

**Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica**

**ANÁLISE NUMÉRICA DE FADIGA DE BAIXO CICLO
ATRAVÉS DA TEORIA DE DANO**

Dissertação Submetida à Universidade Federal de Santa Catarina para
Obtenção do Grau de Mestre em Engenharia Mecânica

Rodrigo Rossi

Florianópolis, junho de 1997.

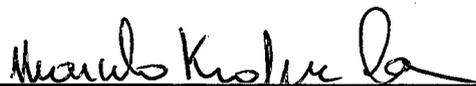
Análise Numérica de Fadiga de Baixo Ciclo Através da Teoria de Dano

Rodrigo Rossi

Esta Dissertação foi Julgada Adequada para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Especialidade Engenharia Mecânica, Área de Concentração Projeto e Análise de Componentes Mecânicos, e Aprovada em sua Forma Final pelo Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica



Marcelo Krajnc Alves, Ph. D.

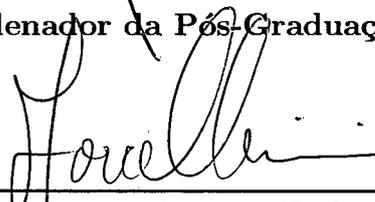
Orientador



Abelardo Alves de Queiroz, Ph. D.

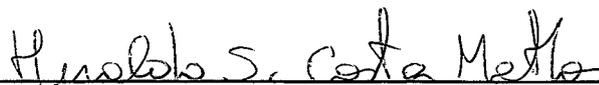
Coordenador da Pós-Graduação

Banca Examinadora



Fernando Antônio Forcellini, Dr. Eng. Mec.

Presidente



Heraldo S. Costa Mattos, Dr. Eng. Mec.

Membro



Edison da Rosa, Dr. Eng. Mec.

Membro

DEDICATÓRIA

à minha mãe
e a meu pai (*in memoriam*)

AGRADECIMENTOS

à CAPES pelo apoio financeiro nestes dois anos de trabalho;

ao professor, orientador e grande amigo Marcelo Krajnc Alves pelo suporte técnico e pelo excelente convívio;

aos meus amigos do GRANTE e de outros laboratórios, em especial a Alex Pizzatto, Alexandre Kaelble Calixto, André Ogliari, Antônio André Novotny, Cesar Augusto do Canto Vinadé, Eduardo A. Fancello, Eduardo Barbeitos, Felipe Carlos Schneider, João Carlos Arantes Costa Jr., Jorge Eurico, Juan Jose Lopensino, Jucélio Tomás Pereira, Juscelino de Farias Maribondo, Karina May, Lauro Fernando S. Ignácio Jr., Marcelo Gitirana Gomes Ferreira, Marcos Alexandre Luciano, Marcus Antonius da Costa Nunes, Michael Fernandes, Nederson da Silva Koehler, Nichele Pinto, Oscar Alfredo Garcia de Suarez, Valdir Mendes Cardoso, Yugi Sakurada e a meu grande amigo Marcelo Casara.

aos meus irmãos Evandro Domingos Rossi e Daniel David Rossi e a minha mãe Deomar Rossi pelo incentivo e apoio constante.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Revisão Bibliográfica	2
1.2	Apresentação do Trabalho	5
2	Elementos da Mecânica e da Termodinâmica dos Meios Contínuos	6
2.1	Princípio das Potências Virtuais	7
2.1.1	Escolha do Movimento Virtual - Teoria do Primeiro Gradiente	8
2.1.2	Potência Virtual dos Esforços Internos	9
2.1.3	Potência Virtual dos Esforços Exteriores	9
2.1.4	Potência Virtual dos Esforços de Inércia	10
2.1.5	Equação de Equilíbrio	10
2.1.6	Hipótese de Pequenas Deformações e Pequenos Deslocamentos	11
2.2	Termodinâmica dos Meios Contínuos	12
2.2.1	Leis de Conservação	12
2.3	Método do Estado Local	14
2.3.1	Potencial Termodinâmico	15
2.3.2	Potencial Termodinâmico de Dissipação	16

3 Aspectos Fenomenológicos e Apresentação das Variáveis do Problema	18
3.1 Fadiga	19
3.1.1 Comportamento do material sob carregamento cíclico	20
3.1.2 Mecanismos da Fadiga	22
3.1.3 Tipos de Fadiga	24
3.2 Plasticidade	25
3.2.1 Função de Escoamento ou Superfície de Escoamento	26
3.2.2 Regras de Endurecimento	27
3.2.3 Critério de Escoamento	29
3.3 Mecânica do Dano Contínuo	29
3.3.1 Representação Mecânica do Dano	31
3.3.2 Critério de Ruptura	35
3.3.3 Estágio de Início do Dano	35
3.4 Equações de Estado	36
3.4.1 Efeito do Fechamento das Microtrincas - Caso Geral	37
3.5 Equações de Evolução - Potencial de Dissipação	39
3.5.1 Equações Constitutivas da Elastoplasticidade Cíclica Acoplada com Dano	40
4 Discretização e Exemplos	44
4.1 Discretização	44
4.1.1 Equações de Equilíbrio Globais	45
4.2 Integração Local	47
4.2.1 Algoritmo	47

	vii
4.2.2	Determinação do Operador Tangente \mathbf{J} 49
4.2.3	Algoritmo geral 49
4.3	Exemplos 49
4.3.1	Exemplos 1D 51
4.3.2	Exemplos com o MEF 55
5	Conclusões e Sugestões 72
A	Provas 79

Lista de Figuras

2.1	Descrição do sistema físico	8
2.2	Configurações em deformações finitas.	11
3.1	Laço de histerese com deformação controlada do cobre, Fuchs & Stephens	21
3.2	Curva tensão x deformação cíclica, Fuchs & Stephens	22
3.3	Intrusões e Extrusões, Fuchs & Stephens	23
3.4	Estágios de propagação das trincas de fadiga, Fuchs & Stephens	24
3.5	Mecanismo de evolução de trincas de fadiga, Fuchs & Stephens	25
3.6	Endurecimento Isotrópico	27
3.7	Endurecimento Cinemático	28
3.8	Elemento de Volume Representativo de Dano	32
3.9	Tensão efetiva em um elemento unidimensional	33
4.1	Efeito do fechamento das microtrincas na tensão.	52
4.2	Curva deformação x vida para o aço AISI 316.	53
4.3	Evolução do dano para diferentes valores de deformação média	54
4.4	Solução Numérica e Solução Exata	55
4.5	Elemento finito - sistema local (ξ, η)	56
4.6	Geometria uniaxial	56

4.7	Acumulo de dano	57
4.8	Placa com furo	58
4.9	Discretização da placa com furo.	58
4.10	Evolução de p: Ciclo 10; b) ciclo 60; c) ciclo 110; d) ciclo 160; e) ciclo 210 e f) ciclo 260.	61
4.11	Evolução do dano. a) ciclo 10; b) ciclo 60; c) ciclo 110; d) ciclo 160; e) ciclo 210 e f) ciclo 260.	62
4.12	Região de concentração do dano.	63
4.13	Evolução do Dano	63
4.14	Evolução da deformação plástica acumulada para um carregamento monotônico	64
4.15	Evolução do dano sob carregamento monotônico	65
4.16	Evolução da frente plástica. a) Foggiatto (1997) - b) Zienkiewicz (1977) . . .	66
4.17	Evolução da tensão e do endurecimento cinemático no ensaio monotônico . .	67
4.18	Placa T	67
4.19	Discretização da placa T	68
4.20	Evolução da deformação plástica acumulada. a) ciclo 4; b) ciclo 20, c) ciclo 36, d) ciclo 52, e) ciclo 68 e f) ciclo 84.	69
4.21	Evolução do dano. a) ciclo 4; b) ciclo 20, c) ciclo 36, d) ciclo 52, e) ciclo 68 e f) ciclo 84.	70
4.22	Região onde ocorreu o máximo valor do dano.	71

Lista de Tabelas

3.1	Variáveis Termodinâmicas (J. Lemaitre 1976)	19
3.2	Dimensões do elemento de volume representativo	30
4.1	Equações principais do problema	45
4.2	Algoritmo geral	50

Resumo

Neste trabalho, é apresentada uma teoria capaz de analisar o dano de fadiga de baixo ciclo em componentes mecânicos juntamente com um algoritmo da classe de mapeamento de retorno, o qual integra as equações de elasto-plasticidade acopladas com dano. A teoria de dano considerada foi desenvolvida basicamente por Lemaitre (1992) e está fundamentada dentro do enfoque da termodinâmica dos processos irreversíveis. Este modelo considera o dano como sendo de caráter isotrópico e leva em consideração na análise elastoplástica o endurecimento isotrópico e cinemático, ambos não lineares e dependentes da deformação plástica. O modelo de dano incorpora ainda o efeito do fechamento das microtrincas, que consiste na diferenciação da tensão efetiva entre o estado de tração e o estado de compressão do material. A introdução deste parâmetro torna necessária a partição do campo de tensões em uma parte positiva e uma parte negativa. Já o algoritmo, apresentado por Simo & Taylor e generalizado por Benallal et al (1988) utiliza-se do método de Newton-Raphson para a solução do conjunto de equações não lineares locais bem como o conjunto de equações não lineares globais. O método de elementos finitos é utilizado para a discretização do domínio do sólido em questão e o elemento finito utilizado é o quadrilátero completo de nove nós, da classe Lagrangeana.

Exemplos de fadiga unidimensional e bidimensional, tais como a tradicional placa com furo e outras geometrias que apresentem algum ponto de concentração de tensão sob a hipótese de estado plano de tensões, serão apresentadas afim de poder acompanhar a evolução da variável de dano, bem como as demais variáveis de estado.

Abstract

In this work we present a theory and propose an algorithm for the analysis of the damage of low cycle fatigue in components. A return mapping algorithm is used in the integration of the fully coupled elastoplastic and damage equations. The theory of damage used was proposed by Lemaitre (1992) and this theory is well-founded in the framework of thermodynamics of irreversible process. The model takes into account a non-linear isotropic and kinematic hardening rule and the damage process considers the microcrack closure effect, i.e., distinguish the effective stress in tension and compression. In order to introduce this effect we make a partition of the stress field in a positive and negative parts, and consider a different response while in traction and compression. The algorithm used in the integration of the set of evolution equations was presented by Simo & Taylor (1986) and generalized by Benallal et al (1988) and it uses the Newton-Raphson method to solve the set of local non-linear equations, as well as the set of global non-linear equations. The finite element method is employed in the discretisation of the body domain in question and the element obtained is the complete quadratic, nine nodes Lagrangian class.

Examples of one-dimensional and two-dimensional, like that a traditional plate with a hole, assuming a plane stress state, are showed in order to verify the evolution of damage variable as well as the others states variables.

Capítulo 1

Introdução

Ainda hoje, entender os mecanismos e formular teorias para modelar fenômenos irreversíveis é uma tarefa árdua para os pesquisadores. Tais fenômenos, os quais sempre envolvem mecanismos complexos de dissipação, podem ser encontrados em todas as áreas de conhecimento da engenharia. Especificamente, dentro da área de mecânica dos sólidos, talvez o mais famoso e importante deles seja o fenômeno da fadiga em componentes. Segundo Fuchs & Stephens (1980), 50 a 90% de todas as falhas mecânicas são provenientes deste fenômeno. Assim, predizer o tempo de vida, ou o número de ciclos de operação até a falha de um certo componente tem sido o objetivo de grandes pesquisadores ao longo da história.

Geralmente, o dano em fadiga é baseado na lei de evolução de Palmgren-Miner. Porém, esta representa uma relação linear entre o número de ciclos percorridos e o número de ciclos de ruptura para uma certa amplitude de carregamento. Devido a isso, esta lei de acúmulo de dano apresenta resultados discrepantes quando comparamos carregamentos com amplitudes ou blocos de amplitudes diferentes aplicados em ordens diferentes. Estes erros são devidos ao fato de que a lei de evolução do dano de Palmgren-Miner não leva em conta os efeitos de

endurecimento e/ou amolecimento do material.

Por sua vez, a proposta de evolução do dano de fadiga de Lemaitre et al está baseada no contexto da termodinâmica dos processos irreversíveis, a qual permite que um tratamento matemático mais adequado seja aplicado, possibilitando a introdução de um modelo de plasticidade mais requintado. Com esta metodologia, variáveis como endurecimento isotrópico, endurecimento cinemático, dano e efeito de fechamento das microtrincas podem ser introduzidas e, além disso, validadas do ponto de vista físico, pela satisfação de princípios termodinâmicos.

Neste trabalho a proposta de Lemaitre é utilizada para realizar um estudo numérico do problema de fadiga de baixo ciclo em componentes mecânicos. O conjunto final de equações não lineares de evolução do problema é discretizada e um algoritmo para resolvê-las é proposto. Por fim, são apresentados resultados numéricos para problemas de fadiga de baixo ciclo unidimensional e bidimensional ¹. Nesta dissertação é apresentada a teoria geral de dano acrescida do parâmetro de fechamento das microtrincas. Porém, por simplicidade, não consideramos o efeito do fechamento das microtrincas quando na solução dos problemas bidimensionais propostos.

1.1 Revisão Bibliográfica

Antigamente, a falha de um componente mecânico estava associada diretamente com a fratura, desenvolvida pelo excesso de deformação devido a uma solicitação estática. A falha por fadiga começou a ser estudada apenas depois do desenvolvimento da máquina a vapor e de seu emprego nas locomotivas da época. Nestes equipamentos, a falha devido a carregamentos variáveis, cíclicos ou não, tornou-se bastante comum.

¹ Nos problemas bidimensionais é assumida a hipótese de estado plano de tensões (EPT).

Desta forma, os pesquisadores da época começaram a desenvolver um grande interesse em como o mecanismo da fadiga atuava, e conseqüentemente, na possibilidade de se prevenir da ocorrência deste mecanismo de degradação resultando na falha do componente. Este ítem tem como objetivo fazer uma rápida apresentação sobre os pesquisadores e os trabalhos que mais influenciaram no desenvolvimento da teoria de fadiga até os dias de hoje. Esta revisão bibliográfica é baseada principalmente no trabalho de Fuchs & Stephens (1980).

Os primeiros ensaios datam de 1830, quando W. A. Albert observou o comportamento de correntes soldadas de um guindaste até 100.000 ciclos de operação. Entre 1850-1865, ambos E. A. Hodgkinson e W. Fairbairn realizaram um ensaio com carregamento de flexão repetido em uma viga e perceberam que, depois de alguns ciclos sob uma carga de 30 kN aplicada no seu centro a viga rompia, enquanto a carga de ruptura estática era de 120 kN.

Porém, o trabalho de maior valor para a fadiga até aquela data foi realizado por A. Wöhler entre 1850-1860. Wöhler submeteu um eixo de trem a carregamentos repetidos de flexão e plotou os resultados em um diagrama de tensão alternada de falha versus vida, introduzindo assim o conhecido diagrama $\sigma \times N$.

Durante 1870-1890 muitos pesquisadores contribuíram para expandir o trabalho de Wöhler, entre eles os principais foram Gerber, que analisou o efeito da tensão média na vida de um componente, e J. Goodman que propôs uma teoria simplificada para o efeito da tensão média.

Após esta fase inicial de pesquisa, outras grandes contribuições só foram feitas com o advento do microscópio óptico já no século XX. Desta forma, foi possível estudar os mecanismos que estavam envolvidos no fenômeno da fadiga a nível metalúrgico. Dentro desta área destacam-se os trabalhos de H. J. Gough em 1920 e H. F. Moore & J. B. Koppers em 1927. Paralelamente aos trabalhos de fadiga, começavam a surgir os trabalhos na área da mecânica

da fratura, principalmente com A. A. Griffith. J. O. Almen apresentou sua contribuição no problema de fadiga através do efeito benéfico que as tensões residuais produzem. Em 1945, M. A. Miner formulou um critério de acúmulo linear de dano, sugerida inicialmente por A. Palmgren em 1924. Este critério de dano de fadiga ficou conhecido depois como lei de acúmulo de dano de Palmgren-Miner. Outro grande avanço na área da fadiga só veio a acontecer nos anos 60 com a relação de S. S. Manson e de L. F. Coffin para problemas de fadiga com controle de deformação. Esta relação é amplamente utilizada e é conhecida como relação de Coffin-Manson.

Embora o conceito de uma variável que está relacionada com a degradação do material tenha sido apresentada já no trabalho de Palmgren-Miner, é o trabalho de L. M. Kachanov em 1958 que é considerado como o ponto inicial da teoria de dano mecânico contínuo. Alguns anos depois a variável de dano D ganhou sentido de uma variável de estado interna dentro da termodinâmica. Porém só em 1968 outro grande avanço foi alcança através de Y. N. Robtnov com o conceito de tensão efetiva.

Dos anos 70 até os dias de hoje houve um grande desenvolvimento da teoria do dano mecânico contínuo dada por L. M. Kachanov, J. L. Chaboche e principalmente por J. Lemaitre. Destes trabalhos surgiram também novas propostas de dano, como a apresentada por H. C. Mattos (1995).

Hoje, a teoria do dano mecânico contínuo esta fortemente montada dentro do contexto da termodinâmica dos processos irreversíveis, podendo ser aplicada não só para o problema de fadiga, mas para qualquer problema que, de alguma forma, envolva a degradação do material.

1.2 Apresentação do Trabalho

Esta dissertação será apresentada em 5 capítulos. Um resumo do conteúdo de cada um dos capítulos será apresentado neste ítem.

Neste capítulo uma revisão bibliográfica e uma apresentação do trabalho são discutidas.

No capítulo 2 é mostrado, com um certo nível de detalhes, a formulação termodinâmica utilizada para analisar problemas de caráter irreversível. Lá é apresentado, de maneira metodológica, as definições e conceitos utilizados por todo o trabalho bem como as hipóteses assumidas na formulação.

Já o capítulo 3 introduz as variáveis utilizadas para modelar o problema de fadiga de baixo ciclo dentro do enfoque apresentado no capítulo 2. A cada variável apresentada é feita uma discussão sobre o aspecto fenomenológico que ela representa. Neste capítulo são definidas as expressões analíticas que governarão o problema de elasto-placidade cíclica acoplada com dano.

Por sua vez, o capítulo 4 apresenta a discretização das equações de evolução obtidas no capítulo 3, o algoritmo utilizado para a sua solução numérica, bem como, discute os resultados de vários exemplos obtidos através da implementação destas equações. O uso do método de elementos finitos se fará presente para a discretização do domínio em questão.

O capítulo 5 apresenta as conclusões do trabalho e sugestões para a continuidade do mesmo.

Por fim, no apêndice A é mostrada a prova matemática de alguns resultados considerados essenciais para o desenvolvimento teórico e computacional deste trabalho.

Capítulo 2

Elementos da Mecânica e da Termodinâmica dos Meios Contínuos

O objetivo deste capítulo é o de apresentar os conceitos básicos da teoria utilizada para modelar os fenômenos de deformação e de ruptura de um meio contínuo. Para analisar estes fenômenos faz-se necessário a determinação da cinemática da deformação de um corpo, dos esforços atuantes sobre o corpo e também da evolução das variáveis características do fenômeno de ruptura. O texto deste capítulo está baseado principalmente nos trabalhos de Germain (1973), Germain et al (1983) e de Lemaitre & Chaboche (1994).

Assim, a base deste capítulo é dada sobre o Princípio das Potências Virtuais (PPV) idealizado por d'Alembert (1750) e que obteve utilização sistemática a partir de 1970 devido ao desenvolvimento dos métodos variacionais na análise funcional. Através do PPV e da escolha de um conjunto de movimentos virtuais compatíveis com o corpo em análise obtêm-se uma definição coerente das deformações, das equações de equilíbrio de forças e das condições de contorno apropriadas.

Afim de introduzir as variáveis características dos fenômenos estudados, utiliza-se o enfoque da termodinâmica dos processos irreversíveis. A escolha de *Potenciais Termodinâmicos* e a utilização do *Método do Estado Local* permite definir as variáveis associadas a partir das variáveis de estado, observáveis e internas, escolhidas em função dos fenômenos que se deseja

observar, conduzindo naturalmente as equações de estado. O pseudo potencial de dissipação fornece às leis complementares ou leis de evolução que descrevem os processos irreversíveis considerados ².

2.1 Princípio das Potências Virtuais

Segundo Sampaio (1985), o Princípio das Potências Virtuais consiste em descrever os movimentos possíveis de um sistema mecânico por um espaço virtual ϑ , denominado espaço dos movimentos virtuais, sendo que a escolha deste espaço reflete o grau de detalhe com o qual se quer descrever o sistema mecânico em questão. As forças aplicadas no sistema mecânico são então descritas pela prescrição de um funcional linear contínuo em ϑ . O conjunto destes funcionais lineares constitui o espaço \mathfrak{S} das forças. Assim, o significado das forças é dado através da potência que esta força realiza em um movimento virtual qualquer.

O PPV é baseado em dois axiomas básicos, o axioma da invariância dos esforços internos e o axioma de equilíbrio.

Axioma da invariância dos esforços internos

Este primeiro axioma diz que a potência virtual dos esforços internos associada a um movimento de corpo rígido é nula.

Axioma de equilíbrio

Para todo o meio material, relacionado a um referencial absoluto, a cada instante de tempo e para todo o movimento virtual; a potência virtual dos esforços de inércia P_a é igual a soma das potências virtuais dos esforços internos P_i e das potências virtuais dos esforços

² Neste trabalho convencionou-se que:

Campos escalares são representados por letras de fonte itálica e símbolos, ex. D , r , σ ;

Campos vetoriais são representados por letras de fonte itálica e símbolos sobrescritos por \rightarrow , ex. \vec{v} , \vec{n} ;

Campos tensoriais são representados por letras e símbolos em negrito, ex. $\boldsymbol{\sigma}$, \mathbf{A} .

externos P_x , i.e.,

$$P_a = P_i + P_x. \quad (2.1)$$

2.1.1 Escolha do Movimento Virtual - Teoria do Primeiro Gradiente

Seja \mathcal{D} o domínio, de fronteira $\partial\mathcal{D}$, interior a um meio de volume \mathcal{S} e de fronteira $\partial\mathcal{S}$ e seja \vec{n} a normal exterior em um ponto M de $\partial\mathcal{D}$ relacionado a um sistema de coordenadas como na figura 2.1.

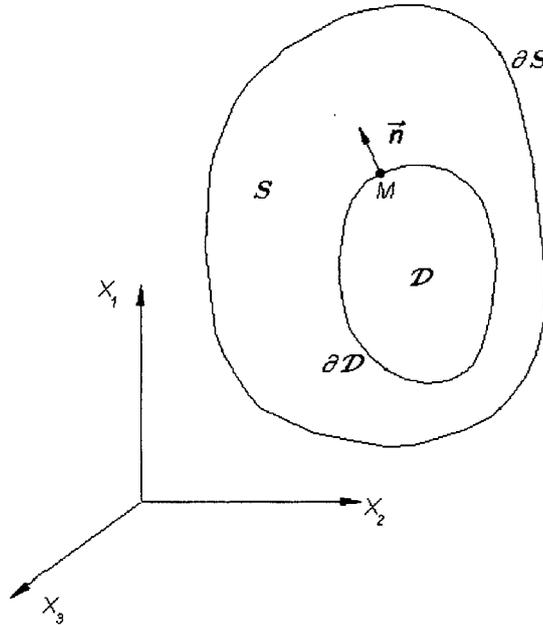


Figura 2.1: Descrição do sistema físico

Afim de descrever o movimento do corpo com uma certa rigidez, é introduzido, além do campo de velocidades $\vec{v}(M)$, o campo de gradientes da velocidade $\vec{grad} \vec{v}(M)$. Decompondo o tensor $\vec{grad} \vec{v}(M)$ em sua parte simétrica \mathbf{D} e em sua parte anti-simétrica $\mathbf{\Omega}$ pode-se escrever

$$\vec{grad} \vec{v}(M) = \mathbf{D} + \mathbf{\Omega}, \quad (2.2)$$

onde $\mathbf{D} = \frac{1}{2} \left\{ \vec{\text{grad}} \vec{v} (M) + \left[\vec{\text{grad}} \vec{v} (M) \right]^T \right\}$ e é denominado tensor taxa de deformação e $\mathbf{\Omega} = \frac{1}{2} \left\{ \vec{\text{grad}} \vec{v} (M) - \left[\vec{\text{grad}} \vec{v} (M) \right]^T \right\}$ é denominado tensor taxa de rotação.

