

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

CONTROLE DE VIBRAÇÕES E RUÍDO POR
NEUTRALIZADORES DINÂMICOS TIPO VIGA:
MÉTODO DAS GRANDEZAS GENERALIZADAS EQUIVALENTES

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA

FERNANDO LUIZ FREITAS FILHO

FLORIANÓPOLIS, AGOSTO DE 1993

CONTROLE DE VIBRAÇÕES E RUÍDO POR NEUTRALIZADORES DINAMICOS
TIPO VIGA: MÉTODO DAS GRANDEZAS GENERALIZADAS EQUIVALENTES

FERNANDO LUIZ FREITAS FILHO

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

MESTRE EM ENGENHARIA

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO VIBRAÇÕES E RUÍDO

E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO



Prof. José João de Espíndola, Ph.D
Orientador

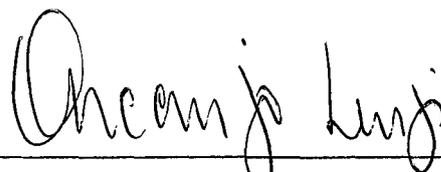


Prof. Berend Snoeijer, Dr. Ing.
Coordenador

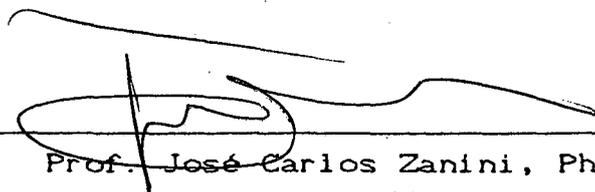
BANCA EXAMINADORA:



Prof. José João de Espíndola, Ph.D.
Presidente



Prof. Arcanjo Lenzi, Ph.D.



Prof. José Carlos Zanini, Ph.D

Aos meus pais
e a Brigitte

AGRADECIMENTOS

- . Ao Prof. José João de Espíndola, pela orientação, pelo apoio e pela amizade;
- . Ao Eng. Eduardo Márcio de Oliveira Lopes pela oportunidade de estágio no Laboratório de Vibrações e Acústica da UFSC;
- . Ao Eng. Hilton Penha Silva pela valiosa ajuda durante o transcorrer dos trabalhos;
- . Ao Prof. Arcanjo Lenzi, pelo apoio e pela amizade;
- . Aos demais professores do curso, Prof. Nelson Diógenes do Valle, Prof. Samir N. Y. Gerges e Prof. Arno Blass, pelos ensinamentos transmitidos em suas disciplinas;
- . Aos Professores Arno Blass e Berend Snoeijer pelo incansável trabalho realizado como Coordenadores do Curso;
- . Aos colegas do LVA, Marcio, Buba, Joseval, Luiz, Geraldo, Acir, Paru, Carlos, Paulo Henrique, Gustavo, Pacheco, Murilo, Adriana, Fu, Paru, Stela, Guillermo, Flávio, Roberson e demais bolsistas;
- . A todos os funcionários do LVA, do CPGEM e do DEM, pela atenciosa colaboração;
- . Ao CNPq - programa RHAÉ, pelo apoio financeiro no primeiro ano de trabalho;
- . A Capes, pelo apoio financeiro no decorrer da última etapa deste trabalho;
- . Aos meus pais, pela valiosa educação recebida e pelo total apoio durante todo o trabalho;
- . A Brigitte, pelo amor e carinho dedicados e pela certeza de uma vida inteira juntos.

ÍNDICE

1	- INTRODUÇÃO.....	1
2	- NEUTRALIZADORES DINAMICOS TIPO VIGA.....	4
2.1	- Obtenção das Matrizes das Grandezas Generalizadas Equivalentes em função da Matriz de Rigidez Dinâmica do Neutralizador.....	4
2.2	- Determinação da Matriz de Transferência do Neutralizador.....	8
2.3	- Obtenção da Matriz de Rigidez Dinâmica para o Neutralizador Dinâmico tipo Viga Simples com Massa de Sintonização na Extremidade.....	13
2.4	- Determinação da Expressão das Frequências Naturais do Neutralizador Dinâmico Tipo Viga.....	14
3	- APLICAÇÃO DO NEUTRALIZADOR TIPO VIGA. CASO PARTICULAR: FUNÇÃO DE TRANSMISSIBILIDADE.....	17
3.1	- Determinação da Transmissibilidade para uma Viga em Balanço na qual São Acoplados Dois Neutralizadores Dinâmicos.....	17
3.2	- Otimização da Rigidez e Amortecimento do Neutralizador a Partir da Função de Transmissibilidade.....	24
3.2.1	- Considerações Iniciais.....	24
3.2.2	- Otimização da Rigidez.....	25
3.2.3	- Otimização do Amortecimento.....	28
3.3	- Resultados Obtidos.....	30

4 - NEUTRALIZADORES DINAMICOS TIPO VIGA SANDUICHE.....	45
4.1 - Introdução.....	45
4.2 - Projeto do Neutralizador Tipo Viga Simples.....	46
4.3 - Projeto do Neutralizador Tipo Viga Sanduíche.....	49
4.3.1 - Determinação das Frequências Naturais e do Fator de Perda de Vigas Sanduíche.....	49
4.3.2 - Comparação Entre os Resultados Teóricos e Experimentais.....	52
4.3.3 - Projeto da Viga Sanduíche Equivalente.....	59
5 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	63
APÊNDICE A - Teoria das Grandezas Generalizadas Equivalentes....	66
APÊNDICE B - OBTENÇÃO DA MATRIZ DE TRANSFERÊNCIA PARA A VIGA EM FLEXÃO.....	77
APÊNDICE C - DETERMINAÇÃO DA FUNÇÃO DE TRANSMISSIBILIDADE.....	82
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	88

SIMBOLOGIA

- b = largura da viga
 c_e = coeficiente de amortecimento viscoso generalizado equivalente
 D = EI
 D_{oi} = "rigidez" EI do neutralizador quando a frequência de ressonância do i -ésimo modo do neutralizador for igual à frequência de ressonância do modo j
 e = excentricidade do centro de gravidade da massa de sintonização em relação à extremidade da viga do neutralizador
 E = módulo de elasticidade de Young
 f, F = excitação
 f, F = frequência [Hz]
 h = altura da viga
 i = $\sqrt{-1}$
 I = segundo momento de área da seção
 I_G = momento de inércia baricêntrico da massa de sintonização
 K = rigidez dinâmica
 k_{ij} = elemento da matriz de rigidez dinâmica
 l = comprimento da viga (sistema primário)
 L = comprimento da viga do neutralizador
 m = massa por unidade de comprimento da viga (sistema primário)
 m_e = massa generalizada equivalente
 M = momento fletor
 M_G = massa de sintonização do neutralizador
 t = tempo

- t_0 = parâmetro de tempo
 T_F = transmissibilidade da força
 T_M = transmissibilidade do momento
 $[T]$ = matriz de transferência
 t_{ij} = elemento da matriz de transferência
 V = esforço cortante
 Y = parâmetro geométrico
 α_j = Ω_a / Ω_j
 α_{ij} = D / D_0
 βl = frequência adimensional
 γ = razão entre a massa total do neutralizador e a massa da viga
 μ = massa por unidade de comprimento do neutralizador
 η = fator de perda
 θ = rotação
 ρ = densidade
 Ψ = função deslocamento da viga em flexão
 ω = deflexão
 Ω = frequência circular
 Ω_a = frequência natural do neutralizador
 Ω_j = frequência natural do modo j do sistema principal.

CONVENÇÕES:

- O símbolo $\bar{\quad}$ sobre qualquer variável indica quantidade complexa;
 O símbolo $\dot{\quad}$ sobre qualquer variável indica derivada em relação ao tempo;
 O símbolo \prime sobre qualquer variável indica derivada em relação à posição;
 O símbolo $[\]$ indica matriz;

O símbolo $\langle \rangle$ indica vetor;

O símbolo $| |$ indica valor absoluto

O símbolo $\text{Re}(\)$ significa a parte real do termo entre chaves;

O símbolo $\text{Im}(\)$ significa a parte imaginária do termo entre chaves;

O símbolo $\mathcal{F}[\]$ significa a transformada de Fourier do termo entre colchetes.

RESUMO

A teoria clássica dos neutralizadores dinâmicos considera o sistema a ser controlado, bem como o neutralizador, como tendo um único grau de liberdade. Uma nova teoria, absolutamente geral, foi desenvolvida para neutralizadores de um grau de liberdade acoplados a sistemas de múltiplos graus de liberdade. Esta teoria baseia-se na substituição dos neutralizadores por suas propriedades generalizadas equivalentes, ou seja, massa generalizada equivalente e coeficiente de amortecimento viscoso generalizado equivalente.

Esta teoria, aplicada com sucesso para neutralizadores simples, é agora expandida para neutralizadores dinâmicos tipo viga, com dois graus de liberdade na raiz, isto é, no ponto de fixação ao sistema primário. Com o auxílio do método das matrizes de transferência, as matrizes das grandezas generalizadas equivalentes são derivadas, bem como as equações gerais do sistema composto, em termos das coordenadas do sistema primário apenas.

É apresentado um exemplo que consiste numa viga em balanço na qual são acoplados 2 neutralizadores tipo viga e uma força $f(t)$.

Foi feito um processo de otimização dos neutralizadores para o controle dos primeiros modos de vibração do sistema principal.

São plotadas as curvas da função de transmissibilidade, definida, no domínio da frequência, pelo módulo da razão entre a força transmitida no engaste e a força aplicada na estrutura.

ABSTRACT

The classical theory of dynamic neutralizers considers both the system to be controlled and the neutralizer, as single degree of freedom systems. A new theory, absolutely general, was developed for single degree of freedom neutralizers attached upon a multi degree of freedom system. This theory is based on the substitution of the neutralizers for their equivalent generalized quantities, i. e., equivalent mass and equivalent viscous damping.

This theory, applied with success to simple neutralizers, is now expanded to beamlike dynamic neutralizers, with two degrees of freedom on its base, i. e., the point where the neutralizers are fixed to the main system. With the help of the Transfer Matrix Method, the matrices of the equivalent generalized quantities and the general equations of the compound system are derived, as a function of only the coordinates of the main system.

An example is shown, which consists in a cantilever beam with two beamlike neutralizers and a force $f(t)$. A neutralizer optimization process is done to control the first 3 modes of the main system. The transmissibility function is plotted for various cases of this example.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, uma linha de pesquisa foi implantada no Laboratório de Vibrações e Acústica, sob orientação do Professor José João de Espíndola, visando a aplicação de elastômeros ao controle de vibrações e ruído.

Em uma primeira etapa, as pesquisas se orientaram para a medição das propriedades dinâmicas de elastômeros. O conhecimento preciso destas propriedades é essencial para o projeto de dispositivos para redução de vibrações e ruído. A medição destas propriedades exigiu uma infra-estrutura complexa e desenvolvimento de "software" específico. Deste trabalho resultou a dissertação de mestrado [15]. A segunda etapa consistiu na análise de motores aeronáuticos montados em isoladores elastoméricos. Foi desenvolvida uma formulação matemática pertinente, bem como algoritmos computacionais para análise do desempenho de um motor montado em isoladores viscoelásticos. E finalmente o terceiro ramo dessa pesquisa é o da aplicação de neutralizadores dinâmicos de vibrações para o controle de vibrações e ruído.

Quando sobre um sistema, ou parte dele, atua uma força alternada de frequência próxima de uma de suas frequências naturais, este pode apresentar vibrações excessivas, e/ou irradiar ruídos desagradáveis. Para o controle dessas vibrações pode-se utilizar um dos seguintes recursos:

a) atuar sobre a excitação, ou seja, reduzir a amplitude da força aplicada e/ou alterar sua frequência;

b) atuar sobre a estrutura, ou seja, variar a rigidez e/ou a massa, alterando assim sua frequência natural e/ou introduzir amortecimento ao sistema;

c) aplicar um sistema mecânico secundário ao sistema primário, com o objetivo de dissipar a energia vibratória e/ou aplicar forças de reação ao sistema primário.

Ao sistema secundário referido acima dá-se o nome de Neutralizador Dinâmico de Vibrações, que nada mais é do que um dispositivo mecânico acoplado ao sistema principal, com a finalidade de reduzir ou controlar vibrações a níveis aceitáveis.

A teoria clássica sobre neutralizadores dinâmicos, estudada inicialmente por Ormondroyd e Den Hartog e apresentada por vários autores, [1]-[5], considera o sistema a ser controlado como tendo um único grau de liberdade. Esta teoria é limitada em seu escopo e, obviamente, inadequada para a aplicação a sistemas complexos com densidade modal considerável.

Uma teoria geral para o controle modal de estruturas complexas foi desenvolvida, graças aos conceitos de massa generalizada equivalente e amortecimento viscoso generalizado equivalente. Por essa teoria o controle é feito modo a modo e, independente do número de neutralizadores ou de quantos graus de liberdade possuem. As equações gerais (no domínio da frequência) são escritas nas coordenadas generalizadas do sistema primário apenas. Esta teoria foi apresentada nas referências [6]-[9] para neutralizadores de 1 grau de liberdade e aplicada a um exemplo, cujos resultados numéricos foram comparados com material publicado anteriormente por Snowdon [10].

O objetivo dessa dissertação é estender os trabalhos realizados nessa linha de pesquisa para neutralizadores dinâmicos de 2 graus de liberdade do tipo viga, que consistem numa viga em balanço com uma massa de sintonização na extremidade [5],[11].

No capítulo 2 é apresentada a formulação matemática para a determinação das matrizes das grandezas generalizadas equivalentes. Para tanto utilizou-se como recurso o método das matrizes de transferência [12]-[13]. Além disso, neste capítulo é determinada a expressão para cálculo das frequências naturais do neutralizador.

No capítulo 3 é discutida a aplicação do neutralizador dinâmico num caso particular das referências [8]-[10], que consiste na determinação da função de transmissibilidade de uma força aplicada em uma viga em balanço quando 1 ou 2 neutralizadores dinâmicos são acoplados à mesma. É feito o controle para o 1º, 2º e 3º modos. É feito, também, um processo de otimização da rigidez e amortecimento do neutralizador, bem como são apresentados os resultados comparativos entre o presente trabalho e o da referência [8].

No capítulo 4 apresenta-se um método para obtenção de uma viga sanduíche, com características equivalentes às da viga simples obtida no capítulo anterior. Este trabalho foi desenvolvido por Rao [14] e consiste no projeto de uma viga sanduíche equivalente, com as mesmas frequências naturais e o mesmo amortecimento de uma viga simples.

No capítulo 5 são apresentadas as conclusões a respeito deste trabalho, bem como sugestões para trabalhos que possam ser desenvolvidos no futuro, dentro dessa linha de pesquisa.

CAPÍTULO 2

NEUTRALIZADORES DINÂMICOS TIPO VIGA

2.1. Obtenção das Matrizes das Grandezas Generalizadas Equivalentes em Função da Matriz de Rigidez Dinâmica do Neutralizador

Seja a viga uniforme da figura abaixo:

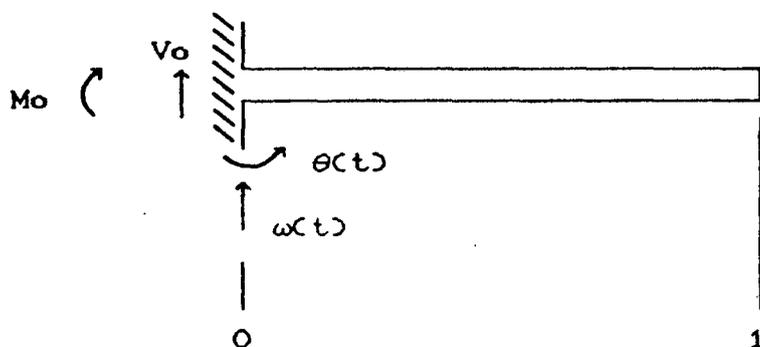


FIGURA 2.1 - Forças e Deslocamentos de uma Viga em Balanço.

Na figura 2.1 é representada uma viga em balanço com os respectivos esforços e deslocamentos na extremidade engastada. M_o e V_o são, respectivamente, momento fletor e esforço cortante no ponto O. Observa-se que neste ponto existem apenas dois movimentos, o de translação ω e o de rotação θ . Ao acoplarmos esta viga a um sistema primário com o objetivo de dissipar energia vibratória, estamos frente a um neutralizador dinâmico de

vibrações tipo viga com dois graus de liberdade em sua base. Neste trabalho será estudado o neutralizador tipo viga com uma massa de sintonização na extremidade livre. Essa massa, como o próprio nome diz, tem por objetivo sintonizar o neutralizador para a condição ótima de operação.

Seja o vetor,

$$\langle Z \rangle_i = \begin{Bmatrix} \omega_i \\ \theta_i \\ M_i \\ V_i \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

que representa os esforços e os deslocamentos no ponto i da viga. A este vetor dá-se o nome de vetor de estado [12]-[13].

Seja o operador $[T]$ que, aplicado ao vetor $\langle Z \rangle_0$ reproduza o vetor $\langle Z \rangle_1$, ou seja,

$$\langle Z \rangle_1 = [T] \langle Z \rangle_0 \quad (2.2)$$

A este operador dá-se o nome de Matriz de Transferência. No presente trabalho, apenas por questão de conveniência, será considerado o seguinte vetor de estado:

$$\langle Z \rangle_i = \begin{Bmatrix} -\omega_i \\ \theta_i \\ M_i \\ V_i \end{Bmatrix}$$

Considerando um deslocamento unitário na translação (figura 2.2), tem-se que:

$$\begin{Bmatrix} -\omega_1 \\ \theta_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ M_0 \\ V_0 \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

Tomando-se as duas últimas expressões e isolando-se o vetor $\langle Z \rangle_1$, chega-se a:

$$\begin{Bmatrix} M_0 \\ V_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K_{21} \\ K_{11} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} t_{44} & -t_{34} \\ -t_{43} & t_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_{31} \\ t_{41} \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

onde:

$$\Delta = t_{33} t_{44} - t_{34} t_{43}$$

Considerando um deslocamento unitário na rotação (figura 2.3), tem-se que:

$$\begin{Bmatrix} M_0 \\ V_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K_{22} \\ K_{12} \end{Bmatrix} = -\frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} t_{44} & -t_{34} \\ -t_{43} & t_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_{32} \\ t_{42} \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

Tem-se, então, que a Matriz de Rigidez Dinâmica para a viga da figura 2.1, em função dos termos da Matriz de Transferência, pode ser obtida por:

$$[\bar{K}(\omega)] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

onde:

$$K_{11} = \frac{t_{33} t_{41} - t_{31} t_{43}}{t_{33} t_{44} - t_{43} t_{34}}$$

$$K_{12} = \frac{t_{43} t_{32} - t_{33} t_{42}}{t_{33} t_{44} - t_{43} t_{34}}$$

$$K_{21} = \frac{t_{44} t_{31} - t_{34} t_{41}}{t_{33} t_{44} - t_{43} t_{34}}$$

$$K_{22} = \frac{t_{34} t_{42} - t_{44} t_{32}}{t_{33} t_{44} - t_{43} t_{34}}$$

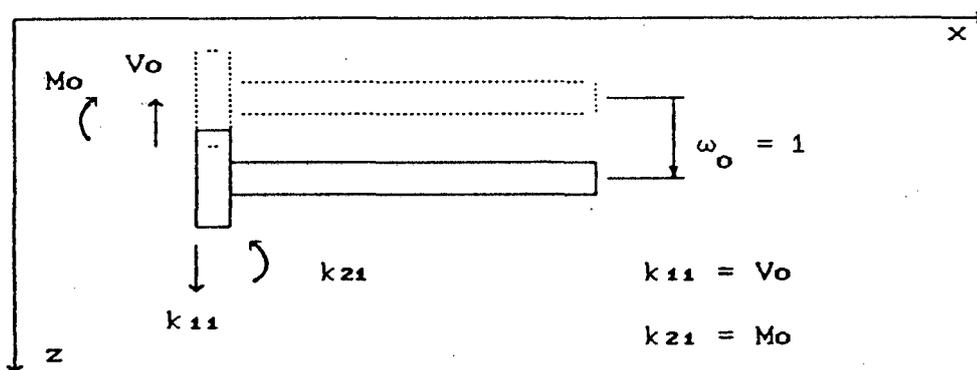


FIGURA 2.2 - Deslocamento Unitário na Translação

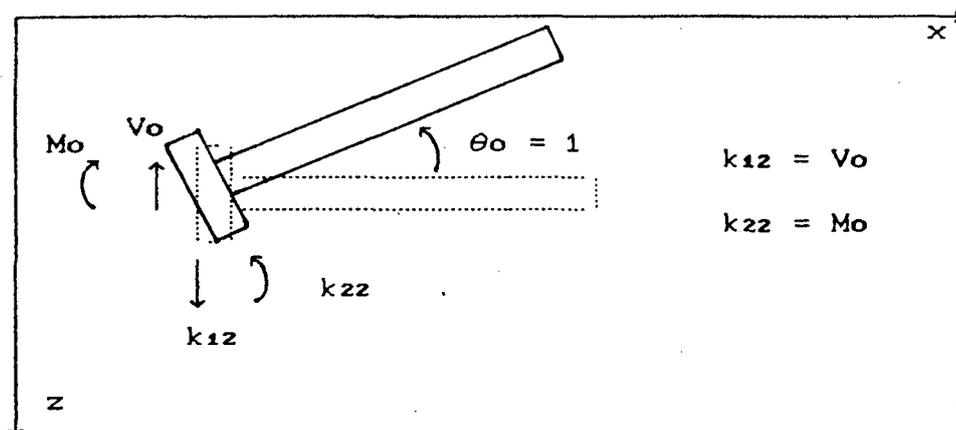


FIGURA 2.3 - Deslocamento Unitário na Rotação

Convém observar que a matriz de rigidez dinâmica é complexa e função da frequência. Isto ocorre pelo fato de que os termos da matriz de transferência para uma viga são função da frequência. Além disso, em se tratando de um neutralizador dinâmico tipo viga, deve-se considerar que a viga seja amortecida e, portanto, o módulo de Young é complexo. Estas considerações serão apresentadas no próximo item quando se determinará a matriz de transferência para o neutralizador dinâmico.

Finalmente, as matrizes do coeficiente de amortecimento viscoso generalizado equivalente $[c_e(\Omega)]$ e de massa generalizada equivalente $[m_e(\Omega)]$, segundo Espíndola [7] e [9], são dadas por:

$$[c_e(\Omega)] = \frac{\text{Im}\{\bar{K}(\Omega)\}}{\Omega} \quad (2.7)$$

$$[m_e(\Omega)] = - \frac{\text{Re}\{\bar{K}(\Omega)\}}{\Omega^2}$$

No apêndice A a teoria das grandezas generalizadas equivalentes é apresentada, bem como, a dedução das expressões (2.7).

2.2. Determinação da Matriz de Transferência do Neutralizador

Seja a viga em flexão da figura 2.4, na qual está representado o sistema de coordenadas a ser adotado, bem como a convenção de sinais. Os dois deslocamentos são a deflexão w e a rotação θ , e as forças correspondentes são o esforço cortante V e o momento fletor M .

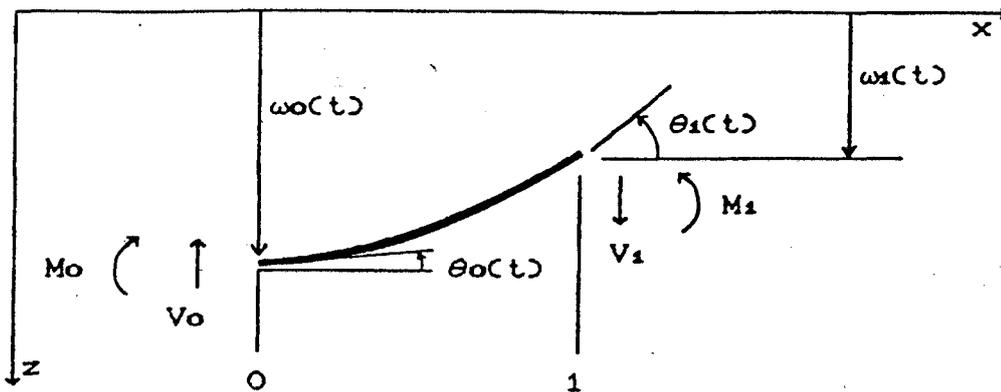


FIGURA 2.4 - Forças e Deslocamentos de uma Viga em Flexão

Seja, agora, a viga em balanço da figura 2.5, que representa o neutralizador dinâmico tipo viga.

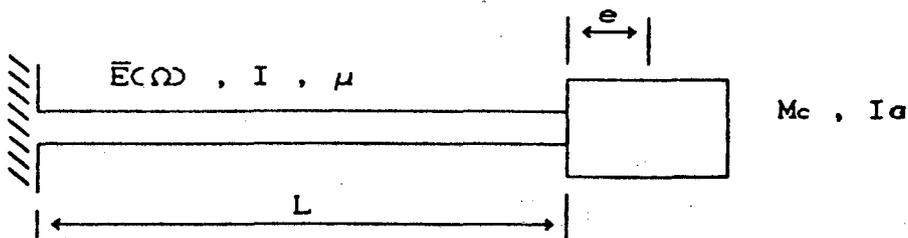


FIGURA 2.5 - Neutralizador Dinâmico Tipo Viga

Na figura anterior, as grandezas representadas têm o seguinte significado:

$\bar{E}(\Omega)$ é o módulo complexo de Young em função da frequência Ω ;

I é o momento de área da seção transversal;

μ é massa distribuída;

e é a excentricidade do centro de gravidade da massa de sintonização em relação à extremidade do neutralizador;

L é o comprimento do neutralizador;

M_c é a massa de sintonização na extremidade do neutralizador;

I_0 é o momento de inércia baricêntrico da massa da extremidade.

