

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINĀ
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**UMA METODOLOGIA PARA SIMULAÇÃO NUMÉRICA
TRIDIMENSIONAL DE RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO
UTILIZANDO MODELO BLACK-OIL E
FORMULAÇÃO EM FRAÇÕES MÁSSICAS**

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE
SANTA CATARINA PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM
ENGENHARIA MECÂNICA

ADALBERTO ROMALINO DA CUNHA

FLORIANÓPOLIS, MAIO DE 1996

**UMA METODOLOGIA PARA SIMULAÇÃO NUMÉRICA
TRIDIMENSIONAL DE RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO
UTILIZANDO MODELO BLACK-OIL E
FORMULAÇÃO EM FRAÇÕES MÁSSICAS**

ADALBERTO ROMALINO DA CUNHA

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO
DO TÍTULO DE MESTRE EM ENGENHARIA ESPECIALIDADE
ENGENHARIA MECÂNICA, ÁREA DE CONCENTRAÇÃO
ENGENHARIA E CIÊNCIAS TÉRMICAS,
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO CURSO DE
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA.

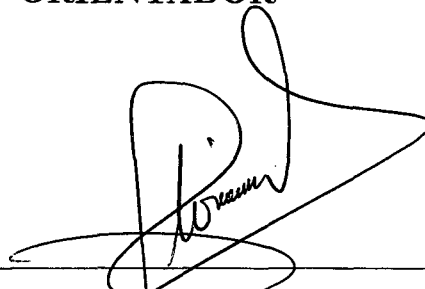


Prof. ABELARDO ALVES DE QUEIROZ, Ph.D.
COORDENADOR DO CURSO

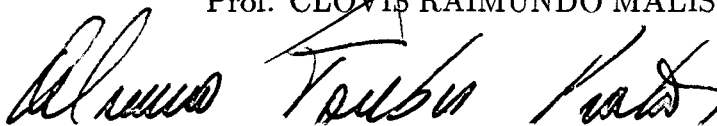


Prof. ANTONIO FABIO CARVALHO DA SILVA, Dr. Eng. Mec.
ORIENTADOR

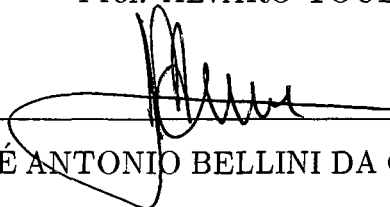
BANCA EXAMINADORA



Prof. CLOVIS RAIMUNDO MALISKA, Ph.D.



Prof. ÁLVARO TOUBES PRATA, Ph.D.



Prof. JOSÉ ANTONIO BELLINI DA CUNHA NETO, Dr.

Este trabalho é dedicado aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

Aos contribuintes brasileiros que através do CNPq financiaram este trabalho.

Ao Prof. Antonio Fábio Carvalho da Silva pela orientação e dedicação empregadas em seus ensinamentos.

Ao Prof. Clovis Raimundo Maliska pela orientação e suporte proporcionados.

Ao Prof. Francisco Marcondes pela atenção e conhecimentos transmitidos.

Ao ilustre mestre e grande amigo Luciano Amaury dos Santos, por ser uma fonte de motivação das coisas sérias e verdadeiras, e pelos constantes e inestimáveis auxílios prestados.

Ao amigo Clovis R. Maliska Jr. pelos seus fantásticos programas gráficos, colocados sempre com muita presteza a disposição dos membros do SINMEC.

Ao amigo João Flávio V. de Vasconcellos pelas correções iniciais da dissertação e ensinamentos transmitidos em relação ao editor de texto utilizado.

Ao amigo Marcos Antonio do Livramento pelo espetacular gerenciamento da rede de computadores do SINMEC.

Ao mestre Axel Dihlmann pela educação e atenção com que sempre nos acolhe.

À Ana Lucia pela paciência com que sempre me atendeu.

Aos demais amigos e professores do Depto. de Eng. Mecânica pelo excelente ambiente de convívio.

Sumário	v
Resumo	vii
Abstract	viii
Lista de Figuras	ix
Lista de Tabelas	xiii
Simbologia	xiv
1. Introdução	1
1.1 - Preliminares	1
1.2 - Processos de Exploração de Petróleo	4
1.3 - Aspectos Numéricos na Simulação de Reservatórios	6
1.3.1 - Malhas Utilizadas na Discretização de Reservatórios	6
1.3.2 - Formulações Utilizadas	8
1.3.3 - Métodos de Linearização das Equações Discretizadas	9
1.4 - Objetivos e Organização do Trabalho	11
2. Formulação Matemática	14
2.1 - Introdução	14
2.2 - Modelo Composicional	14
2.2.1 - Algumas definições preliminares	14
2.2.2 - Equação da Conservação da Massa	16
2.3 - Modelo Black-Oil Generalizado	18
2.3.1 - Fatores Volume de Formação e Solubilidade	19
2.4 - Modelo Black-Oil Padrão	21
2.4.1 - Modelo Black-Oil Padrão: Formulação em Saturação	21
2.4.2 - Cálculo da Solubilidade, R_s	23
2.4.3 - Modelo Black-Oil Padrão: Formulação em Frações Mássicas	25
3. Discretização das Equações Governantes	27
3.1 - Introdução	27
3.2 - Discretização para a Formulação em Saturação	27
3.2.1 - Metodologia IMPES	29
3.2.2 - Metodologia Totalmente Implícita	31
3.3 - Discretização para a Formulação em Frações Mássicas	35
3.3.1 - Processo de derivação das funções residuais	47
4. Aplicação das Condições de Contorno	53
4.1 - Introdução	53
4.2 - Esquema de Tratamento das Falhas Geológicas - Desenvolvimento de uma Equação Geral	53

4.2.1 - Procedimento de obtenção dos coeficientes F 's.	54
4.3 - Modelo de Poço	58
4.3.1 - Cálculo do Raio Equivalente, r^0	61
4.4 - Relação Entre Termos Fonte/Sorvedouro e Pressão de Fundo de Poço	63
4.5 - Condições de Contorno nos Poços	66
4.5.1 - Pressão de Fundo de Poço Prescrita	67
4.5.2 - Vazão de Água Prescrita nas Condições de Superfície	67
4.5.3 - Vazão de Óleo Prescrita nas Condições de Superfície	67
4.5.4 - Vazão de Gás Prescrita nas Condições de Superfície	69
4.5.5 - Vazão Total Prescrita nas Condições de Superfície	69
5. Descrição da Rotina de <i>Flash</i>	70
5.1 - Introdução	70
5.2 - Rotina de <i>Flash</i> para o Modelo <i>Black-Oil</i> Padrão	70
5.3 - Uma Observação Importante	75
6. Aspectos Numéricos Relevantes	76
6.1 - Introdução	76
6.2 - Considerações a Respeito das Derivadas Numéricas	76
6.3 - Considerações a Respeito da Aplicação do Esquema UDS (<i>upwind</i>)	77
6.4 - Estrutura da Matriz Jacobiana e Procedimento Iterativo de Solução	80
6.5 - Avaliação da Convergência no Método de Newton	84
7. Resultados e Discussões	85
7.1 - Introdução	85
7.2 - Resultados Bidimensionais Bifásicos (água/óleo)	85
7.2.1 - Comparações com Yanosik e McCracken	86
7.2.2 - Comparações com Palagi	94
7.2.3 - Comparações com Marcondes	96
7.3 - Caso Tridimensional Bifásico (água/óleo)	111
7.4 - Caso Tridimensional Trifásico	115
8. Conclusões	120
Referências Bibliográficas	122
A. Condições de Contorno nos Poços Baseadas nas Mobilidades	127
A.1 - Vazão de Água Prescrita	128
A.2 - Vazão de Óleo Prescrita	128
A.3 - Vazão de Gás Prescrita	129
A.4 - Vazão de Líquido Prescrita	129
A.5 - Vazão Total Prescrita	130
B. Deduções de Expressões da Rotina de <i>Flash</i>	131

O presente trabalho descreve uma metodologia para o desenvolvimento de um simulador tridimensional de reservatórios de petróleo empregando coordenadas curvilíneas não-ortogonais. As equações de balanço são escritas na formulação em frações mássicas para escoamentos multifásicos a multicomponentes, posteriormente sendo simplificadas e aplicadas ao modelo *black-oil* trifásico (água, óleo e gás). O método dos volumes finitos é empregado para integração das equações diferenciais e obtenção das equações aproximadas. O método de Newton é utilizado para linearização do conjunto de equações algébricas (aproximadas) não-lineares. Resultados bi e tridimensionais são apresentados e comparados com outros da literatura.

Abstract

This work addresses a methodology for the development of a three-dimensional petroleum reservoir simulator using non-orthogonal curvilinear coordinates. The balance equations are written in a mass fraction formulation for multiphase flows, with multi-components in each phase. These equations are then simplified to obtain the three-phase black-oil model (water, oil and gas). The finite volume method is applied in the integration of the differential equations to obtain the approximate equations. The Newtons' method is use for the linearization of the non-linear equations set. Two and three-dimensional results are presented and compared with others from the literature.

Lista de Figuras

1.1.	Reservatório típico de petróleo.	2
1.2.	Esquema da estrutura porosa.	3
1.3.	Fluxograma da simulação computacional.	10
2.1.	Definição de B^o e R^{go}	19
2.2.	Curva de R_s em função de P	23
3.1.	Volume de controle P e seus vizinhos.	28
3.2.	Domínios físico e transformado.	36
3.3.	Volumes presentes no esquema numérico.	39
3.4.	Volume de controle elementar tridimensional.	40
4.1.	Linhas coordenadas passando por falhas geológicas.	54
4.2.	Plano computacional γ constante.	55
4.3.	Falha geológica alcançando a face norte do volume de controle P.	56
4.4.	a) Escoamento radial b) Comportamento logarítmico da pressão	60
4.5.	Volume de controle com poço.	62
4.6.	Representação de um poço.	64
4.7.	Vazão de água prescrita nas condições de superfície	68
6.1.	Sentido dos fluxos das fases numa interface.	78

6.2.	Exemplo de uma discretização com 2 poços	81
6.3.	Estrutura da matriz correspondente a Fig. 6.2.	81
7.1.	Escoamento unidimensional de uma frente de deslocamento.	86
7.2.	Perfis de saturação de água referentes ao escoamento indicado na Fig. 7.1.	87
7.3.	Curvas de fluxo fracionário, f^w , representando deslocamento tipo pistão.	88
7.4.	Configuração <i>five-spot</i> num campo de petróleo.	89
7.5.	Malhas diagonais e paralelas.	89
7.6.	Malha curvilínea utilizada para a discretização da configuração de 1/4 de <i>five-spot</i>	90
7.7.	Volume de óleo recuperado - Comparação com [45] utilizando várias malhas.	92
7.8.	Volume de óleo recuperado - Comparação com [45] e [29].	93
7.9.	Iso-saturações $S^w = 0.9$ para diversos VPI.	94
7.10.	Volume de óleo recuperado $M = 10$ - Comparação com Palagi [29]	95
7.11.	Volume de óleo recuperado $M = 50$ - Comparação com Palagi [29]	95
7.12.	Malha Generalizada (21×36).	97
7.13.	Malha de Voronoi hexagonal [23].	97
7.14.	Malha de Voronoi hexagonal-híbrida [23].	98
7.15.	Recuperação de óleo.	99
7.16.	Variação de pressão no bloco produtor.	100

7.17.	Isocurvas de saturação após 0,58 VPI.	101
7.18.	Reservatório de geometria irregular - 2 ^a comparação com Marcondes [23].	101
7.19.	Comportamento das curvas de permeabilidades relativas.	103
7.20.	Malhas generalizadas.	104
7.21.	Malhas de Voronoi (Marcondes [23]).	104
7.22.	Recuperação de óleo no poço produtor 1.	104
7.23.	Pressão no poço produtor 1.	105
7.24.	Recuperação de óleo no poço produtor 4.	106
7.25.	Pressão no poço produtor 4.	106
7.26.	Recuperação de óleo no poço produtor 5.	107
7.27.	Pressão no poço produtor 5.	107
7.28.	Variação das localizações dos poços nas malhas generalizadas.	108
7.29.	Variação das localizações dos poços em duas malhas de Voronoi hexagonais.	108
7.30.	Posições do poço: P _C → Posição correta; P _U → Posição utilizada pelo simulador.	109
7.31.	Variação da posição do poço com o refino da malha.	110
7.32.	Malha tridimensional em perspectiva.	111
7.33.	Vista superior da malha e falha geológica em destaque.	112
7.34.	Curva de recuperação total de óleo.	113
7.35.	Iso-saturações $S^w = 0,4$ e $S^w = 0,6$, após 0,2 VPI.	113

7.36.	Iso-saturações $S^w = 0,4$ e $S^w = 0,6$, após 0,6 VPI.	114
7.37.	Vetores velocidade após 0,6 VPI.	114
7.38.	Paralelepípedo deformado. Malha e linha onde são medidas as saturações da Fig. 7.39	116
7.39.	Saturações das três fases após 0,3 VPI.	117
7.40.	Paralelepípedo deformado. Iso-saturações após 0,10 VPI.	118
7.41.	Paralelepípedo deformado. Iso-saturações após 0,30 VPI.	118
7.42.	Paralelepípedo deformado. Iso-saturações após 0,70 VPI.	119

Lista de Tabelas

7.1.	Dados do Problema para o caso tipo pistão.	91
7.2.	Dados físicos e geométricos - 1 ^a comparação com Marcodes [23]	98
7.3.	Permeabilidades relativas	99
7.4.	Coordenadas e Vazões Iniciais dos Poços	102
7.5.	Dados físicos e geométricos - 2 ^a comparação com Marcodes [23]	103
7.6.	Dados físicos e geométricos - Caso do paralelepípedo deformado	116

Simbologia

A	- Coeficiente de Equações Algébricas, Eq. (3.7) - Matriz jacobiana, Eq. (3.19) - Área transversal, Eq. (4.19)
B^p	- Fator volume de formação da fase p
c^p	- Compressibilidade da fase p
c^r	- Compressibilidade da rocha
d	- Distância entre o centro do volume P e o centro do volume considerado
D_i	- Termos definidos na obtenção das equações em coordenadas generalizadas e que representam a difusão da propriedade em consideração
f^w	- Fluxo fracionário da água
F	- Termo fonte, Eq. (3.7) - Vetor de funções residuais, Eq. (3.19), Eq. (3.103) - Coeficientes de falha, Eq. (3.44) - Função resíduo, Eq. (3.62)
g	- Aceleração da gravidade
G_i	- Termo proveniente de D_i , conforme definição (i) do item 3.4
h	- Altura (ou profundidade) do reservatório
J	- Jacobiano da transformação de coordenadas
k	- Permeabilidade absoluta
k^r	- Permeabilidade relativa
M	- Massa da mistura, Eq. (2.2) - Razão de viscosidades, Eq. (7.3)
M^c	- Massa do componente c
M^p	- Massa da fase p

M^{cp}	- Massa do componente c na fase p
m^p	- fluxo mássico da fase p
\tilde{m}^p	- fluxo mássico da fase p por unidade de volume de reservatório
P^p	- Pressão da fase p
P^{cow}	- Pressão capilar entre as fases água e óleo
P^{cog}	- Pressão capilar entre as fases gás e óleo
P	- Pressão da fase óleo
q^p	- Vazão volumétrica da fase p nas condições de reservatório por unidade de volume de reservatório
\hat{q}^p	- Vazão volumétrica da fase p nas condições de superfície por unidade de volume de reservatório
Q^p	- Vazão volumétrica da fase p nas condições de superfície
r^w	- Raio do poço
r^0	- Raio equivalente de poço
R^{cp}	- Solubilidade do componente c na fase p
S^p	- Saturação da fase p
S^{or}	- Saturação residual da fase óleo
S^{iw}	- Saturação inicial da fase água
S^{io}	- Saturação inicial da fase óleo
S^{ig}	- Saturação inicial da fase gás
t	- Tempo
u^p	- Velocidade da fase p
VPI	- Volume poroso deslocável injetado
VPOR	- Volume poroso de óleo recuperável
V	- Volume
V^p	- Volume da fase p nas condições P e T de reservatório
V^{cp}	- Volume do componente c que é liberado da fase p nas condições padrões
V^{pp}	- Volume do componente p (ou fase p) nas condições padrões
x	- Coordenada cartesiana

X	- Variável do problema na equação de Newton, Eq. (2.1)
X^{cp}	- Fração mássica do componente c na fase p
y	- Coordenada cartesiana
z	- Coordenada cartesiana
Z^c	- Fração mássica global do componente c
WI	- Índice de poço

Gregos

α^p	- Fração mássica da fase p
Δx	- Dimensão do volume de controle na direção x
Δy	- Dimensão do volume de controle na direção y
Δz	- Dimensão do volume de controle na direção z
$\Delta \xi$	- Dimensão do volume de controle na direção ξ
$\Delta \eta$	- Dimensão do volume de controle na direção η
$\Delta \gamma$	- Dimensão do volume de controle na direção γ
Δt	- Passo de tempo
ΔV	- Volume Discreto
λ^p	- Mobilidade da fase p
ϕ	- Porosidade
Φ^p	- Potencial da fase p
μ^p	- Viscosidade da fase p
γ^p	- Peso específico da fase p
ρ^p	- Massa específica da fase p
ρ^m	- Massa específica da mistura
$f\xi, f\eta, f\gamma$	- Parâmetros presentes nas definições dos coeficientes de falha
ξ	- Coordenada no plano transformado
η	- Coordenada no plano transformado
γ	- Coordenada no plano transformado

Subíndices

e, w, n, s, t, b	- Interfaces do volume de controle P
--------------------	--------------------------------------

E, W, N, S, T, B, etc

- Pontos centrais dos volumes de controles vizinhos ao Volume P

NB

- Vizinhança do volume P

STC

- Condições de superfície (standard Conditions)

Superíndices

w

- Água ou poço

o

- Óleo

g

- Gás

wf

- Fundo de poço

c

- Componente

p

- Fase

k

- Nível iterativo do ciclo de Newton

Introdução

1.1 - Preliminares

A decisão sobre a viabilidade de exploração de uma bacia petrolífera depende da análise de vários parâmetros importantes como: tempo de produção da bacia, capacidade de produção, tipo de fluido presente no reservatório, estrutura geológica da bacia, técnicas/meios operacionais necessários para realizar a recuperação.

A implantação ou não de um complexo de engenharia de exploração de petróleo envolve custos elevadíssimos e, portanto, deve ser fundamentada em bases concretas. Assim, um prévio estudo sobre a viabilidade econômica e operacional da bacia é necessário. A análise experimental completa de uma bacia petrolífera torna-se evidentemente muito difícil, além de envolver altos investimentos. Fatos tais como dimensões/características geométricas, estrutura geológica, condições iniciais e operacionais do reservatório, etc, são realmente difíceis, se não impossíveis, de serem reproduzidos em laboratório. É exatamente neste estudo preliminar da bacia petrolífera que a simulação numérica tem grande importância, tornando-se, portanto, uma ferramenta fundamental na análise de viabilidade e no gerenciamento de reservatórios de petróleo. Atualmente, todas companhias de petróleo do mundo fazem uso exaustivo desta poderosa ferramenta.

Segundo Ewing [12], existem quatro estágios a serem seguidos para realizar a simulação numérica:

1. *Modelação física* - descreve a essência do fenômeno.
2. *Formulação matemática* - é a descrição matemática do modelo físico.
3. *Estabelecimento das propriedades do modelo matemático* - existência, unicidade, e regularidade da solução para originar um modelo numérico que seja estável.

4. *Elaboração do programa computacional* - o programa deve ter desempenho eficiente, necessário na computação do método numérico.

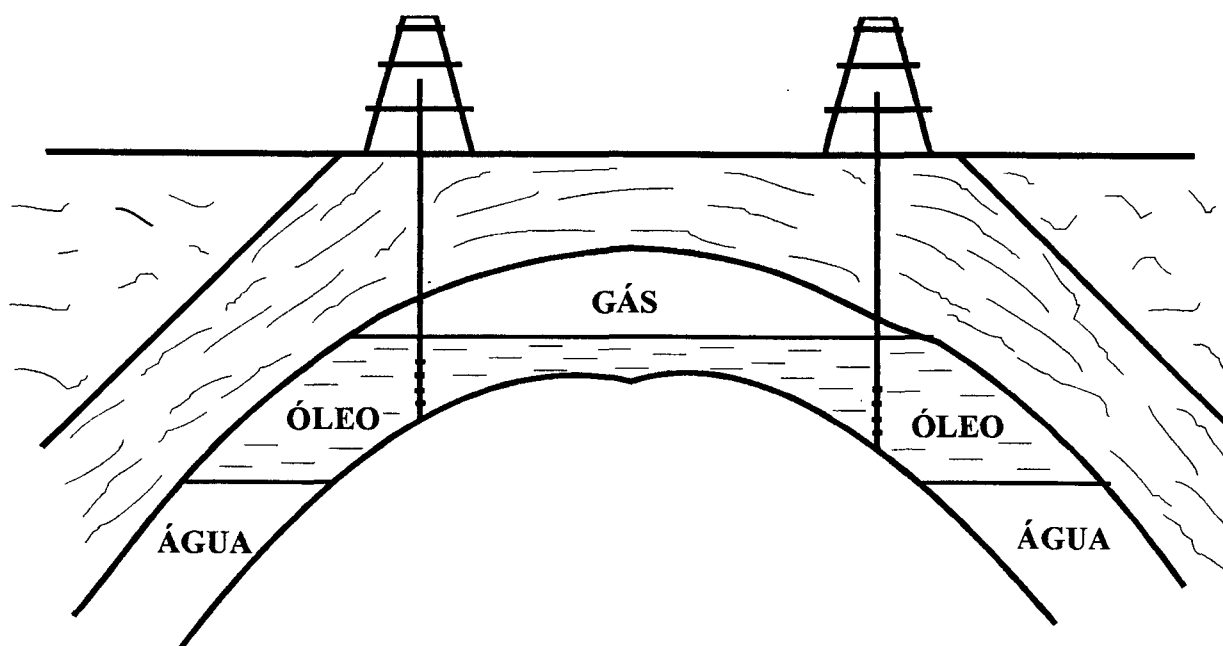


Fig. 1.1 - Reservatório típico de petróleo.

Fisicamente, o fenômeno em estudo consiste no escoamento multifásico a multicomponentes em meio poroso. Sabe-se que, em reservatórios de petróleo, o óleo (petróleo) não se encontra isolado, isto é, no subsolo de um reservatório normalmente coexistem três fases (fase água, fase óleo e fase gás), como pode-se ver na Fig. 1.1. Além disso, estas fases podem conter mais de um componente (substância). Também, não se deve imaginar o petróleo (e todas as fases) estando contido em bolsões vazios no subsolo. Em geral, como ilustrado Fig. 1.2, água, óleo e gás estão impregnados em microporos de solo rochoso como arenito [12], e o escoamento através da rocha só ocorre sob a influência de grandes diferenciais de pressão. Conforme já mencionado, é difícil fazer a análise experimental de um reservatório de petróleo pois o escoamento no meio poroso envolve muitos fenômenos físicos complexos. Uma alternativa para o estudo do problema é a modelagem matemática. Para tanto, toda descrição geométrica/geológica do reservatório deve ser conhecida. Por exemplo, devem ser feitas definições em relação às superfícies geométricas que delimitam o reservatório, e também das superfícies que constituem as falhas estruturais

(falhas geológicas). Entretanto, as técnicas empregadas para definir tais superfícies contém imprecisões, de modo que existem incertezas na prescrição geométrica do reservatório.

As propriedades que caracterizam o meio poroso como porosidade, compressibilidade, condutibilidade térmica, calor específico, densidade, permeabilidade absoluta, etc, são obtidas por amostragem no reservatório (nos poços exploratórios), e portanto, não se tem de forma plena e rigorosa a caracterização completa do domínio em estudo. Porém, a existência de tal deficiência, na caracterização das propriedades do reservatório, não impede a elaboração de modelos que tentam representar o fenômeno do problema. A medida que as técnicas de caracterização do reservatório são aprimoradas mais realística tornar-se-á a modelagem do fenômeno físico.

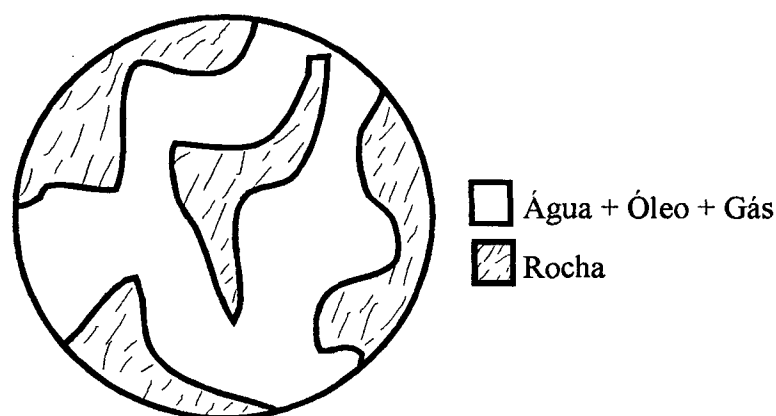


Fig. 1.2 - Esquema da estrutura porosa.

Do exposto, observa-se que a tarefa de simular numericamente uma bacia petrolífera, levando em conta todos os detalhes envolvidos, é árdua. Atualmente, muitos tópicos de pesquisa são investigados na “ciência” de simulação numérica de reservatórios de petróleo [4], podendo-se destacar, entre eles, o desenvolvimento de novas formulações e metodologias numéricas, métodos para linearização das equações diferenciais governantes, métodos de resolução de sistemas lineares associados, modelagem de poços, processos de inicialização de reservatórios, modelos composicionais, etc.

Existem grupos, prestadores de consultoria, especializados na elaboração de *softwares* comerciais para simulação de reservatórios de petróleo. Os códigos computacionais comerciais, em geral, têm características particulares, alguns, por exemplo, simulam escoamentos

realmente muito complexos (escoamentos multifásicos a multicomponentes), outros permitem simular escoamentos para óleos que apresentam comportamento não-newtoniano, e alguns, apenas simulam o chamado escoamento *black-oil*, que será abordado neste trabalho. Como exemplo de simulador comercial para escoamentos *black-oil* pode-se citar o SIMBEST I [39].

1.2 - Processos de Exploração de Petróleo

Conforme Mezzomo [24], a eficiência do processo extrativo (chamado fator de recuperação) resulta do produto de três eficiências independentes, a saber: eficiência de varredura vertical, de varredura superficial, e de deslocamento. As eficiências de varredura representam o acesso ao reservatório pelo fluido deslocante (água, gás, etc). A eficiência de varredura vertical é associada à heterogeneidade nesta direção e a superficial está relacionada à malha (configuração) de poços e razão de mobilidades entre fluidos deslocante e deslocado. Finalmente, a eficiência de deslocamento é associada a fenômenos a nível de poro, e está relacionada ao balanço de forças viscosas e capilares. Ainda segundo Mezzomo [24], o fator de recuperação não evoluiu consideravelmente desde a década de 60 devido à escassez de desenvolvimento tecnológico significativo no que tange à exploração de petróleo.

Descrições detalhadas sobre os principais métodos de exploração de petróleo podem ser encontradas em [24] e [12]. Estes métodos, conforme será visto a seguir, estão relacionados com as subdivisões das eficiências acima relacionadas.

Cronologicamente, a técnica de recuperação mais elementar é a recuperação natural, sendo mais conhecida como recuperação primária. Normalmente esta técnica é aplicada durante um curto período de tempo. Na recuperação primária faz-se perfurações (poços) em determinadas regiões do reservatório por onde o óleo é extraído. A recuperação é promovida pelo estado inicial de pressão existente no interior do reservatório. Esta técnica pode deixar de 70 à 80% do óleo disponível no reservatório [12].

O método secundário de recuperação se dá pela injeção de água (ou gás) para o interior do reservatório. O objetivo é manter elevadas as pressões e taxas de escoamento inundando o meio poroso com o fluido deslocante. A injeção do fluido deslocante promove

a movimentação de óleo em direção aos poços produtores. Geralmente, mesmo após a aplicação deste processo mais de 50% do óleo disponível permanece no reservatório, devido à diferença entre viscosidades do fluido deslocante e deslocado e devido a efeitos de tensão superficial. Em geral, o óleo confinado no reservatório apresenta elevada viscosidade (baixa mobilidade), quando comparada com a viscosidade (mobilidade) da água (ou gás). Durante o processo de recuperação secundária é comum o aparecimento dos chamados “dedos” (em inglês, *fingers*), Ewing [12], Yanosik e McCracken [45], Mota [25], que são oriundos, fundamentalmente, da grande diferença de mobilidades entre as fases água e óleo. Os “dedos” nada mais são do que a formação de canais preferenciais onde a água escoar mais facilmente. Quando existe a formação destes canais ocorre o aparecimento de água mais rapidamente nos poços produtores, o que significa menor produção de óleo.

Os métodos terciários de recuperação ou métodos especiais de recuperação (MER), geralmente, envolvem processos químicos ou térmicos e visam aumentar o fator de recuperação. Certamente, dentre os processos de recuperação terciária, os mais difundidos são os chamados métodos de recuperação térmica. Os processos térmicos mais conhecidos são: injeção de água quente ou vapor d’água, combustão *in situ*, e passagem de corrente elétrica. Estes métodos objetivam, principalmente, reduzir a viscosidade do óleo de modo a aumentar sua mobilidade, isto diminui a razão de mobilidades entre fluidos deslocante e deslocado, minimizando a formação de “dedos”. Desta forma, a redução da viscosidade do óleo influi diretamente no aumento do fator de recuperação. Entretanto, deve-se ressaltar que a elevação da temperatura no interior do reservatório, via injeção de fluido não é fácil, pois muitas perdas de calor ocorrem. Em reservatórios que contém hidrocarbonetos na forma de carvão, piche ou óleo pastoso, costuma-se promover a combustão *in situ*, que é a transformação destes hidrocarbonetos em estados no qual podem ser recuperados via poços produtores. O calor gerado na combustão possibilita a recuperação de uma parcela dos hidrocarbonetos em detrimento de outras. A combustão *in situ* é mantida pela injeção de oxigênio para o interior do reservatório. Métodos miscíveis de recuperação são usados quando injeta-se um gás (geralmente dióxido de carbono) que é solúvel na fase óleo, de modo a reduzir a viscosidade desta fase. Então, a produção processa-se por uma mistura que escoar em uma única fase. Os métodos químicos de recuperação podem ser vistos como uma evolução do método de recuperação secundária. Eles consistem, basicamente, na adição de substâncias na água injetada. Por exemplo, pode-se adicionar polímeros na fase

aquosa com o objetivo de aumentar a viscosidade da mesma, e portanto, reduzir a razão de mobilidade do sistema água/óleo, o que aumenta a eficiência de varredura, pois a formação de dedos é reduzida. Também pode-se adicionar soluções alcalinas na água, que reduzem o efeito de tensão interfacial do sistema água/óleo, aumentando a eficiência de deslocamento. Pode-se, ainda, adicionar surfactantes ou detergentes na fase água com o objetivo de reduzir os efeitos de tensão superficial, permitindo que o óleo escoe por poros pequenos. Do exposto, pode-se concluir que a simulação numérica destes métodos é complexa devido aos fenômenos físicos e químicos associados. Existem ainda pesquisas/experimentações no emprego de novos MER, tais como: uso de princípios microbiológicos, vibração, etc. Mezomo [24] ainda apresenta outras informações interessantes, por exemplo, que o percentual de óleo produzido via recuperação terciária no Brasil não é superior a 3%, e que a produção terciária nos EUA é equivalente a produção total brasileira.

1.3 - Aspectos Numéricos na Simulação de Reservatórios

A partir do advento do computador e da crescente evolução dos recursos computacionais, pôde-se aplicar métodos numéricos para a simulação de reservatórios de petróleo [5]. Tradicionalmente o método das diferenças finitas, empregando malhas cartesianas, foi e é muito empregado com este propósito. Devido às características e complexidades particulares de reservatórios de petróleo, novas metodologias estão sendo empregadas buscando aprimorar a simulação de todo processo. A seguir são apresentados alguns dos tópicos de estudo enfocados na simulação de reservatórios de petróleo.

1.3.1 - Malhas Utilizadas na Discretização de Reservatórios

Conforme citado anteriormente, as primeiras simulações numéricas foram realizadas empregando discretização do tipo cartesiana. O emprego de malhas cartesianas tem como vantagens principais a fácil construção, relativa simplicidade da forma final das equações discretizadas, e rápida implementação do código computacional.

Porém, objetivando-se simular reservatórios de petróleo, a discretização cartesiana apresenta consideráveis desvantagens como:

- a) Exige significativo refinamento para descrever contornos e superfícies de reservatórios de geometrias irregulares e com presença de heterogeneidades.
- b) Dificuldade de aplicação de condições de contorno em reservatórios de fronteiras arbitrárias, às vezes, sendo necessário interpolação das condições de contorno.
- c) Acentuado nível de difusão numérica pela dificuldade de alinhamento da malha com as direções de escoamento (efeito de orientação de malha), que as vezes pode ser minimizado pelo emprego de malhas curvilíneas.

Para contornar problemas relativos à geometria e da presença de heterogeneidades muitos trabalhos foram realizados. Alguns trabalhos empregando malhas curvilíneas ortogonais para simular reservatórios de petróleo foram apresentados por Hirasaki [16], Fleming [15], Sharp [38] e Robertson [37]. Estes trabalhos apresentaram-se como alternativas para mapear reservatórios irregulares e minimizar o efeito de orientação de malha na simulação de configurações especiais de reservatórios, como *five-spot* [†]. Entretanto, os contornos das geometrias de reservatórios são em geral irregulares dificultando a geração de malhas ortogonais. Britto et al. [7] estudaram o emprego de coordenadas curvilíneas não-ortogonais na simulação de um reservatório com descontinuidades e heterogeneidades internas e mostrou que o número de volumes necessários para simular o reservatório em questão foi bastante reduzido quando comparado ao número de volumes usado na simulação com malha cartesiana. Maliska *et al.* [18,19,20,21,22] e Cunha *et al.* [10] também fizeram uso de sistemas curvilíneos generalizados e obtiveram bons resultados para simulação da configuração *five-spot*. É bom ressaltar que o uso de coordenadas não-ortogonais provoca uma pequena alteração na estrutura matricial do sistema linear pois mais pontos são considerados. É claro que a utilização de coordenadas curvilíneas não elimina os efeitos de orientação de malha, a não ser em situações muito particulares como na conhecida configuração *five-spot*.

Também pode-se minimizar o efeito de orientação de malha pelo emprego de malhas triangulares ou de Voronoi. Nestes tipos de malhas, por serem considerados um número

[†] Um campo com a configuração *five-spot* está esquematizado na Fig. 7.4

maior de direções de escoamento (não há uma estrutura definida), geralmente, obtém-se melhores resultados. Por exemplo, Amado [2,3], utilizou menor número de blocos de malha, com discretização triangular, para obter resultados equivalentes aos fornecidos por um simulador comercial que empregava malha cartesiana [39]. Palagi [29] e Marcondes [23] fizeram uso de malhas de Voronoi e obtiveram resultados menos dependentes de orientação de malha. Eles, e também Pedrosa [33], ainda usaram a técnica de refinamento local, junto aos poços onde existem elevados gradientes, buscando reduzir efeitos de difusão numérica. Outro modo de diminuir o efeito de difusão numérica consiste em envolver na equação discretizada um número maior de pontos da malha, conforme sugerido por Yanosik e McCracken [45]. Porém, o esquema proposto por eles impõe maiores dificuldades no tratamento de contornos e heterogeneidades. Esquemas de interpolação mais aprimorados, como o TVD (*Total Variation Diminishing*) também contribuem para redução do efeito de orientação de malha. Exemplos de trabalhos utilizando o esquema TVD na simulação de reservatórios de petróleo são o de Pinto [35], em coordenadas cartesianas, e de Mota [25], em coordenadas curvilíneas.

No presente trabalho é usado o sistema de coordenadas curvilíneo generalizado [17]. As equações resolvidas são tipicamente de difusão com propriedades físicas variáveis, sendo o esquema UDS (*UDS-Upstream Differencing Scheme*) usado para avaliar quaisquer parâmetros físicos nas interfaces dos volumes de controle. O processo de geração da malha, segue, basicamente, as idéias de Thomson *et al.* [43], Hirasaki e O'Dell [16] e Maliska *et al.* [20]. Como argumentado em [16], o uso de coordenadas curvilíneas tem grandes vantagens na simulação tridimensional de reservatórios de petróleo, pois, geralmente, os reservatórios são de “fina” espessura e apresentam “grande” variação de profundidade (são encurvados!), tendo o aspecto como indicado na Fig. 1.1.

1.3.2 - Formulações Utilizadas

Na simulação de reservatórios de petróleo, denomina-se de modelo composicional ao modelo matemático que permite descrever o escoamento de múltiplos-componentes em múltiplas-fases num meio poroso. Usualmente, nos modelos composicionais, as equações de balanço são formuladas de modo que se tenha como variáveis primárias pressão e saturações. Exemplos de modelos composicionais que envolvem tais variáveis podem ser

encontrados em Peaceman [31], Coats [8], Prais e Campagnolo [36]. Entretanto, o uso de formulações que têm como variáveis primárias pressão e saturações apresentam sérios problemas. Exemplos destes problemas ocorrem em regiões do reservatório onde a fase gás desaparece, mas o componente gás permanece presente dissolvido nas fases líquidas. Nestas formulações, como mencionado por Prais e Campagnolo [36], com o desaparecimento de qualquer fase torna-se inativa a respectiva equação de restrição envolvendo o somatório das frações dos componentes da fase. Isso implica na utilização de esquemas como substituição de variável e equação, ou outros que impeçam que a fase em questão desapareça, permanecendo em um valor residual especificado [1,13], dificultando com isso a programação. Com o propósito de contornar estes problemas, no presente trabalho, utilizou-se a formulação descrita por Prais e Campagnolo [36] e Britto [6], que tem como variáveis primárias pressão do óleo e frações mássicas globais de cada componente. O emprego da formulação em frações mássicas globais não origina modificações nem troca de equações (ou variáveis), com o aparecimento ou desaparecimento de fases, o que constitui sua grande vantagem.

O modelo composicional completo é muito complexo † para o estudo e análise inicial de um reservatório. Uma etapa anterior à aplicação do modelo composicional costuma ser a implementação de um modelo mais simplificado, o modelo *black-oil*. Após a escolha do modelo a ser utilizado define-se a formulação a ser empregada, formulação em saturações ou formulação em frações mássicas. O conjunto de equações resultantes, após serem escritas na forma discretizada, pode ser linearizado aplicando-se as metodologias IMPES ou implícita, que serão descritas no próximo item. Um fluxograma da modelação integral do problema está apresentado na Fig. 1.3 ‡ .

1.3.3 - Métodos de Linearização das Equações Discretizadas

Durante a confecção deste trabalho foram estudados, basicamente, duas metodologias para linearização do conjunto de equações algébricas, o Método IMPES (IMPLICIT Pressure Explicit Saturation) e o Método Totalmente Implícito. Porém, neste trabalho, somente este último será apresentado em maiores detalhes.

† Este modelo será descrito no próximo capítulo.

‡ No fluxograma, os caminhos indicados por A, B e C serão referenciados no Cap. 3.

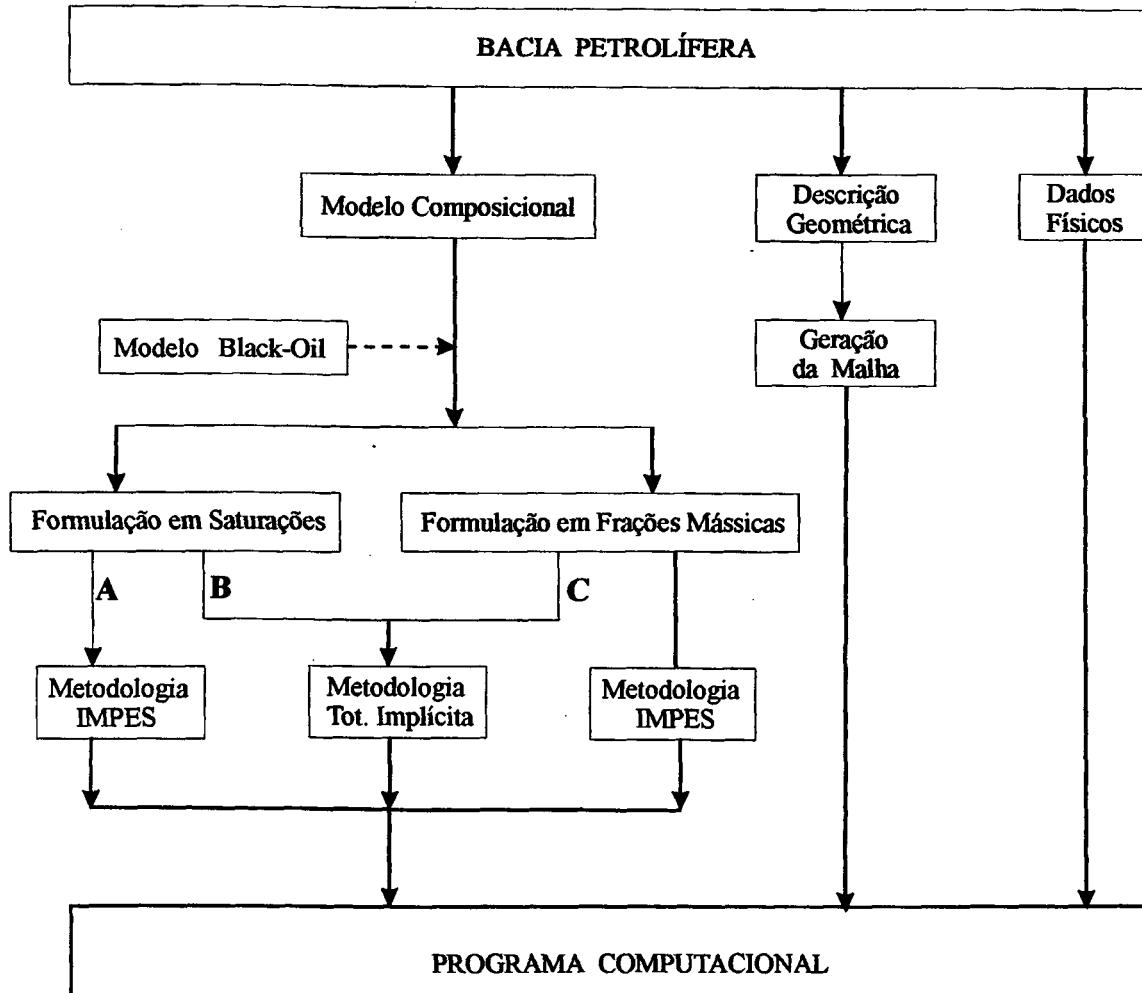


Fig. 1.3 - Fluxograma da simulação computacional.

