

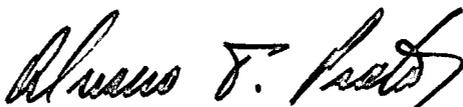
**CARREGAMENTO DINÂMICO DE MANCAIS RADIAIS COM
CAVITAÇÃO DO FILME DE ÓLEO**

EVANDRO DE SOUZA SANTOS

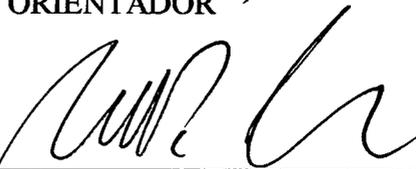
**ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
MESTRE EM ENGENHARIA**

**ESPECIALIDADE : ENGENHARIA MECÂNICA
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO : ENGENHARIA E CIÊNCIAS TÉRMICAS**

**E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM ENGENHARIA MECÂNICA.**



Prof. ÁLVARO TOUBES PRATA, Ph. D.
ORIENTADOR



Prof. ANTÔNIO FÁBIO CARVALHO DA SILVA, Dr. Eng. Mec.
COORDENADOR DO CURSO

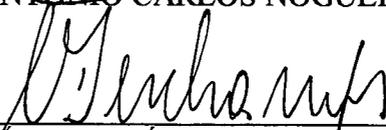
BANCA EXAMINADORA



Prof. ROGÉRIO TADEU DA SILVA FERREIRA, Ph. D.
Presidente



Prof. ANTÔNIO CARLOS NOGUEIRA, Dr. Eng. Mec.



Prof. CÉSAR JOSÉ DESCHAMPS, Ph. D.



Eng. ADILSON LUIZ MANKÉ, M. Eng.

AGRADECIMENTOS

A DEUS pela vida e pela felicidade

Tenho enorme respeito e a mais elevada admiração por todos os engenheiros, especialmente pelo maior deles: DEUS.

Thomas Edison (1847-1931), inventor no campo da Física, com mais de 2000 patentes.

- Dedico todo este trabalho aos meus pais onde sempre busquei o exemplo de pessoas que conquistam um espaço com muito suor, honestidade e coragem. Agradeço pela base da educação centrada no amor exigente, no valor dos estudos e pelo incentivo dado à vida profissional.

- Dedico também à minha noiva **Betinha**, amiga, companheira e mulher ideal, em grande parte responsável por dar um outro sentido em minha vida e tornar a felicidade sempre mais próxima. Obrigado pela paciência, carinho e o amor que tens demonstrado. *Te amo mais do que ontem e menos que amanhã.*

- Ao professor Álvaro Toubes Prata, que foi fundamental para a conclusão deste trabalho, pela confiança, objetividade, empenho e profissionalismo na solução de problemas e sugestões.
- Ao trabalhador brasileiro que através da Capes patrocinou toda minha formação acadêmica (graduação e pós-graduação).
- Ao casal amigo André e Cristina e ao amigo Moacyr que sempre se fizeram presentes e disponíveis em momentos felizes e infelizes desta caminhada.
- Ao Valdori de Oliveira e sua família por terem me aceito como integrante de seu meio.
- À Ação Social Missão pela perseverança na fé.
- Aos amigos do NRVA e da pós-graduação que compartilharam todos os momentos dos meus trabalhos, pela ajuda, companheirismo, pelas horas de lazer e discussões técnicas que em muito enriqueceram meus conhecimentos.
- A todo corpo docente do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica pelo brilhantismo e lealdade em transmitir seus conhecimentos, o que torna o curso reconhecidamente de alto nível.
- À Embraco que através do Eng. Adilson L. Manke foi uma das primeiras empresas nacionais a incentivar e investir no estudo da Lubrificação Hidrodinâmica.
- À Metalúrgica Schulz pela grande oportunidade que está me oferecendo na aplicação e desenvolvimento deste trabalho na indústria.

CONTEÚDO

LISTA DE FIGURAS	ix
LISTA DE TABELAS	xi
NOMENCLATURA	xii
RESUMO	xvi
ABSTRACT	xvii
1 - INTRODUÇÃO	1
1.1 - Histórico	1
1.2 - Importância	2
1.3 - Revisão Bibliográfica	3
1.4 - Objetivos da Dissertação	5
2 - MANCAIS RADIAIS EM CARREGAMENTO DINÂMICO	7
2.1 - Introdução	7
2.2 - Formulação do Problema	7
2.2.1 - Equação de Reynolds	8
2.2.2 - Carregamento Dinâmico	19
2.3 - Aproximações	23

2.3.1 - Manca! Curto	23
2.3.2 - Manca! Longo	25
3 - CAVITAÇÃO EM MANCAIS RADIAIS	26
3.1 - Introduoão	26
3.2 - Condições de Contorno de Ruptura do Filme	28
3.2.1- Condição de Sommerfeld	28
3.2.2 - Condição de Gumbel	29
3.2.3 - Condição de Swift-Stieber (ou Reynolds)	30
3.2.4 - Condição de Coyne-Elrod	31
3.2.5 - Condição de Jakobsson-Floberg	34
3.2.6 - Condição de Olsson	36
3.3 - Condições de Contorno de Reforma do Filme	39
3.3.1 - Condição de Jakobsson-Floberg	39
3.3.2 - Condição de Olsson	40
3.4 - Equação Universal	41
4 - METODOLOGIA DE SOLUÇÃO	45
4.1 - Introduoão	45
4.2 - Discretizaao	46
4.2.1 - Equação de Reynolds	46
4.2.2 - Algoritmo de Elrod	48
4.3 - Solução das Equações Algébricas	52
4.4 - Determinação da Trajetória do Eixo	54

4.4.1 - Runge-Kutta de 4ª Ordem	55
4.4.2 - Método da Substituição	56
5 - RESULTADOS E DISCUSSÕES	59
5.1 - Introdução	59
5.2 - Carregamento Estático	60
5.3 - Carregamento Dinâmico com Carga Constante	67
5.4 - Carregamento Dinâmico	68
6 - CONCLUSÃO	76
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	79
APÊNDICE A - ADIMENSIONALIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DE REYNOLDS	85
APÊNDICE B - DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DE REYNOLDS	89
APÊNDICE C - FATORIZAÇÃO APROXIMADA	93
APÊNDICE D - DETERMINAÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARA O CÁLCULO DA TRAJETÓRIA	97

LISTA DE FIGURAS

CAPÍTULO 1

Figura 1.1	Cavitação em mancais radiais.	4
------------	-------------------------------	---

CAPÍTULO 2

Figura 2.1	Mancal radial finito: Geometria e Notação.	10
Figura 2.2	Sistemas de coordenadas.	11
Figura 2.3	Geometria para o cálculo de h.	12
Figura 2.4	Decomposição para o cálculo de h.	13
Figura 2.5	Indicação das velocidades que atuam em mancais radiais.	15
Figura 2.6	Decomposição das velocidades.	15
Figura 2.7	Balanco de forças para o cálculo da trajetória do eixo.	20

CAPÍTULO 3

Figura 3.1	Distribuição de pressão.	27
Figura 3.2	Distribuição de Pressão para Condição de Sommerfeld	28
Figura 3.3	Distribuição de Pressão para Condição de Gumbel	29
Figura 3.4	Distribuição de Pressão para Condição de Reynolds	31
Figura 3.5	Vista superior da ruptura do filme condizente com condição de Reynolds	31
Figura 3.6	Vista transversal da separação do filme de óleo	32
Figura 3.7	Separação com uma interface líquido-gás (Coyne e Elrod)	33
Figura 3.8	Distribuição de Pressão para Condição de Jakobsson/Floberg	35
Figura 3.9	Volume de controle na fronteira de cavitação	36
Figura 3.10	Volume de controle na reforma do filme	39

CAPÍTULO 4

Figura 4.1	Volume de controle típico.	46
Figura 4.2	Volume de controle no Nó (i,j).	50
Figura 4.3	Malha do domínio de solução discretizado.	53

CAPÍTULO 5

Figura 5.1	Trajectoria do eixo para $\mu = 0,01$ Pa.s.	67
Figura 5.2	Trajectoria do eixo para $\mu = 0,001$ Pa.s.	68
Figura 5.3	Esquema de carregamento de magnitude e rotaçao constantes.	69
Figura 5.4	Trajectoria para um mancal sob carga de magnitude e rotaçao constantes.	70
Figura 5.5	Carregamentos Pendulares	71
Figura 5.6	Trajectorias descritas pelo centro do eixo sob carregamentos da figura 5.5	72
Figura 5.7	Carregamento do mancal principal de um motor de combustao interna	73
Figura 5.8	Trajectorias do centro do eixo, conforme carregamento da figura 5.7	74

APÊNDICE B

Figura B.1	Volume de controle típico.	89
------------	----------------------------	----

LISTA DE TABELAS

CAPÍTULO 5

TABELA 5.1	Resultados de literatura.	60
TABELA 5.2	Carregamento estático e condição de Gumbel; $\varepsilon = 0,4$.	61
TABELA 5.3	Carregamento estático e malha adaptativa à fronteira; $\varepsilon = 0,4$	61
TABELA 5.4	Carregamento estático e algoritmo de cavitação ; $\varepsilon = 0,4$	62
TABELA 5.5	Carregamento estático e algoritmo de Elrod; $\varepsilon = 0,4$.	62
TABELA 5.6	Carregamento estático e condição de Gumbel; $\varepsilon = 0,8$.	63
TABELA 5.7	Carregamento estático e malha adaptativa à fronteira; $\varepsilon = 0,8$	63
TABELA 5.8	Carregamento estático e algoritmo de cavitação ; $\varepsilon = 0,8$	64
TABELA 5.9	Carregamento estático e algoritmo de Elrod; $\varepsilon = 0,8$.	64
TABELA 5.10	Atrito em mancais radiais para várias condições de contorno	66

NOMENCLATURA

VARIÁVEIS

\vec{a}	Vetor aceleração do eixo	$m.s^{-2}$
c	Folga radial	m
D	Diâmetro do eixo	m
e	Excentricidade dimensional	m
\vec{e}	Vetor posição do eixo	m
\dot{e}	de/dt	$m.s^{-1}$
\ddot{e}	d^2e/dt^2	$m.s^{-2}$
F	Força hidrodinâmica	N
g	Aceleração da gravidade	$m.s^{-2}$
g	Função chave	adm
h	Espessura do filme de óleo	m
h_{∞}	Espessura de filme assintótica na região de cavitação	m
L	Largura do mancal	m
\dot{m}	Fluxo de massa	$kg.s^{-1}$
p	Pressão dimensional	Pa
P	Peso do eixo	N
Q	Vazão volumétrica	$m^3.s^{-1}$
R	Raio do eixo (ou mancal)	m
R_0	Raio de curvatura do filme no contorno de ruptura.	m
rot	Rotação do eixo	rpm
u	Velocidade do fluido na direção x	$m.s^{-1}$
U	Velocidade tangencial da superfície sólida	$m.s^{-1}$
v	Velocidade do fluido na direção y	$m.s^{-1}$

V	Velocidade axial da superfície sólida	$m.s^{-1}$
V	Volume ocupado pelo fluido lubrificante	m^3
\vec{V}	Vetor velocidade do eixo	$m.s^{-1}$
x	Coordenada circunferencial cartesiana	m
X_f	Posição da fronteira de cavitação	m
W	Carga do mancal	N
W_0	Velocidade radial do mancal	$m.s^{-1}$
W_h	Velocidade radial do eixo	$m.s^{-1}$
y	Coordenada axial cartesiana	m
z	Coordenada radial cartesiana	m

SÍMBOLOS GREGOS

α	Posição da fronteira de cavitação	graus
β	Módulo volumétrico	Pa
Φ	Posição da carga (ângulo no quadrante)	rad
δ	Ângulo da fronteira de cavitação	graus
ε	razão de excentricidade(= e/c)	adm
$\dot{\varepsilon}$	$d\varepsilon/dt$	s^{-1}
$\ddot{\varepsilon}$	$d^2\varepsilon/dt^2$	s^{-2}
$\dot{\varepsilon}^*$	$d\varepsilon/d\tau$	adm
$\ddot{\varepsilon}^*$	$d^2\varepsilon/d\tau^2$	adm
γ	Posição angular da linha de centros	rad
μ	Viscosidade absoluta do fluido lubrificante	Pa.s
θ	Coordenada angular	rad
Θ	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Densidade adimensional } (\rho/\rho_c) \\ \text{Fração da quantidade de filme de óleo} \end{array} \right.$	adm
Θ^*	Valor atual de Θ	adm
ρ	Densidade do fluido	$kg.m^{-3}$

ρ_c	Densidade do fluido na região de cavitação	kg.m^{-3}
σ	Tensão superficial	N.m^{-1}
τ	ωt	adm
ω	Velocidade angular do eixo	rad.s^{-1}
ξ	y/R	adm
ψ	Ângulo de atitude	rad

PARÂMETROS ADIMENSIONAIS

F^*	Força hidrodinâmica adimensional	$\frac{c^2 F}{\mu U R^2 L}$
G	Relação adimensional entre velocidade e gravidade	$\frac{\omega^2 c}{g}$
\bar{h}	Espessura do filme adimensional	$\frac{h}{c}$
p^*	Pressão adimensional	$\frac{p c^2}{6 \mu \omega R^2}$
P	Pressão adimensional	$p^* (1 - \varepsilon_x \sin \theta_f - \varepsilon_z \cos \theta_f)^{3/2}$
P^*	Peso adimensional	$\frac{c^2 P}{\mu U R^2 L}$
\bar{t}	tempo adimensional	ωt
\bar{x}	Coordenada circunferencial adimensional	$\frac{x}{2 \pi R}$
W^*	Capacidade de carga adimensional	$\frac{c^2 W}{\mu U R^2 L}$
\bar{y}	Coordenada axial adimensional	$\frac{y}{L}$
$\bar{\beta}$	Módulo volumétrico adimensional	$\frac{\beta}{\mu \omega} \left(\frac{c}{R} \right)^2$

Δ Número de Sommerfeld

$$\frac{c^2 W}{\mu U R^2 L}$$

SUB ÍNDICES

1	Superfície sólida do eixo
2	Superfície sólida do mancal
f	Relativo ao sistema fixo de coordenadas
x	Direção ao longo do eixo x
y	Direção ao longo do eixo y
z	Direção ao longo do eixo z
cav	Relativo à região de cavitação
simetria	Relativo à posição de simetria do mancal na direção y
sai	Saindo da região de cavitação
ent	Entrando na região de cavitação
antes	Antes da fronteira de cavitação (ruptura ou reforma)
depois	Depois da fronteira de cavitação (ruptura ou reforma)
i	Nó na direção circunferencial
j	Nó na direção axial

RESUMO

Mancal radial é uma bucha que se envolve parcial ou completamente em um eixo em rotação e que suporta carga. O problema de lubrificação hidrodinâmica bem como do escoamento do filme de óleo em mancais é resolvido pela aplicação da equação de Reynolds.

Na lubrificação de mancais radiais é sabido que o filme de óleo não se mantém contínuo ao longo de toda a circunferência do mancal. Esta continuidade é interrompida pela cavitação do óleo lubrificante. A dificuldade principal do uso da equação de Reynolds está na determinação precisa da fronteira de cavitação, ou seja, onde o óleo começa a escorrer em estrias.

Um dos objetivos do presente trabalho é revisar e comparar diferentes algoritmos computacionais para tratar do problema da cavitação. Outro aspecto desta dissertação se refere à escolha do sistema de coordenadas utilizado para escrever a equação de Reynolds. Até então os problemas de lubrificação hidrodinâmica sempre foram estudados considerando um sistema móvel de coordenadas com uma das coordenadas coincidente com a linha de centro do sistema eixo-mancal. Diferentemente da prática corrente, este trabalho apresenta a integração da equação de Reynolds para um sistema de coordenadas fixo.

São apresentados diferentes métodos numéricos para a resolução da equação de Reynolds e para a determinação da trajetória descrita pelo eixo. O trabalho apresenta também a obtenção das equações algébricas pelo método dos volumes finitos e por diferenças finitas. Resultados são obtidos com carregamentos estático e dinâmico. Análises quantitativas e qualitativas são feitas considerando condições de contorno de cavitação conservativas e não-conservativas.

ABSTRACT

Journal bearing is the most traditional type of bearing which partially or totally embraces the rotating shaft and is responsible for supporting the load. The problem of hydrodynamic lubrication and the flow of oil film in bearings are only solved by making use of Reynolds' equation.

It is nowadays well known that the oil film in journal bearings cannot be held circumferentially continuous due to cavitation phenomena. The main difficulty in using Reynolds' equation resides in the precise determination of the cavitation edge, or the angular position after which the oil starts to flow in streamers.

One of the objectives of the present work is to revise some of the different numerical algorithms related to the cavitation phenomena, available in the open literature, and to perform comparisons between those results, as well.

Other important subject covered in this dissertation is related to the selection of the coordinates system used to analyze the problem. Up to now all the hydrodynamic lubrication problems have been studied based on Reynolds' equation referred to a rotating coordinates system where one of the coordinates is coincident with the centerline of the journal bearing - rotating shaft system. Here, the integration of Reynolds' equation is performed with respect to an inertial coordinates system.

Different numerical methods, used to solve Reynolds' equation in order to calculate the trajectory of the center of the shaft, and the deduction of the algebraic equations resulted from the finite volumes and finite differences methods are also presented.

The qualitative and quantitative numerical results were obtained from both static and dynamic loading under conservative and non-conservative boundary conditions applied to the cavitation front.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 Histórico

Na antiguidade, mancais de pedra e bronze foram desenvolvidos tendo argamassa, água, sebo e óleo como lubrificantes. Por volta de 400 A.C., mancais de metal com elementos rolantes já estavam sendo empregados.

Na Renascença, Leonardo da Vinci (século XV) fez os primeiros estudos sobre atrito e desgaste. Nos séculos XVII e XVIII muitos trabalhos foram publicados, porém os mais significativos foram os de Newton (1687), que formulou as hipóteses do escoamento viscoso, e Euler (1750), que definiu o símbolo μ para o coeficiente de fricção e a distinção entre atrito estático e dinâmico.

Até então a graxa era o lubrificante mais utilizado. Na era da Revolução Industrial a lubrificação hidrodinâmica começou a ter mais importância. Von Pauli (1849) foi o primeiro a estudar mancais radiais onde investigou a influência do material do mancal sobre o atrito. Petrov (1883) afirmou que o atrito poderia estar relacionado com a viscosidade do lubrificante (e não com a densidade). Assim, ele estabeleceu a natureza hidrodinâmica do atrito em mancais e formulou uma lei para o cálculo do coeficiente de atrito em termos de viscosidade, capacidade de carga e outros parâmetros e que hoje é conhecida como Lei de Petrov. Tower (1883) através de uma descoberta acidental foi o primeiro a identificar a presença de pressões hidrodinâmicas em mancais. A partir desta constatação, Reynolds (1886) publicou a formulação matemática do problema de lubrificação hidrodinâmica (capítulo 2). Ele afirmou que as elevadas pressões em mancais eram geradas na região convergente do filme de óleo e ainda previu a formação de uma região de cavitação na sua porção divergente.

Um trabalho interessante e completo sobre a história e evolução da lubrificação hidrodinâmica está em Dowson (1979).

1.2 Importância

Atualmente a lubrificação hidrodinâmica é empregada em todos os campos onde há movimento relativo entre superfícies. Ela vem no sentido de minimizar o atrito e evitar o desgaste entre as superfícies. Fuller (1984) afirma que a importância e o emprego de mancais hidrodinâmicos só é comparável à eletricidade, sendo que a geração desta depende ainda do bom uso de mancais.

Dentre os vários segmentos da indústria que dependem da lubrificação estão os que seguem:

- (i) indústria de transporte - ex: motores de combustão interna.
- (ii) indústria de máquinas e equipamentos - ex: compressores em geral.
- (iii) indústria de peças - ex: processos de conformação e usinagem.
- (iv) indústria energética - ex: usinas hidrelétricas, termoeletricas e nucleares.
- (v) indústria eletro-eletrônica - ex: sistemas que utilizam discos e fitas

Mancal radial é uma bucha que se envolve parcial ou completamente em um eixo em rotação e que suporta carga. É o mancal mais empregado. A diferença entre o diâmetro da bucha e o eixo é da ordem de micrômetros. Uma película de óleo separa as duas superfícies mesmo sob carga considerável.

Dos inúmeros dispositivos e máquinas que possuem mancais radiais estão as máquinas alternativas, entre elas os compressores e motores de combustão interna. Tais máquinas possuem um carregamento cíclico sobre os mancais. A análise do desempenho de mancais radiais hidrodinâmicos neste caso objetiva a obtenção das características operacionais como a vazão de óleo e a potência dissipada pelo atrito, além da análise qualitativa da trajetória descrita pelo eixo. Com isso pode-se selecionar mancais que operem com alta eficiência e confiabilidade.

O estudo de mancais radiais é muito complexo quando fatores como a variação da viscosidade com a temperatura, pressão e taxa de cisalhamento, elasticidade da superfície do mancal, desalinhamento entre eixo e mancal são levados em consideração. A relevância de tais fatores dependem das condições de operação. Uma complicação adicional associada a mancais radiais é a existência de uma região divergente do filme de óleo que resulta na cavitação, uma vez

que o lubrificante não suporta pressões negativas de grandes amplitudes. As hipóteses simplificativas e as condições de contorno para esta região são de vital importância para a correta geração de resultados para a análise de mancais hidrodinâmicos (capítulo 2).

1.3 Revisão Bibliográfica

Após os trabalhos de Reynolds, os esforços principais da comunidade científica foram no sentido da resolução da equação de Reynolds e na determinação precisa da posição da fronteira de cavitação na porção divergente do mancal. Tal equação é uma equação diferencial parcial, não homogênea, com coeficientes variáveis. Pela sua complexidade, os primeiros trabalhos pós Reynolds foram no sentido de resolvê-la para casos simplificados.

Manke (1991) fez um excelente relato de descobertas e aplicações, além da evolução e aperfeiçoamento das técnicas de resolução da equação de Reynolds. No que se segue dar-se-á destaque às principais contribuições relacionadas com a cavitação em mancais.

Muitos trabalhos experimentais foram realizados a fim de se conhecer o fenômeno da cavitação. Cole e Hughes (1956) fotografaram faixas de óleo na região divergente do mancal. Dowson (1957) observou bolhas de gás nesta mesma região. Floberg (1961) indicou que o óleo escorria em estrias após a ruptura do filme de óleo, o que mais tarde foi confirmado por Smith (1975), com uma fotografia que é aqui reproduzida na figura 1.1.

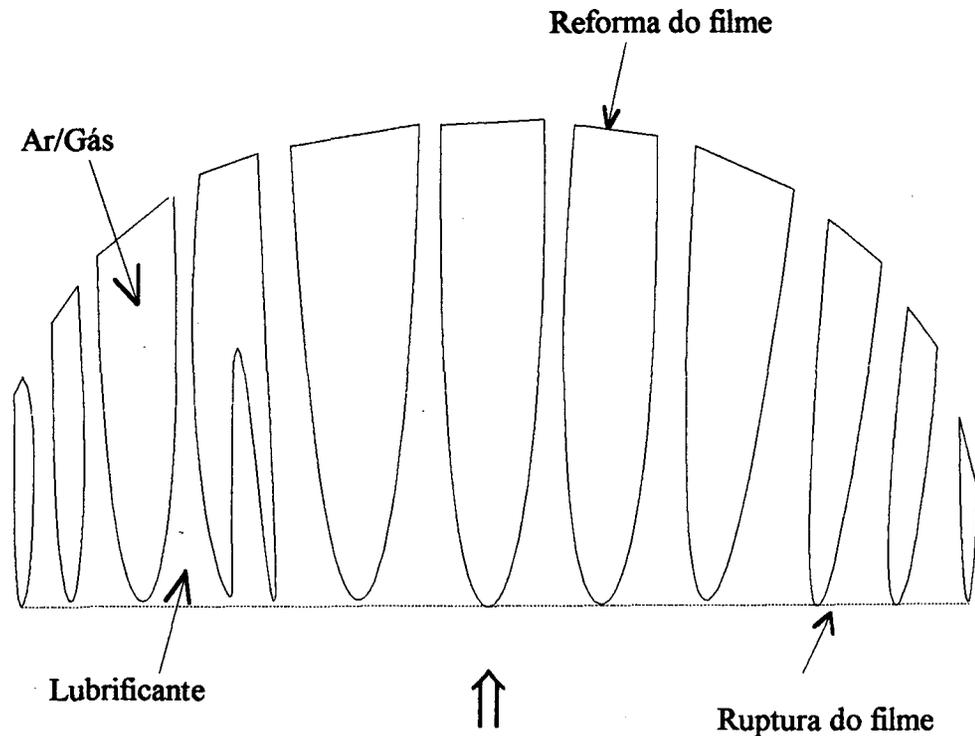


Fig. 1.1 - Cavitação em mancais radiais segundo Smith (1975)

Gümbel e Everling (1925) demonstraram que não há pressões negativas em mancais radiais. Floberg (1961) observou pequena sub-cavitação da pressão da ordem de $0,2 \text{ N/cm}^2$ em mancais com carregamento estático. Em carregamento dinâmico, McBroon (1953) e Carl (1962) determinaram que a mínima pressão estava entre a atmosférica e o vácuo absoluto. Etsion e Ludwig (1982) constataram que a pressão dentro da bolha de gás varia da ordem de 50 kPa na extensão circunferencial, e que um processo contínuo de liberação e absorção de ar no óleo ocorre como forma de controle de variação de pressão. Braun e Hendricks (1983) confirmaram a existência de pressão abaixo da ambiente em mancais radiais submetidos a altas velocidades. Jakobson e Hamrock (1983) registraram a formação e o colapso de bolhas de vapor em mancais radiais submersos em carregamento dinâmico. O tempo de vida da bolha medido foi de 25 ms e constatou-se que a consideração de pressão constante ambiente ou pressão de saturação do gás é uma aproximação tão boa quanto maior for o carregamento do mancal.

Seguiram-se então estudos no sentido de determinar as condições de contorno a serem empregadas na solução da equação de Reynolds. Destacam-se Sommerfeld (1904), Gümbel (1921), Swift (1931) e Stieber (1933), Hopkins (1957), Birkhoff e Hays (1963), Coyne e Elrod

(1970 e 1971), Jakobsson e Floberg (1957), Floberg (1957, 1960,1961) e Olsson (1965). No capítulo 2 os estudos dos autores acima serão mais detalhados.

Os trabalhos de Jakobsson, Floberg e Olsson em conjunto formaram a teoria JFO. Elrod e Adams (1974) incorporaram a teoria JFO em um esquema computacional onde se evitam as complexidades de determinação da ruptura do filme de óleo e da sua reforma. Uma outra grande vantagem deste trabalho é o uso de uma única equação em toda região de lubrificação (região de filme de óleo completo e região cavitada). Elrod (1981) modificou o esquema acima melhorando a diferenciação na região cavitada. Tal trabalho ficou conhecido como Algoritmo de Elrod.

