

Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC  
Centro Sócio Econômico  
Departamento de Ciências Econômicas e Relações Internacionais

MARCELO MASERA DE ALBUQUERQUE

Minimização do risco em carteira: Aplicação da moderna teoria do portfólio

FLORIANÓPOLIS, 2015

MARCELO MASERA DE ALBUQUERQUE

MINIMIZAÇÃO DO RISCO EM CARTEIRA: APLICAÇÃO DA MODERNA TEORIA DO  
PORTFÓLIO

Monografia apresentada ao Departamento de  
Economia e Relações Internacionais da  
Universidade Federal de Santa Catarina como  
requisito obrigatório para obtenção do título de  
Bacharel em Ciências Econômicas

Orientador: Prof. Dr. Milton Biage

FLORIANÓPOLIS, 2015.

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA – UFSC**  
**CURSO DE GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS ECONÔMICAS**

A Banca Examinadora resolveu atribuir nota 9,0 ao aluno Marcelo Masera de Albuquerque na disciplina CNM 7107 – Monografia, pela apresentação deste trabalho.

Banca Examinadora:

---

Prof. Dr. Milton Biage  
Orientador

---

Prof. Msc. Max Cardoso de Resende  
Membro da banca

---

Prof. Msc. Helberte João França Almeida  
Membro da banca

## RESUMO

O elevado nível de oscilação no preço dos ativos no mercado acionário, ocasionado por expectativas dos agentes econômicos resulta em alto risco para os investidores, uma vez que tal comportamento torna-se imprevisível na presença de choques econômicos. Nesse sentido, os investidores procuram ao máximo inibir o componente aleatório dos preços dos ativos financeiros, por meio de um processo de diversificação de ativos. Dentre as metodologias existentes para a minimização do risco estão a de Markowitz e Sharpe. A metodologia de Markowitz é caracterizada pela otimização do *trade-off* entre risco e retorno, e permite delinear uma fronteira eficiente de portfólios, no qual se identifica as melhores composições de ativos para cada nível de risco assumido. Enquanto isso, o método de Sharpe, mais conhecido como CAPM, complementa a base da teoria moderna do portfólio. Dessa forma, o objetivo do presente estudo é utilizar uma metodologia de otimização de portfólio capaz de minimizar o risco e identificar seu maior retorno médio para cada nível de risco assumido. A partir da inclusão de um ativo livre de risco à fronteira eficiente de Markowitz, é possível determinar seu retorno exigido para os ativos. Conclui-se que a aplicação dos métodos à um caso real, por meio da utilização do software MatLab, apresentou-se eficaz, uma vez que foi possível identificar a minimização do risco mediante o procedimento de diversificação de ativos e a composição ideal para o alcance do ponto máximo do índice Sharpe.

**Palavras-chave:** Markowitz, CAPM, MatLab.

## ABSTRACT

The high level of fluctuation in asset prices in the stock market caused by expectations of economic agents results in high risk to investors, as this behavior becomes unpredictable in the presence of economic shocks. In this sense, investors seek the maximum inhibit the random component in the prices of financial assets through a process of diversification of assets. Among the existing methodologies for risk minimization are the Markowitz and Sharpe. The Markowitz methodology is characterized by optimal *trade-off* between risk and return, and helps outline an efficient frontier portfolios, which identifies the best compositions of assets for each level of risk assumed. Meanwhile, the method of Sharpe, better known as CAPM, complements the foundation of modern portfolio theory. Thus, the aim of this study is to use an optimization methodology portfolio able to minimize risk and identify your highest average return. From the inclusion of an active risk free the Markowitz efficient frontier, you can determine your required return for the assets. It concludes that the application of the methods to a real case, by using MatLab software, appeared to be effective, since it was possible to identify the minimization of risk through diversification of procedure of assets and the ideal composition to achieve the peak Sharpe index.

**Keywords: Markowitz, CAPM, MatLab.**

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Fronteira eficiente sem a presença de ativo livre de risco .....	19
Figura 2 - Fronteira eficiente com a presença de ativo livre de risco .....	20
Figura 3 - Relação Retorno-Beta .....	21
Figura 4 - Risco e retorno dos ativos .....	25
Figura 5 - Fronteira eficiente .....	27
Figura 6 - Fronteira eficiente com dois portfólios distintos.....	29
Figura 7 - Fronteira eficiência com custos de transação.....	31
Figura 8 - Fronteira de eficiência com restrição no volume de ativos.....	33
Figura 9 - Fronteira eficiente com a curva de mercado .....	35
Figura 10 - Fronteira de eficiência com o ponto Sharpe.....	36
Figura 11 - Relação risco e retorno no ponto Sharpe.....	38

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Matriz de covariâncias.....	12
Tabela 2 - Trabalhos sobre o modelo CAPM – Testes em portfólios de ativos .....	15
Tabela 3 – Ativos selecionados aleatoriamente do Ibovespa.....	22
Tabela 4 - Rentabilidade média mensal no período 2012-2015 .....	22
Tabela 5 - Portfólio de variância mínima .....	28
Tabela 6 - Portfólio A .....	30
Tabela 7 - Portfólio B .....	30
Tabela 8 - Composição do portfólio no ponto Sharpe .....	37
Tabela 9 - Composição do Ibovespa.....	46

## SUMÁRIO

<b>1.INTRODUÇÃO.....</b>	<b>3</b>
<b>1.1. TEMA E PROBLEMA DE PESQUISA .....</b>	<b>4</b>
<b>1.2. OBJETIVOS.....</b>	<b>5</b>
1.2.1. Objetivo Geral.....	5
1.2.2. Objetivos Específicos.....	5
1.2.3. Justificativa .....	5
<b>2. METODOLOGIA .....</b>	<b>6</b>
<b>3. REFERENCIAL TEÓRICO .....</b>	<b>8</b>
<b>3.1. Mercado de Capitais .....</b>	<b>8</b>
<b>3.2. Variância-Média .....</b>	<b>9</b>
3.2.1. Modelo de Markowitz.....	11
<b>3.3. Capital Asset Pricing Model .....</b>	<b>13</b>
3.3.1. Estudos realizados no Brasil que utilizam o CAPM.....	15
3.3.2. Premissas do CAPM .....	18
3.3.3. Modelo CAPM.....	19
<b>4. OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRA .....</b>	<b>22</b>
<b>5. CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>40</b>
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>42</b>
<b>ANEXOS.....</b>	<b>45</b>



## 1.INTRODUÇÃO

Existem distintas maneiras para obter uma redução ou diluição do risco nos investimentos financeiros, entretanto, no presente estudo, será analisada o método de otimização de portfólio, no qual, utiliza-se os estudos realizados por Harry Max Markowitz (1952) e ampliados por William Forsyth Sharpe (1964).

O impacto do estudo de Markowitz (1952), intitulado *Portfolio Selection*, sobre os métodos até então vigentes, no qual procurava auxiliar os investidores em suas decisões de investimentos, foi determinante para que suas conclusões refutassem o modo em que se analisava um investimento financeiro. Especificamente, o tópico abordado por Markowitz (1952) reflete um novo comportamento dos investidores frente a elaboração de um portfólio, caracterizado pelo processo de diversificação.

O método adotado pelos investidores até a publicação do artigo, direcionava suas escolhas sobre um ativo em que oferecesse o maior retorno esperado, sem levar em consideração qualquer outro parâmetro. Sobre a ótica desse padrão de comportamento, é possível concluir por Markowitz (1952) que tal postura muitas vezes não se revelava eficiente, uma vez que o risco presente nos investimentos financeiros não se apresentava como um parâmetro de análise.

O risco está associado a realização de um evento esperado, de tal forma que, em relação aos ativos financeiros, sua materialização ocorre mediante seu nível de variância ou desvio padrão de seus retornos em relação a um retorno médio esperado. Markowitz (1952) passa a considerar esse novo parâmetro, por entender que apenas o objetivo maximizar o retorno esperado não justificaria o processo de diversificação de ativos.

Em síntese, portanto, Markowitz (1952) desenvolveu um método de otimização de portfólio, no objetivo de minimizar o risco presente nos ativos financeiros e, ao mesmo tempo, uma valorização de capital mediante um processo de diversificação de ativos. No procedimento de diversificação, sua teoria elabora um método de escolha de portfólios que maximizam a utilidade esperada do investidor, a partir de seu nível de aversão ao risco.

Dessa forma, Markowitz (1952) amplia o foco de análise financeira por incluir mais um parâmetro para a tomada de decisão dos investidores: retorno esperado e risco. É nesse contexto, portanto, que seus estudos avançam e desenvolvem um novo método de análise de investimentos.

O modelo Capital Asset Pricing Model (CAPM) foi desenvolvido de forma simultânea e independente por William Sharpe (1964), John Lintner (1965) e Jan Mossin (1966). Seus

estudos representam uma ampliação da proposição de Markowitz, uma vez que sua constituição é realizada por intermédio de questionamentos baseados no mesmo contexto de comportamento dos investidores. No entanto, sua principal consideração está caracterizada pela presença de um ativo livre de risco, além, claro, da relação entre o retorno esperado de um ativo e seu coeficiente de risco.

A partir da formulação da fronteira eficiente ou de distintas composições de ativos para cada nível de risco assumido pelos investidores, realizada pelo método de diversificação de Markowitz (1954), é possível identificar o retorno exigido para dado portfólio ou sua precificação mediante a relação entre um ativo livre de risco e o risco de mercado. Em síntese, o processo de precificação é obtido por meio da maximização do índice Sharpe, formulado por Sharpe (1966) no qual revela o ponto máximo da relação risco-retorno, descontado o retorno de um ativo livre de risco.

A composição de ativos que maximiza o índice Sharpe apresenta o portfólio no qual é alcançado o maior retorno para o risco assumido, descontado o retorno do ativo livre de risco. Portfólios que apresentam um índice Sharpe inferior ao seu ponto máximo, revelam um desempenho ineficiente sobre a relação risco-retorno. Nessas situações, o retorno marginal apresenta uma taxa decrescente quando há um aumento na exposição ao risco.

Em conjunto, o método de Markowitz e o CAPM constituem peça central no processo de seleção de portfólios, uma vez que apresentam um método capaz de alcançar o maior retorno esperado para cada nível exposição ao risco ou para cada nível de risco assumido junto aos investidores, além de identificar a composição ótima de um portfólio por meio da otimização da relação risco-retorno, de tal forma que apresentam grande importância na análise de investimentos financeiros.

## 1.1. TEMA E PROBLEMA DE PESQUISA

O grande interesse dos investidores em minimizar o risco e manter uma valorização de seu capital, ocasionou ao longo dos últimos anos um crescimento nos estudos direcionados à modelos matemáticos-estatísticos para este fim.

A motivação nesta área está caracterizada pelo ambiente incerto do mercado acionário e da volatilidade presente em grande parte dos investimentos financeiros. O comportamento de preços das ações distribuídas ao longo do tempo apresenta elevadas oscilações, além de serem muito vulneráveis a qualquer externalidade, seja ela negativa ou positiva.

Portanto, uma vez que as séries financeiras apresentam grande volatilidade, se faz necessário a utilização de modelos capazes de aumentar a eficiência da análise em questão. Desta forma, o foco deste trabalho está em analisar e aplicar o método de otimização de portfólio, mediante estudos realizados por Markowitz (1952) e Sharpe (1964).

## 1.2. OBJETIVOS

Nesta etapa serão apresentados os objetivos geral, que se refere à contribuição que o trabalho pretende trazer à área de otimização de portfólio, e os objetivos específicos, no qual refere-se aos objetivos particulares.

### 1.2.1. Objetivo Geral

Utilizar uma metodologia de otimização de portfólio e testar sua capacidade de minimização do risco.

### 1.2.2. Objetivos Específicos

Os objetivos específicos estão relacionados em:

- a) Apresentar as características presentes no mercado de capitais;
- b) Apresentar a metodologia existente para otimização de carteira;
- c) Testar a aplicabilidade do método proposto por meio de um caso de teste, baseado em um cenário real.

### 1.2.3. Justificativa

No objetivo de enriquecer o debate acadêmico frente às distintas metodologias existentes para otimização de portfólio, mediante a minimização do risco, o presente estudo procura apresentar a aplicação da metodologia de Markowitz e CAPM, na tentativa de comprovar o processo de diversificação de ativos na redução do risco.

## 2. METODOLOGIA

A aplicação de um método de trabalho não é apenas um modelo ou fórmula, que uma vez aplicado alcança os resultados desejados, mas sim, consiste em um conjunto ordenado de procedimentos que se mostram eficientes, caracterizando o método científico em um instrumento de trabalho, sendo seu resultado dependente de cada usuário (CERVO; BERVIAN; DA SILVA; 2007).