O módulo complexo de Young é dado pela expressão,

$$\bar{E}(\Omega) = E [1 + i \eta(\Omega)], \quad (2.8)$$

onde E é o módulo de Young e $\eta(\Omega)$ é o fator de perda do material do neutralizador em função da frequência.

A rigor, o fator de perda $\eta(\Omega)$ é também função da temperatura, ou seja, $\eta(\Omega, T)$. No presente trabalho não será considerada a variação com a temperatura. Porém, deve-se lembrar que na aplicação do neutralizador, o mesmo deve ser utilizado em uma temperatura adequada.

Segundo Espíndola [12], a matriz de transferência para uma viga de comprimento L , obedecendo as convenções assumidas anteriormente, é dada por (ver apêndice B):

$$[T]_{01} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3/D & c_4/D \\ c_4 \lambda_1^4 & c_1 & c_2/D & c_3/D \\ c_3 D \lambda_1^4 & c_4 D \lambda_1^4 & c_1 & c_2 \\ c_2 D \lambda_1^4 & c_3 D \lambda_1^4 & c_4 \lambda_1^4 & c_1 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

onde:

$$\lambda_1 = \bar{\lambda}_1(\Omega) = \left[\Omega^2 \frac{\mu}{D} \right]^{1/4}$$

$$D = \bar{D}(\Omega) = \bar{E}(\Omega) I$$

$$c_1 = \bar{c}_1(\Omega) = \frac{\cosh \lambda_1 L + \cos \lambda_1 L}{2}$$

$$c_2 = \bar{c}_2(\Omega) = \frac{\sinh \lambda_1 L + \sin \lambda_1 L}{2 \lambda_1}$$

$$c_3 = \bar{c}_3(\Omega) = \frac{\cosh \lambda_1 L - \cos \lambda_1 L}{2 \lambda_1^2}$$

$$c_4 = \bar{c}_4(\Omega) = \frac{\sinh \lambda_1 L - \sin \lambda_1 L}{2 \lambda_1^3}$$

Para a massa de sintonização, de acordo com a figura 2.6, pode-se obter a seguinte matriz de transferência:

$$[T]_{12} = \begin{bmatrix} 1 & e & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\Omega^2 I_G & 1 & e \\ M_c \Omega^2 & M_c e \Omega^2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

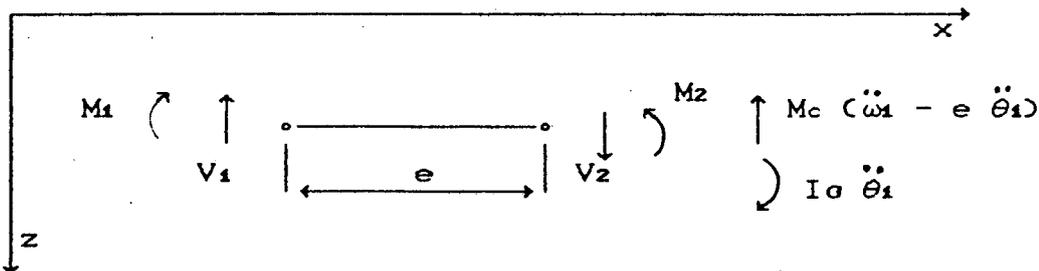


FIGURA 2.6 - Esforços que Atuam na Massa de Sintonização.

A matriz de transferência total $[T]_{02}$ do neutralizador, ou seja, a matriz de transferência para a viga mais a massa da extremidade é obtida por:

$$[T]_{02} = [T]_{12} [T]_{01} \quad (2.11)$$

Tem-se, então, que a matriz de transferência, para o neutralizador dinâmico tipo viga, com massa de sintonização na extremidade, é dada por:

$$[T]_{02} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

onde:

$$t_{11} = c_1 + c_4 e \lambda_1^4$$

$$t_{12} = c_2 + c_1 e$$

$$t_{13} = \frac{(c_3 + c_2 e)}{D}$$

$$t_{14} = \frac{(c_4 + c_3 e)}{D}$$

$$t_{21} = c_4 \lambda_1^4$$

$$t_{22} = c_1$$

$$t_{23} = c_2 / D$$

$$t_{24} = c_3 / D$$

$$t_{31} = \lambda_1^4 (-c_4 \Omega^2 I_G + c_3 D + c_2 e D)$$

$$t_{32} = -c_1 \Omega^2 I_0 + c_4 D \lambda_1^4 + c_3 e D \lambda_1^4$$

$$t_{33} = \frac{-c_2 \Omega^2 I_0}{D} + c_1 + c_4 e \lambda_1^4$$

$$t_{34} = \frac{-c_3 \Omega^2 I_0}{D} + c_2 + c_1 e$$

$$t_{41} = c_1 \Omega^2 M_c + c_4 e \Omega^2 M_c \lambda_1^4 + c_2 D \lambda_1^4$$

$$t_{42} = c_2 \Omega^2 M_c + c_1 e \Omega^2 M_c + c_3 D \lambda_1^4$$

$$t_{43} = \frac{c_3 \omega^2 M_c}{D} + \frac{c_2 e \Omega^2 M_c}{D} + c_4 \lambda_1^4$$

$$t_{44} = \frac{c_4 \Omega^2 M_c}{D} + \frac{c_3 e \Omega^2 M_c}{D} + c_1$$

Lembrando que $t_{ij} = \bar{t}_{ij}(\Omega)$, $i, j = 1, 4$

2.3. Obtenção da Matriz de Rigidez Dinâmica para o Neutralizador Dinâmico tipo Viga Simples com Massa de Sintonização na Extremidade.

Para obter a matriz de rigidez dinâmica do neutralizador, basta substituir a expressão (2.12) em (2.6).

Então,

$$[\bar{K}(\Omega)] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

onde:

$$K_{11} = [c_6(a_1 - a_5) + c_7(a_2 a_5 + a_3 a_5) - c_{10} a_4 D + 2c_8 a_3 a_5] / \delta$$

$$K_{12} = [c_{11} a_1 + c_{12} a_5 + c_6 a_4 D + c_{10} a_3 D - c_8 a_5(a_3 + a_2)] / \delta$$

$$K_{21} = [-c_{12} a_1 - c_{11} a_5 + c_6 a_4 D + c_{10} a_3 D - c_8 a_5(a_3 + a_2)] / \delta$$

$$K_{22} = [c_8(a_1 - a_5) - c_{10} D(a_2 + a_3) - c_7 a_4 D] / \delta$$

$$\delta = \frac{c_5 a_1}{D} + c_6(a_2 + a_3 e) + c_7 a_3 + c_8 a_4 - c_9 \lambda_1^4 + c_1^2$$

$$c_5 = c_3^2 - c_2 c_4$$

$$c_6 = c_3 c_4 \lambda_1^4 - c_1 c_2$$

$$c_7 = c_4^2 \lambda_1^4 - c_2^2$$

$$c_8 = c_1 c_4 - c_2 c_3$$

$$c_9 = c_2 c_4$$

$$c_{10} = c_3^2 \lambda_1^4 - c_1^2$$

$$c_{11} = c_2^2 - c_1 c_3$$

$$c_{12} = c_4^2 \lambda_1^4 - c_1 c_3$$

$$a_1 = \Omega^4 M_c I_\sigma / D$$

$$a_2 = \Omega^2 I_\sigma / D$$

$$a_3 = e \Omega^2 M_c / D$$

$$a_4 = \Omega^2 M_c / D$$

$$a_5 = D \lambda_1^4$$

Substituindo as expressões acima nos termos K_{12} e K_{21} e fazendo as devidas operações matemáticas, chega-se a conclusão que K_{12} é igual a K_{21} . Portanto, a matriz de rigidez dinâmica é simétrica.

2.4. Determinação da Expressão das Frequências Naturais do Neutralizador Dinâmico Tipo Viga.

Da referência [15] sabe-se que a expressão para o deslocamento de uma viga em flexão é dada por,

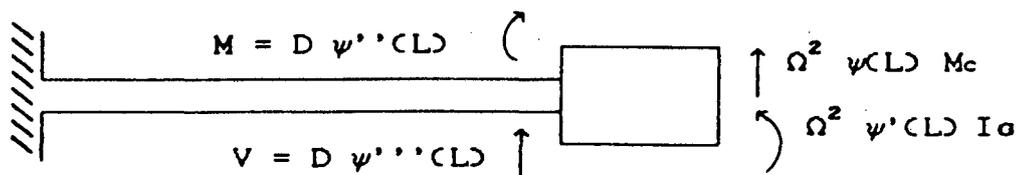
$$\psi(x) = A_1 \sin \lambda_1 x + A_2 \cos \lambda_1 x + A_3 \sinh \lambda_1 x + A_4 \cosh \lambda_1 x \quad (2.14)$$

Substituindo as condições de contorno conforme a figura 2.7, tem-se que:

$$\begin{aligned} & \Omega^4 M_c I \sigma \lambda_1 (\cos \lambda_1 L \cosh \lambda_1 L - 1) + \\ & \Omega^2 I \sigma \lambda_1^4 D (\sin \lambda_1 L \cosh \lambda_1 L + \cos \lambda_1 L \sinh \lambda_1 L) + \\ & \Omega^2 M_c D \lambda_1^2 (\sin \lambda_1 L \cosh \lambda_1 L - \cos \lambda_1 L \sinh \lambda_1 L) - \\ & \Omega^2 \lambda_1^5 (1 + \cos \lambda_1 L \cosh \lambda_1 L) = 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Da expressão anterior pode-se obter os valores das frequências naturais da viga em questão.

Supondo que ω_m seja a frequência natural do modo que se quer controlar as vibrações do sistema principal, aplicando-o na expressão anterior e fixando-se os demais parâmetros, obter-se-á os valores de " D " para os quais a frequência de ressonância do neutralizador coincida com a do sistema principal. Nota-se que existirão infinitos valores de " D " em que isto ocorre, pois haverá um valor de " D " onde a frequência natural do primeiro modo do neutralizador será igual a ω_m ; haverá outro valor de " D " onde a frequência natural do segundo modo do neutralizador será igual a ω_m ; e assim por diante. Isto pode ser melhor observado na figura 2.8, onde é plotado o gráfico $\log |F| \times \Omega$. F é a função cujas raízes são frequências naturais do neutralizador e, portanto, os pontos em que ocorrem os vértices nas curvas representam as frequências naturais do neutralizador. Verifica-se que, para o maior valor de $D = EI$, o 1º modo do neutralizador irá controlar o modo desejado do sistema primário.



$$\psi(0) = 0 \quad EI \psi''(L) - \Omega^2 \psi'(L) I_a = 0$$

$$\psi'(0) = 0 \quad EI \psi'''(L) + \Omega^2 \psi(L) M_c = 0$$

FIGURA 2.7 - Condições de Contorno

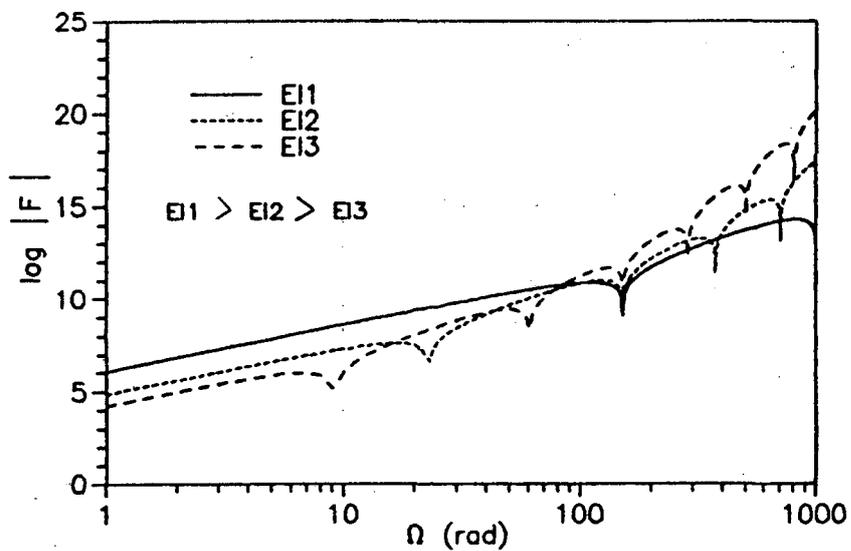


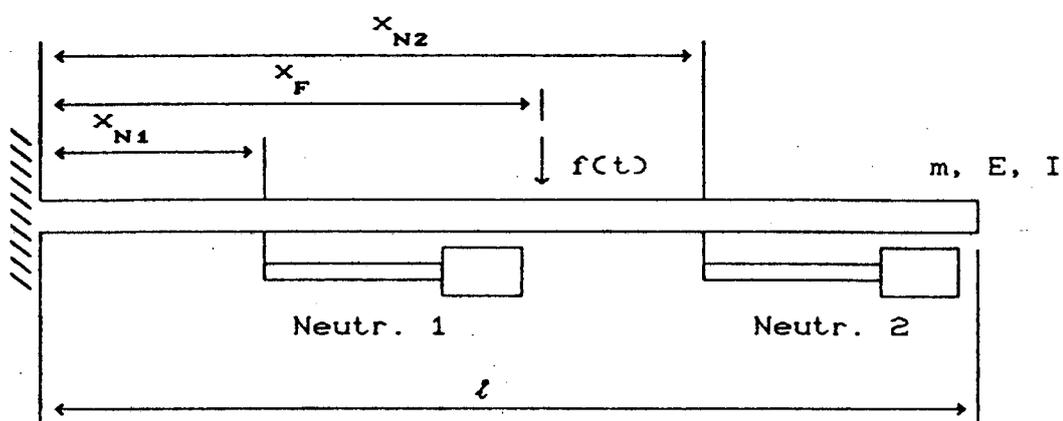
FIGURA 2.8 - Gráfico $\log |F| \times \Omega$

CAPÍTULO 3

APLICAÇÃO DO NEUTRALIZADOR TIPO VIGA
CASO PARTICULAR: FUNÇÃO DE TRANSMISSIBILIDADE

3.1. Determinação da Transmissibilidade para uma Viga em Balanço
na qual São Aplicados Dois Neutralizadores Dinâmicos.

Seja a viga em balanço da figura 3.1, sobre a qual encontram-se dois neutralizadores dinâmicos tipo viga e uma força $f(t)$. Considera-se nesta figura $x_{N1} \leq x_{N2}$ e $x_{N1} \leq x_F \leq x_{N2}$. Tal condição satisfaz todos os casos apresentados nas referências [8]-[10].



onde m - massa por unidade de comprimento,
 E - módulo de elasticidade
 I - segundo momento de área da seção transversal

FIGURA 3.1 - Viga em Balanço com dois Neutralizadores Dinâmicos
Tipo Viga e uma Força Aplicada.

A figura 3.2 representa o mesmo sistema da figura 3.1, onde os dois neutralizadores foram substituídos por suas propriedades equivalentes, ou seja, coeficiente de amortecimento viscoso generalizado equivalente e massa generalizada equivalente.

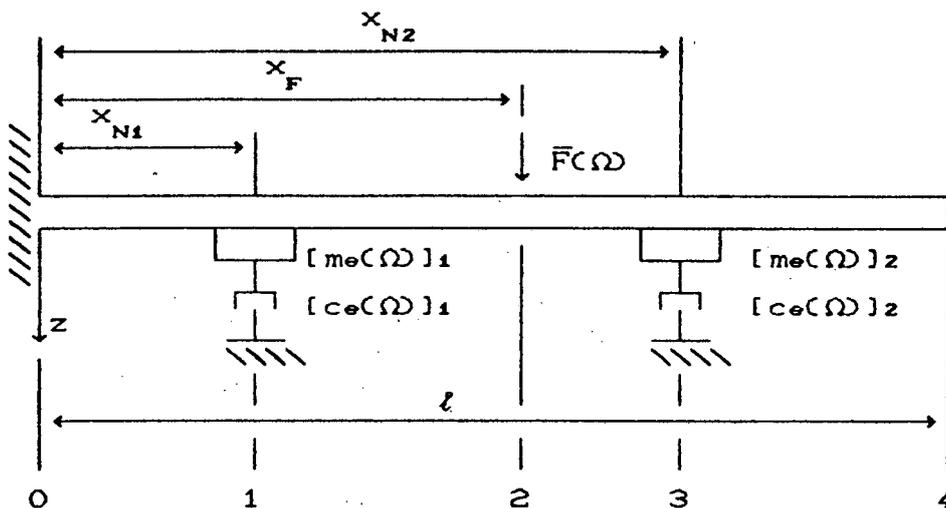


FIGURA 3.2 - Representação Equivalente do Sistema da Figura 3.1

A força aplicada $\bar{F}(\Omega)$ pode ser representada de forma vetorial da seguinte maneira:

$$\langle \bar{F}(\Omega) \rangle = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{F}(\Omega) \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

A cada trecho da viga corresponde uma matriz de transferência, dada pela expressão (2.9). Para o neutralizador

dinâmico esta matriz é complexa devido ao fato de que o mesmo é feito com material viscoelástico. Já para a viga em questão, a matriz de transferência é real, uma vez que não é considerado o amortecimento do sistema principal. Para o neutralizador dinâmico, considerando suas seções imediatamente à esquerda e imediatamente à direita (figura 3.3), pode-se obter a seguinte matriz de transferência:

$$[\bar{T}]_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{B} & 1 & 0 \\ \bar{A} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

onde:

$$\bar{A} = \Omega^2 m_{e_{11}} - i \Omega c_{e_{11}}$$

$$\bar{B} = -\Omega^2 m_{e_{22}} + i \Omega c_{e_{22}}$$

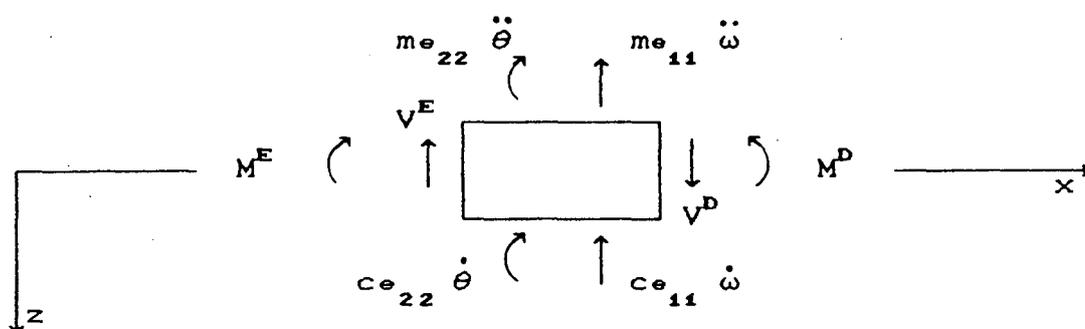


FIGURA 3.3 - Esforços que Atuam nas Seções Imediatamente à Esquerda e Imediatamente à Direita do Neutralizador.

Deve-se observar que os termos fora da diagonal principal das matrizes $[m_0(\Omega)]$ e $[c_0(\Omega)]$, ou seja, $m_{0_{12}}$, $m_{0_{21}}$, $c_{0_{12}}$ e $c_{0_{21}}$, não foram considerados na determinação de $[\bar{T}]_N$. Foi verificado através de um exemplo numérico que o erro que esta consideração acarreta é desprezível. No apêndice C é apresentado o desenvolvimento do cálculo da transmissibilidade considerando esses termos.

Sabendo-se que o vetor de estado no ponto 0 da viga é,

$$\langle \bar{Z} \rangle_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{M}_0 \\ \bar{V}_0 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

pode-se obter, sucessivamente, para cada ponto a direita deste:

$$\langle \bar{Z} \rangle_1^E = [T]_{01} \langle \bar{Z} \rangle_0$$

$$\langle \bar{Z} \rangle_1^D = [\bar{T}]_{N1} \langle \bar{Z} \rangle_1^E = [\bar{T}]_{N1} [T]_{01} \langle \bar{Z} \rangle_0$$

$$\langle \bar{Z} \rangle_2^E = [T]_{12} \langle \bar{Z} \rangle_1^D = [T]_{12} [\bar{T}]_{N1} [T]_{01} \langle \bar{Z} \rangle_0$$

$$\langle \bar{Z} \rangle_2^D = \langle \bar{Z} \rangle_2^E - \langle \bar{F} \rangle = [T]_{12} [\bar{T}]_{N1} [T]_{01} \langle \bar{Z} \rangle_0 - \langle \bar{F} \rangle$$

$$\begin{aligned} \langle \bar{Z} \rangle_3^E &= [T]_{23} \langle \bar{Z} \rangle_2^D = [T]_{23} [T]_{12} [\bar{T}]_{N1} [T]_{01} \langle \bar{Z} \rangle_0 - [T]_{23} \langle \bar{F} \rangle \\ &= [T]_{13} [\bar{T}]_{N1} [T]_{01} \langle \bar{Z} \rangle_0 - [T]_{23} \langle \bar{F} \rangle \end{aligned}$$

$$\langle \bar{Z} \rangle_3^D = [\bar{T}]_{N2} \langle \bar{Z} \rangle_3^E = [\bar{T}]_{N2} \left([T]_{13} [\bar{T}]_{N1} [T]_{01} \langle \bar{Z} \rangle_0 - [T]_{23} \langle \bar{F} \rangle \right)$$

$$\langle \bar{Z} \rangle_4^D = [T]_{34} \langle \bar{Z} \rangle_3^D$$

$$\langle \bar{Z} \rangle_4^D = [T]_{34} [\bar{T}]_{N2} \left([T]_{13} [\bar{T}]_{N1} [T]_{01} \langle \bar{Z} \rangle_0 - [T]_{23} \langle \bar{F} \rangle \right) \quad (3.4)$$

Sabe-se que no ponto 4 o vetor de estado é:

$$\langle \bar{Z} \rangle_4 = \begin{pmatrix} -\bar{\omega}_4 \\ \bar{\theta}_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Substituindo (3.3) e (3.5) em (3.4), fazendo-se as operações genéricas das matrizes e vetores, e tomando-se a 3ª e 4ª equações daí obtidas, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \bar{C}_{11} \bar{M}_0 + \bar{C}_{12} \bar{V}_0 &= \bar{d}_1 \bar{F} \\ \bar{C}_{21} \bar{M}_0 + \bar{C}_{22} \bar{V}_0 &= \bar{d}_2 \bar{F} \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde:

$$\begin{aligned} \bar{C}_{11} &= \left(t_{31}^{34} + \bar{A}_2 t_{34}^{34} \right) \bar{b}_1 + \left(t_{32}^{34} + \bar{B}_2 t_{33}^{34} \right) \bar{b}_3 + t_{33}^{34} \bar{b}_5 + t_{34}^{34} \bar{b}_7 \\ \bar{C}_{12} &= \left(t_{31}^{34} + \bar{A}_2 t_{34}^{34} \right) \bar{b}_2 + \left(t_{32}^{34} + \bar{B}_2 t_{33}^{34} \right) \bar{b}_4 + t_{33}^{34} \bar{b}_6 + t_{34}^{34} \bar{b}_8 \\ \bar{d}_1 &= \left(t_{31}^{34} + \bar{A}_2 t_{34}^{34} \right) t_{14}^{23} + \left(t_{32}^{34} + \bar{B}_2 t_{33}^{34} \right) t_{24}^{23} + t_{33}^{34} t_{34}^{23} + t_{34}^{34} t_{44}^{23} \\ \bar{C}_{21} &= \left(t_{41}^{34} + \bar{A}_2 t_{44}^{34} \right) \bar{b}_1 + \left(t_{42}^{34} + \bar{B}_2 t_{43}^{34} \right) \bar{b}_3 + t_{43}^{34} \bar{b}_5 + t_{44}^{34} \bar{b}_7 \\ \bar{C}_{22} &= \left(t_{41}^{34} + \bar{A}_2 t_{44}^{34} \right) \bar{b}_2 + \left(t_{42}^{34} + \bar{B}_2 t_{43}^{34} \right) \bar{b}_4 + t_{43}^{34} \bar{b}_6 + t_{44}^{34} \bar{b}_8 \\ \bar{d}_2 &= \left(t_{41}^{34} + \bar{A}_2 t_{44}^{34} \right) t_{14}^{23} + \left(t_{42}^{34} + \bar{B}_2 t_{43}^{34} \right) t_{24}^{23} + t_{43}^{34} t_{34}^{23} + t_{44}^{34} t_{44}^{23} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{b}_1 &= t_{11}^{13} t_{13}^{01} + t_{12}^{13} t_{23}^{01} + t_{13}^{13} \left(t_{33}^{01} + \bar{B}_1 t_{23}^{01} \right) + t_{14}^{13} \left(t_{43}^{01} + \bar{A}_1 t_{13}^{01} \right) \\ \bar{b}_2 &= t_{11}^{13} t_{14}^{01} + t_{12}^{13} t_{24}^{01} + t_{13}^{13} \left(t_{34}^{01} + \bar{B}_1 t_{24}^{01} \right) + t_{14}^{13} \left(t_{44}^{01} + \bar{A}_1 t_{14}^{01} \right) \\ \bar{b}_3 &= t_{21}^{13} t_{13}^{01} + t_{22}^{13} t_{23}^{01} + t_{23}^{13} \left(t_{33}^{01} + \bar{B}_1 t_{23}^{01} \right) + t_{24}^{13} \left(t_{43}^{01} + \bar{A}_1 t_{13}^{01} \right) \\ \bar{b}_4 &= t_{21}^{13} t_{14}^{01} + t_{22}^{13} t_{24}^{01} + t_{23}^{13} \left(t_{34}^{01} + \bar{B}_1 t_{24}^{01} \right) + t_{24}^{13} \left(t_{44}^{01} + \bar{A}_1 t_{14}^{01} \right) \\ \bar{b}_5 &= t_{31}^{13} t_{13}^{01} + t_{32}^{13} t_{23}^{01} + t_{33}^{13} \left(t_{33}^{01} + \bar{B}_1 t_{23}^{01} \right) + t_{34}^{13} \left(t_{43}^{01} + \bar{A}_1 t_{13}^{01} \right) \\ \bar{b}_6 &= t_{31}^{13} t_{14}^{01} + t_{32}^{13} t_{24}^{01} + t_{33}^{13} \left(t_{34}^{01} + \bar{B}_1 t_{24}^{01} \right) + t_{34}^{13} \left(t_{44}^{01} + \bar{A}_1 t_{14}^{01} \right) \\ \bar{b}_7 &= t_{41}^{13} t_{13}^{01} + t_{42}^{13} t_{23}^{01} + t_{43}^{13} \left(t_{33}^{01} + \bar{B}_1 t_{23}^{01} \right) + t_{44}^{13} \left(t_{43}^{01} + \bar{A}_1 t_{13}^{01} \right) \\ \bar{b}_8 &= t_{41}^{13} t_{14}^{01} + t_{42}^{13} t_{24}^{01} + t_{43}^{13} \left(t_{34}^{01} + \bar{B}_1 t_{24}^{01} \right) + t_{44}^{13} \left(t_{44}^{01} + \bar{A}_1 t_{14}^{01} \right) \end{aligned}$$

Os termos da forma genérica t_{xy}^{ab} acima representam o termo xy da matriz de transferência relativa ao trecho ab da viga.