Brewe (1986) aplicou o Algoritmo de Elrod em um modelo de vapor de cavitação em mancais carregados dinamicamente. Woods e Brewe (1989) implantaram a técnica de multigrid para a solução do Algoritmo de Elrod. Vijayaranghavan e Keith (1989a) analisaram mancais radiais não circulares. Os mesmos autores (1989b) propuseram uma modificação no algoritmo melhorando sensivelmente os esquemas de diferenciação de Elrod. Vijayaranghavan e Keith (1990a) introduziram uma nova técnica, da fatorização aproximada, para a resolução do Algoritmo de Elrod, e em (1990b) incorporaram a técnica de transformação e ajuste de malhas para obter soluções precisas com um número reduzido de pontos; esta técnica foi usada para analisar os efeitos de desalinhamento no desempenho de mancais radiais ranhurados. Brewe e Vijayaranghavan (1992) estudaram a estabilidade de mancais radiais com carga periódica. Paranjpe (1992) analisou os efeitos de lubrificantes não-Newtonianos em mancais radiais em carregamento dinâmico.

1.4 Objetivos da Dissertação

Em geral a solução da equação de Reynolds é obtida apenas na região onde o filme de óleo é completo, e a região de cavitação do óleo é ignorada. Porém, a determinação precisa da fronteira de cavitação é fundamental para a correta integração da equação de Reynolds. Geralmente são considerados métodos não conservativos como de Gumbel (1921), e a pressão é imposta igual a zero na região de cavitação quando a equação fornece pressão negativa. Tal procedimento viola a lei da conservação da massa.

O presente trabalho visa o uso de condições físicas e matemáticas coerentes aplicando a teoria JFO. Através de um algoritmo de cavitação a região cavitada será incorporada nos cálculos e as fronteiras de ruptura e reforma do filme de óleo serão obtidas naturalmente. Ainda, serão analisados resultados usando-se diferentes condições de contorno, dentre as quais as não conservativas e a de Reynolds. Serão feitos testes com carregamentos estático e dinâmico. Ênfase maior será dado na análise de tempo computacional necessário para a obtenção dos resultados. Tal enfoque visa a determinação de metodologias de cálculo de mancais radiais com baixo tempo computacional.

Um estudo do fenômeno de cavitação e as implicações deste nas condições de contorno será abordado. Um novo sistema de coordenadas, fixo no mancal, é adotado e, conseqüentemente, a equação de Reynolds terá que ser deduzida para este novo sistema.

CAPÍTULO 2

MANCAIS RADIAIS EM CARREGAMENTO DINÂMICO

2.1 Introdução

A formulação matemática do problema de mancais radiais hidrodinâmicos é originada da teoria de lubrificação hidrodinâmica formulada por Reynolds (1886). Esta teoria se insere na Mecânica dos Fluidos pois a equação básica de lubrificação é obtida das equações de Navier - Stokes em conjunto com a equação da conservação da massa.

Neste capítulo a equação de Reynolds será deduzida e pela primeira vez um sistema de coordenadas fixo será adotado. Um rápido estudo dos efeitos de sustentação de carga será abordado. Depois, a segunda lei de Newton é aplicada ao eixo para determinação das equações da trajetória do eixo devido ao desequilíbrio entre o carregamento e a força hidrodinâmica gerada. Por fim, a equação de Reynolds será simplificada para mancal curto e longo de forma que soluções analíticas possam ser desenvolvidas.

2.2 Formulação do Problema

Na análise de problemas de lubrificação hidrodinâmica busca-se uma equação diferencial que quando resolvida forneça a distribuição de pressão no mancal. A integração do campo de pressão fornece a carga que o mancal é capaz de suportar. A equação diferencial da pressão é denominada de equação de Reynolds e será deduzida a seguir.

2.2.1 Equação de Reynolds

As hipóteses simplificativas normalmente adotadas em problemas de lubrificação hidrodinâmica são:

- (i) forças de campo ausentes;
- (ii) pressão constante através da espessura do filme de óleo;
- (iii) raio de curvatura da superfície do eixo e do mancal grandes comparados com a espessura do filme de óleo;
- (iv) não há deslizamento do óleo nas superfícies sólidas;

Outras afirmações, cuja inserção na formulação seria feito sem grandes dificuldades, são introduzidas para reduzir a complexidade do problema. São elas:

- (v) escoamento laminar;
- (vi) fluido incompressível
- (vii) fluido Newtoniano;
- (viii) inércia do fluido desprezível;
- (ix) viscosidade constante;

A figura 2.1 representa o objeto de estudo deste trabalho. A figura superior representa um sistema eixo-mancal em perspectiva onde o mancal está suportando uma carga W imposta pelo eixo que gira em uma rotação ω . Na figura inferior está representado a projeção lateral do sistema eixo-mancal com seus eixos coordenados e algumas variáveis geométricas. Os pontilhados representam o óleo lubrificante escoando continuamente e a região vazia (sem os pontilhados) representam à região de cavitação do mancal onde o óleo escorre em estrias. Uma atenção especial à região de cavitação será dada mais adiante no capítulo 3. Assumindo as hipóteses anteriores, as componentes nas direções x e y da equação de Navier-Stokes são, respectivamente:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (2.2)$$

Integrando-se a equação (2.1) na direção da espessura do filme de óleo (direção z conforme a figura 2.1) e usando as condições de contorno que seguem,

$$(i) u = U_2 \text{ em } z = 0 \quad (2.3a)$$

$$(ii) u = U_1 \text{ em } z = h \quad (2.3b)$$

Obtém-se:

$$u(x, z) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (z^2 - zh) + (U_1 - U_2) \frac{z}{h} + U_2 \quad (2.4)$$

Fazendo o mesmo para a equação (2.2) e substituindo as expressões das velocidades na equação da continuidade e integrando-a na direção z, resulta:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[(U_1 + U_2) \frac{h}{2} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[(V_1 + V_2) \frac{h}{2} \right] + (W_h - W_0) \quad (2.5)$$

Detalhes da derivação podem ser encontrados em Prata (1992). Todas as variáveis constantes da equação (2.5) acham-se listadas na nomenclatura.

Esta é a celebrada equação de Reynolds, que quando integrada fornece a distribuição de pressão no filme de óleo. A figura 2.1 representa um mancal radial finito onde a equação de Reynolds pode ser aplicada sob diferentes condições de contorno, discutidas adiante.

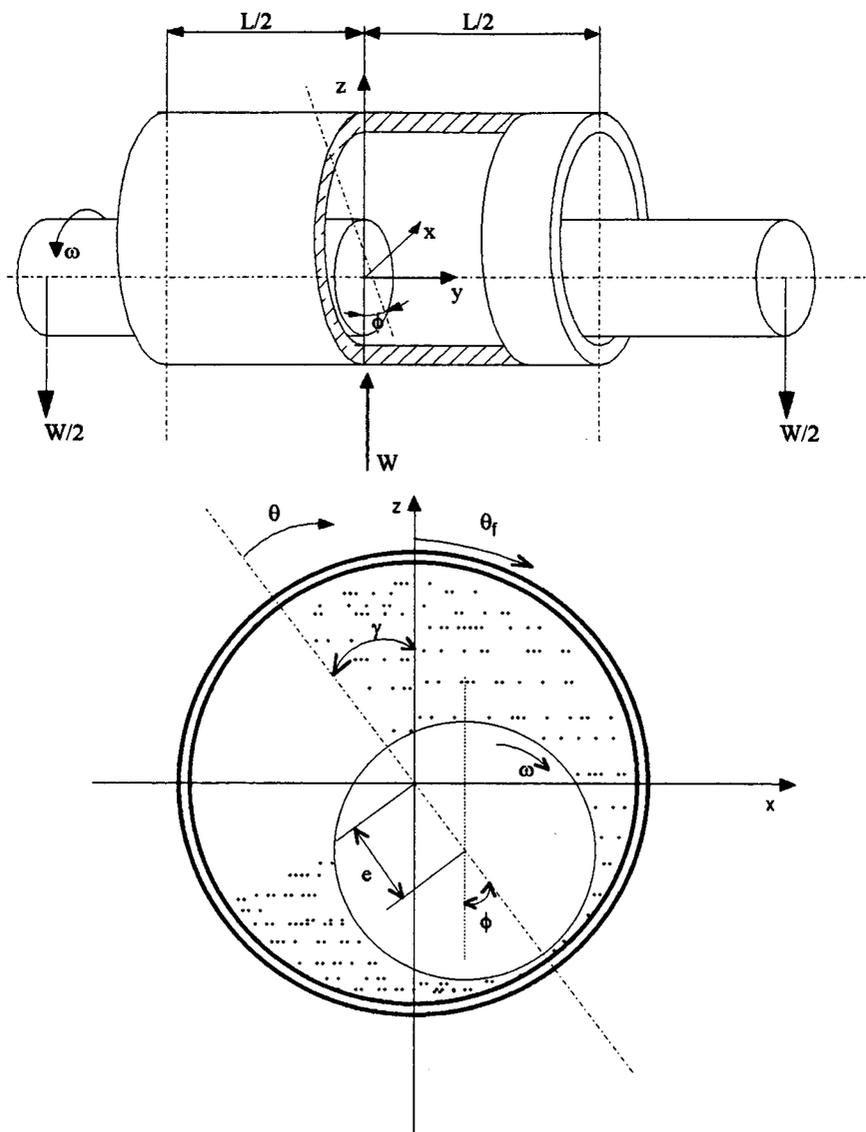


Figura 2.1 - Mancal radial finito : Geometria e Notação

Conforme a figura 2.1, o mancal é fixo e o eixo não possui movimento axial. Assim, têm-se:

$$U_2 = V_1 = V_2 = W_0 = 0 \quad (2.6)$$

Desta forma, a equação de Reynolds se torna:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Uh}{2} \right) + W_h \quad (2.7)$$

Os mecanismos de geração de pressão da equação (2.7) estão representados no lado direito da mesma. O primeiro termo representa o efeito cunha e o segundo o efeito de filme espremido. O processo de geração de pressão pelo efeito cunha e pelo efeito filme espremido bem como uma dedução mais detalhada da equação de Reynolds está em Prata (1992) e Manke (1991). Os mesmos autores deduziram as expressões para a espessura do filme de óleo h , componente de velocidade tangencial U e componente de velocidade radial W_h usando um sistema móvel de coordenadas representado esquematicamente na figura 2.2 pelos eixos e_1e_2 , pelos ângulos θ , Ψ e ϕ e o parâmetro "e". Conforme indicado o eixo da figura 2.2 está suportando uma carga W

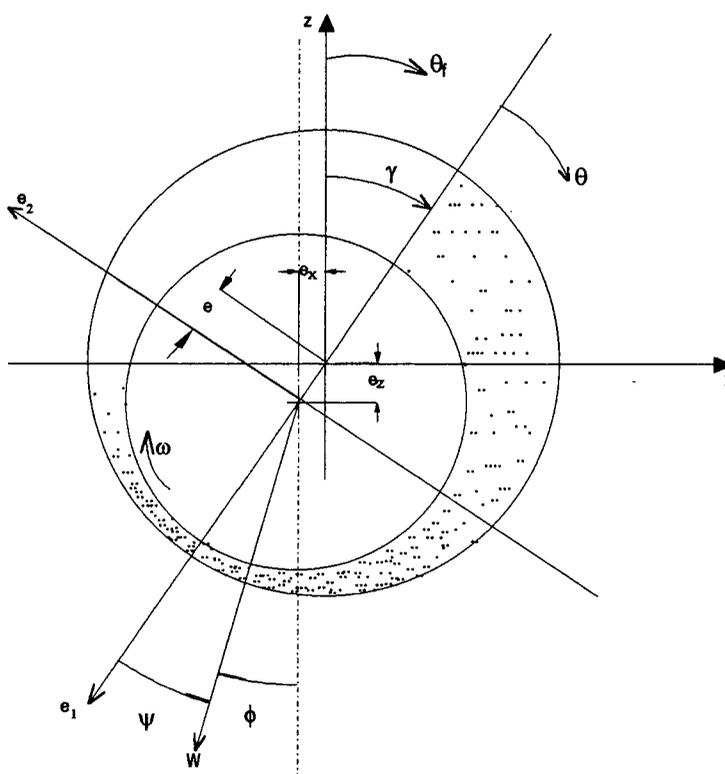


Figura 2.2 - Sistemas de coordenadas

O sistema de coordenadas é dito móvel devido ao fato do eixo e_1 (linha de centros) mudar de posição a cada instante no caso de carregamento dinâmico. Com isso, todas as referências são móveis no tempo. Isto torna o entendimento global de certas variáveis um tanto complexo.

O sistema de coordenadas fixo proposto no presente trabalho é representado pelos eixos xz , pelos ângulos θ_f e γ e parâmetros e_x e e_z .

Para o cálculo da espessura do filme de óleo, a figura abaixo será considerada. Note-se que diferentemente do que ocorre na realidade, na figura 2.3 os diâmetros do eixo e do mancal foram desenhados com diâmetros bem diferentes.

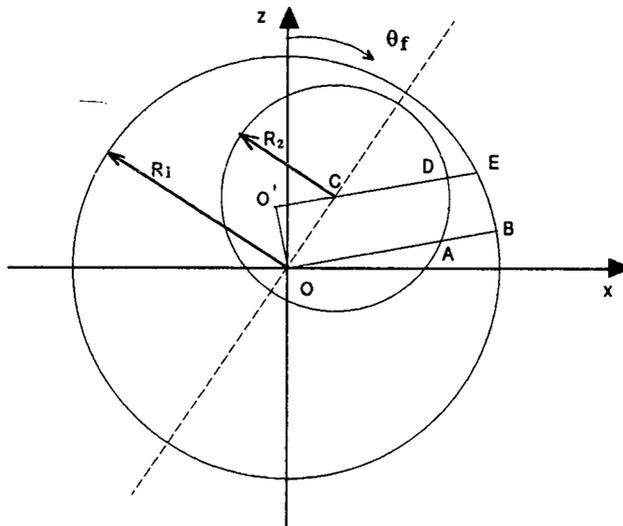


Figura 2.3 - Geometria para o cálculo de h

Em geral a folga radial é muito menor do que o raio do mancal R_1 e do eixo R_2 , permitindo que se escreva

$$\overline{AB} \ll \overline{OA} \quad (2.8a)$$

$$\overline{DE} \ll \overline{CD} \quad (2.8b)$$

e, portanto,

$$\overline{OB} \approx \overline{CE} \quad (2.8c)$$

Logo, pode-se considerar que:

$$h(\theta_f) = \overline{DE} = \overline{AB} \quad (2.8d)$$

Assim,

$$h(\theta_f) = \overline{DE} = \overline{OB} - \overline{O'D} = \overline{OB} - (\overline{O'C} + \overline{CD}) \quad (2.8e)$$

ou

$$h(\theta_f) = \overline{OB} - \overline{CD} - \overline{O'C} = R_1 - R_2 - \overline{O'C} \quad (2.8f)$$

mas

$$R_1 - R_2 = c \quad (2.8g)$$

então

$$h(\theta_f) = c - \overline{O'C} \quad (2.8h)$$

Para calcular $\overline{O'C}$ vamos detalhar melhor o triângulo da figura 2.3.

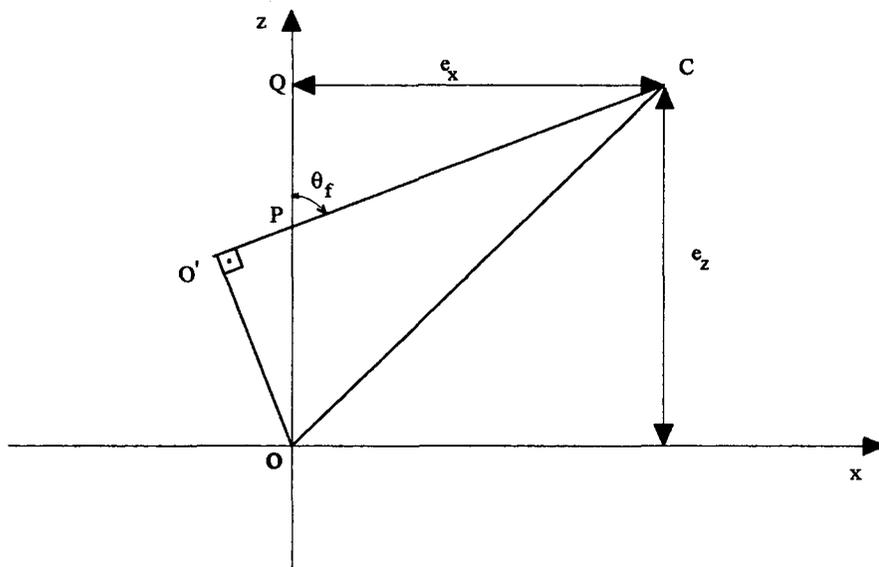


Figura 2.4 - Decomposição para o cálculo de h

Têm-se que:

$$\overline{O'C} = \overline{O'P} + \overline{PC} \quad (2.9a)$$

Do triângulo QPC,

$$\overline{PC} = e_x / \text{sen} \theta_f \quad (2.9b)$$

e

$$\overline{PQ} = \overline{PC} \cos \theta_f \quad (2.9c)$$

Do triângulo OPO' ,

$$\overline{O'P} = \overline{OP} \cos\theta_f \quad (2.9d)$$

mas

$$\overline{OP} = e_z - \overline{PQ} \quad (2.9e)$$

Substituindo (2.9c) em (2.9e) e esta em (2.9d), têm-se

$$\overline{O'P} = (e_z - \overline{PC} \cos\theta_f) \cos\theta_f \quad (2.9f)$$

Substituindo (2.9b) em (2.9f) e (2.9a), resulta:

$$\overline{O'C} = e_x \text{sen}\theta_f + e_z \text{cos}\theta_f \quad (2.9g)$$

Assim, a equação (2.8h) se torna:

$$\boxed{h(\theta_f) = c - e_x \text{sen}\theta_f - e_z \text{cos}\theta_f} \quad (2.9h)$$

Esta é a expressão para o cálculo da espessura do filme de óleo no sistema de coordenadas fixo no mancal.

Para a determinação das velocidades tangencial U e radial W_h , considere a figura 2.5. Observe que tais variáveis deverão estar em função da posição do eixo, ou seja, e_x e e_z . Para uma visualização mais clara, considere o gráfico da figura 2.6. As componentes das velocidades do eixo serão decompostas nas direções das componentes de U e ω_h da seguinte forma:

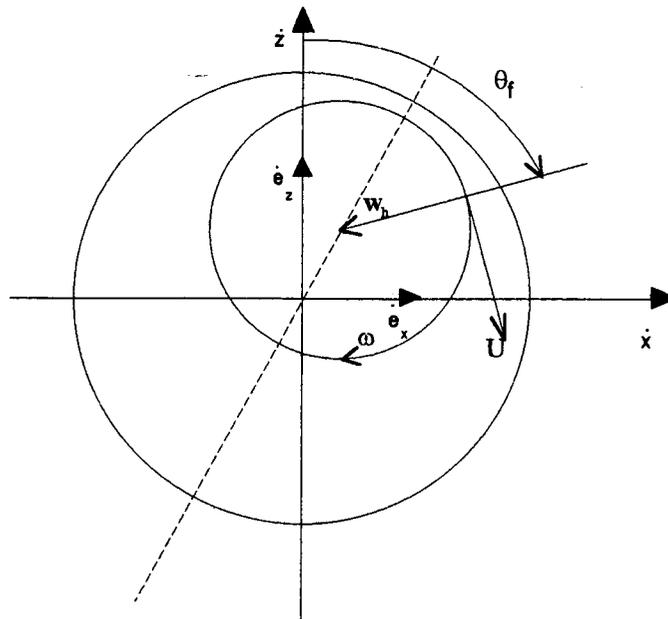


Figura 2.5 - Indicação das velocidades que atuam em mancais radiais

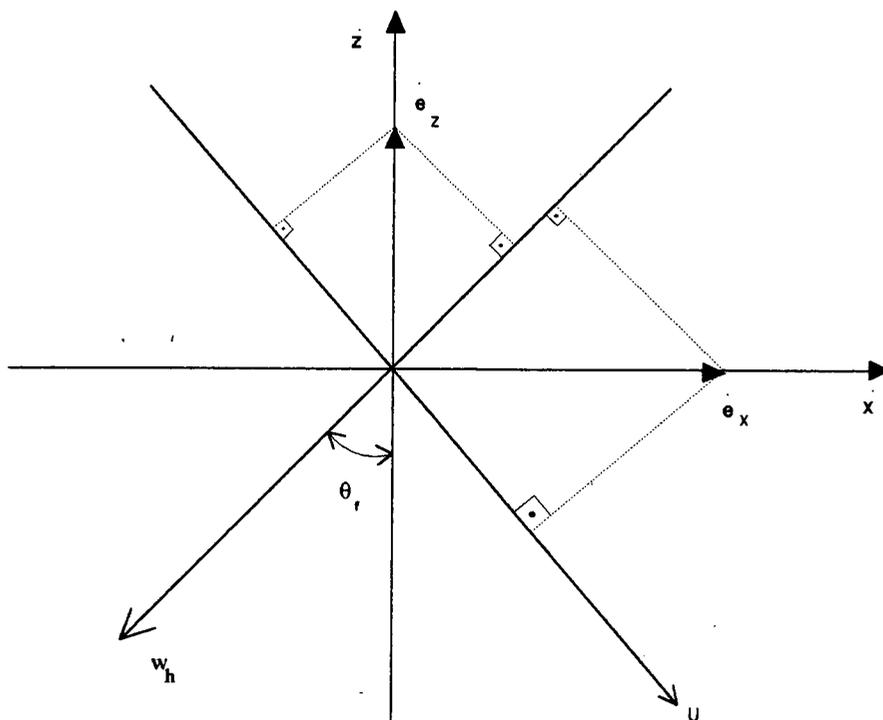


Figura 2.6 - Decomposição das velocidades

$$\boxed{U(\theta_f) = \omega R + \dot{e}_x \cos\theta_f - \dot{e}_z \operatorname{sen}\theta_f} \quad (2.10)$$

e

$$\boxed{\omega_h(\theta_f) = -\dot{e}_x \operatorname{sen}\theta_f - \dot{e}_z \cos\theta_f} \quad (2.11)$$

Agora a equação de Reynolds (2.7) precisa estar também em função da coordenada θ_f . Assim, tem-se que:

$$dx = R d\theta_f \quad (2.12)$$

Substituindo a equação (2.12) na equação (2.7) tem-se:

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta_f} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta_f} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta_f} \left(\frac{Uh}{2} \right) + \omega_h \quad (2.13)$$

O primeiro termo do lado direito da equação (2.13) será desenvolvido abaixo:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta_f} \left(\frac{Uh}{2} \right) = \frac{1}{2R} \left(U \frac{\partial h}{\partial \theta_f} + h \frac{\partial U}{\partial \theta_f} \right) \quad (2.14)$$

Usando as expressões de $h(\theta_f)$ da equação (2.9h) e de $U(\theta_f)$ da equação (2.10) tem-se:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta_f} \left(\frac{Uh}{2} \right) = \frac{1}{2R} (\omega R + \dot{e}_x \cos\theta_f - \dot{e}_z \operatorname{sen}\theta_f) \frac{\partial h}{\partial \theta_f} + \frac{h}{2R} (-\dot{e}_x \operatorname{sen}\theta_f - \dot{e}_z \cos\theta_f) \quad (2.15a)$$

ou

$$= \frac{1}{2R} (\omega R + c\dot{e}_x \cos\theta_f - c\dot{e}_z \operatorname{sen}\theta_f) \frac{\partial h}{\partial \theta_f} - \frac{h}{2R} (c\dot{e}_x \operatorname{sen}\theta_f + c\dot{e}_z \cos\theta_f) \quad (2.15b)$$

onde,

$$\dot{e}_x = \frac{\dot{e}_x}{c} \quad e \quad \dot{e}_z = \frac{\dot{e}_z}{c} \quad (2.16)$$

Considerando que $\frac{c}{R} \ll 1$ a equação (2.15) se torna,

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta_f} \left(\frac{Uh}{2} \right) = \frac{1}{2} \omega \frac{\partial h}{\partial \theta_f} \quad (2.17)$$

A equação (2.17) mostra que as componentes de velocidades devidas ao deslocamento do eixo na direção tangencial são desprezíveis se comparadas com a própria velocidade de rotação do eixo. Retornando agora a equação (2.13) e usando a expressão acima chega-se à equação de Reynolds dimensional e generalizada abaixo

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta_f} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta_f} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \frac{\omega}{2} \frac{\partial h}{\partial \theta_f} + \omega_h \quad (2.18)$$

Usando as expressões de $h(\theta_f)$ da equação (2.9h) e de $\omega_h(\theta_f)$ da equação (2.11) e fazendo

$$\varepsilon_x = \frac{e_x}{c} \quad e \quad \varepsilon_z = \frac{e_z}{c} \quad (2.19)$$

resulta em

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta_f} \left[\frac{c^3 (1 - \varepsilon_x \sin \theta_f - \varepsilon_z \cos \theta_f)^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta_f} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{c^3 (1 - \varepsilon_x \sin \theta_f - \varepsilon_z \cos \theta_f)^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right] = \frac{\omega c}{2} (-\varepsilon_x \cos \theta_f + \varepsilon_z \sin \theta_f) - c \dot{\varepsilon}_x \sin \theta_f - c \dot{\varepsilon}_z \cos \theta_f \quad (2.20)$$

A equação (2.20) pode ser adimensionalizada se as seguintes variáveis forem utilizadas

$$p^* = \frac{pc^2}{6\mu\omega R^2} \quad (2.21a)$$

$$\xi = \frac{y}{R} \quad (2.21b)$$

$$\tau = \omega t \quad (2.21c)$$

$$\dot{\varepsilon}_x^* = \frac{d\varepsilon_x}{d\tau} \quad e \quad \dot{\varepsilon}_z^* = \frac{d\varepsilon_z}{d\tau} \quad (2.21d)$$

Assim, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta_f} \left[(1 - \varepsilon_x \text{sen} \theta_f - \varepsilon_z \text{cos} \theta_f)^3 \frac{\partial p^*}{\partial \theta_f} \right] + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1 - \varepsilon_x \text{sen} \theta_f - \varepsilon_z \text{cos} \theta_f)^3 \frac{\partial p^*}{\partial \xi} \right] = \\ (-2\dot{\varepsilon}_z^* - \varepsilon_x) \text{cos} \theta_f + (-2\dot{\varepsilon}_x^* + \varepsilon_z) \text{sen} \theta_f \end{aligned} \quad (2.22)$$

Se a variável adimensional $P = p^* (1 - \varepsilon_x \text{sen} \theta_f - \varepsilon_z \text{cos} \theta_f)^{3/2}$ for utilizada na equação acima, obtém-se (ver apêndice A)

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \theta_f^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} = A(\theta_f) \dot{\varepsilon}_x^* + B(\theta_f) \dot{\varepsilon}_z^* + C(\theta_f) P + D(\theta_f) \quad (2.23)$$

onde,

$$A(\theta_f) = \frac{-2 \text{cos} \theta_f}{\bar{h}^{3/2}} \quad (2.24a)$$

$$B(\theta_f) = \frac{-2 \text{sen} \theta_f}{\bar{h}^{3/2}} \quad (2.24b)$$

$$C(\theta_f) = \frac{3}{4} \frac{1}{\bar{h}^2} \left[2 \frac{d^2 \bar{h}}{d\theta_f^2} \bar{h} + \left(\frac{d\bar{h}}{d\theta_f} \right)^2 \right] \quad (2.24c)$$

$$D(\theta_f) = \frac{d\bar{h}}{d\theta_f} \frac{1}{\bar{h}^{3/2}} \quad (2.24d)$$

$$\bar{h} = \frac{h}{c} \quad (2.24e)$$

A equação (2.23) é a equação de Reynolds adimensional para um sistema fixo de coordenadas. Esta forma de adimensionalização da pressão fornece uma solução numérica mais precisa quando comparada com a formulação dimensional da equação (2.18). Isto porque os gradientes de pressão P com θ_f não são tão acentuados quanto os da pressão dimensional p . Conhecidas a posição e a velocidade do eixo, a equação fornece a distribuição de pressão e por conseguinte a força hidrodinâmica atuante no eixo. As equações para a determinação de posição e velocidade de eixo serão demonstradas a seguir. As condições de contorno para a equação (2.23) serão discutidas no capítulo 3.

