NOÇÕES
DE
ARITHMETICA

PARA USO
DAS ESCOLAS PRIMARIAS

Estudo Pratico e Inductivo

POR

F. MARCONDES PEREIRA

ENGENHEIRO CIVIL

LENTE DE ARITHMETICA E ALGEBRA DO LYCEU DO CEARÁ

Adoptados na Instrucção Publica do Estado do Ceará, diversos Estados do Paiz, Instituto Commercial da Capital Federal e outros estabelecimentos publicos e particulares

---

2.ª Edição

CEARÁ — FORTALEZA

Editor : MILITÃO BIVA[illegible]

TYPOGRAPHIA AILLAUD & C^ia — PARIS

1905

NOÇÕES

DE

ARITHMETICA

PARA USO

DAS ESCOLAS PRIMARIAS

Estudo Pratico e Inductivo

POR

F. MARCONDES PEREIRA

ENGENHEIRO CIVIL

LENTE DE ARITHMETICA E ALGEBRA DO LYCEU DO CEARÁ

Adoptados na Instrucção Publica do Estado de Ceará, diversos Estados do Paiz, Instituto Commercial da Capital Federal e outros estabelecimentos publicos e particulares

---

2.ª Edição

CEARÁ — FORTALEZA

Editor : MILITÃO BIVAR

TYPOGRAPHIA AILLAUD & Cia — PARIS

1905

Pertence a propriedade desta obra

ao Sr. Militão Bivar.

O AUTOR

Á MEMORIA

de

MEUS PAES

14 de Novembro de 1883
17 de Abril de 1872

AO LEITOR

Entre as difficuldades inherentes ao magisterio — santa missão de cultivar o tenro espirito da infancia — ha uma que sobreleva ás demais : é synthetisar o estudo de um ramo dos conhecimentos humanos — indispensaveis á vida — em livro que ensine sem viciar a intelligencia da creança, dando definições simples, comprehensiveis e concisas. — É peior cultivar um terreno onde raizes damninhas já lhe tenham sugado a pureza do *humus* do que um terreno virgem embora arido.

Noções falsas sobre uma sciencia, definições viciadas e em excesso, trazem como consequencia a confusão, a fadiga e não comprehensão, originando-se d'ahi verdadeira aversão pelo estudo.

O livro, que ora se vê publicado, não tem a pretenção de achar-se escoimado de todos os defeitos apontados e conhecidos, mesmo porque falta ao autor a competencia e a pratica para tanto, alem de sobrar muito e communmente o espirito da rotina impedindo uma mudança repentina. O autor fez o que poude, tem mesmo certeza de que era necessario fazer mais e reconhece alguns dos defeitos de seu livro; mas, algumas correcções que julga necessario, fará em edições posteriores, se tanto lhe couber fazel-o, pois é conveniente que a transição não seja por demais brusca.

Pensando que é da maxima conveniencia o estudo pratico seguido do theorico, especialmente na materia em questão, e nem todos podendo fazer este mas todos necessitando daquelle, consigna em seu livrinho a resolução pratica de todas as questões da Arithmetica e suas principaes applicações, explicando-as e auxiliando a comprehensão por meio de figuras, que serão mais amplamente desenvolvidas pelos professores que o quizerem fazer. As figuras limitam-se a muito pequeno numero, salvo as indispensaveis, mesmo porque em excesso ellas tendem mais a distrahir o espirito do alumno, do que a fazel-o convergir para o assumpto afim de poder melhor raciocinar.

Aqui, encontra o leitor um resumo pratico dos « *Apontamentos de Arithmetica* » e ao mesmo tempo o embasamento no qual se levanta o seu estudo — conhecido esse livrinho, ainda mais simples torna-se o estudo d'aquelle.

Ceará, 15 de Dezembro de 1903.

O AUTOR.

Noções de Arithmetica

1. **Arithmetica** (1). — É a parte da mathematica que se occupa do calculo dos valores.

2. **Grandeza**. — É tudo que pode augmentar ou diminuir — Exemplos : uma casa, uma rua, uma corda, etc.

3. **Quantidade**. — É a grandeza medida ou avaliada. Assim, se tomarmos um pedaço de corda, teremos uma grandeza; mas se medirmos a grandeza e em logar de um simples pedaço de corda tivermos *dois metros* ou *tres varas* de corda, teremos uma quantidade.

4. **Observação**. — Avalia-se uma grandeza medindo-a ou contando-a; como uma peça de chita que se avalia medindo-a com um *metro* ou uma *vara*, um cesto de laranjas que se avalia contando as laranjas que elle contem, etc.

5. **Unidade**. — É uma *quantidade* que serve para medir ou avaliar as grandezas da mesma especie.

Observação. — É claro que a unidade deve ser uma quantidade de todos conhecida; se não o fosse não poderiamos nos servir della para medir ou avaliar uma grandeza, visto como não ficariamos fazendo juizo das dimensões da grandeza desde que não conhecessemos as da unidade. Demais, é necessario que seja da mesma especie da *grandeza a medir*, visto como não podemos medir o comprimento de uma rua por meio de um peso, nem o peso de um fardo pelo metro, etc.

---

(1) Não se deve obrigar o alumno a decorar as definições e nem tão pouco os exemplos; ao contrario, deve-se fazel-o comprehender bem a definição, definir e exemplificar por si mesmo.

As grandezas dividem-se em :

6. **Homogeneas.** — São as da mesma especie entre si. Exemplos : os livros, as casas, os bancos, os tinteiros, etc.

7. **Heterogeneas.** — São de especies differentes entre si. Exemplos : um *livro* e um *tinteiro ;* uma *mesa*, uma *cadeira* e uma *casa*, etc.

8. **Mensuraveis.** — São as que se podem medir, contar ou avaliar. Exemplo : *uma rua, uma peça de fazenda, um cesto de laranjas*, etc.

9. **Immensuraveis.** — São as que não se podem medir. Exemplos : a *dôr*, a *caridade*, a *intelligencia*, etc.

Observação. — As grandezas immensuraveis não podem ser medidas por falta de uma *da mesma especie e geralmente conhecida*, que sirva de medida ou de unidade. Não podemos dizer, por exemplo : — Pedro é tres vezes mais intelligente do que Paulo, mas, embora dissessemos, não se poderia fazer idéa do grão de intelligencia deste, visto como não tinhamos conhecimento perfeito do grão de intelligencia d'aquelle. O mais que podemos dizer é que o primeiro é mais ou muito mais intelligente do que o segundo.

10. **Continuas.** — São as que formam um todo sem partes distinctas e que, portanto, *podem augmentar ou diminuir á vontade*. Exemplos : Uma *peça de renda*, uma *corda*, uma *rua*, etc., pois que podemos fazer a peça de renda, a corda ou a rua maiores ou menores.

11. **Descontinuas.** — São as que formam um todo tendo partes distinctas e que, portanto, *não podem augmentar, nem diminuir á vontade*. Exemplos : um *rebanho*, um *exercito*, um *bosque*, etc., são grandezas que só podem augmentar ou diminuir *pelo menos* de uma de suas partes componentes, isto é, o rebanho de uma *ovelha*, o exercito de um *soldado* e o bosque de uma *arvore*.

12. **Numero.** — É o resultado da comparação (1)

(1) A comparação póde ser feita medindo a grandeza com a unidade ou contando o numero de unidades que a grandeza contem.

de uma grandeza com uma unidade, que se toma para medil-a. Exemplos : se medirmos com o *palmo* o comprimento de uma mesa e a unidade (palmo) se contiver exactamente oito vezes, *oito* é o resultado da medida, isto é, o numero que resulta da comparação da grandeza com a unidade; se tivermos uma pilha de tijolos e contarmos os que ha, como na figura junto, achamos *cinco*, isto é, *cinco* é o numero ou resultado da comparação da unidade com a grandeza.

13. **Algarismos.** — São signaes, caracteres ou *symbolos* que servem para a representação dos numeros.

Ha duas especies de algarismos mais communmente usadas entre nós : os *arabicos* e os *romanos*.

14. **Algarismos arabicos.** — São os symbolos abaixo, cujas formas indicam os numeros :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
um	dois	tres	quatro	cinco	seis	sete	oito	nove	zero

Os nove primeiros são chamados algarismos *significativos*, porque cada um delles tem um valor propriosignificativo, ao passo que o ultimo é denominado insignificativo, isto é, sem valor proprio, mas serve para augmentar ou diminuir o valor dos outros.

15. **Algarismos romanos.** — Os algarismos romanos são representados pelas sete lettras abaixo do alphabeto, tendo cada uma destas lettras um valor proprio que se acha escripto em seguida :

I	V	X	L	C	D	M
um	cinco	dez	cincoenta	cem	quinhentos	mil

16. **Observação.** — No estudo da *numeração* indicaremos o modo de representar os numeros por meio destes algarismos.

17. **Os numeros** dividem-se em *inteiros*, *fracção* e *mixtos* ou *fraccionarios*.

18. **Numero inteiro.** — É o resultado da medida ou comparação da grandeza por meio de uma unidade, quando esta se contem na grandeza *exactamente* uma ou mais vezes. Exemplos : No n.º 12, quando medimos o comprimento da mesa com o palmo e elle se conteve 8 vezes exactamente, 8 é um *numero inteiro;* do mesmo modo, quando contámos os tijolos da pilha achámos 5 exactamente, 5 é um *numero inteiro;* etc.

19. **Fracção.** — É o resultado da medida de uma grandeza por uma unidade, quando esta é de dimensões maiores do que a grandeza. D'ahi conclue-se que a *fracção* representa uma ou mais partes eguaes da unidade. Supponhamos que se quer medir a grandeza AB pela unidade ab; é claro que a grandeza

A |——|——|——| B

c

a |——|——|——|——| b

não contem a unidade nem uma só vez, mas nós podemos dividir a unidade em partes eguaes (*quatro,* por exemplo) de modo que uma destas partes se contenha na grandeza um numero exacto de vezes (*tres,* por exemplo), então se mede a grandeza AB não pela unidade ab *directamente*, mas por uma de suas partes eguaes ac; e como a parte ac se contem 3 vezes na grandeza, representa-se o resultado de uma tal medida escrevendo um traço horisontal, abaixo o numero de partes eguaes em que se dividio a unidade (4) e na parte superior o numero de vezes (3) que uma dessas partes se conteve na grandeza e assim temos a fracção relativa a esta medida:

$$\frac{3}{4}$$

20. **Denominador.** — Chama-se denominador de uma fracção — *o numero que indica em quantas partes eguaes foi a unidade dividida;* no exemplo acima é 4.

21. **Numerador.** — Chama-se numerador de uma fracção — *o numero que indica quantas vezes uma das*

partes eguaes em que a unidade foi dividida se conteve na grandeza; no exemplo acima é 3.

22. **Numero mixto** ou **fraccionario.** É o numero que se compõe das duas especies acima — *inteiro* e *fracção.*

Exemplo : Supponhamos que se quer medir a grandeza AB pela unidade ab;

C D

A |————|————|—|—| B

a |—|—|—| b

levando a unidade sobre a grandeza ella a contem de A a C uma vez, de C a D outra vez; em DB não se contem mais — é o caso da fracção. Dividindo ab em partes iguas (3), taes que uma dellas se contenha em DB, vemos que DB contem uma destas partes eguaes duas vezes, logo DB é igual a $\frac{2}{3}$; mas como AD é egual a 2 vezes a unidade, porque a conteve exactamente *duas* vezes (numero inteiro 2) segue-se que o numero que representa a medida de AB é $2\frac{2}{3}$ que se lê : *dois e dois terços.*

23. **Observação.** — Ha outras especies de numeros, que serão estudadas em occasiões opportunas.

Numeração (1)

24. **Systema de numeração.** — É a combinação de *palavras* e *signaes* convencionados para a representação dos numeros. D'ahi resulta a divisão da numeração em fallada e escripta, occupando-se a primeira da representação dos numeros por meio de *palavras* oraes ou escriptas, e a segunda da representação dos numeros por meio de *signaes, caracteres* ou *algarismos*.

25. **Numeração fallada.** — É a combinação de palavras apropriadas para a representação dos numeros. Havendo uma infinidade de numeros, é claro que não poderiamos dar um nome a cada um delles, mesmo aos que necessitamos communmente, porque se tornaria impossivel guardar na memoria tão consideravel numero de nomes; procurou-se, então, um meio facil e commodo de remediar este inconveniente de modo a designar-se todos os numeros com um numero restricto de nomes. O artificio para isto empregado baseia-se na lei que se convencionou adoptar para a numeração decimal : « *Dez unidades de uma ordem formam uma de ordem immediatamente superior* ».

(1) Para alguns parecerá que démos grande desenvolvimento ao estudo da numeração, maior talvez do que comportava este livro; mas aqui se acham os conhecimentos indispensaveis para se poder facilmente aprender a ler e escrever um numero.

26. **Base,** de um systema de numeração, *é o numero de unidades de uma ordem necessario para formar uma de ordem immediatamente superior*. No systema decimal, geralmente usado, é o *numero dez*.

27. As unidades simples, ou de primeira ordem, tambem chamadas numeros digitos, são as nove primeiras que já conhecemos : *um, dois, tres, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove*. A *nove* juntando-se uma unidade forma-se o numero *dez;* mas como *dez unidades de uma ordem formam uma de ordem immediatamente superior*, temos assim o numero dez constituindo *uma unidade de segunda ordem*, que se denominou *dezena*, nome derivado de *dez*.

Juntando-se unidades á dezena, formam-se successivamente os numeros : *onze*, de *undeci; doze*, de *duodeci; treze, quatorze, quinze, dezeseis, dezesete*, etc., até *vinte* ou duas dezenas, cujos nomes são :

1.ª dezena	. . . .	dez
2.ª »	. . . .	vinte
3.ª »	. . . .	trinta
4.ª »	. . . .	quarenta
5.ª »	. . . .	cincoenta
6.ª »	. . . .	sessenta
7.ª »	. . . .	setenta
8.ª »	. . . .	oitenta
9.ª »	. . . .	noventa
10.ª »	. . . .	cem.

As dez primeiras dezenas, unidades de segunda ordem, formam uma de *terceira*, a qual se denominou *centena*, nome derivado do primeiro numero d'essa ordem que é *cem* (1).

28. **Observação.** — Os numeros intermediarios formam-se juntando-se unidades ás respectivas dezenas;

(1) Ás vezes emprega-se a denominação — *cento*.

assim temos : vinte e um, vinte e dois... vinte e nove; trinta e um, trinta e dois... trinta e nove, etc.

As centenas contam-se como contámos as unidades; assim diz-se : cento e um... cento e vinte... cento e noventa e nove, duas centenas ou *dois centos*, nome que o uso modificou para *duzentos*. A *duzentos* juntando-se unidades formam-se as centenas seguintes : tres centenas ou *tres centos*, que o uso modificou para *trezentos;* quatro centenas ou *quatrocentos;* cinco centenas ou *quinhentos;* seis centenas ou *seiscentos;* nove centenas ou *novecentos;* dez centenas. Mas como *dez unidades de uma ordem formam uma de ordem superior*, as *dez centenas* ou *dez unidades* de terceira ordem formam uma de quarta, denominada *unidade de milhar*, denominação derivada do nome do seu primeiro numero que é *mil*.

29. As unidades de milhar contam-se como contámos as simples, as dezenas, as centenas, etc. Assim, temos : um milhar ou mil; dois milhares ou dois mil;... nove milhares ou nove mil, dez milhares ou dez mil; mas *dez unidades de quarta ordem* formam uma de quinta, portanto dez milhares formam *uma dezena de milhar* — unidade de quinta ordem. As unidades de quinta ordem contam-se como contámos as de quarta e assim, temos : *uma* dezena de milhar ou dez mil; *duas* dezenas de milhar ou *vinte mil;... nove* dezenas de milhar ou noventa mil; *dez* dezenas de milhar; mas como dez unidades de quinta ordem formam uma de sexta, temos que *dez dezenas de milhar*, formam uma *centena de milhar* ou *cem mil*, unidade de sexta ordem.

Assim proseguindo, temos que : *dez centenas de milhar* formam uma unidade de setima ordem ou *milhão*. Ás unidades de *milhão*, seguem-se as *dezenas*, e *centenas de milhão* e *dez* destas ultimas unidades formam um *bilhão*, etc. O resumo abaixo e a explicação dada acima, permittem facilmente a formação das unidades de ordens superiores :

1.ª ordem...		unidades.	1.ª classe
2.ª	»	dezena ou dez, vinte, trinta...	
3.ª	»	centena ou cem, duzentos, trezentos...	
4.ª	»	milhar ou mil, dois mil, tres mil...	2.ª classe
5.ª	»	dezena de milhar ou dez mil, vinte mil...	
6.ª	»	centena de milhar ou cem mil, duzentos mil...	
7.ª	»	milhões... um milhão, dois milhões, tres milhões...	3.ª classe
8.ª	»	dezena de milhão ou dez milhões, vinte milhões...	
9.ª	»	centena de milhão ou cem milhões, 200 milhões...	
10.ª	»	bilhões... um bilhão, dois bilhões, tres bilhões...	4.ª classe
11.ª	»	dezena de bilhão ou dez bilhões, vinte bilhões...	
12.ª	»	centena de bilhão ou cem bilhões, 200 bilhões...	
13.ª	»	trilhões... um trilhão, dois trilhões, tres trilhões...	5.ª classe
. . .		. . . .	

30. Á medida que as ordens de unidades foram-se formando, procurou-se grupal-as de *tres* em *tres*, constituindo as *classes*, com o fim de facilitar o modo de ler e escrever os numeros, como tambem reduzir a nomenclatura. Como se observa em o numero acima, as classes são formadas de agrupamentos de tres ordens de unidades :

1.ª	classe :	unidades,	dezenas e	centenas	(simples)
2.ª	»	»	»	»	de milhar
3.ª	»	»	»	»	de milhão
4.ª	»	»	»	»	de bilhão
5.ª	»	»	»	»	de trilhão
6.ª	»	»	»	»	de quatrilhão
. . .		. . .	. . .	. . .	. . .

31. Ha, para representação dos numeros, duas series de palavras — uma representando os nomes dos numeros — *dez, cem, mil...* outra o nome das unidades de cada ordem — *dezena, centena, milhar...* Assim, conse-

guio-se com um numero reduzido de palavras representar os numeros necessarios aos usos communs; umas palavras são primitivas como *dez, cem, mil...* outras derivadas por meio das terminações *ena, enta* e *lhão*, como dez*ena*, oit*enta*, tri*lhão*.

32. **Numeração escripta.** — É a combinação de signaes adoptados para representação graphica dos numeros.

Os signaes ou *algarismos* geralmente usados são os que já conhecemos :

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Com a combinação conveniente destes algarismos podemos representar todos os numeros, e como os signaes são distinctos pela sua forma a numeração escripta tem sobre a fallada a vantagem de, sendo tambem universalmente adoptada, evitar o inconveniente da diversidade das linguas, alem de abreviar e facilitar os calculos.

33. O artificio empregado na representação dos numeros baseia-se na seguinte lei : « *Um algarismo escripto á esquerda de outro tem um valor dez vezes maior do que teria se estivesse escripto no logar desse outro* » (1). Desta lei se conclue — que um algarismo tem um valor variavel com o logar que elle occupa em um numero, valor que se denomina *relativo*; mas como elle tem tambem um valor dependente de sua forma, a este valor se denomina *absoluto*.

34. **Valor absoluto** de um algarismo — é o que elle tem pela sua forma ou considerado isoladamente.

(1) Podemos dar a esta lei um enunciado mais comprehensivel na pratica : *Um algarismo escripto á esquerda de outro representa unidades de ordem immediatamente superior ás que representa esse outro.*

35. **Valor relativo** de um algarismo — é o que elle tem dependente de sua collocação em um numero.

36. — É graças a esses valores, que um mesmo algarismo *póde representar unidades de qualquer ordem;* assim, o algarismo 8, isoladamente, pela sua forma, tem o valor absoluto *oito*, mas escripto á esquerda de um zero (1) forma o numero 80, e 8 passa então a representar *unidades de ordem immediatamente superior ou dezenas*. Escripto á esquerda de *dois zeros* forma o numero 800; porque o primeiro zero á direita representa unidades, o segundo representa dezenas ou unidades de ordem immediatamente superiores áquellas e o algarismo 8, pela mesma razão, representa *centenas*, logo 800 representa 8 *centenas*, etc. Eis como se distingue quando um algarismo representa unidades de qualquer ordem, e assim temos os numeros :

8	*oito* unidades
80	*oito* dezenas
800	*oito* centenas
8000	*oito* mil ou milhares
80000	*oit*enta mil ou milhares
800000	*oito*centos mil ou milhares
8000000.	*oito* milhões
. . . .	

37. — Vê-se, pois, que o zero *serve para dar a qualquer um algarismo significativo um valor relativo e ao mesmo tempo indicar a ausencia ou a falta de unidades de uma ordem*. Agora podemos facilmente escrever um numero qualquer de unidades de *uma mesma classe* (2), isto é, um numero de *tres* algarismos. Seja como exemplo escrever : *trezentos e setenta e duas* unidades (3). O numero dado contem 3 centenas, 7 dezenas e 2 unidades.

(1) **Observação.** As unidades de ordem inferior se acham sempre á direita do numero e as de ordem superior á esquerda : é isto uma consequencia da lei enunciada acima.

(2) Depois de saber escrever um numero de uma classe qualquer, facilmente escreve-se então um numero de mais de tres algarismos.

(3) As unidades, dezenas e centenas podem ser de qualquer ordem.

Póde-se empregar dois processos — um theorico e outro
pratico. O 1.º consiste em escrever o algarismo das
unidades mais inferiores que o numero encerra (2 — no
exemplo dado), á esquerda o algarismo das de ordem
immediatamente superior e caso não haja unidades
dessa ordem suppre-se com um zero para dar ao alga-
rismo seguinte o *valor relativo*, no exemplo temos
7 dezenas, forma-se assim o numero 72; á esquerda de
7, algarismo das dezenas, escreve-se o das centenas que
é 3 e assim temos 372. O 2.º ou pratico, consiste em
escrever o numero em ordem inversa áquella em que
elle se forma, isto é, da esquerda para a direita : assim
escrevem-se os algarismos que representam as centenas,
dezenas e unidades da classe que se quer escrever, tendo
o cuidado de preencher com um zero o logar, que se
denomina geralmente *casa*, correspondente á ordem de
unidades que faltar. Seja o numero : *quinhentos e sete*
unidades; este numero encerra 5 centenas (ou quinhen-
tos) e 7 unidades, logo *não tem dezenas*, sendo necessario
preencher com um zero a *casa* das dezenas; assim
temos 507. Seja ainda escrever *oitenta e sete;* este nu-
mero não encerra centenas, encerra porém 8 dezenas e
7 unidades, logo é 87, e não se escreve o zero á direita,
no começo de um numero, para indicar ausencia de cen-
tenas, porque *zeros á direita e no começo de um numero*
inteiro, não lhe alteram o valor — é isto uma consequen-
cia da lei fundamental.

38. — Sabendo escrever um numero de *tres alga-*
rismos, relativos a uma classe qualquer, é facil escrever
um numero qualquer de mais de tres algarismos desde
que conheçamos a classe das unidades mais elevadas,
visto como cada classe tem apenas tres ordens de uni-
dades; começa-se ainda pela esquerda escrevendo, *como*
ficou dito, a classe mais elevada, depois a immediata-
mente inferior, e assim prosegue-se até escrever a ulti-
ma classe. Para mais facilidade pode-se destacar a
principio as classes, escrevendo cada uma de per si, e
depois collocando umas em seguida ás outras a partir
successivamente das classes superiores para as inferio-
res. — Exemplo : 1.º Seja o numero *oitenta e sete milhões*
quatrocentos e cinco mil e noventa e sete; este numero
contendo milhões, que correspondem a unidades da
terceira classe, encerra *tres classes* — milhões, milhares

e unidades simples. A classe dos milhões — *trinta e sete milhões*, contem, como já sabemos, 3 dezenas e sete unidades, logo é 37 unidades. A classe dos milhares contem 4 centenas, nenhuma dezena ou 0 dezena e 5 unidades, é pois 405. A classe das unidades simples, finalmente, não contem centenas ou 0 centenas; contem, porém, 9 dezenas e 7 unidades, logo é 097. Escrevendo os numeros relativos ás classes, uns em seguida aos outros, a partir da classe superior, temos finalmente :

37 405 097 ou 37405097 .

Como 2.º exemplo, seja o numero *oitocentos e setenta e dois bilhões, trezentos e vinte e um milhões, quatrocentos e dois mil e seis unidades*. O numero proposto encerrando bilhões (1), contem unidades da *quarta classe*. Esta classe contem 8 centenas, 7 dezenas e 2 unidades, logo é 872 *bilhões*. A immediatamente inferior é a dos milhões e encerra 3 centenas, 2 dezenas e 1 unidade, logo é 321 *milhões*. A que se lhe segue é a dos mil ou milhares, que encerra 4 centenas, 0 dezenas e 2 unidades, é portanto 402 mil. A ultima classe, das unidades simples, não encerra centenas e nem dezenas, logo contem 0 centenas, 0 dezenas e 6 unidades e o numero que a representa é, pois, 006. O numero escripto, conforme ficou dito, é portanto 872321402006.

39. **Observação.** — Quando a um numero faltam todas as unidades de uma ou mais classes, preenche-se toda a classe por meio de zeros, como em os numeros : 8000000, 8000720, 6000000462, etc.

40. **Ler um numero.** — É o inverso do que fizemos; para ler um numero escripto divide-se-o em classes de 3 *algarismos* a partir da direita para a esquerda, podendo a ultima classe ter mesmo um só algarismo; conhecida a classe mais elevada, lêem-se as unidades de cada classe, dando afinal a terminação relativa á classe considerada, depois prosegue-se successiva-

(1) O primeiro cuidado de quem escreve um numero consiste em verificar a classe mais elevada que elle encerra.

mente fazendo o mesmo com os algarismos das classes seguintes. Exemplos : 1.º Seja o numero 372857638; este numero contem *tres* classes : 372-857-638, logo a classe mais elevada é a terceira ou dos milhões; reconhecido isto, é facil lêr o numero : 372 *milhões*, 857 *mil*, 638 *unidades*. 2.º Seja o numero 1370042785637; este numero tem *cinco* classes, que são 1-370-042-785-637, logo a classe mais elevada é a *quinta* ou a dos *trilhões*; portanto lê-se : 1 *trilhão*, 370 *bilhões*, 42 *milhões* (1), 785 *mil* e 637 *unidades*.

Este é o modo corrente e communmente usado para ler um numero, embora haja outros meios.

41. **Numeração romana.** — Já conhecemos os algarismos romanos e os seus valores :

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Os outros numeros são representados combinando convenientemente estes symbolos entre si ou repetindo alguns delles como sejam : I, X, C e M. Assim : II vale 2, III vale 3, XX vale 20, CCC vale 300, MMM vale 3000, etc. Nunca, porém, estas lettras são repetidas mais de tres vezes seguidamente.

Quando á esquerda de uma lettra que representa valor maior se escreve uma de menor valor, isto indica que da primeira se deve subtrahir a da esquerda. Exemplos : IV vale V menos I ou 5 menos 1, que é quatro; etc.

Torna-se o valor de uma lettra *mil vezes maior* collocando-se na parte superior desta lettra um pequeno traço horizontal. Exemplos : C vale cem, $\overline{\text{C}}$ vale cem mil; M vale mil, $\overline{\text{M}}$ vale mil vezes mil ou um milhão; etc.

(1) Não se lêem os zeros; assim não se lê 042 milhões, mas sómente 42 milhões.

Numeros Inteiros

42. **Operações.** — São os diversos modos de combinar os numeros. Na pratica das operações uns numeros são dados ou conhecidos, outros desconhecidos e são os que procuramos determinar pelas relações que os ligam áquelles, ora compondo-os, ora decompondo-os (1).

43. — São operações de composição — a addição ou *somma*, a multiplicação e a potenciação; são operações de decomposição — a subtracção ou *conta de diminuir*, a divisão e a radiciação.

44. **Addição.** — É a operação que tem por fim determinar um numero que contenha tantas unidades,

(1) No correr do nosso estudo teremos occasião de empregar certas expressões que carecem de ser conhecidas, taes são :

1.ª **Proposição.** — É o enunciado de um juizo que avançamos, cuja verdade geralmente carece de ser demonstrada. Exemplo : *o algarismo 7 á esquerda de um zero representa dezenas.*

2.ª **Axioma.** — É uma proposição evidente e que, portanto, não precisa de ser demonstrada. Faremos uso dos seguintes :

1.º *O todo é maior do que qualquer uma das suas partes;*

2.º *O todo é egual á somma das suas partes;*

3.º *Duas cousas eguaes a uma terceira são eguaes entre si;*

4.º *Effectuando sobre quantidades eguaes a mesma operação, os resultados serão eguaes.*

3.ª **Problema.** — É o enunciado de uma questão que exige solução. Os problemas podem ser graphicos ou numericos.

4.ª **Egualdade.** — É a relação estabelecida entre duas ou mais grandezas equivalentes.

5.ª **Identidade.** — É a egualdade estabelecida entre duas ou mais quantidades.

Regra. — É o enunciado final e pratico do modo como se deve effectuar uma operação.

Prova. — É uma segunda operação, que serve para verificar a exactidão da primeira quantas ha em outros numeros dados. Estes numeros chamam-se *parcellas* e o que se procura — *somma* ou *total;* a somma é o *todo* e as parcellas são as *partes*. É a unica operação em que de uma só vez se opera sobre mais de dois numeros. Divide-se em dois casos.

1º. **Caso.** — « *Addição de numeros simples* ». dado como exemplo sommar os dois numeros 5 e 5. É claro que para termos um numero que contenha tantas unidades quantas os dois encerram, basta a um delles juntar successivamente as unidades do outro. Supponhamos que ambos os numeros representam

tijolos. De um lado temos uma pilha de 5 e do outro outra egual pilha; se aos tijolos da pilha da esquerda juntamos um a um os da direita, contando-os, teremos : 5 que já

contem e 1 fazem 6; 6 e 1 fazem 7; 7 e 1 fazem 8; 8 e 1 fazem 9; 9 e 1 fazem 10. — Assim fica exgotada a pilha da direita e na da esquerda encontram-se 10 tijolos, numero que representa a somma. Mas como tambem poderiamos obter a somma juntando aos tijolos da pilha da direita os da esquerda e cada pilha representando uma parcella, segue-se que *a ordem das parcellas não altera a somma.*

45. — Do mesmo modo que sommámos *tijolos* podemos sommar quaesquer outros objectos, *desde que elles sejam da mesma especie*. Se fossem de especies dif-

ferentes não podiamos sommar, como não podemos sommar os 5 tijolos da pilha á esquerda com os 5 ovos contidos no pequeno ninho á direita. O

numero de objectos resultantes ainda é 10, mas é evidente que este numero nem representa ovos, nem tijolos; d'ahi conclue-se — *que só se podem sommar quantidades da mesma especie ou homogeneas.*

46. Se tivessemos mais de dois numeros para sommar, addicionavamos dois delles, depois ao resultado o terceiro, depois o quarto e assim por diante. Exemplo : *Sommar os numeros* 3, 4 e 7; indicando a operação pelo signal + que se lê *mais* — temos :

$$3 + 4 + 7 = 7 + 7 = 14.$$

47., — Na pratica é necessario ter de memoria a somma dos numeros simples; isto se obtem pela *Taboada de Pythagoras*, que se forma escrevendo em uma linha horizontal os numeros simples a partir de zero; depois somma-se uma unidade a cada um delles e obtem-se a segunda columna; depois uma unidade a cada numero da 2.ª columna e obtem-se a 3.ª e assim prosegue-se até juntar successivamente 9 unidades. Para fazer uso da taboada de Pythagoras, afim de obter a somma de numeros simples, procura-se um delles na columna horisontal de cima e o outro na vertical á esquerda, devendo a somma achar-se no encontro destas duas columnas. Exemplo — obter a somma de 6 e 7 : procurando 6 na columna horisontal e 7 na vertical, obtem-se 13 no encontro das duas columnas.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

48. 2º **Caso.** — « *Addição dos numeros compostos* ». Os numeros compostos, ou formados de mais de um algarismo, sommam-se do mesmo modo que os simples, mas esse processo natural é muito longo, por isto emprega-se um artificio que *consiste em sommar as unidades de diversas ordens entre si, como se sommam os numeros simples.* Seja como exemplo — sommar os numeros 256, 1211 e 2322. Na pratica escrevem-se uns abaixo dos outros, de modo que as unidades de mesma ordem se correspondam, como se vê ao lado esquerdo; depois sommam-se as unidades simples, conforme ficou dito no primeiro caso e obtem-se 9, escreve-se abaixo do traço horisontal, que se faz para separar as parcellas da somma; do mesmo modo sommam-se as dezenas e obtem-se 8, numero que *se escreve á esquerda* de 9, algarismo das

$$\begin{array}{r} 256 \\ 1211 \\ \underline{2322} \\ 3789 \end{array}$$

unidades, para indicar que representa *dezenas*, de accordo com a lei da numeração escripta; depois sommam-se as centenas e obtem-se 7, numero que se escreve *á esquerda* do algarismo 8 das dezenas para indicar que representa *centenas;* finalmente, sommam-se os milhares e obtem-se 3; este numero escreve-se á esquerda do algarismo 7 das centenas para indicar que representa milhares. Assim obtem-se o numero 3789 que *encerrando tantas unidades, dezenas, centenas e milhares* quantas encerram *as parcellas,* representa a somma pedida.

49. No exemplo acima observa-se que a somma de cada uma das columnas — das unidades, dezenas, centenas e milhares — *não excede de nove;* se excedesse seria necessario *extrahir de cada uma destas sommas parciaes* (1) *as unidades de ordem superior formadas para sommal-as com as da mesma ordem*, visto como só se podem sommar quantidades homogeneas e as unidades de uma ordem não o são com as de outra ordem differente. Seja como exemplo sommar os numeros: 3742, 53801, 9378 e 653. Dispondo-os com ficou dito acima, temos a somma das unidades que é 14 unidades de 1.ª ordem formam uma de 2.ª e resultam 4, escreve-se o algarismo 4 e a unidade de 2.ª ordem formada leva-se para sommar ás de mesma ordem ou dezenas, e como ficou reservada para isto chama-se *reserva*. Então, sendo 14 a somma das unidades, escreve-se 4 e diz-se *vai um* que se addiciona ás dezenas e assim temos: 1 e 5, 6; 6 e 4, 10; 10 e 7, 17; mas 17 dezenas formam uma centena, que se compõe de 10 dezenas, e ficam 7, algarismo que se escreve á esquerda de 4 para indicar dezenas, como já sabemos. A centena formada leva-se de reserva para sommar ás centenas e assim obtem-se: 1 e 6, 7; 7 e 7, 14; 14 e 3, 17; 17 e 8, 25; mas como 25 centenas formam dois milhares e ficam 5, escreve-se o algarismo 5 á esquerda do das dezenas e levam-se os 2 milhares formados para sommar

653
3742
9378
53801
67574

(1) Chama-se *somma parcial* a somma dos algarismos de cada columna ou das unidades de uma mesma ordem.

com os milhares, e assim temos: 2 e 3, 5; 5 e 9, 14; 14 e 3, 17; 17 milhares formam *uma dezena de milhar,* que levamos para sommar com as unidades da mesma ordem, assim obtem-se 6, algarismo que se escreve á esquerda de 7.