A transmissibilidade da força é definida, no domínio da frequência, através do módulo da razão entre a força transmitida no engaste e a força aplicada sobre a estrutura:

$$T_F(\Omega) = \left| \frac{\bar{V}_0(\Omega)}{\bar{F}(\Omega)} \right| \quad (3.7)$$

Caso a força de excitação tenha um espectro unitário no domínio da frequência, a transmissibilidade se reduz a:

$$T_F(\Omega) = | \bar{V}_0(\Omega) | \quad (3.8)$$

A transmissibilidade da força aplicada a viga pode então ser obtida das equações (3.6):

$$T_F(\Omega) = \left| \frac{\bar{c}_{11} \bar{d}_2 - \bar{c}_{21} \bar{d}_1}{\bar{c}_{11} \bar{c}_{22} - \bar{c}_{12} \bar{c}_{21}} \right| \quad (3.9)$$

Da mesma maneira que se definiu a transmissibilidade da força aplicada, pode-se definir a transmissibilidade do momento devido à força:

$$T_M(\Omega) = \left| \frac{\bar{M}_0(\Omega)}{x_F \bar{F}(\Omega)} \right| \quad (3.10)$$

Para um espectro unitário da força $\bar{F}(\Omega)$:

$$T_M(\Omega) = \left| \frac{\bar{M}_0(\Omega)}{x_F} \right| \quad (3.11)$$

A transmissibilidade do momento pode então ser obtida:

$$T_M(\Omega) = \left| \frac{\bar{c}_{22} \bar{d}_1 - \bar{c}_{12} \bar{d}_1}{x_F (\bar{c}_{11} \bar{c}_{22} - \bar{c}_{12} \bar{c}_{21})} \right| \quad (3.12)$$

3.2. Otimização da Rigidez e Amortecimento do Neutralizador a Partir da Função de Transmissibilidade

3.2.1. Considerações Iniciais

Se duas curvas de transmissibilidade forem plotadas (equação 3.9), uma para $\eta = 0$ e outra para alto amortecimento do neutralizador (η tendendo para infinito), dois pontos chamados pontos fixos serão produzidos pela intersecção das duas curvas. Para qualquer valor de amortecimento, as curvas de transmissibilidade passarão por esse pontos.

Definindo-se o parâmetro,

$$\alpha_j = \frac{\Omega_a}{\Omega_j}, \quad (3.15)$$

onde Ω_a é a frequência natural do neutralizador e Ω_j é a frequência natural do modo em questão do sistema principal, pode-se afirmar que os pontos fixos são função apenas desse parâmetro.

Na figura 3.4 podem ser observadas as curvas de transmissibilidade para diferentes valores de amortecimento, destacando-se os dois pontos fixos A e B. A abscissa do gráfico é a frequência adimensional, que é definida como:

$$\beta l = \left[\frac{\Omega^2 m}{EI} \right]^{1/4} l \quad (3.16)$$

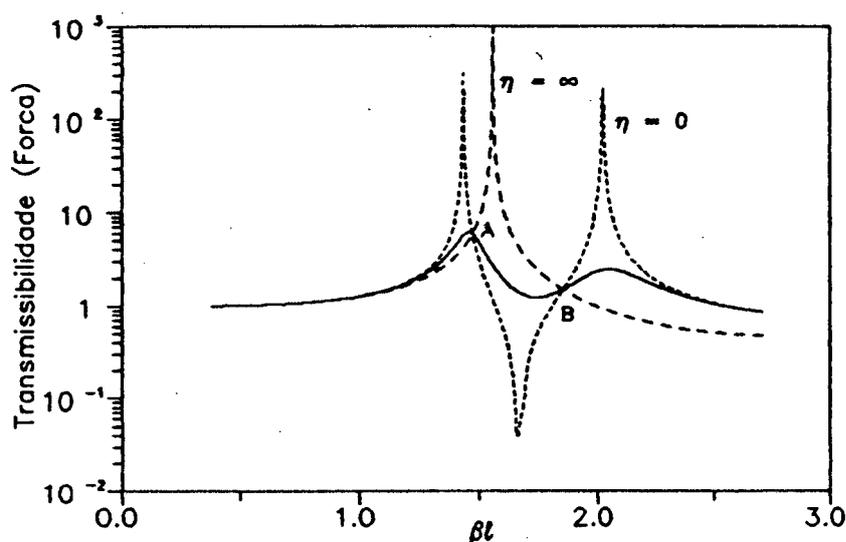


FIGURA 3.4 - Curva de Transmissibilidade - Pontos Fixos.

3.2.2. Otimização da Rigidez

Como foi visto no item anterior, existem os chamados pontos fixos nas curvas de transmissibilidade para diferentes valores de amortecimento e que são função do parâmetro α_j . Alterando-se o valor de α_j , as posições dos pontos fixos também se alteram. Existe um valor de α_j em que os pontos fixos possuem a mesma amplitude, ou seja, a transmissibilidade é igual em ambos os pontos. A este valor de α_j dá-se o nome de α_{ot} (alfa ótimo). Para a determinação de α_{ot} , foi desenvolvido um procedimento iterativo numérico [8] em que, primeiramente se determinam as frequências (Ω_A e Ω_B) em que os pontos fixos ocorrem para um valor inicial de α_j . Isto pode ser obtido através da expressão,

$$T_F(\Omega) \Big|_{\eta=0} - T_F(\Omega) \Big|_{\eta=\infty} = 0 \quad (3.17)$$

cujas raízes são Ω_A e Ω_B . A seguir é verificado se os valores da transmissibilidade são iguais. Se forem iguais, $\alpha_{ot} = \alpha_j$. Se forem diferentes, dá-se incrementos nos valores de α_j até que se determine α_{ot} .

No presente trabalho o processo iterativo teve outro parâmetro de cálculo, ou seja,

$$\alpha_{ij} = \frac{D}{D_{oi}} \quad (3.18)$$

onde:

D é a "rigidez" EI do neutralizador;

D_{oi} é a "rigidez" EI do neutralizador quando a frequência de ressonância do i-ésimo modo do neutralizador for igual à frequência de ressonância do modo de interesse da viga

i é o modo do neutralizador que irá controlar as vibrações do sistema primário.

A figura 3.5 apresenta o fluxograma da subrotina desenvolvida para determinação de α'_{ot} , que é o valor otimizado de α_{ij} . A partir deste valor pode-se determinar D e a frequência natural do neutralizador Ω_a . Com estes dados determina-se α_{ot} .

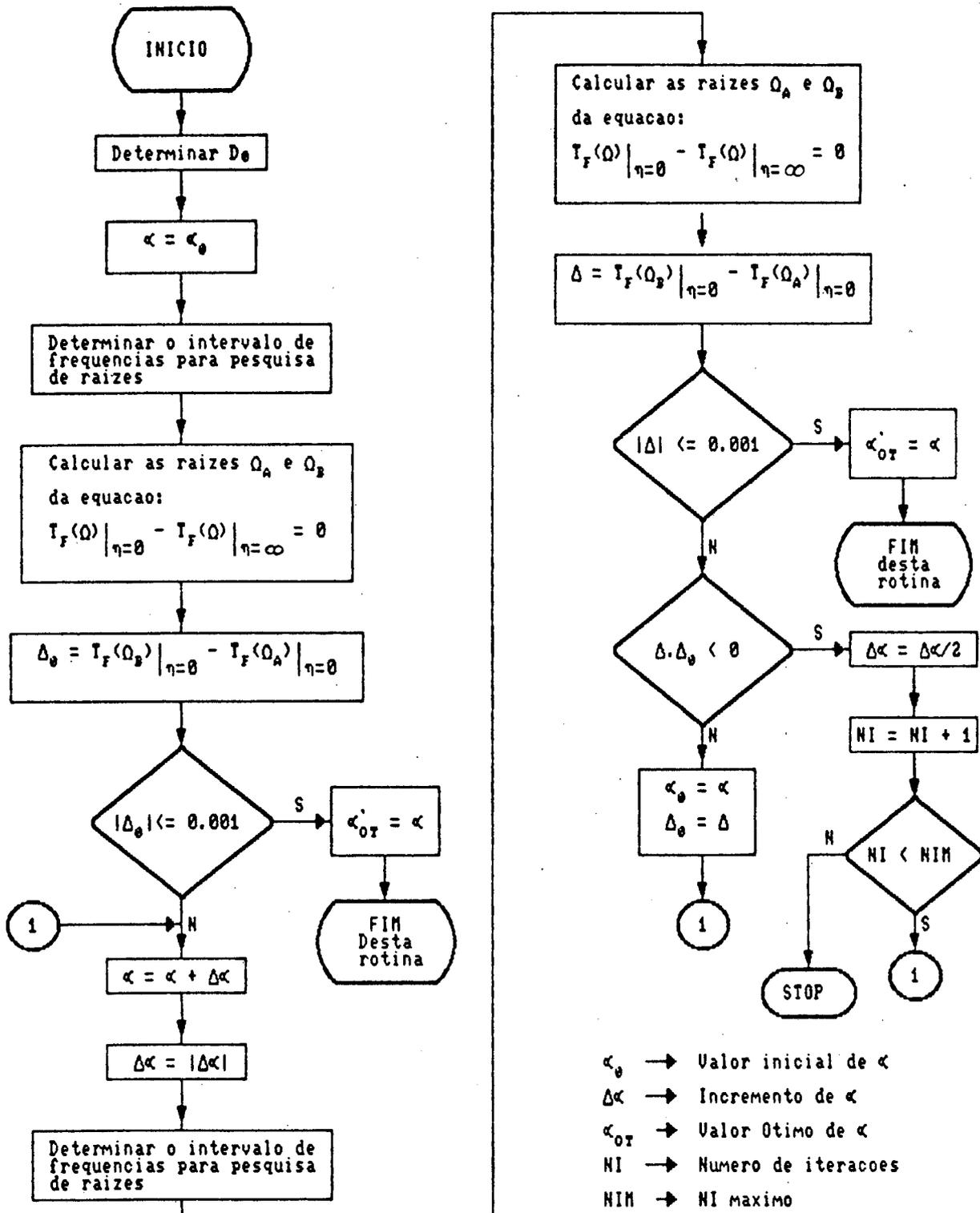


FIGURA 3.5 - Fluxograma do procedimento de otimização da rigidez do neutralizador dinâmico.

3.2.3. Otimização do Amortecimento

Uma vez determinados os pontos fixos de igual amplitude, será determinado o valor do amortecimento ótimo (η_{ot}). Este valor é tal que o máximo valor da transmissibilidade é aproximadamente igual ao valor desta nos pontos fixos, ou seja, a sua derivada nas frequências Ω_A e Ω_B é aproximadamente igual a zero.

A figura 3.6 mostra o comportamento de várias curvas de transmissibilidade com amortecimento diferente.

O fluxograma da subrotina que calcula η_{ot} é apresentado na figura 3.7.

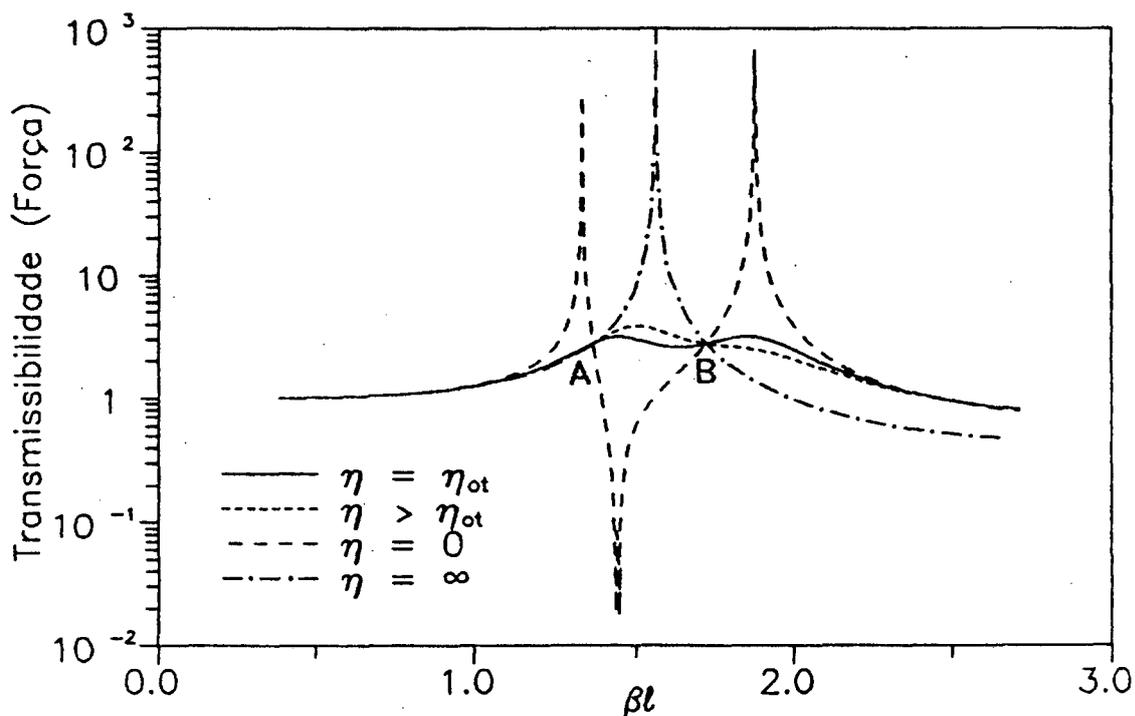


FIGURA 3.6 - Comportamento das curvas de transmissibilidade.

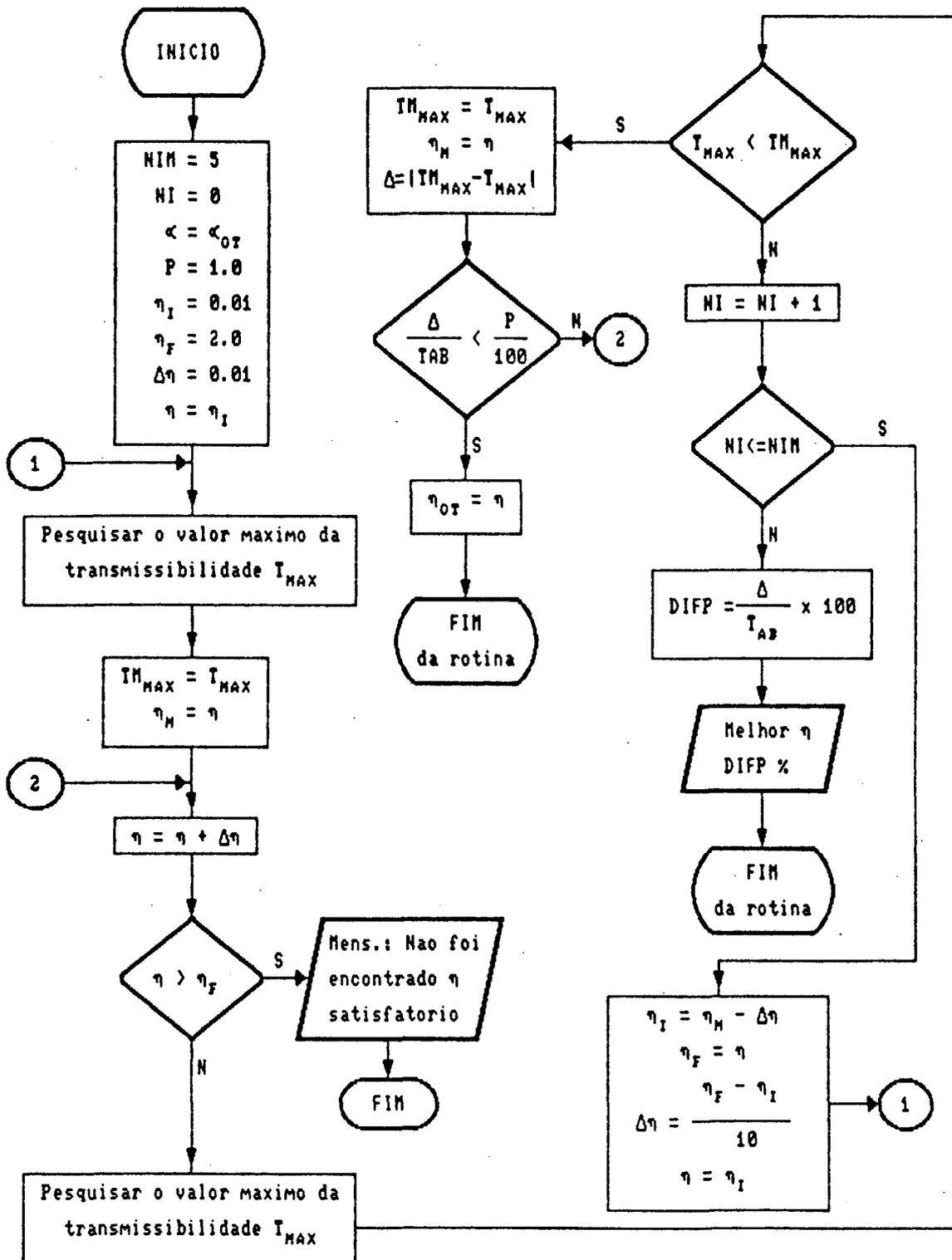


FIGURA 3.7 - Fluxograma do procedimento de otimização do amortecimento do neutralizador.

3.3. Resultados Obtidos

A viga (sistema principal) do presente exemplo é a mesma apresentada nas referências [8]-[10] e possui as seguintes características:

$$l = 3.81 \text{ m}$$

$$E = 2.0 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$$

$$I = 8.982 \times 10^{-5} \text{ m}^4$$

$$m = 46.43 \text{ kg/m}$$

Para efeito de comparação entre os resultados obtidos com o uso de neutralizadores dinâmicos tipo viga e os da referência [8] (neutralizadores dinâmicos MCK), ambos os casos serão plotados nos gráficos a serem apresentados neste capítulo. Além disso é plotada a curva da transmissibilidade sem neutralizador. Serão considerados todos os casos ilustrados nas figuras 3.8 e 3.9. Na figura 3.8 a força encontra-se aplicada na extremidade da viga, enquanto que na figura 3.9 a força encontra-se no ponto central da viga. Para o controle do primeiro modo de vibração do sistema principal, o neutralizador é aplicado na extremidade da viga, e para o controle do segundo modo, no centro. Já para o controle do terceiro modo, o neutralizador é aplicado a uma distância de 1.27 m a partir da extremidade engastada.

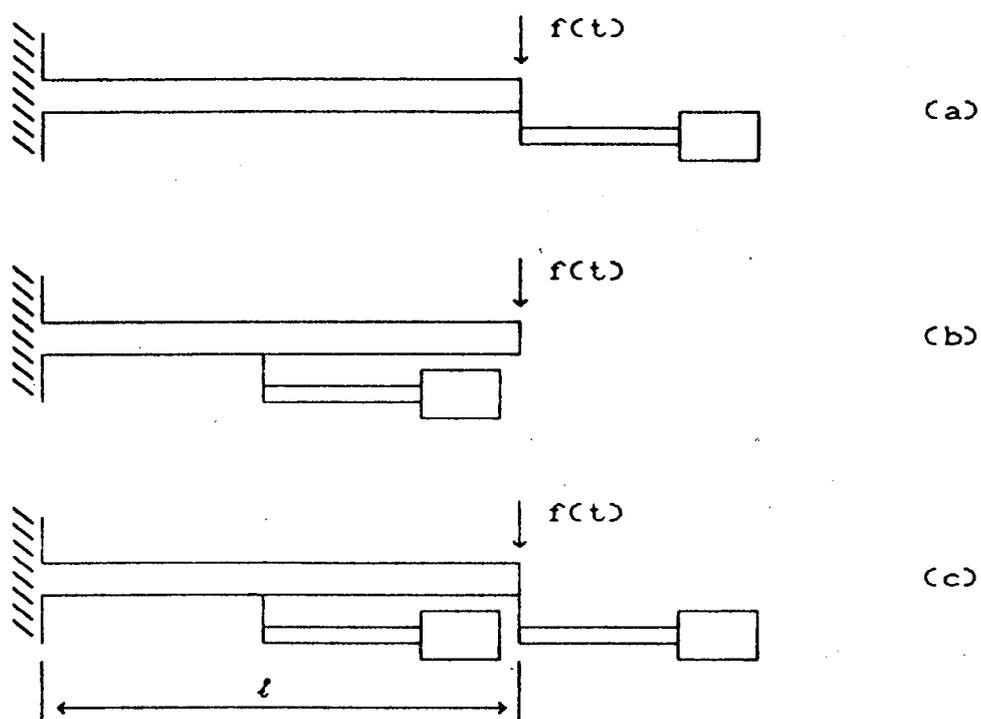


FIGURA 3.8 - Viga em balanço com neutralizadores dinâmicos tipo viga, força aplicada na extremidade livre da viga.

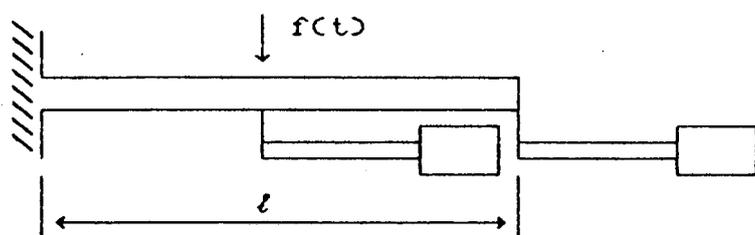


FIGURA 3.9 - Viga em balanço com neutralizadores dinâmicos tipo viga, força aplicada no centro da viga.

Como parâmetro inicial para o processo de otimização, utiliza-se a massa do neutralizador ou, em termos adimensionais, a razão entre a massa total do neutralizador e a massa da viga (γ). Uma vez definida a massa total do neutralizador, todos os parâmetros são definidos, com exceção de \bar{EI} , que é utilizado como parâmetro de otimização.

As dimensões dos neutralizadores são as seguintes (ver figura 2.5):

a) Controle do 1º modo:

$$\gamma = 0.25$$

$$\mu = 34.22 \text{ kg/m}$$

$$M_c = 10 \text{ kg}$$

$$L = 1 \text{ m}$$

$$I_0 = 0.15 \text{ kg.m}^2$$

$$e = 0.06 \text{ m}$$

b) Controle do 2º modo:

$$\gamma = 0.10$$

$$\mu = 13.70 \text{ kg/m}$$

$$M_c = 4 \text{ kg}$$

$$L = 1 \text{ m}$$

$$I_0 = 0.06 \text{ kg.m}^2$$

$$e = 0.06 \text{ m}$$

Apesar do neutralizador dinâmico tipo viga possuir infinitos modos de vibração, será utilizado apenas o primeiro modo para o controle das vibrações do sistema principal. Esta escolha é

devido à maior eficiência se comparada aos modos subsequentes (2º, 3º, etc.). Na tabela 3.1 são apresentados os resultados obtidos neste trabalho, lembrando que α'_{ot} e α_{ot} são os valores otimizados de D/D_0 (equação 3.18) e Ω_0/Ω_j (equação 3.15), respectivamente.