2.2.2 Carregamento Dinâmico

Em mancais radiais submetidos a carregamento dinâmico o eixo está em contínuo movimento devido ao desequilíbrio entre a carga no instante de tempo considerado, e a força hidrodinâmica gerada no mesmo tempo. Os conceitos da dinâmica são necessários para determinar a posição e a aceleração do eixo em cada instante de tempo nos sistemas de coordenadas fixos.

Desta forma, um balanço de forças é feito e obtém-se as equações para a determinação da trajetória do eixo. Para isto considere a figura 2.7a que mostra as forças atuantes no eixo, e a figura 2.7b que fornece um detalhe da posição do eixo em relação ao sistema de coordenadas xy . Conforme indicado na figura, F é a força hidrodinâmica resultante do campo de pressão induzido no óleo e W é a carga a que o eixo está submetido.

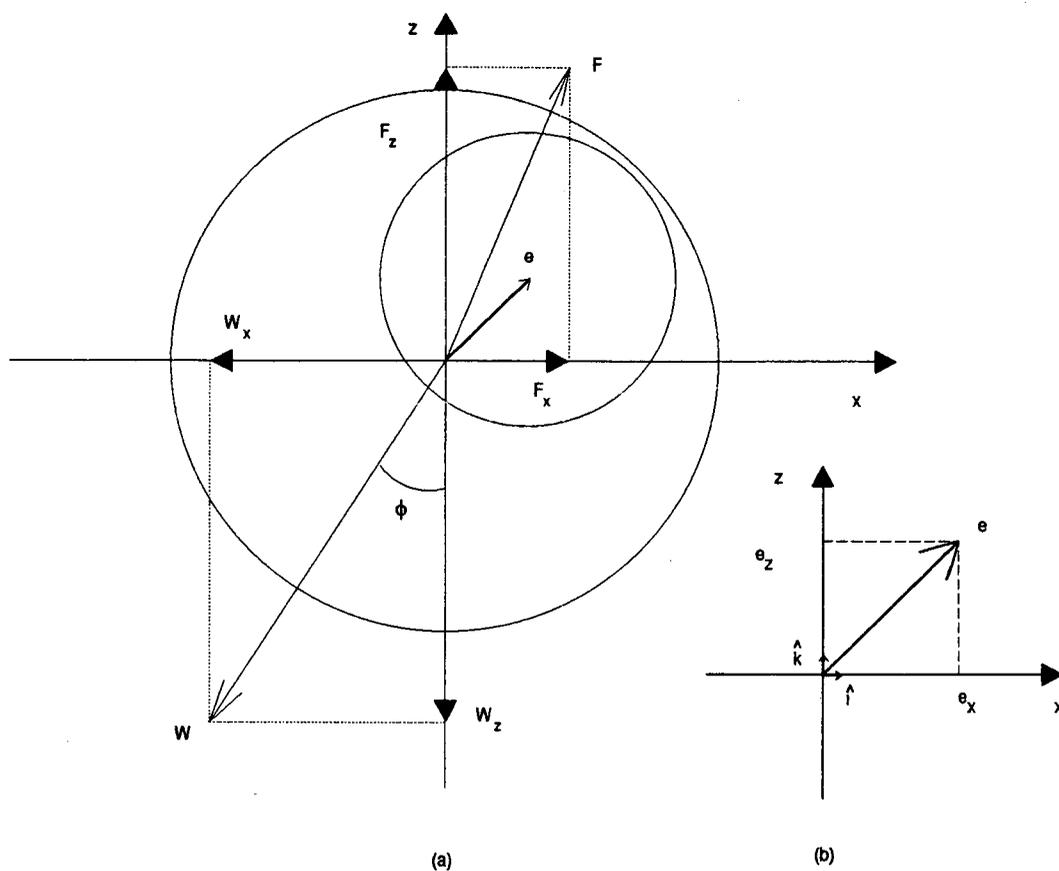


Figura 2.7 - Balanço de forças para o cálculo de trajetória do eixo.

Da figura 2.7.b a posição do eixo em um determinado instante de tempo é,

$$\vec{e} = e_x \hat{i} + e_z \hat{k} \quad (2.25)$$

Da equação (2.25) obtém-se a velocidade e a aceleração do eixo da seguinte forma,

$$\vec{V} = \frac{d\vec{e}}{dt} = \frac{de_x}{dt} \hat{i} + e_x \frac{d\hat{i}}{dt} + \frac{de_z}{dt} \hat{k} + e_z \frac{d\hat{k}}{dt} \quad (2.26)$$

Como o sistema é fixo,

$$\frac{d\hat{i}}{dt} = \frac{d\hat{k}}{dt} = 0 \quad (2.27)$$

então,

$$\vec{V} = \frac{d\vec{e}}{dt} = \frac{de_x}{dt}\hat{i} + \frac{de_z}{dt}\hat{k} = \dot{e}_x\hat{i} + \dot{e}_z\hat{k} \quad (2.28)$$

E de forma análoga,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \ddot{e}_x\hat{i} + \ddot{e}_z\hat{k} \quad (2.29)$$

Aplicando a 2a. Lei de Newton nas direções x e z e usando a aceleração da equação (2.29) tem-se,

$$W \sin \phi + F_x = m\ddot{e}_x \quad (2.30)$$

$$W \cos \phi + F_z = m\ddot{e}_z \quad (2.31)$$

Há casos onde os efeitos inerciais do eixo podem influenciar no carregamento. Assim a massa do eixo deve ser acrescida ao balanço de forças. Por simplicidade, considera-se que tal peso esteja concentrado no centro do mancal, isto porque as distâncias entre centros é micrométrico. Assim a equação do balanço de forças na direção z se torna:

$$W \cos \phi + F_z + P = m\ddot{e}_z \quad (2.32)$$

E ainda tem-se que,

$$m = \frac{P}{g} \quad (2.33)$$

A forma adimensional das equações (2.30) e (2.32) se torna,

$$W^* \sin \phi + F_x^* = P^* G \ddot{e}_x^* \quad (2.34)$$

$$W^* \cos \phi + F_z^* + P^* = P^* G \ddot{e}_z^* \quad (2.35)$$

onde,

$$W^* = \frac{c^2 W}{\mu U R^2 L} \quad (2.36a)$$

$$F_-^* = \frac{c^2 F_-}{\mu U R^2 L} \quad (2.36b)$$

$$P^* = \frac{c^2 P}{\mu U R^2 L} \quad (2.36c)$$

$$G = \frac{\omega^2 c}{g} \quad (2.36d)$$

$$\ddot{\epsilon}_-^* = \frac{d^2 \epsilon_-}{dt^2} \quad (2.36e)$$

As componentes da força hidrodinâmica F_x e F_z são determinadas a partir da integração do campo de pressão,

$$F_x = - \int_0^L \int_\gamma^{\gamma+2\pi} p \sin \theta_f R d\theta_f dy \quad (2.37)$$

$$F_z = - \int_0^L \int_\gamma^{\gamma+2\pi} p \cos \theta_f R d\theta_f dy \quad (2.38)$$

A solução das equações diferenciais ordinárias (2.34) e (2.35) determina a posição, a velocidade e a aceleração do eixo a cada instante de tempo. A resolução destas equações será discutida no capítulo 4.

Quando as forças inerciais podem ser desconsideradas por serem muito menores do que o carregamento aplicado, as equações de balanço de força sofrem uma alteração. Voltando às equações (2.30) e (2.31), se a massa do eixo for desprezada, tem-se que:

$$W \sin \phi + F_x = 0 \quad (2.39)$$

$$W \cos \phi + F_z = 0 \quad (2.40)$$

ou, adimensionalmente:

$$W^* \operatorname{sen} \phi + F_x^* = 0 \quad (2.41)$$

$$W^* \operatorname{cos} \phi + F_z^* = 0 \quad (2.42)$$

As variáveis necessárias à determinação da posição, velocidade e aceleração do eixo estão implícitas nas componentes da força hidrodinâmica. No capítulo 4, um sistema de equações com as variáveis necessárias implícitas será obtido a partir das equações (2.41) e (2.42).

2.3 Aproximações

A equação de Reynolds (2.23) não pode ser resolvida analiticamente. Porém, se o mancal for considerado infinitamente longo ou infinitamente curto, a equação (2.23) se torna uma equação diferencial ordinária. No caso de mancais curtos uma solução analítica pode ser obtida. Para mancais longos a resolução continua tendo que ser obtida numericamente só que agora para uma situação unidimensional, o que reduz consideravelmente o tempo computacional requerido.

2.3.1 Mancal Curto

São considerados mancais curtos aqueles cuja relação entre o comprimento L e o diâmetro D seja menor que $1/4$. Michell (1929) foi o primeiro a idealizar este modelo porém foi Ocvirk (1953) quem realmente o empregou e obteve bons resultados.

A principal hipótese simplificativa para o modelo de mancal curto é que as variações de pressão ao longo da direção circunferencial podem ser desconsideradas. Daí resulta,

$$\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \xi^2} = A(\theta_f) \dot{\varepsilon}_z^* + B(\theta_f) \dot{\varepsilon}_x^* + D(\theta_f) \quad (2.43)$$

ou

$$\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \xi^2} = 1 \quad (2.44)$$

onde:

$$\bar{p} = p^* \frac{(1 - \varepsilon_x \operatorname{sen} \theta_f - \varepsilon_y \operatorname{cos} \theta_f)^3}{(\varepsilon_z - 2\dot{\varepsilon}_z^*) \operatorname{sen} \theta_f - (\varepsilon_x + 2\dot{\varepsilon}_x^*) \operatorname{cos} \theta_f} \quad (2.45)$$

Sendo as condições de contorno:

$$(i) \bar{p} = 0 \quad \text{em } \xi = 0 \quad (2.46)$$

$$(ii) \bar{p} = 0 \quad \text{em } \xi = L/R \quad (2.47)$$

Integrando-se duas vezes em ξ a equação (2.44) se torna:

$$\bar{p} = \frac{\xi}{2} \left(\xi - \frac{L}{R} \right) \quad (2.48)$$

Utilizando a definição (2.45) a equação (2.48) pode ser escrita na forma dimensional como,

$$\boxed{p = \frac{3\mu\omega}{c^2} \left[\frac{(\varepsilon_z - 2\dot{\varepsilon}_z^*) \operatorname{sen} \theta_f - (\varepsilon_x + 2\dot{\varepsilon}_x^*) \operatorname{cos} \theta_f}{(1 - \varepsilon_x \operatorname{sen} \theta_f - \varepsilon_y \operatorname{cos} \theta_f)^3} \right] y(y-1)} \quad (2.49)$$

Da equação (2.49) que fornece o campo de pressão para o modelo de mancal curto, pode-se determinar a força hidrodinâmica gerada no mancal. Considerando o sistema fixo de coordenadas e a notação da figura 2.2, as componentes desta força são:

$$F_x = -\int_0^L \int_\gamma^{\gamma+\pi} p \sin\theta_f R d\theta_f dy \quad (2.50)$$

$$F_z = -\int_0^L \int_\gamma^{\gamma+\pi} p \cos\theta_f R d\theta_f dy \quad (2.51)$$

Na integração dos campos de pressão realizada nas equações anteriores adotou-se a condição de Gumbel para a pressão ($p=0$ em $\pi \leq \theta \leq 2\pi$). Em mancais curtos esta é uma prática corrente uma vez que nestes casos a cavitação ocorre muito próxima da folga mínima (Cameron, 1966, e Pinkus e Sternlicht, 1961). No capítulo seguinte o fenômeno da cavitação será analisado com maior profundidade e a condição de Gumbel (seção 3.2.2) será apresentada.

2.3.2 Mancais Longo

O modelo de mancais longo é empregado quando a relação L/D é superior a 4. Alguns autores consideram este limite como 2. Sommerfeld (1904) foi o primeiro a considerar que para mancais longos as variações de pressão ao longo da direção axial poderiam ser desprezadas. Com isso a equação de Reynolds (2.23) se torna:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \theta_f^2} = A(\theta_f) \dot{\epsilon}_z^* + B(\theta_f) \dot{\epsilon}_x^* + C(\theta_f) P + D(\theta_f) \quad (2.52)$$

A equação acima não possui solução analítica. Porém a resolução numérica é unidimensional e fácil de ser obtida. Em Prata (1992) é apresentada a expressão analítica para o campo de pressão em mancais longos quando o sistema de coordenadas é móvel; também é mostrada uma fórmula para a determinação da fronteira de cavitação.

CAPÍTULO 3

CAVITAÇÃO EM MANCAIS RADIAIS

3.1 Introdução

A cavitação é um fenômeno inerente aos mancais radiais devida à existência da cunha divergente que há a partir da posição de folga mínima. Observe-se na figura 2.2 que para $\theta \geq \pi$ a folga passa a aumentar com θ . O fenômeno da cavitação é a ruptura de uma fase contínua líquida pela presença de gás ou vapor. Portanto a cavitação tem duas formas básicas:

1. Cavitação por Gás: onde gases circunvizinhos migram para região onde a pressão abaixo da ambiente é atingida.
2. Cavitação por Vapor: onde o lubrificante vaporiza à temperatura ambiente quando a pressão cai abaixo da sua pressão de vapor.

A maior parte da região divergente da folga possui pressão constante ou levemente inferior à pressão ambiente. Isto porque o filme lubrificante está aberto para a atmosfera. Também, nota-se que o óleo normalmente está exposto à pressão ambiente por longos períodos de tempo assegurando que a pressão de saturação de gás dissolvido seja bastante próximo da ambiente. Portanto, uma fração de gás sai da solução quando a pressão cai abaixo do vapor de saturação limitando um decréscimo maior da pressão.

Em mancais radiais os efeitos da cavitação não estão presentes no sentido danoso. Pelo contrário, a cavitação é que proporciona a capacidade de carga ao mancal. Conforme ilustrado na figura 3.1, se o filme de óleo não rompe, a componente de força normal à superfície em movimento é nula. Porém, se gás livre garantir que na porção divergente a pressão se mantenha próximo à ambiente, é obvio que haverá uma componente de força líquida normal à superfície em movimento.

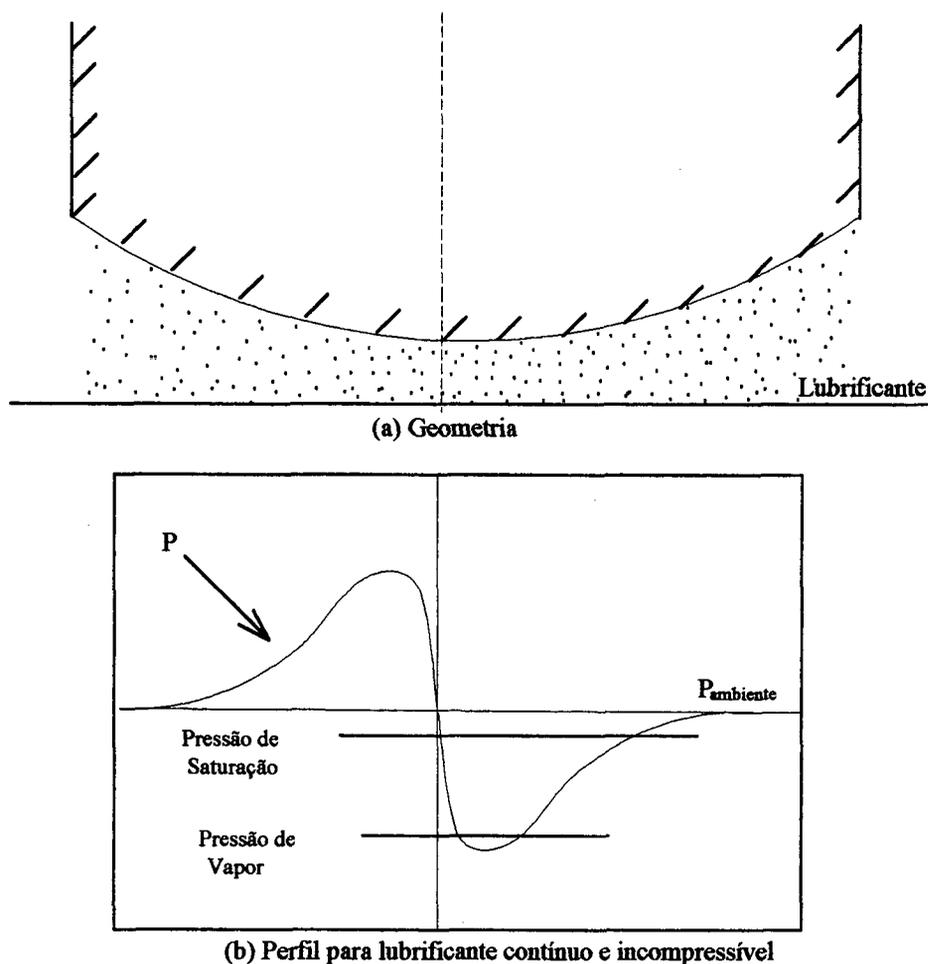


Figura 3.1 - Distribuição de Pressão

Observe que, no caso de não haver cavitação, haverá uma capacidade de carga normal à linha de centros. Por esta razão, o eixo se moveria em uma direção normal à aplicação de carga (da esquerda para a direita na figura 3.1).

A determinação das condições de contorno para a região de cavitação ainda é um problema em aberto. Nas seções subsequentes as principais condições de contorno em uso serão listadas e subdivididas em dois títulos principais: Ruptura do filme e Reforma do filme.

3.2 Condições de Contorno para Ruptura do Filme

3.2.1 Condições de Sommerfeld

Sommerfeld (1904) assume uma condição de não-cavitação, ou seja, o filme de óleo através do mancal é sempre completo. Desta forma, tem-se:

$$p = 0 \text{ em } \theta = 0, 2\pi \quad (3.1)$$

onde θ é a coordenada angular a partir da máxima espessura do filme de óleo. O perfil de pressão pode ser visto na figura 3.2.

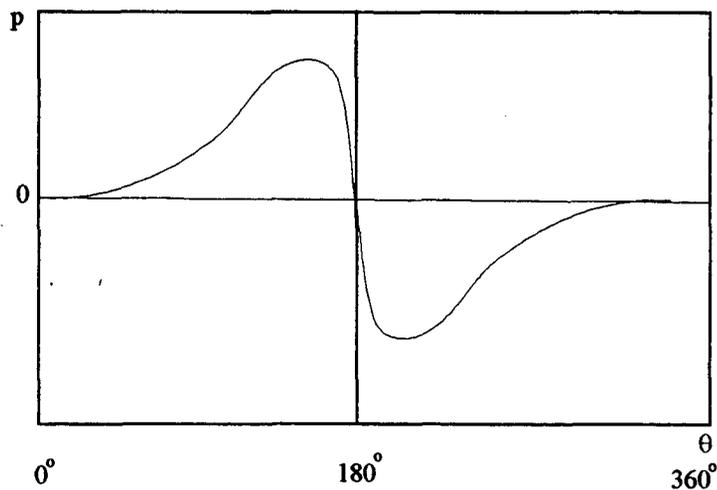


Figura 3.2 - Distribuição de Pressão para Condição de Sommerfeld

Nota-se a inconsistência desta condição pela presença de pressões negativas da mesma ordem de grandeza das pressões positivas. E ainda, o perfil anti-simétrico forneceria uma carga sempre normal à linha de centros onde, exceto para casos especiais, é fisicamente impossível.

3.2.2 Condições de Gumbel (ou meio Sommerfeld)

Gumbel (1921) sugeriu que o problema das pressões negativas poderia ser sanado se, no perfil de pressão de Sommerfeld, as pressões negativas fossem consideradas nulas. Em outras palavras,

$$p = 0 \text{ em } \theta = 0, \pi \quad p = 0 \text{ para } \pi < \theta < 2\pi \quad (3.2)$$

A figura 3.3 mostra o perfil de pressão para esta condição.

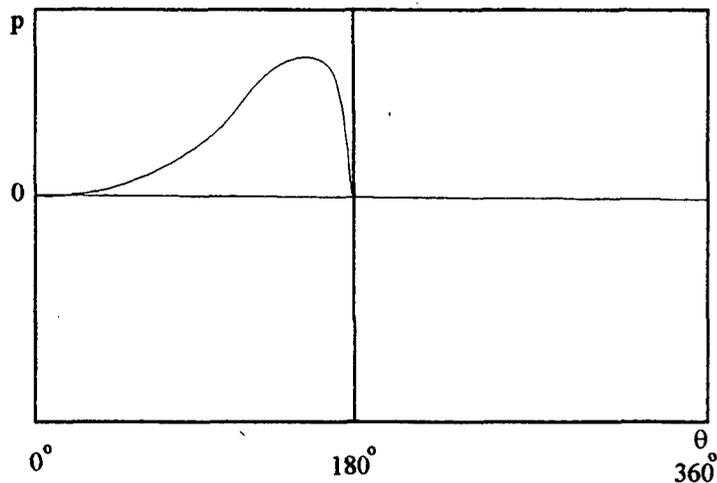


Figura 3.3 - Distribuição de Pressão para Condição de Gumbel

Apesar da lei de conservação da massa ser violada com a utilização deste perfil de pressão este método é o mais popular e ainda é bastante usado pois não introduz erros apreciáveis nos parâmetros globais dos mancais. Estudos demonstram que os erros máximos obtidos no parâmetro capacidade de carga de mancais usando tal condição é de 15 % quando comparado com a condição de Reynolds tida como a mais correta (Dowson and Taylor, 1979).

3.2.3 Condições de Swift-Stieber (ou Reynolds)

Esta condição foi proposta por Reynolds (1886), sugerida por Gumbel (1921) mas primeiro formulada matematicamente por Swift (1931), baseando no argumento da estabilidade, e por Stieber (1933), considerando a continuidade do escoamento. Assim tem-se que para um caso bidimensional a taxa de escoamento do lubrificante antes da ruptura do filme é:

$$Q_x = -\frac{h^3}{12\mu} \frac{dp}{dx} + \frac{Uh}{2} \left[\frac{m^3/s}{m} \right] \quad (3.3)$$

Na região de cavitação, logo após a ruptura do filme, a pressão é geralmente tomada como sendo constante. Assim, somente o escoamento de Couette deve ser considerado e a taxa de escoamento de lubrificante logo após a ruptura é:

$$Q_x = \frac{Uh}{2} \quad (3.4)$$

Comparando o escoamento antes e depois da ruptura do filme de óleo, a condição de gradiente de pressão nulo no início da cavitação deve ser adotada. Esta análise mostra que a condição de Gumbel que estabelece um gradiente negativo de pressão na fronteira de cavitação está incorreta. A condição de Reynolds pode ser resumida por

$$p = p_{cav} \quad e \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \text{em } \theta = \theta_{cav} \quad (3.5)$$

onde p_{cav} é a pressão de cavitação geralmente assumida como pressão ambiente. O perfil de pressão considerado nesta condição pode ser visto na figura 3.4 e o modelo na figura 3.5.

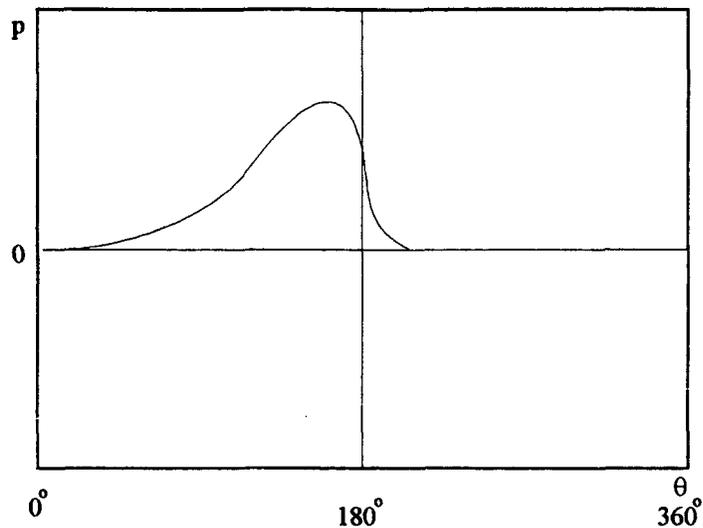


Figura 3.4 - Distribuição de Pressão para Condição de Reynolds

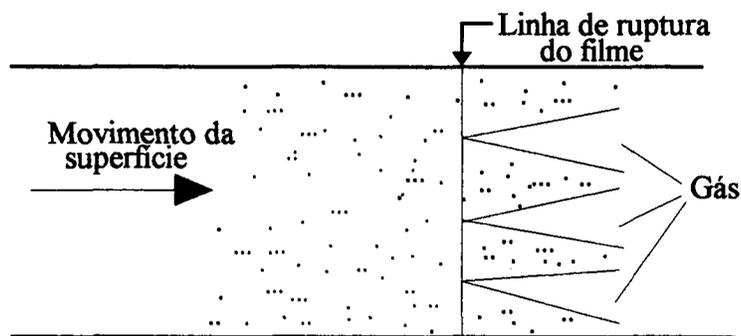


Figura 3.5 - Vista superior da ruptura do filme condizente com a condição de Reynolds

Uma complicação adicional que surge com a condição de Reynolds é que a localização da linha de ruptura do filme de óleo não é conhecida a priori e deve ser obtida durante a solução do problema. Como θ_{cav} em geral varia na direção axial (direção y na figura 2.1) o uso da condição de Reynolds conduz a um problema de fronteira livre.

