CURSO NORMAL

DE

MATHEMATICA

POR

J. EULALIO

Lente Cathedratico da Extincta Escola Superior de Guerra,
Major do Corpo de Estado Maior,
Doutor em Mathematica e Sciencias Physicas e Professor da Escola
de Artilharia e Engenharia.

ARITHMETICA

1ª PARTE

RIO DE JANEIRO
IMPRENSA NACIONAL
1907

01196
2.Z

LIVRARIA APOLLO
TEL 42-...
RUA DO CAT...
RIO DE JANEIRO

Classifi-
cação | 01 | .1.1 |

CURSO NORMAL

DE

MATHEMATICA

POR

J. EULALIO

Lente Cathedratico da Extincta Escola Superior de Guerra,
Major do Corpo de Estado Maior,
Doutor em Mathematica e Sciencias Physicas e Professor da Escola
de Artilharia e Engenharia.

ARITHMETICA

1ª PARTE

RIO DE JANEIRO
IMPRENSA NACIONAL
1907

5242

GHEMAT
DIGITALIZADO

Obras do mesmo autor:

ARITHMETICA, 2 vols.
ALGEBRA, 2 vols.
GEOMETRIA PRELIMINAR, 2 vols.
TRIGONOMETRIA, 1 vol.
MECANICA GERAL, 2 vols.
HYDRAULICA, 1 vol.
RESISTENCIA DOS MATERIAES, 1 vol.
CONSTRUCÇÕES METALLICAS, 1 vol.

Livraria de Francisco Alves & C.
134, RUA DO OUVIDOR, 134
RIO DE JANEIRO

PREFACIO

Resumindo a Obra de *J. Hamblin Smith*, intitulada " A TREATISE ON ARITHMETIC ", julgamos prestar um serviço á mocidade brasileira. E para que esse livro do judicioso professor de Cambridge pudesse adaptar-se ao ensino de nossas Escolas, completamol-o com outros trabalhos egualmente bons, taes como os de A. COMTE, EULER, PIERRE LAFFITTE e WENTWORTH.

Temos, portanto, absoluta certeza do valor dos materiaes que serviram para a elaboração deste Curso, já conhecido pela publicação que delle fez a " REVISTA DIDACTICA ".

J. EULALIO

Rio, 7 de Setembro de 1907.

INDICE

ARITHMETICA

PRIMEIRA PARTE

CAPITULO I

CAPITULO II

CAPITULO III

CALCULO FUNDAMENTAL

CAPITULO IV

CAPITULO V

CAPITULO VI

CALCULO COMPLEMENTAR

CAPITULO VII

CAPITULO I

Definição da arithmetica

1. Tudo o que é capaz de augmento ou diminuição chama-se GRANDEZA, e toda grandeza capaz de ser avaliada em numeros chama-se QUANTIDADE.

Para avaliar uma quantidade somos forçados a admittir uma UNIDADE; isto é, uma quantidade conhecida e da mesma especie, que serve de *Padrão*.

A medida do valor de uma quantidade faz-se por um NUMERO; portanto, *numero é a expressão da medida do valor de uma quantidade*.

Se a especie da unidade é determinada, diz-se que o numero é *concreto*; mas, se não é determinada o numero chama-se *abstracto*.

Qualquer, porém, que seja a especie do numero achado para medida de uma quantidade, sempre o numero será formado de *um ajuntamento de unidades*. Com effeito, podemos conceber duas especies de unidades: umas independentes ou *primarias*, e outras dependentes ou *subordinadas*.

Quando dizemos *sete dias* temos um *numero inteiro*, ou o ajuntamento de *sete* unidades primarias.

Quando dizemos *sete horas* temos um *numero fraccionario*, que exprime o ajuntamento de *sete* unidades subordinadas.

Quando a grandeza da unidade é egual á quantidade que se deseja avaliar, quer a unidade seja primaria ou subordinada, conclue-se que o numero *um* será a expressão do valor da quantidade.

Tambem o numero *um* será a medida de uma quantidade se o numero de unidades subordinadas for equivalente a uma unidade primaria. Assim, por exemplo, 24 *horas* é um ajuntamento de unidades subordinadas mas equivalente a uma unidade primaria, porque 24 *horas* equivalem a *um dia*.

Compondo-se um *numero inteiro* com um *numero fraccionario* ter-se-á um *numero mixto*. Assim quando tivermos *nove dias* e *cinco horas*, teremos um ajuntamento das duas especies de numeros.

Logo, em todos os tres casos, um numero significa *um ajuntamento de unidades*.

Tal é a definição dada por Euler.

Os unicos numeros *determinados* são os numeros *concretos*.

Os numeros *abstractos* são *indeterminados* e constituem o primeiro grão de indeterminação das quantidades; os outros grãos surgem em *algebra*, em *geometria* e na *mecanica*; isto é, apparecem em outros dominios da sciencia mathematica.

Mathematica é a sciencia que trata da medida indirecta das grandezas.

Esta sciencia, fundamento de todo saber humano, divide-se em tres grandes partes:

CALCULO, GEOMETRIA E MECANICA;

as quaes estudam:

O NUMERO, A EXTENSÃO E O MOVIMENTO.

O calculo subdivide-se em duas partes: ARITHMETICA E ALGEBRA.

A arithmetica é o calculo dos valores.

Tal é a definição dada por A. Comte.

CAPITULO II

Notação e numeração

2. A arte de representar os numeros por algarismos chama-se *notação* e a de exprimir por *vocabulos* um numero escripto com algarismos chama-se *numeração*.

3. O systema de notação universalmente adoptado é o dos Arabes.

4. NUMEROS INTEIROS são os multiplos exactos da unidade. Ex.: 7, 21, 1859 são *numeros inteiros* ou simplesmente *inteiros*.

5. ALGARISMOS. Os symbolos seguintes, chamados *algarismos*, ou *numeros digitos*, são usados para representar os numeros em Arithmetica:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
zero	um	dois	tres	quatro	cinco	seis	sete	oito	nove

O primeiro destes algarismos, **0**, chama-se *zero*, *nada*, ou *cifra*, e significa que *não ha numero*. Cada um dos outros algarismos significa o numero que está escripto em linguagem vulgar.

6. DEZENAS — O numero *dez* é expresso por **0** á direita de 1. Assim, *dez*, *escreve-se* **10**. Nesta posição, **1**, não significa *um*; mas, *um grupo de dez unidades*.

Os algarismos que significam *dezenas* são escriptos no *segundo* logar da direita. Do mesmo modo *vinte* (**2** dezenas) representa-se por **20**; *trinta* (**3** dezenas) por **30**; *quarenta* (**4** dezenas) por **40**; *cincoenta* (**5** dezenas) por **50**; *sessenta* (**6** dezenas) por **60**; *setenta* (**7** dezenas) por **70**; *oitenta* (**8** dezenas) por **80**; *noventa* (**9** dezenas) por **90**.

7. Dezenas e unidades — Um numero contendo dezenas e unidades exprime-se escrevendo o algarismo das dezenas no *segundo* logar da direita, e o algarismo das unidades no *primeiro* logar.

Onze, uma dezena e um é expresso por **11**.

Doze, uma dezena e dois é expresso por **12**.

Treze, uma dezena e tres é expressso por **13**.

Quatorze, uma dezena e quatro é expresso por **14**.

Quinze, uma dezena e cinco é expresso por **15**.

Dezeseis, uma dezena e seis é expresso por **16**.

Dezesete, uma dezena e sete é expresso por **17**.

Dezoito, uma dezena e oito é expresso por **18**.

Dezenove, uma dezena e nove é expresso por **19**.

Vinte e um, duas dezenas e um é expresso por **21**.

Vinte e dois, duas dezenas e dois é expresso por **22**.

Trinta e um, tres dezenas e um é expresso por **31**.

Trinta e nove, tres dezenas e nove é expresso por **39**.

Quarenta e um, quatro dezenas e um é expresso por **41**.

Quarenta e nove, quatro dezenas e nove é expresso por **49**.

Cincoenta e um, cinco dezenas e um é expresso por **51**.

Cincoenta e nove, cinco dezenas e nove é expresso por **59**.

Sessenta e sete, seis dezenas e sete é expresso por **67**.

Setenta e tres, sete dezenas e tres é expresso por **73**.

Oitenta e oito, oito dezenas e oito é expresso por **88**.

Noventa e um, nove dezenas e um é expresso por **91**.

Noventa e nove, nove dezenas e nove é expresso por **99**.

8. Centenas. Um grupo de **10** dezenas chama-se *centena*, e os algarismos que significam centenas são escriptos no *terceiro* logar da direita.

Assim, uma centena, duas centenas, tres centenas, etc., são expressas por **100**, **200**, **300**, etc.

9. Escrever centenas, dezenas e unidades. Escrevemos primeiro as centenas, depois as dezenas e unidades.

Assim, duas centenas e setenta e cinco escreve-se **275**.

Exprimir em algarismos os numeros seguintes :

Seis centenas e cincoenta e quatro.

Uma centena e vinte e dois.

Cinco centenas e noventa e oito.

Oito centenas e doze.

Duas centenas e vinte e oito.

Uma centena e dez.

Oito centenas.

Cinco centenas e oitenta e dois.

Quatro centenas e dois.

Sete centenas e oito.

Sete centenas e noventa.

Nove centenas e noventa e nove.

10. Ler centenas, dezenas e unidades. Lemos primeiro as centenas, depois as dezenas e unidades.

Assim, o numero **259** tem duas centenas, cinco dezenas e nove unidades, e lê-se *duzentos e cincoenta e nove* ; o numero **634** tem seis centenas, tres dezenas e quatro unidades ; e lê-se *seiscentos e trinta e quatro* ; o numero **503** tem cinco centenas, nada de dezenas e tres unidades, e lê-se *quinhentos e tres*.

Ler os numeros seguintes, discriminando as centenas, dezenas e unidades de cada um :

502 664 208 532 309 324 222 930
271 604 209 300 734 999 004 071

11. Milhares. Ao grupo de **10** centenas chama-se um *milhar*, e os algarismos que significam milhares são escriptos no *quarto* logar da direita.

Assim, um milhar, dois milhares, tres milhares, quatro milhares, etc., são expressos por

1000, 2000, 3000, 4000, etc.

12. Numeros expressos por quatro algarismos. Os numeros expressos por quatro algarismos podem ser lidos em *milhares, centenas, dezenas* e *unidades*; ou em *centenas, dezenas* e *unidades*. Assim, 7002 : *sete milhares nada de centenas, nada de dezenas e duas unidades*; ou *setenta centenas, nada de dezenas e duas unidades*; 9532 quer dizer : *nove milhares, cinco centenas, tres dezenas e duas unidades*; ou *noventa e cinco centenas, tres dezenas e duas unidades*.

O mais simples modo è sempre o melhor. Ler os numeros seguintes :

1234 9012 7890 8764 0001 1401
5678 3456 1295 2222 4003 9999

13. Ordens de unidades. As unidades de um numero são as *unidades de primeira ordem*. As dezenas de um numero são as *unidades de segunda ordem*. As centenas de um numero são as *unidades de terceira ordem*. Os milhares de um numero são as *unidades de quarta ordem*.

Algarismos em *quinto* logar significam *dez milhares*, chamados *unidades de quinta ordem*. Algarismos em *sexto* logar significam *cem milhares*, chamados *unidades de sexta ordem*.

NOTA. — As unidades de um numero são geralmente chamadas *unidades*, o termo *unidades* significando *unidades de primeira ordem*. Assim, **724** tem *sete centenas, duas dezenas e quatro unidades*.

14. Systema decimal. Visto que *dez* unidades de uma ordem são eguaes a *uma* unidade de ordem immediatamente superior, este systema de numeração chama-se *systema decimal*.

15. Periodos. Quando os algarismos de um numero são *cinco* ou mais, nós os separamos em grupos de tres algarismos, cada um por uma virgula, principiando pela direita. O grupo á direita chama-se o *periodo de unidades*; o segundo grupo chama-se o *periodo de milhares*; o terceiro grupo chama-se o *periodo de milhões*; o quarto grupo chama-se o *periodo de bilhões*.

A unidade de qualquer periodo é egual a **1000** unidades do periodo immediatamente anterior.

Um milhão é egual a **1000** *milhares* e escreve-se :

1 0 0 0 0 0 0;

um bilhão é egual a **1000** *milhões* e escreve-se :

1 0 0 0 0 0 0 0 0 0.

O periodo á esquerda poderá ter um, dois, ou tres algarismos; cada um dos outros periodos tem forçosamente tres algarismos.

16. Ler um numero inteiro expresso em algarismos. Vamos ler o numero :

7 4 3 8 0 5 9 6 4 2 1.

Começamos pela direita e separamos os algarismos em periodos de tres algarismos cada um. Teremos :

7 4 , 3 8 0 , 5 9 6 , 4 2 1.

Começamos a leitura pela esquerda e lemos cada periodo como se estivesse só, dizendo o *nome* do periodo.

O *quarto* periodo a partir da direita é o *periodo de bilhões*.

Agora lemos :

Setenta e quatro bilhões, trezentos e oitenta milhões, quinhentos e noventa e seis milhares e quatrocentos e vinte e um.

Portanto, *começando pela direita, separamos os algarismos por virgulas em periodos de tres algarismos cada um. Partindo da esquerda, lemos cada periodo como se não existissem outros, dizendo o nome de cada um periodo, excepto o nome do periodo de unidades.*

NOTA. — Os nomes de periodos acima de milhões são os seguintes : *trilhões, quatrilhões, quintilhões, sextilhões, setilhões, octilhões* e *nonilhões*. Estes nomes bastam ás nossas avaliações numericas.

EXERCICIO 1

Separar em periodos e ler os numeros expressos pelos algarismos seguintes :

(1) 7, 13, 45, 59, 326, 4578.
(2) 90, 110, 207, 4300, 4036, 4306.
(3) 780, 609, 5360, 2020, 1101.
(4) 36497, 49532, 654321, 743269.
(5) 45000, 32600, 75230, 500000.
(6) 8572914, 3469218, 4629817.
(7) 9000000, 20000000, 715000000.
(8) 910307240, 307004205, 380503040.
(9) 243759268342, 207405006270.
(10) 417235682719435, 203056300072010.

17. ESCREVER UM NUMERO INTEIRO POR ALGARISMOS. — Vamos escrever em algarismos o numero :

duzentos e oitenta e tres milhões seiscentos e vinte e quatro milhares duzentos e sete

Nós separamos primeiro os *periodos* do numero dado. Elle tem o periodo de milhões, o periodo de milhares, e o periodo de unidades.

Escrevemos primeiro o periodo de milhões e pomos uma virgula depois delle ; em seguida o periodo de milhares, e o periodo de unidades.

Teremos :

283,624,207.

NOTA I. — Cada periodo, excepto o da esquerda, deve ter tres algarismos. Faltando qualquer ordem de unidades de um periodo, pomos uma cifra em seu logar; e se faltar qualquer periodo, pomos tres cifras em seu logar. Assim,

tres milhões dezeseis milhares e cinco

escreve-se :

3,016,005;

doze milhões e quatrocentos e treze

escreve-se :

12,000,413.

Portanto, *começando pela esquerda, escrevemos as centenas, dezenas e unidades de cada periodo, pondo zeros nos logares vagos e uma virgula entre cada periodo e o periodo seguinte.*

NOTA II. — O milhar chama-se *mil*, abreviadamente.

EXERCICIO 2

Exprimir em algarismos os numeros seguintes :

(1) Nove ; doze ; dezesete; dezenove; treze; dezeseis; onze.

(2) Vinte e tres; vinte e sete ; trinta e cinco ; trinta e oito ; quarenta e quatro ; quarenta ; vinte e seis ; trinta e quatro.

(3) Sessenta e sete ; setenta e cinco ; sessenta e dois ; oitenta e tres ; setenta e quatro ; noventa e dois ; sessenta e oito ; noventa e cinco.

(4) Setenta e seis; vinte e dois; cincoenta; quinze; vinte e oito; sessenta e um; quarenta e nove; dezoito; noventa; setenta e tres.

(5) Cento e sete; cento e trinta; duzentos e quarenta e seis; trezentos e setenta e dois; seiscentos e oito; setecentos e quarenta; novecentos e noventa.

(6) Oitocentos e trinta e seis; setecentos e quarenta e sete; quatrocentos e dez; novecentos e treze; setecentos e cincoenta; trezentos e oitenta e quatro.

(7) Oitocentos e dezoito; oitocentos e oito; duzentos e seis; quatrocentos e trinta; quinhentos e doze; setecentos e oitenta e sete.

(8) Sete mil oitocentos e quarenta e cinco; nove mil seiscentos e trinta e sete; doze mil; oito mil e quatrocentos; seis mil e tres; oitenta e cinco mil e quarenta.

(9) Cinco mil quatrocentos e setenta; tres mil seiscentos e cincoenta; oito mil setecentos e oitenta; mil duzentos e quarenta e sete; quatro mil oitocentos e oito.

(10) Seis mil e quatro; sete mil e vinte e dois; tres mil e quinhentos; nove mil e quarenta e sete; dois mil e dezesete; dezenove mil quatrocentos e dois.

(11) Setenta mil e sete; sessenta mil e sessenta; quatorze mil e quatorze; setenta mil e dezesete; deze mil trezentos e tres; dezeseis mil e cinco.

(12) Trezentos e cincoenta e seis mil setecentos e vinte e oito; seiscentos e quarenta mil oitocentos e quarenta e dois; novecentos mil; oitocentos mil e quarenta.

(13) Sete milhões; quatro milhões quinhentos e setenta e seis mil oitocentos e setenta e cinco; setenta e cinco milhões oitocentos e seis mil novecentos e quarenta.

(14) Trezentos e quinze milhões; cinco milhões e quarenta mil; oito milhões e setecentos; dezoito milhões e vinte; setecentos milhões e dois.

(15) Trezentos e quinze bilhões seiscentos e setenta e quatro milhões dezoito mil e tres; trinta e cinco bilhões seiscentos milhões e quinhentos e vinte.

(16) Sete trilhões; cinco trilhões oitocentos bilhões seiscentos mil e quarenta e sete; oito trilhões quarenta e tres mil e sete.

(17) Trezentos e cinco trilhões cinco bilhões quatro milhões seis mil e tres.

(18) Nove trilhões e nove; noventa trilhões e novecentos; dezenove trilhões e dezenove mil; um trilhão um milhão mil cento e um.

18. Systema romano de notação. — O systema dos Romanos consta dos sete symbolos seguintes:

Letras	I	V	X	L	C	D	M
Valores	1	5	10	50	100	500	1000

Os nove primeiros numeros são expressos por:

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
1	2	3	4	5	6	7	8	9

As dezenas são expressas por:

X	XX	XXX	XL	L	LX	LXX	LXXX	XC
10	20	30	40	50	60	70	80	90

Dezenas e unidades exprimem-se escrevendo os symbolos das unidades á direita dos das dezenas. Assim:

XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX
11	12	13	14	15	16	17	18	19

XXII	LVI	XCIX
22	56	99

As centenas são expressas por:

C	CC	CCC	CD	D	DC	DCC	DCCC	CM
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Escrevendo *M* á esquerda de cada uma destas expressões, temos:

MC	MCC	MCCC	MCD	MD	MDC	MDCC
1100	1200	1300	1400	1500	1600	1700

MDCCC	MCM
1800	1900

Centenas, dezenas e unidades são expressas escrevendo-se as centenas, depois as dezenas e finalmente as unidades: Assim: *mil novecentos e seis*, escreve-se:

MCMVI;

mil oitocentos e cincoenta e nove, escreve-se:

MDCCCLIX.

EXERCICIO 3

Escrever em algarismos arabes:

(1) XXVII.
(2) XLIX.
(3) LXVIII.
(4) LXXIII.
(5) XCII.
(6) CXLIV.
(7) CLXIII.
(8) CXCIX.
(9) DCLXLV.
(10) MDLXXXIX.

EXERCICIO 4

Escrever em symbolos romanos:

(1) 37; (2) 59; (3) 87; (4) 62; (5) 95; (6) 139; (7) 145; (8) 179; (9) 846; (10) 1763.

CAPITULO III

Calculo fundamental

1 — ADDIÇÃO

19. Se combinarmos dois ou mais numeros, de modo a reunil-os em um só, o resultado chamar-se-á *Somma* dos numeros dados.

O symbolo +, lê-se *mais* e significa addição. O symbolo = significa: *é egual a*, ou *o resultado é*.

Para obter a somma de 5 e 3, raciocinamos assim:

$$3 = 1 + 1 + 1,$$

donde

$$\begin{aligned} 5 + 3 &= 5 + 1 + 1 + 1 \\ &= 6 + 1 + 1 \\ &= 7 + 1 \\ &= 8 . \end{aligned}$$

20. Na pratica, podemos exprimir o resultado da addição de um numero menor que *dez* com qualquer outro numero, sem decompôr em unidades o numero a addicionar.

Assim dizemos:

7 e 5 *são* 12,
15 e 8 *são* 23;

e assim por deante.

Mas, sendo tres ou quatro *parcellas*, cada uma menor que *dez*, a addicionar, empregaremos o processo mentalmente.

Assim, para sommar:

4, 7, 9 e 6,

dizemos:

4 e 7 *são* 11 ; 11 e 9 *são* 20 ; 20 e 6 *são* 26.

21. Agora apreciemos o processo de addição, no caso de numeros quaesquer.

Supponhamos que temos a sommar os quatro numeros :

2475, 397, 486 e 3007

Fazemos assim:

$$\begin{array}{rr} & 2\,4\,7\,5 \\ & 3\,9\,7 \\ & 4\,8\,6 \\ & 3\,0\,0\,7 \\ \hline \text{Somma} & 6\,3\,6\,5\,. \end{array}$$

Colloquemos os algarismos que representam *unidades*, em cada uma das parcellas, na mesma linha vertical ; os que representam *dezenas* na mesma linha vertical ; e similarmente os que representam *centenas* e *milhares*. Tiremos uma linha horizontal por baixo da ultima parcella. Abaixo desta linha ponhamos o numero que representa a somma dos numeros dados, a qual será achada do modo seguinte:

Sommando

7, 6, 7 e 5

unidades, a somma será vinte e cinco, ou 2 dezenas e 5 unidades.

Nós collocamos o 5 abaixo da linha de unidades e levamos as 2 dezenas para a linha de dezenas.

Sommando

2, 0, 8, 9 e 7

dezenas, a somma será vinte e seis, ou 2 centenas e 6 dezenas. Nós collocamos o 6 abaixo da linha de dezenas e levamos as 2 centenas para a linha de centenas.

Sommando

2, 0, 4, 3 e 4

centenas, a somma será treze, ou 1 milhar e 3 centenas. Nós collocamos o 3 abaixo da linha de centenas e levamos 1 milhar para a linha dos milhares.

Sommando

1, 3 e 2

milhares, a somma será seis e nós escrevemos este numero por baixo da linha dos milhares.

EXERCICIO 5

Sommar :

(1) 4 *e* 7, 3 *e* 13, 5 *e* 15, 9 *e* 27

(2)	62 36	(3)	40 27	(4)	36 24
(5)	237 349 823	(6)	209 140 600	(7)	562 70 106
(8)	45 6 237 4269	(9)	5462 723 8004 9217	(10)	24609 3470 40052 6207

(11)	429 347 425 269 538	(12)	364 629 488 976 853	(13)	253 189 567 278 384	(14)	140 49 257 6 428

(15)	6842	(16)	8750	(17)	8604	(18)	6843
	5679		4623		4007		4297
	8526		7988		5290		236
	5037		6543		3046		32
	2409		5729		7259		7008

(19) $64 + 43 + 7 + 85 + 9.$
(20) $247 + 356 + 28 + 423 + 97 + 12.$
(21) $425 + 3742 + 4236 + 39 + 847.$
(22) $7288 + 976 + 45 + 623 + 4000.$
(23) $8 + 97623 + 3407 + 5260 + 86.$
(24) $41537 + 9215 + 48 + 6077 + 23 + 2413.$
(25) $275413 + 3126 + 725 + 5007.$
(26) $74259 + 346274 + 30000 + 1000001 + 207.$
(27) $4692 + 72430 + 80000729 + 40 + 600000000.$

(28)	46243	(29)	748325	(30)	5629
	35297		54297		425580
	825649		532684		37259
	246728		20047		506
	815		4207		670492
	42376		617043		37987
	645980		3025		6493

(31)	256497	(32)	654297	(33)	625493
	648098		248643		75872
	720430		380469		5436
	630689		472586		87294
	407246		582987		4859
	864928		639458		863
	254384		498468		13

(34)	7462594	(35)	4697498	(36)	6572043
	8625837		527		2869257
	4398025		4307046		436
	6702403		27209		698206
	5124917		152372		45297
	6219806		4058		3526084
	4390143		7265204		57002
	7409425		4372943		852968

(37) Setecentos e quarenta; quarenta mil e quinze; seiscentos e quarenta e sete; cincoenta e tres mil trezentos e tres; dezesete mil quinhentos e quarenta e seis.

(38) Quinhentos e oito; seis mil e nove; trinta e cinco mil e quatorze; oitocentos e dezenove; setecentos mil e seis; dois mil e doze.

(39) Seiscentos e quarenta e cinco mil oitocentos e quarenta e cinco; setenta mil e quarenta e sete; sessenta mil e quarenta; setecentos e cincoenta mil; trezentos mil e quinze.

(40) Duzentos e um milhões noventa e seis mil trezentos e quarenta e dois; cincoenta e quatro mil entos e quarenta e dois; dezoito milhões seis mil e trezentos e quatro; dezoito milhões seis mil e tres; quinhentos mil e quarenta; oito milhões e oito.

2 — SUBTRACÇÃO

22. Se de um numero tirarmos outro menor, o processo chamar-se-á *Subtracção*.

Tirar um numero de outro é o mesmo que successivamente deduzir as unidades de que é composto. Assim por exemplo, para subtrahir 3 de 5, raciocinaremos deste modo:

$$3 = 1 + 1 + 1;$$

se de 5 tirarmos uma destas tres unidades, restarão sómente 4; se destas quatro tirarmos uma segunda unidade, restarão sómente 3; e, finalmente, destas tres deduzindo a terceira unidade, resultarão apenas 2.

O symbolo —, lê-se *menos*, é usado para designar a operação de subtrahir 3 de 5, e sua connexão com o resultado, poderá ser expressa do modo seguinte :

$$5 - 3 = 2.$$

23. Na pratica, podemos exprimir o resultado da subtracção de um numero menor que *dez*, de outro numero, sem decompôr o *subtraendo* em unidades; assim dizemos :

$$7 - 5 = 2,$$
$$17 - 7 = 10,$$
$$45 - 9 = 36;$$

e assim por deante.

Antes de proceder á exposição do processo de Subtracção no caso de numeros quaesquer, conheçamos o principio sobre o qual se funda o processo.

Se compararmos dois numeros, com o intuito de descobrir um terceiro, que seja o excesso do maior sobre o menor, podemos accrescentar *dez unidades simples* ao maior desde que accrescentemos tambem *um grupo de dez unidades simples* ao menor; e podemos accrescentar *dez grupos de dez unidades* ao maior desde que accrescentemos *um grupo de cem unidades* ao menor; e assim successivamente.

Supponhamos, para exemplo, que temos de achar o numero que seja o excesso de 56 sobre 29. Raciocinaremos deste modo :

56 = cinco dezenas e seis unidades
29 = duas dezenas e nove unidades.

Dulamitha Almeida.

Se ao primeiro accrescentarmos *dez unidades simples* e ao segundo accrescentarmos *um grupo de dez unidades*, teremos.

cinco dezenas e dezeseis unidades, no primeiro caso;
tres dezenas e nove unidades, no segundo caso.

Portanto, o excesso do primeiro numero sobre o segundo será um numero composto de duas dezenas e sete unidades; isto é, será 27.

Seja agora tomado um exemplo, para provar o modo *pratico* de effectuar a operação da subtracção, associado a uma completa exposição do processo.

Supponhamos que temos de deduzir 589 de 926 :

Minuendo.......	926
Subtraendo	589
Resto.........	337

Nós dispomos os numeros, collocando na mesma linha vertical os algarismos que representam unidades, e fazemos o mesmo com os que representam dezenas e centenas.

Isto posto, raciocinamos assim: não podemos tirar 9 unidades de 6 unidades; mas accrescentamos *dez unidades* ás 6 unidades, fazendo *dezeseis unidades*; tomando 9 unidades ás dezeseis unidades, pomos o resultado, 7 unidades abaixo da linha de unidades.

Tendo augmentado o minuendo com *dez unidades*, addicionamos, para haver compensação, 1 *dezena* ao subtraendo, mudando, portanto, 8 dezenas em 9 dezenas.

Agora, não podemos tirar 9 dezenas de 2 dezenas; mas, addicionamos *dez dezenas* ás 2 dezenas, fazendo *doze dezenas*; tomando 9 dezenas ás doze dezenas, pomos o resultado, 3 dezenas, abaixo da linha de dezenas.

Tendo augmentado o minuendo com *dez dezenas*, addicionamos, para haver compensação, 1 *centena* ao subtraendo, mudando, portanto, 5 centenas em 6 centenas.

Então tomamos 6 centenas ás 9 centenas, e pomos o resultado, que são 3 centenas, abaixo da linha de centenas.

EXERCICIO 6

Achar a differença entre os seguintes pares de numeros :

(1) 13 *e* 6 (2) 15 *e* 7 (3) 23 *e* 4 (4) 3 *e* 32

(5)	57	(6)	96	(7)	74	(8)	87	(9)	92
	23		42		39		58		47
(10)	313	(11)	704	(12)	630	(13)	7420		
	247		195		548		3618		
(14)	6239	(15)	4729	(16)	6258	(17)	65472		
	4127		501		36		4001		
(18)	357	(19)	3625	(20)	72649	(21)	20004		
	249		1846		43821		17243		

(22) 437—56. (23) 529—483. (24) 827—795.
(25) 3000—958. (26) 7040—583. (27) 6259—479.
(28) 58623—7248. (29) 64295—53296.
(30) 70000—68904. (31) 52764 *e* 34297.
(32) 42456 *e* 102479. (33) 624300 e 1400072.
(34) 99999 *e* 100000.
(35) Um milhão *e* um milhar.
(36) Cem milhões *e* cem mil.
(37) Dez milhões *e* mil e um.
(38) Que numero deve ser deduzido de 26, para que se obtenha 18 ?
(39) Que numero deve ser tirado de 427, para ter-se 401 ?

