

Jônatas Matthies Roschild

**ANÁLISE DE ESTABILIDADE E SÍNTESE DE  
CONTROLE PARA CONVERSORES BOOST COM  
CORREÇÃO DO FATOR DE POTÊNCIA ATRAVÉS DE  
UMA ABORDAGEM LMI**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-  
Graduação em Engenharia de Automação e  
Sistemas para a obtenção do Grau de Mestre  
em Engenharia de Automação e Sistemas.  
Orientador: Daniel Ferreira Coutinho, Dr.

Florianópolis

2015

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Roschild, Jônatas Matthies

Análise de Estabilidade e Síntese de Controle para Conversores Boost com Correção do Fator de Potência Através de Uma Abordagem LMI / Jônatas Matthies Roschild ; orientador, Daniel Ferreira Coutinho - Florianópolis, SC, 2015.

143 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas.

Inclui referências

1. Engenharia de Automação e Sistemas. 2. Conversores Boost com correção do fator de potência. 3. Autocontrole da corrente. 4. Análise de estabilidade e desempenho. 5. Síntese de controle Robusta. I. Ferreira Coutinho, Daniel . II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas. III. Título.

**ANÁLISE DE ESTABILIDADE E SÍNTESE DE  
CONTROLE PARA CONVERSORES BOOST COM  
CORREÇÃO DO FATOR DE POTÊNCIA ATRAVÉS DE  
UMA ABORDAGEM LMI**

Jônatas Matthies Roschild

Dissertação submetida à Universidade Federal de Santa Catarina como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia de Automação e Sistemas.

Florianópolis, 28 de abril de 2015.

---

Daniel Ferreira Coutinho, Dr.  
Orientador

---

Rômulo Silva de Oliveira, Dr.  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia de Automação e Sistemas

**Banca Examinadora:**

---

Daniel Ferreira Coutinho, Dr.  
Presidente

---

Eugênio de Bona Castelan Neto, Dr. - UFSC

---

Luis Fernando Alves Pereira, Dr. - UFRGS

---

Marcelo Lobo Heldwein, Dr. sc. ETH - UFSC



Dedico este trabalho a Caroline, minha amada.



## AGRADECIMENTOS

Eu preciso agradecer a muitas pessoas, pelas suas contribuições e incentivo na realização desta dissertação. Primeiro, agradeço a Caroline Voser Pereira, minha fiel amiga, namorada, incansável companheira de todas as horas, não foram poucas as vezes que precisei de seu apoio e incentivo. Agradeço a minha família pelos sorrisos que motivam, por todo carinho e por suas orações, testemunhas do meu esforço e dedicação.

Aos meus colegas que encontrei aqui em Florianópolis, mestrandos e doutorandos da engenharia, ecologia e outras áreas, todos juntos trabalhando e buscando o crescimento pessoal e profissional. Muitas horas de conversas e experiências trocadas. Em especial, a Rejane de Barros, o Luis Arcaro, o Marcelo de Lellis e ao Fabrício Saggin por contribuições diretas nesta dissertação.

Agradeço ao meu orientador Daniel Ferreira Coutinho, pela condução deste trabalho, por orientar com respeito e compreensão, e por acreditar nos resultados. Também agradeço aos professores que contribuíram na minha formação, cada aula e conselho são valiosos.

Por fim, agradeço ao IFSUL por incentivar minha capacitação, e a CAPES e UFSC pelo financiamento desta dissertação.

Para todos, meu muito obrigado!

Jônatas Matthies Roschild





O homem, como um ser histórico, inserido num permanente movimento de procura, faz e refaz constantemente o seu saber.

(Paulo Freire, 1981)



## RESUMO

O estágio de entrada da grande maioria dos equipamentos eletrônicos modernos consiste em um conversor CA–CC com baixo fator de potência e elevado conteúdo harmônico, o que é indesejável do ponto de vista da rede elétrica. Os conversores Boost com correção do fator de potência (CFP) são, atualmente, soluções consolidadas para atender as especificações de qualidade da rede elétrica. No entanto, o projeto de controladores para esses dispositivos é bastante complexo devido às não linearidades do modelo e também da lei de controle para garantir um fator de potência unitário. Neste contexto, a técnica do autocontrole da corrente se destaca dentre as demais estratégias de controle para conversores Boost com CFP pela sua simplicidade, por dispensar o sensoriamento da tensão de entrada e pelo baixo custo. Nesta dissertação, abordam-se os problemas de análise de estabilidade e desempenho, e síntese de controle para conversores Boost com CFP autocontrolado pela corrente utilizando uma formulação matemática baseada em desigualdades matriciais lineares (LMIs). Com este objetivo, utiliza-se a técnica do modelo médio para o conversor em malha aberta além de uma representação algébrico-diferencial do sistema em malha fechada para manipular mais facilmente a não linearidade inerente à lei de controle. Para o sistema em malha fechada, realiza-se uma análise de estabilidade local considerando uma incerteza na carga e obtendo estimativas da região de atração. Esta metodologia de análise é estendida para a síntese de controle (sintonia dos parâmetros do controlador) considerando incertezas na carga (variante no tempo) e uma perturbação na tensão de entrada levando em consideração robustez e critérios de desempenho baseados no ganho  $\mathcal{L}_2$  e na taxa de decaimento exponencial.

**Palavras-chave:** Conversor Boost com CFP. Estimativa da região de atração. Síntese de controle.



## ABSTRACT

The input stage of most modern electronic equipments consists of an AC–DC converter with low power factor and high harmonic contents, which is undesirable from the point of view of the grid power line. The Boost converters with power factor correction (PFC-Boost) are currently consolidated solutions to comply with the quality specifications of the power grid. However, the control design for PFC-Boost converters is very complex because of the nonlinearities of the model and of the control law (needed to ensure a unity power factor). In this context, the self-current control technique stands out among other control strategies because of its circuit simplicity, no input voltage sensing and low cost. In this master thesis, the stability and performance analysis, and control synthesis problems are addressed for current self-controlled PFC-Boost converters considering the linear matrix inequality (LMI) framework. To this end, the average modeling technique is applied to represent the open-loop dynamics while a differential-algebraic state-space representation is applied to deal with the nonlinear closed-loop dynamics. Moreover, a local stability analysis of the closed-loop system is assessed assuming load uncertainty while estimating the system domain of attraction. Then, the analysis results are extended for control design (i.e., controller tuning) considering a time-varying (and bounded) load and vanishing input voltage disturbances as well as performance specifications in terms of the system  $\mathcal{L}_2$ -gain and of an exponential decay rate.

**Keywords:** PFC Boost converters. Domain attraction Estimation. Control Synthesis.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Exemplo gráfico da noção de estabilidade. . . . .	35
Figura 2	Região de Atração do Oscilador Van der Pol em tempo reverso para $\epsilon = 1$ . . . . .	39
Figura 3	Região de Atração do Oscilador Van der Pol com variação do parâmetro. . . . .	40
Figura 4	Exemplo de estimativas de região de atração utilizando funções de Lyapunov mais complexas (COUTINHO; DE SOUZA; TROFINO, 2009). . . . .	42
Figura 5	Exemplo gráfico dos sinais que compõe a modulação por largura de pulso (MEZAROBA, 2015). . . . .	50
Figura 6	Transferência estática ideal do conversor Boost. . . . .	51
Figura 7	Circuito de potência do conversor Boost CC-CC . . . . .	51
Figura 8	Formas de onda no conversor Boost (BARBI; MARTINS, 2000). . . . .	53
Figura 9	Topologias de circuito do conversor Boost em um período de comutação. . . . .	54
Figura 10	Simulação do modelo real e médio do conversor Boost CC-CC. . . . .	58
Figura 11	Circuitos de um retificador com filtro e um conversor Boost com CFP implementados no Psim. . . . .	60
Figura 12	Simulação comparativa das tensões e correntes de entrada de um conversor Boost com CFP e um retificador com filtro. . . . .	60
Figura 13	Formas de onda da tensão de saída e corrente no indutor (real e filtrada). . . . .	62
Figura 14	Tensão de saída e corrente no indutor formando um plano. . . . .	63
Figura 15	Diagrama de controle da corrente no indutor pela estratégia clássica. . . . .	66
Figura 16	Diagrama de controle da corrente no indutor pelo autocontrole da corrente. . . . .	68
Figura 17	Simulação do conversor Boost autocontrolado pela corrente. . . . .	70
Figura 18	Estrutura de controle pelo autocontrole da corrente. . . . .	71
Figura 19	Estimativa da região de atração do conversor Boost com CFP. . . . .	93

Figura 20 Estimativas das regiões de atração nos planos $(x_1, x_2)$ , $(x_2, x_3)$ do conversor Boost com CFP. ....	94
Figura 21 Estimativas das regiões de atração nos planos $(x_1, x_2)$ , $(x_2, x_3)$ do conversor Boost com CFP: comparação entre politopo simétrico e assimétrico. ....	95
Figura 22 Estimativa da região de atração do conversor Boost com CFP com faixa de valores da incerteza estendida para cargas leves (até $-42\%$ de $\bar{Y}_o$ ). ....	96
Figura 23 Estimativas das regiões de atração nos planos $(x_1, x_2)$ , $(x_2, x_3)$ do conversor Boost com CFP: comparação de estimativas para faixa de valores com mudança de carga de $5\%$ e $42\%$ . ....	97
Figura 24 Estimativa da região de atração do conversor Boost com CFP através de uma função de Lyapunov quadrática. ....	98
Figura 25 Estimativas das regiões de atração nos planos $(x_1, x_2)$ , $(x_2, x_3)$ do conversor Boost com CFP: comparação entre estimativas a partir de funções de Lyapunov quadrática e polinomial para o caso de larga faixa de valores de incerteza. ....	99
Figura 26 Estimativas das regiões de atração nos planos $(x_1, x_2)$ , $(x_2, x_3)$ das estimativas da região de atração do conversor Boost com CFP: comparação de estimativas para faixa de valores com mudança de carga de $\pm 5\%$ e $-42\%$ com uma dada taxa de convergência. ...	100
Figura 27 Estimativas da região de estados atingíveis do conversor Boost com CFP. ....	122
Figura 28 Estimativa do conjunto de estados atingíveis no plano $(x_1, x_2)$ e $x_3 = 0$ do procedimento de análise e síntese. ....	122
Figura 29 Tensão de saída para mudanças de carga. Conversor com controlador projetado está em vermelho e conversor com controlador de referência está em azul. ....	124
Figura 30 Corrente de entrada para os conversores Boost com CFP com controlador projetado e de referência para mudança de carga de $866 \Omega$ . ....	125
Figura 31 Estimativas da região de estados atingíveis do conversor Boost com CFP. ....	131
Figura 32 Estimativas das regiões de estados atingíveis no plano $(x_1, x_2)$ e $x_3 = 0$ do procedimento de análise e síntese. ....	132
Figura 33 Tensão de saída quando o sistema sujeito a perturbação na tensão de entrada. Conversor com controlador projetado está em vermelho e conversor com controlador de referência está em azul. .	133



Figura 34 Tensão de saída e integrador para mudanças de carga 866  $\Omega$ . Conversor com controlador do Exemplo 6 está em vermelho e conversor com controlador projetado neste exemplo está em azul. 133



## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Especificações do circuito de potência do conversor Boost CC–CC.....	57
Tabela 2	Especificações do circuito de potência do conversor Boost com CFP.....	69
Tabela 3	Ganho do controlador de referência (JAPPE; MUSSA; COUTINHO, 2011).....	69
Tabela 4	Especificações do circuito de potência do conversor de referência (JAPPE; MUSSA; COUTINHO, 2011).....	92
Tabela 5	Ganho do controlador de referência (JAPPE; MUSSA; COUTINHO, 2011).....	92
Tabela 6	Ponto de equilíbrio em malha fechada.....	92
Tabela 7	Relação dos dados de entrada e saída para os procedimentos de análise e síntese.....	119
Tabela 8	Estimativas do limitante superior de $\  \mathcal{G}_{w_{az}} \ _{\infty}^2$ – Projeto 1.....	121
Tabela 9	Primeira estratégia de projeto - ‘tudo igual’.....	127
Tabela 10	Segunda estratégia de projeto - ‘aumento de $\mu$ ’.....	127
Tabela 11	Terceira estratégia de projeto - ‘mudando $[\rho_1, \rho_2]$ ’.....	129
Tabela 12	Estimativas do limitante superior de $\  \mathcal{G}_{w_{az}} \ _{\infty}^2$ – Projeto 2.....	131



## NOMENCLATURA E SIMBOLOGIA

<b>LMI</b>	Linear Matrix Inequalities,
<b>CFP</b>	Correção do Fator de Potência,
<b>FP</b>	Fator de Potência,
<b>PFC</b>	Power Factor Correction,
<b>PI</b>	Controlador de Ação Proporcional e Integral,
<b>PWM</b>	Pulse-Width Modulation,
<b>LQR</b>	Linear Quadratic Regulator,
<b>CC</b>	Corrente Contínua,
<b>CA</b>	Corrente Alternada,
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais,
$\mathbb{R}_+$	Conjunto dos números reais positivos,
$\mathbb{R}^n$	Conjunto de vetores reais com dimensão $n$ ,
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Conjunto de matrizes reais de dimensão $n \times m$ ,
$\langle x(t) \rangle$	Valor médio de $x(t)$ ,
$\dot{x}(t)$	Derivada temporal da função $x(t)$ , onde o argumento $t$ é frequentemente omitido,
$S'$	Matriz transposta de $S$ ,
$S = S'$	Matriz simétrica,
$S > 0$	Matriz definida positiva,
$diag\{S_i\}$	Matriz (bloco) diagonal com elementos $S_i$ ,
$posto(S)$	Posto da matriz $S$ ,
$x_i$	Representa para um vetor $x \in \mathbb{R}^n$ a sua $i$ -ésima componente,
$\mathcal{V}(\mathcal{B})$	Conjunto de todos os vértices do politopo $\mathcal{B}$ ,
$\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$	Representa um politopo obtido pelo produto cartesiano de dois politopos $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ ,
$\mathbf{I}_n$	Matriz identidade de dimensão $n$ ,
$\mathbf{0}_n$	Matriz de zeros de dimensão $n$ ,
$\mathbf{0}_{n \times m}$	Matriz de zeros não quadrada (dimensão $n \times m$ ), onde a dimensão é frequentemente omitida,
$\ x\ $	Norma Euclidiana de $x$ , $x \in \mathbb{R}^n$ , $\ x\  = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ ,
$\ x(t)\ _2$	Norma $\mathcal{L}_2$ de sinais, i.e., $\ x(t)\ _2 = \sqrt{\int_0^\infty x(t)'x(t)dt}$ ,
$\ \mathcal{G}_{wz}\ _\infty$	Ganho $\mathcal{L}_2$ de $w(t)$ para $z(t)$ , onde $z(t)$ é uma função escalar no tempo.



## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	25
1.1	OBJETIVOS .....	31
1.2	CONTRIBUIÇÃO CIENTÍFICA .....	31
1.3	ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO .....	32
<b>2</b>	<b>PRELIMINARES</b> .....	33
2.1	SISTEMAS NÃO LINEARES .....	33
2.2	DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES - LMIS ..	41
<b>2.2.1</b>	<b>Principais Definições</b> .....	42
<b>2.2.2</b>	<b>LMIs Dependentes de Parâmetros</b> .....	45
<b>3</b>	<b>O CONVERTOR BOOST</b> .....	49
3.1	PRINCÍPIO DE FUNCIONAMENTO .....	49
<b>3.1.1</b>	<b>Conversor Boost CC-CC</b> .....	51
3.1.1.1	Modelo Médio .....	54
<b>3.1.2</b>	<b>Conversor Boost com Correção do Fator de Potência</b>	58
3.1.2.1	Trajетórias dos Estados: Dinâmica Comutada e Modelo Médio .....	63
3.2	ESTRATÉGIAS DE CONTROLE .....	64
<b>3.2.1</b>	<b>Controle Clássico</b> .....	64
<b>3.2.2</b>	<b>Autocontrole da Corrente</b> .....	66
3.3	OBTENÇÃO DO MODELO MÉDIO EM MALHA FE- CHADA CONSIDERANDO AUTOCONTROLE DA COR- RENTE .....	71
<b>3.3.1</b>	<b>Determinando o Ponto de Equilíbrio em Malha Fechada</b> .....	73
<b>3.3.2</b>	<b>Representação em Espaço de Estados</b> .....	75
<b>4</b>	<b>ANÁLISE DE ESTABILIDADE E DESEMPE- NHO</b> .....	79
4.1	FUNÇÃO DE LYAPUNOV .....	80
<b>4.1.1</b>	<b>Formulação Convexa para <math>\dot{V}(x)</math></b> .....	82
4.2	REGIÃO DE ATRAÇÃO .....	85
4.3	ESTABILIDADE REGIONAL .....	86
4.4	TAXA DE CONVERGÊNCIA .....	89
4.5	RESULTADOS E DISCUSSÕES .....	91
<b>5</b>	<b>SÍNTESE DO CONTROLADOR</b> .....	103
5.1	FUNÇÃO DE LYAPUNOV .....	105
5.2	GANHO $\mathcal{L}_2$ .....	107

5.2.1	<b>Estimativa da Região de Atração Considerando a Perturbação de Entrada</b> .....	110
5.3	<b>REGIÃO DE ATRAÇÃO</b> .....	112
5.4	<b>ANÁLISE DE ESTABILIDADE COM PERTURBAÇÃO <math>\mathcal{L}_2</math> NA ENTRADA</b> .....	113
5.5	<b>PROJETO DE CONTROLE</b> .....	116
5.6	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES</b> .....	118
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES</b> .....	135
6.1	<b>PERSPECTIVAS FUTURAS</b> .....	137
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	139



# 1 INTRODUÇÃO

O primeiro estágio da entrada de alimentação de equipamentos eletrônicos modernos consiste, em geral, de um conversor de potência CA–CC com baixo fator de potência e elevado conteúdo harmônico na corrente de entrada poluindo a rede elétrica. Do ponto de vista do sistema de distribuição de energia elétrica o fator de potência pode ser entendido como um critério de qualidade e eficiência do consumo de energia, pois relaciona a quantidade de energia fornecida pela rede elétrica com a quantidade de energia efetivamente utilizada para realizar trabalho. Pode-se definir o fator de potência como sendo expresso pela razão da potência ativa e a potência aparente de um dado equipamento elétrico. Portanto, para a rede elétrica, a carga ideal é resistiva (fator de potência unitário), o que torna necessário incluir algum tipo de correção do fator de potência para os equipamentos eletrônicos cujo estágio de conexão à rede elétrica consiste de um conversor CA–CC.

Neste sentido, uma maneira de superar este problema é incorporar ao conversor uma etapa de correção do fator de potência. Desta forma, aqueles equipamentos caracterizados como cargas não lineares passam a apresentar alto fator de potência. Dentre as diversas soluções de conversores de único estágio, o conversor elevador de tensão CC–CC, também conhecido como conversor Boost, com correção do fator de potência (CFP) é uma topologia consolidada, devido a sua simplicidade, eficiência e baixo custo. Em geral, utiliza-se esse conversor com frequência de comutação fixa imposta por uma modulação por largura de pulso (PWM) e operando em modo de condução contínua.

Ao incorporar a correção do fator de potência ao conversor, observa-se um novo objetivo de controle: a corrente de entrada deve ter o mesmo formato e fase que a tensão de entrada para obter um alto fator de potência. Portanto, para os conversores Boost, as estratégias de controle mais aplicadas podem ser classificadas quanto a forma de controle da corrente. Na literatura especializada, destacam-se duas técnicas de controle. A primeira delas, denominada de método direto, utiliza a informação da tensão de entrada como sinal referência para controlar a forma da corrente de entrada. Nesta estratégia a técnica de controle por valores médios instantâneos da corrente do indutor é a mais utilizada<sup>1</sup> (TODD, 1996). A segunda forma, chamada de controle indireto, considera a medição da corrente do indutor no conversor ao invés da

---

<sup>1</sup>Por possuir um circuito integrado dedicado a sua implementação (TODD, 1996), além de ser a solução *default* no software Psim (POWERSIM, 2014).

tensão de entrada para controlar a corrente de entrada, pois a corrente no indutor tem a mesma forma da tensão de entrada. Nesta estratégia, destaca-se a técnica do autocontrole da corrente<sup>2</sup> (RAJAGOPALAN; LEE; NORA, 1997; BEN-YAAKOV; ZELTSER, 1999; BORGONOVO et al., 2005).

A técnica por valores médios citada acima controla a corrente no indutor para impor na corrente de entrada o formato da tensão de entrada. Nesta técnica, para controlar a corrente no indutor, utilizam-se duas etapas, sendo a primeira para gerar o sinal de referência da corrente e outra o sinal de controle. A etapa que gera o sinal de referência da corrente consiste de uma multiplicação entre o sinal que regula a tensão de saída e a tensão de entrada. Desta forma, obtém-se a amplitude e o formato da tensão de entrada para formar a corrente de referência a partir do sinal que regula a tensão de saída. Esta referência por sua vez é comparada com uma amostra da corrente do indutor e processada para gerar o sinal de controle adequado para a modulação PWM que comanda a comutação da chave. Por essa descrição, torna-se evidente que a tensão de entrada é a responsável pela imposição do formato da corrente de entrada.

Então, a estrutura de controle da técnica por valores médios pode ser caracterizada por duas malhas de realimentação, uma para cada etapa. A malha interna realimenta a corrente do indutor, enquanto a malha externa realimenta a tensão de saída, e para conectar as malhas utiliza-se um multiplicador. Logo, a lei de controle é não linear (devido a essa multiplicação), apesar de em cada uma das malhas utilizarem-se controladores lineares. Embora a lei de controle seja não linear, classicamente, utiliza-se a abordagem no domínio da frequência e ferramentas lineares para o projeto dos controladores lineares (em geral, do tipo PI). Do ponto de vista prático, essa abordagem determina um modelo simples e funcional para o projeto da lei de controle de conversores operando em condições nominais, mas apresenta uma perda de desempenho significativa (até mesmo a instabilidade) em situações com carga leve.

Em relação ao desempenho da regulação da saída, a ondulação da tensão é inevitável para o equilíbrio de energia uma vez que a potência de entrada é uma função senoidal quadrada, e o tamanho do armazenador de energia pode ser escolhido para manter a magnitude da ondulação a um nível razoável. Porém, na prática percebe-se que isto afeta a resposta dinâmica, de modo que há um compromisso entre velocidade de resposta e atenuação da ondulação. Com base nessa característica dinâmica, supõe-se no projeto de controle pela abordagem frequencial

---

<sup>2</sup>Também denominada de técnica autocontrolada pela corrente.

que a frequência da rede é a largura de banda máxima permitida no circuito de regulação de saída sob a condição de fator de potência unitário (CHU et al., 2009). Nesse caso, pela abordagem frequencial, assume-se que a frequência de cruzamento para um controlador do tipo PI na malha de tensão é em torno de  $\frac{1}{3}$  ou  $\frac{1}{5}$  da frequência da rede e a margem de fase é escolhida maior que  $45^\circ$ . Enquanto que na malha de corrente a frequência de cruzamento é limitada em torno de  $\frac{1}{10}$  da frequência de comutação, e para obter estabilidade deve ser 50 a 100 vezes maior que a frequência da rede. Logo, a malha de corrente possui uma velocidade de resposta muito superior à malha de tensão, porém neste caso acontece um fenômeno de distorção da forma de onda quando a corrente é nula (SUN, 2004), o que a torna muito sensível a ruídos (CHEN; MATHEW; SUN, 2007).

Nestas especificações comuns, para atenuar a ondulação na tensão de saída, efeito da segunda harmônica da tensão da rede, o controlador PI da malha da tensão tem dinâmica muito lenta para ter desempenho e robustez satisfatórios (CHU et al., 2009). Assim, em situações de cargas leves, interrupções instantâneas ou mudança do valor eficaz da tensão de entrada o desempenho pode ficar comprometido, ou seja, quando o conversor estiver em operação fora das condições nominais a tensão de saída pode torna-se oscilatória, e em casos críticos até perder a estabilidade. Neste contexto, existem trabalhos recentes que utilizam da estrutura de controle pela técnica por valores médios, porém acrescentam alguma adaptação para superar os problemas que esta técnica possui na operação fora das condições nominais.

Um trabalho que visa robustez e melhorar a velocidade de resposta para suportar mudanças da carga é (FIGUERES et al., 2007), que usa a técnica de controle de injeção da corrente de carga. A ideia desta técnica é adicionar uma malha de realimentação da corrente da carga com a finalidade de atualizar rapidamente o valor de referência da corrente do indutor. Desta forma, obteve-se uma resposta da tensão de saída mais acelerada diante de mudança de carga, quase eliminando os sobressinais típicos deste tipo de conversores. Uma alternativa ao acréscimo da malha de controle, e visando os mesmos objetivos é encontrado em (MOON; CORRADINI; MAKSIMOVIC, 2010). Neste caso, a solução foi utilizar controladores PI com ganhos autoprogramados. Dessa forma, verifica-se se existem perturbações nas malhas e caso ocorra modificam-se os ganhos dos controladores aumentando ou diminuindo a velocidade de resposta devido a variação dos parâmetros.

Por outro lado, em (AROUDI; ORABI, 2012) a estratégia foi utilizar uma malha de realimentação em atraso do sinal de saída para o

controlador da malha de tensão, de modo que com esse acréscimo fosse possível tratar os fenômenos não lineares e distorção harmônica que são naturais da técnica de controle por valores médios. Já em (GIRI et al., 2010) apesar de utilizar a estrutura de controle em questão os controladores PI foram substituídos. Na malha de tensão foi utilizado um filtro de 3ª ordem e o controlador da malha de corrente foi projetado utilizando *backstepping*. Essas modificações resultaram em estabilidade e desempenho diante de cargas desconhecidas.

Na busca por maior robustez em (KESSAL; RAHMANI, 2013) a malha de corrente foi substituída por um controlador de estrutura variável com modos deslizantes (*sliding mode*) dispensando a modulação PWM. Nesta modificação da estrutura de controle, obteve-se em regime permanente uma baixa distorção harmônica e alto fator de potência, além de uma certa robustez em relação a mudanças na carga. Em (JAPPE; MUSSA, 2009) apresenta o problema da interrupção instantânea da tensão de alimentação e seus efeitos sobre o conversor. Neste caso, como solução foi projetado junto aos controladores PI uma malha *anti wind-up* como uma proteção. Pois, observa-se que após a interrupção da energia de entrada pode ocorrer a saturação do controlador permitindo a circulação de um alto valor de corrente que pode danificar a chave semicondutora.

Em relação ao método indireto do controle da corrente anteriormente apresentado, a alternativa do autocontrole da corrente também possibilita elevado fator de potência. Neste caso, o controle da corrente do indutor não utiliza a tensão de entrada diretamente, o que implica na ausência do monitoramento da tensão de alimentação. Nesta técnica, torna-se necessário apenas uma etapa para o controle da corrente, o que torna o controlador mais simples. Observa-se que a corrente do indutor possui o mesmo formato da onda da tensão de entrada, então basta controlar sua amplitude para obter alto fator de potência, o que é possível através de uma ação proporcional na malha de controle da corrente (BEN-YAAKOV; ZELTSEY, 1999). Por esse motivo, esta técnica chama-se autocontrole da corrente, pois utiliza uma amostra da corrente do indutor para gerar o sinal de controle da corrente. Isto torna a lei de controle com menos elementos dispensando a utilização de ação de controle PI na malha de corrente. Para controlar a malha de tensão se utiliza uma ação PI, de maneira similar a técnica clássica por valores médios na qual a malha de tensão gera uma amplitude de referência para a corrente. Para conectar as malhas utiliza-se uma divisão, pois a amplitude gerada pelo controle da tensão é inversamente proporcional a corrente de referência.

Porém, além da não linearidade racional na entrada da malha de corrente, esta técnica apresenta problemas também no que se refere a robustez, quando submetida a cargas leves de maneira similar ao conversor Boost com CFP clássico (LANGE; HELDWEIN, 2011; JAPPE; MUSSA; COUTINHO, 2011). Neste caso, o seu desempenho é afetado podendo em algumas situações críticas se instabilizar. Em (LANGE; HELDWEIN, 2011) a solução encontrada foi substituir o controlador proporcional na malha da corrente por um compensador em atraso de fase autoajustável para cada faixa de potência processada na saída. Assim, manteve-se uma margem de fase robusta o suficiente para obter a estabilidade independente da carga, ao custo de tornar o controlador mais complexo. No entanto, essa abordagem não leva em conta as não linearidades do modelo e do controle. Isto significa que não é possível garantir a estabilidade do sistema de controle quando os estados do sistema se afastarem em demasia do ponto de operação do conversor, pois, o modelo linear perde consistência. Em (JAPPE; MUSSA; COUTINHO, 2011), propõe-se uma metodologia para análise de estabilidade na qual a dinâmica não linear é levada em consideração. Esta técnica de análise permitiu também obter uma estimativa da faixa de carga admitida com garantia de estabilidade.

De forma resumida, as técnicas citadas possuem leis de controle não lineares, mas devido à complexidade de lidar com a lei de controle completa, em geral utilizam-se ferramentas lineares para o projeto dos controladores. Em contraste com esta prática, recentemente, destacam-se as estratégias de controle não lineares que permitem o projeto dos controladores levando em conta integralmente a dinâmica do sistema em malha fechada. Em (DAS et al., 2013) utiliza-se funções de Lyapunov, (CHU et al., 2009) realimentação linearizante exata e (SELEME et al., 2013) utiliza a teoria de passividade. No entanto, ao considerar as não linearidades do conversor Boost e da lei de controle, aumenta-se o esforço para o projeto de controle, porém em contrapartida obtêm-se uma garantia de estabilidade e desempenho.

De maneira geral, as técnicas frequenciais não podem garantir estabilidade e desempenho, pois são baseadas em aproximações lineares da dinâmica do sistema. Isto justifica o crescimento do estudo de técnicas de projeto de controle que visam garantir estabilidade e desempenho. Uma ferramenta que vem sendo utilizada com este objetivo são as desigualdades matriciais lineares (LMI). As técnicas clássicas de projeto, tais como reguladores lineares quadráticos (LQR), norma  $\mathcal{H}_2$  e norma  $\mathcal{H}_\infty$  tem sido aplicadas através da abordagem LMI em diversos problemas, inclusive em conversores de potência, principalmente

conversores estáticos CC–CC.

Neste contexto, destaca-se o trabalho (OLALLA et al., 2009), que busca a solução do projeto LQR através de uma abordagem LMI. No entanto esse trabalho considera somente as parcelas lineares do modelo do conversor. Em (OLALLA et al., 2012a) foi considerado no projeto do controlador a dinâmica não linear, as incertezas paramétricas, a saturação do sinal de controle. Além disso, utilizou-se um controlador por realimentação de estados com a adição de uma ação integral (erro entre saída e referência) que contava com alocação de polos para as especificações em transitório e  $\mathcal{H}_\infty$  em regime permanente. Além disso, neste trabalho também obteve-se uma estimativa da região de atração. Já em (OLALLA et al., 2012b) tem-se basicamente a mesma abordagem em relação aos requisitos de projeto do trabalho anterior, porém os ganhos do controlador são escalonados.

Uma abordagem alternativa para o projeto de controladores robustos pode ser vista em (MONTAGNER et al., 2012). Neste trabalho foi utilizado um controlador  $\mathcal{H}_2$  robusto de realimentação de estados. Nesta abordagem, apesar de considerar uma aproximação linear do modelo do conversor, mostra superioridade em desempenho comparada com o controle clássico escolhido para comparação. Além dessas contribuições para o controle robusto de conversores Boost, encontra-se em (LEYVA; INGLES; OLALLA, 2012) um foco na atenuação da ondulação da tensão de saída através da filtragem do sinal de controle, que é um outro aspecto relacionado ao desempenho. Já em (TORRES-PINZON; GIRAL; LEYVA, 2012) apresenta-se uma abordagem multivariável para o problema de controle de dois conversores Boost em cascata. Portanto, as abordagens LMIs apresentam condições para obter projetos de controle que garantem a estabilidade e algum desempenho, pois podem considerar a estimativa da região de atração como uma região segura para operação. Além disso, essas técnicas facilitam a inclusão de critérios de desempenho e robustez ao projeto.

Diante de tudo que foi exposto, este trabalho concentra-se no estudo do conversor Boost com correção do fator de potência autocontrolado pela corrente. Essa escolha justifica-se pelo fato que o método de controle indireto é menos suscetível a ruídos de chaveamento, pois não é necessário medir a tensão de entrada. Outra vantagem é uma certa imunidade a interrupções instantâneas da tensão de entrada (JAPPE; MUSSA, 2009). Mas como apresentado acima, esta técnica pode levar a instabilidade do sistema de controle quando operando com pouca carga (i.e., regime de operação com carga leve) principalmente quando o controle é implementado digitalmente (JAPPE; MUSSA; COUTINHO,

2011).

## 1.1 OBJETIVOS

O objetivo principal deste trabalho é desenvolver uma abordagem LMI para tratar de problemas de controle do conversor Boost com correção do fator de potência autocontrolado pela corrente operando em modo de condução contínua e frequência fixa de comutação imposta por modulação PWM. Em particular, para este conversor busca-se estimar a região de atração através da análise de estabilidade regional e determinar ganhos robustos através da síntese do controlador baseado em ganho  $\mathcal{L}_2$ . Além disso, a síntese do controlador considera a incerteza na carga e perturbação na tensão de entrada.

## 1.2 CONTRIBUIÇÃO CIENTÍFICA

O trabalho contribui com novas experiências no uso de funções de Lyapunov polinomiais e abordagens LMIs aplicadas na análise de estabilidade e na síntese de controladores robustos. Em particular, apresentam-se uma análise de estabilidade e síntese do controlador para um conversor Boost com correção do fator de potência autocontrolado pela corrente.

Além disso, mostra como obter um modelo não linear em espaço de estados que representa a dinâmica do conversor Boost com correção do fator de potência em malha fechada. Para este conversor considera-se a incerteza na carga e a perturbação na tensão de entrada.

Neste trabalho, encontra-se também uma análise de estabilidade que leva em conta a incerteza na carga, uma dada taxa de convergência garantida e as não linearidades do conversor e do controlador. Esta análise é baseada em uma abordagem LMI resultando em uma estimativa da região de estados atingíveis.

O principal resultado do trabalho é um método de projeto de ganhos robustos para o conversor Boost autocontrolado pela corrente. O método é uma abordagem LMI, e utiliza funções de Lyapunov polinomiais e o ganho  $\mathcal{L}_2$  como critério de desempenho. Os resultados desta dissertação foram condensados no artigo “Robust Tuning of Current Self-Controlled Single-Phase PFC Boost Converters” submetido ao IEEE Multi-Conference on Systems and Control, 2015, a se realizar na Austrália.

### 1.3 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

O restante desta dissertação é organizado nos seguintes capítulos:

- **Capítulo 2:** revisa conceitos básicos de sistemas não lineares variantes no tempo e incertos. Apresenta as principais técnicas LMIs para tratar sistemas não lineares;
- **Capítulo 3:** apresenta o conversor Boost com correção do fator de potência além de demonstrar a obtenção do modelo em malha fechada que será utilizado para a análise e síntese;
- **Capítulo 4:** desenvolve uma abordagem LMI para a análise de estabilidade regional do conversor Boost em malha fechada considerando uma carga incerta (mas constante) e sem perturbação;
- **Capítulo 5:** contém o principal resultado do trabalho. Desenvolve uma abordagem LMI para a síntese de ganhos robustos do conversor Boost com correção do fator de potência autocontrolado pela corrente considerando a carga variante no tempo e perturbação de entrada  $\mathcal{L}_2$ ;
- **Capítulo 6:** apresenta as conclusões gerais do trabalho e resume os resultados obtidos.



## 2 PRELIMINARES

Neste capítulo, revisam-se os principais conceitos de sistemas dinâmicos e de controle para os sistemas não lineares a serem utilizados nessa dissertação. Em especial, caracteriza-se a estabilidade para sistemas não lineares considerando a teoria de Lyapunov, e apresentam-se os métodos baseados em desigualdades matriciais lineares (ou LMIs) que serão utilizados para a obtenção de condições para a análise de estabilidade e síntese de controle para a classe de sistemas não lineares considerada nessa dissertação. Além disso, dar-se-á atenção à região de atração e suas propriedades, de modo a relacionar a abordagem LMI e a teoria de Lyapunov.

### 2.1 SISTEMAS NÃO LINEARES

Considere o seguinte sistema não linear variante no tempo:

$$\dot{x} = f(t, x) \quad x_0 = x(t_0) \quad (2.1)$$

em que  $x \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $x_0$  é o vetor de condições iniciais,  $t \in \mathbb{R}_+$  é o tempo e  $t_0$  o instante inicial.

Para desenvolver esta dissertação são necessárias definições e conceitos básicos relativos aos sistemas não lineares, representados por (2.1), que podem ser facilmente encontrados em (KHALIL, 1996). Neste contexto, a noção de ponto de equilíbrio é fundamental. Em um sistema dinâmico, um ponto de equilíbrio,  $\bar{x}$ , é um ponto no espaço  $\mathbb{R}^n$  para o qual as trajetórias convergem ao tempo tender ao infinito. Em outras palavras,  $\bar{x}$  é definido como um ponto de equilíbrio se  $f(t, \bar{x}) \equiv 0$ , para todo  $t \in \mathbb{R}_+$ . Em um sistema linear tem-se um único ponto de equilíbrio, o que facilita a análise, mas em um sistema não linear podem existir vários pontos de equilíbrio (com diferentes comportamentos), e portanto o conceito de estabilidade é também associado ao ponto de equilíbrio. Quando o ponto de equilíbrio não é a origem,  $\bar{x} \neq 0$ , em muitos casos é possível transladar o ponto de equilíbrio à origem fazendo uma mudança de variáveis (KHALIL, 1996), desta forma considera-se nesta dissertação que a origem é o ponto de equilíbrio a ser considerado para a análise de estabilidade.