Nesse sentido, a pesquisa realizada baseou-se na seleção de distintos ativos financeiros, caracterizados pelas ações de empresas presentes no IBOVESPA. Como critério de seleção das empresas, procurou-se alcançar ativos de distintos segmentos econômicos e que apresentam fraca correlação. Nesse sentido, dentre as 27 empresas selecionadas, foram identificados 20 segmentos econômicos<sup>1</sup>. A referência da composição do IBOVESPA é do mês de outubro do ano de 2015.

As informações descritivas das ações foram retiradas do Yahoo Finance. Todos os dados compreendem a periodicidade diária para cada ativo, conforme o cálculo realizado:

$$R_{di} = \frac{P_{fechamento}(it) - P_{abertura}(it)}{P_{abertura}(it)} \times 100$$

onde,  $R_d$  representa a rentabilidade diária da ação  $i$ ; e o  $P$  representa o preço da ação  $i$  no tempo  $t$ . Além desse tratamento, foi realizada uma transformação da rentabilidade diária para mensal por meio dos números índices, onde utilizou-se como base fixa o primeiro dia útil de cada mês. Assim, foi possível identificar a rentabilidade acumulada mês a mês. A transformação da rentabilidade diária para mensal foi realizado de acordo com o seguinte cálculo:

$$R_{mi} = \left[ \left( 1 + \left( \frac{R_0}{100} \right) \right) \times \left( 1 + \left( \frac{R_t}{100} \right) \right) \times \dots \times \left( 1 + \left( \frac{R_n}{100} \right) \right) \right] - 1$$

---

<sup>1</sup> Os segmentos selecionados são: açúcar e álcool, água e saneamento, bancos, carnes e derivados, cervejas e refrigerantes, energia elétrica, exploração e/ou refino de petróleo, holdings diversificadas, material aeronáutico e de defesa, medicamentos, minerais metálicos, motores, compressores e outros, papel e celulose, serviços educacionais, serviços médicos – hospitalares, análises e diagnósticos, siderurgia, tecido, vestuário e calçados, telefonia fixa, telefonia móvel e transporte aéreo.

onde  $R_{mi}$  representa a rentabilidade mensal do ativo  $i$ ;  $R_0$  a rentabilidade de base fixa, ou seja, do primeiro dia no mês, enquanto que  $R_t$  representa a rentabilidade no dia  $t$  e  $R_n$  a rentabilidade no último dia do mês.

Em conjunto com os dados das empresas listadas no IBOVESPA, utilizou-se a cotação diária da poupança, na qual apresentava a rentabilidade dos últimos 30 dias. A origem dos dados é de referência do Banco Central do Brasil (BCB). Ao todo, a série histórica analisada apresenta a rentabilidade diária de 02/01/12 até 02/11/2015.

Para a elaboração de um portfólio ótimo foram utilizadas as metodologias presentes no método de Markowitz (1952), de Média-Variância, e nos estudos elaborados por Sharpe (1964), identificado como CAPM.

O método foi aplicado junto ao software MATLAB R2013a conforme a programação de uma elevada quantidade de códigos que identificam as distintas composições para cada nível de exposição do risco. Nele foram realizados cálculos estatísticos de caráter descritivo, como variância, covariância, retorno médio e desvio padrão dos ativos selecionados. Vale destacar, ainda, que, mesmo utilizando como *input* ao modelo os dados de rentabilidade média mensal, o software irá solucionar o problema de otimização de carteira apresentando os resultados com periodicidade anual, tanto para o risco assumido quanto para a rentabilidade média.

Após a realização desses procedimentos, os dados obtidos foram analisados e comparados em distintos momentos na curva de utilidade, de maneira que fosse possível identificar as mudanças na composição da carteira mediante o nível de risco de interesse de cada investidor.

As limitações do trabalho consistem, justamente, em não conseguir antecipar as oscilações causadas por choques inesperados, de maneira que influenciam as expectativas dos investidores e consequentemente aumentem a instabilidade nos preços das ações, de tal forma que a carteira analisada e seu retorno esperado não se realize.

### 3. REFERENCIAL TEÓRICO

O referencial teórico consiste em uma análise da literatura sobre o método de Markowitz (1952) e Sharpe (1964) para a otimização de portfólio, de modo que as principais características do método estudado sejam analisadas para, posteriormente, ser aplicado ao caso real proposto.

#### 3.1. Mercado de Capitais

O mercado de capitais pode ser definido como um conjunto de instituições que negociam títulos e valores mobiliários, no intuito de canalizar recursos financeiros de agentes econômicos, viabilizando, portanto, a capitalização das empresas e oferecendo liquidez ao mercado de títulos emitidos por elas (PINHEIRO, 2009).

Nesse sentido, sua criação consiste em um avanço financeiro para o sistema capitalista, uma vez que oferece outra oportunidade para as empresas adquirirem *funding* para suas atividades fins. O *funding* corresponde ao processo de transformação da dívida de curto prazo, em uma relação de longo prazo através da emissão de ações e de títulos (RESENDE, 2007).

Para Pinheiro (2009), a criação do mercado de capitais foi fundamentada em dois princípios básicos, os quais relacionam-se diretamente com a interação entre as instituições presentes: i) fomentar o desenvolvimento econômico, servindo como força propulsora de capitais para investimento e estimulando a poupança privada; ii) orientar a estruturação de uma sociedade pluralista, mediante participação coletiva de forma ampla na riqueza e nos resultados da economia.

Em momentos de expansão econômica ou não, é relevante a atuação desse sistema de distribuição de valores mobiliários, uma vez que atuam como fator multiplicador da riqueza nacional. Assim, os investimentos produtivos estão relacionados com a participação de agentes econômicos que revelam interesse na participação dos resultados de maneira que impulsionem a atividade fim da empresa.

Sua estrutura básica apresenta dois mercados distintos, identificados como mercado primário e mercado secundário. No primeiro deles, temos a criação de títulos e capitalização das empresas, enquanto que, no segundo, observa-se a negociação de títulos, troca da propriedade dos títulos e geração de liquidez aos títulos.

Os títulos são representados por ações das empresas, nas quais representam uma parcela do capital social de uma sociedade anônima ou empresa, de forma que o acionista representa um co-proprietário com direito sobre os resultados financeiros.

As ações das empresas são classificadas como ordinárias normativas (ON) e preferenciais normativas (PN). Na primeira delas, os acionistas recebem o direito à voto nas Assembleias dos Acionistas, possuindo o poder de eleger e destituir membros da diretoria e do Conselho Fiscal da empresa e auxiliam, ainda, no destino dos lucros auferidos durante um período. Já para as ações PN os acionistas, geralmente, não possuem direito à voto, salvo condições específicas no estatuto de cada empresa. No entanto, recebem a preferência sobre a participação nos lucros da empresa, em forma de dividendos.

No Brasil, a BM&FBovespa<sup>2</sup> é responsável pela administração do mercado organizado de títulos, valores mobiliários e contratos derivativos (BM&FBOVESPA, 2015). Atualmente, a BM&FBovespa é uma das maiores bolsas no mundo em relação ao valor de mercado.

São realizados diversos índices que medem o desempenho das ações no mercado brasileiro como, por exemplo, Ibovespa, IBrX50, IBrX100, IDIV, caracterizados como índices mais amplos, entre outros índices de sustentabilidade, setoriais, de seguimento e governança. No entanto, o índice mais utilizado está caracterizado pelo o Ibovespa.

O Ibovespa representa o desempenho das empresas que obtiveram os maiores volumes nos últimos meses, sendo, portanto, caracterizado por companhias que apresentam elevado índice de liquidez.

A composição do Ibovespa, tendo como referência o mês de outubro de 2015, pode ser observada no Anexo, ao final desse trabalho.

Ressalta-se que o Ibovespa será utilizado para o desenvolvimento de uma carteira de ativos, na qual objetiva-se realizar um processo de ponderação no peso de cada ação, de acordo com o método de Markowitz (1952) e Sharpe (1964).

### **3.2. Variância-Média**

O início da moderna teoria do portfólio foi iniciado com o artigo elaborado por Harry Markowitz (1952), intitulado *Portfolio Selection*. O impacto de seu estudo sobre a teoria vigente do comportamento dos investidores na escolha de uma carteira foi determinante para que suas conclusões à refutassem e construíssem a base da moderna teoria do portfólio.

Em sua visão, a ideia de que os indivíduos procuram maximizar apenas o retorno descontado ou retorno antecipado deveria ser rejeitada, tanto como hipótese quanto uma máxima para explicar o comportamento dos investidores. Para Markowitz (1952), o investidor

---

<sup>2</sup>Bolsa de Valores, Mercadorias e Futuros de São Paulo.

considera (ou deveria considerar) o retorno esperado como algo desejável, enquanto que a variância do retorno seria considerada indesejável. Portanto, o investidor analisa dois componentes para elaborar uma carteira de ativos. Sharpe, Alexander e Bailey (1995) acrescentam, ainda que, um investidor típico, apesar de querer alcançar os maiores retornos, ele quer, também, o maior retorno possível dado um nível de risco. Dessa forma, os investidores buscam alcançar dois objetivos conflitantes entre si.

O processo de diversificação, caracterizado, sobretudo, pela aquisição de diferentes ativos foi a proposta central de Markowitz (1952) para alcançar uma solução aos objetivos conflitantes dos investidores. Essa proposição é observada na afirmação de que o processo de diversificação se apresenta como uma escolha ótima, de maneira que uma regra que não seja superior à da diversificação deve ser sumariamente rejeitada tanto como hipótese quanto uma máxima para auxiliar o comportamento ou o processo de decisão dos investidores na alocação de recursos.

Uma consequência interessante desses objetivos conflitantes consiste justamente em sua solução, uma vez que revolucionou a teoria de finanças ao mudar o foco de análise de investimentos em direção à diversificação, colocando pela primeira vez, em bases sólidas e matemáticas, a relação entre risco e retorno (Santos; Tessari, 2012).

Complementando, Markowitz (1952) argumentou que a escolha de um portfólio com o máximo de retorno esperado não apresenta, necessariamente, o menor risco. Simultaneamente, um processo de diversificação ingênuo, ou seja, sem levar em consideração a correlação entre os ativos e analisando unicamente a quantidade de ativos presente no portfólio, não levaria, obrigatoriamente, à redução do risco.

De acordo com Saito, Savoia e Famá (2006), o fato de o método elaborado por Markowitz não ter eliminado por completo o risco de uma carteira de investimentos, colaborou de forma implícita, para a compreensão de risco sistêmico (não diversificável) e não-sistêmico (diversificável), que foram analisados por Sharpe (1964).

Como resultado, seu estudo desenvolveu um método de identificação por meio de uma fronteira eficiente de investimentos, na qual é possível observar a maior taxa de rendimento esperada de cada conjunto de ativos, para cada nível de risco (Haugen, 1997). Os investidores, portanto, tomam suas decisões no processo de alocação de recursos baseadas em um *trade-off* entre retorno esperado e risco, onde o resultado é observado geometricamente por uma fronteira eficiente. Esse procedimento, portanto, revolucionou o processo de composição de um portfólio de ativos financeiros, a fim de maximizar o ponto ótimo da relação risco-retorno.



### 3.2.1. Modelo de Markowitz

Segundo Markowitz (1952), o processo de seleção de uma carteira pode ser realizado em duas etapas: i) primeiro, mediante a observação dos dados passados (experiência) e posteriormente em conjecturas sobre o desempenho futuro dos títulos analisados; ii) conjecturas sobre o desempenho futuro e a escolha de um portfólio. Dessa forma, no objetivo de identificar uma fronteira de investimentos, seu estudo concentra-se na segunda etapa do processo de seleção de carteira.

Os parâmetros utilizados nesse modelo consistem, portanto, no retorno esperado dos ativos e na identificação da matriz de variância-covariância dos retornos dos ativos. Dessa forma, os parâmetros utilizados são obtidos mediante a análise de dados históricos dos ativos selecionados. Matematicamente, o retorno de um ativo individual pode ser calculado da seguinte maneira:

$$r_i = \frac{\text{Período final} - \text{Período Inicial}}{\text{Período inicial}}$$

Uma vez que o processo de elaboração de uma carteira de ativos consiste na escolha de diversos ativos individuais distintos, o retorno de uma carteira pode ser calculado por:

$$E(r_p) = \sum_{i=1}^n (w_i \cdot E(r_i))$$

onde,  $w_i$  representa a proporção individual de cada ativo na composição da carteira e  $E(r_i)$  representa o retorno individual médio esperado do ativo  $i$ . Além disso, a equação do retorno da carteira pode ser descrita, também, por meio da notação matricial:

$$r_p = W'R$$

A partir disso, conclui-se que:

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1$$

Uma medida estatística importante levada em consideração na seleção de uma carteira de ativos é, justamente, a correlação entre eles. Seu resultado apresenta de que forma os ativos se inter-relacionam, ou seja, procura mensurar o comportamento dos ativos entre si. Vale destacar sua íntima relação com a covariância, uma vez que matematicamente a correlação é definida como a covariância entre duas variáveis aleatórias dividido pelo produto de seus desvios padrão:

$$\rho_{jk} = \frac{Cov(r_{jk})}{\sigma_j \sigma_k}$$

O coeficiente de correlação, apresenta um valor dentro do intervalo de -1 e +1. Um valor mais próximo de -1 representa uma correlação negativa, enquanto que um valor mais próximo de +1 representa uma correlação positiva. Dessa forma, pode-se entender que a correlação consiste em uma normalização da covariância.