50. **Regra.** — Para sommar dois ou mais numeros, escrevem-se uns abaixo dos outros, de modo que as unidades de diversas ordens se correspondam, e abaixo passa-se um traço. A somma de cada columna não excedendo de 9 escreve-se abaixo da columna; mas excedendo verifica-se o numero de unidades de ordem superior que ellas formam, reserva-se este numero para addicionar com as da mesma especie e só escreve-se abaixo da columna, que se está addicionando, o restante: na ultima columna, porém, escreve-se toda a somma.

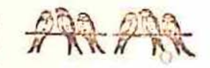
51. **Subtracção.** — É a operação que tem por fim subtrahir de um numero dado tantas unidades quantas ha em outro. O numero do qual se subtrahe chama-se *minuendo,* o que se subtrahe chama-se *diminuidor* e o que se procura — *resto*, excesso ou differença (1). É claro, então, que o minuendo representa a somma de duas parcellas, as quaes são o diminuidor e o resto; na addição davam-se as parcellas e se pedia a somma, aqui, ao contrario, é dada a somma de duas parcellas (minuendo) e uma dellas (diminuidor) e pede-se a outra — que é o resto, concluindo-se d'ahi que a subtracção é uma operação inversa á addição.

Na subtracção, como na addição, temos tres casos a considerar:

52. 1.º **Caso.** — *Subtracção entre numeros simples.* Como na addição o resultado só póde ser obtido directamente, tirando do minuendo uma a uma e successivamente as unidades do diminuidor, afim de obter as que restam. Seja, como exemplo — subtrahir de 6 o numero

(1) O numero que se procura toma a denominação de — *resto*, quando se deseja saber *quanto fica tirando do minuendo o diminuidor;* de *excesso*, quando se deseja saber de quanto o 1.º numero excede ao 2.º; e de *differença*, quando se deseja saber a differença que existe entre elles.

3. Supponhamos que se tem 6 passaros, como na figura á direita, e que se tira um a um os 3 do diminuidor, assim, temos : 6 menos 1, ficam 5; 5 menos 1, ficam 4; 4 menos 1, ficam 3; 3 é portanto o numero dos passaros restantes : é, pois, o resto (1). Seja, como segundo exemplo, *saber de quantas unidades* 9 *excede a* 5. Para indicar abreviadamente a subtracção emprega-se o signal — que se lê *menos*, o qual indica que do numero escripto á sua esquerda se deve subtrahir o da direita. Assim temos :



$$9-1=8;\ 8-1=7;\ 7-1=6;\ 6-1=5;\ 5-1=4.$$

Tendo-se subtrahido successivamente a unidade 5 vezes ou *5 unidades*, ficaram 4, numero este que indica o *excesso* de 9 sobre 5 ou o que é o mesmo — o resto que ficaria de 9 tirando 5.

53. Por ser a subtracção uma operação inversa á addição, póde-se indirectameute obter o resto — *procurando-se quantas unidades se devem sommar ao diminuidor para ter o minuendo;* é claro que o numero de unidades sommadas representa o *excesso* do minuendo sobre o diminuidor, portanto quantas ficariam tirando daquelle este numero. Resolvendo deste modo o segundo exemplo, temos :

$$5+1=6;\ 6+1=7;\ 7+1=8;\ 8+1=9;$$

logo, é necessario sommar 4 unidades a 5 para ter 9, portanto 4 representa o numero de unidades de que 9 é maior do que 4, é, pois, o rèsto ou o excesso de 9 sobre 4.

(1) Cumpre observar que sendo o minuendo uma somma, e o diminuidor e o resto as parcellas, só se podem subtrahir quantidades da mesma especie ou homogeneas.

54. **Se o minuendo é um numero composto,** mas o diminuidor é simples, a operação ainda se effectua do mesmo modo. Seja, como exemplo : *subtrahir de* 37 *o numero* 5, temos :

$$37-1=36;\ 36-1=35;\ 35-1=34;$$
$$34-1=33;\ 33-1=32;$$

e 32 é, pois, o resto.

55. Para o estudo do 2.º *caso* convem que se tenha de memoria ou se obtenha facilmente os resultados das subtracções quando os restos forem numeros simples; este resultado se alcança facilmente pela taboada de diminuir, que é tirada da taboada de Pythagoras, relativa a addição, a qual já conhecemos.

Para obter-se o resto da subtracção entre dois numeros, sendo o diminuidor um numero simples, procura-se este numero na 1.ª columna horisontal acima (ou vertical á esquerda), segue-se pela columna, em que elle se achar, para baixo (ou para a direita) até obter o minuendo; depois de obtido este numero segue-se pela mesma linha para a esquerda (ou para cima) e no fim da columna obtem-se o resto.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Seja, como exemplo — *obter o resto da subtracção entre* 13 *e* 6. Procura-se 6 na 1.ª columna horisontal acima, descendo por ella encontra-se 13 e seguindo pela linha horisontal para a esquerda obtem-se 7 para resto.

56. 2º **Caso.** — *Subtracção entre dois numeros compostos*. O artificio para reduzir este caso ao precedente, afim de obter o resto — *consiste em subtrahir as unidades de diversas ordens entre si como se fossem simples*, analogamente ao que fizemos na addição.

1.º *Exemplo* (1). Subtrahir de 73884 o numero 62623.

(1) Neste 1º exemplo, para melhor comprehensão do methodo, os algarismos que representam as unidades de diversas ordens do minuendo são eguaes ou maiores do que os do diminuidor.

Na pratica, para tornar o calculo mais facil, escreve-se o minuendo e abaixo o diminuidor, de modo que as unidades de diversas ordens se correspondam, separando-os depois do resto por um traço horisontal. O minuendo representando a somma das unidades, dezenas, centenas, etc.. do diminuidor e do resto, os seus algarismos, que representam essas unidades, devem representar a somma dos algarismos do diminuidor e do resto. Assim, 4 deve representar a somma das unidades do diminuidor e do resto, logo tirando as 3 do diminuidor fica 1 para o resto. O algarismo 8 das dezenas do minuendo deve representar a somma das dezenas do diminuidor e do resto, logo tirando as 2 dezenas do diminuidor ficam 6 para o resto. Pelo mesmo motivo achamos 2 *centenas* para resto, subtrahindo das 8 do minuendo as 6 do diminuidor; 1 *milhar* para o resto, subtrahindo dos 3 do minuendo os 2 do diminuidor; e, finalmente, 1 *dezena de milhar* para o resto, subtrahindo das 7 do minuendo as 6 do diminuidor. O resto, é pois : 11261, numero que sommado ao diminuidor reproduz o minuendo.

$$\begin{array}{r} 73884 \\ \underline{62623} \\ 11261 \end{array}$$

2.º *Exemplo*. Seja de 8529 subtrahir 3745. Dispondo os numeros, como se faz na pratica, temos : Sendo 9 maior do que 5 é claro que tirando 5 de 9, ficam 4 unidades para o resto, conforme vimos precedentemente. O algarismo 2 das dezenas do minuendo sendo menor do que 4, algarismo das dezenas do diminuidor, é claro que elle não representa a somma das 4 dezenas deste numero e das do resto; mas, se isto se dá, *é porque esta somma foi tal que formou uma unidade de ordem superior* ou centena, que passou como reserva, ficando apenas duas dezenas; logo se tirarmos das 5 do minuendo a centena que passou como reserva, redusirmol-a a dezenas (1) e sommarmos ás 2 existentes no minuendo teremos 12 dezenas, que então representam a somma das dezenas do resto e do diminuidor, e desta somma (12) subtrahindo as 4 dezenas deste numero ficam 8 para o resto. O minuendo não tem mais 5 centenas, mas apenas 4, e para indicar isto é que se escreve acima do 5 um traço e o algarismo 4, o qual deve

$$\begin{array}{r} \overline{74} \\ 8529 \\ \underline{3745} \\ 4784 \end{array}$$

(1) Cumpre observar que uma centena contem 10 dezenas.

representar a somma das 7 centenas do diminuidor e do resto. Isto não se dando é porque esta somma foi tal que formou um milhar, o qual passou como reserva para os milhares, ficando apenas 4 centenas. Dos 8 milhares do minuendo tirando 1, reduzindo a centenas e sommando ás 4 existentes no minuendo, ficam 14, numero que representa a somma das centenas do resto e do diminuidor; desta somma subtrahindo as 7 centenas deste numero ficam 7 para o resto.

O minuendo não contem mais 8 milhares visto como tirámos 1, mas apenas 7, o que é indicado escrevendo um pequeno traço e acima o algarismo 7. Este é o algarismo dos milhares do minuendo e como é maior do que 3 podemos effectuar a subtracção, ficando 4 milhares para o resto.

Assim, pois, o resto é 4784, numero que sommado ao diminuidor reproduz o minuendo, como é facil verificar effectuando a somma.

57. **Na pratica** abrevia-se este processo. — Quando algum algarismo do minuendo é menor do que o que lhe corresponde no diminuidor, augmenta-se o de *dez unidades da ordem que elle representa*, faz-se então a subtracção e depois, *em logar de diminuir o algarismo seguinte do minuendo* de 1 unidade, augmenta-se o correspondente do diminuidor de 1 unidade da mesma ordem, *visto como assim o resto não se altera.*

Opera-se do seguinte modo : 7 de 8 fica 1 para resto. 3 de 2 não póde ser, mas de 12 ficam 9 para resto. De 12 *vai um* e 7 são 8 e 8 de 6 não póde ser, mas de 16 ficam 8 para resto. De 16 *vai um* e 8 são 9 e 9 de 5 não póde ser, mas de 15 ficam 6. De 15 *vai um* e 1 são 2, numero que subtrahido de 2 não deixa resto ou deixa zero, que não se escreve, porque zero á esquerda de um numero inteiro não lhe altera o valor.

$$\begin{array}{r} 25628 \\ \underline{18737} \\ 6891 \end{array}$$

59. **Regra.** — Para effectuar a subtracção entre dois numeros compostos — escreve-se o minuendo e abaixo o diminuidor, de modo que as unidades de mesma ordem se correspondam e separam-se os dois numeros do resto por um traço horisontal; depois subtrahem-se

as unidades de diversas ordens do diminuidor das do minuendo, escrevendo os restos abaixo do traço e operase assim até se ter esgotado o diminuidor. Se em alguma ordem de unidades o algarismo, que as representar, fôr maior no diminuidor do que no minuendo, junta-se a este algarismo mentalmente 10, subtrahe-se e escreve-se o resto, tendo o cuidado de augmentar o algarismo seguinte do diminuidor de uma unidade ou diminuir o do minuendo (1).

60. **Provas reaes da addição e da subtracção.** — Sendo a *prova* uma operação que tem por fim verificar a exactidão da primeira, tambem está sujeita a erros. Para evitar, tanto quanto possivel, que um erro commettido no correr da operação se reproduza, é necessario evitar a ordem das palavras empregadas durante a operação.

61. **Provas da addição.** — 1.ª *Sommar de baixo para cima*, escrevendo acima da 1.ª parcella o resultado e confrontando-o com a primeira somma obtida;

2.ª Sommar segunda vez *mudando a ordem das parcellas*;

3.ª *Sommar da esquerda para a direita.* Exemplo : verificar a somma á direita :

Separa-se por um traço a primeira da nova somma, a qual obtem-se addicionando cada columna a partir da esquerda, e dando á somma obtida o valor relativo com zeros ou não, com *tanto que se tenha o cuidado de escrever as unidades de mesma ordem umas abaixo das outras*; depois somma-se o resultado, sendo egual ao primeiro *é provavel* que esteja certa a operação.

1372
4529
653
6554
5000
1400
140
14
6554

(1) Quando de um numero se tem que subtrahir varios outros, podem-se fazer as subtracções successivamente ou sommal-os e subtrahir a somma.

62. **Provas da subtracção.** — 1.ª Sommam-se o diminuidor e o resto, o resultado deve ser igual ao minuendo.

2.ª — Do minuendo subtrahe-se o resto, o resultado deve ser o diminuidor.

3.ª — Somma-se ou subtrahe-se ao minuendo e ao diminuidor um mesmo numero, effectua-se novamente a subtracção e deve-se achar o mesmo resto.

63. **Multiplicação.** — É a operação em que — sendo dado dois numeros, se procura obter um terceiro, que se forme do primeiro como o segundo formou-se da unidade. O 1.º dos numeros dados denomina-se *multiplicando* e é o numero *que se quer multiplicar*; o 2.º denomina-se *multiplicador* e é o numero *pelo qual se quer multiplicar*; o 3.º finalmente, denomina-se *producto* e é o que se quer obter.

Pela definição dada vê-se que o *producto* deve se formar do *multiplicando* como o *multiplicador* formou-se da unidade. É claro que o *multiplicador*, sendo um numero inteiro, formou-se da unidade pela addição successiva de tantas quantas elle contem; portanto o *producto*, devendo se formar do *mesmo modo* do multiplicando, deve contel-o *tantas vezes quantas o multiplicador contem a unidade*; isto é, o multiplicando é para o producto o que a unidade é para o multiplicador, logo este numero contendo *tres, quatro*, etc., vezes a unidade, o producto contem *tres, quatro*, etc., vezes o multiplicando.

64. Do exposto conclue-se — que o producto *é uma somma de tantas parcellas eguaes ao multiplicando quantas são as unidades do multiplicador*; e, conseguintemente, que a multiplicação é um caso particular da addição, caso em que as parcellas são todas eguaes entre si e eguaes ao multiplicando, e em numero egual a tantas unidades quantas o multiplicador contem.

Na multiplicação temos tres casos a considerar.

65. **1.º Caso.** — *Multiplicação de numeros simples.* Neste caso o resultado só póde ser obtido directamente, isto é, pela addição. Seja, como exemplo : *multipli-*

car 7 por 4. Temos que sommar 4 parcellas eguaes a 7 para obtermos o producto, logo :

$$7 + 7 + 7 + 7 = 28.$$

Para indicar que um numero deve ser multiplicado por outro, escreve-se o multiplicando, depois o signal $\times$ da multiplicação e em seguida o multiplicador; a operação é, então, *indicada* do seguinte modo : $7 \times 4 = 28$, que se lê : 7 *multiplicado por 4 egual a* 28.

66. Para o estudo dos casos seguintes convem saber de memoria os productos dos numeros simples entre si, sem o que a pratica das *multiplicações* dos numeros compostos tornar-se-ia muito demorada; para isto existe a *taboada de multiplicação* devida a Pythagoras, a qual damos em seguida :

Em linha horisontal escreve-se a serie dos numeros simples, a partir da unidade, formando-se a 1.ª columna horisontal; imagina-se outra columna egual e somma-se a esta, obtem-se a 2.ª; somma-se esta com a 1.ª e obtem-se a 3.ª, somma-se esta com a 1.ª e obtem-se a 4.ª; assim prosegue-se, sommando sempre a ultima columna obtida á 1.ª até nove vezes.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

67. — O producto de 2 numeros obtem-se — *procurando* um delles na 1.ª columna horisontal e o outro na 1.ª vertical; no encontro das duas columnas encontra-se o producto. *Exemplo* : 8×5, procurando 5 na 1.ª columna horisontal e 8 na 1.ª vertical, obtem-se 40, producto procurado, no encontro das duas columnas.

68. **Observação.** — Quando os numeros representam unidades differentes, isto é, se acham referidas a unidades diversas, *o producto é sempre da especie do multiplicando*, visto como elle é uma somma cujas parcellas são eguaes ao multiplicando e a somma é sempre, como sabemos, da especie das parcellas.

Assim, multiplicando *dois vintens* (preço de uma *laranja*) por 10, numero das laranjas compradas, obtem-se 20 vintens, producto da especie do multiplicando.

69. **2.º Caso.** — *Multiplicação de um numero composto por um simples*. Exemplo : *multiplicar* 2745 *por* 3. Para obtermos directamente o resultado, teriamos que sommar 3 parcellas eguaes a 2745. Observemos, porém, que para isto seriamos levados a sommar 3 parcellas eguaes a 5 *unidades*, 3 eguaes a 4 *dezenas*, 3 eguaes a 7 *centenas* e 3 eguaes a 2 *milhares*, e depois addicionar os resultados, que se denominam *productos parciaes*. Mas isto equivale a multiplicar successivamente 5 unidades, 4 dezenas, 7 centenas e 2 milhares pelo multiplicador 3. Dispondo, então, o calculo como se faz na pratica, resultam os productos parciaes :

			2745
			3
1.º	Producto parcial de 5 unidades pelo multiplicador		15
2.º	» » » 4 dezenas » »		12.
3.º	» » » 7 centenas » »		21..
3.º	» » » 2 milhares » »		6...
		Producto.	8235

O signal . indica a suppressão dos zeros que deviam ser escriptos para dar a 12 o valor relativo a dezenas, a 21 o valor relativo a centenas e a 6 o valor relativo a milhares, visto como na pratica deixa-se de escrevel-os attendendo a que *a collocação das unidades da mesma ordem, umas abaixo das outras*, é sufficiente para dar-lhes o valor relativo que ellas representam. Cumpre observar que os productos de 5 *unidades*, 4 *dezenas*, 7 *centenas* e 2 *milhares* por 3, são respectivamente 15 *unidades*, 12 *dezenas*, 21 *centenas*, e 6 *milhares*, porque o *producto é da especie do multiplicando*, como sabemos.

	5745
	3
	17235

70. **Na pratica,** ao mesmo tempo que se obteem os diversos *productos parciaes* sommam-se-os mentalmente; assim, diz-se : 3 vezes 5 são 15, mas como 15 unidades formam uma dezena escreve-se 5 no producto e leva-se a dezena de *reserva* para sommar ao producto das dezenas. Este producto parcial é : 3 vezes 4 são 12 e 1 (*de reserva*, do 1.º producto parcial) são 13; escreve-se 3 e leva-se a centena de reserva para sommar ao producto das centenas. O producto das centenas é : 3 vezes 7 são 21 e 1 (*de reserva*) são 22; escreve-se 2 e levam-se as 20 centenas, que formam 2 milhares, para sommar ao producto dos milhares. Temos, finalmente : 3 vezes 5 são 15 milhares e 2

(*de reserva*) são 17, numero que se escreve todo no producto, visto como não ha mais algarismos no multiplicando para continuar a multiplicação. O producto obtido é, pois, o seguinte : 17235.

71. **3.° Caso.** — *Multiplicação de um numero composto por outro.* Exemplo : *Multiplicar* 2675 *por* 234. Para obtermos directamente o resultado, teriamos que sommar 234 parcellas eguaes a 2675. Observemos, porém, que podemos sommar 234 parcellas eguaes a 2675 sommando primeiro 4 *parcellas* (1), depois 30 *parcellas* e finalmente 200 *parcellas*. E claro que, addicionando depois estas *sommas parciaes*, teremos a somma das 234 parcellas pedidas. É o que vamos fazer :

1.ª *Somma parcial* — addição de 4 parcellas eguaes a 2675. Sommar 4 parcellas eguaes a 2675 é o mesmo que multiplicar 2675 por 4, resultado que já sabemos obter pelo caso precedente e que nos dá : 10700.

2.ª *Somma parcial* — addição de 30 parcellas eguaes a 2675. Sommar 30 parcellas eguaes a 2675, é o mesmo que sommar 3 e o resultado obtido sommar 10 vezes ou tornal-o 10 *vezes maior*. Assim, temos para producto de 2675 por 3 o resultado 8025 ou, o que é o mesmo, tornando 8025 *dez vezes maior* temos a addição das 30 parcellas pedidas, mas torna-se um numero dez vezes maior accrescentando um zero á sua direita (2), logo a somma das 30 parcellas eguaes a 2675 é : 80250.

3.ª *Somma parcial* — addição das 200 parcellas eguaes a 2675. Para obter esta somma, podemos obter a de 2 parcellas e addicionar o resultado 100 vezes ou, o que é o mesmo, tornal-o 100 vezes maior. A somma de 2 parcellas eguaes a 2675 é 5350; addicionando 100 parcellas

(1) Visto como o multiplicador 234 contem 4 unidades, 3 dezenas ou 30 unidades e 2 centenas ou 200 unidades.

(2) Em virtude da lei da numeração escripta. Com effeito, vê-se que o algarismo 5 que antes representava unidades, agora representa dezenas ou unidades dez vezes maiores. O mesmo dando-se com os demais algarismos, é claro que o numero se acha 10 vezes maior.

eguaes a 5350 temos a somma das 200 parcellas pedidas ou, o que é o mesmo, tornando 5350 *cem vez maior*, resultado que se obtem acrescentando *dois zeros á direita*, e assim temos para a somma das 200 parcellas eguaes a 2675 o numero 535000.

Em resumo, eis como se opera e como se dispõem os productos parciaes (1) :

	2675
	234
Producto do multipl. pelas unidades do multiplicador	10700
» » » » dezenas » »	8025.
» » » » centenas » »	5350..
Producto.	625950

Addicionando as sommas das 4 parcellas, das 30 e das 200, temos as das 234 ou : 625950.

72. **Praticamente** dispõem-se os numeros escrevendo o multiplicando e abaixo o multiplicador, depois multiplica-se todo o multiplicando, successivamente, pelos valores *absolutos* dos algarismos do multiplicador, a partir da direita para a esquerda, escrevendo esses productos parciaes uns abaixo dos outros de modo que as unidades da mesma ordem se correspondam, findo o que sommam-se os resultados obtidos. Seja, como exemplo, multiplicar os numeros abaixo indicados :

	37429
	2378
Producto do multip. pelas 8 unidades do multiplicador	299432
» » » » 7 dezenas » »	262003
» » » » 3 centenas » »	112287
» » » » 2 milhares » »	74858
Total.	89006162

Observação. — Assim, fica reduzido o 3.° caso ao 2.°, visto como multiplica-se o multiplicando, que é um numero

(1) Os *zeros*, que deviam ser escriptos á direita do 2.° e 3.° productos parciaes — para dar lhes os respectivos valores relativos — acham-se substituidos, cada um delles, por um ponto; na pratica a simples disposição das unidades de mesma ordem, escriptas umas abaixo das outras, é sufficiente para isto, como vemos no exemplo do numero 72.

composto, successivamente, pelos algarismos do multiplicador, sommando depois os resultados. Podiamos começar a operação pela esquerda do multiplicador, apenas era necessario ter cuidado com os valores relativos aos productos parciaes.

73. **Regra.** — Para multiplicar dois numeros quaesquer — escreve-se o multiplicando e abaixo o multiplicador, multiplica-se todo o multiplicando, successivamente, pelos algarismos do multiplicador, a partir da direita para a esquerda, escrevendo os productos parciaes uns abaixo dos outros de modo que as unidades de uma mesma ordem se correspondam, depois sommam-se os resultados e obtem-se o producto desejado.

74. *Consequencias da multiplicação.* — 1.ª O producto representando uma somma de parcellas eguaes ao multiplicando, *é sempre da especie deste numero*, devendo o multiplicador ser considerado como *abstracto* quando não o fôr (1). Exemplo : *uma laranja custando dois vintens, dez laranjas quanto custam ?* Effectuando o producto obtem-se 20 *vintens*, isto é, o producto é da especie do multiplicando.

2.ª *Para multiplicar mais de dois numeros*, multiplicam-se dois delles, depois o producto pelo terceiro e assim prosegue-se até effectuar o producto de todos.

3.ª *O producto de dois numeros tem tantos algarismos quantos ha nos dois factores* (2) *ou esse numero menos um algarismo*. Assim, o producto de 37429 por 2378 tem 8 algaris-

(1) D'ahi a divisão dos numeros em *concretos* e *abstractos*, por alguns autores impugnada. Estes chamam aquelles numeros *quantidades*, quando são os numeros que as representam. Em todo caso dividiremos os numeros em :

Concretos. São os que indicando o numero de vezes que a grandeza conteve a unidade, *indicam tambem qual foi a unidade empregada na medida*, como — 3 *metros* de chita, 4 *palmos* de corda, etc. ;

Abstractos. São aquelles que apenas indicam o numero de vezes que a grandeza conteve uma unidade *abstracta*, como 3 ou 4 ou 5, etc.

Observação. Os numeros concretos 3 *metros* e 4 *palmos*, etc., não podem ser considerados como a propria *quantidade*, que é o pedaço da chita ou da corda equivalente a 3 metros ou 4 palmos em virtude da propria definição.

(2) Chamam-se *factores* os numeros que se quer multiplicar. Assim, o multiplicando e o multiplicador são *factores* do producto, etc.

mos ao passo que os dois numeros têm 9, portanto 9 menos 1 ; o producto de 7575 por 345 é 2613375 : tem 7 algarismos, isto é, tantos quantos têm os numeros dados.

4.ª *Quando um ou mais factores terminam em zeros*, despresam-se os zeros, multiplicam-se os numeros restantes á esquerda e ao producto juntam-se, á direita, tantos zeros quantos se despresaram. Exemplo : $3500 \times 250 \times 3000 =$ Temos : $35 \times 25 \times 3 = 2625$; logo o producto pedido, desde que despresámos 6 zeros, é : 2625000000.

5.ª *A ordem dos factores não altera o producto*, isto é, tanto faz multiplicar 745 por 2372 como 2372 por 745. Cumpre observar, no emtanto, que no caso do multiplicando ser *concreto* o producto será da especie delle.

6.ª Na pratica, muitas vezes, temos occasião de multiplicar differenças indicadas ou differenças por sommas, estas quantidades veem umas precedidas do signal *mais* e outras do signal *menos*, deve-se então observar a seguinte regra, originaria de uma das propriedades da multiplicação e conhecida sob a denominação de :

Regra dos signaes (*de* Descartes). « O producto de duas quantidades precedidas do *mesmo signal* tem o signal *mais* ou de addição ; o producto de duas quantidades precedidas de *signaes differentes*, tem o signal *menos* ou de subtracção.

75. **Divisão** (1). — É a operação que tem por fim — *sendo dados dois numeros, achar um terceiro que se forme da unidade como o primeiro formou-se do segundo.* Ao primeiro desses numeros chama-se — *dividendo* e é o numero pelo qual se quer dividir ; ao segundo — *divisor* e é o numero pelo qual se quer dividir o primeiro ; ao terceiro, denomina-se — *quociente* e é o que se quer obter.

Pela definição conclue-se : que o dividendo forma-se do divisor como o quociente da unidade, ou, o que é o mesmo, *que o dividendo deve conter tantas vezes o divisor quantas vezes o quociente contiver a unidade*. Logo o dividendo deve representar uma somma de tantas parcellas eguaes ao divisor quantas são as unidades do quociente ; elle é, pois, um *producto* cujos factores são o divisor —

(1) Suppomos as relações estabelecidas entre numeros abstractos : e a principio, que a divisão se faz exactamente para melhor comprehensão.

como multiplicando e o quociente — como multiplicador. Do exposto decorre que esta operação tem como objecto — dado o producto de dois factores (dividendo) e um delles (divisor), determinar o outro que é o — quociente; é, portanto, uma operação inversa á multiplicação e analoga á subtracção.

1° Caso. — *Divisão de um numero simples por outro.* Seja — *dividir 8 por 2.* O quociente deve conter tantas vezes a unidade quantas vezes o dividendo 8 contiver o divisor 2; para termos, pois, as unidades do quociente basta de 8 subtrahir 2 o numero de vezes que fôr possivel; e assim, temos: $8 - 2 = 6$; $6 - 2 = 4$; $4 - 2 = 2$; e $2 - 2 = 0$. O dividendo 8 contendo o divisor 2 exactamente 4 vezes, 4 é, pois, o quociente pedido.

76. Tambem podiamos obter o quociente, embora por tentativas (1), procurando qual o numero que multiplicado pelo divisor 2 reproduzisse o dividendo 8 e assim achariamos o quociente 4.

77. No caso em que o dividendo contem o divisor *um numero exacto de vezes*, como no caso acima da divisão de 8 por 2, diz-se que a divisão se faz exactamente, isto é, que não ha *resto* ou que *o dividendo é divisivel pelo divisor*.

78. Quando, porém, o dividendo não contem o divisor um *numero exacto de vezes*, isto é, quando ha resto do qual não se póde tirar mais o divisor ou não o contem mais, diz-se que a divisão não se faz exactamente, denominando-se ao que resta de — *resto da divisão*. Neste caso o numero de vezes que o dividendo contem o divisor é o que se chama *quociente inteiro, parte inteira*

(1) Este processo é o das *tentativas*; não constitue um methodo nem mostra como a operação originou-se, pois que a divisão é um caso particular da *subtracção*, caso em que de um numero — dividendo, subtrahe-se outro successivamente, diversas vezes — divisor, indicando o quociente o numero de subtracções. Ora, é claro que não podemos definir, portanto, a divisão como sendo a operação — em que sendo dado o producto de dois factores e um delles, se procura o outro, visto como assim não se tem idéa perfeita da operação.

do quociente ou ainda *quociente incompleto*. Obtem-se, então, o *quociente completo* — addicionando á parte inteira uma fracção cujo numerador é o resto e cujo denominador é o divisor. Seja, como exemplo — *dividir 9 por 2*.

A divisão é indicada por um dos signaes: ou $\div$, escrevendo-se á sua esquerda o dividendo e á direita o divisor; ou então, e mais communmente, o traço de fracção, escrevendo no logar do numerador o dividendo e no do denominador o divisor.

Effectuando a divisão de 9 por 2, temos 4 para parte inteira do quociente e 1 para resto, o quociente completo é, pois: $4 + \frac{1}{2}$ que se lê: *quatro mais um meio*.

Para melhor comprehensão, observemos que se póde decompor o dividendo em duas parcellas — uma divisivel pelo divisor ou que o contenha exactamente um certo numero de vezes, outra que seja o resto; e como *para dividir uma somma por um numero, divide-se cada parcella pelo numero sommando os resultados*, segue-se que: $9 = 8 + 1$ ou $9 \div 2 = 8 \div 2 + 1 \div 2$ ou ainda $9 \div 2 = 4 + 1 \div 2$ que se escreve de preferencia: $9 \div 2 = 4 + \frac{1}{2}$

Por tentativas, procurando qual o numero que multiplicado por 2 reproduzisse 9, achariamos que *esse numero estaria comprehendido entre 4 e 5*; ao quociente inteiro 4 chama-se tambem — *quociente* a menos de uma unidade ou para menos ou por defeito; a 5, denomina-se — quociente para mais ou por excesso.

79. Para o estudo dos casos seguintes é conveniente ter de memoria ou obter facilmente os quocientes das divisões, quando elles são numeros simples; este resultado é alcançado facilmente pela *taboada da divisão* extrahida da tabella de Pythagoras, já conhecida na multiplicação (pag. 32) seguindo uma ordem inversa áquella que se fez para obter o producto. Seja, como applicação — *procurar o quociente da divisão de 42 por 6*.

Procura-se 6 na 1.ª columna horisontal *(ou vertical)*, segue-se por ella descendo *(ou para a direita)* até encontrar 42, depois segue-se para a esquerda *(ou para cima)* até obter o quociente, que se encontra no fim da columna e o qual é 7,

Quando o dividendo *não se encontra* na tabella, procura-se o numero que mais se lhe approxima para menos e opera-se do mesmo modo com elle; isto indica que a divisão não se faz exactamente e obtem-se, neste caso, sómente a *parte inteira do quociente.*

O quociente completo será, então, a parte inteira, assim obtida, *mais a differença entre os dois numeros* (o dado e o encontrado na tabella) dividida pelo divisor. Exemplo: *dividir* 47 por 7. Na tabella não se acha 47; o numero que mais se approxima para menos é 42, cujo quociente por 7 é 6. O quociente completo será então: $6 + \frac{5}{6}$

80. 2.º Caso. — *Divisão de um numero composto por um simples.* Exemplo: *dividir* 16954 *por* 7.

As *unidades, dezenas, centenas,* etc., do quociente serão dadas pelo numero de vezes, de vezes *dez*, de vezes *cem*, etc., que do dividendo podermos subtrahir o divisor; mas observemos que tanto faz subtrahir 7 de 16954 *cem* vezes, ou *dez* vezes, etc., como *uma só vez* o numero 7 tornado *cem vezes maior, dez vezes maior*; etc., isto é, tanto faz subtrahir 7 *dez* ou *cem* vezes, etc., como 70 ou 700 uma só vez. Assim, pois, comecemos por determinar as unidades de mais alta ordem que entram no quociente. O dividendo 16954 sendo menor do que 70000, delle não podemos subtrahir 70000 nem uma vez, logo não podemos subtrahir 7 *dez mil vezes* (1), o que indica não conter o quociente *dezena de milhar*. 16954 sendo maior do que 7000, podemos subtrahir daquelle este numero 2 *vezes* (2), o que indica que o quociente contem *dois milhares*, ficando 2954 para resto. 2954 sendo maior do que 700, podemos subtrahir este numero daquelle 4 *vezes* (3), o que indica que o quociente contem 4 *centenas*, ficando 154 para resto. 154 sendo maior do que 70, podemos subtrahir este numero daquelle *duas vezes*, o que equivale a subtrahir 7 vinte vezes, e indica que o quociente contem 2 *dezenas*, ficando 14 de resto. De 14 podemos subtrahir 7 duas vezes, o que nos mostra ter o quociente 2 *unidades* e a divisão ter-se feito exactamente. Logo, o

(1) Porque 70000 é *dez mil vezes maior* do que 7.

(2) Verifica-se fazendo-se as subtracções; e isto equivale a subtrahir 7 *duas mil vezes*.

(3) Equivale a subtrahir 7 *quatrocentas vezes*.

quociente *contendo tantas unidades quantas vezes o dividendo contem o divisor, conterá duas mil quatrocentas e vinte e duas unidades* ou será 2422.

81. Na pratica da operação, dispõem-se os numeros como vê-se no exemplo abaixo, denominando-se — *chave de divisão* ao conjuncto dos dois traços — vertical e horizontal — que servem para separar o dividendo do divisor e este do quociente.

```
16954 | 7
14    |-----
----- | 2422
 29
 28
 ----
  15
  14
  ----
   14
   14
   ----
    0
```

Reconhecidas as unidades de mais alta ordem que entram no quociente, as quaes são milhares, observa-se que ellas devem se achar nos 16 milhares do numero ou em 16, e que tanto faz subtrahir de 16 *milhares* 7 *milhares* (1) como 7 de 16, o que equivale, como vimos no *1.º caso*, a dividir 16 por 7, resultado que se obtem por tentativas procurando qual o numero que multiplicado por 7 reproduz 16; não havendo tal numero procura-se aquelle cujo producto mais se approxima para menos, acha-se 2, escreve-se-o no quociente, multiplica-se pelo divisor obtendo-se 14 para producto. Escreve-se 14 abaixo de 16 e subtrahe-se, obtendo-se 2 para resto. O resto 2 representa *milhares*, como o quociente 2; reduzem-se os 2 milhares do resto a centenas, formam-se 20 centenas as quaes sommam-se ás do numero, formando 29 *centenas* (2) [o que equivale a escrever o algarismo das centenas do dividendo á direita do resto]. As centenas do quociente devem se achar nas do dividendo (visto como são dadas pelo numero de vezes que se subtrahir 700), procurando, então, um numero que multiplicado por 7 reproduza 28, acha-se 4 approximadamente para menos e este numero representa as centenas do quociente. Multiplicando 4 por 7 obtem-se 28; e tanto faz subtrahir de 29 *centenas* 7 *centenas* 4 vezes, como uma só vez 7 centenas tornadas 4 vezes maiores ou 28 centenas. Assim, temos 4 *centenas* para quociente e 1 *centena* de resto. Reduzindo esta centena a dezenas e sommando ás 5 do dividendo, temos 15 dezenas.