Como já mencionado, as equações resolvidas são tipicamente de difusão com coeficientes variáveis. No método IMPES estes coeficientes são avaliados com o valor das variáveis do intervalo de tempo anterior, de modo que é possível desacoplar a pressão da saturação, obtendo uma equação envolvendo apenas a pressão. Resolvendo o campo de pressão obtém-se as saturações de forma explícita como função das pressões. O método IMPES é usado largamente na indústria de petróleo, porém ocorrem problemas na aplicação desta metodologia em regiões de altas vazões ou de elevados gradientes de saturações, acarretando no uso de pequenos intervalos de tempo " Δt " para manter a estabilidade da solução. Em regiões refinadas da malha a restrição no passo de tempo é necessária para que se tenha estabilidade, contudo o uso de baixos " Δt " pode tornar a simulação um tanto onerosa. No método IMPES o custo computacional por passo de tempo é menor em relação ao método

totalmente implícito, pois apenas a equação da pressão é avaliada implicitamente. Outra vantagem do IMPES é que as rotinas computacionais de avanço das variáveis explícitas são facilmente vetorizáveis.

No Método Totalmente Implícito (MTI), que foi utilizado no presente trabalho, os coeficientes presentes nas equações discretizadas são avaliados no nível de tempo mais atual. Desta forma todo o conjunto de equações algébricas é resolvido simultaneamente. Neste método o custo computacional por passo de tempo é mais elevado, entretanto, o MTI é muito estável, o que permite o uso de intervalos de tempo maiores. Conforme mencionado por Marcondes [23], Thomas e Thurnao [42] propuseram o uso de uma metodologia implícita adaptativa (AIM - Adaptive Implicit Method), que foi aprimorada posteriormente por Forsyth e Sammon [14]. No AIM, os métodos IMPES e implícito podem ser aplicados simultaneamente em diferentes regiões do reservatório. Nesta metodologia a pressão é sempre avaliada implicitamente e as saturações (ou frações mássicas) podem ser obtidas implícita ou explicitamente, dependendo de algum critério pré-estabelecido [14].

1.4 - Objetivos e Organização do Trabalho

O presente trabalho tem por objetivo global apresentar uma metodologia para a desenvolvimento e a elaboração de um simulador de reservatórios de petróleo. O trabalho teve como fonte de motivação um projeto de cooperação firmado entre o CENPES/PETROBRÁS e o SINMEC (Laboratório de Simulação Numérica em Mecânica dos Fluidos e Transferência de Calor). Os estudos preliminares reservaram-se a casos muito simples. Inicialmente estudou-se escoamentos mono e bifásicos em situações bidimensionais. Por fim passou-se para o caso tridimensional. Nestes estudos foram utilizadas a formulação em saturação e a metodologia IMPES. Porém, o interesse do CENPES/PETROBRÁS era o desenvolvimento de um código computacional tridimensional que utiliza-se a metodologia totalmente implícita usando a formulação em frações mássicas. Além disso, tinha-se também interesse no uso de coordenadas generalizadas, uma vez que os softwares comerciais disponíveis no CENPES/PETROBRÁS permitem apenas a discretização cartesiana de um reservatório.

Foi dentro deste contexto que este trabalho nasceu, tendo como objetivo os seguintes itens:

i) Utilizar formulação em frações mássicas.

Esta formulação é apresentada para modelação de escoamentos multifásicos a multi-componentes. Entretanto, no decorrer deste trabalho, maiores detalhes serão dedicados à aplicação desta formulação ao modelo *black-oil*.

ii) Empregar o método totalmente implícito usando o sistema curvilíneo de coordenadas.

A implementação do método totalmente implícito em coordenadas generalizadas requer, como poderá ser visto, algumas considerações devidas à não-ortogonalidade da malha.

iii) Aplicação do sistema de coordenadas curvilíneo generalizado.

O uso de coordenadas coincidentes com a fronteira (*boundary fitted coordinates*) permite, com satisfatória flexibilidade, mapear de modo eficiente geometrias irregulares como as de reservatórios de petróleo. Além disso, também torna-se possível descrever as chamadas falhas geológicas usando coordenadas curvilíneas. Para tal é comum fazer com que algumas superfícies coordenadas passem pelas posições espaciais que delimitam as falhas geológicas.

iv) Desenvolvimento de uma equação genérica.

Em muitas situações tridimensionais, a obtenção das equações discretizadas para todos os tipos de volumes (volume de fronteira, interior, vizinho de uma falha geológica, etc) da malha torna-se uma tarefa impraticável. Desta forma, apresenta-se o desenvolvimento de uma equação geral, que pode reproduzir a equação de conservação de qualquer volume de controle da malha.

A seguir apresenta-se o escopo do restante do trabalho.

O Cap. 2 descreve a formulação matemática utilizada onde são apresentadas as formas diferenciais das equações de balanço para as formulações em saturação e em frações mássicas.

No Cap. 3 as equações diferenciais são obtidas em formas discretas via aplicação do método dos volumes finitos.

O Cap. 4 relata o esquema numérico desenvolvido que permite tratar falhas geológicas internas ao reservatório, e conseqüentemente as fronteiras do mesmo. Também são discutidos os vários tipos de condições de operação dos poços injetores e produtores.

No Cap. 5 são apresentadas as equações que regem o equilíbrio entre fases (rotina de *flash*).

O Cap. 6 apresenta todo o processo numérico envolvido para resolução do sistema não linear de equações.

O Cap. 7 é reservado para apresentação dos resultados numéricos que validam a metodologia abordada.

Por fim, no Cap. 8 são mencionadas as contribuições do presente trabalho e sugestões para trabalhos futuros.

CAPÍTULO DOIS

Formulação Matemática

2.1 - Introdução

Neste capítulo serão apresentados os modelos matemáticos das formulações em saturação e em frações mássicas globais. As equações apresentadas representam o modelo composicional que descreve o escoamento de múltiplos componentes em múltiplas fases. Em seguida as equações genéricas do modelo composicional são simplificadas para o modelo *black-oil*.

2.2 - Modelo Composicional

No modelo composicional considera-se o escoamento de n_p fases no meio poroso onde em cada fase podem estar presentes n_c componentes (substâncias químicas). Pelo fato de ser possível a transferência de massa entre fases, não existe necessariamente conservação de massa a nível de fase. A conservação da massa ocorre a nível de componente. Nesta seção a equação da conservação da massa, para o modelo composicional, será apresentada sob duas formulações: a formulação em saturação [4,31] e a formulação em frações mássicas [6,36,44].

2.2.1 - Algumas definições preliminares

Com o objetivo de facilitar o entendimento das equações a serem apresentadas descreve-se a seguir definições de algumas grandezas importantes.

- Saturação da fase p

$$S^p = \frac{\text{volume da fase } p}{\text{volume dos espaços vazios}} = \frac{V^p}{V} \quad (2.1)$$

- Fração mássica global do componente c

$$Z^c = \frac{\text{massa do componente } c}{\text{massa total da mistura}} = \frac{M^c}{M} \quad (2.2)$$

onde

$$M = \sum_{nc} M^c = \sum_{np} M^p \quad (2.3)$$

- Densidade da fase p

$$\rho^p = \frac{\text{massa da fase } p}{\text{volume da fase } p} = \frac{M^p}{V^p} \quad (2.4)$$

- Densidade média da mistura

$$\rho^m = \frac{\text{massa total da mistura}}{\text{volume total da mistura}} = \sum_{np} \rho^p S^p \quad (2.5)$$

- Fração mássica do componente c na fase p

$$X^{cp} = \frac{\text{massa do componente } c \text{ presente na fase } p}{\text{massa total da fase } p} = \frac{M^{cp}}{M^p} \quad (2.6)$$

- Fração mássica da fase p

$$\alpha^p = \frac{\text{massa da fase } p}{\text{massa total da mistura}} = \frac{M^p}{M} \quad (2.7)$$

e portanto as saturações podem ser obtidas de

$$S^p = \frac{V^p}{V} = \frac{V^p}{\sum_{np'} V^{p'}} = \frac{\frac{M^p}{\rho^p}}{\sum_{np'} \frac{M^{p'}}{\rho^{p'}}} = \frac{\frac{\alpha^p}{\rho^p}}{\sum_{np'} \frac{\alpha^{p'}}{\rho^{p'}}} \quad (2.8)$$

2.2.2 - Equação da Conservação da Massa

A conservação da massa do componente c é descrita pela equação

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \left(\sum_{np} X^{cp} \rho^p S^p \right) \right] = -\nabla \cdot \left[\sum_{np} X^{cp} \rho^p \vec{u}^p \right] - \sum_{np} X^{cp} \tilde{m}^p \quad (2.9)$$

sendo

$$\tilde{m}^p = \rho^p q^p \quad (2.10)$$

onde

ϕ é a porosidade do meio poroso;

\vec{u}^p é o vetor velocidade da fase p ;

\tilde{m}^p é o fluxo mássico de produção/injeção da fase p por unidade de volume, sendo positivo para produção e negativo para injeção;

q^p é a vazão volumétrica de produção/injeção da fase p por unidade de volume, sendo positiva para produção e negativa para injeção.

A Eq. (2.9) não apresenta termos envolvendo efeitos de difusão hidrodinâmica, uma vez que os efeitos convectivos são considerados dominantes. Nesta mesma equação, o termo de acumulação está escrito em função da variável saturação. Esta forma de escrever a equação da conservação da massa é adequada para a formulação em saturação, em que as incógnitas são as saturações das fases. Porém, não é difícil perceber que o termo de acumulação também pode ser escrito em função das frações mássicas globais, como pode ser visto na Eq. (2.11). Neste caso, a equação da conservação da massa é conveniente para a formulação em frações mássicas, em que as incógnitas são as frações mássicas globais.

$$\frac{\partial}{\partial t} [\phi \rho^m Z^c] = -\nabla \cdot \left[\sum_{np} X^{cp} \rho^p \vec{u}^p \right] - \sum_{np} X^{cp} \tilde{m}^p \quad (2.11)$$

Considerando-se escoamento em meio poroso, a velocidade \vec{u}^p é obtida da lei de Darcy,

$$\vec{u}^p = -\lambda^p [\nabla \Phi^p] \quad (2.12)$$

Desta forma, levando em conta a Eq. (2.12), e somando as equações de conservação (equações da formulação em saturações ou da formulação em frações mássicas) para todos os componentes, obém-se

$$\frac{\partial}{\partial t} [\phi \rho^m] = \sum_{np} \nabla \cdot [\lambda^p \nabla \Phi^p] - \sum_{np} \tilde{m}^p \quad (2.13)$$

Note-se que equação anterior representa a conservação global de massa. Esta equação é muito importante e será requisitada mais adiante.

Na Eq. (2.12) λ^p é a mobilidade da fase p , dada por

$$\lambda^p = \frac{\mathbf{k} k^{rp}}{\mu^p} \quad (2.14)$$

onde, k^{rp} é a permeabilidade relativa da fase p , μ^p é a viscosidade da fase p , Φ^p é o potencial da fase p , dado por

$$\Phi^p = P^p + \rho^p g z \quad (2.15)$$

sendo, P^p a pressão da fase p , ρ^p a densidade da fase p , g o módulo da aceleração gravitacional e z a terceira coordenada cartesiana, orientada do fundo para a superfície do reservatório. Neste trabalho o meio poroso será considerado homogêneo e isotrópico, e portanto o tensor permeabilidade absoluta, \mathbf{k} assume a forma

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Na formulação em saturações as variáveis primárias são as saturações das fases, S^p , e a pressão da fase óleo, P^o . Na formulação em frações mássicas as variáveis primitivas são as frações mássicas globais, Z^c , e a pressão da fase óleo, P^o , porém, para computar a Eq. (2.11) é necessário o conhecimento das mobilidades λ^p , e estas por sua vez são dependentes das permeabilidades relativas, que são função das saturações das fases. Portanto, também nesta formulação, se faz necessário o conhecimento das saturações. As saturações são obtidas a partir das frações mássicas de cada fase, conforme Eq. (2.8).

Os valores das frações X^{cp} e α^p são obtidas por rotinas de *flash*[†] que descrevem o comportamento (equilíbrio) entre fases. Segundo Prais e Campagnolo [36] estas rotinas são estudadas em detalhe na Engenharia Química [26,27,28,34]. No caso de modelos térmicos[‡] e composicionais as rotinas de *flash* envolvem processos iterativos, enquanto no modelo *black-oil* o *flash* é um procedimento explícito de cálculos. No capítulo 5 apresentar-se-á a rotina de *flash* para o modelo *black-oil* padrão, modelo que é abordado neste trabalho.

2.3 - Modelo Black-Oil Generalizado

Para reservatórios que apresentam óleos pesados ou de baixa volatilidade pode-se restringir o modelo composicional de forma a obter um modelo mais simples, chamado de *black-oil*. O modelo *black-oil* generalizado é isotérmico e o comportamento entre fases é regido por relações PVT (Pressão-Volume-Temperatura). Este modelo tem as seguintes características [4]:

- Sistema de três componentes (w=água, o=óleo e g=gás) e de três fases (w=água, o=óleo e g=gás)
- As fases água e óleo são imiscíveis e não trocam massa.

[†] Nas rotinas de *flash*, a partir do conhecimento das variáveis primárias (P^o , Z^w , e Z^o) todas as demais grandezas associadas (saturações, mobilidades, etc) são obtidas por meio de relações de equilíbrio).

[‡] Nos modelos térmicos a equação da energia é resolvida para considerar os gradientes de temperatura existentes no reservatório e as relações de equilíbrio são expressas em função da temperatura.

- Os componentes água e óleo não vaporizam na fase gás, porém o componente gás pode dissolver-se nas fases óleo e água.

A fim de obter as equações simplificadas do modelo *black-oil* serão descritas a seguir as definições de duas grandezas importantes: o fator volume de formação e a solubilidade.

2.3.1 - Fatores Volume de Formação e Solubilidade

Considere um determinado volume de óleo, V^o , nas condições de reservatório, conforme Fig. 2.1. Quando este volume de óleo é recuperado e levado à condições de superfície, uma parte do gás que estava dissolvido no óleo nas condições de reservatório se desprende dando origem a um volume V^{g^o} nas condições de superfície. O óleo, por sua vez, que ocupava o volume V^o , devido a mudança de pressão, entre o reservatório e as condições de superfície, e devido ao desprendimento de gás, passa a ocupar um volume V^{oo} .

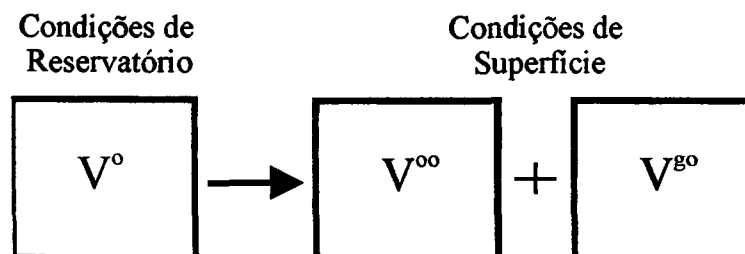


Fig. 2.1 - Definição de B^o e R^{g^o} .

Desta forma, define-se o fator volume de formação da fase óleo por

$$B^o = \frac{V^o}{V^{oo}} \quad (2.17)$$

e a solubilidade do componente gás na fase óleo por

$$R^{g^o} = \frac{V^{g^o}}{V^{oo}} \quad (2.18)$$

De uma forma geral o fator volume de formação de uma fase p é dado por

$$B^p = \frac{V^p}{V^{pp}} \quad (2.19)$$

E a solubilidade do componente c na fase p por

$$R^{cp} = \frac{V^{cp}}{V^{pp}} \quad (2.20)$$

Geralmente o fator volume de formação é fornecido via tabela de pontos experimentais ou é definido em termos da compressibilidade[†], conforme a seguinte expressão

$$B^p(P) = \frac{B_{ref}^p}{1 + c^p(P - P_{ref})} \quad (2.21)$$

onde B_{ref}^p é o fator volume de formação na pressão de referência P_{ref} . Devido às características de compressibilidade, os fatores volume de formação dos líquidos são da ordem da unidade, já para os gases o fator volume de formação é muito menor que a unidade.

Deve-se notar que da Eq. (2.20) pode-se escrever

$$R^{cp} = \frac{V^{cp}}{V^{pp}} = \frac{\frac{M^{cp}}{\rho_{STC}^c}}{\frac{V^p}{B^p}} = \frac{\frac{M^{cp}}{\rho_{STC}^c}}{\frac{M^p}{\rho^p B^p}} = \frac{M^{cp}}{M^p} \frac{\rho^p}{\rho_{STC}^c} B^p = X^{cp} \rho^p \frac{B^p}{\rho_{STC}^c} \quad (2.22)$$

e portanto

$$\rho^p X^{cp} = \frac{R^{cp}}{B^p} \rho_{STC}^c \quad (2.23)$$

Esta última expressão será empregada, logo adiante, quando apresenta-se a forma final da equação da conservação da massa para o modelo *black-oil* padrão.

[†] A compressibilidade de uma fase, c^p , a temperatura T constante, expressa a variação do volume da fase com a variação de pressão, sendo definida por $c^p = -\frac{1}{V^p} \left(\frac{\partial V^p}{\partial P} \right)_T$

2.4 - Modelo Black-Oil Padrão

O modelo *black-oil* generalizado pode ainda admitir simplificações adicionais que resultam no modelo *black-oil* padrão (*standard black-oil model*), onde se assume que o componente óleo não se vaporiza na fase gás e que o componente gás não se dissolve na fase água. Assim, para o modelo *black-oil* padrão tem-se

$$\begin{aligned}
 R^{ww} &= 1 & R^{ow} &= 0 & R^{gw} &= 0 \\
 R^{oo} &= 1 & R^{wo} &= 0 & R^{go} &= R_s(P) \\
 R^{gg} &= 1 & R^{wg} &= 0 & R^{og} &= 0
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

onde R^{go} é a única solubilidade que deve ser conhecida como função de P , isto é, $R^{go} = R_s(P)$, e de mesmo modo, as frações mássicas de cada componente ficam sendo dadas por [†]

$$\begin{aligned}
 X^{ww} &= 1 & X^{wo} &= 0 & X^{wg} &= 0 \\
 X^{oo} &= 1 - X^{go} & X^{ow} &= 0 & X^{og} &= 0 \\
 X^{gg} &= 1 & X^{gw} &= 0 & X^{go} &= \frac{R^{og}}{\rho^o B^o} \rho_{STC}^g
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

2.4.1 - Modelo Black-Oil Padrão: Formulação em Saturação

A partir das suposições anteriormente expostas, pode-se escrever a equação da conservação da massa do componente c para o modelo *black-oil* padrão. Porém deve-se partir da equação da conservação da massa do modelo *black-oil* generalizado. Então, inicialmente deve-se substituir a Eq. (2.23) na Eq. (2.9). Feito isto, a equação da massa para o componente c segundo o modelo *black-oil* generalizado, e na formulação em saturação, fica sendo dada por

$$\sum_{np} \frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \left(\frac{R^{cp}}{B^p} S^p \right) \right] = \sum_{np} \nabla \cdot [R^{cp} \lambda^p \nabla \Phi^p] - \sum_{np} \frac{R^{cp}}{B^p} q^p \tag{2.26}$$

[†] Na formulação em frações mássicas $X^{oo} = 1 - X^{go} =$ função(Z^w, Z^o, P), como poderá ser visto no Cap. 5.

sendo que agora a mobilidade da fase p , λ^p , é dada por,

$$\lambda^p = \frac{k k^{rp}}{B^p \mu^p} \quad (2.27)$$

Levando em conta as solubilidades do item 2.4, as equações do modelo *black-oil* padrão, na formulação em saturações, são dadas por

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \frac{S^w}{B^w} \right] = \nabla \cdot [\lambda^w \nabla \Phi^w] - \frac{q^w}{B^w} \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \frac{S^o}{B^o} \right] = \nabla \cdot [\lambda^o \nabla \Phi^o] - \frac{q^o}{B^o} \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \left(\frac{S^g}{B^g} + R^{go} \frac{S^o}{B^o} \right) \right] = \nabla \cdot [\lambda^g \nabla \Phi^g + R^{go} \lambda^o \nabla \Phi^o] - \left(\frac{q^g}{B^g} + R^{go} \frac{q^o}{B^o} \right) \quad (2.30)$$

É importante perceber que as três equações anteriores representam conservação volumétrica dos componentes nas condições de superfície. Os potenciais das fases são obtidos de acordo com a Eq. (2.15) e estão relacionados com a pressão da fase óleo por meio das pressões capilares, logo

$$\Phi^w = P^o - P^{cow} + \gamma^w z \quad (2.31)$$

$$\Phi^o = P^o + \gamma^o z \quad (2.32)$$

$$\Phi^g = P^o + P^{cog} + \gamma^g z \quad (2.33)$$

De posse destas equações, vê-se, agora, que nas Eqs. (2.28) a (2.30) existem quatro incógnitas (S^w , S^o , S^g e P^o). A quarta equação, responsável pelo fechamento do problema, resulta da restrição volumétrica, dada por,

$$S^w + S^o + S^g = 1 \quad (2.34)$$

A formulação descrita anteriormente é a convencionalmente usada e tem como variáveis primárias saturações e pressão da fase óleo. Porém, usando tal formulação, surgem problemas quando em determinadas regiões do reservatório a fase gás desaparece ($S^g = 0$). Neste caso, como será visto no próximo item, a solubilidade, R_s , não pode ser obtida em função da pressão e tem-se que fazer uma mudança de variáveis. Este problema acaba originando um código computacional de pouca eficiência e de implementação um tanto complexa, devido à necessidade de mudança de variáveis. O mesmo problema ainda pode ser contornado empregando esquemas que impeçam que a fase gás desapareça, permanecendo um valor residual. Porém, também nestes esquemas a programação fica dificultada.

2.4.2 - Cálculo da Solubilidade, R_s

Considere um sistema envolvendo uma mistura de gás e óleo a uma determinada pressão P . Suponha, ainda, que o componente gás não esteja totalmente dissolvido na fase óleo, isto é, existe gás livre ($S^g \neq 0$). Esta situação é representada pelo ponto A da Fig. 2.2. Neste caso a solubilidade, R_s , pode ser obtida como função da pressão, ou seja, $R_s = R^{go}(P)$. Assim, a solubilidade, R_s , poderia ser obtida a partir da curva de saturação, dada pela linha tracejada da Fig. 2.2.

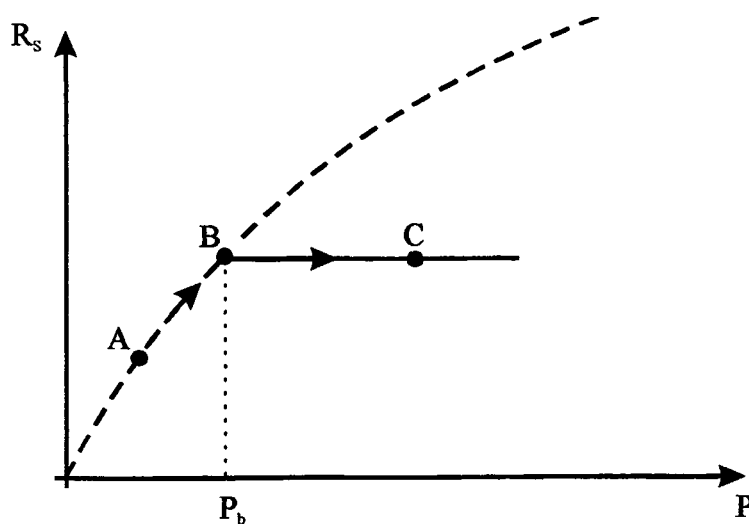


Fig. 2.2 - Curva de R_s em função de P .

Porém, imagine agora que a pressão do referido sistema aumente, a partir do ponto **A**, até atingir o ponto **B**, de modo que todo gás fique dissolvido na fase óleo. Nesta nova situação, aumentando-se a pressão, a solubilidade R_s fica constante (patamar contínuo da Fig. 2.2), tornando-se independente da pressão. São em processos como o mencionado que ocorrem problemas com a formulação em saturações, pois não se consegue obter R_s como função de P , e portanto, não pode-se avaliar a Eq. (2.30). O problema apresentado, na formulação convencional, é contornado por meio de substituição de variáveis, onde a pressão, P , é substituída pela pressão de saturação. Conforme Aziz [5], a pressão de saturação de uma célula computacional é a pressão do bloco se existir gás livre ($S^g \neq 0$) no mesmo ou é a pressão de ponto de bolha se o óleo estiver subsaturado[†]. A pressão de ponto de bolha, como indicado na Fig. 2.2, de um líquido subsaturado, é a pressão a partir do qual a primeira bolha de gás é liberada com o decréscimo de pressão.

As metodologias numéricas empregadas para trabalhar com a formulação convencional são muito complexas e não fazem parte dos objetivos deste trabalho. Deste modo, estas metodologias não serão exploradas neste texto. Entretanto, na literatura, podem ser encontrados muitos trabalhos relacionados ao problema do desaparecimento da fase gás. Alguns destes trabalhos foram realizados por Stright et al. [41], Abou-kassem [1] e Forsyth e Sammon [13].

Neste trabalho os estudos usando a formulação em saturações concentraram-se apenas para o caso de escoamentos imiscíveis bifásicos (água/óleo), onde as equações governantes reduzem-se a

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \frac{S^w}{B^w} \right] = \nabla \cdot [\lambda^w \nabla P] - \frac{q^w}{B^w} \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \frac{S^o}{B^o} \right] = \nabla \cdot [\lambda^o \nabla P] - \frac{q^o}{B^o} \quad (2.36)$$

Note-se que nas duas equações anteriores desconsiderou-se os efeitos capilares e gravitacionais ($\Phi^w = \Phi^o = P$).

[†] Um líquido encontra-se subsaturado quando a quantidade de gás nele dissolvido é menor que a de saturação.

2.4.3 - Modelo Black-Oil Padrão: Formulação em Frações Mássicas

No presente trabalho estudou-se a formulação em frações mássicas globais aplicada ao modelamento do escoamento *black-oil* trifásico padrão. Como já mencionado, neste modelo cada componente flui exclusivamente na fase de mesmo nome, com exceção do componente gás que pode estar na fase gás ou dissolvido na fase óleo.

Aplicando as relações expressas pela Eq. (2.25), obtém-se as equações de conservação da massa de cada um dos componentes segundo a formulação em frações mássicas. Portanto tem-se

$$\frac{\partial}{\partial t} [\phi \rho^m Z^w] = \nabla \cdot [\lambda^w \nabla \Phi^w] - \tilde{m}^w \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\phi \rho^m Z^o] = \nabla \cdot [X^{oo} \lambda^o \nabla \Phi^o] - X^{oo} \tilde{m}^o \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\phi \rho^m Z^g] = \nabla \cdot [(1 - X^{oo}) \lambda^o \nabla \Phi^o + \lambda^g \nabla \Phi^g] - (1 - X^{oo}) \tilde{m}^o - \tilde{m}^g \quad (2.39)$$

Somando as três equações anteriores obtemos,

$$\frac{\partial}{\partial t} [\phi \rho^m] = \nabla \cdot [\lambda^w \nabla \Phi^w + \lambda^o \nabla \Phi^o + \lambda^g \nabla \Phi^g] - \tilde{m}^w - \tilde{m}^o - \tilde{m}^g \quad (2.40)$$

Note-se que a equação anterior já foi apresentada anteriormente, Eq. (2.13), e representa a conservação global de massa.

Nas quatro últimas equações a mobilidade da fase p , λ^p , é dada por,

$$\lambda^p = \frac{k k^{rp} \rho^p}{\mu^p} \quad (2.41)$$

As equações de fechamento são :

$$Z^w + Z^o + Z^g = 1 \quad (2.42)$$

$$P^w = P^o - P^{cow} \quad (2.43)$$

$$P^g = P^o + P^{cog} \quad (2.44)$$

$$\Phi^o = P^o + \gamma^o z \quad (2.45)$$

$$\Phi^w = P^o - P^{cow} + \gamma^w z \quad (2.46)$$

$$\Phi^g = P^o + P^{cog} + \gamma^g z \quad (2.47)$$

No presente trabalho as equações de balanço resolvidas são as Eqs. (2.37), (2.38) e (2.40). Portanto, as incógnitas são P^o , Z^o e Z^w , uma vez que Z^g pode ser obtida diretamente da equação de restrição mássica, Eq. (2.42).

Nesta formulação não surgem problemas com o cálculo da solubilidade, R_s , uma vez que ela sempre pode ser determinada por meio do conhecimento das variáveis P , Z^w e Z^o , conforme pode ser visto pela equação Eq. (5.1).

Neste capítulo apresentou-se as formulações e equações usadas durante este trabalho. No capítulo seguinte mostrar-se-á a metodologia numérica utilizada para tratar e resolver as equações relacionadas a tais formulações.

Discretização das Equações Governantes

3.1 - Introdução

Neste capítulo as equações diferenciais do modelo *black-oil* padrão são discretizadas via método de volumes finitos. O capítulo está dividido em duas partes. Na primeira será abordada a formulação em saturações. As equações diferenciais são discretizadas para o caso bifásico (água/óleo) unidimensional. Duas metodologias de linearização das equações discretizadas serão apresentadas: a metodologia IMPES e a totalmente implícita. As equações são apresentadas para o caso unidimensional, pois o objetivo nesta parte é de apenas esclarecer o entendimento das metodologias. Contudo, no capítulo 7, resultados tridimensionais são apresentados envolvendo a formulação em saturações. Na segunda parte, que é o objetivo do presente trabalho, será abordada a formulação em frações mássicas. As equações são discretizadas considerando-se escoamento trifásico. O método de Newton é usado para linearização do sistema de equações algébricas discretizadas. Nesta parte, as equações são escritas para o caso tridimensional, utilizando o sistema de coordenadas curvilíneo generalizado.

3.2 - Discretização para a Formulação em Saturação

Considere-se as Eqs. (2.28) e (2.29) aplicadas à situação unidimensional,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \frac{S^p}{B^p} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda^p \frac{\partial P}{\partial x} \right] - \hat{q}^p \quad (3.1)$$

onde $p = w$ ou $p = o$.

Na equação anterior, \hat{q}^p ($\hat{q}^p = \frac{q^p}{B^p}$) é a vazão nas condições de superfície por unidade de volume de reservatório. Note-se ainda que os efeitos capilares e gravitacionais foram desconsiderados.

A integração da Eq. (3.1) no tempo e no espaço sobre o volume de controle da Fig. 3.1 conduz a,

$$\left[\left(\phi \frac{S^p}{B^p} \right)_P - \left(\phi \frac{S^p}{B^p} \right)_P^0 \right] \frac{\Delta x}{\Delta t} = \left(\lambda^p \frac{\partial P}{\partial x} \right)_e - \left(\lambda^p \frac{\partial P}{\partial x} \right)_w - \hat{q}^p \Delta x \quad (3.2)$$

onde o sobrescrito "0" indica o instante de tempo anterior.

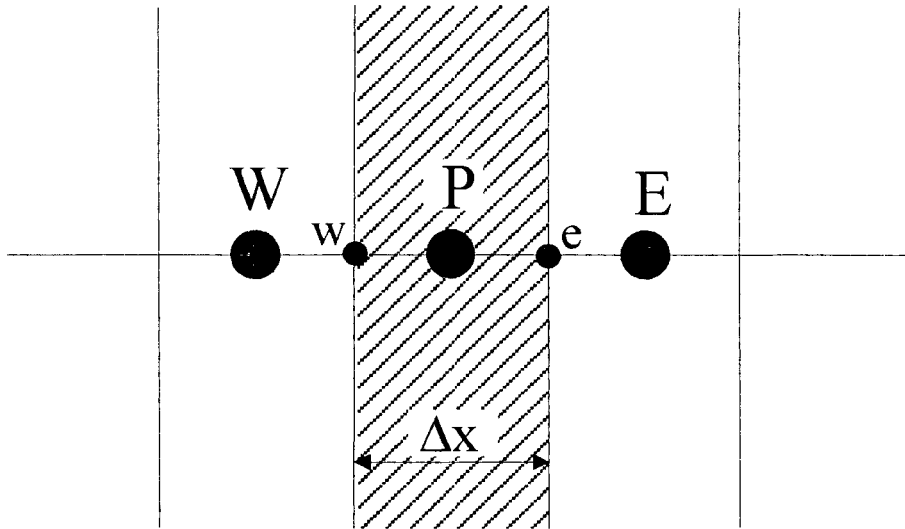


Fig. 3.1 - Volume de controle P e seus vizinhos.

Considerando-se uma discretização uniforme e, usando-se aproximação em diferenças centrais para as derivadas parciais, obtém-se a equação na forma discreta,

$$\left[\left(\phi \frac{S^p}{B^p} \right)_P - \left(\phi \frac{S^p}{B^p} \right)_P^0 \right] \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lambda_e^p \frac{(P_E - P_P)}{\Delta x} - \lambda_w^p \frac{(P_P - P_W)}{\Delta x} - \hat{q}^p \Delta x \quad (3.3)$$

onde $p = w$ ou e .

3.2.1 - Metodologia IMPES

A metodologia IMPES [†] consiste em obter uma equação implícita para o avanço da pressão e uma equação explícita para avançar a saturação. Para tal, isola-se as saturações S^w e S^o da Eq. (3.3) obtendo-se,

$$S_P^w = \frac{\Delta t B^w}{\phi \Delta x} \left[\lambda_e^w \frac{(P_E - P_P)}{\Delta x} - \lambda_w^w \frac{(P_P - P_W)}{\Delta x} \right] - \hat{q}_P^w \frac{\Delta t}{\phi} B_P^w + \left(\frac{S_P^w}{B_P^w} \right)^0 B_P^w \quad (3.4)$$

e

$$S_P^o = \frac{\Delta t B^o}{\phi \Delta x} \left[\lambda_e^o \frac{(P_E - P_P)}{\Delta x} - \lambda_w^o \frac{(P_P - P_W)}{\Delta x} \right] - \hat{q}_P^o \frac{\Delta t}{\phi} B_P^o + \left(\frac{S_P^o}{B_P^o} \right)^0 B_P^o \quad (3.5)$$

Observe-se que a porosidade foi admitida constante. Ainda no método IMPES, as mobilidades e vazões são consideradas constantes dentro de um intervalo de tempo, e assumem os valores do instante anterior. Note-se que as mobilidades devem ser conhecidas nas interfaces do volume de controle. Existem várias técnicas para se avaliar os valores das mobilidades nas interfaces dos volumes de controle, a mais simples, e a usada neste trabalho, é a interpolação UDS[‡] (Upstream Differencing Scheme). Substituindo-se as Eqs. (3.4) e (3.5) na equação de restrição volumétrica,

$$S^w + S^o = 1 \quad (3.6)$$

obtém-se a equação implícita da pressão, na forma

$$A_P P_P = A_E P_E + A_W P_W + F^P \quad (3.7)$$

onde

[†] Neste trabalho, a aplicação da metodologia IMPES parte do modelo *black-oil* seguindo o caminho **A**, indicado na Fig. 1.3.

[‡] Detalhes em relação ao UDS são abordados no item 6.3 do Cap. 6.

$$A_E = \frac{\Delta t}{\phi \Delta x^2} (B_P^w \lambda_e^w + B_P^o \lambda_e^o) \quad (3.8)$$

$$A_W = \frac{\Delta t}{\phi \Delta x^2} (B_P^w \lambda_w^w + B_P^o \lambda_w^o) \quad (3.9)$$

$$A_P = A_E + A_W \quad (3.10)$$

e

$$F^P = \left(\frac{S_P^w}{B_P^w} \right)^0 B_P^w - \frac{\hat{q}_P^w B_P^w \Delta t}{\phi} + \left(\frac{S_P^o}{B_P^o} \right)^0 B_P^o - \frac{\hat{q}_P^o B_P^o \Delta t}{\phi} - 1 \quad (3.11)$$

onde o termo fonte, F^P , da equação da pressão foi linearizado segundo Patankar [30],

$$F^P = F^{P*} + \frac{d}{dP_P} (F^P)^* (P_P - P_P^*) \quad (3.12)$$

e o sobrescrito * representa o nível iterativo anterior da resolução da equação da pressão. Substituindo a Eq. (3.12) na Eq. (3.7), obtém-se formas modificadas para A_P e F_P , como abaixo,

$$F^P = F^{P*} - \frac{d}{dP_P} (F^P)^* P_P^* \quad (3.13)$$

$$A_P = A_P^* - \frac{d}{dP_P} (F^P)^* \quad (3.14)$$

Neste trabalho utilizou-se o seguinte procedimento iterativo para o método IMPES:

1. *Inicializa-se os valores de S^w e P ;*
2. *Computa-se os valores dos coeficientes e termos fontes da equação da pressão.* Para obter os coeficientes da equação da pressão, em primeiro lugar, calcula-se os fatores volume de formação pela equação Eq. (2.21). Depois aplica-se o esquema UDS para interpolar as mobilidades nas interfaces dos volumes de controle. Conhecendo-se os fatores volume de formação e as mobilidades pode-se calcular os coeficientes, Eqs. (3.8) a (3.10), e termo fonte, Eq. (3.11), da equação da pressão.

3. *Obtém-se o campo de pressão.* A equação da pressão, Eq. (3.7), é uma equação implícita. O conjunto de equações, geradas pela aplicação da equação da pressão para cada volume de controle, origina um sistema de equações lineares. Para obter o campo de pressão deve-se utilizar algum algoritmo para resolução de sistemas lineares. Note-se que o sistema linear a ser resolvido é esparso, e portanto, seria conveniente dispor de algoritmo eficaz;
4. *Verifica-se se o critério de convergência para a pressão foi obtido.* Caso não se tenha obtido convergência retorna-se ao passo 2. As não linearidades presentes na equação da pressão devem-se exclusivamente aos fatores volume de formação. Desta forma, tem-se que reavaliar os coeficientes e termo fonte da equação da pressão até que se obtenha convergência no campo de pressão;
5. *Avança-se o campo de saturação.* Após determinado o campo de pressão as saturações são obtidas, explicitamente, via Eqs. (3.4) e (3.6).
6. *Faz-se um incremento no tempo.* Obteve-se até aqui a solução para o presente instante de tempo. Se desejado, retorna-se ao item 2 para o avanço da solução no tempo.

Uma analogia importante pode ser feita entre o método IMPES e PRIME[†]. Como a metodologia IMPES avança a saturação explicitamente, teoricamente pode-se dizer que ela é equivalente ao método PRIME. No PRIME, a partir da equação da quantidade de movimento, as velocidades u e v são explicitadas e substituídas na equação da conservação da massa obtendo-se uma equação para a pressão. Calculando-se o campo de pressões retorna-se nas equações da quantidade de movimento e obtém-se o campo de velocidades explicitamente.

3.2.2 - Metodologia Totalmente Implícita

Na metodologia totalmente implícita[‡] as mobilidades são avaliadas no nível de tempo mais atual e o conjunto de equações não-lineares é linearizado via método de Newton. No

[†] O PRIME [17](PReSSure Implicit Momentum Explicit) é um método para tratamento do acoplamento pressão-velocidade.

[‡] Neste trabalho, a aplicação da metodologia totalmente implícita, na formulação em saturações, parte do modelo *black-oil* seguindo o caminho **B**, indicado na Fig. 1.3.

método de Newton as equações discretizadas, Eqs. (3.3), são escritas na forma residual de modo que os resíduos devem se anular em cada intervalo de tempo. Assim, as equações a serem resolvidas são

$$F^w = - \left[\left(\phi \frac{S^w}{B^w} \right)_P - \left(\phi \frac{S^w}{B^w} \right)_P^0 \right] \frac{\Delta x}{\Delta t} + \lambda_e^w \frac{(P_E - P_P)}{\Delta x} - \lambda_w^w \frac{(P_P - P_W)}{\Delta x} - \frac{q_P^w}{B_P^w} \Delta x \quad (3.15)$$

$$F^o = - \left[\left(\phi \frac{S^o}{B^o} \right)_P - \left(\phi \frac{S^o}{B^o} \right)_P^0 \right] \frac{\Delta x}{\Delta t} + \lambda_e^o \frac{(P_E - P_P)}{\Delta x} - \lambda_w^o \frac{(P_P - P_W)}{\Delta x} - \frac{q_P^o}{B_P^o} \Delta x \quad (3.16)$$

onde $S^o = 1 - S^w$.

Expandindo-se o resíduo em série de Taylor, tem-se

$$F^{k+1} = F^k + \sum_{\forall X} \left(\frac{\partial F}{\partial X} \right)^k \Delta X \quad (3.17)$$

onde k é o nível iterativo e X representa o vetor de incógnitas (P e S^w) envolvidas com a respectiva equação de resíduo. A princípio a equação de resíduo deveria ser derivada em relação a todas as pressões e saturações envolvidas na discretização. Porém, devido ao uso do esquema de interpolação utilizado (esquema UDS), aparecem apenas derivadas do resíduo em relação as variáveis do ponto \mathbf{P} e de seus vizinhos. Na última equação, o resíduo na iteração $k + 1$ deve ser nulo, logo tem-se

$$-F^k = \sum_{\forall X} \left(\frac{\partial F}{\partial X} \right)^k \Delta X \quad (3.18)$$

ou em forma matricial,

$$\mathbf{A} \Delta \mathbf{X} = -\mathbf{F} \quad (3.19)$$

onde \mathbf{A} é a matriz jacobiana.

A solução do sistema linear, dado pela Eq. (3.19), permite evoluir os valores de P e S^w até que se obtenha a conservação da massa em cada instante de tempo. A matriz jacobiana, \mathbf{A} , é uma matriz de blocos, isto é, seus elementos são matrizes 2x2. As matrizes da Eq. (3.19) têm as seguintes formas

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1N} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ A_{N1} & \dots & A_{NN} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$\Delta \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \Delta X_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta X_N \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_N \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

onde

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_i^w}{\partial P_j} & \frac{\partial F_i^w}{\partial S_j^w} \\ \frac{\partial F_i^o}{\partial P_j} & \frac{\partial F_i^o}{\partial S_j^w} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$\Delta X_i = \begin{bmatrix} P_i^{k+1} - P_i^k \\ S_i^{wk+1} - S_i^{wk} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

$$F_i = \begin{bmatrix} F_i^w \\ F_i^o \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

As equações das derivadas dos resíduos em relação as variáveis não são aqui apresentadas. Nas equações anteriores N indica o número total de volumes da malha.