FIGURAS	Modo	γ	α'_{ot}	α_{ot}	η_{ot}	EI [N.m ²]
3.8a 3.10 3.11	1	0.25	0.385	0.625	0.95	5.46E4
3.8a 3.12 3.13	2	0.25	0.018	0.890	0.45	9.90E4
3.8b 3.14 3.15	1	0.10	1.014	0.998	0.27	5.58E4
3.8b 3.16 3.17	2	0.10	0.820	0.905	0.41	1.80E6
3.8c 3.18 3.19	1	0.25	0.373	0.616	0.97	5.30E4
	2	0.10	0.705	0.840	0.42	1.55E6
3.9 3.20 3.21	1	0.10	0.642	0.794	0.66	3.53E4
	2	0.10	0.723	0.850	0.52	1.59E6
3.22 3.23	3	0.10	0.905	0.948	0.35	1.55E7
3.24 3.25	3	0.25	0.714	0.835	0.35	3.00E7

TABELA 3.1 - Resultados da otimização dos neutralizadores dinâmicos aplicados a uma viga em balanço.

As figuras 3.10 a 3.25 apresentam os gráficos da transmissibilidade para todos os casos acima:

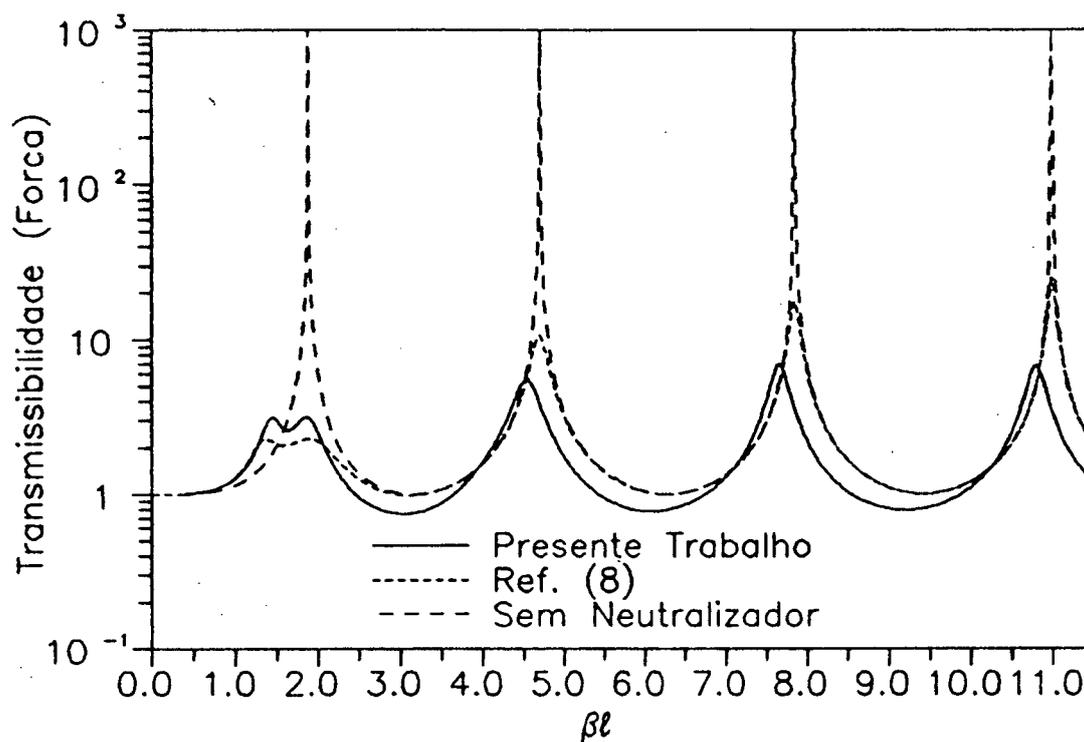


FIGURA 3.10 - Neutralizador dinâmico na extremidade da viga, força na extremidade, controle do modo 1.

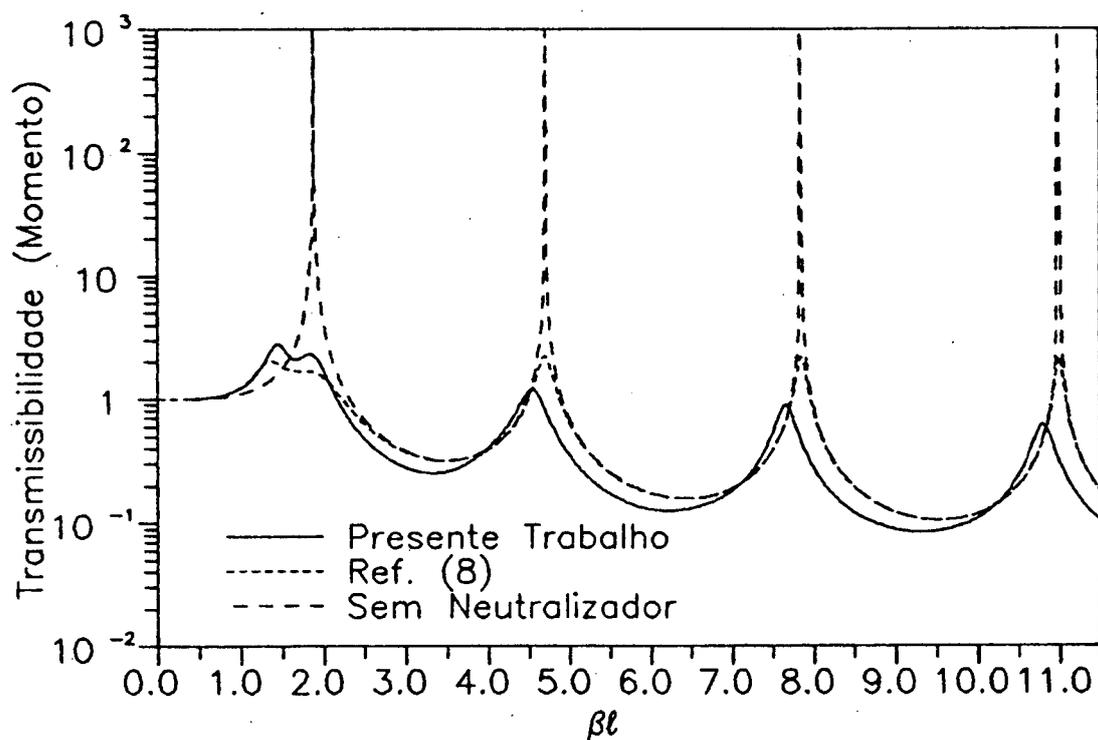


FIGURA 3.11 - Neutralizador dinâmico na extremidade da viga, força na extremidade, controle do modo 1.

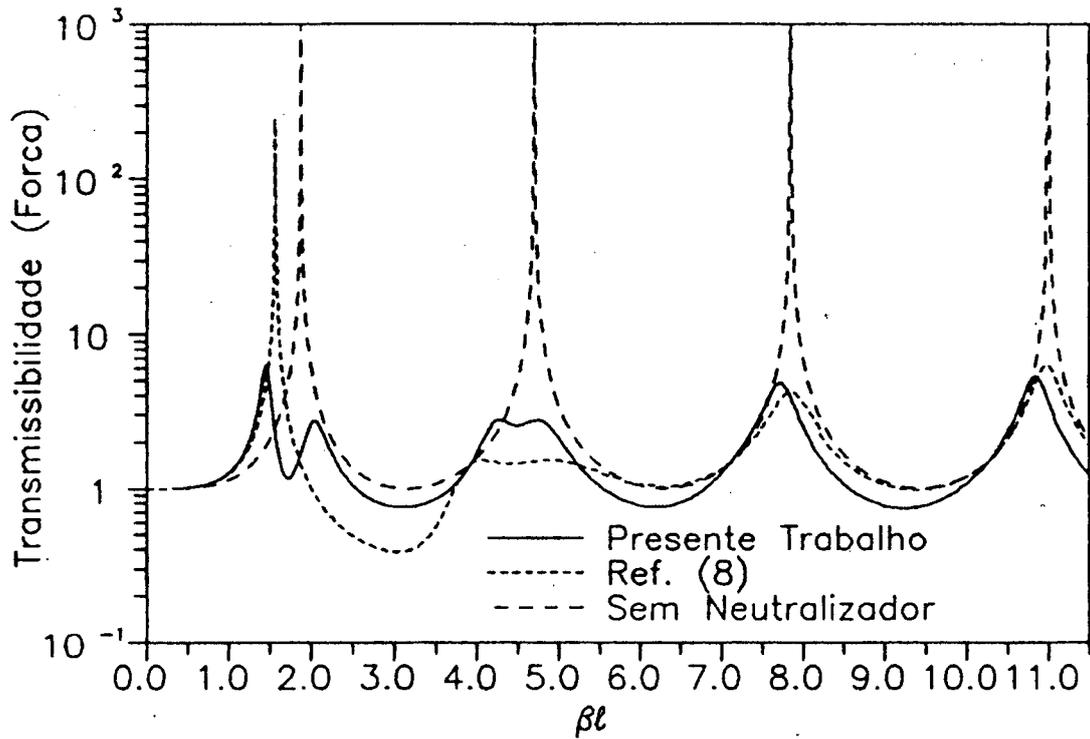


FIGURA 3.12 - Neutralizador dinâmico na extremidade da viga, força na extremidade, controle do modo 2.

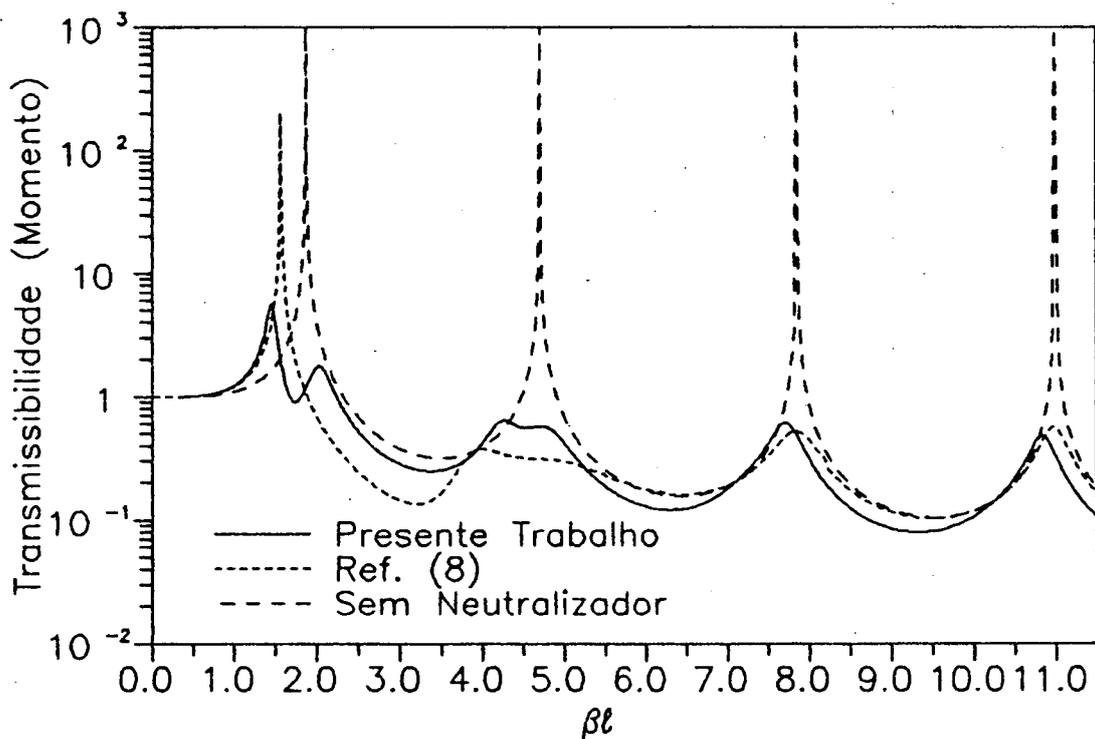


FIGURA 3.13 - Neutralizador dinâmico na extremidade da viga, força na extremidade, controle do modo 2.

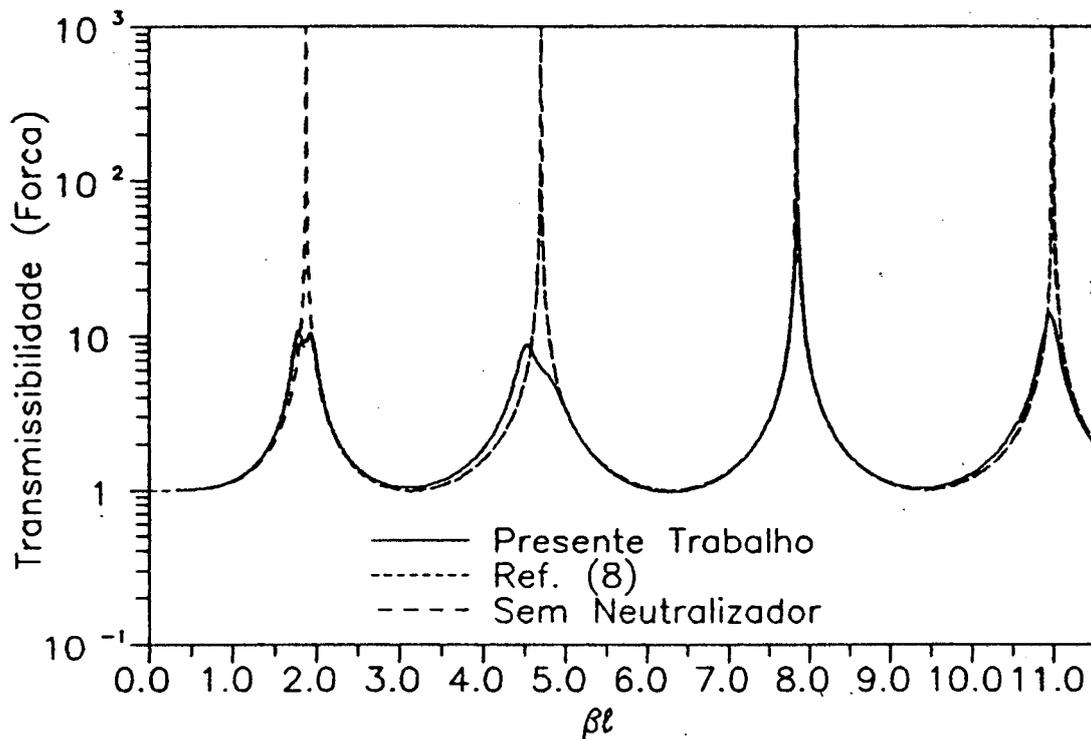


FIGURA 3.14 - Neutralizador dinâmico no meio da viga, força na extremidade, controle do modo 1.

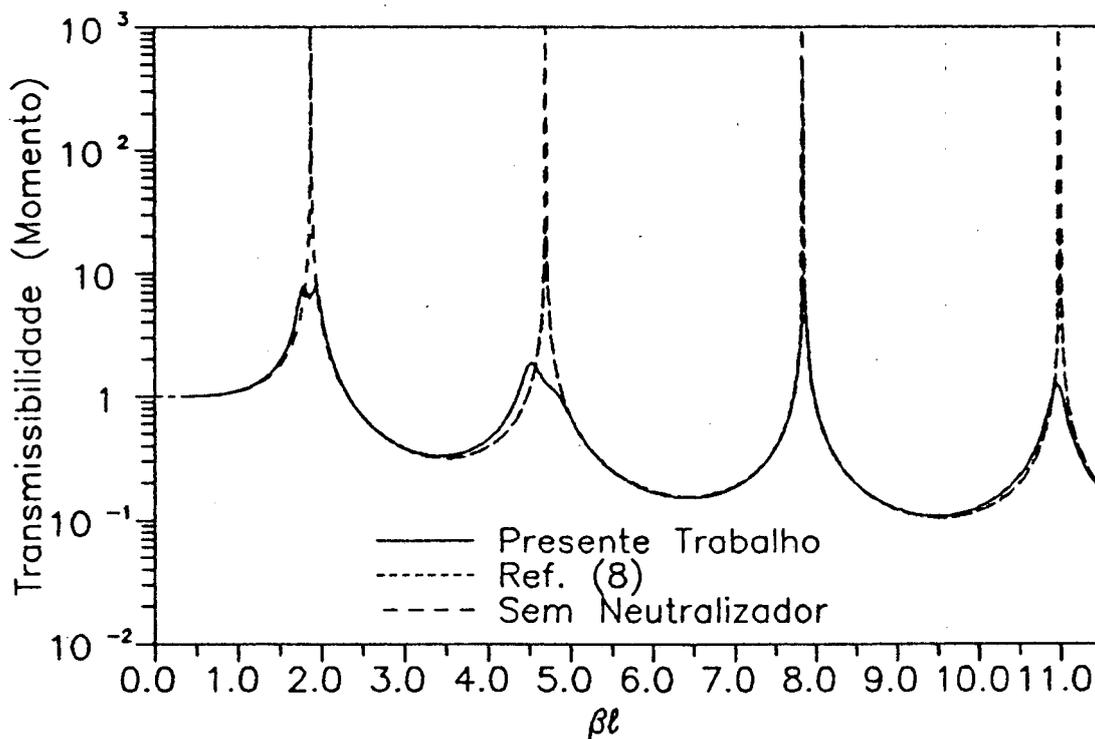


FIGURA 3.15 - Neutralizador dinâmico no meio da viga, força na extremidade, controle do modo 1.

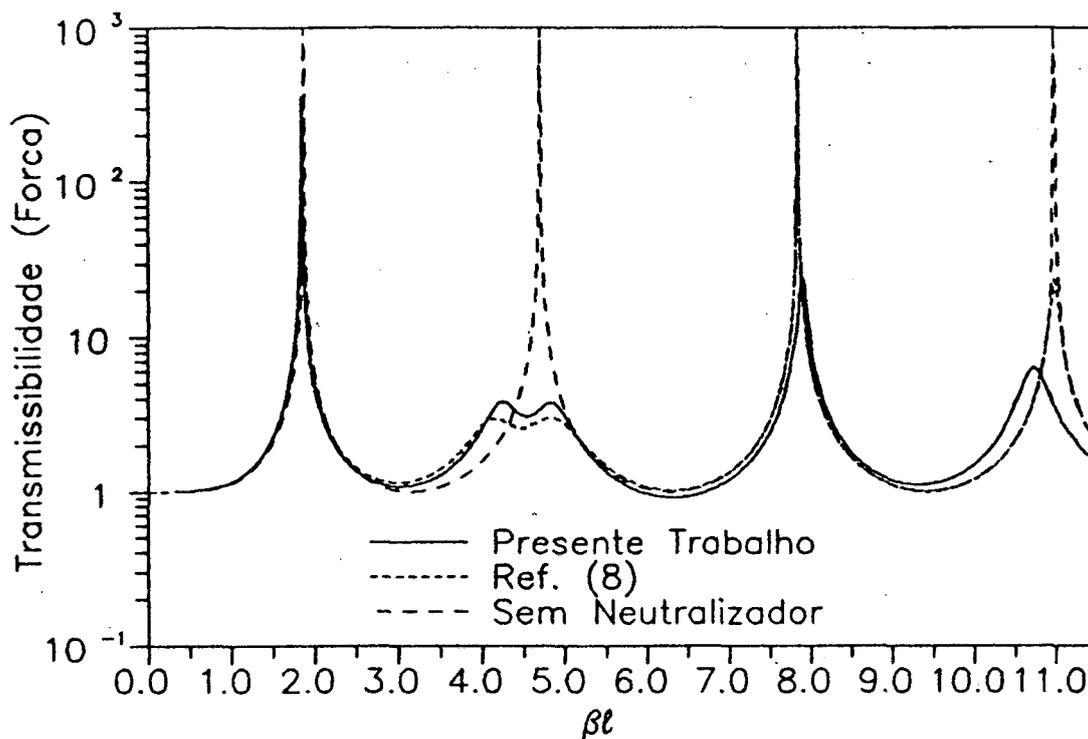


FIGURA 3.16 - Neutralizador dinâmico no meio da viga, força na extremidade, controle do modo 2.

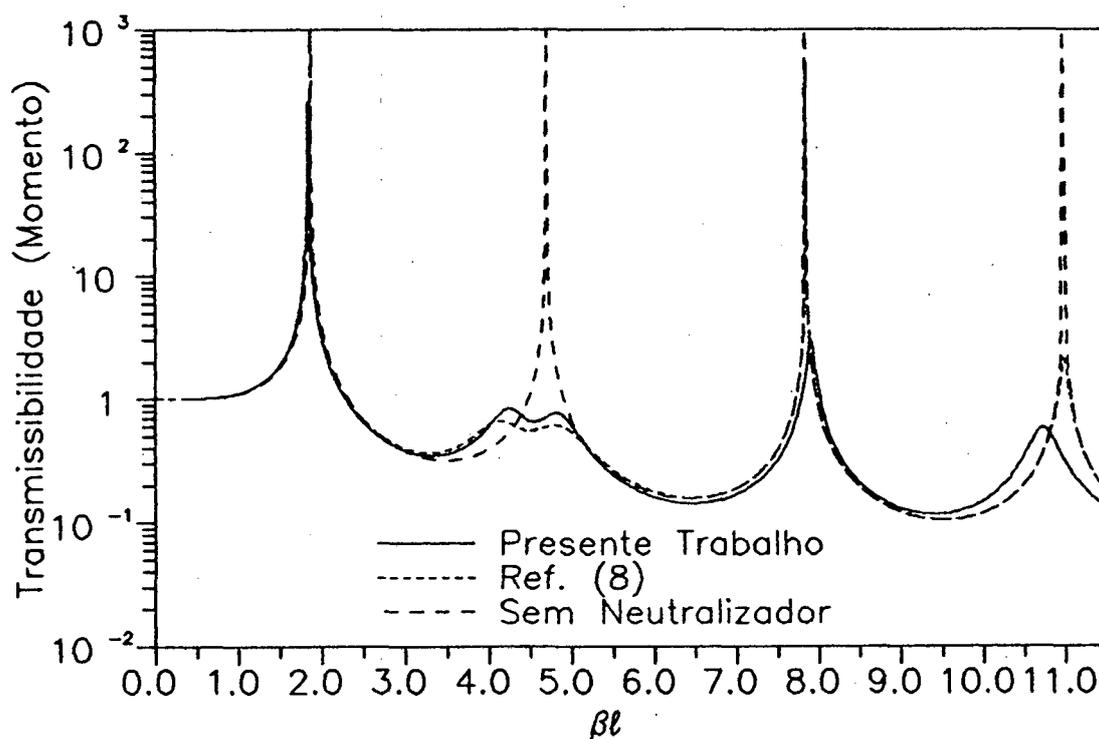


FIGURA 3.17 - Neutralizador dinâmico no meio da viga, força na extremidade, controle do modo 2.

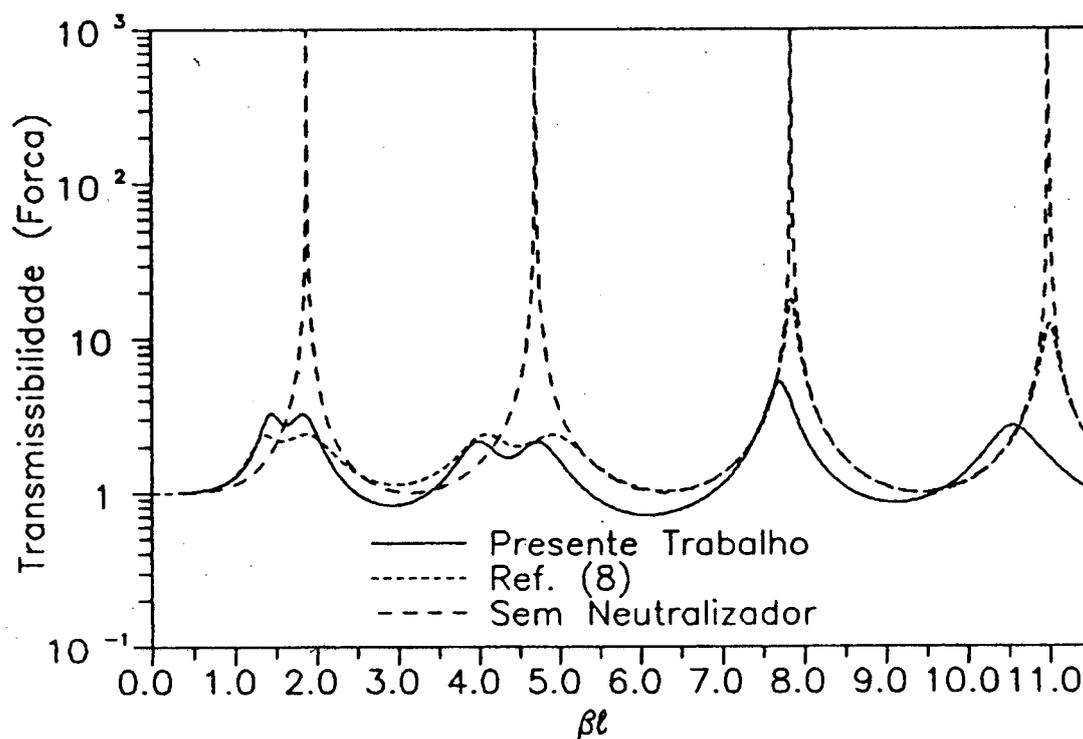


FIGURA 3.18 - Neutralizador dinâmico na extremidade e no meio da viga, força na ext., controle dos modos 1 e 2.

