

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

UMA ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE ELEMENTOS FINITOS PARA CASCAS

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA

ROBERTO KINCELER

FLORIANÓPOLIS, DEZEMBRO DE 1990.

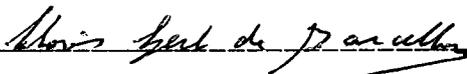
UMA ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE ELEMENTOS FINITOS PARA CASCAS

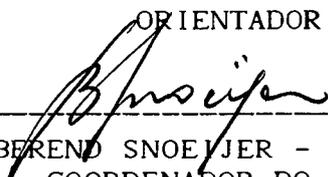
ROBERTO KINCELER

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

MESTRE EM ENGENHARIA

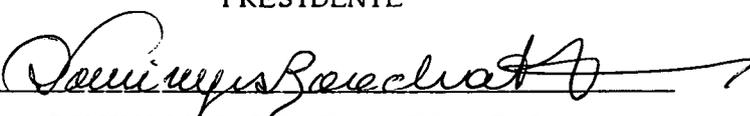
ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA, ÁREA DE CONCENTRAÇÃO PROJETO, APROVADA
EM SUA FORMA FINAL PELO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

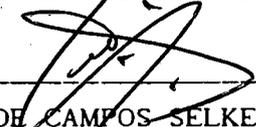

CLOVIS SPERB DE BARCELLOS - Ph.D.
ORIENTADOR


BEREND SNOEIJER - Dr.-Ing.
COORDENADOR DO CURSO

BANCA EXAMINADORA:


CLOVIS SPERB DE BARCELLOS - Ph.D.
PRESIDENTE


DOMINGOS BOECHAT ALVES - D.Sc.


CARLOS ALBERTO DE CAMPOS SELKE - Ph.D.

-À meus pais, Sr. José e D. Meize.

-À minha esposa, Lúcia.

AGRADECIMENTOS

- Ao Prof. Barcellos, pela orientação deste trabalho.
- Aos amigos Jun e Tancredo, por tudo mesmo.
- À turma do mar de lama, pelos momentos inesquecíveis.
- Ao Marco Antônio Luersen, pela parte gráfica.
- À Sula, pela datilografia.
- À CAPES, pelo apoio financeiro.
- À todos aqueles das salas 5, 6 e "tenda" que de uma forma ou de outra contribuíram para a realização deste trabalho.
- Aos amigos Tancredo, Jun e Jucélio, pelo trabalho de revisão e edição da dissertação.

ÍNDICE

1 - INTRODUÇÃO

1.1 - Generalidades	1
1.2 - Revisão bibliográfica	2
1.3 - Definição do problema	5
1.3.1 - Introdução	5
1.3.2 - Conceitos	7
1.3.3 - Seleção dos elementos	12
1.4 - Implementação computacional	13

2 - DESENVOLVIMENTO DOS ELEMENTOS 9-FULL E 9-URI

2.1 - Introdução	15
2.2 - Formulação do elemento 9-FULL	15
2.2.1 - Sistemas de coordenadas	15
2.2.2 - Geometria do elemento	18
2.2.3 - Representação dos deslocamentos	19
2.2.4 - Deformações	20
2.2.5 - Definição das tensões	23
2.2.6 - Determinação da matriz de rigidez	25
2.2.7 - Determinação da matriz de inércia	26
2.2.8 - Integração numérica	27
2.3 - Formulação do elemento 9-URI	27
2.3.1 - Introdução	27
2.3.2 - Elemento 9-URI	27

3 - DESENVOLVIMENTO DO ELEMENTO SHELM-9

3.1 - Introdução	29
3.2 - Formulação do elemento SHELM-9	30
3.2.1 - Sistemas de coordenadas	30
3.2.2 - Geometria do elemento	30
3.2.3 - Representação dos deslocamentos	30
3.2.4 - Funcional utilizado	31

3.2.5 - Campo de deformações	32
3.2.6 - Determinação da matriz de rigidez	35
3.2.7 - Determinação da matriz de inércia	37
3.2.8 - Integração numérica	37
4 - ANÁLISE ESTÁTICA	
4.1 - Introdução	38
4.2 - "Patch test"	39
4.2.1 - Introdução	39
4.2.2 - Descrição do problema	40
4.2.3 - Base comparativa	41
4.2.4 - Análise dos resultados	41
4.3 - Placa quadrada com malha regular	42
4.3.1 - Introdução	42
4.3.2 - Descrição do problema	42
4.3.3 - Base comparativa	43
4.3.4 - Análise dos resultados	44
4.3.5 - Figuras	45
4.4 - Placa quadrada com malha regular e distorcida	48
4.4.1 - Introdução	48
4.4.2 - Descrição do problema	48
4.4.3 - Base comparativa	50
4.4.4 - Análise dos resultados	51
4.4.5 - Tabelas e figuras	52
4.5 - Telhado cilíndrico	54
4.5.1 - Introdução	54
4.5.2 - Descrição do problema	55
4.5.3 - Base comparativa	56
4.5.4 - Análise dos resultados	57
4.5.5 - Tabela e figura	58
4.6 - Cilindro puncionado	58
4.6.1 - Introdução	58
4.6.2 - Descrição do problema	59
4.6.3 - Base comparativa	61
4.6.4 - Análise dos resultados	61
4.6.5 - Tabelas e figuras	62
4.7 - Semiesfera	65
4.7.1 - Introdução	65
4.7.2 - Descrição do problema	65

4.7.3 - Base comparativa	66
4.7.4 - Análise dos resultados	67
4.7.5 - Tabela e figura	67
4.8 - Cilindro engastado	67
4.8.1 - Introdução	67
4.8.2 - Descrição do problema	68
4.8.3 - Base comparativa	69
4.8.4 - Tabelas	70
4.8.5 - Análise dos resultados	70
5 - ANÁLISE DINÂMICA	
5.1 - Introdução	71
5.2 - Análise de autovalores e autovetores	72
5.2.1 - Introdução	72
5.2.2 - Descrição do problema	72
5.2.3 - Análise dos resultados	74
5.3 - Placa engastada. Freqüências naturais	75
5.3.1 - Introdução	75
5.3.2 - Descrição do problema	75
5.3.3 - Base comparativa	76
5.3.4 - Análise dos resultados	77
5.3.5 - Tabelas e figuras	77
5.4 - Pá de ventilador	80
5.4.1 - Introdução	80
5.4.2 - Descrição do problema	80
5.4.3 - Base comparativa	81
5.4.4 - Análise dos resultados	81
5.4.5 - Tabelas e figuras	82
6 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES	
6.1 - Introdução	85
6.2 - Conclusões	85
6.3 - Sugestões	88
BIBLIOGRAFIA	89

APÊNDICES

A - Funções de interpolação e suas derivadas em relação às coordenadas naturais ξ, η , para os elementos 9-FULL, 9-URI e SHELM-9	94
B - Matriz \mathbf{B}^e de relações deformações-deslocamentos em relação ao sistema global	96
C - Matriz de transformação de deformações $\tilde{\mathbf{T}}_e$ do sistema global para o sistema local	100
D - Matriz de inércia	102
E - Integração numérica pela quadratura de Gauss	104
F - Determinação da matriz de rigidez do elemento SHELM-9	106
G - Matriz de transformação de deformações do sistema natural para o sistema local	111
H - Determinação dos esforços nos elementos 9-FULL, 9-URI e SHELM-9	115
I - Determinação das tensões do elemento SHELM-9	120
J - Determinação das tensões nos elementos 9-FULL e 9-URI	122

LISTA DE SIMBOLOGIA

1. SINAIS E CONVENÇÕES.

- \int - Integração
- \times - Produto vetorial entre vetores
- (\cdot) - Produto escalar entre vetores
- $w_{,x}$ - A vírgula indica derivada parcial, ou seja $\frac{\partial w}{\partial x}$
- $\{ \}$ - Vetor coluna
- $\{ \}^t$ - Transposto de um vetor coluna
- $[]$ - Matriz
- $[]^t$ - Transposta de uma matriz
- $(\cdot)^g$ - Significa variável referente ao sistema global
- $(\cdot)^l$ - Significa variável referente ao sistema local
- $(\cdot)^n$ - Significa variável referente ao sistema natural
- $(\cdot)^f$ - Significa variável referente ao sistema nodal
- (\bar{x}) - A barra indica que a variável "x" provém de um campo de deformações independentes
- (\hat{x}) - O circunflexo indica que a variável "x" provém de um campo de deslocamentos
- $(n \times m)$ - Matriz com dimensão "n" por "m"
- $| |$ - Determinante de uma matriz
- x** - Letras minúsculas em negrito significa vetor
- X** - Letras maiúsculas em negrito significa matriz
- $\| \|$ - Norma euclidiana de um vetor

LISTA DE SÍMBOLOS

A	- Área
E_b	- Parcela de energia de deformação devido à flexão
E_m	- Parcela de energia de deformação devido à membrana
E_s	- Parcela de energia de deformação devido ao cisalhamento
E	- Módulo de elasticidade longitudinal
G	- Módulo de elasticidade transversal
h_i	- Espessura no nó "i" do elemento
I	- Momento de inércia de uma seção
L	- Comprimento de um lado
N_i	- Funções de interpolação lagrangeanas
P	- Carga concentrada aplicada
Q	- Carga distribuída aplicada
T	- Energia cinética do elemento
V	- Volume
W_0	- Trabalho realizado pelas cargas externas
w_i	- Pesos de integração
B	- Matriz de relação deformações-deslocamentos
D	- Matriz de relações constitutivas
J	- Matriz jacobiana
J^{-1}	- Inversa da matriz jacobiana
K	- Matriz de rigidez de um elemento
K_b	- Matriz de rigidez de flexão de um elemento
K_m	- Matriz de rigidez de membrana de um elemento
K_s	- Matriz de rigidez de cisalhamento de um elemento

- M - Matriz de inércia do elemento
 T_e - Matriz de transformação de deformações do sistema global para o sistema local
 e_i^f - Vetores de base ortonormais do sistema nodal de coordenadas
 e_i^g - Vetores de base ortonormais do sistema global de coordenadas
 e_i^l - Vetores de base ortonormais do sistema local de coordenadas
 f - Vetor de cargas nodais
 q - Vetor de variáveis nodais
 u, v, w - Deslocamentos nodais em relação ao sistema global
 Π - Funcional
 α - Deslocamento na matriz de rigidez ("shifting")
 β - Parâmetros de deformações
 δ - Operador variacional
 ε - Deformação no plano
 ϕ - Autovetores
 γ - Deformações cisalhantes
 λ - Autovalores
 ν - Coeficiente de Poisson
 ρ - Densidade volumétrica
 σ - Tensões
 θ_1, θ_2 - Rotações nodais
 Ω - Frequências angulares
 κ - Fator de correção de tensões cisalhantes transversais
 ξ, η, ζ - Coordenadas naturais
 θ - Matriz dos cossenos diretores entre os sistemas global e local
 Φ - Matriz jacobiana que relaciona os sistemas natural e local de coordenadas

RESUMO

Neste trabalho é apresentada uma análise comparativa entre alguns modelos lineares de elementos de casca isotrópicos.

Dos modelos propostos na literatura, foram selecionados para a análise aqueles que melhor satisfaziam uma série de critérios pré-estabelecidos, entre estes a inclusão da parcela de energia de deformação por cisalhamento.

A comparação é feita com base no comportamento de cada elemento na solução de problemas tanto estático como dinâmicos. Neste contexto são analisados os seguintes aspectos: ocorrência dos fenômenos de travamento de cisalhamento e de membrana, sensibilidade à distorção de malha, ocorrência de modos falsos de energia e convergência para as deflexões e frequências naturais.

Com base nos resultados obtidos é feita uma recomendação de implantação dos melhores elementos em um programa de elementos finitos de uso geral .

ABSTRACT

A comparative analysis of some linear models of isotropic shell finite elements is presented in this work.

The elements that best fulfill some previously defined requirements, such as the inclusion of strain energy due to shearing, were selected from the models proposed in the literature.

The comparison is based on the performance of each element in the solution of both static and dynamic problems. In this context, the following aspects were analysed: presence of shear and membrane locking, mesh distortion sensitivity, presence of spurious zero energy modes, convergence of displacements and natural frequencies.

Based on the results, the elements with better performance are recommended for inclusion in a general finite element program.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 - GENERALIDADES.

A análise de estruturas de casca compreende uma vasta área dentro do ramo da engenharia. Como exemplos de estruturas que podem ser modeladas usando a teoria de cascas, pode-se citar os vasos sob pressão, estruturas de reatores nucleares, submarinos, comportas e barragens de usinas hidrelétricas, estruturas aeronáuticas, turbinas, etc...

Antes de se construir tais estruturas, é necessário que se faça o estudo teórico e/ou experimental de um modelo, de tal forma que a estrutura não colapse quando sob um carregamento real. Uma das possibilidades do estudo teórico consiste no uso de um método bastante difundido na engenharia, denominado de método de elementos finitos, onde, basicamente, a estrutura é discretizada em pequenos elementos, os chamados elementos finitos e, através da aplicação de princípios variacionais, as variáveis de interesse são obtidas.

O elemento a ser utilizado no uso do método de elementos finitos deve ser compatível com o tipo de estrutura a ser analisada na prática: para estruturas de casca, por exemplo, procura-se utilizar elementos finitos de casca. No entanto, podem ocorrer simplificações como a utilizada por ZIENKIEWICZ [43], baseadas na utilização de elementos de placa para a modelagem de estruturas de casca.

Embora a análise de estruturas de casca pelo método de elementos finitos já se estenda por mais de 3 décadas, o estabelecimento de um modelo de elemento de casca para análise estática e dinâmica que seja confiável e eficiente ainda continua a ser objeto de estudo de muitos pesquisadores.

O objetivo deste trabalho reside justamente no fato de se procurar, em um primeiro instante, formulações de elementos finitos para cascas consideradas promissoras e dentre estas, em um segundo momento, a implementação computacional para a realização de um estudo comparativo entre estes elementos.

Quanto aos elementos existentes, pode-se dizer que alguns são especí-

ficos para certos tipos de estrutura como, por exemplo, estruturas axissimétricas sujeitas a carregamentos axissimétricos. Outros se aplicam bem a cascas finas, onde a energia de deformação associada ao cisalhamento transversal é desprezada.

Neste trabalho foram selecionados, na primeira etapa, apenas elementos cujas formulações são capazes de representar cascas finas e semi-espessas, ou seja, com energia de deformação de cisalhamento transversal inclusa.

Bathe e Dvorkin [4], resumiram os requisitos que idealmente deveriam ser encontrados no desenvolvimento de um elemento finito de casca confiável e eficiente:

- 1- O elemento deve satisfazer os requisitos de convergência [43].
- 2- O elemento deve ser simples e de baixo custo computacional, com 5 ou seis graus de liberdade por nó.
- 3- A capacidade de predição do elemento deve ser elevada, ou seja, deve ser confiável e eficiente.
- 4- O elemento deve ser relativamente insensível à distorção de malha.
- 5- O elemento deve ser numericamente coerente, ou seja, não deve ter jamais modos falsos de deformação, e jamais deve ocorrer o efeito do travamento ou "locking".
- 6- O elemento não deve ser baseado em fatores de ajustes numéricos.
- 7- A formulação teórica do elemento deve ser fortemente baseada na mecânica do contínuo, com premissas na discretização do elemento finito que sejam claras e bem fundamentadas.

Dentro deste escopo, é feita uma seleção dos elementos considerados promissores. Implementa-se computacionalmente alguns deles e faz-se uma análise comparativa, tanto estática quanto dinâmica.

1.2- REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.

As tentativas de desenvolvimento de elementos finitos para casca seguem basicamente duas metodologias diferentes. Na primeira metodologia, a casca é substituída pela montagem de elementos de placa, que têm formatos triangulares ou quadrangulares. Esta metodologia foi adotada por ZIENKIEWICZ [43]. No entanto, o método tem a desvantagem da não existência de acoplamento entre os efeitos de membrana e flexão dentro de cada elemento e, conseqüentemente, um grande número de elementos deve ser usado para atingir uma precisão satisfatória [38].

Apesar dos elementos planos terem os problemas citados acima, alguns

autores [30] tentam resolver o problema do não acoplamento entre os efeitos de membrana e flexão utilizando elementos planos. Tais elementos seriam bastante úteis principalmente na solução de problemas não lineares, onde o custo computacional deve ser preferencialmente baixo.

Na segunda metodologia, que notoriamente tem dado os melhores resultados, utilizam-se elementos finitos de casca com dupla curvatura, os quais permitem uma melhor representação da estrutura de casca, tanto teórica como geométrica.

A seguir é feito um levantamento de elementos que se enquadram na proposta deste trabalho.

AHMAD e outros [1] introduziram em seu elemento o conceito do sólido degenerado em casca, onde as equações tri-dimensionais são colocadas na forma de variáveis nodais na superfície média da casca. Além disso, a hipótese de Kirchhoff é relaxada, permitindo que o elemento sofra deformações cisalhantes. Infelizmente, os resultados obtidos pelos elementos degenerados puros, ou seja, com integração completa, não foram bons quando aplicados em cascas finas, pois o modelo resultante era muito rígido, exibindo tanto o travamento de membrana ou "membrane locking", como o travamento de cisalhamento ou "shear locking". Além disso, a taxa de convergência era baixa.

OLSON e LINDBERG [28] e COWPER e outros [13] formularam elementos baseados na teoria de cascas rasas, enquanto HEPPLER e HANSEN [17] o fizeram baseados na teoria de cascas profundas, utilizando polinômios de ordem mais elevada.

PARK e outros [30] fizeram um estudo comparativo entre elementos de casca de 4 nós, onde analisaram a capacidade de representar o acoplamento membrana-flexão em cascas finas. Concluíram que tais elementos podem representar o acoplamento membrana-flexão com malhas mais refinadas. Formularam ainda um elemento de quatro nós que usa apenas um ponto de integração na parte de rigidez de flexão e membrana, com posterior estabilização da matriz de rigidez.

BELYTSCHKO e outros [7] formularam um elemento lagrangeano de nove nós com integração reduzida e aplicaram um processo de estabilização da matriz de rigidez para controle dos modos espúrios de deformação. O processo mostrou-se não somente eficaz para controle destes modos, como também na eliminação do travamento de membrana e de cisalhamento.

KANOKNUKULCHAI [23] desenvolveu um elemento de quatro nós, baseado no conceito do sólido degenerado em casca. Apesar da sua simplicidade de implementação, o elemento se baseia em um fator "kt", indesejável para uma aplicação mais geral. Além disso, nada é afirmado acerca da existência ou não dos modos espúrios de deformação ou ainda se o elemento satisfaz os critérios de convergência.

CHOI e outros [11] desenvolveram elementos de cascas não conformes, colocando termos adicionais no campo de deslocamentos. As matrizes adicionais obtidas são eliminadas a nível do elemento, resultando em uma matriz com o mesmo tamanho da original. Os resultados são melhores que os obtidos pelos elementos degenerados puros mas, novamente, nenhum comentário é feito com relação aos modos espúrios e critérios de convergência.

BATHE e HO [6], DHATT e outros [14] e MEEK e TAN [26] criaram elementos baseados na teoria de Kirchhoff discreta. Esses elementos são variações dos elementos DKT (*Discrete Kirchhoff Triangle*), CST (*Constant Strain Triangle*) e LST (*Linear Strain Triangle*), tendo em comum o fato de usarem a teoria de placas de Mindlin, permitindo assim a inclusão da energia de deformação associada ao cisalhamento.

Mais recentemente surgiram alguns elementos baseados no conceito das deformações assumidas. Estes elementos empregam os mesmos graus de liberdade dos elementos lagrangeanos normais, mas não são elementos isoparamétricos [21]. BATHE e DVORKIN [5] e PARK e STANLEY [29] têm usado deformações assumidas, baseadas nas deformações físicas referenciadas a um sistema de coordenadas naturais do elemento. HUANG e HINTON [18] propuseram elementos baseados no uso de deformações não físicas covariantes assumidas, referenciadas também a um sistema de coordenadas naturais do elemento. Estas deformações não físicas são posteriormente expressas como deformações cartesianas físicas através de transformação tensorial.

JANG e PINSKY [21] também usaram o conceito das deformações assumidas usadas por HUANG e HINTON [18], diferindo apenas na forma com que é obtido o campo de deformações covariantes para membrana. Os resultados obtidos por estes elementos são razoáveis.

RHIU e LEE [31] e CHANG e outros [10] desenvolveram modelos mistos de casca, utilizando um princípio de Hellinger-Reissner modificado. Nestes elementos, as equações de elementos finitos são obtidas assumindo-se campos de deslocamentos e deformações independentes. Os elementos resultantes são livres do travamento, tanto de membrana quanto de cisalhamento, além de não terem modos espúrios de deformação.

SALEEB e outros [33]-[34] e GELLERT e LAURSEN [16] desenvolveram elementos baseados também no princípio de Hellinger-Reissner modificado, com a diferença de que, ao invés de considerar campos de deformações independentes, são considerados campos de tensões e deslocamentos independentes.

Existem outras metodologias para propor novos elementos, mas referentes a formulações de elementos capazes de representar cascas finas [22] ou estruturas axissimétricas [12]. Dentro da proposta do trabalho, as principais delas foram citadas acima.

1.3 - DEFINIÇÃO DO PROBLEMA.

1.3.1 - Introdução.

A seleção de um elemento ideal para o estudo de cascas deveria ser fundamentalmente baseada nos critérios propostos por BATHE [4]. Infelizmente não existe até hoje um elemento que satisfaça todos aqueles requisitos conjuntamente.

Basicamente existem duas metodologias diferentes, já citadas no item anterior, que podem ser identificadas nas formulações de elementos finitos para casca, ou seja:

- 1- modelos planos combinando rigidez de flexão com rigidez de membrana, mais a inclusão de efeitos cisalhantes;
- 2- elementos curvos, quer seja usando uma teoria de casca específica, quer seja usando elementos degenerados, onde um modelo de casca é obtido "degenerando-se" um sólido em casca através do uso de premissas apropriadas.

Cada uma destas metodologias tem suas vantagens e desvantagens. No entanto, a formulação de elementos de casca empregando o conceito do sólido degenerado em casca é o mais atrativo do ponto de vista da consistência matemática e aplicabilidade à análises não lineares. Esta afirmação pode ser comprovada pelas inúmeras publicações feitas nos últimos anos, que adotam esta metodologia como base [1],[10],[18],[31].

A segunda formulação oferece várias vantagens. Primeiro, ela pode tratar cascas de geometrias arbitrárias, já que nenhuma imposição é feita para se "amoldar" a uma teoria de casca específica. Segundo, a formulação usa funções do tipo C^0 para as aproximações das variáveis cinemáticas. Isto leva a uma simplificação considerável da formulação, já que somente funções C^0 são empregadas. Em terceiro lugar, já que a teoria de Mindlin/Reissner é utilizada para considerar as deformações cisalhantes transversais, ela é adequada para a modelagem de cascas finas, moderadamente espessas ou cascas compostas.

Apesar das vantagens citadas no parágrafo anterior, os elementos degenerados requerem um procedimento de integração numérica bastante preciso para serem efetivos, pois se forem integrados com pontos em demasia, ocorre o fenômeno do travamento, ou "locking", enquanto que utilizando um número insuficiente de pontos de integração, a matriz de rigidez não apresenta o posto correto, dando origem aos chamados modos falsos de deformação.

Em placas, quando se utilizam as funções biquadráticas lagrangeanas e integração completa (3x3) nos termos de cisalhamento e flexão, obtém-se um elemento

que apresenta o travamento de cisalhamento, ou "shear locking". A razão deste comportamento é o aparecimento de energias espúrias, devido à inabilidade das funções de interpolação utilizadas representarem a restrição de cisalhamento nulo, quando a relação espessura/comprimento da placa é diminuída.

Em cascas, este fenômeno é agravado ainda mais pelo aparecimento do chamado travamento de membrana ou "membrane locking", termo cunhado por STOLARSKI E BELYTSCHKO [37]. Basicamente, o travamento de membrana reflete a inabilidade do elemento, em um caso de flexão pura, de flexionar sem se distender. Este modo de deformação é também chamado de modo de deformação inextensional, porque quando as deformações de membrana desaparecem, todas as linhas na superfície média da casca devem permanecer com comprimentos inalterados.

A forma com que o "locking" de membrana aparece é similar ao do aparecimento do "locking" de cisalhamento. Ele aparece quando um elemento curvo, com integração completa, é sujeito a um carregamento de flexão pura. Teoricamente nenhuma tensão de membrana deveria acontecer, mas na prática surgem tensões de membrana espúrias que não deveriam existir.

Este tipo de comportamento é indesejável na prática, já que tensões de membrana espúrias poderão se desenvolver em um elemento. É sabido que, em certos casos, a rigidez de membrana é muito maior que a rigidez de flexão. Com isto, qualquer energia espúria proveniente das parcelas de membrana, poderia mascarar os resultados.

Existem diversas maneiras de controlar o aparecimento do efeito de travamento. A mais conhecida e de mais fácil utilização é o emprego da integração reduzida ou reduzida/seletiva, utilizada por ZIENKIEWICZ e outros [44] nos termos de cisalhamento e membrana da matriz de rigidez. Esta metodologia resultou em um processo bastante eficaz, como será visto nos capítulos 4 e 5.

No entanto, a utilização da integração reduzida ou reduzida/seletiva pode dar origem aos chamados modos falsos de deformação, como será visto mais adiante.

É bem sabido que os elementos isoparamétricos lagrangeanos C^0 de nove nós sofrem algumas deficiências. O elemento de nove nós com integração reduzida/seletiva (9-SRI), exibe uma convergência pobre para alguns tipos de problemas, enquanto que o elemento de nove nós com integração reduzida (9-URI), apesar de ter uma convergência muito boa, sofre o problema de não ter o posto correto. Isto pode dar origem aos modos espúrios de deformação.

Várias propostas de estabilização dos modos falsos surgiram nos últi-

mos anos.

BELYTSCHKO e outros [7] criaram o "método gama" para o controle dos modos espúrios e o aplicaram em seu elemento. Basicamente, neste elemento são definidas cinco deformações generalizadas adicionais em cada um dos quatro pontos de integração reduzida. Com estas deformações generalizadas constrói-se uma matriz de estabilização dos modos espúrios. Esta matriz depende de certas constantes arbitrárias. Apesar deste fato, o resultado final é muito bom.

BELYTSCHKO e outros [8] utilizaram o método da projeção da decomposição dos modos. A idéia básica do método é definir as componentes de flexão do modo de qualquer deformação, e desprezar as energias de deformação de membrana e cisalhamento contidas dentro dos modos de flexão.

PARK e outros [30] usaram um procedimento semelhante ao utilizado por BELYTSCHKO [7], mas sempre baseado em alguns "fatores" escolhidos arbitrariamente.

Uma outra forma muito usada para a supressão dos modos espúrios é a do uso das chamadas deformações assumidas ou interpolações mistas usadas por BATHE e DVORKIN [4], [5], HUANG e HINTON [9], CHANG e outros [10] e PARK e STANLEY [29]. Nestes casos, as tensões ou deformações que causam "locking" são interpoladas de forma que as tensões ou deformações espúrias são evitadas. Utiliza-se a integração completa da matriz de rigidez de forma que o elemento resultante possui o posto correto.

Embora as metodologias citadas nos parágrafos anteriores necessitem de uma explicação matemática mais rígida, os resultados são bastante satisfatórios.

1.3.2 - Conceitos.

Até agora foram citadas expressões associadas a fenômenos comuns na análise de estruturas por elementos finitos. Convém conceituá-las, bem como outras expressões comumente encontradas na literatura especializada.

a) Travamento de cisalhamento ou "shear locking".

É uma excessiva rigidez na solução de um problema, que acontece quando a relação espessura/comprimento da casca/placa torna-se pequena. Isto acontece devido ao aparecimento de energias espúrias relacionadas ao cisalhamento transversal, que não deveriam aparecer. Este fator é importante, pois na prática tais elementos terão a sua aplicabilidade limitada.

b) Travamento de membrana ou "membrane locking".

Este é um termo dado por STOLARSKI e BELYTSCHKO [37] para designar a

inabilidade de um elemento em flexionar-se sem se distender num caso de flexão pura, ou seja, de sofrer a chamada deformação inextensional.

Obviamente este é mais um fenômeno indesejável que acontece em cascas, já que são energias espúrias indesejáveis que representarão uma parcela considerável de energia no modelo. Isto fará com que o modelo se comporte mais rigidamente, levando a resultados imprecisos.

c) Modos espúrios de energia ou "spurious zero-energy modes".

Corresponde ao número de auto-valores nulos, excedentes àqueles que representam os movimentos de corpo rígido; e que estão associados a autovetores não nulos [36]. Fisicamente, significa que o elemento pode se deformar sem que se tenha uma energia associada a essa deformação.

Os modos espúrios de deformação surgem normalmente quando a integração reduzida ou reduzida/seletiva é utilizada no cálculo da matriz de rigidez do elemento. Isto faz com que a matriz de rigidez não tenha o posto correto.

Para certas condições de contorno [9], esta deficiência pode levar à singularidade da matriz de rigidez e, em outros casos, ao mau condicionamento da matriz, degradando o processo de solução.

Este fenômeno é muito mais crítico em análises dinâmicas e não-lineares, onde o surgimento de tal fenômeno praticamente inviabiliza o processo de solução.

A singularidade normalmente desaparece com a reunião de vários elementos, porém os modos falsos de energia estão relacionados com a compatibilidade das formas dos autovetores associados a autovalores não nulos, e podem não desaparecer com a reunião dos elementos. Neste último caso, os modos falsos de energia são chamados de modos compatíveis ou comutáveis; caso contrário, são incompatíveis ou não comutáveis.

No caso de uma análise dinâmica ou não-linear, o uso de elementos que possuam modos compatíveis deve ser evitado, pois pode-se chegar a resultados duvidosos, ou mesmo não ter resultado algum. No capítulo cinco serão apresentados alguns resultados em que ocorrem os modos espúrios, quando então estas afirmações serão claramente constatadas.

A determinação dos modos falsos de energia vem da solução do problema de autovalores

$$(\mathbf{K}^1 - \lambda^1 \mathbf{M})\phi = 0 \quad (1)$$

$$\mathbf{K}^1 = \mathbf{K} + \alpha \mathbf{M} \quad (2)$$

$$\lambda^1 = \lambda + \alpha \quad , \quad (3)$$

onde

\mathbf{K} é a matriz de rigidez do elemento,

\mathbf{M} é a matriz de inércia do elemento,

α é uma constante para tornar a matriz \mathbf{K} não singular,

ϕ são autovetores e

λ são os autovalores reais.

A determinação dos modos espúrios é feita simplesmente observando-se os autovalores nulos que não correspondem a autovetores associados a deslocamento de corpo rígido.

d) Integração reduzida e reduzida/seletiva.

Normalmente, em elementos de casca, os elementos constituintes da matriz de rigidez não são obtidos de uma integração analítica. O uso de integração numérica se faz necessário. O procedimento da integração numérica pela quadratura de Gauss é o mais utilizado em programas de elementos finitos, embora existam outros métodos [3]. Basicamente, neste procedimento a função que se deseja integrar é substituída por um somatório da função calculada em "certos" pontos otimizados multiplicados por um "peso" de integração nestes pontos. Dependendo do caso a ser estudado, a integração deve ser efetuada em várias direções. Com "n" pontos de integração, para os casos lineares, a integração pela quadratura de Gauss pode integrar exatamente funções polinomiais de grau até $(2n-1)$.

No caso de casca, a energia de deformação do elemento pode ser dividida em três parcelas:

$$E_b = \frac{1}{2} \mathbf{q}^t \mathbf{K}_b \mathbf{q} \quad (4)$$

$$E_m = \frac{1}{2} \mathbf{q}^t \mathbf{K}_m \mathbf{q} \quad (5)$$

$$E_s = \frac{1}{2} \mathbf{q}^t \mathbf{K}_s \mathbf{q} \quad (6)$$

onde E_b , E_m , E_s são as parcelas de energia de deformação devido à flexão, membrana e cisalhamento, respectivamente, \mathbf{K}_b , \mathbf{K}_m e \mathbf{K}_s são as matrizes de rigidez corresponden-

tes à rigidez de flexão, membrana e cisalhamento, respectivamente, e \mathbf{q} é o vetor de variáveis nodais.

Definidos \mathbf{K}_m e \mathbf{K}_s e se "n" é o número de pontos necessários para se integrar completamente a rigidez em uma direção, são estabelecidos os seguintes tipos de integração:

- 1) completa, se $n \times n$ pontos forem utilizados para integrar \mathbf{K}_b , \mathbf{K}_m e \mathbf{K}_s ;
- 2) reduzida/seletiva, se $n \times n$ pontos forem utilizados para integrar \mathbf{K}_b e \mathbf{K}_m e $(n-1) \times (n-1)$ pontos para \mathbf{K}_s ;
- 3) reduzida, se $n \times n$ pontos forem utilizados para integrar \mathbf{K}_b e $(n-1) \times (n-1)$ pontos para \mathbf{K}_m e \mathbf{K}_s .

e) Invariância.

Um elemento é dito invariante quando a sua matriz de rigidez puder ser obtida em sistemas locais de coordenadas, rodados ou transladados em relação ao sistema global de coordenadas, sem que a solução do problema sofra alterações [36]. Em outras palavras, a solução do problema não deve ser dependente da escolha do sistema de referência.

f) Compatibilidade e completeza.

Para assegurar uma convergência monotônica do modelo, ou seja, sem oscilações na resposta, um elemento deve ser compatível e completo. No caso de um modelo de deslocamento um elemento é dito conforme se as funções usadas para interpolar os deslocamentos assegurarem completeza e compatibilidade. A completeza é alcançada quando as funções utilizadas para interpolar os deslocamentos do elemento forem capazes de representar os deslocamentos de corpo rígido e estados de deformação constante [3].

