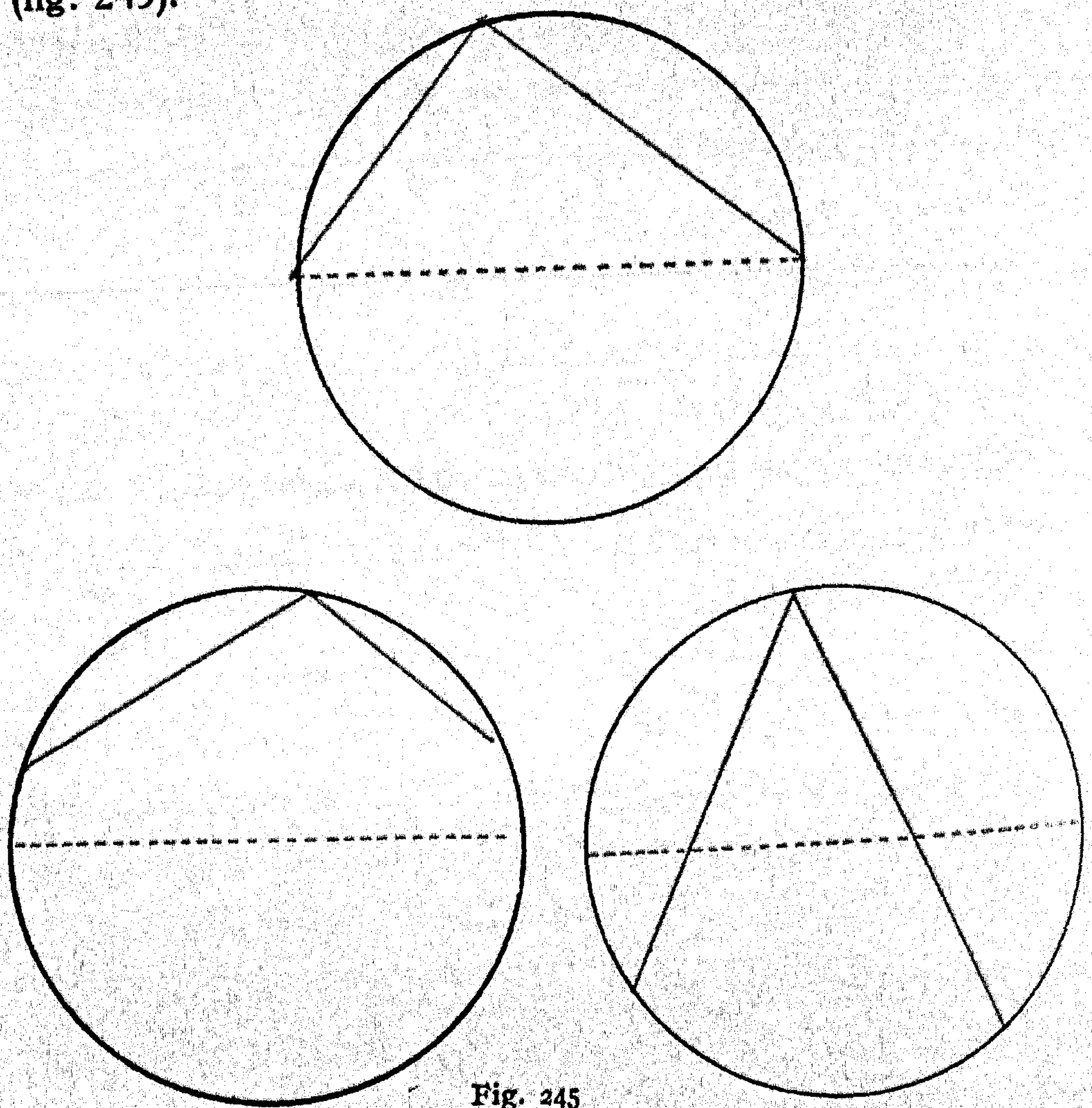


Fig. 245

LA CUADRATURA DEL CIRCULO

Planteemos ahora un problema de geometría ; hallar el cuadrado equivalente al círculo.

(La solución que obtenemos se debe a Elena Lubienska, alumna del 14.° curso internacional de Londres, 1929.)

Sabemos que el área del círculo es igual a πr^2, donde representa el valor 3'1416.

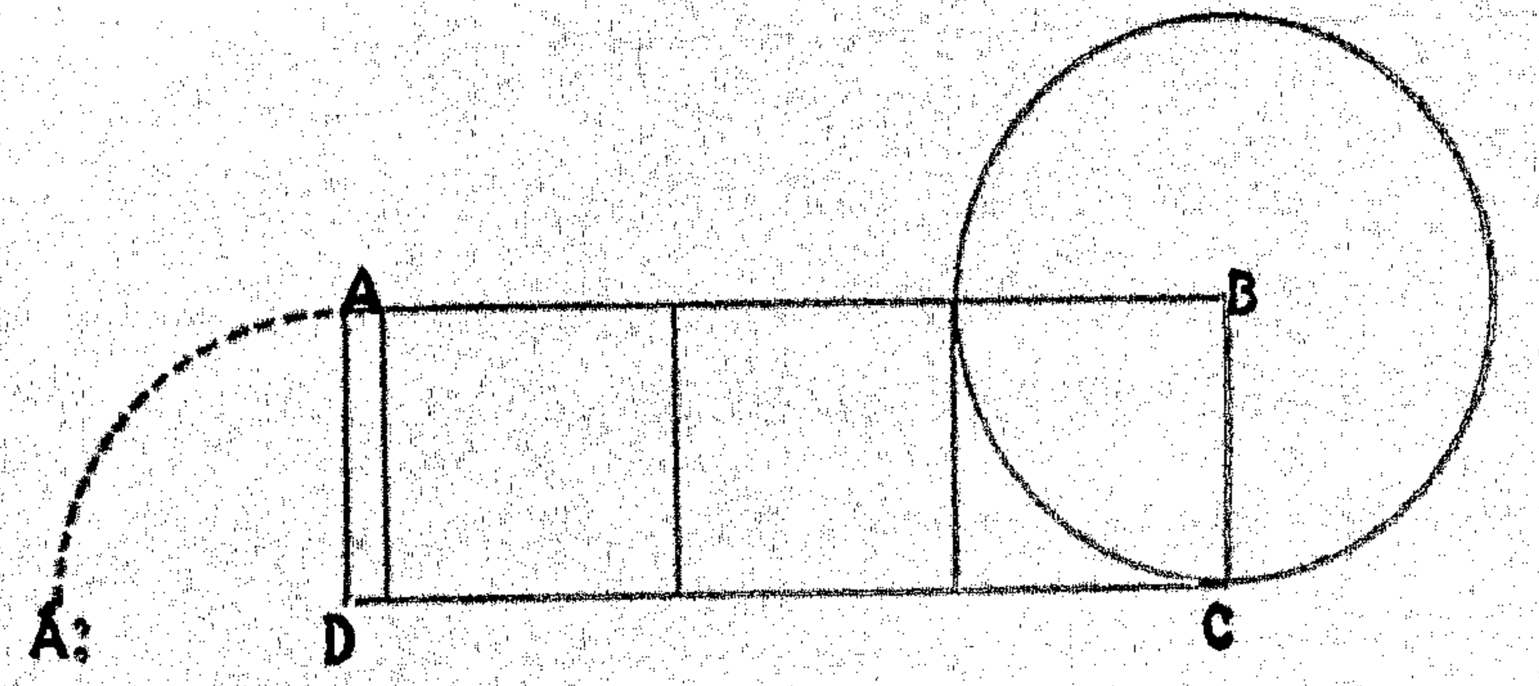


Fig. 246

La figura 246 representa al rectángulo ABCD igual a la suma de los tres cuadrados del radio más las fracción 0'14. El rectángulo tiene como lado menor el radio del círculo y como lado mayor la mitad de la circunferencia (C = D × 3'1416) $\frac{C}{2} = \frac{D}{2}$ 3'14 = r × 3'14.

Transportemos la longitud del radio (el lado AD) sobre la línea CD prolongando el lado mayor del rectángulo hasta A' (fig. 247).

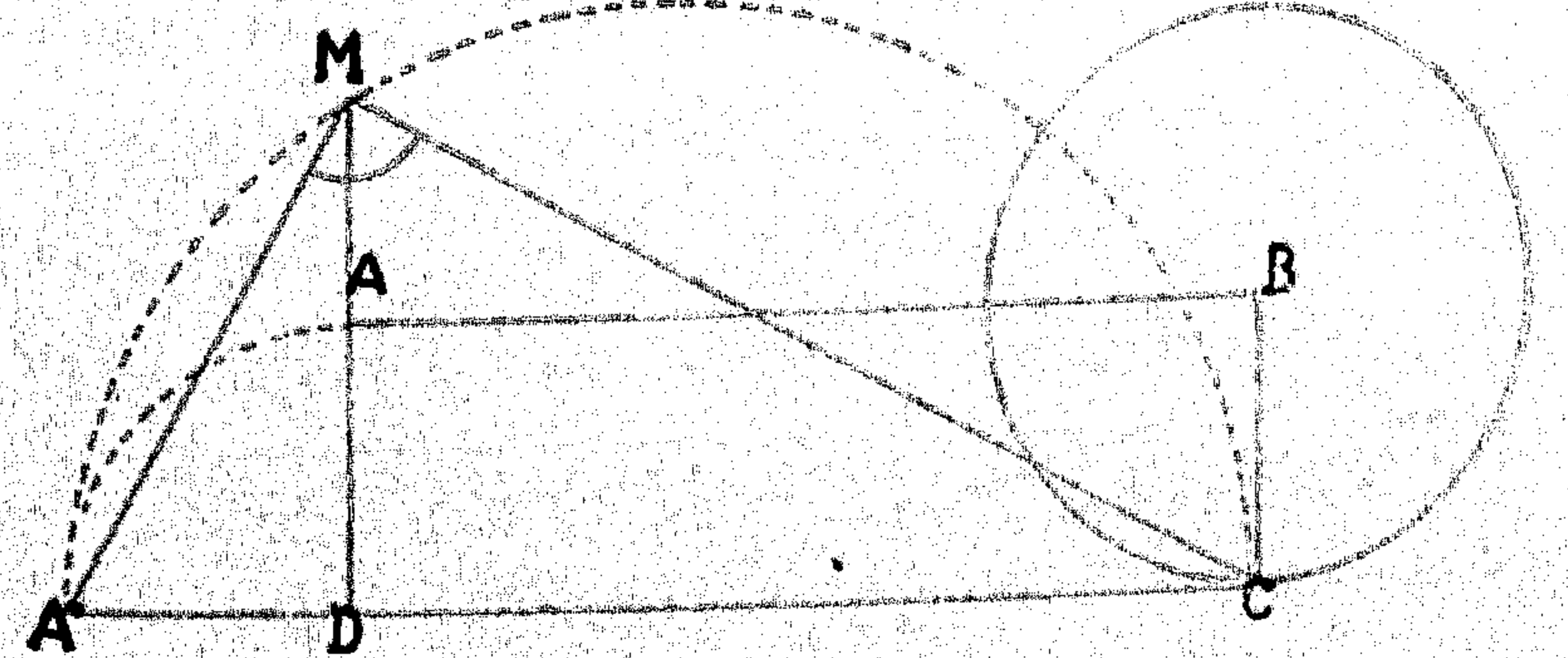


Fig. 247

La línea A'C está compuesta de dos partes: A'D igual al radio, más DC igual a media circunferencia.

Busquemos el punto central de esta línea para trazar sobre ella una semicircunferencia cuyo diámetro sea A'C.

Prolongando la línea AD (lado menor del rectángulo) ésta encuentra a la semicircunferencia en el punto M. Si M se une con los extremos A' y C del diámetro resultará en M un ángulo recto y el triángulo A'MC un triángulo rectángulo.

La línea MD es la altura de este triángulo, trazada desde el ángulo recto sobre la hipotenusa y es proporcional entre las dos porciones A'D y DC. Por lo que $DM^2 = A'D \times DC$.

