

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

UMA FORMULAÇÃO PARA ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA DE CASCAS
SEMI-ESPESSAS UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA
CATARINA PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA
MECÂNICA

ARMANDO SÁ RIBEIRO JÚNIOR

FLORIANÓPOLIS, AGOSTO DE 1995

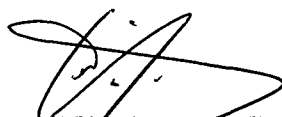
UMA FORMULAÇÃO PARA ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA DE CASCAS SEMI-
ESPESAS UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

ARMANDO SÁ RIBEIRO JÚNIOR

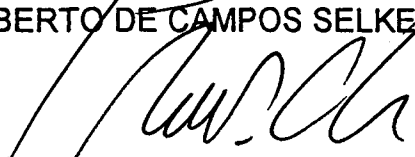
ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

MESTRE EM ENGENHARIA

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA, ÁREA DE CONCENTRAÇÃO PROJETO
E ANÁLISE DE COMPONENTES MECÂNICOS, E APROVADA EM SUA FORMA
FINAL PELO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

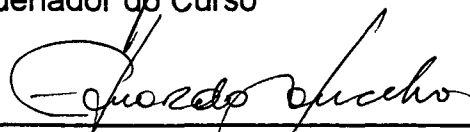


CARLOS ALBERTO DE CAMPOS SELKE - Ph.D.
Orientador

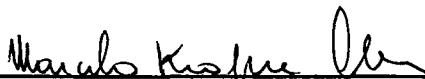


ANTÔNIO FÁBIO CARVALHO DA SILVA - Dr.Eng.Mec.
Coordenador do Curso

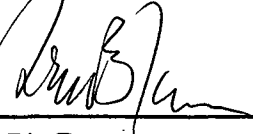
BANCA EXAMINADORA



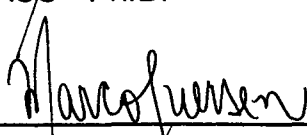
EDUARDO ALBERTO FANCELLO - D.Sc.
Presidente



MARCELO KRAJNG ALVES - Ph.D.
Membro



ARNO BLASS - Ph.D.
Membro



MARCO ANTÔNIO LUERSEN - M.Eng.Mec.
Membro

À Cristina e Carolina com todo o amor do mundo.

AGRADECIMENTOS

À **CAPES**, pelo apoio financeiro;

ao professor **Carlos Alberto de Campos Selke**, pela orientação deste trabalho e pela experiência de vida compartilhada;

ao colega **Marco Antônio Luersen**, pela amizade e pela colaboração indispensável à minha formação;

ao **Clóvis Maliska Júnior**, pela representação gráfica dos resultados obtidos;

ao pessoal do GRANTE, em especial a **Agenor, Pablo, Fogiatto, André Ogliari, Tancredo, Raminelli, Maldaner, Filippin e Jucéllo**;

aos professores **Marcelo Alves e Eduardo Fancello**, pela ajuda nos momentos mais difíceis;

ao pessoal do SINMEC, em especial ao **Livramento, Marcondes, Moacir e João Flávio**.

ao **Ricardo Capúcio, Luiz Augusto, Leone e Genisson**, pela amizade compartilhada;

ao amigo **Geraldo José Belmonte**;

ao tio **Neri**, tia **Augusta**, **Tiago** e **Ciça**, pela paciência e carinho;

aos meus pais **Armando** e **Marinalva** e minhas irmãs **Ângela** e **Stefânia**, pelo incentivo constante e por sempre acreditarem na realização deste trabalho.

SUMÁRIO

1 - INTRODUÇÃO.....	1
1.1 Objetivos do Trabalho.....	3
1.2 Descrição dos Capítulos.....	4
2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	6
2.1 Desenvolvimento dos Elementos Finitos de Cascas.....	6
2.2 Análise Não Linear Utilizando o Método dos Elementos Finitos.....	10
3 - SOLUÇÃO DO PROBLEMA ELASTOPLÁSTICO.....	16
3.1 Introdução.....	16
3.2 Descrição Lagrangeana Atualizada.....	17
3.3 Equações de Equilíbrio.....	19
3.4 Transformação do Princípio Variacional.....	23
3.5 Formulação por Elementos Finitos.....	26
3.6 Atualização das Tensões.....	28
3.7 Integração da Matriz de Rigidez.....	30
3.8 Critério de Convergência.....	31
4 - ELEMENTO FINITO PARA ANÁLISE DE CASCAS SEMI-ESPESSAS.....	33
4.1 Introdução.....	33

4.2	Formulação do Elemento Finito de Casca Degenerado.....	34
4.2.1	Sistema de Coordenadas Cartesiano Global.....	35
4.2.2	Sistema de Coordenadas Natural.....	36
4.2.3	Sistema de Coordenadas Nodal.....	37
4.2.4	Sistema de Coordenadas Local.....	38
4.2.5	Graus de Liberdade Nodais.....	39
4.3	Matriz de Transformação Global-Local.....	40
4.3.1	Transformação dos Graus de Liberdade.....	42
4.4	Discretização da Geometria e do Campo de Deslocamentos.....	46
4.5	Discretização do Princípio Variacional.....	49
4.6	Desempenho Numérico do Elemento de Casca Lagrangeano de Nove Nós.....	52
4.7	Estabilização dos Modos Espúrios.....	56
4.7.1	Operador Projeção γ	56
4.7.2	Obtenção da Matriz de Estabilização.....	59
4.7.3	O Método de Estabilização na Análise Não-Linear.....	62
5	RELAÇÃO CONSTITUTIVA ELASTOPLÁSTICA.....	64
5.1	Introdução.....	64
5.2	Teoria de Fluxo Plástico.....	65
5.2.1	Superfície de Escoamento.....	66
5.2.2	Regra de Encruamento.....	68
5.2.3	Regra de Fluxo.....	69
5.3	Crítério de Carregamento Plástico.....	72
5.4	Relação Constitutiva Elastoplástica.....	73

5.5 Particularização da Relação Constitutiva Elastoplástica para Cascas, Considerando a Hipótese de Mindlin-Reissner.....	78
5.6 Generalização da Relação Constitutiva Elastoplástica para Deformações Finitas.....	79
5.7 Integração da Relação Constitutiva.....	80
6 - RESULTADOS NUMÉRICOS.....	86
6.1 Introdução.....	86
6.2 Teste da Malha Irregular ("Patch-Test").....	87
6.3 Casos Lineares.....	90
6.3.1 Telhado Cilíndrico.....	90
6.3.2 Cilindro Puncionado.....	92
6.3.3 Semi-Esfera.....	94
6.4 Viga Engastada Submetida à Flexão Pura.....	96
6.5 Placa Apoiada com Carregamento de Flexão.....	101
6.6 Placa Engastada com Deformações plásticas.....	104
6.7 Telhado Cilíndrico sob Carregamento Uniforme.....	108
7 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....	114
BIBLIOGRAFIA.....	118
APÊNDICE 1 - Transformação do Princípio Variacional.....	125

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1 - Corpo sujeito à ação incremental de forças externas.....	17
Figura 3.2 - Condições de contorno.....	21
Figura 4.1 - Sistemas de coordenadas global (a) e natural (b).....	36
Figura 4.2 - Sistemas de coordenadas local e nodal.....	39
Figura 4.3 - Rotações nodais.....	43
Figura 4.4 - Deslocamento de um ponto genérico da casca.....	46
Figura 4.5 - Modos espúrios não comunicáveis.....	54
Figura 4.6 - Modos espúrios comunicáveis.....	55
Figura 5.1 - Gráfico tensão-deformação para um material com encruamento isotrópico.....	69
Figura 5.2 - Normais à superfície de escoamento.....	71
Figura 5.3 - Critério de carregamento plástico.....	72
Figura 5.4 - Curva tensão-deformação.....	76
Figura 5.5 - Integração da relação constitutiva.....	82
Figura 5.6 - Integração da relação constitutiva com m incrementos.....	84
Figura 6.1 - "Patch Test:" geometria e discretização.....	88
Figura 6.2 - "Patch Test:" condições de contorno.....	89
Figura 6.3 - Teto de Scordelis-Lo: geometria e condições de contorno.....	91
Figura 6.4 - Teto de Scordelis-Lo: deslocamento normalizado.....	92
Figura 6.5 - Cilindro puncionado: geometria e condições de contorno.....	93
Figura 6.6 - Cilindro puncionado: deslocamento normalizado.....	94

Figura 6.7 - Casca semi-esférica: geometria e condições de contorno.....	95
Figura 6.8 - Casca hemisférica: deslocamento normalizado.....	96
Figura 6.9 - Viga engastada: geometria e discretização.....	97
Figura 6.10 - Viga engastada com carregamento de flexão: solução analítica.....	98
Figura 6.11 - Viga engastada: deslocamentos normalizados.....	100
Figura 6.12 - Viga engastada: configurações intermediárias.....	101
Figura 6.13 - Placa biapoiada: geometria e discretização.....	102
Figura 6.14 - Placa biapoiada: deslocamentos normalizados.....	103
Figura 6.15 - Placa biapoiada: configurações intermediárias.....	104
Figura 6.16 - Placa engastada: geometria e discretização.....	105
Figura 6.17 - Placa engastada: deslocamento do ponto central.....	107
Figura 6.18 - Telhado cilíndrico: geometria e discretização.....	109
Figura 6.19 - Telhado cilíndrico: deslocamento do ponto A.....	111
Figura 6.20 - Telhado cilíndrico: evolução da frente plástica.....	112

LISTA DE TABELAS

Tabela 6.1 - Viga engastada com um momento na extremidade: resultados normalizados.....	99
Tabela 6.2 - Placa biapoiada: comparação entre os resultados.....	103
Tabela 6.3 - Placa engastada: comparação entre os resultados.....	108
Tabela 6.4 - Telhado cilíndrico sob carregamento uniforme: comparação entre os resultados de deslocamentos do ponto A.....	110

RESUMO

Este trabalho apresenta uma formulação lagrangeana atualizada baseada no Método dos Elementos Finitos de deslocamentos, utilizada para a obtenção de um elemento de casca semi-espessa do tipo sólido degenerado para a análise de problemas com não-linearidades dos tipos geométrica e material. O elemento finito empregado é o lagrangeano de nove nós com cinco graus de liberdade por nó. A formulação utiliza o princípio variacional de Hill.

O fenômeno de travamento (*locking*), característico deste tipo de formulação, é tratado pela utilização da técnica de integração reduzida uniforme. Os modos espúrios de energia nula, resultantes da utilização deste procedimento são estabilizados utilizando de um operador projeção, construído de maneira a ser ortogonal às componentes do campo de deslocamentos linear, quadrático e de corpo rígido, possuindo a característica adicional de ter uma componente paralela ao vetor de modos espúrios. A obtenção deste operador é realizada através do processo de ortogonalização de Gram-Schmidt.

O comportamento elastoplástico da estrutura é modelado adotando-se o critério de escoamento de von Mises e a regra associada de escoamento, resultando nas equações de Prandtl-Reuss. A integração da matriz de rigidez ao longo da espessura é efetuada utilizando a quadratura gaussiana.

O elemento finito de casca semi-espessa é utilizado para resolver vários problemas não-lineares de cascas. Os resultados numéricos obtidos são comparados com soluções encontradas na literatura corrente.

ABSTRACT

This work presents an updated incremental lagrangian formulation of displacement based Finite Element Method, which is used to obtain a degenerated thick shell finite element for the analysis of shell problems, with geometric and material nonlinearities. The thick shell lagrangian type finite element obtained, has nine nodes, and five degrees of freedom per node. The formulation presented makes use of Hill's variational principle.

The locking phenomenon is avoided by using the uniform reduced integration technique, and the resulting spurious modes are stabilized by the addition of a specially constructed mathematical operator to the element stiffness matrix. This projection operator is constructed in such a way that it must be orthogonal to the linear, the quadratic, and the rigid body motion components of the displacement field, having additionally a component that is parallel to the spurious modes vectors. The Gram-Schmidt orthogonalization process is used to obtain this operator.

The elastic-plastic behavior of the shell structures studied is modelled using the Von Mises yield criterion and the associated Prandtl-Reuss flow rule. The process of integration through the thickness of the shell is done using Gauss quadrature.

This thick shell finite element is used to solve several nonlinear problems of shells. The obtained numerical results are compared with the results and solutions available in the literature.

Capítulo 1

Introdução

O uso de métodos numéricos na solução de problemas em engenharia está bastante difundido hoje devido a sua facilidade prática e a variedade de programas disponíveis no mercado. Em quase todas as áreas da engenharia se utilizam ferramentas computacionais como auxílio para simular fenômenos físicos de forma a obter uma aproximação razoável dos resultados ou avaliar os parâmetros de maior influência dentro do contexto do problema.

Em mecânica dos sólidos, o método numérico mais utilizado na análise de problemas estruturais dos mais variados tipos é o Método dos Elementos Finitos, devido ao seu grande desenvolvimento nesta área, comparado com outras técnicas numéricas. O seu uso se torna quase imperativo quando se trata de resolver problemas que não apresentam soluções analíticas ou aqueles que envolvem não linearidades geométricas e materiais.

Para o tratamento de problemas de estruturas como cascas, a necessidade do uso do método dos elementos finitos fica ainda mais evidente. Para este tipo de análise, as equações que governam o problema são muito complicadas ou até mesmo impossíveis de serem resolvidas analiticamente, principalmente quando se trata de problemas não lineares. Desta forma, a utilização de um método numérico se torna necessária.

Muitos são os problemas práticos envolvendo estruturas do tipo casca, entre os quais pode-se citar vasos de pressão, trocadores de calor, silos, aeronaves, turbinas, compressores entre outros. Apesar do uso bastante difundido, ainda há uma necessidade muito grande de se desenvolver novas formulações baseadas no método dos elementos finitos para garantir a simulação mais apropriada de certos problemas modelados com este tipo de estrutura.

Problemas envolvendo não linearidades aparecem com frequência na mecânica dos sólidos. Na análise de instabilidade estrutural, os efeitos da não linearidade geométrica são estudados levando em consideração as alterações que ocorrem na rigidez da estrutura, devido às forças de membranas que agem na mesma. No caso de não linearidade material, variações nas propriedades materiais ocorrem e, conseqüentemente, a rigidez estrutural é alterada mediante a aplicação do carregamento.

Na análise não linear de estruturas do tipo cascas, usando o método dos elementos finitos, desenvolvem-se formulações nas quais hipóteses simplificadoras são adotadas com a finalidade de reduzir a sua complexidade. No entanto, a forma mais apropriada de tratar deste assunto ainda não foi bem estabelecida e muitos trabalhos vem sendo apresentados com o intuito de corrigir os problemas remanescentes, e obter assim uma aproximação cada vez melhor da solução real.

1.1 Objetivos do Trabalho

Este trabalho tem como objetivo principal desenvolver um elemento finito de casca semi-espessa para análise de estruturas sujeitas a grandes deslocamentos e deformações plásticas, baseado na teoria de Mindlin-Reissner, a qual considera o efeito do cisalhamento transversal.

O princípio variacional utilizado foi primeiramente apresentado por Hill (1959), sendo que o primeiro tensor de Piola-Kirchhoff, o qual tem a característica de não ser simétrico, era usado para representar o campo de tensões e a configuração inicial era escolhida como configuração de referência. Posteriormente, McMeeking e Rice (1975) adaptaram este princípio para problemas que envolvem grandes deslocamentos e grandes deformações elastoplásticas, generalizando a relação constitutiva elastoplástica infinitesimal adotando o par dual tensor co-rotacional de Kirchhoff e tensor taxa de deformação. Devido a essa escolha de tensores, a configuração de referência passou a ser a configuração corrente. Esta mesma formulação foi utilizada por Kikuchi e Chen (1983) e Elgueta V. (1994) para análise de problemas de contato e processo de forjamento, respectivamente.

O elemento degenerado isoparamétrico lagrangeano de nove nós é implementado utilizando o método da subintegração reduzida total para evitar o problema de travamento. Para eliminar os modos de energia nula, decorrentes do processo de subintegração, é utilizado um operador matemático especialmente construído para este fim.

O comportamento do material é representado pela matriz constitutiva elastoplástica, a qual foi deduzida utilizando a teoria de fluxo e as equações de Prandtl-Reuss. O critério de escoamento de von Mises é implementado e a relação

constitutiva elastoplástica, expressa em função do tensor co-rotacional de Kirchhoff e do tensor taxa de deformação, é integrada utilizando o método desenvolvido por Hinton e Owen (1980).

1.2 Descrição dos Capítulos

No Capítulo 2 são apresentados, em uma perspectiva evolutiva histórica, vários elementos de cascas, através de resumos dos trabalhos realizados nas últimas décadas, com ênfase nas hipóteses admitidas por cada autor. Da mesma forma, serão apresentados alguns tipos de formulações para análise elastoplástica.

No Capítulo 3, a formulação desenvolvida por McMeeking e Rice (1975) a partir do princípio variacional apresentado por Hill (1959) será adaptada para uso em uma formulação que levará a um programa do elementos finitos, utilizando o tensor co-rotacional de Kirchhoff e o tensor taxa de deformações para representar os campos de tensões e deformações, respectivamente.

No Capítulo 4 será apresentada a descrição do elemento lagrangeano de nove nós. Os sistemas de coordenadas e os graus de liberdade serão definidos e as matrizes de transformação entre os sistemas serão deduzidas. No final do capítulo será abordado o desempenho do elemento lagrangeano de nove nós e é apresentado o processo de estabilização dos modos espúrios utilizado.

A relação constitutiva elastoplástica será definida no Capítulo 5. Será apresentada a teoria de fluxo plástico, a qual servirá de base para a dedução da matriz constitutiva elastoplástica. A relação constitutiva elastoplástica para o caso

infinitesimal será então deduzida e generalizada para o caso de deformações finitas e, por fim, é apresentado um algoritmo para a sua integração.

No Capítulo 6 serão apresentados os resultados numéricos dos testes realizados para validar a formulação. Serão testados casos lineares, não lineares elásticos e aqueles envolvendo deformações plásticas. Os resultados são comparados com os obtidos em trabalhos encontrados na literatura.

O trabalho finaliza com as conclusões obtidas a partir dos resultados apresentados. Serão feitas observações que visam melhorar o desempenho do elemento e sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

2.1 Desenvolvimento dos Elementos Finitos de Cascas

As primeiras expressões utilizadas para equacionar problemas de cascas, datadas no final do século passado, foram desenvolvidas a partir dos postulados de Love (Kraus, 1967), os quais admitem as seguintes hipóteses:

- A casca é fina, ou seja, a relação entre a sua espessura e o seu menor raio de curvatura é muito pequena;
- As deflexões são pequenas, de ordem de grandeza inferior à espessura;
- As tensões normais transversais são desprezáveis;
- As normais à superfície de referência, na configuração indeformada da casca, permanecem normais à superfície de referência deformada e não variam o seu comprimento. Esta última assertiva é conhecida por Hipótese de Kirchhoff-Love.

A teoria apresentada por Love não leva em consideração o efeito da deformação cisalhante transversal, tendo o seu uso restrito a problemas de estruturas de cascas com espessura muito fina. No entanto, a partir destes estudos, muitos trabalhos foram apresentados, nos quais outras hipóteses foram introduzidas e que resultaram em teorias para o tratamento diferenciado de problemas de cascas.

Atualmente, as hipóteses utilizadas no tratamento de problemas de cascas semi-espessas são aquelas mesmas empregadas na teoria de placas de Mindlin-Reissner (Hughes, 1987), que abandona o último postulado de Love, permitindo assim a consideração das deformações cisalhantes transversais e generalizando seu uso para problemas de estruturas que apresentam espessuras não tão pequenas.

As tentativas de simular numericamente problemas de cascas por meio do método dos elementos finitos foram inicialmente realizadas utilizando elementos cuja formulação se baseava nas hipóteses de Love. No entanto, além de se aplicarem apenas a problemas de cascas finas, suas limitações foram logo percebidas, pois estes elementos podiam ainda apresentar descontinuidades de deslocamentos e ausência de alguns movimentos de corpo rígido (Mourão, 1991; Mourão e Selke, 1992).

Para superar estas limitações, foi desenvolvido o elemento finito degenerado (Noor e Peters, 1981), baseado nas premissas da teoria de Mindlin-Reissner, no qual as equações são expressas em termos de variáveis nodais na superfície média da casca. A solução das equações de equilíbrio que, na formulação para cascas finas eram representadas por funções de continuidade C^1 , poderiam ser descritas por funções de continuidade C^0 , uma vez que estas equações passam a ser diferenciáveis de segunda ordem.

Os resultados obtidos utilizando elementos degenerados puros, ou seja, com integração completa, não foram satisfatórios quando aplicados a cascas finas, pois o modelo resultante era excessivamente rígido, problema este denominado de travamento (“*locking*”) (Huang e Hinton, 1986). Esses elementos apresentaram também uma taxa de convergência baixa. Visando corrigir estes problemas, vários trabalhos, baseados na formulação de elementos degenerados, foram apresentados. Por exemplo, Yang e Saigal (1985) utilizaram um elemento de casca curvo com funções de interpolação hermitianas (Cook et al, 1989), aplicando-o a problemas não-lineares. Dinis e Owen (1982) utilizaram um elemento conhecido como “*semiloof*” para análise elastoplástica de cascas finas. Uma análise similar foi realizada por Imaeda (1992) e Imaeda et al (1993), utilizando o elemento “*semiloof*” proposto por Nagtegaal e Slater (1981).

Entre outras formulações apresentadas, citam-se, por exemplo, aquela utilizada por Noor e Peters (1981), que consiste no modelo misto, onde são usadas funções de interpolação independentes para os deslocamentos e as rotações. O problema deste tipo de formulação é que o desempenho do elemento piora para uma diminuição da espessura, pois a rigidez transversal cisalhante é subestimada e, além disso, os resultados para deformações inextensíveis não são bons, devido à representação inadequada dos movimentos de corpo rígido.

Outra formulação empregada na simulação de problemas de cascas foi a formulação híbrida (Liu e To, 1995), na qual o princípio de Hellinger-Reissner (Washizu, 1982) é implementado utilizando multiplicadores de Lagrange e as equações de equilíbrio são satisfeitas em termos de deslocamentos e de tensões. No entanto, o alto custo computacional devido ao grande número de graus de liberdade, característico deste tipo de formulação, inviabiliza o seu uso generalizado.

Para eliminar o problema de travamento nos elementos degenerados, o método mais bem aceito pela comunidade científica de hoje é o Método da Subintegração apresentado por Zienkiewicz et al (1971), que consiste em utilizar a regra de integração de Gauss uma ordem abaixo da necessária para integrar exatamente as matrizes de rigidez elementares. Contudo, este método não é totalmente eficaz, pois alguns casos particulares apresentaram campos de deslocamentos sem energia de deformação associada, conhecidos por modos espúrios, decorrentes do processo de subintegração.

O elemento lagrangeano de nove nós, que será utilizado neste trabalho, apresenta sete modos espúrios quando subintegrado totalmente, ou seja, quando é utilizada uma regra de integração 2x2 para avaliar a sua rigidez.

Para eliminar os modos espúrios foi proposto o Método da Subintegração Seletiva (Zienkiewicz et al, 1971), que consiste em subintegrar apenas a parcela da matriz de rigidez correspondente à energia de cisalhamento. No entanto, este nem sempre leva a um bom desempenho quando aplicado ao elemento lagrangeano de nove nós, pois, para alguns casos, existe um modo de energia nulo que torna a matriz de rigidez singular. Além disso, esta técnica não evita o problema de travamento de membrana (Belytschko e Wong, 1989). Huang e Hinton (1986) e Belytschko e Wong (1989) contornaram este problema interpolando as deformações de membrana e de cisalhamento, utilizando funções de interpolação em coordenadas locais obtendo resultados satisfatórios.

No trabalho de Belytschko et al (1985) foi desenvolvido um método de estabilização aplicável à análise não linear, a partir do princípio variacional de Hu-Washizu, construindo um operador matemático denominado operador γ . Posteriormente, White e Abel (1990) utilizaram este processo para desenvolver uma

formulação de um elemento finito de casca, lagrangeano de nove nós, livre de modos espúrios, na qual está baseado o elemento que será implementado neste trabalho.

2.2 Análise Não Linear Utilizando o Método dos Elementos Finitos

Os primeiros estudos de não-linearidades em cascas, utilizando o Método dos Elementos Finitos, foram realizados no início dos anos 60. Inicialmente, os trabalhos eram voltados para a análise de problemas específicos com restrições de geometria e tipo de carregamento.

Os conceitos e teorias, bem como as dificuldades computacionais na análise não-linear de cascas são muito discutidas por diversos autores. Na análise estática ou quase-estática, estas dificuldades se baseiam nos seguintes tópicos (Liu e To, 1995):

- 1 - Na linearização consistente da forma variacional das equações que governam o problema;
- 2 - No uso de tensores tensão e deformação adequados para o uso nas relações constitutivas;
- 3 - No tratamento das grandes rotações, no cálculo da matriz de rigidez elementar e na atualização da geometria;
- 4 - Na representação física apropriada do comportamento não linear do material.

Para a solução de problemas que apresentam não-linearidades geométrica e material, a formulação lagrangeana total e a formulação lagrangeana atualizada constituem-se nas duas escolhas tradicionais. Na análise estrutural, no

entanto, a formulação lagrangeana atualizada é mais adequadamente empregada, principalmente quando se trata de problemas que apresentam comportamento material descrito através de relações constitutivas em termos de taxas (Gadala et al, 1984). Neste tipo de formulação, a configuração de equilíbrio em um dado instante t é escolhida como configuração de referência, sendo a carga aplicada em incrementos. Consequentemente, a geometria deve ser atualizada ao final da aplicação de cada incremento de carga.

A consideração de grandes rotações na análise não-linear tem merecido bastante atenção nos últimos anos. Segundo Nagtegaal e de Jong (1981), os grandes deslocamentos produzem um efeito adicional à distorção excessiva das malhas dos elementos finitos, deteriorando os resultados. Como as rotações não são grandezas comutativas, diferentes resultados serão obtidos, dependendo da sequência na qual foram consideradas. Liu e To (1995) apresentaram uma revisão dos trabalhos publicados envolvendo o tratamento das grandes rotações e constataram que a não comutatividade é o principal motivo do insucesso destes trabalhos. Surana (1983) por exemplo, apresentou uma estratégia na qual foi considerada uma média dos valores obtidos para cada sequência em que são consideradas. No entanto, esta aproximação torna o cálculo das matrizes de rigidez um pouco mais complexos, devido à existência de termos de senos e co-senos. Uma forma de atenuar este problema é utilizar tensores tensão e deformação invariantes com os deslocamentos de corpo rígido, além de utilizar a formulação lagrangeana atualizada.