(40) Que numero deve ser tirado de tres mil e quinze, para ter-se dois mil quatrocentos e cinco ?
(41) De quanto mil excede quatrocentos e sete ?
(42) O maior de dois numeros é 427 *e* a somma dos numeros é 586; qual é o menor desses dois numeros ?
(43) Qual o numero que deve ser sommado a 7428, para fazer 8047 ?

3 — MULTIPLICAÇÃO

24. *Multiplicação* é o processo pelo qual achamos a somma de dois, tres, quatro ou mais numeros *eguaes entre si*.

Assim, querendo achar a somma de tres numeros eguaes a 7, chamaremos o processo *a Multiplicação de 7 por 3*.

Esta somma é o *Producto* da multiplicação de 7 por 3.

O numero 3 é o *Multiplicador*.
O numero 7 é o *Multiplicando*.

A seguinte Taboa deve ser confiada á memoria.

TABOA DE MULTIPLICAÇÃO

Duas vezes		Tres vezes		Quatro vezes		Cinco vezes		Seis vezes		Sete vezes	
1 *são*	2	1 *são*	3	1 *são*	4	1 *são*	5	1 *são*	6	1 *são*	7
2	4	2	6	2	8	2	10	2	12	2	14
3	6	3	9	3	12	3	15	3	18	3	21
4	8	4	12	4	16	4	20	4	24	4	28
5	10	5	15	5	20	5	25	5	30	5	35
6	12	6	18	6	24	6	30	6	36	6	42
7	14	7	21	7	28	7	35	7	42	7	49
8	16	8	24	8	32	8	40	8	48	8	56
9	18	9	27	9	36	9	45	9	54	9	63
10	20	10	30	10	40	10	50	10	60	10	70
11	22	11	33	11	44	11	55	11	66	11	77
12	24	12	36	12	48	12	60	12	72	12	84

Oito vezes	Nove vezes	Dez vezes	Onze vezes	Doze vezes
1 *são* 8	1 *são* 9	1 *são* 10	1 *são* 11	1 *são* 12
2 16	2 18	2 20	2 22	2 24
3 24	3 27	3 30	3 33	3 36
4 32	4 36	4 40	4 44	4 48
5 40	5 45	5 50	5 55	5 60
6 48	6 54	6 60	6 66	6 72
7 56	7 63	7 70	7 77	7 84
8 64	8 72	8 80	8 88	8 96
9 72	9 81	9 90	9 99	9 108
10 80	10 90	10 100	10 110	10 120
11 88	11 99	11 110	11 121	11 132
12 96	12 108	12 120	12 132	12 144

25. Observemos que a multiplicação é uma forma abreviada da addição. Quando dizemos que 3 *vezes* 4 *são* 12, affirmamos que,

$$4 + 4 + 4 = 12.$$

Cada um dos numeros 3 e 4 é um *Factor* do *Producto* 12.

Querendo achar o valor de 4 *vezes* 67, a addição dá-nos :

$$\begin{array}{r} 67 \\ 67 \\ 67 \\ 67 \\ \hline 268 \end{array}$$

Por serem os algarismos de cada linha vertical os mesmos, podemos livrar-nos do trabalho de addição, empregando a Taboa anterior. Fazemos assim :

$$\begin{array}{r} 67 \\ 4 \\ \hline 268 \end{array}$$

O processo consiste no seguinte :

Quatro vezes 7 são vinte e oito; escrevemos 8 no *local* de unidades e guardamos mentalmente 2 dezenas para a linha de dezenas.

Quatro vezes 6 dezenas são 24 dezenas; com as 2 dezenas reservadas, temos vinte e seis dezenas; isto é, duas centenas e seis dezenas; escrevemos 6 no *local* de dezenas e 2 no de centenas; donde, o resultado final é 268.

No exemplo feito,

67 é o Multiplicando,
4 é o Multiplicador,
268 é o Producto.

26. O symbolo ×, posto entre dois numeros, significa que o segundo é multiplicado pelo primeiro. O conjuncto da operação, no exemplo feito, indica-se assim:

$$4 \times 67 = 268.$$

27. Observemos, que, o multiplicador e o multiplicando podem trocar os logares, sem alterar o valor do producto.

Com effeito, temos :

$$3 \text{ vezes } 4 = 4 + 4 + 4 = \left.\begin{array}{l} 1+1+1+1 \\ +1+1+1+1 \\ +1+1+1+1 \end{array}\right\} (1)$$

e

$$4 \text{ vezes } 3 = 3 + 3 + 3 + 3 = \left.\begin{array}{l} 1+1+1 \\ +1+1+1 \\ +1+1+1 \\ +1+1+1 \end{array}\right\} (2)$$

Portanto,

$$3 \times 4 = 4 \times 3$$

ou *a ordem dos factores não altera o producto.*

28. Para multiplicarmos um numero por 10, collocaremos *um zero* á sua direita; isto é,

$$10 \times 364 = 3640.$$

Para multiplicarmos um numero por 100, collocaremos *dois zeros* á sua direita; isto é,

$$100 \times 364 = 36400.$$

Tambem annexando 000 a um numero, o teremos multiplicado por 1000. E assim por deante.

Se tivermos de multiplicar um numero por 20, poderemos primeiro multiplical-o por 2 e depois annexar 0 ao resultado; obteremos assim o producto desejado.

E se temos a multiplicar um numero por 200, poderemos primeiro multiplical-o por 2 e depois annexar 00 ao resultado; obteremos assim o producto desejado.

O methodo de exprimir o resultado de multiplicações desse genero *na pratica* é o seguinte:

Multipliquemos, por exemplo, 4276 *por* 700 e 14239 *por* 6000. Teremos:

$$\begin{array}{r} 4276 \\ 700 \\ \hline 2993200 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 14239 \\ 6000 \\ \hline 85434000 \end{array}$$

EXERCICIO 7

Achar o producto nos casos seguintes:

(1) 3 *vezes* 15. (2) 4 *vezes* 76. (3) 5 *vezes* 98.
(4) 10 *vezes* 87. (5) 6 *vezes* 114. (6) 7 *vezes* 123.
(7) 11 *vezes* 843. (8) 12 *vezes* 947.
(9) Multiplicar 25 *por* 2, 3, 7, 9.
(10) Multiplicar 127 *por* 5, 8, 10, 11, 20, 70.
(11) Multiplicar 2467 *por* 4, 6, 11, 12, 500, 7000.
(12) Multiplicar 37429 *por* 8, 11, 12, 50000, 80000009.

29. *Exemplo* (1). Multiplicar 347 *por* 23.

O calculo faz-se assim:

$$\begin{array}{r} 3\ 4\ 7 \\ 2\ 3 \\ \hline 1\ 0\ 4\ 1 \\ 6\ 9\ 4\ \\ \hline 7\ 9\ 8\ 1 \end{array}$$

A explicação é esta:

O multiplicador consta de duas partes, 3 e 20; portanto, multiplicamos 347 primeiro por 3 e depois por 20; e addicionamos os dois *productos parciaes*.

Mas

$$3 \times 347 = 1041$$

e

$$20 \times 347 = 6940.$$

No calculo, escrevendo por baixo este segundo resultado *omittimos o zero*, porque a addição dos dois productos parciaes o contempla.

EXERCICIO 8

Multiplicar:

(1) 23 *por* 15. (2) 37 *por* 29. (3) 46 *por* 36.
(4) 70 *por* 26. (5) 125 *por* 24. (6) 327 *por* 42.
(7) 205 *por* 43. (8) 107 *por* 98. (9) 2684 *por* 35.
(10) 57296 *por* 27. (11) 84293 *por* 38.
(12) 7629302 *por* 76.

Exemplo (2). Multiplicar 34007 *por* 213.

$$\begin{array}{r} 3\ 4\ 0\ 0\ 7 \\ 2\ 1\ 3 \\ \hline 1\ 0\ 2\ 0\ 2\ 1 \\ 3\ 4\ 0\ 0\ 7\ \\ 6\ 8\ 0\ 1\ 4\ \ \\ \hline 7\ 2\ 4\ 3\ 4\ 9\ 1 \end{array}$$

Neste exemplo, quando multiplicamos 34007 *por* 200, o resultado é:

6 8 0 1 4 0 0 ;

mas *omittimos os dois zeros* do fim, porque escrevemos o 4 no *local* de centenas. Observamos, que, em todos os casos, o primeiro algarismo da direita de cada producto parcial é escripto na mesma linha vertical que o algarismo que serve de multiplicador. Assim, no exemplo dado, o 4 no terceiro producto parcial está na mesma linha vertical que o 2 do multiplicador.

Exemplo (3). Multiplicar 30047 *por* 21009.

$$\begin{array}{r}
30047\\
\underline{21009}\\
270423\\
30047\\
\underline{60094}\\
631257423
\end{array}$$

Neste exemplo, o primeiro algarismo á direita do segundo producto parcial está collocado no *local* de milhares, porque multiplicámos

30047 *por* 1000.

Exemplo (4). Multiplicar 70407 *por* 3700.

$$\begin{array}{r}
70407\\
\underline{3700}\\
492849\,00\\
\underline{211221}\\
260505900
\end{array}$$

EXERCICIO 9

Multiplicar:

(1) 326 *por* 532. (2) 704 *por* 176.
(3) 809 *por* 506. (4) 917 *por* 406.
(5) 5376 *por* 423. (6) 7846 *por* 340. (7) 7859 *por* 5006.
(8) 85639 *por* 598. (9) 79802 *por* 4007.
(10) 30207 *por* 5060. (11) 642867 *por* 90807.
(12) 8637405 *por* 40300. (13) 970052 *por* 40072.
(14) 980740 *por* 3406. (15) 9864302 *por* 300071.
(16) 870120006 *por* 700403 (17) 32804070 *por* 409300.
(18) 742349 *por* 947. (19) 578628 *por* 6205.
(20) 428734 *por* 8053. (21) 984236 *por* 5009.
(22) 872469 *por* 70043. (23) 385704 *por* 36479.
(24) 423796 *por* 57243. (25) 620072 *por* 400205.
(26) 270403 *por* 502049. (27) 427964 *por* 582968.

Exemplo (5). Achar o *producto continuado* de 14, 8 e 70.

Neste caso, multiplicaremos primeiro 14 *por* 8, e depois o producto *por* 70. Assim:

$$\begin{array}{r}
14\\
\underline{8}\\
112\\
\underline{70}\\
7840
\end{array}$$

donde

$$14 \times 8 \times 70 = 7840.$$

EXERCICIO 10

Achar o producto continuado de :

(1) 18, 19, e 20 (2) 436, 73, 12 e 5.
(3) 3473, 2300, 70010, e 2003.

30. Potenciação. Quando um numero é multiplicado *por si mesmo* uma, duas, tres vezes,... os productos resultantes chamam-se a segunda, terceira, quarta,.... *Potencias* do numero.

O processo chama-se *Potenciação*, e a Potencia, á que é elevada o numero, exprime-se pelo *numero de vezes* que o numero foi empregado como factor na operação.

O termo *quadrado* é usualmente empregado em logar de *segunda potencia*.

O termo *cubo* é usualmente empregado em vez de *terceira potencia*.

Assim:

144 é o quadrado de 12, porque $12 \times 12 = 144$.
64 é o cubo de 4, porque $4 \times 4 \times 4 = 64$.
81 é a quarta potencia de 3, porque

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81.$$

EXERCICIO 11

Achar os quadrados de:

(1) 15.	(2) 24.	(3) 40.	(4) 57.
(5) 69.	(6) 72.	(7) 87.	(8) 100.
(9) 114.	(10) 237.	(11) 625.	(12) 890.
(13) 789.			

E os cubos de:

(14) 11.	(15) 13.	(16) 26.	(17) 47.
(18) 68.	(19) 83.	(20) 100.	(21) 257.
(22) 355.	(23) 539.	(24) 704.	(25) 987.

31. Multiplicação abreviada. Tendo de multiplicar 347 *por* 23, o methodo usual (*Artigo 29*) consiste em multiplicar 347 primeiro *por* 3 e depois *por* 20; mas, o

mesmo resultado póde ser obtido se multiplicarmos primeiro *por* 20 e depois *por* 3; assim temos:

Methodo *velho*		Methodo *novo*	
	347	347	
	23	23	
3 *vezes* 347 =	1041	6940	= 20 *vezes* 347.
20 *vezes* 347 =	6940	1041	= 3 *vezes* 347
	7981	7981	

32. Os seguintes, são outros exemplos de multiplicação pelo methodo de tomar os digitos do multiplicador, em ordem *reversa*; isto é, principiando com o digito da esquerda.

Multiplicar	379	Multiplicar	864
por	426	*por*	579
400 × 379 =	151600	500 × 864 =	432000
20 × 379 =	7580	70 × 864 =	60480
6 × 379 =	2274	9 × 864 =	7776
	161454		500256

33. Zeros superfluos, dois no fim do primeiro producto parcial, e um no fim do segundo producto parcial, podem ser omittidos nos exemplos precedentes, como nos seguintes:

Multiplicar	4236	Multiplicar	7648
por	876	*por*	559
	33888		38240
	29652		38240
	25416		68832
	3710736		4275232

Observemos, que, o algarismo da direita de cada producto parcial, tem o mesmo valor *local* que o algarismo do multiplicador, pelo qual é multiplicado em cada caso.

34. Agora consideremos os exemplos seguintes:

```
(1)                          (2)
Multiplicar   7324           Multiplicar   7205094
        por   3806                   por     46006
              21972                        28820376
               58592                        43230564
                43944                        43230564
              27875144                     331477554564
```

O algarismo da direita do ultimo producto parcial está, no exemplo (1), *dois* logares á direita do algarismo extremo do producto parcial que lhe fica precedendo, porque num caso é o resultado da multiplicação *por* 800, e noutro *por* 6.

O algarismo da direita do ultimo producto parcial está, no exemplo (2), *tres* logares á direita do algarismo extremo do producto parcial que lhe fica precedendo, porque num caso é o resultado da multiplicação *por* 6000, e noutro *por* 6.

35. Quando occorrerem zeros no fim do multiplicador, são annexados ao fim do producto final.

Assim:

```
(3)                          (4)
Multiplicar   4792           Multiplicar   58964
        por   24300                  por    2505000
              9584                         117928
              19168                         294820
                14376                         294820
              116445600                    147704820000
```


EXERCICIO 12

Multiplicar, tomando os digitos do multiplicador em ordem reversa, ou da esquerda para a direita:

(1) 87 *por* 23. (2) 75 *por* 28. (3) 58 *por* 36.
(4) 69 *por* 37. (5) 95 *por* 42. (6) 126 *por* 49.
(7) 325 *por* 54. (8) 207 *por* 62. (9) 729 *por* 96.
(10) 655 *por* 52. (11) 925 *por* 49. (12) 806 *por* 55.
(13) 236 *por* 132. (14) 605 *por* 186. (15) 908 *por* 605.
(16) 827 *por* 304. (17) 408 por 502. (18) 739 *por* 985.
(19) 3576 *por* 589. (20) 4609 *por* 783.
(21) 5078 *por* 407. (22) 58369 *por* 684.
(23) 78042 *por* 708. (24) 30207 *por* 602.
(25) 7428 *por* 4629. (26) 6974 *por* 8146.
(27) 9874 *por* 4638. (28) 5702 *por* 3095.
(29) 74635 *por* 72864. (30) 62073 *por* 83496.
(31) 51247 *por* 94026. (32) 37508 *por* 24036.
(33) 39862 *por* 34066. (34) 960025 *por* 50403.
(35) 72985 *por* 40009. (36) 60200 *por* 30056.
(37 20307 *por* 5320. (38) 78529 *por* 42300.
(39) 870480 *por* 20200. (40) 1859 *por* 1906000.

4 — DIVISÃO

36. *Divisão* é o processo pelo qual, quando um *producto* é dado e conhecemos *um dos factores*, determinamos *o outro factor*.

O producto é, com referencia a este processo, chamado *Dividendo*.

O factor dado chama-se *Divisor*.

O factor determinado chama-se *Quociente*.

37. A operação de divisão é designada pelo signal ÷

Assim

$$12 \div 3$$

significa que 12 deve ser dividido por 3.

A mesma operação designa-se escrevendo o Dividendo, sobre o Divisor, separados por um traço horizontal, assim $\frac{12}{3}$.

Vamos primeiro tratar do caso em que o Dividendo contém o Divisor um exacto numero de vezes.

38. Para os pequenos numeros, a Taboa de Multiplicação offerece os meios de resolver a questão da Divisão.

Para exemplo seja:

$$12 = 4 \times 3,$$
$$12 \div 4 = 3 \quad e \quad 12 \div 3 = 4;$$

e tambem:

$$96 = 12 \times 8,$$
$$96 \div 12 = 8 \quad e \quad 96 \div 8 = 12.$$

39. Quando dividirmos um numero por outro numero, achamos quantas vezes o ultimo se contém no primeiro, e, portanto, o processo pelo qual podemos descobrir quantas vezes um numero é contido em um outro, forma uma regra para a divisão. Semelhante processo é explicado pelos exemplos que vamos dar.

Exemplo (1). Dividir 408 *por* 17.

Temos:

$$17 \times 20 = 340$$

e

$$17 \times 30 = 510.$$

E', pois, evidente que 17 é contido em 408 mais que *vinte* vezes e menos que *trinta* vezes.

Se, pois, tirarmos 340 de 408, e acharmos quantas vezes 17 vezes se contém no numero que resta, saberemos

quantas vezes, além das *vinte*, o Divisor é contido no Dividendo 408.

Mas

$$408 - 340 = 68$$

e este numero 68 contém 17 justamente *quatro* vezes.

Logo 17 se contém em 408 vinte vezes, e mais 4 vezes; isto é, o Quociente resultante da divisão de 408 por 17 é 24.

Este processo é representado mais brevemente assim:

```
17) 408 (20 + 4
    340
     68
     68
```

Logo

$$408 \div 17 = 24.$$

E ainda mais brevemente, avaliando nós mesmos da notação pela qual o valor *local* de digitos é representado, somos habilitados a omittir zeros,

```
17) 408 (24
    34
     68
     68
```

Exemplo (2). Supponhamos que temos a dividir 89012 *por* 17.

```
Divisor  Dividendo  Quociente
  17)     89012     (5236
          85
           40
           34
            61
            51
            102
            102
```

Nós primeiro achamos quantas vezes 17 se contém em 89, e como é contido cinco vezes, escrevemos 5 para primeiro algarismo do quociente; depois multiplicamos 17 por 5, e subtrahimos o resultado 85 de 89; ao resto 4 annexamos o algarismo seguinte do dividendo; depois como 17 se contém em 40 duas vezes, escrevemos 2 para segundo algarismo do quociente, depois multiplicamos 17 por 2, e subtrahimos o resultado 34 de 40; e procederemos de modo analogo até ao fim da operação.

Exemplo (3). Dividir 920575 *por* 23

```
23) 920575 ( 40025
    92
    ---
     057
      46
     ---
      115
      115
      ---
```

Neste caso, quando abaixamos o 0, *terceiro* algarismo do dividendo, 23 não se conterá nelle; pomos um 0 para o segundo algarismo do quociente, e então abaixamos 5 o *quarto* algarismo do dividendo.

Não sendo 23 contido em 5, escrevemos outro zero para terceiro algarismo do quociente. Quando depois abaixamos 7, o novo algarismo do dividendo, vemos que 23 é contido em 57 duas vezes, e a operação proseguirá facilmente.

EXERCICIO 13

Dividir:

(1) 18 *por* 6	(2) 27 *por* 9
(3) 84 *por* 7	(4) 132 *por* 12
(5) 182 *por* 13	(6) 238 *por* 17
(7) 456 *por* 19	(8) 3708 *por* 36
(9) 3996 *por* 37	(10) 6409 *por* 493

(11) 431376 *por* 817	(12) 976272 *por* 946
(13) 19249470 *por* 342	(14) 86366784 *por* 358
(15) 224009433 *por* 489	(16) 4690325214 *por* 618
(17) 2880376 *por* 1369	(18) 107810526 *por* 6142
(19) 98955005667 *por* 4123	(20) 4076361 *por* 2019
(21) 13312053 *por* 237	(22) 505350366 *por* 89
(23) 360919856 *por* 83	(24) 4600304 *por* 907
(25) 218860161 *por* 689	(26) 337103025 *por* 861
(27) 39916424548 *por* 1001	(28) 152847420 *por* 5060

(29) 26540538445 *por* 7649
(30) 1165584398000 *por* 17072
(31) 35088008823434 *por* 74291
(32) 369187022085112 *por* 65432
(33) 837741356152459 *por* 98989
(34) 58376823669 *por* 642867
(35) 29599009065442 *por* 9864302
(36) 261449109180 *por* 8723694

40. Se dois quaesquer dos tres numeros que formam o Divisor, o Dividendo e o Quociente são dados, podemos achar o terceiro.

Com effeito, temos:

Dividendo ÷ Divisor = Quociente.
Dividendo ÷ Quociente = Divisor.
Divisor × Quociente = Dividendo.

EXERCICIO 14

(1) O Dividendo é 1171692, o Divisor 342, achar o Quociente.

(2) O Dividendo é 149201, o Quociente 23, achar o Divisor.

(3) O Divisor é 987, o Quociente 64852, achar o Dividendo.

41. Divisão abreviada— Quando o divisor não é maior que 12, o processo de divisão póde ser muito abreviado.

Supponhamos que temos a dividir 92368 *por* 8.

A operação será praticada do seguinte modo:

$$\begin{array}{r|l} 8 & 92368 \\ \hline & 11546 \text{ Quociente} \end{array}$$

O processo é o seguinte:

Desde que 8 é contido *uma vez* em 9, com 1 para resto, escrevemos 1 por baixo do 9, e mentalmente guardamos o resto 1 para o annexar ao 2, lendo o resultado como 12; então 8 é contido *uma vez* em 12, com 4 para resto, escrevemos 1 por baixo do 2, e mentalmente guardamos o resto para o annexar ao 3, lendo o resultado como 43; então, como 8 é contido *cinco vezes* em 43, com 3 para resto, escrevemos 5 por baixo do 3, e mentalmente guardamos o resto 3 para o annexar ao 6, lendo o resultado como 36; então, como 8 é contido *quatro vezes* em 36, com 4 para resto, escrevemos 4 por baixo do 6, e mentalmente guardamos o resto 4 para o annexar ao 8, lendo o resultado como 48; então, como 8 é contido *seis vezes* em 48, sem nenhum resto, escrevemos 6 por baixo do 8, e assim temos concluido a operação.

Agora supponhamos que temos a dividir 11042304 *por* 12.

A operação será praticada do modo seguinte:

$$\begin{array}{r|l} 12 & 11042304 \\ \hline & 920192 \text{ Quociente} \end{array}$$

O processo é o seguinte:

Podemos tomar tres algarismos, porque assim teremos um numero que contém 12; então diremos: 12 é

contido *nove vezes* em 110, com 2 para guardar; e sendo 12 contido *duas vezes* em 24, nada temos que guardar; então 12 *não sendo contido* em 2, escrevemos 0 abaixo do 2, e guardamos 2; então 12 é contido em 23 *uma vez*, com 11 para guardar; então 12 é contido em 110 *nove vezes*, com 2 para guardar; finalmente, 12 é contido em 24 *duas vezes* exactamente.

EXERCICIO 15

Dividir:

(1) 7652 *por* 2 (2) 725961 *por* 3
(3) 8650232 *por* 4 (4) 8749320 *por* 5
(5) 7463424 *por* 6 (6) 3504221 *por* 7
(7) 713406960 *por* 9 (8) 4362017 *por* 11
(9) 7912464 *por* 12 (10) 4000623070905 *por* 9
(11) 7642300721 *por* 11 (12) 36089882405604 *por* 12

Dividir cada um dos seguintes numeros *por* 2, 3, e 4 separadamente:

(13) 4263924 (14) 620437548 (15) 27540918264

Dividir cada um dos seguintes numeros *por* 5, 8 e 9 separadamente:

(16) 46528920 (17) 981754200 (18) 234567000

Dividir cada um dos seguintes numeros *por* 7, 11 e 12 separadamente:

(19) 7971348 (20) 29574468 (21) 6736387812

42. Prova dos nove — Uma verificação do resultado da multiplicação é fornecida por uma curiosa propriedade dos numeros, que podemos conhecer facilmente. Com effeito:

O producto de dois factores inteiros é um *multiplo* de cada um destes factores.

Cada potencia de 10 é superior de *uma unidade* a um certo multiplo de 9. Assim temos:

$$10 = 9 + 1 \quad 100 = 11 \times 9 + 1$$
$$1000 = 111 \times 9 + 1, \text{ etc.}$$

Cada multiplo de uma potencia de 10 *por* um só digito é, pois, um multiplo de 9, mais este digito. Assim temos :

$$500 = 55 \times 9 + 5; \qquad 7000 = 777 \times 9 + 7, \text{ etc.}$$

Mas, como qualquer numero consta da somma de multiplos de potencias de 10, *todo numero será um multiplo de nove, mais a somma dos seus proprios digitos*. Assim temos :

24573 = (*um multiplo de* 9) + (2 + 4 + 5 + 7 + 3)

A divisão de 24573 *por* 9, dar-nos-á, portanto, o mesmo resto que nos dá a divisão da somma dos digitos (2 + 4 + 5 + 7 + 3).

Tal é a propriedade em que se funda a *Regra* seguinte:

Divida-se a somma dos digitos no Multiplicando por 9 e registre-se o resto. Divida-se a somma dos digitos no Multiplicador por 9 e registre-se o resto. Multiplique-se os dois restos achados ; divida-se o resultado por 9 e registre-se o resto. Se a multiplicação, que se deseja verificar, estiver certa, este resto será o mesmo que o resto obtido quando tomarmos a somma dos digitos no Producto dado e a dividirmos por 9.

Exemplo :

Multiplicando		*Multiplicador*		*Producto*
7 6 3 7 1	×	8 5 4	=	6 5 2 2 0 8 3 4

Somma de digitos no Multiplicando = 24 *e* 24 ÷ 9 *dá* 6 *de resto.*

Somma de digitos no Multiplicador = 17 *e* 17 ÷ 9 *dá* 8 *de resto.*

Primeiro resto × segundo resto = 48 *e* 48 ÷ 9 *dá* 3 *de resto.*

Somma de digitos no Producto = 30 *e* 30 ÷ 9 *dá* 3 *de resto.*

Logo a operação está certa. Isto é verdade quasi sempre; mas, póde falhar. Como? Ponha-se um 9 no producto em logar do 0, suppondo um erro; o producto será :

6 5 2 2 9 8 3 4

A somma dos digitos = 39 *e* 39 ÷ 9 *dá* 3 *de resto* isto é, o mesmo resto que nos deu a divisão de 30 *por* 9.

Não obstante, empregue-se sempre a *prova dos nove*. Ella presta bastante serviço aos que calculam.

Uma prova que não falha, será a da repetição da multiplicação por methodo diverso do que foi feito. Se os dois resultados obtidos forem eguaes; isto é, se feitas as multiplicações pelos methodos *novo* e *velho* (*Artigo 31*), encontrarmos o mesmo producto, poderemos confiar nos nossos calculos.

43. DECOMPOSIÇÃO DOS NUMEROS — Vamos agora estudar uma operação, que é opposta á multiplicação. Em multiplicação determinamos o producto de dois ou mais factores dados : na operação de que vamos tratar, o producto é dado e os factores vão ser achados.

44. Para numeros fracos, os factores podem ser determinados por immediata inspecção :

Assim, os factores de 21 são 3 e 7
e os factores de 55 são 5 e 11

45. Quando temos de achar dois factores, que fazem certo producto, um ou ambos podem algumas vezes ser reductiveis a simples factores.

Assim, 9 e 6 são factores de 54

e os factores de 9 sendo 3 e 3, e os factores de 6 sendo 2 e 3, o numero 54 póde ser *partido* ou *decomposto* em *quatro* factores :

2, 3, 3, 3

46. *Numeros Primos* são os que não têm divisor exacto senão elles mesmos e a unidade. Assim

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 e outros

são *Numeros Primos*. (*Vide* a Taboa de numeros primos que se acha no fim deste livro).

Numeros Multiplos são os que podem ser *resolvidos* em factores, cada um dos quaes maior que 1. Assim

4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18 e outros,

são *Numeros Multiplos*.

47. Cada numero multiplo póde ser resolvido em factores primos. Assim

$$4 = 2 \times 2;\quad 6 = 2 \times 3;\quad 8 = 2 \times 2 \times 2;\quad 9 = 3 \times 3$$
$$10 = 2 \times 5;\quad 12 = 2 \times 2 \times 3;\quad 14 = 2 \times 7$$
$$15 = 3 \times 5;\quad 16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$$
$$18 = 2 \times 3 \times 3 \text{ etc.}$$

Agora, para decompor um numero *forte* em factores, dividil-o-emos por qualquer dos menores numeros primos, cuja divisão se faça exactamente; depois dividimos o quociente por qualquer numero primo que o divida exactamente; e procederemos neste caminho, até que o quociente seja 1; então, os divisores serão os factores procurados.

Assim procuremos os factores de 2520

2	2520
2	1260
2	630
3	315
3	105
5	35
7	7
1	1

Donde, $2520 = 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$.

Na pratica, raramente precisaremos de *todos* os factores de um numero multiplo ; mas, mui frequentemente, teremos de conhecer se um dado numero é exactamente divisivel por *certo* numero *particular*.

Por isto, será bom conservarmos de memoria as seguintes propriedades dos numeros :

Um numero é exactamente divisivel :

por 2 quando o seu ultimo algarismo for 0, ou um digito *par*, como 426 ;
3 quando a somma de seus digitos for divisivel por 3, como 579 ;
4 quando os seus *dois* ultimos algarismos formarem um numero divisivel por 4, como 2364 ;
8 quando os seus *tres* ultimos algarismos formarem um numero divisivel por 8, como 25256 ;
5 quando o seu ultimo algarismo for 0 ou 5, como 30 e 135 ;
9 quando a somma dos seus digitos for divisivel por 9, como 275265 ;
10 quando o seu ultimo algarismo for 0 ;
por 11 quando a differença entre a somma dos digitos nos logares *impares* (a começar da direita) e a somma dos digitos nos logares *pares*, seja 0 ou divisivel por 11. Assim 24794 e 829191 são divisiveis por 11.