As dezenas do quociente serão dadas pelo numero de vezes que de 15 dezenas podermos subtrahir 7 *dez vezes* ou 7 tornado 10 vezes maior ou 70; mas tanto faz de 15 *dezenas* subtrahir 7 *dezenas* como 7 de 15. Procurando qual o numero que multiplicado por 7 reproduza 15, achamos 2 approximada-

(1) Ou o divisor tornado mil vezes maior.

(2) Chama-se 2.º dividendo parcial a 29.

mente para menos; 2 é, pois, o algarismo das dezenas do quociente, o qual multiplicado pelo divisor dá 14, numero que subtrahido das 15 dezenas do dividendo deixa 1 *dezena* de resto. Reduzindo esta dezena a unidades e sommando ás do dividendo, obtemos 14 unidades.

As unidades do quociente serão dadas pelo numero de vezes que das 14 unidades do dividendo podermos tirar 7; procurando qual o numero que multiplicado por 7 produza 14, acha-se 2; subtrahindo 14 de 14 dá *zero* para resto, o que indica ter-se feito a divisão exactamente. O quociente completo é, pois, 2422.

82. **Praticamente** a operação feita acima simplifica-se muito; porque, ao mesmo tempo que se formam os productos dos diversos algarismos obtidos para o quociente — pelo divisor, effectua-se mentalmente a subtracção, escrevendo-se apenas os restos.

3744	9
14	416
54	
0	

Vejamos como opera-se na pratica, tomando o exemplo á direita. Separam-se á direita do dividendo, mentalmente ou com uma virgula, um ou dois algarismos — de modo a formar um numero egual ao divisor ou maior do que elle: assim, temos 37. Procura-se qual o numero que multiplicado por 9 produza 37; não havendo esse numero, toma-se o que mais se approxima para menos que é 4. Multiplica-se 4 pelo divisor e o producto 36 subtrahe-se mentalmente de 37 escrevendo-se o resto 1 abaixo deste numero. Á direita do resto escreve-se o algarismo seguinte do dividendo (1); assim forma-se o 2.º *dividendo parcial*. Não havendo numero que multiplicado por 9 reproduza 14 toma-se 1 que é o mais approximado para menos. E, assim temos: 1 vez 9 é 9, que subtrahido mentalmente de 14 dá o resto 5. Escrevendo á direita do resto 5 o algarismo seguinte do dividendo, forma-se o 3.º dividendo parcial 54. O numero que multiplicado por 9 produz 54 é 6, pois 6 vezes 9 são 54. Subtrahindo este producto de 54 acha-se zero para resto, sendo o quociente completo 416.

(1) Póde-se deixar de escrevel-o, desde que se o considere como escripto; embora mais sujeito a confusão, assim faz-se muitas vezes na pratica.

83. **3.º Caso.** — *Divisão de um numero composto por outro.* Exemplo : *dividir* 959488 *por* 3748. O quociente não contem milhares; porque, se os contivesse, do dividendo podiamos subtrahir o divisor *pelo menos mil* vezes ou ao menos *uma só vez o divisor tornado mil vezes maior*, isto é, de 959488 poderiamos subtrahir 3748000, o que não é possivel.

O numero de centenas do quociente será dado pelo numero de *cem* vezes que de 959488 podermos subtrahir 3748 ou pelo numero de vezes que for possivel subtrahir este numero tornado *cem vezes maior*, isto é, pelo numero de vezes que de 959488 podermos subtrahir 374800. Mas, é facil de ver, as centenas do quociente sendo dadas pelo numero de vezes que de 959488 podermos subtrahir 374800, serão dadas pela subtracção entre as centenas do dividendo e as do divisor, isto é, entre 9594 *centenas* e 3748 *centenas*, visto como as dezenas e unidades não influem nesta subtracção.

Tanto faz, pois, subtrahir 3748 de 9594 *duas, tres,* etc., vezes, como uma só vez, 3748 tornado *duas, tres,* etc., vezes maior.

Para obter mais facilmente o numero de vezes que o *dividendo parcial* (9594) contem o divisor (3748), multiplica-se este *mentalmente* por 2, por 3, etc., e subtrahe-se o producto d'aquelle, de modo a ficar um resto menor do que o divisor; assim (1), vemos que o dividendo 9594 contem o divisor 3748 *duas vezes* ficando o resto 2098, o que indica ter o quociente 2 *centenas*.

Reduzindo as 2098 centenas restantes a dezenas e sommando ás 8 do dividendo, temos 20988 dezenas ou 209880. As dezenas do quociente serão dadas pelo numero de vezes que de 209880 podermos subtrahir o divisor *tornado dez vezes maior* ou 37480; mas tanto faz de 209880 subtrahir *uma, duas,* etc., vezes 37480 como de 20988 subtrahir (2) o divisor 3748 tornado *uma, duas,* etc., vezes maior. Experimenta-se, então, quantas vezes se

(1) Multiplicando-se 3748 por 2, mentalmente, e subtrahindo-se de 9594, obtem-se para resto 2098.

(2) Visto como a operação entre os numeros 209880 e 37480 é a mesma que entre 20988 dezenas e 3748 dezenas.

póde effectuar a subtracção multiplicando mentalmente o divisor 3748 por *dois*, *tres*, etc., e subtrahindo o producto do *dividendo parcial* 20988, até obter um resto menor do que o divisor. Assim obtem-se 5 para algarismo das dezenas do quociente, pois 5 é o numero que multiplicado por 3748, subtrahido o producto resultante do dividendo parcial 20988, dá o resto 2248 dezenas, *menor* do que o divisor.

Reduzindo o resto 2248 dezenas a unidades e sommando ás 8 unidades do dividendo, forma-se o 3.º dividendo parcial 22488 unidades. As unidades do quociente serão dadas pelo numero de vezes que das 22488 podermos subtrahir as 3748 unidades do divisor, mas tanto faz de 22488 subtrahirmos 3748 duas, tres, etc., vezes como uma só vez 3748 *tornado duas, tres*, etc., vezes maior.

Experimenta-se, então, quantas vezes se póde effectuar a subtracção multiplicando 3748, mentalmente, por *dois*, por *tres*, etc., e subtrahindo o producto do dividendo parcial 22488, até obter um resto menor do que o divisor. Assim, obtem-se 6 para algarismo das unidades e o resto zero, o que indica divisão exacta; tendo o quociente 2 centenas, como vimos, 5 dezenas e 6 unidades, será: 256.

84. — Na pratica da operação, dispõe-se o calculo e opera-se como no exemplo á direita.

959488	3748
20988	256
22488	
0	

É claro que subtrahir do dividendo o divisor tornado 100 vezes maior, é o mesmo que das centenas daquelle numero subtrahir o divisor, isto é, de 9594 *centenas* subtrahir 3748 o numero de vezes possivel. Este resultado obtem-se, como vimos precedentemente, procurando, por tentativas, qual o numero que multiplicado por 3748 reproduz 9594, ou, no caso de não haver um tal numero o que produza um producto mais approximado para menos. Assim, obtem-se o algarismo 2 para centenas (1) do quociente, o qual multiplicado pelo divisor e subtrahido o producto, mentalmente, da parte separada no dividendo, 9594, deixa o resto 2098 centenas.

(1) Porque a operação realisou-se entre centenas.

Á direita do resto, escreve-se o algarismo seguinte do dividendo, formando-se o numero 20988, o que equivale a reduzir as 2098 centenas a dezenas e sommar ás existentes no dividendo. Com o dividendo parcial 20988 opera-se como se fez com o primeiro dividendo parcial 9594. O numero que multiplicado pelo divisor dá um producto que mais se approxima de 20988 é 5; multiplicando o divisor por 5, segundo algarismo do quociente — obtido por tentativas — e subtrahindo o producto do dividendo parcial em questão, fica o resto 2248 dezenas.

Á direita do resto escreve-se o algarismo seguinte do dividendo, formando-se o numero 22488, o que equivale a ter reduzido o resto 2248 dezenas a unidades e sommado ás 8 do dividendo. Com este dividendo parcial 22488 opera-se como se fez com o precedente. O numero que multiplicado pelo divisor reproduz esse dividendo partial é 6, obtido por tentativas; multiplicando o divisor por 6, mentalmente, e subtrahindo o producto do ultimo dividendo parcial, obtem-se *zero* para resto, o que indica ter-se feito exactamente a divisão, sendo 256 o quociente completo.

85. **Praticamente** a operação effectua-se como no exemplo abaixo. Á direita do dividendo separam-se, mentalmente, tantos algarismos quantos bastem para formar um numero egual ou maior do que o divisor (no exemplo 4 algarismos ou o numero 9039); depois procura-se qual o numero que multiplicado pelo divisor produza 9039 ou o numero que mais se lhe approxime para menos. Assim, obtem-se por tentativas o algarismo (1) 3; multiplicando 3 pelo divisor, mentalmente, e ao mesmo tempo que o producto se forma subtrahindo-o da parte separada ao dividendo, tem-se: 3 vezes 6 são 18, para 19 fica 1 de resto, algarismo que se escreve abaixo do minuendo como os

903968	2756
7716	328
22048	
0	

(1) Ha um meio pratico de obter esse algarismo. Consiste em separar á esquerda do divisor o primeiro algarismo e á direita do dividendo parcial tantos quantos ficaram á direita do divisor, depois divide-se o numero formado por aquelles algarismos por este separado á esquerda do divisor; a parte inteira do quociente representa o algarismo desejado ou um mais forte, por isto experimenta-se e neste caso se o diminue de uma unidade, experimentando novamente até obter um algarismo conveniente.

demais; 3 vezes 5 são 15, e 1 são 16, para 23 ficam 7 de resto; 3 vezes 7 são 21, 21 e 2 são 23, para 30 ficam 7 de resto; 3 vezes 2 são 6 e 3 são 9, para 9 fica *zero;* o resto é, pois, 771.

Á direita do resto escreve-se o algarismo seguinte do dividendo, formando-se o numero 7716, segundo dividendo parcial. Procurando, por tentativas, o numero que multiplicado pelo divisor reproduza este dividendo parcial ou o numero que mais se lhe approxime para menos, acha-se 2; multiplicando mentalmente o divisor por 2 e, ao mesmo tempo, subtrahindo o producto que se fôr formando do 2.º dividendo parcial, temos: 2 vezes 6 são 12, para 16 ficam 4 para resto; 2 vezes 5 são 10 e 1 são 11, para 11 resta *zero;* 2 vezes 7 são 14 e 1 são 15, para 17 fica o resto 2; 2 vezes 2 são 4 e 1 são 5, para 7 fica o resto 2. O resto é, pois, 2204, sendo 2 o segundo algarismo do quociente.

Á direita do resto escreve-se o algarismo seguinte do dividendo, formando-se o 3.º dividendo parcial, que é 22048. Procurando qual o numero que multiplicado pelo divisor produza 22048 ou o numero que mais se lhe approxime para menos, acha-se 8 por tentativas. Multiplicando mentalmente 8 pelo divisor e ao mesmo tempo que o producto se forma subtrahindo-o do 3.º dividendo parcial, temos: 8 vezes 6 são 48, para 48, zero; 8 vezes 5 são 40 e 4 são 44, para 44 zero de resto; 8 vezes 7 são 56 e 4 são 60, para 60 zero de resto; 8 vezes 2 são 16 e 6 são 22, para 22 zero de resto. O resto sendo zero, a divisão fez-se exactamente, sendo o quociente completo 328.

86. **Regra.** — Para dividir um numero por outro, escreve-se o dividendo e á direita o divisor, separando-os pela chave de divisão.

Depois separa-se á esquerda do dividendo tantos algarismos quantos bastem para formar um numero egual ao divisor ou maior do que elle; feito isto, procura-se, por tentativas, qual o numero que multiplicado pelo divisor reproduz o dividendo ou um numero que mais se lhe approxime para menos. Multiplica-se, mentalmente, esse numero pelo divisor e o producto, á proporção que se forma, vai se subtrahindo da parte separada no dividendo.

Á direita do resto escreve-se o algarismo seguinte do

dividendo, formando-se o 2.º dividendo parcial; com este numero procede-se como se fez com o precedente — separado no dividendo; e assim continua-se até se terem exgotado todos os algarismos do dividendo.

Quando á direita de um resto, escrevendo-se o algarismo seguinte do dividendo, o numero formado fôr inferior ao divisor, é signal de que o quociente não tem unidades da ordem considerada, escreve-se *zero* no quociente, baixa-se o algarismo seguinte do dividendo e opera-se como ficou dito.

87. — A divisão resolve dois problemas distinctos:

1.º *Saber quantas vezes um numero dado contem outro.* O numero dado é o dividendo, o que se procura saber quantas vezes o dividendo contem, é o divisor, e o numero que indica quantas vezes aquelle contem este é o quociente.

Neste caso, o quociente é considerado como abstracto, sendo o dividendo e o divisor da mesma especie; o dividendo é o producto, o divisor é o multiplicando e o quociente é o multiplicador.

2.º *Dividir um numero dado em um certo numero de partes eguaes.* — O numero dado é o dividendo, o numero que indica em quantas partes eguaes se quer dividir o dividendo é — o divisor, e uma das partes eguaes é — o quociente; este é, então, o *multiplicando*, sendo o dividendo o producto e o divisor o multiplicador. Exemplo: *dividir* 10548 *laranjas por* 36 *pessôas.* O quociente é da especie do dividendo e é 293 *laranjas.*

88. **Observação.** — Aos que apenas quizerem fazer um estudo das quatro operações, completamente pratico, bastará o estudo dos numeros: 44, 48 e 49 relativos á addição; 52 e 57 relativos á subtracção; 65, 70 e 72 relativos á multiplicação; e 75, 82 e 85 relativos á divisão.

89. **Provas da multiplicação.** — 1.ª Inverte-se a ordem dos factores, multiplicando o multiplicador pelo multiplicando; se o resultado fôr o mesmo, antes obtido, é provavel que a operação esteja certa.

2.ª Divide-se o producto por um dos factores; o quociente sendo o outro, é provavel que a operação esteja certa.

90. **Provas da divisão.** — 1.ª Multiplica-se o divisor pelo quociente e ao producto addiciona-se o resto, se houver; a somma sendo egual ao dividendo é provavel que a operação esteja certa.

2.ª Divide-se o dividendo pelo quociente, o quociente deve ser então o divisor e, isto se dando, é provavel que a operação esteja certa.

91. **Potenciação.** — É a operação que tem por fim — multiplicar *um numero* por si mesmo tantas vezes quantas são as unidades de *outro*. Ao primeiro numero denomina-se *base da potencia* e ao segundo *grão* ou expoente. O *grão* da potencia indica, pois, o numero de vezes que a *base* deve ser multiplicada por si mesma; e, como se observa, a potenciação é um caso especial da multiplicação, no qual os factores são eguaes entre si, caso em que se multiplica um numero — *base* — por si mesmo tantas vezes quantas são as unidades de outro — *grão* ou expoente.

92. **Grão.** — É um numero que se escreve acima e á direita da base para indicar quantas vezes ella deve ser multiplicada por si mesma — ou é o numero que indica quantos factores eguaes entram na formação da potencia.

93. **Base.** — É um dos factores eguaes que entram na formação da potencia — ou o numero que deve ser multiplicado por si mesmo tantas vezes quantas são as unidades do grão. As potencias são indicadas abreviadamente escrevendo o grão acima e á direita da base, e classificam-se pelos seus grãos, conforme o numero de unidades que nelles entram; assim: 3^2, 4^3 e 5^4, etc., são, respectivamente — a *segunda* potencia de 3, a *terceira* potencia de 4 e a *quarta* potencia de 5.

94. As segundas e as terceiras potencias tomam as denominações especies de *quadrados* e de *cubos*; opportunamente veremos porque lhes são dadas estas denominações.

95. Seja, como 1.º exemplo — *elevar ao quadrado* (segunda potencia) *o numero* 35. Indicando e effectuando a operação, temos: $35^2 = 35 \times 35 = 1225$.

2.º Exemplo — *elevar ao cubo* (terceira potencia) *o numero* 7. Indicando e effectuando a operação, temos: $7^3 = 7 \times 7 \times 7 = 343$.

3.º Exemplo — *elevar á 4.ª potencia o numero* 5. Indicando e effectuando a operação, temos: $5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$.

96. **Radiciação** (1). — É a operação que tem por fim — dado um numero, determinar outro que sendo multiplicado por si mesmo duas ou mais vezes reproduza o primeiro. As raizes classificam-se pelos seus *grãos* ou indices, como as potencias; a raiz do segundo grão toma a denominação de — raiz quadrada e a do terceiro grão de — raiz cubica.

97. **Grão** ou indice de uma raiz — é o numero que indica quantas vezes ella deve ser multiplicada por si mesma para reproduzir o numero proposto. Assim, todas as bases das diversas potencias são raizes do grão correspondente á potencia.

Exemplos: 35 é a raiz quadrada de 1225, no 1.º exemplo do n.º 95; 7 é a raiz cubica de 343; e 5 é a raiz do quarto grão de 625.

98. A operação da radiciação, ou extracção de uma raiz, é indicada de um dos modos abaixo:

$$\sqrt[2]{1225} \quad \text{ou} \quad (1225)^{\frac{1}{2}}$$

O signal $\sqrt{\ }$ denomina-se *radical*; o numero escripto em sua abertura ou angulo é o indice ou grão da raiz; tambem se póde indical-a elevando o numero, cuja raiz se quer extrahir, a uma *potencia fraccionaria*, cujo numerador seja a unidade e o denominador o grão da raiz; assim a raiz cubica de 343 será: $(343)^{\frac{1}{3}} = 7$.

(1) Trataremos em especial das raizes quadradas e cubicas.

99. Raiz quadrada. — Para extrahir a raiz quadrada de um numero composto, é necessario conhecer as raizes dos numeros quando são representadas por numeros simples. O quadro abaixo mostra os *quadrados* e suas raizes, as quaes são obtidas procurando quaes os numeros que multiplicados por si mesmos reproduzem os quadrados (1):

QUADRADOS	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
RAIZES QUADRADAS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Neste quadro apenas figuram os quadrados e suas respectivas raizes. Os numeros que são comprehendidos entre dois delles, como 30, que se acha comprehendido entre 25 e 36, têm suas raizes quadradas comprehendidas entre as daquelles, isto é, entre 5 e 6; por isto elles não são *quadrados perfeitos*. As suas raizes são approximadas para mais ou para menos, *a menos de uma unidade* (2), conforme se consideram as dos menores ou as dos maiores quadrados perfeitos que mais se lhes approximam; assim, a raiz de 30, approximada para menos — é 5 e para mais é 6.

100. Seja dado, como exemplo — *extrahir a raiz quadrada de* 139876. Para isto, divide-se o numero em classes de dois algarismos, a partir da direita para a esquerda; assim o numero proposto fica com tres classes, podendo a ultima, á esquerda, conter mesmo um só algarismo. A raiz quadrada de um numero encerra tantos algarismos quantas classes elle contem, portanto a do numero proposto terá *tres* algarismos.

(1) Este quadro mostra que entre os cem primeiros numeros apenas ha dez quadrados perfeitos.

(2) A differença entre 5 e 6 sendo de uma unidade, e a raiz de 30 se achando comprehendida entre 5 e 6, é maior do que 5 e menor do que 6, logo differe de 5 ou de 6, a menos de uma unidade.

Feito isto, extrahe-se a raiz do *maior quadrado* contido na primeira classe á esquerda; ora, o maior quadrado contido em 13 é 9, cuja raiz é 3, como se verifica pelo quadro do n.º 99. A raiz escreve-se na chave de divisão, no logar do divisor, e o quadrado 9 subtrahe-se da classe considerada, obtendo-se 4 para resto. A direita do resto escreve-se a classe seguinte 98, formando o numero 498, ao qual despresa-se mentalmente o ultimo algarismo á direita.

13.98.76	374	
9	67	744
498	7	4
469	469	2976
2976		
2976		
0		

A parte restante á esquerda, 49, divide-se pelo dobro do do algarismo achado para raiz — 6 —; o quociente inteiro — 8 — deve ser o segundo algarismo da raiz (1) (correspondente á classe 98) ou maior do que elle. Para verifical-o, escreve-se este algarismo á direita do dobro da raiz achada, que é 6, formando-se o numero 68, o qual multiplica-se por esse mesmo algarismo, 8, dando o producto 544, numero que sendo maior do que 498 indica que o algarismo 8 é forte. Se o diminue de uma unidade e experimenta-se 7; fica 67, numero que multiplicado por 7 dá o producto 469, menor do que 498; logo é 7 o segundo algarismo da raiz.

O producto 469 subtrahe-se de 498, ficando o resto 29, á direita do qual escreve-se a classe seguinte, formando-se o numero 2976. Com este numero opera-se como operou-se com 498, isto é, *separa-se o ultimo algarismo á direita e divide-se a parte restante á esquerda pelo dobro da raiz achada*, a qual sendo agora 37 o dobro será 74. Dividindo a parte á esquerda, 297, por 74 o quociente inteiro é 4, algarismo que se escreve á direita do dobro da raiz 74 formando o numero 744, o qual se multiplica por este mesmo algarismo, 4, e sendo o producto 2976 egual (ou se fosse menor) a 2976, isto indica que o terceiro algarismo da raiz (corresponde á terceira classe), é 4, algarismo que se escreve á direita da raiz achada, 37, formando a raiz pedida, 374.

Subtrahindo de 2976 o producto obtido acha-se *zero* para resto, o que indica ser o numero dado um quadrado, quadrado do numero 374, que é a raiz quadrada e exacta daquelle.

101. Seja ainda, como segundo exemplo — extrahir a raiz quadrada de 4149369. Dispondo o numero, cuja

(1) No exemplo não figura o algarismo 8, porque é forte, mas 7; deve-se, porém, acompanhar o calculo com o raciocinio exposto para sua bôa comprehensão.

raiz deve ter quatro algarismos, porque elle tem quatro classes, e applicando o methodo seguido acima, temos :

O maior quadrado contido em 4 é 4, cuja raiz é 2, algarismo que se escreve na raiz; subtrahindo 4 de 4, fica zero para resto, que não se escreve. Á direita do resto escrevendo a classe seguinte, temos 14; separando o ultimo algarismo á direita, 4, e dividindo a parte restante á esquerda, 1, pelo dobro da raiz achada, verifica-se que não é possivel, visto não comportar 4 nem uma vez; *isto indica que o algarismo da raiz*, correspondente á classe considerada, é *zero*. Escreve-se *zero* na raiz, e á direita de 14 escreve-se a classe seguinte, separa-se o ultimo algarismo á direita, 3, e divide-se a parte restante á esquerda por 40, dobro da raiz achada (20). A parte inteira do quociente é 3, algarismo que se escreve á direita da raiz e do seu dobro 40, formando o numero 403, que multiplicado por 3 dá 1209; este producto subtrahe-se de 1493. Assim, prosegue-se, como no exemplo precedente, obtendo para raiz exacta 2037 (1).

```
4.14.93.69 | 2037
4          |------------------
-----------| 4 |  403 |  4067
  14 93    |   |    3 |     7
  12 09    |   |------|-------
-----------|   | 1209 | 28469
 2 84 69   |
 2 84 69   |
-----------|
       0   |
```

102. **Regra.** — *Para extrahir a raiz quadrada de um numero inteiro, divide-se esse numero em classes de dois algarismos, a partir da direita para a esquerda; procura-se o maior quadrado contido na primeira classe á esquerda, o qual se subtrahe desta classe, escrevendo sua raiz no logar indicado.*

Á direita do resto escreve-se a classe seguinte, separa-se o ultimo algarismo á direita e a parte restante á esquerda divide-se pelo dobro da raiz achada; a parte inteira do quociente deve ser o algarismo seguinte da raiz; para verificar, escreve-se esse algarismo á direita do dobro da raiz achada e o numero assim formado multiplica-se por elle; o producto obtido subtrahe-se do numero

(1) Este exemplo foi dado para ensinar o caso particular em que, separado o ultimo algarismo á direita, a parte á esquerda é *menor* do que o dobro da raiz achada até então.

formado pelo resto seguido da classe seguinte — se fôr egual ou menor, sendo maior diminue-se o quociente inteiro de uma unidade e experimenta-se novamente. Assim prosegue-se, sempre de accordo com o exposto, até ter exgotado todas as classes.

103. — Se, escrevendo á direita de um resto a classe seguinte, o numero formado fôr inferior ao dobro da raiz até então achada, escreve-se zero na raiz, baixa-se a classe seguinte e opera-se de accordo com a regra acima.

104. — Não serão quadrados perfeitos os numeros terminados em 2, 3, 7, 8 e em um *numero impar* de zeros; porque não ha quadrado de unidades que termine nestes numeros; ao passo que os terminados em 1, 4, 5, 6, 9 e em um numero par de zeros poderão sel-o.

105. Quando um numero não é quadrado (*perfeito*, como se costuma chamar), a operação tem apenas por fim extrahir a raiz do maior quadrado que elle encerra. Se reconhece que ella está certa, isto é, que a raiz achada é a do *maior quadrado perfeito* contido em um numero, quando *o resto fôr menor do que o dobro da raiz augmentado de uma unidade*.

106. — Se póde determinar a raiz quadrada de um numero, dividindo-o pela serie natural dos numeros *até obter um quociente egual ao divisor empregado*. Seja, como exemplo — *obter a raiz quadrada de 144*. Dividindo 144 pela serie dos numeros inteiros, acha-se que 12 divide 144 dando 12 para quociente, logo : $12 \times 12 = 144$ e 12 é a raiz pedida.

107. **Raiz cubica** de um numero — é o numero que multiplicado por si mesmo duas vezes reproduz o numero dado. Entre os mil primeiros numeros só ha 10 cubos perfeitos ou exactos e são obtidos pela multiplicação directa; o quadro abaixo mostra quaes são elles e suas respectivas raizes :

CUBOS	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000
RAIZES CUBICAS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

108 Conhecidos os cubos e as raizes existentes entre os mil primeiros numeros, conforme o quadro acima, é

facil obter a raiz cubica de um numero qualquer. Para isto — *divide-se o numero em classes de tres algarismos, a partir da direita para a esquerda, podendo a ultima classe ter dois ou mesmo um só algarismo.*

O numero de algarismos da raiz é dado pelo numero de classes, fornecendo cada classe um algarismo á raiz.

Seja, como exemplo — *extrahir a raiz cubica de* 11572428.

Dispondo o calculo como faz-se na pratica e dividindo-se o numero em classes de tres algarismos, a partir da direita para a esquerda, resulta: O maior cubo contido na primeira classe á esquerda, 11, é 8, cuja raiz 2 se escreve no logar da raiz, subtrahindo o cubo 8 da 1.ª classe 11. Á direita do resto 3, escreve-se a classe seguinte, formando-se o numero 3572, á direita do qual separam-se os dois ultimos algarismos. A parte restante á esquerda, 35, divide-se pelo *triplo do quadrado da raiz achada* (1) ou 12. A parte inteira do quociente (2) escreve-se á direita da raiz achada, formando-se o numero 22, o qual se eleva ao cubo. Este cubo, que é 10648, subtrahe-se *das duas primeiras classes do numero proposto*, resultando 924 para resto. E, como o cubo 10648 é menor do que o numero formado pelas duas primeiras classes, isto é, menor do que 11572, resulta que 2 é o segundo algarismo da raiz procurada, algarismo que se escreve na raiz.

11.572.428	226	
8	4×3=12	484×3=1452
3 572	22	226
1 064 8	22	226
924 428	44	1356
11 543 176	44	452
29 242	484	452
	22	51076
	968	226
	968	306456
	10648	102152
		102152
		11543176

Á direita do resto, 924, escreve-se a classe seguinte 428, formando-se o numero 924428, á direita do qual separam-se os dois ultimos algarismos. A parte restante á esquerda (9244) divide-se pelo *triplo do quadrado da raiz achada*, que agora é 22; o triplo do quadrado (2) de 22 é 1452.

A parte inteira do quociente é 6, algarismo que deve ser o terceiro da raiz procurada. Para verifical-o, escreve-se-o á direita da raiz achada, formando o numero 226, o qual se eleva

(1) Triplo do quadrado de 2 é : $3 \times 4 = 12$.

(2) O quadrado de 22 tem-se no calculo á direita, 1.ª columna, é 484 e triplo de 484 é 1452.

ao cubo. Este cubo é 11543176, conforme o ultimo calculo á direita. Subtrahindo este cubo das tres primeiras classes do numero proposto, obtem-se o resto 29242, do que se conclue que o numero proposto não é cubo perfeito e que 226 representa apenas a raiz do maior cubo que elle encerra, o qual se obtem subtrahindo delle o resto, ou : $11572428 - 29242 = 11543176$, sendo este o maior cubo contido em 11572428.

109. — Verifica-se se a operação está certa formando o *triplo do quadrado* da raiz achada, o triplo da raiz e á somma destas duas parcellas addicionando uma unidade : o resto deve ser *menor* do que esta somma.

O quadrado da raiz achada sendo 51076, o seu *triplo* será então 153228

Triplo da raiz	678
Uma unidade	1
Somma.	153907

Sendo o resto 29242 menor do que a somma 153907, segue-se que 226 representa a raiz do maior cubo contido em o numero proposto.

110. *Segundo exemplo.* — Extrahir a raiz cubica de 12812904. Dividindo em classes de tres algarismos vê-se que a raiz terá tres algarismos. Applicando o que ficou dito acima ou a regra abaixo, obtem-se a raiz pedida, a qual é 234.

O calculo á direita mostra a marcha a seguir para obter o resultado. O numero proposto é um cubo perfeito — cubo de 234.

12.812.904	234	
8	4×3=12	529×3=1587
48 12	23	234
12 167	23	234
645 904	69	936
12 812 90	46	702
0	529	468
	23	54756
	1587	234
	1058	219024
	12167	164268
		109512
		12812904

Para obter o segundo algarismo, acha-se 4 para a parte inteira do quociente, mas formando-se o cubo de 24 vê-se que elle é maior do que o numero formado pelas duas primeiras classes, isto é, maior do que 12812, e que, portanto, é preciso diminuil-o de uma unidade, assim obtem-se 3 para segundo algarismo da raiz pedida.

111. Regra. — *Para extrahir a raiz cubica de um numero — divide-se esse numero em classes de tres algarismos, a partir da direita para a esquerda, podendo a ultima classe ter dois ou sómente um algarismo; procura-se o maior cubo contido na primeira classe á esquerda e sua raiz será o primeiro algarismo da raiz procurada, esse cubo subtrahe-se da classe considerada e á direita do resto escreve-se a classe seguinte; separam-se dois algarismos á direita e a parte restante á esquerda divide-se pelo triplo do quadrado da raiz achada; a parte inteira do quociente será o algarismo seguinte da raiz ou um mais fraco. Para verifical-o escreve-se-o á direita da raiz, o numero assim formado eleva-se ao cubo e o resultado, se não fôr maior, subtrahe-se do numero formado por tantas classes á esquerda do proposto quantos são os algarismos da raiz; no caso do cubo ser maior do que esse numero diminue-se a parte inteira do quociente de uma unidade e experimenta-se novamente.*

Assim prosegue-se até se ter considerado todas as classes.

Quando a parte restante á esquerda de um numero, formado pelo resto seguido da classe seguinte, fôr menor do que o triplo do quadrado da raiz achada até então, isto indica que o algarismo procurado para raiz é zero; escreve-se zero na raiz, baixa-se a classe seguinte e opera-se como ficou dito (1).

112. *Extrahir a raiz cubica de* 8615125. Empregando a regra acima acha-se para raiz exacta : 205.

113. O cubo de 10, 100, 1000, etc., tendo sempre um numero triplo de zeros, conclue-se que os numeros que, terminando em zeros, não terminarem em um numero triplo de zeros, não serão cubos.

---

(1) Se verifica se o numero obtido é raiz do maior cubo contido em um numero, quando elle não é cubo — ou se é a raiz cubica de um cubo — sommando-se o triplo de seu quadrado com o seu triplo augmentado de uma unidade; o resto deve ser menor do que esta somma. Quando a raiz não é exacta obtem-se então a raiz do maior cubo contido em o numero proposto, isto é, a *parte inteira* da raiz ou a raiz approximada para menos, a menos de uma unidade.

Divisibilidade

114. **A divisibilidade** tem por objecto — conhecer se um numero é ou não divisivel por outro, sem effectuar a divisão; e, no caso de o não ser, o resto que fica. Isto se obtem por meio de certos caracteres que os numeros apresentam, chamados *caracteres de divisibilidade*.

115. *Caracter de divisibilidade por 2 e suas potencias.* Um numero é divisivel por 2, quando o seu ultimo algarismo o é (1). Assim, são divisiveis por 2 os numeros terminados em 2, 4, 6, 8 e 0.

Quando o ultimo algarismo de um numero não fôr divisivel por 2 elle tambem não o será e, dividido por 2, deixará o mesmo resto que esse ultimo algarismo. Exemplos : são divisiveis por 2 os numeros : 36, 474, 872, 530, 638, etc.; não o são e deixam 1 de resto, divididos por 2, os numeros : 33, 471, 875, etc., nos quaes os ultimos algarismos não o são.

116. — Serão divisiveis pela *segunda potencia* de 2 ou 2^2 ou 4, os numeros cujos *dois ultimos algarismos á direita formarem um numero divisivel por 2^2 ou 4*; quando não é numero divisivel por 2^2 ou 4, deixará o mesmo resto que o numero formado por esses dois ultimos algarismos. Exemplos : são divisiveis por 4 os seguintes numeros : 3624, 87460, 16848,

---

(1) Os numeros divisiveis por 2 são chamados *pares*; os não divisiveis são chamados *impares*.

etc., nos quaes os numeros 24, 60 e 48 são respectivamente divisiveis por 4 ou 2^2. Não o são os numeros : 35423, 16739, etc., nos quaes os numeros 23 e 39 não são divisiveis por 4, deixando ambos o resto 3 e o mesmo resto que os numeros formados pelos seus 2 ultimos algarismos.

Serão divisiveis por 8 ou 2^3 os numeros cujos 3 *ultimos algarismos* á direita formarem um numero divisivel por 8. Exemplos : 8472, 65264.

Serão, de um modo geral, divisiveis por 2^m os numeros cujos m ultimos algarismos á direita formarem um numero divisivel por 2^m; cumpre observar que m representa um numero qualquer.

117. *Caracteres de divisibilidade por* 5 *e suas potencias*. São os mesmos que para 2; assim, são divisiveis por 5 os numeros cujo ultimo algarismo o fôr, como 35, 840, etc. Ou, o que é o mesmo, os numeros terminados em 5 e em zeros.