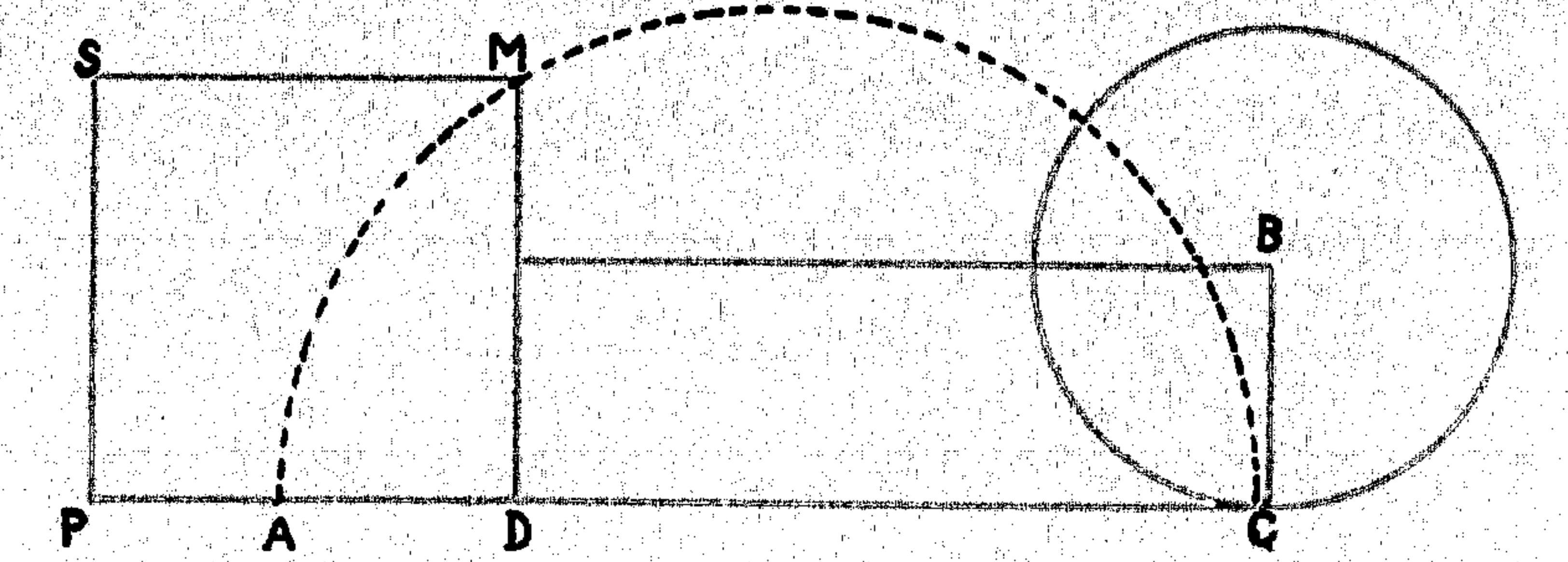


Fig. 248

Es decir, que el cuadrado SMDP (fig. 248) construído sobre MD es equivalente al rectángulo que representa el área del círculo, y por lo mismo, al círculo.

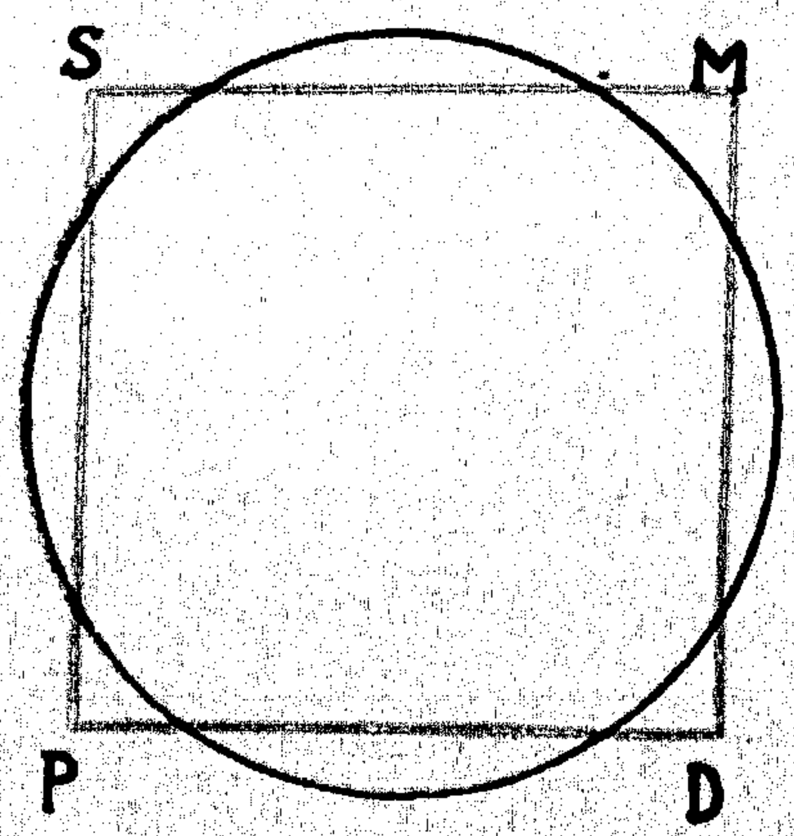


Fig. 249

Transportado el cuadrado sobre el círculo se ve que la circunferencia pasa por cuatro puntos equidistantes entre sí y de los vértices del cuadrado.

SMPD es equivalente a la superficie del círculo (fig. 249).

RAZONAMIENTOS SOBRE TRIANGULOS RECTANGULOS

Los discípulos de Pitágoras hallaron, varios siglos después de la muerte de aquél, la siguiente relación:

El cuadrado construído sobre la hipotenusa es equivalente a la suma de los cuadrados construídos sobre los catetos.

Este es el famoso teorema atribuído a Pitágoras y que de él toma el nombre.

El teorema de Pitágoras fué deducido del primer descubrimiento de éste sobre la proporcionalidad entre la altura y las partes en que divide a la hipotenusa en un triángulo rectángulo.

Esta relación se dedujo en seguida de los primeros ejercicios practicados con nuestro material.

Ahora volveremos sobre la misma cuestión para estudiarla en sí misma, no con vistas a los razonamientos que conducen a la demostración, sino para probar lo que es evidente por sí mismo.

TRIANGULO CON DOS CATETOS IGUALES

PRIMERA DEMOSTRACIÓN:

Para esta primera demostración tenemos un marco que corresponde a un espacio complejo, es decir:

(a) de un triángulo rectángulo isósceles tomado de nuestro primer material de cuadrados, la subdivisión del cuadrado (de 10 cm. de lado) en ocho partes.

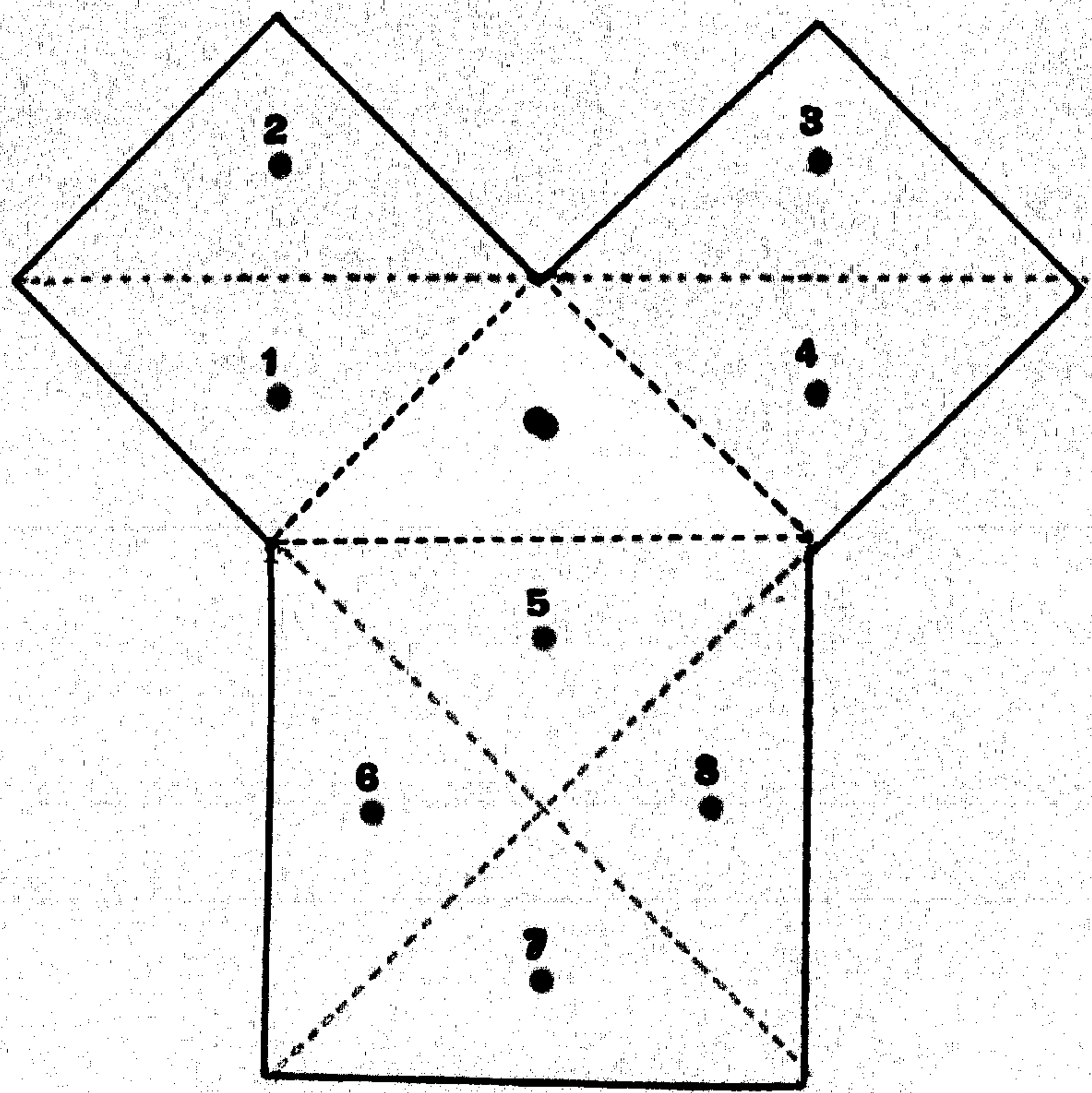


Fig. 250

(b) del espacio correspondiente a los cuadrados construídos sobre los tres lados (fig. 250).

En el centro se halla colocado un triángulo de hierro pintado de amarillo y con un botón para poder ser asido fácilmente.

El resto del material consiste en uno de nuestros cua-

drados fundamentales, dividido en ocho triángulos por medio de las dos diagonales y las dos medianas (fig. 251).

Numeraremos, para facilidad de expresión, los ocho triángulos.

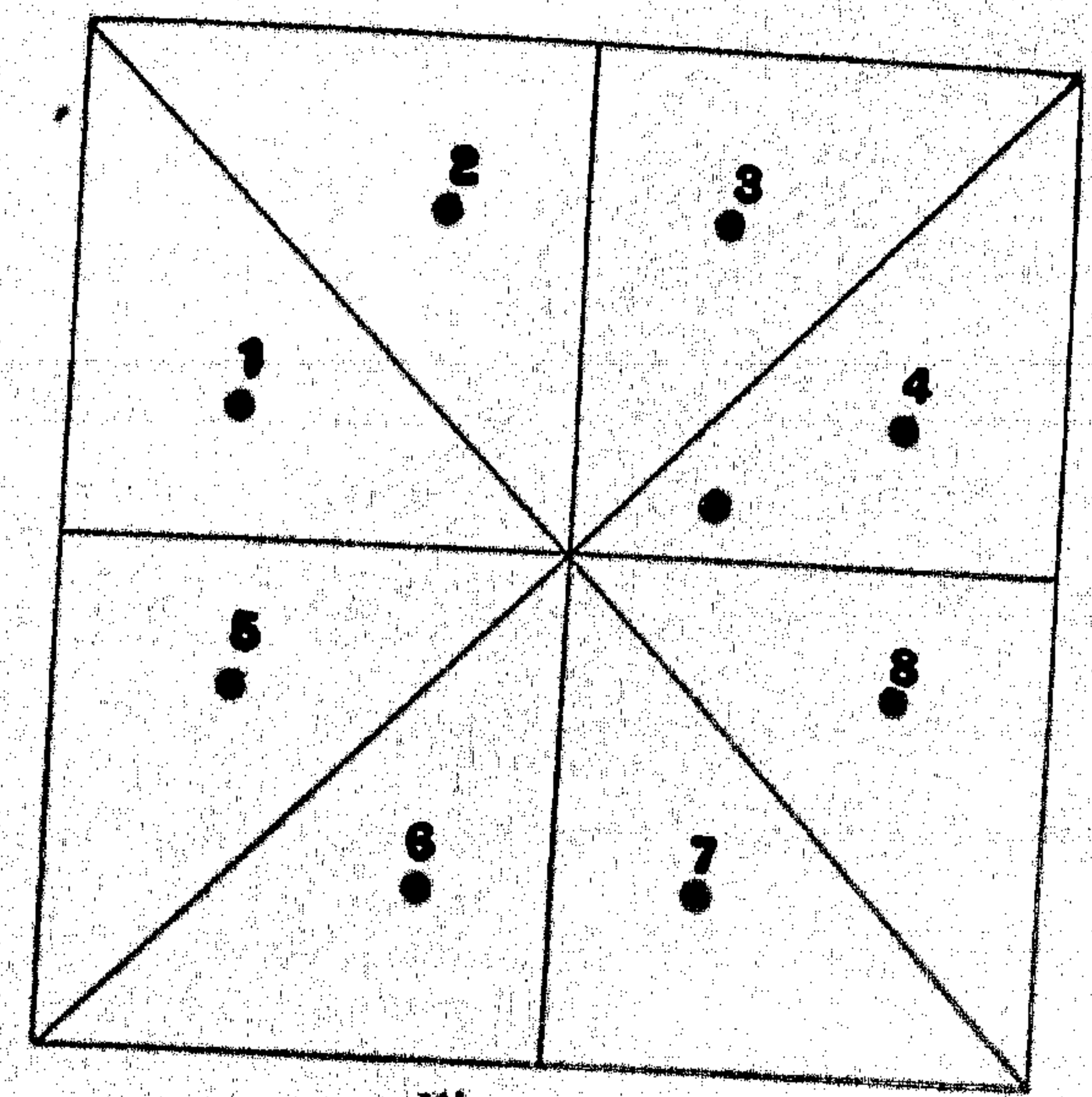


Fig. 251

Es fácil ver que los triángulos 1-2 y los 3-4 (fig. 250) forman entre sí un cuadrado cuyo lado es igual al cateto del triángulo puesto en el centro del marco.