A escolha dos tensores tensão e deformação que serão utilizados para expressar as relações constitutivas e as relações deformações-deslocamentos é essencial para se obter bons resultados na análise não-linear. Dois fatores devem ser levados em conta para determiná-los: as medidas de tensão e deformação devem ser

energeticamente conjugadas e, além disso, devem estar de acordo com a lei constitutiva utilizada para representar o comportamento material. Quando se trata de problemas sujeitos a grandes rotações de corpo rígido, por exemplo, a invariância a estes movimentos é indispensável. Da mesma forma, quando os efeitos da não linearidade material, tal como elastoplasticidade finita, estão sendo estudados, é mais conveniente expressar as tensões e deformações em termos de taxas (Washizu, 1982).

O tensor tensão de Jaumann (Prager, 1961; Kleiber, 1989) tem sido utilizado por vários autores para estudar problemas elastoplásticos de cascas. Szabó (1983) apresenta algumas expressões para as relações constitutivas utilizando o tensor de Jaumann do tensor tensão de Cauchy e o tensor de Jaumann do tensor tensão de Kirchhoff, além do tensor co-rotacional de Kirchhoff. Todos estes tensores são invariantes às rotações de corpo rígido e fazem par dual com o tensor taxa de deformação, que também compartilha desta propriedade.

Outro aspecto importante na análise não-linear é a definição do algoritmo iterativo a ser utilizado. A presença de deformação plástica pode dificultar o desempenho do algoritmo em alguns casos. Para materiais perfeitamente plásticos, por exemplo, a utilização do Método de Newton-Raphson (Bathe, 1982) poderá ser problemática, pois a matriz de rigidez poderá ser singular ou mal condicionada. O Método de Newton-Raphson Modificado pode superar este problema, mas poderá levar a uma diminuição substancial na velocidade de convergência.

Um método que tem apresentado um desempenho melhor que os processos de Newton-Raphson e Newton-Raphson Modificado é o BFGS (Bathe, 1982). Imaeda (1992) resolveu o problema de uma placa tracionada na qual ocorre uma mudança de fase plástica para elástica, ou seja, um descarregamento elástico.

Segundo este autor, o uso do Método de Newton-Raphson Modificado leva a uma resposta oscilante, sem que haja convergência. No entanto, o uso do Método BFGS permite a obtenção da convergência em poucas iterações.

Um método iterativo eficiente foi desenvolvido por Riks (1979) e Crisfield (1983), denominado de Método do Comprimento de Arco. Neste algoritmo, a solução é aproximada por meio de arcos, o que resulta em uma maior eficiência no processo iterativo. Este método é muito eficaz quando aplicado a problemas que apresentam um ponto limite.

As teorias mais utilizadas no tratamento de problemas de plasticidade são as Teorias de escoamento Plástico ou Teorias de Fluxo Plástico (Washizu, 1982). Estes tipos de abordagens são baseadas na história do carregamento desde o início da plastificação, que é determinado pelo critério de escoamento. Neste processo, pode-se escrever uma relação entre a tensão e a velocidade de deformação em qualquer instante. Numericamente, é utilizada a formulação lagrangeana atualizada sendo que os incrementos de velocidade de deformação são definidos na configuração deformada.

Um exemplo de teoria de escoamento plástico é a Teoria de Saint-Venant (Hill, 1950), na qual as componentes do tensor tensão e do tensor taxa de deformação são expressas em termos de suas componentes desviadoras, em conjunto com a condição de incompressibilidade. No entanto, as deformações elásticas são desprezadas durante o processo de deformação plástica e isto pode levar a sérios erros.

A teoria de fluxo plástico mais apropriada para descrever o comportamento dos metais é a Teoria de Prandtl-Reuss (Chen e Han, 1988), a qual tem como base as equações de Prandtl-Reuss, associada ao critério de escoamento

de von Mises. Nesta teoria, as componentes elásticas de deformação são incluídas na determinação das deformações plásticas e as variações volumétricas são assumidas como sendo puramente elásticas.

A utilização da teoria de fluxo plástico requer um esquema eficaz de integração da relação constitutiva elastoplástica. Muitas regras de integração que tem sido propostas se enquadram nos chamados *algoritmos de mapeamento de retorno*, entre os quais se pode citar os apresentados por Nagtegaal e de Jong (1981), Ortiz e Simo (1986) e Simo e Taylor (1986). Neste trabalho foi implementado o método sugerido por Hinton e Owen (1980), que será tratado no Capítulo 5.

A integração da matriz de rigidez é outro aspecto que deve ser discutido. A presença de deformações plásticas origina uma complexa distribuição de tensões ao longo da espessura, requerendo um tratamento especial na avaliação da rigidez nesta direção.

Dinis e Owen (1982) utilizaram um modelo denominado de Rótula Plástica no qual é admitido que a plastificação ocorra instantaneamente em toda a seção. Para isso, os autores adotam o critério de escoamento de Ilyushin que é expresso em função de momentos fletores e tensões resultantes. Esta aproximação é válida apenas para cascas de espessura reduzida, visto que, na maioria dos casos, a plastificação ocorre na superfície da estrutura, devido a uma combinação de esforços de flexão e membrana. Além disso, os efeitos da deformação cisalhante transversal são desprezados.

O processo utilizado por Parish (1981) e Yang e Saigal (1985) é mais consistente e pode ser utilizado para cascas semi-espessas. Trata-se do método de integração por camadas no qual a espessura é dividida em um número par de camadas, nas quais a rigidez é avaliada. A rigidez é totalizada somando os valores

obtidos para cada camada. O inconveniente deste método é que o jacobiano é calculado na superfície média da camada e é admitido constante ao longo da espessura da mesma. Além disso, serão necessárias muitas camadas para avaliar a rigidez em pontos próximos à superfície, aumentando muito os custos computacionais.

Neste trabalho, a regra de quadratura de Gauss foi utilizada para integração na superfície e ao longo da espessura. Dessa forma, são evitadas as desvantagens do método de integração por camadas.

Capítulo 3

Formulação Incremental do Problema Elastoplástico

3.1 Introdução

Neste capítulo será apresentada uma formulação incremental para problemas de cascas semi-espessas envolvendo não linearidades material e geométrica, submetidas a deformações elastoplásticas e grandes deslocamentos. As equações utilizadas neste trabalho foram desenvolvidas por McMeeking e Rice (1975), a partir do princípio variacional apresentado por Hill (1959).

A formulação apresentada neste trabalho foi utilizada por Kikuchi e Cheng (1983) para problemas de elastoplasticidade com contato, e por Imaeda (1992) para problemas elasto-plásticos de cascas finas.

O princípio variacional utilizado será deduzido na seção 3.3, a partir das equações de equilíbrio escritas em termos de taxas. Dessa forma, pode-se escrever as relações constitutivas em termos de taxas, o que possibilitará a obtenção de uma representação física de forma mais natural do problema (McMeeking e Rice, 1975). Na seção seguinte, o princípio variacional é escrito em termos dos tensores escolhidos para exprimir as relações constitutivas, obtendo-se assim a forma fraca das equações de equilíbrio, que será usada na solução do problema, utilizando elementos finitos.

A solução do sistema de equações não lineares é obtida para cada incremento sucessivo de carga, até que todo o carregamento seja aplicado, caracterizando assim a teoria incremental utilizada.

3.2 Formulação Lagrangeana Atualizada

A Figura 3.1 representa um corpo sujeito à ação de forças externas em três instantes consecutivos t_0 , t e $t+\Delta t$.

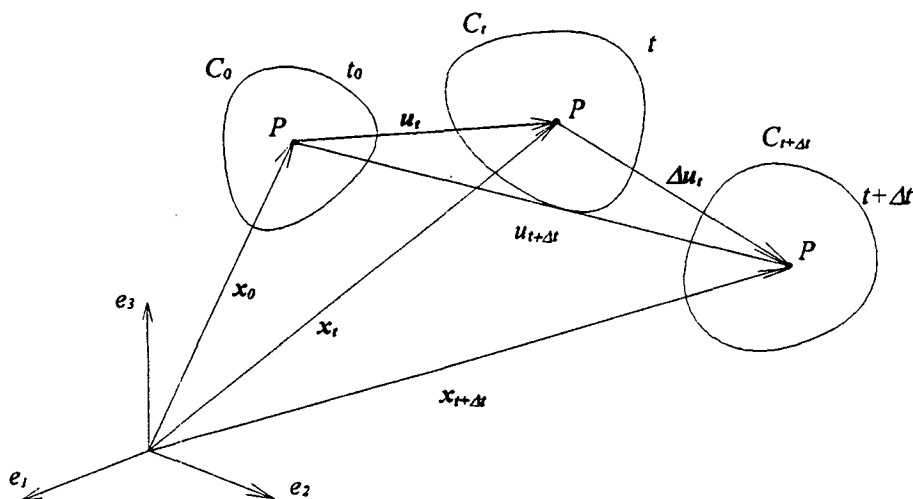


Figura 3.1 - Corpo sujeito à ação incremental de forças externas.

A posição de um ponto arbitrário P , pertencente ao corpo, em relação a um sistema fixo de coordenadas (e_1, e_2, e_3) , é dada por x_t e o seu vetor deslocamento por

$$u = u(x, t). \quad (3.1)$$

A metodologia utilizada, que se baseia na formulação lagrangeana atualizada, consiste em determinar os incrementos de deslocamentos apresentados pelo corpo ao final de cada incremento de carga (passo), tendo como referência a configuração anterior. Após ter calculado os incrementos de deslocamentos $\Delta u(x, t)$, pode-se determinar os incrementos de deformações através das equações deformações-deslocamentos e os incrementos de tensões através das relações constitutivas. Portanto o objetivo é determinar a configuração de equilíbrio $C_{t+\Delta t}$ conhecendo C_t e assim sucessivamente, até que o carregamento total seja aplicado, obtendo a configuração final C_n (ver Figura 3.1).

Durante o intervalo de tempo $[t, t+\Delta t]$ o vetor posição x do ponto P do corpo bem como suas propriedades materiais permanecem constantes. Isto ocorre devido à natureza referencial da descrição lagrangeana.

Ao final de cada passo de carga, a geometria, bem como o campo de tensões, são atualizados. As equações utilizadas para atualizar as tensões serão apresentadas na seção 3.6.

3.3 Equações de Equilíbrio

O problema elastoplástico em mecânica do contínuo consiste em determinar, em um dado instante t , os deslocamentos apresentados por um corpo, quando sujeito à ação de forças externas, levando em consideração as variações que ocorrem nas propriedades materiais durante o processo. Trata-se, portanto, de um problema não-linear, visto que as propriedades materiais dependem do campo de deslocamentos, que não é conhecido previamente.

De acordo com Washizu (1982), a teoria de fluxo plástico é mais adequada para a representação de problemas elastoplásticos. Inicialmente, considera-se que ocorrem um fluxo de deformações plásticas quando o campo de tensões atinge um determinado valor (limite de escoamento). O carregamento é aplicado de forma incremental, o que permite determinar a taxa de deformação plástica em cada ponto no decorrer do processo. Desta forma, a história do carregamento é levada em consideração e, conseqüentemente, as propriedades materiais são mais bem representadas.

Para utilizar a teoria de fluxo plástico deve-se, partindo das equações do movimento, escrever as tensões, forças e deslocamentos na forma de taxas, obtendo as equações de equilíbrio em termos de taxas.

As equações do movimento de um corpo escritas na configuração de referência, são dadas por (Malvern, 1969)

$$T_{ij}^{\circ}(x,t) + b_i^{\circ}(x,t) = \rho^{\circ} \dot{u}_i^{\circ}(x,t), \quad (3.2)$$

onde

T_{ij}° são as componentes do primeiro tensor de Piola-Kirchhoff;

b_i° são as forças de corpo por unidade de volume;

u_i° é a aceleração do corpo, sendo $\rho^\circ u_i^\circ$, portanto, a força inercial;

j indica a derivada em relação às coordenadas materiais, ou seja, $\frac{\partial}{\partial X_j}$;

ρ° é a densidade.

O sobrescrito \circ indica a configuração na qual os termos estão escritos (ver Figura 3.1).

Para obter as equações de equilíbrio em termos de taxas, toma-se a derivada da expressão (3.2) em relação ao tempo

$$T_{ij,j}^\circ(x,t) + \dot{b}_i^\circ(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho^\circ \ddot{u}_i^\circ(x,t)) \quad (3.3)$$

onde o sobrescrito $\dot{}$ indica derivada em relação ao tempo.

Considerando apenas pequenas variações no tempo, isto é, um processo de carregamento quase-estático, pode-se desprezar a influência dos termos de inércia, obtendo (Kikuchi e Cheng, 1983)

$$T_{ij,j}^\circ(x,t) + \dot{b}_i^\circ(x,t) = 0 \quad (3.4)$$

Para se definir as condições de contorno deve-se dividir o contorno Γ em duas partes Γ_u e Γ_t (ver Figura 3.2),

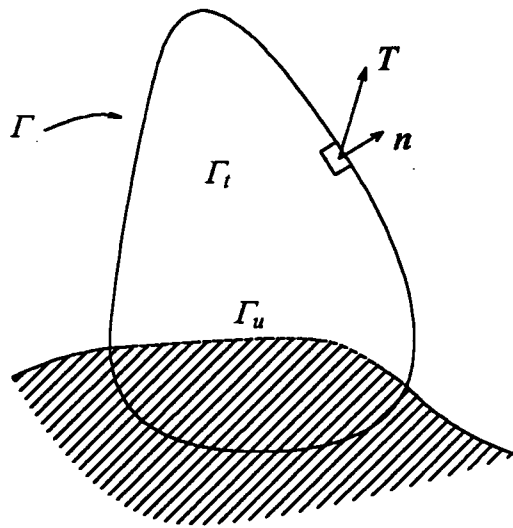


Figura 3.2 - Condições de contorno

sendo,

$$\begin{aligned} \Gamma_u \cup \Gamma_t &= \Gamma \\ \Gamma_u \cap \Gamma_t &= \emptyset \end{aligned} \quad (3.5)$$

As condições de contorno de taxas de deslocamentos são dadas em Γ_u , enquanto que as de taxas de forças de superfície são prescritas em Γ_t .

Desta forma, as condições de contorno para o problema em termos de taxas são:

$$\begin{aligned} T_{ij}(x,t) n_j(x,t) &= f_i(x,t) & \forall x \in \Gamma_t \\ u(x,t) &= 0. & \forall x \in \Gamma_u \end{aligned} \quad (3.6)$$

Da equação (3.4) pode-se obter a forma fraca, dada por (Washizu, 1982),

$$\int_{\Omega_0} [T_{ij}^{\circ}(\mathbf{x}, t) \delta v_i(\mathbf{x}, t) + b_i^{\circ}(\mathbf{x}, t) \delta v_i(\mathbf{x}, t)] d\Omega_0 = 0, \quad (3.7)$$

com $\delta v_i = 0$ em Γ_u .

Utilizando-se a propriedade do divergente

$$(\dot{T}_{ij} \delta v_i)_j = \dot{T}_{ij,j} \delta v_i + \dot{T}_{ij} \delta v_{i,j}, \quad (3.8)$$

tem-se

$$\dot{T}_{ij,j} \delta v_i = (\dot{T}_{ij} \delta v_i)_{,j} - \dot{T}_{ij} \delta v_{i,j}. \quad (3.9)$$

que, inserido na expressão (3.7), leva a

$$\int_{\Omega_0} [(\dot{T}_{ij}^{\circ} \delta v_i)_{,j} - \dot{T}_{ij}^{\circ} \delta v_{i,j} + b_i^{\circ} \delta v_i] d\Omega_0 = 0. \quad (3.10)$$

Considerando que o teorema da divergência (Hughes, 1987) fornece

$$\int_{\Omega_0} (\dot{T}_{ij}^{\circ} \delta v_i)_{,j} d\Omega_0 = \int_{\Gamma_0} (\dot{T}_{ij}^{\circ} \delta v_i) n_j d\Gamma_0, \quad (3.11)$$

onde \mathbf{n} é o vetor normal à superfície, e

$$\int_{\Gamma} (\dot{T}_{ij}^{\circ} \delta v_i) n_j d\Gamma = \int_{\Gamma_u} (\dot{T}_{ij}^{\circ} \delta v_i) n_j d\Gamma_u + \int_{\Gamma_t} (\dot{T}_{ij}^{\circ} \delta v_i) n_j d\Gamma_t, \quad (3.12)$$

e como $\delta v_i = 0$ no contorno Γ_u ,

$$\int_{\Omega_0} (T_{ij}^\circ \delta v_i)_{,j} d\Omega_0 = \int_{\Gamma_t} (T_{ij}^\circ \delta v_i) n_j d\Gamma_t = \int_{\Gamma_t} \dot{f}_i^\circ \delta v_i d\Gamma_t, \quad (3.13)$$

onde $\dot{f}_i^\circ = T_{ij}^\circ n_j$ representa a taxa de força de superfície aplicada.

Substituindo a expressão (3.13) na equação (3.10), obtém-se

$$\int_{\Omega_0} T_{ij}^\circ \delta v_{i,j} d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \dot{b}_i^\circ \delta v_i d\Omega_0 + \int_{\Gamma_t} \dot{f}_i^\circ \delta v_i d\Gamma_t, \quad (3.14)$$

sendo $\delta v_{i,j} = \frac{\partial \delta v_i}{\partial X_j}$.

Este princípio foi apresentado por Hill (1959) e utilizado por McMeeking e Rice (1975) para solução de problemas sujeitos a grandes deformações em meio contínuo, no regime elastoplástico.

3.4 Transformação do Princípio Variacional

A utilização do primeiro tensor de Piola-Kirchhoff em termos de taxas \dot{T} na expressão (3.14) resulta em uma matriz constitutiva não simétrica, o que não é conveniente em termos computacionais, pois leva à não simetria da matriz de rigidez. Para contornar este problema, deve-se escolher outro tensor para representar o estado de tensões do corpo no instante considerado, sendo necessário que, além de

simétrico, seja independente dos movimentos de corpo rígido, para poder representar melhor as propriedades materiais. McMeeking e Rice (1975) sugerem a utilização do tensor co-rotacional de Kirchhoff τ^* , por ser mais adequado ao uso na relação constitutiva. A relação entre o tensor co-rotacional de Kirchhoff τ^* e o primeiro tensor tensão de Piola-Kirchhoff em termos de taxas \dot{T} é dada por (McMeeking e Rice, 1975),

$$\dot{T}_{ij} = \tau_{ij}^* - \tau_{kj} D_{ki} - \tau_{ik} D_{kj} + \tau_{ik} v_{j,k}, \quad (3.15)$$

onde τ_{ij} são as componentes do tensor tensão de Kirchhoff e D_{ij} as componentes do tensor taxa de deformação, dadas por

$$D_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}). \quad (3.16)$$

A relação entre o tensor tensão de Kirchhoff τ e o tensor tensão de Cauchy σ é dada por (Kleiber, 1989)

$$\tau_{ij} = J \sigma_{ij}, \quad (3.17)$$

onde J é o determinante da matriz jacobiana $\frac{\partial x_i}{\partial X_j}$, que representa a razão entre o volume do corpo medido no estado de referência e no estado deformado.

Se a configuração corrente for escolhida como configuração de referência, caracterizando assim a formulação lagrangeana atualizada, $J=1$ e, portanto, pode-se escrever a expressão (3.17) como (Kikuchi e Cheng, 1983)

$$\sigma_{ij} = \tau_{ij}. \quad (3.18)$$

Utilizando a expressão (3.18), pode-se rescrever a equação (3.15) como

$$T_{ij} = \tau_{ij}^* - \sigma_{kj} D_{ki} - \sigma_{ik} D_{kj} + \sigma_{ik} v_{j,k}. \quad (3.19)$$

Substituindo a expressão (3.19) em (3.14) tem-se (ver Apêndice 1)

$$\int_{\Omega} [\tau_{ij}^* \delta D_{ij} - \frac{1}{2} \sigma_{ij} \delta (2D_{ik} D_{kj} - v_{k,i} v_{k,j})] d\Omega = \int_{\Omega} b_i \delta v_i d\Omega + \int_{\Gamma} f_i \delta v_i d\Gamma. \quad (3.20)$$

A equação (3.20) representa o princípio variacional de Hill em termos do tensor co-rotacional de Kirchhoff. É importante observar que a equação está escrita na **configuração deformada** e não mais no estado de referência.

3.5 Formulação por Elementos Finitos

A equação (3.20) pode ser escrita na forma de equações de elementos finitos para grandes deslocamentos e grandes deformações. Para isso define-se:

$\dot{\phi}$, vetor taxa de variação dos graus de liberdade nodais;

v , vetor velocidade nodal;

D , tensor taxa de deformações;

N , matriz das funções de interpolação e

B , matriz das derivadas das funções de interpolação, tal que

$$[B_{ij}] = \frac{1}{2}([N_i]_{,j} + [N_j]_{,i}) . \quad (3.21)$$

Desta forma, pode-se escrever as velocidades como:

$$v_i = [N] \{\dot{\phi}\}$$

$$e \quad (3.22)$$

$$D_{ij} = [B_{ij}] \{\dot{\phi}\} .$$

Na equação de equilíbrio discretizada que se obtém a partir de (3.20), pode-se verificar dois termos de rigidez. O primeiro termo, que se refere a $\int_{\Omega} \tau_{ij}^* \delta D_{ij} d\Omega$, é o mesmo obtido em problemas sujeitos a pequenas deformações e deslocamentos. Fornece a matriz de rigidez linear dada por (Cook et al, 1989)

$$K_L = \int_{\Omega} [B]^T [C] [B] d\Omega, \quad (3.23)$$

onde C representa a matriz constitutiva. A parcela $\int_{\Omega} \frac{I}{2} \sigma_{ij} (D_{ik} D_{kj} - \nu_{ki} \nu_{kj}) d\Omega$ fornece a matriz de rigidez geométrica, característica dos problemas de grandes deslocamentos. É expressa por (McMeeking e Rice, 1975)

$$\mathbf{K}_G = \int_{\Omega} ([N_k]_{,i}^T \sigma_{ij} [N_k]_{,j} - 2 [B_{ki}]^T \sigma_{ij} [B_{kj}]) d\Omega, \quad (3.24)$$

de forma que a rigidez total do elemento é dada por

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_G. \quad (3.25)$$

As forças de corpo e de superfície são discretizadas utilizando as mesmas funções de interpolação usadas para o campo de deslocamentos. Consequentemente, tem-se

$$\{\dot{P}\} = \int_{\Omega} [N]^T \{\dot{b}\} d\Omega + \int_{\Gamma} [N]^T \{f\} d\Gamma. \quad (3.26)$$

Substituindo as expressões (3.23), (3.24) e (3.26) na equação (3.20) e considerando que a taxa dos deslocamentos virtuais δv possuem valores arbitrários, tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} ([B]^T [C][B] + [N_k]_{,i}^T \sigma_{ij} [N_k]_{,j} - 2 [B_{ki}]^T \sigma_{ij} [B_{kj}]) \{\dot{\phi}\} d\Omega = \\ = \int_{\Omega} [N]^T \{\dot{b}\} d\Omega + \int_{\Gamma} [N]^T \{f\} d\Gamma. \end{aligned} \quad (3.27)$$

A equação (3.27) representa a equação de equilíbrio em termos de taxas, escrita de forma a levar a um programa de elementos finitos para solução de problemas de grandes deformações e grandes deslocamentos.

É importante discutir a validade do princípio (3.20) e sua correspondente equação por elementos finitos. Segundo McMeeking e Rice (1975), pode ser utilizada para materiais elastoplásticos com encruamento isotrópico e com a relação constitutiva escrita em termos do tensor co-rotacional de Kirchhoff τ^* e do tensor taxa de deformações D , dependendo apenas dos parâmetros materiais e do estado de tensões. Isto inclui materiais submetidos a diferentes tipos de carregamento e descarregamento. Portanto, a relação constitutiva utilizada deve ser

$$\{\tau^*\} = [C]\{D\} \quad (3.28)$$

ou, na forma incremental,

$$\{\Delta\tau^*\} = [C]\{\Delta D\}, \quad (3.29)$$

onde C representa a matriz constitutiva linearizada.

3.6 Atualização das Tensões

Através da equação (3.29), pode-se determinar o incremento do tensor co-rotacional de Kirchhoff $\Delta\tau^*$ no final de cada passo. No entanto, o tensor tensão que

realmente tem significado físico e que, portanto, representa o estado de tensões real do corpo, em um dado instante, é o tensor tensão de Cauchy σ . Para calcular o incremento de tensão de Cauchy $\Delta\sigma$ a partir do incremento de tensão co-rotacional de Kirchhoff $\Delta\tau^*$, utiliza-se a relação (Kikuchi e Cheng, 1983)

$$\Delta\tau_{ij}^* = \Delta\sigma_{ij} - W_{ik}\sigma_{kj} + \sigma_{ik}W_{kj} + \sigma_{ij}\Delta D_{kk} \quad (3.30)$$

onde σ_{ij} são as componentes do tensor de Cauchy na configuração atual e W_{ij} são as componentes da parte anti-simétrica do tensor gradiente do incremento de velocidade, também chamado de tensor spin, dado por (Kleiber, 1989)

$$W_{ij} = \frac{1}{2}(\Delta v_{i,j} - \Delta v_{j,i}). \quad (3.31)$$

sendo Δv o incremento de velocidade. A grandeza ΔD_{kk} representa o traço do tensor taxa do incremento de deformações.

Calculado o incremento do tensor de Cauchy em termos de taxas $\Delta\sigma$, a tensão de Cauchy σ é incrementada utilizando a expressão (Kleiber, 1989)

$$\sigma_{ij}^{t+\Delta t} = \sigma_{ij}^t + \Delta\sigma_{ij}. \quad (3.32)$$

3.7 Integração da Matriz de Rigidez

A integração da matriz de rigidez em problemas no regime elasto plástico requer um tratamento especial, devido à complexa distribuição das tensões decorrentes da deformação plástica ao longo da espessura. Um acréscimo de carga pode plastificar pontos situados na porção mais externa da casca, enquanto que próximo à superfície média ainda permanece o regime elástico. Em corpos sujeitos à flexão pura, este problema fica evidente e, se não for levado em consideração, poderá acarretar uma imprecisão muito grande nos resultados.

Uma solução para este problema é implementar uma regra de integração na direção normal, independente da integração na superfície média. O método mais utilizado é a integração por camadas (Parish, 1981), no qual se divide a casca em camadas paralelas, ao longo da espessura, dentro das quais é feita a integração. O valor integrado é obtido somando cada parcela multiplicada pela espessura da camada.

Neste trabalho empregou-se a regra de quadratura de Gauss, tanto para integrar na superfície quanto para a integração ao longo da espessura. Entretanto, o número de pontos de integração utilizados na direção normal foi variável, enquanto que na superfície média, usaram-se 2x2 pontos (subintegração uniforme). As dificuldades numéricas decorrentes do processo de subintegração serão tratadas no Capítulo 4.