3.2.4 Condições de Coyne-Elrod

Resultados experimentais mostram a existência de uma pequena sub-cavitação antes da região de cavitação. Hopkins (1957), Birkhoff e Hays (1963) foram os primeiros a introduzir a idéia de que a separação do escoamento poderia originar uma regra para a ruptura do filme. Tal

conceito se baseava na consideração de que uma parte do lubrificante seria carregado apenas pelo movimento da superfície girante, contrariando a condição anterior que tornava tal efeito desprezível.

A separação aconteceria em uma posição da superfície do mancal, na porção divergente, quando o gradiente de velocidade do filme transversal (dU/dz) fosse nulo. Tal situação está mostrada na figura 3.6.

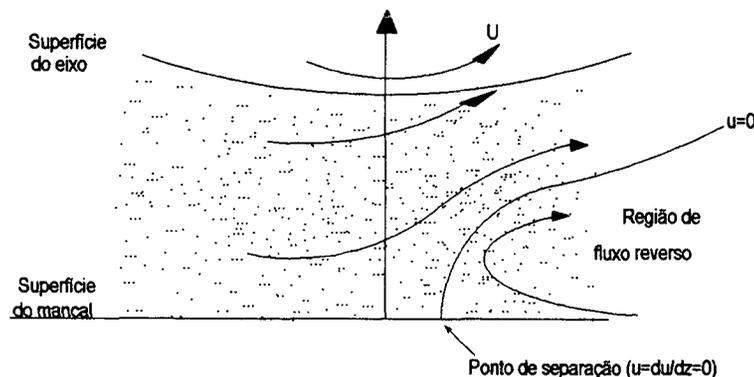


Figura 3.6 - Vista transversal da separação do filme de óleo

Da equação de Navier - Stokes para a direção x Coyne e Elrod (1970) obtiveram uma expressão para o gradiente de pressão que segue,

$$\frac{dp}{dx} = \frac{2\mu U}{h^2} \quad (3.6)$$

e que junto com o valor da pressão de cavitação fornece a posição da ruptura do filme.

A região de fluxo reverso que se desenvolve abaixo da linha de corrente associada ao ponto de separação indica um mecanismo pelo qual bolhas de gases suspensas poderiam ser direcionadas a formar um padrão de cavitação. A equação (3.6) assume que o filme de óleo seja completo, o que não é verificado com a experimentação. Coyne e Elrod (1970) resolveram tal inconsistência considerando os efeitos de tensão superficial e usando a continuidade do escoamento para se determinar as condições de contorno.

O fluxo circunferencial de óleo antes da região de cavitação é dado pela equação (3.3). Em algum lugar na posição divergente da folga (figura 3.7), o lubrificante é separado da superfície estacionária e carregado pela superfície em movimento.

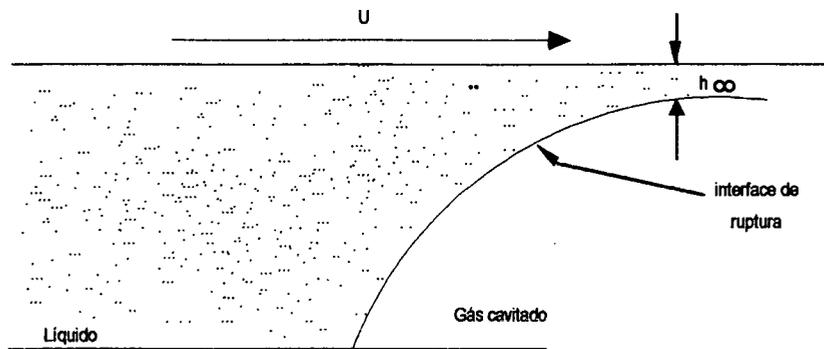


Figura 3.7 - Separação com uma interface líquido-gás (Coyne e Elrod)

O fluxo nesta região é dado por:

$$Q_x = Uh_{\infty} \quad (3.7)$$

onde h_{∞} é a espessura mínima do filme assintótica a jusante. Das equações (3.3) e (3.7) tem-se:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{6\mu U}{h^2} \left(1 - \frac{2h_{\infty}}{h} \right) \quad (3.8)$$

Para um ângulo de contato de 90° entre a superfície de cavitação e a superfície do mancal, a relação h_{∞} / h pode ser dada por:

$$\frac{h_{\infty}}{h} = f \left(\frac{3\mu U}{\sigma} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.9)$$

onde σ é a tensão superficial entre o óleo e o ar. Para maiores detalhes da equação (3.9) ver Taylor (1963).

A expressão (3.8) representa a primeira condição de contorno para a pressão na fronteira de cavitação. A segunda condição detalhada por Coyne e Elrod é:

$$p = -\frac{\sigma}{R_0} + \Delta P \quad (3.10)$$

onde R_0 é a raio de curvatura da interface e ΔP é a variação de pressão através da mesma. O perfil de pressão para este caso está esquematizado na fig. 3.8.

3.2.5 Condições de Jacobsson - Floberg

Jacobsson e Floberg (1957) e Floberg (1957, 1960 e 1961) assumiram que na região após a ruptura do óleo, o lubrificante escorria em estrias entre cavidades de ar e que o volume de óleo que se adere à superfície em movimento era desprezível. Ainda, durante condições normais de carregamento a mais baixa pressão possível é a pressão ambiente.

O escoamento por unidade de comprimento entrando na região de cavitação é dado pela equação (3.3). Após a ruptura do filme de óleo, a pressão se torna constante e o escoamento por unidade de comprimento passa a ser,

$$Q_{\text{sa}} = \Theta \frac{Uh}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq 1 \quad (3.11)$$

onde Θ leva em conta o fato de que uma parte da área disponível para o escoamento não é ocupada por óleo. Igualando as equações (3.3) e (3.11)

$$(1 - \Theta) \frac{Uh}{2} - \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (3.12)$$

Se a pressão na fronteira não cair abaixo da pressão de cavitação, a derivada $\partial p / \partial x$ assume somente valores negativos ou zero (ver figura 3.8). Portanto analisando a equação (3.12) nota-se que a única condição coerente é

$$\Theta = 1, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (3.13)$$

A condição acima sugere que em toda a extensão da interface de ruptura está completamente ocupada por óleo. Tal expressão será utilizada como condição de contorno no algoritmo de Elrod que será deduzido no capítulo seguinte.

Segundo Floberg (1965) quando o carregamento é leve (relação excentricidade $\varepsilon=e/c$ menor que 0,4) as pressões de sub-cavitação podem influenciar nos resultados. Considerando que na região de cavitação o óleo escoa entre estrias de gases, Floberg obteve a seguinte expressão:

$$\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial X_f}{\partial y} = \frac{6\mu U}{h^2} \quad (3.14)$$

onde X_f é a posição da fronteira de cavitação conforme figura 3.9.

Esta condição de contorno prevê a pressão de subcavitação a montante da fronteira de cavitação. O perfil de pressão é qualitativamente similar ao perfil de Coyne / Elrod (figura 3.8).

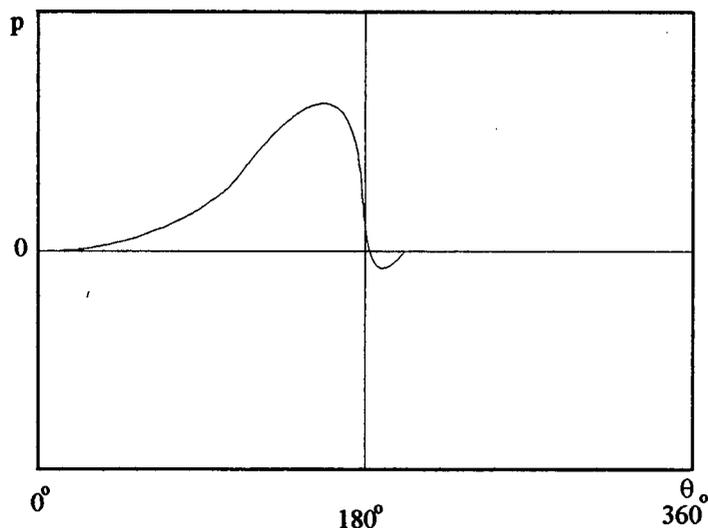


Figura 3.8 - Distribuição de Pressão para Condição de Jakobsson/Floberg e Coyne/Elrod

Para carregamentos menos leves, a condição de Reynolds ou equação (3.13) se mostra bastante eficiente. Porém para carregamentos leves a condição de contorno da equação (3.14) é a que fornece resultados que melhor concordam com dados experimentais.

3.2.6 Condições de Olsson

Enquanto Jakobsson e Floberg formularam as condições de cavitação para carregamento estático, Olsson (1965) estudou tais condições para carregamento dinâmico de mancais. A formulação de Olsson é baseada na figura 3.9.

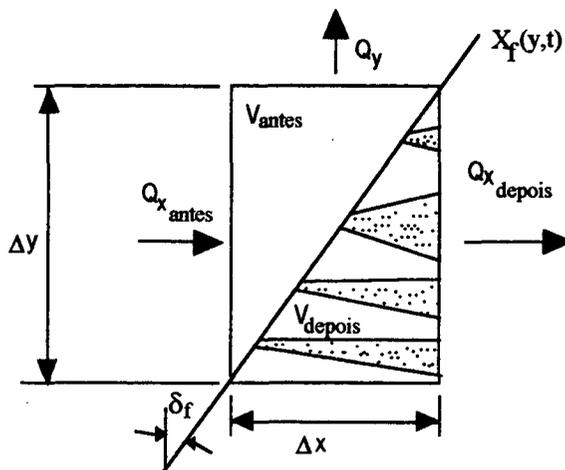


Figura 3.9 - Volume de controle na fronteira de cavitação

Sendo V_{antes} e V_{depois} os volumes ocupados pelo fluido lubrificante respectivamente antes e depois da ruptura do filme de óleo, a equação da conservação da massa fornece:

$$\frac{\partial V_{\text{antes}}}{\partial t} + \frac{\partial V_{\text{depois}}}{\partial t} = Q_{x_{\text{antes}}} - Q_{x_{\text{depois}}} - Q_y \quad (3.15)$$

onde:

$$\frac{\partial V_{\text{antes}}}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t} \frac{\Delta x \Delta y}{2} + \frac{\partial X_f}{\partial t} h \Delta y \quad (3.16a)$$

$$\frac{\partial V_{\text{depois}}}{\partial t} = \frac{\partial \theta h}{\partial t} \frac{\Delta x \Delta y}{2} - \frac{\partial X_f}{\partial t} \theta h \Delta y \quad (3.16b)$$

$$Q_{x_{antes}} = \left[\frac{Uh}{2} - \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right] \Delta y \quad (3.16c)$$

$$Q_{x_{depois}} = \Theta \frac{Uh}{2} \Delta y \quad (3.16d)$$

$$Q_y = - \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \Delta x \quad (3.16e)$$

$$\Delta x = \Delta y \cdot \text{tg} \delta_f \quad (3.16f)$$

e X_f é a posição da fronteira de cavitação. Substituindo as expressões acima na equação (3.15) obtém-se:

$$\left(\frac{U}{2} - \frac{\partial X_f}{\partial t} \right) (1 - \Theta) = \frac{h^2}{12\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \text{tg} \delta_f \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{\Delta x}{2h} \left[\frac{\partial h}{\partial t} (1 + \Theta) + h \frac{\partial \Theta}{\partial t} \right] \quad (3.17)$$

Mas sabe-se que a pressão na fronteira não varia, então:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x = 0 \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} \text{tg} \delta_f \quad (3.19)$$

Substituindo a equação (3.19) na equação (3.17) tem-se:

$$\left(\frac{U}{2} - \frac{\partial X_f}{\partial t} \right) (1 - \Theta) = \frac{h^2}{12\mu} \frac{1}{\cos^2 \delta_f} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\Delta x}{2h} \left[\frac{\partial h}{\partial t} (1 + \Theta) + h \frac{\partial \Theta}{\partial t} \right] \quad (3.20)$$

Aplicando os limites $\Delta x \rightarrow 0$ e $\Delta y \rightarrow 0$ resulta em:

$$\left(\frac{U}{2} - \frac{\partial X_f}{\partial t}\right)(1 - \Theta) = \frac{h^2}{12\mu} \frac{1}{\cos^2 \delta_f} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.21)$$

Se a mínima pressão é a pressão de cavitação, garante-se que $dp/dx \leq 0$. Desta forma o lado direito da equação (3.21) é sempre menor ou igual a zero. Avaliando o fator $(1-\Theta)$ tem-se:

$$0 \leq (1 - \Theta) \leq 1 \quad (3.22)$$

Portanto tem-se duas situações nas quais a equação (3.21) deve ser satisfeita:

$$(i) \frac{\partial X_f}{\partial t} \leq \frac{U}{2} \quad (3.23)$$

Com isto o lado esquerdo da equação (3.21) se torna maior ou igual a zero. Conseqüentemente,

$$\Theta = 1 \quad , \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (3.24)$$

A condição acima é a mesma obtida por Swift - Stieber e Jakobsson - Floberg.

$$(ii) \frac{\partial X_f}{\partial t} > \frac{U}{2} \quad (3.25)$$

Desta vez o lado esquerdo da equação é menor ou igual a zero. Então a condição de ruptura do filme é obtida resolvendo-se a equação diferencial abaixo:

$$\frac{\partial X_f}{\partial t} = \frac{U}{2} - \frac{h^2}{12\mu} \frac{1}{\cos^2 \delta_f} \frac{1}{(1 - \Theta)} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.26)$$

3.3 Condições de Contorno de Reforma do Filme

3.3.1 Condições de Jakobsson - Floberg

Considere a figura abaixo:

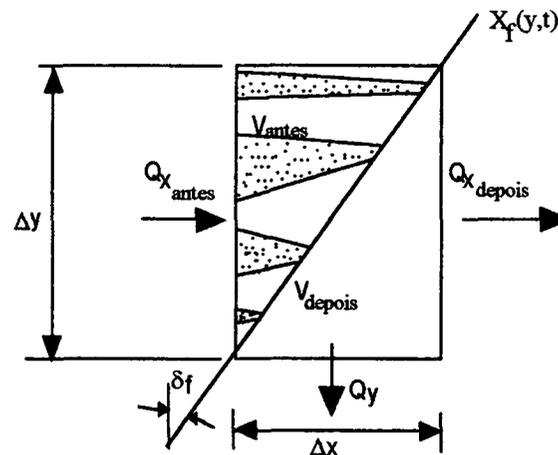


Figura 3.10 - Volume de controle na reforma do filme

O fluxo de massa que chega antes da reforma do filme é:

$$Q_{x_{antes}} = \frac{Uh\Theta}{2} \Delta y \quad (3.27)$$

Após a reforma do filme tem-se:

$$Q_{x_{depois}} = \left[\frac{Uh}{2} - \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right] \Delta y - \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \Delta x \quad (3.28)$$

Igualando as expressões de $Q_{x_{antes}}$ e $Q_{x_{depois}}$ obtém-se:

$$\frac{Uh\Theta}{2} \Delta y = \frac{Uh}{2} \Delta y - \frac{h^3}{12\mu} \left[\frac{\partial p}{\partial x} \Delta y + \frac{\partial p}{\partial y} \Delta x \right] \quad (3.29)$$

Reorganizando e aplicando limite $\Delta x \rightarrow 0$ e $\Delta y \rightarrow 0$, tem-se:

$$\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial X_f}{\partial y} = \frac{6\mu U}{h^2} (1 - \Theta) \quad (3.30)$$

Esta é a condição de contorno para reforma do filme lubrificante.

3.3.2 Condição de Olsson

A condição para reforma do filme no caso dinâmico é feita pela análise da mesma equação para a ruptura porém considerando que X_f é a posição da fronteira de reforma e que $dp/dx \geq 0$. A condição a ser aplicada é novamente aquela da equação (3.21)

$$\left(\frac{U}{2} - \frac{\partial X_f}{\partial t} \right) (1 - \Theta) = \frac{h^2}{12\mu} \frac{1}{\cos^2 \delta_f} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.21)$$

Desta vez o lado direito da equação acima é positivo ou nulo. Como antes, duas possibilidades podem ocorrer:

$$(i) \frac{\partial X_f}{\partial t} > \frac{U}{2} \quad (3.31)$$

Assim o lado esquerdo da equação (3.21) é negativo e por conseguinte a única opção coerente é:

$$\Theta = 1 \quad , \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (3.32)$$

$$(ii) \frac{\partial X_f}{\partial t} \leq \frac{U}{2} \quad (3.33)$$

Neste caso a resolução da equação (3.26) fornece o valor de Θ para a condição de reforma do filme.

Os estudos e formulações de Jakobsson, Floberg e Olsson são conhecidos por teoria JFO. Esta teoria pode ser utilizada tanto para carregamento estático, como para carregamento dinâmico com intensidade moderada ($0,4 \leq \varepsilon \leq 0,7$) ou mais pesada ($\varepsilon > 0,7$). Na seção seguinte a teoria JFO será utilizada na obtenção de uma Equação Universal que será empregada em toda a região de lubrificação do mancal.

3.4 A Equação Universal

A região de lubrificação em mancais radiais pode ser dividida em duas porções distintas: região de filme de óleo completo e região de cavitação. Na região de filme completo, o escoamento é incompressível e é conduzido pelo gradiente de pressão e pela ação do arraste associado ao movimento do eixo. Nesta região a equação de Reynolds pode ser aplicada para se obter a distribuição de pressão.

Na região de cavitação, pela presença de gás ou vapor o escoamento é compressível. A pressão é constante e o fluxo é devido somente ao arraste promovido pelo eixo. Neste caso a equação de Reynolds não pode ser aplicada diretamente pois, pela conservação da massa, esta geraria pressões negativas de grandes amplitudes e como já se sabe, o óleo não sustenta tais pressões.

Em muitas aplicações são utilizadas condições de contorno que não satisfazem o princípio da conservação da massa como por exemplo as condições de Gumbel. A teoria JFO preserva a conservação da massa em toda a região de lubrificação e fornece condições de contorno que possibilitam o cálculo da fronteira de cavitação.

Elrod e Adams (1974) introduziram um esquema computacional que incorpora a teoria JFO de uma maneira bastante simples e conveniente. Mais tarde, Elrod (1981) fez algumas modificações na formulação original e determinou uma equação universal, que pode ser utilizada em toda a região de lubrificação. A conservação da massa é assegurada e através de uma mudança de variável, a variável dependente passa a ser a densidade e não mais a pressão. A seguir será desenvolvida a equação universal que originou o denominado Algoritmo de Elrod.

A equação de Reynolds para um fluido newtoniano, escoamento laminar e compressível para mancais radiais em carregamento dinâmico é:

$$\frac{\partial \rho h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h U}{2} - \frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 0 \quad (3.34)$$

Na região cavitada o escoamento ocorre em estrias e a pressão é constante. Desta forma os gradientes de pressão da equação (3.34) se anulam e nesta região a equação anterior se torna:

$$\frac{\partial \rho_c h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho_c h U}{2} \right) = 0 \quad (3.35)$$

onde ρ_c é a densidade do óleo na pressão de cavitação.

Introduzindo uma densidade adimensional Θ ,

$$\Theta = \frac{\rho}{\rho_c} \quad (3.36)$$

pode-se caracterizar duas situações distintas conforme a região em consideração. Na região de filme completo ocorre a compressão do lubrificante e tem-se $\rho > \rho_c$ e $\Theta > 1$. Na região cavitada, apesar da densidade ser constante, o fluido ocupa apenas uma porção do volume. Assim, a variável Θ pode ser interpretada da mesma forma da teoria JFO, ou seja, como um parâmetro de fração de quantidade de filme. Ainda tem-se que nesta região $\Theta < 1$ e que $(1 - \Theta)$ representa a fração de vazio.

Neste ponto é conveniente definir o módulo volumétrico, β , que relaciona pressão e densidade,

$$\beta = \rho \frac{\partial p}{\partial \rho} \quad (3.37)$$

Comparando-se as equações (3.34) e (3.35) nota-se que a diferença entre elas é o termo do gradiente de pressão. Uma única equação que reproduza as informações tanto da equação (3.34) como da equação (3.35) pode ser obtida empregando-se uma função chave definida por:

$$g \begin{cases} = 1 & \text{na região de filme completo} \Rightarrow \Theta > 1 \\ = 0 & \text{na região cavitada} \Rightarrow \Theta < 1 \end{cases} \quad (3.38)$$

Para tal a função g é introduzida na expressão (3.37) da seguinte forma:

$$g\beta = \rho \frac{\partial p}{\partial \rho} = \Theta \frac{\partial p}{\partial \Theta} \quad (3.39)$$

e após integração em Θ tem-se

$$p = p_c + g\beta \ln \Theta \quad (3.40)$$

Substituindo a equação anterior na equação (3.34), obtém-se:

$$\boxed{\frac{\partial \rho_c \Theta h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho_c U h \Theta}{2} - \frac{\rho_c \beta h^3}{12\mu} g \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\rho_c \beta h^3}{12\mu} g \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right) = 0} \quad (3.41)$$

Esta é a equação universal com uma única variável dependente, Θ , e que pode ser usada em toda a região de lubrificação.

A distribuição de pressão é obtida pela equação (3.40) após a determinação da distribuição de Θ . Adimensionalmente, a equação (3.41) se torna:

A distribuição de pressão é obtida pela equação (3.40) após a determinação da distribuição de θ . Adimensionalmente, a equação (3.41) se torna:

$$\boxed{\frac{\partial \Theta \bar{h}}{\partial \bar{t}} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\Theta \bar{h}) = \frac{\bar{\beta}}{48\pi^2} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\bar{h}^3 g \frac{\partial \Theta}{\partial \bar{x}} \right) + \frac{\bar{\beta}}{48(L/D)^2} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\bar{h}^3 g \frac{\partial \Theta}{\partial \bar{y}} \right)} \quad (3.42)$$

onde:

$$\begin{aligned} \bar{h} &= \frac{h}{c} \\ \bar{x} &= \frac{x}{2\pi R} \\ \bar{y} &= \frac{y}{L} \\ \bar{t} &= \omega t \\ \bar{\beta} &= \frac{\beta}{\mu \omega} \left(\frac{c}{R} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.43)$$

Observa-se que a equação universal (3.41) representa a equação de conservação da massa onde o primeiro termo é a variação temporal da massa (filme espremido), o segundo termo é a taxa líquida de fluxo de massa na direção circunferencial (arraste + pressão) e o terceiro termo é a taxa líquida do fluxo de massa na direção axial (somente pressão). Esta equação será empregada no Algoritmo de Elrod que é uma formulação em diferenças finitas em forma conservativa usando aproximação em volume de controle.

CAPÍTULO 4

METODOLOGIA DE SOLUÇÃO

4.1 Introdução

A solução da equação de Reynolds (2.20) ou (2.23) e da equação universal (3.41) ou (3.42) só pode ser obtida numericamente. Para tal o domínio de solução é discretizado em um número finito de pequenos volumes de controle, o que resulta em um sistema de equações algébricas cuja solução é obtida iterativamente.

A equação de Reynolds será discretizada via integração ao longo dos volumes de controle ao passo que a equação universal será discretizada via diferenciação que vai originar o algoritmo de Elrod. Serão apresentadas duas formas de resolução das equações algébricas: o tradicional TDMA linha por linha e a fatorização aproximada.

Paralelamente à resolução da equação de Reynolds e da equação universal deve ser obtida a posição e a velocidade do eixo para cada instante de tempo. Para isto faz-se necessário a resolução do sistema de equações diferenciais para a determinação da trajetória do eixo (eq. 2.32 e 2.33) ou (eq. 2.35 e 2.36). Então, serão utilizados os métodos de Runge-Kutta e o da substituição quando os efeitos inerciais forem considerados e quando não o forem, respectivamente (Manke, 1991).

4.2 Discretização

4.2.1 Equação de Reynolds

A discretização da equação de Reynolds (2.23) é feita pelo método dos volumes finitos onde a equação diferencial é integrada ao longo de cada volume de controle típico, conforme a figura 4.1.

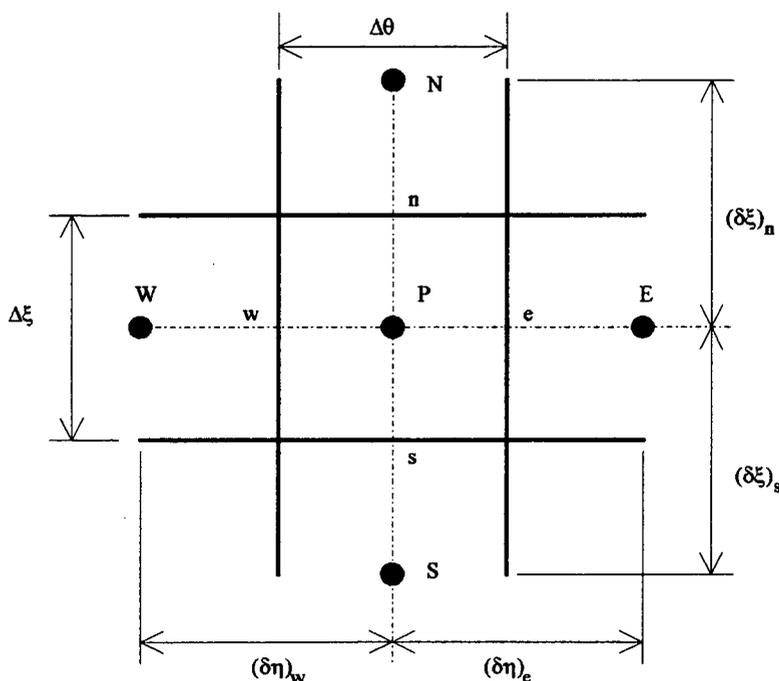


Figura. 4.1 - Volume de Controle Típico

Pela figura anterior, o volume é construído sobre um ponto nodal (especificado por letras maiúsculas) e as derivadas são calculadas nas respectivas faces (especificadas por letras minúsculas).