Quanto ás potencias, são divisiveis por 5^2 ou 25 os numeros cujos numeros formados pelos 2 ultimos algarismos o forem; por 5^3 ou 125, os numeros cujos numeros formados pelos 3 ultimos algarismos o forem, etc. Em resumo : serão divisiveis por 5^m os numeros cujos numeros formados pelos m ultimos algarismos o forem, sendo m um numero qualquer

118. *Caracter de divisibilidade por* 3. São divisiveis por 3 os numeros cujas sommas dos *valores absolutos* de seus algarismos forem divisiveis por 3. Não o serão aquelles cujas sommas não o forem, e deixarão o mesmo resto que estas sommas divididas por 3.

Exemplos : o numero 85362 é divisivel por 3, porque a somma dos valores absolutos de seus algarismos sendo : $8 + 5 + 3 + 6 + 2 = 24$, 24 é divisivel por 3. Identicamente os numeros : 372825, 187263, etc.

Não o são os numeros 37,853, porque a somma 26 não o é e deixa de resto 2, mesmo resto que o numero proposto; 17852, porque a somma 22 não o é e deixa de resto 1, mesmo resto que o numero proposto dividido por 3.

119. *Caracter de divisibilidade por* 9. São divisiveis por 9 os numeros cujas sommas dos valores absolutos de

(1) Os restos dessas divisões, quando não se fizerem exactamente, serão os mesmos das partes em que se experimentar a divisão.

seus algarismos o forem. Não o serão aquelles cujas sommas dos algarismos não o forem; e, divididos por 9, deixarão o mesmo resto que estas sommas. Assim, os numeros : 374283, 1872657, 85689 são divisiveis por 9.

Não o são os numeros : 87265, cuja somma 28 dividida por 9 dá o resto 1, mesmo resto que o numero proposto; 65975, cuja somma 32 dividida por 9 dá o resto 5, mesmo resto que o numero proposto dividido por 9, etc.

120. *Caracter de divisibilidade por* 11. São divisiveis por 11 os numeros cujas differenças entre as sommas dos algarismos de *ordem impar — a partir da direita —* e dos algarismos de *ordem par* o forem (1). Assim, para se conhecer se um numero é divisivel por 11, sommam-se os algarismos de *ordem impar* a partir da direita para a esquerda, e desta somma subtrahe-se a dos algarismos de *ordem par*, tambem a partir da direita para a esquerda.

Exemplos : o numero 137247 é divisivel por 11 porque a somma dos algarismos de *ordem impar*, a partir da direita é : $7 + 2 + 3 = 12$; a dos algarismos de *ordem par* é : $4 + 7 + 1 = 12$; e é zero a differença entre as duas. O numero 8374421 tambem o é, porque a somma dos algarismos de *ordem impar*, a partir da direita, é 20 e a dos algarismos de *ordem par*, tambem a partir da direita, é 9; a differença entre as duas : $20 - 9 = 11$ é divisivel por 11, logo o numero tambem o é. Quando esta differença não o fôr, o numero tambem não o será e, dividido por 11, dará o mesmo resto que essa differença.

Observação. — Quando a somma dos algarismos de ordem impar fôr *menor* do que a dos de ordem par, junta-se-lhe 11 ou qualquer multiplo de 11 como 22, 33, 44, etc., até que a somma dos algarismos de ordem impar fique *maior* do que a dos de ordem par, fazendo-se depois a subtracção.

121. — **Numero primo** é o que só é divisivel por si e pela unidade. Desta definição conclue-se :

(1) Ou estas differenças forem zeros.

1.º *Dois ou mais numeros primos de per si, são primos entre si.*

2.º *Dois ou mais numeros primos entre si, só têm para divisor commum a unidade.*

3º *Todo numero primo, que não divide outro numero qualquer, é primo com elle.*

122. Se reconhece quando um numero é primo dividindo-o pela serie dos numeros primos (1), a partir successivamente dos menores para os maiores, até que o quociente torne-se egual ao divisor; caso em que, a divisão se fazendo exactamente, o numero não será primo; não se fazendo exactamente, ou o divisor tornando-se *maior* do que o quociente sem que isto se tenha dado, o numero será primo.

Abaixo damos uma tabella dos primeiros numeros primos. Estes numeros foram calculados como ficou acima indicado. Seja, como exemplo — reconhecer se o numero 197 é primo. Dividindo 197 pela serie natural dos numeros primos, a partir dos menores, vê-se que 197 dividido por 13 dá o quociente 15 e o resto 2; dividido por 17 dá o quociente 11 e o resto 10. Ora, o quociente tendo decrescido e *o divisor se tornado maior do que elle*, sem se terem tornado eguaes nem a divisão sido exacta, segue-se que 197 é primo.

1	37	89	151
2	41	97	157
3	43	101	163
5	47	103	167
7	53	107	173
11	59	109	179
13	61	113	181
17	67	127	191
19	71	131	197
23	73	137	
29	79	139	
31	83	149	

123. Os numeros *que são divisiveis por dois ou mais primos entre si, dois a dois, o são tambem pelo producto delles.* Exemplos : 45 sendo divisivel por 3 e por 5, será por 15, producto delles; 36 sendo divisivel por 2 e por 3, será por 6, producto delles, como tambem sendo divisivel por 9 e por 2, será por 18. O numero 1485 sendo divisivel por 5 e por 3, será por 15; sendo tambem por

(1) Quanto aos divisores primos : 2, 3, 9 e 11, não é necessario fazer a divisão, pois se reconhece pelos caracteres da divisibilidade.

13 e por 11, será por 143 e tambem pelo producto de 5 por 11 ou 55 ; de 3 por 11 ou 33 ; de 13 por 3 ou 39 ; etc.

124. Decomposição de um numero em seus divisores primos. — Todo numero, que não é primo, tem um ou mais divisores primos e se denomina — *numero multiplo ;* e sendo um producto de factores primos póde ser decomposto nesses factores.

Para fazer a decomposição de um numero em seus factores primos, — *divide-se esse numero successivamente pela serie dos numeros primos, a partir dos menores para os maiores divisores, só se mudando de um para outro quando a divisão não é mais possivel pelo que se está operando.* Applicando esta regra, vamos decompôr o numero 210 em seus divisores ou factores primos.

210	2
105	3
35	5
7	7
1	1

Escreve-se 210 e á direita um traço vertical, que serve de chave de divisão. Depois procura-se reconhecer pelos caracteres de divisibilidade o menor divisor primo do numero; para 210 o menor, excepto a unidade, é 2, algarismo que se escreve no logar do divisor e divide-se do seguinte modo, escrevendo o quociente abaixo do numero : 210 dividido por 2 dá 105; Ou então divide-se algarismo por algarismo, isto é : 2 dividido por 2 dá 1, que se escreve abaixo do algarismo 2 de 210 que se dividio; 1 dividido por 1 dá 0 para quociente inteiro, escreve-se 0 no logar do quociente, abaixo do algarismo 1, que se dividio; 10 dividido (1) por 2 dá 5, algarismo que se escreve abaixo do correspondente do dividendo. Assim obtem-se o quociente 105. Agora divide-se 105 por 3 *visto não ser mais divisivel por 2.* Assim, temos : 10 dividido por 3 dá 3 para parte inteira do quociente e 1 de resto. Esta dezena reduz-se a unidades e sommam-se ás 5 do numero, ficam deste modo 15 que divididas por 3 dão 5 para quociente; 35 é, pois, o quociente da divisão de 105 por 3.

Divide-se 35 por 5, *visto não ser mais divisivel por* 3; tem-se então : 35 dividido por 5 dá 7 para quociente. E este numero sendo primo só é divisivel por si e pela unidade; dividindo-se 7 por 7 tem-se 1 para quociente. Divide-se 1 por 1 e tem-se feito a decomposição pedida, que termina sempre pelo divisor 1.

(1) A dezena que se dividio deu zero para quociente, reduz-se a unidades e somma-se ás que o numero contem.

Assim, o numero proposto é egual ao producto de seus factores primos, ou :

$$210 = 1 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7$$

2.° Exemplo : Decompôr o numero á direita em seus factores primos :

Dividindo 415800 successivamente por 2 obteem-se os quocientes escriptos á esquerda; quando a divisão não é mais possivel por 2 passa-se para o divisor 3, depois 5, depois 7 e 11 e finalmente 1. Assim o numero 415800 fica decomposto em seus divisores ou factores primos e é egual ao próducto delles, logo (1) :

415800	2
207900	2
103950	2
51975	3
17325	3
5775	3
1925	5
385	5
77	7
11	11
1	1

$$415800 = 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 11. =$$
$$= 1 \times 2^3 \times 3^3 \times 5^2 \times 7 \times 11.$$

Abaixo damos outros numeros e seus factores primos para fazer-se a decomposição como exercicio :

$$22932 = 1 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7 \times 7 \times 13 = 1 \times 2^2 \times 3^2 \times 7^2 \times 13.$$
$$24822 = 2 \times 3^2 \times 7 \times 197.$$

125. **Formação dos divisores de um numero.** — Todos os divisores de um numero, primos e multiplos, *são em numero egual ao producto dos expoentes dos seus factores primos, augmentado cada expoente de uma unidade.* Cumpre observar que quando um numero *não tem expoente suppõe-se que elle tem a unidade para expoente.* Seja, como exemplo — *obter os divisores de* 90. Decompondo 90 em seus factores primos, temos : $90 = 2 \times 3^2 \times 5$. Logo, o numero total de seus divisores será (2): $2 \times 3 \times 2 = 12$, inclusive a unidade e o proprio numero.

(1) Não se costuma escrever a unidade visto como não altera o producto.

(2) Producto dos expoentes — dos factores primos — augmentados de uma unidade cada um delles.

Para obter esses divisores escreve-se em linha horisontal, a partir da unidade, os divisores relativos ao 1.° factor, assim temos :

	1 — 2	
Multiplicam-se esses divisores pelo seguinte elevado successivamente ás potencias desde 1 até á marcada pelo expoente.	3 — 6 9 — 18	Divisores relativos a 3 e 3²
Finalmente todos pelo factor seguinte elevado successivamente desde a potencia 1 até á marcada pelo seu expoente.	5 — 10 15 — 30 45 — 90	Divisores relativos a 5

126. *Uma propriedade importante* dos divisores totaes é a seguinte : *escriptos na ordem crescente, o producto de dois delles, equidistantes dos extremos, é constante e egual ao producto dos extremos e ao numero proposto.* Escrevendo os obtidos acima, temos :

1 — 2 — 3 — 5 — 6 — 9 — 10 — 15 — 18 — 30 — 45 — 90

Assim, o producto dos extremos é : $1 \times 90 = 90$ numero proposto; os productos de 2 e 45, 3 e 30, 5 e 18, 6 e 15 e 9 e 10 são tambem eguaes a 90.

127. **Maximo commum divisor.** — É o maior numero que divide exactamente a dois ou mais numeros dados. O *m. c. divisor* a varios numeros obtem-se, naturalmente, formando todos os divisores relativos a cada um delles, procurando depois entre os divisores communs a todos o maior; mas assim a operação torna-se muito longa. Para abrevial-a existem dois processos :

1° *Processo.* Determina-se o *m. c. divisor* a dois (1) numeros, applicando a seguinte :

Regra. — Divide-se o maior pelo menor, se a divisão fizer-se exactamente o menor dos numeros será o *m. c. divisor* entre elles; porque não ha numero maior do que o menor delles que o divida. Se a divisão não se fizer exactamente, divide-se *o menor* pelo resto da divi-

(1) Primeiro trataremos do caso de dois numeros.

são; se esse resto dividir o menor será elle o *m. c. divisor* aos numeros propostos. Se o resto não dividir o menor, divide-se esse primeiro resto pelo segundo e assim prosegue-se até obter um resto que divida o resto precedente, esse resto será então o *m. c. divisor* aos dois numeros propostos. No caso de não haver resto algum que satisfaça a essa condição, elles irão decrescendo até á unidade, o que indica que os numeros são primos entre si, pois só têm para divisor commum a unidade.

O calculo para as divisões successivas dispõe-se como se vê abaixo, no exemplo seguinte — procurar o *m. c. divisor* entre 25410 e 4290.

	5	1	12
25410	5290	2960	330
3960	330	0	

Dividindo-se 25410 por 4290 obtem-se o quociente 5, algarismo que se escreve acima do divisor. Fazendo a operação, obtem-se o resto 3960, o que indica que o menor *não é o m. c. divisor* aos dois numeros propostos. Então divide-se o menor pelo resto, escrevendo-o na *chave* seguinte á direita; effectuando a operação acha-se 1 para quociente, algarismo que se escreve acima do divisor e 330 para resto, o que indica não ser o *primeiro resto o m. c. divisor* procurado. Divide-se 3960, primeiro resto, pelo segundo 330; assim obtem-se 12 para quociente e o resto *zero*, o que mostra que o *segundo* resto divide o primeiro e, dividindo o primeiro, *dividirá os numeros dados*, sendo o *m. c. divisor* entre elles.

128. **O m. c. divisor** a mais de dois numeros se obtem — procurando primeiro o *m. c. divisor* a dois dos numeros propostos, depois entre esse *m. c. divisor* obtido e um dos outros numeros; e assim faz-se até se ter considerado todos os numeros. Exemplo: procurar o *m. c. divisor aos numeros:* 180180, 27720 e 41580. Entre o primeiro e o segundo destes numeros o *m. c. divisor* é 13860. O *m. c. divisor* entre este, 13860, e o terceiro numero é 13860, porque 13860 divide a 41580; logo, o *m. c. divisor* procurado, aos tres numeros propostos, é: 13860.

129. 2º *Processo* (1). Opera-se conforme a seguinte

(1) Este processo tem a vantagem de se applicar directamente a mais de dois numeros.

Regra. — Decompõem-se os numeros em seus divisores primos, depois forma-se *o producto dos divisores primos* communs, *elevados* aos menores *expoentes;* este producto é o *m. c. divisor* procurado. Exemplo: *procurar o m. c. divisor* aos numeros 990, 8580, 22430. Decompondo estes numeros em seus factores primos obtem-se respectivamente:

$$22430 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 11 \times 17.$$
$$8580 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 11 \times 13.$$
$$990 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 11.$$

Os factores primos communs aos tres numeros são: 2, 3, 5 e 11. O *m. c. divisor* é egual ao producto apenas destes factores elevados, porém, aos menores expoentes; logo, é: $2 \times 3 \times 5 \times 11 = 330$.

130. Quando se divide dois ou mais numeros pelo seu *m. c. divisor*, os quocientes obtidos são primos entre si. Esta propriedade caracterisa o m. c. divisor.

131. **Menor multiplo commum.** — É o *menor numero* divisivel, exactamente, por dois ou mais outros. Dentre a infinidade de multiplos communs (1) que podem ter dois ou mais numeros o menor de todos é *m. m. commum*. Ha dois processos para sua determinação.

132. 1º *Processo.* — Pela theoria do *m. c. divisor.* Obtem-se o *m. m. commum* a dois numeros applicando a seguinte

Regra. — Para obter o *m. m. commum* a dois numeros — multiplica-se um pelo outro e divide-se o producto obtido pelo *m. c. divisor* aos numeros propostos. Exemplo — *Obter o m. m. commum aos numeros:* 180180 *e* 27720. Em o numero 128 vimos que o *m. c. divisor* a estes numeros era 13860. Obtido o *m. c. divisor*, forma-se o producto de 180180 por 27720 e divide-se por 13860.

(1) Chama-se multiplo de um numero — ao producto desse numero por qualquer outro; logo o producto dos numeros propostos é sempre um *multiplo commum* a elles; mas raramente o menor, o que só se dá quando elles são primos entre si. Multiplicando um multiplo commum pela serie natural dos numeros, tem-se uma infinidade de multiplos communs.

Esse producto é :..... 4994589600; dividindo-o pelo *m. c. divisor*, 13860, acha-se o quociente, *que é sempre inteiro*, porque a divisão faz-se exactamente : 360360 é, pois, o menor multiplo commum aos numeros dados.

133. **O m. m. commum** a mais de dois numeros se obtem do seguinte modo : procura-se o *m. m. commum* a dois delles; depois entre esse *m. m. commum* obtido e o terceiro numero; finalmente, entre esse ultimo *m. m. commum* e o quarto numero, até ter-se operado sobre todos os numeros dados.

Exemplo. — *Achar o m. m. commum* aos numeros 16, 32, 64 e 128. O *m. m. commum* entre 128 e 64, isto é, entre os dois maiores numeros, é 128 ou *o producto delles dividido pelo seu m. c. divisor* (1). Entre 128, *m. m. commum* aos dois primeiros, e 32 é, pela mesma razão — 128. Entre 16 e 128, isto é, entre o segundo *m. m. commum* (aos tres numeros : 128, 64 e 32) e o quarto numero é 128. Este é, pois, o *m. m. commum* pedido.

134. 2º *Processo*. — Pela theoria dos numeros primos. Para isto, emprega-se a seguinte

Regra. — Para obter o *m. m. commum* a varios numeros — decompõem-se esses numeros em seus factores primos e forma-se o producto dos factores primos communs e não communs, affectados respectivamente *dos maiores expoentes*. Esse producto é o *m. m. commum* desejado. Exemplo : *procurar o m. m. commum entre os numeros abaixo :*

9240	2	1170	2	11900	2
4620	2	585	3	5950	2
2310	2	195	3	2975	5
1155	3	65	5	595	5
385	5	13	13	119	7
77	7			17	17
11	11				
1	1				

Os factores primos communs e não communs a esses numeros, *elevados aos maiores expoentes*, são : 2^3, 3^2, 5^2, 7, 11, 13 e 17. O producto delles é : 30630600 — menor multiplo commum aos numeros : 9240, 1170 e 11900.

(1) O *m. m. commum* a dois numeros, *sempre que o menor divide o maior* — é o maior delles.

Fracções

135. **Fracção ordinaria.** — Em o nº 19 das Noções preliminares vimos o que era uma fracção, e podemos definil-a como sendo — *o numero que representa uma ou mais partes eguaes da unidade.*

136. **Fracções homogeneas.** — São as que se acham referidas a uma mesma unidade *e a uma mesma subdivisão dessa unidade*. Quando concretas, é necessario que se refiram á mesma unidade — *metro, vara, palmo*, etc.; alem disto é necessario que tambem se refiram a uma mesma *unidade fraccionaria*, isto é, a uma mesma subdivisão da unidade, para o que é necessario que tenham o mesmo denominador (1). Assim $\frac{3}{7}$ do *metro* e $\frac{4}{5}$ do *metro* não são fracções homogeneas; como $\frac{3}{7}$ da *vara* e $\frac{2}{7}$ do *metro* tambem não o são (2).

137. **Fracções proprias.** — São aquellas cujos denominadores *são maiores* do que os numeradores. Então, pelo que fica dito, representam uma ou mais partes eguaes da unidade, como : $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{9}$...

(1) Lê-se uma fracção, lendo em primeiro logar o numerador depois o denominador com a terminação ordinal; se este numero é 2 lê-se *meios*, se é 3 — *terço*, etc.; mas se não é nenhum dos numeros simples, nem numero terminado em zeros, dá-se ao denominador a terminação — *avos*; assim $\frac{5}{17}$ e $\frac{3}{11}$ leem-se : cinco e dezesete *avos*, tres e onze *avos*, etc.

(2) No estudo a seguir, quando os numeros forem abstractos, deveremos sempre considerar as fracções referidas á mesma unidade.

138. **Fracções improprias.** — São aquellas cujos denominadores *são menores* do que os numeradores. Estas fracções contêm uma ou mais unidades alem de uma ou mais partes eguaes dessa mesma unidade.

139. **Conversão de inteiros em fracções.** — Converte-se um inteiro em fracção, transformando-o em uma fracção impropria equivalente, que tenha para denominador um numero dado.

Como exemplo, seja: *converter 5 em uma fracção cujo denominador seja 7.* O denominador dado é 7; quanto ao numerador se o obtem multiplicando o inteiro pelo denominador dado; logo, a fracção impropria equivalente a 5 é: $\frac{35}{7}$. Com effeito, dividindo 35 por 7 obtem-se o quociente 5, o que mostra que *uma fracção representa o quociente da divisão do numerador pelo denominador.*

Regra. — Converte-se um inteiro em fracção, cujo *denominador seja dado*, multiplicando o inteiro pelo denominador e dando o producto como numerador.

140. **Extracção dos inteiros.** — Extrahem-se os inteiros contidos em uma fracção dividindo o numerador pelo denominador; a parte inteira do quociente representa os inteiros contidos na fracção e o resto dividido pelo denominador — a parte fraccionaria, propriamente dita.

Exemplos. — Extrahir os inteiros á fracção $\frac{38}{5}$. Dividindo 38 por 5 obtem-se 7 para parte inteira do quociente e 3 para resto; 7 é, pois, o numero de inteiros contidos na fracção e assim temos: $7\frac{3}{5}$ ou $7 + \frac{3}{5}$, como resultado. Seja a fracção $\frac{9}{4}$. Extrahindo os inteiros, temos: $2\frac{1}{4}$.

141. **Alterações que soffrem as fracções.** — Este estudo baseia-se nos seguintes lemmas (1):

1º *De fracções que têm o mesmo denominador, maior será a que tiver maior numerador.* Assim, entre as fracções $\frac{3}{7}$ $\frac{4}{7}$ e $\frac{6}{7}$, maior é esta ultima.

(1) Lemma — é uma proposição reconhecida como verdadeira.

Com effeito, em todos os casos a mesma unidade está dividida em um mesmo numero, 7, de partes eguaes, sendo que na ultima tomou-se maior numero dessas partes, logo é ella a maior; ao contrario, tendo-se tomado menor numero de partes, 3, para a primeira, é ella a menor.

142. 2º *De fracções que têm o mesmo numerador, maior será a que tiver menor denominador.*

Assim, entre as fracções: $\frac{2}{7}$, $\frac{2}{5}$ e $\frac{2}{3}$, maior é esta ultima e menor a primeira.

Com effeito, na primeira fracção a unidade foi dividida em 7 partes eguaes, na segunda a mesma unidade foi dividida em 5 e na terceira em 3; em todos os casos tendo-se tomado 2 dessas partes, é claro que as da ultima sendo *maiores*, a ultima fracção tambem o será; ao contrario, sendo menores as da primeira, esta será a menor.

143. *Sommando um numero ao numerador de uma fracção ella augmenta, subtrahindo ella diminue.*

Seja $\frac{4}{5}$ a fracção; sommando 3 ao numerador, temos $\frac{7}{5}$ fracção maior do que a primeira de $\frac{3}{5}$, conforme o 1.º lemma: subtrahindo ao numerador da fracção $\frac{4}{5}$ o numero 2, temos $\frac{2}{5}$, fracção menor do que aquella de $\frac{2}{5}$, conforme o 1.º lemma.

144. *Sommando ao denominador de uma fracção um numero ella diminue, subtrahindo ella augmenta.*

Com effeito, se ao denominador da fracção $\frac{2}{5}$ sommarmos um numero, 2 por exemplo, temos $\frac{2}{7}$, fracção menor do que aquella, em virtude do 2.º lemma; se subtrahirmos, ao contrario, temos: $\frac{2}{3}$, fracção maior, em virtude do mesmo lemma.

145. *Sommando a ambos os termos de uma fracção propria um mesmo numero ella augmenta, subtrahindo ella diminue.*

Seja $\frac{4}{7}$, sommando 2 a ambos os termos, temos $\frac{6}{9}$; á primeira faltam $\frac{3}{7}$ para ser egual á unidade e á segunda faltam $\frac{3}{9}$ Sendo esta fracção menor do que aquella, em virtude do

2.º lemma, segue-se que á fracção $\frac{6}{9}$ falta *menos* para ser egual á unidade do que á fracção $\frac{4}{7}$; logo, $\frac{4}{7}$ augmentou quando a ambos os seus termos sommámos um mesmo numero. Subtrahindo, ao contrario, diminuiria, pois $\frac{2}{5}$ é menor do que $\frac{2}{7}$, portanto a esta falta menos do que áquella para ser egual á unidade.

146. *Sommando a ambos os termos de uma fracção impropria um mesmo numero a fracção diminue, subtrahindo ella augmenta.*

Seja a *fracção impropria* $\frac{12}{7}$; sommando 2 a ambos os seus termos, temos $\frac{14}{9}$, fracção *menor* do que a primeira, porquanto aquella excede a unidade de $\frac{5}{7}$ e esta de $\frac{5}{9}$ e, conforme o 2.º lemma, esta fracção é menor do que $\frac{5}{7}$; logo, a segunda excedendo a unidade de menos do que a primeira é menor do que esta. Ao contrario, subtrahindo a ambos os termos o mesmo numero a *fracção impropria* augmenta; com effeito, seja $\frac{7}{5}$, subtrahindo 2 a ambos os termos, temos $\frac{5}{3}$, fracção que excede a unidade de $\frac{2}{3}$ ao passo que $\frac{7}{5}$ excede sómente de $\frac{2}{5}$ esta fracção sendo menor do que $\frac{2}{3}$, conforme o 2.º lemma, a fracção $\frac{5}{3}$ excede mais a unidade do que $\frac{7}{5}$, logo é maior do que esta.

147. Multiplicando o numerador de uma fracção por um numero, a fracção fica maior esse numero de vezes; dividindo, ao contrario, fica menor esse mesmo numero de vezes.

Com effeito, seja a fracção $\frac{4}{7}$; multiplicando o numerador por 2 temos $\frac{8}{7}$. Em ambos os casos a mesma unidade está dividida em 7 partes eguaes, mas, evidentemente, no segundo caso, $\frac{8}{7}$, tomou-se *duas vezes* mais *partes*, logo a segunda fracção é *duas vezes maior* do que a primeira. Ao contrario dividindo o numerador por 2, temos : $\frac{2}{7}$; em ambos os casos a unidade está dividida em 7 partes eguaes, sendo que na fracção dada, $\frac{4}{7}$, tomou-se 4 dessas partes e na segunda, $\frac{2}{7}$, apenas duas ou *duas vezes menos* partes, logo a fracção $\frac{4}{7}$ ficou *duas vezes menor* quando se dividio o seu numerador por 2.

148. Multiplicando o denominador de uma fracção por um numero, a fracção fica esse numero de vezes menor; dividindo, ao contrario, fica esse mesmo numero de vezes maior.

Effectivamente, seja a fracção $\frac{3}{4}$; multiplicando seu denominador por 2, temos $\frac{3}{8}$; no 1.º caso a unidade foi dividida em 4 partes eguaes, no 2.º em 8, logo essas partes são evidentemente *duas vezes menores*, e como em ambos os casos tomou-se o mesmo numero dessas partes, segue-se que a segunda fracção é *duas vezes menor* do que a primeira. Ao contrario, dividindo por 2 o denominador temos : $\frac{3}{2}$; é claro que, agora, cada parte da unidade, que foi apenas dividida em 2 partes, é duas vezes maior do que na fracção $\frac{3}{4}$, em que a unidade foi dividida em 4 partes; logo as partes em que a unidade foi dividida n'aquella fracção sendo *duas vezes maiores* do que as desta, e em ambos os casos tendo-se tomado o mesmo numero, 3, dessas partes, segue-se que a fracção $\frac{3}{2}$ é *duas vezes maior* do que $\frac{3}{4}$.

149. *Multiplicando ou dividindo ambos os termos de uma fracção por um mesmo numero ella não se altera.*

Com effeito, multiplicando o numerador por um numero elle fica *esse numero de vezes maior*; multiplicando o denominador ella fica *esse numero de vezes menor*; logo, multiplicando ambos os termos ella não se altera. Dividindo o numerador por um numero ella fica *esse numero de vezes menor*; dividindo o denominador ella fica *esse numero de vezes maior*; logo dividindo ambos os termos ella não soffre alteração.

150. **Fracções complexas ou mixtas.** — São aquellas cujos termos são compostos, como :

$$\frac{3+\sqrt{4}}{5+\sqrt[3]{8}} = \frac{3+2}{5+2} = \frac{5}{7}$$

151. **Simplificação das fracções.** — A simplificação das fracções tem por objecto *transformal-as em outras equivalentes e cujos termos sejam numeros primos entre si*; e, neste caso, isto é, quando os termos da frac-

ção são *numeros primos entre si* diz-se que a fracção é — *irreductivel*.

Simplifica-se uma fracção — *dividindo ambos os seus termos pelo m. c. divisor entre elles*. Ou, o que é o mesmo: *dividindo os seus dois termos, successivamente, pelos factores communs a elles*, os quaes são factores do *m. c. divisor*; porque *tanto faz dividir um numero por outro como successivamente pelos factores desse outro*. Seja, como exemplo — simplificar a fracção : $\frac{74}{555}$ que se lê : *setenta e quatro, quinhentos e cincoenta e cinco avos*. O *m. c. divisor* aos seus dois termos é : 37; dividindo ambos os termos da fracção por 37 temos : $\frac{2}{15}$, fracção equivalente á proposta e *cujos termos sendo menores melhor* idéa se póde fazer do seu valor.

2º *Exemplo*. Simplificar a fracção : $\frac{2310}{30030}$. Procurando o *m. c. divisor* aos dois termos temos 2310, dividindo-os por 2310 obtem-se a fracção $\frac{1}{13}$. Dividindo, successivamente, ambos os termos pelos factores primos, obtem-se tambem $\frac{1}{13}$.

152. **Transformações das fracções.** — A transformação das fracções tem por fim — *obter uma fracção equivalente a outra e cujo denominador* (ou numerador) *seja um numero dado*. Para applicar o processo geral de transformação é essencial que a fracção a transformar seja *irreductivel*; geralmente a transformação refere-se ao denominador com o fim de referil-as á mesma subdivisão da unidade, tornando-as homogeneas. Para que a transformação se dê, sendo a fracção irreductivel, é necessario *que o denominador dado seja divisivel pelo denominador da fracção proposta*, do contrario a transformação não póde ser exacta, mas sómente approximada.

1º *Exemplo*. Transformar a fracção $\frac{4}{7}$ em outra cujo denominador seja 91. Sendo 91 divisivel por 7 e a fracção proposta irreductivel. a transformação póde ser exacta.

Regra. — *Divide-se o denominador dado*, 91, *pelo denominador*, 7, *da fracção proposta e o quociente*, 13, *multiplica-se por ambos os termos desta fracção*, o que não lhe muda o valor, como sabemos. Assim, temos :

$$\frac{4 \times 13}{7 \times 13} = \frac{52}{91}$$

e esta fracção é equivalente á $\frac{4}{7}$, tendo para denominador o numero dado 91.

2.º *Exemplo*. — Transformar a fracção $\frac{3}{11}$ em outra cujo denominador seja 121. Dividindo 121 por 11 *a divisão faz-se exactamente* dando o quociente 11, logo é possivel a transformação. Multiplicando ambos os termos da fracção proposta por 11, temos : $\frac{3 \times 11}{11 \times 11} = \frac{33}{121}$, fracção equivalente á proposta e cujo denominador é 121.

153. **Reducção das fracções ao mesmo denominador.** — Tem como objecto transformar fracções dadas em outras — equivalentes e que tenham denominador commum. Para comparar duas ou mais fracções é necessario que ellas se achem referidas a uma mesma unidade fraccionaria, isto é, que tenham denominador commum; d'ahi provem a necessidade de uma tal transformação, para o que existem dois processos.

154. 1.º *Processo*. — É o mais geral e o mais conveniente, porque fornece para denominador o menor numero possivel. Sendo necessario para transformar fracções em outras, cujo denominador seja um numero dado, que esse numero seja *multiplo* ou divisivel pelos denominadores das fracções dadas; e sendo conveniente que elle seja o menor possivel, é claro que o *menor m. commum* é o numero que satisfaz a essa dupla condicção. Uma tal transformação faz-se pela seguinte :

Regra. — Para transformar fracções em outras equivalentes e que tenham um denominador commum — *procura-se* o m. m. commum *aos denominadores das fracções dadas, divide-se o, successivamente, por esses denominadores e os quocientes respectivos multiplicam-se por ambos os termos das fracções*.

Exemplo : *reduzir as fracções* $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{15}$ e $\frac{6}{21}$ *ao mesmo denominador*. Applicando a regra acima, temos para *m. m. commum* aos denominadores 5, 15 e 21, das fracções dadas, o numero 105. Dividindo 105, successivamente, por 5, por 15 e por 21 e multiplicando os quocientes respectivos por ambos os termos das fracções propostas, temos :

$$\frac{3}{5}=\frac{3\times21}{5\times21}=\frac{63}{105}\,;\ \frac{4}{15}=\frac{4\times7}{15\times7}=\frac{28}{105}\,;$$
$$\frac{6}{21}=\frac{6\times5}{21\times5}=\frac{30}{105}$$

Assim, as novas fracções, equivalentes ás propostas, são respectivamente :

$$\frac{63}{105}\qquad\frac{28}{105}\qquad\frac{30}{105}$$

155. 2º *Processo.* Multiplicam-se, successivamente, ambos os termos de cada uma das fracções pelo producto dos denominadores de todas as outras (1). Exemplo : reduzir ao mesmo denominador as fracções $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{15}$ e $\frac{6}{21}$.

Multiplicando ambos os termos de cada fracção pelo producto dos denominadores de todas as outras, resulta :

$$\frac{3}{5}=\frac{3\times15\times21}{5\times15\times21}=\frac{945}{1575}\,;\ \frac{4}{15}=\frac{4\times5\times21}{15\times5\times21}=\frac{420}{1575}\,;$$
$$\frac{6}{21}=\frac{6\times5\times15}{21\times5\times15}=\frac{450}{1575}$$

E as fracções transformadas são respectivamente :

$$\frac{945}{1575}\qquad\frac{420}{1575}\qquad\frac{450}{1575}$$

156. **Addição das fracções** — tem por fim obter um numero que contenha tantas *partes eguaes da unidade* (1), quantas ha em outros numeros dados. Só se podendo sommar quantidades homogeneas é claro que só podemos sommar fracções que tenham o mesmo denominador, por isto, quando as fracções dadas não têm denominador commum, primeiro devem ser transformadas em outras equivalentes e que tenham um mesmo denominador, feito o que — *sommam-se os numeradores e dá-se á somma o denominador commum.* Exemplo : sommar as fracções :

(1) Este processo tem o grande inconveniente de conduzir geralmente á fracções cujos termos são relativamente consideraveis, salvo o caso em que os denominadores são numeros primos entre si, porque neste caso o producto é o proprio *m. m. commum* a elles.

$$\frac{2}{5}+\frac{3}{7}=\frac{14}{35}+\frac{15}{35}=\frac{29}{35}$$

157. *No caso de uma das parcellas ser um numero inteiro* — dá-se-lhe a forma de fracção, tendo o mesmo denominador commum. Ou, o que é o mesmo — *multiplica-se o inteiro pelo denominador da fracção, somma-se o producto ao numerador dando-se ao resultado para denominador o denominador commum ou o da fracção.* Exemplo : sommar os inteiros e fracções abaixo.

$$3+\frac{4}{7}=\frac{3\times7+4}{7}=\frac{25}{7}$$

$$3+\frac{2}{5}+1+\frac{3}{7}=3+1+\frac{14}{35}+\frac{15}{35}=4+\frac{29}{35}=$$
$$=\frac{4\times35+29}{35}=\frac{169}{35}$$

158. **Subtracção das fracções** — tem por fim subtrahir de uma fracção tantas partes eguaes da unidade quantas ha em outra. Só se podendo subtrahir quantidades homogeneas, é claro que é necessario, para se effectuar a subtracção entre fracções, que ellas sejam homogeneas, isto é, que tenham o mesmo denominador; portanto, quando as fracções não têm denominador commum, transformam-se em outras equivalentes que o tenham, para depois effectuar a operação. Uma vez refe-

(1) Partes eguaes da unidade ou *unidades fraccionarias.*

ridas ao mesmo denominador — *subtrahe-se do numera-* *dor da fracção minuendo o da fracção diminuidor, dando-* *se á differença, como denominador, o denominador com-* *mum.* Exemplo : *subtrahir* $\frac{4}{7}$ *de* $\frac{6}{7}$. Assim, como ficou dito, temos : $\frac{6}{7} - \frac{5}{8} = \frac{48}{56} - \frac{35}{56} = \frac{13}{56}$.