2.1.2 Potência Virtual dos Esforços Internos

Supõe-se que a potência virtual dos esforços internos está definida por uma integral sobre o domínio \mathcal{D} que a priori contém os três termos $\vec{v} (M)$, \mathbf{D} e $\mathbf{\Omega}$ associados respectivamente a um vetor \vec{f}^* e aos tensores $\boldsymbol{\sigma}$, simétrico e $\boldsymbol{\Gamma}$, anti-simétrico. Assim,

$$P_i = - \int_{\mathcal{D}} \left(\vec{v} \cdot \vec{f}^* + \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Gamma} \right) d\mathcal{D} \quad (2.3)$$

na qual o sinal negativo é introduzido por convenção que será usada mais tarde no desenvolvimento termodinâmico. Através do primeiro axioma do PPV pode-se chegar que a Eq.(2.3) reduz-se a

$$P_i = - \int_{\mathcal{D}} \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\sigma} d\mathcal{D}. \quad (2.4)$$

2.1.3 Potência Virtual dos Esforços Exteriores

Os esforço externos são divididos em esforços de ação a distância e esforços de contato. Os esforços de ação a distância são devidos a ação do exterior sobre o sistema, atuando no volume do corpo \mathcal{D} , e são tais como o campo gravitacional e os campos eletromagnéticos. Estes esforços são representados por uma densidade de forças \vec{f} . O segundo termo é devido aos esforços de contato que atuam na superfície do corpo $\partial\mathcal{D}$ e são representados pelo vetor densidade de forças de superfície \vec{t} . Assim, a potência virtual dos esforços externos é definida como

$$P_x = \int_{\mathcal{D}} \vec{f} \cdot \vec{v} d\mathcal{D} + \int_{\partial\mathcal{D}} \vec{t} \cdot \vec{v} d\partial\mathcal{D}. \quad (2.5)$$

2.1.4 Potência Virtual dos Esforços de Inércia

Se $\vec{\gamma}$ é o vetor aceleração em cada ponto M e ρ é a massa específica, a potência das quantidades de aceleração é definida como

$$P_a = \int_{\mathcal{D}} \rho \vec{\gamma} \cdot \vec{v} \, d\mathcal{D}. \quad (2.6)$$

2.1.5 Equação de Equilíbrio

Substituindo as equações integrais encontradas para cada um dos termos de potência na Eq.(2.1) chega-se a

$$\int_{\mathcal{D}} \rho \vec{\gamma} \cdot \vec{v} \, d\mathcal{D} = - \int_{\mathcal{D}} \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\sigma} \, d\mathcal{D} + \int_{\mathcal{D}} \vec{f} \cdot \vec{v} \, d\mathcal{D} + \int_{\partial\mathcal{D}} \vec{t} \cdot \vec{v} \, d\partial\mathcal{D}. \quad (2.7)$$

O teorema da divergência para um campo vetorial³ e algumas propriedades de derivação pode-se chegar a seguinte equação integral

$$\int_{\mathcal{D}} \left(\text{div } \boldsymbol{\sigma} + \vec{f} - \rho \vec{\gamma} \right) \cdot \vec{v} \, d\mathcal{D} = 0 \quad \forall \vec{v}, \quad (2.8)$$

assim,

$$\text{div } \boldsymbol{\sigma} + \vec{f} - \rho \vec{\gamma} = 0 \quad \text{em } \mathcal{D}, \quad (2.9)$$

que é a clássica equação de equilíbrio dinâmico. Se o corpo estiver em equilíbrio estático então a potência devida à quantidade de aceleração P_a é nula e a Eq.(2.9) torna-se

$$\text{div } \boldsymbol{\sigma} + \vec{f} = 0 \quad \text{em } \mathcal{D}, \quad (2.10)$$

que é a conhecida equação de equilíbrio estático. Temos ainda que $\vec{t} = \boldsymbol{\sigma} \vec{n}$ sobre $\partial\mathcal{D}$.

³ Teorema da Divergência:

Campo escalar: $\int_{\partial a} \varphi \vec{n} \, d\partial a = \int_a \nabla \varphi \, da$

Campo vetorial: $\int_{\partial a} \vec{v} \cdot \vec{n} \, d\partial a = \int_a \text{div } \vec{v} \, da$

Campo tensorial: $\int_{\partial a} \mathbf{A} \vec{n} \, d\partial a = \int_a \text{div } \mathbf{A} \, da$

2.1.6 Hipótese de Pequenas Deformações e Pequenos Deslocamentos

Quando os deslocamentos $\vec{u}(M)$, e as deformações ε , forem de pequena magnitude as variáveis de Lagrange, definidas na configuração indeformada B_0 , ver figura 2.2, e as variáveis de Euler, definidas na configuração atual B_t , se confundem.

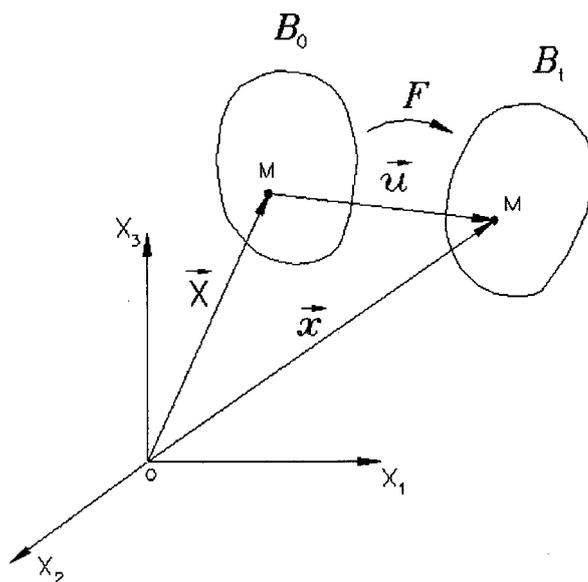


Figura 2.2: Configurações em deformações finitas.

Desta forma, pode-se escrever que

$$\vec{u}(M) = \int_0^t \vec{v}(M) dt \quad (2.11)$$

e

$$\varepsilon = \int_0^t \mathbf{D} dt \quad (2.12)$$

e por conseqüência

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left\{ \vec{\text{grad}} \vec{u}(M) + \left[\vec{\text{grad}} \vec{u}(M) \right]^T \right\}. \quad (2.13)$$

2.2 Termodinâmica dos Meios Contínuos

2.2.1 Leis de Conservação

i) Conservação da Quantidade de Movimento:

A equação de equilíbrio Eq.(2.9) pode ser interpretada como um balanço de quantidade de movimento, ou seja,

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho \vec{\gamma} d\mathcal{D} - \int_{\partial\mathcal{D}} \vec{t} d\partial\mathcal{D} = \int_{\mathcal{D}} \vec{f} d\mathcal{D} \quad (2.14)$$

ii) Conservação da Massa:

A segunda lei de conservação é a lei de conservação da massa que é expressa por

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho d\mathcal{D} = 0. \quad (2.15)$$

iii) Primeira Lei da Termodinâmica:

A terceira, e mais famosa lei de conservação é a lei da conservação de energia. Ela exprime que a taxa de variação de energia interna, definida como

$$\frac{d}{dt} (E) = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho e d\mathcal{D} \quad (2.16)$$

na qual e é a energia interna específica, mais a taxa de variação da energia cinética, definida como

$$\frac{d}{dt} (K) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho \vec{v} \cdot \vec{v} d\mathcal{D} \quad (2.17)$$

deve ser igual a taxa de calor recebida pelo corpo mais a potência externa definida pela Eq.(2.5), isto é

$$\frac{d}{dt} (E + K) = P_x + Q. \quad (2.18)$$

A taxa de calor recebida pelo corpo compreende duas partes, uma devida ao calor gerado no interior do corpo \mathcal{D} pela ação das forças externas e a outra pelo calor recebido através da

fronteira $\partial\mathcal{D}$. Assim a taxa de calor pode ser escrita como

$$Q = \int_{\mathcal{D}} r \, d\mathcal{D} - \int_{\partial\mathcal{D}} \vec{q} \cdot \vec{n} \, d\partial\mathcal{D} \quad (2.19)$$

na qual r é a densidade, em volume, de produção interna de calor, \vec{q} é o vetor fluxo de calor e \vec{n} é a normal exterior a $\partial\mathcal{D}$ já definida anteriormente.

Com a manipulação matemática destas definições apresentadas até aqui, pode-se escrever a primeira lei da termodinâmica da seguinte forma

$$\dot{e} \rho = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} + r + \text{div} \vec{q} \quad (2.20)$$

ou

$$\dot{e} \rho = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + r + \text{div} \vec{q} \quad (2.21)$$

utilizando a hipótese de pequenos deslocamentos.

iv) Segunda Lei da Termodinâmica - Entropia

A segunda lei da termodinâmica é expressa por uma desigualdade que relaciona duas novas variáveis, a temperatura absoluta T e a entropia S que é definida como

$$S = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho \, s \, d\mathcal{D}, \quad (2.22)$$

na qual s é a entropia específica. Esta desigualdade é tal que a taxa de produção de entropia é sempre superior, ou no caso extremo igual, a taxa de calor recebida por \mathcal{D} , definida pela Eq.(2.19), dividida pela temperatura absoluta T . Assim,

$$\frac{dS}{dt} \geq \int_{\mathcal{D}} \frac{r}{T} \, d\mathcal{D} - \int_{\partial\mathcal{D}} \frac{\vec{q} \cdot \vec{n}}{T} \, d\partial\mathcal{D}. \quad (2.23)$$

Através desta desigualdade pode-se então excluir os processos físicos não factíveis, i.e., processos que possuem taxa de entropia negativa. A aplicação do teorema da divergência na

Eq.(2.23) permite-nos escrever

$$\int_{\mathcal{D}} \left[\rho \frac{ds}{dt} + \text{div} \left(\frac{\vec{q}}{T} \right) - \frac{r}{T} \right] d\mathcal{D} \geq 0 \quad (2.24)$$

ou em sua forma local

$$\rho \frac{ds}{dt} + \text{div} \left(\frac{\vec{q}}{T} \right) - \frac{r}{T} \geq 0. \quad (2.25)$$

Com base na primeira lei da termodinâmica expressa pela Eq.(2.20), pode-se escrever

$$\rho \left(T \frac{ds}{dt} - \frac{de}{dt} \right) + \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \vec{q} \cdot \frac{\vec{\text{grad}} T}{T} \geq 0. \quad (2.26)$$

Introduzindo o potencial de energia livre de Helmlhotz

$$\Psi = e - Ts \quad (2.27)$$

chega-se a

$$\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \rho \left(\frac{d\Psi}{dt} + s \frac{dT}{dt} \right) - \vec{q} \cdot \frac{\vec{\text{grad}} T}{T} \geq 0 \quad (2.28)$$

que é a desigualdade de Clausius-Duhem. Admitindo agora a hipótese de pequenos deslocamentos e pequenas deformações a desigualdade descrita pela Eq.(2.28) pode ser expressa por

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \rho \left(\frac{d\Psi}{dt} + s \frac{dT}{dt} \right) - \vec{q} \cdot \frac{\vec{\text{grad}} T}{T} \geq 0 \quad (2.29)$$

2.3 Método do Estado Local

O axioma do método do estado local considera que o estado termodinâmico de um meio contínuo pode ser definido através do conhecimento de valores de um certo número de variáveis definidas em um instante t fixo. Esta hipótese implica que a evolução de um meio contínuo pode então ser considerada como a sucessão de vários estados de equilíbrio, ou termoestáticos. Estas variáveis são denominadas *variáveis de estado local*. Assim, o sucesso

da representação do fenômeno físico em questão depende da boa escolha das variáveis de estado. Os processos serão termodinamicamente admissíveis se para cada instante t da evolução, a equação de Clausius-Duhem for satisfeita. As variáveis de estado local são classificadas segundo Lemaitre (1992) por variáveis observáveis e variáveis internas.

Variáveis observáveis: As variáveis observáveis que interagem dentro dos fenômenos de elasticidade, viscoelasticidade, plasticidade, viscoplasticidade, dano e ruptura são a temperatura T e a deformação total $\boldsymbol{\varepsilon}$. Os fenômenos reversíveis ou elásticos são completamente definidos pelas variáveis observáveis.

Variáveis internas: Para introduzir a plasticidade é necessário a introdução da variável irreversível deformação plástica, representada por $\boldsymbol{\varepsilon}^p$. Deste modo a deformação total pode ser escrita como

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^p + \boldsymbol{\varepsilon}^e. \quad (2.30)$$

Na Eq.(2.30) duas variáveis internas foram definidas: a deformação plástica $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ e a deformação termo-elástica $\boldsymbol{\varepsilon}^e$, se existir dilatação térmica. Os outros fenômenos, tais como dano e o encruamento por exemplo, podem ser incluídos através da introdução de variáveis internas que os representem. Estas variáveis serão representadas aqui por V_k , (V_1, V_2, \dots, V_k) , e dependendo do fenômeno estas variáveis podem ser de natureza escalar, vetorial ou tensorial.

2.3.1 Potencial Termodinâmico

Postula-se a existência de um potencial termodinâmico Ψ do qual pode-se obter as leis de estado. Este potencial tem as seguintes características: $\Psi : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$, é côncavo com relação a T e convexo com relação às demais variáveis de estado. O potencial termodinâmico escolhido para o trabalho é a energia livre de Helmholtz, definido pela Eq.(2.27), e represen-

tado, através das variáveis de estado, como

$$\Psi = \Psi (\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\varepsilon}^e, T, V_k). \quad (2.31)$$

Para a elastoplasticidade pode-se escrever $\boldsymbol{\varepsilon}^e = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p$ e o potencial se reduz para

$$\Psi = \Psi (\boldsymbol{\varepsilon}^e, T, V_k). \quad (2.32)$$

Introduzindo a Eq.(2.32) na desigualdade de Clausius Duhem , Eq.(2.29), pode-se determinar as equações de estado para o problema. A primeira equação de estado é

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \quad (2.33)$$

e diz-se que $\boldsymbol{\sigma}$ é a variável associada com $\boldsymbol{\varepsilon}^e$. A segunda equação de estado é

$$s = -\frac{\partial \Psi}{\partial T} \quad (2.34)$$

e diz-se que s é a variável associada com T . As demais equações de estado são definidas através de

$$A_k = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial V_k}, \quad (2.35)$$

onde A_k são as variáveis associadas com as variáveis internas V_k .

2.3.2 Potencial Termodinâmico de Dissipação

Afim de determinar as leis complementares ou leis de evolução, para o processo dissipativo, postula-se a existência de um potencial ou pseudo-potencial com as seguintes características: $\varphi : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$, contínuo, convexo com relação às variáveis de fluxo, e nulo na origem, i.e.,

$$\varphi = \varphi \left(\left(\boldsymbol{\varepsilon}^p, \dot{V}_k, \frac{\vec{q}}{T} \right); (\boldsymbol{\varepsilon}^e, T, V_k) \right). \quad (2.36)$$

As leis de evolução são determinadas utilizando a propriedade de normalidade ou dissipação normal, i.e., elas são expressas pelas componentes do vetor $\vec{grad} \varphi$ com relação às variáveis de fluxo, que são

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p}, \quad A_k = -\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{V}_k} \quad e \quad \vec{grad} T = -\frac{\partial \varphi}{\partial \left(\frac{\vec{q}}{T}\right)}. \quad (2.37)$$

Através da utilização da transformada de Legendre-Fenchel pode-se definir um potencial dual φ^* , que é definido em função das variáveis duais $\boldsymbol{\sigma}$, A_k e $\vec{grad} T$. Como o potencial também é diferenciável a propriedade de dissipação normal continua válida, assim

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \dot{V}_k = -\frac{\partial \varphi^*}{\partial A_k} \quad e \quad \frac{\vec{q}}{T} = -\frac{\partial \varphi^*}{\partial \left(\vec{grad} T\right)}, \quad (2.38)$$

na qual a primeira equação conduz às leis de evolução da plasticidade e da viscoplasticidade, a segunda relação exprime a evolução das variáveis internas do problema e finalmente a terceira relação conduz a lei de Fourier pela termoestática. Os potenciais de dissipação podem ainda depender das variáveis de estado que fazem o papel de parâmetros.

Todo o problema de modelamento dos fenômenos físicos reside na determinação da expressão analítica dos potenciais termodinâmicos descritos acima e da identificação dos parâmetros materiais através de testes experimentais.

Capítulo 3

Aspectos Fenomenológicos e Apresentação das Variáveis do Problema

Neste capítulo serão apresentadas as variáveis de estado e as suas respectivas variáveis associadas, as quais serão utilizadas para modelar o problema de fadiga de baixo ciclo. Dentro do contexto termodinâmico, apresentado no capítulo 2, serão definidas as variáveis que representarão o fenômeno de endurecimento e também o fenômeno de degradação do material. Afim de explorar o lado físico do problema em questão, a cada variável introduzida será feita uma apresentação sobre os aspectos fenomenológicos que ela representa.

O fenômeno de endurecimento será modelado através de duas variáveis de estado internas. Estas são o escalar r , deformação relacionada ao endurecimento isotrópico, e o tensor α , deformação relacionada com o endurecimento cinemático. As variáveis associadas com r e α são respectivamente o escalar R , endurecimento isotrópico, e o tensor χ^D ⁴, endurecimento cinemático.

Já o fenômeno de degradação do material será abordado através da introdução da variável de estado interna de dano D . Esta será definida como um escalar e terá como variável associada o escalar Y , que é entendida como uma taxa de densidade de energia de

⁴ $()^D$ indica que está no espaço deviatórico.

Tabela 3.1: Variáveis Termodinâmicas (J. Lemaitre 1976)

Variáveis de Estado		Variáveis
Observáveis	Internas V_k	Associadas A_k
ϵ		σ
T		s
	ϵ^e	σ
	ϵ^p	$-\sigma$
	r	R
	α	χ^D
	D	Y

deformação liberada. Um resumo das variáveis levadas em consideração neste trabalho pode ser vista na tabela 3.1.

Porém, antes de tudo, uma discussão sobre o fenômeno da fadiga será apresentada visando mostrar algumas de suas principais características.

3.1 Fadiga

Segundo Rosa (1994), fadiga é a redução gradual da capacidade de carga do componente, pela ruptura lenta do material, consequência do aumento quase infinitesimal das fissuras que formam-se no seu interior. As cargas variáveis, sejam cíclicas ou não, fazem com que, em ao menos alguns pontos, o material sofra deformações plásticas também variáveis com o tempo. Estas deformações levam o material a uma deterioração progressiva, dando origem a uma trinca. Esta cresce até atingir um tamanho suficiente para a ruptura final, geralmente brusca, com características macroscópicas de uma fratura frágil.

O processo de fadiga ocorre de maneira muito localizada, onde certas áreas podem conter altas tensões ou deformações devido a transferência de carregamentos externos, abruptas mudanças de geometria, diferentes temperaturas, tensões residuais e imperfeições materiais, tais como inclusões.

3.1.1 Comportamento do material sob carregamento cíclico

Bauschinger (1833-1893), foi o primeiro a observar a diferença entre o comportamento de um ensaio de tração monotônico e o comportamento obtido de um ensaio sob carregamento cíclico. Em seus ensaios, ele notou que a tensão de escoamento em tração ou compressão era reduzida após a aplicação de um carregamento de sinal contrário, caracterizando um amolecimento.

Muitos estudos sobre a resposta de materiais ao carregamento cíclico ocorreram desde então. A terminologia adotada para estas mudanças na relação constitutiva de tensão-deformação foi de endurecimento cíclico ou amolecimento cíclico. Este comportamento é caracterizado na figura 3.1 que mostra o comportamento do cobre submetido a um ensaio de deformação controlada.

As variáveis envolvidas no comportamento cíclico do material, definidas na figura 3.1a, são a variação da deformação total $\Delta\varepsilon$, dada por $\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^p + \Delta\varepsilon^e$, e a variação da tensão dada por $\Delta\sigma$. Porém, como $\Delta\varepsilon^e = \Delta\sigma/E$, pode-se escrever

$$\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^p + \Delta\varepsilon^e = \Delta\varepsilon^p + \Delta\sigma/E. \quad (3.1)$$

A área dentro do laço de histerese é a energia dissipada por unidade de volume por ciclo. Cada uma das três curvas mostradas nesta figura apresenta características bastante diferentes, quanto ao comportamento cíclico. A curva apresentada em 3.1a mostra um progressivo endurecimento por ciclo, já a curva 3.1c apresenta um amolecimento cíclico,

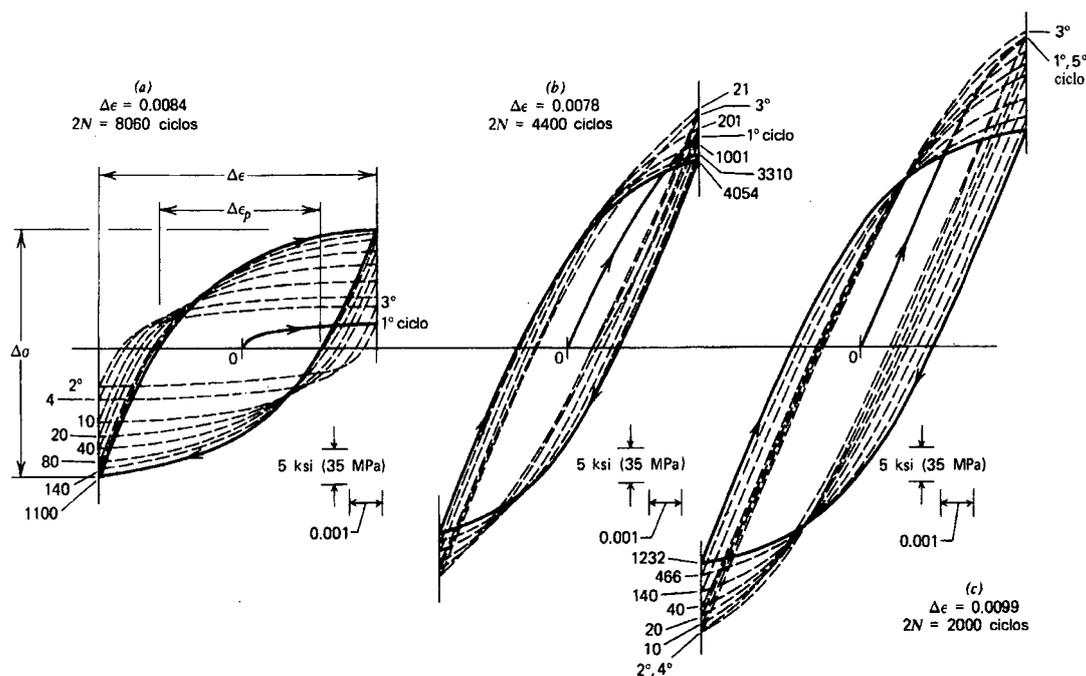


Figura 3.1: Laço de histerese com deformação controlada do cobre, Fuchs & Stephens

também progressivo. Por fim, a curva 3.1b apresenta um endurecimento cíclico seguido de um amolecimento. Embora a tensão mude bastante nos primeiros ciclos, depois de cerca de 10 a 30% do ensaio, o laço de histerese tende a estabilizar, acrescentando uma deformação plástica constante por ciclo até que o processo de ruptura tenha início.

A família de laços de histerese estabilizados, para diferentes amplitudes de deformação, é utilizada para obter a curva tensão-deformação cíclica para um dado material. Um exemplo desta curva é apresentado na figura 3.2 na qual o extremo de cada ciclo de histerese estabilizado é ligado formando a curva tensão-deformação cíclica. A figura 3.2 mostra também a curva do ensaio monotônico do mesmo material para efeito de comparação.

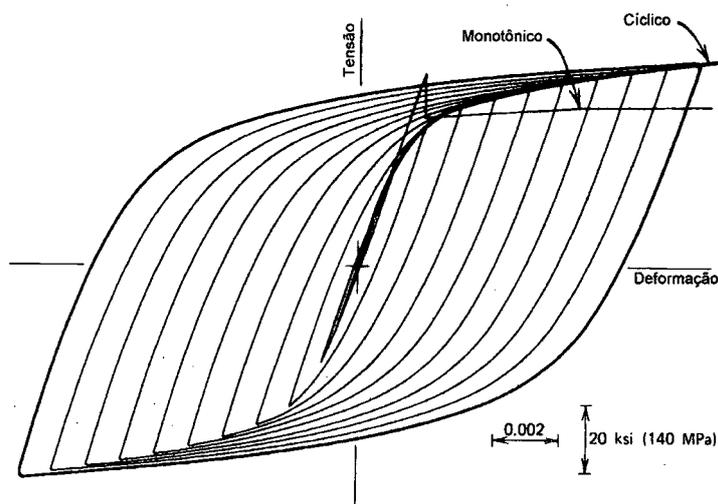


Figura 3.2: Curva tensão x deformação cíclica, Fuchs & Stephens

3.1.2 Mecanismos da Fadiga

Metais são materiais cristalinos. Isto significa que os átomos estão arranjados de uma maneira ordenada. A maioria dos aços estruturais são policristalinos e deste modo consistem de um grande número de cristais ordenados individualmente ou grãos. Cada grão possui propriedades mecânicas particulares, direções de ordenamento. Alguns grãos são orientados de tal forma que os planos de deslizamento estão na mesma direção da tensão de cisalhamento máxima aplicada. Assim, quando submetido a um carregamento o deslizamento irá acontecer dentro daquele grão que tenha a orientação mais favorável, i.e., mais próxima da direção da tensão cisalhante máxima. Este deslizamento ocorre devido ao movimento das discordâncias ao longo dos planos cristalográficos.