Outros factores primos, como 7, 13, 17, 19, etc. deverão ser achados pela divisão directamente, sem necessidade do caracter de divisibilidade relativo a cada um.

EXERCICIO 16

Reconhecer se os numeros seguintes são exactamente divisiveis por 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, ou 11.

(1) 117. (2) 288. (3) 495.
(4) 1050. (5) 23472. (6) 42345.
(7) 27464. (8) 32495. (9) 84732.
(10) 6480. (11) 619182718.

EXERCICIO 17

Resolver em factores *primos* :

(1) 18	(2) 24	(3) 27	(4) 32
(5) 36	(6) 39	(7) 42	(8) 51
(9) 54	(10) 57	(11) 72	(12) 85
(13) 91	(14) 99	(15) 100	(16) 105
(17) 108	(18) 112	(19) 132	(20) 176
(21) 288	(22) 432	(23) 525	(24) 625
(25) 729	(26) 999	(27) 1296	(28) 1760
	(29) 5760		

48. O processo de multiplicação poderá ser feito mui abreviadamente quando o multiplicador é um numero multiplo, sendo este resolvido em *dois ou mais* factores.

Assim, se tivermos de effectuar a multiplicação de

2579825 *por* 56

podemos decompor 56 em seus factores 8 e 7, procedendo deste modo :

$$\begin{array}{r} 2\,5\,7\,9\,8\,2\,5 \\ 8 \\ \hline 2\,0\,6\,3\,8\,6\,0\,0 \\ 7 \\ \hline 1\,4\,4\,4\,7\,0\,2\,0\,0 \end{array}$$

As vantagens deste modo são preciosas na pratica.

EXERCICIO 18

Multiplicar, após a resolução do multiplicador em factores menores que 12 :

(1) 347 *por* 14	(2) 423 *por* 22
(3) 5462 *por* 27	(4) 8497 *por* 36
(5) 8573 *por* 49	(6) 28472 *por* 56
(7) 49273 *por* 63	(8) 90728 *por* 132
(9) 90725 *por* 360	(10) 40207 *por* 108
(11) 36729 *por* 1320	(12) 704075 *por* 14400

49. Tambem podemos frequentemente simplificar o processo de divisão, quando o Divisor, ainda que maior que 12, póde ser decomposto em factores não maiores que 12. Dividiremos o Dividendo primeiro por um dessos factores, e depois dividiremos o Quociente por um segundo factor, e assim por deante.

Supponhamos que temos a dividir

47268540 *por* 45

Neste caso, 45 é decomposto em seus factores 9 e 5

$$\begin{array}{r|r} 9 & 4\,7\,2\,6\,8\,5\,4\,0 \\ \hline 5 & 5\,2\,5\,2\,0\,6\,0 \\ \hline & 1\,0\,5\,0\,4\,1\,2 \end{array}$$

EXERCICIO 19

Applicar o processo expôsto, á divisão de

(1) 34608 *por* 14	(2) 6791040 *por* 15
(3) 752364576 *por* 18	(4) 1143995886 *por* 27
(5) 285216822 *por* 33	(6) 2095501072 *por* 49
(7) 4157028792 *por* 56	(8) 1200130008 *por* 84
(9) 22039992 *por* 108	(10) 57667632 *por* 132
(11) 472634500 *por* 125	(12) 565184160 *por* 720
(13) 537062400 *por* 14400	

50. Divisão inexacta — Até aqui temos effectuado Exemplos em que o Divisor é contido um *exacto* numero de vezes no Dividendo.

Agora supponhamos que temos a dividir 23 *por* 7.

Por ser

$$3 \times 7 = 21$$

segue-se que podemos dividir as 23 unidades em 3 parcellas, cada uma contendo 7 unidades, mas não desprezando as 2 unidades que sobram.

Em tal caso, 3 é o Quociente e 2 o *Resto*.

Agora, tendo a dividir 72469 *por* 53, procederemos assim :

```
5 3) 7 2 4 6 9 (1 3 6 7
     5 3
     -----
     1 9 4
     1 5 9
     -------
       3 5 6
       3 1 8
       -------
         3 8 9
         3 7 1
         -----
           1 8
```

Então o Quociente é 1367 e o Resto 18.

NOTA — Se multiplicarmos o Quociente pelo Divisor, e addicionarmos o Resto ao producto, a somma deve ser egual ao Dividendo.

EXERCICIO 20

Dividir :

(1) 3492 *por* 37
(2) 486296 *por* 41
(3) 872968 *por* 47
(4) 57092 *por* 65
(5) 7492736 *por* 71
(6) 82749325 *por* 98
(7) 87467 *por* 103
(8) 978462 *por* 409
(9) 8276253 *por* 723
(10) 974004562 *por* 1009
(11) 48237654 *por* 4821
(12) 68725642903 *por* 6871

51. Quando empregamos, em casos de divisão *inexacta*, o methodo da divisão abreviada, depois de ter resolvido o divisor em seus factores componentes, o resto póde ser achado por um processo de que ainda não tratamos.

Exemplo (1). Dividir 43276 *por* 21.

```
21 { 3 | 4 3 2 7 6
   { 7 | 1 4 4 2 5   e 1 unidade mais,
           2 0 6 0   e 5 parcellas de 3 unidades, ou
```

15 unidades mais.

Portanto, o Quociente é 2060 e o Resto é 15 + 1, ou, 16.

Exemplo (2). Dividir 572948 *por* 125.

```
    { 5 | 5 7 2 9 4 8
125 { 5 | 1 1 4 5 8 9  e 3 unidades mais,
    { 5 |   2 2 9 1 7  e 4 parcellas de 5 unidades, ou,
                         20 unidades mais.
            4 5 8 3    e 2 parcellas de 25 unidades, ou,
```

50 unidades mais.

Logo o Quociente é 4583, e o Resto é 50 + 20 + 3, ou, 73

EXERCICIO 21

Dividir, fazendo Divisão abreviada,

(1) 4153 *por* 15
(2) 587595 *por* 16
(3) 42813 *por* 18
(4) 423672 *por* 21
(5) 724972 *por* 25
(6) 569024971 *por* 27
(7) 2825780 *por* 33
(8) 8642396 *por* 35
(9) 356599 *por* 48
(10) 8274913 *por* 64
(11) 230047914 *por* 77
(12) 419421 *por* 99
(13) 44487 *por* 105
(14) 95379 *por* 189
(15) 1194477 *por* 210

52. Na divisão de um numero por 10, temos sómente de separar o *ultimo* algarismo ; os outros algarismos dão o quociente, e o algarismo separado dá-nos o resto.

Assim, 2460197 ÷ 10 = 246019, com o resto 7

Agora, para dividir 42395675 *por* 20, procederemos deste modo :

```
   | 4 2 3 9 5 6 7 5
10 | 4 2 3 9 5 6 7   e 5 unidades mais,
 2 | 2 1 1 9 7 8 3   e 1 parcella de 10 unidades mais ;
```

logo, o Quociente é 2119783, e o Resto 10 + 5, ou 15

Mas, a operação será mais breve assim :

$$2{,}0 \left| \begin{array}{l} 4\,2\,3\,9\,5\,6\,7\;,\;5 \\ \hline 2\,1\,1\,9\,7\,8\,3 \end{array} \right. \quad \textit{e o resto } 15$$

Agora :

para dividir *por* 100, separaremos os *dois ultimos* algarismos ;

para dividir *por* 1000, separaremos os *tres* ultimos algarismos, os outros algarismos dão o quociente, e os algarismos separados dão-nos o resto.

53. Sendo dados tres dos quatro numeros : Divisor, Dividendo, Quociente e Resto, poderemos calcular o quarto.

1. Sendo dados : Divisor, Dividendo e Quociente, multiplicaremos o Divisor pelo Quociente, e subtrahiremos o resultado do Dividendo, para termos o Resto.

2. Sendo dados : Divisor, Quociente e Resto, multiplicaremos o Divisor pelo Quociente, e sommaremos ao resultado o Resto, para termos o Dividendo.

3. Sendo dados : Divisor, Dividendo e Resto subtrahiremos o Resto do Dividendo e dividiremos o resultado pelo Divisor, para termos o Quociente.

4. Sendo dados : Quociente, Dividendo e Resto, subtrahiremos o resto do Dividendo, e dividiremos o resultado pelo Quociente, para termos o Divisor.

EXERCICIO 22

(1) O Divisor é 25, o Dividendo 4276, o Quociente 171. Achar o Resto.

(2) O Divisor é 342, o Quociente 1381, o Resto 67. Achar o Dividendo.

(3) O Divisor é 596, o Dividendo 372149, o Resto 245. Achar o Quociente.

(4) O Quociente é 2910, o Dividendo 8765237, o Resto 317. Achar o Divisor.

EXERCICIO 23

REVISÃO

(A)

(1) Exprimir em vocabulos 4237496 ; e em algarismos seiscentos e cincoenta e tres mil oitocentos e dois.

(2) Achar a somma de 24753, 86729, 4237 e 80462.

(3) Achar a differença entre 86293 e 78464.

(4) Multiplicar 8627 *por* 493, e 50042 *por* 307.

(5) Dividir 8423793 *por* 9, e 2659582 *por* 358.

(B)

(1) Escrever em algarismos, vinte e cinco milhões duzentos e cincoenta e sete mil seiscentos e trinta ; e em vocabulos 402050407.

(2) De dezesete milhões e dezesete tirar oito mil e oito.

(3) Multiplicar 6549 *por* 4037, e 27004 *por* 3700.

(4) Dividir 32456789 *por* 96, primeiro pela divisão longa e depois pela divisão abreviada, e mostrar que os resultados concordam.

(5) Achar a somma de um milhão e seis, quinze mil e onze, cem mil e dez, e sessenta mil e quatrocentos ; e dividir o resultado por 9.

(C)

(1) Escrever em vocabulos 10010201401 ; e em algarismos um milhão vinte tres mil e um. Addicionar os dois numeros, e da somma subtrahir a sua differença.

(2) Multiplicar 740296 *por* 2089, e 426004 *por* 3704.

(3) Dividir 78297426 *por* 35, empregando a divisão abreviada.

(4) De cento e vinte e seis milhões quatrocentos e seis mil e tres, tirar noventa e cinco milhões e quatro.

(5) Dividir o producto de 723 e 347 *por* 48.

(D)

(1) Exprimir em algarismos o numero representado por MDCCCLXXXVIII.

(2) Dividir 987654321 *por* 132, usando a divisão abreviada.

(3) Reduzir a factores primos 56, 78 e 114.

(4) Multiplicar a somma de 86297 e 40025 pela differença entre 789 e 694.

(5) De quanto um milhão excede 101 ?

(E)

(1) Dividir trezentos e cincoenta e tres bilhões oito milhões novecentos e setenta e dois mil e seiscentos e dois *por* 5406.

(2) Multiplicar 8976589 *por* 9876.

(3) Resolver em factores elementares (em numeros primos) 40, 90 e 126.

(4) Exprimir em notação Romana 24, 47 e 178.

(5) Quantos tijolos podem ser transportados por 24 carros, cada um transportando 500 tijolos ?

CAPITULO IV

Theoria das fracções ordinarias

54. Os numeros são as medidas das quantidades.

Para medir uma quantidade toma-se alguma quantidade conhecida do mesmo genero, a qual será o Padrão ou a *Unidade*.

O numero, que exprime quantas vezes esta Unidade se contém na quantidade, é a *medida* da quantidade.

Por exemplo, quando dizemos que um homem tem a renda de *novecentos mil réis por anno*, exprimimos, que elle percebe por anno uma somma que contém a unidade *novecentas* vezes.

O numero novecentos será neste caso a *medida* dessa renda.

Concebamos agora que a *Unidade primaria* possa ser supposta dividida em certo numero de partes de *egual* grandeza.

Por exemplo, tomemos para *Unidade primaria* a *moeda de mil réis* e admittamos que ella seja dividida em *vinte* partes eguaes. Cada uma destas partes será *um vigesimo* da unidade ; duas partes serão *dois vigesimos*; tres partes taes serão *tres vigesimos* ; e assim por deante até *vinte vigesimos*, que reconstituirão a propria unidade.

Taes partes da unidade primaria são as suas *fracções*.

Uma *Fracção* se constitue, pois, pela divisão da unidade primaria em certo numero de *partes eguaes*, e quando se considera uma ou mais destas partes.

O numero de partes eguaes em que a unidade primaria é supposta dividida, chama-se o *Denominador* da fracção ; e o numero que exprime quantas destas partes são tomadas para formar a fracção, chama-se o *Numerador* da fracção.

Estes symbolos são representados pelo modo seguinte: escrevendo o numerador acima do denominador, separados por uma linha horizontal. Assim $\frac{3}{4}$ representa a fracção cujo numerador é 3 e o denominador 4.

Taes expressões são chamadas *fracções ordinarias* ou, mais brevemente, *fracções*.

55. O symbolo $\frac{1}{2}$ lê-se *um meio*.

O symbolo $\frac{1}{3}$ lê-se *um terço*.

O symbolo $\frac{1}{4}$ lê-se *um quarto*.

O symbolo $\frac{3}{5}$ lê-se *tres quintos*.

O symbolo $\frac{4}{6}$ lê-se *quatro sextos*.

O symbolo $\frac{5}{7}$ lê-se *cinco setimos*.

O symbolo $\frac{1}{8}$ lê-se *um oitavo*.

O symbolo $\frac{2}{9}$ lê-se *dois nonos*.

O symbolo $\frac{1}{10}$ lê-se *um decimo*.

O symbolo $\frac{7}{11}$ lê-se *sete onze-avos*.

O symbolo $\frac{5}{17}$ lê-se *cinco dezesete-avos*.

O symbolo $\frac{1}{30}$ lê-se *um trinta-avos*.

O symbolo $\frac{7}{237}$ lê-se *sete duzentos e trinta e sete-avos*.

E assim por deante.

56. O numerador e o denominador de uma fracção são chamados os *Termos* da fracção.

Uma *fracção propria* é aquella em que o numerador é *menor* que o denominador, como $\frac{3}{5}$.

Uma *fracção impropria* é aquella em que o numerador é *maior* que o denominador, como $\frac{5}{3}$.

57. Fracções equivalentes — Vamos *provar* que

$$\frac{2}{3}=\frac{8}{12}$$

Com effeito, supponhamos a unidade primaria dividida em *tres* partes eguaes. Donde

$\frac{2}{3}$ representará 2 destas partes.... (1)

Agora seja cada uma destas tres partes subdividida em *quatro* partes eguaes. Assim a unidade primaria foi dividida em *doze* partes eguaes, e $\frac{8}{12}$ representará oito destas subdivisões....... (2)

Mas, *uma* das partes em (1) é egual a *quatro* das subdivisões em (3); portanto, *duas* partes serão eguaes a *oito* subdivisões; isto é,

$$\frac{2}{3}=\frac{8}{12}$$

como queriamos provar.

Duas fracções equivalentes são, pois, *as que têm o mesmo valor*.

Daqui resultam as duas consequencias seguintes:

1.ª Se o numerador e o denominador de uma fracção forem *multiplicados* pelo mesmo numero, o valor da fracção não se altera. Assim

$$\frac{3}{7}=\frac{3\times 4}{7\times 4}=\frac{12}{28}$$

2.ª Se o numerador e o denominador de uma fracção forem *divididos* pelo mesmo numero, o valor da fracção não se altera.

Assim

$$\frac{14}{20}=\frac{2\times 7}{2\times 10}=\frac{7}{10}$$

58. Uma fracção está em seus *menores termos* quando o numerador e o denominador forem *primos entre si*; isto é, quando não tiverem factor commum excepto a unidade. Assim

$$\frac{2}{3} \quad \frac{5}{7} \quad \frac{17}{19}$$

representam fracções em seus menores termos ou *irreductiveis*.

Para reduzir uma fracção aos seus menores termos, damos a Regra seguinte:

Dividir o numerador e o denominador por seus factores communs. Assim seja a reduzir $\frac{18}{81}$ aos seus menores termos. Teremos

$$\frac{18}{81}=\frac{2\times 3\times 3}{3\times 3\times 3\times 3}=\frac{2}{9}$$

isto é, foram *cancellados* os factores communs.

EXERCICIO 24

Reduzir aos seus menores termos as fracções seguintes:

(1) $\frac{24}{80}$ (2) $\frac{72}{280}$ (3) $\frac{42}{210}$ (4) $\frac{192}{576}$

(5) $\frac{5184}{6912}$ (6) $\frac{1680}{1920}$ (7) $\frac{6409}{7395}$ (8) $\frac{319}{5687}$

(9) $\frac{9495}{15615}$ (10) $\frac{3178}{5221}$

59. Maximo commum divisor — Um numero é *factor* de qualquer outro numero, quando o ultimo for exactamente divisivel pelo primeiro. Assim 3 é factor de 12.

Um numero é *factor commum* de dois ou mais numeros, quando cada um destes ultimos for exactamente divisivel pelo primeiro. Assim 3 é *factor commum* de 9, 12 e 15.

O *Maximo Commum Divisor* de dois ou mais numeros é o mais forte numero que exactamente divide cada um delles.

Assim 6 é o *Maximo Commum Divisor* de 6, 13 e 18; 9 é o *Maximo Commum Divisor* de 27, 36 e 108.

Os termos *Maximo Commum Divisor* escrevem-se assim:

M. C. D.

Para numeros fracos o M. C. D. póde ser achado por simples inspecção, e podemos fazer os exemplos seguintes, applicando os caracteres de divisibilidade já estudados.

Exemplo. — Achar o M. C. D. de 40 e 72.

$$40 = 2\times 2\times 2\times 5$$
$$72 = 2\times 2\times 2\times 3\times 3$$

Logo, 2 entra *tres* vezes como factor em 40 e *tres* vezes como factor em 72. Nenhum outro factor é commum a 40 e 72. Portanto, o M. C. D. será

$$2\times 2\times 2, \text{ ou } 8.$$

Para achar o M. C. D. de dois ou mais numeros, damos a Regra seguinte:

Decompor os numeros em seus factores primos. Tomar a menor potencia de cada factor commum aos numeros dados e formar o producto destas potencias.

EXERCICIO 25

Achar o M. C. D. de

(1) 8 *e* 14
(2) 12 *e* 30
(3) 40 *e* 60
(4) 36 *e* 90
(5) 48 *e* 144
(6) 7, 14, 21
(7) 15, 27, 105
(8) 32, 48, 128
(9) 16, 64, 256, 1024
(10) 24, 51, 105, 729

60. Para numeros fortes, os factores não podem ser frequentemente determinados por inspecção, e se quizermos achar o M. C. D. de *dois* numeros taes, temos de recorrer á Regra seguinte:

Dividir o *maior dos numeros pelo menor, e o Divisor pelo resto, repetindo o processo, até que não haja resto: o ultimo divisor será o* M. C. D. *procurado.*

O methodo que esta Regra institue, depende dos dois *principios* seguintes:

1.º *Cada factor de um numero é tambem um factor de cada multiplo do numero.*

2.º *Cada factor commum de dois numeros é tambem um factor de sua somma e de sua differença.*

Assim 4, que é factor de 12, será tambem factor de 24, 36, etc; 6, que é factor commum de 24 e 36, será tambem factor de 60 e de 12.

Appliquemos estes dois *principios* ao exemplo seguinte:

```
69) 184 (2
    138
     46) 69 (1
         46
         23) 46 (2
             46
```

Sendo 23 um factor de si mesmo e de 46, será, em virtude do 2º principio, um factor de 69.

Sendo 23 um factor de 69, será em virtude do 1º principio, um factor de 2 × 69, ou 138; e portanto, em vista do segundo principio, tambem será factor de 138 + 46, ou 184

Logo, 23 é um factor commum de 69 e 184

Agora, cada factor commum de 69 e 184, será, pelo 1º principio, um factor de 2 × 69, ou 138; e, pelo 2º principio, um factor de 184 — 138, ou 46

Cada factor assim, sendo um factor commum de 69 e 46, será, em vista do 2º principio, um factor de 69 — 46, ou 23

Portanto, o M. C. D. de 69 e 184 será contido em 23 e não poderá ser maior que 23. E 23, que provamos ser factor de 69 e 184, deverá ser o M. C. D.

Procuremos, como segundo exemplo, o M. C. D. de 689 e 1573

Procederemos assim:

```
689) 1573 (2
     1378
      195) 689 (3
           585
           104) 195 (1
                104
                 91) 104 (1
                      91
                      13) 91 (7
                          91
```

Donde, 13 é o M. C. D. de 689 e 1573.

EXERCICIO 26

Achar o M. C. D. de

(1) 384 *e* 1296
(2) 2272 *e* 3552
(3) 7455 *e* 47223
(4) 12321 *e* 54345
(5) 6906 *e* 10359
(6) 1908 *e* 2736
(7) 49608 *e* 169416
(8) 126025 *e* 40115
(9) 1581227 *e* 16758766
(10) 35175 *e* 236845

61. Se o M. C. D. de *tres* numeros for pedido, procure-se o M. C. D. de dois quaesquer destes numeros. Então o M. C. D. do resultado e do terceiro numero será o M. C. D. procurado.

Para exemplo, determinemos o M. C. D. de 351, 459 e 1017; primeiro achamos o M. C. D. de 351 e 459, que é 27. Então achamos o M. C. D. de 27 e 1017, o qual é 9. Será, portanto, 9 o M. C. D. procurado.

EXERCICIO 27

Achar o M. C. D. de

(1) 16, 20, 28 (2) 14, 42, 56, 138
(3) 365, 511, 803 (4) 232, 290, 493
(5) 492, 1476, 1763 (6) 148, 444, 592, 703

62. Menor multiplo commum — Diz-se que um numero é *Multiplo* de outro numero, quando o primeiro é exactamente divisivel pelo ultimo. Assim 12 é um multiplo de 3.

Um numero é *Multiplo Commum* de dois ou mais numeros, quando o primeiro é exactamente divisivel por qualquer dos ultimos. Assim 12 é *Multiplo Commum* de 2, 3 e 4.

O *Menor Multiplo Commum* de dois ou mais numeros é o menor numero exatamente divisivel por qualquer delles.

Assim 12 é o *Menor Multiplo Commum* de 4, 6 e 12; e 60 é o *Menor Multiplo Commum* de 15, 20 e 30.

Os termos *Menor Multiplo Commum* nós escrevemos:

M. M. C.

63. Para determinar o M. M. C. de dois numeros, temos a Regra seguinte:

Dividir um dos numeros pelo M. C. D. *e multiplicar o quociente pelo outro numero. O resultado é o* M. M. C.

Para exemplo, achar o M. M. C. de 24 e 36.

O M. C. D. de 24 e 36 é 12.

Agora $24 \div 12 = 2$

Portanto, o M. M. C. de 24 e 36 será

$$2 \times 36 = 72$$

Com effeito, vamos provar que 72 é o M. M. C. de 24 e 36.

Temos:

$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$$
$$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

Por definição temos:

M. M. C. $= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 72$

M. C. D. $= 2 \times 2 \times 3 = 12$

Mas,

$$\frac{36}{12} = 3 \ e \ 3 \times 24 = 72$$

ou

$$\frac{24}{12} = 2 \ e \ 2 \times 36 = 72$$

como queriamos demonstrar.

EXERCICIO 28

Achar o M. M. C. de

(1) 27 *e* 54. (2) 88 *e* 108.
(3) 633 *e* 844. (4) 195 *e* 735.
(5) 1000 *e* 2125. (6) 3432 *e* 3575.
(7) 936 *e* 2925. (8) 2304 *e* 4032.
(9) 2443 *e* 4537.

64. Para determinar o M. M. C. de *tres* numeros, podemos achar o M. M. C. de dois quaesquer delles e depois procurar o M. M. C. do numero resultante e do terceiro dos numeros dados. O resultado será o M. M. C. desejado.

Para mais de tres numeros, este processo tem facil extensão. Assim para achar o M. M. C. de

12, 20, 36 e 54

procederemos deste modo :

M. M. C. de 12 *e* 20 *é* 60 ,
de 60 *e* 36 *é* 180,
de 180 *e* 54 *é* 540,

portanto,

M. M. C. = 540

Na pratica, porém, emprega-se a Regra seguinte:

Dispôr os numeros dados, lado a lado; dividir por qualquer numero primo tal como 2, 3, 5, 7, 11, ..., *que possa exactamente dividir, dois pelo menos dos numeros; dispôr os quocientes e os numeros que não forem exactamente divisiveis pelo divisor, lado a lado: e proceder neste caminho até obter em uma mesma linha os numeros primos entre si. Então o producto continuado de todos os divisores e os numeros desta linha, será o* M. M. C. *procurado.*

Assim procuremos o M. M. C. de 12, 20, 30, 54.

2	12,	20,	30,	54
2	6,	10,	15,	27
3	3,	5,	15,	27
5	1,	5,	5,	9
	1,	1,	1,	9

Portanto,

$$\text{M. M. C.} = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 9 = 540$$

EXERCICIO 29

Achar o M. M. C. de

(1) 6, 9, 24, 40. (2) 8, 12, 22, 55.
(3) 12, 18, 96, 144. (4) 16, 30, 48, 56, 72.
(5) 84, 156, 63, 99. (6) 27, 33, 54, 69, 132.
(7) 17, 51, 119, 210. (8) 15, 26, 39, 65, 180.
(9) 44, 126, 198, 280, 230. (10), 50, 338, 675, 702, 975.

NOTA — Qualquer dos numeros, sendo exactamente contido em um dos numeros dados, deverá ser omittido no processo do M. M. C. Assim no Exemplo (6) será sufficiente achar o M. M. C. de 54, 69. 132.

65. FRACÇÕES ISOMERAS — Duas fracções podem ser substituidas por outras duas fracções equivalentes e com um *Denominador Commum*, pela Regra seguinte :

Achar o M. M. C. *dos denominadores das fracções dadas.*

Dividir o M. M. C. *pelo denominador de cada fracção.*

Multiplicar o primeiro numerador pelo primeiro quociente.

Multiplicar o segundo numerador pelo segundo quociente.

Fazer dos dois productos os numeradores das fracções equivalentes, cujo denominador commum será o M. M. C. *dos denominadores considerados.*

A mesma regra extende-se a tres, quatro, ou mais fracções.

As fracções que teem o mesmo denominador chamam-se *isomeras*.

Exemplo (1). Achar as fracções isomeras, equivalentes a

$$\frac{3}{8} \text{ e } \frac{4}{7}$$

Procederemos assim :
Denominadores: 8, 7.
M. M. C : 56.
Quocientes: 7, 8.
Novos numeradores : 21, 32.
Fracções isomeras, e equivalentes ás fracções dadas:

$$\frac{21}{56} \quad \frac{32}{56}$$

Exemplo (2). Achar as fracções isomeras, equivalentes a

$$\frac{2}{3} \quad \frac{4}{9} \quad \frac{13}{72}$$

Procederemos assim :
Denominadores: 3, 9, 72.
M. M. C: 72.
Quocientes : 24, 8, 1.
Novos numeradores: 48, 32, 13.
Fracções isomeras, e equivalentes ás fracções dadas :

$$\frac{48}{72} \quad \frac{32}{72} \quad \frac{13}{72}$$

NOTA — Dadas duas ou mais fracções ordinarias para serem reduzidas ao mesmo denominador, tres são os casos em que se podem ellas achar :

1º Caso: quando o maior dos denominadores é exactamente divisivel por cada um dos outros ; neste caso o menor multiplo dos denominadores será o maior delles.

2º Caso : quando entre dois quaesquer dos denominadores haja, pelo menos, um factor commum ; devemos procurar o menor multiplo dos denominadores, empregando a regra geral.

3º Caso : quando todos os denominadores forem primos entre si ; neste caso, o menor multiplo dos denominadores é o producto delles.

EXERCICIO 30

Achar as fracções isomeras, equivalentes ás fracções seguintes :

(1) $\frac{3}{4} \quad \frac{5}{7}$ (2) $\frac{4}{9} \quad \frac{5}{18} \quad \frac{7}{27}$

(3) $\frac{3}{5} \quad \frac{4}{7} \quad \frac{6}{11}$ (4) $\frac{5}{12} \quad \frac{13}{20} \quad \frac{17}{80} \quad \frac{19}{120}$

(5) $\frac{4}{7} \quad \frac{15}{17} \quad \frac{26}{51} \quad \frac{65}{102}$ (6) $\frac{1}{3} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{5}{18}$

(7) $\frac{3}{10} \quad \frac{5}{27} \quad \frac{7}{90} \quad \frac{11}{360}$

66. Comparação das fracções — Para comparar os valores de duas ou mais fracções, devemos transformal-as em outras que lhes sejam equivalentes e isomeras : então a comparação dos valores das fracções dadas será reduzida á comparação dos numeradores das novas fracções. Por exemplo, comparemos os valores de

$$\frac{2}{3} \quad \frac{3}{4} \text{ e } \frac{5}{7}$$

As fracções equivalentes e isomeras serão :

$$\frac{56}{84} \quad \frac{63}{84} \quad \frac{60}{84}$$

A ordem descendente do valor destes numeradores é : 63, 60, 56 ; portanto, a ordem descendente do valor das fracções dadas será :

$$\frac{3}{4} \quad \frac{5}{7} \quad \frac{2}{3}$$

67. Podemos tambem comparar fracções pela reducção ao mesmo numerador, competindo o maior valor á fracção que tiver o *menor* denominador. Assim comparemos os valores de

$$\frac{3}{5} \quad \frac{27}{31} \quad \frac{81}{95}$$

Numeradores: 3, 27 , 81.
M. M. C: 81.
Quocientes: 27, 3, 1.
Novos denominadores: 135, 93, 95.
Fracções equivalentes ás fracções dadas :

$$\frac{81}{135} \quad \frac{81}{93} \quad \frac{81}{95}$$

A ordem descendente do *valor* dos denominadores é: 93, 95, 135; portanto, a ordem descendente das fracções será :

$$\frac{27}{31} \quad \frac{81}{95} \quad \frac{3}{5}$$

EXERCICIO 31

Comparar os valores de

(1) $\frac{3}{7} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{9}{13}$ (2) $\frac{5}{6} \quad \frac{7}{9} \quad \frac{12}{17}$

(3) $\frac{9}{11} \quad \frac{13}{15} \quad \frac{17}{21}$ (4) $\frac{3}{20} \quad \frac{7}{40} \quad \frac{11}{70}$

(5) $\frac{7}{33} \quad \frac{9}{43} \quad \frac{11}{53}$ (6) $\frac{2}{17} \quad \frac{5}{34} \quad \frac{7}{51}$

68. Addição de fracções—A Regra para sommar duas ou mais fracções é a seguinte :

Transformar as fracções em outras equivalentes e que sejam isomeras. Sommar os numeradores das fracções equivalentes e collocar o resultado como numerador de uma

fracção cujo denominador seja o denominador commum das fracções equivalentes.