A compatibilidade é assegurada se os deslocamentos dentro do elemento e no contorno forem contínuos e com derivadas contínuas até uma ordem menor do que a maior derivada que aparece no funcional [3]. Fisicamente, a compatibilidade assegura que não existirão buracos ou falhas entre elementos quando o modelo for carregado.

O elemento terá a completeza e compatibilidade dependendo de sua formulação.

Segundo BATHE [3], "a condição de completeza deve ser sempre satisfeita, ao passo que a condição de compatibilidade pode ser relaxada às custas da não obtenção da convergência monotônica, desde que os ingredientes essenciais da condi-

ção de completeza não sejam perdidos".

g) Modelo de elementos finitos.

A base do método de elementos finitos consiste em dividir um sólido em elementos finitos discretos, considerando-se a seguir um campo de tensões e/ou deformações e/ou deslocamentos dentro de cada elemento e/ou no contorno. A aplicação de princípios variacionais resulta em um sistema de equações algébricas, de onde as variáveis de interesse são obtidas. Com base no tipo de funcional a ser utilizado nos processos variacionais, vários tipos de formulações apareceram.

O primeiro deles, e o mais utilizado, é o método dos deslocamentos, que é baseado na utilização do princípio da mínima energia potencial. É conhecido como o método dos deslocamentos pelo fato de serem os deslocamentos as primeiras variáveis obtidas no processo de solução das equações.

Com a utilização do princípio da mínima energia potencial complementar surgiu o método das tensões, nome dado por motivo análogo ao citado no parágrafo anterior.

Em cascas, os elementos mistos estão bastante difundidos. Estes são baseados na utilização dos princípios de Hellinger-Reissner modificados. Nestes casos, um campo de tensões ou deformações é assumido no elemento juntamente com um campo de deslocamentos. O campo de tensões ou deformações é posteriormente condensado a nível de elemento, de tal forma que apenas os deslocamentos saem como incógnitas primeiras do processo de solução. O sucesso desta metodologia pode ser confirmado pelos inúmeros artigos que usam este princípio como base [10], [16], [31], [33], e [34]. Porém, para que a formulação tenha um comportamento estável e consistente, certas condições de compatibilidade entre os campos de deformações/tensões e deslocamentos devem ser satisfeitas. Estas são as condições de Babuska-Brezzi.

h) Elementos degenerados.

São elementos originalmente propostos por AHMAD e outros [1]. Basicamente, nestes elementos um sólido é "degenerado" em casca, assumindo-se premissas adequadas. Entre essas premissas citam-se:

- 1) a hipótese de Kirchhoff é relaxada, permitindo que o elemento sofra deformações cisalhantes transversais;
- 2) as tensões normais ao plano da casca são desconsideradas.

É um elemento de fácil implementação e muito bem fundamentado teoricamente, já que, ao contrário de muitas formulações existentes na atualidade, nenhum

artifício duvidoso é imposto na formulação.

i) "Patch test"

É um teste idealizado para verificar se um determinado elemento convergirá para a resposta correta do problema, à medida que ocorrer um refino de malha.

É um teste fácil de se realizar e muito importante na fase de desenvolvimento ou implementação de um elemento, sendo altamente recomendada a sua utilização.

O teste é realizado montando-se alguns elementos de tal maneira que pelo menos um nó é completamente rodeado por outros elementos. Aplica-se um carregamento com deslocamentos ou forças consistentes, de forma que correspondam a um estado de deformação constante. Se, após computadas as deformações (ou tensões) em qualquer parte do elemento, elas coincidirem com a resposta exata até o limite de precisão do computador, o elemento é dito que passou no "patch test" [12].

1.3.3 - Seleção dos elementos.

Com base no que foi exposto nos itens anteriores, faz-se agora a escolha dos elementos para uma análise mais profunda.

Diante da proposta do trabalho, somente foram selecionados elementos que têm incluída na sua formulação a energia de deformação devido ao cisalhamento transversal.

O primeiro elemento selecionado foi o proposto por CHANG e outros [10]. É um elemento lagrangeano de nove nós baseado no princípio de Hellinger-Reissner modificado. A análise dos resultados do artigo mostrou alguns quesitos importantes, como boa convergência e não ocorrência de modos falsos de energia. Além disso o elemento passa no "patch-test", e é livre do problema do travamento, tanto de membrana quanto de cisalhamento. Este elemento, de agora em diante, será denominado de SHELM-9.

Também foram selecionados os elementos degenerados de nove nós lagrangeanos com integração completa (9-FULL) e com integração reduzida (9-URI). O elemento 9-FULL apresenta uma característica muito importante em elementos de casca, que é a ausência de modos falsos de energia. Já o elemento 9-URI foi selecionado pelo fato de apresentar um comportamento excelente quanto à convergência para os deslocamentos.

Além dos elementos citados nos parágrafos anteriores, e que foram im-

plementados computacionalmente neste trabalho, merecem destaque para futuros trabalhos os elementos propostos por JANG e PINSKY [21], baseados em deformações covariantes assumidas, obtidas através de um campo de deformações covariantes definido em relação a um sistema de coordenadas naturais.

Outro elemento que merece destaque é o proposto por BELYTSCHKO e outros [7]. É um elemento lagrangeano de nove nós, que usa integração reduzida no cálculo da matriz de rigidez, com posterior estabilização desta através do uso do "método gama" proposto pelos mesmos autores. O elemento não possui travamento de membrana nem de cisalhamento, não tendo também modos falsos de energia.

O elemento proposto por PARK e STANLEY [29] também mostrou resultados muito bons. Não apresenta travamento de membrana ou de cisalhamento, nem revela a presença de modos falsos de energia. É baseado no cálculo de deformações referenciadas ao sistema natural do elemento, que são posteriormente referenciadas a um sistema ortogonal e calculadas em cada ponto de integração por intermédio de transformação tensorial.

Finalmente, surge também como uma opção viável o elemento idealizado por HUANG e HINTON [18]. É um elemento degenerado de nove nós, que utiliza em sua formulação o conceito de "deformações melhoradas". As "deformações melhoradas" de cisalhamento são obtidas através de uma interpolação de deformações de cisalhamento não físicas, referenciadas ao sistema natural do elemento. Mais tarde elas são colocadas na forma de deformações físicas nos pontos de integração, por transformação tensorial. As "deformações melhoradas" de membrana também são obtidas através de uma interpolação, só que já referenciadas ao ponto de integração, não necessitando transformação tensorial.

Com os elementos selecionados para a implementação numérica, faz-se um estudo comparativo entre eles.

Nos capítulos dois e três são apresentadas as formulações mais detalhadas dos elementos selecionados para a implementação numérica. No quarto capítulo é feita uma análise dos elementos implementados, quando utilizados na modelagem de problemas estáticos. No quinto capítulo esta análise é dirigida aos casos dinâmicos. Finalizando, no sexto capítulo são mostrados as conclusões e sugestões para futuros trabalhos.

1.4 - IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL.

A implementação foi feita utilizando-se o supercomputador CONVEX-210 da Universidade Federal de Santa Catarina, com processamento vetorial. Todas as va-

riáveis utilizadas no cômputo das matrizes de rigidez e massa foram de dupla precisão, com a utilização de alocação dinâmica de memória. O programa foi elaborado utilizando-se a linguagem FORTRAN.

O sistema base utilizado foi o SIMELF (Sistema Modular de Elementos Finitos) [2], da Universidade Federal de Santa Catarina.

O processo utilizado na solução das equações resultantes dos elementos finitos foi a eliminação de Gauss em matrizes armazenadas em forma de banda, enquanto que os autovalores e autovetores foram obtidos através do método da iteração sub-espacial [3].

CAPÍTULO 2

DESENVOLVIMENTO DOS ELEMENTOS 9-FULL E 9-URI

2.1 - INTRODUÇÃO.

Teórica e matematicamente muito bem fundamentados, os elementos degenerados originariamente propostos por AHMAD e outros [1] desempenham um papel fundamental na história de elementos finitos para cascas. O elemento mostrado agora segue a formulação básica dos elementos degenerados, sendo adotadas as seguintes premissas:

- a) As deflexões são pequenas;
- b) A hipótese de Kirchhoff é relaxada, ou seja, a normal à superfície indeformada não permanece normal à superfície deformada, permanecendo no entanto reta e inextensível;
- c) Tensões normais à superfície de referência da casca são desprezáveis.

Estas premissas também serão válidas nas formulações dos outros elementos selecionados.

A notação indicial é adotada no decorrer do trabalho. Nos locais onde não é utilizada esta notação há uma referência explícita no texto.

2.2 - FORMULAÇÃO DO ELEMENTO 9-FULL.

2.2.1 - Sistemas de coordenadas.

Quatro sistemas de coordenadas são utilizados nas formulações dos elementos de casca degenerados. Estes sistemas são mostrados na figura 1.

- a) Sistema global de coordenadas (x,y,z).

O sistema global de coordenadas é usado para definir as coordenadas nodais e deslocamentos da casca. Os vetores de base associados são designados por e_1^g , e_2^g e e_3^g .

b) Sistema natural de coordenadas (ξ, η, ζ) .

As funções de interpolação N_i são expressas em termos das coordenadas naturais (ξ, η, ζ) não ortogonais do elemento.

A superfície de referência da casca é definida pelas coordenadas naturais ξ e η , com $\zeta = 0$. A direção de ζ é aproximadamente normal à superfície média da casca. Todas essas coordenadas naturais variam de -1 a +1.

c) Sistema local de coordenadas (x^1, y^1, z^1) .

O sistema local de coordenadas é usado para definir as tensões e deformações em qualquer ponto dentro do elemento. O vetor z^1 define a direção z^1 e é obtido através do produto vetorial dos vetores que são tangentes às direções ξ e η , ou seja:

$$z^1 = x_{,\xi} \times x_{,\eta} \quad (7)$$

onde x , é o vetor posição de qualquer ponto da casca, dado pela equação (18).

O vetor x^1 na direção x^1 é coincidente com a tangente na direção ξ , ou seja,

$$x^1 = x_{,\xi} \quad (8)$$

O vetor y^1 na direção y^1 é obtido através do produto vetorial de z^1 com x^1 , de tal forma que

$$y^1 = z^1 \times x^1 \quad (9)$$

O sistema local de coordenadas varia dentro da casca e é útil para definir a matriz dos cossenos diretores θ , a qual permite transformações entre os sistemas de coordenadas local e global. A matriz dos cossenos diretores é definida pela expressão:

$$\theta = \begin{bmatrix} e_1^1 & e_2^1 & e_3^1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

onde e_1^1 , e_2^1 e e_3^1 são vetores de base ortonormais nas direções x^1 , y^1 e z^1 , respectivamente, sendo calculados pelas expressões:

$$e_1^1 = \frac{x^1}{\|x^1\|} \quad (11)$$

$$e_2^1 = \frac{y^1}{\|y^1\|} \quad (12)$$

$$e_3^1 = \frac{z^1}{\|z^1\|} \quad (13)$$

d) Sistema nodal de coordenadas.

O sistema nodal de coordenadas é construído em cada nó, e é usado como referência para definir os graus de liberdade de rotação (θ_1, θ_2) em cada nó do elemento.

Os vetores de base ortogonais associados são dados por e_1^f, e_2^f e e_3^f . A direção de e_3^f é definida através da equação (14).

$$e_{3_1}^f = \frac{\begin{pmatrix} x_i^+ - x_i^- \\ \end{pmatrix}}{h_i} \quad (14)$$

e

$$h_i = \|x_i^+ - x_i^-\| \quad (15)$$

sem soma em i , onde x_i^+ é a posição do vetor do i -ésimo nó na parte superior da casca, x_i^- é o vetor do i -ésimo nó na parte inferior da casca, h_i é a espessura da casca no nó i (*).

Existem várias maneiras de definir as direções dos vetores e_1^f e e_2^f . Neste elemento foi adotada a seguinte convenção:

$$e_1^f = \frac{\begin{pmatrix} e_3^f \times e_3^g \\ \end{pmatrix}}{\|e_3^f \times e_3^g\|} \quad (16)$$

$$e_2^f = e_3^f \times e_1^f \quad (17)$$

No caso de e_3^f ser paralelo a e_3^g , a direção de e_1^f passa a ser a mesma de e_1^g , com e_2^f sendo calculado pela equação (17).

(*) Apesar da formulação utilizada por CHANG e outros [10] requerer o uso das equações (14) e (15), optou-se pela introdução de e_{3i}^f e h_i como dados de entrada do problema. Esta consideração reduz em muito a geração de coordenadas e, para os casos estudados neste trabalho, não há nenhuma degradação da formulação.

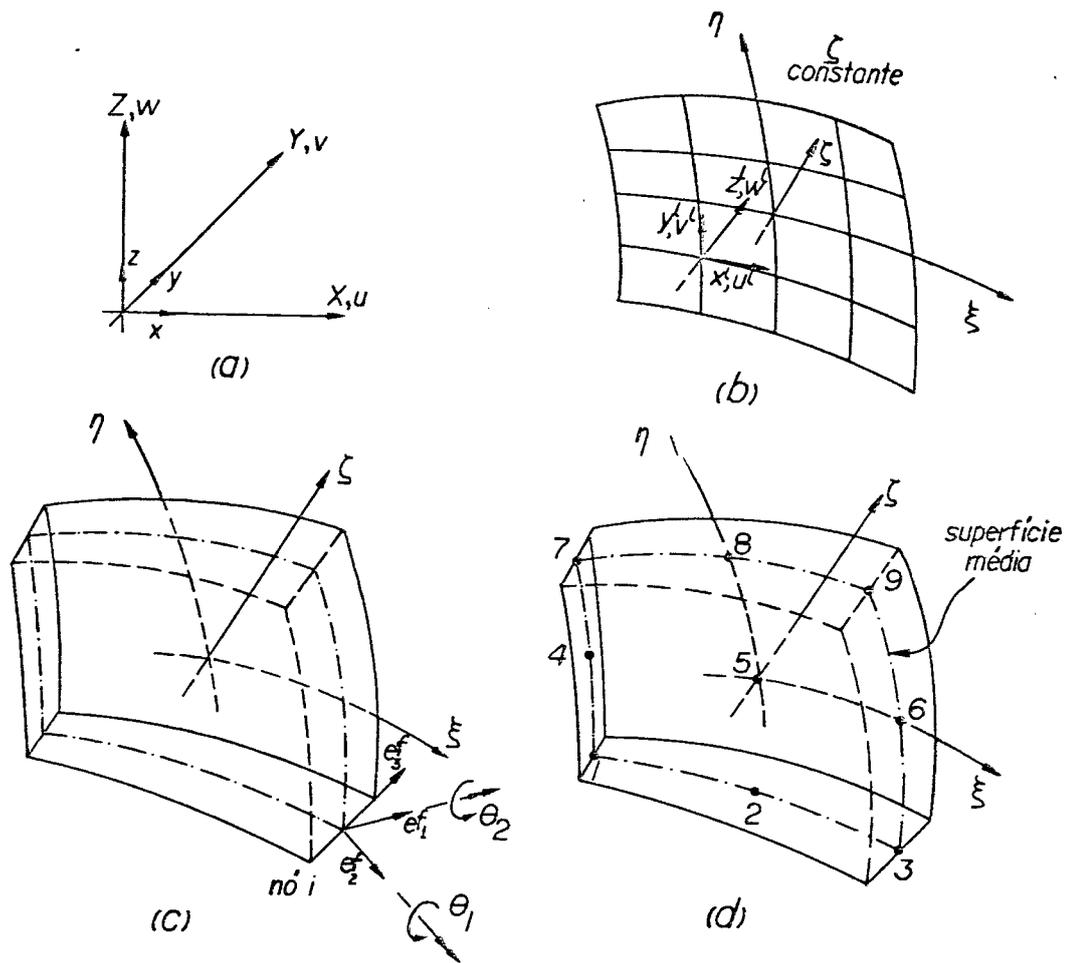


Figura 1 - Tipos de sistemas de coordenadas utilizados.

a) global. b) local. c) nodal. d) natural.

2.2.2 - Geometria do elemento.

Seguindo-se a formulação isoparamétrica, a geometria do elemento é definida em termos das coordenadas naturais do elemento (ξ, η, ζ) , através da seguinte equação:

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = N_i \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{\zeta=0} + \zeta \frac{1}{2} N_i h_i \begin{Bmatrix} e_{3x}^{f1} \\ e_{3y}^{f1} \\ e_{3z}^{f1} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

onde $\mathbf{x} = (x, y, z)$ são as coordenadas de um ponto genérico da casca referentes ao sistema global. N_i é a função de interpolação lagrangeana no nó genérico "i" correspondente a uma superfície com ζ constante; h_i é a espessura da casca no nó "i"; ξ, η, ζ são as coordenadas naturais do ponto em consideração; \mathbf{e}_3^f é o vetor dado pela equação (14). As funções N_i e suas derivadas parciais em relação a ξ e η estão

claramente definidas no apêndice A.

2.2.3 - Representação dos deslocamentos.

Cinco graus de liberdade são considerados em cada nó do elemento: três translações (u,v,w) ao longo dos eixos globais (x,y,z) e duas rotações (θ_1, θ_2) sobre os eixos mutuamente perpendiculares e_1^f e e_2^f , normais à direção e_3^f , como pode ser visto na figura 2. Portanto, cada elemento tem um total de 45 graus de liberdade. Considerando-se as premissas descritas no item 2.1, o vetor de deslocamentos u (u,v,w) em um ponto genérico da casca é dado por:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = N_i \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} + \zeta \frac{1}{2} N_i h_i \begin{Bmatrix} -\theta_1^f e_{12x}^f + \theta_2^f e_{1x}^f \\ -\theta_1^f e_{2y}^f + \theta_2^f e_{1y}^f \\ -\theta_1^f e_{2z}^f + \theta_2^f e_{1z}^f \end{Bmatrix} \quad (19)$$

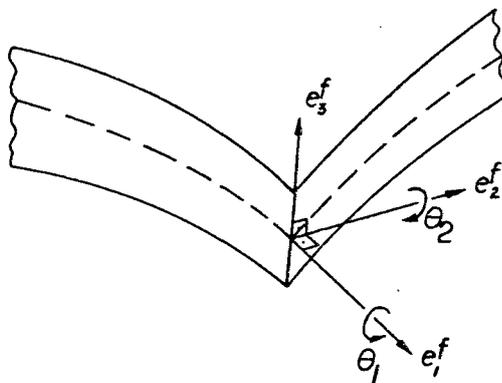


Figura 2 - Sistema nodal.

Ou na forma simbólica;

$$u = \tilde{N} q \quad (20)$$

onde \tilde{N} representa a matriz das funções de interpolação modificadas, obtida a partir dos termos da equação (19), e q é o vetor de variáveis nodais do elemento definido por:

$$q = \left\{ u_1, v_1, w_1, \theta_1^{(1)}, \theta_2^{(2)}, \dots, u_9, v_9, w_9, \theta_1^{(9)}, \theta_2^{(9)} \right\}^t \quad (21)$$

2.2.4 - Deformações.

a) Introdução

O melhor sistema para definir as deformações de um elemento de casca é o sistema local. Escolhe-se este sistema pela facilidade de imposição da premissa da nulidade da tensão normal $\sigma_{z^1 z^1}$, onde z^1 é a direção normal ao plano definido pelas coordenadas naturais ξ e η .

A seguir, descreve-se os passos necessários para se obter a matriz \mathbf{B}^e , que relaciona deformações-deslocamentos do elemento em relação ao sistema global. Ela é definida de tal forma que possa ser utilizada de uma maneira direta, quando do cálculo das matrizes de elementos finitos. Para não perder a sequência de deduções, algumas matrizes serão definidas em apêndices apropriadamente referenciados.

b) Definição das deformações.

O vetor de deformações físicas em relação ao sistema global de coordenadas é dado por:

$$\hat{\varepsilon}^e = \left\{ \hat{\varepsilon}_{xx} \quad \hat{\varepsilon}_{yy} \quad \hat{\varepsilon}_{zz} \quad \hat{\gamma}_{xy} \quad \hat{\gamma}_{yz} \quad \hat{\gamma}_{xz} \right\}^t \quad (22)$$

onde

$$\hat{\varepsilon}_{xx} = u,_{x} \quad (23.a)$$

$$\hat{\varepsilon}_{yy} = v,_{y} \quad (23.b)$$

$$\varepsilon_{zz} = w,_{z} \quad (23.c)$$

$$\hat{\gamma}_{xy} = u,_{y} + v,_{x} \quad (23.d)$$

$$\hat{\gamma}_{yz} = v,_{z} + w,_{y} \quad (23.e)$$

$$\hat{\gamma}_{xz} = u,_{z} + w,_{x} \quad (23.f)$$

Os deslocamentos utilizados neste elemento são dados pela equação (19). Estes deslocamentos são expressos em função das coordenadas naturais do elemento (ξ, η, ζ). Como as deformações dadas pelas equações (23) são calculadas em função das derivadas dos deslocamentos em relação ao sistema global, é necessário que se faça a seguinte transformação:

$$\begin{bmatrix} u,_{x} & v,_{x} & w,_{x} \\ u,_{y} & v,_{y} & w,_{y} \\ u,_{z} & v,_{z} & w,_{z} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} u,_{\xi} & v,_{\xi} & w,_{\xi} \\ u,_{\eta} & v,_{\eta} & w,_{\eta} \\ u,_{\zeta} & v,_{\zeta} & w,_{\zeta} \end{bmatrix} \quad (24)$$

onde \mathbf{J} é a matriz jacobiana dada por:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} x, \xi & y, \xi & z, \xi \\ x, \eta & y, \eta & z, \eta \\ x, \zeta & y, \zeta & z, \zeta \end{bmatrix} \quad (25)$$

As derivadas dos deslocamentos usadas na equação (24) são obtidas através da equação (19), enquanto que as da matriz jacobiana são obtidas através da equação (18).

Com a utilização das equações (19), (24) e (25), pode-se construir um vetor de relações deformações-deslocamentos em relação ao sistema global na forma:

$$\hat{\varepsilon}^g = \mathbf{B}^g \mathbf{q} \quad (26)$$

onde $\hat{\varepsilon}^g$ é definido por (22) e \mathbf{q} pela equação (21). A matriz \mathbf{B}^g pode ser particionada na forma:

$$\mathbf{B}^g = [\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_9] \quad (27)$$

sendo definidas pela equação (B.9).

A equação (26) expressa as relações deformações-deslocamentos em relação ao sistema global. É interessante que as deformações sejam expressas em relação ao sistema local de coordenadas, pois, como já foi dito, fica facilitada a imposição de tensão nula na direção perpendicular às coordenadas naturais (ξ, η) .

Esta transformação é realizada efetuando-se uma transformação tensorial no tensor deformação dada por:

$$\hat{\mathbf{E}}^l = \theta^t \hat{\mathbf{E}}^g \theta \quad (28)$$

onde

θ é a matriz dos cossenos diretores dada pela equação (10),

$\hat{\mathbf{E}}^g$ é o tensor deformação expresso em relação ao sistema global de coordenadas e

$\hat{\mathbf{E}}^l$ é o tensor deformação expresso em relação ao sistema local.

Expandindo e rearranjando os termos da equação (28), pode-se obter o vetor de deformação em relação ao sistema local de uma forma mais elegante, escre-

vendo-se:

$$\hat{\varepsilon}^1 = T_e B^g q \quad (29)$$

onde T_e é obtida eliminando-se a terceira linha da matriz \tilde{T}_e definida pela equação (C.7). Isto é realizado para impor a premissa de tensão nula na direção perpendicular às coordenadas naturais ξ, η do elemento. Portanto, a matriz T_e tem dimensão (5x6). Ainda com relação à equação (29), B^g é a matriz que relaciona deformações aos deslocamentos em relação ao sistema global, definida pela equação (B.9). Ainda, q é o vetor das variáveis nodais do elemento definido pela equação (21) e $\hat{\varepsilon}^1$ é o vetor de deformação em relação ao sistema local, escrito na forma:

$$\hat{\varepsilon}^1 = \left\{ \hat{\varepsilon}_{xx}^{11}, \hat{\varepsilon}_{yy}^{11}, \hat{\gamma}_{xy}^{11}, \hat{\gamma}_{yz}^{11}, \hat{\gamma}_{xz}^{11} \right\}^t \quad (30)$$

A matriz B^g da equação (29) pode ser dividida em duas partes: B_o^g , associada às componentes que não dependem da coordenada natural ζ , e B_t^g , associada às componentes que dependem de ζ . Aqui cabe um esclarecimento. AHMAD e outros [1], assumem que nenhuma deformação ocorre na direção de ζ . Adicionam ainda que, "apesar de ζ não ser exatamente normal à superfície média da casca esta representa uma boa aproximação das premissas usuais de cascas".

Com isso, tem-se:

$$B^g = B_o^g + \zeta B_t^g \quad (31)$$

Substituindo-se (31) em (29) obtém-se:

$$\hat{\varepsilon}^1 = T_e B_o^g q + \zeta T_e B_t^g q \quad (32)$$

ou

$$\hat{\varepsilon}^1 = B_o^1 q + \zeta B_t^1 q \quad (33)$$

onde

$$B_o^1 = T_e B_o^g \quad (34)$$

$$B_t^1 = T_e B_t^g \quad (35)$$

As componentes das matrizes B_o^g e B_t^g são dadas pelas equações (B.10) e (B.11), respectivamente.

As matrizes definidas por (34) e (35) têm dimensões (5x45).

No sistema local, as deformações dadas pela equação (33) podem ser escritas da seguinte forma:

$$\hat{\varepsilon}^1 = \begin{Bmatrix} \hat{\varepsilon}_p^1 \\ \hat{\gamma}_s^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{\varepsilon}_m^1 \\ \hat{\gamma}_s^1 \end{Bmatrix} + \zeta \begin{Bmatrix} \hat{\varepsilon}_b^1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (36)$$

onde $\hat{\varepsilon}_p^1$ significa deformação no plano (ξ, η) ; $\hat{\gamma}_s^1$ são as deformações cisalhantes transversais; $\hat{\varepsilon}_m^1$ são as partes de $\hat{\varepsilon}_p^1$ associadas ao comportamento de membrana sendo independentes de ζ ; $\zeta \hat{\varepsilon}_b^1$ são as partes de $\hat{\varepsilon}_p^1$ associadas ao comportamento de flexão, lineares em ζ .

Convém ressaltar que estas deformações são todas referentes ao sistema local de coordenadas. Os vetores de deformação dados pela equação (36) são obtidos através das seguintes equações:

$$\hat{\varepsilon}_m^1 = \mathbf{B}_m^1 \mathbf{q} \quad (37)$$

$$\hat{\gamma}_s^1 = \mathbf{B}_s^1 \mathbf{q} \quad (38)$$

$$\zeta \hat{\varepsilon}_b^1 = \zeta \mathbf{B}_b^1 \mathbf{q} \quad (39)$$

onde \mathbf{B}_m^1 é a matriz que se forma tomando-se as 3 primeiras linhas da matriz \mathbf{B}_o^1 dada por (34), \mathbf{B}_s^1 é a matriz que se forma tomando-se as duas últimas linhas de \mathbf{B}_o^1 dada por (34) e \mathbf{B}_b^1 é a matriz constituída das três primeiras linhas de \mathbf{B}_t^1 dada pela equação (35). Apesar de claramente definidas, as matrizes \mathbf{B}_m^1 e \mathbf{B}_b^1 têm dimensões (3×45) , enquanto que \mathbf{B}_s^1 tem dimensão (2×45) .

2.2.5 - Definição das tensões.

Conforme já dito antes, a premissa da tensão ser nula em uma direção perpendicular à superfície ζ constante é adotada neste elemento. Então, as relações constitutivas entre as cinco componentes de tensão e deformação em relação ao sistema local podem ser escritas da seguinte forma:

$$\sigma^1 = \mathbf{D} \hat{\varepsilon}^1 \quad (40)$$

onde $\hat{\varepsilon}^1$ é definido pela equação (30), σ^1 é o vetor de tensões expresso em relação ao sistema local, sendo dado por:

$$\sigma^1 = \left\{ \sigma_{xx}^1 \quad \sigma_{yy}^1 \quad \sigma_{xy}^1 \quad \sigma_{yz}^1 \quad \sigma_{xz}^1 \right\}^t \quad (41)$$

e \mathbf{D} é a matriz de relações constitutivas tensões-deformações, em um sistema local ortogonal. A matriz \mathbf{D} para este elemento é válida para um material isotrópico linear, sendo dada por:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ & & & \kappa \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ \text{(sim)} & & & & \kappa \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (42)$$

onde E é o módulo de Young ou módulo de elasticidade e ν é o coeficiente de Poisson do material. O fator κ é incluído com o propósito de melhorar a aproximação da distribuição de tensões cisalhantes ao longo da espessura, pois sabe-se que na realidade esta distribuição é no mínimo parabólica. Neste trabalho foi adotado o valor de $5/6$ para κ . Este valor também é adotado por outros autores [1], [17], [34].

A equação (40) pode ser escrita na forma particionada, dividindo-se entre as tensões atuantes no plano σ_p^1 e tensões cisalhantes transversais σ_s^1 na forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_p^1 \\ \sigma_s^1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & \\ & \mathbf{D}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\varepsilon}_p^1 \\ \hat{\gamma}_s^1 \end{Bmatrix} \quad (43)$$

onde:

$$\sigma_p^1 = \left\{ \sigma_{xx}^{11} \quad \sigma_{yy}^{11} \quad \sigma_{xy}^{11} \right\}^t \quad (44)$$

$$\sigma_s^1 = \left\{ \sigma_{yz}^{11} \quad \sigma_{xz}^{11} \right\} \quad (45)$$

$$\hat{\varepsilon}_p^1 = \hat{\varepsilon}_m^1 + \zeta_s \hat{\varepsilon}_b^1 \quad (46)$$

$$\mathbf{D}_1 = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$\mathbf{D}_2 = \kappa G \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (48)$$

sendo que $\hat{\varepsilon}_p^1$ e $\hat{\gamma}_s^1$ são dadas pela equação (36) e G é o módulo de elasticidade trans-

versal do material, dado por:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (49)$$

2.2.6 - Determinação da matriz de rigidez.

No sistema local de coordenadas, a energia potencial total para este elemento é dada por:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \hat{\varepsilon}_p^{1t} \mathbf{D}_1 \hat{\varepsilon}_p^1 dV + \frac{1}{2} \int_V \hat{\gamma}_s^{1t} \mathbf{D}_2 \hat{\gamma}_s^1 dV - W_0 \quad (50)$$

onde W_0 é o trabalho realizado devido à aplicação das cargas externas. No sistema local de coordenadas, $\hat{\varepsilon}_p^1$ pode ser dividido em duas partes: uma associada ao comportamento de membrana $\hat{\varepsilon}_m^1$, e outra associada ao comportamento de flexão $\zeta \hat{\varepsilon}_b^1$, de tal forma que:

$$\hat{\varepsilon}_p^1 = \hat{\varepsilon}_m^1 + \zeta \hat{\varepsilon}_b^1 \quad (51)$$

Além disso, o elemento diferencial de volume da equação (50) pode ser escrito na forma:

$$dV = |\mathbf{J}| \, d\xi \, d\eta \, d\zeta \quad (52)$$

onde $|\mathbf{J}|$ é o determinante da matriz jacobiana tri-dimensional \mathbf{J} , dada pela equação (25). No entanto $|\mathbf{J}|$ varia muito pouco ao longo da espessura da casca, de tal forma que é possível assumir:

$$dV \cong |\mathbf{J}| \, d\xi \, d\eta \, d\zeta \quad (53)$$

$\zeta=0$

Após a substituição da equação (51) na equação (50) e integração na espessura, os termos de acoplamento entre $\hat{\varepsilon}_m^1$ e $\zeta \hat{\varepsilon}_b^1$ irão desaparecer, de forma que a energia potencial total do elemento pode ser escrita na forma:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \hat{\varepsilon}_m^{1t} \mathbf{D}_1 \hat{\varepsilon}_m^1 dV + \frac{1}{2} \int_V \hat{\varepsilon}_b^{1t} \mathbf{D}_1 \hat{\varepsilon}_b^1 dV + \frac{1}{2} \int_V \hat{\gamma}_s^{1t} \mathbf{D}_2 \hat{\gamma}_s^1 dV - W_0 \quad (54)$$

Substituindo-se as equações (37), (38) e (39) em (54), e integrando-se na espessura, com a subsequente minimização de Π com relação às variáveis nodais \mathbf{q} , obtém-se as seguintes equações:

$$K_{ij} q_j = f_i \quad (55)$$

onde a matriz K_{ij} é a soma das contribuições das matrizes de rigidez de membrana, flexão e cisalhamento, dadas respectivamente por:

$$K_m = \int_A \mathbf{B}_m^{1t} \mathbf{D}_m^1 \mathbf{B}_m^1 |J|_{\zeta=0} d\xi d\eta \quad (56.a)$$

$$K_b = \int_A \mathbf{B}_b^{1t} \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b^1 |J|_{\zeta=0} d\xi d\eta \quad (56.b)$$

$$K_s = \int_A \mathbf{B}_s^{1t} \mathbf{D}_s \mathbf{B}_s^1 |J|_{\zeta=0} d\xi d\eta \quad (56.c)$$

onde

$$\mathbf{D}_m = \int_{-1}^{+1} \mathbf{D}_1 d\zeta = 2\mathbf{D}_1 \quad (57.a)$$

$$\mathbf{D}_b = \int_{-1}^{+1} \mathbf{D}_1 \zeta^2 d\zeta = \frac{2}{3} \mathbf{D}_1 \quad (57.b)$$

$$\mathbf{D}_s = \int_{-1}^{+1} \mathbf{D}_2 d\zeta = 2\mathbf{D}_2 \quad (57.c)$$

onde \mathbf{D}_1 e \mathbf{D}_2 são dadas pelas equações (47) e (48), respectivamente. É importante ressaltar que $|J|$ é calculado usando a matriz jacobiana de dimensão (3x3) em $\zeta = 0$.

2.2.7 - Determinação da matriz de inércia.