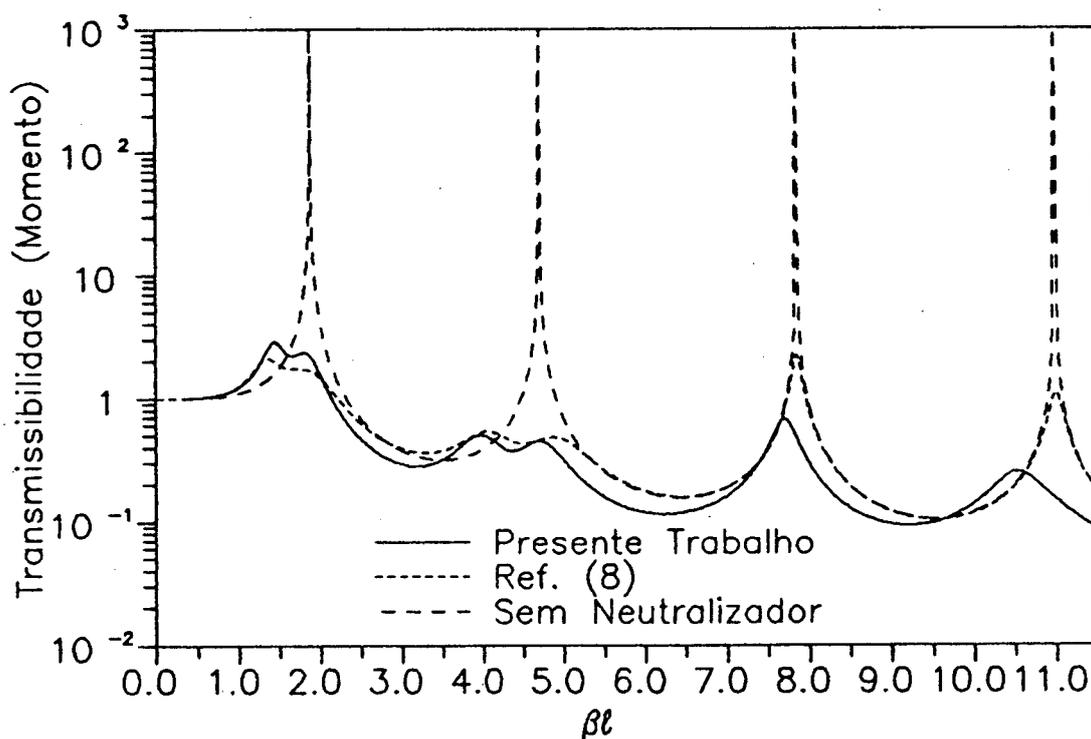


FIGURA 3.19 - Neutralizador dinâmico na extremidade e no meio da viga, força na ext., controle dos modos 1 e 2.

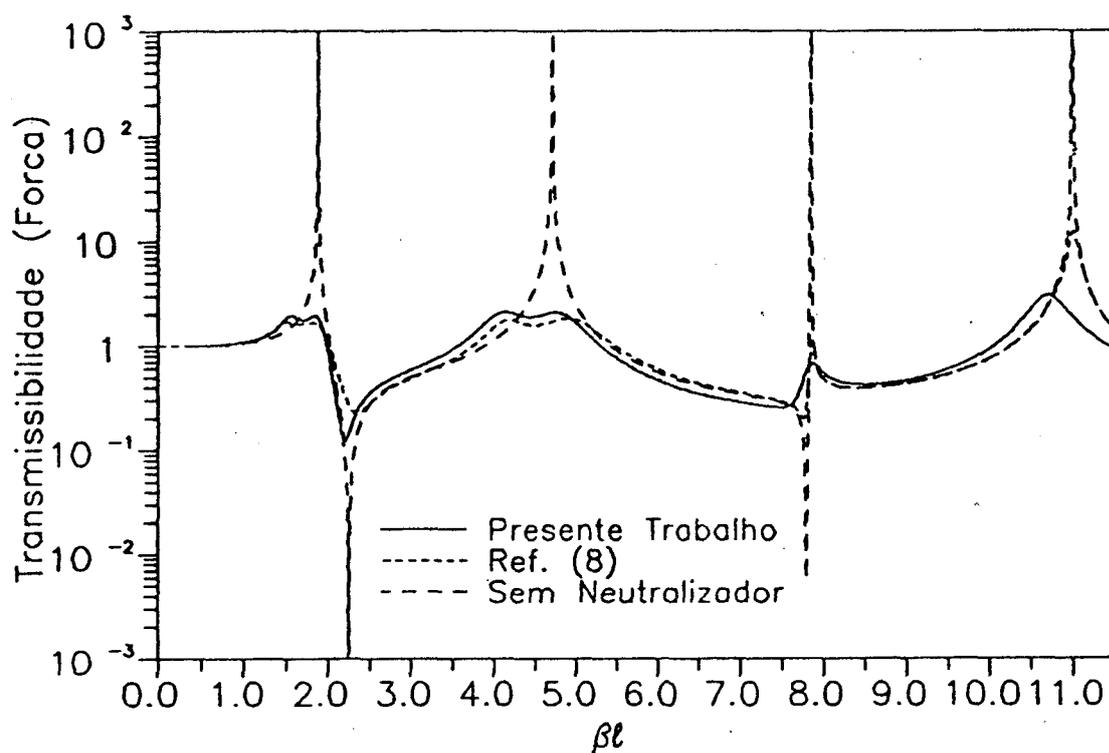


FIGURA 3.20 - Neutralizador dinâmico na extremidade e no meio da viga, força no meio, controle dos modos 1 e 2.

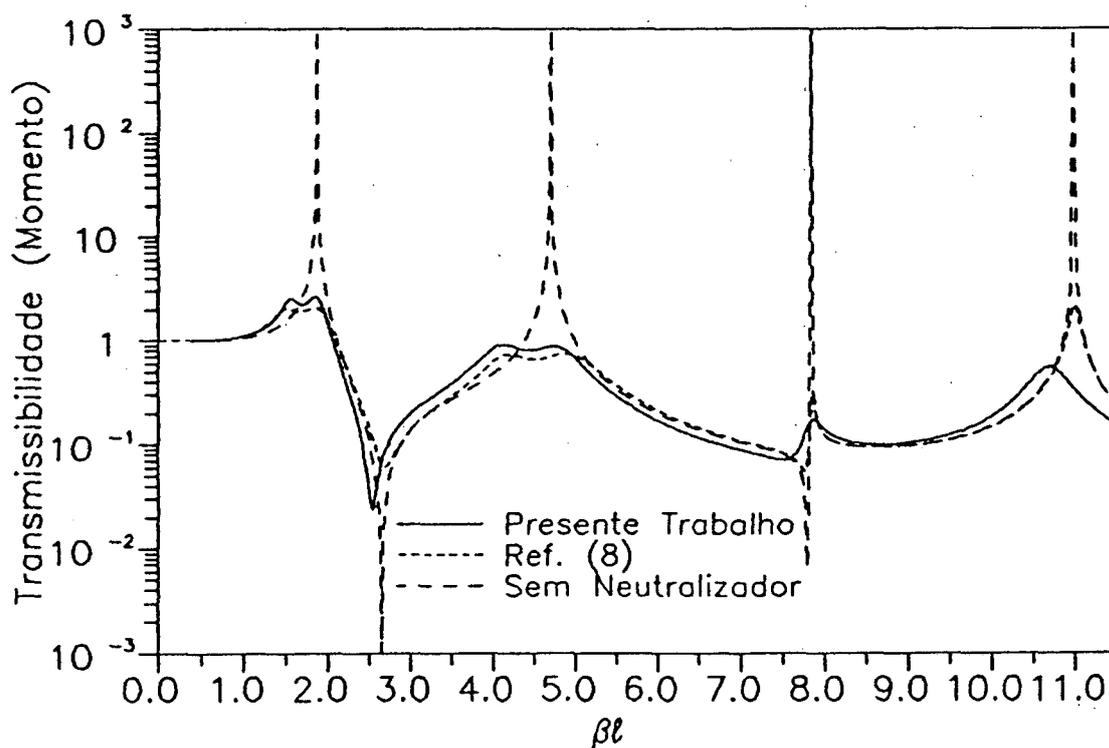


FIGURA 3.21 - Neutralizador dinâmico na extremidade e no meio da viga, força no meio, controle dos modos 1 e 2.

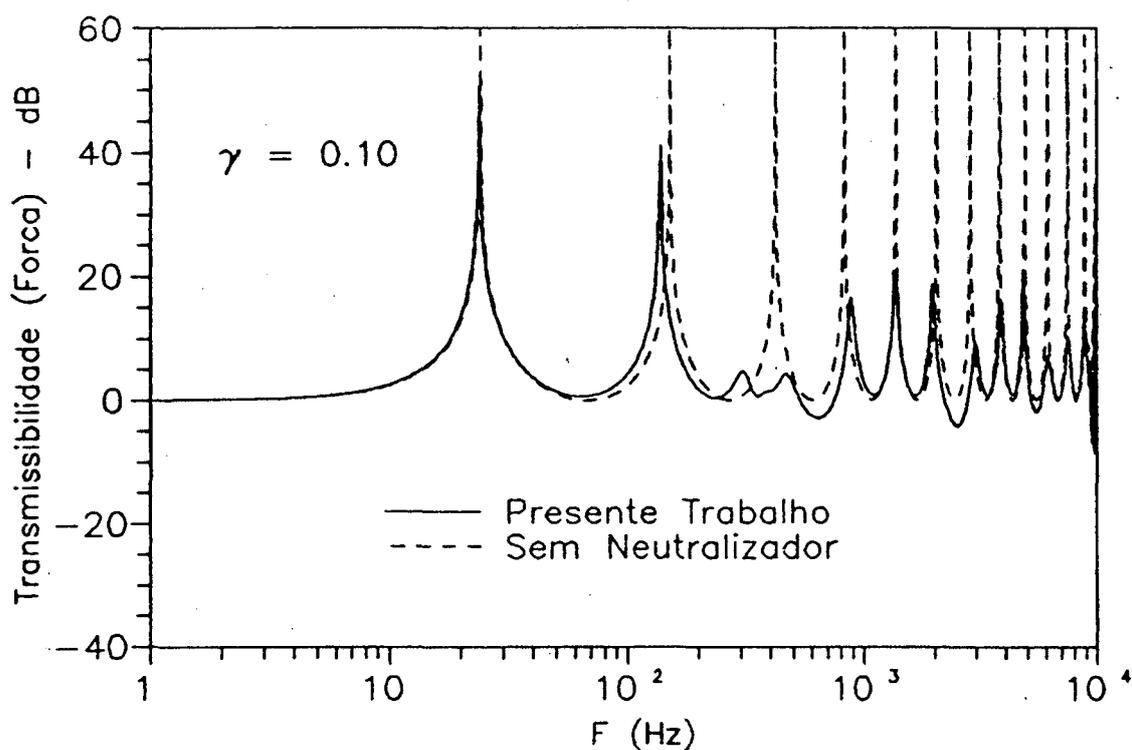


FIGURA 3.22 - Neutralizador dinâmico a 1.27 m da extremidade engastada da viga, força na extr., contr. do modo 3.

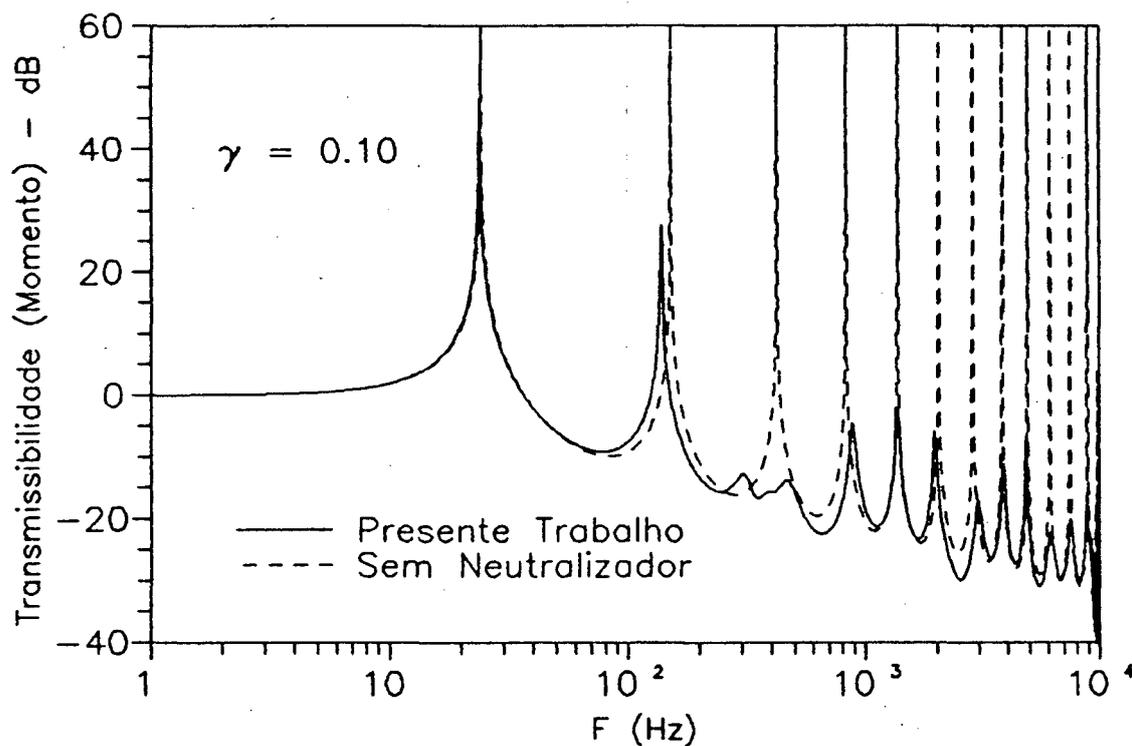


FIGURA 3.23 - Neutralizador dinâmico a 1.27 m da extremidade engastada da viga, força na extr., contr. do modo 3.

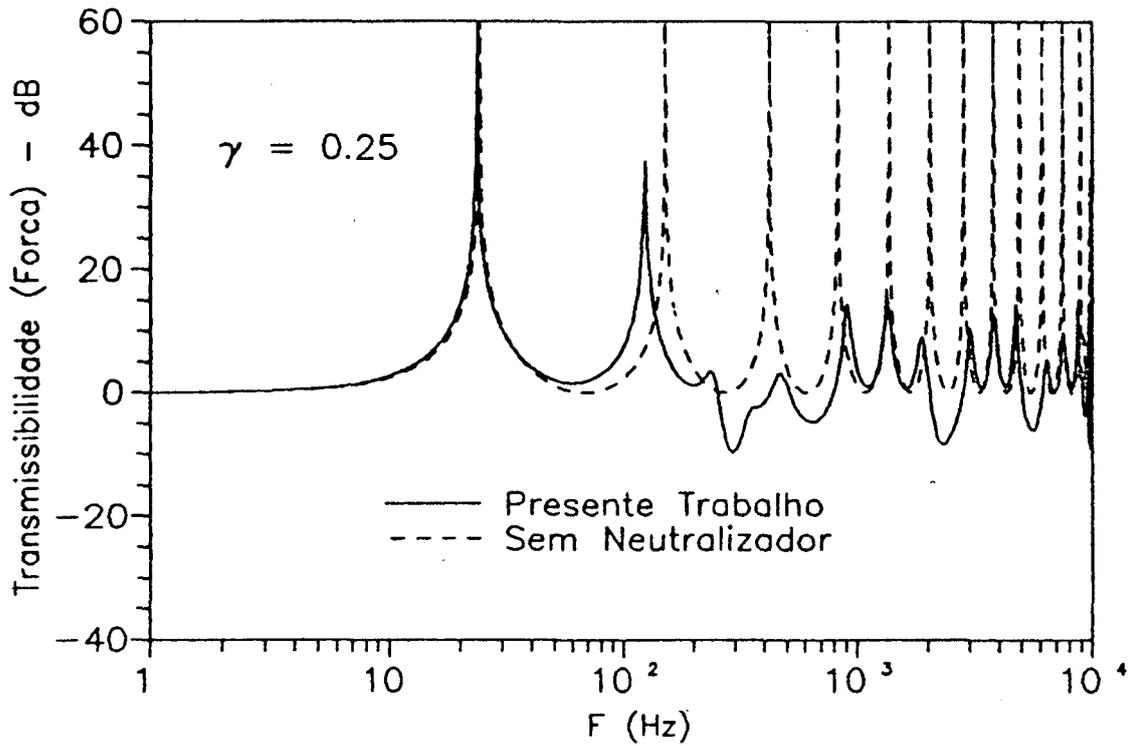


FIGURA 3.24 - Neutralizador dinâmico a 1.27 m da extremidade engastada da viga, força na extr., contr. do modo 3.

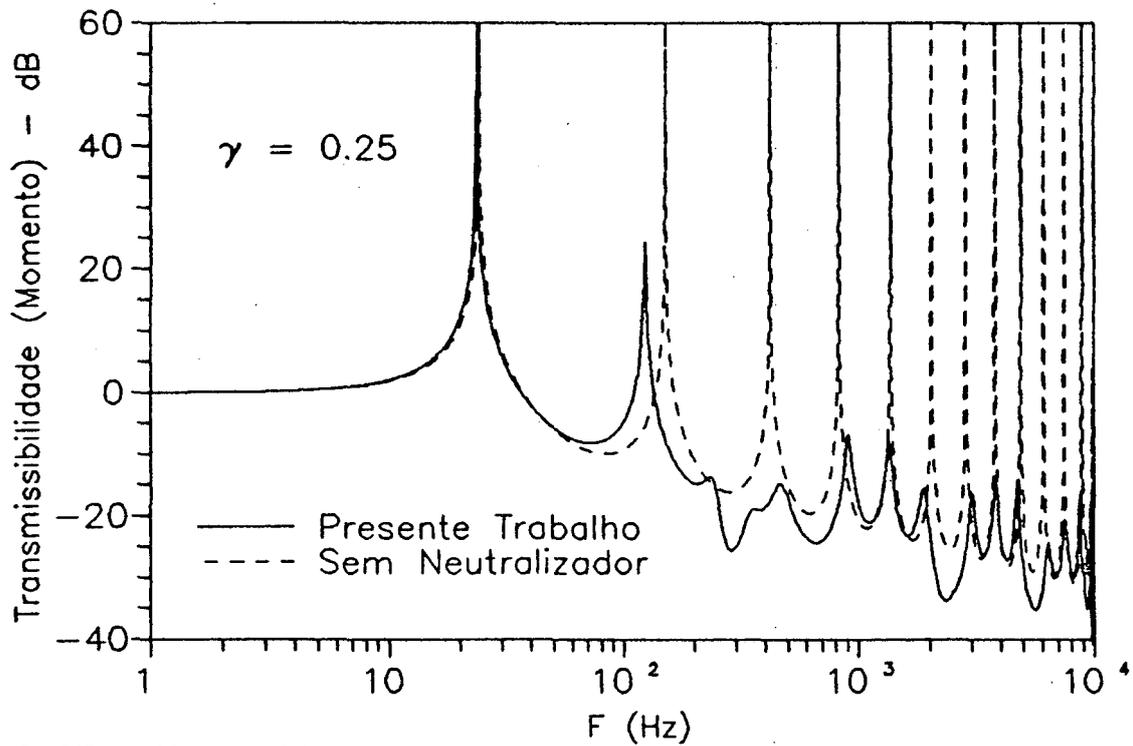


FIGURA 3.25 - Neutralizador dinâmico a 1.27 m da extremidade engastada da viga, força na extr., contr. do modo 3.

Como pode ser visto nas figuras 3.10 e 3.11, a transmissibilidade no 1º modo, obtida devido a utilização do neutralizador tipo viga, é ligeiramente maior que a obtida em [8], que utiliza o neutralizador MCK. Já para os modos posteriores, a eficiência do neutralizador tipo viga é maior, uma vez que um menor valor de transmissibilidade foi obtido em relação ao da referência [8].

As figuras 3.12 e 3.13 apresentam os resultados obtidos da utilização de um neutralizador dinâmico tipo viga, acoplado na extremidade da viga em balanço, com o objetivo de controlar o segundo modo. Neste modo, a transmissibilidade foi maior que a obtida em [8]. Para os modos posteriores foi obtida uma curva semelhante, com uma tendência da transmissibilidade diminuir em relação a da referência [8]. Observa-se, também, que o primeiro modo foi controlado, apesar de não se ter uma curva otimizada.

As figuras 3.14 e 3.15 apresentam as curvas que representam a transmissibilidade para o caso em que o neutralizador é acoplado no centro da viga, com objetivo de controlar o primeiro modo. Como esta não é a posição ideal de posicionamento do neutralizador (a posição ideal seria no ponto de maior deslocamento, ou seja, na extremidade), a transmissibilidade foi grande se comparada com a das figuras 3.10 e 3.11, onde o neutralizador é acoplado na extremidade.

Nas figuras 3.16 e 3.17 observa-se um comportamento semelhante ao obtido nas figuras 3.10 e 3.11, onde a transmissibilidade para o modo em questão é ligeiramente maior e para os modos posteriores é menor, se comparados com [8]. Para o controle simultâneo dos modos 1 e 2 (figuras 3.18 a 3.21), este

mesmo comportamento é verificado.

Nas figuras 3.22 a 3.25 são apresentadas as curvas da transmissibilidade em dB para o controle do terceiro modo. Nos gráficos das figuras 3.22 e 3.23 a relação de massa (γ) é igual a 0.10 e nos gráficos das figuras 3.24 e 3.25, γ é igual a 0.25. Isto quer dizer que nos dois últimos gráficos a massa do neutralizador é maior, ou seja, 25% da massa total da viga. Verificando-se os gráficos, observa-se que os modos posteriores ao terceiro também são controlados. Além disso verifica-se que a eficiência do neutralizador de maior massa ($\gamma = 0.25$) é maior em relação ao de menor massa ($\gamma = 0.10$).

Em resumo, dos gráficos das figuras (3.10) a (3.25), verifica-se que a transmissibilidade obtida neste trabalho, considerando os modos de interesse, é praticamente igual à obtida no exemplo da referência [8]. Já a transmissibilidade para os modos superiores ao modo que se está controlando é menor. Este fato pode ser útil para o controle do ruído irradiado de uma estrutura, pois controlando-se um modo de baixa frequência, pode-se atenuar as vibrações dos modos seguintes que geram ruído. Deve-se salientar que o exemplo da referência [8] é o mesmo deste trabalho, mudando apenas o neutralizador dinâmico, que é do tipo MCK, ou seja, de um grau de liberdade. A massa total dos neutralizadores, em ambos os casos, é a mesma.

Verificando o exemplo apresentado neste trabalho, observa-se que o material do neutralizador deve ter o seguinte comportamento:

a) Alto amortecimento, pois os valores de η obtidos estão na faixa entre 0.27 a 0.07;

b) Densidade elevada, pois quanto maior for a densidade do material, menor serão as dimensões de neutralizador;

c) Elevada rigidez, pois o valor de EI para alguns casos ficou na mesma ordem de grandeza do sistema primário, ou seja, em torno de 10^7 N.m².

Caso não seja possível se obter um material para o neutralizador tipo viga que atenda a todas as características, existem duas alternativas para este problema:

a) Construir vários neutralizadores menores, acoplando-os no mesmo ponto e/ou distribuindo-os de maneira conveniente sobre o sistema primário;

b) Projetar uma viga sanduíche equivalente que tenha as mesmas características da viga simples.

O primeiro caso, onde vários neutralizadores de menor massa foram acoplados ao sistema primário em vez de um só de maior massa, já foi apresentado por Silva, [6], com sucesso.

No caso do projeto da viga sanduíche equivalente, o que se deseja é obter as características de dois materiais diferentes na mesma viga. Por exemplo, combinando aço com elastômero. O aço possui rigidez e densidade elevadas e o elastômero alto amortecimento.

No próximo capítulo será abordado o problema da viga sanduíche: determinação das frequências naturais, do amortecimento e aspectos do dimensionamento de uma viga sanduíche equivalente.

CAPÍTULO 4

NEUTRALIZADOR DINÂMICO TIPO VIGA SANDUÍCHE

4.1. Introdução.

No capítulo anterior foram definidos os parâmetros iniciais para o projeto ótimo de neutralizadores dinâmicos tipo viga, acoplados a uma viga em balanço. Neste capítulo será feito, primeiramente, o projeto de um neutralizador dinâmico tipo viga simples que satisfaça estes parâmetros. A seguir, será apresentada a metodologia do projeto para um neutralizador dinâmico tipo viga sanduíche (figura 4.1), com características equivalentes as do neutralizador tipo viga simples. Para tanto, será utilizado o método apresentado por Rao [14], que consiste na determinação de uma viga sanduíche com as mesmas frequências naturais e o mesmo amortecimento de uma viga simples. Além disso, será feita uma comparação entre os valores obtidos por este método com valores obtidos experimentalmente.