Por exemplo, tomando o seguinte sistema não linear e invariante

no tempo:

$$\dot{x} = f(x), \quad f(\bar{x}) = 0, \quad x_0 = x(0) \quad (2.2)$$

pode-se fazer, sem perda de generalidade, a mudança de variáveis  $y = x - \bar{x}$ , que fica:

$$\dot{y} = \dot{x} = f(x) = f(y + \bar{x}) \triangleq g(y), \quad g(0) = 0 \quad (2.3)$$

Neste trabalho, tem-se interesse em desenvolver condições para caracterizar a estabilidade regional, ou seja, verificar a estabilidade de um ponto de equilíbrio, e além disso determinar uma estimativa da região de atração desse ponto, obtendo assim uma região em que é garantida a convergência das trajetórias para o ponto de equilíbrio.

**Definição 1** (Região de Atração). *Considere que  $\phi_s(t, t_0, x_0)$  seja a solução (trajetória) do sistema (2.1), para uma determinada condição inicial  $x_0$  e instante inicial  $t_0 \geq 0$ , sendo a origem o ponto de equilíbrio. Então, a região de atração  $\mathcal{R}_a$  é definida como o conjunto de todos os pontos  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  para qualquer  $t_0 \in \mathbb{R}_+$ , tal que  $\phi_s(t, t_0, x_0)$  é definida para todo  $t \geq 0$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_s(t, t_0, x_0) = 0$ .*

**Observação 1.** *A região de atração é um conjunto contrativo e invariante, ou seja, é um conjunto de estados iniciais para os quais a convergência das trajetórias ao ponto de equilíbrio é garantida. Essa definição é muito útil para estabelecer o conceito de estabilidade regional a seguir (KHALIL, 1996).*

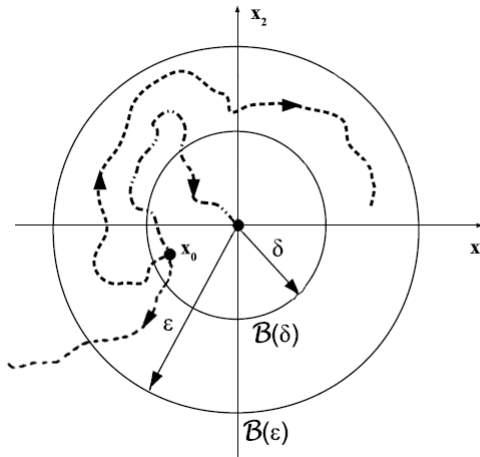
A estabilidade de um ponto de equilíbrio está associada ao comportamento das trajetórias dos estados nas vizinhanças desse ponto. Por exemplo, considere a Figura 1, onde apresentam-se três trajetórias de três sistemas dinâmicos distintos, com mesmo ponto de equilíbrio (origem) e mesmas condições iniciais. Agora, considere duas regiões definidas como  $\mathcal{B}(\epsilon)$  de raio  $\epsilon$  e  $\mathcal{B}(\delta)$  de raio  $\delta$ , ambas centradas no ponto de equilíbrio.

Apesar das trajetórias dos três sistemas iniciarem no mesmo ponto  $x_0$ , que está no interior da região  $\mathcal{B}(\delta)$ , o comportamento dinâmico é diferente. Pois, para o sistema cuja trajetória fica contida dentro da região  $\mathcal{B}(\epsilon)$ , pode-se dizer que esse sistema possui ponto de equilíbrio estável. Além disso, quando a trajetória do sistema converge para a origem, pode-se dizer que o sistema possui ponto de equilíbrio assintoticamente estável. Porém, para o sistema cuja trajetória sai do interior da região  $\mathcal{B}(\epsilon)$ , pode-se dizer que o ponto de equilíbrio é instável.

Neste exemplo, a estabilidade foi caracterizada para a vizinhança

do ponto de equilíbrio, pois este é o caso mais comum encontrado em sistemas dinâmicos não lineares. Entretanto, existem casos em que é possível caracterizar a estabilidade global, ou seja, quando as trajetórias iniciam em qualquer ponto  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , e convergem para o ponto de equilíbrio.

Figura 1 – Exemplo gráfico da noção de estabilidade.



No entanto, a estabilidade de um sistema não linear não é o único requisito necessário para caracterizar o comportamento de um sistema dinâmico. Desta forma, torna-se interessante estabelecer uma noção (desempenho) que forneça mais informações em relação à estabilidade. Por exemplo, a estabilidade exponencial além de garantir a convergência assintótica assegura um decaimento exponencial para as trajetórias dos estados. Desta forma, as trajetórias iniciadas dentro de uma região definida por  $\|x_0\| \leq \delta$  terão suas trajetórias  $x(t)$  definidas como:

$$\|x(t)\| \leq \lambda e^{-\alpha(t-t_0)} \|x_0\|, \forall t \geq t_0$$

se existir um  $\lambda$  e  $\alpha > 0$  (taxa de convergência).

Agora, não só a estabilidade está sendo verificada, mas também tem-se uma noção de desempenho através de uma taxa de decaimento (similar ao conceito de constante de tempo em um sistema linear).

Em princípio, essa noção de estabilidade exige que se conheça todas as possíveis trajetórias do sistema, o que é impossível na prática.

Por essa razão, resultados que não necessitem da solução do sistema para verificar a estabilidade são mais utilizados. Este é o caso do método direto de Lyapunov, que não exige a solução das equações diferenciais, portanto, não é necessário *a priori* conhecer as trajetórias do sistema.

A seguir, apresentam-se vários resultados relacionando o conceito de estabilidade acima definido através da caracterização da estabilidade do ponto de equilíbrio no sentido de Lyapunov. Mas antes, considere um sistema não linear invariante no tempo:

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0, \quad (2.4)$$

e seja  $V(x)$  uma função escalar continuamente diferenciável, denominada como função de Lyapunov. A derivada de  $V(x)$  ao longo das trajetórias de (2.4) é  $\dot{V}(x)$  e dada por:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \frac{\partial V}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) \end{aligned} \quad (2.5)$$

**Teorema 1** (Estabilidade por Lyapunov (KHALIL, 1996)). *Seja  $\bar{x} = 0$  um ponto de equilíbrio para o sistema  $\dot{x} = f(x)$ ,  $f(0) = 0$ , com  $f(x)$  satisfazendo as condições para existência e unicidade de soluções, e  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$  um domínio contendo a origem. Suponha que exista  $V : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R}_+$ , uma função escalar definida positiva e continuamente diferenciável no domínio  $\mathcal{D}$ , tal que*

$$V(0) = 0 \text{ e } V(x) > 0, \quad x \in \mathcal{D}, \quad x \neq 0 \quad (2.6)$$

$$\dot{V}(x) \leq 0 \text{ em } \mathcal{D} \quad (2.7)$$

então,  $\bar{x} = 0$  é estável. Por outro lado, se

$$\dot{V}(x) < 0, \quad x \in \mathcal{D}, \quad x \neq 0 \quad (2.8)$$

então,  $\bar{x} = 0$  é assintoticamente estável.

A ideia de mostrar a estabilidade de um ponto de equilíbrio a partir da verificação de certas propriedades de uma função, torna-se um instrumento atrativo na teoria de sistemas e controle, pois é possível

caracterizar a estabilidade sem precisar resolver o conjunto de equações diferenciais que definem as trajetórias do sistema.

A partir das considerações e definições apresentadas, a seguir, apresentam-se dois resultados da teoria de Lyapunov especializados ao problema de estabilidade considerado nesta dissertação. Com este objetivo, primeiro, considere o seguinte sistema não linear incerto:

$$\dot{x} = f(x, \delta), \quad x \in \mathcal{B}_x, \quad \delta \in \mathcal{B}_\delta, \quad x_0 = x(0) \quad (2.9)$$

em que  $x$  é o vetor de estados e  $\delta$  é o vetor de incertezas (possivelmente variante no tempo). Assume-se que  $f(x, \delta)$  é contínua e limitada para todo  $x \in \mathcal{B}_x$  e  $\delta \in \mathcal{B}_\delta$ , para garantir existência e unicidade de solução da equação diferencial do sistema (2.9).

**Lema 1** (Estabilidade Regional (COUTINHO, 2003)). *Considere o sistema não linear incerto (2.9), os conjuntos  $\mathcal{B}_x$  e  $\mathcal{B}_\delta$ , com  $f : \mathcal{B}_x \times \mathcal{B}_\delta \mapsto \mathbb{R}^n$  sendo uma função localmente Lipschitz tal que  $f(0, \delta) = 0$ , para todo  $\delta \in \mathcal{B}_\delta$ . Supondo que existam escalares positivos  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, c$ , e uma função continuamente diferenciável  $V : \mathcal{B}_x \mapsto \mathbb{R}$  satisfazendo as seguintes condições:*

$$\epsilon_1 x'x \leq V(x) \leq \epsilon_2 x'x, \quad \forall x \in \mathcal{B}_x \quad (2.10)$$

$$\dot{V}(x, \delta) \leq -\epsilon_3 x'x, \quad \forall x \in \mathcal{B}_x, \quad \delta \in \mathcal{B}_\delta \quad (2.11)$$

$$\mathcal{R}(c) \triangleq \{x : V(x) < c\} \subset \mathcal{B}_x \quad (2.12)$$

então, a origem do sistema é localmente exponencialmente estável. Além disso, o conjunto  $\mathcal{R}(c)$  é uma estimativa da região de atração obtida a partir da função de Lyapunov  $V(x)$ , o que significa que para todo  $x(0) \in \mathcal{R}(c)$ , a trajetória  $x(t) \in \mathcal{R}(c)$  e converge para a origem quando  $t \rightarrow \infty$ .

Apesar do resultado acima garantir a estabilidade exponencial do sistema (2.9), a seguir apresenta-se um resultado que permite caracterizar a estabilidade exponencial além de determinar um limitante inferior da taxa de convergência do sistema.

**Lema 2** (Taxa de Convergência (COUTINHO, 2003)). *Considere o Lema 1. Suponha que existam escalares positivos  $\epsilon_a, \epsilon_b, c$ , e uma função continuamente diferenciável  $V : \mathcal{B}_x \mapsto \mathbb{R}$  tendo as seguintes propriedades:*

$$\epsilon_a x'x \leq V(x) \leq \epsilon_b x'x, \quad \forall x \in \mathcal{B}_x \quad (2.13)$$

$$\dot{V}(x, \delta) \leq -2\mu V(x), \quad \forall x \in \mathcal{B}_x, \quad \delta \in \mathcal{B}_\delta \text{ e } \mu \in \mathbb{R}_+ \quad (2.14)$$

$$\mathcal{R}(c) \triangleq \{x : V(x) < c\} \subset \mathcal{B}_x \quad (2.15)$$

então, para todo  $x(0) \in \mathcal{R}(c)$  a trajetória  $x(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$  e satisfaz a seguinte relação:

$$\|x(t)\| \leq \sqrt{\frac{\epsilon_b}{\epsilon_a}} \|x(0)\| e^{-\mu t} \quad (2.16)$$

Portanto, ao se considerar sistemas não lineares incertos, ou seja, aqueles sistemas em que os parâmetros das equações diferenciais são desconhecidos mas com uma faixa de valores admissíveis, essa abordagem por Lyapunov mostra-se ainda mais vantajosa.

Assim, neste trabalho, consideram-se sistemas não lineares sujeitos a incertezas paramétricas (invariantes e/ou variantes no tempo). Desta forma, tem-se o sistema nominal que é aquele com os parâmetros de projeto e o sistema incerto que considera que o parâmetro varia em uma faixa previamente estabelecida. Então, considerando  $\delta$  um vetor de parâmetros incertos, define-se um conjunto de incertezas admissíveis como:

$$\mathcal{B}_\delta = \{\delta \in \mathbb{R}^l : \delta_{min,i} \leq \delta_{n,i} \leq \delta_{max,i}, i = 1, \dots, l\} \quad (2.17)$$

em que  $\mathcal{B}_\delta$  é uma região politópica representando os valores admissíveis de  $\delta$ .

Eventualmente, a estabilidade não pode ser verificada para qualquer politopo  $\mathcal{B}_\delta$ , mas apenas para um politopo  $\mathcal{B}_\delta$  muito pequeno formado a partir do valor nominal do parâmetro incerto considerado. Essa noção de estabilidade associada a faixa de valores do parâmetro incerto é definida como robustez. Assim, de uma maneira simplista, quanto mais robusto for um sistema, maior é faixa de valores admissíveis para  $\delta$  tal que a estabilidade do ponto de equilíbrio é garantida. Portanto, ao se referir em um sistema robusto está implícito que este é estável para a faixa de parâmetros previamente especificada.

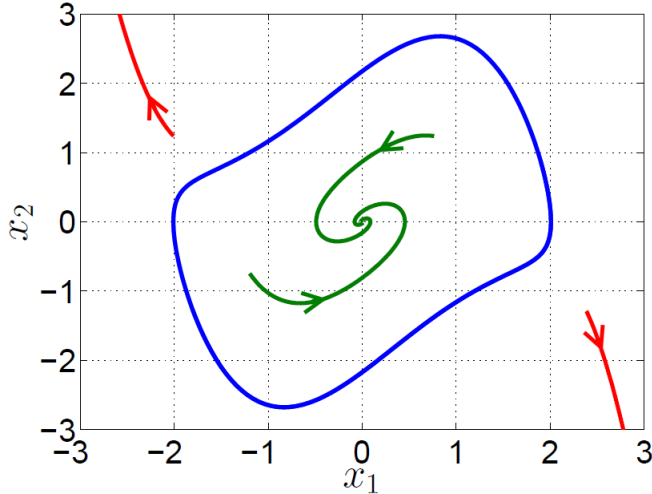
Destaca-se que geralmente a estabilidade global em sistemas não lineares não é alcançada, ou seja, para um ponto de equilíbrio nem todas as condições iniciais resultam em trajetórias estáveis. Desta forma, o tamanho/geometria da região de atração depende do tamanho do conjunto admissíveis de incertezas. Para ilustrar a relação entre robustez, estabilidade e região de atração, considere o sistema do oscilador Van der Pol em tempo reverso (KHALIL, 1996):

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \epsilon(x_1^2 - 1) \end{bmatrix} x, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

onde  $\epsilon$  é o coeficiente de amortecimento não linear.

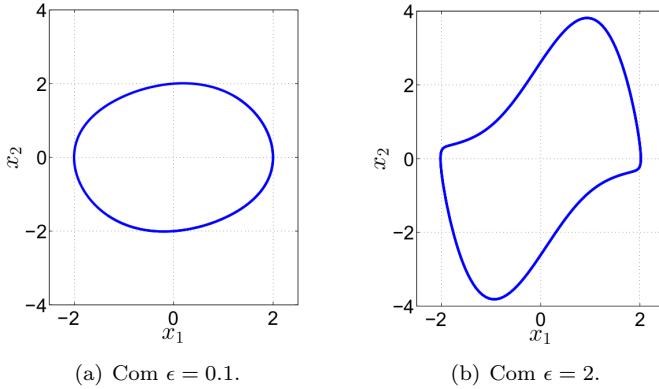
Neste oscilador tem-se a origem como o único ponto de equilíbrio, porém a estabilidade não é global, de modo que somente uma região na vizinhança da origem resulta em um conjunto cujas condições iniciais são trajetórias estáveis, como pode ser observado na Figura 2.

Figura 2 – Região de Atração do Oscilador Van der Pol em tempo reverso para  $\epsilon = 1$ .



Observa-se que o sistema de Van der Pol em tempo reverso possui um parâmetro  $\epsilon$ , que pode ser tomado como um parâmetro incerto, em que seu valor nominal é  $\epsilon = 1$ . Ao se considerar valores diferentes do nominal, a região de atração é deformada, como pode ser visto na Figura 3. Tomando-se um valor menor que a unidade,  $\epsilon = 0.1$ , por observação na Figura 3(a), aparentemente tem-se uma região de atração menor se comparada ao caso nominal, e percebe-se que o formato tende a um círculo de raio 2. Já ao se considerar um valor maior que a unidade,  $\epsilon = 2$ , o tamanho do conjunto de condições iniciais parece ser maior, ao menos em uma dada direção, como pode ser verificado na Figura 3(b).

Figura 3 – Região de Atração do Oscilador Van der Pol com variação do parâmetro.



Com esse exemplo fica claro a dependência da região de atração com o parâmetro incerto, de modo que a incerteza pode aumentar ou diminuir o tamanho da região de atração. Porém, não existe uma regra geral que define a relação entre a incerteza paramétrica e a região de atração. Em casos extremos, a variação paramétrica pode levar a uma mudança topológica no sistema, como o surgimento de novos pontos de equilíbrio e perda de estabilidade local do ponto de equilíbrio em análise (MONTEIRO, 2003). Nesta dissertação, concentra-se no caso na qual a variação paramétrica não leva a modificações topológicas no sistema.

Outro aspecto está em encontrar a expressão analítica exata da região de atração, sendo esta uma tarefa praticamente impossível para sistemas com mais de um estado. Uma alternativa é obter uma estimativa da região de atração através de conjuntos invariantes obtidos das funções de Lyapunov. As funções de Lyapunov permitem encontrar uma estimativa da região de atração através das superfícies de níveis. Desta forma, a função de Lyapunov  $V : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R}_+$  é utilizada para estimar a região de atração  $\mathcal{R}_a$ . Tomando  $V$  como uma função de Lyapunov, seja o conjunto  $\mathcal{R}(c)$  abaixo:

$$\mathcal{R}(c) = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < c\}$$

Supondo que  $V > 0$ ,  $\dot{V} < 0$ ,  $x \in \mathcal{D}$ ,  $x \neq 0$ , tem-se que o conjunto  $\mathcal{R}(c)$  é invariante e contrativo, ou seja, existe a garantia que as trajetórias convergem para o ponto de equilíbrio se iniciadas no



interior desse conjunto. Portanto,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_s(x, x_0) = 0$ , para todo  $x_0 \in \mathcal{R}(c) \subset \mathcal{R}_a$ , em que  $\mathcal{R}(c)$  é uma estimativa da região de atração (KHALIL, 1996).

Em geral, a função de Lyapunov  $V(x)$  influencia no tamanho e na forma da estimativa da região de atração  $\mathcal{R}$ . Assim, ao se considerar funções de Lyapunov mais complexas é possível obter estimativas da região de atração menos conservadoras (COUTINHO et al., 2004), ou seja, obter uma estimativa  $\mathcal{R}(c)$  mais próxima da região de atração  $\mathcal{R}_a$ . Por exemplo, em (COUTINHO; DE SOUZA; TROFINO, 2009), várias estimativas da região de atração são propostas para o sistema de Van der Pol utilizado anteriormente, sendo que cada estimativa é obtida a partir de funções de Lyapunov com diferentes complexidades. Na Figura 4, quatro estimativas são apresentadas e que foram obtidas a partir das seguintes funções de Lyapunov:

$$V_i(x) = \theta_i(x)P_i\theta_i(x), \quad i = 1, \dots, 4$$

em que:

$$\theta_1(x) = x, \quad \theta_2(x) = [x_1^2 \quad x_1x_2 \quad x_2^2 \quad \theta_1(x)']',$$

$$\theta_3(x) = [x_1^3 \quad x_1^2x_2 \quad x_1x_2^2 \quad x_2^3 \quad \theta_2(x)']',$$

$$\theta_4(x) = [x_1^4 \quad x_1^3x_2 \quad x_1^2x_2^2 \quad x_1x_2^3 \quad x_2^4 \quad \theta_3(x)']'.$$

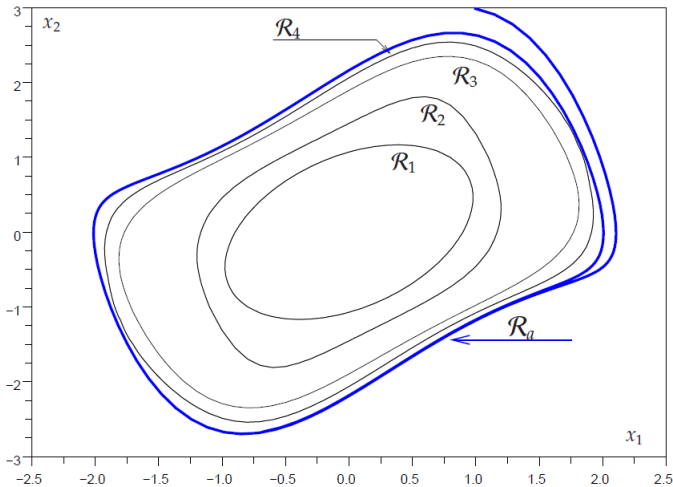
Observa-se que  $V_i(x)$  é um polinômio em  $x$  de grau  $2i$ , sendo a região de atração estimada  $\mathcal{R}_4$  (pela função de Lyapunov de oitavo grau) a que alcançou o tamanho mais próximo da região de atração exata. Portanto, a função de Lyapunov de maior complexidade é a que apresentou a estimativa de menor conservadorismo. No entanto, as funções de Lyapunov de maior complexidade produzem um maior custo computacional pelo método utilizado em (COUTINHO; DE SOUZA; TROFINO, 2009).

## 2.2 DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES - LMIS

Os problemas de controle envolvendo sistemas não lineares não são novos, porém até o final do século XX não existiam instrumentos computacionais eficientes capazes de resolvê-los. O advento de soluções computacionais eficientes através da programação semidefinida, tornou as desigualdades matriciais lineares (ou LMIs) uma interessante ferramenta para tratar problemas de controle, principalmente, aqueles

envolvendo sistemas incertos. Neste contexto, os problemas de controle clássicos foram reformulados em termos de desigualdades matriciais lineares. Nesta seção, apresentam-se algumas definições, operações algébricas envolvendo matrizes e exemplos da formulação LMI.

Figura 4 – Exemplo de estimativas de região de atração utilizando funções de Lyapunov mais complexas (COUTINHO; DE SOUZA; TROFINO, 2009).



### 2.2.1 Principais Definições

Ao tratar-se de LMIs é importante ter em vista que a solução é computacional, e esta é dependente de como o problema de controle é formulado. Uma propriedade fundamental de LMIs é que o conjunto solução de uma LMI é convexo. Neste caso, se a incerteza aparecer de forma linear nas condições LMIs o conjunto solução permanece convexo e as condições de estabilidade em uma dada região podem ser obtidas numericamente em um conjunto finito de pontos. Caso contrário, se a incerteza aparecer de forma não linear, portanto não convexa, restrições na forma de desigualdades matriciais não apresentam resultados ótimos globais e geralmente devem ser resolvidas em um grande conjunto de pontos (HINDI, 2004).

Um conjunto  $\mathcal{X}$  é dito ser convexo se para todo  $x, y \in \mathcal{X}$  e todo

$\vartheta \in \mathbb{R}$ , tal que  $0 \leq \vartheta < 1$  tem-se:

$$\vartheta x + (1 - \vartheta)y \in \mathcal{X}$$

Isto significa que um conjunto  $\mathcal{X}$  será convexo se para quaisquer dois pontos  $x$  e  $y$  pertencentes a  $\mathcal{X}$  o segmento de reta unindo estes pontos também pertencerá a este conjunto. A convexidade permite determinar a validade das soluções por LMIs em um determinado domínio através dos pontos extremos desse conjunto (no caso um politopo) diminuindo drasticamente o esforço computacional. Desta forma, a noção de conjuntos politópicos torna-se um conceito importante na solução de problemas de controle em termos de LMIs. Pode-se definir um conjunto politópico (ou simplesmente um politopo)  $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$  como sendo invólucro convexo de um número finito de pontos em  $\mathbb{R}^n$  (HINDI, 2004).

Uma desigualdade matricial linear é definida na seguinte forma (BOYD et al., 1994):

$$F(\theta) \triangleq F_0 + \theta_1 F_1 + \cdots + \theta_q F_q > 0 \quad (2.19)$$

em que  $\theta_1, \dots, \theta_q \in \mathbb{R}$  são as variáveis de decisão e  $F_0, F_1, \dots, F_q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  são matrizes simétricas conhecidas. Nesta abordagem, o problema é encontrar  $\theta$ , quando possível, tal que  $F(\theta) > 0$ .

Então, o problema na formulação LMI consiste em encontrar uma solução para as variáveis de decisão sujeita às restrições na forma de desigualdades matriciais lineares. A solução de LMIs pode ser vista sob duas perspectivas distintas quanto a qualidade da solução. Pode-se encontrar uma solução factível, que apenas respeita as restrições, ou pode-se obter uma solução ótima, ou seja, a formulação LMI pode levar em conta uma função custo a ser otimizada aliada às restrições. Um problema de otimização convexo com restrições LMIs pode ser definido na seguinte forma:

$$\min c' \theta \quad \text{sujeito a } F(\theta) > 0 \quad (2.20)$$

em que o vetor  $\theta \in \mathbb{R}^q$  é a variável a ser otimizada,  $c \in \mathbb{R}^q$  é um vetor conhecido e  $F(\theta) > 0$  é uma LMI em  $\theta$  (BOYD et al., 1994).

Desta forma, pode-se elaborar um problema de otimização, em que a solução será uma variável de decisão otimizada, ou pode-se elaborar um problema de factibilidade, neste caso há somente o interesse de verificar a existência da solução. Por exemplo, na teoria de controle a desigualdade de Lyapunov pode ser posta como um problema de factibilidade, para verificar a estabilidade de sistemas lineares invariantes no tempo, em

que a variável de decisão é a matriz  $P$ , e deseja-se encontrar qualquer matriz definida positiva que satisfaz a desigualdade (2.21).

$$A'P + PA < 0 \quad (2.21)$$

onde  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

Nesta dissertação, utiliza-se o MATLAB como plataforma para a obtenção de soluções para problemas de programação semidefinida (ou com restrições LMIs) com o auxílio dos pacotes Yalmip (LÖFBERG, 2015b) e Sedumi (LÖFBERG, 2015a). Nota-se em (2.21) que a matriz  $P$  simétrica é a variável de decisão e portanto (2.21) não se encontra na forma padrão em (2.20). A conversão da formulação LMI é feita pelo programa Yalmip e a solução da LMI é obtida pelo SeDuMi.

A seguir são apresentados os principais resultados prévios da álgebra linear envolvendo operações com desigualdades matriciais e que serão utilizados neste trabalho.

**Definição 2** (Complemento de Schur, (BOYD et al., 1994)). *Considere o seguinte conjunto de desigualdades matriciais:*

$$P(\theta) > 0, \quad Q(\theta) - B(\theta)P(\theta)^{-1}B(\theta)' > 0 \quad (2.22)$$

onde as matrizes  $P(\theta) = P(\theta)'$ ,  $Q(\theta) = Q(\theta)'$ ,  $B(\theta)$  são funções afins em  $\theta$ . Então, o conjunto de desigualdades não lineares (2.22) é equivalente à seguinte LMI:

$$\begin{bmatrix} Q(\theta) & B(\theta) \\ B(\theta)' & P(\theta) \end{bmatrix} > 0 \quad (2.23)$$

Note que o complemento de Schur permite obter uma representação convexa para as duas restrições matriciais em (2.22).

**Lema 3** (Lema de Finsler, (OLIVEIRA MAURÍCIO C. E SKELTON, 2001)). *Seja  $\sigma \in \mathbb{R}^{n_\sigma}$  um vetor,  $F \in \mathbb{R}^{n_\sigma \times n_\sigma}$  uma matriz simétrica e  $C \in \mathbb{R}^{m \times n_\sigma}$  uma matriz com  $\text{posto}(C) \leq n_\sigma$ . Então, as seguintes relações são equivalentes:*

- i.  $\sigma'F\sigma < 0, \quad \forall C\sigma = 0, \quad \sigma \neq 0;$
- ii.  $C^\perp'FC^\perp < 0;$
- iii.  $\exists \mu \in \mathbb{R} : F - \mu C'C < 0;$
- iv.  $\exists L \in \mathbb{R}^{n_\sigma \times m} : F + LC + C'L' < 0;$

onde  $C^\perp$  é uma matriz cujas colunas representam uma base para o espaço nulo de  $C$ .

Este lema permite construir uma única restrição LMI a partir de restrições de desigualdade associadas a restrições de igualdade.

**Lema 4** (Procedimento -  $\mathcal{S}$ , (BOYD et al., 1994)). *Sejam  $F_0, \dots, F_q$  funções quadráticas da variável  $\theta \in \mathbb{R}^{n_\theta}$  com a seguinte estrutura:*

$$F_i(\theta) = \theta' T_i \theta + 2u_i' \theta + v_i, \quad i = 0, 1, \dots, q \quad (2.24)$$

em que  $T_i = T_i' \in \mathbb{R}^{n_\theta \times n_\theta}$ ,  $u_i \in \mathbb{R}^{n_\theta}$  e  $v_i \in \mathbb{R}$ .

Então a seguinte condição:

$$F_0(\theta) > 0, \quad \forall \theta : F_i(\theta) \leq 0, \quad i = 1, \dots, q \quad (2.25)$$

é satisfeita se existirem escalares  $\tau_1, \dots, \tau_q$  positivos tais que:

$$F_0(\theta) - \sum_{i=1}^q \tau_i F_i(\theta) > 0, \quad \forall \theta \quad (2.26)$$

O Procedimento -  $\mathcal{S}$  permite concatenar várias restrições escalares de desigualdade em uma única LMI. Além desses resultados da álgebra, ainda é necessário apresentar mais detalhes para o caso em que as LMIs são dependentes de parâmetros (que nesta dissertação podem representar incertezas ou mesmo estados do sistema).

## 2.2.2 LMIs Dependentes de Parâmetros

As LMIs são restrições lineares ou afins nas variáveis de decisão, e com os demais termos conhecidos e constantes. No entanto, existem certas classes de sistemas que exigem que a LMI dependa de algum parâmetro. Se estes parâmetros aparecerem de forma afim nas LMIs e seu domínio for caracterizado por um conjunto politópico, a propriedade da convexidade permite resolver as LMIs apenas nos pontos extremos do domínio de parâmetros.

Nestas situações já foi verificado que a utilização do lema a seguir reduz o conservadorismo da solução (COUTINHO, 2003), este lema é uma extensão do lema de Finsler para restrições dependente de parâmetros.

**Lema 5** (Dependência de Parâmetros (COUTINHO, 2003)). *Seja  $H(z) \in \mathcal{R}^{n_z \times n_z}$  uma matriz simétrica cujos elementos são funções afins no parâmetro  $z \in \mathcal{R}^{n_z}$ . Seja  $M_z(z) \in \mathcal{R}^{m_z \times n_x}$  uma matriz afim em  $z$  tal que  $M_z(z)z = 0$  e  $\mathcal{B}_z$  uma região politópica e convexa, tal que  $z \in \mathcal{B}_z$ .*

Então a condição  $z'H(z)z > 0$  é satisfeita para todo  $z \in \mathcal{B}_z$  e  $z \neq 0$  se existir uma matriz  $L$  com as mesmas dimensões de  $M'_z$  tal que a seguinte LMI é satisfeita em todos os vértices do politopo  $\mathcal{B}_z$ :

$$H(z) + LM_z(z) + M_z(z)'L' > 0 \quad (2.27)$$

Para exemplificar problemas LMI dependente de parâmetros, considere a representação do oscilador Van der Pol em tempo reverso da equação (2.18). Esse oscilador pode ser expresso da seguinte forma:

$$\dot{x} = A(x)x \quad (2.28)$$

onde  $A(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é uma matriz cujos elementos  $a_{ij}$  são funções dependentes de  $x$ .

Uma estratégia possível para determinar a estabilidade regional de um sistema não linear na forma apresentada em (2.28) através de LMIs, utilizando a decomposição algébrica diferencial apresentada a seguir.

Então, tomando (2.28) e decompondo como:

$$\dot{x} = A_1x + A_2z \quad (2.29)$$

$$0 = A_3x + A_4z \quad (2.30)$$

onde  $A_1, A_2, A_3$  e  $A_4$  são matrizes cujos elementos são funções afins de  $x$ . Essa decomposição é equivalente ao sistema original apenas se  $A_4$  tiver posto completo para todo  $x$  no espaço considerado, de forma que  $A(x) = A_1 - A_2A_4^{-1}A_3$ .

Com relação ao oscilador de Van der Pol em tempo reverso, mas considerando o amortecimento não linear unitário ( $\epsilon = 1$ ) se obtém:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \end{bmatrix} \quad A_3 = [0 \quad x_1] \quad A_4 = [-1] \quad (2.31)$$

com  $z = x_1x_2$ . Note que a função escalar  $z$  é uma variável auxiliar introduzida ao problema para permitir a obtenção de uma restrição LMI que depende de forma afim no estado  $x$  como demonstrado a seguir.

Agora, pode-se utilizar o Lema 1 para mostrar a estabilidade. Então, escolhendo  $V(x) = x'Px$  como função Lyapunov, a derivada fica:

$$\dot{V}(x) = \dot{x}'Px + x'P\dot{x} \quad (2.32)$$

Substituindo (2.29) em (2.32), e rearranjando fica:

$$\dot{V}(x) = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}' \underbrace{\begin{bmatrix} PA_1 + A_1'P & PA_2 \\ \star & 0 \end{bmatrix}}_{\Phi} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} < 0$$

$$\forall(x, z) : \begin{bmatrix} A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = 0 \quad (2.33)$$

Note-se que  $\Phi$  é uma matriz simétrica afim nos elementos de  $P$ . Assim, pode-se aplicar o Lema 5 para obter uma solução LMI, sendo que a matriz  $M$  é definida como:

$$M(x) = \begin{bmatrix} A_3 & A_4 \end{bmatrix}$$

Portanto, o ponto de equilíbrio será localmente exponencialmente estável, se as seguintes condições via LMI forem satisfeitas:

$$P > 0 \quad (2.34)$$

$$\Phi + LM(x) + M(x)'L' < 0 \quad (2.35)$$

para todo  $x \in \mathcal{X}$ , onde  $\mathcal{X}$  é um polítopo representando o domínio dos estados do sistema. Como a restrição (2.35) é afim em  $x$ , por convexidade, pode-se buscar as variáveis de decisão  $P$  e  $L$  que satisfazem (2.34) e (2.35) nos vértices de  $\mathcal{X}$ .





### 3 O CONVERSOR BOOST

Neste capítulo, apresenta-se o conversor Boost e o modelo em malha fechada utilizado para o projeto de controle. Primeiramente, revisa-se o princípio de funcionamento do conversor em sua operação CC-CC e com correção do fator de potência. Em seguida, mostram-se as equações dinâmicas relacionadas às etapas de operação a fim de obter um modelo adequado ao objetivo de controle. Especificamente na primeira seção, trata-se do princípio de funcionamento e do modelo médio em malha aberta. Depois, destaca-se a importância e as diferenças do conversor Boost com CFP. Na seção seguinte revisa-se uma estratégia de controle e suas características. Finalmente, na última seção apresenta-se o modelo em malha fechada do conversor a ser considerado nos próximos capítulos.

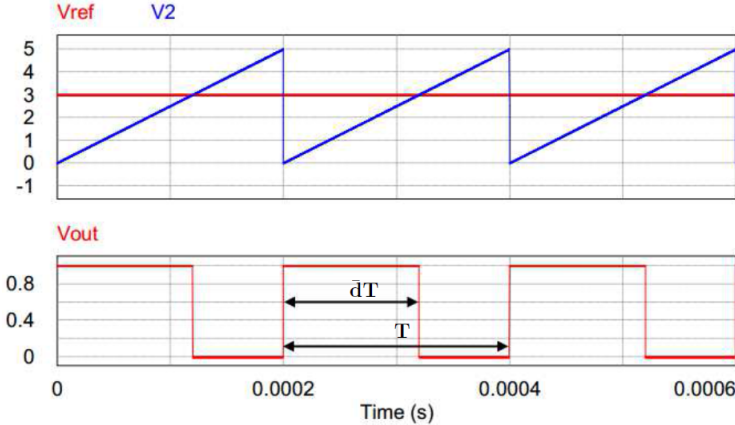
#### 3.1 PRINCÍPIO DE FUNCIONAMENTO

Os conversores estáticos processam energia através da comutação de interruptores, formando assim diferentes topologias de circuitos com diferentes formas de transferência de energia. Desta forma, a transferência de energia depende da comutação dos interruptores, e estes por sua vez dependem de algum tipo de controle, em geral, em malha fechada. Existem muitas formas de controlar os interruptores, mas a forma mais empregada é por modulação por largura de pulso - PWM com frequência fixa de comutação, que resulta em um sinal de comando de amplitude constante cuja largura define o intervalo em que os interruptores permanecem abertas ou fechadas (BARBI; MARTINS, 2000).