Evidentemente a matriz jacobiana \mathbf{A} não é cheia, pois nem todas as incógnitas estão presentes em todas as equações. Por exemplo, no caso unidimensional cada volume está conectado a dois volumes vizinhos (ver Fig. 3.1), ou seja, a equação de balanço de um volume envolve as incógnitas de apenas três células. Com isso, o sistema linear resultante é tridiagonal, e portanto esparso.

Durante o percurso da confecção do presente trabalho, implementou-se um código computacional envolvendo a formulação em saturações e metodologia implícita. Porém poucos testes foram realizados com o mesmo, e por isso, no cap. 7 não são apresentados resultados obtidos com o tal código.

Para a metodologia totalmente implícita o procedimento iterativo implementado foi o seguinte:

1. *Inicialização das variáveis;*
2. *Cálculo das derivadas dos resíduos e montagem da matriz jacobiana.* Para montar a matriz jacobiana é necessário derivar as equações de resíduo, Eqs. (3.15) e (3.16) em relação as variáveis de reservatório, isto é, em relação as saturações e pressões. Desta forma, deve-se obter as derivadas dos fatores volume de formação e das mobilidades em relação as saturações e pressões;
3. *Resolve-se o sistema linear definido pela matriz jacobiana, Eq. (3.19).* Note-se que cada elemento da matriz jacobiana é uma matriz 2x2, e portanto, deve-se dispor de um algoritmo capaz de resolver sistemas lineares de blocos;
4. *Avanço das variáveis no nível iterativo.* A solução do sistema linear dado pela Eq. (3.19) é um vetor de variações e portanto as incógnitas são avançadas no nível iterativo fazendo-se ($X^{k+1} = X^k + \Delta X^k$), sendo $X = P$ ou S^w ;
5. *Verifica-se se a convergência foi obtida.* Caso não haja convergência volta-se ao passo 2. Note-se que a convergência é obtida quando variações no campo de pressões e saturações, são tais que não alteram sensivelmente a solução do sistema dado pela Eq. (3.19);
6. *Avanço no tempo.* Se desejado, faz-se um incremento no tempo e retorna-se ao passo 2.

3.3 - Discretização para a Formulação em Frações Mássicas

Como visto no capítulo anterior, as Eqs. (2.37) a (2.40) referem-se a formulação em frações mássicas aplicadas ao modelo *black-oil* padrão. Porém, conforme comentado, para a solução numérica do problema apenas três destas equações são utilizadas, sendo estas reescritas a seguir [†],

$$\frac{\partial}{\partial t} [\phi \rho^m] = \nabla \cdot [\lambda^w \nabla \Phi^w + \lambda^o \nabla \Phi^o + \lambda^g \nabla \Phi^g] - \tilde{m}^w - \tilde{m}^o - \tilde{m}^g \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\phi \rho^m Z^w] = \nabla \cdot [\lambda^w \nabla \Phi^w] - \tilde{m}^w \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\phi \rho^m Z^o] = \nabla \cdot [X^{oo} \lambda^o \nabla \Phi^o] - X^{oo} \tilde{m}^o \quad (3.28)$$

e, como mencionado, as incógnitas são P^o , Z^w e Z^o . No restante do texto a pressão da fase óleo, P^o , será designada simplesmente por P .

As equações anteriores serão aplicadas à situação tridimensional e visando a solução do escoamento em reservatórios de geometrias irregulares. Portanto, tais equações devem ser escritas para o sistema de coordenadas curvilíneo generalizado segundo uma transformação do tipo [17],

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(x, y, z) \\ \eta &= \eta(x, y, z) \\ \gamma &= \gamma(x, y, z) \end{aligned} \quad (3.29)$$

A Fig. 3.2 mostra os domínios físico e computacional (transformado). Objetivando usar uma linguagem mais compacta, a equação que representa a conservação global de massa, Eq. (3.26), será chamada de equação da pressão, a equação que representa a conservação de massa do componente água, Eq. (3.27) será chamada de equação da água e a equação que representa a conservação de massa do componente óleo, Eq. (3.28), será chamada de equação do óleo. Realizando-se a transformação das equações para o domínio

[†] Estas equações serão resolvidas aplicando-se a metodologia totalmente implícita. Neste caso a solução do problema segue o caminho \mathbf{C} , indicado na Fig. 1.3.

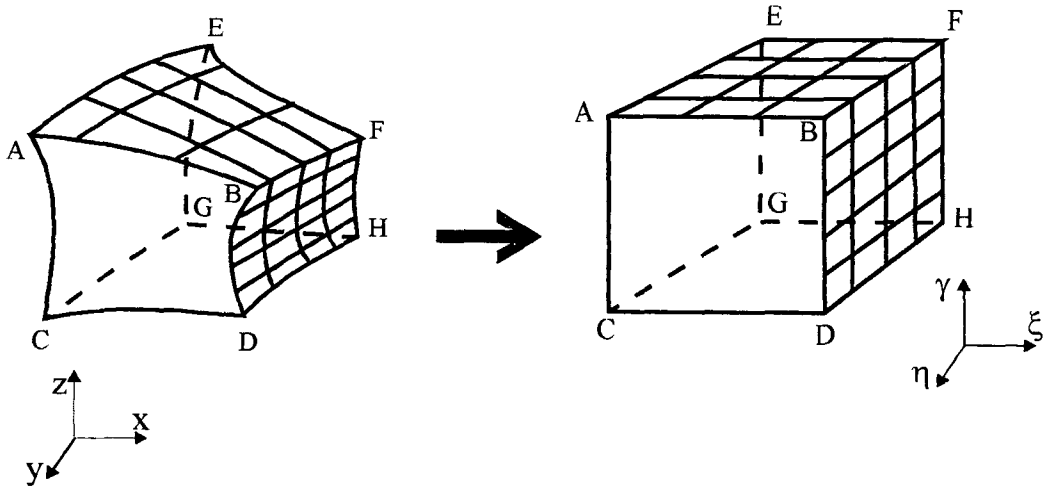


Fig. 3.2 - Domínios físico e transformado.

computacional, conforme o procedimento descrito por Maliska [17], obtém-se as seguintes equações em suas formas conservativas,

• Equação da pressão:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho^m) + \frac{\tilde{m}^w + \tilde{m}^o + \tilde{m}^g}{J} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left[D_1^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} + D_2^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} + D_3^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right] + \\
 \frac{\partial}{\partial \eta} \left[D_4^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} + D_5^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} + D_6^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right] + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[D_7^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} + D_8^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} + D_9^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right] + \\
 \frac{\partial}{\partial \xi} \left[D_1^o \frac{\partial \Phi^o}{\partial \xi} + D_2^o \frac{\partial \Phi^o}{\partial \eta} + D_3^o \frac{\partial \Phi^o}{\partial \gamma} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[D_4^o \frac{\partial \Phi^o}{\partial \xi} + D_5^o \frac{\partial \Phi^o}{\partial \eta} + D_6^o \frac{\partial \Phi^o}{\partial \gamma} \right] + & \quad (3.30) \\
 \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[D_7^o \frac{\partial \Phi^o}{\partial \xi} + D_8^o \frac{\partial \Phi^o}{\partial \eta} + D_9^o \frac{\partial \Phi^o}{\partial \gamma} \right] + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[D_1^g \frac{\partial \Phi^g}{\partial \xi} + D_2^g \frac{\partial \Phi^g}{\partial \eta} + D_3^g \frac{\partial \Phi^g}{\partial \gamma} \right] + \\
 \frac{\partial}{\partial \eta} \left[D_4^g \frac{\partial \Phi^g}{\partial \xi} + D_5^g \frac{\partial \Phi^g}{\partial \eta} + D_6^g \frac{\partial \Phi^g}{\partial \gamma} \right] + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[D_7^g \frac{\partial \Phi^g}{\partial \xi} + D_8^g \frac{\partial \Phi^g}{\partial \eta} + D_9^g \frac{\partial \Phi^g}{\partial \gamma} \right]
 \end{aligned}$$

• Equação da água:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho^m Z^w) + \frac{\tilde{m}^w}{J} = \\
& \frac{\partial}{\partial \xi} \left[D_1^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} + D_2^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} + D_3^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right] + \\
& \frac{\partial}{\partial \eta} \left[D_4^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} + D_5^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} + D_6^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right] + \\
& \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[D_7^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} + D_8^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} + D_9^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right]
\end{aligned} \tag{3.31}$$

• Equação do óleo:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho^m Z^o) + \frac{X^{oo} \tilde{m}^o}{J} = \\
& \frac{\partial}{\partial \xi} \left[X^{oo} \left(D_1^o \frac{\partial \Phi^o}{\partial \xi} + D_2^o \frac{\partial \Phi^o}{\partial \eta} + D_3^o \frac{\partial \Phi^o}{\partial \gamma} \right) \right] + \\
& \frac{\partial}{\partial \eta} \left[X^{oo} \left(D_4^o \frac{\partial \Phi^o}{\partial \xi} + D_5^o \frac{\partial \Phi^o}{\partial \eta} + D_6^o \frac{\partial \Phi^o}{\partial \gamma} \right) \right] + \\
& \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[X^{oo} \left(D_7^o \frac{\partial \Phi^o}{\partial \xi} + D_8^o \frac{\partial \Phi^o}{\partial \eta} + D_9^o \frac{\partial \Phi^o}{\partial \gamma} \right) \right]
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Nas equações anteriores os D_i^p são dados por

$$D_1^p = \frac{\lambda^p}{J} [\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2] \tag{3.33}$$

$$D_2^p = \frac{\lambda^p}{J} [\eta_x \xi_x + \eta_y \xi_y + \eta_z \xi_z] \tag{3.34}$$

$$D_3^p = \frac{\lambda^p}{J} [\gamma_x \xi_x + \gamma_y \xi_y + \gamma_z \xi_z] \tag{3.35}$$

$$D_4^p = \frac{\lambda^p}{J} [\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y + \xi_z \eta_z] \quad (3.36)$$

$$D_5^p = \frac{\lambda^p}{J} [\eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2] \quad (3.37)$$

$$D_6^p = \frac{\lambda^p}{J} [\gamma_x \eta_x + \gamma_y \eta_y + \gamma_z \eta_z] \quad (3.38)$$

$$D_7^p = \frac{\lambda^p}{J} [\xi_x \gamma_x + \xi_y \gamma_y + \xi_z \gamma_z] \quad (3.39)$$

$$D_8^p = \frac{\lambda^p}{J} [\eta_x \gamma_x + \eta_y \gamma_y + \eta_z \gamma_z] \quad (3.40)$$

$$D_9^p = \frac{\lambda^p}{J} [\gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2] \quad (3.41)$$

onde p representa as fases, água, óleo ou gás. As expressões do jacobiano, J , e das métricas, ξ_x, ξ_y , etc, podem ser encontradas em Maliska [17].

Note-se que nas Eqs. (3.30) a (3.32) aparecem nove termos devidos às derivadas de potenciais de cada fase. Isto deve-se a não-ortogonalidade, pois em sistemas ortogonais têm-se apenas três termos ($D_1^p \frac{\partial \Phi^p}{\partial \xi}$, $D_5^p \frac{\partial \Phi^p}{\partial \eta}$, $D_9^p \frac{\partial \Phi^p}{\partial \gamma}$).

Conforme indica a Fig. 3.3, o esquema numérico utilizado envolve 18 volumes vizinhos ao volume central P. Portanto, constata-se que a matriz jacobiana resultante é esparsa, apresentando uma estrutura de 19 bandas. Evidentemente que se torna oneroso manter uma estrutura de 19 bandas no sistema linear resultante. Além disso, se a metodologia totalmente implícita é aplicada tem-se que cada banda é formada por elementos 3x3, uma vez que para cada volume de controle existem três equações associadas a três variáveis. A fim de minimizar este peso computacional, neste trabalho usou-se uma técnica particular. Esta técnica consiste em derivar a equação discretizada apenas em relação as variáveis do volume P e de seus vizinhos diretos (B, S, W, E, N e T). Com isso, o número de pontos envolvidas no esquema numérico é igual ao caso cartesiano ortogonal tridimensional, isto é, 7 pontos.

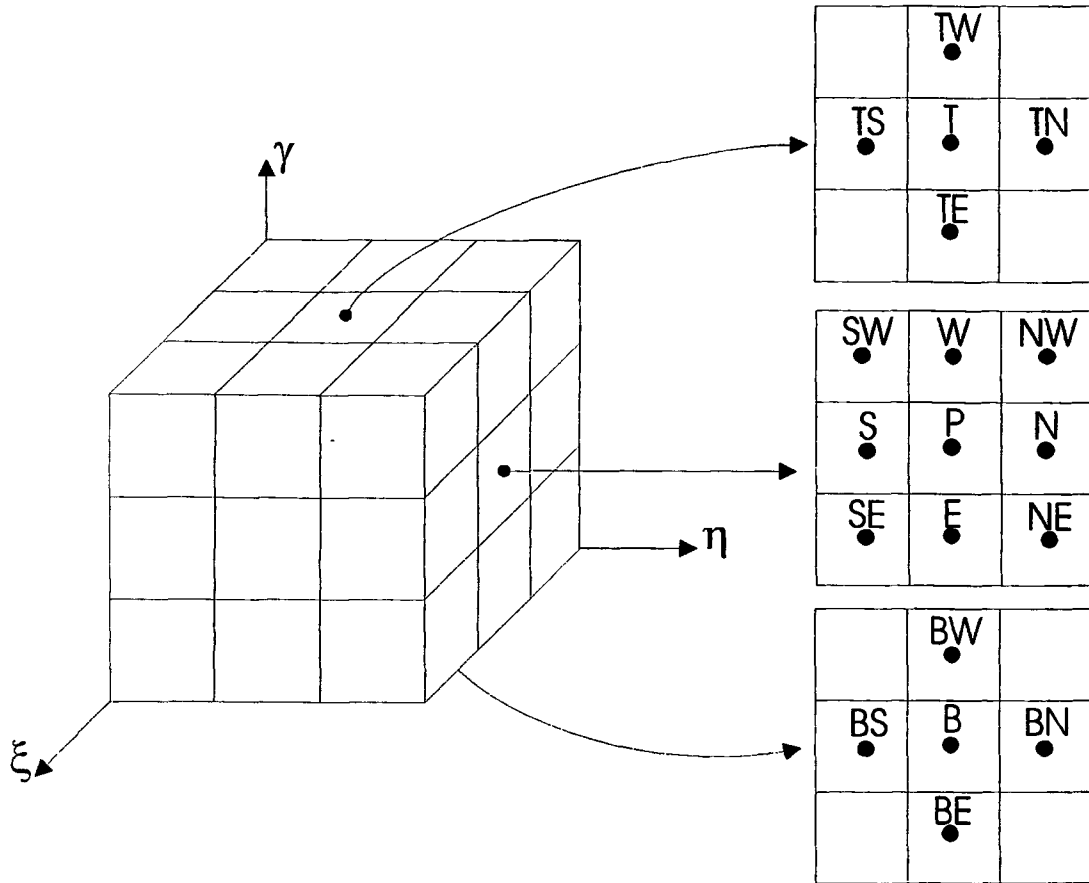


Fig. 3.3 - Volumes presentes no esquema numérico.

Isto ocorre porque, no processo de derivação, desconsiderou-se a dependência da equação em relação as variáveis dos outros volumes vizinhos do volume P (BS , BW , BE , BN , SW , SE , NW , NE , TS , TW , TE , TN). Note-se que este procedimento não implica na introdução de erros, apenas pode provocar redução na taxa de convergência. A vantagem desta técnica está no fato de que a obtenção da matriz jacobiana fica simplificada, e por consequência também sua resolução, pois apenas 7 bandas são consideradas, mantendo-se ainda a versatilidade do sistema generalizado de coordenadas.

Neste trabalho apresentar-se-á apenas como obter a forma discreta da equação da água. Esta escolha deve-se ao fato que o processo de demonstração é muito longo, e sua omissão, para o caso das equações da pressão e do óleo, não afeta o entendimento do restante do trabalho. Além disso, o processo de obtenção das equações discretizadas é padrão, e pode ser realizado facilmente pelo leitor mais interessado. Assim, efetuando-se a integração da Eq. (3.31) no tempo e no volume de controle da Fig. 3.4, obtém-se

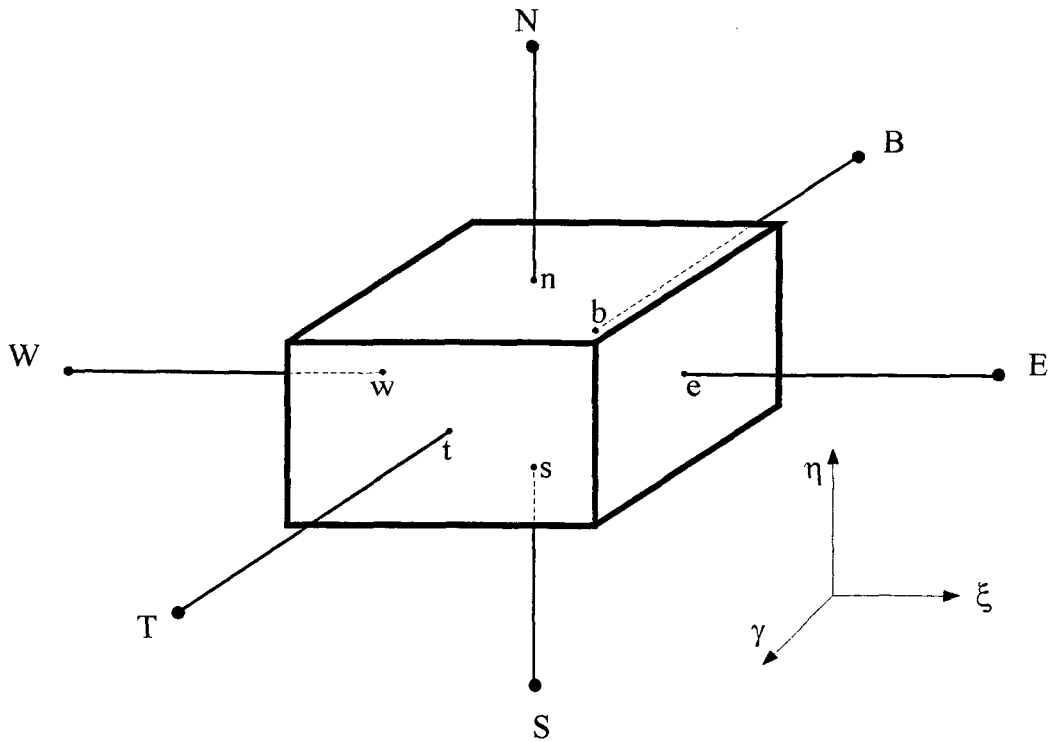


Fig. 3.4 - Volume de controle elementar tridimensional.

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{J} [(\phi \rho^m Z^w)_P - (\phi \rho^m Z^w)_P^o] \Delta V + \frac{\tilde{m}^w}{J} \Delta V \Delta t = \\
 & \left[D_1^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} + D_2^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} + D_3^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right]_e \Delta \eta \Delta \gamma \Delta t - \\
 & \left[D_1^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} + D_2^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} + D_3^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right]_w \Delta \eta \Delta \gamma \Delta t + \\
 & \left[D_4^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} + D_5^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} + D_6^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right]_n \Delta \xi \Delta \gamma \Delta t - \\
 & \left[D_4^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} + D_5^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} + D_6^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right]_s \Delta \xi \Delta \gamma \Delta t + \\
 & \left[D_7^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} + D_8^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} + D_9^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right]_t \Delta \xi \Delta \eta \Delta t - \\
 & \left[D_7^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} + D_8^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} + D_9^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right]_b \Delta \xi \Delta \eta \Delta t
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

Note-se que o termo $\frac{\tilde{m}^w}{J}\Delta V$ representa o fluxo mássico da fase água (injetado ou produzido) relativo ao volume de controle P. Desta forma, define-se \dot{m}^w como sendo este fluxo, ou seja,

$$\dot{m}^w = \frac{\tilde{m}^w}{J}\Delta V \quad (3.43)$$

e similarmente pode-se definir \dot{m}^o e \dot{m}^g .

Para a obtenção da equação algébrica é necessário obter as expressões de derivadas dos potenciais nas seis faces do volume de controle P, conforme pode ser visto na Fig. 3.4.

As derivadas diretas dos potenciais (para cada uma das fases) são dadas por

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right)_e = F_e \left[\frac{\Phi_E - \Phi_P}{\Delta\xi} \right] \quad (3.44)$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right)_n = F_n \left[\frac{\Phi_N - \Phi_P}{\Delta\eta} \right] \quad (3.45)$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma}\right)_t = F_t \left[\frac{\Phi_T - \Phi_P}{\Delta\gamma} \right] \quad (3.46)$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right)_w = F_w \left[\frac{\Phi_P - \Phi_W}{\Delta\xi} \right] \quad (3.47)$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right)_s = F_s \left[\frac{\Phi_P - \Phi_S}{\Delta\eta} \right] \quad (3.48)$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma}\right)_b = F_b \left[\frac{\Phi_P - \Phi_B}{\Delta\gamma} \right] \quad (3.49)$$

onde os coeficientes F 's serão discutidos mais adiante.

A seguir estão expostas as expressões para as derivadas cruzadas.

- derivadas avaliadas nas interfaces $LESTE(e)$ e $OESTE(w)$:

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right)_e = \frac{F\eta_{SE}^E\Phi_{SE} + F\eta_E^E\Phi_E + F\eta_{NE}^E\Phi_{NE} + F\eta_S^P\Phi_S + F\eta_P^P\Phi_P + F\eta_N^P\Phi_N}{F_e^{-1}\Delta\eta} \quad (3.50)$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right)_w = \frac{F\eta_{SW}^W\Phi_{SW} + F\eta_W^W\Phi_W + F\eta_{NW}^W\Phi_{NW} + F\eta_S^P\Phi_S + F\eta_P^P\Phi_P + F\eta_N^P\Phi_N}{F_w^{-1}\Delta\eta} \quad (3.51)$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma}\right)_e = \frac{F\gamma_{BE}^E\Phi_{BE} + F\gamma_E^E\Phi_E + F\gamma_{TE}^E\Phi_{TE} + F\gamma_B^P\Phi_B + F\gamma_P^P\Phi_P + F\gamma_T^P\Phi_T}{F_e^{-1}\Delta\gamma} \quad (3.52)$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma}\right)_w = \frac{F\gamma_{BW}^W\Phi_{BW} + F\gamma_W^W\Phi_W + F\gamma_{TW}^W\Phi_{TW} + F\gamma_B^P\Phi_B + F\gamma_P^P\Phi_P + F\gamma_T^P\Phi_T}{F_w^{-1}\Delta\gamma} \quad (3.53)$$

- derivadas avaliadas nas interfaces $NORTE(n)$ e $SUL(s)$:

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right)_n = \frac{F\xi_{NW}^N\Phi_{NW} + F\xi_N^N\Phi_N + F\xi_{NE}^N\Phi_{NE} + F\xi_W^P\Phi_W + F\xi_P^P\Phi_P + F\xi_E^P\Phi_E}{F_n^{-1}\Delta\xi} \quad (3.54)$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right)_s = \frac{F\xi_{SW}^S\Phi_{SW} + F\xi_S^S\Phi_S + F\xi_{SE}^S\Phi_{SE} + F\xi_W^P\Phi_W + F\xi_P^P\Phi_P + F\xi_E^P\Phi_E}{F_s^{-1}\Delta\xi} \quad (3.55)$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma}\right)_n = \frac{F\gamma_{BN}^N\Phi_{BN} + F\gamma_N^N\Phi_N + F\gamma_{TN}^N\Phi_{TN} + F\gamma_B^P\Phi_B + F\gamma_P^P\Phi_P + F\gamma_T^P\Phi_T}{F_n^{-1}\Delta\gamma} \quad (3.56)$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma}\right)_s = \frac{F\gamma_{BS}^S\Phi_{BS} + F\gamma_S^S\Phi_S + F\gamma_{TS}^S\Phi_{TS} + F\gamma_B^P\Phi_B + F\gamma_P^P\Phi_P + F\gamma_T^P\Phi_T}{F_s^{-1}\Delta\gamma} \quad (3.57)$$

- derivadas avaliadas nas interfaces *SUPERIOR*(*t*) e *INFERIOR*(*b*):

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right)_t = \frac{F\xi_{TW}^T\Phi_{TW} + F\xi_T^T\Phi_T + F\xi_{TE}^T\Phi_{TE} + F\xi_W^P\Phi_W + F\xi_P^P\Phi_P + F\xi_E^P\Phi_E}{F_t^{-1}\Delta\xi} \quad (3.58)$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right)_b = \frac{F\xi_{BW}^B\Phi_{BW} + F\xi_B^B\Phi_B + F\xi_{BE}^B\Phi_{BE} + F\xi_W^P\Phi_W + F\xi_P^P\Phi_P + F\xi_E^P\Phi_E}{F_b^{-1}\Delta\xi} \quad (3.59)$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right)_t = \frac{F\eta_{TS}^T\Phi_{TS} + F\eta_T^T\Phi_T + F\eta_{TN}^T\Phi_{TN} + F\eta_S^P\Phi_S + F\eta_P^P\Phi_P + F\eta_N^P\Phi_N}{F_t^{-1}\Delta\eta} \quad (3.60)$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right)_b = \frac{F\eta_{BS}^B\Phi_{BS} + F\eta_B^B\Phi_B + F\eta_{BN}^B\Phi_{BN} + F\eta_S^P\Phi_S + F\eta_P^P\Phi_P + F\eta_N^P\Phi_N}{F_b^{-1}\Delta\eta} \quad (3.61)$$

Os coeficientes F 's, que aparecem nas expressões das derivadas, são denominados de coeficientes de falha [9], e possibilitam que uma única equação seja empregada para representar a equação de qualquer volume de controle da malha, seja este volume de fronteira, interior, ou vizinho de uma falha geológica. Estes coeficientes são gerados automaticamente pelo programa computacional a partir da prescrição das condições de contorno e das posições de falhas geológicas, (se existirem). Detalhes a respeito da dedução destes coeficientes serão fornecidos no próximo capítulo.

Agora, substituindo as expressões das derivadas dos potenciais nas equações integradas, Eq. (3.42) e suas similares, obtém-se as equações algébricas discretizadas. Para a aplicação do método de Newton estas equações algébricas devem ser colocadas em formas residuais, assim tem-se,

- Equação da pressão na forma residual:

$$F_P^P = F_P^P(P, Z^w, Z^o) \quad (3.62)$$

• Equação da água na forma residual:

$$F_P^w = F_P^w(P, Z^w, Z^o) \quad (3.63)$$

• Equação do óleo na forma residual:

$$F_P^o = F_P^o(P, Z^w, Z^o) \quad (3.64)$$

Note-se que, por exemplo, F_P^w denota a função resíduo da equação da água do ponto P. É importante notar que as funções residuais são dependentes das variáveis nos pontos (BS, BW, B, BE, BN, SW, S, SE, W, P, E, NW, N, NE, TS, TW, T, TE, TN) e de P^{wf} , onde P^{wf} é a pressão de fundo de poço, se existir poço passando pelo volume de controle em questão (detalhes a respeito da variável pressão de fundo de poço são dados no capítulo 4). Ainda, observe que a função residual é obtida quando se desloca todos os termos, da equação associada, para um dos lados da igualdade. Por exemplo, a equação de resíduo para a água tem a seguinte forma,

$$\begin{aligned} F_P^w = & -\frac{1}{J} \frac{\Delta V}{\Delta t} [(\phi \rho^m Z^w)_P - (\phi \rho^m Z^w)_P^o] - \dot{m}^w + \hat{T} + \\ & \left[D_1^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} \right]_e \Delta \eta \Delta \gamma - \left[D_1^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} \right]_w \Delta \eta \Delta \gamma + \\ & \left[D_5^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} \right]_n \Delta \xi \Delta \gamma - \left[D_5^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} \right]_s \Delta \xi \Delta \gamma + \\ & \left[D_9^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right]_t \Delta \xi \Delta \eta - \left[D_9^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right]_b \Delta \xi \Delta \eta \end{aligned} \quad (3.65)$$

onde \hat{T} , que envolve as derivadas cruzadas, é dado por

$$\begin{aligned}
\hat{T} = & \left[D_2^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} + D_3^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right]_e \Delta \eta \Delta \gamma - \left[D_2^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} + D_3^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right]_w \Delta \eta \Delta \gamma + \\
& \left[D_4^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} + D_6^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right]_n \Delta \xi \Delta \gamma - \left[D_4^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} + D_6^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right]_s \Delta \xi \Delta \gamma + \\
& \left[D_7^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} + D_8^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} \right]_t \Delta \xi \Delta \eta - \left[D_7^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} + D_8^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} \right]_b \Delta \xi \Delta \eta
\end{aligned} \tag{3.66}$$

Conforme visto, quando se apresentou a metodologia totalmente implícita para a formulação em saturações, para aplicar o método de Newton deve-se expandir as funções residuais em série de Taylor, como,

$$(F_P^i)^{k+1} = (F_P^i)^k + \sum_{\forall X} \left(\frac{\partial F_P^i}{\partial X} \right)^k \Delta X = 0 \tag{3.67}$$

onde $i = P, w, o$ e $X = P, Z^w, Z^o$, avaliados em (T, N, E, P, W, S, B) , quando não há poço passando pelo volume de controle em questão, e $X = P^{wf}$ ou P, Z^w, Z^o , se existe poço passando pelo volume de controle em questão.

Então, aplicando-se a expressão dada pela Eq. (3.67) à Eq. (3.65) e suas análogas, resulta:

• **Equação Implícita da Pressão:**

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial F_P^P}{\partial P^{wf}} \right) \Delta P^{wf} + \left(\frac{\partial F_P^P}{\partial P_P} \right) \Delta P_P + \left(\frac{\partial F_P^P}{\partial Z_P^w} \right) \Delta Z_P^w + \left(\frac{\partial F_P^P}{\partial Z_P^o} \right) \Delta Z_P^o + \\
& \sum_{NB} \left[\left(\frac{\partial F_P^P}{\partial P_{NB}} \right) \Delta P_{NB} + \left(\frac{\partial F_P^P}{\partial Z_{NB}^w} \right) \Delta Z_{NB}^w + \left(\frac{\partial F_P^P}{\partial Z_{NB}^o} \right) \Delta Z_{NB}^o \right] = -F_P^P
\end{aligned} \tag{3.68}$$

• Equação Implícita da Água:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial F_P^w}{\partial P^{wf}} \right) \Delta P^{wf} + \left(\frac{\partial F_P^w}{\partial P_P} \right) \Delta P_P + \left(\frac{\partial F_P^w}{\partial Z_P^w} \right) \Delta Z_P^w + \left(\frac{\partial F_P^w}{\partial Z_P^o} \right) \Delta Z_P^o + \\ & \sum_{NB} \left[\left(\frac{\partial F_P^w}{\partial P_{NB}} \right) \Delta P_{NB} + \left(\frac{\partial F_P^w}{\partial Z_{NB}^w} \right) \Delta Z_{NB}^w + \left(\frac{\partial F_P^w}{\partial Z_{NB}^o} \right) \Delta Z_{NB}^o \right] = -F_P^w \end{aligned} \quad (3.69)$$

• Equação Implícita do Óleo:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial F_P^o}{\partial P^{wf}} \right) \Delta P^{wf} + \left(\frac{\partial F_P^o}{\partial P_P} \right) \Delta P_P + \left(\frac{\partial F_P^o}{\partial Z_P^w} \right) \Delta Z_P^w + \left(\frac{\partial F_P^o}{\partial Z_P^o} \right) \Delta Z_P^o + \\ & \sum_{NB} \left[\left(\frac{\partial F_P^o}{\partial P_{NB}} \right) \Delta P_{NB} + \left(\frac{\partial F_P^o}{\partial Z_{NB}^w} \right) \Delta Z_{NB}^w + \left(\frac{\partial F_P^o}{\partial Z_{NB}^o} \right) \Delta Z_{NB}^o \right] = -F_P^o \end{aligned} \quad (3.70)$$

Os somatórios que aparecem nas equações anteriores desenvolvem-se sobre todos os volumes vizinhos (T, N, E, W, S, B). Tomando a equação implícita da água, por exemplo, tem-se

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial F_P^w}{\partial P_B} \right) \Delta P_B + \left(\frac{\partial F_P^w}{\partial Z_B^w} \right) \Delta Z_B^w + \left(\frac{\partial F_P^w}{\partial Z_B^o} \right) \Delta Z_B^o + \\ & \left(\frac{\partial F_P^w}{\partial P_S} \right) \Delta P_S + \left(\frac{\partial F_P^w}{\partial Z_S^w} \right) \Delta Z_S^w + \left(\frac{\partial F_P^w}{\partial Z_S^o} \right) \Delta Z_S^o + \\ & \left(\frac{\partial F_P^w}{\partial P_W} \right) \Delta P_W + \left(\frac{\partial F_P^w}{\partial Z_W^w} \right) \Delta Z_W^w + \left(\frac{\partial F_P^w}{\partial Z_W^o} \right) \Delta Z_W^o + \\ & \left(\frac{\partial F_P^w}{\partial P_P} \right) \Delta P_P + \left(\frac{\partial F_P^w}{\partial Z_P^w} \right) \Delta Z_P^w + \left(\frac{\partial F_P^w}{\partial Z_P^o} \right) \Delta Z_P^o + \\ & \left(\frac{\partial F_P^w}{\partial P_E} \right) \Delta P_E + \left(\frac{\partial F_P^w}{\partial Z_E^w} \right) \Delta Z_E^w + \left(\frac{\partial F_P^w}{\partial Z_E^o} \right) \Delta Z_E^o + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial F_P^w}{\partial P_N} \right) \Delta P_N + \left(\frac{\partial F_P^w}{\partial Z_N^w} \right) \Delta Z_N^w + \left(\frac{\partial F_P^w}{\partial Z_N^o} \right) \Delta Z_N^o + \\
& \left(\frac{\partial F_P^w}{\partial P_T} \right) \Delta P_T + \left(\frac{\partial F_P^w}{\partial Z_T^w} \right) \Delta Z_T^w + \left(\frac{\partial F_P^w}{\partial Z_T^o} \right) \Delta Z_T^o + \\
& \left(\frac{\partial F_P^w}{\partial P^{wf}} \right) \Delta P^{wf} = -F_P^w
\end{aligned} \tag{3.71}$$

Note-se que as equações implícitas, quando aplicadas a cada volume da malha, geram um sistema linear cujos coeficientes são as derivadas das funções residuais em relação as variáveis de reservatório (Z^w , Z^o , P) e a P^{wf} . Desta forma, o item a seguir reserva-se ao processo de derivação das funções residuais.

3.3.1 - Processo de derivação das funções residuais

A fim de expressar as derivadas das funções residuais numa forma mais compacta, faz-se algumas definições e considerações:

- (i) Nas Eqs. (3.33) a (3.41) define-se como G_i a parte geométrica envolvida na definição de D_i^p . Isto é,

$$G_i = \frac{D_i^p}{\lambda^p} \tag{3.72}$$

Resultanto, por exemplo,

$$G_4 = \frac{1}{J} [\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y + \xi_z \eta_z] \tag{3.73}$$

- (ii) Será usada a seguinte notação:

$$\Phi_\xi^\alpha = \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \xi} \tag{3.74}$$

- (iii) As derivadas normais dos potenciais nas interfaces dos volumes de controle serão denotadas por

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} \right)_b = [G_7 \Phi_\xi^w + G_8 \Phi_\eta^w + G_9 \Phi_\gamma^w]_b \tag{3.75}$$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial\bar{n}}\right)_s = [G_4\Phi_\xi^w + G_5\Phi_\eta^w + G_6\Phi_\gamma^w]_s \quad (3.76)$$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial\bar{n}}\right)_w = [G_1\Phi_\xi^w + G_2\Phi_\eta^w + G_3\Phi_\gamma^w]_w \quad (3.77)$$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial\bar{n}}\right)_e = [G_1\Phi_\xi^w + G_2\Phi_\eta^w + G_3\Phi_\gamma^w]_e \quad (3.78)$$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial\bar{n}}\right)_n = [G_4\Phi_\xi^w + G_5\Phi_\eta^w + G_6\Phi_\gamma^w]_n \quad (3.79)$$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial\bar{n}}\right)_t = [G_7\Phi_\xi^w + G_8\Phi_\eta^w + G_9\Phi_\gamma^w]_t \quad (3.80)$$

(iv) Todas as derivadas cruzadas dos potenciais em relação a ξ, η, γ serão consideradas constantes. Assim, por exemplo a derivada

$$\frac{\partial}{\partial P_E} \left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma} \right)_e \right]$$

será considerada nula. Porém, note-se que aparecerão derivadas de termos cruzados participando da constituição da matriz jacobiana. Por exemplo, a derivada do termo $(D_2^w \frac{\partial\Phi^w}{\partial\eta})_e$, que aparece na Eq. (3.66), em relação a Z_E^w é aproximada por

$$\frac{\partial}{\partial Z_E^w} \left(D_2^w \frac{\partial\Phi^w}{\partial\eta} \right)_e \cong (\Phi_\eta^w)_e \frac{\partial (D_2^w)_e}{\partial Z_E^w} \quad (3.81)$$

Usando o esquema UDS para a avaliação das mobilidades nas interfaces do volume de controle e, levando em contas as considerações anteriores, as derivadas do resíduo da água, Eq. (3.65), são expressas por:

- Derivadas do resíduo da água em relação as variáveis de reservatório do volume B

$$\bullet \left(\frac{\partial F_P^w}{\partial P_B} \right) = - \left(\frac{\partial\phi}{\partial\bar{n}} \right)_b \frac{\partial (\lambda^w)_b}{\partial P_B} - \left[D_9^w \frac{\partial (\Phi_\gamma^w)}{\partial P_B} \right]_b \quad (3.82)$$

$$\bullet \left(\frac{\partial F_P^w}{\partial Z_B^w} \right) = - \left(\frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} \right)_b \frac{\partial (\lambda^w)_b}{\partial Z_B^w} - \left[D_9^w \frac{\partial (\Phi_\gamma^w)}{\partial Z_B^w} \right]_b \quad (3.83)$$

$$\bullet \left(\frac{\partial F_P^w}{\partial Z_B^o} \right) = - \left(\frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} \right)_b \frac{\partial (\lambda^w)_b}{\partial Z_B^o} - \left[D_9^w \frac{\partial (\Phi_\gamma^w)}{\partial Z_B^o} \right]_b \quad (3.84)$$

- Derivadas do resíduo da água em relação as variáveis de reservatório do volume S

$$\bullet \left(\frac{\partial F_P^w}{\partial P_S} \right) = - \left(\frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} \right)_s \frac{\partial (\lambda^w)_s}{\partial P_S} - \left[D_5^w \frac{\partial (\Phi_\eta^w)}{\partial P_S} \right]_s \quad (3.85)$$

$$\bullet \left(\frac{\partial F_P^w}{\partial Z_S^w} \right) = - \left(\frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} \right)_s \frac{\partial (\lambda^w)_s}{\partial Z_S^w} - \left[D_5^w \frac{\partial (\Phi_\eta^w)}{\partial Z_S^w} \right]_s \quad (3.86)$$

$$\bullet \left(\frac{\partial F_P^w}{\partial Z_S^o} \right) = - \left(\frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} \right)_s \frac{\partial (\lambda^w)_s}{\partial Z_S^o} - \left[D_5^w \frac{\partial (\Phi_\eta^w)}{\partial Z_S^o} \right]_s \quad (3.87)$$

- Derivadas do resíduo da água em relação as variáveis de reservatório do volume W

$$\bullet \left(\frac{\partial F_P^w}{\partial P_W} \right) = - \left(\frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} \right)_w \frac{\partial (\lambda^w)_w}{\partial P_W} - \left[D_1^w \frac{\partial (\Phi_\xi^w)}{\partial P_W} \right]_w \quad (3.88)$$

$$\bullet \left(\frac{\partial F_P^w}{\partial Z_W^w} \right) = - \left(\frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} \right)_w \frac{\partial (\lambda^w)_w}{\partial Z_W^w} - \left[D_1^w \frac{\partial (\Phi_\xi^w)}{\partial Z_W^w} \right]_w \quad (3.89)$$

$$\bullet \left(\frac{\partial F_P^w}{\partial Z_W^o} \right) = - \left(\frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} \right)_w \frac{\partial (\lambda^w)_w}{\partial Z_W^o} - \left[D_1^w \frac{\partial (\Phi_\xi^w)}{\partial Z_W^o} \right]_w \quad (3.90)$$

- Derivadas do resíduo da água em relação as variáveis de reservatório do volume E

$$\bullet \left(\frac{\partial F_P^w}{\partial P_E} \right) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} \right)_e \frac{\partial (\lambda^w)_e}{\partial P_E} + \left[D_1^w \frac{\partial (\Phi_\xi^w)}{\partial P_E} \right]_e \quad (3.91)$$

$$\bullet \left(\frac{\partial F_P^w}{\partial Z_E^w} \right) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} \right)_e \frac{\partial (\lambda^w)_e}{\partial Z_E^w} + \left[D_1^w \frac{\partial (\Phi_\xi^w)}{\partial Z_E^w} \right]_e \quad (3.92)$$

$$\bullet \left(\frac{\partial F_P^w}{\partial Z_E^o} \right) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} \right)_e \frac{\partial (\lambda^w)_e}{\partial Z_E^o} + \left[D_1^w \frac{\partial (\Phi_\xi^w)}{\partial Z_E^o} \right]_e \quad (3.93)$$