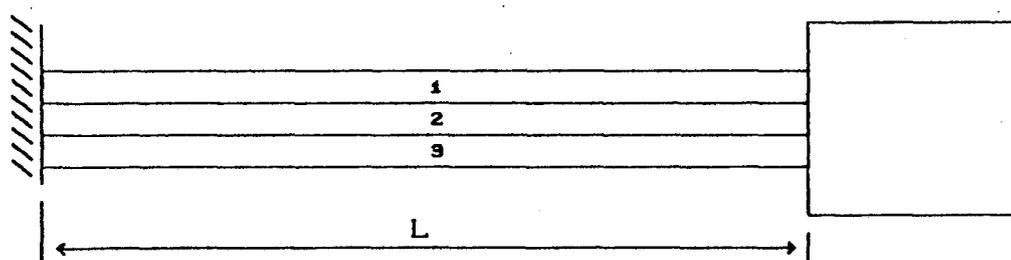


FIGURA 4.1 - Neutralizador dinâmico tipo viga sanduíche.

4.2. Projeto do Neutralizador Tipo Viga Simples.

Tomar-se-á como exemplo o neutralizador dinâmico com $\gamma = 0.25$ utilizado para o controle do 1º modo do sistema principal (ver tabela 3.1). Sabe-se que as características da viga deste neutralizador são as seguintes:

$$\mu = 34.22 \text{ kg/m}$$

$$L = 1 \text{ m}$$

$$EI = 5.46 \times 10^4 \text{ N.m}^2$$

$$\eta = 0.95$$

A partir destes dados será projetada a viga do neutralizador. Assumindo que a mesma seja de um material elastomérico com módulo de elasticidade $E = 1.0 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ e que a seção transversal da viga seja retangular, tem-se que,

$$I = \frac{b h^3}{12} = 5.46 \times 10^{-5} \text{ m}^4, \quad (4.1)$$

onde b é a base e h é a altura da seção transversal da viga.

Para que a condição de massa por unidade de comprimento seja satisfeita, deve-se obedecer a expressão,

$$\mu L = \rho L b h, \quad (4.2)$$

onde:

ρ é a densidade do material da viga [kg/m^3].

Assumindo que este valor seja $1500 \text{ kg}/\text{m}^3$, que é um valor típico para densidade dos elastômeros, [16], de (4.1) e (4.2) chega-se ao seguinte sistema de equações,

$$b h^3 = 12 (5.46 \times 10^{-5}) \text{ m}^4$$

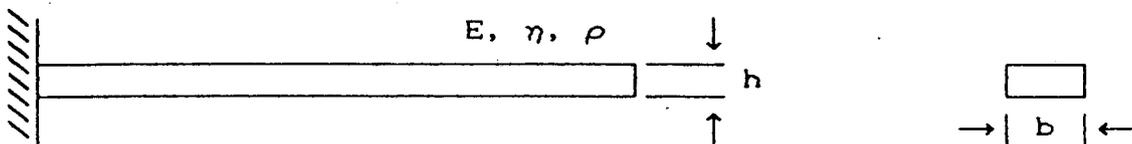
$$b h = \frac{34.22}{1500} \text{ m}^2$$

que fornece os seguintes valores para b e h :

$$b = 0.135 \text{ m}$$

$$h = 0.170 \text{ m}$$

Resumindo, uma possível viga do neutralizador tipo viga simples pode ser observada na figura 4.2.



$$b = 0.135 \text{ m}$$

$$h = 0.170 \text{ m}$$

$$L = 1.0 \text{ m}$$

$$E = 1.0\text{E}9 \text{ N}/\text{m}^2$$

$$\rho = 1500 \text{ kg}/\text{m}^3$$

$$\eta = 0.95$$

$$I = 5.46\text{E}-5 \text{ m}^4$$

$$\mu = 34.22 \text{ kg}/\text{m}$$

FIGURA 4.2 - Neutralizador dinâmico tipo viga simples.

Segundo a referência [15], as frequências naturais não amortecidas desta viga, para os 3 primeiros modos de vibração, considerando que a viga seja de Bernouilli-Euler, podem ser obtidas pela expressão,

$$\Omega_i = a_i \sqrt{\frac{EI}{\mu L^4}}$$

onde:

$$a_1 = 1.875$$

$$a_2 = 4.694$$

$$a_3 = 7.855$$

Portanto,

$$\Omega_1 = 140.4 \text{ rad} \longrightarrow f_1 = 22.4 \text{ Hz}$$

$$\Omega_2 = 880.1 \text{ rad} \longrightarrow f_2 = 140.1 \text{ Hz}$$

$$\Omega_3 = 2464.6 \text{ rad} \longrightarrow f_3 = 392.3 \text{ Hz}$$

Caso não seja possível de se conseguir um material com as características apresentadas na figura 4.2, uma das soluções é o uso da viga sanduíche, que une as características de dois materiais diferentes, como por exemplo, aço e elastômero.

4.3. Projeto do Neutralizador Tipo Viga Sanduíche.

No item anterior foi projetado o neutralizador dinâmico tipo viga simples. Neste item será feito o projeto do neutralizador dinâmico tipo viga sanduíche equivalente, utilizando-se do método apresentado por Rao [14]. Neste método é obtida uma viga sanduíche com o mesmo amortecimento e as mesmas frequências naturais de uma viga simples. Primeiramente será feita a descrição do método e valores obtidos pelo mesmo serão comparados com valores medidos experimentalmente, para se obter seu grau de confiabilidade. A seguir será feito o projeto do neutralizador dinâmico tipo viga sanduíche propriamente dito.

4.3.1. Determinação das Frequências Naturais e do Fator de Perda de Vigas Sanduíche.

As expressões a serem apresentadas a seguir foram derivadas pelo Princípio de Hamilton, [14], e obedecem às seguintes considerações:

- a) Deflexões pequenas e uniformes em cada seção da viga;
- b) deslocamentos axiais contínuos;
- c) as vigas externas obedecem as hipóteses de Euler;
- d) as deformações da viga central são devidas principalmente ao cisalhamento e
- e) são desprezados os efeitos de inércia rotacional e longitudinal.

As variáveis que representam as dimensões características da viga podem ser observadas na figura 4.3.

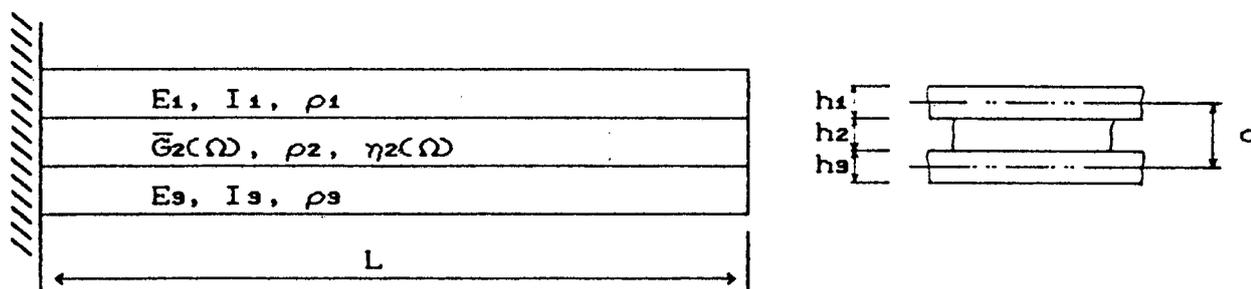


FIGURA 4.3 - Viga sanduíche.

Na figura anterior, as grandezas representadas têm o seguinte significado:

E_1, E_3 - Módulo de elasticidade;

I_1, I_3 - segundo momento de área da seção transversal;

ρ_1, ρ_2, ρ_3 - densidade;

$\bar{G}_2(\Omega)$ - módulo de cisalhamento complexo;

$\eta_2(\Omega)$ - fator de perda.

A área da seção transversal para cada camada da viga é dada por:

$$A_i = h_i b, \quad i = 1, 3 \quad (4.3)$$

onde:

b é a largura da viga.

A rigidez distribuída da viga pode ser obtida pela expressão:

$$D = E_1 I_1 + E_3 I_3 \quad (4.4)$$

Os demais parâmetros utilizados para a determinação das frequências naturais e do fator de perda da viga sanduíche são:

a) Parâmetro de cisalhamento

$$\bar{g}(\Omega) = \frac{\bar{G}_2(\Omega) A_2 L^2 (E_1 A_1 + E_3 A_3)}{4 h_2^2 E_1 A_1 E_3 A_3} = g(\Omega) [1 + i \eta(\Omega)] \quad (4.5)$$

b) Parâmetro geométrico

$$Y = \frac{c^2 E_1 A_1 E_3 A_3}{D (E_1 A_1 + E_3 A_3)} \quad (4.6)$$

c) Parâmetro de tempo

$$t_0 = \sqrt{\frac{\mu L^4}{D}} \quad (4.7)$$

onde:

$$\mu = \rho_1 A_1 + \rho_2 A_2 + \rho_3 A_3$$

Para uma viga engastada-livre, as expressões para determinação do fator de perda (η) e do fator de frequência (Ω^*),

de acordo com a referência [14], podem ser obtidas das expressões a seguir,

Modo 1

$$\begin{aligned} \eta = & 0.142675 \times 1.76507^x \times 0.381063^{x^2} \times 0.958039^{x^3} \times 1.06549^{x^4} \times 5.78986^y \\ & \times 0.539055^y \times 1.08780^{xy} \times 1.08745^{x^2y} \times 0.976757^{x^3y} \times 0.586965^{y^2} \\ & \times 1.02241^{y^3} \times 1.15050^{x^2y^2} \times 0.970210^{x^3y^2} \times 0.983707^{x^4y^2} \times \eta_2 \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \Omega^* = & 3.97720 + 0.593861x + 0.151641x^2 - 0.061331x^3 - 0.022252x^4 \\ & + y(0.154016 + 0.553244x + 0.144153x^2 - 0.075502x^3 - 0.014758x^4) \\ & + y^2(2.42584 + 2.14246x + 0.294401x^2 - 0.194389x^3 - 0.048345x^4) \end{aligned}$$

Modo 2

$$\begin{aligned} \eta = & 0.045809 \times 5.23955^x \times 0.660211^{x^2} \times 0.897479^{x^3} \times 0.992201^{x^4} \times 9.96967^y \\ & \times 0.708600^y \times 0.737315^{x^2y} \times 1.01858^{x^3y} \times 1.04428^{x^4y} \times 0.632614^{y^2} \\ & \times 0.782958^{y^3} \times 1.16677^{x^2y^2} \times 1.03702^{x^3y^2} \times 0.976208^{x^4y^2} \times \eta_2 \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \Omega^* = & 22.6437 + 1.53915x + 1.16909x^2 + 0.088024x^3 - 0.096522x^4 \\ & + y(-1.37115 + 0.330011x + 1.61566x^2 + 0.233375x^3 - 0.169197x^4) \\ & + y^2(6.24946 + 8.70502x + 3.57741x^2 - 0.22708x^3 - 0.306308x^4) \end{aligned}$$

Modo 3

$$\eta = 0.018430 \times 8.13049^x \times 0.803410^{x^2} \times 0.890123^{x^3} \times 0.976944^{x^4} \times 1.09134^y \\ \times 0.90008^{y^2} \times 0.789523^{y^3} \times 0.964562^{y^4} \times 1.02404^{y^5} \times 0.763190^{y^6} \\ \times 0.730160^{y^7} \times 0.974320^{y^8} \times 1.05259^{y^9} \times 1.00884^{y^{10}} \times \eta_2$$

(4.10)

$$\Omega^* = 62.2273 + 1.82075x + 1.96034x^2 + 0.598420x^3 - 0.000547x^4 \\ + y(-3.00169 - 2.56321x + 1.23125x^2 + 1.22688x^3 + 0.158933x^4) \\ + y^2(8.08929 + 16.5705x + 10.5650x^2 + 0.634568x^3 - 0.768191x^4)$$

onde:

$$x = \log g$$

$$y = \log Y$$

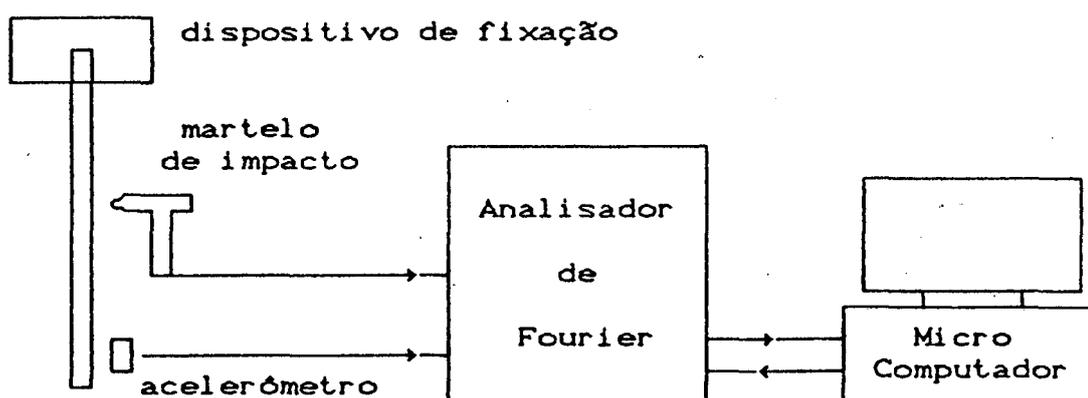
Para calcular a frequência natural em Hertz (f), basta substituir o valor de Ω^* na expressão,

$$f = \frac{\Omega^*}{2 \pi t_0} \quad (4.11)$$

4.3.2. Comparação Entre os Resultados Teóricos e Experimentais.

Neste item, será feito uma comparação entre dados obtidos experimentalmente com os obtidos pelo método apresentado por Rao [14]. Este procedimento será feito a título de verificar o grau de confiabilidade deste método. Para tanto, será utilizado um conjunto de vigas usadas anteriormente no Projeto de Isoladores Aeronáuticos [18].

Os valores experimentais das frequências naturais e dos fatores de perda para o 2º e 3º modos foram obtidos da referência [19]. Já para o 1º modo, foram feitos ensaios experimentais com as mesmas vigas utilizadas em [19]. Na figura 4.4 pode ser observado o sistema de medição utilizado para obtenção das frequências naturais e dos fatores de perda para o 1º modo.



Acelerômetro: B & K 4375

Dispositivo de fixação: B & K 3930

Martelo de Impacto: PCB 086B03

Analisador de Fourier: HP 3567A

Micro-computador: PC AT 386

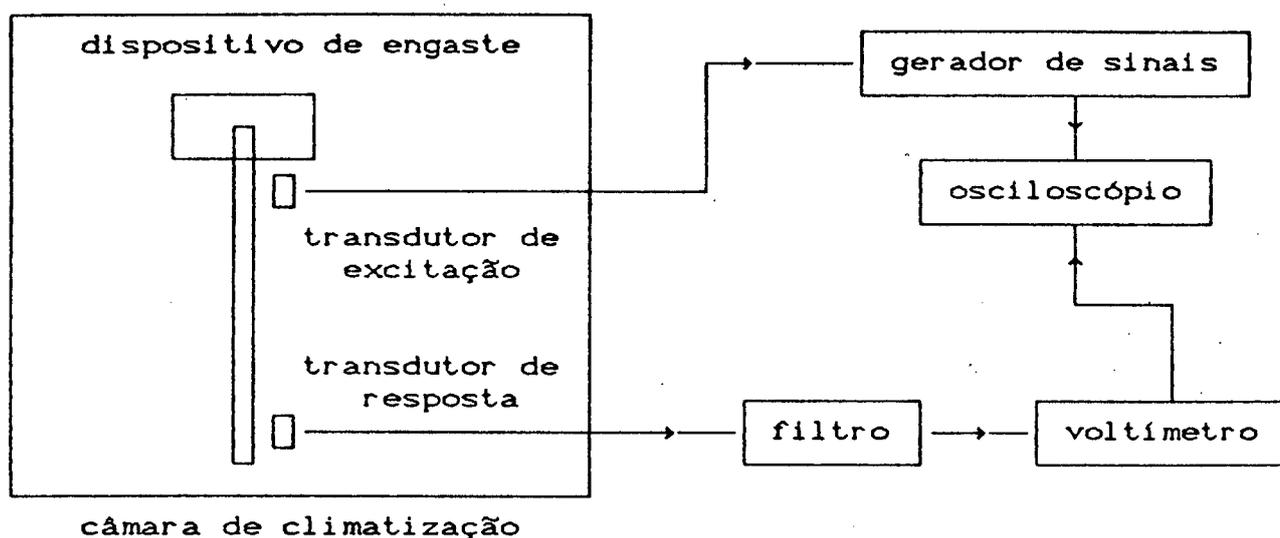
FIGURA 4.4 - Esquema de medição 1.

A frequência natural f é obtida diretamente da curva de resposta em frequência (pico da resposta) e o fator de perda é calculado utilizando-se o método da banda de $1/2$ potência. Neste método, os valores f_a e f_b das frequências cujas respostas estão 3 dB abaixo do valor de pico são medidos, e o amortecimento calculado pela expressão,

$$\eta = \frac{f_b - f_a}{f}$$

(4.12)

Para os demais modos, os ensaios foram realizados conforme esquema da figura 4.5.



Transdutores: tipo magnético B & K MM 002

Dispositivo de fixação: B & K 3930

Gerador de sinais: B & K 1027

Filtro: B & K 5716

Voltímetro: B & K 2425

Osciloscópio: IWATSU SS 5702

FIGURA 4.5 - Esquema de medição 2.

O transdutor de excitação é conectado ao gerador de sinais, que emite um sinal senoidal, excitando a viga. A resposta é obtida pelo transdutor, filtrada e enviada ao voltímetro onde se faz a leitura. O sinal de excitação e a resposta podem ser visualizados no canal 1 e 2 do osciloscópio, respectivamente. Como

no caso anterior, foi utilizado o método da banda de 1/2 potência para a determinação do amortecimento da viga sanduíche.

Em ambos os casos foram utilizados o mesmo conjunto de vigas denominado KL70. Ao todo são 5 vigas com as seguintes dimensões nominais,

$$\begin{aligned} h_1 = h_3 &= 0.0025 \text{ m} & b &= 0.01 \text{ m} \\ h_2 &= 0.0005 \text{ m} & L &= 0.217 \text{ m} \end{aligned}$$

As camadas externas são de aço com densidade $\rho = 7700 \text{ kg/m}^3$ e módulo de elasticidade $E = 2.3 \times 10^{11} \text{ Pa}$, [20]. A camada intermediária é de material elastomérico com densidade $\rho = 1340 \text{ kg/m}^3$.

Para determinação teórica das frequências naturais e do fator de perda seguiu-se o seguinte roteiro de cálculo:

a) De posse dos dados da viga sanduíche, L , b , h_1 , h_2 , h_3 , E_1 , G_2 , E_3 , ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 e η_2 , determinam-se os parâmetros Y , g e t_0 através das equações (4.5), (4.6) e (4.7). Para os valores nominais das vigas em questão,

$$D = E_1 \frac{b h_1^3}{12} + E_3 \frac{b h_3^3}{12} = 5.9896 \text{ N.m}^2$$

$$Y = \frac{c^2}{D} \frac{E_1 A_1 E_3 A_3}{(E_1 A_1 + E_3 A_3)} = 4.32$$

$$g = \frac{G_2 A_2 L^2}{4 h_2^2} \frac{(E_1 A_1 + E_3 A_3)}{E_1 A_1 E_3 A_3} = 8.1894 \times 10^{-8} \times G_2$$

$$t_0 = \sqrt{\frac{\mu L^4}{D}} = 0.0129 \text{ s}$$

b) Através do formulário especificado anteriormente, determinam-se os valores de η e f , que são apresentados nas tabelas 4.1 e 4.2.

Viga	Modo	$G_z [N/m^2]$	$f_M [Hz]$	$f_c [Hz]$	$E(f) \%$
KL70001	1	5.396E6	76	56.7	21.6
KL70001	2	9.110E6	367	316.7	13.7
KL70001	3	1.500E7	907	860.1	5.2
KL70002	1	7.219E6	78	59.8	23.3
KL70002	2	1.335E7	370	315.2	14.8
KL70002	3	2.154E7	898	847.9	5.6
KL70003	1	7.692E6	78.5	62.1	20.9
KL70003	2	1.448E7	392	326.6	16.7
KL70003	3	2.300E7	936	875.2	6.5
KL70004	1	7.379E6	78.5	62.7	20.1
KL70004	2	1.260E7	385	327.8	14.9
KL70004	3	1.918E6	934	878.8	5.9
KL70005	1	9.630E6	76.5	64.6	15.5
KL70005	2	1.201E7	380	322.7	15.1
KL70005	3	1.756E7	924	864.6	6.4

TABELA 4.1 - Freqüências naturais

Viga	Modo	η_z	η_M	η_c	$E(\eta)\%$
KL70001	1	0.207	0.079	0.060	23.6
KL70001	2	0.247	0.044	0.033	25.1
KL70001	3	0.263	0.078	0.023	71.0
KL70002	1	0.234	0.061	0.074	21.9
KL70002	2	0.176	0.057	0.042	27.0
KL70002	3	0.115	0.109	0.028	74.6
KL70003	1	0.194	0.058	0.067	16.3
KL70003	2	0.136	0.069	0.041	40.6
KL70003	3	0.147	0.112	0.029	74.2
KL70004	1	0.119	0.058	0.073	26.7
KL70004	2	0.107	0.073	0.043	41.2
KL70004	3	0.088	0.086	0.028	67.0
KL70005	1	0.097	0.064	0.072	13.1
KL70005	2	0.079	0.055	0.039	28.4
KL70005	3	0.100	0.085	0.025	70.2

TABELA 4.2 - Fator de Perda

Nas tabelas 4.1 e 4.2, f_M , f_c , η_M , η_c , $E(f)$ e $E(\eta)$ têm o seguinte significado:

f_M - a frequência natural da viga sanduíche medida.

f_c - é a frequência natural da viga sanduíche calculada.

η_c - fator de perda da viga sanduíche calculado.

η_M - fator de perda da viga sanduíche medido.

$E(f)$ e $E(\eta)$ são funções erro definidas por,

$$E(f) \% = 100 \left| \frac{f_C - f_M}{f_M} \right| [\%]$$

$$E(\eta) \% = 100 \left| \frac{\eta_C - \eta_M}{\eta_M} \right| [\%]$$

Para obtenção dos valores de $G_z(\Omega)$ e $\eta_z(\Omega)$ foram utilizadas as curvas geradas pelo "software" PRODIN, [18], considerando uma temperatura de 20 °C.

Como já foi visto anteriormente, consegue-se uma maior eficiência para o neutralizador quando o primeiro modo de vibração de neutralizador controla as vibrações do sistema primário. Verificando-se as tabelas anteriores, observa-se que para o 1º modo, o erro médio, tanto para a frequência quanto para o fator de perda, é da ordem de 20 %.

4.3.3. Projeto da Viga Sanduíche Equivalente

No item 4.2 foi projetado o neutralizador dinâmico tipo viga simples (figura 4.2). Neste item será feito o projeto do neutralizador dinâmico tipo viga sanduíche equivalente, utilizando-se do formulário do item 4.3.1.

As especificações da viga foram apresentadas na figura 4.2 e a partir das mesmas será desenvolvido o projeto, obedecendo certas restrições de massa e altura da viga. Estas restrições são descritas a seguir,

a) Restrição de massa - r_v

$$\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3 - r_v \rho h = 0$$

b) Restrição de altura - r_h

$$h_1 + h_2 + h_3 - r_h h = 0$$

lembrando que ρ e h são a densidade e a altura da seção transversal da viga do neutralizador tipo viga simples, respectivamente.

Para $r_v = 1$ e $r_h = 0.5$, a massa do neutralizador tipo viga sanduíche é igual a do tipo viga simples e a altura da viga do neutralizador dinâmico tipo viga sanduíche se reduz a metade. E ainda, para $h_1 = h_3$, chega-se ao seguinte sistema de equações,

$$2 \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 = \rho h$$

$$2 h_1 + h_2 = 0.5 h$$

Assumindo que o material da camada interna é elastômero com densidade $\rho_2 = 1340 \text{ kg/m}^3$ e que o material das camadas externas é aço com densidade $\rho_1 = \rho_3 = 7700 \text{ kg/m}^3$ e módulo de elasticidade $E_1 = E_3 = 2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$, tem-se que,

$$h_1 = h_3 = 0.01106 \text{ m}$$

$$h_2 = 0.06263 \text{ m}$$

O parâmetro geométrico (expressão 4.6), para $E_1 = E_3$, pode ser dado por,

$$Y = \frac{c^2}{D} \frac{E_1 A_1 E_3 A_3}{(E_1 A_1 + E_3 A_3)} = \frac{3 c^2}{h_1^2} = 133.18$$

e portanto,

$$y = \log Y = 2.12443$$

O fator de tempo é dado pela expressão 4.7, ou seja,

$$t_0 = \sqrt{\frac{\mu \cdot L^4}{D}} = 0.07327$$

Considerando que o 1º modo do neutralizador irá controlar as vibrações do sistema principal, serão determinados os parâmetros restantes apenas para o modo 1 do neutralizador. Para obtenção do fator de frequência Ω^* , basta substituir o valor da frequência natural da viga simples obtida no item 4.2, na expressão 4.11, ou seja,

$$f_1 = 22.4 \text{ Hz} \rightarrow \Omega_1^* = 2 \pi f t_0 = 10.3$$

Substituindo os valores de Ω^* e y nas expressões 4.8, tem-se que,

$$x = -0.477903 \rightarrow g = 0.332734$$

O módulo de cisalhamento do elastômero pode ser obtido da expressão 4.5. Então,

$$G_2 = 9.68E7 \text{ Pa}$$

Já o fator de perda pode ser obtido substituindo os valores de x , y e η na expressão 4.8. Portanto,

$$\eta_2 = 1.35$$

Resumindo, a viga do neutralizador dinâmico tipo viga sanduíche, equivalente a do neutralizador tipo viga simples, deverá ter as seguintes características,

$\rho_1 = \rho_3 = 7700 \text{ kg/m}^3$	$\rho_2 = 1340 \text{ kg/m}^3$
$h_1 = h_3 = 0.01106 \text{ m}$	$h_2 = 0.06263 \text{ m}$
$E_1 = E_3 = 2.1E11 \text{ N/m}^2$	$G_2 = 9.68E7 \text{ Pa}$
$b = 0.1346 \text{ m}$	$\eta_2 = 1.35$

Como pode ser observado, para que a viga sanduíche tenha o mesmo amortecimento da viga simples, o fator de perda do elastômero da camada intermediária deve ser elevado, o que nem sempre é possível na prática.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

A título de conclusão, fazem-se aqui alguns comentários dos estudos desenvolvidos nos capítulos anteriores, bem como algumas sugestões para trabalhos futuros.

