

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO  
E SISTEMAS

CONTROLE DE ESTOQUE PARA PRODUTOS DETERIORÁVEIS.  
ESTADO DA ARTE.

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA  
CATARINA PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM  
ENGENHARIA.

ANA REGINA DE AGUIAR DUTRA

FLORIANÓPLIS, DEZEMBRO DE 1990.



0.192.337-6

UFSC-BU

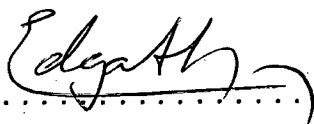
CONTROLE DE ESTOQUE PARA PRODUTOS DETERIORÁVEIS.  
ESTADO DA ARTE.

ANA REGINA DE AGUIAR DUTRA

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO  
DO TÍTULO DE

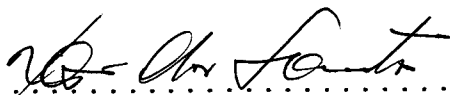
MESTRE EM ENGENHARIA

ESPECIALIDADE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO E APROVADA EM SUA  
FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO.



.....  
Prof. EDGAR AUGUSTO LANZER , PH. D.

Orientador



.....  
Prof. NERI DOS SANTOS , Dr. Ing.

Coordenador do curso.

Banca Examinadora:

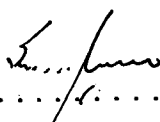


.....  
Prof. EDGAR AUGUSTO LANZER , Ph. D.

Presidente - orientador.



.....  
Prof. RICARDO MIRANDA BARCIA , Ph. D.



.....  
Prof. SÉRGIO FERNANDO MAYERLE , M. Eng.

Dedico a minha familia,  
em especial a minha mãe

Deixo aqui os meus agradecimentos

- Ao professor Edgar Augusto Lanzer, pela total colaboração e orientação.
- Ao coordenador do curso, professor Neri dos Santos,
- Ao professor Ricardo Barcia Miranda e outros, pelos conhecimentos adquiridos,
- As funcionárias Zelita e Aldanei, pela ajuda prestada,
- Ao CNPQ, pela ajuda financeira,
- Aos colegas Anamaria, Gilson, Antônio, Névio e Kall, pela colaboração neste trabalho e durante o curso.

## RESUMO

A partir de 1963, vários autores interessaram-se em desenvolver modelos matemáticos de estoques, para um caso especial: ESTOQUES DE PRODUTOS DETERIORAVEIS.

O objetivo do trabalho é de reunir e organizar os modelos existentes na literatura, além de revisá-los criticamente. Assim construir-se-á uma bibliografia mais compacta, já que a existente apresenta-se bastante esparsa.

Apresenta-se resultados numéricos e sugestões para pesquisas futuras, no sentido de avaliar as alterações quando inclui-se os preços de vendas dos itens estocados, limitação na capacidade de estocagem, controle da demanda (via preços, promoções, propanga, etc) e por fim extender os modelos a vários itens.

ABSTRACT

Since 1963 several models for the control of inventories of products that are subject to deterioration have appeared in the literature of Operations Research. The objective of this dissertation was to put together and to review critically that literature, looking forward for developments and refinements that are still needed to widen their applicability to real world problems. Some numerical examples were utilized to compare the performance of alternative models under distinct hypothesis.

The main conclusion was that the existing models have nearly exhausted the possibilities of applications under their assumptions, so that what it seems to be needed now is a set of new models to tackle with multiple products, storage limitations and demand rate control through prices, sales promotions and the like.

SUMÁRIO

Lista de figuras .....	ix
Lista de quadros .....	x

**CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO**

1.1 - Origem do Trabalho .....	1
1.2 - Definição do Problema .....	2
1.3 - Objetivo do Trabalho .....	2
1.4 - Importância do Trabalho .....	3
1.5 - Metodologia .....	3
1.6 - Estrutura .....	3

**PARTE 1 - MODELOS DE ESTOQUES PARA PRODUTOS DETERIORÁVEIS COM DEMANDAS CONSTANTES E CONHECIDAS.**

**CAPÍTULO II - MODELOS DE LOTE ECONÓMICO.**

2.1 - Modelo matemático de Lote Económico para uma distribuição geral de deterioração .....	7
2.2 - Distribuição Exponencial Negativa para o tempo de deterioração do item .....	9
2.3 - Distribuição Weibull de 2-parâmetros para o tempo de deterioração do item .....	13
2.4 - Distribuição Weibull de 3-parâmetros para o tempo de deterioração de item .....	16
2.5 - Distribuição Gamma para o tempo de deterioração do item ..	21

**CAPÍTULO III - MODELOS DE NÍVEL DE PEDIDO**

3.1 - Modelo de Nível de Pedido quando o tempo é uma variável discreta .....	28
3.2 - Modelo de Nível de Pedido quando o tempo é uma variável contínua .....	33

## CAPÍTULO IV - MODELOS DE LOTE ECONÓMICO E PONTO DE PEDIDO

- 4.1 - Modelo de lote Económico e Ponto de Pedido quando tempo  
for contínuo .....42
- 4.2 - Modelo de Lote Económico e Ponto de Pedido quando o tempo é  
discreto.....46

## CAPÍTULO V - MODELOS DE ESTOQUES PARA PRODUTOS DETERIORÁVEIS COM TAXA DE REABASTECIMENTO FINITA.

- 5.1- Modelo de Lote Económico com taxa de reabastecimento  
finita .....49
- 5.2 - Modelo de Ponto de Pedido com taxa de reabastecimento  
finita.....53

## PARTE 2 - MODELOS DE ESTOQUES PARA PRODUTOS DETERIORÁVEIS COM DEMANDAS PROBABILÍSTICAS.

## CAPÍTULO VI - MODELOS DE ESTOQUES DE PONTO DE PEDIDO

- 6.1 - Modelos de Ponto de Pedido sem tempo de espera .....57
- 6.2 - Modelos de Ponto de Pedido e Lote Económico com tempo de  
espera .....65

## VII - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES .....70

- APÊNDICE 1 - Definições .....72
- APÊNDICE 2 - Aplicações e propriedades das distribuições  
Exponencial Negativa, Weibull e Gamma .....76
- APÊNDICE 3 - Fluxograma e resultados numéricos, referente ao  
capítulo 1 .....80
- APÊNDICE 4 - Equações matemáticas referente ao capítulo 6 ....84

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....87



FIGURA 1 : Ciclo de estoque com e sem esgotamento exponencial, incluindo demanda .....10

FIGURA 2 : Relação entre a taxa de deterioração e o tempo para a distribuição Weibull .....13

FIGURA 3 : Ciclo de estoque com e sem deterioração Weibull, incluindo demanda .....14

FIGURA 4 : Relação entre taxa de deterioração e o tempo para a distribuição de Weibull de 3-parâmetros .....19

FIGURA 5 : Ciclo de estoque com e sem deterioração Weibull de 3-parâmetros, incluindo demanda .....19

FIGURA 6 : Relação entre a taxa de deterioração Gamma e o tempo .....24

FIGURA 7 : Ciclo de estoque para o modelo de nível de pedido ...32

FIGURA 8 : Ciclo de estoque para o modelo de ponto de pedido, incluindo dois depósitos .....34

FIGURA 9 : Ciclo de estoque para o modelo de lote econômico com taxa de reabastecimento finita .....49

Figura 10 : Ciclo de estoque para o modelo de CHAUDHURY & CHAUDHURI [ 2 ] .....53

FIGURA 11 : Esgotamento do estoque sob a política  $(s_p, q)$  probabilística .....58

FIGURA 12 : Esgotamento do estoque sob a política  $(s, q_p)$  probabilísticas .....61

FIGURA 13 : Esgotamento do estoque sob a política  $(\sigma, q)$  probabilística .....67

Lista de quadros :

QUADRO 1 : Exemplo de estoque deteriorando-se a uma taxa de 10% .....	10
QUADRO 2 : Resultados numéricos do exemplo 3, para os modelos de COVERT & PHILIP [ 1 ] e PHILIP [ 15 ] .....	21
QUADRO 3.a : Resultados do exemplo 3, para os modelos estudados no capítulo 1 .....	25
QUADRO 3.b : Resultados obtidos pelos modelos, mediante as variações no ciclo de planejamento T .....	26
QUADRO 4 : Valores de $M(t_1)$ para diferentes valores de $t_1$ .....	32
QUADRO 5 : Resultados numéricos do exemplo 4, obtidos pelo modelo da seção (4.1), considerando ou não a deterioração .....	32
QUADRO 6 : Resumo dos resultados obtidos pelos modelos do capítulo 3, na resolução dos exemplos apresentados .....	40
QUADRO 7 : Resultados numéricos obtidos, pelos modelos estudados no capítulo 4 .....	48
QUADRO 8 : Resultados numéricos para o exemplo 8, obtidos pelo modelo da seção (5.1), considerando ou não a deterioração .....	52

## CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO

Desde o desenvolvimento do modelo de estoque de Wilson, em 1915, um número de artigos foram escritos analisando modelos matemáticos de estoques. A partir de 1963, vários autores, interessaram-se em desenvolver modelos matemáticos de estoques para um caso especial: Estoques de Produtos Deterioráveis.

O presente trabalho reúne modelos importantes de estoques destinados a resolverem problemas criados pela estocagem de produtos deterioráveis.

Frutas, verduras, alimentos em grãos, remédios, substâncias químicas e radioativas, líquidos voláteis e outros são exemplos de produtos, onde a deterioração ocorre durante o tempo normal de estocagem. O termo *deterioração* é definido pelos autores como apodrecimento, estrago ou perda, tal que o produto não pode ser usado para seus fins originais.

Um problema de estoques é um problema de decisão ótima em relação a um sistema de estoques. Ou, em outras palavras, um problema de estoques, se relaciona com a obtenção da solução de custo mínimo total de um sistema de estoques.

As decisões são sempre baseadas nos custos do sistema de estoques, mas não de uma forma direta: Qual seria o custo mínimo do sistema? Mas na forma de resposta às duas perguntas:

- a) Quando devo repor os estoques ?
- b) Quanto devo repor aos estoques ?

O elemento tempo e o elemento quantidade são variáveis sujeitos a controle. Portanto o principal objetivo do problema de estoque é o de encontrar valores específicos das variáveis que minimizem o custo total. Quanto e quando pedir são questões fundamentais que um controlador de estoque tenta resolver e modelos matemáticos são desenhados para propor uma solução adequada.

A complexidade dos problemas de estoques se dá pela diversidade de situações reais, para o qual diferentes hipóteses básicas sugerem soluções diferentes.

### 1.1- Origem do Trabalho

A realização deste trabalho tem origem nas seguintes

observações:

1) Inexistência, na literatura, de uma bibliografia que reúna análises e comparações de modelos de estoques para produtos deterioráveis; o tópico encontra-se bastante disperso no mundo literário.

2) A importância econômica dos estoques de produtos deterioráveis no mundo real;

tome-se como exemplo, a situação em que os produtos estocados deterioram-se em demasia, implicando em prejuízos vultuosos.

O emprego de uma política de estocagem adequada é necessária para reduzir custos e desperdícios.

### 1.2- Definição do Problema.

A definição geral para o problema ( de estoque ) é o de encontrar valores específicos para as variáveis de decisão, tal que minimizem o custo total. (Decisões são feitas usualmente em termos de tempo e quantidade)

Portanto encontrar as variáveis que dão o custo total mínimo é o principal objetivo do problema de estoque. O custo total envolve os custos de manutenção, de ordenação, de falta e o custo unitário de compra ou produção do item ( ver apêndice 1 ).

A definição específica para o problema de estoque abordado pelo presente trabalho, é o de analisar e comparar modelos matemáticos ligados a estoques de produtos deterioráveis. Estes modelos matemáticos são empregados para obterem os valores ótimos para as variáveis de decisão, com o objetivo de minimizar o custo total..

### 1.3- Objetivos do trabalho.

Analisar e comparar modelos matemáticos ligados a estoques de produtos deterioráveis.

Apresentar definições relacionadas ao controle de estoque de produtos deterioráveis.

Obter uma bibliografia que reúna importantes modelos de estoques para produtos deterioráveis, já que o assunto encontra-se bastante disperso na literatura.

#### 1.4- Importância do trabalho.

A importância prática e geral dos modelos de estoques para produtos deterioráveis é também a redução de custos. E a importância deste trabalho está em:

1) Ajudar as empresas a reduzirem seus custos e desperdícios, através da utilização de um ou mais modelos aqui estudados.

Produtos deterioráveis são produtos que requerem um tratamento especial, pois envolvem frequentemente a saúde e a confiança do consumidor.

2) Ter uma bibliografia reunindo uma variedade de situações relacionadas ao controle de estoques de produtos deterioráveis.

#### 1.5- Metodologia do Trabalho.

Os modelos estão agrupados nos capítulos em razão de suas hipóteses comuns e também em uma ordem cronológica de publicação.

Dentro de cada capítulo, faz-se uma abordagem geral sobre o conteúdo para em seguida apresentar as situações particulares. Finaliza-se o capítulo com as análises e comparações dos modelos envolvidos. Apresenta-se exemplos hipotéticos e seus respectivos resultados.

O trabalho apresenta situações determinísticas e probabilísticas para estoques de produtos deterioráveis.

#### 1.6- Estrutura do Trabalho.

O trabalho está estruturado da seguinte forma:

##### Capítulo 1: Introdução

É exposto sua origem, é definido o problema, são apresentadas a importância, os objetivos e a metodologia.

Parte 1- Modelos de estoques para produtos deterioráveis com demandas constantes e conhecidas.

##### Capítulo 2 : Modelos de lote econômico.

O capítulo 2, traz os modelos de lote econômico com

diferentes distribuições de probabilidade, representando o tempo de deterioração do item em estoque. A variável de decisão neste caso é o lote econômico ( $q$ ). Como a expressão do lote econômico apresenta-se em termos do ciclo de planejamento  $T$ , então a equação do custo total também será em termos de  $T$ . A equação do  $C_{tot}(T)$  é uma função convexa, portanto para encontrar  $T$  basta resolver a igualdade  $\partial C_{tot}(T)/\partial T = 0$ . Dessa forma se está minimizando o  $C_{tot}(T)$ .

Faltas não são permitidas nos modelos de lote econômico.

As definições para os elementos como  $q$ ,  $S$ ,  $T$ ,  $C_{tot}$  e os demais que aparecerão no decorrer deste texto, estão colocadas no apêndice 1.

### Capítulo 3 : Modelos de nível de pedido.

Os modelos de nível de pedido permitem a ocorrência de faltas e apresentam o ciclo de planejamento  $T$  como uma constante pré-fixada. Os modelos deste capítulo são divididos considerando o tempo como uma variável discreta e tempo como uma variável contínua. A variável de decisão neste caso é o nível de pedido  $S$ . Nos modelos, onde o tempo é uma variável discreta, cria-se condições de otimalidade para encontrar o  $S$  ótimo, tal que o custo total seja mínimo. Enquanto que nos modelos considerando o tempo uma variável contínua, diferencia-se a expressão do custo total  $C_{tot}(S)$  em relação a  $S$  e iguala-se a zero, ou seja, resolver a igualdade  $\partial C_{tot}(S)/\partial S = 0$ . Assim encontra-se o  $S$  ótimo que minimiza o  $C_{tot}(S)$ .

### Capítulo 4: Modelos de nível de pedido e lote econômico.

Este capítulo pode ser visto como uma extensão de cada um dos capítulos anteriores. As variáveis de decisão serão  $S$  e  $q$ . A divisão deste capítulo segue o mesmo procedimento do capítulo 3. Modelos considerando o elemento tempo como uma variável discreta e modelos, onde o tempo é uma variável contínua. Faltas são permitidas e o ciclo de planejamento ( $T$ ) deve ser encontrado.

### Capítulo 5: Modelos de estoques para produtos deterioráveis com taxa de reabastecimento finita.

Os três últimos capítulos consideram a taxa de

reabastecimento infinita, isto é, o reabastecimento é feito de uma só vez. Enquanto que neste capítulo esta taxa vem a ser finita, isto significa que o reabastecimento é feito parcialmente. Apresenta-se :

- 1) Modelos de lote económico com taxa de reabastecimento finita.
- 2) Modelos de nível de pedido com taxa de reabastecimento finita.

Parte 2- Modelos de estoques para produtos deterioráveis com demandas probabilísticas.

#### Capítulo 6: Modelos probabilísticos de ponto de pedido.

Neste capítulo apresenta-se modelos de estoques probabilísticos com as seguintes características:

a) Sempre que o nível de estoque for menor ou igual ao ponto de pedido ( $s$ ), um lote económico de  $q$  unidades é planejado para um reabastecimento.

b) O tempo de espera ou "lead time" ( $\tau$ ), pode ser desprezível ou não.

O valor de  $\tau$  depende muito da natureza do produto, da distância entre fonecedor e cliente, do transporte e outros.

#### Capítulo 7: Conclusões e recomendações.

São apresentadas as conclusões do trabalho e as recomendações.

PARTE 1 - MODELOS DE ESTOQUES PARA PRODUTOS DETERIORÁVEIS COM DEMANDAS CONSTANTES E CONHECIDAS.

CAPÍTULO II - MODELOS DE LOTE ECONÓMICO.

Estes modelos seguem a política de estoque  $(s_p, q)$ , portanto o custo de falta  $(C_{FL})$  não estará sujeito a controle. A política  $(s_p, q)$  indica que, o lote económico  $(q)$  é a variável de decisão e o ponto de pedido  $(s_p)$  é uma constante pré-fixada. Para os modelos deste capítulo  $s_p = 0$ , isto é, quando o estoque atingir o esgotamento total deve-se encomendar  $q$  unidades para o reabastecimento.

Os modelos desenvolvem suas expressões do lote económico sob as seguintes hipóteses:

- 1) A taxa de demanda de  $K$  unidades/unid. de tempo é conhecida e constante.
- 2) A taxa de reabastecimento,  $\psi$ , é infinita, isto é, o lote é entregue de uma só vez; o lote é constante e o tempo de espera,  $\tau$ , é zero.
- 3) Faltas não são permitidas durante o ciclo de planeamento, pois o custo de faltas  $(C_{FL})$  é bastante alto.
- 4) Não há reparos ou substituições de produtos detetiorados durante o ciclo de planeamento.
- 5) O custo de manutenção  $C_M$  / unid. / unid. de tempo, o custo de ordenção  $C_F$  / ordem e o custo unitário  $C_v$ , são constantes e conhecidos durante o ciclo de planeamento,  $T$ , sob consideração.
- 6) A distribuição do tempo de deterioração de um item tem função de densidade probabilísticas (f.d.p.)  $g(t)$ ,  $t \geq 0$  e função de distribuição acumulativa (f.d.a)  $G(t)$ ; tal que, segundo COX [ 3 ], a taxa de deterioração de um item é

$$Z(t) = \frac{g(t)}{1 - G(t)}, \quad t \geq 0 \quad (1)$$

Note que  $Z(t)dt$  mostra a probabilidade de deterioração de um item durante o periodo infinitesimal  $(t, t+dt)$ , dado que ele não tenha deteriorado antes de  $t$ . Então a vida do item em estoque é estocástica.

As distribuições mais utilizadas no caso de deterioração de



itens são as: Exponencial Negativa, a Weibull de 2 e 3 parâmetros e a Gamma. No apêndice 2, apresenta-se as propriedades e as aplicações das distribuições supra citadas, juntamente com a construção de suas respectivas taxas de deterioração.

## 2.1 - Modelo matemático de lote econômico para uma distribuição geral de deterioração.

Seja  $I_t$  o nível de estoque do sistema no tempo  $t$  ( $0 \leq t \leq T$ ), então  $I_t$  é uma função da taxa de demanda  $K$  e da função de deterioração  $Z(t)$ . O nível de estoque  $I_0$  no início do ciclo de planejamento será suficiente para a demanda real,  $KT$ , mais um fator,  $(I_0 - KT)$ , que corresponde a quantidade de itens deteriorados. A equação diferencial que descreve os estados instantâneos  $I_t$  sobre o ciclo  $(0, T)$  é dado por

$$-dI_t = I_t Z(t)dt + Kdt \quad \text{ou}$$

$$\frac{dI_t}{dt} + I_t Z(t)dt = -K, \quad 0 \leq t \leq T \quad (2)$$

A solução geral da equação (2) segundo KELLS [ 7 ] é

$$I_t u(t) = -K U(t) + c, \quad 0 \leq t \leq T \quad (3)$$

onde

$$u(t) = \exp \left[ \int_0^t Z(t)dt \right], \quad t \geq 0 \quad (4)$$

e

$$U(t) = \int_0^t u(t) dt, \quad t \geq 0 \quad (5)$$

O valor da constante de integração,  $c$ , pode ser obtida através da condição de limite. Isto é, quando  $t = 0$ ,  $I_t = I_0$ , o estoque inicial ( e estoque máximo ) do ciclo de planejamento. Resolvendo a equação (3) para esta condição inicial, obtem-se  $c = I_0$ , onde  $u(t) = 1$  e  $U(0) = 0$ . Assim

$$I_t u(t) = -K U(t) + I_0 \quad (6)$$

Agora para  $t = T$ ,  $I_T = 0$  daí então, por definição, o estoque se esgota totalmente. Para esta condição, a equação (6) vem a ser

$$I_0 = K U(T) \quad (7)$$

Substituindo  $I_0$  na equação (6), tem-se :

$$I_t = \frac{K}{u(t)} (U(T) - U(t)) , \quad 0 \leq t \leq T \quad (8)$$

A variável de decisão  $I_0$  (estoque máximo) que nada mais é do que lote econômico  $q$  é uma função explícita de  $T$ . Então a equação do custo total do sistema será expresso em termos de  $T$ .

A equação do custo total deve considerar o custo devido a deterioração, bem como os custos de manutenção e ordenação. Assim, a equação para o custo total por unid. de tempo,  $C_{tot}(T)$ , é

$$C_{tot}(T) = \frac{C_v(I - KT)}{T} + C_M \frac{I_0}{2} + \frac{C}{T} \quad (9)$$

Para obter a equação (9) é conveniente considerar que a função  $I_t$  é aproximadamente linear em  $t$  sobre  $(0, T)$ , tal que, o número médio de unidades mantidas em estoque por unid. de tempo é

$$\frac{1}{2} (I_0 + I_T) \frac{T}{T} = \frac{1}{2} I_0$$

Substituindo a expressão do estoque médio, dado acima, na equação (9), tem-se

$$C_{tot}(T) = \frac{1}{T} C_v K (U(T) - T) + \frac{1}{2} C_M K U(T) + \frac{1}{T} C_F \quad (10)$$

A função custo dada pela equação (10) é uma função convexa, daí então para encontrar o ciclo de planejamento ótimo  $(T)$ , deve-se resolver  $\partial C_{tot}(T) / \partial T = 0$  para  $T$ . Dessa forma o  $T$  ótimo encontrado minimiza o  $C_{tot}(T)$ . Logo

$$\frac{\partial C_{tot}(T)}{\partial T} = \frac{1}{T^2} C_v K [T u(T) - U(T)] + \frac{1}{2} C_M K u(T) - \frac{1}{T^2} C_F$$

ou

$$\frac{1}{T^2} C_v K [T u(T) - U(T)] + \frac{1}{2} C_M K u(T) - \frac{1}{T^2} C_F = 0 \quad (11)$$

Uma vez que o ciclo de planejamento ótimo é obtido por resolver a equação (11), o lote econômico pode ser obtido pela equação (7) e

o custo total mínimo da equação (10).

Se  $Z(t) = 0$ , isto é, senão existir deterioração, então  $u(t)=1$  e  $UKT = t \forall t$ . Neste caso a expressão (11) é dado por

$$C_M \frac{T^2}{2} - C_F \frac{1}{K} = 0 \quad \text{ou}$$

$$T = \sqrt{\frac{2C_F}{KC_M}} \quad (12)$$

A fórmula padrão (12), que obtem T no modelo similar para itens não deterioráveis, encontra-se em NADDOR [ 12 ], capítulo 3.