- Derivadas do resíduo da água em relação as variáveis de reservatório do volume N

$$\bullet \left(\frac{\partial F_P^w}{\partial P_N} \right) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} \right)_n \frac{\partial (\lambda^w)_n}{\partial P_N} + \left[D_5^w \frac{\partial (\Phi_\eta^w)}{\partial P_N} \right]_n \quad (3.94)$$

$$\bullet \left(\frac{\partial F_P^w}{\partial Z_N^w} \right) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} \right)_n \frac{\partial (\lambda^w)_n}{\partial Z_N^w} + \left[D_5^w \frac{\partial (\Phi_\eta^w)}{\partial Z_N^w} \right]_n \quad (3.95)$$

$$\bullet \left(\frac{\partial F_P^w}{\partial Z_N^o} \right) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} \right)_n \frac{\partial (\lambda^w)_n}{\partial Z_N^o} + \left[D_5^w \frac{\partial (\Phi_\eta^w)}{\partial Z_N^o} \right]_n \quad (3.96)$$

- Derivadas do resíduo da água em relação as variáveis de reservatório do volume T

$$\bullet \left(\frac{\partial F_P^w}{\partial P_T} \right) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} \right)_t \frac{\partial (\lambda^w)_t}{\partial P_T} + \left[D_9^w \frac{\partial (\Phi_\gamma^w)}{\partial P_T} \right]_t \quad (3.97)$$

$$\bullet \left(\frac{\partial F_P^w}{\partial Z_T^w} \right) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} \right)_t \frac{\partial (\lambda^w)_t}{\partial Z_T^w} + \left[D_9^w \frac{\partial (\Phi_\gamma^w)}{\partial Z_T^w} \right]_t \quad (3.98)$$

$$\bullet \left(\frac{\partial F_P^w}{\partial Z_T^o} \right) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} \right)_t \frac{\partial (\lambda^w)_t}{\partial Z_T^o} + \left[D_9^w \frac{\partial (\Phi_\gamma^w)}{\partial Z_T^o} \right]_t \quad (3.99)$$

- Derivadas do resíduo da água em relação as variáveis de reservatório do volume P

$$\begin{aligned}
\bullet \left(\frac{\partial F_P^w}{\partial P_P} \right) &= - \frac{1}{J} \frac{\Delta V}{\Delta t} \frac{\partial(\phi \rho^m Z^w)}{\partial P_P} - \frac{\partial \dot{m}^w}{\partial P_P} + \\
&\left(\frac{\partial \phi}{\partial \bar{n}} \right)_e \frac{\partial(\lambda^w)_e}{\partial P_P} + \left[D_1^w \frac{\partial(\Phi_\xi^w)}{\partial P_P} \right]_e - \left(\frac{\partial \phi}{\partial \bar{n}} \right)_w \frac{\partial(\lambda^w)_w}{\partial P_P} - \left[D_1^w \frac{\partial(\Phi_\xi^w)}{\partial P_P} \right]_w + \\
&\left(\frac{\partial \phi}{\partial \bar{n}} \right)_n \frac{\partial(\lambda^w)_n}{\partial P_P} + \left[D_5^w \frac{\partial(\Phi_\eta^w)}{\partial P_P} \right]_n - \left(\frac{\partial \phi}{\partial \bar{n}} \right)_s \frac{\partial(\lambda^w)_s}{\partial P_P} - \left[D_5^w \frac{\partial(\Phi_\eta^w)}{\partial P_P} \right]_s + \\
&\left(\frac{\partial \phi}{\partial \bar{n}} \right)_t \frac{\partial(\lambda^w)_t}{\partial P_P} + \left[D_9^w \frac{\partial(\Phi_\gamma^w)}{\partial P_P} \right]_t - \left(\frac{\partial \phi}{\partial \bar{n}} \right)_b \frac{\partial(\lambda^w)_b}{\partial P_P} - \left[D_9^w \frac{\partial(\Phi_\eta^w)}{\partial P_P} \right]_b \quad (3.100)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \left(\frac{\partial F_P^w}{\partial Z_P^w} \right) &= - \frac{1}{J} \frac{\Delta V}{\Delta t} \frac{\partial(\phi \rho^m Z^w)}{\partial Z_P^w} - \frac{\partial \dot{m}^w}{\partial Z_P^w} + \\
&\left(\frac{\partial \phi}{\partial \bar{n}} \right)_e \frac{\partial(\lambda^w)_e}{\partial Z_P^w} + \left[D_1^w \frac{\partial(\Phi_\xi^w)}{\partial Z_P^w} \right]_e - \left(\frac{\partial \phi}{\partial \bar{n}} \right)_w \frac{\partial(\lambda^w)_w}{\partial Z_P^w} - \left[D_1^w \frac{\partial(\Phi_\xi^w)}{\partial Z_P^w} \right]_w + \\
&\left(\frac{\partial \phi}{\partial \bar{n}} \right)_n \frac{\partial(\lambda^w)_n}{\partial Z_P^w} + \left[D_5^w \frac{\partial(\Phi_\eta^w)}{\partial Z_P^w} \right]_n - \left(\frac{\partial \phi}{\partial \bar{n}} \right)_s \frac{\partial(\lambda^w)_s}{\partial Z_P^w} - \left[D_5^w \frac{\partial(\Phi_\eta^w)}{\partial Z_P^w} \right]_s + \\
&\left(\frac{\partial \phi}{\partial \bar{n}} \right)_t \frac{\partial(\lambda^w)_t}{\partial Z_P^w} + \left[D_9^w \frac{\partial(\Phi_\gamma^w)}{\partial Z_P^w} \right]_t - \left(\frac{\partial \phi}{\partial \bar{n}} \right)_b \frac{\partial(\lambda^w)_b}{\partial Z_P^w} - \left[D_9^w \frac{\partial(\Phi_\eta^w)}{\partial Z_P^w} \right]_b \quad (3.101)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \left(\frac{\partial F_P^w}{\partial Z_P^o} \right) &= - \frac{1}{J} \frac{\Delta V}{\Delta t} \frac{\partial(\phi \rho^m Z^w)}{\partial Z_P^o} - \frac{\partial \dot{m}^w}{\partial Z_P^o} + \\
&\left(\frac{\partial \phi}{\partial \bar{n}} \right)_e \frac{\partial(\lambda^w)_e}{\partial Z_P^o} + \left[D_1^w \frac{\partial(\Phi_\xi^w)}{\partial Z_P^o} \right]_e - \left(\frac{\partial \phi}{\partial \bar{n}} \right)_w \frac{\partial(\lambda^w)_w}{\partial Z_P^o} - \left[D_1^w \frac{\partial(\Phi_\xi^w)}{\partial Z_P^o} \right]_w + \\
&\left(\frac{\partial \phi}{\partial \bar{n}} \right)_n \frac{\partial(\lambda^w)_n}{\partial Z_P^o} + \left[D_5^w \frac{\partial(\Phi_\eta^w)}{\partial Z_P^o} \right]_n - \left(\frac{\partial \phi}{\partial \bar{n}} \right)_s \frac{\partial(\lambda^w)_s}{\partial Z_P^o} - \left[D_5^w \frac{\partial(\Phi_\eta^w)}{\partial Z_P^o} \right]_s + \\
&\left(\frac{\partial \phi}{\partial \bar{n}} \right)_t \frac{\partial(\lambda^w)_t}{\partial Z_P^o} + \left[D_9^w \frac{\partial(\Phi_\gamma^w)}{\partial Z_P^o} \right]_t - \left(\frac{\partial \phi}{\partial \bar{n}} \right)_b \frac{\partial(\lambda^w)_b}{\partial Z_P^o} - \left[D_9^w \frac{\partial(\Phi_\eta^w)}{\partial Z_P^o} \right]_b \quad (3.102)
\end{aligned}$$

De modo análogo pode-se obter as derivadas das equações de resíduo da pressão e do óleo. Desta forma, o sistema linear a ser resolvido é dado por

$$\mathbf{A}\Delta\mathbf{X} = -\mathbf{F} \quad (3.103)$$

onde

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_i^P}{\partial P_j} & \frac{\partial F_i^P}{\partial Z_j^w} & \frac{\partial F_i^P}{\partial Z_j^o} \\ \frac{\partial F_i^w}{\partial P_j} & \frac{\partial F_i^w}{\partial Z_j^w} & \frac{\partial F_i^w}{\partial Z_j^o} \\ \frac{\partial F_i^o}{\partial P_j} & \frac{\partial F_i^o}{\partial Z_j^w} & \frac{\partial F_i^o}{\partial Z_j^o} \end{bmatrix} \quad (3.104)$$

$$\Delta X_i = \begin{bmatrix} P_i^{k+1} - P_i^k \\ Z_i^{wk+1} - Z_i^{wk} \\ Z_i^{ok+1} - Z_i^{ok} \end{bmatrix} \quad (3.105)$$

$$F_i = \begin{bmatrix} F_i^P \\ F_i^w \\ F_i^o \end{bmatrix} \quad (3.106)$$

Portanto, após a montagem e resolução do sistema linear, definido pela matriz jacobiana, tem-se um modo pelo qual as variáveis de reservatório podem ser avançadas durante o processo numérico.

Algumas questões ainda permanecem pendentes como:

- (i) Seqüência de cálculos que define a rotina de *flash*.
- (ii) Técnicas utilizadas para avaliar derivadas como $\frac{\partial(\lambda^w)_s}{\partial P_5}$.
- (iii) Aplicação do esquema de interpolação UDS.
- (iv) Estrutura e forma da matriz jacobiana associada ao sistema linear resultante.
- (iv) Critérios adotados para avaliação da convergência.

Todas estas questões serão abordadas nos Caps. 5 e 6.

CAPÍTULO QUATRO

Aplicação das Condições de Contorno

4.1 - Introdução

Este capítulo descreve quais são e como foram tratadas as condições de contorno. Primeiramente mostrar-se-á o esquema elaborado para modelar falhas geológicas. Este esquema, como será demonstrado, acaba resultando no desenvolvimento de uma equação geral capaz de representar a equação de qualquer volume de controle da malha, quer seja interno, de fronteira ou vizinho à falhas. O desenvolvimento deste esquema implica na definição dos chamados coeficientes de falha [9], que apareceram no capítulo anterior nas Eqs. (3.44) a (3.61). O capítulo prossegue com a descrição dos vários regimes de operação dos poços que são possíveis de serem encontrados em reservatórios.

4.2 - Esquema de Tratamento das Falhas Geológicas - Desenvolvimento de uma Equação Geral

As falhas geológicas são muitas vezes encontradas em determinados tipos de reservatórios de petróleo, portanto, um simulador deve necessariamente ser capaz de levar em consideração este tipo de configuração. Se for possível fazer com que as linhas (superfícies) coordenadas passem pelas falhas tangenciando-as, então a presença da falha poderá ser facilmente levada em consideração, conforme indica a Fig. 4.1. As falhas são possíveis de serem tratadas de modo eficiente quando se trabalha com coordenadas curvilíneas generalizadas. As falhas geológicas consideradas neste trabalho, impõe restrição total ao escoamento, ou seja, através de uma falha geológica não há fluxo de massa. Isto corresponde a velocidade nula através de uma falha. Deste modo, quando se deseja descrever uma falha geológica, é conveniente gerar a malha de tal modo que ela “capture” a falha, ou seja, deve-se, como já dito, forçar linhas (superfícies) da malha a passarem pelas falhas. Nos trechos das linhas (superfícies) coordenadas que “capturam” uma falha deve-se aplicar

a condição de restrição ao escoamento, Esta condição pode ser entendida como se fosse uma condição de “contorno” local na falha.

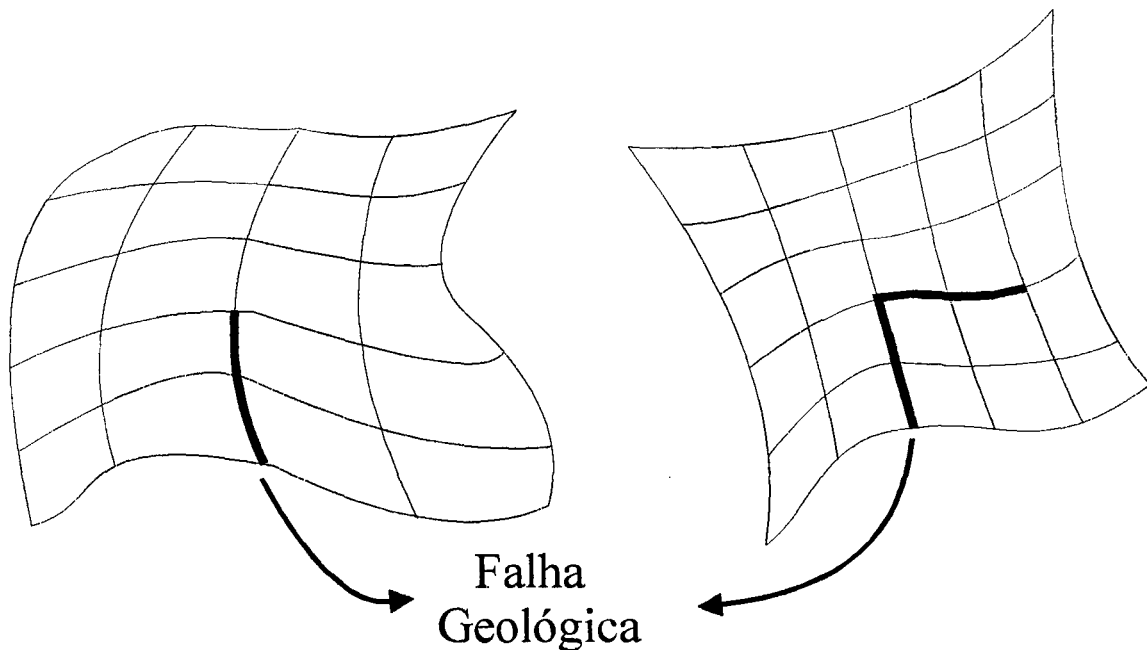


Fig. 4.1 - Linhas coordenadas passando por falhas geológicas.

O esquema desenvolvido para tratar a presença de falhas geológicas no reservatório é descrito a seguir. Do ponto de vista computacional o tratamento eficiente de falhas não é tão simples. Esta afirmativa pode ser verificada nas equações apresentadas anteriormente, Eqs. (3.44) a (3.61), onde coeficientes especiais armazenam informações da existência de falhas no domínio e como estas afetam o mesmo. Assim, o tratamento computacional de falhas geológicas foi desenvolvido por meio de coeficientes responsáveis pela avaliação correta das derivadas dos potenciais nas interfaces dos volumes da malha, pois estas derivadas são uma medida do fluxo de massa.

4.2.1 - Procedimento de obtenção dos coeficientes F 's.

Com o objetivo de explicar o procedimento de obtenção os coeficientes F 's, considere-se a Fig. 4.2 que representa um plano computacional γ constante. Inicialmente, para exemplificar, serão deduzidas as expressões das derivadas $(\frac{\partial \phi}{\partial \xi})_e$ e de $(\frac{\partial \phi}{\partial \eta})_e$.

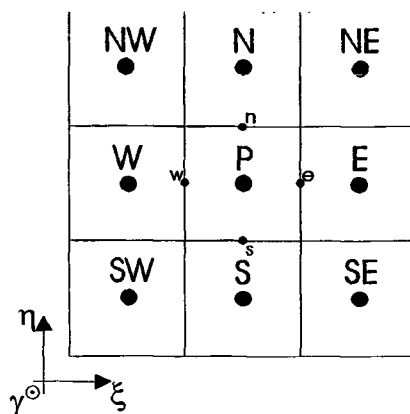


Fig. 4.2 - Plano computacional γ constante.

Primeiramente serão definidos coeficientes F_e e $f\xi_e$ da seguinte forma:

$$F_e = 1 - f\xi_e \quad (4.1)$$

e

$$f\xi_e = \begin{cases} 0 \rightarrow \text{Quando a interface } e \text{ é normal} \\ 1 \rightarrow \text{Quando a interface } e \text{ é impermeável} \end{cases} \quad (4.2)$$

De modo semelhante pode-se definir coeficientes F_n e $f\eta_n$ relativos a interface n .

Para um volume interno e não vizinho a falhas a derivada $(\frac{\partial\phi}{\partial\xi})_e$ é avaliada por

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right)_e = \frac{\Phi_E - \Phi_P}{\Delta\xi} \quad (4.3)$$

Para prever a possibilidade da face leste (*este*) ser fronteira impermeável (onde todas as derivadas devem anular-se para que o fluxo de massa seja nulo) a Eq. (4.3) é substituída por

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right)_e = F_e \left[\frac{\Phi_E - \Phi_P}{\Delta\xi} \right] \quad (4.4)$$

Considere-se agora a avaliação de $(\frac{\partial\phi}{\partial\eta})_e$. Esta derivada deve ser estimada por

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right)_e = 0.5 \left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right)_P + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right)_E \right] \quad (4.5)$$

Para o caso de um volume interno e não vizinho a falhas, tem-se que

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right)_P = \frac{(\Phi_N - \Phi_S)}{2\Delta\eta} \quad (4.6)$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right)_E = \frac{(\Phi_{NE} - \Phi_{SE})}{2\Delta\eta} \quad (4.7)$$

De forma que a Eq. (4.5) resulta

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right)_e = 0.5 \left[\left(\frac{\Phi_N - \Phi_S}{2\Delta\eta}\right) + \left(\frac{\Phi_{NE} - \Phi_{SE}}{2\Delta\eta}\right) \right] \quad (4.8)$$

Suponha agora a existência de uma falha que alcança a face norte, do volume de controle P, conforme Fig. 4.3.

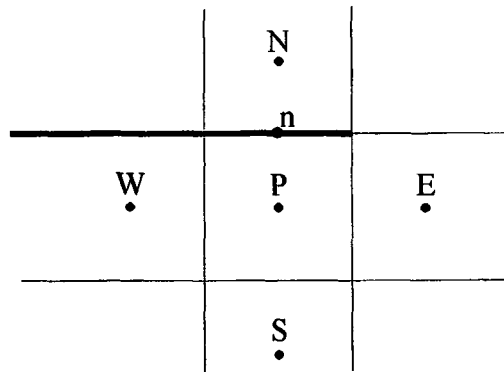


Fig. 4.3 - Falha geológica alcançando a face norte do volume de controle P.

Neste caso, a Eq. (4.6) não pode mais ser aplicada para avaliar $\left(\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right)_P$. Esta derivada, neste caso, deve ser calculada por um só lado através de

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right)_P = \frac{(\Phi_P - \Phi_S)}{\Delta\eta} \quad (4.9)$$

Analisando-se o exemplo anterior, nota-se que são inúmeras as situações que podem ocorrer para a avaliação das derivadas dos potenciais. Por este motivo optou-se pela utilização de coeficientes que levassem a informação da presença de falhas no reservatório, eliminando, portanto, a necessidade da introdução de muitas estruturas e comandos de decisão no código computacional. Estas estruturas e comandos de decisão, além de tornarem a execução do programa mais lenta, também dificultam o entendimento do código computacional.

Pode-se escrever uma equação geral para $(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta})_P$ que será função dos coeficientes f' s anteriormente definidos, com a seguinte forma

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right)_P &= (1 - f\eta_s)(1 - f\eta_n) \left(\frac{\Phi_N - \Phi_S}{2\Delta\eta}\right) + f\eta_s(1 - f\eta_n) \left(\frac{\Phi_N - \Phi_P}{1\Delta\eta}\right) \\ &\quad + f\eta_n(1 - f\eta_s) \left(\frac{\Phi_P - \Phi_S}{1\Delta\eta}\right) \end{aligned} \quad (4.10)$$

A equação anterior deve ser analisada com cuidado. Observe-se que na ausência de falhas nas interfaces \underline{n} e \underline{s} ($f\eta_n = f\eta_s = 0$), esta equação reduz-se à Eq. (4.6). Por outro lado, se existe uma falha em \underline{n} ($f\eta_n = 1$), então a equação anterior se transforma na Eq. (4.9). Para concluir, se existem falhas simultaneamente nas interfaces \underline{s} e \underline{n} ($f\eta_n = f\eta_s = 1$), que é uma situação absurda, então a derivada $(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta})_P$ torna-se nula, até porque não existe forma de avaliá-la. Portanto, a Eq. (4.10) possibilita a aproximação da derivada $(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta})_P$ para quaisquer situações. A Eq. (4.10) pode ser reescrita numa forma mais conveniente colocando-se em evidência os potenciais de mesmo índice, logo

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right)_P = 2 \left(\frac{F\eta_N^P\Phi_N + F\eta_S^P\Phi_S + F\eta_P^P\Phi_P}{\Delta\eta} \right) \quad (4.11)$$

onde

$$F\eta_N^P = \frac{1}{2} \left[\frac{F_s F_n}{2} + f\eta_s F_n \right] \quad (4.12)$$

$$F\eta_S^P = \frac{1}{2} \left[-\frac{F_s F_n}{2} - f\eta_n F_s \right] \quad (4.13)$$

$$F\eta_P^P = \frac{1}{2} \left[-f\eta_s F_n + f\eta_n F_s \right] \quad (4.14)$$

Procedimento idêntico é realizado para a derivada $(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta})_E$, obtendo-se

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right)_E = 2 \left(\frac{F\eta_{NE}^E \Phi_{NE} + F\eta_{SE}^E \Phi_{SE} + F\eta_E^E \Phi_E}{\Delta\eta} \right) \quad (4.15)$$

onde

$$F\eta_{NE}^E = \frac{1}{2} \left[\frac{F_{sE} F_{nE}}{2} + f\eta_{sE} F_{nE} \right] \quad (4.16)$$

$$F\eta_{SE}^E = \frac{1}{2} \left[-\frac{F_{sE} F_{nE}}{2} - f\eta_{nE} F_{sE} \right] \quad (4.17)$$

$$F\eta_E^E = \frac{1}{2} \left[-f\eta_{sE} F_{nE} + f\eta_{nE} F_{sE} \right] \quad (4.18)$$

note que agora os coeficientes f 's e F 's são relativos ao volume de controle E .

De modo análogo, todos os coeficientes F 's que aparecem nas Eqs. (3.44) a (3.61) são determinados para cada volume do domínio. Conforme já salientado, o uso do procedimento acima evita equações diferentes para os 27 diferentes tipos de volumes de controle, ou em outra palavras, a dedução dos 27 tipos diferentes de equações é realizada (ou ajustada) automaticamente pelo algoritmo computacional (estes 27 diferentes tipos de equações aparecem quando se escrevem as equações para os cantos, arestas, faces e interior da malha). Além disso, tal esquema dá um tratamento equivalente às falhas e às fronteiras.

4.3 - Modelo de Poço

A injeção de água, nos poços injetores, e a mistura (água, óleo e gás) extraída nos poços produtores são representados pelos termos fonte/sorvedouro nas equações de balanço. Nas malhas tradicionalmente empregadas para simulação de reservatório, ocorre que as dimensões geométricas dos volumes de controle, que contém poços, são muito maiores que os diâmetros dos poços. Com isto, não se pode assumir que a pressão do volume computacional seja igual à pressão do poço. Os chamados modelos de poço [2,4,25,29,32], relacionam a pressão do bloco computacional com a pressão do poço. O objetivo destes modelos é obter uma expressão do tipo $\dot{m} = f(P_P, P_P^w)$, onde P_P é a pressão do bloco computacional P (pressão do volume de controle P) e P_P^w é a pressão do poço que passa pelo bloco computacional P. Nos códigos computacionais, P_P e P_P^w são incógnitas[†] do problema, portanto, o termo fonte/sorvedouro, \dot{m} , sempre pode ser escrito em função das variáveis (incógnitas) do problema. Os modelos de poço são obtidos assumindo-se escoamento monofásico radial, em regime permanente, nas vizinhanças do poço. Assim, considerando um poço de raio r^w , conforme indicado na Fig. 4.4, tem-se

$$\dot{m} = \rho u A = \rho \left[\frac{k}{\mu} \left(\frac{dP}{dr} \right) \right] 2\pi r h \quad (4.19)$$

onde, conforme descrito no Cap. 2, \dot{m} é negativo para a injeção. A letra h simboliza a altura do poço.

Integrando a Eq. (4.19) entre os limites de (r^w, P^w) a $(r, P(r))$, obtém-se

$$P(r) = P^w + \frac{\dot{m}\mu}{2\pi k h \rho} \ln \left(\frac{r}{r^w} \right) \quad (4.20)$$

Define-se, então, o raio equivalente de poço, r^0 , como o raio onde $P(r) = P_P$, sendo P_P a pressão do bloco computacional. Desta forma, tem-se que

[†] Na verdade P_P^w não é incógnita. Porém P_P^w apresenta, como será visto adiante, uma relação direta com P_P^{wf} , a pressão de fundo de poço, que é uma incógnita do problema ou é um dado conhecido.

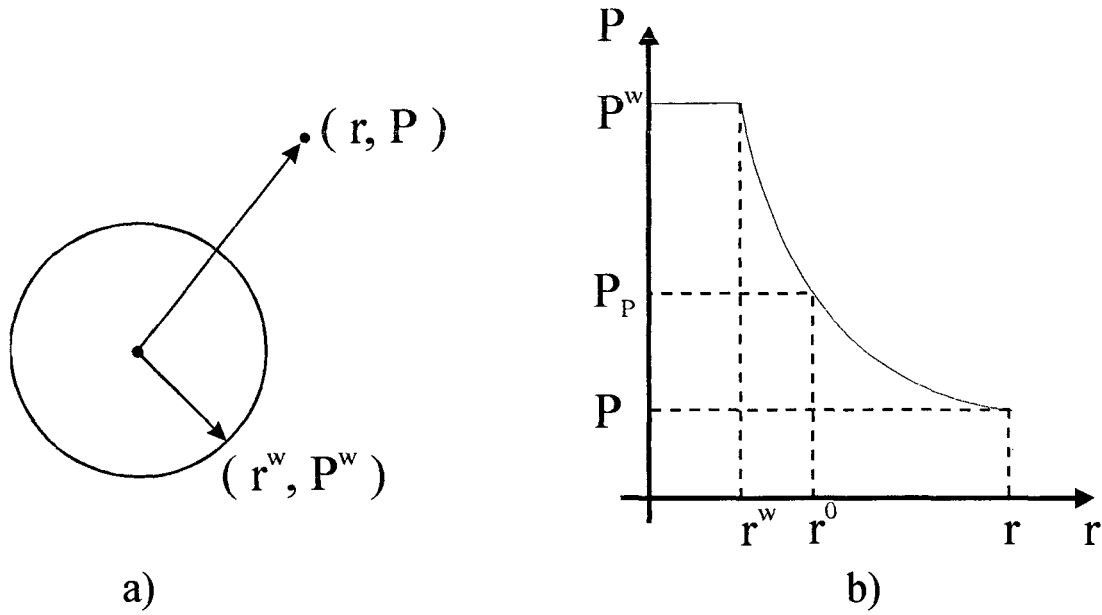


Fig. 4.4 - a) Escoamento radial b) Comportamento logarítmico da pressão

$$P_P = P_P^w + \frac{\dot{m}\mu}{2\pi kh\rho} \ln\left(\frac{r^0}{r^w}\right) \quad (4.21)$$

de onde

$$\dot{m} = \frac{2\pi kh\rho}{\mu \ln\left(\frac{r^0}{r^w}\right)} [P_P - P_P^w] \quad (4.22)$$

Porém, a equação anterior é mais conhecida na forma,

$$\dot{m} = WI\lambda [P_P - P_P^w] \quad (4.23)$$

onde WI é o índice de poço, dado por

$$WI = \frac{2\pi h}{\mu \ln\left(\frac{r^0}{r^w}\right)} \quad (4.24)$$

e

$$\lambda = \frac{k\rho}{\mu} \quad (4.25)$$

Portanto, a Eq. (4.23) representa a função $\dot{m} = f(P_P, P_P^w)$ procurada. Note-se, porém que, para computar a Eq. (4.23) deve-se conhecer o raio r^0 . O procedimento para determinação de uma expressão para o cálculo de r^0 é descrito a seguir.

4.3.1 - Cálculo do Raio Equivalente, r^0

A equação para cálculo de r^0 é obtida por meio das equações de modelo de poço. Supõe-se que a Eq. (4.20) seja válida para quaisquer pontos próximos ao ponto P. Então, aplicando-se a Eq. (4.20) aos pontos E, W, N e S, e subtraindo a Eq. (4.21), obtém-se

$$P_E - P_P = \frac{\dot{m}}{2\pi h\lambda} \ln \left(\frac{d_E}{r^0} \right) \quad (4.26)$$

$$P_W - P_P = \frac{\dot{m}}{2\pi h\lambda} \ln \left(\frac{d_W}{r^0} \right) \quad (4.27)$$

$$P_N - P_P = \frac{\dot{m}}{2\pi h\lambda} \ln \left(\frac{d_N}{r^0} \right) \quad (4.28)$$

$$P_S - P_P = \frac{\dot{m}}{2\pi h\lambda} \ln \left(\frac{d_S}{r^0} \right) \quad (4.29)$$

onde d_E, d_W, d_N e d_S (ver Fig. 4.5) representam as distâncias do centro do volume de controle P ao centro dos volumes de controle E, W, N e S, respectivamente.

Agora, fazendo-se um balanço de massa para o volume de controle que contém o poço, Fig. 4.5, e desprezando-se os termos devidos à não-ortogonalidade (derivadas cruzadas), tem-se (lembrando que o escoamento é assumido ser radial, em regime permanente e monofásico, nas proximidades do poço), da Eq. (3.42), que

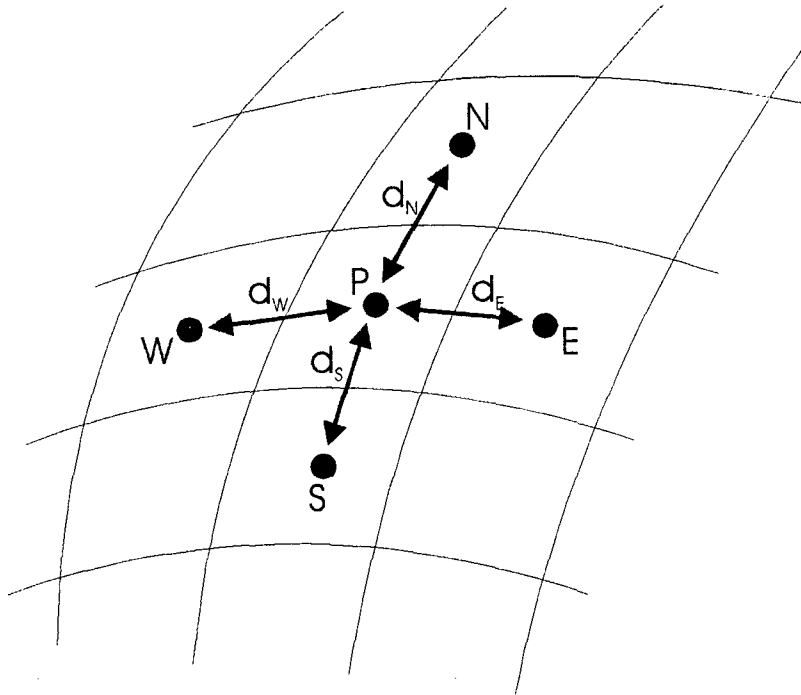


Fig. 4.5 - Volume de controle com poço.

$$D_{1e}(P_E - P_P) - D_{1w}(P_P - P_W) + D_{5n}(P_N - P_P) - D_{5s}(P_P - P_S) = \dot{m} \quad (4.30)$$

onde $D_i \equiv \lambda G_i$, conforme definição feita no item 3.3.1 por meio da Eq. (3.72).

O fato de desprezar-se termos de derivadas cruzadas da Eq. (3.42) não é crucial, pois hipóteses mais fortes foram feitas quando assumiu-se escoamento monofásico e em regime permanente. Ainda, conforme mostrou Mota [25], a equação obtida para r^0 quando os termos cruzados são considerados não fornece resultados muito diferentes da equação que será obtida a seguir. Além disso, o objetivo principal é obter uma expressão simples para r^0 de modo a levar em conta a ordem de grandeza do decaimento (crescimento) logarítmico da pressão no poço injetor (produtor). Desta forma, pode-se reescrever a Eq. (4.30) como

$$\lambda G_{1e}(P_E - P_P) - \lambda G_{1w}(P_P - P_W) + \lambda G_{5n}(P_N - P_P) - \lambda G_{5s}(P_P - P_S) = \dot{m} \quad (4.31)$$

Analisando-se a Eq. (4.31) pode-se ver que as diferenças do tipo $P_E - P_P$ podem ser substituídas em função de logaritmos conforme Eqs. (4.26) a (4.29), obtendo-se

$$-2\pi h + G_{1e} \ln \left(\frac{d_E}{r^0} \right) - G_{1w} \ln \left(\frac{d_W}{r^0} \right) + G_{5n} \ln \left(\frac{d_N}{r^0} \right) - G_{5s} \ln \left(\frac{d_S}{r^0} \right) = 0 \quad (4.32)$$

Efetuada-se manipulações algébricas na Eq. (4.32) encontra-se a seguinte expressão para r^0 ,

$$r^0 = \left[e^{-2\pi h} d_E^{G_{1e}} d_W^{G_{1w}} d_N^{G_{5n}} d_S^{G_{5s}} \right]^\beta \quad (4.33)$$

onde

$$\beta = (G_{1e} + G_{1w} + G_{5n} + G_{5s})^{-1} \quad (4.34)$$

Para o caso particular de uma malha cartesiana uniforme a Eq. (4.33) fornece $r^0 = 0.208\Delta X$, que é um resultado bem conhecido da literatura [4,25,32]. Deste modo conhecendo-se o raio equivalente de poço, r^0 , pode-se calcular o índice de poço (WI) que faz a conexão entre pressão de poço e pressão de bloco. É importante ressaltar que, em três dimensões, o procedimento para conectar o poço com o volume de controle é a aplicação do modelo de poço bidimensional para cada camada. A pressão do poço, em cada camada, tem sua conexão com a pressão de fundo de poço (P^{wf}) por meio de um modelo de escoamento no interior do poço. O modelo mais simples é aquele que consiste apenas no equilíbrio hidrostático dentro do poço, sendo este o empregado neste trabalho.

4.4 - Relação Entre Termos Fonte/Sorvedouro e Pressão de Fundo de Poço

A Eq. (4.23) estabelece uma relação direta entre o termo fonte/sorvedouro, \dot{m} , e as pressões P_P e P_P^w . A pressão P_P^w é a pressão do poço (em inglês, *well*) associada ao volume P. O que se pretende agora é estabelecer uma relação entre \dot{m} e as pressões P_P e P_P^{wf} , onde P_P^{wf} é a pressão de fundo de poço associada ao volume de controle P.

A conexão entre a pressão do poço com a pressão do volume de controle P, da camada k, é dada pela Eq. (4.23), resultando

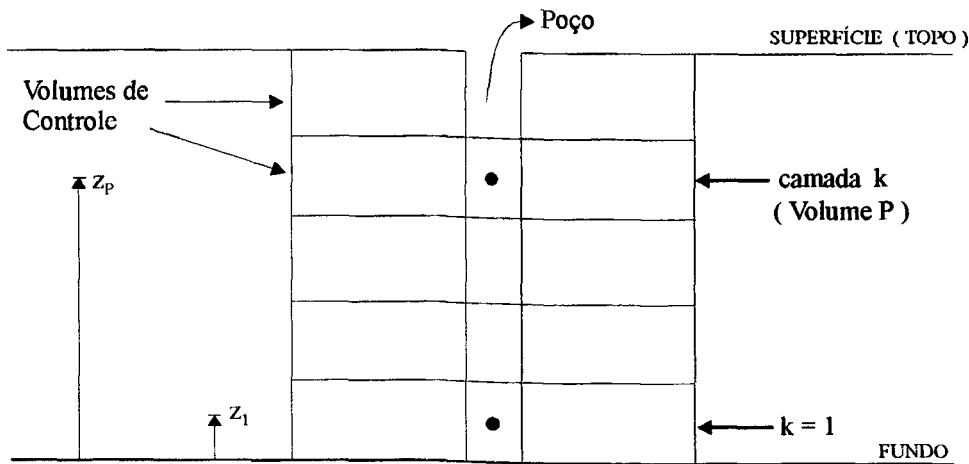


Fig. 4.6 - Representação de um poço.

$$\dot{m}_P^p = WI_P \lambda_P^p [P_P - P_P^w] \quad (4.35)$$

onde a mobilidade, λ_P^p é calculada de acordo com o tipo de poço:

$$\lambda_P^p = \begin{cases} \left(\frac{k k^{r^p} \rho^p}{\mu^p} \right)_P = f(P^o, Z^o, Z^w) \rightarrow \text{Poços Produtores} \\ \left(\frac{k \rho^p}{\mu^p} \right)_P = f(P^o) \rightarrow \text{Poços Injetores} \end{cases} \quad (4.36)$$

Observe que para poços injetores a mobilidade é avaliada sem a permeabilidade relativa. Procede-se deste modo pois o escoamento é monofásico no interior do poço injetor.

As diversas condições de operação dos poços (condições de vazões ou pressões prescritas) sempre necessitam, direta ou indiretamente, do conhecimento da pressão no fundo do poço. Desta forma, considere a lei de Stevin que relaciona a pressão P_P^w numa camada, k , qualquer do poço com a pressão de fundo de poço, P^{wf} ,

$$P_P^w = P_P^{wf} - \bar{\rho}g(z_p - z_1) \quad (4.37)$$

onde a densidade média é dada por

$$\bar{\rho} = \begin{cases} \rho_{inj} \rightarrow \text{Poço Injetor} \\ \bar{\rho}_{prod} \rightarrow \text{Poço Produtor} \end{cases} \quad (4.38)$$

sendo

$$\bar{\rho}_{prod} \equiv \frac{\sum_{i=1}^k \sum_p (\dot{m}_i^p)}{k} \equiv \frac{\sum_{i=1}^k \sum_p (\rho_i^p q_i^p)}{\sum_{i=1}^k \sum_p (q_i^p)} \quad (4.39)$$

Nas equações anteriores, as densidades médias são avaliadas com os valores do passo de tempo anterior.

A equação que relaciona a pressão de fundo do poço com a pressão do volume de controle localizado na camada k , é obtida quando se substitui a lei de Stevin na Eq. (4.35), resultando em

$$\dot{m}_P^p = (WI)_P \lambda_P^p \left[P_P - P_P^{wf} + \bar{\rho}g(z_P - z_1) \right] \quad (4.40)$$

onde z_1 , conforme indica a Fig. 4.6, é a coordenada z do volume da primeira camada.

Portanto, a equação anterior representa a relação existente entre a variável pressão de fundo de poço, P_P^{wf} , e o termo fonte/sorvedouro, \dot{m} .

Lembre-se que nas equações de balanço aparecem derivadas de termos do tipo \dot{m}_P em relação as três variáveis de reservatório (P , Z^w e Z^o). Também podem haver derivadas em relação à variável pressão de fundo de poço, P_P^{wf} , quando a condição de contorno não for de pressão prescrita. Por exemplo, para o caso da equação da água, estas derivadas são dadas por

$$\frac{\partial \dot{m}_P^w}{\partial P_P} = WI_P \lambda_P^w + WI_P \left[P_P - P_P^{wf} + \bar{\rho}g(z_P - z_1) \right] \frac{\partial \lambda_P^w}{\partial P_P} \quad (4.41)$$

$$\frac{\partial \dot{m}_P^w}{\partial Z_P^w} = WI_P \left[P_P - P^{wf} + \bar{\rho}g(z_P - z_1) \right] \frac{\partial \lambda_P^w}{\partial Z_P^w} \quad (4.42)$$

$$\frac{\partial \dot{m}_P^w}{\partial Z_P^o} = WI_P \left[P_P - P^{wf} + \bar{\rho}g(z_P - z_1) \right] \frac{\partial \lambda_P^w}{\partial Z_P^o} \quad (4.43)$$

$$\frac{\partial \dot{m}_P^w}{\partial P^{wf}} = -WI_P \lambda_P^w \quad (4.44)$$

Observe ainda que, devido ao aparecimento da nova variável, pressão de fundo de poço, para haver fechamento matemático do problema, cria-se a necessidade do conhecimento de novas equações para cada um dos poços presentes no reservatório. Estas equações são as equações de restrições para os poços e estão relacionadas com os diversos regimes de operação possíveis para um poço, ou seja, com as possíveis condições de contorno aplicadas no poço. É importante salientar que as equações de restrições só são necessárias quando a condição de contorno no poço não for de pressão prescrita e o domínio for tridimensional.

4.5 - Condições de Contorno nos Poços

Os poços de um reservatório podem encontrar-se segundo vários regimes de operação, sendo eles os seguintes:

- 1º - Pressão de Fundo de Poço Prescrita;
- 2º - Vazão de Água Prescrita nas Condições de Superfície;
- 3º - Vazão de Óleo Prescrita nas Condições de Superfície;
- 4º - Vazão de Gás Prescrita nas Condições de Superfície;
- 5º - Vazão Total Prescrita nas Condições de Superfície.

As condições de contorno nos poços envolvem as equações resultantes dos modelos de poço, originando as chamadas equações de restrição. Existem equações de restrição associadas a cada um dos regimes de operação citados. Estas equações, conforme será visto, estão relacionadas diretamente com a pressão de fundo de poço P^{wf} . Observe que as equações de restrição fazem parte do conjunto de equações algébricas e, portanto, também

devem ser linearizadas pela aplicação do método de Newton. A seguir serão analisados cada um dos regimes de operação citados e as respectivas equações de restrições associadas.

4.5.1 - Pressão de Fundo de Poço Prescrita

Quando a condição é de pressão de fundo de poço prescrita não é necessário a introdução de uma equação de restrição. Neste caso a pressão P^{wf} pode ser substituída diretamente nas equações que definem \dot{m} , Eq. (4.40). Entretanto, as vezes pode ser desejável trabalhar com uma equação de restrição a fim de manter a mesma forma da matriz jacobiana (ver Cap. 5). Neste caso a equação de restrição é dada por

$$P^{wf} = P_{prescrita} \quad (4.45)$$

4.5.2 - Vazão de Água Prescrita nas Condições de Superfície

Considere a Fig. 4.7 representando um poço, atravessando vários volumes de controle, que opera com vazão de água, Q^w , prescrita (poço produtor ou injetor) nas condições de superfície ou padrão (*standard conditions*). Somando as vazões para cada camada k , encontra-se

$$\dot{m}_{STC}^w \equiv \rho_{STC}^w Q_{STC}^w = \sum_{k=1}^{NK} WI_k \lambda_k^w \left[P_k - P^{wf} + \bar{\rho}_k g (z_k - z_1) \right] \quad (4.46)$$

que é a equação de restrição associada a referida condição de operação de poço. Observe-se que o somatório tem como limites os números das camadas que limitam o poço.