No entanto, para estimar o risco de uma carteira de ativos, você precisa ter a matriz de covariância para os ativos selecionados. A matriz de covariância dá-lhe as covariâncias entre cada um dos ativos em carteira, de forma a representar uma medida de mensuração do modo como os retornos dos ativos variam entre si. Além disso, a covariância de um ativo em relação a ele mesmo representa, sua própria variância. Desse modo, uma matriz de covariância nos apresenta, também, as respectivas variâncias dos ativos selecionados. Por exemplo, uma matriz de covariância entre três ativos A, B e C é a apresentada da seguinte forma:

**Tabela 1 - Matriz de covariâncias**

Ativo	A	B	C
A	$Cov(r_a, r_a) = \sigma^2$	$Cov(r_b, r_a)$	$Cov(r_c, r_a)$
B	$Cov(r_a, r_b)$	$Cov(r_b, r_b) = \sigma^2$	$Cov(r_c, r_b)$
C	$Cov(r_a, r_c)$	$Cov(r_b, r_c)$	$Cov(r_c, r_c) = \sigma^2$

Fonte: Haugen, 1997

Matematicamente, a covariância entre ativos diferentes pode ser estimada utilizando os dados históricos dos retornos dos ativos em  $T$  períodos:

$$Cov(r_j, r_k) = \sum_{i=1}^T \frac{(r_{ji} - E(r_j)) \cdot (r_{ki} - E(r_k))}{T}$$

onde,  $E(r_j)$  e  $E(r_k)$  representam o retorno médio esperado dos ativos  $j$  e  $k$ , respectivamente.

De acordo com Sharpe, Alexander e Bailey (1995), a covariância é uma medida estatística que procura representar a relação entre duas variáveis. Um valor positivo para covariância indica que, nesse caso, os retornos dos ativos tendem a se mover em mesma direção, enquanto que uma covariância negativa a tendência é justamente o contrário, de forma que os retornos apresentam certa compensação. Quando é observada pouca ou nenhuma covariância, não há nenhuma relação entre os retornos dos ativos selecionados.

Por sua vez, a variância de uma carteira pode ser obtida matematicamente mediante a seguinte notação:

$$\sigma_p^2 = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (w_j w_k \sigma_{jk})$$

onde,  $\sigma_p^2$  representa a variância da carteira,  $w_j w_k$ , com  $j=1,2,\dots,n$  e  $k=1,2,\dots,n$  correspondem a proporção de cada ativo na carteira e  $\sigma_{jk}$ , com  $j=1,2,\dots,n$  e  $k=1,2,\dots,n$  corresponde a covariância dos ativos na carteira.

Para Farias e Moura (2013), a maior contribuição do método de Markowitz (1952, 1959) foi, justamente, essa distinção realizada entre a variabilidade dos retornos individuais e sua contribuição para o risco da carteira, uma vez que seu estudo aponta que para minimizar o risco, torna-se necessário investir em ativos que apresentem pouca correlação.

Após as características e apresentação dos métodos matemáticos para a confecção de uma carteira ótima por intermédio do método de Markowitz, percebe-se o objetivo do investidor consiste, justamente, em minimizar o risco de uma carteira de ativos, mediante uma restrição de retorno médio esperado.

A seguir são apresentados dados teóricos relacionados ao CAPM.

### 3.3. Capital Asset Pricing Model

O modelo Capital Asset Pricing Model (CAPM) representa uma ampliação da proposição de Markowitz (1952), uma vez que sua constituição é realizada por intermédio de questionamentos baseados no mesmo contexto de comportamento dos investidores. Dessa

forma, em conjunto com o método de média-variância, o CAPM constitui peça central no processo de seleção e construção de carteiras.

De maneira complementar, Eugene Fama e Kenneth French (2004) afirmam que o modelo assume que os investidores são avessos ao risco, uma vez que durante o procedimento de seleção de uma carteira, sua preocupação recai apenas sobre retorno esperado e o risco, de maneira que façam suas escolhas em termos eficientes em relação a variância, ou seja, minimizam o risco e maximizam o retorno.

Seu desenvolvimento iniciou-se quando, de forma simultânea e independente, três estudiosos questionaram-se: supondo que todos os investidores utilizassem o método de Markowitz (1952) e investissem nas carteiras da fronteira eficiente, de que maneira esse comportamento afetaria os valores dos ativos? Como solução à essa pergunta, John Lintner, Jan Mossin e William Sharpe desenvolveram o método CAPM (HAUGEN, 1997).

Os trabalhos de Lintner (1965), Mossin (1966), juntamente com Sharpe (1964) ampliaram as discussões iniciadas por Markowitz (1952), de modo que foi possível reavaliar o retorno esperado para um determinado ativo em face ao seu risco.

Vale destacar que, quando os investidores utilizam as mesmas informações dos ativos, ou seja, enfrentam a mesma taxa livre de risco, todos desenhariam a mesma curva de fronteira eficiente, de maneira que todos alcançariam a mesma carteira de ativos, tanto na quantidade quanto em sua composição (BODIE; KANE; MARCUS, 2014).

Sharpe (1964), identificou que o risco total de um ativo é composto por risco sistemático e risco não-sistemático. O risco sistemático afeta todos os ativos da economia, de modo que pode ser associado a fatores macroeconômicos, como inflação e desempenho da economia. Enquanto isso, o risco não-sistemático, representa a parcela de risco individual de uma empresa, caracterizados por fatores internos da empresa, sem que haja influencia às demais.

Segundo Haugen (1997), o modelo analisa precisamente a relação entre o risco de um ativo e seu retorno esperado, de forma a nos oferecer uma taxa de referência para o retorno e uma estimativa de apreçamento de um ativo. O CAPM é uma teoria de como os ativos são precificados de acordo com seu risco sistemático.

Portanto, evidencia-se que o modelo CAPM consiste em um método de apreçamento de ativos, dado seu risco observado, em um mercado de equilíbrio, uma vez que os investidores compartilham as mesmas informações e mesma função de utilidade.

Dando continuidade a revisão dos estudos, a próxima sessão apresenta alguns estudos realizados no Brasil que utilizaram o CAPM.

### 3.3.1. Estudos realizados no Brasil que utilizam o CAPM

No Brasil a utilização do método CAPM contribuiu para importantes avanços teóricos ou operacionais nas três grandes áreas de decisão em finanças: investimentos, financiamentos e distribuição de dividendos. Em pesquisa realizada por Araújo, Oliveira e Silva (2012) no rol das decisões de investimentos, na qual se estuda a aplicação do modelo CAPM para a predição e/ou explicação do retorno (rentabilidade) esperado pelos proprietários do capital, os autores obtiveram evidências sobre as principais características metodológicas e constatações dos trabalhos que abordaram o CAPM e variantes no Brasil, no período entre o ano de 1997 e 2008.

As constatações obtidas pelos autores demonstram que, nos últimos anos, as pesquisas realizadas no Brasil que abordaram o modelo CAPM, o utilizaram para testar sua adequação e poder explicativo no que se refere a ativos individuais ou portfólios. Essa utilização se deu por meio de cinco diferentes formas. Na primeira delas Raboni et al. (2008) testaram a estratégia de investimento em ações que tiveram crescimento nos últimos anos; na segunda Salmasi (2008) investigou a relação entre governança corporativa e o custo de capital próprio em companhias brasileiras; na terceira Mazer e Nakao (2008) examinaram a existência de relação entre o nível de transparência e o custo de capital próprio de companhias do Ibovespa; Piloto; na quarta Senra e Moreno (2008) desenvolveram uma nova fórmula para o cálculo do WACC; e na quinta Castro Silva et al. (2009) compararam empiricamente o CAPM na versão estática e na condicional. Os resultados obtidos por Araújo, Oliveira e Silva (2012) são apresentados na Tabela 2.

**Tabela 2 - Trabalhos sobre o modelo CAPM – Testes em portfólios de ativos**

Autor	Objetivo	Conclusão
Rochman e Eid Jr. (2006)	Investigar se é melhor investir em fundos ativos ou passivos .	Confirmou-se a efetividade do CAPM na estimativa de risco de fundos.
Silva e Munhoz (2006)	Determinar se seria possível utilizar o lucro líquido de empresas fechadas e sua dispersão, uma medida contável, como uma aproximação do beta.	O modelo foi considerado efetivo para mensuração do risco.

Tambosi Filho, Costa Jr. E Rosseto (2006)	Apresentar as vantagens dos modelos condicionais em relação ao modelo estático.	O C-CAPM é o mais eficiente nas previsões que o CAPM.
Galdi e Securato (2007)	Analisar a relação entre o risco idiossincrático e o retorno de uma carteira diversificada no Brasil.	Rejeitou-se o desempenho preditivo do CAPM.
Lins, Silva e Marques (2007)	Construir carteiras de ações com características homogêneas de risco versus retorno.	O CAPM apresentou bom desempenho para calcular o risco.
Rabelo <i>et al.</i> (2007)	Analisar se as empresas que adotam práticas de governança corporativa superiores apresentam melhor <i>performance</i> .	A ineficiência do modelo foi justificada pelas características da amostra pesquisada.
Rogers e Securato (2008)	Testar e comparar três modelos alternativos para predição de retornos esperados no mercado de capitais brasileiro.	Rejeitou-se o CAPM para predizer os retornos.
Raboni <i>et al</i> (2008)	Testar a estratégia de investir em ações que apresentaram crescimento nos últimos anos.	O CAPM apresentou melhor poder explicativo quando acrescentada outra variável.
Castro Silva, Melo e Pinto (2009)	Investigar qual dos modelos (CAPM, D-CAPM ou C-CAPM) seria mais estável e melhor se ajustaria às estimativas do retorno de índices de ações negociadas na Bovespa.	Sugeriu-se que o C-CAPM foi ligeiramente mais estável. E a presença de mudanças estruturais nas séries também apontou que o beta não é o único fator que explicaria o risco.

Castro Silva <i>et al.</i> (2009)	Testar e comparar o CAPM na versão estática e o CAPM na versão condicional.	Evidenciou-se maior eficiência do C-CAPM, por apresentar menores critérios de informações de Akaike e Schwarz, sem a presença de quebra estrutural.
-----------------------------------	---	---

Fonte: Quadro apresentado por Araújo, Oliveira e Silva (2012).

Da amostra de 43 artigos analisados por Araújo, Oliveira e Silva (2012), apenas 25 confirmaram a efetividade do CAPM na precificação de ativos, o que corresponde a pouco mais de 58% da amostra analisada pelos autores, e quase 42% dos artigos rejeitaram sua capacidade de prever o retorno do acionista, o que pode demonstrar uma lacuna do modelo. Por meio dos dados apresentados pelos autores, verificou-se que este trabalho de conclusão de curso está relacionado ao trabalho de Galdi e Securato (2007), Lins, Silva, Gomes e Marques (2007) e o de Castro, Silva, Melo e Pinto (2009).

O estudo realizado por Silva, Pinto e Melo (2012), faz uma análise comparativa entre as versões condicional e convencional do CAPM, e avaliam o risco não apenas em períodos totais, mas também sob a presença de quebra estrutural utilizando os períodos entre 2005 e 2008, onde havia pelo menos dois períodos sobre as influências do ambiente econômico cujos fatores determinantes estariam contidos nas informações de mercado. Os autores atentam para a crise financeira de 2008 que despertou a atenção às mudanças na avaliação de risco, disseminada em termos de informações de mercado, e o processo eleitoral de 2006 que geralmente exerce impacto na expectativa dos investidores.

Mazzeu, Costa-Júnior e Santos (2013) aplicaram o CAPM condicional com aprendizagem no mercado acionário brasileiro com o objetivo de avaliar se esse modelo era capaz de reduzir os erros de apreçamento em comparação ao CAPM incondicional e o condicional sem aprendizagem. O trabalho desenvolvido pelos autores foca na análise do erro de apreçamento de 13 ações com maior índice de liquidez na Bolsa de Valores de São Paulo (Bovespa) entre 1987 e 2010. Os autores obtiveram resultados que indicam que, “quando se considera a aprendizagem sobre o nível do beta, os erros de apreçamento sofrem uma redução quando comparados aos resultados obtidos pelo modelo CAPM condicional e incondicional sem aprendizagem” (p. 147).