O deslizamento ocorre tanto no carregamento monotônico quanto no carregamento cíclico. A figura 3.3a, mostra um deslizamento grosseiro, o qual caracteriza carregamento monotônico ou grandes amplitudes de carregamento cíclico. Já a figura 3.3b, representa o

comportamento de carregamento cíclico com baixas amplitudes de carregamento.

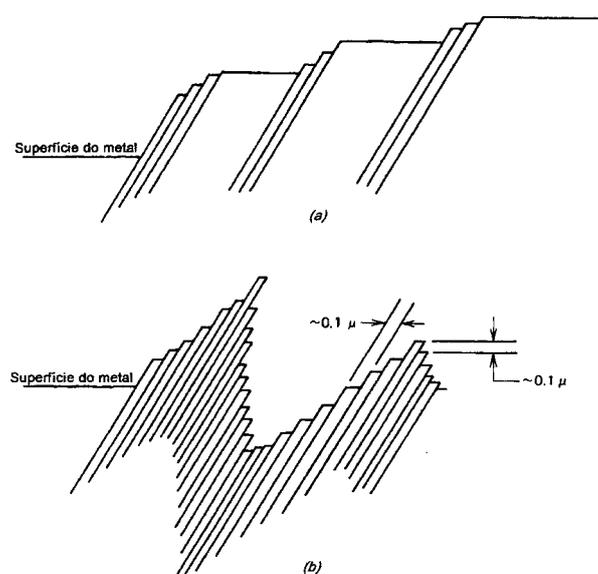


Figura 3.3: Intrusões e Extrusões, Fuchs & Stephens

Pode-se caracterizar as intrusões como o fundo da cavidade da figura 3.3b e como extrusões o pico de elevação da mesma figura. Intrusões formam excelentes pontos de concentração de tensão, os quais podem ser a localização inicial de uma trinca. Inicialmente, o deslizamento é controlado pela tensão de cisalhamento. Assim, a trinca de fadiga tende a crescer em bandas de deslizamento locais na direção da máxima tensão de cisalhamento. Este crescimento é relativamente pequeno, usualmente da ordem de alguns grãos. Com a continuidade do carregamento cíclico, as trincas de fadiga tendem a coalescer e crescer de acordo com o plano de máxima tensão de tração. Estes dois estágios de crescimento da trinca de fadiga são chamados de estágio I e II, respectivamente. A figura 3.4 mostra este comportamento.

O mecanismo de fadiga em metais de alta resistência ou para metais frágeis pode não conter formação de bandas de deslizamento. Neste caso microtrincas são geralmente

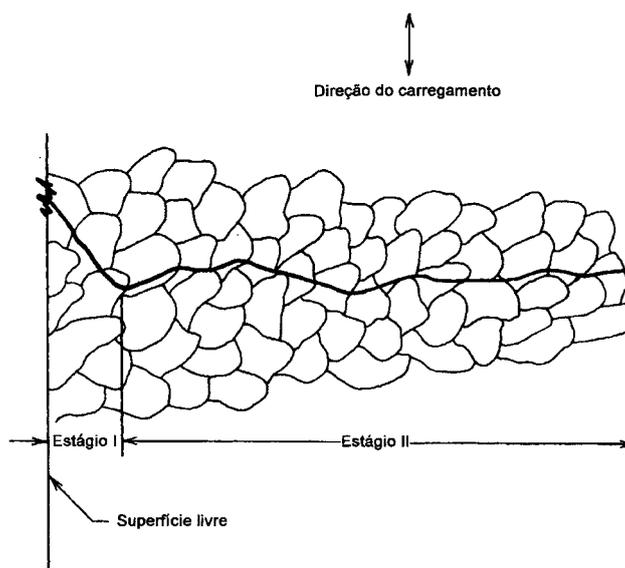


Figura 3.4: Estágios de propagação das trincas de fadiga, Fuchs & Stephens

formadas diretamente nas discontinuidades, tais como inclusões ou vazios e então crescem ao longo dos planos de máxima tensão de tração, Fuchs & Stephens (1980).

A figura 3.5 apresenta de forma esquemática o mecanismo de surgimento de trincas de fadiga de acordo com o nível de sollicitação.

3.1.3 Tipos de Fadiga

Alguns autores, como Lemaitre, costumam diferenciar a ocorrência do fenômeno da fadiga em duas partes, conforme o nível de sollicitação envolvida.

Fadiga de Alto Ciclo

Na fadiga de alto ciclo a sollicitação produz valores baixos de tensão e, deste modo, a única deformação irreversível envolvida é a microplasticidade, a qual é não mensurável e, portanto, difícil de ser determinada pois geralmente ocorre na interface de inclusões e em torno da região de vazios. Conseqüentemente, os mecanismos de evolução do dano devem ser obtidos em termos de tensões. O nível de tensões, na melhor das hipóteses, é o da

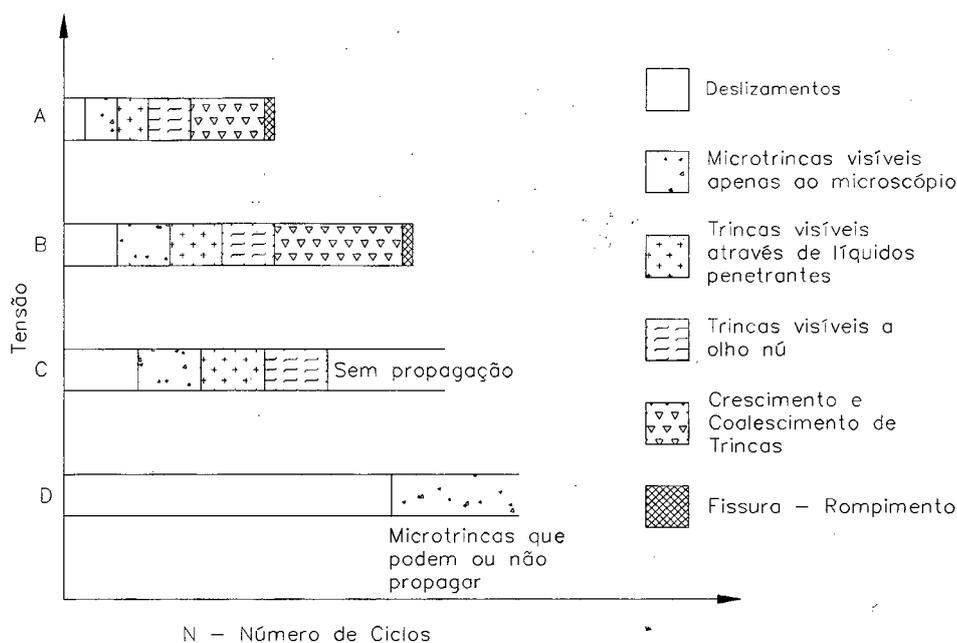


Figura 3.5: Mecanismo de evolução de trincas de fadiga, Fuchs & Stephens

magnitude da tensão de escoamento do material. Este tipo de fadiga corresponde a um número de ciclos até a falha de $N > N_{tr}$ ciclos, onde N_{tr} é o número de ciclos de transição. Em algumas literaturas ele é definido como $N_{tr} = 10^4$. Neste tipo de fadiga o dano acontece de forma mais localizada.

Fadiga de Baixo Ciclo

Considera-se fadiga de baixo ciclo quando a deformação plástica envolvida é grande o suficiente para ser medida. Isto corresponde a um nível de tensões pouco maiores que a tensão de escoamento e de um número de ciclos para a falha na ordem de $N < N_{tr}$ ciclos.

3.2 Plasticidade

Com o objetivo de descrever o comportamento de um material elastoplástico é necessário que a teoria constitutiva apresente, além das relações elásticas, i.e., Lei de Hooke genera-

lizada, uma definição de carregamento plástico e de descarregamento elástico, bem como, uma regra de evolução que descreva o desenvolvimento da deformação plástica. O critério de carregamento será dado pela definição de uma função escoamento ou superfície de escoamento. Através do potencial de dissipação e da hipótese de dissipação normal, pode-se encontrar as leis de evolução não apenas para a deformação plástica, mas também para as demais variáveis. Este potencial de dissipação já foi apresentado no capítulo 2, Eq.(2.36), e voltará a ser abordado após a definição de todas as variáveis do problema.

3.2.1 Função de Escoamento ou Superfície de Escoamento

Dentro do enfoque da teoria da plasticidade clássica, o estado de carregamento de um ponto do material é determinado por uma função de escoamento f . Para um material que apresenta endurecimento esta função é expressa como uma função das componentes do tensor tensão e das variáveis associadas R e χ , i.e.,

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \chi, R) = 0. \quad (3.2)$$

Segundo Lemaitre & Chaboche (1990), para materiais que apresentam amolecimento, é mais interessante utilizar uma formulação em termos da deformação $\boldsymbol{\varepsilon}$ e das variáveis de estado r e $\boldsymbol{\alpha}$, assim,

$$\bar{f}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}, r) = 0. \quad (3.3)$$

Considerando a função de escoamento f , o estado de tensão $\boldsymbol{\sigma}$ de um ponto define a posição dentro do espaço das tensões, e R e χ descrevem o tamanho, a forma e a posição da superfície de escoamento relativa à superfície de escoamento inicial, dentro do mesmo espaço. Esta função divide o espaço das tensões em dois domínios; um domínio elástico $f < 0$, onde

⁵ Em viscoplasticidade \bar{f} é também função da temperatura T .

⁶ Em viscoplasticidade \bar{f} é também função da temperatura T .

é válida a teoria da elasticidade; e um domínio $f = 0$, i.e. sobre a superfície de escoamento onde o material tem resposta elastoplástica. De acordo com este critério não haverá fluxo plástico enquanto $f < 0$ seja para carregamento, $f > 0$ ou descarregamento, $f < 0$. Porém, quando $f = 0$ e $\dot{f} = 0$ haverá o fluxo plástico.

3.2.2 Regras de Endurecimento

Endurecimento Isotrópico

É responsável pela expansão ou redução uniforme da superfície de escoamento inicial, figura 3.6, sem translação e distorção. A função escoamento pode ser definida, neste caso, pela simples relação:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^p) = G(\boldsymbol{\sigma}) - R(\boldsymbol{\varepsilon}^p) = 0 \quad (3.4)$$

na qual $G(\boldsymbol{\sigma})$ é uma função que define a forma da superfície de escoamento e $R(\boldsymbol{\varepsilon}^p)$ o seu tamanho.

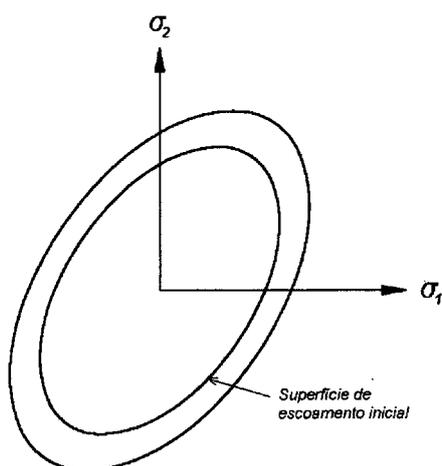


Figura 3.6: Endurecimento Isotrópico

A expressão utilizada neste trabalho para o endurecimento isotrópico possui as características de apresentar uma não linearidade com relação à deformação plástica e de apresentar também um patamar de estabilização definido pelo parâmetro material R_∞ . A expressão

analítica, para o caso unidimensional de tração, é dada por:

$$R = R_{\infty} \left(1 - e^{-b\varepsilon^p} \right), \quad (3.5)$$

na qual b também é um parâmetro do material.

Endurecimento Cinemático

Já o endurecimento cinemático é responsável pela translação da superfície de escoamento, mantendo a sua forma e tamanho, figura 3.7, e sua função é a de introduzir o efeito Bauschinger na formulação. Assim a função escoamento pode ser definida da seguinte forma

$$f(\sigma, \chi, \varepsilon^p) = G(\sigma - \chi) - k = 0 \quad (3.6)$$

na qual χ define o endurecimento cinemático e k é uma constante.

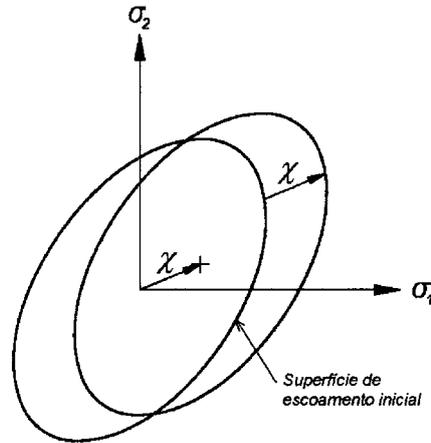


Figura 3.7: Endurecimento Cinemático

Assim como o endurecimento isotrópico, o endurecimento cinemático apresenta as propriedades de saturação e de não linearidade com a deformação plástica. A expressão analítica para o endurecimento cinemático, para o caso unidimensional de tração, é dada por

$$\chi = \chi_{\infty} \left(1 - e^{-\gamma\varepsilon^p} \right). \quad (3.7)$$

na qual γ e χ_{∞} também são parâmetros do material.

3.2.3 Critério de Escoamento

A função escoamento final adotada neste trabalho é obtida pela combinação dos dois tipos de endurecimento. O critério de von Mises ⁷, baseado no invariante J_2 ⁸, é então transformado em uma expressão mais complexa levando em consideração o endurecimento cinemático, i.e.,

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma}^D - \boldsymbol{\chi}^D)_{eq} &= \sqrt{3 J_2 (\boldsymbol{\sigma}^D - \boldsymbol{\chi}^D)} \\ &= \sqrt{\left[\frac{3}{2} (\boldsymbol{\sigma}^D - \boldsymbol{\chi}^D) \cdot (\boldsymbol{\sigma}^D - \boldsymbol{\chi}^D) \right]} \\ &= \sqrt{\left[\frac{3}{2} (\sigma_{ij}^D - \chi_{ij}^D) (\sigma_{ij}^D - \chi_{ij}^D) \right]}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Assim a função de escoamento é definida como:

$$f = (\boldsymbol{\sigma}^D - \boldsymbol{\chi}^D)_{eq} - R - \sigma_y = 0. \quad (3.9)$$

na qual σ_y é a tensão de escoamento inicial.

3.3 Mecânica do Dano Contínuo

De modo geral, a evolução do dano D se faz através de um processo irreversível que representa a deterioração do material devido a ação de algum tipo de carregamento. Lemaitre dividiu a ocorrência do dano em três diferentes níveis, microescala, mesoescala e macroescala. No nível da microescala o dano é o acúmulo de microtensões na vizinhança de defeitos ou interfaces e a quebra de laços atômicos. No nível da mesoescala, ou seja, no Elemento de Volume Representativo (EVR) o dano é o crescimento e a coalescência de microfissuras ou microvazios. No nível da macroescala o dano é o crescimento da fissura já no tamanho visível.

O primeiro e segundo nível podem ser estudados através da introdução de uma variável de

⁷ $f(J_2) = J_2 - k^2 = 0$, na qual $k = \sigma_y / \sqrt{3}$
⁸ $J_2 = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^D \sigma_{ij}^D$, na qual $\sigma_{ij}^D = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}$

Tabela 3.2: Dimensões do elemento de volume representativo

metais e cerâmicas	$(0.1 \text{ mm})^3$
polímeros e muitos materiais compostos	$(1 \text{ mm})^3$
madeira	$(10 \text{ mm})^3$
concreto	$(100 \text{ mm})^3$

estado interna contínua de dano. O dano é de natureza tensorial, mas se for considerada a hipótese de isotropia ele se reduz a um escalar. O terceiro nível é usualmente estudado pela mecânica da fratura.

A mecânica do contínuo lida com quantidades definidas em um ponto matemático. Do ponto de vista físico, estas quantidades representam uma média em um certo volume. Desta forma, o EVR deve ser pequeno o suficiente para evitar a suavização de altos gradientes e grande o suficiente para representar uma média dos microprocessos. Para ensaios experimentais e para a análise numérica Lemaitre (1992) sugere as magnitudes apresentadas na tabela 3.2 para o EVR.

Embora o dano na microescala seja governado por um mecanismo geral de rompimento de laços atômicos, na mesoescala ele pode se manifestar de várias maneiras, dependendo da natureza do material, do tipo de carregamento e temperatura. Entre as mais estudadas manifestações do dano estão o dano frágil, o dano dúctil, o dano por fluência, o dano por fadiga de alto ciclo e o dano por fadiga de baixo ciclo, que será abordado nesta dissertação.

O estágio final do processo de dano é a condição de início da trinca pela coalescência dos microdefeitos, i.e., a existência de uma descontinuidade na mesoescala (EVR). Esta condição ocorre quando o dano atinge, em um determinado ponto, um dado valor crítico o qual, de um modo geral, depende do material e do processo de carregamento do corpo. A

partir deste ponto, a análise de crescimento da trinca deve ser feita dentro do contexto da mecânica da fratura. Para isso, introduz-se uma trinca, no ponto em que o dano atingiu o seu valor crítico, de dimensão da ordem do lado do volume representativo do material. A trinca é orientada de forma a manter a concordância da evolução do dano do material, numa vizinhança do ponto em que o dano é crítico.

3.3.1 Representação Mecânica do Dano

O dano pode ser interpretado, na microescala, como o surgimento de microplanos de descontinuidades originados pelo rompimento de laços atômicos e pelo crescimento plástico das microcavidades. Na mesoescala, o número de laços quebrados ou microcavidades pode ser aproximado, em um plano, pela área das interseções de todas as microcavidades naquele plano. Para isso, considera-se em um corpo com dano um elemento de volume representativo em um ponto M . Neste ponto, um plano é definido por uma normal \vec{n} com uma abcissa x ao longo da direção de \vec{n} , como é mostrado na figura 3.8. Nesta figura δS é a área total do plano definido no EVR e δS_D a área efetiva das interseções de todas as microtrincas ou microcavidades neste plano.

O valor do dano D , no ponto M e na direção de \vec{n} pode ser escrito como

$$D(M, \vec{n}, x) = \frac{\delta S_D}{\delta S}. \quad (3.10)$$

A partir desta definição pode-se observar que o valor da variável D , em uma certa direção \vec{n} do EVR, está limitada por 0 e 1. Logo, se $D = 0$ o EVR não apresenta dano e se $D = 1$ o EVR encontra-se separado em duas partes. Para o caso de dano isotrópico a equação 3.10 torna-se

$$D(M) = \frac{S_D}{S}. \quad (3.11)$$

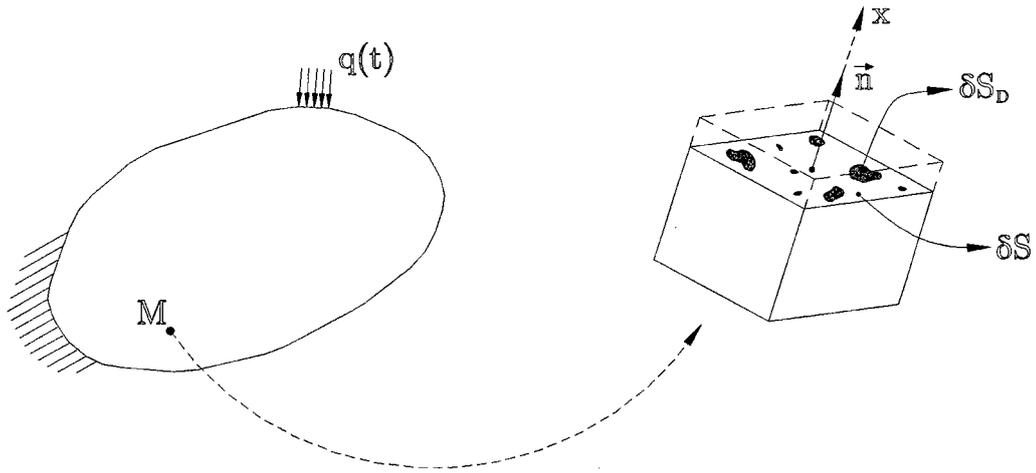


Figura 3.8: Elemento de Volume Representativo de Dano

Conceito de Tensão Efetiva (Y. N. Robotnov, 1969)

Considere um elemento com área de seção transversal S com dano sujeito a um carregamento uniaxial F , como mostrado na figura 3.9.

A tensão uniaxial pode ser escrita como

$$\sigma = \frac{F}{S}. \quad (3.12)$$

Se todos os defeitos estão abertos, de tal maneira que não existem microforças atuando sobre a superfície das microtrincas ou microcavidades representadas por S_D , é conveniente introduzir uma tensão efetiva $\tilde{\sigma}$ relacionada com a superfície que efetivamente resiste ao carregamento, i.e.,

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{S - S_D}. \quad (3.13)$$

Para o caso de dano isotrópico, o comportamento mecânico das microfissuras ou microvazios é independente de sua orientação e depende apenas da variável escalar D , assim,

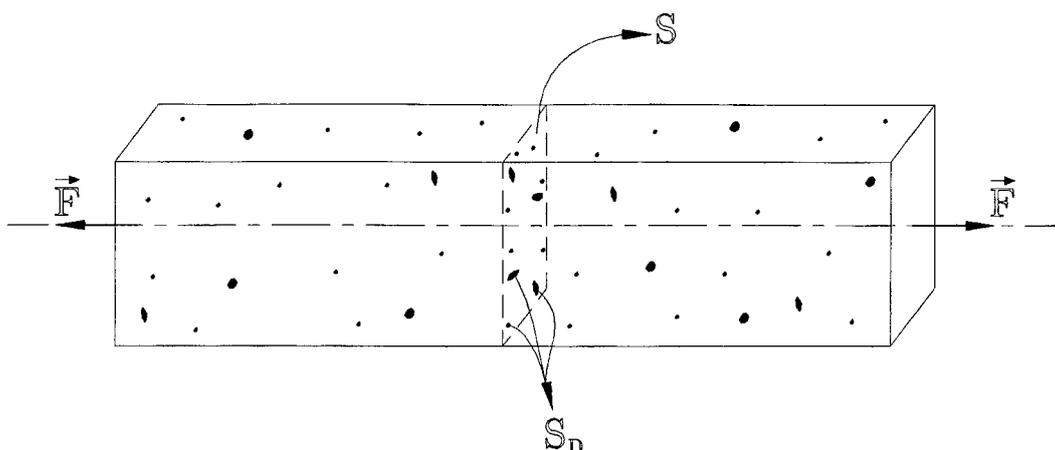


Figura 3.9: Tensão efetiva em um elemento unidimensional

através da Eq.(3.11) pode-se escrever

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - D}. \quad (3.14)$$

Efeito do Fechamento das Microtrincas

É importante perceber que a definição apresentada acima é válida apenas para o caso no qual o material está sujeito a tensão de tração. No caso em que o material está sujeito a compressão, o valor do dano não muda, mas alguns defeitos podem fechar e a área que resistirá ao carregamento será maior que $S - S_D$. Assim $\sigma \leq \tilde{\sigma}^- \leq \tilde{\sigma}^+$ ⁹ e em particular, se todos os defeitos fecham $\tilde{\sigma}^- = \sigma$.

Uma forma de introduzir este efeito dentro da formulação do problema é proposta por Lemaitre (1992) e consiste em introduzir um parâmetro de correção $h \in [0, 1]$, chamado de efeito de fechamento das microtrincas, o qual diminui a influência do dano na compressão. Para o caso unidimensional a introdução deste efeito é dada pela seguinte condição unilateral:

⁹ $\tilde{\sigma}^-$ significa estado de compressão e $\tilde{\sigma}^+$ significa estado de tração

(i) – Tração ($\tilde{\sigma}^+$): neste caso temos que $S^+ = S - S_D$, assim

$$\tilde{\sigma}^+ = \frac{\sigma}{1 - D}; \quad (3.15)$$

(ii) – Compressão ($\tilde{\sigma}^-$): temos que $S - S_D \leq S^- \leq S$, e com a introdução do parâmetro de fechamento das microtrincas

$$\tilde{\sigma}^- = \frac{\sigma}{1 - hD}. \quad (3.16)$$

O parâmetro h depende, a priori, do tipo de carregamento e do material, porém após experimentos verificou-se que h poderia ser assumido, para uma classe de aços, como constante com valor $h \simeq 0,2$, Lemaitre (1992).