A fracção obtida será egual á somma das fracções dadas.

Por exemplo, procuremos a somma de

$$\frac{1}{3} \text{ e } \frac{1}{4}$$

Teremos :

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \times 4}{3 \times 3} = \frac{4}{12} \text{ e } \frac{1}{4} = \frac{1 \times 3}{4 \times 3} = \frac{3}{12}$$

portanto,

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$$

EXERCICIO 32

Achar a somma das fracções seguintes :

(1) $\frac{1}{7}$ *e* $\frac{2}{5}$ (2) $\frac{2}{3}$ *e* $\frac{3}{14}$

(3) $\frac{2}{7} \quad \frac{3}{11} \quad \frac{2}{33}$ (4) $\frac{4}{9} \quad \frac{5}{14}$ *e* $\frac{5}{42}$

(5) $\frac{5}{13} \quad \frac{2}{39} \quad \frac{25}{78}$ *e* $\frac{7}{156}$

(6) $\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16}$ *e* $\frac{1}{32}$

(7) $\frac{5}{11} \quad \frac{2}{27} \quad \frac{7}{55}$ *e* $\frac{4}{135}$

(8) $\frac{1}{3} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{7} \quad \frac{1}{9}$ *e* $\frac{1}{11}$

(9) $\frac{2}{3} \quad \frac{3}{40} \quad \frac{7}{240}$ *e* $\frac{11}{2880}$

69. Subtracção de fracções — A regra para subtrahir uma fracção de outra maior é a seguinte :

Transformar as fracções em outras equivalentes e que sejam isomeras. Subtrahir o numerador da menor das fracções equivalentes do numerador da maior, e collocar o resultado como numerador de uma fracção cujo denominador seja o denominador commum das fracções equivalentes. Esta fracção será egual á differença das fracções dadas.

Por exemplo, procuremos a differença entre

$$\frac{2}{3} \text{ e } \frac{5}{7}$$

$$\frac{2}{3}=\frac{2\times 7}{3\times 7}=\frac{14}{21} \quad e \quad \frac{5}{7}=\frac{5\times 3}{7\times 3}=\frac{15}{21}$$

portanto,

$$\frac{5}{7}-\frac{2}{3}=\frac{15}{21}-\frac{14}{21}=\frac{1}{21}$$

EXERCICIO 33

Achar a differença das seguintes fracções :

(1) $\frac{4}{5}$ *e* $\frac{5}{6}$ (2) $\frac{3}{7}$ *e* $\frac{15}{19}$

(3) $\frac{11}{12}$ *e* $\frac{12}{13}$ (4) $\frac{13}{51}$ *e* $\frac{235}{357}$

(5) $\frac{17}{63}$ *e* $\frac{29}{108}$ (6) $\frac{9}{38}$ *e* $\frac{43}{209}$ (7) $\frac{146}{273}$ *e* $\frac{268}{637}$

(8) $\frac{199}{200}$ *e* $\frac{359}{360}$ (9) $\frac{347}{1242}$ *e* $\frac{835}{1998}$

70. Multiplicação de fracções — Para multiplicar uma fracção por qualquer numero inteiro, multiplicamos o numerador pelo numero e conservamos o

mesmo denominador. Assim $\frac{2}{7}$ multiplicado por 3 torna-se $\frac{6}{7}$

Com effeito, um producto sendo a somma de tantas parcellas eguaes ao multiplicando quantas forem as unidades do multiplicador, teremos :

$$3\times\frac{2}{7}=\frac{2}{7}+\frac{2}{7}+\frac{2}{7}=\frac{6}{7}$$

E como *a ordem dos factores não altera o producto,* tambem.

$$\frac{2}{7}\times 3=\frac{6}{7}.$$

71. *Para provar que* $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{15}$

raciocinaremos deste modo :

multiplicar $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}$ é o mesmo que tomar duas terças partes de $\frac{4}{5}$; e como para tomar duas terças partes de um numero podemos tomar primeiro a terça parte e depois repetir o resultado duas vezes, teremos :

terça parte de $\frac{4}{5}=\frac{4}{5\times 3}=\frac{4}{15}$

Com effeito, $\frac{4}{5}$ significa que a unidade primaria foi dividida em 5 partes eguas e $\frac{4}{15}$ significa que a mesma unidade foi dividida em 15 partes eguaes ; portanto, cada parte da primeira fracção é tres vezes maior que cada parte da ultima ; e sendo o numero de partes o mesmo para ambas, a ultima fracção será $\frac{1}{3}$ da primeira.

Portanto,

$$\textit{duas terças partes de } \frac{4}{5} = 2 \times \frac{4}{15} = \frac{8}{15}.$$

isto é, $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$, *como queriamos provar.*

Daqui emana a seguinte Regra da multiplicação das fracções :

Tomar o producto dos numeradores para formar o numerador da fracção resultante, e o producto dos denominadores para formar o denominador.

A mesma regra extende-se á multiplicação de tres ou mais fracções : mas, antes de effectuar o producto, devem ser cancellados os factores communs aos dois termos da fracção resultante.

Exemplo— Achar o valor de

$$\frac{14}{25} \textit{ de } \frac{35}{51} \textit{ de } \frac{17}{49} = \frac{2 \times 7 \times 5 \times 7 \times 17}{5 \times 5 \times 3 \times 17 \times 7 \times 7} =$$
$$= \frac{2}{5 \times 3} = \frac{2}{15}$$

EXERCICIO 34

Reduzir á forma mais simples

(1) $\frac{3}{7}$ *de* $\frac{5}{9}$ (2) $\frac{3}{4} \times \frac{5}{7} \times \frac{9}{11}$

(3) $\frac{42}{65} \times \frac{39}{56} \times \frac{24}{27}$ (4) $\frac{84}{85} \times \frac{102}{117} \times \frac{91}{132}$

(5) $\frac{17}{82} \times \frac{27}{38} \times \frac{123}{153}$ (6) $\frac{100}{161} \times \frac{35}{72} \times \frac{33}{40}$

(7) $\frac{9}{10}$ *de* $\frac{11}{12}$ *de* $\frac{13}{14}$ *de* $\frac{21}{29}$ (8) $\frac{292}{455}$ *de* $\frac{573}{657}$ *de* $\frac{248}{1719}$

(9) $\frac{1205}{2763}$ *de* $\frac{712}{2169}$ *de* $\frac{1535}{1068}$

72. DIVISÃO DE FRACÇÕES — Para dividirmos uma fracção por qualquer numero, multiplicamos o denominador por este numero e conservamos o mesmo numerador. Assim

$$\frac{2}{7} \textit{ dividido por 3 torna-se } \frac{2}{7 \times 3} = \frac{2}{21}$$

Com effeito, $\frac{2}{7}$ significa que a unidade primaria foi dividida em 7 partes eguaes e $\frac{2}{21}$ significa que a mesma unidade foi dividida em 21 partes eguaes ; portanto, cada parte da primeira fracção é tres vezes maior que cada parte da ultima ; e sendo o numero de partes o mesmo para ambas : a ultima fracção será $\frac{1}{3}$ da primeira.

73. *Para provar* que $\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4}$ raciocinaremos deste modo: o quociente resultante da divisão de $\frac{2}{3}$ *por* $\frac{4}{5}$ deverá ser um numero tal, que, multiplicado pelo divisor $\frac{4}{5}$ o producto seja egual ao dividendo $\frac{2}{3}$; isto é,

$$\frac{4}{5} \textit{ do quociente } = \frac{2}{3}$$

ou

$$\frac{5}{4} \textit{ de } \frac{4}{5} \textit{ do quociente } = \frac{5}{4} \textit{ de } \frac{2}{3}$$

ou

$$\frac{20}{20} \textit{ do quociente } = \frac{5}{4} \textit{ de } \frac{2}{3}$$

ou

$$\textit{o quociente} = \frac{5}{4} \textit{ de } \frac{2}{3}$$

isto é,

$$\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{5}{4} \; de \; \frac{2}{3}$$

ou

$$\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4}$$

donde, a Regra seguinte para as divisões de fracções :

Inverter o divisor, e proceder como na multiplicação.

Assim

$$\frac{12}{49} \div \frac{16}{35} = \frac{12}{49} \times \frac{35}{16} = \frac{15}{28}$$

EXERCICIO 35

Dividir

(1) $\frac{12}{49}$ *por* $\frac{3}{7}$ (2) $\frac{25}{39}$ *por* $\frac{10}{13}$ (3) $\frac{85}{256}$ *por* $\frac{51}{64}$

(4) $\frac{16}{261}$ *por* $\frac{4}{27}$ (5) $\frac{38}{275}$ *por* $\frac{133}{385}$ (6) $\frac{91}{369}$ *por* $\frac{78}{287}$

(7) $\frac{49}{550}$ *por* $\frac{343}{1450}$ (8) $\frac{695}{1544}$ *por* $\frac{1251}{2316}$

(9) $\frac{1535}{2421}$ *por* $\frac{921}{1076}$

74. Estabelecidas as regras elementares para effectuar as operações sobre fracções, procedamos agora ao estudo de questões complementares.

Qualquer numero, póde ser escripto sob fórma de fracção, tendo 1 para denominador. Assim 5 póde ser escripto sob esta fórma : $\frac{5}{1}$

E tambem assim :

$$\frac{5}{1} = \frac{10}{2} = \frac{15}{3} = \frac{20}{4} = \text{etc.}$$

Podemos, pois, representar qualquer numero sob a fórma de fracção e com o denominador que convenha.

75. *Numero mixto* é um inteiro seguido de uma fracção, como $4\frac{2}{7}$. Este póde ser lido deste modo : *quatro e dois setimos*, e deve ser considerado como a *somma* de 4 e $\frac{2}{7}$.

Um numero misto póde tomar a fórma de *fracção impropria*, fazendo-se a multiplicação do inteiro pelo denominador da fracção, addicionando-se ao producto o numerador da mesma fracção, e constituindo esta somma o numerador de uma fracção, da qual será denominador o denominador da fracção dada.

Assim $4\frac{2}{7} = \frac{30}{7}$ (fracção impropria).

Com effeito, temos :

$$4\frac{2}{7} = 4 + \frac{2}{7} = \frac{28}{7} + \frac{2}{7} = \frac{30}{7}.$$

Inversamente, uma fracção impropria póde ser reduzida a numero misto, pela divisão do numerador pelo denominador ; constituindo o quociente a parte inteira, e sendo o resto o numerador da parte fraccionaria do numero misto, e o denominador sendo o da fracção dada.

Assim

$$\frac{25}{7} = 3\frac{4}{7}$$

Porque

$$\frac{25}{7} = \frac{21+4}{7} = \frac{21}{7} + \frac{4}{7} = 3 + \frac{4}{7} = 3\frac{4}{7}$$

EXERCICIO 36

Converter em fracções improprias

(1) $7\frac{4}{9}$ (2) $23\frac{15}{47}$ (3) $216\frac{13}{29}$ (4) $173\frac{19}{1000}$

E em numeros mistos

(5) $\frac{427}{10}$ (6) $\frac{3477}{1000}$ (7) $\frac{4293}{137}$ (8) $\frac{65943}{71}$

76. As regras da addição, subtracção, multiplicação e divisão de fracções são applicaveis ás *fracções improprias*. Assim

$$\frac{7}{4}+\frac{13}{10}=\frac{35}{20}+\frac{26}{20}=\frac{61}{20}=3\frac{1}{20}$$

$$\frac{9}{5}-\frac{13}{12}=\frac{108}{60}-\frac{65}{60}=\frac{43}{60}$$

$$\frac{13}{9}\times\frac{27}{26}=\frac{13\times 27}{9\times 26}=\frac{13\times 9\times 3}{9\times 13\times 2}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$$

$$\frac{117}{110}\div\frac{91}{33}=\frac{117}{110}\times\frac{33}{91}=\frac{9\times 13\times 11\times 3}{11\times 10\times 7\times 13}=$$

$$=\frac{9\times 3}{10\times 7}=\frac{27}{70}$$

77. Na applicação das regras aos numeros mistos, devemos, em todos os casos, mudar os numeros mistos em fracções improprias, e proceder como nos seguintes exemplos.

Em divisão devemos proceder assim:

$$4\frac{5}{9}\div 12\frac{3}{10}=\frac{41}{9}\div\frac{123}{10}=\frac{41}{9}\times\frac{10}{123}=\frac{10}{27}$$

$$16\div 12\frac{4}{5}=\frac{16}{1}\div\frac{64}{5}=\frac{16}{1}\times\frac{5}{64}=\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}$$

Em multiplicação é usual fazer assim:

$$7\frac{2}{3}\times 5\frac{4}{7}=\frac{23}{3}\times\frac{39}{7}=\frac{23\times 13}{7}=$$

$$=\frac{299}{7}=42\frac{5}{7}$$

Em addição é vantajoso proceder deste modo:

$$4\frac{2}{3}+3\frac{4}{7}=4+\frac{2}{3}+3+\frac{4}{7}$$

$$=4+3+\frac{2}{3}+\frac{4}{7}$$

$$=7+\frac{14}{21}+\frac{12}{21}$$

$$=7+\frac{26}{21}$$

$$=7+1\frac{5}{21}$$

$$=8\frac{5}{21}$$

Analogamente, quando tres ou mais numeros devam ser addicionados, podemos separar as fracções dos seus inteiros, e effectuar as operações de inteiros com inteiros e de fracções com fracções.

Em subtracção podemos empregar o mesmo methodo; mas, um pequeno cuidado é necessario. Supponhamos que temos a differença entre

$$3\frac{4}{7}-4\frac{2}{3}$$

Reduzindo as partes *fraccionarias* dos numeros a fracções equivalentes e isomeras, temos:

$$3\frac{12}{21}-4\frac{14}{21}$$

Não podemos tomar da parte inteira do primeiro numero a parte inteira do segundo, e nem da parte fraccionaria do primeiro a parte fraccionaria do segundo; mas, temos:

$$4\frac{14}{21}-3\frac{12}{21}=1\frac{2}{21}$$

Agora supponhamos que temos a differença

$$10\frac{2}{5} - 3\frac{5}{7}$$

Teremos :

$$\frac{5}{7} = \frac{25}{35} \textit{ e } \frac{2}{5} = \frac{14}{35}$$

donde,

$$\frac{5}{7} \textit{ é maior que } \frac{2}{5}$$

portanto, não podemos tomar a parte fraccionaria de $3\frac{25}{35}$ da parte fraccionaria de $10\frac{14}{35}$:
Sahiremos da difficuldade pelo artificio de addicionar *a unidade* a cada uma das fracções ; donde,

$$10\frac{14}{35} - 3\frac{25}{35} = 10\frac{49}{35} - 4\frac{25}{35} = 6\frac{24}{35}$$

NOTA — E' geralmente preferivel reduzir os numeros mistos a fracções improprias, no caso de subtracção. Assim

$$10\frac{2}{5} - 3\frac{5}{7} = \frac{52}{5} - \frac{26}{7} = \frac{364}{35} - \frac{130}{35} =$$
$$= \frac{234}{35} = 6\frac{24}{35}$$

EXERCICIO 37

Simplificar as fracções seguintes:

(1) $4\frac{2}{7} \div 3\frac{7}{9}$ (2) $8\frac{3}{5} \div 6\frac{1}{7}$

(3) $104\frac{2}{9} \div 53\frac{7}{13}$ (4) $6\frac{2}{3} \times 9\frac{5}{6}$

(5) $14 \times 3\frac{2}{21}$ (6) $9\frac{4}{15} \times 19\frac{2}{7}$

(7) $2\frac{1}{3} + 3\frac{1}{4}$ (8) $5\frac{2}{7} + 6\frac{3}{11} + 1\frac{4}{15}$

(9) $16\frac{2}{5} + 4\frac{4}{9} + 17\frac{13}{45}$ (10) $4\frac{3}{7} - 2\frac{1}{5}$

(11) $14\frac{4}{9} - 5\frac{7}{8}$ (12) $6\frac{7}{13} - 5\frac{9}{14}$

Os seguintes exemplos devem ser cuidadosamente praticados :

1.° *De* 17 *tirar* $4\frac{5}{21}$

$$17 - 4\frac{5}{21} = 16 + 1 - 4\frac{5}{21} = 16 - 4 + 1 - \frac{5}{21} =$$
$$= 12 + \frac{16}{21} = 12\frac{16}{21}$$

2.° De 317 *tirar* $\frac{5}{49}$

$$317 - \frac{5}{49} = 316 + 1 - \frac{5}{49} = 316 +$$
$$+ \frac{44}{49} = 316\frac{44}{49}$$

3°. *Multiplicar* $\frac{999}{1000}$ *por* 397

$$\frac{999}{1000} = 1 - \frac{1}{1000}$$

$$397 \times \frac{999}{1000} = 397 - \frac{397}{1000} = 396 + 1 - \frac{397}{1000} =$$
$$= 396 + \frac{603}{1000} = 396\frac{603}{1000}$$

78. FRACÇÃO COMPOSTA — Uma *fracção de fracção* chama-se *fracção composta*.

Assim $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{5}{7}$ e $\frac{3}{4}$ *de* 2 $\frac{1}{4}$ *de* $5\frac{2}{7}$ são fracções compostas.

Ellas se reduzem a simples fracções pelo processo de multipticação.

Assim $\frac{3}{4}$ *de* $2\frac{1}{4}$ *de* $5\frac{2}{7} = \frac{3}{4} \times \frac{9}{4} \times$

$$\times \frac{37}{7} = \frac{3 \times 9 \times 37}{4 \times 4 \times 7} = \frac{999}{112} = 8\frac{103}{112}$$

79. Fracção complexa—Uma fracção cujo numerador ou denominador é uma fracção ou numero misto, chama-se *fracção complexa*.

Assim

$$\frac{\frac{3}{4}}{7} \qquad \frac{2}{\frac{5}{9}} \qquad \frac{4\frac{2}{7}}{5\frac{3}{8}}.$$

são fracções complexas. Ellas se reduzem a simples fracções pelo proccesso de divisão.

$$\text{Assim } \frac{\frac{3}{4}}{7} = \frac{3}{4} \div 7 = \frac{3}{4} \div \frac{7}{1} = \frac{3}{4} \times$$

$$\times \frac{1}{7} = \frac{3}{28}$$

e

$$\frac{2}{\frac{5}{9}} = 2 \div \frac{5}{9} = \frac{2}{1} \div \frac{5}{9} = \frac{2}{1} \times \frac{9}{5} =$$

$$= \frac{18}{5} = 3\frac{3}{5}$$

EXERCICIO 38

Simplificar as fracções seguintes:

(1) $\frac{3}{4}$ *de* $5\frac{1}{9}$ *de* $7\frac{1}{5}$ (2) $4\frac{3}{7}$ *de* $11\frac{1}{5}$ *de* 15

(3) $\frac{7}{8}$ *de* $2\frac{5}{9}$ *de* $3\frac{4}{7}$ *de* 90. (4) $\frac{\frac{2}{5}}{\frac{7}{8}}$

(5) $\frac{6\frac{2}{9}}{4\frac{2}{3}}$ (6) $\frac{14}{3\frac{1}{2}}$

(7) $\frac{30\frac{1}{4}}{11}$ (8) $\frac{16\frac{2}{3}}{\frac{25}{39}}$

80. Emprego do parenthesis— Quando uma expressão é encerrada em um parenthesis ( ), significa que todos os termos ou partes da expressão são affectados por algum symbolo que precede, ou segue o parenthesis.

Assim

$$24 \times \left(3\frac{1}{2} + 7\frac{1}{4}\right)$$

quer dizer, que, 24 vezes a somma dos numeros $3\frac{1}{2}$ e $7\frac{1}{4}$ deve ser tomada; a qual poderemos effectuar combinando $3\frac{1}{2}$ e $7\frac{1}{4}$ por addição e multiplicando o resultado por 24.

Agora,

$$2\frac{5}{7} \div \left(4\frac{3}{4} - 2\frac{1}{2}\right)$$

significa que $2\frac{5}{7}$ deve ser dividido pela differença entre $4\frac{3}{4}$, *e* $2\frac{1}{2}$; e portanto o resultado será:

$$2\frac{5}{7} \div 2\frac{1}{4} \text{ ou } \frac{19}{7} \div \frac{9}{4} \text{ ou } \frac{19}{7} \times \frac{4}{9} \text{ ou } \frac{76}{63}$$

81. Os symbolos que representam os parenthesis são diversos; assim os signaes

$$[\ ]\ \text{e}\ \{\ \}$$

são frequentemente empregados. Estes parenthesis são usados para fechar outros, como vê-se na expressão

$$3 \div \left[2 + 3 \div \left\{4 + 5 \div \left(2 + \frac{1}{3}\right)\right\}\right]$$

Para dispensar taes parenthesis, devemos começar pelo que estiver mais no *interior* da expressão, e removel-os um a um.

Assim

$$3 \div \left[2 + 3 \div \left\{4 + 5 \div (2 + \frac{1}{3})\right\}\right]$$
$$= 3 \div \left[2 + 3 \div \left\{4 + 5 \div \frac{7}{3}\right\}\right]$$
$$= 3 \div \left[2 + 3 \div \left\{4 + \frac{15}{7}\right\}\right]$$
$$= 3 \div \left[2 + 3 \div \frac{43}{7}\right]$$
$$= 3 \div \left[2 + \frac{21}{43}\right]$$
$$= 3 \div \frac{107}{43} = \frac{129}{107}$$

82. Fracção continua — Dá-se este nome a uma fracção da fórma:

$$\cfrac{\text{I}}{4 + \cfrac{\text{I}}{\text{I} - \cfrac{\text{I}}{2 - \frac{9}{16}}}}$$

Esta fracção póde ser posta sob a fórma seguinte:

$$\text{I} \div \left[4 + \text{I} \div \left\{\text{I} - \text{I} \div \left(2 - \frac{9}{16}\right)\right\}\right]$$

Calculando, encontraremos para resultado final $\frac{7}{51}$

83. Para simplificar as fracções complexas e continuas, empregaremos outro methodo de calculo, como verse-á nos exemplos seguintes:

Exemplo (1). Simplificar $\dfrac{5}{2 + \frac{3}{7}}$

Multipliquemos todos os termos da fracção por 7. Teremos:

$$\frac{35}{14 + 3} \ \textit{ou}\ \frac{35}{17}$$

Exemplo (2). Simplificar $\dfrac{\frac{2}{3}}{5 + \frac{3}{10}}$

Multipliquemos todos os termos por 30. Vem:

$$\frac{20}{150 + 9} \ \textit{ou}\ \frac{20}{159}$$

Exemplo (3). Simplificar $\dfrac{\frac{2}{3} - \frac{3}{7}}{\frac{5}{6} - \frac{5}{14}}$

Multipliquemos todos os termos por 42. Virá:

$$\frac{28 - 18}{35 - 15} \ \textit{ou}\ \frac{10}{20} \ \textit{ou}\ \frac{1}{2}$$

Exemplo (4). Simplificar $\dfrac{3}{3 + \cfrac{4}{9 + \frac{2}{7}}}$

Calculamos assim :

$$\frac{3}{3+\frac{4}{9+\frac{2}{7}}} = \frac{3}{3+\frac{28}{65}} = \frac{195}{195+28} = \frac{195}{223}$$

Exemplo (5). Simplificar $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}}$

Calculamos deste modo :

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{2}{3}}} = \frac{1}{1+\frac{3}{5}} = \frac{5}{8}$$

EXERCICIO 39

Simplificar as fracções seguintes :

(1) $\dfrac{6}{5+\frac{3}{4}}$ (2) $\dfrac{7}{19-\frac{3}{11}}$ (3) $\dfrac{\frac{4}{5}}{7-\frac{2}{3}}$

(4) $\dfrac{6\frac{7}{8}}{11-\frac{5}{12}}$ (5) $\dfrac{\frac{4}{5}-\frac{3}{20}}{\frac{7}{10}-\frac{9}{40}}$ (6) $\dfrac{\frac{11}{16}-\frac{5}{24}}{\frac{7}{12}+\frac{3}{4}}$

(7) $\dfrac{2}{5+\dfrac{6}{9+\frac{3}{4}}}$ (8) $\dfrac{3}{2+\dfrac{1}{3+\frac{1}{3}}}$

(9) $\dfrac{5}{2-\dfrac{1}{4-\frac{2}{5}}}$ (10) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\frac{2}{5}}}}$

84. Se dois parenthesis estão juntos, lado a lado, *sem signal algum entre elles*, assim

$$\left(2+\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{3}{7}\right)$$

isto significa que a expressão contida no primeiro parenthesis deve ser *multiplicada* pela expressão encerrada no outro parenthesis.

Os seguintes exemplos devem ser cuidadosamente observados :

(1) $$\frac{3}{5}+\frac{4}{7} \text{ de } \frac{2}{3}-\frac{3}{10}$$

A primeira coisa a fazer é tomar o producto de $\frac{4}{7}$ e $\frac{2}{3}$; e a expressão ficará assim

$$\frac{3}{5}+\frac{8}{21}-\frac{3}{10}$$

agora effectuamos a addição e depois tiramos $\frac{3}{10}$ da somma obtida.

(2) $$\frac{3}{5}+\frac{4}{7} \text{ de } \left(\frac{2}{3}-\frac{3}{10}\right)$$

Primeiro toma-se a differença de $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{10}$; multiplica-se o resultado por $\frac{4}{7}$, e addiciona-se o producto a $\frac{3}{5}$

(3) $$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\div\frac{6}{7}$$

Primeiro simplifica-se $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$, obtendo $\frac{8}{15}$ para resultado ; depois divide-se $\frac{8}{15}$ *por* $\frac{6}{7}$ sendo o resultado $\frac{8}{15} \times \frac{7}{6}$, *ou* $\frac{28}{45}$

(4) $$\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} \times \frac{6}{7}$$

Primeiro simplifica-se $\frac{2}{3} \div \frac{4}{5}$ obtendo para resultado $\frac{2}{3} \times \frac{5}{4}$, *ou* $\frac{5}{6}$; depois multiplica-se $\frac{5}{6}$ *por* $\frac{6}{7}$; resultando $\frac{5}{7}$

EXERCICIO 40

Simplificar as expressões seguintes :

(1) $3\frac{2}{5} \div \left(2\frac{1}{3} + 1\frac{5}{7}\right)$

(2) $\left(4\frac{3}{11} + 2\frac{1}{5}\right) \div 35\frac{3}{5}$

(3) $\dfrac{2}{1 + \dfrac{5}{7 + \dfrac{2}{3}}}$ (4) $\dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{2}}}$

(5) $5\dfrac{3}{4 - \dfrac{5}{7 + \dfrac{2}{5}}}$

(6) $\frac{3}{7} + \frac{5}{9}$ *de* $\frac{3}{10} - \frac{2}{21}$ (7) $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{5}{9} + \frac{3}{7} \div \frac{4}{5}$

(8) $\left(\frac{11}{13} \div \frac{2}{7}\right)$ *de* $7\frac{7}{12} - 1\frac{3}{5}$

(9) $\left(\frac{4}{9} - \frac{3}{11}\right)\left(2\frac{3}{4} + 3\frac{2}{3}\right)$

(10) $\left(\frac{3}{13} - \frac{2}{39}\right) \div \left(\frac{5}{78} + \frac{7}{156}\right)$

(11) $\dfrac{\left(2 + \frac{1}{5}\right) \div \left(3 + \frac{1}{7}\right)}{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \times \left(4 - 3\frac{3}{7}\right)}$

(12) $\dfrac{\left(3\frac{1}{3} - 2\frac{1}{2}\right) \div \frac{5}{6} \text{ de } \frac{3}{8}}{2\frac{2}{3} \div \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)}$

EXERCICIO 41

REVISÃO

(1) Addicionar

$$\frac{17}{33} \quad \frac{5}{12} \quad \frac{8}{44} \quad \frac{3}{28} \quad \frac{15}{56}$$

(2) Addicionar

$$\frac{2}{5} \text{ de } \frac{3}{7} \text{ a } \frac{3}{7} \text{ de } 2\frac{1}{3}$$

e multiplicar o resultado por

$$\left(\frac{2}{3} \text{ de } \frac{5}{6}\right) \div \left(\frac{5}{4} + \frac{4}{5}\right)$$

(3) Subtrahir

$$\frac{2}{3} \text{ de } \frac{5}{6} \text{ de } 1\frac{1}{2} \text{ de } \frac{4}{9};$$

e dividir o resultado por

$$\left(\frac{2}{3} - \frac{4}{7}\right)\left(\frac{4}{5} - \frac{5}{8}\right)$$

(4) Simplificar as fracções $\frac{221}{629}$, $\frac{72816}{8528}$, e achar o seu producto.