Filho, Garcia, Imoniana e Moreiras (2010) em seu estudo trazem as vantagens dos modelos condicionais ou dinâmicos (modelos que incorporam variâncias e covariâncias que se alteram ao longo do tempo), em relação ao modelo estático nas economias de três países: Brasil,

Argentina, Chile e Estados Unidos. Os autores evidenciaram que o modelo estático parece não representar satisfatoriamente a realidade de cada uma das economias analisadas, isso devido ao ciclo de negócios, que é dinâmico em qualquer economia e o modelo analisado não contempla esse fato. Outra justificativa seria que a *proxy* de mercado, por si só, não é suficiente para representar uma economia, seja ela qual for. Em relação ao modelo condicional, os autores concluem que, o poder de explicação do modelo aumenta muito, seja para qualquer um dos casos analisados.

No Brasil, os estudos que utilizam a metodologia do CAPM têm demonstrado validade e auxiliado na diminuição do risco em previsões de carteira.

### **3.3.2. Premissas do CAPM**

O ambiente econômico é caracterizado, sobretudo, por uma complexidade e dinamicidade que instiga a ambição dos economistas sobre os padrões de comportamento de variáveis aleatórias, de maneira que a construção de modelos simplistas capazes de, minimamente, explicar relações de interesse do pesquisador é de grande valia para o avanço científico. Assim, a formulação do CAPM é composta por uma série de premissas simplificadoras que objetivam, à sua maneira, explicar o comportamento dos investidores e suas implicações sobre o apreçamento dos ativos financeiros.

Edwin Elton *et al.* (2014) listam uma série de premissas que fazem parte do modelo:

- a) Ausência de custos na transação, ou seja o mercado é completamente competitivo;
- b) Os ativos são infinitamente divisíveis, ou seja, os investidores podem tomar qualquer posição em um investimento;
- c) Ausência de imposto de renda;
- d) Em razão da suposição de competição perfeita, nenhum investidor, individualmente, pode determinar o preço das ações. No entanto, o conjunto total de investidores influenciam no preço das ações;
- e) Os investidores tomam suas decisões baseado no valor esperado e na variância dos retornos de sua carteira;
- f) Vendas à descoberto são permitidas;

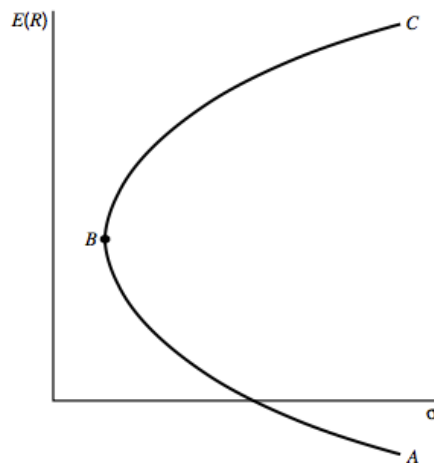


- g) Há uma suposição de que os investidores podem emprestar ou tomar emprestado qualquer quantia de fundos desejados a uma taxa de juros igual à taxa sem risco para títulos;
- h) Os investidores possuem expectativas homogêneas;
- i) Os investidores são avessos ao risco e maximizam sua utilidade esperada (os indivíduos são racionais);
- j) Todos os ativos são negociáveis.

### 3.3.3. Modelo CAPM

Em um ambiente onde não é percebido a livre concessão de empréstimos sem riscos, a fronteira eficiente de cada investidor será levada em conta seus níveis de aversão ao risco, de maneira que cada investidor apresentará uma fronteira eficiente diferente. Em contrapartida, na presença de empréstimos livres de risco, as carteiras escolhidas por qualquer investidor podem ser identificadas sem levar em conta suas preferências de risco (ELTON et al, 2014).

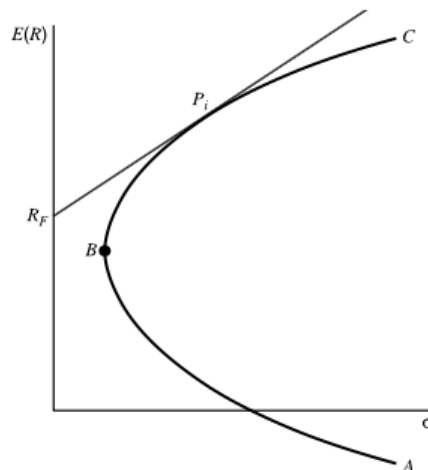
Essa derivação pode ser observada na Figura 1, onde exemplifica a curva de fronteira eficiente, onde há a presença de um conjunto de carteiras de variância mínima. Nela, pode-se observar que a linha *BC* apresenta o conjunto de carteira eficiente.



**Figura 1 - Fronteira eficiente sem a presença de ativo livre de risco**

Fonte: Elton et al, 2014

Já para a representação gráfica da fronteira eficiente na presença de empréstimos livres de risco, a Figura 2 apresenta a carteira escolhida por qualquer investidor sem levar em consideração sua aversão ao risco.



**Figura 2 - Fronteira eficiente com a presença de ativo livre de risco**

Fonte: Elton et al, 2014

Quando introduzimos um ativo sem risco no modelo, mostramos que a carteira de ativos de risco que qualquer investidor selecionará será identificada pelo ponto que tangencia a fronteira eficiente original de ativos de risco e o raio que passa pelo retorno sem risco (no eixo vertical). Esse padrão de comportamento é identificado pelo ponto  $P_i$ . Vale destacar, também, que o conjunto eficiente está presente entre o ponto  $R_F$  e  $P_i$ .

Essa relação pode ser melhor compreendida, conforme afirma Elton et al (2014):

Se todos os investidores possuem expectativas homogêneas e todos enfrentam a mesma taxa de empréstimo livre de risco [...] sua carteira de ativos de risco, localizada no ponto  $P_i$  será idêntica à carteira de ativos de outros investidores. Se todos os investidores possuem o mesmo portfólio arriscado, então, em equilíbrio, ele deve ser a carteira de mercado (ELTON et al, p. 293, 2014).

Assim, dado as premissas apresentadas, podemos derivar a função do CAPM como a seguinte equação:

$$E(R_i) = R_F + [E(R_M) - R_F]\beta_i$$

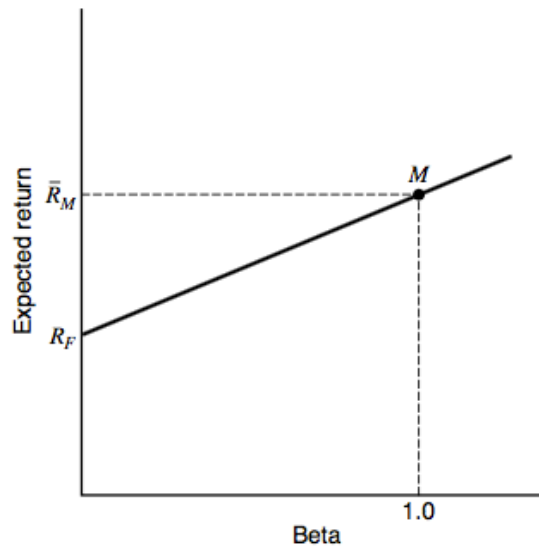
Onde,  $E(R_i)$  representa o retorno esperado,  $R_F$  o retorno do ativo livre de risco,  $E(R_M)$  o retorno do indicador de mercado e  $\beta_i$  representado o risco sistemático.

Nesse sentido, complementa Haugen (2014) que nesse ponto, a carteira selecionada representa o conjunto eficiente que apresenta o maior valor para o índice Sharpe:

$$\frac{E(R_p) - R_F}{\sigma(R_p)}$$

onde,  $E(R_p)$  representa o retorno médio esperado da carteira,  $R_F$  representa a taxa livre de risco e  $\sigma(R_p)$  representa o desvio padrão do retorno da carteira. Essa equação representa o retorno adicional que pode ser obtido através do aumento do nível de risco (desvio padrão) em uma carteira eficaz por uma só unidade.

A relação linear entre o beta e o retorno pode ser analisada na Figura 3.



**Figura 3 - Relação Retorno-Beta**  
**Fonte: Elton et al, 2014**

Assim, o que o CAPM nos diz é que retorno esperado é igual à taxa sem risco, acrescido de um prêmio pelo risco de se investir nesse ativo, de modo que se observa uma relação linear positiva entre o risco sistemático e a rentabilidade esperada.

#### 4. OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRA

Para a aplicação da moderna teoria do portfólio, no qual apresenta-se como objeto de estudo, foram selecionados, de maneira aleatória, 27 ativos presentes no Ibovespa. A escolha dos ativos presentes em distintos segmentos econômicos e fraca correlação justifica-se por não ter, de nenhuma maneira, influência direta no resultado esperado para a elaboração da carteira e os pontos de eficiente a serem encontrados na fronteira eficiente.

Os ativos selecionados podem ser observados na Tabela 3.

**Tabela 3 – Ativos selecionados aleatoriamente do Ibovespa**

ABEV3	PETR4
BBAS3	QUAL3
CMIG4	RADL3
CPLE6	SANB11
CSAN3	SBSP3
EMBR3	SUZB5
ESTC3	TBLE3
GOLL4	TIMP3
ITUB4	UGPA3
JBSS3	GGBR4
KROT3	VALE3
LREN3	VALE5
MRFG3	WEG3
OIBR3	

Fonte: BM&Fbovespa (2015). Elaborado pelo autor.

Foram utilizados, inicialmente, os dados diários dos ativos selecionados, ao longo do período de 02/01/2012 até 20/11/2015. A base de dados utilizada foi retirada diretamente do site Yahoo Finance.

Os dados foram tratados, utilizando o método de transformação com números índices, sendo que a base fixa fosse representada pelo primeiro dia útil de cada mês, conforme procedimento apresentado na metodologia. Dessa forma tornou-se possível obter a rentabilidade mensal durante o período de jan/2012 até nov/2015. A rentabilidade mensal média obtida para os ativos selecionados pode ser observada na Tabela 4.

**Tabela 4 - Rentabilidade média mensal no período 2012-2015**

Ativo	Rentabilidade média mensal
-------	----------------------------

ABEV3	2,66%
BBAS3	0,37%
CMIG4	0,33%
CPLE6	-0,15%
CSAN3	1,41%
EMBR3	2,31%
ESTC3	5,68%
GOLL4	1,53%
ITUB4	0,64%
JBSS3	1,26%
KROT3	8,48%
LREN3	2,04%
MRFG3	-0,46%
OIBR3	-4,80%
PETR4	-0,67%
QUAL3	1,33%
RADL3	1,47%
SANB11	0,72%
SBSP3	1,68%
SUZB5	1,58%
TBLE3	0,85%
TIMP3	1,40%
UGPA3	1,88%
GGBR4	-0,31%
VALE3	-0,93%
VALE5	-1,10%
WEG3	2,79%

Fonte: Yahoo Finance (2015). Elaborado pelo autor.

Como parte integrante da metodologia, foi utilizado como indicador do desempenho de mercado o IBOV11 e como ativo livre de risco a rentabilidade mensal da poupança. Os dados desses dois ativos contemplam a mesma periodicidade das ações selecionadas.

Os dados do indicador de mercado foram retirados diretamente do site do Infomoney, enquanto que os dados da poupança foram retirados do BCB, especificamente pelo Sistema Gerenciador de Séries Temporais – v.2.1. Para a rentabilidade do período de 1/1/2012 até

03/05/2012, foi utilizado os dados da conta de “Depósitos de poupança até 03.05.2012 – Rentabilidade no período”, na qual o código referente é 25. Os dados posteriores a essa dada, foram retirados da conta de “Depósitos de poupança a partir de 04.05.2012 – Rentabilidade no período”, no qual o código referente é 195. A rentabilidade mensal no período de 2012 até 2015 do indicador de mercado é de aproximadamente -0,05%, enquanto que a rentabilidade mensal média da poupança é de 0,50%.