Reescrevendo a equação de Reynolds adimensionalizada (2.23) tem-se,

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \theta_f^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} = A(\theta_f) \dot{\epsilon}_z^* + B(\theta_f) \dot{\epsilon}_x^* + C(\theta_f) P + D(\theta_f) \quad (4.1)$$

Integrando-a para cada ponto nodal do domínio de solução e considerando os parâmetros geométricos da figura 4.1 pode-se obter uma equação algébrica correspondente da seguinte forma (de acordo com o Apêndice B).

$$\mathbf{a}_p \mathbf{P}_p = \mathbf{a}_e \mathbf{P}_E + \mathbf{a}_w \mathbf{P}_w + \mathbf{a}_n \mathbf{P}_N + \mathbf{a}_s \mathbf{P}_S + S \quad (4.2)$$

onde

$$\mathbf{a}_p = \mathbf{a}_{e1} + \mathbf{a}_{e2} + \mathbf{a}_{w1} - \mathbf{a}_{w2} + \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_s \quad (4.3a)$$

$$\mathbf{a}_e = \mathbf{a}_{e1} - \mathbf{a}_{e2} \quad (4.3b)$$

$$\mathbf{a}_{e1} = \frac{\Delta \xi}{(\delta \theta_f)_e} \quad \mathbf{a}_{e2} = \frac{C(\theta_f)_e}{2} \Delta \xi \quad (4.3c)$$

$$\mathbf{a}_w = \mathbf{a}_{w1} + \mathbf{a}_{w2} \quad (4.3d)$$

$$\mathbf{a}_{w1} = \frac{\Delta \theta_f}{(\delta \xi)_w} \quad \mathbf{a}_{w2} = \frac{C(\theta_f)_w}{2} \Delta \theta_f \quad (4.3e)$$

$$\mathbf{a}_n = \frac{\Delta \theta_f}{(\delta \xi)_n} \quad \mathbf{a}_s = \frac{\Delta \theta_f}{(\delta \xi)_s} \quad (4.3f)$$

$$S = -\left[A(\theta_f) \dot{\epsilon}_x^* + B(\theta_f) \dot{\epsilon}_z^* + D(\theta_f) \right]_p \Delta \theta_f \Delta \xi \quad (4.3g)$$

Os parâmetros $A(\theta_f)$, $B(\theta_f)$, $C(\theta_f)$, $D(\theta_f)$, $\dot{\epsilon}_x^*$ e $\dot{\epsilon}_z^*$ são fornecidos pelas expressões (2.24.a-e). A solução do sistema de equações algébricas será abordado na seção 4.3. No capítulo seguinte serão apresentados resultados gerados pela equação (4.2) usando as seguintes condições de contorno para a direção circunferencial:

$$(i) P=0 \quad \text{em } \theta=0, \pi \quad \text{e} \quad P=0 \quad \text{em } \pi < \theta < 2\pi \quad (4.4)$$

$$(ii) P=0 \quad \text{em } \theta=0, 2\pi \quad \text{e se} \quad P < 0 \rightarrow P=0 \quad (4.5)$$

onde θ é a coordenada angular a partir da máxima espessura de filme de óleo.

Para as duas condições anteriores, na direção axial, tem-se,

$$P=0 \quad \text{em} \quad \xi=0, L/R \quad (4.6)$$

A condição (4.4) é a condição de Gumbel e já foi analisada no capítulo 2. A condição (4.5) é similar à condição de Sommerfeld também analisada no capítulo 2. Tal condição (a de Sommerfeld) ignora a região de cavitação e isto leva à geração de pressão negativa na porção divergente do mancal. Como se sabe que o óleo não sustenta pressão negativa, este problema é contornado fazendo com que as pressões negativas sejam zeradas logo após seu cálculo.

Utilizando as duas condições acima observa-se que não há necessidade de se conhecer, a priori, as fronteiras de cavitação para se determinar o campo de pressão. Este fato simplifica bastante o problema pois a fronteira de cavitação depende do campo de pressão, o que tornaria o problema não linear.

4.2.2 Algoritmo de Elrod

A equação universal assume dois tipos diferentes conforme a região do mancal:

1. Região de filme completo ($g = 1$)

- escoamento incompressível
- Equação diferencial parcial elíptica

2. Região cavitada ($g = 0$)

- escoamento compressível
- Equação diferencial parcial hiperbólica

No primeiro caso a variável dependente é função de todos os seus vizinhos enquanto que no segundo cada ponto é função somente de pontos respectivos a montante. Elrod (1981) formulou um esquema numérico que reflete o exposto acima. Desta maneira, foi determinado o algoritmo de Elrod que tem as seguintes características:

- **Preserva a conservação da massa.**
- **Produz uma única equação que pode ser aplicada em toda a região do mancal.**
- **Remove a contribuição do gradiente de pressão no fluxo de massa na região cavitada.**
- **Introduz o método de diferenças finitas na equação universal.**
- **Estabelece, aproximadamente, corretas condições nas fronteiras de cavitação.**

As expressões que Elrod utilizou foram obtidas a partir da equação de Reynolds que na realidade impõe a conservação da massa.

A equação universal dimensional (3.41) reescrita abaixo,

$$\frac{\partial \rho_c \Theta h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho_c U h \Theta}{2} - \frac{\rho_c \beta h^3}{12\mu} g \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(- \frac{\rho_c \beta h^3}{12\mu} g \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right) = 0 \quad (4.7)$$

pode ser escrita da seguinte forma,

$$\frac{\partial \rho_c \Theta h}{\partial t} \Delta x \Delta y = \Delta m_x \Delta y + \Delta m_y \Delta x \quad (4.8)$$

onde o lado esquerdo representa o aumento total de massa ($\rho_c \Theta h$) no tempo Δt e o lado direito representa a soma das variações dos fluxos de massa linear na direção circunferencial (Δm_x) e na direção axial (Δm_y).

Analisando as equações (4.7) e (4.8) observa-se que,

$$m_x = (m_x)_{\text{Couette}} + (m_x)_{\text{Poiseuille}} \quad (4.9)$$

$$m_y = (m_y)_{\text{Poiseuille}} \quad (4.10)$$

A figura 4.2 mostra o volume de controle utilizado para o desenvolvimento do algoritmo de Elrod.

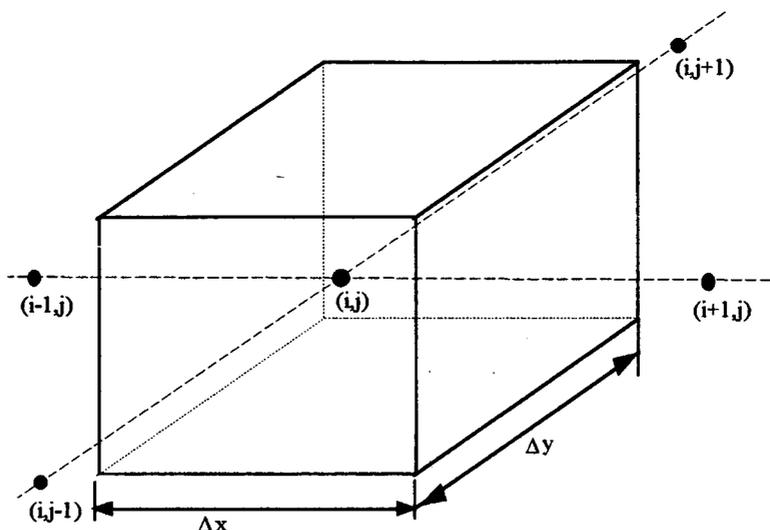


Fig. 4.2 - Volume de controle no Nó (i,j).

As expressões desenvolvidas por Elrod (1981) em diferenças finitas são,

$$\begin{aligned}
 (\Delta m_x)_{\text{Couette}} = & \frac{\rho_c U}{2} \left[h_{i-1}(1 - g_{i-1})\Theta_{i-1} - h_i(1 - g_i)\Theta_i \right. \\
 & \left. + \frac{h_{i-1}g_{i-1}}{2}(2 - g_i) + \frac{h_i g_i}{2}(g_{i-1} + g_{i+1} - 2) - \frac{h_{i+1}g_{i+1}g_i}{2} \right] \quad (4.11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\Delta m_x)_{\text{Poiseuille}} = & \frac{\rho_c \beta}{12\mu\Delta x} \left[h_{i-1/2}^3 g_{i-1}(\Theta_{i-1} - 1) \right. \\
 & \left. - (h_{i-1/2}^3 + h_{i+1/2}^3)g_i(\Theta_i - 1) + h_{i+1/2}^3 g_{i+1}(\Theta_{i+1} - 1) \right] \quad (4.12)
 \end{aligned}$$

Na direção y as expressões são similares. A formulação para a variação do fluxo de massa de Couette é incompressível ($\partial h/\partial x$) na região de filme contínuo onde $g_{i-1} = g_i = g_{i+1} = 1$ e compressível ($\partial h\Theta/\partial x$) dentro da região cavitada onde $g_{i-1} = g_i = g_{i+1} = 0$.

Nas duas formulações acima, têm-se o esquema de diferenças centrais (precisão de segunda ordem) na região de filme completo onde a equação é elíptica. Na região cavitada onde a equação é hiperbólica o esquema UPWIND é utilizado (precisão de primeira ordem). Observe-se

que o fluxo de massa de Poiseuille é anulado quando se está na região cavitada onde todos os g 's são nulos.

As expressões anteriores formam o algoritmo de Elrod que determina automaticamente os contornos de cavitação aplicando as condições de contorno da teoria JFO (ver seções 3.2 e 3.3).

Substituindo as expressões (4.11) e (4.12) na equação (4.8) obtém-se

$$a_p \Theta_p = a_e \Theta_E + a_w \Theta_w + a_n \Theta_N + a_s \Theta_s + S \quad (4.13)$$

onde,

$$a_e = \frac{\beta \Delta y}{12 \mu \Delta x} g_E h_e^3 \quad (4.14a)$$

$$a_w = \frac{U \Delta y}{2} h_w (1 - g_w) + \frac{\beta \Delta y}{12 \mu \Delta x} g_w h_w^3 \quad (4.14b)$$

$$a_n = \frac{\beta \Delta x}{12 \mu \Delta y} g_N h_n^3 \quad (4.14c)$$

$$a_s = \frac{\beta \Delta x}{12 \mu \Delta y} g_s h_s^3 \quad (4.14d)$$

$$a_p = a_{p1} + a_{p2} \quad (4.14e)$$

$$a_{p1} = \frac{U \Delta y}{2} h_p (1 - g_p) + \frac{\beta \Delta y}{12 \mu \Delta x} g_p (h_w^3 + h_e^3) + \frac{\beta \Delta x}{12 \mu \Delta y} g_p (h_s^3 + h_n^3) \quad (4.14f)$$

$$a_{p2} = \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} (\omega_h \Delta t + h_p) \quad (4.14g)$$

$$S = S_1 + S_2 + S_3 \quad (4.14h)$$

$$S_1 = a_{p1} - (a_e + a_w + a_n + a_s) \quad (4.14i)$$

$$S_2 = \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} h_P \Theta_P^* \quad (4.14j)$$

$$S_3 = \frac{U \Delta y}{2} \left[\frac{h_P - h_W}{2} (g_P g_W - 2) + \frac{h_P - h_E}{2} g_P g_E \right] \quad (4.14l)$$

Na equação (4.14j) Θ_P^* é o valor de Θ_P no instante de tempo anterior e h e ω_h são obtidos pelas equações (2.9.h) e (2.11), respectivamente. Uma vez obtido o campo de Θ , o campo de pressão é fornecido pela equação (3.40).

4.3 Solução das Equações Algébricas

As equações (4.2) e (4.13) representam equações típicas de um sistema de equações algébricas de um domínio discretizado. A variável do ponto P é dependente dos pontos nodais vizinhos (E, W, N, S) e para cada ponto nodal tem-se uma equação algébrica. A solução do sistema de equações algébricas será obtida pelo algoritmo da matriz tri-diagonal, o TDMA (Tri-Diagonal Matrix Algorithm). Em uma dimensão o TDMA fornece, sem iterações, a solução do sistema de equações algébricas. A seguir será apresentada uma variante do TDMA que pode ser empregado para casos bidimensionais. Alternativamente, as equações algébricas podem ser resolvidas pelo método da Fatorização Aproximada que está apresentado no Apêndice D.

Considere-se o domínio de solução da figura 4.3 com seus pontos nodais e uma linha em destaque.

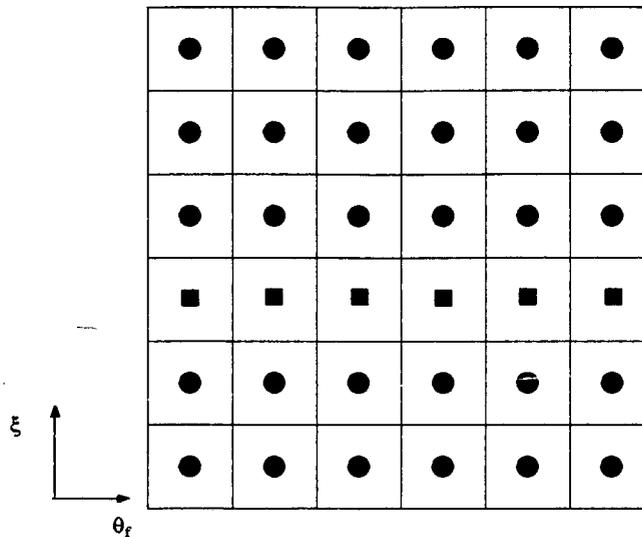


Figura 4.3 - Malha do domínio de solução discretizado.

O método consiste em aplicar o TDMA a cada linha de pontos nodais, seja na direção de θ_f ou ξ . Por exemplo, suponha-se que os pontos nodais circulares vizinhos de cima e de baixo dos pontos nodais quadrados da figura anterior são conhecidos. Desta maneira, o caso bidimensional da equação (4.2) torna-se unidimensional e a equação algébrica para a pressão pode ser escrita da seguinte forma:

$$a_p P_P = a_e P_E + a_w P_W + S' \quad (4.15)$$

onde

$$S' = a_n P_N + a_s P_S + S \quad (4.16)$$

A equação (4.15) pode ser resolvida pelo TDMA e este mesmo processo pode ser feito para a linha seguinte até que todo o domínio seja varrido sempre atualizando campo de pressão calculado. Por este motivo o método é conhecido como TDMA linha por linha. Para transportar eficazmente as informações dos contornos do domínio sugere-se fazer quatro varreduras da seguinte forma:

1. Linhas horizontais de baixo para cima.
2. Linhas horizontais de cima para baixo.
3. Linhas verticais da esquerda para a direita.
4. Linhas verticais da direita para a esquerda.

4.4 Determinação da Trajetória do Eixo

Em mancais radiais submetidos a carregamento dinâmico, há dois casos que merecem destaque, com relação a forças inerciais provocadas pela aceleração da massa do eixo:

- Quando a massa do eixo possui a mesma ordem de grandeza do carregamento, a força peso, P , deve ser considerada. O sistema de equações diferenciais para o cálculo da trajetória do eixo que incorpora tal força é,

$$W^* \operatorname{sen} \phi + F_x^* = P^* G \ddot{\epsilon}_x^* \quad (4.30)$$

$$W^* \operatorname{cos} \phi + F_z^* + P^* = P^* G \ddot{\epsilon}_z^* \quad (4.31)$$

onde os parâmetros adimensionais especificados por “*” estão expressos nas equações (2.37a-e). De acordo com os estudos de Manke (1991) o método de Runge-Kutta de quarta ordem oferece a melhor precisão aliada ao tempo computacional.

- Quando a massa do eixo pode ser desprezada (por exemplo, em máquinas alternativas) em relação ao carregamento, o sistema de equações diferenciais para a determinação da trajetória se torna,

$$W^* \operatorname{sen} \phi + F_x^* = 0 \quad (4.32)$$

$$W^* \operatorname{cos} \phi + F_z^* = 0 \quad (4.33)$$

Observe-se que os parâmetros de determinação da posição e velocidade do eixo não aparecem nas equações acima. Neste caso pode-se usar o método da substituição conforme introduzido por Prata et al. (1988), e utilizado por Manke (1991).

4.4.1 Runge-Kutta de 4ª Ordem

O método de Runge-Kutta de 4ª ordem fornece a solução numérica de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Tal método pode ser aplicado em equações diferenciais ordinárias de ordem n maior que um, desde que esta possa ser escrita como um sistema de n equações diferenciais de primeira ordem.

Suponha-se que uma equação diferencial ordinária de primeira ordem possa ser escrita como,

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (4.34)$$

e sendo y_i a solução numérica em um ponto x_i onde “ i ” representa os pontos de um domínio discreto com $i=0,1,2,3,\dots$

$$y(x_i) = y_i \quad (4.35)$$

O método de Runge-Kutta de 4ª ordem calcula a solução y_{i+1} em x_{i+1} fazendo quatro estimativas de $f(x,y)$, da seguinte forma,

$$\bar{y}_{i+1/2} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i) \quad (4.36a)$$

$$\bar{\bar{y}}_{i+1/2} = y_i + \frac{h}{2} f(x_{i+1/2}, \bar{y}_{i+1/2}) \quad (4.36b)$$

$$\bar{\bar{\bar{y}}}_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1/2}, \bar{\bar{y}}_{i+1/2}) \quad (4.36c)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} \left[f(x_i, y_i) + 2f(x_{i+1/2}, \bar{y}_{i+1/2}) + 2f(x_{i+1/2}, \bar{\bar{y}}_{i+1/2}) + f(x_{i+1}, \bar{\bar{\bar{y}}}_{i+1}) \right] \quad (4.36d)$$

onde h é o intervalo do domínio discretizado.

Este método fornece a solução numérica de $f(x,y)$ semelhante a uma precisão de 4ª ordem da série de Taylor ou seja, quando se trunca termos de ordem maiores que h^4 .

Observe-se que a classe de problemas, que podem ser resolvidos por Runge-Kutta, é de valores iniciais. Em White (1974) há uma subrotina que implementa as equações (4.36a-d) de uma forma bastante eficaz.

4.4.2 Método da Substituição

Conforme explorado anteriormente, o método da substituição explicita os parâmetros necessários à obtenção da posição e velocidade do eixo. Tais parâmetros podem ser encontrados nas componentes da força hidrodinâmica (F_x, F_z) . Para obtê-los basta proceder uma integração por partes do campo de pressão, fornecidos pela equação de Reynolds (4.2) ou pelo algoritmo de Elrod (4.13), de forma a deixar explícitos os parâmetros \dot{e}_x e \dot{e}_z nas equações da trajetória (4.32 e 4.33). Desta forma, pelo algoritmo de Elrod tem-se

$$F_x^* = -K \int_0^L \int_{\gamma}^{\gamma+2\pi} p \sin \theta_f R d\theta_f dy \quad (4.37a)$$

$$F_z^* = -K \int_0^L \int_{\gamma}^{\gamma+2\pi} p \cos \theta_f R d\theta_f dy \quad (4.37b)$$

onde

$$K = \frac{c^2}{\mu U R^2 L} \quad (4.38)$$

mas, da equação (3.40), tem-se,

$$p_p = p_c + g\beta \ln \Theta_p \quad (4.39)$$

Como Θ_p é sempre próximo da unidade pode-se escrever

$$p_p = p_c + g\beta(\Theta_p - 1) \quad (4.40)$$

onde, pela expressão (4.13),

$$\Theta_p = \frac{\left[\sum a_{viz} \Theta_{viz} + S + (\dot{e}_x \text{sen} \theta_f + \dot{e}_z \text{cos} \theta_f) \Theta_p \Delta x \Delta y \right]}{\left(a_{p1} + \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} h_p \right)} \quad (4.41)$$

e

$$\sum a_{viz} \Theta_{viz} = a_e \Theta_E + a_w \Theta_W + a_n \Theta_N + a_s \Theta_S \quad (4.42)$$

Observe-se que os parâmetros \dot{e}_x e \dot{e}_z vieram da velocidade radial ω_h da equação (2.11). Substituindo a equação (4.41) na equação (4.40) e esta nas equações (4.37a) e (4.37b) obtém-se o cálculo das componentes da força hidrodinâmica em função das componentes das velocidades do eixo. Adimensionalizando essas forças convenientemente e substituindo nas expressões (4.32) e (4.33) obtém-se (ver desenvolvimento no Apêndice D),

$$W^* \text{sen} \phi + (I_1 + \dot{e}_z I_2 + \dot{e}_x I_3) = 0 \quad (4.43)$$

$$W^* \text{cos} \phi + (I_4 + \dot{e}_z I_5 + \dot{e}_x I_6) = 0 \quad (4.44)$$

Isolando \dot{e}_z da equação (4.43) tem-se,

$$\dot{e}_z = -\frac{W^* \text{sen} \phi + I_1 + \dot{e}_x I_3}{I_2} \quad (4.45)$$

Substituindo-se a equação anterior na equação (4.44) e isolando \dot{e}_x , tem-se,

$$\dot{e}_x = \frac{W^* (I_2 \text{cos} \phi - I_5 \text{sen} \phi) + I_2 I_4 - I_1 I_5}{I_3 I_5 - I_6 I_2} \quad (4.46)$$

Tendo-se a posição inicial do eixo, obtém-se as velocidades pelas equações anteriores (4.45 e 4.46). A posição do eixo no instante de tempo seguinte é obtida por,

$$e_x^{t+\Delta t} = e_x^t + \Delta t \dot{e}_x^t \quad (4.47)$$

$$e_z^{t+\Delta t} = e_z^t + \Delta t \dot{e}_z^t \quad (4.48)$$

Processo análogo pode ser utilizado para a equação de Reynolds (4.2).

CAPÍTULO 5

RESULTADOS E DISCUSSÕES

5.1 Introdução

Neste capítulo serão mostrados resultados de simulação utilizando-se a equação de Reynolds para um sistema fixo de coordenadas (2.23) e a equação universal (3.41) que origina o algoritmo de Elrod. Adicionalmente, a metodologia introduzida por Prata e Ferreira (1990) onde uma malha móvel e adaptativa à fronteira de cavitação é utilizada, será abordada comparativamente.

Comparações serão feitas através dos diferentes tipos de condições de contorno de cavitação quais são:

- (i) Condição de Gumbel.
- (ii) Malha adaptativa à fronteira (Condição de Reynolds).
- (iii) Algoritmo de Elrod (Teoria JFO).
- (iv) Algoritmo de cavitação onde se $p < 0$ então $p = 0$.

Em todas as simulações será empregada a condição de simetria na direção axial ou seja $\partial p / \partial y = 0$ em $y=L/2$.

A análise de resultados será tanto para carregamento estático como para carregamento dinâmico. No carregamento dinâmico, com carga constante, a massa do eixo vai ser considerada. Para carregamento dinâmico com carga variável a massa do eixo será desconsiderada.

Todos os resultados serão obtidos utilizando o TDMA linha por linha para a resolução das equações algébricas já que o método da fatorização aproximada não apresentou baixos tempos computacionais.

A ênfase maior da presente dissertação está na metodologia numérica para o cálculo de mancais radiais, e não na simulação destes componentes. Desta forma, na apresentação e

discussão dos resultados o enfoque será na comparação das metodologias exploradas anteriormente, e apenas alguns parâmetros associados ao desempenho de mancais serão explorados. Outras grandezas como a vazão do lubrificante e a potência dissipada por atrito, embora importantes na análise de mancais, não serão focalizados.

5.2 Carregamento Estático

Os resultados obtidos para carregamento estático são mostrados nas tabelas 5.1 a 5.8. Os parâmetros geométricos e operacionais foram:

$$c = 250 \mu\text{m}; \quad D = 0,070 \text{ m}; \quad L = 0,035 \text{ m}; \quad \mu = 0,01 \text{ Pa.s}; \quad \text{rot} = 3000 \text{ rpm}$$

Para a comparação foram utilizados parâmetros globais como a carga adimensional capaz de ser suportada pelo eixo (número de Sommerfeld, $\Delta = c^2W/\mu UR^2 L$) a relação pressão máxima/carga projetada ($P_{\text{max.}}/W_{\text{proj}}$) bem como um parâmetro local que é a posição da fronteira de cavitação na simetria do mancal. Também o tempo computacional foi medido no IBM3090.

Resultados de literatura dos parâmetros que serão utilizados nas comparações podem ser vistos na tabela 5.1. Tais valores foram obtidos por Pinkus (1961) e por Cameron (1966) para um mancal finito em que é considerada a cavitação.

TABELA 5.1 - Resultados de literatura.

	CAMERON		PINKUS	
	$\varepsilon = 0,4$	$\varepsilon = 0,8$	$\varepsilon = 0,4$	$\varepsilon = 0,8$
Δ (adm)	0,409	3,449	0,405	3,460
$P_{\text{max.}}/W_{\text{proj}}$ (adm)	2,27	3,67	2,25	3,72
α_{simetria} (graus)	17	11	17	14

Para cada condição de contorno na fronteira de cavitação foi variada a malha de uma situação refinada para uma situação grosseira e dois valores de relação de excentricidade foram empregados; $\varepsilon = 0,4$ e $\varepsilon = 0,8$. Os erros relativos foram calculados em relação à malha mais refinada (90 X 60) e as tolerâncias de convergência adotadas foram de 10^{-4} .

TABELA 5.2 - Carregamento estático e condição de Gumbel; $\varepsilon = 0,4$.

Malha	Δ (adm)	P_{\max}/W_{proj} (adm)	α_{simetria} (graus)	Tempo (s)	Erro Δ (%)	Erro P_{\max}/W_{proj} (%)	Erro α_{simetria} (%)
90 X 60	0,389	2,319	0	42,85	x	x	x
90 X 46	0,389	2,319	0	30,81	0	0	0
60 X 46	0,389	2,318	0	11,67	0	0,04	0
60 X 16	0,390	2,312	0	3,77	0,26	0,30	0
40 X 21	0,390	2,315	0	2,60	0,26	0,17	0
30 X 16	0,391	2,306	0	1,69	0,51	0,56	0
30 X 8	0,395	2,279	0	1,34	1,54	1,70	0

TABELA 5.3 - Carregamento estático e malha adaptativa à fronteira; $\varepsilon = 0,4$

Malha	Δ (adm)	P_{\max}/W_{proj} (adm)	α_{simetria} (graus)	Tempo (s)	Erro Δ (%)	Erro P_{\max}/W_{proj} (%)	Erro α_{simetria} (%)
90 X 60	0,405	2,295	18,49	100,22	x	x	x
90 X 46	0,405	2,295	18,49	69,41	0	0	0
60 X 46	0,405	2,293	18,52	32,67	0	0,09	0,16
60 X 16	0,406	2,288	18,52	7,97	0,25	0,30	0,16
40 X 21	0,405	2,291	18,59	6,22	0	0,17	0,54
30 X 16	0,406	2,290	18,69	3,49	0,25	0,22	1,0
30 X 8	0,410	2,262	18,66	1,91	1,23	1,44	0,92

TABELA 5.4 - Carregamento estático e algoritmo de cavitação (se $p < 0$ então $p = 0$); $\varepsilon = 0,4$

Malha	Δ (adm)	P_{\max}/W_{proj} (adm)	α_{simetria} (graus)	Tempo (s)	Erro Δ (%)	Erro P_{\max}/W_{proj} (%)	Erro α_{simetria} (%)
90 X 60	0,405	2,260	18,41	15,78	x	x	x
90 X 46	0,405	2,260	18,41	12,16	0	0	0
60 X 46	0,405	2,257	15,52	5,29	0	0,13	15,7
60 X 16	0,406	2,251	15,52	2,63	0,25	0,40	15,7
40 X 21	0,406	2,257	14,21	2,10	0,25	0,13	22,8
30 X 16	0,407	2,257	19,29	1,77	0,49	0,13	4,78
30 X 8	0,411	2,230	19,29	1,67	1,48	1,33	4,78

TABELA 5.5 - Carregamento estático e algoritmo de Elrod; $\varepsilon = 0,4$.

