

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

CONTROLE MODAL DE VIBRAÇÕES POR NEUTRALIZADORES DINÂMICOS  
UMA ABORDAGEM GENERALIZADA

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA

HILTON PENHA SILVA

FLORIANÓPOLIS, ABRIL DE 1991

CONTROLE MODAL DE VIBRAÇÕES POR NEUTRALIZADORES DINÂMICOS:

UMA ABORDAGEM GENERALIZADA

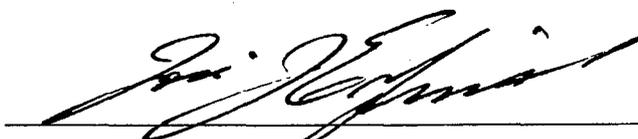
HILTON PENHA SILVA

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

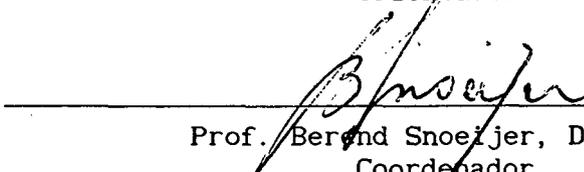
MESTRE EM ENGENHARIA

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA, ÁREA DE CONCENTRAÇÃO VIBRAÇÕES E RUÍDO, E

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

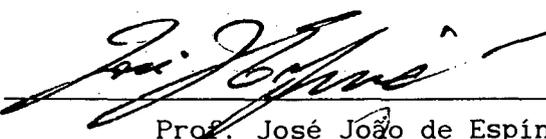


Prof. José João de Espíndola, Ph.D.  
Orientador



Prof. Berend Snoeijer, Dr. Ing.  
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:



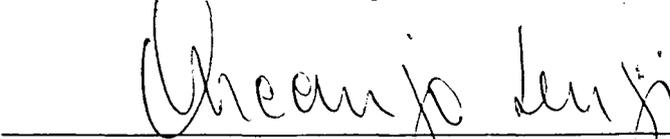
Prof. José João de Espíndola, Ph.D.  
Presidente



Prof. Hans Ingo Weber, Dr. Ing.



Prof. Clóvis Sperb de Barcellos, Ph.D.



Prof. Arcanjo Lenzi, Ph.D.

Aos meus pais  
(in memoriam)

"SENHOR,  
No silêncio deste dia que começa,  
venho pedir-te a paz, a sabedoria e a força.  
Quero, hoje, PAI, olhar o mundo  
com os olhos cheios de amor.  
Quero ser paciente, compreensivo, manso e prudente.  
Quero ver além das aparências, teus filhos,  
assim como tu mesmo os vês, e deste modo,  
não ver senão o bem em cada um deles.  
Cerra minha língua de toda maldade.  
Que só de bençãos se encha minh'alma.  
Que eu seja tão bom e tão alegre,  
que todos aqueles que se aproximem de mim  
sintam a tua presença.  
Reveste-me SENHOR, da tua beleza  
e que no decurso deste dia eu te revele a todos."

(São Francisco de Assis)

AGRADECIMENTOS

- . Ao Prof. José João de Espíndola, pela orientação, pelo apoio e pela amizade;
- . Ao Eng. Eduardo Márcio de Oliveira Lopes, pela valiosa ajuda no que se refere aos materiais viscoelásticos e pela sempre boa vontade no auxílio computacional;
- . Ao Eng. Marcus Antonius da Costa Nunes, pela introdução ao aprendizado da programação do Analisador de Fourier HP 5451C;
- . Ao Sr. Adilto, pela fabricação dos dispositivos experimentais;
- . Aos colegas e amigos: Murilo, Paulo, Luiz, Sandra, Elvira, Ednardo, William, Márcio, Buba, Nakagima, Fernando, José Arnaldo, José Jacome, Alexandre, Antônio Cláudio, Leandro e Evandro, com os quais convivi e muito aprendi neste período;
- . Ao Prof. Arcanjo Lenzi, pelo estímulo e pela amizade;
- . A Verinha e Adriana, secretárias sempre atenciosas;
- . A todos os meus familiares, que apesar da distância, sempre deram todo apoio;
- . A USIMINAS MECÂNICA S/A, pela oportunidade de iniciar este trabalho e pelo apoio financeiro na sua primeira etapa;
- . Ao Eng. Euler de Carvalho Cruz, pela motivação para o término do trabalho iniciado;
- . A CAPES, pelo apoio financeiro no decorrer da última etapa deste trabalho.

## ÍNDICE

1 - INTRODUÇÃO.....	1
2 - TEORIA BÁSICA APLICADA A SISTEMAS DE UM GRAU DE LIBERDADE.....	8
2.1 - Definição geral da razão de respostas.....	8
2.2 - Grandezas equivalentes de um neutralizador dinâmico MCK.....	11
2.3 - Neutralizador dinâmico MCK aplicado a um sistema de um grau de liberdade.....	14
2.3.1 - Excitação por uma força aplicada.....	14
2.3.2 - Excitação por movimento da base.....	16
2.3.3 - Otimização do neutralizador MCK.....	17
2.3.4 - Razão de respostas.....	18
2.3.5 - Caso particular - neutralizador MC.....	20
3 - NEUTRALIZADORES DINÂMICOS APLICADOS A SISTEMAS DE MÚLTIPLOS GRAUS DE LIBERDADE.....	23
3.1 - Adição de um neutralizador dinâmico a estrutura.....	23
3.1.1 - Caso geral.....	23
3.1.2 - Caso especial: controle de um modo e otimização do neutralizador.....	27
3.2 - Adição de vários neutralizadores dinâmicos a estrutura.....	29
3.2.1 - Caso geral.....	29
3.2.2 - Caso especial: controle de um modo e otimização dos neutralizadores.....	32
3.3 - Razão modal de respostas.....	34
3.3.1 - Conceito geral.....	34
3.3.2 - Controle de um modo por um neutralizador dinâmico MCK.....	35

3.3.3 - Controle de um modo por vários neutralizadores dinâmicos MCK.....	36
3.3.4 - Caso particular - controle de um modo por um neutralizador dinâmico MC.....	36
3.4 - Análise para controle de vários modos.....	37
3.5 - Adição de vários neutralizadores MCK segundo uma mesma coordenada generalizada.....	38
4 - EXEMPLOS DE APLICAÇÃO DA TEORIA GERAL.....	41
4.1 - Neutralizadores MCK aplicados a um edifício industrial .....	41
4.2 - Neutralizador de Lanchester aplicado a um eixo de um motor Diesel.....	60
5 - NEUTRALIZADOR DINÂMICO DO TIPO VIGA SANDUÍCHE EM BALANÇO.....	69
5.1 - Considerações preliminares.....	69
5.2 - Equações diferenciais do movimento do neutralizador dinâmico.....	72
5.2.1 - Excitação por movimento translacional da base.....	72
5.2.2 - Excitação por movimento rotacional da base.....	74
5.3 - Considerações a respeito do amortecimento.....	76
5.4 - Matriz de massas dinâmicas na base do neutralizador.....	77
5.4.1 - Formulação básica.....	77
5.4.2 - Considerações para simplificação computacional do problema.....	80
5.5 - Rigidez complexa equivalente da viga sanduíche.....	83
5.6 - Módulo de cisalhamento e fator de perda do material de amortecimento viscoelástico.....	86

6 - DETERMINAÇÃO EXPERIMENTAL DA MATRIZ DE MASSAS DINÂMICAS NA BASE DO NEUTRALIZADOR DO TIPO VIGA SANDUÍCHE EM BALANÇO E COMPARAÇÃO COM OS RESULTADOS TEÓRICOS.....	89
6.1 - Introdução.....	89
6.2 - Procedimento experimental.....	90
6.2.1 - Descrição do procedimento.....	90
6.2.2 - Instrumentação para as medições.....	94
6.2.3 - Aferição dos acelerômetros.....	94
6.2.4 - Calibração dos sistemas de medição da força e da aceleração.....	97
6.2.5 - Descrição do procedimento computacional para a determinação experimental da matriz de massas dinâmicas.....	100
6.3 - Resultados teóricos e experimentais.....	102
6.4 - Procedimento experimental alternativo.....	108
6.4.1 - Descrição do procedimento.....	108
6.4.2 - Resultados.....	110
7 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	115
APÊNDICE A - Razão de respostas de um sistema de um grau de liberdade com neutralizador MCK.....	119
APÊNDICE B - Otimização dos neutralizadores MCK e MC aplicados a um sistema de um grau de liberdade.....	122
B.1 - Neutralizador MCK.....	122
B.2 - Neutralizador MC.....	128
APÊNDICE C - Considerações a respeito de sistemas de múltiplos graus de liberdade.....	131
C.1 - Excitação por forças aplicadas.....	131
C.2 - Excitação por deslocamento prescrito.....	132
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	134

## SIMBOLOGIA

## CAPÍTULOS 2, 3 e 4 :

- $c$  = amortecimento viscoso  
 $c_{eq}$  = amortecimento equivalente  
 $E$  = excitação (genérica)  
 $F$  = excitação (força)  
 $H$  = função complexa resposta em frequência  
 $k$  = rigidez  
 $k_{eq}$  = rigidez equivalente  
 $K$  = rigidez dinâmica  
 $m$  = massa  
 $m_{eq}$  = massa equivalente  
 $M$  = massa dinâmica  
 $n$  = número de graus de liberdade da estrutura  
 $\bar{n}$  = número de autovetores de interesse  
 $n_i$  = número de neutralizadores adicionados segundo a  $i$ -ésima coordenada generalizada  
 $P$  = coordenada principal  
 $q$  = coordenada generalizada  
 $Q$  = resposta da estrutura (deslocamento)  
 $R$  = razão de respostas  
 $S$  = excitação da base  
 $\Delta T_r$  = acréscimo de energia cinética segundo a  $r$ -ésima coordenada generalizada  
 $Z$  = impedância mecânica  
 $\alpha$  = razão entre as frequências naturais do sistema secundário e do sistema primário  
 $\beta$  = razão entre a frequência de excitação e a frequência natural do sistema primário

- $\gamma_j$  = somatório da contribuição de todas as forças na excitação do j-ésimo modo  
 $\mu$  = razão entre a massa do sistema secundário e a massa do sistema primário  
 $\xi$  = razão entre o amortecimento e o amortecimento crítico  
 $\Delta\tau_r$  = acréscimo de potência dissipada segundo a r-ésima coordenada generalizada  
 $\Phi_{ij}$  = elemento da matriz modal  
 $\Omega$  = frequência circular

#### CAPÍTULOS 5 e 6 :

- $A_{ij}$  = elemento da matriz de inertâncias  
 $b$  = largura  
 $B$  = momento fletor  
 $e$  = excentricidade  
 $E$  = módulo de elasticidade de Young  
 $EI$  = rigidez distribuída  
 $f$  = frequência em Hz  
 $f_R$  = frequência reduzida  
 $F$  = excitação  
 $G$  = módulo de cisalhamento; ganho do sistema de medição  
 $H$  = espessura  
 $I$  = segundo momento de área da seção  
 $I_G$  = momento baricêntrico  
 $L$  = comprimento  
 $k_{ij}$  = elemento da matriz de rigidez  
 $m_c$  = massa concentrada  
 $m_{ij}$  = elemento da matriz de massas  
 $M_{ij}$  = elemento da matriz de massas dinâmicas  
 $p$  = número de onda

$P$	= coordenada principal
$S$	= esforço cortante
$t$	= tempo
$T$	= energia cinética; temperatura Kelvin
$V_e$	= energia potencial elástica
$w$	= deslocamento relativo
$x$	= posição
$y$	= deslocamento da base do neutralizador
$\alpha$	= aceleração
$\alpha_T$	= parâmetro de transformação de frequência em frequência reduzida
$\eta$	= fator de perda
$\theta$	= rotação da base do neutralizador
$\mu$	= massa distribuída
$\xi_n$	= n-ésimo autovalor
$\rho$	= massa específica
$\Phi_{ij}$	= elemento da matriz modal
$\Psi$	= função admissível no método dos modos assumidos
$\Omega$	= frequência circular

#### CONVENÇÕES :

- O símbolo  $*$  sobre qualquer variável indica quantidade complexa;
- O símbolo  $\cdot$  sobre qualquer variável indica derivada em relação ao tempo;
- O símbolo  $'$  sobre qualquer variável dos capítulos 5 e 6 indica derivada em relação a posição;
- O símbolo  $[ ]$  indica matriz;
- O símbolo  $[ \backslash \backslash ]$  indica matriz diagonal;
- O símbolo  $[ ]^T$  indica matriz transposta;
- O símbolo  $[ ]^{-1}$  indica matriz inversa;
- O símbolo  $\{ \}$  indica vetor;

O símbolo  $\{ \}^T$  indica vetor transposto;

O símbolo  $| |$  indica valor absoluto;

O símbolo  $i$  indica  $\sqrt{-1}$  ;

O símbolo  $\triangleq$  significa definição;

O símbolo  $\text{Re}( )$  significa parte Real do termo entre parênteses;

O símbolo  $\text{Im}( )$  significa parte Imaginária do termo entre parênteses.

## RESUMO

A teoria clássica dos neutralizadores dinâmicos considera o sistema a ser controlado como tendo um único grau de liberdade e o neutralizador, viscoso ou viscoelástico, também com um único grau de liberdade. Esta teoria é limitada em seu escopo e, obviamente, inadequada para a aplicação a sistemas complexos com densidade modal considerável.

Este trabalho trata de uma formulação nova e absolutamente geral para o problema de aplicação de sistemas de neutralizadores dinâmicos a estruturas complexas. O método pressupõe a disponibilidade de um modelo modal da estrutura, que pode ser obtido por um código de elementos finitos ou por técnicas de identificação.

A teoria como apresentada, permite a otimização do sistema de neutralizadores dinâmicos, quando de um grau de liberdade, de maneira extremamente simples, como uma extensão da teoria clássica de otimização. Ela permite também a consideração de neutralizadores tanto viscosos como viscoelásticos.

Dois exemplos de aplicação numérica são apresentados: o caso de um edifício industrial sujeito a uma excitação harmônica e o caso do eixo de um motor Diesel.

Como a teoria geral comporta neutralizadores dinâmicos com graus de liberdade acoplados, é feito também um estudo das propriedades equivalentes de um neutralizador que seja efetivo tanto na redução de movimentos translacionais quanto rotacionais: o neutralizador dinâmico do tipo viga sanduíche em balanço.

Um procedimento de otimização deste último tipo de neutralizador não é apresentado aqui.

## ABSTRACT

The classical theory of dynamic neutralizers considers that the system to be controlled has a single degree of freedom and the neutralizer, viscously or viscoelastically damped, has the same nature. This theory is limited and obviously inadequate to apply neutralizers to complex systems with considerable modal density.

This work presents a new and absolutely general formulation of application problem of neutralizers systems to complex structures. The method needs a modal model of the structure which can be obtained by a finite element code or by identification techniques.

The theory presented allows an optimization of the dynamic neutralizers system in a simple manner as an extension of the classical optimization theory, when each neutralizer is of a single degree of freedom. It's possible to consider either viscously damped neutralizers or viscoelastically damped neutralizers.

Two numerical application examples are presented: the case of an industrial building excited by a discrete frequency and the case of a Diesel engine crankshaft.

Since the general theory permits neutralizers with coupled degrees of freedom, it's also presented a study of the equivalent properties of an neutralizer that can be effective to reduce translationals and rotationals motions: the sandwich cantilever beam neutralizer type.

An optimization procedure of this neutralizer type is not presented here.

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

Quando sobre um sistema, ou parte dele, atua uma força alternada de frequência próxima de uma de suas frequências naturais, este pode apresentar vibrações excessivas. Com o fito de reduzir essas vibrações, mantendo-as em níveis aceitáveis, pode-se utilizar uma das seguintes técnicas básicas:

- atuar sobre a excitação, reduzindo sua amplitude e/ou alterando sua frequência;
- atuar sobre a estrutura, seja pela variação da rigidez e/ou da massa, seja pela introdução de amortecimento no sistema;
- aplicar um sistema mecânico secundário ao sistema vibrante primário, cuja vibração se deseja reduzir.

Ao sistema mecânico secundário referido na terceira técnica acima mencionada, dá-se o nome de neutralizador dinâmico de vibrações. A primeira publicação a respeito de um dispositivo com um objetivo semelhante ao de tal sistema, segundo a referência [5], parece ter sido escrita por Watts em 1883 e se destinava à redução do balanço de navios, proporcionando uma maior estabilização das plataformas dos canhões e, assim, uma melhor precisão de tiro. Frahm, considerado por alguns como o inventor do neutralizador dinâmico, [1], propôs em 1909 um dispositivo para redução deste mesmo tipo de movimento em navios.

O caso mais clássico e simples, estudado primeiramente por Ormondroyd e Den Hartog e apresentado por vários autores, [1]-[5], é o da aplicação de um neutralizador dinâmico de um grau de liberdade do tipo massa-mola a um sistema primário de mesma natureza. Neste estudo, por simplicidade, despreza-se o amortecimento do sistema primário e determinam-se os parâmetros do neutralizador, também denominado sistema secundário, que tornam mínima a

vibração no primário.

No sistema secundário, pode ou não ser introduzido amortecimento. O caso não amortecido é bem eficiente na redução de vibração causada por uma excitação de frequência bem definida e constante. Os parâmetros do neutralizador, massa e rigidez, são escolhidos de maneira que o deslocamento do sistema primário seja nulo na frequência de excitação, a qual, originalmente, coincidia com a frequência natural desse sistema ou estava muito próximo dela. Entretanto, caso a frequência de excitação seja variável, o neutralizador não amortecido torna-se completamente inútil. Isto ocorre porque, se o sistema original não amortecido tinha uma frequência de ressonância onde a amplitude era infinita, ao ser adicionado o neutralizador o sistema passa a ter duas frequências de ressonância onde as amplitudes serão infinitas, já que o sistema primário e o neutralizador dinâmico formam um sistema de dois graus de liberdade. Mesmo assim, o neutralizador torna-se ainda vantajoso através da introdução de certa parcela de amortecimento.

O neutralizador massa-mola com amortecimento viscoso é comumente chamado de neutralizador MCK, [4]. Além dos parâmetros de massa e rigidez, é necessário escolher-se um amortecimento ótimo para esse neutralizador. Esses parâmetros são calculados de modo que os picos de ressonância se localizem nas frequências correspondentes aos chamados pontos fixos, [1]-[5].

Para a otimização dos parâmetros do neutralizador MCK, alguns autores preferem trabalhar com o deslocamento adimensional do sistema primário, [1], [2] e [5], ou seja, a razão entre o deslocamento dinâmico e o deslocamento estático. Outros, [3], utilizam-se do conceito de transmissibilidade. Espíndola, [4], introduz o conceito de razão de respostas, que permite uma avaliação da eficiência do neutralizador em reduzir a resposta do sistema primário.

A teoria clássica dos neutralizadores dinâmicos, como já exposto, foi desenvolvida com base em um modelo viscoso de difícil construção prática e de

limitada aplicação, principalmente quando se tratam de estruturas leves e delicadas. É uma teoria limitada em seu escopo e obviamente inadequada para aplicação a sistemas complexos, onde vários modos contribuem consideravelmente à resposta estrutural.

Mesmo assim, alguns pesquisadores, estudaram a aplicação de tal neutralizador a estruturas um pouco mais complexas. Snowdon, [13], considera a adição simultânea de dois neutralizadores dinâmicos com amortecimento viscoso a uma viga em balanço não amortecida. A sintonização e o amortecimento ótimos, nesse caso, dependerão da localização dos neutralizadores e de quais modos deverão ser controlados. A análise é feita em termos da equação da transmissibilidade e esta, por sua vez, obtida através das expressões das impedâncias mecânicas dos sistemas primário e secundário.

Nobile e Snowdon, [14], estudam teórica e experimentalmente o comportamento da curva de transmissibilidade ao aplicarem simultaneamente dois neutralizadores, um amortecido e o outro não, a um sistema primário de um grau de liberdade não amortecido. Também é analisado o caso onde os neutralizadores são não amortecidos e o sistema primário é fortemente amortecido. Tais tipos de análise são uma tentativa de extensão da teoria clássica, onde, além de se obter uma redução significativa nos picos de ressonância, da mesma ordem de grandeza que no caso clássico, obtém-se também uma grande atenuação da transmissibilidade nas frequências para as quais os neutralizadores não amortecidos são sintonizados.

Na referência [11], Snowdon, pela primeira vez considerou a massa do neutralizador presa ao sistema vibrante primário por um material resiliente (borracha natural ou butílica) com propriedades de rigidez e de amortecimento. Toda a análise foi feita para um neutralizador dinâmico de um grau de liberdade e três tipos de comportamentos distintos da rigidez e do amortecimento do material resiliente foram abordados.

Na referência [12], Snowdon analisa a introdução desse tipo de

neutralizador dinâmico a sistemas compostos de dois graus de liberdade. Tais sistemas considerados, são normalmente oriundos de sistemas de um grau de liberdade aos quais se adiciona um estágio intermediário com a finalidade de reduzir a transmissibilidade em altas frequências. Tal estágio, no entanto, introduz um pico indesejável na curva de transmissibilidade e é a redução deste pico que é combatida com a introdução do neutralizador.

Configurações diferentes de neutralizadores dinâmicos têm sido estudadas para a redução de vibrações em vários tipos particulares de estruturas. Um caso já clássico é o do neutralizador desenvolvido por H. Stockbridge, que ficou conhecido pelo sobrenome do inventor. Sua principal aplicação é a de redução de vibrações em linhas de transmissão de energia elétrica [7]-[10].

Em [15], Snowdon aborda o caso de um neutralizador dinâmico onde o amortecedor do neutralizador convencional é substituído por uma mola em série com o amortecedor. É mostrado que esse tipo de neutralizador torna-se ativo sobre uma maior faixa de frequências, e na frequência central dessa faixa tem sua efetividade aumentada quando comparado com o neutralizador dinâmico convencional.

Neutralizadores dinâmicos do tipo viga, seja em balanço com ou sem massa na extremidade, em duplo balanço, bi-engastada, ou vigas unidas formando uma cruz têm sido estudados por diversos pesquisadores, [6], [16], [17], [18], [19], [20]. A análise, em todos os casos, é feita com base na teoria de vigas Euler-Bernoulli e para o caso de excitação por movimento linear da base do neutralizador. O amortecimento, em geral, é fornecido por camadas de material viscoelástico, sejam externas, cobrindo a superfície da viga, sejam internas, formando um sanduíche, ou através de elementos viscoelásticos ligando a viga ao sistema primário. Esses tipos de neutralizadores têm sido aplicados no controle de vibrações em vigas, placas e em estruturas específicas, tais como pás de rotores de turbinas a jato. No entanto, esses estudos são limitados, e

em geral, permitem a análise do controle de vibrações de apenas um modo, ou de dois modos no caso do neutralizador cruciforme.

Muito já se escreveu sobre a aplicação de neutralizadores a vários tipos de estruturas. Os exemplos são inúmeros e vão de estruturas de edifícios a de helicópteros, passando por máquinas em geral, linhas de transmissão de energia elétrica, e máquinas ferramentas. Apesar do esforço que se há notado em ampliar a abrangência da teoria clássica com vistas a permitir o projeto consciente de um sistema de neutralização, não é do conhecimento o surgimento de nenhuma teoria que generalizasse a aplicação de neutralizadores dinâmicos a estruturas de qualquer complexidade.

Um objetivo deste trabalho é a apresentação de uma teoria que torna isso possível. Essa teoria baseia-se em um controle modal de vibração por neutralizadores dinâmicos. O método pressupõe a disponibilidade de um modelo modal da estrutura, que pode ser obtido por um código de elementos finitos ou por técnicas de identificação.

Neste trabalho, a teoria é apresentada para os casos particulares de aplicação de neutralizadores MCK e MC a estrutura primária, podendo, entretanto, ser estendida para neutralizadores mais complexos. A teoria comporta, portanto, neutralizadores dinâmicos com graus de liberdade acoplados, tanto de translação como de rotação. Como a teoria é desenvolvida no domínio da frequência, a partir de um modelo modal, ela permite a consideração de neutralizadores tanto viscosos como viscoelásticos.

A formulação do método é feita em termos das coordenadas originais do sistema a ser controlado, coordenadas essas que tenham um sentido físico. Os neutralizadores devem ser representados em termos de suas propriedades equivalentes, no domínio da frequência, e essas somadas às correspondentes propriedades de massa e amortecimento ou rigidez e amortecimento da estrutura primária, segundo as coordenadas de interesse. O número de neutralizadores associados a cada modo pode ser variável.

Visando a obtenção de um neutralizador dinâmico que seja efetivo tanto na redução de movimentos translacionais quanto rotacionais, é feito também um estudo de um neutralizador dinâmico do tipo viga sanduíche em balanço, considerando os dois movimentos da base do mesmo, translação e rotação. O material de amortecimento empregado é do tipo viscoelástico, cujas propriedades dinâmicas foram objeto de estudo de uma dissertação de mestrado, [21], desenvolvida dentro do Projeto de Isoladores Aeronáuticos, no Laboratório de Vibrações e Acústica do Depto. de Engenharia Mecânica da UFSC.

Inúmeras podem ser as aplicações deste neutralizador, podendo-se citar a redução de vibrações em palhetas de distribuidores de turbinas hidráulicas, pás de turbinas, e mesmo, substituir com vantagem neutralizadores do tipo Stockbridge, devido ao amortecimento introduzido. Sugere-se que o estudo de aplicação deste neutralizador seja feito na mesma linha do estudo anterior, isto é, com base em uma análise modal.

No capítulo 2 é apresentada a definição geral da razão de respostas em termos das impedâncias dos sistemas primário e secundário. As propriedades equivalentes são derivadas para o neutralizador MCK e a teoria básica da adição do neutralizador é apresentada para o caso de um sistema de um grau de liberdade excitado tanto por uma força quanto pelo movimento da base. Os parâmetros ótimos são derivados como na teoria clássica. Uma particularização é feita para o sistema MC (neutralizador de Lanchester).

No capítulo 3, apresenta-se para sistemas de múltiplos graus de liberdade, a teoria geral do controle modal por neutralizadores dinâmicos. O caso de controle de um modo de interesse é estudado, tanto através da adição de um quanto de vários neutralizadores. Uma razão modal de respostas é definida. A otimização dos neutralizadores é feita também como na teoria clássica.

No capítulo 4 são discutidos dois exemplos de aplicação da teoria anterior: o caso de um eixo de um motor de combustão interna com neutralizador

de Lanchester e o caso de vibração de um edifício industrial. O significado e a importância da razão modal de respostas são discutidos para esses casos.

No capítulo 5 é feito o estudo do neutralizador do tipo viga sanduíche em balanço. São deduzidas as equações diferenciais do movimento, bem como são determinadas as matrizes de massas dinâmicas para a base do neutralizador. Nesse capítulo é feito também um estudo para determinação da rigidez dinâmica e do fator de perda equivalentes da viga sanduíche, com base nas propriedades de cada componente.

No capítulo 6 é descrito um procedimento experimental visando corroborar a prática das equações do capítulo 5.

No capítulo 7 são apresentadas as conclusões e as sugestões para trabalhos futuros.

## CAPÍTULO 2

## TEORIA BÁSICA APLICADA A SISTEMAS DE UM GRAU DE LIBERDADE

## 2.1 - DEFINIÇÃO GERAL DA RAZÃO DE RESPOSTAS

Seja o ponto A de um sistema mecânico (primário) de impedância mecânica  $Z^*(\Omega)$ , ao qual se fixa um outro sistema (secundário) de impedância mecânica  $Z_a^*(\Omega)$ , conforme a figura 2.1 .

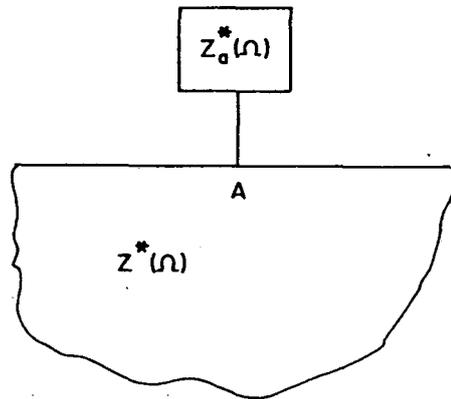


FIGURA 2.1 - Sistema secundário de impedância mecânica  $Z_a^*(\Omega)$  fixado a um sistema primário de impedância mecânica  $Z^*(\Omega)$ .

Sabe-se, de acordo com a referência [3], que a impedância mecânica total apresentada por elementos de massa, rigidez, ou viscosidade, os quais experimentam uma velocidade comum, é igual a soma das impedâncias mecânicas dos componentes. De maneira semelhante, essa propriedade de adição pode ser estendida para a rigidez dinâmica e para a massa dinâmica, nos casos onde os elementos de massa, rigidez ou viscosidade apresentem, respectivamente, deslocamentos e acelerações comuns. Assim, após a fixação do sistema secundário, a impedância mecânica total no ponto A fica:

$$Z_a^*(\Omega) = Z^*(\Omega) + Z_a^*(\Omega) \quad (2.1)$$

já que a velocidade no ponto de união é comum.

Isoladamente, as impedâncias nos sistemas primário e secundário podem ser definidas a partir dos esquemas das figuras 2.2(a) e 2.2(b), ou seja:

$$Z_a^* = \frac{E^*(\Omega)}{i\Omega Q_a^*(\Omega)} \quad (2.2)$$

$$Z^* = \frac{E^*(\Omega)}{i\Omega Q_0^*(\Omega)} \quad (2.3)$$

onde:  $E^*(\Omega)$  é a excitação que atua isoladamente sobre os sistemas primário e secundário;

$Q_a^*(\Omega)$  é a resposta (deslocamento) do sistema secundário, no domínio da frequência, devido à excitação  $E^*(\Omega)$ ;

$Q_0^*(\Omega)$  é a resposta (deslocamento) apenas do sistema primário, no domínio da frequência, devido à excitação  $E^*(\Omega)$ .

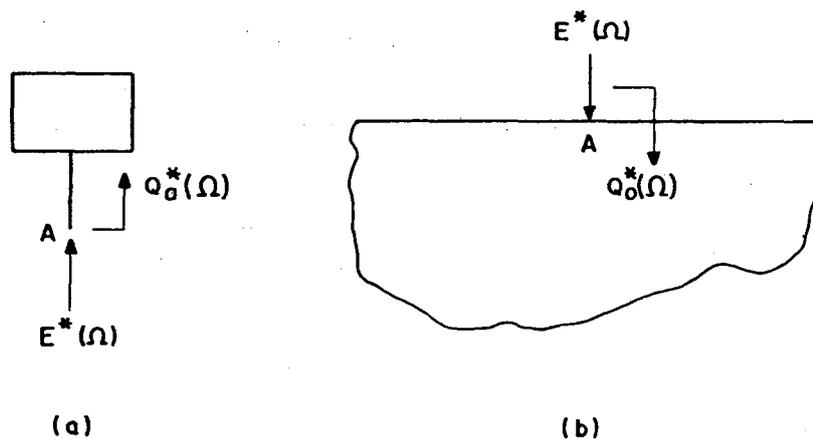


FIGURA 2.2 - Esquemas de excitação e respostas isolados dos sistemas secundário (a) e primário (b).

Supondo que  $Q_A^*(\Omega)$  seja a resposta (deslocamento) do sistema primário, após a fixação do secundário, devido à mesma excitação  $E^*(\Omega)$ , a impedância  $Z_A^*(\Omega)$  se escreve:

$$Z_A^* = \frac{E^*(\Omega)}{i\Omega Q_A^*(\Omega)} \quad (2.4)$$

Utilizando (2.4), (2.3) e (2.1), pode-se obter uma razão entre as respostas do sistema primário com e sem a fixação do sistema secundário:

$$\frac{Q_A^*(\Omega)}{Q_O^*(\Omega)} = \frac{Z^*(\Omega)}{Z^*(\Omega) + Z_a^*(\Omega)} \quad (2.5)$$

Designando de  $R(\Omega)$  o módulo de (2.5),

$$R(\Omega) = \frac{1}{\left| 1 + \frac{Z_a^*(\Omega)}{Z^*(\Omega)} \right|} \quad (2.6)$$

Esta última razão recebe o nome de razão de respostas e representa uma medida da eficiência do sistema secundário em reduzir a resposta do sistema primário. Ela terá valores pequenos nas frequências em que a impedância do sistema primário seja pequena e a do sistema secundário seja grande.

A impedância  $Z_a^*(\Omega)$  tem valores máximos nas antirressonâncias do sistema secundário e a impedância  $Z^*(\Omega)$  tem valores mínimos nas ressonâncias do sistema primário. Portanto, a condição para que  $R$  seja mínima é aquela em que a frequência seja a um só tempo, de ressonância do sistema primário e de antirressonância do sistema secundário.

Observe-se que a razão de respostas (2.6) pode ser definida tanto em termos da rigidez dinâmica, da impedância mecânica ou da massa dinâmica, ou ainda em termos das funções inversas dessas, respectivamente, receptância, mobilidade e inertância.

No apêndice A, encontra-se a obtenção da razão de respostas para o caso de um sistema de um grau de liberdade com neutralizador MCK em termos das impedâncias dos sistemas primário e secundário, como discutido acima. Mais adiante, neste capítulo, a mesma expressão da razão de respostas será obtida para esse mesmo sistema em termos de outras propriedades equivalentes apresentadas a seguir.

## 2.2 - GRANDEZAS EQUIVALENTES DE UM NEUTRALIZADOR DINÂMICO MCK :

A abordagem teórica que será apresentada nos próximos itens e no capítulo seguinte, baseia-se na substituição do neutralizador dinâmico ou dos neutralizadores dinâmicos por suas propriedades equivalentes que aqui serão desenvolvidas. Estas formas equivalentes serão de grande valia, principalmente na análise de adição de neutralizadores MCK a sistemas de múltiplos graus de liberdade, como se poderá constatar no próximo capítulo.

Para a obtenção das propriedades equivalentes, seja o neutralizador MCK esquematizado na figura 2.3.

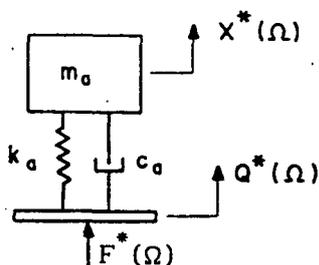


FIGURA 2.3 - Representação de um neutralizador MCK.

Complementando o que foi dito no item anterior, se os elementos de massa, rigidez, ou viscosidade estiverem sujeitos á ação de uma força comum, a impedância mecânica total será dada pelo inverso da soma dos inversos das impedâncias de cada componente. Essa mesma propriedade pode também ser estendida para a rigidez dinâmica e para a massa dinâmica.

Então, para a base do neutralizador dinâmico da figura 2.3, a rigidez dinâmica, a impedância mecânica e a massa dinâmica ficam:

$$K_a^*(\Omega) = \frac{1}{\frac{1}{-\Omega^2 m_a} + \frac{1}{i\Omega c_a + k_a}} = -\Omega^2 m_a \frac{k_a + i\Omega c_a}{k_a - \Omega^2 m_a + i\Omega c_a} \quad (2.7)$$

$$Z_a^*(\Omega) = \frac{1}{\frac{1}{i\Omega m_a} + \frac{1}{c_a + k_a/i\Omega}} = i\Omega m_a \frac{k_a + i\Omega c_a}{k_a - \Omega^2 m_a + i\Omega c_a} \quad (2.8)$$

$$M_a^*(\Omega) = \frac{1}{\frac{1}{m_a} + \frac{1}{c_a/i\Omega - k_a/\Omega^2}} = m_a \frac{k_a + i\Omega c_a}{k_a - \Omega^2 m_a + i\Omega c_a} \quad (2.9)$$

Por sua vez, tanto a rigidez dinâmica, a impedância mecânica, ou a massa dinâmica relativas a um sistema qualquer, podem ser desdobradas em duas outras propriedades dinâmicas, a saber: massa equivalente e amortecimento equivalente ligado à terra (referencial inercial), ou rigidez equivalente e amortecimento equivalente, ambos ligados à terra, conforme o esquema da figura 2.4.

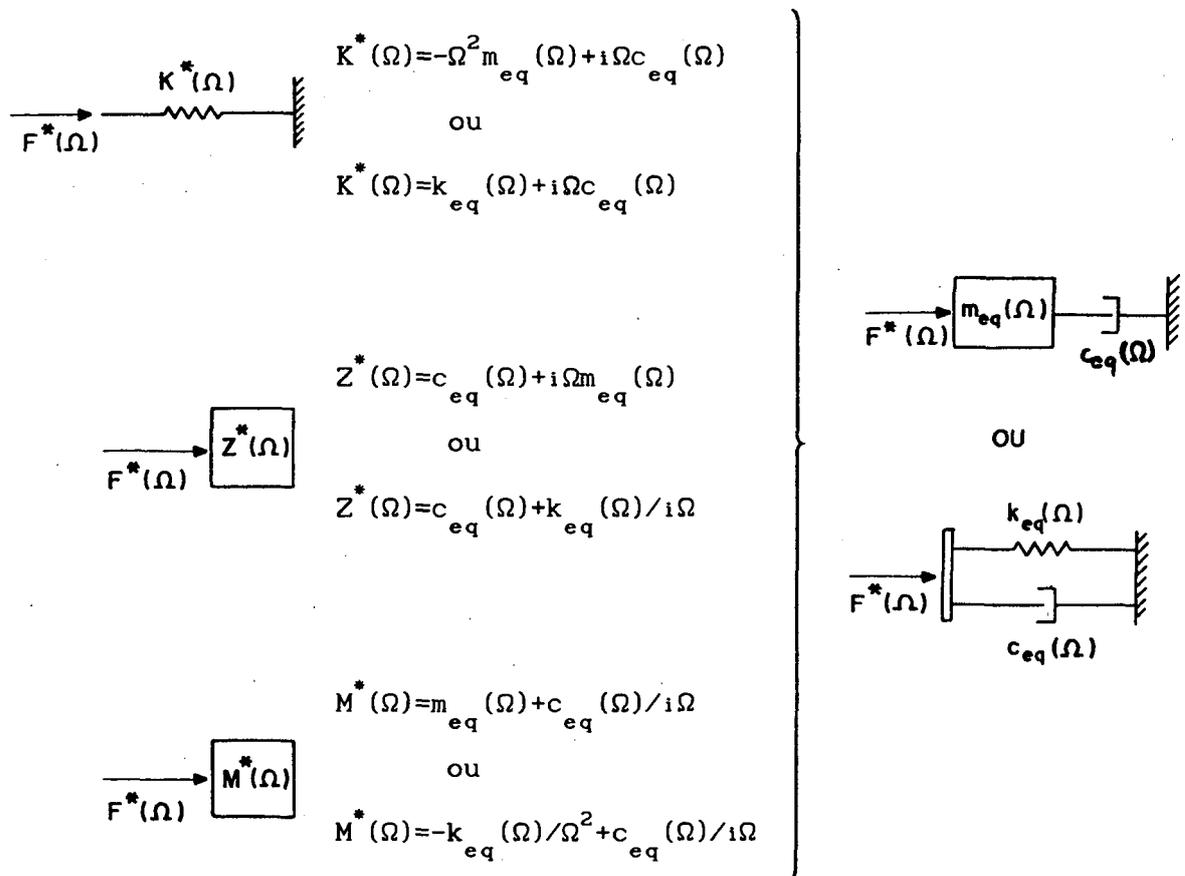


FIGURA 2.4 -- Dois possíveis sistemas equivalentes para cada uma das propriedades dinâmicas: rigidez dinâmica, impedância mecânica e massa dinâmica.

Da rigidez dinâmica tira-se:

$$k_{eq}(\Omega) = \operatorname{Re}(K^*(\Omega)) \quad (2.10)$$

$$c_{eq}(\Omega) = \frac{\operatorname{Im}(K^*(\Omega))}{\Omega} \quad (2.11)$$

$$m_{eq}(\Omega) = \frac{\operatorname{Re}(K^*(\Omega))}{-\Omega^2} \quad (2.12)$$

onde  $\operatorname{Re}$  e  $\operatorname{Im}$  representam respectivamente parte Real e parte Imaginária do termo entre parênteses.

Da impedância mecânica obtém-se:

$$k_{eq}(\Omega) = -\Omega \operatorname{Im}(Z^*(\Omega)) \quad (2.13)$$

$$c_{eq}(\Omega) = \operatorname{Re}(Z^*(\Omega)) \quad (2.14)$$

$$m_{eq}(\Omega) = \frac{\operatorname{Im}(Z^*(\Omega))}{\Omega} \quad (2.15)$$

E da massa dinâmica fica:

$$k_{eq}(\Omega) = -\Omega^2 \operatorname{Re}(M^*(\Omega)) \quad (2.16)$$

$$c_{eq}(\Omega) = -\Omega \operatorname{Im}(M^*(\Omega)) \quad (2.17)$$

$$m_{eq}(\Omega) = \operatorname{Re}(M^*(\Omega)) \quad (2.18)$$

Donde, substituindo-se (2.7), (2.8) ou (2.9) em (2.10)-(2.12), (2.13)-(2.15) ou (2.16)-(2.18), obtém-se para as propriedades equivalentes do neutralizador dinâmico MCK:

$$k_{eq}(\Omega) = -\Omega^2 m_a \frac{k_a (k_a - \Omega^2 m_a) + (\Omega c_a)^2}{(k_a - \Omega^2 m_a)^2 + (\Omega c_a)^2} \quad (2.19)$$

$$c_{eq}(\Omega) = m_a \frac{\Omega^4 m_a c_a}{(k_a - \Omega^2 m_a)^2 + (\Omega c_a)^2} \quad (2.20)$$

$$m_{eq}(\Omega) = m_a \frac{k_a (k_a - \Omega^2 m_a) + (\Omega c_a)^2}{(k_a - \Omega^2 m_a)^2 + (\Omega c_a)^2} \quad (2.21)$$

Para o desenvolvimento que se segue, elege-se-á a forma massa e amortecimento equivalentes para representar o neutralizador dinâmico MCK, conforme a figura 2.5.

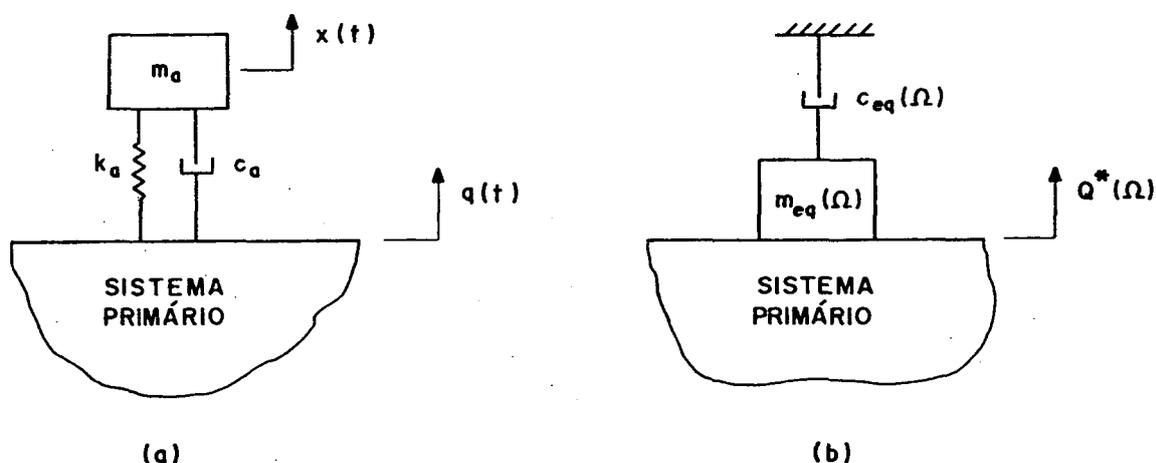


FIGURA 2.5 - Neutralizador MCK aplicado a um sistema primário (a) e sua representação equivalente escolhida para este trabalho (b).

## 2.3 - NEUTRALIZADOR DINÂMICO MCK APLICADO A UM SISTEMA DE UM GRAU DE LIBERDADE

### 2.3.1 - EXCITAÇÃO POR UMA FORÇA APLICADA :

Na figura 2.6 encontra-se a representação equivalente do neutralizador dinâmico MCK aplicado a um sistema de um grau de liberdade excitado por uma força  $F_1^*(\Omega)$  e seu diagrama de corpo livre.

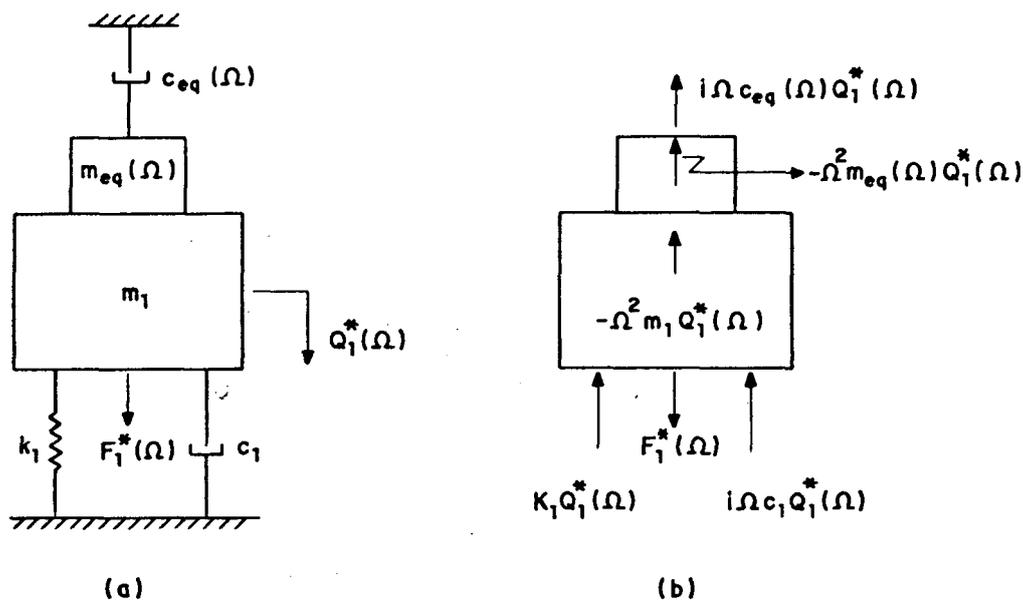


FIGURA 2.6 - Representação equivalente do sistema de um grau de liberdade com neutralizador MCK, excitado por uma força  $F_1^*(\Omega)$  (a) e seu correspondente diagrama de corpo livre (b).

