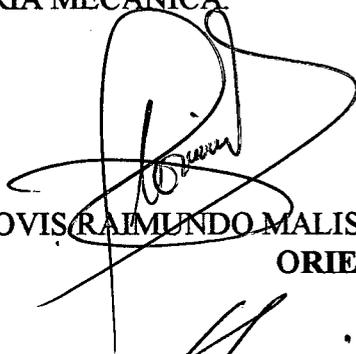


# SIMULAÇÃO NUMÉRICA DA DESCARGA TÉRMICA AXISSIMÉTRICA DE CHAMINÉS NA ATMOSFERA

AXEL DIHLMANN

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO  
TÍTULO DE **MESTRE EM ENGENHARIA** ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA,  
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO CIÊNCIAS TÉRMICAS, APROVADA EM SUA FORMA FINAL  
PELO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA.

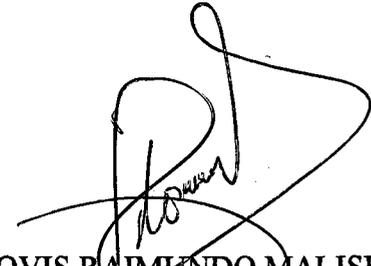


Prof. CLOVIS RAIMUNDO MALISKA, Ph.D.  
ORIENTADOR

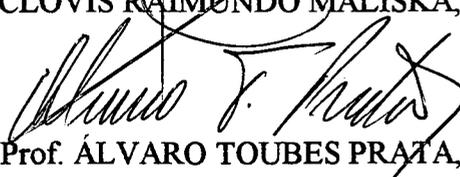


Prof. BEREND SNOEIJER, Dr. Ing.  
COORDENADOR DO CURSO

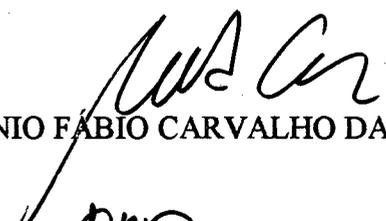
## BANCA EXAMINADORA



Prof. CLOVIS RAIMUNDO MALISKA, Ph.D.



Prof. ÁLVARO TOUBES PRATA, Ph.D.



Prof. ANTÔNIO FÁBIO CARVALHO DA SILVA, Dr. Eng.



Prof. ANTÔNIO CARLOS RIBEIRO NOGUEIRA, D.Sc.

*Sozinho não sou ninguém ...*

*A minha querida esposa Ivana,  
pelo seu imenso amor e dedicação,  
e imprescindível incentivo.*

*A meus filhos Johannes e Hans Georg,  
pelos momentos de ausência  
e pela enorme alegria que me dão.*

*A meus pais Elfriede e Dieter  
pelo carinho e amor com que me conduziram  
durante toda minha formação.*

*Antes e durante a execução deste trabalho, tive a oportunidade de conviver com pessoas realmente extraordinárias, às quais manifesto minha sincera gratidão e atribuo o mérito dos resultados aqui apresentados. Não me atrevo a agradecer explicitamente a todos, e por isso peço desculpas, pois receio incorrer num eventual esquecimento. No entanto, faço especial menção:*

*Ao Prof. Clovis Raimundo Maliska, pela soberba orientação que resultou de sua grande inteligência e capacidade de trabalho, traçando e fundamentando os rumos a serem seguidos visando atingir nossas metas, sempre com muita objetividade. Nossa leal amizade, construída ao longo de todo este tempo, foi-me um prêmio extra de valor inestimável.*

*Ao Prof Antonio Fábio Carvalho da Silva, pelos muitos ensinamentos passados durante nossa convivência, e pela amizade, sempre constante e fraterna.*

*Aos integrantes do Laboratório de Simulação Numérica em Mecânica dos Fluidos e Transferência de Calor, do Departamento de Engenharia Mecânica, pelo sentimento de equipe e ambiente familiar oferecido. A estrutura fornecida pelo SINMEC foi simplesmente decisiva para levar a bom termo os desenvolvimentos.*

*À Companhia Nacional Mineração de Carvão do Barro Branco, de Lauro Müller - SC, que, sob a direção do Sr. Dipl. Ing. Dieter Dihlmann, foi uma das pioneiras a atuar na área de conservação do meio ambiente na indústria carbonífera brasileira e grande incentivadora deste trabalho.*

*Ao Grupo Escolar Visconde de Taunay, de Lauro Müller, Colégio Marista, de Criciúma e Universidade Federal de Santa Catarina e seus respectivos professores, pelos conhecimentos fundamentais transferidos.*

*Ao CNPq pelo apoio financeiro oferecido.*

---

## ÍNDICE

---

Resumo . . . . .	iii
Abstract . . . . .	iv
Zusammenfassung . . . . .	v
Lista de figuras . . . . .	vi
Lista de tabelas . . . . .	viii
Simbologia . . . . .	ix

## CAPÍTULOS

1 - INTRODUÇÃO . . . . .	01
1.1 - Motivação . . . . .	01
1.2 - Aspectos Gerais . . . . .	02
1.2.1 - Escoamentos Considerados . . . . .	03
1.3 - Revisão Bibliográfica . . . . .	07
1.3.1 - Métodos empíricos ou Fórmulas . . . . .	08
1.3.2 - Métodos Integrais . . . . .	09
1.3.3 - Métodos Diferenciais . . . . .	10
1.4 - Contribuição da Dissertação . . . . .	11
1.5 - Perfil da Dissertação . . . . .	12
2 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA - TRANSFORMAÇÃO DO SISTEMA DE COORDENADAS - INTEGRAÇÃO E APROXIMAÇÃO DAS EQUAÇÕES . . . . .	14
2.1 - Introdução . . . . .	14
2.2 - Formulação do Problema . . . . .	14
2.3 - Equações Governantes . . . . .	16

2.4 - Transformação do Sistema de Coordenadas . . . . .	20
2.5 - Aproximação das Equações . . . . .	29
2.5.1 - Localização das Variáveis Dependentes na Malha . . . . .	29
2.5.2 - Integração das Equações no Plano Transformado . . . . .	30
<b>3 - ESQUEMA NUMÉRICO DE SOLUÇÃO - CONDIÇÕES DE CONTORNO . . . . .</b>	<b>40</b>
3.1 - Introdução . . . . .	40
3.2 - Acoplamento Pressão-Velocidade . . . . .	40
3.3 - Condições de Contorno . . . . .	46
3.3.1 - Condições de Contorno Para a Velocidade . . . . .	46
3.3.2 - Condições de Contorno Para a Pressão . . . . .	50
3.3.3 - Condições de Contorno Para a Temperatura . . . . .	53
<b>4 - RESULTADOS PARA ESCOAMENTOS LAMINARES . . . . .</b>	<b>56</b>
4.1 - Introdução . . . . .	56
4.2 - Resultados de Zeldin e Schmidt . . . . .	57
4.2.1 - escoamento com Convecção Forçada . . . . .	60
4.2.2 - escoamentos com Convecção Mista . . . . .	63
4.3 - Resultados de Akaike e Nemoto . . . . .	67
4.3.1 - Comparações para $Re = 158$ e $Re = 308$ . . . . .	72
4.4 - Simulação de um Caso com Inversão Térmica . . . . .	78
<b>5 - RESULTADOS PARA ESCOAMENTOS TURBULENTOS . . . . .</b>	<b>83</b>
5.1 - Introdução . . . . .	83
5.2 - Modelo Utilizado . . . . .	83
5.3 - Transformação de Coordenadas e Integração das Equações . . . . .	85
5.4 - Resultados . . . . .	89
<b>6 - CONCLUSÕES . . . . .</b>	<b>97</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS . . . . .</b>	<b>99</b>

---

## RESUMO

---

No presente trabalho experimenta-se numericamente o problema da descarga térmica bidimensional de jatos em ambiente uniforme ou estratificado, utilizando o método dos volumes finitos, aplicado a um sistema de coordenadas generalizadas. Para captar os efeitos de recirculação devidos a inversões térmicas, no caso de ambientes estratificados, o modelo matemático retém as equações na forma elíptica.

O sistema elíptico de equações governantes é transformado do sistema de coordenadas cilíndricas para curvilíneas. Posteriormente, este é integrado e submetido a uma aproximação. O sistema resultante é resolvido por técnicas numéricas de solução de matrizes, sendo o acoplamento pressão-velocidade, oriundo da formulação incompressível, tratado pelo método PRIME.

Para a validação da metodologia, simulam-se casos de convecção pura e mista no interior de um duto de secção circular, considerando o parâmetro adimensional  $Gr/Re$ . Posteriormente comparam-se resultados para jatos d'água descarregados no interior de um reservatório de mesmo fluido. Simula-se ainda um caso hipotético de inversão térmica e finalmente obtém-se resultados para escoamentos turbulentos, através da implementação de um modelo de turbulência algébrico simples, inicialmente proposto para um sistema parabólico de equações.

---

## ABSTRACT

---

The two-dimensional thermal jet discharge in uniform and stratified environments is solved numerically using a finite-volume technique in generalized coordinates. The model is fully elliptic for capturing the thermal inversion in the case of stratified environments.

The governing system of equations is transformed from the cylindrical coordinate system to the general curvilinear coordinate system. The PRIME method is used for handling the pressure/velocity coupling.

To assess the methodology it is solved pure and mixed convection inside a vertical circular duct for different values of  $Gr/Re$ . Water jets discharged into quiescent water are also solved and compared with experimental results available in the literature. A thermal plume with thermal inversion is also solved.

Finally, it is obtained results for the turbulent flow using an algebraic turbulence model.

---

## ZUSAMMENFASSUNG

---

In der vorliegenden Arbeit wird der Versuch unternommen durch numerische Simulationen das Problem des thermischen Verhaltens von zwei dimensionalen Strahlen unter gleichmässigen und faserähnlichen Bedingungen zu lösen. Dazu wird die Methode der Finiten Volumen in ein general Koordinatensystem übertragen. Um die effekte der Rezirkulation auf Grund der thermischen Rückführung im Falle geschichteter Umgebung zu zeigen, benutzt das mathematische Modell Gleichungen elliptischer Formeln.

Das System der vorherrschenden elliptischen Equationen wird von einem zylindrischen Koordinatensystem in ein generales übertragen und nachträglich einer Annäherung unterworfen. Das dadurch erhaltene Ergebnis wird durch die Anwendung des Systems der linearen Gleichungen und die Verflechtung Druck-Geschwindigkeit, hervorgerufen durch die nicht Komprimierbarkeit, durch benutzen der Methode PRIME gelöst.

Um die Gültigkeit vorzuführen, werden reine und gemischte Konvektionen in Röhren mit kreisförmigen Querschnitten, erwägen der dimensionslos parameter  $Gr/Re$ . Nachfolgend werden Ergebnisse mit Wasserstrahlen in einem mit Wasser gefüllten Tank verglichen. Weiterhin wird der hipotetische Fall einer thermischen Inversion gezeigt. Schluß endlich werden Ergebnisse für den turbulenten Ausfluß durch die Einführung eines einfachen algebraischen Modelles gelöst, wie es am Anfang, durch die Einführung parabolischer Gleichungen zu Lösung vorgeschlagen wurde.

---

## LISTA DE FIGURAS

---

<b>Figura 1.1</b> - Jato descarregado livremente num ambiente . . . . .	04
<b>Figura 1.2</b> - Jato livre sendo descarregado num ambiente uniforme . . . . .	05
<b>Figura 1.3</b> - Jato livre sendo descarregado num ambiente não uniforme . . . . .	06
<b>Figura 2.1</b> - Domínio físico do problema da descarga axissimétrica . . . . .	15
<b>Figura 2.2</b> - Discretização de fronteiras com malha cartesiana . . . . .	20
<b>Figura 2.3</b> - Discretização de fronteiras com malha curvilínea . . . . .	21
<b>Figura 2.4</b> - Representação esquemática da transformação de coordenadas . . . . .	22
<b>Figura 2.5</b> - Arranjo de variáveis na malha computacional . . . . .	30
<b>Figura 2.6</b> - Volume de controle elementar . . . . .	32
<b>Figura 3.1</b> - Componentes de velocidade cartesianas e contravariantes . . . . .	41
<b>Figura 3.2</b> - Discretização para a obtenção dos gradientes de pressão . . . . .	42
<b>Figura 3.3</b> - Discretização de uma fronteira do domínio . . . . .	47
<b>Figura 3.4</b> - Utilização da condição de contorno parabólica . . . . .	49
<b>Figura 3.5</b> - Discretização da fronteira de simetria . . . . .	50
<b>Figura 3.6</b> - Discretização da fronteira de temperatura prescrita . . . . .	53
<b>Figura 4.1</b> - Geometria esquematizada do problema . . . . .	58
<b>Figura 4.2</b> - Região de entrada da malha utilizada . . . . .	60
<b>Figura 4.3</b> - Condições de contorno para o caso de convecção forçada . . . . .	61
<b>Figura 4.4</b> - Comparação de resultados para convecção forçada . . . . .	62
<b>Figura 4.5</b> - Condições de contorno para o caso de convecção mista . . . . .	63

<b>Figura 4.6</b> - Comparação de resultados para convecção mista . . . . .	64
<b>Figura 4.7</b> - Vetores velocidade para convecção mista . . . . .	65
<b>Figura 4.8</b> - Comparação de resultados para a temperatura . . . . .	66
<b>Figura 4.9</b> - Geometria e dimensões do bocal de descarga . . . . .	67
<b>Figura 4.10</b> - Condições de contorno para a descarga . . . . .	68
<b>Figura 4.11</b> - Malha utilizada para a simulação da descarga . . . . .	69
<b>Figura 4.12</b> - Valores para parâmetros adimensionais . . . . .	71
<b>Figura 4.13</b> - Outros valores para parâmetros adimensionais . . . . .	73
<b>Figura 4.14</b> - Comparação de resultados para $Re = 158$ . . . . .	74
<b>Figura 4.15</b> - Comparação de resultados para $Re = 308$ . . . . .	75
<b>Figura 4.16</b> - Variação da velocidade axial . . . . .	76
<b>Figura 4.17</b> - Vetores velocidade para $Re = 308$ . . . . .	77
<b>Figura 4.18</b> - Linhas de corrente para $Re = 158$ . . . . .	78
<b>Figura 4.19</b> - Condições de contorno para a simulação da inversão térmica . . . . .	79
<b>Figura 4.20</b> - Temperaturas e velocidades sobre a linha de simetria . . . . .	81
<b>Figura 4.21</b> - Vetores velocidade para o caso da inversão térmica . . . . .	82
<b>Figura 5.1</b> - Regiões distintas para o cálculo da viscosidade turbulenta . . . . .	87
<b>Figura 5.2</b> - Comparação de resultados para a temperatura, $Fr = 4$ . . . . .	89
<b>Figura 5.3</b> - Comparação de resultados para a temperatura, $Fr = 16$ . . . . .	90
<b>Figura 5.4</b> - Comparação de resultados para a temperatura, $Fr = 64$ . . . . .	90
<b>Figura 5.5</b> - Comparação de resultados para a temperatura, $Fr = 1$ . . . . .	91
<b>Figura 5.6</b> - Comparação de resultados para a velocidade, $Fr = 1$ . . . . .	91
<b>Figura 5.7</b> - Comparação de resultados para a temperatura, $Fr = 35$ . . . . .	92
<b>Figura 5.8</b> - Comparação de resultados para a velocidade, $Fr = 35$ . . . . .	92
<b>Figura 5.9</b> - Comparação de resultados para a temperatura, $Fr = 52$ . . . . .	93
<b>Figura 5.10</b> - Comparação de resultados para a velocidade, $Fr = 52$ . . . . .	93
<b>Figura 5.11</b> - Comparação de resultados para a temperatura, $Fr = 106$ . . . . .	94
<b>Figura 5.12</b> - Comparação de resultados para a velocidade, $Fr = 106$ . . . . .	94
<b>Figura 5.13</b> - Comparação de resultados para a temperatura, $Fr = 1000$ . . . . .	95
<b>Figura 5.14</b> - Comparação de resultados para a velocidade, $Fr = 1000$ . . . . .	95

---

## LISTA DE TABELAS

---

<b>Tabela 2.1</b> - Valores dos parâmetros para a equação (2.5) . . . . .	18
<b>Tabela 2.2</b> - Valores dos parâmetros para a equação (2.29) . . . . .	25
<b>Tabela 4.1</b> - Dimensões utilizadas no experimento . . . . .	59
<b>Tabela 4.2</b> - Propriedades do ar para o caso simulado . . . . .	59
<b>Tabela 4.3</b> - Propriedades da água para o caso simulado . . . . .	68
<b>Tabela 4.4</b> - Propriedades do ar para o caso simulado . . . . .	80

---

## SIMBOLOGIA

---

$r, y$	Eixos coordenados do sistema cilíndrico.
$\rho$	Massa específica.
$u, v$	Componentes de velocidade no sistema cilíndrico.
$p^\phi$	Pressão.
$S^\phi$	Termo fonte na equação de conservação para $\phi$ .
$\tilde{S}^\phi$	Termo fonte transformado na equação de transformação para $\phi$ .
$g$	Aceleração da gravidade.
$k$	Coefficiente de condutividade térmica.
$T$	Temperatura.
$C_p$	Calor específico a pressão constante.
$\mu$	Viscosidade.
$\Gamma$	Coefficiente de transporte difusivo.
$\phi$	Campo escalar genérico.
$q, E, F, R, S$	Grandezas definidas pelas equações (2.7) a (2.11).
$\xi, \eta$	Eixos coordenados do sistema generalizado.
$J$	Jacobiano da transformação, equações (2.14) e (2.19).
$\det [ ]$	Determinante da matriz entre colchetes.
$r_\xi$	Derivada parcial de $r$ em relação a $\xi$ .
$r_\eta$	Derivada parcial de $r$ em relação a $\eta$ .

$y_{\xi}$	Derivada parcial de $y$ em relação a $\xi$ .
$y_{\eta}$	Derivada parcial de $y$ em relação a $\eta$ .
$\bar{q}, \bar{E}, \bar{F}, \bar{R}, \bar{S}$	Grandezas definidas pelas equações (2.30) a (2.35).
$\alpha, \beta, \gamma$	Componentes do tensor métrico, equações (2.42), (2.43) e (2.45).
$U, V$	Contravariantes do vetor velocidade sem normalização métrica.
ST	Termo fonte da equação para a temperatura.
$\dot{m}$	Fluxo de massa.
$C_1, C_2$ e $C_4$	Coefficientes de difusão transformados, equações (2.47) a (2.49).
$\bar{\alpha}, \bar{\beta}$	Coefficientes para as parcelas convectiva e difusiva, respectivamente.
$Pe$	Número de Peclet.
$\Delta V$	Volume do <i>volume de controle</i> no plano transformado.
$A_p, A_e, A_w \dots$	Coefficientes para as equações aproximadas.
$L \mid \mid$	Operador da aproximação da quantidade entre barras.
$n, n+1, n+\theta$	Níveis de tempo $t, t+\Delta t$ e $t+\theta \Delta t$ , respectivamente.
$E$	Multiplicador de tempo, definido pela equação (2.94).
$\bar{U}, \bar{V}$	Velocidades definidas pelas equações (3.3) e (3.4).
$B$	Termo fonte da equação para a pressão.
$\Delta P \mid_i$	Gradiente de pressão avaliado na fronteira $i$ .
$Gr$	Número de Grashof.
$\nu$	Viscosidade cinemática ( $\mu / \rho$ ).
$Z$	Altura adimensional ( $y / r_0$ ).
$C_v$	Calor específico a volume constante.
$Pr$	Número de Prandtl.
$Fr$	Número de Froude $u_0^2 / g d_0 \beta (t_0 - t_{0\infty})$ .

### Subíndices

ref	Propriedade referenciada.
$P, E, W, N \dots$	Pontos dos volumes onde as variáveis são avaliadas.
$p, e, w, n \dots$	Pontos das faces onde as variáveis são avaliadas.
máx	Máximo.

mín	Mínimo.
0	Avaliado no nível da descarga.
m	Valor médio.
a, ∞	Ambiente.

### **Superíndices**

$\phi$	Avaliado para o escalar $\phi$ .
$\wedge$	Indica quantidades transformadas.
-	Indica quantidades médias.

### INTRODUÇÃO

---

---

#### 1.1 - MOTIVAÇÃO

O desenvolvimento industrial tem sido motivo de significativa melhora da condição social do ser humano, e sua continuidade é de vital importância para que novas conquistas sejam atingidas. Os grandes parques industriais construídos geram, ao longo do tempo, e em contrapartida com seus enormes benefícios, resíduos poluentes em quantidades cada vez maiores, resultantes de seu constante crescimento.

Por muito tempo e, principalmente, nos países pertencentes ao hoje chamado Primeiro Mundo, não se deu a devida importância aos efeitos causados pela emissão destes poluentes. A tomada de uma consciência ambientalista e os graves problemas causados por fatores nocivos à saúde humana, animal e vegetal, levaram as pessoas a se preocuparem com a preservação e manutenção do meio ambiente. Em especial, legisladores, cientistas e engenheiros têm tido a incumbência de apontar soluções para a correção dos resultados dos desmandos até então ocorridos.

Os resíduos de combustão, normalmente lançados à atmosfera através de chaminés, são uma das formas mais comuns de agressão ao meio. Estas descargas, geralmente sem o adequado tratamento, são muito numerosas, pois praticamente qualquer tipo de indústria as possui. Em Santa Catarina, onde viabilizou-se o carvão mineral como fonte energética alternativa, pode-se citar como exemplos as coquearias, que fazem a eliminação de voláteis deste material, os fornos cerâmicos e a geração de eletricidade por termoelétricas.

A instalação de uma nova usina termoelétrica, ou de um forno contínuo para a queima de materiais cerâmicos, por exemplo, deve ser acompanhada de uma cuidadosa previsão da extensão dos danos que o lançamento de efluentes de suas chaminés vai causar ao ambiente, especificamente à fauna e flora locais. Neste aspecto, a quantificação dos efeitos consiste em determinar a distribuição da concentração de poluentes no ambiente que irá receber estes lançamentos. O conhecimento de como estas substâncias nocivas se dispersam no meio receptor da descarga, permitirá aos biólogos avaliar seus efeitos sobre a vida local. Uma previsão através de estudos antecipados evita danos de grande monta ao meio, antes de ser constatada, na prática, a sua periculosidade.

## **1.2 - ASPECTOS GERAIS**

Na tentativa de minimizar o impacto causado por emissões nocivas requer-se, primordialmente, o conhecimento de como os componentes poluentes se dispersam após o seu lançamento na atmosfera. Fatores tais como campos de velocidade, de temperatura e de pressão, se conhecidos, auxiliam grandemente o entendimento do fenômeno físico em questão.

Atualmente encontram-se disponíveis muitos modelos para o cálculo de casos práticos importantes envolvendo a descarga de jatos no ambiente, variando de simples fórmulas empíricas até modelos complexos envolvendo equações diferenciais parciais. Especialmente para os casos em que são simulados escoamentos turbulentos, todos estes métodos requerem dados experimentais, seja para o embasamento das fórmulas empíricas ou funções apresentadas, ou para validar uma metodologia num determinado campo de aplicação. Neste aspecto, deve-se considerar

a potencial generalidade de métodos mais sofisticados e completos, que podem modelar com o rigor necessário detalhes exclusivos dos escoamentos turbulentos. Entretanto, ressalte-se a dificuldade de validação destes, devido à carência de dados experimentais realmente confiáveis.

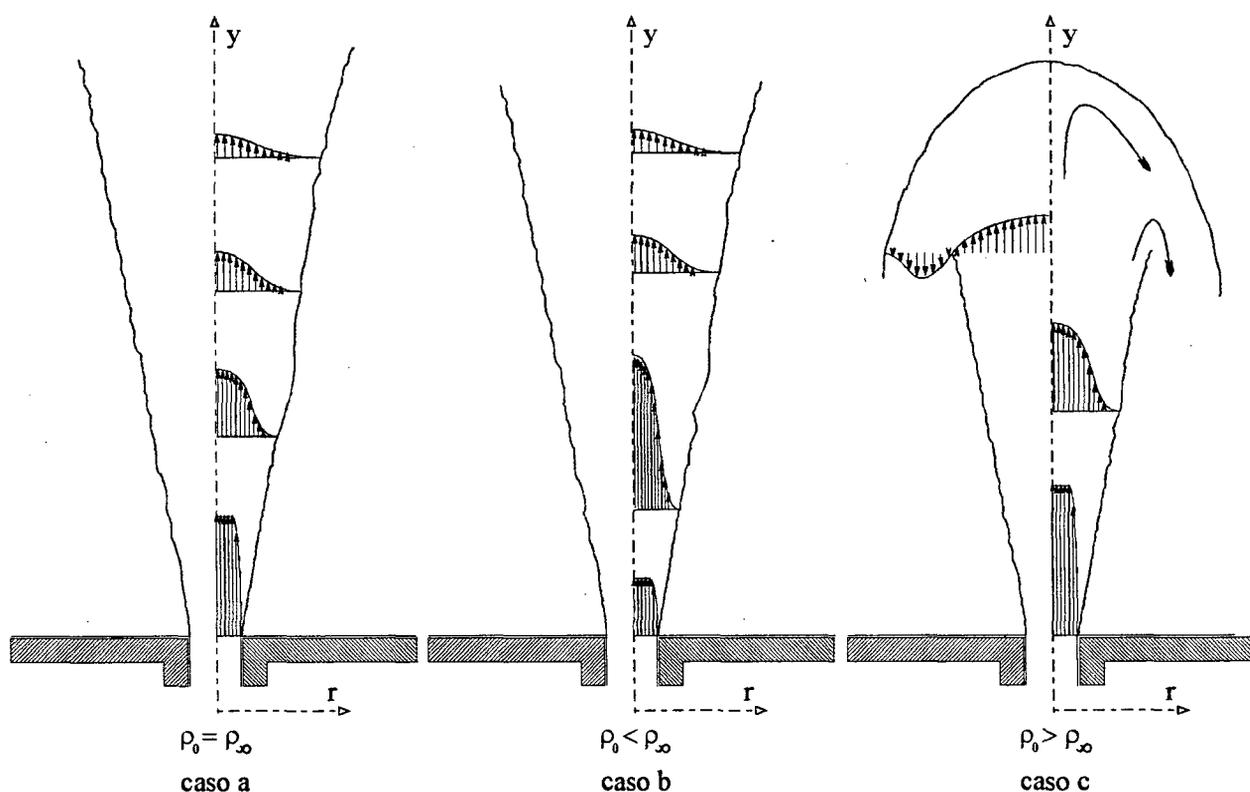
### 1.2.1 - ESCOAMENTOS CONSIDERADOS

Neste trabalho pretende-se desenvolver uma metodologia para a simulação de descargas de chaminés nas quais o eixo axial está alinhado com o vetor gravidade, e cuja densidade é diferente daquela do meio circundante. Deve-se salientar que, na maioria dos casos, a descarga de jatos na atmosfera é afetada pelas características do próprio ambiente no qual é descarregado, resultando num escoamento tridimensional. No entanto, existem situações em que escoamentos bidimensionais ou axissimétricos podem ser considerados com razoável precisão. Como exemplo tem-se a emissão de chaminés que ocorre em dias sem vento. Frize-se que esta é uma situação real das mais críticas sob o aspecto de nocividade ao meio, uma vez que a dispersão dos poluentes depende exclusivamente dos mecanismos criados pela própria descarga, e que neste caso são extremamente minguados, se comparados com aqueles provocados pelo movimento local da atmosfera.

A consideração dos efeitos gravitacionais implica no surgimento de forças de empuxo, que tendem a acelerar ou desacelerar a velocidade do fluido de descarga. Acompanhando-se a figura (1.1), podemos observar as diversas maneiras como este escoamento pode se apresentar. Caso a força de empuxo esteja agindo no mesmo sentido da velocidade do jato na origem, figura (1.1 b), obtém-se um aumento da quantidade de movimento do fluido, e diz-se que o *jato possui empuxo positivo*. No caso contrário, figura (1.1 c), diz-se que o *jato possui empuxo negativo*. Desprezando-se os efeitos de empuxo ou quando eles não existem, figura (1.1 a), denominamos a descarga como *jato puro*.

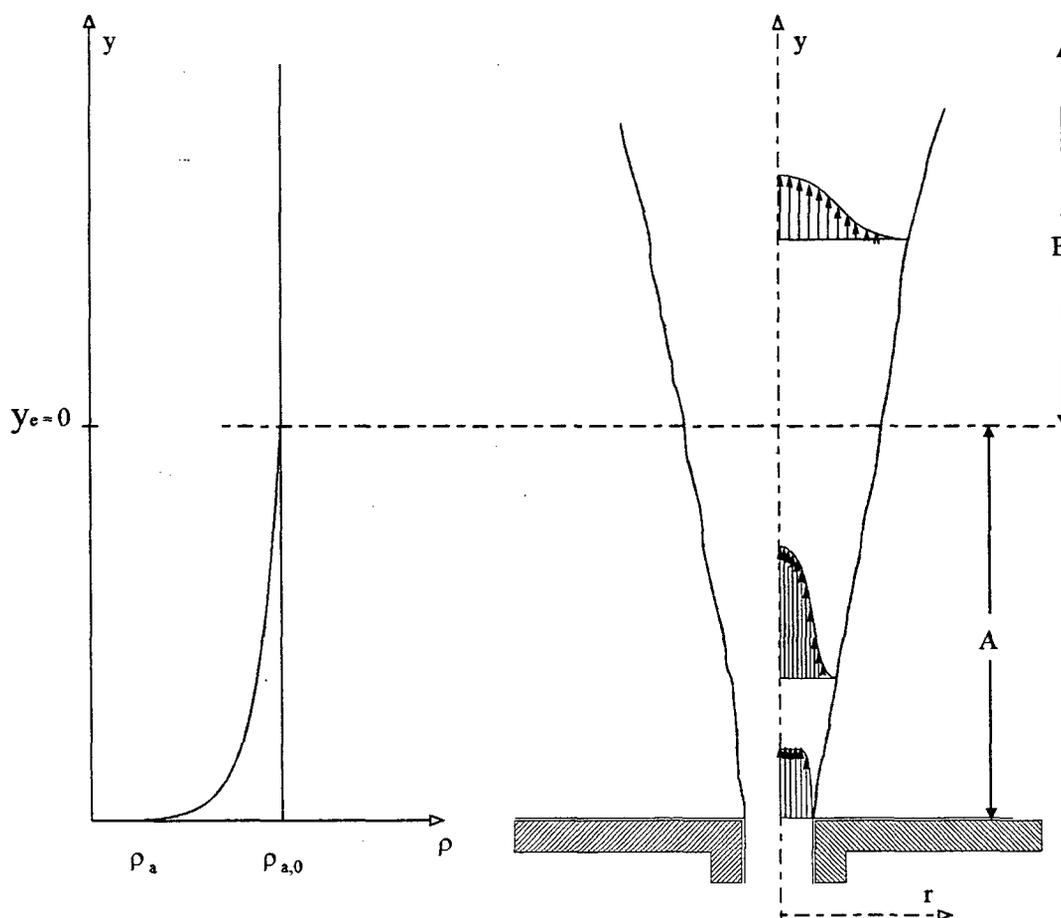
Para a simulação, supõe-se ainda que estes jatos não são afetados por paredes laterais, considerando-se, entretanto, os efeitos do atrito com o solo. Admite-se ainda que estas descargas são gerados a partir de uma fonte de dimensões finitas.

A seguir serão dadas informações detalhadas sobre as situações estudadas neste trabalho.



**Figura 1.1** - Jato descarregado livremente num ambiente.  
Tipos de escoamento, considerando ou não os efeitos de empuxo.