Malha	Δ (adm)	P_{\max}/W_{proj} (adm)	α_{simetria} (graus)	Tempo (s)	Erro Δ (%)	Erro P_{\max}/W_{proj} (%)	Erro α_{simetria} (%)
90 X 60	0,396	2,277	18,20	124,12	x	x	x
90 X 46	0,393	2,284	18,20	71,44	0,76	0,31	0
60 X 46	0,393	2,285	21,36	42,14	0,76	0,35	17,4
60 X 16	0,369	2,342	21,36	7,90	6,8	2,85	17,4
40 X 21	0,378	2,313	23,07	4,43	4,5	1,58	26,7
30 X 16	0,371	2,326	18,62	2,53	6,3	2,02	2,3
30 X 8	0,330	2,432	18,62	2,11	16,7	6,80	2,3

TABELA 5.6 - Carregamento estático e condição de Gumbel; $\varepsilon = 0,8$.

Malha	Δ (adm)	P_{\max}/W_{proj} (adm)	α_{simetria} (graus)	Tempo (s)	Erro Δ (%)	Erro P_{\max}/W_{proj} (%)	Erro α_{simetria} (%)
90 X 60	3,067	3,834	0	39,37	x	x	x
90 X 46	3,068	3,833	0	28,54	0,03	0,03	0
60 X 46	3,072	3,824	0	10,92	0,16	0,26	0
60 X 16	3,079	3,814	0	3,55	0,39	0,52	0
40 X 21	3,080	3,825	0	2,50	0,42	0,23	0
30 X 16	3,090	3,806	0	1,65	0,75	0,73	0
30 X 8	3,123	3,758	0	1,38	1,82	0,73	0

TABELA 5.7 - Carregamento estático e malha adaptativa à fronteira; $\varepsilon = 0,8$.

Malha	Δ (adm)	P_{\max}/W_{proj} (adm)	α_{simetria} (graus)	Tempo (s)	Erro Δ (%)	Erro P_{\max}/W_{proj} (%)	Erro α_{simetria} (%)
90 X 60	3,459	3,759	14,00	89,97	x	x	x
90 X 46	3,460	3,759	14,00	62,65	0,03	0	0
60 X 46	3,458	3,760	14,03	30,57	0,03	0,03	0,21
60 X 16	3,465	3,750	14,02	6,98	0,17	0,24	0,14
40 X 21	3,457	3,762	14,08	5,98	0,06	0,08	0,57
30 X 16	3,453	3,755	14,16	3,50	0,11	0,11	1,14
30 X 8	3,490	3,705	14,14	1,81	0,90	1,44	1,0

TABELA 5.8 - Carregamento estático e algoritmo de cavitação (se $p < 0$ então $p = 0$); $\varepsilon = 0,8$

Malha	Δ (adm)	P_{\max}/W_{proj} (adm)	α_{simetria} (graus)	Tempo (s)	Erro Δ (%)	Erro P_{\max}/W_{proj} (%)	Erro α_{simetria} (%)
90 X 60	3,470	3,655	14,32	14,86	x	x	x
90 X 46	3,470	3,655	14,32	11,38	0	0	0
60 X 46	3,467	3,629	15,52	4,88	0,09	0,71	8,4
60 X 16	3,474	3,619	15,52	2,54	0,11	0,98	8,4
40 X 21	3,494	3,546	14,21	2,01	0,69	2,98	0,77
30 X 16	3,438	3,719	19,29	1,75	0,92	1,75	34,7
30 X 8	3,476	3,673	19,29	1,64	1,17	0,49	34,7

TABELA 5.9 - Carregamento estático e algoritmo de Elrod; $\varepsilon = 0,8$

Malha	Δ (adm)	P_{\max}/W_{proj} (adm)	α_{simetria} (graus)	Tempo (s)	Erro Δ (%)	Erro P_{\max}/W_{proj} (%)	Erro α_{simetria} (%)
90 X 60	3,430	3,670	14,16	42,46	x	x	x
90 X 46	3,408	3,682	14,16	28,71	0,64	0,33	0
60 X 46	3,440	3,631	15,25	15,53	0,29	1,1	7,70
60 X 16	3,258	3,733	15,25	4,33	5,00	1,70	7,70
40 X 21	3,336	3,620	23,01	3,13	2,74	1,40	62,0
30 X 16	3,404	3,674	18,62	2,28	0,76	0,11	31,5
30 X 8	3,079	3,858	18,62	2,04	10,2	5,12	31,5

Analisando os resultados para a condição de Gumbel (tabelas 5.2 e 5.6) observa-se que com a diminuição do número de pontos nodais houve uma grande redução do tempo computacional com erros relativos inferiores a 1%. No caso para a malha 30 X 16 e $\varepsilon = 0,4$ e $\varepsilon = 0,8$ a redução de tempo computacional foi de aproximadamente 96% e o erro relativo dos parâmetros globais atingiram um máximo de 0,75%.

Também para o caso da malha adaptativa à fronteira de cavitação (tabelas 5.3 e 5.7) os resultados dos parâmetros globais forneceram erros percentuais inferiores a 1% para a maioria das malhas utilizadas. O parâmetro local α_{simetria} também sofreu pouca alteração já que o método prioriza o cálculo da fronteira de cavitação. A maior redução de tempo computacional (96%) aliada a erros relativos menores que 1% também foi obtida para uma malha de 30 X 16.

Usando o algoritmo de cavitação onde as pressões negativas são zeradas (tabelas 5.4 e 5.8) os parâmetros globais sofrem poucas alterações com a variação da malha computacional porém o parâmetro local α_{simetria} varia mais intensamente. Observa-se também que os erros relativos obtidos de cada parâmetro para as relações de excentricidades utilizadas não seguiram uma mesma tendência. Isto pode ser visto se por exemplo os erros de α_{simetria} forem analisados. Enquanto o erro α_{simetria} para $\varepsilon=0,4$ passa de 15,7% na malha de 60X16 para 22,8% na malha de 40X21 na relação $\varepsilon=0,8$ ocorre uma variação inversa de 8,4% para 0,77% respectivamente para as mesmas malhas analisadas.

O algoritmo de Elrod (tabelas 5.5 e 5.9) se mostrou bastante dependente da malha e tanto os parâmetros globais como o local variaram intensamente.

Das tabelas anteriores conclui-se que tanto no algoritmo de cavitação quanto no algoritmo de Elrod, deve ser usada uma malha bem refinada a fim de se garantir resultados confiáveis, porém com prejuízo de tempo computacional, que se tornará elevado.

Tempo computacional reduzido aliado a bons resultados em relação a malha refinada foi obtido nas condições de Gumbel e da malha adaptativa à fronteira. Porém sabe-se que na condição de Gumbel há um erro devido ao fato de não se considerar que existe filme de óleo que sustenta carga depois da posição $\theta = \pi$. Isto pode ser verificado pelos baixos valores do número de Sommerfeld das tabelas 5.1 e 5.5. Para carregamento estático, a condição da malha adaptativa à fronteira fornece bons resultados com baixo tempo computacional indicando ser esta melhor opção para a simulação de mancais radiais, conforme relatado por Prata e Ferreira (1990).

Comparando os dados de literatura (conforme tabela 5.1) com os valores dos parâmetros globais (Δ e $P_{\max.}/W_{\text{proj}}$) obtidos para cada condição de contorno e considerando a malha 90X60 observa-se boa concordância de resultados. Com exceção da condição de Gumbel, pois como já se sabe que seus valores devem ser considerados apenas qualitativamente, os erros relativos não passaram de 3%.

Uma grandeza interessante de se analisar é as que envolvem o atrito nos mancais. Dependendo do domínio de solução que cada condição de contorno determina, o cálculo da força de atrito pode ser subestimado. Isto porque na região de cavitação há energia dissipada por atrito e portanto deve ser considerada nos cálculos. Porém isto é comumente desprezado pois o domínio de solução muitas vezes não engloba tal região. Na tabela 5.10 estão relacionados os parâmetros de potência dissipada nos mancais e uma relação adimensional comumente adotada e definida como $(R/c) \frac{F_{\text{atrito}}}{W}$ onde “ F_{atrito} ” é a força de atrito viscoso, “ W ” é a carga que o mancal suporta, “ R ” é o raio do mancal e “ c ” é a folga radial. Observe que a relação F_{atrito}/W representa o coeficiente de atrito. Os resultados são referentes aos mesmos dados de entrada das tabelas anteriores porém apenas para o caso de $\epsilon=0,8$ e malha de 90X60.

TABELA 5.10 - Atrito em mancais radiais para várias condições de contorno

	Gumbel	Malha Adaptativa	Algoritmo de Cavitação	Algoritmo de Elrod	Cameron	Pinkus
Potência Dissipada [W]	35,35	40,09	66,50	65,1	x	x
$(R/c) \frac{F_{\text{atrito}}}{W}$	1,946	2,002	3,234	3,206	3,25	3,24

Pela Tabela 5.10 nota-se que para as condições de contorno que não excluem o cálculo da força de atrito na região de cavitação (algoritmo de Elrod e de cavitação) se aproximam mais dos resultados de literatura e fornecem valores de potência dissipada nos mancais superiores aos outros métodos.

5.3 Carregamento Dinâmico com Carga Constante

Para carregamento dinâmico com carga constante o eixo descreve uma trajetória cíclica que tende a convergir para um ponto de equilíbrio. A trajetória do eixo foi calculada considerando-se a massa do eixo, e os seguintes parâmetros geométricos e operacionais foram utilizados;

$$L/D = 0,5 ; \quad c = 250 \mu\text{m} ; \quad D = 0,07 \text{ m} ; \quad \text{rot} = 3000 \text{ rpm} ; \quad W = 26,5\text{N}$$

A malha utilizada foi 50 X 30, a variação do tempo adimensional foi de $\tau = 0,04$ e a massa do eixo adotada é W/g onde g é a aceleração da gravidade.

Foram executados dois casos distintos variando-se a viscosidade do óleo lubrificante. Nos gráficos abaixo são mostradas as trajetórias descritas para cada caso com as diferentes condições de contorno de cavitação adotadas. Os tempo computacionais se referem ao IBM3090.

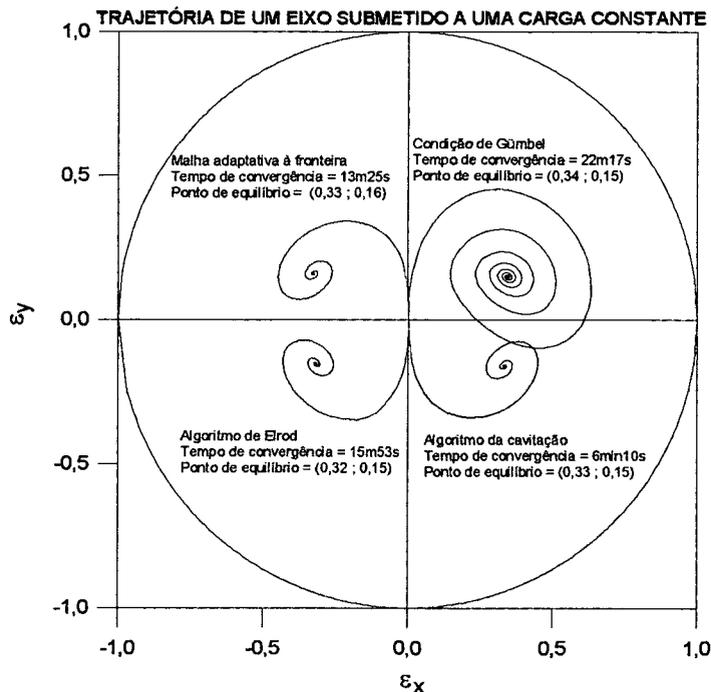


Figura 5.1 - Trajetória do eixo para $\mu = 0,01 \text{ Pa}\cdot\text{s}$

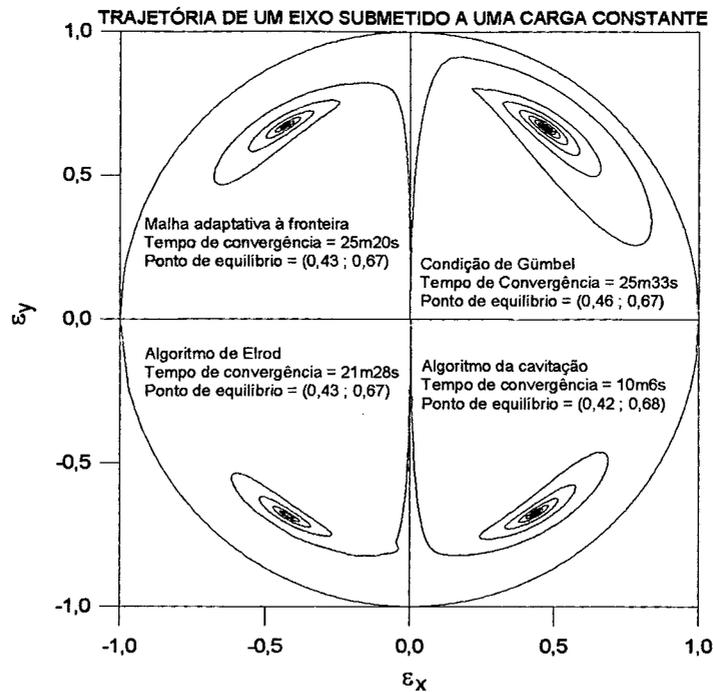


Figura 5.2 - Trajetória do eixo para $\mu = 0,001 \text{ Pa}\cdot\text{s}$

Para a convergência da trajetória também foi adotada uma tolerância de 10^{-4} . O algoritmo da cavitação fornece o menor tempo computacional para os dois casos explorados. Isto é devido ao menor número de ciclos iterativos que tal condição requer.

Para todos os casos o ponto de equilíbrio foi praticamente comum em todas as condições de contorno avaliadas. Isto valida a formulação para um sistema fixo de coordenadas.

5.4 Carregamento Dinâmico

Uma maneira de se garantir que os modelos numéricos adotados estão validados para carregamento dinâmico alternativo é simulando casos de carregamentos particulares, onde a trajetória pode ser prevista.

O primeiro teste a ser feito será o caso onde um dos mecanismos de geração de pressão, o efeito cunha, se torna nulo. Desta forma, apenas o efeito de filme espremido será responsável pela geração de pressão no mancal. Manke (1991), analisou tal caso e constatou que a trajetória

do eixo teria que ser helicoidal, aproximando-se gradativamente da parede do mancal. Para que o efeito cunha seja anulado, Manke (1991) assumiu uma carga de magnitude e rotação constantes e a velocidade angular da carga igual à metade da velocidade do eixo conforme figura 5.3.

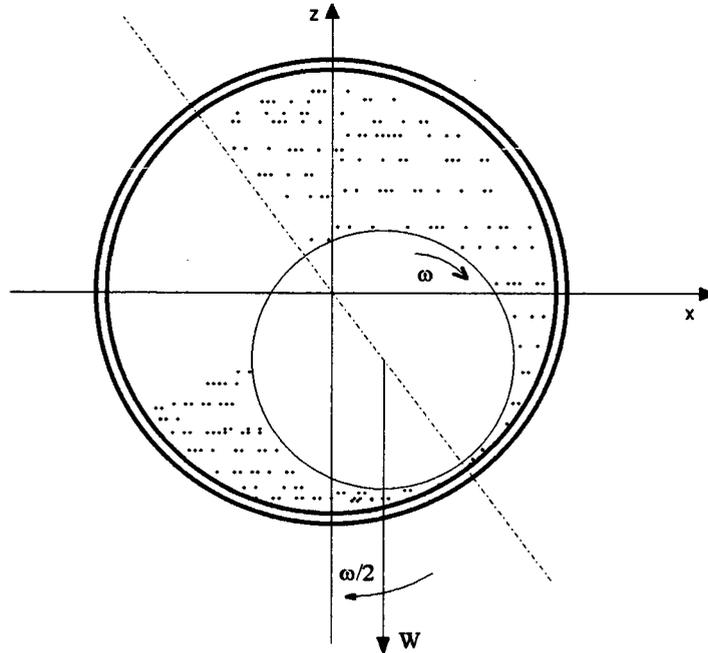
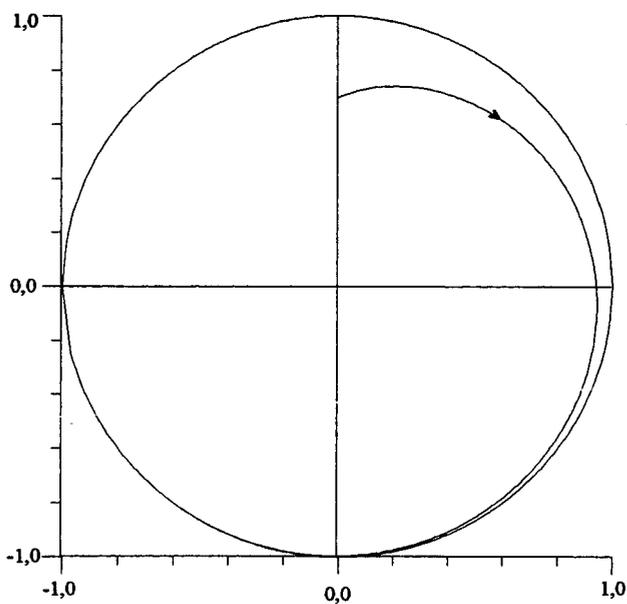


Figura 5.3 - Esquema de carregamento de magnitude e rotação constantes

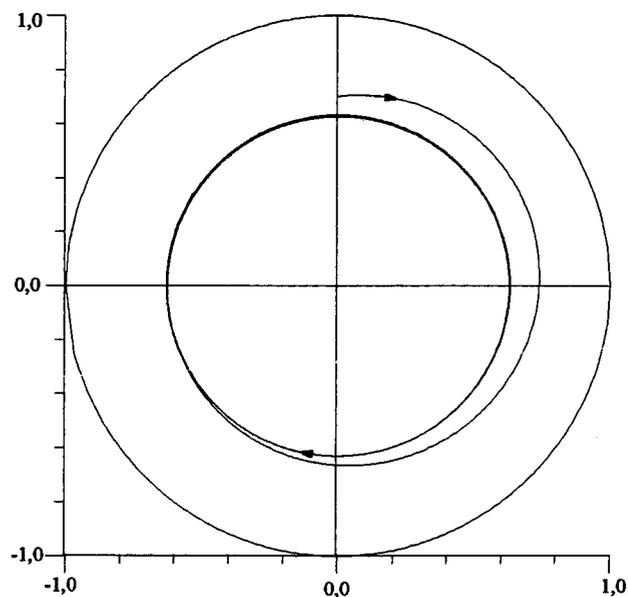
Os dados operacionais utilizados para a simulação foram:

$$L/D = 1/4 ; \quad c = 25 \mu\text{m} ; \quad D = 0,14 \text{ m} ; \quad \text{rot} = 3000 \text{ rpm} ; \quad \mu = 0,01 \text{ Pa.s} ; \quad W = 21,4 \text{ kN}$$

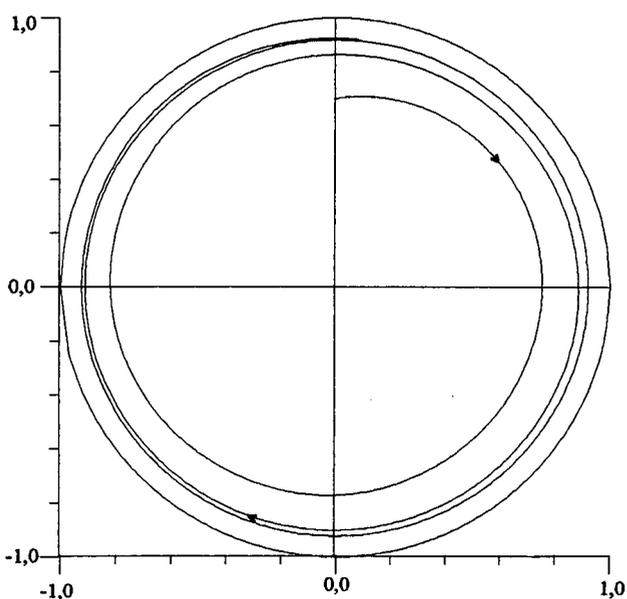
As figuras 5.4a-d mostram as trajetórias obtidas para todas as condições de contorno em estudo.



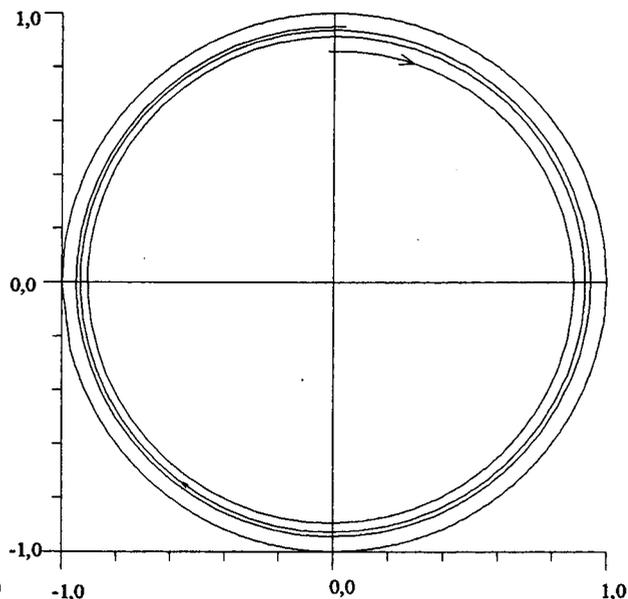
(a) - Gumbel



(b) - Algoritmo de cavitação



(c) - Elrod



(d) - Malha adaptativa

Figura 5.4 - Trajetória para um mancal sob carga de magnitude e rotação constantes ($=\omega/2$)

Na condição de Gumbel (figura 5.4a) a força hidrodinâmica não foi capaz de sustentar o eixo por mais de um ciclo. No algoritmo de cavitação (figura 5.4.b) houve uma redução na excentricidade do eixo e a trajetória é aparentemente circular, porém o que ocorre é um processo de divergência muito lento. Já no algoritmo de Elrod (figura 5.5c) e na malha adaptativa (figura

5.4d) a trajetória helicoidal está presente, todavia o algoritmo de Elrod possui uma divergência mais lenta.

A seguir um outro caso de carregamento dinâmico será explorado com o intuito de validar as metodologias utilizadas. Para tal deve-se notar que no carregamento dinâmico de uma máquina alternativa o eixo descreve uma trajetória periódica. Isto porque para cada instante de tempo uma carga de intensidade e direção distinta atua no eixo, de acordo com um ciclo. Para uma análise do desempenho de cada condição de contorno, para carregamento dinâmico foram utilizados quatro carregamentos diferentes, cuja carga varia analogamente à trajetória descrita por um pêndulo. Desta forma os quatro carregamentos obtidos podem ser vistos na figura 5.5. Observe que cada carregamento representa um ciclo completo (ida e volta) do pêndulo e a carga se movimenta ao longo de cada uma das quatro curvas mostradas na figura 5.3.

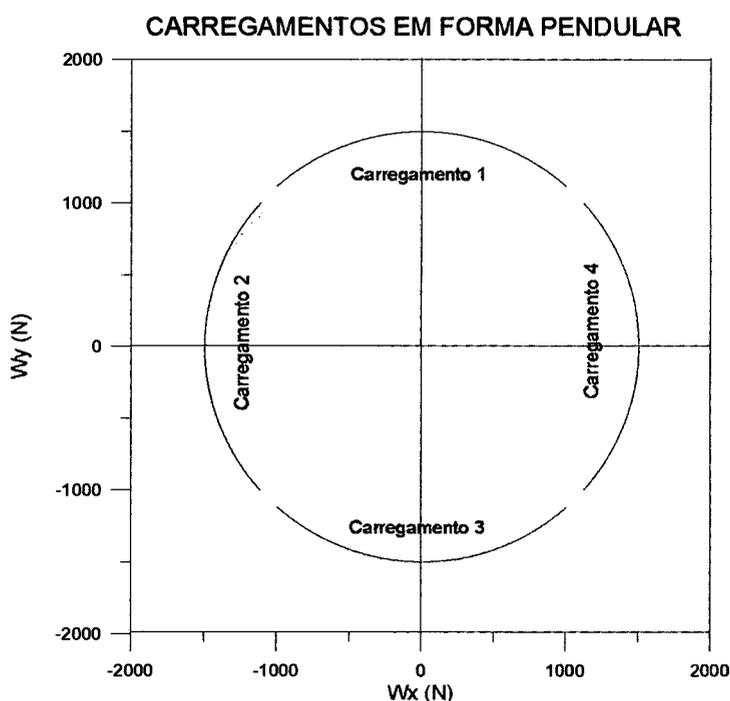


Figura 5.5 - Carregamentos Pendulares

Os parâmetros geométricos e operacionais que foram utilizados são;

$$L/D = 0,5 ; \quad c = 50 \mu\text{m} ; \quad D = 0,07 \text{ m} ; \quad \text{rot} = 3000 \text{ rpm} ; \quad \mu = 0,01 \text{ Pa.s}$$

As trajetórias descritas para cada carregamento e para cada condição de cavitação bem como os tempos computacionais correspondentes estão mostrados na figura 5.6.

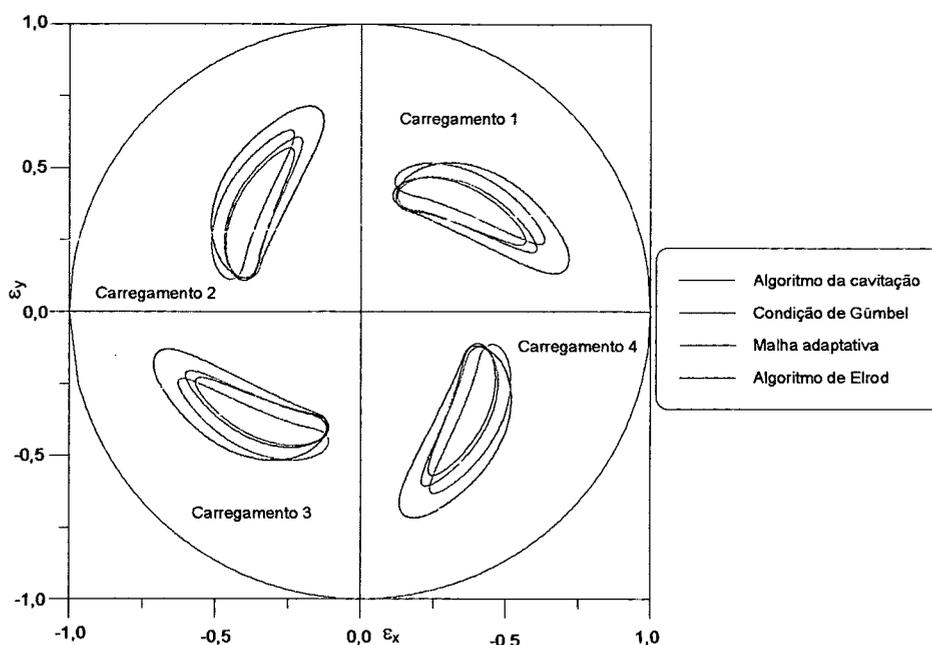


Figura 5.6 - Trajetórias descritas pelo centro do eixo sob carregamentos da figura 5.5

Os tempos computacionais obtidos em uma estação de trabalho Sun Sparc 10, Processador Modelo 51 foram os seguintes:

Algoritmo da cavitação = 36m 51s

Condição de Gumbel = 23m 9s

Malha adaptativa = 38m 25s

Algoritmo de Elrod = 16m 34s

As trajetórias obtidas para cada condição só se diferenciam pela posição em relação aos eixos coordenados. Tal fato já era esperado pois o mesmo acontece com os respectivos carregamentos (ver figura 5.5). Essas trajetórias validam toda a formulação matemática e convenções de sinais (ângulos e vetores) adotadas na programação computacional com respeito aos quadrantes do sistema de coordenadas.