A modulação por largura de pulso possui um sinal chamado de portadora, em geral de alta frequência e de formato triangular ou dente de serra, e um sinal chamado de modulante oriundo do sistema de controle. Na Figura 5 ambos os sinais são mostrados como  $V_{ref}$  e  $V_2$ , respectivamente. Neste caso, o sinal resultante do PWM é uma sequência de pulsos de frequência constante  $V_{out}$  mostrados na Figura 5, onde  $V_{out}$  é o sinal de controle aplicado ao interruptor. Se o sinal modulante for constante, ou seja, está em regime permanente, então a saída terá largura fixa,  $\bar{d}$ , para um período de comutação  $T$ , em que  $d$  representa o período ativo do interruptor e é denominado razão cíclica. Portanto, nesta dissertação tem-se interesse por conversores estáticos

com frequência de comutação fixa imposta por modulação por largura de pulso (HOLMES; LIPO, 2003).

Figura 5 – Exemplo gráfico dos sinais que compõe a modulação por largura de pulso (MEZAROBA, 2015).



Além disso, tem-se interesse no conversor elevador de tensão com correção do fator de potência. Para este conversor pode-se relacionar o ganho de tensão saída/entrada com a razão cíclica em regime permanente,  $\bar{d}$ , da seguinte forma:

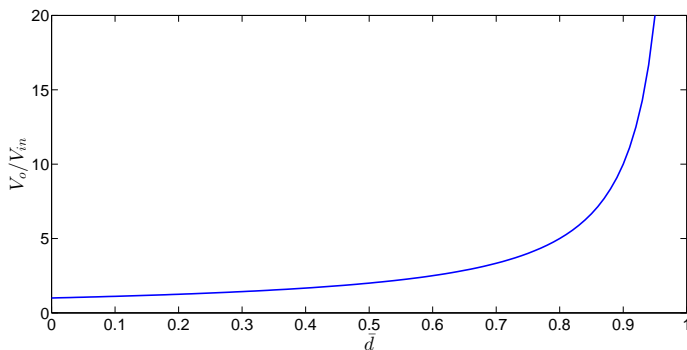
$$\frac{V_o}{V_{in}} = \frac{1}{1 - \bar{d}} \quad (3.1)$$

em que  $V_{in}$  é um parâmetro do conversor e  $V_o$  é a tensão de saída desejada.

Essa relação é graficamente expressa na Figura 6 e representa a característica de transferência estática ideal do conversor Boost. Nota-se que quando  $\bar{d}$  tende à unidade, a tensão de saída tende ao infinito, e a mínima tensão de saída é  $V_{in}$ . Observa-se da figura uma relação não linear entre o ganho estático e a razão cíclica, o que fica acentuado para valores de  $\bar{d} > 0.7$ . Portanto, existe uma relação direta entre a modulação e a razão cíclica, de modo que a razão cíclica é proporcional ao sinal modulante  $V_2$ .

A seguir aborda-se primeiro as características e operação da parte CC-CC de um conversor Boost operando em modo de condução contínua.

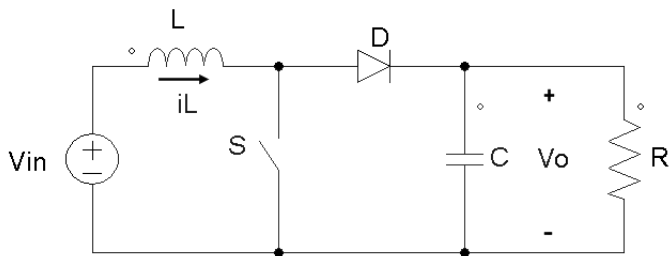
Figura 6 – Transferência estática ideal do conversor Boost.



### 3.1.1 Conversor Boost CC-CC

No conversor Boost CC-CC tem-se a tensão média de saída maior que a tensão média de entrada, conforme ganho estático anteriormente apresentado, portanto regular a tensão de saída é o principal objetivo de controle neste conversor. Ao se observar a Figura 7 que mostra o esquema do circuito do conversor, percebe-se que o interruptor  $S$  é o único elemento atuador, pois os demais são elementos passivos e a fonte  $v_{in}$ . Desta forma, utiliza-se a razão cíclica para regular a tensão de saída.

Figura 7 – Circuito de potência do conversor Boost CC-CC



Observa-se que a indutância  $L$  é colocada em série com a fonte de alimentação  $V_{in}$ , assim a entrada do circuito comporta-se como uma fonte de corrente  $i_L$ . Já na saída o capacitor  $C$  está em paralelo com a

resistência de carga  $R$ , logo, supondo o capacitor suficientemente grande, tem-se na saída o comportamento de uma fonte de tensão  $V_o$ . Entre a entrada do circuito com a fonte de corrente e a saída do circuito com a fonte de tensão estão dois elementos de comutação. Os estados do interruptor  $S$  junto ao diodo  $D$  definem duas topologias distintas para o período de comutação, criando duas etapas de operação.

A primeira etapa é quando o interruptor  $S$  está conduzindo ( $S$  está fechado - ON:  $V_S = 0$  e  $i_S = i_L$ ) e o diodo  $D$  é inversamente polarizado isolando a entrada da saída. A corrente do indutor  $i_L$  cresce até um valor máximo  $I_M$ , a corrente no diodo  $i_D$  é nula e parte da energia do capacitor é consumida pela carga, criando uma corrente constante do capacitor para a carga ( $i_o = i_C$ ). Já quando o interruptor  $S$  não está conduzindo ( $S$  está aberto - OFF:  $V_S = V_o$  e  $i_S = 0$ ) começa a segunda etapa de operação. Agora o diodo conduz interligando a entrada à saída. A corrente do indutor decresce até um valor mínimo  $I_m$ , o diodo conduz a mesma corrente do indutor,  $i_L = i_D$ , que será drenada pelo capacitor e pela carga. O funcionamento descrito é caracterizado pelo modo de condução contínuo, ou seja, o conversor funciona com a corrente do indutor sempre maior que um valor mínimo de projeto que é diferente de zero. Na Figura 8, mostram-se as formas de onda das correntes e das tensões no conversor Boost.

Observa-se na figura que para cada forma de onda de corrente existe um valor médio para um dado período de comutação. Pode-se descrever aproximadamente a dinâmica do conversor utilizando esses valores médios, e isso torna-se mais realista para altas frequências de chaveamento que é imposta pelo PWM. Assim as grandezas elétricas podem ser tomadas como constantes, por exemplo, a corrente instantânea  $i_L(t)$  pode ser considerada constante e igual a  $\langle i_L \rangle$ , e o mesmo pode ser aplicado a tensão de entrada e a tensão de saída. Desta forma, define-se o valor médio (às vezes chamado de valor médio instantâneo) para um mesmo período de comutação para as seguintes grandezas:

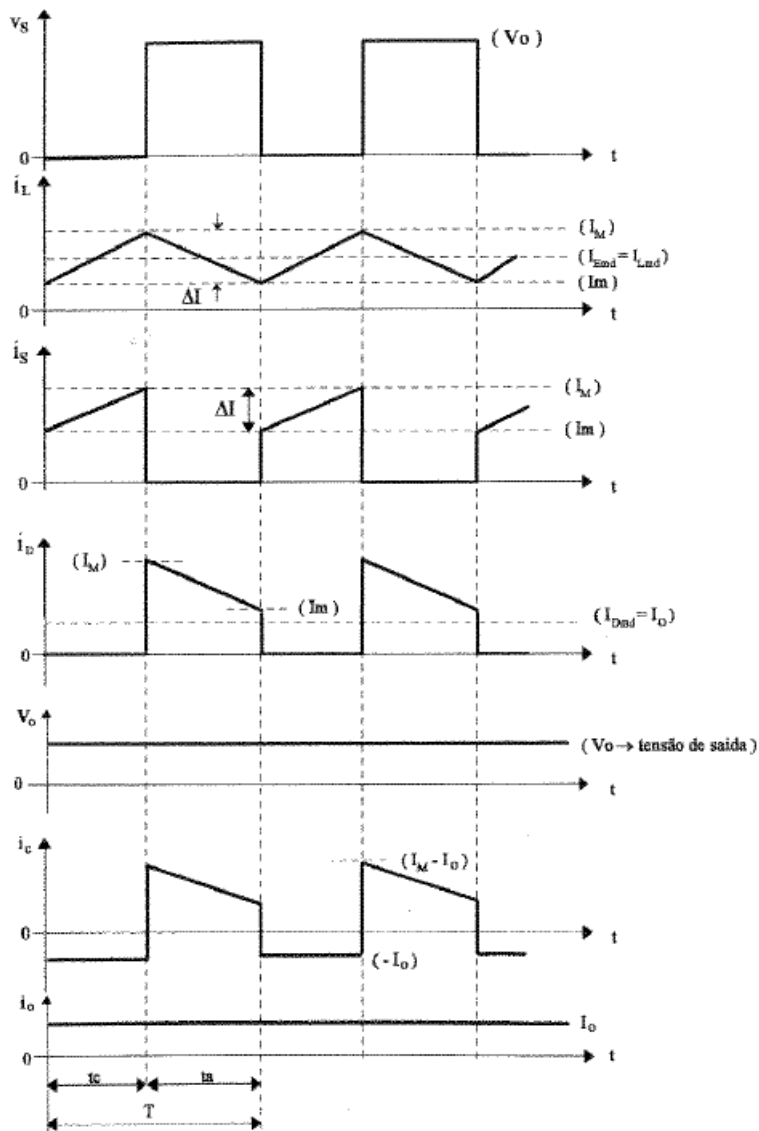
$$\langle v_{in} \rangle = \frac{1}{T_s} \int_{t-T_s}^t V_{in}(\tau) d\tau \quad (3.2)$$

$$\langle i_L \rangle = \frac{1}{T_s} \int_{t-T_s}^t i_L(\tau) d\tau \quad (3.3)$$

$$\langle v_o \rangle = \frac{1}{T_s} \int_{t-T_s}^t v_o(\tau) d\tau \quad (3.4)$$

em que  $T_s$  é o período de comutação.

Figura 8 – Formas de onda no conversor Boost (BARBI; MARTINS, 2000).

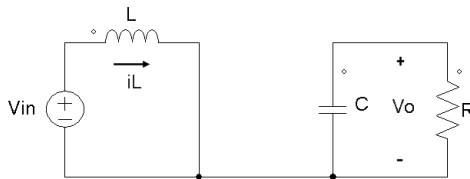


Neste trabalho, utiliza-se esse conceito de valor médio para estabelecer equações de estado para representar a dinâmica do conversor. Essa técnica, chama-se na literatura de representação pelo modelo médio. Essa forma de representação começou com os trabalhos de (MIDDLEBROOK; CUK, 1976). Mais detalhes sobre essa representação podem ser encontrados em (ERICKSON; MAKSIMOVIC, 2001; COELHO; SCHWEITZER; MARTINS, 2012).

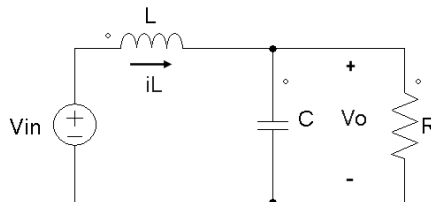
### 3.1.1.1 Modelo Médio

Para obter o modelo médio do conversor Boost em malha aberta assume-se que esteja operando em modo de condução contínua, que os dispositivos semicondutores sejam ideais e que as resistências intrínsecas dos componentes passivos são consideradas nulas. Assim, a operação do conversor apresenta duas topologias, de acordo com a posição do interruptor, fechado (ON) e aberto (OFF), conforme pode ser visto na Figura 9.

Figura 9 – Topologias de circuito do conversor Boost em um período de comutação.



(a) Topologia com o interruptor fechado - ON.



(b) Topologia com o interruptor aberto - OFF.

Da primeira topologia, quando o interruptor está fechado obtêm-se as seguintes equações diferenciais seguindo as leis básicas de circuitos

elétricos:

$$\begin{aligned} v_{in} - L \frac{di_L}{dt} &= 0 \\ \frac{v_o}{R} + C \frac{dv_o}{dt} &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

com as variáveis calculadas pelas equações (3.2), (3.3) e (3.4), que resulta na seguinte representação de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} v_{in}$$

com  $\xi = [i_L, v_o]'$  o vetor de estado. Essa representação pode ser reescrita de forma compacta:

$$\dot{\xi} = A_{on}\xi + B_{on}v_{in} \quad (3.6)$$

Na segunda topologia, quando o interruptor está aberto obtêm-se as seguintes equações diferenciais:

$$\begin{aligned} v_{in} - v_o - L \frac{di_L}{dt} &= 0 \\ i_L - \frac{v_o}{R} - C \frac{dv_o}{dt} &= 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

cuja representação de estado é:

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{C} & \frac{-1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} v_{in}$$

de forma compacta:

$$\dot{\xi} = A_{off}\xi + B_{off}v_{in} \quad (3.8)$$

Portanto, a representação de estados em (3.6) descreve o sistema dinâmico quando o interruptor está fechado, enquanto a representação em (3.8) corresponde ao sistema quando o interruptor está aberto. Desta forma, o modelo médio pode ser usado para obter uma única representação de estado, que descreve a dinâmica do conversor durante um período de comutação (JAPPE; MUSSA; COUTINHO, 2011; COELHO; SCHWEITZER; MARTINS, 2012). Então, tomando  $d$  como a razão cíclica,

ou seja, como o período em que o interruptor conduz obtêm-se:

$$\dot{\xi} = [A_{on}d + A_{off}(1 - d)]\xi + [B_{on}d + B_{off}(1 - d)]v_{in} \quad (3.9)$$

Reorganizando essa expressão, sabendo que  $B_{on} = B_{off}$ , tem-se:

$$\dot{\xi} = A_{off}\xi + (A_{on} - A_{off})\xi d + B_{off}v_{in} \quad (3.10)$$

Essa expressão pode ser modificada, para que a razão cíclica complementar seja utilizada como o sinal de controle obtendo-se:

$$\dot{\xi} = A_{on}\xi + (A_{off} - A_{on})\xi u_o + B_{off}v_{in} \quad (3.11)$$

onde  $u_o = 1 - d$  é a entrada de controle.

A representação em (3.10) e (3.11) em espaço de estados através do modelo médio do conversor Boost é não linear. Esse modelo é conhecido como bilinear, visto que a não linearidade é uma multiplicação entre o estado e o sinal de controle.

A fim de ilustrar o comportamento do modelo médio e do conversor real será apresentado um exemplo de simulação. As especificações do conversor estão na Tabela 1 e a simulação da Figura 10(a) foi realizada no *software* Psim. Nesta simulação, apresenta-se o comportamento do conversor em malha aberta para um tempo de simulação de 0,04 s, sendo que em 0,02 s é realizado uma mudança de carga para 40  $\Omega$ . Já na Figura 10(b) apresenta-se um detalhamento da tensão de saída e da corrente no indutor quando acontece a mudança de carga. Observa-se que o sinal com ondulação é a tensão de saída do conversor comutado, aqui chamado de  $v_o$ , enquanto a saída do conversor equivalente é um sinal médio, aqui nomeado de  $V_{o-med}$ .

O ponto de equilíbrio em malha aberta do conversor é dado por:

$$\begin{aligned} 0 &= A_{off}\bar{\xi} + (A_{on} - A_{off})\bar{\xi}\bar{d} + B_{off}\bar{v}_{in} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \bar{\xi} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \bar{\xi}\bar{d} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \bar{v}_{in} \end{aligned}$$

Da primeira linha matricial da expressão algébrica acima:

$$-\frac{\bar{\xi}_2}{L} + \frac{\bar{\xi}_2\bar{d}}{L} + \frac{\bar{v}_{in}}{L} \longrightarrow \bar{d} = 1 - \frac{\bar{v}_{in}}{\bar{\xi}_2} \quad (3.12)$$



Da segunda linha:

$$-\frac{\bar{\xi}_1}{C} - \frac{\bar{\xi}_2}{RC} - \frac{\bar{\xi}_1 \bar{d}}{C} \rightarrow \bar{\xi}_1 = \frac{\bar{\xi}_2}{1 - \bar{d}} = \frac{\bar{\xi}_2^2}{v_{in}} \quad (3.13)$$

Portanto, em malha aberta define-se a tensão de saída desejada em regime permanente  $\bar{v}_o$  e a alimentação  $v_{in}$ , então obtém-se a razão cíclica  $\bar{d}$  e a corrente no indutor  $i_L$ .

Tabela 1 – Especificações do circuito de potência do conversor Boost CC–CC.

Potência de Saída	$P_o = 200 \text{ W}$
Tensão de entrada RMS	$V_{in} = 50 \text{ V}$
Tensão de saída	$V_o = 100 \text{ V}$
Frequencia de comutação	$f_s = 40 \text{ kHz}$
Indutor	$L = 2.5 \text{ mH}$
Capacitor	$C_o = 8 \text{ } \mu\text{F}$
Resistor de carga	$R_o = 50 \text{ } \Omega$

Para obter o circuito equivalente do modelo médio será utilizada a equação (3.10), mas com a razão cíclica em equilíbrio que fica:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A_{off}\xi + (A_{on} - A_{off})\xi\bar{d} + B_{off}v_{in} \\ &= (A_{on}\bar{d} + (1 - \bar{d})A_{off})\xi + B_{off}v_{in} \end{aligned}$$

Voltando as variáveis originais de circuito, corrente no indutor  $i_L$  e tensão de saída  $v_o$ , tem-se:

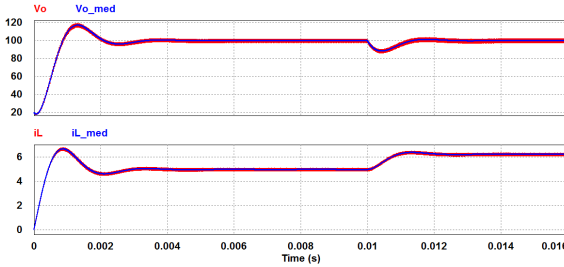
$$\begin{bmatrix} \dot{i}_L \\ \dot{v}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1 - \bar{d}}{L} \\ \frac{1 - \bar{d}}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} v_{in} \quad (3.14)$$

Observa-se que na matriz de dinâmica o valor  $1 - \bar{d}$  representa um ganho no circuito equivalente. Além disso, esse valor representa a razão cíclica complementar visto que define o tempo médio que a chave fica aberta. Portanto, apesar do sinal de controle utilizado na representação ser a razão cíclica  $d$ , a dinâmica do conversor depende da razão cíclica complementar  $u_o$ .

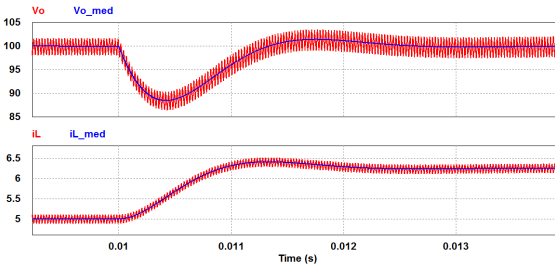
Ao usar o modelo médio para representar a dinâmica está sendo ignorado do comportamento real das harmônicas devido ao chaveamento

e às ondulações (ripple) da tensão de saída e da corrente no indutor, visto que essas grandezas são agora contínuas para um período de comutação.

Figura 10 – Simulação do modelo real e médio do conversor Boost CC–CC.



(a) Tensão de saída e corrente no indutor dos modelos real e médio.



(b) Tensão de saída e corrente no indutor quando acontece uma mudança de carga.

### 3.1.2 Conversor Boost com Correção do Fator de Potência

Nesta seção, apresenta-se o conversor Boost com correção do fator de potência. Porém, antes de tratar as características deste conversor, é preciso definir o que é fator de potência e suas implicações ao se tratar de conversores estáticos de potência. Assim, pode-se definir o fator de potência como sendo expresso pela razão da potência instantânea e a potência aparente de um dado equipamento elétrico:

$$FP = \frac{P \text{ (kW)}}{S \text{ (kVA)}} \quad (3.15)$$

Portanto, o valor do fator de potência diz respeito à eficiência com que o sistema elétrico consumidor está processando energia, evitando perdas no sistema elétrico de distribuição e transmissão. Visto que um baixo valor de  $FP$  indica que é necessário distribuir mais energia para suprir a potência requerida, ao passo que para a mesma potência requerida, mas com um alto valor de  $FP$  necessitará de menor quantidade de energia do sistema elétrico de distribuição. Logo, o fator de potência possui uma importância por causa do indicativo da qualidade da energia na rede, bem como por motivação financeira devido as perdas de distribuição e transmissão.

No entanto, a expressão (3.15) não é muito útil para entender quais são as características do sistema elétrico que prejudicam a obtenção de um alto fator de potência. Assim, considerando que a tensão ou a corrente é puramente senoidal, pode-se assumir que a potência ativa é a multiplicação entre as componentes fundamentais de tensão e corrente,  $V_{in,1}$  e  $I_{in,1}$ , e o ângulo de defasamento entre estas componentes  $\varphi$ , e a potência aparente é a multiplicação entre os valores eficazes de tensão e corrente com todas as harmônicas,  $V_{in}$  e  $I_{in}$ , tem-se:

$$FP = \frac{V_{in,1}I_{in,1}}{V_{in}I_{in}} \cos(\varphi) \quad (3.16)$$

A partir desta expressão percebe-se que o fator de potência pode ser caracterizado através do conteúdo harmônico e pelo ângulo de defasamento entre as componentes fundamentais da tensão e corrente. Então, pela Equação (3.16), torna-se claro que para obter fator de potência unitário é necessário reduzir o conteúdo harmônico,  $V_{in} \approx V_{in,1}$  e  $I_{in} \approx I_{in,1}$  e diminuir o defasamento  $\varphi$ ,  $\cos(\varphi) \approx 1$ .

Por exemplo, considere dois circuitos com fator de potência distintos, um retificador em ponte, com filtro de saída para regular a tensão, e um conversor Boost com correção do fator de potência, controlado pela técnica de valores médios. Essa técnica é mais utilizada para o conversor Boost e o circuito simulado faz parte da biblioteca de exemplos do Psim. Os esquemas elétricos dos circuitos estão na Figura 11.

Primeiro, mostram-se as tensões e correntes de entrada do conversor Boost com alto fator de potência e depois do retificador, como observa-se na Figura 12(a). Nota-se na figura que a corrente de entrada do conversor Boost é um sinal com ondulação, porém em fase com a tensão de entrada. Já em relação ao retificador a corrente está completamente diferente da forma de onda senoidal como pode ser visto na Figura 12(b).

Figura 11 – Circuitos de um retificador com filtro e um conversor Boost com CFP implementados no Psim.

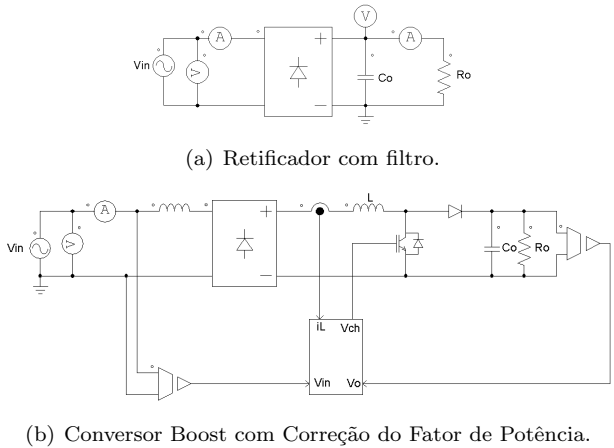
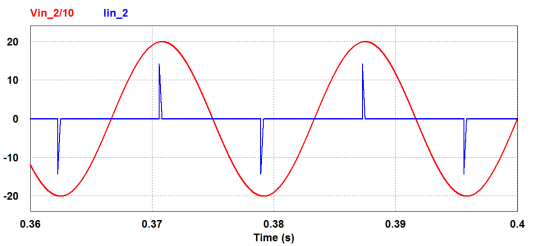
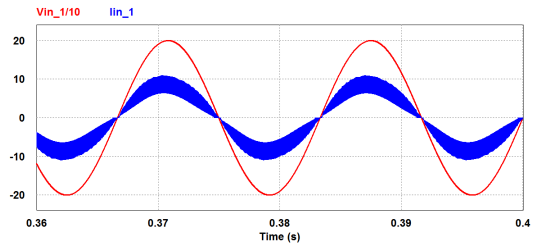


Figura 12 – Simulação comparativa das tensões e correntes de entrada de um conversor Boost com CFP e um retificador com filtro.



O software Psim oferece no ambiente de simulação o cálculo do fator de potência. Assim, usando este recurso foi obtido, para o tempo de simulação de 0,1 s até 0,15 s, um  $FP = 0,98$  para o conversor Boost, enquanto que para o circuito retificador ficou em  $FP = 0,20$ . Logo, não basta mais apenas regular a tensão de saída como no conversor CC-CC, mas é preciso garantir também que a corrente de entrada tenha a forma de onda como uma imagem da tensão de entrada, tornando assim o conversor uma carga resistiva do ponto de vista da rede de alimentação. Portanto, tem-se dois objetivos de controle no conversor Boost com correção do fator de potência: regular a tensão de saída e impor um formato na corrente do indutor assegurando alto fator de potência.

Agora, que já foi estabelecido o problema do fator de potência é preciso tratar das características dinâmicas do conversor Boost com correção do fator de potência. Como visto, no conversor Boost com CFP a corrente no indutor é uma imagem da tensão de entrada, isto significa que após o retificador tem-se duas frequências caracterizando as grandezas elétricas envolvidas com a dinâmica do conversor, sendo uma de baixa frequência relacionada com a rede e outra de alta frequência relacionada com a comutação.

Em relação a frequência da rede, esta é duplicada após o retificador. Isto significa que a corrente no indutor e a tensão de saída apresentam uma ondulação de 120 Hz. No caso da corrente do indutor a forma de onda será uma imagem da tensão retificada com um ruído de alta frequência. Já em relação a tensão de saída, idealmente constante, haverá uma ondulação em 120 Hz em torno do valor médio de saída projetado. Isto pode ser observado na Figura 13. Nesta figura, a tensão de saída  $V_o$ , a corrente real do indutor é  $I_L$  e a corrente com a dinâmica de alta frequência filtrada é chamada de  $i_{L-med}$ . A ondulação observada na corrente do indutor diz respeito a dinâmica de alta frequência, ou seja, é a influência da comutação.

Assim, em termos do valor médio das grandezas elétricas, tem-se que a corrente no indutor é um sinal contínuo na baixa frequência, pois o efeito da comutação foi filtrado ao considerar seu valor constante dentro de um período de comutação. Isto está relacionado com a abordagem da seção anterior, em que no modelo médio são ignorados comportamentos oscilatórios de alta frequência dentro de um período de comutação.

Anteriormente, definiu-se a tensão de entrada, a corrente no indutor e a tensão de saída como constantes para um período de comutação nas Equações (3.2), (3.3) e (3.4), respectivamente. Agora, ao se tratar do conversor Boost com CFP essas grandezas são periódicas, e são redefinidas como segue:

$$\langle v_{in} \rangle = \frac{1}{T_s} \int_{t-T_s}^t V_p |\sin \omega \tau| d\tau \quad (3.17)$$

$$\langle i_L \rangle = \frac{1}{T_s} \int_{t-T_s}^t i_L(\omega \tau) d\tau \quad (3.18)$$

$$\langle v_o \rangle = \frac{1}{T_s} \int_{t-T_s}^t v_o(\omega \tau) d\tau \quad (3.19)$$

em que  $T_s$  é o período de comutação.

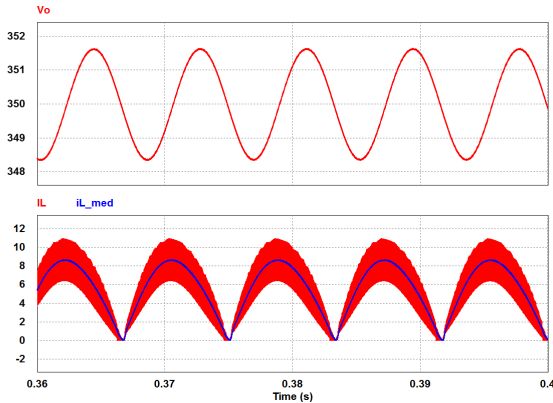
Portanto, o modelo adotado para representar a dinâmica do conversor com correção do fator de potência, com as variáveis definidas pelas equações (3.17), (3.18) e (3.19) tem a mesma forma da equação (3.11), reescrita como a seguir:

$$\dot{\xi} = A\xi + B\xi u_o + E v_{in} \quad (3.20)$$

em que  $\xi = [\xi_1, \xi_2]' = [i_L, v_o]'$  é o vetor de estados e  $u_o$  é o sinal de controle que determina o período em que a chave está aberta. E as matrizes são definidas a seguir:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Figura 13 – Formas de onda da tensão de saída e corrente no indutor (real e filtrada).

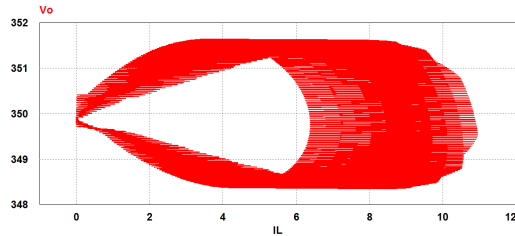


### 3.1.2.1 Trajetórias dos Estados: Dinâmica Comutada e Modelo Médio

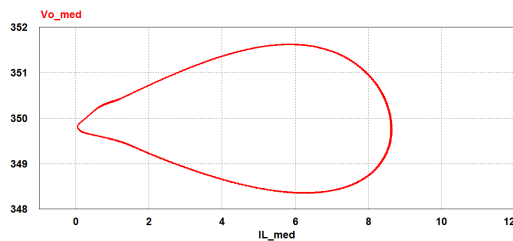
Na seção anterior, obteve-se a dinâmica do conversor através da representação pelo modelo médio. Como o modelo médio é uma aproximação da dinâmica do conversor, torna-se evidente que existem diferenças entre as trajetórias de ambas representações (real e média). Para ilustrar tal característica considere um plano  $v_o \times i_L$  da operação do conversor, ou seja, as trajetórias dos estados tem duas formas de ondas distintas.

A primeira, diz respeito ao conversor Boost com a dinâmica real, aquela que considera a comutação, tal como a tensão  $V_o$  e corrente  $I_L$  da Figura 13. A segunda está relacionada com a corrente média, cuja forma de onda não apresenta as oscilações devido à comutação, portanto é contínua do ponto de vista da frequência da rede. Ambos os planos podem ser visto nas Figuras 14(a) e 14(b).

Figura 14 – Tensão de saída e corrente no indutor formando um plano.



(a) Dinâmica com grandezas reais.



(b) Dinâmica com grandezas médias.

Observa-se que ao considerar o tempo de simulação da Figura 13 tem-se quase 5 ciclos completos de 120 Hz, assim as trajetórias no plano  $v_o \times i_L$  devem se sobrepor. Porém, percebe-se o caráter oscilatório da dinâmica comutada do conversor Boost com correção do fator de

potência. Já ao considerar a corrente filtrada tem-se trajetórias com caráter fortemente contínuas, de modo que a oscilação é devido exclusivamente à resolução da simulação. Portanto, essas figuras com o plano tensão-corrente apresentam as diferenças entre o modelo médio e a dinâmica real para representar o comportamento dinâmico dos estados do conversor Boost com CFP.

Além disso, a região de atração da Definição 1 pode não ser idêntica para ambas representações. Em outras palavras, ao estimar a região de atração do conversor Boost com CFP no plano  $v_o \times i_L$ , obtém-se uma estimativa a partir das grandezas médias da tensão de saída e corrente de entrada, logo a região estimada se refere às trajetórias da Figura 14(b), no caso do circuito simulado, o que é um inconveniente associado ao modelo médio.

## 3.2 ESTRATÉGIAS DE CONTROLE

Nesta seção, revisa-se a estratégia de controle chamada de Autocontrole da corrente, cuja principal característica é a realimentação direta da corrente para impor alto fator de potência, não possuindo assim um sinal de referência senoidal para a corrente no indutor. Porém, antes de apresentar o Autocontrole da corrente abordada-se a estratégia clássica.

### 3.2.1 Controle Clássico

O conversor Boost com correção do fator de potência possui dois principais objetivos de controle: (i) regulação da tensão de saída obtendo tensão constante; (ii) imposição do formato da corrente de entrada igual ao da tensão de entrada obtendo alto fator de potência. Esses objetivos são alcançados através de diferentes estratégias, mas a mais empregada utiliza a técnica de valores médios (TODD, 1996). Esta técnica consiste em controlar a corrente do indutor utilizando uma corrente de referência para impor na corrente de entrada o formato da tensão de entrada, enquanto a tensão de saída é regulada através da amplitude da corrente drenada pelo conversor.

Nesta técnica, para controlar a corrente no indutor, utilizam-se duas etapas, onde uma gera o sinal de referência da corrente e outra o sinal de controle. Observa-se que nesta estratégia o sinal de controle é a razão cíclica  $d$ . A etapa que gera o sinal de referência da corrente



consiste de uma multiplicação entre o sinal que regula a tensão de saída e a tensão de entrada. Desta forma, do sinal que regula a tensão de saída obtém-se a amplitude e da tensão de entrada o formato para a corrente de referência. Esta referência por sua vez é comparada com uma amostra da corrente do indutor e processada para gerar o sinal de controle adequado para a modulação PWM que comanda a comutação do interruptor. Por essa descrição torna-se evidente que a tensão de entrada é diretamente a responsável pela imposição do formato na corrente de entrada.

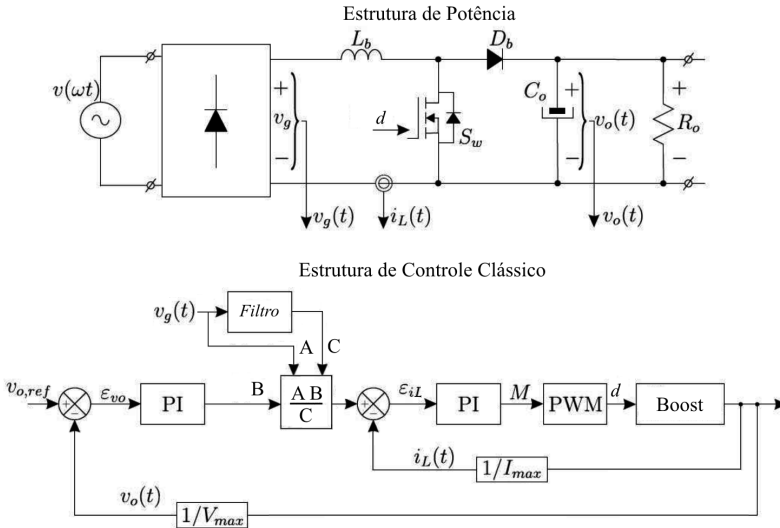
Então, a estrutura de controle desta técnica pode ser caracterizada por duas malhas de realimentação, uma para cada etapa, como pode ser visto na Figura 15. A malha interna realimenta a corrente do indutor, enquanto a malha externa realimenta a tensão de saída, e para conectar as malhas utiliza-se um multiplicador que também recebe a tensão de entrada retificada e a tensão de entrada filtrada. Essa tensão de entrada filtrada serve para manter um valor de referência constante frente variações da tensão de entrada. Portanto, a lei de controle é não linear devido essa multiplicação, apesar de em cada uma das malhas ser utilizado controladores lineares do tipo PI. Embora a lei de controle seja não linear, classicamente, utiliza-se abordagem no domínio da frequência e ferramentas lineares para o projeto dos controladores PI, o que significa que o projeto de controle não leva em conta a lei de controle por completo, mas somente as partes relativas ao PI.

Portanto, a estratégia clássica na concepção linear tem o princípio de controle da corrente baseado na imposição da tensão sobre o indutor, a fim de controlar sua corrente. Quando o interruptor está fechado a tensão sobre o indutor é a própria alimentação  $v_g(t)$ , pois a entrada do conversor está isolada da saída, mas quando a chave está aberta a tensão sobre indutor depende da diferença entre a tensão de entrada e a tensão equivalente da saída vista sobre a chave  $v_2(t)$ , logo a tensão sobre o indutor é definida como:

$$v_L(t) = v_g(t) - v_2(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad (3.21)$$

Ao supor que a tensão de entrada mantém seu formato e o valor eficaz estável, isto é, sem perturbações, todo o controle da tensão do indutor depende da tensão  $v_2(t)$ , ou seja, depende da tensão equivalente da saída vista sobre o interruptor, o que evidencia a importância da tensão de entrada sob a comutação do interruptor. Então, a razão cíclica com a qual o interruptor é comandado define a tensão  $v_2(t)$ , que por consequência determina a tensão resultante sobre o indutor.

Figura 15 – Diagrama de controle da corrente no indutor pela estratégia clássica.



Em outras palavras, nessa estratégia a tensão de entrada é vista como uma perturbação, logo há necessidade de um sinal de referência para a corrente do indutor, pois somente a tensão equivalente da saída vista sobre a chave é insuficiente para o controle de  $v_L(t)$ .

### 3.2.2 Autocontrole da Corrente

Ao utilizar o autocontrole da corrente proposta em (BORGONOVO et al., 2005), a tensão de entrada é considerada uma referência no modelo, o que dispensa uma referência para corrente, sendo possível haver a realimentação direta da mesma, ainda assim garantindo um alto fator de potência. Nisto consiste a principal diferença entre as estratégias de controle. Essa mudança de perspectiva em relação a tensão de entrada também tem consequências sobre a estrutura de controle, ou seja, sobre a lei de controle e o funcionamento do conversor em malha fechada.

A lei de controle proposta em (BORGONOVO et al., 2005) consiste em gerar a tensão  $v_2(t)$  diretamente da amostra da corrente. Como resultado desta abordagem, pode-se simplificar a complexidade do controle da corrente, reduzindo um dos controladores a um proporcional,

como pode ser observado pelo diagrama de blocos da Figura 16.