(5) Dividir o producto de $3\frac{2}{5}$ e $3\frac{3}{7}$ pelo producto de $1\frac{5}{7}$ e $1\frac{13}{21}$

(6) Multiplicar as fracções $4\frac{1}{3}$, $2\frac{3}{4}$ e addicionar o resultado a $4\frac{3}{4} + 3\frac{1}{3}$

(7) Multiplicar a differença entre $\frac{21}{71}$ *e* $\frac{201}{701}$ pela somma de $4\frac{7}{15}$ *e* $1\frac{3}{8}$; e multiplicar o resultado pela differença entre $10\frac{2}{5}$ *e* $5\frac{2}{3}$

(8) Simplificar

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{4}{7}\right)\frac{20\frac{1}{4}}{3\frac{6}{7} + 2\frac{1}{4}}$$

(9) Simplificar

$$\left(3\frac{4}{5} + 5\frac{1}{9} - \frac{1}{45}\right)\left(4\frac{1}{5} - 3\frac{1}{4}\right)$$

dividido por

$$1\frac{5}{11} + 2\frac{1}{8} - \left(2\frac{9}{16} - \frac{1}{8} - \frac{1}{22}\right)$$

(10) Simplificar

$$\left(1\frac{1}{3} + 2\frac{2}{7}\right)\left(\frac{5\frac{1}{16}}{4\frac{6}{7} + 1\frac{1}{4}}\right)$$

(11) Simplificar

$$\left(7\frac{1}{9} + 1\frac{4}{5} - \frac{1}{45}\right)\left(2\frac{1}{4} - \frac{4}{5}\right)$$

dividido por

$$4\frac{1}{8} - \frac{6}{11} - \left(2\frac{7}{8} - \frac{7}{16} - \frac{1}{22}\right)$$

(12) Simplificar

$$\frac{6\frac{3}{4} - 1\frac{5}{14}}{2\frac{1}{6} + 1\frac{3}{7}} \ \textit{e}\ \left(\frac{5}{7}\ \textit{de}\ 1\frac{6}{13}\right) \div \frac{2\frac{5}{7}}{3\frac{1}{4}}$$

(13) Simplificar

$$\cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{5}{13}}}} \ \textit{e}\ \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{9}{16}}}}$$

(14) Simplificar

$$\frac{10\frac{2}{5} - 1\frac{5}{7}}{7\frac{1}{8} + 3\frac{3}{40}} \ \textit{e}\ \left(\frac{3}{7}\ \textit{de}\ 2\frac{1}{17}\right) \div \frac{1\frac{2}{3}}{2\frac{3}{7}}$$

(15) Simplificar

$$\frac{8\frac{7}{8} - 7\frac{6}{7} + 5\frac{5}{6} - 4\frac{4}{5}}{9\frac{9}{10} - 8\frac{13}{15} + 7\frac{7}{8} - 6\frac{6}{7}} \ \textit{e}\ 1\frac{21}{43} \times \frac{37797}{75008}$$

(16) Simplificar

$$\frac{5 - \cfrac{1}{5 - \cfrac{1}{5}}}{3 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{3}}} \times \frac{9}{23}\ \textit{de}\ 7 \ \textit{e}\ \frac{6 + \cfrac{1}{6 - \cfrac{1}{6}}}{4 - \cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{4}}} \times 10\frac{8}{9}$$

(17) Simplificar

$$\frac{8\frac{3}{5} - 7\frac{3}{4} + 5\frac{2}{3} - 4\frac{1}{2}}{13 - 11\frac{9}{10} + 10\frac{7}{9} - 9\frac{17}{20}} \times \frac{2}{11}\ \textit{de}\ 365$$

(18) Simplificar

$$\frac{\frac{1}{21} \times 5\frac{17}{23} \times 6\frac{3}{11} + 6\frac{19}{51} \times 1\frac{23}{49} \div 2\frac{5}{17} + 1\frac{10}{49}}{9\frac{16}{57} \times 1\frac{22}{23} \div 5\frac{17}{38} + 3\frac{11}{78} \times 6\frac{17}{21} \div 7\frac{21}{32}} \times$$

$$\times 12\frac{4}{9}$$

(19) Simplificar

$$\frac{\frac{1}{23}\ de\ 6\frac{13}{17}\ de\ \left(24\frac{11}{13}-4\frac{13}{18}\right)\times 3\frac{33}{34}\div 3\frac{37}{96}}{\left(8\frac{17}{19}\times 5\frac{14}{39}\right)\div\left(4\frac{15}{32}-7\frac{19}{20}\right)\times 5\frac{11}{65}\div 14\frac{21}{25}}\times 4\frac{8}{23}$$

(20) Simplificar

$$\frac{19}{7\times\dfrac{2}{3-1\frac{2}{3}}}\times\frac{7735}{67184}\div\left(1\frac{3}{16}-\frac{47}{48}\right)$$

(21) Simplificar

$$\frac{1}{2+\dfrac{3}{4+\frac{5}{6}}}\times\frac{4862}{4147}\div\left(1\frac{1}{2}-\frac{23}{38}\right)$$

(22) Simplificar

$$\frac{\dfrac{7}{4-\frac{5}{6}}-\dfrac{5}{6-\frac{3}{8}}}{\dfrac{4}{7-\frac{4}{7}}+\dfrac{2}{4-\frac{2}{5}}}\times\frac{\dfrac{1}{\frac{1}{2}-\frac{27}{59}}-13}{19-\dfrac{1}{\frac{1}{2}-\frac{6}{31}}}$$

(23) Simplificar

$$\frac{\dfrac{2}{3-\frac{4}{5}}+\dfrac{3'}{4-\frac{5}{6}}}{\dfrac{3}{2-\frac{1}{4}}-\dfrac{1}{3-\frac{4}{5}}}\times\frac{\dfrac{1}{\frac{2}{3}-\frac{2}{9}}-\dfrac{1}{1\frac{1}{2}-\frac{19}{22}}}{\dfrac{1}{1\frac{1}{7}-\frac{1}{8}}-\dfrac{2}{6\frac{3}{5}-2\frac{5}{11}}}$$

Tal é a theoria das fracções ordinarias.

CAPITULO V

Theoria das Fracções Decimaes

83. Os multiplos do 10 são :

10, 20. 30, 40, 50....

e assim por deante.
As potencias de 10 são :

10, 100, 1000, 10000....

e assim por deante : ellas são chamadas a primeira, segunda, terceira, quarta,.... potencias de 10.

Uma fracção cujo denominador é uma das potencias de 10, chama-se fracção decimal, ou, simplesmente, *um Decimal*.

Todas as outras fracções são, para fazer distincção, chamadas *Fracções ordinarias* ou *Fracções vulgares*.

Para evitar a perturbação no modo de escrever os denominadores das fracções decimaes, usa-se um methodo de notação especial, pelo qual exprime-se o valor do denominador em cada caso. Este methodo fica explicado nos exemplos seguintes :

0.3 significa $\frac{3}{10}$ e lê-se assim : *tres decimos*.

0.25 significa $\frac{25}{100}$ e lê-se assim : *vinte e cinco centesimos*.

0.347 significa $\frac{347}{1000}$ e lê-se assim : *trezentos e quarenta e sete millesimos*.

Os algarismos que seguem o *Ponto Decimal* são os que formam o *Numerador* da fracção em cada caso.

O *numero* de algarismos, que seguem o Ponto Decimal, corresponde ao numero que designa a Potencia particular de 10 que forma o *Denominador* da fracção em cada caso.

Mas, como a primeira potencia de 10 é 1 seguido por um zero; a segunda potencia de 10 é 1 seguido por dois zeros; a terceira potencia de 10 é 1 seguido por tres zeros; e assim por deante; podemos em cada caso escrever o denominador, annexando a 1 tantos zeros quantos são os algarismos que seguem o Ponto.

Assim

$$0.426789 \text{ significa } \frac{426789}{1000000}$$

seis zeros sendo annexados a 1, porque o numero de algarismos que seguem o ponto é neste caso *seis*.

Mas,

$$0.07 \text{ significa } \frac{7}{100}$$

$$0.005 \text{ significa } \frac{5}{1000}$$

$$0.00025 \text{ significa } \frac{25}{100000}$$

os zeros, que se acham entre o Ponto e os algarismos 7, 5 e 25, não sendo escriptos nos numeradores das fracções, porque não têm nenhum effeito sobre o valor dos numeradores, sendo que 07 e 7 significam o mesmo numero, e que 005 e 5 significam o mesmo numero.

Mas estes zeros, affectam o valor dos denominadores, como por exemplo:

$$0.7=\frac{7}{10} \quad 0.07=\frac{7}{100} \quad 0.007=\frac{7}{1000}$$

86. Zeros *annexados* a um decimal não têm effeito em seu valor; isto é,

$$0.7,\ 0.70,\ 0.700$$

são numeros do mesmo valor; porque

$$0.7=\frac{7}{10}$$

$$0.70=\frac{70}{100}=\frac{7}{10}$$

$$0.700=\frac{700}{1000}=\frac{70}{100}=\frac{7}{10}$$

87. O methodo de representar as Fracções Decimaes é uma simples extensão do methodo pelo qual os *Inteiros* são representados, como vemos nas considerações seguintes:

Como o valor *local* de cada digito augmenta dez vezes, quando avançamos da direita para a esquerda, tambem o valor local de cada digito decresce na mesma proporção, quando avançamos da esquerda para a direita.

Se, pois, annexamos differentes digitos á direita do local das unidades, cada um delles tendo pela sua posição um valor dez vezes menor que o valor que teria tido se estivesse immediatamente á esquerda, teremos, para a direita do local das unidades, uma série de Fracções cujos denominadores são successivamente 10, 100, 1000,.... e cujos numeradores, podem ser quaesquer numeros entre 9 e zero. Assim

$$246.4789=2\times100+4\times10+6+\frac{4}{10}+\frac{7}{100}+\frac{8}{1000}+\frac{9}{10000}$$

88. Um numero, que conste de um inteiro e um decimal, como 4.5, póde ser expresso sob fórma fraccionaria, escrevendo-se no Numerador todos os algarismos do numero, e no Denominador *1* seguido por tantos zeros quantos são os algarismos *depois do Ponto*.

Assim

$$4.5=\frac{45}{10}$$

porque

$$4.5=4+\frac{5}{10}=\frac{40}{10}+\frac{5}{10}=\frac{45}{10}.$$

Tambem

$$14.075=\frac{14075}{1000}$$

porque

$$14.075=14+\frac{75}{1000}=\frac{14000}{1000}+\frac{75}{1000}=\frac{14075}{1000}.$$

EXERCICIO 42

Exprimir, por meio de symbolos de fracções ordinarias em seus menores termos

(1) 0.5 (2) 0.25 (3) 0.75 (4) 0.375 (5) 0.00243
(6) 0.0000725 (7) 14.8 (8) 104.235 (9) 50.0004
(10) 100.001

Exprimir na fórma abreviada

(11) $\frac{9}{10}$ (12) $\frac{37}{100}$ (13) $\frac{4579}{10000}$
(14) $\frac{3}{1000}$
(15) $\frac{17295}{100}$ (16) $\frac{59}{10000000}$ (17) $\frac{25679}{1000000}$
(18) $\frac{325793}{100000}$ (19) $\frac{19}{10000}$

89. Chamemos:

0.5	3.7	15.9	expressões decimaes da *primeira* ordem,
0 25	4.39	143.73	expressões decimaes da *segunda* ordem,
0.043	5.006	27.009	expressões decimaes da *terceira* ordem;

o numero da ordem dependendo do numero de algarismos que *seguem o ponto*.

O numero que indica a ordem chama-se *Indice da ordem*. Assim, 1 é o indice da primeira ordem; 2 o da segunda; e assim por deante.

90. Resulta do que dissemos no *Artigo 86* que um decimal de qualquer ordem póde ser mudado em outro decimal equivalente de ordem mais *elevada*, annexando-se um, dois, tres, quatro,... zeros concordantes com o excesso do indice elevado sobre o indice primitivo. Assim

0.43 póde ser mudado em um decimal equivalente da *quinta* ordem, annexando-se-lhe *tres* zeros, deste modo: 0.43000; e

0.047 póde ser mudado em um decimal equivalente da *setima* ordem, annexando-se-lhe *quatro* zeros, deste modo: 0.0470000.

91. Addição de Fracções Decimaes. Para addicionar 0.27 a 0.45 procederemos assim:

$$0.27=\frac{27}{100}$$
$$0.45=\frac{45}{100}$$

portanto

$$0.27+0.45=\frac{27}{100}+\frac{45}{100}=\frac{72}{100}=0.72$$

Mas obtemos o mesmo resultado, collocando os decimaes um por baixo do outro, *ponto* abaixo de *ponto*, addicionando os algarismos como se fossem inteiros e pondo o *ponto* no resultado abaixo dos outros *pontos*. Deste modo:

$$\begin{array}{r} 0.27 \\ \underline{0.45} \\ 0.72 \end{array}$$

92. Se os decimaes a sommar não forem da mesma ordem, como por exemplo 0.37 e 0.049, raciocinaremos assim:

0.049 é um decimal de terceira ordem,

0.37 é um decimal de segunda ordem, mas póde ser mudado em um decimal equivalente da terceira ordem, annexando-se-lhe uma cifra, assim 0.370.

Então faremos a addição dos decimaes deste modo:

$$\begin{array}{r} 0.370 \\ 0.049 \\ \hline 0.419 \end{array}$$

Supponhamos que agora temos a addicionar mais de duas expressões decimaes, como

0.0074, 0.72, 0.05 e 0.123456.

Destas quatro expressões a ultima é da *sexta* ordem; podemos mudar as outras tres em decimaes equivalentes da sexta ordem; então serão dispostas assim:

$$\begin{array}{r} 0.007400 \\ 0.720000 \\ 0.050000 \\ 0.123456 \\ \hline 0.900856 \end{array}$$

Na pratica, omittem-se os zeros annexados, porque elles não teem effeito algum sobre o resultado. Procede-se assim:

$$\begin{array}{l} 0.0074 \\ 0.72 \\ 0.05 \\ 0.123456 \\ \hline 0.900856 \end{array}$$

Se os numeros a addicionar compõem-se de inteiros combinados com decimaes, collocaremos os pontos em uma linha vertical, e procederemos como na addição de inteiros. Assim para addicionar

4.27, 15.004, 0.9007 e 23

procederemos dest'arte:

$$\begin{array}{r} 4.2700 \\ 15.0040 \\ 0.9007 \\ 23.0000 \\ \hline 43.1747 \end{array}$$

ou assim:

$$\begin{array}{l} 4.27 \\ 15.004 \\ 0.9007 \\ 23. \\ \hline 43.1747 \end{array}$$

EXERCICIO 43

Achar a somma de

(1) 0.275 *e* 0.425
(2) 0.007 *e* 0.2394
(3) 0.001 *e* 0.0002
(4) 13.279, 3.00046, 742.000372
(5) 0.000493, 3.24, 15, 42.6, 324.42037
(6) 49.327, 0.458, 8317.05, 341.875, 32.4962
(7) 700.372, 894.0009, 0.347, 0.00082, 5370.006
(8) 560.379, 0.45687, 350.0036, 7.074, 52.257

93. Subtracção de fracções decimaes— Para acharmos a differença entre 0.47 *e* 0.35, quando ambos os decimaes são da mesma ordem, e 0.47 é o maior dos dois, procederemos assim :

Minuendo	0.47
Subtraendo	0.35
Resto	0.12

portanto, a subtracção de decimaes é uma operação semelhante á da subtracção de inteiros, sendo os *pontos decimaes* collocados em uma linha vertical. Que este methodo é correcto, não ha duvida porque

$$0.47 - 0.35 = \frac{47}{100} - \frac{35}{100} = \frac{12}{100} = 0.12$$

94. Para acharmos a differença entre 0.888 *e* 0.9 podemos mudar o ultimo em um decimal da terceira ordem, assim 0.900, e como este numero é maior que 0.888, procederemos assim:

Minuendo	0.900
Subtraendo	0.888
Resto	0.012

Tendo de achar a differença entre 0.998 e 1, observamos que 1 sendo um inteiro maior que 0.998, que é uma fracção propria, isto é $\frac{998}{1000}$, procederemos assim :

Minuendo	1.000
Subtraendo	0.998
Resto	0.002

EXERCICIO 44

Achar a differença entre

(1) 56.429 *e* 5.218

(2) 9.005 *e* 7.462

(3) 53.316 *e* 5.0867

(4) 0.799 *e* 0.8

(5) 6.047 *e* 5.9863

(6) 850.007 *e* 270.8796

(7) 0.0000086 *e* 0.00001

(8) 0.00537 *e* 0.000985

(9) 10 *e* 0.0002

(10) 0.09999 *e* 0.101

95. Multiplicação de decimaes— Para achar o producto de 0.12 e 0.11, procederemos deste modo :

$$0.12 \times 0.11 = \frac{12}{100} \times \frac{11}{100} = \frac{12 \times 11}{100 \times 100} =$$
$$= \frac{132}{10000} = 0.0132$$

o resultado sendo um decimal da *quarta* ordem. Analogamente,

$$4.32 \times 0.00012 = \frac{432}{100} \times \frac{12}{100000} =$$
$$= \frac{5184}{10000000} = 0.0005184$$

o resultado sendo um decimal da *setima* ordem.

Geralmente, o producto de duas quaesquer expressões decimaes é uma expressão decimal, de uma ordem cujo indice é a somma dos indices das ordens das duas expressões.

Daqui deduzimos a seguinte Regra :

Multiplicar como se fossem inteiros, marcando no producto um numero de casas decimaes egual á somma do numero de casas decimaes dos dois factores.

Exemplo : Multiplicar 2.4327 *por* 4.23

Procederemos deste modo :

```
   2.4327
     4.23
 --------
    72981
   48654
  97308
 --------
 10.290321
```

Egualmente, para multiplicar 43.672 *por* 0.00000047, teremos :

$$\begin{array}{r} 43.672 \\ \underline{0.00000047} \\ 305704 \\ \underline{174688} \\ 2052584 \end{array}$$

Agora, para marcar as casas de decimaes deste producto, que devem ser onze, prefixaremos quatro zeros aos sete algarismos do producto achado, collocando o ponto decimal á esquerda dos quatro zeros prefixados. Teremos :

0.00002052584

que será o producto dos dois factores considerados.

Um caso mais deve ser exemplificado. Supponhamos que temos a multiplicar 0.235 *por* 0.48. Teremos :

$$\begin{array}{r} 0.235 \\ \underline{0.48} \\ 1880 \\ \underline{940} \\ 0.11280 \end{array}$$

Este decimal da *quinta* ordem é equivalente a um decimal da *quarta* ordem 0.1128 (*Artigo 86*), e esta é a fórma a mais simples do resultado.

EXERCICIO 45

Multiplicar :

(1) 7.5 *por* 4.7
(2) 3.62 *por* 5.23
(3) 0.427 *por* 0.235
(4) 0.562 *por* 0.00074
(5) 3.00704 *por* 4.0205
(6) 0.0009 *por* 1000
(7) 623.4075 *por* 24.0259

(8) 0.00746 *por* 0.006235
(9) 1432.6749 *por* 0.00004030705
(10) 50704.042 *por* 0.004007090061

Achar o valor do seguinte :

(11) $0.407 \times 4.03 \times 0.006$
(12) $1.01 \times 1000 \times 0.001$
(13) $0.52 \times 0.007 \times 4.3 \times 0.02$

Achar o producto continuado de :

(14) 0.07, 4.6, 0.009 *e* 52.47
(15) 42.6, 0.795, 4.03 *e* 0.00074
(16) Qual é o cubo de 2.74 ?
(17) Elevar 3.5 á quarta potencia.

96. MULTIPLICAÇÃO ABREVIADA— Na multiplicação das expressões decimaes, quando os digitos do multiplicador são tomados em ordem reversa, começando com o digito da esquerda, o ponto decimal póde ser fixado no primeiro producto parcial, de accôrdo com a regra dada (*Artigo 95*).

(1)
$$\begin{array}{rr} \text{Multiplicar} & 4.7 \\ \textit{por} & \underline{2.3} \\ 2 \times 4.7 = & 9.4 \\ 0.3 \times 4.7 = & \underline{1.41} \\ & 10.81 \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{rr} \text{Multiplicar} & 0.047 \\ \textit{por} & \underline{0.23} \\ 0.2 \times 0.047 = & 0.0094 \\ 0.03 \times 0.047 = & \underline{0.00141} \\ & 0.01081 \end{array}$$

(3)
$$\begin{array}{rr} \text{Multiplicar} & 0.586 \\ \textit{por} & \underline{4.5} \\ & 2.344 \\ & \underline{0.2930} \\ & 2.637 \end{array}$$

(4)
$$\begin{array}{rr} \text{Multiplicar} & 0.235 \\ \textit{por} & \underline{0.48} \\ & 0.0940 \\ & \underline{0.01880} \\ & 0.1128 \end{array}$$

EXERCICIO 46

Multiplicar, usando a ordem reversa:

(1) 7.9 *por* 4.5 (2) 9.8 *por* 3.7 (3) 4.2 *por* 5.6
(4) 27.8 *por* 8.4 (5) 32.9 *por* 5.2 (6) 43.7 *por* 9.8
(7) 0.54 *por* 3.9 (8) 0.79 *por* 8.6 (9) 0.85 *por* 7.7
(10) 0.49 *por* 0.67 (11) 0.86 *por* 0.54
(12) 0.057 *por* 0.49 (13) 0.038 *por* 0.42
(14) 0.687 *por* 0.35 (15) 0.429 *por* 0.78
(16) 0.025 *por* 0.53 (17) 0.047 *por* 2.9
(18) 0.475 *por* 0.84 (19) 0.075 *por* 6.4
(20) 0.365 *por* 8.6

97. Demos agora alguns exemplos mais difficeis:

(1) Multiplicar 7.86
por 5.49

39.30
3.144
0.7074

43.1514

(2) Multiplicar 7.095
por 0.0437

0.28380
0.021285
0.0049665

0.3100515

(3) Multiplicar 41.2763
por 71.49

2889.341
41.2763
16.51052
3.714867

2950.842687

(4) Multiplicar 64.749
por 0.05358

3.23745
0.194247
0.0323745
0.00517992

3.46925142

(5) Multiplicar 6.5978
por 10.429

65.978
2.63912
0.131956
0.0593802

68.8084562

(6) Multiplicar 24.06593
por 40.467

962.6372
9.626372
1.4439558
0.16846151

973.87598931

EXERCICIO 47

Multiplicar, empregando a ordem reversa:

(1) 3.71 *por* 3.56 (2) 93.764 *por* 2.093
(3) 83.04 *por* 5.63 (4) 6.047 *por* 0.0539
(5) 17.423 *por* 0.0726 (6) 16.45 *por* 22.36
(7) 983.04 *por* 122.3 (8) 7.3945 *por* 10.357
(9) 0.09683 *por* 10.09 (10) 0.096384 *por* 30.8
(11) 6.00486 *por* 400.62 (12) 649.193 *por* 208.9
(13) 313.6784 *por* 498.09 (14) 0.000493 *por* 0.149
(15) 29.571 *por* 3.009 (16) 91.4963 *por* 0.00906
(17) 0.00768 *por* 25.06 (18) 0.097864 *por* 30.92
(19) 236.003 *por* 19.0624 (20) 93.764 *por* 2.093

98. Multiplicação com approximação — Mostremos agora, empregando a ordem reversa de multiplicação, como podemos abreviar o processo de achar o producto de duas expressões decimaes, especificando previamente o numero de casas decimaes.

Procuremos o producto de 2.9193 *e* 0.57864, com *tres* algarismos decimaes. Empreguemos primeiro o methodo commum, no qual os digitos do multiplicador são tomados na ordem da *direita para esquerda*, e depois o methodo abreviado, no qual os digitos do multiplicador são tomados em ordem da *esquerda para direita*.

Methodo commum.	Methodo approximado.
2.9193	2.,9,1,9,3
0.57864	0.57864
116772	1.45965
175158	0.20435
233544	0.02335
204351	0.00174
145965	0.00011
1.689223752	1.689

Para explicar o methodo approximado: o primeiro producto parcial é feito por completo, e o ponto decimal é fixado. Este producto consta de *cinco* casas decimaes e como desejamos que o producto total tenha apenas tres casas decimaes, convem que os demais productos parciaes sejam conduzidos duas casas para deante, afim de que apresentem mais approximação. Então multiplicamos por 7, isto é por 0.07.

Effectuada a multiplicação de todos os algarismos do multiplicando, teremos seis casas no segundo producto parcial; mas como apenas queremos cinco, regeitamos o algarismo 3 e começamos com o segundo digito, 9, tendo o cuidado de addicionar ao producto de 7 e 9, que é 63, o numero 2 que mentalmente guardamos quando regeitamos o 3.

Quanto aos outros algarismos do segundo producto parcial, serão obtidos como na multiplicação pelo methodo commum.

Isto pôsto, passamos a multiplicar por 8, regeitando o segundo digito, contando da direita do multiplicando, 9, e começando com o digito 1, tendo o cuidado de, como precedentemente, ao producto de 8 e 1, que é 8, addicionar 7, guardado mentalmente quando regeitamos o 9; e procederemos para obter os outros algarismos do terceiro producto parcial, como ordinariamente.

Assim proseguiremos, regeitando cada vez um digito do multiplicando, marcando por um accento cada digito successivamente, para indicar por onde se deve principiar a multiplicação. Na addição final, as duas ultimas columnas da direita servirão somente para dar o numero a addicionar á terceira columna, de modo que se obtenha correctamente a terceira casa decimal exigida para o resultado final.

99. Tomemos outro exemplo. Supponhamos que temos de achar o producto de 28.701 e 0.02342, precisamente com 3 casas de decimaes.

Procederemos assim:

```
28.,7,0,1
  0.02342
---------
  0.57402
  0.08610
  0.01148
  0.00057
---------
  0.672
```

Agora supponhamos que temos de formar o quadrado de 3.1416 precisamente até tres casas de decimaes.

Teremos:

$$\begin{array}{r} 3.,1,4,1,6 \\ 3.1416 \\ \hline 9.4248 \\ 0.3141 \\ 0.1256 \\ 0.0031 \\ 0.0018 \\ \hline 9.869 \end{array} = 9.87 \textit{ approximadamente.}$$

NOTA — Temos, portanto, o exemplo de uma verdadeira fórma geral de approximação, quando consideramos que um pequeno numero de casas decimaes seja sufficiente ao resultado final, e desprezamos um ou mais algarismos para a direita. Então, a regra invariavel é que, se o primeiro algarismo desprezado for 5, ou maior que 5, o ultimo algarismo conservado deve ser augmentado de 1.

Assim:

2.4857 = 2.486 *approximadamente*.

e 4.2684 = 4.27 *approximadamente*.

EXERCICIO 48

Effectuar as multiplicações seguintes, e achar precisamente cada producto com tres casas decimaes:

(1) 4.7863 *por* 0.4397 (2) 0.59273 *por* 5.687
(3) 9.234 *por* 0.0859 (4) 0.27903 *por* 3.425
(5) 39.524 *por* 0.06948
(6) 0.74518 *por* 2.9508
(7) 0.23578 *por* 5.7096
(8) 0.45454 *por* 3.726
(9) 0.94074 *por* 7.777
(10) 3.00642 *por* 2.1605

100. O numero de algarismos pode ser abreviado pela omissão de cifras entre o ponto decimal e o primeiro

digito significativo nos productos parciaes. Para mostrar, tomemos o primeiro exemplo do artigo precedente. Fazemos deste modo :

$$\begin{array}{r} 28.,7,0,1 \\ 0.02342 \\ \hline 0.57402 \\ 8610 \\ 1148 \\ 57 \\ \hline 0.672 \end{array}$$

Devemos ter o maximo cuidado na ordem das columnas.

Procuremos agora o producto de 5.689 e 0.04732 com tres casas decimaes. Fazemos assim :

$$\begin{array}{r} 5.,6,8,9 \\ 0.04732 \\ \hline 0.22756 \\ 3982 \\ 170 \\ 11 \\ \hline 0.269 \end{array}$$

EXERCICIO 49

Effectuar as multiplicações seguintes, omittindo as cifras entre o ponto decimal e o primeiro digito significativo nos productos parciaes depois do primeiro, como nos exemplos anteriores, e apresentar os resultados precisamente com tres casas de decimaes :

(1) 37.849 *por* 0.06537
(2) 6.794 *por* 0.05962
(3) 0.69696 *por* 5.8383

(4) 7.58203 *por* 2.445
(5) 0.92065 *por* 7.758
(6) 4.78304 *por* 6.542
(7) 7.8624 *por* 0.7685
(8) 0.27404 *por* 1.347
(9) 2.75008 *por* 6.3884
(10) 33.4275 *por* 0.56742

101. Devemos ainda observar que um ou mais algarismos podem, desde principio, ser logo regeitados.

Por exemplo, querendo calcular o producto de 0.4876 e 0.0283, precisamente com tres casas decimaes, podemos regeitar o 6, porque não sendo assim teremos *seis* casas decimaes no primeiro producto parcial, e unicamente necessitamos de *cinco* ; assim começamos a multiplicar o 7 por 2, addicionando 1 ao resultado, porque 1 foi mentalmente guardado quando multiplicamos 6 por 2. A operação é esta :

$$\begin{array}{r} 0.4{,}8{,}7{,}6 \\ 0.0283 \\ \hline 0.00975 \\ 389 \\ 14 \\ \hline 0.013 \end{array}$$

Analogamente, se temos de multiplicar 6.58774 por 0.0383 precisamente tendo o producto tres casas de decimaes, podemos regeitar *dois* algarismos da direita do multiplicando desde logo, e procedemos deste modo :

$$\begin{array}{r} 6.5{,}8{,}7{,}74 \\ 0.0383 \\ \hline 0.19763 \\ 5269 \\ 197 \\ \hline 0.252 \end{array}$$

EXERCICIO 50

Effectuar as multiplicações seguintes, omittindo os algarismos superfluos, e dar ao resultado precisamente tres casas decimaes :

(1)	0.5984	*por* 0.0367	(2)	9.68458	*por* 0.9964
(3)	3.009625	*por* 2.6043	(4)	7.58103	*por* 0.3648
(5)	3.89569	*por* 0.03498	(6)	0.565656	*por* 0.9292
(7)	27.56248	*por* 0.08693	(8)	9.8274568	*por* 0.62497
(9)	6.59828	*por* 0.2386	(10)	253.68617	*por* 0.03303

102. Em cada um dos exemplos precedentes, conservamos os productos parciaes com *duas* casas de decimaes além das que eram designadas ao resultado final. Mas, na pratica, basta exceder de uma casa decimal, sobretudo attendendo-se á Nota que se acha logo depois do Exemplo (3).