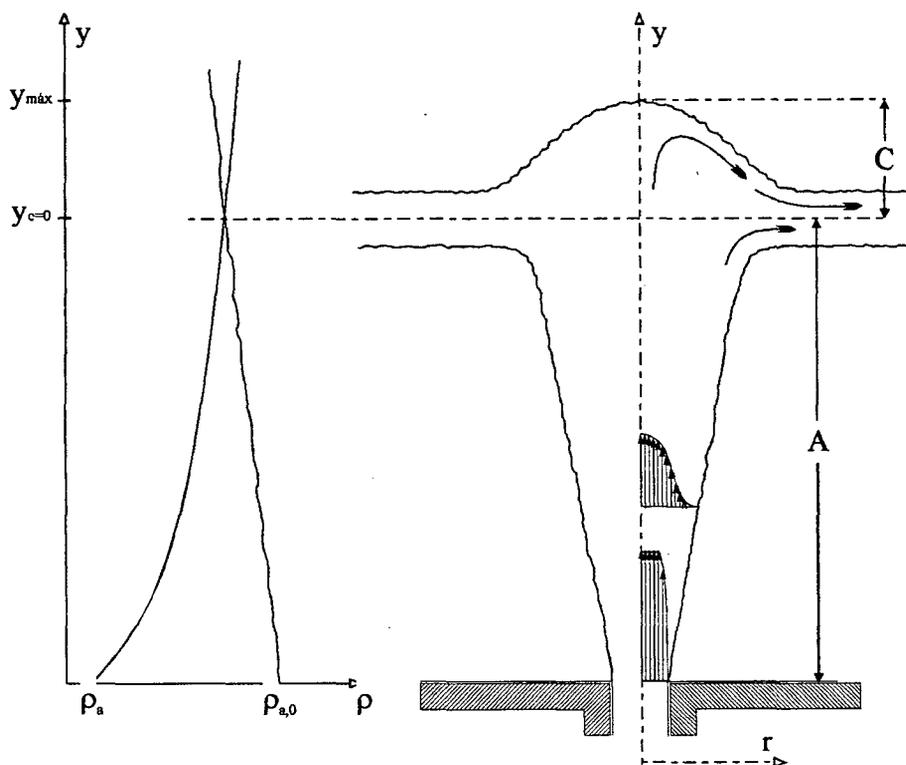
No caso de ambiente uniforme, como mostrado na figura (1.2), notam-se duas regiões. Na região inicial (A), o fluido é acelerado, uma vez que o mesmo encontra-se com uma densidade  $\rho_0$  menor do que aquela apresentada pelo meio circundante. Esta diferença de densidades é provocada pela maior temperatura do fluido de descarga. À medida que o fluido se esfria, sua massa específica vai tornando-se mais próxima daquela do meio  $\rho_{a,0}$ . Com isto, as forças de empuxo têm sua intensidade diminuída até anularem-se, em  $y_c = 0$ . Neste ponto temos a chamada altura de empuxo neutro. A partir deste patamar, região (B), o fluido continua a subir movido somente pela quantidade de movimento que ainda possui. Consoante sua subida, o fluido vai perdendo esta energia cinética através dos efeitos viscosos.



**Figura 1.2** - Jato livre sendo descarregado em ambiente uniforme.  
( $\rho_{a,0} = \text{constante}$ ).

Deve-se considerar ainda a possibilidade da existência de uma estratificação do meio. Neste caso existe um acréscimo da temperatura do ambiente com a altura. Reportando-nos à figura (1.3) e à última etapa do escoamento descrita no item anterior, recordemos que o fluido continua subindo, movido pela quantidade de movimento adquirida e, à medida que sobe, mantém ainda uma temperatura inferior a do meio, adquirida em alturas inferiores. Surge daí uma força de empuxo negativa, localizada na região (C), que tende a desacelerar o fluido. Quando as forças de empuxo e de inércia se compensam, tem-se a altura máxima  $y_{\text{máx}}$  atingida pelo fluido. A partir daí o fluido é levado a retroceder, isto é, inverte o seu sentido de movimento, espalhando-se na altura de flutuação nula, que é a região de equilíbrio das forças.

Visando a simulação dos casos supracitados, faz-se uso de uma modelagem que considera as equações governantes do fenômeno, constituídas num sistema elíptico de equações diferenciais parciais não lineares, acopladas.



**Figura 1.3** - Jato livre sendo descarregado num ambiente não uniforme.  
( $\rho_{a,0}$  = variável).

Inicialmente estas equações são submetidas a uma transformação, objetivando-se chegar a um sistema de coordenadas que coincidam com as fronteiras do domínio, conforme descrito por Maliska [1]. Desta maneira as condições de contorno ficam definidas exatamente onde são necessárias, ou seja, sobre as fronteiras, evitando-se interpolações. Adicionalmente, o problema é resolvido num plano transformado com geometria única, sem a necessidade de alteração do programa computacional quando da mudança da geometria física do caso em estudo.

Aplicando-se a técnica dos volumes finitos, como descrita na referência anteriormente citada, chega-se a um conjunto de expressões algébricas que representam aproximadamente o sistema de equações diferenciais originais. Recorrendo-se a técnicas numéricas de resolução de matrizes, obtém-se então a solução para este sistema de equações.

O processo de geração das malhas para o problema é algébrico, e procurou-se otimizá-lo ao máximo visando facilitar a adaptação às mais diversas situações, objetivando-se sempre obter para as linhas coordenadas uma configuração conforme a provável orientação preferencial do escoamento.

A validação preliminar do modelo desenvolvido, para a verificação da correta transformação de coordenadas e implementação computacional, é feita comparando-se os resultados com dados experimentais para escoamento laminar no interior de um duto de secção circular, obtidos por Zeldin e Schmidt [2], considerando-se casos de convecção forçada e mista. Numa segunda etapa, procura-se verificar a exatidão dos resultados para um caso de descarga hidrodinâmica, através da comparação com resultados experimentais de Akaike e Nemoto [3]. A seguir comprova-se a viabilidade do modelo no que tange à representação de situações de inversão térmica. Finalmente procura-se corroborar a metodologia através de comparações com resultados experimentais e numéricos para descargas turbulentas em atmosfera uniforme, obtidos por Madni e Pletcher [4] e Pripitniewics [5]. Para tanto, esta última etapa do trabalho consistiu na implementação de um modelo de turbulência simplificado, que emprega equações algébricas para o cálculo da viscosidade turbulenta para cada altura do domínio.

### **1.3 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

Metodologias de simulação numérica, baseadas nas definições matemáticas do fenômeno em questão, tornam-se mais confiáveis se corroboradas por estudos experimentais, além de comparadas com outros modelos similares. É dedicada atenção especial à interpretação e revisão de resultados existentes na literatura considerando os vários processos existentes.

Atualmente pode-se classificar a obtenção de resultados em três grandes grupos, significando estágios de complexidade, desenvolvimento e potencial crescentes:

- Métodos empíricos ou fórmulas;
- Métodos integrais;
- Métodos diferenciais.

A seguir procura-se resumir cada um dos itens apresentados, destacando-se as vantagens e desvantagens e, principalmente, buscando especificar o campo de aplicação de cada metodologia.

### **1.3.1 - MÉTODOS EMPÍRICOS OU FÓRMULAS**

Uma das maneiras mais simples de obter-se um método de cálculo para o desenvolvimento de jatos livres é correlacionar dados experimentais considerando parâmetros de relevância teórica, como por exemplo aqueles obtidos através de uma análise dimensional. Na simulação de descargas de chaminés na atmosfera, estas correlações empíricas são comumente usadas para determinar a altura máxima, o que permite avaliar a concentração de substâncias nocivas no solo. Detalhes sobre fórmulas descritivas do comportamento dos jatos verticais em ambiente calmo e estavelmente estratificado, encontram-se em Briggs [6] e Csanady [7].

A maioria das fórmulas de desenvolvimento de plumas existentes na literatura são para situações com vento lateral, e geralmente representam bem somente os casos para os quais existem dados experimentais correlacionados. Situações similares têm sua previsão prejudicada.

Moore [8] constatou que as fórmulas empíricas têm difícil aplicação quando o desenvolvimento do jato está sujeito a escoamento atmosférico com turbulência, situação esta que é real e bastante comum. Apesar disto, estas fórmulas são de grande utilidade na engenharia, devido a sua simplicidade e rapidez de aplicação, embora seus resultados devam ser interpretados com cautela.

### 1.3.2 - MÉTODOS INTEGRAIS

Mais recentemente, com o advento do computador e do aparecimento de novas técnicas numéricas, tornou-se viável o desenvolvimento de métodos de cálculo fundamentados nas equações governantes. Estas metodologias são baseadas nas leis de conservação da massa, quantidade de movimento, energia e concentração de substâncias. Os métodos integrais assumem formatos geralmente Gaussianos para os perfis de velocidade, temperatura ou concentração, de tal forma que as equações diferenciais parciais possam ser integradas sobre a secção transversal do jato, gerando relações para a descrição da variação axial da velocidade ou densidade.

Uma outra hipótese é normalmente feita especificando o modo como o fluido do ambiente se incorpora ao jato turbulento, fenómeno este chamado de *entrainment*. Morton et al. [9] assumiram que a velocidade do fluido de entrada é proporcional à velocidade local na linha de centro e que o coeficiente de proporcionalidade, chamado *coeficiente de entrainment*, era uma constante universal. Mais tarde Morton [10], Abraham [11], Telford [12], Fox [13], Anwar [14], List e Imberger [15] e Sneck e Brown [16] concluíram que este coeficiente não era uma constante universal, mas dependia do carácter local do escoamento e das condições ambientais. Constatou-se também que um coeficiente diferente é necessário em jatos com flutuação negativa. Estes achados levaram Fox [13] a propor a hipótese de que o *coeficiente de entrainment* fosse uma função do número de Froude local, ou seja, a razão local entre as forças de inércia e de flutuação. No caso de convecção mista da figura (1.1 b) este número característico varia de grandes valores na parte sem flutuação até valores pequenos na região com flutuação.

Os métodos integrais mais recentes usando um *coeficiente de entrainment* variável, como consta nos trabalhos de Fox [13], Sneck e Brown [17], Hirst [18] e Schatzmann [19], tem bom desempenho na previsão das características globais dos jatos com flutuação, tais como a massa específica e a variação axial da velocidade na linha de centro, bem como a altura máxima atingida por descargas em ambientes linearmente estratificados e estáveis. Contudo os métodos integrais são algo ineficientes quando utilizados em situações nas quais a estratificação é uma função complexa da altura. Nestes casos não se consegue uma boa descrição da zona de deflexão

(de flutuação negativa) de um jato num ambiente estavelmente estratificado.

Os dados experimentais requeridos para desenvolver e testar métodos integrais, além das condições iniciais e do ambiente são, principalmente, o formato do perfil de velocidade e de massa específica, a razão de *entrainment*, a variação axial da velocidade e densidade na linha de centro e a altura máxima atingida pela pluma em ambiente estavelmente estratificado.

### 1.3.3 - MÉTODOS DIFERENCIAIS

Métodos integrais são de difícil extensão para escoamentos turbulentos mais complexos, que apresentam empuxo. Na maioria destes casos o escoamento é tridimensional e comumente existem paredes e interfaces do tipo água-ar. Nestes escoamentos genéricos é complexo prescrever formas de perfis e relacionar a razão de *entrainment* a todos os parâmetros locais importantes, como por exemplo as características turbulentas do escoamento no ambiente. Por isto, outros métodos tornaram-se crescentemente preferidos, os quais não empregam hipóteses quanto a perfis e *entrainment*, mas os obtém a partir da solução. Estes métodos determinam os componentes de velocidade médios e a temperatura ou a concentração em cada ponto do escoamento, através da solução das equações diferenciais parciais governantes destas quantidades. Por isso são chamados de *métodos diferenciais*.

As equações governantes são as mesmas utilizadas nos métodos integrais. Para o caso em que se consideram os efeitos turbulentos, deve-se assumir um modelo de turbulência, o qual descreve o seu nível em cada ponto do escoamento.

Modelos de turbulência de vários padrões de complexidade têm sido desenvolvidos e usados. Um dos mais simples, que adota a hipótese do comprimento de mistura de Prandtl, relaciona os fluxos de turbulência diretamente a quantidades médias locais do escoamento, enquanto os modelos mais complexos resolvem as equações diferenciais de transporte para cada fluxo individualmente. Uma revisão dos modelos é dada por Launder e Spalding [20], donde se pode concluir que a generalidade de uma metodologia cresce com a sua complexidade.

Concomitantemente, modelos mais complexos necessitam de mais dados, na forma de constantes empíricas e também maior tempo de computação.

A maioria dos modelos de turbulência sugeridos até agora foram desenvolvidos e testados somente para escoamentos sem flutuação. Mas alguns modelos que consideram efeitos de flutuação foram propostos por Lumley [21], Donaldson et al. [22], Mellor [23], Mellor e Yamada [24], Moroney [25], Lumley e Kajeh-Nouri [26], e Launder [27]. Uma revisão dos modelos de Lumley e Launder é encontrada em Houssain e Rodi [28]. Donaldson e Meroney aplicaram seus modelos para problemas de turbulência no ar desconsiderando a presença de poluentes; Mellor previu camadas limites estratificadas com seus vários modelos; Gibson e Launder [29] testaram as sugestões de modelos de Launder, aplicando-os a jatos horizontais na superfície de reservatórios; finalmente Ideriah [30] e Chen e Rodi [31] modificaram o modelo de Launder para prever jatos verticais com flutuação em ambiente uniforme e estratificado.

Os dados experimentais são vitais para o desenvolvimento de modelos de turbulência porque eles não somente fornecem a base para o entendimento dos fenômenos turbulentos, orientando a formulação do modelo, mas também os subsídios necessários para determinar as constantes empíricas envolvidas. Considerando-se também que estas constantes são válidas somente para uma faixa restrita de escoamentos, mormente para os métodos mais simples, os dados experimentais são necessários ainda para extrapolar estes campos. O maior requisito de um método de cálculo é prever o escoamento médio corretamente. Portanto, dados experimentais sobre a distribuição das velocidades médias, temperatura ou concentração sobre o campo do escoamento são extremamente necessários, especialmente para a etapa de validação do modelo.

#### **1.4 - CONTRIBUIÇÃO DA DISSERTAÇÃO**

Da análise do exposto anteriormente, pode-se concluir que pouco desenvolvimento tem sido alcançado no sentido de simular o problema da inversão térmica. A maioria dos casos de simulação limitam-se à região em que o escoamento não apresenta recirculações. Portanto, exclui-se da abordagem a região onde ocorre a inversão do fluxo, de grande relevância sob o aspecto

de poluição ambiental. O uso de modelos simplificados, por si só, torna a análise destes problemas praticamente impossível.

A contribuição deste trabalho é demonstrar que uma modelagem baseada nas equações diferenciais governantes na sua forma elíptica, para o caso da descarga térmica de jatos, é perfeitamente capaz de captar o escoamento reverso que resulta do fenômeno da inversão térmica.

## **1.5 - PERFIL DA DISSERTAÇÃO**

Nesta seção apresenta-se resumidamente o conteúdo principal de cada capítulo desta dissertação.

**CAPÍTULO 2 - Formulação do Problema, Transformação e Aproximação das Equações Governantes** - Apresenta-se o problema da descarga de jatos termicamente ativos na atmosfera, e ressalta-se a importância do estudo de jatos axissimétricos. O sistema elíptico de equações governantes do fenômeno em coordenadas cilíndricas é posto, juntamente com as hipóteses simplificativas. Em seguida é desenvolvida a transformação de coordenadas para o sistema curvilíneo generalizado, colocando-se as métricas responsáveis pela transferência das informações sobre comprimentos e não-ortogonalidades do plano físico para o novo plano. As equações são então integradas, considerando um volume de controle elementar axissimétrico, onde as propriedades envolvidas são supostas como sendo a média de seus valores infinitesimais. Mostram-se ainda os esquemas de aproximação dos termos convectivos e difusivos, considerando-se a sua importância relativa no processo, obtendo-se finalmente as equações discretizadas a nível de volumes finitos.

**CAPÍTULO 3 - Esquema Numérico de Solução, Condições de Contorno** - Neste capítulo comenta-se sobre a conveniência da obtenção das equações da conservação da quantidade de movimento em termos das velocidades contravariantes. Obtém-se a relação para a determinação do campo de pressão, necessária para o fechamento do sistema de equações, uma vez que não se pôde utilizar a equação de estado para este fim. Apresentam-se as condições de contorno para

a velocidade, pressão e temperatura, utilizadas para a simulação dos casos.

**CAPÍTULO 4 - Resultados Para Escoamentos Laminares** - Procede-se a verificação da validade do modelo desenvolvido, através da simulação e comparação com dados experimentais de problemas laminares. Inicialmente realiza-se a simulação do escoamento no interior de um duto de secção circular constante. São comparados resultados para o escoamento hidrodinâmico e para o caso de convecção mista, onde se comprova a eficiência do modelo quanto à representação de situações onde existe empuxo térmico. Posteriormente simula-se o caso da descarga hidrodinâmica de um jato num reservatório d'água, visando verificar a correção dos resultados, tanto no sentido longitudinal quanto radial. Finalmente executa-se a simulação de um caso apresentando inversão térmica, para comprovar a viabilidade do uso do código para situações apresentando recirculações.

**CAPÍTULO 5 - Resultados Para Escoamentos Turbulentos** - Apresenta-se um modelo de turbulência algébrico, originalmente implementado num sistema de equações parabólicas, adaptado ao sistema elíptico de equações. Este procedimento implicou na divisão, em duas regiões distintas, do domínio ocupado pelo jato termicamente ativo, descarregado livremente. Em cada uma delas o cálculo da viscosidade turbulenta é executado diferentemente. Os valores obtidos são comparados com resultados numéricos e dados experimentais.

### FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

### TRANSFORMAÇÃO DO SISTEMA DE COORDENADAS

### INTEGRAÇÃO E APROXIMAÇÃO DAS EQUAÇÕES

---

---

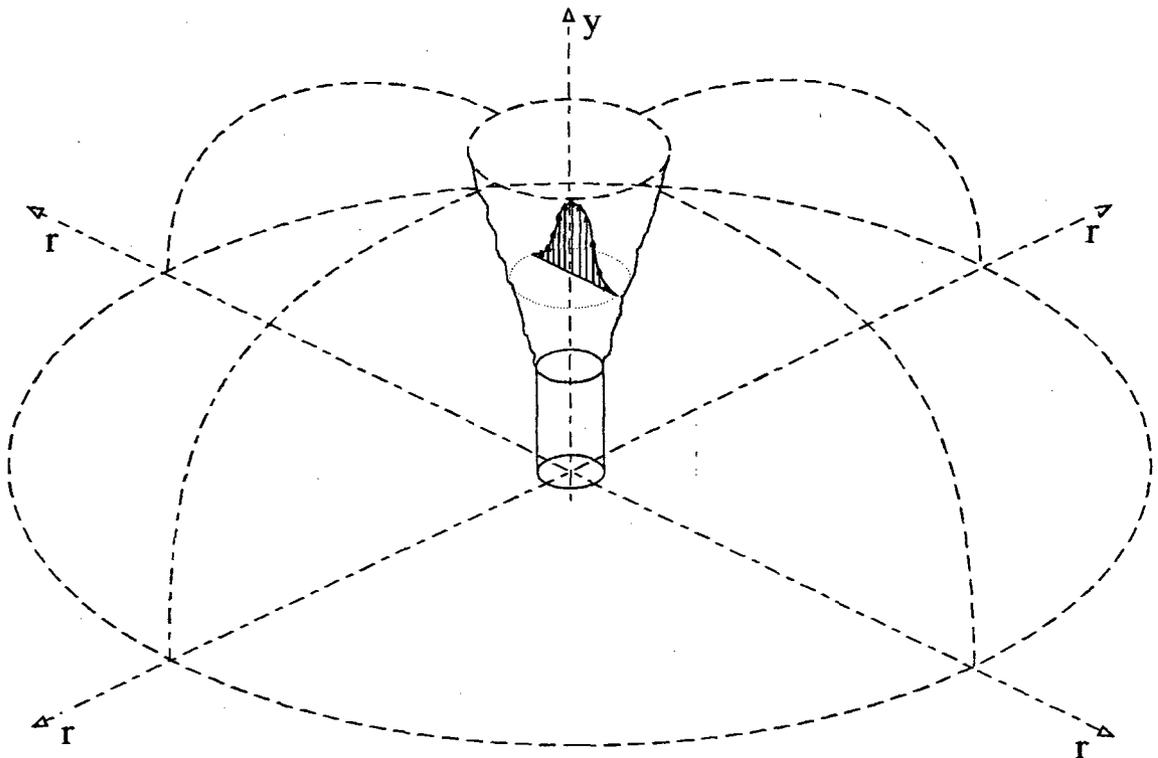
#### 2.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo será apresentado o problema da descarga de jatos termicamente ativos na atmosfera. Serão apresentadas as equações governantes para o fenômeno físico em questão, em coordenadas cilíndricas, agrupadas de tal modo que possam ser representadas de uma forma genérica. As hipóteses simplificativas e os termos responsáveis pela simulação dos efeitos de empuxo serão também mostrados. As equações diferenciais serão então transformadas do plano físico para o plano transformado, onde estas serão resolvidas, após terem sido integradas sobre um volume finito.

#### 2.2 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O objetivo final do presente trabalho é simular a descarga de jatos termicamente ativos em ambiente uniforme ou estratificado. Basicamente, a diferença entre as duas situações está em como é definido o perfil de estratificação do meio, ou seja, num ambiente uniforme considera-se

a massa específica constante ao longo da altura relativa à descarga. Já num ambiente estratificado, este perfil de estratificação varia com a altura, o que simula mais aproximadamente uma situação real. Na presente metodologia esta variação é atribuída à temperatura, somente. Pela equação de estado obtém-se uma correlação com a massa específica do ar nas circunvizinhanças da descarga. Este procedimento permite simular eficientemente os efeitos de empuxo numa descarga térmica.



**Figura 2.1** - Domínio físico do problema da descarga axissimétrica através de uma chaminé.

Um aspecto que deve ser considerado é que a descarga de jatos na atmosfera normalmente é um fenômeno tridimensional, isto devido às próprias condições do ambiente no qual este é descarregado. Considere-se por exemplo, os efeitos causados pelos ventos transversais sobre o desenvolvimento do jato, a influência do relevo sobre a camada limite atmosférica, as condições da turbulência presente no próprio escoamento, a existência de edificações ao longo da trajetória da pluma e diversos outros parâmetros de menor importância. Ponderando-se estes aspectos, pode-se concluir que existem muitas fontes de influência que precisam ser conhecidas, caso se deseje simular este tipo de escoamento com certa precisão. Uma questão que resulta do

raciocínio anterior é quanto a aplicabilidade da simulação bidimensional do fenômeno, uma vez que esta representa apenas uma pequena parcela dos casos reais. A réplica pode ser dada se considerarmos que uma das situações mais críticas em fenômenos que envolvam a descarga de jatos poluentes na atmosfera, ocorre justamente quando os efeitos dos ventos são desprezíveis, isto é, quando não é possível contar com os mecanismos adicionais de dispersão destes poluentes, formados por efeitos de convecção forçada. Nesta situação, a dispersão da pluma é afetada primordialmente pelas condições de descarga, tais como quantidade de movimento, temperatura do jato em relação à do ambiente e em parte pelo perfil local de estratificação, se este existir.

Isto posto, passa-se, na próxima seção, para a apresentação das equações governantes do fenômeno da descarga de jatos térmicos. Como poderá ser visto, não será apresentada uma equação dedicada à obtenção do campo de concentração. O comportamento deste campo pode ser obtido utilizando-se uma analogia com o campo de temperatura, uma vez que as equações para a concentração e para a conservação da energia são similares. As condições de contorno serão vistas no capítulo 3.

### 2.3 - EQUAÇÕES GOVERNANTES

O problema da descarga de jatos térmicos em ambientes é um fenômeno de convecção natural, elíptico no caso de inversões térmicas, uma vez que se está na presença de escoamentos com recirculações. Por este motivo o seguinte conjunto de equações diferenciais parciais é adequado ao problema.

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [\rho r u] + \frac{\partial}{\partial y} [\rho v] = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho u] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [\rho r u u] + \frac{\partial}{\partial y} [\rho v u] + P^u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \mu \frac{\partial u}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right] + S^u \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho v] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [\rho r u v] + \frac{\partial}{\partial y} [\rho v v] + P^v = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \mu \frac{\partial v}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \rho g \beta (T - T_{ref}) \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho T] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [\rho r u T] + \frac{\partial}{\partial y} [\rho v T] = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{k}{C_p} \frac{\partial T}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{k}{C_p} \frac{\partial T}{\partial y} \right] \quad (2.4)$$

As equações (2.1) a (2.4) estão escritas utilizando-se a aproximação de Boussinesq, isto é,  $\rho$  é constante em todas as expressões, exceto no termo de empuxo da equação do movimento longitudinal (2.3), onde o empuxo por unidade de volume é dado por  $\rho g \beta (T - T_{ref})$ . O objetivo final é obter os campos de propriedades para o regime permanente. Mesmo assim, os termos referentes ao tempo são mantidos nas equações, para fins de avanço iterativo.

As hipóteses simplificativas utilizadas para as equações governantes (2.1) a (2.4) são:

- 1 - Domínio de solução bidimensional;
- 2 - Fluido newtoniano e incompressível;
- 3 - Propriedades do fluido constantes;
- 4 - Não há geração de calor;
- 5 - Sem dissipação viscosa.

Observando-se as equações de (2.1) a (2.4), deduz-se que estas podem ser apresentadas de uma forma genérica como

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho \phi] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [\rho r u \phi] + \frac{\partial}{\partial y} [\rho v \phi] + P^\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] + S^\phi \quad (2.5)$$

onde as expressões para os parâmetros  $\Gamma^\phi$ ,  $P^\phi$  e  $S^\phi$  são dados na tabela 2.1. Note-se, por exemplo, que a equação de conservação da massa pode ser recuperada fazendo-se  $\phi = 1$ , com as devidas expressões para os demais parâmetros.

Equação	Massa	Q.M.(r)	Q.M.(y)	Energia
$\phi$	1	u	v	T
$\Gamma^\phi$	0	$\mu$	$\mu$	$k/C_p$
$S^\phi$	0	0	$\rho g \beta (T - T_{ref})$	0
$P^\phi$	0	$\partial P / \partial r$	$\partial P / \partial y$	0

**Tabela 2.1** - Parâmetros  $\Gamma^\phi$ ,  $P^\phi$  e  $S^\phi$  para a equação (2.5).

Numa forma ainda mais reduzida, obtém-se

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rE) + \frac{\partial}{\partial y}(F) + P^\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rR) + \frac{\partial}{\partial y}(S) + S^\phi \quad (2.6)$$

onde

$$q = \rho \phi \quad (2.7)$$

$$E = \rho u \phi \quad (2.8)$$

$$F = \rho v \phi \quad (2.9)$$

$$R = \Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (2.10)$$

$$S = \Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (2.11)$$

A grandeza  $\Gamma^\phi$  simboliza a propriedade física responsável pelo transporte difusivo da variável  $\phi$ . Para as equações do movimento na direção radial e longitudinal,  $\Gamma^\phi$  é igual a viscosidade absoluta  $\mu$ , enquanto que para a equação da energia  $\Gamma^\phi$  se iguala à condutividade térmica dividida pelo calor específico à pressão constante ( $k/C_p$ ).

Substituindo os valores adequados da tabela (2.1) na equação (2.6), recuperamos as equações de (2.1) até (2.4). Observando-as, contam-se as incógnitas  $u$ ,  $v$ ,  $P$ ,  $\rho$  e  $T$ , enquanto dispomos de somente quatro equações.

Se a variação de  $\rho$  é grande no domínio, então a equação de estado, relacionando a massa específica com a pressão e a temperatura, pode ser empregada para o fechamento do sistema de equações. Neste caso a equação de estado pode ser usada para a determinação da pressão, sendo a massa específica determinada pela equação da continuidade. Assim temos a formulação chamada *compressível*.

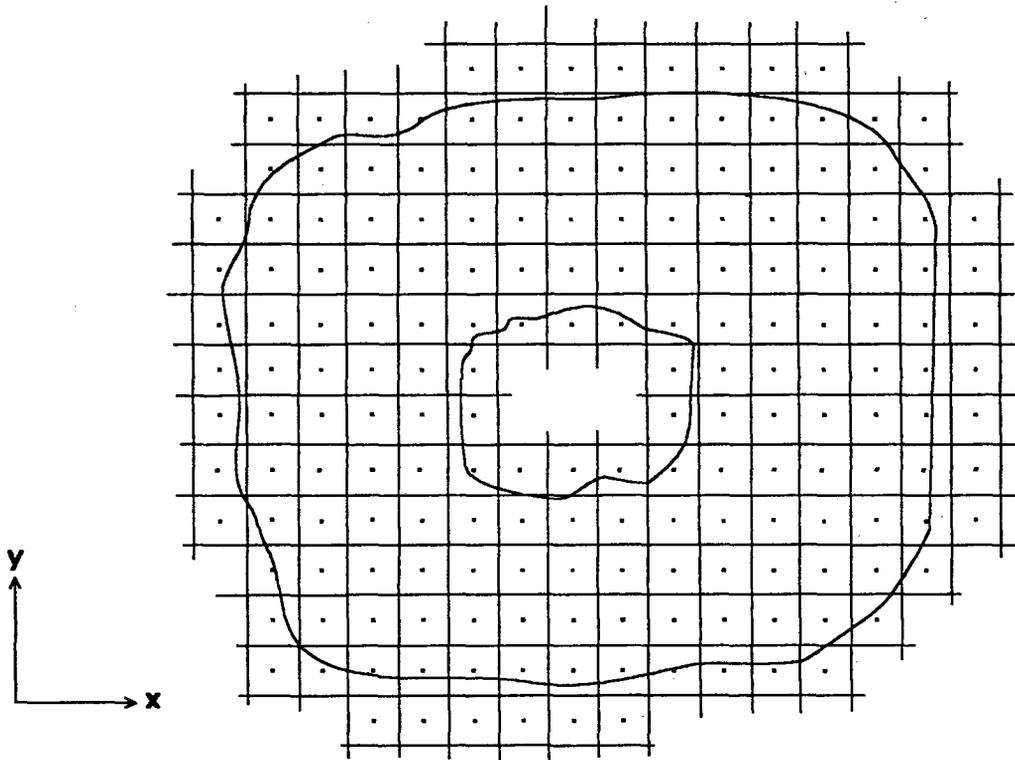
Na presente situação, considerando que a variação da massa específica praticamente não é afetada pela pressão, mas sim pela temperatura, a aplicação da equação de estado poderá gerar valores irrealistas para a pressão, decorrentes de pequenos erros no cálculo da massa específica através da equação da continuidade. Os campos de pressão assim obtidos, se introduzidos nas equações do movimento, geram velocidades que, aplicadas novamente na equação da continuidade para evolução da massa específica, produzem instabilidades no processo iterativo.

Do raciocínio acima, sugere-se então que  $\rho$  deva ser calculado como uma função da temperatura somente, ou  $\rho = \rho(T)$ , onde  $T$  é obtida pela equação da energia. Desvinculando a massa específica  $\rho$  da pressão  $P$ , perde-se a equação para o cálculo do campo de pressão; a equação de estado passa a representar a massa específica  $\rho$  e a equação da continuidade torna-se somente uma restrição a ser satisfeita pelo campo de velocidade.

Necessita-se, portanto, encontrar um campo de pressão que, ao ser substituído nas equações do movimento, gerem velocidades que satisfaçam a equação da conservação da massa. Isto será visto no capítulo 3, onde será apresentado o método para tratamento do acoplamento pressão-velocidade e a correspondente equação para a pressão, para o fechamento do sistema de equações.

## 2.4 - TRANSFORMAÇÃO DO SISTEMA DE COORDENADAS

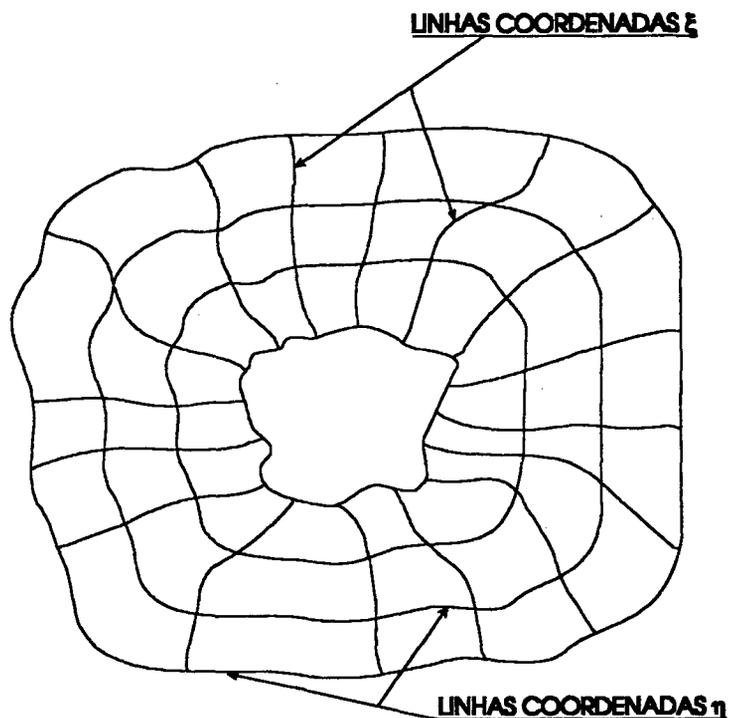
Para a aplicação de uma metodologia de simulação numérica divide-se o domínio total em elementos menores, de tal modo que as equações adequadas ao fenômeno físico estudado possam ser aplicadas como significando a média de cada uma das propriedades para aquele volume.



**Figura 2.2** - Malha baseada num sistema de coordenadas cartesianas para a representação da região de fronteira de um domínio qualquer.