Quanto às trajetórias descritas para cada condição observa-se que para a condição de Gumbel o eixo percorre uma distância maior no ciclo. Isto é devido à menor força hidrodinâmica

gerada pois o campo de pressão está limitado entre 0 e π . A condição de malha adaptativa e o algoritmo de Elrod descrevem trajetórias bastante semelhantes porém o algoritmo de Elrod esteve praticamente em todos os instantes de tempo com excentricidade superior àquela obtida pela condição de malha adaptativa. O algoritmo de cavitação se mostrou em quase todos os instantes concordante com a condição de malha adaptativa.

Em seguida serão apresentados resultados para um carregamento dinâmico bem mais complexo que os explorados até então. Tal carregamento que é tradicionalmente usado para a validação de modelos de simulação de mancais submetidos a carregamentos alternativos é apresentado em Jones (1982). O carregamento mostrado atua no mancal principal intermediário de um motor a gasolina, de 4 tempos, 1,8 litros e 4 cilindros, e é apresentado na figura 5.7.

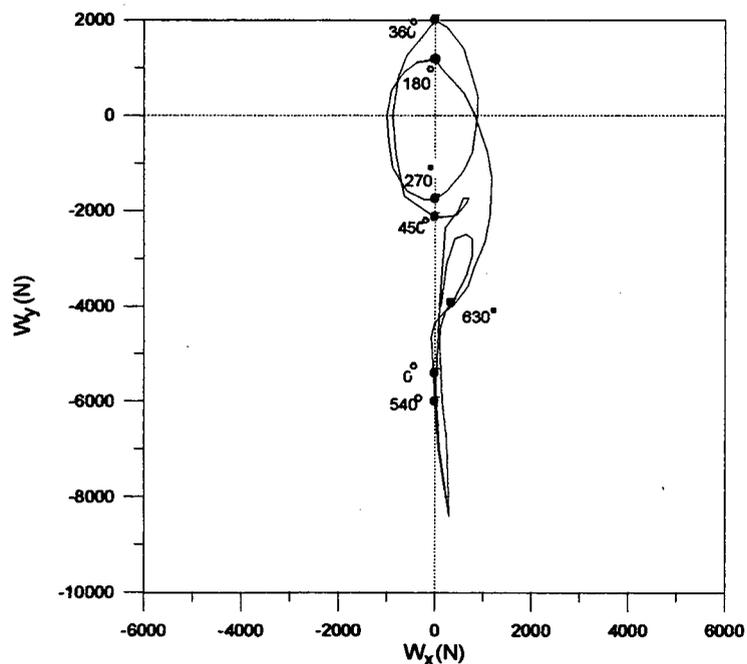


Figura 5.7 - Carregamento do mancal principal de um motor de combustão interna segundo Jones

Os parâmetros geométricos e operacionais que foram utilizados são;

$$c = 56 \mu\text{m}; \quad L = 0,0185 \text{ m}; \quad D = 0,054\text{m}; \quad \text{rot} = 4000 \text{ rpm}; \quad \mu = 0,007 \text{ Pa.s}$$

A malha utilizada foi de 60 X 10 nas direções circunferencial e axial, respectivamente, e o intervalo de tempo adimensional foi de $8,7266 \cdot 10^{-3}$.

As figuras 5.8a, 5.8b, 5.8c, 5.8d mostram as trajetórias descritas pelo eixo para todas as metodologias de cálculo utilizadas na presente dissertação. Observa-se que apesar da grande

complexidade do carregamento todas as quatro metodologias foram capazes de reproduzir a órbita do eixo.

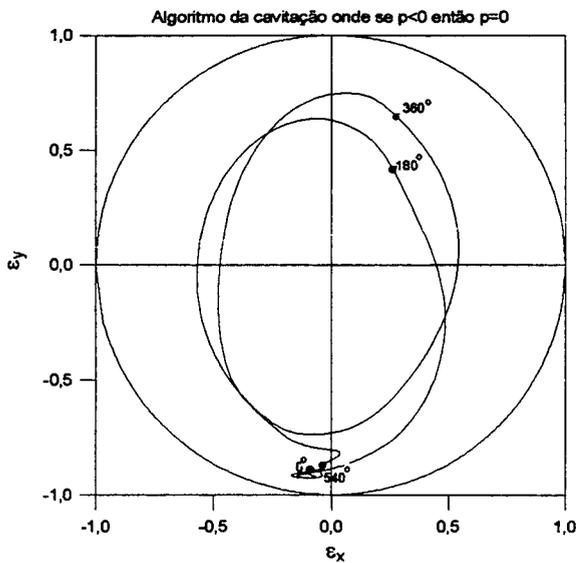


Figura 5.8a - Trajetória 1

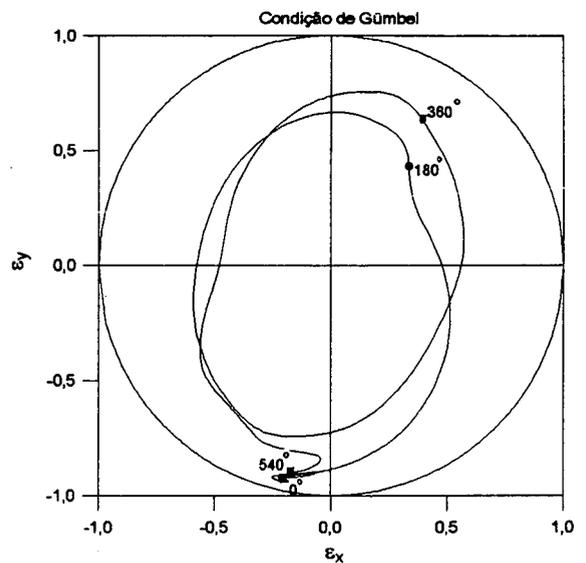


Figura 5.8b - Trajetória 2

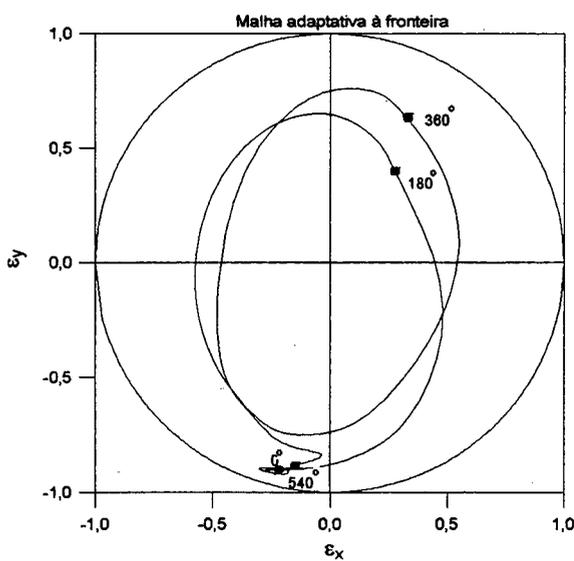


Figura 5.8c - Trajetória 3

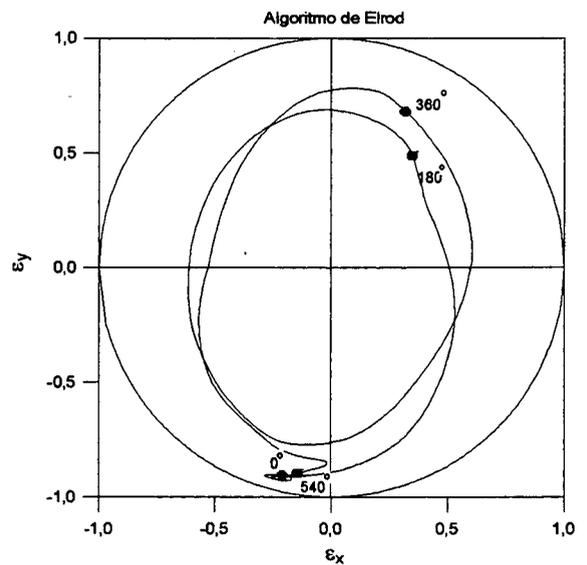


Figura 5.8d - Trajetória 4

Figura 5.8 - Trajetórias do centro do eixo, conforme carregamento da figura 5.7

Os tempos computacionais obtidos em uma estação de trabalho Sun Sparc 10, Processador Modelo 51 foram os seguintes:

Algoritmo da cavitação = 2h 11m 26s

Condição de Gumbel = 1h 31m 16s

Malha adaptativa = 2h 41m 37s

Algoritmo de Elrod = 30m 32s

Assim como no caso do carregamento pendular, as trajetórias obtidas pela condição de malha adaptativa e pelo algoritmo de cavitação foram concordantes. Na condição de Gumbel e no algoritmo de Elrod nota-se o aparecimento de uma pequena reentrância (1° quadrante nas figuras 5.8b e 5.8d) nas órbitas do eixo. Tais reentrâncias não puderam ser explicadas por razões físicas e podem estar associadas a aproximações numéricas. Malhas mais refinadas e intervalos de tempos menores foram considerados no intuito de se eliminar tal peculiaridade porém não houve mudanças na órbita do eixo. O algoritmo de Elrod foi o que consumiu o menor tempo computacional. Este bom desempenho do algoritmo de Elrod está bastante associado ao uso de coeficientes de sub-relaxação para a trajetória mais elevados (0,04) que aqueles utilizados pelos outros métodos (inferior a 0,01).

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES

O presente trabalho enfocou a simulação numérica de mancais radiais com particular ênfase na modelagem da cavitação do filme de óleo que ocorre na parte divergente da folga radial entre o eixo e a bucha do mancal.

A simulação de mancais radiais é feita através da integração numérica da equação de Reynolds, que é a equação diferencial que descreve a distribuição do campo de pressão no mancal. Presentemente há muitos estudos sobre a determinação precisa das condições de contorno para o problema da lubrificação hidrodinâmica. A dificuldade maior está na implementação de modelos que possam representar a cavitação do filme de óleo e desta forma possibilitar a integração da equação de Reynolds. Este trabalho apresentou uma síntese das principais metodologias empregadas para a resolução da equação de Reynolds. Quatro condições de contorno foram exploradas. Tais condições representam as práticas mais adotadas para simular a cavitação e são resumidas a seguir:

1. Condição de Gumbel - assume filme de óleo contínuo em um domínio compreendido entre $0 \leq \theta \leq \pi$ e portanto não necessita da determinação da fronteira de cavitação. Este método viola a lei da conservação da massa mas ainda é bastante empregado.
2. Condição de Reynolds - exige o cálculo da fronteira de cavitação (α) e o domínio de solução adotado é $0 \leq \theta \leq (\pi + \alpha)$. Tal método preserva a conservação da massa e requer o uso de malhas adaptativas.
3. Algoritmo de Cavitação - utiliza um domínio de solução $0 \leq \theta \leq 2\pi$ mas não calcula diretamente a posição da fronteira de cavitação. Tal método usa um artifício onde as pressões negativas que são geradas pela equação de Reynolds são zeradas a cada iteração até que o

campo de pressão esteja convergido. Este procedimento faz com que a lei da conservação da massa seja violada.

4. Teoria JFO - considera como domínio de solução $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Este método substitui a variável pressão da equação de Reynolds por uma variável denominada de densidade adimensional (ρ/ρ_c). Quando esta densidade adimensional se torna menor que a unidade indica que o óleo começa a escoar em estrias e nesta posição está a fronteira de cavitação. Esta metodologia preserva a conservação da massa e, na presente dissertação, foi implementada através do algoritmo de Elrod.

Até então, na formulação matemática das equações que governam o problema de lubrificação hidrodinâmica, era adotado um sistema móvel de coordenadas, onde, para a direção circunferencial, a origem era coincidente com a linha de centros do sistema eixo-mancal. Neste trabalho a equação de Reynolds foi deduzida e integrada para um sistema fixo de coordenadas. Esta abordagem é original e constitui uma das contribuições da presente dissertação. A utilização de um sistema de coordenadas fixo é particularmente vantajoso na inclusão de orifícios e ranhuras de alimentação de óleo.

Os resultados obtidos com carregamento estático mostram que o método da Malha Adaptativa à Fronteira que emprega a condição de Reynolds fornece os melhores resultados associados com o baixo tempo computacional. Quando o interesse for meramente qualitativo a condição de Gumbel é a mais indicada. O algoritmo de Elrod e o algoritmo da cavitação só fornecem resultados confiáveis para malhas mais refinadas. Quando se desejar cálculos que envolvam perdas por atrito em mancais, recomenda-se utilizar o algoritmo de Elrod ou o algoritmo de cavitação por considerarem a região de cavitação nos cálculos de força de atrito e potência dissipada.

Para carregamento dinâmico com carga constante onde o eixo descreve uma trajetória até convergir em um ponto, o algoritmo da cavitação forneceu os menores tempos computacionais para a convergência. Para a malha utilizada todas as metodologias em estudo levaram o eixo para uma mesma posição pontual. A condição de Gumbel levou mais tempo para atingir a convergência. Na resolução das equações algébricas foi utilizado o esquema TDMA linha por

linha. O método da fatorização aproximada levou a tempos computacionais bastante elevados. Para a determinação da trajetória do eixo foi utilizado o método de Runge-Kutta.

Os resultados obtidos com carregamento dinâmico e carga variável foram todos a favor do algoritmo de Elrod. Um dos motivos que conduzem a essa superioridade é o fato deste método utilizar coeficientes de sub-relaxação da trajetória superiores aos outros métodos. Além disso o algoritmo de Elrod possui um ciclo iterativo a menos que o método da malha adaptativa, pois a fronteira de cavitação é calculada automaticamente pelo campo de densidade adimensional obtido. Em todos os casos as equações algébricas foram resolvidas pelo TDMA linha por linha. Quando o método da fatorização aproximada era utilizado a solução era sempre divergente.

O presente trabalho indicou algumas alternativas metodológicas para a determinação do campo de pressão em mancais radiais. O mundo tecnológico está sempre aprimorando e inventando novos sistemas mecânicos com partes móveis e que, pela escassez de energia, necessitam minimizar as perdas por atrito com baixo consumo de óleo lubrificante. A comunidade científica e os interesses tecnológicos têm, cada vez mais, se preocupado com a precisão de resultados de simulação a baixos custos e tempos computacionais. Isto porque dentre os novos desafios da lubrificação hidrodinâmica estão o acoplamento de sistemas de mancais, a inserção da equação de energia para se considerar a variação da viscosidade do óleo lubrificante, e a consideração das deformações elásticas no mancal. Todos esses fatores requerem que o sistema computacional utilizado para a simulação de mancais seja mais rápido e possua maior capacidade de memória, o que torna o estudo do desempenho de mancais demasiadamente caro. O algoritmo de Elrod está sendo uma ferramenta fundamental para este fim, pois para carregamento dinâmico com carga variável, fornece bons resultados a baixo custo computacional.

Outra direção a ser explorada é o estudo de métodos numéricos para a resolução iterativa das equações algébricas. O método da fatorização aproximada explorado aqui não forneceu bons resultados embora haja trabalhos publicados que garantem que o método reduz consideravelmente o tempo computacional (Vijayaraghavan and Keith, 1990).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BIRKHOFF, G. and HAYS, D.F., (1963) - *Free Boundaries in Partial Lubrication*, **Journal of Mathematical Physics**, V. 42, p. 126-138.

BRAUN, M.J. and HENDRICKS, R.C., (1983) - *An Experimental and Investigation of the Vaporous/Gaseous Cavity Characteristics of a Eccentric Journal Bearings*, **ASME Journal of Lubrication Technology**, V. 27,1, p. 1-14.

BREWE, D.E., (1986) - *Theoretical Modeling of the Vapor Cavitation in Dynamically Loaded Journal Bearings*, **ASME Journal of Tribology**, V. 108, p. 628-638.

CAMERON, A. , (1966) - *The Principles of Lubrication*, **Longman Green**, London.

CARL, T.E., (1962) - *Das Zylindrische Gleitlager unter Konstanter und Sinusformiger Belastung*, Karlsruhe.

COLE, J.A. and HUGHES, C.J., (1956) - *Oil Flow and Film Extent in Complete Journal Bearings*, **Proceedings of Institution of Mechanical Engineers**, V. 170, p. 499-510.

COYNE, J.C. and ELROD, JR.,H.G., (1970) - *Conditions for Rupture of a Lubricating Film Part I: Theoretical Model*, **ASME Journal of Lubrication Technology**, V. 92, p. 451-456.

COYNE, J.C. and ELROD, JR.,H.G., (1971) - *Conditions for Rupture of a Lubricating Film Part II: New Boundary Conditions for Reynolds Equation*, **Transactions of ASME**, V. 93, p. 156-167.

DOWSON, D., (1979) - *History of Tribology*, **Longman Green**, London and New York.

DOWSON, D. and TAYLOR, C.M., (1979) - *Cavitation in Bearings*, **Annual Review of Fluid Mechanics**, Palo Alto, CA, V. 11, p. 5-66.

DOWSON, D., (1957) - *Cavitation in Lubricating Films Supporting Small Loads*, **Proceedings of Institution of Mechanical Engineers, Conference of Lubrication and Wear**, p. 93-99.

ELROD, JR., H.G., (1981) - *A Cavitation Algorithm*, **ASME Journal of Lubrication Technology**, V. 103, p. 350-354.

ELROD, JR., H.G. and ADAMS, M.L., (1974) - *A Computer Program for Cavitation and Starvation Problems*, **Cavitation and Related Phenomena in Lubrication**, **Mechanical Engineering Publications**, New York, p. 37-41.

ETSION, I. and LUDWIG, L.P., (1982) - *Observation of Pressure Variation in the Cavitation Region of Submerged Journal Bearings*, **ASME Journal of Lubrication Technology**, V. 104, p. 157-163.

FLOBERG, L., (1957) - *Infinite Journal Bearing Considering Vaporization*, **Transaction of Chalmers University of Technology**, Guthenberg, Sweden, V. 189.

FLOBERG, L., (1960) - *Two Groove Journal Bearing Considering Vaporization*, **Transaction of Chalmers University of Technology**, Guthenberg, Sweden, V. 232.

FLOBERG, L., (1961) - *Boundary Conditions of Cavitation Regions in Journal Bearing*, **ASLE Transactions**, V. 4, p. 282-286.

FLOBERG, L., (1961) - *Experimental Investigation of Cavitation Regions in Journal Bearings*, **Transaction of Chalmers University of Technology**, Guthenberg, Sweden, V. 238.

FLOBERG, L.,(1965) - *On Hydrodynamic Lubrication with special Reference to Sub-Cavity Pressures and Number of Streamers in Cavitation Regions*, **Acta Polytechnic Scand. Mechanical Engineering Series**, V. 19.

FULLER, D.D., (1984) - *Theory and Practice of Lubrication for Engineers*, **2nd edition, John Wiley and Sons**, New York.

GÜMBEL, L. and EVERLING, E., (1925) - *Reibung und Schmierung in Maschinenbau*, Berlin.

GÜMBEL, L. K. R., (1921) - *Verleich der Ergebrusse der Rectinerischen Behandlung des Lagerschmierangproblem mir Neueren Veisuchsegebrussen*, **Monatsbl. Berliner Bez. Ver. Dtsch. ing.**, p. 125-128.

HOPKINS , M.R., (1957) - *Viscous Flows between Rotating Cylinders and a Sheet Moving between Them*, **British Journal of Applied Physics**, V. 8, p. 442-447.

JAKOBSSON, B. and FLOBERG, L., (1957) - *The Finite Journal Bearing Considering Vaporization*, **Transaction of Chalmers University of Technology**, Guthenberg, Sweden, V. 190.

JAKOBSSON, B.O. and HAMROCK, B.J., (1983) - *High Speed Motion Picture Camera Experiments of Cavitation in Dynamically Loaded Journal Bearings*, **ASME Journal of Lubrication Technology**, V. 105, p. 446-452.

JONES, G. J., (1982) - *Crankshaft Bearings: Oil Film History*, **Proceedings of the 9th Leeds - Lyon Tribology Symposium**, p. 83-88.

MANKE, A.L., (1991) - *Uma Metodologia de Cálculo para a Simulação de Mancais Radiais Submetidos a Carregamento Dinâmico*, **Dissertação de Mestrado, UFSC**.

MCBROOM, H.L., (1953) - *Cavitation in Journal Bearings*, **Scientific Lubrication**.

MICHELL, A.G.M., (1929) - *Progress in Fluid Film Lubrification*, **Trans. ASME**, V. 51, p. 153-163.

OCVIRK, F.N. and DUBOIS, G.B., (1953) - *Analytical Derivation and Experimental Evaluation of Short Bearings_Aproximations of Full Journal Bearings*, **NACA Tech.Rep. n. 1157**.

OLSSON, K.O., (1965) - *Cavitation in Dynamically Loaded Bearing*, **Transaction of Chalmers University of Technology**, Guthenberg, Sweden, V. 308.

PARANJPE, R.S., (1992) - *Analysis of Non-Newtonian Effects in Dynamically Loaded Finite Journal Bearings Including Mass Conserving Cavitation*, **ASME Journal of Tribology**, V. 114, p. 736-746.

PATANKAR, S. V., (1980) - *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, **Hemisphere Publising Corp.**, New York.

PETROV, N. P. (1883) - *Friction in Machines and the Effect of the Lubrificant*, **Inzheneronii Zhurnall St. Petersburg**, V. 1, p. 71-140; V. 2, p. 227-279; V. 3, p. 377-436; V. 4, p. 435-464.

PINKUS, O. and STERNLICHT, B. (1961) - *Theory of Hydrodynamic Lubrication*, **McGraw-Hill Book Co.**, New York.

PRATA, A. T., FERREIRA, R. T. S., LILIE, D. E. B. and BORTOLI, M. G. D., (1988) - *Dynamically Loaded Journal Bearing - Finite Volume Method Analysis*, **Proceedings of the International Compressor Engineering Conference**, West Lafayette, USA, V.I, p. 34-41.

PRATA, A. T. and FERREIRA, R. T. S (1990) - *The Accuracy of Short Bearing Theory in Presence of Cavitation*, **ASME Journal of Tribology**, V. 112, p. 650-654.

PRATA, A. T., (1992) - *Lubrificação Hidrodinâmica de Mancais Radiais*, Apostila do curso de **Lubrificação do CPGEM-UFSC**.

SOMMERFELD, A., (1904) *Zur Hydrodynamiscian Theorie der Schmiermitteerhreibung*, **Z Math. Phys.**, V. 50, p. 97-155.

STIEBER, W., (1933) - *Das Schwimmlager Hydrodynamische Theorie des Gleitlagers*, **Berlin: Ver Dtsch. Ing.**, 1933.

SWIFT, H.W., (1931) - *The Stability of Lubricating Films in Journal Bearings*, **Journal of Institution of Civil Engineers**, V. 233, Part 1, p. 267-288.

TAYLOR, G.I., (1963) - *Cavitation of a Viscous Fluid in Narrow Passages*, **J. Fluid Mech.**, V. 16, p. 595-617.

TOWER, B., (1883) - *1st. Report on Friction Experiments*, **Proc.Inst. Mech. Eng.**, V. 35, 29-35

VIJAYARAGHAVAN, D. and KEITH, JR., T.H., (1989a) - *Numerical Prediction of Cavitation in Noncircular Journal Bearings*, **Tribology Transactions**, V. 32, 2, p. 215-224.

VIJAYARAGHAVAN, D. and KEITH, JR., T.H., (1989b) - *Development and Evaluation of a Cavitation Algorithm*, **Tribology Transactions**, V. 32, 2, p. 225-233.

VIJAYARAGHAVAN, D. and KEITH, JR., T.H., (1990a) - *An Efficient, Robust, and Time Accurate Numerical Scheme Applied to a Cavitation Algorithm*, **ASME Journal of Tribology**, V. 112, p. 44-51.

VIJAYARAGHAVAN, D. and KEITH, JR., T.H., (1990b) - *Grid Transformation and Adaption Techniques Applied in the Analysis of Cavitated Journal Bearings*, **ASME Journal of Tribology**, V. 112, p. 52-59.

VIJAYARAGHAVAN, D. and KEITH, JR.,T.H., (1990c) - *Analysis of Finite Grooved Misaligned Journal Bearing Considering Cavitation and Starvation Effects*, **ASME Journal of Tribology**, V. 112, p. 60-67.

VIJAYARAGHAVAN, D. and BREWE,D.E., (1992) - *Frequency Effects on the Stability of a Journal Bearing for Periodic Loading*, **ASME Journal of Tribology**, V. 114, p. 107-115.

WHITE, F. M., (1974) - *Viscous Fluid Flow*, **McGraw-Hill Inc.**, New York.

WOODS, C.M.and BREWE, D.E., (1989) - *The Solution of the Elrod Algorithm for a Dynamically Loaded Journal Bearing Using Multigrid Techniques*, **ASME Journal of Tribology**, V. 111, p. 302-308.