Mientras los otros cuatro, dispuestos en forma que los vértices estén todos unidos al centro y la hipotenusa en el exterior, forman otro cuadrado cuyo lado corresponde a la hipotenusa del triángulo que está en el marco. Así los ocho triángulos se pueden colocar en el marco llenando todo el hueco y demostrando este primer caso del teorema de Pitágoras.

En esta demostración hemos partido de un hecho conocido—el teorema de Pitágoras—y de un marco vacío que lo representa y hemos *demostrado* el teorema llenando los huecos del marco.

En cambio, la primera vez queríamos hallar el cuadrado que fuese la mitad de otro y obtuvimos como consecuencia insospechada, una relación evidente; la que se encuentra expresada bajo la forma del teorema de Pitágoras.

SEGUNDA DEMOSTRACIÓN :

Los lados del triángulo se hallan en una relación especial, esto es : si la hipotenusa es igual a 5, uno de los catetos es igual a 4 y el otro a 3.

En este caso especial (fig. 252) calculando la longitud

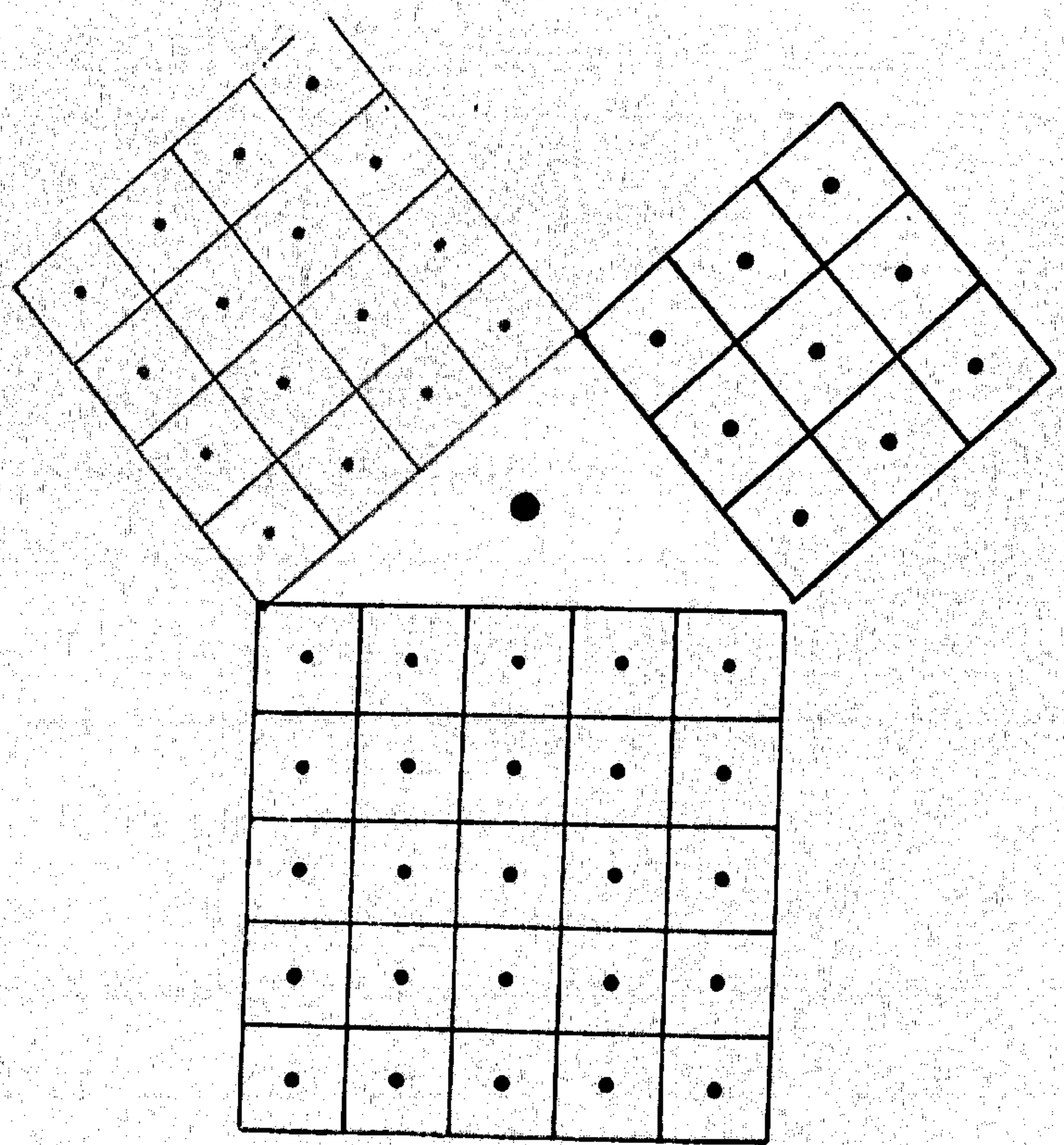


Fig. 252

de los lados por sí mismos, se tiene el número de cuadrados que cubren la superficie, es decir :

$$\left.\begin{array}{l} 3 \times 3 = 9 \text{ cuadrados} \\ 4 \times 4 = 16 \quad \text{''} \\ 5 \times 5 = 25 \quad \text{''} \end{array}\right\} \quad 25 = 16 + 9$$

Como los pequeños cuadrados correspondientes al cuadrado de cada lado son de diversos colores se pueden colocar formando dibujos varios, los pequeños cuadrados co-

rrespondientes a los dos catetos, en el cuadrado de la hipotenusa (fig. 253).

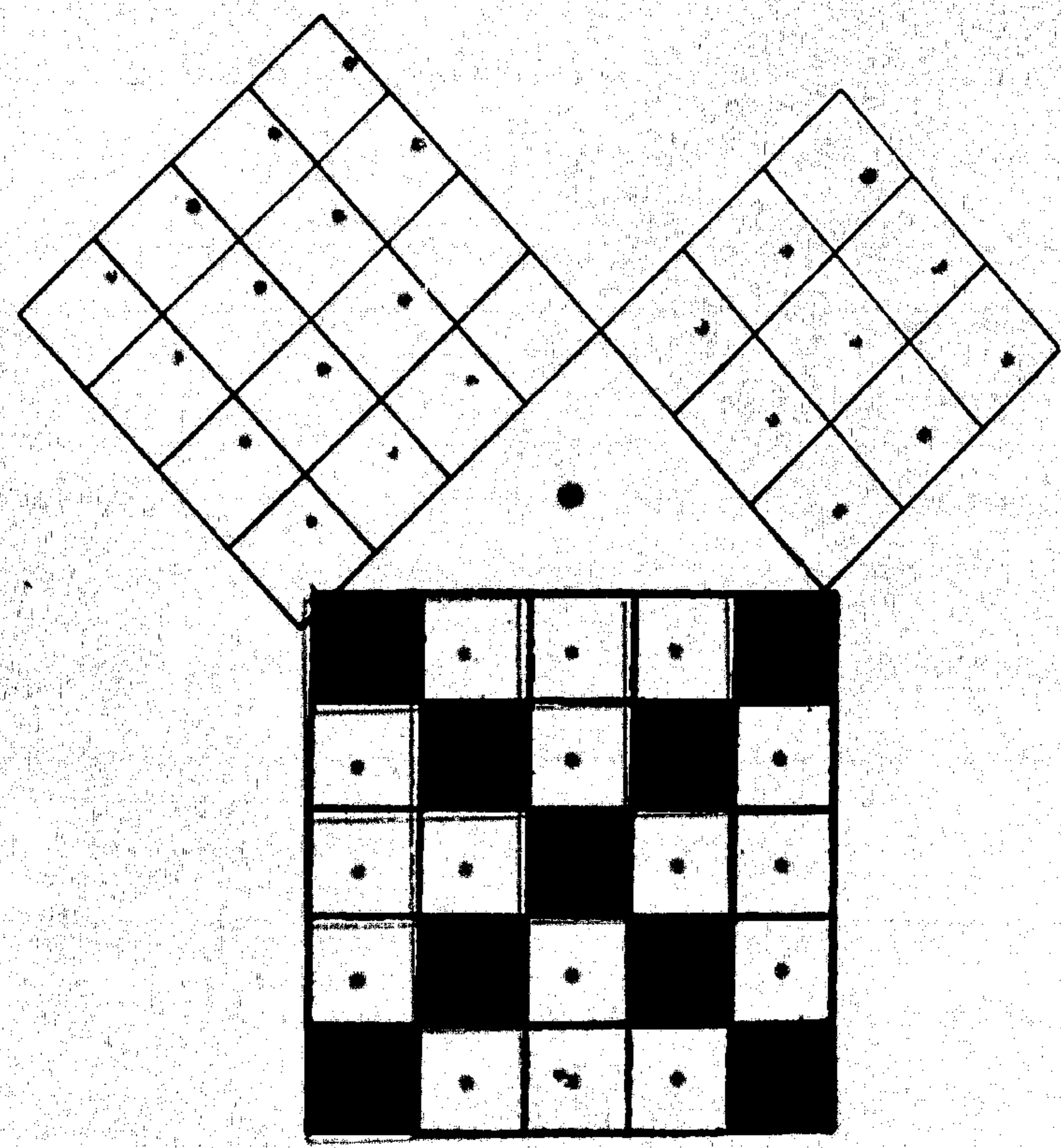


Fig. 253

Entonces los espacios correspondientes a los cuadrados de los dos catetos están rellenos con los pequeños cuadrados correspondientes a la hipotenusa y quedan del mismo color.

Así queda material y estéticamente demostrada la relación pitagoriana cambiando los pequeños cuadrados móviles dentro de los huecos del marco que se encuentra en el material correspondiente a esta especial demostración del teorema.

TERCERA DEMOSTRACIÓN. — CASO GENERAL :

En todo triángulo rectángulo el cuadrado construído sobre la hipotenusa es equivalente a la suma de los cuadrados construídos sobre los catetos.

El material que sirve para esta demostración ofrece el hueco de un triángulo rectángulo sobre cuyos lados está construído un cuadrado y está rodeado por el marco correspondiente que, por su forma, presenta un teorema ya enunciado que hay que demostrar.