Do diagrama de corpo livre tira-se a equação do movimento, já expressa no domínio da frequência:

$$[-\Omega^2(m_1 + m_{eq}(\Omega)) + i\Omega(c_1 + c_{eq}(\Omega)) + k_1] Q_1^*(\Omega) = F_1^*(\Omega) \quad (2.22)$$

Tomando a equação de vibração livre do sistema e considerando  $c_1=0$  e  $c_a=0$ , obtém-se :

$$k_1 - \Omega^2(m_1 + m_{eq}(\Omega)) = 0 \quad (2.23)$$

Observe-se de (2.20) que sendo  $c_a$  nulo,  $c_{eq}$  também o será. Substituindo (2.21) em (2.23), obtém-se:

$$m_1 m_a \Omega^4 - (m_1 k_a + m_a k_a + m_a k_a) \Omega^2 + k_1 k_a = 0 \quad (2.24)$$

Esta é a mesma equação que seria obtida a partir do determinante do sistema de dois graus de liberdade original, e cujas raízes são os correspondentes autovalores do sistema.

Da equação (2.22) pode-se obter ainda a função complexa resposta em frequência:

$$H^*(\Omega) = \frac{Q_1^*(\Omega)}{F_1^*(\Omega)} = \frac{1}{k_1 - \Omega^2(m_1 + m_{eq}(\Omega)) + i\Omega(c_1 + c_{eq}(\Omega))} \quad (2.25)$$

Esta será usada mais adiante na determinação da razão de respostas do sistema.

### 2.3.2 - EXCITAÇÃO POR MOVIMENTO DA BASE :

A figura 2.7 ilustra o caso de excitação por movimento da base do sistema de um grau de liberdade com neutralizador MCK.

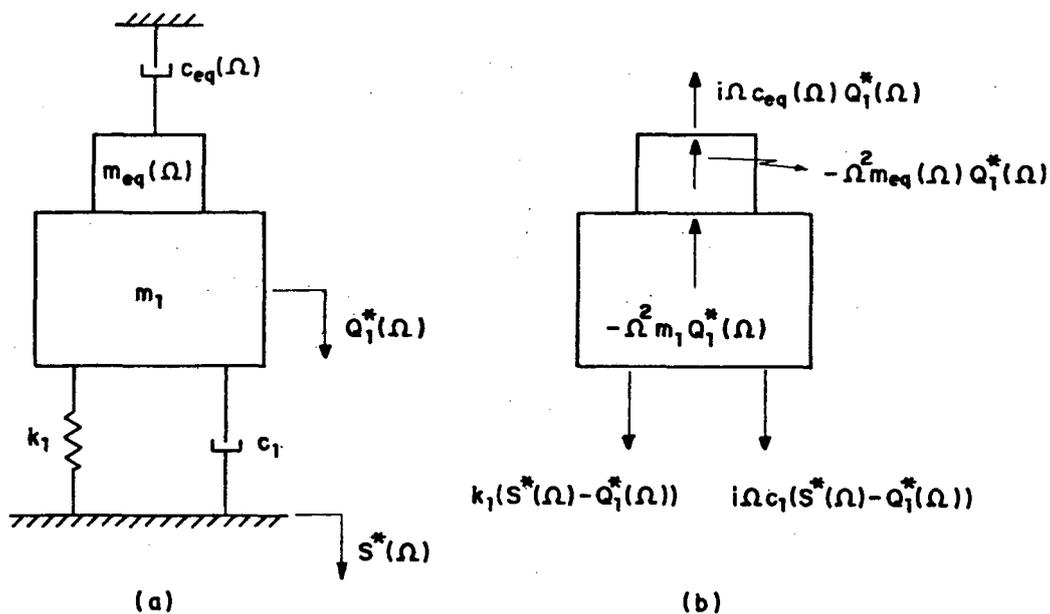


FIGURA 2.7 - Representação equivalente do sistema de um grau de liberdade com neutralizador dinâmico MCK, excitado pelo movimento  $S^*(\Omega)$  da base (a) e seu correspondente diagrama de corpo livre (b).

Da figura 2.7(b) obtém-se a equação de equilíbrio do sistema, já no domínio da frequência:

$$[-\Omega^2(m_1 + m_{eq}(\Omega)) + i\Omega(c_1 + c_{eq}(\Omega)) + k_1]Q_1^*(\Omega) = (k_1 + i\Omega c_1)S^*(\Omega) \quad (2.26)$$

Tomando o segundo membro de (2.26) como uma força generalizada, a função complexa resposta em frequência do sistema se escreve:

$$H^*(\Omega) = \frac{Q_1^*(\Omega)}{(k_1 + i\Omega c_1)S^*(\Omega)} = \frac{1}{k_1 - \Omega^2(m_1 + m_{eq}(\Omega)) + i\Omega(c_1 + c_{eq}(\Omega))} \quad (2.27)$$

que é a mesma obtida em (2.25).

### 2.3.3 - OTIMIZAÇÃO DO NEUTRALIZADOR MCK :

A otimização deste tipo de neutralizador aplicado a um sistema de um grau de liberdade, encontra-se amplamente estudada em literatura clássica. No apêndice B encontra-se descrito o procedimento usado para esta otimização.

Tanto o caso de excitação por força, quanto por movimento prescrito levam à expressão (B.6) do deslocamento adimensional, expressão esta, base para a otimização dos parâmetros  $\alpha$  e  $\xi_a$  definidos em (A.5) do apêndice A.

Esses parâmetros otimizados vão aqui reproduzidos:

$$\alpha_{ot} = \frac{1}{1 + \mu} \quad (2.28)$$

$$\xi_{a_{ot}} = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1 + \mu)}} \quad (2.29)$$

De (2.28) e (A.5) conclui-se que uma vez estabelecida uma massa para o neutralizador, sua rigidez fica:

$$k_a = m_a (\alpha_{ot} \Omega_1)^2 \quad (2.30)$$

Um critério prático para adoção de uma massa para o neutralizador é:

$$m_a = (0,10 \text{ a } 0,20) m_1 \quad (2.31)$$

A figura B.2 mostra uma curva para parâmetros ótimos de um neutralizador MCK, comparada com curvas de parâmetros não otimizados. A figura B.4 mostra uma curva onde o coeficiente de amortecimento  $\xi_a$  é otimizado para um sistema onde a razão de frequências naturais  $\alpha=1$ .

### 2.3.4 - RAZÃO DE RESPOSTAS :

Antes da adição do neutralizador dinâmico de vibrações ao sistema primário, tanto no caso de excitação por força aplicada quanto por movimento da base, a função complexa resposta em frequência do sistema se escreve:

$$H_0^*(\Omega) = \frac{Q_0^*(\Omega)}{F_1^*(\Omega)} = \frac{Q_0^*(\Omega)}{(k_1 + i\Omega c_1)S^*(\Omega)} = \frac{1}{k_1 - \Omega^2 m_1 + i\Omega c_1} \quad (2.32)$$

Como já dito no item 2.1, a razão de respostas é definida pelo módulo da razão entre a resposta  $Q_1^*(\Omega)$  do sistema primário após a adição do sistema secundário e a resposta  $Q_0^*(\Omega)$  do sistema primário antes da adição do sistema secundário. Assim, de (2.25) ou (2.27) e (2.32), obtém-se:

$$R^*(\Omega) = \frac{Q_1^*(\Omega)}{Q_0^*(\Omega)} = \frac{Q_1^*(\Omega)/F_1^*(\Omega)}{Q_0^*(\Omega)/F_1^*(\Omega)} = \frac{k_1 - \Omega^2 m_1 + i\Omega c_1}{k_1 - \Omega^2 (m_1 + m_{eq}(\Omega)) + i\Omega (c_1 + c_{eq}(\Omega))} \quad (2.33)$$

Esta é a expressão da razão complexa de respostas em termos das propriedades do sistema primário e das propriedades equivalentes  $m_{eq}$  e  $c_{eq}$  do sistema secundário.

A substituição de (2.20) e (2.21) em (2.33) leva á expressão:

$$R^*(\Omega) = \frac{(k_1 - \Omega^2 m_1 + i\Omega c_1) [(k_a - \Omega^2 m_a) + i\Omega c_a]}{(k_1 - \Omega^2 m_1 + i\Omega c_1) (k_a - \Omega^2 m_a + i\Omega c_a) - \Omega^2 m_a (k_a + i\Omega c_a)} \quad (2.34)$$

Constata-se, como era de se esperar, que (2.34) é a mesma expressão (A.4) obtida no apêndice A através das impedâncias mecânicas dos sistemas primário e secundário. Neste apêndice, esta equação ainda é colocada na forma

adimensional (A.6) e obtido o seu módulo, aqui reproduzido:

$$R(\Omega) = \left\{ \frac{R_N^2 + I_N^2}{R_D^2 + I_D^2} \right\}^{1/2} \quad (2.35)$$

onde:

$$\begin{aligned} R_N &= (1-\beta^2)(\alpha^2-\beta^2) - 4\xi_1 \xi_a \alpha \beta^2 \\ I_N &= 2\xi_1 \beta(\alpha^2-\beta^2) + 2\xi_a \alpha \beta(1-\beta^2) \\ R_D &= (1-\beta^2)(\alpha^2-\beta^2) - 4\xi_1 \xi_a \alpha \beta^2 - \mu \alpha^2 \beta^2 \\ I_D &= 2\xi_1 \beta(\alpha^2-\beta^2) + 2\xi_a \alpha \beta(1-\beta^2 - \mu \beta^2) \end{aligned} \quad (2.36)$$

A figura 2.8 mostra algumas curvas traçadas com a equação (2.35). Essa figura procura ilustrar o comportamento da razão de respostas quando se altera os parâmetros do sistema secundário. Caso não houvesse adição de um sistema secundário, a razão de respostas seria unitária em toda a faixa de frequências, o que corresponderia a uma linha de amplitude constante de 0 dB nessa figura.

No caso de amortecimento nulo no sistema secundário e uma razão  $\alpha=1$ , a resposta seria infinitamente amplificada nas novas frequências naturais do sistema e reduzida de infinito para zero na frequência natural do sistema original. Essa redução da resposta é representada pelo vale da curva correspondente a essa situação. Casos intermediários são também mostrados, onde a resposta é bastante atenuada na frequência natural original, mas, relativamente bastante amplificada em outras frequências.

No caso dos parâmetros  $\alpha_{ot}$  e  $\xi_{a_{ot}}$ , vê-se claramente que a resposta continua sendo, ainda, bastante atenuada na faixa de frequências em torno da frequência natural do sistema original e bem pouco amplificada em outras frequências.

As curvas dos deslocamentos adimensionais correspondentes aos parâmetros da figura 2.8 encontram-se nas figuras B.1 e B.2 do apêndice B.

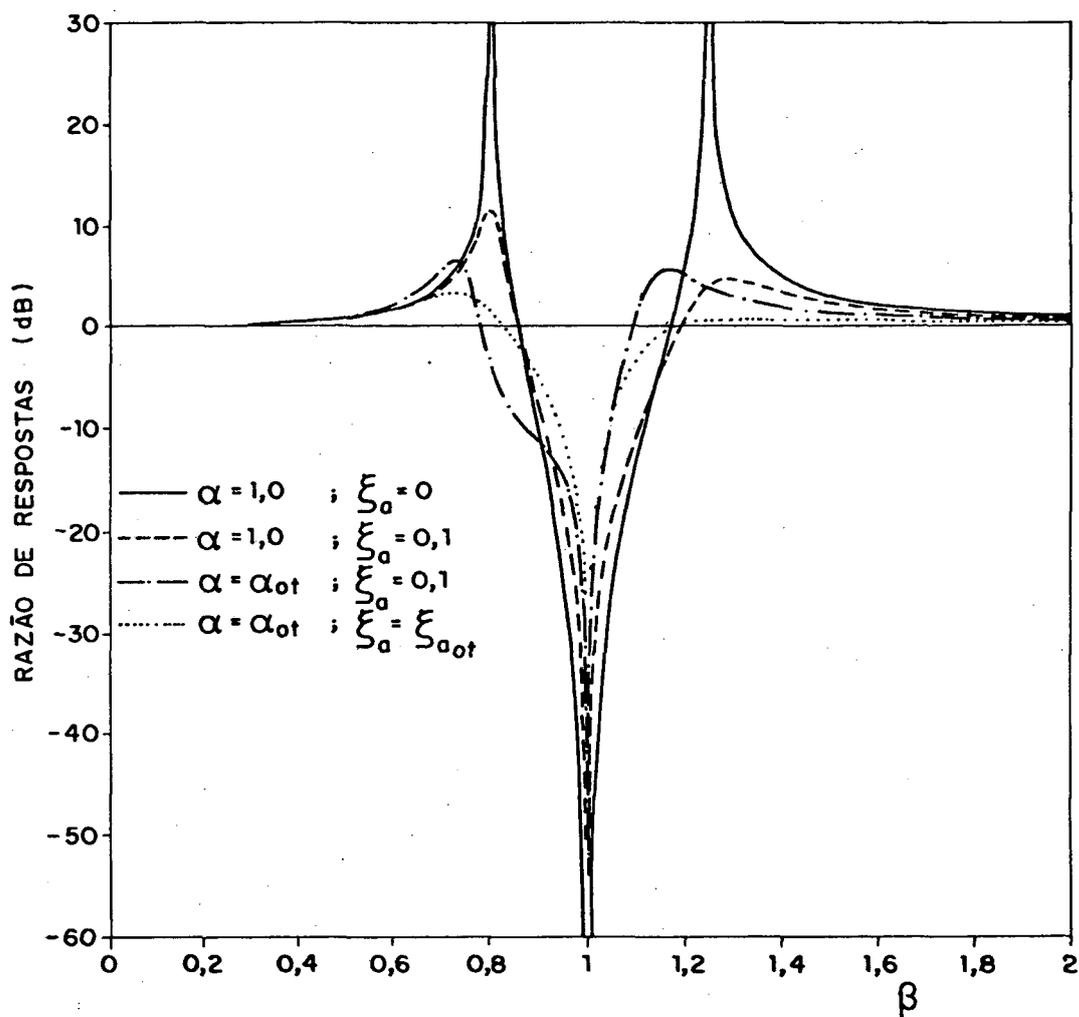


FIGURA 2.8 - Razões de respostas para razão de massas  $\mu=0,2$  e alguns casos das razões  $\alpha$  e  $\xi_a$ .

### 2.3.5 - CASO PARTICULAR - NEUTRALIZADOR MC :

Neste caso, como é nulo o elemento de rigidez  $k_a$ , o amortecimento e a massa equivalentes se reduzem a:

$$c_{eq}(\Omega) = m_a \frac{\Omega^2 m_a c_a}{\Omega^2 m_a^2 + c_a^2} \quad (2.37)$$

$$m_{eq}(\Omega) = m_a \frac{c_a^2}{\Omega^2 m_a^2 + c_a^2} \quad (2.38)$$

Conseqüentemente, a razão complexa de respostas fica:

$$R^*(\Omega) = \frac{(k_1 - \Omega^2 m_1 + i\Omega c_1)(-\Omega^2 m_a + i\Omega c_a)}{(k_1 - \Omega^2 m_1 + i\Omega c_1)(-\Omega^2 m_a + i\Omega c_a) - i\Omega^3 m_a c_a} \quad (2.39)$$

Agora, o parâmetro de amortecimento  $\xi_a$  não mais pode ser definido como em (A.5) pois  $\Omega_a = 0$ . Um novo parâmetro  $\xi$  é definido em (B.11). A razão complexa de respostas em termos deste e dos demais parâmetros (A.5) se escreve:

$$R^*(\Omega) = \frac{(1 - \beta^2 + i2\xi_1 \beta)(-\beta^2 + i2\xi \beta)}{(1 - \beta^2 + i2\xi_1 \beta)(-\beta^2 + i2\xi \beta) - i2\xi \mu \beta^3} \quad (2.40)$$

ou, em módulo:

$$R(\Omega) = \left\{ \frac{[-\beta(1 - \beta^2) - 4\xi_1 \xi \beta]^2 + [2\xi(1 - \beta^2) - 2\xi_1 \beta^2]^2}{[-\beta(1 - \beta^2) - 4\xi_1 \xi \beta]^2 + [2\xi(1 - \beta^2 - \mu \beta^2) - 2\xi_1 \beta^2]^2} \right\}^{1/2} \quad (2.41)$$

A otimização deste tipo de neutralizador também é abordada no apêndice B. O parâmetro de amortecimento ótimo  $\xi_{ot}$  pode ser escrito:

$$\xi_{ot} = \sqrt{\frac{1}{2(2 + \mu)(1 + \mu)}} \quad (2.42)$$

A figura 2.9 mostra algumas curvas da razão de respostas (2.41) para alguns casos do parâmetro de amortecimento  $\xi$ , entre os quais, o de amortecimento ótimo (2.42). Estas curvas podem ser comparadas com as curvas da figura B.5 do apêndice B, que representam os deslocamentos adimensionais para estes mesmos casos.

Observe-se neste caso que, se o amortecimento do sistema secundário é nulo, o neutralizador não causa nenhum efeito no sistema primário e a razão de respostas é a reta que passa em 0 dB.

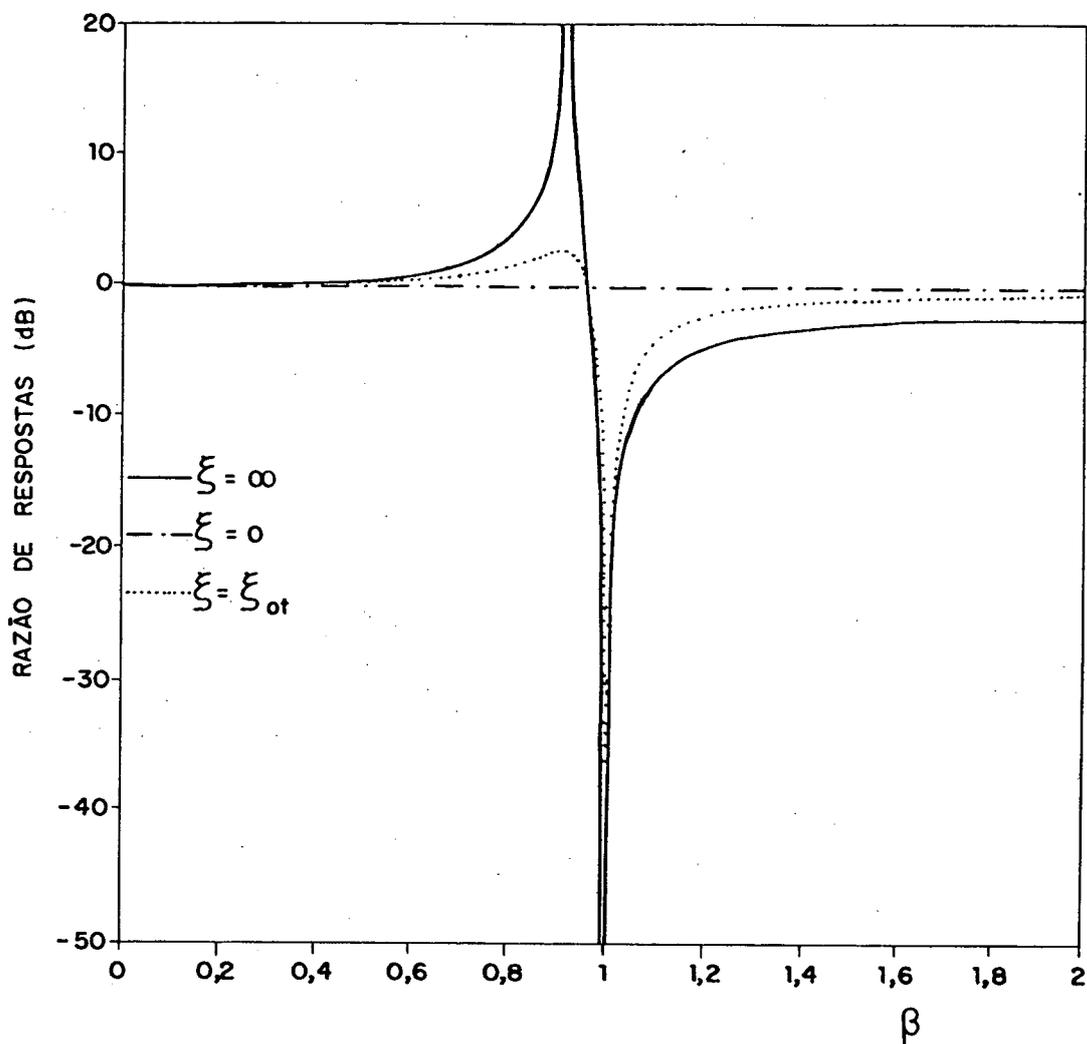


FIGURA 2.9 - Razões de respostas para um sistema primário com neutralizador dinâmico MC, com  $\mu=0,2$  e três diferentes casos do coeficiente de amortecimento  $\xi$ .

## CAPÍTULO 3

NEUTRALIZADORES DINÂMICOS APLICADOS A SISTEMAS DE  
MÚLTIPLOS GRAUS DE LIBERDADE

## 3.1 - ADIÇÃO DE UM NEUTRALIZADOR DINÂMICO A ESTRUTURA :

## 3.1.1 - CASO GERAL :

As considerações que seguem neste e nos próximos itens prestam-se para análise de estruturas excitadas tanto por forças aplicadas quanto por deslocamento prescrito. Nesse último caso, o segundo membro do sistema de equações correspondente será tomado como um conjunto de forças generalizadas.

Como já descrito no Capítulo 2, a adição de um neutralizador dinâmico MCK segundo uma dada coordenada generalizada  $q_r$ , coordenada essa que tenha um sentido físico, pode ser representada como a adição de uma massa equivalente e um amortecedor equivalente ligado à terra, segundo essa mesma coordenada. Essa adição causa os seguintes acréscimos na energia cinética e na potência dissipada do sistema:

$$\Delta T_r = \frac{1}{2} m_{eq} \dot{q}_r^2 \quad (3.1)$$

$$\Delta \tau_r = \frac{1}{2} c_{eq} \dot{q}_r^2 \quad (3.2)$$

Conseqüentemente, as matrizes de massa e de amortecimento do sistema serão alteradas. Observe-se que nas expressões (3.1) e (3.2) apenas comparece o termo da velocidade  $\dot{q}_r$ , já que o neutralizador dinâmico está sendo acrescentado única e exclusivamente segundo a coordenada generalizada  $q_r$ .

Rigorosamente falando, (3.1) e (3.2) deveriam ter sido expressas inteiramente no domínio da frequência, já que  $m_{eq}$  e  $c_{eq}$  estão definidos nesse domínio. Por questão de rigor e coerência, todas as equações deste capítulo passarão a ser expressas no domínio da frequência.

As equações de equilíbrio, expressas em coordenadas generalizadas absolutas, após o acréscimo do neutralizador dinâmico, se escrevem:

$$\left[ -\Omega^2 [\tilde{m}] + i\Omega [\tilde{c}] + [k] \right] \{Q^*(\Omega)\} = \{F^*(\Omega)\} \quad (3.3)$$

onde:

$$[\tilde{m}] = [m] + [m_e] \quad (3.4)$$

$$[\tilde{c}] = [c] + [c_e] \quad (3.5)$$

e,

$$[m_e] = \begin{bmatrix} \vdots \\ \dots m_{eq} \dots \\ \vdots \\ r \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$[c_e] = \begin{bmatrix} \vdots \\ \dots c_{eq} \dots \\ \vdots \\ r \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Observe-se que em (3.6) e (3.7) são nulos todos os demais termos não mostrados nas matrizes, tendo em vista as expressões dos acréscimos da energia cinética (3.1) e da potência dissipada (3.2) anteriormente apresentadas. Observe-se também, que em (3.3) a matriz de rigidez permanece inalterada, já que não há alteração da energia potencial elástica do sistema.

Se a excitação se dá por um movimento prescrito  $\vec{s}(t)$  de sua base e as equações de equilíbrio são também tomadas em termos das coordenadas absolutas  $\{Q^*(\Omega)\}$ , o vetor  $\{F^*(\Omega)\}$  se escreve:

$$\{F^*(\Omega)\} = \left[ i\Omega [c] + [k] \right] \{\alpha\} S^*(\Omega) \quad (3.8)$$

onde  $\{\alpha\}$  são os cossenos diretores entre o vetor  $\vec{s}$  e cada uma das coordenadas generalizadas. No apêndice C encontra-se um tratamento um pouco mais detalhado a respeito de um tal tipo de excitação.

Substituindo em (3.3) a transformação de coordenadas do tipo (C.2), onde a matriz modal  $[\Phi]$  é a mesma da estrutura não amortecida original sem o neutralizador, e pré-multiplicando ambos os membros da equação por  $[\Phi]^T$ , as matrizes  $[\tilde{m}]$  e  $[\tilde{c}]$  resultarão em matrizes não diagonalizadas. Para  $[\tilde{m}]$ , resultará:

$$\begin{aligned}
 [\Phi]^T[\tilde{m}][\Phi] &= [\Phi]^T[m][\Phi] + \\
 &+ \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \dots & \Phi_{r1} & \dots & \Phi_{n1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \Phi_{1k} & \dots & \Phi_{rk} & \dots & \Phi_{nk} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \Phi_{1n} & \dots & \Phi_{rn} & \dots & \Phi_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & m_{eq} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \dots & \Phi_{1k} & \dots & \Phi_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \Phi_{r1} & \dots & \Phi_{rk} & \dots & \Phi_{rn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \Phi_{n1} & \dots & \Phi_{nk} & \dots & \Phi_{nn} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} m_{jN} \end{bmatrix} + m_{eq} \begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

onde:

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{r1}^2 & \dots & \Phi_{r1} \Phi_{rk} & \dots & \Phi_{r1} \Phi_{rn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \Phi_{rk} \Phi_{r1} & \dots & \Phi_{rk}^2 & \dots & \Phi_{rk} \Phi_{rn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \Phi_{rn} \Phi_{r1} & \dots & \Phi_{rn} \Phi_{rk} & \dots & \Phi_{rn}^2 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Note-se que  $\{\Phi\}_k$  é um autovetor genérico da matriz modal  $[\Phi]$ .

De modo semelhante, supondo que o amortecimento da estrutura primária seja do tipo viscoso proporcional, resultará para  $[\tilde{c}]$ :

$$[\Phi]^T[\tilde{c}][\Phi] = \begin{bmatrix} c_{jN} \end{bmatrix} + c_{eq} \begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

onde, novamente, a matriz  $[A]$  é fornecida por (3.10).

Assim, não haverá um desacoplamento das  $n$  equações do sistema (3.3). Mas, em geral, apesar de o número de graus de liberdade ser muito grande, poucos são os modos que são realmente excitados.

Suponha-se então o caso de truncamento onde ao invés de se utilizar

os  $n$  autovetores solução do problema de autovalores original, utilize-se apenas  $\bar{n}$ , sendo  $\bar{n} \ll n$ . A transformação de coordenadas principais para generalizadas fica:

$$\{Q^*(\Omega)\} = [\bar{\Phi}] \{\bar{P}^*(\Omega)\} \quad (3.12)$$

Os vetores e matrizes em (3.12) têm o seguinte significado:

$\{Q^*(\Omega)\}$  é o vetor de todas as coordenadas generalizadas, sendo de dimensão  $n \times 1$ ;

$[\bar{\Phi}]$  é a matriz de apenas  $\bar{n}$  autovetores, sendo de dimensão  $n \times \bar{n}$ ;

$\{\bar{P}^*(\Omega)\}$  é o vetor de apenas  $\bar{n}$  coordenadas principais e é de dimensão  $\bar{n} \times 1$ .

Substituindo (3.12) em (3.3) e pré-multiplicando ambos os membros desta última por  $[\bar{\Phi}]^T$ , obter-se-á um sistema reduzido de apenas  $\bar{n}$  equações acopladas, ou seja:

$$\begin{aligned} & \left[ -\Omega^2 \left[ \left[ \bar{m}_{j\backslash} \right] + m_{eq} \left[ \bar{A} \right] \right] + i\Omega \left[ \left[ \bar{c}_{j\backslash} \right] + c_{eq} \left[ \bar{A} \right] \right] + \left[ \bar{k}_{j\backslash} \right] \right] \left\{ \bar{P}^*(\Omega) \right\} = \\ & = [\bar{\Phi}]^T \left\{ F^*(\Omega) \right\} = \left\{ \bar{\gamma}^*(\Omega) \right\} \end{aligned} \quad (3.13)$$

$\bar{\gamma}_j^*(\Omega)$  representa o somatório das contribuições de todas as forças na excitação do  $j$ -ésimo modo. A matriz  $[\bar{A}]$  é dada pela mesma equação (3.10), bastando substituir nesta  $n$  por  $\bar{n}$ .

Caso a matriz  $[\bar{\Phi}']$  esteja ortonormalizada em relação a matriz de massas do sistema original sem o neutralizador, as equações de equilíbrio ainda podem ser escritas:

$$\begin{aligned} & \left[ -\Omega^2 \left[ \left[ \bar{I} \right] + m_{eq} \left[ \bar{A}' \right] \right] + i\Omega \left[ \left[ 2\bar{\xi}_{j\backslash} \bar{\Omega}_{j\backslash} \right] + c_{eq} \left[ \bar{A}' \right] \right] + \left[ \bar{\Omega}_{j\backslash}^2 \right] \right] \left\{ \bar{P}^*(\Omega) \right\} = \\ & = [\bar{\Phi}']^T \left\{ F^*(\Omega) \right\} = \left\{ \bar{\gamma}'^*(\Omega) \right\} \end{aligned} \quad (3.14)$$

### 3.1.2 - CASO ESPECIAL - CONTROLE DE UM MODO E OTIMIZAÇÃO DO NEUTRALIZADOR:

Suponha-se que o  $j$ -ésimo modo seja dominante na resposta da estrutura sendo, portanto, aquele a ser controlado. A matriz modal se reduz ao  $j$ -ésimo autovetor e a equação de equilíbrio torna-se:

$$\begin{aligned} & \left[ -\Omega^2 (m_j + m_{eq\ rj} \Phi^2) + i\Omega (c_j + c_{eq\ rj} \Phi^2) + k_j \right] P_j^*(\Omega) = \\ & = \left\{ \Phi \right\}_j^T \left\{ F^*(\Omega) \right\} = \gamma_j^*(\Omega) \end{aligned} \quad (3.15)$$

ou, no caso de ortonormalização:

$$\begin{aligned} & \left[ -\Omega^2 (1 + m_{eq\ rj} \Phi'^2) + i\Omega (2\xi_j \Omega_j + c_{eq\ rj} \Phi'^2) + \Omega_j^2 \right] P_j^*(\Omega) = \\ & = \left\{ \Phi' \right\}_j^T \left\{ F^*(\Omega) \right\} = \gamma_j'^*(\Omega) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Note-se que a equação (3.15) é bastante semelhante às equações (2.22) e (2.26) obtidas para a aplicação do neutralizador dinâmico a um sistema de um grau de liberdade.

De (3.15) pode-se obter o deslocamento adimensional:

$$\frac{P_j^*(\Omega)}{\gamma_j^*(\Omega)/k_j} = \frac{k_j}{(k_j - \Omega^2 m_j + i\Omega c_j) + \Phi_{rj}^2 (-\Omega^2 m_{eq} + i\Omega c_{eq})} \quad (3.17)$$

Substituindo (2.20) e (2.21) em (3.17), fica:

$$\frac{P_j^*(\Omega)}{\gamma_j^*(\Omega)/k_j} = \frac{k_j [(k_a - \Omega^2 m_a) + i\Omega c_a]}{(k_j - \Omega^2 m_j + i\Omega c_j) (k_a - \Omega^2 m_a + i\Omega c_a) - \Phi_{rj}^2 \Omega^2 m_a (k_a + i\Omega c_a)} \quad (3.18)$$

ou, de maneira semelhante a (A.5), definindo:

$$\begin{aligned}
\Omega_j^2 \Delta &\triangleq \frac{k_j}{m_j} & ; & & \Omega_a^2 \Delta &\triangleq \frac{k_a}{m_a} \\
\beta_j \Delta &\triangleq \frac{\Omega}{\Omega_j} & ; & & \alpha_j \Delta &\triangleq \frac{\Omega_a}{\Omega_j} \\
\xi_j \Delta &\triangleq \frac{c_j}{2m_j \Omega_j} & ; & & \xi_a \Delta &\triangleq \frac{c_a}{2m_a \Omega_a} \\
\mu_j \Delta &\triangleq \frac{m_a}{m_j} & ; & & \frac{k_a}{k_j} &= \alpha_j^2 \mu_j
\end{aligned} \tag{3.19}$$

o módulo do deslocamento adimensional se torna:

$$\left| \frac{P_j^*(\Omega)}{\gamma_j^*(\Omega)/k_j} \right| = \left\{ \frac{R_N^2 + I_N^2}{R_D^2 + I_D^2} \right\}^{1/2} \tag{3.20}$$

onde:

$$\begin{aligned}
R_N &= \alpha_j^2 - \beta_j^2 \\
I_N &= 2\xi_a \alpha_j \beta_j \\
R_D &= (1-\beta_j^2)(\alpha_j^2 - \beta_j^2) - 4\xi_j \xi_a \alpha_j \beta_j^2 - \mu_j \Phi_{rj}^2 \alpha_j^2 \beta_j^2 \\
I_D &= 2\xi_j \beta_j (\alpha_j^2 - \beta_j^2) + 2\xi_a \alpha_j \beta_j (1-\beta_j^2 - \mu_j \Phi_{rj}^2 \beta_j^2)
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Comparando (3.20) e (3.21) com (B.6) e (B.7) do apêndice B, usadas na otimização do neutralizador MCK aplicado a sistemas de um grau de liberdade, constata-se que a única diferença entre elas, além dos índices, é o termo  $\Phi_{rj}^2$  que multiplica a razão de massas  $\mu_j$  em (3.21). Conclui-se, então, que os parâmetros ótimos  $\alpha_{j\text{ot}}$  e  $\xi_{a\text{ot}}$  serão dados pelas equações (B.8) e (B.14), bastando substituir nessas o coeficiente  $\mu$  por  $\mu_j \Phi_{rj}^2$ , ou seja:

$$\alpha_{j\text{ot}} = \frac{1}{1 + \mu_j \Phi_{rj}^2} \tag{3.22}$$

$$\zeta_{a_{ot}} = \sqrt{\frac{3 \mu_j \phi_{rj}^2}{8(1 + \mu_j \phi_{rj}^2)}} \quad (3.23)$$

No presente caso, o seguinte critério pode ser apropriado para a escolha da massa do neutralizador:

$$\mu'_j = \phi_{rj}^2 \mu_j = \phi_{rj}^2 \frac{m_a}{m_j} = 0,10 \text{ a } 0,20 \quad (3.24)$$

donde:

$$m_a = (0,10 \text{ a } 0,20) \frac{m_j}{\phi_{rj}^2} \quad (3.25)$$

No caso de ortonormalização, ter-se-ia:

$$m_a = (0,10 \text{ a } 0,20) \frac{1}{\phi_{rj}'^2} \quad (3.26)$$

que representa o mesmo que (3.25), já que no processo de ortonormalização,

$$\phi_{rj}' = \frac{\phi_{rj}}{\sqrt{m_j}} \quad (3.27)$$

A rigidez da mola do neutralizador será fornecida por:

$$k_a = m_a \left( \alpha_{j_{ot}} \Omega_j \right)^2 \quad \text{ver 2.20} \quad (3.28)$$

### 3.2 - ADIÇÃO DE VÁRIOS NEUTRALIZADORES DINÂMICOS A ESTRUTURA :

#### 3.2.1 - CASO GERAL :

Muitas vezes são necessários  $p$  neutralizadores de um grau de liberdade associados, respectivamente, às coordenadas generalizadas  $q_{k_1} \dots q_{k_p}$ . Os acréscimos de energia cinética e de potência dissipada ficam:



Supondo aqui novamente o caso de truncamento onde são considerados apenas  $\bar{n}$  modos normais de interesse, as equações de equilíbrio em termos das coordenadas principais do sistema original se escrevem:

$$\begin{aligned} & \left[ -\Omega^2 \left[ \left[ \bar{m}_{j\setminus} \right] + \left[ \bar{m}_A(\Omega) \right] \right] + i\Omega \left[ \left[ \bar{c}_{j\setminus} \right] + \left[ \bar{c}_A(\Omega) \right] \right] + \left[ \bar{k}_{j\setminus} \right] \right] \left\{ \bar{P}^*(\Omega) \right\} = \\ & = \left[ \bar{\Phi} \right]^T \left\{ F^*(\Omega) \right\} = \left\{ \bar{\gamma}^*(\Omega) \right\} \end{aligned} \quad (3.33)$$

onde:

$$\left[ \bar{m}_A \right] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^p m_{eq_i} \Phi_{k_i 1}^2 & \dots & \sum_{i=1}^p m_{eq_i} \Phi_{k_i 1} \Phi_{k_i 1} & \dots & \sum_{i=1}^p m_{eq_i} \Phi_{k_i 1} \Phi_{k_i \bar{n}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^p m_{eq_i} \Phi_{k_i 1} \Phi_{k_i 1} & \dots & \sum_{i=1}^p m_{eq_i} \Phi_{k_i 1}^2 & \dots & \sum_{i=1}^p m_{eq_i} \Phi_{k_i 1} \Phi_{k_i \bar{n}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^p m_{eq_i} \Phi_{k_i \bar{n}} \Phi_{k_i 1} & \dots & \sum_{i=1}^p m_{eq_i} \Phi_{k_i \bar{n}} \Phi_{k_i 1} & \dots & \sum_{i=1}^p m_{eq_i} \Phi_{k_i \bar{n}}^2 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

$$\left[ \bar{c}_A \right] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^p c_{eq_i} \Phi_{k_i 1}^2 & \dots & \sum_{i=1}^p c_{eq_i} \Phi_{k_i 1} \Phi_{k_i 1} & \dots & \sum_{i=1}^p c_{eq_i} \Phi_{k_i 1} \Phi_{k_i \bar{n}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^p c_{eq_i} \Phi_{k_i 1} \Phi_{k_i 1} & \dots & \sum_{i=1}^p c_{eq_i} \Phi_{k_i 1}^2 & \dots & \sum_{i=1}^p c_{eq_i} \Phi_{k_i 1} \Phi_{k_i \bar{n}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^p c_{eq_i} \Phi_{k_i \bar{n}} \Phi_{k_i 1} & \dots & \sum_{i=1}^p c_{eq_i} \Phi_{k_i \bar{n}} \Phi_{k_i 1} & \dots & \sum_{i=1}^p c_{eq_i} \Phi_{k_i \bar{n}}^2 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Note-se que  $\{\bar{\Phi}\}_1$  é um autovetor genérico da matriz  $[\bar{\Phi}]$ .

Da observação de (3.34) e (3.35) conclui-se que pode-se obter

expressões dos termos genéricos de  $[\bar{m}_A]$  e  $[\bar{c}_A]$ , ou seja:

$$\bar{m}_{A_{rs}} = \sum_{i=1}^P m_{eq_i} \Phi_{k_i r} \Phi_{k_i s} \quad (3.36)$$

$$\bar{c}_{A_{rs}} = \sum_{i=1}^P c_{eq_i} \Phi_{k_i r} \Phi_{k_i s} \quad (3.37)$$

Caso os neutralizadores sejam todos iguais, (3.34) e (3.35) se reduzem a:

$$\begin{bmatrix} - \\ \bar{m}_A \end{bmatrix} = m_{eq} \begin{bmatrix} - \\ \bar{A} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

$$\begin{bmatrix} - \\ \bar{c}_A \end{bmatrix} = c_{eq} \begin{bmatrix} - \\ \bar{A} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

onde o termo genérico de  $[\bar{A}]$  agora se escreve:

$$\bar{A}_{rs} = \sum_{i=1}^P \Phi_{k_i r} \Phi_{k_i s} \quad (3.40)$$

### 3.2.2 - CASO ESPECIAL: CONTROLE DE UM MODO E OTIMIZAÇÃO DOS NEUTRALIZADORES:

Na análise que se fará agora, supor-se-á que os neutralizadores usados para controle de um modo sejam todos iguais, o que é bastante sensato e facilita a análise. Com essa consideração, constata-se que a equação (3.33) passa a ter a mesma forma (3.13), sendo que a matriz  $[\bar{A}]$  é dada pelo termo genérico (3.40).

Se o  $j$ -ésimo modo é o modo dominante na resposta da estrutura e o  $j$ -ésimo autovetor é, portanto, o único considerado, a matriz  $[\bar{A}]$  se reduz a um único elemento e a equação de equilíbrio fica:

$$\begin{aligned} & \left[ -\Omega^2 \left( m_j + m_{eq} \sum_{i=1}^P \Phi_{k_i j}^2 \right) + i\Omega \left( c_j + c_{eq} \sum_{i=1}^P \Phi_{k_i j}^2 \right) + k_j \right] P_j^*(\Omega) = \\ & = \left\{ \Phi \right\}_j^T \left\{ F^*(\Omega) \right\} = \gamma_j^*(\Omega) \end{aligned} \quad (3.41)$$

ou no caso de ortonormalização,

$$\left[ -\Omega^2 \left( 1 + m_{eq} \sum_{i=1}^p \Phi_{k_1 j}^{\prime 2} \right) + i\Omega \left( 2\xi_j \Omega_j + c_{eq} \sum_{i=1}^p \Phi_{k_1 j}^{\prime 2} \right) + \Omega_j^2 \right] P_j^*(\Omega) =$$

$$= \left\{ \Phi' \right\}_j^T \left\{ F^*(\Omega) \right\} = \gamma_j'^*(\Omega) \quad (3.42)$$

Uma comparação entre as equações (3.41) e (3.15) ou (3.42) e (3.16), mostra que a diferença entre as mesmas está no termo que multiplica a massa e o amortecimento equivalentes, respectivamente.

Fazendo uma analogia entre a análise feita no caso da otimização de um neutralizador dinâmico no controle de um modo e o presente caso, chega-se a conclusões semelhantes quanto a otimização.

O módulo do deslocamento adimensional neste caso é dado pela mesma equação 3.20, sendo que agora os termos  $R_N$ ,  $I_N$ ,  $R_D$  e  $I_D$ , são:

$$R_N = \alpha_j^2 - \beta_j^2$$

$$I_N = 2\xi_a \alpha_j \beta_j$$

$$R_D = (1 - \beta_j^2)(\alpha_j^2 - \beta_j^2) - 4\xi_j \xi_a \alpha_j \beta_j^2 - \mu_j \sum_{i=1}^p \Phi_{k_1 j}^2 \alpha_j^2 \beta_j^2$$

$$I_D = 2\xi_j \beta_j (\alpha_j^2 - \beta_j^2) + 2\xi_a \alpha_j \beta_j \left( 1 - \beta_j^2 - \mu_j \sum_{i=1}^p \Phi_{k_1 j}^2 \beta_j^2 \right) \quad (3.43)$$

Os coeficientes  $\alpha_{j_{ot}}$  e  $\xi_{a_{ot}}$  ficam:

$$\alpha_{j_{ot}} = \frac{1}{1 + \mu_j \sum_{i=1}^p \Phi_{k_1 j}^2} \quad (3.44)$$

$$\xi_{a_{ot}} = \sqrt{\frac{3 \mu_j \sum_{i=1}^p \Phi_{k_1 j}^2}{8 \left( 1 + \mu_j \sum_{i=1}^p \Phi_{k_1 j}^2 \right)}} \quad (3.45)$$

O critério de escolha de uma massa para o neutralizador, neste caso, fica:

$$m_a = (0,10 \text{ a } 0,20) \frac{m_j}{\sum_{i=1}^p \phi_{k_1 j}^2} \quad (3.46)$$

A rigidez da mola do neutralizador é fornecida pela mesma equação (3.28).