APÊNDICE A

ADIMENSIONALIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DE REYNOLDS

A equação de Reynolds dimensional e generalizada é a dada por

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta_f} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta_f} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \frac{\omega}{2} \frac{\partial h}{\partial \theta_f} + \omega_h \quad (\text{A.1})$$

Usando as expressões de $h(\theta_f)$ da equação (2.9h) e de $\omega_h(\theta_f)$ da equação (2.11) e fazendo

$$\varepsilon_x = \frac{e_x}{c} \quad \text{e} \quad \varepsilon_z = \frac{e_z}{c} \quad (\text{A.2})$$

resulta em,

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta_f} \left[\frac{c^3 (1 - \varepsilon_x \sin \theta_f - \varepsilon_z \cos \theta_f)^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta_f} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{c^3 (1 - \varepsilon_x \sin \theta_f - \varepsilon_z \cos \theta_f)^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right] = \frac{\omega c}{2} (-\varepsilon_x \cos \theta_f + \varepsilon_z \sin \theta_f) - c \varepsilon_x \sin \theta_f - c \varepsilon_z \cos \theta_f \quad (\text{A.3})$$

A equação (A.2) pode ser adimensionalizada se as seguintes variáveis forem utilizadas

$$p^* = \frac{pc^2}{6\mu\omega R^2} \quad (\text{A.4a})$$

$$\xi = \frac{y}{R} \quad (\text{A.4b})$$

$$\tau = \omega t \quad (\text{A.4c})$$

$$\dot{\varepsilon}_x^* = \frac{d\varepsilon_x}{d\tau} \quad e \quad \dot{\varepsilon}_z^* = \frac{d\varepsilon_z}{d\tau} \quad (\text{A.4d})$$

Assim, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta_f} \left[(1 - \varepsilon_x \sin \theta_f - \varepsilon_z \cos \theta_f)^3 \frac{\partial p^*}{\partial \theta_f} \right] + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1 - \varepsilon_x \sin \theta_f - \varepsilon_z \cos \theta_f)^3 \frac{\partial p^*}{\partial \xi} \right] = \\ (-2\dot{\varepsilon}_z^* + \varepsilon_x) \cos \theta_f + (-2\dot{\varepsilon}_x^* + \varepsilon_z) \sin \theta_f \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Se a variável adimensional $P = p^* (1 - \varepsilon_x \sin \theta_f - \varepsilon_z \cos \theta_f)^{3/2}$ for utilizada na equação acima, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta_f} \left\{ (1 - \varepsilon_x \sin \theta_f - \varepsilon_z \cos \theta_f)^3 \frac{\partial}{\partial \theta_f} \left[P (1 - \varepsilon_x \sin \theta_f - \varepsilon_z \cos \theta_f)^{-3/2} \right] \right\} \\ + \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ (1 - \varepsilon_x \sin \theta_f - \varepsilon_z \cos \theta_f)^3 \frac{\partial}{\partial \xi} \left[P (1 - \varepsilon_x \sin \theta_f - \varepsilon_z \cos \theta_f)^{-3/2} \right] \right\} = \\ -(2\dot{\varepsilon}_z^* + \varepsilon_x) \cos \theta_f + (-2\dot{\varepsilon}_x^* + \varepsilon_z) \sin \theta_f \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Para diminuir o tamanho e a complexidade das equações, a seguinte variável será utilizada

$$\bar{h} = \frac{h}{c} = (1 - \varepsilon_x \sin \theta_f - \varepsilon_z \cos \theta_f) \quad (\text{A.7})$$

Portanto, a equação (A.6) se torna,

$$\frac{\partial}{\partial \theta_f} \left[\bar{h}^3 \frac{\partial}{\partial \theta_f} (P \bar{h}^{-3/2}) \right] + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\bar{h}^3 \frac{\partial}{\partial \xi} (P \bar{h}^{-3/2}) \right] = -2 \frac{d\bar{h}}{dt} + \frac{d\bar{h}}{d\theta_f} \quad (\text{A.8})$$

Desenvolvendo as derivadas mais internas tem-se

$$\frac{\partial}{\partial \theta_f} \left(-3/2 \bar{h}^{1/2} \frac{d\bar{h}}{d\theta_f} P + \bar{h}^{3/2} \frac{\partial P}{\partial \theta_f} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\bar{h}^{3/2} \frac{\partial P}{\partial \xi} \right) = -2 \frac{d\bar{h}}{dt} + \frac{d\bar{h}}{d\theta_f} \quad (\text{A.9})$$

Fazendo o mesmo para as derivadas mais externas resulta em

$$-\frac{3}{2} P \left(\frac{d^2 \bar{h}}{d\theta_f^2} \bar{h}^{1/2} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{h}}{d\theta_f} \right)^2 \bar{h}^{-1/2} \right) + \bar{h}^{3/2} \frac{\partial^2 P}{\partial \theta_f^2} + \bar{h}^{3/2} \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} = -2 \frac{d\bar{h}}{dt} + \frac{d\bar{h}}{d\theta_f} \quad (\text{A.10})$$

Reorganizando de modo que no primeiro membro tenham somente as derivadas segundas de pressão obtém-se

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \theta_f^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} = \frac{\frac{3}{2} P \left(\frac{d^2 \bar{h}}{d\theta_f^2} \bar{h}^{1/2} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{h}}{d\theta_f} \right)^2 \bar{h}^{-1/2} \right)}{\bar{h}^{3/2}} + \frac{-2 \frac{d\bar{h}}{dt} + \frac{d\bar{h}}{d\theta_f}}{\bar{h}^{3/2}} \quad (\text{A.11})$$

Resolvendo o termo $\frac{d\bar{h}}{dt}$ tem-se

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \theta_f^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} = \frac{\frac{3}{2} P \left(\frac{d^2 \bar{h}}{d\theta_f^2} \bar{h}^{1/2} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{h}}{d\theta_f} \right)^2 \bar{h}^{-1/2} \right)}{\bar{h}^{3/2}} + \frac{-2 \left(\dot{\epsilon}_z \cos \theta_f + \dot{\epsilon}_x \sin \theta \right) + \frac{d\bar{h}}{d\theta_f}}{\bar{h}^{3/2}} \quad (\text{A.12})$$

ou

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \theta_f^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} = \frac{\frac{3}{4} P \left(2 \frac{d^2 \bar{h}}{d\theta_f^2} \bar{h} + \left(\frac{d\bar{h}}{d\theta_f} \right)^2 \right)}{\bar{h}^2} + \frac{-2 \left(\dot{\epsilon}_z \cos \theta_f + \dot{\epsilon}_x \sin \theta \right) + \frac{d\bar{h}}{d\theta_f}}{\bar{h}^{3/2}} \quad (\text{A.13})$$

A equação anterior pode ser rearranjada da seguinte forma,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial \theta_f^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial \xi^2} = -\frac{2\dot{\epsilon}_z^* \cos \theta_f}{\bar{h}^{3/2}} - \frac{2\dot{\epsilon}_x^* \sin \theta_f}{\bar{h}^{3/2}} + \frac{3}{4} \frac{1}{\bar{h}^2} \left[2 \frac{d^2 \bar{h}}{d\theta_f^2} \bar{h} + \left(\frac{d\bar{h}}{d\theta_f} \right)^2 \right] \mathbf{P} + \frac{d\bar{h}/d\theta_f}{\bar{h}^{3/2}} \quad (\text{A.14})$$

Então tem-se

$$\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial \theta_f^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial \xi^2} = \mathbf{A}(\theta_f) \dot{\epsilon}_z^* + \mathbf{B}(\theta_f) \dot{\epsilon}_x^* + \mathbf{C}(\theta_f) \mathbf{P} + \mathbf{D}(\theta_f) \quad (\text{A.15})$$

onde,

$$\mathbf{A}(\theta_f) = \frac{-2 \cos \theta_f}{\bar{h}^{3/2}} \quad (\text{A.16.a})$$

$$\mathbf{B}(\theta_f) = \frac{-2 \sin \theta_f}{\bar{h}^{3/2}} \quad (\text{A.16.b})$$

$$\mathbf{C}(\theta_f) = \frac{3}{4} \frac{1}{\bar{h}^2} \left[2 \frac{d^2 \bar{h}}{d\theta_f^2} \bar{h} + \left(\frac{d\bar{h}}{d\theta_f} \right)^2 \right] \quad (\text{A.16.c})$$

$$\mathbf{D}(\theta_f) = \frac{d\bar{h}}{d\theta_f} \frac{1}{\bar{h}^{3/2}} \quad (\text{A.16.d})$$

APÊNDICE B

DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DE REYNOLDS

A equação de Reynolds adimensional é dada pela seguinte equação

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \theta_f^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} = A(\theta_f) \dot{\xi}_z^* + B(\theta_f) \dot{\xi}_x^* + C(\theta_f) P + D(\theta_f) \quad (\text{B.1})$$

Considere o volume de controle e os parâmetros geométricos da figura B.1 abaixo.

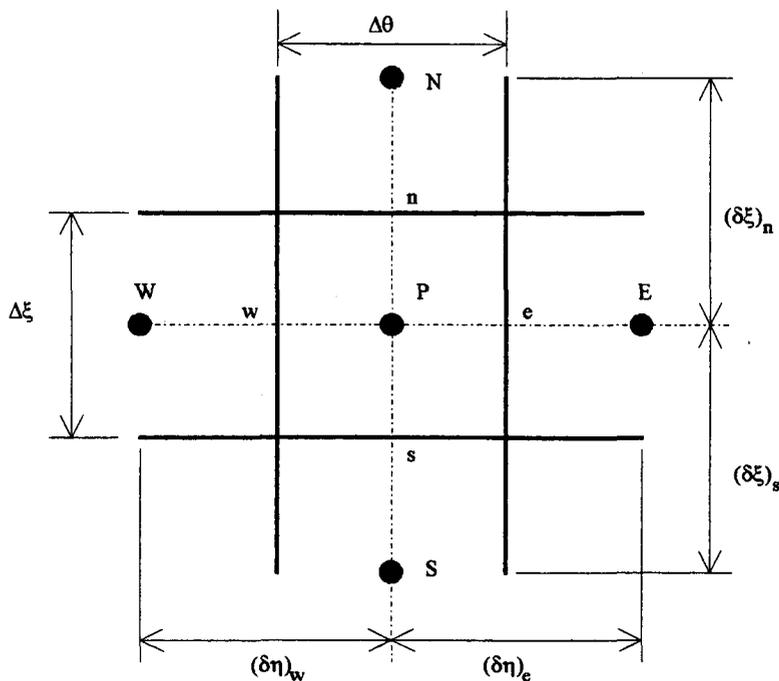


Figura B.1 - Volume de controle típico

Integrando a equação (B.1) ao longo de θ_f , nos limites genéricos de “w” e “e” obtém-se

$$\frac{\partial P}{\partial \theta_f} \Big|_e - \frac{\partial P}{\partial \theta_f} \Big|_w + \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} \Delta \theta_f = \left[A(\theta_f) \dot{\xi}_z^* + B(\theta_f) \dot{\xi}_x^* + D(\theta_f) \right]_P \Delta \theta_f + \left[C(\theta_f) P \right]_e - \left[C(\theta_f) P \right]_w \quad (\text{B.2})$$

As derivadas nas faces podem ser aproximadas por diferenças centrais da seguinte maneira

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \theta_f} \right|_e = \frac{P_E - P_P}{(\delta \theta_f)_e} \quad (\text{B.3a})$$

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \theta_f} \right|_w = \frac{P_P - P_W}{(\delta \theta_f)_w} \quad (\text{B.3b})$$

As pressões nas faces são obtidas pela média aritmética que segue,

$$P_e = \frac{P_E + P_P}{2} \quad (\text{B.4a})$$

$$P_w = \frac{P_W + P_P}{2} \quad (\text{B.4b})$$

Substituindo as aproximações (B.3) e (B.4) na expressão (B.2) resulta,

$$\begin{aligned} \frac{P_E - P_P}{(\delta \theta_f)_e} - \frac{P_P - P_W}{(\delta \theta_f)_w} + \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} \Delta \theta_f = & \left[A(\theta_f) \dot{\epsilon}_x^* + B(\theta_f) \dot{\epsilon}_x^* + D(\theta_f) \right]_P \Delta \theta_f \\ & + C(\theta_f)_e \frac{P_E + P_P}{2} - C(\theta_f)_w \frac{P_W + P_P}{2} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Integrando desta vez a equação (B.5) ao longo de ξ nos limites genéricos de “s” e “n” tem-se o seguinte

$$\begin{aligned} \left[\frac{P_E - P_P}{(\delta \theta_f)_e} - \frac{P_P - P_W}{(\delta \theta_f)_w} \right] \Delta \xi + \left(\left. \frac{\partial P}{\partial \xi} \right|_n - \left. \frac{\partial P}{\partial \xi} \right|_s \right) \Delta \theta_f = & \left[A(\theta_f) \dot{\epsilon}_z^* + B(\theta_f) \dot{\epsilon}_x^* + D(\theta_f) \right]_P \Delta \theta_f \Delta \xi \\ & + \left[C(\theta_f)_e \frac{P_E + P_P}{2} - C(\theta_f)_w \frac{P_W + P_P}{2} \right] \Delta \xi \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

De forma análoga à anterior, as derivadas primeiras podem ser escritas como

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \xi} \right|_n = \frac{P_N - P_P}{(\delta \xi)_n} \quad (\text{B.7a})$$

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \xi} \right|_s = \frac{P_P - P_S}{(\delta \xi)_s} \quad (\text{B.7b})$$

Substituindo (B.7) na expressão (B.6) resulta

$$\begin{aligned} \left[\frac{P_E - P_P}{(\delta \theta_f)_e} - \frac{P_P - P_W}{(\delta \theta_f)_w} \right] \Delta \xi + \left[\frac{P_N - P_P}{(\delta \xi)_n} - \frac{P_P - P_S}{(\delta \xi)_s} \right] \Delta \theta_f = \left[A(\theta_f) \dot{\xi}_z^* + B(\theta_f) \dot{\xi}_x^* + D(\theta_f) \right]_P \Delta \theta_f \Delta \xi \\ + \left[C(\theta_f)_e \frac{P_E + P_P}{2} - C(\theta_f)_w \frac{P_W + P_P}{2} \right] \Delta \xi \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Reorganizando tem-se

$$\begin{aligned} \left[\frac{\Delta \xi}{(\delta \theta_f)_e} + \frac{\Delta \xi}{(\delta \theta_f)_w} + \frac{\Delta \theta_f}{(\delta \xi)_n} - \frac{\Delta \theta_f}{(\delta \xi)_s} + C(\theta_f)_e \frac{\Delta \xi}{2} - C(\theta_f)_w \frac{\Delta \xi}{2} \right] P_P = \\ + \left[\frac{\Delta \xi}{(\delta \theta_f)_e} - C(\theta_f)_e \frac{\Delta \xi}{2} \right] P_E + \left[\frac{\Delta \xi}{(\delta \theta_f)_w} + C(\theta_f)_w \frac{\Delta \xi}{2} \right] P_W + \frac{\Delta \theta_f}{(\delta \xi)_n} P_N + \frac{\Delta \theta_f}{(\delta \xi)_s} P_S \\ - \left[A(\theta_f) \dot{\xi}_z^* + B(\theta_f) \dot{\xi}_x^* + D(\theta_f) \right]_P \Delta \theta_f \Delta \xi \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Escrevendo a equação anterior da forma,

$$a_p P_P = a_e P_E + a_w P_W + a_n P_N + a_s P_S + S \quad (\text{B.10})$$

tem-se que

$$a_p = a_{e1} + a_{e2} + a_{w1} - a_{w2} + a_n + a_s \quad (\text{B.11a})$$

$$\mathbf{a}_e = \mathbf{a}_{e1} - \mathbf{a}_{e2} \quad (\text{B.11b})$$

$$\mathbf{a}_{e1} = \frac{\Delta \xi}{(\delta \theta_f)_e} \quad \mathbf{a}_{e2} = \frac{C(\theta_f)_e}{2} \Delta \xi \quad (\text{B.11c})$$

$$\mathbf{a}_w = \mathbf{a}_{w1} + \mathbf{a}_{w2} \quad (\text{B.11d})$$

$$\mathbf{a}_{w1} = \frac{\Delta \theta_f}{(\delta \xi)_w} \quad \mathbf{a}_{w2} = \frac{C(\theta_f)_w}{2} \Delta \theta_f \quad (\text{B.11e})$$

$$\mathbf{a}_n = \frac{\Delta \theta_f}{(\delta \xi)_n} \quad \mathbf{a}_s = \frac{\Delta \theta_f}{(\delta \xi)_s} \quad (\text{B.11f})$$

$$S = -[A(\theta_f) \dot{\xi}_z^* + B(\theta_f) \dot{\xi}_x^* + D(\theta_f)]_p \Delta \theta_f \Delta \xi \quad (\text{B.11g})$$

APÊNDICE C

FATORIZAÇÃO APROXIMADA

O método da Fatorização Aproximada (Vijayaraghavan and Keith-1990) também consiste na transformação de um caso bidimensional para um caso unidimensional, porém, desta vez, um esquema de iterações de Newton auxilia o processo de convergência. A seguir o método será exemplificado utilizando-se a equação universal deduzida no capítulo 3.

A equação adimensionalizada (3.42) pode ser escrita como,

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^{n+1} + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^{n+1} = 0 \quad (C.1)$$

onde $(n+1)$ significa o valor do termo avaliado no instante futuro e

$$E = \Theta \bar{h} \quad (C.2a)$$

$$F = C_1 \Theta + C_2 \frac{\partial \Theta}{\partial x} \quad (C.2b)$$

$$G = C_3 \frac{\partial \Theta}{\partial y} \quad (C.2c)$$

$$C_1 = \frac{\bar{h}}{4\pi} \quad C_2 = -\frac{\beta}{48\pi^2} \bar{h}^3 g \quad C_3 = -\frac{\beta}{48\left(\frac{L}{D}\right)^2} \bar{h}^3 g \quad (C.2d)$$

Como a equação (C.1) é função apenas de Θ , então pode-se escrever que

$$f(\Theta) = 0 \quad (C.3)$$

Aplicando as iterações de Newton na equação anterior, tem-se,

$$f(\Theta^*) + \left(\frac{\partial f}{\partial \Theta} \right)_{\Theta=\Theta^*} (\Theta - \Theta^*) = 0 \quad (\text{C.4})$$

onde Θ^* é o valor atual disponível de Θ . Para cada intervalo de tempo a convergência é atingida quando o valor de $\Delta\Theta = (\Theta - \Theta^*)$ se aproxima de zero.

O método de Newton pode ser incorporado aos três termos da equação (C.1) da seguinte forma,

$$\frac{\partial E}{\partial \bar{t}} = \frac{E^{n+1} - E^n}{\Delta \bar{t}} = \frac{\left[E(\Theta^*) + \left(\frac{\partial E}{\partial \Theta} \right)_{\Theta=\Theta^*} (\Theta - \Theta^*) - E^n \right]}{\Delta \bar{t}} \quad (\text{C.5a})$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \right)^{n+1} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left[F(\Theta^*) + \left(\frac{\partial F}{\partial \Theta} \right)_{\Theta=\Theta^*} (\Theta - \Theta^*) \right] \quad (\text{C.5b})$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial \bar{y}} \right)^{n+1} = \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left[G(\Theta^*) + \left(\frac{\partial G}{\partial \Theta} \right)_{\Theta=\Theta^*} (\Theta - \Theta^*) \right] \quad (\text{C.5c})$$

As equações acima podem ser desenvolvidas usando as expressões (C.2) o que resulta em,

$$\frac{\partial E}{\partial \bar{t}} = \frac{\left[E(\Theta^*) + \bar{h} \Delta \Theta - E^n \right]}{\Delta \bar{t}} \quad (\text{C.6a})$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \right)^{n+1} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left[F(\Theta^*) + \left(C_1 + C_2 \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \right) \Delta \Theta \right] \quad (\text{C.6b})$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial \bar{y}} \right)^{n+1} = \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left[G(\Theta^*) + \left(C_3 \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \right) \Delta \Theta \right] \quad (\text{C.6c})$$

Substituindo as expressões acima na equação (C.1) e rearranjando obtém-se,

$$\left[\frac{\bar{h}}{\Delta \bar{t}} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(C_1 + C_2 \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(C_3 \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \right) \right] \Delta \Theta + \left(\frac{E - E^n}{\Delta \bar{t}} + \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial G}{\partial \bar{y}} \right)_{\Theta = \Theta^*} = 0 \quad (C.7)$$

A equação anterior é resolvida implicitamente para $\Delta \Theta$. Esta equação pode ainda ser escrita como,

$$N \Delta \Theta + R = 0 \quad (C.8)$$

onde N é um operador e R é o resíduo de Θ^* . O operador N é escolhido como um produto de dois ou mais operadores. Desta forma,

$$N_1 N_2 \dots \approx N \quad (C.9)$$

O produto desses sub-operadores fornece um valor aproximado para o operador N . Assim pode-se escrever

$$N = B N_x N_y \quad (C.10)$$

onde

$$N_x = 1 + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} C_1 + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} (C_2) \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \quad (C.11a)$$

$$N_y = 1 + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} (C_3) \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \quad (C.11b)$$

$$B = \frac{\bar{h}}{\Delta \bar{t}} \quad (C.11c)$$

Com os operadores acima, a equação (C.8) pode ser dividida em duas partes da forma que segue:

- Passo 1 :
$$N_x \overline{\Delta\Theta} = -\frac{R}{B} \quad (C.12)$$

- Passo 2 :
$$N_y \Delta\Theta = \overline{\Delta\Theta} \quad (C.13)$$

Primeiramente, $\overline{\Delta\Theta}$ é obtido varrendo-se as linhas na direção circunferencial (\bar{x}) ao longo de uma linha na direção axial (\bar{y}). Depois $\Delta\Theta$ pode ser obtido varrendo-se as linhas na direção \bar{y} ao longo de uma linha na direção \bar{x} .

APÊNDICE D

DETERMINAÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARA O CÁLCULO DA TRAJETÓRIA

Quando a massa do eixo pode ser desprezada (por exemplo em máquinas alternativas) em relação ao carregamento, o sistema de equações diferenciais para a determinação da trajetória se torna

$$W^* \operatorname{sen} \phi + F_x^* = 0 \quad (\text{D.1a})$$

$$W^* \operatorname{cos} \phi + F_z^* = 0 \quad (\text{D.1b})$$

onde,

$$W^* = \frac{c^2 W}{\mu U R^2 L} \quad (\text{D.2a})$$

$$F_{\pm}^* = \frac{c^2 F_{\pm}}{\mu U R^2 L} \quad (\text{D.2b})$$

Desta forma, pelo algoritmo de Elrod, tem-se

$$F_x^* = -K \int_0^L \int_{\gamma}^{\gamma+2\pi} p \operatorname{sen} \theta_r d\theta_r dy \quad (\text{D.3a})$$

$$F_z^* = -K \int_0^L \int_{\gamma}^{\gamma+2\pi} p \operatorname{cos} \theta_r d\theta_r dy \quad (\text{D.3b})$$

onde

$$K = \frac{c^2}{\mu U R^2 L} \quad (\text{D.4})$$

mas da equação (3.7) tem-se,

$$p_p = p_c + g\beta \ln \Theta_p \quad (D.5)$$

Como Θ_p é sempre próximo da unidade pode-se escrever

$$p_p = p_c + g\beta(\Theta_p - 1) \quad (D.6)$$

onde, pela expressão (4.13),

$$\Theta_p = \frac{\left[\sum a_{viz} \Theta_{viz} + S + (\dot{e}_x \text{sen} \theta_f + \dot{e}_z \text{cos} \theta_f) \Theta_p \Delta x \Delta y \right]}{\left(a_{p1} + \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} h_p \right)} \quad (D.7)$$

e

$$\sum a_{viz} \Theta_{viz} = a_e \Theta_E + a_w \Theta_W + a_n \Theta_N + a_s \Theta_S \quad (D.8)$$

Observe que os parâmetros \dot{e}_x e \dot{e}_z vieram da velocidade radial ω_h da equação (2.11). Substituindo a equação (D.7) na equação (D.6) e considerando que a pressão de cavitação é nula tem-se

$$p = g\beta \left\{ \frac{\left[\sum a_{viz} \Theta_{viz} + S + (\dot{e}_x \text{sen} \theta_f + \dot{e}_z \text{cos} \theta_f) \Theta_p \Delta x \Delta y \right]}{\left(a_{p1} + \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} h_p \right)} - 1 \right\} \quad (D.9)$$

Usando agora a equação (D.9) nos cálculos das componentes da força hidrodinâmica (D.3) obtém-se as seguintes expressões

$$F_x^* = -K \int_0^1 \int_0^{+2\pi} g\beta \left\{ \frac{\left[\sum a_{viz} \Theta_{viz} + S + (\dot{e}_x \text{sen}\theta_f + \dot{e}_z \text{cos}\theta_f) \Theta_P \Delta x \Delta y \right]}{\left(a_{p1} + \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} h_p \right)} - 1 \right\} \text{sen}\theta_f d\theta_f dy \quad (\text{D.10a})$$

$$F_z^* = -K \int_0^1 \int_0^{+2\pi} g\beta \left\{ \frac{\left[\sum a_{viz} \Theta_{viz} + S + (\dot{e}_x \text{sen}\theta_f + \dot{e}_z \text{cos}\theta_f) \Theta_P \Delta x \Delta y \right]}{\left(a_{p1} + \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} h_p \right)} - 1 \right\} \text{cos}\theta_f d\theta_f dy \quad (\text{D.10b})$$

A fim de explicitar as componentes de velocidade do eixo as equações (D.10a e b) serão compactadas da seguinte forma

$$F_x^* = I_1 + \dot{e}_z I_2 + \dot{e}_x I_3 \quad (\text{D.11a})$$

$$F_z^* = I_4 + \dot{e}_z I_5 + \dot{e}_x I_6 \quad (\text{D.11b})$$

onde

$$I_1 = -K \int_0^1 \int_0^{+2\pi} g\beta \left[\frac{\sum a_{viz} \Theta_{viz} + S}{\left(a_{p1} + \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} h_p \right)} - 1 \right] \text{sen}\theta_f d\theta_f dy \quad (\text{D.12a})$$

$$I_2 = -K \int_0^1 \int_0^{+2\pi} g\beta \frac{\Theta_P \text{cos}\theta_f}{\left(a_{p1} + \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} h_p \right)} \text{sen}\theta_f \Delta x \Delta y d\theta_f dy \quad (\text{D.12b})$$

$$I_3 = -K \int_0^1 \int_0^{+2\pi} g\beta \frac{\Theta_P \text{sen}\theta_f}{\left(a_{p1} + \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} h_p \right)} \text{sen}\theta_f \Delta x \Delta y d\theta_f dy \quad (\text{D.12c})$$

$$I_4 = -K \int_0^1 \int_0^{+2\pi} g\beta \left[\frac{\sum a_{viz} \Theta_{viz} + S}{\left(a_{p1} + \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} h_p \right)} - 1 \right] \cos \theta_f d\theta_f dy \quad (D.12d)$$

$$I_5 = -K \int_0^1 \int_0^{+2\pi} g\beta \frac{\Theta_p \cos \theta_f}{\left(a_{p1} + \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} h_p \right)} \cos \theta_f \Delta x \Delta y d\theta_f dy \quad (D.12e)$$

$$I_6 = -K \int_0^1 \int_0^{+2\pi} g\beta \frac{\Theta_p \text{sen} \theta_f}{\left(a_{p1} + \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} h_p \right)} \cos \theta_f \Delta x \Delta y d\theta_f dy \quad (D.12f)$$

Substituindo as expressões das componentes da força hidrodinâmica (D.11) nas equações para a trajetória do eixo (D.1) obtém-se o sistema de equações diferenciais em função das componentes da velocidade do eixo

$$W^* \text{sen} \phi + (I_1 + \dot{e}_z I_2 + \dot{e}_x I_3) = 0 \quad (D.13)$$

$$W^* \text{cos} \phi + (I_4 + \dot{e}_z I_5 + \dot{e}_x I_6) = 0 \quad (D.14)$$