A configuração dos volumes, resultante da discretização utilizada, deve estar referenciada a um sistema de coordenadas adequado. Usualmente tem-se diversos sistemas coordenados aplicáveis a uma mesma situação, cada qual apresentando vantagens e desvantagens em relação aos outros. Como exemplos de uso freqüente, podemos citar os sistemas de coordenadas cartesianos, cilíndricos, polares e curvilíneos. Geometrias de formas simples têm sua representação facilmente enquadrada num dos três primeiros sistemas de coordenadas. Já as geometrias complexas necessitam de um sistema de coordenadas que se adapte à forma física do

problema. Diversas vantagens surgem quando temos um sistema de coordenadas adaptado à geometria do problema. A principal delas diz respeito à aplicação das condições de contorno, que têm influência dominante na solução. O uso de malhas não coincidentes com as fronteiras, conforme mostra a figura (2.2), pode falhar na representação das condições de contorno justamente na região de maior sensibilidade. O processo comumente utilizado neste caso é interpolar as propriedades sobre os pontos da fronteira nos quais ela não é conhecida, podendo produzir gradientes irrealistas nas vizinhanças destas fronteiras, neste caso alterando significativamente o caráter da solução [34].



**Figura 2.3** - Malha baseada num sistema de coordenadas curvilíneas para a representação da região de fronteira de um domínio qualquer.

A figura (2.3) mostra um sistema de coordenadas adaptado à geometria do domínio. Desta maneira contorna-se o problema da aplicação das condições de contorno, uma vez que existem linhas coordenadas sobre os limites físicos da região em estudo. Neste procedimento, um sistema de coordenadas curvilíneas é adotado. Isto é feito através do relacionamento das coordenadas do domínio físico com um outro domínio chamado de transformado. Esta correlação

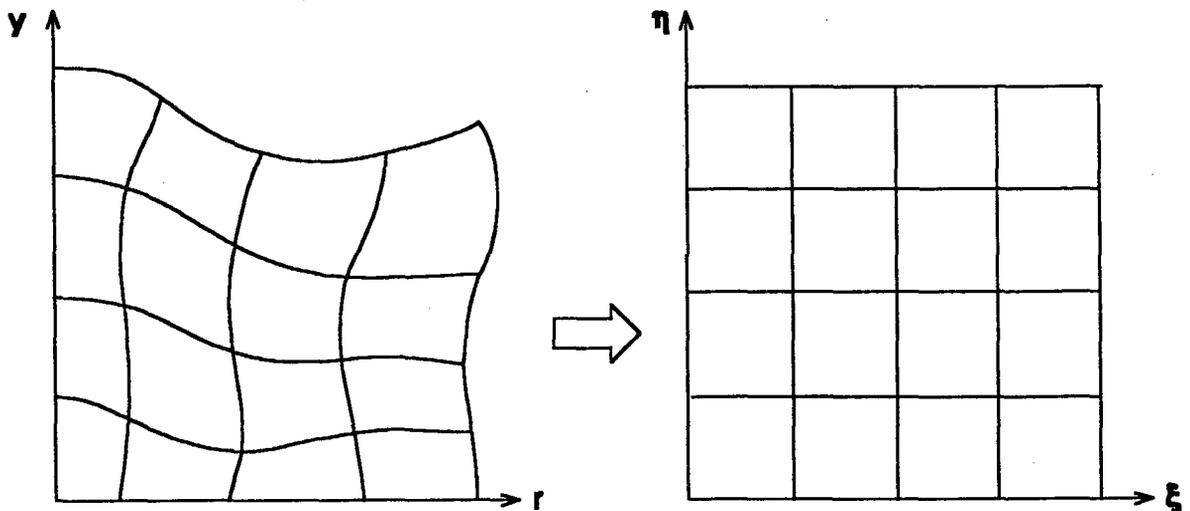
é definida através das métricas da transformação. Esta metodologia, embora traga alguns cálculos a mais na etapa de transformação das coordenadas, tem enormes vantagens sobre o método que emprega interpolações, uma vez que as condições de contorno são conhecidas exatamente nos pontos onde são necessárias.

Para o caso do presente trabalho, a transformação se dá do sistema de coordenadas cilíndricas  $(r, y)$  para o curvilíneo  $(\xi, \eta)$ . Genericamente significa encontrar as relações

$$\xi = \xi(r, y) \quad (2.12)$$

$$\eta = \eta(r, y) \quad (2.13)$$

onde cada ponto do plano de coordenadas cilíndricas encontra um correspondente no plano transformado. A transformação realizada está esquematizada na figura (2.4).



**Figura 2.4** - Representação esquemática da transformação do plano físico para o transformado.

A matriz jacobiana para esta transformação é dada por

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial r} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial r} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} \quad (2.14)$$

ou, introduzindo uma outra notação

$$J = \begin{vmatrix} \xi_r & \xi_y \\ \eta_r & \eta_y \end{vmatrix} \quad (2.15)$$

O determinante desta transformação é dado por

$$J = \det [J] = \xi_r \eta_y - \eta_r \xi_y \quad (2.16)$$

A transformação inversa de (2.12) e (2.13) é expressa por

$$r = r(\xi, \eta) \quad (2.17)$$

$$y = y(\xi, \eta) \quad (2.18)$$

e a sua matriz jacobiana, utilizando a notação anteriormente adotada, é

$$J_1 = \begin{vmatrix} r_\xi & r_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{vmatrix} \quad (2.19)$$

O determinante ou Jacobiano, neste caso é

$$J_1 = \det [J_1] = r_\xi y_\eta - r_\eta y_\xi \quad (2.20)$$

Facilmente conclui-se que as matrizes jacobianas (2.15) e (2.19) são relacionadas por

$$J = [J_1]^{-1} \quad (2.21)$$

Pode-se então obter as relações

$$\xi_r = y_\eta J \quad (2.22)$$

$$\eta_r = -y_\xi J \quad (2.23)$$

$$\eta_y = r_\xi J \quad (2.24)$$

$$\xi_y = -r_\eta J \quad (2.25)$$

As derivadas parciais são transformadas usando-se a regra da cadeia

$$f_r = f_\xi \xi_r + f_\eta \eta_r \quad (2.26)$$

$$f_y = f_\xi \xi_y + f_\eta \eta_y \quad (2.27)$$

Para a obtenção de derivadas de ordem maior, faz-se uso das equações (2.26) e (2.27) repetidamente.

Tomando agora a equação (2.6), aplicando a transformação para as derivadas parciais

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (rE) \xi_r + \frac{\partial}{\partial \eta} (rE) \eta_r \right] + \left[ \frac{\partial F}{\partial \xi} \xi_y + \frac{\partial F}{\partial \eta} \eta_y \right] + P^\phi = \\ \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (rR) \xi_r + \frac{\partial}{\partial \eta} (rR) \eta_r \right] + \left[ \frac{\partial S}{\partial \xi} \xi_y + \frac{\partial S}{\partial \eta} \eta_y \right] + S^\phi \end{aligned} \quad (2.28)$$

Substituindo as relações de (2.22) até (2.25), após alguma manipulação algébrica teremos

$$\frac{\partial \hat{q}}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} + \hat{P}^\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{R}}{\partial \xi} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{S}}{\partial \eta} + \hat{S}^\phi \quad (2.29)$$

onde

$$\hat{q} = \frac{q}{J} \quad (2.30)$$

$$\hat{E} = \frac{r(E\xi_r + F\xi_y)}{J} \quad (2.31)$$

$$\hat{F} = \frac{r(F\eta_y + E\eta_r)}{J} \quad (2.32)$$

$$\hat{P}^\phi = \frac{P^\phi}{J} \quad (2.33)$$

$$\hat{R} = \frac{r(R\xi_r + S\xi_y)}{J} \quad (2.34)$$

$$\hat{S} = \frac{r(S\eta_y + R\eta_r)}{J} \quad (2.35)$$

$$\hat{S}^\phi = \frac{S^\phi}{J} \quad (2.36)$$

As expressões para os parâmetros  $S^\phi$  e  $P^\phi$ , que são os termos fonte e de pressão para as equações transformadas, são apresentadas na tabela 2.2.

	$\phi = 1$	$\phi = \mathbf{u}$	$\phi = \mathbf{v}$	$\phi = \mathbf{T}$
$S^\phi$	0	0	$\rho g \beta (T - T_{ref})$	0
$P^\phi$	0	$\frac{\partial P}{\partial \xi} y_\eta - \frac{\partial P}{\partial \eta} y_\xi$	$\frac{\partial P}{\partial \eta} r_\xi - \frac{\partial P}{\partial \xi} r_\eta$	0

Tabela 2.2 - Parâmetros  $S^\phi$  e  $P^\phi$  para a equação (2.29).

Tomando-se isoladamente o segundo e o terceiro termos da equação (2.29) e remontando os mesmos, através do uso das equações (2.31) e (2.32)

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{r(E\xi_r + F\xi_y)}{J} \right] &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \rho r \phi \frac{(u\xi_r + v\xi_y)}{J} \right] = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \rho r \phi \frac{(uy_\eta J - vr_\eta J)}{J} \right] = \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \rho r \phi \left( u \frac{\partial y}{\partial \eta} - v \frac{\partial r}{\partial \eta} \right) \right] = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho r \phi U) \end{aligned} \quad (2.37)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{r(F\eta_y + E\eta_r)}{J} \right] &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \rho r \phi \frac{(v\eta_y + u\eta_r)}{J} \right] = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \rho r \phi \frac{(vr_\xi J - uy_\xi J)}{J} \right] = \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \rho r \phi \left( v \frac{\partial r}{\partial \xi} - u \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \right] = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho r \phi V) \end{aligned} \quad (2.37)$$

observa-se nestas equações que

$$U = u \frac{\partial y}{\partial \eta} - v \frac{\partial r}{\partial \eta} \quad (2.39)$$

$$V = v \frac{\partial r}{\partial \xi} - u \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (2.40)$$

onde  $U$  e  $V$  são, por definição, as componentes contravariantes do vetor velocidade sem normalização métrica, nas direções tangencial e perpendicular às linhas  $\xi$  e  $\eta$ . Estas componentes, se multiplicadas por  $2\pi r$ , representam a própria vazão de massa naquela face onde estão definidas. Um procedimento semelhante para a definição das componentes contravariantes partindo de um sistema de coordenadas cartesianas e o motivo de sua escolha como sendo as variáveis independentes no plano transformado, pode ser visto em [35].

Reconstruindo as parcelas difusivas da equação (2.29) através das equações (2.34) e (2.35), para o primeiro termo difusivo, tem-se

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{r(R\xi_r + S\xi_y)}{J} \right] = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \frac{r}{J} \left[ \left( \Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \xi_r + \left( \Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \xi_y \right] \right\} =$$
(2.41)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ r \frac{\partial \phi}{\partial \xi} (\Gamma^\phi J \alpha) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ r \frac{\partial \phi}{\partial \eta} (-\Gamma^\phi J \beta) \right]$$

onde

$$\alpha = y_\eta^2 + r_\eta^2$$
(2.42)

$$\beta = y_\xi y_\eta + r_\xi r_\eta$$
(2.43)

Para o segundo termo difusivo, obtém-se

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{r(S\eta_y + R\eta_r)}{J} \right] = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{r}{J} \left[ \left( \Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \eta_y + \left( \Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \eta_r \right] \right\} =$$
(2.44)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ r \frac{\partial \phi}{\partial \eta} (\Gamma^\phi J \gamma) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ r \frac{\partial \phi}{\partial \xi} (-\Gamma^\phi J \beta) \right]$$

onde

$$\gamma = r_\xi^2 + y_\xi^2$$
(2.45)

E finalmente

$$\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho r \phi U) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho r \phi V) + \hat{P}^\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ C_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right] +$$
(2.46)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ C_2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ C_4 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ C_2 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right] + \hat{S}^\phi$$

onde

$$C_1 = r \Gamma^\phi J \alpha$$
(2.47)

$$C_2 = -r \Gamma^\phi J \beta$$
(2.48)

$$C_4 = r \Gamma^\phi J \gamma$$
(2.49)

Então as equações governantes para o fenômeno em questão no plano transformado são

### Continuidade

$$\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi}(\rho r U) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta}(\rho r V) = 0 \quad (2.50)$$

### Movimento em $r$

$$\begin{aligned} \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi}(\rho r u U) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta}(\rho r u V) + \hat{P}^u = \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ (r \mu J \alpha) \frac{\partial u}{\partial \eta} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ (-r \mu J \beta) \frac{\partial u}{\partial \eta} \right] + \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ (r \mu J \gamma) \frac{\partial u}{\partial \eta} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ (-r \mu J \beta) \frac{\partial u}{\partial \xi} \right] + \hat{S}^u \end{aligned} \quad (2.51)$$

### Movimento em $y$

$$\begin{aligned} \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi}(\rho r v U) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta}(\rho r v V) + \hat{P}^v = \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ (r \mu J \alpha) \frac{\partial v}{\partial \eta} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ (-r \mu J \beta) \frac{\partial v}{\partial \eta} \right] + \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ (r \mu J \gamma) \frac{\partial v}{\partial \eta} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ (-r \mu J \beta) \frac{\partial v}{\partial \xi} \right] + \\ \frac{\rho g \beta}{J} (T - T_{ref}) \end{aligned} \quad (2.52)$$

### Energia

$$\begin{aligned} \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t}(\rho T) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi}(\rho r T U) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta}(\rho r T V) + \hat{P}^T = \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ (r \mu J \alpha) \frac{\partial T}{\partial \eta} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ (-r \mu J \beta) \frac{\partial T}{\partial \eta} \right] + \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ (r \mu J \gamma) \frac{\partial T}{\partial \eta} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ (-r \mu J \beta) \frac{\partial T}{\partial \xi} \right] + \hat{S}^T \end{aligned} \quad (2.53)$$

## 2.5 - APROXIMAÇÃO DAS EQUAÇÕES

A adoção da técnica dos volumes finitos, uma vez obtidas as equações diferenciais parciais governantes do fenômeno para o plano transformado, implica em integrar as mesmas numa determinada região do domínio. Isto significa aceitar a hipótese de que nesta região especificada a propriedade considerada é igual à média das propriedades infinitesimais que compõe todo o volume.

### 2.5.1 - LOCALIZAÇÃO DAS VARIÁVEIS DEPENDENTES NA MALHA

Inicialmente devemos especificar a posição relativa de cada incógnita na malha computacional. É de grande importância adotar uma configuração consistente fisicamente com o problema. Seguindo este raciocínio, Maliska [1] sugeriu que a disposição mais adequada para as velocidades é exatamente onde estas são necessárias para o cálculo do fluxo de massa, ou seja, no centro de cada uma das quatro faces do volume de controle para a equação da continuidade, evitando-se assim o cálculo de médias. Da mesma forma, ainda mantendo a consistência física, as pressões devem estar dispostas de tal forma que seus gradientes sejam os responsáveis pelas velocidades ou suas alterações. Portanto devem estar armazenadas no centro dos volumes. Na figura (2.5) vê-se a disposição das variáveis na malha e os volumes de controle para cada uma delas. Outras propriedades escalares também são armazenadas no centro dos volumes.

Observando-se ainda a figura (2.5) nota-se a semelhança da disposição das pressões com aquela adotada em sistemas ortogonais. Para a determinação da velocidade  $U$  na face este, por exemplo, utilizando a equação da quantidade de movimento apropriada, precisaremos dos gradientes de pressão na direção  $\xi$ , dado pelas pressões localizadas em **E** e **P**, e na direção  $\eta$ , dado pelas pressões localizadas nos pontos **N**, **NE**, **S** e **SE**, resultando num esquema de nove pontos.

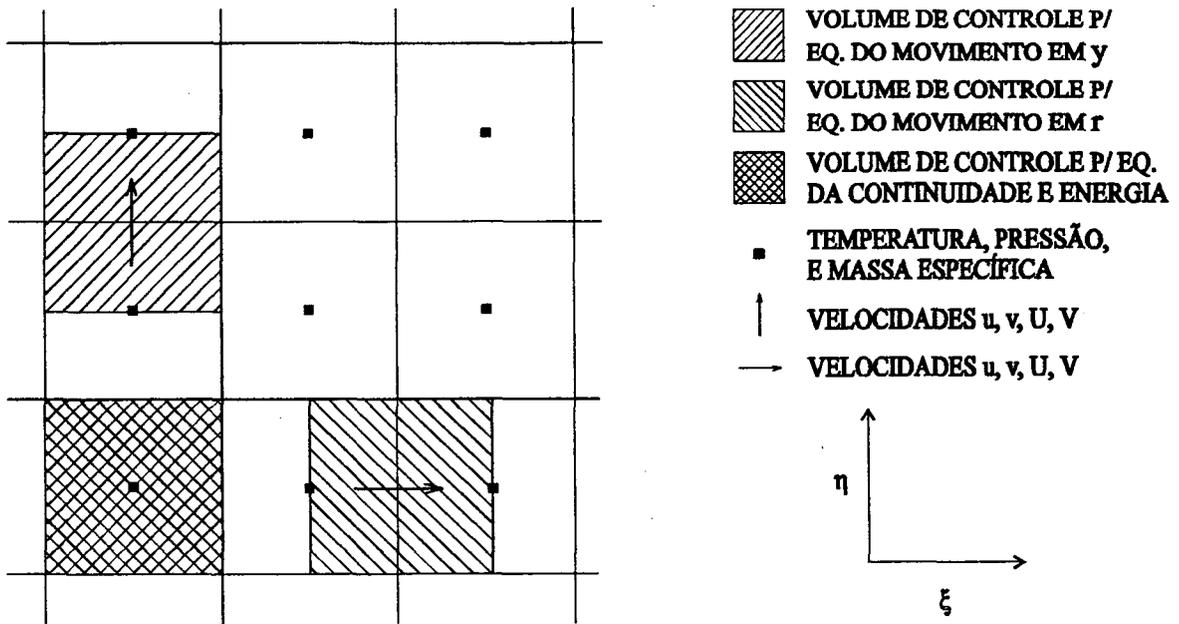


Figura 2.5 - Disposição das variáveis na malha computacional e respectivos volumes de controle.

## 2.5.2 - INTEGRAÇÃO DAS EQUAÇÕES NO PLANO TRANSFORMADO

Tomando a equação (2.46) e rearranjando-a, encontramos

$$\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \phi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi}(\rho r \phi U) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta}(\rho r \phi V) + \hat{P}^\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ C_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ C_4 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right] + \hat{S} T^\phi \quad (2.54)$$

onde a expressão

$$\hat{S} T^\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ C_2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ C_3 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right] + \hat{S}^\phi \quad (2.55)$$

apresenta termos difusivos com derivadas cruzadas.

A figura (2.6) apresenta o volume de controle elementar sobre o qual será executada a integração, no plano físico. No plano transformado, conforme pode ser visto na figura (2.4), a integração deverá ser feita entre a linha de  $\eta$  constante inferior e a outra superior, bem como da linha  $\xi$  constante lateral esquerda até a linha  $\xi$  lateral direita. Para considerar a axissimetria, deve-se ainda levar em conta o perímetro médio do volume, definido pela posição de  $r_p$ . A consideração temporal é feita integrando-se as equações no intervalo de tempo  $\Delta t$ .

Tem-se então, para o primeiro termo da equação genérica

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{\xi_w}^{\xi_e} \int_{\eta_s}^{\eta_n} \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) 2\pi r_p d\eta d\xi dt \quad (2.56)$$

Supondo que o valor de  $(\rho \phi)$  seja constante em todo o volume integrado, tem-se

$$\frac{1}{J} [(\rho_P \phi_P)^{t+\Delta t} - (\rho_P \phi_P)^t] 2\pi r_p \Delta \eta \Delta \xi \quad (2.57)$$

Para o segundo termo da equação tem-se

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{\eta_s}^{\eta_n} \int_{\xi_w}^{\xi_e} \frac{1}{r_p} \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho r \phi U) 2\pi r_p d\xi d\eta dt = \quad (2.58)$$

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{\eta_s}^{\eta_n} [(\rho r \phi U)|_e - (\rho r \phi U)|_w] 2\pi d\eta dt =$$

Admitindo-se que as propriedades são constantes ou com distribuição linear ao longo de cada face, chega-se a

$$\int_t^{t+\Delta t} [(\rho r \phi U)|_e - (\rho r \phi U)|_w] 2\pi \int_{\eta_s}^{\eta_n} d\eta dt \quad (2.59)$$

e da integração entre as linhas  $\eta$  resulta

$$\int_t^{t+\Delta t} [(\rho r \phi U)|_e - (\rho r \phi U)|_w] 2\pi \Delta \eta dt \tag{2.60}$$

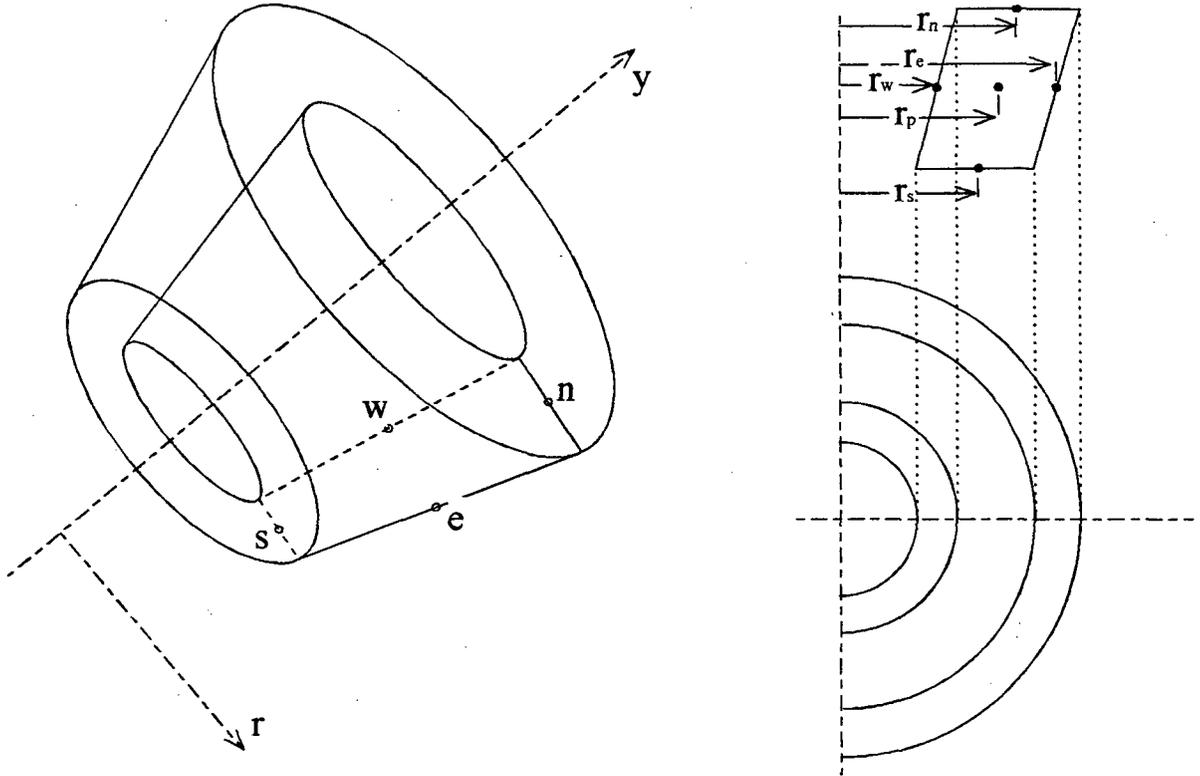


Figura 2.6 - Volume de controle elementar onde é executada a integração, representado no plano fisico.

Executando a integração no tempo, finalmente obtém-se a expressão

$$2\pi (\dot{m}_e \phi_e)^{t+\Delta t} \Delta \eta \Delta t - 2\pi (\dot{m}_w \phi_w)^{t+\Delta t} \Delta \eta \Delta t \tag{2.61}$$

onde

$$\dot{m}_e = (\rho r U)|_e \tag{2.62}$$

$$\dot{m}_w = (\rho r U)|_w \tag{2.63}$$

O termo  $2\pi$ , por aparecer em todas as equações, pode ser simplificado e doravante não mais será apresentado. Para os demais termos da equação genérica

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{\xi_w}^{\xi_e} \int_{\eta_s}^{\eta_n} \frac{1}{r_p} \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho r \phi V) r_p d\eta d\xi dt = \quad (2.64)$$

$$(\dot{m}_n \phi_n)^{t+\Delta t} \Delta \xi \Delta t - (\dot{m}_s \phi_s)^{t+\Delta t} \Delta \xi \Delta t$$

onde

$$\dot{m}_n = (\rho r V)|_n \quad (2.65)$$

$$\dot{m}_s = (\rho r V)|_s \quad (2.66)$$

Para o primeiro termo difusivo da equação (2.54)

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{\eta_s}^{\eta_n} \int_{\xi_w}^{\xi_e} \frac{1}{r_p} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ C_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right] r_p d\xi d\eta dt = \quad (2.67)$$

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{\eta_s}^{\eta_n} \left[ \left( C_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)_e - \left( C_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)_w \right] d\eta dt =$$

Utilizando a suposição anterior, que considera as propriedades constantes ao longo das faces

$$\int_t^{t+\Delta t} \left[ \left( C_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)_e - \left( C_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)_w \right] \Delta \eta dt \quad (2.68)$$

e finalmente tem-se

$$\left( C_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)_e^{t+\Delta t} \Delta \eta \Delta t - \left( C_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)_w^{t+\Delta t} \Delta \eta \Delta t \quad (2.69)$$

Para o segundo termo difusivo

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{\xi_w}^{\xi_e} \int_{\eta_s}^{\eta_n} \frac{1}{r_P} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ C_4 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right] r_P d\eta d\xi dt = \quad (2.70)$$

$$\left( C_4 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)_n^{t+\Delta t} \Delta \xi \Delta t - \left( C_4 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)_s^{t+\Delta t} \Delta \xi \Delta t$$

Os termos de pressão e fonte são integrados da seguinte forma

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{\xi_w}^{\xi_e} \int_{\eta_s}^{\eta_n} \hat{P}^\phi r_P d\eta d\xi dt = L |\hat{P}^\phi|_{r_P} \Delta \eta \Delta \xi \Delta t \quad (2.71)$$

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{\xi_w}^{\xi_e} \int_{\eta_s}^{\eta_n} \hat{S} T^\phi r_P d\eta d\xi dt = L |\hat{S} T^\phi|_{r_P} \Delta \eta \Delta \xi \Delta t \quad (2.72)$$

Remontando a equação geral

$$\begin{aligned} \frac{1}{J} [(\rho_P \phi_P)^{t+\Delta t} - (\rho_P \phi_P)^t] r_P \Delta \eta \Delta \xi + (\dot{m}_e \phi_e)^{t+\Delta t} \Delta \eta \Delta t - (\dot{m}_w \phi_w)^{t+\Delta t} \Delta \eta \Delta t + \\ (\dot{m}_n \phi_n)^{t+\Delta t} \Delta \xi \Delta t - (\dot{m}_s \phi_s)^{t+\Delta t} \Delta \xi \Delta t + L |\hat{P}^\phi|_{r_P} \Delta \eta \Delta \xi = \\ \left[ C_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right]_e^{t+\Delta t} \Delta \eta \Delta t - \left[ C_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right]_w^{t+\Delta t} \Delta \eta \Delta t + \\ \left[ C_4 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right]_n^{t+\Delta t} \Delta \xi \Delta t - \left[ C_4 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right]_s^{t+\Delta t} \Delta \xi \Delta t + \\ L |\hat{S} T^\phi|_{r_P} \Delta \eta \Delta \xi \end{aligned} \quad (2.73)$$

pode-se verificar a necessidade de avaliar os valores da propriedade  $\phi$  e seus gradientes em relação a  $\xi$  e  $\eta$  nas faces do volume. Uma vez que só dispomos dos valores de  $\phi$  no centro de cada volume, adotaremos neste trabalho, o **WUDS** (Weighted Upstream Differencing Scheme), de Raithby e Torrance [36] para estas avaliações.

$$\phi_e = (1/2 + \bar{\alpha}_e)\phi_P + (1/2 - \bar{\alpha}_e)\phi_E \quad (2.74)$$

$$\phi_w = (1/2 + \bar{\alpha}_w)\phi_W + (1/2 - \bar{\alpha}_w)\phi_P \quad (2.75)$$

$$\phi_n = (1/2 + \bar{\alpha}_n)\phi_P + (1/2 - \bar{\alpha}_n)\phi_N \quad (2.76)$$

$$\phi_s = (1/2 + \bar{\alpha}_s)\phi_S + (1/2 - \bar{\alpha}_s)\phi_P \quad (2.77)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right|_e = \bar{\beta}_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta \xi} \quad (2.78)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right|_w = \bar{\beta}_w \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta \xi} \quad (2.79)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right|_n = \bar{\beta}_n \frac{\phi_N - \phi_P}{\Delta \eta} \quad (2.80)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right|_s = \bar{\beta}_s \frac{\phi_P - \phi_S}{\Delta \eta} \quad (2.81)$$

Onde os termos  $\bar{\alpha}$  e  $\bar{\beta}$  são dados em função do número de Peclet, que relaciona as parcelas de influência convectiva e difusiva, conforme a equação (2.84). Estes valores são encontrados no trabalho de Raithby [36],

$$|\bar{\alpha}| = \frac{(Pe|_{face})^2}{10 + 2(Pe|_{face})^2} \quad (2.82)$$

$$|\bar{\beta}| = \frac{1 + 0,005(Pe|_{face})^2}{1 + 0,05(Pe|_{face})^2} \quad (2.83)$$

$$Pe|_{face} = \frac{\rho U}{C_i} \Big|_{face} \quad (2.84)$$

onde o subscrito  $i$  vale 2 para as faces este e oeste e 4 para as faces norte e sul.

Utilizando-se a equação da continuidade integrada no mesmo volume de controle definido na figura (2.6), expressa por

$$(\dot{m}_e - \dot{m}_w)\Delta \eta + (\dot{m}_n - \dot{m}_s)\Delta \xi = 0 \quad (2.85)$$

e realizando alguma manipulação algébrica sobre a equação (2.73), chega-se a

$$\frac{\rho_P}{J_P} \frac{\Delta V}{\Delta t} \phi_P^{n+1} - \frac{\rho_P}{J_P} \frac{\Delta V}{\Delta t} \phi_P^n + A_P^* \phi_P^{n+\theta} = A_e \phi_E^{n+\theta} + A_w \phi_W^{n+\theta} + A_n \phi_N^{n+\theta} + A_s \phi_S^{n+\theta} + L |\hat{S}T\phi| \Delta V - L |\hat{P}\phi| \Delta V \quad (2.86)$$

onde

$$\Delta V = r_P \Delta \eta \Delta \xi \quad (2.87)$$

$$A_e = \left[ -\hat{m}_e (1/2 - \bar{\alpha}_e) + C_{1_e} \bar{\beta}_e \frac{\Delta \eta}{\Delta \xi} \right]^{t+\theta} \quad (2.88)$$

$$A_w = \left[ \hat{m}_w (1/2 + \bar{\alpha}_w) + C_{1_w} \bar{\beta}_w \frac{\Delta \eta}{\Delta \xi} \right]^{t+\theta} \quad (2.89)$$

$$A_n = \left[ -\hat{m}_n (1/2 - \bar{\alpha}_n) + C_{4_n} \bar{\beta}_n \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} \right]^{t+\theta} \quad (2.90)$$

$$A_s = \left[ \hat{m}_s (1/2 + \bar{\alpha}_s) + C_{4_s} \bar{\beta}_s \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} \right]^{t+\theta} \quad (2.91)$$

e

$$A_P^* = A_e + A_w + A_n + A_s \quad (2.92)$$

Na equação (2.86), por conveniência, passamos a indicar  $t+\Delta t$  por  $n+1$ , significando o instante de tempo atual, e  $t$  por  $n$ , indicando o instante de tempo anterior. Para  $\theta = 1$ , a formulação é totalmente implícita. Se  $\theta = 0$ , a formulação é explícita.

Quando a formulação é explícita, existe um valor limite para o avanço de tempo  $\Delta t$  que garante a positividade do coeficiente de  $\phi_P^n$ , impedindo assim a divergência dos métodos que serão empregados para resolver o sistema linear de equações. Este valor limite é dado por

$$\Delta t_{\max} = \rho_P \frac{\Delta V}{JA_P^*} \quad (2.93)$$

Definindo o multiplicador de tempo  $E$ , conforme Raithby [37], para a formulação explícita podemos escolher um valor entre 0 e 1, de tal forma que

$$\Delta t = E \Delta t_{\max} \quad (2.94)$$

Quando se deseja obter o transiente real de uma solução, é necessário que  $\Delta t$  seja igual em todos os volumes e equações. Portanto o valor de  $E$  pode variar de volume para volume do domínio. Se o interesse é pela solução de regime permanente, como é o presente caso, o valor de  $E$  pode ser constante em todo o domínio, chegando-se ao regime permanente através de uma solução em que o transiente é distorcido, ou seja, o avanço no tempo é variável para cada volume de controle.