Neste elemento optou-se pela utilização da matriz de inércia consistente. Esta é uma matriz de fácil obtenção, tendo a vantagem de garantir uma convergência monotônica dos autovalores quando o elemento for compatível. Apesar da matriz de inércia concentrada economizar espaço de memória, a obtenção das suas componentes não é direta, visto que envolve a atribuição de pesos nem sempre fáceis de se definir.

A matriz de inércia consistente é de fácil obtenção, já que os deslocamentos dados pela equação (19) estão referenciados ao sistema global, não sendo

necessário fazer qualquer transformação.

A matriz de inércia para este elemento é dada por:

$$M = 2 \int_A \rho \tilde{N}_1^t \tilde{N}_1 |J|_{\zeta=0} d\xi d\eta + \frac{2}{3} \int_A \rho \tilde{N}_2^t \tilde{N}_2 |J|_{\zeta=0} d\xi d\eta \quad (58)$$

onde ρ é a densidade do material. \tilde{N}_1 e \tilde{N}_2 são dadas pelas matrizes (D.3) e (D.4), e $|J|_{\zeta=0}$ é o determinante da matriz jacobiana J calculada em $\zeta = 0$.

Detalhes do desenvolvimento da matriz de inércia consistente estão descritos no apêndice D.

2.2.8 - Integração numérica.

O processo de integração numérica utilizado para o cálculo das equações (56) e (58) foi o da quadratura de Gauss. A integração na direção da espessura da casca foi feita analiticamente tanto na matriz de rigidez quanto na matriz de inércia.

Para o elemento 9-FULL foram utilizados 3 pontos de integração, tanto na direção de ξ como na direção de η , para todas as parcelas contribuintes da matriz de rigidez. Estas parcelas são dadas pelas equações (56). Na integração da matriz de inércia consistente também foram adotados 3 pontos em cada direção de ξ e η .

Os pontos e pesos de integração utilizados por este procedimento podem ser vistos no apêndice E.

2.3 - FORMULAÇÃO DO ELEMENTO 9-URI.

2.3.1 - Introdução.

O elemento 9-URI utiliza basicamente a mesma formulação utilizada pelo elemento 9-FULL. É um elemento lagrangeano de nove nós com cinco graus de liberdade por nó, tendo assim um total de 45 graus de liberdade por elemento. Baseia-se nas mesmas premissas do item 2.1 deste capítulo.

É um elemento que fornece bons resultados, apesar da sua simplicidade.

2.3.2 - Elemento 9-URI.

A formulação básica deste elemento é a mesma utilizada pelo elemento 9-FULL, de forma que apenas a diferença fundamental é realçada.

A diferença entre os elementos 9-FULL e 9-URI está no número de pontos utilizados na integração das parcelas de rigidez de membrana e cisalhamento. Enquanto que no elemento 9-FULL utilizou-se três pontos de integração nas direções ζ e η , o elemento 9-URI utilizou apenas dois pontos em cada direção ζ e η . Estes pontos e pesos podem ser vistos no apêndice E.

As implicações da utilização de integração reduzida no cálculo destas matrizes serão vistas nos capítulos quatro e cinco.

CAPÍTULO 3

DESENVOLVIMENTO DO ELEMENTO SHELM-9

3.1 - INTRODUÇÃO.

Formulado por CHANG e outros [10], este elemento misto é baseado na utilização de um princípio de Hellinger-Reissner modificado. É um elemento lagrangeano de nove nós que considera tanto um campo de deslocamentos u quanto um campo de deformações $\bar{\epsilon}^n$.

É um elemento degenerado seguindo as mesmas linhas mestras já delineadas no segundo capítulo. Segundo Chang, o elemento não apresenta nem travamento de membrana nem travamento de cisalhamento, podendo ser usado para modelar cascas finas ou moderadamente espessas. Além disso, não apresenta modos falsos de energia e é pouco sensível à distorção de malha.

No desenvolver do capítulo serão apresentados comentários a respeito da seleção do campo de deformações, já que este item é de primordial importância para o sucesso deste elemento.

A base deste elemento é a mesma utilizada pelo elemento 9-FULL e 9-URI, portanto não serão repetidas algumas deduções mais triviais. As premissas enumeradas no item 2.1 deste trabalho também são válidas neste elemento. Como estas premissas são importantes, elas são reescritas novamente:

- a) As deflexões são pequenas;
- b) a hipótese de Kirchhoff é relaxada, ou seja, a normal à superfície indeformada não permanece normal à superfície deformada, permanecendo no entanto reta e inextensível;
- c) Tensões normais à superfície de referência da casca são desprezáveis.

3.2 - FORMULAÇÃO DO ELEMENTO SHELM-9.

3.2.1 - Sistemas de coordenadas.

Neste elemento são utilizados os mesmos sistemas de coordenadas usadas no elemento 9-FULL e 9-URI, ou seja, sistemas global, local, nodal e natural de coordenadas. Não será repetido aqui o desenvolvimento de tais sistemas, visto que eles podem ser encontrados através das equações (7) a (17), no segundo capítulo.

3.2.2 - Geometria do elemento.

A geometria deste elemento, à semelhança do elemento 9-FULL, é definida em termos das coordenadas naturais do elemento (ξ, η, ζ) , através da equação:

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = N_i \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{\zeta=0} + \zeta \frac{1}{2} N_i h_i \begin{Bmatrix} e_{3x}^{fi} \\ e_{3y}^{fi} \\ e_{3z}^{fi} \end{Bmatrix} \quad (59)$$

onde $\mathbf{x} = (x, y, z)$ são as coordenadas cartesianas de um ponto genérico da casca referente ao sistema global de coordenadas; N_i é a função de interpolação lagrangeana no nó genérico "i" correspondente a uma superfície com ζ constante; h_i é a espessura da casca no nó "i"; ξ, η, ζ são as coordenadas naturais do ponto em consideração; e_3^f é o vetor nodal dado pela equação (14). As funções N_i e suas derivadas parciais em relação às coordenadas naturais ξ, η podem ser vistas na tabela A.1.

3.2.3 - Representação dos deslocamentos.

Cinco graus de liberdade são considerados em cada nó do elemento: três translações (u, v, w) ao longo dos eixos globais (x, y, z) e duas rotações (θ_1, θ_2) sobre os eixos mutuamente perpendiculares e_1^f, e_2^f , normais a e_3^f , como pode ser visto na figura 2.

Considerando-se as premissas citadas no início deste capítulo, o vetor de deslocamentos $\mathbf{u} (u, v, w)$ em um ponto genérico da casca é dado por:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = N_i \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix}_{\zeta=0} + \zeta \frac{1}{2} N_i h_i \begin{Bmatrix} -\theta_1^i e_{12x}^{fi} + \theta_2^i e_{21x}^{fi} \\ -\theta_1^i e_{12y}^{fi} + \theta_2^i e_{21y}^{fi} \\ -\theta_1^i e_{12z}^{fi} + \theta_2^i e_{21z}^{fi} \end{Bmatrix} \quad (60)$$

ou, se reescrito em uma forma simbólica:

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{N}} \mathbf{q} \quad (61)$$

sendo que $\tilde{\mathbf{N}}$ representa a matriz das funções de interpolação modificadas, combinando os termos da equação (60), e \mathbf{q} é o vetor de variáveis nodais do elemento, definido por:

$$\mathbf{q} = \left\{ u_1, v_1, w_1, \theta_1^{(1)}, \theta_2^{(2)}, \dots, u_9, v_9, w_9, \theta_1^{(9)}, \theta_2^{(9)} \right\}^t \quad (62)$$

3.2.4 - Funcional utilizado.

Para este elemento, onde se consideram campos de deslocamentos e deformações independentes, utiliza-se o princípio de Hellinger-Reissner dado por:

$$\Pi_r(\mathbf{u}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^1) = \int_V \left[-\frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{1t} \mathbf{D} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^1 + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{1t} \mathbf{D} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^1 \right] dV - W_0 \quad (63)$$

onde

$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^1 \rightarrow$ vetor de deformações provenientes de um campo de parâmetros de deformação referenciados ao sistema local;

$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^1 \rightarrow$ vetor de deformações provenientes dos deslocamentos interpolados \mathbf{u} , também referente ao sistema local;

$\mathbf{u} = (u, v, w) \rightarrow$ é o vetor com as componentes dos deslocamentos em relação ao sistema global;

$\mathbf{D} \rightarrow$ matriz de relações constitutivas tensões-deformações;

$W_0 \rightarrow$ energia potencial devido à aplicação das cargas externas;

$dV \rightarrow$ elemento diferencial de volume.

No sistema local de coordenadas, o vetor de deformação $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^1$ proveniente do campo de deslocamentos, pode ser separado em três parcelas. São as parcelas de membrana $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_m^1$, de flexão $\zeta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_b^1$ e a parcela de cisalhamento $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_s^1$. Estas deformações podem ser escritas na forma já deduzida no segundo capítulo por:

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_m^1 = \mathbf{B}_m^1 \mathbf{q} \quad (64.a)$$

$$\zeta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_b^1 = \zeta \mathbf{B}_b^1 \mathbf{q} \quad (64.b)$$

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}}_s^1 = \mathbf{B}_s^1 \mathbf{q} \quad (64.c)$$

onde \mathbf{q} é o vetor de variáveis nodais dado pela equação (62) e \mathbf{B}_m^1 , \mathbf{B}_b^1 e \mathbf{B}_s^1 , as matri-

zes que relacionam deformações-deslocamentos de membrana, flexão e cisalhamento, respectivamente, calculadas de acordo com as equações (37), (38) e (39).

As deformações dadas pelas equações (64) podem ainda ser expressas na forma:

$$\hat{\varepsilon}^l = \begin{Bmatrix} \hat{\varepsilon}_l \\ \hat{\varepsilon}_p \\ \hat{\gamma}_s \end{Bmatrix} + \zeta \begin{Bmatrix} \hat{\varepsilon}_b \\ \cdot \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (65)$$

3.2.5 - Campo de deformações.

A obtenção das deformações em função de um conjunto de parâmetros de deformações não é tão direta como o é a obtenção das deformações provenientes dos deslocamentos.

Segundo Saleeb [34], uma escolha apropriada das deformações é fundamental para o êxito das formulações mistas. Saleeb escreve que escolhendo-se um campo de deformações simplificado, ou seja, com poucos parâmetros de deformação, pode-se induzir a ocorrência de modos falsos de energia, visto que a condição necessária para que a matriz de rigidez tenha o posto correto é que o número de parâmetros de deformação seja maior ou igual a $(n-r)$, onde n é o número total de graus de liberdade de deslocamentos do elemento e r é o número de movimentos de corpo rígido [10]. Por outro lado, se for tomado um número muito grande de parâmetros de deformação o fenômeno do travamento de cisalhamento pode acontecer, devido ao fato que, neste caso, as formulações mistas poderão dar resultados idênticos aos resultados obtidos pelos modelos baseados no método dos deslocamentos.

Além disso, segundo Saleeb, para se ter um comportamento estável e consistente para os elementos mistos, certas condições de compatibilidade devem ser satisfeitas para os campos de deformação-deslocamento. Estas são as condições de Babuska-Brezzi. Se estas condições forem satisfeitas, a estabilidade numérica é garantida e a solução convergirá.

Não existe um critério fechado para a escolha do campo de deformações, mas para este elemento foram fixados três critérios básicos para a escolha deste:

- a) supressão dos modos falsos de energia;
- b) ter um índice de restrição favorável;
- c) assegurar invariância do elemento;

Baseando-se nestes critérios e na condição necessária para que a matriz de rigidez tenha o posto correto, foi adotado o número de 39 parâmetros de de-

formação.

Para lidar com o fenômeno de travamento, usa-se o conceito do índice de restrição [42], [34], [32] e [20], ou "constraint index" (C.I.). Basicamente o (C.I.) é uma medida da habilidade do elemento de acomodar a restrição de cisalhamento nulo que é gerada no caso de placas/cascas finas [20]. O índice de restrição é definido por $CI = NK - NC$, onde NK é o número de graus de liberdade trazidos por um elemento, quando adicionado a uma malha já existente e NC é o número de condições de restrições independentes do elemento que devem ser impostas quando usado no caso limite de placa fina ou aqui, em cascas finas. Um valor favorável para o índice de restrição é $CI > 0$, sugerindo que o elemento é livre do travamento de cisalhamento.

A determinação do índice de restrição é dependente da malha utilizada, e para este elemento um mínimo de nove variáveis de deformação foram asseguradas para as deformações cisalhantes transversais provenientes dos parâmetros de deformações.

Até agora, sabe-se que o número mínimo de parâmetros de deformações é 39 e que 9 deles serão usados para as deformações cisalhantes. Resta definir os parâmetros para as partes de membrana e flexão. Para isto, CHANG e outros [10] sugerem que, do ponto de vista de modelagem por elementos finitos, um elemento de casca deve ter a mesma habilidade de representar tanto as contribuições de energia das partes de membrana como as contribuições de energia da parte de flexão. Portanto, os parâmetros de deformação utilizados para representar qualquer destas partes não devem ser tendenciosos.

Baseado nos argumentos dos parágrafos anteriores, e levando-se em consideração que o elemento deve ser invariante, são consideradas as seguintes deformações para este elemento:

$$\bar{\epsilon}^n = \begin{bmatrix} P_m^n & 0 & P_b^n \\ 0 & P_s^n & 0 \end{bmatrix} \beta \quad (66)$$

onde

$$P_m^n = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \zeta\eta & \eta^2 & \xi\eta^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi^2 & 0 & 1 & \xi & \eta & \xi\eta & \xi^2\eta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \eta & \xi\eta \end{bmatrix}_{(3 \times 15)} \quad (67)$$

$$P_b^n = \zeta P_m^n \quad (68)$$

$$P_s^n = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi\eta & \xi^2\eta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi\eta^2 & 1 & \xi & \eta & \xi\eta \end{bmatrix}_{(2 \times 9)} \quad (69)$$

onde o índice "n" refere-se às coordenadas naturais e a barra refere-se às deformações consideradas. A equação (66) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\bar{\epsilon}^n = \begin{Bmatrix} \bar{\epsilon}_m^n \\ \bar{\gamma}_s^n \end{Bmatrix} + \zeta \begin{Bmatrix} \bar{\epsilon}_b^n \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (70)$$

onde

$$\bar{\epsilon}_m^n = P_m^n \beta_m \quad (71.a)$$

$$\zeta \bar{\epsilon}_b^n = \zeta P_b^n \beta_b \quad (71.b)$$

$$\bar{\gamma}_s^n = P_s^n \beta_s \quad (71.c)$$

onde $\bar{\epsilon}_m^n$, $\zeta \bar{\epsilon}_b^n$, $\bar{\gamma}_s^n$ são os vetores de deformações de membrana, flexão e cisalhamento, respectivamente, enquanto que β_m , β_b , β_s são os vetores dos parâmetros de deformação de membrana, flexão e cisalhamento, nesta ordem, e P_m^n , P_b^n e P_s^n são as matrizes relacionando as deformações e seus parâmetros.

No entanto, estas deformações consideradas estão expressas no sistema natural do elemento (ξ, η, ζ) , sendo necessária uma transformação deste sistema para o sistema local de integração. Utiliza-se uma transformação na forma:

$$\bar{E}^l = \Phi^t \bar{E}^n \Phi \quad (72)$$

onde \bar{E}^l é o tensor deformação expresso em relação ao sistema local, \bar{E}^n é o tensor deformação expresso em relação ao sistema natural e Φ é a matriz de deformação jacobiana entre os sistemas local e natural do elemento. As matrizes \bar{E}^l e \bar{E}^n são dadas pelas equações (G.2) e (G.3), respectivamente, e a matriz Φ é obtida da equação (G.8). Não obstante, esta transformação é realizada somente no plano ξ, η . A razão da realização desta transformação é fazer com que o elemento, passando no "patch test", assegure a convergência para a resposta correta do problema, à medida que a malha vai sendo refinada. Além disso, esta transformação mostrou-se bastante útil no que se refere à sensibilidade do elemento quanto à distorção de malha. Mais tar-

de, no quarto capítulo, esta afirmação poderá ser constatada.

Como visto no apêndice G, a equação (72) pode ser rearranjada de tal forma que as deformações de membrana, flexão e cisalhamento, já relacionadas ao sistema local, possam ser reescritas na forma:

$$\bar{\varepsilon}^{-1} = \begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_m^{-1} \\ \bar{\gamma}_s^{-1} \end{Bmatrix} + \zeta \begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_b^{-1} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (73)$$

$$\bar{\varepsilon}_m^{-1} = \mathbf{P}_m \beta_m \quad (74.a)$$

$$\zeta \bar{\varepsilon}_b^{-1} = \zeta \mathbf{P}_m \beta_b \quad (74.b)$$

$$\bar{\gamma}_s^{-1} = \mathbf{P}_s \beta_s \quad (74.c)$$

tal que:

$$\mathbf{P}_m = \mathbf{T}_m \mathbf{P}_m^n \quad (75)$$

$$\mathbf{P}_s = \mathbf{T}_s \mathbf{P}_s^n \quad (76)$$

de forma que as matrizes \mathbf{P}_m^n , \mathbf{P}_s^n são dadas pelas equações (67) e (69), respectivamente, com as matrizes \mathbf{T}_m e \mathbf{T}_s sendo dadas pelas equações (G.15) e (G.16).

3.2.6 - Determinação da matriz de rigidez.

Particionando-se a matriz \mathbf{D} de relações constitutivas em duas partes \mathbf{D}_1 e \mathbf{D}_2 , dadas pelas equações (47) e (48), e substituindo-se as equações (36) e (70) no funcional dado pela equação (63), pode-se chegar a:

$$\begin{aligned} \Pi_r = \int_V \left\{ -\frac{1}{2} \left(\bar{\varepsilon}_m^{-1t} \mathbf{D}_1 \bar{\varepsilon}_m^{-1} + \zeta^2 \bar{\varepsilon}_b^{-1t} \mathbf{D}_1 \bar{\varepsilon}_b^{-1} + \bar{\gamma}_s^{-1t} \mathbf{D}_2 \bar{\gamma}_s^{-1} \right) + \right. \\ \left. + \left(\bar{\varepsilon}_m^{-1t} \mathbf{D}_1 \hat{\varepsilon}_m^{-1} + \zeta^2 \bar{\varepsilon}_b^{-1t} \mathbf{D}_1 \hat{\varepsilon}_b^{-1} + \bar{\gamma}_s^{-1t} \mathbf{D}_2 \hat{\gamma}_s^{-1} \right) \right\} |\mathbf{J}|_{\zeta=0} d\xi d\eta d\zeta \quad (77) \end{aligned}$$

Integrando-se na direção da espessura, aplicando-se a discretização via elementos finitos utilizando-se as equações (64) e (74), e fazendo-se a estacionariedade de Π_r em relação aos vetores de parâmetros de deformação β_m , β_b , β_s com posterior eliminação destes, o funcional dado pela equação (77) pode ser reescrito na forma:

$$\Pi_r = \frac{1}{2} \left[\mathbf{q}^t \left(\mathbf{G}_m^t \mathbf{H}_m^{-1} \mathbf{G}_m + \mathbf{G}_b^t \mathbf{H}_b^{-1} \mathbf{G}_b + \mathbf{G}_s^t \mathbf{H}_s^{-1} \mathbf{G}_s \right) \mathbf{q} \right] - \mathbf{q}^t \mathbf{f} \quad (78)$$

ou de um modo compacto:

$$\Pi_r = \frac{1}{2} \mathbf{q}^t \mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{q}^t \mathbf{f} \quad (79)$$

onde \mathbf{f} é o carregamento externo aplicado, \mathbf{q} é o vetor de variáveis nodais dado pela equação (62) e \mathbf{K} é a matriz de rigidez do elemento, dada por:

$$\mathbf{K} = \mathbf{G}_m^t \mathbf{H}_m^{-1} \mathbf{G}_m + \mathbf{G}_b^t \mathbf{H}_b^{-1} \mathbf{G}_b + \mathbf{G}_s^t \mathbf{H}_s^{-1} \mathbf{G}_s \quad (80)$$

com as matrizes anteriores sendo:

$$\mathbf{G}_m = \int_A \mathbf{P}_m^t \mathbf{D}_m \mathbf{B}_m |J|_{\zeta=0} d\xi d\eta \quad (81.a)$$

$$\mathbf{G}_b = \int_A \mathbf{P}_m^t \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b |J|_{\zeta=0} d\xi d\eta \quad (81.b)$$

$$\mathbf{G}_s = \int_A \mathbf{P}_s^t \mathbf{D}_s \mathbf{B}_s |J|_{\zeta=0} d\xi d\eta \quad (81.c)$$

$$\mathbf{H}_m = \int_A \mathbf{P}_m^t \mathbf{D}_m \mathbf{P}_m |J|_{\zeta=0} d\xi d\eta \quad (82.a)$$

$$\mathbf{H}_b = \int_A \mathbf{P}_m^t \mathbf{D}_b \mathbf{P}_m |J|_{\zeta=0} d\xi d\eta \quad (82.b)$$

$$\mathbf{H}_s = \int_A \mathbf{P}_s^t \mathbf{D}_s \mathbf{P}_s |J|_{\zeta=0} d\xi d\eta \quad (82.c)$$

e ainda \mathbf{P}_m , \mathbf{P}_s sendo dadas pelas equações (75) e (76), respectivamente, \mathbf{B}_m , \mathbf{B}_b , \mathbf{B}_s dadas pelas equações (37), (38) e (39), nesta ordem, com \mathbf{D}_m , \mathbf{D}_b e \mathbf{D}_s dadas pelas equações (57).

O determinante da matriz jacobiana $|J|$ é calculado em $\zeta=0$, já que assume-se que ele varia muito pouco na direção da espessura da casca.

Fazendo-se a estacionariedade de Π_r em relação a \mathbf{q} obtém-se as equações resultantes para este elemento na forma:

$$\mathbf{K}_{ij} \mathbf{q}_j = \mathbf{f}_i \quad (83)$$

onde K é a matriz de rigidez do elemento dada por (80), q é o vetor de variáveis nodais do elemento e f é o vetor de cargas externas aplicadas.

Detalhes do desenvolvimento da matriz de rigidez podem ser vistos no apêndice F.

3.2.7 - Determinação da matriz de inércia.

Neste elemento, optou-se também pela utilização da matriz de inércia consistente. Esta opção é devida tanto à facilidade de sua obtenção, quanto aos resultados obtidos por ela. Esta afirmação poderá ser comprovada no quinto capítulo.

A matriz de inércia consistente para este elemento é a mesma utilizada nos elementos 9-FULL e 9-URI, sendo escrito na forma:

$$M = 2 \int_A \rho \tilde{N}_1^t \tilde{N}_1 |J|_{\zeta=0} d\xi d\eta + \frac{2}{3} \int_A \rho \tilde{N}_2^t \tilde{N}_2 |J|_{\zeta=0} d\xi d\eta \quad (84)$$

onde ρ é a densidade do material. \tilde{N}_1 e \tilde{N}_2 são dadas pelas matrizes (D.3) e (D.4) do apêndice D e $|J|_{\zeta=0}$ é o determinante da matriz jacobiana J dado pela equação (25), calculada em $\zeta=0$. Detalhes da obtenção da matriz de inércia consistente podem ser vistos no apêndice D.

3.2.8 - Integração numérica.

O processo de integração numérica utilizado neste elemento, para a determinação de equações envolvendo integrais, foi o da quadratura de Gauss. A integração destas equações na direção da espessura da casca foi feita explicitamente.

Neste elemento SHELM-9 foram utilizados três pontos de integração, tanto na direção de ξ como na direção de η , em todas as equações envolvendo integrais, inclusive na integração da matriz de inércia consistente. Os pontos e pesos de integração utilizados podem ser vistos no apêndice E.

CAPÍTULO 4

ANÁLISE ESTÁTICA

4.1 - INTRODUÇÃO.

Este capítulo é dedicado aos resultados obtidos pelos três elementos implementados, quando aplicados a problemas estáticos.

A fim de que se possa tirar alguma conclusão dos resultados obtidos, é necessário que os casos escolhidos tenham uma solução conhecida (analítica ou numérica), que deverá servir de base comparativa dos resultados. Além deste fato, alguns dos problemas selecionados para testes devem ser modificados, de forma a adequá-los aos problemas específicos dos elementos finitos de casca, dentre os quais pode-se citar os travamentos de cisalhamento e de membrana, modos falsos de energia, requisitos de convergência e sensibilidade à distorção de malha.

Infelizmente não existe um conjunto padronizado de testes para elementos finitos de casca, do qual se possa extrair um "conceito" de um elemento. MACNEAL e HARDER [25] propuseram alguns problemas como padrões para análise de elementos finitos em geral. Apesar do trabalho de MACNEAL e HARDER não ser exclusivo para elementos finitos de casca, alguns dos testes propostos por eles serão aplicados como padrão nesta fase do trabalho.

Este capítulo foi organizado da forma descrita a seguir: em cada caso analisado faz-se uma breve introdução do problema; segue-se uma descrição do problema a ser analisado, incluindo os dados utilizados, geometrias, condições de contorno, malhas utilizadas e as variações propostas; após a descrição é mostrado um resultado, ou resultados, que serve de base de comparação dos resultados obtidos; e finalmente é feita uma análise dos resultados, seguidos das tabelas e figuras obtidos dos casos correspondentes. O quadro 1 mostra a simbologia utilizada nos gráficos comparativos, bem como os tipos de malha utilizada e o número de graus de liberdade correspondentes. Ainda neste quadro, as linhas cheias representam malhas regulares, enquanto que as linhas tracejadas representam malhas distorcidas.

Quadro 1 - Simbologia, malhas e número de graus de liberdade utilizados.

ELEMENTOS	SÍMBOLOS	MALHAS	GRAUS DE LIBERDADE (G.D.L.)
9-FULL	—□—	1 x 1	45
	---□---	2 x 2	125
9-URI	—○—	4 x 4	405
	---○---	6 x 6	845
SHELM-9	—△—	8 x 8	1445
	---△---	16 x 16	5445

4.2 - "PATCH-TEST".

4.2.1 - Introdução.

Como já explicado no primeiro capítulo, o "patch test" é um teste idealizado para verificar se um determinado elemento convergirá para a resposta correta do problema à medida que ocorrer um refino de malha.

O teste é realizado montando-se alguns elementos de tal maneira que pelo menos um nó é completamente rodeado por outros elementos. Aplica-se um carregamento com deslocamentos ou forças consistentes, de forma que correspondam a um estado de deformação constante. Se, após computadas as deformações (ou tensões) em qualquer parte do elemento, elas coincidirem com a resposta exata até o limite de precisão do computador, é dito que o elemento passou no "patch-test" [12].

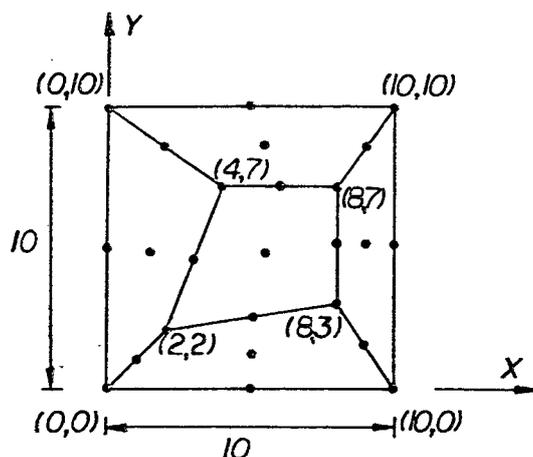


Figura 3 - Malha utilizada no "patch-test".

4.2.2 - Descrição do problema.

Existem várias malhas propostas para a realização do "patch-test" [39], [41]. A escolhida neste trabalho, e utilizada também por outros autores [4], [15], [18], [19], é mostrada na figura 3.

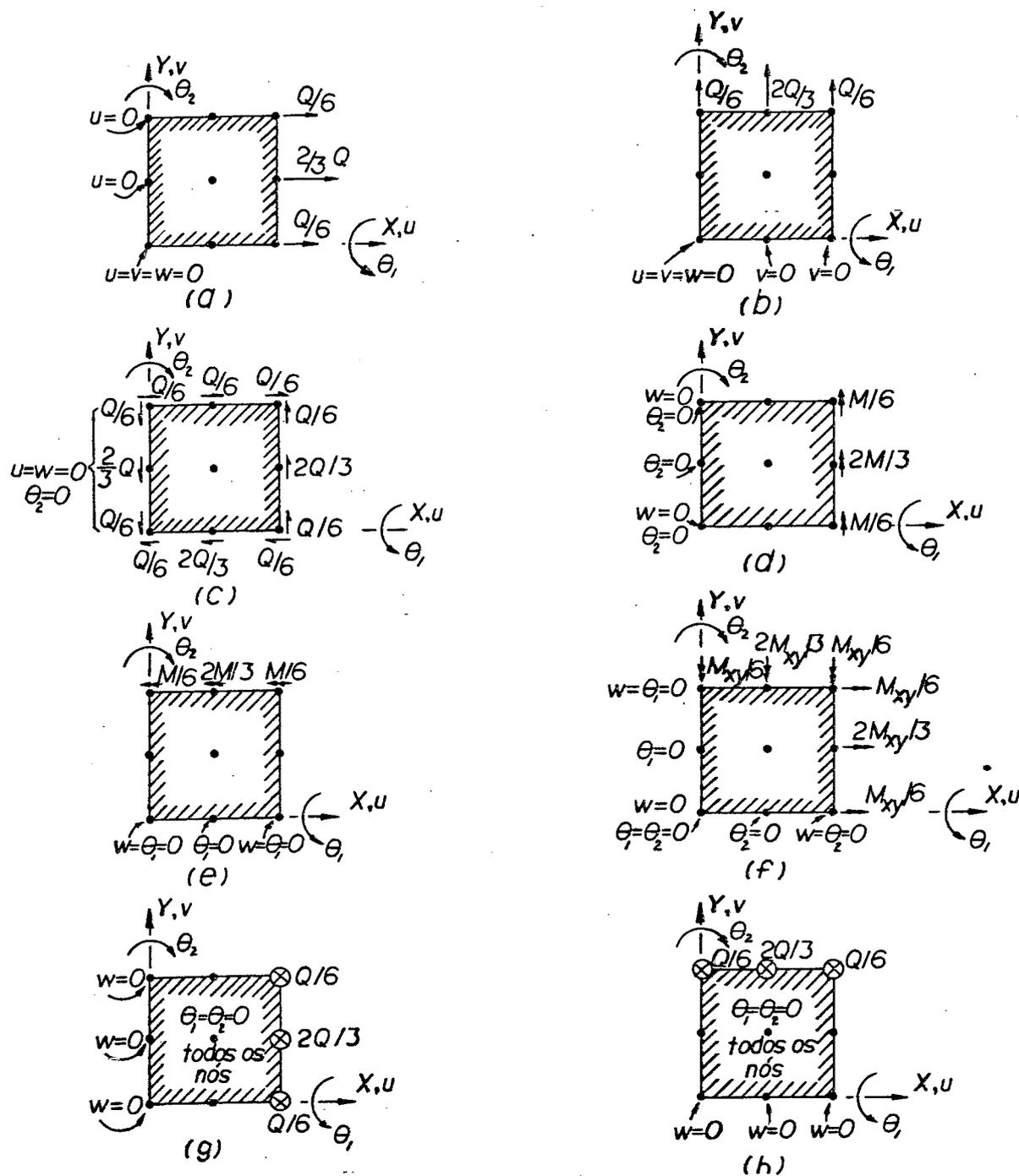


Figura 4 - "Patch-test". Cargas e condições de contorno.

- (a) Membrana σ_{xx} .
- (b) Membrana σ_{yy} .
- (c) Cisalhamento γ_{xy} .
- (d) Momento M_{xx} .
- (e) Momento M_{yy} .
- (f) Torção M_{xy} .
- (g) Cisalhamento τ_{xz} .
- (h) Cisalhamento τ_{yz} .

Para a malha mostrada na figura 3 foram impostas as condições de contorno e forças consistentes de acordo com a figura 4.

4.2.3 - Base comparativa.

Utilizando-se uma força por unidade de comprimento de 0,6 [N/mm] e espessura de 0,1 [mm], como mostra a figura 3, as tensões por unidade de comprimento que devem ser encontradas nos casos (a), (b), (c), (g) e (h) são:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = \frac{F}{A} = 0,6 \text{ [N/mm}^2\text{/mm]} \quad (85)$$

Para os casos de momentos (d), (e) e (f), conforme a figura 4, utilizando-se um momento por unidade de comprimento $M_f = 0,6$ [N.mm/mm], as tensões por unidade de comprimento nas partes superior e inferior da placa são dadas por:

$$\sigma = \frac{M_f h}{I} = 36,0 \text{ [N/mm}^2\text{/mm]} \quad (86)$$

onde M_f é o momento aplicado, h é a espessura da placa e I é o momento de inércia da placa, dado por:

$$I = \frac{h^3}{12} \quad (87)$$

4.2.4 - Análise dos resultados.

Para todos os casos mostrados na figura 4, foi feita uma variação na espessura da placa entre 1 e 0,001, de forma que a relação (h/L) , onde L é o comprimento do lado e h é a espessura, variou de 1/10 a 1/10000.

Calculadas as tensões para cada caso mostrado na figura 4, com as variações de espessuras indicadas, observou-se que:

- a) para os casos (a), (b), (c), (g) e (h) os três elementos concordaram com os resultados analíticos até a última casa de precisão da palavra do computador (16 dígitos decimais).
- b) Nos três elementos testados para os casos de momentos, (d), (e) e (f), houve concordância com os resultados analíticos até a sétima casa de precisão da palavra do computador (16 dígitos decimais).

Apesar da não convergência completa para a resposta exata do problema nos casos (d), (e) e (f), como exige o "patch-test", pode-se dizer que o comportamento dos elementos foi muito bom. Não são esperados, assim, resultados estranhos à medida que o refino de malha for acontecendo.

4.3 - PLACA QUADRADA COM MALHA REGULAR.

4.3.1 - Introdução.