Nesta técnica, a tensão  $v_2(t)$  é definida pela razão cíclica complementar, pois essa tensão é nula com a chave fechada. Assim, a modulação PWM é responsável por prover o sinal de controle adequado a chave. Isto pode ser expresso como:

$$v_2(t) = [1 - d(t)]v_o \quad (3.22)$$

em que  $d(t)$  é a razão cíclica. Ao se utilizar a estratégia de controle da Figura 16, mas com apenas um controlador proporcional na malha de controle da corrente, tem-se:

$$1 - d(t) = K i_L(t) \quad (3.23)$$

Juntando as equações (3.22) e (3.23) tem-se:

$$v_2(t) = i_L(t)Kv_o \quad (3.24)$$

Da definição da tensão sobre o indutor em (3.21):

$$v_L(t) = v_g(t) - v_2(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad (3.25)$$

Como a tensão  $v_2(t)$  é definida por (3.24), então, substituindo-a em (3.25):

$$L \frac{di_L(t)}{dt} = v_g(t) - i_L(t)Kv_o \quad (3.26)$$

O ponto de equilíbrio pode ser calculado com a derivada igual a zero:

$$v_g(t) - i_L(t)Kv_o = 0 \quad (3.27)$$

De onde obtém-se:

$$I_L = \frac{V_g}{KV_o} \quad (3.28)$$

Com  $I_L$  e  $V_o$  sendo respectivamente, a corrente no indutor e a tensão na saída em regime permanente. Essa expressão significa que a amplitude da corrente no indutor é inversamente proporcional ao ganho  $K$ .

Além disso, aplicando a transformada de Laplace em (3.26):

$$I_L(s)sL = V_g(s) - I_L(s)KV_o \quad (3.29)$$

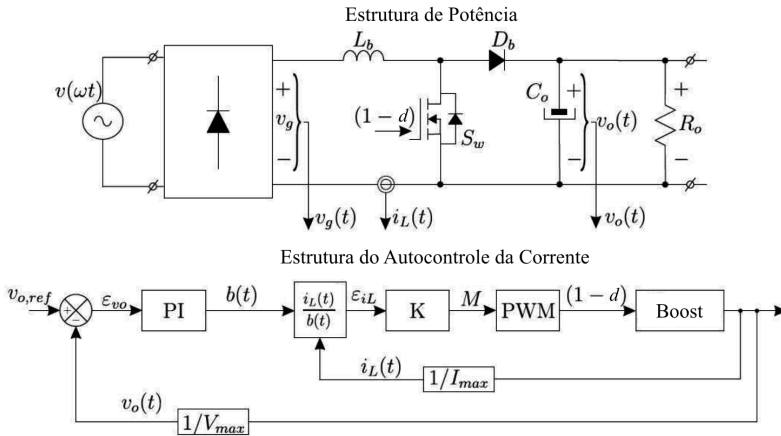
Que resulta na seguinte função de transferência em malha fechada:

$$\frac{I_L(s)}{V_g(s)} = \frac{1/L}{s + KV_o/L} \quad (3.30)$$

Como a indutância  $L$  e a tensão em regime permanente  $V_o$  são dados do projeto do conversor, a posição do polo é livremente alocável pelo ganho  $K$ . Assim, essa estratégia de controle é equivalente a um filtro sobre a tensão de entrada com corrente do indutor como saída, podendo atenuar possíveis componentes harmônicas presentes na tensão. Portanto, uma realimentação direta da corrente do indutor com um controlador proporcional é suficiente para estabilização e obtenção de um alto fator de potência.

No entanto, ao considerar a regulação da tensão de saída é preciso ter em vista que a amplitude da corrente no indutor é inversamente proporcional ao ganho  $K$  e a tensão  $V_o$ , tal como expresso pela equação (3.26), desta forma, ao inserir a malha de controle da tensão de saída é preciso implementar um termo racional do tipo  $1/x$  que ajusta a saída do controlador PI com o ganho  $K$ . Essa é a solução proposta por (BORGONOVO et al., 2005) para tratar da relação não linear entre a tensão de saída e a amplitude da corrente no indutor.

Figura 16 – Diagrama de controle da corrente no indutor pelo autocontrole da corrente.



A fim de ilustrar o funcionamento do conversor em malha fechada, utilizando a estratégia do autocontrole da corrente, apresenta-se um

exemplo de conversor, cujas especificações foram retiradas de (JAPPE; MUSSA; COUTINHO, 2011). Neste trabalho, esse conversor será usado como referência nas simulações, de modo a servir como um projeto de controle para comparação nos próximos capítulos.

As especificações do circuito de potência estão na Tabela 2. Enquanto os dados do controlador estão na Tabela 3. Assim, o esquema de controle está na figura 16.

Tabela 2 – Especificações do circuito de potência do conversor Boost com CFP.

Potência de Saída	$P_o = 600 \text{ W}$
Tensão de entrada RMS	$V_{ac} = 220 \text{ V}$
Tensão de saída	$V_o = 400 \text{ V}$
Frequencia de comutação	$f_s = 50 \text{ kHz}$
Frequencia da rede	60 Hz
Indutor	$L = 2 \text{ mH}$
Capacitor	$C_o = 1 \text{ mF}$
Resistor de carga	$R_o = 260 \text{ } \Omega$
Ganho de realimentação da malha $i_L$	$I_{max} = 15 \text{ A}$
Ganho de realimentação da malha $V_o$	$V_{max} = 490 \text{ V}$

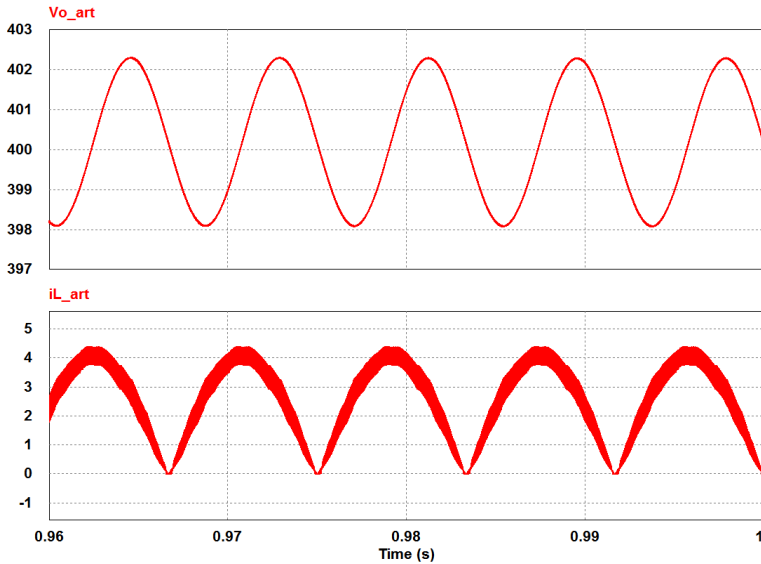
Tabela 3 – Ganho do controlador de referência (JAPPE; MUSSA; COUTINHO, 2011).

$K$	$K_p$	$K_i$
9,52	2,8	140

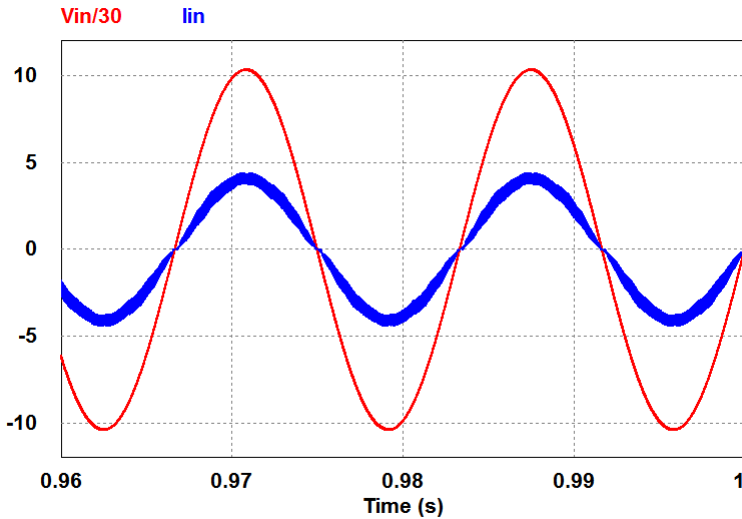
Pode-se observar a tensão de saída com a ondulação de 120 Hz na Figura 17(a), bem como a corrente no indutor. Pode-se notar na figura, que a corrente é uma imagem da tensão de entrada. Além disso, ao realizar a simulação no Psim, e usando os mesmos recursos anteriores tem-se o  $FP = 0,99$ , este resultado numérico é um reflexo do formato de onda imposto pelo controle, que pode ser visto na Figura 17(b).

Finalmente, neste trabalho adota-se esta estratégia de controle para aplicar ao conversor Boost com correção do fator de potência. Essa escolha é realizada devido as características do autocontrole da corrente serem superiores ao controle clássico em relação a: (i) não é necessário o monitoramento da tensão de entrada (ii) atenuação de ruídos na corrente do indutor, principalmente, originados pela tensão de entrada; (iii) menor complexidade da lei de controle e (iv) obtenção de alto fator de potência.

Figura 17 – Simulação do conversor Boost autocontrolado pela corrente.



(a) Corrente no indutor e a tensão de saída em regime permanente.



(b) Tensão e corrente de entrada em regime permanente.

### 3.3 OBTENÇÃO DO MODELO MÉDIO EM MALHA FECHADA CONSIDERANDO AUTOCONTROLE DA CORRENTE

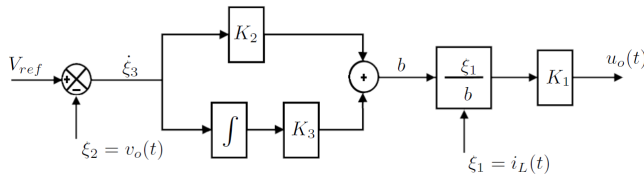
Parte-se do modelo médio dada pela equação (3.20), reescrita a seguir:

$$\dot{\xi} = A\xi + B\xi u_o + E v_{in}$$

com a razão cíclica complementar como o sinal de controle, ou seja, controlando quando a chave está aberta. Neste modelo, as grandezas elétricas instantâneas são aproximadas para um valor contante em um período de comutação, visto que a frequência da rede é muito menor que a frequência de comutação. Isto é aplicado para a tensão de entrada  $v_{in}$ , assim como para as variáveis de estado  $\xi = [\xi_1, \xi_2]' = [i_L, v_o]'$ .

A estrutura de controle utilizando o autocontrole da corrente é apresentada na figura 18, que consiste de um sinal de referência para tensão e uma amostra da tensão de saída, de onde gera um sinal de erro que será processado pelo controlador PI. A saída do PI divide uma amostra da corrente, criando um sinal de amplitude adequado para o controle da corrente no indutor.

Figura 18 – Estrutura de controle pelo autocontrole da corrente.



**Observação 2.** Observa-se na Figura 18 que a tensão de saída e corrente do indutor na entrada do controlador são as mesmas do conversor Boost, ou seja, considera-se o conversor Boost em malha fechada sem os ganhos de realimentação  $1/V_{max}$  e  $1/I_{max}$  da Figura 16.

A dinâmica do controlador PI é expressa como:

$$\begin{cases} b = K_3\xi_3 + K_2(V_{ref} - \xi_2) \\ \dot{\xi}_3 = V_{ref} - \xi_2 \end{cases} \quad (3.31)$$

em que  $b$  é a saída do PI e  $\xi_3$  é a variável de estado da dinâmica do integrador, cuja função é regular a tensão de saída.

A amplitude e a forma de onda da corrente de entrada é imposta pela malha da corrente, que consiste na realimentação da corrente do

indutor e um ganho proporcional. Ambas as malhas de controle são conectadas por um termo racional que divide uma amostra da corrente realimentada pela saída do PI que pode ser escrito como:

$$u_o = K_1 \frac{i_L}{b} = K_1 \frac{\xi_1}{b} \quad (3.32)$$

em que  $u_o$  é o sinal de controle e corresponde à razão cíclica complementar. De fato, neste trabalho considera-se o PWM com ganho unitário, o que significa que o sinal de controle é definido para  $u_o \in [0, 1]$ .

Observa-se que o controlador não depende da tensão de entrada. Assim, a dinâmica do termo racional fica:

$$u_o = \frac{K_1 \xi_1}{b} \rightarrow u_o b = K_1 \xi_1 \rightarrow 0 = -u_o b + K_1 \xi_1$$

e substituindo a expressão da saída do PI,  $b$ , da equação (3.31), tem-se a dinâmica do controlador através de uma expressão algébrica diferencial:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_3 &= V_{ref} - \xi_2 \\ 0 &= -(K_3 \xi_3 + K_2 (V_{ref} - \xi_2)) u_o + K_1 \xi_1 \end{aligned} \quad (3.33)$$

Ao acrescentar na equação (3.33) a dinâmica do conversor tem-se o sistema aumentado em malha fechada:

$$\begin{cases} \dot{\xi} &= A\xi + B\xi u_o + E v_{in} \\ \dot{\xi}_3 &= V_{ref} - \xi_2 \\ 0 &= -(K_3 \xi_3 + K_2 (V_{ref} - \xi_2)) u_o + K_1 \xi_1 \end{cases} \quad (3.34)$$

Como pode ser observado na Figura 14 o modelo médio realiza uma aproximação das grandezas elétricas de alta frequência, portanto da dinâmica comutada. Mas devido à tensão de entrada ser senoidal de baixa frequência, ao passar um período de comutação o valor médio das grandezas elétricas mudam como se fossem contínuas, seguindo a evolução no tempo da tensão de entrada em um período da frequência da rede. Assim, haverá múltiplos valores médios para representar um único período da frequência da rede. O mesmo acontece com a corrente no indutor e na tensão de saída. Portanto os estados não convergem para um ponto de equilíbrio, mas para uma trajetória cíclica, tal como observado na Figura 14(b). No entanto, como o objetivo deste trabalho é realizar a síntese de controle para um ponto de equilíbrio, pode-se aproximar essa trajetória cíclica para um ponto de equilíbrio ao aproximar a tensão de entrada senoidal por seu valor eficaz.



Ao tomar o valor eficaz da tensão de entrada utiliza-se um valor constante para a tensão de entrada para um período da frequência da rede, e dessa forma obtêm-se a corrente de entrada e a tensão de saída também constantes na frequência da rede. Assim, este procedimento permite obter um ponto de equilíbrio do sistema em malha fechada (3.34), que servirá para realizar a análise de estabilidade e a síntese do controlador.

### 3.3.1 Determinando o Ponto de Equilíbrio em Malha Fechada

Como visto no Capítulo 2, verifica-se a estabilidade regional para um ponto de equilíbrio do sistema em análise, logo, torna-se necessário determinar o ponto de equilíbrio em malha fechada do conversor Boost com CFP autocontrolado pela corrente.

Da equação (3.34) fica:  $\dot{\xi}_3 = 0 \rightarrow \bar{\xi}_2 = V_{ref}$ . E fazendo  $\dot{\xi} = 0$  temos que

$$\bar{\xi} = -(A + B\bar{u}_o)^{-1} E v_{in}^-$$

logo, tem-se o equilíbrio de  $\xi_1$  e  $\xi_2$  como:

$$\begin{bmatrix} \bar{\xi}_1 \\ \bar{\xi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v_{in}^-}{\bar{u}_o^2 R} \\ \frac{v_{in}^-}{\bar{u}_o} \end{bmatrix}$$

O que pode-se relacionar com  $\bar{\xi}_2 = \frac{v_{in}^-}{\bar{u}_o} = V_{ref}$  de onde sai  $\bar{u}_o = \frac{v_{in}^-}{V_{ref}}$ . Portanto,

$$\bar{\xi}_1 = \frac{V_{ref}}{\bar{u}_o R} = \frac{V_{ref}^2}{v_{in}^- R}$$

Então, o ponto de equilíbrio em malha fechada dos estados  $\xi_1$  e  $\xi_2$  coincidem com os de malha aberta das equações (3.12) e (3.13). Em malha fechada tem-se o ponto de equilíbrio do estado adicional inserido pelo controlador do integrador, então  $\bar{\xi}_3$  vem de

$$0 = -(K_3 \bar{\xi}_3 + K_2 (V_{ref} - \bar{\xi}_2)) \bar{u}_o + K_1 \bar{\xi}_1$$

$$0 = -(K_3 \bar{\xi}_3) \bar{u}_o + K_1 \bar{\xi}_1$$

que resulta em

$$\bar{\xi}_3 = \frac{K_1 \bar{\xi}_1}{K_3 \bar{u}_o}$$

Finalmente,

$$\bar{\xi}_1 = \frac{V_{ref}^2}{\bar{v}_{in} R} \quad (3.35)$$

$$\bar{\xi}_2 = V_{ref} \quad (3.36)$$

$$\bar{\xi}_3 = \frac{K_1 \bar{\xi}_1}{K_3 \bar{u}_o} \quad (3.37)$$

Enquanto os estados da corrente no indutor e tensão de saída dependem, unicamente, de parâmetros de projeto do conversor e da carga, o estado do integrador depende também dos parâmetros do controlador. Como posteriormente será feita uma translação para a origem do ponto de equilíbrio, torna-se necessário evitar que o ponto de equilíbrio do integrador dependa dos parâmetros do controlador. Desta forma, define-se  $\eta$  como a relação entre os ganhos que influenciam o ponto de equilíbrio do integrador:

$$\eta = \frac{K_1}{K_3} = \text{constante} \quad (3.38)$$

A condição acima não é necessária ao realizar a análise de estabilidade, pois os ganhos do controlador são conhecidos *a priori* para determinar o ponto de equilíbrio. No entanto, ao realizar a síntese, como o ponto de equilíbrio depende do controlador essa relação não está definida porque os ganhos ainda não foram determinados, o que acrescentaria uma dificuldade adicional a síntese.

Para superar este problema, deve-se tomar algum valor de  $\eta$  conhecido quando for realizada a síntese. Assim, neste trabalho, considera-se que o parâmetro  $\eta$  seja conhecido. Por exemplo, na ilustração utilizada anteriormente, considerou-se o ponto de equilíbrio utilizado na referência (JAPPE; MUSSA; COUTINHO, 2011). Desta forma, o ponto de operação do integrador é fixado como se fosse um parâmetro de projeto do conversor sendo transparente a etapa de síntese dos parâmetros do controlador.

### 3.3.2 Representação em Espaço de Estados

Nesta dissertação são objetivos estabelecer as condições para verificar a rejeição de perturbação e a estabilidade robusta. Então, para obter uma representação de estado adequada considera-se duas situações no modelo:

i) Perturbação na tensão de entrada:

Como foi visto, a tensão de entrada afeta a corrente no indutor, então perturbações na tensão de entrada irão produzir transitórios na corrente. Por isso, a fim de expressar a perturbação no valor da tensão  $v_{in}$  considera-se composta por um termo conhecido,  $\bar{W} = v_{in}^-$ , e um termo incerto,  $w$ , ficando:

$$v_{in} = \bar{W} + w$$

Além disso, neste trabalho será considerado que essa perturbação é de energia limitada, portanto pode-se definir um conjunto de perturbações admissíveis  $\mathcal{W}$  como:

$$\mathcal{W} \triangleq \{w \in \mathcal{L}_2 : \|w\|_2^2 \leq \lambda_1, \lambda_1 > 0\} \quad (3.39)$$

em que

$$\|w\|_2^2 = \int_0^\infty w(t)'w(t)dt < \infty \quad (3.40)$$

ii) Incerteza de carga:

Em relação à incerteza de carga considera-se um conjunto limitado de faixas de valores admissíveis  $\mathcal{B}_\delta$ . Assim, a carga não poderá assumir qualquer valor, mas está dentro de uma faixa com limites em torno do valor nominal. Por conveniência, toma-se a carga como a condutância, pois esta tem uma relação diretamente proporcional à corrente no indutor. Logo, fazendo  $Y_o = 1/R$ , tem-se que o  $\bar{\xi}_1$  e  $\bar{\xi}_3$  podem ser redefinidos como:

$$\bar{\xi}_1(Y_o) = \frac{V_{ref}^2}{v_{in}^-} Y_o \quad (3.41)$$

$$\bar{\xi}_3(Y_o) = \frac{K_1}{K_3 \bar{u}_o} \bar{\xi}_1(Y_o) = \frac{\eta}{\bar{u}_o} \bar{\xi}_1(Y_o) \quad (3.42)$$

em que  $Y_o = \bar{Y}_o + \delta Y_o$ , com  $\bar{Y}_o$  a carga nominal e  $\delta Y_o$  a incerteza.

A partir desta definição  $\delta Y_o$  define a amplitude máxima e mínima da mudança de carga admitida no sistema, e por consequência a amplitude da corrente no indutor em regime permanente. Como, neste trabalho, supõe-se que a carga é variante no tempo, deve-se também caracterizar a variação no tempo da carga. Neste trabalho, toma-se a incerteza de carga,  $\delta Y_o$ , limitada em amplitude e a mudança de carga,  $\delta \dot{Y}_o$ , como limitada em energia. Portanto, o conjunto de incerteza na carga admissível é definido como:

$$\tilde{\mathcal{B}}_\delta = \{\delta Y_o : \delta Y_o \in \mathcal{B}_\delta, \|\delta \dot{Y}_o\|_2 \leq \lambda_2\} \quad (3.43)$$

onde

$$\mathcal{B}_\delta = \{\delta Y_o : \rho_1 \leq \delta Y_o \leq \rho_2\} \quad (3.44)$$

é um politopo como definido anteriormente, cujo  $\rho_1$  e  $\rho_2$  são escalares que limitam a magnitude da variação da carga admissível. Enquanto,

$$\|\delta \dot{Y}_o\|_2^2 = \int_0^\infty (\delta \dot{Y}_o(t))^2 dt < \infty \quad (3.45)$$

em que  $\lambda_2$  representa uma noção de como acontece a mudança de carga.

Por conveniência deseja-se que o ponto de equilíbrio seja a origem do sistema em malha fechada. Portanto, aplica-se uma translação do ponto de equilíbrio de (3.34) para origem de uma representação em malha fechada alternativa com novas coordenadas.

Então, muda-se as variáveis:

$$x_1 = \xi_1 - \bar{\xi}_1, \quad x_2 = \xi_2 - \bar{\xi}_2 \text{ e } x_3 = \xi_3 - \bar{\xi}_3$$

e aplica-se a perturbação no sinal de controle,  $u = u_o - \bar{u}_o$ , e na tensão de entrada,  $w = v_{in} - \bar{W}$ .

Além disso, ao considerar a incerteza na carga como variante no tempo, torna-se necessário tomar a derivada do ponto de equilíbrio nesta nova representação, obtendo-se:

$$\dot{x}_1 = \frac{-1}{L}(x_2 + \bar{\xi}_2)(u + \bar{u}_o) + \frac{1}{L}(w + \bar{W}) - \dot{\xi}_1 \quad (3.46)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{-Y_o}{C}(x_2 + \bar{\xi}_2) + \frac{1}{C}(x_1 + \bar{\xi}_1)(u + \bar{u}_o) - \dot{\xi}_2 \quad (3.47)$$

$$\dot{x}_3 = V_{ref} - (x_2 + \bar{\xi}_2) - \dot{\xi}_3 \quad (3.48)$$

$$0 = -(K_3(x_3 + \bar{\xi}_3) + K_2(V_{ref} - (x_2 + \bar{\xi}_2)))(u + \bar{u}_o) + K_1(x_1 + \bar{\xi}_1) \quad (3.49)$$

Finalmente, tem-se de forma compacta a seguinte representação em espaço de estados do sistema em malha fechada:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(\delta Y_o)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\mathbf{x}, \delta Y_o)u(t) + \mathbf{E}\mathbf{w}_a(t) \\ 0 &= \mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{K}\mathbf{D}(\mathbf{x}, \delta Y_o)u(t) \end{cases} \quad (3.50)$$

em que  $\mathbf{x}(t) = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]'$  é o vetor de estados,  $\delta Y_o \in \mathcal{B}_\delta \subset \mathbb{R}$  é a incerteza na carga,  $u(t)$  é o sinal de controle para o sistema transladado e  $\mathbf{w}_a(t) = [w \quad \delta \dot{Y}_o]'$   $\in \mathcal{W}_a \subset \mathbb{R}^2$  é o vetor de perturbações de entrada (variação de tensão de entrada e taxa de variação da carga), onde  $\mathcal{W}_a$  é definido como:

$$\mathcal{W}_a \triangleq \{\mathbf{w}_a \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{w}_a\|_2^2 \leq \lambda, \lambda > 0\} \quad (3.51)$$

com  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ .

As matrizes são definidas como:

$$\mathbf{A}(\delta Y_o) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-\bar{u}_o}{L} & 0 \\ \frac{\bar{u}_o}{C} & \frac{-\bar{Y}_o + \delta Y_o}{C} & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}, \delta Y_o) = \begin{bmatrix} \frac{-\bar{\xi}_2 + x_2}{L} \\ \frac{\bar{\xi}_1(\delta Y_o) + x_1}{C} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & \frac{-V_{ref}^2}{v_{in}} \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\eta V_{ref}^2}{\bar{u}_o v_{in}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{u}_o & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{u}_o \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, \delta Y_o) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ -(\bar{\xi}_3(\delta Y_o) + x_3) \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{K} = [K_1 \quad K_2 \quad K_3]$$

Observa-se que a matriz  $\mathbf{A}(\delta Y_o)$  tem elementos que dependem linearmente de  $\delta Y_o$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \delta Y_o)$  e  $\mathbf{D}(\mathbf{x}, \delta Y_o)$  são matrizes que dependem linearmente do estado  $\mathbf{x}$  e da incerteza  $\delta Y_o$ , as matrizes  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{E}$  são constantes, e  $\mathbf{K}$  é o vetor de ganhos do controlador. Portanto, a representação de estado em (3.50) considera o conversor Boost com CFP em malha fechada sujeito à perturbação de entrada e à mudança de carga. Utiliza-se este modelo para análise de estabilidade e desempenho no próximo capítulo.



## 4 ANÁLISE DE ESTABILIDADE E DESEMPENHO

Neste capítulo apresenta-se um método para investigar a estabilidade e desempenho do conversor Boost. Para facilitar a compreensão da metodologia proposta, neste capítulo considera-se o problema de análise de estabilidade para o sistema sem perturbação. Posteriormente, no capítulo 5 será considerado o problema completo com perturbação na entrada. Em particular, enfatiza-se o problema de estimação da região de atração supondo que a carga é incerta mas constante, além do critério de desempenho da taxa de convergência.

Então, considere o sistema em malha fechada na forma da Equação (3.50) com  $w_a(t) = 0 \forall t$  reescrito a seguir:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(\delta Y_o)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\mathbf{x}, \delta Y_o)u(t) \\ 0 &= \mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{K}\mathbf{D}(\mathbf{x}, \delta Y_o)u(t) \end{cases}$$

A partir desta representação do conversor Boost em malha fechada, define-se a análise de estabilidade deste sistema no seguinte contexto:

- Hipótese 1.** *a. A origem do sistema,  $\bar{\mathbf{x}} = 0$ , é um ponto de equilíbrio;*  
*b. As trajetórias dos estados  $\mathbf{x}$  da Equação (3.50) são limitadas e contínuas para todo  $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_x$  e  $\delta Y_o \in \mathcal{B}_\delta$  de interesse, onde  $\mathcal{B}_x$  é uma região politópica dos estados contendo a origem;*  
*c. O parâmetro incerto,  $\delta Y_o$ , é limitado em amplitude a uma região  $\mathcal{B}_\delta$ , definida como:*

$$\mathcal{B}_\delta = \{\delta Y_o : \rho_1 \leq \delta Y_o \leq \rho_2\} \quad (4.1)$$

com a carga sendo  $Y_o = \bar{Y}_o + \delta Y_o$  e  $\delta \dot{Y}_o \approx 0$ .

Com base no contexto acima estabelecido considera-se o seguinte problema:

**Problema 1.** *Considere o sistema (3.50) com a Hipótese 1. Determinar numericamente uma função de Lyapunov local e uma estimativa do sua região de atração através de um problema de programação semidefinida (LMI) supondo que o espaço de estados é limitado a uma região politópica  $\mathcal{B}_x$  e que a incerteza  $\delta Y_o$  seja limitada em amplitude ao conjunto  $\mathcal{B}_\delta$ .*

Para solucionar este problema pode-se aplicar o Lema 1. Por isso,

na próxima seção apresenta-se a candidata à função de Lyapunov.

#### 4.1 FUNÇÃO DE LYAPUNOV

Neste trabalho, tem-se um interesse especial em funções de Lyapunov polinomiais, pois estas podem apresentar estimativas da região de atração menos conservadoras para sistemas não lineares (COUTINHO; DE SOUZA; TROFINO, 2009). Assim, para estabelecer uma relação entre o sistema em (3.50) e a candidata a função de Lyapunov é conveniente reescrever o sistema na forma como segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}\dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{x})\tilde{\mathbf{x}}, \quad \tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ u \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \\ \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\delta Y_o) & \mathbf{B}(\mathbf{x}, \delta Y_o) \\ \mathbf{K}\mathbf{C} & \mathbf{K}\mathbf{D}(\mathbf{x}, \delta Y_o) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Agora, considera-se a seguinte classe de funções de Lyapunov:

$$V(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{x}}'\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{x})\mathbf{S}\tilde{\mathbf{x}}, \quad \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \tilde{\Theta}(\mathbf{x})'\mathbf{P}\tilde{\Theta}(\mathbf{x}) & \tilde{\Theta}(\mathbf{x})'\mathbf{Q} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

em que  $\mathbf{P} = \mathbf{P}' \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  e  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}$  são matrizes constantes a serem determinadas, e  $\tilde{\Theta} : \mathbb{R}^{n_x} \mapsto \mathbb{R}^{m \times n_x}$  é uma função não linear de  $\mathbf{x}$ , que define a complexidade da função candidata.

Da definição de  $\mathbf{S}$  em (4.2) e  $\tilde{\mathbf{P}}$  em (4.3), pode-se considerar que:

$$V(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{x}}'\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{x})\mathbf{S}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}'\tilde{\Theta}(\mathbf{x})'\mathbf{P}\tilde{\Theta}(\mathbf{x})\mathbf{x} = \zeta(\mathbf{x})'\mathbf{P}\zeta(\mathbf{x}) \quad (4.4)$$

com  $\zeta(\mathbf{x}) = \tilde{\Theta}(\mathbf{x})\mathbf{x}$ .

Observa-se que se escolhido  $\tilde{\Theta}(x)$  como uma matriz identidade, então a função de Lyapunov é quadrática. Porém, neste trabalho, utiliza-se uma função afim em  $\mathbf{x}$ , pois o sistema como representado em (3.50) é bilinear. Então, considere a seguinte matriz:

$$\tilde{\Theta}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \Theta(\mathbf{x}) \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \Theta(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{T}_i x_i, \quad (4.5)$$

em que  $\mathbf{T}_i \in \mathbb{R}^{n_\theta \times 3}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , são matrizes constantes. Com esta escolha a função de Lyapunov é de quarto grau, pois a função  $\zeta(\mathbf{x})$  é de segundo grau.



No Lema 1 a primeira condição a ser verificada é em relação a função de Lyapunov:

$$V(\mathbf{x}) > 0$$

Porém, de (4.4) percebe-se que  $V(\mathbf{x})$  não é uma função afim em  $\mathbf{x}$ , portanto, não é uma LMI. Assim, pode-se reescrever como:

$$\zeta(\mathbf{x})'\mathbf{P}\zeta(\mathbf{x}) > 0, \forall \mathbf{x} : \mathcal{N}_1(\mathbf{x})\zeta(\mathbf{x}) = 0$$

em que a matriz  $\mathcal{N}_1(x)$  é chamada de aniquiladora, pois terá seus elementos escolhidos de tal forma que  $\zeta(\mathbf{x})$  para todo  $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_x$  pertença ao espaço nulo de  $\mathcal{N}_1(\mathbf{x})$ .

Então, ao aplicar o Lema 5 encontra-se uma formulação convexa suficiente para testar a restrição da função de Lyapunov:

$$\mathbf{P} + \mathbf{L}_1\mathcal{N}_1(\mathbf{x}) + \mathcal{N}_1(\mathbf{x})'\mathbf{L}'_1 > 0 \quad (4.6)$$

em que deve-se encontrar uma matriz  $\mathbf{P}$  definida positiva e uma matriz  $\mathbf{L}_1$  livre com as mesmas dimensões de  $\mathcal{N}_1(\mathbf{x})'$ .

Uma vez apresentada a função de Lyapunov, de acordo com o Lema 1, para verificar a estabilidade do ponto de equilíbrio é preciso conhecer a derivada temporal da função de Lyapunov. Com essa finalidade calcula-se  $d(\tilde{\Theta}(\mathbf{x})\mathbf{x})/dt$ , deste modo:

$$\begin{aligned} d(\tilde{\Theta}(\mathbf{x})\mathbf{x})/dt &= \dot{\tilde{\Theta}}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \tilde{\Theta}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}}, \\ d(\tilde{\Theta}(\mathbf{x}))/dt &= \frac{\partial \tilde{\Theta}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^3 \mathbf{T}_i \mathbf{i}_i \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

em que  $\mathbf{i}_i$  é a  $i$ -ésima linha da matriz identidade  $\mathbf{I}_{n_x}$ .

$$d(\tilde{\Theta}(\mathbf{x})\mathbf{x})/dt = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n_x} \mathbf{T}_i \mathbf{i}_i \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \Theta(\mathbf{x}) \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}$$

mas  $\mathbf{i}_i \dot{\mathbf{x}}$  é um escalar, podendo comutar para esquerda. Assim, pode-se reescrever a expressão como segue:

$$\begin{aligned} d(\tilde{\Theta}(\mathbf{x})\mathbf{x})/dt &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n_x} \mathbf{T}_i \mathbf{x} \mathbf{i}_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} \Theta(\mathbf{x}) \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} = \hat{\Theta}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}}, \\ \hat{\Theta}(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} \Theta(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{n_x} \mathbf{T}_i \mathbf{x} \mathbf{i}_i \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Então, pode-se escrever a derivada temporal da função de Lyapunov

nov como:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\mathbf{x}) &= 2\mathbf{x}'\tilde{\Theta}(\mathbf{x})'\mathbf{P}\hat{\Theta}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} & (4.7) \\
&= 2 \begin{bmatrix} \mathbf{x}'\tilde{\Theta}(\mathbf{x})' \\ u' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}\hat{\Theta}(\mathbf{x}) & \mathbf{Q} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{u} \end{bmatrix} \\
&= 2 \begin{bmatrix} \mathbf{x}' \\ u' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\Theta}(\mathbf{x})' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}\hat{\Theta}(\mathbf{x}) & \mathbf{Q} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{u} \end{bmatrix} \\
&= 2\tilde{\mathbf{x}}' \begin{bmatrix} \tilde{\Theta}(\mathbf{x})'\mathbf{P}\hat{\Theta}(\mathbf{x}) & \tilde{\Theta}(\mathbf{x})'\mathbf{Q} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{S}}\dot{\tilde{\mathbf{x}}} \\
&= 2\tilde{\mathbf{x}}' \begin{bmatrix} \tilde{\Theta}(\mathbf{x})'\mathbf{P}\hat{\Theta}(\mathbf{x}) & \tilde{\Theta}(\mathbf{x})'\mathbf{Q} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\delta Y_o) & \mathbf{B}(\mathbf{x}, \delta Y_o) \\ \mathbf{KC} & \mathbf{KD}(\mathbf{x}, \delta Y_o) \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{x}}' \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 & \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_2' & \mathbf{V}_3 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \quad (4.8)$$

onde

$$\mathbf{V}_1 = \text{He}\{\tilde{\Theta}(\mathbf{x})'\mathbf{P}\hat{\Theta}(\mathbf{x})\mathbf{A}(\delta Y_o) + \tilde{\Theta}(\mathbf{x})'\mathbf{Q}\mathbf{K}\mathbf{C}\} \quad (4.9)$$

$$\mathbf{V}_2 = \tilde{\Theta}(\mathbf{x})'\mathbf{P}\hat{\Theta}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}, \delta Y_o) + \tilde{\Theta}(\mathbf{x})'\mathbf{Q}\mathbf{K}\mathbf{D}(\mathbf{x}, \delta Y_o) + \mathbf{C}'\mathbf{K}'\mathbf{R}' \quad (4.10)$$

e

$$\mathbf{V}_3 = \mathbf{R}\mathbf{K}\mathbf{D}(\mathbf{x}, \delta Y_o) + \mathbf{D}(\mathbf{x}, \delta Y_o)'\mathbf{K}'\mathbf{R}' \quad (4.11)$$

Ao observar a derivada da função de Lyapunov obtida percebe-se que seus elementos possuem uma relação quadrática em  $\mathbf{x}$ , o que implica que a propriedade de convexidade não está garantida. Assim, se faz necessário uma abordagem que elimina essa relação tornando todas as expressões afins em relação a  $\mathbf{x}$  e  $\delta Y_o$ . Na próxima seção apresenta-se uma formulação convexa para derivada temporal da função de Lyapunov.