Princípio da Deformação Equivalente (J. Lemaitre, 1971)

Para evitar uma análise micromecânica para cada tipo de microdefeito e para cada tipo de mecanismo de dano, postula-se o seguinte princípio válido na mesoescala:

”Qualquer equação constitutiva para um material com dano pode ser determinada da mesma maneira como para um material virgem, exceto que a tensão usual deve ser representada pela tensão efetiva.”

Este princípio impõe que as relações constitutivas para a deformação de um microelemento não são modificadas na vizinhança do microelemento que contém a microtrinca.

A aplicação deste princípio pode ser ilustrado como

Material sem dano Material com dano

$$\varepsilon = \mathfrak{F}(\boldsymbol{\sigma}, \dots) \quad \varepsilon = \mathfrak{F}\left(\frac{\boldsymbol{\sigma}}{1-D}, \dots\right)$$

Desta forma, $\mathfrak{F}(\bullet)$ representa a mesma relação funcional para um material com ou sem dano.

3.3.2 Critério de Ruptura

Embora Kachanov (1958), tenha utilizado como critério de início da fissura $D = 1$, o que implica na completa ausência de área resistente, hoje se sabe que o seu início acontece com um valor de D inferior a 1. Porém, ainda existe alguma discussão sobre qual é o melhor critério a ser utilizado (Benallal et al 1992). Neste trabalho, utiliza-se a aproximação proposta por Lemaitre e Chaboche (1990) a qual considera o dano crítico $D_c < 1$ constante e dependente de material para material. Uma vez alcançado, temos origem a um processo instável conduzindo a uma fissura no EVR.

3.3.3 Estágio de Início do Dano

Dentro do mecanismo micromecânico de ruptura, para a existência de microtrincas, é necessário que um certo valor crítico de deformação plástica seja alcançado para dar início a um processo de nucleação das microtrincas. Em um ensaio monotônico de tração isto corresponde à seguinte condição:

$$\varepsilon^p < \varepsilon^{pD} \longrightarrow D = 0, \quad (3.17)$$

na qual ε^{pD} é o valor crítico de deformação plástica para início de dano e ε^p é a deformação plástica uniaxial. Para carregamentos genéricos, define-se uma variável chamada deformação plástica acumulada p , que tem sua evolução definida por

$$\dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\varepsilon}^p \cdot \dot{\varepsilon}^p. \quad (3.18)$$

De forma análoga ao caso monotônico, existe um valor crítico de deformação plástica acumulada, p_D , que deve ser alcançado para o início do dano ¹⁰, i.e.,

$$p < p_D \longrightarrow D = 0. \quad (3.19)$$

¹⁰ p_D pode ser entendido também como a quantidade de energia armazenada pelo material, resultado da concentração de microtensões desenvolvidas na vizinhança das discordâncias e nas inclusões de outros materiais.

3.4 Equações de Estado

Uma vez definidas todas as variáveis internas é possível escrever o potencial de Helmholtz, Eq.(2.32), como

$$\Psi = \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, D, r, \boldsymbol{\alpha}).^{11} \quad (3.20)$$

Através da Eq.(2.35) pode-se escrever as demais equações de estado como sendo

$$R = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad \boldsymbol{\chi}^D = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\alpha}}, \quad Y = -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial D} \quad (3.21)$$

que juntamente com as equações Eq.(2.33) e Eq.(2.34) definem as relações entre as variáveis de estado e as variáveis associadas.

A expressão analítica para o potencial de Helmholtz proposta, sem o efeito do fechamento de microtrincas, neste trabalho é a seguinte

$$\rho \Psi = \frac{1}{2} \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}^e \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^e (1 - D) + R_\infty \left(r + \frac{1}{b} e^{-br} \right) + \frac{1}{3} \chi_\infty \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha}, \quad (3.22)$$

ou, em notação indicial

$$\rho \Psi = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij}^e \varepsilon_{kl}^e (1 - D) + R_\infty \left(r + \frac{1}{b} e^{-br} \right) + \frac{1}{3} \gamma \chi_\infty \alpha_{ij} \alpha_{ij}, \quad (3.23)$$

no qual C_{ijkl} é o tensor de quarta ordem da elasticidade.

Com o uso de Eq.(2.33) e Eq.(3.21) pode-se encontrar as expressões analíticas para as equações de estado, i.e.,

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}^e (1 - D) \quad (3.24)$$

para a elasticidade acoplada com dano,

$$R = R_\infty (1 - e^{-br}) \quad (3.25)$$

¹¹Considera-se o problema isotérmico, i.e., $\vec{\text{grad}} T = 0$, assim T não faz mais parte das variáveis de estado.

para o endurecimento isotrópico,

$$\chi^D = \frac{2}{3}\chi_\infty\gamma\alpha \quad (3.26)$$

para o endurecimento cinemático e

$$Y = \frac{1}{2}\mathbf{C}\varepsilon^e \cdot \varepsilon^e \quad (3.27)$$

para a taxa de densidade de energia de deformação liberada.

3.4.1 Efeito do Fechamento das Microtrincas - Caso Geral

Afim de introduzir o efeito do fechamento das microtrincas nas equações de estado tridimensionais, é necessário que postulamos um outro potencial, dual ao potencial de Helmholtz. Este potencial dual Ψ^* , conhecido também como potencial de Gibbs, é introduzido por uma questão de praticidade para a introdução do efeito do fechamento das microtrincas. Ele é determinado através da transformada de Legendre-Fenchel, i.e.,

$$\Psi^*(\boldsymbol{\sigma}, r, \boldsymbol{\alpha}, D) = \underset{\varepsilon^e}{Sup} [\boldsymbol{\sigma} \cdot \varepsilon^e - \Psi(\varepsilon^e, D, r, \boldsymbol{\alpha})], \quad (3.28)$$

assim o potencial dual é

$$\rho\Psi^*(\boldsymbol{\sigma}, r, \boldsymbol{\alpha}, D) = \frac{1}{2E(1-D)} [(1+\nu)\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \nu(tr \boldsymbol{\sigma})^2] - R_\infty \left(r + \frac{1}{b}e^{-br} \right) - \frac{\gamma\chi_\infty}{3}\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha}.^{12} \quad (3.29)$$

Contudo, para introduzir o efeito do fechamento das microtrincas, h , dentro da expressão do potencial dual é necessário fazer as seguintes considerações:

i – Decomposição da representação diagonal do tensor tensão, i.e. em termos de tensões principais, em uma parte negativa e em uma parte positiva. Denominando de $\boldsymbol{\sigma}_d$ o tensor

¹² $tr \mathbf{A}$ é o traço do tensor \mathbf{A} , i.e., $tr \mathbf{A} = A_{11} + A_{22} + A_{33}$.

diagonal pode-se escrever

$$\boldsymbol{\sigma}_d = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

e utilizando o *operador* de Mac Auley, definido como

$$\langle x \rangle = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}, \quad (3.31)$$

pode-se chegar a

$$\boldsymbol{\sigma}_d = \begin{bmatrix} \langle \sigma_1 \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle \sigma_2 \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle \sigma_3 \rangle \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \langle -\sigma_1 \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle -\sigma_2 \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle -\sigma_3 \rangle \end{bmatrix}, \quad (3.32)$$

ou, em forma compacta

$$\boldsymbol{\sigma}_d = \langle \boldsymbol{\sigma}_d \rangle - \langle -\boldsymbol{\sigma}_d \rangle. \quad (3.33)$$

ii– Partição do potencial de entalpia de Gibbs em duas partes, uma relacionada com o termo $\langle \boldsymbol{\sigma}_d \rangle$, i.e., associada com a tração e a outra parte relacionada com $\langle -\boldsymbol{\sigma}_d \rangle$, ou seja, associada com as tensões de compressão, onde atuará o parâmetro h . Assim, o potencial de entalpia de Gibbs é escrito do seguinte modo

$$\begin{aligned} \rho\Psi^*(\boldsymbol{\sigma}_d, r, \boldsymbol{\alpha}, D) = & \frac{1}{2E(1-D)} \left[(1+\nu) \langle \boldsymbol{\sigma}_d \rangle \cdot \langle \boldsymbol{\sigma}_d \rangle - \nu \langle \text{tr } \boldsymbol{\sigma}_d \rangle^2 \right] + \\ & + \frac{1}{2E(1-hD)} \left[(1+\nu) \langle -\boldsymbol{\sigma}_d \rangle \cdot \langle -\boldsymbol{\sigma}_d \rangle - \nu \langle -\text{tr } \boldsymbol{\sigma}_d \rangle^2 \right] - \\ & - R_\infty \left[r + \frac{1}{b} e^{-br} \right] - \frac{\gamma\chi_\infty}{3} \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Da mesma forma que para o potencial de Ψ as equações de estado são determinadas

através da diferenciação de Ψ^* , produzindo ¹³

$$\varepsilon_d^e = \rho \frac{\partial \Psi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}_d} = \frac{1}{E(1-D)} [(1+\nu) \langle \boldsymbol{\sigma}_d \rangle - \nu \langle \text{tr } \boldsymbol{\sigma}_d \rangle \mathbf{I}] - \frac{1}{E(1-hD)} [(1+\nu) \langle -\boldsymbol{\sigma}_d \rangle - \nu \langle -\text{tr } \boldsymbol{\sigma}_d \rangle \mathbf{I}], \quad (3.35)$$

para a deformação elástica ¹⁴,

$$R = -\rho \frac{\partial \Psi^*}{\partial r} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad (3.36)$$

para o endurecimento isotrópico,

$$\chi^D = -\rho \frac{\partial \Psi^*}{\partial \alpha} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}, \quad (3.37)$$

para o endurecimento isotrópico e

$$Y = \frac{1+\nu}{2E} \left[\frac{\langle \boldsymbol{\sigma}_d \rangle \cdot \langle \boldsymbol{\sigma}_d \rangle}{(1-D)^2} + h \frac{\langle -\boldsymbol{\sigma}_d \rangle \cdot \langle -\boldsymbol{\sigma}_d \rangle}{(1-hD)^2} \right] - \frac{\nu}{2E} \left[\frac{\langle \text{tr } \boldsymbol{\sigma}_d \rangle^2}{(1-D)^2} + h \frac{\langle -\text{tr } \boldsymbol{\sigma}_d \rangle^2}{(1-hD)^2} \right] \quad (3.38)$$

para a taxa de densidade de energia de deformação liberada.

A expressão para a tensão efetiva para o caso geral de tensões é dada por

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_d = & \frac{1}{1-D} \left\{ \langle \boldsymbol{\sigma}_d \rangle + \frac{\nu}{1-2\nu} [\text{tr } \langle \boldsymbol{\sigma}_d \rangle - \langle \text{tr } \boldsymbol{\sigma}_d \rangle] \mathbf{I} \right\} - \\ & - \frac{1}{1-hD} \left\{ \langle -\boldsymbol{\sigma}_d \rangle + \frac{\nu}{1-2\nu} [\text{tr } \langle -\boldsymbol{\sigma}_d \rangle - \langle -\text{tr } \boldsymbol{\sigma}_d \rangle] \mathbf{I} \right\}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

3.5 Equações de Evolução - Potencial de Dissipação

Conforme visto no ítem 2.3.2, para de descrever o processo dissipativo é necessário introduzir as leis de evolução complementares. Estas leis de evolução, são obtidas através da introdução de um pseudo potencial de dissipação e aplicando sobre este potencial a hipótese de dissipação normal.

¹³Na qual \mathbf{I} é a matrix identidade.

¹⁴Se o potencial Ψ^* não for diferenciável então $\varepsilon^e \in \rho \partial \Psi^*$ (subgradiente de Ψ^*)

Este pseudo potencial de dissipação é definido de forma que

$$F(\boldsymbol{\sigma}, R, \boldsymbol{\chi}^D, Y; \boldsymbol{\varepsilon}_d^e, r, \boldsymbol{\alpha}, D) = F_P(\boldsymbol{\sigma}, R, \boldsymbol{\chi}^D; \boldsymbol{\varepsilon}_d^e, r, \boldsymbol{\alpha}, D) + F_D(Y; r, D) \quad (3.40)$$

na qual F_P é a parte de onde irá se derivar as equações de evolução para o problema de elastoplasticidade cíclica e F_D é a parte responsável pela evolução da variável de dano.

As equações de evolução do problema são obtidas através da aplicação da hipótese de dissipação normal sobre o potencial F . Assim, temos que

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F_P}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \dot{r} = -\dot{\lambda} \frac{\partial F_P}{\partial R} \quad e \quad \dot{\boldsymbol{\alpha}} = -\dot{\lambda} \frac{\partial F_P}{\partial \boldsymbol{\chi}^D}, \quad (3.41)$$

são as equações de evolução do problema elastoplástico e

$$\dot{D} = \dot{\lambda} \frac{\partial F_D}{\partial Y} \quad (3.42)$$

é a equação de evolução da variável de dano. Nas últimas duas equações $\dot{\lambda}$ é um multiplicador escalar que é sempre positivo e será determinado mais adiante.

3.5.1 Equações Constitutivas da Elastoplasticidade Cíclica Acoplada com Dano

Aqui o critério de escoamento será definido da mesma forma do que apresentado na Eq.(3.9), porém a tensão será substituída pela tensão efetiva, logo

$$f = \left(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^D - \boldsymbol{\chi}^D \right)_{eq} - R - \sigma_y = 0. \quad (3.43)$$

Determinação de F_P

Assim como para o potencial Ψ , a determinação da expressão analítica para F_P deve estar baseada sobre experimentos e sobre a micromecânica. Com base nas Eq.(3.5), Eq.(3.7)

¹⁵Experimentos mostram que F_D não depende de $\boldsymbol{\chi}^D$, $\boldsymbol{\sigma}$ ou R .

e Eq.(3.43), pode-se então definir a expressão analítica para este potencial, i.e.,

$$F_P = \left(\tilde{\sigma}^D - \chi^D \right)_{eq} - R - \sigma_y + \frac{3}{4\chi_\infty} \chi^D \cdot \chi^D \quad (3.44)$$

na qual o último termo deste potencial é responsável pela não linearidade do endurecimento cinemático ¹⁶.

É possível agora determinar as equações de evolução para o problema elastoplástico.

Através do uso de Eq.(3.41), pode-se escrever que

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{3 \dot{\lambda}}{2 \left(\tilde{\sigma}^D - \chi^D \right)_{eq}} \left(\tilde{\sigma}^D - \chi^D \right) \cdot \frac{\partial \tilde{\sigma}^D}{\partial \sigma}, \quad (3.45)$$

ou em notação indicial

$$\varepsilon_{ij}^{p \dot{}} = \frac{3 \dot{\lambda}}{2 \left(\tilde{\sigma}^D - \chi^D \right)_{eq}} \left(\tilde{\sigma}_{kl}^D - \chi_{kl}^D \right) \frac{\partial \tilde{\sigma}_{kl}^D}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.46)$$

para a evolução da deformação plástica,

$$\dot{r} = \dot{\lambda} \quad (3.47)$$

para a evolução da deformação relacionada ao endurecimento isotrópico e

$$\dot{\alpha} = \frac{3}{2} \left[\frac{\dot{\lambda}}{\left(\tilde{\sigma}^D - \chi^D \right)_{eq}} \left(\tilde{\sigma}^D - \chi^D \right) - \frac{\dot{\lambda}}{\chi_\infty} \chi^D \right] \quad (3.48)$$

para a evolução da deformação relacionada com o endurecimento cinemático.

Todavia, para o cálculo incremental é mais conveniente escrever as equações de evolução Eq.(3.47) e Eq.(3.48) em função das variáveis associadas R e χ^D . Isto é feito através da substituição de Eq.(3.47) e de Eq.(3.48) dentro das derivadas de Eq.(3.25) e de Eq.(3.26) com relação ao tempo, produzindo

$$\dot{R} = b (R_\infty - R) \dot{\lambda} \quad (3.49)$$

¹⁶Repare que se $F_P = f$ conduz a chamada teoria não associativa em plasticidade (Chen (1988), Lubliner (1990))

para a evolução do endurecimento isotrópico e

$$\dot{\chi}^D = \gamma \chi_\infty \left[\frac{\dot{\lambda}}{(\tilde{\sigma}^D - \chi^D)_{eq}} (\tilde{\sigma}^D - \chi^D) - \frac{\dot{\lambda}}{\chi_\infty} \chi^D \right], \quad (3.50)$$

para a evolução do endurecimento cinemático.

Usando os resultados das Eq.(3.18) e Eq.(3.45), pode-se escrever que a taxa de deformação plástica acumulada como

$$\dot{p} = \eta \dot{\lambda} \quad (3.51)$$

na qual $\eta = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\partial F_P}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial F_P}{\partial \sigma}}$.

Determinação de F_D

Uma das principais características do dano é que ele sempre é relacionado com deformações irreversíveis. Esta característica é introduzida naturalmente dentro da formulação com ajuda da Eq.(3.51), que permite escrever a Eq.(3.42) como

$$\dot{D} = \frac{\dot{p}}{\eta} \frac{\partial F_D}{\partial Y}. \quad (3.52)$$

Como visto na seção 3.3.3, o dano só se manifestará após a nucleação das microtrincas, esta característica conduz a

$$\dot{D} = \begin{cases} \frac{\dot{p}}{\eta} \frac{\partial F_D}{\partial Y} & \text{se } p \geq p_D \\ 0 & \text{se } p < p_D \end{cases}, \quad (3.53)$$

que permite introduzir no potencial de dissipação, a função de Heaviside que é definida como

$$H(p - p_D) = \begin{cases} 1 & \text{se } p \geq p_D \\ 0 & \text{se } p < 0 \end{cases}. \quad (3.54)$$

Dentro do enfoque termodinâmico a principal variável para a evolução do dano foi escrita como Y , Eq.(3.38), na qual está implícita a influência do estado triaxial de tensões. A expressão analítica para o potencial F_D é obtida considerando que $\dot{D} \propto Y \dot{p}$ o que implica

em $F_D \propto Y^2$. Conseqüentemente, com a introdução de um fator de escala S , que também é uma propriedade material, pode-se finalmente chegar a ¹⁷

$$F_D(Y; r, D) = \frac{Y^2 \eta}{2S} H(r - p_D), \quad (3.55)$$

deste modo a Eq.(3.53) pode ser escrita como

$$\dot{D} = \frac{Y \eta}{S} H(p - p_D) \dot{\lambda}. \quad (3.56)$$

Determinação de $\dot{\lambda}$

Para fechar o problema de evolução, a última expressão a determinar é a expressão analítica para o multiplicador $\dot{\lambda}$. Esta pode ser determinada com base nas condições para carregamento plástico apresentadas na seção 3.2.1, que são $\dot{f} = 0$ e $f = 0$. Aplicando estas duas condições sobre Eq.(3.43) e após alguma manipulação matemática pode-se facilmente chegar a

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{3}{2} \frac{(\tilde{\sigma}^D - \chi^D)}{(\sigma^D - \chi^D)_{eq}} \cdot \frac{\partial \tilde{\sigma}^D}{\partial \sigma} \cdot \dot{\sigma}}{b(R_\infty - R) + \frac{3}{2} \gamma \chi_\infty \frac{(\tilde{\sigma}^D - \chi^D)}{(\sigma^D - \chi^D)_{eq}} \cdot \left[\frac{(\tilde{\sigma}^D - \chi^D)}{(\sigma^D - \chi^D)_{eq}} - \frac{\chi^D}{\chi_\infty} \right] - \frac{3}{2} \frac{Y \eta}{S} H(p - p_D) \frac{(\tilde{\sigma}^D - \chi^D)}{(\sigma^D - \chi^D)_{eq}} \cdot \frac{\partial \tilde{\sigma}^D}{\partial D}}. \quad (3.57)$$

¹⁷ $\dot{r} = \dot{p}$ e $\dot{p} = \eta \dot{\lambda}$

Capítulo 4

Discretização e Exemplos

Na primeira parte deste capítulo, ítem 4.1, será apresentado um algoritmo da classe *'return mapping'* para a integração das equações constitutivas elastoplásticas acopladas com dano. Este algoritmo, apresentado por Benallal et al (1988) é uma generalização do algoritmo proposto por Simo & Taylor (1986) e divide o problema em duas etapas. A primeira, consiste nas equações de equilíbrio globais do problema, as quais são apresentadas dentro do enfoque do método dos elementos finitos. Já a segunda parte trata da integração local das equações constitutivas para a determinação do valor das variáveis de evolução no instante de tempo t_{n+1} , para cada ponto de integração. Porém, para a solução das equações de equilíbrio globais torna-se necessária a identificação do operador tangente \mathbf{J} . A sua identificação é feita com base na solução das equações de equilíbrio locais, como mostrado no ítem 4.1.3.

Já na segunda parte, ítem 4.2, são apresentados e discutidos os exemplos escolhidos para mostrar a evolução das variáveis do problema.

4.1 Discretização

Um resumo das equações constitutivas que serão levadas em consideração nesta seção é dada pela tabela 4.1.

Tabela 4.1: Equações principais do problema

$$\boldsymbol{\epsilon}_d^e = \frac{1}{E(1-D)} [(1 + \nu) \langle \boldsymbol{\sigma}_d \rangle - \nu \langle \text{tr } \boldsymbol{\sigma}_d \rangle \mathbf{I}] - \frac{1}{E(1-hD)} [(1 + \nu) \langle -\boldsymbol{\sigma}_d \rangle - \nu \langle -\text{tr } \boldsymbol{\sigma}_d \rangle \mathbf{I}]$$

é a equação da elasticidade,

$$f = (\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^D - \boldsymbol{\chi}^D)_{eq} - R - \sigma_y = 0,$$

é a função escoamento,

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \frac{3\dot{\lambda}}{2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^D - \boldsymbol{\chi}^D)_{eq}} (\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^D - \boldsymbol{\chi}^D) \cdot \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^D}{\partial \boldsymbol{\sigma}},$$

$$\dot{R} = b(R_\infty - R) \dot{\lambda},$$

$$\dot{\boldsymbol{\chi}}^D = \gamma \chi_\infty \left[\frac{\dot{\lambda}}{(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^D - \boldsymbol{\chi}^D)_{eq}} (\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^D - \boldsymbol{\chi}^D) - \frac{\dot{\lambda}}{\chi_\infty} \boldsymbol{\chi}^D \right] \mathbf{e}$$

$$\dot{D} = \frac{\dot{p}_Y}{S} H(p - p_D)$$

são as equações de evolução a serem integradas.

4.1.1 Equações de Equilíbrio Globais

Segundo Bathe (1992), o problema básico de uma análise não linear em MEF é o de encontrar um estado de equilíbrio do corpo com as correspondentes forças aplicadas. Como as forças externas, \vec{F}_e , são geralmente uma função do tempo, a condição de equilíbrio de um sistema de elementos finitos, representando o domínio em consideração, pode ser expresso por

$$\vec{F}_e - \vec{F}_i = 0, \quad (4.1)$$

no qual \vec{F}_i é o vetor de forças internas.

Esta relação expressa o equilíbrio de dois sistemas na geometria deformada corrente, levando em conta as não linearidades. Além disso, ela deve ser satisfeita em toda a história, ou seja para qualquer valor de t .

O enfoque básico em uma solução incremental, passo a passo, é assumir que a solução

para o ponto t_n é conhecida e procurar a solução para o instante t_{n+1} , sendo o incremento Δt escolhido de maneira adequada. Assim, no processo requer-se que

$$\vec{F}e_{n+1} - \vec{F}i_{n+1} = 0. \quad (4.2)$$

Um dos mais utilizados procedimentos iterativos para a resolução de sistemas não lineares é o método de Newton-Raphson, bem como suas variações. O equilíbrio em MEF pode ser escrito como

$$\vec{h}(\vec{u}^*) = 0, \quad (4.3)$$

onde $\vec{h}(\vec{u}^*) = \vec{F}e_{n+1}(\vec{u}^*) - \vec{F}i_{n+1}(\vec{u}^*)$.