Utilizando o conceito do multiplicador de tempo  $E$ , para a formulação explícita temos

$$\begin{aligned} \frac{A_P^*}{E} \phi_P^{n+1} = A_P^* \left( \frac{1-E}{E} \right) \phi_P^n + A_S \phi_S^n + A_N \phi_N^n + A_E \phi_E^n + A_W \phi_W^n - \\ L |\hat{P}^\phi|_{r_P} \Delta \eta \Delta \xi + L |\hat{S}T^\phi|_{r_P} \Delta \eta \Delta \xi \end{aligned} \quad (2.95)$$

Fazendo  $\theta = 1$  na equação (2.86), obtemos a seguinte relação para a formulação implícita

$$\begin{aligned} A_P \phi_P^{n+1} = A_E \phi_E^{n+1} + A_W \phi_W^{n+1} + A_S \phi_S^{n+1} + A_N \phi_N^{n+1} + \frac{A_P}{(1+E)} \phi_P^n - \\ - L |\hat{P}^\phi|_{r_P} \Delta \eta \Delta \xi + L |\hat{S}T^\phi|_{r_P} \Delta \eta \Delta \xi \end{aligned} \quad (2.96)$$

onde

$$A_P = \rho_P \frac{\Delta V}{J \Delta t} + A_P^* \quad (2.97)$$

Neste caso podemos ter  $E$  maior que 1, tanto para o cálculo do transiente real quanto para o distorcido, pois a positividade dos coeficientes independe deste valor. Com este fator de

sobrerrelaxação pode-se obter uma convergência mais rápida.

Usando as relações (2.93) e (2.94), obtém-se

$$\frac{A_P^*}{E} = \rho_P \frac{\Delta V}{J \Delta t} \quad (2.98)$$

e  $A_P$  pode ser expresso como

$$A_P = A_P^* \left( \frac{1 + E}{E} \right) \quad (2.99)$$

Finalmente, as equações governantes ficam

*Conservação da massa*

$$[(\rho r U)_e - (\rho r U)_w] \Delta \eta + [(\rho r V)_n - (\rho r V)_s] \Delta \xi = 0 \quad (2.100)$$

*Conservação da quantidade de movimento na direção r*

$$A_P u_P^{n+1} = A_e u_e^{n+1} + A_w u_w^{n+1} + A_s u_s^{n+1} + A_n u_n^{n+1} + \frac{A_P}{(1 + E)} u_P^n - L |\hat{P}^u| r_P \Delta \eta \Delta \xi + L |\hat{S} T^u| r_P \Delta \eta \Delta \xi \quad (2.101)$$

*Conservação da quantidade de movimento na direção y*

$$A_P v_P^{n+1} = A_e v_e^{n+1} + A_w v_w^{n+1} + A_s v_s^{n+1} + A_n v_n^{n+1} + \frac{A_P}{(1 + E)} v_P^n - L |\hat{P}^v| r_P \Delta \eta \Delta \xi + L |\hat{S} T^v| r_P \Delta \eta \Delta \xi \quad (2.102)$$

*Conservação da energia*

$$A_p T_P^{n+1} = A_e T_E^{n+1} + A_w T_W^{n+1} + A_s T_S^{n+1} + A_n T_N^{n+1} + \frac{A_p}{(1 + E)} T_P^n + L |\hat{S} T^T| r_p \Delta \eta \Delta \xi \quad (2.103)$$

### ESQUEMA NUMÉRICO DE SOLUÇÃO CONDIÇÕES DE CONTORNO

---

---

#### 3.1 - INTRODUÇÃO

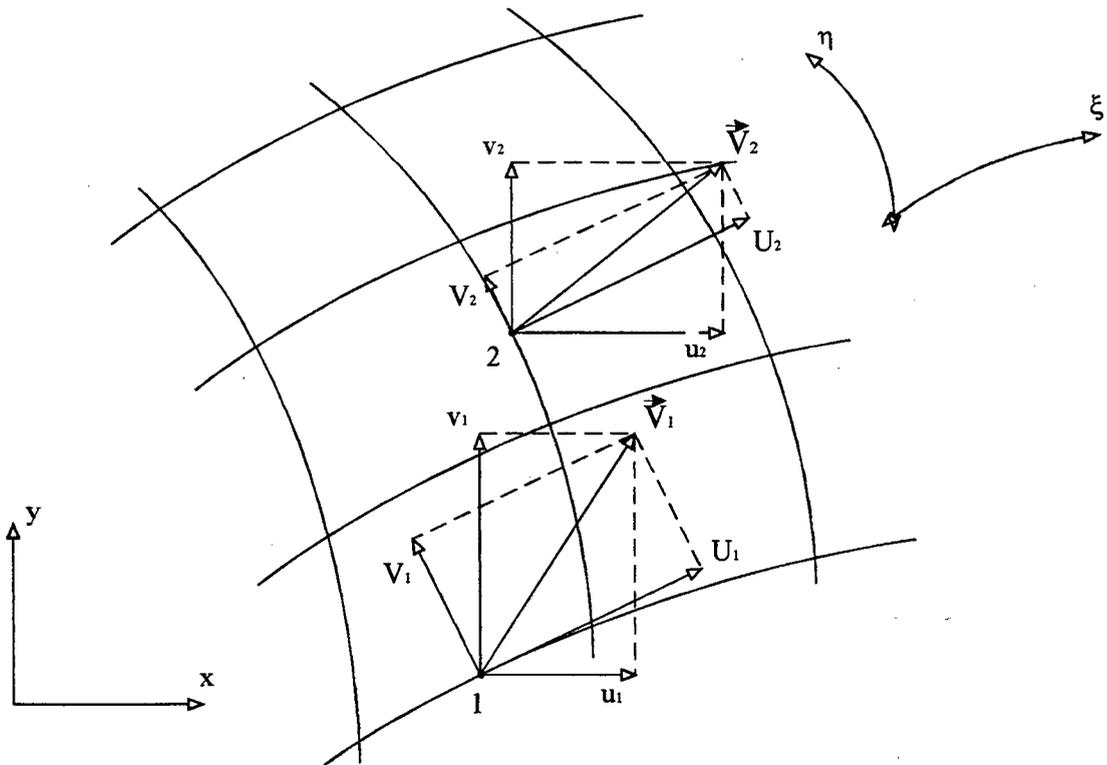
Neste capítulo desenvolve-se a equação para a determinação do campo de pressão, necessária para o fechamento do sistema de equações governantes apresentadas no capítulo 2. Para isto, comenta-se sobre a conveniência da obtenção das equações para a conservação da quantidade de movimento em termos das velocidades contravariantes para posterior substituição na equação da conservação da massa. Numa última etapa, colocam-se as condições de contorno utilizadas neste trabalho para a velocidade, pressão e temperatura.

#### 3.2 - ACOPLAMENTO PRESSÃO/VELOCIDADE

Conforme já discutido na seção 2.3, a impossibilidade do uso da equação de estado para a evolução do campo de pressão introduz um forte acoplamento pressão-velocidade, uma vez que é necessário avaliar este campo que, inserido nas equações de conservação da quantidade de movimento, deve resultar em velocidades que satisfaçam a equação da conservação da massa.

O esquema numérico para tratar da evolução do campo de pressão adotado neste trabalho é o **PRIME** (update **P**ressure **I**mplicit and **M**omentum **E**xplicit). Uma descrição detalhada sobre este procedimento é dada por Maliska [1].

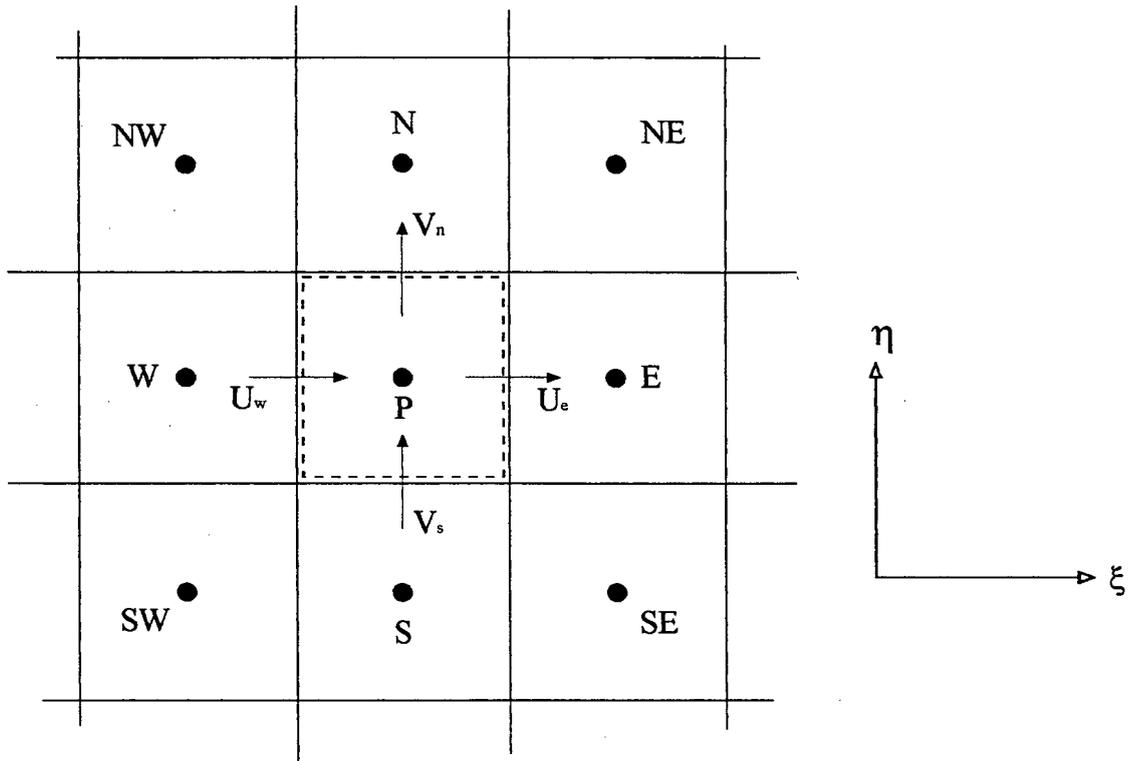
A relação para a pressão é obtida substituindo-se as equações da quantidade de movimento na equação da conservação da massa. Lembrando que  $u$  e  $v$  estão relacionadas a um sistema de coordenadas cartesianas, e examinando a figura (3.1), conclui-se que para o cálculo do fluxo de massa numa determinada face é necessário o conhecimento prévio destas duas componentes de velocidade. Para o balanço de massa em todo o volume de controle tem-se, portanto, que utilizar oito componentes de velocidade.



**Figura 3.1** - Componentes cartesianas  $u$  e  $v$  e contravariantes  $U$  e  $V$  do vetor velocidade.

Considerando ainda a possibilidade de uso das duas velocidades contravariantes,  $U$  para a avaliação do fluxo pelas linhas de  $\xi$  constante (faces este e oeste) e  $V$  para o mesmo cálculo sobre as linhas de  $\eta$  constante (faces sul e norte), torna-se recomendável escrever as equações

para a quantidade de movimento em termos destas velocidades. Desta maneira, utilizando apenas quatro velocidades, podemos realizar o balanço de massa pretendido, como pode ser visto na figura (3.2).



**Figura 3.2** - Discretização utilizada para a obtenção dos gradientes de pressão para a equação da pressão.

Usando as equações (2.100) e (2.101) com as equações (2.39) e (2.40), pode-se obter

$$U_P = \hat{U}_P - \left| \frac{\Delta P}{\Delta \xi} \frac{\Delta V}{A_P^U} \alpha \right|_P + \left| \frac{\Delta P}{\Delta \eta} \frac{\Delta V}{A_P^U} \beta \right|_P \quad (3.1)$$

$$V_P = \hat{V}_P - \left| \frac{\Delta P}{\Delta \eta} \frac{\Delta V}{A_P^V} \gamma \right|_P + \left| \frac{\Delta P}{\Delta \xi} \frac{\Delta V}{A_P^V} \beta \right|_P \quad (3.2)$$

onde  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  foram definidos anteriormente e  $\hat{U}$  e  $\hat{V}$ , dados pelas equações (3.3) e (3.4), são grandezas que agrupam todos os termos explícitos (da iteração anterior) da equação da quantidade de movimento a qual correspondem, excetuando-se os termos de pressão.

$$\begin{aligned} \hat{U}_P = & \frac{A_e^U}{A_P^U} (y_{\eta_P} u_E - r_{\eta_P} v_E) + \frac{A_w^U}{A_P^U} (y_{\eta_P} u_W - r_{\eta_P} v_W) + \\ & \frac{A_n^U}{A_P^U} (y_{\eta_P} u_N - r_{\eta_P} v_N) + \frac{A_s^U}{A_P^U} (y_{\eta_P} u_S - r_{\eta_P} v_S) + \frac{B_P^U}{A_P^U} \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \hat{V}_P = & \frac{A_e^V}{A_P^V} (r_{\xi_P} v_E - y_{\xi_P} u_E) + \frac{A_w^V}{A_P^V} (r_{\xi_P} v_W - y_{\xi_P} u_W) + \\ & \frac{A_n^V}{A_P^V} (r_{\xi_P} v_N - y_{\xi_P} u_N) + \frac{A_s^V}{A_P^V} (r_{\xi_P} v_S - y_{\xi_P} u_S) + \frac{B_P^V}{A_P^V} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Neste novo arranjo, os termos fonte são

$$B_P^U = \left[ A_P^u \frac{u_P}{(1+E)} + L |\hat{S}T^u|_P \Delta V \right] y_{\eta_P} - \left[ A_P^v \frac{v_P}{(1+E)} + L |\hat{S}T^v|_P \Delta V \right] r_{\eta_P} \quad (3.5)$$

$$B_P^V = \left[ A_P^v \frac{v_P}{(1+E)} + L |\hat{S}T^v|_P \Delta V \right] r_{\xi_P} - \left[ A_P^u \frac{u_P}{(1+E)} + L |\hat{S}T^u|_P \Delta V \right] y_{\xi_P} \quad (3.6)$$

Em cada uma das equações obtidas para a conservação da quantidade de movimento em termos das velocidades contravariantes, os coeficientes para  $u$ ,  $v$ ,  $U$  ou  $V$  num mesmo ponto são iguais, pois estas variáveis estão localizadas no mesmo volume de controle. Assim, para o volume elementar de  $U$  e  $V$  temos, respectivamente, as relações (3.7) e (3.8).

$$A_P^u = A_P^v = A_P^U \quad (3.7)$$

$$A_P^u = A_P^v = A_P^V \quad (3.8)$$

As velocidades cartesianas, quando necessárias, podem ser obtidas das equações (3.1) e (3.2) através de

$$u = J(U r_{\xi} + V r_{\eta}) \quad (3.9)$$

$$v = J(U y_{\xi} + V y_{\eta}) \quad (3.10)$$

Ainda nas equações (3.1) e (3.2), utilizando-se a discretização mostrada na figura (3.2), podemos avaliar os gradientes de pressão nas direções  $\xi$  e  $\eta$  através de uma aproximação de segunda ordem, resultando

$$U_e = \hat{U}_e - \left| \frac{\alpha}{A_P^U} \frac{\Delta V}{\Delta \xi} \right|_e (P_E - P_P) + \frac{1}{4} \left| \frac{1}{A_P^U} \frac{\Delta V}{\Delta \eta} \beta \right|_e (P_N + P_{NE} - P_S - P_{SE}) \quad (3.11)$$

$$U_w = \hat{U}_w - \left| \frac{\alpha}{A_P^U} \frac{\Delta V}{\Delta \xi} \right|_w (P_P - P_W) + \frac{1}{4} \left| \frac{1}{A_P^U} \frac{\Delta V}{\Delta \eta} \beta \right|_w (P_N + P_{NW} - P_S - P_{SW}) \quad (3.12)$$

$$V_n = \hat{V}_n - \left| \frac{\gamma}{A_P^V} \frac{\Delta V}{\Delta \eta} \right|_n (P_N - P_P) + \frac{1}{4} \left| \frac{1}{A_P^V} \frac{\Delta V}{\Delta \xi} \beta \right|_n (P_E + P_{NE} - P_W - P_{NW}) \quad (3.13)$$

$$V_s = \hat{V}_s - \left| \frac{\gamma}{A_P^V} \frac{\Delta V}{\Delta \eta} \right|_s (P_P - P_S) + \frac{1}{4} \left| \frac{1}{A_P^V} \frac{\Delta V}{\Delta \xi} \beta \right|_s (P_E + P_{SE} - P_W - P_{SW}) \quad (3.14)$$

Conhecidas as velocidades contravariantes  $U$  e  $V$ , representativas do fluxo de massa em cada uma das faces do volume de controle para a equação da continuidade, procede-se o balanço de massa. Substituindo-se as equações (3.11), (3.12), (3.13) e (3.14) na equação (2.100) obtém-se

$$A_p P_P = A_e P_E + A_w P_W + A_n P_N + A_s P_S + A_{ne} P_{NE} + A_{nw} P_{NW} + A_{se} P_{SE} + A_{sw} P_{SW} + B \quad (3.15)$$

onde os coeficientes são dados por

$$A_P = \left| r \frac{\alpha}{A_P^U} \Delta V \right|_e + \left| r \frac{\alpha}{A_P^U} \Delta V \right|_w + \left| r \frac{\gamma}{A_P^V} \Delta V \right|_n + \left| r \frac{\gamma}{A_P^V} \Delta V \right|_s \quad (3.16)$$

$$A_e = \left| r \frac{\alpha}{A_P^U} \Delta V \right|_e + \frac{1}{4} \left| r \frac{\beta}{A_P^V} \Delta V \right|_s - \frac{1}{4} \left| r \frac{\beta}{A_P^V} \Delta V \right|_n \quad (3.17)$$

$$A_w = \left| r \frac{\alpha}{A_P^U} \Delta V \right|_w + \frac{1}{4} \left| r \frac{\beta}{A_P^V} \Delta V \right|_n - \frac{1}{4} \left| r \frac{\beta}{A_P^V} \Delta V \right|_s \quad (3.18)$$

$$A_n = \left| r \frac{\gamma}{A_P^V} \Delta V \right|_n - \frac{1}{4} \left| r \frac{\beta}{A_P^U} \Delta V \right|_e + \frac{1}{4} \left| r \frac{\beta}{A_P^U} \Delta V \right|_w \quad (3.19)$$

$$A_{s_i} = \left| r \frac{\gamma}{A_P^V} \Delta V \right|_s + \frac{1}{4} \left| r \frac{\beta}{A_P^U} \Delta V \right|_e - \frac{1}{4} \left| r \frac{\beta}{A_P^U} \Delta V \right|_w \quad (3.20)$$

$$A_{ne} = -\frac{1}{4} \left| r \frac{\beta}{A_P^U} \Delta V \right|_e - \frac{1}{4} \left| r \frac{\beta}{A_P^V} \Delta V \right|_n \quad (3.21)$$

$$A_{nw} = \frac{1}{4} \left| r \frac{\beta}{A_P^U} \Delta V \right|_w + \frac{1}{4} \left| r \frac{\beta}{A_P^V} \Delta V \right|_n \quad (3.22)$$

$$A_{se} = \frac{1}{4} \left| r \frac{\beta}{A_P^U} \Delta V \right|_e + \frac{1}{4} \left| r \frac{\beta}{A_P^V} \Delta V \right|_s \quad (3.23)$$

$$A_{sw} = -\frac{1}{4} \left| r \frac{\beta}{A_P^U} \Delta V \right|_w - \frac{1}{4} \left| r \frac{\beta}{A_P^V} \Delta V \right|_s \quad (3.24)$$

e

$$B = (r\hat{U})_w - (r\hat{U})_e + (r\hat{V})_s - (r\hat{V})_n \quad (3.25)$$

A equação (3.15) dá a pressão para um ponto interno da malha. Para os pontos de pressão da fronteira, precisa-se encontrar as equações para cada uma das situações existentes. Para tanto, é necessário avaliar os gradientes de pressão das equações para as velocidades (3.11), (3.12), (3.13) e (3.14) considerando a condição de contorno existente, e posteriormente aplicar o mesmo processo adotado para a obtenção da equação (3.15). Este procedimento será explicado na seção concernente às condições de contorno.

Recapitulando, o sistema de equações governantes, agora fechado, fica definido da seguinte forma

- Conservação da massa, dada pela equação (2.100);
- Conservação da quantidade de movimento para  $U$ , equação (3.1);
- Conservação da quantidade de movimento para  $V$ , equação (3.2);
- Conservação da energia, dada pela equação (2.103), e
- Equação (3.15) para a pressão.

O algoritmo de solução destas equações é dado a seguir.

- (1) Estimar os campos iniciais de pressão, velocidade e temperatura em todo o domínio;
- (2) Calcular os coeficientes das equações (2.101) e (2.102) para a conservação da quantidade de movimento;
- (3) Calcular as velocidades  $\bar{U}$  e  $\bar{V}$ , através das equações algébricas (3.3) e (3.4);
- (4) Calcular o campo de pressão, através da equação (3.15);
- (5) Corrigir as velocidades  $U$  e  $V$ , usando as equações (3.1) e (3.2);
- (6) Resolver a equação da energia (2.103), obtendo o campo de temperatura;
- (7) Calcular as velocidades cartesianas  $u$  e  $v$  usando as equações (3.9) e (3.10);
- (8) Retornar ao item (2) até que a convergência seja atingida. Com este processo iterativo são levadas em conta as não-linearidades das equações e o acoplamento entre elas.

### 3.3 - CONDIÇÕES DE CONTORNO

Já tendo sido obtido o sistema de equações diferenciais discretizadas, governantes do fenômeno em estudo, é necessário agora especificar as condições de contorno de forma também discretizada. A aplicação das condições de contorno para a velocidade será feita através do uso de volumes fictícios; para a pressão utilizar-se-á a técnica do balanço dos fluxos de massa na fronteira; e para a temperatura as condições de contorno serão incorporadas diretamente na equação da conservação da energia.

#### 3.3.1 - CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA A VELOCIDADE

O uso de volumes fictícios para a consideração das condições de contorno permite que se tenha uma única equação para todo o domínio. Para isto adota-se uma função cujo valor de  $\phi$  no ponto fictício depende do tipo da condição de contorno adotado na fronteira. A seguir, com

o auxílio da figura (3.3), mostra-se como são calculados os valores de  $\phi$  no ponto fictício.

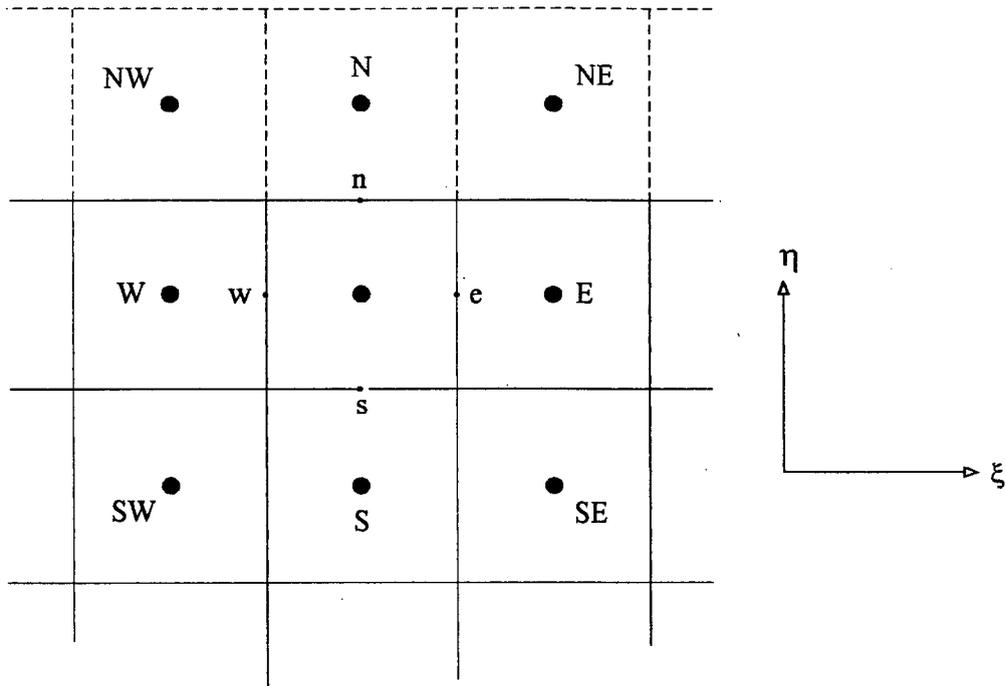


Figura 3.3 - Discretização da fronteira norte do domínio.

Considere-se a fronteira descrita pela figura (3.3), onde os volumes dados por N, NW e NE são fictícios. Deseja-se englobar a condição de contorno especificada na posição n, que pode ser de velocidade prescrita, parabólica ou de simetria, às equações governantes. Então tem-se:

1) Condição de contorno do tipo Dirichlet - Velocidade prescrita na posição n.

Conhecendo-se  $\phi_n$ , interpreta-se este valor como sendo a média da função avaliada na posição N (não conhecido) e P (já conhecido), conforme mostra a equação (3.26).

$$\phi_n = \frac{\phi_N + \phi_P}{2} \quad (3.26)$$

Logo, calcula-se  $\phi_N$ , onde  $\phi$  representa as velocidades cartesianas  $u$  e  $v$ .

$$\phi_N = 2\phi_n - \phi_P \quad (3.27)$$

Quando a fronteira é impermeável, tem-se que  $\phi_n = 0$ . Então

$$\phi_N = -\phi_P \quad (3.28)$$

## 2) Condição de Contorno tipo Neumann - Gradiente de velocidade conhecido.

Para a condição de contorno parabólica, tem-se que

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right|_n = 0 \quad (3.29)$$

Admita-se a existência desta condição de contorno na fronteira curva da direita da figura (3.4). Devido à discretização do domínio, e por estar-se tratando de um sistema de coordenadas generalizadas oriundo de um sistema cilíndrico, devemos considerar a variação da área com o raio na posição em que a função  $\phi$  é avaliada. Isto significa que não se pode simplesmente igualar as velocidades cartesianas do último volume com aquelas do volume fictício, como é procedido quando um sistema de coordenadas cartesianas é adotado. Se assim fosse, desrespeitar-se-ia a equação da conservação da massa.

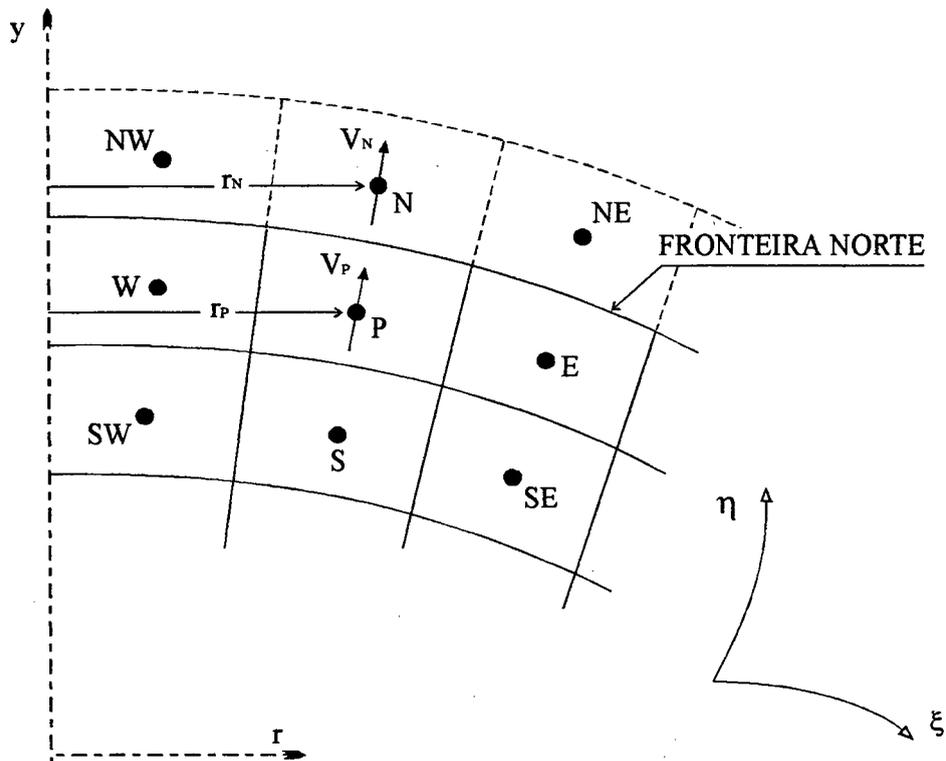
Uma maneira de contornar este problema é considerar a vazão nas direções  $\xi$  e  $\eta$  iguais nos pontos **N** e **P**. Desta hipótese resulta

$$V_N r_N = V_P r_P \quad (3.30)$$

$$U_N r_N = U_P r_P \quad (3.31)$$

onde  $U$  e  $V$  são as velocidades contravariantes já definidas. Uma consequência da utilização desta condição de contorno é que na última fila de volumes, como a vazão na direção  $\eta$  é constante, isto é a velocidade contravariante multiplicada pelo respectivo raio na face sul é igual a

velocidade contravariante multiplicada pelo raio da face norte, e em função de não haver fluxo de massa na direção  $\xi$ , pelo motivo de as fronteiras oeste e este serem impermeáveis, a velocidade contravariante  $U$  é nula.



**Figura 3.4** - Condição de contorno parabólica, considerando a variação da área com o raio.

No presente trabalho, utiliza-se ainda a condição de contorno de simetria sobre o eixo axial, como descreve a figura (3.5). Para este caso tem-se

$$\left. \frac{\partial v}{\partial \xi} \right|_w = 0 \quad e \quad u|_w = 0 \quad (3.32)$$

Devido à axissimetria, o volume de controle para a posição **P** é o mesmo que aquele para a posição fictícia **W**. Então podemos avaliar  $\phi$  em **W** como

$$v_W = v_P \quad (3.33)$$

$$u_W = -u_P \quad (3.34)$$

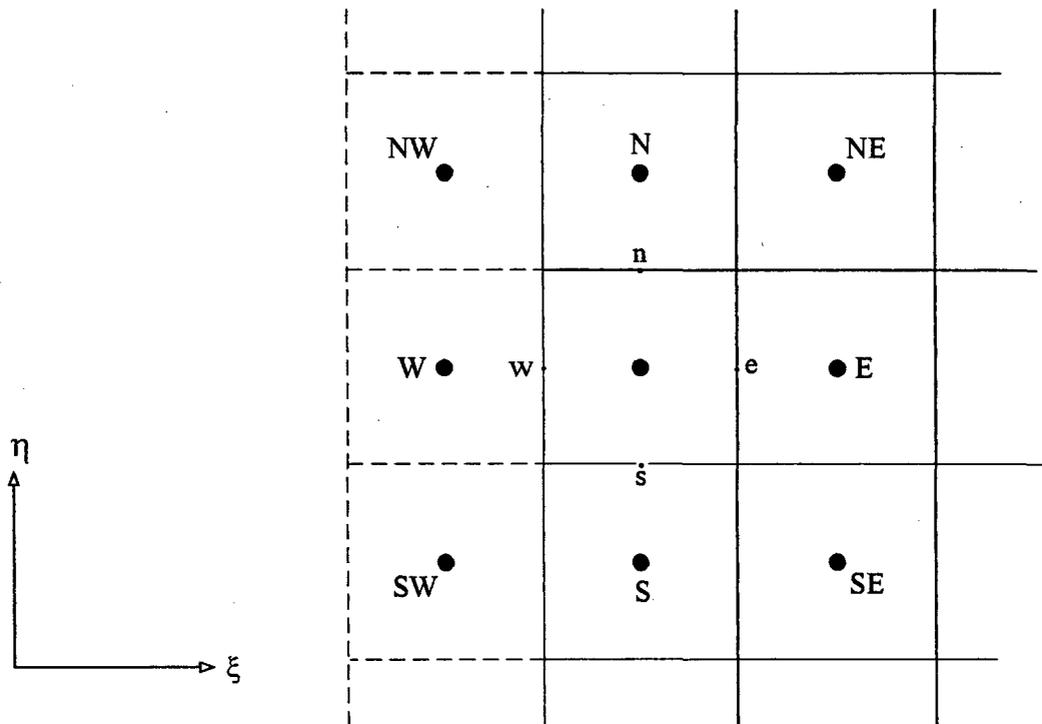


Figura 3.5 - Discretização da fronteira oeste (de simetria) do domínio.

### 3.3.2 - CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA A PRESSÃO

Já mostrou-se que a equação para a evolução da pressão é obtida através da substituição das equações da quantidade de movimento em termos das velocidades contravariantes (3.1) e (3.2) na equação da conservação da massa (2.100). Como não se dispõe de pontos fictícios para a pressão, torna-se necessário avaliar de outra maneira estes gradientes nas direções  $\xi$  e  $\eta$  nas faces da fronteira.

No procedimento adotado neste trabalho para avaliar  $\phi$  nas fronteiras utiliza-se uma aproximação de segunda ordem, como descrito detalhadamente por Perez [35].