#### 4.1.1 Formulação Convexa para $\dot{V}(x)$

As funções de  $\mathbf{V}_1$  e  $\mathbf{V}_2$  encontradas na derivada da função de Lyapunov não são afins nos termos dependentes. Então, para tornar a derivada da função de Lyapunov convexa utiliza-se uma nova representação do sistema a partir de (3.50) e uma relação de igualdade do tipo  $\zeta(\mathbf{x})N = \mathbf{x}$ . Esta nova representação é obtida decompondo as matrizes  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \delta Y_o)$  e  $\mathbf{D}(\mathbf{x}, \delta Y_o)$ , com a finalidade de eliminar a dependência de  $\mathbf{x}$  no interior das matrizes.

Então, considere o sistema em (3.50) na seguinte representação:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(\delta Y_o)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1(\delta Y_o)u(t) + \mathbf{B}_2\mathbf{x}(t)u(t) \\ 0 = \mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{K}\mathbf{D}_1(\delta Y_o)u(t) + \mathbf{K}\mathbf{D}_2\mathbf{x}(t)u(t) \end{cases} \quad (4.12)$$

com  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\delta Y_o$  e  $u(t)$  definidas como em (3.50), e as matrizes são mostradas abaixo:

$$\mathbf{B}_1(\delta Y_o) = \begin{bmatrix} -\bar{\xi}_2/L \\ \bar{\xi}_1/C \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1/L & 0 \\ 1/C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_1(\delta Y_o) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\bar{\xi}_3 \end{bmatrix}, \mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Agora, as matrizes  $\mathbf{B}_2$  e  $\mathbf{D}_2$  são constantes, o que permite a multiplicação com  $\mathbf{P}\hat{\Theta}(\mathbf{x})$  mantendo a convexidade, enquanto as matrizes  $\mathbf{B}_1(\delta Y_o)$  e  $\mathbf{D}_1(\delta Y_o)$  são dependentes apenas da incerteza, no entanto estas não irão multiplicar nenhum termo também dependente de  $\mathbf{x}$ . Além disso, definindo uma matriz constante  $N \in \mathbb{R}^{n \times m}$  tal que  $\zeta(\mathbf{x})N = \mathbf{x}$ , o termo  $\tilde{\Theta}(\mathbf{x})$  será retirado dos elementos  $\mathbf{V}_1$  e  $\mathbf{V}_2$ . Desta forma pode-se reescrever a derivada da função de Lyapunov como:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= 2\mathbf{x}'\tilde{\Theta}(\mathbf{x})'\mathbf{P}\hat{\Theta}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} & (4.13) \\ &= 2 \begin{bmatrix} \mathbf{x}'\tilde{\Theta}(\mathbf{x})' \\ u' \\ \mathbf{x}'u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}\hat{\Theta}(\mathbf{x}) & \mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{u} \\ \dot{\mathbf{x}}\dot{u} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

desta expressão pode-se relacionar com o sistema como segue:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{u} \\ \dot{\mathbf{x}}\dot{u} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\delta Y_o) & \mathbf{B}_1(\delta Y_o) & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{K}\mathbf{C} & \mathbf{K}\mathbf{D}_1(\delta Y_o) & \mathbf{K}\mathbf{D}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N\tilde{\Theta}(\mathbf{x})\mathbf{x} \\ u \\ \mathbf{x}u \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\delta Y_o)N & \mathbf{B}_1(\delta Y_o) & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{K}\mathbf{C}N & \mathbf{K}\mathbf{D}_1(\delta Y_o) & \mathbf{K}\mathbf{D}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta(\mathbf{x}) \\ u \\ \mathbf{x}u \end{bmatrix} \\ &= \tilde{\mathbf{A}}_1\zeta_a(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

onde

$$\tilde{\mathbf{A}}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\delta Y_o)N & \mathbf{B}_1(\delta Y_o) & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{KCN} & \mathbf{KD}_1(\delta Y_o) & \mathbf{KD}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \text{ e } \zeta_a(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \zeta(\mathbf{x}) \\ u \\ \mathbf{x}u \end{bmatrix}$$

Então, obtém-se:

$$= 2 \begin{bmatrix} \zeta(\mathbf{x})' \\ u' \\ \mathbf{x}'u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}\hat{\Theta}(\mathbf{x}) & \mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_1 \zeta_a(\mathbf{x}) \quad (4.14)$$

$$= \begin{bmatrix} \zeta(\mathbf{x}) \\ u \\ \mathbf{x}u \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{11} & \mathbf{V}_{12} & \mathbf{V}_{13} \\ \mathbf{V}'_{12} & \mathbf{V}_{22} & \mathbf{V}_{23} \\ \mathbf{V}'_{13} & \mathbf{V}'_{23} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta(\mathbf{x}) \\ u \\ \mathbf{x}u \end{bmatrix}$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \zeta_a(\mathbf{x})' \mathbf{V}_a \zeta_a(\mathbf{x}) \quad (4.15)$$

onde

$$\mathbf{V}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{11} & \mathbf{V}_{12} & \mathbf{V}_{13} \\ \mathbf{V}'_{12} & \mathbf{V}_{22} & \mathbf{V}_{23} \\ \mathbf{V}'_{13} & \mathbf{V}'_{23} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

com os elementos de  $\mathbf{V}_a$  definidos a seguir:

$$\mathbf{V}_{11} = \text{He}\{\mathbf{P}\hat{\Theta}(\mathbf{x})\mathbf{A}(\delta Y_o) + \mathbf{QKCN}\} \quad (4.16)$$

$$\mathbf{V}_{12} = \mathbf{P}\hat{\Theta}(\mathbf{x})\mathbf{B}_1(\delta Y_o) + \mathbf{QKD}_1(\delta Y_o) + N'\mathbf{C}'\mathbf{K}'\mathbf{R}' \quad (4.17)$$

$$\mathbf{V}_{13} = \mathbf{P}\hat{\Theta}(\mathbf{x})\mathbf{B}_2 + \mathbf{QKD}_2 \quad (4.18)$$

$$\mathbf{V}_{22} = \mathbf{RKD}_1(\delta Y_o) + \mathbf{D}_1(\delta Y_o)'\mathbf{K}'\mathbf{R}' \quad (4.19)$$

$$\mathbf{V}_{23} = \mathbf{RKD}_2 \quad (4.20)$$

Agora,  $\mathbf{V}_a$  da derivada da função de Lyapunov possui todos seus elementos como funções afins em  $\mathbf{x}$ , o que garante a convexidade. Porém, foi incluída em  $\dot{V}(\mathbf{x})$  a função  $\zeta(\mathbf{x})$  que é quadrática em  $\mathbf{x}$ . No entanto, isto facilmente pode ser resolvido com o Lema 5, pois os elementos de  $\zeta_a(\mathbf{x})$  não são independentes, então existe uma matriz  $\mathcal{N}_2(\mathbf{x})$  tal que:

$$\mathcal{N}_2(\mathbf{x})\zeta_a(\mathbf{x}) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}_x \quad (4.21)$$

Assim, pode-se reescrever (4.15) como:

$$\zeta_a(\mathbf{x})'\mathbf{V}_a\zeta_a(\mathbf{x}) < 0, \quad \forall \mathbf{x} : \mathcal{N}_2(\mathbf{x})\zeta_a(\mathbf{x}) = 0$$

e aplicar o Lema 5 para obter uma restrição LMI:

$$\mathbf{V}_a + \mathbf{L}_2 \mathcal{N}_2(\mathbf{x}) + \mathcal{N}_2(\mathbf{x})' \mathbf{L}'_2 < 0 \quad (4.22)$$

com  $\mathbf{L}_2$  uma matriz livre de mesma dimensão que  $\mathcal{N}_2(\mathbf{x})'$ .

## 4.2 REGIÃO DE ATRAÇÃO

Se a  $V(\mathbf{x})$  em (4.3) satisfaz as condições do Lema 1 para todo  $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_x$  e  $\delta Y_o \in \mathcal{B}_\delta$ , então mostra-se que uma região definida por uma curva de nível da função de Lyapunov é um conjunto contrativo e positivamente invariante. Visando uma solução convexa do Problema 1 considera-se o seguinte politopo que contém a origem:

$$\mathcal{B}_x = \{\mathbf{x} : -\alpha_k \leq x_k \leq \beta_k, \alpha_k, \beta_k > 0, k = 1, 2, 3\} \quad (4.23)$$

E considera-se a seguinte estimativa da região de atração:

$$\mathcal{R} = \{\mathbf{x} : V(\mathbf{x}) = \zeta(\mathbf{x})' \mathbf{P} \zeta(\mathbf{x}) \leq 1\} \quad (4.24)$$

Como  $V(\mathbf{x})$  satisfaz as condições do Lema 1 para todo  $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_x$ , então a estimativa da região de atração  $\mathcal{R}$  é um subconjunto de  $\mathcal{B}_x$  ( $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}_x$ ). E essa condição pode ser expressa como:

$$\left. \begin{array}{l} 1 + \alpha_k^{-1} c'_k \mathbf{x} \geq 0 \\ 1 - \beta_k^{-1} c'_k \mathbf{x} \geq 0 \end{array} \right\} \forall \mathbf{x} : \zeta(\mathbf{x})' \mathbf{P} \zeta(\mathbf{x}) - 1 \leq 0. \quad (4.25)$$

em que  $c_k \in \mathbb{R}^3$  é a  $i$ -ésima linha da matriz identidade  $I_3$ .

Aplica-se o Procedimento -  $\mathcal{S}$  para as expressões dos limites inferiores ( $\alpha_k$ ) e superiores ( $\beta_k$ ):

$$\exists \tilde{\tau}_k > 0 : (1 + \alpha_k^{-1} c'_k \mathbf{x}) - \tilde{\tau}_k (1 - \zeta(\mathbf{x})' \mathbf{P} \zeta(\mathbf{x})) \geq 0, \forall k=1, 2, 3$$

$$\exists \tilde{\nu}_k > 0 : (1 - \beta_k^{-1} c'_k \mathbf{x}) - \tilde{\nu}_k (1 - \zeta(\mathbf{x})' \mathbf{P} \zeta(\mathbf{x})) \geq 0, \forall k=1, 2, 3$$

Ajusta-se  $\tilde{\tau}_k = 1/2\tau_k$  e  $\tilde{\nu}_k = 1/2\nu_k$ . Então, faz-se necessário existir escalares positivos  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  e  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$ , tais que:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \zeta(\mathbf{x}) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} (2\tau_k - 1) & \tau_k \alpha_k^{-1} N_k \\ \tau_k \alpha_k^{-1} N'_k & \mathbf{P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \zeta(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \geq 0. \quad (4.26)$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \zeta(\mathbf{x}) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} (2\nu_k - 1) & -\nu_k \beta_k^{-1} N_k \\ -\nu_k \beta_k^{-1} N_k' & \mathbf{P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \zeta(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \geq 0. \quad (4.27)$$

em que  $N_k = c'_k N$ ,  $k=1, 2, 3$ .

As restrições nas Equações (4.26) e (4.27) garantem que a estimativa  $\mathcal{R}$  da região de atração seja um subconjunto do espaço  $\mathcal{B}_x$  considerado. No entanto, essas restrições não são afins em  $x$ , pois dependem de  $\zeta(\mathbf{x})$  que é uma função quadrática.

Para obter uma solução convexa aplica-se o Lema 5 em (4.26) e (4.27). Então, toma-se a seguinte restrição de igualdade:

$$\mathcal{N}_3(x) \begin{bmatrix} 1 \\ \zeta(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}_x \quad (4.28)$$

O que permite obter:

$$\begin{bmatrix} (2\tau_k - 1) & \tau_k \alpha_k^{-1} N_k \\ \tau_k \alpha_k^{-1} N_k' & \mathbf{P} \end{bmatrix} + \mathbf{H}_k \mathcal{N}_3(\mathbf{x}) + \mathcal{N}_3(\mathbf{x})' \mathbf{H}'_k \geq 0 \quad (4.29)$$

$$\begin{bmatrix} (2\nu_k - 1) & -\nu_k \beta_k^{-1} N_k \\ -\nu_k \beta_k^{-1} N_k' & \mathbf{P} \end{bmatrix} + \mathbf{M}_k \mathcal{N}_3(\mathbf{x}) + \mathcal{N}_3(\mathbf{x})' \mathbf{M}'_k \geq 0 \quad (4.30)$$

com  $\mathbf{H}_k$  e  $\mathbf{M}_k$  são matrizes livres de mesma dimensão de  $\mathcal{N}_3(\mathbf{x})'$  e  $\forall k=1, 2, 3$ .

### 4.3 ESTABILIDADE REGIONAL

Nesta seção, apresenta-se uma solução convexa do Problema 1 utilizando as definições introduzidas nas seções 4.1 e 4.2. Então, para um controlador particular com ganho  $\mathbf{K}$  a estabilidade do sistema em malha fechada é garantida em uma região contrativa e invariante, de acordo com o Lema 1, se as seguintes condições são satisfeitas:

**Teorema 2.** *Considere o sistema em (3.50), que representa a dinâmica em malha fechada do conversor Boost, e a decomposição em (4.12) para um dado controlador de ganho  $\mathbf{K}$ . Seja  $\mathcal{B}_x$  uma região politópica para os estados definida pelos escalares  $\alpha_k$  e  $\beta_k$  com  $k = 1, 2, 3$  como definida em (4.23), e  $\mathcal{B}_\delta$  o conjunto de incerteza admissível no entorno da carga nominal,  $\bar{Y}_o$ , como em (4.1). Seja  $\tilde{\Theta}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{m \times 3}$  uma dada função afim*

em  $\mathbf{x}$  tal como apresentada em (4.5).

Suponha que existem matrizes  $\mathbf{P} = \mathbf{P}'$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{L}_1$ ,  $\mathbf{L}_2$ ,  $\mathbf{H}_k$ ,  $\mathbf{M}_k$  e escalares positivos  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  e  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$  e as seguintes LMIs para todo  $(\mathbf{x}, \delta Y_o) \in \mathcal{V}(\mathcal{B}_x \times \mathcal{B}_\delta)$ :

$$\mathbf{P} + \mathbf{L}_1 \mathcal{N}_1(\mathbf{x}) + \mathcal{N}_1(\mathbf{x})' \mathbf{L}_1' > 0 \quad (4.31)$$

$$\mathbf{V}_a + \mathbf{L}_2 \mathcal{N}_2(\mathbf{x}) + \mathcal{N}_2(\mathbf{x})' \mathbf{L}_2' < 0 \quad (4.32)$$

$$\Pi_\alpha + \mathbf{H}_k \mathcal{N}_3(\mathbf{x}) + \mathcal{N}_3(\mathbf{x})' \mathbf{H}_k' \geq 0, \quad \forall k = 1, 2, 3 \quad (4.33)$$

$$\Pi_\beta + \mathbf{M}_k \mathcal{N}_3(\mathbf{x}) + \mathcal{N}_3(\mathbf{x})' \mathbf{M}_k' \geq 0, \quad \forall k = 1, 2, 3 \quad (4.34)$$

com

$$\Pi_\alpha = \begin{bmatrix} (2\tau_k - 1) & -\tau_k \alpha_k^{-1} \mathbf{N}_k \\ -\tau_k \alpha_k^{-1} \mathbf{N}_k' & \mathbf{P} \end{bmatrix}, \quad \Pi_\beta = \begin{bmatrix} (2\nu_k - 1) & \nu_k \beta_k^{-1} \mathbf{N}_k \\ \nu_k \beta_k^{-1} \mathbf{N}_k' & \mathbf{P} \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{V}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{11} & \mathbf{V}_{12} & \mathbf{V}_{13} \\ \mathbf{V}_{12}' & \mathbf{V}_{22} & \mathbf{V}_{23} \\ \mathbf{V}_{13}' & \mathbf{V}_{23}' & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

cujos elementos  $\mathbf{V}_{ij}$  são dados pelas Equações (4.16), (4.17), (4.18), (4.19) e (4.20). E com as matrizes aniquiladoras escolhidas como:

$$\mathcal{N}_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\Theta(\mathbf{x}) \\ \mathbf{0} & \mathcal{N}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{N}_3(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{x} & -\mathbf{N} \\ \mathbf{0} & \mathcal{N}_1(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{N}_2(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathcal{N}_1(\mathbf{x}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{x} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad e \quad \mathcal{N}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_2 & -x_1 & 0 \\ 0 & x_3 & -x_2 \end{bmatrix}.$$

Então, a origem do sistema em malha fechada em (3.50) é localmente exponencialmente estável. Além disso, para todo  $t \geq 0$ , para algum  $\mathbf{x}(0) \in \mathcal{R}$  e  $\delta Y_o \in \mathcal{B}_\delta$  as trajetórias dos estados tendem para origem quando o tempo tende ao infinito, onde  $\mathcal{R}$  definido em (4.24) é uma estimativa da região de atração.

**Prova do Teorema 2.** Suponha que as LMIs (4.31) e (4.32) estejam satisfeitas nos vértices politopo  $\mathcal{V}(\mathcal{B}_x \times \mathcal{B}_\delta)$ , então por convexidade também são satisfeitas para todo  $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_x$  e  $\delta Y_o \in \mathcal{B}_\delta$ .

A primeira parte desta prova é obter a partir da LMI (4.31) uma restrição semelhante à condição (2.10) do Lema 1 reescrita abaixo:

$$\epsilon_1 \mathbf{x}' \mathbf{x} \leq V(\mathbf{x}) \leq \epsilon_2 \mathbf{x}' \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}_x$$

Nota-se que  $V(\mathbf{x}) = \zeta(\mathbf{x})' \mathbf{P} \zeta(\mathbf{x})$  é a função de Lyapunov escolhida. Seja  $N$  uma matriz tal que  $N\zeta(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ . Agora considere a LMI (4.31):

$$\mathbf{P} + \mathbf{L}_1 \mathcal{N}_1(\mathbf{x}) + \mathcal{N}_1(\mathbf{x})' \mathbf{L}_1' > 0$$

Existem escalares positivos sendo um suficientemente pequeno  $\epsilon_1$  e outro suficientemente grande  $\epsilon_2$  tal que:

$$\epsilon_1 N' N \leq \mathbf{P} + \mathbf{L}_1 \mathcal{N}_1(\mathbf{x}) + \mathcal{N}_1(\mathbf{x})' \mathbf{L}_1' \leq \epsilon_2 N' N$$

desde que a LMI seja estrita e os elementos de  $\mathcal{N}_1(\mathbf{x})$  sejam limitados. Pré e pós multiplicando a expressão acima por  $\zeta(\mathbf{x})'$  e  $\zeta(\mathbf{x})$ , respectivamente, tem-se:

$$\epsilon_1 \mathbf{x}' \mathbf{x} \leq \zeta(\mathbf{x})' \mathbf{P} \zeta(\mathbf{x}) \leq \epsilon_2 \mathbf{x}' \mathbf{x} \quad (4.35)$$

uma vez que  $\mathcal{N}_1(\mathbf{x}) \zeta(\mathbf{x}) = 0$ .

A segunda parte desta prova é obter a partir da LMI (5.34) uma restrição semelhante à condição (2.10) do Lema 1 reescrita abaixo:

$$\dot{V}(\mathbf{x}, \delta Y_o) \leq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}_x$$

Agora considere a LMI (4.32):

$$\mathbf{V}_a + \mathbf{L}_2 \mathcal{N}_2(\mathbf{x}) + \mathcal{N}_2(\mathbf{x})' \mathbf{L}_2' < 0$$

como a LMI é estrita, existe um escalar positivo suficientemente pequeno  $\epsilon_3$  tal que:

$$\mathbf{V}_a + \mathbf{L}_2 \mathcal{N}_2(\mathbf{x}) + \mathcal{N}_2(\mathbf{x})' \mathbf{L}_2' \leq -\epsilon_3 N_a' N_a$$

onde  $N_a = \begin{bmatrix} N & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ . Pré e pós multiplicando a expressão acima por  $\begin{bmatrix} \zeta(\mathbf{x})' & u' & \mathbf{x}' u & w \end{bmatrix}$  e seu transposto obtém

$$\dot{V}(\mathbf{x}, \delta Y_o) \leq -\epsilon_3 \mathbf{x}' \mathbf{x}. \quad (4.36)$$

Por fim, pré e pós multiplicando a LMI em (4.33) e (4.34) por  $\begin{bmatrix} 1 & \zeta(\mathbf{x})' \end{bmatrix}$  e seu transposto, as LMIs resultam em (4.29) e (4.30), respectivamente. De modo que  $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}_x$ .

O resto desta prova segue diretamente do Lema 1.

□

A solução do Teorema 2 garante que o sistema é regionalmente estável e resulta em uma estimativa da região de atração. No entanto, a estimativa obtida pelo teorema pode ser conservadora. Assim, pode-se obter uma estimativa otimizada da região de atração para um dada



função de Lyapunov.

Neste trabalho, utiliza-se o traço da matriz  $\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \tilde{\Theta}(\mathbf{x})' \mathbf{P} \tilde{\Theta}(\mathbf{x})$  como o critério de otimização. Por exemplo, para funções quadráticas o traço da matriz  $\mathbf{P}(\mathbf{x})$  está inversamente relacionado com o tamanho da estimativa, assim quanto menor o traço maior o tamanho da estimativa. Porém, como neste caso a função de Lyapunov é polinomial aplica-se ao problema de otimização a mesma solução de (4.6) tratar o problema da dependência quadrática em  $\mathbf{x}$  de  $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ .

Portanto, para maximizar o tamanho da estimativa da região de atração utiliza-se o seguinte resultado:

**Observação 3.** *Para obter a máxima estimativa da região de atração a partir do Teorema 2 considera-se o seguinte problema de otimização:*

$$\begin{aligned} \min \\ \text{sujeito a : } \quad \varrho - \text{traço}(\mathbf{P} + \mathbf{L}_1 \mathcal{N}_1(\mathbf{x}) + \mathcal{N}_1(\mathbf{x})' \mathbf{L}'_1) > 0, \end{aligned} \quad (4.37)$$

(4.31), (4.32), (4.33) e (4.34)

Na próxima seção, apresenta-se com base nestes resultados a análise de estabilidade contendo a informação da taxa de convergência.

#### 4.4 TAXA DE CONVERGÊNCIA

Uma vez que na seção anterior foram estabelecidas condições para verificar a estabilidade regional. Nesta seção, considera-se o problema de determinar a estabilidade regional tomando-se como restrição uma dada taxa de convergência.

Isso significa que para toda condição inicial pertencente à região de atração, a trajetória converge para o ponto de equilíbrio satisfazendo a seguinte relação do Lema 2:

$$\|x(t)\| \leq \sqrt{\frac{\epsilon_b}{\epsilon_a}} \|x(0)\| e^{-\mu t} \quad (4.38)$$

Pode-se formalmente escrever o problema de análise como:

**Problema 2.** *Considere o sistema (3.50) com a Hipótese 1. Para uma dada taxa de convergência  $\mu$  determinar numericamente uma função de Lyapunov local e uma estimativa do seu domínio de atração através de um problema de programação semidefinida (LMI).*

Assim, para obter uma solução convexa do Problema 2 considere

o Lema 2 que redefine a condição em relação à derivada da função de Lyapunov como:

$$\dot{V}(\mathbf{x}, \delta Y_o) \leq -2\mu V(\mathbf{x}), \quad \forall x \in \mathcal{B}_x, \quad \delta Y_o \in \mathcal{B}_\delta \quad (4.39)$$

Esta nova restrição deve ser adicionada a derivada da função de Lyapunov da Equação (4.13), de modo que somente modifica-se o elemento  $V_{11}$  da Equação (4.16), ficando:

$$\tilde{V}_{11} = \text{He}\{\mathbf{P}\hat{\Theta}(\mathbf{x})\mathbf{A}(\delta Y_o)\mathbf{N} + \mathbf{Q}\mathbf{K}\mathbf{C}_1\mathbf{N} + \mu\mathbf{P}\}. \quad (4.40)$$

Então, para um controlador particular com ganho  $\mathbf{K}$  a estabilidade do sistema em malha fechada é garantida em uma região contrativa e invariante a uma dada taxa de convergência  $\mu$ , de acordo com o Lema 2, se as seguintes condições são satisfeitas:

**Teorema 3.** *Considere o sistema em (3.50), que representa a dinâmica em malha fechada do conversor Boost, e a decomposição em (4.12) para um dado controlador de ganho  $\mathbf{K}$ . Seja  $\mathcal{B}_x$  uma região politópica para os estados definida pelos escalares  $\alpha_k$  e  $\beta_k$  com  $k = 1, 2, 3$  como definida em (4.23), e  $\mathcal{B}_\delta$  o conjunto de incerteza admissível no entorno da carga nominal,  $\bar{Y}_o$ , como em (4.1). Seja  $\tilde{\Theta}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{m \times 3}$  uma dada função afim em  $\mathbf{x}$  tal como apresentada em (4.5). Seja  $\mu$  uma dada taxa de convergência.*

*Supondo que existem matrizes  $\mathbf{P} = \mathbf{P}'$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{L}_1$ ,  $\mathbf{L}_2$ ,  $\mathbf{H}_k$ ,  $\mathbf{M}_k$  e escalares positivos  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  e  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$  e as LMIs (4.31), (4.32), (4.33) e a definida abaixo para todo  $(\mathbf{x}, \delta Y_o) \in \mathcal{V}(\mathcal{B}_x \times \mathcal{B}_\delta)$ :*

$$\tilde{\mathbf{V}}_a + \mathbf{L}_2 \mathcal{N}_2(\mathbf{x}) + \mathcal{N}_2(\mathbf{x})' \mathbf{L}'_2 < 0 \quad (4.41)$$

com

$$\tilde{\mathbf{V}}_a = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{V}}_{11} & \mathbf{V}_{12} & \mathbf{V}_{13} \\ \mathbf{V}'_{12} & \mathbf{V}_{22} & \mathbf{V}_{23} \\ \mathbf{V}'_{13} & \mathbf{V}'_{23} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

cujos elementos  $\mathbf{V}_{ij}$  são dados pelas Equações (4.17), (4.18), (4.19), (4.20) e (4.40).

Então, a origem do sistema em malha fechada em (3.50) é localmente exponencialmente estável. Além disso, para todo  $t \geq 0$ , para algum  $\mathbf{x}(0) \in \mathcal{R}$  e  $\delta Y_o \in \mathcal{B}_\delta$  as trajetórias dos estados tendem para origem quando o tempo tende ao infinito com uma taxa  $\mu$ , onde  $\mathcal{R}$  definido em (4.24) é uma estimativa da região de atração.

A prova deste teorema é direta a partir da prova do Teorema 2 e

do Lema 2.

Além disso, a Observação 3 pode ser aplicada novamente para o resultado do Teorema 3.

## 4.5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção, apresentam-se resultados a partir dos Teoremas 2 e 3 das seções anteriores. Para este fim realizam-se exemplos mostrando aspectos da influência da escolha dos parâmetros de projeto e análise na estimativa da região de atração. Desta forma, os exemplos a seguir abordam as seguintes questões:

- Influência da escolha do politopo  $\mathcal{B}_x$  na estimativa da região de atração;
- Diferenças entre as estimativas a partir de funções de Lyapunov quadrática e polinomial;
- Influência da faixa de valores da incerteza na carga;
- Relação entre faixa de valores da incerteza e tamanho da região de atração para uma dada taxa de convergência;

Além disso, para os exemplos a seguir utiliza-se o trabalho em (JAPPE; MUSSA; COUTINHO, 2011) como referência, uma vez que este apresentou resultados de análise de estabilidade utilizando uma abordagem LMI visando obter uma estimativa de carga admissível que garantisse estabilidade para o conversor Boost com CFP autocontrolado pela corrente, cujos ganhos foram obtidos por técnicas lineares. Por essa razão, utiliza-se as especificações de potência do conversor apresentadas em (JAPPE; MUSSA; COUTINHO, 2011), reescritas na Tabela 4 e os ganhos do controlador da Tabela 5.

Observa-se que em (JAPPE; MUSSA; COUTINHO, 2011) não foi considerado a perturbação na entrada na análise de estabilidade, e não foi estimada a região de atração. Então, nos exemplos a seguir considera-se a perturbação de entrada nula, mas avalia-se a região de condições iniciais admissíveis a partir das estimativas da região de atração para as questões acima mencionadas.

**Exemplo 1.** *Considere o conversor Boost com correção do fator de potência autocontrolado pela corrente, cuja representação em malha fechada é dada pela Equação (3.50), as especificações de potência da Tabela 4 e a Hipótese 1.*

Tabela 4 – Especificações do circuito de potência do conversor de referência (JAPPE; MUSSA; COUTINHO, 2011).

Potência de Saída	$P_o = 600 \text{ W}$
Tensão de entrada RMS	$V_{ac} = 220 \text{ V}$
Tensão de saída	$V_o = 400 \text{ V}$
Frequencia de comutação	$f_s = 50 \text{ kHz}$
Frequencia da rede	60 Hz
Indutor	$L = 2 \text{ mH}$
Capacitor	$C_o = 1 \text{ mF}$
Resistor de carga	$R_o = 260 \ \Omega$

Tabela 5 – Ganho do controlador de referência (JAPPE; MUSSA; COUTINHO, 2011).

$K$	$K_p$	$K_i$
9,52	2,8	140

Neste exemplo, utiliza-se os ganhos do controlador da Tabela 5. Porém, nestes valores considera-se os ganhos de realimentação estática  $1/V_{max}$  e  $1/I_{max}$  da Figura 16. Por isso, para aplicar o método deve-se ajustar os ganhos de acordo com a Observação 2 obtendo os valores parametrizados a seguir:

$$K = [0, 6346 \ 0, 0057 \ 0, 2857]$$

Então, calcula-se o ponto de equilíbrio da Tabela 6.

Tabela 6 – Ponto de equilíbrio em malha fechada.

$\xi_1(Y_o)$	$\xi_2$	$\xi_3(Y_o)$	$\bar{u}$
2,79	400	11,3	0,55

Neste exemplo considera-se a faixa de valores da incerteza na carga,  $|\delta Y_o| \leq 0,00019 \ S$ , que representa uma mudança de carga de até  $\pm 5 \%$  no entorno do valor nominal  $\bar{Y}_o$ , o que equivale a seguinte faixa de resistência:

$$247 \ \Omega \leq R_o \leq 273 \ \Omega$$

Para aplicar o Teorema 2 é preciso definir o politopo  $B_x$ . Utiliza-se os seguintes limites:

$$\alpha = \beta = [10 \ 80 \ 6]$$

para obter um politopo simétrico.

O método exige a escolha da função de Lyapunov de acordo com a Equação (4.4). Para escolher os termos que compõe  $\zeta(\mathbf{x})$  observa-se que as derivadas dos estados  $x_1$  e  $x_2$  são não lineares, por isso torna-se atrativo escolher para a função de Lyapunov termos não lineares de  $x_1$  e  $x_2$ . Neste caso, termos de segundo grau para compor  $\zeta(\mathbf{x})$  são os mais simples de representar. Além disso, como a derivada do estado  $x_3$  é linear em relação a  $x_2$ , torna-se conveniente simplificar a escolha de termos de  $x_3$  para a função de Lyapunov.

Escolhe-se a função  $\zeta(x)$  como:

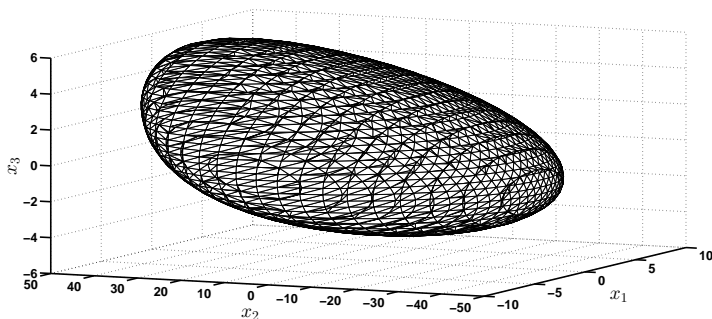
$$\zeta(x) = \tilde{\Theta}(x)x = [x_1^2 \ x_1x_2 \ x_1x_3 \ x_2^2 \ x_2x_3 \ x_1 \ x_2 \ x_3]'$$
 (4.42)

em que os termos que contêm  $x_1$  e  $x_2$  são de segundo grau. Desta forma, tem-se as seguintes matrizes para formar a função  $\tilde{\Theta}(x)$  da Equação (4.5):

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad T_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

Portanto, com base nestas informações e aplicando-se o Teorema 2 encontra-se a seguinte estimativa da região de atração:

Figura 19 – Estimativa da região de atração do conversor Boost com CFP.



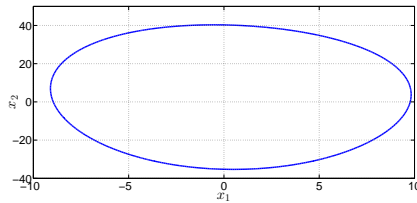
Nesta figura, mostra-se uma estimativa da região de atração em um espaço de mesma dimensão que o sistema. Os eixos  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$

representam, respectivamente, a diferença entre a corrente no indutor, a tensão de saída e o estado do integrador com seus valores nominais. Outro aspecto é que o plano  $x_1x_2$  foi rotacionado em  $180^\circ$  para visualizar a porção em que  $x_2$  é negativo, ou seja, quando a tensão de saída é menor que seu valor nominal.

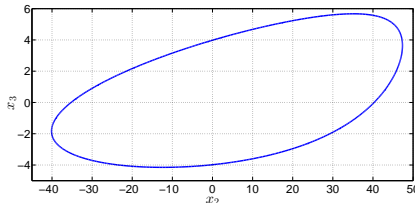
Nota-se que a porção da região de atração para valores negativos da tensão é diferente que a porção para valores positivos, indicando que a região estimada não é simétrica em relação a  $x_2$ . Além disso, observa-se que existe uma inclinação na direção formada pelo plano  $(x_2, x_3)$ .

Para facilitar a visualização desses detalhes a seguir apresenta-se a estimativa da região de atração através de duas projeções, ou seja, uma projeção formada pelo plano  $(x_1, x_2)$  e outra pelo plano  $(x_2, x_3)$ .

Figura 20 – Estimativas das regiões de atração nos planos  $(x_1, x_2)$ ,  $(x_2, x_3)$  do conversor Boost com CFP.



(a) Estimativa da região de atração no plano  $(x_1, x_2)$  e  $x_3 = 0$ .



(b) Estimativa da região de atração no plano  $(x_2, x_3)$  e  $x_1 = 0$ .

Na Figura 20(a) percebe-se que a projeção da estimativa da região de atração tem uma característica de um círculo achatada, alcançando valores maiores para a tensão de saída quando positiva. Já na Figura 20(b) torna-se evidente a inclinação na direção primeiro-terceiro quadrante no plano  $(x_2, x_3)$ .

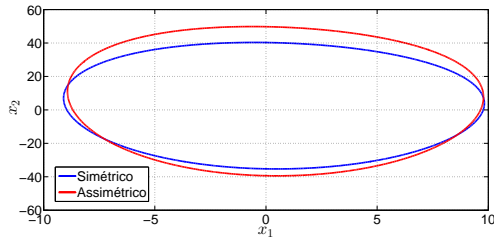
**Exemplo 2.** *Considere as condições do Exemplo 1. Agora, considere um politopo  $\mathcal{B}_x$  assimétrico, tomando-se os seguintes limites  $\alpha$  e  $\beta$ :*

$$\alpha = [10 \ 60 \ 6] \quad \beta = [10 \ 70 \ 8]$$

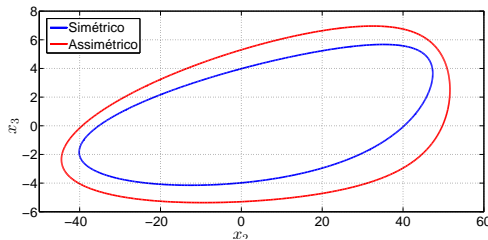
*A escolha deste politopo tem por objetivo explorar a inclinação no plano  $x_2x_3$  observada no exemplo anterior, pois  $\mathcal{B}_x$  é maior na direção do primeiro quadrante.*

*Portanto, com base nestas informações e nas condições do exemplo anterior e aplicando-se o Teorema 2 encontram-se as projeções da estimativa da região de atração apresentadas na Figura 21:*

Figura 21 – Estimativas das regiões de atração nos planos  $(x_1, x_2)$ ,  $(x_2, x_3)$  do conversor Boost com CFP: comparação entre politopo simétrico e assimétrico.



(a) Estimativa da região de atração no plano  $(x_1, x_2)$  e  $x_3 = 0$ .



(b) Estimativa da região de atração no plano  $(x_2, x_3)$  e  $x_1 = 0$ .

*Neste exemplo, observa-se da Figura 21 que a nova estimativa da região de atração, com o politopo assimétrico, praticamente, contém toda a região estimada do Exemplo 1. Portanto, ao se utilizar um politopo crescendo na direção do primeiro quadrante obteve-se uma estimativa da região de atração de tamanho maior. Desta forma, torna-se claro que a escolha do politopo influencia o tamanho da estimativa da região*

de atração.