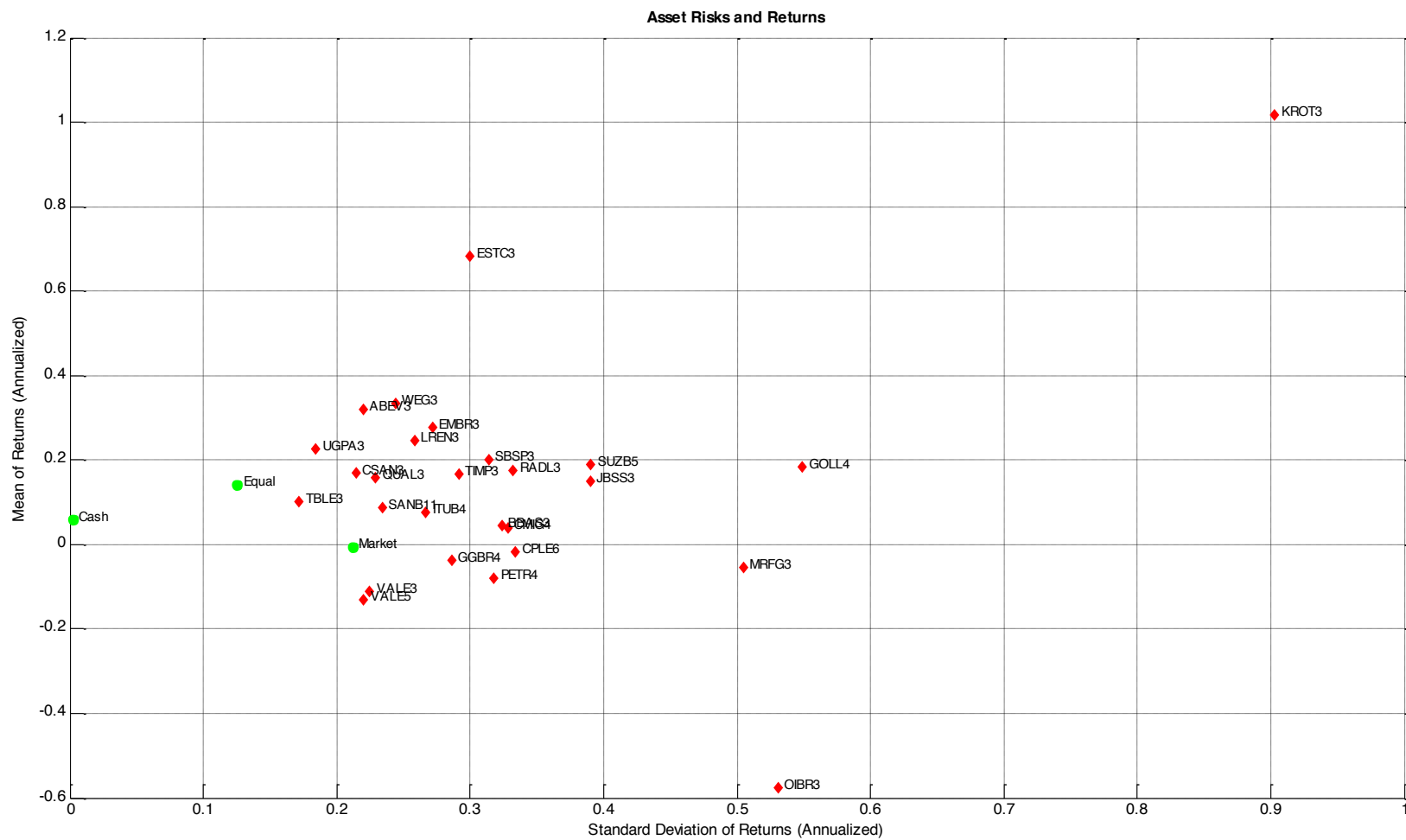
O software utilizado para a aplicação da metodologia de Markowitz e do CAPM consiste no MatLab – Matrix Laboratory, em sua versão 2013. Por meio do Financial Toolbox é possível realizar distintas modelagens matemáticas e análise estatística de dados financeiros, sendo possível, por exemplo, otimizar portfólios (MATWORKS, P.1, 2015).

Por meio do código inserido no software foi possível identificar a matriz de covariância entre os ativos selecionados. O restante do processo realizado, de acordo com a metodologia analisada da teoria moderna do portfólio, foi criado por meio de códigos que ofereçam a transformação da teoria em realidade, de modo que seja possível identificar os maiores retornos possíveis para cada nível de risco adotado.

Em um primeiro momento, foi realizado um portfólio no qual aplicou-se o mesmo peso para todos os ativos selecionados, de modo que cada ativo tenha uma proporção de 1/27 na carteira. Essa carteira foi denominada de “Equal” e apresentou uma rentabilidade mensal de 1,19% e anual de aproximadamente 14,28%. Essas rentabilidades foram identificadas dado um risco mensal de 0,0362 ou 3,62% e um risco anual de 0,1254 ou 12,54%. Vale destacar que a transformação dos dados mensais para anual foi realizada diretamente pelo software MatLab para a geração dos gráficos no qual apresenta todos os ativos e a fronteira eficiente.

Para o indicador de desempenho de mercado, identificado na Figura 4 como Market, no qual corresponde especificamente ao IBOV, observou-se uma rentabilidade média mensal de -0,05% e anual de -0,62%, com um risco anual superior a 0,21 ou 21%.

A Figura 4 apresenta a relação de todos os ativos selecionados, além do índice de mercado, do ativo livre de risco e da carteira com pesos idênticos para todas as 27 ações. O índice de mercado está identificado como “Market” e representa o Ibovespa, enquanto que o ativo denominado “Cash” é identificado pelo ativo livre de risco, caracterizado pela poupança.



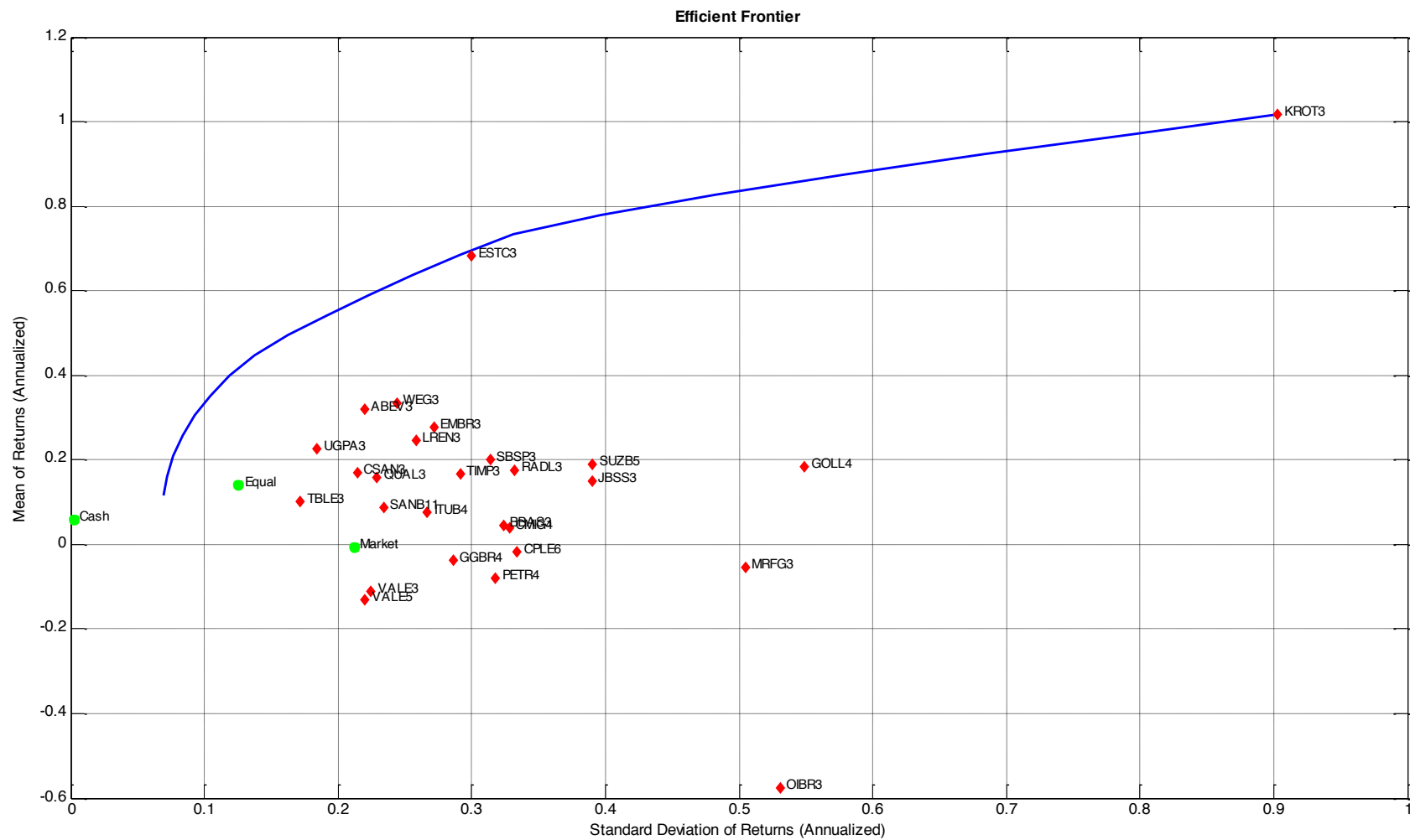
**Figura 4 - Risco e retorno dos ativos**

Fonte: Gerado no Matlab v. 2013a

Para criar uma fronteira eficiente, no qual representa a melhor composição entre os ativos selecionados, de modo que se alcance a maior rentabilidade possível dado o nível de risco, se faz necessário impor algumas premissas para o procedimento. A principal delas é que a soma dos pesos não pode exceder 1 ou 100%, além de que não exista pesos negativos para algum ativo em específico.

Assim, a obtenção da curva com os alvos de risco e de retorno, é realizada pelo código exposto no Matlab chamado "estimateFrontierLimits". Dessa forma, a geração da fronteira eficiente pode ser ilustrada na Figura 5.





**Figura 5 - Fronteira eficiente**  
 Fonte: Gerado no Matlab v. 2013a

A gama de possibilidade de carteiras ótimas demonstradas na fronteira eficiente apresenta uma rentabilidade de variância mínima, identificada no início da curva e uma de variância máxima, identificada no final da curva. Estima-se que o risco da carteira apresenta um risco mínimo anual, identificado pelo desvio padrão, de 0,0693 ou 6,93% e um risco anual máximo de 0,9033 ou 90,33%. Nessas condições, estima-se uma rentabilidade anual máxima no ponto de mínima variância de aproximadamente 11,4% e no ponto de máxima variância de 101,76%.

Como observado em Markowitz (1952), os investidores procuram o menor risco possível, relacionando-o a maior rentabilidade possível dado o risco assumido. Nesse sentido, uma vez que é possível alcançar uma rentabilidade positiva anual com um risco mínimo de 0,0693, seria necessário que a composição dos ativos escolhidos fosse da seguinte maneira:

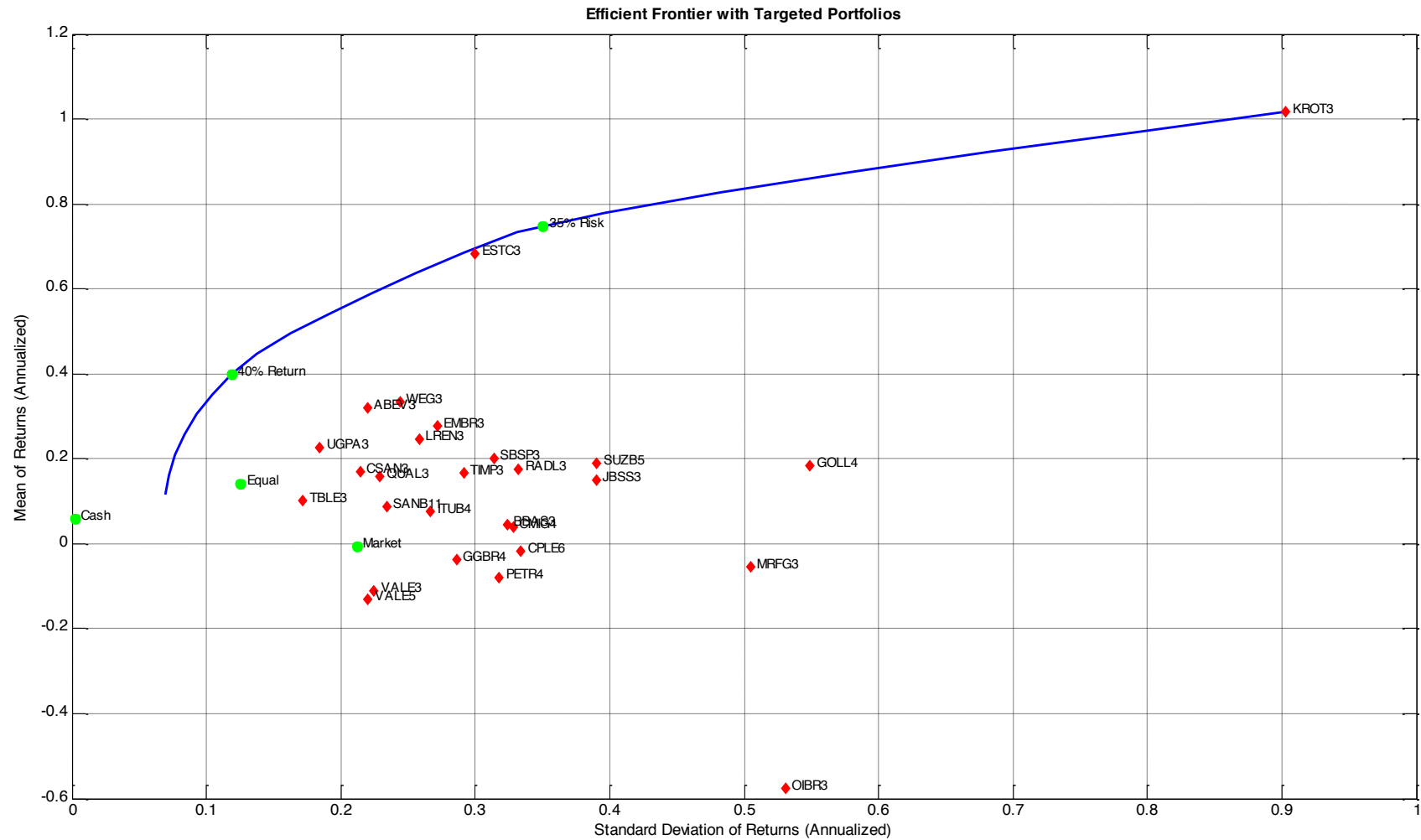
**Tabela 5 - Portfólio de variância mínima**

Ativo	Peso
CMIG4	2,4923 %
EMBR3	13,76 %
OIBR3	7,2002 %
QUAL3	7,4605 %
SANB11	16,903 %
SUZB5	6,0905 %
TBLE3	25,486 %
TIMP3	0,277 %
GGBR4	4,2021 %
WEG3	16,128 %
<b>Total</b>	<b>100 %</b>
<b>Retorno anual</b>	<b>11,4%</b>
<b>Risco</b>	<b>6,93%</b>

Fonte: Elaborado pelo autor.