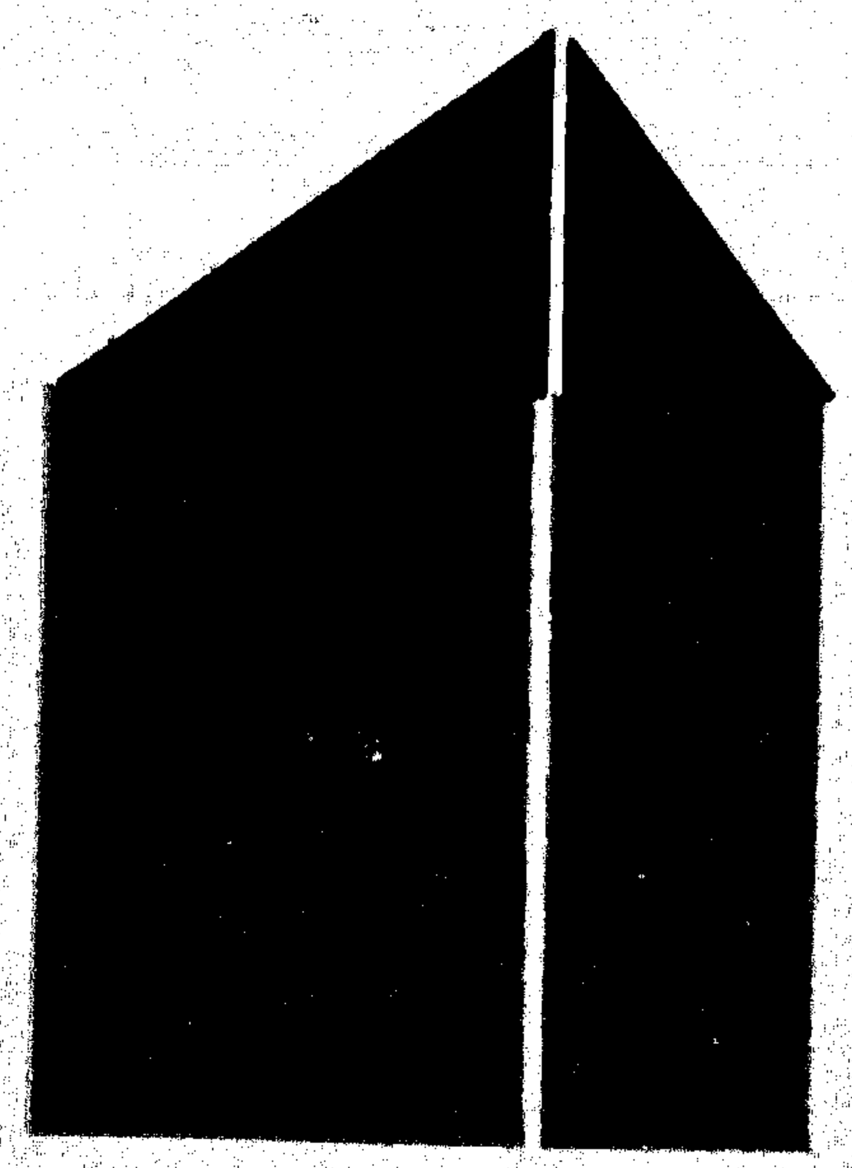


Fig. 254

Varios trozos llenan los huecos, aparte del triángulo, de dos cuadrados completos desplazables, en relación con los catetos (fig. 254). Pero en el espacio correspondiente al cuadrado construído sobre la hipotenusa, se encuentra éste dividido en dos rectángulos según la prolongación de la altura del triángulo que divide a la hipotenusa en partes proporcionales.

Precisa demostrar que la suma de dichos dos rectángulos (que son trozos desplazables) equivale a la suma de los cuadrados construídos sobre los catetos.

La demostración material se obtiene con el desplazamiento de las figuras.

Quitemos primero el cuadrado construído sobre el cateto menor (fig. 255) y queda entonces un hueco correspon-

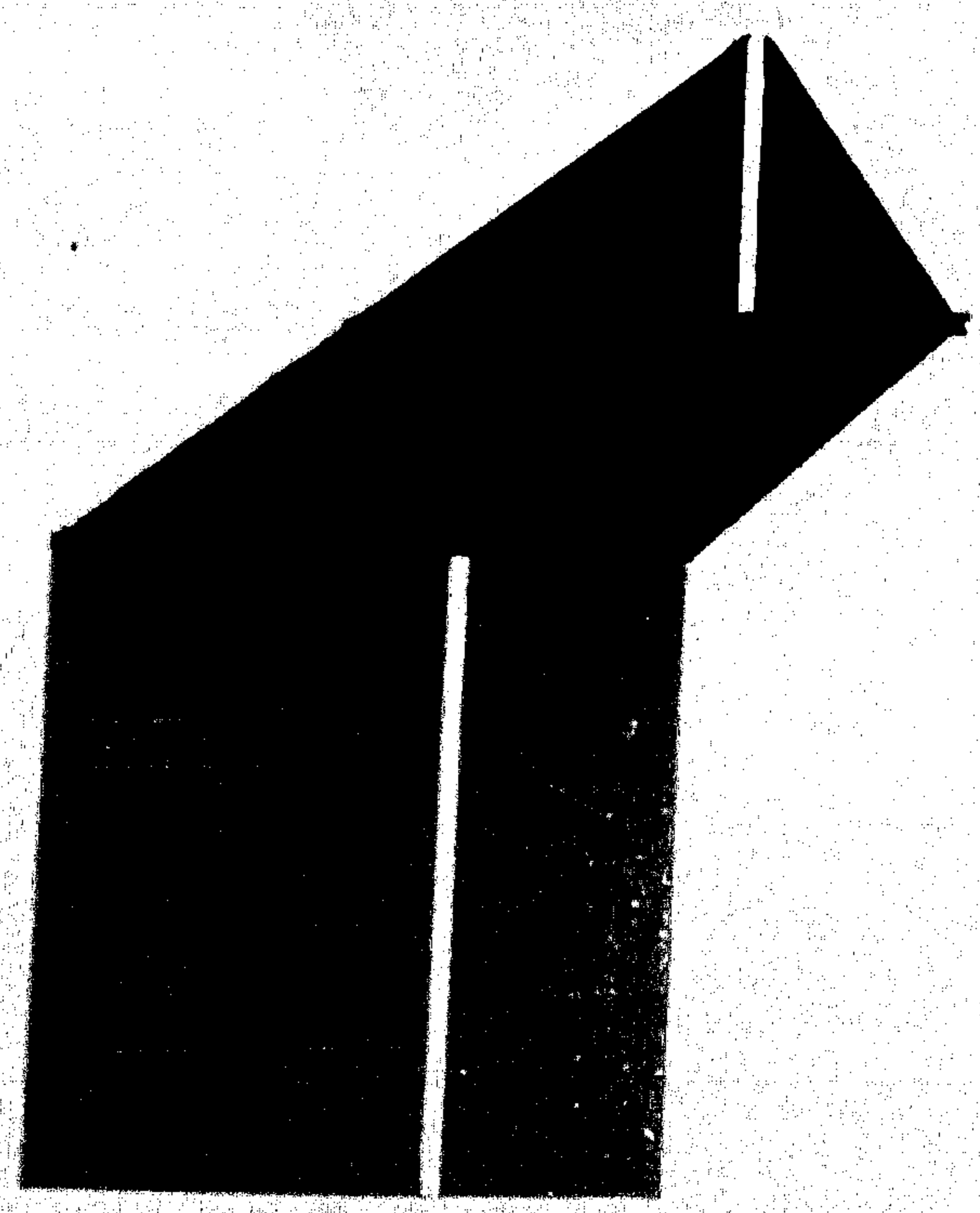


Fig. 255

diente al cuadrado que se separó. Hagamos ahora resbalar en este espacio el triángulo hasta que el vértice de su ángulo recto encaje en el espacio de un ángulo recto del hueco que dejó libre el cuadrado. El cateto menor corresponde al lado externo del cuadrado porque todos los lados del cuadrado desplazado son iguales al cateto menor.

Es evidente que el hueco que resta después de este desplazamiento hacia arriba del triángulo, es equivalente al cuadrado que se quitó.

Este hueco tiene la forma de un romboíde. Uno de sus lados es igual a la hipotenusa y el otro al lado del cuadrado, es decir, al cateto menor del triángulo.

El material presenta un rombo construído precisamente para llenar este hueco y sustituye en la figura al cuadrado al cual es equivalente.

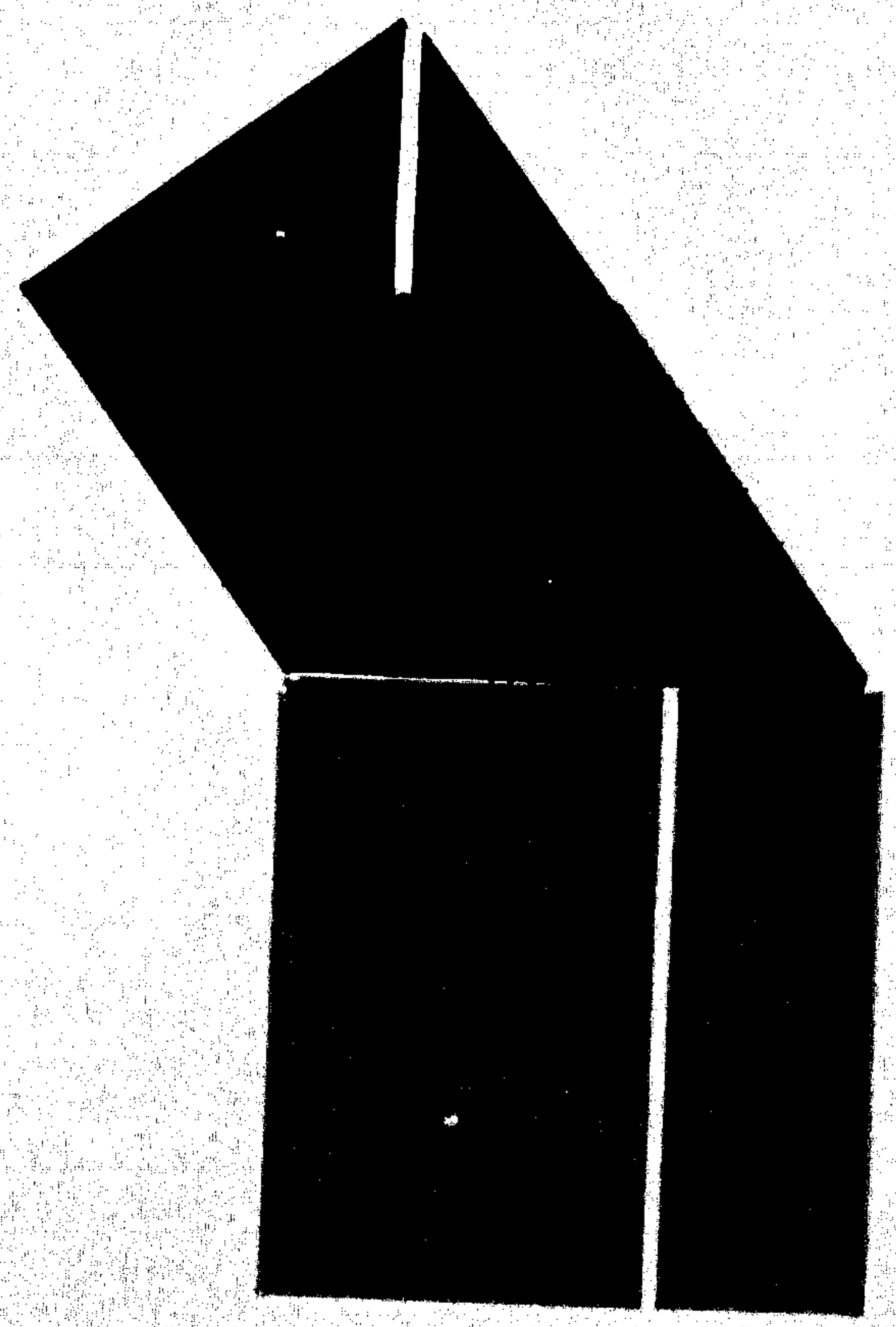


Fig. 256

Quitemos ahora el rombo y coloquemos todas las figuras en su sitio, reconstruyendo el cuadro primitivo (fig. 254).

Después de esto repitamos análogos desplazamientos en lo que respecta al cateto mayor (fig. 256).