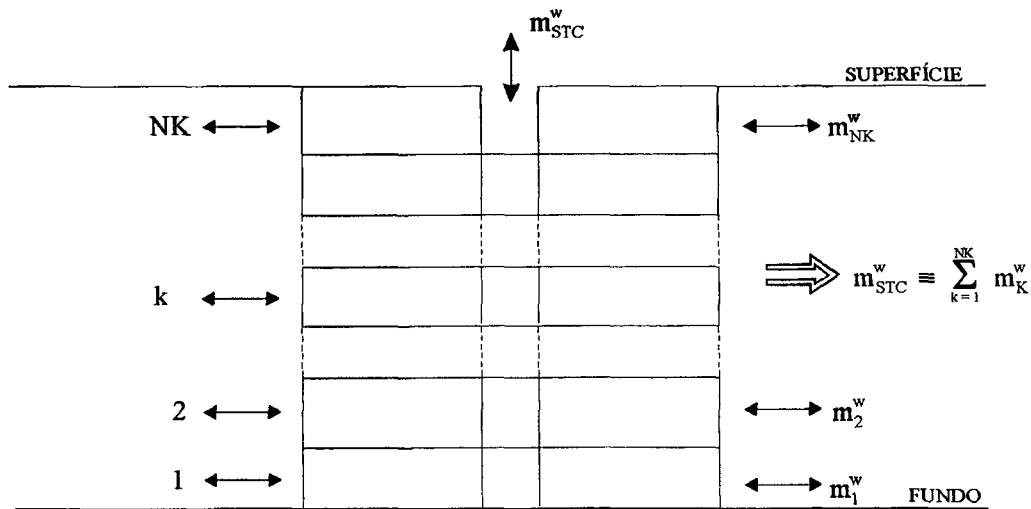


Fig. 4.7 - Vazão de água prescrita nas condições de superfície

4.5.3 - Vazão de Óleo Prescrita nas Condições de Superfície

Agora, considere-se o poço da Fig. 4.7 operando em regime de vazão de óleo prescrita nas condições de superfície. Portanto, pela lei da conservação da massa deve-se ter,

$$\dot{m}_{STC}^o \equiv \rho_{STC}^o Q_{STC}^o = \sum_{k=1}^{NK} (X^{oo} \dot{m}^o)_k \quad (4.47)$$

onde a fração X^{oo} aparece pois a fase óleo pode conter componente gás. Então, escrevendo o termo \dot{m}^o em função da pressão de fundo de poço, obtém-se

$$\dot{m}_{STC}^o = \rho_{STC}^o Q_{STC}^o = \sum_{k=1}^{NK} X_k^{oo} W I_k \lambda_k^o \left[P_k - P^{wf} + \bar{\rho} g (z_k - z_1) \right] \quad (4.48)$$

4.5.4 - Vazão de Gás Prescrita nas Condições de Superfície

Uma vez que o componente gás pode ser carregado pelas fases óleo e gás deve-se ter que

$$\dot{m}_{STC}^g \equiv \rho_{STC}^g Q_{STC}^g = \sum_{k=1}^{NK} (\dot{m}^{go} + \dot{m}^{gg})_k \quad (4.49)$$

ou

$$\dot{m}_{STC}^g \equiv \rho_{STC}^g Q_{STC}^g = \sum_{k=1}^{NK} [(1 - X^{oo}) \dot{m}^o + \dot{m}^g]_k \quad (4.50)$$

onde

$$(\dot{m}^o)_k = WI_k \lambda_k^o \left[P_k - P^{wf} + \bar{\rho}g (z_k - z_1) \right] \quad (4.51)$$

$$(\dot{m}^g)_k = WI_k \lambda_k^g \left[P_k - P^{wf} + \bar{\rho}g (z_k - z_1) \right] \quad (4.52)$$

4.5.5 - Vazão Total Prescrita nas Condições de Superfície

Neste caso é prescrita a soma das vazões volumétricas de gás, água e óleo, que podem ser obtidas individualmente dividindo as Eqs. (4.46), (4.48) e (4.50) pelas respectivas massas específicas nas condições de armazenamento.

Descrição da Rotina de *Flash*

5.1 - Introdução

Este capítulo reserva-se para a descrição da seqüência de cálculos que constituem a rotina de *flash*. Conforme comentado nos capítulos anteriores, nas rotinas de *flash* tem-se as relações que estabelecem o equilíbrio entre fases. Em modelos composicionais completos o *flash* envolve um processo iterativo de cálculos. No presente trabalho, devido ao emprego do modelo *black-oil*, o *flash* é definido por uma seqüência explícita de expressões simples, como será visto a seguir.

5.2 - Rotina de *Flash* para o Modelo *Black-Oil* Padrão

A rotina de *flash* tem por objetivo principal a obtenção das saturações em função das variáveis primárias, que são a pressão (da fase óleo) e as frações mássicas globais dos componentes. As saturações, além de serem dados de interesse de reservatório, também são necessárias no cálculo de diversos parâmetros físicos envolvidos nas equações governantes. Por exemplo, a determinação de pressões capilares, permeabilidades relativas e mobilidades, requerem o conhecimento das saturações. As equações discretizadas, obtidas no Cap. 3, só podem ser avaliadas quando se conhece as mobilidades, potenciais das fases, e a fração mássica X^{oo} . Desta forma, a seguir apresenta-se a seqüência de cálculos que permitem a obtenção da fração mássica X^{oo} , das saturações, das mobilidades, dos potenciais das fases, etc, a partir das variáveis primárias (P, Z^w e Z^o). Nesta seqüência, algumas expressões são obtidas através das definições apresentadas no item 2.2.1, enquanto outras são obtidas a partir das propriedades físicas das fases. Portanto, todas as propriedades e parâmetros necessários são obtidos na seguinte seqüência de cálculos (que define a rotina de *flash*),

- Solubilidade, R_s :

$$R_s = \min \left\{ \frac{\rho_{STC}^o (1 - Z^o - Z^w)}{\rho_{STC}^g}, R_s(P) \right\} \quad (5.1)$$

Comentário: O primeiro termo da função mínimo, na equação anterior, corresponde à situação onde não existe gás livre, ou seja, situação no qual todo gás encontra-se dissolvido na fase óleo. No apêndice B, a dedução deste termo é demonstrada, além de outras equações que aparecerão nesta seção. A segunda parcela da função mínimo, corresponde a situação no qual o óleo encontra-se em saturação, isto é, situação no qual a quantidade de gás dissolvida no óleo é máxima para a pressão dada, e ainda existe gás livre. Note-se que estas condições originam-se da definição de R_s , e podem ser obtidas pela análise da curva de saturação, conforme Fig. 2.2.

- Frações Mássicas das Fases, α^w , α^o , α^g :

$$\alpha^w = Z^w \quad (5.2)$$

$$\alpha^o = Z^o \left[1 + \frac{\rho_{STC}^g}{\rho_{STC}^o} R_s \right] \quad (5.3)$$

$$\alpha^g = 1 - \alpha^o - \alpha^w \quad (5.4)$$

Comentário: A Eq. (5.2) é consequência do fato de que na fase água só existe o componente água. A Eq. (5.3) decorre do fato que a fase óleo pode conter componente gás. A demonstração desta equação é apresentada no apêndice B.

- Fração Mássica do Componente Óleo na Fase Óleo, X^{oo} :

$$X^{oo} = \frac{1}{\left[1 + \frac{\rho_{STC}^g}{\rho_{STC}^o} R_s \right]} \quad (5.5)$$

Comentário: Como descrito no item 2.4, esta é a única fração mássica de componente em fase que necessita ser obtida, pois todas as outras são conhecidas diretamente da definição do modelo *black-oil* padrão. A demonstração desta equação também é dada no apêndice B.

- Fatores Volumes de Formação, B^w , B^o , B^g :

$$B^w = B^w(P) \quad (5.6)$$

$$B^o = B^o(P) \quad (5.7)$$

$$B^g = B^g(P) \quad (5.8)$$

Comentário: Estas equações são obtidas experimentalmente ou são definidas em termos da compressibilidade do fluido, conforme Eq. (2.21).

- Porosidade, ϕ :

$$\phi = \phi(P) \quad (5.9)$$

Comentário: O espaço vazio no meio poroso é função da pressão. Geralmente, a porosidade é definida em termos da compressibilidade da rocha, c^r , por meio de uma função linear da pressão, isto é, $\phi = \phi_i + c^r(P - P_i)$. Note-se ainda que o cálculo da porosidade não necessariamente precisa ser realizado na rotina de *flash*, porém fez-se isto no presente trabalho.

- Densidades das Fases, ρ^w , ρ^o , ρ^g :

$$\rho^o = \frac{\rho_{STC}^o}{B^o} \left[1 + \frac{\rho_{STC}^g}{\rho_{STC}^o} R_s \right] \quad (5.10)$$

$$\rho^w = \frac{\rho_{STC}^w}{B^w} \quad (5.11)$$

$$\rho^g = \frac{\rho_{STC}^g}{B^g} \quad (5.12)$$

Comentário: As Eqs. (5.11) e (5.12) decorrem do fato que na fase água só existe o componente água, e que na fase gás só existe o componente gás. A Eq. (5.10) decorre do fato que na fase óleo pode haver componente gás, veja apêndice B.

- Saturações das Fases, S^w , S^o , S^g :

$$S^p = \frac{\frac{\alpha^p}{\rho^p}}{\sum_{p'} \frac{\alpha^{p'}}{\rho^{p'}}} \quad (p = w, o, g) \quad (5.13)$$

onde $p = w, o$ ou g .

Comentário: Esta equação foi demonstrada no item 2.2.1, Eq. (2.8), e está reapresentada no apêndice B.

- Densidade Média da Mistura, ρ^m :

$$\rho^m = \sum_p \rho^p S^p \quad (5.14)$$

Comentário: Esta expressão é obtida diretamente da definição de densidade média, Eq. (2.5).

Os próximos parâmetros são definidos em termos de funções experimentais ou em termos de alguns modelos algébricos.

- Viscosidades das Fases, μ^w , μ^o , μ^g :

$$\mu^o = \mu^o(P) \quad (5.15)$$

$$\mu^w = \mu^w(P) \quad (5.16)$$

$$\mu^g = \mu^g(P) \quad (5.17)$$

- Pressões Capilares, P^{cow} , P^{cog} :

$$P^{cow} = P^{cow}(S^w) \quad (5.18)$$

$$P^{cog} = P^{cog}(S^g) \quad (5.19)$$

- Permeabilidades Relativas das Fases, k^{rw} , k^{ro} , k^{rg} :

$$k^{rw} = k^{rw}(S^w) \quad (5.20)$$

$$k^{rg} = k^{rg}(S^g) \quad (5.21)$$

$$k^{ro} = k^{ro}(S^w, S^g) \quad (5.22)$$

- Mobilidades das Fases, λ^w , λ^o , λ^g :

$$\lambda^w = \frac{k\rho^w k^{rw}}{\mu^w} \quad (5.23)$$

$$\lambda^o = \frac{k\rho^o k^{ro}}{\mu^o} \quad (5.24)$$

$$\lambda^g = \frac{k\rho^g k^{rg}}{\mu^g} \quad (5.25)$$

5.3 - Uma Observação Importante

Neste trabalho a seqüência de cálculos anteriores é aplicada simultaneamente a quatro pontos, ou seja, na rotina de *flash* obtém-se todos os parâmetros (mobilidades, potenciais, etc) nos seguintes pontos:

1. (P, Z^w, Z^o) ;
2. $(P + \Delta P, Z^w, Z^o)$;
3. $(P, Z^w + \Delta Z^w, Z^o)$;
4. $(P, Z^w, Z^o + \Delta Z^o)$.

O procedimento acima é realizado, pois, no código computacional desenvolvido, as derivadas dos parâmetros presentes nas funções residuais também foram calculadas na rotina de *flash*. O procedimento de cálculo destas derivadas será descrito no próximo capítulo.

CAPÍTULO SEIS

Aspectos Numéricos Relevantes

6.1 - Introdução

Este capítulo aborda aspectos importantes relativos ao processo numérico. Apresentar-se-á considerações em relação ao procedimento de cálculo das derivadas dos resíduos. Também serão feitas importantes observações a respeito da aplicação do esquema de interpolação UDS (*upwind*). Descreve-se, ainda, a forma final da estrutura da matriz de blocos (matriz jacobiana) e o método usado para resolução do sistema linear associado a esta matriz. O capítulo termina tecendo comentários referentes a critérios de convergência e controle do processo iterativo.

6.2 - Considerações a Respeito das Derivadas Numéricas

Nas equações das derivadas dos resíduos para a água, Eqs. (3.82) a (3.102), e suas similares (para a pressão e o óleo), aparecem derivadas das variáveis ou grupamentos de variáveis, λ , Φ , $\phi\rho^m Z$, $X^{oo}\lambda^o$, entre outras, em relação as variáveis de reservatório (P , Z^w e Z^o). Note-se que estas derivadas não são obtidas diretamente. Por exemplo, as mobilidades são funções das permeabilidades relativas, das densidades e das viscosidades. Porém, as permeabilidades relativas são funções das saturações, que por sua vez dependem das frações mássicas das fases. As frações mássicas das fases dependem diretamente das variáveis primárias. As afirmações anteriores podem ser visualizadas observando o conjunto de equações que definem o *flash*, Eqs. (5.1) a (5.25). Raciocínio similar poderia ser feito em relação às pressões capilares. É importante ressaltar que o cálculo das derivadas de λ , Φ , $\phi\rho^m Z$, $X^{oo}\lambda^o$, etc, em termos de suas expressões analíticas, isto é, por meio da aplicação da regra da cadeia, torna-se um processo oneroso (equações muito grandes). Assim, neste trabalho, decidiu-se avaliar quaisquer derivadas sempre numericamente. Na verdade, na rotina de *flash* cada parâmetro é calculado em quatro pontos diferentes, a

saber: (P, Z^w, Z^o) , $(P + \Delta P, Z^w, Z^o)$, $(P, Z^w + \Delta Z^w, Z^o)$ e $(P, Z^w, Z^o + \Delta Z^o)$. Desta forma, quando se deseja obter a derivada de um parâmetro Ω (na verdade os únicos parâmetros que necessitam ser derivados são λ^p e Φ^p , $\phi\rho^m Z$, $X^{oo}\lambda^o$, conforme pode ser visto nas equações de derivadas dos resíduos, Eq. (3.82) a (3.102)) em relação à variável de reservatório X ($X = P, Z^w$ ou Z^o), aplica-se a definição abaixo

$$\frac{\partial \Omega}{\partial X} \cong \frac{\Omega(X + \Delta X) - \Omega(X)}{\Delta X} \quad (6.1)$$

sendo mantidas constantes as demais variáveis de reservatório. Por exemplo, se Ω é o fator volume de formação da fase óleo, B^o , então

$$\frac{\partial B^o}{\partial Z^w} = \frac{\partial B^o}{\partial Z^o} = 0 \quad (6.2)$$

e

$$\frac{\partial B^o}{\partial P} \cong \frac{B^o(P + \Delta P) - B^o(P)}{\Delta P} \quad (6.3)$$

uma vez que B^o é apenas função de P .

Na Eq. (6.1) ΔX pode ser ΔP , ΔZ^w ou ΔZ^o . Tipicamente, neste trabalho usou-se $\Delta P = 0,001P$ e $\Delta Z = 0,01Z$. Porém, objetivando reduzir imprecisões numéricas, fez-se $\Delta Z = 10^{-5}$ para frações mássicas de pequena magnitude (menores que $0,001^\dagger$). Estas aproximações numéricas para as derivadas, como será visto no capítulo de resultados, podem ser utilizadas com segurança, uma vez que os resultados obtidos apresentaram boa concordância com os disponíveis na literatura.

[†] Na realidade, em situações de reservatório não ocorrem estes valores para as frações mássicas. Entretanto, em situações de testes do programa computacional as frações mássicas podem assumir valores menores do que $0,001$.

6.3 - Considerações a Respeito da Aplicação do Esquema UDS (*upwind*)

Neste trabalho optou-se por armazenar os valores das mobilidades e de suas derivadas, em relação às variáveis P , Z^w , e Z^o , nos centros dos volumes de controle. Pode-se observar que nas equações linearizadas, Eqs. (3.68) a (3.70), tem-se a necessidade de avaliar valores de mobilidades e derivadas de mobilidades nas interfaces do volume de controle P, Eqs. (3.82) a (3.102). Neste trabalho, estas avaliações foram feitas empregando-se o esquema *upwind*, ou seja, a propriedade na interface assume o valor da propriedade do volume de controle que está atrás da interface em relação ao sentido do escoamento. Note-se que ainda deve haver duas avaliações da derivada de uma mobilidade numa interface, isto é, a derivada da mobilidade na interface deve ser avaliada em relação às variáveis de reservatório dos dois volumes de controle que definem a referida interface. Por exemplo, nas equações de resíduo da pressão e da água, tem-se que derivar λ_e^w em relação a P_P e P_E e também em relação a Z_P^w e Z_E^w , e ainda em relação a Z_P^o e Z_E^o . De forma similar a derivada do termo $(X^{oo}\lambda^o)_t$, na equação do óleo, deve ser avaliada em relação as variáveis dos volumes P e T. Um outro ponto importante a ser comentado é que como o escoamento é trifásico, deve-se então aplicar o esquema *upwind* para cada fase, pois as fases podem ter movimentos independentes, conforme ilustrado na Fig. 6.1.

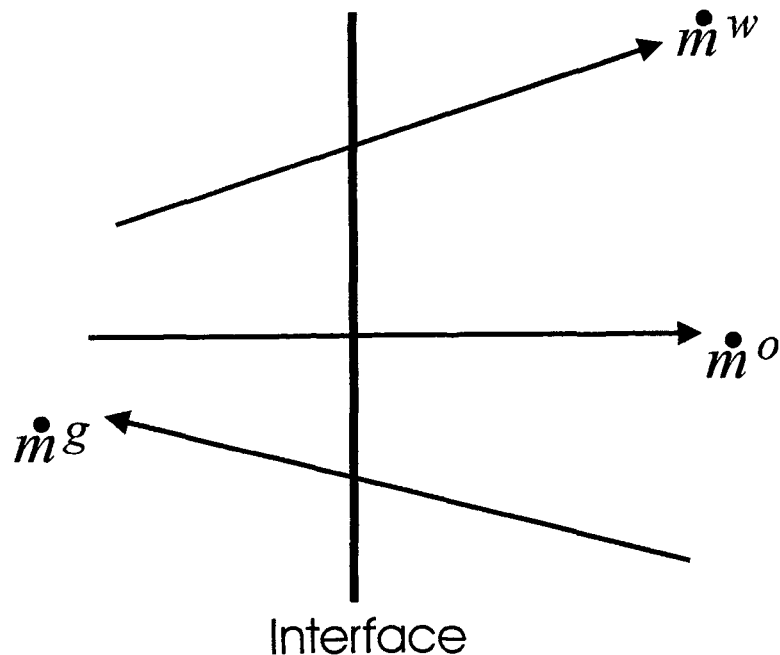


Fig. 6.1 - Sentido dos fluxos das fases numa interface.

O trecho a seguir ilustra a aplicação do *upwind*, numa interface \underline{e} , para os parâmetros referentes a fase óleo.

Se $(\frac{\partial \Phi^o}{\partial \bar{n}})_\xi < 0$, então

$$\lambda_e^o = \lambda_P^o \quad (6.4)$$

$$(X^{oo}\lambda^o)_e = X_P^{oo}\lambda_P^o \quad (6.5)$$

$$\frac{\partial \lambda_e^o}{\partial P_P} = \frac{\partial \lambda_P^o}{\partial P_P} \quad (6.6)$$

$$\frac{\partial \lambda_e^o}{\partial Z_P^w} = \frac{\partial \lambda_P^o}{\partial Z_P^w} \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial \lambda_e^o}{\partial Z_P^o} = \frac{\partial \lambda_P^o}{\partial Z_P^o} \quad (6.8)$$

$$\frac{\partial \lambda_e^o}{\partial P_E} = 0 \quad (6.9)$$

$$\frac{\partial \lambda_e^o}{\partial Z_E^w} = 0 \quad (6.10)$$

$$\frac{\partial \lambda_e^o}{\partial Z_E^o} = 0 \quad (6.11)$$

Caso contrário

$$\lambda_e^o = \lambda_E^o \quad (6.12)$$

$$(X^{oo}\lambda^o)_e = X_E^{oo}\lambda_E^o \quad (6.13)$$

$$\frac{\partial \lambda_e^o}{\partial P_P} = 0 \quad (6.14)$$

$$\frac{\partial \lambda_e^o}{\partial Z_P^w} = 0 \quad (6.15)$$

$$\frac{\partial \lambda_e^o}{\partial Z_P^o} = 0 \quad (6.16)$$

$$\frac{\partial \lambda_e^o}{\partial P_E} = \frac{\partial \lambda_E^o}{\partial P_E} \quad (6.17)$$

$$\frac{\partial \lambda_e^o}{\partial Z_E^w} = \frac{\partial \lambda_E^o}{\partial Z_E^w} \quad (6.18)$$

$$\frac{\partial \lambda_e^o}{\partial Z_E^o} = \frac{\partial \lambda_E^o}{\partial Z_E^o} \quad (6.19)$$

6.4 - Estrutura da Matriz Jacobiana e Procedimento Iterativo de Solução

A aplicação do método de Newton gera um conjunto de equações lineares que, para o caso de escoamentos multifásicos, acaba por resultar numa matriz jacobiana de blocos. No problema de simulação de reservatórios de petróleo, como já visto no capítulo anterior, existem equações de restrições oriundas das condições de operação nos poços. Estas equações de restrições, como será visto a seguir, quebram a forma estruturada da matriz jacobiana, o que exige um tratamento especial para a resolução do sistema linear associado. A Fig. 6.2 mostra uma discretização com 27 volumes elementares e dois poços. O poço 1, completado em todas as camadas, e o poço 2, completado na primeira e terceira camadas. A Fig. 6.3 mostra, a estrutura do sistema linear resultante. Na matriz jacobiana os elementos são

$$\begin{aligned} x \rightarrow & \begin{bmatrix} \frac{\partial F^P}{\partial P} & \frac{\partial F^P}{\partial Z^w} & \frac{\partial F^P}{\partial Z^o} \\ \frac{\partial F^w}{\partial P} & \frac{\partial F^w}{\partial Z^w} & \frac{\partial F^w}{\partial Z^o} \\ \frac{\partial F^o}{\partial P} & \frac{\partial F^o}{\partial Z^w} & \frac{\partial F^o}{\partial Z^o} \end{bmatrix}; & \square \rightarrow & \begin{bmatrix} \frac{\partial F^P}{\partial P^{wf}} \\ \frac{\partial F^w}{\partial P^{wf}} \\ \frac{\partial F^o}{\partial P^{wf}} \end{bmatrix} \\ \bullet \rightarrow & \begin{bmatrix} \frac{\partial F^{wf}}{\partial P} & \frac{\partial F^{wf}}{\partial Z^w} & \frac{\partial F^{wf}}{\partial Z^o} \end{bmatrix}; & + \rightarrow & \frac{\partial F^{wf}}{\partial P^{wf}} \end{aligned}$$

Observe que houve uma pequena mudança na notação da pressão de fundo de poço. Desta forma, P_i^{wf} simboliza a pressão de fundo de poço do poço i . No exemplo mostrado,

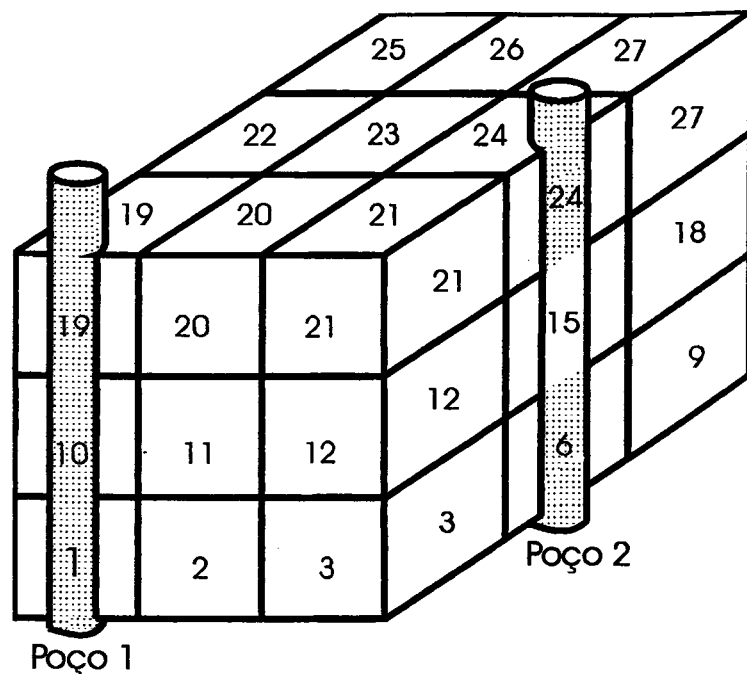


Fig. 6.2 - Exemplo de uma discretização com 2 poços

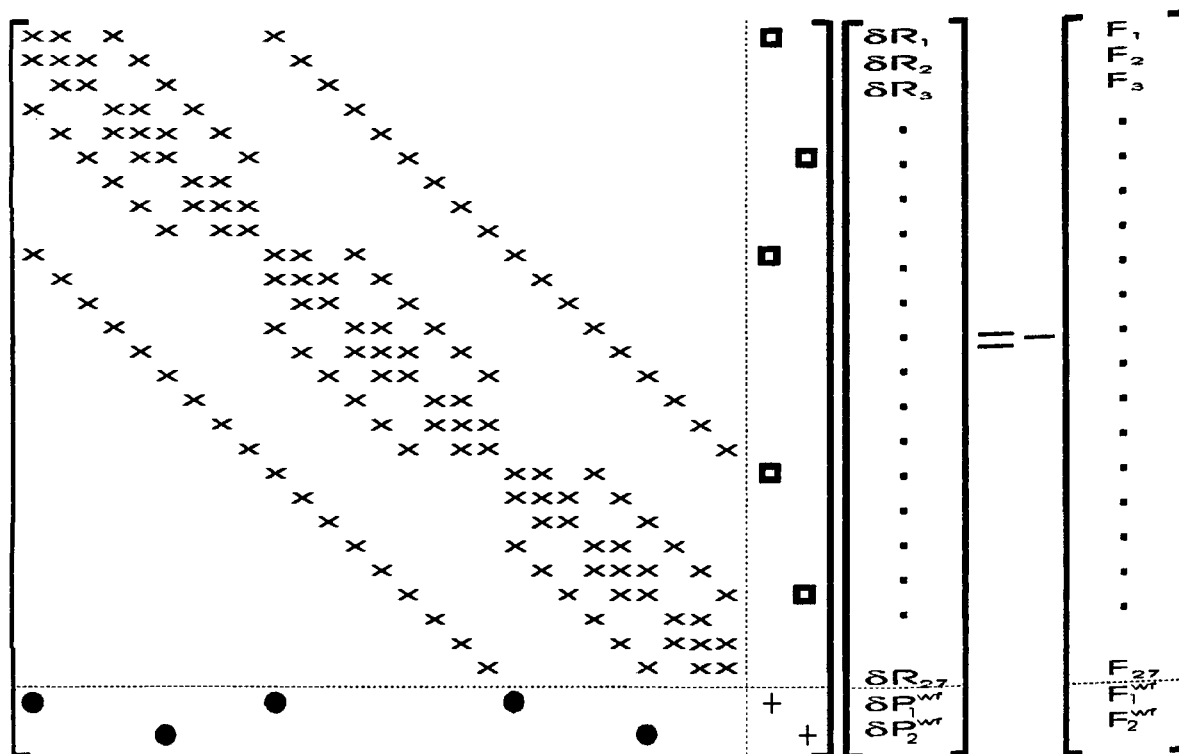


Fig. 6.3 - Estrutura da matriz correspondente a Fig. 6.2.

como tem-se dois poços, o valor de i será 1 ou 2. Note-se ainda que o sobrescrito wf indica *fundo de poço*. Por exemplo, F_1^{wf} indica a função residual referente ao poço 1.

Algumas observações podem ser feitas em relação a estrutura da matriz da Fig. 6.3. A primeira observação é que os elementos do tipo \times (bloco 3×3) representam derivadas das equações de balanço (equações de conservação global, da água, e do óleo) em relação as variáveis de reservatório (P , Z^w , e Z^o). Elementos do tipo \bullet (bloco 1×3) representam derivadas das equações de restrição nos poços em relação as variáveis de reservatório. Os elementos representados por \square (bloco 3×1) são as derivadas das equações de balanço em relação às pressões de fundo de poço. Os símbolos $+$ (bloco 1×1) representam as derivadas das equações de restrição em relação às pressões de fundo de poço. Note que devido a existência de dois poços, aparecem na matriz mais duas linhas que representam as equações de restrição. Da mesma forma aparecem duas colunas que representam a derivada de todas as equações envolvidas em relação às pressões de fundo de poço.

Conforme pode-se observar a estrutura da matriz resultante é um tanto complexa, pois não é constituída exclusivamente de bandas. Neste trabalho, resolveu-se o sistema linear associado por meio de uma rotina de Gauss-Seidel.

Para a formulação em frações mássicas o procedimento iterativo de resolução do sistema de equações, utilizando a metodologia totalmente implícita, não difere muito daquele apresentado no item 3.2. As diferenças principais estão no processo de inicialização [†] e na introdução da rotina de *flash*. Desta forma o procedimento iterativo fica sendo dado por:

1. *Inicialização das variáveis;*
2. *Execução da rotina de flash.* A execução da rotina de *flash* consiste na seqüência de cálculos do item 5.2. Conforme abordado no Cap. 5, no *flash* todos os parâmetros são avaliados em quatro pontos distintos, de onde são obtidas as derivadas numéricas. É importante ressaltar que os parâmetros e derivadas numéricas são armazenados nos centros dos volumes de controle;
3. *Cálculo das derivadas dos resíduos e montagem da matriz jacobiana.* Para a montagem da matriz jacobiana deve-se computar as derivadas das funções residuais, Eqs. (3.82) à (3.102), e suas similares para as equações da pressão e do óleo. Os

[†] A partir dos dados “conhecidos” de um reservatório, isto é, a partir do conhecimento inicial dos campos de pressão e saturações deve-se gerar os campos iniciais de frações mássicas globais.

cálculos destas derivadas envolvem o conhecimento das mobilidades (e de suas derivadas) nas interfaces dos volumes de controle. Desta forma, o esquema UDS, abordado no item 6.3, é aplicado para avaliar as propriedades nas interfaces dos volumes de controle. Note-se que para a aplicação do esquema UDS deve-se conhecer as derivadas normais dos potenciais, que são dadas pelas Eqs. (3.75) à (3.80). Deste modo, conhecendo-se as propriedades nas interfaces, pode-se calcular as derivadas das funções residuais que definem a parte superior da matriz jacobiana. A parte inferior da matriz jacobiana é definida pelas funções residuais provenientes das equações de restrição dos poços. Estas equações também devem ser derivadas para que se tenha o conjunto completo de equações que definem a matriz jacobiana;

4. *Resolve-se o sistema linear definido pela matriz jacobiana.* O sistema linear originado não tem uma estrutura simples, conforme indicado na Fig. 6.3. Para resolver este sistema linear aplicou-se o método de Gauss-Seidel.
5. *Avanço das variáveis no nível iterativo.* A solução do sistema linear consiste de um vetor de variações de variáveis ΔX . Desta forma, as variáveis são avançadas no nível iterativo fazendo-se $X^{k+1} = X^k + \Delta X^k$.
6. *Verifica-se se a convergência foi obtida.* Caso não haja convergência volta-se ao passo 2. A convergência é avaliada conforme explicado no item 6.5;
7. *Avança-se a solução para o próximo intervalo de tempo e retorna-se ao passo 2.*

6.5 - Avaliação da Convergência no Método de Newton

A avaliação da convergência foi realizada averiguando-se as variações apresentadas pelas variáveis P , Z^w , Z^o . Por exemplo, para a pressão o critério de convergência estipulado foi do tipo,

$$\max \left(\frac{|P_P^{k+1} - P_P^k|}{P_{MAX}^{k+1} - P_{MIN}^{k+1}} \right) \leq TOL_P \quad (6.20)$$

onde k é o nível iterativo do ciclo de Newton. Ainda nesta equação, P_{MAX}^{k+1} e P_{MIN}^{k+1} são a máxima e mínima pressão, respectivamente, e TOL_P é o tolerância para a pressão.

Para as frações mássicas o critério de convergência adotado foi o seguinte,

$$\max | Z_P^{k+1} - Z_P^k | \leq TOL_Z \quad (6.21)$$

onde TOL_Z é a tolerância exigida para as frações mássicas.

Tipicamente, os valores de TOL_P utilizados ficaram na faixa de 10^{-2} a 10^{-3} , enquanto que os valores adotados para TOL_Z situaram-se entre 10^{-4} a 10^{-5} .

CAPÍTULO SETE

Resultados e Discussões

7.1 - Introdução

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos com a formulação matemática descrita nos capítulos anteriores. Para melhor organização do capítulo os resultados são divididos em três partes. A primeira parte procura validar o código computacional desenvolvido. São retratadas situações bidimensionais bifásicas (água/óleo) onde comparações são realizadas com resultados obtidos por outros autores [23,29,45]. Na segunda parte também são apresentados resultados bifásicos (água/óleo), porém com discretização tridimensional. Nesta parte simulou-se uma situação na qual o reservatório possui uma falha geológica interna, sendo a comparação realizada com os resultados fornecidos pelo código computacional SIRP-3D [†] [40]. A parte final do capítulo apresenta uma situação trifásica com discretização tridimensional, não sendo realizada nenhum tipo de comparação. Neste caso, os aspectos observados foram relativos à verificação de conservação da massa e obtenção de escoamentos simétricos. O objetivo desta última parte é apenas mostrar as potencialidades e características gerais do simulador desenvolvido. Assim, pela análise dos resultados presentes neste capítulo pretende-se evidenciar as capacidades e limitações do código computacional implementado.

7.2 - Resultados Bidimensionais Bifásicos (água/óleo)

Nesta seção são apresentados resultados bidimensionais bifásicos que objetivam validar parcialmente o código computacional desenvolvido. É importante salientar que o código tridimensional foi aplicado para gerar todos os resultados bidimensionais referentes ao presente trabalho. Dividiu-se esta parte em três itens. O primeiro item é uma comparação com

[†] O programa SIRP-3D trabalha com formulação em saturações para escoamentos bifásicos (água/óleo).

os resultados de Yanosik e McCracken [45] e refere-se ao escoamento *Piston Type* [11,25,45], numa configuração *five-spot* †. O segundo item refere-se a uma situação de escoamento mais realística, porém ainda na configuração *five-spot*. Os resultados são comparados com Palagi [29]. No terceiro item são comparados os resultados obtidos no presente trabalho com os obtidos por Marcondes [23], que utilizou a metodologia totalmente implícita nas saturações e malhas de Voronoi.

7.2.1 - Comparações com Yanosik e McCracken

Antes da apresentação dos resultados descreve-se o significado de escoamento *piston-type* e da configuração *five-spot*.

Como o próprio nome sugere, o escoamento *piston-type* caracteriza-se por ser equivalente a uma frente de deslocamento onde a água desloca o óleo como se fosse um pistão, conforme indica a Fig. 7.1. Este tipo de escoamento não é realístico, do ponto de vista de recuperação de petróleo, porém é muito usado para testes de modelos computacionais devido as dificuldades numéricas associadas (os resultados obtidos em problemas 2D e 3D são altamente sensíveis ao efeito de orientação de malha).

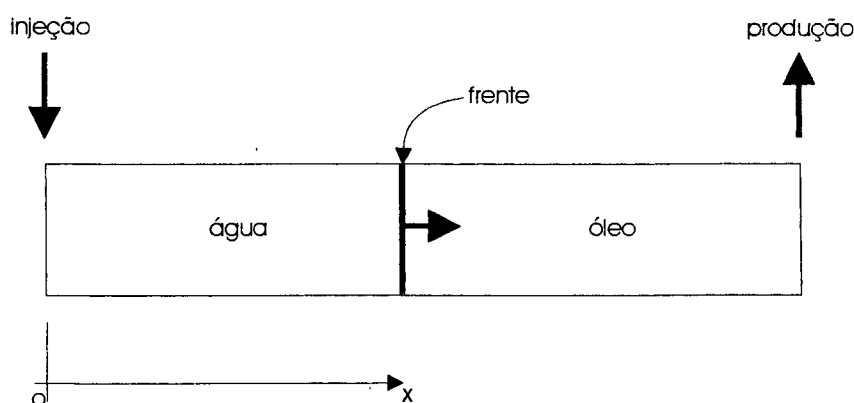


Fig. 7.1 - Escoamento unidimensional de uma frente de deslocamento.

Considere-se novamente a configuração 1D indicada na Fig. 7.1. A Fig. 7.2 ilustra perfis de saturação de água ao longo da distância x para um dado tempo. Na situação a),

† Esta configuração de reservatório está ilustrada na Fig. 7.4.

desta figura, o escoamento é tipo pistão, pois atrás da frente de deslocamento a saturação da água é máxima. Já na situação b) o escoamento não é tipo pistão pois atrás da frente de deslocamento há um gradiente de saturação.

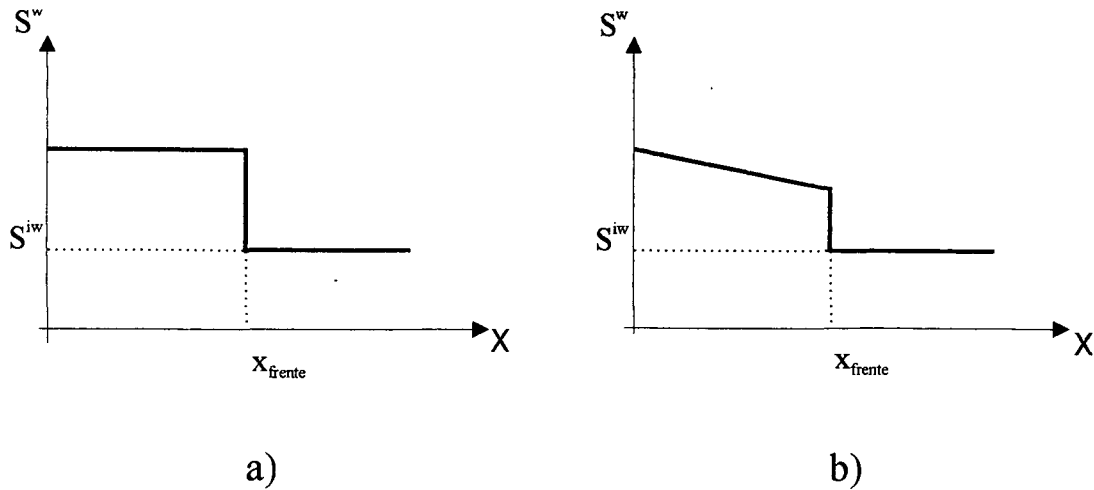


Fig. 7.2 - Perfis de saturação de água referentes ao escoamento indicado na Fig. 7.1.

Conforme mencionado por Yanosik e McCracken [45], existem várias curvas de permeabilidades relativas que podem ser usadas na simulação de deslocamentos tipo pistão. Estas curvas podem ser obtidas do conceito de fluxo fracionário. O fluxo fracionário da água, f^w , é definido como a razão entre vazão de água e vazão total. Em Dake [11] são apresentadas determinadas condições, envolvendo o fluxo fracionário f^w tal que o escoamento seja tipo-pistão. Por exemplo, as curvas $f^w = S^w$ e $f^w = S^{w2}$, indicadas na Fig. 7.3, representam escoamento tipo pistão.

Uma vez definidas as curvas de fluxo fracionário, f^w , as permeabilidades relativas são dadas por

$$k^{rw} = \frac{f^w}{M(1 - f^w) + f^w} \quad (7.1)$$

$$k^{ro} = 1 - k^{rw} \quad (7.2)$$

onde

$$M = \frac{\mu^o}{\mu^w} \quad (7.3)$$

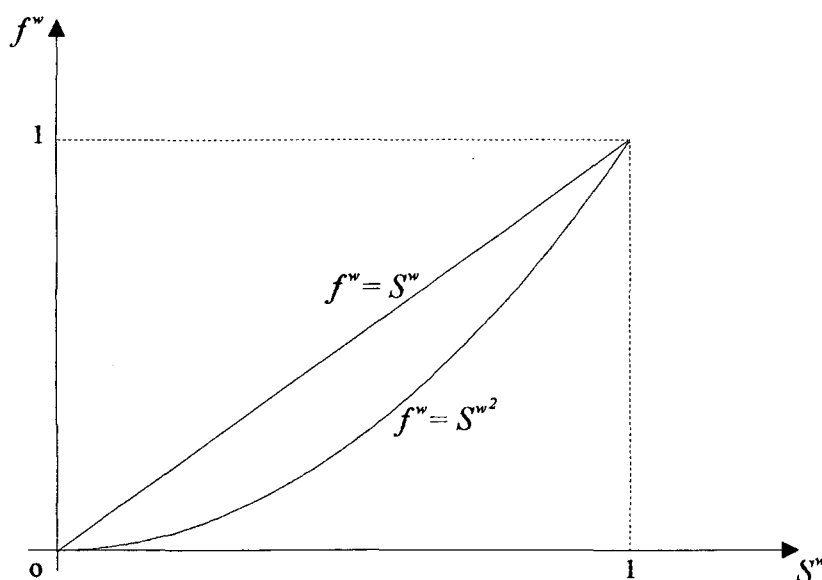


Fig. 7.3 - Curvas de fluxo fracionário, f^w , representando deslocamento tipo pistão.

Note-se que se $M = 1$, então pela Eq. (7.1) tem-se $k^{rw} = f^w$. Nas comparações realizadas com Yanosik e McCracken [45] utilizou-se $f^w = S^{w^2}$.

Considere-se agora a denominada configuração *five-spot*. Esta configuração representa uma forma de exploração da bacia petrolífera como indicado na Fig. 7.4. A configuração *five-spot* (cinco poços) é formada por um quadrado com quatro poços injetores (ou produtores) em cada vértice e um poço produtor (ou injetor) no centro. Na Fig. 7.4 estão destacadas duas possíveis situações de simetria. A primeira, indicada por **D**, representa um quarto da configuração de *five-spot* (1/4 de *five-spot*). A segunda, indicada por **P**, corresponde a metade da configuração de *five-spot* (1/2 de *five-spot*). Nas regiões assinaladas por **D** e **P** é comum usar malhas denominadas *diagonais* e *paralelas*, respectivamente, conforme pode ser visto na Fig. 7.5.