Da teoria das Grandezas Generalizadas Equivalentes para neutralizadores tipo viga apresentada no capítulo 2, fica evidente a simplicidade deste método, não importando o número de graus de liberdade da estrutura primária. Além disso, trabalha-se apenas com os graus de liberdade da estrutura original. Tal vantagem vem do conceito das propriedades equivalentes dos neutralizadores, o qual apenas introduz propriedades da massa e amortecimento, ou rigidez e amortecimento na estrutura primária.

Do capítulo 3, no qual o neutralizador dinâmico de vibrações tipo viga é aplicado a uma viga em balanço, pode-se obter duas importantes conclusões. A primeira é que, além do eficiente controle das vibrações, a transmissibilidade obtida para os modos do sistema principal que se está controlando é praticamente a mesma obtida com neutralizadores dinâmicos simples. E em segundo lugar, a transmissibilidade dos modos superiores é menor quando do uso do neutralizador tipo viga. Com isso pode haver o controle de um ou mais modos especificamente, além de se atenuar as vibrações dos modos superiores.

Como sugestão para continuação deste trabalho cita-se a otimização dos neutralizadores dinâmicos tipo viga para o caso

geral, utilizando uma função resposta em frequência, como por exemplo, a receptância.

Quanto ao aspecto construtivo do neutralizador dinâmico tipo viga simples, pode-se ter alguns problemas. O material a ser utilizado deve possuir alto amortecimento, que é o caso dos polímeros. Caso o material escolhido seja um elastômero, o mesmo deve ter rigidez suficiente para que não haja flexão da viga do neutralizador devido à massa de sintonização ou ao peso próprio. Se isto ocorrer, a teoria utilizada não está mais sendo válida. Este é um dos motivos para a utilização de vigas sanduíche, pois pode-se obter as características de dois materiais na mesma viga, como por exemplo a elevada rigidez do aço e o alto amortecimento do elastômero.

Outro aspecto importante é a possibilidade de alteração da posição da massa de sintonização. Isso porque o projeto do neutralizador pode necessitar de um ajuste fino para que haja o controle da frequência natural desejada.

Do capítulo 4 obteve-se uma metodologia de projeto do neutralizador dinâmico tipo viga sanduíche, baseado na substituição da viga simples por uma viga sanduíche equivalente. Observou-se que existe uma grande dificuldade de se conseguir uma viga sanduíche com o mesmo amortecimento da viga simples, pois o fator de perda do elastômero da viga sanduíche tende a se tornar bastante elevado. Porém, mesmo não se obtendo o amortecimento ótimo, pode-se conseguir uma redução razoável das vibrações com um fator de perda menor.

Um outro fato importante a ser mencionado é o grau de confiabilidade do método apresentado no capítulo 4. Obteve-se uma

comparação entre os resultados teóricos e práticos apenas para um formato de viga. E mesmo neste caso o resultado não foi tão satisfatório. Os erros na determinação do fator de perda e da frequência natural ficaram em torno de 20% para o primeiro modo. O ideal seria desenvolver a teoria para determinação das matrizes das grandezas generalizadas equivalentes diretamente para o neutralizador dinâmico tipo viga sanduíche.

Como principal sugestão para trabalhos futuros cita-se a aplicação prática de ambos os neutralizadores dinâmicos, tanto o tipo viga simples quanto o tipo viga sanduíche. Inclusive verificando a real possibilidade de se obter a viga sanduíche equivalente, além de se poder comparar os dois tipos de neutralizadores. E o outro ponto importante para ser desenvolvido, como já foi mencionado anteriormente, é a determinação das grandezas generalizadas equivalentes para o neutralizador dinâmico tipo viga sanduíche, fazendo todo o processo de otimização da rigidez e do amortecimento diretamente para este tipo de neutralizador. Além disso, o processo de otimização necessita ser aperfeiçoado, pois o utilizado é bastante lento e muitas vezes apresentava algum tipo de problema numérico.

APÊNDICE A - TEORIA DAS GRANDEZAS GENERALIZADAS EQUIVALENTES

A teoria das grandezas generalizadas equivalentes baseia-se na substituição do neutralizador dinâmico por suas propriedades equivalentes: coeficiente de amortecimento viscoso generalizado equivalente (c_e) e massa generalizada equivalente (m_e).

Seja um neutralizador dinâmico massa-mola com amortecimento (MCK) representado na figura abaixo:

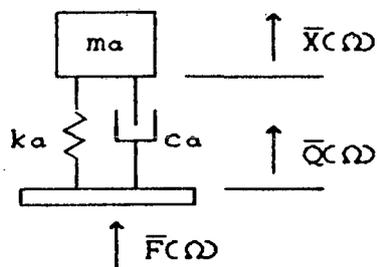


FIGURA A.1 - Neutralizador Dinâmico MCK

Para a base do neutralizador dinâmico, a rigidez dinâmica pode ser calculada conforme esquema da figura A.2.

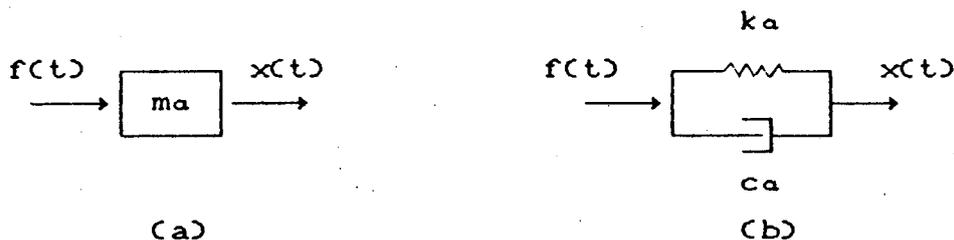


FIGURA A.2 - Esquema para determinação da rigidez dinâmica.

Da figura A.2(a), tem-se que,

$$f(t) = m_a \ddot{x}(t)$$

$$\bar{F}(\omega) = m_a [-\omega^2 \bar{x}(\omega)]$$

$$\bar{K}_1(\omega) = \frac{\bar{F}(\omega)}{\bar{X}(\omega)} = -\omega^2 m_a \quad (\text{A.1})$$

e de A.2(b),

$$f(t) = k_a x(t) + c \dot{x}(t)$$

$$\bar{F}(\omega) = k_a \bar{X}(\omega) + i \omega c \bar{X}(\omega)$$

$$\bar{F}(\omega) = [k_a + i \omega c] \bar{X}(\omega)$$

$$\bar{K}_2(\omega) = \frac{\bar{F}(\omega)}{\bar{X}(\omega)} = k_a + i \omega c \quad (\text{A.2})$$

Somando-se a rigidez devido a massa m_a (A.1) e a rigidez devido a mola e o amortecimento (A.2), tem-se que,

$$k_a = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}$$

ou

$$\bar{K}_a(\omega) = -\omega^2 m_a \frac{k_a + i \omega c}{k_a - \omega^2 m_a + i \omega c} \quad (\text{A.3})$$

Da mesma forma, a impedância mecânica e a massa dinâmica na base do neutralizador podem ser dadas por:

$$\bar{Z}_a(\Omega) = \frac{1}{\frac{1}{i \Omega m_a} + \frac{1}{c_a + k_a / (i \Omega)}}$$

$$\bar{Z}_a(\Omega) = i \Omega m_a \frac{k_a + i \Omega c}{k_a - \Omega^2 m_a + i \Omega c} \quad (\text{A.4})$$

$$\bar{M}_a(\Omega) = \frac{1}{\frac{1}{m_a} + \frac{1}{(c_a / i \Omega) - (k_a / \Omega^2)}}$$

$$\bar{M}_a(\Omega) = m_a \frac{k_a + i \Omega c}{k_a - \Omega^2 m_a + i \Omega c} \quad (\text{A.5})$$

Por sua vez, estas 3 propriedades $\bar{K}_a(\Omega)$, $\bar{Z}_a(\Omega)$ e $\bar{M}_a(\Omega)$ podem ser representadas por suas propriedades generalizadas equivalentes, conforme esquema da figura abaixo:

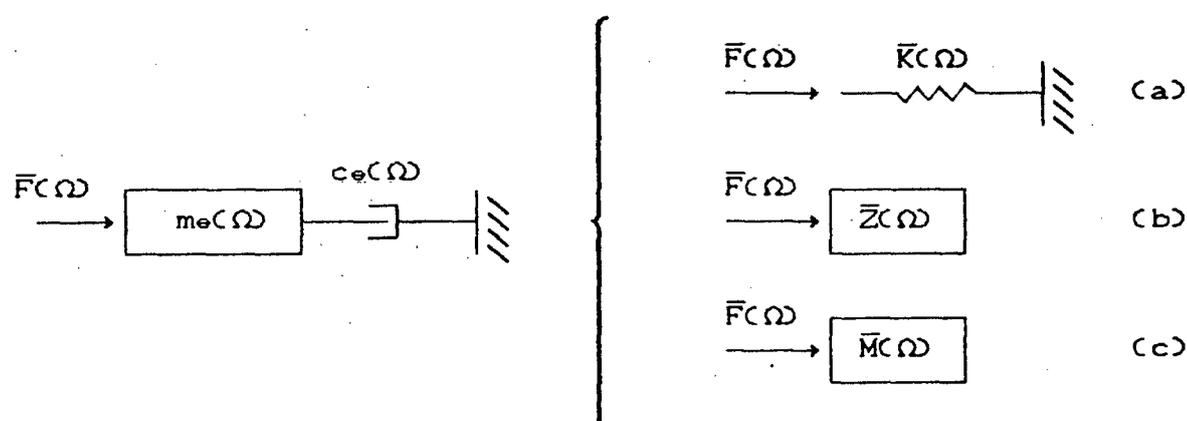


FIGURA A.3 - Representação esquemática do sistema equivalente do neutralizador dinâmico, da rigidez dinâmica (a), impedância mecânica (b) e massa dinâmica (c).

Então,

$$\bar{K}(\Omega) = \Omega^2 m_e(\Omega) + i \Omega c_e(\Omega) \quad (\text{A. 6})$$

$$\bar{Z}(\Omega) = c_e(\Omega) + i \Omega m_e(\Omega) \quad (\text{A. 7})$$

$$\bar{M}(\Omega) = m_e(\Omega) + \frac{c_e(\Omega)}{i\Omega} \quad (\text{A. 8})$$

Comparando-se as expressões (A.3) com (A.6), (A.4) com (A.7) e (A.5) com (A.8), chega-se a conclusão que,

$$c_e(\Omega) = \frac{\text{Im}(\bar{K}(\Omega))}{\Omega} = \text{Re}(\bar{Z}(\Omega)) = -\Omega \text{Im}(\bar{M}(\Omega)) \quad (\text{A. 9})$$

$$m_e(\Omega) = \frac{\text{Re}(\bar{K}(\Omega))}{-\Omega^2} = \frac{\text{Im}(\bar{Z}(\Omega))}{\Omega} = \text{Re}(\bar{M}(\Omega)) \quad (\text{A. 10})$$

A seguir será apresentado o conceito de grandezas generalizadas equivalentes para neutralizadores simples.

A.1. O Conceito de Grandezas Generalizadas Equivalentes para Neutralizador Dinâmico Simples.

Seja um neutralizador dinâmico aplicado a um sistema primário, conforme figura A.4.

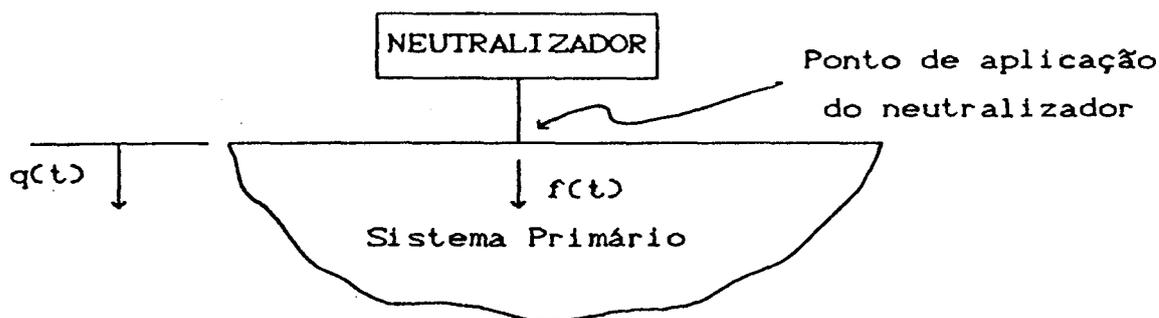
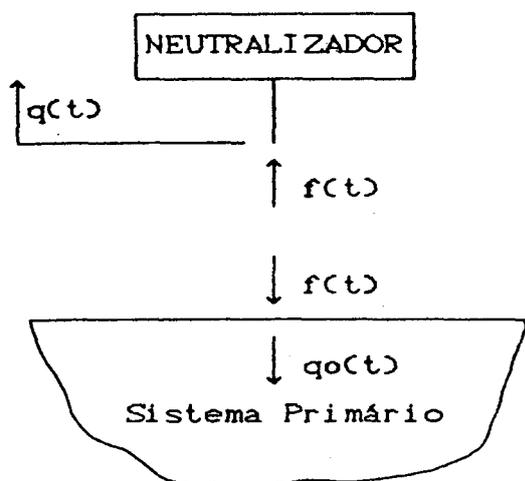


FIGURA A.4 - Neutralizador dinâmico aplicado a um sistema primário.

onde $q(t)$ é a resposta do sistema primário após a colocação do neutralizador e $f(t)$ é a força aplicada.

Sejam $\bar{Z}_N(\Omega)$ e $\bar{Z}_S(\Omega)$ as impedâncias do neutralizador e do sistema primário, respectivamente. As mesmas podem ser obtidas da figura A.5.



$$\bar{Z}_N(\Omega) = \frac{\mathcal{F}[f(t)]}{\mathcal{F}[q_N(t)]} = \frac{\bar{F}(\Omega)}{1 - \Omega \bar{Q}_N(\Omega)}$$

$$\bar{Z}_S(\Omega) = \frac{\mathcal{F}[f(t)]}{\mathcal{F}[q_0(t)]} = \frac{\bar{F}(\Omega)}{1 - \Omega \bar{Q}_N(\Omega)}$$

$q_0(t)$ - resposta do sistema primário sem o neutralizador

FIGURA A.5 - Impedâncias do neutralizador e do sistema primário.

No ponto de aplicação do neutralizador a impedância (\bar{Z}_c) é dada pela soma das impedâncias do neutralizador e do sistema primário, ou seja,

$$\bar{Z}_c(\Omega) = \bar{Z}_N(\Omega) + \bar{Z}_s(\Omega) \quad (\text{A.11})$$

Para se medir a efetividade do neutralizador, define-se Razão de Resposta como sendo a razão entre a resposta com neutralizador e sem neutralizador, ou seja,

$$|R(\Omega)| = \frac{|\bar{Q}_c(\Omega)|}{|\bar{Q}_0(\Omega)|} \quad (\text{A.12})$$

que em termos das impedâncias pode ser reescrita como:

$$|R(\Omega)| = \frac{\bar{Z}_s(\Omega)}{\bar{Z}_s(\Omega) + \bar{Z}_N(\Omega)} = \frac{1}{\left| 1 + \frac{\bar{Z}_N(\Omega)}{\bar{Z}_s(\Omega)} \right|} \quad (\text{A.13})$$

Expressões equivalentes podem ser escritas em termos de rigidez dinâmica, massa dinâmica, receptância, mobilidade e inertância.

Da expressão (A.13) conclui-se que quanto maior for a razão $|\bar{Z}_N(\Omega)/\bar{Z}_s(\Omega)|$ menor será a razão de resposta. $|\bar{Z}_N(\Omega)|$ tem valor grande na frequência de anti-ressonância do neutralizador e $|\bar{Z}_s(\Omega)|$ é pequeno na frequência de ressonância do sistema primário. Portanto grandes valores de $|\bar{Z}_N(\Omega)/\bar{Z}_s(\Omega)|$ são obtidos para as frequências nas quais ocorrem simultaneamente a anti-ressonância do neutralizador e a ressonância do sistema

principal.

O objetivo da aplicação de neutralizadores ao sistema primário é justamente ter uma razão de resposta eficaz.

O neutralizador simples representado na figura A.1 pode também ser representado por uma massa mais um pedaço de material visco-elástico, conforme figura A.6.

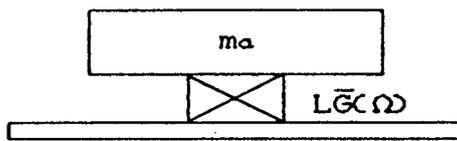


FIGURA A.6 Neutralizador Dinâmico

A rigidez complexa do neutralizador é dada por:

$$\bar{K}(T, \Omega) = L\bar{G}(T, \Omega) = LG(T, \Omega) [1 + i \eta(T, \Omega)] \quad (A.14)$$

onde:

$\bar{G}(T, \Omega)$ - Módulo de cisalhamento dinâmico do elastômero.

$\eta(T, \Omega)$ - Fator de perda do elastômero.

L - Parâmetro geométrico.

T - Temperatura.

Ω - frequência.

A rigidez dinâmica pode ser obtida do esquema da figura A.7.

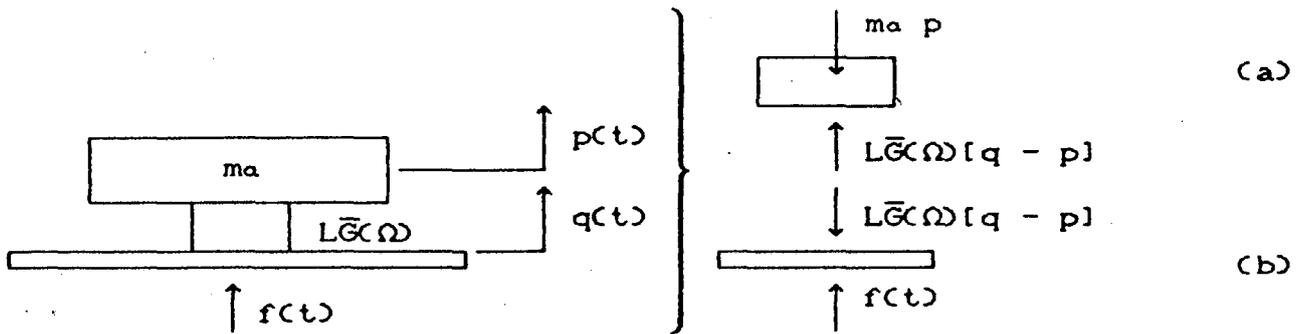


FIGURA A.7 - Esquema básico para determinação da rigidez dinâmica.

De A.7(a) tem-se que,

$$L\bar{G}(\omega) (q - p) - ma p = 0$$

$$ma p + L\bar{G}(\omega) p = L\bar{G}(\omega) q$$

$$[L\bar{G}(\omega) - ma \Omega^2] \bar{P}(\omega) = L\bar{G}(\omega) \bar{Q}(\omega) \quad (a)$$

e de A.7(b),

$$L\bar{G}(\omega) (q - p) = f(t)$$

$$L\bar{G}(\omega) \bar{Q}(\omega) - L\bar{G}(\omega) \bar{P}(\omega) = \bar{F}(\omega) \quad (b)$$

Substituindo (a) em (b) chega-se a,

$$\frac{\bar{F}(\omega)}{\bar{Q}(\omega)} = L\bar{G}(\omega) \left[\frac{-ma \Omega^2}{L\bar{G}(\omega) - ma \Omega^2} \right]$$

Então, a rigidez dinâmica no ponto de aplicação do neutralizador é dada por:

$$\bar{K}_a(\Omega) = \frac{\bar{F}(\Omega)}{\bar{Q}(\Omega)} = \frac{L\bar{G}(\Omega) m_a \Omega^2}{m_a \Omega^2 - L\bar{G}(\Omega)} \quad (\text{A.15})$$

ou

$$\bar{K}_a(\Omega) = \frac{m_a \Omega^2 L G(\Omega) [1 + i \eta(\Omega)]}{m_a \Omega^2 - L G(\Omega) [1 + i \eta(\Omega)]} \quad (\text{A.16})$$

A frequência de anti-ressonância é tal que, na ausência de amortecimento, faz o denominador de (A.16) ser igual a zero, ou seja, rigidez infinita:

$$m_a \Omega_a^2 - L G(\Omega_a) = 0$$

ou

$$\Omega_a^2 = \frac{L G(\Omega_a)}{m_a} \quad (\text{A.17})$$

Fazendo,

$$L G(\Omega) = L G(\Omega_a) r(\Omega),$$

onde $r(\Omega) = G(\Omega)/G(\Omega_a)$, pode-se escrever a rigidez dinâmica na raiz do neutralizador como:

$$\bar{K}_a(\Omega) = m_a \Omega_a^2 \frac{\varepsilon_a^2 r(\Omega) [1 + i \eta(\Omega)]}{\varepsilon_a^2 - r(\Omega) [1 + i \eta(\Omega)]} \quad (\text{A.18})$$

onde $\varepsilon_a = \Omega/\Omega_a$

Da mesma maneira, a impedância e a massa dinâmica na base do neutralizador podem ser dadas por:

$$\bar{Z}_a(\Omega) = i \, m_a \, \Omega_a \frac{\epsilon a \, r(\Omega) [1 + i \, \eta(\Omega)]}{\epsilon a^2 - r(\Omega) [1 + i \, \eta(\Omega)]} \quad (\text{A.19})$$

$$\bar{M}_a(\Omega) = - m_a \frac{r(\Omega) [1 + i \, \eta(\Omega)]}{\epsilon a^2 - r(\Omega) [1 + i \, \eta(\Omega)]} \quad (\text{A.20})$$

Como $c_e(\Omega) = \text{Re}\langle \bar{Z}_a(\Omega) \rangle$ e $m_e(\Omega) = \text{Re}\langle \bar{M}_a(\Omega) \rangle$, tem-se que:

$$c_e(\Omega) = m_a \, \Omega_a \frac{r(\Omega) \, \eta(\Omega) \, \epsilon a^2}{[\epsilon a^2 - r(\Omega)]^2 + [r(\Omega) \, \eta(\Omega)]^2} \quad (\text{A.21})$$

$$m_e(\Omega) = m_a \frac{r(\Omega) [\epsilon a^2 - r(\Omega) [1 + i \, \eta^2(\Omega)]]}{[\epsilon a^2 - r(\Omega)]^2 + [r(\Omega) \, \eta(\Omega)]^2} \quad (\text{A.22})$$

Da teoria apresentada, torna-se evidente que ambos os esquemas da figura A.8 são dinamicamente equivalentes.

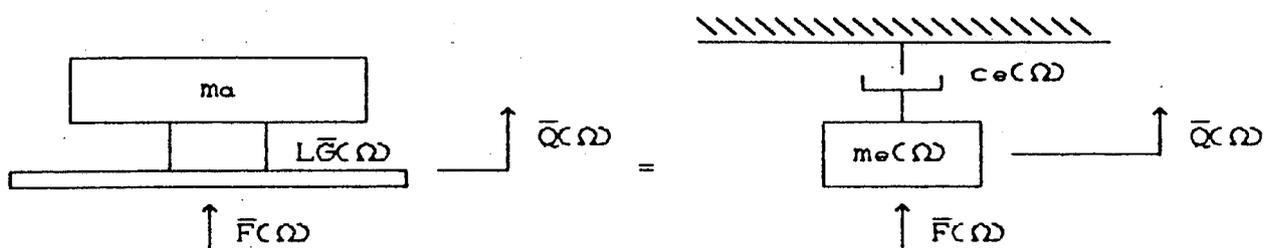


FIGURA A.8 - Equivalência dinâmica entre os esquemas dos neutralizadores.

Como consequência, o sistema primário "sente" o neutralizador como sendo uma massa $m_e(\Omega)$ e um amortecimento viscoso $c_e(\Omega)$ ligado à terra, conforme figura A.9.