Basicamente, o método consiste em expandir $h(u^*)$ em uma série de Taylor mantendo apenas o termo de primeira ordem, i.e.,

$$\vec{h}(\vec{u}^*) = \vec{h}(\vec{u}_{n+1}^i) + \frac{\partial \vec{h}(\vec{u}_{n+1}^i)}{\partial \vec{u}} (\vec{u}^* - \vec{u}_{n+1}^i), \quad (4.4)$$

e utilizando a Eq.(4.3) juntamente com a suposição que $\vec{F}e_{n+1}$ não depende dos deslocamentos e definindo $\Delta \vec{u}_{n+1} = (\vec{u}^* - \vec{u}_{n+1}^i)$ e $\mathbf{K}_{n+1}^i = \frac{\partial \vec{F}i(\vec{u}_{n+1}^i)}{\partial \vec{u}}$ e pode-se chegar a

$$\mathbf{K}_{n+1}^i \Delta \vec{u}_{n+1} = \vec{F}e_{n+1} - \vec{F}i_{n+1}^i, \quad (4.5)$$

na qual \mathbf{K} é geralmente chamada de matriz tangente. Note que para encontrar o elemento

\vec{u}_{n+1}^{i+1} pode-se fazer

$$\vec{u}_{n+1}^{i+1} = \Delta \vec{u}_{n+1}^i + \vec{u}_{n+1}^i. \quad (4.6)$$

O critério de parada pode ser feito por $\left\| \vec{h}(\vec{u}_{n+1}^{i+1}) \right\| \leq \text{tolerância} \quad (19)$, o que leva a

$$\vec{u}_{n+1}^{i+1} \approx \vec{u}^*.$$

¹⁸Repare que o vetor $\vec{F}e_{n+1}$ é sempre conhecido.

¹⁹ $\|\diamond\|$ indica a norma no espaço Euclidiano.

Dentro do contexto incremental e do enfoque do método dos elementos finitos é possível escrever que

$$\mathbf{K}_{n+1}^i = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{J}_{n+1}^i \mathbf{B} d\Omega, \quad (4.7)$$

na qual \mathbf{B} é a matriz de deformação-deslocamento e \mathbf{J}_{n+1}^i é uma aproximação de $\left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\right)_{n+1}^i$. A determinação do operador \mathbf{J} será feita no ítem 4.1.3 pois depende da solução das equações locais apresentadas em 4.1.2.

Para a iteração inicial utiliza-se $\vec{u}_{n+1}^0 = \vec{u}_n^*$.

4.2 Integração Local

Afim de simplificar a notação e a escrita do algoritmo define-se dois vetores, os quais contêm o conjunto de incógnitas do problema, estes vetores são $\vec{Q} = (\boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\chi}^D, R, D)$ e $\vec{q} = (\boldsymbol{\sigma}, \vec{Q}, \lambda)$.

Desta forma, as equações de evolução apresentadas na tabela 4.1 podem ser escritas de forma compacta da seguinte maneira

$$\vec{Q} = \lambda \vec{G}(\boldsymbol{\sigma}, \vec{Q}) \quad (4.8)$$

e colocando-as em sua forma incremental chega-se a

$$\Delta \vec{Q} - \Delta \lambda \vec{G}(\boldsymbol{\sigma}_{n+\theta}, \vec{Q}_{n+\theta}) = 0. \quad (4.9)$$

4.2.1 Algoritmo

(i) - Conhecido $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$, considera-se que o incremento é puramente elástico, assim

$\Delta \vec{Q} = 0$ e $\Delta \lambda = 0$ e calcula-se a tensão teste utilizando

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{d_{n+1}} = \mathbf{L} \boldsymbol{\varepsilon}_d^* \quad (4.10)$$

²⁰ $\Delta [\diamond] = [\diamond]_{n+1} - [\diamond]_n$ e $[\diamond]_{n+\theta} = (1 - \theta) [\diamond]_n + \theta [\diamond]_{n+1}$ com $\theta \in [0, 1]$

na qual \mathbf{L} é o tensor que contém a relação constitutiva, $\boldsymbol{\varepsilon}_d^* = \mathbf{R}^T (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) \mathbf{R}$ com \mathbf{R} sendo o tensor cuja as colunas são os autovetores ortonormalizados do tensor $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p$

(ii) - Com a tensão teste calculada em (i) verifica-se o critério de escoamento. Se $f(\vec{\sigma}_{d_{n+1}}, \vec{Q}_n) < 0$ então a hipótese inicial (i) está correta e o procedimento local pode ser encerrado atualizando as componentes de \vec{q} . Porém se $f(\vec{\sigma}_{d_{n+1}}, \vec{Q}_n) \geq 0$ deve-se fazer as correções plásticas.

(iii) - Realizar as correções plásticas. As variáveis no instante t_{n+1} devem satisfazer: o critério de escoamento, a lei da elasticidade e as equações de evolução.

Com estas três condições é possível montar o seguinte sistema não linear

$$\begin{aligned} g_1(\vec{q}_{n+1}) &= f(\vec{\sigma}_{d_{n+1}}, \vec{Q}_{n+1}) = 0; \\ g_{2..5}(\vec{q}_{n+1}) &= \Delta \vec{Q} - \Delta \lambda \vec{G}(\boldsymbol{\sigma}_{n+\theta}, \vec{Q}_{n+\theta}) = 0; \\ g_6(\vec{q}_{n+1}) &= \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^e - \frac{1}{E(1-D)} [(1+\nu) \langle \boldsymbol{\sigma}_{d_{n+1}} \rangle - \nu \langle \text{tr } \boldsymbol{\sigma}_{d_{n+1}} \rangle \mathbf{I}] + \\ &\quad + \frac{1}{E(1-hD)} [(1+\nu) \langle -\boldsymbol{\sigma}_{d_{n+1}} \rangle - \nu \langle -\text{tr } \boldsymbol{\sigma}_{d_{n+1}} \rangle \mathbf{I}] = 0; \end{aligned} \quad (4.11)$$

na qual $\boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^e$ podem ser escrito como $\boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^e = \mathbf{R}^T (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) \mathbf{R}$.

Este sistema é também resolvido numericamente através do método de Newton-Raphson, i.e.

$$\mathbf{M}_T \Delta \vec{q}_{n+1} = - \vec{g}(\vec{q}_{n+1}^{-k}) \quad (4.12)$$

com $\vec{q}_{n+1}^{-0} = (\boldsymbol{\sigma}_n, \vec{Q}_n, 0)$ para a primeira iteração e sendo $M_{T_{ij}} = \frac{\partial g_i}{\partial q_j}$. O critério de erro é dado pela norma do resíduo, i.e., $\|\vec{g}_{n+1}^{-k}\|$ assim como feito nas equações globais e a atualização é feita da seguinte forma $\vec{q}_{n+1}^{-k+1} = \vec{q}_{n+1}^{-k} + \Delta \vec{q}_{n+1}^{-k}$.²¹

²¹ k é referente ao número de iterações realizadas pelo método de Newton e n é referente ao passo do carregamento.

4.2.2 Determinação do Operador Tangente J

Após o algoritmo da integração local das equações constitutivas convergir, é possível identificar o operador tangente \mathbf{J}_{n+1}^i mantendo a solução do instante t_{n+1} e sabendo que

$$\delta\sigma = \mathbf{J}_{n+1}^i \delta\varepsilon. \quad (4.13)$$

Esta identificação pode ser feita utilizando o seguinte sistema de equações

$$\sum_{i=1} \left[\left(\frac{\partial g_i}{\partial q_j} \right)_{n+1} \delta q_j + \left(\frac{\partial g_i}{\partial \varepsilon} \right)_{n+1} \delta \varepsilon \right] = 0. \quad j = 1, \dots, 6. \quad (4.14)$$

4.2.3 Algoritmo geral

O algoritmo geral pode ser resumido como mostra a tabela 4.2.

4.3 Exemplos

Os resultados numéricos, obtidos da implementação das equações vistas no início deste capítulo, de acordo com o procedimento dos itens 4.1 e 4.2 serão agora analisados. Contudo, é interessante frisar que dois tipos de implementação foram feitas nesta dissertação e portanto os resultados serão apresentados em dois itens diferentes.

No primeiro item, 4.3.1, denominado *Exemplos 1D* estão os resultados da implementação das equações, apresentados no início deste capítulo, particularizadas para o problema 1D, de acordo com o algoritmo apresentado em 4.2. Estes resultados podem ser vistos também em Rossi & Alves (1996) onde são apresentadas as equações discretizadas do problema 1D.

Já no item 4.3.2, *Exemplos com o uso do MEF*, estão discutidos os resultados provenientes das mesmas equações, porém adotando a hipótese de estado plano de tensões e

Tabela 4.2: Algoritmo geral

- ★ Dado um estado de carregamento fazer:
 - ⇒ *loop* sobre o número de elementos
 - ⇒ *loop* sobre os pontos de integração
 - ★ Resolver o problema local
 - ★ Identificar o operador tangente \mathbf{J}
 - ★ Montar a matriz de rigidez do elemento $\mathbf{K}_{e_{n+1}}^i = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_{n+1}^T \mathbf{J}_{n+1}^i \mathbf{B}_{n+1} d\Omega_e$
 - ★ Montar o vetor de força interna do elemento $\vec{F}i_{e_{n+1}} = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_{n+1}^T \boldsymbol{\sigma}_{n+1} d\Omega_e$
 - ⇒ *Fim do loop* sobre os pontos de integração
 - ★ Introduzir a matriz de rigidez do elemento na global
 - ★ Introduzir o vetor de força interna do elemento no global
 - ⇒ *Fim do loop* sobre o número de elementos
 - ★ Resolver $\mathbf{K}_{n+1}^i \Delta \vec{u}_{n+1} = \vec{F}e_{n+1} - \vec{F}i_{n+1}^i$
 - ★ Atualizar $\vec{u}_{n+1}^{i+1} = \Delta \vec{u}_{n+1}^i + \vec{u}_{n+1}^i$
 - ★ Cálculo do erro
 - ★ Enquanto $erro \geq Tolerância$, voltar ao loop sobre elementos
- ★ Tomar um novo passo de carregamento

utilizando o MEF como ferramenta de análise. É importante voltar a frizar aqui que nestes exemplos utilizaremos $h = 1$, i.e., sem efeito do fechamento das microtrincas.

Embora as equações de endurecimento vistas anteriormente sejam postuladas para a representação do problema cíclico, serão apresentados também exemplos onde submete-se a geometria a um carregamento monotônico.

As propriedades materiais que serão usados em todos os exemplos abaixo são os do aço AISI 316, i.e., $E = 200.000$ MPa, $\nu = 0,3$, $\sigma_y = 260$ MPa, $\chi_\infty = 200$ MPa, $b = 1$, $\gamma = 2$, $R_\infty = 300$ MPa, $S = 7$ MPa e $Dc = 0,15$.

4.3.1 Exemplos 1D

Nos exemplos considerados neste ítem foram utilizados $h = 0,2$ e $p_D = 6$. Com um valor grande de p_D , o usual para problemas unidimensionais fica na faixa de 0.1, procurou-se desacoplar o estágio de endurecimento do material com o estágio no qual o dano está presente. Isto foi feito com objetivo de observar cada uma das características da formulação separadamente. Porém, é importante lembrar que p_D é a deformação plástica acumulada em *cada ciclo*.

Estas características podem ser vistas no gráfico da figura 4.1. Nele está plotado a tensão versus o número de ciclos para atingir o dano crítico. É possível verificar o endurecimento sofrido pelo material nos primeiros 100 ciclos seguido de um período de estabilização. Por volta do ciclo de número 200 verifica-se que começa a acontecer uma queda na tensão. Esta se deve ao efeito do dano. Percebe-se ainda que esta queda é muito mais acentuada na parte positiva da tensão do que na parte negativa, tendo com explicação o efeito do fechamento das microtrincas.

Já no gráfico da figura 4.2, mostra a clássica relação entre a amplitude de deformação

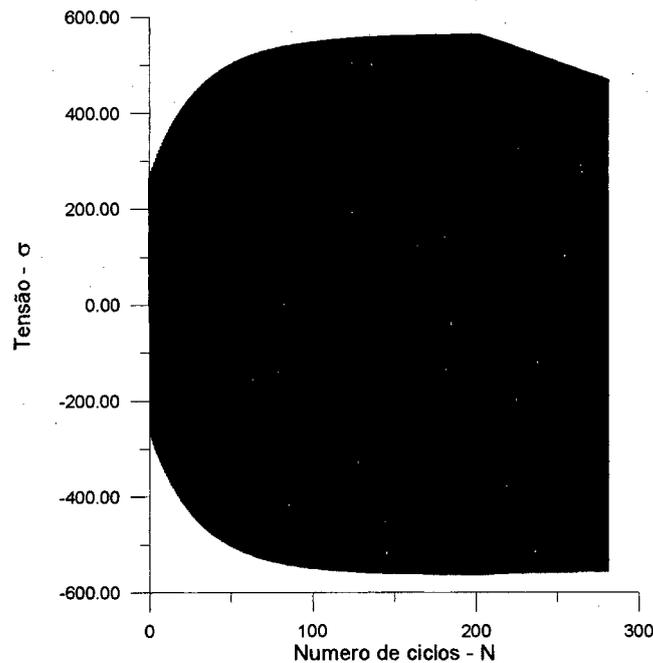


Figura 4.1: Efeito do fechamento das microtrincas na tensão.

e a vida em número de ciclos e em escala log-log. A curva obtida, é o resultado de várias simulações numéricas com diferentes amplitudes de deformação constante.

Porém, pode-se identificar uma expressão analítica para ela conhecendo-se a amplitude de deformação elástica e plástica estabilizadas. Esta curva é a soma destas duas amplitudes.

A sua expressão analítica é dada por

$$\frac{\Delta\varepsilon}{2} = \frac{\sigma'_f}{E} (2Nr)^b + \varepsilon'_f (2Nr)^c \quad (4.15)$$

na qual Nr é o número de ciclos para que o dano crítico seja alcançado, $\frac{\sigma'_f}{E}$ e ε'_f são os pontos aonde as retas cortam o eixo das ordenadas e b e c são os coeficientes angulares das respectivas retas. Assim, a curva amplitude de deformação versus vida pode ser aproximada pela seguinte expressão

$$\frac{\Delta\varepsilon}{2} = 0.003 (2Nr)^{-0,01} + 5,05 (2Nr)^{-1,04} \quad (4.16)$$

²²A primeira parcela desta é devida a Basquin (1922) e a segunda parcela é relação de Coffin-Manson

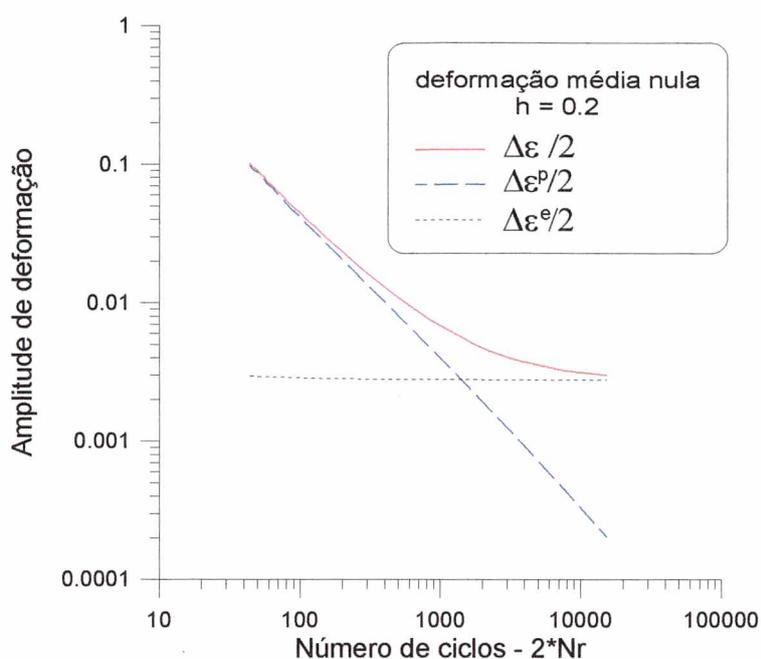


Figura 4.2: Curva deformação x vida para o aço AISI 316.

Repare que o comportamento da curva é muito parecido com o comportamento real de um aço submetido a um carregamento cíclico. Isto mostra que a teoria de dano representa bem o fenômeno de fadiga de baixo ciclo.

O efeito da deformação média pode ser analisado através da figura 4.3a. Neste gráfico é mostrado a deformação plástica acumulada em função do número de ciclos com deformação média variável.

Constata-se que a deformação média tem efeito apenas no primeiro ciclo. Este efeito pode ser melhor compreendido se analisado o gráfico da figura 4.3b e 4.3c. Em 4.3b é mostrado um carregamento com deformação média não nula. Para tal carregamento, se considerarmos o material como sendo elastoplástico ideal, a curva será dada por 4.3c. Então, se a linha de carregamento é dada por \overline{ob} em 4.3b a resposta do material será de acordo com a linha \overline{oab} de 4.3c. Porém, se o carregamento cíclico é então iniciado, o comportamento da curva será dado por \overline{bcde} , com deformação plástica constante por ciclo e a influência da

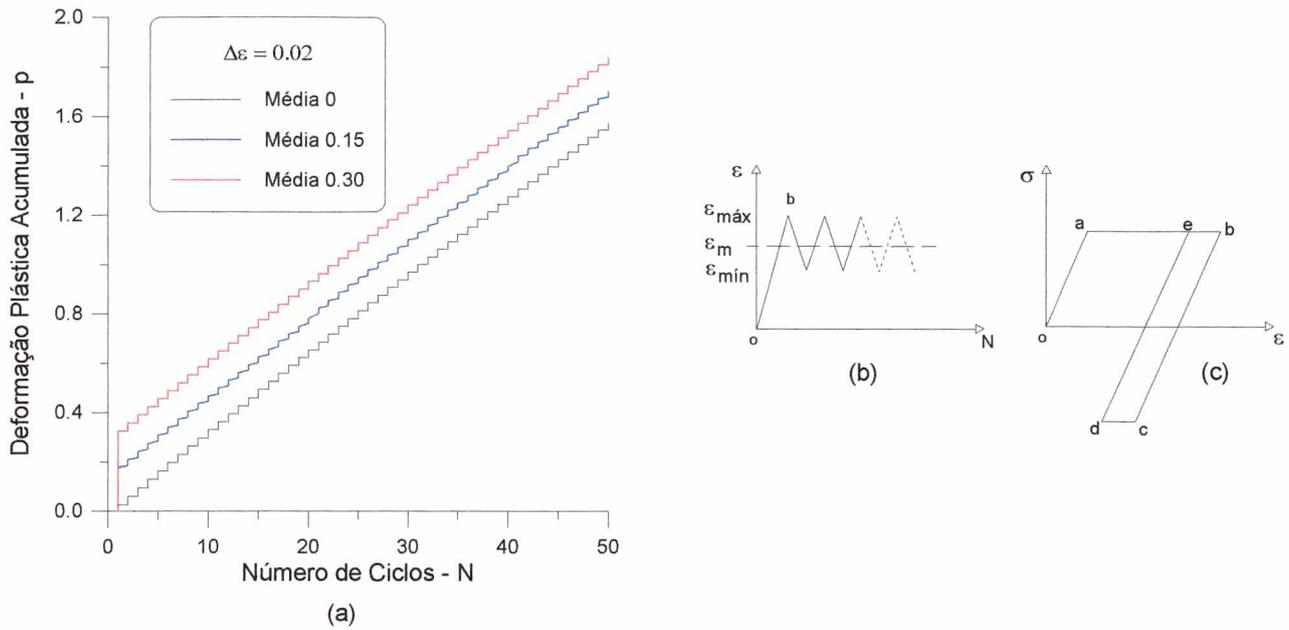


Figura 4.3: Evolução do dano para diferentes valores de deformação média

deformação média esta apenas na região em 4.3c. Por outro lado, se a deformação média for nula o carregamento cíclico implicará em um mesmo ciclo, porém com centro em 'o'. Assim, para a influência da deformação média ser significativa no ciclo, o seu valor deve ser muito maior do que a amplitude de deformação.

Para o caso de carregamento monotônico unidimensional de tração, é possível integrar analiticamente a equação de evolução entre tensão e deformação plástica. Esta integração produz

$$\sigma = R_\infty + \chi_\infty + \sigma_y - R_\infty e^{-b\epsilon^p} - \chi_\infty e^{-\gamma\epsilon^p}. \quad (4.17)$$

A figura 4.4 mostra a comparação entre a expressão analítica dada pela Eq.(4.17) e o resultado obtido através da análise numérica. Neste gráfico é plotada a curva tensão versus deformação plástica. O valor de p_D utilizado nesta simulação foi de 0.01 com $Dc = 0,15$. A diferença existente entre as duas curvas é justamente a influência do dano. A grande magnitude alcançada para a deformação plástica, abscissa da figura 4.4, é devido a estas

equações constitutivas serem formuladas para o problema fadiga de baixo ciclo, e não para simular a ruptura dúctil.

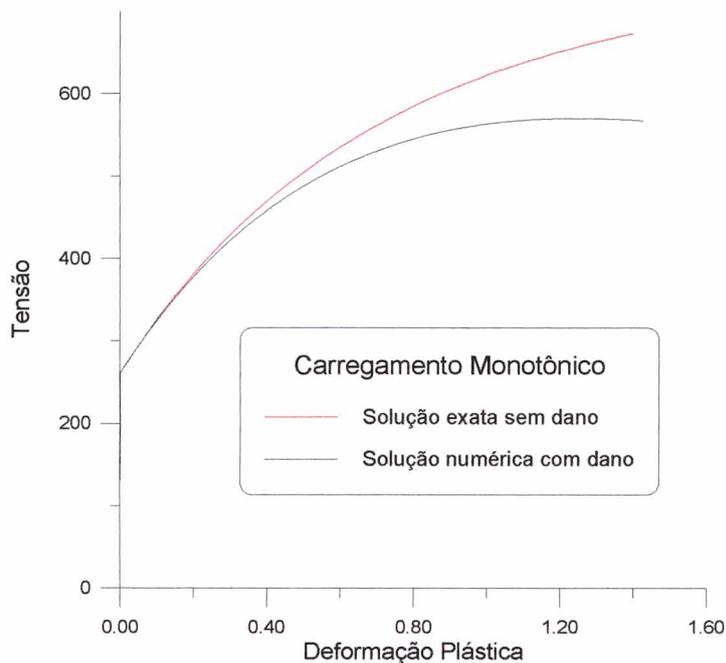


Figura 4.4: Solução Numérica e Solução Exata

4.3.2 Exemplos com o MEF

Nesta seção serão apresentados os exemplos que utilizam o método de elementos finitos como ferramenta de análise. O elemento finito obtido é o elemento quadrilátero completo de nove nós, da classe Lagrangeana, o qual é representado na figura 4.5.

a) Acumulo de dano

Neste exemplo um elemento finito é submetido a um carregamento cíclico uniaxial, representando um problema de estado plano de tensões com carregamento unidimensional, como mostra a figura 4.6.