Uma vantagem da utilização da quadratura de Gauss ao longo da espessura é que são necessários menos pontos de integração do que camadas para calcular a rigidez das fibras mais externas. Além disso, o jacobiano é calculado em

cada ponto, enquanto que no processo por camadas este é admitido constante ao longo de cada camada.

3.8 Critério de Convergência

O critério de convergência para os incrementos utilizado neste trabalho foi o mesmo utilizado por Imaeda (1992), baseado no trabalho de Yang e Saigal (1985), o qual é controlado pelas expressões

$$\left[\frac{\sum_{i=1}^n (R_i)^2}{\sum_{i=1}^n (F_{ext})^2} \right]^{\frac{1}{2}} \leq \text{Tolerância}, \quad (3.33)$$

$$\left[\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta u_i)^2}{\sum_{i=1}^n (u_i)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \leq \text{Tolerância}, \quad (3.34)$$

onde

R_i são as forças residuais no nó i , ou seja, a diferença entre as forças externas incrementais aplicadas e as forças internas no nó i ;

F_{ext} são as forças externas incrementais aplicadas,

Δu_i são os incrementos de deslocamentos nodais na iteração;

u_i são os incrementos de deslocamentos nodais no incremento;

n é o número de graus de liberdade do modelo numérico.

A expressão (3.33) é utilizada quando há prescrição de forças e a expressão (3.34) quando há prescrição de deslocamentos.

Capítulo 4

Elemento Finito para Análise de Cascas Semi-Espessas

4.1 Introdução

No presente capítulo será apresentada a formulação para o elemento finito de casca utilizado neste trabalho. Esta formulação está baseada no trabalho de White e Abel (1990) e foi utilizada por Mourão (1991) para simular problemas de cascas semi-espessas sujeitas a grandes deslocamentos.

Na seção 4.2 os sistemas de coordenadas utilizados para descrever o elemento serão apresentados, e os graus de liberdade nodais serão definidos, nos sistemas global e local. Na seção seguinte serão determinadas as matrizes transformação de coordenadas entre os sistemas. O campo de deslocamentos e a

geometria serão discutidos na seção 4.4.

Na seção 4.5, as equações descritas no Capítulo 3 serão apresentadas de forma a simplificar o uso do método de estabilização de modos espúrios proposto. Segundo White e Abel (1990), a forma na qual as equações são escritas resulta em maior eficiência computacional associada aos resultados do uso da técnica de subintegração uniforme.

Na seção 4.6 será analisado o desempenho dos elementos lagrangeanos de nove nós. Serão discutidos o problema de travamento e o processo de subintegração utilizado. No final desta seção serão apresentados os modos espúrios decorrentes da subintegração.

O capítulo finaliza com o desenvolvimento do método de estabilização de modos espúrios implementado, sendo definidos a matriz de estabilização e o operador projeção.

4.2 Formulação do Elemento Finito de Casca Degenerado

O elemento finito de casca lagrangeano de 9 nós originou-se a partir do elemento sólido de 27 nós, no qual se compactaram os nós que compartilhavam a mesma normal à superfície, obtendo assim um elemento de casca curvo com nós apenas na superfície média (Huang e Hinton, 1986). A tensão normal ao longo da espessura é desprezada e o campo de deslocamentos é expresso em função das translações e rotações da superfície de referência, utilizando funções de interpolação apropriadas.

A idéia do uso do elemento de casca degenerado é similar à do uso da teoria de placa de Mindlin-Reissner. O processo de degeneração do elemento sólido para o elemento de casca se baseia em duas considerações (Huang e Hinton, 1986):

(1) A normal à superfície média antes da deformação permanece reta após a deformação;

(2) A energia de deformação associada com a tensão normal transversal é considerada nula e é eliminada da relação constitutiva.

Quatro sistemas de coordenadas são utilizados para descrever o campo de deslocamentos e a geometria do elemento de casca degenerado: sistema de coordenadas cartesiano global, sistema de coordenadas natural, sistema de coordenadas nodal e sistema de coordenadas local.

4.2.1 Sistema de Coordenadas Cartesiano Global (e_1^g, e_2^g, e_3^g)

O sistema global é usado para definir as coordenadas e os deslocamentos nodais. É definido por três vetores base ortogonais; (Figura 4.1(a)). A Figura 4.1 (b) indica a numeração e posicionamento dos nós.

A matriz de rigidez global e o vetor forças externas são escritas no sistema global.

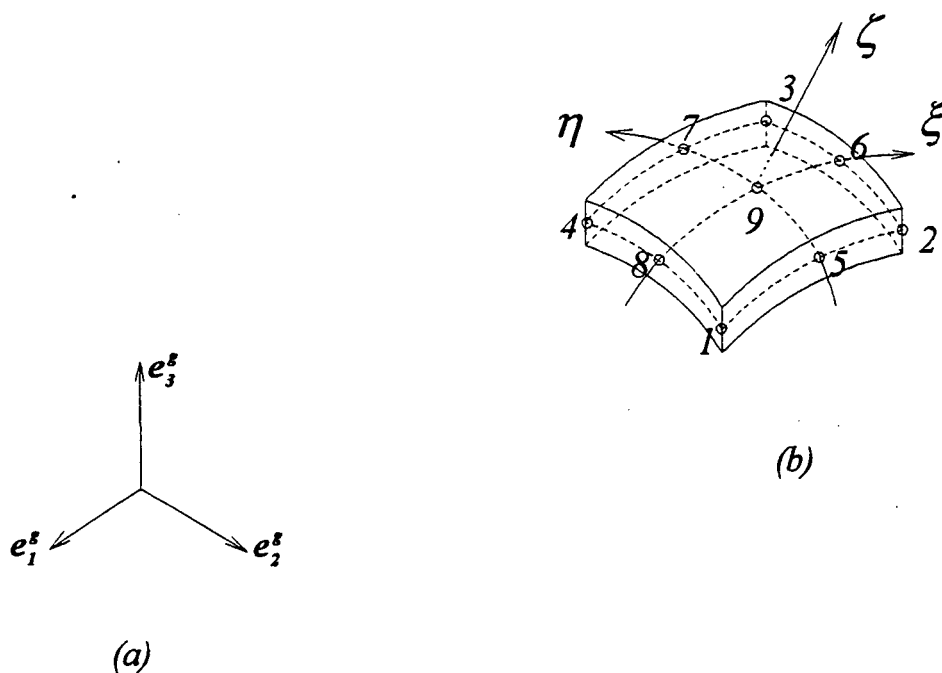


Figura 4.1 - Sistemas de coordenadas (a) global e (b) natural.

4.2.2 Sistema de Coordenadas Natural (ξ , η , ζ)

O sistema natural é definido pelos vetores e_ξ , e_η e e_ζ . O eixo das coordenadas ζ é retilíneo devido à hipótese de que, para a teoria de cascas utilizada neste trabalho, a normal à superfície média permanece reta após a deformação. Os eixos de coordenadas ξ e η são definidos sobre a superfície de referência e, dentro do domínio da casca. Todas as coordenadas naturais variam de -1 a +1.

Os vetores base deste sistema estão representados na Figura 4.1(b) e são definidos por

$$\begin{aligned}
 e_\xi &= \frac{X_{,\xi}}{\|X_{,\xi}\|}; \\
 e_\eta &= \frac{X_{,\eta}}{\|X_{,\eta}\|}; \\
 e_\zeta &= e_\xi \times e_\eta
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde X é o vetor posição, em coordenadas globais, e $\| \cdot \|$ representa a norma euclidiana.

As funções de interpolação são definidas neste sistema de coordenadas.

4.2.3 Sistema de Coordenadas Nodal (e_1, e_2, e_3)

O sistema nodal é um sistema ortogonal associado a cada nó do elemento. Sua base é construída de forma tal que o vetor e_3 seja normal à superfície média e sua origem esteja no nó correspondente. Os vetores desta base são definidos como

$$\begin{aligned}
 e_3 &= \frac{X_{P,\xi} \times X_{P,\eta}}{\|X_{P,\xi} \times X_{P,\eta}\|}; \\
 e_1 &= \frac{e_3^s \times e_3}{\|e_3^s \times e_3\|}; \\
 e_2 &= e_3 \times e_1,
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

sendo X_p o vetor posição do nó P em coordenadas globais.

Os vetores e_1 e e_2 construídos desta maneira são paralelos à superfície de referência.

As funções que descrevem a superfície de referência são de ordem C^0 , por isso pode haver uma descontinuidade da normal entre elementos, principalmente em problemas com grandes curvaturas. Como consequência, o vetor $e_{,3}$, construído a partir da equação acima, não é necessariamente normal à superfície de referência quando o nó em questão se localiza entre dois ou mais elementos. Para contornar este problema, Belytschko et al (1989) sugerem tirar a média dos vetores normais calculados para cada elemento que compartilham o mesmo nó, e dessa forma tem-se então um vetor normal médio entre os elementos.

A Figura 4.2 mostra o sistema de coordenadas nodais. As rotações são descritas neste sistema de coordenadas.

4.2.4 Sistema de Coordenadas Local (e'_1, e'_2, e'_3)

O sistema de coordenadas local é definido em cada um dos 2x2 pontos de integração do elemento. Tal como o sistema nodal, o sistema local é ortogonal e sua origem está situada na superfície de referência, porém sobre cada ponto de integração. Sua base é definida como:

$$\begin{aligned} e'_1 &= \frac{e_\eta \times e_\zeta}{\|e_\eta \times e_\zeta\|} ; \\ e'_2 &= \frac{e_\zeta \times e'_1}{\|e_\zeta \times e'_1\|} ; \\ e'_3 &= \frac{e'_1 \times e'_2}{\|e'_1 \times e'_2\|} . \end{aligned} \tag{4.3}$$

A matriz de rigidez, além das tensões e deformações, são calculadas

neste sistema, e posteriormente transformadas para o sistema global. Os vetores base deste sistema estão ilustrados na Figura 4.2.

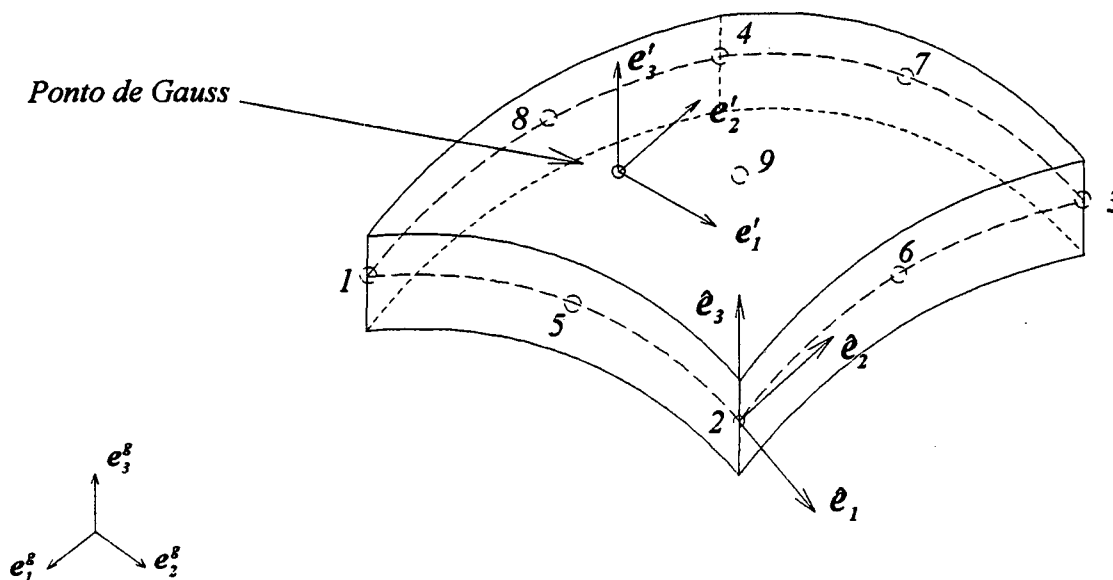


Figura 4.2 - Sistemas de coordenadas local e nodal.

Um quinto sistema de coordenadas será utilizado neste trabalho. Trata-se de um sistema similar ao local, definido sobre a superfície média, em pontos denominados pontos α que possuem mesmas coordenadas ξ e η , no qual são obtidas as matrizes de estabilização dos modos espúrios.

4.2.5 Graus de Liberdade Nodais

O elemento utilizado neste trabalho possui cinco graus de liberdade por nó, sendo três de translação e dois de rotação. Os graus de liberdade de translação

são escritos em coordenadas globais, enquanto que as rotações são escritas em coordenadas nodais. Estes cinco graus de liberdade tornam-se seis quando escritos em coordenadas locais. Dessa forma, pode-se escrever

$$\Delta \mathbf{u}^g = [u_{1,p}^g \quad u_{2,p}^g \quad u_{3,p}^g \quad \theta_{1,p} \quad \theta_{2,p}] \quad (4.4)$$

(nó P)

em coordenadas globais, e

$$\Delta \mathbf{u}' = [u'_{1,p} \quad u'_{2,p} \quad u'_{3,p} \quad U'_{1,p} \quad U'_{2,p} \quad U'_{3,p}] \quad (4.5)$$

(nó P)

em coordenadas locais.

Na seção seguinte, as matrizes de transformação entre os sistemas serão definidas.

4.3 Matriz Transformação Global-Local

Na formulação apresentada, a matriz de rigidez é determinada em coordenadas locais, em termos das componentes dos deslocamentos em coordenadas locais u'_i e U'_i nos diferentes pontos de integração. Posteriormente, a mesma é transformada para o sistema global quando é escrita em função das componentes dos deslocamentos em coordenadas globais u_i^g e θ_i . Segundo White e Abel (1990), são

necessárias menos operações para calcular a contribuição de rigidez de cada um dos 2x2 pontos de integração se as matrizes de rigidez linear e geométrica e a matriz de estabilização forem determinadas em coordenadas locais. Para seguir este procedimento, deve-se calcular a matriz transformação de coordenadas entre os sistemas global e local para cada ponto em questão.

As transformações entre os sistemas global e nodal e global e local são efetuadas através das matrizes de co-senos diretores de cada base. Estas matrizes são, respectivamente, definidas como

$$\begin{aligned} R &= [e_1 \quad e_2 \quad e_3]^T \\ S &= [e'_1 \quad e'_2 \quad e'_3]^T. \end{aligned} \tag{4.6}$$

A matriz transformação entre sistemas ortogonais é uma matriz ortogonal, portanto **R** e **S** são ortogonais.

Em notação indicial pode-se escrever

$$\begin{aligned} \hat{X}_i &= R_{ij} X_j^g \\ X'_i &= S_{ij} X_j^g. \end{aligned} \tag{4.7}$$

A transformação entre os sistemas nodal e local é definida considerando a propriedade de matrizes ortogonais de que sua inversa é igual a sua transposta.

Desta forma tem-se

$$\begin{aligned} \hat{X}_i &= R_{ik} S_{jk} X'_j \\ X'_i &= S_{ik} R_{jk} \hat{X}_j \end{aligned} \tag{4.8}$$

4.3.1 Transformação dos Graus de Liberdade

Como os graus de liberdade de translação são dados em coordenadas globais, a mudança de base é direta, e é dada por

$$u'_{i_p} = S_{ij} u^g_{j_p}, \quad (4.9)$$

onde u'_{i_p} e $u^g_{j_p}$ são os graus de liberdade de translação nos sistemas local e global respectivamente. Em forma matricial tem-se

$$\begin{Bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & & \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & & \\ & & & \cdot & \cdot \\ & 0 & & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} u^g_{1_p} \\ u^g_{2_p} \\ u^g_{3_p} \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix}. \quad (4.10)$$

Os graus de liberdade de rotação são dados em coordenadas nodais (em torno dos eixos e_1 e e_2) e sua transformação é mostrada a seguir.

Define-se U'_{i_p} como as rotações em coordenadas locais. A rotação \hat{U}_1 (na direção e_1) é dada pela rotação nodal θ_2 (em torno do eixo e_2). Portanto tem-se

$$\hat{U}_1 = \theta_2. \quad (4.11)$$

As rotações em torno dos eixos e_1 e e_2 , possuem sinais contrários (por convenção), como mostra a Figura 4.3.

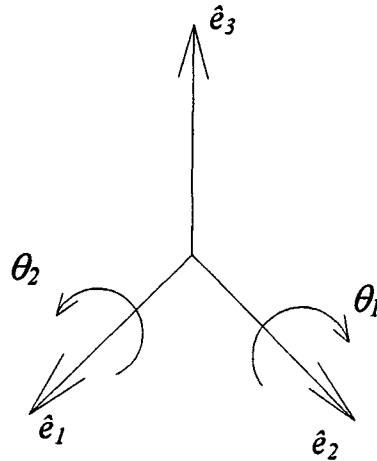


Figura 4.3 - Rotações nodais.

A rotação \hat{U}_2 é dada por

$$\hat{U}_2 = -\theta_1. \quad (4.12)$$

Em forma matricial pode-se escrever o vetor representativo das rotações da seguinte forma

$$\begin{Bmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{U}_2 \\ \hat{U}_3 \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (4.13)$$

ou, $\hat{U} = H\theta$.

Utilizando a expressão (4.7) pode-se escrever

$$U'_i = S_{ik} R_{jk} \hat{U}_j. \quad (4.14)$$

Fazendo $G_{ij} = S_{ik} R_{jk}$ e utilizando $\hat{U} = H \theta$ obtém-se

$$U'_i = G_{ik} H_{kj} \theta_j, \quad (4.15)$$

que pode ser escrita como

$$U'_i = V_{ij} \theta_j, \quad (4.16)$$

onde j varia de 1 a 2, i de 1 a 3 e $V_{ij} = G_{ik} H_{kj}$. V é uma matriz retangular de três linhas e duas colunas, dada por

$$V = \begin{Bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \\ V_{31} & V_{32} \end{Bmatrix}. \quad (4.17)$$

A transformação dos graus de liberdade de translação pode ser então escrita como

$$u'_{i_p} = Q_{ij} u^s_{j_p} \quad (4.18)$$

com u'_{i_p} e $u^g_{i_p}$ definidos por (4.5) e (4.4), respectivamente, e Q definido como

$$Q = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & & & \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & & \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & & & \\ & & & V_{11} & V_{12} & \\ & 0 & & V_{21} & V_{22} & \\ & & & V_{31} & V_{32} & \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

A matriz transformação para as tensões e deformações é dada por (Cook et al, 1989)

$$T = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & l_1 m_1 & m_1 n_1 & l_1 n_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & l_2 m_2 & m_2 n_2 & l_2 n_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & l_3 m_3 & m_3 n_3 & l_3 n_3 \\ 2l_1 l_2 & 2m_1 m_2 & 2n_1 n_2 & l_1 m_2 + l_2 m_1 & m_1 n_2 + m_2 n_1 & l_1 n_2 + l_2 n_1 \\ 2l_2 l_3 & 2m_2 m_3 & 2n_2 n_3 & l_2 m_3 + l_3 m_2 & m_2 n_3 + m_3 n_2 & l_2 n_3 + l_3 n_2 \\ 2l_1 l_3 & 2m_1 m_3 & 2n_1 n_3 & l_1 m_3 + l_3 m_1 & m_1 n_3 + m_3 n_1 & l_1 n_3 + l_3 n_1 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

onde l_i , m_i e n_i são os componentes da matriz R , isto é,

$$R = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix}, \quad (4.21)$$

e representam os cossenos diretores.

Na matriz T (equação 4.20), a terceira linha e coluna serão eliminadas

devido à hipótese, já mencionada, de que na teoria de cascas utilizada no presente trabalho a tensão normal transversal é desprezada.

4.4 Discretização da Geometria e do Campo de Deslocamento

Na formulação utilizada neste trabalho, o deslocamento de um ponto genérico P pertencente ao elemento é calculado somando o deslocamento de sua projeção P' na superfície média, com o seu deslocamento em relação a mesma projeção. A Figura 4.4 representa o deslocamento do ponto P entre dois instantes consecutivos t e $t+\Delta t$. O vetor u_t representa o deslocamento de P e o vetor Z_P representa a normal unitária à superfície média que passa pelo ponto P .

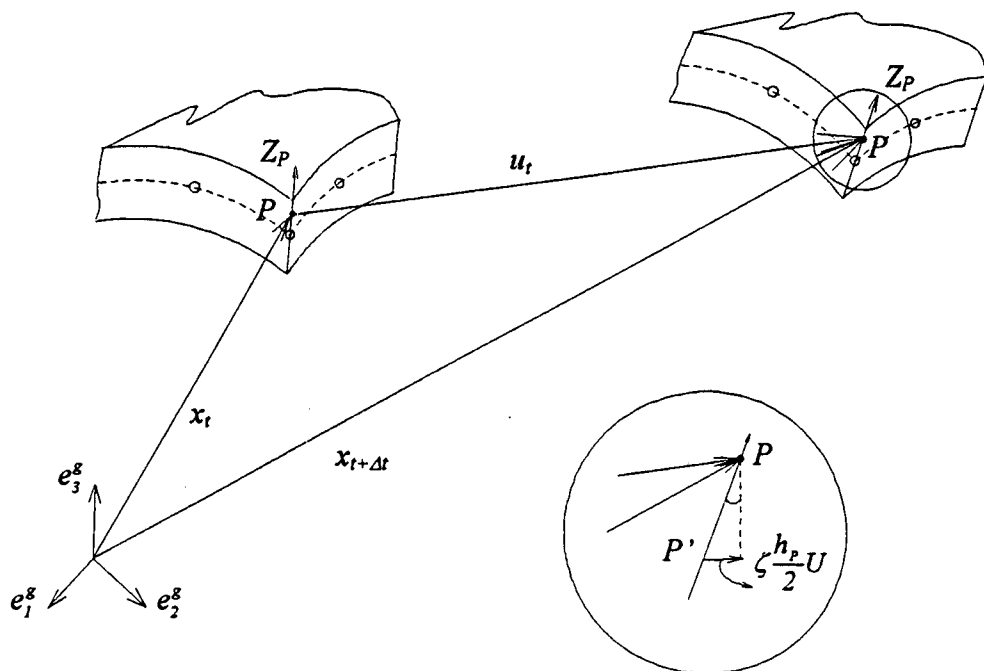


Figura 4.4 - Deslocamento de um ponto genérico da casca.

O deslocamento total é dado pelo somatório da contribuição de cada nó.

Dessa forma, pode-se escrever

$$\mathbf{u}_t = \sum_{i=1}^9 N_P^i \mathbf{u}_i + \frac{h_P}{2} \zeta N_P^i \mathbf{U}_i \quad (4.22)$$

onde

N_P^i é a função de interpolação do nó i calculada no ponto P ;

ζ é a distância entre o ponto P e a superfície média em coordenadas naturais;

h_P é a espessura do elemento no ponto P ;

$\frac{h_P}{2} \zeta$ a distância entre o ponto P e a superfície média medida ao longo do vetor

\mathbf{Z}_P e o vetor \mathbf{U} representa a rotação do vetor \mathbf{Z}_P .

A geometria do elemento é descrita de maneira similar, interpolando as coordenadas a partir dos valores nodais. A equação pode ser expressa algebricamente por

$$\mathbf{x}_P = \sum_{i=1}^9 N_P^i \mathbf{x}_i + \frac{h_P}{2} \zeta N_P^i \mathbf{Z}_i \quad (4.23)$$

onde

\mathbf{x}_P representa o vetor posição de um ponto genérico P ;

\mathbf{Z}_i é a normal unitária à superfície média no nó i .

O elemento utilizado é isoparamétrico, isto é, o campo de deslocamentos e a geometria são discretizados através das mesmas funções de interpolação. A partir da equação (4.22) pode-se definir o campo de deslocamentos em termos das funções de interpolação e representá-lo em coordenadas locais como

$$\Delta \mathbf{u}' = N_P^i u'_i + \frac{h_P}{2} \zeta N_P^i U'_i, \quad (4.24)$$

sendo u'_i os graus de liberdade de translação do nó i e U'_i o deslocamento devido as rotações nodais θ_{1i} e θ_{2i} .

As equações (4.23) e (4.24) podem ser escritas em termos das coordenadas curvilíneas ξ , η e ζ , obtendo assim a expressão final para a discretização dos deslocamentos e a geometria do elemento,

$$\Delta \mathbf{u}'_P(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^9 [N_P^i(\xi, \eta) u'_i + \frac{h_P}{2} \zeta N_P^i(\xi, \eta) U'_i] \quad (4.25)$$

$$\mathbf{x}_P(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^9 [N_P^i(\xi, \eta) \mathbf{x}_i + \frac{h_P}{2} \zeta N_P^i(\xi, \eta) \mathbf{Z}_i] \quad (4.26)$$

onde $\Delta \mathbf{u}'_P$ é o vetor incremento de deslocamento no ponto (ξ, η, ζ) da casca e \mathbf{x}_P é o vetor posição de um ponto P qualquer no interior do elemento.

4.5 Discretização do Princípio Variacional.

As matrizes utilizadas na discretização do princípio variacional (equação (3.27)), serão definidas nesta equação.

A matriz B da equação (3.21) é definida a partir do tensor taxa de deformação, sendo denominada matriz das derivadas das funções de interpolação. Para o elemento utilizado neste trabalho, a matriz B é definida como (White e Abel, 1990):

$$B^P = \begin{bmatrix} N_{P,x} & 0 & 0 & \frac{h_P}{2}(t N_P)_{,x} & 0 & 0 \\ 0 & N_{P,y} & 0 & 0 & \frac{h_P}{2}(t N_P)_{,y} & 0 \\ N_{P,y} & N_{P,x} & 0 & \frac{h_P}{2}(t N_P)_{,y} & \frac{h_P}{2}(t N_P)_{,x} & 0 \\ 0 & N_{P,z} & N_{P,y} & 0 & \frac{h_P}{2}(t N_P)_{,z} & \frac{h_P}{2}(t N_P)_{,y} \\ N_{P,z} & 0 & N_{P,x} & \frac{h_P}{2}(t N_P)_{,z} & 0 & \frac{h_P}{2}(t N_P)_{,x} \end{bmatrix}, \quad (4.27)$$

sendo $\Delta D = B \Delta u$ o tensor incremento de taxa de deformações, onde

$$\Delta D = \left[\Delta D_{11} \quad \Delta D_{22} \quad \Delta D_{12} \quad \Delta D_{23} \quad \Delta D_{13} \right]^T \quad (4.8)$$

e $\Delta \tau^* = C \Delta D$ o incremento de tensão co-rotacional de Kirchhoff,

$$\Delta \tau^* = \left[\Delta \tau_{11}^* \quad \Delta \tau_{22}^* \quad \Delta \tau_{12}^* \quad \Delta \tau_{23}^* \quad \Delta \tau_{13}^* \right]^T \quad (4.29)$$

e C é a matriz constitutiva elementar, objeto de discussão no capítulo 5.