Para o modelo geral mostrado acima, quatro casos particulares foram desenvolvidos utilizando as distribuições Exponencial Negativa, a Weibull de 2 e 3 parâmetros e a Gamma. Dependendo da distribuição empregada para descrever o tempo de deterioração do item, a taxa de deterioração pode ser constante ou variável.

## 2.2 - Distribuição Exponencial Negativa para o tempo de deterioração de um item.

No ano de 1963 surgiu a primeira abordagem com respeito a controle de estoque para itens deterioráveis, cujos pioneiros foram GHARE & SCHRADER [ 5 ]. Eles desenvolveram um modelo de lote econômico, utilizando a distribuição exponencial negativa para representar o tempo de deterioração de um item em estoque.

A taxa de deterioração para esta distribuição é constante e é dada por:

$$Z_0(t) = \alpha, \quad t \geq 0. \quad (13)$$

A construção desta e das demais taxas de deterioração para as distribuições envolvidas neste texto, estão colocadas no apêndice 2.

Como exemplo de taxa de deterioração constante, seja o estoque inicial de 100 unidades, deteriorando-se a uma taxa de 1/10 em cada período de tempo. O esgotamento do estoque devido a deterioração para o exemplo citado, está colocado no quadro abaixo:

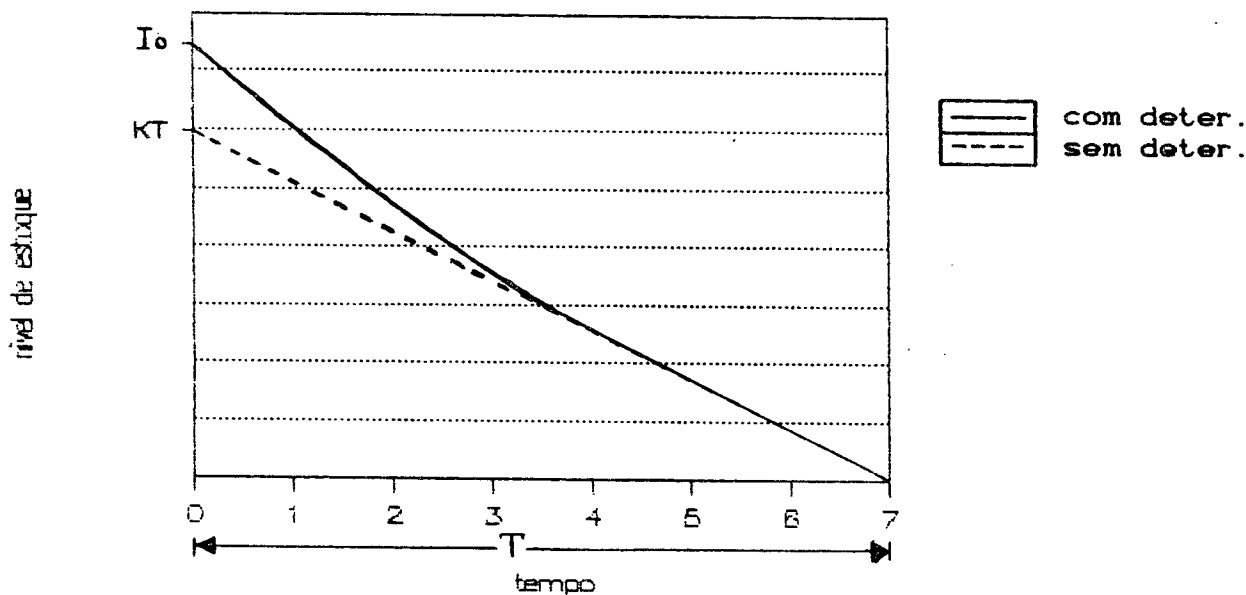
QUADRO 1: Exemplo de estoque deteriorando-se a uma taxa constante de 10% .

período de tempo t	estoque no início do período t	quantidade deteriorada no período t	estoque no final de t
1	100	10%	90
2	90	9	81
3	81	8.1	72.9
4	72.9	7.29	65.61
5	65.61	6.56	59.05
6	59.05	5.91	53.14

### 2.1.1 - Desenvolvimento.

Um ciclo de estoque é mostrado na figura 1, onde esgotamento se dá pela demanda e também pela deterioração de itens.

FIGURA 1 - Ciclo de estoque com e sem esgotamento exponencial, incluindo demanda.



Então para  $Z_0(t) = \alpha$  ( $t \geq 0$ ), as equações (4), (5) e (7) venham se respectivamente

$$u(t) = e^{\alpha t}, \quad 0 \leq t \leq T \quad (14)$$

$$U(T) = 1/\alpha ( e^{\alpha t} - 1 ) , 0 \leq t \leq T \quad e \quad (15)$$

$$I_o = K/\alpha ( e^{\alpha T} - 1 ) . \quad (16)$$

A quantidade de itens deteriorados durante o ciclo de planejamento T é

$$I_D(T) = I_o - K T \quad (17.a)$$

Supondo o período de vida  $1/\alpha$  maior do que o ciclo de planejamento T ( isto é,  $1/\alpha > T$ , então  $\alpha T < 1$  ) e os termos  $\alpha^3 T^3/3!$  e acima, ignorados. Assim a equação (17) após simplificações pode ser reescrita como

$$I_D(T) = K \alpha T^2/2. \quad (17.b)$$

Usando a mesma condição acima para a equação (16), obtem-se

$$I_o = K T + K \alpha T^2/2 . \quad (16.b)$$

O objetivo é encontrar o valor de T ótimo que satisfaça a equação (11), tal que, a taxa de deterioração seja constante. Logo

$$C_v \sqrt{T^2} [ T e^{\alpha T} - 1/\alpha ( e^{\alpha T} - 1 ) ] + C_M/2 K e^{\alpha T} + C_F \sqrt{T^2} = 0. \quad (18)$$

Expandindo as exponenciais em séries e ignorando os termos de segunda e maior ordem de  $\alpha$ , sob a hipótese que  $\alpha \ll T$ , a equação (18) pode ser reescrita como

$$C_v \frac{K\alpha}{2} + C_M \frac{K}{2} + C_M \frac{K T \alpha}{2} - C_F \frac{1}{T^2} = 0 \quad (19.a)$$

Resolvendo para T

$$T = \left[ \frac{2C_F}{K\alpha C_v + K C_M + K C_M \alpha T} \right]^{1/2} \quad (19.b)$$

Como a variável T está nos dois lados da igualdade, não se pode resolvê-la diretamente. Portanto, T pode ser determinado pelo método de aproximações sucessivas, dado pelo algoritmo abaixo:

$$\text{Passo 1- calcular } T_1 = \left[ \frac{2C_F}{K\alpha C_V + KC_M} \right]^{1/2} \quad (20)$$

$$\text{Passo 2- calcular } T_2 = \left[ \frac{2C_F}{K\alpha C_V + KC_M + KC_M \alpha T_1} \right]^{1/2} \quad (21)$$

O valor atual de T estará no intervalo  $T_1 \leq T \leq T_2$ .

Passo 3- Selecione um  $\Delta T$  tal que  $(T_1 - \Delta T) > T_2$ .

Seja  $T_1 - \Delta T = T_2'$ .

Passo 4- Calcule  $T_2'$  pelo passo 2 usando  $T_1'$ .

Fazendo isto até  $T_1^n - T_2^n < 1/2$  se obter uma aproximação precisa.

Mas usualmente com duas iterações se terá uma boa aproximação.

### 2.2.1- Aplicação Numérica.

EXEMPLO 2: Considere um vendedor que estoca um item que custa \$4.00 e tem um período de vida de 40 dias. O custo de ordenação é de \$ 20.00/pedido e o custo de manutenção é de \$0.0002/unidade/dia. Determine o ciclo de planejamento ( T ), tal que, o custo total seja mínimo. A taxa de demanda é de 10 unidades/dia.

#### RESULTADOS FINAIS:

- $T_1 = 6.32$  dias e
- $T_2 = 6.31$  dias. Assim  $6.31 \leq T \leq 6.32$ .

Esta aproximação é suficientemente exata, desde que T seja arredondado para o próximo valor menor ou maior, isto é, T = 6 ou 7 dias.

- Para T = 6 dias,
  - $I_o = 65$  unidades,
  - $I_D(T) = 6$  unidades e
  - $C_{tot}(T) = \$ 46.67/\text{ciclo}$ .

- Para T = 7 dias,
  - $I_o = 76$  unidades,
  - $I_D(T) = 5$  unidades e
  - $C_{tot}(T) = \$ 46.29/\text{ciclo}$ .

Adota-se então o ciclo de 7 dias.

Nota-se que a equação (18) para  $\alpha T < 1$  ( no exemplo numérico

acima  $\alpha T = 0.175$ ) reduz-se a

$$T = \sqrt{\frac{2C_F}{K\alpha C_V + KC_M}}$$

que é a mesma equação (21). Então com apenas esta equação pode-se obter T, já que é feito um arredondamento para o próximo valor menor ou maior de T.

Então, para  $\alpha T < 1$ , não há necessidade de se utilizar o algoritmo.

### 2.3 - Distribuição Weibull de 2 parâmetros para o tempo de deterioração de um item.

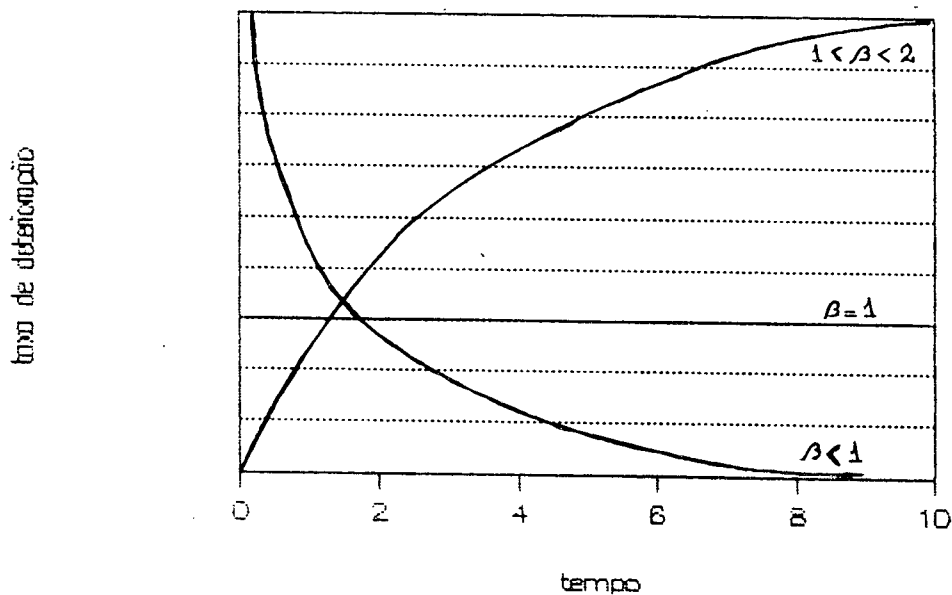
Em 1973, COVERT & PHILIP [ 1 ] deram continuidade ao modelo de GHARE & SCHRADER [ 5 ], extendendo-o. Para o modelo de COVERT & PHILIP [ 1 ] foi adotada a distribuição Weibull de 2 parâmetros, para representar tempo de deterioração de um item. Dessa forma tem-se uma taxa de deterioração variável com parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  que é dada por

$$Z_1(T) = \alpha \beta t^{\beta-1}, \quad t \geq 0. \quad (22)$$

As funções de densidade probabilística e de distribuição acumulativa, bem como a construção da taxa de deterioração para a distribuição Weibull estão colocadas no apêndice 2.

A relação entre taxa de det. e tempo, para a distribuição em questão é dada pela figura 2.

FIGURA 2 - Relação entre taxa de deterioração e tempo para distribuição Weibull de 2-parâmetros.



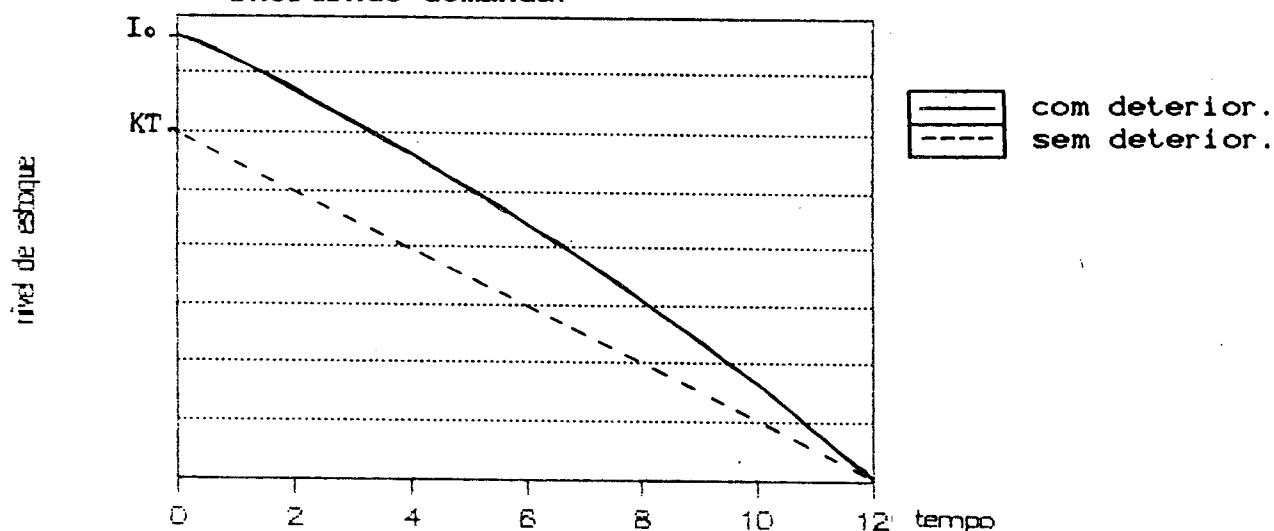
Da figura 2, observa-se as seguintes limitações:

- Para uma taxa de det. decrescente é preciso ter uma taxa inicial alta.
- Enquanto que para uma taxa crescente de det. é preciso ter a taxa inicial aproximadamente zero.
- E no caso da taxa de det. constante basta que  $\beta = 1$ .

### 2.3.1 - Desenvolvimento.

Prosseguindo com o modelo, um ciclo de estoque é mostrado na fig. 3.

FIGURA 3 - Ciclo de estoque com e sem deterioração Weibull, incluindo demanda.



Então para  $Z_1(T) = \alpha \beta t^{\beta-1}$  ( $t \geq 0$ ), as equações (4), (5) e (7) venham ser respectivamente

$$u(t) = e^{-\alpha t^\beta} \quad (23)$$

$$U(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n t^{n\beta+1}}{n!(n\beta+1)} \quad (24)$$

$$I_0 = K \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n t^{n\beta+1}}{n!(n\beta+1)} \quad (25)$$

Com  $\alpha, \beta > 0$  e  $0 \leq t \leq T$ .

A quantidade de itens deteriorados durante o ciclo de planejamento  $T$  é



$$I_D(T) = K \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n T^{n\beta+1}}{n!(n\beta+1)} \right] \quad (26)$$

A equação (11) para a taxa de distribuição Weibull de 2 parâmetros vem a ser

$$C_V \frac{K}{T^2} \left[ T e^{\alpha T^\beta} - \int_0^T e^{\alpha t^\beta} dt \right] + C_M \frac{K e^{\alpha T^\beta}}{2} - C_F \frac{1}{T^2} = 0 \quad \text{ou}$$

$$C_V \frac{K}{T^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n n \beta T^{n\beta-1}}{n!(n\beta+1)} + C_M \frac{K e^{\alpha T^\beta}}{2} - C_F \frac{1}{T^2} = 0 \quad (27)$$

Esta igualdade quando resolvida para T, fornece o ciclo de planejamento ótimo.

#### Casos particulares

a) Se  $\beta = 1$ , o modelo de COVERT & PHILIP [ 1 ] reduz-se ao modelo de GHARE & SCRADER [ 5 ].

b) E se  $\alpha = 0$ , não há deterioração. Fazendo esta substituição na equação (18), tem-se a equação (12).

Observando a equação (27), a variável T apresenta-se separada dificultando assim a solução direta. Contudo, a solução é fácil de ser encontrada utilizando métodos numéricos, como por exemplo a Correção de Newton. Para esse problema o método usa a fórmula recursiva abaixo:

$$T_m = T_{m-1} - \frac{f(T_{m-1})}{f'(T_{m-1})} \quad (28)$$

onde

$T_m$  = os valores sucessivas de T;

$f(T_{m-1})$  = ao valor da função  $f(t)$  para  $T = T_{m-1}$ ;

$$f(T) = C_V K \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n n \beta T^{n\beta-1}}{n!(n\beta+1)} + C_M \frac{K e^{\alpha T^\beta}}{2} - C_F = 0 \quad ; \quad (29)$$

$f'(T)$  = ao valor da derivada da função  $f(T_{m-1})$ ;

$$f'(T) = C_V K \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n \beta T^{n\beta}}{(n-1)!} + C_M \frac{K e^{\alpha T^\beta}}{2} [\alpha \beta T^{\beta+1} + 2 T] \quad (30)$$

Observe que a equação (29) é a mesma equação (27) multiplicada por  $T^2$ , isto é feito para facilitar na derivada. A explicação geométrica para todo este procedimento encontra-se no apêndice 3. Mostra-se também o fluxograma utilizado para o programa computacional, com o objetivo de resolver a equação (27) iterativamente até  $T_m - T_{m-1} < 0.00T_m$ . As séries deverão ser truncadas em  $at^\beta < 1$ .

### 2.3.2 - Aplicação Numérica.

EXEMPLO 3: A deterioração de frutas e verduras em um supermercado foi arbitrariamente escolhida com uma distribuição Weibull de parâmetros  $\alpha = 1/600$  e  $\beta = 1.5$ . Escolhe-se um certo item com os seguintes valores constantes:

$$C_V = \$4.00/\text{unid} \quad C_M = \$0.001/\text{unid.}/\text{dia}$$

$$C_F = \$20.00/\text{lote} \quad K = 10\text{unids.}/\text{dia}$$

Escolhe-se inicialmente  $T_0 = 63.2456$  (este resultado é obtido através da equação (12), quando não houver deterioração) e procede-se com os cálculos de  $T$  até ter-se uma correção suficientemente pequena.

#### Resultados Finais:

Ciclo de planejamento ótimo	- $T = 11.64$ dias.
Lote econômico	- $I_0 = 119.55$ unidades.
Quantidade deteriorada	- $I_D = 3.14$ unidades e
Custo total	- $C_{\text{tot}}(T) = \$2.86/\text{ciclo}$ .

Estes resultados estão colocados com mais detalhes no apêndice 3.

### 2.4 - Distribuição Weibull de 3 parâmetros.

PHILIP [ 15 ], no ano de 1974, criou um modelo de lote econômico generalizado para itens com distribuição Weibull de deterioração. Especificamente, os 3 parâmetros da dist. Weibull são utilizados para representar o tempo de deterioração do item. Com isso, PHILIP [ 15 ], ampliou ainda mais os modelos de GHARE & SCHRADER [ 5 ] e COVERT & PHILIP [ 1 ].

As propriedades desta distribuição estão presentes no apêndice 2, inclusive a construção da taxa de deterioração. A taxa

deterioração neste caso é também variável com parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\delta$  que é dada por

$$Z_2(t) = \alpha \beta (t - \delta)^{\beta-1}, \quad \alpha, \beta, \delta > 0 \quad \text{e} \quad t \geq 0 \quad (31)$$

A relação entre a taxa de deterioração e o tempo para os 3 parâmetros da dist. Weibull, está mostrada na fig. 4.

Comparando as figuras 2 e 4, as limitações ( a, b e c ) existentes na distribuição Weibull de 2 parâmetros, não estão presentes na distribuição Weibull de 3 parâmetros.

Como pode ser visto da fig. 4, a distribuição Weibull de 3 parâmetros pode ser usado para itens com algum valor inicial de taxa de deterioração ( quando  $\delta < 0$  ) e para itens que iniciam suas deteriorações após um certo período de tempo no estoque ( quando  $\delta > 0$  ). Enquanto que a dist. Weibull de 2 parâmetros deve ser usada para itens que iniciam suas deteriorações a partir do momento de suas entradas no estoque ( quando  $\delta = 0$  ). Então a distribuição Weibull de 3 parâmetros é mais flexível nesta área de estoque deterioráveis.

#### 2.4.1 - Desenvolvimento.

Um ciclo de estoque é mostrado na fig.5, onde

$$\delta' = \delta \quad ; \quad \delta \geq 0$$

e

$$\delta' = 0 \quad ; \quad \delta < 0.$$

PHILIP [ 15 ] considera  $\delta' < T$ . A solução para  $\delta' \geq T$  é trivial, pois não existirá deterioração neste ciclo. Como a taxa de deterioração é zero no período de ( 0 ,  $\delta'$  ), então o nível de estoque neste período,  $I_{\delta'}$ , pode ser escrito como:

$$I_{\delta'} = I_0 - K \delta' \quad (32)$$

Devido a introdução do parâmetro  $\delta$  ( parâmetro localização ), não será possível o uso das equações da seção (2.1) na integral.

A equação (2) para a taxa de deterioração  $Z_2(t)$  é

$$-dI_t = I_t [ \alpha \beta (t - \delta)^{\beta-1} ] dt + K dt \quad (33)$$

A solução desta equação diferencial

$$I_{\delta'} = \frac{1}{\exp[\alpha(t-\delta)^\beta]} \int_{\delta'}^t (-K) \exp[\alpha(x-\delta)^\beta] dx + c_1 \quad (34)$$

onde  $c_1$  é a constante de integração.

Resolvendo (34) para as condições de limites

$$\begin{aligned} I_t &= I_{\delta'} \quad \text{quando } t = \delta' & , \\ I_t &= 0 \quad \text{quando } t = T & e \end{aligned}$$

em seguida substituindo a equação (34) na equação (32) obtém-se,

$$I_0 = K \delta' + \frac{1}{\exp[\alpha(\delta'-\delta)^\beta]} \int_{\delta'}^T \exp[\alpha(x-\delta)^\beta] dx \quad (35)$$

$I_0$  na equação (35) representa o estoque no início do ciclo de planejamento  $T$ , ou seja, representa o lote econômico  $q$  a ser encomendado para o reabastecimento.

Assim a equação (9) para a distribuição Weibull de 3 parâmetros representando o tempo de deterioração do item é dada por

$$\begin{aligned} C_{tot}(T) = & C_v K/T \left[ \delta' + \frac{1}{\exp[\alpha(\delta'-\delta)^\beta]} \int_{\delta'}^T \exp[\alpha(x-\delta)^\beta] dx - T \right] \\ & + C_M K/2 \left[ \delta' + \frac{1}{\exp[\alpha(\delta'-\delta)^\beta]} \int_{\delta'}^T \exp[\alpha(x-\delta)^\beta] dx \right] + C_F \sqrt{T}. \end{aligned} \quad (36)$$

Utiliza-se então,  $\partial C_{tot}(T)/\partial T = 0$  para encontrar o ciclo de planejamento ótimo. Após simplificações, tem-se

$$\begin{aligned} K(C_v + C_M T^2/2) \exp(\alpha[(T-\delta)^\beta - (\delta'-\delta)^\beta]) - (C_F + C_v K \delta') \\ - C_v \frac{K}{\exp[\alpha(\delta'-\delta)^\beta]} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n [(T-\delta)^{n\beta+1} - (\delta'-\delta)^{n\beta+1}]}{n! (n\beta+1)} = 0 \end{aligned} \quad (37)$$

O lote econômico,  $I_0$  ótimo, é obtido substituindo  $T$  ótimo na equação (35).