### 3.3 - RAZÃO MODAL DE RESPOSTAS :

#### 3.3.1 - CONCEITO GERAL :

Antes da adição de neutralizadores dinâmicos à estrutura em questão, a resposta dos  $\bar{n}$  modos de interesse é dada pelo vetor:

$$\{P^*(\Omega)\} = \begin{Bmatrix} P_1^*(\Omega) \\ \vdots \\ P_n^*(\Omega) \end{Bmatrix} \quad (3.47)$$

Após a adição dos neutralizadores dinâmicos, a resposta desses modos torna-se:

$$\{\tilde{P}^*(\Omega)\} = \begin{Bmatrix} \tilde{P}_1^*(\Omega) \\ \vdots \\ \tilde{P}_n^*(\Omega) \end{Bmatrix} \quad (3.48)$$

A razão modal de respostas relativa ao  $j$ -ésimo modo é então definida por:

$$R_j(\Omega) = \left| \frac{\tilde{P}_j^*(\Omega)}{P_j^*(\Omega)} \right| \quad (3.49)$$

### 3.3.2 - CONTROLE DE UM MODO POR UM NEUTRALIZADOR DINÂMICO MCK :

Obtendo as expressões das respostas do j-ésimo modo antes e depois da adição dos neutralizadores, isto é,  $P_j^*(\Omega)$  a partir de (C.4) e  $\tilde{P}_j^*(\Omega)$  a partir de (3.15), a razão modal de respostas na forma complexa fica:

$$R_j^*(\Omega) = \frac{-\Omega^2 m_j + i\Omega c_j + k_j}{-\Omega^2 \left( m_j + m_{eq} \Phi_{rj}^2 \right) + i\Omega \left( c_j + c_{eq} \Phi_{rj}^2 \right) + k_j} \quad (3.50)$$

A substituição de  $m_{eq}$  e  $c_{eq}$  das expressões (2.20) e (2.21) conduzem (3.50) a:

$$R_j^*(\Omega) = \frac{(k_j - \Omega^2 m_j + i\Omega c_j)(k_a - \Omega^2 m_a + i\Omega c_a)}{(k_j - \Omega^2 m_j + i\Omega c_j)(k_a - \Omega^2 m_a + i\Omega c_a) - \Phi_{rj}^2 \Omega^2 m_a (k_a + i\Omega c_a)} \quad (3.51)$$

O módulo desta última fornece a razão modal de respostas que, em termos dos parâmetros adimensionais (3.19), fica:

$$R_j(\Omega) = \left\{ \frac{R_N^2 + I_N^2}{R_D^2 + I_D^2} \right\}^{1/2} \quad (3.52)$$

onde:

$$\begin{aligned} R_N &= (1-\beta_j^2)(\alpha_j^2 - \beta_j^2) - 4\xi_j \xi_a \alpha_j \beta_j^2 \\ I_N &= 2\xi_j \beta_j (\alpha_j^2 - \beta_j^2) + 2\xi_a \alpha_j \beta_j (1-\beta_j^2) \\ R_D &= (1-\beta_j^2)(\alpha_j^2 - \beta_j^2) - 4\xi_j \xi_a \alpha_j \beta_j^2 - \mu_j \Phi_{rj}^2 \alpha_j^2 \beta_j^2 \\ I_D &= 2\xi_j \beta_j (\alpha_j^2 - \beta_j^2) + 2\xi_a \alpha_j \beta_j (1-\beta_j^2 - \mu_j \Phi_{rj}^2 \beta_j^2) \end{aligned} \quad (3.53)$$

### 3.3.3 - CONTROLE DE UM MODO POR VÁRIOS NEUTRALIZADORES DINÂMICOS MCK:

A partir de (C.4) e (3.41) obtém-se:

$$R_j^*(\Omega) = \frac{-\Omega^2 m_j + i\Omega c_j + k_j}{-\Omega^2 \left( m_j + m_{eq} \sum_{i=1}^p \Phi_{k_{1j}}^2 \right) + i\Omega \left( c_j + c_{eq} \sum_{i=1}^p \Phi_{k_{1j}}^2 \right) + k_j} \quad (3.54)$$

Da mesma maneira que na seção anterior, a razão modal de respostas em termos dos parâmetros adimensionais (3.19) é expressa pela mesma equação (3.52), onde agora:

$$\begin{aligned} R_N &= (1-\beta_j^2)(\alpha_j^2 - \beta_j^2) - 4\xi_j \xi_a \alpha_j \beta_j^2 \\ I_N &= 2\xi_j \beta_j (\alpha_j^2 - \beta_j^2) + 2\xi_a \alpha_j \beta_j (1-\beta_j^2) \\ R_D &= (1-\beta_j^2)(\alpha_j^2 - \beta_j^2) - 4\xi_j \xi_a \alpha_j \beta_j^2 - \mu_j \sum_{i=1}^p \Phi_{k_{1j}}^2 \alpha_j^2 \beta_j^2 \\ I_D &= 2\xi_j \beta_j (\alpha_j^2 - \beta_j^2) + 2\xi_a \alpha_j \beta_j \left( 1-\beta_j^2 - \mu_j \sum_{i=1}^p \Phi_{k_{1j}}^2 \beta_j^2 \right) \end{aligned} \quad (3.55)$$

### 3.3.4 - CASO PARTICULAR - CONTROLE DE UM MODO POR UM NEUTRALIZADOR DINÂMICO MC

Como é nula a rigidez  $k_a$  do neutralizador, a razão complexa de respostas (3.51) se reduz a:

$$R_j^*(\Omega) = \frac{(k_j - \Omega^2 m_j + i\Omega c_j)(-\Omega^2 m_a + i\Omega c_a)}{(k_j - \Omega^2 m_j + i\Omega c_j)(-\Omega^2 m_a + i\Omega c_a) - i\Phi_{rj}^2 \Omega^3 m_a c_a} \quad (3.56)$$

Definindo uma nova razão de amortecimentos  $\xi$  de maneira semelhante a (B.11), ou seja:

$$\xi = \frac{\Delta}{2m_a \Omega_j} \frac{c_a}{\Omega_j} \quad (3.57)$$

pode-se obter, em termos de  $\xi$  e dos demais parâmetros adimensionais (3.19), a

seguinte expressão para a razão modal de respostas:

$$R_j(\Omega) = \left\{ \frac{[-\beta_j(1-\beta_j^2) - 4\xi_j\xi\beta_j]^2 + [2\xi(1-\beta_j^2) - 2\xi_j\beta_j^2]^2}{[-\beta_j(1-\beta_j^2) - 4\xi_j\xi\beta_j]^2 + [2\xi(1-\beta_j^2 - \mu_j\phi_{rj}^2\beta_j^2) - 2\xi_j\beta_j^2]^2} \right\}^{1/2} \quad (3.58)$$

Caso se deseje a razão ótima de amortecimentos  $\xi_{ot}$ , esta pode ser obtida a partir de uma expressão do deslocamento adimensional semelhante à expressão (B.16) do apêndice B, ou seja:

$$\left| \frac{P_j^*(\Omega)}{\gamma_j^*(\Omega)/k_j} \right| = \left\{ \frac{\beta_j^2 + 4\xi^2}{[-\beta_j(1-\beta_j^2) - 4\xi_j\xi\beta_j]^2 + [2\xi(1-\beta_j^2 - \mu_j\phi_{rj}^2\beta_j^2) - 2\xi_j\beta_j^2]^2} \right\}^{1/2} \quad (3.59)$$

O amortecimento ótimo fica:

$$\xi_{ot} = \sqrt{\frac{1}{2(2 + \mu_j\phi_{rj}^2)(1 + \mu_j\phi_{rj}^2)}} \quad (3.60)$$

### 3.4 - ANÁLISE PARA CONTROLE DE VÁRIOS MODOS :

Observe-se primeiramente que o caso de controle de um modo por um neutralizador é um caso particular de controle de um modo por vários neutralizadores.

No caso de controle de  $\bar{n}$  modos, a análise de controle e otimização deverá se proceder separadamente para cada um dos modos de interesse.

Para verificar o efeito conjunto de todos os neutralizadores sobre os  $\bar{n}$  modos, as propriedades equivalentes dos neutralizadores deverão ser superpostas nas matrizes  $[\bar{m}_A]$  e  $[\bar{c}_A]$  das formas (3.34) e (3.35), respectivamente. O sistema de  $\bar{n}$  equações acopladas da forma (3.33) poderá então ser resolvido para cada uma das frequências de interesse, por um procedimento qualquer de resolução de sistemas de equações complexas.

Os resultados em termos das coordenadas generalizadas poderão ser obtidos através da transformação (3.12).

É aconselhável que os resultados obtidos no controle de cada um dos modos sejam usados separadamente na resolução do sistema de equações (3.33). Isto porque os resultados obtidos para o controle de um modo podem ter grande influência no controle dos demais e, por si só, serem suficientes.

### 3.5 - ADIÇÃO DE VÁRIOS NEUTRALIZADORES MCK SEGUNDO UMA MESMA COORDENADA GENERALIZADA :

Há casos em que a análise por um modelo simplificado da estrutura exige a adição de vários neutralizadores dinâmicos segundo uma mesma coordenada generalizada. Suponha-se então, que sobre uma determinada coordenada generalizada  $q_i$  sejam adicionados  $n_i$  neutralizadores iguais. Como a velocidade é comum a todos, a impedância mecânica total do conjunto de neutralizadores fica:

$$Z^*(\Omega) = n_i Z_a^*(\Omega) \quad (3.61)$$

Consequentemente, a massa e o amortecimento equivalentes do conjunto serão, respectivamente,  $n_i$  vezes as mesmas propriedades isoladas de cada neutralizador, ou seja:

$$m_{eq_i}(\Omega) = n_i m_{eq}(\Omega) \quad (3.62)$$

$$c_{eq_i}(\Omega) = n_i c_{eq}(\Omega) \quad (3.63)$$

De posse desta conclusão e por analogia às análises procedidas nos itens anteriores, far-se-á a seguir uma generalização dos parâmetros ótimos que servirá para a adição de qualquer número de neutralizadores dinâmicos MCK sobre quaisquer graus de liberdade, no controle do  $j$ -ésimo modo de vibração.

Sendo  $n_i$  o número de neutralizadores a serem adicionados segundo o

$i$ -ésimo grau de liberdade e  $n$  o número total de graus de liberdade, os parâmetros ótimos ficam:

$$\alpha_{j_{ot}} = \frac{1}{1 + \mu_j \sum_{i=1}^n n_i \phi_{ij}^2} \quad (3.64)$$

$$\xi_{a_{ot}} = \sqrt{\frac{3 \mu_j \sum_{i=1}^n n_i \phi_{ij}^2}{8 \left( 1 + \mu_j \sum_{i=1}^n n_i \phi_{ij}^2 \right)}} \quad (3.65)$$

O critério para escolha inicial da massa do neutralizador torna-se:

$$m_a = (0,10 \text{ a } 0,20) \frac{m_j}{\sum_{i=1}^n n_i \phi_{ij}^2} \quad (3.66)$$

A expressão do deslocamento adimensional fica:

$$\left| \frac{P_j^*(\Omega)}{\gamma_j^*(\Omega)/k_j} \right| = \left\{ \frac{R_N^2 + I_N^2}{R_D^2 + I_D^2} \right\}^{1/2} \quad (3.67)$$

onde:

$$R_N = \alpha_j^2 - \beta_j^2$$

$$I_N = 2\xi_a \alpha_j \beta_j$$

$$R_D = (1 - \beta_j^2)(\alpha_j^2 - \beta_j^2) - 4\xi_j \xi_a \alpha_j \beta_j^2 - \mu_j \sum_{i=1}^n n_i \phi_{ij}^2 \alpha_j^2 \beta_j^2$$

$$I_D = 2\xi_j \beta_j (\alpha_j^2 - \beta_j^2) + 2\xi_a \alpha_j \beta_j \left( 1 - \beta_j^2 - \mu_j \sum_{i=1}^n n_i \phi_{ij}^2 \beta_j^2 \right) \quad (3.68)$$

e a expressão da razão modal de respostas se escreve:

$$R_j(\Omega) = \left\{ \frac{R_N^2 + I_N^2}{R_D^2 + I_D^2} \right\}^{1/2} \quad (3.69)$$

onde:

$$\begin{aligned} R_N &= (1-\beta_j^2)(\alpha_j^2 - \beta_j^2) - 4\xi_j \xi_a \alpha_j \beta_j^2 \\ I_N &= 2\xi_j \beta_j (\alpha_j^2 - \beta_j^2) + 2\xi_a \alpha_j \beta_j (1-\beta_j^2) \\ R_D &= (1-\beta_j^2)(\alpha_j^2 - \beta_j^2) - 4\xi_j \xi_a \alpha_j \beta_j^2 - \mu_j \sum_{i=1}^n n_i \phi_{ij}^2 \alpha_j^2 \beta_j^2 \\ I_D &= 2\xi_j \beta_j (\alpha_j^2 - \beta_j^2) + 2\xi_a \alpha_j \beta_j \left( 1-\beta_j^2 - \mu_j \sum_{i=1}^n n_i \phi_{ij}^2 \beta_j^2 \right) \end{aligned} \quad (3.70)$$

A análise para controle de vários modos continua a mesma do item 3.4.

## CAPÍTULO 4

## EXEMPLOS DE APLICAÇÃO DA TEORIA GERAL

## 4.1 - NEUTRALIZADORES MCK APLICADOS A UM EDIFÍCIO INDUSTRIAL :

O presente exemplo trata do problema de vibração do edifício ilustrado na figura 4.1. io

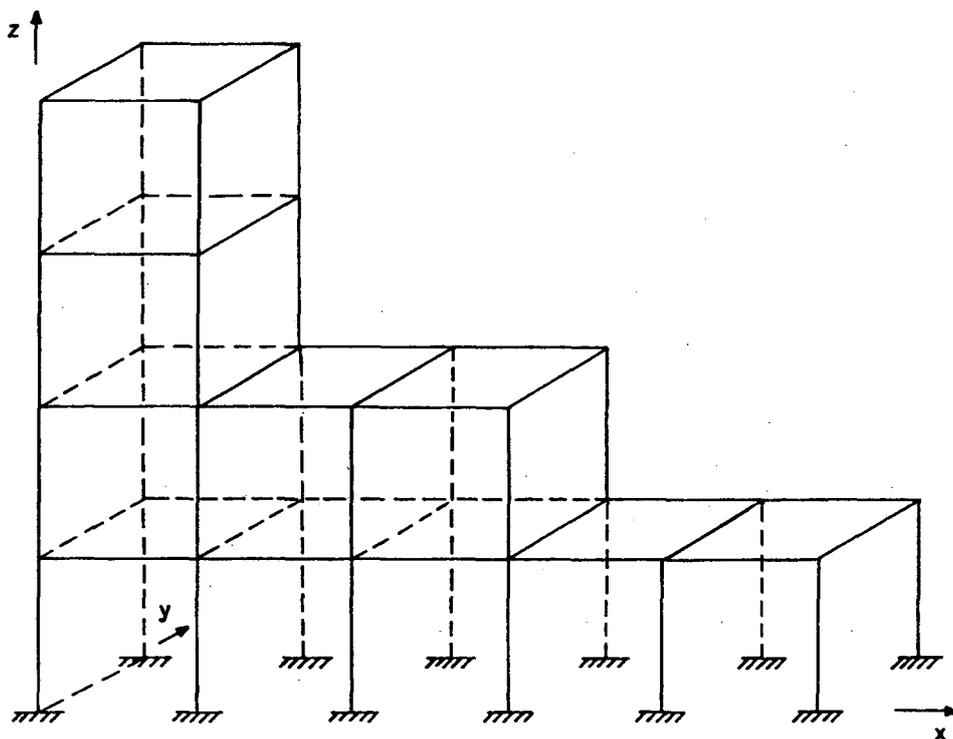


FIGURA 4.1 - Estrutura de um edifício industrial sujeito a uma excitação harmônica.

Este edifício encontra-se próximo a um britador de calcáreo, cujo mecanismo possui uma frequência harmônica de 3,32 Hz. A vibração causada por este mecanismo se propaga pelo solo e excita o edifício, provocando uma vibração excessiva e uma sensação extremamente desagradável.

Experimentalmente, verificou-se que a vibração se dá fundamentalmente na direção do eixo x, indicando estar sendo excitado algum modo de vibração

por cisalhamento nesta direção.

Supondo que as lajes sejam suficientemente rígidas na faixa da frequência de excitação, um modelo bastante simplificado da estrutura pode ser elaborado, onde são consideradas apenas deformações por cisalhamento na direção  $x$ . A figura 4.2 ilustra tal modelo.

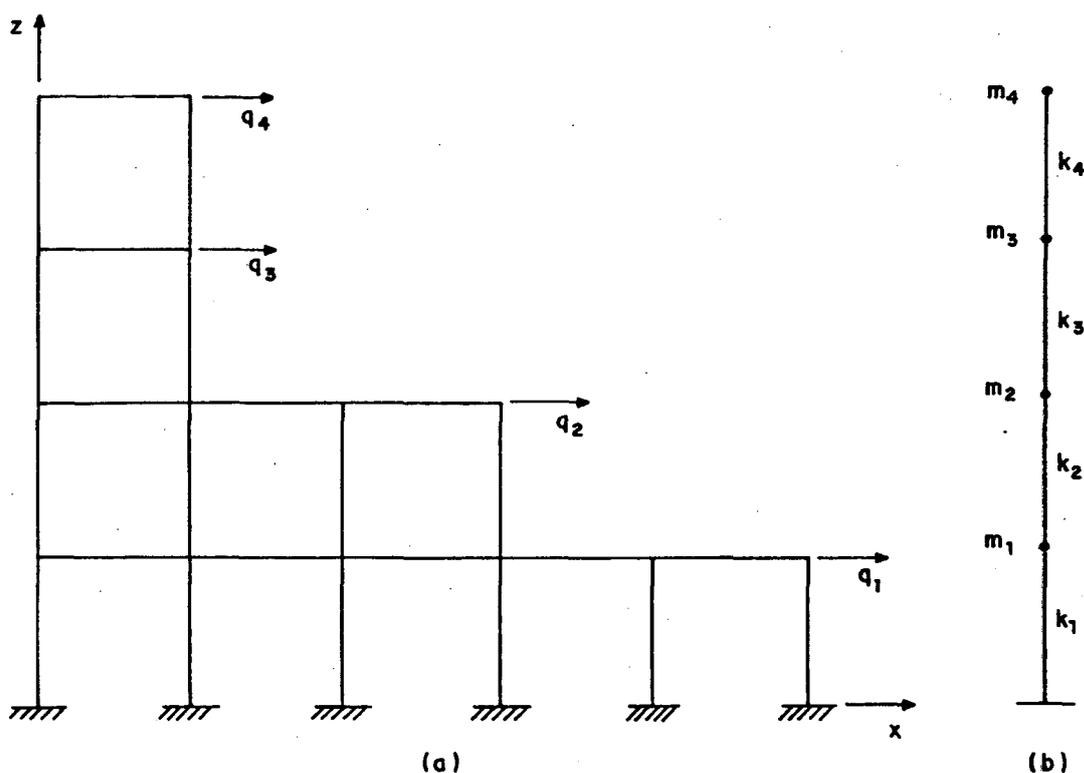


FIGURA 4.2 - Graus de liberdade considerados (a) e modelo simplificado da estrutura (b).

Neste modelo apenas quatro graus de liberdade são considerados. As constantes de rigidez  $k_1$  a  $k_4$  são calculadas pela associação das constantes de rigidez das colunas correspondentes. As massas  $m_1$  a  $m_4$  também são determinadas pela soma das massas dos correspondentes trechos de colunas, vigas e lajes.

A tabela 4.1 mostra essas massas e constantes de rigidez.

Nº	m (Kg)	K (N/m)
1	71127	18139087
2	39047	23481239
3	36059	16310709
4	20206	17889972

TABELA 4.1 - Massas concentradas e constantes de rigidez das colunas obtidos para o modelo simplificado.

As matrizes de massa e rigidez podem ser determinadas pelo método dos coeficientes de influência, donde se obtém:

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix}$$

$$[k] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o problema de autovalores e de autovetores obtém-se as frequências naturais e os autovetores das tabelas 4.2 e 4.3, respectivamente.

Da tabela 4.2, constata-se que realmente existe um modo, o de número 2, cuja frequência natural é bem próxima da frequência de excitação, sendo este o modo responsável pela vibração excessiva. Neutralizadores dinâmicos serão então calculados para controlar este modo.

Modo	$\Omega$ (rad/seg)	f (Hz)
1	8,463	1,347
2	20,175	3,211
3	34,495	5,490
4	42,066	6,695

TABELA 4.2 - Freqüências naturais

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
$\Phi_1$	$0,153 \times 10^{-2}$	$-0,281 \times 10^{-2}$	$-0,182 \times 10^{-2}$	$-0,710 \times 10^{-3}$
$\Phi_2$	$0,238 \times 10^{-2}$	$-0,151 \times 10^{-2}$	$0,334 \times 10^{-2}$	$0,255 \times 10^{-2}$
$\Phi_3$	$0,319 \times 10^{-2}$	$0,182 \times 10^{-2}$	$0,126 \times 10^{-2}$	$-0,355 \times 10^{-2}$
$\Phi_4$	$0,348 \times 10^{-2}$	$0,337 \times 10^{-2}$	$-0,366 \times 10^{-2}$	$0,356 \times 10^{-2}$

TABELA 4.3 - Autovetores ortonormalizados

Na figura 4.3 estão ilustradas as representações gráficas dos quatro modos de vibração por cisalhamento na direção x.

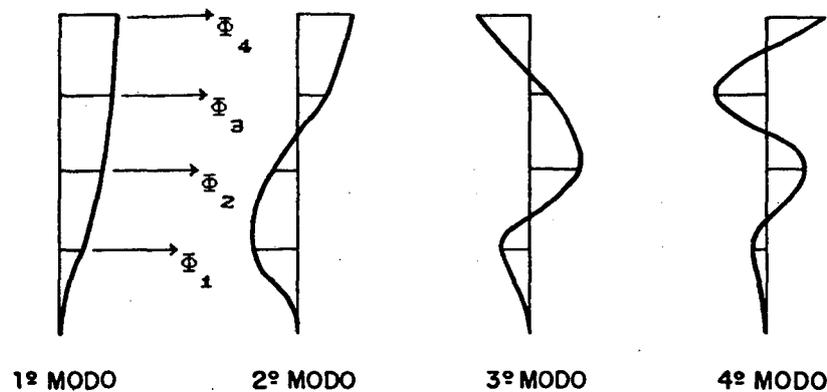


FIGURA 4.3 - Modos de vibração por cisalhamento da estrutura na direção x.

A tabela 4.4 apresenta várias alternativas diferentes para instalação

de neutralizadores dinâmicos na estrutura. Os parâmetros da tabela foram calculados com as correspondentes equações do capítulo 3, sendo que para a massa dos neutralizadores foi tomado um coeficiente de 0,05 na equação (3.66), para não resultar neutralizadores excessivamente grandes.

Nº neut./g.l.				$m_a$ (Kg)	$\sum n_i m_a$ (Kg)	$\mu_2$	$\alpha_{2_{ot}}$	$k_a$ (N/m)	$\xi_{a_{ot}}$
$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_4$						
4	4	4	4	500	8000	500	0,953	184703	0,133
8	8	8	8	250	8000	250	0,953	92351	0,133
16	16	16	16	125	8000	125	0,953	46175	0,133
4	0	0	4	650	5200	650	0,952	239946	0,134
8	0	0	8	325	5200	325	0,952	119973	0,134
16	0	0	16	162,5	5200	162,5	0,952	59987	0,134
16	4	4	16	150	6000	150	0,953	55424	0,133
32	8	8	32	75	6000	75	0,953	22712	0,133
0	0	0	4	1100	4400	1100	0,952	406130	0,133
0	0	0	8	550	4400	550	0,952	203065	0,133
4	0	0	0	1580	6320	1580	0,952	583425	0,134
8	0	0	0	790	6320	790	0,952	291712	0,134

TABELA 4.4 - Diferentes alternativas para instalação de neutralizadores dinâmicos na estrutura.

Desta tabela podem-se tirar várias conclusões. A primeira é que, para um mesmo critério de escolha da massa do neutralizador, isto é, um mesmo coeficiente na equação (3.66), independentemente do número de neutralizadores e de como estejam distribuídos segundo os vários graus de liberdade, chegam-se aos mesmos parâmetros ótimos  $\alpha_{ot}$  e  $\xi_{a_{ot}}$ . As pequenas diferenças encontradas na tabela 4.4 resultam de arredondamentos feitos nos valores de  $m_a$ .

Conclui-se também, observando o critério anterior, que o fato de

aumentar proporcionalmente o número de neutralizadores para todos os graus de liberdade que possuem neutralizadores, resultará sempre em uma mesma massa total adicionada a estrutura.

Uma conclusão importante, também observando o mesmo critério, é que a adição de neutralizadores apenas segundo os graus de liberdade de maior deslocamento, resulta em uma menor massa total adicionada a estrutura.

Note-se que a adição de neutralizadores segundo os graus de liberdade 1 e 4 resulta em uma menor massa total do que quando adicionados segundo todos os graus de liberdade. Note-se ainda que a adição dos mesmos apenas segundo o grau de liberdade 4, que é o que apresenta o maior deslocamento, resulta na menor das massas totais.

As figuras 4.4 e 4.5 mostram o deslocamento adimensional e a razão de respostas para as alternativas da tabela 4.4. Para essas curvas foi considerado um amortecimento modal  $\xi_2=0,001$  na estrutura primária.

Todas as alternativas resultam em uma mesma curva de deslocamento adimensional e de razão de respostas, mostrando que todas as alternativas produzem o mesmo efeito.

Esta conclusão poderia ter sido obtida das equações do deslocamento adimensional (3.67) e (3.68), ou da razão de respostas (3.69) e (3.70), já que o termo:

$$\mu_j \sum_{i=1}^n n_i \phi_{ij}^2$$

que comparece nas correspondentes equações, resulta em um mesmo valor, qualquer que seja a alternativa da tabela 4.4.

Na figura 4.4, encontram-se também as curvas correspondentes ao amortecimento nulo e ao amortecimento infinito, evidenciando o fato de que os picos de deslocamento ocorrem nos pontos fixos.

Da curva da razão de respostas, figura 4.5, observa-se que na frequência de ressonância original do sistema primário, a resposta é reduzida

em torno de 39 dB, o que corresponde a cerca de 89 vezes. Em contrapartida, lateralmente a essa região, existem outras duas onde a resposta é amplificada. O pico máximo de amplificação corresponde a cerca de 3 dB, o que representa uma resposta em torno de 1,4 vezes maior que a resposta do sistema original.

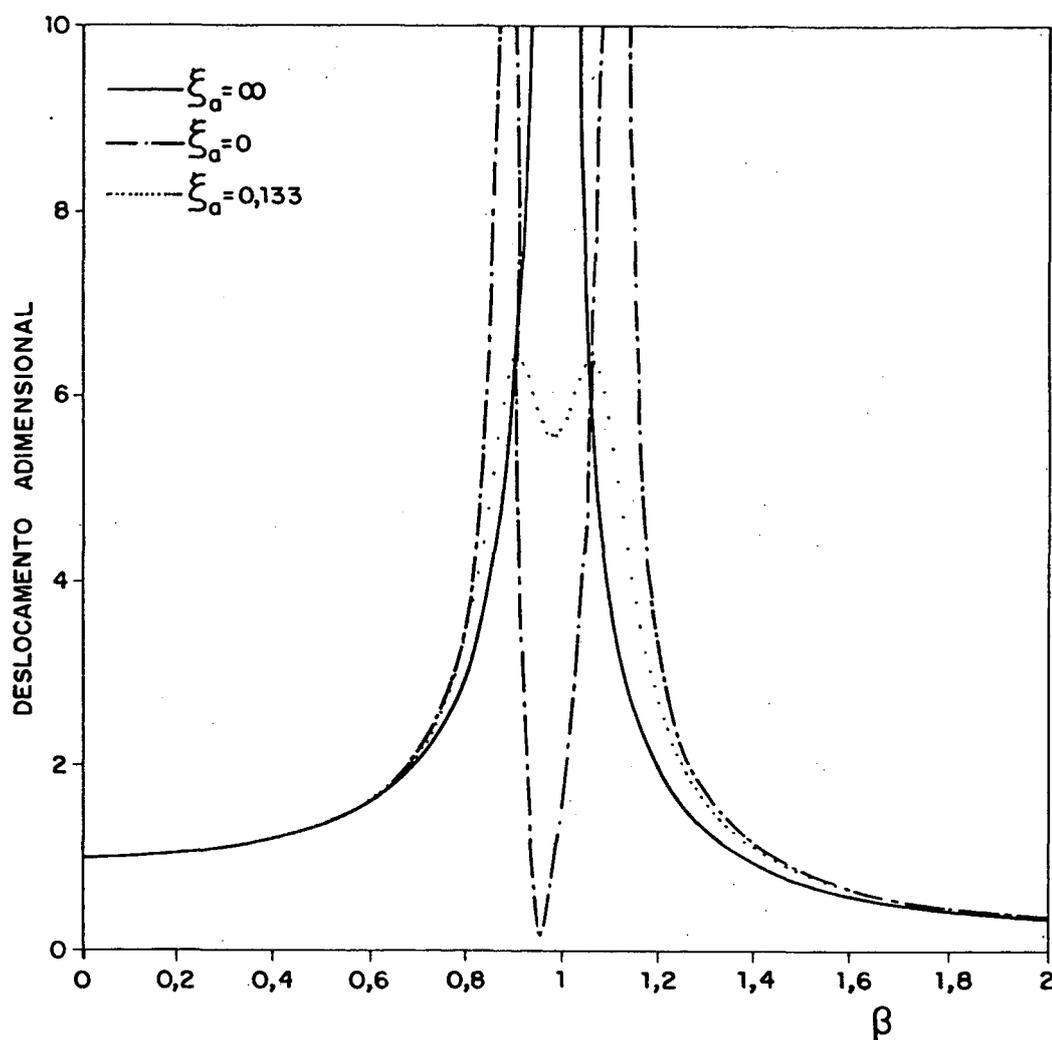


FIGURA 4.4 - Deslocamentos adimensionais para as alternativas da tabela 4.4.

A frequência de excitação do exemplo em análise é de 3,32 Hz e corresponde a uma razão  $\beta_2=1,03$ , que se encontra dentro da faixa de atenuação da resposta, conforme o gráfico da figura 4.5. Da equação (3.69), obtém-se para esta frequência um valor de razão de respostas de -8,6 dB, ou seja, uma resposta cujo valor é 0,37 vezes a resposta do sistema original.

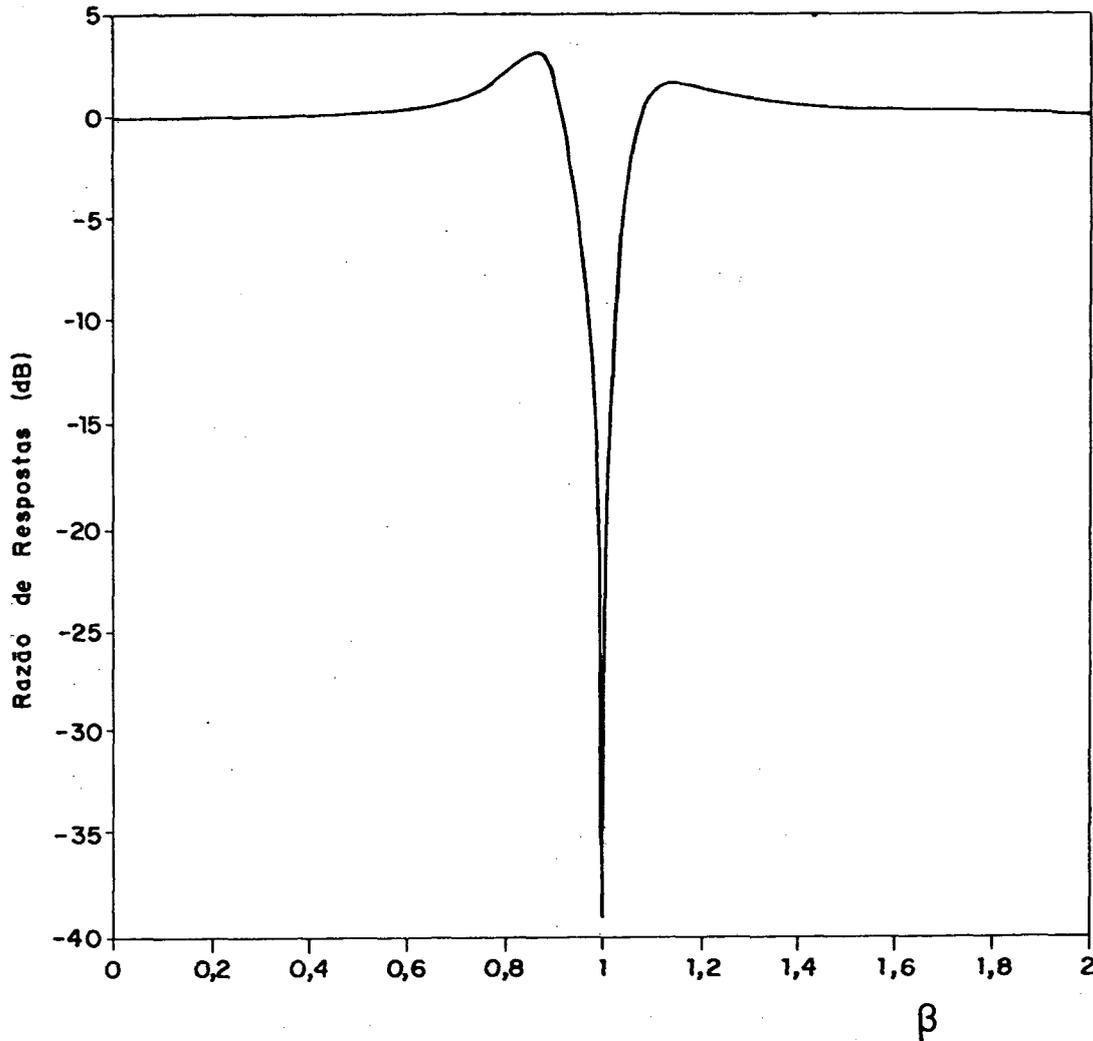


FIGURA 4.5 - Razão de respostas correspondente às alternativas da tabela 4.4.

A tabela 4.5 apresenta outras quatro alternativas, onde, nas três primeiras delas, os neutralizadores são adicionados segundo os graus de liberdade 1 e 4, e na quarta, os mesmos são adicionados somente segundo o quarto grau de liberdade. Para essas alternativas, os neutralizadores foram escolhidos de tal maneira que a soma total de suas massas, em cada alternativa, seja a mesma que nas três primeiras alternativas da tabela 4.4, onde os neutralizadores eram distribuídos igualmente segundo todos os graus de liberdade. O objetivo é mostrar a potencialidade do conceito da razão de respostas na comparação dos efeitos dessas diferentes alternativas.

Nº neut./g.l.				$m_a$ (Kg)	$\sum n_i m_a$ (Kg)	$\mu_2$	$\alpha_{2_{ot}}$	$k_a$ (N/m)	$\xi_{a_{ot}}$
$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_4$						
4	0	0	4	1000	8000	1000	0,928	350902	0,164
2	0	0	6	1000	8000	1000	0,922	346435	0,170
1	0	0	7	1000	8000	1000	0,919	344233	0,174
0	0	0	8	1000	8000	1000	0,917	342053	0,177

TABELA 4.5 - Alternativas onde as somas das massas dos neutralizadores são as mesmas que as das três primeiras alternativas da tabela 4.4.

Nas figuras 4.6 e 4.7 estão, respectivamente, as curvas dos deslocamentos adimensionais e das razões de respostas relativas a essas alternativas. Para efeito de comparação, nessas figuras encontram-se também representadas as curvas correspondentes às alternativas da tabela 4.4. O amortecimento modal  $\xi_2$  considerado para todas as curvas foi o mesmo anterior.

Na figura 4.6, além dos deslocamentos adimensionais relativos às tabelas 4.4 e 4.5, acha-se ainda representada a curva do deslocamento adimensional da estrutura original, para permitir uma melhor compreensão do comportamento das curvas de razões de respostas.

Da figura 4.6, observa-se que à medida em que aumenta a concentração de neutralizadores dinâmicos segundo o grau de liberdade de maior amplitude de deslocamento, reduzem-se as amplitudes dos picos das curvas de deslocamentos adimensionais. Mas, simplesmente tal efeito não é suficiente para uma avaliação da eficiência dos neutralizadores em reduzir a resposta do sistema primário. As curvas das razões de respostas fornecem informações adicionais para análise do efeito dos mesmos.

Vê-se, das figuras 4.6 e 4.7, que apesar dos picos dos deslocamentos adimensionais reduzirem-se como descrito acima, as razões de respostas para as diferentes alternativas conservam praticamente as mesmas amplitudes máximas.

Isto porque, apesar dos picos dos deslocamentos adimensionais apresentarem valores distintos, ocorrem em frequências ligeiramente diferentes.

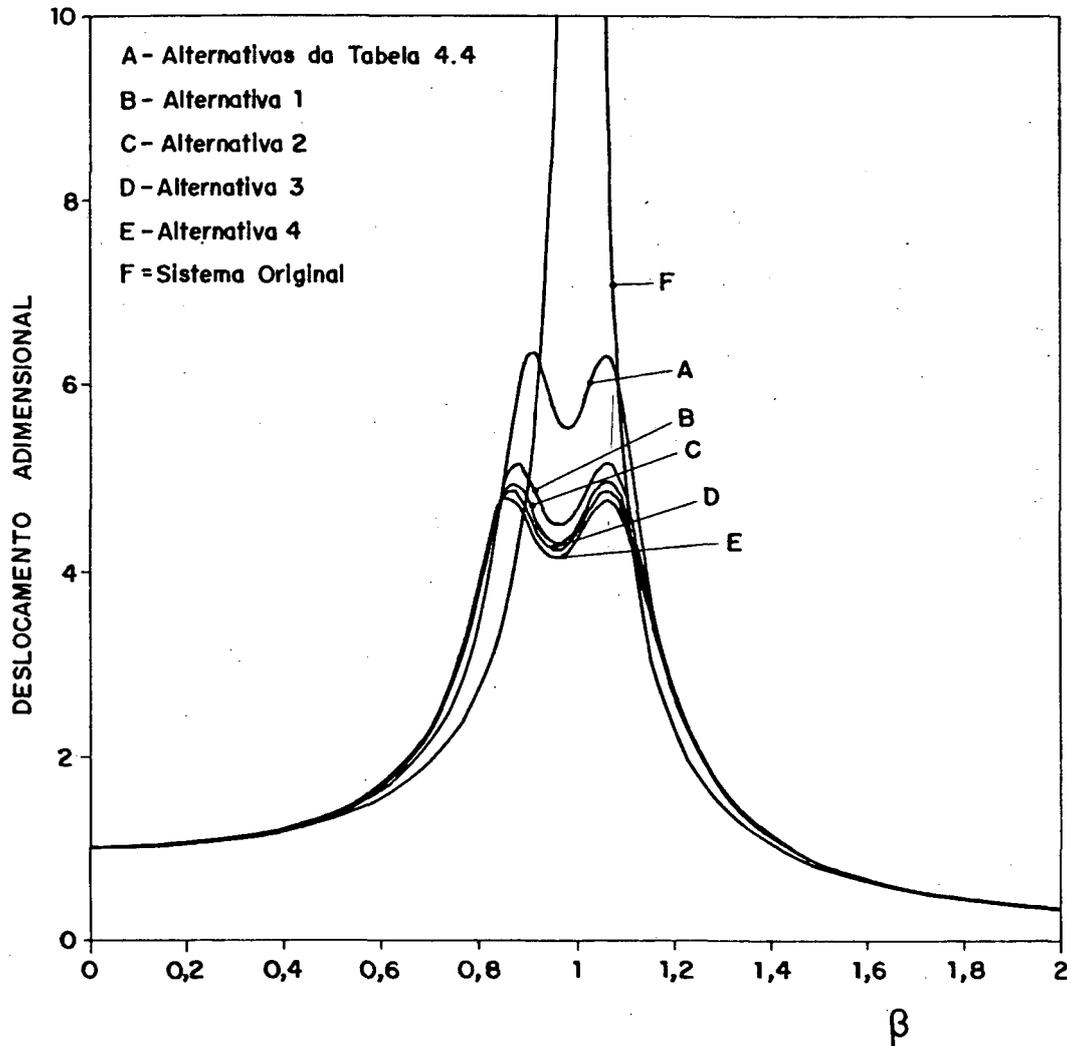


FIGURA 4.6 - Deslocamentos adimensionais relativos às alternativas das tabelas 4.4 e 4.5.

Analisando a curva da resposta do sistema original sem o neutralizador, como mostrada na figura 4.6, vê-se que a mesma possui uma variação bem íngreme na região dos picos dos deslocamentos do sistema com neutralizadores, de tal maneira que a máxima razão entre as respostas permanece praticamente a mesma, alterando-se, na realidade, a frequência onde ela ocorre.

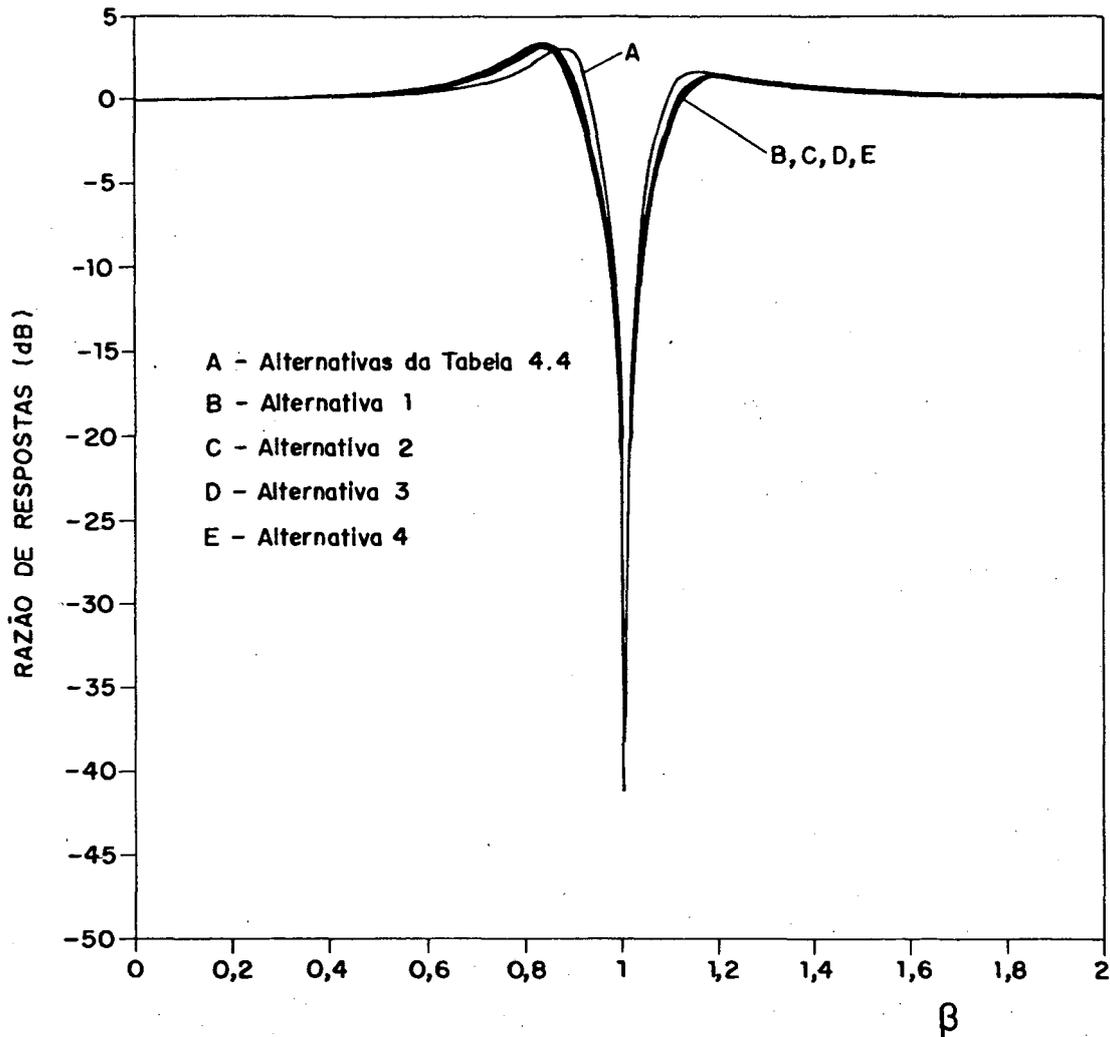


FIGURA 4.7 - Razões de respostas correspondentes às alternativas das tabelas 4.4 e 4.5

Constata-se das curvas das razões de respostas, que todas as alternativas da tabela 4.5 produzem praticamente a mesma redução relativa das respostas. Mas, apesar dessas constatações, as curvas das razões de respostas mostram que as alternativas da tabela 4.5 são ligeiramente mais favoráveis quando comparadas com as da tabela 4.4, pois produzem um alargamento da faixa de freqüências onde há uma atenuação da resposta da estrutura e uma maior atenuação da resposta na freqüência de ressonância original, agora em torno de 42 dB ou 126 vezes.

Toda a análise até agora tem sido feita em termos dos deslocamentos

modais adimensionais e das razões modais de respostas. Na figura 4.8 encontram-se representados dois ganhos do sistema em termos das coordenadas físicas do mesmo. A curva contínua refere-se ao sistema sem neutralizadores dinâmicos e a curva pontilhada refere-se ao sistema com os neutralizadores da quarta alternativa da tabela 4.5. O objetivo é mostrar a influência dos neutralizadores no comportamento da resposta final do sistema em toda a faixa de frequências de interesse, bem como o efeito do acoplamento dos modos introduzido pelos neutralizadores.