A matriz de rigidez linear definida por (3.23) é obtida pela transformação e superposição adequada das matrizes de rigidez elementares definidas por

$$K_L = \int_{\Omega} [B]^T [C] [B] d\Omega. \quad (4.30)$$

A integral é calculada numericamente somando a contribuição de cada ponto de integração.

De maneira similar, determina-se a matriz de rigidez geométrica (3.24). A matriz N é definida a partir das derivadas das componentes da velocidade v_{ij} e é expressa por

$$N^P = \begin{bmatrix} N_{P,x} & 0 & 0 & \frac{h_P}{2}(t N_P)_{,x} & 0 & 0 \\ N_{P,y} & 0 & 0 & \frac{h_P}{2}(t N_P)_{,y} & 0 & 0 \\ N_{P,z} & 0 & 0 & \frac{h_P}{2}(t N_P)_{,z} & 0 & 0 \\ 0 & N_{P,x} & 0 & 0 & \frac{h_P}{2}(t N_P)_{,x} & 0 \\ 0 & N_{P,y} & 0 & 0 & \frac{h_P}{2}(t N_P)_{,y} & 0 \\ 0 & N_{P,z} & 0 & 0 & \frac{h_P}{2}(t N_P)_{,z} & 0 \\ 0 & 0 & N_{P,x} & 0 & 0 & \frac{h_P}{2}(t N_P)_{,x} \\ 0 & 0 & N_{P,y} & 0 & 0 & \frac{h_P}{2}(t N_P)_{,y} \end{bmatrix}. \quad (4.31)$$

(no nó P)

onde $\sigma = \{ \sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{12} \ \sigma_{23} \ \sigma_{13} \}^t$.

As grandezas definidas nesta seção são calculadas no sistema local e depois são transformadas para o sistema global utilizando as matrizes transformação determinadas na seção (4.3). Esta forma, segundo White e Abel (1990), é a mais adequada ao uso das matrizes de estabilização descritas na seção 4.7.

4.6 Desempenho Numérico do Elemento de Casca Lagrangeano de Nove Nós

Os elementos de cascas baseados na teoria de Mindlin-Reissner possuem grandes vantagens sobre os baseados na teoria de Kirchhoff-Love quanto à implementação numérica computacional. O elemento de Mindlin-Reissner requer funções de interpolação da classe C^0 , o que possibilita o uso de polinômios de graus de continuidade inferiores aos exigidos pelo elemento de Kirchhoff-Love, que devem possuir continuidade C^1 das funções de interpolação. Além disso, por incorporar tensões cisalhantes transversais, o elemento de Mindlin-Reissner pode ser utilizado para uma grande variedade de espessuras de cascas, ampliando assim a sua aplicabilidade, em relação aos formulados através da teoria de Kirchhoff-Love.

Os elementos bi-quadráticos necessitam de 3x3 pontos de quadratura de Gauss para a integração exata na superfície. O problema é que quando se utiliza integração cheia para calcular as matrizes de rigidez de flexão e cisalhamento no elemento lagrangeano de nove nós, aparece o fenômeno de travamento chamado (*"locking"*) de membrana, que é a inability do elemento de representar o estado de flexão pura. Em outras palavras, aparece uma energia de membrana quando há

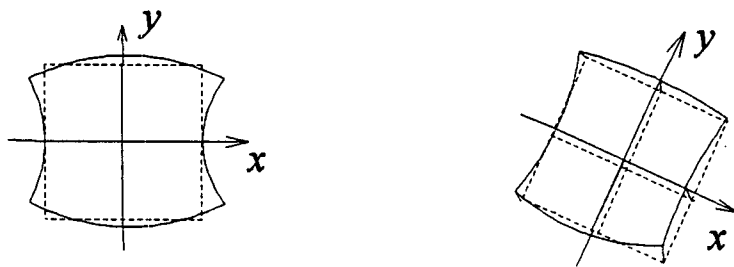
apenas carregamento de flexão. Este problema fica mais evidente quando se trata de problemas de cascas finas, isto é, quando a relação entre a espessura da casca e o menor raio de curvatura for muito pequena.

O problema de travamento é comum em elementos de cascas, devendo ser tratado, pois causa um enrijecimento excessivo da estrutura, apresentando valores incorretos de deslocamentos e tensões. Três métodos podem ser utilizados para tratar o problema de (Mourão, 1991): o Método Misto, o Método da Decomposição Nodal e o Método da Subintegração, o qual será utilizado neste trabalho.

O Método da Subintegração consiste em utilizar a regra de integração de Gauss uma ordem abaixo da necessária para a integração exata da matriz de rigidez. Para o elemento bi-quadrático, no caso o lagrangeano de nove nós, o esquema para a integração exata é 3x3 pontos nas direções ξ e η , respectivamente. No método de subintegração usam-se 2x2 pontos. Dessa forma a energia de membrana, bem como a de flexão, serão sub-avaliadas. Uma outra forma, denominada de subintegração seletiva, é utilizar uma integração cheia para avaliar a energia de membrana e subintegrar a parcela de cisalhamento. Neste trabalho optou-se por uma regra de integração de 2x2 pontos, caracterizando assim uma integração reduzida total.

A subintegração é muito eficaz para corrigir o problema de travamento em cascas. No entanto, o uso de menos pontos que o necessário para uma integração exata pode ter conseqüências inconvenientes, a depender do problema estudado. A matriz de rigidez torna-se singular devido á existência de modos espúrios (Cook et al, 1989; Hughes, 1987). O modo espúrio ou modo de energia zero, é um campo de deslocamentos que o corpo sofre, sem apresentar energia de deformação associada e é devido a regra de integração utilizada que não se está avaliando adequadamente a matriz de rigidez. O elemento de casca lagrangeano de nove nós apresenta sete

modos de energia nula quando subintegrado, sendo dois deles possíveis apenas em uma malha com um único elemento, pois são incomunicáveis ou incompatíveis. As Figuras 4.5 e 4.6 apresentam os modos espúrios comunicáveis e não comunicáveis respectivamente para o elemento lagrangeano de nove nós (White e Abel, 1990).



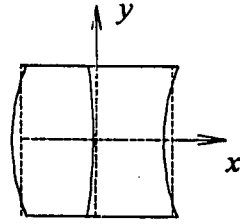
$$u = c_1 x_1 (1 - 3x_2^2)$$

$$\theta_1 = c_2 x_1 (1 - 3x_2^2)$$

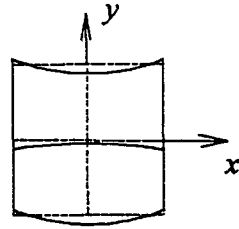
$$v = c_1 x_2 (1 - 3x_1^2)$$

$$\theta_2 = c_2 x_2 (1 - 3x_1^2)$$

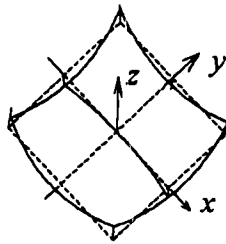
Figura 4.5 - Modos espúrios não comunicáveis.



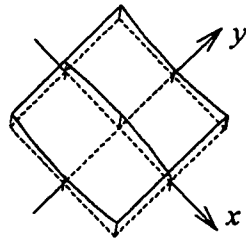
$$u = c_1(x_1^2 + x_2^2 - 3x_1^2 x_2^2)$$



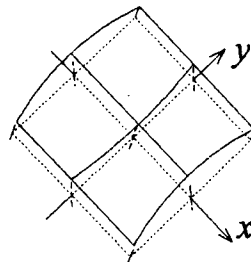
$$v = c_2(x_1^2 + x_2^2 - 3x_1^2 x_2^2)$$



$$w = c_3(x_1^2 + x_2^2 - 3x_1^2 x_2^2)$$



$$\theta_2 = c_4(x_1^2 + x_2^2 - 3x_1^2 x_2^2)$$



$$\theta_1 = c_5(x_1^2 + x_2^2 - 3x_1^2 x_2^2)$$

Figura 4.6 - Modos espúrios comunicáveis.

4.7 Estabilização dos Modos Espúrios

A idéia básica dos métodos de controle de modos espúrios é recuperar a energia de deformação perdida no processo de subintegração, adicionando à matriz de rigidez, uma deformação artificial produzida por um operador comumente denominado operador γ . Belytschko e Wong (1989) mostram, utilizando o princípio de Hu-Washizu, que isto equivale a recuperar a parcela dos termos da diagonal principal da matriz de rigidez perdidos na integração reduzida.

4.7.1 Operador Projeção γ

Segundo White e Abel (1990), o cálculo de um operador projeção apropriado é a chave para o sucesso do método de estabilização. O operador γ deve ser capaz de adicionar energia de deformação na direção dos modos espúrios sem contudo alterar os campos de deslocamentos reais. É justamente a partir destas restrições que o operador de estabilização é determinado.

O método da subintegração não altera os deslocamentos de corpo rígido e os estados de deformações constantes que são avaliados no teste de malha irregular ("patch-test"), portanto, o operador γ não deve interferir na representação destes campos. Matematicamente isto é obtido fazendo com que o operador projeção seja uma combinação linear dos vetores de uma base ortogonal aos campos de deslocamentos correspondentes a estes estados. Estes vetores estão representados nas expressões abaixo (White e Abel, 1990):

$$\begin{aligned}
s_1 &= [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1], \\
x &= [(x'_1)_1 \ (x'_1)_2 \ (x'_1)_3 \ \cdots \ (x'_1)_9]^T, \\
y &= [(x'_2)_1 \ (x'_2)_2 \ (x'_2)_3 \ \cdots \ (x'_2)_9]^T, \\
x^2 &= [(x'_1)_1^2 \ (x'_1)_2^2 \ (x'_1)_3^2 \ \cdots \ (x'_1)_9^2]^T, \\
y^2 &= [(x'_2)_1^2 \ (x'_2)_2^2 \ (x'_2)_3^2 \ \cdots \ (x'_2)_9^2]^T, \\
xy &= [(x'_1 x'_2)_1 \ (x'_1 x'_2)_2 \ (x'_1 x'_2)_3 \ \cdots \ (x'_1 x'_2)_9]^T.
\end{aligned} \tag{4.35}$$

sendo $(x'_i)_p$ são as coordenadas do nó p em coordenadas locais.

O operador projeção não adiciona energia de deformação sob um movimento de corpo rígido se for ortogonal a s_1 . Da mesma forma, os estados de deformações constantes não são afetados caso a ortogonalidade aos vetores x e y seja obedecida. Os vetores x^2 , y^2 e xy representam os campos de deslocamentos quadráticos, e portanto o operador deve ser ortogonal aos mesmos a fim de evitar alterações na representação dos estados de flexão pura e torção pura.

A ortogonalidade do operador γ aos vetores definidos em (4.35) garante que os campos de deslocamentos reais não seja alterados pelo processo de estabilização. Contudo, é necessário que o operador projeção tenha uma componente paralela ao campo de deslocamentos associado aos modos espúrios comunicáveis para que a energia ausente seja adicionada quando o elemento apresentar deformações nestes modos. Segundo White e Abel (1990), o vetor que representa os cinco modos comunicáveis do elemento lagrangeano de nove nós é definido por

$$h = [1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 0]^T, \tag{4.36}$$

e, portanto, o operador deve ter uma componente na direção deste vetor.

A determinação do operador está baseada em alguns critérios a serem obedecidos. O processo se inicia a partir do vetor h fazendo-o ser ortogonal aos vetores definidos por (4.35). Desta forma, o processo é desenvolvido, construindo a base de vetores s_2 até s_6 , como mostrado na sequência abaixo

$$\begin{aligned}
 s_2 &= x - \frac{x \cdot s_1}{s_1 \cdot s_1} s_1, \\
 s_3 &= y - \sum_{i=1}^2 \frac{y \cdot s_i}{s_i \cdot s_i} s_i, \\
 s_4 &= x^2 - \sum_{i=1}^3 \frac{x^2 \cdot s_i}{s_i \cdot s_i} s_i, \\
 s_5 &= y^2 - \sum_{i=1}^4 \frac{y^2 \cdot s_i}{s_i \cdot s_i} s_i, \\
 s_6 &= xy - \sum_{i=1}^5 \frac{xy \cdot s_i}{s_i \cdot s_i} s_i.
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

O vetor h é então ortogonalizado em relação a estes vetores, obtendo-se

$$r = h - \sum_{i=1}^6 \frac{h \cdot s_i}{s_i \cdot s_i} s_i. \tag{4.38}$$

O processo descrito acima é denominado Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt. O operador γ é obtido normalizando o vetor r pela sua componente máxima, resultando em

$$\gamma = \frac{r}{(r_i)_{max}} \quad (4.39)$$

onde $(r_i)_{max}$ é a componente máxima do vetor r .

4.7.2 Obtenção da Matriz de Estabilização

As matrizes de estabilização são definidas em cada um dos quatro pontos de integração α a partir do operador γ . As deformações generalizadas de estabilização são definidas como

$$\varepsilon^{\gamma} = B^{\gamma} \Delta u' \quad (4.40)$$

sendo $\Delta u'$ os graus de liberdade locais definidos pela expressão (4.5).

A matriz deformações-deslocamentos de estabilização B^{γ} , similar a B (3.21), é definida em função do operador γ por

$$B^{\gamma} = [L_1, L_2, L_3, \dots, L_n], \quad (4.41)$$

onde as matrizes L_i são definidas como:

$$L_i = \begin{bmatrix} \gamma_i & & & 0 \\ & \gamma_i & 0 & 0 \\ & & \gamma_i & 0 \\ 0 & & & \gamma_i \\ & & & & \gamma_i & 0 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

Deve-se notar na equação (4.40) que os deslocamentos estão em coordenadas locais.

Da mesma forma, definem-se as tensões de estabilização calculadas a partir da relação constitutiva

$$\sigma^r = C^r \varepsilon^r, \quad (4.43)$$

onde C^r representa a matriz dos coeficientes de estabilização, expressa por

$$C^r = \begin{bmatrix} g_{m1} & & & & \\ & g_{m2} & & & \\ & & g_f & & \\ & & & g_{c1} & \\ & & & & g_{c2} \end{bmatrix}. \quad (4.44)$$

A determinação das componentes da matriz C^r é muito importante para a eficiência do método de estabilização. Os coeficientes de estabilização g_{mi} e g_{ci} são fatores puramente numéricos introduzidos com a finalidade de ponderar os valores de rigidez devidos ao processo de estabilização em relação à rigidez original da casca. Estes fatores devem ser suficientemente grandes para que os modos espúrios sejam eliminados, mas não muito grandes, para não atrapalhar o desempenho natural do elemento, causando um enrijecimento artificial no modelo. Segundo White e Abel (1990), as expressões deduzidas por Belytschko et al (1987), para estes coeficientes, baseadas em princípios variacionais mistos, elevam em muito os custos computacionais. Já o método sugerido por Verheghe e Powell (1986), o qual adota

um valor único igual ao maior elemento da diagonal principal da matriz de rigidez linear elementar, conduz a resultados de flexão excessivamente rígidos quando aplicados a cascas. Desta forma, sugerem então os seguintes valores (Whit e Abel, 1990):

$$\begin{aligned}
 g_{m1} &= F_s \cdot C_{m1} \\
 g_{m2} &= F_s \cdot C_{m2} \\
 g_f &= 0.125 F_s \cdot \frac{t^3}{j'_\alpha} C_f \\
 g_{c1} &= 1.25 F_s \frac{t^3}{j'_\alpha} C_{c1} \\
 g_{c2} &= 1.25 F_s \frac{t^3}{j'_\alpha} C_{c2}
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

O fator F_s é denominado fator de estabilização e tem significado puramente numérico. Segundo White e Abel (1990), pode ser considerado igual à unidade para a grande maioria dos casos. O parâmetro t é a espessura do elemento e j'_α é o jacobiano no ponto α considerado, medido em coordenadas locais. Para obter o fator C_{m1} , escreve-se a matriz de rigidez linear elementar definida por (4.30) no ponto de integração α considerado, fazendo-se o somatório

$$K_\alpha^L = \sum_{\alpha=1}^4 K_\alpha, \tag{4.46}$$

onde K_α é a contribuição à rigidez do ponto de integração α . Na matriz K_α^L ,

consideram-se apenas os elementos da diagonal principal que multiplicam os graus de liberdade u'_{1p} de cada nó. O fator C_{m1} é tomado igual ao maior destes elementos. Similarmente, obtém-se os parâmetros C_{m2} , C_f , C_{c1} e C_{c2} , considerando o maior dos termos da diagonal principal que multiplicam os u'_{2p} , u'_{3p} , U'_{1p} e U'_{2p} , respectivamente.

Definidos os termos da matriz C' (4.44) e B' (4.41), a matriz de estabilização é expressa por

$$K_\gamma = \sum_{\alpha=1}^4 [B']^T [C'] [B']. \quad (4.47)$$

Esta matriz é adicionada às matrizes de rigidez linear (3.23) e geométrica (3.24), obtendo-se assim a matriz de rigidez elementar como

$$K_e = K_L + K_G + K_\gamma \quad (4.48)$$

4.7.3 O Método de Estabilização na Análise Não-Linear.

Na análise não-linear, as tensões artificiais de estabilização são calculadas ao final de cada iteração, usando o operador e os coeficientes determinados no começo do incremento. Os incrementos de deformações $\Delta \epsilon^T$ e tensões $\Delta \sigma^T$ são calculados a partir das expressões (4.40) e (4.43) na forma incremental, ou seja,

$$\begin{aligned}\Delta \varepsilon^r &= B^r \Delta u^r \\ \Delta \sigma^r &= C^r \Delta \varepsilon^r,\end{aligned}\tag{4.49}$$

sendo B^r e C^r calculados na configuração inicial do presente incremento de carga.

Os incrementos de tensões de estabilização $\Delta \sigma^r$, calculadas a partir da equação (4.49), são da mesma natureza das tensões calculadas por meio das relações constitutivas. Consequentemente, o incremento de tensão de estabilização que deve ser adicionado à atual, deve ser calculado a partir de $\Delta \sigma^r$, de forma similar ao incremento do tensor co-rotacional de Kirchhoff $\Delta \tau^*$, utilizando a equação

$$\Delta \sigma_{ij}^r = \Delta \sigma_{ij}^r - W_{ik} \sigma_{kj}^r + \sigma_{ik}^r W_{kj} + \sigma_{ij}^r D_{kk}.\tag{4.50}$$

Os incrementos de tensões de estabilização $\Delta \sigma_{ij}^r$ são então adicionados à tensão de estabilização acumulada σ^r .

As forças nodais internas de estabilização são calculadas no sistema local, por meio da expressão

$$F_E^r = [B^r]^T \sigma^r,\tag{4.51}$$

sendo B^r calculado na configuração final, e são adicionadas às forças nodais internas, relativas às tensões reais em cada ponto de integração. As forças internas são necessárias para o cálculo do resíduo, em cada iteração.

Capítulo 5

Relação Constitutiva

Elastoplástica

5.1 Introdução

No presente capítulo será apresentada a relação constitutiva elastoplástica utilizada neste trabalho. O desenvolvimento teórico e as equações estão baseadas nos trabalhos de Chen e Han (1988) e Hinton e Owen (1980).

O capítulo inicia-se com a apresentação da teoria de fluxo plástico e das hipóteses sobre o comportamento do material na plastificação (seção 5.2). A seguir, o critério de escoamento é apresentado e o critério de carregamento plástico é discutido (seção 5.3).

Na seção 5.4, a relação constitutiva elastoplástica para o caso de plasticidade infinitesimal é desenvolvida a partir da hipótese da decomposição aditiva

e da regra de fluxo associada. Na seção seguinte, a matriz constitutiva elastoplástica será particularizada impondo a condição de casca de Mindlin-Reissner de tensão normal transversal nula.

Na seção 5.6, a relação constitutiva elastoplástica é então generalizada para adequá-la a casos de elastoplasticidade finita, conforme sugerido por McMeeking e Rice (1975).

O capítulo finaliza com a apresentação do método de integração da relação constitutiva elastoplástica sugerida por Hinton e Owen (1980).

5.2 Teoria de Fluxo Plástico

A teoria de fluxo, conforme mencionado no Capítulo 3, é a mais indicada para tratar problemas elastoplásticos na mecânica do contínuo. Neste tipo de formulação, os incrementos de tensões $\Delta\sigma_{ij}$ estão relacionados com os incrementos de deformações plásticas $\Delta\varepsilon_{ij}^{(p)}$ para o estado de tensões definidos por σ_{ij} . A relação entre $\Delta\sigma_{ij}$ e $\Delta\varepsilon_{ij}^{(p)}$ está baseada na mudança que ocorre na superfície de escoamento a medida que ocorrem deformações plásticas. Desta forma, a resposta do material, após um escoamento inicial, é descrita pela nova superfície de escoamento, que é determinada pela regra de encruamento.

No desenvolvimento da teoria de fluxo, três considerações devem ser feitas (Chen e Han, 1988):

- 1) A existência de uma superfície de escoamento inicial que define o limite elástico do material em um estado de tensões multiaxial;
- 2) A regra de encruamento, que descreve a evolução da superfície de escoamento mediante o incremento de deformação plástica;
- 3) A regra de fluxo, que relaciona a função potencial plástico com a direção do vetor deformação plástica no espaço de tensões.

5.2.1 Superfície de Escoamento

A superfície de escoamento inicial é determinada pelo critério de escoamento que define o limite elástico do material. Neste trabalho, utilizou-se o critério de von Mises, que é o critério comumente utilizado para determinar o início do escoamento de metais (Hinton e Owen, 1980). Este critério estabelece que o escoamento ocorre quando uma combinação de tensões, expressa pelo segundo invariante do tensor desviador S atingir um determinado valor K . Esta relação é expressa por (Chen e Han, 1988):

$$f(\sigma_{ij}) = J_2 - K^2 = 0, \quad (5.1)$$

onde

$f(\sigma_{ij})$ é a função de escoamento;

$J_2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}$ é o segundo invariante do tensor desviador;

σ_{ij} são as componentes do tensor de Cauchy;

$S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{nn} \delta_{ij}$ são as componentes do tensor desviador;

K é o parâmetro material que expressa a partir de quando este passa para a fase plástica em um ensaio de cisalhamento puro;

k é o parâmetro de encruamento.

O valor de K está relacionado com a tensão de escoamento σ^o pela expressão:

$$K = \frac{\sigma^o}{\sqrt{3}}. \quad (5.2)$$

O valor de σ^o é obtido em um ensaio de tração pura, sendo denominado de tensão de escoamento do material.

Outros critérios de escoamento podem ser encontrados na literatura entre os quais o Critério de Tresca, o Critério de Rankine e o Critério de Mohr-Coulomb (Chen e Han, 1988).

O critério de Tresca, tal como o de von Mises, é utilizado para determinar o início do escoamento de metais. Este critério estabelece que ocorrem deformações plásticas quando a tensão cisalhante máxima for superior à metade da tensão de escoamento do material σ^o (Chen e Han, 1988).

O critério de Rankine e o critério de Mohr-Coulomb são utilizados para determinar quando ocorrem falhas nos materiais frágeis (Chen e Han, 1988).

5.2.2 Regra de Encruamento

A regra de encruamento depende do material em questão que pode ter encruamento isotrópico, cinemático ou independente. No encruamento isotrópico, a superfície de escoamento definida por $f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \dot{\varepsilon}) = 0$, expande-se sem distorção e sua expansão depende do grau de deformação plástica. Neste caso, o limite de escoamento à compressão cresce na mesma proporção que o limite de escoamento à tração.

No encruamento cinemático, a superfície de escoamento mantém seu formato original sem expansão. O que ocorre na realidade é um movimento da superfície na direção do vetor deformação plástica. Neste caso, o limite de escoamento por compressão diminui com um incremento de deformação plástica para o caso de escoamento por tração.

No encruamento independente, supões-se que o material tem um comportamento independente à tração e à compressão.

O encruamento isotrópico, que foi utilizado neste trabalho, é apropriado para metais (Roberts e Sheppard, 1971). No entanto, não leva em consideração o *efeito Bauschinger*, que é a diminuição do limite de escoamento á compressão devido a um escoamento por tração. Como consequência, deve ser utilizado principalmente para carregamento monotônico sem reversão de tensões. A curva tensão-deformação para um material com encruamento isotrópico está representada na Figura 5.1.

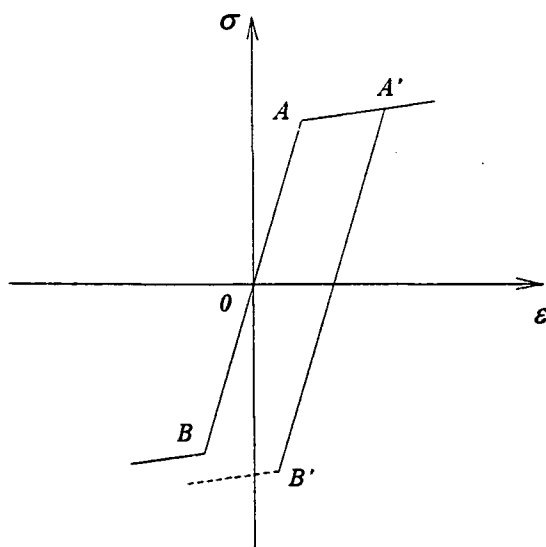


Figura 5.1 - Gráfico tensão-deformação para um material com encruamento isotrópico

5.2.3 Regra de Fluxo

A regra de fluxo parte da consideração de que existe uma função $g(\sigma_{ij})$, denominada *função potencial plástico*, da qual se pode obter a deformação plástica pela diferenciação direta. Dessa forma, a equação de fluxo plástico pode ser representada por (Chen e Han, 1988)

$$\Delta \varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad (5.3)$$

sendo $d\lambda$ um fator de proporcionalidade positivo semi-definido, que é não nulo apenas quando ocorre escoamento e σ_{ij} são as componentes do tensor de Cauchy. A derivada

$\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}$ define a direção do vetor deformação plástica e a função $g(\sigma_{ij})$ define uma superfície no espaço de tensões.

O uso da equação (5.3) é simplificado, quando se trata de metais, quando a função potencial plástico $g(\sigma_{ij})$ for escolhida como sendo a função de escoamento $f(\sigma_{ij})$. Neste caso, a equação (5.3) se torna

$$\Delta \varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (5.4)$$

A equação (5.4) é denominada de regra de fluxo associada, pois o fluxo plástico passa a ser descrito pela mesma função que descreve o critério de escoamento. Para materiais com encruamento, a regra de fluxo associada satisfaz o Postulado de Estabilidade de Drucker, o qual estabelece o seguinte (Chen e Han, 1988):

1) *Convexidade*: A superfície de escoamento inicial e as subsequentes devem ser convexas;

2) *Normalidade*: Em pontos de regularidade da superfície de escoamento (gradiente único), o incremento de deformação plástica $\Delta \varepsilon_{ij}^p$ é dada por (5.4) e em pontos de falta de regularidade ou cantos ("corners") da superfície de escoamento, por exemplo, em pontos de interseção de dois modos, a direção de $\Delta \varepsilon_{ij}^p$ está contida no cone formado pelas normais aos modos ativos no ponto (ver Figura 5.2).