También, después de quitar el cuadrado correspondiente y desplazar el triángulo hacia arriba, queda un rom-

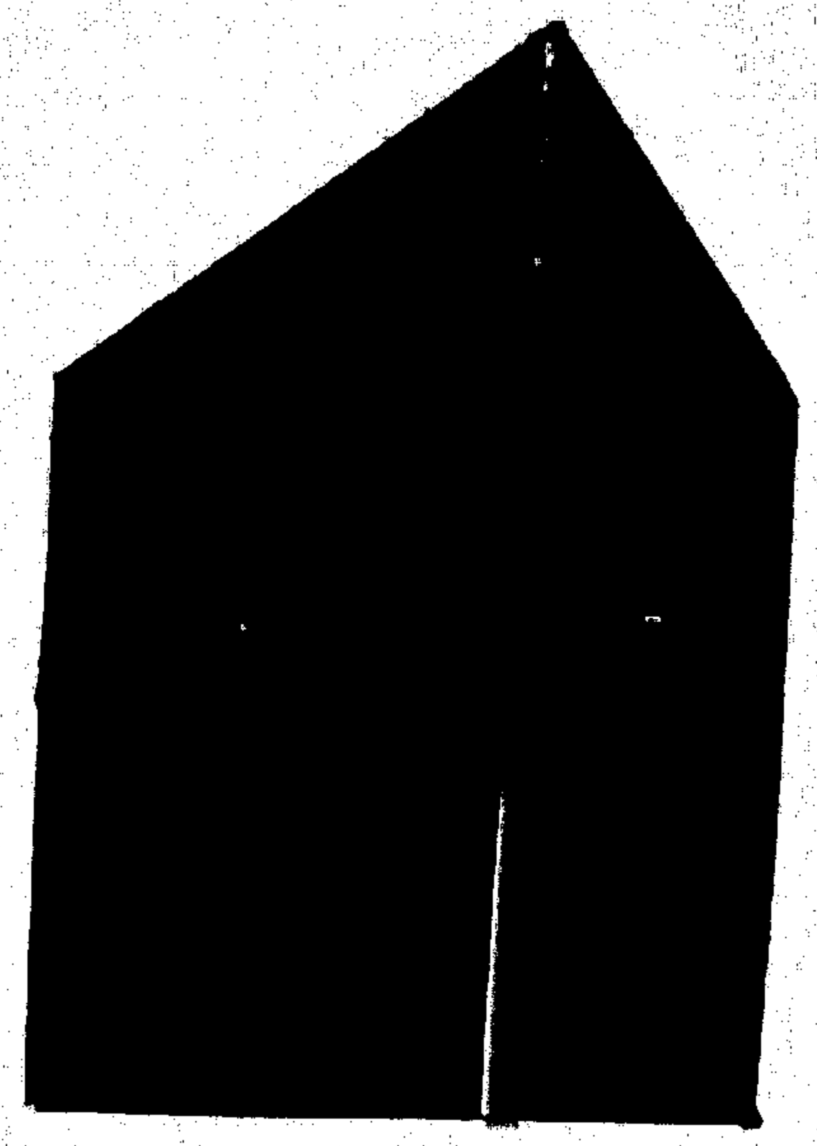


Fig. 257

boíde equivalente al cuadrado que falta, que tiene un lado igual a la hipotenusa y el otro igual al lado del cuadrado que se quitó, es decir, al cateto mayor del triángulo rectángulo.

Se ha construído el rombo que es equivalente al cuadrado que se quitó y por ello llena por completo el espacio que quedaba vacío.

Ahora, y después de quitar este rombo, volvamos las piezas a su primitiva posición como en la figura 254.

Hagamos finalmente un nuevo desplazamiento.

Quitemos los dos rectángulos que llenan conjuntamente un hueco igual al cuadrado construído sobre la hipotenusa.

Hagamos resbalar el triángulo hasta que la hipotenusa ocupe el lugar que ocupaba el lado inferior del cuadrado.

Queda vacío, en la parte superior del triángulo un espacio que equivale sin duda al cuadrado (fig. 257).

Dicho espacio tiene la forma de un extraño polígono de seis lados, pero prolongando la línea que pasa por el vértice del triángulo se ve inmediatamente que el espacio antedicho queda dividido en dos rombos, uno mayor y otro menor. En efecto, colocando dichos rombos se ve que llenan el hueco por completo.

Como cada uno de ellos es equivalente al respectivo cuadrado construído sobre el cateto, resulta que el hueco que dejan los dos rectángulos que contituyen el cuadrado construído sobre la hipotenusa, es equivalente a la suma de los cuadrados construídos sobre los catetos.

El teorema de Pitágoras queda materialmente demostrado.

DEDUCCIONES

Observemos el rombo en las dos figuras correspondientes, cuadrado y rectángulo a los cuales equivale cuando tiene uno de los lados (el menor) común con el cuadrado y la misma altura de éste y el otro lado (el mayor) común con el rectángulo y su misma altura.

Ahora sabemos que un rombo que tiene la misma base y la misma altura de un rectángulo es equivalente a él (y lo mismo sucede con el cuadrado).

El cuadrado y el rectángulo que son equivalentes al mismo rombo son equivalentes entre sí (fig. 258).

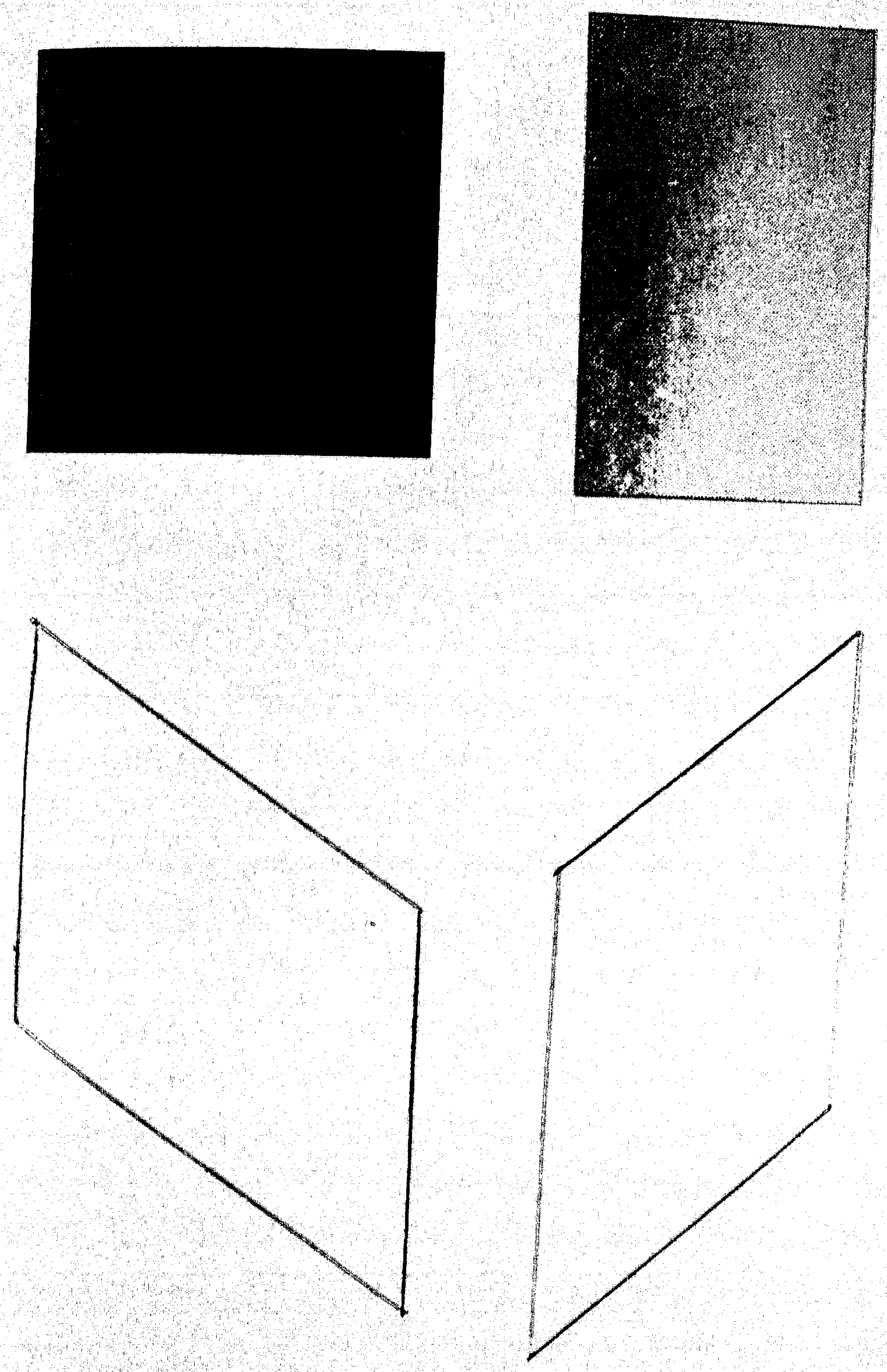


Fig. 258

En el material adecuado para esta demostración existen dos listas o tiras ahuecadas en el marco; una de ellas es alta como el cuadrado, la otra como el lado menor del rectángulo.

Colocadas las dos figuras en el interior, se ve como el rombo haciéndole girar en los dos sentidos está dentro de una y otra tira y el lado que se apoya sobre un borde es

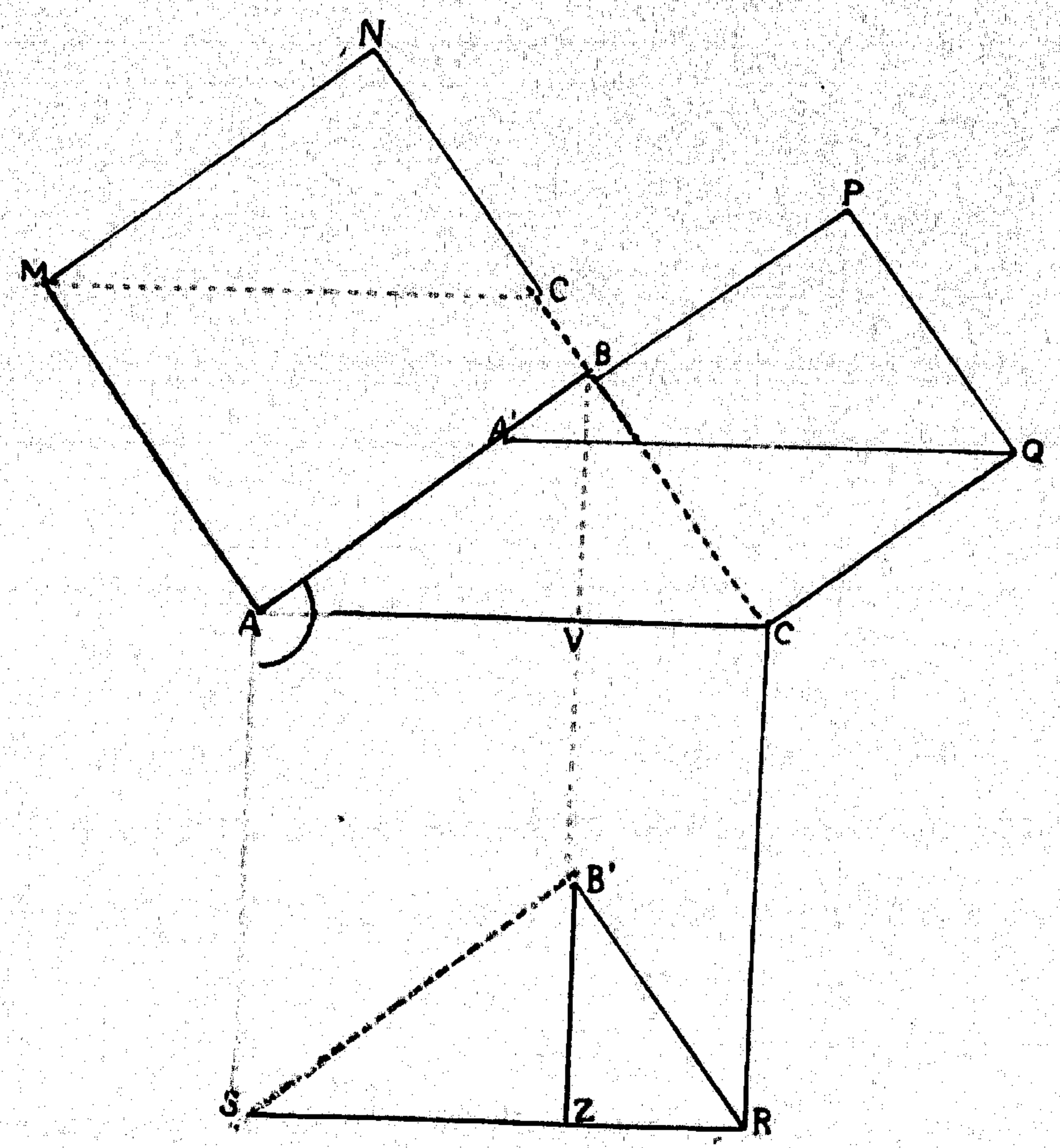


Fig. 259

igual al lado del cuadrado o del rectángulo respectivamente.

Vamos a repetir la demostración con razonamientos.

Sea el triángulo ABC (fig. 259) cuyo ángulo en B es recto.

Sobre sus tres lados se han construído los cuadrados respectivos.

Consideremos primeramente el cuadrado construído sobre el cateto mayor AB. Sobre NB se toma una porción NC' igual al cateto menor BC y se une el punto C' con M. Obtenemos así un triángulo MNC' que es igual al ABC por tener los catetos iguales. En efecto MN lado del cuadrado construído sobre AB es igual AB y el otro cateto NC' es igual a BC por construcción.

Consideremos ahora el cuadrilátero MC'CA, éste tiene los lados opuestos MC' y AC iguales y son también paralelos entre sí.

En efecto NB y BC son partes de la misma línea—porque todos los ángulos en B son rectos—y C'C y MA están en la dirección de los dos lados opuestos de un cuadrado y por lo mismo paralelos.

La línea NC, pues, es una línea contínua porque NB y BC están en la misma dirección, siendo rectos todos los ángulos en torno a B.