159. *De um inteiro subtrahe-se uma fracção* — dando ao inteiro a forma de fracção, com o mesmo denomina dor que o da fracção; ou, o que é o mesmo — *multiplica-* *se o inteiro pelo denominador da fracção diminuidor, do* *producto subtrahe-se o numerador desta fracção e ao resto* *dá-se para denominador o da fracção.* Exemplo : *de* 1 *subtrahir* $\frac{2}{7}$. Applicando a regra acima temos (1) :

$$\frac{1 \times 7 - 2}{7} = \frac{5}{7}.$$

160. **Multiplicação das fracções.** — A multipli- cação das fracções apresenta tres casos, como a dos numeros inteiros.

161. **1° Caso.** Multiplicação de uma fracção por um inteiro. Multiplica-se uma fracção por um inteiro — multiplicando-se o seu numerador por esse inteiro e ao producto dando-se o denominador da fracção. Exemplo : *Seja* $\frac{3}{5}$ *a multiplicar por* 4. Temos, para producto :

$$\frac{3 \times 4}{5} = \frac{12}{5}.$$

Com effeito, *devendo o producto formar-se do multipli-* *cando como o multiplicador formou-se da unidade*, e esse numero sendo a somma de 4 parcellas eguaes á unidade, o pro- ducto será tambem a somma de 4 parcellas eguaes á fracção multiplicando, logo, temos :

(1) O caso contrario, isto é, de uma fracção subtrahir um inteiro, só é possivel, no dominio da Arithmetica, quando a fracção é impropria e egual ou maior do que o inteiro; opera-se, então, do seguinte modo : *multiplica-* *se o inteiro pelo denominador da fracção minuendo*, o producto subtrahe- se do numerador dessa fracção, dando-se ao resto o mesmo denominador

$$\frac{3}{5} \times 4 = \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} = \frac{3+3+3+3}{5} =$$
$$= \frac{3 \times 4}{5} = \frac{12}{5}.$$

162. **2° Caso.** Multiplicação de um inteiro por uma fracção. Como *a ordem dos factores não altera o valor do producto*, vemos, *a priori*, que o resultado se obtem do mesmo modo, isto é — *multiplica-se o inteiro pelo nume-* *rador da fracção e ao producto dá-se o mesmo denomi-* *nador.*

Com effeito, *seja 5 a multiplicar por* $\frac{3}{4}$. O multiplicador contem *tres vezes a quarta parte da unidade*, logo o producto deverá conter tambem *tres vezes a quarta parte do multipli-* *cando*; para obtel-o, pois, basta tomar a *quarta parte do mul-* *tiplicando*, o que se obtem dividindo 5 por 4, e repetir esta *quarta parte tres vezes*; logo, o producto será :

$$\frac{5 \times 3}{4} = \frac{15}{4}.$$

163. **3° Caso.** Multiplicação de uma fracção por outra. Multiplica-se uma fracção qualquer por outra — multi- plicando-se respectivamente os numeradores e os deno- minadores entre si. Exemplo : *Seja* $\frac{3}{5}$ *a multiplicar por* $\frac{2}{7}$; temos para producto :

$$\frac{3}{5} \times \frac{2}{7} = \frac{3 \times 2}{5 \times 7} = \frac{6}{35}.$$

Com effeito, o multiplicador $\frac{2}{7}$ contem em si *duas vezes a* *setima parte da unidade*, logo o producto deverá conter tam- bem *duas vezes a setima parte do multiplicando*; para ob- tel-o, pois, basta tomar a *setima parte do multiplicando e re-* *petil-a duas vezes*. Tomar a *setima parte do multiplicando* é tornal-o *sete vezes menor*, o que se obtem multiplicando o seu denominador por 7, logo a septima parte do multiplicando é : $\frac{3}{5 \times 7}$; repetindo esta *setima parte do multiplicando* duas vezes, isto é, tornando-a *duas vezes maior*, temos o producto :

$$\frac{3}{5 \times 7} \times 2 = \frac{3 \times 2}{5 \times 7} = \frac{6}{35}.$$

164. **Observações.** — 1.ª Quando as fracções a multiplicar veem acompanhadas de inteiros, reduzem-se esses á forma fraccionaria e depois então effectua-se o producto.

2.ª O producto de uma fracção por um inteiro, e *vice-versa*, é maior do que o multiplicando.

3.ª O producto de duas fracções *é menor* do que qualquer dellas.

165. **Divisão das fracções.** — A divisão das fracções, cuja definição é a mesma do n.º 75, apresenta os mesmos tres casos da multiplicação.

166. **1º Caso.** Divisão de uma fracção por um inteiro. Divide-se uma fracção qualquer por um inteiro — *multiplicando o inteiro pelo denominador da fracção dividendo* (1). Exemplo : *dividir a fracção* $\frac{3}{5}$ *pelo inteiro* 4. O quociente será pois :

$$\frac{3}{5} \div 4 = \frac{3}{5 \times 4} = \frac{3}{20}.$$

Com effeito, o dividendo, *tres quintos*, devendo conter o quociente tantas vezes quantas o divisor contem a unidade, contem o quociente *4 vezes*; logo, para termos o quociente, basta-nos tomar a *quarta parte do dividendo* ou tornar este numero *quatro vezes* menor, o que se obtem *multiplicando o seu denominador por quatro*, conforme o numero 148.

167. **2º Caso.** Divisão de um inteiro por uma fracção. Para dividir um inteiro por uma fracção, multiplica-se o inteiro pela fracção divisor invertida. Exemplo : *dividir 4 pela fracção* $\frac{3}{7}$. O quociente, pelo que ficou dito, será :

$$4 \div \frac{3}{7} = 4 \times \frac{7}{3} = \frac{28}{3}.$$

(1) Ou dividindo o numerador da fracção dividendo pelo inteiro, quando elle é divisivel. Estes dois modos de effectuar a operação resultam como consequencias dos numeros 147 e 148.

Com effeito, o dividendo, 4, deve conter em si tantas vezes o quociente quantas vezes o divisor *tres setimos* contem a unidade ou partes eguaes da unidade; ora, o divisor contem *tres vezes a setima parte* da unidade, logo o dividendo, 4, contem *tres vezes a setima parte do quociente*; para termos, pois, este numero, basta-nos tomar a *terça parte do dividendo* e *repetil-a sete vezes*. A terça parte de 4 é : $\frac{4}{3}$; para repetir esta *setima parte do quociente* sete vezes, isto é, tornal-a *sete vezes maior*, temos que multiplicar o numerador da fracção por 7; logo, temos para quociente :

$$\frac{4 \times 7}{3} = \frac{28}{3}.$$

168. **3º Caso.** Divisão de uma fracção por outra. Para dividir uma fracção por outra — *multiplica-se a fracção dividendo pela divisor invertida*. Exemplo : *seja dividir* $\frac{3}{5}$ *por* $\frac{2}{7}$. O quociente, pelo que ficou dito é :

$$\frac{3}{5} \div \frac{2}{7} = \frac{3}{5} \times \frac{7}{2} = \frac{21}{10}.$$

Com effeito, o dividendo, *tres quintos*, contem o quociente tantas vezes quantas o divisor, *dois setimos*, contem partes eguaes da unidade; ora, *dois setimos* contem *duas vezes a setima parte da unidade*, logo o dividendo contem *duas vezes a setima parte do quociente*.

Para termos, pois, o quociente basta-nos tomar a *metade* do dividendo, que representa sua setima parte, e tornal-a sete vezes maior. A metade do dividendo se obtem tornando-o duas vezes menor, logo será $\frac{3}{5 \times 2}$ em virtude do numero 148. Esta fracção representando a setima parte do quociente, para termos todo o quociente basta tornar esta setima parte sete vezes maior o que em virtude do numero 147 se obtem multiplicando o numerador por 7, logo o quociente será : $\frac{3 \times 7}{5 \times 2} = \frac{3}{5} \times \frac{7}{2} = \frac{21}{10}$, isto é, *o producto da fracção dividendo pela fracção divisor invertida.*

169. **Observação.** — Quando as fracções veem acompanhadas de inteiros, reduzem-se esses á forma fraccionaria, e depois opera-se como ficou dito.

170. **Potenciação.** — Eleva-se uma fracção a uma potencia qualquer — *elevando cada um dos seus termos a*

essa potencia. Exemplo : *elevar a fracção $\frac{2}{5}$ ao cubo*. Pelo que ficou dito, temos :

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125}.$$

171. **Observações.** — 1.ª *Toda potencia de uma fracção, é tambem uma fracção, porem tanto menor do que a base quanto maior é o grão da potencia.*

2.ª Se as fracções acham-se acompanhadas de numeros inteiros, reduzem-se esses inteiros á forma fraccionaria e depois opera-se como ficou dito. Seja como exemplo : *elevar o numero $3 + \frac{2}{5}$ ao quadrado*. Assim, temos :

$$\left(3 + \frac{2}{5}\right)^2 = \left(\frac{17}{5}\right)^2 = \frac{17^2}{5^2} = \frac{289}{25}.$$

172. **Radiciação.** — A radiciação das fracções basea-se no seguinte theorema (1) : « *A raiz de um quociente é egual á raiz do mesmo grão do dividendo dividida pela do divisor* ». Assim, a raiz de um grão, *m*, qualquer da fracção $\frac{a}{b}$ é :

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$$

Na pratica apresentam-se tres casos :

173. **1º Caso.** O numerador e o denominador são potencias perfeitas do grão da raiz a extrahir. Obtem-se, neste caso, a raiz — *extrahindo a do numerador e a do denominador e dividindo a primeira pela segunda*. Exemplo : *extrahir a raiz quadrada de $\frac{4}{9}$ e a raiz cubica de $\frac{125}{343}$*. Assim, temos :

$$\sqrt[2]{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} \qquad \sqrt[3]{\frac{125}{343}} = \frac{5}{7}.$$

(1) Chama-se *theorema* a uma proposição, cuja verdade se demonstra.

174. **2º Caso.** O numerador não é potencia perfeita do grão da raiz a extrahir, porém o denominador o é. Neste caso — *extrahe-se approximadamente para menos a raiz do numerador e exactamente a do denominador, depois divide-se a primeira pela segunda.*

Exemplo : extrahir as raizes — quadrada e cubica — das fracções $\frac{5}{9}$ e $\frac{11}{125}$. Temos, então :

$$\sqrt[2]{\frac{5}{9}} = \frac{2}{3} \quad \text{e} \quad \sqrt[3]{\frac{11}{125}} = \frac{2}{5}.$$

Visto como 2 é a raiz do maior quadrado contido em 5, numerador da primeira fracção; e 2 a raiz do maior cubo contido em 11, numerador da segunda fracção.

175. **3º Caso.** Os termos da fracção não são potencias perfeitas do grão da raiz a extrahir. Neste caso é necessario transformar-se a fracção em outra equivalente e cujo denominador seja potencia perfeita do grão da raiz a extrahir.

Se é a raiz quadrada — *multiplicam-se ambos os termos da fracção pelo seu denominador* (1), *o que o torna um quadrado perfeito, e depois extrahe-se a raiz a ambos os termos*, como ficou dito no 2.º caso. Se é a raiz cubica — *multiplicam-se ambos os termos da fracção pelo quadrado do denominador, o que o torna um cubo perfeito, e depois extrahe-se a raiz a ambos os termos.*

Exemplos : 1.º — *extrahir a raiz quadrada de $\frac{2}{7}$*. O denominador, 7, não sendo quadrado perfeito, multiplicam-se ambos os termos da fracção por elle, assim temos :

$$\frac{2}{7} = \frac{2 \times 7}{7 \times 7} = \frac{14}{49}.$$

Extrahindo a raiz quadrada a ambos os termos, temos :

$$\sqrt[2]{\frac{2}{7}} = \sqrt[2]{\frac{14}{49}} = \frac{3}{7}.$$

(1) Em virtude do n.º 149, isto não altera a fracção.

2.º — *Extrahir a raiz cubica de* $\frac{3}{5}$. Não sendo 5 um cubo perfeito, temos que multiplicar ambos os termos da fracção pelo quadrado de 5 ou 5^2 e assim temos:

$$\sqrt[3]{\frac{3}{5}} = \sqrt[3]{\frac{3\times5^2}{5\times5^2}} = \sqrt[3]{\frac{75}{5^3}} = \frac{4}{5}.$$

176. **Observação.** — Ha occasiões na pratica em que para se transformar o denominador da fracção, cuja raiz se quer extrahir, em uma potencia perfeita do grão dessa raiz, *basta multiplicar ambos os termos da fracção por um ou mais factores primos de modo a tornal-o potencia perfeita*. Exemplo: extrahir a raiz cubica de $\frac{3}{4}$, temos: $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$, fracção esta cujo denominodor é cubo perfeito, logo:

$$\sqrt[3]{\frac{3}{4}} = \sqrt[3]{\frac{6}{8}} = \frac{1}{2}.$$

177. **Fracções decimaes.** — São as que tèm para denominador uma potencia de dez.

As fracções decimaes são, portanto, um caso particular das fracções ordinarias, caso em que o denominador é uma potencia de dez; se não fosse este facto, que dá logar a grandes simplificações no calculo, mais cousa alguma teriamos a dizer, pois todas as regras relativas ás fracções ordinarias lhe são applicaveis. Uma das grandes vantagens consiste no modo de escrevel-as, substituindo-se o *traço da fracção* por uma *virgula*, isto baseado no principio fundamental da numeração.

O primeiro algarismo á esquerda da virgula representa unidades, o segundo dezenas ou unidades *dez vez maiores*, o terceiro centenas ou unidades *cem vezes maiores*, etc., ao passo que isto se dá á esquerda da virgula, á direita dá-se o contrario — o primeiro algarismo á direita da virgula representa unidades *dez vezes menores* do que unidades ou *decimos*; o segundo — representa — unidades *dez vezes menores ou centesimos*; o terceiro — *millesimos*, etc. Assim, com a substituição do traço da fracção pela virgula, a fracção decimal escreve-se como um numero inteiro.

178. *Escrever uma fracção decimal.* — Seja, como primeiro exemplo — escrever a fracção: $\frac{3729}{1000}$, que se lê: *tres mil setecentos e vinte e nove millesimos*. Obser-

(1) Considerando-a como uma somma, conforme o n. 156.

vemos que esta fracção pode ser decomposta em parcellas (1):

$$\frac{3729}{1000} = \frac{3000}{1000} + \frac{700}{1000} + \frac{20}{1000} + \frac{9}{1000}.$$

$$\text{Ou, simplificando-a: } 3 + \frac{7}{10} + \frac{2}{100} + \frac{9}{1000}.$$

Assim, o algarismo 3 representando *unidades*, a virgula deve ser collocada logo á sua direita; o algarismo 7, que representa *decimos*, deve ser escripto logo á direita da virgula; em seguida 2, que representa *centesimos* ou unidades dez vezes menores do que decimos; finalmente, o algarismo 9, que representa *millesimos* ou unidades dez vezes menores do que centesimos; assim a fracção dada escreve-se: 3,729.

179. **Regra.** — Para escrever uma fracção decimal sob a forma de inteiro — *supprime-se o denominador e com uma virgula separam-se á direita do numerador tantos algarismos quantos zeros contiver o denominador.* Quando o numero de algarismos do numerador não fôr sufficiente — *completa-se escrevendo zeros á sua esquerda,* como tambem preenche-se com este symbolo as casas que faltarem, como faz-se para os numeros inteiros.

180. — Seja, como segundo exemplo: *escrever sob a forma de inteiro a fracção*: $\frac{37}{1000}$.

Escreve-se, como ficou dito, 37; depois temos que separar á sua direita *tres* algarismos, isto é, tantos zeros quantos ha no denominador, mas como 37 só tem dois algarismos completa-se escrevendo zero *á esquerda*, e para indicar que *não ha unidades* escreve-se tambem um zero á esquerda da virgula, o que mostra ser a fracção propria; assim, temos: 0,037.

Abaixo damos algumas fracções e os *numeros decimaes* (1) que lhes correspondem:

$$\frac{371}{100} = 3{,}71;\ \frac{3}{1000} = 0{,}003;\ \frac{4781}{1000000} = 0{,}004781.$$

(1) Denominam-se — *numeros decimaes* — as fracções decimaes escriptas sob a forma de inteiros.

181. — *O problema inverso*, isto é, dado um *numero decimal* escrevel-o sob a forma de fracção é facilimo, pois não se tem mais do que — *escrever o numero decimal supprimindo a virgula e dar-lhe para denominador a unidade seguida de tantos zeros quantas casas* (1) *decimaes tem o numero*. Assim, seja como exemplo : escrever sob a forma de fracções os numeros decimaes : 0,37 ; 3,741 ; 85,72 e 0,00031 ; temos, respectivamente :

$$\frac{37}{100}\ ;\ \frac{3741}{1000}\ ;\ \frac{8572}{100}\ ;\ \frac{31}{100000}.$$

182. *Leitura de um numero decimal*. — Para ler um numero decimal ha varios meios.

Antes de qualquer exemplo, damos um numero decimal e abaixo o nome de cada casa para melhor comprehensão :

....3	7	5	8	6,	1	5	6	7	8	9	2	3....
dezenas de milhar	milhares	centenas	dezenas	unidades	decimos	centesimos	millesimos	decimos millesimos	centesimos millesimos	millionesimos	decimos millionesimos	centesimos millionesimos

183. — 1.º *Lê-se a parte inteira separadamente* (2), *quando ha, depois a parte decimal como se fosse inteira dando ao numero a terminação relativa á ultima subdivisão da unidade que elle contem.*

Seja o numero decimal : 375,048. Lê-se : *trezentos e setenta e cinco unidades e quarenta e oito millesimos*, visto como o ultimo algarismo representa *millesimos*, e o numero decimal uma fracção cujo numerador é 375048 e o denominador é 1000. 2.º exemplo : ler o numero 3,75967. Lê-se : *tres* ou *tres unidades e setenta e cinco mil novecentos e sessenta e sete centesimos millesimos*, visto o ultimo algarismo á direita, 7, representar *centesimos millesimos*.

(1) *Casas decimas* — são os algarismos á esquerda da virgula.

(2) Parte inteira — é a que está escripta á esquerda da virgula, e parte decimal a que está á direita.

184. — 2.º *Lê-se todo o numero, independentemente da virgula, como se fosse inteiro, dando por fim a terminação relativa ao ultimo algarismo decimal á direita.*

Assim, o numero : 37,8549, lê-se : *trezentos e setenta e oito mil, quinhentos e quarenta e nove decimos millesimos*. O numero do exemplo do n.º 182, lê-se : 3 *trilhões*, 758 *bilhões*, 615 *milhões*, 678 *mil* e 923 *centesimos* millionesimos.

185. — 3.º Applicavel de preferencia aos numeros de muitos algarismos. *Divide-se o numero em classes de tres algarismos a partir da virgula para a direita e para a esquerda se ha parte inteira, depois lê-se cada classe com a denominação que lhe é relativa.*

Exemplo — seja dado o *numero* 37429,50362583. Lê-se : 37 *mil*, 429 *unidades;* 503 *millesimos*, 625 *millionesimos* e 83 *centesimos millionesimos*.

186. **Escrever um numero decimal.** — Ha tambem tres meios, conforme dicta-se :

187. — 1.º *Escreve-se a parte inteira e depois a decimal, separada daquella por uma virgula, de modo que o ultimo algarismo da parte decimal* represente unidades da ultima ordem enunciada, *tendo-se o cuidado de preencher com zeros as casas que faltarem.*

Seja, como exemplo, escrever o numero — *trezentos e cinco unidades e mil setecentos e vinte e nove decimos millesimos.* Escreve-se : 305,1729 ; visto como decimos millesimos pertencem á quarta casa decimal não ha necessidade de preencher com zeros. Se o numero fosse : *trinta e sete e oitocentos e vinte e cinco decimos millesimos*, seria necessario *preencher com um zero, á esquerda da parte decimal, para que o seu ultimo algarismo representasse decimos millesimos* e o numero seria então : 37,0825.

188. — 2.º *Escreve-se o numero como se fosse inteiro, separando-se depois á direita tantas casas decimaes quantas correspondem á denominação dada ao ultimo algarismo.*

Seja, como exemplo : escrever o numero — *dois milhões oitocentos e sete mil trezentos e seis centesimos millesimos.* A denominação sendo de *centesimos millesimos*, correspondente á quinta casa decimal, escreve-se o numero como se fosse inteiro e á direita separam-se cinco casas decimaes : Assim, temos : **28,07306.**

189. — 3.° Quando-lê-se o numero seguindo a cada classe a sua denominação — *escreve-se-o então como fizemos acima*, isto é, como se fosse inteiro, separando á direita o numero de casas decimaes relativo á ultima denominação.

Exemplo : *escrever o numero — quinhentos e setenta e dois mil e setecentos e dois milhões, oitocentos e quarenta e dois mil e setecentos e dois millionesimos*. A' denominação correspondendo a *sexta casa decimal*, separam-se á direita do numero escripto, como se fosse inteiro, seis casas decimaes; assim, temos : 572702,842702.

190. *Theorema.* — Um numero decimal não muda de valor escrevendo zeros á sua direita.

Com effeito, seja o numero decimal 0,37 — escrevendo zeros á sua direita, temos : 0,3700; as fracções que correspondem ao primeiro e ao segundo numero são equivalentes, como vê-se abaixo :

$$\frac{37}{100} = \frac{3700}{10000} = \frac{37}{100}.$$

191. *Theorema.* — Para multiplicar ou dividir um numero decimal por uma potencia de dez, basta andar com a virgula para a direita ou para a esquerda tantas casas decimaes quantas são as unidades do grão da potencia.

Com effeito, seja o numero 37,485; andando com a virgula successivamente para a direita, temos : 374,85 e 3748,5 e finalmente 37485, numeros estes cujos valores crescem de dez em dez vezes, como é facil verificar, pois os algarismos representam valores de dez em dez vezes maiores, ou escrevendo-os sob a forma de fracção. Andando com a virgula para a esquerda o contrario dá-se, pois temos : 3,7485 e 0,37485, numeros esses cujos valores decrescem de dez em dez de um para o outro.

192. *Simplificação dos numeros decimaes.* — Opera-se como para as fracções ordinarias, de accordo com o que ficou dito em o numero 151.

193. *Reducção ao mesmo denominador.* — Os numeros ou fracções decimaes reduzem-se ao mesmo denominador — *igualando o numero de casas decimaes*, isto é, *accrescentando zeros á direita dos que têm menor numero, até que fiquem eguaes os numeros de casas decimaes em todos elles.*

Operando-se como em o n.° 151 se reconhece que o denominador relativo ao decimal de maior numero de casas é o *m. m. commum* aos outros, e que *egualar o numero de casas decimaes* corresponde a multiplicar ambos os termos da fracção relativa pelo quociente da divisão do *m. m. commum* pelo seu denominador. Exemplo : *reduzir ao mesmo denominador os decimaes : 37,42; 8,927* e 0,0033. Pelo que ficou dito, temos : 37,4200; 8,5270 e 0,0033. Com effeito, as fracções relativas são :

$$\frac{3742}{100},\ \frac{8526}{1000}\ \text{e}\ \frac{33}{10000};$$

o *m. m. commum* aos denominadores é 1000. Dividindo-o successivamente pelos denominadores das outras fracções e os quocientes respectivos multiplicando por ambos os termos, temos :

$$\frac{374200}{10000},\ \frac{85260}{10000}\ \ \frac{33}{10000}.$$

Escrevendo estas fracções sob a forma inteira, temos 37,4200 e 8,5270 e 0,0033, conforme dissemos acima.

OPERAÇÕES

194. Addição. — Para addicionar numeros decimaes — *egualá-se o numero de casas decimaes, escrevem-se uns abaixo dos outros de modo que as virgulas se correspondam e sommam-se as unidades de diversas ordens como se os numeros fossem inteiros, separando á somma tantas casas decimaes quantas ha em uma das parcellas.*

Isto equivale a reduzir as fracções relativas ao mesmo denominador, como sabemos, e sommar os numeradores. Exemplo : sommar os decimaes 0,37; 42,538; 2,03756.

Dispondo-os como ficou dito, egualando o numero de casas e sommando-os, obtem-se para somma :

$$\begin{array}{r} 0,37000 \\ 42,53800 \\ 2,03756 \\ \hline 44,94556 \end{array}$$

195. **Subtracção.** — Para subtrahir numeros decimaes — *egualam-se o numero de casas decimaes, escrevem-se os numeros de modo que as virgulas se correspondam e opera-se como se fossem inteiros*, separando ao resto tantas *casas decimaes quantas ha em um dos termos da subtracção.*

Identicamente, como na addição, isto equivale a reduzir as fracções relativas ao mesmo denominador e subtrahir do numerador da fracção minuendo o da diminuidor, dando ao resto o denominador commum. Exemplo : subtrahir de 37,4275 o numero 3,056. Dispondo como na pratica e operando como ficou dito, temos o resto :

$$\begin{array}{r} 37,4275 \\ 3,0560 \\ \hline 34,3715 \end{array}$$

196. **Multiplicação.** — Para multiplicar numeros decimaes — *multiplicam-se como se fossem inteiros, separando-se ao producto tantas casas decimaes quantas ha em todos os factores.*

Isto equivale a multiplicar os numeradores e denominadores das fracções relativas. Com effeito, seja dado — multiplicar 3,52 pelo decimal 0,575. Pelo que ficou dito o producto será obtido : 3,52 × 0,575 = 2,02400. Sob a forma de fracção, teriamos :

$$\frac{352}{100} \times \frac{575}{1000} = \frac{352 \times 575}{100 \times 1000} = \frac{202400}{100000} = 2{,}02400.$$

197. **Divisão.** — Na divisão dos decimaes temos tres casos a considerar :

198. **1.º Caso.** — Dividendo e divisor têm o mesmo numero de casas decimaes. Neste caso — *supprimem-se as virgulas e dividem-se os numeros como se fossem inteiros.*

Com effeito, supprimindo a virgula ao dividendo equivale a multiplical-o por uma potencia de *dez*, correspondente ao numero de casas decimaes, conforme o n.º 191, logo o quociente fica multiplicado por essa potencia de dez; quando se supprime a virgula ao divisor equivale a tel-o multiplicado tambem por uma potencia de dez, equivalente ao numero de casas decimaes, logo o quociente fica dividido por essa mesma potencia de dez. E' claro, pois, que multiplicando o dividendo e o divisor pelo mesmo numero, o quociente não se altera.

199. **2.º Caso.** — O dividendo tem maior numero de casas decimaes do que o divisor. Este caso reduz-se ao

precedente, pois é facil tornar egual o numero de casas decimaes do dividendo e do divisor, escrevendo zeros á direita deste, até que ambos tenham o mesmo numero de casas decimaes, depois do que se supprimem as virgulas e opera-se como se os numeros fossem inteiros. Na pratica, porém, se prefere operar do seguinte modo : *supprimem-se as virgulas* (sem egualar o numero de casas decimaes), *dividem-se os numeros como se fossem inteiros — e á direita do quociente separam-se tantas casas decimaes quantas o dividendo excede ao divisor.*

Prefere-se operar assim, porque este processo fornece o quociente com uma approximação correspondente a uma fracção, cujo numerador é a unidade e o denominador uma potencia de dez — de um grão egual ao excesso do numero de casas decimaes do dividendo sobre o do divisor.

Exemplo : dividir : 36,472629 por 5,7426. O dividendo tendo seis casas decimaes e o divisor quatro, o quociente terá uma approximação de $\frac{1}{10^2}$ ou $\frac{1}{100}$. Dividindo e separando á direita do quociente *duas casas decimaes*, temos o quociente approximado até centesimos : 6,35.

200. **3.º Caso.** — O dividendo tem menor numero de casas decimaes do que o divisor. Neste caso eguala-se o numero de casas decimaes do dividendo e do divisor, accrescentando zeros á direita daquelle numero, depois supprimem-se as virgulas e opera-se como se os numeros fossem inteiros.

201. **Observação.** — O processo do n.º 199 permitte obter sempre o quociente com uma approximação desejada, bastando accrescentar zeros á direita do dividendo, de modo a dar-lhe um numero de casas decimaes que *exceda as do divisor de tantas quantas casas decimaes de approximação se deseja obter para o quociente.* Assim, seja como exemplo : *dividir 22,5 por 7,35, devendo o quociente ser approximado até decimos millesimos,* isto é, ter quatro casas decimaes de approximação. Para isto o dividendo deve ter mais 4 casas decimaes do que o divisor, isto obtem-se accrescentando á sua direita cinco zeros; depois *supprimem-se as virgulas, dividem-se os numeros como se fossem inteiros e á direita do quociente separam-se 4 casas decimaes.*

202. — Mesmo quando os numeros são inteiros, pode-se applicar este processo para obter um quociente approximado.

Exemplo : *dividir 22 por 7, de modo a obter o quociente com approximação de millesimo*, isto é, de tres casas decimaes. Para isto, á direita do dividendo (22) accrescentam-se tantos zeros quantas casas decimaes de approximação deseja-se para o quociente — tres no exemplo em questão — depois divide-se 22000 por 7, *separando-se á direita do quociente tres casas decimaes*. Isto equivale a multiplicar e dividir o quociente por mil, o que não o altera.

Assim, obtem-se o quociente : 3,142, approximado até millesimos.

203. **Potenciação.** — Sendo a potencia um producto de factores eguaes — para elevar um decimal a uma potencia — *multiplica-se esse decimal por si mesmo tantas vezes quantas são as unidades do grão da potencia, separando á direita do producto tantas casas decimaes quantas ha, multiplicadas pelo grão da potencia, completando com zeros á esquerda quando fôr necessario*. Assim, o quadrado tem o *duplo* das casas decimaes da base; o cubo tem o *triplo*; etc.

Exemplo : 1.º *elevar ao quadrado* 0,37. Temos : $(0,37)^2 = 0,37 \times 0,37 = 0,1369$. — 2.º *elevar ao cubo* 0.37. Temos : $(0,37)^3 = 0,37 \times 0,37 \times 0.37 = 0,050653$. — 3.º *elevar ao cubo* 0,07. Temos : $(0,07)^3 = 0,07 \times 0,07 \times 0,07 = 0,000343$.

204. **Radiciação.** — Todas as regras relativas ás fracções ordinarias e os casos previstos nesse estudo, applicam-se ás fracções decimaes; assim, para extracção das raizes aos decimaes *basta dar-lhes a forma de fracções* e operar como ficou dito; mas é mais simples praticar como se segue :

205. — Para que um numero decimal seja potencia perfeita do grão de uma raiz a extrahir, é necessario que o numero de suas casas decimaes *seja divisivel pelo indice da raiz a extrahir*. Não quer isto dizer que assim sendo, o decimal seja potencia perfeita, *mas o seu denominador sel-o-á* como é facil de reconhecer pelo que ficou dito na potenciação. Portanto, para extrahir a raiz de um grão qualquer de um numero decimal — *torna-se o numero de suas casas decimaes divisivel pelo indice da raiz, accrescentando zeros á direita, depois supprime-se a virgula e extrahe-se a raiz como se o numero fosse inteiro, sepa-*

rando á direita da raiz um numero de casas decimaes egual ás que o numero contem divididas pelo indice da raiz (1).

Exemplo : 1.º *Extrahir a raiz quadrada de* 3,635. Para que o numero de casas decimaes de 3,635 seja divisivel por 2, indice da raiz, accrescenta-se um zero; assim temos : 3,6350, isto não altera o seu valor, visto como *zeros á direita de um decimal não lhe alteram o valor*. Supprimindo a virgula, extrahindo a raiz do maior quadrado contido em 36350 e separando á direita duas casas decimaes, isto é, metade das que o numero encerra, obtem-se para raiz do maior quadrado contido em o numero proposto : 1,90.

2.º *Extrahir a raiz cubica de* 35,4223. Accrescendo dois zeros á direita para tornar o numero de casas decimaes divisivel por 3, indice da raiz, supprimindo a virgula, extrahindo a raiz de 35422300 e separando á direita della *tres* casas decimaes, temos : 3,280.

206. **Observação.** — Este processo nos conduz — tanto para raiz quadrada como para raiz cubica — a obtel-as com uma approximação desejada; para isto não temos mais que accrescentar — *tantas vezes dois zeros quantos forem os algarismos decimaes de approximação que quizermos para a raiz quadrada*; e tantas vezes *tres zeros*, quantos forem os algarismos decimaes que se quizer de approximação para a raiz cubica.

Exemplo : 1.º *Obter a raiz quadrada de 2 com approximação de um centesimo.* — A approximação de *centesimos* corresponde a *duas* casas decimaes, logo não temos mais do que accrescentar *quatro zeros* á direita de 2 e extrahir a raiz do maior quadrado contido em 20000, *separando á direita da raiz obtida duas casas decimaes*; esta raiz é : 1,4.

2.º *Obter a raiz cubica de 5 com approximação de um decimo.* — A approximação de *decimos* correspondendo a uma casa decimal, accrescenta-se á direita de 5, *tres zeros* e extrahe-se a raiz do maior cubo contido em 5000, *separando á direita da raiz obtida uma casa decimal*; esta raiz é : 1,7.

207. **Conversão das fracções ordinarias em decimaes. — Fracções periodicas.** Ha casos em que uma fracção ordinaria pode ser convertida em um numero decimal exacto; ha outros, porém, em que uma tal transformação só pode ser feita approximadamente, porquanto o numero decimal resultante é incommensuravel.

(1) Para a raiz quadrada — metade das casas decimaes do numero; para a raiz cubica — a terça parte; etc.