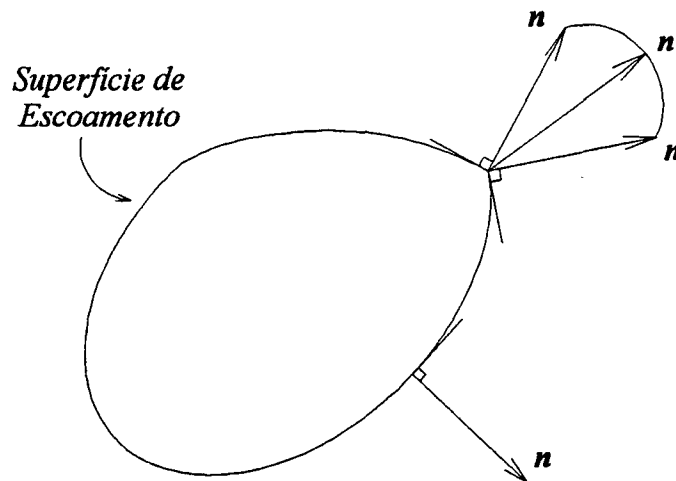


Figura 5.2 - Normais à superfície de escoamento

3) *Linearidade*: O incremento de deformação plástica $\Delta \varepsilon_{ij}^p$ deve ser linear com o incremento de tensão $\Delta \sigma_{ij}$. A intensidade de $\Delta \varepsilon_{ij}^p$, dado pelo escalar $d\lambda$, depende apenas da projeção de $\Delta \sigma_{ij}$ na direção da normal $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$;

4) *Continuidade*: A condição de continuidade requer que o incremento de deformação plástica $\Delta \varepsilon_{ij}^p$ seja nulo quando o incremento de tensão $\Delta \sigma_{ij}$ for tangente à superfície de escoamento;

5) *Unicidade*: O Postulado de Estabilidade de Drucker estabelece que existe apenas uma solução para o problema de valor no contorno para materiais com encruamento.

5.3 Critério de Carregamento Plástico

Uma atividade que é requerida frequentemente na análise elastoplástica é a determinação da natureza do incremento de tensão $\Delta\sigma_{ij}$. O material estando no regime elástico poderá escoar com o próximo incremento de carga ou permanecer elástico. Similarmente, o material no regime plástico poderá continuar escoando ou passar para o descarregamento elástico quando o campo de tensões é incrementado (ver Figura 5.3).

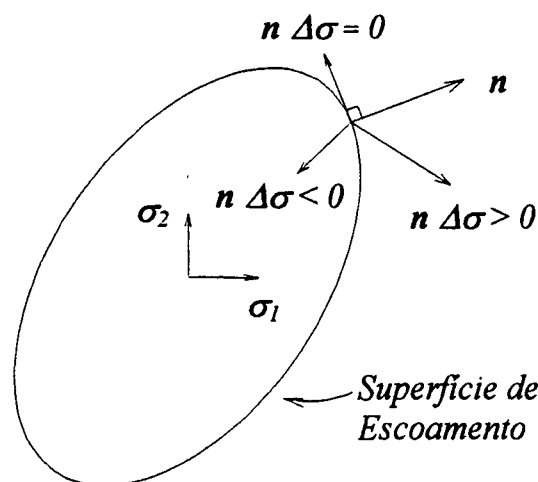


Figura 5.3 - Critério de Carregamento Plástico.

Uma forma de determinar se o incremento de tensão é elástico ou plástico em um ponto na fase plástica é avaliando a direção do vetor $\Delta\sigma_{ij}$ relacionando-a com a direção da normal à superfície de escoamento no instante de aplicação do incremento de carga. A expressão que define o vetor normal à superfície de escoamento n no espaço das tensões é dada por

$$n = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)^{1/2}}. \quad (5.6)$$

O ângulo entre o vetor n e o incremento de tensão $\Delta\sigma_{ij}$ indica se houve carregamento plástico ou descarregamento. Desta forma, três combinações são possíveis (ver Figura 5.3)

1) $n \Delta\sigma > 0$, neste caso, houve um acréscimo de deformação plástica devido a $\Delta\sigma$, ou seja, $\Delta\varepsilon_{ij}^p \neq 0$;

2) $n \Delta\sigma < 0$, houve um descarregamento elástico e portanto $\Delta\varepsilon_{ij}^p = 0$;

3) $n \Delta\sigma = 0$, o ponto se moveu sobre a superfície de escoamento e portanto a resposta do material é elástica e o incremento de deformação plástica é nulo.

O critério dado por (5.6) pode ser implementado numericamente através da equação

$$n \cdot \Delta\sigma = \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)^T C^{(e)} \Delta\varepsilon. \quad (5.7)$$

5.4 Relação Constitutiva Elastoplástica.

Na formulação apresentada, a função potencial plástico $g(\sigma_{ij})$ está associada ao critério de escoamento de von Mises, dado pela equação (5.1). Desta forma, pode-se definir o comportamento do tensor deformação durante o escoamento

plástico por

$$\Delta \varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (5.8)$$

sendo f definida por (5.1).

As equações (5.8) definidas acima (com f sendo a superfície de escoamento de von Mises) são conhecidas com equações de Prandtl-Reuss e formam a base para a dedução da relação constitutiva elastoplástica.

Inicialmente, admite-se que a deformação total infinitesimal $\Delta \varepsilon_{ij}$ pode ser representada pela soma da parte elástica com a parte plástica (hipótese da decomposição aditiva), ou seja

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \Delta \varepsilon_{ij}^{(p)} + \Delta \varepsilon_{ij}^{(e)}. \quad (5.9)$$

A validade da hipótese da decomposição aditiva para os casos de não linearidade geométrica, segundo Gadala et al (1984), é restrita aos casos em que ocorrem deformações quase estáticas e a componente elástica da deformação seja pequena.

Substituindo a equação (5.8) e a relação constitutiva infinitesimal elástica (lei de Hooke generalizada) na equação (5.9), tem-se

$$\Delta \varepsilon_{ij} = C_{klij}^{(e)} \Delta \sigma_{ij} + d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (5.10a)$$

onde foi considerado

$$\Delta \varepsilon_{ij}^{(e)} = C_{klij}^{(e)} \Delta \sigma_{ij}. \quad (5.10b)$$

sendo $C_{klij}^{(e)}$ as componentes da matriz inversa da matriz constitutiva elástica convencional.

A função escalar $d\lambda$ é determinada pela condição de consistência, definida por $df = 0$, que garante que o estado de tensões permanece na superfície de escoamento. Aplicando esta condição na equação (5.1) tem-se:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \Delta \sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial k} dk = 0 \quad , \quad (5.11)$$

que pode ser escrita como

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \Delta \sigma_{ij} - H' d\lambda = 0 \quad (5.12)$$

sendo

$$H' = -\frac{1}{d\lambda} \frac{\partial f}{\partial k} dk. \quad (5.13a)$$

A constante H' é conhecida como *função de encruamento* e pode ser determinada experimentalmente em um ensaio de tração uniaxial (Zienkiewicz, 1977), sendo expressa da seguinte forma

$$H' = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{ij}^{(p)}}. \quad (5.13b)$$

No presente trabalho, modelou-se a curva tensão-deformação de forma simplificada, como mostrado na Figura 5.4.

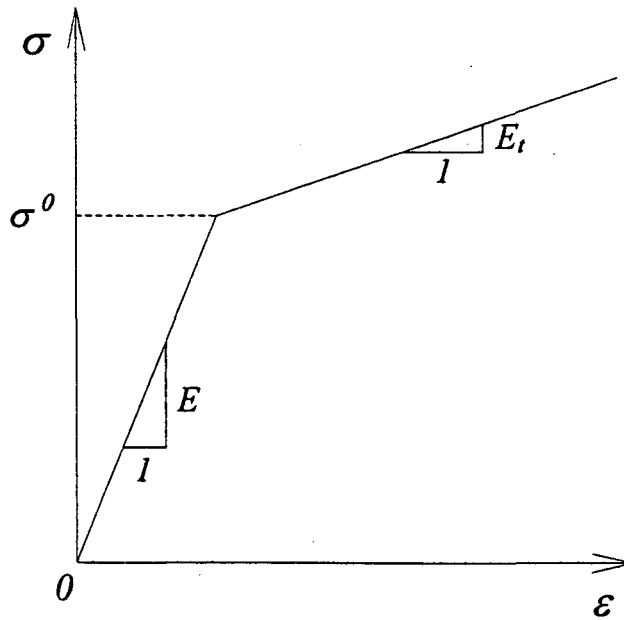


Figura 5.4 - Curva tensão-deformação.

Desta forma, o parâmetro H' é determinado por

$$H' = \frac{E_\tau}{1 - E_\tau/E}. \quad (5.14)$$

Premultiplicando a equação (5.10a) por $(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}})^T C_{ijk}^{(e)}$ obtém-se

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\right)^T C_{ijk}^{(e)} \Delta \varepsilon_k = \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\right)^T \Delta \sigma_{ij} + \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\right)^T C_{ijk}^{(e)} d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_k}. \quad (5.15)$$

Substituindo a expressão (5.12) em (5.15) tem-se:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\right)^T C_{ijk}^{(e)} \Delta \varepsilon_k = H' d\lambda + \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\right)^T C_{ijk}^{(e)} d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_k} \quad (5.16)$$

ou

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\right)^T C_{ijkl}^{(e)} \Delta \varepsilon_{kl} = \left[H' + \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\right)^T C_{ijkl}^{(e)} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \right] d\lambda. \quad (5.17)$$

O parâmetro $d\lambda$ é então determinado por

$$d\lambda = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\right)^T C_{ijkl}^{(e)} \Delta \varepsilon_{kl}}{\left[H' + \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\right)^T C_{ijkl}^{(e)} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \right]}. \quad (5.18)$$

A relação constitutiva elastoplástica é obtida como segue.

Premultiplica-se a equação (5.10) por $C_{ijkl}^{(e)}$,

$$C_{ijkl}^{(e)} \Delta \varepsilon_{kl} = \Delta \sigma_{ij} + C_{ijkl}^{(e)} d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \quad (5.19)$$

que pode ser escrita como

$$\Delta \sigma_{ij} = C_{ijkl}^{(e)} \Delta \varepsilon_{kl} - C_{ijkl}^{(e)} d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}. \quad (5.20)$$

Substituindo a expressão (5.18) em (5.20) tem-se (Chen e Han, 1988):

$$\Delta \sigma_{ij} = C_{ijkl}^{(ep)} \Delta \varepsilon_{kl} \quad (5.21)$$

sendo

$$C_{ijkl}^{(ep)} = C_{ijkl}^{(e)} - \frac{C_{ijmn}^{(e)} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}}\right) \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}}\right) C_{pqkl}^{(e)}}{\left[H' + \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{sr}}\right) C_{rstu}^{(e)} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{tu}} \right]} \quad (5.22)$$

a matriz constitutiva elastoplástica.

$$\Delta \bar{\sigma}_i = \bar{C}_{ij} \Delta \bar{\varepsilon}_j + C_{i6}^* \Delta \varepsilon_{zz} \quad i,j=1,5 \quad (5.25)$$

e

$$\Delta \sigma_{zz} = (C_{6j}^*)^T \Delta \bar{\varepsilon}_j + C_{66} \Delta \varepsilon_{zz} \quad j=1,5. \quad (5.26)$$

Pela hipótese de tensão normal transversal nula ($\sigma_{zz} = 0$) tem-se

$$\Delta \varepsilon_{zz} = -\frac{(C_{6j}^*)^T \Delta \bar{\varepsilon}_j}{C_{66}} \quad j=1,5. \quad (5.27)$$

Substituindo a equação (5.27) em (5.25), obtém-se

$$\Delta \sigma_i = \bar{C}_{ij} \Delta \bar{\varepsilon}_j + C_{i6}^* \left(-\frac{(C_{6j}^*)^T \Delta \bar{\varepsilon}_j}{C_{66}} \right) \quad i,j=1,5. \quad (5.28)$$

A matriz constitutiva para casca de Mindlin-Reissner pode ser então escrita como

$$C_{ij} = \bar{C}_{ij} + C_{i6}^* \left(-\frac{(C_{6j}^*)^T}{C_{66}} \right) \quad i,j=1,5. \quad (5.29)$$

5.6 Generalização da Relação Constitutiva Elastoplástica para Deformações Finitas

A relação constitutiva definida pela equação (5.21) é utilizada para casos da plasticidade infinitesimal. Para estender seu uso aos casos de deformações finitas é necessário escolher adequadamente os tensores tensão e deformação para exprimir estes campos quando grandes deformações e grandes deslocamentos são apresentados, em substituição aqueles utilizados na expressão (5.21).

Uma escolha inadequada dos tensores incrementais poderá acarretar complicações numéricas indesejáveis ou até mesmo resultados errados. Como foi

apresentado no Capítulo 3, a generalização utilizada neste trabalho foi fundamentada na escolha do par dual tensor co-rotacional de Kirchhoff $\Delta\tau^*$ e o tensor taxa de deformações D , conforme sugerido por McMeeking e Rice (1975).

Estes tensores possuem a propriedade de serem invariantes aos movimentos de corpo rígido e, além disso, a matriz de rigidez, resultante desta escolha, é simétrica (McMeeking e Rice, 1975).

Desta forma, a relação constitutiva incremental fica então definida como

$$\Delta\tau_{ij}^* = C_{ijkl}^{(ep)} \Delta D_{kl} \quad (5.30)$$

quando ocorrer carregamento plástico e

$$\Delta\tau_{ij}^* = C_{ijkl}^{(e)} \Delta D_{kl} \quad (5.31)$$

quando houver descarregamento ou carregamento elástico.

Ao admitir a relação constitutiva como definida pelas equações (5.30) e (5.31), assume-se que a matriz constitutiva, expressa por (5.22), independe da velocidade de deformação. Esta mesma relação recai no caso infinitesimal quando aplicada a problemas sujeitos a pequenas deformações e pequenos deslocamentos.

5.7 Integração da Relação Constitutiva

A determinação do tensor de Cauchy σ para os pontos que estão no regime elástico é relativamente simples e foi descrita na seção 3.7. No entanto, os pontos que apresentaram um incremento de deformação plástica requerem uma integração da relação constitutiva de modo que a história do carregamento seja considerada (Bathe, 1982). Desta forma, o incremento de tensão co-rotacional de

Kirchhoff $\Delta\tau^*$ deve ser obtido pela expressão

$$\Delta\tau_{ij}^* = \int_{t_D}^{t_D + \Delta t} C_{ijkl}^{(ep)} d\Delta D_{kl}, \quad (5.32)$$

sendo que o critério de escoamento estabelecido pela equação (5.1) deve ser obedecido durante a integração.

Vários trabalhos foram apresentados definindo algoritmos para determinar a solução de equações deste tipo. Entre eles pode-se citar os desenvolvidos por Chen e Han (1988) e Ortiz e Simo (1986).

O método utilizado no presente trabalho, e que será desenvolvido nesta seção, foi apresentado por Hinton e Owen (1980) e está fundamentado na equação (5.20).

Na Figura 5.5, um ponto A, inicialmente no regime elástico, escoava quando uma tensão $\Delta\sigma_{ij}$ é adicionada. O comportamento correspondente ao trecho \overline{AB} é puramente elástico. Um comportamento elástico, além do ponto B, resulta em um estado de tensões definido pelo ponto C. No entanto, o ponto não pode se mover para fora da superfície de escoamento devido à condição de consistência definida pela equação (5.11). Para que a equação de equilíbrio e a relação constitutiva sejam ambas satisfeitas, deve-se eliminar do tensor $\Delta\sigma_{ij}$ a parcela referente à deformação plástica. Esta condição é obtida por meio da equação

$$\sigma_{ij}^{t+\Delta t} = \sigma_{ij}^t + \Delta\sigma_{ij} - C_{ijkl}^{(e)} d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}, \quad (5.33)$$

onde

σ_{ij}^t são as componentes do tensor de Cauchy no instante t ;

$\Delta\sigma_{ij} = C_{ijkl}^{(e)} \Delta D_{kl}$ são as componentes do tensor incremento de tensão de Cauchy calculado supondo comportamento elástico;

$d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \Delta \varepsilon_{ij}^{(p)}$ são as componentes do tensor incremento de deformação

plástica;

$C_{ijkl}^{(e)}$ são as componentes do tensor constitutivo elástico.

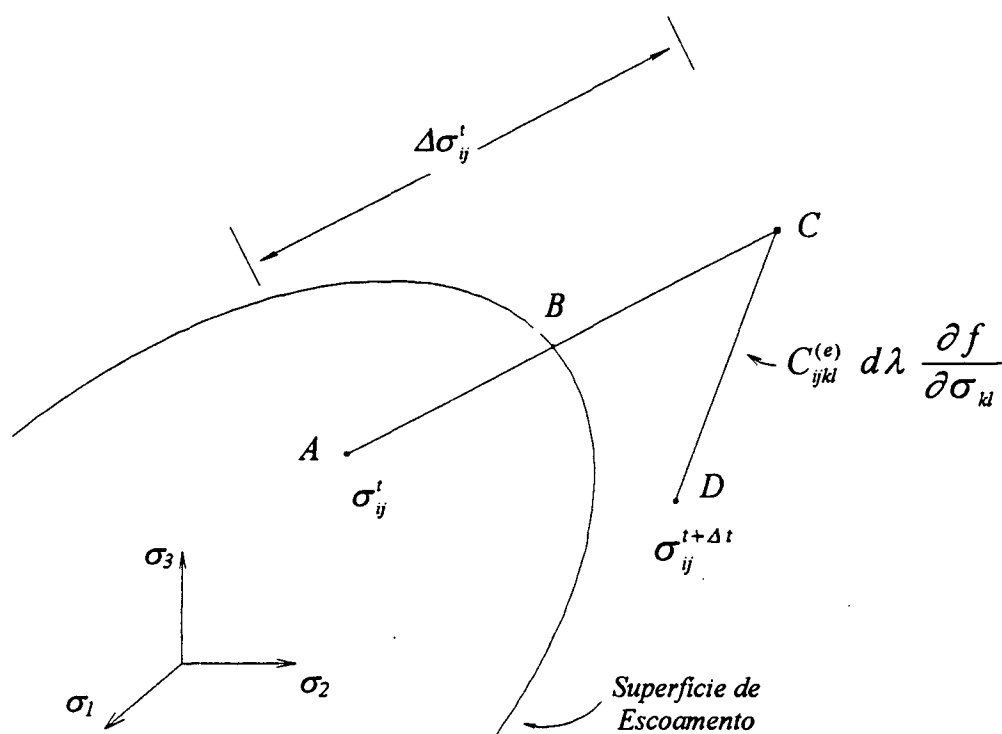


Figura 5.5 - Integração da relação constitutiva.

Como pode ser visto na Figura 5.5, aplicando a equação (5.33) sobre o

valor total do incremento de deformação plástica $\Delta\varepsilon^{(p)}$, resulta um estado de tensão final representado por $\sigma_{ij}^{t+\Delta t}$, o qual está muito afastado da superfície de escoamento, definida por (5.1). Para contornar este problema, Hinton e Owen (1980) sugerem dividir o incremento de deformação plástica $\Delta\varepsilon^{(p)}$ em m subincrementos iguais (ver Figura 5.6). Assim, para cada valor de σ_{ij} calculado a partir da equação

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^t + \Delta\sigma_{ij} - \frac{1}{m} C_{ijkl}^{(e)} d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}, \quad (5.34)$$

uma nova superfície de escoamento é determinada através de

$$\sigma_y = \sigma_y^0 + H' \bar{\varepsilon}_e \quad (5.35)$$

sendo

$\bar{\varepsilon}_e = \sqrt{\Delta\varepsilon_{ij}^{(p)} \Delta\varepsilon_{ij}^{(p)}}$ a deformação plástica efetiva;

σ_y o limite de escoamento no instante considerado;

σ_y^0 o limite de escoamento inicial.

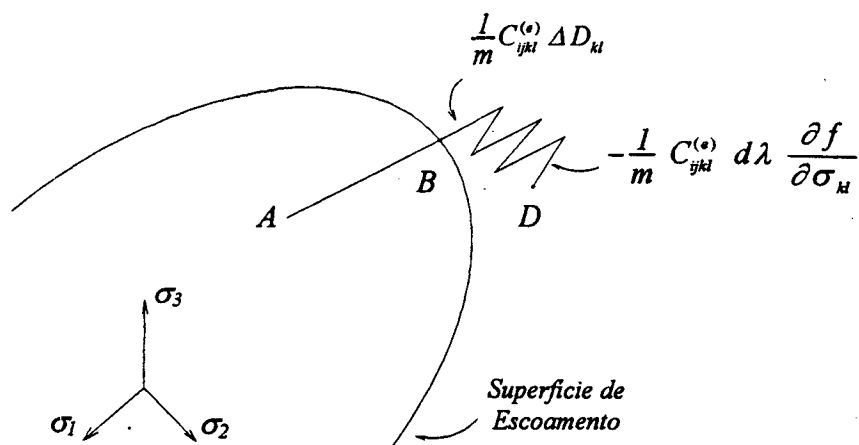


Figura 5.6 - Integração da relação constitutiva com m incrementos.

A expressão para o cálculo de m é dada por (Hinton e Owen, 1980)

$$m = 8 \left[\frac{\bar{\sigma}_e - \sigma_y}{\sigma_y^0} \right] + 1, \quad (5.36)$$

sendo

$$\bar{\sigma}_e = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma_{ij} \sigma_{ij}} \text{ a tensão efetiva.}$$

O valor final da tensão calculada utilizando o procedimento descrito acima ainda estará ligeiramente deslocado da superfície de escoamento. Este afastamento é corrigido utilizando a expressão (Hinton e Owen, 1980)

$$\sigma_{ij}^{t+\Delta t} = R \sigma_{ij}, \quad (5.37)$$

sendo

σ_{ij} as componentes da tensão de Cauchy determinada a partir da equação (5.34);

$\sigma_{ij}^{t+\Delta t}$ as componentes da tensão de Cauchy final no instante $t+\Delta t$;

R o fator de escalonamento dado por (Hinton e Owen, 1980)

$$R = \frac{\sigma_y^0 + H' \bar{\varepsilon}_e}{\bar{\sigma}_e}. \quad (5.38)$$

Capítulo 6

Exemplos Numéricos

6.1 Introdução

Neste capítulo são apresentados os resultados dos problemas resolvidos para comprovar a validade e a eficiência da formulação utilizada neste trabalho. Para efeitos de comparação, foram resolvidos problemas lineares e não-lineares cuja solução analítica ou numérica, são encontrados na literatura corrente. Outra preocupação que se teve foi a de selecionar casos com variadas condições de carregamento e contorno, para comprovar a versatilidade do elemento.

No início do capítulo é apresentado o Teste da Malha Irregular ("Patch-Test") (McNeal e Harder, 1985) aplicado ao elemento para verificar a validade da sua formulação e implementação computacional. Na seção 6.3 são apresentados os resultados para o Teto de Scordelis-Lo, para o cilindro puncionado e para a casca hemisférica, casos estes lineares, propostos por McNeal e Harder (1985) com o

objetivo de verificar os parâmetros que podem afetar a precisão da solução numérica.

Nas seções 6.4 e 6.5 são apresentados problemas que envolvem não-linearidade geométrica com o contínuo no regime elástico. A seleção dos exemplos teve como objetivo verificar o desempenho da formulação quando utilizada em problemas sujeitos a grandes rotações, uma vez que, como foi citado no Capítulo 2, este é um dos fatores que devem ser avaliados quando se trata de solução de problemas não-lineares.

Os problemas que apresentam deformações plásticas serão tratados nas seções 6.6 e 6.7. No primeiro exemplo, em que se tem uma placa engastada com carregamento distribuído transversal, será feita uma avaliação comparativa do método empregado para integração da matriz de rigidez ao longo da espessura com os utilizados por outros autores. No segundo exemplo será examinado o desempenho da formulação em problemas que apresentam uma combinação de efeitos das não-linearidades geométrica e material.

6.2 Teste da Malha Irregular ("Patch-Test ")

O teste da malha irregular ("Patch-Test") tem como finalidade verificar se o elemento finito representa os estados de deformações constantes quando são dispostos em uma malha irregular. A aprovação nestes testes garante que a solução convergirá para o valor exato à medida que houver um refino de malha.

O teste da malha irregular ("Patch-Test") utilizado neste trabalho foi recomendado por Huang e Hinton (1986) e consiste em submeter uma malha distorcida de cinco elementos, como representada na Figura 6.1, a estados puros de

flexão, torção, cisalhamento de membrana, cisalhamento transversal e tração.

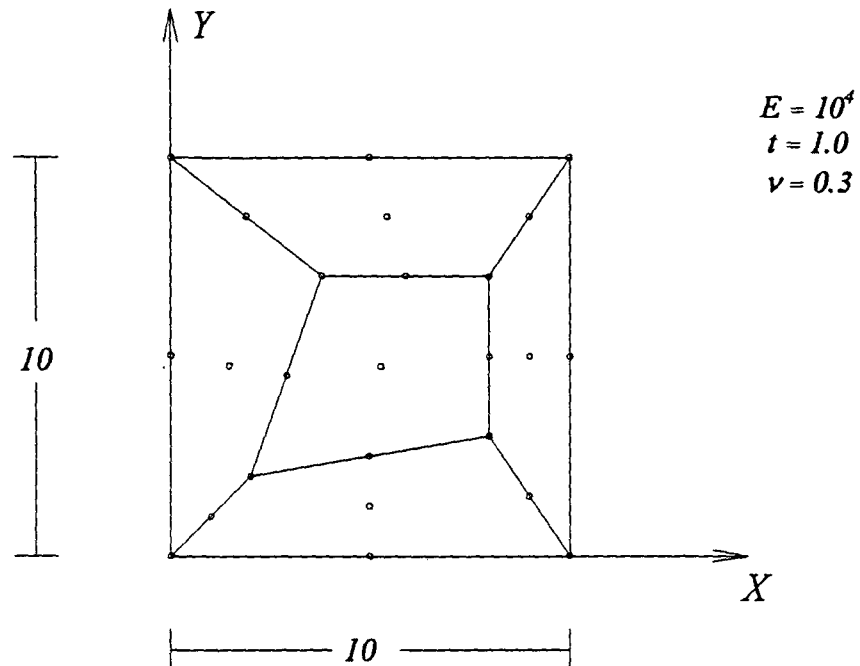


Figura 6.1 - Patch-Test: geometria e discretização

As condições de contorno para os seis testes realizados são mostrados na Figura 6.2. Para os casos de tração e cisalhamento, foi aplicada uma força por unidade de comprimento $F = 6.0$, sendo a solução analítica para as tensões neste caso dada por

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \frac{F}{A} = 6.0 \quad (6.1)$$

Nos testes de flexão e torção foi aplicado um momento por unidade de comprimento $M = 0.06$, conseqüentemente deve-se esperar uma tensão nos pontos de

integração dada por

$$\sigma = \frac{M c}{I} = 0.20784610, \quad (6.2)$$

onde c representa a distância entre o ponto de integração e a superfície média da casca e I o momento de inércia da seção.