Diferenciando dos exemplos vistos no item anterior, este possui deformações dadas por $\varepsilon_{33} = \varepsilon_{22} = -\nu\varepsilon_{11}$. A figura 4.7 mostra o diagrama de acumulo de dano quando da

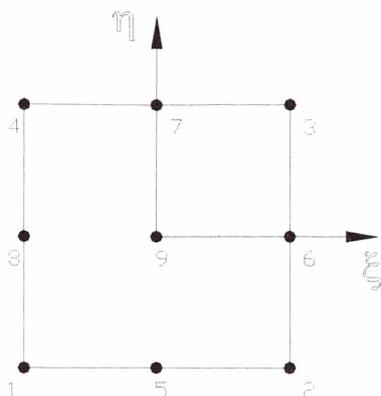


Figura 4.5: Elemento finito - sistema local (ξ, η)

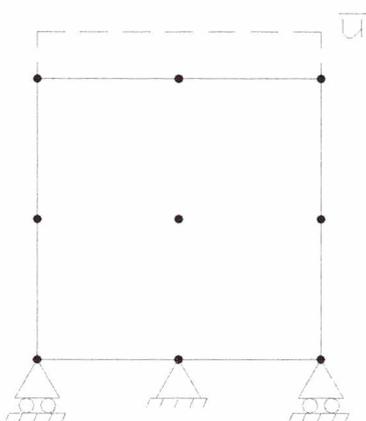


Figura 4.6: Geometria uniaxial

aplicação de dois blocos de amplitudes diferentes de carregamento. Os valores assumidos para a amplitude de deformação foram de $\Delta\bar{\epsilon} = 0.04$ e $\Delta\bar{\epsilon} = 0.08$, e os parâmetros utilizados aqui foram $p_D = 0.1$ e $h = 1$, i.e. sem considerar o efeito do fechamento das microtrincas. A forma do carregamento é dada por $\Delta\epsilon = \Delta\bar{\epsilon} \cdot \text{sen } t$, no qual t é o tempo. A linha tracejada interna se refere a regra de evolução de dano proposta por Palmgren-Miner, na qual o dano é definido como

$$D = \sum_i \frac{N_i}{N_{R_i}}. \quad (4.18)$$

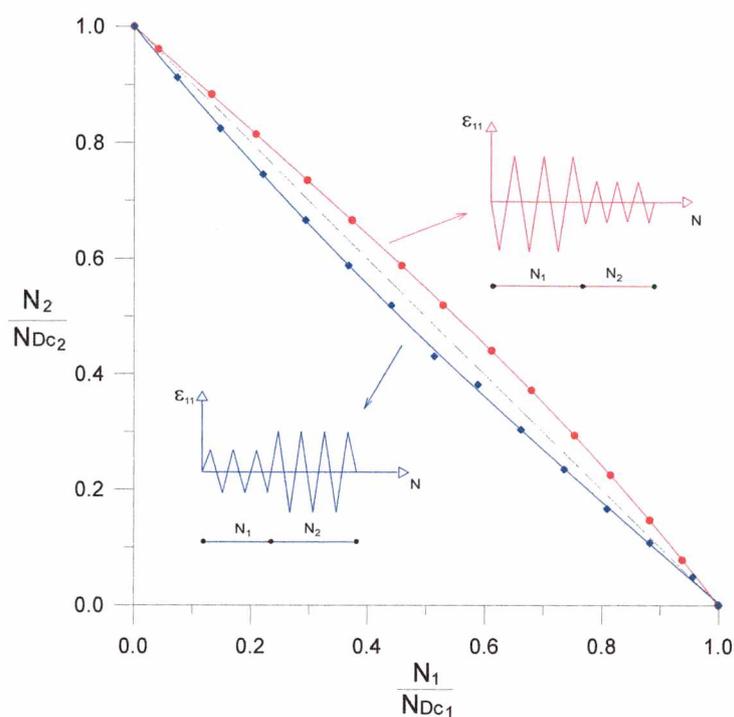


Figura 4.7: Acumulo de dano

Nesta equação N_i é o número de ciclos dados com uma amplitude $\Delta\varepsilon_i$ e N_{R_i} é o número de ciclos para a falha para a mesma amplitude. Desta forma, pode-se perceber a diferença entre as regras de acumulo de dano proposta por Lemaitre et al e a regra de Palmgren-Miner.

b) Placa com furo

Será agora analisado o comportamento de uma placa com furo submetida a um carregamento cíclico de deslocamento senoidal com $\Delta\bar{u} = 0.04 \text{ mm}$. As dimensões da placa em análise podem ser vistas na figura 4.8.

Na figura 4.9 está representada a malha que foi submetida a análise juntamente com as condições de contorno e a direção do carregamento. Neste problema foi utilizada a condição de simetria, portanto foi modelado apenas 1/4 da geometria.

Os resultados serão apresentados por meio de isoformas e os campos escalares escolhidos para a visualização são a deformação plástica acumulada, p_D , e o dano, D . Estes campos

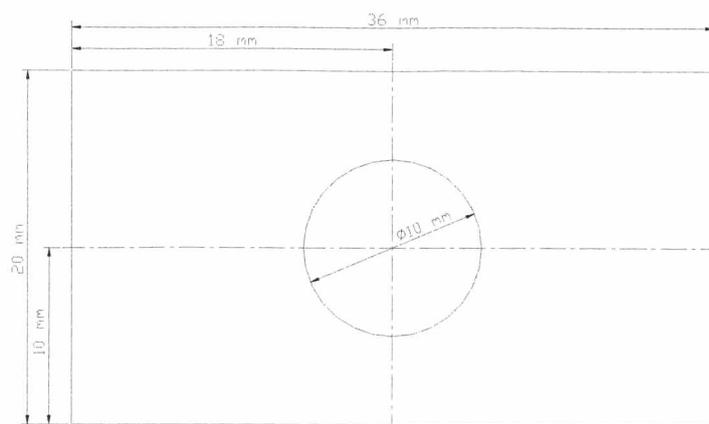


Figura 4.8: Placa com furo

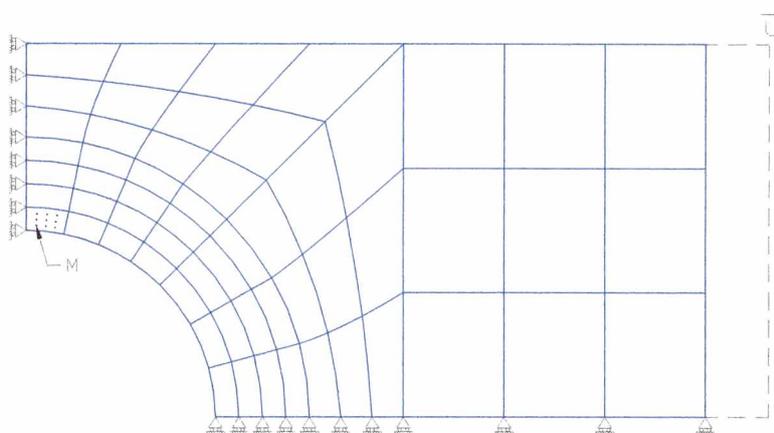


Figura 4.9: Discretização da placa com furo.

foram escolhidos por representarem as características físicas essenciais para descrever o processo evolutivo da degradação do material analisado.

O dano crítico para este problema foi alcançado durante o ciclo 260. A figura 4.10 mostra a evolução da deformação plástica acumulada.

Já a figura 4.11 mostra a evolução do dano durante a análise. Repare que o ponto crítico, ou máximo atingido, pelos campos de deformação plástica acumulada e de dano se dá na mesma região (em vermelho) que é justamente o ponto de máxima concentração de

tensão.

A figura 4.12 mostra uma ampliação da região na qual ocorreu a maior concentração de dano.

Na figura 4.13 mostra a evolução do dano no ponto de integração M, figura 4.9. Em 4.13a pode-se observar a não linearidade do fenômeno quando plotado com relação a deformação plástica acumulada. Já em 4.13b observa-se a forma de evolução do dano. Os pequenos patamares horizontais vistos nesta figura estão relacionados à deformação elástica, i.e., na parte de carregamento ou descarregamento elástico nos quais não existe evolução do dano.

A mesma placa mostrada na figura 4.8 foi submetida a um carregamento monotônico até que o dano crítico fosse atingido. Os resultados desta simulação podem ser vistos na figura 4.14 que mostra a evolução da deformação plástica acumulada e na figura 4.15 a qual mostra a evolução do dano. Em comparação com o problema cíclico pode-se perceber que o tamanho da região plastificada e o tamanho da região com dano são bem maiores no exemplo de carregamento monotônico. Por esta simulação pode-se ainda fazer algumas comparações da forma da evolução plástica.

Os trabalhos de Zienkiewicz (1977) e Foggiatto (1997) mostram o comportamento de uma placa furada, com mesmas dimensões daquelas usadas na figura 4.8, submetida a um carregamento monotônico. Porém estes trabalhos consideram apenas encruamento linear, possuem uma discretização diferente e ainda as propriedades materiais diferentes. Contudo, se analisados estes trabalhos percebe-se que a forma de como a evolução plástica acontece é muito semelhante. No trabalho de Foggiatto (1997), figura 4.16a, está mostrada a evolução da frente plástica em termos da tensão efetiva, i.e. Von Mises. Já no trabalho de Zienkiewicz (1977), figura 4.16b, estão mostrados os valores correspondentes à razão entre o dobro do

carregamento aplicado e a tensão de escoamento inicial do material $\left(\frac{2q}{\sigma_y}\right)$, como mostrado por Foggiatto (1997).

A figura 4.17 mostra a evolução da tensão e do endurecimento cinemático para o ponto de integração M. Neste gráfico é possível verificar os grades valores de deformação plástica alcançados. Novamente, a justificativa para tais valores se da por estar-se usando neste trabalho equações constitutivas para modelar o fenômeno da fadiga de baixo ciclo e não ruptura dúctil.

b) Placa T

Um outro exemplo analisado foi a placa T mostrada na figura 4.18. Como no exemplo da placa com furo, o carregamento também é assumido cíclico senoidal, porém, com $\Delta\bar{u} = 20 \text{ mm}$.

A figura 4.19 mostra a discretização utilizada, bem como as condições de contorno aplicadas e a direção do carregamento. Também aqui foi aproveitado os eixos de simetria do problema.

Neste caso o dano crítico foi alcançado dentro do ciclo 84. Assim, como no exemplo anterior, a figura 4.20 mostra a evolução da deformação plástica acumulada.

Na figura 4.21 é apresentado a evolução do dano para este problema.

A figura 4.22 mostra uma ampliação do local onde houve a concentração do dano, a qual também coincide com o ponto de máxima concentração de tensão da geometria.

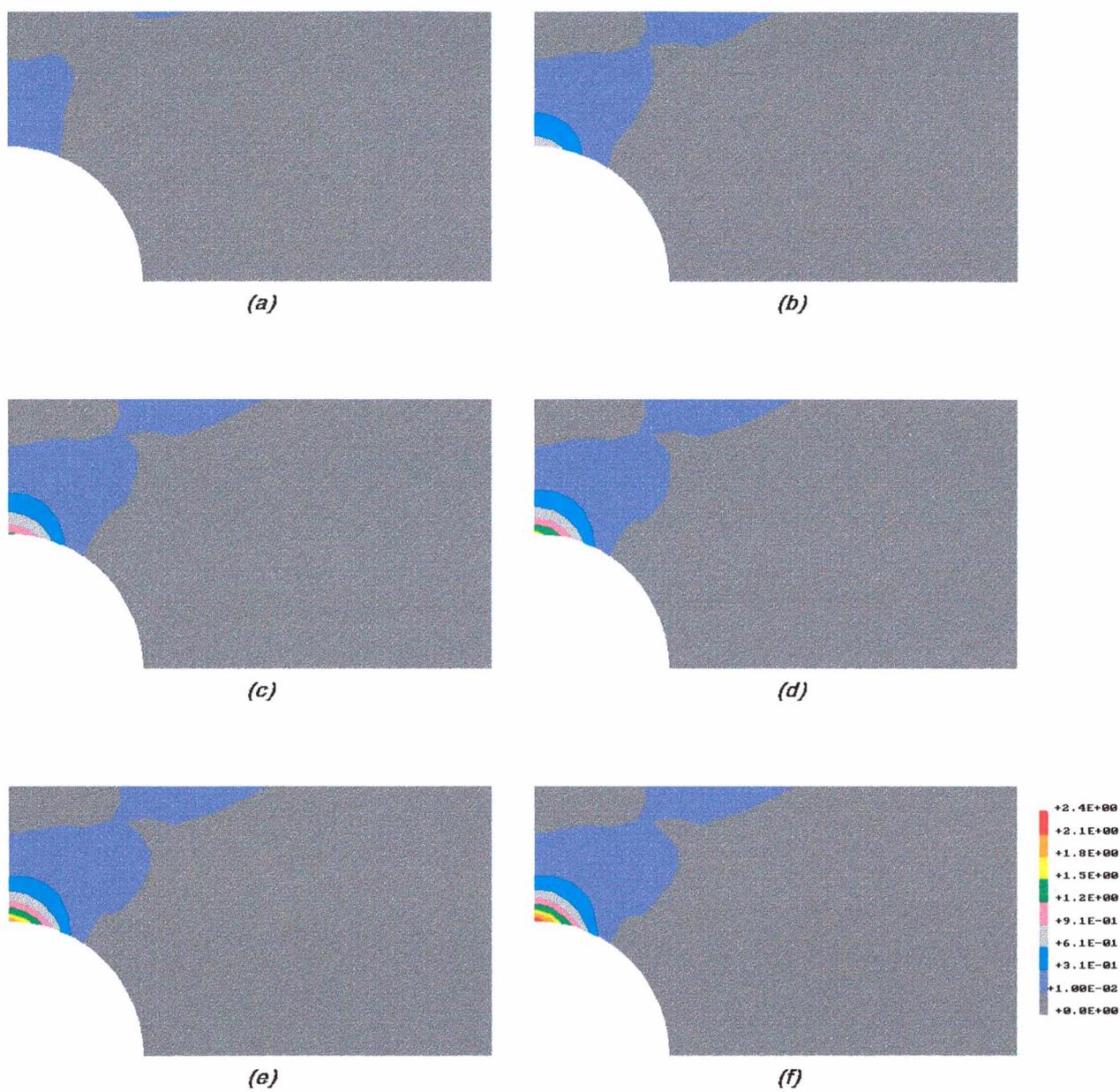


Figura 4.10: Evolução de p : Ciclo 10; b) ciclo 60; c) ciclo 110; d) ciclo 160; e) ciclo 210 e f) ciclo 260.

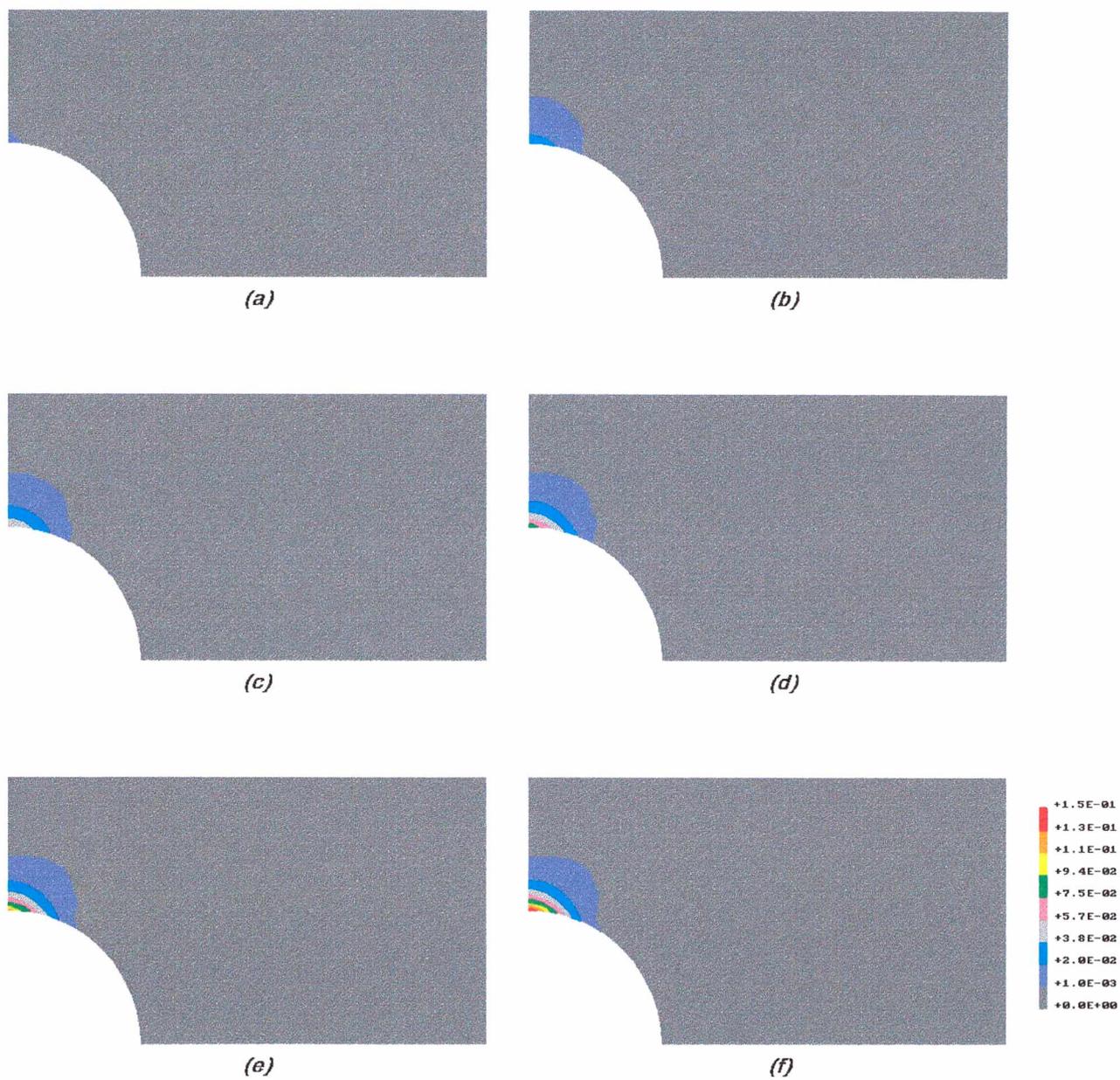


Figura 4.11: Evolução do dano. a) ciclo 10; b) ciclo 60; c) ciclo 110; d) ciclo 160; e) ciclo 210 e f) ciclo 260.

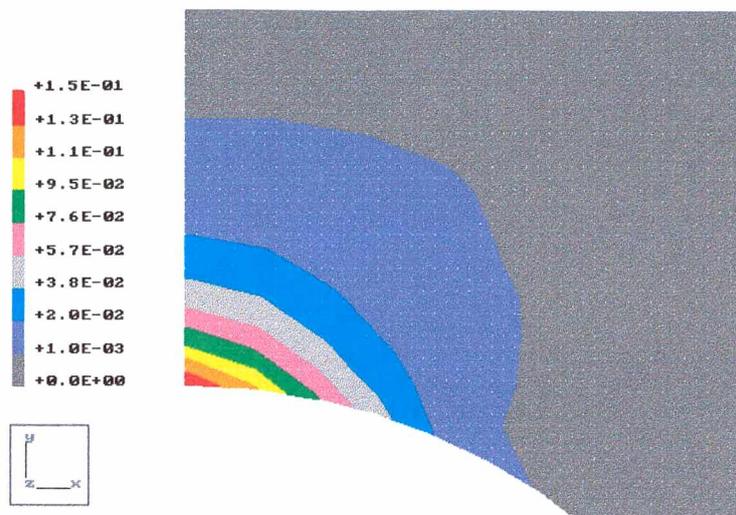


Figura 4.12: Região de concentração do dano.

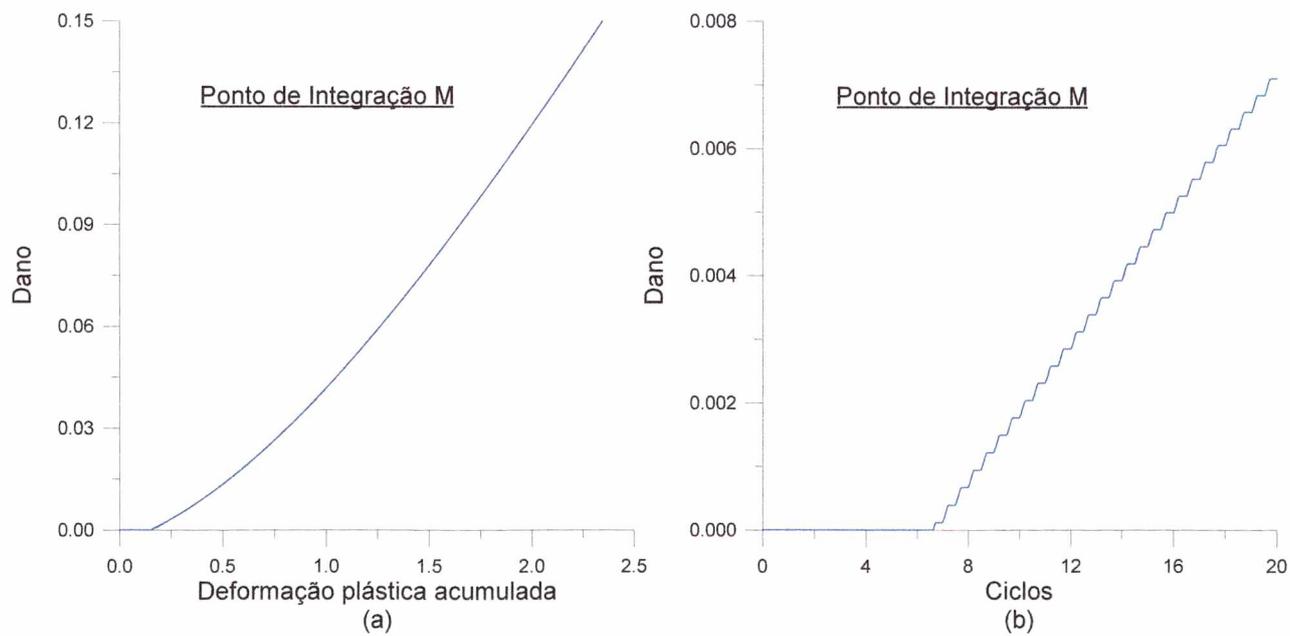


Figura 4.13: Evolução do Dano

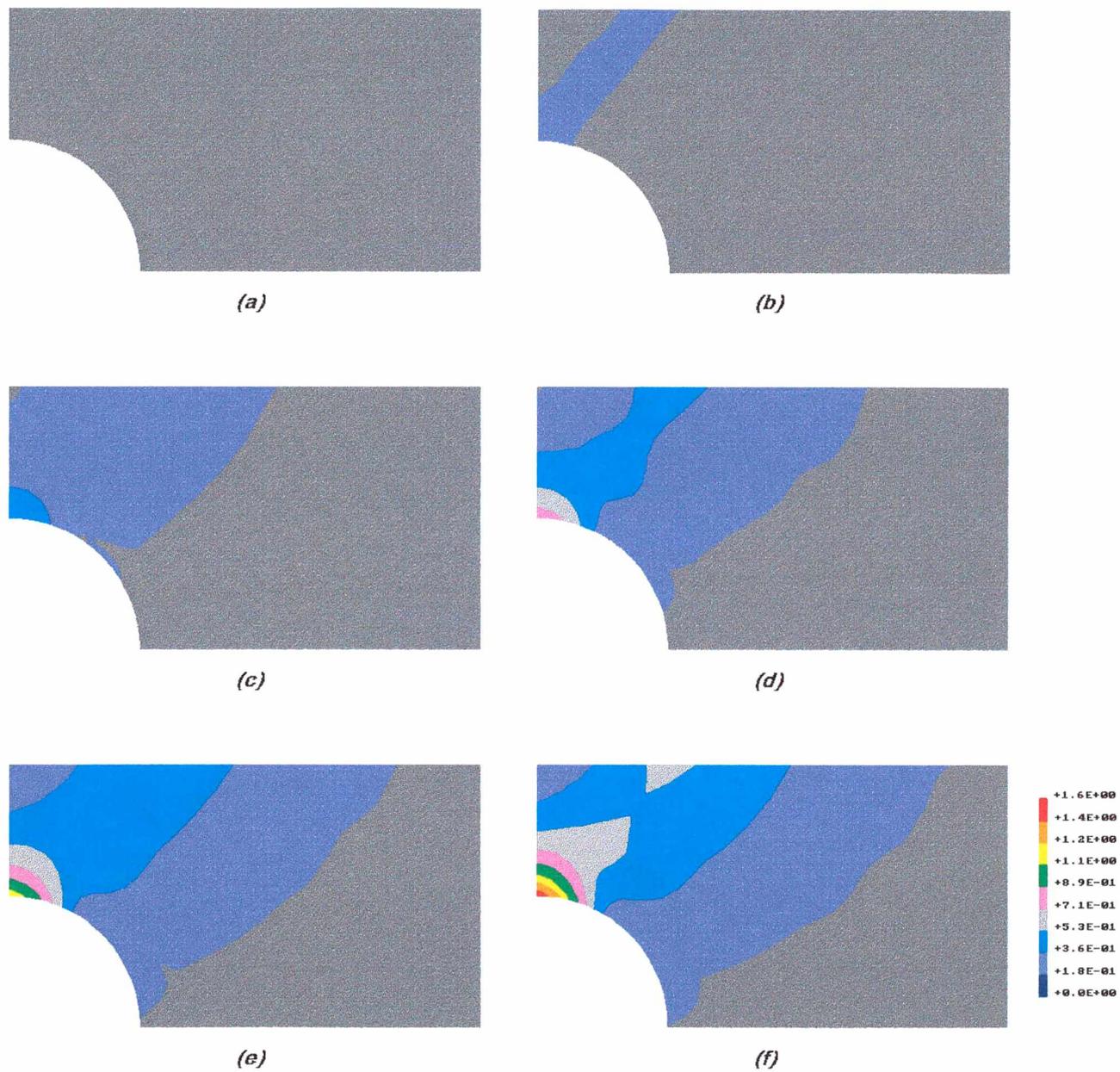


Figura 4.14: Evolução da deformação plástica acumulada para um carregamento monotônico