**Exemplo 3.** Considere as condições do Exemplo 1. Agora, considere a faixa de valores admissíveis para a mudança na carga estimada em (JAPPE; MUSSA; COUTINHO, 2011), que estende a faixa para cargas leves chegando a  $450 \Omega$ , o que representa uma mudança de  $-42\%$  da carga nominal  $\bar{Y}_o$ , tornando uma larga faixa de incerteza de carga  $\delta Y_o$ , com os valores a seguir:

$$\rho = [-0,0016 \ 0,0000][S]$$

então, a mudança de carga admitida está definida entre os limites:

$$[Y_{omin} \ Y_{omax}] = [0,0022 \ 0,0038][S]$$

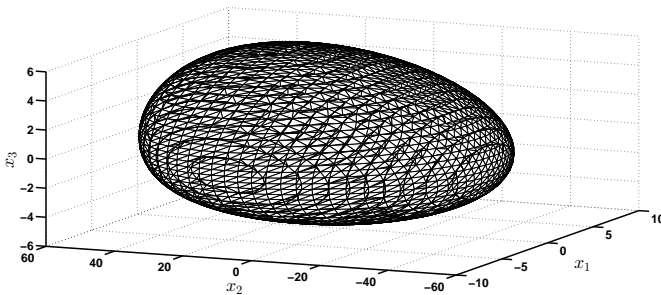
Para essa faixa de valores, o problema de otimização da Observação 3 não é factível para o politopo  $\mathcal{B}_x$  escolhido no Exemplo 2. Assim, tomando-se um novo politopo:

$$\alpha = [10 \ 60 \ 5] \quad \beta = [10 \ 70 \ 8]$$

Neste caso, o politopo é pouco menor somente em relação ao estado do integrador, porém nas demais dimensões mantêm-se os mesmos limites.

Portanto, com base nestas informações e aplicando-se o Teorema 2 encontra-se a seguinte estimativa da região de atração:

Figura 22 – Estimativa da região de atração do conversor Boost com CFP com faixa de valores da incerteza estendida para cargas leves (até  $-42\%$  de  $\bar{Y}_o$ ).



Nesta figura, mostra-se uma estimativa da região de atração em

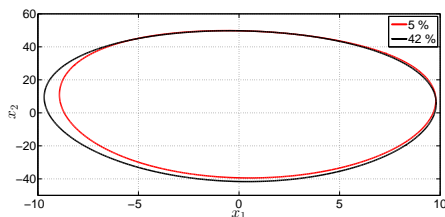


um espaço de mesma dimensão que o sistema. Os eixos  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  representam, respectivamente, a diferença entre a corrente no indutor, a tensão de saída e o estado do integrador com seus valores nominais. Outro aspecto é que o plano  $x_1x_2$  foi rotacionado em  $180^\circ$  para visualizar a porção em que  $x_2$  é negativo, ou seja, quando a tensão de saída é menor que seu valor nominal.

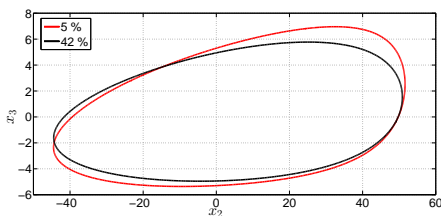
Nota-se na Figura 22 que no plano  $(x_2, x_3)$  que a inclinação observada nos exemplos anteriores diminuiu, tornando a estimativa parecida com uma bola achatado, apesar que a porção da região de atração para valores positivos da tensão de saída seja, aparentemente, maior que para valores negativos.

Além disso, a fim de comparar a estimativa deste exemplo, obtida para uma larga faixa de valores admissíveis para a mudança de carga, com a estimativa do Exemplo 1, obtida para uma faixa estreita de valores, são desenhadas nas mesmas figuras as projeções formadas pelo plano  $(x_1, x_2)$  e plano  $(x_2, x_3)$ .

Figura 23 – Estimativas das regiões de atração nos planos  $(x_1, x_2)$ ,  $(x_2, x_3)$  do conversor Boost com CFP: comparação de estimativas para faixa de valores com mudança de carga de 5% e 42%.



(a) Estimativa da região de atração no plano  $(x_1, x_2)$  e  $x_3 = 0$ .



(b) Estimativa da região de atração no plano  $(x_2, x_3)$  e  $x_1 = 0$ .

Neste exemplo, trata-se a relação entre a mudança de carga

e a estimativa da região de atração. Utilizando-se como referência de tamanho de região de atração a estimativa do Exemplo 2, pode-se observar na figura que o tamanho da estimativa da região de atração praticamente se mantém quando admite-se uma mudança de carga máxima para  $-42\%$  do valor de  $\bar{Y}_o = 0,0038$ , o que corresponde a  $\delta Y_o = -0,0016$ .

**Exemplo 4.** Considere as condições do Exemplo 3. Agora, considere uma função de Lyapunov quadrática:

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'\mathbf{P}\mathbf{x}, \quad \mathbf{P} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3]'$$
 (4.44)

Na Seção 4.1, apresentou-se uma classe de função de Lyapunov do tipo polinomial através da Equação 4.4. Porém, pode-se obter a partir daquela classe uma função de Lyapunov quadrática tal como a Equação 4.44. Para isto é necessário fazer  $\zeta(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ , o que implica:

$$\zeta(\mathbf{x}) = \tilde{\Theta}(\mathbf{x})\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Theta(\mathbf{x}) \\ I_3 \end{bmatrix} \mathbf{x} \rightarrow \Theta(\mathbf{x}) = I_{5 \times 3}$$

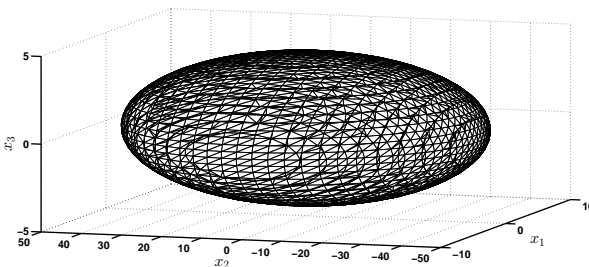
Com esse procedimento obtém-se uma função de Lyapunov quadrática. Mas do ponto de vista prático pode-se tomar da Equação 4.4 uma matriz  $\mathbf{P}$  tal como:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{5 \times 5} & \mathbf{0}_{5 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 5} & \mathbf{P}_1 \end{bmatrix}$$

em que  $\mathbf{P}_1$  é uma matriz definida positiva de tamanho  $3 \times 3$  a ser encontrada.

Portanto, com base nestas informações e aplicando-se o Teorema 2 encontra-se a seguinte estimativa da região de atração:

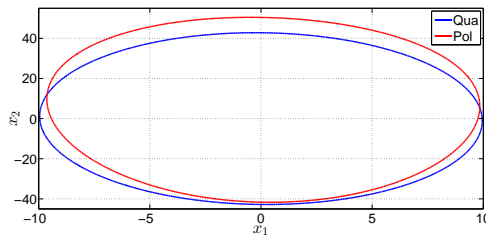
Figura 24 – Estimativa da região de atração do conversor Boost com CFP através de uma função de Lyapunov quadrática.



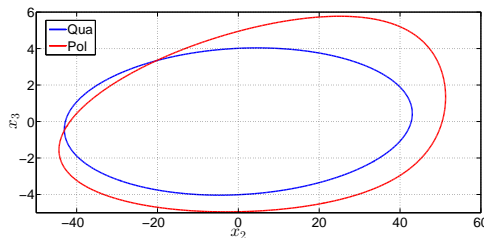
Nesta figura, mostra-se uma estimativa da região de atração em um espaço de mesma dimensão que o sistema. Os eixos  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  representam, respectivamente, a diferença entre a corrente no indutor, a tensão de saída e o estado do integrador com seus valores nominais. Outro aspecto é que o plano  $x_1x_2$  foi rotacionado em  $180^\circ$  para visualizar a porção em que  $x_2$  é negativo, ou seja, quando a tensão de saída é menor que seu valor nominal. Nota-se na Figura 24 a simetria e a características arredondada dos contornos, evidenciando que a estimativa é uma elipse de dimensão 3.

A seguir, compara-se as estimativas da região de atração, obtida através de uma função de Lyapunov quadrática e de uma polinomial.

Figura 25 – Estimativas das regiões de atração nos planos  $(x_1, x_2)$ ,  $(x_2, x_3)$  do conversor Boost com CFP: comparação entre estimativas a partir de funções de Lyapunov quadrática e polinomial para o caso de larga faixa de valores de incerteza.



(a) Estimativa da região de atração no plano  $(x_1, x_2)$  e  $x_3 = 0$ .



(b) Estimativa da região de atração no plano  $(x_2, x_3)$  e  $x_1 = 0$ .

Esse exemplo acompanha a ideia apresentada no Exemplo 3, que compara as estimativas de região de atração. Neste caso, observando as projeções na Figura 25, percebe-se que a estimativa da região de atração

através da função de Lyapunov polinomial é maior que a obtida com a quadrática. É evidente que o custo computacional é maior para obter estimativas com funções de Lyapunov mais complexas.

**Exemplo 5.** Neste exemplo, a ideia é mostrar uma estimativa da região de atração para uma dada taxa de convergência. Assim, considere as condições do Exemplo 3 em que se comparou as estimativas para faixas de valores da incerteza  $\delta Y_o$  de  $\pm 5\%$  e  $-42\%$  de  $\bar{Y}_o$ .

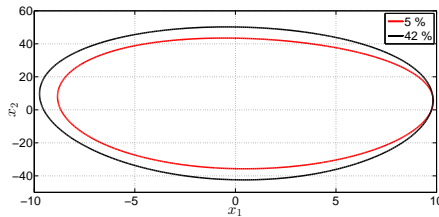
Agora, considere uma taxa de convergência:

$$\mu = 0,2$$

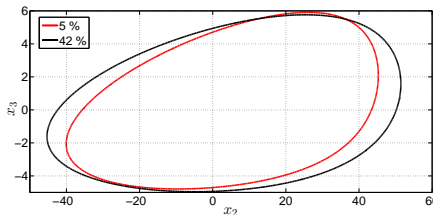
Esse valor dado para a taxa é um limitante inferior da velocidade de convergência da trajetória do sistema, ou seja, para as trajetórias da região de atração estimada tem-se garantia que a taxa de convergência não é menor que o valor dado.

Portanto, com base nestas informações e aplicando-se o Teorema 3 encontra-se a seguinte região de estabilidade:

Figura 26 – Estimativas das regiões de atração nos planos  $(x_1, x_2)$ ,  $(x_2, x_3)$  das estimativas da região de atração do conversor Boost com CFP: comparação de estimativas para faixa de valores com mudança de carga de  $\pm 5\%$  e  $-42\%$  com uma dada taxa de convergência.



(a) Estimativa da Região de Atração no plano  $(x_1, x_2)$  e  $x_3 = 0$ .



(b) Estimativa da Região de Atração no plano  $(x_2, x_3)$  e  $x_1 = 0$ .

*Finalmente, apresentou-se estimativas da região de atração para uma dada taxa de convergência. Neste exemplo, toma-se duas faixas de valores de incerteza, de  $\pm 5\%$  e  $-42\%$  já utilizadas nos exemplos anteriores, mas considerando-se a mesma taxa de convergência igual a  $\mu = 0,2$ .*

*Além disso, esse exemplo apresentou duas estimativas com incertezas diferentes tal como no Exemplo 3, mas para a mesma taxa, e ainda mantendo-se a mesma relação de tamanho das regiões de atração estimadas, ou seja, a estimativa da região de atração para a faixa de  $-42\%$  é pouco maior que a faixa de  $\pm 5\%$ .*

Nesta seção foram vistos cinco exemplos para mostrar diversas situações nas quais é possível estimar a região de atração, para o conversor Boost com correção do fator de potência. Além disso, neste capítulo focou-se em análise de estabilidade e robustez para o sistema sujeito a incerteza na carga. No próximo capítulo, será apresentado condições para realizar a síntese do controlador com o sistema sujeito a incerteza na carga e com perturbações na tensão de entrada.



## 5 SÍNTESE DO CONTROLADOR

Neste capítulo, considera-se o problema de síntese do controlador. Em especial, apresenta-se um método numérico para a sintonia de ganhos que assegurem uma estabilidade robusta em uma determinada região  $\mathcal{R}$  e um limitante do ganho  $\mathcal{L}_2$  do sistema.

O método será desenvolvido considerando que o conversor está operando em modo de condução contínua e com uma frequência fixa imposta pelo PWM. Considera-se ainda que o conversor está sujeito a perturbações na tensão de entrada e a mudança de carga. Portanto, pode-se utilizar a Equação (3.50) para representar a dinâmica do sistema em malha fechada, reescrita a seguir:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(\delta Y_o)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\mathbf{x}, \delta Y_o)u(t) + \mathbf{E}\mathbf{w}_a(t) \\ 0 &= \mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{K}\mathbf{D}(\mathbf{x}, \delta Y_o)u(t) \end{cases}$$

A partir desta representação do conversor Boost em malha fechada, pode-se definir o seguinte contexto para o projeto do controlador:

- Hipótese 2.** *a. A origem do sistema,  $\bar{\mathbf{x}} = 0$ , é um ponto de equilíbrio;*
- b. As trajetórias dos estados  $\mathbf{x}$  da Equação (3.50) são limitadas e contínuas para todo  $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_x$  e  $\delta Y_o \in \tilde{\mathcal{B}}_\delta$  de interesse, onde  $\mathcal{B}_x$  é uma região politópica dos estados contendo a origem;*
- c. O parâmetro incerto,  $\delta Y_o$ , é limitado em amplitude a uma região  $\mathcal{B}_\delta$ , definido em (3.44);*
- d. A perturbação  $\mathbf{w}_a(t) = [w \delta \dot{Y}_o]'$  é limitada em energia a um conjunto  $\mathcal{W}_a$ , definido em (3.51).*

Com base no contexto estabelecido considera-se o seguinte problema:

**Problema 3.** *Considere o Conversor Boost com correção do fator de potência em modo de condução contínua, o modelo em malha fechada do sistema em (3.50) com a Hipótese 2. Deseja-se determinar numericamente ganhos robustos do controlador,  $\mathbf{K} = [K_1 \ K_2 \ K_3]$ , através de um problema de programação semidefinida (LMI) utilizando uma função de Lyapunov local, considerando a restrição de ganhos  $\eta = K_1/K_3$ .*

Nota-se da solução encontrada para a análise de estabilidade do capítulo anterior que o controlador  $\mathbf{K}$  multiplica termos da função de Lyapunov, em que estes termos são variáveis de decisão. Logo, ao tratar-se da síntese do ganho essa multiplicação torna-se um problema não convexo, pois agora  $\mathbf{K}$  é também uma variável de decisão. Por essa razão, primeiro formula-se uma solução convexa para análise de estabilidade e desempenho para o sistema nas condições da Hipótese 2, e depois considera-se o problema de controle.

Então, para formular a análise de estabilidade quando o sistema está sujeito à perturbação de entrada adota-se a mesma metodologia do capítulo anterior. Primeiro apresenta-se a função de Lyapunov e depois realiza-se as inclusões para obter um resultado simultâneo de desempenho e estimativa da região de atração. A principal diferença do que foi realizado no capítulo anterior está em considerar a perturbação de entrada no sistema (devendo considerar  $w(t)$  e  $\delta\dot{Y}_o$  não nulos), e por esta razão incluir o ganho  $\mathcal{L}_2$  como um critério de desempenho.

Como visto no capítulo de análise, a representação do sistema em (3.50) não conduz a uma derivada temporal da função de Lyapunov linear nos termos dependentes (neste caso os estados), portanto a convexidade não está garantida e a restrição não é uma LMI. Então, considera-se a seguir a solução adotada na subseção 4.1.1, que decompõe as matrizes  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \delta Y_o)$  e  $\mathbf{D}(\mathbf{x}, \delta Y_o)$  para obter uma representação que conduz a uma derivada temporal da função de Lyapunov convexa.

Considere o sistema em (3.50) e a decomposição de (4.12) reescrita a seguir com a inclusão da perturbação:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(\delta Y_o)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1(\delta Y_o)u(t) + \mathbf{B}_2\mathbf{x}(t)u(t) + \mathbf{E}\mathbf{w}_a(t) \\ 0 = \mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{K}\mathbf{D}_1(\delta Y_o)u(t) + \mathbf{K}\mathbf{D}_2\mathbf{x}(t)u(t) \end{cases} \quad (5.1)$$

com  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\delta Y_o$ ,  $u(t)$  e  $\mathbf{w}_a(t)$ , e as matrizes definidas como em (3.50).

Para estabelecer uma relação entre a função de Lyapunov e a representação em (5.1), pode-se reescrever o sistema como:

$$S\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{A}(x)\tilde{\mathbf{x}} \quad (5.2)$$

onde  $\tilde{\mathbf{x}} = [\mathbf{x} \quad u \quad \mathbf{x}u \quad \mathbf{w}_a]'$ ,  $S = \text{diag}\{\mathbf{I}_3, 0, \mathbf{0}_3, \mathbf{0}_2\}$  e

$$\tilde{A}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\delta Y_o) & \mathbf{B}_1(\delta Y_o) & \mathbf{B}_2 & \mathbf{E} \\ \mathbf{K}\mathbf{C} & \mathbf{K}\mathbf{D}_1(\delta Y_o) & \mathbf{K}\mathbf{D}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$



Agora, com a representação do sistema como em (5.2) pode-se diretamente obter a função de Lyapunov e sua derivada.

## 5.1 FUNÇÃO DE LYAPUNOV

Na análise de estabilidade do capítulo anterior, foi utilizada uma função de Lyapunov polinomial, e foi mostrado nos exemplos que esta apresenta estimativas da região de atração menos conservadoras do que função de Lyapunov quadrática. Por isso, para realizar o projeto do controlador será considerado a mesma classe de funções de Lyapunov:

$$V(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{x}}' \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{S}} \tilde{\mathbf{x}}, \quad \tilde{\mathbf{P}}(x) = \begin{bmatrix} \tilde{\Theta}(x)' \mathbf{P} \tilde{\Theta}(x) & \tilde{\Theta}(x)' \mathbf{Q} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

em que  $\mathbf{P} = \mathbf{P}' \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  e  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}$  são matrizes constantes a serem determinadas, e  $\tilde{\Theta} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^{m \times 3}$  é uma função não linear de  $\mathbf{x}$ , que define a complexidade da função candidata.

Da definição de  $\mathbf{S}$  em (5.2) e  $\tilde{\mathbf{P}}$  em (5.3) pode-se considerar que:

$$V(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{x}}' \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{S}} \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}' \tilde{\Theta}(\mathbf{x})' \mathbf{P} \tilde{\Theta}(\mathbf{x}) \mathbf{x} = \zeta(\mathbf{x})' \mathbf{P} \zeta(\mathbf{x}), \quad \zeta(\mathbf{x}) = \tilde{\Theta}(\mathbf{x}) \mathbf{x}$$

o que conduziu à mesma  $V(\mathbf{x})$  obtida em (4.4). Logo, seguindo os passos realizados na Seção 4.1 encontra-se a seguinte restrição:

$$\mathbf{P} + \mathbf{L}_1 \mathcal{N}_1(\mathbf{x}) + \mathcal{N}_1(\mathbf{x})' \mathbf{L}_1' > 0$$

em que deve-se encontrar uma matriz  $\mathbf{P}$  definida positiva e uma matriz  $\mathbf{L}_1$  livre com as mesmas dimensões de  $\mathcal{N}_1(x)'$ , tal como em (4.6).

Uma vez apresentada a função de Lyapunov, de acordo com o Lema 1, para verificar a estabilidade do ponto de equilíbrio é preciso conhecer a derivada temporal da função de Lyapunov. Com essa finalidade calcula-se  $d(\tilde{\Theta}(\mathbf{x}) \mathbf{x})/dt$ , que resulta:

$$d(\tilde{\Theta}(\mathbf{x}) \mathbf{x})/dt = \hat{\Theta}(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{x}},$$

$$\hat{\Theta}(\mathbf{x}) = \left[ \Theta(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^3 \mathbf{T}_i \mathbf{x} \mathbf{i}_i \right]$$

em que os passos intermediários estão na Seção 4.1.

Então, pode-se escrever a derivada temporal da função de Lyapunov como:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\mathbf{x}) &= 2\mathbf{x}'\tilde{\Theta}(\mathbf{x})'\mathbf{P}\hat{\Theta}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} \\
&= 2 \begin{bmatrix} x'\tilde{\Theta}(\mathbf{x})' \\ u \\ \mathbf{x}u \\ \mathbf{w}'_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}\hat{\Theta}(\mathbf{x}) & \mathbf{Q} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{u} \\ \dot{\mathbf{x}}\dot{u} \\ \dot{\mathbf{w}}_a \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \zeta(\mathbf{x}) \\ u \\ \mathbf{x}u \\ \mathbf{w}_a \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{11} & \mathbf{V}_{12} & \mathbf{V}_{13} & \mathbf{V}_{14} \\ \mathbf{V}'_{12} & \mathbf{V}_{22} & \mathbf{V}_{23} & \mathbf{0} \\ \mathbf{V}'_{13} & \mathbf{V}'_{23} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{V}'_{14} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta(\mathbf{x}) \\ u \\ \mathbf{x}u \\ \mathbf{w}_a \end{bmatrix} \\
\dot{V}(\mathbf{x}) &= \zeta_a(\mathbf{x})'\mathbf{V}_a\zeta_a(\mathbf{x}) \tag{5.4}
\end{aligned}$$

onde

$$\zeta_a(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \zeta(\mathbf{x}) \\ u \\ \mathbf{x}u \\ \mathbf{w}_a \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{V}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{11} & \mathbf{V}_{12} & \mathbf{V}_{13} & \mathbf{V}_{14} \\ \mathbf{V}'_{12} & \mathbf{V}_{22} & \mathbf{V}_{23} & \mathbf{0} \\ \mathbf{V}'_{13} & \mathbf{V}'_{23} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{V}'_{14} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

com os elementos de  $\mathbf{V}_a$  definidos a seguir:

$$\mathbf{V}_{11} = \text{He}\{\mathbf{P}\hat{\Theta}(\mathbf{x})\mathbf{A}(\delta Y_o) + \mathbf{Q}\mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{N}\} \tag{5.5}$$

$$\mathbf{V}_{12} = \mathbf{P}\hat{\Theta}(\mathbf{x})\mathbf{B}_1(\delta Y_o) + \mathbf{Q}\mathbf{K}\mathbf{D}_1(\delta Y_o) + \mathbf{N}'\mathbf{C}'\mathbf{K}'\mathbf{R}' \tag{5.6}$$

$$\mathbf{V}_{13} = \mathbf{P}\hat{\Theta}(\mathbf{x})\mathbf{B}_2 + \mathbf{Q}\mathbf{K}\mathbf{D}_2 \tag{5.7}$$

$$\mathbf{V}_{14} = \mathbf{P}\hat{\Theta}(\mathbf{x})\mathbf{E} \tag{5.8}$$

$$\mathbf{V}_{22} = \mathbf{R}\mathbf{K}\mathbf{D}_1(\delta Y_o) + \mathbf{D}_1(\delta Y_o)'\mathbf{K}'\mathbf{R}' \tag{5.9}$$

$$\mathbf{V}_{23} = \mathbf{R}\mathbf{K}\mathbf{D}_2 \tag{5.10}$$

e  $N$  é uma matriz constante em que  $N\zeta(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ .

Agora, a função  $\mathbf{V}_a$  possui todos seus elementos como funções afins em  $\mathbf{x}$  e  $\delta Y_o$ , o que garante a convexidade. No entanto, o procedimento realizado para remover a não linearidade do interior da derivada temporal da função de Lyapunov implicou em utilizar  $\zeta(\mathbf{x})$ , que é uma função em  $\mathbf{x}$ , incluída no vetor  $\zeta_a(\mathbf{x})$  que compõe  $\dot{V}(\mathbf{x})$  em (5.4), logo devemos de alguma forma considerar a dependência de  $\zeta(\mathbf{x})$  em (5.4) adicionando multiplicadores à restrição LMI como em (4.22).

Como os elementos de  $\zeta_a(\mathbf{x})$  não são independentes, existe uma

matriz  $\mathcal{N}_2(\mathbf{x})$  tal que:

$$\mathcal{N}_2(\mathbf{x})\zeta_a(\mathbf{x}) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}_x \quad (5.11)$$

Assim, pode-se reescrever (5.4) como:

$$\zeta_a(\mathbf{x})'\mathbf{V}_a\zeta_a(\mathbf{x}) < 0, \quad \forall \mathbf{x} : \mathcal{N}_2(\mathbf{x})\zeta_a(\mathbf{x}) = 0$$

e aplicar o Lema 5 para obter uma restrição LMI:

$$\mathbf{V}_a + \mathbf{L}_2\mathcal{N}_2(\mathbf{x}) + \mathcal{N}_2(\mathbf{x})'\mathbf{L}'_2 < 0 \quad (5.12)$$

com  $\mathbf{L}_2$  uma matriz livre de mesma dimensão que  $\mathcal{N}_2(\mathbf{x})'$ .

**Observação 4.** *No capítulo anterior foi estabelecido uma condição para verificar a estabilidade regional com uma taxa de convergência garantida. Para esta finalidade basta adicionar ao elemento  $\mathbf{V}_{11}$  de  $\mathbf{V}_a$  a informação da restrição da taxa de convergência:*

$$\mathbf{V}_{11} = \text{He}\{\mathbf{P}\hat{\Theta}(\mathbf{x})\mathbf{A}(\delta Y_o)N + \mathbf{Q}\mathbf{K}CN + \mu\mathbf{P}\}. \quad (5.13)$$

*Isso significa que para toda condição inicial pertencente a região de atração, a trajetória converge para o ponto de equilíbrio satisfazendo a seguinte relação do Lema 2:*

$$\|x(t)\| \leq \sqrt{\frac{\epsilon_b}{\epsilon_a}} \|x(0)\| e^{-\mu t} \quad (5.14)$$

## 5.2 GANHO $\mathcal{L}_2$

O problema de controle consiste na síntese (sintonia) dos parâmetros do controlador de forma robusta, ou seja, parâmetros de controle capazes de garantir que o sistema em malha fechada seja estável e que possua um certo desempenho quando sujeito a mudança de carga e perturbações na tensão de entrada. Com este objetivo, considera-se a norma  $\mathcal{L}_2$  ao problema de controle.

Portanto, afim de definir o desempenho no sentido  $\mathcal{L}_2$ , considera-se a seguinte saída de desempenho:

$$\mathbf{z} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u + \mathbf{H}\mathbf{w}_a \quad (5.15)$$

onde  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{n_z}$ ,  $\mathbf{w}_a \in \mathcal{W}_a$  e as matrizes  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}$  e  $\mathbf{H}$  são constantes com

dimensões apropriadas a serem definidas pelo projetista.

Agora, considere a definição da norma  $\mathcal{L}_2$  adaptada de (KHALIL, 1996; COUTINHO et al., 2008), em que se relaciona, para condições iniciais nulas, um ganho do sistema  $\| \mathcal{G}_{w_a z} \|_\infty$  da entrada de perturbação  $\mathbf{w}_a$  para a saída  $\mathbf{z}$ :

$$\| \mathcal{G}_{w_a z} \|_\infty \triangleq \sup_{w_a \in \mathcal{W}_1, w_a \neq 0} \left\{ \frac{\| \mathbf{z} \|_2}{\| \mathbf{w}_a \|_2} : x(0) = 0 \right\}$$

No entanto, obter o valor exato deste do ganho em geral é difícil, então busca-se obter uma estimativa do limitante superior do ganho  $\mathcal{L}_2$ . Essa estimativa torna-se um critério de desempenho avaliando da entrada  $\mathbf{w}_a$  para a saída  $\mathbf{z}$ .

Por consequência, para o sistema em malha fechada de (3.50) com a saída de (5.15) o ganho do sistema,  $\| \mathcal{G}_{w_a z} \|_\infty$ , é menor do que  $\sqrt{\gamma}$  se existir  $V(\mathbf{x})$ , tal que a solução do sistema em regime permanente tem a derivada temporal satisfazendo a seguinte desigualdade (COUTINHO; DE SOUZA, 2012; SCHAFT, 1992):

$$\dot{V}(\mathbf{x}) + \gamma^{-1} \mathbf{z}' \mathbf{z} - \mathbf{w}'_a \mathbf{w}_a < 0 \quad (5.16)$$

Tomando-se (5.16) tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) + \gamma^{-1} \mathbf{z}' \mathbf{z} - \mathbf{w}'_a \mathbf{w}_a &< 0 \\ \zeta_a(\mathbf{x})' \mathbf{V}_a \zeta_a(\mathbf{x}) + \gamma^{-1} \mathbf{z}' \mathbf{z} - \mathbf{w}'_a \mathbf{w}_a &< 0 \\ \begin{bmatrix} \zeta(\mathbf{x}) \\ u \\ \mathbf{x}u \\ \mathbf{w}_a \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{11} & \mathbf{V}_{12} & \mathbf{V}_{13} & \mathbf{V}_{14} \\ \mathbf{V}'_{12} & \mathbf{V}_{22} & \mathbf{V}_{23} & \mathbf{0} \\ \mathbf{V}'_{13} & \mathbf{V}'_{23} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{V}'_{14} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta(\mathbf{x}) \\ u \\ \mathbf{x}u \\ \mathbf{w}_a \end{bmatrix} + \gamma^{-1} \mathbf{z}' \mathbf{z} - \mathbf{w}'_a \mathbf{w}_a &< 0 \\ \begin{bmatrix} \zeta(\mathbf{x}) \\ u \\ \mathbf{x}u \\ \mathbf{w}_a \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{11} & \mathbf{V}_{12} & \mathbf{V}_{13} & \mathbf{V}_{14} \\ \mathbf{V}'_{12} & \mathbf{V}_{22} & \mathbf{V}_{23} & \mathbf{0} \\ \mathbf{V}'_{13} & \mathbf{V}'_{23} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{V}'_{14} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta(\mathbf{x}) \\ u \\ \mathbf{x}u \\ \mathbf{w}_a \end{bmatrix} + \gamma^{-1} \mathbf{z}' \mathbf{z} &< 0 \end{aligned}$$

$$\zeta_a(\mathbf{x})' \mathbf{V}_{a1} \zeta_a(\mathbf{x}) +$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ u \\ \mathbf{x}u \\ \mathbf{w}_a \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathbf{F}' \\ \mathbf{G}' \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{H}' \end{bmatrix} [\gamma^{-1}] \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{G} & \mathbf{0} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ u \\ \mathbf{x}u \\ \mathbf{w}_a \end{bmatrix} < 0$$

$$\zeta_a(\mathbf{x})' \mathbf{V}_{a1} \zeta_a(\mathbf{x}) + \begin{bmatrix} \zeta(\mathbf{x}) \\ u \\ \mathbf{x}u \\ \mathbf{w}_a \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} N' \mathbf{F}' \\ \mathbf{G}' \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{H}' \end{bmatrix} [\gamma^{-1}] \begin{bmatrix} \mathbf{F}N & \mathbf{G} & \mathbf{0} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta(\mathbf{x}) \\ u \\ \mathbf{x}u \\ \mathbf{w}_a \end{bmatrix} < 0$$

com

$$\mathbf{V}_{a1} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{11} & \mathbf{V}_{12} & \mathbf{V}_{13} & \mathbf{V}_{14} \\ \mathbf{V}'_{12} & \mathbf{V}_{22} & \mathbf{V}_{23} & \mathbf{0} \\ \mathbf{V}'_{13} & \mathbf{V}'_{23} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{V}'_{14} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} N' \mathbf{F}' \\ \mathbf{G}' \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{H}' \end{bmatrix}$$

tem-se:

$$\zeta_a(\mathbf{x})' \mathbf{V}_{a1} \zeta_a(\mathbf{x}) + \zeta_a(\mathbf{x})' \mathbf{Z} [\gamma^{-1}] \mathbf{Z}' \zeta_a(\mathbf{x}) < 0 \quad (5.17)$$

que pode ser reescrito como:

$$\zeta_a(\mathbf{x})' (\mathbf{V}_{a1} + \mathbf{Z} [\gamma^{-1}] \mathbf{Z}') \zeta_a(\mathbf{x}) < 0 \quad (5.18)$$

Agora, se a expressão abaixo é satisfeita:

$$\mathbf{V}_{a1} + \mathbf{Z} [\gamma^{-1}] \mathbf{Z}' < 0 \quad (5.19)$$

então, aplicando-se o complemento de Schur tem-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_{a1} & \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}' & -\gamma \mathbf{I}_{n_z} \end{bmatrix} < 0 \quad (5.20)$$

De onde pode ser reescrito como:

$$\begin{bmatrix} \zeta_a(\mathbf{x}) \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{a1} & \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}' & -\gamma \mathbf{I}_{n_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_a(\mathbf{x}) \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} < 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n_z} \quad (5.21)$$

e define-se:

$$\mathbf{V}_{a2} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{a1} & \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}' & -\gamma \mathbf{I}_{n_z} \end{bmatrix}$$

Assim como em (5.4), para obter uma condição na forma LMI que garanta a suficiência de (5.21) utiliza-se o conceito de aniquiladores e multiplicadores.

Em outras palavras, os elementos de  $\zeta_a(\mathbf{x})$  não são independentes, portanto existe uma matriz  $\mathcal{N}_2(\mathbf{x})$  tal que:

$$\mathcal{N}_2(\mathbf{x}) \zeta_a(\mathbf{x}) = 0, \quad \forall x \in \mathcal{B}_x \quad (5.22)$$

Assim, pode-se reescrever (5.4) como:

$$\left[ \begin{array}{c} \zeta_a(\mathbf{x}) \\ \mathbf{v} \end{array} \right]' \mathbf{V}_{a2} \left[ \begin{array}{c} \zeta_a(\mathbf{x}) \\ \mathbf{v} \end{array} \right] < 0, \quad \forall \mathbf{x} : \left[ \begin{array}{cc} \mathcal{N}_2(\mathbf{x}) & \mathbf{0} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \zeta_a(\mathbf{x}) \\ \mathbf{v} \end{array} \right] = 0$$

e aplicar o Lema 5 para obter uma restrição LMI:

$$\mathbf{V}_{a2} + \mathbf{L}_2 \left[ \begin{array}{cc} \mathcal{N}_2(\mathbf{x}) & \mathbf{0} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} \mathcal{N}_2(\mathbf{x})' \\ \mathbf{0} \end{array} \right] \mathbf{L}_2' < 0 \quad (5.23)$$

com  $\mathbf{L}_2$  uma matriz livre de mesma dimensão que  $\left[ \begin{array}{cc} \mathcal{N}_2(\mathbf{x}) & \mathbf{0} \end{array} \right]'$ .

### 5.2.1 Estimativa da Região de Atração Considerando a Perturbação de Entrada

Como visto acima, se  $\gamma$  satisfaz a Equação (5.16), então  $\sqrt{\gamma}$  é um limitante superior do ganho  $\mathcal{L}_2$ . Este ganho relaciona a energia da saída  $\mathbf{z}$  quando sujeita a perturbação  $\mathbf{w}_a$  a partir do regime permanente. Como definido anteriormente, a perturbação pertence a um conjunto limitado em energia, como reescrito abaixo:

$$\mathcal{W}_a \triangleq \{ \mathbf{w}_a \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{w}_a\|_2^2 \leq \lambda, \lambda > 0 \}$$

Nota-se que o tamanho do limitante de energia ( $\lambda$ ) desse conjunto influencia de alguma forma a dinâmica do sistema. Para determinar como a perturbação influencia a dinâmica do sistema toma-se:

$$\mathcal{J}_z \triangleq \dot{V}(\mathbf{x}) + \gamma^{-1} \mathbf{z}' \mathbf{z} - \mathbf{w}_a' \mathbf{w}_a$$

e integrando de 0 até  $T$  obtêm-se:

$$\begin{aligned} \int_0^T \mathcal{J}_z dt &= \int_0^T \left( \dot{V}(\mathbf{x}) + \gamma^{-1} \mathbf{z}' \mathbf{z} - \mathbf{w}_a' \mathbf{w}_a \right) dt \\ \int_0^T \mathcal{J}_z dt &= V(\mathbf{x}(T)) - V(\mathbf{x}(0)) + \\ &\quad \gamma^{-1} \int_0^T \mathbf{z}' \mathbf{z} dt - \int_0^T \mathbf{w}_a' \mathbf{w}_a dt, \quad \forall T > 0 \end{aligned} \quad (5.24)$$

Assumindo-se que o sistema é estável, então  $\mathcal{J}_z < 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}_x$  e

$\mathbf{x}(0) \in \mathcal{R}_o$ , tal que  $\mathcal{R}_o$  é redefinido de (4.24) como:

$$\mathcal{R}_o = \{\mathbf{x} : V(\mathbf{x}) = \zeta(\mathbf{x})' \mathbf{P} \zeta(\mathbf{x}) \leq 1\} \quad (5.25)$$

Portanto, para o caso  $\mathbf{w}_a \equiv 0$ , obtém-se:

$$\dot{V}(x) < -\gamma^{-1} \mathbf{z}' \mathbf{z} \leq 0$$

o que garante  $x(t) \rightarrow 0$  para  $t \rightarrow \infty$ . Assim,  $\mathcal{R}_o$  é um conjunto contrativo e invariante, ou seja, é uma estimativa da região de atração.

No entanto, ao considerar a perturbação  $\mathbf{w}_a \neq 0$  tem-se:

$$V(\mathbf{x}(T)) < V(\mathbf{x}(0)) - \gamma^{-1} \int_0^T \mathbf{z}' \mathbf{z} dt + \int_0^T \mathbf{w}'_a \mathbf{w}_a dt, \quad \forall T > 0$$

evidentemente, que

$$\int_0^T \mathbf{w}'_a \mathbf{w}_a dt \leq \int_0^\infty \mathbf{w}'_a \mathbf{w}_a dt < \infty$$

portanto,

$$V(\mathbf{x}(T)) < V(\mathbf{x}(0)) + \|\mathbf{w}_a\|_2^2 - \gamma^{-1} \|\mathbf{z}\|_2^2, \quad \forall T > 0$$

como  $x(0) \in \mathcal{R}_o$ ,  $\|\mathbf{w}_a\|_2^2 < \lambda$  e  $\|\mathbf{z}\|_2^2 > 0$  a desigualdade torna-se:

$$V(\mathbf{x}(T)) < 1 + \lambda$$

o que significa que as trajetórias estão contidas em um conjunto  $\lambda$  maior que o conjunto de condições iniciais.