Las líneas MC' y AC forman ángulos iguales con NC porque NC'M y BCA son ángulos correspondientes de dos triángulos iguales. Son pues paralelas.

Los ángulos del cuadrilátero en M y en C son también iguales entre sí porque el ángulo en C es uno de los ángulos agudos del triángulo rectángulo y el opuesto C'MA es igual a NC'M como alternos internos respecto a las paralelas (o también como complementarios del otro ángulo agudo del triángulo). Por lo mismo, también, los otros dos ángulos opuestos son iguales.

Tendremos pues, que el cuadrilátero C'CAM tiene los lados opuestos iguales y paralelos y los ángulos iguales y, por lo mismo, es un rombo.

Ahora bien; el rombo MC'CA y el cuadrado MNBA tienen una base común MA y la misma altura porque están comprendidos entre las paralelas NC y MA, luego son equivalentes.

El mismo razonamiento se puede repetir para el otro lado respecto al cuadrado BPQC, construyendo el triángulo PA'Q después de tomar sobre PA una parte PA' igual a BA. El rombo A'ACQ y el cuadrado BPLC que tiene una base común CA y la misma altura por estar comprendidos entre dos paralelas, son equivalentes.

Tracemos ahora la altura del triángulo rectángulo desde el vértice del ángulo recto sobre la hipotenusa y prolonguémosla por todo el cuadrado ACRS hasta llegar a su base. El trozo VZ de esta línea divide al cuadrado ACRS en dos rectángulos VCZR y VZAS. Se toma la magnitud ZB' y se une el punto B' con S y con R obteniendo así el triángulo SB'R que es igual al ABC. En efecto, tiene la misma altura la cual divide la base de los dos triángulos en partes respectivamente iguales así que AV = SZ y VC = ZR.

Los cuadriláteros ASB'B y BB'RC son rombos porque tienen los lados iguales opuestos y paralelos.

ASBB' tiene con el rectángulo AVZS una base común AS y tienen la misma altura porque están comprendidos entre dos paralelas, luego son equivalentes.

Si tenemos pues

ABB'S equivalente a AVZS)
BCRB' » » VCZR) sus sumas también serán equivalentes, es decir, ABB'S + BCRB' = AVZS + VCZR.

Queda por demostrar que el rombo ABB'S equivalente al rectángulo mayor AVZS es igual al rombo MC' CA.

Ambos tienen los lados iguales. En efecto MA = AB como lados del mismo cuadrado y AC = AS por la misma razón.

El ángulo obtuso MAC es igual al BAS pues cada uno de ellos se compone de un recto más BAC.

Lo mismo se puede decir del otro rombo A'QCA y el rectángulo VZCR.

Se tiene por ambas partes un cuadrado y un rectángulo que son equivalentes al mismo rombo, luego son equivalentes entre sí. Y la suma de los otros dos rectángulos o sea el cuadrado construído sobre la hipotenusa.

Que es lo que queríase demostrar.

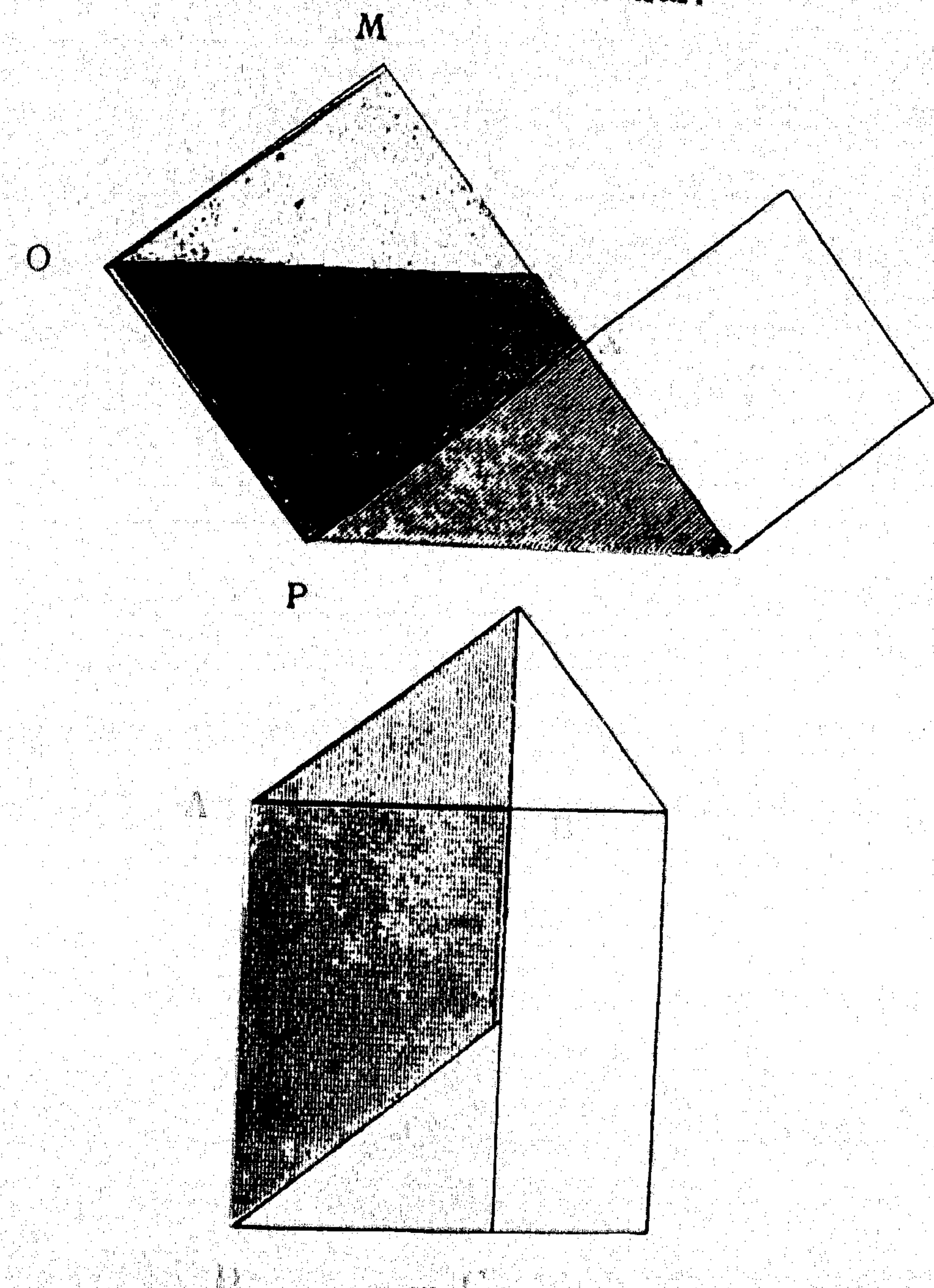


Fig. 260

El mismo romboide se ve equivalente al rectángulo y al cuadrado ABCD MNOP por tener una base y altura iguales.

Así se ha probado de varias maneras y en todos los casos posibles el teorema de Pitágoras que habíamos ya demostrado en el caso del triángulo rectángulo isósceles, efectuando desplazamientos con las figuras del material.

Pero, además de la equivalencia entre los cuadrados, hemos hallado la de los triángulos equiláteros, es decir: Un triángulo equilátero construído sobre la hipotenusa es equivalente a la suma de los triángulos equiláteros construídos sobre los catetos (fig. 261).

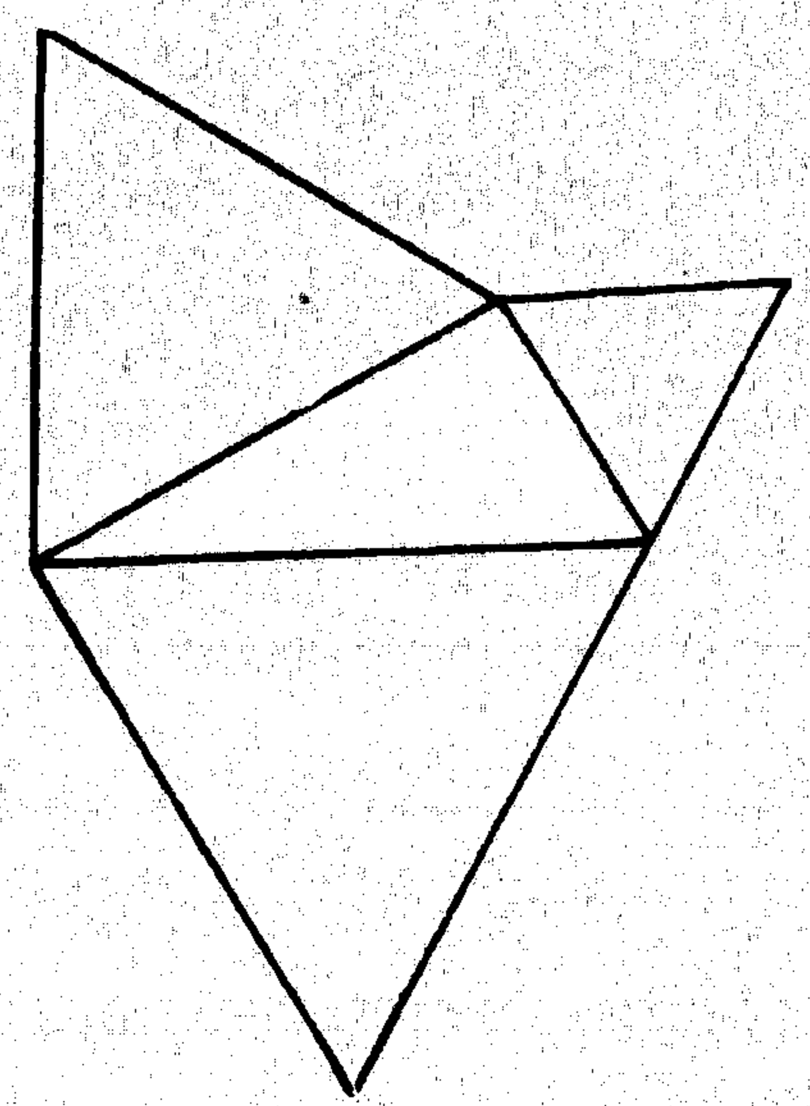


Fig. 261

Con mayor razón se puede repetir esto para los triángulos rectángulos isósceles.

Si sobre los lados de un triángulo rectángulo cualquiera ABC (fig. 262) se construyen triángulos rectángulos isósceles que tengan su hipotenusa superpuesta a los tres lados de aquél, el triángulo correspondiente a la hipotenusa AC es igual a la suma de los triángulos construídos sobre BC y AB.

Y esto sucede, porque dichos triángulos son la cuarta

parte de los cuadrados construídos sobre los lados y si existe una correspondencia cuantitativa entre los lados, subsiste la misma correspondencia entre las partes.