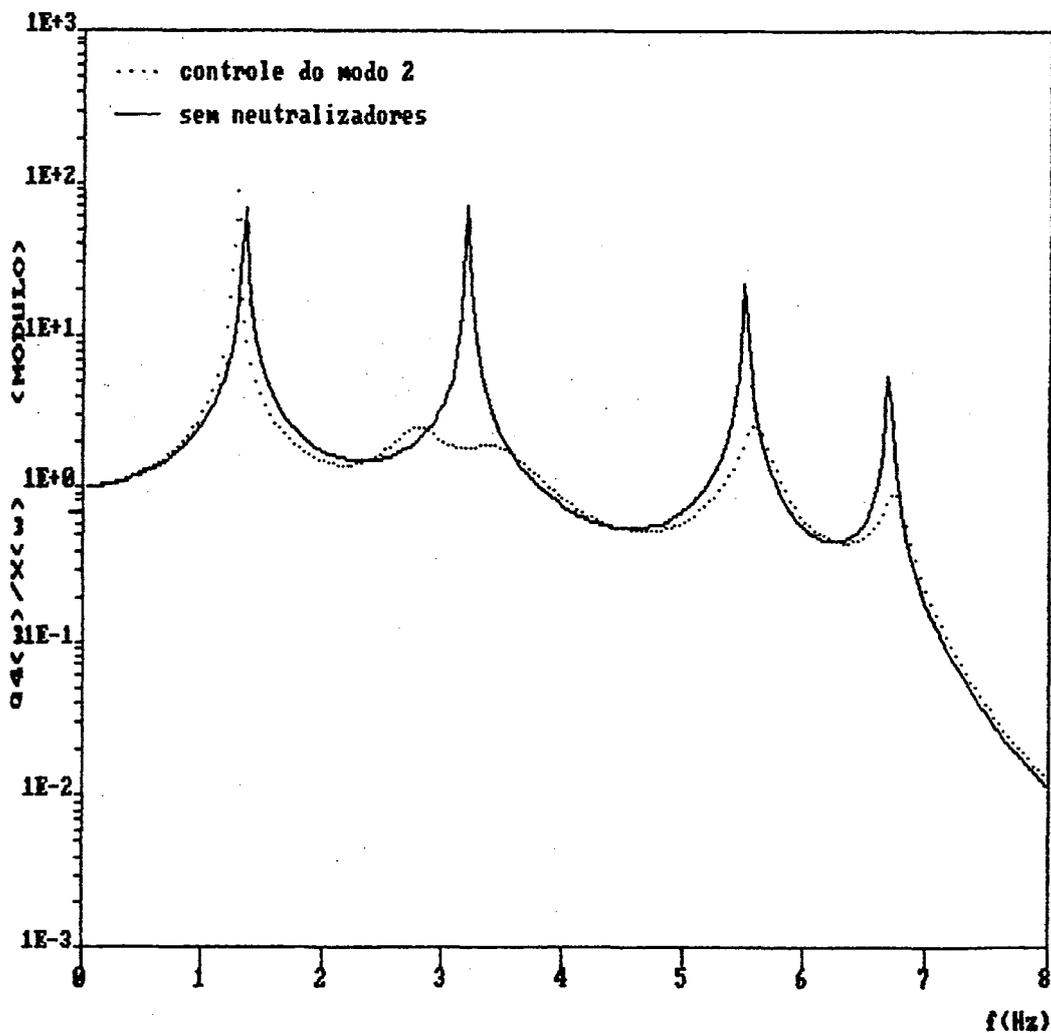


FIGURA 4.8 - Ganhos do sistema (coordenada  $q_4$ ) para a situação sem neutralizadores e para o caso de adição dos neutralizadores da quarta alternativa da tabela 4.5 .

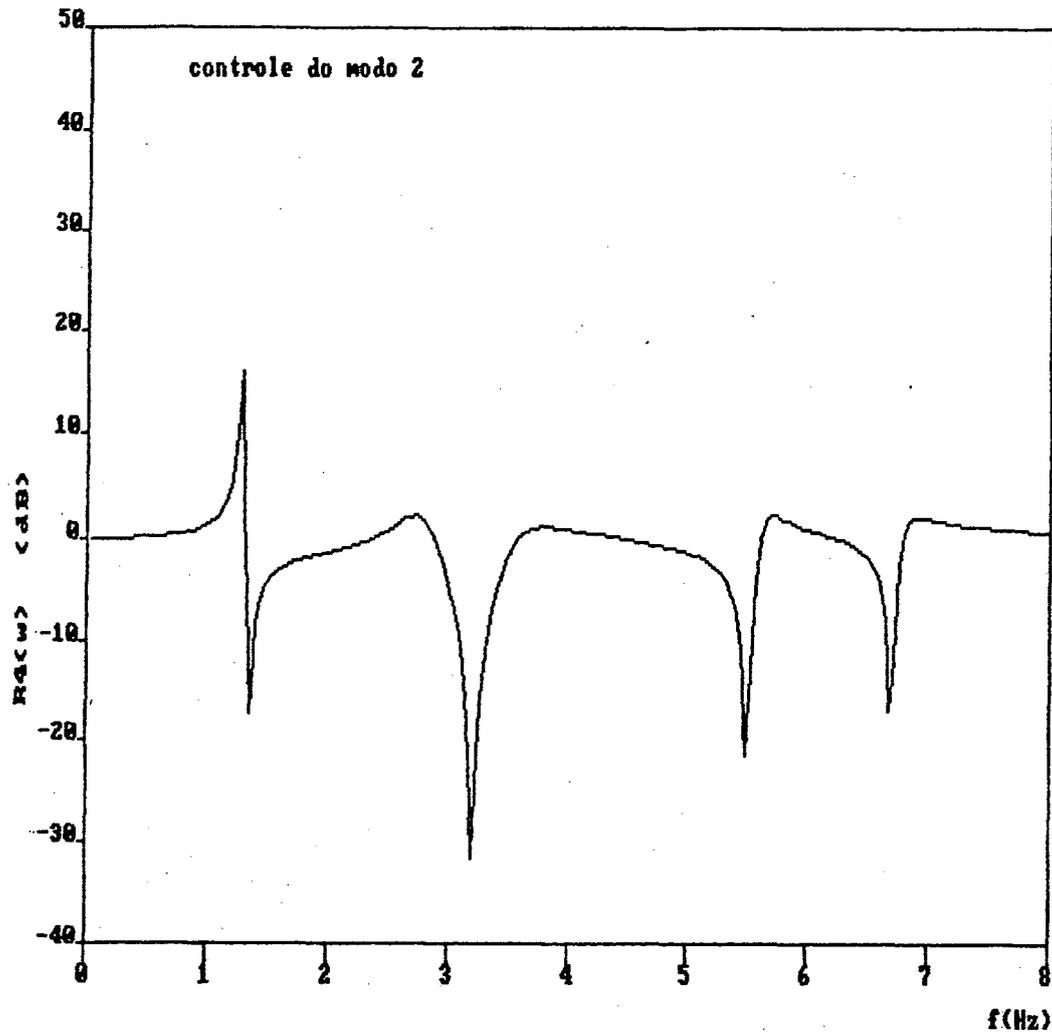


FIGURA 4.9 - Razão de respostas para o caso de adição dos neutralizadores da quarta alternativa da tabela 4.5 (coordenada  $q_4$ ).

Para a obtenção dessas curvas foi utilizado o procedimento descrito no item 3.4, ou seja, mediante uma excitação conhecida, o sistema de  $\bar{n}$  equações complexas (3.33) foi resolvido para cada frequência de interesse, e através da transformação (3.12) obteve-se a resposta em coordenadas físicas. Foram utilizados todos os quatro autovetores obtidos para o modelo e uma excitação por ruído branco na base da estrutura, na faixa entre 0 e 8 Hz. A transformada de Fourier da resposta final da estrutura foi dividida pela transformada do ruído branco utilizado como excitação, possibilitando a

obtenção do ganho do sistema. Na figura 4.8 foram representados apenas os ganhos da coordenada física  $q_4$ .

A figura 4.9 apresenta a razão de respostas relativa a essa mesma coordenada e para a mesma alternativa de adição de neutralizadores. Essa razão de respostas foi obtida tomando-se o módulo da razão entre a resposta complexa em coordenadas físicas do sistema após a adição dos neutralizadores e a resposta antes da adição dos mesmos.

Da análise das curvas das figuras 4.8 e 4.9, observa-se que a resposta na frequência natural do segundo modo de vibração da estrutura original (para o qual os neutralizadores foram calculados) é atenuada em cerca de 32 dB. Esse valor é menor que a redução modal da resposta anteriormente apresentada na figura 4.7 (42 dB). Isto pode ser compreendido tendo em vista o acoplamento dos modos introduzido pelos neutralizadores na equação (3.33), através das matrizes  $[\bar{m}_A]$  e  $[\bar{c}_A]$ , e também devido à influência dos demais modos na resposta total da estrutura, ao se fazer a transformação (3.12).

Das figuras 4.8 e 4.9, observa-se ainda que as respostas dos modos 3 e 4 também são atenuadas. Novamente aqui, o fato pode ser explicado pelo efeito do acoplamento das equações (3.33) introduzido principalmente pelo amortecimento dos neutralizadores, através da matriz  $[\bar{c}_A]$ .

A ausência deste efeito pode ser claramente visto na figura 4.10, onde foram usados os mesmos neutralizadores da figura 4.8, mas, com amortecimento nulo. Neste caso, não mais existe atenuação das respostas do terceiro e quarto modos, havendo uma ligeira alteração das frequências onde os picos de ressonância ocorrem, bem como uma ligeira alteração das amplitudes dos mesmos.

Observa-se ainda, dessa última figura, semelhantemente ao que ocorre com um sistema de um grau de liberdade com neutralizador não amortecido, uma aparição de duas novas frequências naturais, uma acima e outra abaixo da frequência natural do sistema original, bem como uma grande atenuação da

resposta do sistema na faixa de frequências em torno da frequência natural do sistema original.

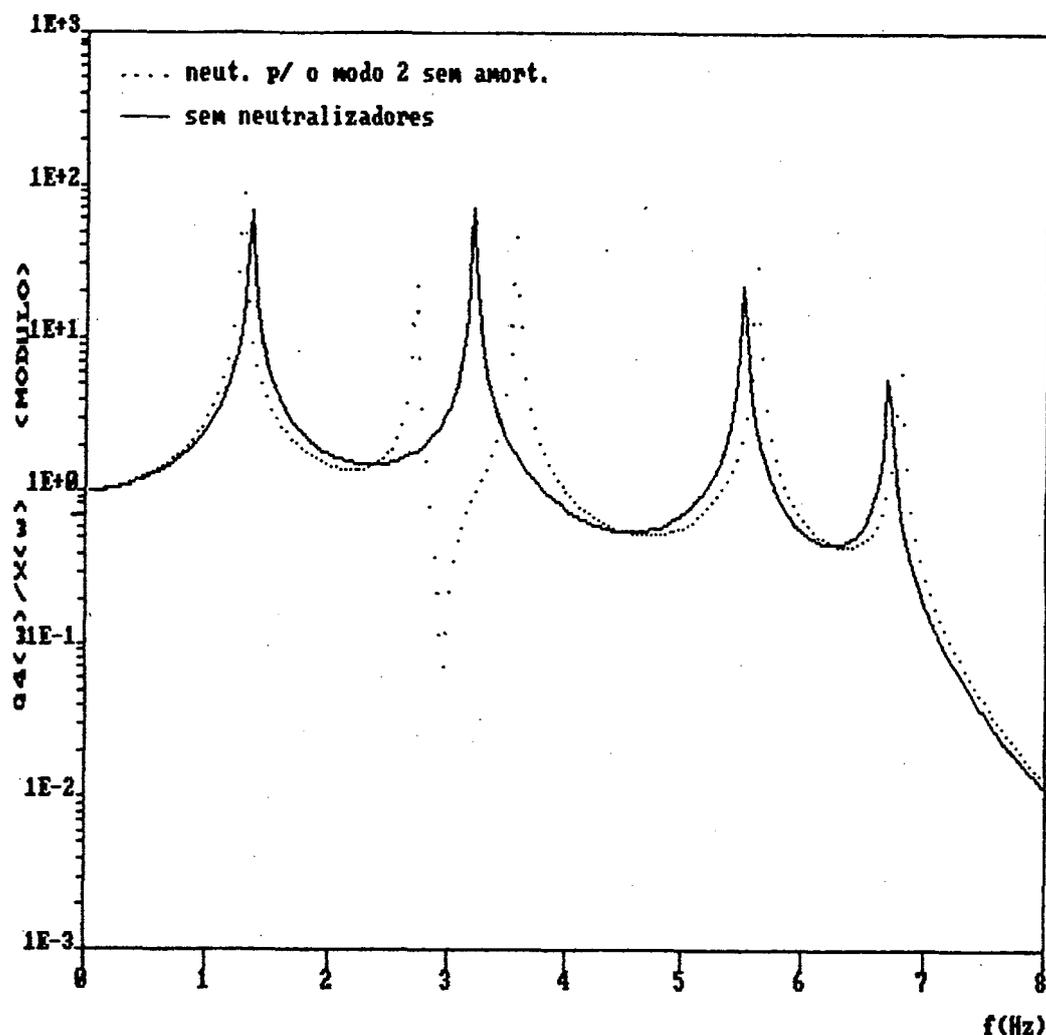


FIGURA 4.10- Ganhos do sistema (coordenada  $q_4$ ) para a situação sem neutralizadores e para a adição dos neutralizadores da quarta alternativa da tabela 4.5 sem amortecimento

Voltando à figura 4.8, nota-se ainda que o pico de respostas do primeiro modo de vibração não foi atenuado pelos neutralizadores, ao contrário, foi ligeiramente amplificado, tendo também sua frequência ligeiramente reduzida. Caso se deseje o controle desse primeiro modo de vibração, um conjunto de neutralizadores também pode ser calculado com esse objetivo. As características de um conjunto de neutralizadores escolhido

encontram-se na tabela 4.6.

Nº neut./g.l.				$m_a$ (Kg)	$\sum n_i m_a$ (Kg)	$\mu_1$	$\alpha_{1_{ot}}$	$k_a$ (N/m)	$\xi_{a_{ot}}$
$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_4$						
0	0	0	8	1000	8000	1000	0,912	59529	0,182

TABELA 4.6 - Neutralizadores para controle do primeiro modo de vibração da estrutura.

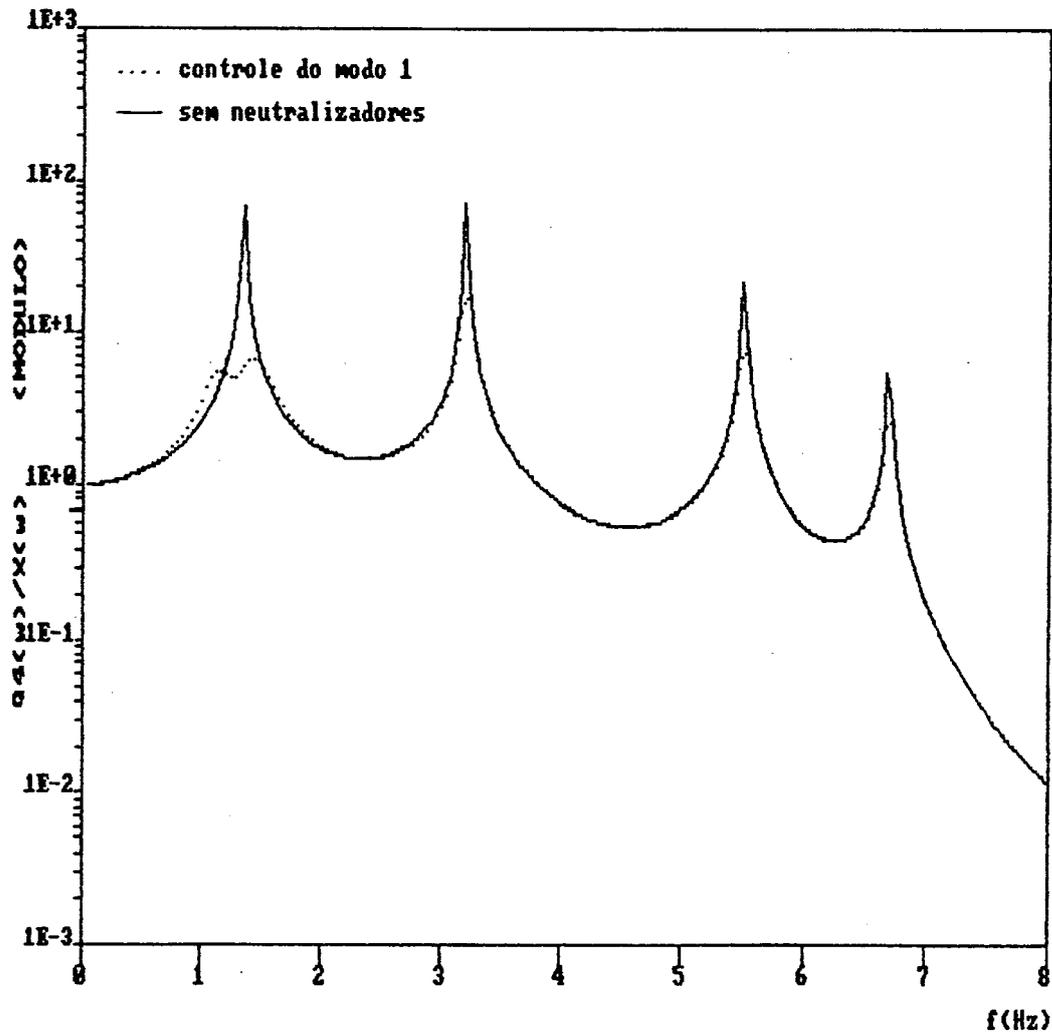


FIGURA 4.11 - Ganhos do sistema (coordenada  $q_4$ ) para a situação sem neutralizadores e para a adição de neutralizadores para controle do primeiro modo de vibração.

As figuras 4.11 e 4.12 mostram o ganho e a razão de respostas em coordenadas físicas relativos a esse último caso. Observa-se destas figuras que a resposta do primeiro modo foi reduzida, produzindo apenas uma pequena redução na resposta dos demais modos.

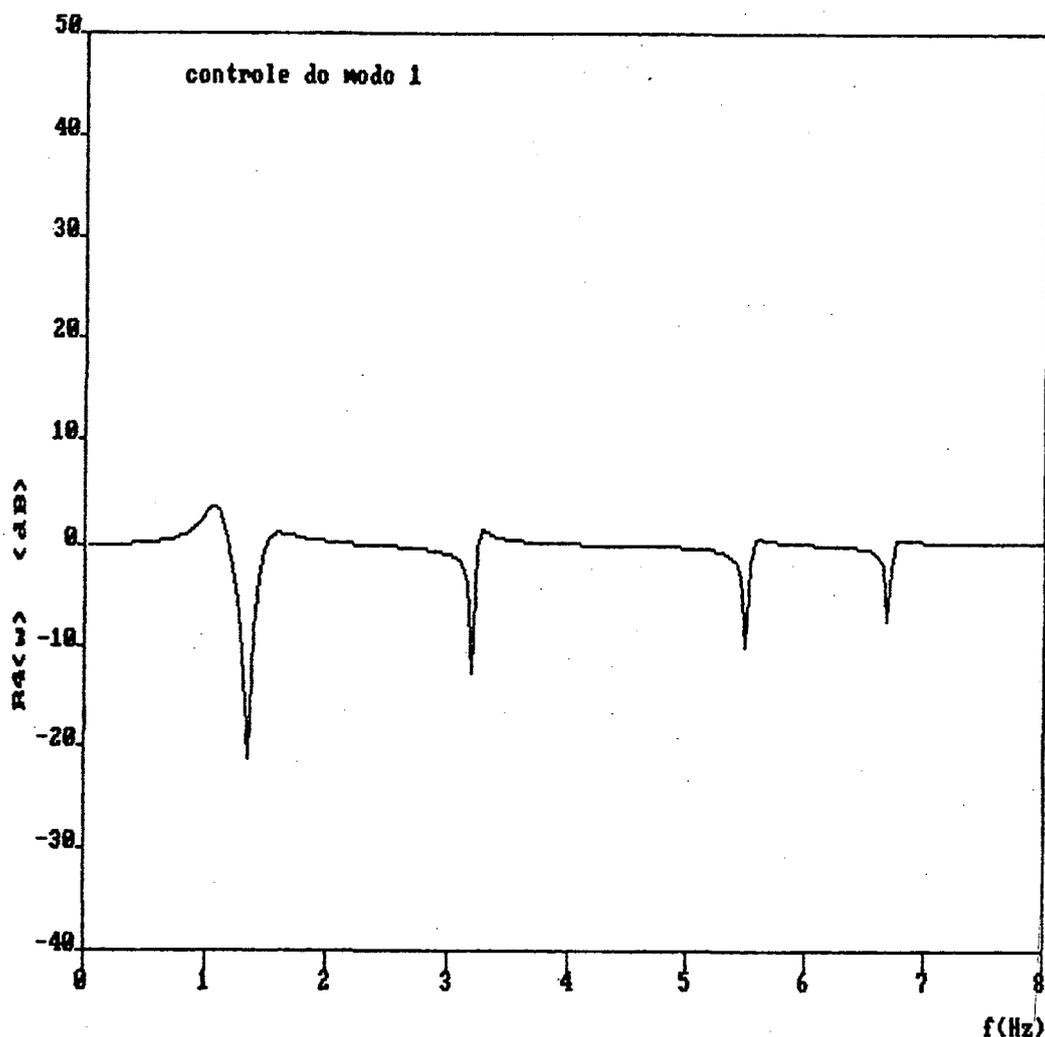


FIGURA 4.12 - Razão de respostas para o caso de adição de neutralizadores para controle do primeiro modo de vibração (coordenada  $q_4$ ).

As figuras 4.13 e 4.14 mostram o efeito de se utilizar simultaneamente os dois conjuntos de neutralizadores: o conjunto para controle do primeiro modo e o conjunto para controle do segundo modo de vibração. Neste caso, consegue-se uma sensível atenuação de todos os picos de respostas.

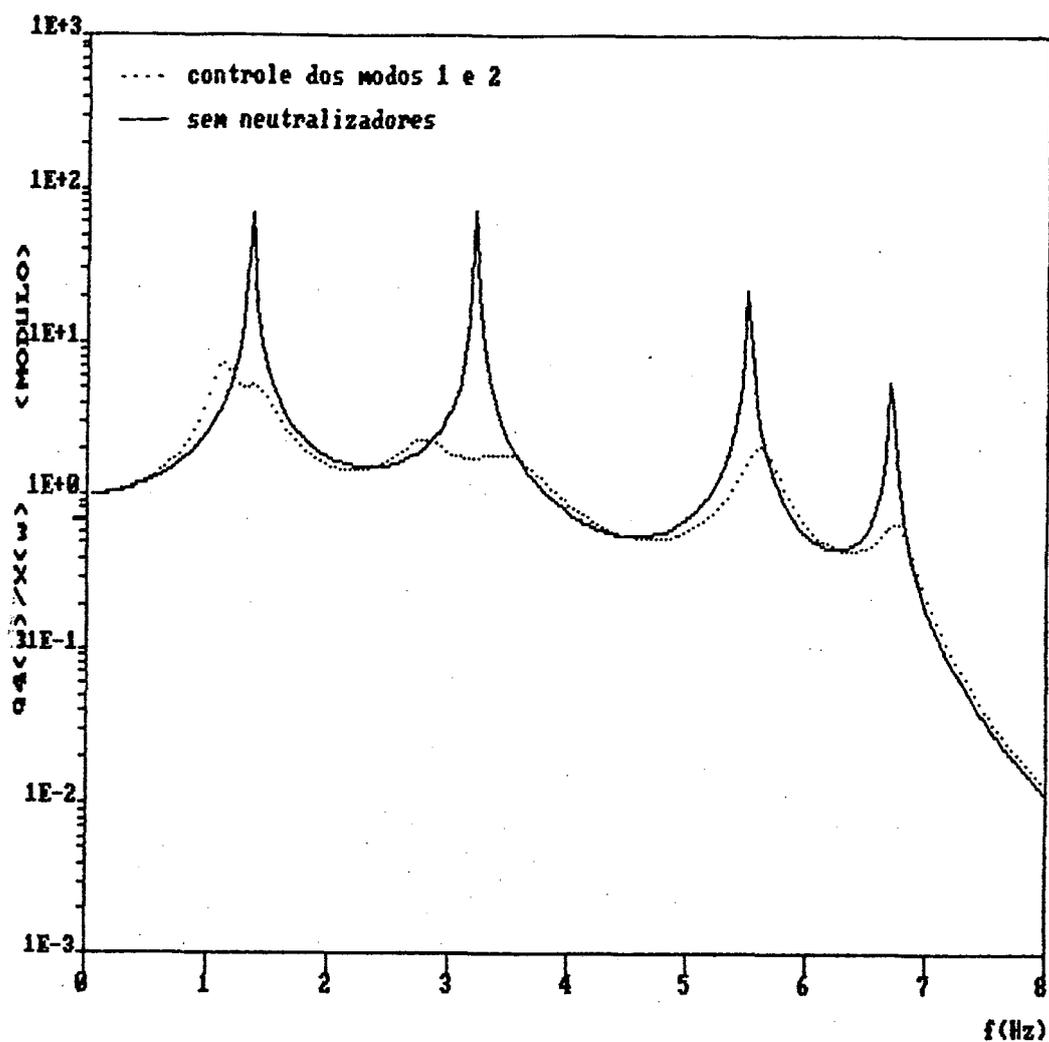


FIGURA 4.13 - Ganhos do sistema (coordenada  $q_4$ ) para a situação sem neutralizadores e para o caso de adição simultânea dos conjuntos de neutralizadores para controle do primeiro e segundo modos de vibração.

Em qualquer uma das figuras 4.8, 4.11 e 4.13, nota-se que os dois novos picos de respostas na região de frequências dos modos para os quais os neutralizadores foram calculados, não mais possuem a mesma amplitude, como acontecia nas curvas das respectivas respostas modais. Tal efeito, novamente, se deve ao acoplamento dos modos, desprezado nas respostas modais, e à influência das respostas dos diversos modos nessa região de frequências, quando se passa das coordenadas modais  $\{\bar{p}\}$  para as coordenadas físicas  $\{q\}$ ,

através da transformação (3.12).

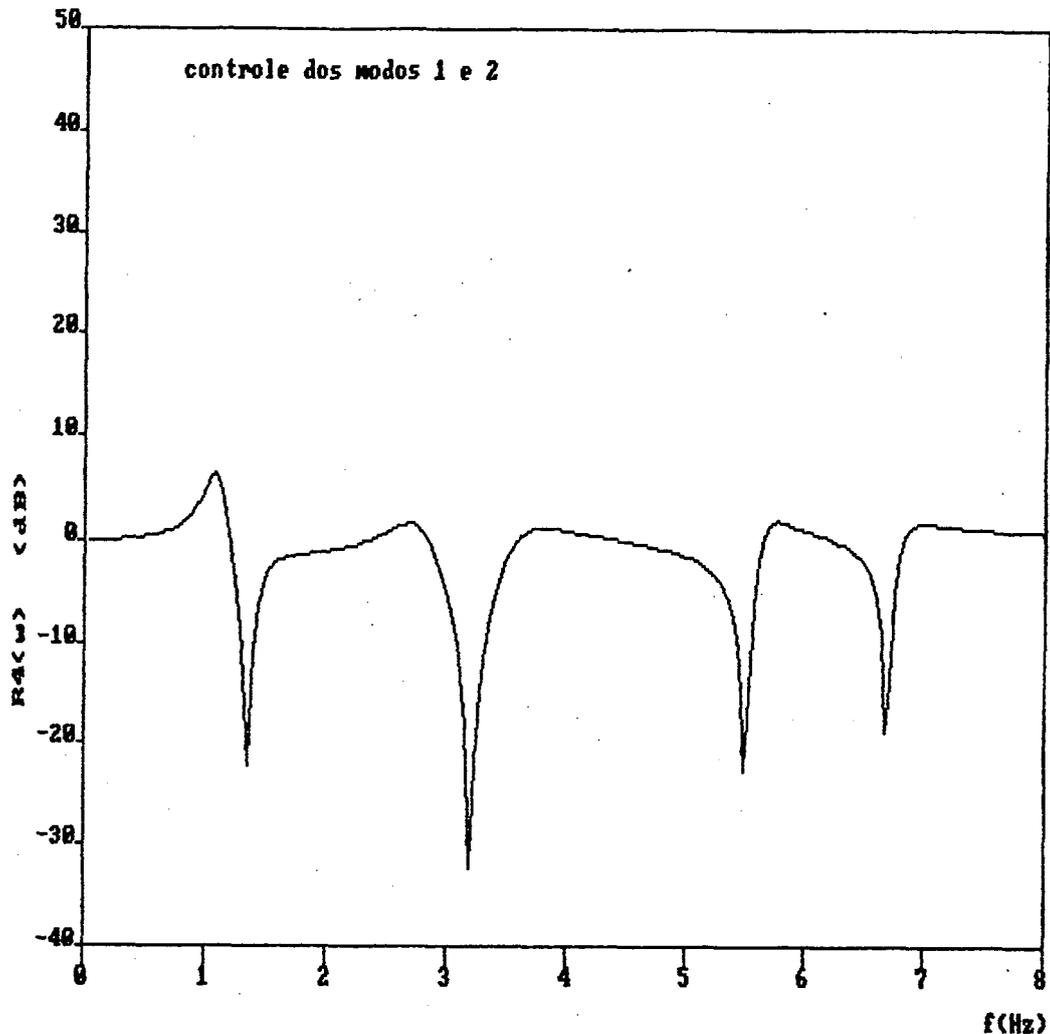


FIGURA 4.14 - Razão de respostas para o caso de adição simultânea dos conjuntos de neutralizadores para controle do primeiro e segundo modos de vibração.

Se se desejar uma curva em coordenadas físicas que possua esses picos com amplitudes iguais (na região de um mesmo modo), um procedimento iterativo pode ser usado. Através de pequenas alterações do parâmetro de amortecimento ótimo  $\xi_{a_{ot}}$  ou do parâmetro  $\alpha_{j_{ot}}$ , obtém-se a resposta em coordenadas físicas para cada alteração, até que a condição desejada seja obtida.

Maiores atenuações da resposta também podem ser alcançadas mediante a utilização de conjuntos de neutralizadores que apresentem uma maior soma total

de massas, de maneira semelhante à que está ilustrada na figura B.3 do apêndice B para sistemas de um grau de liberdade.

#### 4.2 - NEUTRALIZADOR DE LANCHESTER APLICADO A UM EIXO DE UM MOTOR DIESEL :

O neutralizador de Lanchester é um neutralizador do tipo massa e amortecimento aplicado a sistemas torcionais. Na realidade, como se trata de um problema torcional, a massa deverá ser substituída pelo momento de inércia.

A figura 4.15 ilustra um neutralizador dinâmico de Lanchester do tipo Houde, isto é, com amortecimento viscoso.

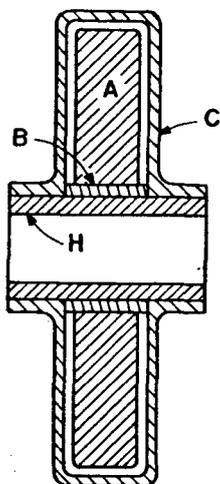


FIGURA 4.15 - Neutralizador dinâmico de Lanchester do tipo Houde.

Nesta figura, H e C formam a carcaça do neutralizador, sendo que H é a parte interna que vai acoplada diretamente ao eixo, cuja vibração se deseja reduzir. A é o volante que através de um anel de bronze B, pode girar livremente. A folga entre o volante A e a carcaça C é muito pequena e de dimensão bastante precisa. Essa folga encontra-se completa e permanentemente cheia de um fluido viscoso. Este é um fluido de silicone que tem uma viscosidade semelhante à do óleo, mas, com a vantagem de ter uma variação dessa viscosidade menos drástica que a do óleo nas alterações de temperatura.

O presente exemplo é baseado na referência [1], onde o neutralizador

dinâmico descrito acima é aplicado a um eixo de um motor Diesel. Este eixo vai mostrado na figura 4.16. Os graus de liberdade considerados coincidem com a numeração apresentada dentro dos círculos.

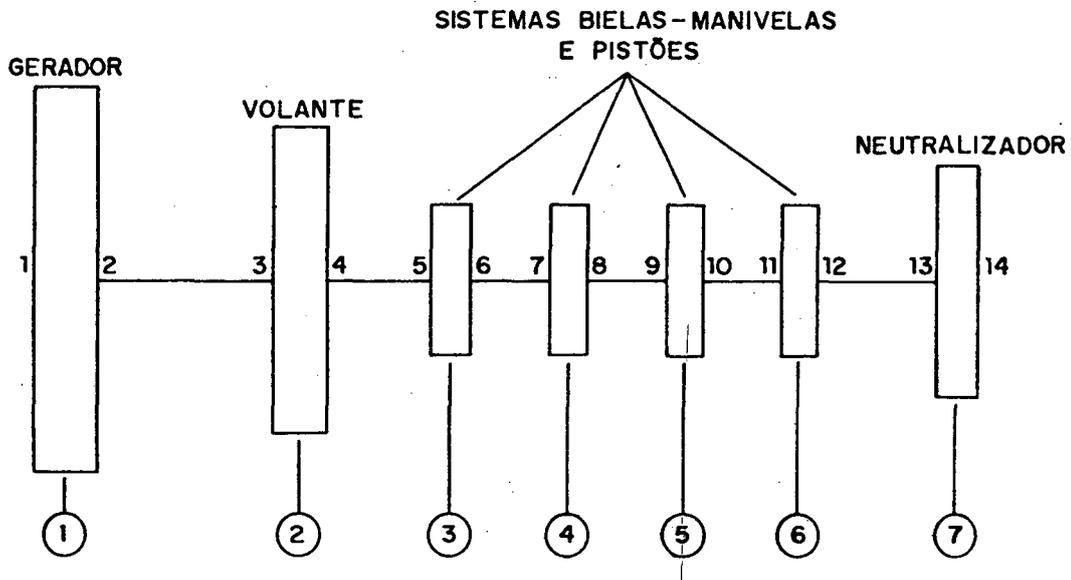


FIGURA 4.16 - Eixo do motor Diesel com os elementos que o compõem.

O motor Diesel considerado, é um motor V-8 de 4 tempos e encontra-se acionando um gerador. Os conjuntos bielas-manivelas e pistões são representados por rotores, cujos momentos de inércia equivalem a estes conjuntos.

No esquema da figura 4.16, o neutralizador de Lanchester acha-se representado em uma das extremidades do eixo.

Para que se proceda a uma análise como a apresentada no capítulo anterior, a estrutura original, base para a adição do neutralizador, deverá ser o conjunto eixo, volante, rotores e a carcaça do neutralizador, já que esta última encontra-se também rigidamente ligada ao eixo. Assim, as propriedades equivalentes do neutralizador, referir-se-ão apenas ao rotor e ao material de amortecimento.

A tabela 4.7 apresenta as propriedades de momento de inércia e rigidez para as diversas seções do eixo, de acordo com a figura 4.16. Essas

propriedades foram extraídas do exemplo numérico da referência [1] e convertidas para o Sistema Internacional de Unidades. Note-se que o momento de inércia da seção 13-14 refere-se somente a carcaça do neutralizador.

Seção	I (Kg. m <sup>2</sup> )	k(10 <sup>6</sup> N.m/rad)
1-2	11,86	————
2-3	————	1,06
3-4	2,01	————
4-5	————	6,10
5-6	0,17	————
6-7	————	3,05
7-8	0,17	————
8-9	————	3,05
9-10	0,17	————
10-11	————	3,05
11-12	0,17	————
12-13	————	4,07
13-14	0,40	————

TABELA 4.7 - Propriedades dos diversos componentes do eixo do motor Diesel.

Sabe-se também que o volante do neutralizador tem um momento de inércia  $I_a = 0,98 \text{ Kg. m}^2$ .

Para determinação das freqüência naturais e dos modos de vibração, as matrizes de rigidez e de inércia do eixo foram montadas através do método dos coeficientes de influência.

$$[k] = \begin{bmatrix} 1,06 & -1,06 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1,06 & 7,16 & -6,10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6,10 & 9,15 & -3,05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3,05 & 6,10 & -3,05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3,05 & 6,10 & -3,05 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3,05 & 7,12 & -4,07 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4,07 & 4,07 \end{bmatrix} \times 10^6$$

$$[I] = \begin{bmatrix} 11,86 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2,01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,17 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,17 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,17 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,40 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o problema de autovalores e autovetores, resulta nas frequências naturais e nos autovetores das tabelas 4.8 e 4.9, respectivamente. Nestas, foi omitido o modo de corpo rígido que não interessa ao caso.

Modo	$\Omega$ (rad/seg)	f (Hz)
1	623,9	99,3
2	1344,6	214,0
3	3660,0	582,5
4	6039,4	961,2
5	7728,3	1230,4
6	8494,9	1352,2

TABELA 4.8 - Frequências naturais

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6
$\Phi_1$	-0,1300	0,0231	0,0011	-0,0002	0,0001	0,0001
$\Phi_2$	0,4350	-0,4430	-0,1590	0,0970	-0,0739	-0,0681
$\Phi_3$	0,4770	-0,2600	0,5140	-1,0500	1,3700	1,5400
$\Phi_4$	0,5520	0,1320	1,4800	-1,2500	-0,2290	-1,3400
$\Phi_5$	0,6150	0,5100	1,3600	1,0500	-1,0800	1,0700
$\Phi_6$	0,6650	0,8390	0,2430	1,2500	1,6000	-0,7630
$\Phi_7$	0,6920	1,0200	-0,7310	-0,4750	-0,3240	0,1230

TABELA 4.9 - Autovetores ortonormalizados

A otimização da razão de amortecimentos para neutralização de um determinado modo pode ser obtida de (3.60), onde agora:

$$\mu_j = \frac{I_a}{I_j} \quad (4.1)$$

Observando que o neutralizador dinâmico está sendo adicionado segundo a coordenada  $r=7$ , a tabela 4.10 mostra as razões ótimas de amortecimentos para controle dos modos 1 e 2, respectivamente. Nesta tabela estão também as razões ótimas de amortecimentos para esses mesmos modos, obtidas segundo os critérios de maximização de energia dissipada da referência [1].

Modo	$\mu_j$	$\Phi_{rj}$	$\xi_{ot}$	$c_{a_{ot}}$ (Kg.m <sup>2</sup> /s) [Ref. 1]	$\xi_{ot}$ [Ref. 1]
1	0,98	0,6920	0,371	542,3	0,444
2	0,98	1,0200	0,286	1129,8	0,429

TABELA 4.10 - Razões de amortecimentos ótimas para os modos 1 e 2.

As figuras 4.17 a 4.20 mostram os gráficos das respostas adimensionais e das razões de respostas para os modos de vibração 1 e 2. Para

as curvas destes gráficos foi considerado um amortecimento modal no sistema primário  $\xi_1 = \xi_2 = 0,0001$ .

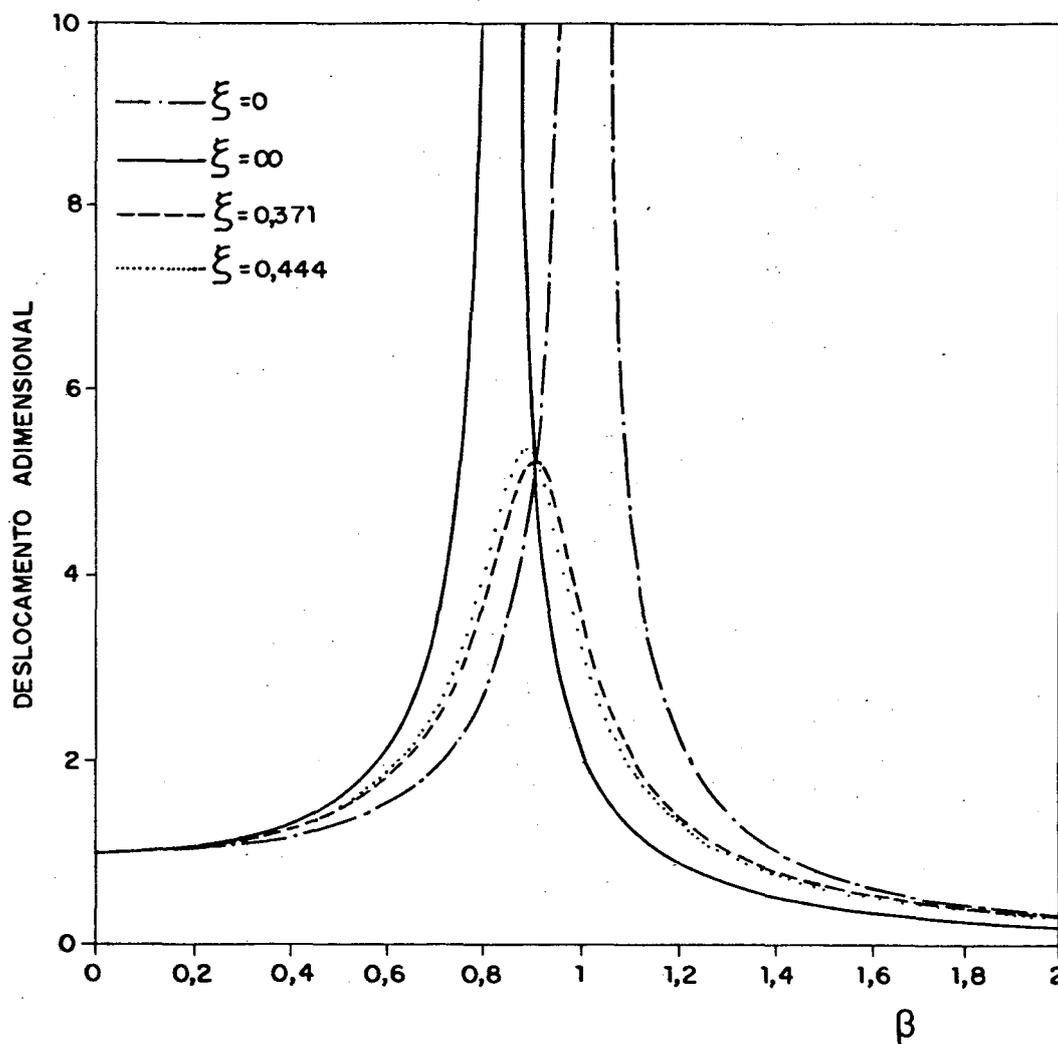


FIGURA 4.17 - Curvas dos deslocamentos adimensionais relativos ao primeiro modo de vibração do eixo para quatro casos de amortecimento.

Os gráficos dos deslocamentos adimensionais apresentam curvas para quatro razões de amortecimentos distintas, ou seja, nula, infinita, otimizada pelos critérios do presente trabalho e otimizada pelos critérios da referência [1].

O modo 2 é o que apresenta uma maior diferença tanto nas curvas dos deslocamentos adimensionais quanto das razões de respostas, haja visto a maior

dos

diferença das razões ótimas de amortecimentos. Das curvas das razões de respostas deste modo, observa-se que a otimização da referência [1] produz uma maior ampliação da resposta em baixas frequências, mas, em contrapartida, produz um ligeiro alargamento da faixa de atenuação da resposta, sendo que em frequências mais altas, também produz uma maior atenuação.

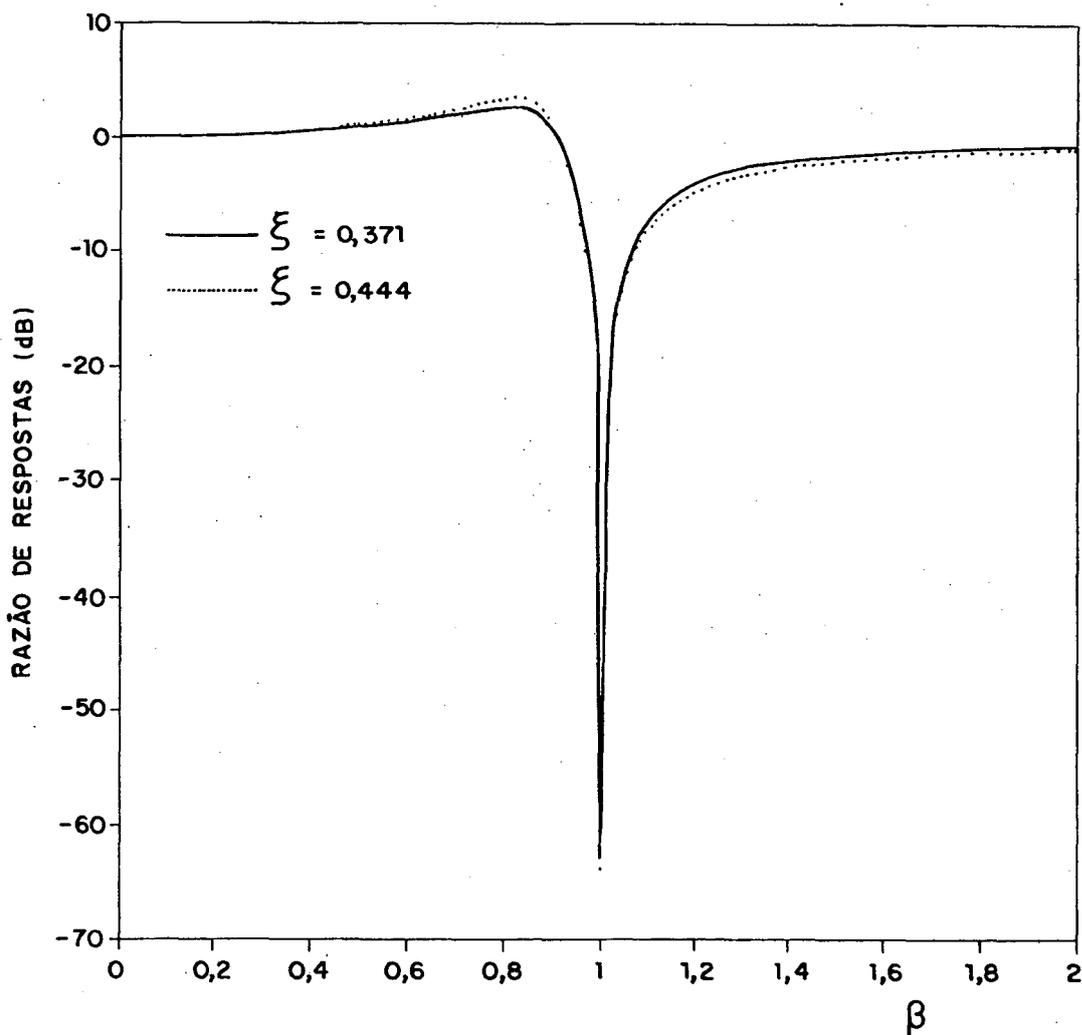


FIGURA 4.18 - Curvas das razões de respostas do primeiro modo de vibração do eixo para dois casos distintos de amortecimento.