Definindo:

$$\mathcal{R} = \{\mathbf{x} : V(\mathbf{x}) = \zeta(\mathbf{x})' \mathbf{P} \zeta(\mathbf{x}) \leq 1 + \lambda\} \quad (5.26)$$

então, as trajetórias do sistema quando sujeito a perturbação  $\mathbf{w}_a$  não sairão do conjunto  $\mathcal{R}$ . Desta forma,  $\mathcal{R}$  é um conjunto invariante, ou seja, uma estimativa dos estados atingíveis.

Portanto, pode-se concluir que quanto maior a energia da perturbação  $\lambda$ , maior deve ser o tamanho do conjunto de estados atingíveis  $\mathcal{R}$ .

### 5.3 REGIÃO DE ATRAÇÃO

Com base na seção anterior, o conjunto  $\mathcal{R}$  é uma estimativa da região dos estados atingíveis para o sistema quando sujeito a perturbação. Desta forma, torna-se necessário adicionar a informação de  $\lambda$  à formulação convexa obtida na Seção 4.2.

Então, considera-se a estimativa da região atingível em (5.26), reescrita abaixo:

$$\mathcal{R} = \{\mathbf{x} : V(\mathbf{x}) = \zeta(\mathbf{x})' \mathbf{P} \zeta(\mathbf{x}) \leq 1 + \lambda\}$$

Como  $V(\mathbf{x})$  satisfaz as condições do Lema 1 para todo  $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_x$ , então a estimativa da região de atração  $\mathcal{R}$  é um subconjunto de  $\mathcal{B}_x$ , por consequência  $\mathcal{R}_o \subseteq \mathcal{R} \subset \mathcal{B}_x$ . E essa condição pode ser expressa como:

$$\left. \begin{array}{l} 1 + \alpha_k^{-1} c'_k \mathbf{x} \geq 0 \\ 1 - \beta_k^{-1} c'_k \mathbf{x} \geq 0 \end{array} \right\} \forall \mathbf{x} : \zeta(\mathbf{x})' \mathbf{P} \zeta(\mathbf{x}) - (1 + \lambda) \leq 0. \quad (5.27)$$

em que  $c_k \in \mathbb{R}^3$  é a  $k$ -ésima linha da matriz identidade  $I_3$ .

Aplica-se o Procedimento -  $\mathcal{S}$  para as expressões dos limites inferiores ( $\alpha_k$ ) e superiores ( $\beta_k$ ):

$$\exists \tilde{\tau}_k > 0 : (1 + \alpha_k^{-1} c'_k \mathbf{x}) - \tilde{\tau}_k (1 + \lambda - \zeta(\mathbf{x})' \mathbf{P} \zeta(\mathbf{x})) \geq 0, \quad \forall k=1, 2, 3$$

$$\exists \tilde{\nu}_k > 0 : (1 - \beta_k^{-1} c'_k \mathbf{x}) - \tilde{\nu}_k (1 + \lambda - \zeta(\mathbf{x})' \mathbf{P} \zeta(\mathbf{x})) \geq 0, \quad \forall k=1, 2, 3$$

Ajusta-se  $\tilde{\tau}_k = 1/2\tau_k$  e  $\tilde{\nu}_k = 1/2\nu_k$ . Então, faz-se necessário existir escalares positivos  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  e  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$ , tais que:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \zeta(\mathbf{x}) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} (2\tau_k - 1 - \lambda) & \tau_k \alpha_k^{-1} N_k \\ \tau_k \alpha_k^{-1} N'_k & \mathbf{P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \zeta(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \geq 0. \quad (5.28)$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \zeta(\mathbf{x}) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} (2\nu_k - 1 - \lambda) & -\nu_k \beta_k^{-1} N_k \\ -\nu_k \beta_k^{-1} N'_k & \mathbf{P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \zeta(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \geq 0. \quad (5.29)$$

em que  $N_k = c'_k N$ ,  $k=1, 2, 3$ .

As restrições nas Equações (5.28) e (5.29) garantem que a estimativa  $\mathcal{R}$  da região de estados atingíveis seja um subconjunto do espaço  $\mathcal{B}_x$  considerado. No entanto, essas restrições não são afins em  $\mathbf{x}$ , pois dependem de  $\zeta(\mathbf{x})$  que é uma função quadrática.

Para obter uma solução convexa aplica-se o Lema 5 em (5.28) e



(5.29). Então, toma-se a seguinte restrição de igualdade:

$$\mathcal{N}_3(x) \begin{bmatrix} 1 \\ \zeta(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}_x \quad (5.30)$$

O que permite obter as seguintes condições suficientes na forma LMI para (5.28) e (5.29):

$$\begin{bmatrix} (2\tau_k - 1 - \lambda) & \tau_k \alpha_k^{-1} N_k \\ \tau_k \alpha_k^{-1} N_k' & \mathbf{P} \end{bmatrix} + \mathbf{H}_k \mathcal{N}_3(\mathbf{x}) + \mathcal{N}_3(\mathbf{x})' \mathbf{H}_k' \geq 0 \quad (5.31)$$

$$\begin{bmatrix} (2\nu_k - 1 - \lambda) & -\nu_k \beta_k^{-1} N_k \\ -\nu_k \beta_k^{-1} N_k' & \mathbf{P} \end{bmatrix} + \mathbf{M}_k \mathcal{N}_3(\mathbf{x}) + \mathcal{N}_3(\mathbf{x})' \mathbf{M}_k' \geq 0 \quad (5.32)$$

com  $\mathbf{H}_k$  e  $\mathbf{M}_k$  sendo matrizes livres de mesma dimensão de  $\mathcal{N}_3(\mathbf{x})'$  e  $\forall k = 1, 2, 3$ .

## 5.4 ANÁLISE DE ESTABILIDADE COM PERTURBAÇÃO $\mathcal{L}_2$ NA ENTRADA

Nesta seção, apresenta-se uma formulação convexa que conduz para a solução do Problema 3 utilizando as definições introduzidas na seções anteriores. Então, para um controlador particular com ganho  $\mathbf{K}$  a estabilidade do sistema em malha fechada é garantida em uma região contrativa e invariante, de acordo com o Lema 1 e uma estimativa do limitante superior do ganho  $\mathcal{L}_2$ , se as seguintes condições são satisfeitas:

**Teorema 4.** *Considere o sistema em (3.50), que representa a dinâmica em malha fechada do conversor Boost para um dado controlador de ganho  $\mathbf{K}$ . Seja  $\mathcal{B}_x$  uma região politópica para os estados definida pelos escalares  $\alpha_k$  e  $\beta_k$  com  $k = 1, 2, 3$  como definida em (4.23),  $\mathcal{B}_\delta$  o conjunto de incerteza admissível no entorno da carga nominal,  $\mathcal{Y}_o$  como em (3.44) e  $\mathcal{W}_a$  o conjunto de perturbação admissível definida em (3.51). Seja  $\mu$  uma dada taxa de convergência tal como definida no Lema 2 e  $\tilde{\Theta}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{m \times 3}$  uma dada função afim em  $\mathbf{x}$  tal como apresentada em (4.5).*

*Suponha que existe as matrizes  $\mathbf{P} = \mathbf{P}'$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{L}_1$ ,  $\mathbf{L}_2$ ,  $\mathbf{H}_k$ ,  $\mathbf{M}_k$  e escalares positivos  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  e  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$ ,  $\lambda$  e  $\gamma$  que satisfaçam as LMIs a seguir para todo  $(\mathbf{x}, Y_o) \in \mathcal{V}(\mathcal{B}_x \times \mathcal{B}_\delta)$ :*

$$\mathbf{P} + \mathbf{L}_1 \mathcal{N}_1(\mathbf{x}) + \mathcal{N}_1(\mathbf{x})' \mathbf{L}_1' > 0 \quad (5.33)$$

$$\mathbf{V}_{a2} + \mathbf{L}_2 \begin{bmatrix} \mathcal{N}_2(\mathbf{x}) & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{N}_2(\mathbf{x})' \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{L}'_2 < 0 \quad (5.34)$$

$$\Pi_\alpha + \mathbf{H}_k \mathcal{N}_3(\mathbf{x}) + \mathcal{N}_3(\mathbf{x})' \mathbf{H}'_k \geq 0, \quad k = 1, 2, 3 \quad (5.35)$$

$$\Pi_\beta + \mathbf{M}_k \mathcal{N}_3(\mathbf{x}) + \mathcal{N}_3(\mathbf{x})' \mathbf{M}'_k \geq 0, \quad k = 1, 2, 3 \quad (5.36)$$

com

$$\Pi_\alpha = \begin{bmatrix} (2\tau_k - 1 - \lambda) & -\tau_k \alpha_k^{-1} N_k \\ -\tau_k \alpha_k^{-1} N'_k & \mathbf{P} \end{bmatrix}, \quad \Pi_\beta = \begin{bmatrix} (2\nu_k - 1 - \lambda) & \nu_k \beta_k^{-1} N_k \\ \nu_k \beta_k^{-1} N'_k & \mathbf{P} \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{V}_{a2} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{11} & \mathbf{V}_{12} & \mathbf{V}_{13} & \mathbf{V}_{14} & N' \mathbf{F}' \\ \mathbf{V}'_{12} & \mathbf{V}_{22} & \mathbf{V}_{23} & \mathbf{0} & \mathbf{G}' \\ \mathbf{V}'_{13} & \mathbf{V}'_{23} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{V}'_{14} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I}_2 & \mathbf{H}' \\ \mathbf{F} N & \mathbf{G} & \mathbf{0} & \mathbf{H} & -\gamma \mathbf{I}_{n_z} \end{bmatrix}$$

cujos elementos  $V_{ij}$  são dados pelas Equações (5.13), (5.6), (5.7), (5.8), (5.9) e (5.10). E com as matrizes aniquiladoras escolhidas como:

$$\mathcal{N}_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\Theta(\mathbf{x}) \\ \mathbf{0} & \mathcal{N}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{N}_2(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathcal{N}_1(\mathbf{x}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{x} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{N}_3(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{x} & -N \\ \mathbf{0} & \mathcal{N}_1(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad e \quad \mathcal{N}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_2 & -x_1 & 0 \\ 0 & x_3 & -x_2 \end{bmatrix},$$

Então, tem-se as seguintes situações:

- i Para qualquer  $\mathbf{x}(0) \in \mathcal{R}_o$  e  $\mathbf{w}_a \in \mathcal{W}_a$  as trajetórias do sistema não saem do conjunto  $\mathcal{R}$  para todo  $t \geq 0$ ;
- ii Para qualquer  $\mathbf{x}(0) \in \mathcal{R}_o$  e  $\mathbf{w}_a \equiv 0$ , a origem do sistema em malha fechada em (3.50) é localmente exponencialmente estável,  $\mathbf{x} \in \mathcal{R}_o$  para todo  $t \geq 0$  e as trajetórias dos estados tendem para origem quando o tempo tende ao infinito;
- iii Para qualquer  $\mathbf{w}_a \in \mathcal{W}_a$  e  $\mathbf{x}(0) \equiv 0$ ,  $\|\mathcal{G}_{\mathbf{w}_a z}\|_\infty \leq \sqrt{\gamma}$  e  $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{R}(\lambda)$  para todo  $t \geq 0$ .

**Prova do Teorema 4.** Suponha que as LMIs (5.33) e (5.34) estejam satisfeitas nos vértices do politopo  $\mathcal{V}(\mathcal{B}_x \times \mathcal{B}_\delta)$ , então por convexidade também são satisfeitas para todo  $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_x$  e  $\delta \mathbf{Y}_o \in \mathcal{B}_\delta$ .

A primeira parte desta prova é obter a partir da LMI (5.33) uma

restrição semelhante à condição (2.10) do Lema 1 reescrita abaixo:

$$\epsilon_1 \mathbf{x}' \mathbf{x} \leq V(\mathbf{x}) \leq \epsilon_2 \mathbf{x}' \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}_x$$

Nota-se que  $V(\mathbf{x}) = \zeta(\mathbf{x})' \mathbf{P} \zeta(\mathbf{x})$  é a função de Lyapunov escolhida.

Seja  $N$  uma matriz tal que  $N \zeta(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ . Agora considere a LMI (5.33):

$$\mathbf{P} + \mathbf{L}_1 \mathcal{N}_1(\mathbf{x}) + \mathcal{N}_1(\mathbf{x})' \mathbf{L}_1' > 0$$

Existem escalares positivos sendo um suficientemente pequeno  $\epsilon_1$  e outro suficientemente grande  $\epsilon_2$  tal que:

$$\epsilon_1 N' N \leq \mathbf{P} + \mathbf{L}_1 \mathcal{N}_1(\mathbf{x}) + \mathcal{N}_1(\mathbf{x})' \mathbf{L}_1' \leq \epsilon_2 N' N$$

desde que a LMI seja estrita e os elementos de  $\mathcal{N}_1(\mathbf{x})$  sejam limitados. Pré e pós multiplicando a expressão acima por  $\zeta(\mathbf{x})'$  e  $\zeta(\mathbf{x})$ , tem-se:

$$\epsilon_1 \mathbf{x}' \mathbf{x} \leq \zeta(\mathbf{x})' \mathbf{P} \zeta(\mathbf{x}) \leq \epsilon_2 \mathbf{x}' \mathbf{x} \quad (5.37)$$

uma vez que  $\mathcal{N}_1(\mathbf{x}) \zeta(\mathbf{x}) = 0$ .

A segunda parte desta prova é obter a partir da LMI (5.34) uma restrição semelhante à condição (5.16) reescrita abaixo:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) + \gamma^{-1} \mathbf{z}' \mathbf{z} - \mathbf{w}'_a \mathbf{w}_a < 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}_x \quad (5.38)$$

Agora considere a LMI (5.34):

$$\mathbf{V}_{a2} + \mathbf{L}_2 \begin{bmatrix} \mathcal{N}_2(\mathbf{x}) & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{N}_2(\mathbf{x})' \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{L}_2' < 0$$

Pré e pós multiplicando por  $\begin{bmatrix} \zeta(\mathbf{x})' & u & \mathbf{x}' u & \mathbf{w}'_a & \mathbf{0}' \end{bmatrix}$  e seu transposto e aplicando o complemento de Schur que conduz para:

$$\dot{V}(\mathbf{x}, \delta Y_o) + \gamma^{-1} \mathbf{z}' \mathbf{z} - \mathbf{w}'_a \mathbf{w}_a < 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}_x, \quad \delta Y_o \in \mathcal{B}_\delta$$

desde que  $\begin{bmatrix} \mathcal{N}_2(\mathbf{x}) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta(\mathbf{x})' & u & \mathbf{x}' u & \mathbf{w}'_a & \mathbf{0}' \end{bmatrix}' = 0$  e  $\dot{V}(\mathbf{x}, \delta Y_o)$  é definido em (5.4).

Agora, pré e pós multiplicando a LMI em (5.35) e (5.36) por  $\begin{bmatrix} 1 & \zeta(\mathbf{x})' \end{bmatrix}$  e seu transposto, as LMIs resultam em (5.31) e (5.32), com  $\mathcal{N}_3(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} 1 & \zeta(\mathbf{x})' \end{bmatrix}' = 0$ . De modo que  $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}_x$ .

Por fim, integrando (5.38) de 0 até  $T$  com  $T > 0$  obtêm-se:

$$V(\mathbf{x}(T)) < V(\mathbf{x}(0)) + \|\mathbf{w}_a\|_2^2 < 1 + \lambda$$

então,  $\mathcal{R}$  é um conjunto contrativo e invariante. Além disso, se  $\mathbf{x}(0) \equiv 0$  tem-se  $\|\mathbf{z}\|_2^2 \leq \gamma \|\mathbf{w}_a\|_2^2$ ,  $V(\mathbf{x}(T)) < \lambda$ , então  $\|\mathcal{G}_{w_a z}\|_\infty \leq \sqrt{\gamma}$  e  $\mathcal{R}(\lambda)$  é um conjunto contrativo e invariante.

O resto desta prova segue diretamente do Lema 1.  $\square$

A solução do Teorema 4 garante que o sistema é estável e resulta em uma estimativa da região de atração. No entanto, o interesse neste capítulo é o projeto do controlador, ou seja, é determinar os ganhos com alguma garantia de desempenho. Assim, pode-se facilmente utilizar o teorema acima para obter uma estimativa otimizada do limitante superior do ganho  $\mathcal{L}_2$ . Para essa finalidade utiliza-se o seguinte resultado:

**Corolário 1** (Estimativa do Ganho  $\mathcal{L}_2$ ). *Considere o Teorema 4 e o escalar  $\gamma$ . Suponha que as matrizes  $\mathbf{P} = \mathbf{P}'$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{L}_1$ ,  $\mathbf{L}_2$ ,  $\mathbf{H}_k$ ,  $\mathbf{M}_k$ , os escalares positivos  $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \nu_1, \nu_2, \nu_3$ ,  $\lambda > 0$  e  $\gamma > 0$  são solução para o seguinte problema de otimização:*

$$\min \gamma \quad \text{sujeito a:} \quad (5.33), (5.34), (5.35) \text{ e } (5.36) \quad (5.39)$$

Então, o ganho  $\mathcal{L}_2$  do sistema (3.50),  $\|\mathcal{G}_{w_a z}\|_\infty$ , é limitado por  $\sqrt{\gamma}$ . Em outras palavras, para um conjunto admissível  $\mathcal{W}_a$ :

$$\|\mathcal{G}_{w_a z}\|_\infty \triangleq \sup_{w_a \in \mathcal{W}_a, w_a \neq 0} \left\{ \frac{\|\mathbf{z}\|_2}{\|\mathbf{w}_a\|_2} : x(0) = 0 \right\} < \sqrt{\gamma}$$

Desta forma, quanto menor o  $\gamma$  encontrado menor será o ganho do sistema da entrada  $\mathbf{w}_a$  para a saída  $\mathbf{z}$ . Portanto, minimizar o ganho  $\mathcal{L}_2$  indica atenuar o efeito da perturbação na saída de interesse.

## 5.5 PROJETO DE CONTROLE

Nesta seção, apresenta-se uma solução do Problema 3 utilizando um resultado direto do Teorema 4. Observa-se que do Teorema 4 o projeto dos ganhos do controlador  $\mathbf{K}$  conduz a uma desigualdade matricial bilinear, devido à multiplicação de  $\mathbf{K}$  pelos elementos  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$  da função de Lyapunov. Dessa forma, para caracterizar uma formulação convexa para o problema de controle é preciso remover essas multiplicações entre variáveis de decisão. Para superar este problema, neste trabalho o vetor  $\mathbf{Q}$  e o escalar  $\mathbf{R}$  são considerados elementos dados. Assim, é possível a partir da solução das LMIs do Teorema 4 encontrar os ganhos do controlador.

Além disso, para garantir que  $\eta$  seja constante independente dos ganhos projetados, a seguinte restrição de igualdade deve ser adicionada ao projeto:

$$K_3\eta - K_1 = 0 \quad (5.40)$$

em que  $\eta$  foi definido em (3.38).

Então, apresenta-se o seguinte resultado para projetar os ganhos do controlador minimizando o limitante superior de  $\|\mathcal{G}_{w_{az}}\|_\infty^2$ :

**Teorema 5.** *Considere o sistema em (3.50), que representa a dinâmica em malha fechada do conversor Boost para um dado controlador de ganho  $\mathbf{K}$ . Considere a Hipótese 2 e um dado vetor  $\mathbf{Q}$  e um escalar  $\mathbf{R}$ . Seja  $\mathcal{B}_x$  uma região politópica para os estados definida pelos escalares  $\alpha_k$  e  $\beta_k$  com  $k = 1, 2, 3$  como definida em (4.23),  $\mathcal{B}_\delta$  o conjunto de incerteza admissível no entorno da carga nominal,  $\bar{Y}_o$  como em (3.44) e  $\mathcal{W}_a$  o conjunto de perturbação admissível definida em (3.51). Seja  $\mu$  uma dada taxa de convergência tal como definida no Lema 2 e  $\tilde{\Theta}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{m \times 3}$  uma dada função afim em  $\mathbf{x}$  tal como apresentada em (4.5).*

*Supondo que existe as matrizes  $\mathbf{P} = \mathbf{P}'$ ,  $\mathbf{L}_1$ ,  $\mathbf{L}_2$ ,  $\mathbf{H}_k$ ,  $\mathbf{M}_k$  e escalares positivos  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  e  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$ ,  $\lambda$  e  $\gamma$  são solução do seguinte problema de otimização :*

$$\min \gamma \quad \text{sujeito a : } (5.33), (5.34), (5.35), (5.36) \text{ e } (5.40) \quad (5.41)$$

*Então,  $\mathbf{K}$  é o vetor de ganhos do controlador e tem-se as seguintes situações:*

- i Para qualquer  $\mathbf{x}(0) \in \mathcal{R}_o$  e  $\mathbf{w}_a \in \mathcal{W}_a$  as trajetórias do sistema não saem do conjunto  $\mathcal{R}$  para todo  $t \geq 0$ ;*
- ii Para qualquer  $\mathbf{x}(0) \in \mathcal{R}_o$  e  $\mathbf{w}_a \equiv 0$ , a origem do sistema em malha fechada em (3.50) é localmente exponencialmente estável,  $\mathbf{x} \in \mathcal{R}_o$  para todo  $t \geq 0$  e as trajetórias dos estados tendem para origem quando o tempo tende ao infinito;*
- iii Para qualquer  $\mathbf{w}_a \in \mathcal{W}_a$  e  $\mathbf{x}(0) \equiv 0$ ,  $\|\mathcal{G}_{w_{az}}\|_\infty \leq \sqrt{\gamma}$  e  $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{R}(\lambda)$  para todo  $t \geq 0$ .*

**Prova do Teorema 5.** A prova segue diretamente da prova do Teorema 4 levando em conta a restrição de igualdade em (5.40).  $\square$

**Observação 5.** *No Teorema 5 toma-se o vetor  $\mathbf{Q}$  e o escalar  $\mathbf{R}$  como dados. No entanto, encontrar esses elementos que resulte em uma solução factível na síntese do controlador não é uma tarefa fácil. Então,*

*pode-se obter o vetor  $\mathbf{Q}$  e o escalar  $\mathbf{R}$  factíveis resolvendo o Teorema 4, supondo que se conheça um ganho  $\mathbf{K}$  que estabiliza o sistema (obtido, por exemplo, por métodos clássicos).*

## 5.6 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção, primeiro apresenta-se, passo a passo, como proceder com o projeto do controlador a partir dos resultados teóricos apresentados nas seções anteriores. Em seguida, apresentam-se alguns exemplos de projetos a fim de mostrar como os parâmetros de entrada, tal como a escolha do tamanho do politopo  $\mathcal{B}_x$ , da taxa de convergência e do tamanho da faixa de valores da incerteza influenciam na síntese dos ganhos e na estimativa do limitante do ganho  $\mathcal{L}_2$ . Esses exemplos podem servir como “orientação” de sintonia do controlador. Por fim, esta seção termina apresentando um exemplo completo de projeto a partir das orientações precedentes.

A determinação dos ganhos é realizado utilizando o Teorema 5 e sua aplicação conta com o vetor  $\mathbf{Q}$  e o escalar  $\mathbf{R}$  como dados de entrada. Desta forma, escolher esses elementos adequados que convirja para a solução do problema de otimização do teorema é um desafio. Para superar esta questão, utiliza-se o resultado do Colorário 1 para calcular o vetor  $\mathbf{Q}$  e o escalar  $\mathbf{R}$  adequados, ou seja, antes de realizar a síntese do controlador é realizado uma etapa de análise para obter o vetor  $\mathbf{Q}$  e o escalar  $\mathbf{R}$ . Para facilitar a apresentação do método de projeto elaborado considere a Tabela 7.

Nesta tabela são elencados os dados de entrada e saída para o procedimento de análise e de síntese, e foi subtraído a escolha da saída de interesse  $\mathbf{z}$  para simplificar a discussão. Ainda assim, torna-se claro a partir da tabela que existem muitas alternativas de ajuste dos parâmetros para realizar o projeto. Mas para o primeiro exemplo, a maneira mais simples é considerar os dados de entrada que aparecem em ambos os procedimentos iguais. Isso significa que é necessário apenas ajustar três dos sete, de tal modo que o mesmo desempenho exigido na análise será tomado como mínimas condições a serem satisfeitas na síntese. Logo, espera-se que os dados de saída da síntese sejam resultados de um controlador de melhor desempenho que o da análise.

Tabela 7 – Relação dos dados de entrada e saída para os procedimentos de análise e síntese.

Análise	
Entrada	Limitantes $\alpha$ e $\beta$ do politopo $\mathcal{B}_x$
	Limitantes $\rho_1$ e $\rho_2$ da faixa de valores da incerteza na carga;
	Taxa de convergência $\mu$
Saída	Estimativa da região de atração $\mathcal{R}$
	Estimativa do limitante superior da norma $\mathcal{L}_2$
	Vetor $\mathbf{Q}$ e o escalar $\mathbf{R}$
Síntese	
Entrada	Limitantes $\alpha$ e $\beta$ do politopo $\mathcal{B}_x$
	Limitantes $\rho_1$ e $\rho_2$ da faixa de valores da incerteza na carga
	Taxa de convergência $\mu$
	Vetor $\mathbf{Q}$ e o escalar $\mathbf{R}$
Saída	Estimativa da região de atração $\mathcal{R}$
	Estimativa do limitante superior da norma $\mathcal{L}_2$
	Ganhos $Y$ do controlador

Em outras palavras, que o limitante superior do ganho  $\mathcal{L}_2$  da síntese seja menor que o da análise e a estimativa da região de estados atingíveis da síntese seja maior que da análise. Portanto, essas duas verificações são suficientes para aferir a qualidade do controlador projetado, embora somente depois de se realizar simulações e testes práticos com o conversor utilizando os ganhos projetados tem-se garantia de desempenho. Por esta razão, neste trabalho concentra-se em simulações que se verifica o desempenho da tensão de saída quando o sistema está sujeito a mudança de carga e perturbações.

Assim, diante de tudo que foi exposto, neste trabalho o primeiro exemplo utiliza a seguinte estratégia: *fixa os mesmos valores para os dados de entrada em ambos procedimentos.*

**Exemplo 6.** *Neste exemplo, realiza-se a síntese dos parâmetros do controlador para o mesmo conversor utilizado nos exemplos do capítulo anterior. Assim, considere o conversor Boost com correção do fator de potência, cuja representação em malha fechada é dada pela Equação (3.50), com as especificações de potência da Tabela 4 e o ponto de*

equilíbrio da Tabela 6.

Além disso, considere a função de Lyapunov da Equação (4.42) como a função de Lyapunov polinomial para este exemplo. Também considera-se as condições iniciais nulas para realizar o projeto, o que equivale a  $V(\mathbf{x}(0)) = 0$ . E definindo  $\lambda = 1$  tem-se que o conjunto de estados atingíveis  $\mathcal{R}(\lambda) = \{x : V(x) \leq 1\}$ .

Outra definição exigida pelo método é a escolha das variáveis para compor a saída de interesse  $\mathbf{z}$ . Como considera-se que o sistema está sujeito a perturbações e um dos objetivos de controle é regular a tensão de saída, torna-se evidente que a tensão de saída,  $x_2$ , deve estar na saída de interesse. Além disso, deseja-se que o sinal de controle  $u$  seja suave e capaz de atenuar as perturbações do sistema, então o sinal de controle também deve estar na saída de interesse. Portanto, a saída de interesse pode ser escrita como:

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} x_2 \\ u \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{z}'\mathbf{z} = x_2^2 + u^2$$

tal que

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{0}_2.$$

Agora, define-se os dados de entrada para os procedimentos de análise e síntese. Então, toma-se os seguintes limites para o politopo  $\mathcal{B}_x$ :

$$\alpha = \beta = [10 \ 40 \ 3]$$

A taxa de convergência escolhida é  $\mu = 0,5$ . E a faixa de valores da incerteza na carga,  $|\delta Y_o| = 0,0013S$ . Este valor foi escolhido para representar uma mudança de carga de até  $\pm 35\%$  entorno do valor nominal  $\bar{Y}_o$ , o que equivale a seguinte faixa de resistência:

$$192 \ \Omega \leq R_o \leq 400 \ \Omega$$

Com os parâmetros de análise e projeto escolhidos, tomam-se os mesmos ganhos do controlador utilizado no Exemplo 1 para aplicar ao Colorário 1, reescritos a seguir:

$$K = [0,6346 \ 0,0057 \ 0,2857]$$

Portanto, com base nestas informações e aplicando-se o Colorário 1 encontra-se o seguinte vetor  $\mathbf{Q}$ :



$$\mathbf{Q} = 10^3 \times [-0,1146; -0,0279; 0,0273; -0,0001; \\ 0,0042; -6,1324; -0,0602; 1,5046]'$$

e o escalar  $\mathbf{R} = 3,6469 \times 10^4$

Além disso, como resultado obtêm-se uma estimativa de estados atingíveis  $\mathcal{R}$  mostrada na Figura 27(a) e na Tabela 8 mostra-se uma estimativa otimizada do limitante superior de  $\|\mathcal{G}_{w_{az}}\|_{\infty}^2$ .

Assim, tomando-se o vetor  $\mathbf{Q}$ , o escalar  $\mathbf{R}$  e os demais dados apresentados acima aplica-se o Teorema 5, que resulta na síntese dos ganhos a seguir, na estimativa da região de estados atingíveis  $\mathcal{R}$  mostrada na Figura 27(b) e na estimativa otimizada do limitante superior de  $\|\mathcal{G}_{w_{az}}\|_{\infty}^2$  mostrado na Tabela 8.

$$K = [0,4007 \ 0,0174 \ 0,1804]$$

Observa-se na Tabela 8 que a estimativa do limitante superior de  $\|\mathcal{G}_{w_{az}}\|_{\infty}^2$  obtida na síntese é menor que a obtida na análise, o que representa que o procedimento de síntese determinou ganhos para o controlador cuja dinâmica em malha fechada possui melhor desempenho, visto ser capaz de rejeitar perturbações de maior energia.

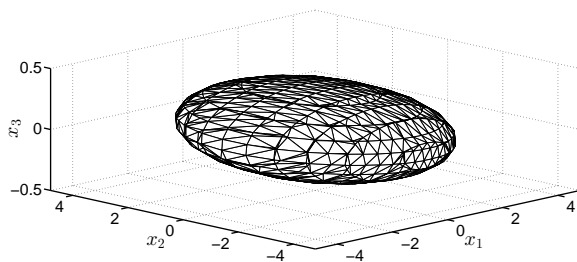
Tabela 8 – Estimativas do limitante superior de  $\|\mathcal{G}_{w_{az}}\|_{\infty}^2$  – Projeto 1.

Análise	$\gamma = 1,3693$
Síntese	$\gamma = 1,0600$

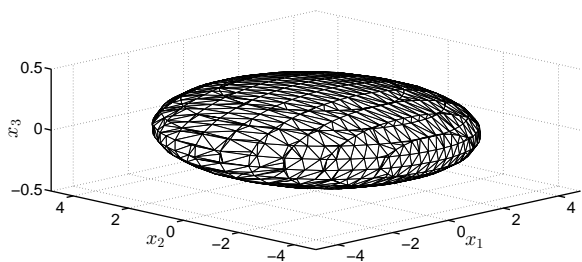
Nesta figura, mostra-se uma estimativa da região de estados atingíveis para ambos procedimentos, análise e síntese, em um espaço de mesma dimensão que o sistema. O eixo  $x_1$  representa a corrente no indutor, o eixo  $x_2$  a tensão de saída e o eixo  $x_3$  representa o estado do integrador. Outro aspecto é que o plano  $x_1x_2$  foi rotacionado em  $180^\circ$  para visualizar a porção em que a tensão de saída é negativa.

Ao observar as estimativas percebe-se que estas são pequenas dado o tamanho do polítopo, e ambas estimativas são de tamanhos próximos. Uma forma de verificar a qualidade do controlador projetado é comparar a estimativa da região de estados atingíveis obtida na síntese com a da análise. Então, a seguir apresentam-se as estimativas da região de estados atingíveis de ambos procedimentos com  $x_3 = 0$  para facilitar a visualização desse detalhe. Na Figura 28 mostra-se ambas estimativas no plano  $(x_1, x_2)$ , e claramente a estimativa da síntese é maior que a obtida na análise.

Figura 27 – Estimativas da região de estados atingíveis do conversor Boost com CFP.

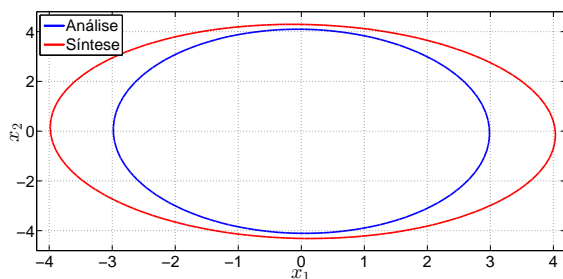


(a) Estimativa da região de estados atingíveis para análise.



(b) Estimativa da região de estados atingíveis para síntese.

Figura 28 – Estimativa do conjunto de estados atingíveis no plano  $(x_1, x_2)$  e  $x_3 = 0$  do procedimento de análise e síntese.



Portanto, o projeto nos requisitos de estimativas da região de estados atingíveis e do limitante superior do ganho  $\mathcal{L}_2$  obtiveram me-

lhor resultado. Para verificar essa superioridade qualitativa, realiza-se simulações no *Psim* para observar o desempenho do controlador projetado quando acontece mudança de carga no conversor e comparar o desempenho com o controlador de referência retirado de (JAPPE; MUSSA; COUTINHO, 2011). Nas simulações no *Psim* a seguir utiliza-se um conversor em malha fechada com o esquema da Figura 16, que considera os ganhos estáticos de realimentação, tal como em (JAPPE; MUSSA; COUTINHO, 2011). Portanto, deve-se utilizar a parametrização da Observação 2. Desta forma, os ganhos projetados neste exemplo redimensionados são:

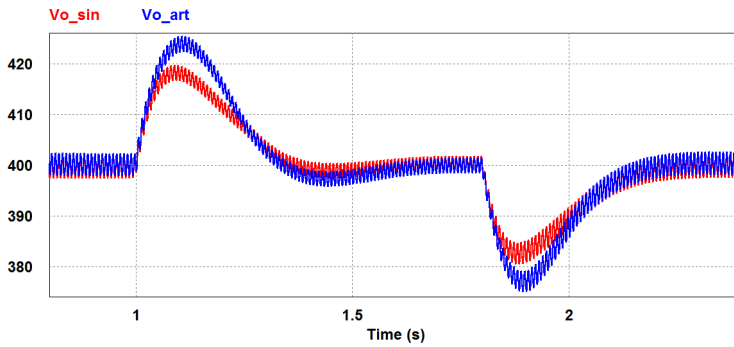
$$K = [6, 0104 \ 8, 5380 \ 88, 3878]$$

Na simulação dois conversores de mesmas especificações de projeto são testados, de modo que um possui o controlador com os ganhos de referência e outro com os ganhos determinadas no projeto. Na Figura 29(a) apresentam-se as saídas de ambos conversores para o caso em que ocorre uma mudança de carga temporário a partir do regime permanente de  $260 \ \Omega$  para  $400 \ \Omega$ , em que este é um dos limites de carga admitidos no projeto. Observa-se na figura que a saída do conversor com o controlador projetado, denotada por  $V_o - \sin$  (em vermelho), é mais rápida e tem menor sobressinal que a saída do conversor de referência, denotada por  $V_o - \text{art}$  (em azul).

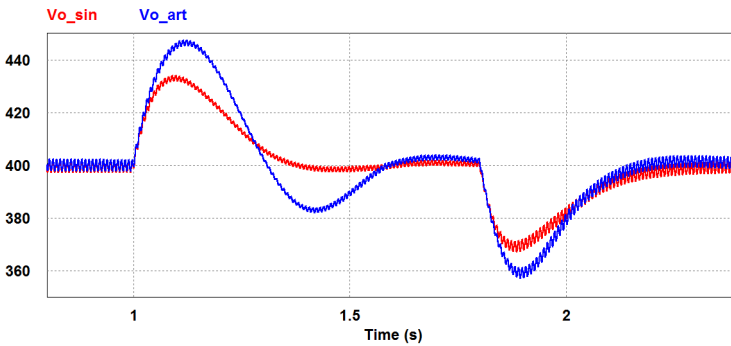
Além disso, realiza-se simulação para a situação em que ambos os conversores estão sujeitos a uma mudança de carga para 40% da corrente nominal, o que corresponde a  $650 \ \Omega$ . O conversor com o controlador projetado mantém-se estável, e com desempenho superior ao conversor com o controlador de referência, como pode ser verificado na Figura 29(b). Nesta figura, a saída do conversor com o controlador projetado é denotada por  $V_o - \sin$  (em vermelho), e a saída do conversor de referência é denotada por  $V_o - \text{art}$  (em azul). Portanto, torna-se evidente a partir destes testes a vantagem do controlador projetado sobre o controlador de referência.

Por fim, para mostrar a robustez do controlador projetado realiza-se um teste com mudança de carga temporária a partir do regime permanente de  $260 \ \Omega$  para  $866 \ \Omega$ . Nesta situação, o conversor com o controlador projetado da Figura 30(a) mantém-se estável, enquanto que o controlador com o controlador de referência instabiliza após a mudança de carga como pode ser visto na Figura 30(b).