Casos particulares:

- a) Quando  $\delta = 0$ , o modelo de PHILIP [ 15 ] reduz-se ao modelo de COVERT & PHILIP [ 1 ].
- b) Quando  $\delta = 0$  e  $\beta = 1$ , o modelo de PHILIP [ 15 ] vem a ser o modelo de GHARE & SCHRADER [ 5 ].
- c) E se  $\delta = T$ , não há deterioração durante o ciclo e uma das fórmulas padrões para T, sem deterioração, é a equação (12).

FIGURA 4 - Relação entre a taxa de deterioração e o tempo, para a distribuição Weibull de 3 parâmetros.

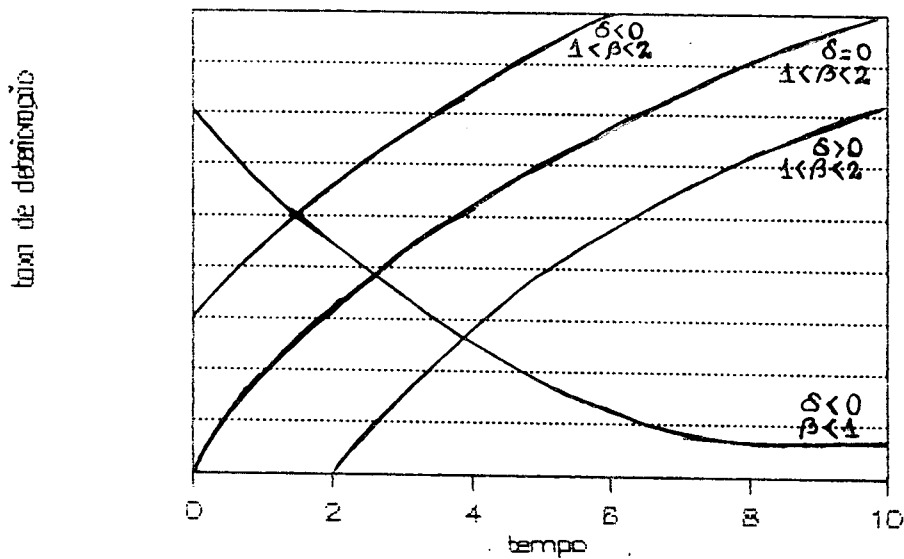
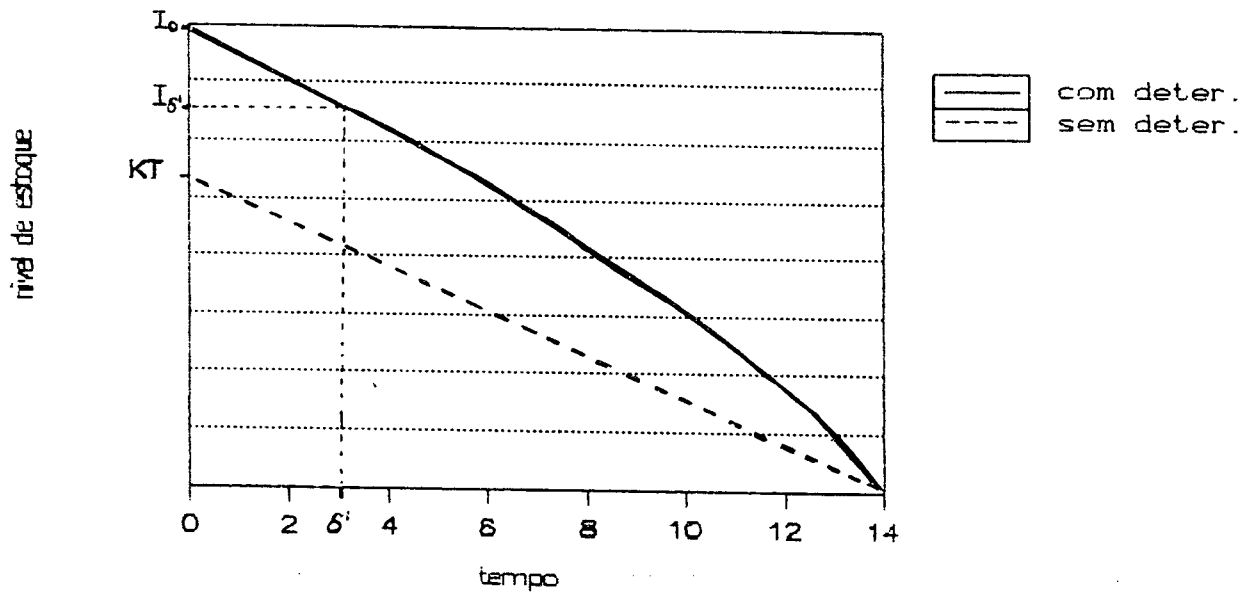


FIGURA 5 - Ciclo de estoque com e sem deterioração Weibull, incluindo demanda.



O método computacional e a fórmula recursiva, utilizados para encontrar o ciclo ótimo são os mesmos empregados por COVERT & PHILIP [ 1 ].

Para o caso da distribuição Weibull de 3 parâmetros

$f(t)$  = a equação (37) e

$$f'(t) = K \exp(\alpha[(T-\delta)^\beta - (\delta'-\delta)^\beta]) [C_M T + \alpha \beta (T-\delta)^{\beta-1} (C_V T + C_M T/2)]. \quad (38)$$

As séries deverão ser truncadas em  $\alpha (T - \delta)^\beta < 1$ , para um valor adequado de T.

#### 2.4.2 - Aplicação Numérica .

Toma-se os mesmos dados de entrada fornecidos por COVERT & PHILIP [ 1 ], com

1)  $\alpha = 1/600$  ,  $\beta = 1.5$  e  $\delta = 3$  e

2)  $\alpha = 1/600$  ,  $\beta = 1.5$  e  $\delta = -3$ .

#### Resultados Finais:

Inicialmente  $T = 63.2456$  e após a execução do modelo, tem-se:

1) Ciclo de planejamento ótimo -  $T = 10.7$  dias.

Lote econômico -  $I_o = 110.6$  unids.

Quantidade deteriorada -  $I_D = 3.6$  unids. durante 10.7 dias.

Custo total -  $C_{tot}(T) = \$3.27/\text{ciclo}$

2) Ciclo de planejamento ótimo -  $T = 12.9$  dias.

Lote econômico -  $I_o = 131.1$  unids.

Quantidade deteriorada -  $I_D = 2.1$  unids. durante 12.9 dias.

Custo total -  $C_{tot}(T) = \$2.26/\text{ciclo}$ .

Os resultados acima estão colocados com mais detalhes no apêndice 3

QUADRO 2 : Resultados numérico do exemplo 3, para os modelos de COVERT & PHILIP [ 1 ] e PHILIP [ 15 ].

dados	COVERT & PHILIP	PHILIP	
T	11.64 dias	10.7 dias	12.9 dias
$\delta$	0	-3	3
I <sub>D</sub>	3.14 unids	3.6 unids	2.1 unids
C <sub>tot</sub> (T)	\$2.86	\$3.27	\$2.26

Observando o quadro cima, a coluna 2 apresenta um ciclo de planejamento menor do que o fornecido pela coluna 1, enquanto na coluna 3, nota-se um ciclo bem menor. Nota-se também que a quantidade deteriorada na coluna 2 é maior do que na coluna 1, isto se dá devido ao valor negativo de  $\delta$ . Já na coluna 3, a quantidade deteriorada é menor do que na coluna 1, devido ao valor positivo de  $\delta$ .

## 2.5 - Distribuição Gamma para deterioração do item.

Em 1978, TADIKAMALLA [ 23 ] desenvolveu um modelo de lote econômico, usando então a distribuição Gamma para representar o tempo de deterioração do item no estoque. TADIKAMALLA [ 23 ], considera a família Gamma de distribuição uma das mais flexíveis para descrever a deterioração de itens. Algumas destas razões são mostradas no apêndice 2.

A taxa de deterioração para a distribuição Gamma é dada por

$$Z_3(t) = \frac{g(t)}{1 - G(t)}, \quad t \geq 0, \quad (39)$$

onde  $g(t)$  é a função de densidade Gamma e  $G(t)$  é a sua f.d.a..

O desenvolvimento deste modelo é considerado bastante complexo, pois não existe uma expressão simples para  $(1 - G(t))$ . Como consequência a obtenção da taxa de deterioração torna-se também difícil.

O cálculo da equação (39) será discutida na subseção (2.5.2).

a relação entre taxa de deterioração e tempo para a distribuição Gamma é dada na fig. 6, mostrada no fim desta seção.

### 2.5.1 - Desenvolvimento.

Um ciclo de estoque para a distribuição Gamma de deterioração

é mostrado na fig.3. Então para  $Z_3(t)$ , as equações (4), (5) e (7) venham ser respectivamente :

$$u(t) = \exp \int_0^t Z_3(x) dx \quad , \quad (40)$$

$$U(t) = \int_0^t K \exp \left[ \int_0^x Z_3(y) dy \right] dx \quad e \quad (41)$$

$$I_0 = \int_0^T K \exp \left[ \int_0^x Z_3(y) dy \right] dx \quad . \quad (42)$$

A quantidade de itens deteriorados durante o ciclo de planejamento é

$$\begin{aligned} I_D(T) &= I_0 - KT \\ &= \int_0^T K \exp \left[ \int_0^x Z_3(y) dy \right] dx - KT. \end{aligned} \quad (43)$$

A equação (11) para a distribuição Gamma vem a ser

$$\begin{aligned} C_V K/T^2 \left\{ T \exp \left[ \int_0^T Z_3(x) dx \right] - \int_0^T \exp \left[ \int_0^x Z_3(y) dy \right] dx \right\} \\ + C_M K/2 \exp \left[ \int_0^T Z_3(x) dx \right] - C_F/T^2. \end{aligned} \quad (44)$$

#### Casos particulares:

- a) Quando  $\alpha = 1$  e  $\beta$  uma constante  $C$ , a função de densidade Exponencial é gerada com um valor esperado  $C$ .
- b) Se  $\beta = 1$  e  $\alpha$  for um valor grande, a distribuição Gamma aproxima-se da distribuição Normal assintoticamente.
- c) Se  $\alpha$  é um valor inteiro,  $K$ , então a distribuição Gamma é comumente chamada de distribuição Erlang- $K$ .
- d) A distribuição Qui-quadrada é uma dist. Gamma com  $\beta = 2$  e  $\alpha = v/2$ , onde  $v$  é o grau de liberdade.

A solução direta da equação (44) é impossível, pois envolve integração tripla de uma função não integrável. Segundo PHILIP [ 6 ], calcular  $Z_3(t)$  na equação (39) por integração numérica, implica em resolver uma integração tripla na equação



(44). Este procedimento consome muito tempo computacional.

Para facilitar a resolução da equação (39), TADIKAMALLA [ 23 ] baseou-se em PARK [ 13 ] e obteve uma aproximação para  $(1 - G(t))$ . Assim a equação (44) envolverá somente integração dupla. Segue-se com aproximação:

$$1 - G(t) = (\alpha - a) \exp(-t/\beta) (t/\beta)^a / a! + \sum \exp(-t/\beta) (t/\beta)^n / n!, \quad (45)$$

onde  $a$  é a parte inteira de  $\alpha$ .

TADIKAMALLA [ 23 ] desenvolveu um programa computacional utilizando o método da Bisseção para resolver a equação não-linear (44). As integrais envolvidas são numericamente computadas usando o método de Romberg. O programa computacional usa a aproximação (45) na equação (39) se  $\alpha \geq 1$  e resolve a integração tripla se  $\alpha < 1$ .

O emprego do método da Bisseção é devido a não utilização de derivadas, utilizando apenas o limite inferior e superior de  $T$ .

Substituindo a aproximação (45) na equação (39) e efetuando as simplificações, tem-se

$$Z_3(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha) \left[ (\alpha-a)(t/\beta)^a / a! + \sum_{n=0}^{a-1} (t/\beta)^n / n! \right]} \quad (47)$$

onde  $\alpha \geq 1$ ,  $\beta > 0$  e  $a$  é a parte inteira de  $\alpha$ , ou seja  $a = [ \alpha ]$ .

Se  $\alpha \in \mathbb{Z}^+$ , então  $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!$  e com isso  $Z_3(t)$  reduz-se à

$$Z_3(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\beta^\alpha \left[ (\alpha-1)! \sum_{n=0}^{\alpha-1} (t/\beta)^n / n! \right]} \quad (48)$$

Segundo MANN [ 10 ], as distribuições Weibull e Gamma são as que melhor representam o tempo de deterioração de um item.

Observa-se que a distribuição Exponencial é um caso especial para as duas distribuições.

As distribuições Weibull e Gamma são semelhantes em suas formas (parâmetro  $\alpha$ ), mas nota-se consideráveis diferenças em suas taxas de deteriorações. Observe as figuras 2 e 6, quando  $t \rightarrow \infty$ , a taxa de deterioração Weibull aproxima-se de zero ou infinito,

enquanto a taxa de deterioração Gamma tende a  $1/\beta$ .

LIITTSCHWAGER [ 8 ] discutiu a similaridade entre as distribuições Gamma e Weibull, e conclui que sob certas condições elas não podem ser distinguidas.

### 2.5.2 - Aplicação Numérica.

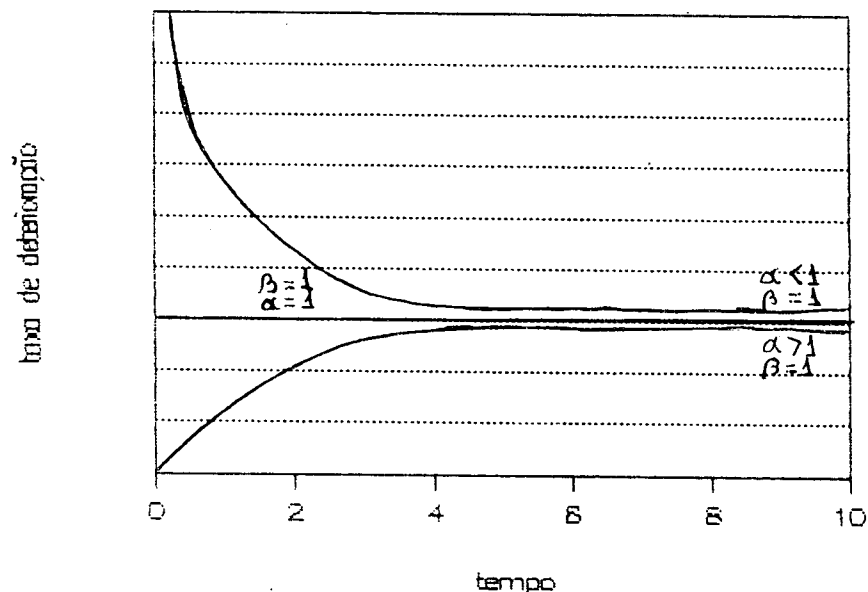
Os dados de entrada são os mesmos do exemplo 3, apresentado por COVERT & PHILIP [ 1 ], com exceção de  $\alpha = 2.1$  e  $\beta = 30$ .

É dado inicialmente o limite inferior e superior de T e em seguida aplica-se o modelo de TADIKAMALLA [ 23 ].

#### Resultados Finais:

Ciclo de planejamento ótimo	- T = 12.47 dias,
Lote econômico	- $I_o = 127.18$ unidades ,
Quantidade deteriorada	- $I_D = 2.48$ unidades e
Custo Total	- $C_{tot}(t) = \$ 2.45/\text{ciclo}$ .

FIGURA 6 - Relação entre taxa de deterioração Gamma e tempo.



### 2.6 - Comparações e Análises:

Após o estudo de todos estes modelos de lote econômico com diferentes distribuições, representando o tempo de deterioração do item, conclui-se que o modelo de TADIKAMALLA [ 23 ] é um modelo complexo. Esta complexidade é devido a falta de um expressão

integrável e explícita em  $t$  para a equação (39). Então TADIKAMALLA [ 23 ] adotou uma aproximação para  $(1 - G(t))$  com o objetivo de obter uma expressão mais simples para  $Z_a(t) = g(t)/(1 - G(t))$ . Precisou ainda da ajuda do método de Romberg na resolução das integrais existentes. E em seguida empregar o método iterativo da Bisseção a fim de obter, finalmente, o ciclo ótimo.

Esta aproximação adotada vale para  $\alpha \geq 1$  e quando  $\alpha < 1$ , as integrais triplas terão que ser resolvidas. Já no modelo de GHARE & SCHRADER [ 5 ] foi utilizado um algoritmo para encontrar o ciclo ótimo. Nos modelos de COVERT & PHILIP [ 1 ] e PHILIP [ 15 ], foi adotado apenas o método da Correção de Newton, a fim de obter  $T_{ot}$  ( ciclo ótimo ).

No quadro abaixo mostra-se um resumo dos resultados obtidos pelos modelos, na resolução do exemplo hipotético apresentado por COVERT & PHILIP [ 1 ].

QUADRO 3.a - Resultados do exemplo 3 para os modelos estudados.

modelos	PHILIP		COV. & PHI.	TADIKAMALLA
	$\alpha=1/600$ $\beta=1.5 \delta=3$	$\alpha=1/600$ $\beta=1.5 \delta=-3$	$\alpha=1/600$ $\beta=1.5$	$\alpha=2.1$ $\beta=30$
lote econôm.	131.1 unids	110.6 unid	119.6 unids	127.18 unids
ciclo de pla.	12.9 dias	10.7 dias	11.64 dias	12.47 dias
quant. deter.	2.1 unids	3.6 unids	3.14 unids	2.48 unids
custo total	\$2.26/dia	\$3.27/dia	\$2.86/dia	\$2.45/dia

Obs: Os parâmetros das distribuições foram escolhidos de modo que suas médias  $\mu$  e variâncias  $\sigma^2$  fossem aproximadamente as mesmas.

Do quadro acima, observa-se que cada coluna corresponde um conjunto de resultados ótimos, ou seja, representa uma distribuição de deterioração diferente.

Para checar a otimalidade das soluções obtidas pelos modelos, mostrado pelo quadro 3.a, apresentar-se-á um outro quadro com variações no ciclo de planejamento  $T$ . Estas variações tem a finalidade de verificar as alterações causadas principalmente nos custos totais.

QUADRO 3.b - Resultados obtidos pelos modelos, mediante as variações no ciclo de planejamento  $T$ .

T ciclo	COV & PHI.			$\delta = 8$ PHILIP $\delta = -8$					
	q unide	$I_D(T)$ unide	$C_{tot}(T)$ \$/ciclo	q unide	$I_D(T)$ unide	$C_{tot}(T)$ \$/ciclo	q unide	$I_D(T)$ unide	$C_{tot}(T)$ \$/cicl.
9	91.64	1.64	2.99	92.5	2.5	8.88	90.6	0.6	2.58
10	102.1	2.14	2.91	108.2	8.17	8.81	100.9	0.9	2.41
11	112.7	2.72	2.86	118.9	8.94	8.8	111.2	1.2	2.81
12	128.4	8.89	2.86	124.8	4.81	8.88	121.6	1.64	2.27
18	184.2	4.16	2.88	185.7	5.65	8.85	182.1	2.14	2.26

Obs: continua abaixo o quadro 3.b.

T ciclo	TADIKAMALLA		
	q unide	$I_D(T)$ unide	$C_{tot}(T)$ \$/ciclo
9	90.98	0.98	2.7
10	101.8	1.8	2.57
11	111.7	1.7	2.49
12	122.8	2.8	2.48
18	182.8	2.8	2.4

O impacto das variações em T ( ciclo de planejamento ) sobre o  $C_{tot}(T)$  é pequeno, isto implica que a função do  $C_{tot}(T)$  é "achatada". Portanto o quadro 3.b indica que o aumento no ganho pela complexidade dos modelos, não é necessariamente acompanhado por alterações substanciais nas decisões e custos totais.

Optar por este ou aquele modelo depende da importância do produto para a empresa. Por exemplo, se o produto em questão envolve custos altos, escolheria-se um modelo mais flexível e preciso. Caso não se tenha tantas exigências com respeito ao produto, opta-se por um modelo mais simples e também eficiente.

Os parâmetros (  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\delta$  ) das distribuições, poderão ser obtidos através de um estudo impírico dos dados. Dados estes relacionados com a sobrevivência do produto estocado. Existem produtos químicos deterioráveis, com estes parâmetros já definidos.

### CAPÍTULO III - MODELOS DE NÍVEL DE PEDIDO.

Os modelos de nível de pedido, obedecem a política de  $(T_p, S)$ , onde o custo de ordenação ( $C_F$ ) não estará sujeito a controle. A política  $(T_p, S)$ , indica que o ciclo de planejamento  $T_p$  é uma constant pré-fixada e o nível de pedido  $S$  é a variável de decisão.

Os modelos desenvolvidos sob esta política apresentam as seguintes hipóteses:

- 1) A taxa de demanda de  $K$  unidades/unid. de tempo é conhecida e constante.
- 2) A taxa de reabastecimento é infinita; o lote de reabastecimento é constante. O tempo de espera,  $\tau$ , é zero.
- 3) As faltas ocorrem e são preenchidas no início do próximo ciclo de planejamento,  $T_p$ . Estas faltas correspondem aos pedidos acumulados durante algum intervalo de tempo.
- 4) Não há reparos ou substituições de produtos deteriorados durante o ciclo de planejamento,  $T_p$ .
- 5) O custo de manutenção  $C_M$ /unid./unid. de tempo, o custo de falta  $C_{FL}$ /unid./unid. de tempo e o custo unitário  $C_V$ /unid. são constantes e conhecidos durante ciclo de planejamento sob consideração.
- 6) A distribuição Exponencial Negativa representa o tempo de deterioração do item no estoque. Neste caso, a taxa de deterioração é constante igual a  $\alpha$ .

A flutuação do estoque para os modelos de nível de pedido dependerá dos valores de  $S$  e  $q$ . Veja a figura 7, mostrada no fim desta seção.

O ponto de pedido para a figura 7 é  $s_p = S - q$ .

Pela figura 7, percebe-se que quando  $t = 0$  uma porção de  $q$  unidades entra no estoque, das quais  $(q - S)$  unidades correspondem as faltas, obtendo assim um saldo de  $S$  unidades como o nível de estoque inicial. Depois disso com o passar do tempo, o nível de estoque diminui principalmente devido a demanda e parcialmente devido a deterioração, até e incluindo  $t = t_1 - 1$ . Quando  $t = t_1$ , o nível de estoque  $I_{t_1} = 0$ . E no intervalo restante,  $t_1 \leq t \leq T_p$ , são registradas as faltas que são acumuladas

no nível  $(S - q)$ , ou seja, os pedidos são acumulados neste intervalo.

A quantidade a ser ordenada é

$$q = S + K ( T_p - t_1 ) \quad ( 49 )$$

Uma vez que  $I_t$  é quantidade de itens no início do tempo  $t$ , então  $\alpha I_t$  é a quantidade de itens deteriorados durante o tempo  $t$  e  $K$  é a taxa de demanda/unid. de tempo. Dai  $( I_t - \alpha I_t - K )$  será a quantidade de itens no início do próximo período.

### 3.1 - Modelos de nível de pedido quando o tempo é uma variável discreta.

Em 1979, DAVE [ 4 ] desenvolveu um modelo de nível de pedido para produtos deterioráveis, onde o tempo é uma variável discreta. Assim a quantidade de itens para o próximo período  $t + 1$  é dado por:

$$I_{t+1} = I_t - \alpha I_t - K \quad \text{ou}$$

$$\Delta I_t + I_t = -K \quad ,$$

onde

$$\Delta I_t = I_{t+1} - I_t \quad .$$

Note que esta relação é verdadeira somente para  $t = 0, 1, 2, \dots, t_1 - 1$ . Para o intervalo  $t_1 \leq t \leq T_p$  do ciclo, não existe estocagem de itens e conseqüentemente não haverá itens deteriorados. A relação para o intervalo  $t_1 \leq t \leq T_p$  é

$$I_{t+1} = I_t - K \quad \text{ou}$$

$$\Delta I_t = -K \quad .$$

Assim

$$\Delta I_t + \alpha I_t = -K \quad \text{para } t = 0, 1, \dots, t_1 - 1.$$

$$\Delta I_t = -K \quad \text{para } t = t_1, t_1 + 1, \dots, T_p.$$

( 50 )

Seguindo RICHARDSON [ 18 ], a solução da equação diferença linear de primeira ordem dado pela expressão (50) é:

$$I_t = C_1 (1 - \alpha)^t - k/\alpha \quad \text{para } t = 0, 1, \dots, t_1 - 1. \quad (51.a)$$

$$= C_2 - K t \quad \text{para } t = t_1, t_1 + 1, \dots, T_p, \quad (51.b)$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são as constantes de integração.