Lo mismo puede decirse refiriéndose a las mitades res-

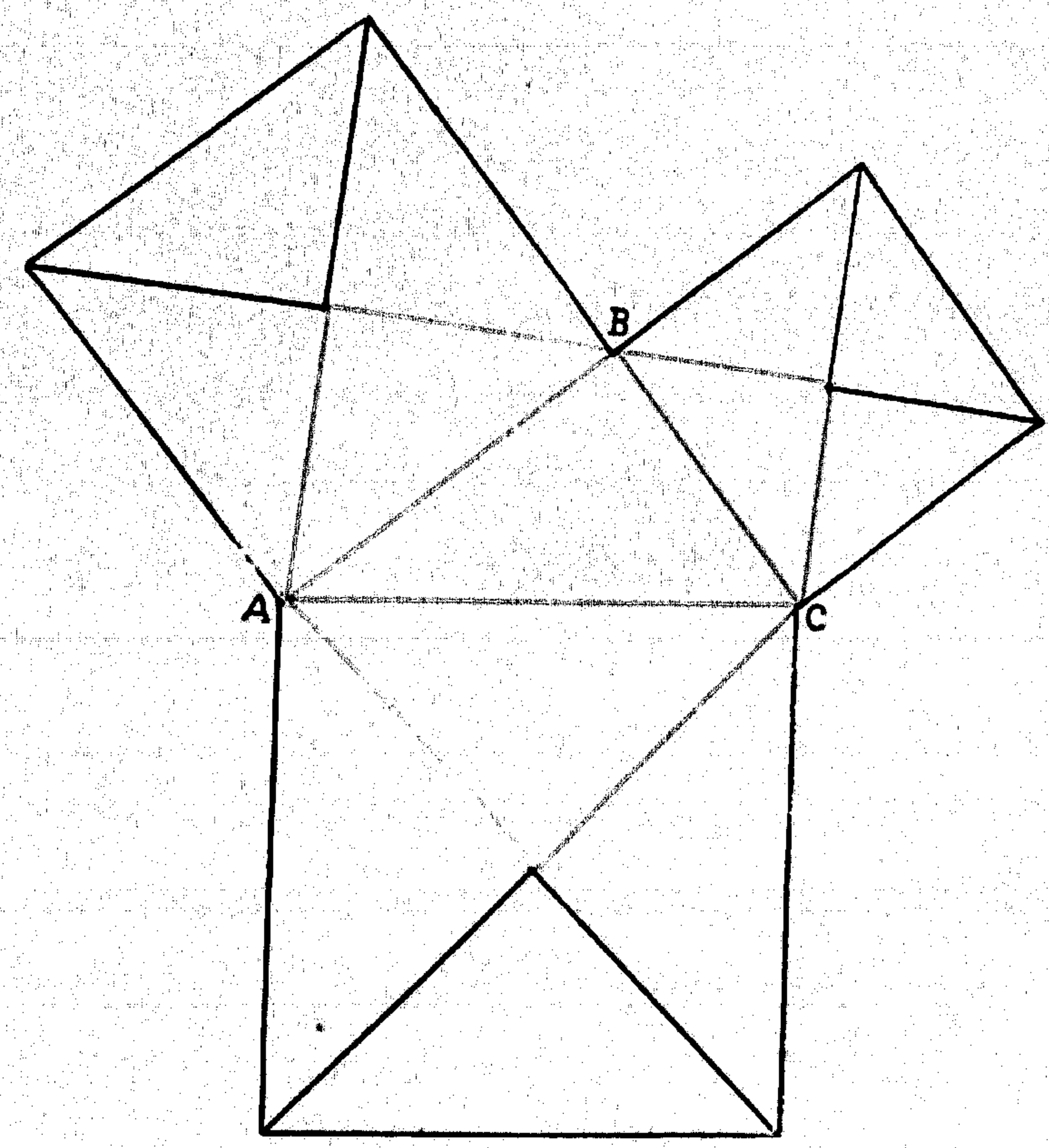


Fig. 262

pectivas de los cuadrados, esto es: si sobre los lados de un triángulo rectángulo ABC se construyen triángulos rectángulos isósceles que tengan uno de los lados iguales adyacente a los lados, el construído sobre la hipotenusa AB (fig. 263) es igual a la suma de los construídos sobre los catetos.

Si se repite el razonamiento no sobre partes de la figura sino sobre múltiplos, entonces, partiendo del hecho ya demostrado que el triángulo equilátero construído sobre la hipotenusa es igual a la suma de los triángulos equiláteros construídos sobre los catetos, podemos decir, que por lo que al exágono (igual a seis veces el triángulo) se refiere queda demostrada la misma correspondencia (fig. 264).

Y también para un polígono de cualquier número de lados se puede repetir la misma correspondencia, porque es evidente que ella existe para los círculos.

En efecto, el área del círculo está en relación constante con el cuadrado del radio. Y si los círculos se cons-

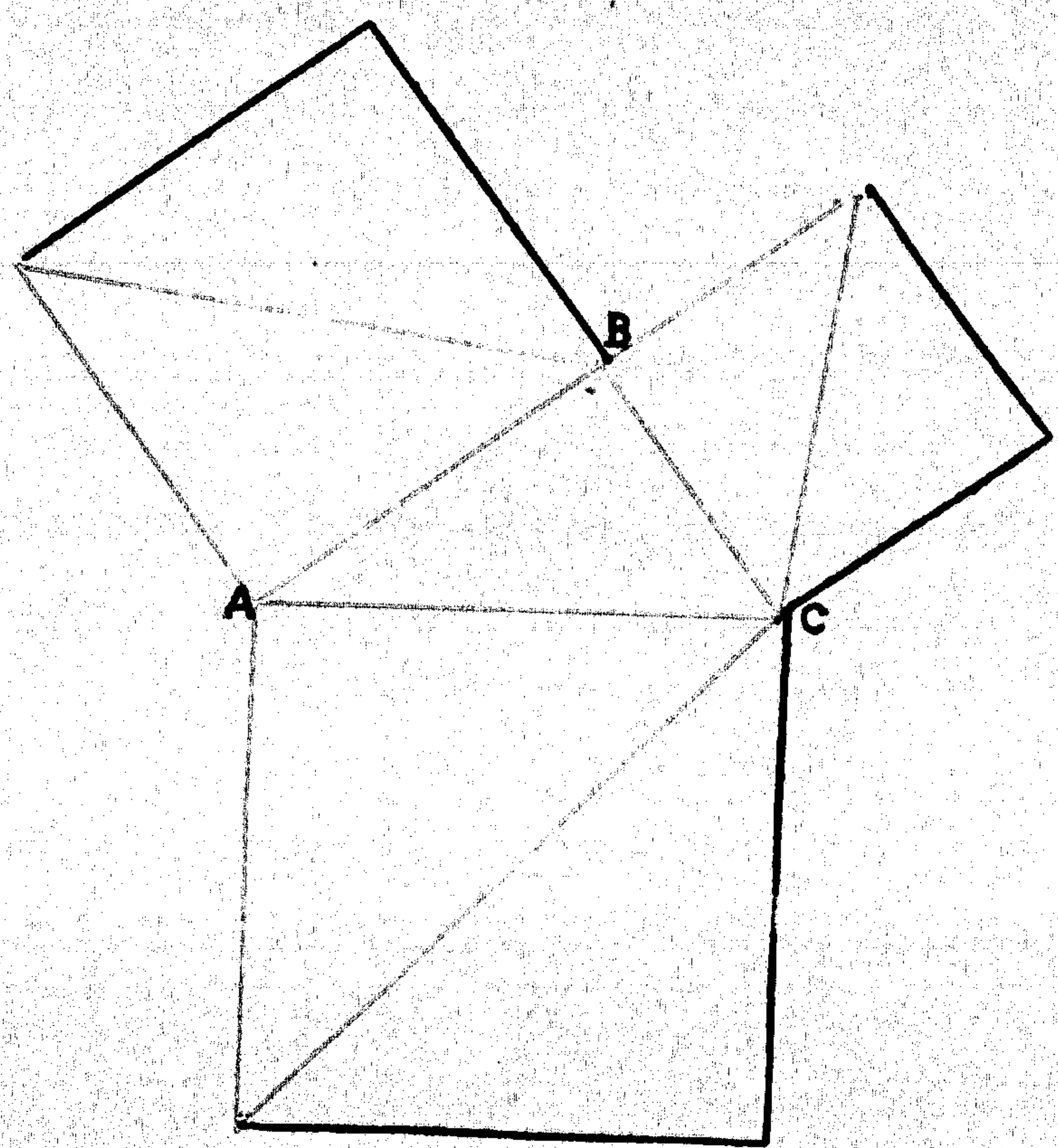


Fig. 263

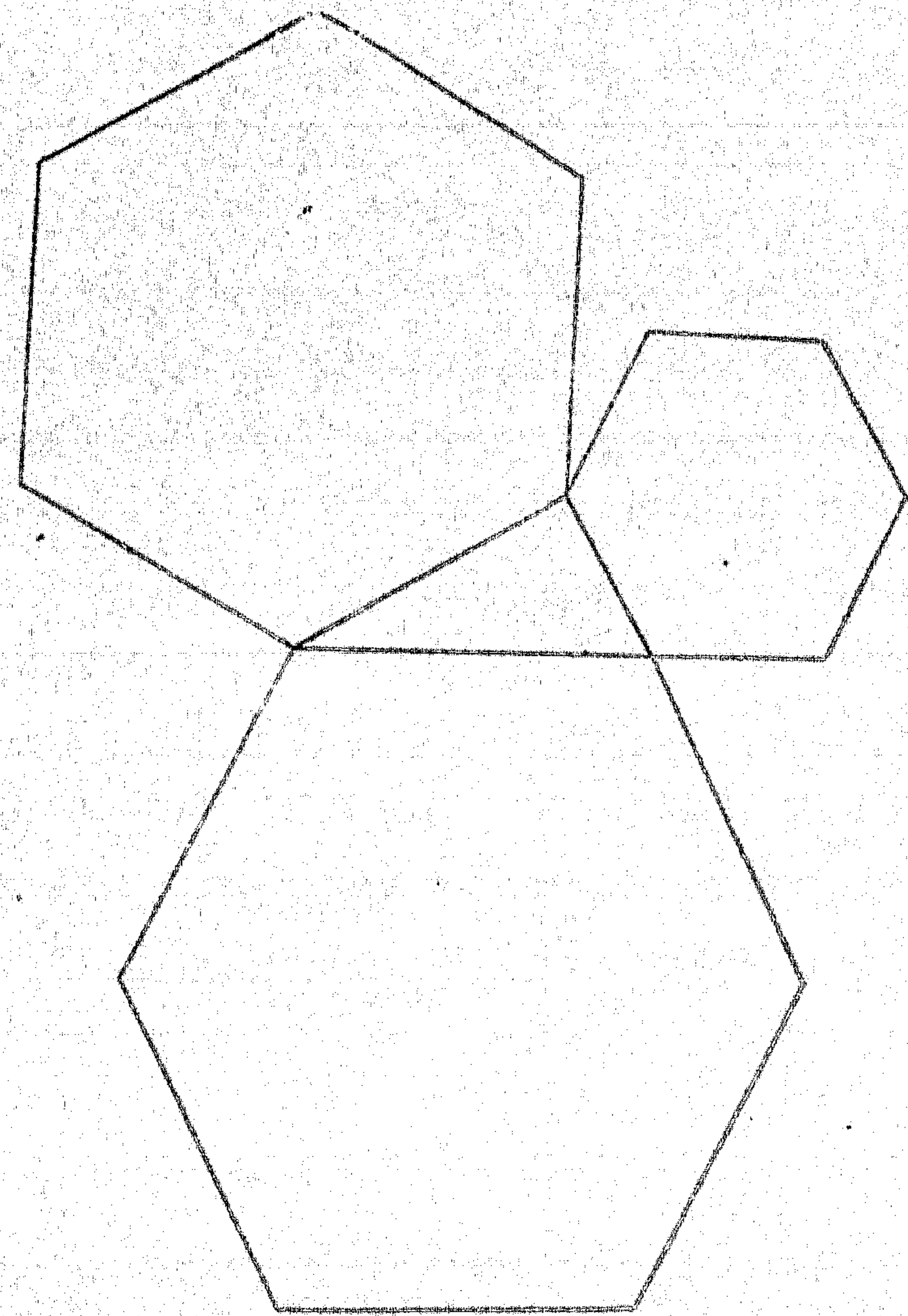


Fig. 264

truyen de modo que cada lado del triángulo rectángulo sea su recpectivo diámetro, aparece evidente su relación pitagórica (fig. 265).