208. **1.° Caso.** — *Conversão exacta.* Isto tem logar *sempre que no denominador da fracção ordinaria* (1) *irreductivel só entram os factores 2 ou 5; e então o numero de algarismos decimaes é egual ao das unidades do maior dos expoentes dos factores 2 ou 5.*

Exemplos : 1.° *Converter $\frac{3}{20}$ em decimal.* — Para fazer uma tal conversão, emprega-se o processo do n.° 201, como se se tratasse de obter um quociente approximado. Mas 3 unidades não contendo 20 nem uma vez, reduzem-se a *decimos* e assim temos 30 decimos a dividir por 20; para indicar que o quociente representa decimos escreve-se no seu logar zero e virgula, como no calculo á margem. Dividindo 30 *decimos* por 20, obtem-se 1 *decimo* para quociente e restam 10 *decimos*. Reduzem-se os 10 *decimos* a *centesimos* accrescentando um zero á sua direita, pois que 10 decimos valem 100 *centesimos*. Dividindo 100 centesimos por 20, obtem-se 5 *centesimos* para quociente e zero para resto, o que indica *uma transformação exacta*. O decimal equivalente á fracção proposta é, pois : 0,15; contem *duas casas* decimaes ou tantas quantas unidades contem o maior dos expoentes 2 ou 5, pois que 20, denominador da fracção, decomposto em seus factores primos é egual a $2^2 \times 5$. Logo, a transformação faz-se *accrescentando um zero á direita do numerador, escrevendo zero e virgula no logar do quociente e depois dividindo; á direita do resto escrevendo zero e dividindo novamente, proseguindo-se assim até obter um quociente exacto.*

30	20
100	0,15
0	

209. **2.° Caso.** — *Transformação inexacta.* A transformação inexacta — *dá-se quando no denominador da fracção ordinaria irreductivel entram factores differentes de 2 e 5, combinados com estes ou não.* Temos dois casos a destinguir, conforme os factores primos differentes de 2 e 5 entram isolados ou combinados com estes ou algum delles :

210. *No denominador da fracção só entram factores differentes de 2 e de 5.* — Neste caso temos para resultado da transformação inexacta um quociente illimitado, constituido por uma *dizima periodica simples* porque o periodo (2) começa logo depois da virgula.

(1) Consideraremos sempre a fracção ordinaria irreductivel.
(2) Chama-se — *periodo* — ao conjunto de algarismos, que se reproduzem sempre na mesma ordem.

Exemplo : *seja a fracção $\frac{2}{7}$*. Como no denominador só entra o factor 7, differente de 2 ou de 5, o quociente será illimitado e constituido por uma *dizima ou fracção periodica simples.* A conversão ou transformação faz-se do mesmo modo, accrescentando zero á direita do numerador, escrevendo um zero e virgula no quociente e dividindo; á direita de cada resto accrescentando-se zero e dividindo-se, como indica o calculo. O quociente é, pois, illimitado e constituido pela *dizima periodica simples* : 0,285714285714.... cujo *periodo* é formado pelos algarismos : 0,285714.

20	7
60	0,285714...
40	
50	
10	
30	
20	

As fracções $\frac{4}{21}$ e $\frac{3}{13}$ dão as dizimas simples : 0,190476190476... e 0,230769230769....

211. *No denominador da fracção, alem dos factores 2 ou 5 ou ambos, entram factores differentes destes.* — Neste caso, temos ainda um quociente illimitado, formado por uma dizima periodica, mas a dizima é *composta*, porque o periodo não começa logo depois da virgula, isto é, ha uma parte que não se reproduz ou não é periodica, e outra que é periodica.

Exemplos : 1.° *Converter a fracção $\frac{3}{14}$ em decimal.* — No denominador 14 entram os factores 7 e 2, sendo aquelle differente dos da base, logo esta fracção dá lugar a uma *dizima periodica composta*. Fazendo a divisão, como se vê no calculo á direita, sem que o algarismo 2 logo á direita da virgula se reproduza, o periodo é : 142857, formando, assim uma dizima composta : 0,2142857142857.... que se pode decompôr em duas partes — uma periodica e outra não periodica.

30	14
20	0,2142857...
60	
40	
120	
80	
100	
20	
60	
....	

2.° *Exemplo :* A fracção $\frac{6}{35}$ dá logar tambem á *dizima composta* 0,17142857142857....

212. **Regra para conversão.** — Á direita do numerador escreve-se zero, e zero e virgula no logar do quociente, depois divide-se o numero assim formado pelo denominador; á direita de cada resto seguinte escreve-se zero e opera-se a divisão *como se os numeros fossem intei-*

ros, proseguindo-se até a reproducção de um dos periodos.

Quando a fracção é impropria, começa-se por extrahir os inteiros nella contidos, e opera-se com a fracção propria restante como ficou dito.

213. — **Conversão dos numeros decimaes em fracções ordinarias.** — A fracção ordinaria que produz uma dizima, denomina-se : *fracção geratriz* ou original. A determinação dessa fracção, quando se tem a dizima, dá logar aos mesmos casos constituindo o problema inverso.

214. **1.º Caso.** *Decimal limitado.* — Este caso ficou explicado em o numero 208.

Escreve-se o decimal, sem a virgula, como numerador da fracção, dando-lhe para denominador a unidade seguida de tantos zeros quantas casas decimaes elle contem; depois torna-se irreductivel a fracção resultante.

Exemplo : *Obter a fracção geratriz do decimal limitado* 0,228. Pelo que ficou dito, temos : $\frac{228}{1000} = \frac{114}{500} = \frac{57}{250}$.

215. **2.º Caso.** *Dizima periodica simples.* — Para obter a fracção geratriz — *dá-se como numerador um dos periodos e como denominador tantos noves quantos algarismos tem o periodo, depois torna-se irreductivel a fracção assim obtida.*

Exemplo : 1.º *Seja a dizima simples* : 0,285714. Temos então : $\frac{285714}{999999}$. Procurando o *m. c. divisor* a seus dois termos e dividindo-os por elle, obtem-se a geratriz : $\frac{2}{7}$.

2.º exemplo : 0,372372... temos : $\frac{372}{999} = \frac{124}{333}$, fracção geratriz.

216. **3.º Caso.** *Dizima periodica composta.* — A fracção geratriz obtem-se — *dando-se para numerador o numero formado pela parte não periodica seguida de um dos periodos, menos a parte não periodica, e para denominador tantos noves quantos são os algarismos de um dos*

periodos, seguidos de tantos zeros quantos são os algarismos da parte não periodica.

Exemplo : *seja a dizima composta* 0,73521521... — A parte não periodica é 73 e o periodo é 521; logo, a fracção geratriz, pelo que ficou dito, será :

$$\frac{73521 - 73}{99900} = \frac{73448}{99900} = \frac{18372}{24975}.$$

Sendo esta ultima fracção irreductivel é ella a geratriz que, convertida em decimal, produz a dizima proposta.

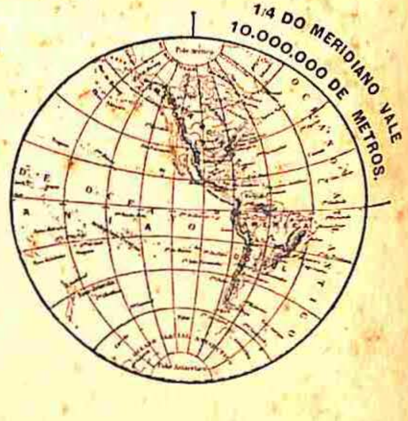
Metrologia

217. É a parte da Arithmetica que tracta do estudo dos diversos systemas de pesos e medidas.

Desde os tempos mais remotos que as necessidades da vida determinaram a troca ou permuta directa de um producto por outro e posteriormente pela moeda; d'ahi originou-se a necessidade dos pesos e das medidas, como meio de avaliar ou medir os objectos produzidos. A principio a difficuldade de transporte restringio os mercados fazendo com que em cada logar houvesse um systema de pesos e medidas especiaes, as quaes sendo ás vezes as mesmas tinham nomes differentes em pontos proximos ou sob a mesma denominação havia medidas diversas. Com o desenvolvimento dos meios de transporte, essas causas determinaram a necessidade da organisação de um systema de pesos e medidas que devesse ser universalmente adoptado — foi assim organisado o *systema decimal* conhecido por — *systema metrico*.

Nos occuparemos delle. visto que se acha adoptado entre nós, e do nosso antigo systema de pesos e medidas que, embora abolido por lei desde 1874, ainda é empregado e é conhecido sob a denominação de *complexo*.

218. **Systema metrico decimal.** — Neste systema de pesos e medidas a unidade principal é o *metro* — medida de comprimento.



O **metro** é a decima millionesima parte da quarta parte do meridiano terrestre, isto é — dividido o meridiano em 4 partes eguaes, uma destas partes foi depois dividida em *dez milhões de partes eguaes*, sendo uma destas ultimas partes denominada — *metro*. A figura ao lado mostra o quarto do meridiano terrestre.

Para facilidade dos calculos, procurou-se guardar uma uniformidade entre os multiplos e submultiplos do metro, baseando o systema metrico na mesma lei de formação do systema de numeração decimal: assim dez unidades de uma ordem formam uma ordem superior. O metro foi tambem dividido em dez partes eguaes, successivamente, constituindo os seus submultiplos. Em seguida damos os multiplos e submultiplos do metro, observando que para uns e outros se empregam prefixos — uns latinos e outros gregos. Os prefixos para os submultiplos do metro são: *deci, centi, mille, decimille, etc.;* e para os multiplos:

deca,	*hecto,*	*kiloi,*	*myria,*	*etc.*
dez	cem	mil	dez mil.	

219. *Medidas de comprimento:*

Myriametro:	. dez mil metros	10000 metros.
Kilometro. .	. mil metros	1000 »
Hectometro .	. cem metros.	100 »
Decametro .	. dez metros	10 »
Metro.	. unidade	1 »
Decimetro. .	. decimo do metro	0,m10 »
Centimetro .	. centesimo do metro	0,m01 »
Millimetro .	. millesimo do metro	0m,001 »
Decimillimetro	decimo millesimo do metro.	0m,0001 »

220. **Medidas de superficie.** — São derivadas do metro, seus multiplos e submultiplos, accrescentando a palavra *quadrado*, porque ellas são quadradas; constam do resumo abaixo (1):

Decametro quadrado	100,m²00	Um quadrado, cujo lado tem 10 metros; egual portanto a $10^m \times 10^m = 100^{m^2}$, que se lê; *cem metros quadrados.*
Metro quadrado unidade	1,m²00	Um quadrado, cujo lado tem um metro.
Decimetro quadrado (2)	0,m²01	Idem, cujo lado tem um decimetro. E' a *centesima parte* de um metro quadrado.

(1) D'ahi a denominação de quadrado á segunda potencia e essas medidas são representadas escrevendo como expoente ao numero: *m²*.

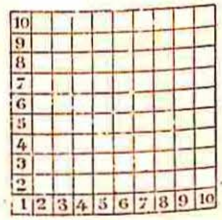
(2) O metro quadrado tem 100 decimetros quadrados, logo o *decimetro quadrado* é a centesima parte de um metro quadrado. É por este motivo que os numeros decimaes que indicam superficie têm *dois algarismos* decimaes para cada casa; isto é, os dois á direita da virgula representam decimetros, os dois seguintes representam centimetros etc.

Centimetro quadrado 0,$^{m^2}$0001 { Idem, cujo lado tem um centimetro. E' a *decima millesima parte* do metro quadrado.

221. *Medidas agrarias.* — São as medidas de superficie, quando applicadas á medida das terras; as usuaes são :

Hectare.... symbolo : HA.... equivale a *cem ares* e escreve-se 100^A. { 100 *ares* ou 10000 *metros quadrados*. E' um quadrado cujo lado tem 100 metros.

Are. — Unidade :... A... 1^A Corresponde ao *decametro quadrado*, pois cada lado tem 10 metros, como indica a figura na qual cada divisão equivale a um metro quadrado.

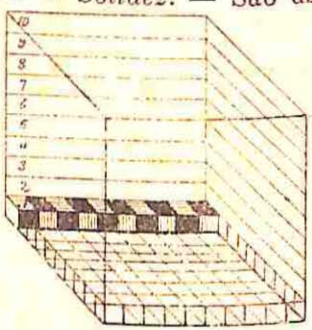


Deciare... dA... decima parte do ar, o 10,$^{m^2}$00.
Centiare... cA... centesima parte do ar, ou 1$^{m^2}$,00.

222. **Medidas de volume.** — *Solidez.* — São as mesmas com a designação — *Cubico* :

Metro cubico unidade (1) 1,$^{m^3}$000...

Cubo cuja aresta tem um metro, como indica a figura, na qual cada divisão equivale a um decimetro cubico.



Decimetro cubico.. 0,$^{m^3}$001 { Cubo cuja aresta tem um decimetro. Equivale á *millesima* parte do metro cubico.

Centimetro cubico. 0,$^{m^3}$000001 { Cubo cuja aresta tem um centimetro. Equivale á *millionesima* parte do metro cubico.
(Ver a figura ao lado do litro).

(1) O metro tendo 10 decimetros o *metro cubico* tem 1000, ou 10 × 10 × 10; portanto os numeros que representam as medidas de volume têm *tres algarismos decimaes* para cada casa, isto é, os tres á direita da virgula representam *decimetros cubicos*, os *tres seguintes* — centimetros cubicos, os *tres outros* — millimetros cubicos, etc.

Millimetro cubico 0,$^{m^3}$000000001 { Um billionesimo do metro cubico.

223. **Medidas de capacidade.** — *Para seccos.* São as mesmas de volume e as usuaes constam do resumo abaixo :

Kilolitro... 1000 litros... L....... Equivale a um *metro cubico*.
Hectolitro... 100 litros... Equivale a um decimo do *met. cubico*.
Decalitro.... 10 litros... » a um centesimo do *m. cubico*.

Litro — Unidade... Equivale á millesima parte de um metro cubico; é, pois, um decimetro cubico.

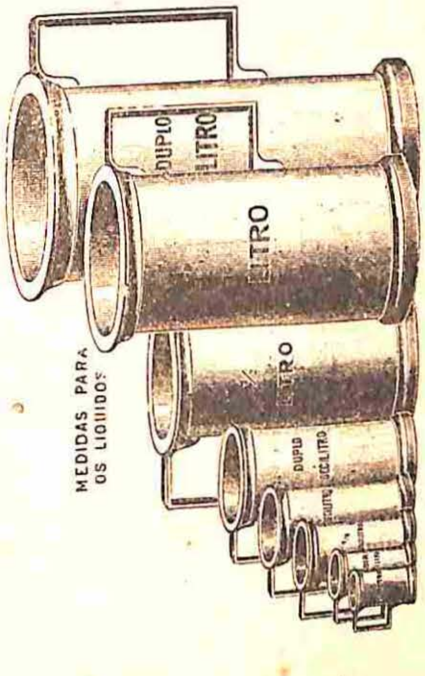
Meio litro... metade de um litro.

Decilitro...... 0^l,1... Decima parte de um litro.

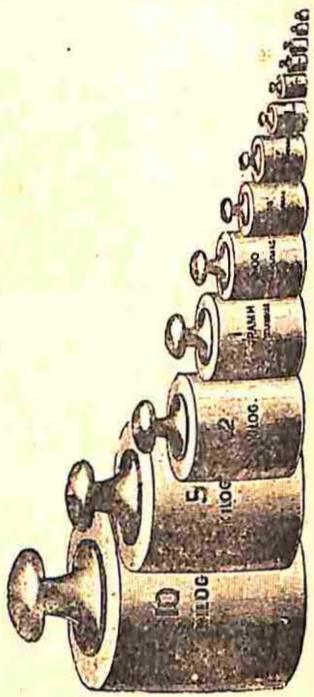
(o peso d'[illegible] agua [illegible] gramma)

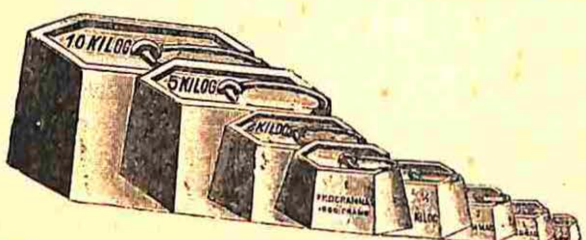
224. **Medidas de capacidade.** — *Para os liquidos.*

São as mesmas tendo mais algumas subdivisões. Para os seccos as medidas são de madeira, em geral; ao passo que para os liquidos são de metal e têm a forma representada na figura ao lado, figura que tambem representa as subdivisões usuaes.



225. Medidas para o peso. — As medidas para o peso, geralmente denominadas — *pesos*, são de duas especies — uns *pesos* são de metal amarello, cylindricos como a figura ao lado; outros são de ferro fundido, tendo a forma de um tronco de pyramide, como vê-se na figura abaixo, sendo o maior peso geralmente de 20 *kilos* ou 20 kilogrammos. Abaixo damos os multiplos e submultiplos da unidade principal, que é o kilogrammo.





Tonelada metrica . .	T.	1000	kilogrammos.
Quintal metrico . . .	Q.	100	»
Myriagrammo. . . .	10 kilogrammos .	10000	grammos.
Kilogrammo. . . .	unidade.	1000	»
Hectogrammo. . . .	. . . .	100	»
Decagrammo	. . . .	10	»

Grammo (1) *grm*. . . .	unidade.	1 grammo.
Decigrammo.	decimo do grammo. .	0,^{gm}1
Centigrammo	centesimo do » . .	0,^{gm}01
Milligrammo.	millesimo do » . .	0,^{gm}001

Peso de ferro fundido — 20 kilogrammos.

20 *kilos* — denominação vulgar.

226. — *A medida para os pesos* faz-se vulgarmente por um instrumento que se denomina — balança; á direita damos uma — a balança decimal — que serve para as pesadas dos armazens. Ha mais outros typos de balanças, entre esses damos a de Roberval, ou de pratos, geralmente usada para as pequenas pesadas.

BALANÇA DE PRATOS

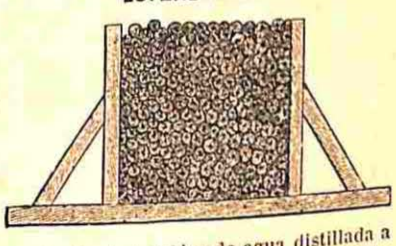
227. Medidas para madeiras. — São da forma da figura abaixo — o *estere*. As usuaes são:

Decastere	10 esteres. .	equivale a. .		10,^{m3}000
Meio decastere. .	5 » . .	» a. .		5,^{m3}000
Duplo estere. . .	2 » . .	» a. .		2,^{m3}000

ESTERE=1 metro cubico.

Estere . . unidade. Equivale a um metro cubico.

Decistere. . decimo do estere.



(1) O *grammo* é o peso de um centimetro cubico de agua distillada a 4 gráos centigrados acima de zero, quando a agua tendo o seu maximo de contracção tem tambem a maxima densidade.

6.

228. **Medida dos angulos** (1) — *divisão sexagesimal.*

Grão	60 minutos	1111,^{m}00
Minutos	60 segundos	18,^{m}51
Segundo	60 terceiros	0,^{m}3085
Terceiro	60 quartos	0,^{m}00514

229. **Operações sobre os numeros decimaes.** — Antes de encetar este estudo, cumpre saber ler e escrever um numero metrico decimal.

230. **Leitura.** — Faz-se de tres modos. 1.º Lê-se como se fosse inteiro, dando ao terminar a leitura a denominação da ultima subdivisão da unidade principal. 2.º Lê-se a parte inteira separadamente com a sua designação, e depois a decimal dando ao final a denominação da ultima subdivisão. 3.º Lê-se separadamente cada algarismo do numero (ou somente da parte decimal) seguido do nome do multiplo ou do submultiplo relativo.

Antes de qualquer exemplo, damos um numero metrico e a denominação de cada casa :

7	5	9	6	4	,	2	8	7	5	6....
Myriametros	Kilometros	Hectometros	Decametros	Metros		Decimetros	Centimetros	Millimetros	Decimillimetros	Centimillimetros

1.º Exemplo : *ler o numero :* 572^{m},857 — Pelo 1.º processo, lê-se : 572857 millimetros; pelo segundo 572 metros e 857 millimetros; finalmente, pelo terceiro lê-se : 5 *hectometros*, 7 *decametros*, 2 *metros*, 8 *decimetros*, 5 *centimetros* e 7 *millimetros*.

231. **Observação.** — Quando o numero representa area ou superficie ou refere-se a volume, é lido mais geralmente pelo segundo processo, tendo-se o cuidado de observar, como ficou dito em as notas dos numeros 220 e 222, que cada unidade de uma ordem é formada de cem (para as superficies) ou de mil (para os volumes) de ordem inferior, como se vê nas figuras do *metro quadrado*, que tem cem decimetros quadrados e do *metro cubico* que tem mil decimetros cubicos. É por este motivo, como dissemos, que *cada casa decimal de um numero referente á superficie tem* dois algarismos e *referente* a *volume tem* tres algarismos decimaes.

(1) Não é usada a divisão centesimal, por isto deixamos de dal-a.

Deve-se completar com zeros á direita os decimaes relativos a superficies, de modo que o numero de seus decimaes seja par, e os relativos a volumes de modo que seja triplo.

1.º *Exemplo : ler o numero* 174,^{m2}8562. Lê-se : 1.º 174 metros quadrados, 85 decimetros e 62 centimetros quadrados; 2.º 174 metros quadrados, 8562 *centimetros quadrados.*

Para ler, pois, um numero decimal referente á superficie — *divide-se a parte decimal em classes de* dois algarismos *da esquerda para a direita, a partir da virgula,* completando com um zero quando a ultima classe só tiver um algarismo; *depois lê-se a parte inteira e a decimal separadamente, dando a cada classe o nome da subdivisão que ella representar.*

232. — 2.º *Exemplo : ler o numero* 853,^{m3}785962. Lê-se : 853 *metros cubicos*, 785 *decimetros cubicos* e 962 *centimetros cubicos*. Ou, então, lê-se : 875 *metros cubicos*, 785962 *centimetros cubicos;* ou ainda : 875785962 *centimetros cubicos.*

Para ler um numero metrico decimal referente a volume — *divide-se a parte decimal em classes de* tres algarismos, *a partir da virgula e da esquerda para a direita,* completando com zeros a ultima classe, caso não tenha tres algarismos; *depois lê-se a parte inteira e separadamente a decimal, dando á cada classe a denominação da subdivisão da unidade que ella representar.*

233. *Escrever um numero metrico decimal.* — Se o numero representa unidades de uma só dimensão, isto é — comprimentos, *escreve-se como um decimal commum, separando depois com uma virgula tantas casas decimaes quantas indicar a ultima subdivisão da unidade decimal.*

Exemplo : Escrever : *trinta e sete mil seiscentos e vinte e nove millimetros.* O millimetro sendo o *millesimo* do metro, temos que escrever o numero como se fosse inteiro, separando á sua direita tres casas decimaes; é, portanto : 37,^{m}629. Escreve-se acima do algarismo das unidades um *m* para indicar a unidade empregada — metro.

234. — Se o numero representa unidades de duas dimensões, quadrados ou de superficies, *escreve-se como decimal commum* (cumprindo apenas observar, com at-

tenção, que cada casa decimal tem dois algarismos, e preencher com zeros quando faltar algum delles); *depois separam-se á direita tantas casas decimaes quantas indicar a denominação da ultima subdivisão* (1).

Exemplo. Escrever o numero : 275 metros quadrados 427372 millimetros quadrados. O millimetro correspondendo a millesimo, corresponde á terceira casa decimal, e como cada casa tem *dois algarismos*, escreve-se a parte inteira 275 e a decimal como se fosse inteira, e á direita separam-se 6 casas decimaes; o numero, é pois : 275,$^{m^2}$427372.

Seja ainda o numero : *dois metros quadrados e trezentos e vinte e sete millimetros quadrados.* Este numero não tem decimetros quadrados, pois *cem millimetros* quadrados formam um centimetro quadrado, logo 327 formam 3 centimetros quadrados e restam 27 e tambem não tem dezenas de centimetros quadrados; logo o numero será : 2,$^{m^2}$00 03 27.

235. — Se o numero refere-se a unidades de tres dimensões, isto é, unidades de volume — *escreve-se como um decimal commum, separando á direita tantas casas decimaes quantas indicar a denominação da ultima subdivisão da unidade.* Cumpre observar que cada casa decimal tem *tres algarismos*, isto é, os tres primeiros algarismos á direita da virgula representam respectivamente — centena, dezena e unidades de *decimos;* os tres seguintes de centesimos; etc. Quando não fôr triplo o numero de casas decimaes accrescentam-se zeros á direita até tornal-o triplo.

Exemplo. Escrever o numero : quatrocentos e vinte oito metros cubicos, trezentos e setenta e dois mil quinhentos e setenta e tres centimetros cubicos.

Centimetros cubicos referem-se á segunda subdivisão, logo escreve-se a parte inteira e á direita da virgula a decimal de modo a ter seis casas (2); o numero é, pois : 428,$^{m^3}$372573.

236. **Operações.** — *Addição.* Para addicionar ou subtrahir numeros metricos decimaes — *referem-se esses*

(1) Os dois primeiros algarismos logo depois da virgula representam *decimos*, os dois seguintes *centesimos*, etc. Cada casa tem respectivamente dezenas e unidades.

(2) As tres primeiras casas decimaes referem-se, como já sabemos, a unidades, dezenas e centenas de decimetros cubicos; as tres seguintes referem-se a unidades, dezenas e centenas de centimetros cubicos; etc.

a uma mesma divisão da unidade principal e opera-se como se fossem decimaes communs.

Exemplo : Sommar 103,^{HM}87 e 31^{DM}872. Os 103 *hectometros* é 87 centesimos e os 31 *decametros* e 872 millesimos, referindo-se a divisões diversas da unidade principal, é necessario tornal-os homogeneos, isto é, referil-os á mesma unidade, que pode ser o metro; assim, 103,^{HM}87 = 10387,^{m}00 visto como um hectometro tem 100 metros; 31,^{DM}872 = 318,^{m}72.

	10387,00
	318,72
Sommando agora os numeros referidos a metros temos a somma.	10705,72

Identicamente se subtrahiriam os mesmos numeros, obtendo o resto : 10068,^{m}28.

237. *Multiplicação.* — Sendo o producto da especie do multiplicando, nenhuma difficuldade offerece esta operação, que se pratica como se os numeros fossem simples decimaes.

238. *Divisão.* — Conforme os problemas geraes da divisão (n.º 87) temos dois casos a considerar :

239. 1.º *Caso.* — Os numeros dados são de especies differentes. Então, como ficou dito no n.º 87, *divide-se os numeros dados como se fossem abstractos, sendo o quociente da especie do dividendo.*

Exemplo : *dividir* 35,^{HL}45 *por* 14,^{DM}17 (1). O quociente obtido é : 2,^{HL}501.

240. 2.º *Caso.* Os numeros dados são da mesma especie. Neste caso cumpre referil-os á mesma subdivisão da unidade e effectuar a operação como ficou dito em o n.º 83.

Exemplo : *dividir* 45,^{HL}6 *por* 5,^{DL}897. Reduzindo á mesma unidade — *litro* — temos : 45,^{HL}6 = 45,6 × 100 = 4560^{l}, visto como o *hectolitro* tem cem litros; 5,^{DL}897 = 5,897 × 10 = 58,^{l}97 visto como o decalitro tem dez litros. Effectuando a divisão, como se os numeros fossem abstractos, temos o quociente : 77,^{l}32.

241. *Potenciação.* — A potenciação dos numeros metricos decimaes faz-se como a dos simples decimaes.

(1) O symbolo HL, indica *hectolitro*, e o numero lê-se : *35 hectolitros e 45 centesimos do hectolitro*; o symbolo DM indica decametro, e o numero lê-se : *14 decametros e 17 centesimos do decametro.*

242. *Radiciação.* — É feita como para os decimaes communs, conforme as regras precedentemente expostas.

243. **Systemas monetarios** : *Francez.* — A unidade é o *Franco,* moeda cunhada em prata, tendo o *titulo* de 9 partes de prata e uma de cobre (1).

244. *Inglez.* — A unidade geralmente conhecida é a *Libra sterlina,* moeda de ouro, correspondendo a 20 *shillings* e o shilling a 12 *pence* ou dinheiros. A *libra* vale 25 francos e 21 centesimos, ou 8$889 reis.

245. *Allemão.* — A unidade é o *Marco,* moeda de prata — 1 Marco equivale a 100 *pfenings* e 20 marcos a 8$723 reis.

246. *Portuguez.* —Em relação ao nosso, o systema monetario portuguez é *forte,* isto é, ao cambio ao par 1000 réis nossos valem apenas 500 réis portuguezes.

(1) No fim daremos um quadro dos valores das diversas moedas em relação ao nosso dinheiro.

247. *Americano.* — A unidade é o dollar, moeda de ouro.

248. *Italiano.* — A unidade é a *Lira,* que vale 100 centesimos. 20 liras valem 7$066 reis.

249. *Brasileiro.* — O nosso systema monetario é um dos mais perfeitos do mundo, devido á unidade monetaria, de valor ficticio pela sua insignificancia — o *real.* As notas ou *cedulas.* têm curso forçado — não são o que se denomina *papel moeda,* que é uma *nota* convertivel em ouro á simples apresentação, não gosando do privilegio do — curso obrigatorio.

Quasi todo o nosso dinheiro é em *moeda papel,* embora tenhamos a moeda ouro do valor de *dez mil reis.* O nosso 1000 réis, ao par, vale 27 *pence.*

As *cedulas* são dos valores de 500, 200, 100, 50, 30, 20, 10, 5, 2, 1 mil réis, havendo tambem de 500 réis. Para os pequenos valores temos moedas de prata, de nikel e de cobre.

250. Ao lado damos um resumo dos valores relativos das moedas, ao cambio ao par.

Franco	360 réis.	
Dollar	1831,001	
Marco	436,172	
Libra.	8$888,888	20 Shillings.
Shilling	444,444	12 dinheiros.
Dinheiro ou penny.	370 »	
Lira	353,015	

251. **Systema brasileiro.** — A partir do 1.º de Janeiro de 1874 este systema não se acha mais officialmente adoptado entre nós, mas ainda hoje fazendo-se uso dessas medidas, convem conhecel-as e seus correspondentes em relação ás medidas do systema metrico.

252. *Medidas de comprimento:*

Nomes	Notação	Submultiplos	Valores em metros
Linha . . .	*l*		2,$^{m/m}$291
Pollegada . .	*pol*	12 linhas	2,$^{c/m}$750
Palmo . . .	*P*	8 pollegadas . .	2,$^{d/m}$200
Vara (1) . .	*V*	5 palmos. . . .	1,^{m}100
Covado . . .	*Co*	3 »	0,^{m}681
Braça . . .	*Br* ou *B*	2 varas	2,^{m}200
Pé	*p*	12 pollegadas . .	3,$^{d/m}$300
Milha . . .	*Mi*	841 $\frac{3}{4}$ Br	1851,^{m}85
Legua (2). .	*L*	3 milhas. . . .	5555,^{m}55
Corda . . .	*Ca*		33,^{m}00

253. *Medidas de superficies:*

Legua quadrada.	*L.q.*	9 Mi. quadradas. .	30,$^{km.q.}$86'1
Milha »	*Mi.q.*	708543, Br. q. . .	3,$^{km.q.}$4293
Geira »	*G.*	400 Br. quadradas.	1936,$^{m^2}$60
Braça »	*Br.q.*	4 varas »	4,$^{m^2}$84
Vara »	*V.q.*	64 palmos »	1,$^{m^2}$21
Palmo »	*P.q.*	64 pol. »	4,$^{d/m^2}$84
Pollegada »	*pol.q.*	144 linhas »	7,$^{c/m^2}$56
Linha »	*l.q.*		5,$^{m/m^2}$25
Pé »	*p.q.*	144 pol. »	10,$^{d/m^2}$8864

254. *Medidas de Volume — solidez:*

Vara cubica. . .	*V.c.*	125 palmos cubicos	1,$^{m^3}$331
Palmo cubico . . .	*P.c.*	512 pol. »	10,$^{d/m^3}$648
Pollegada cubica .	*pol.c.*	1728 linhas »	20,$^{c/m^3}$797
Linha cubica . . .	*l.c.*		12,$^{m/m^3}$035

(1) Corresponde ao comprimento do *Pendulo* que bate um segundo na latitude do Rio de Janeiro.

(2) Legua de 20 ao grão, isto é, o vigesimo do grão.

De capacidade — para seccos:

Moio	*Mo*	15 Fangas. . .	2,$^{m^3}$176200
Fanga . . .	*Fa*	4 Alqueires. .	14,$^{d/m^3}$500=14,^{lit}5
Alqueire (1).	*Al*	4 Quartas. . .	36,$^{d/m^3}$280=36,^{lit}280
Quarta . . .	*Q*	4 Sellamins. .	9,$^{d/m^3}$070= 9,^{lit}070
Sellamin . .	*Sl*		2,$^{d/m^3}$240

255. *Medidas de capacidade — para liquidos:*

Tonel. . . .	*To*		1,$^{m^3}$597200=1597,^{lit}200
Pipa	*Pi*	15 Almudes.	798,^{lit}600
Almude. . .	*Al*	12 Canadas.	31,^{lit}940
Canada (2) .	*Ca*	4 Quartilhos	2,^{lit}1693
Quartilho. .	*Qu*		0,^{lit}666

256. *Medidas de peso:*

Tonellada. .	*T*a	13 $\frac{1}{2}$ Quintaes . .	793,^{k}162	
Quintal. . .	*Qu*	4 Arrobas	58,^{k}752	
Arroba . . .	*a*	32 Libras. . . .	14,^{k}688	
Libra. . . .	*lb*	2 Marcos	0,^{k}459	459 gram.
Marco (3). .	*mr* (Metaes e pedras preciosas.)	8 Onças		229,5
Onça. . . .		8 Oitavas		28,681
Oitava . . .		3 Escropulos. . .		3,5858
Escropulo. .		6 Quilates		1,1753
Quilate. . .		4 Grãos		0,1992
Grão				0,0498

257. **Complexos.** — Denominam-se — *numeros complexos* — áquelles que são compostos por unidades, seus multiplos e submultiplos, como $5^{Br}\ 2^{V}\ 3^{P}$, etc.

É facil transformar um *numero complexo* em um incomplexo equivalente, como $5^{Br}\ 2^{V}\ 3^{P}$, reduzindo os

(1) *Alqueire* — em alguns logares tem 128 litros, em outros 200, 160 e até mesmo 80 litros. Equivale a 1744 pol. cubicas.

(2) A *Canada* é geralmente avaliada em 8 garrafas — cerca de 5 litros e meio.

(3) *Marco* — é a unidade. — O grammo equivale a 0,279 da oitava. *Quilate* é uma corrupção de *Karat*, semente indiana que serve para pesar pedras preciosas.

multiplos á ultima subdivisão indicada; assim : $5^{Br} = 10^V$, $10^V = 50^P$. Identicamente : $2^V = 10^P$; logo, o numero dado equivale a $50 + 10 + 3 = 63^P$. Do mesmo modo podiamos transformar este numero incomplexo, 63^P, em o numero complexo : $5^{Br}\ 2^V\ 3^P$.

258. *Transformação de um numero complexo em uma fracção da unidade principal.* — Seja como exemplo : — transformar o complexo : $5^{Br}\ 2^V\ 3^P$ em uma expressão fraccionaria da braça.

Regra. — Transforma-se o numero complexo em outro incomplexo equivalente, referido á ultima subdivisão da unidade, como no calculo *á direita;* e tambem esta unidade em seu correspondente, igualmente referido á ultima subdivisão, *como no calculo á esquerda.* O primeiro dos numeros é o numerador da fracção e o segundo o denominador (1).