Obtem-se  $C_1$  e  $C_2$  da condição de limite  $I_{t_1} = 0$  e em seguida seus valores são substituídos na expressões (51.a) e (51.b). Encontra-se então como solução

$$I_t = K/\alpha \left[ (1 - \alpha)^{t-t_1} \right] \quad \text{para } t = 0, 1, \dots, t_1 - 1. \quad (52)$$

$$= K (t_1 - t) \quad \text{para } t = t_1, t_1 + 1, \dots, T_p.$$

Para encontrar o estoque inicial basta usar a condição que no tempo  $t = 0$ ,  $I_t = S$ .

$$S = K/\alpha \left[ (1 - \alpha)^{-t_1} - 1 \right]. \quad (53)$$

e substituindo na expressão (49) tem-se

$$q = K (T - 1) + K/\alpha \left[ (1 - \alpha)^{-t_1} - 1 \right]. \quad (54)$$

O lote econômico  $q$  supri a demanda e a deterioração durante  $[0, t_1 - 1]$  e também supri as faltas durante o intervalo  $[t_1, T_p]$ , já que não existe deterioração neste último intervalo.

A quantidades de itens deteriorados durate  $T_p$  é dado pela expressão

$$I_D(t_1) = q - K T_p = K/\alpha \left[ (1 - \alpha)^{-t_1} - 1 \right] - K t_1. \quad (55)$$

Lembre-se que o estoque deteriora-se só até  $t_1$ . Da equação (52), para o intervalo  $0 \leq t \leq t_1 - 1$ , a quantidade média de unidades no estoque é dada por :

$$N_1(t_1) = \frac{1}{T_p + 1} \sum_{t=0}^{t_1-1} I_t = \frac{K}{\alpha(T_p + 1)} \left[ \frac{(1-\alpha)^{-t_1} - 1}{\alpha} - t_1 \right]. \quad (56)$$

E as faltas médias por unidade de tempo durante o intervalo  $t_1 \leq t \leq T_p$  vem a ser

$$N_2(t_1) = \frac{1}{T_p + 1} \sum_{t=t_1}^{T_p} (-I_t) = \frac{K}{2(T_p + 1)} (T_p - t_1)(T_p - t_1 + 1). \quad (57)$$

Com as equações (55), (56) e (57) constrói-se a função do custo total por unidade de tempo.

$$C_{tot}(t_1) = \frac{C_v}{T_p} I_D(t_1) + C_M N_1(t_1) + C_{FL} N_2(t_1). \quad (58)$$

Uma vez que  $t$  deve ser um número inteiro não negativo, as condições para que  $C_{tot}(t_1)$  tenha um mínimo absoluto em  $t_1 = t_{1(opt)}$  são :

$$\Delta C_{tot}(t_{1(opt)} - 1) \leq 0 \leq \Delta C_{tot}(t_{1(opt)}) \quad (59)$$

e

$$\Delta^2 C_{tot}(t_1) \geq 0 \quad \forall t = 0, \dots, T_p. \quad (60)$$

Substituindo a equação (58) nas condições supra citadas e fazendo as devidas simplificações, a condição de otimalidade em  $t_1 = t_{1(opt)}$  torna-se

$$M(t_{1(opt)} - 1) \leq \frac{C_{FL} \alpha T_p}{C_M T_p + C_v \alpha (T_p + 1)} \leq M(t_{1(opt)}), \quad (61)$$

onde

$$M(t_1) = [(1 - \alpha)^{-(t_1 - 1)} - 1] / (T_p - t_1). \quad (62)$$

Após obter  $t_1$  ótimo, substitui-se nas equações (53), (54) e (57). E assim obter-se-á o nível de pedido ótimo  $S_{ot}$ , o lote econômico  $q$  e o custo total mínimo, respectivamente.

#### Caso particular:

Se a deterioração fosse desconsiderada, isto é, se a taxa de deterioração fosse zero, o custo total viria a ser



$$C_{tot}(t_1) = \frac{K}{2(T_p+1)} \left[ C_M t_1(t_1+1) + C_{FL}(T_p-t_1)(T_p-t_1+1) \right]. \quad (63)$$

A condição de otimalidade em  $t_1 = t_{1(ot)}$  reduz-se à :

$$\frac{t_{1(ot)}}{T_p - t_{1(ot)} + 1} \leq \frac{C_{FL}}{C_M} \leq \frac{t_{1(ot)}}{T_p - t_{1(ot)}}. \quad (64)$$

### 3.1.1 - Aplicação Numérica.

#### EXEMPLO 4 :

Para verificar a aplicabilidade do modelo de DAVE [ 4 ], utiliza-se um exemplo hipotético com os seguintes dados de entrada:

$$\begin{aligned} C_V &= \$ 80.00/\text{unidade}; \\ C_M &= \$ 1.00/\text{unidade/mês}; \\ C_{FL} &= \$ 9.00/\text{unidade/mês}; \\ K &= 200 \text{ unidades/mês}; \\ T_p &= 12 \text{ meses}. \end{aligned}$$

O exemplo será resolvido para as taxas de deterioração  $\alpha = 0.05$  unidades/mês e  $\alpha = 0$  ( para  $\alpha = 0$ , não existe deterioração), a fim de observar os resultados obtidos.

Das expressões (61) e (64), tem-se respectivamente:

$$\frac{C_{FL} \alpha T_p}{C_M T_p + C_V \alpha (T_p + 1)} = 0.084375 \quad \text{e} \quad \frac{C_{FL}}{C_M} = 9.$$

Para diferentes valores de  $t_1$ , os valores de  $M(t_1)$  são como segue:

QUADRO 4: Valores de  $M(t_1)$  para diferentes valores de  $t_1$ .

$t_1$	$M(t_1)$ c.d.	$M(t_1)$ s.d.	$t$	$M(t)$ c.d.	$M(t)$ s.d.
1	0.00982	0.1818	7	0.10147	1.6
2	0.01663	0.3	8	0.14668	2.25
3	0.0253	0.444	9	0.22341	3.33
4	0.03654	0.625	10	0.37908	5.5
5	0.05148	0.857	11	0.85072	12
6	0.072	1.166			

c.d. - com deterioração.

s.d. - sem deterioração.

Das expressões (61) e (64), tem-se:

$0.072 \leq 0.084375 \leq 0.10147$ , então pelo quadro acima  $T_p = 6$  ou 7 meses.

$5.5 \leq 9 \leq 12$ , então  $T_p = 10$  ou 11 meses, respectivamente.

O quadro seguinte traz os resultados ótimos para os dois casos: com e sem deterioração.

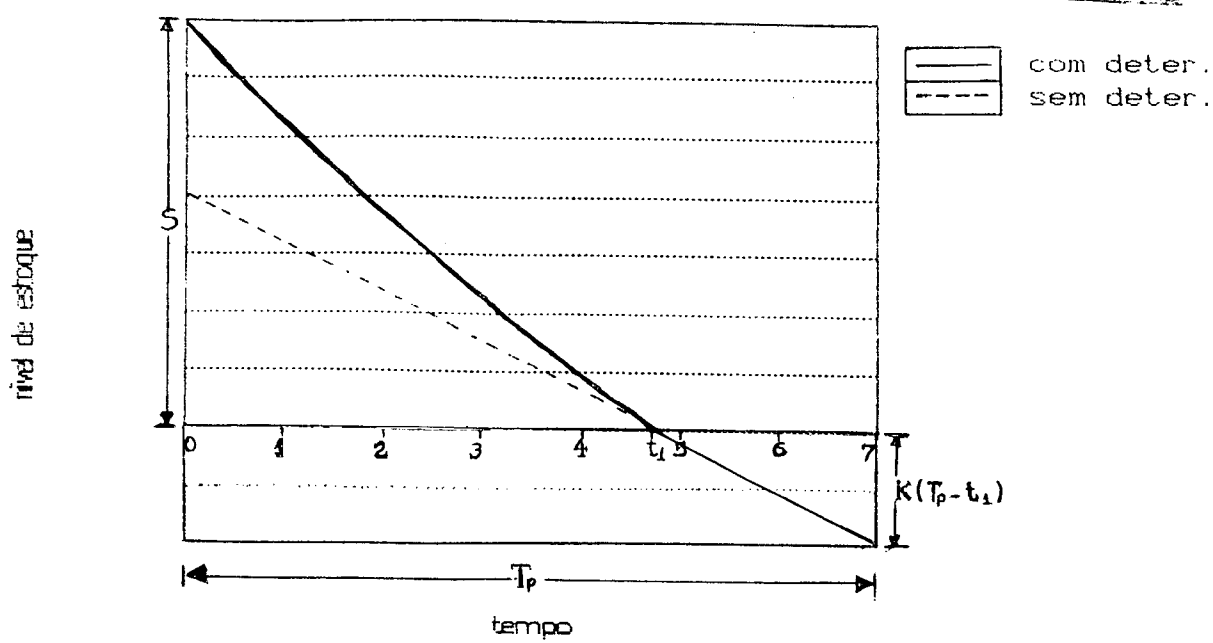
QUADRO 5: Resultados numéricos do exemplo 4, obtido pelo modelo da seção (5.1), considerando ou não deterioração.

Caso	$t_1$ (meses)	q (lote) (unids)	S (unids)	$I_D(t_1)$ (unids)	$C_{tot}(t_1)$ \$/mês
com deterioração	7	2728	1728	328	4768.18
sem deterioração	11	3232.68	3032.68	833	6970.7

328 unidades correspondem a quantidade deteriorada durante o ciclo de planejamento que é de 12 meses. Na verdade estas 328 unidades deterioram durante os sétimos primeiros meses, pois nos próximos 5 meses não haverá itens estocados e conseqüentemente não haverá itens deteriorados. Estes 5 meses se referem ao período de faltas. O mesmo acontece quando não se considera a deterioração.

Observa-se do quadro 5 uma redução no custo total de \$2202.52/mês e também um decréscimo na quantidade deteriorada de 505 unidades/ciclo de planejamento, quando a deterioração é levada em conta.

FIGURA 7 - Ciclo de estoque para modelo de nível de pedido.



3.2- Modelo de nível de pedido quando o tempo é uma variável contínua.

SARMA [19] desenvolveu um modelo de nível de pedido, onde o tempo é uma variável contínua. Além disso o modelo considera dois pontos de estocagem diferentes, um próprio da empresa e outro alugado. Os modelos já apresentados não fazem este tipo de consideração.

Este tipo de situação geralmente ocorre quando:

- 1) o custo de fazer o pedido é maior do que manter um depósito alugado (d.p), ou seja, se o custo de ordenação é alto, então a tendência é pedir menos vezes,
- 2) ou quando o tempo de espera ( $\tau$ ) para o reabastecimento é longo e os lotes (q) são recebidos somente em datas fixadas. Isso geralmente acontece quando não se pode obter o lote encomendado antes da data determinada,
- 3) ou ainda, quando o item for de natureza sazonal.  
 O depósito alugado tem a função de estocar as unidades que

excedem a capacidade fixada  $W$  do depósito próprio (d.p.). O custo de manter uma unidade no d.a., segundo o autor, excede ao do d.p., pois envolve o custo adicional do aluguel.

Dessa forma torna-se mais econômico consumir primeiramente as unidades do depósito alugado. Se o d.a. oferecer melhores condições de conservação, então a taxa de deterioração será menor.

O custo de manutenção vem a ser

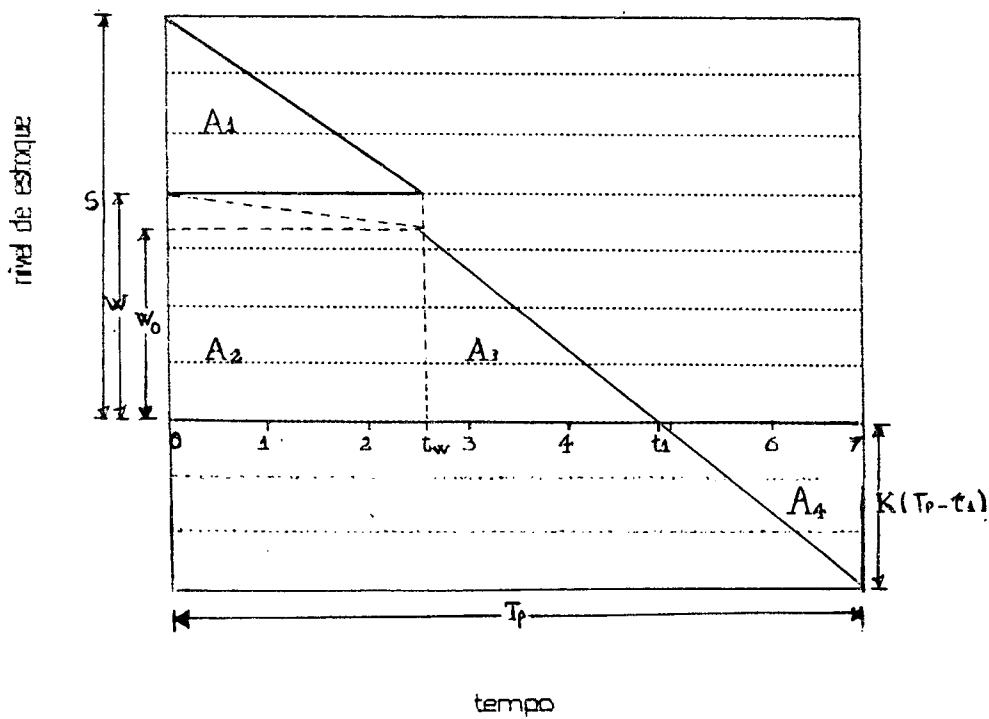
$$C_M = \begin{cases} H & \text{para itens no d.a.} \\ F & \text{" " " d.p.} \end{cases}$$

tal que  $\beta < \alpha$  e  $(F + \beta C_V) > (H + \alpha C_V)$ , onde  $\beta$  e  $\alpha$  são as taxas de deterioração no d.a. e d.p. respectivamente.

O objetivo do modelo é de decidir o nível de pedido ótimo no caso de dois depósitos e depois mostrar-se-á para o caso de apenas um depósito.

A situação do estoque é mostrado na figura 8, onde o esgotamento do estoque aparece como uma função linear do tempo, simplificando assim a exposição.

FIGURA 8 - Ciclo de estoque para o modelo de nível de pedido, incluindo dois depósitos



Seguindo a figura 8; tem-se:

A área total do estoque é dividida em quatro partes por conveniência e cada uma é avaliada separadamente. São descritas como segue:

$A_1$  : área durante  $(0, t_v)$  no d.a.;

$A_2$  : área durante  $(0, t_v)$  no d.p.;

$A_3$  : área durante  $(t_v, t_1)$  no d.p.;

$A_4$  : área durante  $(t_1, T_p)$  representado as faltas.

A quantidade a ser ordenada é dada pela expressão (49).

### 1) Situação no depósito alugado.

$I_t$  denota o nível de estoque em algum tempo  $t$  no d.a..

A equação diferencial que descreve o estado do estoque é dado por:

$$\frac{dI_t}{dt} + \beta I_t = -K, \quad \text{para } 0 \leq t \leq t_v. \quad (65)$$

A solução desta, utilizando as condições de limites,  $I_0 = Z$  e

$I_{t_v} = 0$  vem a ser respectivamente

$$I_t = \left[ Z + K/\beta \right] e^{-\beta t} - K/\beta \quad (66)$$

$$t_v = 1/\beta \ln \left[ 1 + \beta Z/K \right], \quad (67)$$

onde  $t_v$  é o tempo necessário para o esgotamento total do estoque no depósito alugado. A quantidade consumida e deteriorada no intervalo  $0 \leq t \leq t_v$  é respectivamente

$$\rightarrow K t_v \quad (68)$$

$$\rightarrow Z - K t_v. \quad (69)$$

Observa-se que  $(Z - K t_v) = \beta A_1$ , isto é, a quantidade deteriorada  $(Z - K t_v)$  é equivalente a taxa de deterioração sobre a área  $A_1$ . Logo

$$A_1 = (Z - K t_v)/\beta. \quad (70)$$

### 2) Situação no depósito próprio.

A situação no depósito próprio é subdividida em duas outras:

a) Durante o intervalo  $0 \leq t \leq t_v$ , todas as  $W$  unidades do d.p. são guardadas sem uso, mas elas estão sujeitas a deterioração com uma taxa  $\alpha$ . A equação diferencial que descreve o estado do estoque

neste intervalo é dado por:

$$\frac{dI_t}{dt} + \alpha I_t = 0, \quad \text{para } 0 \leq t \leq t_v \quad (71)$$

(O zero que aparece do lado esquerdo da igualdade, indica que não houve consumo).

A solução da equação (71), utilizando as condições de limites  $I_0 = W$  e  $I_{t_v} = W_0$ , vem a ser respectivamente

$$\rightarrow I_t = W e^{-\alpha t} \quad (72)$$

$$\rightarrow W_0 = W e^{-\alpha t_v} \quad (0 \leq t \leq t_v) \quad (73)$$

Nota-se também que  $(W - W_0)$  é a porção deteriorada durante  $0 \leq t \leq t_v$ , que é equivalente a  $\alpha A_2$ . Ou seja,

$$A_2 = (W - W_0)/\alpha. \quad (74)$$

b) Já durante o intervalo  $t_v \leq t \leq t_1$ , o estoque no depósito alugado está sujeito tanto a deterioração como ao consumo.

A equação diferencial que representa o estado do estoque neste caso é dado por:

$$\frac{dI_t}{dt} + \alpha I_t = -K, \quad \text{para } t_v \leq t \leq t_1. \quad (75)$$

A solução de (75), usando a condição de limite  $I_{t_v} = W_0$ , vem a ser

$$I_t = \left[ W_0 + K/\alpha \right] e^{-\alpha(t-t_v)} - K/\alpha. \quad (76)$$

Pela figura 8,  $t^x = (t_1 - t_v)$  é o período necessário para o esgotamento total das  $W_0$  unidades no depósito próprio. Utilizando a condição de limite,  $I_{t_1} = 0$ , a equação (76) torna-se:

$$t^x = 1/\alpha \ln \left[ 1 + W_0 \alpha / K \right]. \quad (77)$$

É importante saber que a porção consumida no intervalo  $(t_1 - t_v)$  é de  $Kt^x$  unidades e a quantidade deteriorada durante este mesmo intervalo é de  $(W_0 - Kt^x)$  unidades. A quantidade  $(W_0 - Kt^x)$  é equivalente a  $\alpha A_3$ . Ou seja,

$$A_3 = (W_0 - Kt_1^x) / \alpha. \quad (78)$$

3) Situação no intervalo  $t_1 \leq t \leq T_p$ .

Só resta estudar então, o intervalo  $t_1 \leq t \leq T_p$ , que corresponde o período de faltas.

A quantidade de faltas ocorridas neste intervalo é dada pela área

$$A_4 = K (T_p - t_1)^2 / 2. \quad (79)$$

Durante o intervalo de faltas não existe itens deteriorados, pois não há estocagem de itens.

A quantidade de itens deteriorados durante todo o ciclo de planejamento  $T_p$  é

$$I_D(T_p) = (S_0 - Kt_1). \quad (80)$$

A função do custo total para modelo é

$$C_{tot}(S_0) = 1/T_p \left[ C_v I_D(T_p) + F A_1 + H C (A_2 + A_3) + C_{FL} A_4 \right], \quad (81)$$

sendo que o valor ótimo de  $S_0$  é obtido resolvendo a expressão

$$\frac{\partial C_{tot}(S_0)}{\partial S_0} = 0$$

Resolvendo a expressão acima e em seguida fazendo algumas simplificações, obtém-se

$$C_v(K + \beta Z)(K + \alpha W_0) + C_v K^2 + FZ(K + \alpha W_0) + HKW_0 = C_{FL} K^2 (T_p - t_1). \quad (82)$$

A equação (82) pode ser ainda mais simplificada, utilizando para isso as seguintes aproximações:

i)  $\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3$ , para  $|x| < 1$ ;

ii)  $e^{-x} = 1 - x + x^2/2$ ;

iii) os termos de  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\alpha\beta$  de segunda ordem ou maior devem ser ignorados.

Com estas aproximações, tem-se

$$\rightarrow t_v = (S_0 - W)/K - \beta(S_0 - W)^2/2K^2, \quad (83)$$

$$\rightarrow W_0 = W - \alpha W S_0 / K + \alpha W^2 / K \quad e \quad (84)$$

$$\rightarrow t_1 = S_0/K - \beta(S_0 W)^2/2K^2 + \alpha W^2/2K^2 - \alpha W S_0/K^2. \quad (85)$$

Agora substituindo estes resultados na equação (82), ela reduz-se a

$$\begin{aligned} & C_{FL} \beta (S_0)^2 + S_0 [C_{FL} W (\alpha - \beta) + \alpha W (H - F) - K (F + C_{FL} + \beta C_V)] \\ & + C_{FL} K^2 T_p - W^2 [C_{FL} (\alpha - \beta)/2 + \alpha (H - F)] - WK [C_V (\alpha - \beta) \\ & + (H - F)] = 0. \end{aligned} \quad (86)$$

Além disso é preciso verificar a condição suficiente para o custo total mínimo que é  $\partial^2 C_{tot}(S_0)/\partial S_0^2 > 0$  e então neste momento encontra-se o nível de pedido ótimo.

#### Casos Particulares do modelo:

a) Quando  $W = 0$ , a quantidade  $S_0$  está toda guardada em único depósito, com isso a equação (86) vem a ser

$$S_0 (C_V \beta + F) = C_{FL} K (T_p - t_v). \quad (87)$$

Substituindo o valor de  $t_v$  aproximado, dado anteriormente pela expressão (86), obtém-se

$$S_0 (F + \beta C_V) + C_{FL} S_0 (1 - \beta S_0/2K) = C_{FL} K T_p. \quad (88)$$

b) Supõe-se agora que  $\beta$  seja um valor aproximadamente zero, então

$$S_0 (F + C_{FL}) = C_{FL} K T_p. \quad (89)$$

Esta expressão é dada por NADDOR [12], o qual considera apenas um depósito e a inexistência de deterioração.

c) Quando  $\alpha = \beta = 0$ , isto é, quando não houver deterioração em nenhum dos depósitos, logo a equação (86) resulta em

$$S_0 = \frac{C_{FL} K T_p + W (F - H)}{F + C_{FL}} \quad (90)$$

Se neste caso  $F$  (custo de manter um unidade no d.a.) for muito grande, então o valor de  $S_0 \rightarrow W$ , logo não será conveniente alugar um depósito.

#### 3.2.1- Aplicação Numérica.



EXEMPLO 5 :

A demanda para um artigo de utilidade doméstica é conhecida e constante com uma taxa de 100 unidades/dia. O item é comprada de um vendedor e a política é para obter um lote no primeiro dia de cada mês ( 30 dias). O tamanho do lote é constante e faltas são acumuladas. A empresa tem um depósito próprio que tem capacidade de guardar até 20000 unidades/mês. O que excede é armazenado em um depósito alugado próximo a empresa.