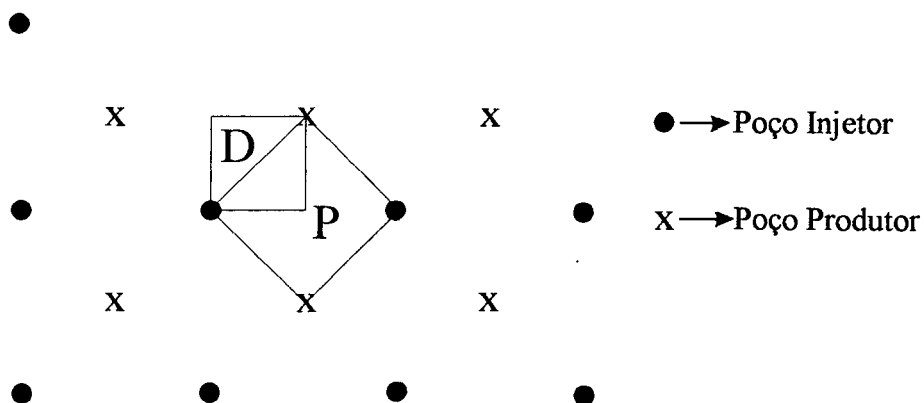


Fig. 7.4 - Configuração *five-spot* num campo de petróleo.

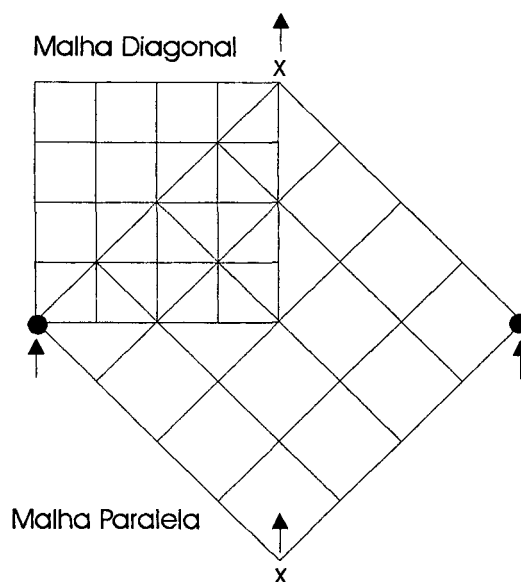


Fig. 7.5 - Malhas diagonais e paralelas.

Note-se que na malha cartesiana diagonal as linhas coordenadas estão a 45° da linha que une o poço injetor ao produtor. Na malha paralela as linhas coordenadas são paralelas ou perpendiculares às linhas que unem os poços produtor e injetor. Conforme observado por Yanosik e McCracken [45] existem diferenças acentuadas entre os resultados obtidos quando se utilizam os dois tipos de malhas, isto é, quando se usam malhas diagonal e

paralela. A estas discrepâncias dá-se o nome de efeito de orientação de malha. Yanosik e McCracken [45] propuseram um esquema numérico de 9 pontos, que minimiza o efeito de orientação de malha, de modo que os resultados obtidos com os dois tipos de discretização (diagonal e paralela) não diferiram de mais de 1,5%.

Os resultados serão apresentados utilizando malhas cartesianas diagonal e paralela, conforme indicado na Fig. 7.5, Além da aplicação da malha cartesiana, em 1/4 de *five-spot*, também discretizou-se tal região por meio de uma malha curvilínea. As linhas coordenadas desta malha assemelham-se às linhas de fluxo do escoamento, como pode ser visto na Fig. 7.6.

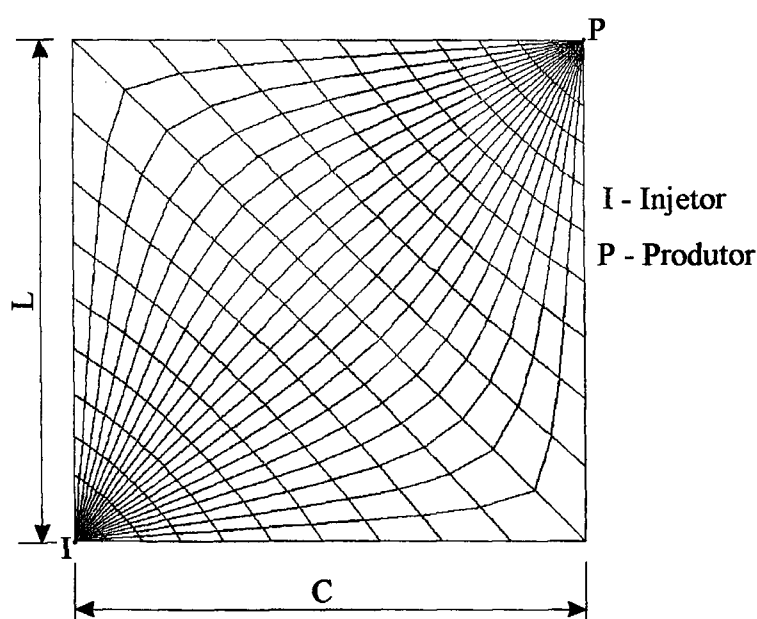


Fig. 7.6 - Malha curvilínea utilizada para a discretização de 1/4 da configuração de *five-spot*.

A Tabela 7.1 apresenta os dados[†] utilizados para simulação do escoamento tipo pistão na configuração 1/4 de *five-spot*. Note-se que, nesta tabela, os fatores volume de formação foram definidos em termos das compressibilidades, conforme Eq. (2.21).

[†] As vazões de injeção e produção são distribuídas sobre toda a fronteira injetora e produtora, respectivamente, conforme condições abordadas no apêndice A. Em todas as simulações deste capítulo fez-se $P^{cow} = P^{cog} = 0$. Na tabela, **STB** → *Barrel Standard*, 1 STB = $1,840127 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$.

Tabela 7.1 - Dados do Problema para o caso tipo pistão.

Comprimento	$C = 402,33 \text{ m (1320 ft)}$
Largura	$L = 402,33 \text{ m (1320 ft)}$
Profundidade	$h = 6,09 \text{ m (20 ft)}$
Porosidade	$\phi = 0,08$
Permeabilidade Absoluta	$k = 0.0125 \mu\text{m}^2 \text{ (12,5 mD)}$
Pressão Inicial	$P_i = 689,4 \text{ kPa (100 psi)}$
Saturação Inicial	$S_i = 0$
Vazão de Prod. e Inj.	$q = 9,534 \text{ m}^3/\text{dia (60 STB /dia)}$
Densidades	$\rho^w = \rho^o = 1000 \text{ kg/m}^3$
Fats. Vol. de Formação	$B^w = B^o = 1 \text{ a } 689,4 \text{ kPa (100 psi)}$
Compressibilidades	$c^w = c^o = 1,45033 \cdot 10^{-9} \text{ Pa}^{-1} \text{ (1,0} \cdot 10^{-5} \text{ psi}^{-1})$
Viscosidade da Água	$\mu^w = \frac{1}{M} \text{ mPa.s (}\frac{1}{M} \text{ cp)}$
Viscosidade do Óleo	$\mu^o = 1,0 \text{ mPa.s (1,0 cp)}$

Os resultados obtidos podem ser analisados por meio das Figs. 7.7 e 7.8. Nestas figuras, no eixo das abscissas tem-se o Volume Poroso Deslocável Injetado (**VPI**). O **VPI** é uma medida de tempo muito usada na indústria de petróleo. Este número, adimensional, é a razão entre o volume de água injetado e o volume total de óleo que é possível retirar do reservatório. A expressão algébrica para o **VPI** é dada por

$$VPI = \frac{\hat{Q}^w t}{\phi V_R (1 - S^{iw} - S^{or})} \quad (7.4)$$

onde \hat{Q}^w é a vazão de água injetada nas condições de superfície, V_R é o volume do reservatório, t é o tempo de injeção, S^{iw} a saturação inicial da água e S^{or} a saturação residual do óleo (saturação na qual a fase óleo tem mobilidade nula, ou seja, saturação na qual nenhum óleo pode ser removido).

No eixo das ordenadas tem-se o Volume Poroso de Óleo Recuperado (**VPOR**). O **VPOR** é uma medida de volume de óleo produzido. Este número, adimensional, é a razão entre o volume de óleo recuperado e o volume total de óleo que é possível retirar do reservatório. A expressão algébrica para o **VPOR** é dada por

$$VPOR = \int_{t_0}^t \frac{\hat{Q}^o(t) dt}{\phi V_R (1 - S^{iw} - S^{or})} \quad (7.5)$$

A Fig. 7.7 mostra as curvas de recuperação de óleo para as diversas malhas empregadas comparadas com os resultados de Yanosik e McCracken [45]. No presente trabalho utilizou-se uma malha cartesiana diagonal de 400 (20×20) volumes e uma paralela de 784 (28×28) volumes. Também empregou-se uma malha curvilínea generalizada com 400 (20×20) volumes, como a da Fig. 7.6. No trabalho de Yanosik e McCracken foram usadas malhas diagonais e paralelas de 441 (21×21) e 841 (29×29) pontos, respectivamente. Alguns fatores podem ter originado as diferenças entre os resultados obtidos. O principal é que na malha de Yanosik e McCracken [45] são empregados meios-volumes de controle nas fronteiras.

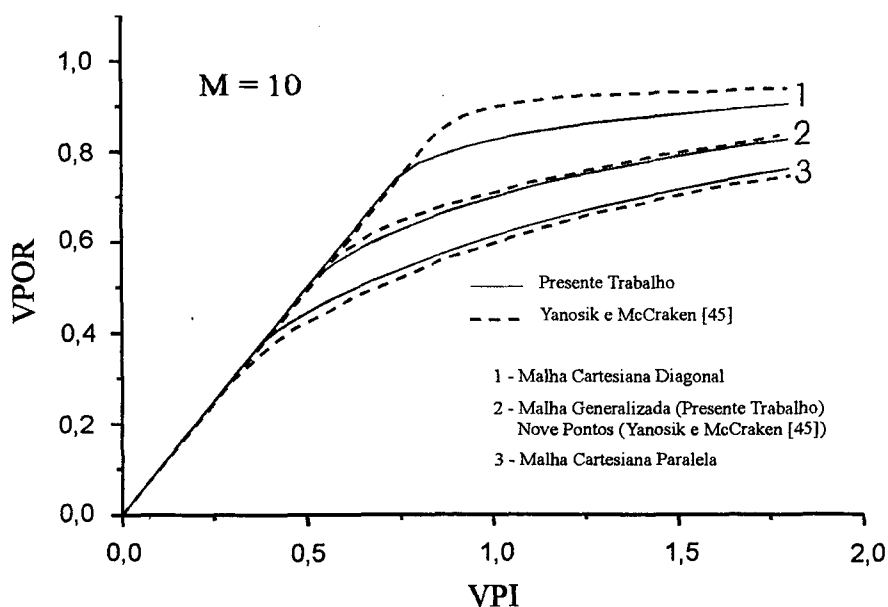


Fig. 7.7 - Volume de óleo recuperado - Comparação com [45] utilizando várias malhas.

Na Fig. 7.7 os resultados mais precisos são aqueles indicados pelo grupo 2 (obtidos com malha generalizada no presente trabalho e obtidos com esquema de 9 pontos por Yanosik

e McCracken [45]). Na Fig. 7.8 estes resultados são mostrados juntamente com os obtidos por Palagi [29] que utilizou malha de Voronoi.

Note-se que as Figs. 7.7 e 7.8 mostram curvas de recuperação de óleo para $M = 10$ ($M = \mu^o/\mu^w$). Observe-se ainda que, os trechos em linhas retas destas figuras, correspondem ao intervalo de tempo em que a água leva para alcançar o poço produtor. Após a irrupção há decaimento no volume de óleo produzido.

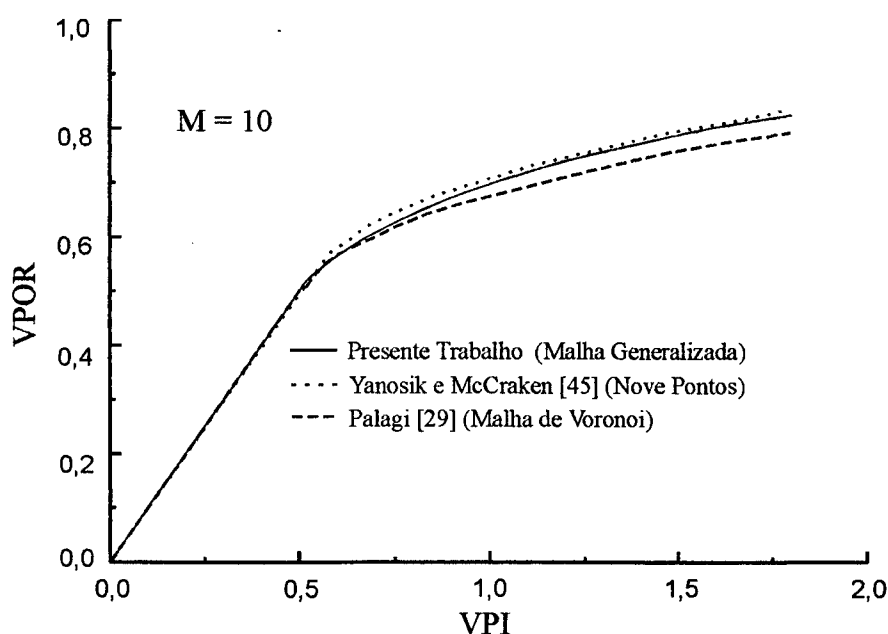


Fig. 7.8 - Volume de óleo recuperado - Comparação com [45] e [29].

Os resultados obtidos no presente trabalho, para malhas diagonais e paralelas, da mesma forma que os obtidos por Yanosik e McCracken [45], também apresentam grandes discrepâncias. Porém empregando a malha generalizada da Fig. 7.6 obteve-se resultados que se aproximaram dos de Yanosik e McCracken [45] para o esquema de 9 pontos. Esta concordância, proporcionada pelo uso da malha generalizada, nem sempre é possível ser obtida. São poucas as configurações onde se pode gerar malhas com linhas coordenadas que assemelham-se às linhas de fluxo do escoamento. Outra observação importante é que todos resultados do presente trabalho foram obtidos utilizando-se a formulação em frações mássicas. Os resultados dos outros autores, utilizados nas comparações, foram gerados empregando-se a formulação em saturações.

A Fig. 7.9 ilustra as linhas de iso-saturações $S^w = 0.9$ obtidas em diferentes valores de VPI para a malha generalizada.

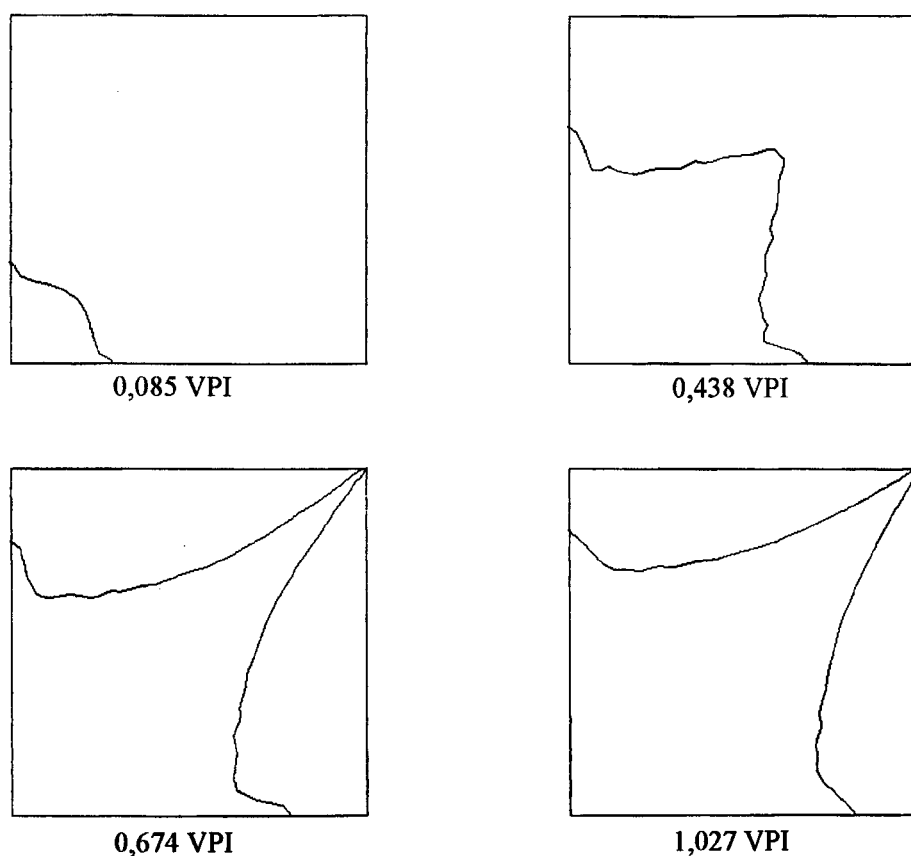


Fig. 7.9 - Iso-saturações $S^w = 0.9$ para diversos VPI.

7.2.2 - Comparações com Palagi

Palagi [29] apresenta resultados para uma simulação que, em relação à simulação tipo pistão da secção anterior, tem como única diferença as curvas de permeabilidades relativas. As curvas utilizadas por Palagi [29] representam situações de escoamento mais realísticas em recuperação de petróleo. Nesta simulação as permeabilidades relativas k^{rw} e k^{ro} são agora avaliadas por

$$k^{rw} = S^w{}^2 \quad (7.6)$$

$$k^{ro} = (1 - S^w)^2 = S^o{}^2 \quad (7.7)$$

As Figs. 7.10 e 7.11 indicam boa concordância de resultados. Note-se que a concordância é maior para a malha generalizada.

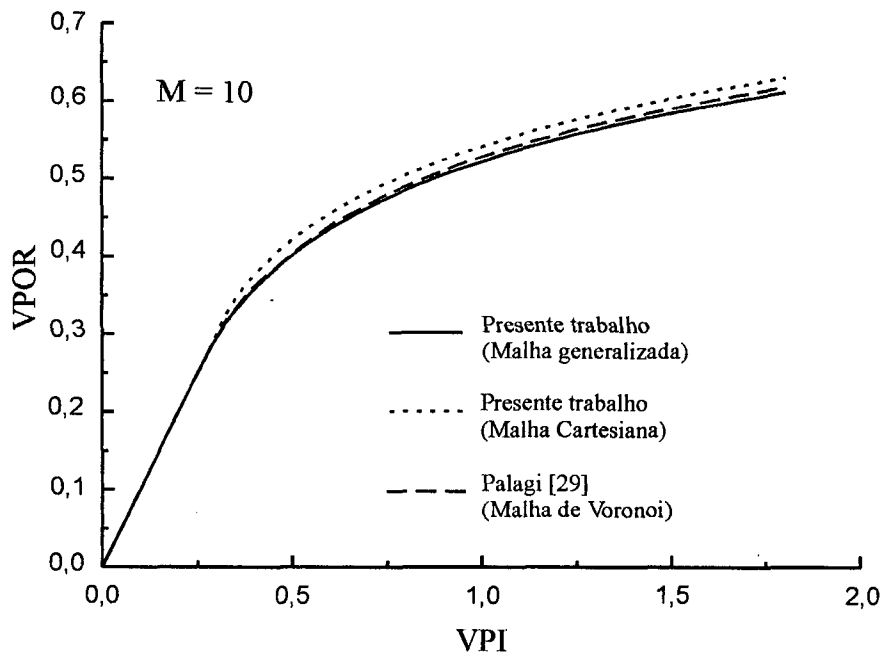


Fig. 7.10 - Volume de óleo recuperado $M = 10$ - Comparação com Palagi [29]

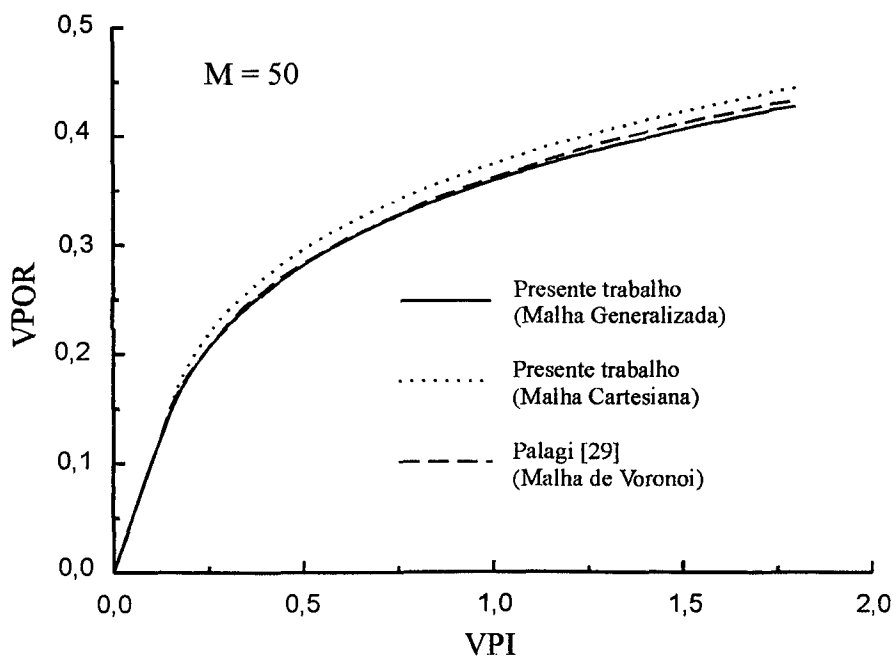


Fig. 7.11 - Volume de óleo recuperado $M = 50$ - Comparação com Palagi [29]

As malhas utilizadas para esta comparação foram as mesmas do item anterior. Note-se que a diferença de resultados obtidos com a malha cartesiana e generalizada não é muito expressiva. Esta afirmação pode ser averiguada tanto para o caso de $M = 10$ quanto para o caso de $M = 50$ analisando-se as curvas das Figs. 7.10 e 7.11. De fato, pode-se concluir que estas curvas de k^{rw} e k^{ro} produzem menor efeito de orientação de malha. Uma importante observação ainda deve ser feita. Nesta comparação com Palagi [29] os casos de $M = 10$ e $M = 50$ foram facilmente simulados. Porém, no caso de escoamento *piston-type* para $M = 50$ surgiram dificuldades na simulação. Yanosik e McCracken [45] também retrataram tal dificuldade e para contorná-la empregaram um artifício numérico. Neste trabalho tal artifício não foi implementado, por isto não apresentou-se as curvas de recuperação para $M = 50$ no caso tipo pistão.

7.2.3 - Comparações com Marcondes

Para dar fechamento ao estudo do caso bidimensional bifásico optou-se por fazer um estudo comparativo com alguns dos resultados fornecidos pelo código computacional desenvolvido por Marcondes [23]. F. Marcondes desenvolveu um simulador bifásico *black-oil* utilizando discretização de Voronoi. Em seu trabalho, Marcondes, utilizou a formulação em saturação e a metodologia totalmente implícita. Desta forma, pode-se considerar que uma comparação com os resultados de Marcondes deve ser bem proveitosa, pois os códigos computacionais utilizados são totalmente diferentes.

A primeira comparação de resultados provém de simulação na configuração *five-spot*. As malhas curvilíneas empregadas neste trabalho foram de 588 (21×28) e de 756 (21×36) volumes. A malha de 756 (21×36) volumes está mostrada na Fig. 7.12, onde um *zoom* indica como é o formato da malha junto aos poços.

Marcondes usou duas malhas diferentes, uma com elementos hexagonais de 410 volumes e outra hexagonal-híbrida (com discretização hexagonal no interior e radial em volta dos poços) de 445 volumes, conforme indicam as Figs. 7.13 e 7.14.

Os dados físicos e geométricos estão fornecidos na Tabela 7.2. As permeabilidades relativas são dadas segundo a Tabela 7.3

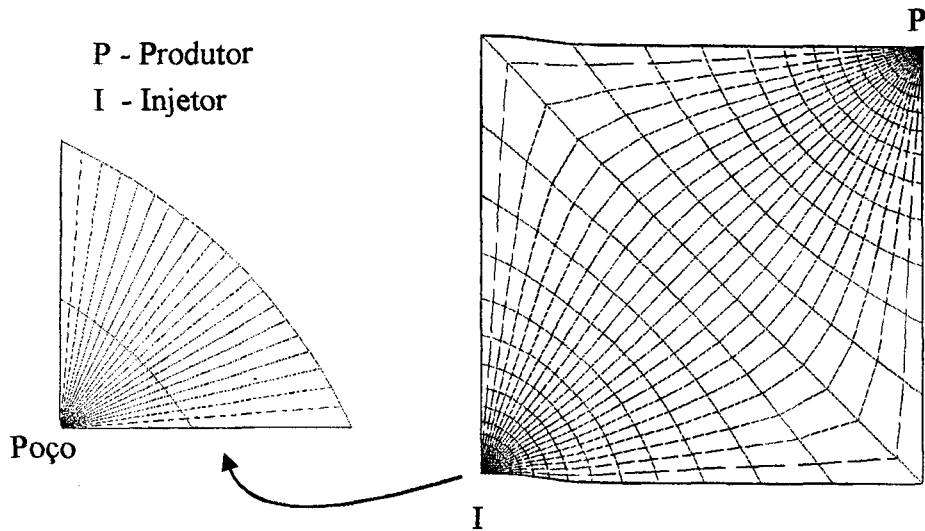


Fig. 7.12 - Malha Generalizada (21 x 36).

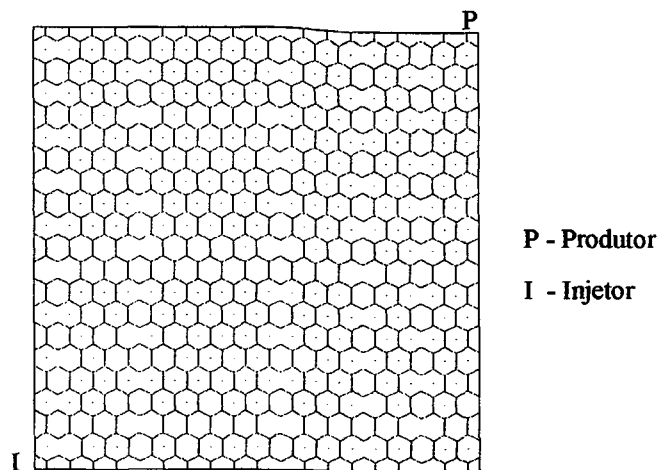


Fig. 7.13 - Malha de Voronoi hexagonal [23].

Na Fig. 7.15 tem-se o gráfico da recuperação de óleo.

A Fig. 7.16 mostra as curvas de variação da pressão no “bloco” produtor.

Pode-se ver que, pelo menos em relação à curva de recuperação, a concordância dos resultados é muito boa. Com relação à Fig. 7.16, no caso das malhas generalizadas, a

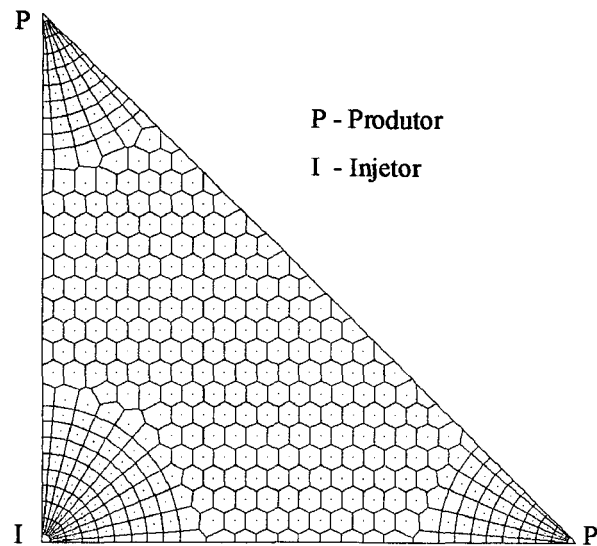


Fig. 7.14 - Malha de Voronoi hexagonal-híbrida [23].

Tabela 7.2 - Dados físicos e geométricos - 1ª comparação com Marcodes [23]

Comprimento e Largura	$C = L = 1463,04 \text{ m (4800 ft)}$
Profundidade	$h = 15 \text{ m (49,2126 ft)}$
Raio do poço	$r^w = 0,12192 \text{ m (0,4 ft)}$
Porosidade	$\phi = 0,30$
Permeabilidade Absoluta	$k = 0,3 \mu\text{m}^2 \text{ (300 mD)}$
Pressão Inicial	$P_i = 20685 \text{ kPa (3000 psi)}$
Saturação Inicial	$S^{iw} = 0,20$
Vazão de Prod. e Injeção	$q = 2,76 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s (1500 STB/dia)}$
Densidades	$\rho^w = \rho^o = 1000 \text{ kg/m}^3$
Fats. Vol. de Formação	$B^w = B^o = 1 \text{ a } 20685 \text{ kPa (3000 psi)}$
Compressibilidades	$c^w = c^o = 7,25163 \cdot 10^{-9} \text{ Pa}^{-1} \text{ (5,0} \cdot 10^{-5} \text{ psi}^{-1}\text{)}$
Viscosidade da Água	$\mu^w = 10^{-3} [1 + 1,45 \cdot 10^{-12} (P - 1,38 \cdot 10^7)] \text{ Pa}\cdot\text{s}$
Viscosidade do Óleo	$\mu^o = 1,163^{-2} [1 + 1,45 \cdot 10^{-12} (P - 1,38 \cdot 10^7)] \text{ Pa}\cdot\text{s}$

Tabela 7.3 - Permeabilidades relativas

S^w	k^{ro}	k^{rw}
0,22	1,0000	0,00
0,30	0,4000	0,07
0,40	0,1250	0,15
0,50	0,0649	0,24
0,60	0,0048	0,33
0,80	0,0000	0,65
0,90	0,0000	0,83
1,00	0,0000	1,00

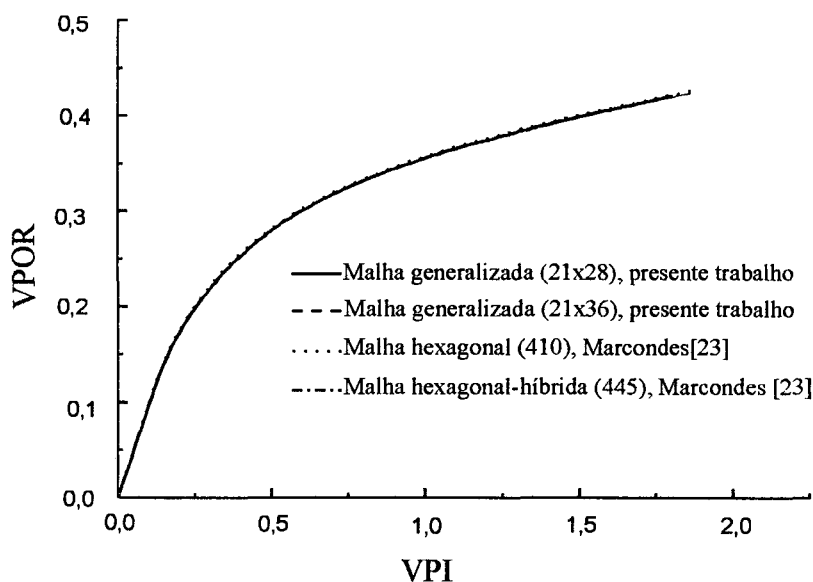


Fig. 7.15 - Recuperação de óleo.

pressão representada no gráfico é a média das pressões dos volumes de controle adjacentes ao poço produtor. Usou-se esta média pois o problema é de vazão prescrita, sendo a mesma distribuída uniformemente em todos os volumes de controle vizinhos à fronteira que delimita o poço. Pode-se verificar que a melhor concordância de resultados foi obtida empregando-se a malha de 756 (21×36) volumes e ocorre no início do processo de injeção. Marcondes [23] também utilizou outras malhas hexagonais-híbridas mais refinadas e os resultados não diferiram muito do obtido com a malha hexagonal-híbrida de 445 volumes.

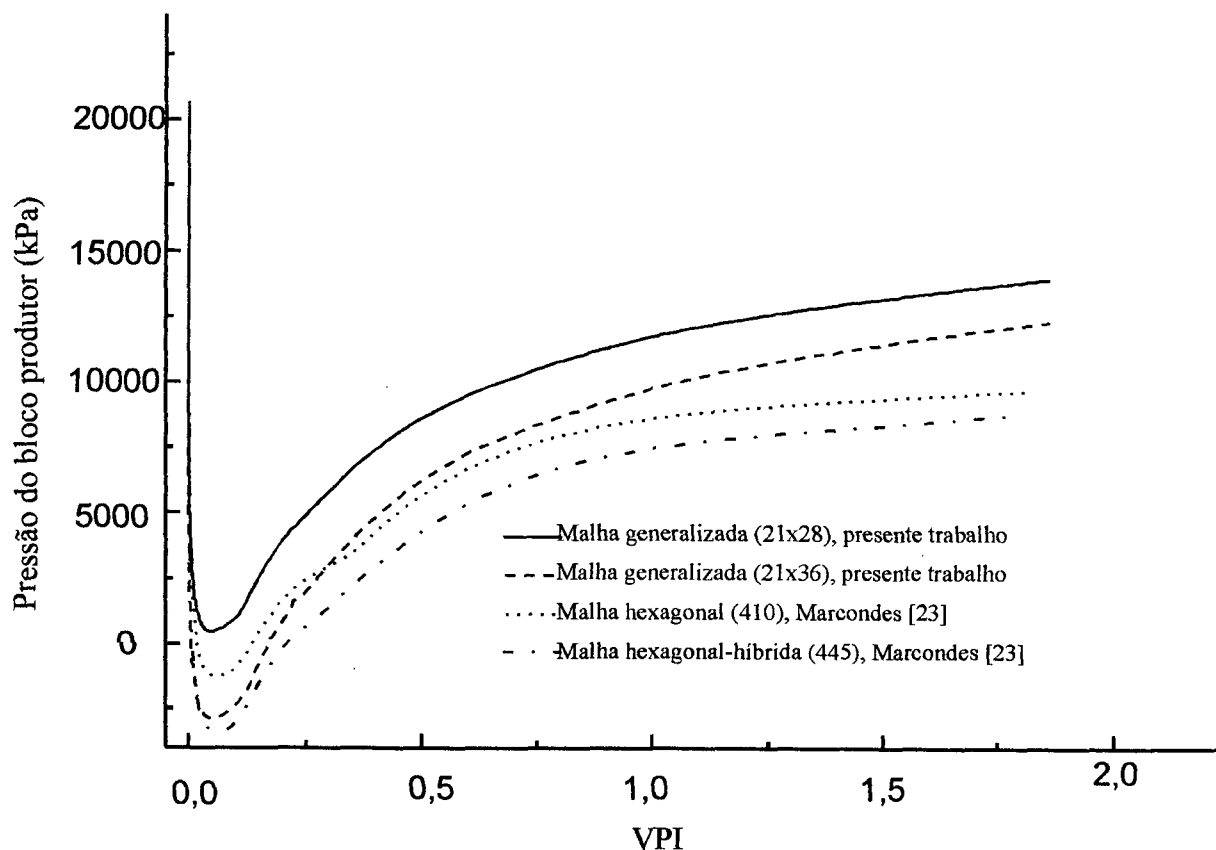


Fig. 7.16 - Variação de pressão no bloco produtor.

Deve-se esperar que, devido às características da malha, os resultados de Marcondes [23] com a malha hexagonal-híbrida sejam mais confiáveis. Alguns aspectos podem ser abordados com a finalidade de explicar as diferenças entre os resultados apresentados. A pressão *plotada*, referente ao presente trabalho, é uma média da pressão dos volumes de controle adjacentes ao poço, e portanto há uma distância entre a fronteira do poço e o local onde é obtida esta média de pressões. Nos resultados de Marcondes [23] a pressão *plotada* é a do bloco que define o poço produtor. Portanto os locais onde se compara tais pressões não são os mesmos (não foram exatamente definidos). Note-se que, devido à relação entre vazão imposta e resistências ao escoamento, originou-se um grande diferencial de pressão. Este, por sua vez, acabou gerando valores negativos de pressão no poço produtor. A Fig. 7.17 mostra as curvas de isosaturações $S^w = 0.45$ e $S^w = 0.35$ obtida com as duas malhas generalizadas (as diferenças não podem ser identificadas na figura) após 0.58 VPI. As isocurvas para a malha de Voronoi não são apresentadas, pois até a data da comparação não havia, no SINMEC, um programa computacional que processasse isocurvas em malhas não estruturadas.

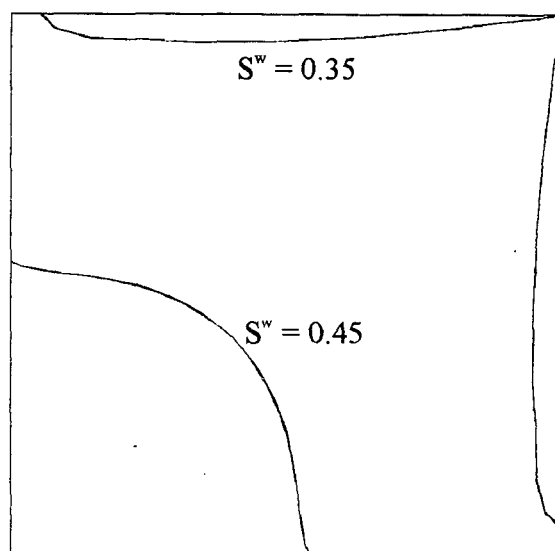


Fig. 7.17 - Isocurvas de saturação após 0,58 VPI.

O segundo caso teste realizado nas comparações com Marcondes [23] corresponde a uma configuração irregular de reservatório, como indicado na Fig. 7.18.

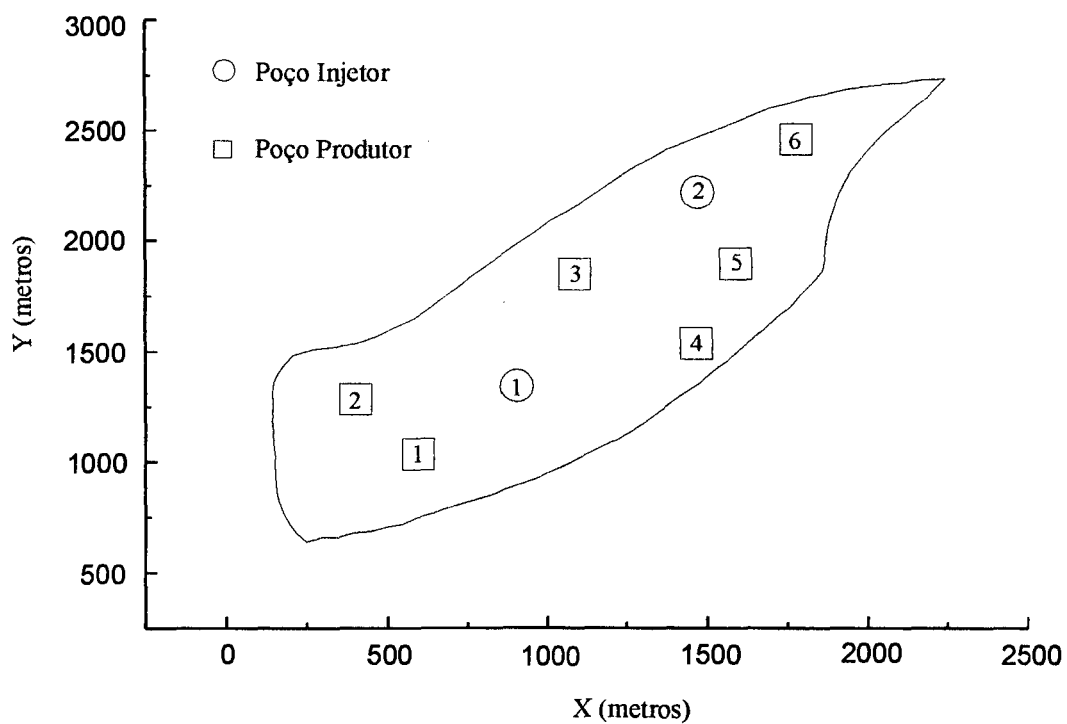


Fig. 7.18 - Reservatório de geometria irregular - 2ª comparação com Marcondes [23].

Tabela 7.4 - Coordenadas e Vazões Iniciais dos Poços

Poço	X [m]	Y [m]	Q [m ³ /s]	Q [STB/dia]
Poço Inj. 1	906	1343	2,9424.10 ⁻³	1600
Poço Inj. 2	1468	2218	2,0392.10 ⁻³	1100
Poço Prod. 1	593	1031	9,1997.10 ⁻⁴	500
Poço Prod. 2	406	1281	1,1039.10 ⁻³	600
Poço Prod. 3	1093	1843	9,1997.10 ⁻⁴	500
Poço Prod. 4	1468	1531	5,5198.10 ⁻⁴	300
Poço Prod. 5	1593	1906	7,3597.10 ⁻⁴	400
Poço Prod. 6	1781	2468	7,3597.10 ⁻⁴	400

Conforme pode ser visto na Fig. 7.18 o reservatório tem 8 (oito) poços, sendo que 2 (dois) são injetores e 6 (seis) são produtores. A Tabela 7.4 apresenta as coordenadas x,y de localização dos poços e suas respectivas vazões. A Tabela 7.5 mostra os dados físicos e geométricos utilizados para a simulação.

As curvas de permeabilidades relativas são dadas a seguir em termos das Eqs. (7.8) e Eq. (7.9).

$$k^{rw} = (S^w - 0,2) \left(-250S^{w2} + 325S^w - 55 \right) / 27 \quad (7.8)$$

$$k^{ro} = 1 - k^{rw} \quad (7.9)$$

A Fig. 7.19 mostra graficamente o comportamento das permeabilidades relativas em função da saturação S^w . Note-se que estas curvas impossibilitam a recuperação total de óleo do reservatório, uma vez que para $S^w = 0.8$ a mobilidade da fase óleo torna-se nula. Desta forma, estas curvas só devem ser usadas na faixa de valores: $0,2 \leq S^w \leq 0,8$.