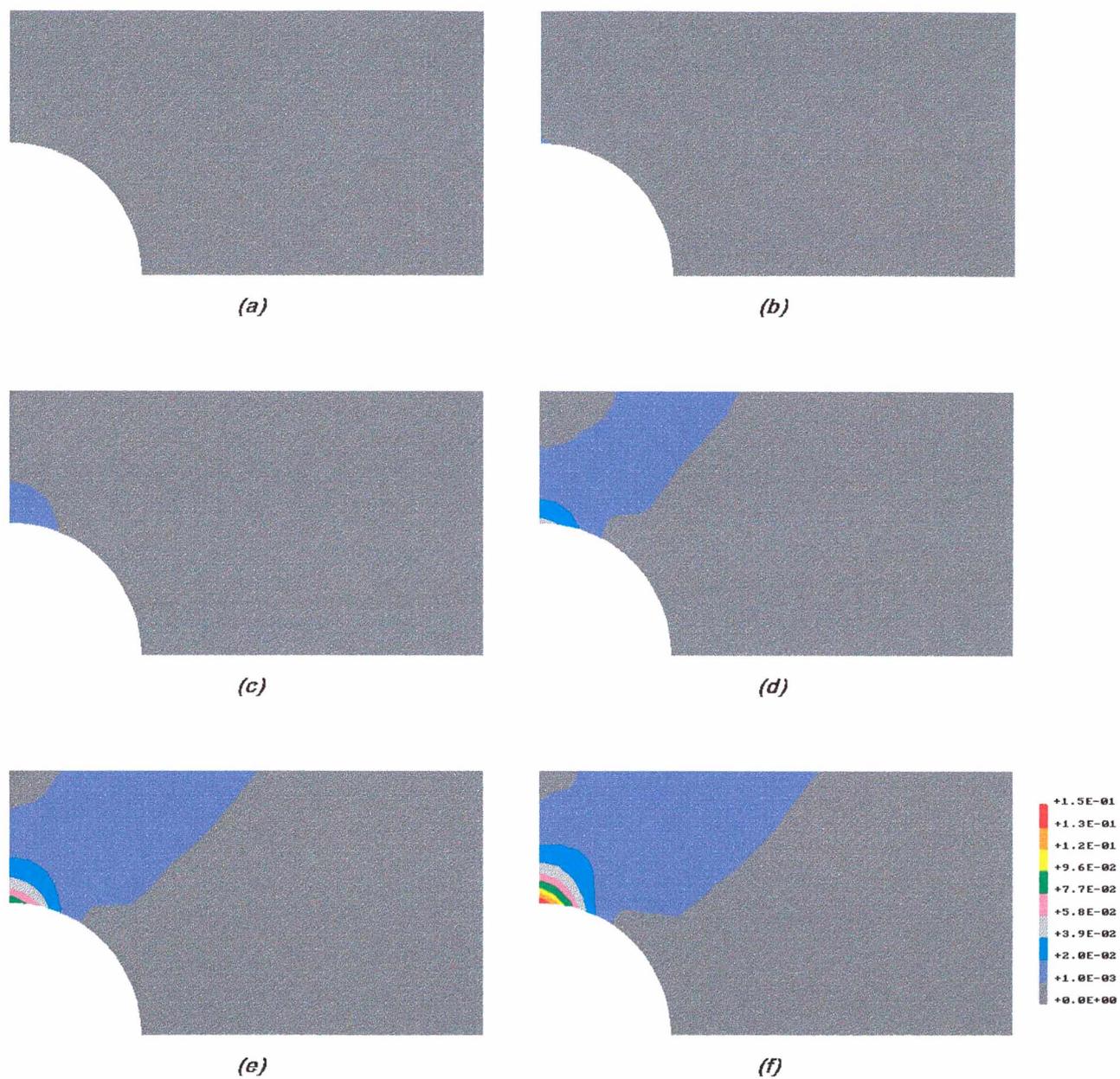


Figura 4.15: Evolução do dano sob carregamento monotônico

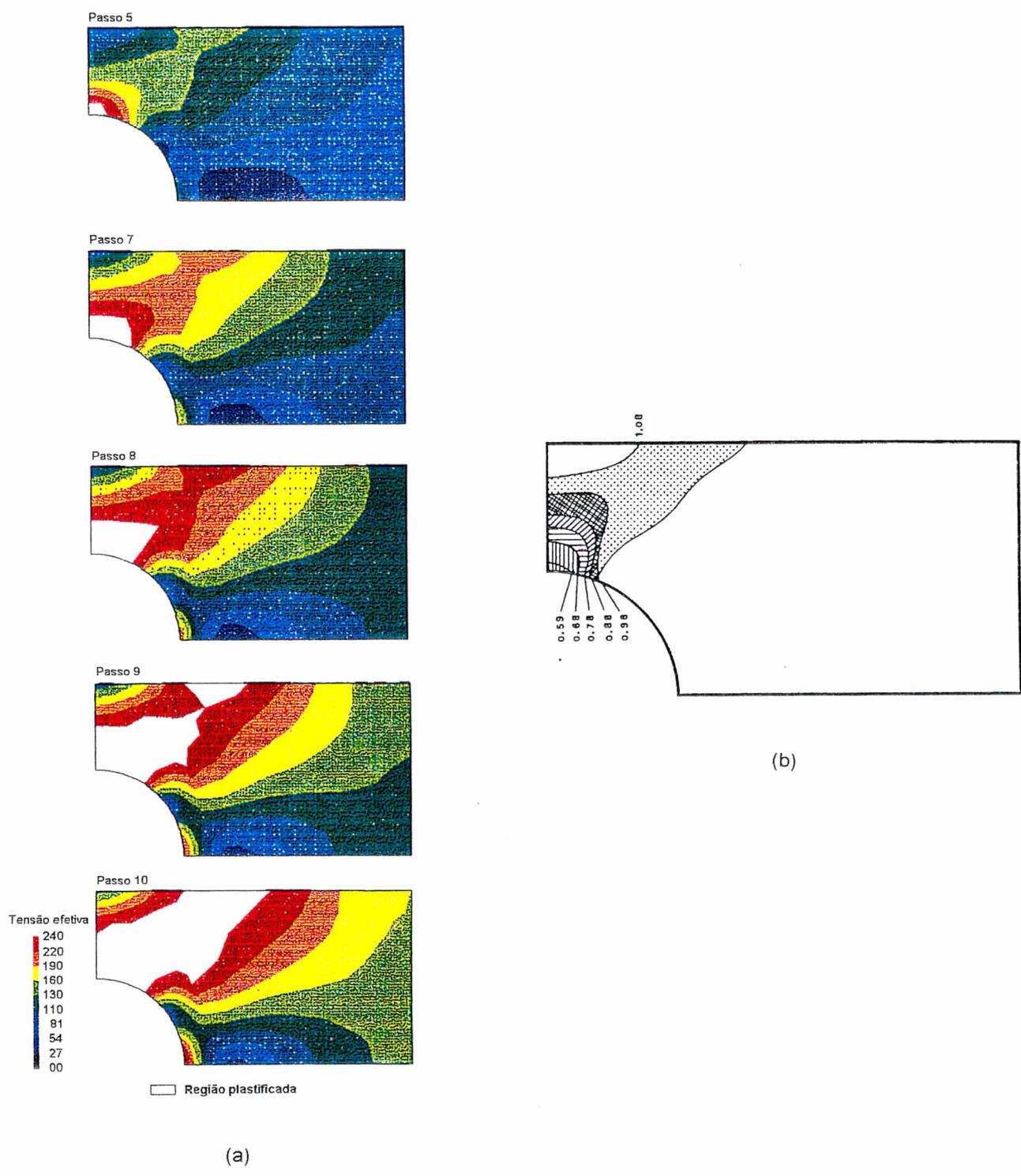


Figura 4.16: Evolução da frente plástica. a) Foggiatto (1997) - b) Zienkiewicz (1977)

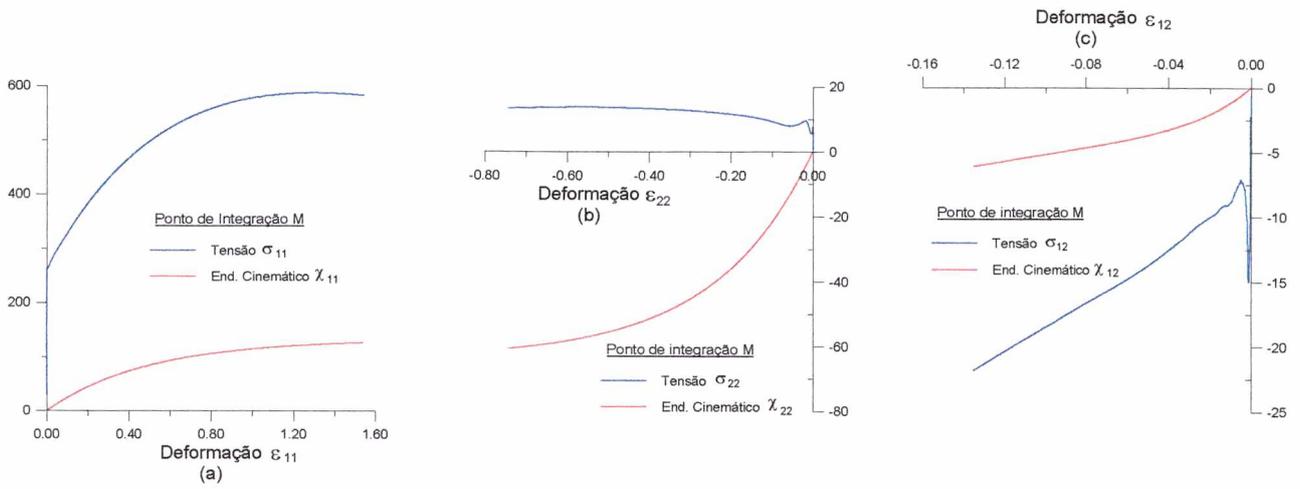


Figura 4.17: Evolução da tensão e do endurecimento cinemático no ensaio monotônico

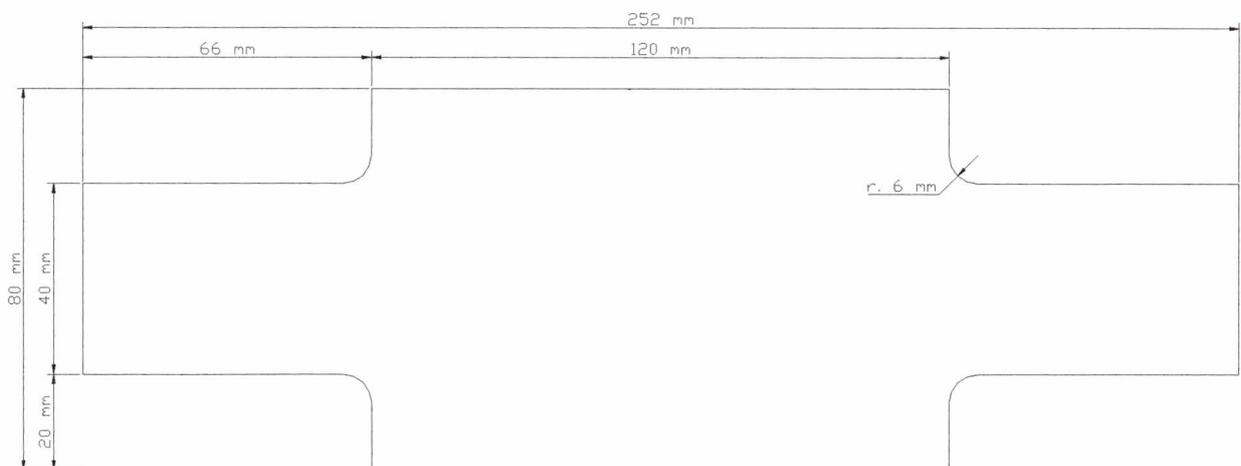


Figura 4.18: Placa T

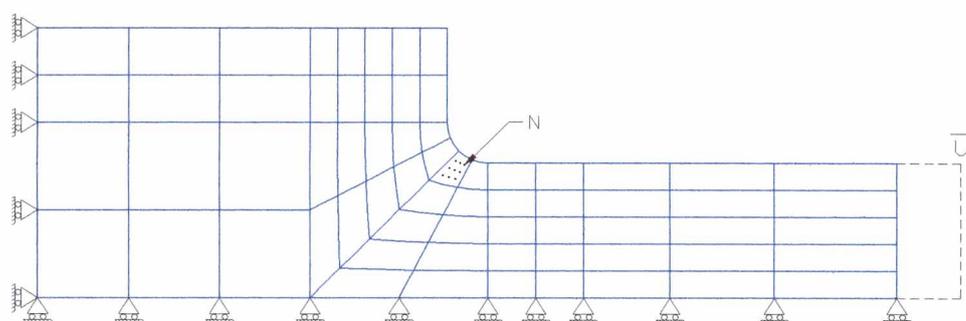


Figura 4.19: Discretização da placa T

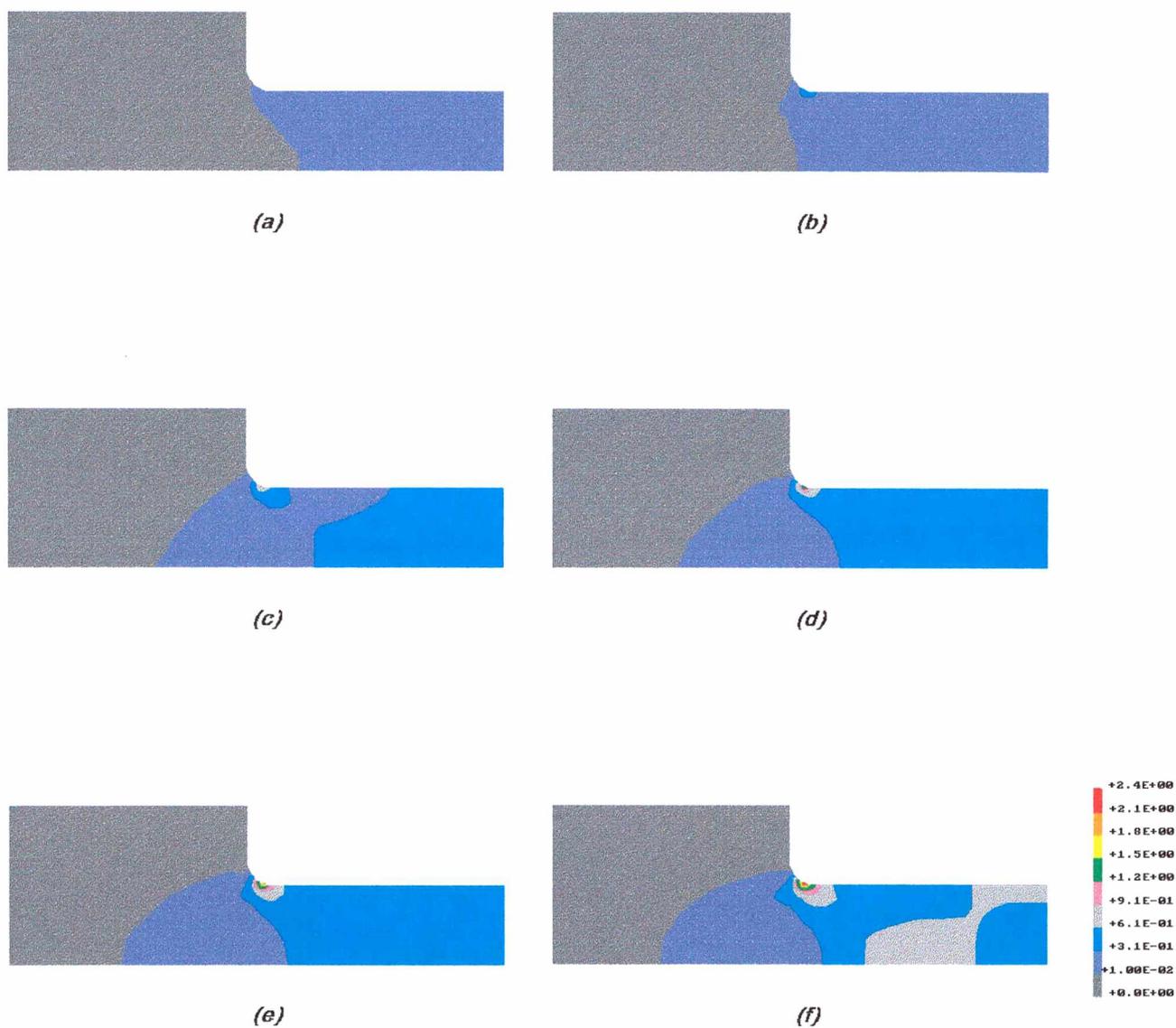


Figura 4.20: Evolução da deformação plástica acumulada. a) ciclo 4; b) ciclo 20, c) ciclo 36, d) ciclo 52, e) ciclo 68 e f) ciclo 84.

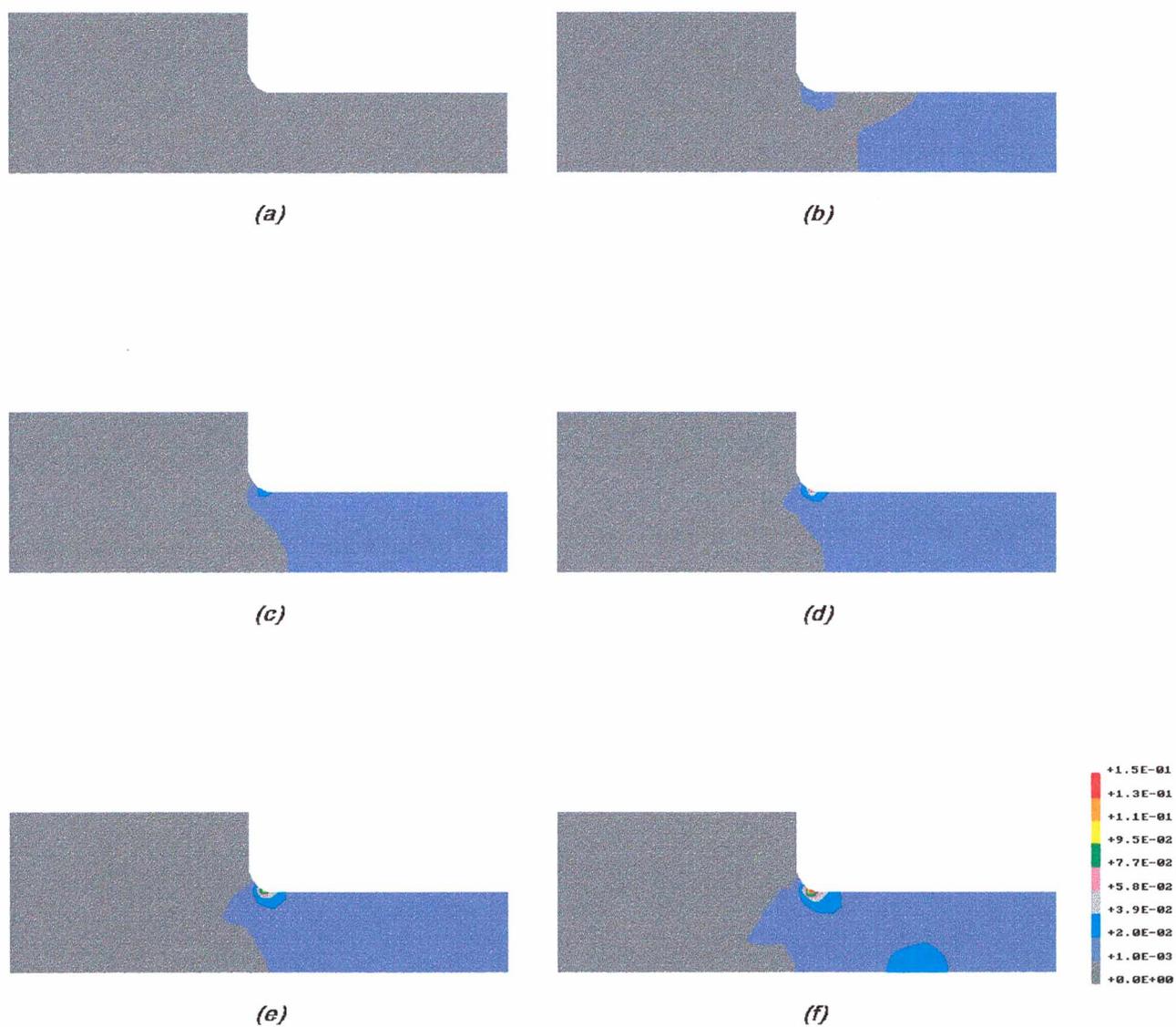


Figura 4.21: Evolução do dano. a) ciclo 4; b) ciclo 20, c) ciclo 36, d) ciclo 52, e) ciclo 68 e f) ciclo 84.

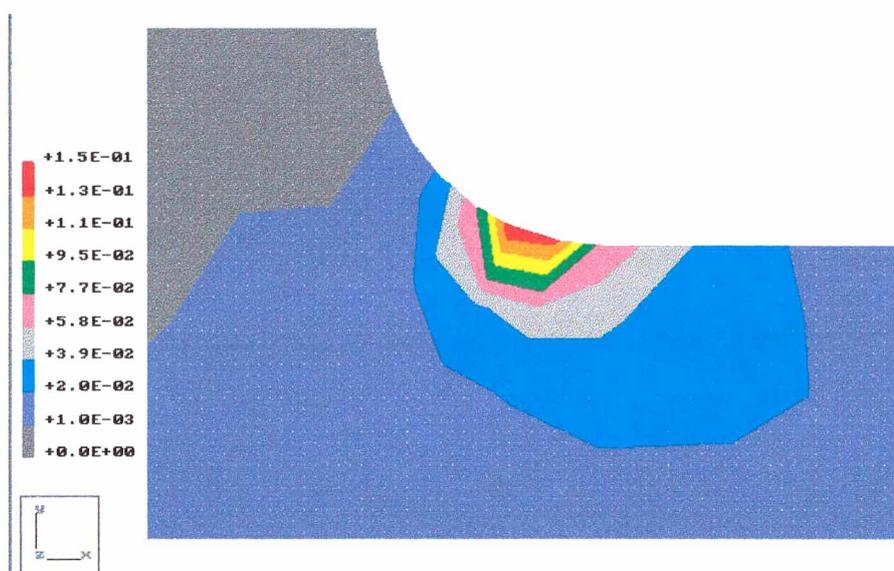


Figura 4.22: Região onde ocorreu o máximo valor do dano.

Capítulo 5

Conclusões e Sugestões

Neste trabalho é feita uma análise de fadiga de baixo ciclo através da teoria de dano, proposta por Lemaitre et al. Esta teoria, quando comparada com a teoria clássica, apresenta algumas vantagens. Estas vantagens são: a possibilidade de determinar de maneira precisa a evolução elastoplástica para um carregamento genérico e a capacidade de introduzir modelos de equações de evolução de dano mais elaborados possibilitando uma melhor descrição do problema físico. No caso específico da teoria clássica, a análise é baseada em experimentos uniaxiais, com corpos de prova normalizados, e em relações empíricas específicas para o problema utilizado. A extensão dos resultados obtidos, para casos mais complexos, é feita através da introdução de fatores de correção, como por exemplo: tamanho do corpo de prova, fatores de concentração de tensões, e vários outros.

A teoria de dano proposta por Lemaitre et al é geral e permite, através da mudança da equação de evolução do dano, a representação de outros fenômenos físicos. Para cada fenômeno físico a ser considerado é, em geral, necessário: a definição de uma ou mais variáveis necessárias para a medida do dano acumulado no material e a introdução de uma equação de evolução para o conjunto de variáveis de dano consideradas no modelo. A teoria é apresentada dentro do escopo da termodinâmica dos processos irreversíveis, a qual é uma poderosa ferramenta para a obtenção e validação de equações constitutivas, principalmente por se

apresentar de maneira clara, metodológica e consistente.

No presente trabalho, os resultados obtidos para os problemas unidimensionais, nos quais foi incluído o efeito do fechamento das microtrincas, mostraram-se bastante elucidativos pois permitem uma completa compreensão das principais características físicas representadas pela formulação matemática proposta.

Devido a falta de trabalhos que introduzam modelos de plasticidade não lineares e os aplique a casos bidimensionais como o da placa com furo, da não existência de soluções analíticas e ainda da não disponibilidade de ensaios para estes problemas é difícil de fazer algum tipo de comparação a não ser de caráter da evolução da frente plástica nos problemas bidimensionais. Quanto a evolução do dano em ambos os exemplos o dano crítico foi alcançado justamente no ponto de concentração de tensão máxima da geometria.

O algoritmo proposto nesta dissertação foi baseado no trabalho de Benallal et al (1988) e mostrou-se bastante satisfatório tanto para a solução do problema local quanto para o problema global.