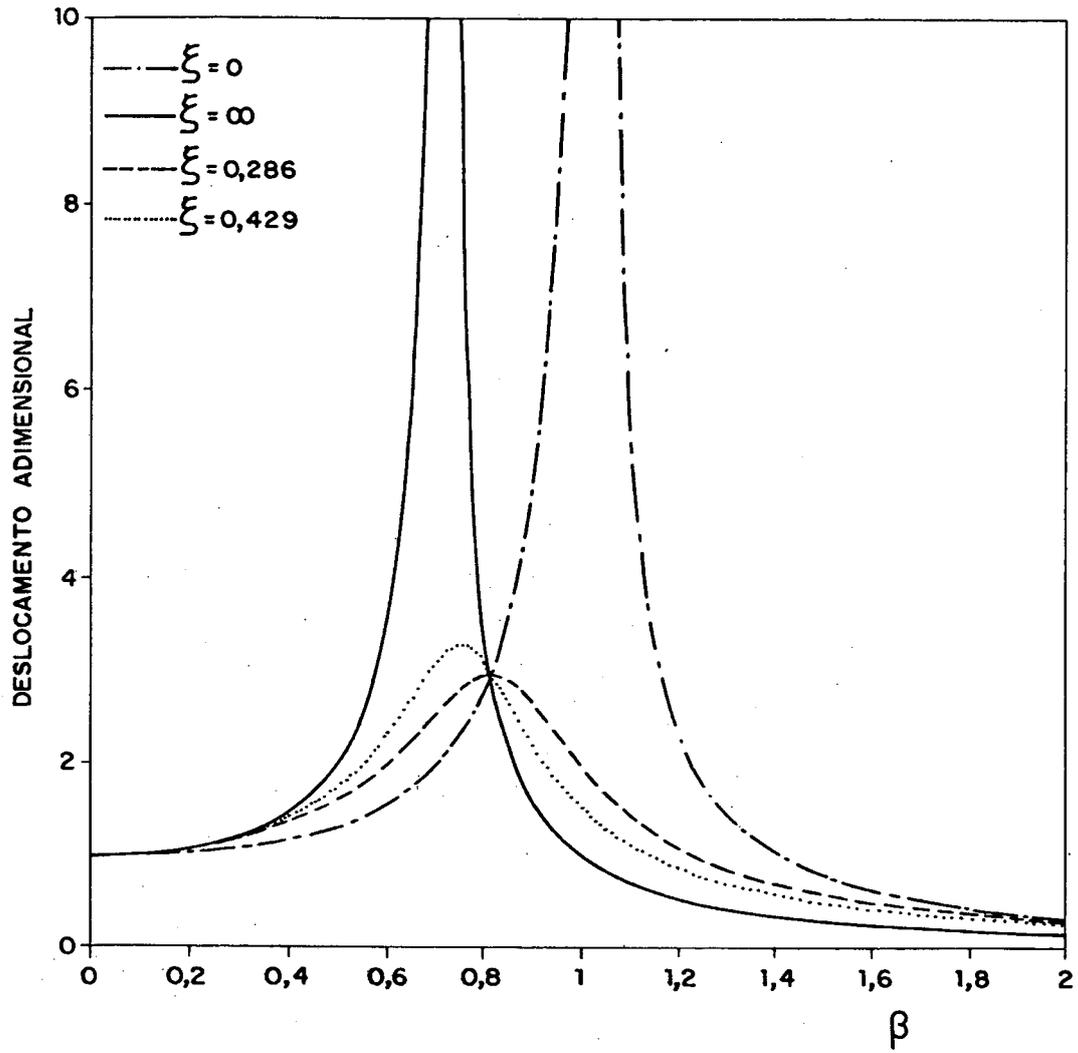


FIGURA 4.19 - Curvas dos deslocamentos adimensionais relativos ao segundo modo de vibração do eixo para quatro casos distintos de amortecimento.

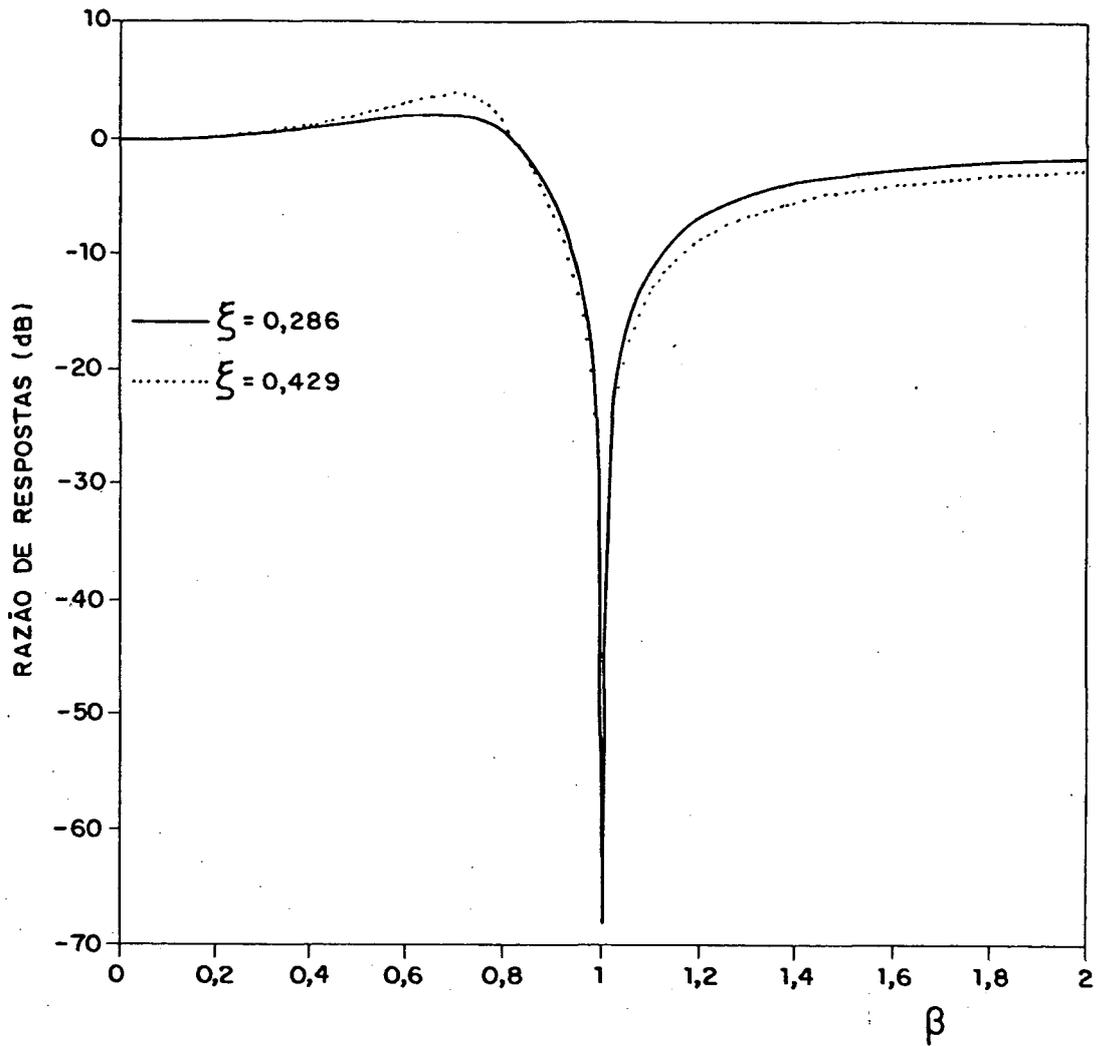


FIGURA 4.20 - Curvas das razões de respostas do segundo modo de vibração do eixo para dois casos distintos de amortecimento.

## CAPÍTULO 5

## NEUTRALIZADOR DINÂMICO DO TIPO VIGA SANDUÍCHE EM BALANÇO

## 5.1 - CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES :

Em geral, é desejável que um sistema secundário possua as mesmas características que o sistema primário ao qual ele é aplicado. Assim é que ao sistema massa mola de um grau de liberdade aplica-se um neutralizador dinâmico de mesma natureza e a um sistema torcional aplica-se um sistema auxiliar também torcional.

Seja o exemplo de um sistema de dois graus de liberdade mostrado na figura 5.1(a).

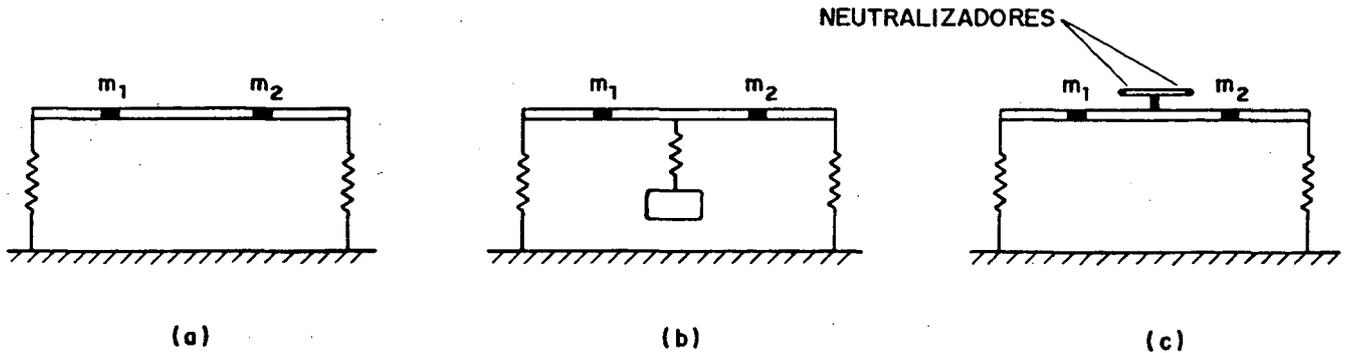


FIGURA 5.1 - Sistema de dois graus de liberdade (a) ao qual é aplicado um neutralizador massa mola (b) ou neutralizadores tipo viga em balanço (c).

Este sistema é constituído de uma viga rígida de massa distribuída desprezível e com duas massas concentradas  $m_1$  e  $m_2$ .

O neutralizador dinâmico massa mola de um grau de liberdade aplicado no centro da viga, como ilustrado na figura 5.1(b), é efetivo apenas na redução do movimento vertical. Entretanto, se o neutralizador for do tipo viga em balanço, conforme a figura 5.2(c), poderá ser efetivo tanto na redução do

movimento translacional quanto rotacional.

Estuda-se neste capítulo um neutralizador que tenha as características desse último, ou seja, que possa reduzir vibrações translacionais e rotacionais da estrutura primária.

Esse neutralizador dinâmico é constituído de uma viga composta de duas partes metálicas separadas por uma terceira de material viscoelástico, formando um sanduíche. Uma das extremidades da viga vai engastada à estrutura primária cuja vibração se deseja reduzir. Na outra extremidade, que se encontra em balanço, pode ser adicionada uma massa com o objetivo de melhor sintonizar o neutralizador às frequências naturais da estrutura primária. A figura 5.2 ilustra esse tipo de neutralizador.

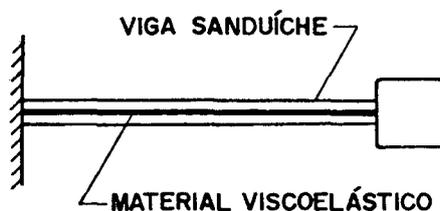


FIGURA 5.2 - Neutralizador dinâmico do tipo viga sanduíche em balanço.

Assim como no caso do neutralizador MCK, a introdução da camada de material de amortecimento viscoelástico visa a redução de vibrações sobre uma maior faixa de frequências.

As equações diferenciais do movimento do neutralizador serão determinadas separadamente para cada um dos dois tipos de excitação de sua base, isto é, os movimentos de translação e de rotação.

Como ferramenta matemática para a determinação das equações diferenciais serão utilizadas as equações de Lagrange:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i \quad i=1, \dots, n \quad (5.1)$$

onde:  $T$  é a energia cinética do sistema;

$V$  é a energia potencial do sistema;

$q_i$  é a  $i$ -ésima coordenada generalizada;

$Q_i$  é a  $i$ -ésima força generalizada.

Serão desprezados os efeitos da deformação por cisalhamento e da inércia rotatória, isto é, a haste do neutralizador será tratada como uma viga do tipo Euler-Bernoulli.

Como se trata de um sistema contínuo utilizar-se-á o método dos modos assumidos na representação dos deslocamentos, o qual permitirá considerar de uma maneira aproximada as propriedades distribuídas (massa e rigidez) do neutralizador. Neste método admite-se que o deslocamento  $w(x,t)$  possa ser representado por:

$$w(x,t) = \sum_{j=1}^n \Psi_j(x) q_j(t) \quad (5.2)$$

onde:  $\Psi_j(x)$  são funções admissíveis, isto é, funções que possam representar a geometria deformada e satisfazem as condições de contorno;

$q_j(t)$  são coeficientes que dão conta da participação de  $\Psi_j(x)$  na configuração deformada, ou seja, são as coordenadas generalizadas.

As propriedades equivalentes na base do neutralizador, por sua vez, poderão ser obtidas das equações diferenciais. Estas propriedades serão agora apresentadas na forma de matrizes  $2 \times 2$ , já que são dois tipos de excitação e dois tipos de esforços resultantes na base do neutralizador.

No procedimento experimental a ser apresentado no capítulo 6, optou-se pela determinação da matriz de massas dinâmicas. Portanto, para efeito de comparação dos resultados, a matriz de massas dinâmicas será a forma escolhida no desenvolvimento teórico que se segue.

Cada elemento dessa matriz será função da rigidez complexa equivalente da viga sanduíche, a qual terá que ser determinada para cada

freqüência de interesse. Essa rigidez complexa equivalente, por sua vez, será expressa em função das propriedades das camadas metálicas e do material viscoelástico.

As propriedades do material de amortecimento viscoelástico serão consideradas através de seu módulo de cisalhamento e de seu fator de perda, ambos funções da freqüência e da temperatura.

## 5.2 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DO MOVIMENTO DO NEUTRALIZADOR DINÂMICO

### 5.2.1 - EXCITAÇÃO POR MOVIMENTO TRANSLACIONAL DA BASE :

Seja  $y(t)$  o deslocamento da base do neutralizador, conforme a figura 5.3.

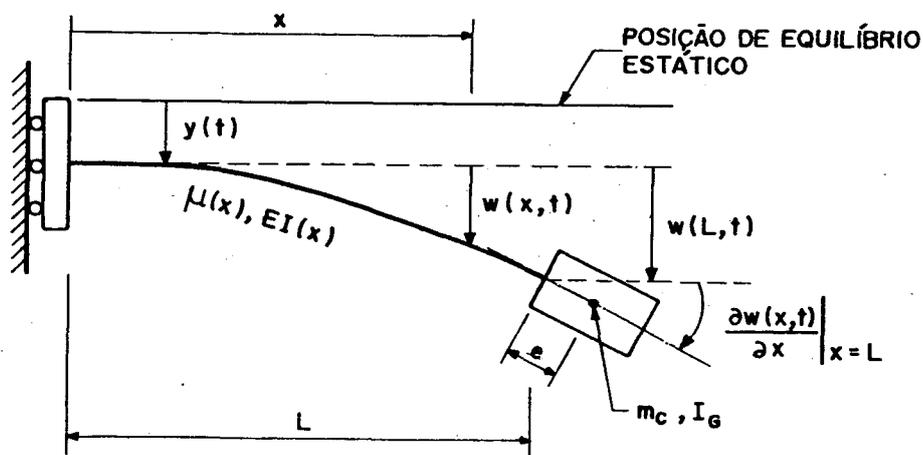


FIGURA 5.3 - Neutralizador dinâmico excitado por um movimento translacional da base.

Nesta figura, as grandezas representadas têm o seguinte significado:

$EI(x)$  é a rigidez distribuída da haste do neutralizador, sendo  $E$  o módulo de elasticidade e  $I$  o segundo momento de área da seção transversal;

$\mu(x)$  é a massa distribuída;

$L$  é o comprimento da haste;

$m_c$  é a massa concentrada na extremidade da haste do neutralizador;

$I_G$  é o momento de inércia baricêntrico da massa da extremidade;

$e$  é a excentricidade do centro de gravidade da massa concentrada em relação a extremidade da haste;

$w(x, t)$  é o deslocamento relativo da haste.

Considerando-se que os deslocamentos sejam pequenos pode-se obter a seguinte expressão para a energia cinética do neutralizador:

$$\begin{aligned}
 T = & \frac{1}{2} \int_0^L \mu(x) \left[ \frac{dy(t)}{dt} + \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \right]^2 dx + \\
 & \frac{1}{2} m_c \left[ \frac{dy(t)}{dt} + \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \Big|_{x=L} + e \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=L} \right) \right]^2 + \\
 & \frac{1}{2} I_c \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=L} \right) \right]^2
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

ou, substituindo (5.2) em (5.3), fica:

$$\begin{aligned}
 T = & \frac{1}{2} \int_0^L \mu(x) \left[ \dot{y}(t) + \sum_{j=1}^n \left( \Psi_j(x) \dot{q}_j(t) \right) \right]^2 dx + \\
 & \frac{1}{2} m_c \left[ \dot{y}(t) + \sum_{j=1}^n \left( \Psi_j(L) \dot{q}_j(t) \right) + e \sum_{j=1}^n \left( \Psi'_j(L) \dot{q}_j(t) \right) \right]^2 + \\
 & \frac{1}{2} I_c \left[ \sum_{j=1}^n \left( \Psi'_j(L) \dot{q}_j(t) \right) \right]^2
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Na expressão acima, o ponto sobre a variável significa derivada em relação ao tempo e o apóstrofe significa derivada em relação à posição.

Para a energia potencial elástica tem-se:

$$V_e = \frac{1}{2} \int_0^L EI(x) \left( \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right)^2 dx \tag{5.5}$$

ou, como anteriormente, substituindo (5.2) em (5.5):

$$V_e = \frac{1}{2} \int_0^L EI(x) \left[ \sum_{j=1}^n \left( \Psi_j'(x) q_j(t) \right) \right]^2 dx \quad (5.6)$$

Levando as derivadas das expressões da energia cinética (5.4) e da energia potencial elástica (5.6) nas equações de Lagrange (5.1) obtém-se:

$$[m] \{ \ddot{q}(t) \} + [k] \{ q(t) \} = -\ddot{y}(t) \{ v \} \quad (5.7)$$

onde os termos genéricos das matrizes  $[m]$  e  $[k]$  e do vetor  $\{v\}$  são:

$$m_{ij} = \int_0^L \mu(x) \Psi_i(x) \Psi_j(x) dx + m_c \left[ \Psi_i(L) + e \Psi_i'(L) \right] \left[ \Psi_j(L) + e \Psi_j'(L) \right] + I_G \Psi_i'(L) \Psi_j'(L) \quad (5.8)$$

$$k_{ij} = \int_0^L EI(x) \Psi_i''(x) \Psi_j''(x) dx \quad (5.9)$$

$$v_i = \int_0^L \mu(x) \Psi_i(x) dx + m_c \left[ \Psi_i(L) + e \Psi_i'(L) \right] \quad (5.10)$$

### 5.2.2 - EXCITAÇÃO POR MOVIMENTO ROTACIONAL DA BASE:

Seja agora  $\theta(t)$  o deslocamento rotacional da base do neutralizador como ilustrado na figura 5.4.

Neste caso, considera-se também que os deslocamentos sejam pequenos, de tal maneira que:

$$x \sin \theta(t) \approx x \theta(t)$$

$$\frac{w(x, t)}{\cos \theta(t)} \approx w(x, t)$$

$$e \sin \left( \theta(t) + \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=L} \right) \approx e \left( \theta(t) + \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=L} \right)$$

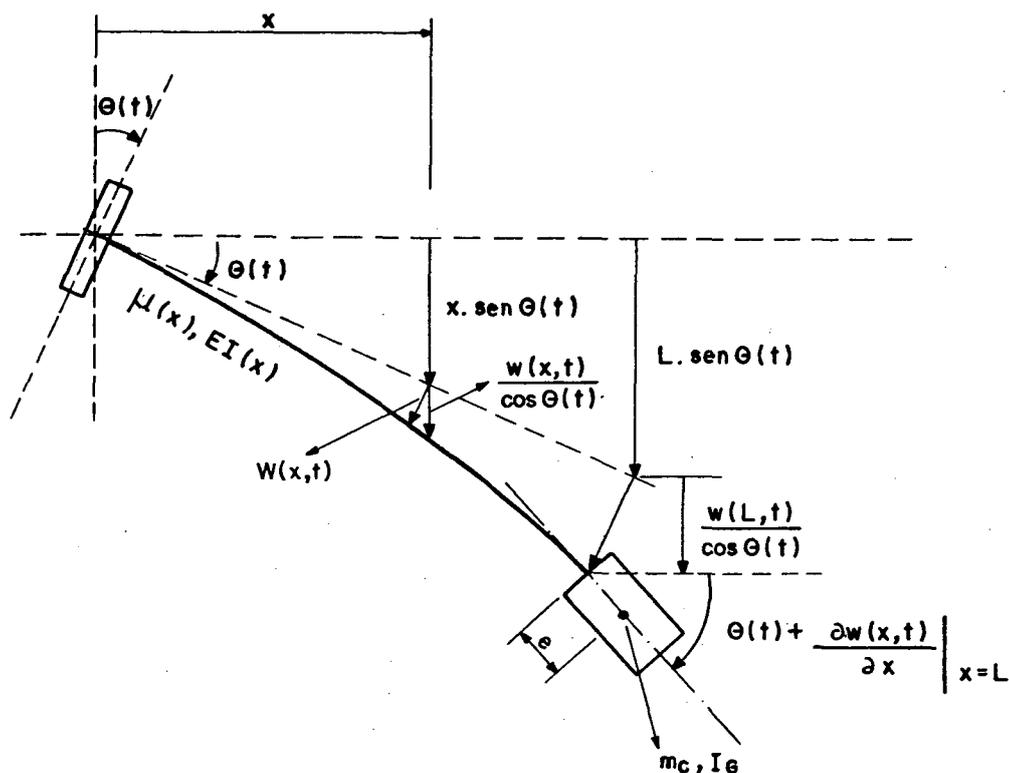


FIGURA 5.4 - Neutralizador dinâmico excitado por um movimento rotacional  $\theta(t)$  da base.

A expressão da energia cinética fica:

$$\begin{aligned}
 T = & \frac{1}{2} \int_0^L \mu(x) \left[ \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} + x \frac{d\theta(t)}{dt} \right]^2 dx + \\
 & \frac{1}{2} m_c \left[ (L+e) \frac{d\theta(t)}{dt} + \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \Big|_{x=L} + e \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=L} \right) \right]^2 + \\
 & \frac{1}{2} I_c \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=L} \right) + \frac{d\theta(t)}{dt} \right]^2
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

Substituindo (5.2), esta última se torna:

$$\begin{aligned}
T = & \frac{1}{2} \int_0^L \mu(x) \left[ \sum_{j=1}^n \left( \Psi_j(x) \dot{q}_j(t) \right) + x \dot{\theta}(t) \right]^2 dx + \\
& \frac{1}{2} m_c \left[ (L+e) \dot{\theta}(t) + \sum_{j=1}^n \left( \Psi_j(L) \dot{q}_j(t) \right) + e \sum_{j=1}^n \left( \Psi'_j(L) \dot{q}_j(t) \right) \right]^2 + \\
& \frac{1}{2} I_G \left[ \sum_{j=1}^n \left( \Psi'_j(L) \dot{q}_j(t) \right) + \dot{\theta}(t) \right]^2 \quad (5.12)
\end{aligned}$$

Para a energia potencial elástica chega-se às mesmas expressões (5.5) e (5.6) anteriores.

Substituindo-se as derivadas de (5.12) e (5.6) em (5.1) obtém-se:

$$[m] \{\ddot{q}(t)\} + [k] \{q(t)\} = -\ddot{\theta}(t) \{b\} \quad (5.13)$$

onde os termos genéricos das matrizes [m] e [k] e do vetor {b} são:

$$\begin{aligned}
m_{ij} = & \int_0^L \mu(x) \Psi_i(x) \Psi_j(x) dx + m_c \left[ \Psi_i(L) + e \Psi'_i(L) \right] \left[ \Psi_j(L) + e \Psi'_j(L) \right] + \\
& I_G \Psi'_i(L) \Psi'_j(L) \quad (5.14)
\end{aligned}$$

$$k_{ij} = \int_0^L EI(x) \Psi''_i(x) \Psi''_j(x) dx \quad (5.15)$$

$$b_i = \int_0^L x \mu(x) \Psi_i(x) dx + m_c (L+e) \left[ \Psi_i(L) + e \Psi'_i(L) \right] + I_G \Psi'_i(L) \quad (5.16)$$

Note-se que (5.14) e (5.15) são as mesmas expressões (5.8) e (5.9).

### 5.3 - CONSIDERAÇÕES A RESPEITO DO AMORTECIMENTO:

As equações diferenciais do neutralizador foram deduzidas sem se levar em conta o amortecimento. Considerando que o material de amortecimento

tenha um comportamento linear, independentemente da amplitude de deformação, essas equações serão transportadas para o campo da viscoelasticidade, no domínio da frequência, simplesmente substituindo a rigidez elástica  $EI(x)$  pela correspondente rigidez complexa equivalente da viga sanduíche  $E^*I(x,\Omega)$ , [6],[21] :

$$E^*I(x,\Omega) = EI(x,\Omega) [ 1 + i \eta(x,\Omega) ] \quad (5.17)$$

A substituição da rigidez complexa equivalente (5.17) nas equações genéricas (5.9) ou (5.15) dos termos da matriz de rigidez resulta em:

$$k_{ij}^*(\Omega) = \int_0^L E^*I(x,\Omega) \Psi_i''(x) \Psi_j''(x) dx \quad (5.18)$$

Considerando que o fator de perda equivalente da viga sanduíche  $\eta(x,\Omega)$  seja constante ao longo do comprimento da viga, pode-se escrever ainda:

$$k_{ij}^*(\Omega) = k_{ij}(\Omega) [ 1 + i \eta(\Omega) ] \quad (5.19)$$

As equações de equilíbrio (5.7) e (5.13) agora inteiramente expressas no domínio da frequência ficam:

$$\left[ -\Omega^2[m] + [k(\Omega)] (1+i\eta(\Omega)) \right] \left\{ Q^*(\Omega) \right\} = \Omega^2 Y^*(\Omega) \left\{ v \right\} \quad (5.20)$$

$$\left[ -\Omega^2[m] + [k(\Omega)] (1+i\eta(\Omega)) \right] \left\{ Q^*(\Omega) \right\} = \Omega^2 \Theta^*(\Omega) \left\{ b \right\} \quad (5.21)$$

#### 5.4 - MATRIZ DE MASSAS DINÂMICAS NA BASE DO NEUTRALIZADOR:

##### 5.4.1 - FORMULAÇÃO BÁSICA:

A figura 5.5 mostra os esforços que atuam na base do neutralizador devido aos dois tipos de excitação  $Y^*(\Omega)$  e  $\Theta^*(\Omega)$ .  $S^*(0,\Omega)$  e  $B^*(0,\Omega)$  são, respectivamente, o esforço cortante e o momento fletor neste ponto.

Dessa figura define-se cada um dos termos da matriz de massas

dinâmicas:

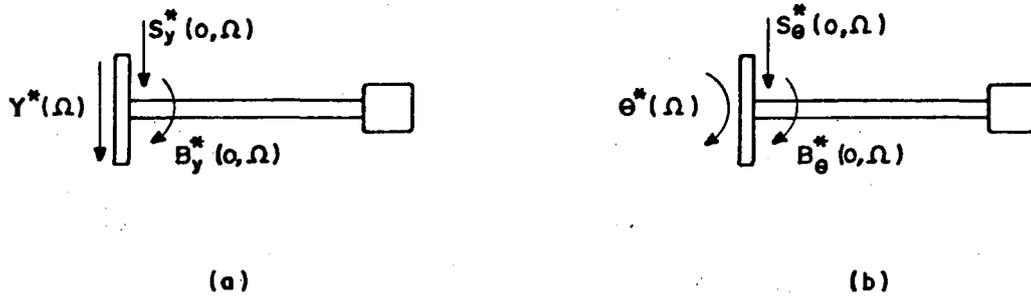


FIGURA 5.5 - Esforços dinâmicos que atuam na base do neutralizador devido a uma excitação translacional (a) e a uma excitação rotacional (b).

$$M_{11}^*(\Omega) \triangleq \frac{S_y^*(0, \Omega)}{-\Omega^2 \Upsilon^*(\Omega)} \quad (5.22)$$

$$M_{21}^*(\Omega) \triangleq \frac{B_y^*(0, \Omega)}{-\Omega^2 \Upsilon^*(\Omega)} \quad (5.23)$$

$$M_{12}^*(\Omega) \triangleq \frac{S_\theta^*(0, \Omega)}{-\Omega^2 \theta^*(\Omega)} \quad (5.24)$$

$$M_{22}^*(\Omega) \triangleq \frac{B_\theta^*(0, \Omega)}{-\Omega^2 \theta^*(\Omega)} \quad (5.25)$$

Sabe-se da resistência dos materiais que:

$$B = -EI \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (5.26)$$

$$S = \frac{dB}{dx} \quad (5.27)$$

Estendendo estas expressões para o domínio da frequência, obtém-se para a base do neutralizador:

$$B^*(0, \Omega) = -E^* I(\Omega) \left. \frac{\partial^2 w^*(x, \Omega)}{\partial x^2} \right|_{x=0} \quad (5.28)$$

$$S^*(0, \Omega) = -E^* I(\Omega) \left. \frac{\partial^3 w^*(x, \Omega)}{\partial x^3} \right|_{x=0} \quad (5.29)$$

Observe-se que nestas expressões, para efeito de simplificação, a rigidez complexa equivalente da viga sanduíche foi considerada constante ao longo de seu comprimento.

Para  $w^*(x, \Omega)$  será usada a mesma forma aproximada (5.2), agora no domínio da frequência:

$$w^*(x, \Omega) = \sum_{i=1}^n \psi_i(x) Q_i^*(\Omega) \quad (5.30)$$

Suas derivadas segunda e terceira ficam:

$$\frac{\partial^2 w^*(x, \Omega)}{\partial x^2} = \sum_{i=1}^n \psi_i''(x) Q_i^*(\Omega) = \left\{ \psi_i''(x) \right\}^T \left\{ Q_i^*(\Omega) \right\} \quad (5.31)$$

$$\frac{\partial^3 w^*(x, \Omega)}{\partial x^3} = \sum_{i=1}^n \psi_i'''(x) Q_i^*(\Omega) = \left\{ \psi_i'''(x) \right\}^T \left\{ Q_i^*(\Omega) \right\} \quad (5.32)$$

Conseqüentemente as expressões para o momento e o esforço cortante (5.28) e (5.29) na base do neutralizador ficam:

$$B^*(0, \Omega) = -E^* I(\Omega) \left\{ \psi_i''(0) \right\}^T \left\{ Q_i^*(\Omega) \right\} \quad (5.33)$$

$$S^*(0, \Omega) = -E^* I(\Omega) \left\{ \psi_i'''(0) \right\}^T \left\{ Q_i^*(\Omega) \right\} \quad (5.34)$$

De (5.20) e (5.21) obtém-se:

$$\left\{ Q_i^*(\Omega) \right\} = \Omega^2 Y^*(\Omega) \left[ D^*(\Omega) \right]^{-1} \left\{ v \right\} \quad (5.35)$$

$$\left\{ Q_i^*(\Omega) \right\} = \Omega^2 \Theta^*(\Omega) \left[ D^*(\Omega) \right]^{-1} \left\{ b \right\} \quad (5.36)$$

onde:

$$[D^*(\Omega)] = [-\Omega^2[m] + [k(\Omega)] (1 + i\eta(\Omega))] \quad (5.37)$$

Substituindo (5.35) em (5.33) e (5.34) fica:

$$B_y^*(0, \Omega) = -\Omega^2 Y^*(\Omega) E^* I(\Omega) \left\{ \Psi''(0) \right\}^T [D^*(\Omega)]^{-1} \{v\} \quad (5.38)$$

$$S_y^*(0, \Omega) = -\Omega^2 Y^*(\Omega) E^* I(\Omega) \left\{ \Psi'''(0) \right\}^T [D^*(\Omega)]^{-1} \{v\} \quad (5.39)$$

Das quais se obtém prontamente:

$$M_{11}^*(\Omega) = E^* I(\Omega) \left\{ \Psi'''(0) \right\}^T [D^*(\Omega)]^{-1} \{v\} \quad (5.40)$$

$$M_{21}^*(\Omega) = E^* I(\Omega) \left\{ \Psi''(0) \right\}^T [D^*(\Omega)]^{-1} \{v\} \quad (5.41)$$

De (5.36), (5.33) e (5.34) tiram-se os dois outros termos da matriz de massas dinâmicas:

$$M_{12}^*(\Omega) = E^* I(\Omega) \left\{ \Psi'''(0) \right\}^T [D^*(\Omega)]^{-1} \{b\} \quad (5.42)$$

$$M_{22}^*(\Omega) = E^* I(\Omega) \left\{ \Psi''(0) \right\}^T [D^*(\Omega)]^{-1} \{b\} \quad (5.43)$$

#### 5.4.2 - CONSIDERAÇÕES PARA SIMPLIFICAÇÃO COMPUTACIONAL DO PROBLEMA:

Uma análise das equações (5.40) a (5.43) mostra que o trabalho computacional para o cálculo dos termos da matriz de massas dinâmicas é muito grande, já que é necessário a inversão da matriz  $[D^*(\Omega)]$  para cada uma das frequências  $\Omega$ .

Uma simplificação computacional pode ser alcançada encontrando uma matriz que diagonalize a matriz  $[D^*(\Omega)]$ . Analisando (5.37) conclui-se que para

isto basta que se encontre uma matriz  $[\Phi]$  que diagonalize ao mesmo tempo a matriz  $[m]$  e a matriz  $[k(\Omega)]$ .

Considere-se pois o seguinte problema de autovalores e autovetores:

$$[k(\Omega_0)] \{\Phi\} = \Omega^2 [m] \{\Phi\} \quad (5.44)$$

onde  $\Omega_0$  é uma frequência arbitrariamente escolhida.

Lembrando que a rigidez complexa equivalente já foi considerada constante ao longo do comprimento da haste do neutralizador, o termo genérico da matriz  $[k(\Omega)]$  pode ser escrito:

$$k_{ij}(\Omega) = EI(\Omega) \int_0^L \Psi_i''(x) \Psi_j''(x) dx = EI(\Omega) \tilde{k}_{ij} \quad (5.45)$$

Donde o problema de autovalores fica:

$$EI(\Omega_0) [\tilde{k}] \{\Phi\} = \Omega^2 [m] \{\Phi\} \quad (5.46)$$

Se  $[\Phi]$  é a matriz modal solução do problema então:

$$[\Phi]^T EI(\Omega) [\tilde{k}] [\Phi] = EI(\Omega) [\tilde{k}_{r \setminus}] \quad (5.47)$$

$$[\Phi]^T [m] [\Phi] = [m_{r \setminus}] \quad (5.48)$$

Portanto, qualquer que seja a frequência  $\Omega_0$  escolhida haverá diagonalização das matrizes  $[k(\Omega)]$  e  $[m]$  através da transformação:

$$\{Q^*(\Omega)\} = [\Phi] \{P^*(\Omega)\} \quad (5.49)$$

Aplicando esta transformação em (5.20) e (5.21) e pré-multiplicando ambos os membros destas equações por  $[\Phi]^T$ , obtém-se:

$$\left[ \begin{array}{c} -\Omega^2 m_r + k_r(\Omega) (1+i\eta(\Omega)) \end{array} \right] \{P^*(\Omega)\} = \Omega^2 Y^*(\Omega) [\Phi]^T \{v\} \quad (5.50)$$

$$\left[ \begin{array}{c} -\Omega^2 m_r + k_r(\Omega) (1+i\eta(\Omega)) \end{array} \right] \{P^*(\Omega)\} = \Omega^2 \Theta^*(\Omega) [\Phi]^T \{b\} \quad (5.51)$$

Explicitando  $\{P^*(\Omega)\}$  em ambas as equações:

$$\{P^*(\Omega)\} = \Omega^2 Y^*(\Omega) [D_r^*(\Omega)^{-1}] [\Phi]^T \{v\} \quad (5.52)$$

$$\{P^*(\Omega)\} = \Omega^2 \Theta^*(\Omega) [D_r^*(\Omega)^{-1}] [\Phi]^T \{b\} \quad (5.53)$$

onde:

$$[D_r^*(\Omega)] = \left[ \begin{array}{c} -\Omega^2 m_r + k_r(\Omega) (1+i\eta(\Omega)) \end{array} \right] \quad (5.54)$$

Substituindo (5.52) e (5.53) em (5.49) fica:

$$\{Q^*(\Omega)\} = \Omega^2 Y^*(\Omega) [\Phi] [D_r^*(\Omega)^{-1}] [\Phi]^T \{v\} \quad (5.55)$$

$$\{Q^*(\Omega)\} = \Omega^2 \Theta^*(\Omega) [\Phi] [D_r^*(\Omega)^{-1}] [\Phi]^T \{b\} \quad (5.56)$$

De (5.55), (5.33) e (5.34) e de (5.56), (5.33) e (5.34) obtém-se os quatro termos da matriz de massas dinâmicas em função da matriz  $[D^*(\Omega)]$  diagonalizada:

$$M_{11}^*(\Omega) = E^* I(\Omega) \left\{ \Psi''''(0) \right\}^T [\Phi] [D_r^*(\Omega)^{-1}] [\Phi]^T \{v\} \quad (5.57)$$

$$M_{21}^*(\Omega) = E^* I(\Omega) \left\{ \Psi''(0) \right\}^T [\Phi] [D_r^*(\Omega)^{-1}] [\Phi]^T \{v\} \quad (5.58)$$

$$M_{12}^*(\Omega) = E^* I(\Omega) \left\{ \Psi''''(0) \right\}^T [\Phi] \left[ D_r^*(\Omega)^{-1} \right] [\Phi]^T \{b\} \quad (5.59)$$

$$M_{22}^*(\Omega) = E^* I(\Omega) \left\{ \Psi''(0) \right\}^T [\Phi] \left[ D_r^*(\Omega)^{-1} \right] [\Phi]^T \{b\} \quad (5.60)$$

### 5.5 - RIGIDEZ COMPLEXA EQUIVALENTE DA VIGA SANDUÍCHE:

Para o cálculo computacional dos termos da matriz de massas dinâmicas é necessário conhecer o valor da rigidez complexa equivalente da viga sanduíche em cada frequência de interesse. Essa rigidez será função das propriedades de cada um dos componentes da viga. A figura 5.6 ilustra uma viga sanduíche com suas dimensões características.

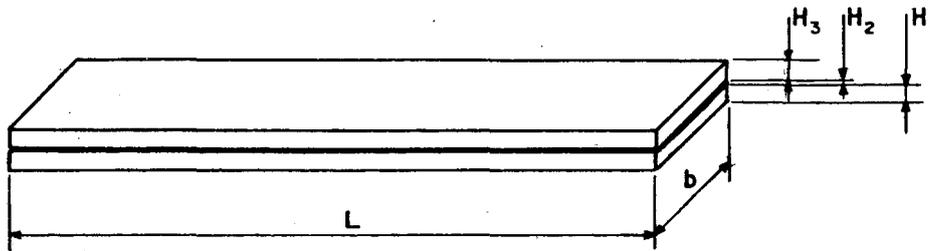


FIGURA 5.6 - Viga sanduíche com as dimensões de seus componentes.

De acordo com as equações desenvolvidas originalmente por Ross, Ungar e Kerwin [22] para vigas ou placas de três camadas e posteriormente simplificadas por Nashif, Jones e Henderson [6], pode-se escrever para a rigidez complexa equivalente por unidade de largura da viga sanduíche:

$$\frac{EI}{b}(\Omega) [1+i\eta(\Omega)] = \frac{E_1 H_1^3}{6} + E_1 H_1 (H_1 + H_2)^2 \frac{g[1+i\eta_2(\Omega)]}{1+2g[1+i\eta_2(\Omega)]} \quad (5.61)$$

onde:

$$g(1+i\eta_2) = \frac{G_2^*(\Omega)}{E_1 H_1 H_2 p^2} \quad (5.62)$$

$$p = \begin{cases} \frac{\xi_n}{L} & \text{para as freqüências naturais} \\ \Omega^{1/2} \left( \frac{2\rho_1 H_1 + \rho_2 H_2}{EI(\Omega)/b} \right)^{1/4} & \text{para freqüências quaisquer} \end{cases} \quad (5.63)$$

Para a viga sanduíche em questão valem as considerações:

$$H_1 = H_3$$

$$\eta_1 = \eta_3 = 0$$

$$E_1(\Omega) = E_3(\Omega) = E_1$$

$$G_2^*(\Omega) = G_2(\Omega) [1+i\eta_2(\Omega)]$$

O significado de  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$ ,  $b$  e  $L$  são as dimensões mostradas na figura 5.6.  $E_1(\Omega)$  e  $E_3(\Omega)$  são os módulos de elasticidade de Young das camadas 1 e 3,  $G_2(\Omega)$  e  $\eta_2(\Omega)$  são, respectivamente, os módulos de cisalhamento e o fator de perda da camada de material viscoelástico,  $\rho_1$  e  $\rho_2$  são as massas específicas dos materiais das camadas externas e de material viscoelástico,  $\xi_n$  é o n-ésimo autovalor,  $EI(\Omega)$  é a parte real da rigidez complexa equivalente da viga sanduíche, e  $\eta(\Omega)$  o seu fator de perda.

Deve-se observar que as equações anteriores foram desenvolvidas originalmente para expansões senoidais dos modos de vibração, sendo aplicáveis para vigas simplesmente apoiadas. Para vigas em balanço é aconselhável que as equações sejam aplicadas apenas para freqüências a partir do segundo modo de vibração [6].

Explicitando a parte real e a parte imaginária da rigidez complexa equivalente (5.61), e utilizando (5.62) e (5.63), estas partes ficam, respectivamente:

$$\frac{EI(\Omega)}{b} = \frac{E_1 H_1^3}{6} + c \frac{a \left[ \frac{EI(\Omega)}{b} \right]^{1/2} + 2a^2 \left[ \frac{EI(\Omega)}{b} \right] [1 + \eta_2^2(\Omega)]}{1 + 4a \left[ \frac{EI(\Omega)}{b} \right]^{1/2} + 4a^2 \frac{EI(\Omega)}{b} [1 + \eta_2^2(\Omega)]} \quad (5.64)$$

$$\frac{EI(\Omega)}{b} \eta(\Omega) = c \frac{a \left[ \frac{EI(\Omega)}{b} \right]^{1/2} \eta_2(\Omega)}{1 + 4a \left[ \frac{EI(\Omega)}{b} \right]^{1/2} + 4a^2 \frac{EI(\Omega)}{b} [1 + \eta_2^2(\Omega)]} \quad (5.65)$$

onde:

$$a = \frac{G_2}{E_1 H_1 H_2 \Omega (2\rho_1 H_1 + \rho_2 H_2)^{1/2}} \quad (5.66)$$

$$c = E_1 H_1 (H_1 + H_2)^2$$

Supondo-se conhecidas as propriedades das camadas metálicas e de elastômero em cada frequência, a única incógnita que comparece em (5.64) é  $EI(\Omega)$ . Rearranjando os termos tem-se:

$$A \left[ \frac{EI(\Omega)}{b} \right]^2 + B \left[ \frac{EI(\Omega)}{b} \right]^{3/2} + C \left[ \frac{EI(\Omega)}{b} \right] + D \left[ \frac{EI(\Omega)}{b} \right]^{1/2} + E = 0 \quad (5.67)$$

ou

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0 \quad (5.68)$$

onde:

$$\begin{aligned} x &= \left[ \frac{EI(\Omega)}{b} \right]^{1/2} \\ A &= 24 a^2 [1 + \eta_2^2(\Omega)] \\ B &= 24 a \\ C &= 6 - \left[ 4H_1^2 + 12(H_1 + H_2)^2 \right] a^2 E_1 H_1 [1 + \eta_2^2(\Omega)] \\ D &= - \left[ 4H_1^2 + 6(H_1 + H_2)^2 \right] a E_1 H_1 \\ E &= -E_1 H_1^3 \end{aligned} \quad (5.69)$$

Da solução de (5.68) obtém-se quatro raízes. Computacionalmente, para o caso analisado, verificou-se que apenas uma delas é satisfatória (positiva). Desta última pode-se, então, obter a rigidez equivalente  $EI(\Omega)$  da viga sanduíche. De (5.65) tira-se, conseqüentemente, o fator de perda equivalente  $\eta(\Omega)$ .

#### 5.6 - MÓDULO DE CISALHAMENTO E FATOR DE PERDA DO MATERIAL DE AMORTECIMENTO VISCOELÁSTICO:

O módulo de cisalhamento e o fator de perda de materiais de amortecimento viscoelásticos variam com a frequência, temperatura e amplitude de deformação [3], [6], [21], [23], [24]. Como já foi dito anteriormente, supõe-se que o material viscoelástico tenha um comportamento linear, independentemente, portanto, da amplitude de deformação.

Existem técnicas que permitem determinar experimentalmente essas propriedades em certas faixas de frequências e em ambientes de temperatura controlada. Dentre essas técnicas cita-se a da viga vibrante.