Tabela 7.5 - Dados físicos e geométricos - 2ª comparação com Marcondes [23]

Profundidade	$h = 15 \text{ m (49, 2126 ft)}$
Porosidade	$\phi = 0,30$
Permeabilidade Absoluta	$k = 0.3 \mu\text{m}^2 \text{ (300 mD)}$
Raio dos poços	$r^w = 0.09144 \text{ m (0,3 ft)}$
Pressão Inicial	$P_i = 20685 \text{ kPa (3000 psi)}$
Saturação Inicial	$S^{iw} = 0,20$
Densidades	$\rho^w = \rho^o = 1000 \text{ kg/m}^3$
Fats. Vol. de Formação	$B^w = B^o = 1 \text{ a } 20685 \text{ kPa (3000 psi)}$
Compressibilidades	$c^w = c^o = 7,25163 \cdot 10^{-9} \text{ Pa}^{-1} \text{ (} 5,0 \cdot 10^{-5} \text{ psi}^{-1}\text{)}$
Viscosidade da Água	$\mu^w = 10^{-3}[1 + 1,45 \cdot 10^{-12}(P - 1,38 \cdot 10^7)] \text{ Pa.s}$
Viscosidade do Óleo	$\mu^o = 1,163^{-2}[1 + 1,45 \cdot 10^{-12}(P - 1,38 \cdot 10^7)] \text{ Pa.s}$

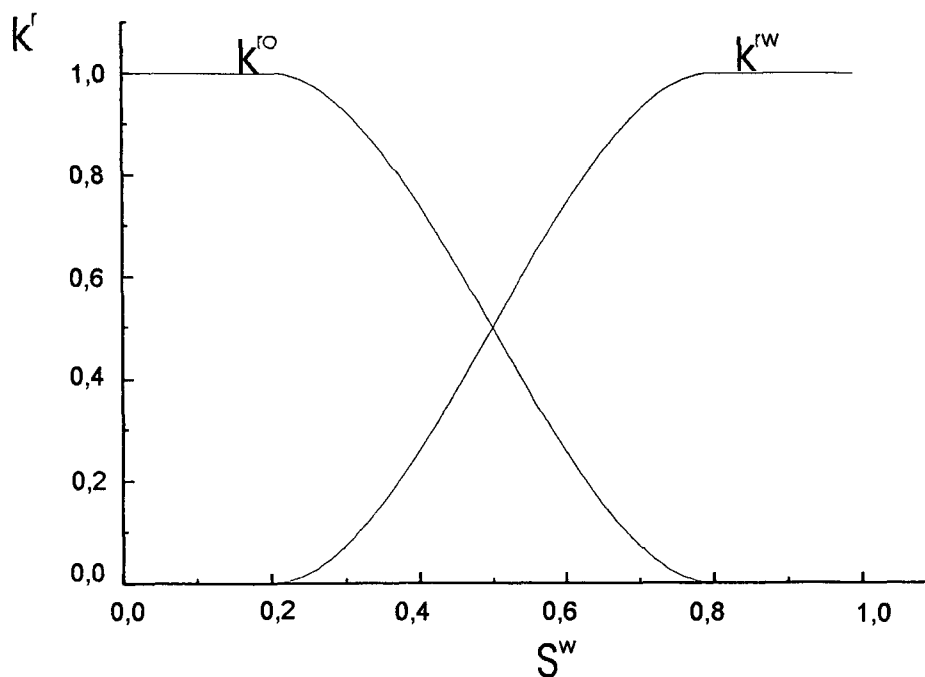
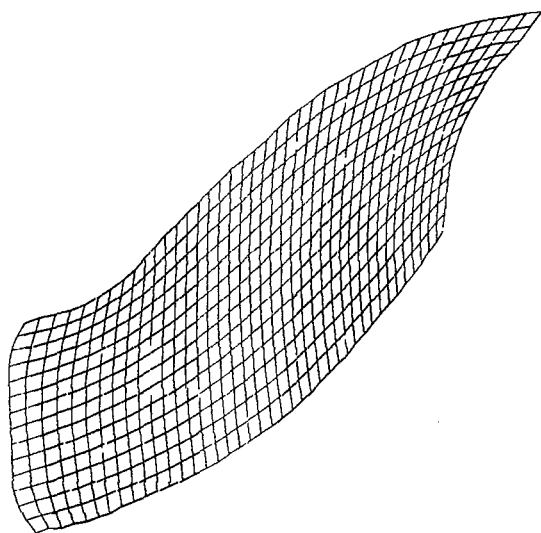


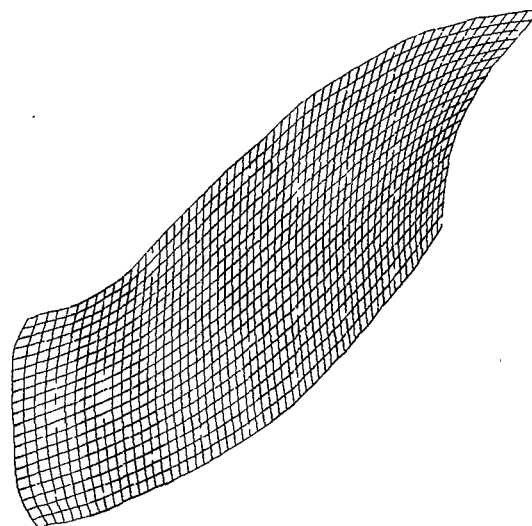
Fig. 7.19 - Comportamento das curvas de permeabilidades relativas.

As Figs. 7.20 e 7.21 mostram algumas das malhas utilizadas na comparação. As malhas curvilíneas utilizadas foram de 560 (40x14) e 1160 (58x20) volumes. Marcondes [23] utilizou

três malhas diferentes (embora na Fig. 7.21 só sejam mostradas duas delas), uma malha hexagonal de 559 volumes e duas malhas hexagonais-híbridas de 672 e 1026 volumes.

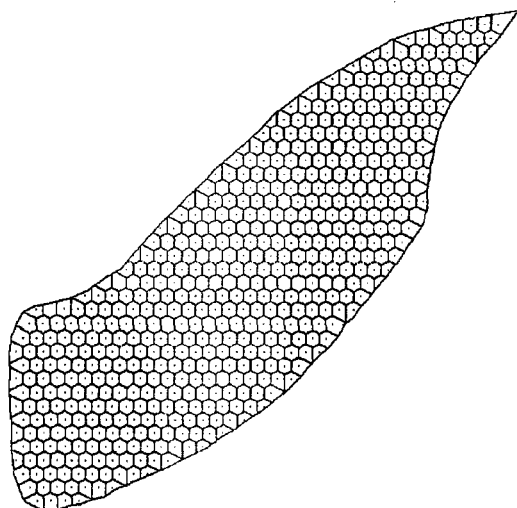


a) Malha generalizada (40x14)

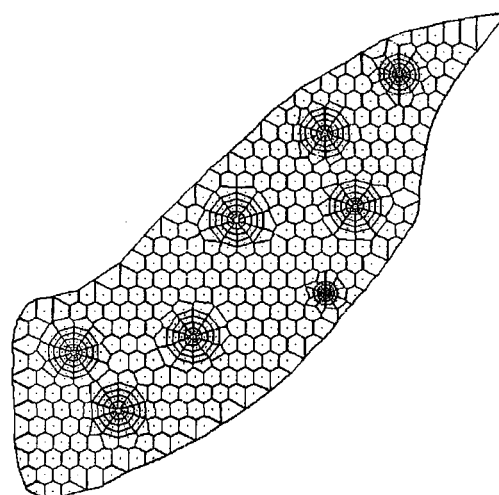


b) Malha generalizada (58x20)

Fig. 7.20 - Malhas generalizadas.



a) Malha hexagonal (559)



b) Malha hexag.-híbrida(672)

Fig. 7.21 - Malhas de Voronoi (Marcondes [23]).

As Figs. 7.22 a 7.27 apresentam as curvas de recuperação e pressão em três poços produtores.

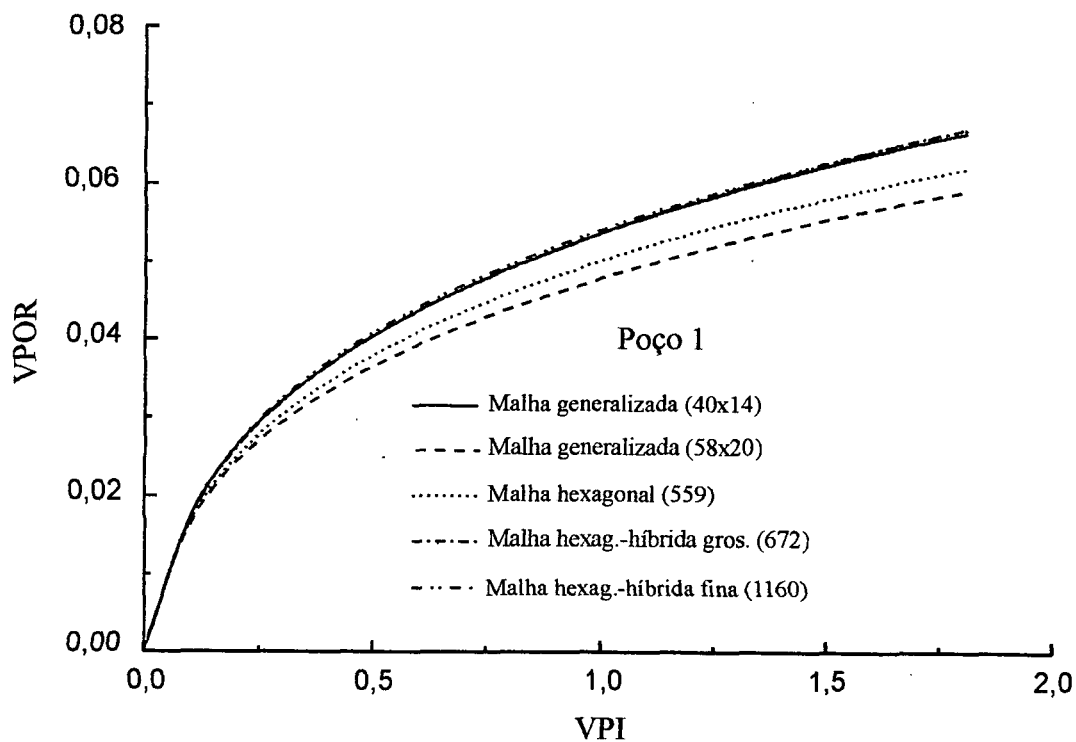


Fig. 7.22 - Recuperação de óleo no poço produtor 1.

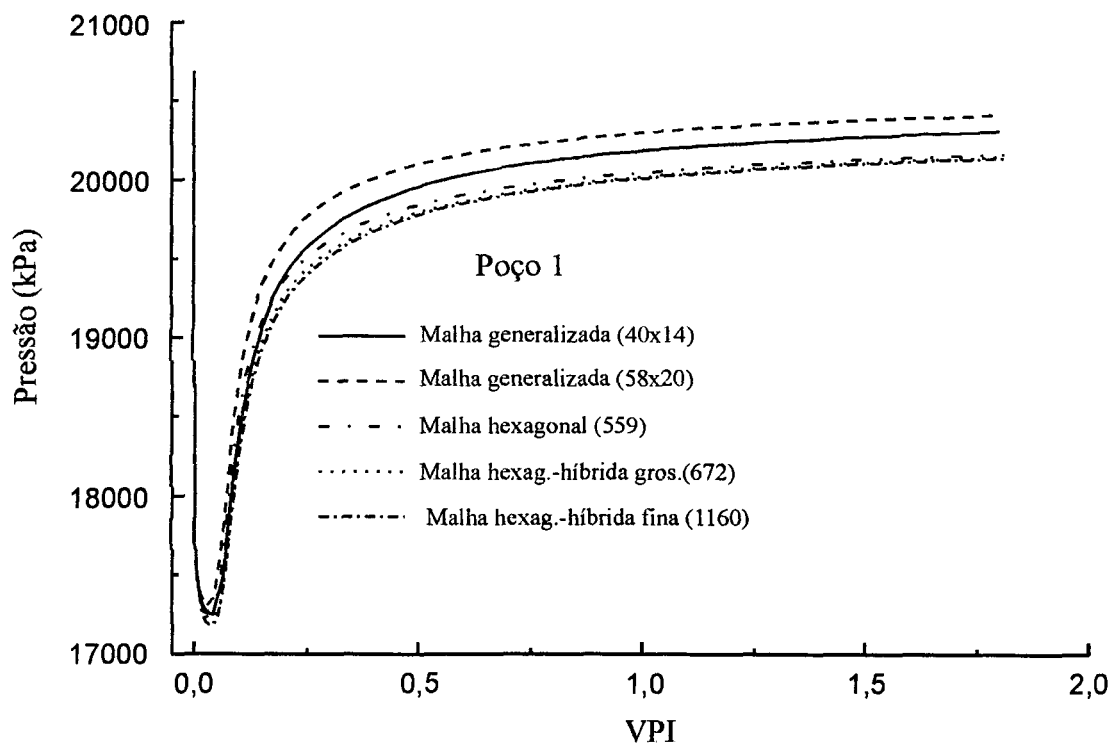


Fig. 7.23 - Pressão no poço produtor 1.

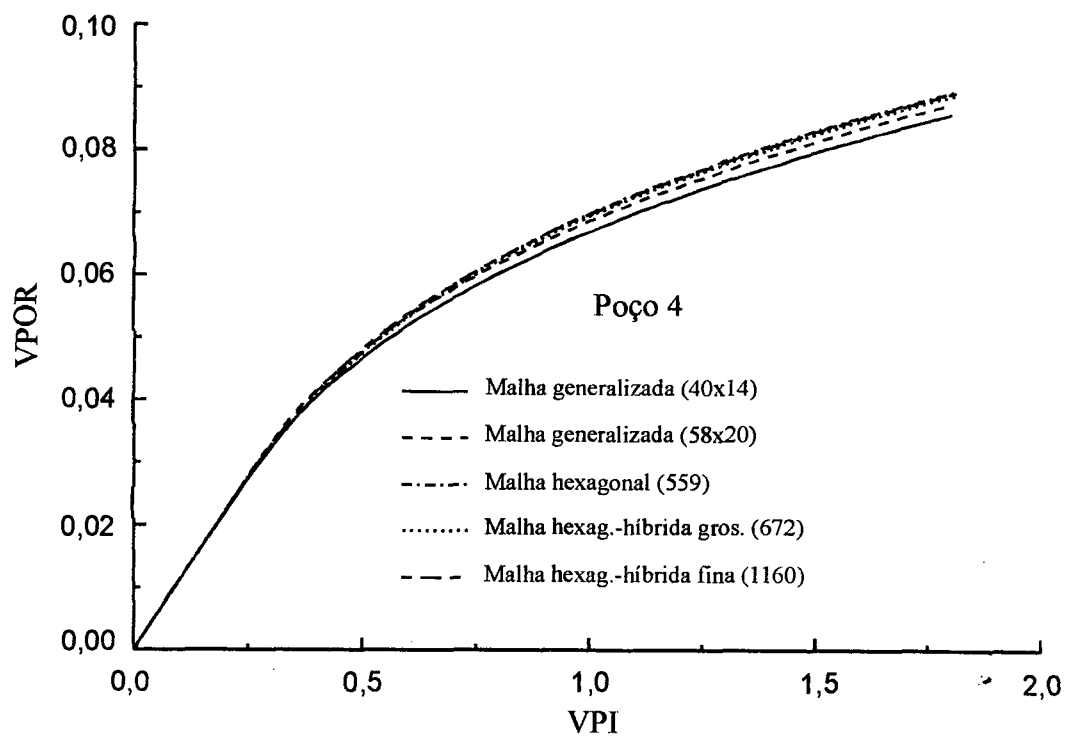


Fig. 7.24 - Recuperação de óleo no poço produtor 4.

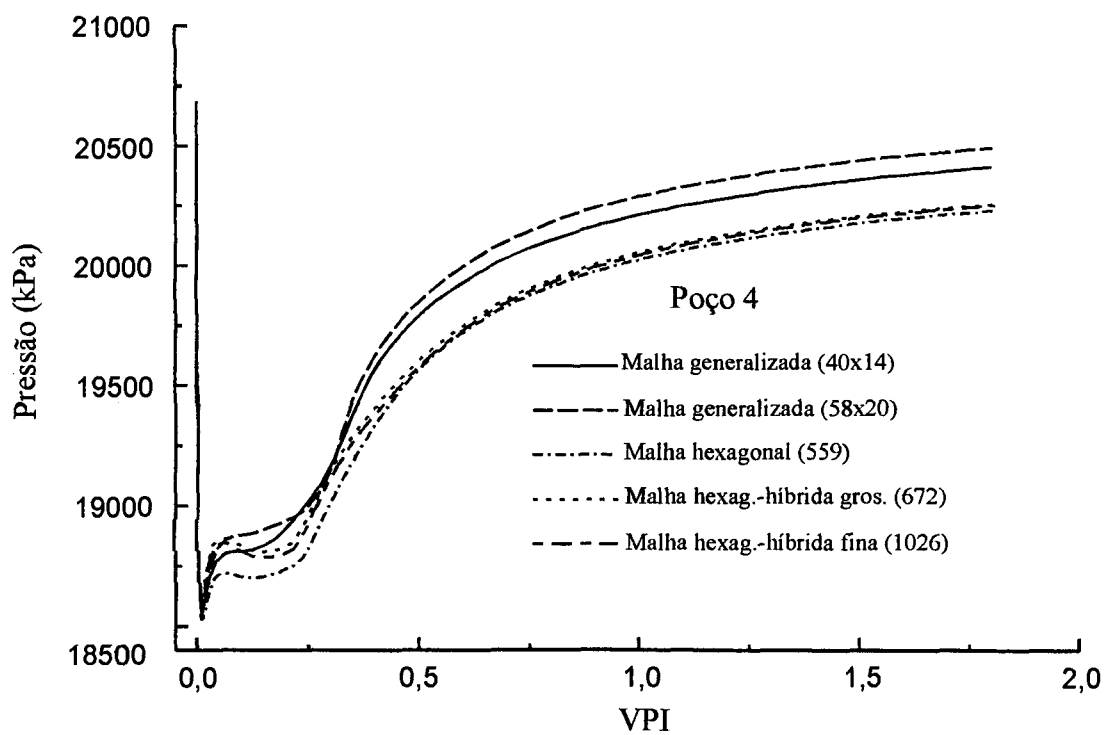


Fig. 7.25 - Pressão no poço produtor 4.

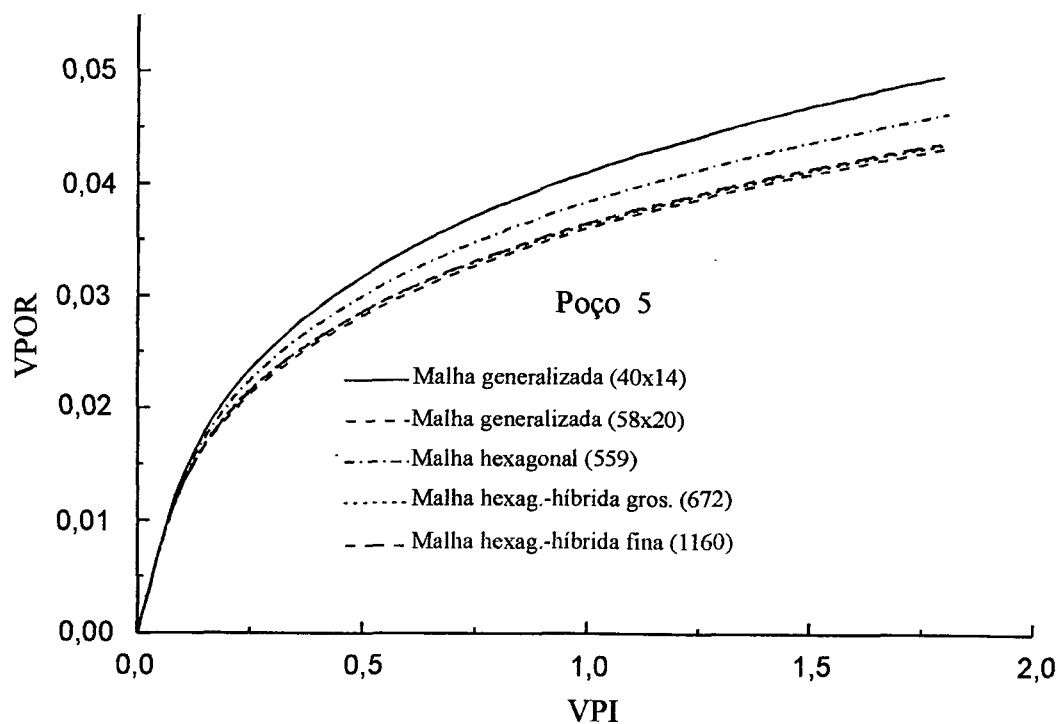


Fig. 7.26 - Recuperação de óleo no poço produtor 5.

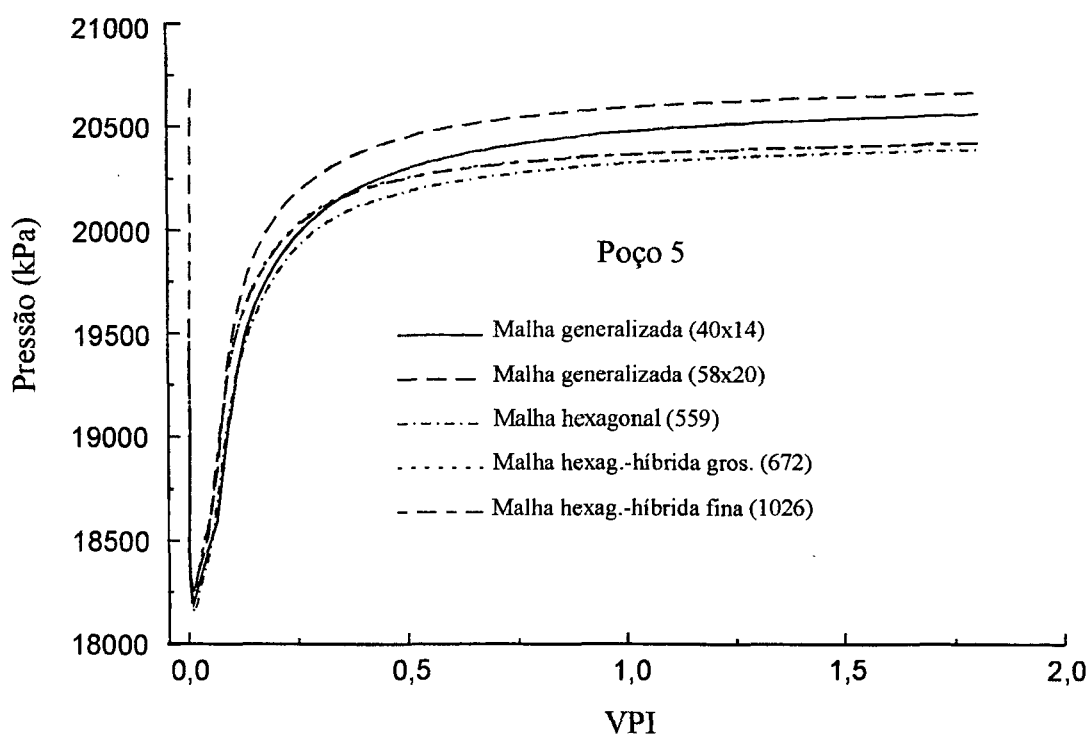


Fig. 7.27 - Pressão no poço produtor 5.

Note-se que os resultados obtidos com as malhas hexagonais híbridas sempre apresentam ótima concordância entre si. As diferenças entre os resultados apresentados podem

ser explicadas pelo fato de ser difícil definir as posições dos poços. As Figs. 7.28 e 7.29 indicam as localizações dos poços para as várias malhas empregadas.

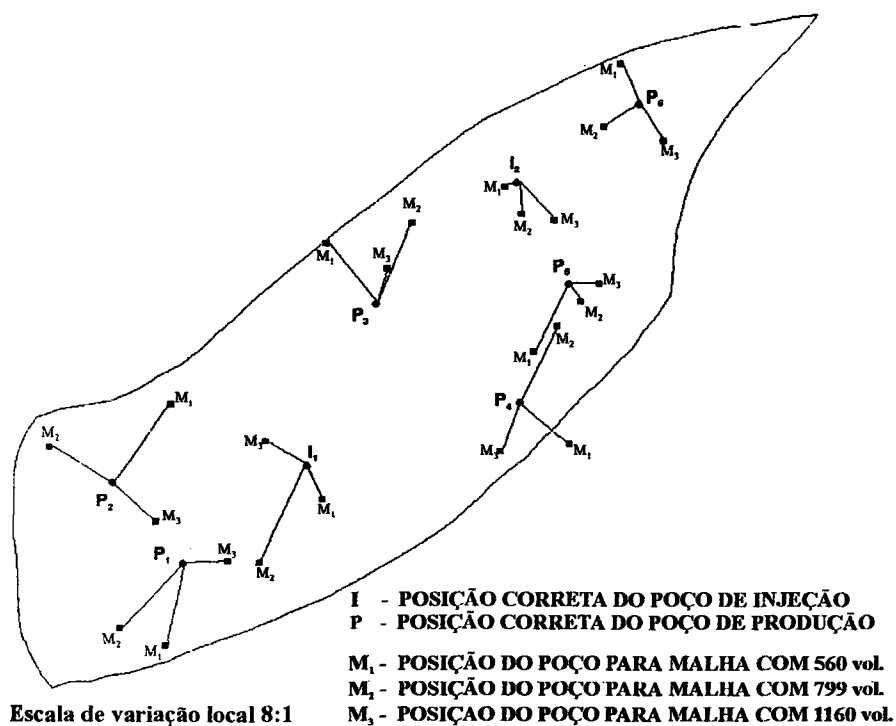


Fig. 7.28 - Variação das localizações dos poços nas malhas generalizadas.

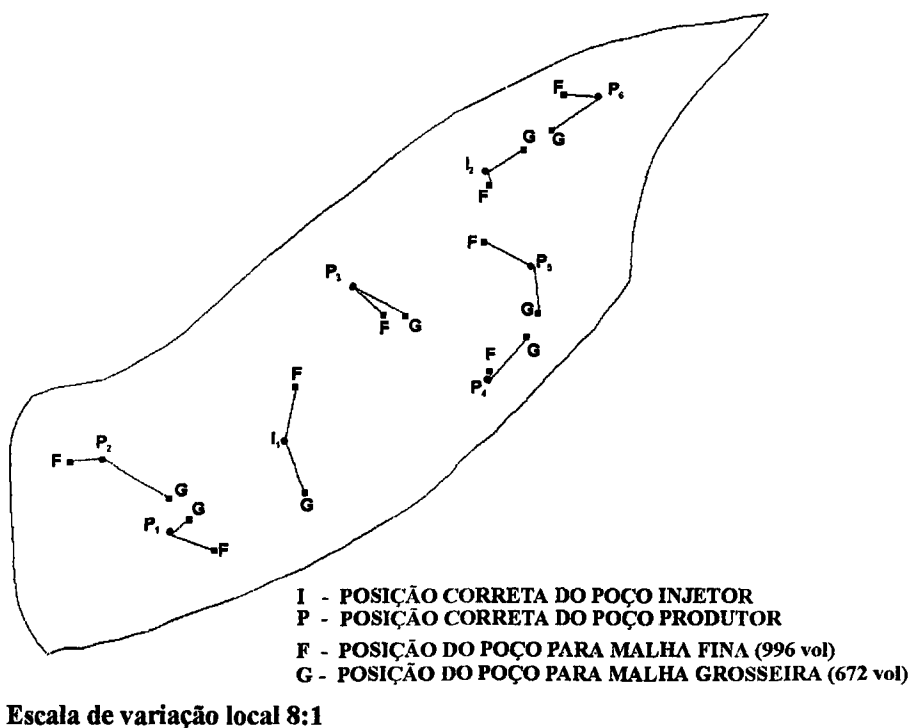
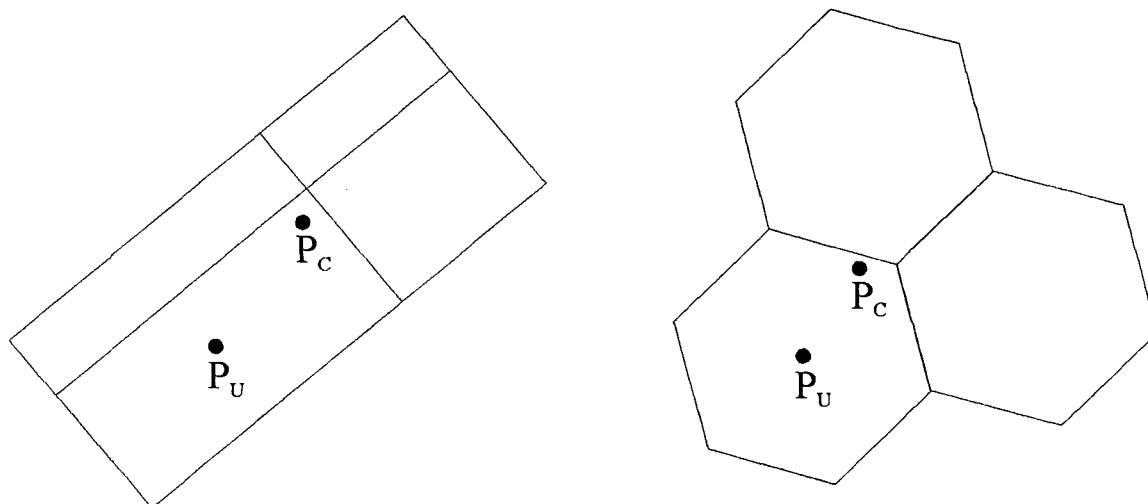


Fig. 7.29 - Variação das localizações dos poços em duas malhas de Voronoi hexagonais.

A localização do poço numa malha é definida pela posição do centro do volume de controle que envolve a posição prescrita (correta) do poço, conforme indica a Fig. 7.30. Quando se faz o refino da malha, Fig. 7.31, ocorre uma redistribuição de volumes no domínio, o que acaba por provocar variações nas localizações dos poços. Nas Figs. 7.28 e 7.29 estão indicadas as distâncias entre a posição correta e a posição utilizada de cada poço para cada uma das malhas. Com o objetivo de melhorar a visualização as distâncias da posição correta foram ampliadas por um fator de 8.



a) Volumes de Controle de uma malha generalizada.

b) Volumes de Controle de uma malha hexagonal de Voronoi.

Fig. 7.30 - Posições do poço: P_C → Posição correta; P_U → Posição utilizada pelo simulador.

O comentário anterior em relação a posição dos poços tem por objetivo mostrar que mesmo utilizando os mesmos dados físicos e geométricos não deveria-se esperar uma concordância plena entre os resultados, uma vez que os problemas simulados nunca são os mesmos (devido a variação na localização dos poços). Na malha hexagonal híbrida de Marcondes [23], o bloco central de cada região cilíndrica foi localizado na posição de cada poço, de forma que o ponto (nó) do volume e a posição do poço coincidem. Desta forma, para a comparação entre os resultados obtidos, com as diferentes malhas, poderia se ter como referência os resultados obtidos com a malha hexagonal híbrida mais refinada.

Observando as distâncias entre os poços I_1 e P_1 , da Fig. 7.28, pode-se tentar explicar o comportamento obtido com as curvas das duas malhas curvilíneas. Para exemplificar, pode-se analisar o comportamento das curvas relativas ao poço produtor 1, P_1 , quando refina-se a malha generalizada de 560 para 1160 volumes. A Fig. 7.22 mostra que a recuperação de óleo no poço produtor 1 cai com o refino da malha (M_1 para M_3 , na Fig. 7.28). Isto ocorre porque, com o refino da malha, o poço produtor 1, P_1 , aproxima-se do poço injetor 1, I_1 , logo mais rápida é a irrupção de água em P_1 e conseqüentemente obtém-se redução na recuperação de óleo com a malha mais refinada. O comportamento da curva de pressão no poço produtor 1, obtido com as duas malhas, também pode ser explicado. Note-se que, com o refino da malha o poço produtor 1, P_1 , se aproxima do poço injetor 1, I_1 , e portanto deve-se esperar (como realmente ocorreu) que a pressão em P_1 seja mais alta com a malha de 1160 volumes. Uma análise semelhante pode ser feita com os resultados obtidos para o poço produtor 5, P_5 . Para o poço produtor 4, P_4 , fica difícil fazer uma análise entre os resultados obtidos com as duas malhas generalizadas, uma vez que este poço situa-se numa posição que recebe influência de vários poços vizinhos, tanto injetores como produtores.

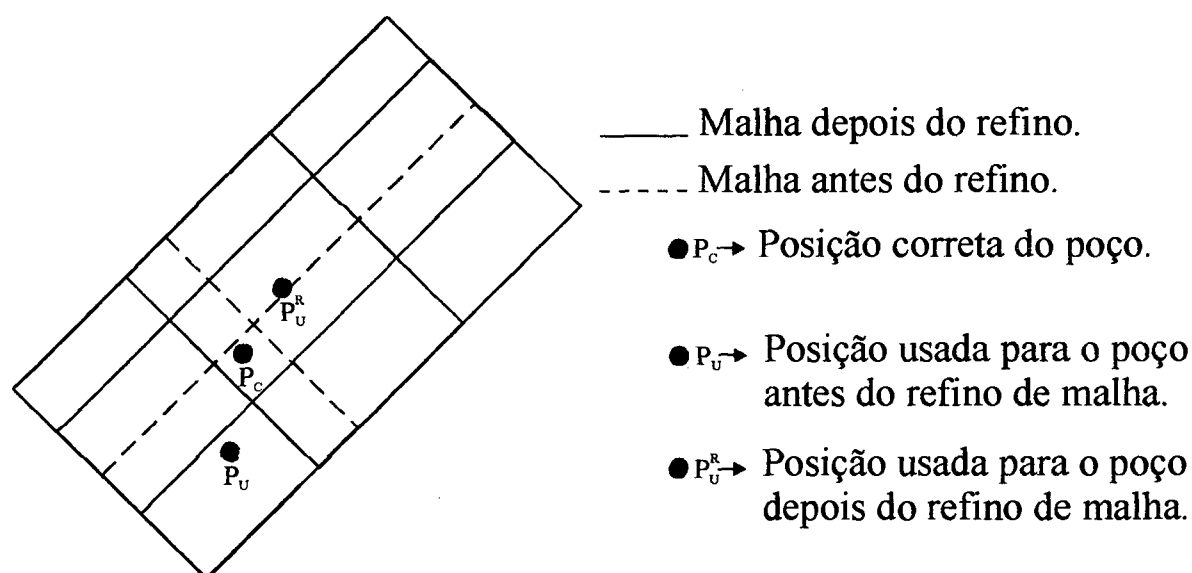


Fig. 7.31 - Variação da posição do poço com o refino da malha.

Analisando as Figs. 7.22 a 7.27 pode-se concluir que as concordâncias entre resultados são satisfatórias, devendo-se esperar que os resultados obtidos por Marcondes [23], com a malha hexagonal-híbrida fina, sejam os mais confiáveis. De modo geral, em relação ao caso bidimensional bifásico, pode-se dizer que os resultados obtidos foram bons, apresentando concordância satisfatória com os resultados dos autores referenciados.

7.3 - Caso Tridimensional Bifásico (água/óleo)

Nesta parte são apresentados os resultados obtidos numa simulação com discretização tridimensional. O escoamento é suposto bifásico (água e óleo). O reservatório em estudo e os dados envolvidos são essencialmente os mesmos do item 7.2.3, exceto por duas variantes: a) A profundidade foi ampliada de um fator de 10; b) As vazões também foram aumentadas de um fator de 10. Porém, devido à situação tridimensional, algumas observações importantes ainda devem ser relatadas: a) Nesta simulação considerou-se o efeito gravitacional ($g = 9,8066 \text{ m/s}^2$); b) As vazões foram prescritas na superfície do reservatório, e portanto as pressões de fundo de poço tornaram-se incógnitas na simulação. Além disso, uma particularidade foi introduzida no problema, pois considerou-se a presença de uma falha geológica.

A Fig. 7.32 mostra uma vista em perspectiva do reservatório, cuja malha empregada foi de $19 \times 10 \times 5$ volumes. Note-se que a falha geológica estende-se por toda a profundidade do reservatório.

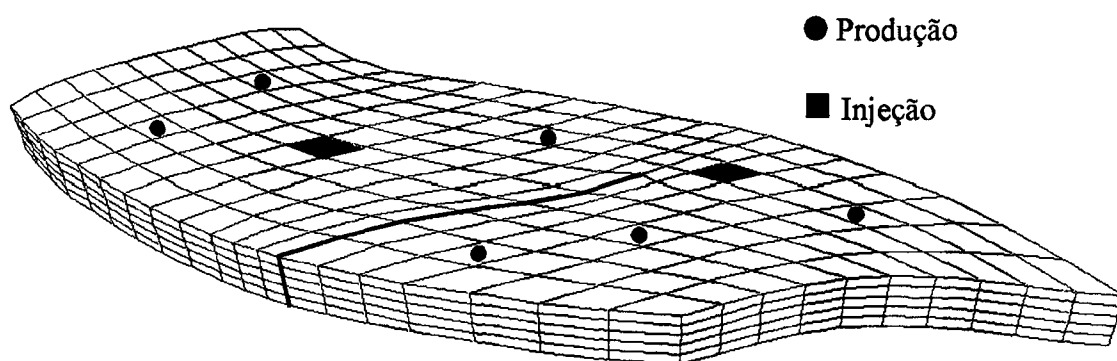


Fig. 7.32 - Malha tridimensional em perspectiva.

A Fig. 7.33 indica uma vista superior do reservatório onde a falha geológica é destacada. Nesta figura ainda estão indicadas as coordenadas (x, y) da malha que definem a falha geológica.

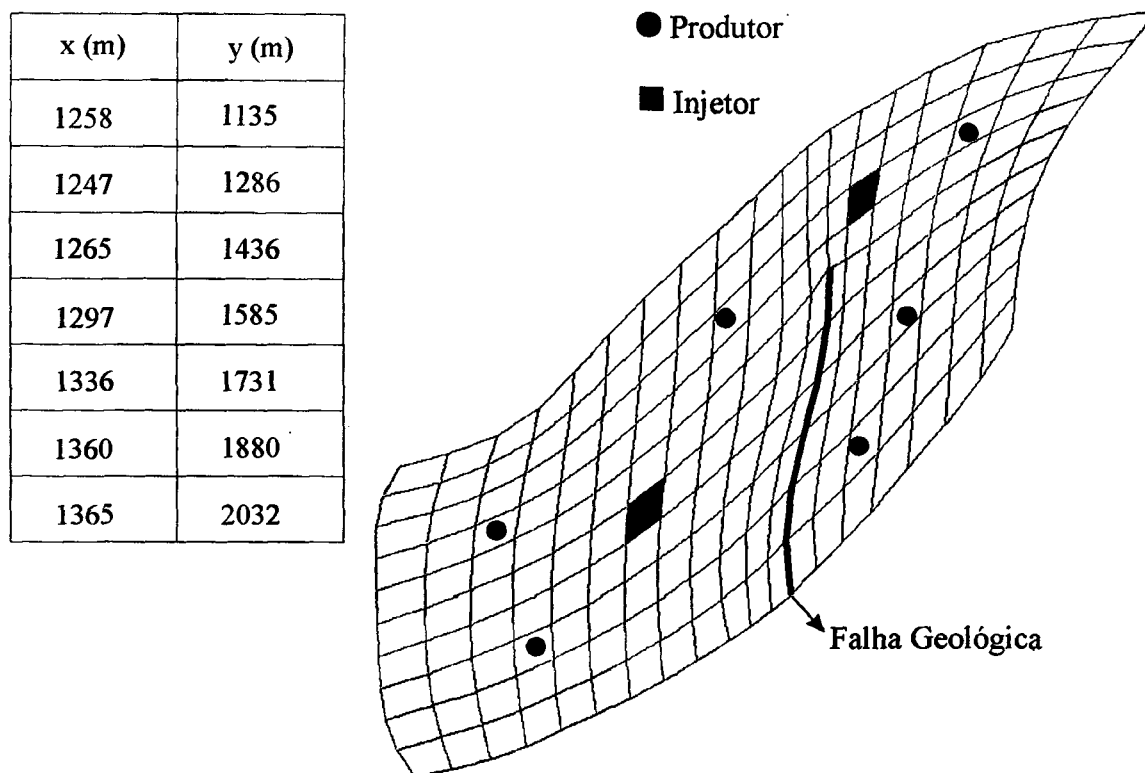


Fig. 7.33 - Vista superior da malha e falha geológica em destaque.

O reservatório foi simulado empregando-se dois códigos computacionais. O primeiro código, SIRP-3D [40], usa o método IMPES e formulação em saturações (para o caso bifásico água/óleo). O segundo código, desenvolvido neste trabalho, emprega o método totalmente implícito e formulação em frações mássicas. A Fig. 7.34 mostra a curva de recuperação de óleo obtida com os dois códigos computacionais.

As Figs. 7.35 e 7.36 mostram linhas de iso-saturações obtidas com os dois códigos computacionais.

A Fig. 7.37 ilustra o campo de velocidades da fase água, obtido com o código implícito, após 0,6 VPI.

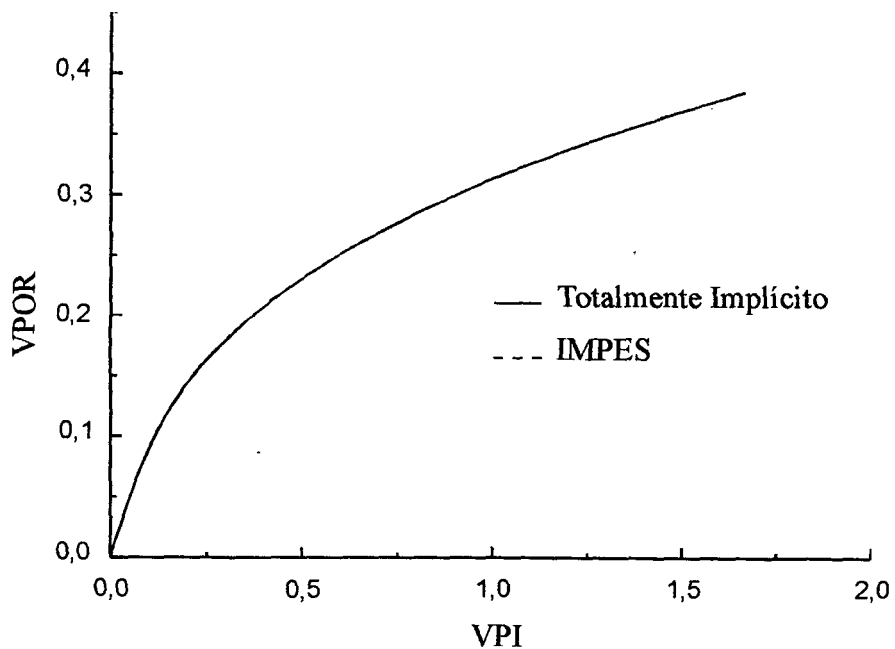


Fig. 7.34 - Curva de recuperação total de óleo.