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 2 \\ \hline 2^V \\ \times 5 \\ \hline 10^P \\ \times 8 \\ \hline 80^P \\ \times 12 \\ \hline 160 \\ 80 \\ \hline 960^l \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 5^{Br} \\ \times 2 \\ \hline 10^V \\ +2 \\ \hline 12^V \\ \times 5 \\ \hline 60^P \\ +3 \\ \hline 63^P \\ \times 8 \\ \hline 504^{pol} \\ \times 12^l \\ \hline 1008 \\ 504 \\ \hline 6048^l \end{array}$$

Explicação. — 1.º numero : 5 braças têm $10,^V$ por isto multiplica-se 5^B por 2 e sommam-se as 2^V que o numero contem prefazendo 12^V ; a vara tendo 5^P multiplicam-se as 12^V por 5 e assim tem-se 60^P, aos quaes sommam-se as 3^P existentes em o numero dado prefazendo 63^P ; o palmo tendo 8 pollegadas, multiplicam-se 63^P por 8 obtendo-se 504pol. Finalmente, a pollegada tendo 12 linhas, multiplicam-se 504pol. por 12 obtendo, assim, o numero incomplexo equivalente : 6048^l. Com o 2.º numero — a *unidade*, que é a *braça* — opera-se do mesmo modo: como indica o calculo á esquerda.

A fracção da unidade principal é : $\dfrac{6048^B}{960}$.

(1) A ultima subdivisão das medidas de comprimento é a *linha*.

259. *Transformação de uma fracção em um numero complexo equivalente.* — Para isto, applica-se a seguinte :

Regra. — Extrahem-se os inteiros contidos na fracção (se houver), o quociente representa unidades da primeira especie; o numero dessas unidades sendo sufficiente para formar uma ou mais de ordem superior, forma-se. O numerador do resto converte-se em unidades da subdivisão immediatamente inferior multiplicando-se pelo numero dessas unidades, que é necessario para formar uma das que o resto representa; depois extrahem-se os inteiros á fracção restante e o quociente representa unidades da referida subdivisão. Assim prosegue-se até á divisão exacta ou até chegar-se á ultima subdivisão da unidade principal.

Exemplo : Transformar a fracção $\dfrac{3782^B}{960}$ *em um numero complexo equivalente.* Extrahindo os inteiros, temos o numero de braças que é 3^B, ficando a fracção $\dfrac{902^B}{960}$. Convertendo o numerador do resto, 902^B, em varas, temos 1804^V visto cada braça ser equivalente a duas *varas;* logo $\dfrac{902^B}{960} = \dfrac{1804^V}{960}$. Extrahindo os inteiros, temos : $1^V + \dfrac{844^V}{960}$; logo, temos 1^V e o resto $\dfrac{844^V}{960}$. Convertendo o numerador da fracção em palmos, temos $844 \times 5 = 4220^P$, visto como uma vara vale 5 palmos. A fracção $\dfrac{844^V}{960}$ é pois equivalente á $\dfrac{4220^P}{960}$. Extrahindo os inteiros, temos : $4^P + \dfrac{380^P}{960}$. Convertendo o numerador do resto em pollegadas, temos : $380 \times 8 = 3040$ pol. visto como o palmo vale 8 pollegadas; logo a fracção $\dfrac{380^P}{960}$ é equivalente a $\dfrac{3040\text{pol}}{960}$. Extrahindo os inteiros temos : $3\text{ pol} + \dfrac{160\text{pol}}{960}$. Convertendo o numerador da fracção, 160 pol. em linhas, temos : $160 \times 12 = 1920^l$, visto como a pollegada tem 12 linhas. Extrahindo os inteiros, temos 2^l. Logo o *numero complexo* equivalente á fracção proposta é :

$$3^B\ 1^V\ 4^P\ 3^{pol}\ 2^l$$

260. **Addição dos numeros complexos.** — Effectua-se como a dos incomplexos — *sommando as*

unidades da mesma especie e extrahindo da somma os multiplos formados, afim de addicional-os aos da especie correspondente, como faz-se com as dezenas, etc.

Seja, como exemplo, sommar os complexos abaixo :

3 Moios	12 Fangas	2 Alqueires	1 Quarta
0	7	3	2
1	3	1	3
5	8	3	2

A somma das quartas é 6, mas 6 *quartas* formam 1 alqueire e ficam 2, que se escreve na somma, levando o *alqueire* formado para sommar ás unidades da mesma especie. Assim, temos : 1 alqueire e 2, são 3; 3 e 3 são 6; 6 e 1, 7; mas 7 *alqueires* formam 1 fanga, que se leva para sommar com as *fangas* e ficam 3, que se escrevem na somma. 1 fanga e 12 são 13; 13 e 7 são 20; 20 e 3 são 23 fangas; mas 23 fangas formam 1 moio, que se reserva para sommar com os moios, e ficam 8 fangas que se escrevem na somma. 1 *moio* e 3 são 4, 4 e 1 são 5 moios. A somma é, pois : 5 MO 8 FA 3 AI 2Q.

261. **Subtracção dos numeros complexos.** — Identicamente faz-se a subtracção, como no exemplo abaixo :

20 Quintaes	14 ar	12 lb	1 Marco	3 onças
17	13	19	0	5
3	0	25	0	6

De 3 onças não podemos tirar 5, por isto tomamos 1 marco, reduzimol-o a onças [vale 8 onças] e sommamos ás 3 existentes prefazendo 11 onças, das quaes subtrahindo 5 ficam 6 onças. Não existindo mais no minuendo nem um marco e nem no diminuidor escreve-se zero no resto. De 12 libras não se pode subtrahir 19, por isto toma-se uma das 14 arrobas 1 e reduz-se a libras [vale 32 libras] e sommam-se ás 12 existentes, prefazendo 44 libras, das quaes tirando as 19 do diminuidor ficam 25 libras para o resto. O minuendo só tem agora 13 arrobas, das quaes tirando as 13 do diminuidor fica zero para o resto. Dos 20 quintaes tirando os 17 do diminuidor ficam 3 para o resto, que é : 3 quint. 0 ar. 25 lb. 0 mar. 6 onç.

262. **Multiplicação dos numeros complexos.** — Temos a considerar dois casos :

1.° Caso. Multiplicação de um numero complexo por um incomplexo. Seja como exemplo effectuar a multiplicação seguinte :

2^{B}	1^{V}	3^{P}	2pol
			5
14^{B}	0^{V}	1^{P}	2pol

O producto de 2 pollegadas por 5 dá 10 pol. que valem 1 palmo ficando 2 pol. de resto, que se escreve no producto, levando o palmo *formado* para sommar ao producto dos palmos por 5. O producto de 3 palmos por 5 é 15 palmos e 1 de reserva, 16; mas 16 palmos fazem 3 varas e fica 1 palmo que se escreve no producto. O producto de 1 vara por 5 é 5 varas e 3 de reserva prefazem 8, mas 8 varas valem 4 braças, logo temos 0 varas para o producto. O producto de 2^{B} por 5 é 10^{B} e 4^{B} de reserva, prefazem 14^{B}.

263. *Processo das partes aliquotas* (1). — A operação acima pode ser feita facilmente pelo processo das *partes aliquotas*.

Exemplo : multiplicar $3^{L}\ 5^{s}\ 7^{d}$ *por* 6.

	3^{L}	4^{s}	7^{d}
			6
$3^{L} \times 6 =$	18^{L}		
$4^{s} \times 6$	1	4^{s}	
$\widehat{1^{s}} \times 6$		$\widehat{6}$	
$\widetilde{7^{d}}$ $\left(3^{d}\right.$		1	6^{d}
$\left(4^{d}\right.$		2	
	19^{L}	7^{s}	6^{d}

O producto de 3^{L} por 6 é 18^{L}. O producto de 4^{s} — parte aliquota da libra sterlina, que contem 20 shillings — por 6, obtem-se do seguinte modo : sendo 4^{s} a *quinta parte de uma libra*, o producto de 4^{s} por 6 será a quinta parte do producto de 1^{L} por 6 ou de 6^{L} ; a quinta parte de 6^{L} é 1^{L} sobra 1^{L} que vale 20^{s}, cuja quinta parte é 4; logo o producto de 4^{s} por 7 é 1^{L} e 4^{s}.

O producto de 7^{d} por 6 obtem-se decompondo 7^{d} em partes aliquotas do shilling, que contem 12 dinheiros; assim podemos decompor 7 em dois divisores de 12, que são 3 e 4.

Para termos o producto de 3^{d} e 4^{d} por 6, torna-se mais facil obter primeiro o producto (2) de 1^{s} por 6, que é 6^{s} ; agora 3^{d} sendo a quarta parte de 1^{s}, seu producto por 6 será a quarta parte do de 1^{s} por 6 ou de 6^{s}, quarta parte que é 1^{s} e sobram 2^{s} que valem 24^{d}, cuja quarta parte é 6^{d}; logo o producto de 3^{d} por 6 é 1^{s} e 6^{d}.

(1) *Parte aliquota* é um divisor de um numero complexo

(2) Producto que se denomina *subsidiario* e que se encerra entre parentheses para mostrar que não deve ser sommado.

O producto de 4^{d} por 6 é 2^{s}, visto como 4^{d} sendo a terça parte de 1^{s} seu producto por 6 é terça parte do de 1^{s} por 6 ou de 6^{s}, terça parte que é 2^{s}. Sommando os productos parciaes *(menos o subsidiario)* obtem-se o producto (1) pedido : $19^{L}\ 7^{s}\ 6^{d}$.

264. **2.º Caso.**—Multiplicação de um numero incomplexo por um complexo. Pode-se operar conforme ficou dito em o n.º 262, visto como a ordem dos factores não altera o producto, embora elle seja da especie do multiplicando. Ou então applicar o processo das partes aliquotas, como vamos fazer :

« Exemplo : *sendo* 11\$000 *o preço de uma vara de certa fazenda, qual será o de* $3^{v}\ 3^{p}\ 5^{pol}$? »

	11\$000 3^{v} 3^{p} 5^{pol}.
Preço de 3^{v}	33\$000
» » 3^{p} (1	2\$200
(2	4\$400
» » 5^{pol} (4 pol.	1\$100
(1 pol.	\$275
	40\$975

O preço de 1^{v} sendo 11\$000 o de 3^{v} será 33\$000. Para termos o preço de 3^{p} decompomos 3^{p} em partes aliquotas da vara (1 e 2); a vara tendo 5^{p} é claro que 1^{p} será a quinta parte de 1^{v} e o seu preço será o quinto de 11\$000 ou 2\$200. Sendo 2\$200 o preço de 1^{p} o de 2^{p} será o dobro ou 4\$400. Para termos o preço de 5 pol. decompomos 5 pol. em partes aliquotas do palmo, que tem 8, isto é, decompomos 5 pol. em 4 pol. e 1 pol. O preço de 1^{p} sendo 2\$200 o de 4 pol., que é meio palmo, será a metade de 2\$200 ou 1\$100; e o preço de 1 pol. será a quarta parte do de 4 pol. isto é, a quarta parte de 1\$100 ou 275 réis. Logo, o producto pedido é 40\$975.

265. **3.º Caso.** — Multiplicação de um numero complexo por outro.

Exemplo : sendo o preço de 1 *vara de certa fazenda* $3^{L}\ 4^{s}\ 2^{d}$, *qual será o preço de* $7^{v}\ 3^{p}\ 5^{pol}$?

A resolução do problema reduz-se a :

1.º — Determinar o preço de 7^{v}
2.º — Idem 3^{p}
3.º — Idem 5^{pol}

Esses productos parciaes determinam-se como ficou dito nos casos precedentes, isto é, o de 7^{v} multiplicando por 7 o custo de 1^{v} que é : $3^{L}\ 4^{s}\ 2^{d}$. O de 3^{p} — determinando o custo de 1^{p}, quinta parte de 1^{v}, e repetindo-o tres vezes. O de 5 pol. determina-se decompondo 5 pol. em 4 pol. e 1 pol. sendo 4 pol. a metade de 1^{p} e 1 pol a quarta parte de 4 pol. Estes productos parciaes são, respectivamente :

De 7 varas	22^{L}	9^{s}	2^{d}
» 3 palmos.	1	18	6
» 5 pollegadas . . .		8	$^{1}/_{4}$
Total.	24^{L}	15^{s}	$8^{d}\ ^{1}/_{4}$

266. **Divisão.** — Temos a considerar os mesmos casos da multiplicação.

1.º Caso. Divisão de um numero complexo por um incomplexo.

Exemplo : *dividir* $12^{B}\ 1^{v}\ 4^{p}\ 5^{pol}$ *por* 3.

$$12^{B}\ 1^{v}\ 4^{p}\ 5^{pol} \;\Big|\; \frac{3}{4^{B}\ 0^{v}\ 3^{p}\ 1^{pol}\ \frac{2}{3}}$$

Dispondo o calculo como faz-se na pratica, e dividindo 12^{B} por 3 temos 4^{B} para quociente. Dividindo 1^{v} por 3 vê-se que o quociente não contem *varas*, por isto escreve-se zero no quociente. Reduzindo 1^{v} a palmos e sommando aos 4 do dividendo temos 9^{p}, os quaes divididos por 3 dão 3^{p} para o quociente. Dividindo, finalmente, 5 pol. por 3 o quociente é 1 pol. e sobram 2 pol. ou 1 pol. $\frac{2}{3}$. Podia-se reduzir as 2 pollegadas do resto a linhas e assim teriamos 24^{l}, as quaes divididas por 3 dariam 8^{l} para o quociente, que então seria : $4^{B}\ 0^{v}\ 3^{p}\ 1\ pol\ 8^{l}$.

267. **Observação.** — Podia-se obter o resultado pela reducção do dividendo á fracção complexa da unidade principal, applicando depois a regra da divisão de uma fracção por um inteiro. Assim, reduzindo o complexo dado a fracção da braça, temos : $\frac{12444^{B}}{960}$; dividindo esta por $\frac{4148^{B}}{960}$. Transformando esta fracção em um numero complexo equivalente, conforme vimos em o n.º 259, obtemos : $4^{B}\ 0^{v}\ 3^{p}\ 1^{pol}\ 8^{l}$.

268. **2.º Caso.** — Divisão de um numero complexo por outro, sendo o divisor de especie differente da do dividendo.

Exemplo : *Dividir* $20^{L}\ 17^{s}\ 5^{d}$ *por* $3^{B}\ 3^{P}\ 1^{V}$ 7 pol.

O meio mais pratico consiste em transformar o divisor em uma fracção da unidade principal e applicar a regra da divisão de um inteiro por uma fracção, isto é, multiplicar o dividendo pelo denominador da fracção e dividir o producto pelo numerador. Transformando o divisor, temos : $\frac{3732^{B}}{960}$. Multiplicando o dividendo por 960 temos : 20044^{L}. Dividindo o producto 20044^{L} por 3732, numerador da fracção, temos o quociente pedido : $5^{L}\ 7^{s}\ 5^{d}\ \frac{12}{3732}$ ou $5^{L}\ 7^{s}\ 5^{d},00322$. Estas operações praticam-se com o conhecimento dos casos precedentes.

269. **3.° Caso.** — Dividendo e divisor são complexos da mesma especie. A operação effectua-se como em os casos precedentes, apenas cumpre observar que o quociente representa então o numero de vezes que o dividendo contem o divisor, sendo portanto considerado como abstracto; conforme o problema, porém, elle poderá ou deverá ser concreto e só então o caso particular determinará a sua especie.

270. **Conversão das medidas.** — Tem por fim determinar as relações existentes entre as medidas de um systema e as de outro, tomadas para termo de comparação; a essas relações denominam-se — *coefficientes de conversão.*

271. **Medidas lineares.** — Se compararmos ou medirmos a vara com o metro, chegaremos á conclusão de que (1) $1^{V} = 1,^{m}10$, logo $1^{m} = 0,^{V}909090...$

Assim, o *coefficiente de conversão* de varas a metro é : $1,^{m}10$ e o de metros a varas é : $0,^{V}9090...$ Para transformar, pois, um certo numero de varas em metros — multiplica-se esse numero por $1,^{m}10$ e para transformar um certo numero de metros em varas multiplica-se esse outro numero por $0,^{V}9090...$

A vara sendo $1,^{m}10$, é claro que $10^{V} = 11,^{m}00$; mas a vara tendo 5 palmos, 10^{V} terão 50 palmos, logo $50^{P} = 11^{m}$,

---

(1) A relação é incommensuravel; approximadamente, porém, é $1,^{m}10$ o comprimento de uma vara.

donde $1^{P} = \frac{11^{m}}{50} = 0,^{m}22$ e $0,^{m}22$ é o valor de um palmo expresso em centimetros ou é o coefficiente de transformação de palmos em metros, etc. Abaixo damos o resumo dos coefficientes lineares :

Braça	$2,^{m}20$	Palmo.	$0,^{m}22$
Vara.	$1,^{m}10$	Pollegada	$0,^{m}0275$

Problema : converter $2^{B}\ 1^{V}\ 4^{P}$ em metros.

A braça equivalendo a $2^{m},20$, duas braças $= 4^{m},40$; $1^{V} = 1^{m},10$; 1 palmo equivalendo $0^{m},22$; os 4^{P} equivalerão a $0^{m}.22 \times 4 = 0^{m},88$; logo, o numero complexo dado equivale a $4^{m},40 + 1^{m},10 + 0^{m},88 = 6^{m},38$. Identicamente : $6^{m},38 = 2^{B}\ 1^{V}\ 4^{P}$.

272. **Medidas de superficies.** — Sendo $1^{V} = 1^{m},10$ a vara quadrada obter-se-á elevando esta egualdade ao quadrado, logo $1^{V^2} = 1,^{m^2}21$; reciprocamente : $1,^{m^2} = \frac{100^{V^2}}{121^{m^2}}$. Abaixo damos os coefficientes de reducção de metros quadrados a varas quadradas e *vice versa.*

$$\left.\begin{array}{l} 1^{V^2} = 1,^{m^2}21. \ . \ . \ . \\ 1^{P^2} = 0,^{m^2}0484. \ . \ . \end{array}\right| \begin{array}{l} 1^{m^2} = \dfrac{100^{V^2}}{121^{m^2}} \\ \text{Are} = 100^{m^2} = 100 \times \dfrac{100^{V^2}}{121} \end{array}$$

273. — *Problema :* Transformar 300 geiras em metros quadrados, seus multiplos e submultiplos.

A geira vale 400 braças quadradas e cada braça quadrada vale 4^{V^2}, logo : 300 geiras $= 300 \times 400 = 120000$ bra. quad. $= 480000^{V^2}$. Para transformar em metros quad. basta multiplicar 480000^{V^2} pelo coefficiente de reducção de varas quadradas a metros quadrados, o qual é $1^{m^2},21$; portanto, temos :

$$480000^{V^2} \times 1,^{m^2}21 = 580800^{m^2} = 58^{HA}\ 8^{A}.$$

274. — *Problema :* Transformar em braças quad. seus multiplos e submultiplos, o numero $1272^{m^2},3675$.

$$1272,^{m^2}3675 \times \frac{100^{V^2}}{121} = \frac{12723675^{V^2}}{12100}$$

$$= 1051^{V^2} + \frac{6575^{V^2}}{12100}$$

Reduzindo esta fracção da vara quad. a palmos quad., observando que a vara quad. tem 25 p. quad., temos :

$$\frac{6575^{V^2} \times 25}{12100} = \frac{164375^{P^2}}{12100} = 131^{P^2} + \frac{7075^{P^2}}{12100}$$

Reduzindo esta fracção do palmo quad. a pol. quad., observando que $1^{P^2} = 64$ pol², temos :

$$\frac{7075 \times 64}{12100} = \frac{552800}{12100} = 37^{pol^2} + \frac{5100^{pol^2}}{12100}$$

Convertendo esta fracção da pol. quad. em linhas ou em decimal, temos para resultado : $1751^{V^2}\ 13^{P^2}\ 37$ pol² 421 ou 262^{B^2} $3^{V^2}\ 13^{P^2}\ 37$ pol², 421.

275. **Medídas de volume.** — Sendo $1^{V} = 1,^{m}10$, temos, elevando esta egualdade ao cubo : $1^{V^3} = 1,^{m^3}331$. Sendo $1^{m} = \frac{10^{V}}{11}$, $1^{m^3} = \frac{1000^{V^3}}{1331}$. Abaixo damos os outros coefficientes, obtidos do mesmo modo :

$1^{V^3} = 1,^{m^3}331$	$1^{m^3} = \frac{1000^{V^3}}{1331} = 40571^{pol^3}$
$1^{P^3} = 0,^{m^3}010648$	
$1^{pol^3} = 0,^{m^3}000020796875$	

276. *Problema* 1.º *Transformar* 10 *alqueires em litros.*

O alq. tendo 1744^{pol^3} e sendo $1^{pol^3} = 0,^{m}0000208$ approx. temos : $1^{alq.} = 1744 \times 0,000208 = 0,^{m^3}0362752$; portanto, para termos 10 alq. basta multiplicar este resultado por 10; logo $10^{alq.} = 0,^{m^3}362752$ ou $362,^{lit.}752$.

277. *Problema* 2.º *Converter* $1^{alm.}\ 7^{can.}\ 3^{quart.}$ *em litros, seus multiplos e submultiplos.*

$1^{alm.}$ tendo $12^{can.}$ terá $2,^{lit.}662 \times 12 =$	$31,^{lit.}944$
As $7^{can.}$ conterão : $7, \times 2,^{lit.}662 =$	$18,^{lit.}634$
$1^{quart.}$ será a quarta parte de $2,^{lit.}662$, portanto será 0,6655. Logo : $3^{quart.} =$ $3 \times 0,^{lit.}6655. \ldots =$	$1,^{lit.}9965$
Resultado : $5^{DL}\ 2^{l}\ 5^{dl}\ 7^{cl}\ 4^{ml}$ ou :	$52,^{lit.}5745$

278. *Problema* 3.º *Seja* $30^{HL}\ 2^{DL}\ 3^{l}\ 4^{dl}$ *para converter em canadas e seus submultiplos.*

Um litro equivale a 0,375 da canada, logo 30^{HL} ou $300^{lit.} = 300 \times 0,^{can.}375 =$	$112,^{can.}5$
Os 2 decalitros equivalem a $20^{lit.}$ ou $20 \times 0,^{can.}375 = \ldots$	$7,^{can.}5$
Os 3^{l} equivalem a $3 \times 0,^{can.}375 = \ldots$	$1,^{can.}125$
Os 4 decilitros equivalem a $0,4 \times 0,375 =$	$0,^{can.}1500$
	$121,^{can.}275$

Sommando os resultados parciaes, temos para resultado da conversão : $121,^{can.}275$ ou $121,^{can.}\ 1,^{quart.}1$ — convertendo a fracção da canada em quartilhos.

Applicações

279. — *Razão por differença* ou *arithmetica* — é a differença que existe entre duas quantidades. Assim 3 — 2 é uma razão por differença que, de um modo geral, se representa por $a - b$.

280. — *Razão por quociente* ou *geometrica* — é o quociente da divisão de duas quantidades. Assim $\frac{7}{3}$ ou 7 : 3 é uma razão por differença e se lê : 7 *está para* 3; de um modo geral representa-se por $\frac{a}{b}$ ou $a : b$.

281. **Equidifferença.** — É a relação de egualdade entre duas razões por differença. Assim : $7 - 3 = 9 - 5$ ou $a - b = c - d$. Lê-se : 7 *está para* 3 *assim como* 9 *está para* 5. Aos primeiros termos de cada razão chamam-se antecedentes (7 e 9 ou a e c); aos segundos chamam-se consequentes (3 e 5 ou b e d); ao primeiro e ao ultimo — *extremos*; finalmente aos 2.os e 3.os — *meios*.

282. — *Em toda a equidifferença a somma dos extremos é egual á somma dos meios.*

283. *Quarta differencial.* — É o quarto termo — geralmente desconhecido — de uma equidifferença.

Exemplo : Seja a equidifferença $11 - 7 = 17 - x$. O termo

x é a *quarta differencial*; obtem-se o seu valor pela propriedade conhecida de que a somma dos extremos é egual á dos meios : $11 + x = 7 + 17$, donde : $11 + x = 24$, logo $x = 24 - 11 = 13$.

284. — *Média differencial* ou meio arithmetico — Diz-se que
é o meio de uma equidifferença continua. quando os seus meios ou
uma equidifferença é continua. quando os seus meios ou
os seus extremos são eguaes; assim : $8 - x = x - 4$. O va-
lor do meio ou média differencial é : $8 + 4 = 2x$ ou $2x = 12$,

donde $x = \frac{12}{2} = 6$.

Logo, a média arithmetica entre duas quantidades — é egual á *semi-somma* (metade da somma) *dos extremos.* Ou, se é extremo, como na equidifferença : $x - 2 = 8 - x$, temos : $2x = 10$, donde $x = 5$, o valor de x é então *a semi-somma dos meios.*

285. **Proporção.** — É a relação de egualdade entre duas razões por quociente. Assim : $\frac{15}{5} = \frac{60}{20}$; tambem escreve-se 15 : 5 : : 60 : 20 e lê-se, como nas equidifferenças (1) : 15 *está para* 5, *assim como* 60 *está para* 20.

286. *Em toda a proporção o producto dos meios é egual ao producto dos extremos.* — Assim : $20 \times 15 = 60 \times 5$.

287. — *Quarta proporcional* — é o quarto termo — geralmente desconhecido — de uma proporção. Exemplo : 16 : 4 : : 32 : x; x é a *quarta proporcional*. Por ser o producto dos extremos $16 \times x$ egual ao dos meios 4×32, temos : $4 \times 32 = 16 \times x$, donde $x = \frac{4 \times 32}{16} = 8$; assim — *a quarta proporcional é egual ao producto dos meios dividido pelo extremo conhecido.*

Tanto nas proporções como nas equidifferenças, podem-se transpor os termos, isto é, passar os extremos para meios e os meios para extremos, o que as não altera, visto como o producto dos meios continua a ser egual ao dos extremos. Assim, temos : 4 : 16 : : x : 32, donde $4 \times 32 = 16 \times x$, logo $x = \frac{4 \times 32}{16} = 8$; por-

(1) Os termos ainda têm as mesmas denominações de extremos meios, antecedentes, consequentes, etc.

tanto, se a quarta proporcional é um meio — ella é egual ao producto dos extremos dividido pelo meio conhecido.

288. — *Média proporcional* ou *meio geometrico* — é o meio — desconhecido — de uma proporção continua, isto é, que tem os dois meios ou os dois extremos eguaes.

Exemplo: a proporção $18 : x :: x : 2$ é continua e x é a *média proporcional* entre os extremos 18 e 2. Determina-se o seu valor pela propriedade fundamental: $18 \times 2 = x \times x$ ou $36 = x^2$, donde $x = \sqrt{36} = 6$. Logo, a média proporcional entre duas quantidades (18 e 2) *é egual á raiz quadrada do producto dessas quantidades.*

A proporção podia ser transposta: $x : 18 :: 2 : x$ e ainda o valor de x seria o mesmo, como é facil de verificar.

289. — Em toda proporção pode-se multiplicar ou dividir os quatro termos, sómente os antecedentes, sómente os consequentes ou sómente uma razão por um numero, sem que a proporção deixe de subsistir, embora a rasão se altere. Identicamente, pode-se mudar o logar dos meios ou dos extremos.

290. **Regra de tres.** — A regra de *tres* tem por fim obter uma quantidade desconhecida e cujo valor depende dos de tres quantidades conhecidas — d'ahi o seu nome; divide-se em *simples* e *composta.*

291. *Regra de tres simples.* — A regra de tres simples resolve-se por meio de uma só proporção, estabelecida entre duas razões. Uma razão é formada pelos termos *conhecidos da mesma especie* — por isto denominados — *principaes;* a outra razão é formada pelos outros dois termos da mesma especie, sendo porém um delles *desconhecido* ou *incognito* — chamados — *relativos,* porque se referem áquelles.

A regra de tres, tanto simples como composta, pode ser *directa* ou *inversa;* é directa — *quando crescendo ou decrescendo os principaes e os relativos tambem crescem, ou decrescem;* é inversa — *quando crescendo os principaes, os relativos decrescem, ou vice versa* (1).

Toda difficuldade da solução de um problema consiste em armar a proporção; com a applicação da regra abaixo isso torna-se facil.

(1) No primeiro caso diz-se que a razão entre cada principal e o seu relativo é *directa,* no segundo caso diz-se que é *inversa.*

292. **Regra.** — Escrevem-se os principaes uma baixo do outro e os relativos, á direita, tambem um abaixo do outro; depois arma-se a proporção dividindo os dois primeiros entre si e tambem os dois ultimos — *na mesma ordem* se a regra é directa, *em ordem inversa* se a regra é inversa.

293. *1.º Problema. Custando 5^m de chita 3$000, quanto custam 7^m?* Os principaes *sendo os dois termos conhecidos da mesma especie,* são 5^m e 7^m; os relativos são 3$000 e x, cujo valor se procura. A regra é directa, pois que se 5^m custam 3$000, é claro que 7^m custarão mais, logo crescendo o principal cresce o seu relativo.

$$\begin{array}{l} 5^m \text{———————} 3\$000 \\ 7 \text{———————} x \end{array}$$

A primeira razão é $5 : 7$ ou 7 para 5; a segunda será $3 : x$ ou $x : 3$, contanto que se a primeira se formou de *cima para baixo* a segunda tambem forme-se do mesmo modo. Assim, temos a proporção: $5 : 7 :: 3\$: x$; donde: $5 \times x = 3\$ \times 7$ ou $x = \frac{21\$}{5} = 4\$200.$

294. *2.º Problema.* — Cinco trabalhadores fizeram um dado serviço em 7 dias, pergunta-se quantos dias gastarão 15 trabalhadores para fazer o mesmo serviço? Os principaes são 5 e 15 e os relativos respectivos são 7 dias e x, valor que se procura. É claro que augmentando o numero de trabalhadores, para fazer um mesmo serviço, o numero de dias de serviço decresce, logo crescendo o principal decresce o seu relativo e a regra é *inversa.* Dispondo os dados como faz-se na pratica, temos:

$$\begin{array}{l} 5t \text{———————} 7d \\ 15 \text{———————} x \end{array}$$

A primeira razão sendo $5 : 15$, a segunda será armada *de baixo para cima,* isto é, em ordem inversa, e então será $x : 7$. Assim, temos a proporção: $5 : 15 :: x : 7$; donde

$$x = \frac{5 \times 7}{15} = \frac{35}{15} = 2^d + \frac{5}{15} \text{ ou } 2^d\ \frac{1}{3}$$

O dia de serviço sendo de 9 horas, $\frac{1}{3}$ do dia corresponde a 3 horas, portanto: $x = 2d.\ 3h.$

295. **Methodo de reducção á unidade.** — Esses problemas são facilmente resolvidos pelo methodo de reducção á unidade, o qual consiste em obter o rela-

tivo da unidade e multiplical-o oú dividil-o pelo numero de unidades.

296. — 1.º *Problema. 3^B de corda custando 7$000, quanto custam 3^V e 4^P?* Começa-se reduzindo tudo á ultima subdivisão indicada, que é o palmo; assim temos $3^B = 30^P$ e 3^V e $4^P = 19^P$. A resolução é a seguinte, observando-se que a regra é directa :

Se 30^P custam 7$000, é claro que 1^P custará : $\frac{7\$000}{30} =$ 233 réis; se 1^P custa 233 réis, é claro que 19 palmos custarão 19 vezes mais ou $233 \times 19 =$ 4$427 réis.

297. — 2.º *Problema. 8 trabalhadores fizeram um cercado em 17 dias, em quantos dias 14 trabalhadores fariam o mesmo cercado?* A regra sendo simples e inversa, resolve-se do seguinte modo : Se 8 trab. gastaram 17 dias é claro que 1 gastaria *8 vezes mais dias* ou 17×8. Se 1 trabalhador gastaria 17×8 dias, é claro tambem que 14 gastariam *14 vezes menos dias* ou $\frac{17 \times 8}{14} = \frac{136}{14} = 9^d \frac{10}{14}$ ou $9^d \frac{5}{7}$. Se o dia de serviço fosse de 7 horas, por exemplo, a fracção do dia seria de 5h. e assim teriamos : 9 d. 5 h.

298. **Regra.** — Multiplica-se o primeiro principal pelo seu relativo e divide-se o producto pelo outro principal.

299. **Regra de tres composta.** — Nesta regra o valor da quantidade desconhecida, ou *incognita*, depende de mais de tres quantidades e por isto se o obtem por meio de mais de uma proporção, desdobrando-se em duas ou mais regras de tres simples.

300. *Problema. — 7 trabalhadores gastaram 19d. para fazer 123m de um muro, quantos dias gastariam 21 trabalhadores para fazer 194m?* É claro que a soução do problema depende de *dois elementos* — numero de metros de muro e numero de trabalhadores — logo, de duas regras de tres simples; porque sendo dois os elementos de que depende a incognita, a regra composta desdobra-se em duas simples — fazendo variar ora um ora outro dos elementos, considerando o outro como constante. 1.º Se o *serviço* em ambos os casos fosse o *mesmo*, teriamos uma regra simples : 7 trabalhadores gastaram 19d. em um serviço, quantos dias gastariam 21t. para fazer o mesmo serviço? Esta regra é inversa; dispondo os dados e armando a proporção temos :

7t. . . . (gastariam em um serviço). . . . 19d.
21t. . . . (gastariam no mesmo »). . . . xd.
Logo : 21 : 7 :: 19 : x *(a)*

Fica assim determinado o valor da incognita x relativo á variação de um dos elementos *(num. de trabalhadores)* considerado o outro *(serviço)* como constante ou o mesmo. Agora vamos fazer variar este elemento considerando aquelle como constante. Com effeito, temos assim : um certo num. de trab. fez 123m de muro em x dias, em quantos dias fasia 194m? Temos outra regra simples e directa, relativa ao outro elemento, a qual se resolve pela proporção :

123m. . *(feitos por um certo n. de trabalhadores)*. . xd
194m. . *(em quantos dias pelo mesmo numero ?)*. . x'd
Logo : 123 : 194 :: x : x' *(b)*

Multiplicando as proporções *(a)* e *(b)* entre si, temos :

$$21 \times 123 : 7 \times 194 :: 19 \times x : x \times x'$$

Ou : $$\frac{21 \times 123}{7. \times 194} = \frac{19 \times x}{x \times x'}.$$

Dividindo ambos os termos da segunda fracção por x,

temos : $$\frac{21 \times 133}{7 \times 194} = \frac{19}{x'}.$$

Um extremo desconhecido é egual ao producto dos meios dividido pelo extremo conhecido, logo :

$$x' = \frac{7 \times 194 \times 19}{21 \times 123} = \frac{26802}{2683} = 9,^{d}99$$

Considerando o dia de serviço como tendo 8 horas e reduzindo a fracção do dia a horas e minutos, temos : 9d. 7h. 55m.

301. **Observação.** — Podiamos determinar o valor de x na proporção (a) e subtituil-o em (b), mas, como fizemos, é mais simples e é como faz-se na pratica.

302. 2º *Problema. — 10 trabalhodores fazem um aterro, em 25d, trabalhando 8 horas por dia, 15t. em quantos dias fariam trabalhando apenas 6 h.?* 1.ª regra simples : 10t. em 25d, 15t em xd, donde :

15 : 10 :: 25 : x

2.ª regra simples: 8h. em xd, 6h. em x'd, logo : 8 : 6, : x : x'.