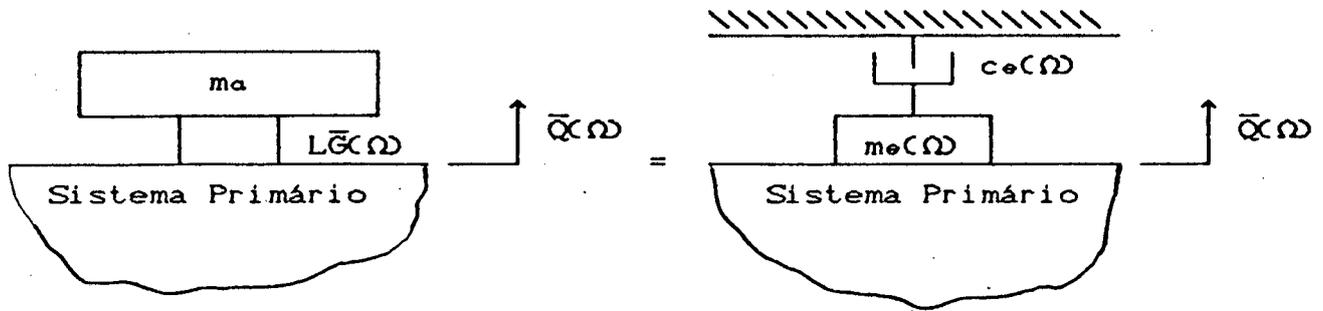


FIGURA A.9 - Grandezas generalizadas equivalentes para o neutralizador dinâmico.

APÊNDICE B

OBTENÇÃO DA MATRIZ DE TRANSFERÊNCIA PARA A VIGA EM FLEXÃO

Da teoria de vigas, [12] e [15], sabe-se que para uma viga em flexão (viga Bernoulli-Euler),

$$M(x,t) = -EI \frac{\partial^2 \omega(x,t)}{\partial x^2}$$

$$V(x,t) = -EI \frac{\partial^3 \omega(x,t)}{\partial x^3} \quad (B.1)$$

$$EI \frac{\partial^4 \omega(x,t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 \omega(x,t)}{\partial t^2}$$

Fazendo a separação de variáveis $\omega(x,t) = W(x) e^{i\Omega t}$

$$M(x) = -EI \frac{d^3 W(x)}{dx^3}$$

$$V(x) = -EI \frac{d^2 W(x)}{dx^2} \quad (B.2)$$

$$EI \frac{d^4 W(x)}{dx^4} - m \Omega^2 W(x) = 0$$

Supondo $W(x) = e^{\lambda x}$, tem-se que

$$\lambda^4 - \frac{m \Omega^2}{EI} = 0 \quad (B.3)$$

Definindo $\Omega^{*2} = \frac{m l^4 \Omega^2}{EI}$, tem-se,

$$\lambda^4 = \frac{\Omega^{*2}}{l^4} \quad (\text{B. 4})$$

que tem como solução $\lambda_1, -\lambda_1, i\lambda_1, -i\lambda_1$, onde,

$$\lambda_1 = \frac{\Omega^{*1/2}}{l} \quad (\text{B. 5})$$

Das expressões B.1, pode-se escrever

$$\omega' = -\theta$$

$$\theta' = \frac{M}{EI}$$

$$M' = V$$

$$V' = -m \Omega^2 \omega = -\frac{EI \Omega^{*2}}{l^4} \omega$$

(B. 6)

ou em forma matricial,

$$\begin{Bmatrix} -\omega \\ \theta \\ M \\ V \end{Bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/EI & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{EI}{l^4} \Omega^{*2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\omega \\ \theta \\ M \\ V \end{Bmatrix} \quad (\text{B. 7})$$

$$\langle Z \rangle' = [A] \langle Z \rangle$$

(B. 8)

A expressão anterior representa um conjunto de equações diferenciais ordinárias, com solução,

$$Z(x) = e^{[A]x} Z(0) \quad (B.9)$$

De (B.9) tira-se que $[T(x)] = e^{[A]x}$. A matriz de transferência $[T(x)]$ é, pois, função da matriz $[A]$ chamada matriz de estado.

Segundo Espíndola [12], pode-se demonstrar que

$$[T(x)] = \sum_{j=1}^N c_j [A]^{(j-1)} \quad (B.10)$$

onde c_j são soluções do seguinte sistema:

$$\sum_{j=1}^N c_j \lambda_m^{(j-1)} = e^{\lambda_m x} \quad ; m = 1, N \quad (B.11)$$

onde λ_m são os autovalores de $[A]$, ou seja, as soluções de $[[A] - \lambda [I]] = 0$, que são $\lambda_1, -\lambda_1, i\lambda_1, -i\lambda_1$

As equações (B.11) ficam

$$c_1 + c_2 \lambda_1 + c_3 \lambda_1^2 + c_4 \lambda_1^3 = e^{\lambda_1 x}$$

$$c_1 - c_2 \lambda_1 + c_3 \lambda_1^2 - c_4 \lambda_1^3 = e^{-\lambda_1 x}$$

$$c_1 + i c_2 \lambda_1 - c_3 \lambda_1^2 - i c_4 \lambda_1^3 = e^{i \lambda_1 x}$$

$$c_1 - i c_2 \lambda_1 - c_3 \lambda_1^2 + i c_4 \lambda_1^3 = e^{-i \lambda_1 x}$$

Somando-se as duas primeiras equações e posteriormente subtraindo-as, chega-se a:

$$2c_1 + 2c_3 \lambda_1^2 = e^{\lambda_1 x} + e^{-\lambda_1 x} = 2 \cosh \lambda_1 x \quad (a)$$

$$2c_2 \lambda_1 + 2c_4 \lambda_1^3 = e^{\lambda_1 x} - e^{-\lambda_1 x} = 2 \sinh \lambda_1 x \quad (b)$$

Fazendo o mesmo com as duas últimas equações,

$$2c_1 - 2c_3 \lambda_1^2 = e^{i \lambda_1 x} + e^{-i \lambda_1 x} = 2 \cos \lambda_1 x \quad (c)$$

$$-2c_2 \lambda_1 + 2c_4 \lambda_1^3 = -2 \sin \lambda_1 x \quad (d)$$

Resolvendo-se (a), (b), (c) e (d) simultaneamente, chega-se a:

$$c_1 = \frac{\cos \lambda_1 x + \cosh \lambda_1 x}{2}$$

$$c_2 = \frac{\sinh \lambda_1 x + \sin \lambda_1 x}{2 \lambda_1}$$

$$c_3 = \frac{\cosh \lambda_1 x - \cos \lambda_1 x}{2 \lambda_1^2}$$

$$c_4 = \frac{\sinh \lambda_1 x - \sin \lambda_1 x}{2 \lambda_1^3}$$

(B.12)

Expandindo a expressão (B.10),

$$[T(x)] = c_1 [A]^0 + c_2 [A]^1 + c_3 [A]^2 + c_4 [A]^3,$$

calculando as potências de [A], e substituindo seus valores, na expressão acima, chega-se a:

$$[T(x)] = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3/EI & c_4/EI \\ c_4 \lambda_1^4 & c_1 & c_2/EI & c_3/EI \\ c_3 EI \lambda_1^4 & c_4 EI \lambda_1^4 & c_1 & c_2 \\ c_2 EI \lambda_1^4 & c_3 EI \lambda_1^4 & c_4 \lambda_1^4 & c_1 \end{bmatrix} \quad (B.13)$$

lembrando que $\lambda_1^4 = \frac{\Omega^2 m}{EI}$

Portanto, a expressão (B.13) representa a matriz de transferência para uma viga Bernoulli-Euler em flexão, segundo as convenções adotadas neste trabalho.

APÊNDICE C

DETERMINAÇÃO DA FUNÇÃO DE TRANSMISSIBILIDADE

Seja a viga em balanço na qual são acoplados dois neutralizadores dinâmicos tipo viga, conforme o exemplo do capítulo 3. Para cada neutralizador, os esforços que atuam nas seções imediatamente à esquerda e imediatamente à direita podem ser observados na figura C.1.

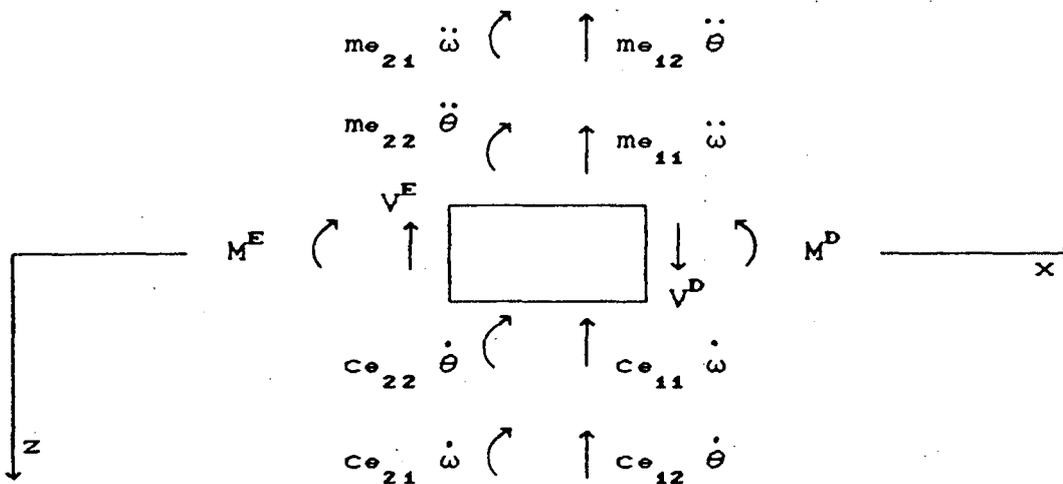


FIGURA C.1 - Esforços que Atuam nas Seções Imediatamente à Esquerda e Imediatamente à Direita do Neutralizador.

Considerando que $m_{12} = m_{21}$ e $c_{12} = c_{21}$, uma vez que as matrizes $[m_e(\Omega)]$ e $[c_e(\Omega)]$ são simétricas; fazendo o somatório de forças e momentos e, mudando-se para o domínio da frequência,

tem-se que:

$$\begin{aligned}
 V^D &= -(\Omega^2 m_{e_{11}} - i c_{e_{11}}) \omega - (\Omega^2 m_{e_{12}} - i c_{e_{12}}) \theta + V^E \\
 M^D &= M^E - (\Omega^2 m_{e_{22}} - i c_{e_{22}}) \theta - (\Omega^2 m_{e_{12}} - i c_{e_{12}}) \omega \\
 \omega^D &= \omega^E \\
 \theta^D &= \theta^E
 \end{aligned} \tag{C.1}$$

Escrevendo na forma matricial,

$$\begin{Bmatrix} -\omega \\ \theta \\ M \\ V \end{Bmatrix}^D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \bar{C} & \bar{B} & 1 & 0 \\ \bar{A} & \bar{D} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\omega \\ \theta \\ M \\ V \end{Bmatrix} \tag{C.2}$$

onde:

$$\begin{aligned}
 \bar{A} &= \Omega^2 m_{e_{11}} - i \Omega c_{e_{11}} \\
 \bar{B} &= -\Omega^2 m_{e_{22}} + i \Omega c_{e_{22}} \\
 \bar{C} &= \Omega^2 m_{e_{12}} - i c_{e_{12}} \\
 \bar{D} &= -\Omega^2 m_{e_{12}} + i c_{e_{12}}
 \end{aligned}$$

Da expressão (3.4), sabe-se que

$$\langle \bar{Z} \rangle_4 = [T]_{94} [\bar{T}]_{N2} \left[[T]_{19} [\bar{T}]_{N1} [T]_{01} \langle \bar{Z} \rangle_0 - [T]_{29} \langle \bar{F} \rangle \right] \tag{C.3}$$

Desmembrando a expressão acima e assumindo que a forma genérica t_{xy}^{ab} representa o termo xy da matriz de transferência relativa ao trecho ab da viga, tem-se que:

$$[T]_{29} \langle \bar{F} \rangle = \begin{Bmatrix} t_{14}^{29} \\ t_{24}^{29} \\ t_{34}^{29} \\ t_{44}^{29} \end{Bmatrix} \bar{F}$$

$$[T]_{29} [\bar{T}]_{N2} =$$

$$\begin{bmatrix} t_{11}^{34} + \bar{C}_2 t_{19}^{34} + \bar{A}_2 t_{14}^{34} & t_{12}^{34} + \bar{B}_2 t_{19}^{34} + \bar{D}_2 t_{14}^{34} & t_{19}^{34} & t_{14}^{34} \\ t_{21}^{34} + \bar{C}_2 t_{29}^{34} + \bar{A}_2 t_{24}^{34} & t_{22}^{34} + \bar{B}_2 t_{29}^{34} + \bar{D}_2 t_{24}^{34} & t_{29}^{34} & t_{24}^{34} \\ t_{31}^{34} + \bar{C}_2 t_{39}^{34} + \bar{A}_2 t_{34}^{34} & t_{32}^{34} + \bar{B}_2 t_{39}^{34} + \bar{D}_2 t_{34}^{34} & t_{39}^{34} & t_{34}^{34} \\ t_{41}^{34} + \bar{C}_2 t_{49}^{34} + \bar{A}_2 t_{44}^{34} & t_{42}^{34} + \bar{B}_2 t_{49}^{34} + \bar{D}_2 t_{44}^{34} & t_{49}^{34} & t_{44}^{34} \end{bmatrix}$$

$$[T]_{19} [\bar{T}]_{N1} [T]_{01} \langle \bar{Z} \rangle_0 = \begin{Bmatrix} \bar{b}_1 \bar{M}_0 + \bar{b}_2 \bar{V}_0 \\ \bar{b}_3 \bar{M}_0 + \bar{b}_4 \bar{V}_0 \\ \bar{b}_5 \bar{M}_0 + \bar{b}_6 \bar{V}_0 \\ \bar{b}_7 \bar{M}_0 + \bar{b}_8 \bar{V}_0 \end{Bmatrix}$$

onde:

$$\bar{b}_1 = t_{11}^{19} t_{19}^{01} + t_{12}^{19} t_{29}^{01} + t_{19}^{19} \left(t_{99}^{01} + \bar{B}_1 t_{29}^{01} + \bar{C}_1 t_{19}^{01} \right) + t_{14}^{19} \left(t_{49}^{01} + \bar{A}_1 t_{19}^{01} + \bar{D}_1 t_{29}^{01} \right)$$

$$\bar{b}_2 = t_{11}^{19} t_{14}^{01} + t_{12}^{19} t_{24}^{01} + t_{19}^{19} \left(t_{94}^{01} + \bar{B}_1 t_{24}^{01} + \bar{C}_1 t_{14}^{01} \right) + t_{14}^{19} \left(t_{44}^{01} + \bar{A}_1 t_{14}^{01} + \bar{D}_1 t_{24}^{01} \right)$$

$$\bar{b}_3 = t_{21}^{19} t_{19}^{01} + t_{22}^{19} t_{29}^{01} + t_{29}^{19} \left(t_{99}^{01} + \bar{B}_1 t_{29}^{01} + \bar{C}_1 t_{19}^{01} \right) + t_{24}^{19} \left(t_{49}^{01} + \bar{A}_1 t_{19}^{01} + \bar{D}_1 t_{29}^{01} \right)$$

$$b_4 = t_{21}^{19} t_{14}^{01} + t_{22}^{19} t_{24}^{01} + t_{29}^{19} \left(t_{94}^{01} + \bar{B}_1 t_{24}^{01} + \bar{C}_1 t_{14}^{01} \right) + t_{24}^{19} \left(t_{44}^{01} + \bar{A}_1 t_{14}^{01} + \bar{D}_1 t_{24}^{01} \right)$$

$$\bar{b}_5 = t_{31}^{19} t_{19}^{01} + t_{32}^{19} t_{29}^{01} + t_{39}^{19} \left(t_{99}^{01} + \bar{B}_1 t_{29}^{01} + \bar{C}_1 t_{19}^{01} \right) + t_{34}^{19} \left(t_{49}^{01} + \bar{A}_1 t_{19}^{01} + \bar{D}_1 t_{29}^{01} \right)$$

$$\bar{b}_6 = t_{31}^{19} t_{14}^{01} + t_{32}^{19} t_{24}^{01} + t_{39}^{19} \left(t_{94}^{01} + \bar{B}_1 t_{24}^{01} + \bar{C}_1 t_{14}^{01} \right) + t_{34}^{19} \left(t_{44}^{01} + \bar{A}_1 t_{14}^{01} + \bar{D}_1 t_{24}^{01} \right)$$

$$\bar{b}_7 = t_{41}^{19} t_{19}^{01} + t_{42}^{19} t_{29}^{01} + t_{49}^{19} \left(t_{99}^{01} + \bar{B}_1 t_{29}^{01} + \bar{C}_1 t_{19}^{01} \right) + t_{44}^{19} \left(t_{49}^{01} + \bar{A}_1 t_{19}^{01} + \bar{D}_1 t_{29}^{01} \right)$$

$$\bar{b}_8 = t_{41}^{19} t_{14}^{01} + t_{42}^{19} t_{24}^{01} + t_{49}^{19} \left(t_{94}^{01} + \bar{B}_1 t_{24}^{01} + \bar{C}_1 t_{14}^{01} \right) + t_{44}^{19} \left(t_{44}^{01} + \bar{A}_1 t_{14}^{01} + \bar{D}_1 t_{24}^{01} \right)$$

Então,

$$\begin{Bmatrix} -\bar{\omega}_4 \\ \bar{\theta}_4 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11}^{34} + \bar{C}_2 t_{13}^{34} + \bar{A}_2 t_{14}^{34} & t_{12}^{34} + \bar{B}_2 t_{13}^{34} + \bar{D}_2 t_{14}^{34} & t_{13}^{34} & t_{14}^{34} \\ t_{21}^{34} + \bar{C}_2 t_{23}^{34} + \bar{A}_2 t_{24}^{34} & t_{22}^{34} + \bar{B}_2 t_{23}^{34} + \bar{D}_2 t_{24}^{34} & t_{23}^{34} & t_{24}^{34} \\ t_{31}^{34} + \bar{C}_2 t_{33}^{34} + \bar{A}_2 t_{34}^{34} & t_{32}^{34} + \bar{B}_2 t_{33}^{34} + \bar{D}_2 t_{34}^{34} & t_{33}^{34} & t_{34}^{34} \\ t_{41}^{34} + \bar{C}_2 t_{43}^{34} + \bar{A}_2 t_{44}^{34} & t_{42}^{34} + \bar{B}_2 t_{43}^{34} + \bar{D}_2 t_{44}^{34} & t_{43}^{34} & t_{44}^{34} \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} b_1 \bar{M}_0 + \bar{b}_2 \bar{V}_0 - t_{14}^{34} \bar{F} \\ b_3 \bar{M}_0 + \bar{b}_4 \bar{V}_0 - t_{24}^{34} \bar{F} \\ b_5 \bar{M}_0 + \bar{b}_6 \bar{V}_0 - t_{34}^{34} \bar{F} \\ b_7 \bar{M}_0 + \bar{b}_8 \bar{V}_0 - t_{44}^{34} \bar{F} \end{Bmatrix} \quad (C.4)$$

Tomando-se as duas últimas expressões do sistema de equações acima tem-se que,

$$\begin{aligned} \bar{C}_{11} \bar{M}_0 + \bar{C}_{12} \bar{V}_0 &= \bar{d}_1 \bar{F} \\ \bar{C}_{21} \bar{M}_0 + \bar{C}_{22} \bar{V}_0 &= \bar{d}_2 \bar{F} \end{aligned} \quad (C.5)$$

onde:

$$\begin{aligned} \bar{C}_{11} &= \left(t_{31}^{34} + \bar{A}_2 t_{34}^{34} \right) \bar{b}_1 + \left(t_{32}^{34} + \bar{B}_2 t_{33}^{34} \right) \bar{b}_3 + t_{33}^{34} \bar{b}_5 + t_{34}^{34} \bar{b}_7 \\ \bar{C}_{12} &= \left(t_{31}^{34} + \bar{A}_2 t_{34}^{34} \right) \bar{b}_2 + \left(t_{32}^{34} + \bar{B}_2 t_{33}^{34} \right) \bar{b}_4 + t_{33}^{34} \bar{b}_6 + t_{34}^{34} \bar{b}_8 \\ \bar{d}_1 &= \left(t_{31}^{34} + \bar{A}_2 t_{34}^{34} \right) t_{14}^{23} + \left(t_{32}^{34} + \bar{B}_2 t_{33}^{34} \right) t_{24}^{23} + t_{33}^{34} t_{34}^{23} + t_{34}^{34} t_{44}^{23} \\ \bar{C}_{21} &= \left(t_{41}^{34} + \bar{A}_2 t_{44}^{34} \right) \bar{b}_1 + \left(t_{42}^{34} + \bar{B}_2 t_{43}^{34} \right) \bar{b}_3 + t_{43}^{34} \bar{b}_5 + t_{44}^{34} \bar{b}_7 \end{aligned}$$

$$\bar{C}_{22} = \left(t_{41}^{34} + \bar{A}_2 t_{44}^{34} \right) \bar{b}_2 + \left(t_{42}^{34} + \bar{B}_2 t_{43}^{34} \right) \bar{b}_4 + t_{43}^{34} \bar{b}_6 + t_{44}^{34} \bar{b}_8$$

$$\bar{d}_2 = \left(t_{41}^{34} + \bar{A}_2 t_{44}^{34} \right) t_{14}^{23} + \left(t_{42}^{34} + \bar{B}_2 t_{43}^{34} \right) t_{24}^{23} + t_{43}^{34} t_{34}^{23} + t_{44}^{34} t_{44}^{23}$$

Os valores da transmissibilidade, tanto da força quanto do momento, são dados pelas equações 3.7 a 3.12 do capítulo 3 deste trabalho. Neste capítulo, não foi considerado os termos fora das diagonais principais das matrizes $[m_e(\Omega)]$ e $[c_e(\Omega)]$. Como já foi mencionado, isto não acarreta em erro na determinação da transmissibilidade. Para se obter as expressões do capítulo 3, basta que se considere \bar{C} e \bar{D} iguais a zero.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] DEN HARTOG, J. P., "Mechanical Vibrations", Dover Publications, New York, 1985.
- [2] SNOWDON, J. C., "Vibration and Shock in Damped Mechanical Systems", John Wiley & Sons, New York, 1968.
- [3] SNOWDON, J. C., "Steady-State Behavior of the Dynamic Absorber", The Journal of Acoustic Society of America, August, 1959, vol. 31, nº 8, pp. 1096-1103.
- [4] ESPÍNDOLA J. J., "Apostila do Curso de Controle de Vibrações", Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, UFSC, 1991.
- [5] HUNT, J. B., "Dynamic Vibration Absorbers", Mechanical Engineering Publications LTD., London, 1979.
- [6] SILVA H. P., "Controle Modal de Vibrações por Neutralizadores Dinâmicos: Uma Abordagem Generalizada", Dissertação de Mestrado, UFSC, 1991.
- [7] ESPÍNDOLA J. J. e SILVA H. P., "Modal Reduction of Vibrations by Dynamic Neutralizers: A Generalized Approach", Proceedings of 10th IMAC, San Diego, USA, 1992, pp 1367-1373.
- [8] SILVA H. P., "Relatório de Bolsa de Desenvolvimento Tecnológico Industrial", Programa RHAÉ-CNPq, Março, 1992.
- [9] ESPÍNDOLA J. J. e SILVA H. P., "Vibration Analysis of Structures with Neutralizers", V Congresso Nacional de Engenharia Mecânica, Universidade de Magallanes, Chile, 1992.
- [10] SNOWDON, J. C., "Vibration of Cantilever Beams to which Dynamic Absorbers Are Attached", The Journal of the Acoustical Society of America, 1966, VOL. 39, nº 5, part 1.

- [11] SNOWDON, J. C. & NOBILE, M. A., "Beamlike Dynamic Vibration Absorbers", *Acustica*, 1980, Vol. 44, 98-108.
- [12] ESPINDOLA, J. J., "Apostila do Curso de Vibrações em Estruturas", Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, UFSC, 1991.
- [13] PESTEL, E. H. e LECKIE, F. A., "Matrix Methods in Elastomechanics", McGraw-Hill Book Company Inc., 1963.
- [14] RAO, D. K., "Frequency and Loss Factor of Sandwich Beams Under Various Boundary Conditions", *Journal Mechanical Engineering Science*, Vol. 20, No 5, 1978.
- [15] CLOUGH, R. W. e PENZIEN, J., "Dynamics of Structures", McGraw-Hill Book Company Inc., 1975.
- [16] NASHIF, A. D., JONES, D. I. G. & HENDERSON, J. P., "Vibration Damping", John Wiley & Sons, 1985.
- [17] LOPES, E. M. O., "Um estudo da Precisão do Método da Viga Vibrante Aplicado à Determinação das Propriedades Dinâmicas de Elastômeros", Dissertação de Mestrado, UFSC, 1989.
- [18] ESPINDOLA, J. J., "Relatório Final do Projeto de Isoladores Aeronáuticos", Laboratório de Vibrações e Acústica, UFSC, 1989.
- [19] FREITAS FILHO, F. L., "Relatório de Bolsa de Iniciação Científica (CNPq) - Projeto de Isoladores Aeronáuticos", LVA-UFSC, 1989.
- [20] FREITAS FILHO, F. L., "Relatório de Bolsa de Iniciação Científica (CNPq) - Medição do Módulo Estático de Cisalhamento de Elastômeros", LVA-UFSC, 1990.