Para ilustrar este processo, apresenta-se a seguir a obtenção desta equação para a pressão relativa à fronteira descrita pela figura (3.3), considerando como prescrita a velocidade na posição **n**. Neste caso as equações (3.1) e (3.2), para cada uma das faces, ficam

$$U_e = \hat{U}_e - \left| \frac{\alpha}{A_P^U} \frac{\Delta V}{\Delta \xi} \right|_e (P_E - P_P) + \frac{1}{4} \left| \frac{\beta}{A_P^U} \frac{\Delta V}{\Delta \eta} \right|_e (P_P + P_E - P_S - P_{SE} + 2\Delta P|_e) \quad (3.35)$$

$$U_w = \hat{U}_w - \left| \frac{\alpha}{A_P^U} \frac{\Delta V}{\Delta \xi} \right|_w (P_P - P_W) + \frac{1}{4} \left| \frac{\beta}{A_P^U} \frac{\Delta V}{\Delta \eta} \right|_w (P_P + P_W - P_S - P_{SW} + 2\Delta P|_w) \quad (3.36)$$

$$V_s = \hat{V}_s - \left| \frac{\gamma}{A_P^V} \frac{\Delta V}{\Delta \eta} \right|_s (P_P - P_S) + \frac{1}{4} \left| \frac{\beta}{A_P^V} \frac{\Delta V}{\Delta \xi} \right|_s (P_E + P_{SE} - P_W - P_{SW}) \quad (3.37)$$

$$V_n = \hat{V}_n \quad (3.38)$$

onde  $\Delta P$  é o gradiente de pressão na fronteira norte, no ponto que resulta da intersecção da face onde a propriedade está sendo avaliada com a referida fronteira. A equação (3.38) tem a forma apresentada pois, como  $V_n$  é conhecida, a mesma não precisa ser corrigida pelos termos de pressão. Substituindo as equações (3.35), (3.36), (3.37) e (3.38) na equação da continuidade, obtém-se

$$A_p P_P = A_e P_E + A_w P_W + A_s P_S + A_{se} P_{SE} + A_{sw} P_{SW} + A_{ne} P_{NE} + A_{nw} P_{NW} + K_U|_e + K_U|_w + B \quad (3.39)$$

onde

$$A_e = \left| r \frac{\alpha}{A_P^U} \right|_e \Delta V - \frac{1}{4} \left| r \frac{\beta}{A_P^U} \right|_e \Delta V + \frac{1}{4} \left| r \frac{\beta}{A_P^V} \right|_s \Delta V \quad (3.40)$$

$$A_w = \left| r \frac{\alpha}{A_P^U} \right|_w \Delta V + \frac{1}{4} \left| r \frac{\beta}{A_P^U} \right|_w \Delta V - \frac{1}{4} \left| r \frac{\beta}{A_P^V} \right|_s \Delta V \quad (3.41)$$

$$A_s = \left| r \frac{\gamma}{A_P^V} \right|_s \Delta V + \frac{1}{4} \left| r \frac{\beta}{A_P^U} \right|_e \Delta V - \frac{1}{4} \left| r \frac{\beta}{A_P^U} \right|_w \Delta V \quad (3.42)$$

$$A_{se} = \frac{1}{4} \left| r \frac{\beta}{A_P^U} \right|_e \Delta V + \frac{1}{4} \left| r \frac{\beta}{A_P^V} \right|_s \Delta V \quad (3.43)$$

$$A_{se} = -\frac{1}{4} \left| r \frac{\beta}{A_P^U} \right|_w \Delta V - \frac{1}{4} \left| r \frac{\beta}{A_P^V} \right|_s \Delta V \quad (3.44)$$

$$A_{ne} = 0 \quad (3.45)$$

$$A_{nw} = 0 \quad (3.46)$$

$$B = [(r\hat{U})_w - (r\hat{U})_e] \Delta \eta + [(r\hat{V})_s - (r\hat{V})_n] \Delta \xi \quad (3.47)$$

$$K_U|_e = -\frac{1}{2} \left| r \frac{\beta}{A_P^U} \right|_e \Delta P|_e \quad (3.48)$$

$$K_U|_w = \frac{1}{2} \left| r \frac{\beta}{A_P^U} \right|_w \Delta P|_w \quad (3.49)$$

Para o caso da condição de contorno na fronteira dada pela posição  $n$  ser parabólica, faz-se que as correções através dos gradientes de pressão para as velocidades contravariantes nas posições  $s$  e  $n$  sejam iguais. Ao serem inseridas na equação da continuidade as mesmas se anulam, logo a equação (3.37) se torna

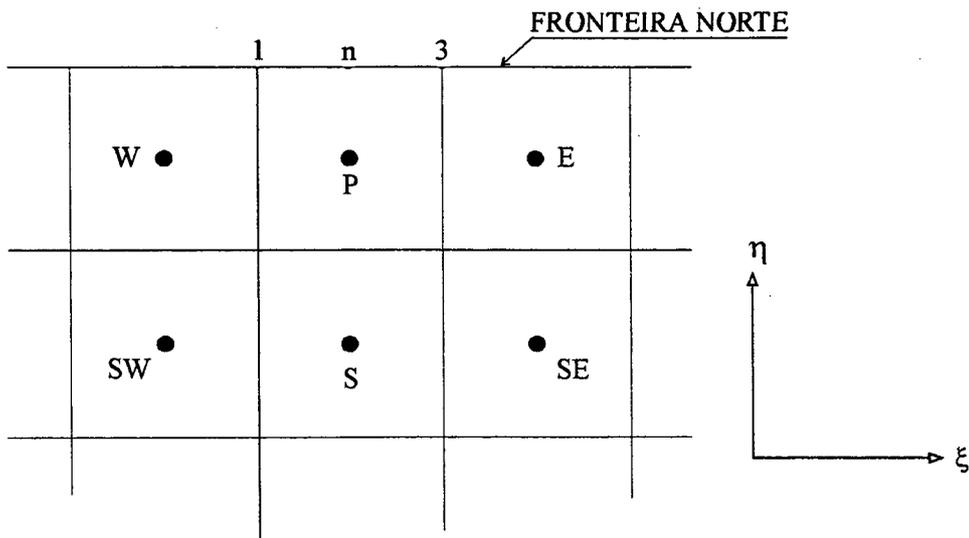
$$V_s = \hat{V}_s \quad (3.50)$$

sendo que as demais não são alteradas.

Cabe salientar que, após vários testes, verificou-se que a aproximação do termo  $\Delta P$  através de uma função de segunda ordem, pode ser substituída, sem prejuízo na precisão dos resultados, por uma extrapolação linear, o que simplifica significativamente esta avaliação.

### 3.3.3 - CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA A TEMPERATURA

A equação da conservação da energia (2.103) resultou da utilização de um esquema de cinco pontos para os coeficientes, em função de ter sido obtida para uma variável genérica  $\phi$ . Neste caso, os termos de derivada cruzada foram mantidos no termo fonte. No entanto, pode-se também obter uma equação em que os nove pontos estão ativos, na qual a parcela que foi englobada pelo termo fonte passa também a ser integrada. Para a obtenção da equação da energia, este esquema foi adotado.



**Figura 3.6** - Discretização da fronteira norte (de temperatura prescrita) do domínio.

A seguir, demonstrar-se-á a obtenção da equação da energia discretizada para a fronteira norte, de temperatura prescrita, representada pela figura (3.6). Partindo-se de equação (2.46), fazendo uso da tabela (2.2), chega-se a

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial T} + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho r T U) + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho r T V) = \\
 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ C_1 \frac{\partial T}{\partial \xi} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ C_2 \frac{\partial T}{\partial \eta} \right] + \\
 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ C_4 \frac{\partial T}{\partial \eta} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ C_2 \frac{\partial T}{\partial \xi} \right]
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

As condições de contorno são englobadas diretamente à equação (3.51) através da substituição da temperatura e dos seus gradientes. Assim, sendo a fronteira de temperatura prescrita, avalia-se os gradientes de temperatura da seguinte maneira

$$\left. \frac{\partial T}{\partial \xi} \right|_e = \frac{T_E - T_P}{\Delta \xi} \quad (3.52)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial \xi} \right|_w = \frac{T_P - T_W}{\Delta \xi} \quad (3.53)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial \eta} \right|_s = \frac{T_P - T_S}{\Delta \eta} \quad (3.54)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial \eta} \right|_n = \frac{T_n - T_P}{0,5 \Delta \eta} \quad (3.55)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial \xi} \right|_s = \frac{T_E + T_{SE} - T_W - T_{SW}}{4 \Delta \xi} \quad (3.56)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial \xi} \right|_n = \frac{T_3 - T_1}{\Delta \xi} \quad (3.57)$$

e, por simplicidade, aproxima-se os seguintes gradientes como

$$\left. \frac{\partial T}{\partial \eta} \right|_e = \frac{T_P + T_E - T_S - T_{SE}}{2 \Delta \eta} \quad (3.58)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial \eta} \right|_w = \frac{T_P + T_W - T_S - T_{SW}}{2 \Delta \eta} \quad (3.59)$$

Substituindo as equações de (3.52) até (3.59) na equação (3.51) já integrada no volume de controle apresentado na figura (2.6) e adotando a formulação implícita, chega-se a

$$A_p T_P = A_e T_E^{n+1} + A_w T_W^{n+1} + A_s T_S^{n+1} + A_{se} T_{SE}^{n+1} + A_{sw} T_{SW}^{n+1} + \frac{A_p}{(1 + E)} T_P^n + STT \quad (3.60)$$

onde

$$STT = \left[ -(\rho r V)_n \Delta \xi + 2 C_{4_n} \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} \right] T_n + C_{2_n} [T_3 - T_1] \quad (3.61)$$

$$A_p = A_p^* \frac{(1 + E)}{E} \quad (3.62)$$

onde

$$A_p^* = A_e + A_w + A_s + A_{se} + A_{sw} - (\rho r V)_n \Delta \xi + 2 C_{4_n} \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} \quad (3.63)$$

e

$$A_e = -(\rho r U)_e (1/2 - \alpha_e) \Delta \eta + C_{1_e} \bar{\beta}_e \frac{\Delta \eta}{\Delta \xi} + \frac{1}{2} C_{2_e} \bar{\beta}_e - \frac{1}{4} C_{2_s} \bar{\beta}_s \quad (3.64)$$

$$A_w = (\rho r U)_w (1/2 + \alpha_w) \Delta \eta + C_{1_w} \bar{\beta}_w \frac{\Delta \eta}{\Delta \xi} - \frac{1}{2} C_{2_w} \bar{\beta}_e + \frac{1}{4} C_{2_s} \bar{\beta}_s \quad (3.65)$$

$$A_s = (\rho r V)_s (1/2 + \alpha_s) \Delta \xi + C_{4_s} \bar{\beta}_s \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} + \frac{1}{2} C_{2_e} \bar{\beta}_e + \frac{1}{2} C_{2_w} \bar{\beta}_w \quad (3.66)$$

$$A_{se} = -\frac{1}{2} C_{2_e} \bar{\beta}_e - \frac{1}{4} C_{2_s} \bar{\beta}_s \quad (3.67)$$

$$A_{sw} = \frac{1}{2} C_{2_w} \bar{\beta}_w + \frac{1}{4} C_{2_s} \bar{\beta}_s \quad (3.68)$$

Como visto na figura (3.5), neste trabalho utiliza-se a fronteira oeste do domínio como sendo de simetria. Apenas para exemplificar, se a fronteira para a qual foram obtidas as equações anteriores apresentasse esta condição de contorno, que pode ser analogamente interpretada como uma fronteira isolada termicamente, fazer-se-ia

$$T_n = T_p \quad (3.69)$$

o que resulta

$$\left. \frac{\partial T}{\partial \eta} \right|_n = 0 \quad (3.70)$$

Evidentemente, para este caso também não há fluxo de massa através da fronteira de simetria.

---

### RESULTADOS PARA ESCOAMENTOS LAMINARES

---

#### 4.1 - INTRODUÇÃO

O modelo proposto passa agora por uma etapa de testes, visando a sua validação. Na literatura existente enfatizou-se a procura por resultados experimentais para validar o modelo sugerido no presente trabalho. A primeira etapa constitui-se de comparações com resultados para escoamentos laminares, com o objetivo de isolar erros gerados pelo modelo numérico e pela introdução do modelo de turbulência. Numa segunda etapa, no próximo capítulo, serão implementadas as modificações para a simulação de escoamentos turbulentos, através de um modelo algébrico simples.

Neste capítulo apresentar-se-ão comparações com os resultados de experimentos desenvolvidos por Zeldin e Schmidt [2] para um duto vertical com convecção forçada e mista, com a finalidade de evidenciar a correção dos resultados do presente trabalho quanto à influência da simplificação de axissimetria, e dos termos de empuxo. Também serão comparados os resultados do presente trabalho com dados obtidos por Akaike e Nemoto [3] para um jato puro sendo descarregado num grande ambiente, onde poderá ser verificada a solução no sentido radial.

## 4.2 - RESULTADOS DE ZELDIN E SCHMIDT

No presente trabalho procurou-se mostrar que, sob certas circunstâncias, um fluido pode ter seu escoamento fortemente afetado pela existência de forças gravitacionais. Esta influência é resultante e proporcional às forças de corpo criadas pelo campo de densidade local do fluido.

Duas situações, a primeira enfocando o comportamento hidrodinâmico de um fluido, a outra um escoamento com determinadas características térmicas, foram estudadas. Utilizou-se como modelo um longo tubo vertical de secção circular, no qual prescreve-se o perfil de velocidade e temperatura na entrada e nas paredes. Em ambos os casos, dados experimentais foram obtidos considerando para um perfil plano de velocidade na entrada.

O tubo foi assumido como sendo suficientemente longo para permitir que, no caso de convecção mista, a temperatura do fluido  $T_f$  pudesse, à saída deste, ser considerada como igual a temperatura da parede  $T_w$  e que a velocidade no interior do mesmo eventualmente assumisse o perfil plenamente desenvolvido, dado por

$$v = 2 v_m \left[ r - \left( \frac{r}{r_0} \right) \right] \quad (4.1)$$

$$u = 0$$

O comportamento do fluido no interior do duto foi estudado fixando-se os números de Grashof e Reynolds para o escoamento. Estes parâmetros são definidos como

$$Gr = \frac{g \beta}{\nu^2} (T_e - T_w) r_0^3 \quad (4.2)$$

$$Re = \frac{2 r_0 u_m}{\nu} \quad (4.3)$$

Os perfis de velocidade e de temperatura foram baseados no parâmetro  $Z/Pe$ , definido por

$$Z = \frac{z}{r_0} \quad (4.4)$$

$$Pe = Re \left( \frac{C_v \mu}{K} \right) \quad (4.5)$$

O aparato experimental é descrito com detalhes em [2]. No presente trabalho foram utilizadas as medidas físicas reais do experimento. A geometria e dimensões do domínio da simulação constam esquematicamente na figura (4.1). Na tabela (4.1), estão cotados os pontos de tomada de dados do experimento. Ar foi utilizado como fluido de escoamento, e as propriedades são dadas na tabela (4.2).

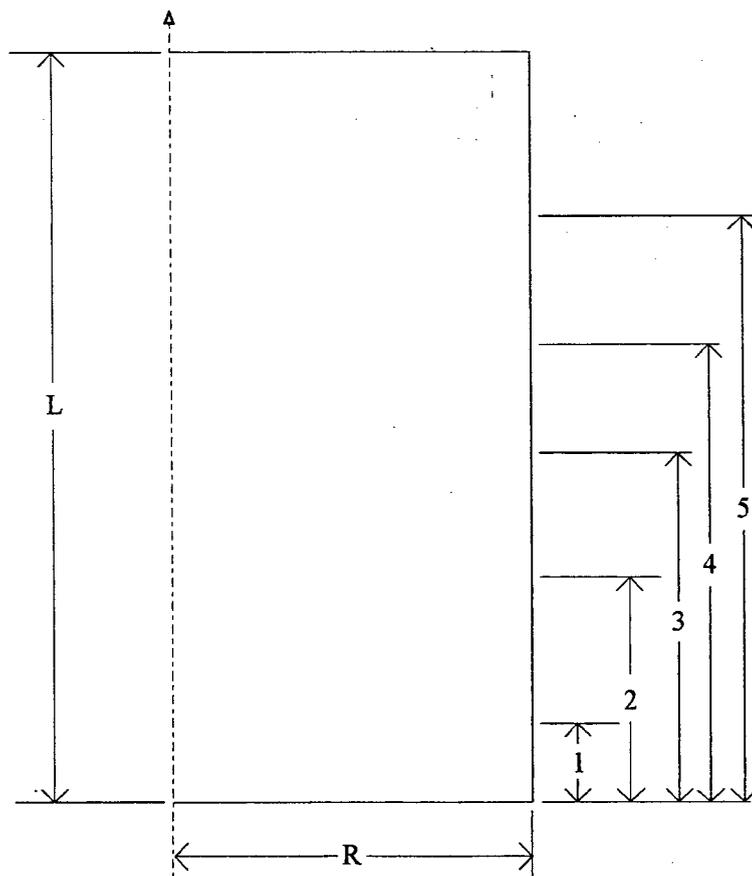


Figura 4.1 - Geometria esquematizada do problema.

Ponto	Z (m)	Dimensão (m)
1	4,094480E-02	R = 4,094480E-02 L = 4,2672
2	5,873750E-02	
3	2,238375E-01	
4	2,560638	
5	4,186238	

**Tabela 4.1** - Cotas utilizadas para a obtenção dos dados experimentais

CASO	$\nu$ (m <sup>2</sup> /s)	$\rho$ (Kg/m <sup>3</sup> )	$\mu$ (Kg/ms)	K (W/m °C)	Pr
FORÇADA	1,5896E-05	1,1774	1,8717E-05	0,02624	0,708
MISTA	1,6462E-05	1,1595	1,9088E-05	0,02668	0,707

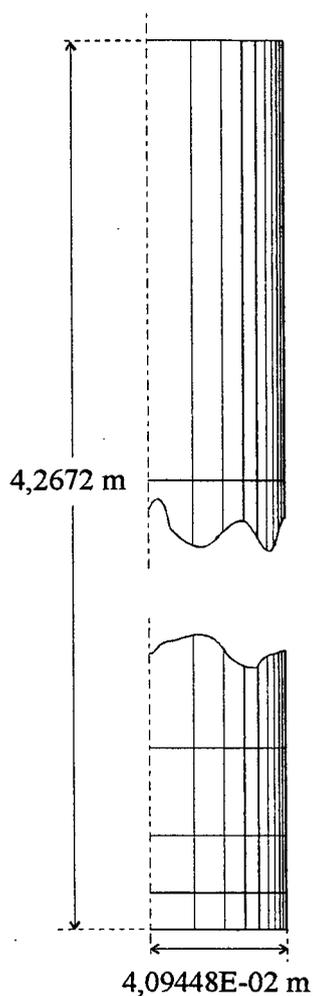
**Tabela 4.2** - Valores das propriedades do ar para os dois casos de convecção simulados.

Na figura (4.2) é apresentada a malha utilizada para a simulação. Para melhor visualização e entendimento, fêz-se uma ampliação da malha na região de entrada do duto, podendo-se notar o refinamento desta próxima à parede. Este procedimento justifica-se por ser exatamente nesta região onde se apresentam os maiores gradientes das propriedades.

Para a verificação da consistência dos resultados, foram simulados vários casos, alterando-se o número de volumes em cada direção. Foram experimentados problemas adotando-se malhas com 10 X 50, 10 X 100 e 20 X 100 volumes, nas direções radial e longitudinal, respectivamente. Os resultados aqui apresentados são todos referentes à malha de 10 X 100 volumes, configuração a partir da qual não foram observadas alterações na solução.

O programa computacional foi executado em um computador IBM 3090, escalar, de um único processador. Os tempos de execução, evidentemente, variaram proporcionalmente à complexidade do problema. Os casos de convecção pura foram executados em tempos da ordem de 12 minutos. Por outro lado os casos mais complexos, onde ocorria convecção natural e o uso

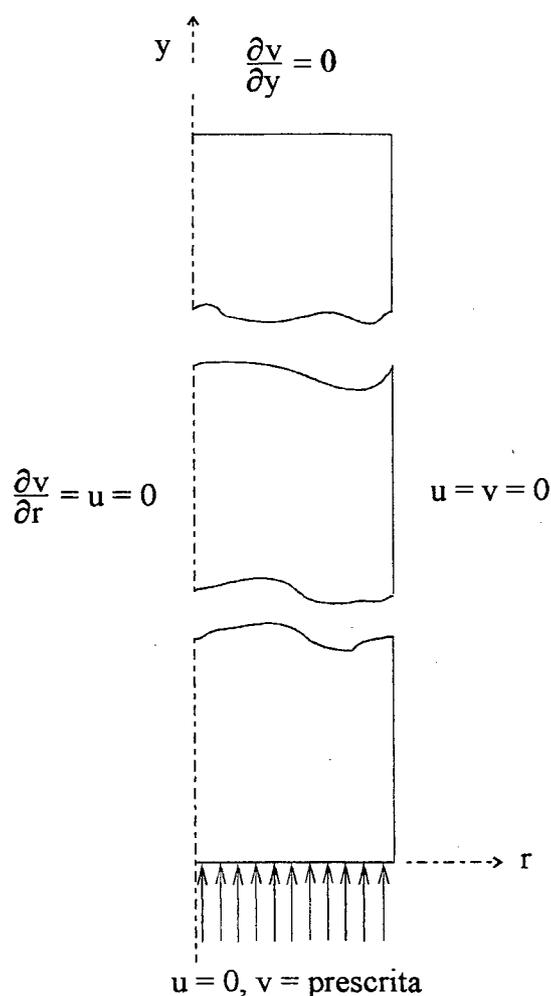
de malhas mais refinadas, desenvolveram-se em tempos bem superiores, chegando aos 50 minutos. A seguir apresentam-se as situações simuladas, explicadas detalhadamente.



**Figura 4.2** - Malha para a simulação. Detalhe da região de entrada.

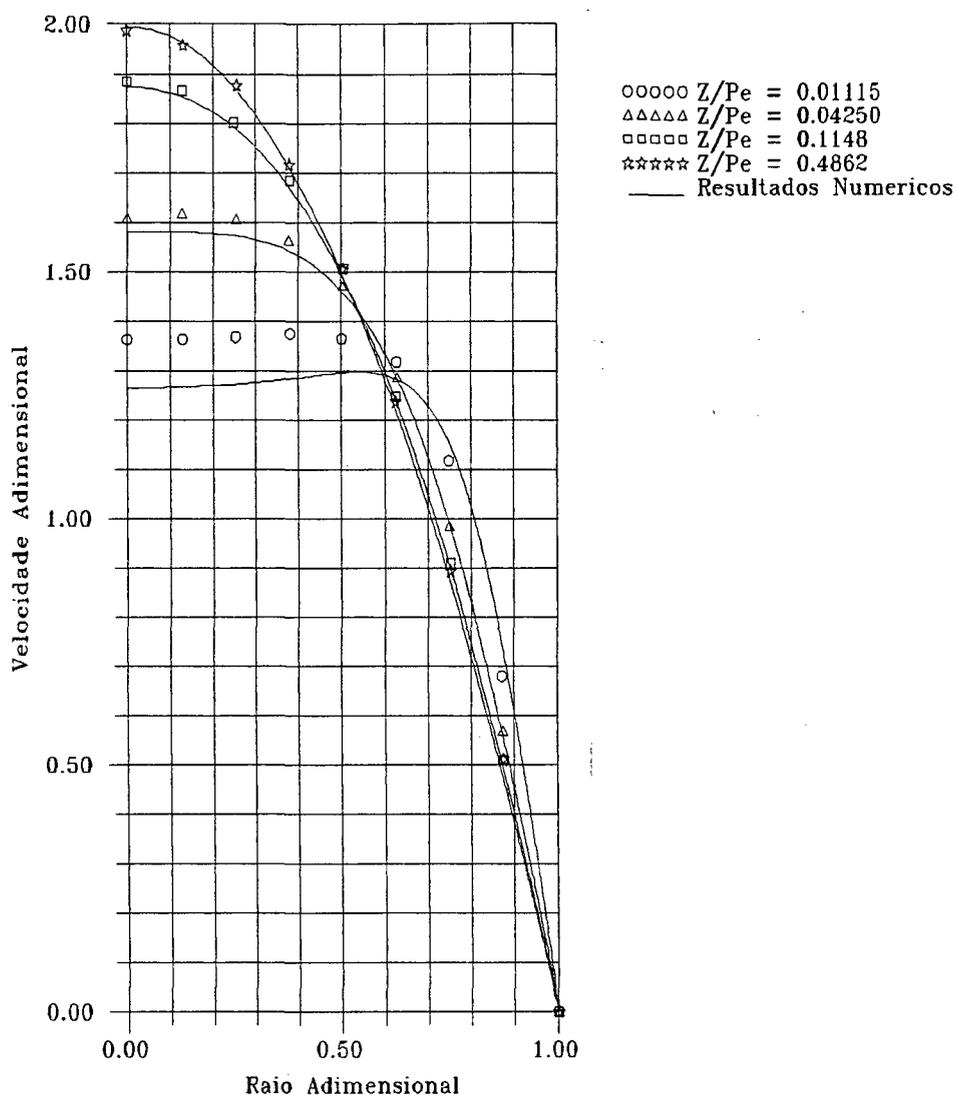
#### 4.2.1 - ESCOAMENTO COM CONVECÇÃO FORÇADA

As condições de contorno para o caso do escoamento envolvendo somente convecção forçada, com  $Re = 510$  e  $Pe = 257.32$ , são dadas pela figura (4.3). Note-se que a representação é apenas da metade do duto, de acordo com a hipótese de escoamento axissimétrico.



**Figura 4.3** - Condições de contorno para o caso de convecção forçada.

Primeiramente mostram-se, na figura (4.4), os perfis de velocidade adimensionais, ao longo do eixo longitudinal do tubo vertical. Conforme pode observar-se, para o perfil dado pelo número característico  $Z/Pe = 0.01115$ , existe uma discrepância de aproximadamente 6 %. No trabalho de Zeldin e Schmidt comenta-se sobre esta diferença, cujos resultados também a detectam. A justificativa apresentada é que o perfil de velocidade na entrada do duto não é exatamente plano no experimento, como foi suposto para o caso simulado numericamente. Embora houvesse sido feito um arredondamento nesta região, é razoável supor que este procedimento não tenha sido requisito suficiente para garantir que o perfil de velocidade resultante fosse plano.



**Figura 4.4** - Comparação entre dados experimentais de Zeldin e Schmidt [2] e resultados do presente trabalho. Convecção forçada.

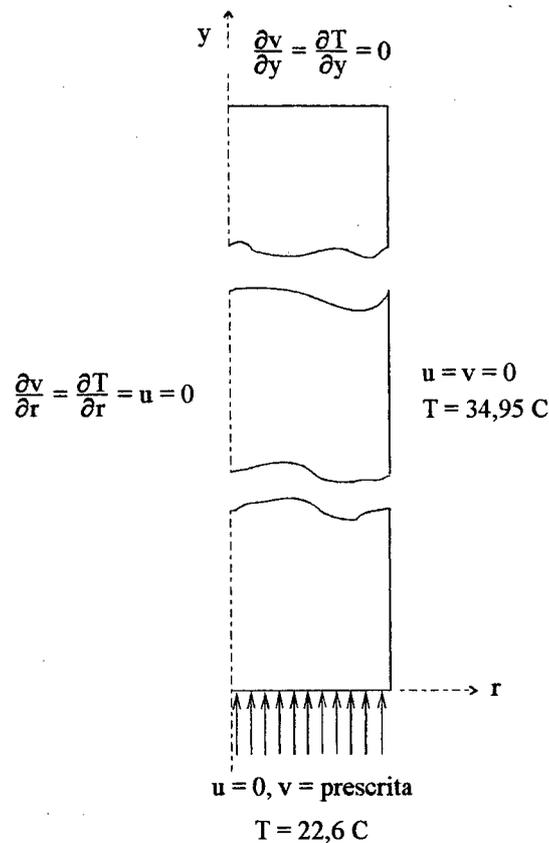
É interessante observar que, a despeito da discordância do resultado logo à entrada, o perfil obtido no presente trabalho mantém consistência com o problema físico. A inflexão encontrada na região central foi observada no trabalho que serve como referência e também em Nogueira [35].

Os perfis de velocidade para alturas maiores coincidem muito bem, comprovando a correção dos resultados.

#### 4.2.2 - ESCOAMENTOS COM CONVECÇÃO MISTA

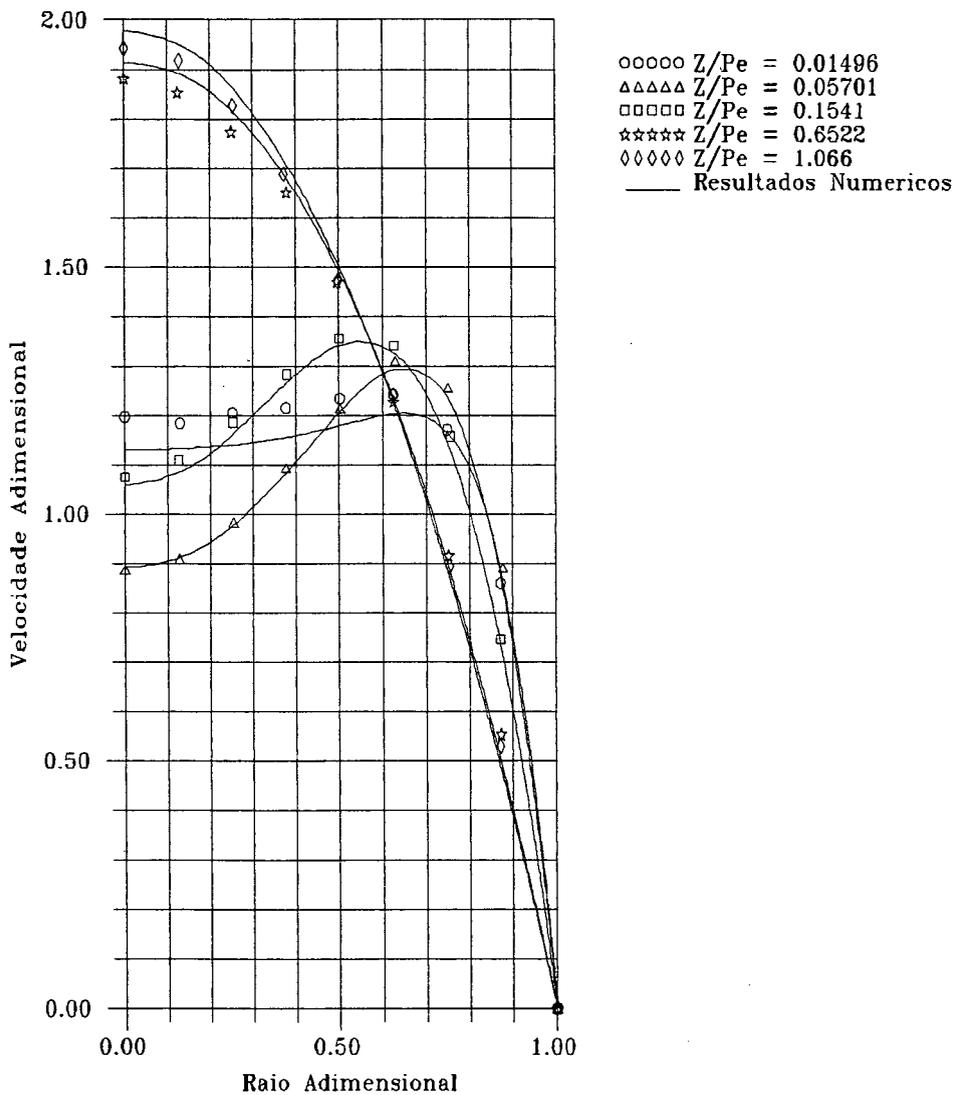
Na figura (4.5) apresenta-se as condições de contorno para o caso da simulação do escoamento com convecção mista com  $Gr/Re = -33,25$ , sendo  $Re = 379,8$ . Na figura (4.6) mostram-se os resultados obtidos. Neste caso é esperado que se notem os efeitos causados pelos termos que envolvem a variação da densidade, resultantes da influência do aquecimento do fluido mais próximo da parede do duto.

Como pode ser observado, o problema citado anteriormente para o caso da convecção forçada referente à diferença dos perfis logo na entrada do duto, em  $Z/Pe = 0,01496$ , continua persistindo, levando-nos a crer que realmente se trata de um erro sistemático, causado pela geometria da entrada do duto.



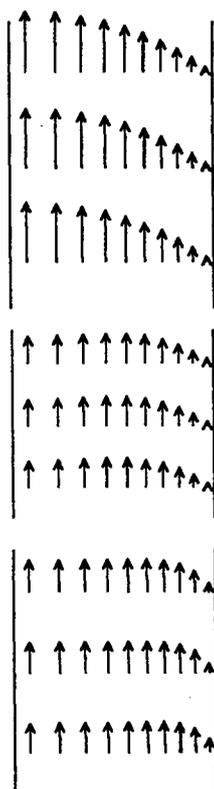
**Figura 4.5** - Condições de contorno para o caso de convecção mista.