(1) Achar o producto de 2.495 e 0.783 precisamente com tres decimaes.

$$\begin{array}{r} 2.4{,}9{,}5 \\ 0.783 \\ \hline 1.7465 \\ 1996 \\ 74 \\ \hline 1.953 \end{array}$$

(2) Achar o producto de 8.629 *e* 0.527 precisamente com tres decimaes.

$$\begin{array}{r} 8.6{,}2{,}9 \\ 0.527 \\ \hline 4.3145 \\ 1725 \\ 603 \\ \hline 4.547 \end{array}$$

(3) Achar o producto de 8.4792 *e* 0.0597 precisamente com tres decimaes.

```
 8.,4,7,92
 0.0597
 ---------
 0.4239
    762
     58
 ---------
 0.506
```

NOTA — A columna da direita deu 19 para a somma; mas, nós guardamos mentalmente 2 para addicionar á columna immediata; assim quando a columa da direita dá em somma 9, 19, 29, ..., levamos para a columna seguinte 1, 2, 3, ...

103. Até aqui temos tido exemplos em que tres casas de decimaes são assignadas ao resultado; mas, podemos agora tomar exemplos em que duas, quatro e cinco decimaes são pedidas.

(1) Achar o producto de 3.695 *e* 0.463 precisamente com duas casas de decimaes.

```
 3.,6,9,5
 0.463
 --------
 1.478
   221
    10
 --------
 1.71
```

(2) Achar o producto de 0.23478 *e* 5.7926 precisamente para quatro casas de decimaes.

```
 0.2,3,4,7,8
   5.7926
 -----------
 1.17390
   16434
    2112
      46
      13
 -----------
 1.3599
```


(3) Achar o producto de 27.3164 *e* 0.489673 precisamente para cinco casas de decimaes.

```
 27.,3,1,6,4
  0.489673
 -----------
 10.92656
  2.185312
   .245847
     16389
      1911
        81
 -----------
 13.37610
```

EXERCICIO 51

Achar os productos seguintes, fazendo em cada caso a multiplicação com *uma* casa sómente de decimaes além do numero pedido:

(1) 3.587 *por* 0.695 precisamente para tres decimaes.

(2) 7.439 *por* 0.584 precisamente para dois decimaes.

(3) 0.58946 *por* 4.8324 precisamente para quatro decimaes.

(4) 2.9528 *por* 0.3628 prescisamente para quatro decimaes.

(5) 2.009328 *por* 2.405 precisamente para tres decimaes.

(6) 0.74074 *por* 8.643 precisamente para quatro decimaes.

(7) 86.527 *por* 0.8059 precisamente para dois decimaes.

(8) 14.331 *por* 11.9224 precisamente para dois decimaes.

(9) 26.583 *por* 0.7468 precisamente para dois decimaes.

(10) 87.21872 *por* 0.569423 precisamente para cinco decimaes.

104. O methodo de abreviação é realmente proveitoso quando temos de multiplicar um numero por um factor que diffira pouco da unidade, por excesso ou falta. Exemplifiquemos.

(1) Multiplicar 7.539 *por* 1.002 precisamente para dois decimaes.

$$\begin{array}{ll} & 7.539 \times (1 + 0.002) \\ \text{Add} & \quad\;\; 15 \\ \hline & 7.55 \end{array}$$

(2) Multiplicar 0.5738 *por* 0.997 precisamente para tres decimaes.

$$\begin{array}{ll} & 0.5738 \times (1 - 0.003) \\ \text{Sub} & \quad\;\;\; 17 \\ \hline & 0.572 \end{array}$$

EXERCICIO 52

Multiplicar

(1) 6.857 *por* 1.002 para duas casas decimaes.
(2) 27.540 *por* 1.003 para duas casas decimaes.
(3) 7.9854 *por* 1.002 para tres casas decimaes.
(4) 0.7688 *por* 0.98 para tres casas decimaes.
(5) 0.89678 *por* 0.995 para tres casas decimaes.
(6) 3.6142 *por* 0.999 para tres casas decimaes.
(7) 1.9768 *por* 0.998 para tres casas decimaes.
(8) 7.46978 *por* 0.9997 para tres casas decimaes.
(9) 2.57429 *por* 0.9991 para tres casas decimaes.
(10) 37.4286 *por* 1.005 para tres casas decimaes.

105. Divisão de decimaes. — Para dividir 0.27 por 3, procederemos assim :

$$0.27 \div 3 = \frac{27}{100} \div 3 = \frac{9}{100} = 0.09$$

Analogamente, tendo de dividir 0.00625 por 25, faremos deste modo :

$$0.00625 \div 25 = \frac{625}{100000} \div 25 = \frac{25}{100000} = 0.00025$$

Em ambos os casos *o Quociente é um decimal da mesma ordem que o Dividendo.*

Daqui temos a seguinte Regra :

Se o divisor é um inteiro, effectua-se a operação da Divisão como se o Dividendo fosse tambem um inteiro, e dá-se depois ao quociente tantas casas de decimaes quantas existirem no dividendo.

Para exemplo, supponhamos que temos a dividir 0.00086751 por 243

$$\begin{array}{r} 243)\ 0.00086751\ (357 \\ 729 \\ \hline 1385 \\ 1215 \\ \hline 1701 \\ 1701 \\ \hline \end{array}$$

O Quociente deve ser um decimal de *oitava* ordem ; portanto, o resultado será :

0.00000357

106. Agora observemos, que, se o divisor fôr uma expressão *decimal, podemos em cada caso mudal-a em um Inteiro*, por um processo que vamos explicar.

Se multiplicarmos uma expressão decimal :

por 10, o effeito será deslocar o ponto uma casa para a direita ;

por 100, o effeito será deslocar o ponto duas casas para a direita ;

pôr 1000, o effeito será deslocar o ponto tres casas para a direita ;

e assim por deante.

Por exemplo :

$$123.456 \times 10 = 1234.56$$

e

$$123.456 \times 100 = 12345.6$$

A razão é obvia, porque

$$123.456 \times 10 = \frac{123456}{1000} \times 10 = \frac{123456}{100} = 1234.56$$

e

$$123.456 \times 100 = \frac{123456}{1000} \times 100 = \frac{123456}{10} = 12345.6$$

Póde-se, pois, transformar qualquer divisor em um inteiro, pela multiplicação delle por 10, 100, 1000... conforme seja o divisor um decimal de primeira, segunda, terceira,... ordem.

Por exemplo, se o divisor é 0.000492, e o multiplicarmos por 1000000, nós o transformamos no inteiro 492.

Podemos, portanto, multiplicar o divisor por qualquer numero, desde que tambem multipliquemos o dividendo pelo mesmo numero.

Por exemplo, sendo 8 o divisor e 32 o dividendo, podemos multiplicar cada um por 10. Assim o divisor será 80 e o dividendo 320. Agora, dividindo 32 por 8, ou 320 por 80, o quociente será o mesmo numero, isto é, 4.

107. Vamos, pois, instituir uma Regra geral para a divisão de decimaes :

Se o Divisor fôr um decimal, mudal-o-emos em inteiro pela remoção do ponto um sufficiente numero de casas para a direita, e tambem deslocando o ponto no Dividendo o mesmo numero de casas para a direita. Divide-se como no caso de inteiros. Então, se o Dividendo fôr inteiro, o Quociente tambem deverá ser inteiro ; mas, se o Dividendo fôr um decimal, o Quociente tambem deverá ser um decimal da mesma ordem.

O processo será melhor conhecido pelos exemplos seguintes :

Exemplo (1). Dividir 0.625 *por* 0.025

Tem-se :

$$0.625 \div 0.025 = \frac{0.625}{0.025} = \frac{625}{025} = \frac{625}{25}$$

```
25) 625 (25
    50
    ---
    125
    125
    ---
```

O Quociente deve ser um *inteiro*, porque o Dividendo é um inteiro ; portanto, o Quociente é 25.

Exemplo (2). Dividir 108.997 *por* 2.3

Tem-se :

$$108.997 \div 2.3 = \frac{108.997}{2.3} = \frac{1089.97}{23}$$

```
23) 1089.97 (4739
    92
    ---
    169
    161
    ---
      89
      69
     ---
     207
     207
     ---
```

Neste caso o Quociente é um decimal da *segunda* ordem, porque o Dividendo é um decimal da segunda ordem ; portanto, o Quociente será 47.39

Exemplo (3). Dividir 0.625 *por* 0.00025

Tem-se:

$$0.625 \div 0.00025 = \frac{0.625}{0.00025} = \frac{62500}{00025} = \frac{62500}{25}$$

```
25) 62500 (2500
    50
    ---
    125
    125
    ---
      00
```

Neste caso o Quociente é um *inteiro*, porque o Dividendo é *um inteiro*; portanto, o Quociente será 2500.

Exemplo (*4*). Dividir 0.00169 *por* 1.3

Tem-se :

$$0.00169 \div 1.3 = \frac{0.00169}{1.3} = \frac{0.0169}{13}$$

```
13) 0.0169 (13
     13
     39
     39
```

Neste caso o Quociente é um decimal da *quarta* ordem, porque o Dividendo é um decimal da quarta ordem; portanto, o Quociente é 0.0013

Exemplo (*5*). Dividir 625 *por* 0.25

Tem-se :

$$625 \div 0.25 = \frac{625}{0.25} = \frac{62500}{25}$$

```
25) 62500 (2500
    50
     125
     125
       00
```

Neste caso o Quociente é um *inteiro*, porque o Dividendo é inteiro; portanto, o Quociente é 2500

Taes são os casos de divisão *exacta*, isto é, casos em que o processo da divisão termina *sem que haja resto*.

EXERCICIO 53

Dividir

(1) 1.296 *por* 0.108
(2) 17.28 *por* 0.0012
(3) 0.00169 *por* 1.3
(4) 2921 *por* 0.23
(5) 15633.0062 *por* 362.9

(6) 1 *por* 0.0001
(7) 0.03096 *por* 0.000072
(8) 0.7644 *por* 0.0052
(9) 0.0000615228 *per* 307
(10) 746.44808 *por* 7.58
(11) 0.24294591 *por* 36.9
(12) 63987.42 *por* 0.000073
(13) 0.26986365 *por* 3500
(14) 23986.14 *por* 0.00009
(15) 0.00131053 *por* 0.0065
(16) 617325 *por* 0.00025
(17) 0.830676 *por* 0.000231
(18) 0.00019517 *por* 673
(19) 1.0191 *por* 0.00079
(20) 2078.61 *por* 579
(21) 241.16047 *por* 0.527
(22) 0.65220834 *por* 0.00854
(23) 4700460.66583 *por* 0.00518963

108. Tomemos agora os exemplos seguintes:

Dividir 347 *por* 0.64

Teremos :

$$347 \div 0.64 = \frac{347}{0.64} = \frac{34700}{64}$$

O calculo faz-se assim:

```
64) 34700 (542
    320
     270
     256
      140
      128
       12
```

Resultam o Quociente 542 e o resto 12

Se quizermos proseguir na divisão, podemos, collocando um ponto decimal no fim do dividendo, annexar quantos zeros desejarmos, observando que todos os algarismos, que devem vir depois dos que já achamos para o Quociente, serão decimaes.

A operação, completada desde o inicio, será esta :

```
64) 34700.0000 (542.1875
    320
    ---
     270
     256
     ---
      140
      128
      ---
       120
        64
       ---
        560
        512
        ---
         480
         448
         ---
          320
          320
          ---
```

EXERCICIO 54

Dividir

(1) 7.45 *por* 0.32	(2) 14.327 *por* 12.8
(3) 43.26 *por* 12.5	(4) 7432.974 *por* 0.225
(5) 1.2 *por* 625	(6) 0.217 *por* 1250

109. Observemos, que, empregando a Divisão abreviada, o exemplo precedente póde ser feito com mais concisão. Assim, tendo de dividir 34700 por 64, teremos :

```
8 | 34700.0
8 | 4337.5000
    542.1875   Quociente
```

Assim tambem, para dividir 43672.509 por 36, teremos :

```
4 | 43672.50900
9 | 10918.12725
    1213.12525   Quociente
```


Egualmente, para dividir 0.0000013932 *por* 32, procederemos deste modo :

```
4 | 0.0000013932
8 | 0.0000003483000
    0.000000435375   Quociente
```

NOTA — A divisão por 10, 100, 1000,... effectua-se pelo deslocamento das casas decimaes no Dividendo uma, duas, tres,... casas para a esquerda.

Exemplos :

$$24.6 \div 10 = 2.46$$
$$0.47 \div 100 = 0.0047$$

EXERCICIO 55

Empregar a Divisão abreviada para achar o Quociente quando dividimos :

(1) 426.478 *por* 16	(2) 0.07849782 *por* 72
(3) 362.47 *por* 0.025	(4) 9000 *por* 0.00036
(5) 42.007437 *por* 0.24	(6) 0.00007263 *por* 4.5
(7) 2.4715 *por* 0.000016	(8) 0.00463 *por* 50
(9) 0.001 *por* 100	(10) 0.001001001 *por* 2000

Observação—O processo de Divisão é abreviado pela multiplicação do Dividendo e Divisor por um numero que transforme o Divisor em uma potencia ou um multiplo de 10. Com effeito, para dividir 24.46927151 *por* 12.5 multipliquemos ambos por 8. Teremos :

$$\frac{24.46927151}{12.5} = \frac{195.75417208}{100} = 1.9575417208$$

110. Nos Exemplos até agora dados temos sómente considerado casos de divisão *exacta*.

Em todos os casos podemos proseguir com a divisão, até que não haja resto, ou até que certos algarismos no

Quociente reappareçam de novo, e novamente na mesma ordem.

Antes de darmos um exemplo desta reproducção de algarismos, observemos que podemos frequentemente achar o Quociente *com um certo numero de casas de decimaes.*

Por exemplo, supponhamos que temos de achar o Quociente proveniente da divisão de 2.47 *por* 0.37, com quatro casas de decimaes.

$$2.47 \div 0.37 = \frac{2.47}{0.37} = \frac{247}{37}$$

```
37) 247.0000 (6.6756
    222
     250
     222
      280
      259
       210
       185
        250
        222
```

Neste caso, o Quociente, precisamente com quatro casas de decimaes, será 6.6756.

EXERCICIO 56

Achar o Quociente com tres casas de decimaes quando dividimos :

(1) 42.5 *por* 0.0023 (2) 0.197 *por* 0.79
(3) 37.9 *por* 409 (4) 27100 *por* 0.00313
(5) 0.0269 *por* 0.281 (6) 229 *por* 0.007

111. Dizimas periodicas — Continuando a divisão começada no exemplo dado (*Artigo 110*), acharemos os

algarismos 756 voltando de novo, e novamente na mesma ordem no Quociente. Dest'arte o Quociente será a *série*:

6.6756756756756.......

sem possivel terminação.

Outro exemplo : Dividir 90 *por* 0.0011

Teremos :

$$90 \div 0.0011 = \frac{90}{0.0011} = \frac{900000}{11}$$

```
11) 900000
     81818
```

Até aqui o Quociente é um inteiro ; mas, proseguindo a divisão, obteremos uma expressão decimal.

Com effeito, annexando mais dois zeros ao dividendo, precedidos de um ponto decimal, teremos :

```
11) 900000.00
     81818.18
```

Proseguindo a divisão, com a extensão que se deseje, surgirão os dois algarismos 18 voltando de novo, e novamente na mesma ordem. Um decimal desta especie chama-se *dizima* circulante, recorrente, ou *periodica*.

112. Representação symbolica — A extensão de um *periodo* é representada pela collocação de *um ponto* sobre o *primeiro* e de *outro ponto* sobre o *ultimo* dos seus algarismos.

Assim

0.18181818......

escreve-se simplesmente

$$0.\dot{1}\dot{8}$$

e significa um decimal de *tal ordem que não pode ser representado por nenhum indice finito*; isto é, *tem um numero infinito de algarismos.*

Assim tambem,

$6.\dot{7}5\dot{6}$ significa $6.756756756\ldots\ldots$
$0.\dot{0}4\dot{7}$ significa $0.047047047\ldots\ldots$
$0.4\dot{3}7\dot{2}$ significa $0.4372372372\ldots\ldots$
$26.04\dot{7}\dot{9}$ significa $26.0479797979\ldots\ldots$
$0.0002\dot{6}$ significa $0.0002666666\ldots\ldots$

113. TRANSFORMAÇÃO — Uma Fracção Ordinaria transforma-se em Fracção Decimal pelo processo seguinte:

Reduz-se a fracção ordinaria á sua expressão mais simples e depois procura-se o Quociente resultante da divisão do numerador pelo denominador, pela regra da divisão de decimaes. Expliquemos :

Reduzir $\frac{3}{8}$ á decimal. Faremos assim :

```
8) 3.000
   0.375
```

portanto

$$\frac{3}{8} = 0.375$$

Reduzir $\frac{47}{32}$ á decimal. Teremos :

```
32) 47.00000 (1.46875
    32
    150
    128
     220
     192
      280
      256
       240
       224
        160
        160
```

portanto

$$\frac{47}{32} = 1.46875.$$

Neste caso, podiamos ter operado assim :

```
4 | 47.00
8 | 11.75
    1.46875
```

Egualmente, para reduzir $\frac{1}{7}$ á decimal, procederemos assim :

```
7 | 1.00000000
    0.14285714....
```

portanto

$$\frac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7}$$

114. PROPRIEDADE GERAL — Provemos que, quando uma Fracção Ordinaria é reduzida á decimal, ou a operação será terminada ou os algarismos do Quociente se reproduzirão na mesma ordem.

Com effeito, consideremos a operação pela qual uma fracção como $\frac{1}{7}$ é reduzida á decimal. Os unicos restos que podem occorrer são :

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$$

Se occorrer o resto 0, a divisão faz-se exactamente. Se não occorrer o resto 0, podemos ter unicamente *seis* restos differentes, e quando qualquer delles occorra uma segunda vez, teremos uma recorrencia dos restos na mesma ordem.

Quando uma fracção, em sua expressão mais simples, é reduzida á decimal e produz uma dizima periodica, o *limite extremo* do numero de algarismos no *periodo* da dizima é dado pelo denominador da fracção, diminuido de uma unidade.

Assim :

$\frac{1}{7}$ produz uma dizima periodica de 6 casas ;

$\frac{2}{19}$ produz uma dizima periodica de 18 casas ;

$\frac{3}{29}$ produz uma dizima periodica de 28 casas; e

$\frac{45}{53}$ produz uma dizima periodica de 13 casas.

113. Condição necessaria — Uma Fracção Ordinaria, reduzida aos seus menores termos, sómente poderá ser expressa em Decimal Exacto se o seu denominador fôr composto de factores taes como os numeros 2 e 5.

Assim

$\frac{3}{8}$ póde ser expresso em decimal exacto porque

$$8 = 2 \times 2 \times 2$$

$\frac{3}{20}$ póde ser expresso em decimal exacto porque

$$20 = 2 \times 2 \times 5$$

$\frac{4}{125}$ póde ser expresso em decimal exacto porque

$$125 = 5 \times 5 \times 5$$

A razão disto é, que nenhuma fracção póde ser expressa em Decimal Exacto, se não for transformavel em uma fracção que tenha 10, ou alguma potencia de 10, para seu denominador. E nenhum numero póde por multiplicação ser mudado em potencia de 10 se não for composto sómente de factores 2 ou 5. Assim : 8 póde ser mudado em uma potencia de 10, pela sua multiplicação por $5 \times 5 \times 5$; 125 póde ser mudado em potencia de 10, pela sua multiplicação por $2 \times 2 \times 2$; 40 póde ser mudado em potencia de 10, pela sua multiplicação por 5×5

Portanto

$$\frac{3}{8} = \frac{3}{2 \times 2 \times 2} = \frac{3 \times 5 \times 5 \times 5}{2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5} = $$
$$= \frac{375}{1000} = 0.375$$

$$\frac{7}{125} = \frac{7}{5 \times 5 \times 5} = \frac{7 \times 2 \times 2 \times 2}{5 \times 5 \times 5 \times 2 \times 2 \times 2} =$$
$$= \frac{56}{1000} = 0.056$$

$$\frac{9}{40} = \frac{9}{2 \times 2 \times 10} = \frac{9 \times 5 \times 5}{2 \times 2 \times 10 \times 5 \times 5} =$$
$$= \frac{225}{1000} = 0.225$$

Mas, os numeros taes como 7, 12, 13, 30, não podem ser mudados em potencias de 10 por multiplicação; e, portanto, as fracções

$$\frac{3}{7} \quad \frac{5}{12} \quad \frac{5}{13} \quad \frac{11}{30}$$

não podem ser reduzidas a decimaes exactos.

Podemos tambem observar que, quando uma Fracção Ordinaria em seus menores termos for reduzida á decimal exacto, a ordem deste decimal será expressa pelo maior numero de vezes que cada um dos factores 2 ou 5 entrar no denominador.

EXERCICIO 57

Converter em Decimaes as fracções ordinarias seguintes :

(1) $\frac{7}{20}$ (2) $\frac{11}{25}$ (3) $\frac{6}{7}$ (4) $\frac{1}{99}$ (5) $\frac{1}{999}$

(6) $\frac{1}{41}$ (7) $\frac{11}{21}$ (8) $\frac{13}{60}$ (9) $\frac{17}{1375}$ (10) $\frac{129}{55}$

116. Divisão com approximação — O methodo de abreviar a operação da divisão, quando o numero de algarismos no divisor é forte, e se exige para quociente um numero limitado de casas decimaes não superior ao numero de algarismos no divisor, é mui simples.

Em todos os casos, muda-se o divisor em um Inteiro e remove-se o ponto decimal no dividendo um mesmo numero de casas para a direita que no divisor.

Isto posto, divide-se, como no processo ordinario da divisão, até que todos os algarismos no dividendo tenham sido utilisados. Então, em logar de addicionar uma cifra ao resto, de modo a proseguir na divisão, separa-se um algarismo da direita do divisor, e divide-se pelo numero formado pelos algarismos restantes. Tendo em attenção, quando se multiplica o divisor por cada algarismo successivo do quociente, addicionar ao producto o algarismo que foi mentalmente guardado quando se regeitou o algarismo do divisor, proseguir-se-á separando successivamente os algarismos do divisor. Exemplifiquemos :

Exemplo (1) — Dividir 1143.4 *por* 3416.4 até cinco casas de decimaes.

```
3, 4, 1, 6, 4) 11434.0 (0.33468
               10249 2
               -------
                1184 8
                1024 9
                ------
                 159 9
                 136 6
                 -----
                  23 3
                  20 4
                  ----
                   2 9
                   2 7
```


Exemplo (2) — Dividir 650 *por* 24.69 até tres casas de decimaes.

```
2, 4, 6, 9) 65000 (26.326
            4938
            -----
            15620
            14814
            -----
              806
              740
              ---
               66
               49
               --
               17
               14
```

Exemplo (3) — Dividir 700 *por* 15.43 até tres casas de decimaes.

```
1, 5, 4, 3) 70000 (45.367
            6172
            ----
             8280
             7715
             ----
              565
              462
              ---
              103
               92
              ---
               11
               10
```

Exemplo (4) — Dividir 1.277 *por* 0.99917 até tres casas de decimaes.

```
99, 9, 1, 7) 127700 (1.278
             99917
             -----
             27783
             19983
             -----
              7800
              6993
              ----
               807
               799
```

Exemplo (5) — Dividir 3.03 *por* 103.4 até quatro casas de decimaes.

```
10, 3, 4) 30.30 (0.0293
          2068
          ----
           962
           930
          ----
            32
            30
          ----
```

Exemplo (6) — Exprimir $\frac{1}{273}$ com um decimal de cinco casas.

```
2, 7, 3) 1.000 (0.00366
           819
          ----
           181
           163
          ----
            18
            16
```

Exemplo (7) — Exprimir $\frac{394.126}{98.3968}$ com um decimal de cinco casas.

```
9, 8, 3, 9, 6, 8) 3941260 (4.00547
                  3935872
                  -------
                     5388
                     4919
                     ----
                      469
                      393
                     ----
                       76
                       68
                     ----
```

EXERCICIO 58

Effectuar as divisões seguintes, observando o methodo de approximação, e conduzindo as operações até ao numero de casas decimaes especificadas em cada exemplo:

(1) 6500 *por* 22.4 para duas casas de decimaes.
(2) 207 *por* 11.4 para duas casas de decimaes.

(3) 32 *por* 2.21 para duas casas de decimaes.
(4) 17.45 *por* 0.0896 para duas casas de decimaes.
(5) 0.5924 *por* 0.1639 para tres casas de decimaes.
(6) 9.818 *por* 3.618 para tres casas de decimaes.
(7) 36.419 *por* 8.1498 para quatro casas de decimaes.
(8) 326.14 *por* 4.8163 para quatro casas de decimaes.
(9) 57.14 *por* 42.86 para tres casas de decimaes.
(10) 19.24 *por* 0.2043 para duas casas de decimaes.
(11) 5.807 *por* 2.923 para tres casas de decimaes.
(12) 37.686 *por* 37.592 para quatro casas de decimaes.
(13) 21.14 *por* 19.61 para tres casas de decimaes.
(14) 22.6 *por* 0.5037 para tres casas de decimaes.
(15) 86.68 *por* 28.87 para tres casas de decimaes.
(16) 26.914 *por* 9.437 para tres casas de decimaes.
(17) 9.082 *por* 0.5643 para tres casas de decimaes.
(18) 226.154 *por* 19.718 para quatro casas de decimaes.
(19) 3.152 *por* 0.9137 para tres casas de decimaes.
(20) 126.214 *por* 143.618 para quatro casas de decimaes.

117. DIZIMAS PERIODICAS — *Periodicas simples* são as fracções decimaes cujos periodos começam logo após o ponto decimal.

Assim:

$$0.\dot{3},\quad 0.\dot{2}\dot{7},\quad 0.\dot{0}42\dot{9}$$

são fracções decimaes *periodicas simples*.

Periodicas mixtas são as fracções decimaes cujos periodos são precedidos de um ou mais algarismos.

Assim:

$$0.2\dot{3},\quad 0.24\dot{2}\dot{7},\quad 0.35\dot{0}42\dot{9}$$

são fracções decimaes *periodicas mixtas*.

118. Procuremos a Fracção Ordinaria equivalente a uma dada periodica simples.

Exemplo (1). Achar a Fracção Ordinaria equivalente a $0.\dot{3}$.

Procederemos assim:

A fracção periodica simples é 0.333...,

Tornando esta fracção 10 vezes maior, resultará 3.3333....

Subtrahindo o decimal deste resultado, vem 3.0000

Então, **9** vezes o decimal = 3; portanto, o decimal será:

$$\frac{3}{9} \text{ ou } \frac{1}{3}$$

Exemplo (2). Achar a Fracção Ordinaria equivalente a

$$0.\dot{2}4\dot{7}$$

O decimal = 0.247247....
De 1000 vezes o decimal, ou, 247.247.....
subtrahindo o decimal, ou, 0.247.....
teremos:

999 vezes o decimal = 247; donde,

$$\text{o decimal} = \frac{247}{999}$$

Exemplo (3). Achar a Fracção Ordinaria equivalente a

$$0.\dot{0}42\dot{3}$$

O decimal = 0.04230423....
De 10000 vezes o decimal, ou, 423.0423....
subtrahindo o decimal, ou, 0.0423....
teremos:

9999 vezes o decimal = 423; donde,

$$\text{o decimal} = \frac{423}{9999} = \frac{47}{1111}$$

EXERCICIO 59

Converter em Fracções Ordinarias irreductiveis:

(1) $0.\dot{6}$ (2) $0.\dot{2}\dot{7}$ (3) $0.\dot{0}4\dot{5}$ (4) $0.\dot{3}12\dot{3}$
(5) $0.\dot{0}07\dot{2}$ (6) $0.\dot{4}02\dot{3}$ (7) $0{\cdot}\dot{0}005\dot{4}$ (8) $0.\dot{0}000\dot{9}$

119. Do que temos dito, resulta a regra seguinte para reduzir uma dizima periodica simples á Fracção Ordinaria:

Tomar um dos periodos para formar o Numerador e para Denominador o numero formado pela repetição de 9 tantas vezes quantos forem os algarismos no periodo.

Assim:

$$0.\dot{7} = \frac{7}{9}$$

$$0.\dot{0}\dot{5} = \frac{5}{99}$$

$$0.\dot{4}32\dot{7} = \frac{4327}{9999}$$

120. Procuremos agora a Fracção Ordinaria equivalente a uma dada periodica mixta.

Exemplo (1). Achar a Fracção Ordinaria equivalente a

$$0.2\dot{3}\dot{7}$$

O decimal = 0.23737....
De 1000 vezes o decimal, ou, 237.37....
subtrahindo 10 vezes o decimal, ou, 2.37....
teremos:

990 vezes o decimal = 235; donde,

$$\text{o decimal} = \frac{235}{990} = \frac{47}{198}$$

Exemplo (2). Achar a Fracção Ordinaria equivalente a

$$0.0\dot{4}72\dot{6}$$

O decimal $= 0.04726726....$

De 100000 vezes o decimal, ou, $4726.726....$

subtrahindo 100 vezes o decimal, ou, $4.726....$

teremos:

69900 vezes o decimal $=$ 4722 ; donde,

$$\text{o decimal} = \frac{4722}{99900} = \frac{787}{16650}$$

Exemplo (3). Achar a Fracção Ordinaria equivalente a

$$3.1\dot{4}$$

O decimal $= 3.1444....$

De 100 vezes o decimal, ou, $314.44....$

subtrahindo 10 vezes o decimal, ou, $31.44....$

teremos:

90 vezes o decimal $=$ 283 ; donde,

$$\text{o decimal} = \frac{283}{90}$$

EXERCICIO 60

Converter em Fracções Ordinarias irreductiveis:

(1) $0.4\dot{2}\dot{5}$ (2) $0.47\dot{5}\dot{9}$ (3) $4.25\dot{3}$ (4) $0.004\dot{2}\dot{6}$
(5) $53.00\dot{2}4\dot{3}$ (6) $7.2\dot{0}1\dot{1}$ (7) $2.53\dot{0}\dot{6}$

121. Do que temos dito, resulta a regra seguinte para reduzir uma dizima periodica mixta á Fracção Ordinaria:

O Numerador é a differença entre o numero formado pela parte não periodica seguida de um periodo, e o nu-

mero formado pela parte não periodica. O Denominador forma-se de tantos 9 quantos são os algarismos de um periodo seguidos de tantos 0 quantos são os algarismos entre o ponto decimal e o primeiro periodo.