A representação do módulo de cisalhamento e do fator de perda em função da frequência e temperatura se faz em termos dos chamados diagramas de frequência reduzida, os quais são obtidos dos dados experimentais rearranjados pelo princípio de equivalência frequência-temperatura [6], [21], [23], [24]. Segundo este princípio, o módulo de rigidez ou o fator de perda em uma frequência  $f$  e uma temperatura  $T$  são equivalentes, respectivamente, às mesmas propriedades em uma frequência  $f \cdot \alpha_T$  e uma temperatura  $T_0$ . O coeficiente  $\alpha_T$  é um parâmetro de transformação de frequência em frequência reduzida.

Resultados experimentais para diversas temperaturas e faixas limitadas de frequências podem então compor o novo diagrama. Este diagrama permite que sejam interpoladas e extrapoladas propriedades em frequências e temperaturas nas quais a determinação experimental seria difícil ou mesmo impossível.

Equações empíricas já foram também obtidas para a representação dessas propriedades [23],[24], permitindo que as mesmas sejam determinadas computacionalmente em qualquer frequência e temperatura. Assim, para o módulo de cisalhamento tem-se:

$$\log_{10}(G_2) = \log_{10}(G_L) + \frac{2 \log_{10}\left(\frac{G_{ROM}}{G_L}\right)}{1 + \left(\frac{f_{ROM}}{f_R}\right)^N} \quad (5.70)$$

e para o fator de perda:

$$\log_{10}(\eta_2) = \log_{10}(\eta_{FROL}) + \frac{c}{2} \left\{ (S_L + S_H) \frac{1}{c} \log_{10}\left(\frac{f_R}{f_{ROL}}\right) + (S_L - S_H) \left[ 1 - \sqrt{1 + \left[ \frac{1}{2} \log_{10}\left(\frac{f_R}{f_{ROL}}\right) \right]^2} \right] \right\} \quad (5.71)$$

onde:

$$f_R = f \alpha_T \quad (5.72)$$

$$\log_{10} \alpha_T = \frac{-12 (T - T_0)}{291,7 + (T - T_0)}$$

$f$  é a frequência na qual se deseja calcular as propriedades (Hz);

$f_R$  é a frequência reduzida (Hz);

$\alpha_T$  é o parâmetro de transformação de frequência em frequência reduzida;

$T_0$  é uma temperatura de referência (K);

$T$  é a temperatura ambiente (K);

$G_{ROM}$ ,  $G_L$ ,  $f_{ROM}$ ,  $N$ ,  $\eta_{FROL}$ ,  $S_L$ ,  $S_H$ ,  $f_{ROL}$  e  $c$  são constantes obtidas através da técnica dos mínimos quadrados no procedimento de ajuste das curvas [24].

No próximo capítulo será apresentado um exemplo onde os coeficientes de (5.70) e (5.71) serão extraídos da referência [24] para um caso particular de material de amortecimento viscoelástico.

## CAPÍTULO 6

DETERMINAÇÃO EXPERIMENTAL DA MATRIZ DE MASSAS DINÂMICAS NA BASE DO  
 NEUTRALIZADOR DO TIPO VIGA SANDUÍCHE EM BALANÇO E COMPARAÇÃO COM  
 OS RESULTADOS TEÓRICOS

## 6.1 - INTRODUÇÃO:

Neste capítulo é descrito um procedimento visando a corroboração experimental das equações do capítulo anterior. Optou-se pela determinação da matriz de massas dinâmicas pelo fato de poder-se trabalhar com a aceleração onde a relação sinal ruído é maior que nos casos da velocidade e deslocamento.

A matriz de massas dinâmicas  $[M^*(\Omega)]$  relaciona o vetor força  $\{F^*(\Omega)\}$  com a aceleração  $\{\alpha^*(\Omega)\} = -\Omega^2\{X^*(\Omega)\}$  através da equação:

$$\{F^*(\Omega)\} = [M^*(\Omega)] \{\alpha^*(\Omega)\} \quad (6.1)$$

Igualmente, pode-se escrever a equação inversa desta utilizando o conceito da matriz de inertâncias  $[A^*(\Omega)]$ , ou seja:

$$\{\alpha^*(\Omega)\} = [A^*(\Omega)] \{F^*(\Omega)\} \quad (6.2)$$

Os termos genéricos das matrizes de massas dinâmicas e inertâncias ficam, respectivamente:

$$M_{jk}^*(\Omega) = \frac{F_j^*(\Omega)}{\alpha_k^*(\Omega)} \quad ; \quad \alpha_m^*(\Omega) = 0 \quad \forall \quad m \neq k \quad (6.3)$$

$$A_{kj}^*(\Omega) = \frac{\alpha_k^*(\Omega)}{F_j^*(\Omega)} \quad ; \quad F_m^*(\Omega) = 0 \quad \forall \quad m \neq j \quad (6.4)$$

Na prática, a obtenção de situações onde apenas a aceleração segundo um único grau de liberdade seja diferente de zero para cada caso de excitação,

é muito difícil ou mesmo impossível na maioria dos casos [25]. Por outro lado, não é tão difícil obter situações em que apenas um dos termos do vetor de excitações seja não nulo, o que viabiliza a determinação experimental dos termos da matriz de inertâncias.

Portanto, a matriz de massas dinâmicas na base do neutralizador será obtida indiretamente através da matriz de inertâncias, já que vale a relação:

$$[M^*(\Omega)] = [A(\Omega)]^{-1} \quad (6.5)$$

## 6.2 - PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL:

### 6.2.1 - DESCRIÇÃO DO PROCEDIMENTO:

Os termos da matriz de inertâncias na base do neutralizador dinâmico serão determinados com o auxílio do dispositivo ilustrado na figura 6.1.

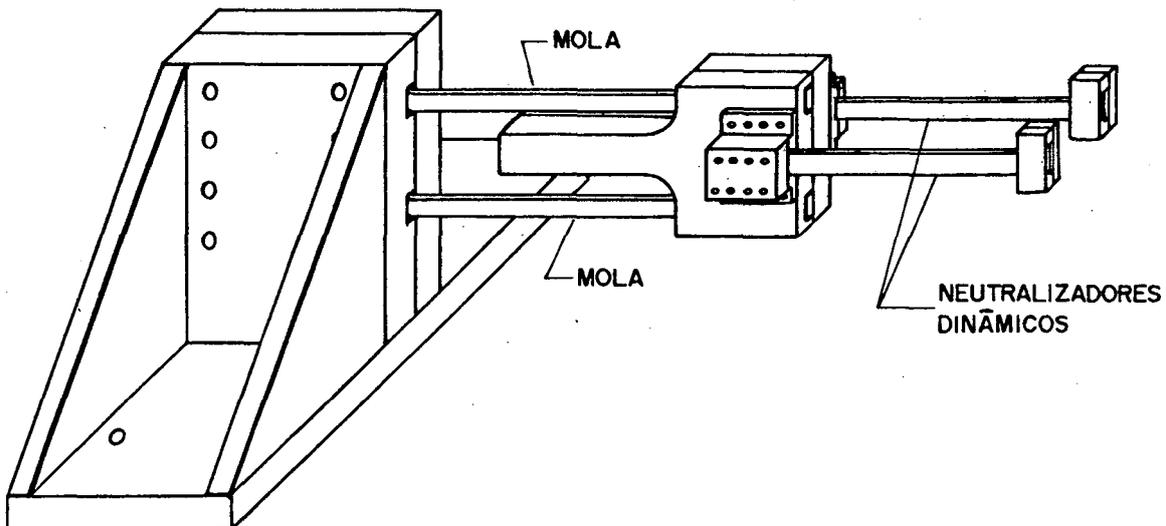


FIGURA 6.1 - Dispositivo para determinação experimental da matriz de inertâncias na base do neutralizador dinâmico.

Este dispositivo consiste de um suporte onde são fixados rigidamente dois neutralizadores idênticos. Este suporte, por sua vez, é ligado por meio de hastes flexíveis (molas) a uma base de impedância mecânica infinita.

A excitação direta sobre a posição onde são fixados os neutralizadores, conforme a figura 6.2, permite a determinação de dois dos termos da matriz de inertâncias, já que é nulo o binário  $F_2$  aí aplicado.

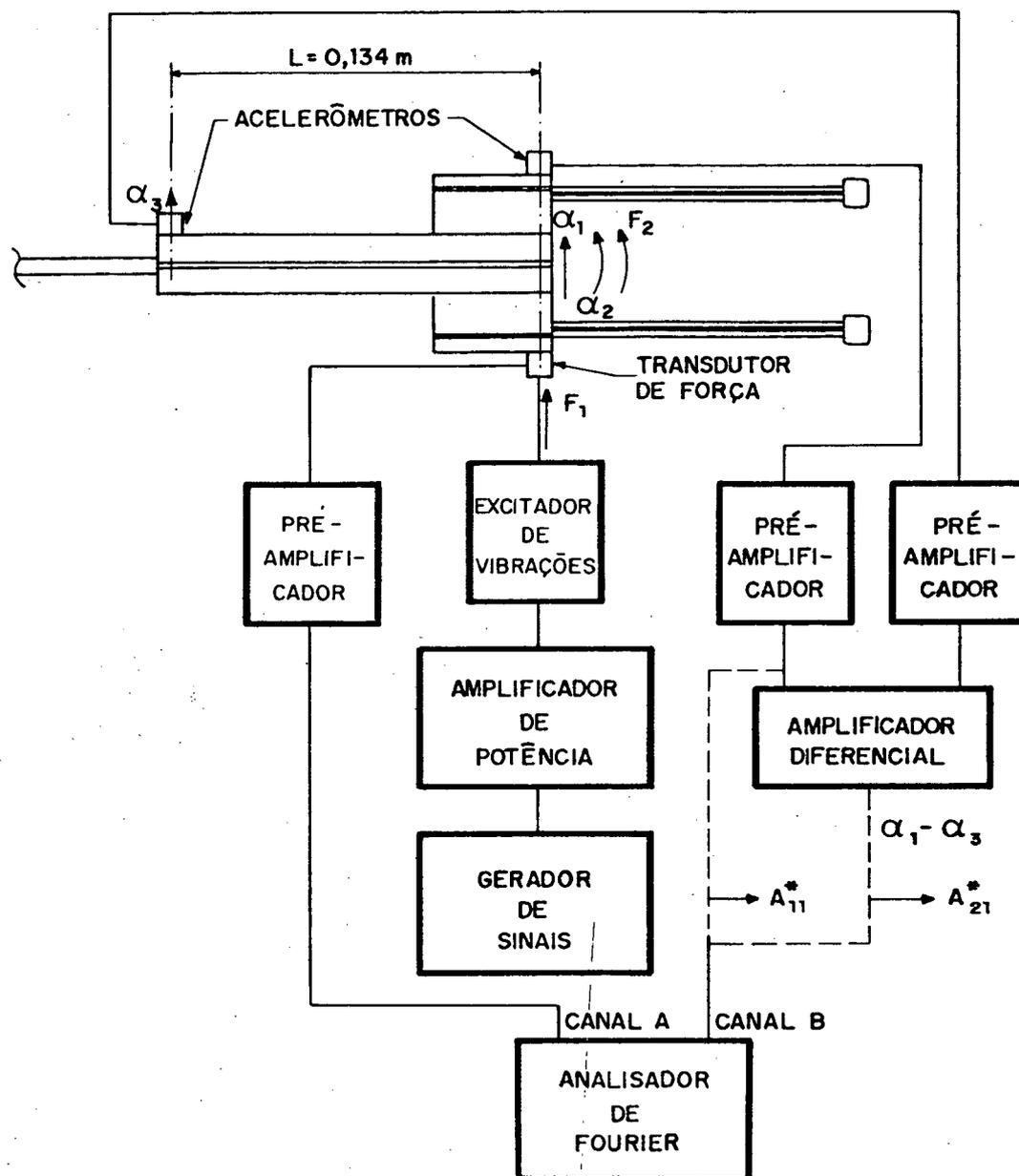


FIGURA 6.2 - Montagem do sistema para determinação dos termos  $A_{11}^*(\Omega)$  e  $A_{21}^*(\Omega)$  da matriz de inertâncias.

Esses termos são:

$$A_{11}^*(\Omega) = \frac{\alpha_1^*(\Omega)}{F_1^*(\Omega)} \quad (6.6)$$

$$A_{21}^*(\Omega) = \frac{\alpha_2^*(\Omega)}{F_1^*(\Omega)} \quad (6.7)$$

Considerando que os deslocamentos sejam pequenos, a aceleração rotacional  $\alpha_2$  na base do neutralizador é dada por:

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{L} \quad (6.8)$$

Os dois termos restantes da matriz de inertâncias podem ser obtidos mudando-se a posição da excitação, conforme a figura 6.3. Neste caso, tanto a força  $F_1$  quanto o binário  $F_2$  são não nulos e os dois termos restantes da matriz de inertâncias podem ser obtidos com auxílio dos termos já determinados anteriormente:

$$A_{12}^*(\Omega) = \frac{\alpha_1^*(\Omega) - A_{11}^*(\Omega) F_1^*(\Omega)}{F_2^*(\Omega)} \quad (6.9)$$

$$A_{22}^*(\Omega) = \frac{\alpha_2^*(\Omega) - A_{21}^*(\Omega) F_1^*(\Omega)}{F_2^*(\Omega)} \quad (6.10)$$

Note-se que aplicar a força  $F_1$  na posição indicada na figura 6.3 é o mesmo que aplicar esta mesma força e um binário  $F_2$  na posição da base dos neutralizadores. O binário é dado por:

$$F_2 = -F_1 L \quad (6.11)$$

A aceleração rotacional é novamente fornecida por (6.8). A substituição de (6.11) em (6.9) e (6.10) fornece ainda:

$$A_{12}^*(\Omega) = \frac{\alpha_1^*(\Omega)}{-F_1^*(\Omega) L} + \frac{A_{11}^*(\Omega)}{L} \quad (6.12)$$

$$A_{22}^*(\Omega) = \frac{\alpha_2^*(\Omega)}{-F_1^*(\Omega) L} + \frac{A_{21}^*(\Omega)}{L} \quad (6.13)$$

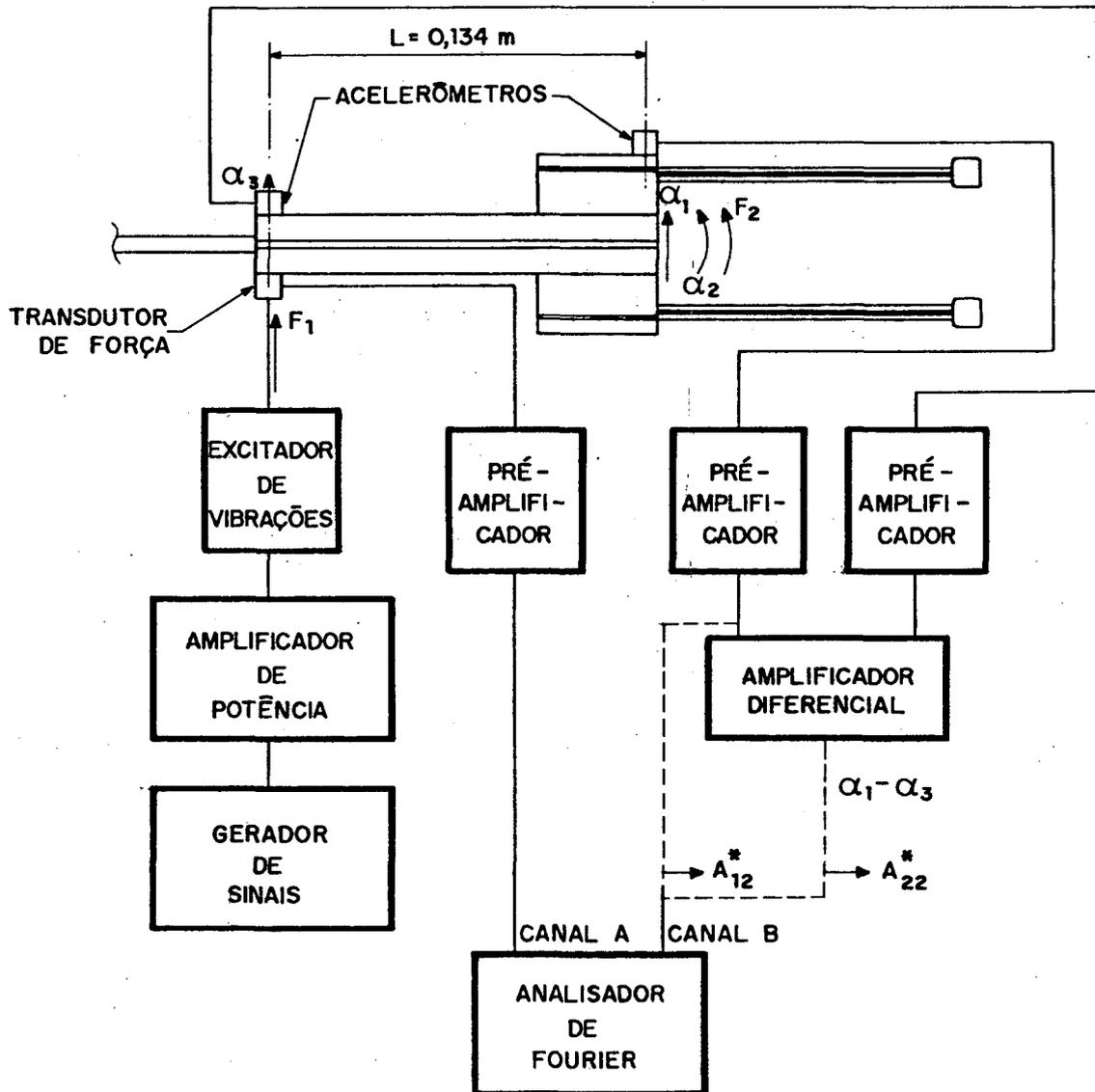


FIGURA 6.3 - Montagem do sistema para determinação dos termos  $A_{12}^*(\Omega)$  e  $A_{22}^*(\Omega)$  da matriz de inércias.

A inversão da matriz de inércias assim obtida fornece uma matriz de massas dinâmicas que se refere a todo o sistema mecânico constituído pelo suporte, molas e neutralizadores.

Os neutralizadores dinâmicos são então retirados dos suportes e o mesmo procedimento experimental anterior é repetido. A nova matriz de massas dinâmicas é a parcela referente ao sistema suporte e molas.

Para a obtenção da matriz de massas dinâmicas na base de um único neutralizador, utilizar-se-á a mesma propriedade já enunciada no capítulo 2 para o caso da impedância mecânica, ou seja, as massas dinâmicas dos componentes se somam quando a aceleração no ponto de união é comum.

De acordo com esta propriedade, a diferença das matrizes de massas dinâmicas do sistema com e sem os neutralizadores resulta em uma parcela relativa aos dois neutralizadores. A divisão por dois desta última fornece a matriz de massas dinâmicas desejada na base de um único neutralizador.

#### **6.2.2 - INSTRUMENTAÇÃO PARA AS MEDIÇÕES:**

As figuras 6.2 e 6.3 apresentam toda a cadeia de instrumentos necessários às medições. As especificações dos instrumentos utilizados são:

2 acelerômetros B&K 4366

1 transdutor de força B&K 8200

2 pré-amplificadores de carga B&K 2635

1 pré-amplificador de carga B&K 2626

1 excitador de vibrações B&K 4810

1 amplificador de potência B&K 2706

1 gerador de sinais B&K 1027

1 amplificador diferencial DIGICART - model DCAD 01

1 analisador de Fourier de dois canais HP 5451C

#### **6.2.3 - AFERIÇÃO DOS ACELERÔMETROS:**

Existe a necessidade de garantir que a diferença das respostas dos acelerômetros se refere à grandeza física em questão, ou seja, a aceleração angular, e não a uma diferença de sensibilidade dos mesmos. Para isto basta

garantir que os acelerômetros apresentem a mesma resposta a uma excitação comum que atue sobre os dois.

Um teste dos dois acelerômetros escolhidos para o experimento é apresentado na figura 6.4.

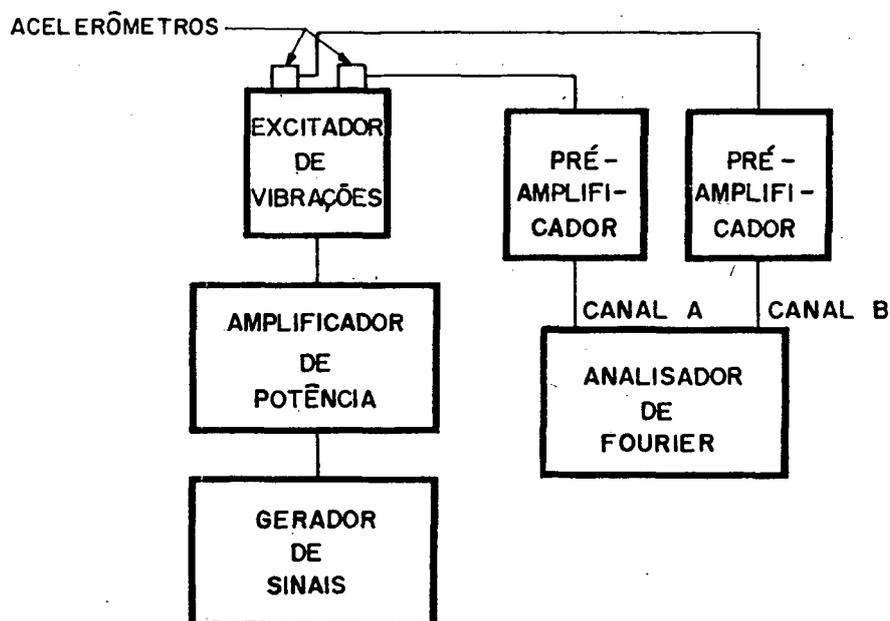


FIGURA 6.4 - Montagem de um sistema para aferição dos acelerômetros.

De acordo com esta figura os dois acelerômetros estão sujeitos a uma mesma excitação pois encontram-se sobre a mesma mesa do excitador.

A figura 6.5 apresenta a razão entre as respostas dos acelerômetros e a figura 6.6 a função de coerência entre as mesmas. A excitação usada foi um ruído branco na faixa de 2 Hz a 2 KHz. Foram tomadas 100 médias.

As figuras 6.5 e 6.6 indicam que os acelerômetros escolhidos são satisfatórios.

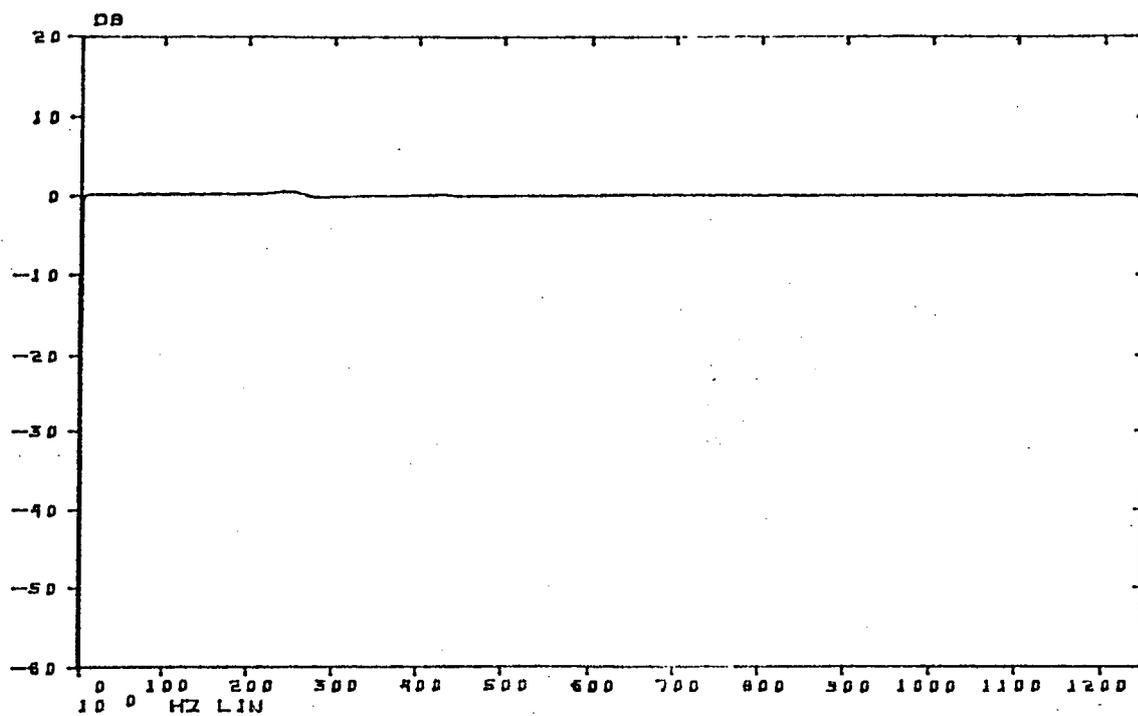


FIGURA 6.5 - Razão entre as respostas dos dois acelerômetros submetidos a uma mesma excitação.

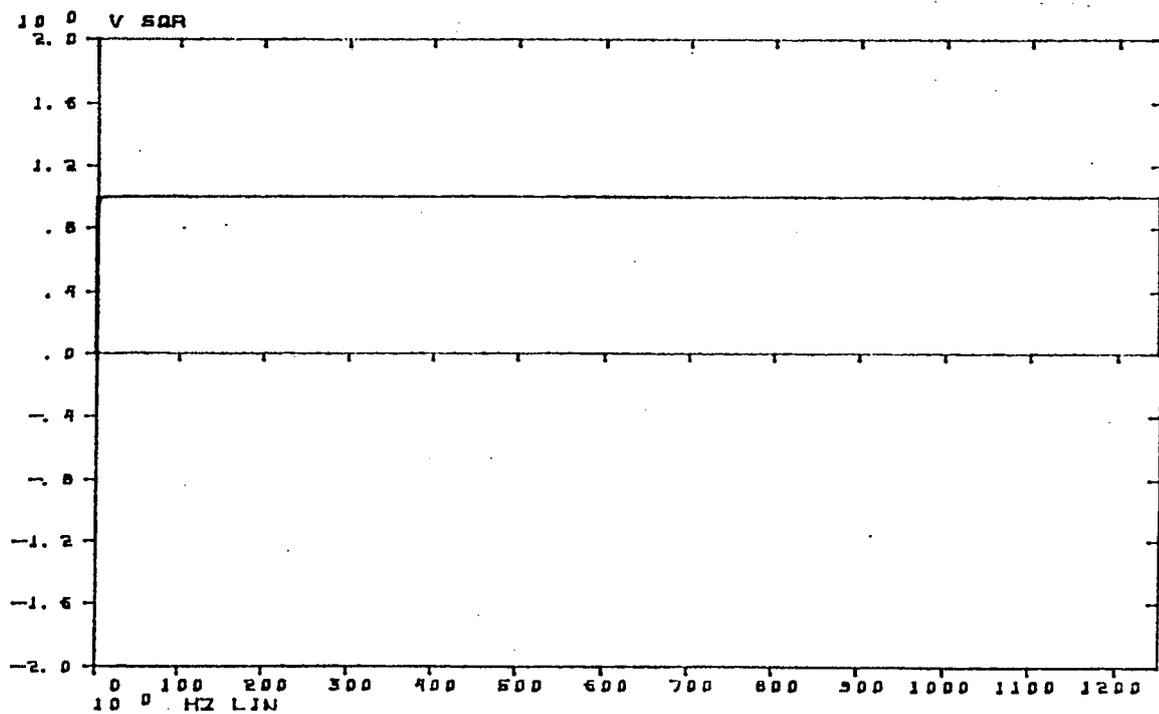


FIGURA 6.6 - Função de coerência entre as respostas dos dois acelerômetros submetidos a uma mesma excitação.

#### 6.2.4 - CALIBRAÇÃO DOS SISTEMAS DE MEDIÇÃO DA FORÇA E DA ACELERAÇÃO:

O analisador de Fourier fornece os resultados das medições em Volts. É necessário saber quais os fatores de conversão das voltagens para unidades físicas, ou seja, é necessário saber quais os ganhos dos sistemas de medição da força  $G_F$  e da aceleração  $G_a$ .

Esses ganhos serão determinados tomando-se os ganhos dos pré-amplificadores e dos subsequentes circuitos de medição dos sinais relativos a força e a aceleração.

No caso da força, os únicos circuitos subsequentes ao pré-amplificador são os inerentes ao analisador de Fourier, ou seja, o do filtro "anti-aliasing" e o circuito de digitalização do sinal. Basta, portanto, que se determine o ganho destes circuitos. A figura 6.7 mostra o sistema de medição para tal determinação.

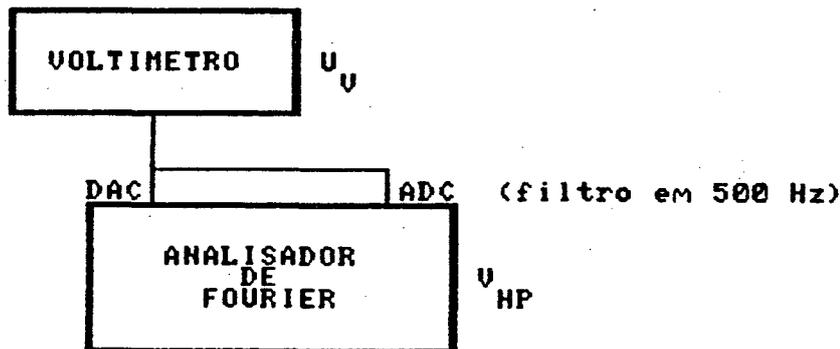


FIGURA 6.7 - Determinação do ganho de parte do sistema de medição da força.

No analisador de Fourier é gerado um pulso unitário no domínio da frequência, em uma frequência desejada. A transformada de Fourier inversa deste fornece um sinal senoidal no domínio do tempo. O circuito DAC (Digital to Analog Converter) faz a conversão digital-analógica deste sinal, cuja voltagem  $V_v$  é lida no voltmetro. O sinal é novamente adquirido pelo circuito ADC (Analog to Digital Converter) passando antes pelo filtro "anti-aliasing" ligado em 500 Hz. Após a conversão deste sinal novamente para o domínio da

frequência, obtém-se a voltagem final  $V_{HP}$  no analisador de Fourier. O ganho deste sistema é obtido pela razão das duas voltagens lidas, isto é:

$$G = \frac{V_{HP}}{V_v} \quad (6.14)$$

A tabela 6.1 apresenta a determinação de  $G$  para quatro frequências na faixa de interesse (0 a 500 Hz).

f(Hz)	$V_v$ (V)	$V_{HP}$ (V)	G
100	0,99	0,4888	0,4937
200	1,00	0,4959	0,4959
300	0,99	0,4941	0,4991
400	0,97	0,4773	0,4921

TABELA 6.1 - Determinação do ganho de parte do sistema de medição da força para 4 frequências distintas.

A média desses valores será usada no cálculo do ganho total do sistema de medição da força:

$$G_F = 0,4952 G_{PF} \quad (6.15)$$

onde  $G_{PF}$  é o ganho em [V/N] do pré-amplificador usado para o sinal da força.

No caso da aceleração é utilizado este mesmo procedimento de determinação do ganho. O circuito correspondente a este caso acha-se na figura 6.8.

A tabela 6.2 apresenta os ganhos deste circuito para as mesmas frequências anteriores.

O ganho total do sistema de medição da aceleração, tomando o valor médio dos ganhos da tabela 6.2, fica:

$$G_\alpha = 0,4929 G_{P\alpha} \quad (6.16)$$

onde  $G_{p\alpha}$  é o ganho em  $[V/ms^{-2}]$  dos pré-amplificadores usados para os sinais das acelerações.

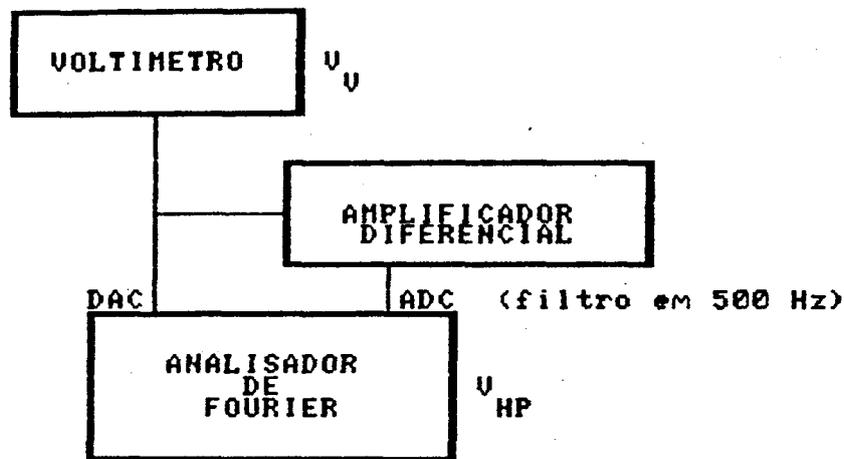


FIGURA 6.8 - Determinação do ganho de parte do sistema de medição da aceleração.

f (Hz)	$V_V$ (V)	$V_{HP}$ (V)	G
100	0,99	0,4829	0,4878
200	1,00	0,4942	0,4942
300	0,99	0,4931	0,4981
400	0,97	0,4769	0,4916

TABELA 6.2 - Determinação do ganho de parte do sistema de medição da aceleração para 4 frequências distintas.

Com a aplicação destes ganhos totais aos respectivos sinais da força e da aceleração, obter-se-á estes sinais nas suas unidades físicas coerentes. Assim, para cada um destes sinais, tem-se:

$$F = \frac{F_V}{G_F} \left[ \frac{V}{V/N} = N \right] \quad (6.17)$$

$$\alpha = \frac{\alpha_v}{G_\alpha} \left[ \frac{V}{V/ms^{-2}} = ms^{-2} \right] \quad (6.18)$$

Portanto, estando a força e a aceleração nas unidades corretas, todos os elementos das matrizes de inertâncias e de massas dinâmicas serão determinados nas suas unidades físicas coerentes.

#### 6.2.5 - DESCRIÇÃO DO PROCEDIMENTO COMPUTACIONAL PARA A DETERMINAÇÃO EXPERIMENTAL DA MATRIZ DE MASSAS DINÂMICAS:

Em vista de todo o processo da determinação experimental dos termos das matrizes de inertâncias, suas posteriores inversões e subtração das mesmas, e da necessidade de obter resultados médios, foram elaborados programas para o analisador de Fourier HP 5451C, visando facilitar estas tarefas.

A figura 6.9 apresenta o fluxograma de um destes programas, ou seja, o de determinação dos termos das matrizes de inertâncias. Este fluxograma descreve alguns passos já apresentados anteriormente.

Note-se que a determinação de cada um dos termos da matriz de inertâncias exige ajustes nas posições de aplicação da força e/ou mudança de medição da aceleração para diferença de acelerações, conforme as figuras 6.2 e 6.3.

Para a determinação dos valores médios desses termos, utilizou-se do "software" disponível no próprio analisador de Fourier, ou seja, o "software" para a determinação das funções de densidades espectrais de potência  $S_{FF}$  e  $S_{AA}$  dos sinais de excitação e de resposta, respectivamente, e da função de densidade espectral cruzada  $S_{AF}$  desses sinais. A partir dessas funções, obtidas para um número de médias desejadas, o termo genérico  $A_{XX}$  da matriz de inertâncias fica:

$$A_{XX} = \frac{S_{AF}}{S_{FF}} \quad (6.19)$$

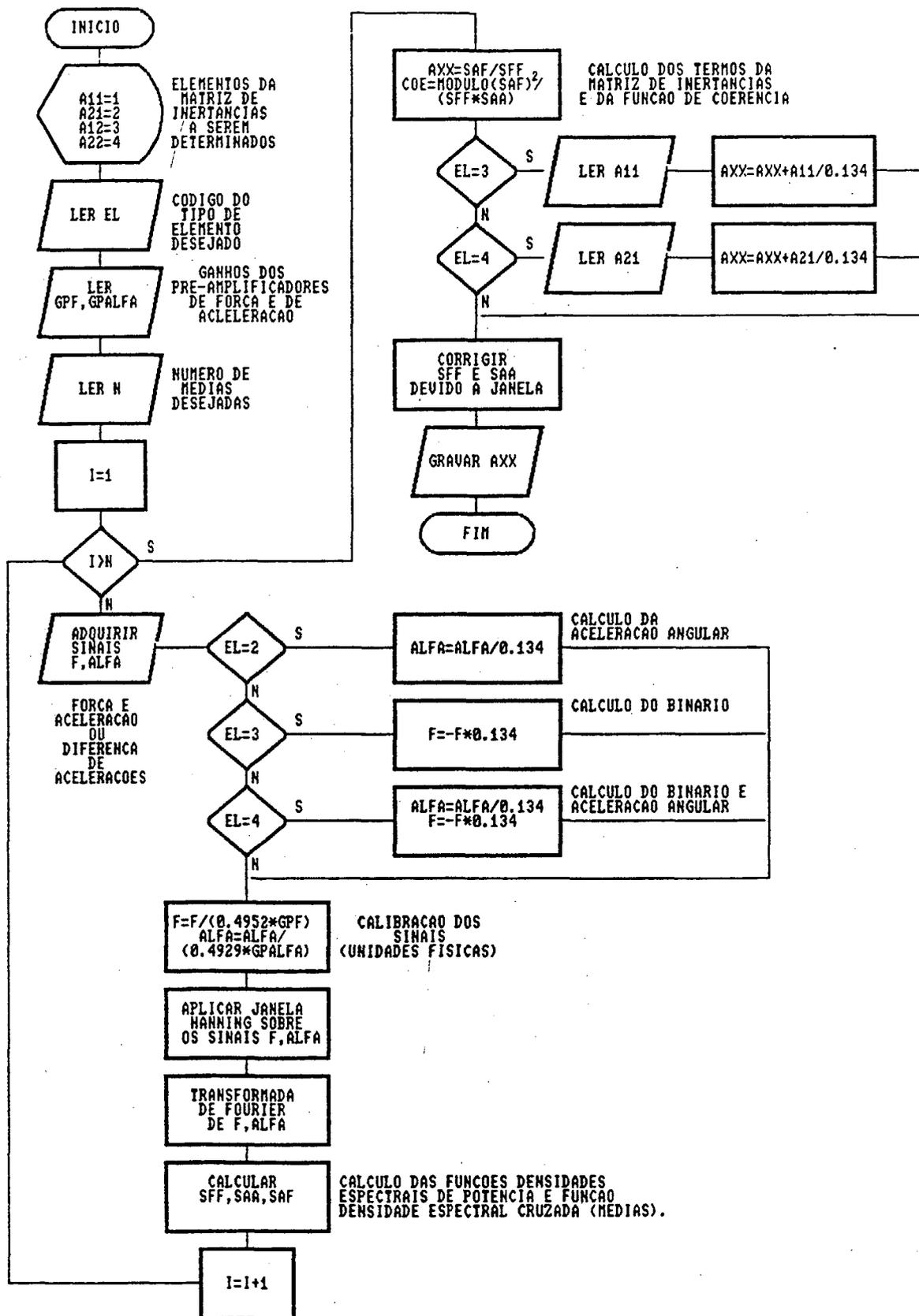


FIGURA 6.9 - Fluxograma para determinação computacional dos termos das matrizes de inércias.

Observe-se que para a determinação dos termos  $A_{12}$  e  $A_{22}$ , de acordo com (6.12) e (6.13), existe a necessidade de primeiro determinar  $A_{11}$  e  $A_{21}$ , respectivamente. As parcelas indicadas em (6.12) e (6.13) devem então serem somadas ao correspondente termo (6.19).

Como forma de avaliar cada termo da matriz de inertâncias obtido, isto é, como forma de analisar a dependência da resposta em relação a excitação aplicada, determinou-se também, através do programa, a função de coerência entre a excitação e a resposta. Essa função, escrita em termos das funções de densidades espectrais de potência e da função de densidade espectral cruzada, fica:

$$\gamma^2 = \frac{|S_{AF}|^2}{S_{FF} S_{AA}} \quad (6.20)$$

Em outro programa foram obtidas as inversões das matrizes de inertâncias e a posterior subtração das mesmas.

Nos programas citados, procurou-se sempre que possível, trabalhar em precisão dupla para evitar perda de precisão, principalmente na inversão das matrizes.

### 6.3 - RESULTADOS TEÓRICOS E EXPERIMENTAIS:

As características dos neutralizadores dinâmicos ensaiados vão apresentadas na tabela 6.3.

O material de amortecimento viscoelástico usado neste neutralizador é o KL70, cujas constantes para determinação computacional de suas propriedades foram obtidas da referência [24]. Estas constantes acham-se na tabela (6.4).

A temperatura ambiente média no horário das medições ficou em torno de 20°C.

Com estes dados e a teoria apresentada no capítulo anterior, a matriz de massas dinâmicas foi determinada computacionalmente para uma faixa de frequências de 0 a 500 Hz. Para as funções admissíveis foram utilizados os 10

primeiros modos de uma viga simples em balanço. Os gráficos do módulo e da fase relativos aos resultados teóricos e experimentais estão apresentados nas figuras 6.10 a 6.17.

$H_1$	$2,54 \times 10^{-3}$ m
$H_2$	$5,19 \times 10^{-4}$ m
L	0,203 m
b	0,014 m
$E_1$	$2,0 \times 10^{11}$ N/m <sup>2</sup>
$\mu(x)$	0,558 Kg/m
$\rho_1$	$7,70 \times 10^3$ Kg/m <sup>3</sup>
$\rho_2$	$1,34 \times 10^3$ Kg/m <sup>3</sup>
$m_c$	$3,13 \times 10^{-2}$ Kg
$I_G$	$8,72 \times 10^{-7}$ Kg m <sup>2</sup>
e	$7,0 \times 10^{-3}$ m

TABELA 6.3 - Características dos neutralizadores dinâmicos ensaiados.

$G_{ROM}$	$4,414 \times 10^7$
$G_L$	$3,713 \times 10^6$
$f_{ROM}$	$1,588 \times 10^3$
N	0,6333
$\eta_{FROL}$	0,2636
$S_L$	0,35
$S_H$	-0,45
$f_{FROL}$	$3,966 \times 10^3$
c	4,0
$T_0$	280

TABELA 6.4 - Contantes para determinação das propriedades do material de amortecimento viscoelástico KL70.