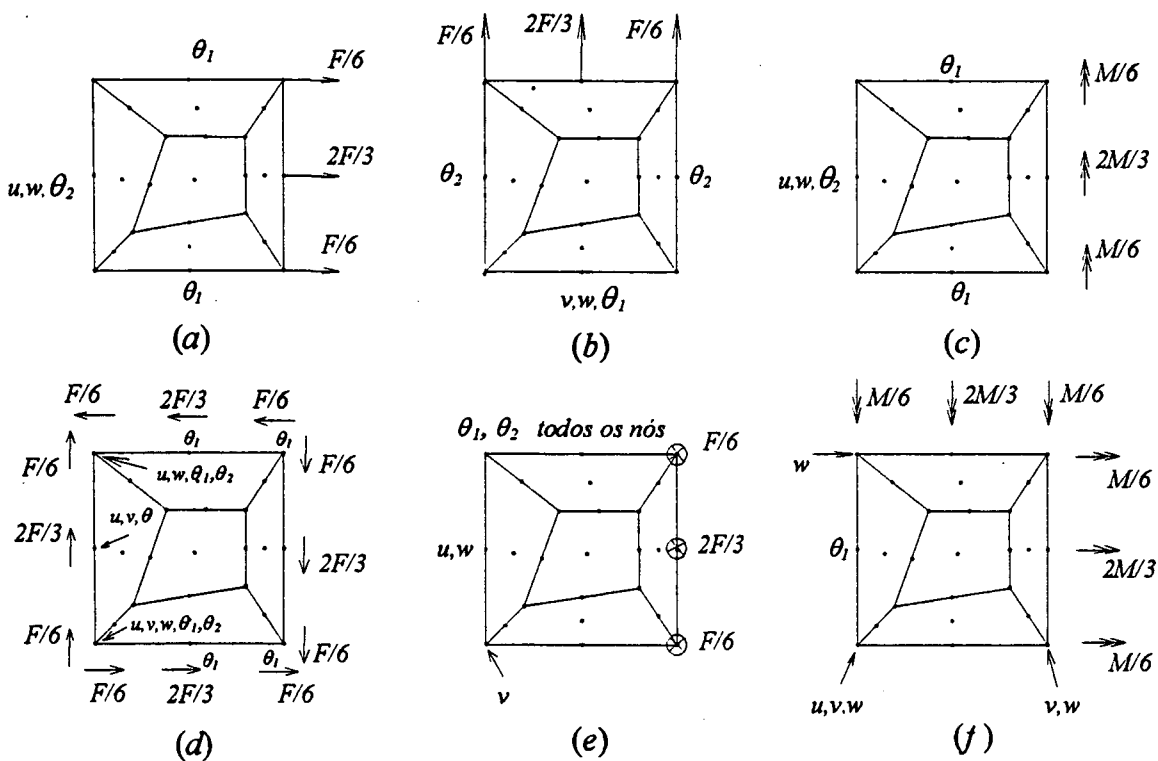


Figura 6.2 - "Patch-Test": condições de contorno (a) Tração na direção ox , (b) Tração na direção oy , (c) Flexão, (d) Cisalhamento de membrana, (e) Cisalhamento transversal, (f) Torção

Os resultados de deslocamentos obtidos para o elemento utilizado neste trabalho foram satisfatórios sendo coincidentes em alguns casos. No entanto, os resultados de tensões apresentaram erros muito acima dos esperados, em torno de

20%. Por exemplo, para o teste de tração na direção ox (a), o resultado de tensão normal obtido para o elemento mais distorcido foi $\sigma_x = 4.75$. Os mesmos testes foram aplicados a uma malha regular e os resultados de tensões e deslocamentos obtidos apresentaram erros desprezáveis.

A partir destes testes pode-se concluir que a formulação utilizada neste trabalho é altamente sensível à distorção da malha de elementos finitos.

6.3 Casos Lineares

O propósito de submeter a formulação aos testes lineares que serão apresentados a seguir é verificar o comportamento do elemento implementado quando utilizado para resolver casos típicos que apresentam problemas numéricos de travamento de membrana e cisalhamento. Além disso, pode-se avaliar a eficiência da formulação aplicando-a a problemas clássicos de estruturas do tipo casca.

A solução analítica w_a é apresentada na figura que representa cada problema e seus respectivos autores são citados no decorrer do texto.

6.3.1 Telhado Cilíndrico

Este exemplo, conhecido como Teto de Scordelis-Lo, consiste de uma casca cilíndrica apoiada em diafragmas rígidos nas extremidades curvas, livre nas extremidades retas, submetida ao peso próprio (Huang e Hinton, 1986). A Figura 6.3 mostra a geometria e os dados do problema, bem como as condições de contorno.

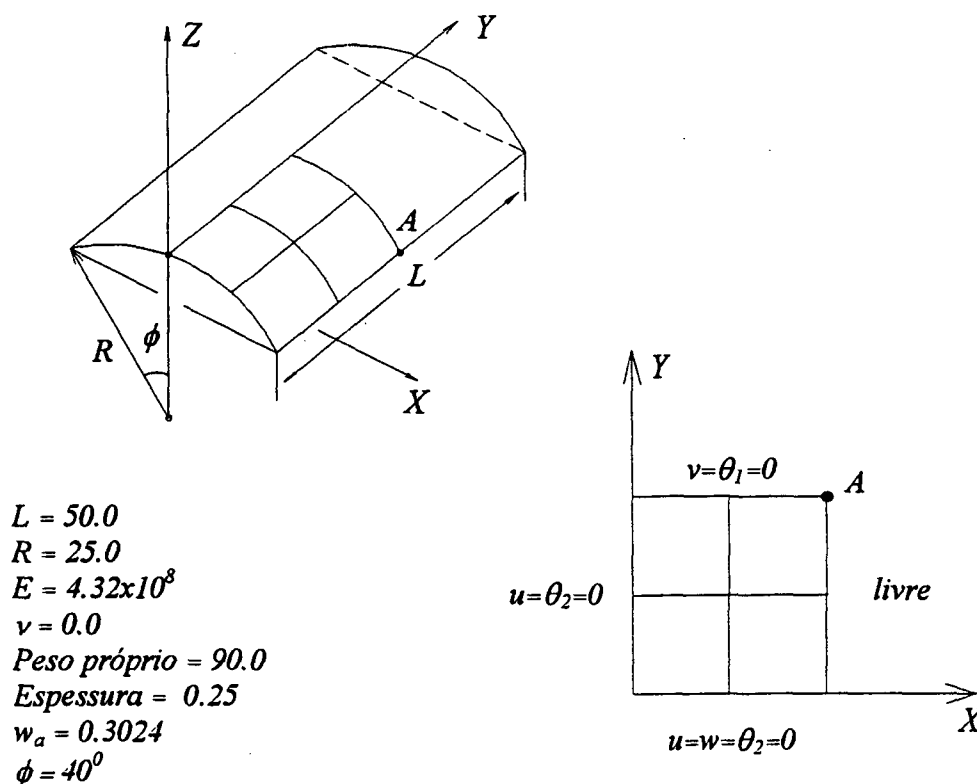


Figura 6.3 - Teto de Scordelis-Lo: geometria e condições de contorno

Este teste é adequado para verificar a capacidade do elemento de representar campos de deformações de membrana complexos. Huang e Hinton (1986) sugerem este problema como um teste de travamento de membrana e apresentam resultados comparativos entre dois elementos, sendo que foi utilizada uma regra de integração reduzida para o primeiro e uma integração cheia no segundo. Estes autores constataram que o elemento subintegrado apresentou melhores resultados.

Neste trabalho, foram utilizadas malhas de 2x2, 4x4 e 6x6 para discretizar um quadrante do domínio, devido às simetrias do problema. Os resultados obtidos para o deslocamento do ponto médio da extremidade livre são mostrados graficamente na Figura 6.4. Os valores foram normalizados em relação à solução analítica

apresentada por McNeal e Harder (1985).

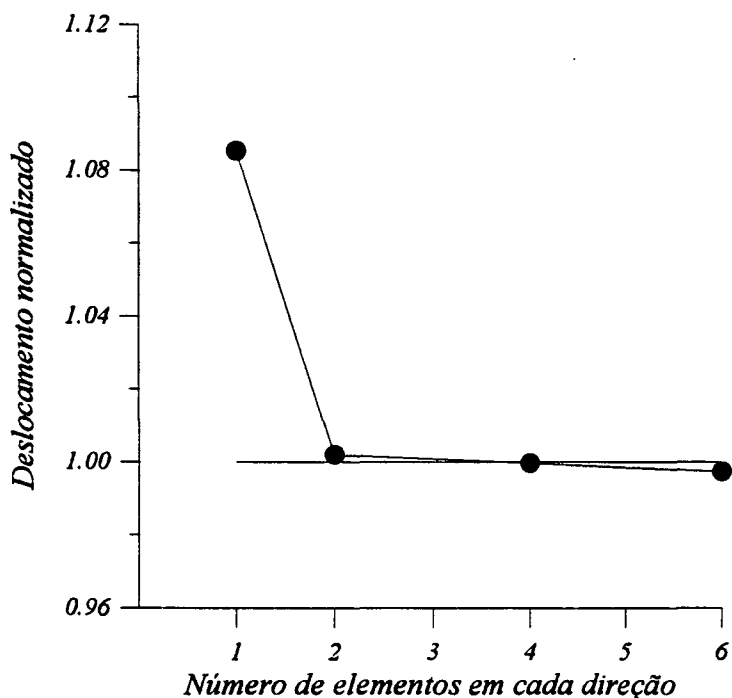


Figura 6.4 - Teto de Scordelis-Lo: deslocamento normalizado

O gráfico da Figura 6.4 mostra a alta taxa de convergência do elemento utilizado neste trabalho a medida que a malha é refinada. Estes resultados comprovam a ausência de travamento de membrana e a eficiência do método utilizado para controlar este tipo de problema.

6.3.2 Cilindro Puncionado

Neste problema um cilindro apoiado nas suas extremidades curvas com diafragmas rígidos é submetido a ação de duas forças diametralmente opostas, aplicadas na parte central (Belytschko et al, 1985). A geometria, os dados do problema

e as condições de contorno são mostrados na Figura 6.5.

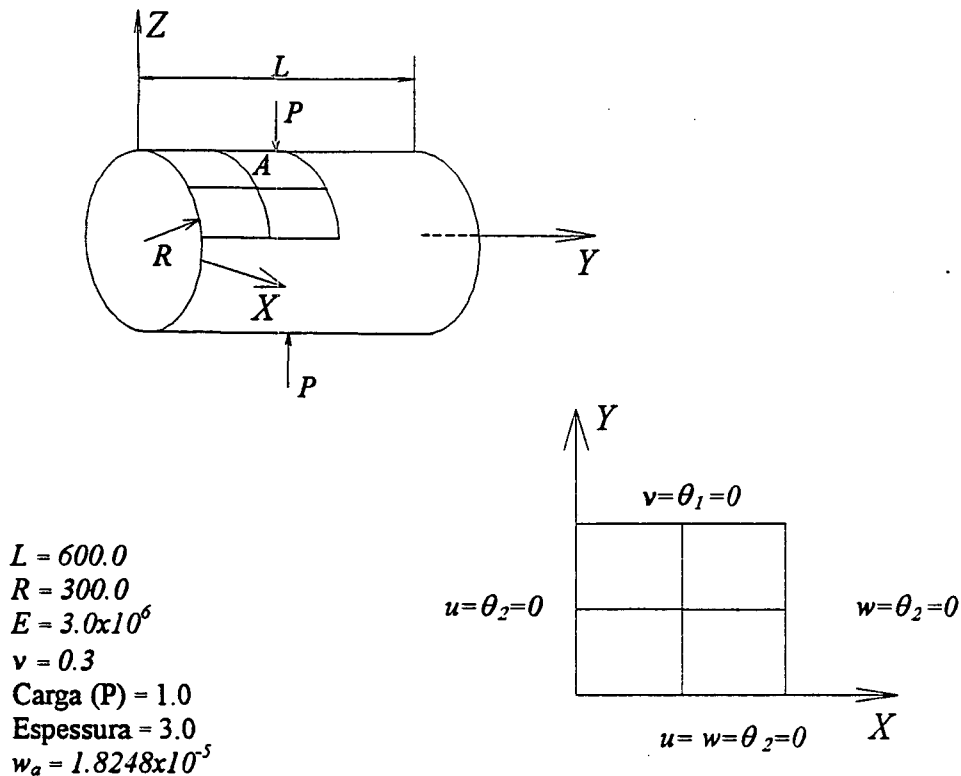


Figura 6.5 - Cilindro puncionado: geometria e condições de contorno

A capacidade do elemento de descrever estados complexos de deformações de membrana e flexão são examinados neste exemplo. Belytschko et al (1985) apresentaram resultados obtidos com elementos com diferentes regras de integração e constataram que o elemento, para o qual foi utilizada uma integração cheia, os resultados obtidos indicaram uma rigidez 10% maior, comparada com a solução analítica apresentada por estes mesmos autores. O elemento subintegrado, no entanto, apresentou um erro de 3% para uma mesma malha de 25 nós.

No presente trabalho foram utilizadas malhas de 2x2, 4x4 e 6x6 elementos para modelar um oitavo da estrutura, aplicando as condições de simetria. Os resultados obtidos para a deflexão vertical no ponto de aplicação da carga,

normalizados com relação ao apresentado por Belytschko et al (1985), são mostrados graficamente na Figura 6.6.

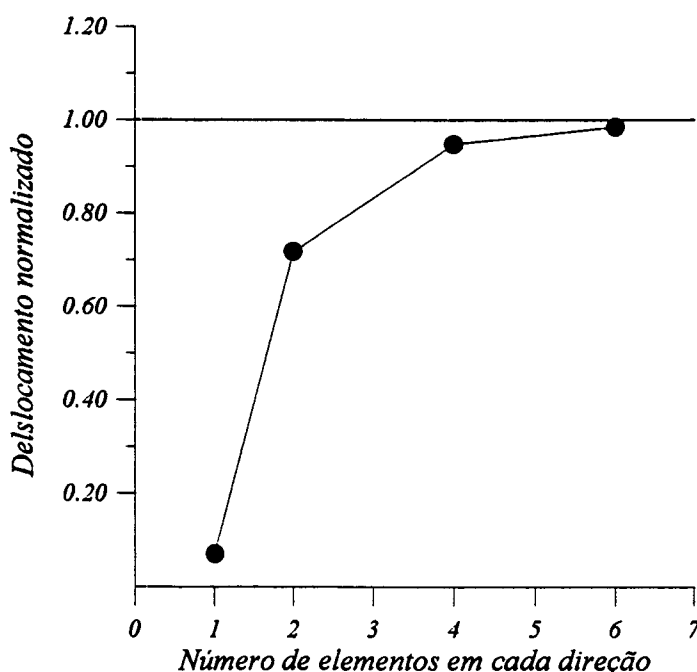


Figura 6.6 - Cilindro puncionado: deslocamento normalizado.

Como pode ser observado no gráfico da Figura 6.6, existe uma boa aproximação dos resultados para uma malha de 4x4 elementos, o que demonstra uma alta taxa de convergência dos resultados apresentados.

6.3.3 Semi-Esfera

O problema apresentado a seguir consiste de uma casca hemisférica submetida a cargas radiais defasadas de 90° e de sentidos alternados, como mostrado na Figura 6.7. O propósito deste exemplo é verificar a habilidade do modelo de elementos finitos implementado de representar flexão, sem distensão de membrana,

uma vez que as deformações de membrana são bem pequenas. Outra verificação que pode ser feita é quanto à representação das rotações de corpo rígido que aparecem nos elementos mais afastados dos pontos de aplicação do carregamento.

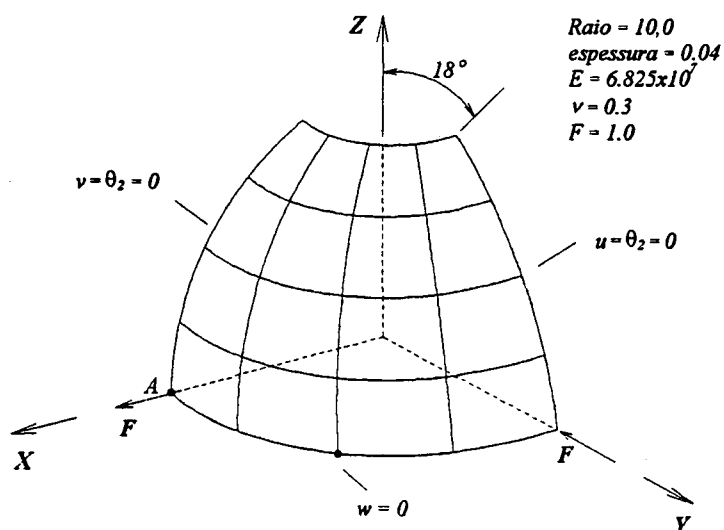


Figura 6.7 - Casca semi-esférica: geometria e condições de contorno.

A solução analítica é apresentada por McNeal e Harder (1985), sendo o valor para os deslocamentos radiais dos pontos de aplicação da carga dado por estes autores igual a 0.094. Na Figura 6.8, os resultados obtidos neste trabalho, normalizados em relação à solução analítica dada acima, são apresentados para as três malhas utilizadas para discretizar um quarto do domínio considerando a simetria do problema.

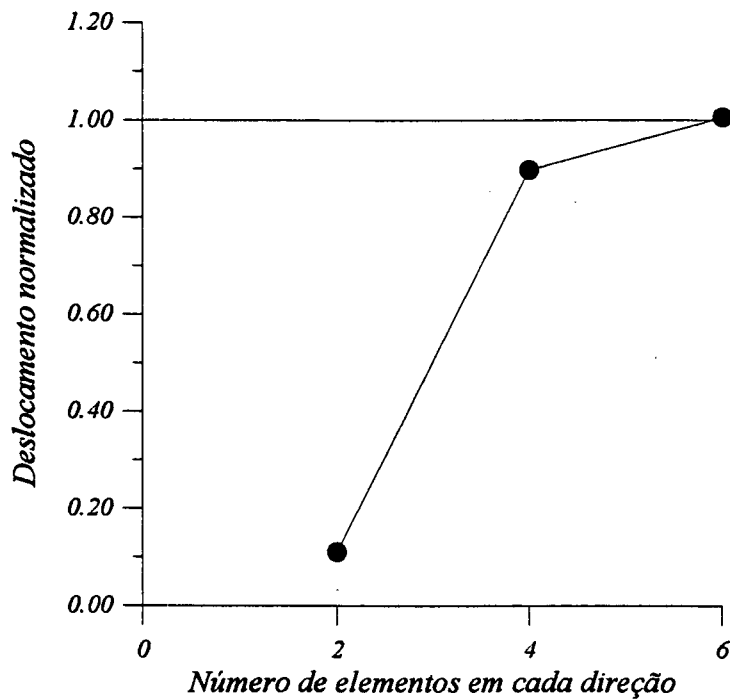


Figura 6.8 - Casca hemisférica: deslocamento normalizado

Os resultados apresentados no gráfico da Figura 6.8 mostram o bom desempenho do elemento utilizado neste trabalho e fornecem um bom indicativo de que não houve problemas de travamento de membrana ou dificuldades da representação das rotações de corpo rígido.

6.4 Viga Engastada Submetida à Flexão Pura

Este exemplo consiste de uma viga engastada, submetida a um momento fletor na sua extremidade livre, modelada com elementos de casca. A geometria, as propriedades e a malha utilizada são mostradas na Figura 6.9.

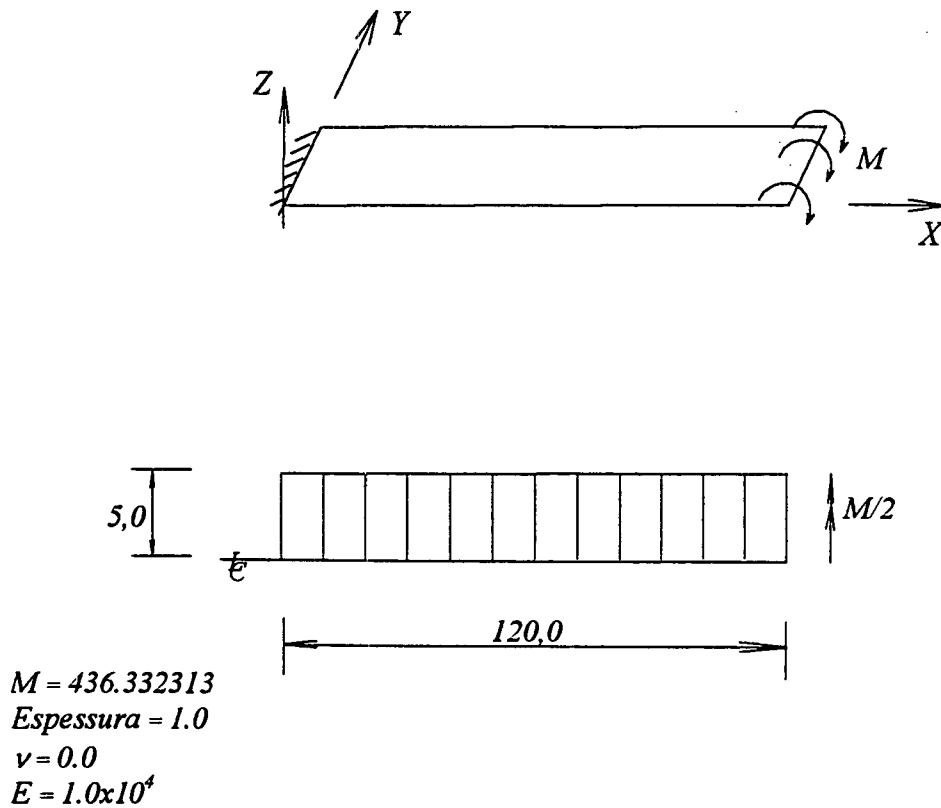


Figura 6.9 - Viga engastada: geometria e discretização.

A solução analítica, para este exemplo, apresentada por Ramm (1976), mostra que as configurações de equilíbrio em cada passo de carga correspondem a um arco de circunferência cujo centro se localiza na vertical tomada a partir do ponto de engaste, conforme mostrado na Figura 6.10.

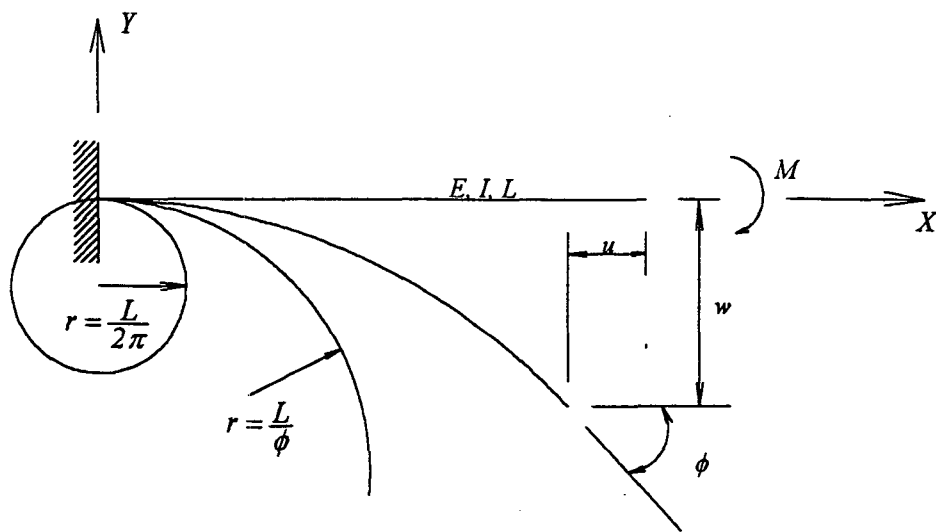


Figura 6.10 - Viga engastada com carregamento de flexão: solução analítica

O ângulo para cada configuração é dado por (Ramm, 1976)

$$\phi = \frac{M L}{E I} \quad (6.3)$$

sendo M o momento acumulado até o presente passo, E e I são o módulo elástico e o momento de inércia da viga, respectivamente.

O carregamento foi aplicado em quarenta e um passos incrementais, sendo que foi utilizado um coeficiente de carga de 0.05 para os seis primeiros passos e 0.02 para os restantes. Esta diminuição no coeficiente a partir do sétimo passo se deve à grande variação na geometria que ocorre durante o carregamento,

ocasionando uma perda de convergência no processo de Newton-Raphson (Mourão, 1991).

Na Tabela 6.1 são apresentados os valores de deslocamentos verticais e horizontais e de rotações normalizadas, em relação à solução analítica apresentada por Ramm (1976) e de tensões cisalhantes transversais para algumas configurações intermediárias. Pode se notar que os valores de deslocamentos normalizados crescem, enquanto que as rotações decrescem.

Tabela 6.1 - Viga engastada com um momento na extremidade: resultados normalizados

Passo	Deslocamentos		Rotação	Tensões ⁽²⁾	
	u / \bar{u}	w / \bar{w}	$\phi / \bar{\phi}$	$\sigma_x / \bar{\sigma}_x$	σ_{xz} ⁽³⁾
4	0.9993	0.9997	0.9997	0.9698	0.88×10^{-4}
12	0.9979	1.0013	0.9986	0.9573	0.17×10^{-2}
20	0.9984	1.0085	0.9984	0.9904	0.60×10^{-2}
28	0.9993	1.0071	0.9984	0.9882	0.16×10^{-1}
36	0.9998	0.0144	0.9884	0.9856	0.33×10^{-1}
41	1.0151	⁽¹⁾	0.9860	0.9840	0.50×10^{-1}

(1) Não calculado pois $\bar{w} = 0$.

(2) Valores de tensões na metade do comprimento da viga.

(3) Valores absolutos de σ_{xz} pois $\bar{\sigma}_{xz} = 0$

Na Figura 6.11 são mostrados os gráficos dos deslocamentos normalizados.