Assim:

$$0.2\dot{4}\dot{5} = \frac{245 - 2}{990} = \frac{243}{990} = \frac{27}{110}$$

$$0.004\dot{7}\dot{3} = \frac{473 - 4}{99000} = \frac{469}{99000}$$

$$4.\dot{5} = \frac{45 - 4}{9} = \frac{41}{9}$$

$$7.34\dot{5} = \frac{7345 - 734}{900} = \frac{6611}{900}$$

122. O methodo de effectuar as operações arithmeticas com as dizimas periodicas torna-se conhecido pelos exemplos seguintes.

I. *Addição* — Achar a somma de

$$3.4\dot{9},\quad 4.\dot{0}4\dot{7} \text{ e } 0.14\dot{6}\dot{3}$$

Façamos primeiramente os decimaes ser todos da mesma ordem, assim:

$$3.4\dot{9}99,\quad 4.\dot{0}4\dot{7}0,\quad 0.14\dot{6}\dot{3}$$

Então, desde que os periodos constam de 1, 3 e 2 algarismos respectivamente, e o M. M. C. de 1, 3 e 2 é 6, carreguemos sobre todos os decimaes *seis* casas de dizimas; assim:

$$\begin{array}{r} 3.4999999999 \\ 4.0470470470 \\ \underline{0.1463636363} \\ 7.6\dot{9}341068\dot{} \end{array}$$

II. *Subtracção* — Procede-se como na Addição.

Seja a subtrahir $5.24\dot{7}$ do $8.\dot{0}5\dot{9}$
Teremos:

$$\begin{array}{r} 8.059059 \\ \underline{5.247777} \\ 2.81\dot{1}2\dot{8} \end{array}$$

Em ambas operações é necessario algum cuidado, afim de ver o algarismo que deve ser conduzido, se as columnas omittidas forem tomadas em consideração.

III. *Multiplicação e Divisão* — As dizimas periodicas devem ser convertidas em fracções ordinarias, e então o Producto ou Quociente destas fracções será achado, podendo ser depois convertido em decimal.

Assim:

$$4.\dot{5} \times 3.\dot{7} = \frac{45-4}{9} \times \frac{37-3}{9} = \frac{41}{9} \times \frac{34}{9} = \frac{1394}{81}$$

e

$$0.0\dot{5} \div 0.04\dot{2} = \frac{5}{90} \div \frac{38}{900} =$$
$$= \frac{5}{90} \times \frac{900}{38} = \frac{5 \times 10}{38} = \frac{25}{19}$$

Podemos agora, se for necessario, converter $\frac{1394}{81}$ e $\frac{25}{19}$ em decimaes.

EXERCICIO 61

Achar o valor das expressões seguintes:

(1) $2.5\dot{7} + 0.\dot{0}4\dot{3} + 13.\dot{2}$

(2) $14.7\dot{6}\dot{2} + 3.\dot{5}4\dot{9} + 2.20\dot{4}$

(3) $15.0\dot{2}\dot{5} - 13.\dot{2}4\dot{7}$

(4) $0.0\dot{2}4\dot{6} - 0.00\dot{3}9\dot{7}$

(5) $3.\dot{7} \times 5.\dot{4}\dot{9}$

(6) $0.007\dot{2} \times 0.\dot{4}\dot{5}$

(7) $3.\dot{4} \div 4.0\dot{9}$

(8) $0.0\dot{7}\dot{4} \div 0.5\dot{9}$

123. Quando as fracções ordinarias e as fracções decimaes são combinadas na mesma expressão simplifica-se muito o calculo reduzindo as fracções ordinarias á fórma decimal.

Assim, tendo de achar a somma de

$$476\,\frac{1}{4} \quad 13\,\frac{3}{8} \quad \text{e} \quad 10{\cdot}375$$

procederemos deste modo:—

$$\begin{array}{lr} 476\,\frac{1}{4} = & 476.25 \\ 13\,\frac{3}{8} = & 13.375 \\ & \underline{10.375} \\ \text{Somma} & 500.000 \end{array}$$

EXERCICIO 62

REVISÃO

(1) Multiplicar 0.0204 *por* 40.2; e dividir 99.9666 *por* 0.037

(2) Multiplicar 0.0701 *por* 700.01; e dividir 8886.66 *por* 0.0037

(3) Reduzir a dizimas periodicas

$$\frac{13}{150} \quad \frac{17}{495} \text{ e } \frac{61}{33}$$

(4) Reduzir a dizimas periodicas

$$\frac{7}{450} \quad \frac{31}{165} \text{ e } \frac{53}{66}$$

(5) Dividir 454206 *por* 3.05 × 0.073 e *por* 6.1 × 2.04

(6) Dividir 3833336 *por* 0.031 × 2.05 e *por* 8.99 × 20.8

(7) Multiplicar 35.603 *por* 27.61 e $43.\dot{2}9\dot{1}$ *por* $6.2\dot{4}$

(8) Dividir 186.4302 *por* 31.02 ; 18643.02 *por* 0.3102 e 1864302 *por* 3.102.

(9) Multiplicar 421.619 *por* 0.547 ; e dividir 0.2107206 *por* 0.0004206.

(10) Dividir 0.0863547 *por* 0.000713 para quatro casas decimaes.

(11) Dividir 104 *por* 7 e dar a razão porque ha dizima periodica.

(12) Dividir 0.8607535 *por* 0.000974 para quatro casas de decimaes.

(13) Multiplicar 76.371 *por* 8.54 ; e dividir $2.\dot{9}80\dot{1}$ *por* $7.\dot{4}5\dot{0}$.

(14) Dividir 0.37848 *por* 0.456 ; 3.7848 *por* 0.0456; e 3784.8 *por* 0.00456.

(15) Multiplicar 457.61 *por* 0.527; e dividir $477.5\dot{5}8\dot{5}$ *por* $21.\dot{3}5\dot{1}$.

(16) Dividir 25.567 *por* 3.7 ; 255.67 *por* 0.0037; e 0.25567 *por* 0.00037.

(17) Dividir 207.861 *por* 5790 ; e 160 *por* 0.00004.

(18) Reduzir $5\frac{81}{625}$ e $3\frac{37}{54}$ a decimaes ; e 0.109375 e $0.5\dot{7}4\dot{0}$ a fracções ordinarias,

(19) Dividir 1.9517 *por* 673000 e 64000 *por* 0.0008.

(20) Reduzir $4\frac{173}{3125}$ e $5\frac{43}{540}$ a decimaes; e 0.9375 e $0.4\dot{9}2\dot{5}$ a fracções ordinarias.

(21) Subtrahir 3.64 *de* 12.064 ; e dividir 1.0191 *por* 79000.

(22) Subtrahir 3.05 *de* 5.015; e dividir 10.24 *por* 0.0128.

(23) Dividir $\frac{1.44}{0.18}$ *de* 0.36 *por* $\frac{36}{0.05}$ de 6.

(24) Dividir $\frac{0.052}{1.3}$ de 1.56 *por* $\frac{0.0624}{14.4}$ de 25.92.

(25) Dividir *a differença de* 0.04 *e* 0.404 *pela somma de* $3\frac{23}{125}$ e $4\frac{23}{50}$

(26) Exprimir a somma de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $0.0\dot{3}\dot{1}$ e $0.\dot{5}\dot{7}$ em dizima periodica.

(27) Dividir *a differença de* 0.4607 *e* 0.00809 *pela differença de* $6\frac{51}{80}$ *e* $5\frac{125}{128}$.

(28) Exprimir a somma de $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $1.2\dot{7}\dot{1}$ *e* $1.\dot{3}\dot{5}$ em dizima periodica.

(29) Achar o valor, com cinco casas de decimaes, de

$$\frac{24}{17} - \frac{14}{11 \times 31}$$

(30) Achar o valor, com cinco casas de decimaes, de

$$\frac{27}{14} - \frac{21}{17 \times 31}$$

(31) Addicionar $23.07\dot{6}$, $19.\dot{2}4\dot{5}$, $31.2\dot{0}\dot{3}$

(32) Addicionar $23.\dot{0}7\dot{6}$, $19.2\dot{4}\dot{5}$, $31.20\dot{3}$

(33) Subtrahir $25.\dot{0}4\dot{7}$ *de* $29.25\dot{9}$

(34) Multiplicar $3.\dot{7}$ *por* $4.\dot{0}5$

(35) Dividir $4.\dot{2}7$ *por* $0.\dot{4}\dot{2}$

Tal é a theoria das fracções decimaes.

CAPITULO VI

Calculo Complementar

I.ª THEORIA DA RAIZ QUADRADA

124. O *Quadrado* de um numero é o producto de dois factores eguaes a esse numero. Assim 144 é o quadrado de 12 e 225 é o quadrado de 15.

O symbolo ^{2}, collocado acima de um numero, exprime o quadrado do numero. Assim 5^2 representa o quadrado de 5.

125. A Raiz Quadrada de um numero dado é o numero cujo quadrado é egual ao numero dado. Assim a rai quadrada de 144 é 12, porque o quadrado de 12 é 144.

O symbolo $\sqrt{\ }$, collocado antes de um numero, significa que a raiz quadrada do numero deve ser calculada. Assim lê-se $\sqrt{25}$ «a raiz quadrada de 25».

126. Um numero que tiver um inteiro para sua raiz quadrada, chama-se Quadrado Perfeito.

127. Dos quadrados perfeitos menores que 100 facil é conhecer as raizes quadradas. Assim conhecemos que

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

são as raizes quadradas dos quadrados perfeitos

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81

De muitos quadrados perfeitos maiores que 100 tambem conhecemos as suas raizes quadradas. Sabemos, por exemplo, que 13 é a raiz quadrada de 169, que 20 é a raiz quadrada de 400, que 100 é a raiz quadrada de 10000, etc. Mas temos regras para achar as raizes quadradas de quaesquer numeros, como vamos mostrar.

Supponhamos, primeiramente, que temos de achar a raiz quadrada de 1225. Faremos deste modo:

Separamos por uma linha os dois algarismos da direita:

```
12 | 25
```

Os algarismos 12 formam o primeiro periodo.

Os algarismos 25 formam o segundo periodo.

Procuramos o maior quadrado perfeito mais proximo de 12, que é 9; collocamos este quadrado abaixo de 12 e escrevemos a sua raiz quadrada, que é 3, como primeiro algarismo da raiz quadrada que temos a calcular, assim :

```
12 | 25 (3
 9
```

Subtrahimos 9 de 12, e annexamos ao resto 3 o segundo periodo 25, para formar um dividendo; dobramos o primeiro algarismo da raiz, e este dobro será o primeiro termo de um divisor. Fazemos assim:

```
     12 | 25 (3
      9
 6  | 325
```

Temos de annexar um outro algarismo ao 6; portanto, este algarismo representa seis dezenas, ou 60. Então, vejamos o numero de vezes que 60 se contem em 325; isto sendo cinco vezes, ponhamos 5 como segundo algarismo da raiz e tambem annexemos 5 ao 6. Façamos assim:

```
     12 | 25 (35
      9
 65 | 325
```

Multipliquemos agora 65 por 5, e escrevamos o producto abaixo de 325. Subtrahindo o producto de 325, não

encontramos resto ; concluimos, pois, que 35 é a raiz quadrada de 1225. O processo completo será :

```
     12 | 25 (35
      9
 65 | 325
    | 325
```

Agora procuremos a raiz quadrada de 622521.

Separemos por um traço vertical os dois algarismos da direita e por outro traço vertical os outros dois algarismos seguintes. O processo para achar os primeiros dois algarismos da raiz é o mesmo que o do primeiro exemplo. Assim, teremos:

```
      62 | 25 | 21 (78
      49
 148 | 1325
     | 1184
        141
```

Annexemos ao resto o terceiro periodo, 21, e dobremos a parte da raiz já achada, 78, considerando o resultado 156 como um divisor parcial. Annexemos o quociente 9 á raiz e ao divisor e multiplicando 1569 por 9, escrevamos o producto abaixo de 14121. O processo, por completo, será:

```
       62 | 25 | 21 (789
       49
  148 | 1325
      | 1184
 1569 |  14121
      |  14121
```

Donde a raiz procurada, será 789.

NOTA —Na pratica, em vez de dividirmos 1325 por 140, podemos dividir 132 por 14; e em vez de dividirmos 14121 por 1560, podemos dividir 1412 por 156. O quociente assim obtido é, não obstante, algumas vezes muito forte.

Procuremos agora a raiz quadrada de 189475225.

Separando os algarismos, por pares, da direita para esquerda, vemos que o primeiro periodo terá só um algarismo, porque o quadrado proposto possue numero impar de algarismos. Teremos:

```
        1 | 89 | 47 | 52 | 25 ( 13765
        1
  23   | 89
       | 69
 267   | 2047
       | 1869
2746   |  17852
       |  16476
27525  |   137625
       |   137625
```

NOTA— Dividindo 89 por 20 obtemos o quociente 4; mas é forte, porque se o addicionarmos ao divisor teremos 24, numero que sendo multiplicado por 4 dá 96, producto este que não póde ser subtrahido de 89.

Achar a raiz quadrada de 39601.

```
       3 | 96 | 01 ( 199
       1
 29   | 296
      | 261
389   | 3501
      | 3501
```

NOTA I—A divisão de 296 por 20 aproveita as observações do ultimo exemplo.

NOTA II —O segundo resto, 35, é maior que o divisor, 29, resultado frequente nesta operação de raiz quadrada.

EXERCICIO 63

Achar as raizes quadradas de:

(1) 196	(2) 529
(3) 1024	(4) 5625
(5) 88209	(6) 119025

(7) 106929	(8) 751689
(9) 193600	(10) 697225
(11) 36372961	(12) 22071204
(13) 550183936	(14) 5256250000
(15) 4124961	(16) 546121000000
(17) 32239684	(18) 191810713444.

128. RAIZ QUADRADA DE UMA FRACÇÃO DECIMAL.

Quando o numero dado tem numero par de casas decimaes, acha-se a raiz quadrada como se o numero fosse inteiro e dá-se para raiz um numero de casas decimaes egual á metade do numero de casas decimaes do quadrado.

Por exemplo, se o quadrado for um decimal da sexta ordem, a raiz quadrada deverá ser um decimal da terceira ordem.

Procuremos, por exemplo, a raiz quadrada de

5.322249

```
      5. | 32 | 22 | 49 ( 2.307
      4
43   | 132
     | 129
46   |   322
```

Pois que 46 não se contém em 32 annexamos um 0 ao divisor e tambem á raiz, ficando assim o periodo:

```
4607 | 32249
     | 32249
```

EXERCICIO 64

Achar as raizes quadradas de:

(1) 16.81	(2) 281.9041
(3) 0.9025	(4) 0.2601
(5) 0.0625	(6) 0.000729
(7) 17242.3161	(8) 1.002001
(9) 44415.5625	(10) 18947.5225

129. A raiz quadrada de uma fracção decimal póde ser achada depois de mudada em um decimal cujo indice de sua ordem seja um numero par. Assim para ter a raiz quadrada de 0.4, mudaremos primeiro o decimal em outro decimal equivalente da segunda, quarta, sexta,... ordem ; isto é, faremos deste modo:

0.40, 0.4000, 0.400000....

Assim o denominador da fracção equivalente será empre um quadrado perfeito, que é o caso das fracções:

$$\frac{40}{100},\ \frac{4000}{10000},\ \frac{400000}{1000000},\ \ldots\ldots$$

mas não o das fracções :

$$\frac{40}{10},\ \frac{400}{1000},\ \frac{40000}{100000},\ \ldots.$$

Tambem, pois que, por um par de algarismos no quadrado teremos um algarismo na raiz, deveremos tomar um numero de algarismos, na parte decimal do quadrado, duplo do numero de casas decimaes que deverá ter a raiz.

Supponhamos, por exemplo, que temos de achar a raiz quadrada de 0.144 com quatro casas decimaes.

Devemos ter oito casas decimaes no quadrado ; portanto, temos:

0.14400000

Isto posto, procedemos como na extracção da raiz de numeros inteiros, mas a raiz sendo um decimal da quarta ordem. Assim:

```
        0.14 | 40 | 00 | 00 ( 0.3794....
         9
 67   |  540
      |  469
749   |  7100
      |  6741
7584  |  35900
      |  30336
      |   5564
```

NOTA —A raiz quadrada de um decimal de ordem *impar* é um decimal illimitado.

EXERCICIO 65

Extrahir, até quatro casas de decimaes, as raizes quadradas de

(1) 20	(2) 30
(3) 0.9	(4) 0.121
(5) 0.169	(6) 0.016
(7) 0.00064	(8) 0.00121
(9) 16.245	(10) $0.\dot{9}$
(11) $0.\dot{2}\dot{5}$	(12) $42.0\dot{3}$

130. Para achar a raiz quadrada de uma fracção ordinaria, podemos sempre, por multiplicação, tornar o denominador um quadrado perfeito, se elle não o for tambem, multiplicando o numerador pelo mesmo numero.

Isto posto, achamos a raiz quadrada do denominador, e acharemos exacta ou approximativamente a raiz quadrada do numerador.

Os resultados serão, respectivamente, o denominador e numerador de uma fracção, que será a raiz procurada, exactamente ou não.

Exemplo (1)

$$\sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}} = \frac{5}{6}$$

Exemplo (2)

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{2 \times 3}{3 \times 3}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Podemos agora extrahir a raiz quadrada de 6 até, supponhamos, tres casas de decimaes. Teremos:

```
         6. | 00 | 00 | 00 ( 2.449....
         4
  44   | 200
       | 176
  484  |  2400
       |  1936
  4889 |   46400
       |   44001
       |    2399
```

Donde, vem:

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{2.449....}{3} = 0.816....$$

Tambem poderiamos ter reduzido $\frac{2}{3}$ a decimal e teriamos:

$$0.66666 \; ....$$

Extrahindo agora a raiz quadrada deste decimal, encontrariamos o mesmo resultado.

Exemplo (3).

$$\sqrt{8\frac{17}{64}} = \sqrt{\frac{529}{64}} = \frac{\sqrt{529}}{\sqrt{64}} = \frac{23}{8} = 2\frac{7}{8}.$$

Exemplo (4). Achar a raiz quadrada de

$$\frac{1.28}{12.5}$$

Neste caso devemos reduzir a fracção aos seus menores termos. Portanto,

$$\sqrt{\frac{1.28}{12.5}} = \sqrt{\frac{0.64}{6.25}} = \frac{0.8}{2.5} = 0.32.$$

131. Um numero inteiro pode sempre ser mudado em um quadrado perfeito, pela multiplicação por si mesmo, e ás vezes pela multiplicação por um numero menor que elle. Por exemplo:

7 multiplicado por 7 dá um quadrado perfeito;
18 multiplicado por 2 dá um quadrado perfeito.

EXERCICIO 66

Achar as raizes quadradas de

(1) $\frac{36}{49}$ (2) $\frac{64}{121}$ (3) $\frac{289}{625}$

(4) $\frac{1369}{7569}$

(5) $\frac{15129}{182329}$ (6) $5\frac{1}{16}$

(7) $5\frac{19}{25}$ (8) $3\frac{22}{169}$ (9) $65\frac{64}{81}$

(10) $38\frac{11}{25}$

(11) $17\frac{16}{25}$ (12) $11\frac{37}{49}$

e achar, com quatro casas de decimaes, as raizes quadradas de

(13) $\frac{5}{8}$ (14) $\frac{10}{24}$

(15) $6\frac{2}{5}$

(16) $9\frac{1}{2}$ (17) $76\frac{14}{17}$

2. THEORIA DA RAIZ CUBICA

132. O *Cubo* de um numero é o producto de tres factores eguaes a esse numero. Assim 27 é o cubo de 3, e 216 é o cubo de 6.

133. A *Raiz Cubica* de um nnmero dado é o numero cujo cubo é egual ao numero dado.

Assim a raiz cubica de 343 é 7, porque o cubo de 7 é 343.

O symbolo ^{3}, collocado acima de um numero, exprime o quadrado do numero. Assim 5^3 representa o cubo de 5.

O symbolo $\sqrt[3]{\ }$, collocado antes de um numero, designa a raiz cubica do numero. Assim, $\sqrt[3]{125}$ lê-se: « a raiz cubica de 125. »

134. Um numero que tiver um inteiro para sua raiz cubica chama-se *Cubo Perfeito*.

135. Dos cubos perfeitos menores que 1000 facil é conhecer as raizes cubicas. Assim conhecemos que

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

são as raizes cubicas dos cubos perfeitos

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729

Para ter a raiz cubica de um cubo perfeito maior que 1000, procederemos por uma regra, que passamos a instituir.

Exemplo (1). Achar a raiz cubica de 91125.

	4		91 | 125
			64
12	5	4800	27125
		625	
		5425	27125

Divide-se o numero 91125 em dois periodos, separando por um traço vertical os tres algarismos da direita.

Toma-se o mais proximo cubo perfeito inferior a 91, o qual é 64, e escreve-se ao lado do numero 91125 a raiz cubica de 64, um pouco á esquerda, a qual a raiz é 4. Este é o primeiro algarismo da raiz quadrada de 91125.

Subtrahe-se 64 de 91, e ao resto 27 annexa-se o segundo periodo 125.

Escreve-se o triplo da raiz achada, 12, ao extremo esquerdo e o triplo do quadrado do primeiro algarismo da raiz, 48, seguido de dois zeros, justamente á esquerda de 27125.

Divide-se 27125 por 4800 e escreve-se o quociente, 5, entre 12 e 4800.

Lê-se então 12 5 como « cento e vinte e cinco »; multiplica-se 125 por 5 e põe-se o resultado 625 abaixo de 4800, como para sommar. Faz-se a somma e tem-se 5425; multiplica-se esta somma por 5 e põe-se o resultado, que é 27125, por baixo do primeiro resto.

Subtrahe-se 27125 do primeiro resto 27125, e como não ha resto, a raiz procurada será 45.

EXERCICIO 67

Achar as raizes cubicas de

(1)	4096	(2)	32768	(3)	74088
(4)	493039	(5)	614125	(6)	262144
(7)	39304	(8)	389017	(9)	195112
(10)	970299	(11)	59319	(12)	250047

Como exemplo de uma raiz cubica de tres algarismos, procuremos a raiz cubica de 428661064.

```
           7                  428 | 661 | 064
                              343
   21      5     14700         85661
                  1075)
                 15775)       78875
                    25)
  225      4     1687500       6786064
                    9016
                 1696516       6786064
```

Separados os tres periodos do numero 428661064, tomamos o mais proximo cubo perfeito que seja contido em 428, o qual é 343, e escrevemos ao lado do numero dado a raiz cubica 7, um pouco á esquerda. Este será o primeiro algarismo da raiz procurada.

Subtrahimos 343 de 428 e annexamos ao resto 85 o segundo periodo 661.

Escrevemos o triplo da raiz achada, 21, ao extremo esquerdo e o triplo do quadrado do primeiro algarismo da raiz, 147, seguido de dois zeros, justamente á esquerda de 85661.

Dividimos 85661 por 14700, obtendo o quociente 5, que será posto entre 21 e 14700.

Então, multiplicamos 215 por 5 e temos o producto 1075.

Sommamos este resultado com 14700, e a somma sendo multiplicada por 5 dá-nos 78875.

Subtrahimos 78875 de 85661 e ao resto 6786 annexamos terceiro periodo 064.

Escrevemos á esquerda deste resto, 225, que é o triplo de 75; e tambem na mesma linha horizontal escrevemos o triplo do quadrado de 75, que é 16875.

Este ultimo resultado tambem pode ser obtido assim: escrevendo o quadrado de 5, segundo algarismo da raiz, por baixo do segundo divisor, e sommando os tres numeros contemplados pelo parenthesis.

Annexamos dois zeros a 16875 e repetiremos o processo anterior, achando 4 para o terceiro algarismo da raiz procurada, a qual será neste caso 754.

Estudemos agora o caso em que a raiz cublica tem *quatro* algarismos. Seja o numero 14832537993.

```
           2                  14 | 832 | 537 | 993
                               8
    6      4      1200         6832
                   256)
                  1456)        5824
                    16)
   72      5    172800         1008537
                  3625)
                176425)        882125
                    25)
  735      7   18007500        126412993
                  51499
               18058999        126412993
```

Logo a raiz procurada é 2457.

EXERCICIO 68

NOTA—Quando dividimos 6832 por 1200 o quociente é 5, mas se tomarmos 5 para segundo algarismo da raiz, vemos que a somma de 5 vezes 65, ou 325, com 1200, dá 1525; e este numero multiplicado por 5 dá 7625, resultado maior que 6832.

Achar as raizes cubicas de

(1) 147061125	(2) 149721291	(3) 28934443
(4) 300763000	(5) 2097152	(6) 5735339
(7) 99252847	(8) 1092727	(9) 16777216
(10) 194104539	(11) 84027672	(12) 130323843
(13) 322828856	(14) 354894912	(15) 700227072
(16) 134217728	(17) 122615327232	(18) 673373097125

136. Raiz cubica de uma fracção decimal.

Uma fracção decimal, para que seja um cubo perfeito, deve ser da 3ª, 6ª, 9ª, etc., ordem; isto é, o indice da ordem deve ser um multiplo de 3.

Procederemos então pelo modo seguinte:

Exemplo (1). Achar a raiz cubica de 0.343

$$\sqrt[3]{0.343} = \sqrt[3]{\frac{343}{1000}} = \frac{7}{10} = 0.7$$

Exemplo (2). Achar a raiz cubica de 0.039304

$$\sqrt[3]{0.039304} = \sqrt[3]{\frac{39304}{1000000}} = \frac{34}{100} = 0.34$$

Exemplo (3) Achar a raiz cubica de 0.012812904

$$\sqrt[3]{0.012812904} = \sqrt[3]{\frac{12812904}{1000000000}} = \frac{234}{1000} = 0.234$$

137. Para extrahir a raiz cubica de um numero inteiro ou expressão decimal, até um certo numero de casas decimaes, toma-se *tres vezes o numero* de casas decimaes na expressão dada, seja ella de um numero inteiro ou de um decimal.

Assim, para achar a raiz cubica de 4.23 particularmente para *tres* casas decimaes, extrahe-se a raiz cubica de 4.230000000, tornando a expressão dada um decimal de *nona* ordem. Feito isto, procura-se a raiz cubica de 4230000000, como se fosse um numero inteiro e dá-se á raiz achada somente tres casas decimaes. A raiz cubica de 4.23, com tres casas decimaes sómente, será 1.617.

Se o numero dado for inteiro, procede-se da mesma maneira. Assim para termos a raiz cubica de 2, particularmente para *duas* casas decimaes, extrahiremos a raiz cubica de 2.000000, que é um decimal de *sexta*

ordem. Isto posto, procuraremos a raiz cubica de 2000000 como se fosse um numero inteiro e daremos á raiz achada somente duas casas decimaes. A raiz cubica de 2, com duas casas decimaes somente, será 1.25.

138. A raiz cubica de uma *fracção ordinaria* póde ser obtida tomando-se as raizes cubicas do numerador e denominador, ou pela reducção da fracção á decimal da 3ª, 6ª, 9ª, etc., ordem, e procedendo-se como anteriormente.

EXERCICIO 69

Achar as raizes cubicas de

(1) 0.389017 (2) 0.048228544 (3) 27054.036008

(4) $\frac{1331}{1728}$ (5) $\frac{250}{686}$ (6) $5\frac{13}{343}$

(7) $405\frac{28}{125}$

e achar até tres casas decimaes as raizes cubicas de

(8) 5 (9) 576 (10) 0.121861281

(11) 15.926972504 (12) $\frac{5}{9}$ (13) $\frac{3}{4}$

(14) $\frac{1}{3}$ (15) $7\frac{3}{5}$ (16) $3\frac{1}{5}$

139. Consequencias — A raiz *quarta* de um numero pode ser obtida tomando-se a raiz quadrada da raiz quadrada do numero.

Assim

$$\sqrt[4]{4096} = \sqrt{64} = 8$$

A raiz *sexta* de um numero pode ser obtida tomando-se a raiz cubica da raiz quadrada do numero.

Assim

$$\sqrt[6]{64} = \sqrt[3]{8} = 2$$

EXERCICIO 70

Achar as raizes quartas de

(1) 541441 (2) 4100625 (3) 1575.2961

e as raizes sextas de

(4) 4826809 (5) 24794911296 (6) 282429.536481

CAPITULO VII

Theoria das progressões arithmeticas

140. *Progressão arithmetica* é uma successão de numeros que crescem ou decrescem sempre de uma mesma quantidade.

Assim os numeros naturaes escriptos por ordem, como

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, etc.,

formam uma progressão arithmetica, porque elles augmentam sempre de uma unidade; e a série

25, 22, 19, 16, 13, 10, 7, 4, 1

é tambem uma progressão arithmetica, porque estes numeros diminuem constantemente de tres unidades.

141. Os numeros que formam a progressão são os *termos* da progressão. A differença entre dois termos consecutivos quaesquer da progressão é commum; isto é, sempre a mesma. Essa differença commum chama-se *razão*.

O primeiro termo e o ultimo são os *extremos*. Os termos entre o primeiro e o ultimo são os *meios* da progressão.

Assim a progressão

2, 5, 8, 11, 14, 17, 20

tem *sete termos*; os *extremos* são 2 e 20, e os *meios* são os demais termos.

Uma progressão *crescente* é aquella cujos termos augmentam da esquerda para a direita.

Uma progressão *decrescente* é aquella cujos termos diminuem da esquerda para a direita.

Assim,

2, 5, 8, 11, 14, 17, 20

é uma progressão arithmetica crescente, cuja razão é 3. E a série

9, 7, 5, 3, 1

é uma progressão arithmetica decrescente, cuja razão é 2.

142. Em qualquer progressão arithmetica, são *cinco* as *quantidades* consideradas :

1. O primeiro termo.
2. O ultimo termo.
3. A razão.
4. O numero de termos.
5. A somma de todos os termos.

Sendo dadas tres quaesquer das quantidades de uma progressão arithmetica, as outras duas poderão ser calculadas.

143. Na progressão arithmetica crescente :

2, 5, 8, 11, 14, 17

acharemos qualquer termo, como o 6º, sommando ao primeiro termo o producto da razão pelo numero de termos procedentes. Assim

$$6^o \text{ termo} = 2 + (3 \times 5) = 17$$

Na progressão arithmetica decrescente :

50, 46, 42, 38, 34, 30, 26

acharemos qualquer termo, como o 7º, subtrahindo do primeiro termo o producto da razão pelo numero de termos precedentes. Assim

$$7^o \text{ termo} = 50 - (4 \times 6) = 26$$

144. Para conhecer qualquer termo de uma progressão arithmetica :

Multiplica-se a razão pelo numero de termos que precedem ao termo procurado. Somma-se este producto ao primeiro termo, se a série for crescente ; subtrahe-se esse producto do primeiro termo, se a série for decrescente.