Este problema é introduzido principalmente para testar a ocorrência do fenômeno de travamento de cisalhamento. São propostos neste caso quatro situações envolvendo diferentes condições de contorno e carregamento.

Para cada caso proposto a espessura é diminuída, de forma que a relação espessura/comprimento do lado varia de 1:10 a 1:10.000.000. Testes semelhantes foram realizados por outros autores [17] e [19]. O quadro 2 mostra os casos estudados, e em cada um deles são feitas malhas com 1 e 2 elementos por lado.

4.3.2 - Descrição do problema.

A figura 5 mostra as condições de contorno, bem como os carregamentos utilizados nos quatro casos estudados. Devido à simetria dos problemas, apenas 1/4 é discretizado. A figura 6 mostra as condições de contorno da parte modelada, bem como as geometrias dos problemas, enquanto que a tabela 1 mostra os parâmetros geométricos utilizados neste problema.

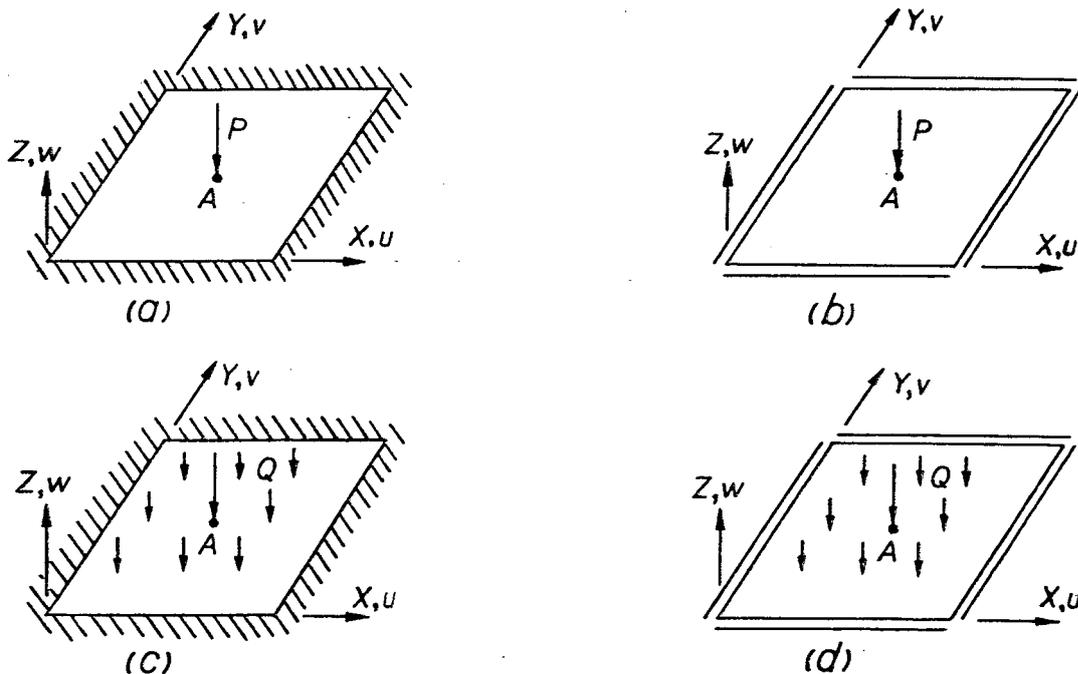


Figura 5 - Condições de contorno e carregamento utilizados.

- (a) engastado com carregamento concentrado.
- (b) apoiado com carregamento concentrado.
- (c) engastado com carregamento distribuído.
- (d) apoiado com carregamento distribuído.

Tabela 1 - Parâmetros geométricos e cargas adotadas.

VARIACÃO		VALOR	ADOTADO
Comprimento	L	0,3	[m]
Espessura	h	variável ($3,0 \times 10^{-2}$ a $3,0 \times 10^{-8}$) [m]	
Mód. de elasticidade	E	$2,1 \times 10^5$	[MPa]
Coef. de Poisson	ν	0,3	
Carga concentrada	P	100,0	[N]
Carga distribuída	Q	$1,0 \times 10^{-3}$	[MPa]

A região da parte modelada foi dividida em uma malha com 1 e 2 elementos em cada direção x e y.

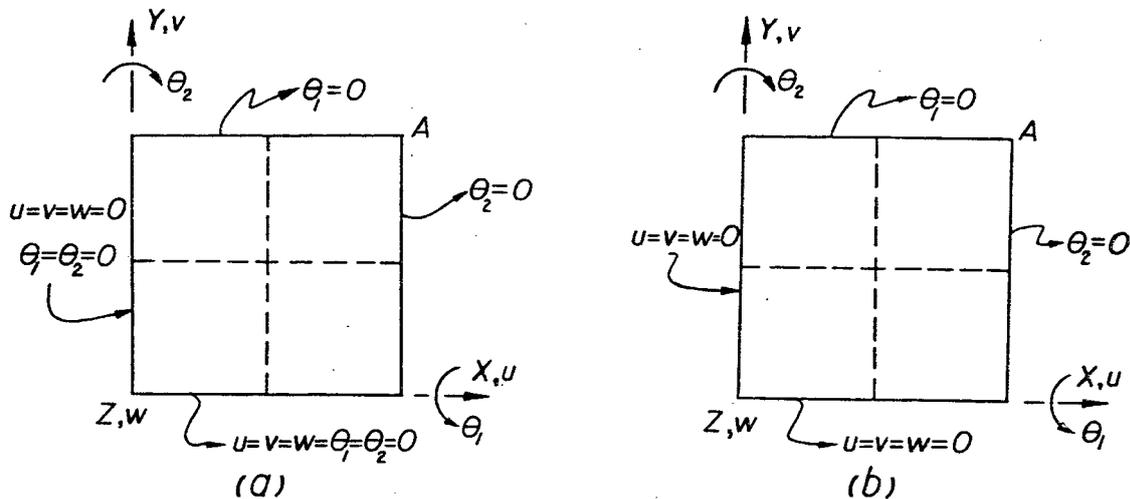


Figura 6 - Condições de contorno utilizadas na parte modelada.

(a) engastado. (b) simplesmente apoiado.

4.3.3 - Base comparativa.

Em cada caso estudado são obtidas as deflexões verticais que ocorrem no meio da placa, ou no ponto "A", conforme a figura 5. Para efeitos de comparação, este deslocamento é comparado com as soluções analíticas obtidas por TIMOSHENKO [40], as quais são válidas para placas finas. Para os casos onde o carregamento é concentrado, os deslocamentos transversais do ponto A são dados pela expressão:

$$w_A = \mu \frac{P L^2}{D} \quad (88)$$

onde μ é mostrado na tabela 2, sendo função das condições de contorno utilizadas, P é o carregamento concentrado imposto no ponto A, L é o comprimento do lado da placa e D é a rigidez de flexão de placas, dada por:

$$D = \frac{E h^3}{12 (1-\nu^2)} \quad (89)$$

sendo que E, ν e h são respectivamente o módulo de elasticidade longitudinal, coeficiente de Poisson e espessura da placa.

Para os casos com carregamento distribuído a deflexão w_A no meio da placa é dada por:

$$w_A = \mu \frac{Q L^4}{D} \quad (90)$$

onde μ é obtido da tabela 2 e Q é a carga distribuída aplicada na placa.

Tabela 2 - Valores de μ para diferentes condições de contorno e carregamento.

TIPO DE CARGA/ CONDIÇÕES DE CONTORNO	CONCENTRADA	DISTRIBUÍDA
Simplesmente Apoiada	0,0116	0,00406
Engastada	0,0056	0,00126

Quadro 2 - Casos testados.

CASO	CONDIÇÕES DE CONTORNO	CARREGAMENTO
Caso A	Simplesmente Apoiado - SA	Concentrado no Centro da Placa - CC
Caso B	Engastado - EN	Concentrado no Centro da Placa - CC
Caso C	Simplesmente Apoiado - SA	Distribuído - DD
Caso D	Engastado - EN	Distribuído - DD

4.3.4 - Análise dos resultados.

Os resultados obtidos neste problema são mostrados nos gráficos das

figuras 7 a 10. Observando-se os gráficos mostrados pode-se tirar algumas observações, como:

- a) Há um comportamento bastante similar dos elementos 9-URI e SHELM-9 em todos os casos estudados. Apenas quando foi usada a malha 1x1 para modelar a placa simplesmente apoiada com carga distribuída, figura 9.a, nota-se uma pequena diferença entre eles.
- b) O fenômeno do travamento no elemento 9-FULL está bem configurado quando se analisam as figuras 8.a e 10.b, que mostram os casos de placa engastada com carregamento concentrado e distribuído, respectivamente, usando malha 1x1. O elemento se comporta muito rigidamente à medida que a relação (h/L) diminui, fornecendo resultados completamente irreais. Quando neste mesmo caso a malha é refinada para 2x2, figuras 8.b e 10.b, o elemento torna-se menos rígido. No entanto, os resultados obtidos por este elemento ainda estão aquém dos resultados analíticos, evidenciando a ocorrência do locking de cisalhamento no elemento 9-FULL.
- c) Com relação ao elemento 9-FULL, pode-se dizer que o fenômeno do travamento se apresenta de uma maneira mais clara nos casos onde a placa estava engastada do que quando estava simplesmente apoiada. Isto pode ser concluído analisando os gráficos das figuras 7.a e 8.a, 9.a e 10.a, 7.b e 8.b e finalmente 9.b e 10.b.
- d) Apesar dos gráficos não mostrarem, foram testadas relações h/L (espessura/comprimento) menores que 1:10.000.000 ($\log(L/h) > 7$). No entanto, neste nível de relação começam a ocorrer problemas com a precisão da palavra do computador, fornecendo resultados sem nenhum significado físico.
- e) Em todos os casos analisados mostrados nos gráficos das figuras 7 a 10, os elementos 9-URI e SHELM-9 não apresentaram o fenômeno do travamento. Nestes dois elementos os resultados foram bem próximos das respostas analíticas correspondentes.

4.3.5 - Figuras.

As figuras 7, 8, 9 e 10 mostram os gráficos comparativos dos resultados obtidos para os casos A, B, C e D do quadro 2, usando malha 1x1 e 2x2. Nestes gráficos, os resultados obtidos foram todos normalizados usando os resultados analíticos dados pelas equações (88) e (90).

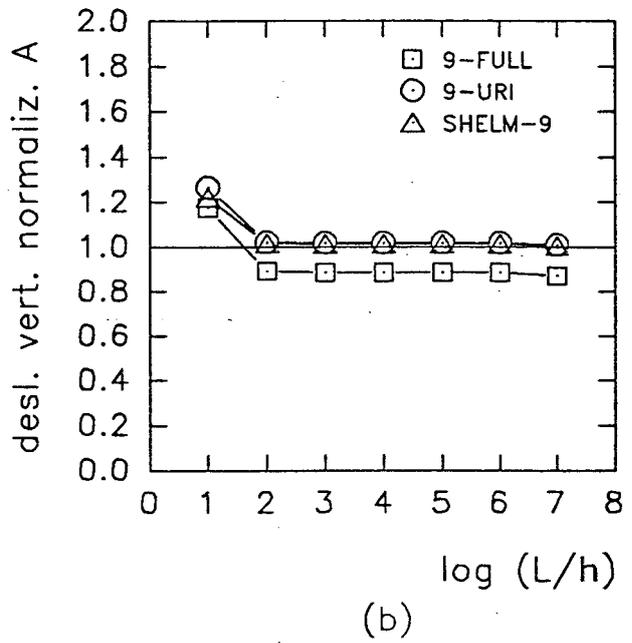
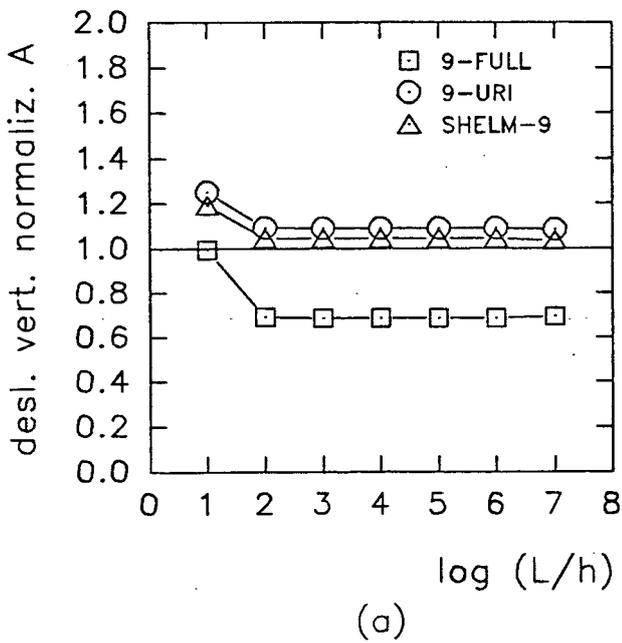


Figura 7 - Deslocamentos normalizados no centro da placa. Caso A.
Carga concentrada/apoiada. a) Malha 1x1. b) Malha 2x2.

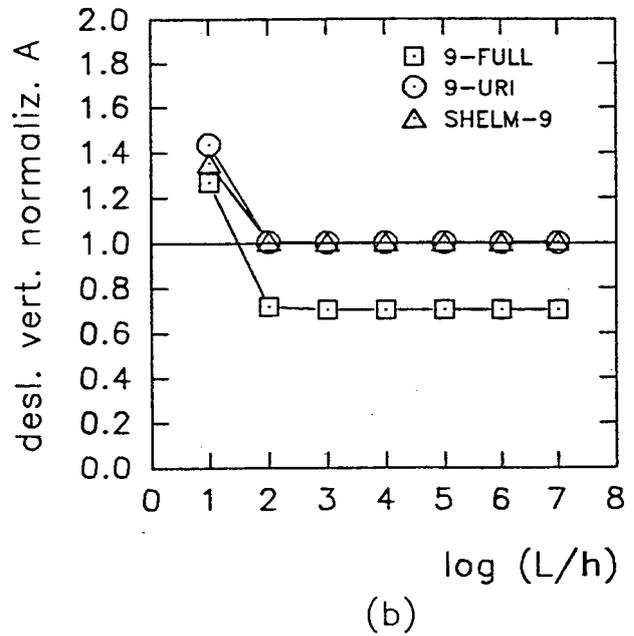
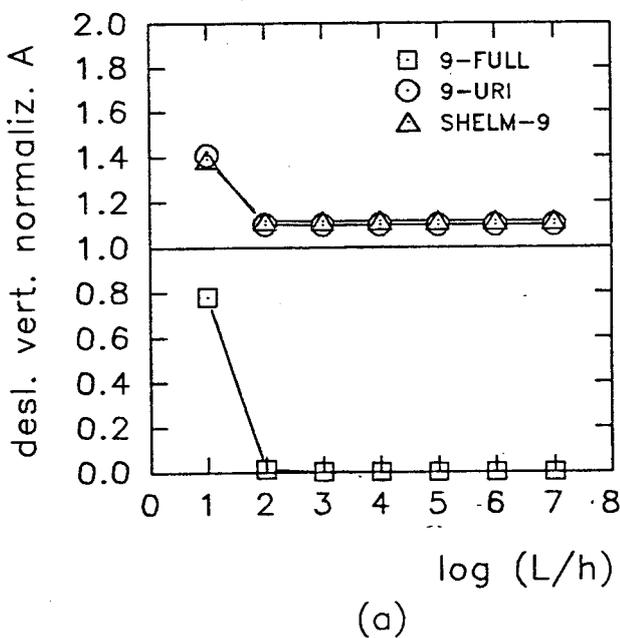
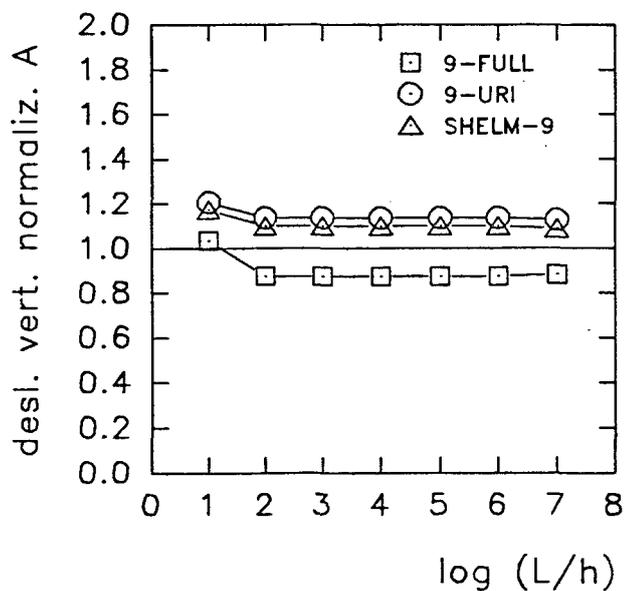
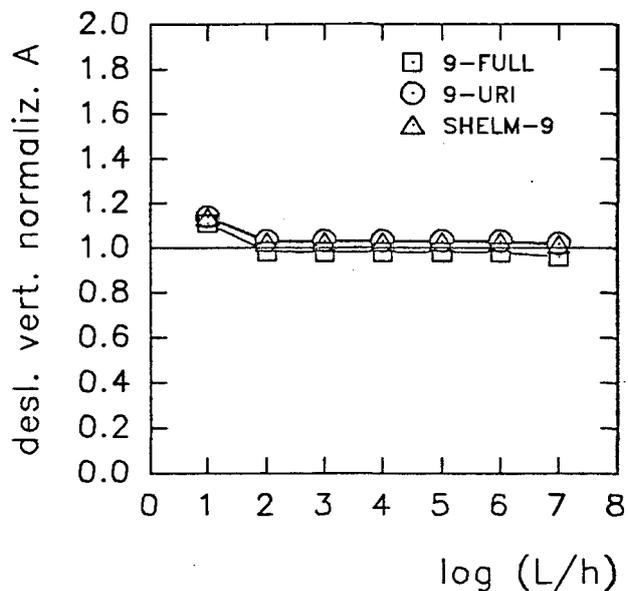


Figura 8 - Deslocamentos normalizados no centro da placa. Caso B.
Carga concentrada/Engastada. a) Malha 1x1. b) Malha 2x2.

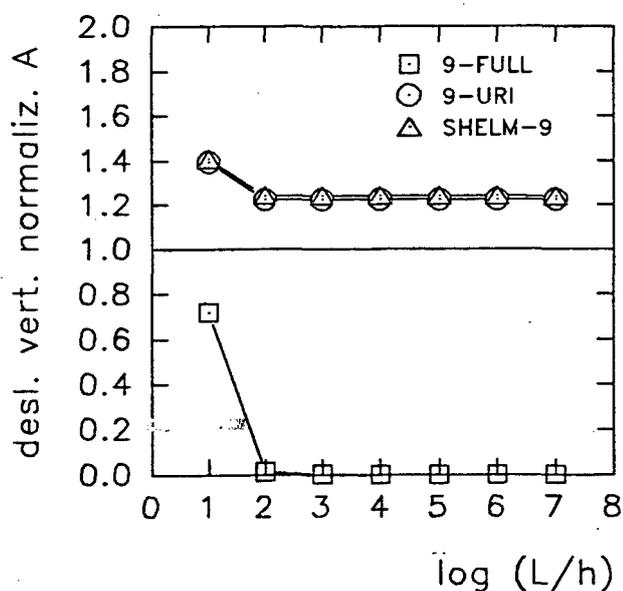


(a)

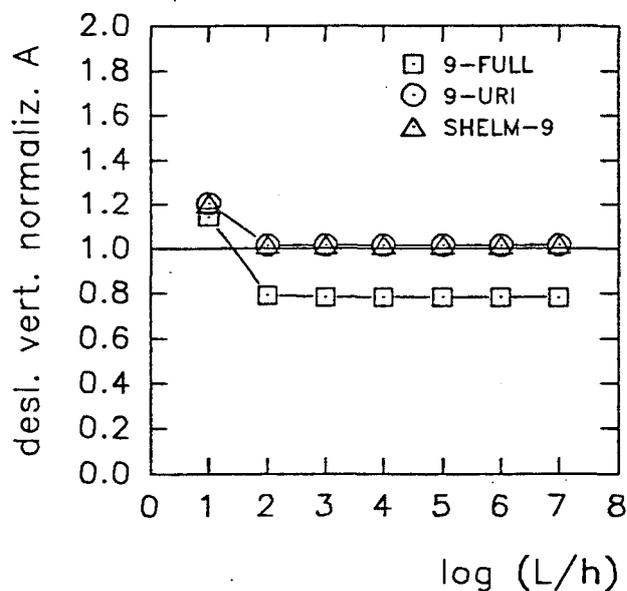


(b)

Figura 9 - Deslocamentos normalizados no centro da placa. Caso C.
Carga distribuída/apoiada. a) Malha 1x1. b) Malha 2x2.



(a)



(b)

Figura 10 - Deslocamentos normalizados no centro da placa. Caso D.
Carga distribuída/Engastada. a) Malha 1x1. b) Malha 2x2.

4.4 - PLACA QUADRADA COM MALHA REGULAR E DISTORCIDA.

4.4.1 - Introdução.

Este caso é introduzido para testar três características importantes na análise por elementos finitos, quais sejam: convergência com o refino de malha, sensibilidade à distorção de malha e taxa de convergência.

A princípio, um elemento ideal deve convergir para a resposta exata do problema à medida que o refino de malha for acontecendo. Isto reflete a capacidade do elemento de atingir um estado de deformação constante quando for utilizado um número bastante razoável de elementos para a modelagem da estrutura. Se um elemento não tem esta característica, este torna-se um elemento não confiável para casos práticos.

Paralelamente à convergência com o refino de malha, o elemento deve preferencialmente oferecer respostas satisfatórias a nível de engenharia o mais rápido possível, ou seja, com a utilização de um número mínimo necessário de elementos. De nada adianta um elemento ser confiável a nível de atingir a precisão desejada, se para isto for necessário a utilização de centenas ou milhares de elementos, inviabilizando a modelagem por restrições numéricas. É por esta capacidade de se alcançar resultados satisfatórios, com o uso de um número mínimo necessário de elementos, que a taxa de convergência é importante.

Um outro aspecto muito importante a ser encontrado nos elementos finitos é a capacidade do elemento de alcançar a precisão satisfatória utilizando malhas distorcidas. Na prática, dificilmente a estrutura a ser modelada tem contornos "bem comportados", de forma que uma malha regular possa ser utilizada. Na maioria dos casos deve-se recorrer a pré-processadores para a geração da malha utilizada na modelagem. Idealmente, os pré-processadores deveriam produzir malhas com um mínimo de distorção, mas na realidade isto não ocorre. O elemento, então, deve estar "preparado" para ser usado em modelagens de estruturas com uma certa distorção.

4.4.2 - Descrição do problema.

Este problema baseia-se na análise de uma placa quadrada usando duas malhas distintas: uma regular e outra distorcida. As malhas utilizadas, bem como suas características geométricas são mostradas nas figuras 11 e 12.

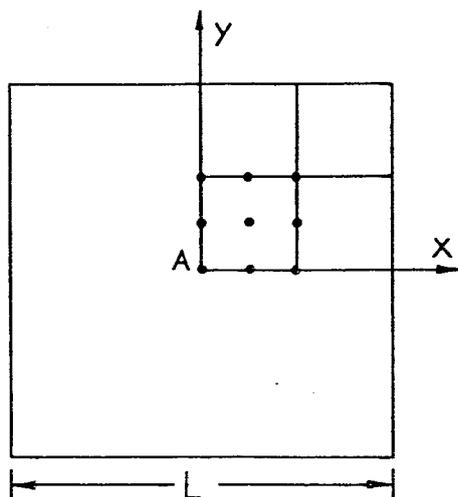


Figura 11 - Placa quadrada modelada com malha regular.

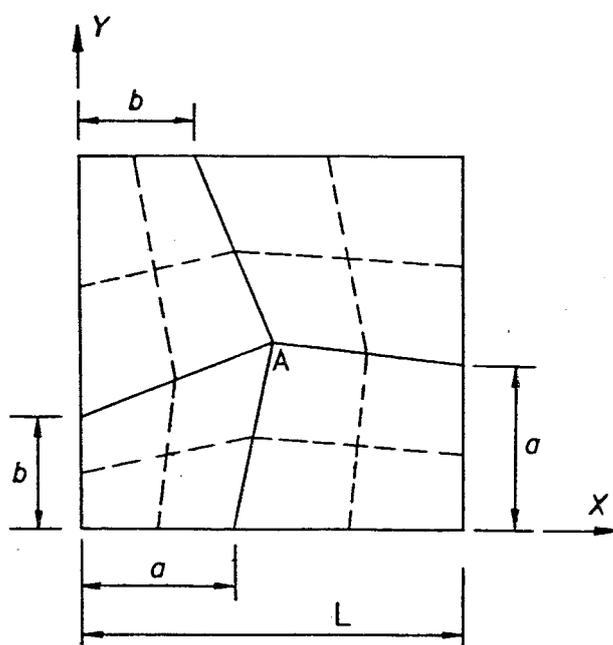


Figura 12 - Placa quadrada com malha distorcida.

A malha utilizada para modelar a placa, conforme a figura 12, é a mesma sugerida por RHIU [31]. Uma carga distribuída é aplicada, sendo que todas as laterais estão completamente engastadas.

A obtenção do refino é feita subdividindo-se cada elemento mostrado nas figuras 11 e 12 tomando-se o ponto médio como referência. A figura 13 mostra as condições de contorno utilizadas na modelagem, válidas para as duas malhas mostradas

pelas figuras 11 e 12. A tabela 3 mostra os parâmetros que foram utilizados nos dois casos testados, conforme as figuras 11 e 12, enquanto que a tabela 4 mostra as condições de contorno e carregamentos utilizados.

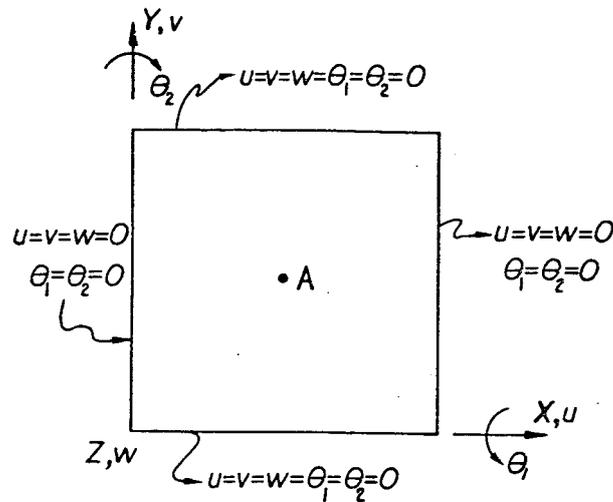


Figura 13 - Condições de contorno utilizadas na modelagem da placa com malha regular e distorcida.

Tabela 3 - Parâmetros utilizados na placa com malha regular e distorcida.
Dimensões em [mm]. Módulo de elasticidade em [MPa].

		MALHA REGULAR	MALHA DISTORCIDA
Comprimento	L	300,0	300,0
Espessura	h	3,0	3,0
Mód. de elasticidade E		$2,1 \times 10^5$	$2,1 \times 10^5$
Coef. de Poisson	ν	0,3	0,3
Comprimento	a	-	90,0
Comprimento	b	-	120,0

4.4.3 - Base comparativa.

Os resultados obtidos para este problema são comparados com os resultados analíticos dados por TIMOSHENKO [40]. São comparados os deslocamentos verticais (na direção do carregamento) obtidos no centro da placa. Para este tipo de problema com carga distribuída e condições de engaste nas suas laterais, TIMOSHENKO fornece a seguinte equação para o deslocamento:

$$w_A = 0,00126 \frac{Q L^4}{D} \quad (91)$$

Tabela 4 - Condições de contorno e carregamento utilizados na placa com malhas regular e distorcida.

	MALHA REGULAR	MALHA DISTORCIDA
Condições de Contorno	$u = v = w = \theta_1 = \theta_2 = 0$ em $\begin{cases} x = y = 0 \text{ e} \\ x = y = L \end{cases}$	$u = v = w = \theta_1 = \theta_2 = 0$ em $\begin{cases} x = y = 0 \text{ e} \\ x = y = L \end{cases}$
Carregamento	Carga distribuída uniforme $Q = 0,1$	Carga distribuída uniforme $Q = 0,1$

onde Q é o carregamento distribuído, L é o comprimento do lado e D é a rigidez de placa, dada por:

$$D = \frac{E h^3}{12 (1-\nu^2)} \quad (92)$$

onde E é o módulo de elasticidade, h é a espessura da placa e ν é o coeficiente de Poisson.

Para este caso específico, o deslocamento vertical no centro da placa, dado pela equação (91), com os dados fornecidos pela tabela 3, é igual a 1,9656 [mm].

4.4.4 - Análise dos resultados.

A tabela 5 mostra os resultados obtidos pelos três elementos 9-FULL, 9-URI e SHELM-9. Os gráficos dados pelas figuras 14.a e 14.b mostram os resultados comparativos obtidos pelos elementos para malha regular e distorcida, respectivamente. Já os gráficos dados pelas figuras 15, 16 e 17 mostram resultados individuais obtidos com a utilização de malha regular e malha distorcida.

Baseado nestes gráficos pode-se tecer os seguintes comentários:

- Para este caso os elementos 9-URI e SHELM-9 se comportam de maneira muito similar. Isto é claramente visto através do gráfico da figura 14.a e 14.b.
- A taxa de convergência dos elementos 9-URI e SHELM-9 é bem melhor que a taxa de convergência do elemento 9-FULL. Neste problema, para se atingir quase a mesma

precisão dos elementos 9-URI e SHELM-9, deve-se usar quatro vezes mais elementos 9-FULL do que elementos 9-URI e SHELM-9, tanto para a malha distorcida quanto para a malha regular.

- c) Analisando-se os gráficos das figuras 15 e 16 pode-se dizer que para este caso o comportamento do elemento 9-FULL, quanto à taxa de convergência, não é muito afetado pela distorção de malha, apesar da convergência ser lenta para ambas. Já os elementos 9-URI e SHELM-9 apresentam uma mudança bastante acentuada de comportamento com a utilização da malha regular e distorcida. Com a malha regular a convergência de ambos é "por cima", enquanto que com a mudança para malha distorcida a convergência de ambos é "por baixo". Esta mudança de comportamento pode ser explicada pela própria formulação dos elementos. Nos elementos mistos, a convergência tanto pode ser "por cima" quanto "por baixo". Isto explicaria o comportamento do elemento SHELM-9. Já o elemento 9-URI, apesar de ser formulado utilizando o princípio da mínima energia potencial, perde a característica de convergência "por baixo", devido ao uso da integração reduzida. O elemento 9-FULL não perde a característica de convergência "por baixo" com a mudança de malha.
- d) Os três elementos tendem a convergir para a resposta exata do problema à medida que o refino de malha vai se realizando, apesar dos elementos 9-URI e SHELM-9 atingirem muito mais cedo a resposta exata do problema do que o elemento 9-FULL.

4.4.5 - Tabelas e figuras.

Tabela 5 - Deslocamentos verticais obtidos pelos elementos 9-FULL, 9-URI e SHELM-9 para placa quadrada com malha regular e malha distorcida. Resultado analítico [40]: $w_A = 1,9656$ [mm]. Valores em [mm].

NNL (*)	MALHA	9-FULL		9-URI		SHELM-9	
		REGULAR	DISTORCIDA	REGULAR	DISTORCIDA	REGULAR	DISTORCIDA
5	2x2	0,0237	0,0215	2,407	0,4998	2,441	0,4689
9	4x4	1,557	1,453	1,995	1,881	1,997	1,866
13	6x6	1,795	1,767	1,981	1,969	1,981	1,967
16	8x8	1,879	1,866	1,979	1,977	1,979	1,976

(*) Número de nós por lado.

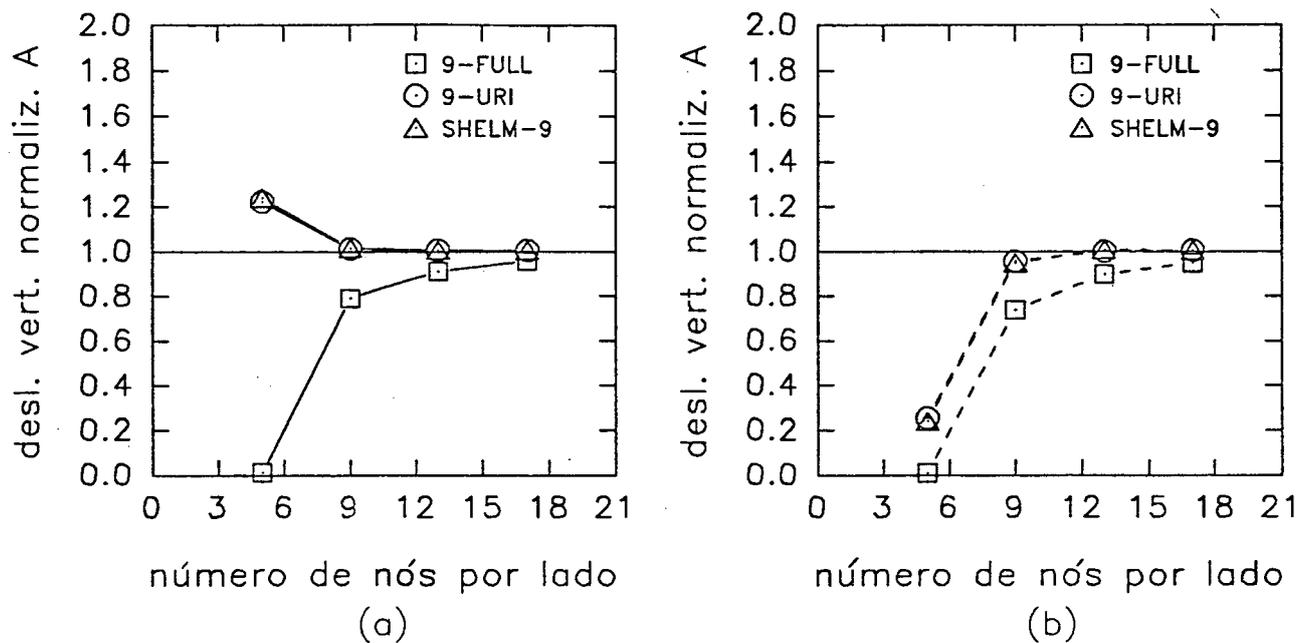


Figura 14 - Placa quadrada. Deslocamento normalizado vertical no centro da placa com o refino de malha. a) Malha regular. b) Malha distorcida. 9-FULL, 9-URI E SHELM-9.