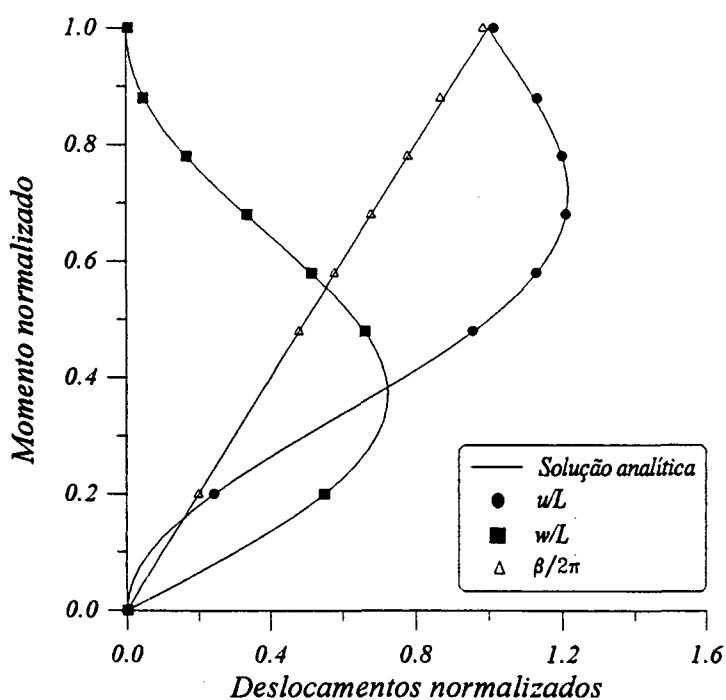


Figura 6.11 - Viga engastada: deslocamentos normalizados

Os resultados de tensões cisalhantes transversais mostrados na Tabela 6.1, os quais apresentaram valores bem próximos de zero, demonstram a eficácia do método de controle de travamento utilizado. Os resultados de deslocamentos apresentados demonstram o bom desempenho do elemento implementado, quando utilizado para simular problemas sujeitos a grandes rotações.

Na Figura 6.12 são apresentadas algumas configurações intermediárias da viga deformada.

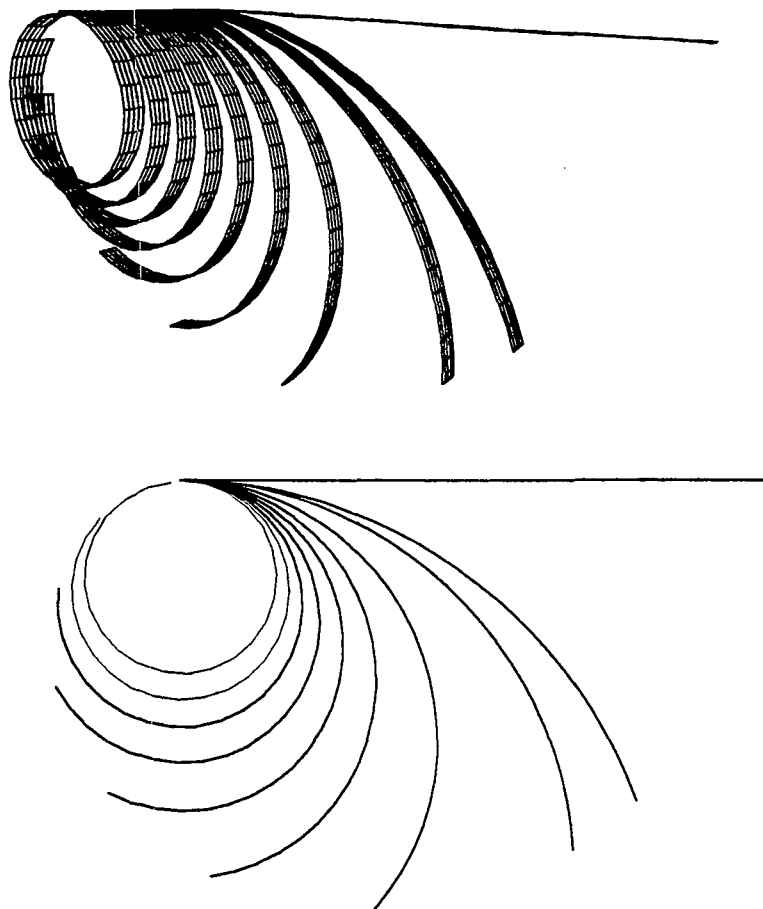


Figura 6.12 - Viga engastada: configurações intermediárias.

6.5 Placa Apoiada com Carregamento de Flexão

Neste exemplo foi considerada uma placa biapoiada com o deslocamento axial restrito na extremidade esquerda e livre na extremidade direita. Um momento fletor foi aplicado em cada extremidade, como mostra a Figura 6.13.

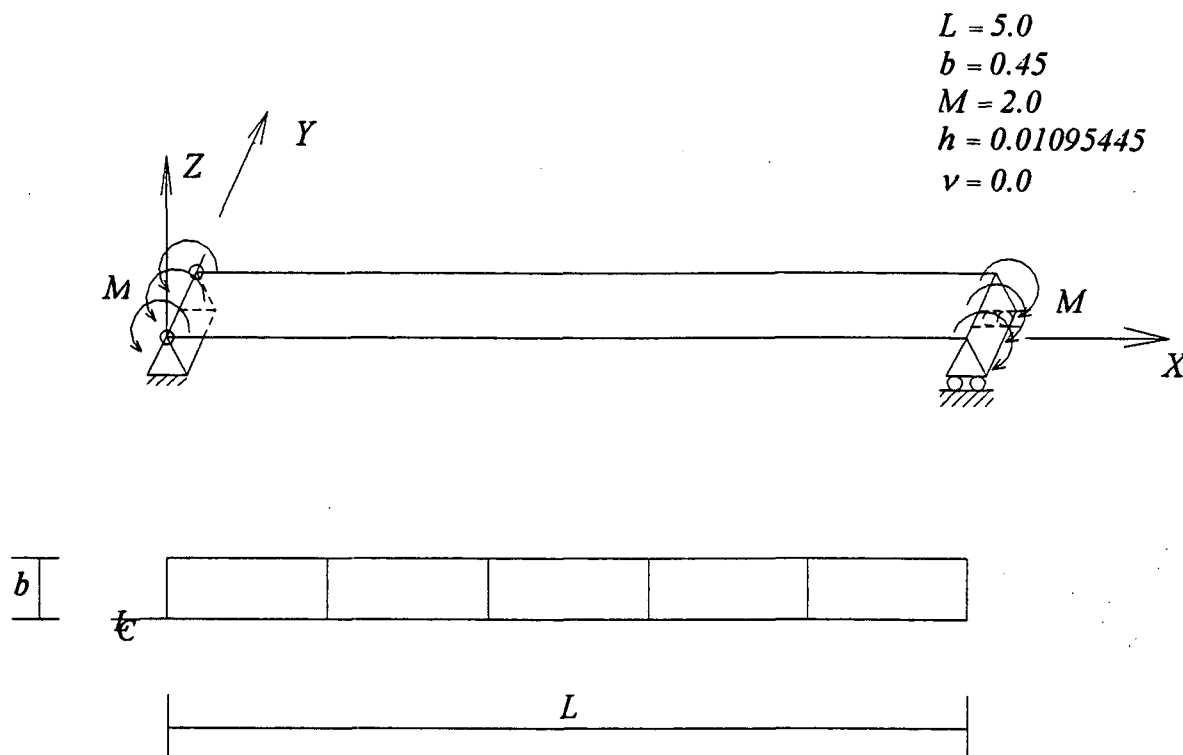


Figura 6.13 - Placa biapoitada: geometria e discretização

Para efeitos de comparação com os resultados obtidos por Surana (1983), foi utilizada a mesma malha considerada por este autor, que consiste de cinco elementos, dispostos axialmente, sendo que foi considerado apenas metade do domínio devido às condições de simetria (Figura 6.13). O carregamento foi aplicado em dez incrementos iguais. A tolerância para a convergência das equações de equilíbrio no processo iterativo, expressa pela equação (3.33), foi de 0.1%.

Na Tabela 6.2 é feita uma comparação dos deslocamentos axiais da extremidade direita, obtidos neste trabalho, com os resultados apresentados por Surana (1983). Esta mesma comparação pode ser vista graficamente na Figura 6.14,

em termos de deslocamentos normalizados. Não se faz um estudo comparativo de tensões, uma vez que o autor não apresenta estes dados.

Tabela 6.2 - Placa biapoiada: comparação entre os resultados

<i>Passo</i>	<i>Presente trabalho</i> u	<i>Surana (1983)</i> \bar{u}	<i>Deslocamento normalizado</i> u / \bar{u}
2	0.41267	0.4114	1.003
4	1.50071	1.5002	1.0003
6	2.88683	2.8918	0.9983
8	4.12119	4.1282	0.9983
10	4.82106	4.8197	1.0003

A coincidência dos resultados demonstra o bom desempenho do elemento utilizado. Pode-se notar que a maior diferença em termos percentuais foi de 0.17%, o que pode ser considerado desprezável em se tratando de um problema não-linear.

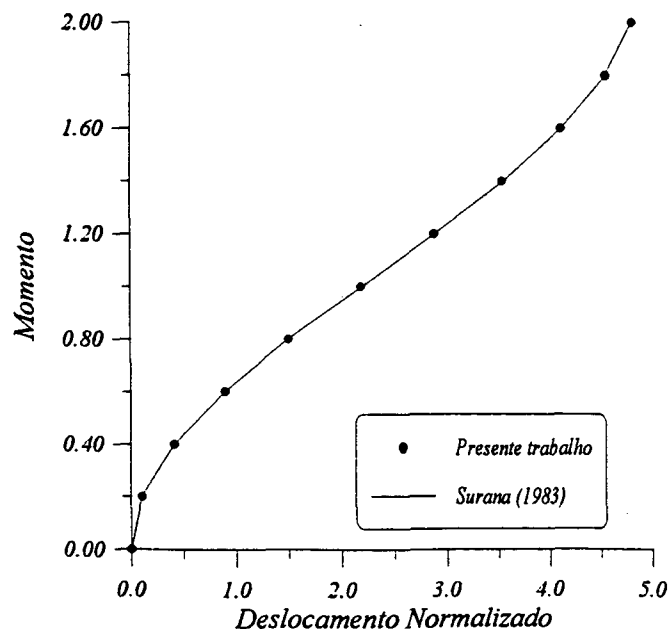


Figura 6.14 Placa biapoiada: deslocamentos normalizados.

As configurações indeformada e deformada para alguns valores intermediários de momento M são mostradas na Figura 6.15.

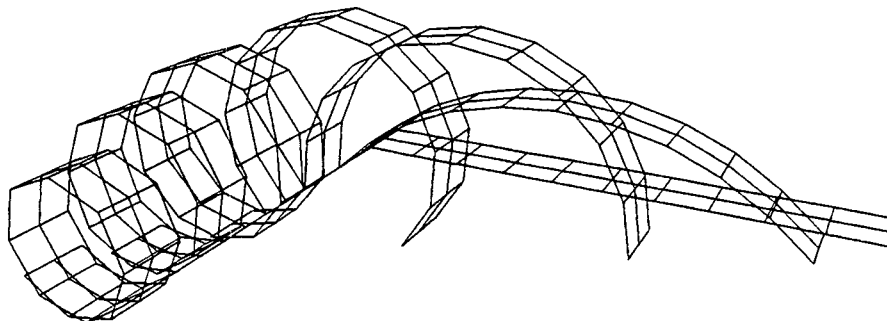
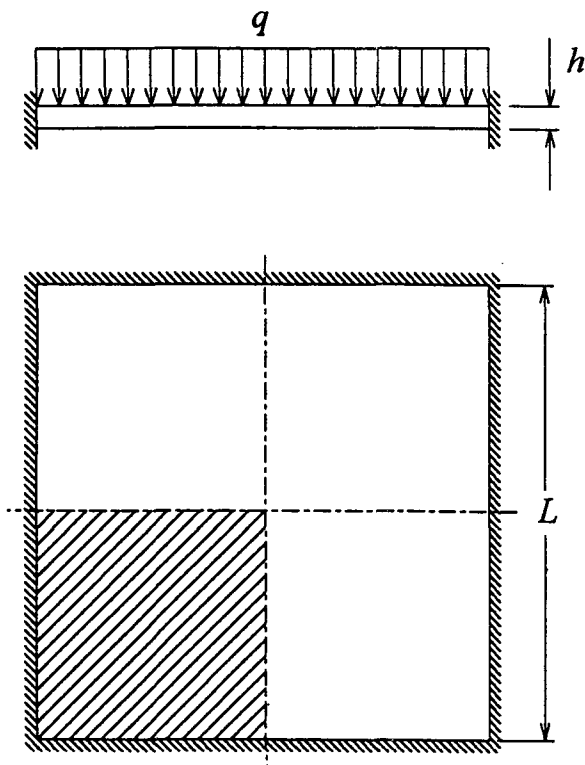


Figura 6.15 - Placa biapoiada: configurações intermediárias

6.6 Placa Engastada com Deformações Plásticas

A seguir será apresentado um exemplo que ilustra bem a importância do método de integração em problemas envolvendo deformações plásticas.

O exemplo consiste de uma placa quadrada engastada com um carregamento uniformemente distribuído na sua superfície. As propriedades materiais e a geometria do problema estão mostradas na Figura 6.16.



$$\begin{aligned}
 L &= 6.0 \\
 E &= 3.0 \times 10^4 \\
 \nu &= 0.3 \\
 H' &= 300.0 \\
 \sigma^0 &= 30.0 \\
 h &= 0.2 \\
 q &= 0.4
 \end{aligned}$$

Figura 6.16 - Placa Engastada: geometria e propriedades.

Owen e Figueiras (1983) abordaram este problema utilizando um elemento finito do tipo "semiloop", considerando o critério de Ilyushin (Owen e Figueiras, 1983), definido em termos de tensões resultantes adimensionalizadas.

A superfície de Ilyushin é definida por

$$Q_T + Q_m = 1, \quad (6.4)$$

sendo Q_T e Q_m expressos por

$$\begin{aligned}
 Q_T &= n_{11}^2 + n_{22}^2 - n_{11} n_{22} + 3 n_{12}^2 \\
 Q_m &= m_{11}^2 + m_{22}^2 - m_{11} m_{22} + 3 m_{12}^2,
 \end{aligned} \quad (6.5)$$

com

$$n_{ij} = \frac{N_i}{N_o} = \frac{S_{ij}^m}{S^o} \quad (6.6)$$

$$m_{ij} = \frac{4}{\sigma^o h^2} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} z dz.$$

Nas equações (6.6), σ_{ij}^m são as tensões de membrana, h é a espessura da placa e σ^o a tensão de escoamento do material.

A integração por momentos resultantes, expressos pela equação (6.5), admite que a deformação plástica só ocorre quando a seção atinge um certo valor de momento de plastificação, dependendo do limite de escoamento do material e das propriedades geométricas.

Neste trabalho foi utilizada uma malha de 8x8 elementos, sendo que foi discretizado apenas um quarto do domínio devido à simetria. A região hachurada da figura 6.16 representa o domínio discretizado. O carregamento foi aplicado em nove incrementos iguais. Os resultados de deflexão transversal do ponto central da placa estão mostrados em forma de gráfico na Figura 6.17.

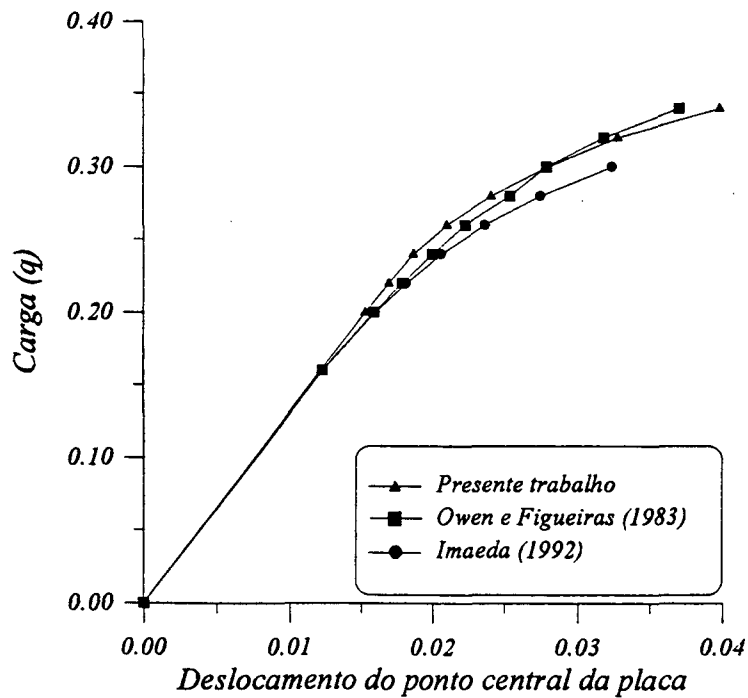


Figura 6.17 - Placa engastada: deslocamento do ponto central

A abordagem apresentada por Imaeda (1992) emprega o método de integração por camadas, sendo que para este caso, aquele autor optou por utilizar doze camadas ao longo da espessura da placa e uma malha de 6x6 elementos para a sua discretização.

Como foi observado por Imaeda, a integração da relação constitutiva por momentos resultantes, associada ao critério de Ilyushin, faz prever uma maior rigidez na estrutura, comparada aos processos de integração por camadas ou por pontos de Gauss. Isto mais uma vez foi comprovado, uma vez que foram utilizados apenas dois pontos de Gauss para efeitos comparativos com os resultados de Owen e Figueiras (1983), e ainda assim alguns valores de deslocamentos encontrados superaram aqueles apresentados por aqueles autores.

Tabela 6.3 - Placa engastada: comparação entre os resultados

<i>carga distribuída (q)</i>	<i>Deslocamento transversal no centro da placa (w)</i>		
	<i>Presente trabalho</i>	<i>Owen e Figueiras (1983)</i>	<i>Imaeda (1992)</i>
0.16	-0.01218	-0.0123	-0.01236
0.20	-0.01527	-0.0159	-0.01596
0.22	-0.01695	-0.0179	-0.01818
0.24	-0.01867	-0.0200	-0.02061
0.26	--0.02102	-0.0223	-0.02367
0.28	-0.02410	-0.0254	-0.27480
0.30	-0.02795	-0.0279	-0.03240
0.32	-0.03277	-0.0318	-0.03883
0.34	-0.03973	-0.0370	-0.04839

A Tabela 6.3 mostra também uma comparação entre os resultados deste trabalho com os apresentados pelos autores citados. Pode-se observar que o modelo utilizado por Imaeda apresentou uma menor rigidez em relação aos outros trabalhos. Isto é explicado pelo número de camadas utilizadas por este autor. Nota-se também que os valores de deslocamentos apresentados por Owen e Figueiras (1983) são maiores que os apresentados neste trabalho enquanto prevalece o regime elástico, sendo superado à medida que a plastificação se intensifica.

6.7 Telhado Cilíndrico sob Carregamento Uniforme

Neste exemplo considera-se uma casca cilíndrica suportada por diafragmas nas extremidades curvas. O problema apresenta uma combinação de

efeitos das não-linearidades geométrica e material. As propriedades materiais e geometria da casca estão mostrados na Figura 6.18.

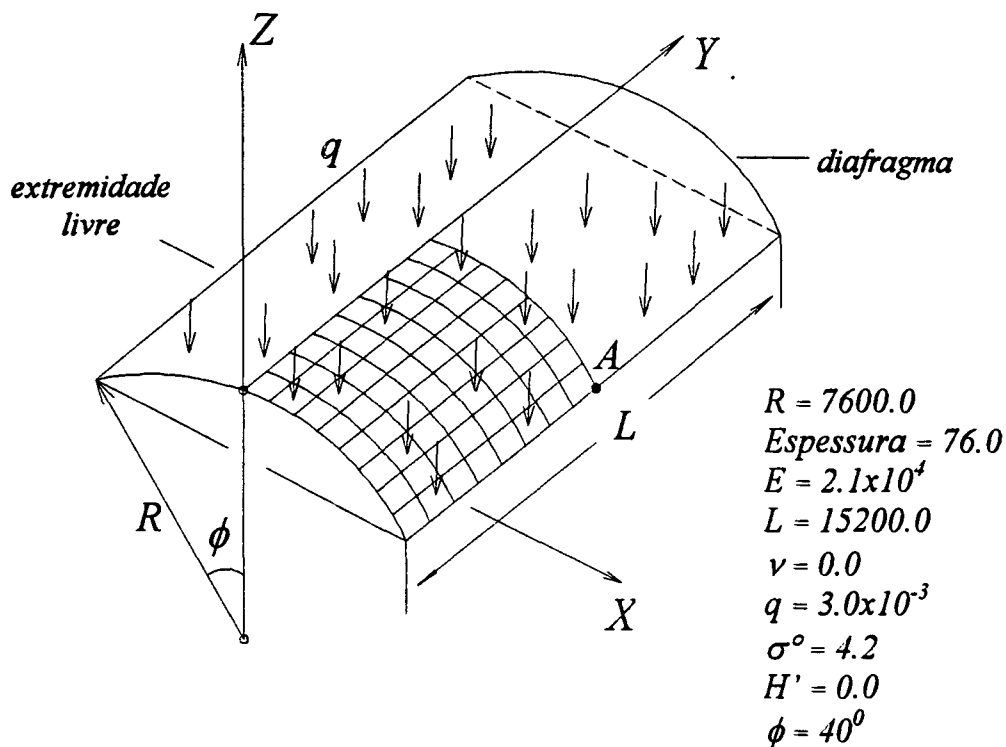


Figura 6.18 - Telhado cilíndrico: geometria e discretização

Considerando a simetria da casca, modelou-se um quarto do domínio utilizando uma malha de sessenta e quatro elementos. Para a integração ao longo da espessura, foram utilizados oito pontos de Gauss.

Como citado no Capítulo 2, o uso do processo iterativo de Newton-Raphson em problemas que envolvem materiais elásticos perfeitamente plásticos, poderá levar a singularidades na matriz de rigidez. Neste trabalho optou-se por utilizar o Método de Newton-Raphson Modificado para evitar este tipo de problema.

Parish (1981) abordou este problema empregando o método de integração por camadas para avaliar a rigidez ao longo da espessura, sendo que para este caso o autor utilizou dezesseis camadas. O mesmo processo foi usado por Imaeda (1992), porém utilizando doze camadas ao longo da espessura.

Os resultados de deflexão do ponto A obtidos no presente trabalho comparados com os apresentados por Parish (1981) e Imaeda (1992), são mostrados graficamente na Tabela 6.4. Para os três casos, o carregamento foi aplicado em quinze incrementos.

Tabela 6.4 - Telhado cilíndrico sob carregamento uniforme: comparação entre os resultados de deslocamentos do ponto A

<i>carga (q x 10³)</i>	<i>Imaeda (1992)</i>	<i>Parish (1981)</i>	<i>Presente trabalho</i>
0.735	-15.133	-14.07	-14.9814
0.885	-18.100	-16.99	-17.9092
1.030	-21.027	-19.90	-20.7044
1.180	-23.916	-22.33	-23.5606
1.330	-26.787	-25.24	-26.4047
1.480	-29.804	-28.64	-29.4063
1.630	-33.006	-32.04	-32.6219
1.780	-36.474	-34.95	-36.0631
1.930	-40.018	-39.32	-39.7492
2.080	-44.097	-43.23	-43.7636
2.230	-48.574	-48.06	-48.2090
2.385	-53.641	-53.88	-53.4233
2.530	-59.714	-60.68	-59.4388
2.680	-66.955	-67.96	-67.0763
2.830	-75.563	-76.21	-76.6127

Estes resultados podem ser vistos graficamente na Figura 6.19.

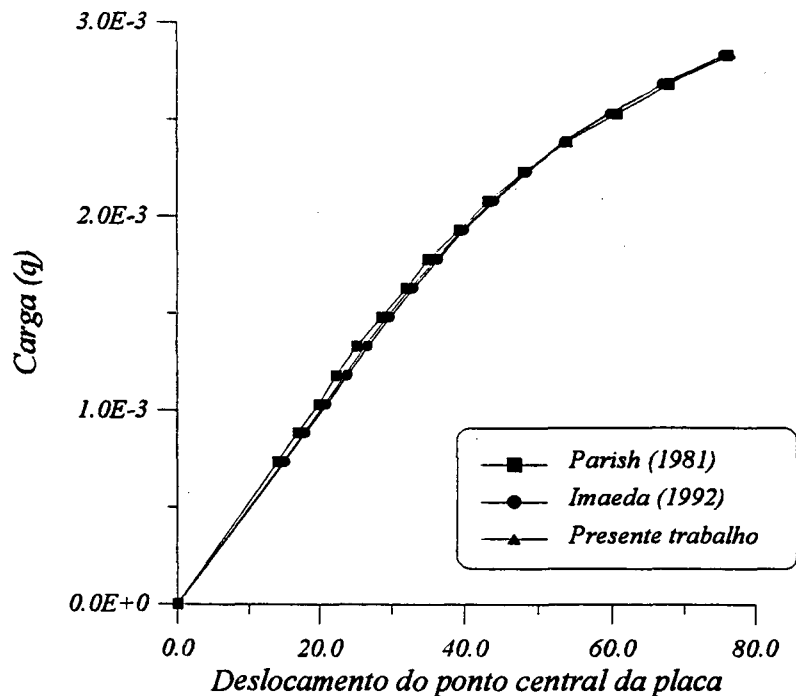


Figura 6.19 - Telhado cilíndrico: deslocamento do ponto A.

Pode-se observar na Tabela 6.4 que os resultados obtidos no presente trabalho são similares àqueles apresentados por Parish (1981) e Imaeda (1992), o que comprova o bom desempenho da formulação utilizada. Uma outra observação que pode ser feita é que foram necessários oito pontos de Gauss para se obter uma representação razoável da distribuição de tensões ao longo da espessura da casca, número este inferior à quantidade de camadas utilizadas pelos autores citados acima. Obviamente o custo computacional neste trabalho foi relativamente menor.