Essa composição entre os ativos representaria, portanto, uma solução ao problema de otimização de portfólio, baseado no *trade-off* entre risco e retorno para os investidores avessos ao risco. Ao longo do desenvolvimento teórico da moderna teoria do portfólio, esse quesito foi altamente discutido por Markowitz (1952).

Além disso, podemos realizar a formação de portfólios com composições distintas. Esse procedimento pode ser realizado para um investidor em específico no qual mostra-se menos avesso ao risco, conforme ilustrado na Figura 6.



**Figura 6 - Fronteira eficiente com dois portfólios distintos**  
 Fonte: Gerado pelo MatLab v. 2013a

O primeiro ponto sinalizado na curva de fronteira eficiente é caracterizado por uma composição de ativos que representa um retorno médio anual esperado de aproximadamente 40%. Para esse nível de retorno, estima-se que a carteira possui um risco de 11,85%. Perceba que essa nova carteira representa uma composição na qual o investidor seja menos avesso ao risco, quando comparado ao ponto de mínima variância analisado anteriormente. Para atingir esse portfólio, estima-se que a composição de ativos seja realizada da seguinte maneira:

**Tabela 6 - Portfólio A**

Ativos	Peso
ESTC3	34,17 %
ITUB4	3,84 %
KROT3	3,98 %
SUZB5	5,74 %
TIMP3	18,08 %
UGPA3	29,35 %
WEG3	4,83 %
TOTAL	100 %

Fonte: Elaborado pelo autor.

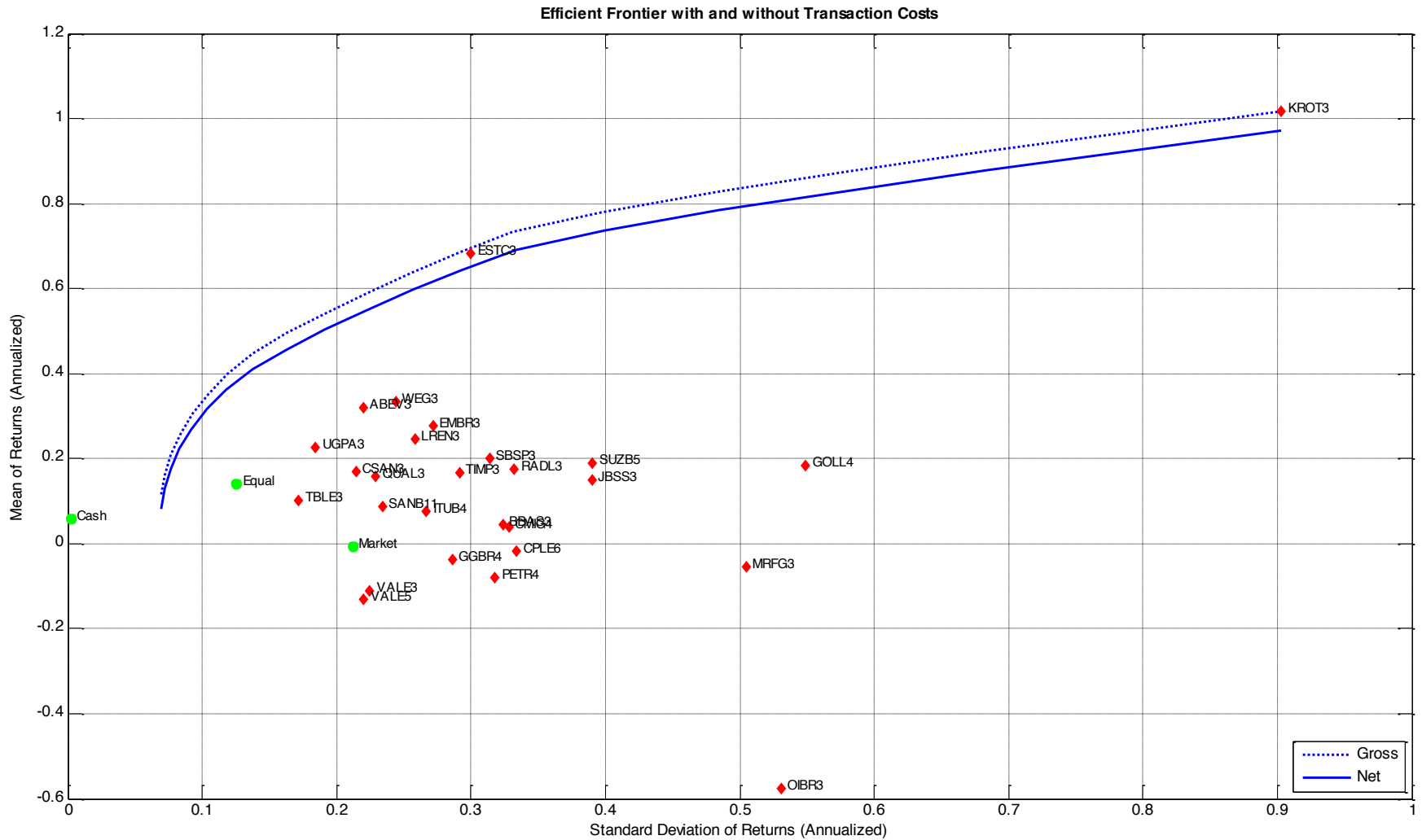
Ainda na Figura 6, foi elaborado um segundo portfólio no qual o investidor assuma um risco considerável, quando comparado aos dois últimos portfólios analisados. Nessa nova composição, estima-se que o risco assumido pelo investidor seja algo em torno de 35% ao ano. Para esse nível de risco, no entanto, estima-se um retorno elevado: 74,88% ao ano. A composição da carteira nesse ponto da curva de fronteira eficiente é realizada basicamente com dois ativos, conforme apresenta na Tabela 7.

**Tabela 7 - Portfólio B**

Ativo	Peso
ESTC3	80,15 %
KROT3	19,85 %
TOTAL	100 %

Fonte: Elaborado pelo autor.

Podemos, também, dentro do problema de otimização, acrescentar ao modelo condicionante de custos de transação. Nessa situação, estima-se que o investidor possua uma curva de fronteira eficiente com um nível de retorno esperado inferior para o mesmo nível de risco observado sem a adição de custos na transação. Para a geração desse cenário foi imposto um custo de 0,02% para cada transação realizada. Esse cenário é ilustrado na Figura 7.

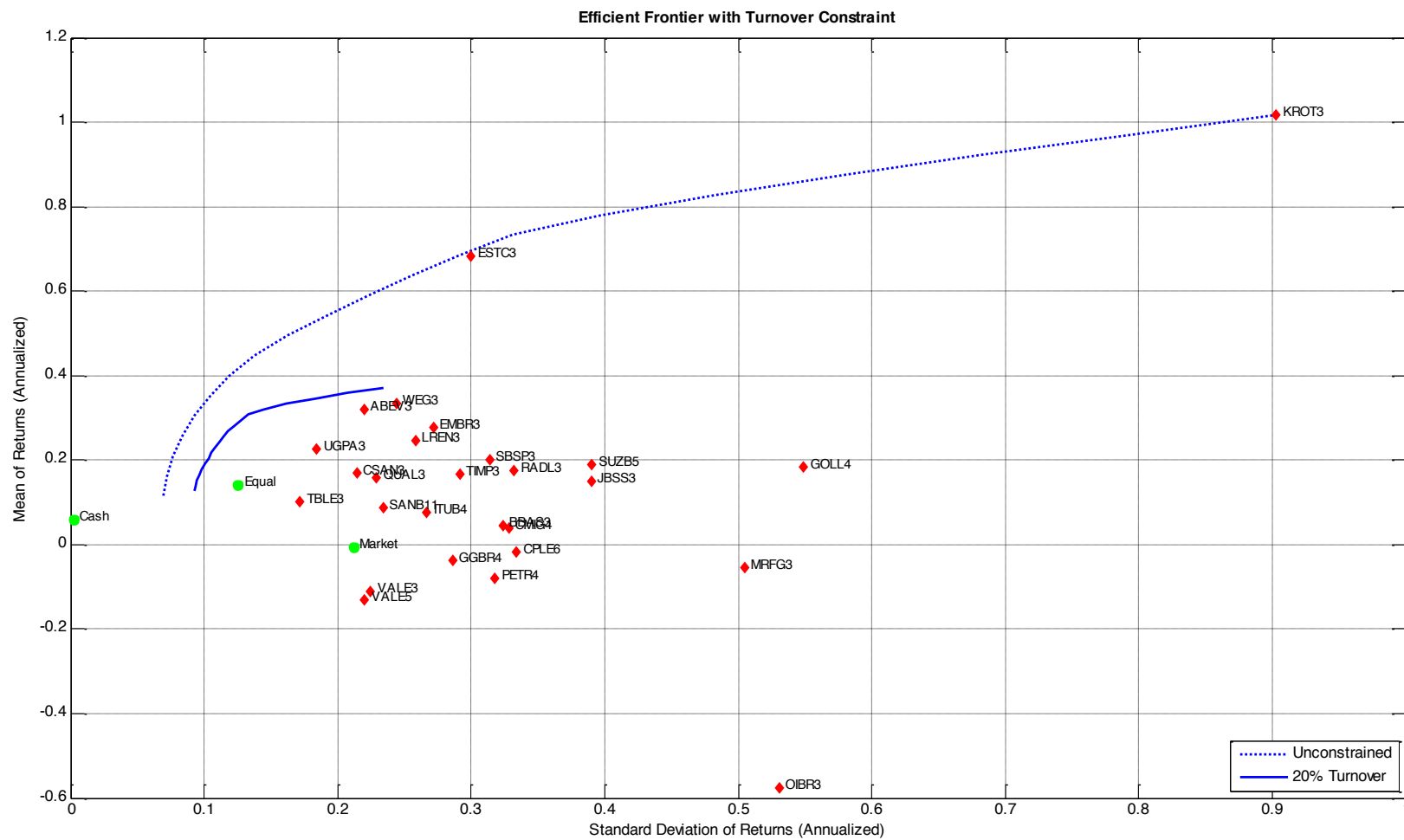


**Figura 7 - Fronteira eficiência com custos de transação**  
 Fonte: Gerado pelo MatLab v. 2013a

A curva pontilha representa a gama de possibilidades de geração de portfólios sem a inclusão de custos de transação, conforme apresentado anteriormente. Por sua vez, os retornos esperados para cada nível de risco, acrescido com os custos de transação são observados na curva contínua, indicada na Figura 7 como “net”, no qual ela representa os retornos líquidos esperados.

Além desse caso, podemos observar o comportamento do problema de otimização de portfólio por meio de uma restrição no volume de negociação de ativos, de modo que seja possível apenas realizar a compra de uma determinada quantidade de ações para cada ativo. Para a simulação desse cenário, foi imposto uma retirada de 20% na quantidade total de ações adquiridas na Figura 5, em que foi apresentada a fronteira de eficiência sem nenhuma imposição à sua formação.

Nesse sentido, a simulação desse cenário é ilustrada na Figura 8.