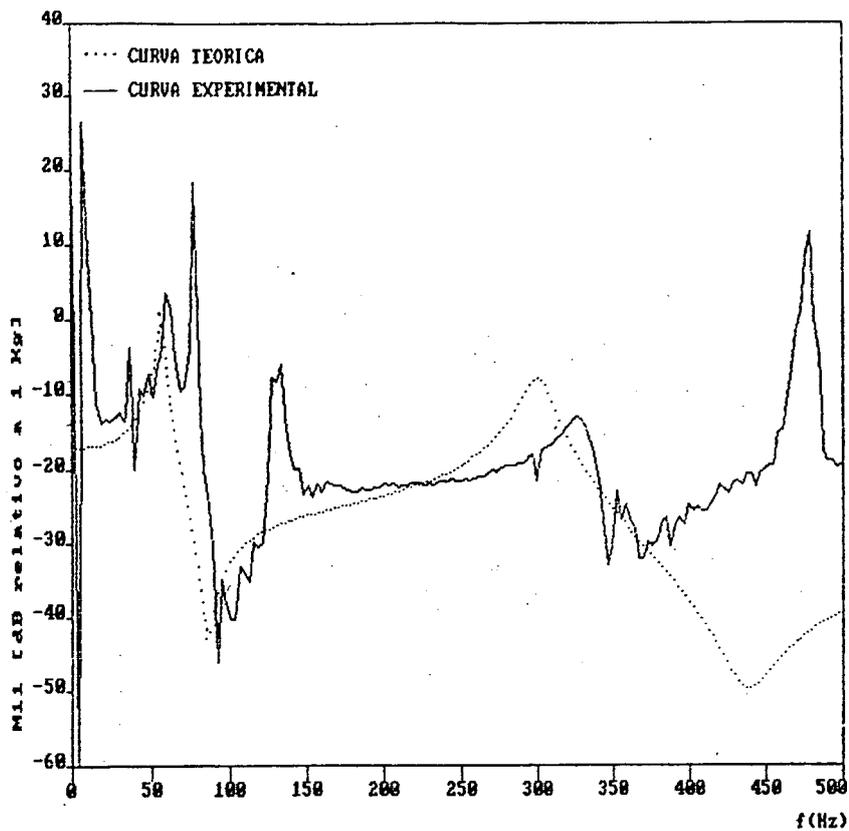


FIGURA 6.10 - Resultados teóricos e experimentais -  $M_{11}$  (módulo)

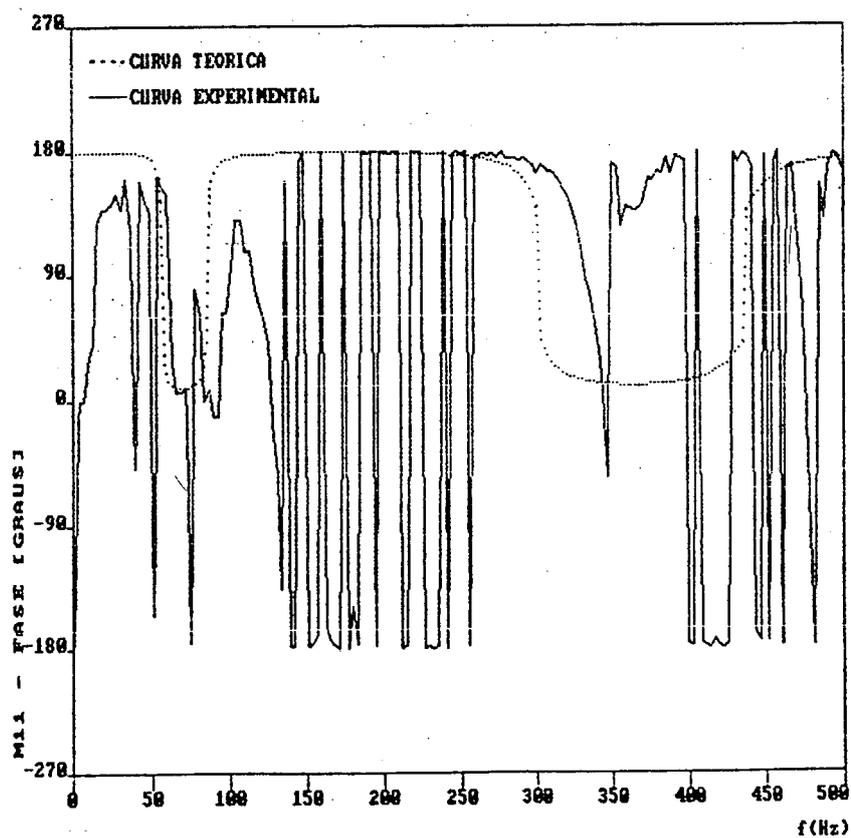


FIGURA 6.11 - Resultados teóricos e experimentais -  $M_{11}$  (fase)

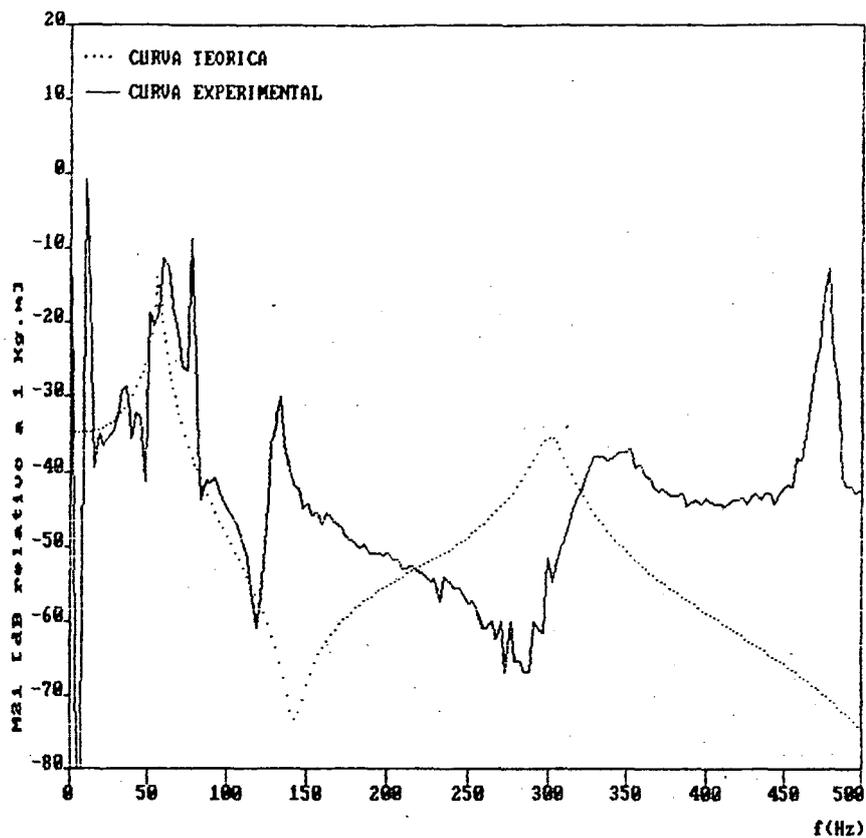


FIGURA 6.12 - Resultados teóricos e experimentais -  $M_{21}$  (módulo)

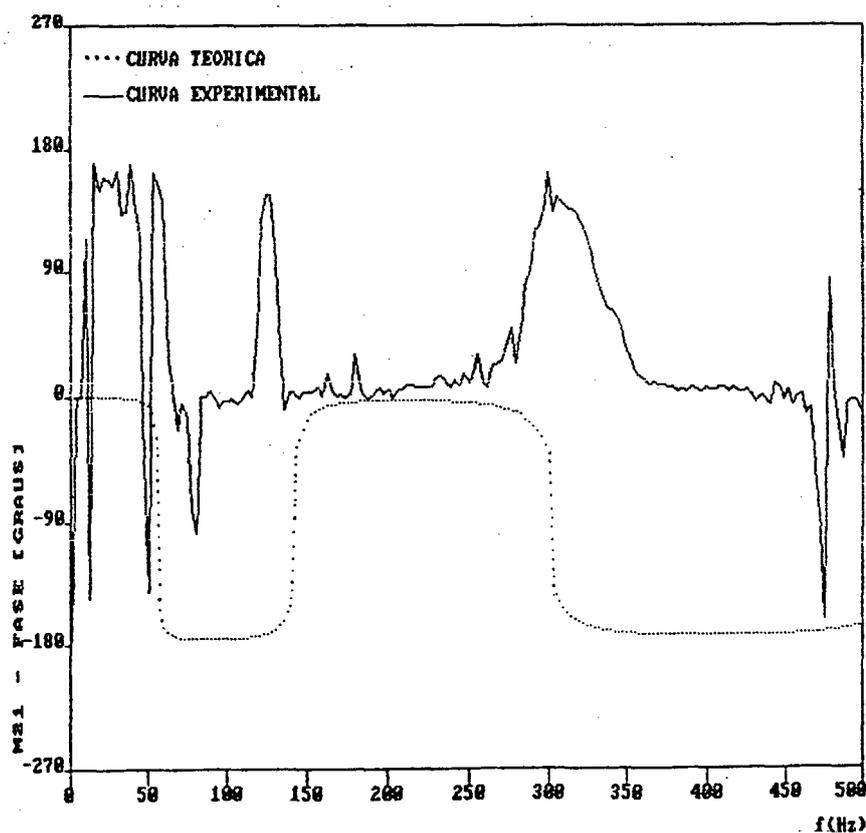


FIGURA 6.13 - Resultados teóricos e experimentais -  $M_{21}$  (fase)

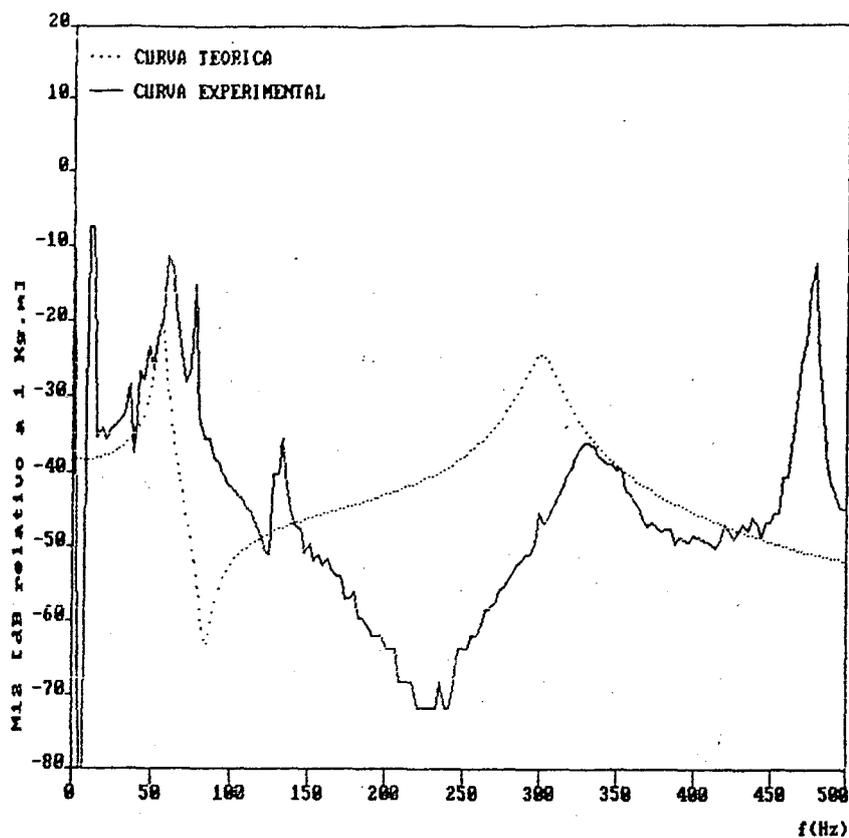


FIGURA 6.14 - Resultados teóricos e experimentais -  $M_{12}$  (módulo)

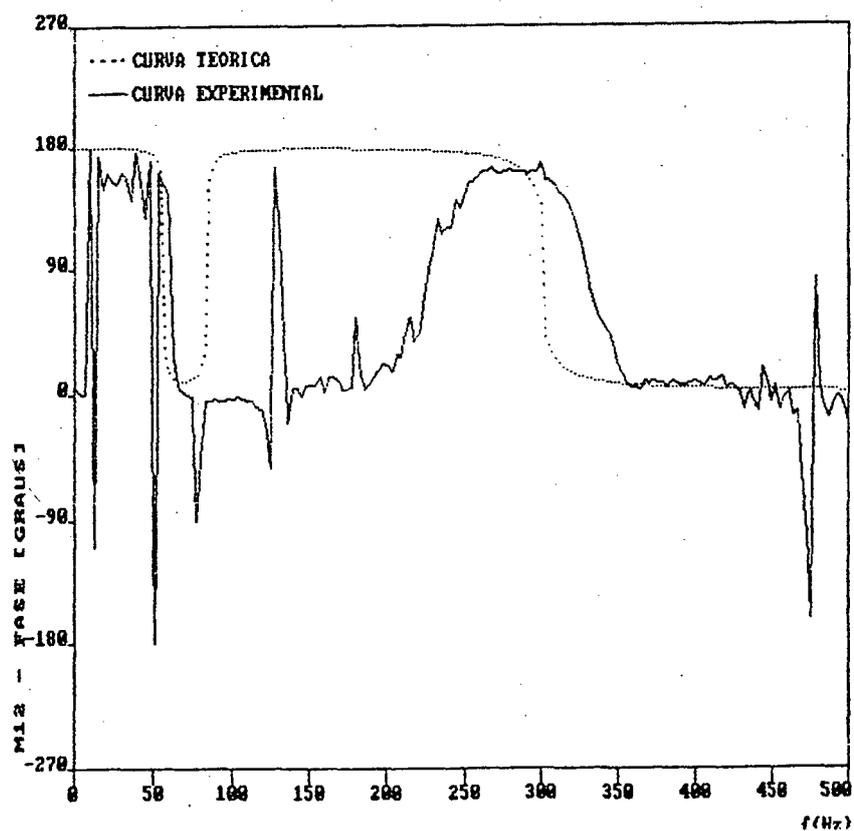


FIGURA 6.15 - Resultados teóricos e experimentais -  $M_{12}$  (fase)

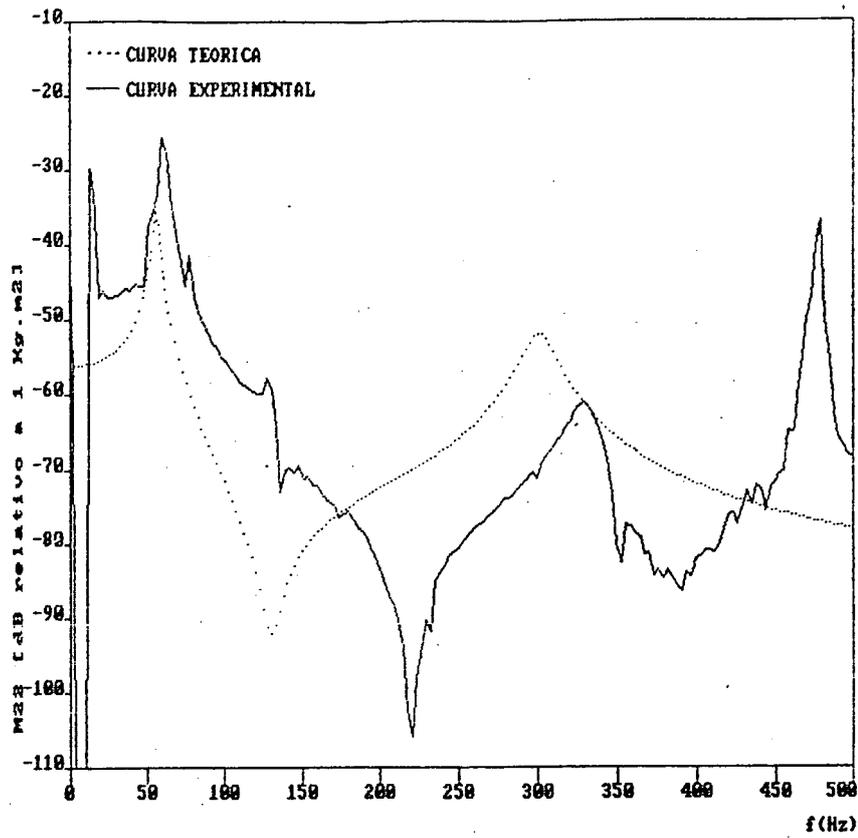


FIGURA 6.16 - Resultados teóricos e experimentais -  $M_{22}$  (módulo)

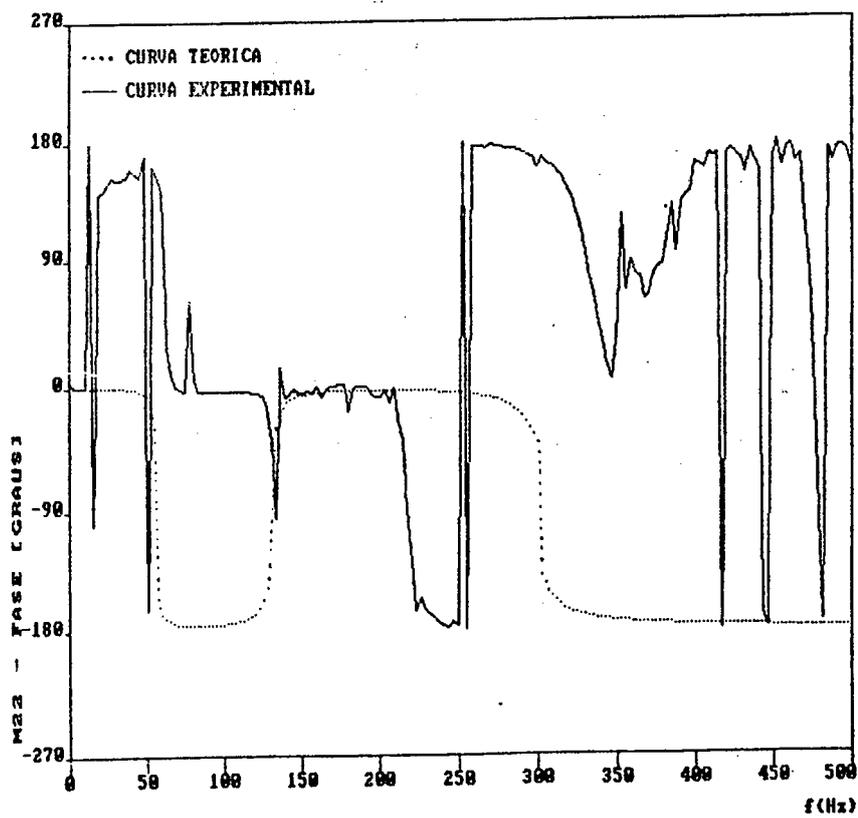


FIGURA 6.17 - Resultados teóricos e experimentais -  $M_{22}$  (fase)

Observa-se destes gráficos, que a primeira frequência natural teórica aproxima-se mais da experimental do que a segunda. Para os termos  $M_{11}$  e  $M_{21}$ , além da frequência teórica ser próxima da experimental, existe uma proximidade muito grande também nas amplitudes.

Tanto os gráficos das fases teóricas quanto experimentais possuem mudanças abruptas nos picos de ressonância, como deveria ser.

De modo geral, as curvas experimentais e teóricas que mais se parecem são aquelas relativas aos módulos dos termos  $M_{11}$  e  $M_{22}$ .

Um fato marcante que aparece nas curvas experimentais é a existência de vários outros picos que não aqueles relativos ao neutralizador. Isto pode ser explicado por uma análise do método experimental utilizado.

Quando se retira os neutralizadores do suporte, as frequências naturais do novo sistema assim constituído (suporte e molas), são diferentes daquelas do sistema com os neutralizadores. Ao se fazer a diferença das matrizes, os picos relativos às frequências naturais que não interessam não coincidem e, conseqüentemente, não desaparecem.

Na tentativa de contornar tal problema, propôs-se um procedimento alternativo que será apresentado no próximo item.

#### **6.4 - PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL ALTERNATIVO:**

##### **6.4.1 - DESCRIÇÃO DO PROCEDIMENTO:**

Para evitar os picos indesejáveis nas curvas determinadas pelo procedimento anterior, pensou-se em um suporte que não possuísse modos de vibração na faixa de frequências naturais dos dois primeiros modos do neutralizador.

O suporte utilizado foi um tarugo de aço dependurado, conforme a figura 6.18. As dimensões deste tarugo são 0,20m x 0,11m x 0,025m e sua primeira frequência natural está em torno de 1200 Hz.

A figura 6.19 mostra os esquemas de excitação e respostas para este

caso.

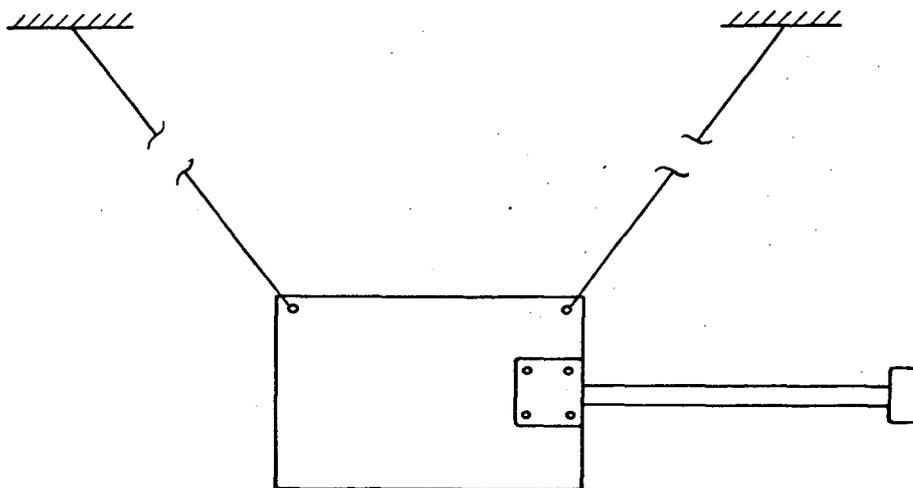


FIGURA 6.18 - Dispositivo alternativo para a determinação experimental da matriz de inércias na base do neutralizador .

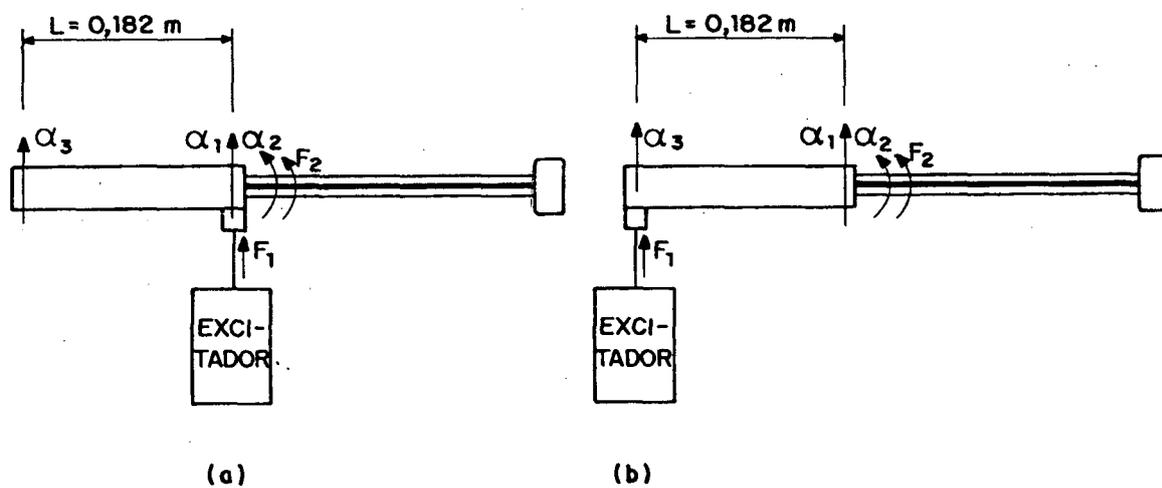


FIGURA 6.19 - Excitação diretamente sobre a posição da base do neutralizador (a) e a uma distância  $L$  da base (b).

Uma análise da figura 6.19(a) mostra que é nulo o binário  $F_2$  atuante e a aceleração  $\alpha_2$  é fornecida pela mesma equação (6.8). No caso da figura 6.19(b), a força na posição da base do neutralizador será a mesma força  $F_1$  e o binário  $F_2$  será dado por (6.11). Neste caso a aceleração  $\alpha_2$  é também fornecida por (6.8).

O procedimento experimental é praticamente o mesmo anterior. A única diferença a ressaltar é que agora utiliza-se apenas um neutralizador dinâmico preso ao suporte.

#### 6.4.2 - RESULTADOS:

As figuras 6.20 a 6.27 mostram as curvas dos módulos e das fases dos termos da matriz de inertâncias na base do neutralizador, determinados pelo presente procedimento, bem como as respectivas curvas teóricas.

Aqui novamente verifica-se a proximidade da primeira frequência natural experimental e teórica, sendo que para os termos  $M_{11}$  e  $M_{21}$  as amplitudes são também praticamente coincidentes.

Observe-se que no presente caso desapareceram os picos característicos de ressonância das curvas anteriores mas, ao contrário do que se esperava, as curvas oscilaram muito mais que no procedimento anterior.

Um fator de relevância que contribui para a obtenção de resultados tão cheios de oscilações é a perda de precisão pelo analisador de Fourier HP 5451C devido à maneira como ele armazena e trabalha com os dados. Neste analisador os dados são armazenados em blocos. Estes, por sua vez, são divididos em canais. Cada canal é usado para armazenar um dado numérico que pode variar de -1 a 1. Para cada bloco de dados existe uma única potência de 10 que multiplica todo o bloco. Assim, uma operação que resulte em números muito grandes e outros muito pequenos em um mesmo bloco de dados resultará em perda de precisão (perda de decimais) dos números pequenos, pois o expoente será ajustado aos números grandes em detrimento dos números pequenos.

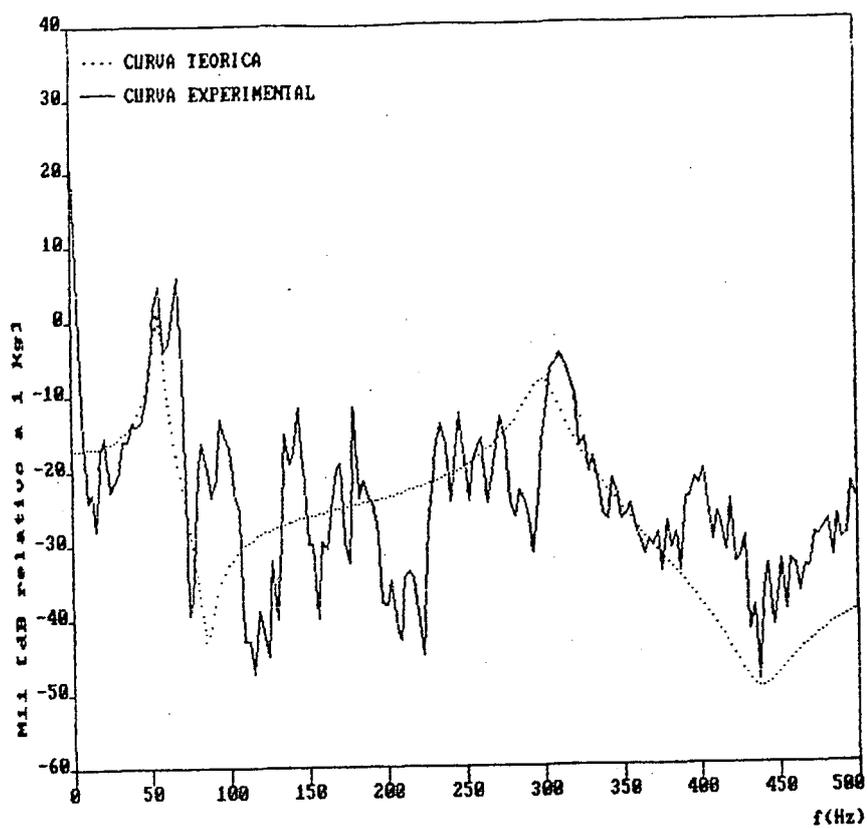


FIGURA 6.20 - Resultados teóricos e experimentais -  $M_{11}$  (módulo)

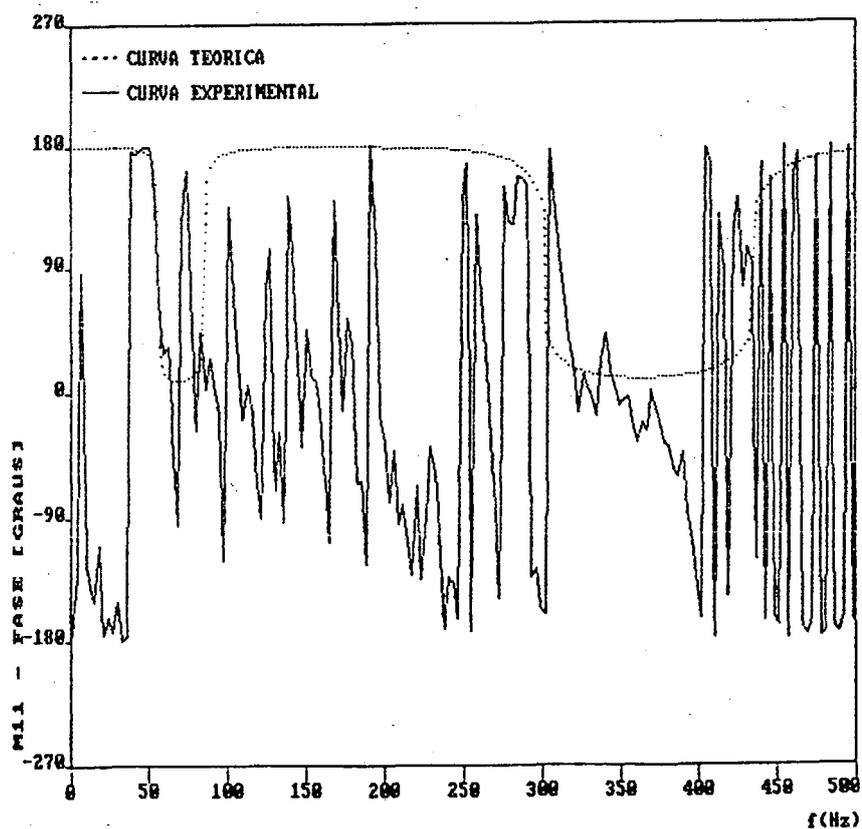


FIGURA 6.21 - Resultados teóricos e experimentais -  $M_{11}$  (fase)

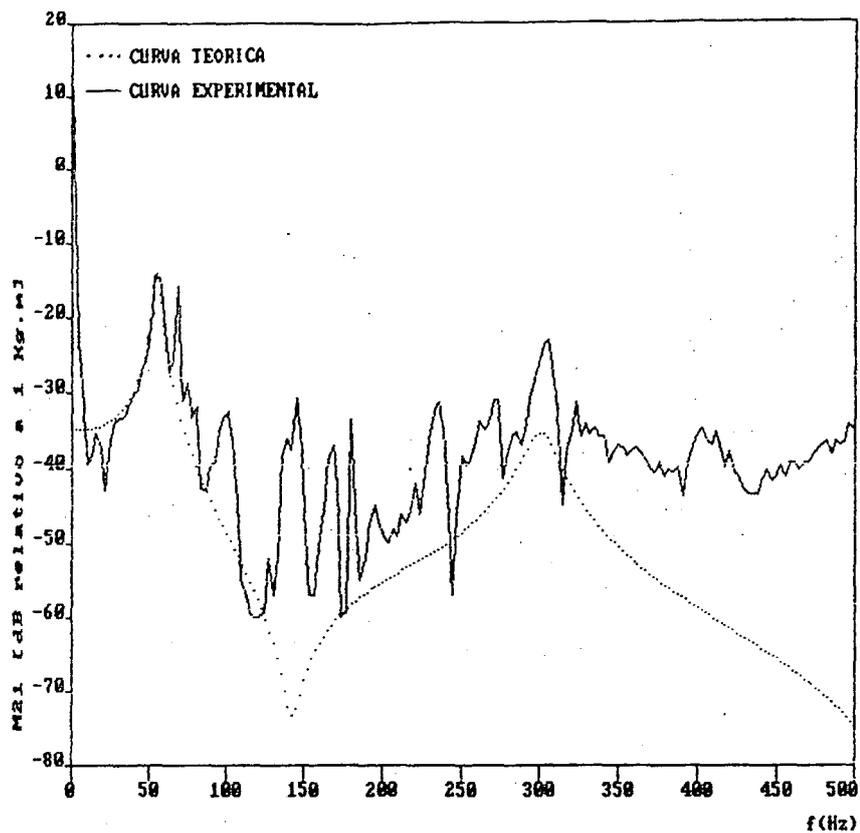


FIGURA 6.22 - Resultados teóricos e experimentais -  $M_{21}$  (módulo)

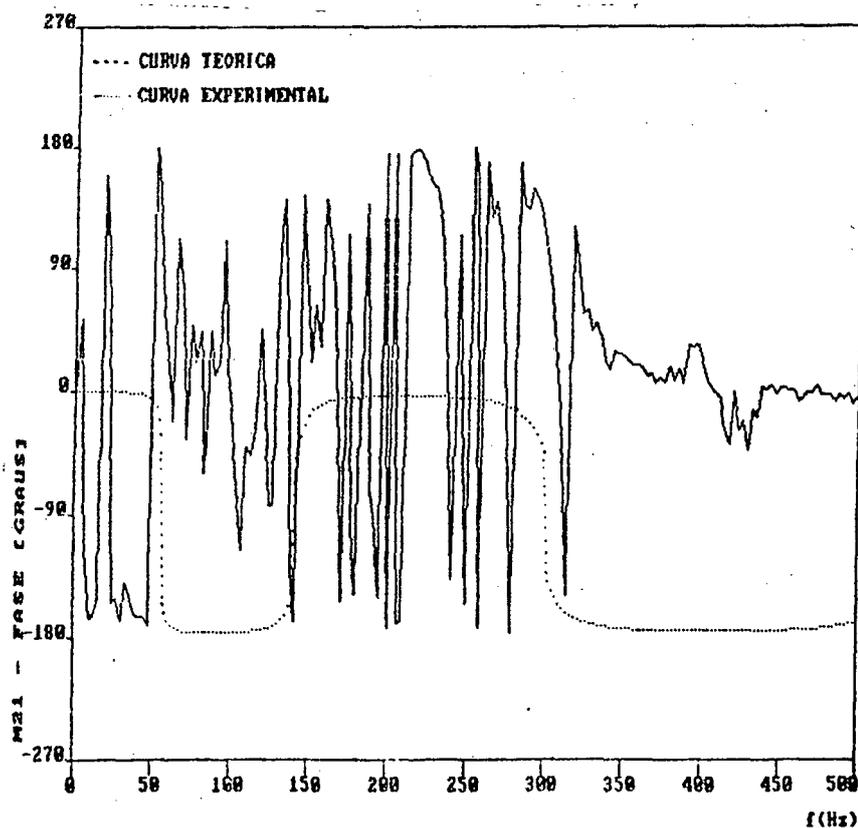


FIGURA 6.23 - Resultados teóricos e experimentais -  $M_{21}$  (fase)

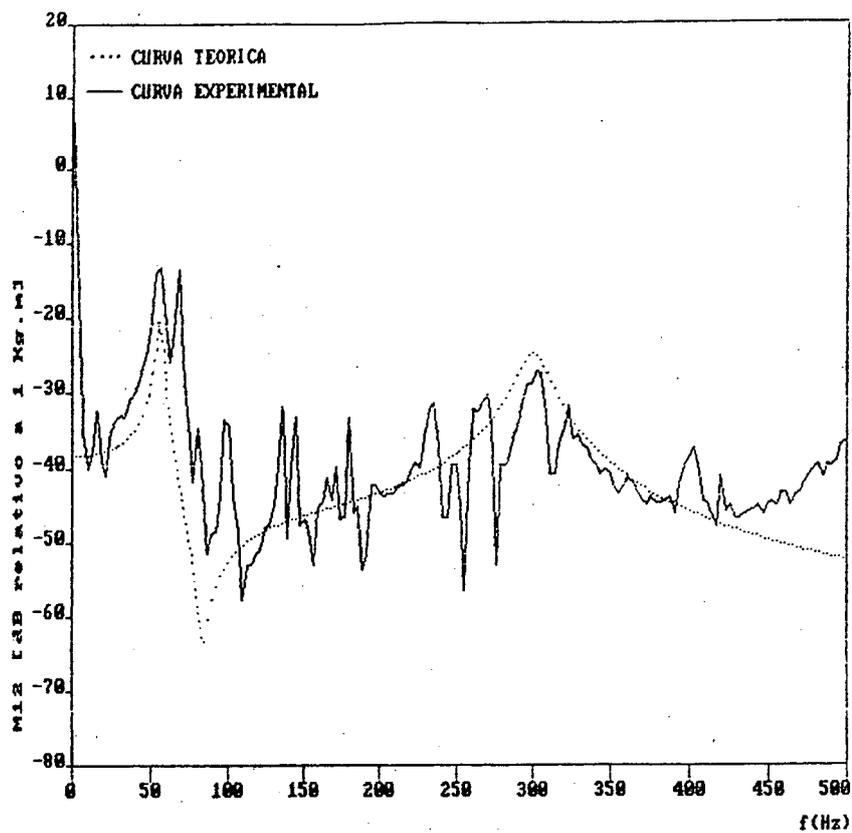


FIGURA 6.24 - Resultados teóricos e experimentais -  $M_{12}$  (módulo)

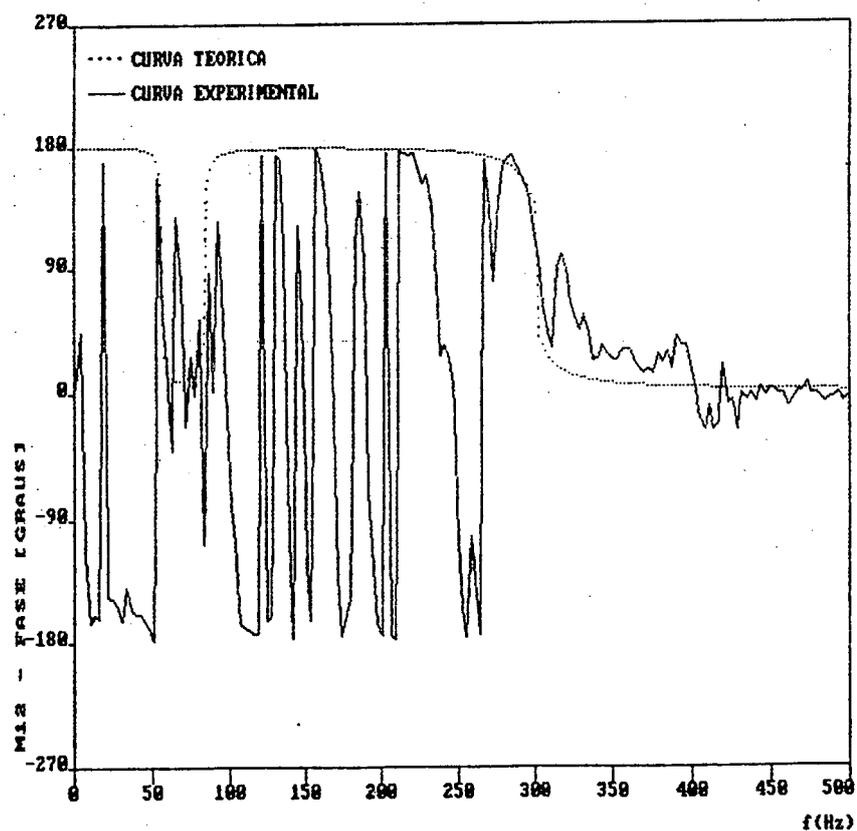


FIGURA 6.25 - Resultados teóricos e experimentais -  $M_{12}$  (fase)

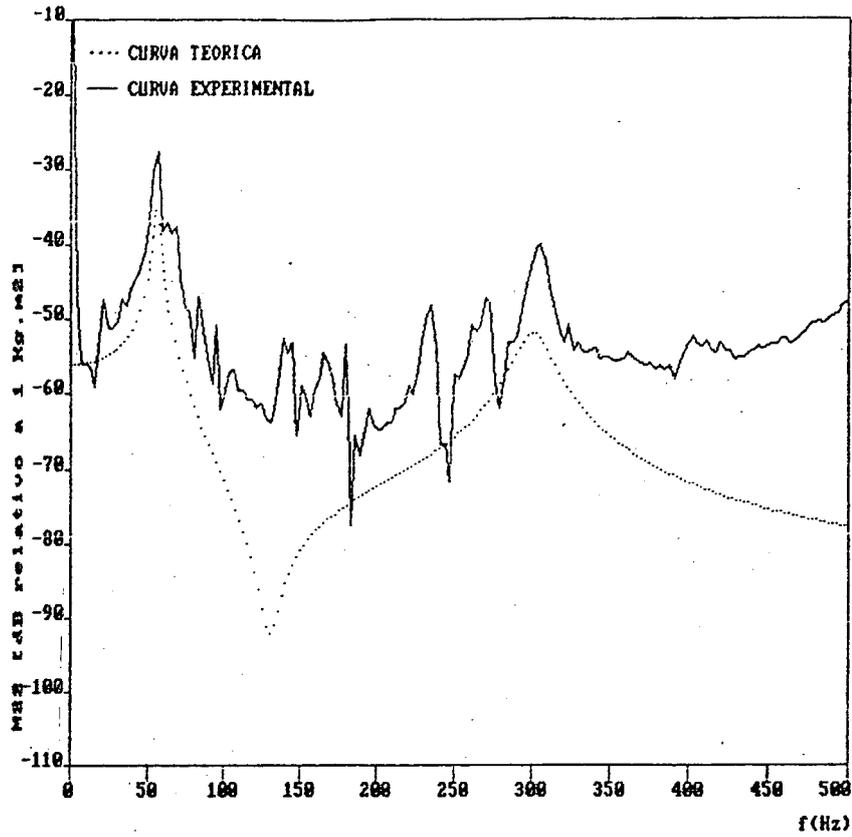


FIGURA 6.26 - Resultados teóricos e experimentais -  $M_{22}$  (módulo)

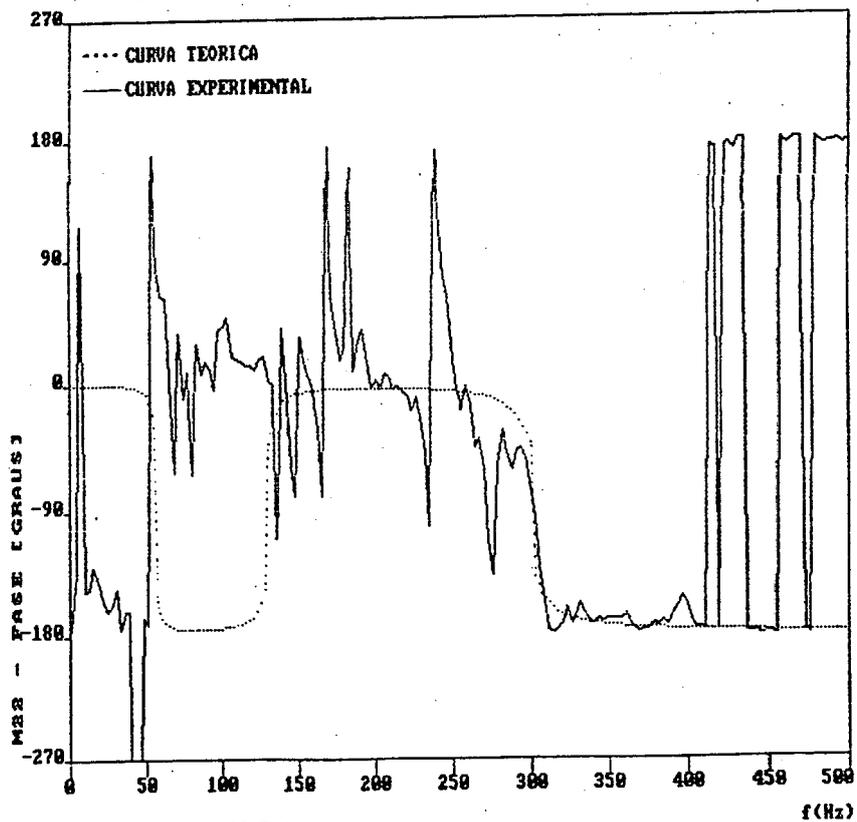


FIGURA 6.27 - Resultados teóricos e experimentais -  $M_{22}$  (fase)

## CAPÍTULO 7

### CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

A título de conclusão, fazem-se aqui alguns comentários dos estudos desenvolvidos nos capítulos anteriores, bem como algumas sugestões para trabalhos futuros.

Da teoria apresentada nos capítulos 2 e 3, e dos exemplos do capítulo 4, algumas vantagens do método de controle de vibrações por neutralizadores dinâmicos através de uma análise modal, proposto nesses capítulos, são evidentes. Uma delas está na simplicidade do método. No caso de neutralizadores de um grau de liberdade, viu-se que a análise torna-se extremamente simples, semelhante àquela da teoria clássica, não importando o número de neutralizadores ou o número de graus de liberdade da estrutura envolvidos.

Outra vantagem, ou, poder-se-ia mesmo salientar, uma grande vantagem do método, é o fato de se trabalhar apenas com os graus de liberdade da estrutura original. Tal vantagem vem do conceito das propriedades equivalentes dos neutralizadores dinâmicos, o qual apenas introduz propriedades de massa e amortecimento, ou rigidez e amortecimento na estrutura primária.

Outra vantagem a ser apontada ainda, é que este tipo de análise pode ser aplicado a estruturas de qualquer complexidade, desde que as mesmas tenham um comportamento linear e seja possível obter os correspondentes modelos modais. Tais modelos podem ser obtidos através de um programa de computador que utilize a técnica de elementos finitos, sendo as limitações ditadas pela própria técnica, ou programa.

Para que se possa aproveitar completamente as vantagens desse programa, é necessário, e isso fica como sugestão para um trabalho futuro, que se desenvolva um programa de computador pós-processador do programa de

elementos finitos. Este pós-processador teria por finalidade a otimização dos neutralizadores, mediante alguns dados básicos previamente escolhidos (massas e coordenadas segundo as quais os neutralizadores devem ser adicionados).

Conforme se viu, um conceito novo e muito importante, estendido do conceito introduzido por Espíndola, [4], no controle de vibrações por neutralizadores dinâmicos em sistemas de um grau de liberdade, é o de razão modal de respostas. Tal conceito é de grande importância na quantificação do efeito dos neutralizadores em reduzir a resposta do sistema primário. Este parâmetro poderá ser usado sempre que se desejar comparar diferentes soluções por diferentes conjuntos de neutralizadores dinâmicos.

Quanto ao neutralizador dinâmico do tipo viga sanduíche em balanço, viu-se que as curvas teóricas e experimentais, apesar de apresentarem comportamentos semelhantes, não apresentaram resultados tão satisfatórios quanto se gostaria. Os motivos das discrepâncias são inerentes tanto às curvas teóricas quanto às experimentais.

Para as curvas teóricas, levou-se em consideração a hipótese de que, na determinação da rigidez equivalente da viga sanduíche, os modos de vibração eram senoidais. Principalmente para o primeiro modo da viga em questão, esta é uma hipótese grosseira, devido às condições de contorno da mesma, ou seja, engastada em uma extremidade e com uma massa presa à extremidade livre. Sugere-se que em futuros trabalhos, tente-se obter a rigidez equivalente da viga sanduíche sem que haja necessidade de uma hipótese como esta. Um outro caminho, seria tentar obter a matriz de massas dinâmicas na base do neutralizador de tal maneira que ela seja função diretamente das propriedades de cada camada que compõe a viga sanduíche, sem precisar obter uma rigidez equivalente e sem se fazer a hipótese dos modos senoidais. Esta nova dedução poderia ser tentada através do uso de matrizes de transferência.

Quanto às curvas experimentais dos elementos da matriz de massas dinâmicas, seria aconselhável que se tentasse obter as mesmas por um processo

direto, a fim de evitar o procedimento de inversão da matriz no analisador de Fourier, já apontado anteriormente como causa de instabilidade, devido à perda de precisão do computador. Como são apenas dois graus de liberdade, essa nova determinação poderia ser feita conforme o esquema da figura 7.1.