Supondo-se que o custo de manter uma unidade do item no d.a. é bem mais caro que mantê-lo no d.p., mas no entanto a taxa de deterioração no d.a. é bem menor. Além dessas informações tem-se os seguintes parâmetros de entrada:

$$K = 1000 \text{ unidades/dia ( } 30.000 \text{ unidades/mês )},$$

$$C_v = \$ 5.00 / \text{unidade ( custo de adquirir um item)},$$

$$C_{FL} = \$ 2.00 / \text{unidade/dia ( custo de faltar um item )},$$

$$H = \$ 0.085 / \text{unidade/dia ( custo de manter um item no d.p.)},$$

$$F = \$ 0.11 / \text{unidade/dia ( custo de manter um item no d.a.)},$$

$$\alpha = 0.01 \text{ ( taxa de deterioração no d.p.)},$$

$$\beta = 0.006 \text{ ( taxa de deterioração no d.a.)},$$

$$W = 20000 \text{ unidades ( capacidade do d.p.) e}$$

$$T_p = 30 \text{ dias ( ciclo de planejamento )}.$$

Substituindo todos esses valores na expressão (86), tem-se  $-0.006(S_0)^2 + 64045 S_0 - (1.8015) \times 10^9 = 0$ . As raízes desta equação quadrática são :  $S_0' = 28203$  unidades e  $S_0'' = 10645963$  unidades. Mas apenas  $S_0'$  satisfaz a condição suficiente, supra citada, para o custo mínimo.

Resultados Finais:

$$S_0 \text{ ( nível de pedido ótimo )} = 28203 \text{ unidades},$$

$$q \text{ ( lote econômico )} = 30129 \text{ unidades},$$

$$t_1 = 0.9358 = 28.074 \text{ dias, isto indica que } 93.58\% \text{ do ciclo de planejamento não ocorrerá faltas.}$$

$$I_D(T_p) \text{ ( quantidade de itens deteriorados durante } T_p) = 129 \text{ unids.}$$

$$Z = 8203 \text{ unidades ,}$$

$$t_v \text{ ( tempo necessário para o esgotamento tota do depósito alugado)} = 8.2 \text{ dias,}$$

$K (T_p - t_1)$  ( número de unidades faltosas ) = 1926 unidades.

Portanto das 30129 unidades a serem adquiridas, 28074 unidades são destinadas ao consumo, 129 unidades deterioram-se e 1926 unidades correspondem as faltas.

### 3.3 - Comparações e Análises.

Estudou-se no capítulo 3, modelos de nível de pedido, onde a variável de decisão é  $S$  e o ciclo de planejamento é pré-fixado. Apresentou-se o modelo de DAVE [ 4 ], onde o tempo é uma variável discreta e o modelo de SARMA [ 19 ], considerando tempo é uma variável contínua.

A princípio parece não ser uma contribuição fundamental a construção de um modelo discreto, já que se pode trabalhar como uma modificação na unidade de tempo.

Mas existem casos críticos, onde é necessária o uso deste modelo, por exemplo : quando o lote é planejado para chegar ao estoque no quinto dia de cada mês, ou quando o pedido é feito a cada primeiro dia da semana. Para estes casos, a discretização da variável tempo é viável.

SARMA [ 19 ] desenvolveu um modelo considerando dois pontos de estocagem, um próprio da empresa e outro alugado, para o tempo contínuo. Algumas razões mais comuns para optar pelo aluguel foram já comentadas. É um modelo simples, pois para encontrar o nível de pedido ótimo basta resolver a equação quadrática (86).

Mostrar-se-á um quadro resumo com os resultados ótimos obtidos pelos modelos estudados. Considerando o exemplo 4, aquele fornecida pelo modelo de DAVE [ 4 ] e o exemplo 5, o fornecido por SARMA [ 19 ].

QUADRO 6: Resumo dos resultados ótimos obtidos pelos modelos do capítulo 3, na resolução dos exemplos considerados.

modelo	exemplo	$S_o$ unids	$q$ unids	$t_1$	$I_D(T_p)$ unids	% sobre $S_o$	$C_{tot}(S_o)$ \$/mês
DAVE	4	1728	2728	7 meses	328	19%	4768.18
SARMA	4	1580	2640	6.7	240	15%	4106.8
SARMA	5	28203	30129	28 dias	129	0.49%	1895

Do quadro:

Para resolver o exemplo 4 fornecido por DAVE [ 4 ] ,

utilizando o modelo de SARMA [ 19 ], basta considerar que os itens serão estocados em apenas um depósito. Isto aparece na linha 2.

Os resultados apresentados na linha 1, são os valores ótimos obtidos por DAVE [ 4 ], para o exemplo 4.

A linha 3 mostra o modelo de SARMA [ 19 ], utilizado na íntegra, ou seja, para os dois depósitos..

Em fim observa-se uma flexibilidade maior nos resultados, onde o tempo é contínuo.

## CAPÍTULO IV - MODELOS DE NÍVEL DE PEDIDO E LOTE ECONÓMICO.

Estes modelos seguem a política  $(S, q)$ , onde  $S$  e  $q$  são as variáveis de decisão. Aqui o custo total envolve os custos de manutenção  $(C_M)$ , unitário  $(C_V)$ , de ordenação  $(C_F)$  e de falta  $(C_F)$ .

Os modelos de nível de pedido e lote económico podem ser vistos como uma extensão de cada um dos capítulos 2 e 3. Se, no capítulo 2 for removida a hipótese  $s_p = 0$  e permitir faltas, obter-se-á o presente capítulo. Similarmente, se no capítulo 3, for removida a hipótese de que o ciclo de planeamento é pré-fixado, também obter-se-á o presente capítulo.

Os modelos desenvolvem suas expressões de nível de pedido e lote económico seguindo as hipóteses do capítulo 3, com excepção de que o ciclo de planeamento  $(T)$  é desconhecido. A figura 7 também representa um ciclo de estoque para o caso de nível de pedido e lote económico. A situação do estoque para cada intervalo da figura 7, comentada no capítulo 3, é válida também para modelos de nível de pedido e lote económico.

A quantidade a ser ordenada é dada pela equação (49).

### 4.1 - Modelo de nível de pedido e lote económico quando o tempo é uma variável contínua.

O modelo que será agora estudado é de autoria de SHAH [ 20 ]. Ele desenvolve um modelo geral de nível de pedido e lote económico, onde o tempo é uma variável contínua. E em seguida mostra três casos particulares.

O objetivo do modelo em questão é de obter o nível de pedido e o lote económico ótimos, tal que o custo total seja mínimo.

A equação diferencial que descreve os estados instantâneos de  $I_t$  sobre  $(0, t)$  é dado por

$$\frac{dI_t}{dt} + I_t Z(t) = -K, \quad 0 \leq t \leq t_1 \quad (91.a)$$

$$\frac{dI_t}{dt} = -K, \quad t_1 \leq t \leq T.$$

As soluções das equações supra citadas, após os ajustes para as constantes de integração, são

$$I_1 = K/u(t) [ UC(t_1) - UC(t) ] , 0 \leq t \leq t_1 \quad (91.a)$$

$$I_1 = Kct_1 - T , t_1 \leq t \leq T, \quad (91.b)$$

onde  $u(t)$  e  $UC(t)$  são dadas pelas equações (4) e (5), respectivamente.

Da equação (91.b), quando  $t = 0$ ,

$$I_0 = S = KUct_1 \quad (92)$$

e daí substituindo na equação (49), o lote econômico vem a ser

$$q = K [ UC(t_1) + (T - t_1) ]. \quad (93)$$

A quantidade de itens deteriorados é

$$I_D = S - Kt_1 = K[UC(t_1) - t_1]. \quad (94)$$

Pela figura 7, o número médio de unidades no estoque e a quantidade de itens faltosos são respectivamente

$$A_1 = St_1/2 \quad e \quad (95)$$

$$A_2 = K(T - t_1)^2. \quad (96)$$

Então as duas variáveis de decisão  $S$  e  $q$  são funções explícitas de  $t_1$  e  $T$ . Logo a equação do custo total deve ser expressa em termos de  $t_1$  e  $T$ , assim

$$C_{tot}(t_1, T) = 1/T ( C_{VD} I_D + C_M A_1 + C_{FL} A_2 + C_F )$$

$$= 1/T \left\{ C_V K [ UC(t_1) - t_1 ] + C_M K t_1 UC(t_1) / 2 + C_{FL} K (T - t_1)^2 t_1 / 2 + C_F \right\}. \quad (97)$$

Para a obtenção da função custo, o autor assumiu convenientemente que a função  $I_1$  é aproximadamente linear em  $t$ , sobre  $(0, T)$ , como mostra a figura 7.

Resolvendo  $\partial C_{tot}(t_1, T) / \partial t_1 = 0$  e  $\partial C_{tot}(t_1, T) / \partial T = 0$ , encontra-se os valores ótimos de  $t_1$  e  $T$  respectivamente.

$$2C_v [u(t_1) - 1] + C_M [t_1 u(t_1) + U(t_1)] + 2C_{FL} t_1 = 2C_{FL} T \quad (98)$$

e

$$2C_v [U(t_1) - t_1] + C_M t_1 U(t_1) + 2C_F/K + C_{FL} t_1^2 = C_{FL} T^2. \quad (99)$$

Eliminando T de (98) e (99), obtém-se

$$\begin{aligned} & (2C_v [u(t_1) - 1] + C_M [t_1 u(t_1) + U(t_1)])^2 + \\ & 8C_F C_{FL} [t_1 u(t_1) - U(t_1)] + 4C_M C_{FL} t_1^2 u(t_1) - 8C_{FL} C_F/K = 0. \end{aligned} \quad (100)$$

Resolvendo (100), obtém-se o valor ótimo de  $t_1$ , e substituindo em (99), tem-se o valor ótimo de T. Finalmente, substituindo os valores ótimos de  $t_1$  e T em (97), obtém-se o custo total mínimo por unidade de tempo. E conseqüentemente o lote econômico e o nível de pedido ótimos deverão ser encontrados. Geralmente, métodos numéricos são adotados para resolver a equação (100).

#### Casos particulares:

a) Se as faltas não fossem permitidas, isto é, se  $C_{FL} \rightarrow \infty$ , então a equação (97) daria  $t_1 = T$ . Neste caso  $q = S$  e a função custo reduziria a equação (10). Este é o caso abordado pelo capítulo 2.

b) Se  $Z(t) = 0$ , isto é, se não existisse deterioração, então  $u(t_1) = 1$  e  $U(T) = t$  para todo t. Neste caso a função custo viria a ser

$$C_{tot}(t_1, T) = C_M K t_1^2 / 2T + C_{FL} K (T - t_1)^2 / 2T + C_F. \quad (101)$$

Para encontrar os valores ótimos de  $t_1$  e T, faz-se  $\partial C_{tot}(t_1, T) / \partial t_1 = 0$  e  $\partial C_{tot}(t_1, T) / \partial T = 0$  respectivamente e obtém-se

$$t_1 = \left[ \frac{2C_F C_{FL}}{C_M K (C_M + C_{FL})} \right]^{1/2} \quad e \quad (102)$$

$$T = \left[ \frac{2C_F (C_{FL} + C_F)}{C_M C_{FL} K} \right]^{1/2}. \quad (103)$$

Estas são as fórmulas padrões para obter  $(t_1, T)$  no modelo similar para itens não deterioráveis, como dado por NADDOR [12] (capítulo 5 - pg. 82).

c) Distribuição Exponencial Negativa para o tempo de deterioração de um item.

As funções de densidade probabilística e distribuição acumulativa, bem como a construção da taxa de deterioração para a distribuição em questão, estão colocadas no apêndice 2.

A taxa de deterioração é dada pela equação (13).

Para esta distribuição  $u(t)$  e  $U(t)$  são dados pelas equações (14) e (15) respectivamente, para o intervalo  $0 \leq t \leq t_1$ .

Expandindo as exponenciais em séries e ignorando os termos de segundo ou maior ordem de  $\alpha$  sob a hipótese que  $\alpha \ll t_1$ , as equações (92), (93), (94), (97) e (100) vem a ser

$$S = Kt_1(1 + \alpha t_1/2) \quad , \quad (104)$$

$$q = KT + Kat_1^2/2 \quad , \quad (105)$$

$$I_D = Kat_1^2/2 \quad , \quad (106)$$

$$C_{tot}(t_1, T) = C_V Kat_1^2/2T + C_M Kt_1^2(1 + \alpha t_1/2)/2T + C_{FL} K(T - t_1)/2T + C_F/T \quad (107)$$

$$C_M(3C_M + 2C_{FL})\alpha t_1^2 + 2C_M^2 + C_M C_{FL} + 2C_M C_F \alpha + C_V C_{FL} \omega t_1^2 - 4C_{FL} C_F/K = 0$$

respectivamente. (108)

Quando  $C_{FL} \rightarrow \infty$ ,  $t_1 = T$  e a equação (108) reduz-se a equação (19), dado por GHARE E SCHRADER [ 5 ], em seu modelo.

#### 4.1.1 - Aplicação Numérica.

##### EXEMPLO 6 :

Para ilustrar o modelo, um sistema hipotético foi adotado com os seguintes dados de entrada:

$$C_V = \$ 50.00/\text{unidade} \quad ,$$

$$C_M = \$ 0.02/\text{unidade}/\text{dia},$$

$$C_{FL} = \$ 0.1/\text{unidade}/\text{dia},$$

$$C_F = \$ 25.00/\text{ordem},$$

$$K = 10 \text{ unidades}/\text{dia}.$$

O tempo de deterioração de um item segue uma distribuição

exponencial negativa com vida média  $1/\alpha = 500$  dias, isto é,  $\alpha = 0.002$ .

Resultados Finais:

A equação (108) é resolvida utilizando um método iterativo ( ex.: Newton-Raphson ) e ai

$$t_1 = 4.34 \text{ dias e}$$

$$T = 9.56 \text{ dias.}$$

Os valores ótimos do lote econômico  $q$  e do nível de pedido  $S$  são

$$q = 95.79 \text{ unidades e}$$

$$S = 43.57 \text{ unidades.}$$

O custo total mínimo por unidade de tempo é  $C_{tot}(t_1, T) = \$5.22/\text{dia}$ .

**4.2 - Modelo de nível de pedido e lote econômico quando o tempo é uma variável discreta.**

GOYAL [ 6 ], desenvolveu um modelo de nível de pedido e lote econômico, onde o tempo é uma variável discreta. Este modelo é uma extensão do modelo de DAVE [ 4 ], noqualo ciclo de planejamento é conhecido e para o modelo de GOYAL [ 6 ],  $T$  é desconhecido.

As equações (53), (54) e (55) do modelo de DAVE [ 4 ] são válidas para o atual modelo. Observa-se algumas alterações nas equações (56) e (57) que representam a quantidade média de unidades estocadas e o número médio de faltas, respectivamente. Apresenta-se as equações (56) e (57) modificadas

$$N_1(t_1, T) = K/2T \left[ \frac{t_1(t_1 + 1)}{2} + \frac{\alpha t_1(1+t_1)}{\alpha^2(1-\alpha)^{t_1}} + \frac{1-\alpha}{\alpha^2} \right] \quad (109)$$

e

$$N_2(t_1, T) = K/2T \left[ (T - t_1)(T - t_1 + 1) \right]. \quad (110)$$

Para um valor particular de  $t_1$  o custo pode ser minimizado por escolher  $T = T(t_1)$  tal que

$$C_{tot}(T(t_1), t_1) < C_{tot}(T(t_1) + 1, t_1) \quad (111)$$

e

$$C_{tot}(T(t_1), t_1) \leq C_{tot}(T(t_1) - 1, t_1). \quad (112)$$



Fazendo as devidas substituições, obtem-se

$$T(t_1)(T(t_1)+1) > X(t_1)/(KC_{FL}) \geq T(t_1)(T(t_1)-1), \quad (113)$$

onde

$$X(t_1) = 2 \left[ C_F + C_V K / \alpha \left( (1 - \alpha)^{-t_1} - (1 + \alpha t_1) \right) + K t_1 (t_1 + 1) \right. \\ \left. + (C_{FL} + C_M / 2) + K C_M \left( \frac{\alpha(1+t_1)^{-1}}{\alpha^2(1-\alpha)^{t_1}} + \frac{1-\alpha}{\alpha^2} \right) \right]. \quad (114)$$

o autor constrói um procedimento de procura para obter  $t_1$  e  $T$  ótimos.

Algoritmo:

Passo 1 - assumir  $t_1 = 0$ ,  
 - calcular  $X(t_1)$  e  $T(t_1)$ .  
 - Calcular o maior inteiro  $t = t_1$  que satisfaça  
 $t_1 [C_M + C_{FL} + \alpha(C_V + C_M t_1 / 2)] \leq C_{FL} T$ .

Passo 2 - Fazer  $t = t_1$ .  
 - Repetir passo 1 e obter  $T(t_1)$ .

Passo 3 - Pare no  $j$ -ésimo teste se  $t_1(j) = t_1(j-1) = t_1$ ,  
 e  $T(t_1(j-1)) = T(t_1(j-2)) = T$ , onde  $t_1$  e  $T$  são  
 valores ótimos.

Passo 4 -  $q$  e  $S$  são obtidos.

#### 4.2.1- Aplicação Numérica.

##### EXEMPLO 7 :

Dados de entrada são como segue:

$C_V = \$ 80.00/\text{unidade}$ ,  
 $C_M = \$ 1.00/\text{unidade/periodo}$ ,  
 $C_{FL} = \$ 9.00/\text{unidade/periodo}$ ,  
 $C_F = \$ 1000.00/\text{ordem}$ ,  
 $K = 100 \text{ unidades/periodo}$  e  
 $\alpha = 0.05 \text{ unidades/periodo}$ .

##### Resultados Finais:

$t_1 = 1 \text{ periodo}$ ,  
 $T = 2 \text{ periodos}$ ,

$q = 205.26$  unidades,

$S = 105.26$  unidades,

$I_D = 5.26$  unidades e

Custo Total = \$ 763.03/período.

#### 4.3 - Comparações e Análises.

Abaixo mostra-se um quadro-resumo, com resultados ótimos obtidos pelos modelos supra estudados.

QUADRO 7 - Resultados numéricos obtidos, pelos modelos estudados neste capítulo.

modelo	ex.:	$t_1$	T	S unidade	q unidade	$I_D$ unidade	% perda sobre S	$C_{tot}(t_1, T)$
SHAH	6	4.34 dias	9.56 dias	43.56	95.79		0.43	\$5.22/dia
GOYAL	6	4 dias	10 dias	40.2	100.2		0.5	\$5.204/dia
SHAH	7	1.55 per.	2.28 per.	161.2	234.2	6.2	3.9	\$814.9/pe- riodo
GOYAL	7	1 per.	2 per.	105.3	205.3	5.3	5	\$763/peri- odo.

Do quadro acima, percebe-se uma flexibilidade maior para os resultados obtidos por SHAH [ 20 ], isto porque a variável tempo é contínua.

Os dois espaços em branco na coluna 7, indicam que menos de uma unidade deterioraram.

As considerações feitas para os modelos do capítulo 3 com respeito a importância da construção de um modelo discreto ou contínuo, são válidas para os modelos deste capítulo.

CAPÍTULO V - MODELOS DE ESTOQUES DETERIORÁVEIS COM TAXA DE REABASTECIMENTO FINITA.

Os três últimos modelos estudados, consideram a taxa de reabastecimento infinita, ou seja, o lote econômico é entregue de uma só vez. Enquanto que neste capítulo esta taxa vem a ser finita, isto significa que o reabastecimento é feito parcialmente. Estes modelos adaptam-se a produção de itens.

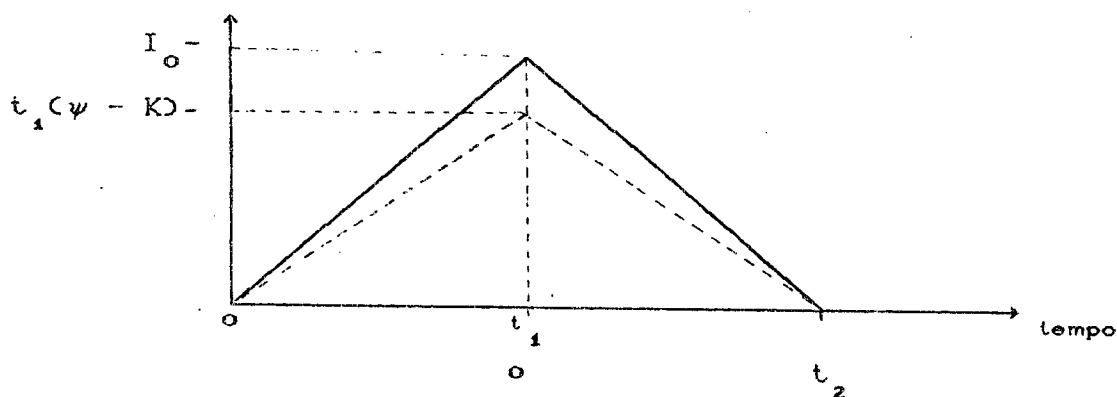
5.1 - Modelo de lote econômico com taxa de reabastecimento finita.

MISRA [ 9 ], desenvolveu um modelo de lote econômico com taxa de reabastecimento finita. A base deste modelo está embutida no modelo de GHARE E SCHRADER [ 5 ], capítulo 2. As hipóteses para o modelo de MISRA [ 9 ] seguem as do segundo capítulo com exceção de que aqui, a taxa de reabastecimento,  $\psi$ , é finita.

A variável de decisão é o lote econômico. A distribuição utilizada para representar o tempo de deterioração do item no estoque é a Exponencial Negativa, logo a taxa de deterioração é constante.

Uma ciclo de estoque para o modelo de lote econômico com taxa de reabastecimento finita é mostrado na figura 9.

FIGURA 9 - Ciclo de estoque para o modelo de lote econômico com taxa de reabastecimento finita.



Da figura 9, tem-se

→ O autor tratou a curva do esgotamento do estoque como uma linha reta, apesar de não ser linear.

→  $I_0$  e  $t_1(\psi - k)$  representam os estoques máximos dos modelos com e sem deterioração, respectivamente.

→ O nível de estoque no início e no fim do ciclo de planejamento é zero.

→ No intervalo  $0 \leq t \leq t_1$ , é efetuada a produção e o estoque esgota-se devido a demanda e a deterioração.

→ De  $t_1 \leq t \leq t_2$ , observa-se o fim da produção e o estoque continua decrescendo devido a demanda e a deterioração.

→  $t_1 + t_2 = T$  ( ciclo de planejamento ).

→ A mudança no nível de estoque,  $dI$ , durante um pequeno intervalo de tempo,  $dt$ , é uma função da deterioração, da demanda, da taxa de produção e do estoque restante. Assim

$$\frac{dI}{dt} + I_t Z(t) = (\psi - K)dt, \quad 0 \leq t \leq t_1 \quad (115)$$

e

$$\frac{dI}{dt} + I_t Z(t) = -K, \quad t_1 \leq t \leq t_2. \quad (116)$$

As soluções destas equações diferenciais são dadas por KELLS [7], onde  $Z(t) = Z_0(t) = \alpha$ . Segue-se com as soluções, após ter substituído os valores das constantes de integração.

$$I_{t(1)} = \frac{(\psi - K)}{\alpha} [1 - \exp(-\alpha t)], \quad 0 \leq t \leq t_1 \quad (117)$$

$$I_{t(2)} = \frac{K}{\alpha} \left[ \frac{\exp(\alpha t_2) - \exp(\alpha t)}{\exp(\alpha t_2)} \right], \quad t_1 \leq t \leq t_2. \quad (118)$$

Ainda pela figura 9, tem-se que quando  $t = t_1$ ,  $I_{t_1} = I_0$  ( estoque máximo durante o ciclo de planejamento,  $T$  ). Substituindo esta condição nas equações supra citadas, obtém-se como resultado

$$I_{t_1(1)} = \frac{(\psi - K)}{\alpha} [1 - \exp(-\alpha t_1)] = I_0 \quad (119)$$

e

$$I_{t_2(2)} = \frac{K}{\alpha} [\exp(\alpha t_2) - 1] = I_0 \quad (120)$$

A quantidade de itens a ser produzido é dado por:

$$q = \psi \cdot t_1, \quad (121)$$

onde  $q$  é o lote econômico,  $\psi$  é a taxa de produção e  $t_1$  é o período que ocorre a produção.