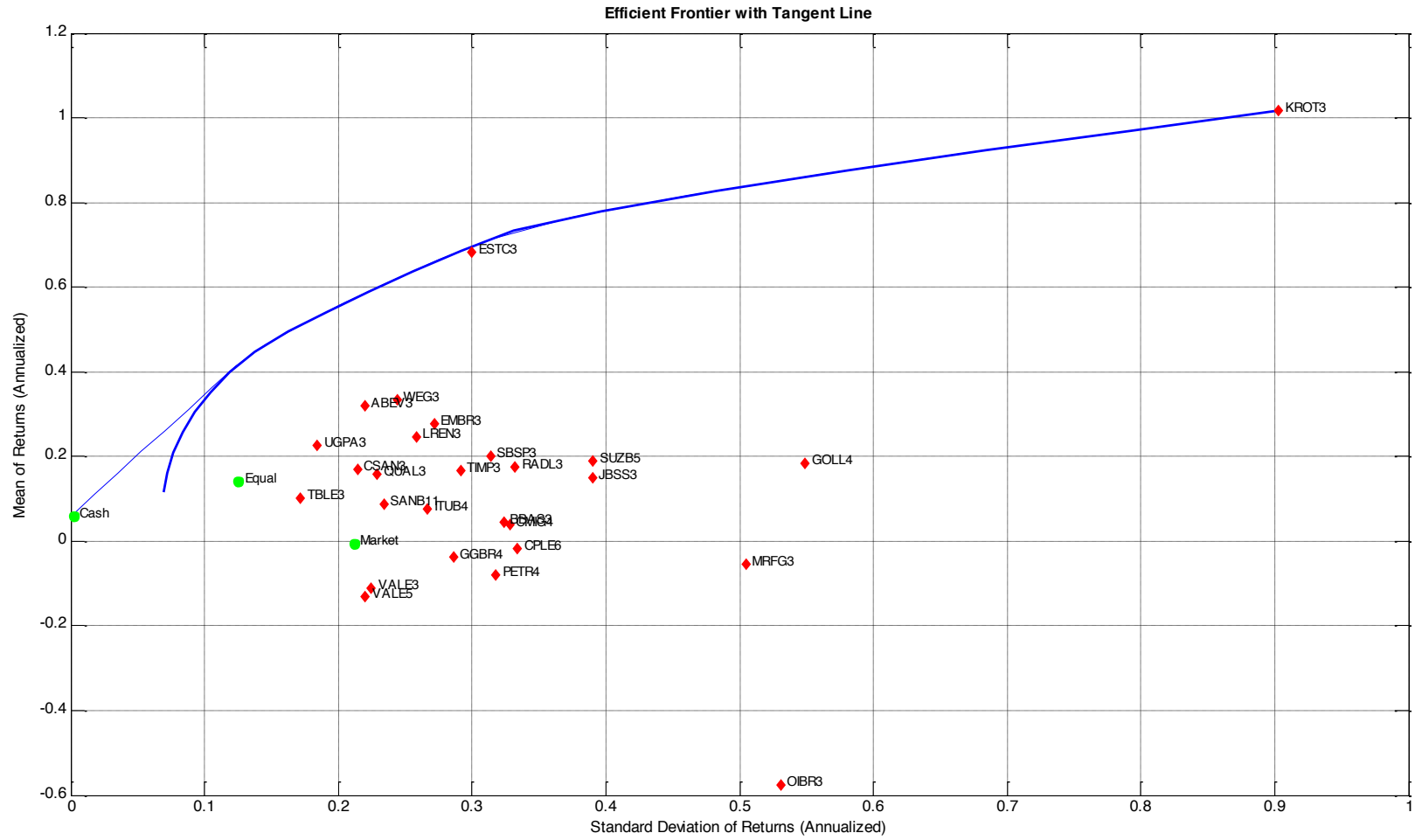
**Figura 8 - Fronteira de eficiência com restrição no volume de ativos**

Fonte: Gerado pelo MatLab v. 2013a

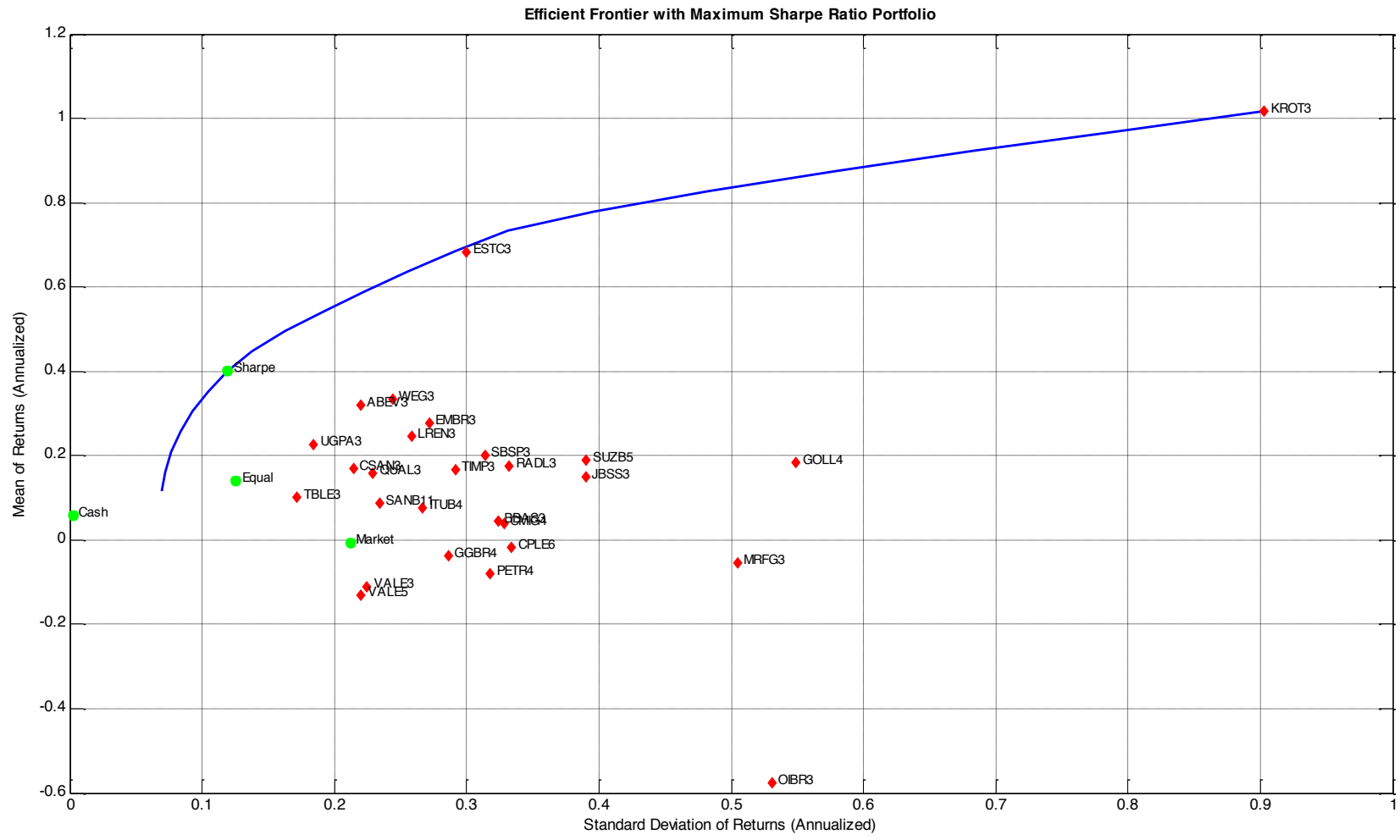
Como podemos observar, na presença de uma restrição no volume de ativos, a fronteira eficiente apresenta-se com um intervalo muito menor do que observado na Figura 5. Devido à redução na quantidade de ações, estima-se um retorno máximo de aproximadamente 39% ao ano e um mínimo de 12% ao ano. No entanto, nesse cenário, observa-se que o risco máximo do portfólio não ultrapassa os 25% ao ano.

Em sequência pode-se analisar a curva de mercado, abordado por Sharpe (1964). Essa análise é precedente ao CAPM, uma vez que, quando a curva de mercado tangencia a fronteira eficiente, apresenta-se o ponto de precificação da carteira, de maneira que nos mostra a rentabilidade exigida para o investimento na carteira. Esse comportamento é ilustrado na Figura 9. Enquanto isso, a Figura 10 ilustra exatamente o ponto Sharpe na fronteira de eficiência.





**Figura 9 - Fronteira eficiente com a curva de mercado**  
 Fonte: Gerado pelo MatLab v. 2013a



**Figura 10 - Fronteira de eficiência com o ponto Sharpe**  
 Fonte: Gerado pelo MatLab v. 2013a

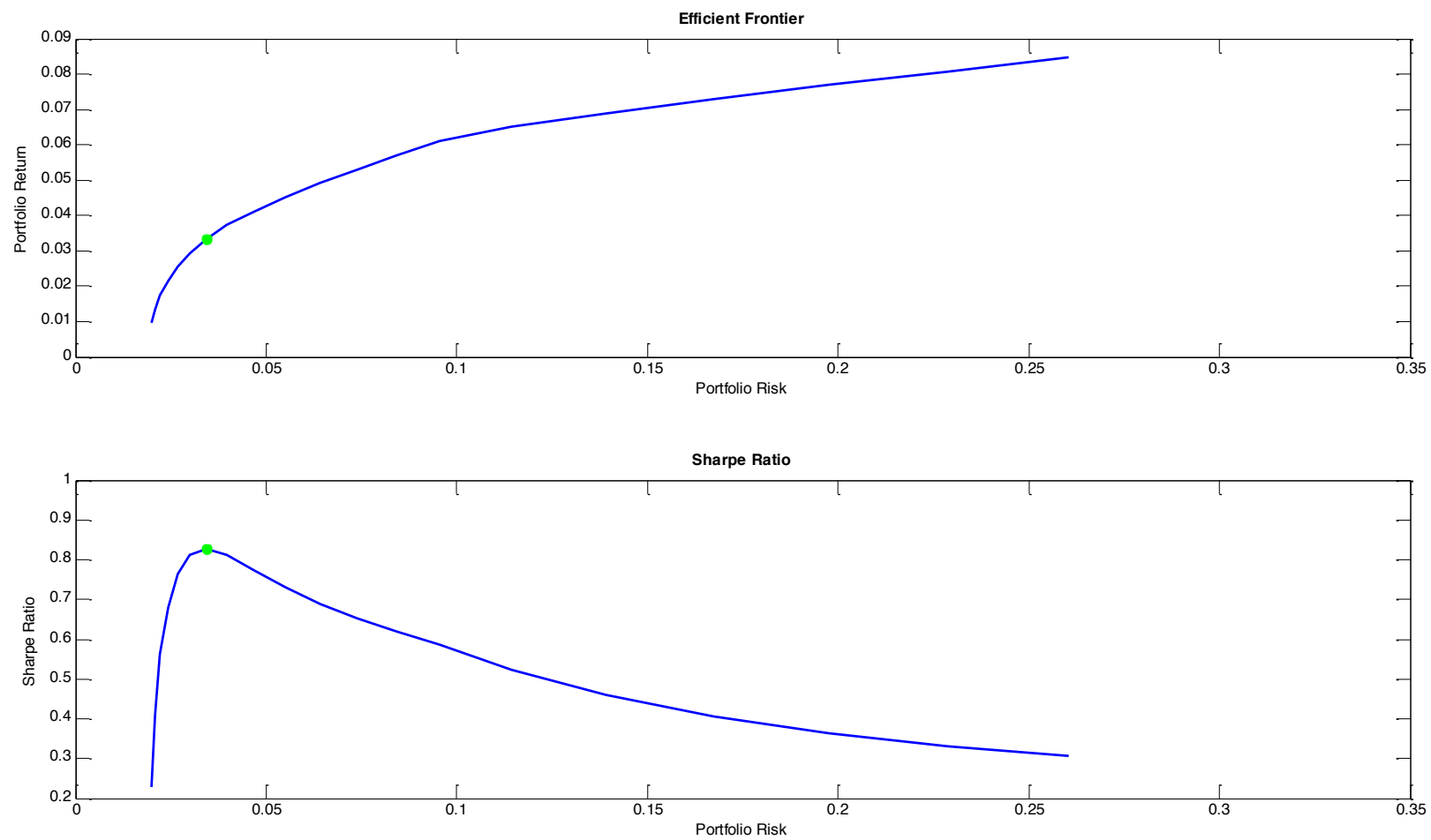
A composição do portfólio para o ponto demarcado na fronteira eficiente como Sharpe na Figura 10, está representada na Tabela 8.