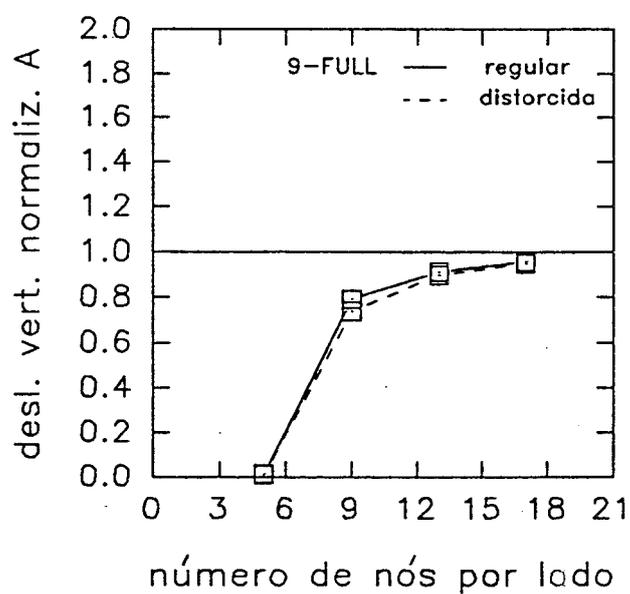


Figura 15 - Deslocamentos verticais normalizados obtidos pelo elemento 9-FULL com malha regular e distorcida.

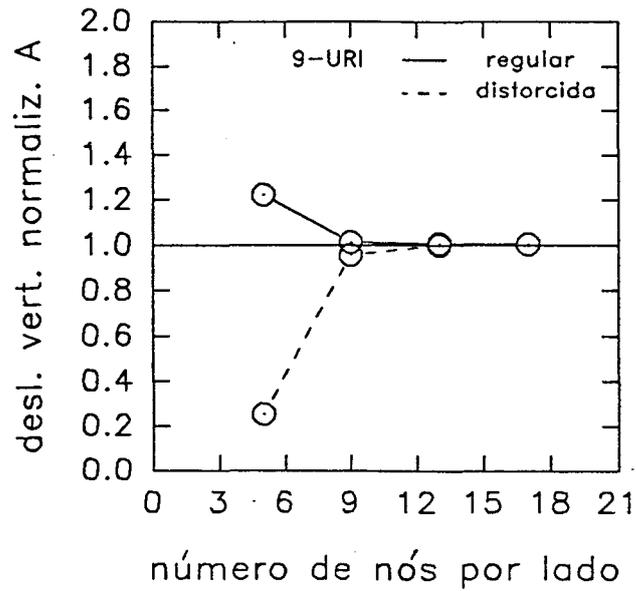


Figura 16 - Deslocamentos verticais normalizados obtidos pelo elemento 9-URI com malha regular e distorcida.

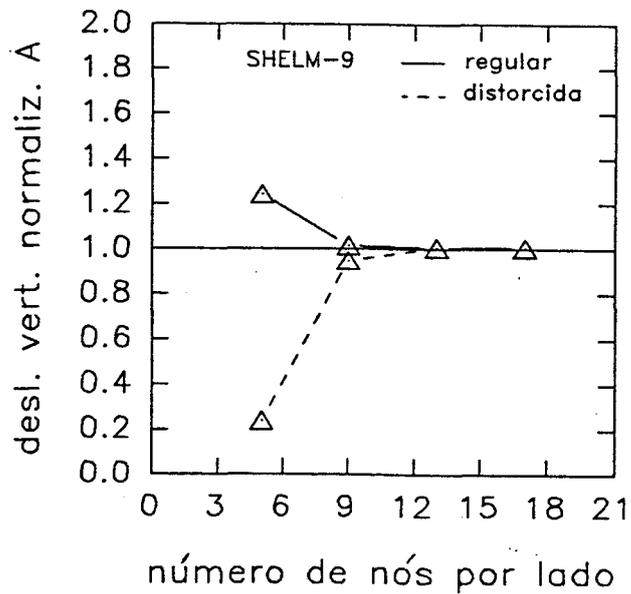


Figura 17 - Deslocamentos verticais normalizados obtidos pelo elemento SHELM-9 com malha regular e distorcida.

4.5 - TELHADO CILÍNDRICO.

4.5.1 - Introdução.

Conhecido pela literatura de cascas como "Scordelis-Lo roof test", em homenagem aos autores SCORDELIS e LO [35], este problema tem sido usado por muitos pesquisadores como teste de desempenho de elementos para cascas.

Este problema faz parte dos problemas sugeridos por MACNEAL e HARDER [25], como padrão para teste de elementos finitos de casca.

Segundo BELYTSCHKO e outros [8], este problema é extremamente útil para determinar a capacidade de um elemento lidar com estados complexos de deformação de membrana. Além disso, uma grande parte de energia de deformação é devida à energia de deformação de membrana, de forma que a influência dos modos de flexão inextensionais neste problema não é tão crítica. BELYTSCHKO e outros [8] concluem ainda que, mesmo elementos que possuam severos efeitos de travamento de membrana irão convergir a uma taxa moderada, enquanto que se o elemento for inadequado para a predição de tensões de membrana a convergência será severamente inibida.

4.5.2 - Descrição do problema.

Este problema baseia-se na forma de um telhado cilíndrico, sujeito ao peso próprio, com um único raio de curvatura. O telhado cilíndrico é sujeito nas suas bordas curvas às condições de contorno conhecidas como de diafragma rígido. As suas bordas laterais são livres. A figura 18 ilustra o problema, bem como os parâmetros geométricos envolvidos.

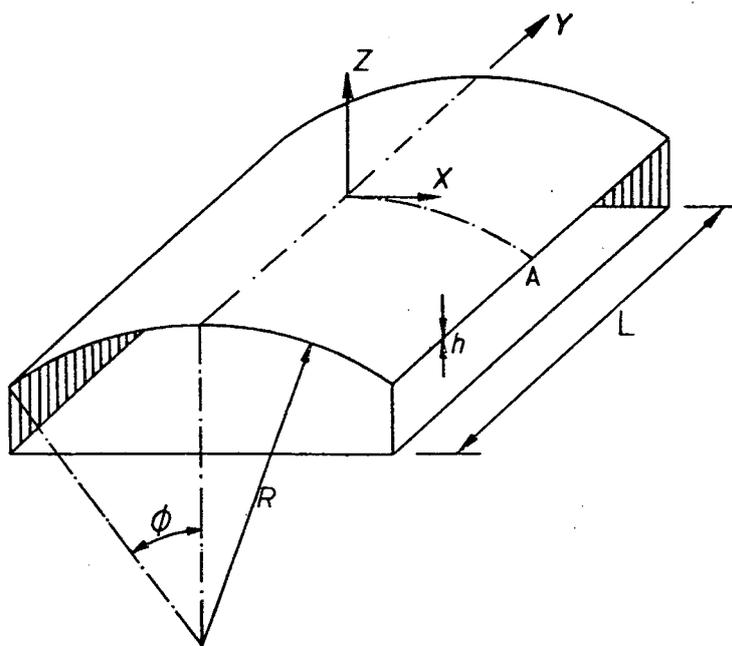


Figura 18 - Telhado cilíndrico sujeito ao peso próprio e parâmetros geométricos.

A malha vai sendo gradualmente refinada, de forma que os deslocamentos verticais do ponto A, mostrado na figura 18, vão sendo computados.

Devido à simetria do problema, apenas 1/4 do mesmo é modelado. A figura 19 mostra as condições de contorno da região modelada, lembrando que as rotações θ_1 , θ_2 mostradas nesta figura são rotações nodais e não globais.

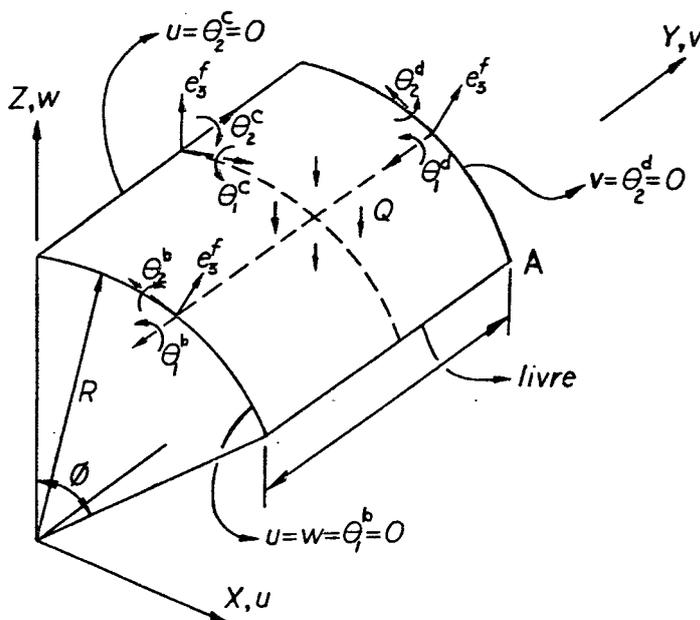


Figura 19 - Condições de contorno utilizadas na região modelada.

A tabela 6 mostra os parâmetros envolvidos, conforme a figura 18, enquanto que a tabela 7 mostra as condições de contorno e carregamentos utilizados.

Tabela 6 - Parâmetros utilizados no problema do telhado cilíndrico.

Dimensões em [mm], módulo de elasticidade em [MPa].

Variável		Valor
Comprimento	L	50.000,0
Espessura	h	250,0
Raio	R	50.000,0
Ângulo	ϕ	40°
Módulo de elasticidade	E	4.32×10^5
Coefficiente de Poisson	ν	0,0

4.5.3 - Base comparativa.

Para este problema, os deslocamentos verticais na metade do lado livre são comparados aos resultados fornecidos no trabalho de MACNEAL e HARDER [25], ou seja, é adotado o valor de $-0,3024$ [mm] para a normalização dos deslocamentos verticais obtidos no ponto A, conforme a figura 18.

Tabela 7 - Condições de contorno e carregamento utilizado no telhado cilíndrico.

Condições de Contorno	$u = w = \theta_1^b = 0$ em $y = 0$ $u = \theta_2^c = 0$ em $x = 0$ $v = \theta_2^d = 0$ em $y = L/2$
Carregamento	carga distribuída uniforme $Q = 90,0 \times 10^{-6} \text{ N/mm}^2$

4.5.4 - Análise dos resultados.

A tabela 8 mostra os resultados obtidos pelos três elementos 9-FULL, 9-URI e SHELM-9, para o caso do telhado cilíndrico. O gráfico mostrado pela figura 20 visualiza os resultados normalizados obtidos pelos elementos a medida que o refino de malha vai aumentando.

Observando-se o gráfico da figura 20 pode-se afirmar:

- À medida que o refino de malha aumenta, os resultados obtidos pelos elementos 9-FULL, 9-URI e SHELM-9 tendem à resposta considerada correta do problema. Para as malhas apresentadas neste, a convergência dos elementos 9-URI e SHELM-9 foram "por cima" enquanto que a do elemento 9-FULL foi "por baixo".
- Novamente há uma semelhança muito boa em relação aos resultados apresentados pelos elementos 9-URI e SHELM-9. Os resultados apresentados pelo elemento SHELM-9 são levemente melhores que os obtidos pelo elemento 9-URI. Além disso, a convergência para a solução correta do problema é bem rápida em ambos os elementos.
- A taxa de convergência do elemento 9-FULL é muito lenta, quando comparada às dos elementos 9-URI e SHELM-9. Porém, como dito antes, a resposta obtida por este elemento converge para a resposta considerada correta, à medida que o refino vai acontecendo.

4.5.5 - Tabela e figura.

Tabela 8 - Resultados obtidos pelos elementos 9-FULL, 9-URI e SHELM-9 para a deflexão vertical no meio do lado livre do problema do telhado cilíndrico. Valores em [mm]. Resultado comparativo [25]: -0,3024 [mm].

MALHA	9-FULL	9-URI	SHELM-9
1x1	-0,0285	-0,3469	-0,334
2x2	-0,0805	-0,3105	-0,3046
3x3	-0,1804	-0,3058	-0,3041
4x4	-0,2474	-0,3043	-0,3038
6x6	-0,2897	-0,3037	-0,3036
8x8	-0,2986	-0,3036	-0,3036

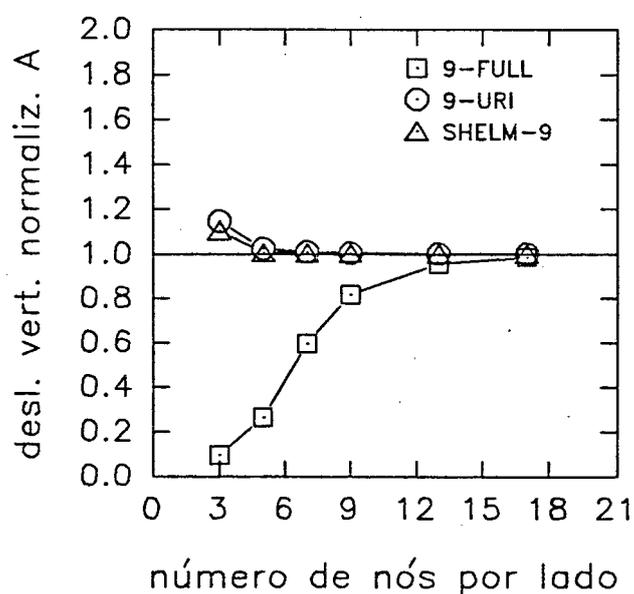


Figura 20 - Deflexão normalizada vertical no meio do lado livre obtida pelos elementos 9-FULL, 9-URI e SHELM-9, com refino de malha.

4.6 - CILINDRO PUNÇIONADO.

4.6.1 - Introdução.

Este problema, conhecido na literatura de cascas como "pinched cylinder with end diaphragm", faz parte dos problemas clássicos de teste de elementos finitos para cascas.

BELYTSCHKO e outros [8] afirmam que o cilindro punçionado é um dos

testes mais severos que podem ser aplicados em elementos finitos de casca, no sentido do elemento representar tanto a flexão inextensional como estados complexos de deformação de membrana.

4.6.2 - Descrição do problema.

Neste problema, um cilindro é sujeito à ação de duas forças concentradas aplicadas de forma diametralmente opostas. O cilindro é restringido em suas extremidades pelas chamadas condições de contorno de diafragma. Como há simetria do problema, apenas 1/8 do cilindro é modelado. A figura 21.a mostra um esboço do problema, bem como os parâmetros envolvidos, enquanto que a figura 21.b mostra as condições de contorno utilizadas para a parte modelada.

Para testar a habilidade dos elementos implementados neste trabalho quanto à sensibilidade à distorção de malhas tridimensionais, duas malhas foram utilizadas. Uma regular, obtida através de sucessivas divisões pela metade dos elementos, e outra irregular, obtida da seguinte forma: planificou-se a região modelada da figura 21.b de tal forma que um lado correspondesse a 1/4 do comprimento de uma circunferência. O outro lado corresponde à metade do comprimento do cilindro.

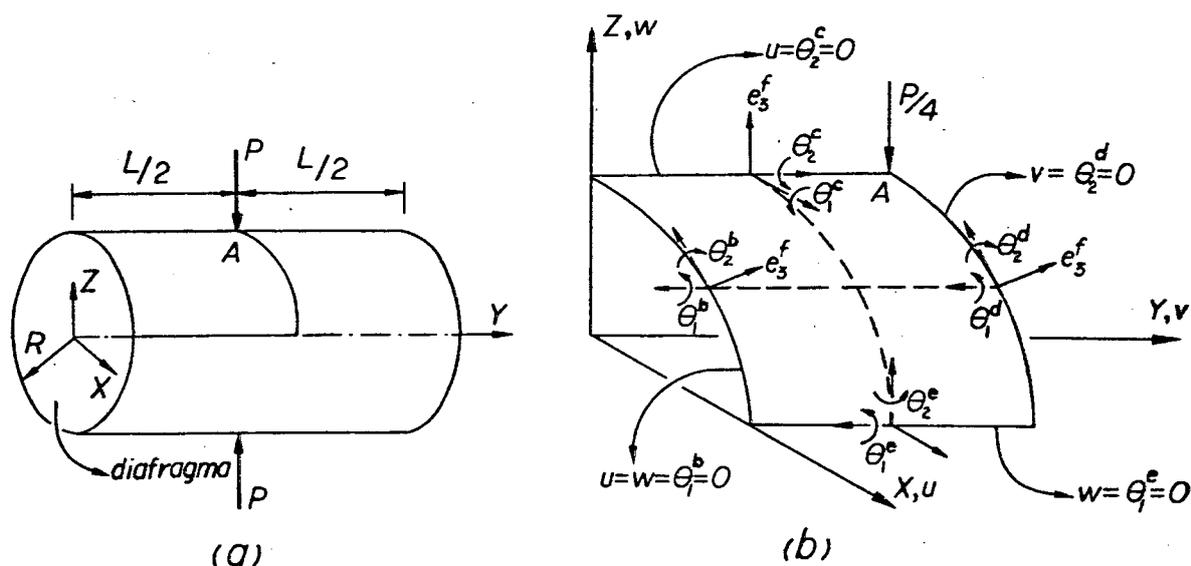


Figura 21 - Cilindro puncionado. a) Geometria. b) Condições de contorno.

Baseado na malha sugerida por RHIU [31], atribuiu-se valores aos parâmetros "a", "b", "c" e "d" mostrados na figura 22. Calculadas as coordenadas no plano, as coordenadas do cilindro para a malha distorcida são obtidas com o auxílio da equação (93).

$$L = R \varphi \quad (93)$$

onde L é o comprimento obtido na direção de y^1 , conforme a figura 22, R é o raio do cilindro e φ é o ângulo em radianos. A tabela 9 mostra os parâmetros utilizados neste problema, bem como a carga aplicada.

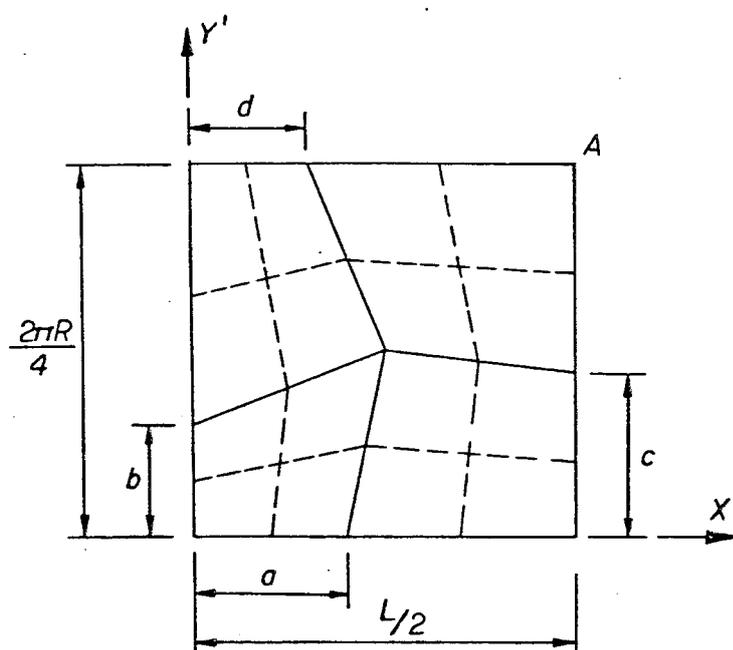


Figura 22 - Malha irregular utilizada para o cilindro com diafragma.

Tabela 9 - Parâmetros utilizados no problema do cilindro puncionado.

Dimensões em [mm]. Módulo de elasticidade em $[N/mm^2]$.

Força concentrada em [N].

Parâmetro		Valor Numérico
Comprimento	L	600,0
Raio	R	300,0
Espessura	h	3,0
Módulo de elasticidade	E	$3,0 \times 10^6$
Coefficiente de Poisson	ν	0,3
Comprimento	a	120,0
Comprimento	b	141,0
Comprimento	c	188,0
Comprimento	d	90,0
Força concentrada	P	1,0

4.6.3 - Base comparativa.

Para este problema, os deslocamentos verticais no ponto de aplicação da força concentrada são comparados aos resultados fornecidos por BELYTSCHKO e outros [8]. Utilizou-se o valor de $-1,8245 \times 10^{-5}$ [mm] para a normalização dos resultados obtidos.

4.6.4 - Análise dos resultados.

A tabela 10 mostra os deslocamentos verticais na direção da aplicação da carga concentrada, obtidos pelos elementos 9-FULL, 9-URI e SHELM-9, para o caso do cilindro puncionado e com a utilização da malha regular. A tabela 11 mostra os mesmos deslocamentos obtidos para a malha distorcida proposta. Os gráficos das figuras 23.a e 23.b mostram um comparativo dos resultados dos elementos para as malhas regulares e distorcidas, respectivamente. Já os gráficos das figuras 24, 25 e 26, mostram resultados comparativos individuais para as malhas regulares e distorcidas. Analisando-se os gráficos das figuras 23 a 26 pode-se fazer algumas observações com relação a este problema.

- a) Para as malhas regulares, os comportamentos dos elementos 9-URI e SHELM-9 são bem semelhantes, convergindo para a resposta exata do problema, a uma taxa bem razoável. O elemento 9-FULL apresenta uma convergência muito lenta para este problema.
- b) Analisando-se o gráfico da figura 23.b, percebe-se que o elemento 9-URI tem um melhor comportamento, quanto à sensibilidade à distorção de malha, do que o elemento SHELM-9. Isto pode ser comprovado comparando os gráficos individuais dos dois elementos mostrados nas figuras 25 e 26.
- c) Neste problema o tipo de convergência apresentado pelos três elementos foi "por baixo", não se notando o comportamento apresentado no caso do item 4.4.4. Notou-se também que os valores obtidos pelos elementos 9-URI e SHELM-9 vão um pouco além dos resultados considerados corretos, quando utilizou-se malhas mais refinadas.

4.6.5 - Tabelas e figuras.

Tabela 10 - Cilindro puncionado. Deslocamento vertical no ponto de aplicação da carga. Resultado correto [6]: $-1,8245 \times 10^{-5}$ [mm].
Malha regular. Valores em [mm].

MALHA	ELEMENTOS		
	9-FULL ($\times 10^{-5}$)	9-URI ($\times 10^{-5}$)	SHELM-9 ($\times 10^{-5}$)
1x1	-0,04247	-0,1678	-0,1514
2x2	-0,0908	-1,425	-1,271
3x3	-0,1620	-1,705	-1,708
4x4	-0,2943	-1,780	-1,764
6x6	-0,6643	-1,825	-1,793
8x8	-1,030	-1,840	-1,815
16x16	-1,655	-1,864	-1,841

Tabela 11 - Cilindro puncionado. Deslocamentos verticais no ponto de aplicação da carga. Resultado correto [8]: $-1,8245 \times 10^{-5}$ [mm].
Malha distorcida. Valores em [mm].

MALHA	ELEMENTOS		
	9-FULL ($\times 10^{-5}$)	9-URI ($\times 10^{-5}$)	SHELM-9 ($\times 10^{-5}$)
2x2	-0,0759	-1,335	-0,910
4x4	-0,2167	-1,776	-1,666
6x6	-0,4942	-1,838	-1,770
8x8	-0,8172	-1,844	-1,803
16x16	-1,557	-1,861	-1,839

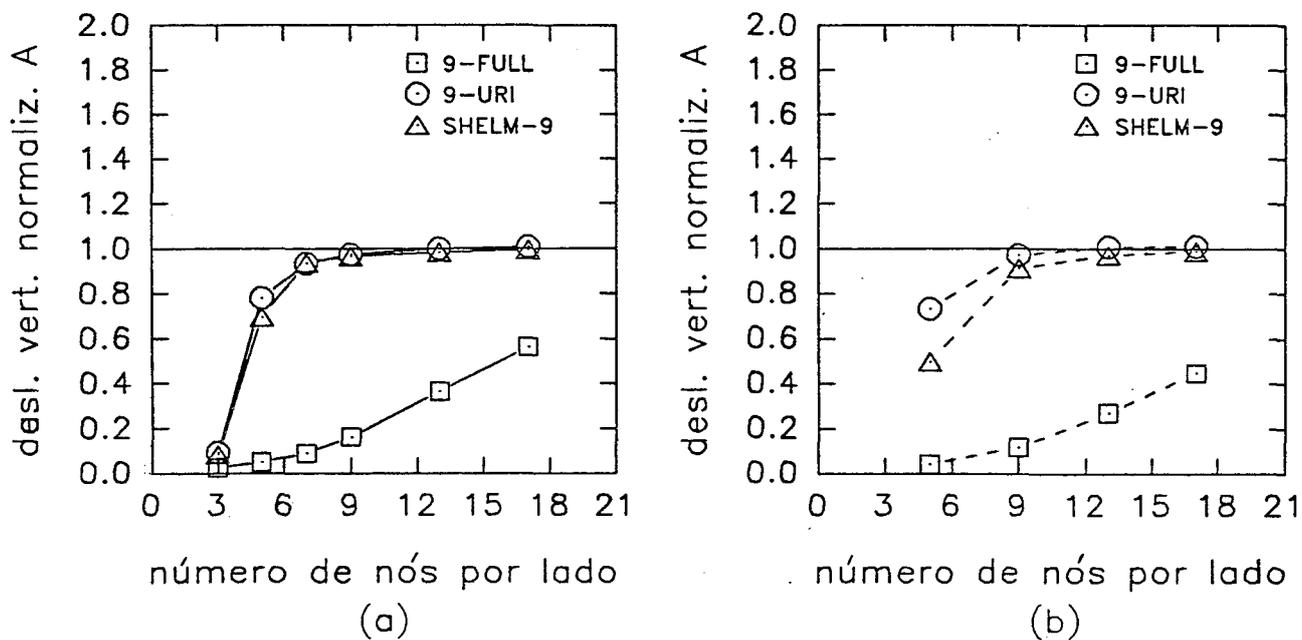


Figura 23 - Curvas de convergência dos deslocamentos para o cilindro puncionado.
a) Malha regular. b) Malha distorcida.

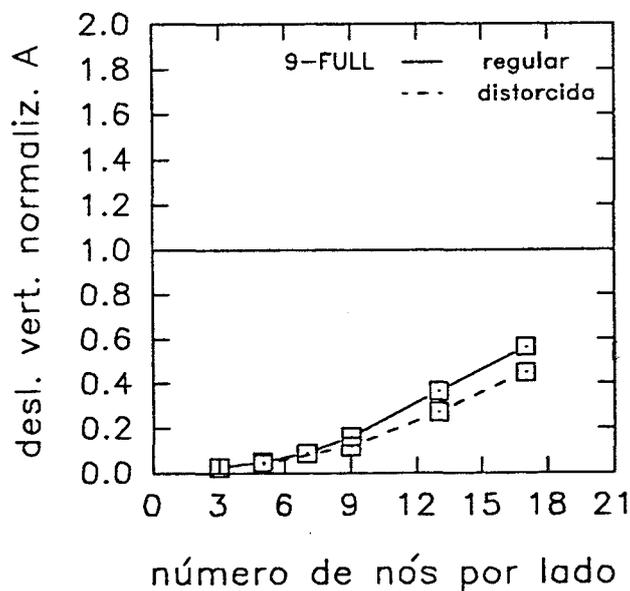


Figura 24 - Elemento 9-FULL. Curvas de convergência.
Malha regular x malha distorcida.

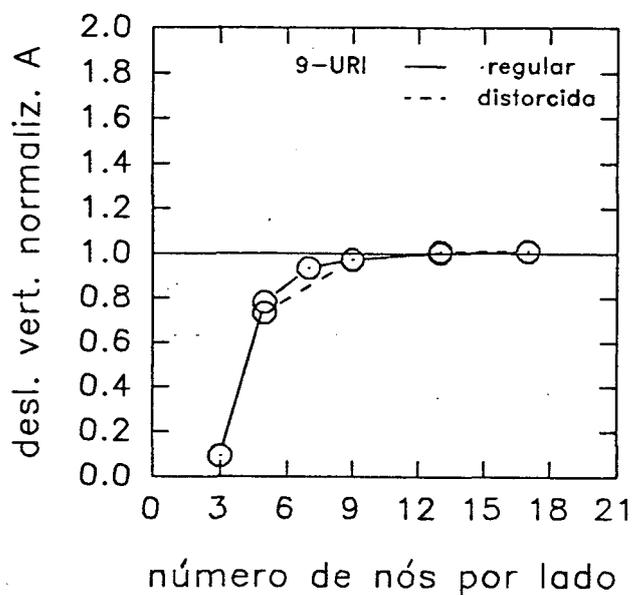


Figura 25 - Elemento 9-URI. Curvas de convergência.
Malha regular x malha distorcida.

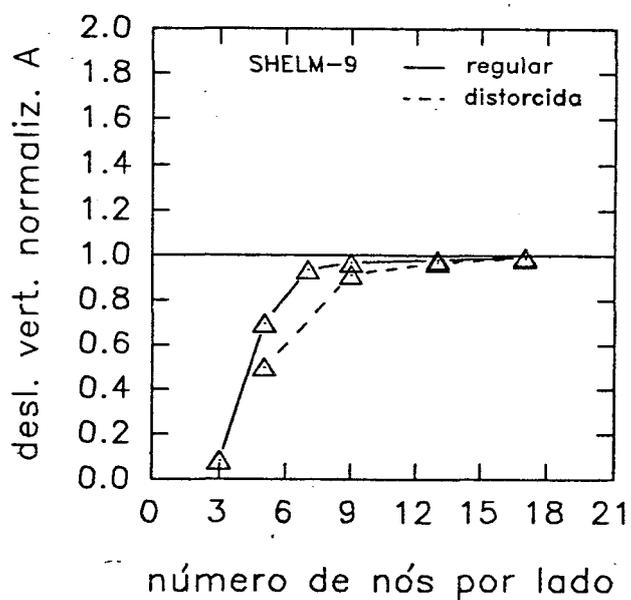


Figura 26 - Elemento SHELM-9. Curvas de convergência.
Malha regular x malha distorcida.

4.7 - SEMIESFERA.

4.7.1 - Introdução.

Um problema bastante importante é o da semisfera. Este problema é interessante por três motivos básicos:

- a) é um exemplo de casca com dupla curvatura;
- b) a capacidade do elemento de representar estados de deformações inextensionais é testada, visto que para este problema quase inexistem deformações de membrana [8];
- c) é um problema muito bom para se testar a capacidade do elemento de sofrer rotações de corpo rígido em relação às normais à superfície da casca. Segundo BELYTSCHKO e outros [8], grandes seções deste problema rotacionam quase como corpo rígido em resposta ao carregamento mostrado pela figura 27.a, de maneira que a capacidade do elemento de modelar precisamente movimentos de corpo rígido é essencial para o bom desempenho deste problema.

O problema testado aqui difere um pouco do problema descrito por BELYTSCHKO, visto que um furo é introduzido em sua parte superior. No entanto, segundo SALEEB e outros [34], os comentários descritos nos parágrafos anteriores também valem para este problema.

4.7.2 - Descrição do problema.

Este problema trata de uma semiesfera aberta em suas partes superior e inferior. A semiesfera é sujeita a dois pares de forças concentradas apostas em direção atuantes no plano diametral da semiesfera. A figura 27.a mostra o esboço do problema e os parâmetros envolvidos. Como existe simetria neste problema, apenas 1/4 da semiesfera é modelada. A figura 27.b mostra as condições de contorno utilizadas na região modelada.

As curvas de convergência são obtidas refinando-se sucessivamente a malha, de maneira a ter sempre uma malha $N \times N$, onde N é o número de nós ao longo de um lado. A cada refino o deslocamento na direção da aplicação da carga é obtido.

A tabela 12 mostra os parâmetros envolvidos neste problema, juntamente com as cargas aplicadas.

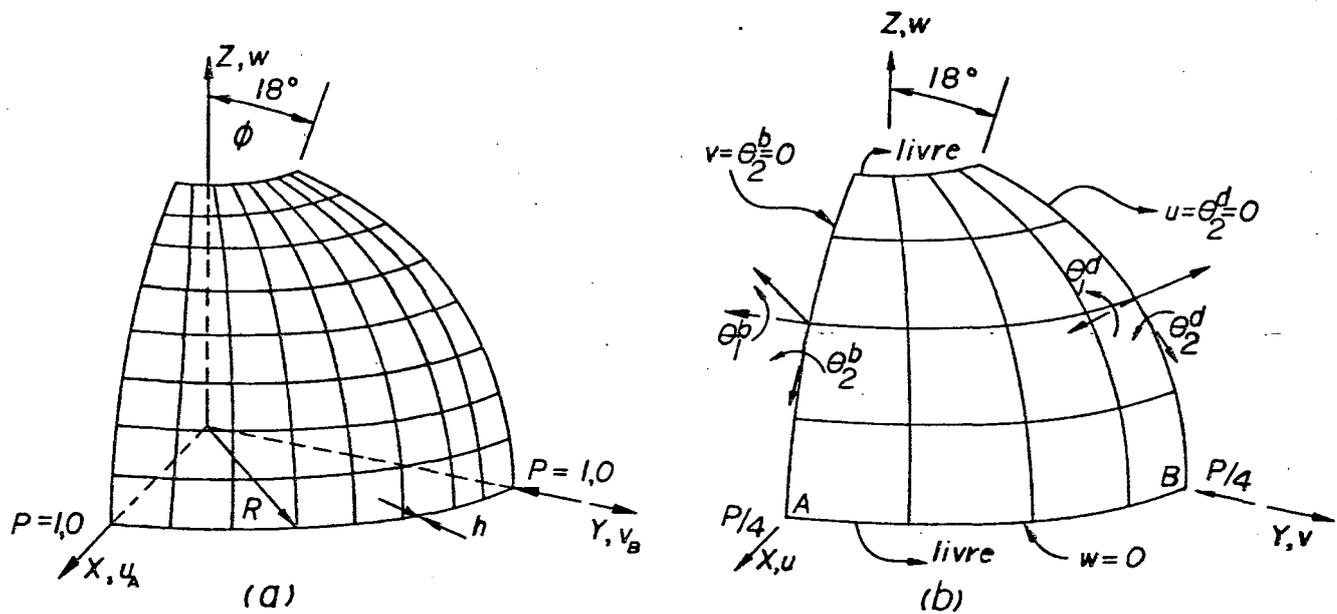


Figura 27 - Semiesfera. a) Geometria. b) Condições de contorno.