Observa-se também, nesta figura, uma aceleração do fluido próximo à parede do tubo, especialmente para os perfis de  $Z/Pe = 0,1541$  e  $Z/Pe = 0,05701$ . Evidencia-se desta forma, a correta resposta dos termos que englobam o empuxo, fazendo com que a porção do fluido mais aquecida tenha um aumento de velocidade, provocado pela diminuição de sua massa específica relativamente à porção de fluido vizinha.



**Figura 4.6** - Comparação entre dados experimentais de Zeldin e Schmidt [2] e resultados do presente trabalho. Convecção mista.

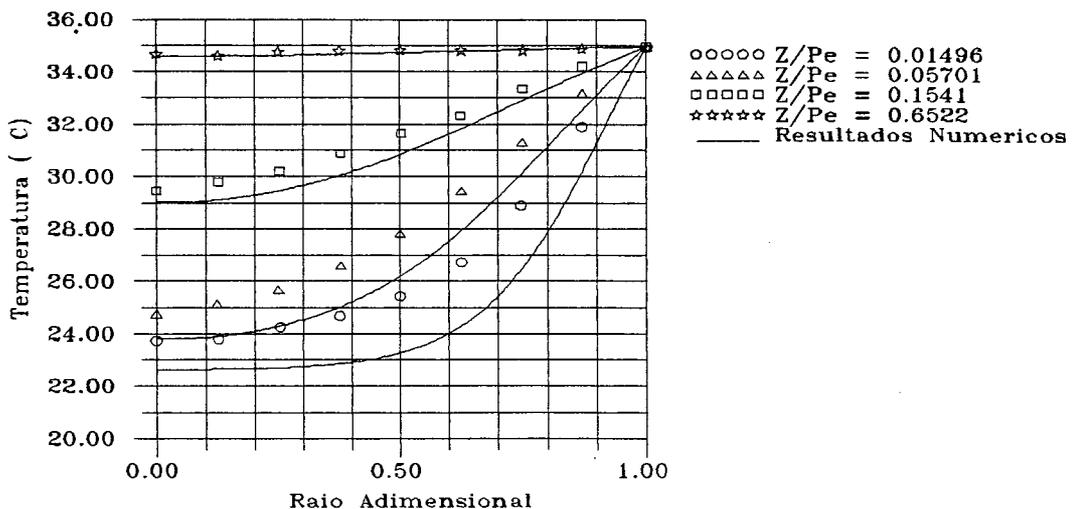
Para manter a conservação da massa para esta secção, é necessário que uma porção de fluido se desloque do centro para a periferia do duto. Note-se que, caso a solução seja conservativa em termos de massa, como o esperado, a massa que atravessa determinada secção horizontal deve ser igual àquela que atravessa qualquer outra secção. Como a área de cada volume de controle aumenta com o raio, uma porção significativa do fluido deve ser deslocada. Este efeito pode ser claramente notado na figura (4.7), que apresenta os vetores velocidade para várias secções.



**Figura 4.7** - Vetores velocidade para o caso de convecção mista.

Observando-se os perfis de velocidade para maiores alturas, nota-se que diminui a deformação devido aos efeitos de empuxo. O fato pode ser explicado pelo decréscimo dos gradientes de temperatura na direção radial, causado pela difusão de calor para as porções de fluido mais próximas do eixo de simetria, isto é, a secção do fluido para aquela altura encontra-se com uma temperatura mais uniforme.

Finalmente, como pode ser observado para o perfil de  $Z/Pe = 1,066$ , são praticamente atingidas as velocidades correspondentes ao perfil plenamente desenvolvido, uma vez que não existe mais nenhuma força provocando a aceleração diferenciada do fluido na direção radial, pela influência de um perfil não plano de temperaturas. A partir deste momento, a forma do perfil de velocidade é influenciada somente pelos efeitos viscosos do escoamento e, como seria de se esperar, adquire o perfil de parabólico, dado pela equação (4.1).



**Figura 4.8** - Comparação de resultados do presente trabalho com dados experimentais de Zeldin e Schmidt [2]. Convecção mista.

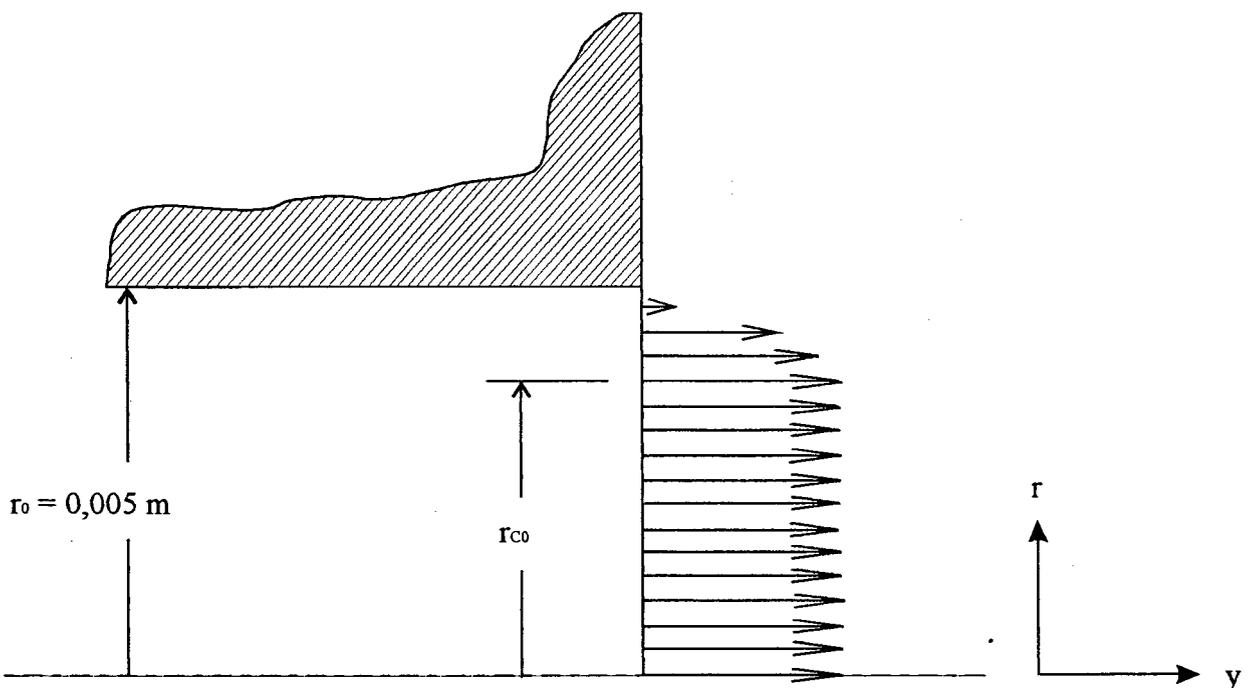
Na figura (4.8) têm-se a solução dos perfis de temperatura para as alturas testadas no experimento de convecção mista. Embora os resultados não sejam plenamente coincidentes, pode-se observar que a diferença é de no máximo 15 %. Os perfis obtidos assumem sempre valores que subestimam ligeiramente a temperatura para aquela seção, se comparados com os dados experimentais.

Outra evidência de que o presente resultado para a temperatura é coerente, é que os perfis de velocidade obtidos, considerando-se os efeitos de empuxo baseados nestas temperaturas, coincidem muito bem com os resultados experimentais. Portanto, pode-se concluir que o presente modelo simula eficientemente os efeitos da temperatura e de seus gradientes no escoamento.

### 4.3 - RESULTADOS DE AKAIKE E NEMOTO

O trabalho destes pesquisadores visou estudar o desenvolvimento do escoamento de um jato de água laminar, axissimétrico, descarregado em um ambiente contendo o mesmo fluido em repouso.

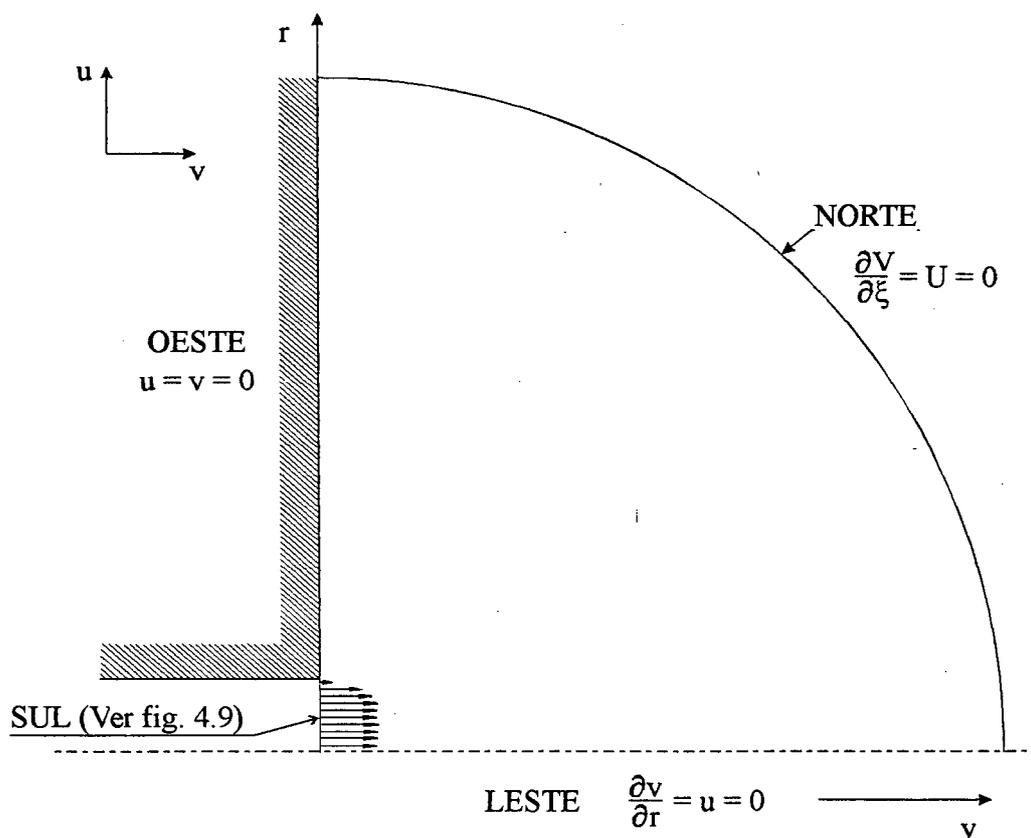
Os ensaios experimentais objetivaram simular situações semelhantes àsquelas encontradas na manufatura de peças plásticas através de processos de injeção. Nestes casos, o número de Reynolds, baseado no diâmetro do bico injetor e na velocidade média de saída, oscila em torno de  $Re = 300$ .



**Figura 4.9** - Geometria e dimensões do bocal de descarga utilizado nos experimentos de Akaike e Nemoto [3] e na presente simulação.

Onde:  $r_0$  → raio medido desde o eixo de simetria, avaliado na saída do bocal;  
 $r_{co}$  → raio de escoamento potencial avaliado na saída do bocal.

Medições foram feitas através de experimento montado em um reservatório de água. Maiores detalhes sobre a parte experimental são encontrados em [3]. As dimensões do bocal de saída estão reproduzidas na figura (4.9), e foram transferidas exatamente como tal para a simulação neste trabalho.



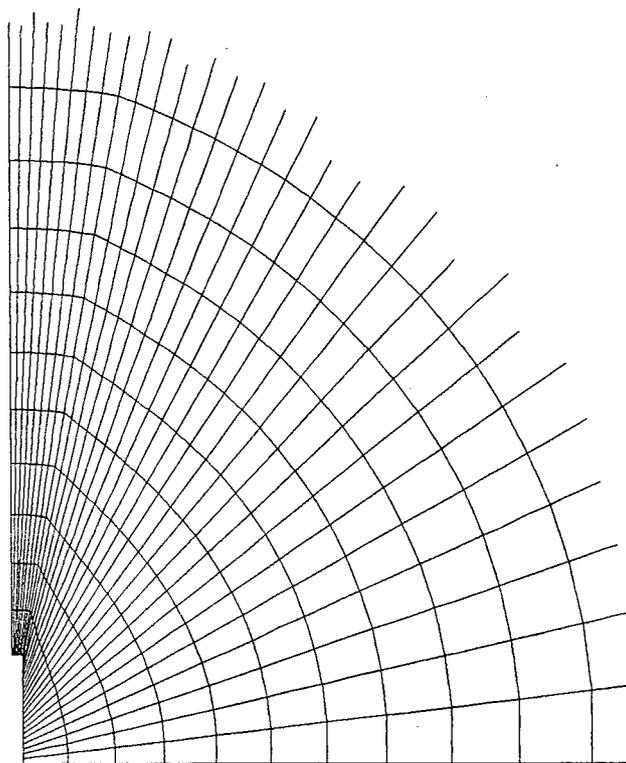
**Figura 4.10** - Condições de contorno para a simulação da descarga do jato d'água.

O fluido de trabalho adotado também foi o mesmo da referência. As propriedades para a água à temperatura de 25 °C estão dadas na tabela (4.3).

T (°C)	$\nu$ (m/s <sup>2</sup> )	$\rho$ (Kg/m <sup>3</sup> )	$\mu$ (Kg/ms)
25	8,94E-07	997,10	8,91E-04

**Tabela 4.3** - Propriedades físicas da água à temperatura de 25°C.

Para a simulação numérica, foi suposta a existência de um determinado perfil de velocidade à saída do bocal, como pode ser visto na figura (4.9). Para melhor entendimento é apresentado na figura (4.10) um esquema mostrando as condições de contorno adotadas.



**Figura 4.11** - Ampliação da malha utilizada para a simulação da descarga de um jato d'água num reservatório

Uma ampliação da malha utilizada está representada na figura (4.11). A malha completa compunha-se de 40 volumes na direção  $\xi$  e 80 volumes na direção  $\eta$ . Note-se a concentração das linhas coordenadas na região próxima à descarga, onde supõe-se existirem os maiores gradientes das propriedades.

Como pode ser observado na figura (4.9), quando  $r$  varia de zero até  $r_{co}$ , o perfil de velocidade é plano. A partir de  $r_{co}$  até  $r_o$ , o perfil passa a ser quadrático, simulando uma espécie de camada limite. Estes perfis obedecem às equações (4.6) e (4.7).

$$V_0 = \frac{\bar{v}_0}{v_{m\acute{a}x\ 0}} = 1 \quad (\text{para } R \leq R_{C0}) \quad (4.6)$$

$$V_0 = \frac{(R - R_{C0})^2}{(1 - R_{C0})^2} \quad (\text{para } R > R_{C0}) \quad (4.7)$$

onde

$$R = \frac{r}{r_0} \quad R_{C0} = \frac{r_{C0}}{r_0} \quad (4.8)$$

- e
- $\bar{v}_0$  → velocidade média na descarga;
  - $v_{m\acute{a}x\ 0}$  → velocidade máxima na descarga;
  - $R$  e  $R_{C0}$  → raios adimensionais.

A relação entre a velocidade média  $\bar{u}_0$  e a velocidade máxima  $v_{m\acute{a}x\ 0}$  é dada pela equação (4.9)

$$\bar{v}_0 = v_{m\acute{a}x\ 0} (1 - A) \quad (4.9)$$

onde

$$A = \frac{2}{(1 - R_{C0})^2} \left[ \frac{1}{4} - \frac{2R_{C0}}{3} + \frac{R_{C0}^2}{2} - \frac{R_{C0}^4}{12} \right] \quad (4.10)$$

A seguir explica-se o procedimento para a obtenção dos valores das variáveis envolvidas nas equações acima. Como o processo para a obtenção do valor de  $r_{C0}$  não foi identificado no texto que serviu como referência, decidiu-se pela transcrição direta para este trabalho, dos gráficos destes resultados.

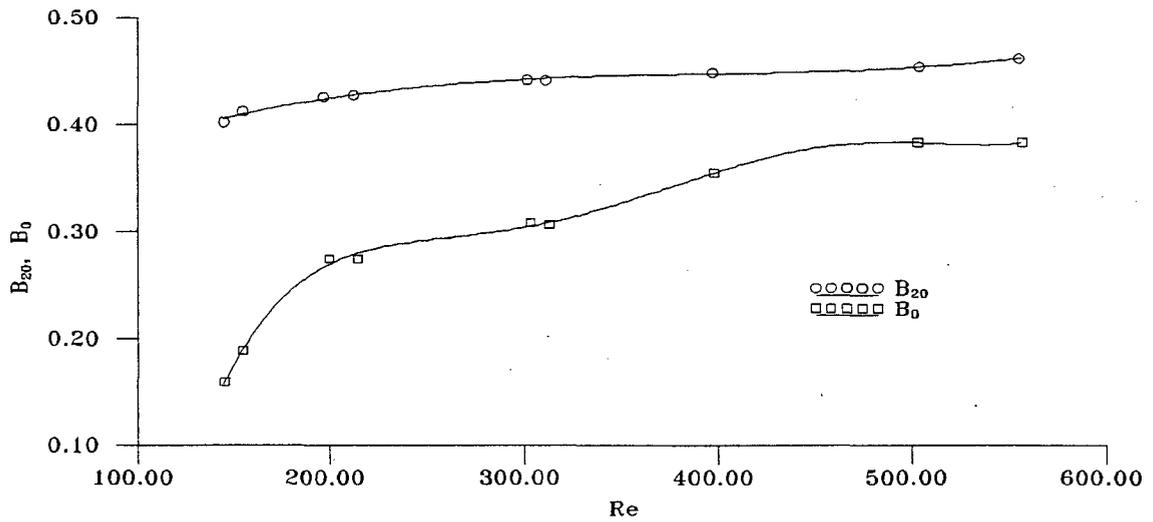


Figura 4.12 - Parâmetros  $B_{20}$  e  $B_0$  para diversos números de Reynolds.

Na figura (4.12) temos a curva de  $B_0$  em função do número de Reynolds. Sendo este valor de  $B_0$  uma relação entre o raio de escoamento potencial  $r_c$  e o diâmetro do bocal  $d$ , podemos extrair o valor de  $r_{c0}$ , uma vez que  $d$  é conhecido.

Para a validação do presente modelo, foram simulados casos em que  $Re = 158$  e  $Re = 308$ . A seguir exemplifica-se o procedimento para o caso em que  $Re = 158$ . Portanto, temos que  $B_0 = 0,2$ , e

$$B_0 = \frac{r_c}{d} \Big|_0 = 0,2$$

portanto

$$r_c \Big|_0 = 0,2 * 0,01 = 0,002$$

Pode-se então, através da relação (4.8), obter  $R_{CO} = 0,4$ . Substituindo o valor obtido na equação (4.10), tem-se que  $A = 0,34$ . Então

$$v_{máx 0} = \frac{\bar{v}_0}{(1 - 0,34)}$$

Necessita-se agora do valor de  $\bar{v}$ , que pode ser obtido através do número de Reynolds

$$Re = \frac{\bar{v}_0 d}{\nu} = 158$$

logo

$$\bar{v}_0 = 1,411874 E - 02 \text{ m/s}$$

e

$$V_{máx 0} = 2,139204 E - 02 \text{ m/s}$$

Com o valor de  $v_{máx 0}$ , obtém-se o perfil de velocidade para toda a região utilizando as equações (4.6) e (4.7), especificando assim as condições de contorno para a entrada de fluido.

A seguir são apresentados os resultados obtidos no presente trabalho, comparados àqueles que Akaike & Nemoto obtiveram em seu experimento. Note-se que estes resultados experimentais foram conseguidos para valores de Reynolds  $Re = 158$  e  $Re = 308$ .

#### 4.3.1 - COMPARAÇÕES PARA $Re = 158$ E $Re = 308$

Preliminarmente necessitamos considerar alguns parâmetros envolvidos na apresentação dos resultados da referência [3]. Os valores das variáveis apresentados nos eixos coordenados dos gráficos são a seguir explicados.

Na escala ordenada estão contidos os valores da velocidade axial adimensional, definidos pela relação (4.11), e na abscissa os valores de  $R_2$ , variável definida pela expressão (4.12), onde

$r_2$  é definido como sendo o meio-raio.

$$V = \frac{v}{v_{máx}} \quad (4.11)$$

$$R_2 = \frac{r}{r_2} \quad (4.12)$$

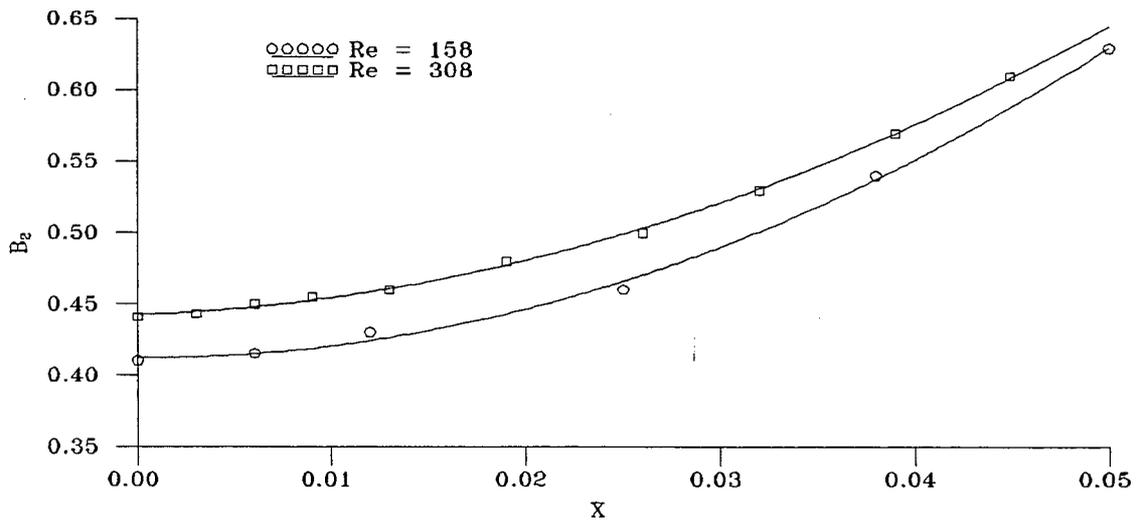


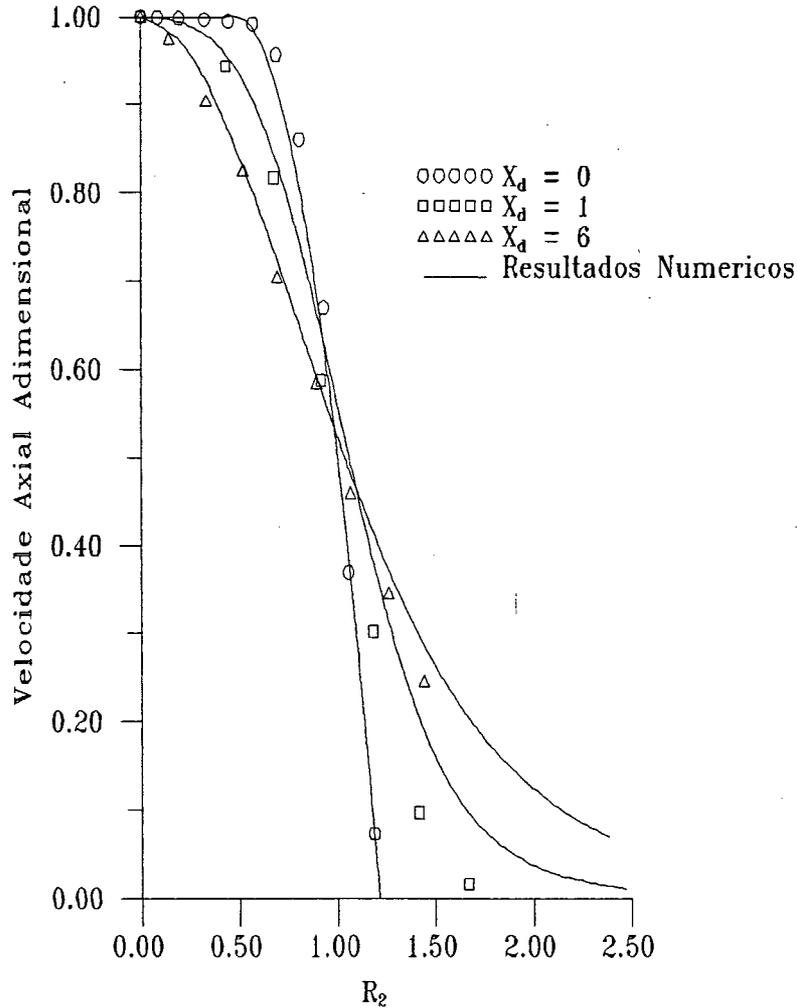
Figura 4.13 - Variação do meio-raio  $B_2$  com o parâmetro  $X$ .

O valor de  $R_2$  não foi obtido através dos resultados do presente trabalho. Para tal, foi necessário recorrer novamente aos resultados apresentados graficamente na referência e calcular o valor do meio-raio  $r_2$ . Através da figura (4.13), para cada um dos casos a ser comparado, temos a curva que representa o raio adimensional  $B_2$  em função da distância axial adimensional  $X$ , onde

$$B_2 = \frac{r_2}{d}$$

$$\bar{X} = \frac{D_d}{Re} \quad \text{onde} \quad X_d = \frac{y}{d}$$

Portanto, para a representação dos resultados conforme aqueles de Akaike e Nemoto, é necessário obter os valores de meio-raio através da figura (4.13) e da relação para  $B_2$ .

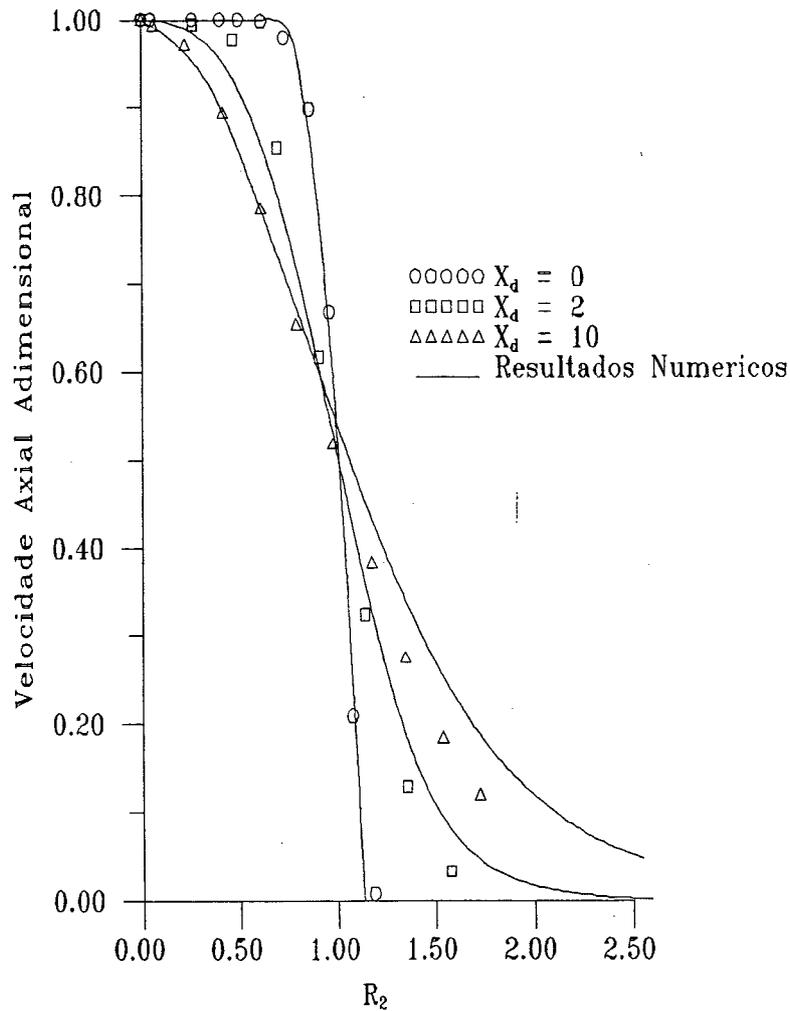


**Figura 4.14** - Comparação entre dados experimentais de Akaike e Nemoto [3] e resultados numéricos do presente trabalho, para o caso de  $Re = 158$ .

Observando-se agora a figura (4.14), notamos a apresentação de três curvas respectivas a cada altura. A primeira, representada por  $X_d = 0$ , é o perfil de velocidade à saída do bocal. Nesta posição, o perfil de velocidade é a própria condição de contorno do problema numérico.

Portanto, a mesma deve ser estimada de tal maneira que simule o mais perfeitamente

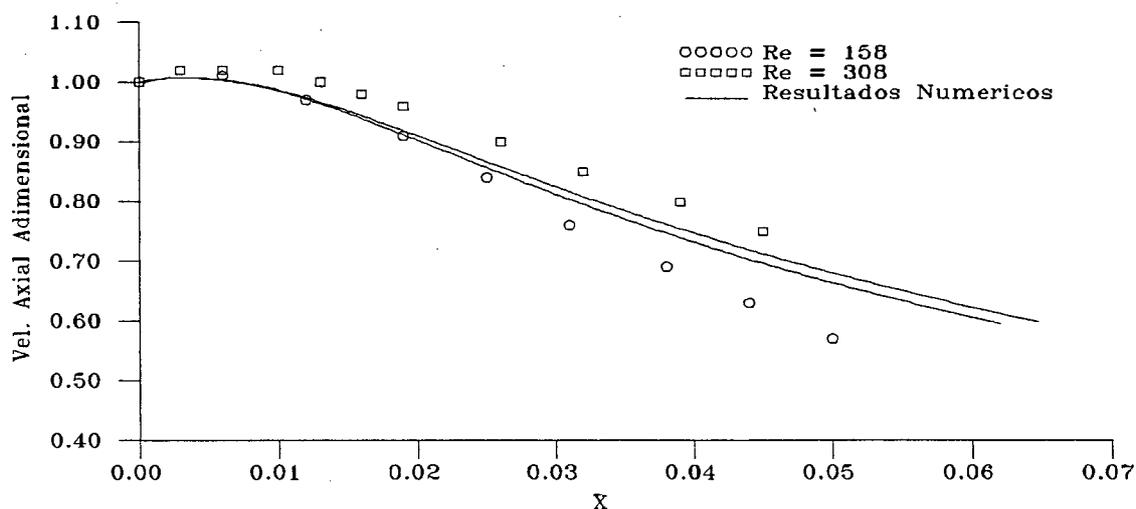
possível a condição real. Pode-se notar que o perfil sugerido pelas equações (4.6) e (4.7) aproxima-se muito bem daquele obtido experimentalmente, validando a sua utilização. Os perfis de velocidade apresentados para alturas dadas por  $X_d = 1$  e  $X_d = 6$ , mostram uma boa concordância se comparados com os resultados experimentais.



**Figura 4.15** - Comparação entre dados experimentais de Akaike e Nemoto [3] e resultados numéricos deste trabalho, para o caso de  $Re = 308$ .

Os resultados para os perfis de velocidade para  $Re = 308$  estão apresentados na figura (4.15). Como pode ser observado, novamente a condição de contorno à saída do bocal está bem representada.

Igualmente os perfis de velocidade para as alturas definidas pela variável  $X_d$  mostram-se satisfatórios, se comparados com os resultados experimentais. Nota-se que uma ligeira tendência de superestimar o perfil para valores de  $R_2$  maiores que 1,3 é observada, o que também ocorreu para  $Re = 158$ .

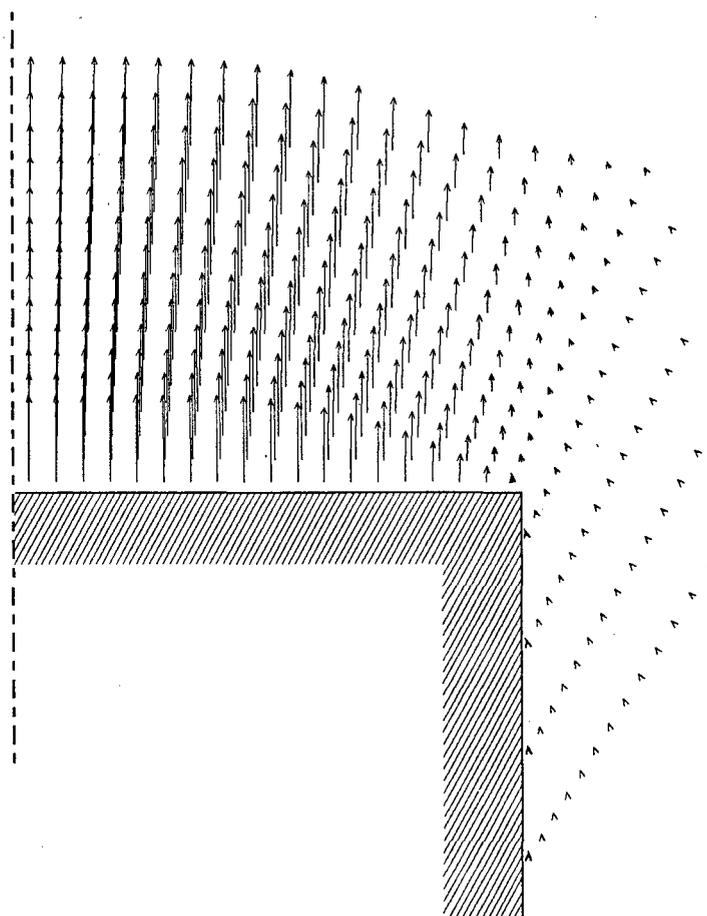


**Figura 4.16** - Variação da velocidade axial na linha de centro com o parâmetro X.

Na figura (4.16) são mostrados os resultados para a variação da velocidade adimensional, relativa àquela da saída, sobre o eixo de simetria com X.