EXERCICIO 71

Achar o ultimo termo de cada uma das séries seguintes :

(1) 2, 5, 8,....... até 17 termos.
(2) 4, 8, 12,....... » 50 »
(3) $7, \frac{29}{4}, \frac{15}{2}, \ldots$ » 16 »
(4) $\frac{5}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \ldots$ » 12 »
(5) $\frac{100-1}{100}, \frac{100-2}{100}, \frac{100-3}{100}, \ldots$ até 100 termos.
(6) $(8+5)^2, (8^2+5^2), (8-5)^2, \ldots$ » 20 »
(7) $\frac{9-2}{9+2}, \frac{4\times9-3\times2}{9+2}, \frac{7\times9-5\times2}{9+2}, \ldots$ » » »
(8) 5, 13, 18, ... » 15 »

145. A somma de sete termos da série:

3, 5, 7, etc.

será

$$3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15$$

e, em ordem inversa,

$$15 + 13 + 11 + 9 + 7 + 5 + 3$$

donde, a somma das duas progressões, crescente e decrescente, ou o dobro da somma dos termos de uma, será :

$$18 + 18 + 18 + 18 + 18 + 18 + 18 = 7 \times 18;$$

portanto, a somma é $= \frac{1}{2}(7 \times 18) = 63$. Logo, para calcular a somma dos termos de uma progressão arithmetica :

Multiplique-se a metade da somma dos extremos pelo numero de termos.

Assim, a somma de oito termos da série cujo primeiro termo é 3 e o ultimo termo é 38, será

$$8 \times \frac{1}{2}(3 + 38) = 164.$$

EXERCICIO 72

Achar a somma das seguintes séries :

(1) 1, 2, 3, 4,.... até 100 termos.
(2) 2, 4, 6, 8,.... » 50 »
(3) 3, 7, 11....... » 20 »
(4) $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$,.. » 15 »
(5) $\frac{5}{6}, \frac{1}{2}$,...... » 7 »
(6) 1, 4, 7,....... » 11 »
(7) 1, 8, 15,....... » 11 »
(8) $\frac{100-1}{100}, \frac{100-2}{100}, \frac{100-3}{100}$,..... até 100 termos.

146. Média arithmetica — Se 1, 2, 3 são numeros em progressão arithmetica, 2 é a *média arithmetica* de 1 e 3.

A média arithmetica de dois numeros é a metade da sua somma.

147. *Inserir tres médias arithmeticas entre 2 e 10.*

O numero de termos da progressão será 5.

A differença entre o primeiro termo e o quinto será evidentemente *quatro vezes a razão* ; portanto, teremos:

$$10 - 2 = 4 \times \text{razão};$$

donde

$$\text{razão} = \frac{10-2}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

A série procurada será:

2, 4, 6, 8, 10.

A média arithmetica entre 2 e 6 é *4*; entre 4 e 8 é *6*; e entre 6 e 10 é *8*. As tres médias arithmeticas serão pois

4, 6 e 8.

EXERCICIO 73

(1) Inserir 4 médias arithmeticas entre 3 e 18.
(2) » 5 » » » 2 » 1.
(3) » 3 » » » 3 » $\frac{2}{3}$.
(4) » 4 » » » $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$.

148. Numeros figurados. — A somma dos termo das progressões arithmeticas que começam por 1 e cujas razões são

1, 2, 3, 4, etc.,

ou qualquer numero inteiro, dá origem aos *numeros figurados*, os quaes se formam pela addição de alguns termos das differentes progressões.

149. Suppondo a razão egual a 1, a progressão será

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, etc.

Fazendo a somma de um, de dois, de tres, etc., termos, resultará a série:

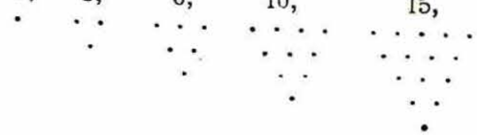
1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, etc.,

porque

$$\begin{aligned}&1 = 1\\&1 + 2 = 3\\&1 + 2 + 3 = 6\\&1 + 2 + 3 + 4 = 10\\&\text{etc., etc.}\end{aligned}$$

Os termos da ultima série são chamados *triangulares*, porque *podem ser dispostas sob a figura de um triangulo as unidades que elles conteem*. Dest'arte :

1, 3, 6, 10, 15, etc.



Resulta do expôsto, que, em todos estes triangulos, os *lados* são formados por *pontos*, representando as unidades. No primeiro triangulo só temos *um ponto* ; no segundo ha *dois pontos* ; no terceiro ha *tres pontos*, etc. Assim, os numeros triangulares, ou o numero dos pontos, ou simplesmente o *triangulo* regula-se pelo numero de pontos contidos em um lado, numero que se chama o *lado*. Por exemplo, o terceiro numero triangular é aquelle cujo lado tem tres pontos ; o quarto aquelle cujo lado tem quatro pontos, e assim successivamente.

150. *Conhecido o lado, determinar o triangulo.*

Seja o lado = 100. O triangulo será :

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots. + 100.$$

Ora, a somma dos termos desta progressão arithmetica será :

$$100 \times \frac{1}{2}\,(1 + 100) = 5050.$$

Portanto, o triangulo será 5050.

151. Supponhamos a razão egual a 2. A progressão será :

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, etc.

As sommas parciaes serão :

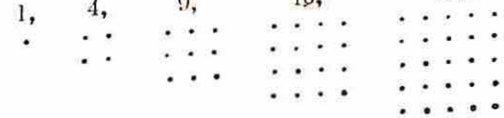
$$\begin{aligned}&1 = 1\\&1 + 3 = 4\\&1 + 3 + 5 = 9\\&1 + 3 + 5 + 7 = 16,\ \text{etc.}\\&\text{etc., etc.,}\end{aligned}$$

A série figurada será :

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, etc.

Os termos desta série são os numeros *quadrados*, porque representam os quadrados dos numeros naturaes. Dest'arte :

1, 4, 9, 16, 25, etc.



Tambem podemos considerar os numeros quadrados como a somma de dois numeros triangulares consecutivos.

Daqui resulta, que, o lado de qualquer dos quadrados contém precisamente o numero de pontos indicados pela raiz quadrada.

Por exemplo, o lado do quadrado 25 é de cinco pontos ; o do quadrado 36 é de seis pontos ; e assim successivamente.

Assim, se o lado é 7, isto é, se o numero dos termos da progressão tomada :

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, \text{etc.}$$

é 7, veremos que o numero quadrado será egual á somma destes termos, ou 49.

152. Fazendo a razão egual a 3, e tomando as sommas parciaes dos differentes termos da progressão arithmetica, teremos :

Indices...............	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	etc.
Progressão arithmetica.	1,	4,	7,	10,	13,	16,	19,	etc.
Numeros figurados.....	1,	5,	12,	22,	35,	51,	70,	etc.

Estes numeros são chamados *pentagonos*, embora não possam ser representados por pontos. Os indices são os lados dos pentagonos.

153. Se o lado do pentagono fôr 7, o numero pentagono será

$$\frac{7\,(3 \times 7 - 1)}{2}, \text{ ou } 70.$$

Se o lado do pentagono for 3, o numero pentagono será :

$$\frac{3\,(3 \times 3 - 1)}{2}, \text{ ou } 12.$$

Se quizermos o pentagono cujo lado é 100, teremos :

$$\frac{100\,(3 \times 100 - 1)}{2}, \text{ ou } 14950.$$

154. Seja agora a razão egual a 4. Teremos :

Indices...............	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	etc.
Progressão arithmetica..	1,	5,	9,	13,	17,	21,		etc.
Numeros figurados.....	1,	6,	15,	28,	45,	66,		etc.

Estes numeros são chamados *hexagonos*, embora não possam mais ser representados por pontos. Os indices mostram ainda o lado de cada hexagono.

155. Se o lado do hexagono for 5, o numero hexagono será :

$$5\,(2 \times 5 - 1), \text{ ou } 45.$$

Se o lado do hexagono for 6, o numero hexagono será :

$$6\,(2 \times 6 - 1), \text{ ou } 66.$$

Euler, o eminente geometra, observa que, todos os numeros hexagonos são tambem triangulares, porque, exceptuando destes ultimos o primeiro, o terceiro, o quinto, etc., temos precisamente a série dos hexagonos.

156. Seguindo a mesma marcha, teremos os numeros heptagonaes, octogonaes, enneagonaes, etc.

EXERCICIO 74

Problema de Euler. Um homem, tendo comprado umas terras, disse : O numero triangular cujo lado é 5000, corresponde ao dinheiro, em réis, que paguei pelas terras. Quanto custaram ?

157. NUMEROS PERFEITOS — Os antigos chamavam *numero perfeito* aquelle que é egual á somma de todas as suas partes *aliquotas*.

Tal é o numero 6, cujas partes aliquotas são 1, 2 e 3.

O numero 28 tambem é um numero perfeito porque

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14,$$

suas partes aliquotas.

Os numeros perfeitos até hoje conhecidos são os seguintes :

$$
\begin{aligned}
&2\ (2^2-1)=6\\
&2^2\ (2^3-1)=28\\
&2^4\ (2^5-1)=496\\
&2^6\ (2^7-1)=8128\\
&2^{12}\ (2^{13}-1)=33550336\\
&2^{16}\ (2^{17}-1)=8589869056\\
&2^{18}\ (2^{19}-1)=137438691328\\
&2^{30}\ (2^{31}-1)=2305843008139952128
\end{aligned}
$$

O numero $2^{31}-1$, Euler affirma ser primo. E' o maior numero primo conhecido.

158 — NUMEROS AMIGAVEIS — Dois numeros são chamados *amigaveis* quando cada um delles é egual á somma das partes aliquotas do outro.

Taes são, por exemplo, os numeros 284 e 220.

As partes aliquotas do primeiro são :

$$1,\ 2,\ 4,\ 71,\ 142\ ;$$

e as do segundo são:

$$1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 10,\ 11,\ 20,\ 22,\ 44,\ 55,\ 110.$$

Com effeito, porque :

$$
\begin{aligned}
284 = 1+2+4+5+10+11+20+22+\\
+44+55+110
\end{aligned}
$$

e

$$220 = 1+2+4+71+142.$$

São conhecidos muitos pares de numeros amigaveis. Este laborioso assumpto foi magistralmente tratado por Euler em suas obras.

(*Vide* Leonardi Euleri: « Opera postuma », Tomus *Prior*, pag. 85 e seguintes; «Opuscula Varii Argumenti», pag. 105 e seguintes.)

Não se conhece ainda a regra geral que daria todos os numeros amigaveis ; mas tem-se encontrado algumas regras particulares.

A mais antiga e a mais simples póde ser traduzida pelas formulas :

$$2^n\,(3\times 2^n-1)\,(3\times 2^{n-1}-1)$$

e

$$2^n\,(9\times 2^{2n-1}-1),$$

os tres factores entre parenthesis, sendo numeros primos. Essa regra é devida a Thabit Ben Korrah, celebre geometra arabe do fim do nono seculo.

O professor Rossotti dá os pares seguintes :

$$\text{I}\begin{cases}220=2^2\times5\times11\\284=2^2\times71\end{cases}\qquad \text{II}\begin{cases}2620=2^2\times5\times131\\2924=2^2\times17\times43\end{cases}$$

$$\text{III}\begin{cases}5020=2^2\times5\times251\\5564=2^2\times13\times107\end{cases}\qquad \text{IV}\begin{cases}6232=2^3\times19\times41\\6368=2^5\times199\end{cases}$$

$$\text{V}\begin{cases}10744=2^3\times17\times79\\10856=2^3\times23\times59\end{cases}\qquad \text{VI}\begin{cases}17296=2^4\times23\times47\\18416=2^4\times1151\end{cases}$$

$$\text{VII}\begin{cases}63020=2^2\times23\times5\times137\\76084=2^2\times23\times827\end{cases}$$

$$\text{VIII}\begin{cases}66928=2^4\times47\times89\\66992=2^4\times53\times79\end{cases}$$

$$\text{IX}\begin{cases}67095=3^3\times5\times7\times71\\71145=3^3\times5\times17\times31\end{cases}$$

$$\text{X}\begin{cases}69615=3^2\times7\times13\times5\times17\\87633=3^2\times7\times13\times107\end{cases}$$

$$\text{XI}\begin{cases}122265=3^2\times5\times13\times11\times19\\139815=3^2\times5\times13\times239\end{cases}$$

$$\text{XII}\begin{cases}141664=2^5\times19\times233\\153176=2^3\times41\times467\end{cases}$$

$$\text{XIII}\begin{cases}142310=2\times5\times7\times19\times107\\168730=2\times5\times47\times359\end{cases}$$

$$\text{XIV}\begin{cases}171856=2^4\times23\times467\\176336=2^4\times103\times107\end{cases}$$

$$\mathrm{XV}\left\{\begin{array}{l}176272 = 2^4 \times 23 \times 479 \\ 180848 = 2^4 \times 89 \times 127\end{array}\right.$$

$$\mathrm{XVI}\left\{\begin{array}{l}196724 = 2^2 \times 11 \times 17 \times 263 \\ 202444 = 2^2 \times 11 \times 43 \times 107\end{array}\right.$$

$$\mathrm{XVII}\left\{\begin{array}{l}308620 = 2^2 \times 5 \times 13 \times 1187 \\ 389924 = 2^2 \times 43 \times 2267\end{array}\right.$$

$$\mathrm{XVIII}\left\{\begin{array}{l}437456 = 2^4 \times 19 \times 1439 \\ 455344 = 2^4 \times 149 \times 191\end{array}\right.$$

$$\mathrm{XIX}\left\{\begin{array}{l}503056 = 2^4 \times 23 \times 1367 \\ 514736 = 2^4 \times 53 \times 607\end{array}\right.$$

$$\mathrm{XX}\left\{\begin{array}{l}522405 = 3^2 \times 5 \times 13 \times 19 \times 47 \\ 525915 = 3^2 \times 5 \times 13 \times 29 \times 31\end{array}\right.$$

$$\mathrm{XXI}\left\{\begin{array}{l}609928 = 2^3 \times 11 \times 29 \times 239 \\ 686072 = 2^3 \times 191 \times 449\end{array}\right.$$

$$\mathrm{XXII}\left\{\begin{array}{l}1175265 = 3^2 \times 7^2 \times 13 \times 5 \times 41 \\ 1438983 = 3^2 \times 7^2 \times 13 \times 251\end{array}\right.$$

$$\mathrm{XXIII}\left\{\begin{array}{l}1280565 = 3^2 \times 5 \times 11 \times 13 \times 199 \\ 1340235 = 3^2 \times 5 \times 13 \times 29 \times 79\end{array}\right.$$

$$\mathrm{XXIV}\left\{\begin{array}{l}1358595 = 3^2 \times 5 \times 19 \times 7 \times 227 \\ 1486845 = 3^2 \times 5 \times 19 \times 37 \times 47\end{array}\right.$$

$$\mathrm{XXV}\left\{\begin{array}{l}5741325 = 3^2 \times 5^2 \times 19 \times 17 \times 79 \\ 5801175 = 3^2 \times 5^2 \times 19 \times 23 \times 59\end{array}\right.$$

$$\mathrm{XXVI}\left\{\begin{array}{l}169218000 = 2^4 \times 3^2 \times 5^3 \times 7 \times 17 \times 79 \\ 170982000 = 2^4 \times 3^2 \times 5^3 \times 7 \times 23 \times 59\end{array}\right.$$

Euler dá muitos pares de numeros amigaveis, não sujeitos á regra precedente.

Citaremos sómente o seguinte par, devido a Schooten:

9363584 e 9437056

159. NUMEROS SAGRADOS — Entre os numeros simples, os tres primeiros são de emprego capital. Os antigos os chamaram *numeros sagrados*. O numero 1 indica a *coordenação*, a unidade de commando, de uma direcção, de uma obra d'arte, de um conjuncto esthetico, de um ponto de vista moral, intellectual ou pratico.

O numero 2 representa a *combinação* de dois seres. Todas as combinações são essencialmente binarias.

O numero 3 exprime a *successão*, o progresso, a *série*, que só póde verdadeiramente surgir após o terceiro termo, como vimos nas progressões arithmeticas.

EXERCICIO 75

REVISÃO

(1) Transformar em fracção decimal a fracção seguinte :

$$\frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10}$$

sem effectuar as multiplicações indicadas (Euler).

(2) A somma de dois numeros é 72, e um delles é 40; qual é o outro ?

(3) A differença de dois numeros é 34, e o menor é 56 ; qual o outro ?

(4) A somma de dois numeros é 126, e um delles excede o outro de 10 ; quaes são os numeros ?

(5) Ao dobro de um certo numero eu addiciono 12 e obtenho 86 como resultado. Qual é o numero?

(6) De cinco vezes um certo numero eu tiro 17 e obtenho 98 como resultado. Qual é o numero ?

(7) Que dois numeros são esses, cuja differença é 14 e a sua somma 48 ?

(8) A somma de dois numeros é 378 e a sua differença é 172. Quaes são elles ?

(9) Um homem morreu em 1868, na idade de 93 annos; seu filho morreu em 1822 com a idade de 16 annos. Que idade tinha o pae quando o seu filho nasceu ?

(10) A trigesima setima parte de um numero é 41. Qual é o numero ?

(11) Quarenta e sete vezes um numero são 1457. Qual é o numero ?

(12) Cinco setimos de um numero são trinta e cinco. Qual é o numero ?

(13) O dobro e a terça parte de um numero, addicionados, dão 140 como resultado. Qual é o numero ?

(14) Qual é o numero cuja metade, o terço e a quarta parte, addicionadas, dão como resultado 104 ?

(15) Qual é o numero cuja duodecima parte, mais a vigesima parte e mais a quadragesima parte dão 38 como resultado ?

(16) Qual é o numero cujo quarto excede o setimo, de 30 ?

(17) Qual é o numero cuja vigesima quinta parte excede a trigesima quinta parte, de 8 ?

(18) Qual é o numero que excede a somma de seu terço mais seu decimo e mais sua duodecimaa parte, de 58 ?

(19) Quando tomamos de 33, o quarto mais o quinto e mais o decimo de um certo numero, o resto é zero. Qual é o numero ?

(20) Qual é o numero cujo quarto, mais o quinto e mais o sexto excedem a sua metade, de 112 ?

(21) A setima parte de um numero é egual ao numero diminuido de 1626. Qual é o numero ?

(22) A somma de dois numeros é 5760, e a sua differença é um terço do maior. Quaes são os numeros ?

(23) Dividir 1800 em duas partes taes, que, uma parte seja dois setimos da outra.

(24) Multiplicando um certo numero por 4, e dividindo o producto por 3, eu obtenho 24 para quociente. Qual é o numero ?

(25) Dividir 60 em duas partes taes, que, uma parte seja mais que a outra, de 24.

(26) Dividir 129 em duas partes taes, que, tres setimos de uma sejam menor que a outra, de 59.

(27) Eu divido 2.49 por um certo numero ; o quociente é 4 e o resto é 0.37. Qual é o divisor ?

(28) Dividindo um certo numero por 0.027, o quociente é 6116 e o resto 0.003. Qual é o dividendo ?

(29) Qual é a differença entre duas vezes o quadrado de 12 e o quadrado de duas vezes doze ?

(30) Em um pomar de arvores fructiferas, a metade é de maçãs, o quarto é de pêras, o sexto é de damascos e o resto, em numero 50, é de ameixas. Quantas arvores existem no pomar ?

(31) Que parte de 25 unidades é $\frac{5}{8}$ da unidade ?

(32) Tres quartas partes da raiz quadrada de um certo numero são 21. Qual é o numero ?

(33) Cinco setimos do quadrado de um certo numero são 140. Qual é o numero ?

(34) Quatro quintos da raiz cubica de um certo numero são 12. Qual é o numero ?

(35) Oito treze avos do cubo de um certo numero são 36504. Qual é o numero ?

(36) Dois terços da somma de um certo numero, mais 21, são 23. Qual é o numero ?

(37) Tres quintos da differença entre um certo numero e 37 são 18. Qual é o numero ?

(38) Da raiz quadrada de um certo numero eu tomo $1\frac{2}{7}$, e os cinco sextos do resultado são $\frac{10}{21}$. Qual é o numero ?

(39) A um certo numero eu sommo 2 ; multiplico a somma por 4 ; divido o producto por 3 ; e tomo 3 do quociente. O resto é 17. Qual é o numero ?

(40) Provar que a setima potencia de 8 é o cubo da setima potencia de 2.

(41) Que numero é esse, cuja metade multiplicada por sua terça parte dá 864 ?

(42) Qual é o numero cujas setima e oitava partes sendo multiplicadas uma pela outra, e o producto dividido por 3, dá o quociente $298\frac{2}{3}$?

(43) Achar o valor de

$$\frac{2\frac{1}{3}+\frac{4}{5}\text{ de }3\frac{1}{3}\text{ de }3\frac{3}{4}-2\frac{1}{2}}{\dfrac{9\frac{1}{6}}{5}}$$

(44) Achar o valor de

$$\frac{\left(3\frac{1}{3}-2\frac{1}{2}\right)\div\frac{5}{6}\text{ de }\frac{3}{8}}{2\frac{2}{3}\div\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)}$$

e exprimir o resultado em decimal.

(45) Simplificar

$$\frac{(3.2-2.9)\times 147}{0.003\times 0.0005}$$

(46) Achar o valor de

$$\frac{1\frac{1}{4}-\frac{5}{12}}{1\frac{1}{4}+\frac{5}{12}}+\frac{7}{6}\text{ de }\frac{9\times 5}{14\times 3}-\frac{11\frac{1}{4}}{15}$$

e reduzir aos seus menores termos $\frac{2622}{3381}$

(47) Simplificar

(1) $\frac{5}{8}$ de $1\frac{1}{3}$ de $2\frac{1}{4}$ de $3\frac{1}{5}$

(2) $$\frac{17}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{7}{8}+\frac{5}{12}}-\frac{7\frac{1}{5}}{3\frac{3}{5}}$$

(48) Simplificar

$$\frac{7\left(1\frac{1}{2}\text{ de }\frac{3}{14}\right)}{\frac{1}{6}\left(\dfrac{3}{3\frac{1}{2}}\text{ de }7\right)}\div\frac{9}{14}$$

(49) Simplificar

$$\frac{5-2\frac{4}{5}\text{ de }1\frac{2}{3}}{\frac{7}{9}\text{ de }\frac{8}{5}-\frac{41}{45}}-\frac{2\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}+1\frac{2}{5}}$$

(50) Provar que

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5}}}}}+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1}}}}}=\frac{8}{9}$$

TABOA DE NUMEROS PRIMOS ATÉ 10000

1	101	239	397	569	733	911	1091	1283
2	03	41	401	71	39	19	93	89
3	07	51	09	77	43	29	97	91
5	09	57	19	87	51	37	1103	97
7	13	63	21	93	57	41	09	1301
11	27	69	31	99	61	47	17	03
13	31	71	33	601	69	53	23	07
17	37	77	39	07	73	67	29	19
19	39	81	43	13	87	71	51	21
23	49	83	49	17	97	77	53	27
29	51	93	57	19	809	83	63	61
31	57	307	61	31	11	91	71	67
37	63	11	63	41	21	97	81	73
41	67	13	67	43	23	1009	87	81
43	73	17	79	47	27	13	93	99
47	79	31	87	53	29	19	1201	1409
53	81	37	91	59	39	21	13	23
59	91	47	99	61	53	31	17	27
61	93	49	503	73	57	33	23	29
67	97	53	09	77	59	39	29	33
71	99	59	21	83	63	49	31	39
73	211	67	23	91	77	51	37	47
79	23	73	41	701	81	61	49	51
83	27	79	47	09	83	63	59	53
89	29	83	57	19	87	69	77	59
97	33	89	63	27	907	87	79	71

1481	1663	1877	2087	2297	2521	2713	2927	3181
83	67	79	89	2309	31	19	39	87
87	69	89	99	11	39	29	53	91
89	93	1901	2111	33	43	31	57	3203
93	97	07	13	39	49	41	63	09
99	99	13	29	41	51	49	69	17
1511	1709	31	31	47	57	53	71	21
23	21	33	37	51	79	67	99	29
31	23	49	41	57	91	77	3001	51
43	33	51	43	71	93	89	11	53
49	41	73	53	77	2609	91	19	57
53	47	79	61	81	17	97	23	59
59	53	87	79	83	21	2801	37	71
67	59	93	2203	89	33	03	41	99
71	77	97	07	93	47	19	49	3301
79	83	99	13	99	57	33	61	07
83	87	2003	21	2411	59	37	67	13
97	89	11	37	17	63	43	79	19
1601	1801	17	39	23	71	51	83	23
07	11	27	43	37	77	57	89	29
09	23	29	51	41	83	61	3109	31
13	31	39	67	47	87	79	19	43
19	47	53	69	59	89	87	21	47
21	61	63	73	67	93	97	37	59
27	67	69	81	73	99	2903	63	61
37	71	81	87	77	2707	09	67	71
57	73	83	93	2503	11	17	69	73

3389	3607	3823	4049	4261	4513	4733	4973	5209
91	13	33	51	71	17	51	87	27
3407	17	47	57	73	19	59	93	31
13	23	51	73	83	23	83	99	33
33	31	53	79	89	47	87	5003	37
49	37	63	91	97	49	89	09	61
57	43	77	93	4327	61	93	11	73
61	59	81	99	37	67	99	21	79
63	71	89	4111	39	83	4801	23	81
67	73	3907	27	49	91	13	39	97
69	77	11	29	57	97	17	51	5303
91	91	17	33	63	4603	31	59	09
99	97	19	39	73	21	61	77	23
3511	3701	23	53	91	37	71	81	33
17	09	29	57	97	39	77	87	47
27	19	31	59	4409	43	89	99	51
29	27	43	77	21	49	4903	5101	81
33	33	47	4201	23	51	09	07	87
39	39	67	11	41	57	19	13	93
41	61	89	17	47	63	31	19	99
47	67	4001	19	51	73	33	47	5407
57	69	03	29	57	79	37	53	13
59	79	07	31	63	91	43	67	17
71	93	13	41	81	4703	51	71	19
81	97	19	43	83	21	57	79	31
83	3803	21	53	93	23	67	89	37
93	21	27	59	4507	29	69	97	41

5443	69	5879	6143	6359	6619	6857	7079	7349
49	83	81	51	61	37	63	7103	51
71	89	97	63	67	53	69	09	69
77	93	5903	73	73	59	71	21	93
79	5701	23	97	79	61	83	27	7411
83	11	27	99	89	73	99	29	17
5501	17	39	6203	97	79	6907	51	33
03	37	53	11	6421	89	11	59	51
07	41	81	17	27	91	17	77	57
19	43	87	21	49	6701	47	87	59
21	49	6007	29	51	03	49	93	77
27	79	11	47	69	09	59	7207	81
31	83	29	57	73	19	61	11	87
57	91	37	63	81	33	67	13	89
63	5801	43	69	91	37	71	19	99
69	07	47	71	6521	61	77	29	7507
73	13	53	77	29	63	83	37	17
81	21	67	89	47	79	91	43	23
91	27	73	99	51	81	97	47	29
5623	39	79	6301	53	91	7001	53	37
39	43	89	11	63	93	13	83	41
41	49	91	17	69	6803	19	97	47
47	51	6101	23	71	23	27	7307	49
51	57	13	29	77	27	39	09	59
53	61	21	37	81	29	43	21	61
57	67	31	43	99	33	57	31	73
59	69	33	53	6607	41	69	33	77

7583	7829	8089	8317	8599	8819	9049	9311	9521
89	41	93	29	8609	21	59	19	33
91	53	8101	53	23	31	67	23	39
7603	67	11	63	27	37	91	37	47
07	73	17	69	29	39	9103	41	51
21	77	23	77	41	49	09	43	87
39	79	47	87	47	61	27	49	9601
43	83	61	89	63	63	33	71	13
49	7901	67	8419	69	67	37	77	19
69	07	71	23	77	87	51	91	23
73	19	79	29	81	93	57	97	29
81	27	91	31	89	8923	61	9403	31
87	33	8209	43	93	29	73	13	43
91	37	19	47	99	33	81	19	49
99	49	21	61	8707	41	87	21	61
7703	51	31	67	13	51	99	31	77
17	63	33	8501	19	63	9203	33	79
23	93	37	13	31	69	09	37	89
27	8009	43	21	37	71	21	39	97
41	11	63	27	41	99	27	61	9719
53	17	69	37	47	9001	39	63	21
57	39	73	39	53	07	41	67	33
59	53	87	43	61	11	57	73	39
89	59	91	63	79	13	77	79	43
93	69	93	73	83	29	81	91	49
7817	8081	97	81	8803	41	83	97	67
23	87	8311	97	07	43	93	9511	69

9781	9803	9829	9851	9871	9901	9929	9949	—
87	11	33	57	83	07	31	67	—
91	17	39	59	87	23	41	9973	—

160. METHODO PARA RECONHECER SE UM NUMERO DADO É OU NÃO PRIMO — *Divide-se o numero dado successivamente por todos os numeros primos cujos quadrados são menores que elle.*

Se qualquer dessas divisões effectuar-se exactamente, o numero dado será multiplo ; mas, se todas as divisões apresentarem restos, o numero dado será primo.

Assim, 197 é um numero primo, porque não é divisivel pelos numeros primos :

2, 3, 5, 7, 11 e 13

unicos cujos quadrados são menores que 197.

O numero 343 não é primo, porque sendo dividido successivamente pelos numeros primos :

2, 3, 5, 7, 11, 13 e 17

unicos cujos quadrados são menores que 343, vemos que a divisão por 7 é exacta.

5242 — Rio de Janeiro — Imprensa Nacional — 1907

OFFICINA DE ENCADERNAÇÃO
AL

5—

OFFICINA DE ENCADERNAÇÃO
DA
IMPRENSA NACIONAL
RIO DE JANEIRO