Com relação a trabalhos futuros pretendemos:

- ★ Implementar o efeito do fechamento das microtrincas, dentro do escopo do método dos elementos finitos;
- ★ Considerar novos critérios de determinação do dano crítico, tais como os métodos baseados na ocorrência de localização;
- ★ Considerar modelos mais sofisticados tanto para as equações de evolução do dano quanto para a evolução do problema elastoplástico para carregamentos cíclicos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BATHE, K. J., **Finite Elements Procedures in Engineering Analysis**, New Jersey, Prentice-Hall, p. xiii + 735, 1982.

BENALLAL, A., BILLARDON, R., DOGHRI, I., An Integration Algorithm and the Corresponding Consistent Tangent Operator for Fully Coupled Elastoplastic and Damage Equations, **Communications in Applied Numerical Methods**, vol. 4, p.731-740, 1988.

BENALLAL, A., COMI, C., LEMAITRE, J., Critical Damage States at Crack Initiation, **Damage Mechanics Localization-ASME**, AMD-Vol. 142/MD-Vol.34, p. 13-23, 1992.

CAROL, I., RIZZI, E., A Unified Theory of Elastic Degradation and Damage Based on a Loading Surface, **International Journal Solids Structures**, vol. 31, p. 2835-2865, 1994.

CARVALHO, R. B., MATTOS, C., Simulação Numérica do Amolecimento em Treliças Elasto-Plásticas com Dano, **Anais do XII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica**, vol. 1, p. 37-40, Brasília, Brasil, 1993.

CHABOCHE, J. L., Time-Independent Constitutive Theories for Cyclic Plasticity, **International Journal of Plasticity**, vol. 2, no 2, p.149-189, 1986.

CHABOCHE, J. L., ROUSSELIER, G., On the Plastic and Viscoplastic Constitutive Equations - Part I and II, **Journal of Pressure Vessel Technology**, vol.105, p.153-164, 1983.

CHEN, W. F., HAN, D. J., **Plasticity for Structural Engineering**, New York, Springer-Verlag, p. xiii + 467, 1984.

COOK, R. D., MALKUS, D. S., PLESHA, M. E., **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**, 3rd Edition, New York, John Wiley & Sons, 1988.

COSTA, M. L. M., MATTOS, H. C., Some Remarks on the Modelling of Momentum and Energy Transfer in Rigid Solid-Fluid Mixtures, **Anais do XII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica**, vol. 1, p. 45-48, Brasília, Brasil, 1993.

DESAI, C. S., **Constitutive Laws for Engineering Materials with Emphasis on Geologic Materials**, New Jersey, Prentice-Hall, p. 468, 1984.

DESOYER, T., CORMERY, F., On Uniqueness and Localization in Elastic-Damage Materials, **International Journal Solids Structures**, vol. 31, p. 733-744, 1994.

FOGGIATTO, J. A., Análise Elastoplástica de Placas Semi-Espessas Sujeitas a Grandes Deflexões Utilizando o Método dos Elementos Finitos, **Dissertação de Mestrado**, UFSC, p. xiii + 87, 1997.

FUCHS, H. O., STEPHENS, R. I., **Metal Fatigue in Engineering**, New York, John Wiley & Sons, p. 318, 1980.

GERMAIN, P., **Cours de Mécanique des Milieux Continus**, Masson & Cie, Paris, 1973.

GERMAIN, P., NGUYEN, Q. S., SUQUET, P., Continuum Thermodynamics, **Journal of Applied Mechanics**, Transactions of the ASME, vol. 50, p.1010-1020, 1983.

GURTIN, M. E., **An Introduction to Continuum Mechanics**, New York, Academic Press, p. 264, 1981.

HANSEN, N. R., SCHREYER, H. L., A Thermodynamically Consistent Framework for Theories of Elastoplasticity Coupled with Damage, **International Journal Solids Structures**, vol. 31, p. 359- 389,1994.

HUGHES, T. R. H., **The Finite Element Method**, New Jersey, Prentice Hall International, p. 797, 1987.

KACHANOV, L. M., Time of Rupture Process Under Creep Conditions, **TVZ Akad. Nauk. S.S.R. Otd. Tech. Nauk.**, vol. 8, 1958.

KHAN, A. S., HUANG, S., **Continuum Theory of Plasticity**, New York, John Wiley & Sons, p. xi + 422, 1995.

KRAJČINOVIC, D., LEMAITRE, J., **Continuum Damage Mechanics - Theory and Applications, Courses and Lectures**, New York, Springer - Verlag, No. 295, p. 294, 1971.

LEMAITRE, J., A Continuous Damage Mechanics Model for Ductile Fracture, Art. Trans. ASME, **Journal of Engineering Materials and Technology**, vol.107/1, 1985.

LEMAITRE, J., How to use Damage Mechanics!, **Nuclear Engineering and Design Journal**, vol.80, 1984.

LEMAITRE, J., **A Course on Damage Mechanics**, Germany, Springer-Verlag, p. 209, 1992.

LEMAITRE, J., Micro-mechanics of Crack Initiation, **International Journal of Fracture**, vol.42, p.87-99, 1990.

LEMAITRE, J., CHABOCHE, J. L., **Mechanics of Solid Materials**, First paperback edition, Cambridge University Press, p. xxv + 556, 1994.

LEMAITRE, J., DOGHRI, I., Damage 90: a Post Processor for Crack Initiation, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 115, p. 197-232, 1994.

LEMAITRE, J., DUFAILY, J., Damage Measurements, **Engineering Fracture Mechanics**, vol.28, p.643-661, 1987.

LUBLINER, J., **Plasticity Theory**, New York, Macmillan Publishing Company, p. 490, 1990.

MALVERN, L. E., **Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium**, Prentice Hall, p. xiv + 713, 1969.

ORTIZ, M., POPOV, E. P., Accuracy and Stability of Integrations Algorithms for Elastoplastic Constitutive Equations, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol.21, p.1561-1576, 1985.

PATIO, J. G. S., Stability and Energy Minimization in Elasticity with Damage, **International Journal Solids Structures**, vol. 25, p. 1255-1266,1989.

ROBOTNOV, Y. N., Creep Rupture, Proc. XII, **Inter. Congres Appl. Mech.**, Stanford, Springer Berlin, 1969.

ROSA, E., Introdução ao Estudo da Fadiga em Componentes Mecânicos, **Apostila de Aula**, Publicação Interna do Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1994.

ROSSI, R., ALVES, M. K., Análise do Dano de Fadiga de Baixo Ciclo Considerando o Efeito do Fechamento de Microtrincas, **Anais do IX Sibrat**, Rio de Janeiro, 1996.

SAMPAIO, R., **VI Escola de Matemática Aplicada - Análise de Sistemas Físicos**, Laboratório Nacional de Computação Científica, Rio de Janeiro, 1985.

SIMO, J. C., JU, J.W., Strain- and Stress-Based Continous Damage Model - Part I and II, **International Journal Solids Structures**, vol. 23, p. 821-869,1987.

SIMO, J. C., TAYLOR, R. L., A Return Mapping Algorithm for Plane Stress Elastoplasticity, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 31, p. 649-670, 1986.

SZABÓ, B., BABUSKA, I., **Finite Element Analysis**, New York, Jonh Wiley & Sons, p. 368, 1991.

ZIENKIEWICZ, O.C., **The Finete Element Method**, 4rd edition, v. 1, New York, McGraw-Hill, p. xx + 648,1977.

Apêndice A

Provas

A densidade de entalpia de Gibbs $\rho\Psi^*(\boldsymbol{\sigma}, r, \boldsymbol{\alpha}, D)$ é dada por

$$\rho\Psi^*(\boldsymbol{\sigma}, r, \boldsymbol{\alpha}, D) = \frac{1}{2E(1-D)} \left[(1+\nu) \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \nu (\text{tr } \boldsymbol{\sigma})^2 \right] - R_\infty \left[r + \frac{1}{b} e^{-br} \right] - \frac{\gamma X_\infty}{3} \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha}. \quad (\text{A.1})$$

A lei de estado que relaciona o tensor deformação elástica $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ e o tensor tensão $\boldsymbol{\sigma}$ é

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \rho \frac{\partial \Psi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}}. \quad (\text{A.2})$$

Afim de incorporar o efeito de fechamento das microtrincas deve-se realizar o seguinte procedimento:

(i) - Decomposição da representação diagonal do tensor tensão, tensões principais, em uma parte negativa e em uma parte positiva. Denominando de $\boldsymbol{\sigma}_d$ o tensor diagonal podemos escrever

$$\boldsymbol{\sigma}_d = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

e utilizando os *parênteses* de Mac Auley definidos como

$$\langle x \rangle = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

então, a decomposição do tensor diagonal pode ser escrita como

$$\sigma_d = \begin{bmatrix} \langle \sigma_1 \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle \sigma_2 \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle \sigma_3 \rangle \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \langle -\sigma_1 \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle -\sigma_2 \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle -\sigma_3 \rangle \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

ou, em sua forma compacta

$$\sigma_d = \langle \sigma_d \rangle - \langle -\sigma_d \rangle. \quad (\text{A.6})$$

Os parênteses de Mac Auley possuem as seguintes propriedades:

$$a) \quad x = \langle x \rangle - \langle -x \rangle \quad (\text{A.7})$$

$$b) \quad \langle x \rangle \cdot \langle -x \rangle = 0 \quad (\text{A.8})$$

Destas duas propriedades é possível determinar que:

$$\text{tr } \sigma = \langle \text{tr } \sigma \rangle - \langle -\text{tr } \sigma \rangle^1 \quad (\text{A.9})$$

$$(\text{tr } \sigma)^2 = \langle \text{tr } \sigma \rangle^2 + \langle -\text{tr } \sigma \rangle^2 \quad (\text{A.10})$$

$$\sigma \cdot \sigma = \langle \sigma \rangle \cdot \langle \sigma \rangle + \langle -\sigma \rangle \cdot \langle -\sigma \rangle. \quad (\text{A.11})$$

(ii) - Partição do potencial de entalpia de Gibbs em duas partes, uma relacionada com o termo $\langle \sigma_d \rangle$, isto é, associada com a tração e a outra parte relacionada com $\langle -\sigma_d \rangle$, ou seja, associada com as tensões de compressão.

Afim de realizar esta partição, é necessário levar em consideração a diferenciação do módulo de elasticidade entre a tensão de tração e a tensão de compressão dada por

$$\tilde{E} = E(1 - D) \quad \text{para a tração,} \quad (\text{A.12})$$

$$\tilde{E} = E(1 - hD) \quad \text{para a compressão.} \quad (\text{A.13})$$

¹ Note que:
 $\langle \text{tr } \sigma \rangle \neq \text{tr } \langle \sigma \rangle$

Como resultado, o potencial de entalpia de Gibbs é escrito do seguinte modo

$$\begin{aligned} \rho\Psi^*(\sigma_d, r, \alpha, D) = & \frac{1}{2E(1-D)} \left[(1+\nu) \langle \sigma_d \rangle \cdot \langle \sigma_d \rangle - \nu \langle \text{tr } \sigma_d \rangle^2 \right] + \\ & + \frac{1}{2E(1-hD)} \left[(1+\nu) \langle -\sigma_d \rangle \cdot \langle -\sigma_d \rangle - \nu \langle -\text{tr } \sigma_d \rangle^2 \right] - (A.14) \\ & - R_\infty \left[r + \frac{1}{b} e^{-br} \right] - \frac{\gamma X_\infty}{3} \alpha \cdot \alpha \end{aligned}$$

Decomposição do tensor tensão:

O tensor tensão pode ser decomposto em duas formas:

$$/1/ \quad \sigma = \langle \sigma \rangle - \langle -\sigma \rangle, \text{ ou em componentes } \sigma_{ij} = \langle \sigma_{ij} \rangle - \langle -\sigma_{ij} \rangle.$$

$$/2/ \quad \sigma_d = \langle \sigma_d \rangle - \langle -\sigma_d \rangle.$$

Se σ_d é a representação diagonal do tensor σ , então $\exists \mathbf{Q} \in \text{Ort}$ tal que

$$\sigma_d = \mathbf{Q}^T \sigma \mathbf{Q} \quad (A.15)$$

na qual \mathbf{Q} é um tensor mudança de base ortogonal cuja as colunas são as componentes da nova base em relação a base original. Se \vec{e}_i são as bases originais, no sistema cartesiano, e \vec{v}_i são as novas bases formadas pelos autovetores ortonormalizados de σ pode-se escrever

$$\begin{aligned} \sigma &= \mathbf{Q} \sigma_d \mathbf{Q}^T \\ &= \mathbf{Q} (\langle \sigma_d \rangle - \langle -\sigma_d \rangle) \mathbf{Q}^T \\ &= \mathbf{Q} \langle \sigma_d \rangle \mathbf{Q}^T - \mathbf{Q} \langle -\sigma_d \rangle \mathbf{Q}^T. \end{aligned} \quad (A.16)$$

Entretanto, perceba que

$$\begin{aligned} \langle \sigma \rangle &= \langle \mathbf{Q} \sigma_d \mathbf{Q}^T \rangle \neq \mathbf{Q} \langle \sigma_d \rangle \mathbf{Q}^T \quad e \\ \langle -\sigma \rangle &= \langle -\mathbf{Q} \sigma_d \mathbf{Q}^T \rangle \neq \mathbf{Q} \langle -\sigma_d \rangle \mathbf{Q}^T. \end{aligned} \quad (A.17)$$

Como resultado temos que a forma /1/ e /2/ não são equivalentes. Logo, a escolha de decomposição /1/ não é ideal pois $\rho\Psi^*(\sigma, \bullet)$ não é invariante com relação a uma mudança

de base, isto é

$$\rho\Psi^*(\mathbf{Q}\sigma\mathbf{Q}^T, \bullet) \neq \rho\Psi^*(\sigma, \bullet). \quad (\text{A.18})$$

Queremos mostrar agora que a decomposição /2/ do tensor tensão é apropriada já que $\rho\Psi^*(\sigma, \bullet)$ é invariante com relação a uma mudança de base.

Se $\mathbf{Q} \in \text{Ort}$ é um elemento arbitrário de *Ort*, então mostraremos que os autovalores de σ serão os mesmos. Assim se \vec{v} é um autovetor arbitrário de σ e λ é o seu autovalor associado, temos que

$$\sigma \vec{v} = \lambda \vec{v}. \quad (\text{A.19})$$

Se

$$\sigma^* = \mathbf{Q}^T \sigma \mathbf{Q}, \quad (\text{A.20})$$

então

$$\sigma = \mathbf{Q}\sigma^*\mathbf{Q}^T \quad (\text{A.21})$$

$$\sigma \vec{v} = \mathbf{Q}\sigma^*\mathbf{Q}^T \vec{v} \quad (\text{A.22})$$

$$\sigma \vec{v} = \lambda \vec{v} \quad (\text{A.23})$$

$$\sigma^*\mathbf{Q}^T \vec{v} = \lambda \mathbf{Q}^T \vec{v}, \quad (\text{A.24})$$

chamando agora $\mathbf{Q}^T \vec{v} = \vec{w}$, temos

$$\sigma^* \vec{w} = \lambda \vec{w} \quad (\text{A.25})$$

logo λ um autovalor de σ .

Como resultado pode-se concluir que os autovalores de σ e de σ^* são os mesmos.

Conseqüentemente

$$\rho\Psi^*(\sigma, \bullet) = \rho\Psi^*(\sigma^*, \bullet) \quad \forall \mathbf{Q} \in \text{Ort} \quad (\text{A.26})$$

,isto é,

$$\rho\Psi^*(\sigma, \bullet) = \rho\Psi^*(\mathbf{Q}^T \sigma \mathbf{Q}, \bullet) \quad \forall \mathbf{Q} \in Ort \wedge \sigma \in Lin \quad (\text{A.27})$$

assim, $\rho\Psi^*(\sigma, \bullet)$ é uma função isotrópica com relação a σ .

Definição:

Uma função "multivalued" $G : Lin \rightarrow X$ é dita isotrópica se

$$\mathbf{Q}^T G(\mathbf{A}) \mathbf{Q} = G(\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q}) \quad \forall \mathbf{A} \in Lin \wedge \forall \mathbf{Q} \in Ort \quad (\text{A.28})$$

onde

$$\mathbf{Q}^T G(\mathbf{A}) \mathbf{Q} = \{f \mid f = \mathbf{Q}^T g \mathbf{Q}, g \in G(\mathbf{A})\}. \quad (\text{A.29})$$

Considere agora a função "multivalued"

$$\varepsilon^e \in \partial\rho\Psi^*(\sigma, \bullet), \quad (\text{A.30})$$

se $\partial\rho\Psi^*(\sigma, \bullet)$ é uma função isotrópica, então

$$\mathbf{Q}^T \partial\rho\Psi^*(\sigma, \bullet) \mathbf{Q} = \partial\rho\Psi^*(\mathbf{Q}^T \sigma \mathbf{Q}, \bullet) \quad \forall \mathbf{Q} \in Ort \wedge \forall \sigma \in Lin. \quad (\text{A.31})$$

Da definição acima temos que

$$/A/ \quad \mathbf{Q}^T \partial\rho\Psi^*(\sigma, \bullet) \mathbf{Q} = \{\mathbf{Q}^T \varepsilon^e \mathbf{Q} \mid \varepsilon^e \in \partial\rho\Psi^*(\sigma, \bullet)\} \quad (\text{A.32})$$

e

$$\begin{aligned} /B/ \quad \partial\rho\Psi^*(\mathbf{Q}^T \sigma \mathbf{Q}, \bullet) &= \{\widehat{\varepsilon}^e \mid \rho\Psi^*(\widehat{\sigma}, \bullet) \geq \partial\rho\Psi^*(\mathbf{Q}^T \sigma \mathbf{Q}, \bullet) + \widehat{\varepsilon}^e \cdot (\widehat{\sigma} - \mathbf{Q}^T \sigma \mathbf{Q})\} \\ &\forall \mathbf{Q} \in Ort \wedge \forall \widehat{\sigma} \in Lin. \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Sem perda de generalidade, dado um tensor $\widehat{\sigma}$ pode-se determinar $\overline{\sigma}$ tal que

$$\widehat{\sigma} = \mathbf{Q}^T \overline{\sigma} \mathbf{Q}, \quad (\text{A.34})$$

conseqüentemente

$$\rho\Psi^* \left(\mathbf{Q}^T \bar{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{Q}, \bullet \right) \geq \rho\Psi^* \left(\mathbf{Q}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{Q}, \bullet \right) + \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}^e \cdot \mathbf{Q}^T (\bar{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{Q}, \quad (\text{A.35})$$

usando agora a identidade

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \text{tr} \left(\mathbf{A}^T \mathbf{B} \right) \quad (\text{A.36})$$

pode-se determinar que

$$\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}^e \cdot \mathbf{Q}^T (\bar{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{Q} = \text{tr} \left[\left(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}^e \right)^T \mathbf{Q}^T (\bar{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{Q} \right] \quad (\text{A.37})$$

mas como $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \left(\boldsymbol{\varepsilon}^e \right)^T$, temos

$$\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}^e \cdot \mathbf{Q}^T (\bar{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{Q} = \text{tr} \left(\boldsymbol{\varepsilon}^e \mathbf{Q}^T (\bar{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{Q} \right). \quad (\text{A.38})$$

Entretanto, da identidade

$$\text{tr} (\mathbf{ABC}) \equiv \text{tr} (\mathbf{CAB}) \equiv \text{tr} (\mathbf{BCA}) \quad (\text{A.39})$$

é possível escrever ainda

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}^e \cdot \mathbf{Q}^T (\bar{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{Q} &= \text{tr} \left(\mathbf{Q} \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}^e \mathbf{Q}^T (\bar{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}) \right) \\ &= \left(\mathbf{Q} \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}^e \mathbf{Q}^T \right)^T \cdot (\bar{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}) \\ &= \mathbf{Q} \boldsymbol{\varepsilon}^e \mathbf{Q}^T \cdot (\bar{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}) \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

conseqüentemente

$$\begin{aligned} \partial \rho \Psi^* \left(\mathbf{Q}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{Q}, \bullet \right) &= \left\{ \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}^e \mid \rho \Psi^* \left(\mathbf{Q}^T \bar{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{Q}, \bullet \right) \geq \rho \Psi^* \left(\mathbf{Q}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{Q}, \bullet \right) + \mathbf{Q} \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}^e \mathbf{Q}^T \cdot (\bar{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}) \right\} \\ \forall \mathbf{Q} &\in \text{Ort} \wedge \forall \bar{\boldsymbol{\sigma}} \in \text{Lin}, \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

escrevendo agora $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\varepsilon}^e \mathbf{Q}$ temos

$$\partial \rho \Psi^* \left(\mathbf{Q}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{Q}, \bullet \right) = \left\{ \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\varepsilon}^e \mathbf{Q} \mid \rho \Psi^* \left(\mathbf{Q}^T \bar{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{Q}, \bullet \right) \geq \rho \Psi^* \left(\mathbf{Q}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{Q}, \bullet \right) + \boldsymbol{\varepsilon}^e \cdot (\bar{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}) \right\}. \quad (\text{A.42})$$

Como $\rho\Psi^*(\boldsymbol{\sigma}, \bullet)$ é uma função isotrópica com respeito a $\boldsymbol{\sigma}$, temos

$$\rho\Psi^*(\mathbf{Q}^T \bar{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{Q}, \bullet) = \rho\Psi^*(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \bullet) \quad (\text{A.43})$$

e

$$\rho\Psi^*(\mathbf{Q}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{Q}, \bullet) = \rho\Psi^*(\boldsymbol{\sigma}, \bullet). \quad (\text{A.44})$$

Então, finalmente chegamos a

$$\partial\rho\Psi^*(\mathbf{Q}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{Q}, \bullet) = \left\{ \mathbf{Q}^T \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}^e \mathbf{Q} \mid \rho\Psi^*(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \bullet) \geq \rho\Psi^*(\boldsymbol{\sigma}, \bullet) + \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}^e \cdot (\bar{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}) \right\} \quad (\text{A.45})$$

$$\forall \mathbf{Q} \in \text{Ort} \wedge \forall \bar{\boldsymbol{\sigma}} \in \text{Lin}.$$

Porém, esta ultima expressão é equivalente à:

$$\partial\rho\Psi^*(\mathbf{Q}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{Q}, \bullet) = \left\{ \mathbf{Q}^T \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}^e \mathbf{Q} \mid \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}^e \in \partial\rho\Psi^*(\boldsymbol{\sigma}, \bullet) \right\} \equiv /A/. \quad (\text{A.46})$$

Como resultado

$$\partial\rho\Psi^*(\mathbf{Q}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{Q}, \bullet) = \mathbf{Q}^T \partial\rho\Psi^*(\boldsymbol{\sigma}, \bullet) \mathbf{Q}, \quad (\text{A.47})$$

o que permite-nos concluir que a função "multivalued"

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e \in \partial\rho\Psi^*(\boldsymbol{\sigma}, \bullet) \quad (\text{A.48})$$

é uma função isotrópica. Este resultado implica que

$$\mathbf{Q}^T \boldsymbol{\varepsilon}^e \mathbf{Q} \in \partial\rho\Psi^*(\mathbf{Q}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{Q}, \bullet) \quad \forall \mathbf{Q} \in \text{Ort}. \quad (\text{A.49})$$

Considerando agora um \mathbf{Q} tal que

$$\boldsymbol{\sigma}_d = \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{Q} \quad (\text{A.50})$$

onde $\boldsymbol{\sigma}_d$ é a representação diagonal do tensor $\boldsymbol{\sigma}$, temos

$$\mathbf{Q}^T \boldsymbol{\varepsilon}^e \mathbf{Q} \in \partial\rho\Psi^*(\boldsymbol{\sigma}_d, \bullet). \quad (\text{A.51})$$

Proposição (Mattos, Fremond and Mamiya):

Porém de Mattos et al temos que:

Seja $G : \mathbf{L} \rightarrow X$, $\mathbf{L} \subset \text{SymLin}$, uma função isotrópica. Então todo autovetor de $\mathbf{A} \in \mathbf{L}$ é um autovetor de $G(\mathbf{A})$. Conseqüentemente,

$$\mathbf{Q}^T \boldsymbol{\varepsilon}^e \mathbf{Q} = \boldsymbol{\varepsilon}_d^e. \quad (\text{A.52})$$

O que nos permite escrever:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_d^e \in \partial \rho \Psi^* (\boldsymbol{\sigma}_d, \bullet). \quad (\text{A.53})$$

Como $\rho \Psi^* (\boldsymbol{\sigma}_d, \bullet)$ é diferenciável obtemos:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_d^e = \nabla \rho \Psi^* (\boldsymbol{\sigma}_d, \bullet). \quad (\text{A.54})$$