**Tabela 8 - Composição do portfólio no ponto Sharpe**

Ativos	Peso
ESTC3	40,00 %
ITUB4	3,73 %
KROT3	4,00 %
SUZB5	5,72%
TIMP3	18,06 %
UGPA3	29,36 %
WEG3	4,80 %
TOTAL	100 %

Fonte: Elaborado pelo autor.

Nessa composição de ativos, o retorno exigido pelo mercado é de aproximadamente 40,1% ao ano, apresentando um risco anual de 11,9%. Conforme analisado por Haugen (2014), a composição de um portfólio no exato ponto de tangência entre a curva de mercado e a fronteira de eficiência representa o retorno máximo que se pode ser obtido através do nível de risco. Em síntese, a escolha de portfólio à direita do ponto Sharpe na curva de eficiência ou à medida que há aumento no risco, espera-se retornos decrescentes para cada acréscimo do nível de risco a partir desse ponto. Essa relação pode ser observada na Figura 11.



**Figura 11 - Relação risco e retorno no ponto Sharpe**  
Fonte: Gerado pelo MatLab v. 2013a

Vale destacar que os dados informados na Figura 11 revelam a rentabilidade mensal no ponto máximo de Sharpe, no qual registrou uma rentabilidade média de 3,3% e um risco de 3,43%.

Assim, podemos confirmar que a composição dessa carteira maximiza o índice Sharpe dentre todas as carteiras possíveis sobrepostas na fronteira de eficiência. Dessa forma, a carteira apresentada na Tabela 8 apresenta o ponto ótimo da fronteira eficiente de acordo com o método de apreçamento de ativos, uma vez que maximiza o índice Sharpe.

## 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Levando em consideração o interesse dos agentes econômicos em proteger o poder de compra da moeda, mediante a realização de investimentos financeiros, a aplicabilidade do método de diversificação de ativos, por meio dos estudos elaborados principalmente por Markowitz (1952) e Sharpe (1964), apresentou elevada eficácia tanto no quesito de valorização do capital quanto no que tange à minimização do risco.

O processo de diversificação apresentou-se adequado ao demonstrar uma fronteira eficiente de inúmeras possibilidades de retorno para determinado nível de risco assumido para cada investidor. Nesse sentido, a escolha da carteira ótima pode ser determinada pelo grau de aversão ao risco dos agentes econômicos.

Entretanto, conforme abordado por Markowitz (1952), os indivíduos procuram minimizar ao máximo o risco inerente aos investimentos financeiros, de modo que possam alcançar a solução máxima do problema de otimização presente no *trade-off* entre risco e retorno. Dessa forma, foi possível estimar a escolha ótima por meio de uma carteira que apresenta o menor risco possível.

Por meio do método do CAPM, no qual levou em consideração a existência de um ativo livre de risco, foi possível determinar o grau de exigência do mercado quanto ao retorno mínimo esperado para os ativos selecionados. Nesse sentido, o ponto máximo identificado pelo indicador de Sharpe nos revela a composição da carteira que converge para a rentabilidade exigida, quando comparada com a existência de ativos livres de risco.

Tendo em vista a importância da realização de um Trabalho de Conclusão de Curso, com vistas a aprimorar o conhecimento acumulado no decorrer do curso de graduação e colocar em prática algumas premissas da atuação profissional de um economista, destaca-se algumas contribuições deste estudo. No que se refere aos estudos de otimização em carteira, verifica-se que este trabalho contribui para identificar, por meio do processo de diversificação, a minimização do risco e a aplicabilidade dos métodos de Markowitz e CAPM.

Embora tenha se objetivado eliminar o máximo de lacunas possíveis a este trabalho, evidencia-se também algumas limitações como as constantes oscilações e incertezas no mercado acionário, que podem gerar desequilíbrios nos preços dos ativos, de modo que, independente do resultado obtido, os retornos esperados para cada nível de risco possam não ser refletidos na realidade.

À guisa de conclusão salienta-se que os objetivos desse trabalho foram alcançados e espera-se que o conteúdo aqui abordado possa auxiliar na elaboração de novos estudos, ou da prática profissional.

## REFERÊNCIAS

ARAÚJO, Elisson Alberto Tavares; OLIVEIRA, Victor do Carmo; SILVA, Wendel Alex Castro. CAPM em estudos brasileiros: uma análise da pesquisa. **Revista de Contabilidade e Organizações**, vol. 6, n. 15. pp. 95-122, 2012.

BANCO CENTRAL DO BRASIL. Disponível em <<https://www3.bcb.gov.br/sgspub/consultarvalores/telaCvsSelecionarSeries.paint>>. Acesso em 1 de novembro de 2015.

BM&FBovespa. Disponível em <<http://www.bmfbovespa.com.br/pt-br/intros/intro-sobre-a-bolsa.aspx?idioma=pt-br>>. Acesso em 5 de novembro de 2015.

BODIE, Z.; KANE, A.; MARCUS, A. J. **Investments**, 10 ed., The McGraw-Hill Companies, 2014.

CARVALHO, F. J. C.; SICSÚ, J.; SOUZA, F. E. P.; DE PAULA, L. F. R.; STUDART, R. **Economia monetária e financeira: teoria e prática**. Campos, São Paulo, 2007.

CASTRO SILVA, W. A. C.; PINTO, E. A.; MELO, A. O.; CAMARGOS, M. A. Análise comparativa entre o CAPM e o C-CAPM na precificação de índices acionários: evidências de mudanças nos coeficientes estimados de 2005 à 2008. In: Encontro Brasileiro de Finanças, 9., 2009, São Leopoldo. Anais... São Paulo: SBFIN, 2009.

CERVO, A. L.; BERVIA, P. A.; DA SILVA, R. **Metodologia científica**. 6 ed. São Paulo: Pearson Prentice. Hall, 2007.

ELTON, E.; GRUBER, M. J.; BROWN, S. J.; GOETZMANN, W. N. **Modern portfolio theory and investments analysis**, 9ed., Wiley, 2014.

FAMA, Eugene F.; KENNETH R. French. The Capital Asset Pricing Model: theory and evidence. **Journal of Economic Perspectives**, 18(3): 25-46, 2004.



FARIAS, T. A; MOURA, F. R. Carteiras eficientes e ingênuas: uma análise comparative com o uso do modelo de Markowitz. **Revista de Economia Mackenzie**, v. 11, n.2, São Paulo, 2013.

MATWORKS, Inc. **Financial Toolbox: User's Guide**. Natick, MA, 2015.

FILHO, Elmo Tambosi; GARCIA, Fábio Gallo; IMONIANA, Joshua Onome; MOREIRAS, Luiz Maurício Franco. Teste do CAPM condicional dos retornos de carteiras dos mercados brasileiro, argentino e chileno, comparando-os com o mercado norte-americano. **RAE, Revista de Administração de Empresas**, São Paulo, v. 50, n.1, pp. 60-74, jan./mar, 2010.

GALDI, F. C.; SECURATO, J. R. O risco idiossincrático é relevante no mercado brasileiro? **Revista Brasileira de Finanças**, v. 5, n. 1, p. 41–58, 2007.

HAUGEN, R. A. **Modern Investment Theory**, Prentice Hall, 4ed., 1996.

LINS, Aline Gonçalves; SILVA, Wesley Vieira da; GOMES, Liliane; MARQUES, Sandro. Formulação de Carteiras Hipotéticas de Ativos Financeiros Usando a Técnica de Análise de Cluster. **XXXI Encontro da Anpad (Enanpad)**, Rio de Janeiro, RJ, 22 a 26 de setembro de 2007.

LINTNER, J. The valuation of risk assets and selection of risky investments in stocks portfolios and capital budgets. **Review of Economics and Statistics**, v. 47, p. 13-37, 1965.

MARKOWITZ, H. M. **Portfolio selection: efficient diversification of investments**. New York: John Wiley & Sons, 1959.

MARKOWITZ, Harry. Portfolio Selection. **Journal of Finance**, n. 7, p. 77-70, Mar., 1952.

MAZZEU, João Henrique Gonçalves; COSTA JUNIOR, Newton Carneiro Affonso da; SANTOS, André Alves Portela. CAPM condicional com aprendizagem aplicado ao mercado brasileiro de ações. **RAM, Revista de Administração Mackenzie**, São Paulo, v. 14, n. 1, p. 143-175, Feb. 2013 .

MOSSIN, J. Equilibrium in a capital asset market. **Econometrica**, v. 34, n. 4, p. 768-783, 1966.

PINHEIRO, Juliano Lima. **Mercado de Capitais: Fundamentos e Técnicas**. 5 ed. São Paulo: Atlas, 2009.

RESENDE, M. F. C. O circuito finance-investimento-poupança-funding em economias abertas. **Revista de Economia Política**, Vol. 28, n. 1 (109), p. 136-154, janeiro-março/2007.

SAITO, A. T.; SAVOIA, J. R. F; FAMÁ, R. A evolução da função financeira. **Revista de Gestão USP**, São Paulo, v. 13, n. especial, p. 31-44, 2006.

SANTOS, A. A. P; TESSARI, C. Técnicas quantitativas de otimização de carteiras aplicadas ao Mercado de ações brasileiro. **Revista Brasileira de Finanças**. Rio de Janeiro, Vol. 10, n. 3, Setembro, 2012.

SHARPE, W.F.; ALEXANDER, G. J.; BAILEY, J. V. **Investments**, 5 ed., Nova Jersey: Prentice Hall, 1995.

SHARPE, William F. Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk. **The Journal of Finance** (New York) Vol XIX, 3 (September 1964): 425-442.

SHARPE, William F. Mutual Fund Performance. **The Journal of Business**, Vol. 39, No. 1, Part. 2: Supplement on Security Prices. Jan., 1966, pp. 119-138.

SILVA, Wendel Alex Castro; PINTO, Edimeire Alexandra; MELO, Alfredo Alves de Oliveira. O CAPM e o CAPM condicional na precificação de índices acionários: evidências de mudanças nos coeficientes estimados de 2005 a 2008. **RAM, Revista de Administração Mackenzie**, São Paulo, v. 13, n. 2, p. 106-134, Apr. 2012 .

**ANEXOS**

**Tabela 9 - Composição do Ibovespa**

Código	Nome	Participação no Ibovespa (%)
ABEV3	AMBEV S/A	7,346
BBAS3	BRASIL	1,905
BBDC3	BRADESCO	1,503
BBDC4	BRADESCO	6,95
BBSE3	BBSEGURIDADE	2,466
BRAP4	BRADESPAR	0,209
BRFS3	BRF SA	3,498
BRKM5	BRASKEM	0,82
BRML3	BR MALLS PAR	0,808
BRPR3	BR PROPERT	0,468
BVMF3	BMFBOVESPA	2,836
CCRO3	CCR SA	1,496
CESP6	CESP	0,391
CIEL3	CIELO	3,793
CMIG4	CEMIG	0,738
CPFE3	CPFL ENERGIA	0,67
CPLE6	COPEL	0,407
CSAN3	COSAN	0,522
CSNA3	SID NACIONAL	0,392
CTIP3	CETIP	1,28
CYRE3	CYRELA REALT	0,29
ECOR3	ECORODOVIAS	0,148
ELET3	ELETROBRAS	0,226
EMBR3	EMBRAER	2,592
ENBR3	ENERGIAS BR	0,391
EQTL3	EQUATORIAL	0,987
ESTC3	ESTACIO PART	0,555
FIBR3	FIBRIA	1,662
GGBR4	GERDAU	0,595

GOAU4	GERDAU MET	0,087
GOLL4	GOL	0,051
HGTX3	CIA HERING	0,269
HYPE3	HYPERMARCAS	1,05
ITSA4	ITAUSA	3,4
ITUB4	ITAUUNIBANCO	10,729
JBSS3	JBS	3,141
KLBN11	KLABIN S/A	1,603
KROT3	KROTON	2,197
LAME4	LOJAS AMERIC	1,154
LREN3	LOJAS RENNER	1,614
MRFG3	MARFRIG	0,297
MRVE3	MRV	0,309
MULT3	MULTIPLAN	0,471
NATU3	NATURA	0,534
OIBR3	OI	0,14
PCAR4	P.ACUCAR-CBD	1,112
PETR3	PETROBRAS	3,161
PETR4	PETROBRAS	3,901
QUAL3	QUALICORP	0,481
RADL3	RAIADROGASIL	1,11
RENT3	LOCALIZA	0,553
RUMO3	RUMO LOG	0,157
SANB11	SANTANDER BR	0,768
SBSP3	SABESP	0,825
SMLE3	SMILES	0,248
SUZB5	SUZANO PAPEL	1,135
TBLE3	TRACTEBEL	0,954
TIMP3	TIM PART S/A	0,872
UGPA3	ULTRAPAR	2,885
USIM5	USIMINAS	0,168
VALE3	VALE	3,001
VALE5	VALE	3,3

VIVT4	TELEF BRASIL	2,379
-------	--------------	-------

**Fonte: BM&FBovespa (2015)**