Multiplicando as duas proporções, simplificando e tirando o valor de x' temos :

$$\frac{120}{60} = \frac{25}{x'} \text{ D'onde } x' = \frac{60 \times 25}{120} = 12,^{d}5$$

303. Porcentagem ou regra de tantos por cento. — No commercio é commum dar-se um abatimento no preço das mercadorias compradas em porção ou pagas á vista; como tambem os negociantes, corretores, etc., costumam cobrar uma *commissão* pelas compras ou vendas feitas em nome de um terceiro. Para estabelecer essa commissão, costuma-se referil-a a um capital fixo *cem*, assim diz-se 5 % — que se lê : 5 *por cento*, querendo isto significar que se tem de deduzir, addicionar ou pagar 5 relativamente a cada cento. A essa quantia fixa, relativa a cada cento, se denomina — *taxa*; a taxa é, pois, *os tantos por cento* ou a quantidade fixa relativa a cem.

Principal — é a quantia total a que se refere a *porcentagem*.
Porcentagem — É o relativo ao total ou a somma total a addicionar ou a deduzir; vulgarmente denomina-se — commissão, porcentagem, etc.

304. — Esta regra resolve-se por uma simples regra de tres.
1.º *Problema. Deduzir 6 % de 3 : 787$500.* De 100 deduzindo-se 6, de 3:787$500 quanto se deduzirá ? Temos :

100. . . . . . deduz-se. 6
3787500. . . quanto se deduzirá? . . . x
Logo : $100 : 3787500 :: 6 : x$

$$\text{Donde } x = \frac{3787500 \times 6}{100} = 227\$250.$$

305. — **Regra :** Multiplica-se *o principal pela taxa e divide-se por 100*, ou separam-se *dois algarismos á direita do producto* (1).

$$\text{Formula relativa á } \textit{porcentagem} : p = \frac{P \times t}{100}$$

$$\text{» » » } \textit{taxa} : \ldots\ t = \frac{100 \times p}{P}$$

$$\text{» » ao } \textit{principal} : P = \frac{100 \times p}{t}$$

306. **Observação.** — Nas formulas acima p representa a porcentagem, P o principal e t a taxa.

307. 2.º *Problema. — Uma factura importa em 10:857$360, tendo 12 % de desconto, quanto é o liquido a pagar ?*

Seguindo a regra do n.º 305 obtemos para porcentagem 1:302$883, importancia que, deduzida de 10:857$360, dá para o liquido — Rs : 9:554$477.

10:857$360
12
21714720
10857360
1302883,20

(1) Quando a *taxa é fraccionaria*, reduz-se a fracção a decimal e opera-se a multiplicação conforme a regra relativa aos decimaes.

308. Juros simples. — *Juro* — é o aluguel de um capital durante um tempo determinado.
Capital. É a quantia que se dá a juro ou a premio.
Taxa. É o juro de um capital fixo — 100 — durante a unidade de tempo.

309. — A taxa é convencional e depende da vontade de quem empresta ou de quem pede emprestado; os dois contractantes fixam a *taxa* a que é feito é emprestimo. O juro pode ser *simples* ou *composto*; é simples — quando o capital não varia durante o tempo do emprestimo ou praso; é composto — quando o juro relativo á cada unidade de tempo addiciona-se ao capital que então vai augmentando.

310. *Determinação da formula.* — Toda questão de juro simples resolve-se por meio de uma regra de tres composta e o problema geral é o seguinte : *Obter o juro do capital* c *durante o tempo* t *annos á taxa* i %. O capital 100 em um anno rende i %, pelá definição de *taxa*, procura-se então conhecer o juro j que rende o capital c durante t annos.

A incognita j depende de dois elementos — o tempo e o capital. 1.º — Considerando o *tempo como constante* e fazendo variar o capital, temos :

O capital. . . . 100. . . . . rende. i
» » . . . . c . . . . . quanto renderá?. x

Sendo directa, temos : $100 : c :: i : x$ Ou $100.\ x = ci.$ (1)

2.º Considerando o tempo como variavel e o capital constante, temos :

Durante o tempo. . 1. o capital c vence. x
» » » . . t o mesmo cap. quanto vencerá? . j

Sendo directa, temos : $1 : t :: x : j.$ Ou $tx = j$ (2)

Dividindo membro a membro a egualdade (2) pela egualdade (1) e simplificando, temos : $\frac{t}{100} = \frac{j}{ci}$.

$$\text{Ou — a } \textit{formula geral} : j = \frac{cit}{100} \qquad \text{(X)}$$

311. **Regra.** — Para obter o juro simples multiplica-se o capital (c) pela taxa (i) e pelo tempo (*) (t) e divide-se

(*) Ou então pelo producto da taxa pelo tempo o producto por 100, isto é, separam-se á direita do producto *os dois ultimos algarismos*, o que equivale a dividil-o por cem.

312. 1.º *Problema*. — *Determinar o juro de 1:350$875, durante 3 annos, á taxa de 6 °/o ao anno.* Applicando a formula geral ou a regra acima, observando que c é o capital, i a taxa e t o tempo, obtemos o juro, que é : 243$157.

$$\begin{array}{r} 1350875 \\ 6 \\ \hline 8105250 \\ 3 \\ \hline 243157{,}50 \end{array}$$

313. *Determinação do tempo*. — Da *formula geral* tiramos o valor do tempo, pois temos : $100j = cit$.

D'onde
$$t = \frac{100j}{ci} \qquad (2)$$

Regra. Para obter o *tempo* — multiplica-se o juro por 100 e o producto divide-se pelo producto do capital pela taxa.

314. *Determinação da taxa*. — Da *formula geral*, temos : $100j = cit$, donde $i = \dfrac{100j}{ct}$ (3)

315. *Determinação do capital*. — Da *formula geral*, temos : $100j = cit$, donde $c = \dfrac{100j}{it}$ (4)

316. *A unidade de tempo é o mez*. — Até aqui temos considerado o juro relativo a um numero exacto de annos; quando isto não se dá *ou a unidade de tempo é o mez*, se a taxa refere-se *tambem ao mez* a formula é a mesma ; se a taxa refere-se, porém, ao anno, cumpre modificar a formula, observando que um mez é *um doze avos* do anno, logo :

$$j = \frac{ci \times \frac{t}{12}}{100} = \frac{cit}{1200} \qquad (5)$$

Formula na qual t representa agora um numero exacto de mezes referindo-se ainda á taxa ao anno.

Problema. « Determinar o juro de 1:500$000 á taxa de 6 °/o ao anno durante 3 mezes ».

$$\text{Temos : } j = \frac{1500000 \times 6 \times 3}{1200} = \frac{27000000}{1200} = 22\$500$$

317. *A unidade de tempo é o dia*. — Um dia sendo *um tre-*

zentos e sessenta avos do anno (1), devemos na formula geral (X) substituir t por esta fracção, e assim temos :

$$j = \frac{ci \times \frac{t}{360}}{100} = \frac{cit}{36000}$$

Nesta formula t representa *um numero exacto de dias*.

Problema. Calcular o juro de 3:600$000 durante 60 dias á taxa de 7 °/o ao anno.

$$\text{Temos : } j = \frac{3600000 \times 7 \times 60}{36000} = \frac{1512000000}{36000} = 42\$000$$

318. — Quando a taxa, o tempo ou ambos são fraccionarios, applica-se o methodo das partes aliquotas para effectuar a multiplicação ; ou então reduz-se o tempo á ultima subdivisão indicada e a fracção da taxa a decimal, e opera-se como ficou dito.

319. *Methodo dos divisores fixos*. — É o meio pratico communmente usado para calcular os juros. Geralmente é empregado quando a unidade de tempo é o dia, isto é, quando, se quer obter o juro de um dado capital durante um certo numero de dias. Abaixo damos uma tabella referente aos divisores fixos relativos ao dia.

A formula geral que se refere ao dia é, como já sabemos : $j = \dfrac{cit}{36000}$. Dividindo por i ambos os termos da fracção temos : $j = \dfrac{ct}{36000 \div i}$. Representando por D o quociente da divisão de 36000 por i, temos, finalmente : $j = \dfrac{ct}{D}$. . . . (x)

D é o que se denomina *divisor fixo* relativo á taxa i.

320. **Regra.** Para obter o juro de um capital — multiplica-se esse capital pelo numero de dias e o producto divide-se pelo divisor fixo relativo á taxa.

321. — *Modo de calcular o divisor fixo relativo a uma taxa*. « Divide-se 36000 pela taxa se se quer o divisor relativo ao dia. » Assim, o divisor fixo relativo a 5 °/o é $36000 \div 5 = 7200$.

(1) O anno commercial tem 360 dias, e cada mez 30 dias.

Se se quer o divisor fixo relativo ao mez, divide-se 1200 pela taxa; e, finalmente, divide-se 100 pela taxa quando se quer o divisor fixo em relação ao anno.

322. *Tabella dos divisores fixos relativos do dia para o anno commercial de 360 dias.* — A taxa refere-se ao anno, como é commum, e o divisor está calculado com approximação de duas casas decimaes, isto é, com approximação de centesimos. O valor do div. fixo refere-se á unidade monetaria, que é o real.

Taxa	Div. fixo	Taxa	Div. fixo	Taxa	Div. fixo
1 %	36000,00	8 %	4500,00	12 %	3000,00
2 %	18000,00	8 1/4	4363,63	12 1/4	2938,77
3 %	12000,00	8 1/2	4235,29	12 1/2	2880,00
3 1/2	10285,71	8 3/4	4114,28	12 3/4	2823,53
4 %	9000,00	9 %	4000,00	13 %	2769,23
4 1/2	8000,00	9 1/4	3891,91	13 1/2	2666,66
5 %	7209,00	9 1/2	3789,53	14 %	2571,43
5 1/2	6545,45	9 3/4	3692,30	14 1/2	2480,00
6 %	6000,00	10 %	3600,00	15 %	2400,00
6 1/4	5760,00	10 1/4	3512,20	15 1/2	2322,58
6 1/2	5538,46	10 1/2	3428,57	16 %	2250,00
6 3/4	5333,33	10 3/4	3348,83	16 1/2	2181,88
7 %	5142,85	11 %	3272,72	17 %	2147,65
7 1/4	4962,41	11 1/4	3200,00	18 %	2000,00
7 1/2	4800,00	11 1/2	3130,43	19 %	1894,73
7 3/4	4645,16	11 3/4	3063,83	20 %	1800,00

323. *Problema.— Obter o juro de 3:789$652 durante 90 dias e á taxa de 6 ½ por cento.* Applicando a regra do n.º 320, temos : para producto :

$$\begin{array}{r} 3789652 \\ 90 \\ \hline 341068680 \end{array}$$

Procurando na tabella o div. fixo relativo a 6 ½ acha-se 5538,46. Dividindo o producto obtido por este div. fixo, temos para o juro pedido : 61$581.

324. **Regra das partes proporcionaes.** — Tem por fim — dividir um numero em partes proporcionaes a outros numeros dados. Tem grandes applicações na pratica, taes como : distribuição dos lucros e perdas das sociedades commerciaes, distribuição dos dividendos, dos impostos, etc. Daremos aqui apenas o processo pratico ou do *factor constante.*

Exemplo : Dividir o numero N em partes proporcionaes a a, b, e c. Seja S a somma dos numeros a, b e c, temos respectivamente para as partes relativas a a, a b e a c:

$$\frac{N}{S} \times a \qquad \frac{N}{S} \times b \qquad \frac{N}{S} \times c$$

Ao *quociente constante* $\frac{N}{S}$ se denomina *factor constante.*

325. **Regra.** — Para dividir um numero em partes proporcionaes a outros — divide-se aquelle numero pela somma desses numeros e o *quociente constante* multiplica-se successivamente por esses numeros, para ter as partes relativas a cada um delles.

326. *Problema.* — 1º *Dividir 49$980 em partes proporcionaes aos numeros 2, 3, 5 e 7.* Applicando a regra do n.º 325 temos para *quociente constante.*

$$q = \frac{49980}{2+3+5+7} = \frac{49980}{17} = 2940$$

$$\left.\begin{array}{lr} \text{A parte relativa a 2 é :} & 2940 \times 2 = 5880 \\ \text{» » » » 3 »} & 2940 \times 3 = 8820 \\ \text{» » » » 5 »} & 2940 \times 5 = 14700 \\ \text{» » » » 7 »} & 2940 \times 7 = 20580 \end{array}\right\} = 49\$980$$

327. *Problema* (1). — 2.º *Tres pedreiros contractaram um serviço por 5:000$000. O 1.º fez $\frac{2}{3}$ do serviço, o 2.º fez $\frac{1}{8}$ e o 3.º fez, finalmente, $\frac{5}{24}$, pergunta-se qual é a quota que cabe a cada um ?*

O quociente constante é :

$$q = \frac{5880000}{\frac{2}{3} + \frac{1}{8} + \frac{5}{24}} = \frac{5880000}{1} = 5880000$$

(1) Esses problemas são os de mais commum applicação.

A parte do 1.º é : $5880\$000 \times \frac{2}{3} = 3920\$000$

» » » 2.º » $5880\$000 \times \frac{1}{8} = 735\$000$

» » » 3.º » $5880\$000 \times \frac{5}{24} = 1225\$000$

Verificação . . . . 5:880$000

328. *Problema.* — 3.º *Tres pessôas obtiveram um premio de 17:855$200 para ser dividido entre ellas, mas em* razão inversa *de suas edades. A 1.ª tem 17 annos, a 2.ª tem 20 e a 3.ª tem 22 annos, pergunta-se quanto cabe a cada pessôa?* Se as partilhas fossem em *razão directa* das edades, teriamos que dividir 17:855$200 em partes proporcionaes a 17, 20 e 22; mas como são em *razão inversa*, temos que dividir em partes proporcionaes a $\frac{1}{17}$, a $\frac{1}{20}$ e a $\frac{1}{22}$, visto como estas são as razões inversas respectivamente a 17, a 20 e a 22.

O quociente constante é :

$$\frac{17855200}{\frac{1}{17}+\frac{1}{20}+\frac{1}{22}} = \frac{17855200}{\frac{577}{3740}} = 17855200 \times \frac{3740}{577} =$$

$$\frac{66778448000}{577} = 115733878{,}682$$

A parte da 1.ª é : $115733878{,}682 \times \frac{1}{17} = 6807\$875{,}216$

» » » 2.ª » $115733878{,}682 \times \frac{1}{20} = 5786\$693{,}935$

» » » 3.ª » $115733878{,}682 \times \frac{1}{22} = 5260\$630{,}849$

Verificação . . . . 17:855$200,000

329. *Problema.* — 4.º *O activo da fallencia de uma casa commercial é de 1260527$000; o passivo compõe-se de 4 dividas sendo — a 1.ª de 235728$000, a 2.ª de 590372$520, a 3.ª de 665300$000 e finalmente a 4.ª de 372857$000; pergunta-se quanto cabe a cada credor tendo sido de 12 °/ₒ as despezas de liquidação?*

Activo	1260527$000
Passivo	1864257$520

Deduzindo do activo, antes da partilha, 12 °/ₒ, temos : 151263$240, conforme o n.º 305. Subtrahindo esta importancia do activo resta : 1109263$760, numero a dividir em partes proporcionaes aos quatro credores. O *factor constante* é :

$$q = \frac{1109263760}{1864257520} = 0{,}595$$

Parte relativa ao 1.º credor. .	235728$000×0,595=140268$260
» » » 2.º » . .	590372$520×0,595=351271$750
» » » 3.º » . .	665300$000×0,595=395853$500
» » » 4.º » . .	372857$000×0,595=221849$910

330. **Regra de Companhia ou Sociedade.** — Tem por fim determinar os lucros ou perdas resultantes de uma sociedade commercial, industrial, etc. Esta sociedade pode ser em nome collectivo, tendo uma *razão* ou firma social, como Militão Bivar & Comp.ª, ou anonyma, como o Banco do Ceará, etc. Neste caso é facil o problema, visto como as perdas ou os lucros, retirados tantos por cento para o *fundo de reserva*, são divididos em quotas eguaes pelo numero de titulos ou *acções*, tomando cada quota a denominação de *dividendo*, o qual é feito semestral ou annualmente. O problema complica-se, porém, quando os socios entram com capitaes deseguaes e ainda mais quando as entradas desses capitaes são feitas em epochas diversas. Resolve-se a questão, em qualquer dos casos, pela regra das partes proporcionaes, como vamos fazer.

331. 1.º *Problema.* — *Tres pessôas formaram uma sociedade commercial sob* a razão *ou firma : « Assis Bezerra & Comp.ª » O primeiro socio entrou com 7:000$000, o 2.º com 8:520$000 e o 3.º com 15:600$000; no fim de terceiro anno obtiveram um lucro de 136:400$000, pergunta-se quanto cabe a cada associado, tendo o 2.º entrado seis mezes depois de estabelecido o 1.º, e o 3.º dez mezes depois do 2.º?*

Se os tres associados tivessem começado juntos, o problema consistiria em dividir o lucro ou perda em partes proporcionaes aos seus capitaes; mas tendo cada um entrado em epocha differente, os lucros alem de proporcionaes aos capitaes são tambem proporcionaes aos tempos de permanencia desses capitaes na sociedade. O problema divide-se, pois, em duas partes — uma em que se considera a differença dos capitaes e outra em que se considera a differença dos tempos.

332. *1.ª Parte.* — Para mais facilidade, supponhamos conhecidos os lucros ou perdas de cada associado, proporcionalmente aos tempos e aos capitaes realisados; é claro, então, que podemos *obter capitaes correspondentes a cada um dos das entradas* e que deem lucros ou perdas *na mesma proporção, como se tivessem todos os socios começado o negocio ao mesmo tempo*. Assim fazendo, substituimos os capitaes reaes por outros — *ficticios* ou imaginarios, *que fornecem o mesmo lucro ou perda a cada associado*, mas que têm a vantagem de *tornar eguaes os tempos das entradas*, facilitando a solução do problema, que assim fica reduzido á immediata applicação da regra das partes proporcionaes.

O 1.º capital, 7:000$000, girou na sociedade 3 annos ou

36 mezes, logo tem o mesmo lucro ou perda que um *36 vezes maior e que girasse um só mez;* isto é, tanto tem de lucro 7:000$000 em 36 mezes, como o capital 7:000$000 × 36 = 252:000$000, em um só mez.

O 2.º capital, 8:520$000, girou apenas 30 mezes, porque entrou *6 mezes depois do primeiro;* tanto elle lucra ou perde em 30 mezes, como um capital *30 vezes maior* em *um só mez;* isto é, tanto lucra 8:520$000 em 30 mezes, como 8:520$000 × 30 = 255:600$000, em um só mez.

O 3.º capital, 15:600$000, girou na sociedade apenas 20 mezes, visto como entrou 10 mezes depois do 2.º ou 16 depois do 1.º; o seu lucro ou perda durante 20 mezes é o mesmo que teria durante *um só mez* um capital *20 vezes maior* ou 15:600$000 × 20 = 312:000$000.

Em resumo:	1.º capital ficticio.	252:000$000
	2.º » »	255:600$000
	3.º » »	312:000$000
	Total.	819:600$000

333. 2.ª *Parte.* — Sendo os lucros destes capitaes ficticios *no mesmo tempo* (um mez, como referimos), *respectivamente eguaes aos dos capitaes reaes nos tempos differentes,* não temos mais do que dividir o lucro (ou perda) obtido: 136:400$000 em partes respectivamente proporcionaes a elles (1) e temos assim:

1.º associado.	41:938$506,588
2.º »	42:537$628,111
3.º »	51:923$865,301
Total.	136:400$000,000

334. 2.º *Problema. — Um negociante estabeleceu-se com 10:000$000; 6 mezes depois outro associou-se-lhe com o capital de 6:000$000 e só 3 mezes mais tarde entrou com 4:000$000 para egualar os capitaes. No fim de 5 annos, depois desta ultima data, liquidaram a sociedade havendo apenas em caixa 3:000$000 pergunta-se qual foi o prejuizo de cada um associado?*

O 1.º entrou com. . . .	10:000$000	durante	69 mezes
» 2.º » ». . . .	6:000$000	»	63 »
» » » ». . . .	6:000$000	»	60 »

O capital social era de 20:000$000, o prejuizo foi de 17:000$000; logo, temos que dividir 17:000$000 em partes proporcionaes ás entradas e tempos. O lucro ou perda do 1.º associado é o mesmo que elle teria em *um só mez com um capital 69 vezes maior* ou com o capital de 690:000$000; o lucro ou

(1) Ver o numero 325.

perda do 2.º para 6:000$000 é o mesmo que se tivesse entrado com um capital *63 vezes maior* ou com 378:000$000, e para os 4:000$000 como se elle tivesse entrado com um capital *60 vezes maior* do que 4:000$000 ou 240:000$000. Obtidos os capitaes ficticios não temos mais do que dividir 17:000$000 em partes proporcionaes a 690:000$000, a 378:000$000 e a 240:000$000.

Á 1.ª entrada de 10 contos cabe a perda de	8:967$000
» 2.ª » » 6 » » » » »	4:913$900
» 3.ª » » 4 » » » » »	3:119$100

335. **Desconto.** — Nas transacções commerciaes é de praxe dar-se um prazo para realisação dos pagamentos, assignando o devedor um documento que se denomina — *lettra.* Em uma lettra temos a distinguir:

1.º — O valor nominal — *é o valor que nella se acha escripto;*

2.º — O valor actual — *é o valor que ella tem actualmente* — pois é claro que o possuidor de uma lettra querendo liquidal-a agora terá que offerecer um abatimento ou desconto;

3.º — Prazo — *é o tempo concedido para o pagamento.*

Do exposto se conclue que o *desconto — é o abatimento feito no valor nominal de uma lettra, a vencer-se em um certo prazo, para obter-se immediato embolso.* Para maior garantia, alem da firma ou assignatura de quem se obriga ao pagamento, costuma-se exigir garantias que são dadas por outras firmas ou assignaturas, sob forma especial, constituindo o *endósso.*

Ha duas especies de desconto — *desconto por dentro e desconto por fóra.* Em primeiro logar trataremos daquelle.

336. **Desconto por dentro.** — Nas questões de desconto o que se procura é o *valor actual* da lettra, pois este valor posto a juro simples durante o prazo e á taxa do desconto deve produzir o valor nominal da lettra. Seja como exemplo o problema abaixo.

337. — *Sendo* c *o valor nominal de uma lettra a vencer-se daqui a* t *annos, qual será o valor actual dessa lettra, á taxa de desconto* i °/₀ *ao anno?* Representando-se por x o valor actual, pelo que ficou dito x augmentado de seus juros em t annos e á taxa i °/₀ é egual ao valor nominal c, logo:

$$x + \frac{xit}{100} = c$$

Ou

$$100\,x + xit = 100\,c$$

Pondo x em evidencia, temos: $x\,[100 + it] = 100\,c.$

Tirando o valor de x, temos o *valor actual:*

$$x = \frac{100c}{100 + it} \qquad [1]$$

338. — O desconto sendo a differença entre os valores nominal e actual, se o representarmos por d, temos :

$$d = c - x = c - \frac{100c}{100 + it} = \frac{cit}{100 + it} \quad [2]$$

339. 2.ª *Problema.* — *Sendo de 1500$000 o valor nominal de uma lettra, a vencer-se daqui a 6 mezes, qual é o seu valor actual, sendo de 12 °/₀ a taxa de desconto?* É necessario modificar a formula visto como ella refere-se ao anno, para isto substitue-se t pela fracção do anno e como 6 mezes é meio anno, substitue-se t por *um meio*. Calculando obtem-se para valor actual 1:410$000 e para o desconto 8$000.

340. **Desconto por fóra.** — É o processo empregado geralmente no commercio; embora menos racional, é communmente usado pela maior simplicidade dos calculos.

341. *Problema. Sendo d a taxa de desconto por anno, que abatimento soffrerá uma lettra do valor nominal — c — pagavel no fim de t annos?* Uma simples proporção resolve a questão, pois se 100 desconta d °/₀ em um anno, em t annos descontará dt e o capital c descontará x, isto é, mais ou menos conforme c fôr maior ou menor do que 100. Portanto, temos uma regra de tres simples e directa :

100. . . . . . desconta em t annos. . . . . dt
c. . . . . . . quanto descontará? x

Logo : $100 : c :: dt : x$

Donde : $$x = \frac{cdt}{100} \quad [2]$$

Conhecido o desconto x, o valor actual será, representando-o por $a = c - x$.

$$\text{ou } a = c - \frac{cdt}{100} = \frac{100c - cdt}{100} = \frac{c(100 - dt)}{100}$$

342. **Observação.** — Se a taxa de desconto d fôr a mesma que a de juro i, a differença entre o valor nominal e o actual, importancia do desconto, será o juro da importancia da lettra.

343. — Em geral os prazos não excedem de 3 a 6 mezes ou são de 30 a 90 dias, portanto é necessario adoptar as formulas:

Em mezes : $x = \dfrac{cdt}{1200}$ ou $x' = \dfrac{ct}{N}$

Em dias : $x = \dfrac{cdt}{36000}$ ou $x'' = \dfrac{ct}{N'}$

Os valores x' e x'' acham-se expressos em relação aos divisores fixos : 1200 dividido por d, para o mez, e 36000 dividido por d, para o dia.

Esses divisores calculam-se facilmente ou servem-se dos da tabella do n.º 322, como no problema em seguida.

344. *Problema.* — *Calcular o desconto de uma lettra, cujo valor nominal é de 1:000$000 e deve vencer-se desta data a 90 dias, sendo de 12 °/₀ a taxa de desconto.*

$$x = \frac{ct}{N} = \frac{1:000\$000 \times 90}{3000} = 30\$000$$

345. **Regra.** — Para calcular o desconto de uma lettra — multiplica-se o valor nominal pelo numero de dias e divide-se o producto pelo divisor fixo relativo á taxa de desconto. »

346. **Cambio.** — Nas transacções commerciaes ha necessidade de enviar dinheiro de um lugar para outro afim de effectuar pagamentos: antigamente enviava-se directamente a moeda, hoje dá-se preferencia ás *lettras de cambio*, as quaes são uma ordem escripta, com as formalidades legaes, que um banco ou casa commercial envia a outro para pagar a alguem uma dada quantia no fim de um certo prazo ou á vista, conforme se acha indicado na lettra.

Na lettra de cambio temos a distinguir :

Sacador — banco ou pessôa que dá a lettra.
Sacado » » » contra quem se saca.
Portador » » » a favor de quem se saca.

347. — Temos que distinguir duas especies de cambio — cambio interno, quando a transacção é feita dentro do paiz, cambio externo — quando a transacção é feita de um paiz para outro.

348. **Cambio interno.** — A operação consiste na commissão ou porcentagem relativa á quantia que se quer sacar.

Como exemplo, supponhamos que alguem quer mandar pagar no *Rio de Janeiro* a importancia de 10:000$000.

Para isto procura um banco ou casa commercial que tenha transacções com aquella praça e compra uma lettra para um banco ou casa commercial do Rio de Janeiro; é claro que terá que pagar uma commissão, a qual será mais ou menos elevada conforme os fundos existentes ali, pois se ha abundancia de dinheiro n'aquella praça para ser enviado a esta a commissão é relativamente modica, podendo até ser nulla, elevando-se no caso contrario; quando a commissão é nulla a transacção faz-se *ao par*. Para resolver o problema, basta saber o valor da commissão, que em geral é de 3 %, e calcular a porcentagem conforme o n.º 305.

349. **Cambio externo.** — Todas as nações não tendo o mesmo padrão monetario, o cambio externo complica-se pela necessidade de obter os equivalentes monetarios.

350. **Cambio sobre a Inglaterra.** — Ao par, isto é, sem agio nem desconto ou depreciação monetaria, o nosso 1000 réis é cotado em 27 *pence* ou dinheiros. Quando se diz que o cambio está a 28, portanto acima do par, ou a 12 e abaixo do par, isto, significa que o nosso 1000 réis vale 28 ou 12 *pence*. D'ahi um meio facil de reduzir, ao cambio, a nossa moeda á ingleza ou vice-versa. Como exemplo, sejam dados os seguintes problemas:

351. 1.º *Problema. — Ao cambio de* $12\frac{3}{4}$ *obter o equivalente, em libras sterlinas, de* 1:350$000. O nosso 1000 réis valendo 12 *pence* e $\frac{3}{4}$ do *pence*, valerá $12^{d}75$. Assim, temos a seguinte regra de tres simples : « *Se* 1$000 *vale* 12,75 *do pence ou dinheiro, quanto valerá* 1:350$000 ? »

$$1000 : 12{,}75 :: 1350\$: x, \text{ donde temos: } x = \frac{1350\$ \times 12{,}75}{1000} =$$

17212,5 *pence*. Convertendo este numero de *pence* em libras e shillings, para o que basta dividir por 240 para ter o numero de libras e o resto por 12 para ter o numero de shillings, temos, ao cambio proposto — 1350$000 valendo $71^{L}\ 14^{s}\ 4^{d}$.

352. **Regra.** — Para converter o dinheiro brazileiro ao inglez — *multiplica-se o valor em réis pela taxa de cambio e o producto divide-se por 100. O resultado obtido representa pence.*

Obtido o numero de *pence* basta reduzil-o a libras e shillings, para o que se divide por 240, visto uma libra ter 240 *pence* ou dinheiros, e o quociente representa libras; o resto divide-se por 12, visto o shilling ter 12 dinheiros, e o quociente representa shillings; o resto representa o numero de *pence*.

353. 2.º *Problema. — Converter em dinheiro brazileiro ou réis :* $13^{L}\ 17^{s}\ 8^{d}$ *ao cambio de* $14\ ^{7}/_{8}$. Convertendo a fracção a decimal o cambio é : 14,875. Reduzindo as $13^{L}\ 17^{s}\ 8^{d}$ a dinheiros ou pence, temos : 3332. Ao cambio de 14,875 isto significa que 14,875 dinheiros equivalem ao nosso 1$000 ; assim, temos uma regra de tres simples; « Se 14,875 pence valem 1$000, 3332 pence quanto valerão? » Logo : 14,875 : 1$000 :: 3332 : *x*.

$$\text{Donde : } x = \frac{3332 \times 1\$000}{14{,}875} = \frac{3332000}{14{,}875} = \frac{3332000000}{14875} = 224\$$$

354. **Regra.** — Para converter a moeda ingleza em brazileira — reduz-se tudo a pence e o resultado multiplica-se por 1$000; o producto obtido divide-se pela taxa do cambio e o quociente representa o equivalente em moeda brazileira.

355. **Cambio sobre a França.** — Em relação á França nós damos o *termo incerto*, isto é, o nosso dinheiro é que varia sendo o franco o *termo certo*, ao contrario do que se dá com a Inglaterra que o nosso 1$000 é constante e o numero de pence é que varia ou é o *termo incerto*. Temos a resolver os mesmos problemas geraes.

356. 1.º *Problema. — Converter* 10:000$000 *em moeda franceza ao cambio de* 250. O cambio de 250 sobre a França significa que um franco custa 50 réis da nossa moeda. O problema resolve-se facilmente : « Se 250 réis equivalem a 1 franco, 10:000$000 a quantos francos equivalerão? » Temos :

$$250 : 1 \text{ f.} :: 10{:}000\$000 : x, \text{ donde } x = \frac{10{:}000\$000}{250} = 40000 \text{ fr.}$$

Tambem se pode resolver pelo methodo de reducção á unidade, procurando o equivalente do real, pois se 250 réis valem 1 f. é claro que temos : $1 \text{ real} = \frac{250}{1 \text{ f.}}$, logo : 10:000$000 equivalerão

$$\text{a } \frac{10{:}000\$000 \times 1 \text{ f.}}{250} = 40000 \textit{ francos.}$$

357. **Regra.** — Para converter moeda brazileira em franceza — divide-se o valor em réis pela taxa de cambio e o quociente representa o numero de francos; havendo resto acrescenta-se zero e continua-se a divisão para ter o numero de *centimos* ou centesimos de franco.

358. 2.º *Problema. — Converter* 856,57 *francos em moeda brazileira ao cambio de* 850 *réis*. Temos a seguinte regra : Se 1 franco vale 850 réis quanto valerão 856,57 ». Logo : 1 : 850 :: 856,57 : *x*; donde $x = 856{,}57 \times 850 = 727\$084$.

359. **Regra.** — Multiplica-se o valor em francos pela taxa de cambio e o producto representa o equivalente em moeda brazileira.

360. **Observação.** — O cambio é geralmente dado sobre a Inglaterra, muitas vezes torna-se necessario, conhecida essa taxa, obter a relativa á França. Para isto observemos que, determinado o valor da libra sterlina ao cambio dado, basta dividil-o pelo numero de francos que lhe equivale, para termos o valor de um franco. — Seja como exemplo o cambio a 24; a este cambio uma libra vale 10$000, pois que 1$000 valem 24 pence e a libra tendo 240 é claro que 240 pence á taxa 24 é

10$000. Uma libra equivalendo a 25.F 21 dividindo-se 10$000 por 25,21 temos : 397 réis para valor do franco, portanto a taxa sobre a França, que corresponde a 24 sobre a Inglaterra é — 397.

361. **Cambio sobre Portugal.** — Ao par o 1$000 portuguez ou forte vale 2$000 da nossa moeda, a relação é, pois, dupla e por meio de uma simples proporção se obtem a taxa ou porcentagem sobre Portugal, relativa á taxa sobre Londres. Para isto — *divide-se 54000 pela taxa ingleza* e o quociente dá o valor do 1$000 forte.

362. 1.º *Problema. — Estando o cambio sobre Londres a 10 quanto vale em nossa moeda 1:372$000 fortes?* Então o valor de 1$000 forte é 5$400 da nossa moeda; multiplicando, pois, 1:372$000 por 5400 temos : 1:372$000 × 5400 = 7:408$800,000 valor equivalente ao portuguez.

363. 2.º *Problema. — Sendo 14 ½ a taxa sobre Londres, a quanto corresponde em moeda portugueza 1:360$000 da nossa moeda?* O valor de 1$000 forte é 3$724; dividindo, pois, 1:360$000 por 3724 temos para valor em moeda portugueza 365$199.

364. **Cambio sobre os E. Unidos.** — Este paiz nos dá o *termo certo*, como a França, e nós damos o *termo incerto*. Em relação á taxa ingleza, para obter o valor do dollar, basta dividir 49410 pela taxa sobre Londres e o quociente representa em nossa moeda este valor. Quando a taxa é directa, calcula-se como fizemos para o franco. Para reduzir o nosso dinheiro ao americano basta calcular o valor do dollar como ficou dito acima, e dividir a importancia em réis pelo valor desta moeda. Para obter o equivalente em nossa moeda de uma somma em dinheiro americano, basta calcular o valor de dollar e dividir o valor em réis pelo do dollar; o quociente representa então o numero de dollares e fracções desta moeda.

365. **Cambio sobre Allemanha.** — Para obter o equivalente do marco, termo certo, em relação á taxa sobre Londres, divide-se 11772 pela taxa ingleza e o quociente dá o valor desta moeda em dinheiro brazileiro. Obtido assim o valor do marco, opera-se como ficou dito para o dollar.

366. **Observação.** — Nem sempre ha uniformidade nas taxas, pois muitas vezes succede que a taxa do Brazil sobre Londres é 24, por exemplo, e em relação a outro paiz não é a correspondente á ingleza, como para França, que seria 397, para Portugal 2250, etc., visto como a taxa destes paizes em relação a Londres podem estar acima ou abaixo do par. Nas transacções commerciaes o conhecimento deste facto é de grande interesse.

FIM

INDICE

Typ. Aillaud & C^ia