Tabela 12 - Semiesfera. Parâmetros e carregamentos. Dimensões em [mm].
Módulo de elasticidade em $[N/mm^2]$. Carga em [N].

Parâmetro		Valor
Raio	R	1000,0
Espessura	h	4,0
Módulo de elasticidade	E	$6,825 \times 10^5$
Coefficiente de Poisson	ν	0,3
Ângulo	ϕ	18°
Força concentrada	P	1,0

4.7.3 - Base comparativa.

Neste problema, os deslocamentos radiais no sentido da aplicação de carga são comparados aos valores dados por MACNEAL e HARDER [25]. Neste sentido, o valor adotado para as normalizações dos deslocamentos u_A e v_B conforme a figura 27.a foi de 0,094 [mm].

4.7.4 - Análise dos resultados.

A tabela 13 contém os deslocamentos radiais na direção da aplicação da força, obtidos pelos elementos 9-FULL, 9-URI e SHELM-9. A figura 28 mostra um gráfico comparativo entre os resultados normalizados obtidos pelos elementos acima, com o refino de malha.

Pode-se ver claramente com a ajuda da tabela 13 e figura 28 que:

- a) A convergência do elemento 9-URI é excelente para este tipo de problema pois, utilizando-se somente uma malha de 3x3, o elemento fornece um erro de apenas 2%, enquanto que o elemento SHELM-9, para a mesma malha, fornece um erro de -22%.
- b) A medida que a malha vai sendo refinada os resultados dos elementos 9-URI e SHELM-9 convergem para a solução do problema. Já o elemento 9-FULL apresenta uma taxa de convergência medíocre para este problema.

4.7.5 - Tabela e figura.

Tabela 13 - Semiesfera. Deslocamentos radiais no sentido de aplicação da força. Valores em [mm]. Valor comparativo [25]: $u_A = 0,094$ [mm].

MALHA	ELEMENTOS		
	9-FULL	9-URI	SHELM-9
2x2	$1,504 \times 10^{-4}$	0,1015	0,03211
3x3	$6,889 \times 10^{-4}$	0,09615	0,07288
4x4	$2,085 \times 10^{-3}$	0,09501	0,08693
6x6	$9,438 \times 10^{-3}$	0,09419	0,0922
8x8	$2,421 \times 10^{-2}$	0,09394	0,09325

4.8 - CILINDRO ENGASTADO.

4.8.1 - Introdução.

Este problema é apresentado com o objetivo de verificar a ocorrência do fenômeno de travamento de membrana em elementos de casca.

O fenômeno de travamento de membrana pode ser descrito como a capacidade que o elemento possui de, em um caso de flexão pura, flexionar sem se distender, ou seja, sem que ocorram falsas deformações de membrana.

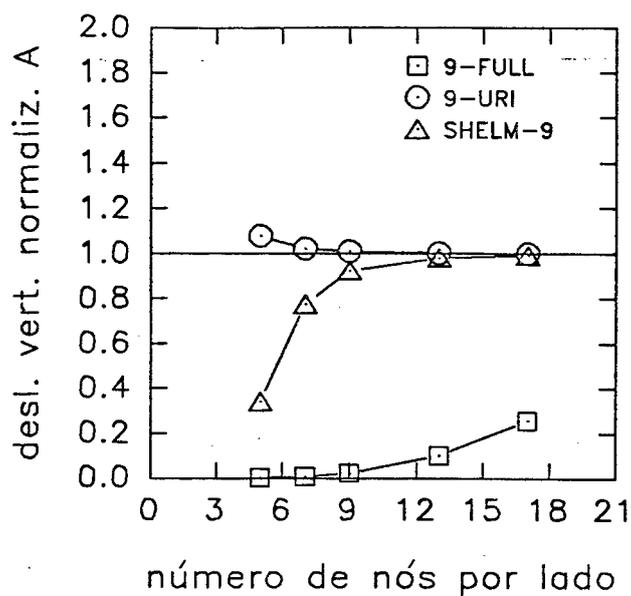


Figura 28 - Curvas de convergência de deslocamentos para a semiesfera.

4.8.2 - Descrição do problema.

Para a realização deste teste é aproveitada a mesma malha de 1/8 de cilindro utilizada pelo caso do cilindro puncionado. A diferença está nas condições de contorno e carregamentos impostos. A figura 29 ilustra o problema, juntamente com as condições de contorno e carregamentos.

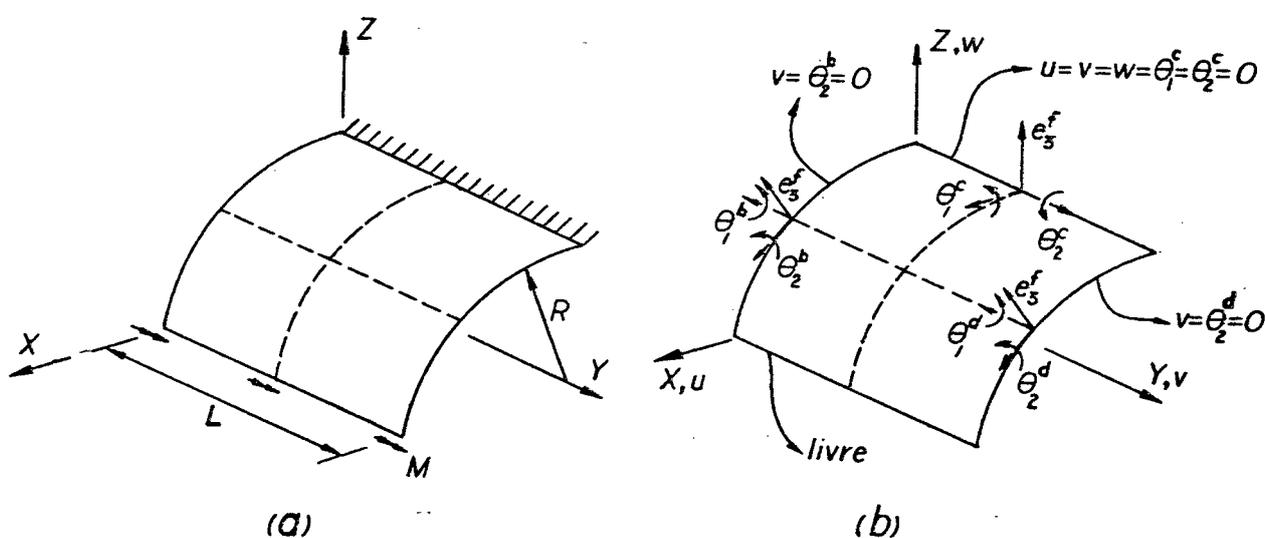


Figura 29 - Flexão pura de um cilindro. a) Geometria. b) Condições de contorno.

Visto que o problema é essencialmente um caso de flexão pura, teórica-

mente somente deverão surgir esforços no plano devido aos momentos fletores aplicados. Os eventuais falsos esforços que venham a acontecer devem ser desprezíveis em relação aos esforços devido à flexão.

Para a realização deste problema a malha foi progressivamente sendo refinada, subdividindo-se cada elemento em dois. Deste modo foram feitas malhas $N \times N$ onde N é o número de elementos em um lado. Os valores de N foram: 1, 2, 4 e 8.

Paralelamente a isso foram obtidos os esforços médios de membrana devido à flexão e tração nos seguintes pontos de integração: pontos que utilizam a integração reduzida (2×2) e nos pontos de integração completa (3×3).

A geometria do problema é a mesma utilizada no item 4.6, de forma que os dados estão mostrados na tabela 9.

4.8.3 - Base comparativa

Os momentos por unidade de comprimento foram normalizados em relação à resposta exata do problema, que é dada por:

$$M_e = \frac{M}{L} \quad (94)$$

onde M é o momento consistente aplicado e L é o comprimento do lado reto da parte do cilindro em questão, conforme a figura 29.a. Para este problema o momento adotado foi de $M = 0,6$ [N.mm]. Com isto o valor exato do esforço de flexão por unidade de comprimento é dado por:

$$M_e = \frac{0,6}{300,0} = 2,0 \times 10^{-3} \quad [\text{N.mm/mm}] \quad (95)$$

Foi definida uma variável C_e que relaciona os esforços médios devidos à tração, com os esforços por unidade de comprimento devidos à flexão, sendo normalizados pela resposta exata do problema. Desta forma C_e é dado por:

$$C_e = \frac{N_o}{M_n} \quad (96)$$

onde N_o são os esforços por unidade de comprimento médio devidos à tração e M_n são os momentos por unidade de comprimento médio, sendo normalizados em relação à resposta exata do problema.

Os valores de C_e encontrados são mostrados nas tabelas 14 e 15.

4.8.4 - Tabelas.

Tabela 14 - Valores da variável C_e para os pontos de integração completa (3x3).

MALHA	9-FULL	9-URI	SHELM-9
1x1	$65,52 \times 10^{-3}$	$87,71 \times 10^{-3}$	$12,4 \times 10^{-3}$
2x2	$26,52 \times 10^{-3}$	$27,92 \times 10^{-3}$	$3,0 \times 10^{-3}$
4x4	$7,82 \times 10^{-3}$	$7,9 \times 10^{-3}$	$0,8 \times 10^{-3}$
8x8	$2,02 \times 10^{-3}$	$2,04 \times 10^{-3}$	$0,208 \times 10^{-3}$

Tabela 15 - Valores da variável C_e para os pontos de integração reduzida (2x2).

MALHA	9-FULL	9-URI	SHELM-9
1x1	$8,22 \times 10^{-3}$	$1,24 \times 10^{-6}$	$3,32 \times 10^{-4}$
2x2	$7,33 \times 10^{-4}$	$1,05 \times 10^{-15}$	$3,03 \times 10^{-5}$
4x4	$5,17 \times 10^{-5}$	$1,04 \times 10^{-14}$	$2,11 \times 10^{-6}$
8x8	$2,24 \times 10^{-6}$	$1,00 \times 10^{-14}$	$1,41 \times 10^{-7}$

4.8.5 - Análise dos resultados.

Analisando-se as tabelas 14 e 15, pode-se chegar às seguintes observações:

- O elemento 9-URI não apresenta o fenômeno de travamento de membrana, pois já que o elemento utiliza a integração reduzida (2x2) nenhum falso esforço foi constatado neste elemento. Isto é claramente mostrado pela tabela 15, onde a variável C_e foi quase zero, indicando que não há mistura entre os esforços de membrana e flexão para este problema.
- Os elementos 9-FULL e SHELM-9, que utilizam a integração completa em suas matrizes, revelaram a presença do fenômeno de travamento de membrana para este problema. Isto pode ser constatado através da observação da tabela 14. Apesar de ambos elementos apresentarem o fenômeno, o comportamento do elemento SHELM-9, em relação a este problema, é melhor do que o comportamento do elemento 9-FULL.
- Observa-se ainda que o fenômeno do travamento de membrana diminui à medida que a malha vai sendo refinada.

CAPÍTULO 5

ANÁLISE DINÂMICA

5.1 - INTRODUÇÃO.

No capítulo anterior foi estudada a aplicação dos elementos implementados computacionalmente (9-FULL, 9-URI e SHELM-9) na solução de problemas estáticos.

Este capítulo será dedicado à análise do comportamento dos elementos citados no parágrafo anterior, quando da aplicação em problemas dinâmicos. Os problemas dinâmicos envolvem uma série de casos como flambagem, análises não lineares, impactos, frequências naturais etc... Os casos de flambagem, análises não lineares e impactos requerem formulações específicas para a sua solução. No entanto, a determinação das frequências naturais de um sistema resume-se na solução do problema de autovalores e autovetores do tipo:

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}) \phi = 0 \quad (97)$$

sendo direta a sua aplicação pelo método de elementos finitos. Na equação (97), \mathbf{K} representa a matriz de rigidez, λ são os autovalores, \mathbf{M} a matriz de inércia e ϕ os autovetores. Após a solução da equação (97), as frequências angulares Ω , dadas em radianos por segundo, podem ser determinadas através da equação (98):

$$\Omega^2 = \lambda \quad (98)$$

Em certos tipos de estruturas, onde o comportamento dinâmico é importante, a determinação das suas frequências naturais é fundamental para o desempenho da estrutura.

5.2 - ANÁLISE DE AUTOVALORES E AUTOVETORES.

5.2.1 - Introdução.

Este é um problema fundamental para se determinar duas características importantes:

- a) Se a matriz de rigidez do elemento possui o posto correto;
- b) Se o elemento possui os chamados modos falsos de deformação.

Como se sabe, os modos falsos de deformação correspondem ao número de autovalores nulos, excedentes àqueles que representam os movimentos de corpo rígido, e estão associados a autovetores não nulos.

Para se determinar os autovalores e autovetores recorre-se à solução da equação (97).

Os modos falsos de energia, como já descrito no primeiro capítulo, podem ser do tipo compatíveis ou incompatíveis. Os modos compatíveis são aqueles que podem se formar mesmo com a reunião de vários elementos. Os modos incompatíveis são aqueles que não se formam com a união de vários elementos.

Obviamente é desejável que um elemento não tenha modos falsos de energia, mas se o tiver, a preferência é que sejam do tipo incompatíveis. Neste caso, a não ser em problemas onde a solução possa ser alcançada com um único elemento, a simples junção de vários elementos fará com que esses modos falsos de energia incompatíveis desapareçam.

5.2.2 - Descrição do problema.

Para verificar se a matriz de rigidez possui o posto correto e se o elemento possui modos falsos de energia, uma placa quadrada sem restrições no contorno é analisada.

A solução do problema é dada por:

$$(\mathbf{K}^1 - \lambda^1 \mathbf{M}) \phi = 0 \quad (99)$$

onde \mathbf{M} é a matriz de inércia do elemento e ϕ são os autovetores do problema.

A matriz \mathbf{K}^1 é dada por:

$$\mathbf{K}^1 = \mathbf{K} + \alpha \mathbf{M} \quad (100)$$

onde \mathbf{K} é a matriz de rigidez do elemento e α uma constante para tornar a matriz de

rigidez do elemento não singular ("shifting"). Os autovalores do problema, λ , são determinados através de:

$$\lambda = \lambda^1 - \alpha \quad (101)$$

onde λ^1 é determinado pela solução da equação (99).

A figura 30 mostra a placa utilizada, bem como os parâmetros geométricos. A tabela 16 mostra os dados utilizados no problema.

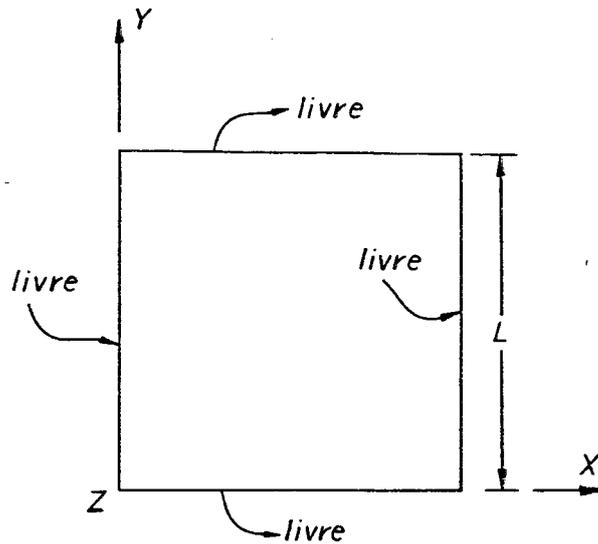


Figura 30 - Placa quadrada sem restrições no contorno.

Tabela 16 - Dados utilizados no problema da placa sem restrições no contorno. Dimensões em [mm]. Módulo de elasticidade em [Kg mm/s²/mm²]. Densidade em [Kg/mm³].

Variável		Valor
Comprimento	L	10,0
Comprimento	a	25,0
Espessura	h	0,1
Módulo de elasticidade	E	$2,1 \times 10^8$
Coefficiente de Poisson	ν	0,3
Densidade específica	ρ	$7,85 \times 10^{-6}$
Constante	α	$1,0 \times 10^8$

A placa definida acima é útil na determinação do posto da matriz de

rigidez. No entanto, se houver a ocorrência de modos falsos de energia, é interessante saber se estes são do tipo compatíveis ou incompatíveis. Neste sentido, foi elaborada outra malha com dois elementos apenas, como mostra a figura 31. Os dados utilizados permaneceram os mesmos mostrados pela tabela 16.

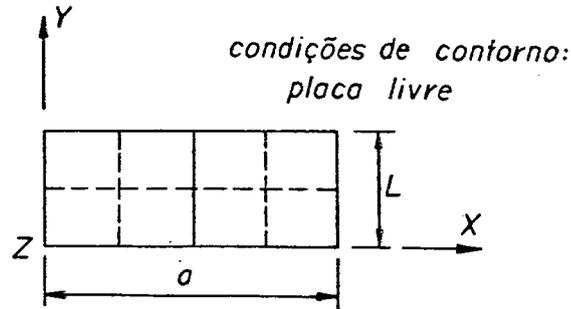


Figura 31 - Placa retangular para determinação de modos falsos de energia compatíveis ou incompatíveis.

Utilizando-se as placas mostradas pelas figuras 30 e 31, os autovalores e autovetores foram determinados com a aplicação das equações 99, 100 e 101. O procedimento utilizado para a determinação dos autovalores e autovetores foi o da iteração subespacial [3]. Após a determinação dos autovetores e autovalores, foi feito um esboço de cada autovetor associado a um autovalor nulo para verificar se eles correspondiam ou não a movimentos de corpo rígido. Os que não correspondiam a movimentos de corpo rígido eram os modos falsos de energia.

5.2.3 - Análise dos resultados.

As tabelas 17 e 18 mostram os números de modos falsos de energia em cada elemento, com a utilização da malha 1x1 e 2x1, respectivamente.

Tabela 17 - Número de modos falsos de energia. Malha 1x1.

ELEMENTO	NÚMERO DE MODOS FALSOS DE ENERGIA
9-FULL	0
9-URI	7
SHELM-9	2

Tabela 18 - Número de modos falsos de energia. Malha 2x1.

ELEMENTO	NÚMERO DE MODOS FALSOS DE ENERGIA
9-FULL	0
9-URI	7
SHELM-9	0

Observa-se o seguinte:

- a) O elemento 9-FULL não apresenta modos falsos de energia.
- b) O elemento 9-URI apresenta 7 modos falsos de energia, sendo que são do tipo compatíveis, já que eles aparecem mesmo com a reunião de elementos.
- c) O elemento SHELM-9 apresenta dois modos falsos de energia. No entanto, eles são do tipo incompatíveis, desaparecendo com a junção de outros elementos.

5.3 - PLACA ENGASTADA - FREQUÊNCIAS NATURAIS.

5.3.1 - Introdução.

Este problema é proposto para verificar o comportamento dos elementos implementados na solução das frequências naturais de uma placa engastada. É interessante observar como se comportam tais elementos de casca na modelagem de estruturas de placas.

5.3.2 - Descrição do problema.

Neste problema, uma placa é engastada em um de seus lados, sendo que os restantes são livres. A figura 32.a mostra um esboço do problema, com as geometrias envolvidas, enquanto que a figura 32.b mostra as condições de contorno utilizadas.

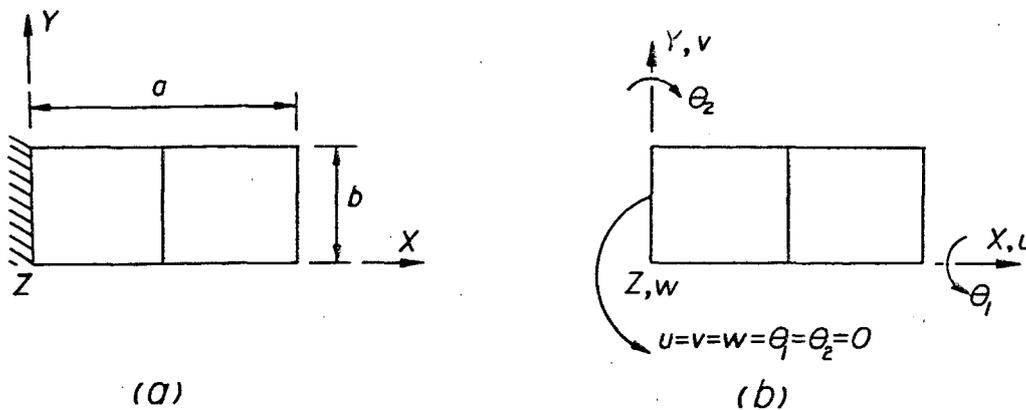


Figura 32 - Placa engastada. a) Geometria. b) Condições de contorno.

Quadro 3 - Malhas e número de graus de liberdade.

MALHA	NGL ^(*)
2x1	75
4x2	225
8x4	765
16x8	2805

As curvas de convergência até a quinta frequência natural são obtidas refinando-se a malha gradualmente. O quadro 3 mostra as malhas utilizadas neste problema, com os respectivos números de graus de liberdade, enquanto que a tabela 19 mostra a geometria e dados utilizados.

Tabela 19 - Placa engastada - dados e geometria. Dimensões em [m].
Módulo de elasticidade em [MPa]. Densidade em [Kg/m³].

Variável		Valor
Comprimento	a	$25,0 \times 10^{-3}$
Comprimento	b	$10,0 \times 10^{-3}$
Espessura	h	$0,1 \times 10^{-3}$
Módulo de elasticidade	E	$2,1 \times 10^{+5}$
Coeficiente de Poisson	ν	0,3
Densidade	ρ	$7,85 \times 10^{+3}$

5.3.3 - Base comparativa.

As frequências naturais obtidas são comparadas aos resultados analíticos obtidos por LEISSA [24].

Para este problema, as cinco primeiras frequências naturais são mostradas pela tabela 20.

(*) Número de graus de liberdade.

Tabela 20 - Frequências naturais analíticas.

MODO	1	2	3	4	5
FREQÜÊNCIA [s ⁻¹]	137,7	716,9	859,4	2290,0	2414,2

5.3.4 - Análise dos resultados.

As tabelas 21 a 24 mostram as cinco primeiras frequências naturais obtidas pelos elementos 9-FULL, 9-URI e SHELM-9, para as malhas 2x1, 4x2, 8x4 e 16x8, respectivamente. Baseado nestas tabelas foram construídos os gráficos das figuras 33, 34 e 35, que mostram as curvas de convergência das frequências normalizadas com o refino de malha.

Baseado nestes gráficos pode-se afirmar que:

- Para a primeira frequência fundamental, mesmo utilizando uma malha grosseira, os resultados apresentados pelos três elementos são satisfatórios. Além disso, todos eles convergem para a resposta analítica do problema, à medida que a malha vai sendo refinada.
- Os elementos 9-URI e SHELM-9 apresentam comportamentos excelentes e quase idênticos. O erro obtido por estes dois elementos para as cinco primeiras frequências, utilizando-se a malha de 4x2 elementos, foi menor que 2%.
- Para este problema, o elemento 9-FULL necessita do dobro de elementos, para atingir a mesma precisão obtida pelos elementos 9-URI e SHELM-9. Além disso, para malhas grosseiras, o elemento não tem precisão no cálculo de frequências mais elevadas.
- No elemento 9-URI não se observou o aparecimento de modos falsos de energia, para este problema. Isto pode ser explicado pelas condições de contorno impostas à placa, que impedem a formação dos modos falsos de energia.

5.3.5 - Tabelas e figuras.

Tabela 21 - Placa engastada. Malha 2x1. Frequências naturais [s⁻¹].

MODO	ELEMENTOS		
	9-FULL	9-URI	SHELM-9
1	146,0	135,7	136,8
2	802,5	719,5	716,0
3	1442,6	897,4	901,3
4	3667,5	2419,4	2389,6
5	6909,8	3015,7	3027,9

Tabela 22 - Placa engastada. Malha 4x2. Freqüências naturais [s⁻¹].

MODO	ELEMENTOS		
	9-FULL	9-URI	SHELM-9
1	139,6	136,4	136,5
2	738,5	716,3	715,9
3	935,2	854,7	855,8
4	2433,0	2290,0	2288,8
5	3019,0	2455,0	2458,1

Tabela 23 - Placa engastada. Malha 8x4. Freqüências naturais [s⁻¹].

MODO	ELEMENTOS		
	9-FULL	9-URI	SHELM-9
1	136,5	136,5	136,5
2	715,2	715,3	715,2
3	852,7	852,6	852,7
4	2278,8	2278,9	2278,8
5	2399,1	2398,7	2399,1

Tabela 24 - Placa engastada. Malha 16x8. Freqüências naturais [s⁻¹].

MODO	ELEMENTOS		
	9-FULL	9-URI	SHELM-9
1	136,8	136,6	136,6
2	717,0	714,1	714,1
3	857,4	852,5	852,5
4	2288,8	2274,8	2274,9
5	2425,7	2395,4	2395,4

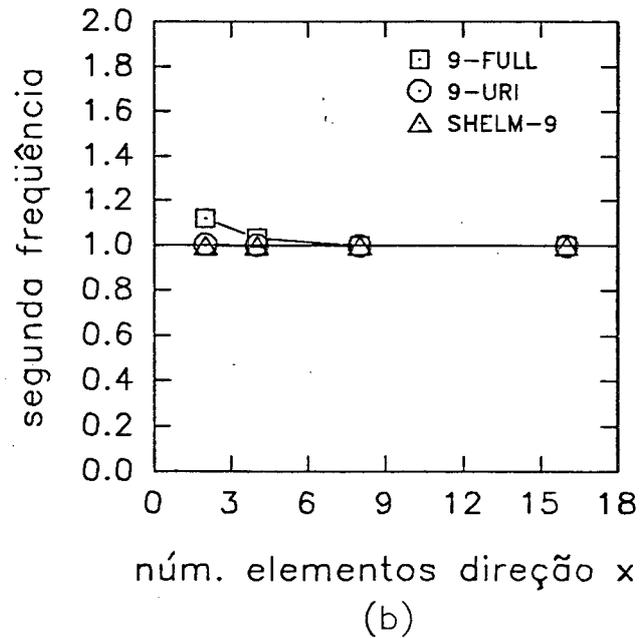
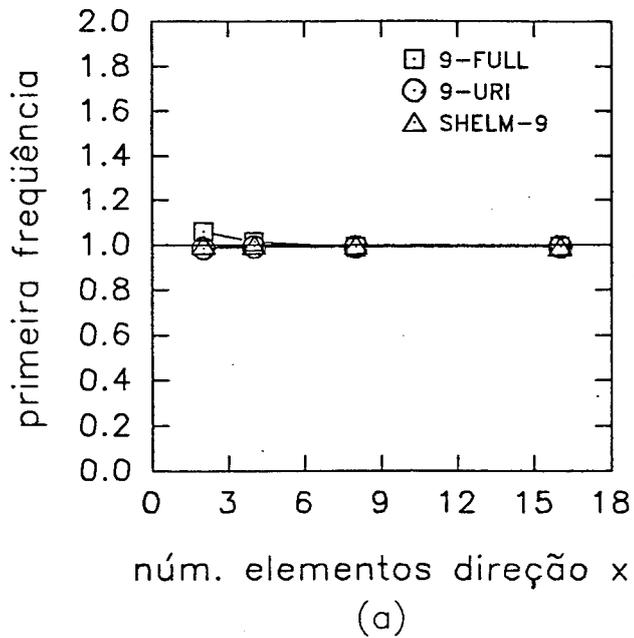


Figura 33 - Curvas de convergência. a)Primeira frequência. b)Segunda frequência.

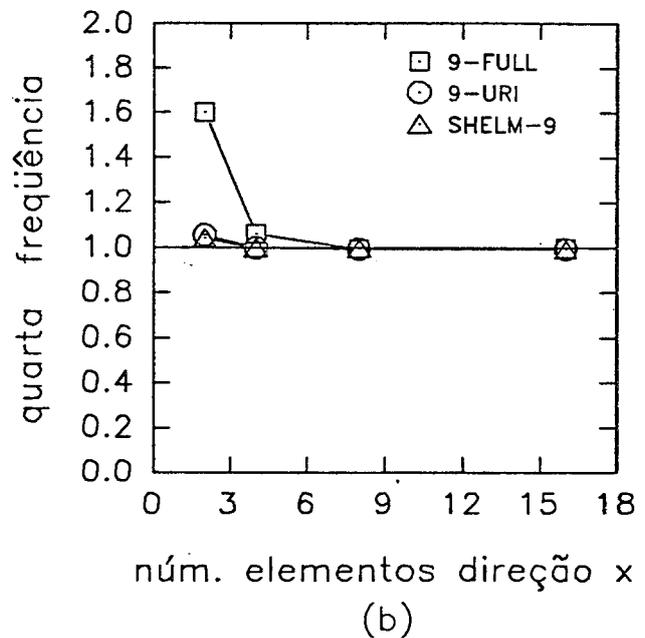
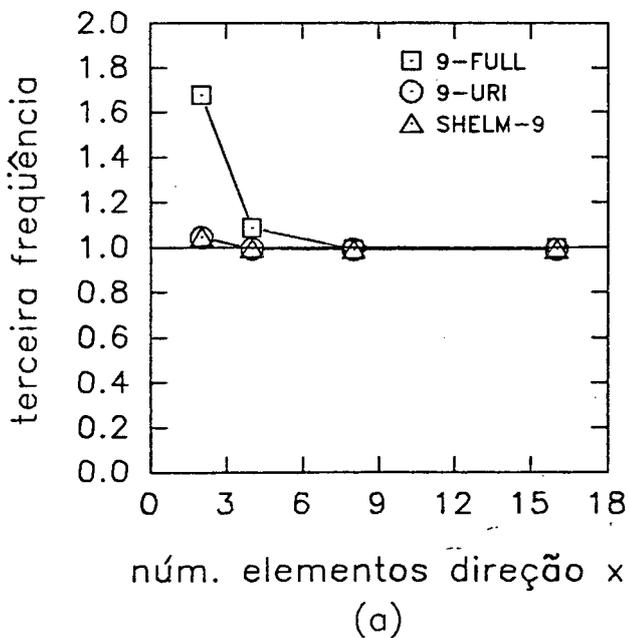


Figura 34 - Curvas de convergência. a)Terceira frequência. b)Quarta frequência.

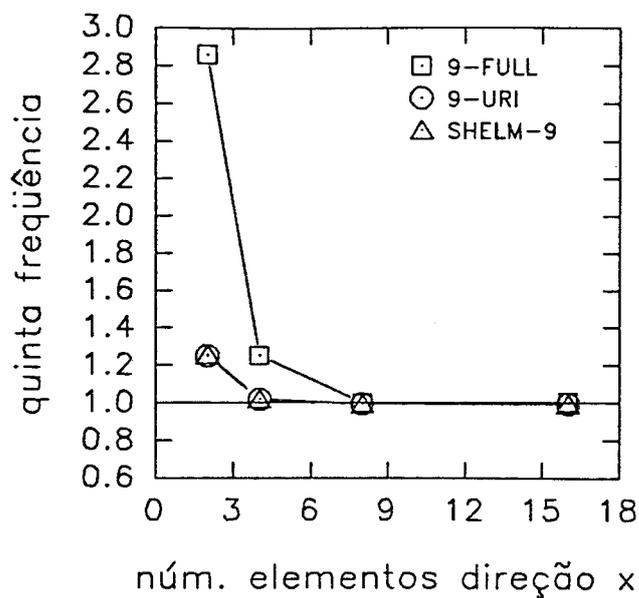


Figura 35 - Curvas de convergência. Quinta frequência.

5.4 - PÁ DE VENTILADOR.

5.4.1 - Introdução.

Este problema, introduzido por OLSON E LINDBERG [28], também foi considerado por NOOR e PETERS [27], sendo utilizado para teste dinâmico de elementos finitos de casca. Ele é composto de uma parte de um cilindro tendo um dos seus lados engastado. A característica importante deste problema é o fato dele possuir um raio de curvatura.

5.4.2 - Descrição do problema.

A figura 36 mostra o problema em questão, bem como as características geométricas e condições de contorno.

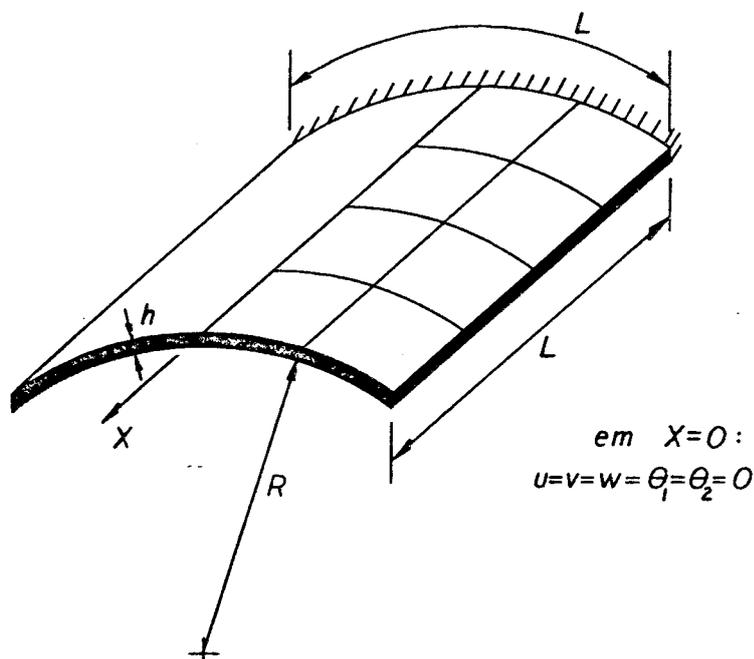


Figura 36 - Problema da pá de ventilador.