O número médio de unidades no estoque é

$$\frac{1}{t_1 + t_2} \left[ \int_0^{t_1} I_{t(1)} + \int_0^{t_2} I_{t(2)} \right]. \quad (122.a)$$

Depois de resolver as integrais, expandir as exponenciais em séries e ignorar os termos de maior ordens de  $\alpha$ , a equação (122.a) pode ser reescrita da forma abaixo:

$$\frac{1}{t_1 + t_2} \left[ (\psi - K)t_1^2/2 + Kt_2^2/2 \right]. \quad (122.b)$$

A quantidade média de itens deteriorados durante  $T (= t_1 + t_2)$  é

$$I_D(T) = (q - KT)/T = \psi t_1/T - K. \quad (123)$$

O equação do custo total segue a expressão abaixo:

$$C_{tot}(T) = \frac{C_v \psi t_1}{t_1 + t_2} - C_v K + \frac{C_M}{t_1 + t_2} [(\psi - K)t_1^2/2 + Kt_2^2/2] + \frac{C_F}{t_1 + t_2}. \quad (124)$$

Para resolver a equação acima, o autor criou uma relação entre  $t_1$  e  $t_2$ , através da igualdade existentes entre as equações (119) e (120). E após expandir as exponenciais em séries e ignorar os termos de maior ordens, tem-se

$$\alpha t_2^2/2 + t_2 - m [t_1 - t_1^2] \cong 0, \text{ onde } m = (\psi - K)/K. \quad (125)$$

Dai

$$t_2 \cong m (t_1 - \alpha t_1^2/2), \quad (126)$$

$$t_1 \cong t_2/m (1 + t_2 \alpha/2) \quad (127)$$

e

$$t_1 + t_2 \cong t_1 \psi / K - \alpha t_1^2 (\psi - K)/2K. \quad (128)$$

Substitui-se todos estes valores na equação do custo total, diferencia-se relação a  $t_1$  ou a  $t_2$  e iguala-se a zero. Em seguida

supõe-se  $1/\alpha \ll t_1$  e daí, obtém-se

$$t_{1(ot)} = \sqrt{\frac{1}{(1 + C_V K \alpha / (C_M \psi))}} \cdot t_{1c} \quad (129)$$

e

$$t_{2(ot)} = \sqrt{\frac{1}{[1 + C_V \alpha (\psi - K) / (C_M \psi)]}} \cdot t_{2c} \quad (130)$$

Os subscritos c e ot, indicam que os elementos em questão são convencionais (isto é, não existe deterioração) e ótimos, respectivamente. Os valores de  $t_{1c}$  e  $t_{2c}$  são dados por NADDOR [12].

#### Caso Particular:

Supondo a taxa de produção  $\psi \rightarrow \infty$ , o modelo reduz-se ao modelo de GHARE E SCHRADER [5], no capítulo 2.

#### 5.1.1 - Aplicação Numérica.

##### EXEMPLO 8 :

Para verificar a aplicabilidade do modelo, o autor utilizou os seguintes dados de entrada:

$$C_V = \$ 3.00/\text{unidade},$$

$$C_M = \$ 0.6/\text{unid./ano},$$

$$C_F = \$ 50.00/\text{ordem},$$

$$K = 2500 \text{ unidades/ano},$$

$$\psi = 7500 \text{ unidades/ano e}$$

$$\alpha = 1/50 \text{ unids/ano.}$$

##### Resultados Finais:

Mostra-se no quadro abaixo, um paralelo dos resultados obtidos pelo modelo considerando ou não a deterioração.

QUADRO 8 : Resultados ótimos do exemplo 8, considerando ou não a deterioração.

CASO	$t_1$ dias	$t_2$ dias	T dias	q unidade	$I_D$ (CT) unidade	$C_{tot}$ (CT) \$/dias
com deterioração	37.9	47.1	85	778	196	47456
sem deterioração	38.5	47.2	85.7	791	204	48049.55

Observando o quadro acima, conclui-se que o modelo reduziu o

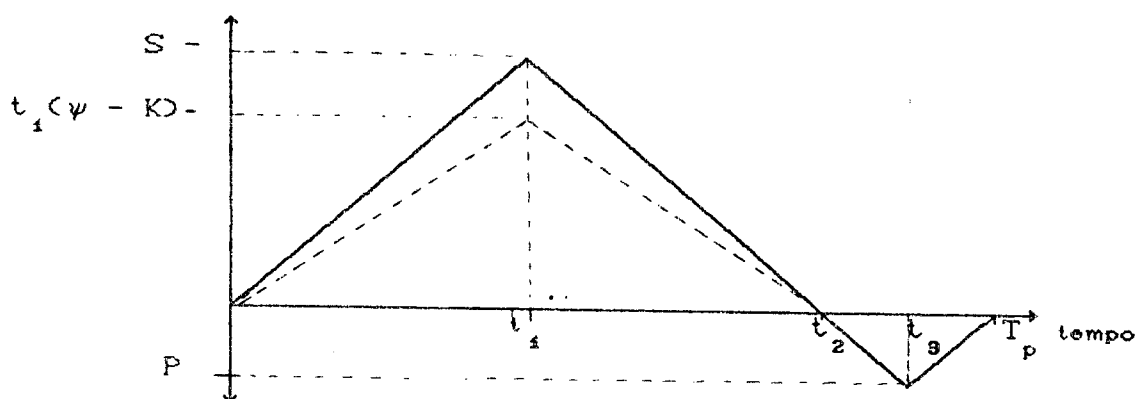
o lote a ser produzido, o custo total e a quantidade de itens deteriorados.

## 5.2 - Modelo de nível de pedido com taxa de reabastecimento finita.

Os autores CHOWDHURY & CHAUDHURI [ 2 ], formularam e resolveram um modelo de nível de pedido para itens deterioráveis com taxa de reabastecimento (ou de produção) finita e taxa de deterioração constante, igual a  $\alpha$ .

Este modelo segue as hipóteses do capítulo 3, com a exceção de que a taxa de reabastecimento é finita. Um ciclo de estoque é mostrado na figura 10.

FIGURA 10 - Ciclo de estoque para o modelo de CHOWDHURY & CHAUDHURI [ 2 ].



Da figura 10, observa-se as seguintes informações:

→  $S$  e  $t_1(\psi - K)$  representam os níveis de pedidos máximo para o modelo, com e sem deterioração.

→ De  $0 \leq t \leq t_1$ , tem-se o início e o fim da produção, incluindo a demanda e a deterioração dos itens.

→ De  $t_1 \leq t \leq t_2$ , o estoque se esgota principalmente devido a demanda e parcialmente devido a deterioração.

→ De  $t_2 \leq t \leq t_3$ , as faltas ocorrem e são acumuladas no nível  $P$  (as faltas correspondem aos pedidos não remetidos).

→ A produção reinicia em  $t_3$  e cessa em  $T_p$ , isto acontece para suprir as faltas. Ou seja, após  $t_3$ , o número de pedidos atrasados

diminui, até atingir o valor zero.

$I_t$  denota o nível de estoque no tempo  $t$  ( $0 \leq t \leq T_p$ ). As equações diferenciais que descrevem os estados instantâneos de  $I_t$  no intervalo  $(0, T_p)$  são dados por:

$$\rightarrow dI_t/dt + \alpha I_t = (\psi - K) \quad , \quad 0 \leq t \leq t_1. \quad (131)$$

$$\rightarrow dI_t/dt + \alpha I_t = -K \quad , \quad t_1 \leq t \leq t_2. \quad (132)$$

$$\rightarrow dI_t/dt = -K \quad , \quad t_2 \leq t \leq t_3. \quad (133)$$

$$\rightarrow dI_t/dt = (\psi - K) \quad , \quad t_3 \leq t \leq T_p. \quad (134)$$

As soluções destas equações são dadas respectivamente por:

$$\rightarrow I_{t(1)} = (\psi - K)/\alpha [1 - \exp(-\alpha t)], \quad 0 \leq t \leq t_1. \quad (135)$$

$$\rightarrow I_{t(2)} = (S + K/\alpha) \exp[-\alpha(t-t_1)] - K/\alpha, \quad t_1 \leq t \leq t_2. \quad (136)$$

$$\rightarrow I_{t(3)} = K(t - t_2), \quad t_2 \leq t \leq t_3. \quad (137)$$

$$\rightarrow I_{t(4)} = (\psi - K)(t - t_3) - P, \quad t_3 \leq t \leq T_p. \quad (138)$$

Usando as condições  $I_{t_1(1)} = S$ ,  $I_{t_2(2)} = 0$ ,  $I_{t_3(3)} = -P$  e  $I_{T_p(4)} = 0$  nas equações acima, tem-se respectivamente

$$\rightarrow t_1 = 1/\alpha \ln [1 + \alpha S/(\psi - K)], \quad (139)$$

$$\rightarrow t_2 = 1/\alpha \ln [1 + \alpha S\psi/K(\psi - K)], \quad (140)$$

$$\rightarrow K(t_3 - t_2) = P, \quad (141)$$

$$\rightarrow (\psi - K)(T_p - t_3) = P. \quad (142)$$

A partir destes resultados o autor define o número de itens deteriorados, o número médio de itens no estoque e o número médio de faltas, respectivamente como

$$\rightarrow I_D = [(\psi - K)t_1 - S] + [S - K(t_2 - t_1)] = \psi t_1 - Kt_2 = \frac{\alpha S^2 \psi}{2K(\psi - K)}.$$

$$\rightarrow \int_0^{t_1} I_{t(1)} + \int_{t_1}^{t_2} I_{t(2)} = \frac{S^2(\psi - 2K)}{2KT_p(\psi - K)} + \frac{\alpha S^3(2K - \psi)\psi}{3K^2(\psi - K)^2 T_p}.$$

$$\rightarrow \int_{t_2}^{t_3} I_{t(3)} + \int_{t_3}^{T_p} I_{t(4)} = \frac{P^2 \psi}{2KT_p(\psi - K)}.$$

Para simplificar as expressões acima foi utilizada a aproximação



$\ln(1+x) = x - x^2/2! + x^3/3!$ , quando  $|x| < 1$ .

O objetivo está em determinar os valores ótimos de S, P e do custo total. O Custo Total médio apresentado pelos autores é mostrado abaixo:

$$C_{tot}(S,P) = C_{VD} + C_{M1}N_1(S) + C_{FL2}N_2(P). \quad (143)$$

S e P são variáveis dependentes. Dai a condição necessária para que o custo total seja mínimo é

$$\frac{dC_{tot}(S,P)}{dS} = \frac{\partial C_{tot}(S,P)}{\partial S} + \frac{\partial C_{tot}(S,P)}{\partial P} \frac{dP}{dS} = 0 \quad (144)$$

e em seguida uma relação entre S e P é obtida, através das equações (133) e (134), e logo o resultado de  $dP/dS$  é substituído na equação acima. Após substituições e simplificações, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{dC_{tot}(S)}{dS} &= \frac{C_M S(\psi - 2K)}{KT(\psi - K)} + \frac{C_{FL} \alpha S \psi}{K(\psi - K)} + \frac{C_V S \psi}{T(\psi - K)K} + \frac{C_V \alpha S \psi}{T(\psi - K)K} - C_{FL} \\ &- \frac{C_M \alpha S^2 (\psi - 2K) \psi}{K^2 (\psi - K)^2 T_P} - \frac{3C_{FL} \alpha S^2 \psi^2}{2K^2 (\psi - K)^2 T_P} = 0. \end{aligned} \quad (145)$$

Observe que a equação (140) é uma equação quadrática que depende somente da variável S, logo não haverá dificuldades em encontrar  $S_{ot}$ . Portanto os dados de entrada deverão ser escolhidos tal que o valor  $S_{ot}$  (o subscrito ot, indica que a variável em questão é ótima), dada pela equação (140), satisfaça a condição suficiente  $d^2 C_{tot}(S) / dS^2 > 0$ , para o custo total ser mínimo. Quando  $S_{ot}$  for determinado, pode-se obter também  $P_{ot}$ . Os valores de  $S_{ot}$  e  $P_{ot}$  deverão ser usados para encontrar o custo total mínimo.

### 5.2.1 - Aplicação Numérica.

#### EXEMPLO 9:

Para verificar o efeito do modelo, apresenta-se um exemplo hipotético com os seguintes parâmetros de entrada:

$$C_V = \$ 0.2/\text{unidade},$$

$$C_M = \$ 0.3/\text{unidade/ano},$$

$$C_{FL} = \$ 1.5/\text{unidade/ano},$$

$$T_P = 1 \text{ ano},$$

$$\psi = 250 \text{ unidades/ano (taxa de produção)},$$

$$K = 100 \text{ unidades/ano (taxa de demanda) e}$$

$$\alpha = 0.01 \text{ unidades/ano.}$$

### Resultados Finais:

$$- S_{ot} = 57.9 \text{ unidades ( nível de pedido ótimo )},$$

$$- P_{ot} = 2.4 \text{ unidades},$$

$$- I_D = 0.27 \text{ unidades/ano ( quantidade de itens deteriorados )},$$

$$- q = S_{ot} + P_{ot} = 60.3 \text{ unidades ( lote económico ) e}$$

$$- C_{tot}(S,P) = \$ 1.8/\text{ano}.$$

### 5.3 - Comparações e análises.

Os modelos apresentados nas seções (5.1) e (5.2), abordam diferentes situações, mas tem em comun a taxa de reabastecimento ( ou taxa de produção ) que é finita. Neste caso, a entrega do lote é feita parcialmente, assim os modelos destas duas seções identificam-se basicamente com a produção de itens. Na medida em que os itens são produzidos, eles são adicionados ao estoque. As variáveis  $t_1$  e  $t_2$  do modelo de MISRA [ 9 ], poderiam ter sido obtidas usando o procedimento da seção (4.1) do capítulo 4. Dessa forma, os resultados seriam obtidos com mais facilidade e com mais precisão. Já no modelo da seção (5.2), para encontrar a variável de decisão  $S$ , basta resolver a equação quadrática (140). Os modelos deste capítulo limitam-se a produção de itens do mesmo tipo.

## PARTE 2 - MODELOS DE ESTOQUES PARA PRODUTOS DETERIORÁVEIS COM DEMANDAS PROBABILÍSTICAS.

São modelos, onde o tamanho da demanda é desconhecido. Neste caso, se tem conhecimento apenas de sua distribuição de probabilidade.

### CAPÍTULO VI - MODELOS DE PONTO DE PEDIDO.

Apresentar-se-á modelos de estoques probabilísticos com as seguintes características:

- a) Sempre que a posição do estoque for menor ou igual ao ponto de pedido,  $s$ , um lote econômico de  $q$  unidades é planejado para o reabastecimento.
- b) O tempo de espera,  $\tau$ , pode ser desprezível ou não. O valor numérico de  $\tau$ , pode depender da natureza do item estocado, da distância entre fornecedor e cliente, do transporte e outros.

#### 6.1 - Modelos de ponto de pedido sem tempo de espera.

Para o desenvolvimento destes modelos, apresenta-se as seguintes hipóteses:

- 1) A posição do estoque é revisado regularmente em um período  $T_P$  ( constante pré-fixada ) unidades de tempo. Sempre que o nível de estoque for menor ou igual ao ponto de pedido,  $s$ , um lote,  $q$ , é planejado para o reabastecimento.
- 2) O tempo de espera é considerado nulo, tal que, o lote econômico é imediatamente adicionado ao estoque.
- 3) A demanda  $x$ , durante algum período de revisão,  $T_P$ , é uma variável randômica com f.d.p,  $f(x)$  e f.d.a,  $F(x)$ , com  $0 \leq x \leq M$ . Onde,

$$\mu = E(x) = \int_0^M xf(x)dx \text{ é a demanda média.}$$

A demanda de  $x$  unidades, ocorre em um padrão uniforme durante  $T_P$ .

- 4) Os itens estão sujeitos a deterioração durante o ciclo  $(0, T_P)$  e não há reparos ou substituições de itens deteriorados durante este mesmo ciclo.

- 5) O custo de manutenção,  $C_M$ /unid./unid. de tempo, o custo de falta,  $C_{FL}$ /unid./unid. de tempo, o custo unitário,  $C_v$  e o custo de

ordenação,  $C_F$  / ordem, são conhecidos e constantes durante  $T_p$ .

6) O tempo de deterioração de um item segue a distribuição Exponencial Negativa, logo a taxa de deterioração é constante.

A subseção (6.1.1), traz a política  $(s_p, q)$ , onde o ponto de pedido,  $s_p$ , é uma constante pré-fixada e  $q$ , a variável de decisão. Aqui faltas não são permitidas.

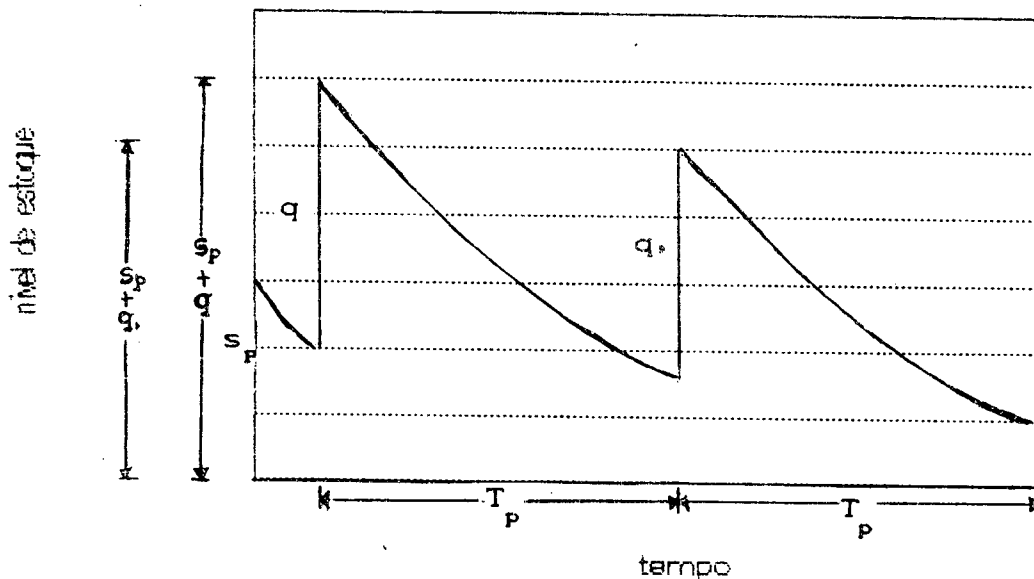
Na subseção (6.1.2), o lote econômico é a constante pré-fixada, faltas poderão ocorrer e o ponto de pedido,  $s$ , é a variável de decisão. Para este último caso a política correspondente é  $(s, q_p)$ .

### 6.1.1 - Política de estoque $(s_p, q)$ .

SHAH & JAISWAL [ 21 ], propuseram-se a desenvolver um modelo de revisão periódica para itens deterioráveis com demandas probabilísticas.

A figura seguinte mostra o esgotamento do estoque para a política em questão.

FIGURA 11 - Esgotamento do estoque sob a política  $(s_p, q)$  probabilístico.



$S$  é a quantidade de estoque ao início de cada ciclo de revisão, após um reabastecimento. NADDOR [ 12 ], mostrou que a f.d.p de  $S$  é dado por

$$h(S) = 1/q, \quad s_p \leq S \leq s_p + q \quad (146)$$

com

$$E(S) = \int_{s_p}^{s_p + q} S h(S) dS = \frac{1}{2} q + s_p, \quad (147)$$

estoque médio inicial para algum ciclo de revisão  $T_p$ .

$I(t | x, S)$  denota o nível de estoque no tempo  $t$  ( $0 \leq t \leq T_p$ ) quando a demanda é de  $x$  unidades durante algum ciclo de revisão  $T_p$  e  $S$  o nível de estoque inicial. ( $0 \leq x \leq M, s_p \leq S \leq s_p + q$ ).

A equação diferencial que descreve a política  $(s_p, q)$  é

$$I(t | x, S) = \frac{1}{\exp(\alpha t)} \left[ S - \frac{x}{\alpha T_p} \left( \exp(\alpha t) - 1 \right) \right] \quad (148)$$

Faltas não são permitidas. Ou seja, o ponto de pedido,  $s_p$ , será tal que, mesmo quando  $S$  atingir seu valor mínimo, a demanda máxima possível,  $x = M$ , não causará faltas durante  $T_p$ . Neste caso,  $S = s_p, x = M, I(T_p | x, S) \cong 0$  e substituindo todos estes valores na equação (148), tem-se

$$s_p = \frac{M}{\alpha T_p} \left[ \exp(\alpha T_p) - 1 \right]. \quad (149)$$

$s_p$  é determinado facilmente, pois os fatores de lado direito da expressão (149), são dados conhecidos.

O custo total esperado para a política  $(s_p, q)$  é

$$C_{tot}(q) = A_1 \left( q/2 + s_p \right) + A_2 - C_F \frac{Y(q)}{q T_p} \quad (150)$$

Fazendo  $dC_{tot}(q)/dq = 0$ , obtém-se

$$q^2 / \left( qM/s_p \right) \cdot F \left[ r_0 - Y(q) + qM/s_p \right] = 2C_F/A_2 T_p \quad (151)$$

e a condição para que o lote econômico,  $q$ , seja ótimo é

$$F \left( r_0 + qM/s_p \right) < \left( A_1 T_p s_p^2 \right) / \left( C_F M^2 \right) \quad (152)$$

$A_1, A_2, Y(q)$  e  $r_0$ , estão colocados no apêndice 4.

### Aplicação Numérica.

#### EXEMPLO 10 :

Para ilustrar a aplicabilidade do modelo, SHAH & JAISWAL [ 21 ], utilizaram o mesmo exemplo abordado por NADDOR [ 12 ], pg. 239. A densidade probabilística de demanda durante um ciclo de revisão ( = ciclo de planejamento )  $T_p$  é

$$f(x) = 6x(1-x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$= 1, \quad \text{outros casos}$$

Os itens estocados no sistema, deterioram a uma taxa constante de  $\alpha$  unidades/ unidade de tempo. O problema é encontrar o lote econômico ótimo,  $q_{ot}$ .

Da f.d.p. acima,

$$\mu = 1/2,$$

$$M = 1 \quad e$$

$$F(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x^3, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

Dependendo do valor de  $q$ , se tem a  $F(x)$  correspondente. daí o custo total esperado é

$$C_{tot}(q) = A_1(q/2 + s_p) + A_2 - \frac{C_F r_o^2 (3 - r_o)}{s_p T_p} - \frac{3C_F r_o q (1 - r_o)}{s_p^2 T_p}$$

$$- \frac{C_F q^2}{s_p^3 T_p} (1 - 2r_o) + \frac{C_F q^3}{2s_p^4 T_p}, \quad \text{se } r_o \leq q \leq s_p (1 - r_o)$$

ou

( 153. a )

$$C_{tot}(q) = A_1(q/2 + s_p) + A_2 + \frac{1}{2qT_p} - C_F [ 1 + r_o(2r_o - r_o - 2) ]$$

$$- \frac{C_F}{s_p T_p}, \quad \text{se } q \geq (1 - r_o)s_p.$$

( 153. b )

Diferenciando duas vezes o  $C_{tot}(q)$  em relação a  $q$ , encontra-se o lote econômico ótimo,  $q_{ot}$ .