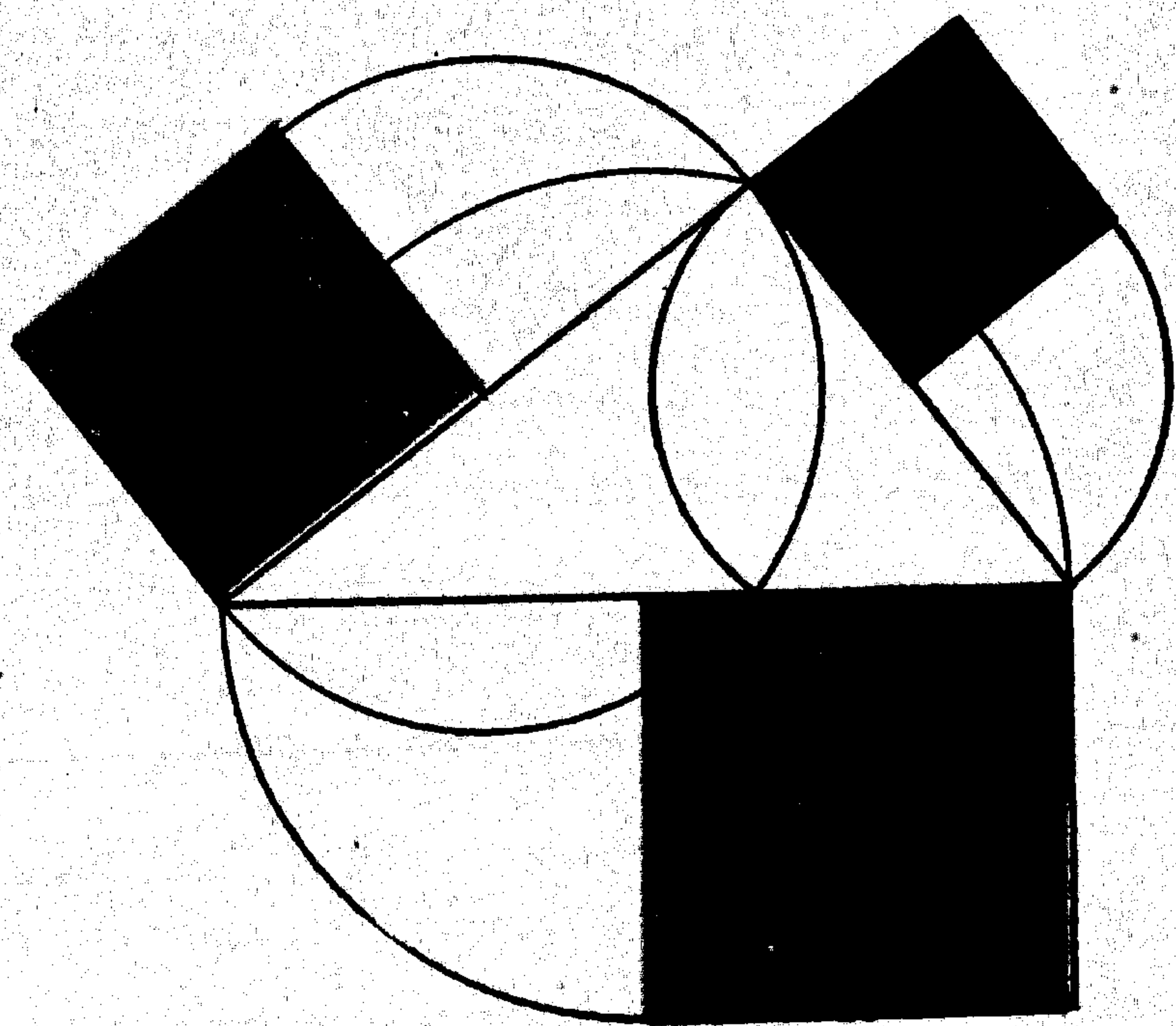
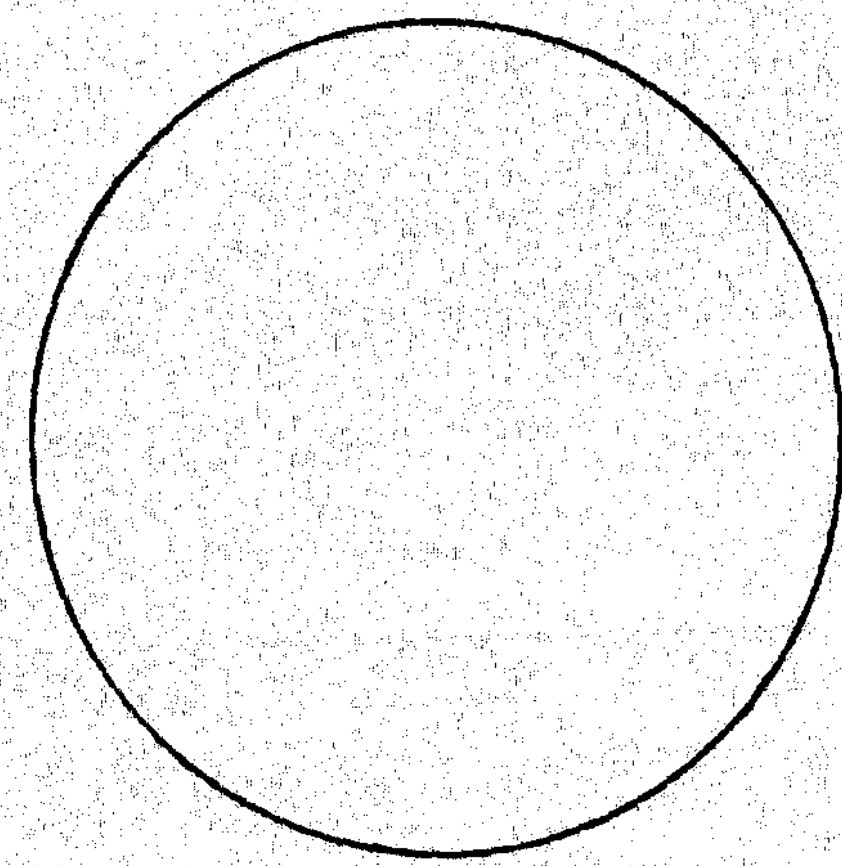
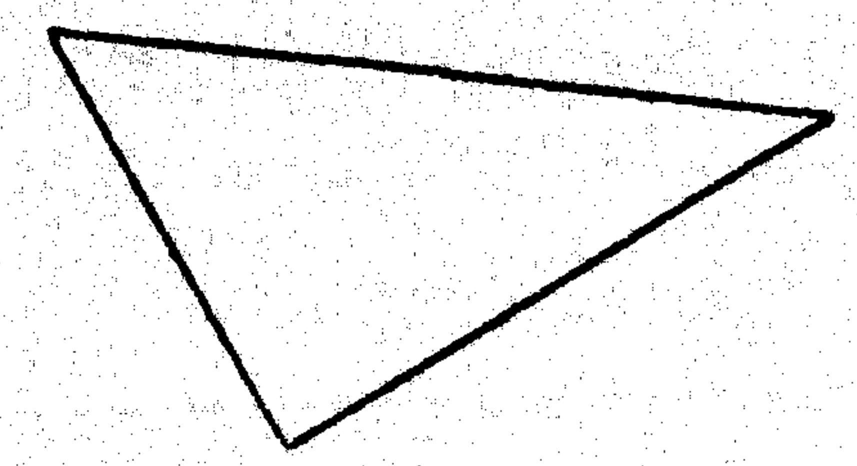


Fig. 265 (1

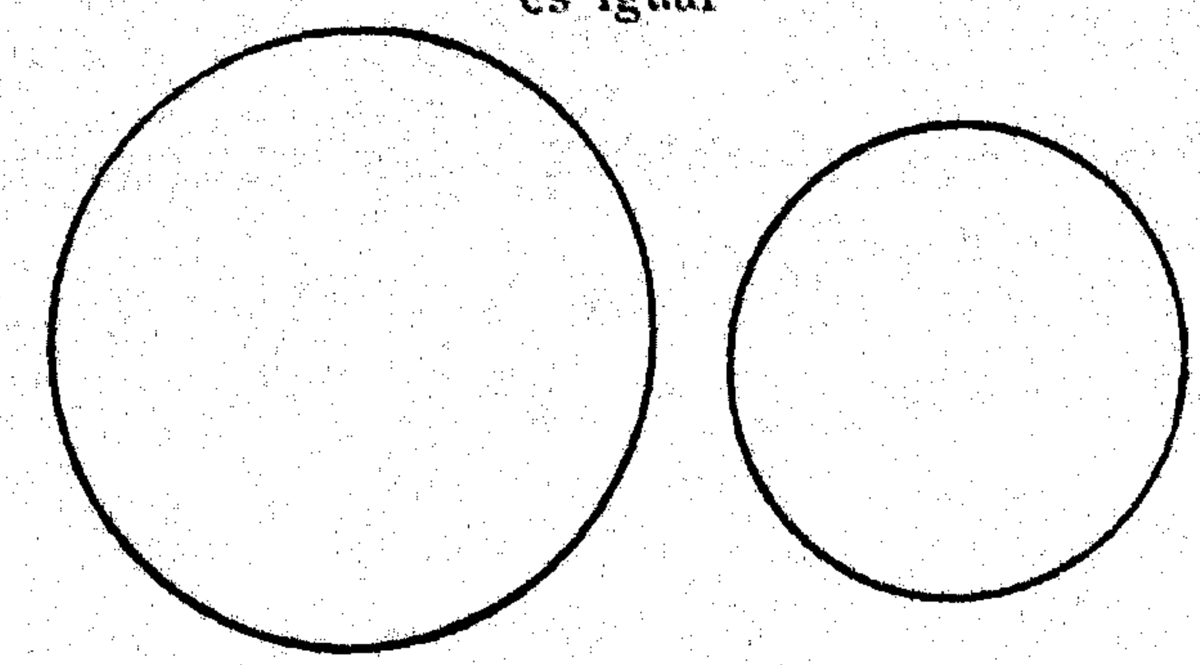
$$\left.\begin{array}{l} 100 \times 100 = 10.000 \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left.\begin{array}{l} 80 \times 80 = 6.400 \\ 60 \times 60 = 3.600 \end{array}\right\} 10.000 \end{array}\right\} 10.000 = 10.000$$



El círculo construído sobre la hipotenusa



de un triángulo rectángulo
es igual



al círculo construído sobre el cateto menor más el círculo construído sobre el cateto mayor

es decir

a la suma de los círculos construídos sobre los catetos

Fig. 265 (2

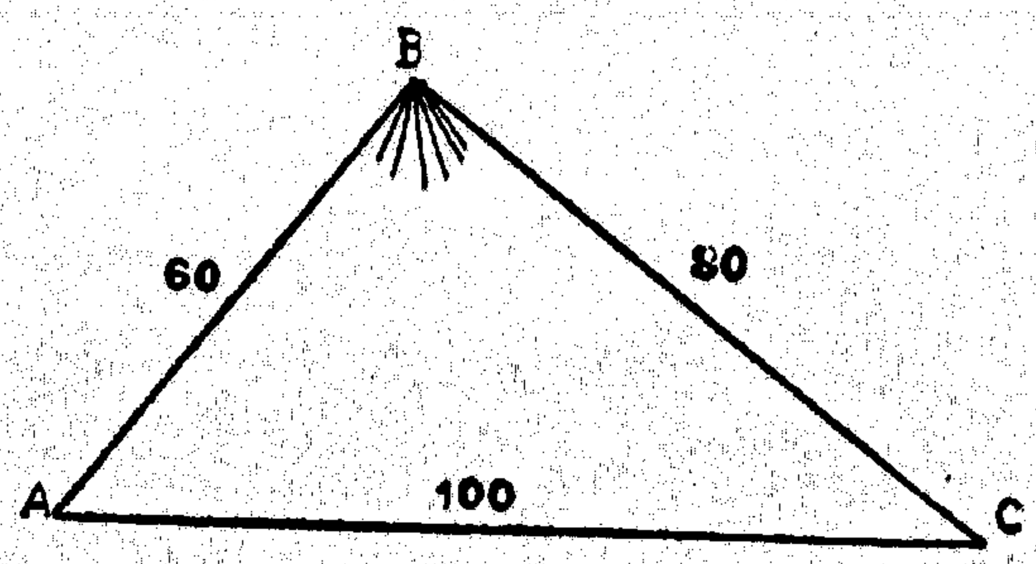


Fig. 266

Pueba numérica.

Sea en el triángulo rectángulo construído en B (fig. 266).

la hipotenusa de 10 cm. = 100 mm.
un cateto de 8 cm. = 80 mm.
el otro cateto de 6 cm. = 60 mm.

$$\text{Los radios son } \begin{matrix} 50 \text{ mm.} \\ 40 \text{ mm.} \\ 30 \text{ mm.} \end{matrix} \text{ las áreas } \left\{ \begin{matrix} (50 \times 50) \times 3'14 = r^2 \times \\ (40 \times 40) \times 3'14 = r^2 \times \\ (30 \times 30) \times 3'14 = r^2 \times \end{matrix} \right.$$

$$(50 \times 50) \times 3'14 = 2500 \times 3'14 = 7850 \quad \text{hipotenusa}$$

$$(40 \times 40) \times 3'14 = 1600 \times 3'14 = 5024$$
$$(30 \times 30) \times 3'14 = 900 \times 3'14 = 2826$$
$$5024 + 2826 = 7850.$$

INDICE

I GENERALIDADES

Págs.

II INTRODUCCION AL PERIODO ELEMENTAL

III EL CUADRADO

IV EL TRIANGULO

V EL CIRCULO

Págs.

VI APLICACIONES DE LA EQUIVALENCIA

VII RAZONAMIENTOS

na úl-

NOV 1951
20 OUT 1951
5 NOV 1951
20 NOV 1951
19 ABR 1952
10 JAN 1956
20 JAN 1971
19 MAR 1971
28 JUL 1971
15 MAIO 1974
1 r SET 1974
10 SET 1974
24
13 NOV. 1974
6 ABR 1976

Impresso para registro de datas, mod. - D. N. E. - 270 Imp. Nac. — 100.406

Montessori, Maria
AUTOR
Psico geometria
TÍTULO

Êste livro deve ser devolvido na última data carimbada

15 MAIO 1974
10 SET. 1974
24 SET. 1974
13 NOV. 1974
6 ABR 1976

Prove que sabe honrar os seus compromissos devolvendo com pontualidade este livro à Biblioteca do D. A.

Se, findo o prazo de empréstimo (2 semanas), o livro não for devolvido, será cobrada uma multa de 500 réis por dia.

O prazo acima poderá ser prorrogado, caso a obra não esteja sendo procurada por outro leitor.

Imp. Nac. — 12.343