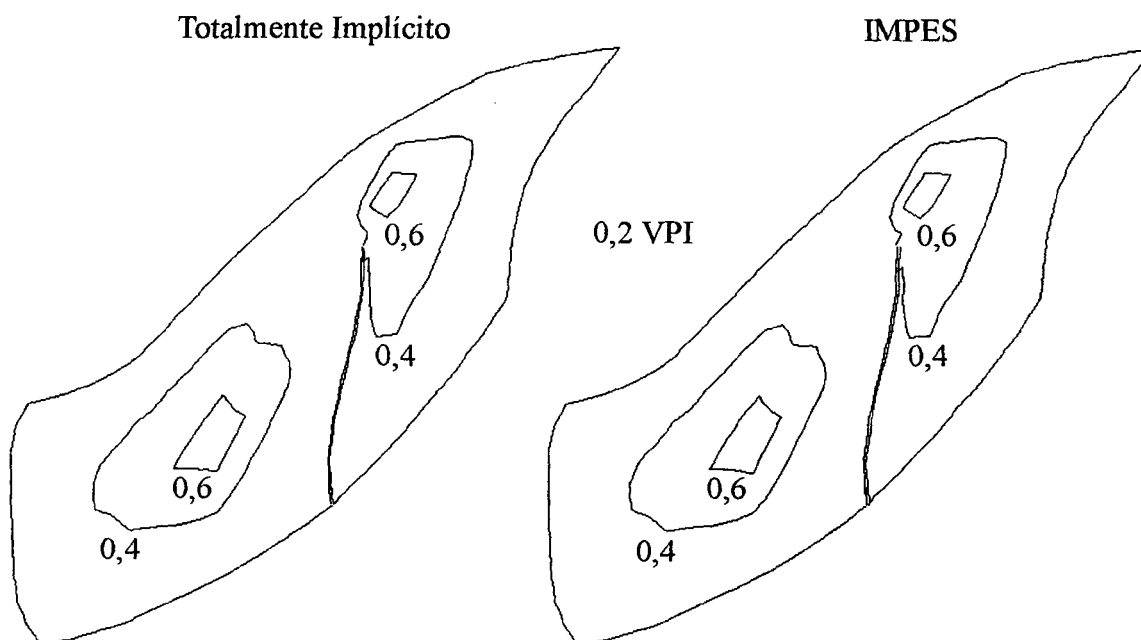


Fig. 7.35 - Iso-saturações $S^w = 0,4$ e $S^w = 0,6$, após 0,2 VPI.

Analisando-se as Figs. 7.35 a 7.37 pode-se ver que a condição de impermeabilidade na falha geológica foi corretamente implementada, uma vez que as linhas de iso-saturações não cruzam a falha geológica e que os vetores velocidades próximos à falha geológica são tangentes a mesma.

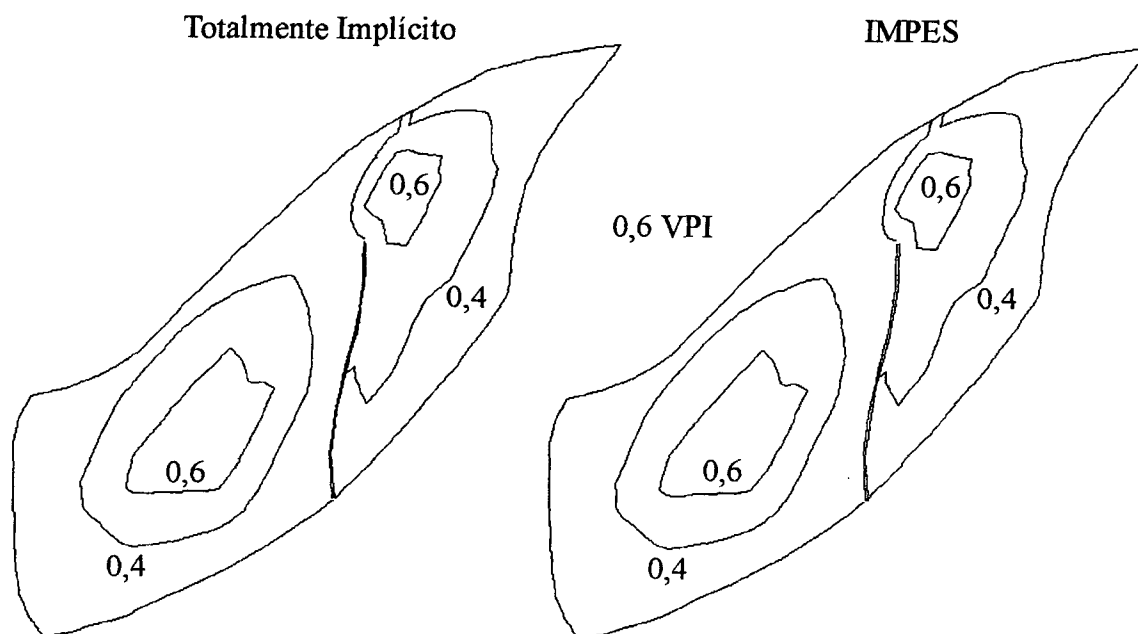


Fig. 7.36 - Iso-saturações $S^w = 0,4$ e $S^w = 0,6$, após 0,6 VPI.

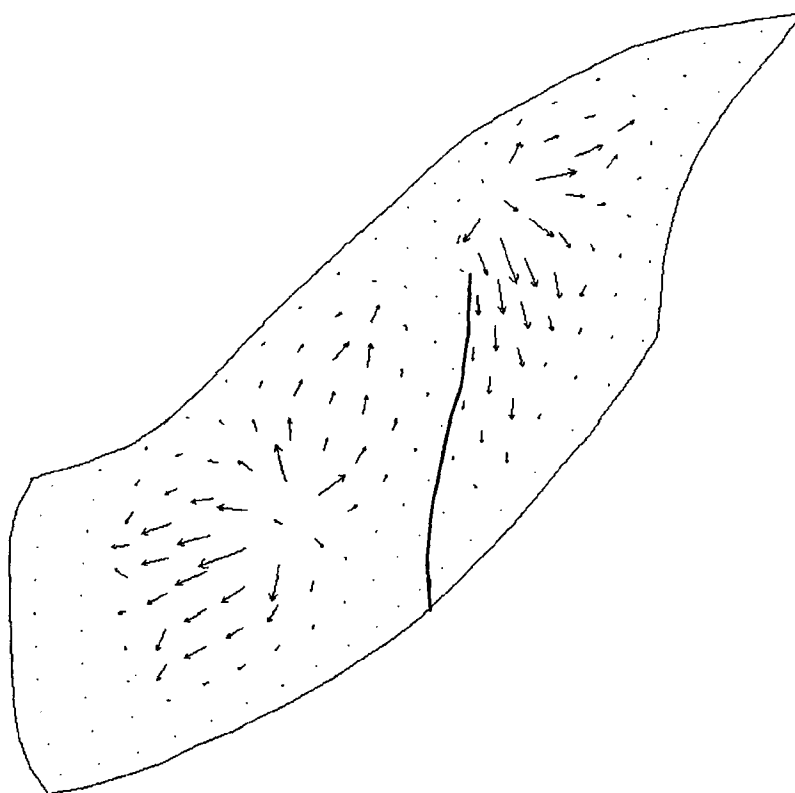


Fig. 7.37 - Vetores velocidade após 0,6 VPI.

Para concluir, em função dos resultados apresentados, pode-se dizer que os dois códigos computacionais apresentaram ótima concordância.

7.4 - Caso Tridimensional Trifásico

O objetivo deste seção é apenas mostrar algumas potencialidades e características relativas ao código computacional desenvolvido. A geometria e dados utilizados são hipotéticos, não objetivando, portanto, representar uma situação realística.

O primeiro caso simulado é relativo a escoamento trifásico, porém um comentário faz-se necessário. No programa tridimensional trifásico desenvolvido ainda não é possível simular escoamentos trifásicos incluindo a fase gás. Esta impossibilidade decorre do fato de não se ter implementado o processo de inicialização para a situação trifásica envolvendo água, óleo e gás. Metodologias para processos de inicialização de reservatórios de petróleo podem ser encontradas em Aziz [4] e Palagi [29]. A implementação do processo de inicialização não é simples, e iria requerer um período de tempo muito além do disponível para confecção deste trabalho. Portanto, o escoamento trifásico simulado não envolve a fase gás com propriedades físicas reais. No caso trifásico simulado, as fases possuem a mesma densidade e as permeabilidades relativas, dos supostos componentes água, óleo e gás, assumem o valor das respectivas saturações, isto é,

$$k^{rw} = S^w \quad (7.10)$$

$$k^{ro} = S^o \quad (7.11)$$

$$k^{rg} = S^g \quad (7.12)$$

A Fig. 7.38 mostra o reservatório simulado e a malha utilizada no mesmo. O reservatório consiste de um paralelepípedo deformado. O eixo γ faz um ângulo de 30° com o eixo z (a vertical) e os eixos ξ e η fazem um ângulo de 60° entre si. O comprimento da aresta na direção γ é de 1 m, e o comprimento nas direções ξ e η é de 2 m. A malha utilizada foi de $15 \times 15 \times 5$ volumes.

Os dados usados na simulação estão dispostos na Tabela 7.6.

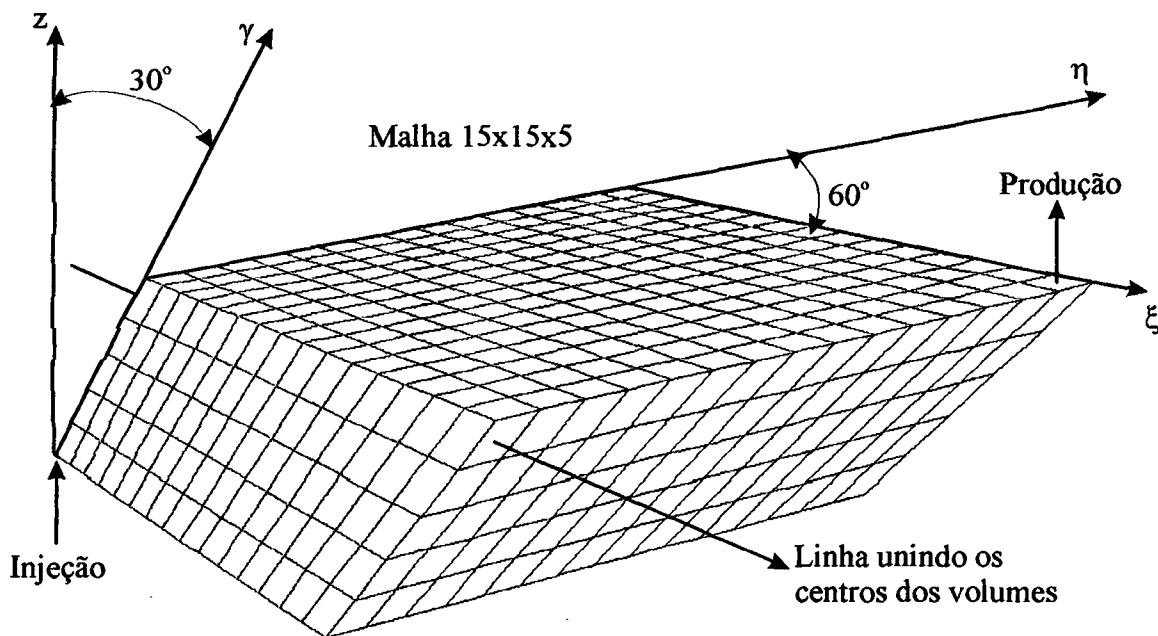


Fig. 7.38 - Paralelepípedo deformado. Malha e linha onde são medidas as saturações da Fig. 7.39

Tabela 7.6 - Dados físicos e geométricos - Caso do paralelepípedo deformado

Porosidade	$\phi = 0,15$
Permeabilidade Absoluta	$k = 4,0 \mu\text{m}^2$ (4000 mD)
Pressão Inicial	$P_i = 0 \text{ kPa}$ (0 psi)
Sat. Inicial da água	$S^{iw} = 0,0$
Sat. Inicial do óleo	$S^{io} = 0,5$
Sat. Inicial do gás	$S^{ig} = 0,5$
Densidades	$\rho^w = \rho^o = \rho^g = 1000 \text{ kg/m}^3$
Fats. Vol. de Formação	$B^w = B^o = B^g = 1 \quad \forall P$
Compressibilidades	$c^w = c^o = c^g = 0 \text{ Pa}^{-1}$
Viscosidades	$\mu^w = \mu^o = \mu^g = 10^{-3} \text{ Pa.s}$
Vazão de Prod. e Inj.	$q = 9,534 \text{ m}^3/\text{dia}$ (60 STB/dia)

Note-se que a injeção e produção são realizadas em apenas um volume, nos cantos opostos do paralelepípedo, conforme indica a Fig. 7.38. As vazões de injeção e produção são

prescritas diretamente nos termos fonte das equações de conservação, conforme explicado no apêndice A.

A Fig. 7.39 apresenta o perfil das saturações ao longo da linha mostrada na Fig. 7.38. Este perfil de saturações é correspondente a 0,3 VPI. Devido ao fato das saturações iniciais das fases óleo e gás serem iguais ($S^{io} = S^{ig} = 0,5$) e em função das propriedades das fases óleo e gás serem equivalentes, as saturações S^o e S^g são sempre iguais e, tendem a 0,5 quando a saturação S^w tende a zero, conforme indica a Fig. 7.39. Note-se que a Fig. 7.39 indica perfeitamente a conservação da massa global, uma vez que as saturações são obtidas a partir das frações mássicas.

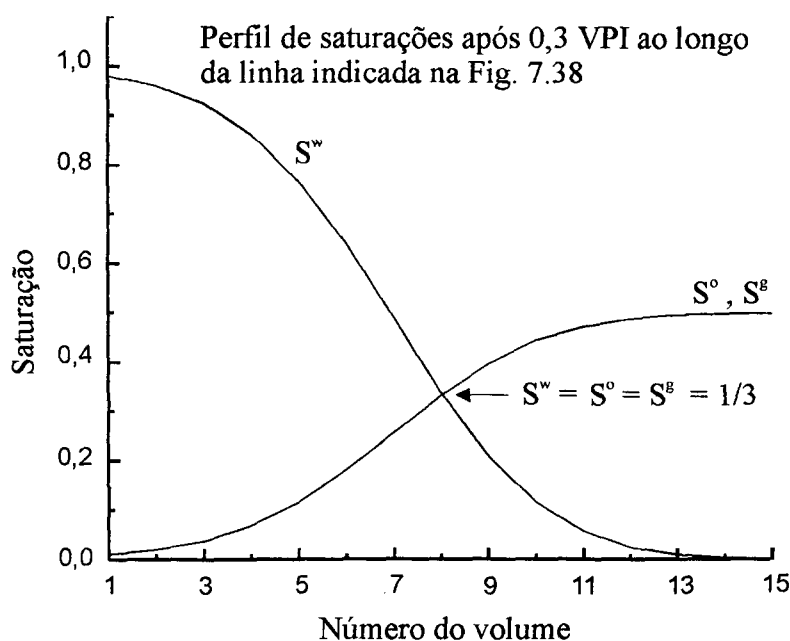


Fig. 7.39 - Saturações das três fases após 0,3 VPI.

Para finalizar, as Figs. 7.40 a 7.42 mostram linhas de iso-saturações de água ($S^w = 0,75$; $S^w = 0,50$; $S^w = 0,25$) para três diferentes valores de volumes porosos injetados.

Avaliando-se todos os resultados registrados neste capítulo pode-se dizer que os mesmos foram coerentes e apresentaram boa concordância com os disponíveis na literatura consultada.

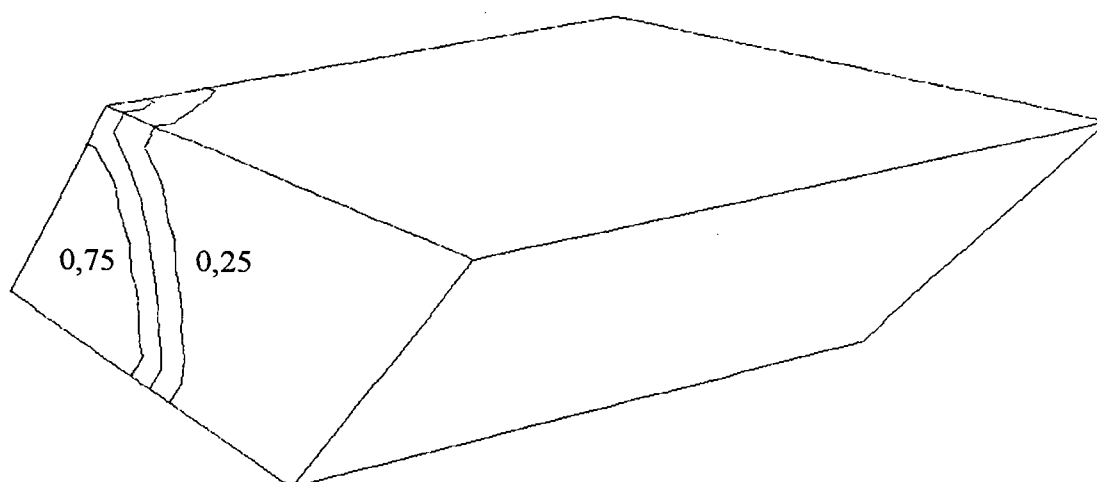


Fig. 7.40 - Paralelepípedo deformado. Iso-saturações após 0,10 VPI.

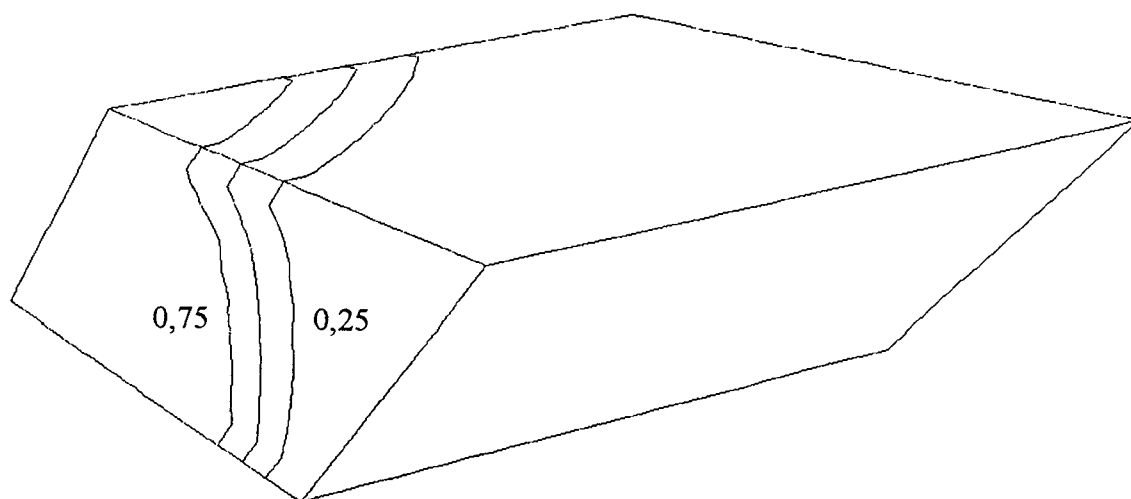


Fig. 7.41 - Paralelepípedo deformado. Iso-saturações após 0,30 VPI.

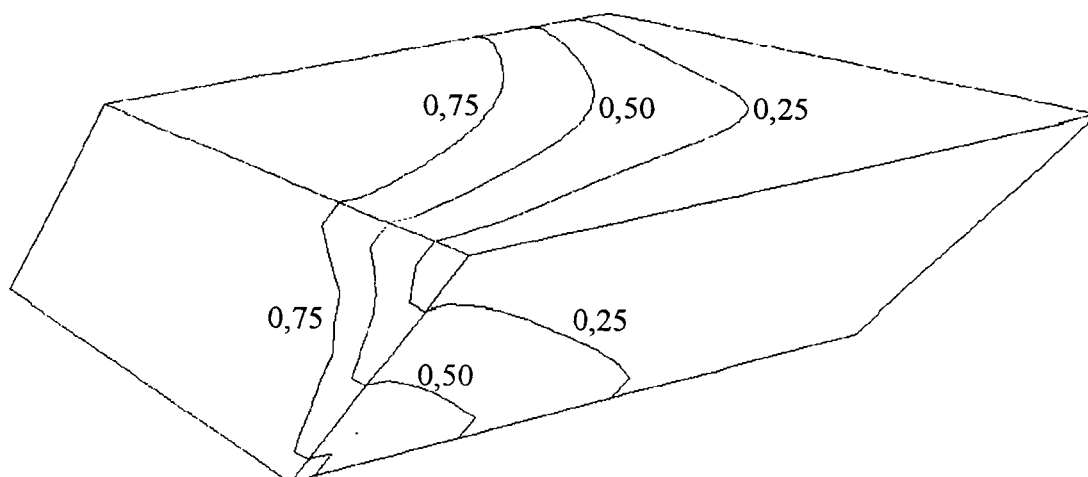


Fig. 7.42 - Paralelepípedo deformado. Iso-saturações após 0,70 VPI.

CAPÍTULO OITO

Conclusões

O presente trabalho apresentou uma metodologia versátil e capaz de ser aplicada para simulação de reservatórios de petróleo. A metodologia proposta presta-se a simulação tridimensional e trifásica de bacias petrolíferas. Foram simulados casos com o objetivo de validar a metodologia proposta e para mostrar a potencialidade da mesma.

Dentre as principais conclusões e contribuições do presente trabalho pode-se citar:

- A formulação em frações mássicas foi empregada e o código computacional implementado forneceu resultados que concordam com outros obtidos pela formulação em saturação.
- O método de Newton foi aplicado à situação tridimensional em coordenadas generalizadas.
- Mostrou-se que o uso de coordenadas curvilíneas proporciona flexibilidade para discretização de reservatórios de petróleo que são, em geral, de geometrias irregulares e com presença de falhas geológicas.
- Foi proposta e apresentada uma equação geral capaz de representar quaisquer tipos de volume de controle presentes na discretização. Analisando os resultados apresentados pode-se concluir que a equação proposta foi corretamente implementada.
- Especificamente em relação aos resultados bifásicos obtidos pode-se dizer que apresentaram boa concordância com os disponíveis na literatura.
- Os resultados tridimensionais bifásicos mostraram-se coerentes, e concordaram com os obtidos pela formulação IMPES.

- A metodologia foi desenvolvida para simulação de escoamentos trifásicos. Os resultados obtidos para uma situação trifásica (propriedades das 3 fases iguais) mostraram-se coerentes.

O presente trabalho é apenas uma etapa inicial em relação à simulação tridimensional de reservatórios de petróleo dentro do SINMEC. É claro que muita e onerosa pesquisa ainda deve ser realizada em cima deste tópico, a fim de se obter um simulador realmente aplicável. Dentre os inúmeros trabalhos futuros que poderiam ser realizados seguindo esta linha de pesquisa poderia-se mencionar:

- Implantação do processo de inicialização considerando o equilíbrio tridimensional trifásico.

- Procura, estudo e testes de *solvers* eficientes para resolução do complexo sistema linear associado.

- Busca de informações e dados a respeito de curvas de permeabilidades, pressões capilares, razões de solubilidade, viscosidades, etc, a fim de se realizar simulações mais realísticas.

Referências Bibliográficas

1. Abou-Kassem, J. H., Aziz, K. "Handling of Phase Change in Thermal Simulators", *SPEJ*, Sep., (1985).
2. Amado, L. C. N. *Aplicação do Método das Diferenças Finitas Com Malha Triangular em Simulação de Reservatórios*, Dissertação de Mestrado, Campinas-SP, UNICAMP, Nov.(1994).
3. Amado, L. C. N., "A Fine Volume Approach With Triangular Grid For Solving Fluid Flow Problems in Reservoirs", *XI COBEM*, pp. 101-104, São Paulo, Dez.(1991).
4. Aziz, K. *Notes for Petroleum Reservoir Simulation*, Stanford University,(1993).
5. Aziz, K., Settari, A. *Petroleum Reservoir Simulation*, Applied Science Publishers. (1979).
6. Britto, P. R. F. "Comunicação Pessoal - Notas Sobre Modelo Composicional Usando Formulação em Frações Mássicas", *CENPES/PETROBRÁS*, Jun.(1994).
7. Britto, P. R. F., Pedrosa Jr., O. A. e Horne, R. "Application of Boundary-Fitted Curvilinear Grid to Reservoir Simulation", *XI COBEM*, pp. 129-132, São Paulo, Dez.(1991).
8. Coats, K. H. "In Situ Combustion Model", *SPEJ*, Dec.(1980).
9. Cunha, A. R. *Relatório de Estágio Curricular*, Eng. Mec. UFSC, Out-Dez, (1992).
10. Cunha, A. R., Maliska, C. R., Silva, A. F. C. e Livramento, M. A. "Two-Dimensional Two-Phase Petroleum Reservoir Simulation Using Boundary-Fitted Grids", *V Encontro Nacional de Ciências Térmicas*, São Paulo, pp. 359-362, Dez.(1994).

11. Dake, L. P. *Fundamentals of Reservoir Engineering*, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam(1978).
12. Ewing, R. *The Mathematics of Reservoir Simulation*, editado por R. E. Ewing, SIAM, pp. 3-34, Philadelphia(1983).
13. Forsyth, P. A. e Sammon, P. H. "Gas Phase Appearance and Disappearance in Fully Implicit Black Oil Simulation", *SPEJ*, Oct.(1984).
14. Forsyth, P. A. e Sammon, P. H. "Practical Consideration for Adaptive Implicit Methods in Reservoir Simulation", *Journal of Computational Physics*, Sep.(1986).
15. Fleming, G. C. "Modeling the Performance of Fractured Wells in Pattern Floods Using Orthogonal, Curvilinear Grids", *SPEJ*, Sep.(1987).
16. Hirasaki, G. J. and O'Dell, P. M. "Representation of Reservoir Geometry for Numerical Simulation", *SPEJ*, Dec.(1970).
17. Maliska, C. R. *Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional*, LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S. A., Rio de Janeiro, RJ, Brasil (1995).
18. Maliska, C. R., Silva, A. F. C., Marcondes, F., Lopes, M. N. Cunha, A. R. "Solução Numérica do Problema Monofásico com Traçador - Parte I", *Relatório CENPES/PETROBRÁS*, SINMEC/EMC/UFSC, Relatório RT-91-5, Florianópolis, SC, Brasil (1991).
19. Maliska, C. R., Silva, A. F. C., Jucá, P. C., Cunha, A. R., Lopes, M. N. "Solução Numérica do Problema Bifásico Imiscível - Parte II", *Relatório CENPES/PETROBRÁS*, SINMEC/EMC/UFSC, Relatório RT-92-2, Florianópolis, SC, Brasil(1992).
20. Maliska, C. R., Silva, A. F. C., Jucá, P. C., Cunha, A. R., Livramento, M. A. "Desenvolvimento de um Simulador 3D Black-Oil em Coordenadas Curvilíneas Generalizadas - Parte I", *Relatório CENPES/PETROBRÁS*, SINMEC/EMC/UFSC, Relatório RT-93-1, Florianópolis, SC, Brasil(1993).

21. Maliska, C. R., Silva, A. F. C., Cunha, A. R., Omoto, M. "Desenvolvimento de Modelos Computacionais em Coordenadas Generalizadas para a Simulação de Reservatórios de Petróleo - Modelo Black-Oil 3D Usando as Frações Mássicas - Parte II", *Relatório CENPES/PETROBRÁS*, SINMEC/EMC/UFSC, Relatório RT-95-3, Florianópolis, SC, Brasil(1995).
22. Maliska, C. R., Cunha, A. R., Livramento, M. A., Silva, A. F. C. "Tridimensional Petroleum Reservoir Simulation Using Generalized Curvilinear Coordinates", *V Encontro Nacional de Ciências Térmicas*, São Paulo, pp. 363-366, Dez.(1994).
23. Marcondes, F. *Simulação Numérica Usando Métodos Adaptativos-Implícitos e Malha de Voronoi de Problemas de Reservatórios de Petróleo* , Tese de Doutorado, UFSC, Florianópolis-SC, Brasil, Abril.(1996).
24. Mezzomo, R. F. "O Escoamento em Meios Porosos na Indústria do Petróleo", *B. técn. PETROBRÁS*, Rio de Janeiro, 35:21-32, Jan./Dez.(1992).
25. Mota, M. A. A. *Simulação Numérica de Reservatórios de Petróleo Utilizando Coordenadas Generalizadas e Esquema de Interpolação TVD* , Dissertação de Mestrado, Florianópolis, UFSC, Set.(1994).
26. Nghiem, L. X., Aziz, K. "A robust Iterative Method for Flash Calculations Using the Soave-Redlich-Kwong or Peng-Robinson Equations of State", *SPEJ* , Jun. (1983).
27. Nutakki, R., Wong, T., Firoozabadi, A., Aziz, K. "Calculation of Multiphase Equilibrium for Water-Hydrocarbon Systems at High Temperature , Paper *SPE* 17390, (1988).
28. Michelsen, M. L. The Isothermal Flash Problem. Part II : Phase Split Calculation, *Fluid Phase Equilibria* , Sep. (1982).
29. Palagi, C. *Generation and Application of Voronoi Grid to Model Flow in Heterogeneous Reservoirs* , Ph.D. dissertation, Stanford University, Stanford, May.(1992).

30. Patankar, S. V. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere Publishing Corporation (1980).
31. Peaceman, D. W. *Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation* Elsevier Science Publishing Company, Amsterdam, Oxford, New York, EUA (1977).
32. Peaceman, D. W. "Interpretation of Well-Block Pressures in Numerical Reservoir Simulation", *SPEJ*, Apr. (1978).
33. Pedrosa Jr., O. A. "Use of Hybrid Grid in Reservoir Simulation", *SPEJ*, Nov. (1986).
34. Peng, D. Y. e Robinson, D. B. "Two and Three Phase Calculation for Systems Containing Water", *Can. J. Chem. Eng.*, Dec. (1976).
35. Pinto, A. C. C. *Esquemas de Alta Resolução para Controle de Dispersão Numérica em Simulação de Reservatórios*, Dissertação de Mestrado, Campinas-SP, UNICAMP, Nov. (1991).
36. Prais, F. e Campagnolo, E. A. "Modelagem do Escoamento Multifásico em Simulação de Reservatório", *XI COBEM*, pp.545-548, São Paulo, Dez. (1991).
37. Robertson, G.E. and Woo, P.T. "Grid Orientation Effects and the Use of Orthogonal Curvilinear Coordinates in Reservoir Simulation, *SPEJ*, Feb. (1978).
38. Sharp, H. N. and Anderson, D. A. "Orthogonal Curvilinear Grid Generation With Present Internal Boundaries for Reservoir Simulation, *SPEJ*, Feb. (1985).
39. SIMBEST BLACK-OIL SIMULATOR *User's Guide Version 1.0*, TRANS. AIME, v. 186, p. 305-324, (1985).
40. SIRP3D - SIMULADOR TRIDIMENSIONAL DE RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO *Manual do Usuário - Versão 1.0*, Laboratório de Simulação Numérica em Mecânica dos Fluidos e Transferência de Calor - SINMEC, Jan. (1995).

41. Stright, D. H. Jr., Aziz, K., Settari, A. e Starratt, F. "Carbon Dioxide Injection into Bottom-Water, undersaturated viscous oil Reservoirs", *J. Petrol. Technol.*, 20, pp1248-58, (1977).
42. Thomas, G. W. e Thurnau, D. H. "Reservoir Simulation Using an Adaptive Implicit Method", *SPEJ*, Feb.(1983).
43. Thomson, J. F., Warsi, Z. U. A. and Mastin, W. C. *Numerical Grid Generation- Foundations and Applications*, Elsevier Science Publishing Co., EUA(1985).
44. Wong, T. W., Firoozabadi, A. e Aziz, K. "The Relationship of the Volume Balance Method of Compositional Simulation to the Newton-Raphson Method", *SPEJ*, Feb.(1989).
45. Yanosik, J. L. e McCracken, T. A. "A Nine-Point Finite-Difference Reservoir Simulator for Realistic Prediction of Unfavorable Mobility Ratio Displacements", *SPEJ*, Feb.(1985).

APÊNDICE A

Condições de Contorno nos Poços Baseadas nas Mobilidades

Conforme apresentado no Cap. 4, quando se emprega condições de contorno nos poços, envolvendo modelos de poço, não se tem controle da vazão produzida em cada camada do poço. Como visto, o que se prescreve é a pressão de fundo de poço, P^{wf} , ou é a vazão na superfície do reservatório. Com finalidade didática e de averiguação do código computacional, muitas vezes costuma-se implementar condições de contorno de injeção/produção que não estão relacionadas com as equações provenientes dos modelos de poço †. Estas condições são aplicadas diretamente sobre o termo fonte/sorvedouro. Nas condições de contorno baseadas nas mobilidades admite-se que a vazão de cada fase é proporcional às mobilidades, deste modo tem-se

$$\frac{q^w}{\lambda^w} = \frac{q^o}{\lambda^o} = \frac{q^g}{\lambda^g} = \frac{q^L}{\lambda^L} = \frac{q^T}{\lambda^T} \quad (A1)$$

onde

$$q^L = q^w + q^o \quad (L \rightarrow \text{Líquido}) \quad (A2)$$

$$q^T = q^w + q^o + q^g \quad (T \rightarrow \text{Total}) \quad (A3)$$

$$\lambda^L = \lambda^w + \lambda^o \quad (A4)$$

$$\lambda^T = \lambda^w + \lambda^o + \lambda^g \quad (A5)$$

As vazões q 's entram diretamente nas equações dos volumes de controle que possuem condições de operações de injeção ou produção. Observe-se que os q 's não são as vazões prescritas nos poços, $Q_{\text{poço}}$. O q , para o volume de controle P , é obtido a partir do $Q_{\text{poço}}$

† No caso de simuladores bidimensionais estas condições são muito utilizadas e realmente são verdadeiras pois, como estes simuladores só empregam uma camada, a vazão prescrita define diretamente o termo fonte/sorvedouro das equações de balanço.

de forma proporcional ao volume de P. Por exemplo, para um poço que envolve n volumes de controle, a vazão em um destes volumes de controle é obtida por

$$q_P = \left[\frac{V_P}{\sum_{I=1}^n V_I} \right] Q_{\text{poço}} \quad (A6)$$

Numa região [†] injetora de água (gás) a vazão de água (gás) é sempre prescrita (q_{INJ}) e a de óleo e gás (água) são sempre nulas.

$$q^w = q_{INJ} \quad (q^g = q_{INJ}) \quad (A7)$$

e

$$q^o = q^g = 0 \quad (\text{ou } q^o = q^w = 0) \quad (A8)$$

Para regiões produtoras várias são as possíveis condições de operações: vazão de água prescrita, vazão de óleo prescrita, vazão de gás prescrita, vazão de líquido prescrita e vazão total prescrita. Considere-se então cada uma destas situações.

A.1 - Vazão de Água Prescrita

Neste caso segundo a Eq. (A1) tem-se

$$q^w = q^w \quad (A9)$$

$$q^o = \frac{\lambda^o}{\lambda^w} q^w \quad (A10)$$

$$q^g = \frac{\lambda^g}{\lambda^w} q^w \quad (A11)$$

[†] Uma região deve ser entendida como sendo um volume de controle ou um conjunto de volumes de controle. No segundo caso a vazão é distribuída proporcionalmente ao volume de cada volume de controle.

A.2 - Vazão de Óleo Prescrita

Também de acordo com a Eq. (A1) tem-se

$$q^o = q^o \quad (A12)$$

$$q^w = \frac{\lambda^w}{\lambda^o} q^o \quad (A13)$$

$$q^g = \frac{\lambda^g}{\lambda^o} q^o \quad (A14)$$

A.3 - Vazão de Gás Prescrita

Similarmente, para vazão de gás prescrita tem-se

$$q^g = q^g \quad (A15)$$

$$q^w = \frac{\lambda^w}{\lambda^g} q^g \quad (A16)$$

$$q^o = \frac{\lambda^o}{\lambda^g} q^g \quad (A17)$$

A.4 - Vazão de Líquido Prescrita

Quando a vazão de *água + óleo* é prescrita na produção, tem-se

$$q^w = \frac{\lambda^w}{\lambda^L} q^L \quad (A18)$$

$$q^o = \frac{\lambda^o}{\lambda^L} q^L \quad (A19)$$

$$q^g = \frac{\lambda^g}{\lambda^L} q^L \quad (A20)$$

A.5 - Vazão Total Prescrita

Para vazão total $q^w + q^o + q^g$ prescrita tem-se

$$q^w = \frac{\lambda^w}{\lambda^T} q^T \quad (A21)$$

$$q^o = \frac{\lambda^o}{\lambda^T} q^T \quad (A22)$$

$$q^g = \frac{\lambda^g}{\lambda^T} q^T \quad (A23)$$

Deduções de Expressões da Rotina de *Flash*

Neste Apêndice são apresentadas algumas deduções de equações presentes na rotina de *flash*, que foi discutida no Cap. 5. As deduções das equações aqui apresentadas partem das definições das propriedades e parâmetros abordados no Cap. 2.

- Dedução da Equação de R_s

No item 5.2 justificou-se o fato da solubilidade ser dada pela expressão

$$R_s = \min \left\{ \frac{\rho_{STC}^o (1 - Z^o - Z^w)}{\rho_{STC}^g Z^o}, R_s(P) \right\} \quad (B1)$$

Porém, o primeiro termo, presente na função mínimo, da Eq. (B1), deve ser demonstrado. Conforme abordado no item 5.2, a razão de solubilidade, R_s , é dada pelo primeiro termo, da função mínimo, apenas quando todo o gás estiver dissolvido na fase óleo (ou seja, quando $S^g = 0$). Então, partindo da definição de R_s , tem-se

$$\begin{aligned} R_s &= \frac{V^{g^o}}{V^{o^o}} \\ &= \frac{M^{g^o}}{M^{o^o}} \\ &= \frac{\rho_{STC}^o}{\rho_{STC}^g} \frac{M^{g^o}}{M^{o^o}} \\ &= \frac{\rho_{STC}^o}{\rho_{STC}^g} \frac{M^{g^o}}{M^{o^o}} \\ &= \frac{\rho_{STC}^o}{\rho_{STC}^g} \left[\frac{M^g - M^{g^g}}{Z^o M} \right] \\ &= \frac{\rho_{STC}^o}{\rho_{STC}^g} \frac{1}{Z^o} \left[Z^g - \frac{M^{g^g}}{M} \right] \\ &= \frac{\rho_{STC}^o}{\rho_{STC}^g} \frac{1}{Z^o} \left[1 - Z^o - Z^w - \frac{M^{g^g}}{M} \right] \end{aligned} \quad (B2)$$

quando $S^g = 0 \rightarrow M^g = M^{g^g} = 0$, a equação anterior resulta

$$R_s = \frac{\rho_{STC}^o}{\rho_{STC}^g} \left[\frac{1 - Z^o - Z^w}{Z^o} \right] \quad \text{para } S^g = 0 \quad (B3)$$

Note-se que a equação anterior é exatamente o primeiro termo da Eq. (B1).

• Dedução da Equação de α^o

Conforme a definição de α^o , tem-se

$$\begin{aligned} \alpha^o &= \frac{M^o}{M} \\ &= \frac{M^{oo} + M^{go}}{\frac{M^{oo}}{Z^o}} \\ &= Z^o \left[1 + \frac{M^{go}}{M^{oo}} \right] \\ &= Z^o \left[1 + \frac{\rho_{STC}^g V_{STC}^{go}}{\rho_{STC}^o V_{STC}^{oo}} \right] \\ &= Z^o \left[1 + \frac{\rho_{STC}^g}{\rho_{STC}^o} R_s \right] \end{aligned} \quad (B4)$$

• Dedução da Equação de X^{oo}

Partindo da definição de X^{oo} tem-se

$$\begin{aligned} X^{oo} &= \frac{M^{oo}}{M^o} \\ &= \frac{M}{M} \frac{M^{oo}}{M^o} \\ &= \frac{Z^o}{\alpha^o} \\ &= \frac{1}{\left[1 + \frac{\rho_{STC}^g}{\rho_{STC}^o} R_s \right]} \end{aligned} \quad (B5)$$

- Dedução da Equação de ρ^o

A equação de ρ^o leva em consideração a possibilidade de haver gás dissolvido na fase óleo. Deste modo,

$$\begin{aligned}
 \rho^o &= \frac{M^o}{V^o} \\
 &= \frac{M_{STC}^{oo} + M_{STC}^{go}}{V^o} \\
 &= \frac{\rho_{STC}^o V_{STC}^{oo} + \rho_{STC}^g V_{STC}^{go}}{V^o} \\
 &= \frac{V_{STC}^{oo}}{V^o} \left[\rho_{STC}^o + \rho_{STC}^g \frac{V_{STC}^{go}}{V_{STC}^{oo}} \right] \\
 &= \frac{1}{B^o} [\rho_{STC}^o + \rho_{STC}^g R_s]
 \end{aligned} \tag{B6}$$

- Dedução da Equação de S^p

A equação que define S^p foi demonstrada no item 2.2, Eq. (2.8), e é rerepresentada abaixo

$$\begin{aligned}
 S^p &= \frac{V^p}{V} \\
 &= \frac{V^p}{\sum_{np'} V^{p'}} \\
 &= \frac{M^p}{\sum_{np'} \frac{M^{p'}}{\rho^{p'}}} \\
 &= \frac{\alpha^p}{\sum_{np'} \frac{\alpha^{p'}}{\rho^{p'}}}
 \end{aligned} \tag{B7}$$