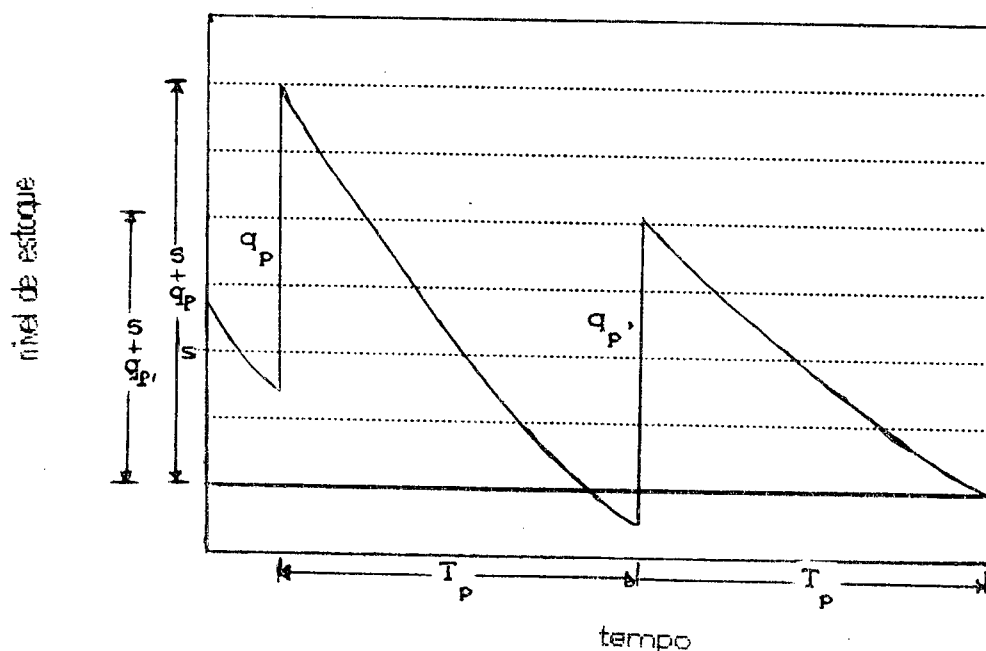
O custo total mínimo pode ser obtido substituindo  $q = q_{ot}$  na expressão (153.a) ou (153.b) do  $C_{tot}(q_{ot})$  correspondente. O uso de métodos computacionais é desnecessário, tornando então, a busca do  $q_{ot}$  um procedimento simples.

Se  $\alpha = 0$ , ou seja, se não houver deterioração, o modelo similar está em NADDOR [ 12 ].

### 6.1.2 - Política de estoque $(s, q_p)$ .

SHAH, JAISWAL & JANI [ 22 ], desenvolveram um outro modelo probabilístico com o objetivo de estender o modelo anteriormente estudado, permitindo a ocorrência de faltas.

FIGURA 12 - Esgotamento do estoque sob a política  $(s, q_p)$ .



#### CASO 1 : Quando não ocorre faltas.

A definição para  $S$  e a equação diferencial que descreve os estados instantâneos do estoque durante  $T_p$ , são as mesmas empregadas pela subseção (6.1.1).

Para que não ocorram faltas, o número de unidades restante no fim do ciclo  $T_p$ , deve ser maior ou igual a zero, ou seja,

$$I(T_p | x, S) \geq 0 \implies x \leq B. \quad (154)$$

onde

$$B = S \alpha T_p / [ \exp(\alpha T_p) - 1 ]. \quad (155)$$

O número de unidades que deterioram durante o ciclo de revisão,  $T_p$ , é dado por

$$I_D(x | x \leq B) = S - x - I(T_p | x, S). \quad (156)$$

Na expressão (156),  $S$ ,  $x$  e  $I(T_p | x, S)$ , significam respectivamente, o nível de estoque no início do ciclo, a demanda durante o ciclo e a quantidade de itens que restaram no fim do ciclo,  $T_p$ .

Supondo-se  $I(t | x, S)$  aproximadamente linear em  $t$ , então o número médio de unidades em estoque é

$$I_1(x | x \leq B) = 1/2 [ I(0 | x, S) + I(T_p | x, S) ]. \quad (157)$$

Esta aproximação é utilizada para facilitar a construção da expressão do custo total. O exato seria integrar a equação (148) no intervalo  $0 \leq t \leq T_p$ , mas isto tornaria o desenvolvimento do modelo bastante complexo.

O número médio de faltas durante o ciclo  $T_p$  é zero, ou seja,

$$I_2(x | x \leq B) = 0. \quad (158)$$

#### CASO 2 : Quando as faltas ocorrem

Como na maioria dos modelos que permitem faltas, o sistema mantém estoque durante  $(0, t_1)$  e de  $(t_1, T_p)$ , as faltas ocorrem. Faltas são pedidos acumulados, não remetidos.

a equação diferencial que descreve o sistema é

$$\frac{dI(t | x, S)}{dt} + \alpha I(t | x, S) = - \frac{x}{T_p}, \quad 0 \leq t \leq t_1 \quad (159)$$

$$\frac{dI(t | x, S)}{dt} = - \frac{x}{T_p}, \quad t_1 \leq t \leq T_p$$

A solução de (159) é

$$I(t | x, S) = \exp(-\alpha T_p) \left\{ S - \frac{x}{\alpha T_p} [ \exp(\alpha t) - 1 ] \right\}, \quad 0 \leq t \leq t_1 \quad (160)$$

$$= x (t_1 - t) / T_p, \quad t_1 \leq t \leq T_p$$



Como  $I(t_1 | x, S) = 0$ , tem-se

$$S = \frac{x}{\alpha T_p} [ \exp(\alpha t) - 1 ] \quad (161)$$

ou

$$t_1 = 1/\alpha \ln(1 + S\alpha T_p/x) \quad (162)$$

Sabe-se que  $t_1 < T_p$ , então  $x > B$ .

O número de unidades que deterioram durante o ciclo de revisão,  $T_p$ , é

$$I_D(x | x > B) = S - x t_1 / T_p \quad (163)$$

O número médio de unidades em estoque é

$$I_1(x | x > B) = \frac{1}{\alpha T_p} \ln(1 + S\alpha T_p/x) \quad (164)$$

O número de faltas é

$$I_2(x | x > B) = x/2 [ 1 - \ln(1 + S\alpha T_p/x) ]^2 \quad (165)$$

Os autores SHAH, JAISWAL & JANI [ 22 ], combinaram os casos 1 e 2, para encontrar a expressão do custo total esperado. Para  $S$  fixado, o custo total esperado por unidade de tempo durante  $T_p$  é

$$C_{tot}(S) = \frac{C_F}{T_p} I_D(S) + C_M I_1(S) + C_{FL} I_2(S) \quad (166)$$

Dai, para algum  $s \leq S \leq s + q_p$ , o custo total esperado por unidade de tempo durante  $T_p$  é

$$C_{tot}(S) = \frac{C_v}{T_p} \int_s^{s+q_p} I_D(S) h(S) dS + C_M \int_s^{s+q_p} I_1(S) h(S) dS \\ + C_{FL} \int_s^{s+q_p} I_2(S) h(S) dS \quad (167)$$

Onde  $I_D(S)$ ,  $I_1(S)$  e  $I_2(S)$ , estão apresentados no apêndice 4.

Para encontrar o  $s_{ot}$  ( ponto de pedido ótimo ) deve-se minimizar a expressão (167), diferenciando-se em relação a  $s$  e igualando a zero, isto é, resolvendo a igualdade  $dC_{tot}(s)/ds = 0$ .

Percebe-se diante mão, que não será fácil encontrá-lo, pois na prática, a equação resultante de  $dC_{tot}(s)/ds = 0$  é bastante complexa e envolve integrais que não poderão ser calculadas explicitamente. Então os autores obtiveram uma solução aproximada e com isso  $dC_{tot}(s)/ds = 0$ , vem a ser

$$A \left( \phi[\eta(s + q_p)] - \phi(\eta s) \right) + N \left( (s + q_p) \rho[\eta(s + q_p)] - s^3 \rho(\eta s) \right) = C_{FL} q_p \quad (168)$$

onde  $A$ ,  $\phi$ ,  $\rho$ ,  $\eta$ , estão colocados no apêndice 4.

Supondo,  $\alpha = 0$ , ou seja, quando não houver deterioração, a solução é dada por NADDOR [ 12 ], pg. 244.

### Aplicação Numérica

#### EXEMPLO 11:

Seja a f.d.p da demanda  $x$ , dado por

$$f(x) = 12x^2(1 - x) \quad , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ = 0 \quad , \quad \text{outros casos.}$$

Calculando,  $A$ ,  $\phi$ ,  $\eta$ ,  $\rho$  e substituindo em (168), obtem-se o ponto de pedido ótimo,  $s_{ot}$ . A expressão para o cálculo de  $s_{ot}$  é uma equação polinomial, resolvida então por métodos computacionais. E quando não houver deterioração, a expressão para  $s_{ot}$ , é dada por NADDOR [ 12 ].

Comparando e analisando as subseções (6.1.1) e (6.1.2), elas diferem-se basicamente pela variável de decisão. O método de controlar o estoque é a revisão periódica, isto é, em períodos constantes de tempo ( $C$  = ciclo de planejamento), um lote econômico é encomendado. Um ponto  $s$  é tomado como referência, do qual a posição do estoque deverá ser menor ou igual, para a realização da tal encomenda. Esta encomenda que é de  $q$  unidades e este ponto de referência,  $s$  ( $=$  ponto de pedido), podem ser variáveis de decisão ou constantes pré-fixadas, como foi abordado pelas duas subseções precedentes. O lote econômico,  $q$ , tão logo chegue é adicionado ao estoque, isto é, o período de reabastecimento é insignificante. Pode-se também dizer que a entrega é instantânea.

O tempo de espera,  $\tau$ , para o reabastecimento nas subseções

(6.1.1) e (6.1.2) são desprezíveis, isto significa que o período entre o pedido do lote e a chegada ao estoque é considerado nulo. Isto na realidade nem sempre acontece.

Toma-se como exemplo dois supermercados de Florianópolis de grupos diferentes, A e B. Para o supermercado A, a pessoa responsável pelas compras ( frutas e verduras ) dirige-se a São Paulo uma ou duas vezes por semana, afim de obter frutas e verduras de melhor preço e qualidade. Enquanto que o supermercado B, aciona ( via telefone ) três vezes por semana, uma equipe lá existente para a realização das compras.

O transporte é feito por caminhões próprios ou fretados pelos supermercados e depois da chegada dos produtos, o descarregamento é imediato. Toda esta transação levará em média de 2 a 3 dias para para o supermercado A, enquanto para o B leva em média 1 dia. Já com os fornecedores locais estes números caem para 1 a 2 horas entre o pedido e a entrega.

Nota-se que o tempo de espera entre fornecedores de São Paulo e os supermercados é considerado expressivo, enquanto para os fornecedores locais o tempo de espera pode ser omitido.

Na seção seguinte, mostra-se um modelo que aborda estoques deterioráveis com demandas probabilísticas, onde o tempo de espera é um valor não nulo.

## 6.2 - Modelo de ponto de pedido com tempo de espera.

Este modelo tem como objetivo a obtenção da melhor política (s, q).

Os modelos que permitem demanda probabilísticas já vistos, assumem que o tempo de espera para fazer uma encomenda é zero. Esta hipótese nem sempre é verdadeiro na prática. Quando se trata de produtos não deterioráveis, incluindo tempo de espera, os resultados são mais simples e estão mostrados em NADDOR [ 12 ]. Agora quando se trata de produto deterioráveis, os resultados são mais difíceis de ser construídos. A razão desta dificuldade está em calcular o número de unidades que deterioram durante o tempo de espera.

Uma heurística foi desenvolvida por NAHIMIAS & WANG [ 11 ], onde eles apresentam uma solução aproximada para o problema. Como uma alternativa, NAHIMIAS & WANG [ 11 ] consideraram um modelo

heurística (s, q) aproximadamente análogo aos encontrados em NADDOR [ 12 ].

As hipóteses seguintes são exigidas:

- 1) a taxa de demanda média é fixada em  $\lambda$  unidades/unidade de tempo. Adicionalmente, a demanda total durante algum tempo de espera é uma variável randômica, com f.d.p  $f(x)$  e f.d.a  $F(x)$ .
- 2) A taxa de deterioração,  $\alpha$ , é uma constante dada.
- 3) Faltas são permitidas.
- 4) O custo de unitário,  $C_v$ , o custo de manutenção,  $C_M$ /unid./unid. de tempo, o custo de ordenação  $C_F$ /ordem e o custo de falta,  $C_{FL}$ /unid./unid. de tempo, são constantes e conhecidos durante  $T_p$ .
- 5) Há um tempo de espera positivo,  $\tau > 0$  ( determinístico ), para o reabastecimento .
- 6) Ambos, o ponto de pedido, s, e o estoque de segurança,  $\sigma$ , são positivos.

Estoque de segurança é definido como o nível de estoque esperado no instante da chegada de uma encomenda. Nos sistemas reais esta quantidade é sempre positiva.

#### Sobre o modelo:

A equação diferencial que representa o esgotamento do estoque é a mesma utilizada por GHARE & SHARADER [ 5 ].

$$I_t = ( I_0 + \lambda/\alpha ) - \lambda/\alpha . \quad ( 169 )$$

O nível de estoque médio variará de acordo com a equação (169) de  $q + \sigma$  a  $\sigma$  em cada ciclo, T. O ciclo de planejamento também deve ser encontrado. Usando as condições de limite,

$$t = T \longrightarrow I_T = \sigma \quad e$$

$$t = 0 \longrightarrow I_0 = q + \sigma, \text{ na equação (169), obtem-se:}$$

$$\sigma = \exp(-\alpha T) ( q + \sigma + \lambda/\alpha ) - \lambda/\alpha \quad ( 170 )$$

ou

$$T = 1/\alpha \ln [ 1 + \alpha q / (\alpha \sigma + \lambda) ]. \quad ( 171 )$$

O estoque médio é dado por

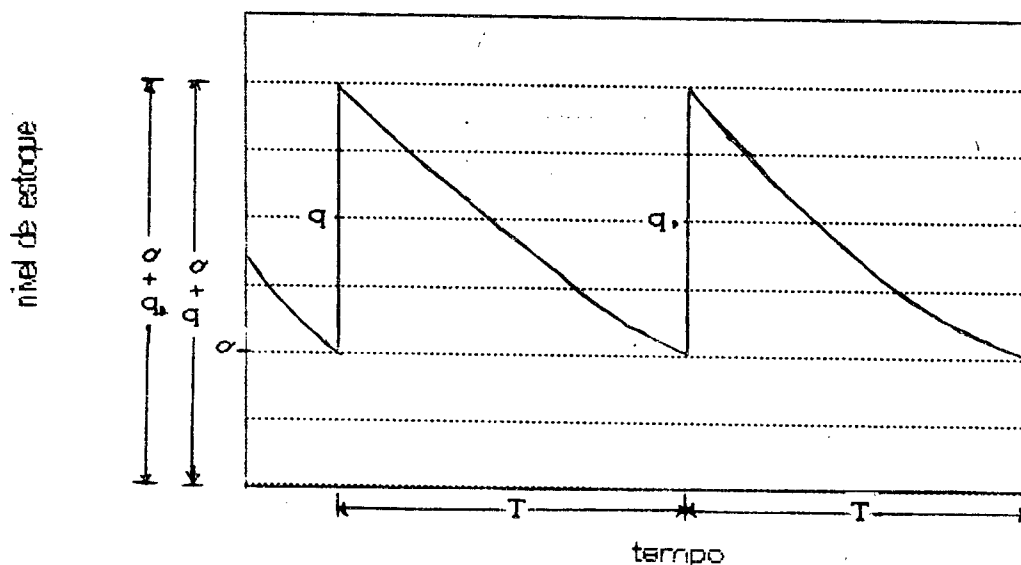
$$I_1 = 1/T \int_0^T I_t dt = \frac{1}{T\alpha} (q - \lambda T). \quad (172)$$

Durante o ciclo, o nível de estoque médio decrescerá devido aos efeitos combinados de ambos, deterioração e demanda. O número médio de unidades mantidas durante o ciclo é  $\lambda T$  e o número médio de unidades que deterioram em um ciclo é  $(q - \lambda T)$ . Dai o número médio de unidades que deterioram por unidade de tempo,  $I_D$ , é

$$I_D = (q - \lambda T)T = q/T - \lambda = \alpha I_1. \quad (173)$$

Precisa-se agora de uma relação entre  $\sigma$  e  $s$ .

FIGURA 13 - Esgotamento do estoque sob a política  $(\sigma, q)$  probabilística.



Da figura 13, tem-se :

$$\sigma = s - \lambda\tau - I_D\tau = s - q\tau/T. \quad (174)$$

A expressão (174), indica que o estoque de segurança é igual ao ponto de pedido, menos a demanda durante o tempo de espera e menos ainda a quantidade de itens deteriorados durante o tempo de espera,  $\tau$ .

Note que  $\alpha$ , também depende de  $T$ . Dai fica impossível uma solução explícita para  $\alpha$  em termos de  $s$ . Por esta razão, os autores formularam um modelo heurístico em termos das variáveis  $(\alpha, q)$  e não em termos de  $(s, q)$ . Uma vez que os valores ótimos de  $q$  e  $\alpha$  são encontrados,  $T$  pode ser também encontrado através da equação (171) e  $\sigma$  da equação (174).

O número médio de unidades faltosas em um ciclo é aproximadamente a quantidade (demanda + deterioração durante  $\tau$ ,  $\lambda\tau - I_D\tau$ ) que excede o ponto de pedido,  $s$ . Segundo NAHIMIAS & WANG [ 11 ], a quantidade  $I_D$  fornece uma estimativa fraca do número médio de unidades que deterioram por unidade de tempo em ciclo, onde faltas são permitidas. A razão é que em tais ciclos, o nível de estoque médio é inferior e o número médio de unidades deterioradas também será menor. Ainda, segundo os autores, um cálculo exato para esta modificação em  $I_D$ , chega ser extremamente difícil, então um aperfeiçoamento na estimativa de  $I_D$  pode ser feita sem comprometer a simplicidade da heurística.

Nestes ciclos, onde permite-se faltas, zero é a melhor estimativa para o estoque disponível, no momento da chegada de um lote. Dai o nível de médio de estoque esperado em ciclos com faltas, dito  $\tilde{I}$ , será aproximadamente  $\alpha/2$ , que é menor do que  $I_1$ .

Segue-se que o número médio de unidades por unidade de tempo é dada por

$$\tilde{I}_D = \alpha \tilde{I}_1 = I_D - \alpha\alpha/2 \quad (175)$$

Seja  $x$  a variável randômica representando a demanda durante o tempo de espera. o número de unidades que irão faltar em um ciclo é aproximadamente

$$(x + \tilde{I}_D\tau - s)^* = (x - [\alpha(1 + \alpha\tau/2)] + \lambda\tau)^* \quad (176)$$

Seja  $I_2$ , a estimativa de unidades esperada que irão faltar em um ciclo. Segue-se de (176) que

$$I_2 = \int_w^{\infty} (x - w)f(x)dx,$$

onde  $w = \alpha(1 + \alpha\tau/2) + \lambda\tau$ .

Seja  $C_{tot}(\sigma, q)$ , o custo total médio esperado por unidade de tempo. Dai

$$\begin{aligned}
 C_{tot}(\sigma, q) &= C_V I_D + C_M I_1 + C_{FL} I_2 / T + C_F / T \\
 &= 1/T \left[ C_F + C_V q + C_M q/\alpha - C_{FL} \bar{F}(w) + C_{FL} \int_0^{\infty} x f(x) dx \right] \\
 &\quad - C_M \lambda / \alpha - C_V \lambda \quad ,
 \end{aligned}
 \tag{177}$$

onde  $T$  ( depende tanto de  $q$  com de  $s$ ) dado em (171),  $w$  ( depende somente de  $\sigma$  ), e  $\bar{F}$  é a acumulativa complementar da demanda durante o tempo de espera. Resta determinar o par  $(\sigma, q)$  que minimize  $C_{tot}(\sigma, q)$ .

Quando a demanda durante o tempo de espera seguir a distribuição Normal ou a Erlang, torna-se mais fácil obter expressões explícitas para  $C_{tot}(\sigma, q)$ , através da resolução das igualdades  $\partial C_{tot}(\sigma, q) / \partial q = 0$  e  $\partial C_{tot}(\sigma, q) / \partial \sigma = 0$ .

NAHIMIAS & WANG [ 11 ], indicam o método da Bisseção para encontrar os resultados, quando por exemplo, a demanda durante o tempo de espera seguir a distribuição Gamma.

Deste modelo heurístico pode-se obter algumas particularidades:

- Quando o estoque de segurança for igual ao ponto de pedido, ou seja,  $\sigma = s$ , pode-se ter

a) o ponto de pedido, uma constante pré-fixada e lote económico, a variável de decisão.

Para obter o lote económico ótimo deve-se minimizar a equação do custo total, isto é, resolver  $\partial C_{tot}(q) / \partial q = 0$ .

Para este caso, conhece-se um modelo similar, sem deterioração, na seção (14.1) de NADDOR [ 12 ].

b) O ponto de pedido ser a variável de decisão e o lote económico a constante pré-fixada.

Neste caso, um modelo análogo ( sem deterioração ) é encontrado na seção (14.2) de NADDOR [ 12 ]. E para obter o ponto de pedido ótimo, calcula-se  $\partial C_{tot}(s) / \partial s = 0$ .

## CAPÍTULO VII - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES.

O trabalho procurou reunir e organizar, além de revisar criticamente, os modelos de estoques destinados a produtos deterioráveis.

Os modelos são dispostos nos capítulos em função de suas hipóteses comuns, e assim construindo uma bibliografia mais compacta, já que a existente é bastante esparsa.

O presente trabalho poderá ajudar os interessados em resolver problemas de estoques, especificamente quando este for de produtos deterioráveis.

A aplicabilidade destes modelos é válida para um único tipo de produto. É conveniente aprofundar-se na aplicação de um modelo complexo, quando por exemplo, o produto em questão envolver custos altos (ex: urânio) ou quando o produto é importante para o desenvolvimento da economia nacional (ex: laranja, café, soja) ou ainda, quando este estiver ligado a saúde pública (ex: bancos de sangue). Seria difícil aplicar estes mesmos modelos a todas as frutas e verduras de um supermercado, simultaneamente. Neste caso, o agente estocador selecionaria os produtos de maior importância para a loja e assim aplicaria o (os) modelo (os), para cada produto separadamente.

Outra desvantagem dos modelos está relacionada com a limitação na capacidade de estocagem. Toda empresa limita a capacidade de estocagem dos seus produtos, em função do espaço físico da loja ou em função da importância de cada produto para a empresa. E no entanto este tipo de restrição não é mencionada pelos modelos apresentados.

Percebe-se também que tanto para modelos determinísticos ou probabilísticos, a demanda é não controlável (exógena). Sabe-se todavia, que o agente estocador poderá controlá-la via preços, propagandas, promoções, etc.

Outro fato a ser comentado é com relação ao transporte dos produtos, para o qual os modelos consideram o transporte de cada tipo de produto separadamente. Se o agente estocador planeja comprar uma quantidade  $x$  de laranja e não o obtiver, ele não poderá completar o caminhão com outro tipo de produto.

O trabalho é recomendável ao controle de recursos naturais



renováveis, por exemplo: o solo e água. Por exemplo, a produção contínua de soja e trigo, causa ao solo uma deterioração na fertilidade, prejudicando assim a qualidade das futuras produções. Neste caso, deixaria de se produzir por um certo período e se faria um "pedido" com respeito a recuperação deste solo. Este procedimento implica em prejuízo, por ter parado a produção e implica em custos relacionados ao tratamento do solo. Logo após a recuperação do solo, inicia-se novamente a produção. A fertilidade do solo está diretamente ligado com o nível da produção.

No caso da água, toma-se como exemplo um reservatório que abastece uma cidade e que com o crescimento demográfico e industrial da mesma, a qualidade desta água decai, precisando assim de um pedido de tratamento.

Recomenda-se, enfim, uma continuação na pesquisa de modelos de estoques para produtos deterioráveis.

**APENDICE 1.**

## DEFINIÇÕES

1 - *Ciclo de planejamento*,  $T$ , : é o espaço de tempo entre consecutivas decisões com respeito ao reabastecimento.

2 - *Custo de manutenção*,  $C_M$ , : o custo de manutenção,  $C_M/\text{unid}/\text{unid. de tempo}$  é constante durante  $T$ . Este custo inclui por exemplo:

- a) custo de oportunidade do capital investido,
- b) aluguel ( quando for o caso ),
- c) manuseio dos itens no estoque,
- d) seguro ( contra incêndio, roubo, etc ),
- e) energia elétrica ( iluminação, câmaras frias e outros), etc.