A tabela 25 mostra os dados utilizados neste problema, e os dados geométricos são mostrados na figura 36.

Tabela 25 - Dados e geometria utilizados. Dimensões em [m].
Módulo de elasticidade em [MPa]. Densidade em [Kg/m³].

Variável		Valor
Comprimento	L	$304,8 \times 10^{-3}$
Espessura	h	$3,048 \times 10^{-3}$
Raio	R	$609,3 \times 10^{-3}$
Módulo de elasticidade	E	$2,068 \times 10^{+5}$
Coefficiente de Poisson	ν	0,3
Densidade	ρ	$7,8 \times 10^{+3}$

Neste problema são formadas malhas $N \times N$, onde N é o número de elementos em um lado. Um novo refino é alcançado dividindo cada elemento em outros dois. Para cada nova malha são obtidas as cinco primeiras frequências naturais.

5.4.3 - Base comparativa.

As cinco primeiras frequências naturais obtidas pelos elementos 9-FULL, 9-URI e SHELM-9 são comparadas às soluções mostradas no trabalho de NOOR e PETERS [27].

Tabela 26 - Frequências naturais em [s⁻¹] obtidas por NOOR e PETERS [27].

MODO	FREQÜÊNCIA
1	86,0
2	138,0
3	249,0
4	342,0
5	386,0

5.4.4 - Análise dos resultados.

As tabelas 27, 28 e 29 mostram as cinco primeiras frequências naturais

obtidas pelos elementos 9-FULL, 9-URI e SHELM-9, para cada malha utilizada.

Baseado nestas tabelas foram construídos os gráficos de convergência para cada uma das frequências, como mostram as figuras 37 a 39. A normalização dos gráficos foi feita utilizando-se as frequências mostradas na tabela 26. Analisando-se estes gráficos pode-se dizer que:

- Utilizando-se a malha 4x4 na modelagem deste problema, o erro máximo encontrado nas cinco primeiras frequências naturais pelos elementos 9-URI e SHELM-9 foi da ordem de menos de 2%. Para se obter um erro de mesma ordem de grandeza, o elemento 9-FULL necessita de pelo menos o dobro de elementos. Isto demonstra o ótimo desempenho dos elementos 9-URI e SHELM-9 na capacidade de predição de frequências naturais neste problema.
- Todos os elementos convergem para a resposta considerada correta, à medida que a malha é refinada. No entanto, o elemento 9-FULL requer uma malha muito refinada para atingir esta convergência.
- Para a terceira, quarta e quinta frequências o elemento 9-FULL apresenta uma convergência rápida quando a malha é refinada de 2x2 para 4x4. No entanto, após isso, a convergência torna-se muito lenta.

5.4.5 - Tabelas e figuras.

Tabela 27 - Pá de ventilador. Malha 2x2. Frequências naturais [s^{-1}].

MODO	ELEMENTOS		
	9-FULL	9-URI	SHELM-9
1	109,1	82,2	86,3
2	165,4	139,9	146,1
3	602,2	243,3	267,2
4	733,5	338,7	373,9
5	762,6	390,3	413,8

Tabela 28 - Pá de ventilador. Malha 4x4. Frequências naturais [s^{-1}].

MODO	ELEMENTOS		
	9-FULL	9-URI	SHELM-9
1	88,8	85,7	86,3
2	145,5	138,3	139,6
3	292,7	247,5	249,7
4	372,9	343,0	347,6
5	431,1	385,1	390,0

Tabela 29 - Pá de ventilador. Malha 8x8. Frequências naturais [s⁻¹].

MODO	ELEMENTOS		
	9-FULL	9-URI	SHELM-9
1	86,5	85,9	86,0
2	139,8	138,6	138,7
3	251,8	247,6	247,8
4	348,3	342,6	343,1
5	393,9	386,1	386,7

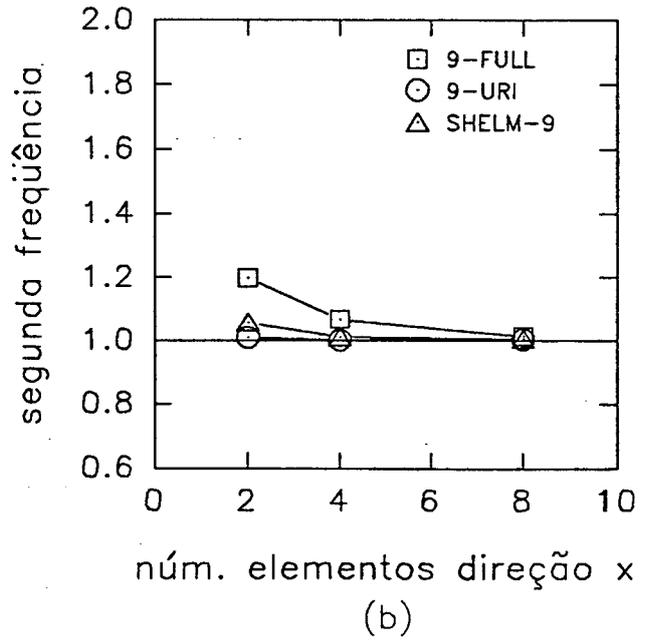
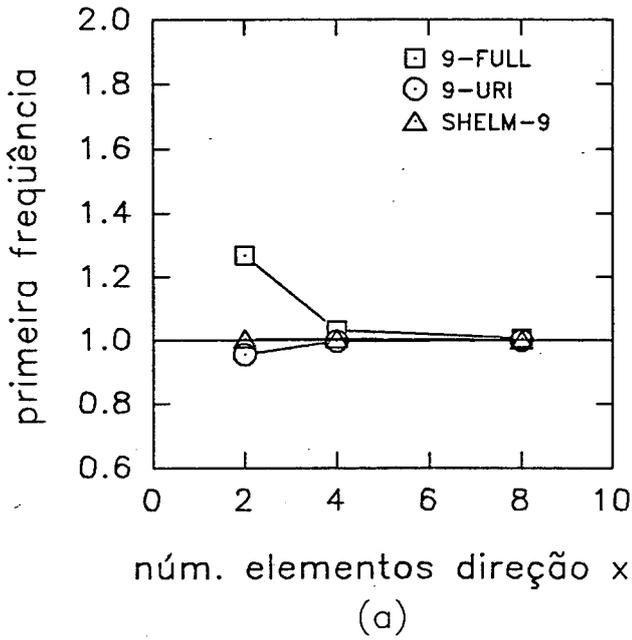


Figura 37 - Curvas de convergência. a)Primeira frequência. b)Segunda frequência.

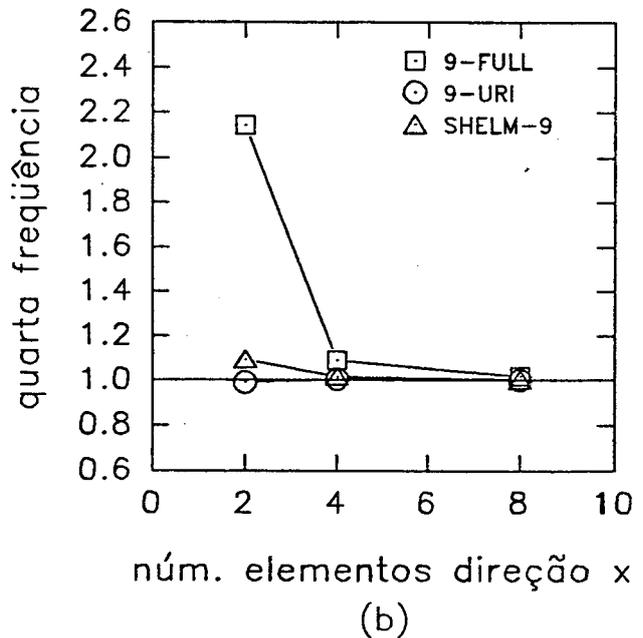
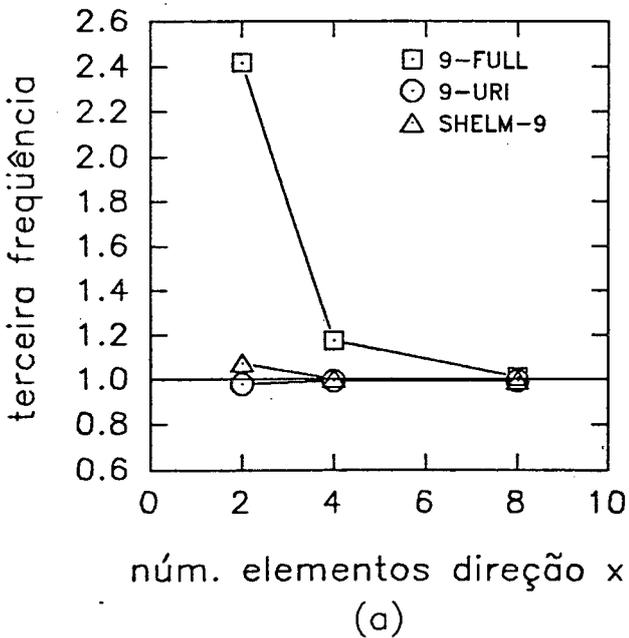


Figura 38 - Curvas de convergência. a)Terceira frequência. b)Quarta frequência.

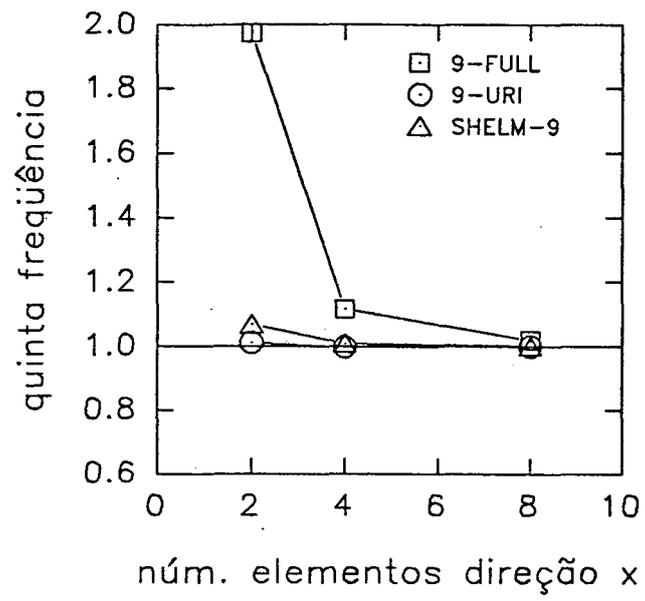


Figura 39 - Curvas de convergência. Quinta frequência.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

6.1 - INTRODUÇÃO.

Este capítulo é dedicado à apresentação das conclusões obtidas neste trabalho, bem como às sugestões para futuros trabalhos correlatos.

As conclusões aqui apresentadas foram baseadas em resultados obtidos por três elementos implementados, 9-FULL, 9-URI e SHELM-9. No entanto, nada impede que outros elementos considerados promissores sejam implementados numericamente, e análises semelhantes às apresentadas neste trabalho possam ser realizadas.

As formulações de novos elementos finitos para casca ainda é uma área definitivamente aberta. Isto é particularmente verdadeiro para as novas formulações de elementos híbridos e mistos, apresentados ultimamente [21].

6.2 - CONCLUSÕES.

Para os elementos analisados neste trabalho pode-se chegar às seguintes conclusões:

a) Quanto ao fenômeno do travamento de cisalhamento.

O problema do fenômeno de travamento de cisalhamento, que surge em decorrência das funções de interpolação não serem capazes de representar exatamente a restrição de energia de cisalhamento transversal nula em cascas/placas muito finas, não foi observado nos elementos 9-URI e SHELM-9. No entanto, no elemento 9-FULL o fenômeno mostrou-se claramente, pois em alguns casos o fenômeno inviabilizou a solução ou forneceu resultados muito rígidos.

b) Quanto ao fenômeno do travamento de membrana.

O travamento de membrana, que reflete a incapacidade do elemento de, em um caso de flexão pura, flexionar sem se distender, não foi notado no elemento 9-URI. No entanto, a presença do fenômeno de travamento de membrana foi detectada nos elementos 9-FULL e SHELM-9.

c) Quanto aos modos falsos de energia.

Com relação à presença de modos falsos de energia, o elemento 9-FULL foi o que apresentou os melhores resultados, pois não foi notada a presença de tais modos neste elemento. Já os elementos 9-URI e SHELM-9 apresentaram 7 e 2 modos falsos de energia, respectivamente. Os modos falsos de energia do elemento 9-URI são do tipo compatíveis, ou seja, podem se formar com a reunião de vários elementos. Os modos falsos de energia do elemento SHELM-9 são do tipo incompatíveis, não se formando com a união de vários elementos. Portanto, a não ser em casos onde a resposta correta possa ser atingida com um único elemento, os modos falsos de energia do elemento SHELM-9 não são tão preocupantes quanto os modos falsos de energia do elemento 9-URI.

d) Quanto à convergência para deflexão.

Neste aspecto, os elementos 9-URI e SHELM-9 apresentam resultados muito superiores aos obtidos pelo elemento 9-FULL. Devido à simplicidade de sua formulação, a convergência para as deflexões demonstrada pelo elemento 9-URI pode ser considerada excelente. O elemento SHELM-9 apresentou convergências para deslocamentos também muito boas. Somente no caso da semiesfera os resultados obtidos pelo elemento SHELM-9 não foram bons, com a utilização de poucos elementos. No entanto, com a utilização de mais elementos, a solução correta foi obtida. Já o elemento 9-FULL não dá bons resultados para deslocamentos e em alguns casos a convergência chega a ser medíocre.

e) Quanto à sensibilidade à distorção de malha.

Quanto à sensibilidade à distorção de malha, os elementos 9-URI e SHELM-9 forneceram bons resultados. No entanto, o comportamento do elemento 9-URI em alguns casos foi superior ao obtido pelo elemento SHELM-9, principalmente em problemas não planos com malha considerada grosseira. Apesar deste fato os elementos 9-URI e SHELM-9 convergem para a resposta exata do problema à medida que a malha vai sendo refinada. O elemento 9-FULL apresentou uma razoável sensibilidade à distorção de malha, e com isto a convergência para a resposta exata do problema é prejudicada.

f) Quanto à convergência de frequências naturais.

Como era de se esperar, devido aos resultados apresentados na parte estática deste trabalho, a convergência demonstrada pelo elemento 9-FULL é muito pobre, quando comparada às convergências obtidas pelos elementos 9-URI e SHELM-9. Para o elemento 9-FULL são necessários pelo menos o dobro dos elementos 9-URI ou SHELM-9, para se obter a mesma precisão destes últimos. Os elementos 9-URI e SHELM-9 tiveram comportamentos muito parecidos quanto ao cálculo de frequências naturais. Além disso, a convergência obtida por estes dois elementos foi muito boa, mesmo para

malhas consideradas grosseiras.

g) Quanto aos melhores elementos.

Baseado no que foi exposto nos itens anteriores e nos critérios apresentados por BATHE [4], pode-se dizer que nenhum dos elementos estudados neste trabalho atende àqueles requisitos. Obviamente isto não é nenhum demérito destes elementos, visto que até hoje tal elemento ainda inexistente. No entanto, analisando-se os resultados obtidos pelo elemento SHELM-9 globalmente, pode-se recomendar a sua aplicação em um programa de elementos finitos de uso geral. Devem ser salientados os dois aspectos negativos encontrados neste trabalho. O primeiro foi a ocorrência do fenômeno do travamento de membrana na resolução do problema da semiesfera. Apesar desta ocorrência, o problema foi solucionado com o refino de malha. O segundo problema foi a ocorrência de dois modos falsos de energia. No entanto, como anteriormente mencionado, este problema não deverá causar preocupação quando a modelagem da estrutura utilizar mais de um elemento, pois os modos falsos de energia encontrados foram do tipo incompatíveis, não se formando com a reunião de vários elementos.

Com relação ao elemento 9-URI, pode-se dizer que é um elemento excelente para análises estáticas. Nos casos estáticos testados neste trabalho, a convergência obtida por este elemento foi muito boa, sendo em alguns casos superior a obtida pelo elemento SHELM-9. Para os casos estáticos testados aqui, não houve a ocorrência da singularidade da matriz de rigidez que inviabilizasse a solução do problema. Em certos casos, como afirmam BELYTSCHKO e outros [8], esta singularidade pode ocorrer. Há que ressaltar o fato de sua formulação ser muito mais simples que a do elemento SHELM-9, não obstante o fato de que ao longo de todo o trabalho os resultados obtidos por ambos os elementos fossem similares. Por isto, aliado ao fato de sua implementação ser muito fácil, o elemento pode ser recomendado em um programa de elementos finitos de uso geral, para a solução de problemas estáticos, desde que as condições de contorno sejam suficientes para a resolução do problema.

A sua aplicação em casos onde envolva o cálculo de frequências naturais, embora possível, não é tão direta. Isto é devido ao fato da presença de modos falsos de energia do tipo compatíveis, ou seja, aqueles modos que se formam mesmo em presença de vários elementos.

Por último, o elemento 9-FULL, embora servindo de base para os outros dois elementos, apresenta resultados medíocres, comparados aos elementos 9-URI e SHELM-9. O fato da não ocorrência de modos falsos de energia foi o único aspecto positivo deste elemento. O elemento 9-FULL apresenta tanto travamento de cisalhamento como de membrana; é sensível à distorção de malha; a convergência para a resposta correta do problema é muito lenta e a capacidade de predição de frequências

naturais é muito baixa. Portanto, a sua implementação numérica não é recomendada em um programa de elementos finitos de uso geral.

6.3 - SUGESTÕES.

Apresenta-se agora algumas sugestões possíveis para outros trabalhos correlatos.

- 1) Propor novos elementos mistos utilizando o princípio de Hellinger-Reissner, mas com a utilização de novos campos de deformações e/ou tensões.
- 2) Programa para otimização de frequências naturais de estruturas.
- 3) Um trabalho propondo testes padrões para a análise exclusiva de elementos finitos de casca, tanto estáticas como dinâmicas.
- 4) Uma análise comparativa entre outros elementos de cascas com formulação linear, analisando também o aspecto de convergência para esforços e tensões.
- 5) Mesmo trabalho realizado aqui, mas dirigido a elementos de casca para análises não lineares.
- 6) Um trabalho propondo um novo processo de estabilização da matriz de rigidez do elemento 9-URI.
- 7) Testes no elemento SHELM-9 utilizando a integração seletiva-reduzida ou reduzida.

BIBLIOGRAFIA

- [1] AHMAD, S. et alli. Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements. **International journal for numerical methods in engineering.** 2: 419-451, 1970.
- [2] BARCELLOS, C.S. & ROSA, E. Sistema modular de elementos finitos. CNEN/UFSC, 14/1979.
- [3] BATHE, K.J. Finite element procedures in engineering analysis. Prentice-Hall, 1982.
- [4] BATHE, K.J. & DVORKIN, E.N. A formulation of general shell elements - the use of mixed interpolation of tensorial components. **International journal for numerical methods in engineering.** 22: 697-722, 1986.
- [5] BATHE, K.J. & DVORKIN, E.N. A four-node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and a mixed interpolation. **International journal for numerical methods in engineering.** 21: 367-383, 1985.
- [6] BATHE, K.J. & HO, L.W. A simple and effective element for analysis of general shell structures. **Computer & Structures** 13: 673-681, 1981.
- [7] BELYTSCHKO, T. et alli. Implementation and application of a 9-node lagrange shell element with spurious mode control. **Computer & Structures** 20: 121-128, 1985.
- [8] BELYTSCHKO, T. et alli. Stress projection for membrane and shear locking in shell finite elements. **Computer methods in applied mechanics and engineering.** 51: 221- 258, 1985.
- [9] BRIASSOULIS, D. The zero energy modes problem of the nine- node lagrangian degenerated shell element. **Computer & Structures.** 30: 1389-1402, 1988.
- [10] CHANG, T.Y. et alli. On the mixed formulation of a 9-node lagrange shell element. **Computer methods in applied mechanics and engineering.** 73: 259-281, 1989.
- [11] CHOI, C.K. & SCHNOBRICH, W.C. Nonconforming finite element analysis of shells. **Journal of the engineering mechanics division.** August: 447-464,

1975.

- [12] COOK, R.D. Concepts and applications of finite element analysis. John Wiley & Sons, 1981.
- [13] COWPER, G.R. et alli. A shallow shell finite element of triangular shape. *International journal of solids structures*. 6: 1133-1156, 1970.
- [14] DHATT, G. et alli. A new triangular discrete Kirchhoff plate/shell element. *International journal for numerical methods in engineering*. 23: 453-470, 1986.
- [15] DVORKIN, E.N. & BATHE, K.J. A continuum mechanics based four-node shell element for general non-linear analysis. *Engineering Computer*. 1: 77-88, 1984.
- [16] GELLERT, M. & LAURSEN, M.E. A new high-precision stress finite element for analysis of shell structures. *International journal of solids structures*. 13: 683-697, 1977.
- [17] HEPPLER, G.R. & HANSEN, H.S. A Mindlin element for thick and deep shells. *Computer methods in applied mechanics and engineering*. 54: 21-47, 1986.
- [18] HUANG, H.C. & HINTON, E. A new nine-node degenerated shell element with enhanced membrane and shear interpolation. *International journal for numerical methods in engineering*. 22: 73-92, 1986.
- [19] HUANG, H.C. & HINTON, E. A nine-node lagrangian Mindlin plate element with enhanced shear interpolation. *Engineering computer*. 1: 369-379, 1984.
- [20] HUGHEST, T.J.R. & COHEN, M. The 'heterosis' finite element for plate bending. *Computer & Structures*. 9: 445-450, 1978.
- [21] JANG, J. & PINSKY, P.M. An assumed covariant strain based 9-node shell element. *International journal for numerical methods in engineering*. 24: 2389-2411, 1987.
- [22] KANG, D.S. & PIAN, T.H.H. A 20-DOF hybrid stress general shell element. *Computer & Structures*. 4: 789-794, 1988.
- [23] KANOKNUKULCHAI, W. A simple and efficient finite element for general shell analysis. *International journal for numerical methods in engineering*. 14: 179-200, 1979.
- [24] LEISSA, A.W. The free vibration of rectangular plates. *Journal of sound and vibration*. 31: 257-293, 1973.
- [25] MACNEAL, R.H. & HARDER, R.L. A proposed standart set of problems to test

- finite element accuracy. *Finite elements in analysis and design*. 1: 3-20, 1985.
- [26] MEEK, J.L. & TAN, H.S. A faceted shell element with loof nodes. *International journal for numerical methods in engineering*. 23: 49-67, 1986.
- [27] NOOR, A.K. & PETERS, J.M. Mixed models and reduced seletive integration displacement models for vibration analysis of shells. *Hybrid and mixed finite element methods*. John Wiley & Sons Ltda. 537-564, 1983.
- [28] OLSON, M.D. & LINDBERG, G.M. Dynamic analysis of shallow shells with a doubly curved triangular finite element. *Journal of sound and vibration*, 19: 299-318, 1971.
- [29] PARK, K.C. & STANLEY, G.M. A curved C^0 shell element based on assumed natural-coordinate strains. *Journal of applied mechanics, ASME*. 53: 278-290, 1986.
- [30] PARK, K.C. et alli. A uniformly reduced four-noded C^0 - shell element with consistent rank corrections. *Computers & Structures*. 20: 129-139, 1985.
- [31] RHIU, J.J. & LEE, S.W. A nine-node finite element for analysis of geometrically non-linear shells. *International journal for numerical methods in engineering*. 26 : 1945-1962, 1988.
- [32] SALEEB, A.F. & CHANG, T.Y. An efficient quadrilateral element for plate bending analysis. *International journal for numerical methods in engineering*. 24: 1123-1155, 1987.
- [33] SALEEB, A.F. et alli. A mixed formulation of C^0 -linear triangular plate/shell element - the role of edge shear constraints. *International journal for numerical methods in engineering*. 26: 1101-1128, 1988.
- [34] SALEEB, A.F. et alli. A quadrilateral shell element using a mixed formulation. *Computer & Structures* 26: 787-803, 1987.
- [35] SCORDELIS, A.C. & LO, K.S. Computer analysis of cylindrical shells. *Journal of the american concrete institute*. 61: 539-561, 1964.
- [36] SIQUEIRA, E.D. Uma análise comparativa de elementos finitos para flexão de placas. *Dissertação de mestrado, UFSC*, 1984.
- [37] STOLARSKI, H. & BELYTSCHKO, T. Membrane locking and reduced integration for curved elements. *Journal of applied mechanics*. 4: 172-176, 1982.
- [38] STOLARSKY, H. et alli. A simple triangular curved shell element. *Engineering computer*. 1: 210-218, 1984.

- [39] TAYLOR, R.L. et alli. The patch test - A condition for assessing fem convergence. *International journal for numerical methods in engineering*. 22: 39-62, 1986.
- [40] TIMOSHENKO, S.P. & KRIEGER, S.W. Theory of plates and shells. McGraw-Hill. Book Company, Inc., 1959.
- [41] WHITE, D.W & ABEL, J.F. Testing of shell finite element accuracy and robustness. *Finite elements in analysis and design* 6: 129-151, 1989.
- [42] YANG, T.Y. & SAIGAL, S. A curved quadrilateral element for static analysis of shells with geometric and material nonlinearities. *International journal for numerical methods in engineering*. 21: 617-635, 1985.
- [43] ZIENKIEWICZ, O.C. The finite element method. McGraw-Hill, Third edition, Book Company Limited, 1977.
- [44] ZIENKIEWICZ, O.C. et alli. Reduced integration technique in general analysis of plates and shells. *International journal for numerical methods in engineering*. 3: 275- 290, 1971.

APÉNDICES

APÊNDICE A

FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO E SUAS DERIVADAS EM RELAÇÃO ÀS COORDENADAS NATURAIS ξ , η , PARA OS ELEMENTOS 9-FULL, 9-URI E SHELM-9

Para o elemento mostrado na figura A.1, as funções de interpolação e suas derivadas parciais em relação a ξ e η são mostradas na tabela A.1.

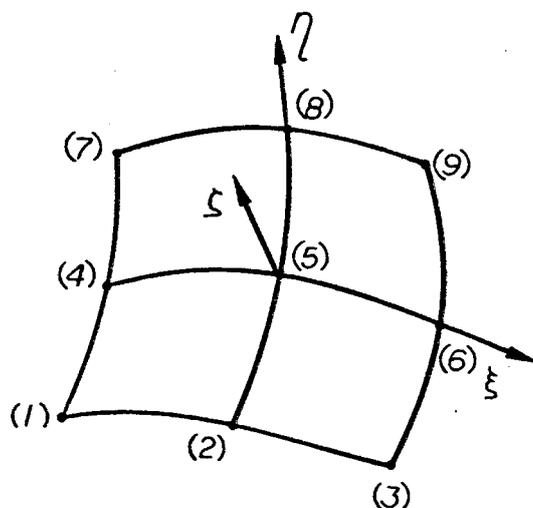


Figura A.1 - Geometria dos elementos 9-FULL, 9-URI e SHELM-9.

Tabela A.1 - Funções de interpolação e suas derivadas.

Nó	N_i	$N_{i,\xi}$	$N_{i,\eta}$
1	$\frac{1}{2} \xi(\xi-1) \frac{1}{2} \eta (\eta-1)$	$\frac{1}{2} (2\xi-1) \frac{1}{2} \eta (\eta-1)$	$\frac{1}{2} \xi(\xi-1) \frac{1}{2} (2\eta-1)$
2	$(1-\xi^2) \frac{1}{2} \eta (\eta-1)$	$-2\xi \frac{1}{2} \eta (\eta-1)$	$(1-\xi^2) \frac{1}{2} (2\eta-1)$
3	$\frac{1}{2} \xi(\xi+1) \frac{1}{2} \eta (\eta-1)$	$\frac{1}{2} (2\xi+1) \frac{1}{2} \eta (\eta-1)$	$\frac{1}{2} \xi(\xi+1) \frac{1}{2} (2\eta-1)$
4	$\frac{1}{2} \xi(\xi-1) (1-\eta^2)$	$\frac{1}{2} (2\xi-1) (1-\eta^2)$	$\frac{1}{2} \xi (\xi-1) (-2\eta)$
5	$(1-\xi^2) (1-\eta^2)$	$-2\xi (1-\eta^2)$	$(1-\xi^2) (-2\eta)$
6	$\frac{1}{2} \xi(\xi+1) (1-\eta^2)$	$\frac{1}{2} (2\xi+1) (1-\eta^2)$	$\frac{1}{2} \xi (\xi+1) (-2\eta)$
7	$\frac{1}{2} \xi(\xi-1) \frac{1}{2} \eta (\eta+1)$	$\frac{1}{2} (2\xi-1) \frac{1}{2} \eta (\eta+1)$	$\frac{1}{2} \xi(\xi-1) \frac{1}{2} (2\eta+1)$
8	$(1-\xi^2) \frac{1}{2} \eta (\eta+1)$	$-2\xi \frac{1}{2} \eta (\eta+1)$	$(1-\xi^2) \frac{1}{2} (2\eta+1)$
9	$\frac{1}{2} \xi(\xi+1) \frac{1}{2} \eta (\eta+1)$	$\frac{1}{2} (2\xi+1) \frac{1}{2} \eta (\eta+1)$	$\frac{1}{2} \xi(\xi+1) \frac{1}{2} (2\eta+1)$

APÊNDICE B

MATRIZ \mathbf{B}^g DE RELAÇÕES DEFORMAÇÕES-DESLOCAMENTOS EM RELAÇÃO AO SISTEMA GLOBAL

A matriz \mathbf{B}^g , que relaciona deformações-deslocamentos em relação ao sistema global, pode ser particionada em 9 blocos de matrizes (6x5), formando uma matriz que tem dimensão (6x45). Mostra-se aqui apenas um destes blocos, já que os outros são determinados pela substituição dos índices correspondentes.

Partindo da equação (24), com as definições das equações (23), pode-se deduzir as seguintes expressões:

$$\varepsilon_{xx}^g = J_{11}^{-1} u_{,\xi} + J_{12}^{-1} u_{,\eta} + J_{13}^{-1} u_{,\zeta} \quad (\text{B.1a})$$

$$\varepsilon_{yy}^g = J_{21}^{-1} v_{,\xi} + J_{22}^{-1} v_{,\eta} + J_{23}^{-1} v_{,\zeta} \quad (\text{B.1b})$$

$$\varepsilon_{zz}^g = J_{31}^{-1} w_{,\xi} + J_{32}^{-1} w_{,\eta} + J_{33}^{-1} w_{,\zeta} \quad (\text{B.1c})$$

$$\gamma_{xy}^g = J_{21}^{-1} u_{,\xi} + J_{22}^{-1} u_{,\eta} + J_{23}^{-1} u_{,\zeta} + J_{11}^{-1} v_{,\xi} + J_{12}^{-1} v_{,\eta} + J_{13}^{-1} v_{,\zeta} \quad (\text{B.1d})$$

$$\gamma_{yz}^g = J_{31}^{-1} v_{,\xi} + J_{32}^{-1} v_{,\eta} + J_{33}^{-1} v_{,\zeta} + J_{21}^{-1} w_{,\xi} + J_{22}^{-1} w_{,\eta} + J_{23}^{-1} w_{,\zeta} \quad (\text{B.1e})$$

$$\gamma_{xz}^g = J_{31}^{-1} u_{,\xi} + J_{32}^{-1} u_{,\eta} + J_{33}^{-1} u_{,\zeta} + J_{11}^{-1} w_{,\xi} + J_{12}^{-1} w_{,\eta} + J_{13}^{-1} w_{,\zeta} \quad (\text{B.1f})$$

Com o auxílio da equação (19), pode-se obter:

$$u_{,\xi} = N_{i,\xi} u_i + \left(-\frac{1}{2} \zeta N_{i,\xi} h_i b_x^i \right) \theta_1^i + \left(\frac{1}{2} \zeta N_{i,\xi} h_i a_x^i \right) \theta_2^i \quad (\text{B.2a})$$

$$u_{,\eta} = N_{i,\eta} u_i + \left(-\frac{1}{2} \zeta N_{i,\eta} h_i b_x^i \right) \theta_1^i + \left(\frac{1}{2} \zeta N_{i,\eta} h_i a_x^i \right) \theta_2^i \quad (\text{B.2b})$$

$$u_{,\zeta} = \left(\frac{1}{2} N_i h_i b_x^i \right) \theta_1^i + \left(\frac{1}{2} N_i h_i a_x^i \right) \theta_2^i \quad (\text{B.2c})$$

$$v_{,\xi} = N_{i,\xi} v_i + \left(-\frac{1}{2} \zeta N_{i,\xi} h_i b_y^i \right) \theta_1^i + \left(\frac{1}{2} \zeta N_{i,\xi} h_i a_y^i \right) \theta_2^i \quad (\text{B.2d})$$

$$v_{,\eta} = N_{i,\eta} v_i + \left(-\frac{1}{2} \zeta N_{i,\eta} h_i b_y^i \right) \theta_1^i + \left(\frac{1}{2} \zeta N_{i,\eta} h_i a_y^i \right) \theta_2^i \quad (\text{B.2e})$$

$$v_{,\zeta} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & N_i h_i b_y^i \\ \frac{1}{2} & N_i h_i a_y^i \end{pmatrix} \theta_1^i + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & N_i h_i a_y^i \\ -\frac{1}{2} & N_i h_i b_y^i \end{pmatrix} \theta_2^i \quad (\text{B.2f})$$

$$w_{,\xi} = N_{i,\xi} w_i + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \zeta & N_{i,\xi} h_i b_z^i \\ \frac{1}{2} \zeta & N_{i,\xi} h_i a_z^i \end{pmatrix} \theta_1^i + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \zeta & N_{i,\xi} h_i a_z^i \\ -\frac{1}{2} \zeta & N_{i,\xi} h_i b_z^i \end{pmatrix} \theta_2^i \quad (\text{B.2g})$$

$$w_{,\eta} = N_{i,\eta} w_i + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \zeta & N_{i,\eta} h_i b_z^i \\ \frac{1}{2} \zeta & N_{i,\eta} h_i a_z^i \end{pmatrix} \theta_1^i + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \zeta & N_{i,\eta} h_i a_z^i \\ -\frac{1}{2} \zeta & N_{i,\eta} h_i b_z^i \end{pmatrix} \theta_2^i \quad (\text{B.2h})$$

$$w_{,\zeta} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & N_i h_i b_z^i \\ \frac{1}{2} & N_i h_i a_z^i \end{pmatrix} \theta_1^i + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & N_i h_i a_z^i \\ -\frac{1}{2} & N_i h_i b_z^i \end{pmatrix} \theta_2^i \quad (\text{B.2i})$$

onde h_i é a espessura no nó i , a_x^i , a_y^i , a_z^i são as componentes globais do vetor nodal e_1^f no nó i e b_x^i , b_y^i , b_z^i são as componentes globais do vetor nodal e_2^f no nó i . Os vetores nodais e_1^f e e_2^f são dados pelas equações (16) e (17).