Para ilustrar ainda mais estes escoamentos, são apresentadas a seguir as figuras (4.17) e (4.18), que mostram os vetores velocidade e linhas de corrente para o caso em que  $Re = 158$ .

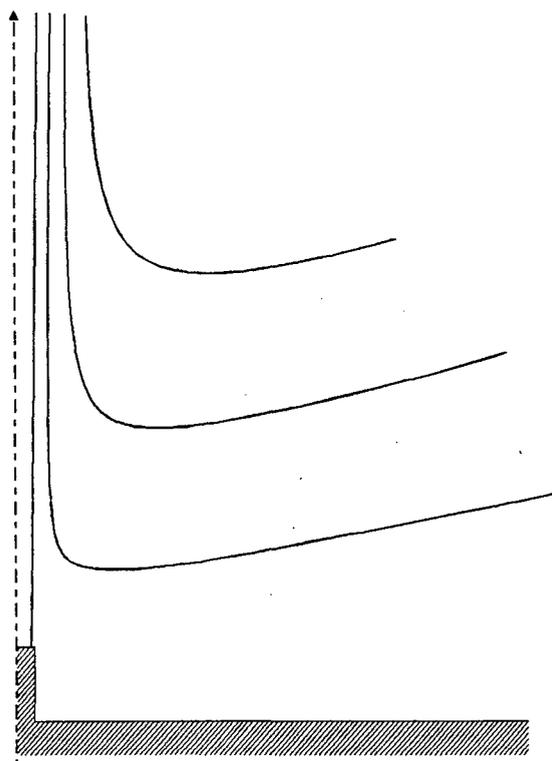
É interessante observar a área próxima à descarga do jato. Fica evidenciado nesta região a existência de fluido sendo incorporado ao jato, fenômeno conhecido pelo nome de "entrainment". A representação dos resultados em termos de vetores velocidade ratifica esta característica.



**Figura 4.17** - Vetores velocidade para o escoamento do jato com  $Re = 308$ .

Pode-se concluir, através das comparações apresentadas, que os resultados do presente trabalho representam satisfatoriamente situações reais de escoamento hidrodinâmico de jatos no interior de um meio de mesmo fluido, embora, como aparenta indicar a figura (4.16), algum trabalho ainda possa ser executado, visando melhorar o desempenho do modelo para maiores alturas.

Como teste de validação final, antes da implementação do modelo de turbulência nas equações, resultados preliminares para um caso de inversão térmica serão obtidos, visando comprovar a viabilidade do uso deste modelo para a previsão de casos críticos de poluição ambiental.



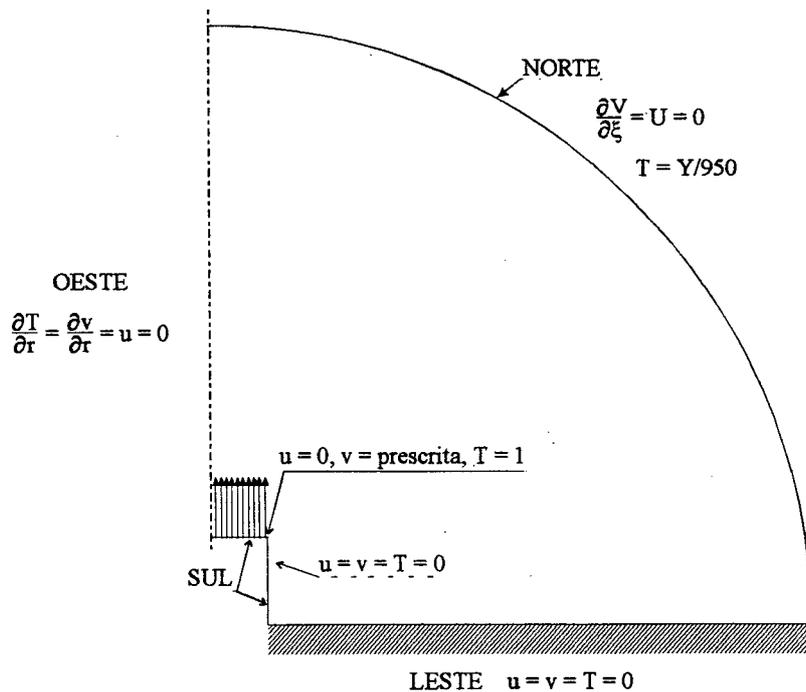
**Figura 4.18** - Linhas de corrente para escoamento do jato com  $Re = 158$ .

#### **4.4 - SIMULAÇÃO DE UM CASO COM INVERSÃO TÉRMICA**

O problema da convecção natural em meio estratificado também foi resolvido. Esta simulação foi executada com o intuito de verificar o potencial desta metodologia quanto a possibilidade de simulação de casos que apresentem inversão térmica. Para tanto utilizou-se uma configuração geométrica semelhante à utilizada para a simulação do problema de Akaike e Nemoto, alterando-se as condições de contorno e, obviamente, acoplado-se ao problema hidrodinâmico o problema térmico.

O mecanismo da inversão térmica já foi descrito com detalhes no capítulo 1, mas uma breve recapitulação é aqui apresentada.

Imagine-se por exemplo, a descarga de um jato em um ambiente de mesmo fluido com uma determinada estratificação, por simplicidade, linear. Esta estratificação caracteriza-se pelo aumento da temperatura com a altura. Inicialmente, se a temperatura do jato descarregado for maior que a do ambiente, este sofre uma aceleração da velocidade, pois sua massa específica é menor que aquela do meio que o circunda.



**Figura 4.19** - Condições de contorno para a simulação da inversão térmica.

O jato continua a subir trocando calor com o meio, até encontrar uma região em que a sua temperatura seja igual a do ambiente. Neste ponto as massas específicas são iguais, e não existe mais efeito de empuxo: o jato continua a subir por efeito de sua quantidade de movimento, adquirida anteriormente. Como a troca de calor entre fluido de descarga e fluido circundante não se dá de maneira instantânea, o fluido de descarga possui ainda uma temperatura semelhante àquela que tinha em alturas inferiores. Ao adentrar um meio de temperatura maior, sua massa específica fica maior relativamente a este. Surgem então efeitos de empuxo contrários à direção do movimento, ou o empuxo negativo. O fluido então é desacelerado e, após atingir a máxima altura, troca a direção do movimento, voltando à posição de empuxo nulo e em torno desta

oscilando, até assumir a sua temperatura, espalhando-se radialmente.

Para o caso simulado neste trabalho, adotou-se as condições de contorno mostradas na figura (4.19). O perfil da descarga na saída é, por simplicidade, plano, com o número de Reynolds baseado no diâmetro de descarga de  $Re = 10$  e número de Froude  $Fr = 55$ , baseado no diâmetro da descarga e nas temperaturas de descarga e  $T_{\infty}$  para a mesma altura da descarga.

$\nu$ (m/s <sup>2</sup> )	$\rho$ (Kg/m <sup>3</sup> )	$\mu$ (Kg/ms)	Pr
1,42E-5	1,165	1,65E-5	0,7

**Tabela 4.4** - Propriedades físicas do ar para a simulação da inversão térmica.

A figura (4.20) mostra as características gerais do escoamento sobre a linha de centro. As linhas mostram a velocidade e temperatura ao longo desta linha. Também é apresentado o perfil de estratificação adotado.

A aceleração do fluido de descarga logo à saída da chaminé não foi verificada, embora possa-se observar a diferença de temperaturas entre este e o meio. Após o lançamento, o fluido na linha de centro permanece ainda um certo percurso com a temperatura próxima a da descarga, o que não acontece nesta simulação. Isto demonstra a necessidade de alterações no modelo, motivo do próximo capítulo, com a adoção de um modelo de turbulência, que minimizará o problema.

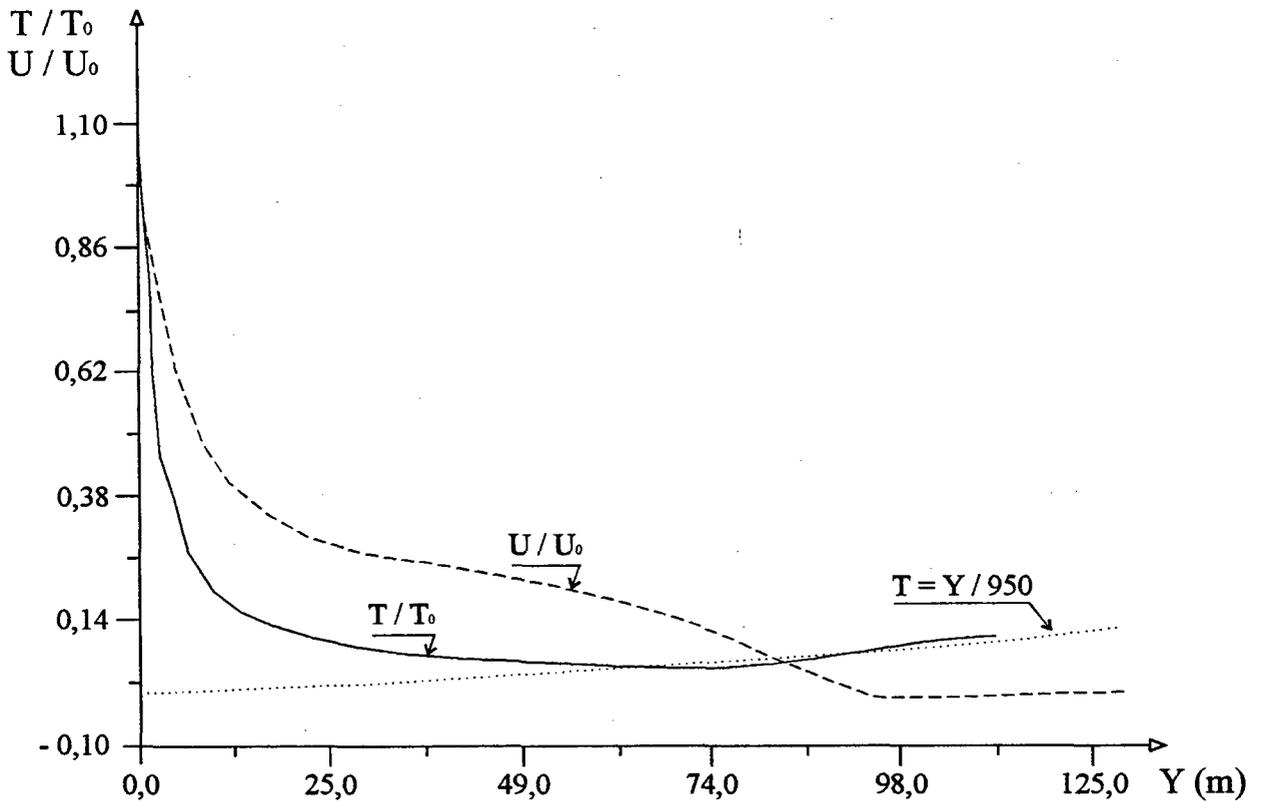
Da figura (4.20) pode-se ainda concluir que o comportamento do modelo, após esta região inicial é coerente, senão vejamos:

A) - A partir de aproximadamente  $Y = 50$  m, onde a temperatura do fluido equivale à do meio, o comportamento da curva representativa da velocidade sofre uma alteração, e a queda da velocidade aumenta. A presença de forças de flutuação negativas pode ser constatada pela diferença entre a temperatura do fluido de descarga e a do meio;

B) - A maior desaceleração do fluido ocorre justamente onde existe a maior diferença de temperaturas entre fluido de descarga e meio circundante ( $Y = 75$  m);

C) - A velocidade se anula em aproximadamente  $Y = 90$  m, que é a altura máxima atingida pelo fluido;

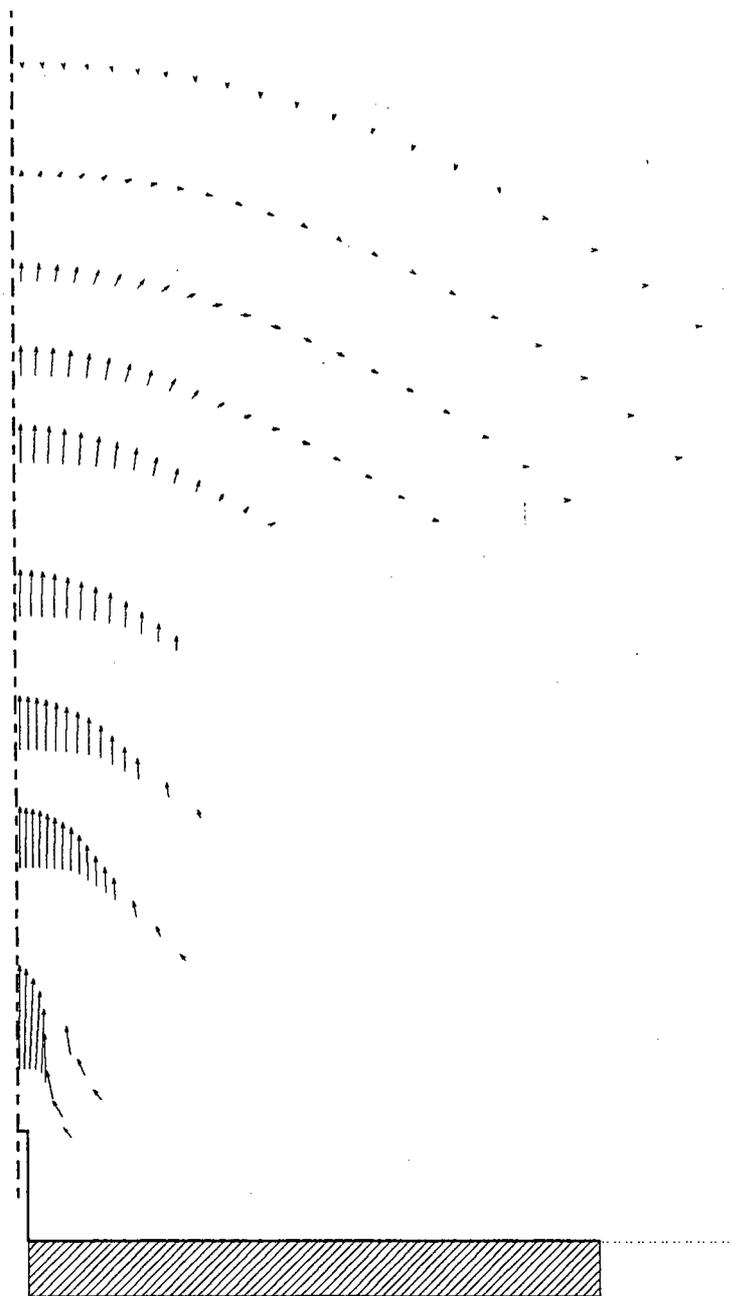
D) - Em  $Y = 98$  m temos fluido do ambiente, na parte superior, sendo arrastado pelo fluido de descarga, devido ao espalhamento radial. Note-se que este fluido possui a mesma temperatura do meio para aquela altura.



**Figura 4.20** - Temperaturas e velocidades para a linha de centro, para o caso com inversão térmica.

Para melhor visualização do escoamento, a seguir é apresentada a figura (4.21), contendo os vetores velocidade para este caso.

Nesta figura pode-se observar claramente o fluido sendo arrastado pela descarga logo à saída. Nota-se também a inversão do movimento do fluido e o seu retorno a uma altura inferior, de flutuação nula, espalhando-se radialmente e arrastando consigo fluido do ambiente, o que ratifica a conclusão do item D, anteriormente apresentada.



**Figura 4.21** - Vetores velocidade para o escoamento apresentando inversão térmica.

---

### RESULTADOS PARA ESCOAMENTOS TURBULENTOS

---

#### 5.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentados os resultados para a metodologia anteriormente descrita, adotando-se o modelo de turbulência algébrico proposto por Madni e Pletcher [4] para a simulação de descargas de jatos turbulentos. Este modelo baseia-se no cálculo da viscosidade turbulenta em duas regiões distintas, variando conforme a altura em relação ao nível de descarga.

#### 5.2 - MODELO UTILIZADO

Visando repetir o mais fielmente possível os resultados obtidos na referência, as modificações implementadas no presente modelo foram semelhantes àquelas adotadas no modelo parabólico de Madni e Pletcher.

Como consequência, pode ser visto nas equações do movimento para a direção axial (5.1) e da energia (5.2) o aparecimento de uma parcela  $\mu_T$ . As demais equações permanecem inalteradas em relação àquelas apresentadas no capítulo 3. Nestas equações os fluxos de calor e

quantidade de movimento são dados por

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho v] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [\rho r u v] + \frac{\partial}{\partial y} [\rho v v] = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r \tau] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right] - \frac{\partial p}{\partial y} + S^v \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho T] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [\rho r u T] + \frac{\partial}{\partial y} [\rho v T] = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{r}{C_p} q \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{k}{C_p} \frac{\partial T}{\partial y} \right] \quad (5.2)$$

onde

$$\tau = (\mu + \mu_T) \frac{\partial v}{\partial r} \quad (5.3)$$

$$q = (k + k_T) \frac{\partial T}{\partial r} \quad (5.4)$$

O procedimento de adotar o modelo de turbulência somente nas equações da conservação da energia e da quantidade de movimento na direção longitudinal no sistema elíptico de equações governantes justifica-se se considerarmos que o problema é essencialmente convectivo segundo esta orientação. Este aspecto é reforçado principalmente se o escoamento não apresentar inversão térmica, como é o caso das situações simuladas para a validação do modelo. Existindo eventualmente recirculações, a equação da conservação da quantidade de movimento na direção radial torna-se um complemento imprescindível do modelo inicial parabólico. Ainda observando as equações (5.1) e (5.2), nota-se que o modelo de turbulência encontra-se apenas no termo difusivo na direção radial. Justifica-se esta característica uma vez que na direção axial o transporte das propriedades é predominantemente convectivo, tendo os termos difusivos nesta direção uma importância relativa pequena, quando comparados com os termos difusivos na direção radial.

Fazendo uma extensão do número de Prandtl para o transporte molecular, admitindo-se que a viscosidade cinemática turbulenta  $\nu_T$  e a difusividade térmica turbulenta  $\alpha_T$  possam ser relacionados por

$$\alpha = \frac{\nu_T}{Pr_T} \quad (5.5)$$

a avaliação da condutibilidade turbulenta  $k_T$  pode se feita por

$$k_T = \rho C_P \frac{\nu_T}{Pr_T} \quad (5.6)$$

onde  $Pr_T$  é o número de Prandtl turbulento, que conforme a referência, assume o valor 0,7.

### 5.3 - TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS E INTEGRAÇÃO DAS EQUAÇÕES

O método de transformação de coordenadas já foi descrito com detalhes no capítulo 2, sendo aplicado da mesma maneira para o presente caso. Com o intuito de exemplificar o procedimento, apresenta-se a transformação, integração e aproximação da equação (5.1) somente.

Após executada a transformação de coordenadas, a equação (5.1) apresenta-se como

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}[\rho v] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi}[\rho r U v] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta}[\rho r V v] + \frac{P\phi}{J} = \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ r J [(\mu + \mu_T) y_\eta^2 + \mu r_\eta^2] \frac{\partial v}{\partial \xi} \right\} + \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ r J [-(\mu + \mu_T) y_\xi y_\eta - \mu r_\xi r_\eta] \frac{\partial v}{\partial \eta} \right\} + \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ r J [(\mu + \mu_T) y_\xi^2 + \mu r_\xi^2 + \mu r_\xi^2 q] \frac{\partial v}{\partial \eta} \right\} + \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ r J [-(\mu + \mu_T) y_\eta y_\xi - \mu r_\eta r_\xi] \frac{\partial v}{\partial \xi} \right\} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Integrando-se a equação (5.7) no volume de controle elementar e no tempo, obtém-se

$$\begin{aligned}
 \frac{r_P}{J} (\rho_P v_P)^{t+\epsilon\Delta t} \frac{\Delta\eta\Delta\xi}{\Delta t} + A_P^* v_P^{t+\epsilon\Delta t} = \\
 A_e v_E^{t+\epsilon\Delta t} + A_w v_W^{t+\epsilon\Delta t} + A_n v_N^{t+\epsilon\Delta t} + \\
 L|\hat{P}^v| r_P \Delta\eta\Delta\xi + L|\hat{S}^v| r_P \Delta\eta\Delta\xi + \frac{r_P}{J} (\rho_P v_P)^t \frac{\Delta\eta\Delta\xi}{\Delta t} + \\
 \left( -P2 \frac{\partial v}{\partial \eta} \Big|_e \right) - \left( -P2 \frac{\partial v}{\partial \eta} \Big|_w \right) + \left( -P4 \frac{\partial v}{\partial \xi} \Big|_n \right) - \left( -P4 \frac{\partial v}{\partial \xi} \Big|_s \right)
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

onde

$$A_P^* = A_e + A_w + A_n + A_s \tag{5.9}$$

$$A_e = -\dot{m}_e (1/2 - \alpha_e) + P1 \beta_e \frac{\Delta\eta}{\Delta\xi} \tag{5.10}$$

$$A_w = \dot{m}_w (1/2 + \alpha_w) + P1 \beta_w \frac{\Delta\eta}{\Delta\xi} \tag{5.11}$$

$$A_n = -\dot{m}_n (1/2 - \alpha_n) + P3 \beta_n \frac{\Delta\xi}{\Delta\eta} \tag{5.12}$$

$$A_s = \dot{m}_s (1/2 + \alpha_s) + P3 \beta_s \frac{\Delta\xi}{\Delta\eta} \tag{5.13}$$

Os termos  $P1$ ,  $P2$ ,  $P3$  e  $P4$  para a equação do movimento em  $y$ , são dados por

$$P1 = r J [(\mu + \mu_T) y_\eta^2 + \mu r_\eta^2] \tag{5.14}$$

$$P2 = r J [(\mu + \mu_T) y_\xi y_\eta + \mu r_\xi r_\eta] \tag{5.15}$$

$$P3 = r J [(\mu + \mu_T) y_\xi^2 + \mu r_\xi^2] \quad (5.16)$$

$$P4 = r J [(\mu + \mu_T) y_\eta y_\xi + \mu r_\eta r_\xi] \quad (5.17)$$

O procedimento de solução das equações é o mesmo já descrito anteriormente, exceto pelo acréscimo da viscosidade turbulenta  $\mu_T$  e da condutividade térmica  $k_T$ , que são calculados a cada passo de tempo e acrescentados às equações pertinentes.

O cálculo de  $\mu_T$ , como descrito na referência, é feito em duas regiões distintas, conforme mostra esquematicamente a figura (5.1).

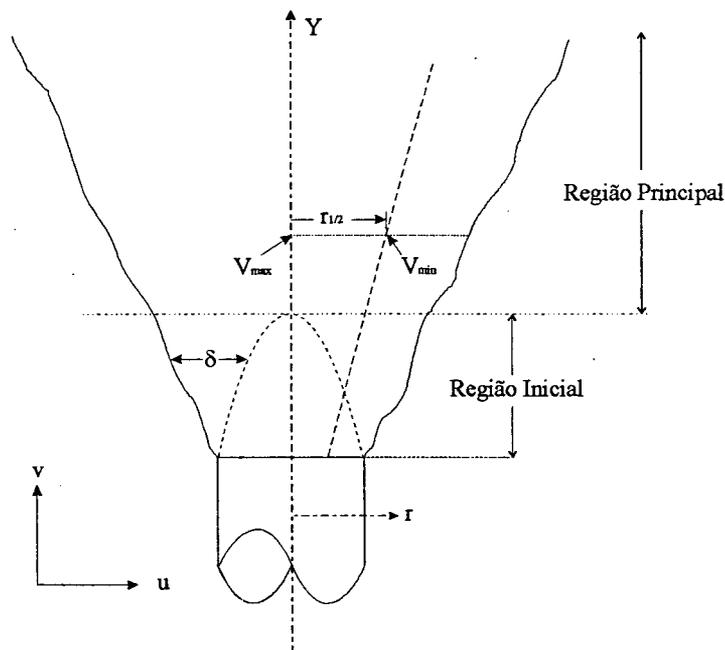


Figura 5.1 - Regiões distintas do cálculo de  $\mu_T$ .

**Região Inicial:** É aquela formada pela saída da descarga, ou seja, o bocal da chaminé e uma linha horizontal imaginária que cruza o eixo de simetria no ponto onde a temperatura  $T$  do fluido do escoamento está a 99% da temperatura na descarga  $T_w$ .

**Região Principal:** É toda a porção do domínio superior à linha imaginária descrita anteriormente.

Em cada uma destas regiões procede-se um cálculo diferente para  $\mu_T$ . Para a região inicial, cada volume da malha contido entre o eixo de simetria e a linha formada pelos pontos onde a velocidade equivale a 1% da velocidade na linha de centro  $v_{m\acute{a}x}$  para a mesma altura, tem a correção  $\mu_T$  calculada individualmente, conforme a equação (5.18).

$$v_T = (0,00762 \delta)^2 \left| \frac{\partial v}{\partial r} \right| \quad (5.18)$$

Na região principal,  $\mu_T$  é constante para todos os volumes da malha que estão numa mesma altura. Para esta região temos

$$v_T = 0,0344 y_{1/2} (v_{m\acute{a}x} - v_{m\acute{i}n}) \quad (5.19)$$

onde  $v_{m\acute{a}x}$  é a velocidade sobre a linha de simetria;

$v_{m\acute{i}n}$  é a velocidade sobre a linha de meio-raio para a mesma altura;

$r_{1/2}$  é o meio-raio, dado pela distância radial da linha de simetria até o ponto onde

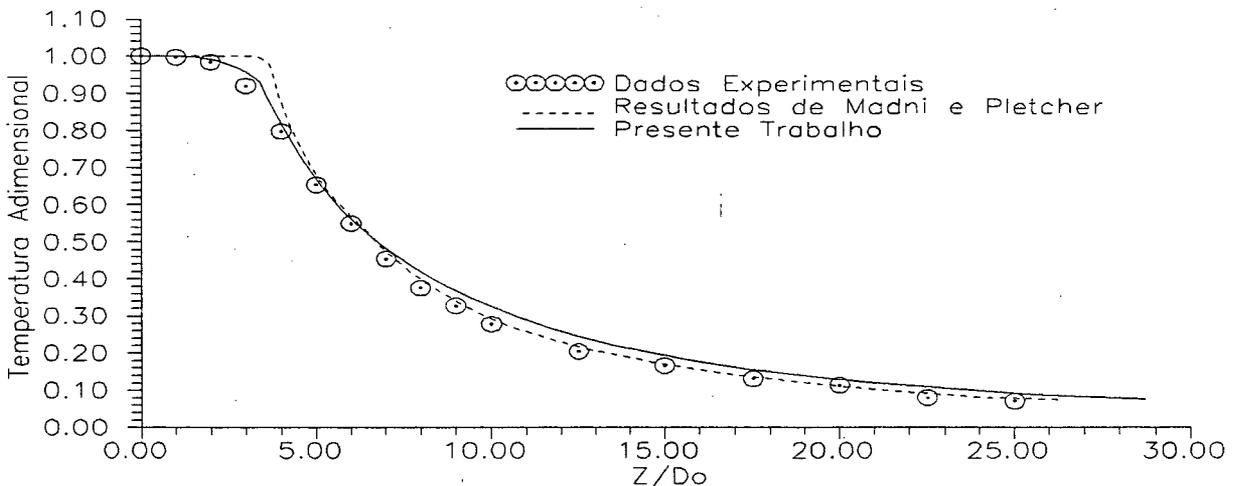
$$v_{m\acute{i}n} = 0,5 v_{m\acute{a}x}.$$

No presente modelo a constante empírica apresentada na equação (5.19) foi alterada em aproximadamente 40%, visando ajustar os resultados obtidos com os dados experimentais. Tal procedimento foi admitido como aceitável, considerando que as constantes obtidas por Madni e Pletcher para as mesmas equações foram escolhidas por tentativas, visando igualmente ajustar os resultados obtidos, e levando ainda em conta as diferenças entre os próprios modelos adotados.

Para a identificação das regiões Inicial e Principal, foi necessária a implementação de uma metodologia de varredura de domínio, onde verifica-se a posição da isoterma de  $0,99 T_0$  e as das linhas de velocidade de 1% e 50%, relativas àquela sobre o eixo de simetria para a mesma altura.

## 5.4 - RESULTADOS

Em Madni e Pletcher [4] encontramos diversos resultados. Inicialmente procedeu-se a verificação da validade do modelo, comparando resultados numéricos com dados experimentais. Esta seqüência de comparações efetuou-se com valores para o decaimento da temperatura sobre a linha de simetria. Igualmente para fins de validação, preliminarmente foram comparados os resultados do presente modelo com dados experimentais de Pryputniewicz [5] e resultados numéricos de Madni e Pletcher [4]. Posteriormente foram analisados outros resultados, referentes ao desenvolvimento da velocidade, também sobre o eixo de simetria.



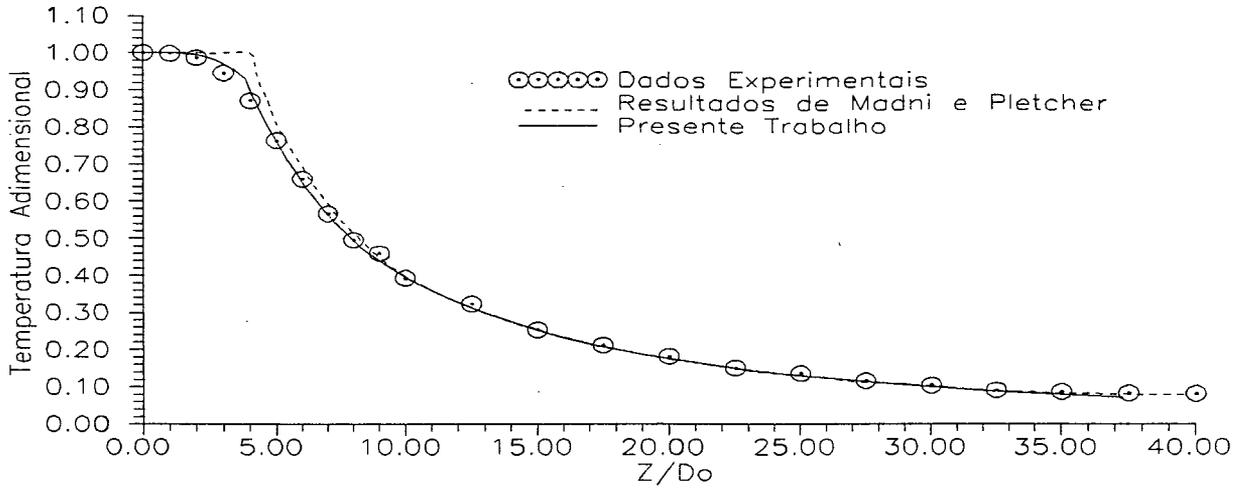
**Figura 5.2** - Temperatura ao longo da linha de simetria para  $Fr = 4$ .