A evolução da frente plástica pode ser vista na Figura 6.20. Cada retângulo escuro que aparece sobre a superfície modelada representa um ponto de integração que plastificou no passo de carga apresentado abaixo de cada figura. Os pontos que foram utilizados para representar a região plastificada estão situados na porção mais externa da casca

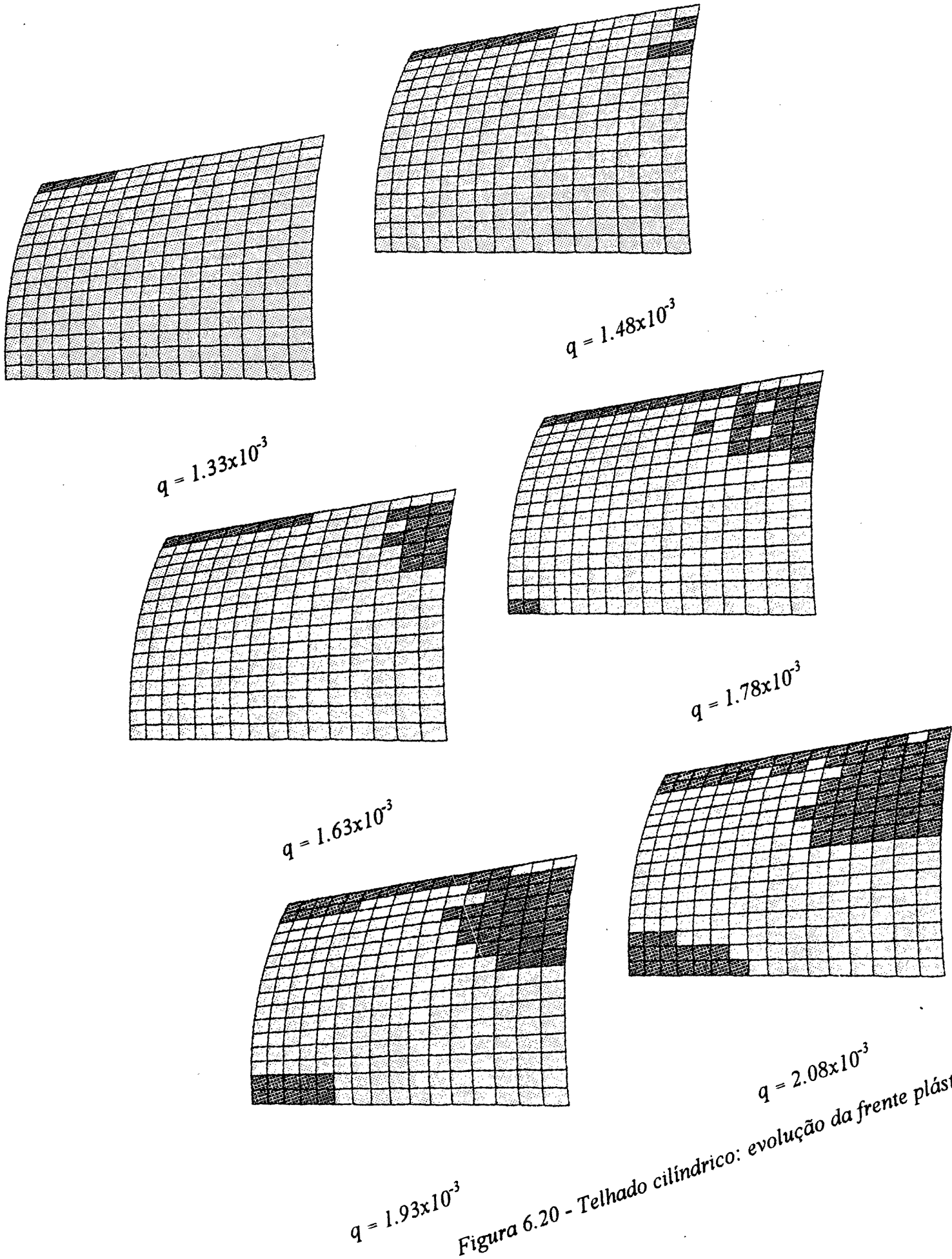


Figura 6.20 - Telhado cilíndrico: evolução da frente plástica.

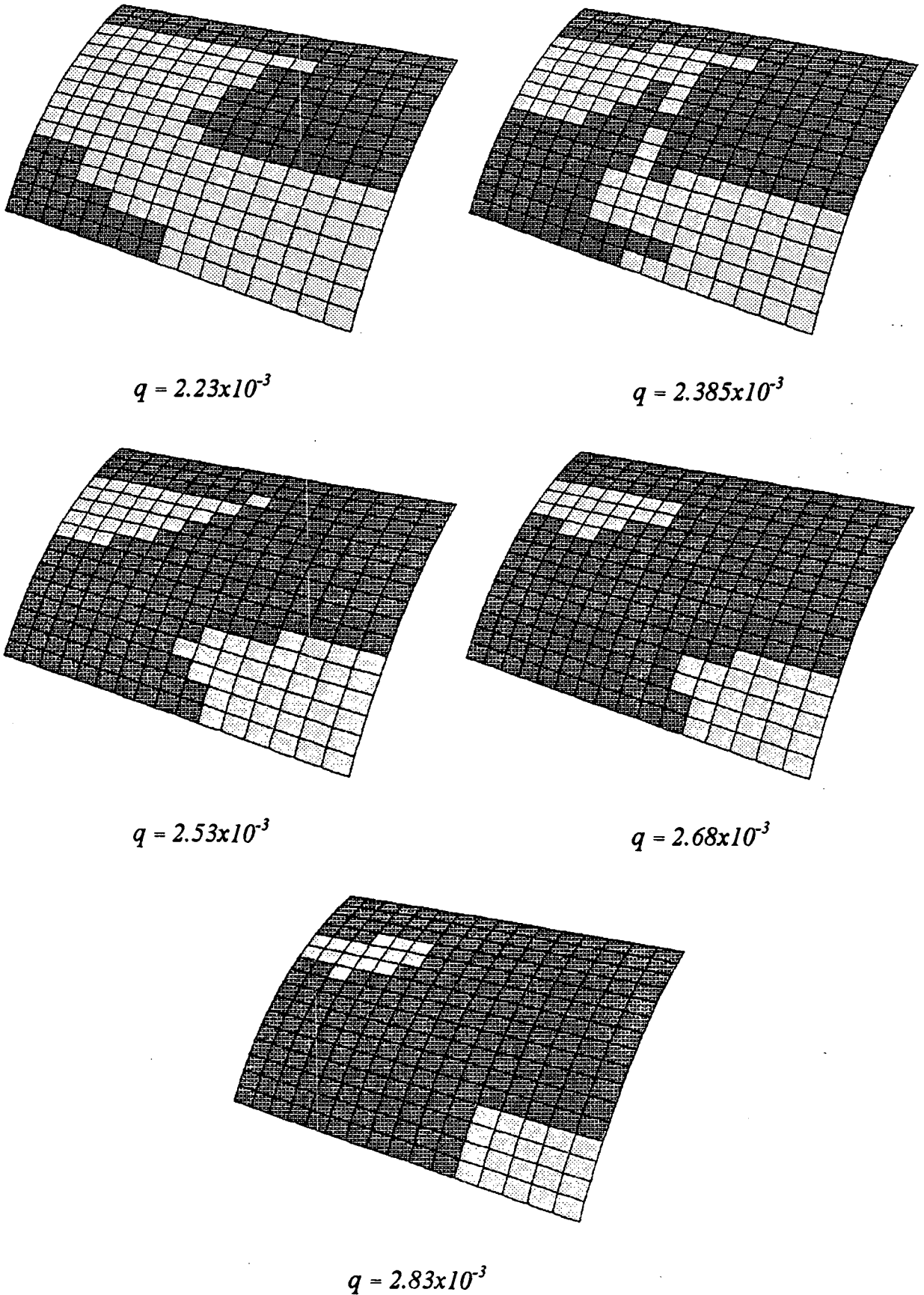


Figura 6.20 - Telhado cilíndrico: evolução da frente plástica (continuação).

Capítulo 7

Conclusões e Sugestões

O propósito deste trabalho foi desenvolver uma formulação, utilizando o método dos elementos finitos, para resolver problemas de cascas finas e semi-espessas envolvendo não-linearidades geométrica e material. Esta idéia pode ser vista como uma seqüência dos trabalhos desenvolvidos por Mourão (1991) e Imaeda (1992) que enfocaram o tratamento de problemas com não-linearidade geométrica de cascas semi-espessas e a análise elastoplástica de cascas finas, respectivamente.

A formulação numérica utilizada foi desenvolvida a partir do princípio variacional de Hill (1959) escrito em termos de taxas, o que a torna adequada ao tratamento de problemas elastoplásticos. No entanto, foi necessário adaptá-la para o uso na análise de problemas envolvendo grandes deslocamentos, através da escolha do par dual tensor co-rotacional de Kirchhoff e tensor taxa de deformações, conforme sugerido por McMeeking e Rice (1975).

A escolha dos tensores adequados para representar os campos de tensões de deformações foi baseada na propriedade de invariância às rotações de corpo rígido uma vez que, em se tratando de problemas que envolvem grandes deslocamentos, esta característica é requerida.

Na determinação da tensão de Cauchy, admitiu-se que a taxa de tensão era constante no intervalo de tempo considerado. Uma sugestão que pode ser feita é um estudo mais detalhado desta consideração, baseando-se no trabalho de Hughes e Winget (1980), que apresentam algoritmos para realizar esta integração.

A integração da matriz de rigidez ao longo da espessura utilizando a regra de quadratura de Gauss apresentou algumas vantagens em relação aos métodos de integração por camadas e por momentos resultantes. A principal delas foi o menor custo computacional, consequência da menor quantidade de pontos de integração necessária para representar apropriadamente o perfil dos estados de tensões e deformações na direção transversal. Isto foi observado no processo de solução do exemplo 6.6.

O elemento implementado foi baseado no trabalho de White e Abel (1990) que desenvolveram um elemento isoparamétrico lagrangeano de nove nós, utilizando a regra de subintegração uniforme para eliminar os problemas de travamento, fazendo um controle de modos espúrios baseado em uma matriz de estabilização.

Os casos lineares nos quais o elemento foi utilizado representam o teste de eficiência dos processos de controle dos problemas de travamento e modos espúrios. Para estes casos, as respostas obtidas foram muito boas, indicando também uma alta taxa de convergência e a eficácia dos métodos utilizados para controlar estes problemas. No entanto, os valores de tensões obtidos no "Patch Test" utilizando uma

malha irregular, ficaram muito aquém do esperado dando indícios de que a formulação do elemento não é tão eficaz quanto se esperava. Além disso, o uso de fatores numéricos sem significado físico na matriz dos coeficientes de estabilização viola um dos critérios sugeridos por Bathe e Dvorkin (1985) a serem observados por bons elementos, segundo o qual o elemento não deve estar baseado em fatores de ajuste numéricos. Sugere-se para trabalhos futuros a utilização do processo apresentado por Huang e Hinton (1986), que utilizam funções de interpolação assumidas para as deformações.

As hipóteses materiais admitidas para análise elastoplástica visaram utilizar o modelo clássico de Von Mises associado ao encruamento isotrópico. O efeito Baushchinger, portanto, não foi considerado, ficando comprometida a utilização desta formulação em casos que apresentam carregamento cíclico. Uma forma de eliminar esta limitação é utilizar o encruamento cinemático.

O algoritmo utilizado para a integração da relação constitutiva elastoplástica foi sugerido por Hinton e Owen (1980). Outros métodos, como os sugeridos por Simo e Taylor (1986) e Nagtegaal e de Jong (1981), poderão ser implementados para se obter um parâmetro comparativo da sua eficiência.

Os processos iterativos utilizados neste trabalho foram o Método de Newton Raphson e Newton Raphson Modificado, os quais são relativamente simples de serem implementados e eficientes na maioria dos casos. Para problemas mais complexos como aqueles que envolvem "ponto limite", sugere-se a implementação do método iterativo desenvolvido por Riks (1979) e Crisfield (1983).

Sugere-se como próximo trabalho a utilização de uma teoria de casca de ordem superior em que o elemento finito, obtido por meio desta formulação, não apresentaria fenômenos de travamento. Desta forma, os problemas constatados por

este trabalho, em relação ao travamento e controle de modos espúrios, seriam contornados. Também com uma formulação desta natureza ter-se-ia valores mais acurados de tensões, visto que o campo de deformações é melhor representado. Uma desvantagem seria o número de graus de liberdade, que fica aumentado em relação à formulação apresentada neste trabalho, bem como a interpretação física de alguns deles, não associados a deslocamentos ou rotações.

Referências Bibliográficas

- **BATHE, K.J. Finite element procedures in engineering analysis.** New Jersey (USA): Prentice-Hall, viii + 735 p., 1982.
- **BATHE, K.J.; DVORKIN, E.N. "A four-node plate bending element based on Mindlin-Reissner plate theory and a mixed interpolation".** **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 21, p. 367-383, 1985.
- **BELYTSCHKO, T.; LIU, WK.; ONG, J.SJ.; LAM, D. "Implementation and application of a 9-node lagrange shell element with spurious mode control".** **Computer & Structure**, v. 20, nº 1-3, p. 121-128, 1985.
- **BELYTSCHKO, T.; LIU, WK.; ONG, J.SJ. "Mixed variational principles and stabilization of spurious modes in the 9-nodes element".** **Computer Methods Applied in Mechanics and Engineering**, v. 62, p. 275-292, 1987.

- BELYTSCHKO, T.; WONG, B.L. "Assumed strain stabilization procedure for the 9-node lagrange shell element". **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 28, p. 385-414, 1989.
- CHEN, W.F.; HAN, D.J. **Plasticity for structural engineering**. New York: Springer-Verlag, xiii + 606 p., 1988.
- COOK, R.D.; MALKUS, D.S.; PLESHA, M.E. **Concepts and applications of finite element analysis**. 3rd edition. New York: John Wiley & Sons, xviii + 631 p., 1989.
- CRISFIELD; M.A. "An arc-length method including line searches and accelerations". **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 19, p. 1269-1283, 1983.
- DINIS, L.M.S.; OWEN, D.R.J. "Elasto-Viscoplastic and Elasto-Plastic large deformation analysis of thin plates and shells". **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.18, p.591-607, 1982.
- ELGUETA V.; M. "Simulacion numerica del proceso de forja bidimensional en frio". **VI Congreso nacional de ingenieria mecanica, anales, Chile**. v. 1. p. 407-412, 1994.
- FUNG, Y.C. **Foundations of solid Mechanics**. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentie-hall, xiv + 525 p., 1965.
- GADALA, M.S.; DOKAINISH, M.A.; ORAVAS, G.A.E. "Formulation methods of geometric and material nonlinearity problems". **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 20, p. 887-914, 1984.

- HILL, R. **The mathematical theory of plasticity**. London: Oxford University Press, ix + 356 p., 1950.
- HILL, R. "Some basic principles in mechanics of solids without a natural time". **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 7, p. 209-225, 1959.
- HINTON, E.; OWEN, D.R.J. **Finite elements in plasticity**. Swansea (UK): Pineridge Press Limited, xii + 594 p., 1980.
- HUANG, C.H.; HINTON, E. "A new nine node degenerated shell element with enhanced membrane and shear interpolation". **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 22, p. 73-92, 1986.
- HUGHES, T.J.R.; WINGET, J. "Finite rotation effects in numerical integration of rate constitutive equations arising in large-deformation analysis". **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 15, p.1862-1867, 1980.
- HUGHES, T.J.R. **The finite element method. Linear static and dynamic finite element analysis**. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, xxvii + 803 p., 1987.
- IMAEDA, F.T. "Um elemento finito de casca fina para análise elastoplástica de estruturas". **Dissertação de Mestrado**, UFSC, x + 133 p., 1992.
- IMAEDA, F.T.; SELKE, C.A.C.; BLASS, A. "Análise Elastoplástica de Estruturas Utilizando um Elemento Finito de Casca Fina". **Anais do XII COBEM - 12º Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica**, v. 1, p. 169-172, Brasília, DF, 1993.

- KIKUCHI, N.; CHENG, J.H. "Finite element analysis of large deformation problems including unilateral contact and friction". **ASME. AMD.**, v. 54, p. 121-132, 1983.
- KLEIBER, M. **Incremental finite element modelling in nonlinear solid mechanics**. New York: John Wiley & Sons, 187 p., 1989.
- KRAUS, H. **Thin Elastic Shells**. New York: John Wiley & Sons, xvii + 476 p., 1967.
- LIU, M.L.; TO, C.W.S. "Hybrid strain based three node flat triangular shell elements - I, nonlinear theory and incremental formulation". **Computers & Structures**, v. 54, nº 6, p.1031-1056, 1995.
- MALVERN, L.E. **Introduction to the mechanics of a continuous medium**. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, xiv + 713 p., 1969.
- McMEEKING, R.M.; RICE, J.R. "Finite element formulations for problems of large elastic-plastic deformation". **International Journal Solids Structures**, v. 11, p. 601-616, 1975.
- McNEAL, R.H.; HARDER, R.L. "A proposed standard set of problems to test finite element accuracy". **Finite Element in Analysis and Design**, v. 1, p. 3-20, 1985.
- MOURÃO, R.P. "Um elemento finito de casca para análise de problemas com não-linearidade geométrica". **Dissertação de Mestrado**, UFSC, IX + 69 p., 1991.
- MOURÃO, R.P.; SELKE, C.A.C., "Um Elemento Finito de Casca para Análise de Problemas com Não-Linearidade Geométrica", **Anais do VII Simpósio Brasileiro**

Sobre Tubulações e Vasos de Pressão, v. 1, p. 137-149, Florianópolis, SC, Brasil, 1992.

- NAGTEGAAL, J.C.; DE JONG, J.E. "Some computational aspects of elastic-plastic large strain analysis". **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 17, p. 15-41, 1981.
- NAGTEGAAL, J.C.; SLATER, J.G. "A simple noncompatible thin shell element based on discret Kirchhoff theory". **ASME, AMD48**. p. 167-192, 1981.
- NOOR, A.; PETERS, J.M. "Mixed models and reduced/selective integration displacement models for nonlinear analysis of curved beams". **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 17, p. 615-631, 1981.
- ORTIZ, M.; SIMO, J.C. "An analysis of a new class of integration algorithms for elastoplastic constitutive relation". **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 23, p. 353-366, 1986.
- OWEN, D.R.J.; FIGUEIRAS, J.A. "Anisotropic Elasto-Plastic Finite Element Analysis of Thick and Thin Plates and Shells". **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 19, p. 541-546, 1983.
- PARISH, H. "Nonlinear analysis of shells using isoparametric elements". **Nonlinear Finite Element Analysis of Plates and Shells. AMD.**, v. 48, p. 47-63, 1981.
- PRAGER, W. **Introduction to mechanics of continuous**. New York: Ginn and Company, x + 230 p., 1961.

- RAMM, E. "A Plate/Shell Element for Large Deflections and Rotations". **Formulation and Computational Algorithms in Finite Element Analysis: U.S. - Germany Symposium**. EUA, Massachusetts Institute of Technology, 1976.
- RIKS, E. "An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems". **International Journal Solids Structures**, v. 15, p. 523-551, 1979.
- ROBERTS, J.M. ; SHEPPARD, T. "On the mechanics of tension-levelling process". **Journal of the Institute of Metals**, v. 100, p. 130-135, 1971.
- SIMO, J.C.; TAYLOR, R.L. "Return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity". **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 22, p. 649-670, 1986.
- SURANA, K.S. "Geometrically nonlinear formulation for curved shell elements". **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 7, p. 581-615, 1983.
- SZABÓ, L. "Shear band formulations in finite element strain elastoplasticity". **International Journal Solids Structures**, v. 31, nº 9, p. 1291-1308, 1983.
- VERHEGGHE, B.; POWELL, G.H. "Control of zero-energy modes in 9-node plane element". **international Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 23, p. 863-869, 1986.
- WASHIZU, K. **Variational methods in elasticity and plasticity**. 3rd edition. New York: Pergamon Press, xv + 630 p., 1982.

- WHITE, D.W.; ABEL, J.F. "Accurate and efficient nonlinear formulation of a nine-node shell element with spurious mode control". **Computer & Structure**, v. 35, n° 6, p. 621-641, 1990.
- YANG, T.Y.; SAIGAL, S. "A curved quadrilateral element for static analysis of shells with geometric and material nonlinearities". **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 21, p. 617-635, 1985.
- ZIENKIEWICZ, O.C.; TAYLOR, R.L.; TOO, J.M. "Reduced integration technique in general analysis of plates and shells". **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 3, p. 275-290, 1971.
- ZIENKIEWICZ, O.C. **The finite element method**. 4rd edition. v. 1. New York: McGraw-Hill, xx + 648 p., 1977.

Apêndice 1

Transformações do Princípio

Variacional

Neste apêndice, o princípio variacional (3.20) em termos do tensor co-rotacional de Kirchhoff τ^* , será obtido a partir do desenvolvimento da expressão (3.14).

A equação que relaciona o primeiro tensor de Piola Kirchhoff T e o tensor co-rotacional de Kirchhoff τ^* e dada por (3.15) como

$$T_{ij} = \tau_{ij}^* - \sigma_{kj} D_{ki} - \sigma_{ik} D_{kj} + \sigma_{ik} v_{j,k}. \quad (\text{A1.1})$$

Do primeiro termo da equação (3.14), tem-se

$$\int_{\Omega_0} T_{ij}^{\circ} \delta v_{j,i} d\Omega_0. \quad (\text{A1.2})$$

Considerando o segundo e terceiro termo da equação (A1.1), substituídos na equação (A1.2), tem-se

$$\sigma_{kj} D_{ki} + \sigma_{ik} D_{kj} = \sigma_{kj} D_{ki} + D_{jk} \sigma_{ik}, \quad (\text{A1.3})$$

$$(\sigma_{kj} D_{ki} + D_{jk} \sigma_{ik}) v_{j,i} = (\sigma_{kj} D_{ki}) v_{j,i} + (D_{jk} \sigma_{ik}) v_{j,i}. \quad (\text{A1.4})$$

Utilizando-se uma propriedade de produto interno de tensores,

$$(A, B) = \text{Tr}(A^t B) = \text{Tr}(AB^t), \quad (\text{A1.5})$$

a expressão (A.1.4) torna-se

$$\sigma_{kj} D_{ki} \delta v_{i,j} + \sigma_{ki} D_{kj} \delta v_{j,i}. \quad (\text{A1.6})$$

Como σ e D são tensores simétricos, $\sigma_{ki} D_{kj} = \sigma_{kj} D_{ki}$ e portanto a expressão (A1.6) torna-se

$$\sigma_{kj} D_{ki} \delta v_{i,j} + \sigma_{kj} D_{ki} \delta v_{j,i} = \sigma_{kj} D_{ki} (\delta v_{i,j} + \delta v_{j,i}). \quad (\text{A1.7})$$

Da equação (3.16) tem-se que $D_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i})$ e, portanto,

$v_{i,j} + v_{j,i} = 2D_{ij}$. Consequentemente,

$$(\delta v_{i,j} + \delta v_{j,i}) = 2\delta D_{ij}. \quad (\text{A1.8})$$

Substituindo a expressão (A1.8) na equação (A1.7) tem-se

$$(\sigma_{kj} D_{ki} + D_{jk} \sigma_{ik}) \delta v_{j,i} = 2\sigma_{kj} D_{ki} \delta D_{ij} = 2\sigma_{ij} D_{ik} \delta D_{kj}. \quad (\text{A1.9})$$

Pode-se demonstrar que $2\sigma_{ij} D_{ik} \delta D_{kj} = \sigma_{ij} \delta(D_{ik} D_{kj})$ pois

$$\sigma_{ij} \delta(D_{ik} D_{kj}) = \sigma_{ij} (\delta D_{ik} D_{kj} + D_{ik} \delta D_{kj}). \quad (\text{A1.10})$$

Novamente utilizando a propriedade (A1.5),

$$\sigma_{ij} \delta(D_{ik} D_{kj}) = \sigma_{ij} D_{jk} \delta D_{ki} + \sigma_{ji} D_{ik} \delta D_{kj} \quad (\text{A1.11})$$

e utilizando a propriedade de simetria dos tensores σ e D ,

$$\sigma_{ij} \delta(D_{ik} D_{kj}) = \sigma_{ij} D_{kj} \delta D_{ik} + \sigma_{ji} D_{ki} \delta D_{jk} = \sigma_{ij} D_{kj} \delta D_{ik} + \sigma_{ij} D_{kj} \delta D_{ik} \quad (\text{A1.12})$$

$$\sigma_{ij} \delta(D_{ik} D_{kj}) = 2\sigma_{ij} D_{kj} \delta D_{ik}. \quad (\text{A1.13})$$

Desta forma, a equação (A1.4) torna-se

$$(\sigma_{ij} D_{ki} + D_{jk} \sigma_{ik}) v_{j,i} = \sigma_{ij} \delta(D_{ik} D_{kj}). \quad (\text{A1.14})$$

A última parcela da equação (A1.1) quando substituída em (A1.2) resulta

$$(\sigma_{ik} v_{j,k}) \delta v_{j,i}. \quad (\text{A1.15})$$

Aplicando a propriedade (A1.5) tem-se

$$\sigma_{ik} v_{j,k} \delta v_{i,j}. \quad (\text{A1.16})$$

Com o mesmo procedimento usado na equação (A1.9), pode-se demonstrar que

$$\sigma_{ik} v_{j,k} \delta v_{i,j} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \delta(v_{k,i} \cdot v_{k,j}), \quad (\text{A1.17})$$

como segue:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sigma_{ij} \delta(v_{k,i} \cdot v_{k,j}) &= \frac{1}{2} \sigma_{ij} \delta(v_{i,k} v_{k,j}) & (\text{A1.18}) \\ &= \frac{1}{2} \sigma_{ij} (\delta v_{i,k} v_{k,j} + v_{i,k} \delta v_{k,j}) \\ &= \frac{1}{2} (\sigma_{ij} \delta v_{j,k} v_{k,i} + \sigma_{ji} v_{i,k} \delta v_{k,j}) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} (\sigma_{ij} \delta v_{j,k} v_{k,i} + \sigma_{ij} v_{j,k} \delta v_{k,i})$$

$$\frac{1}{2} \sigma_{ij} \delta (v_{k,i} \cdot v_{k,j}) = \sigma_{ij} v_{j,k} \delta v_{k,i}. \quad (\text{A1.19})$$

O primeiro termo da equação (A1.1) é desenvolvido da seguinte forma:

$$\tau_{ij}^* \delta v_{j,i} = \tau_{ij}^* \left[\frac{1}{2} (\delta v_{i,j} + \delta v_{j,i}) - \frac{1}{2} (\delta v_{i,j} - \delta v_{j,i}) \right]. \quad (\text{A1.20})$$

Das equações (3.16) e (3.31) tem-se:

$$\tau_{ij}^* \delta v_{j,i} = \tau_{ij}^* \delta D_{ij} - \tau_{ij}^* \delta W_{ij}. \quad (\text{A1.21})$$

Como W é antissimétrico e τ^* é simétrico, $\tau_{ij}^* \delta W_{ij} = 0$, logo

$$\tau_{ij}^* \delta v_{j,i} = \tau_{ij}^* \delta D_{ij}. \quad (\text{A1.22})$$

Substituindo as expressões (A1.14), (A1.19) e (A1.22) na equação (A1.2), obtém-se

$$\int_{\Omega} [\tau_{ij}^* \delta D_{ij} - \frac{1}{2} \sigma_{ij} \delta (2D_{ik} D_{kj} - v_{k,i} v_{k,j})] d\Omega = \int_{\Omega} b_i \delta v_i d\Omega + \int_S f_i \delta v_i dS. \quad (\text{A1.23})$$