3 - *Custo de ordenação*,  $C_F$ , : o custo de ordenação,  $C_F/\text{ordem}$ , é também constante durante  $T$ . Este custo inclui:

- a) *para compra do item*: despesas com a procura do item, inspeção de qualidade, de registros ( papéis, carimbos, etc), despesas de comunicação ( telegramas, tel ex, etc ), transporte e manuseio.
- b) *para fabricação do item*: preparação das máquinas.

4 - *Custo de falta*,  $C_{FL}$ , : o custo de falta,  $C_{FL}/\text{unid.}/\text{unid. de tempo}$ , inclui:

- a) custo ocasionado por perdas de vendas,
- b) esforços administrativos especiais ( telefonemas, telex, etc ) e também corre-se o risco de perder o cliente.

5 - *Custo unitário*,  $C_V$ , : o custo unitário,  $C_V/\text{unidade}$ , é constante durante o ciclo  $T$  sob consideração.

- a) *Para compra*: custo de comprar um item.
- b) *Para fabricação*: é o total de recursos financeiros despendido para tornar o item disponível para uso.

6 - *Custo total*,  $C_{tot}$ , :

- a) é a soma dos custos  $C_M$ ,  $C_V$  e  $C_F$ , quando as faltas não forem

permitidas e o ciclo  $T$  é desconhecido ou

b) é a soma dos custos  $C_M$ ,  $C_V$  e  $C_{FL}$ , quando faltas são permitidas e o ciclo  $T$  é uma constante pré-fixada ou ainda

c) é a soma dos custos  $C_M$ ,  $C_V$ ,  $C_F$  e  $C_{FL}$ , quando faltas são permitidas e o ciclo  $T$  é desconhecido.

7 - *Estoque de segurança,  $\sigma$*  : é definido como o nível de estoque esperado no instante da chegada do lote.

8 - *Estoque inicial* : é o estoque presente no início do ciclo de planejamento  $T$ .

9 - *Lote econômico ou tamanho do reabastecimento,  $q$*  : é a quantidade planejada para o reabastecimento.

10 - *Nível de Pedido,  $S$*  : para modelos onde faltas não são permitidas  $S = q$  e para modelos permitindo faltas  $q = S + K(T - t_1)$ , onde  $q$  é o lote planejado,  $K(T - t_1)$  corresponde as faltas e  $S$  é o estoque inicial.

11 - *Período de reabastecimento,  $t'$*  : é o espaço de tempo entre a entrada dos itens no estoque até o fim do descarregamento.

12 - *Ponto de pedido,  $s$*  : é uma quantidade fixada no nível de estoque. Esta quantidade,  $s$ , serve como referência para encomendar o lote,  $q$ , de reabastecimento.

13 - *Política de estoque*:

As decisões relativas a problemas de estoques são basicamente de dois tipos: Quando repor? Quanto repor?

A primeira pergunta é normalmente respondida de uma das duas formas:

- 1) O estoque deve ser repostado quando seu nível atingir  $s$ .
- 2) O estoque deve ser repostado quando a cada  $T$  unidades de tempo.

A segunda pergunta recebe normalmente uma das seguintes respostas:

- 1) A quantidade a ser repostada é de  $q$  unidades.
- 2) A quantidade a ser repostada é tal que atinja o nível  $S$ .

As políticas de estoques serão aquelas que combinarão as respostas das duas perguntas supra citadas.

14 - *Sistemas de estoques*: Um sistema de estoques convencional (sem deterioração) é um sistema no qual 3 tipos de custos são importantes ( $C_M$ ,  $C_{FL}$  e  $C_F$ ) e no mínimo 2 são sujeitos a controle ( $C_{FL}$  ou  $C_F$ ). Para o caso de estoques deterioráveis acrescenta-se o custo  $C_v$  e  $C_{FL}$  ou  $C_F$  continuam sujeitos a controle.

15 - *Tempo de espera ou "lead time"*,  $\tau$ , : é espaço de tempo entre fazer o pedido e a chegada do lote.

16 - *Taxa de reabastecimento infinita*,  $p$ , : Seja  $t'$  o período de reabastecimento e  $p$  a taxa de reabastecimento que é dado pela forma  $p = q/t'$ . Se o período de reabastecimento for insignificante, isto é,  $t' = 0$ , logo  $p \rightarrow \infty$ .

17 - *Taxa de reabastecimento finita*,  $\psi$ , : neste caso  $t'$  é um valor considerado, então  $\psi$  é finito.

**APENDICE 2.**

## AS DISTRIBUIÇÕES

### 1 - Distribuição Exponencial Negativa.

Freqüentemente a Distribuição Exponencial Negativa é a primeira a ser usada quando tenta-se parametrizar dados. Além disso é a única distribuição para o qual somente um parâmetro deve ser estimado. Ela dá um razoável ponto de partida na consideração de outras distribuições com dois ou três parâmetros.

#### 1.1 - Propriedades:

- Função de densidade probabilística  $\rightarrow g(t) = \alpha e^{-\alpha t}$ ,
- Função de distribuição acumulativa  $\rightarrow G(t) = 1 - e^{-\alpha t}$ ,
- Média  $\rightarrow \mu = 1/\alpha$  ( tempo de vida média de um item),
- Variância  $\rightarrow \sigma^2 = 1/\alpha^2$ ,
- Taxa de deterioração  $\rightarrow Z_0(t) = g(t)/(1 - G(t)) = \alpha$ ,  
onde  $t \geq 0$ ,  $\alpha > 0$ .

#### 1.2 - Aplica-se a: ( Segundo MANN [ 10 ] )

a) Controle de estoque: A função  $f(t)$  representa o tempo de sobrevivência do item no estoque e a taxa de deterioração  $Z_0(t) = \alpha$ , indica que a cada período, uma fração constante  $\alpha$  do estoque, deteriora.

b) Teoria da Confiabilidade.

### 2 - Distribuição Weibull.

A distribuição Weibull tem sido amplamente aplicada a muitos fenômenos randômicos. A principal utilidade da distribuição Weibull é que ela fornece uma excelente aproximação para a lei de probabilidade de muitas variáveis randômicas.

## 2.1 - Propriedades:

Weibull	2-parâmetros	3-parâmetros
f. d. p $\rightarrow g(t) =$	$\alpha \beta t^{\beta-1} \exp(-\alpha t^\beta)$	$\alpha \beta (t - \delta) \exp[-\alpha (t - \delta)^\beta]$
f. d. a $\rightarrow G(t) =$	$1 - \exp(-\alpha t^\beta)$	$1 - \exp[-\alpha (t - \delta)^\beta]$
$\mu =$	$(1/\alpha)^{1/\beta} \Gamma(1 + 1/\beta)$	$\delta + (1/\alpha)^{1/\beta} \Gamma(1 + 1/\beta)$
$\sigma^2 =$	$(1/\alpha)^{2/\beta} [\Gamma(1 + 2/\beta) + \Gamma(1 + 1/\beta)^2]$	
taxa de det.	$Z_1(t) = \alpha \beta t^{\beta-1}$	$Z_2(t) = \alpha \beta (t - \delta)^{\beta-1}$

onde,  $\alpha > 0$  ( parâmetro escala ),  
 $\beta > 0$  ( parâmetro forma ) e  
 $\delta \leq t$  ( parâmetro localização ).

## 2.2 - Aplica-se a: ( Segundo MANN [ 10 ] )

- Ao tempo de sobrevivência do item no estoque.
- Mercadorias devolvidas, classificadas por número de semanas após o carregamento.
- Vazamento em baterias.
- Confiabilidade de capacitores.
- Vida média de remédios.

## 3 - Distribuição Gamma.

A distribuição Gamma é uma das mais usadas entre as distribuições de probabilidade contínuas, para descrever o comportamento de fenômenos randômicos contínuos aplicado a problemas da engenharia.

## 3.1 - Propriedades:

Algumas das razões para o uso da distribuição Gamma em análise de dados falhos são ( Veja PARK [ 13 ] e MANN [ 10 ] ):

- A distribuição inclui muitas das bem comportadas distribuições como seus casos especiais ( Exponencial, Qui-quadrada, Erlang, Normal).

- A estimativa dos parâmetros ( $\alpha$ ,  $\beta$ ) podem ser facilmente feitas pela " média " e " desvio padrão " de valores " típicos " do tempo de deterioração.

- A taxa de deterioração para a distribuição Gamma pode ser



crecente ( $\alpha > 1$ ), decrescente ( $\alpha < 1$ ) e constante ( $\alpha = 1$ ).

- Função de densidade probabilísticas  $\rightarrow g(t) = \frac{t^{\alpha-1} \exp(-t/\beta)}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}$ ,  
 $t \geq 0, \alpha > 0$  e  $\beta > 0$ .

- Taxa de deterioração  $\rightarrow Z_g(t) = g(t)/(1 - G(t))$ .

Infelizmente não se tem uma forma simples para  $R(t) = 1 - G(t)$ , pois  $G(t)$ , neste caso não existe. Ai adota-se uma aproximação, ( ver PARK [ 13 ] )

$$R(t) = (\alpha - \omega) \exp(-t/\beta) (t/\beta)^\alpha / \alpha! + \sum_{n=0}^{\alpha-1} \exp(-t/\beta)^n / n!$$

tal que  $\alpha = [ \alpha ]$ .

$$\text{Logo } Z_g(t) = t^{\alpha-1} / (\Gamma(\alpha)\beta^\alpha) [ (\alpha - \omega) (t/\beta)^\alpha / \alpha! + \sum_{n=0}^{\alpha-1} (t/\beta)^n / n! ]$$

e se  $\alpha$  for um número inteiro, então

$$Z_g(t) = t^{\alpha-1} / [ (\alpha - 1)! \beta^\alpha \sum_{n=0}^{\alpha-1} (t/\beta)^n / n! ]$$

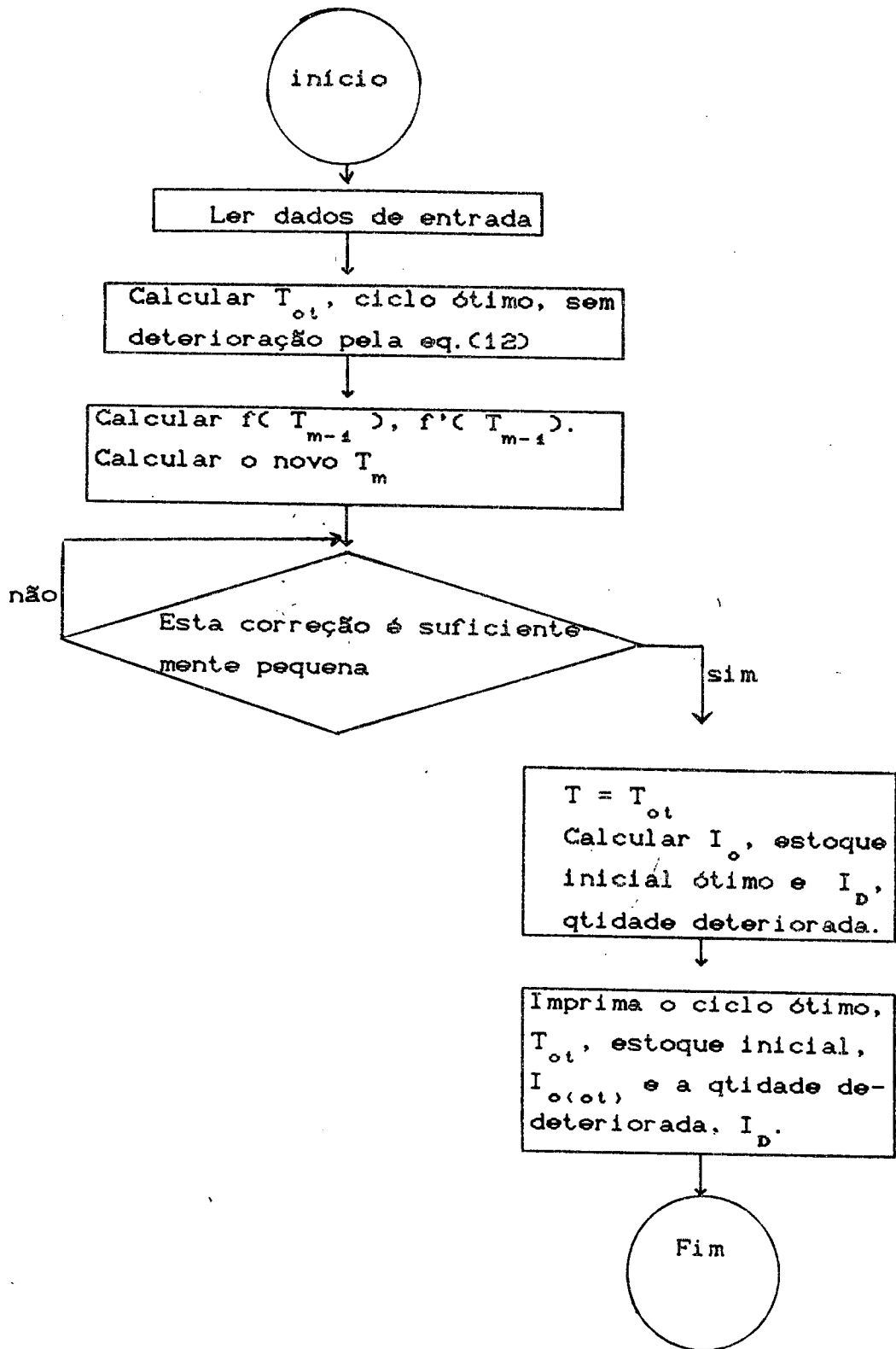
- $\mu = \alpha\beta$
- $\sigma^2 = \alpha\beta^2$ .

3.2 - Aplica-se a: ( veja PHILLIPS [ 16 ] )

- a) Se um artigo (de utilidade doméstica) é comprado em lotes de tamanho  $\alpha$  e a demanda  $\beta$  com uma taxa de  $1/\beta$  por semana, então o período de faltas segue uma distribuição Gamma.
- b) Descreve também a vida média de um item no estoque.
- c) Teoria das Filas.
- d) Falhas em sistemas de confiança.

**APENDICE 3.**

Apresenta-se a seguir o fluxograma utilizado pelo programa computacional, adotado pelos modelos de COVERT & PHILIP [ 1 ] e PHILIP [ 15 ], com o objetivo de resolver as equações (27) e (37), respectivamente.



Comentários geométricos sobre o método computacional, utilizado por COVERT & PHILIP [ 1 ] e PHILIP [ 15 ].

Em termos geométricos, a equação (28) encontra a tangente à curva  $f(t)$  no ponto  $T_{m-1}$ , e sua intersecção com a ordenada,  $T_m$ . Substituindo  $m$  por  $m-1$ , uma nova tangente e uma nova intersecção é encontrada. Isto continua, até a correção for suficientemente pequena para ser ignorada.

Ambas as funções,  $f(t)$ , e sua inclinação  $f'(t)$  cresce com  $T$ , então algum valor positivo de  $T$  fornecerá uma solução inicial adequada. Porém, o tempo do ciclo ótimo para itens não deterioráveis é uma escolha lógica, como solução inicial para o método de NEWTON. A relação pode ser resolvida para alguns conjuntos de valores, onde as séries podem ser truncadas se  $\alpha T^\beta$  e  $\alpha\beta(T - \delta)$  for menor do que um, para os modelos de COVERT & PHILIP [ 1 ] e PHILIP [ 15 ], respectivamente.

Saida computacional para o modelo de COVERT & PHILIP [ 1 ], mostrando o número de iterações e resposta final.

Ciclo de tempo, T	correção
63.2456	18.7221
44.5235	14.5302
29.9933	9.98065
20.0126	5.7317
14.2809	2.26224
12.0187	0.36874
11.6499	0.00939
$T_{ot} = 11.64$ dias $I_o = q = 119.55$ unidades $I_D = 3.14$ unidades (qtidade deteriorada)	

Saida computacional para o modelo de PHILIP [ 15 ], mostrando as iterações e resposta final.

1) Com  $\alpha = 1/600$ ,  $\beta = 1.5$  e  $\delta = 3$

Ciclo de tempo, T	correção
63.2456	18.8786
44.367	14.8491
29.5179	10.1402
19.3777	6.1529
13.2248	2.4279
10.7969	0.118
10.6789	0.0037
$T_{ot} = 10.7$ dias $I_o = q = 110.6$ unidades $I_D = 3.6$ unidades (qtidade deteriorada)	

2) com  $\alpha = 1/600$ ,  $\beta = 1.5$  e  $\delta = -3$ .

Ciclo de tempo, T	correção
63.2456	18.6755
44.5701	14.4245
30.1456	10.0259
20.1197	5.2805
14.8392	1.7781
13.0611	0.1944
12.8667	0.0002
$T_{ot} = 12.9$ dias $I_o = q = 131.1$ unidades $I_D = 2.1$ unidades (qtidade deteriorada)	

**APÉNDICE 4**

Algumas expressões matemáticas referente a subseção (6.1.1).

$$A_1 = \left( C_F / T_p + C_M / 2 \right) - \exp \left( -\alpha T_p \right) \left( C_V / T_p - C_M / 2 \right), \quad (A4.1)$$

$$A_2 = \mu \exp \left( -\alpha T_p \right) / \left( \alpha T_p \right) \left[ \exp \left( \alpha T_p \right) - 1 \right] \left( C_V / T_p - C_M / 2 \right) - C_V \mu / T_p + C_F / T_p, \quad (A4.2)$$

$$Y(q) = \int_{r_0}^{r_0 + qM/s_p} F(x) dx \quad \ominus \quad (A4.3)$$

$$r_0 = M \left[ 1 - \exp \left( -\alpha T_p \right) \right]. \quad (A4.4)$$

Algumas expressões matemáticas referente a subseção (6.1.2).

$$I_D(S) = E \left[ I_D(x|x \leq B) + I_D(x|x > B) \right], \quad (A4.5)$$

$$I_1(S) = E \left[ I_1(x|x \leq B) + I_1(x|x > B) \right], \quad (A4.6)$$

$$I_2(S) = E \left[ I_2(x|x \leq B) + I_2(x|x > B) \right], \quad (A4.7)$$

$$m(y) = \int_y^{\infty} f(x)/x dx, \quad (A4.8)$$

$$M(Z) = \int^Z m(y) dy, \quad (A4.9)$$

$$\phi(S) = \int_0^S M(Z) dz, \quad (A4.10)$$

$$\rho(S) = \int_{s_{ot}}^{\infty} 1/y^2 m(y) dy, \quad (A4.11)$$

$$A = C_M + C_{FL} + \alpha/2 \left( C_V - C_M T_p \right), \quad (A4.12)$$

$$N = \alpha T_p / 4 \left( C_M + 2C_{FL} \right), \quad (A4.13)$$

$$\eta = 1 - \alpha / (2T_p), \quad (A4.14)$$

$$m_0 = (A - 10N) - 5\alpha T_p / 2 (A - 4N), \quad (A4.15)$$

$$m_1 = -2(A - 12N) + q_p(3A - 20N) + \alpha T_p(4(A - 3N) - 5/2 q_p(3A - 8N)), \quad (A4.16)$$

$$m_2 = 2(A - 10N)q_p^2 - 3(A - 12N)q_p - 18N + \alpha T_p(6q_p(A - 3N) - 5q_p^2(A - 4N)), \quad (A4.17)$$

$$m_3 = 2(A + N) - 2q_p^2(A - 12N) - 2Nq_p(5q_p^2 + 9) + \alpha T_p(- (2A - N) + 4q_p^2(A - 3N) + 10Nq_p^2) \quad e \quad (A4.18)$$

$$m_4 = q_p(A + N) - 2Nq_p^2(q_p^2 - 2q_p + 3) + \alpha T_p q_p(2Nq_p^3 - (A/2 + 3N)q_p^2 - (A - N/2)). \quad (A4.19)$$



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

- [ 1 ] - COVERT, R. P., & PHILIP, G. C., " An EQO model for items with Weibull Distribution deterioration, " *AIIE Trans.*, V. 5, No 4, 1973.
- [ 2 ] - CHOWDHURY, M. R., & CHAUDHURI, K. S., " An order-level inventory model for deteriorating items with finite rate of replenishment, " *Opsearch*, V. 20, No 2, 1983.
- [ 3 ] - COX, D. R., " *Renewal Theory*, " John Wiley and Sons, Inc., 1963.
- [ 4 ] - DAVE, Upendra, " On a discrete-in-time order-level inventory model for deteriorating items, " *Journal operational Research Society*, V. 30, 1975.
- [ 5 ] - GHARE, P. M., & SCHARADER, G. F., " A model for exponentially decaying inventory, " *Journal of Industrial Engineering*, V. 14, No 5, 1963.
- [ 6 ] - GOYAL, S. K., " Economic ordering policy for deteriorating items over an infinite time horizon, " *European Journal of Operational Research*, V. 28, 1987.
- [ 7 ] - KELLS, L. M., " *Elementary Differential Equations*, " Mc Graw Hill Book Company, New York, 1960.
- [ 8 ] - LIITTSCWAGER, I. M., " Results of a Gamma, Lognormal e Weibull Sampling Experiment, " *Industrial Quality Control*, V. 22, No 3, 1965.
- [ 9 ] - MISRA, R. B., " Optimum production lot-size model for system with deteriorating inventory, " *Inter. J. Prod. Resc.*, V. 13, 1975.

- [ 10 ] - MANN, N. R., SCHAFER, R. E. & SINGPURWALLA, N. D.,  
"Methods Statistical Analysis of Reliability and life  
data," Jhon Wiley & Sons, New York, 1974.
- [ 11 ] - NAHIMIAS, S., & Wang, S. S., " A heuristic lot size  
reorder-point model fr decaying inventories ," *Management  
Science*, V. 25, No 1, 1979.
- [ 12 ] - NADDOR, E., "Inventory Systems ", John Wiley & Sons, Inc  
1966.
- [ 13 ] - PARK, K. S., " Gamma approximation for Preventive  
Maintenance Scheduling, " *AIIE Trans.*, V. 7, No 4,  
1975.
- [ 14 ] - PACITTI, T. & ATKINSON, P. C., " *Programação e  
Métodos Computacionais*," 2<sup>a</sup> edição, Livros técnicos e  
científicos S. A., 1977.
- [ 15 ] - PHILIP, G. C., " A generalized EOQ moodels for items with  
Weibull Distribution Deterioration, " *AIIE Trans.*, V.  
10, No 2, 1974.
- [ 16 ] - PHILIPS, D. T., " Generation of Randon Gamma Variates  
from the two-parameter Gamma," *AIIE Trans.*, V. 3, No 3,  
1971.
- [ 17 ] - RAMBERG, J. S., & TADIKAMALLA, P. R., " An algorithm for  
generating Gamma Variates based on the Weibull  
Distribution, " *AIIE Trans.*, V. 6, No 3, 1974.
- [ 18 ] - RICHARDSON, C. H., " *An introduction to the Calculus of  
finite differences*," Van Nstrand. Princeton, New Jersey,  
1978.
- [ 19 ] - SARMA , K. V. S., " A deterministic order level inventory  
model for deteriorating items with two storage  
facilities , " *European Journal of Operation Research*,

V. 29, 1987.

- [ 20 ] = SHAH, Y. K., " An order-level lot-size model for deteriorating items," *AIIE Trans.*, V. 9, No 1, 1977.
- [ 21 ] - SHAH, Y. K., & JAISWAL, M. C., " A periodic review inventory model for items that deteriorate continuously in time ", *Int. J. Prod. Res.*, V. 15, No 2, 1977.
- [ 22 ] - SHAH, Y. K., JAISWAL, M. C., & JANI, B. B., "  $(s, q_p)$  system inventory for deteriorating items ", *Int. J. Prod. Res.*, V. 16, No 1, 1978.
- [ 23 ] - TADIKAMALLA, P. R., " An EOQ inventory model for items with Gamma Distribution Deterioration ", *AIIE Trans.*, V. 10, 1978.