Efetuu-se comparações de resultados para diversas situações em ambiente uniforme. Como parâmetro adimensional foi utilizado o número de Froude, definido como segue

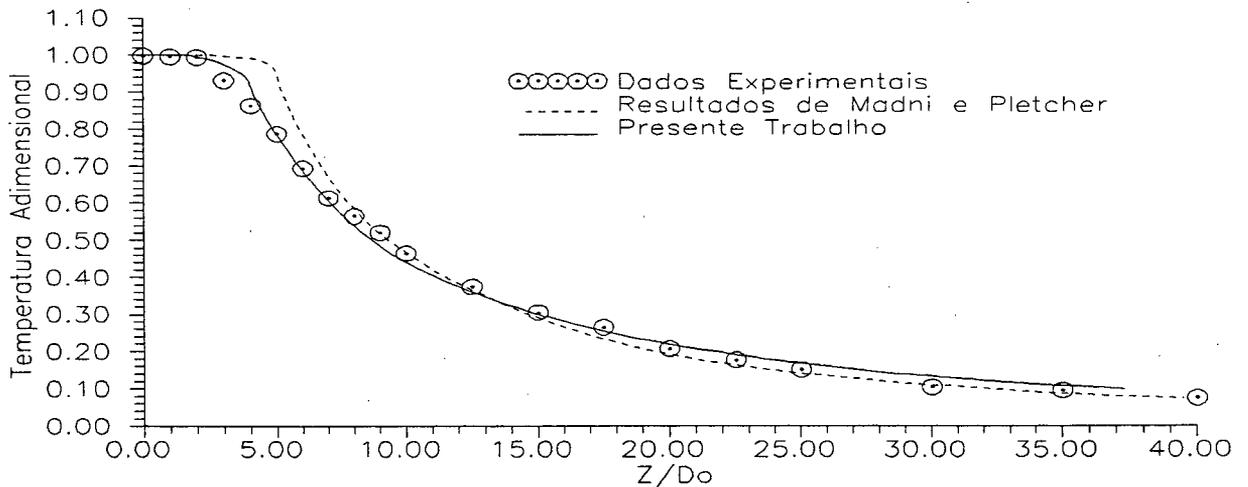
$$Fr_0 = \frac{u_0^2}{g d_0 \beta (t_0 - t_{0s})} \quad (5.20)$$

onde o subscrito 0 simboliza a altura na qual se encontra a descarga. O número de Froude foi variado de  $Fr = 1$ , quando os efeitos de empuxo são extremamente significativos, até  $Fr = 1000$ , quando estes efeitos são desprezíveis.

Nas figuras (5.2), (5.3) e (5.4) são apresentadas comparações de resultados numéricos com dados experimentais para valores de  $Fr = 4, 16$  e  $64$ .



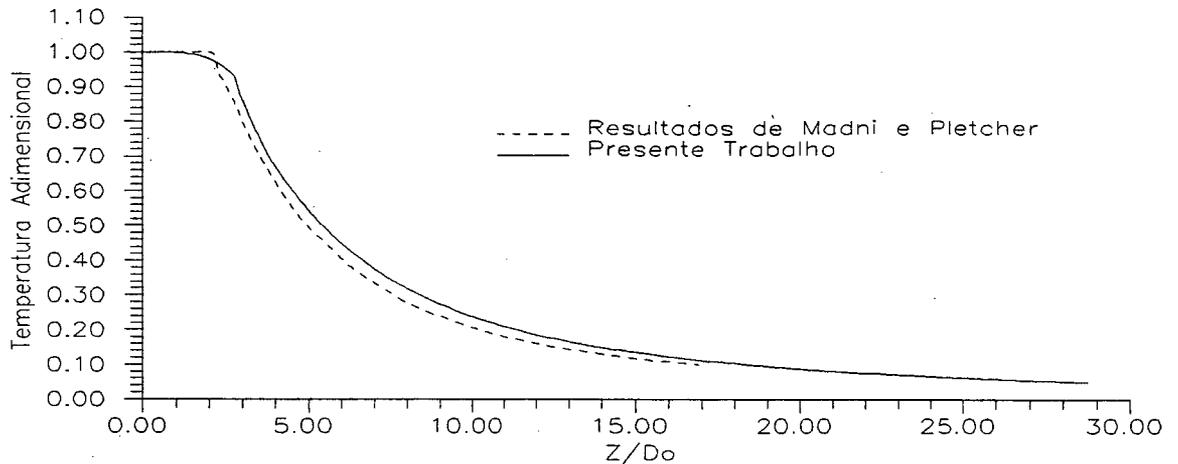
**Figura 5.3** - Temperatura ao longo da linha de simetria para  $Fr = 16$ .



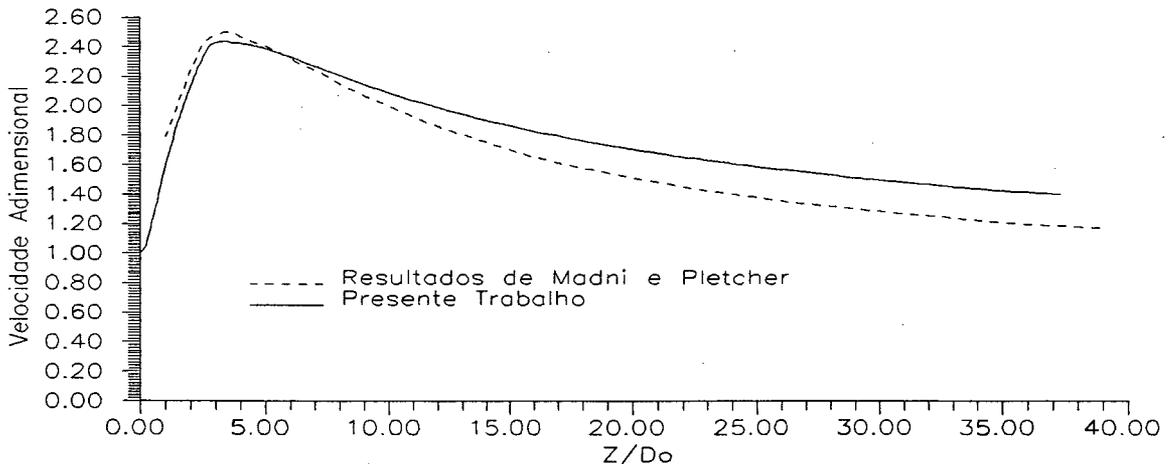
**Figura 5.4** - Temperatura ao longo da linha de simetria para  $Fr = 64$ .

Uma importante característica, identificada por Madni e Pletcher, é que o modelo proposto por eles superestima os valores da temperatura na região inicial, quando relacionados com os dados experimentais obtidos por Pryputniewicz [5], fazendo com que a mesma não se

altere por uma razoável distância ao longo do eixo de simetria. Este mesmo esquema de avaliação das viscosidades turbulentas, quando utilizado no presente trabalho, apresentou resultados qualitativamente superiores para o decaimento da temperatura ao longo deste eixo, além de apresentar uma transição fisicamente mais coerente e suave entre as duas distintas zonas do domínio.



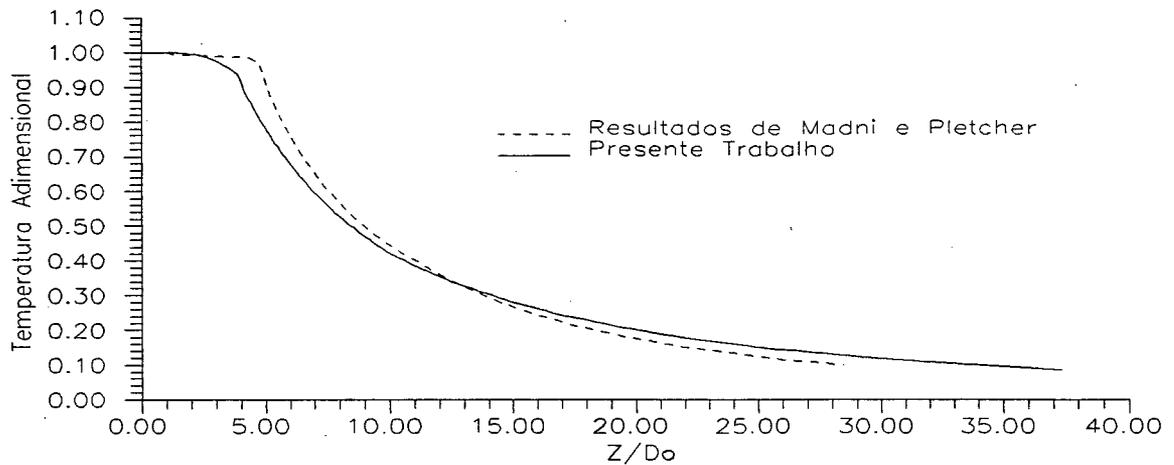
**Figura 5.5** - Resultados numéricos. Temperatura ao longo do eixo de simetria para  $Fr = 1$ .



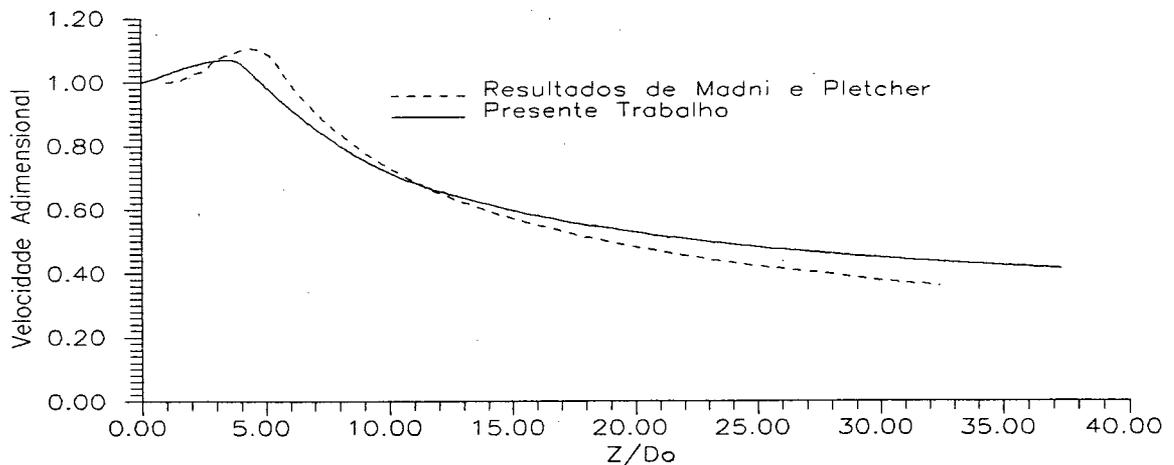
**Figura 5.6** - Resultados numéricos. Velocidade ao longo do eixo de simetria para  $Fr = 1$ .

Observando as figuras (5.2), (5.3) e (5.4), conclui-se que na região principal as soluções

do presente trabalho, as de Madni e Pletcher [4] e os dados experimentais de Pryputniewicz [5] são consideradas equivalentes, uma vez que as diferenças encontradas são muito pequenas.



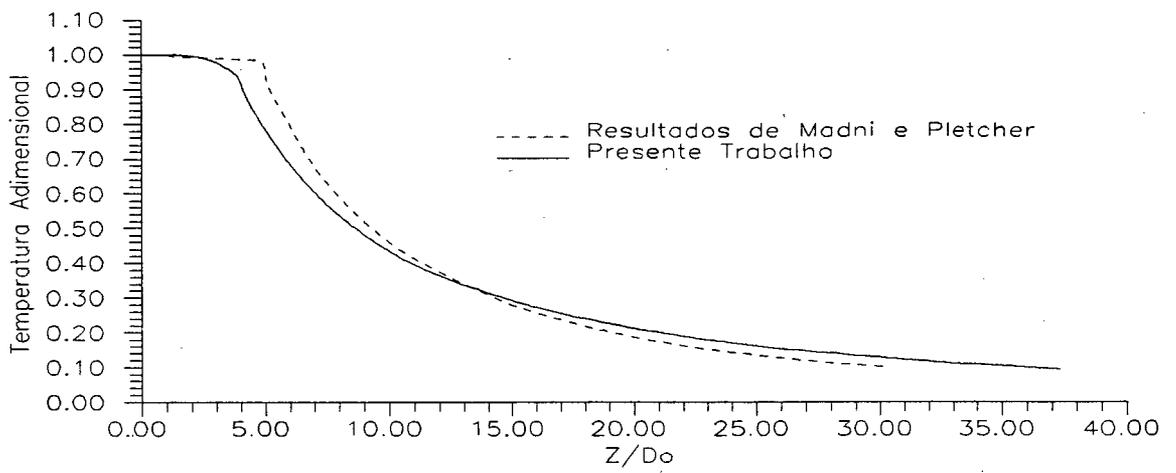
**Figura 5.7** - Resultados numéricos. Temperatura ao longo do eixo de simetria para  $Fr = 35$ .



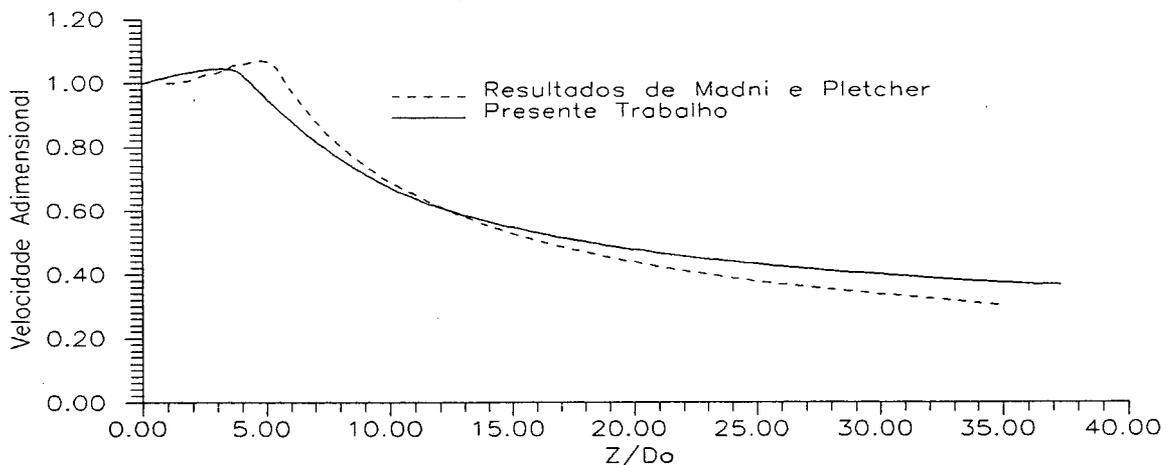
**Figura 5.8** - Resultados numéricos. Velocidade ao longo do eixo de simetria para  $Fr = 35$ .

Numa segunda etapa de comparações, são apresentados resultados numéricos dos testes de Madni e Pletcher para  $Fr = 1$ ,  $Fr = 35$ ,  $Fr = 52$ ,  $Fr = 106$  e  $Fr = 1000$ . Além das soluções para a temperatura, são também apresentados os valores da velocidade sobre a linha de centro.

As figuras de número (5.5) em diante apresentam outras comparações de resultados, sempre mostrando as curvas de velocidade e temperatura sobre a linha de simetria para as mesmas situações. Pode-se observar claramente o considerável efeito da flutuação para os casos em que o número de Froude é baixo. Em particular, para o caso de  $Fr = 1$ , nota-se na figura (5.6) a brutal aceleração do fluido, sofrida logo após a descarga.



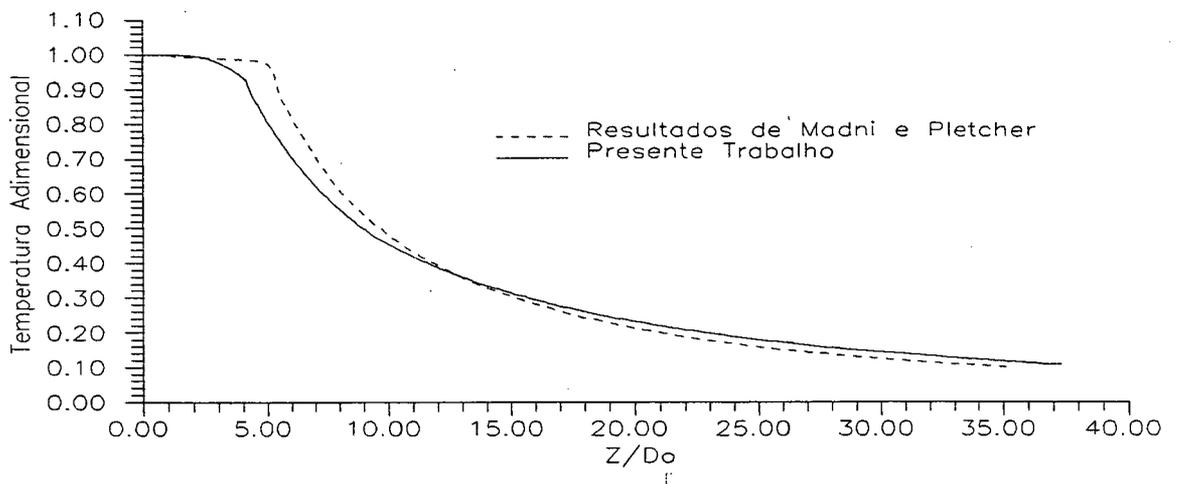
**Figura 5.9** - Resultados numéricos. Temperatura ao longo do eixo de simetria para  $Fr = 52$ .



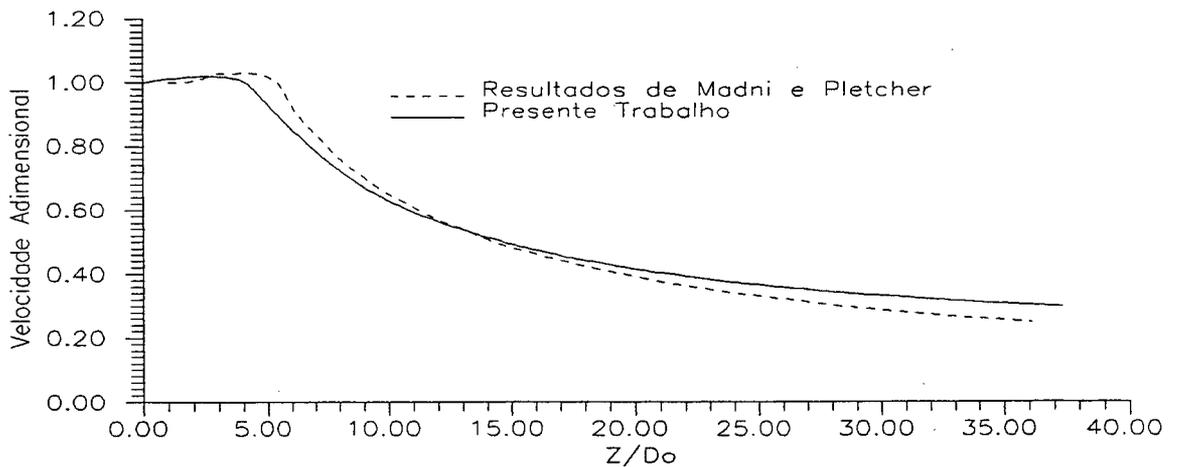
**Figura 5.10** - Resultados numéricos. Velocidade ao longo do eixo de simetria para  $Fr = 52$ .

Nota-se também neste caso, que as estimativas da velocidade máxima e sua posição

coincidem bem com os resultados da referência. Uma discordância é observada na região principal do domínio embora, analisando a figura (5.5), possa-se concluir que os perfis de temperatura são bastante aproximados. Portanto, aparentemente não se pode atribuir aos efeitos de empuxo a disparidade entre os perfis de velocidade na região principal encontrada na figura (5.6).

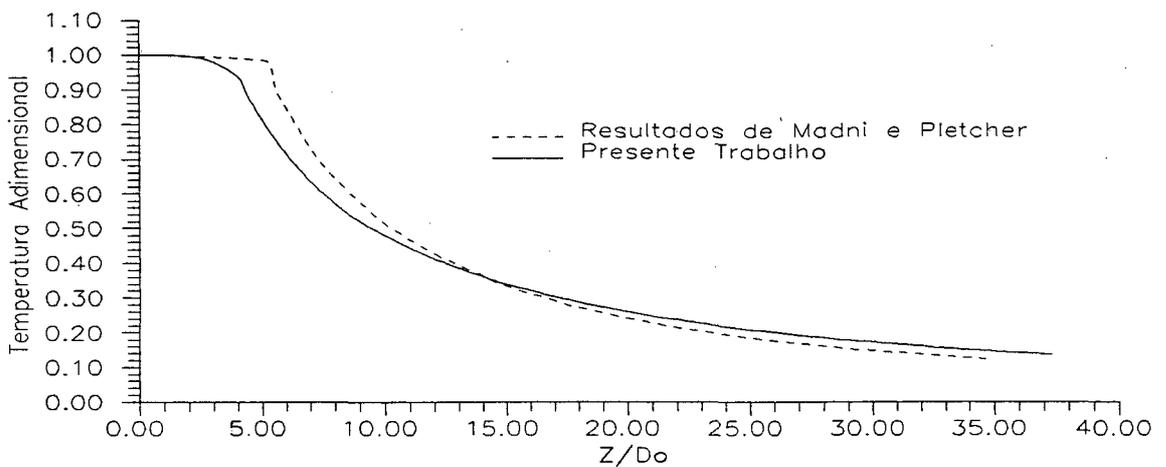


**Figura 5.11** - Resultados numéricos. Temperatura ao longo do eixo de simetria para  $Fr = 106$ .

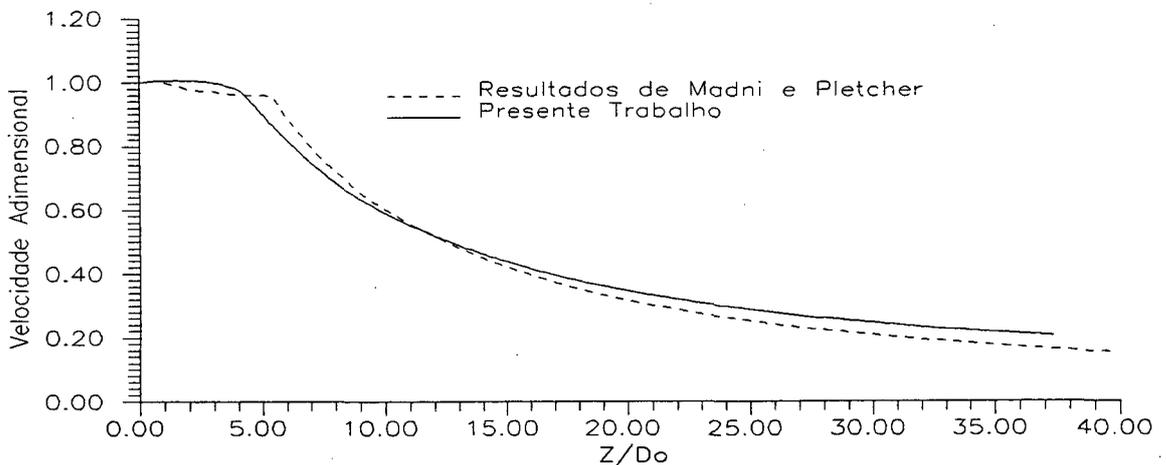


**Figura 5.12** - Resultados numéricos. Velocidade ao longo do eixo de simetria para  $Fr = 106$ .

Deve-se reparar, com base na análise das figuras (5.2), (5.3) e (5.4) que, para números de Froude baixos, os resultados para a região inicial obtidos por Madni e Pletcher [4] estão ligeiramente mais próximos dos experimentais do que para Froudes mais altos. A presente metodologia, por outro lado, apresenta um comportamento mais uniforme dentro do espectro de números de Froude testados, destacando-a no desejável aspecto da generalidade.



**Figura 5.13** - Resultados numéricos. Temperatura ao longo do eixo de simetria.  $Fr = 1000$ .



**Figura 5.14** - Resultados numéricos. Velocidade ao longo do eixo de simetria.  $Fr = 1000$ .

A partir de  $Fr = 35$ , figuras (5.7) e (5.8), e para números de Froude maiores, nota-se sempre que o presente modelo apresenta perfis de temperatura decrescendo mais rapidamente que aqueles apresentados na referência para a região inicial. Conseqüentemente, sob a influência dos efeitos de flutuação abrangendo uma menor região, os perfis de velocidade iniciam seu declínio numa posição anterior.

Observa-se ainda que a tendência de superestimar o perfil de velocidade, em relação aos resultados apresentados por Madni e Pletcher [4] continua existindo na região principal do domínio.

### CONCLUSÕES

---

---

A proposta desta dissertação foi desenvolver uma metodologia para a previsão da dispersão de poluentes lançados por uma chaminé na atmosfera. O modelo considera uma descarga bidimensional, sendo analisado o comportamento hidrodinâmico e térmico do problema em questão. O enfoque sobre a distribuição de temperaturas no campo é justificado pela semelhança existente entre as equações da concentração e da conservação de energia, produzindo resultados análogos.

Os testes de validação foram realizados em duas etapas, considerando escoamentos laminares e turbulentos, das quais se conclui:

- As simulações realizadas num duto verticalmente posicionado, de secção circular, mostraram resultados muito bons quando comparados com os dados experimentais. O escoamento hidrodinâmico foi reproduzido com muita precisão para várias alturas, excetuando-se na entrada, onde o perfil obtido numericamente difere ligeiramente dos dados experimentais. Esta discrepância, aparentemente, deve-se a problemas de reprodução das condições de entrada do processo experimental. Através da simulação do caso de convecção mista, demonstrou-se mais uma vez que os resultados são qualitativamente satisfatórios.

■ No caso da simulação da descarga de água num reservatório, observou-se que os resultados para a velocidade ao longo da linha de simetria e os perfis radiais de velocidade apresentam pequenas diferenças, embora possam ser considerados muito bons. Exige-se mais algum tratamento no algoritmo, visando melhorar o seu desempenho, o que foi feito através da adoção de um modelo de turbulência. Verificou-se que o fenômeno de *entrainment*, ou seja, fluido circundante sendo arrastado pelo jato, foi bem captado.

■ A simulação de uma situação em ambiente estratificado permitiu verificar o coerente desempenho do modelo quanto à previsão do comportamento físico do fluido, conseguindo-se a sua reversão após a altura máxima e verificando-se o seu espalhamento na altura de empuxo neutro.

■ Finalmente, através de um modelo de turbulência simplificado, simulou-se a descarga térmica num ambiente uniforme. Pôde-se verificar o correto comportamento do modelo, obtendo-se resultados melhores que aqueles conseguidos numericamente por Madni e Pletcher [5]. Apesar da simplicidade do modelo algébrico adotado num problema mais complexo, os resultados obtidos podem ser considerados muito bons.

Através dos testes anteriormente realizados, conclui-se que o modelo poderá ser utilizado eficientemente para os casos propostos no início deste trabalho, embora muito ainda possa ser feito para melhorar seu desempenho. Neste sentido sugere-se a extensão para um modelo tridimensional, da metodologia apresentada, visando a consideração de efeitos correlatos a este tipo de escoamento, tais como influência dos ventos, do relevo e de edificações circunvizinhas. Estes melhoramentos certamente exigirão a implementação de um modelo de turbulência mais complexo.

---

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

- [1] C.R. MALISKA, *A Solution Method for Three-Dimensional Parabolic Fluid Flow Problems in Nonorthogonal Coordinates*, Ph.D. Thesis, University of Waterloo, Canada, 1981.
- [2] B. ZELDIN & F.W. SCHMIDT, *Developping Flow with Combined Forced Free Convection in a Isothermal Vertical Tube*, J. Heat Transfer, 211, May 1972.
- [3] S. AKAIKE & M. NEMOTO, *Potential Core of a Submerged Laminar Jet*, Transactions of the ASME, Vol. 110, 392, December 1988.
- [4] I.K. MADNI & R.H. PLETCHER, *Predictions of Turbulent Forced Plumes Issuing Vertically Into Stratified or Uniform Ambients*, J. Heat Transfer, 99, February 1977.
- [5] R.J. PRYPUTNIEWICZ & W.W. BOWLEY, *An Experimental Study of Vertical Buoyant Jets Discharged Into Water of Finite Depth*, J. Heat Transfer, Vol. 97, 274, 1975.

- [6] G.A. BRIGGS, *Plume Rise*, TID 25075, Clearinghouse of Federal Scientific and Technical Information, Springfield, Va, 1966.
- [7] G.T. CSANDY, *Effect of Plume Rise on Ground Level Pollution*, Atmos. Env., Vol. 7, 1973.
- [8] D.J. MOORE, *A Comparison of The Trajectories of Rising Buoyant Plumes With Theoretical/Empirical Models*, Atmos. Env., Vol. 8, 1974.
- [9] B.R. MORTON, G.I. TAYLOR & J.S. TURNER, *Turbulent Gravitational Convection from Maintained and Instantaneous Sources*, Proc. Roy. Soc., 1956.
- [10] B.R. MORTON, *The Ascent of Turbulent Forced Plumes in a Calm Atmosphere*, *Int. J. Air Pollution*, Vol. 1, 1959.
- [11] G. ABRAHAM, *Entrainment Principle and its Restrictions to Solve Problems of Jets*, J. of Hydr. Res., Vol. 3, 1965.
- [12] J.W. TELFORD, *The Convective Mechanism in Clear Air*, J. Atmos. Sci., Vol. 23, 1966.
- [13] D.G. FOX, *Forced Plume in Stratified Fluid*, J. Geophys. Res., Vol. 75, 1979.
- [14] H.O. ANWAR, *Measurement on Horizontal Buoyant Jet in Calm Ambient Fluid With Theory Based on Variable Coefficient of Entrainment Determined Experimentally*, La Houille Blanche, Vol. 4, 1972.
- [15] E.J. LIST & J. IMBERGER, *Turbulent Entrainment in Buoyant Jets and Plumes*, J. Hydr. Div., HY9, Vol. 108, September 1973.
- [16] H.J. SNECK & D.M. BROWN, *Plume Rising From Large Thermal Sources Such as Dry*

*Cooling Towers*, J. Heat Transfer, 232, 1974.

- [17] E. HIRST, *Zone of Flow Establishment for Round Buoyant Jets*, Water Resources Res., Vol. 8, 1234, 1972.
- [18] M. SCHATZMANN, *Auftriebsstrahlen in Natürlichen Strömungen-Entwicklung Eines Mathematischen Modell*, Ph.D. Thesis, Universität von Karlsruhe, Karlsruhe, Deutschland, 1976.
- [19] B.E LAUNDER & D.B. SPALDING, *Mathematical Models of Turbulence*, Academic Press, London, 1972.
- [20] J.L. LUMLEY, *A Model for Computation of Stratified Turbulent Flows*, Int. Symp. on Stratified Flows, Novosibirsk II, 333, 1972.
- [21] C.P. DONALDSON, R.D. SULLIVAN & H. ROSENBAUM, *A Theoretical Study of The Generation of Atmospheric Clear Air Turbulence*, AIAA J., Vol. 10, 162, 1972.
- [22] G.L. MELLOR, *Analytical Prediction of The Properties of Stratified Planetary Surface Layers*, J. Atmos. Sci., Vol. 30, 1061, 1973.
- [23] G.L. MELLOR & T. YAMADA, *A Hierarchy of Turbulent Closure Models for Planetary Boundary Layers*, J. Atmos. Sei., Vol. 31, 1791, 1974.
- [24] R.N. MERONEY, *Buoyancy Effects on a Turbulent Shear Flow*, Project Themis, Rept. 28, Colorado State University, 1974.
- [25] J.L. LUMLEY & B. KHAJEH-NOURI, *Computational Modelling of Turbulent Transport, Turbulent Diffusion in Environmental Pollution*, ed. F.N. Frenkiel and R.E. Munn, Academic Press, NY, 1974.

- [26] B.E. LAUNDER, *On The Effects of a Gravitational Field on The Turbulent Transport of Heat and Momentum*, J. Fluid Mechanics, Vol. 67, 569, 1975.
- [37] M.S. HOSSAIN & W. RODI, *Equations for Turbulent Buoyant Flows and Their Modelling*, Rept. SFB 80/T/46, University of Karlsruhe, 1974.
- [38] M.M. GIBSON & B.E. LAUNDER, *On The Calculation of Horizontal Nonequilibrium Turbulent Shear Flows Under Gravitational Influence*, J. Heat Transfer, 81-87, February 1976.
- [29] F.J.K. IDERIAH, *The Prediction of Turbulent Jets and Plumes*, M.Sc. Thesis, Department of Mech. Eng. Imperial College, London, 1974.
- [30] C.J. CHEN & W. RODI, *A Mathematical Model for Stratified Turbulent Flow and its Application to Buoyant Jets*, 16th IAHR Congress, São Paulo, Brasil, 1975.
- [31] J.F. THOMPSON, F.C. THAMES & C.W. MASTIN, *Boundary-Fitted Curvilinear Coordinate Systems for Solution of Partial Differential Equations on Fields Containing any Number of Arbitrary Two-Dimensional Bodies*, Research Sponsored by NASA Langley Research Center, Grant NGR 25-001-055, Mississippi State University.
- [32] J.O. PEREZ, *Simulação Numérica de Descargas Térmicas em Corpos D'água Rasos de Geometria e Profundidade Variáveis*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, 1987.
- [33] G.B. RAITHBY & K.E. TORRANCE, *Upstream-Weighted Differencing Schemes and Their Application to Elliptic Problems Involving Fluid Flow*, Computer and Fluids, Vol. 2, 191, 1974.
- [34] G.D. RAITHBY, *Prediction of Dispersion by Surface Discharge, Basin Investigation and Modelling Section*, Canada Centre of Inland Waters, Burlington, Ontario, Canada,

August 1976.

- [35] A.C.R. NOGUEIRA & C.R. MALISKA, *Relatório de Atividades, Convênio UFSC/FINEP, Sub-Projeto 6 - Tecnologia do Carvão*, Universidade Federal de Santa Catarina.