Figura 29 – Tensão de saída para mudanças de carga. Conversor com controlador projetado está em vermelho e conversor com controlador de referência está em azul.

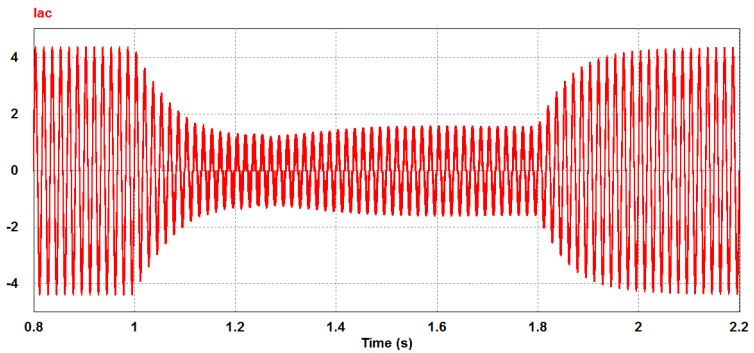


(a) Mudança para  $400 \Omega$ .

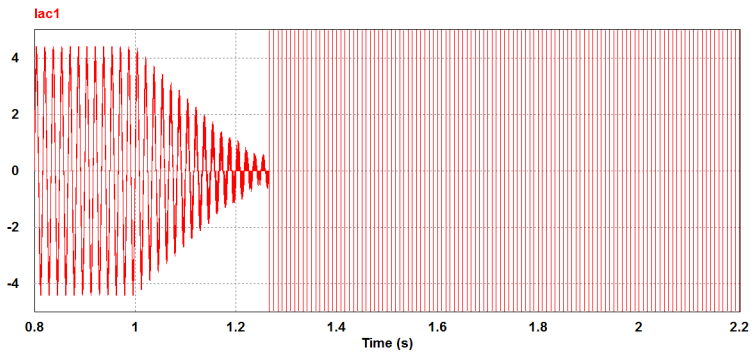


(b) Mudança para  $650 \Omega$ .

Figura 30 – Corrente de entrada para os conversores Boost com CFP com controlador projetado e de referência para mudança de carga de  $866 \Omega$ .



(a) Controlador projetado.



(b) Controlador de referência.

Após este exemplo, em que foi detalhado passo a passo como realizar o projeto e também foi mostrado a viabilidade do método para determinar ganhos robustos, apresenta-se uma série de projetos classificados quanto a estratégia de escolha dos parâmetros de entrada dos procedimentos de análise e síntese. Estes projetos foram desenvolvidos com a finalidade de mostrar a influência dos parâmetros de entrada na determinação dos ganhos. A primeira estratégia envolve a escolha do politopo  $\mathcal{B}_x$ , a segunda a escolha da taxa de convergência e a terceira a escolha da faixa de incerteza na carga. Os demais parâmetros são iguais ao do Exemplo 6. Toma-se como critério de desempenho as estimativas do limitante superior do ganho  $\mathcal{L}_2$  em todos os projetos.

Além disso, para facilitar a visualização e interpretação dos resultados das estratégias, as tabelas mostrando os parâmetros do controlador  $\mathbf{K}$  serão ajustadas, para que os ganhos do controlador apareçam maiores. O ajuste é realizado levando-se em conta os ganhos de realimentação estática  $1/V_{max}$  e  $1/I_{max}$ , ou seja, os ganhos do controlador aparecerão nas tabelas como:

$$K_{Tabelas} = [K_1 * I_{max} \quad K_2 * V_{max} \quad K_3 * V_{max}] \quad (5.42)$$

caso contrário as tabelas conteriam os ganhos com número pequenos para serem interpretados.

A estratégia 1 é a mais simples, pois considera os dados de entrada e saída todos iguais para ambos os procedimentos, análise e síntese. É evidente que este procedimento por ser o mais simples oferece menores ajustes na obtenção de um controlador que tenha melhor desempenho.

Assim, na Tabela 9 apresenta-se projetos de  $A$  até  $F$  para diferentes tamanhos de politopos. Os projetos de  $A$  até  $D$  utilizam politopos simétricos, enquanto os projetos  $E$  e  $F$  utilizam politopos assimétricos. Nota-se que o projeto  $A$  é idêntico ao Exemplo 6. Os demais da tabela diferenciam-se somente na escolha do politopo.

Ao observar a Tabela 9 percebe-se que todos os projetos resultaram em estimativas do limitante superior de  $\|\mathcal{G}_{waz}\|_{\infty}^2$  menores do que no procedimento de análise, o que é um indicativo satisfatório de desempenho. Além disso, existe uma tendência de quanto maior o tamanho do politopo maiores são os ganhos, ou seja, ao se comparar com os valores dos parâmetros do controlador de referencia os ganhos projetados são maiores.

Nota-se que o projeto  $D$ , com o menor politopo, possui os menores ganhos, inclusive tendo seus valores distantes dos demais, e também para este projeto obteve-se a menor estimativa do limitante superior de

$\|\mathcal{G}_{w_{az}}\|_{\infty}^2$  para análise e a segunda melhor estimativa para a síntese, perdendo apenas para o projeto  $A$ .

Tabela 9 – Primeira estratégia de projeto - ‘tudo igual’.

Entrada		Saída			
Politopo $\mathcal{B}_x$	$\gamma_{analise}$	$\gamma_{sintese}$	K		Projeto
$\alpha = \beta = [10; 40; 3]$	1,3693	1,0600	[6, 0104; 8, 5380; 88, 3878]		A
$\alpha = \beta = [10; 40; 5]$	1,4981	1,1524	[15, 0632; 12, 8937; 221, 5172]		B
$\alpha = \beta = [10; 60; 5]$	1,5419	1,3196	[13, 0292; 7, 3495; 191, 6064]		C
$\alpha = \beta = [10; 30; 2]$	1,2983	1,0674	[2, 6657; 4, 9611; 39, 2022]		D
$\alpha = [10; 40; 4]$ $\beta = [10; 30; 2]$	1,3463	1,0681	[4, 7743; 7, 0098; 70, 2110]		E
$\alpha = [10; 50; 5]$ $\beta = [10; 40; 3]$	1,4345	1,1291	[14, 2023; 11, 9962; 208, 8575]		F

A segunda estratégia de projeto é variar o valor da taxa de convergência nos procedimentos de análise e síntese. Em relação aos demais parâmetros de entrada, toma-se os mesmos do Exemplo 6. Nesta estratégia, o ideal é ajustar para a síntese uma taxa de convergência maior do que a ajustada na análise. Na Tabela 10 são apresentados projetos de  $A$  até  $F$  para diferentes ajustes da taxa de convergência.

Tabela 10 – Segunda estratégia de projeto - ‘aumento de  $\mu$ ’.

Entrada		Saída			
$\mu$ - análise	$\mu$ - síntese	$\gamma_{analise}$	$\gamma_{sintese}$	K	Projeto
0,2	0,5	1,2477	0,9937	[6, 8614; 10, 5930; 100, 9029]	A
0,2	0,8	1,2477	1,0920	[8, 1016; 11, 3102; 119, 1410]	B
0,5	0,8	1,3693	1,1900	[5, 0017; 6, 8379; 73, 5551]	C
0,5	1,2	1,3693	1,4689	[5, 4633; 6, 3091; 80, 3423]	D
0,8	1,2	1,5544	1,5017	[6, 0427; 6, 6369; 88, 8634]	E
1,2	1,6	1,8963	1,9167	[7, 7455; 6, 1805; 113, 9039]	F

Nota-se da tabela acima que o ganho  $K_2$  possui valor maior para os projetos que consideram taxas de convergência menores, e valores em torno de uma faixa pequena para os casos com taxas maiores. Em todos os casos, os valores são maiores do que o ganho  $K_2$  do controlador de referência. Percebe-se também que existe uma tendência de quanto maior a taxa de convergência maiores são as estimativas do limitante superior de  $\|\mathcal{G}_{w_{az}}\|_{\infty}^2$ , inclusive para o caso em que se considera a maior taxa de convergência obteve-se a inversão da relação encontrada nos demais projetos. Na maioria dos projetos as estimativas do limitante

superior de  $\|\mathcal{G}_{w_{az}}\|_{\infty}^2$  da etapa de síntese são menores do que na análise, o que é um indicativo satisfatório de desempenho.

Esse resultado do método de projeto pode estar associado ao fato que a solução do problema de controle envolver a otimização do limitante de  $\|\mathcal{G}_{w_{az}}\|_{\infty}^2$ , tanto no procedimento de análise quanto no de síntese. Outro aspecto que pode contribuir para esta tendência é o fato de a taxa de convergência e o ganho  $\mathcal{L}_2$  serem critérios de desempenho, podendo ser conflitantes com diferentes pesos na solução do problema de otimização. Tendo em vista, que a taxa de convergência é um critério de desempenho para todos os estados, enquanto a ganho  $\mathcal{L}_2$  é relativa somente as variáveis escolhidas no projeto.

Uma última estratégia de projeto considera a influência da escolha da faixa de valores da incerteza da carga  $\delta Y_o$ , mostrando a diferença em escolher faixas diferentes para a análise e síntese. Assim como nas estratégias anteriores, os demais parâmetros de entrada são os mesmos do Exemplo 6. Na Tabela 11 apresenta-se projetos de  $A$  até  $F$  para diferentes escolhas de faixa de valores da incerteza.

A incerteza na carga  $\delta Y_o$  define a largura da faixa no entorno da carga nominal para o qual é admitida mudança de carga. Para facilitar a visualização e interpretação na Tabela 11, nas definições de  $\rho$  será apenas apresentado um valor percentual equivalente a  $\rho$ , ainda assim capaz de definir o limite inferior e superior de  $\delta Y_o$ .

Por exemplo, ao definir  $\rho$  do Exemplo 6 como:

$$\rho = [-0,0013; 0,0013]$$

definia-se a mudança de carga entre os limites:

$$[Y_{omin}, Y_{omax}] = [0,0025; 0,0051]$$

o que corresponde a um valor 35% no entorno do valor nominal, então pode-se escrever:

$$\rho\% = [0,65; 1,35]$$

em que  $\rho\%$  indica qual a faixa de valores de incerteza na carga admissíveis em termos percentuais a partir da carga nominal, o que representa implicitamente definir  $[\rho_1, \rho_2]$ .

Na Tabela 11 mostra-se dois tipos de escolha da largura da faixa de valores da incerteza. Os projetos  $A$ ,  $C$  e  $E$  possuem faixas mais estreitas na etapa de análise do que na etapa de síntese, enquanto nos projetos  $B$ ,  $D$  e  $F$  possuem faixas mais largas na etapa de análise do que na de síntese. De modo geral, os projetos que consideram larguras



de faixa mais largas na etapa de análise e largas mais estreitas na síntese possuem um desempenho superior comparado a escolha oposta, ou seja, os projetos  $B$ ,  $D$  e  $F$  resultaram em uma estimativa do limitante superior de  $\|\mathcal{G}_{w_{\alpha z}}\|_{\infty}^2$  da etapa de síntese menor do que na etapa de análise, e com uma diferença entre as estimativas maior.

Tabela 11 – Terceira estratégia de projeto - ‘mudando  $[\rho_1, \rho_2]$ ’.

Entrada		Saída			
$\rho\%$ - análise	$\rho\%$ - síntese	$\gamma_{analise}$	$\gamma_{sintese}$	K	Projeto
[0, 95; 1, 05]	[0, 65; 1, 35]	1,2062	1,0344	[5, 5484; 7, 4565; 81, 5935]	A
[0, 65; 1, 35]	[0, 95; 1, 05]	1,3693	1,0099	[4, 1081; 7, 4741; 60, 4133]	B
[0, 90; 1, 10]	[0, 60; 1, 40]	1,2232	1,0467	[6, 8100; 8, 7657; 100, 1465]	C
[0, 60; 1, 40]	[0, 90; 1, 10]	1,4145	1,0564	[4, 0700; 6, 7564; 59, 8525]	D
[0, 95; 1, 05]	[0, 40; 1, 60]	1,2062	1,3911	[6, 5551; 3, 6410; 96, 3982]	E
[0, 40; 1, 60]	[0, 95; 1, 05]	1,6839	1,1262	[5, 5484; 7, 4565; 81, 5935]	F

Nos projetos  $E$  e  $F$  a diferença de tamanho das faixas entre as etapas de projeto são maiores do que nos demais, de modo que no projeto  $E$  obteve-se o pior resultado, em que se encontrou uma estimativa do limitante superior de  $\|\mathcal{G}_{w_{\alpha z}}\|_{\infty}^2$  no procedimento de síntese maior que na análise. O projeto  $B$  resultou no melhor desempenho, em que o limitante da norma foi otimizada ao menor valor dentre os demais projetos.

Para finalizar as orientações de projeto, observa-se que todos projetos apresentados resultam em melhor desempenho e robustez se comparado com o controlador de referência (JAPPE; MUSSA; COUTINHO, 2011). Além disso, outras estratégias podem ser aplicadas ao método de projeto desenvolvido. Então, abaixo resume-se as principais características dos resultados obtidos:

- Todos os projetos resultaram em um ganho  $K_2$  de maior valor se comparado com o controlador de referência. E na maioria dos projetos o ganho  $K_2$  obtido tem seu valor próximo de 6 a 8, e no pior projeto apresentou  $K_2 = 3,6410$  (Tabela 11);
- A maioria do projetos resultaram em estimativas do limitante superior de  $\|\mathcal{G}_{w_{\alpha z}}\|_{\infty}^2$  da etapa de síntese menor do que da etapa de análise. Em duas situações se verificou que os parâmetros de projeto não eram favoráveis: altas taxas de convergência e alargamento da faixa de incerteza na etapa de síntese;
- Todos os projetos mostraram-se mais rápidos que o controlador

de referência em simulações no Psim para os testes realizados no Exemplo 6.

Então, diante do que foi exposto o exemplo a seguir apresenta um projeto do controlador utilizando os melhores resultados mostrados nas tabelas.

**Exemplo 7.** *Este exemplo apresenta um projeto cujos dados de entrada são aqueles que se destacaram nas estratégias acima apresentadas.*

*Considere o Exemplo 6 e os melhores resultados obtidos das estratégias apresentadas, baseando-se como critério as menores estimativas do limitante superior de  $\| \mathcal{G}_{w_{az}} \|_{\infty}^2$ :*

- *Estratégia 1: Projeto  $D \rightarrow$  Politopo  $\mathcal{B}_x$  com  $\alpha = \beta = [10; 30; 2]$ ;*
- *Estratégia 2: Projeto  $A \rightarrow \mu_{analise} = 0,2$  e  $\mu_{sintese} = 0,5$ ;*
- *Estratégia 3: Projeto  $B \rightarrow \rho\%_{-analise} = [0, 65; 1, 35]$  e  $\rho\%_{-sintese} = [0, 95; 1, 05]$ ;*

*Ao aplicar o método apresentado no Exemplo 6, através do Colorário 1 e do Teorema 5, segue os seguintes resultados:*

- *Análise:*

1. *Vetor  $\mathbf{Q}$  e escalar  $\mathbf{R}$ :*

$$\mathbf{Q} = 10^3 \times [-0,0428; 0,0016; 0,0116; 0,0002; \\ -0,0055; -6,3908; -0,0699; 1,5781]$$

$$\text{e } \mathbf{R} = 5,4191 \times 10^4$$

2. *Estimativa da região de estados atingíveis na Figura 31(a).*
3. *Estimativa do limitante superior de  $\| \mathcal{G}_{w_{az}} \|_{\infty}^2$  na Tabela 12.*

- *Síntese:*

1. *Ganho projetado:*

$$\mathbf{K} = [0,1870; 0,0112; 0,0842]$$

2. *Estimativa da região de estados atingíveis na Figura 31(b).*
3. *Estimativa do limitante superior de  $\| \mathcal{G}_{w_{az}} \|_{\infty}^2$  na Tabela 12.*

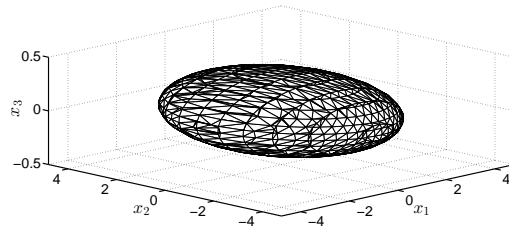
Ao observar a Tabela 12 e as Figuras 31 e 32 percebe-se que ambos critérios de qualidade do projeto são satisfeitos. Em outras palavras, a estimativa do limitante superior de  $\| \mathcal{G}_{w_{az}} \|_{\infty}^2$  da síntese é menor que da análise e a estimativa da região de atração da síntese é maior que a obtida na análise.

Tabela 12 – Estimativas do limitante superior de  $\| \mathcal{G}_{w_{az}} \|_{\infty}^2$  – Projeto 2.

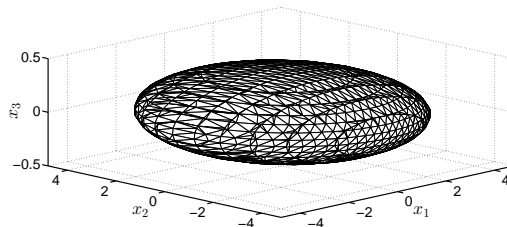
Análise	$\gamma = 1,1901$
Síntese	$\gamma = 1,0364$

Nesta figura, mostra-se uma estimativa da região de estados atingíveis para ambos procedimentos, análise e síntese, em um espaço de mesma dimensão que o sistema. O eixo  $x_1$  representa a corrente no indutor, o eixo  $x_2$  a tensão de saída e o eixo  $x_3$  representa o estado do integrador. Outro aspecto é que o plano  $x_1x_2$  foi rotacionado em  $180^\circ$  para visualizar a porção em que a tensão de saída é negativa.

Figura 31 – Estimativas da região de estados atingíveis do conversor Boost com CFP.



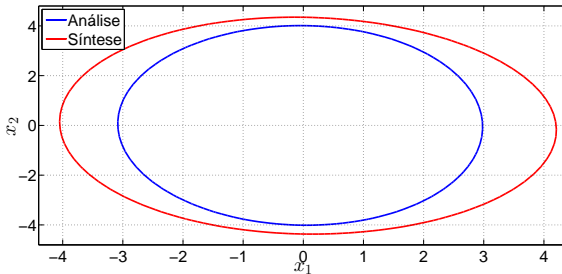
(a) Estimativa da região de estados atingíveis para análise.



(b) Estimativa da região de estados atingíveis para síntese.

Para facilitar a visualização do tamanho relativo entre as duas estimativas apresenta-se estas no plano  $(x_1, x_2)$  na Figura 32, mostrando a estimativa da síntese maior que da análise.

Figura 32 – Estimativas das regiões de estados atingíveis no plano  $(x_1, x_2)$  e  $x_3 = 0$  do procedimento de análise e síntese.



Como realizado no Exemplo 6, para verificar a superioridade qualitativa do método de projeto, realiza-se simulações no Psim. Porém, agora observa-se o desempenho do controlador projetado quando acontece perturbação na tensão de entrada. Na Figura 33 mostra-se a tensão de saída de dois conversores, sendo que a saída denotada por  $V_o - \sin$  (em vermelho) utiliza o controlador projetado, cuja resposta a perturbação é pouco mais lenta, porém tem menor sobressinal que a saída do conversor de referência, denotada por  $V_o - \text{art}$  (em azul).

A fim de comparar os controladores projetados nos Exemplos 6 e 7 realiza-se uma simulação no Psim com a situação de mudança de carga de  $260 \Omega$  para  $866 \Omega$ . Neste caso, o controlador projetado no Exemplo 7 tem melhor desempenho que o projetado no Exemplo 6, pois é um pouco mais rápido e com menor sobressinal. Na Figura 34(a) apresenta-se as saídas de ambos conversores, de modo que saída do conversor com o controlador projetado no Exemplo 6 é denotada por  $V_o - \sin1$  (em vermelho), enquanto a saída do conversor com o controlador projetado no Exemplo 7 é denotada por  $V_o - \sin2$  (em azul).

Já na Figura 34(b) apresenta-se os estados do integrador de ambos conversores, de modo que o estado do integrador com o controlador projetado no Exemplo 6 converge para o equilíbrio após a mudança de carga com uma resposta mais rápida e oscilatória que o estado do integrador com o controlador projetado no Exemplo 7. é denotada por  $V_o - \sin2$  (em azul). Na Figura 34(b) o estado do integrador com o controlador projetado no Exemplo 6 é denotada por  $\text{int} - v - \sin1$  (em vermelho), enquanto o estado do integrador com o controlador projetado

no Exemplo 7 é denotada por  $int - v - sin2$  (em azul).

Figura 33 – Tensão de saída quando o sistema sujeito a perturbação na tensão de entrada. Conversor com controlador projetado está em vermelho e conversor com controlador de referência está em azul.

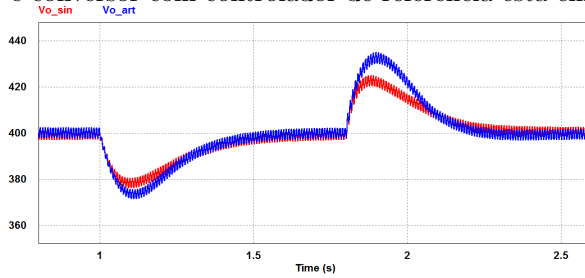
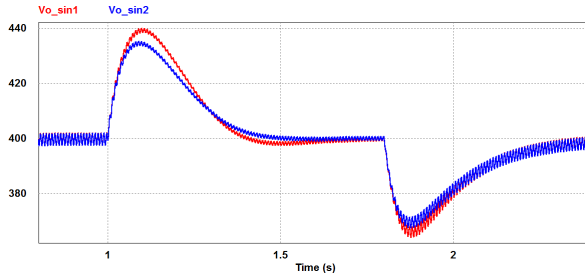
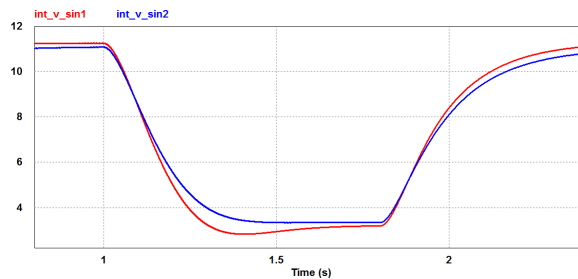


Figura 34 – Tensão de saída e integrador para mudanças de carga  $866 \Omega$ . Conversor com controlador do Exemplo 6 está em vermelho e conversor com controlador projetado neste exemplo está em azul.



(a) Tensão de saída.



(b) Integrador.

Nesta seção, foram vistos exemplos de projetos utilizando o método desenvolvido neste capítulo. Além disso, mostrou-se que mesmo para diferentes estratégias de entrada de dados o método continua válido e resultando em ganhos robustos. Por fim, resultados de simulação focaram em avaliar o desempenho do conversor quando está sujeito a mudança de carga e perturbações na tensão de entrada utilizando os ganhos projetados.

## 6 CONCLUSÕES

Nesta dissertação, propôs-se uma abordagem LMI para a análise de estabilidade e desempenho, e síntese do ganhos do conversor Boost com correção do fator de potência autocontrolado pela corrente. A abordagem proposta considerou o modelo médio não linear do conversor supondo uma modulação PWM, uma carga variante no tempo e perturbação  $\mathcal{L}_2$  na tensão de entrada. De forma resumida, a seguir apresentam-se os resultados apresentados em cada capítulo.

O capítulo 1 apresentou uma revisão bibliográfica do problema de controle do Boost CFP, evidenciando uma área para contribuição deste trabalho. Na sequência, os principais conceitos de sistemas não lineares variantes no tempo e incertos foram apresentados no Capítulo 2, pois o modelo do conversor em malha fechada considerado nessa dissertação é não linear, variante no tempo e sujeito a perturbações limitadas em energia. Além disso, as principais técnicas LMIs para sistemas não lineares foram revisadas.

O terceiro capítulo apresentou as características de funcionamento e o modelo em malha fechada do conversor Boost. Para a obtenção do modelo em malha fechada do conversor foi utilizado o modelo médio, onde aparece uma não linearidade envolvendo o estado e a entrada de controle. Além disso, ao considerar o controlador foi utilizado a representação algébrica diferencial para tratar a lei de controle da malha de corrente que é racional. Portanto, tanto o conversor quanto o controlador possuem alguma não linearidade que foi incluída no modelo em malha fechada. Além disso, realizou-se a translação do ponto de equilíbrio original do sistema para a origem do modelo em malha fechada, e neste processo, considerou-se a incerteza na carga e a perturbação na tensão de entrada.

O capítulo 4 introduz a abordagem LMI que utiliza de uma função de Lyapunov polinomial para a análise de estabilidade regional do conversor em malha fechada quando sujeito a incerteza na carga. O método de análise desenvolvido resulta em uma estimativa da região de atração, que pode ser tomado para o conversor Boost como uma região segura de operação. Além disso, a estimativa pode ser maximizada através da solução de um problema de otimização elaborado a partir da análise de estabilidade. Neste capítulo ainda se tratou do problema de estimar uma região de atração para uma determinada taxa de convergência. Para verificar o método foram realizados exemplos com diferentes parâmetros de análise. Em particular, para mostrar a

estabilidade utilizou-se um controlador de referência retirado de (JAPPE; MUSSA; COUTINHO, 2011).

O capítulo 5 apresentou a abordagem LMI para a determinação de ganhos robustos para o conversor Boost com correção do fator de potência autocontrolado pela corrente. Esta abordagem caracteriza-se por utilizar função de Lyapunov polinomial, e considerar uma carga incerta variante no tempo e critérios de desempenho em relação à velocidade da resposta e também a atenuação de perturbações limitadas em energia. Como resultado dessa abordagem obtêm-se ganhos robustos, uma estimativa de uma região de estados atingíveis do sistema em malha fechada com os ganhos projetados e uma estimativa do limitante superior do ganho  $\mathcal{L}_2$ . Além disso, nesse capítulo foram mostrados exemplos de síntese com diferentes parâmetros de projeto. Os exemplos realizados mostraram superioridade em desempenho nos critérios avaliados, obtendo as menores estimativas do limitante superior do ganho  $\mathcal{L}_2$  e a maior estimativa da região de atração. Por fim, nos exemplos apresentados foram realizadas simulações no Psim a fim de comparar o controlador projetado com o retirado de (JAPPE; MUSSA; COUTINHO, 2011). Nas simulações testou-se mudanças de carga e perturbação na tensão de entrada temporárias que mostraram que o controlador projetado é mais rápido e robusto.

Observa-se que o trabalho possui algumas limitações em algumas direções de investigação. Duas limitações evidentes do trabalho relacionam-se com os resultados. A primeira é o uso nos exemplos de uma única saída de interesse  $\mathbf{z}' = [x_2, u]'$  como critério de desempenho para a síntese do controlador. Existem outras possibilidades para serem exploradas. Outra limitação é a falta de resultados práticos para avaliar o desempenho, pois uma implementação digital do controlador inclui um atraso de fase não considerado no modelo que pode afetar o desempenho do conversor em malha fechada. Apesar destas limitações enquanto método de análise e síntese este trabalho tem validade pelo tipo de testes realizados.

Outra limitação está em relação ao modelo médio considerado nessa dissertação. É evidente que no conversor Boost com correção do fator de potência os estados não convergem para um ponto de equilíbrio, mas para um ciclo limite. A ondulação da tensão de saída quando não desprezada e a forma senoidal da corrente do indutor conduzem para trajetórias cíclicas em 120 Hz. Porém, como desejava-se realizar a síntese, a estratégia de utilizar os valores eficazes mostrou-se suficiente para determinar ganhos robustos.

Portanto, mesmo com limitações o método de análise e síntese



apresentado nesta dissertação podem ser aplicados ao conversor Boost com correção do fator de potência sem perda de generalidade.

## 6.1 PERSPECTIVAS FUTURAS

Uma direção imediata deste trabalho é considerar no modelo uma taxa de variação de carga e variação da tensão de entrada limitadas em amplitude como uma perturbação persistente (TARBOURIECH et al., 2011). Neste contexto, torna-se possível avaliar o sistema para mudanças de carga periódicas, e também para variações persistentes na tensão de entrada.

Em relação à estimativa da região de atração, pode-se considerar funções de Lyapunov mais complexas, ou mesmo funções dependentes da incerteza de carga. A função de Lyapunov é diretamente responsável pelo tamanho e forma da estimativa da região de atração.

Em outra direção, pode-se considerar a análise de estabilidade e o projeto dos controladores utilizando o modelo discretizado em malha fechada. Isto significa considerar aspectos das implementações práticas que usam controladores digitais, o que pode resultar em uma garantia de desempenho considerando a implementação digital do controlador levando em conta os efeitos causados pelo atraso inerente dos amostradores de ordem zero (ZOH).



## REFERÊNCIAS

- AROUDI, A. E.; ORABI, M. Dynamics of PFC power converters subject to time-delayed feedback control. **International Journal of Circuit Theory and Applications**, v. 40, n. May 2010, p. 15–35, 2012.
- BARBI, I.; MARTINS, D. C. **Conversores Básicos  $CC - CC$  Não Isolados**. [S.l.]: UFSC Florianópolis, 2000.
- BEN-YAAKOV, S.; ZELTSER, I. The dynamics of a pwm boost converter with resistive input. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, v. 46, n. 3, p. 613–619, Jun 1999.
- BORGONOVO, D. et al. A self-controlled power factor correction single-phase boost pre-regulator. **IEEE 36th Power Electronics Specialists Conference, 2005. PESC '05.**, p. 2351 – 2357, 06 2005.
- BOYD, S. et al. **Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory**. [S.l.]: SIAM books, 1994.
- CHEN, M.; MATHEW, A.; SUN, J. Nonlinear Current Control of Single-Phase PFC Converters. **IEEE Transactions on Power Electronics**, v. 22, n. 6, p. 2187–2194, Nov 2007.
- CHU, G. et al. A Unified Approach for the Derivation of Robust Control for Boost PFC Converters. **IEEE Transactions on Power Electronics**, v. 24, n. 11, p. 2531–2544, 2009.
- COELHO, R. O. F. C.; SCHWEITZER, R. S.; MARTINS, D. C. Obtenção de modelos médios para grandes sinais voltados à simulação de conversores estáticos. **Anais do XIX Congresso Brasileiro de Automática, CBA 2012.**, p. 4361–4368, 2012.
- COUTINHO, D. **Análise de Estabilidade e Desempenho, e Síntese de Controle para Sistemas Não Lineares Incertos**. [S.l.]: Tese, UFSC, 2003.
- COUTINHO, D. et al. Stability analysis and control of a class of differential-algebraic nonlinear systems. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, v. 14, n. 16, 2004.

COUTINHO, D.; DE SOUZA, C. E. Nonlinear state feedback design with a guaranteed stability domain for locally stabilizable unstable quadratic systems. **IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers**, v. 59, n. 2, p. 360–370, Feb 2012.

COUTINHO, D.; DE SOUZA, C. E.; TROFINO, A. Stability analysis of implicit polynomial systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 54, n. 5, p. 1012–1018, May 2009.

COUTINHO, D. et al.  $\mathcal{L}_2$ -gain analysis and control of uncertain nonlinear systems with bounded disturbance inputs. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, John Wiley & Sons, Ltd., v. 18, n. 1, p. 88–110, 2008.

DAS, P. et al. A Nonlinear Controller Based on a Discrete Energy Function for an AC-DC Boost PFC Converter. **IEEE Transactions on Power Electronics**, v. 28, n. 12, p. 5458–5476, 2013.

ERICKSON, R.; MAKSIMOVIC, D. **Fundamentals of Power Electronics**. Springer, 2001. (Power electronics). Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=On9-rJTR8ygC>>.

FIGUERES, E. et al. A Control Circuit With Load-Current Injection for Single-phase Power-factor-correction Rectifiers. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, v. 54, n. 3, p. 1272–1281, 2007.

GIRI, F. et al. Formal Framework for Nonlinear Control of PWM AC-DC Boost Rectifiers-Controller Design and Average performance Analysis. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, v. 18, n. 2, p. 323–335, 2010.

HINDI, H. A tutorial on convex optimization. In: **American Control Conference, 2004. Proceedings of the 2004**. [S.l.: s.n.], 2004. v. 4, p. 3252–3265 vol.4.

HOLMES, D.; LIPO, T. **Pulse Width Modulation for Power Converters: Principles and Practice**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2003. (IEEE Press Series on Power Engineering).

JAPPE, T. K.; MUSSA, S. A. Discrete-time current control techniques applied in PFC boost converter at instantaneous power interruption. **2009 Brazilian Power Electronics Conference**, v. 1, n. 1, p. 1118–1123, set. 2009.

JAPPE, T. K.; MUSSA, S. A.; COUTINHO, D. Lyapunov based stability analysis of current self-control approach for single-phase pfc boost converters subject to load variations. **IECON 2011 - 37th Annual Conference on IEEE Industrial Electronics Society**, p. 3959 – 3964, 2011.

KESSAL, A.; RAHMANI, L. Analysis and design of sliding mode controller gains for boost power factor corrector. **ISA transactions**, v. 52, n. 5, p. 638–43, set. 2013.

KHALIL, H. K. **Nonlinear Systems**, 3<sup>a</sup> ed. [S.l.]: Prentice Hall, 1996.

LANGE, A. D. B.; HELDWEIN, M. L. Light load stability improvement for single-phase boost PFC rectifier using input current self-control technique. **XI Brazilian Power Electronics Conference**, p. 61–67, set. 2011.

LEYVA, R.; INGLES, J.; OLALLA, C. LMI control of boost-PWM converters: An implementation approach. **2012 IEEE International Symposium on Industrial Electronics (ISIE)**, p. 377–382, May 2012.

LÖFBERG, J. **SEDUMI**. 2015. Disponível em:  
<<http://users.isy.liu.se/johanl/yalmip/pmwiki.php?n=Solvers.SEDUMI>>.

LÖFBERG, J. **What Is YALMIP**. 2015. Disponível em:  
<<http://users.isy.liu.se/johanl/yalmip/pmwiki.php?n=Main.WhatIsYALMIP>>.

MEZAROBIA, M. **Materiais de aula: Aula1 - Modulacao PWM**. 2015. Disponível em:  
<<http://www.joinville.udesc.br/portal/professores/batschauer/materiais/>>.

MIDDLEBROOK, R. D.; CUK, S. A general unified approach to modelling switching-converter power stages. **Proceedings of the IEEE Power Eletronics Specialists Conference**, June 1976.

MONTAGNER, V. et al. Robust H2 control applied to boost converters: design, experimental validation and performance analysis. **IET Control Theory and Applications**, v. 6, n. 12, p. 1881–1888, 2012.

MONTEIRO, L. H. A. **Sistemas Dinâmicos Não Lineares**. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2003.

MOON, S.; CORRADINI, L.; MAKSIMOVIC, D. Auto-tuning of digitally controlled boost power factor correction rectifiers operating in continuous conduction mode. **IEEE 12th Workshop on Control and Modeling for Power Electronics (COMPEL), 2010**, p. 1–8, June 2010.

OLALLA, C. et al. Robust LQR Control for PWM Converters : An LMI Approach. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, v. 56, n. 7, p. 2548–2558, 2009.

OLALLA, C. et al. Robust Gain-Scheduled Control of Switched-Mode DC-DC Converters. **IEEE Transactions on Power Electronics**, v. 27, n. 6, p. 3006–3019, June 2012.

OLALLA, C. et al. Optimal State-Feedback Control of Bilinear DC-DC Converters With Guaranteed Regions of Stability. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, v. 59, n. 10, p. 3868–3880, Oct 2012.

OLIVEIRA MAURÍCIO C. E SKELTON, R. E. de. **Stability tests for constrained linear systems**. [S.l.: s.n.], 2001. 241-257 p.

POWERSIM. **Consumer Electronics**. mar. 2014. Disponível em: <<http://powersimtech.com/solutions/consumer-electronics/>>.

RAJAGOPALAN, J.; LEE, F.; NORA, P. A generalized technique for derivation of average current mode control laws for power factor correction without input voltage sensing. In: **Applied Power Electronics Conference and Exposition, 1997. APEC '97 Conference Proceedings 1997., Twelfth Annual**. [S.l.: s.n.], 1997. v. 1, p. 81–87 vol.1.

SCHAFT, A. Van der.  $\mathcal{L}_2$ -gain analysis of nonlinear systems and nonlinear state-feedback  $\mathcal{H}_\infty$  control. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 37, n. 6, p. 770–784, Jun 1992.

SELEME, S. I. J. et al. Stability in passivity-based boost converter controller for power factor correction. **European Journal of Control**, v. 19, n. 1, p. 56–64, jan. 2013.

SUN, J. On the zero-crossing distortion in single-phase PFC converters. **IEEE Transactions on Power Electronics**, v. 19, n. 3, May 2004.

TARBOURIECH, S. et al. **Stability and Stabilization of Linear Systems with Saturating Actuators**. [S.l.]: Springer, 2011. (SpringerLink : Bücher).

TODD, P. C. **UC3854 controlled power factor correction circuit design**. [S.l.]: UNITRODE Application Note U-134, Merrimark, NH, EUA, 1996.

TORRES-PINZON, C. A.; GIRAL, R.; LEYVA, R. LMI-Based Robust Controllers for DC-DC Cascade Boost Converters. **Journal of Power Electronics**, v. 12, n. 4, p. 538–547, 2012.