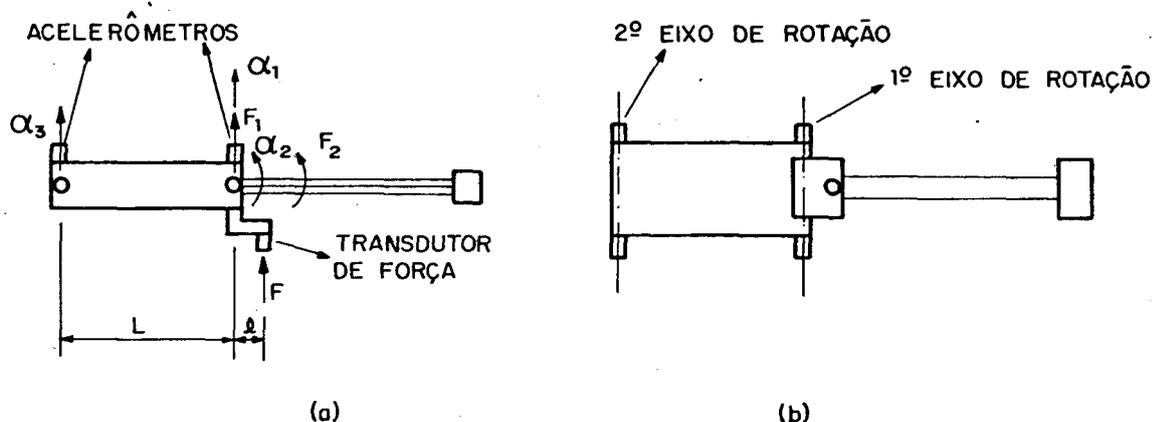


FIGURA 7.1 - Dispositivo para determinação direta da matriz de massas dinâmicas na base do neutralizador, (a) vista de cima, (b) vista lateral.

Essa figura mostra uma vista de cima e uma vista lateral de um dispositivo com essa finalidade. Para a primeira posição de fixação do dispositivo (no primeiro eixo de rotação), tem-se as condições:

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= 0 \\
 F_1 &= F \\
 F_2 &= F \cdot l \\
 \alpha_2 &= \frac{-\alpha_3}{L}
 \end{aligned}
 \tag{7.1}$$

donde, dois dos termos da matriz de massas dinâmicas podem ser obtidos:

$$M_{12}^*(\Omega) = \frac{F_1^*(\Omega)}{\alpha_2^*(\Omega)}
 \tag{7.2}$$

$$M_{22}^*(\Omega) = \frac{F_2^*(\Omega)}{\alpha_2^*(\Omega)}
 \tag{7.3}$$

Para a segunda posição de fixação do dispositivo (segundo eixo de rotação), passa-se a ter as condições:

$$\begin{aligned}\alpha_3 &= 0 \\ F_1 &= F \\ F_2 &= F \cdot l \\ \alpha_2 &= \frac{\alpha_1}{L}\end{aligned}\tag{7.4}$$

Consequentemente, os dois termos restantes da matriz de massas dinâmicas ficam:

$$M_{11}^*(\Omega) = \frac{F_1^*(\Omega) - M_{12}^*(\Omega) \cdot \alpha_2^*(\Omega)}{\alpha_1^*(\Omega)} = \frac{F_1^*(\Omega)}{\alpha_1^*(\Omega)} - \frac{M_{12}^*(\Omega)}{L}\tag{7.5}$$

$$M_{21}^*(\Omega) = \frac{F_2^*(\Omega) - M_{22}^*(\Omega) \cdot \alpha_2^*(\Omega)}{\alpha_1^*(\Omega)} = \frac{F_2^*(\Omega)}{\alpha_1^*(\Omega)} - \frac{M_{22}^*(\Omega)}{L}\tag{7.6}$$

Observe-se que o dispositivo da figura 7.1 deverá ser construído com precisão, de modo a se evitar folgas nos mancais. É aconselhável também, que as frequências naturais do dispositivo fiquem acima da faixa de frequências de interesse do neutralizador.

Um estudo de otimização desse tipo de neutralizador dinâmico deverá ainda ser levado a cabo. Sugere-se que se utilize uma formulação semelhante a do capítulo 3, considerando os  $\bar{n}$  modos normais de interesse. As propriedades de massa e amortecimento equivalentes podem ser obtidas de modo semelhante a (2.17) e (2.18), agora na forma de matrizes. Devido ao fato de se tratar de matrizes cujos elementos fora das diagonais principais são não nulos, resultarão equações acopladas. O novo procedimento de otimização poderá ser um procedimento semelhante ao de técnicas de pesquisa operacional, visando a minimização dos picos das curvas de respostas.

## APÊNDICE A

RAZÃO DE RESPOSTAS DE UM SISTEMA DE UM GRAU DE  
LIBERDADE COM NEUTRALIZADOR MCK

Suponha-se que sobre um sistema primário de um grau de liberdade seja fixado um neutralizador MCK conforme a figura A.1.

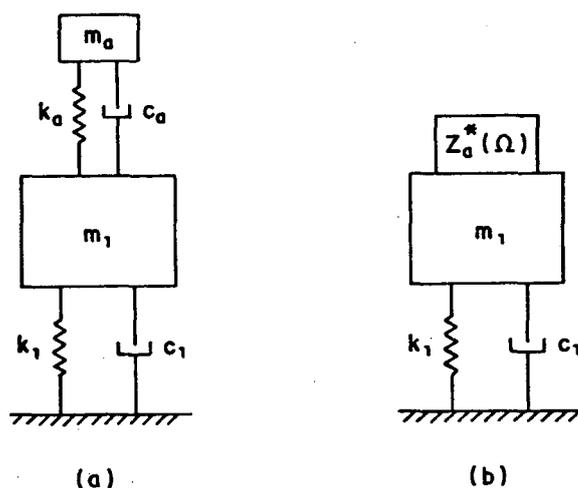


FIGURA A.1 - Neutralizador MCK fixado a um sistema primário de um grau de liberdade (a) e sua representação equivalente em termos da impedância mecânica (b).

As impedâncias mecânicas dos sistemas primário e secundário no ponto de fixação do neutralizador se escrevem, respectivamente:

$$Z^*(\Omega) = -i \frac{k_1 - \Omega^2 m_1 + i\Omega c_1}{\Omega} \quad (\text{A.1})$$

$$Z_a^*(\Omega) = i \Omega m_a \frac{k_a + i\Omega c_a}{k_a - \Omega^2 m_a + i\Omega c_a} \quad (\text{A.2})$$

A razão complexa de respostas em termos das impedâncias mecânicas dos sistemas primário e secundário, é definida por:

$$R^*(\Omega) = \frac{Z^*(\Omega)}{Z^*(\Omega) + Z_a^*(\Omega)} \quad (\text{A.3})$$

Substituindo (A.1) e (A.2) em (A.3), fica:

$$R^*(\Omega) = \frac{(k_1 - \Omega^2 m_1 + i\Omega c_1)(k_a - \Omega^2 m_a + i\Omega c_a)}{(k_1 - \Omega^2 m_1 + i\Omega c_1)(k_a - \Omega^2 m_a + i\Omega c_a) - \Omega^2 m_a (k_a + i\Omega c_a)} \quad (\text{A.4})$$

Que pode ser posta em função dos seguintes parâmetros adimensionais:

$$\begin{aligned} \Omega_1^2 \triangleq \frac{k_1}{m_1} & ; & \Omega_a^2 \triangleq \frac{k_a}{m_a} \\ \beta \triangleq \frac{\Omega}{\Omega_1} & ; & \alpha \triangleq \frac{\Omega_a}{\Omega_1} \\ \xi_1 \triangleq \frac{c_1}{2m_1 \Omega_1} & ; & \xi_a \triangleq \frac{c_a}{2m_a \Omega_a} \\ \mu \triangleq \frac{m_a}{m_1} & ; & \frac{k_a}{k_1} = \alpha^2 \mu \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Assim, (A.4) se escreve:

$$R^*(\Omega) = \frac{(1 - \beta^2 + i2\xi_1 \beta)(\alpha^2 - \beta^2 + i2\xi_a \alpha \beta)}{(1 - \beta^2 + i2\xi_1 \beta)(\alpha^2 - \beta^2 + i2\xi_a \alpha \beta) - \mu \beta^2 (\alpha^2 + i2\xi_a \alpha \beta)} \quad (\text{A.6})$$

Cujo módulo é a razão de respostas:

$$R(\Omega) = \left\{ \frac{R_N^2 + I_N^2}{R_D^2 + I_D^2} \right\}^{1/2} \quad (\text{A.7})$$

onde:

$$R_N = (1-\beta^2)(\alpha^2-\beta^2)-4\xi_1\xi_a\alpha\beta^2$$

$$I_N = 2\xi_1\beta(\alpha^2-\beta^2)+2\xi_a\alpha\beta(1-\beta^2)$$

(A. 8)

$$R_D = (1-\beta^2)(\alpha^2-\beta^2)-4\xi_1\xi_a\alpha\beta^2-\mu\alpha^2\beta^2$$

$$I_D = 2\xi_1\beta(\alpha^2-\beta^2)+2\xi_a\alpha\beta(1-\beta^2-\mu\beta^2)$$

## APÊNDICE B

## OTIMIZAÇÃO DOS NEUTRALIZADORES MCK E MC APLICADOS A

## UM SISTEMA DE UM GRAU DE LIBERDADE :

## B.1 - NEUTRALIZADOR MCK :

Partindo-se da equação do movimento do sistema de um grau de liberdade com neutralizador dinâmico MCK, representado por suas propriedades de massa e amortecimento equivalentes, isto é:

$$[k_1 - \Omega^2(m_1 + m_{eq}) + i\Omega(c_1 + c_{eq})] Q_1^*(\Omega) = F_1^*(\Omega) \quad (B.1)$$

e sabendo-se que:

$$m_{eq}(\Omega) = m_a \frac{k_a(k_a - \Omega^2 m_a) + (\Omega c_a)^2}{(k_a - \Omega^2 m_a)^2 + (\Omega c_a)^2} \quad (B.2)$$

$$c_{eq}(\Omega) = \frac{\Omega^4 m_a^2 c_a}{(k_a - \Omega^2 m_a)^2 + (\Omega c_a)^2} \quad (B.3)$$

pode-se obter uma expressão para o deslocamento adimensional do sistema primário, ou seja:

$$\frac{Q_1^*(\Omega)}{F_1^*(\Omega)/k_1} = \frac{k_1 [(k_a - \Omega^2 m_a) + i\Omega c_a]}{(k_1 - \Omega^2 m_1 + i\Omega c_1)(k_a - \Omega^2 m_a + i\Omega c_a) - \Omega^2 m_a (k_a + i\Omega c_a)} \quad (B.4)$$

Utilizando as definições (A.5), a expressão (B.4) se escreve:

$$\frac{Q_1^*(\Omega)}{F_1^*(\Omega)/k_1} = \frac{(\alpha^2 - \beta^2) + i2\xi_a \alpha\beta}{(1 - \beta^2 + i2\xi_1 \beta)(\alpha^2 - \beta^2 + i2\xi_a \alpha\beta) - \mu\beta^2(\alpha^2 + i2\xi_a \alpha\beta)} \quad (B.5)$$

ou, em módulo:

$$\left| \frac{Q_1^*(\Omega)}{F_1^*(\Omega)/k_1} \right| = \left\{ \frac{R_N^2 + I_N^2}{R_D^2 + I_D^2} \right\}^{1/2} \quad (\text{B.6})$$

onde:

$$\begin{aligned} R_N &= \alpha^2 - \beta^2 \\ I_N &= 2\xi_a \alpha\beta \\ R_D &= (1 - \beta^2)(\alpha^2 - \beta^2) - 4\xi_1 \xi_a \alpha\beta^2 - \mu\alpha^2\beta^2 \\ I_D &= 2\xi_1 \beta(\alpha^2 - \beta^2) + 2\xi_a \alpha\beta(1 - \beta^2 - \mu\beta^2) \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Esta, desprezando-se o amortecimento do sistema primário, é a expressão da teoria clássica para otimização de neutralizadores MCK, [1] e [2].

Na figura B.1, encontram-se algumas curvas dos deslocamentos adimensionais para uma razão de massas  $\mu=0,2$ , razão de frequências naturais  $\alpha=1,0$  e para várias razões de amortecimentos. Note-se que todas as curvas passam por dois pontos A e B, chamados de pontos fixos, independentemente da razão de amortecimentos  $\xi_a$ .

O procedimento de otimização do neutralizador consiste em minimizar os picos de deslocamentos. Para isso, primeiramente, encontra-se uma razão de frequências naturais  $\alpha$  para a qual as amplitudes dos pontos fixos sejam iguais. A razão  $\alpha_{ot}$  que satisfaz esse requisito é:

$$\alpha_{ot} = \frac{1}{1 + \mu} \quad (\text{B.8})$$

O passo seguinte é achar um valor da razão de amortecimentos  $\xi_a$  que faça com que os picos dos deslocamentos ocorram próximos aos pontos fixos.

Um procedimento aproximado [2], onde a amplitude do deslocamento num ponto intermediário entre os pontos fixos é tomada igual a dos pontos fixos, leva à seguinte razão de amortecimentos:

$$\xi_{a_{ot}} = \sqrt{\frac{1}{2(1+\mu)}} \quad (\text{B.9})$$

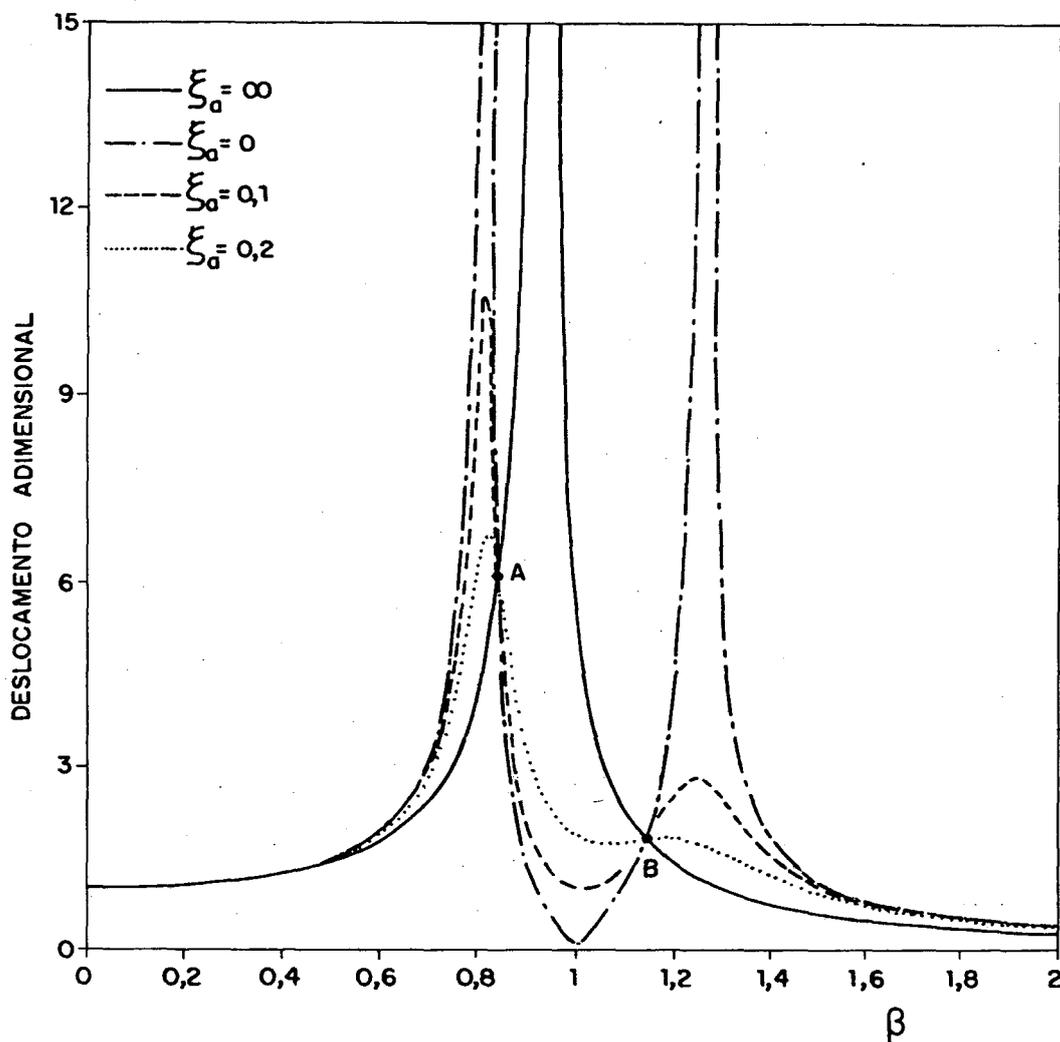


FIGURA B.1 - Deslocamentos adimensionais para razão de massas  $\mu=0,2$ , razão de frequências naturais  $\alpha=1,0$  e quatro diferentes razões de amortecimentos  $\xi_a$ .

Um procedimento mais apurado, considerando o caso onde  $\alpha=\alpha_{ot}$ , leva em conta o fato de que, quando a tangente à curva do deslocamento adimensional é horizontal num dos pontos fixos, ela será praticamente horizontal no outro ponto fixo. Calculando o valor do amortecimento que torna a tangente horizontal em cada um dos pontos fixos e tomando a média, de acordo com a

referência [1], a razão ótima de amortecimentos fica:

$$\xi_{ot} = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1+\mu)^3}} \quad (\text{B.10})$$

Essa razão de amortecimentos, neste caso, encontra-se definida na referência [1] por:

$$\xi = \frac{c_a}{2m_a \Omega_1} \quad (\text{B.11})$$

Em termos de  $\xi_a$ , pode-se escrever:

$$\xi = \frac{c_a}{2m_a \Omega_a} \frac{\Omega_a}{\Omega_1} = \alpha \xi_a \quad (\text{B.12})$$

Donde,

$$\xi_{a_{ot}} = \frac{\xi_{ot}}{\alpha_{ot}} \quad (\text{B.13})$$

Substituindo (B.8) e (B.10) em (B.13) obtém-se:

$$\xi_{a_{ot}} = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1+\mu)}} \quad (\text{B.14})$$

Na figura B.2 encontram-se as curvas dos deslocamentos adimensionais para o valor ótimo da razão de frequências naturais  $\alpha_{ot}$ , sendo que para uma delas  $\xi_a = \xi_{a_{ot}}$ .

A figura B.3 mostra um gráfico onde diferentes neutralizadores MCK foram otimizados para um mesmo sistema primário. Para cada curva, utilizou-se uma massa diferente para o neutralizador, resultando, de acordo com (B.8) e (B.14), diferentes parâmetros ótimos  $\alpha_{ot}$  e  $\xi_{a_{ot}}$ . Observa-se dessas curvas que a medida em que aumenta a massa do sistema secundário, ou seja, a medida em

que aumenta a razão  $\mu$ , resultam amplitudes máximas de deslocamentos cada vez menores.

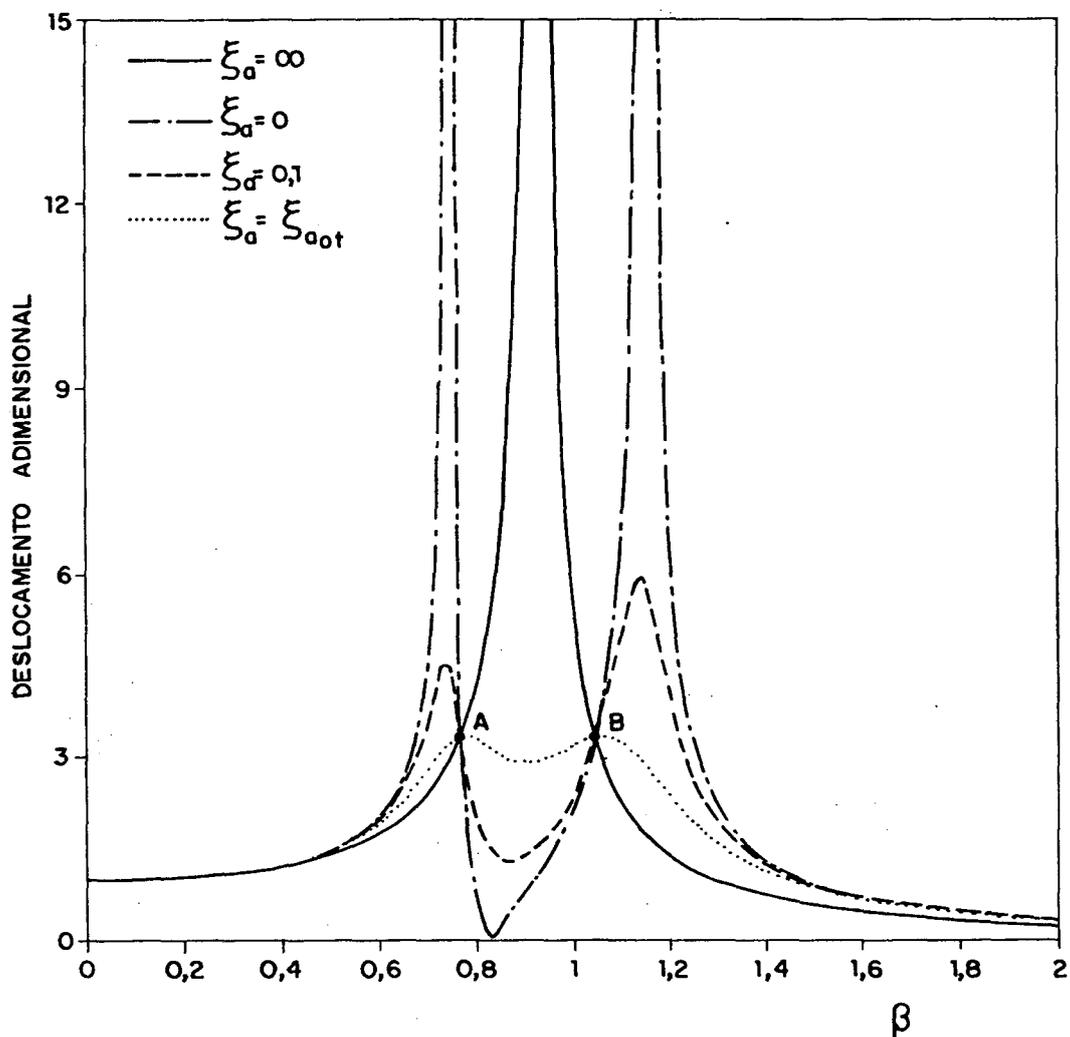


FIGURA B.2 - Deslocamentos adimensionais para razão de massas  $\mu=0,2$ , razão de frequências naturais  $\alpha=\alpha_{ot}$  e quatro diferentes razões de amortecimentos  $\xi_a$ .

Existe também o caso em que um amortecimento ótimo é determinado para o neutralizador dinâmico cuja frequência natural está sintonizada com a frequência natural do sistema primário, isto é, a situação onde  $\alpha=1,0$ . Neste caso o amortecimento é calculado de tal maneira que o mais alto dos picos passe com tangente horizontal no mais alto dos pontos fixos que, geralmente,

para tamanhos usuais do neutralizador, é o primeiro ponto fixo. Assim, de acordo com [1], pode-se obter:

$$\xi_{a_{ot}} = \left[ \frac{\mu(\mu+3) (1+\sqrt{\mu/(\mu+2)})}{8(1+\mu)} \right]^{1/2} \quad (\text{B.15})$$

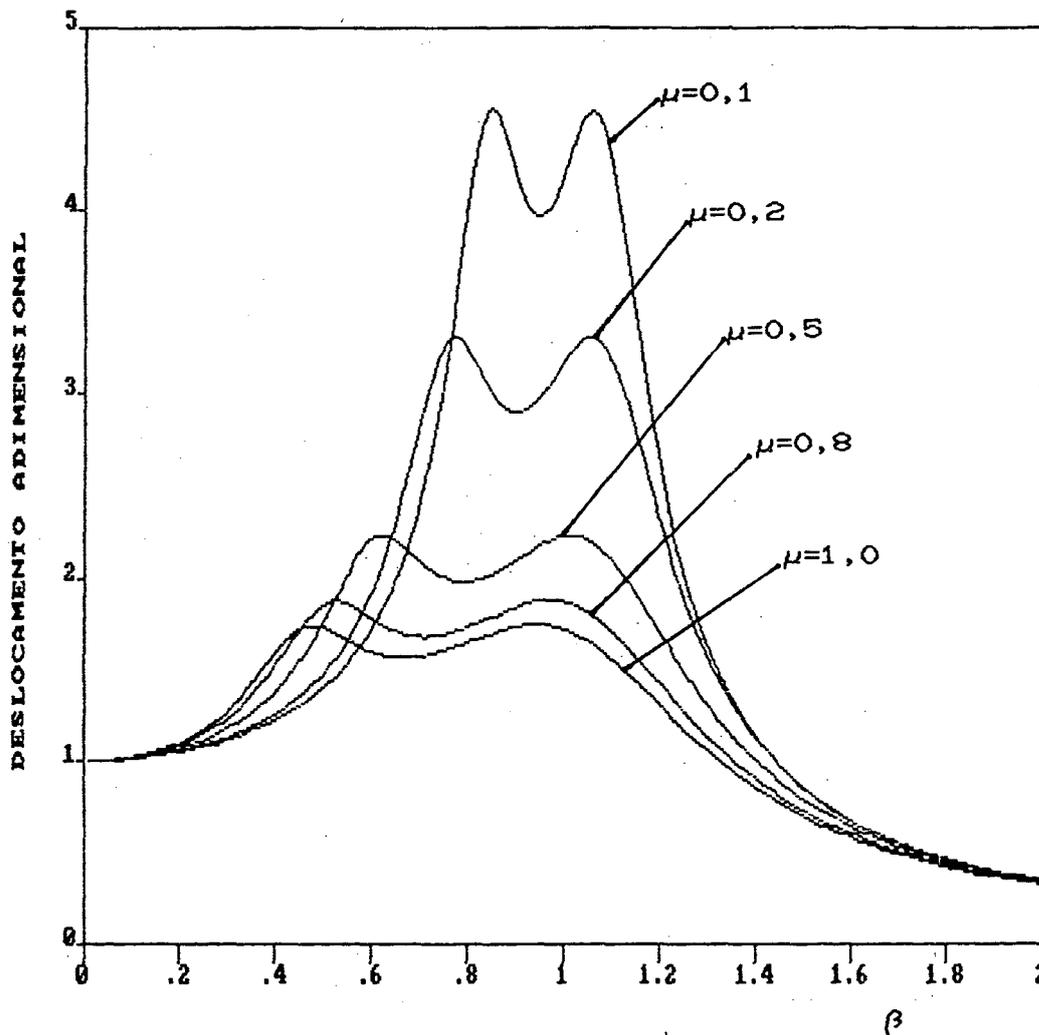


FIGURA B.3 - Deslocamentos adimensionais otimizados para diferentes casos da razão de massas  $\mu$ .

A figura B.4 ilustra a curva do deslocamento adimensional com este amortecimento ótimo, onde a razão  $\alpha=1,0$  e a razão de massas  $\mu=0,2$  são as mesmas usadas nas curvas da figura B.1. Para visualizar os pontos fixos,

acha-se também representada a curva para um amortecimento infinito do sistema secundário.

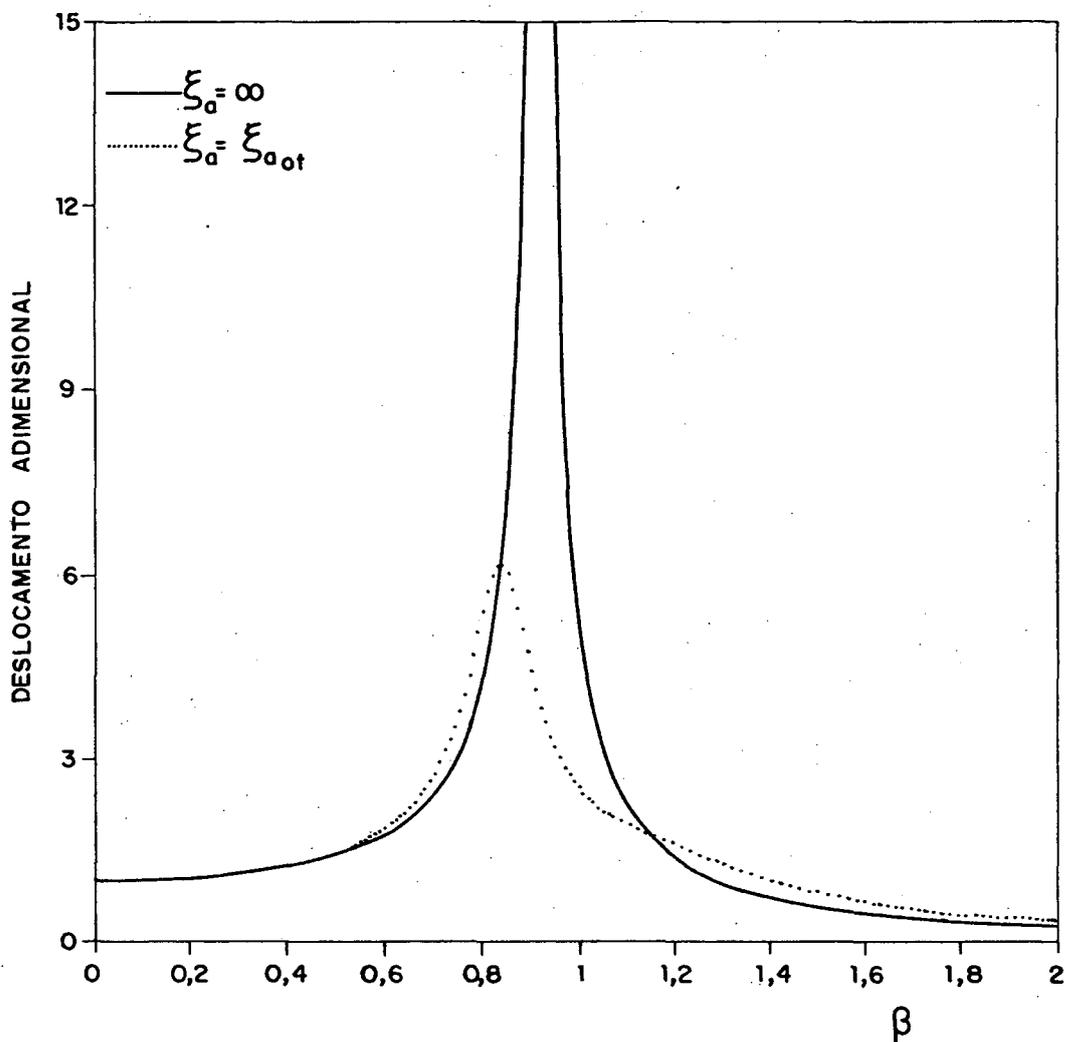


FIGURA B.4 - Deslocamentos adimensionais para razão de massas  $\mu=0,2$ , razão de frequências naturais  $\alpha=1,0$  e razão de amortecimentos  $\xi_a = \xi_{a_{ot}}$  e  $\xi_a = \infty$ .

## B.2 - NEUTRALIZADOR MC :

Neste caso não existe o elemento de rigidez  $k_a$  e vê-se que também  $\Omega_a$  e  $\alpha$  são nulos. A razão de amortecimentos  $\xi_a$  torna-se infinita e, portanto, utilizar-se-á a razão  $\xi$  definida por (B.11). A equação do módulo do

deslocamento adimensional agora se escreve:

$$\left| \frac{Q_1^*(\Omega)}{F_1^*(\Omega)/k_1} \right| = \left\{ \frac{\beta^2 + 4\xi^2}{[-\beta(1-\beta^2) - 4\xi\xi_1\beta]^2 + [2\xi(1-\beta^2 - \mu\beta^2) - 2\xi_1\beta^2]^2} \right\}^{1/2} \quad (\text{B.16})$$

A figura B.5 mostra as curvas dos deslocamentos adimensionais para alguns casos de amortecimentos. Nota-se que o primeiro ponto fixo localiza-se na frequência adimensional  $\beta=0$ .

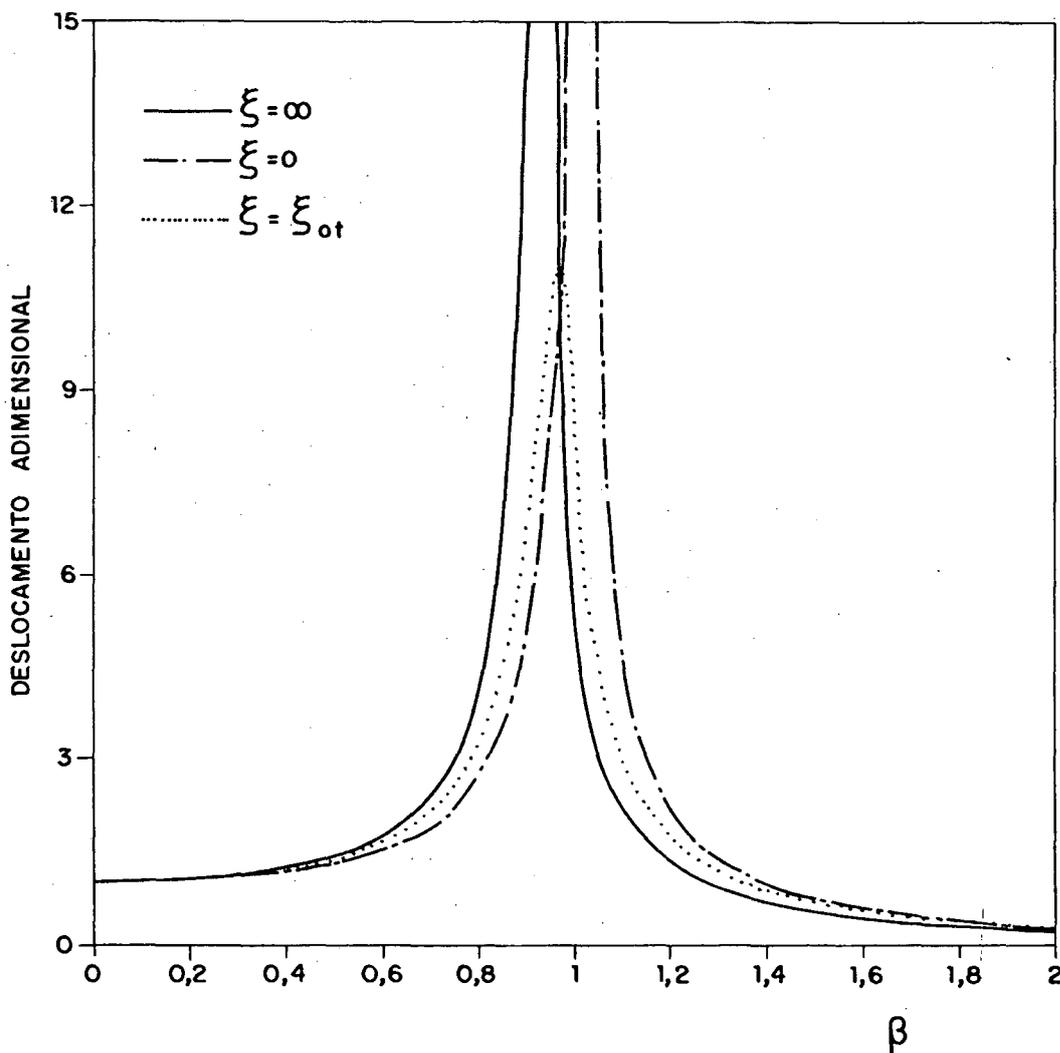


FIGURA B.5 - Deslocamentos adimensionais do sistema primário com neutralizador MC para razão de massas  $\mu=0,2$  e três diferentes razões de amortecimentos  $\xi$ .

O procedimento de otimização do amortecimento consiste aqui, em fazer com que o pico de ressonância localize-se na frequência correspondente ao segundo ponto fixo, o que fornece:

$$\xi_{ot} = \sqrt{\frac{1}{2(2+\mu)(1+\mu)}} \quad (\text{B. 17})$$

A curva correspondente ao amortecimento ótimo acha-se também na figura B.5.

## APÊNDICE C

### CONSIDERAÇÕES A RESPEITO DE SISTEMAS DE MÚLTIPLOS

#### GRAUS DE LIBERDADE

##### C.1 - EXCITAÇÃO POR FORÇAS APLICADAS :

Seja o seguinte sistema de  $n$  equações diferenciais representando um problema de excitação por um conjunto de forças aplicadas  $\{f(t)\}$ :

$$[m]\{\ddot{q}\} + [c]\{\dot{q}\} + [k]\{q\} = \{f\} \quad (C.1)$$

onde  $\{q(t)\}$  é um vetor de coordenadas generalizadas absolutas.

Chamando de  $[\Phi]$  a matriz modal do sistema não amortecido, as coordenadas generalizadas  $\{q\}$  podem ser expressas em termos das coordenadas principais  $\{p\}$  através da transformação:

$$\{q\} = [\Phi]\{p\} \quad (C.2)$$

Supondo que a matriz de amortecimento viscoso  $[c]$  obedeça ao modelo de amortecimento proporcional, sendo portanto diagonalizável, as equações (C.1) serão desacopladas através da transformação (C.2) e da pré-multiplicação de ambos os membros por  $[\Phi]^T$ :

$$\left[ \begin{matrix} m_{jN} \\ \vdots \\ m_{jN} \end{matrix} \right] \left\{ \ddot{p} \right\} + \left[ \begin{matrix} c_{jN} \\ \vdots \\ c_{jN} \end{matrix} \right] \left\{ \dot{p} \right\} + \left[ \begin{matrix} k_{jN} \\ \vdots \\ k_{jN} \end{matrix} \right] \left\{ p \right\} = \left[ \Phi \right]^T \left\{ f \right\} \quad (C.3)$$

Escrevendo apenas a  $j$ -ésima equação, fica:

$$m_j \ddot{p}_j + c_j \dot{p}_j + k_j p_j = \gamma_j \quad j=1, n \quad (C.4)$$

O termo  $\gamma_j$  representa o somatório das contribuições de todas as forças na excitação do  $j$ -ésimo modo.

A matriz modal  $[\Phi]$  poderia também ser ortonormalizada em relação à

matriz de massas, ou seja, normalizada de tal maneira que a diagonalização da matriz de massas  $[m]$  resultasse na matriz identidade. Neste caso, a  $j$ -ésima equação ficaria:

$$\ddot{p}_j + 2\xi_j \Omega_j \dot{p}_j + \Omega_j^2 p_j = \gamma_j' \quad j=1, n \quad (C.5)$$

## C.2 - EXCITAÇÃO POR DESLOCAMENTO PRESCRITO :

De maneira semelhante, caso a estrutura, ao invés de forças, fosse excitada por um deslocamento prescrito  $\vec{s}(t)$  da base, as equações diferenciais em termos das coordenadas generalizadas absolutas poderiam ser escritas:

$$[m]\{\ddot{q}\} + [c]\{\dot{q}\} + [k]\{q\} = [c]\{\dot{s}\} + [k]\{s\} \quad (C.6)$$

Na expressão acima supõe-se que a estrutura sofre um deslocamento imposto  $\vec{s} = s \vec{u}_s$ , onde  $\vec{u}_s$  é um vetor unitário na direção da excitação. O  $j$ -ésimo termo do vetor  $\{s\}$ , representa a projeção de  $\vec{s}$  sobre a  $j$ -ésima coordenada generalizada, ou seja:

$$s_j = \vec{s} \cdot \frac{\partial \vec{s}}{\partial q_j} = s \vec{u}_s \cdot \vec{u}_{q_j} = s \alpha_j \quad (C.7)$$

onde o vetor  $\frac{\partial \vec{s}}{\partial q_j} = \vec{u}_{q_j}$  é o vetor unitário na direção  $q_j$ , e  $\alpha_j$  é o cosseno diretor, supostamente constante no tempo, entre o vetor  $\vec{s}$  e a coordenada generalizada  $q_j$ .

Supondo que  $\vec{s}$  seja retilíneo, tem-se:

$$\dot{s}_j = \dot{s} \alpha_j \quad (C.8)$$

e,

$$\ddot{s}_j = \ddot{s} \alpha_j \quad (C.9)$$

Então,

$$\{s\} = \{\alpha\} s \quad (C.10)$$

$$\{\dot{s}\} = \{\alpha\} \dot{s} \quad (C.11)$$

$$\{\ddot{s}\} = \{\alpha\} \ddot{s} \quad (C.12)$$

A equação (C.6) pode ainda ser colocada em termos das coordenadas generalizadas relativas  $\{y\}$ , definidas por:

$$\{y\} = \{q\} - \{s\} \quad (C.13)$$

Substituindo (C.13) em (C.6), fica:

$$[m]\{\ddot{y}\} + [c]\{\dot{y}\} + [k]\{y\} = -[m]\{\ddot{s}\} = -[m]\{\alpha\}\ddot{s} \quad (C.14)$$

Fazendo uma transformação de coordenadas de forma semelhante a (C.2), ou seja:

$$\{y\} = [\Phi]\{p\} \quad (C.15)$$

e aplicando esta transformação em (C.14), novamente supondo que o amortecimento seja do tipo viscoso proporcional, o sistema de equações desacoplado se escreve:

$$[m_{jN}]\{\ddot{p}\} + [c_{jN}]\{\dot{p}\} + [k_{jN}]\{p\} = -[\Phi]^T [m] \{\alpha\} \ddot{s} \quad (C.16)$$

Escrevendo apenas a j-ésima equação,

$$m_j \ddot{p}_j + c_j \dot{p}_j + k_j p_j = -\gamma_j \ddot{s} \quad j=1, n \quad (C.17)$$

$\gamma_j$  agora representa a parcela da excitação que é usada para excitar o j-ésimo modo e é chamado de fator de participação modal. Note-se que este fator é função das características da estrutura e da direção da excitação.

Utilizando a ortonormalização da matriz modal em relação à matriz de massas, a j-ésima equação pode ainda ser escrita:

$$\ddot{p}_j + 2\xi_j \Omega_j \dot{p}_j + \Omega_j^2 p_j = -\gamma'_j \ddot{s} \quad j=1, n \quad (C.18)$$

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Den Hartog, J.P., "Mechanical Vibrations", Dover Publications, New York, 1985
- [2] Harris, C.M., Crede, C.H., "Shock and Vibration Handbook", McGraw-Hill Book Company, New York, 1976
- [3] Snowdon, J.C., "Vibration and Shock in Damped Mechanical Systems", John Wiley & Sons, New York, 1968
- [4] Espíndola, J.J., "Apostila de Controle de Vibrações", Curso de Mestrado em Eng. Mecânica, Lab. de Vibrações e Acústica, UFSC, 1987
- [5] Hunt, J.B., "Dynamic Vibration Absorbers", Mechanical Engineering Publications LTD, London, 1979
- [6] Nashif, A.D., Jones, D.I.G. e Henderson, J.P., "Vibration Damping", John Wiley & Sons, New York, 1985
- [7] Wagner, H., Ramamurti, V., Sastry, R.V.R. e Hartmann, K., "Dynamics of Stocbridge Dampers", Journal of Sound and Vibration, 1973, 30(2), 207-220
- [8] Dhotarad, M.S., Ganesan, N. e Rao, B.V.A., "Transmission Line Vibrations", Journal of Sound and Vibration, 1978, 60(2), 217-237
- [9] Claren, R. e Diana, G., "Vibrazioni dei Conduttori", L'Energia Elettrica, 1966, 11, 677-688
- [10] Hagendorn, P., "On the Computation of Damped Wind-Excited Vibrations of Overhead Transmission Lines", Journal of Sound and Vibrations, 1982, 83(2), 253-271
- [11] Snowdon, J.C., "Steady-State Behavior of the Dynamic Absorber", The Journal of Acoustical Society of America, August, 1959, Vol. 31, Nº 8, 1096-1103

- [12] Snowdon, J.C., "Compound Mounting Systems That Incorporate Dynamic Vibration Absorbers", Journal of Engineering for Industry, Transactions of the ASME, November, 1975, 1204-1211
- [13] Snowdon, J.C., "Vibration of Cantilever Beams to Which Dynamic Absorbers are Attached", The Journal of the Acoustical Society of America, 1966, Vol. 39, Nº 5, Part 1, 878-881
- [14] Nobile, M.A. e Snowdon, J.C., "Viscously Damped Dynamic Absorbers of Conventional and Novel Design", J. Acoust. Soc. Am., May, 1977, Vol 61, Nº 5, 1198-1208
- [15] Snowdon, J.C., "Dynamic Vibration Absorbers That Have Increased Effectiveness", Journal of Engineering for Industry, Transactions of the ASME, August, 1974, 940-945
- [16] Snowdon, J.C. e Nobile, M.A., "Beamlike Dynamic Vibration Absorbers", Acustica, 1980, Vol. 44, 98-108
- [17] Snowdon, J.C., Wolfe, A.A. e Kerlin, R.L., "The Cruciform Dynamic Vibration Absorber", J. Acoust. Soc. Am., June, 1984, 75(6), 1792-1799
- [18] Jacquot, R.G. e Foster, J.E., "Optimal Cantilever Dynamic Vibration Absorber", Journal of Engineering for Industry, Transactions of the ASME, February, 1977, 138-141
- [19] Nashif, A.D. e Jones, D.I.G., "A Resonant Beam Tuned Damping Device", Journal of Engineering for Power, July, 1969, 143-148
- [20] Jones, D.I.G., Nashif, A.D. e Stargardter, H., "Vibrating Beam Dampers for Reducing Vibrations in Gas Turbine Blades", Journal of Engineering for Power, January, 1975, 111-116
- [21] Lopes, E.M.O., "Um Estudo da Precisão do Método da Viga Vibrante Aplicado à Determinação das Propriedades Dinâmicas de Elastômeros", Dissertação de Mestrado, UFSC, 1989

- [22] Ross, D., Ungar, E.E., e Kerwin Jr., E.M.; "Damping of Plate Flexural Vibrations by Means of Viscoelastic Laminae", ASME, New York, 1959, 49-88
- [23] Rogers, L. e Nashif, A.D., "Computerized Processing and Empirical Representation of Viscoelastic Materials Property and Preliminary Constrained Layer Damping Treatment Design", Shock and Vibration Bulletin, 1981, 51
- [24] Espíndola, J.J., "Relatório Final do Projeto de Isoladores Aeronáuticos", Laboratório de Vibrações e Acústica, UFSC, 1990
- [25] Ewins, D.J., "Modal Testing: Theory and Practice", Research Studies Press LTD, 1984