Substituindo-se as equações (B.2) nas equações (B.1) e ainda denominando-se:

$$A_i = J_{11}^{-1} N_{i,\xi} + J_{12}^{-1} N_{i,\eta} \quad (\text{B.3a})$$

$$B_i = J_{21}^{-1} N_{i,\xi} + J_{22}^{-1} N_{i,\eta} \quad (\text{B.3b})$$

$$C_i = J_{31}^{-1} N_{i,\xi} + J_{32}^{-1} N_{i,\eta} \quad (\text{B.3c})$$

$$D_i = \zeta A_i + J_{13}^{-1} N_i \quad (\text{B.4a})$$

$$E_i = \zeta B_i + J_{23}^{-1} N_i \quad (\text{B.4b})$$

$$F_i = \zeta C_i + J_{33}^{-1} N_i \quad (\text{B.4c})$$

sem soma em i , onde J_{ij}^{-1} são as componentes da inversa da matriz jacobiana, e denominando-se também:

$$e_{11}^i = \frac{h_i a_x^i}{2} \quad (\text{B.5a})$$

$$e_{12}^i = \frac{h_i a_y^i}{2} \quad (\text{B.5b})$$

$$e_{13}^i = \frac{h_i a_z^i}{2} \quad (\text{B.5c})$$

$$e_{21}^i = \frac{h_i b_x^i}{2} \quad (\text{B.5d})$$

$$e_{22}^i = \frac{h_i b_y^i}{2} \quad (\text{B.5e})$$

$$e_{23}^i = \frac{h_i b_z^i}{2} \quad (\text{B.5f})$$

sem soma em i , pode se chegar à seguinte equação:

$$\hat{\varepsilon}^g = \mathbf{B}^g \mathbf{q} \quad (\text{B.6})$$

onde:

$$\hat{\varepsilon}^g = \left\{ \hat{\varepsilon}_{xx}^g \quad \hat{\varepsilon}_{yy}^g \quad \hat{\varepsilon}_{zz}^g \quad \hat{\gamma}_{xy}^g \quad \hat{\gamma}_{yz}^g \quad \hat{\gamma}_{xz}^g \right\}_{(6 \times 1)}^t \quad (\text{B.7})$$

e

$$\mathbf{q} = \left\{ u_1, v_1, w_1, \theta_1^1, \theta_2^1, \dots, u_9, v_9, w_9, \theta_1^9, \theta_2^9 \right\}_{(45 \times 1)}^t \quad (\text{B.8})$$

e, para o nó i , sem somatório em i ,

$$\mathbf{B}_i^g = \left[\begin{array}{cccccc|c} A_i & 0 & 0 & -D_i e_{21}^i & D_i e_{11}^i & & \\ 0 & B_i & 0 & -E_i e_{22}^i & E_i e_{12}^i & & \\ 0 & 0 & C_i & -F_i e_{23}^i & F_i e_{13}^i & & \\ \hline B_i & A_i & 0 & -\left(E_i e_{21}^i + D_i e_{22}^i \right) & \left(E_i e_{11}^i + D_i e_{12}^i \right) & & \\ 0 & C_i & B_i & -\left(F_i e_{22}^i + E_i e_{23}^i \right) & \left(F_i e_{12}^i + E_i e_{13}^i \right) & & \\ \hline C_i & 0 & A_i & -\left(F_i e_{21}^i + D_i e_{23}^i \right) & \left(F_i e_{11}^i + D_i e_{13}^i \right) & & \end{array} \right]_{(6 \times 45)} \quad (\text{B.9})$$

Esta matriz pode ser particionada em duas outras matrizes, uma correspondente aos termos independentes de ζ e outra aos dependentes de ζ . Obtém-se então, para o nó i , sem somatório em i :

$$\mathbf{B}_{0(i)}^g = \begin{bmatrix} A_i & -\left(J_{13}^{-1} N_i e_{21}^i \right) & \left(J_{13}^{-1} N_i e_{11}^i \right) & | \\ B_i & -\left(J_{23}^{-1} N_i e_{22}^i \right) & \left(J_{23}^{-1} N_i e_{12}^i \right) & | \\ C_i & -\left(J_{33}^{-1} N_i e_{23}^i \right) & \left(J_{33}^{-1} N_i e_{13}^i \right) & | \\ B_i A_i & -\left(J_{23}^{-1} N_i e_{21}^i + J_{13}^{-1} N_i e_{22}^i \right) & \left(J_{23}^{-1} N_i e_{11}^i + J_{13}^{-1} N_i e_{12}^i \right) & | \\ C_i B_i & -\left(J_{33}^{-1} N_i e_{22}^i + J_{23}^{-1} N_i e_{23}^i \right) & \left(J_{33}^{-1} N_i e_{12}^i + J_{23}^{-1} N_i e_{13}^i \right) & | \\ C_i A_i & -\left(J_{33}^{-1} N_i e_{21}^i + J_{13}^{-1} N_i e_{23}^i \right) & \left(J_{33}^{-1} N_i e_{11}^i + J_{13}^{-1} N_i e_{13}^i \right) & | \end{bmatrix} \quad (B.10)$$

(6x45)

$$\mathbf{B}_{t(i)}^g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -A_i e_{21}^i & A_i e_{11}^i & | \\ 0 & 0 & 0 & -B_i e_{22}^i & B_i e_{12}^i & | \\ 0 & 0 & 0 & -C_i e_{23}^i & C_i e_{13}^i & | \\ 0 & 0 & 0 & -\left(B_i e_{21}^i + A_i e_{22}^i \right) & \left(B_i e_{11}^i + A_i e_{12}^i \right) & | \\ 0 & 0 & 0 & -\left(C_i e_{22}^i + B_i e_{23}^i \right) & \left(C_i e_{12}^i + B_i e_{13}^i \right) & | \\ 0 & 0 & 0 & -\left(C_i e_{21}^i + A_i e_{23}^i \right) & \left(C_i e_{11}^i + A_i e_{13}^i \right) & | \end{bmatrix} \quad (B.11)$$

(6x45)

APÊNDICE C

MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO DE DEFORMAÇÕES T_e DO SISTEMA GLOBAL PARA O SISTEMA LOCAL

Para se transformar um tensor de deformação em relação a um sistema de bases ortonormais e_1^g, e_2^g, e_3^g global para outro sistema de bases ortonormais e_1^l, e_2^l, e_3^l local, procede-se da seguinte maneira:

Escreve-se os vetores de base e_i^l em função dos vetores de base e_i^g ou seja:

$$e_1^l = (e_1^l \cdot e_1^g) e_1^g + (e_1^l \cdot e_2^g) e_2^g + (e_1^l \cdot e_3^g) e_3^g \quad (C.1a)$$

$$e_2^l = (e_2^l \cdot e_1^g) e_1^g + (e_2^l \cdot e_2^g) e_2^g + (e_2^l \cdot e_3^g) e_3^g \quad (C.1b)$$

$$e_3^l = (e_3^l \cdot e_1^g) e_1^g + (e_3^l \cdot e_2^g) e_2^g + (e_3^l \cdot e_3^g) e_3^g \quad (C.1c)$$

ou na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} e_1^l \\ e_2^l \\ e_3^l \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (e_1^l \cdot e_1^g) & (e_1^l \cdot e_2^g) & (e_1^l \cdot e_3^g) \\ (e_2^l \cdot e_1^g) & (e_2^l \cdot e_2^g) & (e_2^l \cdot e_3^g) \\ (e_3^l \cdot e_1^g) & (e_3^l \cdot e_2^g) & (e_3^l \cdot e_3^g) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_1^g \\ e_2^g \\ e_3^g \end{Bmatrix} \quad (C.2)$$

denominando-se:

$$l_1 = (e_1^l \cdot e_1^g) \quad (C.3a)$$

$$m_1 = (e_1^l \cdot e_2^g) \quad (C.3b)$$

$$n_1 = (e_1^l \cdot e_3^g) \quad (C.3c)$$

$$l_2 = (e_2^l \cdot e_1^g) \quad (C.3d)$$

$$m_2 = (e_2^l \cdot e_2^g) \quad (C.3e)$$

$$n_2 = (e_2^l \cdot e_3^g) \quad (C.3f)$$

$$l_3 = (e_3^l \cdot e_1^g) \quad (C.3g)$$

$$m_3 = (e_3^l \cdot e_2^g) \quad (C.3h)$$

$$n_3 = (e_3^1 \cdot e_3^g) \quad (C.31)$$

escreve-se a matriz dos cossenos diretores na seguinte forma

$$\theta = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \quad (C.4)$$

Substituindo-se a equação (C.4) na equação (28) e expandindo-se e rearranjando-se os termos, obtém-se a seguinte equação de transformação:

$$\tilde{\varepsilon}^1 = \tilde{T}_e \hat{\varepsilon}^g \quad (C.5)$$

onde $\tilde{\varepsilon}^1$ é o vetor de deformação expresso em relação ao sistema local, sendo dado por:

$$\tilde{\varepsilon}^1 = \left\{ \hat{\varepsilon}_{xx}^1, \hat{\varepsilon}_{yy}^1, \hat{\varepsilon}_{zz}^1, \hat{\gamma}_{xy}^1, \hat{\gamma}_{yz}^1, \hat{\gamma}_{zx}^1 \right\}^t \quad (C.6)$$

$\hat{\varepsilon}^g$ é o vetor de deformação expresso em relação ao sistema global, dado pela equação (22), e \tilde{T}_e é a matriz de transformação de deformação do sistema global para o sistema local, dada por:

$$\tilde{T}_e = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & l_1 m_1 & m_1 n_1 & n_1 l_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & l_2 m_2 & m_2 n_2 & n_2 l_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & l_3 m_3 & m_3 n_3 & n_3 l_3 \\ 2l_1 l_2 & 2m_1 m_2 & 2n_1 n_2 & (l_1 m_2 + l_2 m_1) & (m_1 n_2 + m_2 n_1) & (n_1 l_2 + n_2 l_1) \\ 2l_2 l_3 & 2m_2 m_3 & 2n_2 n_3 & (l_2 m_3 + l_3 m_2) & (m_2 n_3 + m_3 n_2) & (n_2 l_3 + n_3 l_2) \\ 2l_3 l_1 & 2m_3 m_1 & 2n_3 n_1 & (l_3 m_1 + l_1 m_3) & (m_3 n_1 + m_1 n_3) & (n_3 l_1 + n_1 l_3) \end{bmatrix}_{6 \times 6} \quad (C.7)$$

APÊNDICE D

MATRIZ DE INÉRCIA

A matriz de inércia consistente é obtida através da expressão da energia cinética T do elemento, sendo escrita na forma:

$$T = \frac{1}{2} \int \rho \dot{u}^2 dV \quad (D.1)$$

Os deslocamentos destes elementos são dados pela equação (2.13), ou seja

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = N_i \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix}_{\zeta=0} + \zeta \frac{1}{2} N_i h_i \begin{Bmatrix} -\theta_1^i e_{12x}^{fi} + \theta_2^i e_{21x}^{fi} \\ -\theta_1^i e_{12y}^{fi} + \theta_2^i e_{21y}^{fi} \\ -\theta_1^i e_{12z}^{fi} + \theta_2^i e_{21z}^{fi} \end{Bmatrix} \quad (D.2a)$$

A equação acima pode ser escrita na forma:

$$u = \tilde{N}_1 q + \zeta \tilde{N}_2 q \quad (D.2b)$$

onde q é o vetor das variáveis nodais na forma da equação (21) e \tilde{N}_1 , \tilde{N}_2 são dadas respectivamente por:

$$\tilde{N}_1 = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} N_9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_9 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 45} \quad (D.3)$$

$$\tilde{N}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2} N_1 h_{11} b_x^1\right) & \left(\frac{1}{2} N_1 h_{11} a_x^1\right) \\ 0 & 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2} N_1 h_{11} b_y^1\right) & \left(\frac{1}{2} N_1 h_{11} a_y^1\right) \\ 0 & 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2} N_1 h_{11} b_z^1\right) & \left(\frac{1}{2} N_1 h_{11} a_z^1\right) \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2} N_9 h_9 b_x^9\right) & \left(\frac{1}{2} N_9 h_9 a_x^9\right) \\ 0 & 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2} N_9 h_9 b_y^9\right) & \left(\frac{1}{2} N_9 h_9 a_y^9\right) \\ 0 & 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2} N_9 h_9 b_z^9\right) & \left(\frac{1}{2} N_9 h_9 a_z^9\right) \end{bmatrix}_{3 \times 5} \quad (D.4)$$

onde N_i são as funções de interpolação do elemento dadas pela tabela A.1; h_i são as espessuras nodais, a_x^i, a_y^i, a_z^i e b_x^i, b_y^i, b_z^i são as componentes dos vetores nodais unitários e_1^f, e_2^f , respectivamente, no nó i . Os vetores e_1^f, e_2^f são dados pelas equações (16) e (17), nesta ordem.

Derivando em relação ao tempo a equação (D.2b), e substituindo-se na equação (D.1), tem-se

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^t \left\{ \int \rho \left[\left(\tilde{N}_1 + \zeta \tilde{N}_2 \right)^t \left(\tilde{N}_1 + \zeta \tilde{N}_2 \right) \right] |J|_{\zeta=0} d\zeta d\xi d\eta \right\} \dot{\mathbf{q}} \quad (D.5)$$

integrando-se na direção da espessura e sabendo-se que:

$$\int_{-1}^{+1} d\zeta = 2 \quad (D.6a)$$

$$\int_{-1}^{+1} \zeta d\zeta = 0 \quad (D.6b)$$

$$\int_{-1}^{+1} \zeta^2 d\zeta = \frac{2}{3} \quad (D.6c)$$

pode-se chegar a:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^t \left[2 \int \rho \tilde{N}_1^t \tilde{N}_1 |J|_{\zeta=0} d\xi d\eta + \frac{2}{3} \int \rho \tilde{N}_2^t \tilde{N}_2 |J|_{\zeta=0} d\xi d\eta \right] \dot{\mathbf{q}} \quad (D.7)$$

ou

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^t \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \quad (D.8)$$

A matriz:

$$\mathbf{M} = 2 \int \rho \tilde{N}_1^t \tilde{N}_1 |J|_{\zeta=0} d\xi d\eta + \frac{2}{3} \int \rho \tilde{N}_2^t \tilde{N}_2 |J|_{\zeta=0} d\xi d\eta \quad (D.9)$$

é a matriz de inércia consistente para este elemento, onde ρ é a densidade do material, \tilde{N}_1 e \tilde{N}_2 são dadas pelas equações (D.3), (D.4) e $|J|_{\zeta=0}$ é o determinante da matriz jacobiana, calculada em $\zeta=0$.

APÊNDICE E

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA PELA QUADRATURA DE GAUSS

As matrizes resultantes dos processos de discretização via elementos finitos são do tipo:

$$A = \int f_A \, d\xi \, d\eta \, d\zeta \quad (E.1)$$

Normalmente a função " f_A " é dependente das variáveis naturais ξ , η , ζ , cuja integração analítica é difícil de ser realizada. Recorre-se a um processo numérico de integração, sendo adotado neste trabalho o mais comum deles, que é o processo de integração pela quadratura de Gauss. Neste processo tem-se:

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta, \zeta) \, d\xi \, d\eta \, d\zeta = w_i w_j w_k \cdot f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \quad (E.2)$$

$$(i=1,2,\dots,n_i) \quad (j=1,2,\dots,n_j) \quad (k=1,2,\dots,n_k)$$

onde

w_i → pesos de integração

ξ_i, η_j, ζ_k → coordenadas dos pontos de integração

n_i, n_j, n_k → número de pontos nas direções i , j e k , respectivamente

ξ, η, ζ → coordenadas naturais do elemento

A tabela I.1 dá as coordenadas dos pontos e pesos para cada ordem de integração.

TABELA I.1 - Coordenadas e pesos de integração.

η	i	ξ_i	w_i
1	1	0	2
2	1	$1/\sqrt{3}$	1
	2	$-1/\sqrt{3}$	2
3	1	0	8/9
	2	$\sqrt{15}/5$	5/9
	3	$-\sqrt{15}/5$	5/9
4	1	0,861136311594053	0,347854845137454
	2	-0,861136311594053	0,347854845137454
	3	0,339981043584856	0,652145154862546
	4	-0,339981043584856	0,652145154862546

APÊNDICE F

DETERMINAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO SHELM-9

Partindo-se do funcional dado pela equação (63) tem-se:

$$\Pi_r(u, \bar{\varepsilon}^1) = \int_V \left(-\frac{1}{2} \bar{\varepsilon}^{1t} \mathbf{D} \bar{\varepsilon}^1 + \bar{\varepsilon}^{1t} \mathbf{D} \hat{\varepsilon}^1 \right) dV - W_0 \quad (\text{F.1})$$

onde $\bar{\varepsilon}^1$ é o vetor das deformações independentes referente ao sistema local, $\hat{\varepsilon}^1$ é o vetor das deformações provenientes dos deslocamentos, também referente ao sistema local, \mathbf{D} é a matriz de relações constitutivas tensões-deformações e W_0 é o trabalho devido à aplicação das cargas externas. O elemento infinitesimal de volume dV pode ser calculado através da seguinte expressão:

$$dV = |\mathbf{J}|_{\zeta=0} d\xi d\eta d\zeta \quad (\text{F.2})$$

onde $|\mathbf{J}|_{\zeta=0}$ é o determinante da matriz jacobiana dada pela equação (25), calculado em $\zeta=0$, já que é considerado que $|\mathbf{J}|$ não varia muito com a espessura. Além disso a matriz de relações constitutivas tensões-deformações, \mathbf{D} , pode ser particionada na forma:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & \\ & \mathbf{D}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{F.3})$$

onde \mathbf{D}_1 , \mathbf{D}_2 são dados pelas equações (47) e (48), respectivamente.

Os vetores $\bar{\varepsilon}^1$ e $\hat{\varepsilon}^1$ são dados pelas equações (73) e (36), sendo reescritos aqui:

$$\bar{\varepsilon}^1 = \begin{Bmatrix} \varepsilon_m^1 \\ \gamma_s^1 \end{Bmatrix} + \zeta \begin{Bmatrix} \varepsilon_b^1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{F.3})$$

$$\hat{\varepsilon}^1 = \begin{Bmatrix} \hat{\varepsilon}_m^1 \\ \hat{\gamma}_s^1 \end{Bmatrix} + \zeta \begin{Bmatrix} \hat{\varepsilon}_b^1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{F.4})$$

Substituindo-se as equações (F.3) e (F.4) em (F.1), com o uso de (F.2), pode-se obter:

$$\Pi_r = \int_V \left\{ -\frac{1}{2} \left(\bar{\varepsilon}_m^{-1t} \mathbf{D}_1 \bar{\varepsilon}_m^{-1} + \zeta^2 \bar{\varepsilon}_b^{-1t} \mathbf{D}_1 \bar{\varepsilon}_b^{-1} + \bar{\gamma}_s^{-1t} \mathbf{D}_2 \bar{\gamma}_s^{-1} \right) + \dots \right. \\ \left. \left(\hat{\varepsilon}_m^{-1t} \mathbf{D}_1 \hat{\varepsilon}_m^{-1} + \zeta^2 \hat{\varepsilon}_b^{-1t} \mathbf{D}_1 \hat{\varepsilon}_b^{-1} + \hat{\gamma}_s^{-1t} \mathbf{D}_2 \hat{\gamma}_s^{-1} \right) \right\} |\mathbf{J}|_{\zeta=0} d\xi d\eta d\zeta - W_0 \quad (\text{F.5})$$

Integrando-se na direção de ζ e rearranjando-se os termos, obtém-se:

$$\Pi_r = \int_A \left(-\frac{1}{2} \bar{\varepsilon}_m^{-1t} \mathbf{D}_m \bar{\varepsilon}_m^{-1} + \bar{\varepsilon}_m^{-1t} \mathbf{D}_m \hat{\varepsilon}_m^{-1} \right) |\mathbf{J}|_{\zeta=0} d\xi d\eta + \\ \int_A \left(-\frac{1}{2} \bar{\varepsilon}_b^{-1t} \mathbf{D}_b \bar{\varepsilon}_b^{-1} + \bar{\varepsilon}_b^{-1t} \mathbf{D}_b \hat{\varepsilon}_b^{-1} \right) |\mathbf{J}|_{\zeta=0} d\xi d\eta + \\ \int_A \left(-\frac{1}{2} \bar{\gamma}_s^{-1t} \mathbf{D}_s \bar{\gamma}_s^{-1} + \bar{\gamma}_s^{-1t} \mathbf{D}_s \hat{\gamma}_s^{-1} \right) |\mathbf{J}|_{\zeta=0} d\xi d\eta - W_0 \quad (\text{F.6})$$

onde:

$$\mathbf{D}_m = \int_{-1}^{+1} \mathbf{D}_1 d\zeta = \frac{2E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{F.7a})$$

$$\mathbf{D}_b = \int_{-1}^{+1} \zeta^2 \mathbf{D}_1 d\zeta = \frac{2E}{3(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{F.7b})$$

$$\mathbf{D}_s = \int_{-1}^{+1} \mathbf{D}_2 d\zeta = \kappa 2G \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{F.7c})$$

onde E e ν são o módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson do material do elemento, respectivamente, κ é o fator de correção das tensões cisalhantes transversais e G é o módulo de elasticidade transversal, dado pela equação (49).

Sabendo-se que:

$$\bar{\varepsilon}_m^{-1} = \mathbf{P}_m \beta_m \quad (\text{F.8a})$$

$$\zeta \bar{\varepsilon}_b^{-1} = \zeta \mathbf{P}_m \beta_b \quad (\text{F.8b})$$

$$\bar{\gamma}_s^{-1} = \mathbf{P}_s \beta_s \quad (\text{F.8c})$$

$$\hat{\varepsilon}_m^{-1} = \mathbf{B}_m \mathbf{q} \quad (\text{F.8d})$$

$$\zeta \hat{\varepsilon}_b^{-1} = \zeta \mathbf{B}_b \mathbf{q} \quad (\text{F.8e})$$

$$\hat{\gamma}_s^{-1} = \mathbf{B}_s \mathbf{q} \quad (\text{F.8f})$$

onde β_m , β_b , β_s são os vetores das variáveis nodais de deformações de membrana, flexão e cisalhamento, respectivamente, q é o vetor de variáveis nodais de deslocamentos e P_m , P_s são dados por:

$$P_m = T_m P_m^n \quad (F.9a)$$

$$P_s = T_s P_s^n \quad (F.9b)$$

onde P_m^n e P_s^n são por sua vez:

$$P_m^n = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi\eta & \eta^2 & \xi\eta^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi^2 & 0 & 1 & \xi & \eta & \xi\eta & \xi^2\eta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \eta & \xi\eta \end{bmatrix}_{(3 \times 15)} \quad (F.9c)$$

$$P_s^n = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi\eta & \xi^2\eta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi\eta^2 & 1 & \xi & \eta & \xi\eta \end{bmatrix}_{(2 \times 9)} \quad (F.9d)$$

com T_m e T_s definidos pelas equações (G.15) e (G.16) e B_m , B_b , B_s sendo dados respectivamente pelas equações (37), (38) e (39).

Com isto, substituindo-se as equações (F.8) em (F.6) e usando as equações (F.9), pode-se chegar a:

$$\begin{aligned} \Pi_r = & -\frac{1}{2} \beta_m^t \left(\int_A P_m^t D_m P_m |J|_{\zeta=0} d\xi d\eta \right) \beta_m + \beta_m^t \left(\int_A P_m^t D_m B_m |J|_{\zeta=0} d\xi d\eta \right) q + \\ & -\frac{1}{2} \beta_b^t \left(\int_A P_m^t D_b P_m |J|_{\zeta=0} d\xi d\eta \right) \beta_b + \beta_b^t \left(\int_A P_m^t D_b B_b |J|_{\zeta=0} d\xi d\eta \right) q + \\ & -\frac{1}{2} \beta_s^t \left(\int_A P_s^t D_s P_s |J|_{\zeta=0} d\xi d\eta \right) \beta_s + \beta_s^t \left(\int_A P_s^t D_s B_s |J|_{\zeta=0} d\xi d\eta \right) q - W_0 \quad (F.10) \end{aligned}$$

Denominando-se,

$$G_m = \int_A P_m^t D_m B_m |J|_{\zeta=0} d\xi d\eta \quad (F.11a)$$

$$G_b = \int_A P_m^t D_b B_b |J|_{\zeta=0} d\xi d\eta \quad (F.11b)$$

$$G_s = \int_A P_s^t D_s B_s |J|_{\zeta=0} d\xi d\eta \quad (F.11c)$$

$$\mathbf{H}_m = \int_A \mathbf{P}_m^t \mathbf{D}_m \mathbf{P}_m |J|_{\zeta=0} d\xi d\eta \quad (\text{F.12a})$$

$$\mathbf{H}_b = \int_A \mathbf{P}_m^t \mathbf{D}_b \mathbf{P}_m |J|_{\zeta=0} d\xi d\eta \quad (\text{F.12b})$$

$$\mathbf{H}_s = \int_A \mathbf{P}_s^t \mathbf{D}_s \mathbf{P}_s |J|_{\zeta=0} d\xi d\eta \quad (\text{F.12c})$$

pode-se reescrever a equação (F.10) na forma:

$$\begin{aligned} \Pi_r = & \left(-\frac{1}{2} \beta_m^t \mathbf{H}_m \beta_m + \beta_m^t \mathbf{G}_m \mathbf{q} \right) + \left(-\frac{1}{2} \beta_b^t \mathbf{H}_b \beta_b + \beta_b^t \mathbf{G}_b \mathbf{q} \right) + \\ & \left(-\frac{1}{2} \beta_s^t \mathbf{H}_s \beta_s + \beta_s^t \mathbf{H}_s \mathbf{q} \right) - W_0 \end{aligned} \quad (\text{F.13})$$

onde os índices "m", "b", "s" estão sempre associados a membrana, flexão e cisalhamento, respectivamente.

Fazendo a estacionariedade de Π_r ($\delta \Pi_r = 0$) em relação aos vetores β_m , β_b , β_s chega-se a:

$$\mathbf{G}_m \mathbf{q} - \mathbf{H}_m \beta_m = 0 \quad (\text{F.14a})$$

$$\mathbf{G}_b \mathbf{q} - \mathbf{H}_b \beta_b = 0 \quad (\text{F.14b})$$

$$\mathbf{G}_s \mathbf{q} - \mathbf{H}_s \beta_s = 0 \quad (\text{F.14c})$$

Das equações (F.14) determina-se:

$$\beta_m = \mathbf{H}_m^{-1} \mathbf{G}_m \mathbf{q} \quad (\text{F.15a})$$

$$\beta_b = \mathbf{H}_b^{-1} \mathbf{G}_b \mathbf{q} \quad (\text{F.15b})$$

$$\beta_s = \mathbf{H}_s^{-1} \mathbf{G}_s \mathbf{q} \quad (\text{F.15c})$$

Substituindo-se as equações (F.15) em (F.13), com $W_0 = \mathbf{q}^t \mathbf{f}$, tem-se:

$$\Pi_r = \frac{1}{2} \left[\mathbf{q}^t \left(\mathbf{G}_m^t \mathbf{H}_m^{-1} \mathbf{G}_m + \mathbf{G}_b^t \mathbf{H}_b^{-1} \mathbf{G}_b + \mathbf{G}_s^t \mathbf{H}_s^{-1} \mathbf{G}_s \right) \mathbf{q} \right] - \mathbf{q}^t \mathbf{f} \quad (\text{F.16})$$

ou na forma mais reduzida:

$$\Pi_r = \frac{1}{2} \mathbf{q}^t \mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{q}^t \mathbf{f} \quad (\text{F.17})$$

onde \mathbf{K} é a matriz de rigidez dada por:

$$\mathbf{K} = \mathbf{G}_m^t \mathbf{H}_m^{-1} \mathbf{G}_m + \mathbf{G}_b^t \mathbf{H}_b^{-1} \mathbf{G}_b + \mathbf{G}_s^t \mathbf{H}_s^{-1} \mathbf{G}_s \quad (\text{F.18})$$

APÊNDICE G

MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO DE DEFORMAÇÕES DO SISTEMA NATURAL PARA O SISTEMA LOCAL

O vetor de deformação $\bar{\epsilon}^l$ que aparece no princípio de Hellinger-Reissner modificado, conforme a equação (63), é um vetor de deformação referenciado ao sistema local de coordenadas. Porém, as deformações mostradas de acordo com as equações (71) são referenciadas ao sistema natural (ξ, η, ζ) do elemento. Naturalmente a transformação de tais deformações do sistema natural para o sistema local se faz necessária. Esta transformação é realizada através da seguinte transformação tensorial:

$$\bar{E}^l = \Phi^t \bar{E}^n \Phi \quad (G.1)$$

onde \bar{E}^l é o tensor de deformação referente ao sistema local, \bar{E}^n é o tensor de deformação referente ao sistema natural e Φ é a matriz de transformação do sistema natural para o sistema local.

O tensor \bar{E}^l é dado por:

$$\begin{bmatrix} \bar{\epsilon}_{xx}^{ll} & \bar{\epsilon}_{xy}^{ll} & \bar{\epsilon}_{xz}^{ll} \\ \bar{\epsilon}_{yx}^{ll} & \bar{\epsilon}_{yy}^{ll} & \bar{\epsilon}_{yz}^{ll} \\ \bar{\epsilon}_{zx}^{ll} & \bar{\epsilon}_{zy}^{ll} & \bar{\epsilon}_{zz}^{ll} \end{bmatrix} \quad (G.2)$$

O tensor \bar{E}^n é dado por:

$$\begin{bmatrix} \bar{\epsilon}_{\xi\xi} & \bar{\epsilon}_{\xi\eta} & \bar{\epsilon}_{\xi\zeta} \\ \bar{\epsilon}_{\eta\xi} & \bar{\epsilon}_{\eta\eta} & \bar{\epsilon}_{\eta\zeta} \\ \bar{\epsilon}_{\zeta\xi} & \bar{\epsilon}_{\zeta\eta} & \bar{\epsilon}_{\zeta\zeta} \end{bmatrix} \quad (G.3)$$

A determinação da matriz Φ pode ser realizada da seguinte maneira: considerando-se os sistemas de coordenadas global X , local X^l , natural X^n e as seguintes transformações entre eles:

$$\mathbf{x} = \mathbf{J} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}^n \end{pmatrix} \mathbf{x}^n \quad (\text{G.4})$$

$$\mathbf{x}^n = \Phi \begin{pmatrix} \mathbf{x}^n \\ \mathbf{x}^1 \end{pmatrix} \mathbf{x}^1 \quad (\text{G.5})$$

$$\mathbf{x} = \theta \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}^1 \end{pmatrix} \mathbf{x}^1 \quad (\text{G.6})$$

onde \mathbf{J} é a matriz jacobiana de transformação do sistema global para o sistema natural, Φ é a matriz jacobiana de transformação do sistema natural para o sistema local e θ a matriz dos cossenos diretores entre os sistemas local e global. Além disso \mathbf{x} , \mathbf{x}^n e \mathbf{x}^1 são vetores associados aos sistemas global, natural e local, respectivamente.

Substituindo-se a equação (G.5) em (G.4) e igualando-se o resultado a (G.6), obtém-se a seguinte relação:

$$\mathbf{J} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}^n \end{pmatrix} \Phi \begin{pmatrix} \mathbf{x}^n \\ \mathbf{x}^1 \end{pmatrix} = \theta \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}^1 \end{pmatrix} \quad (\text{G.7})$$

Pré-multiplicando os dois lados da equação (G.7) por $\mathbf{J}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}^n \end{pmatrix}$, obtém-se a matriz jacobiana procurada, ou seja:

$$\Phi \begin{pmatrix} \mathbf{x}^n \\ \mathbf{x}^1 \end{pmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}^n \end{pmatrix} \theta \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}^1 \end{pmatrix} \quad (\text{G.8})$$

onde \mathbf{J}^{-1} é a inversa da matriz jacobiana dada pela equação (25), calculada em $\xi=0$, $\eta=0$ e $\zeta=0$. θ é a matriz dos cossenos diretores entre os sistemas global e local e $\Phi \begin{pmatrix} \mathbf{x}^n \\ \mathbf{x}^1 \end{pmatrix}$ a matriz jacobiana de transformação do sistema natural para o sistema local.

A matriz θ é dada por:

$$\begin{bmatrix} \left(\begin{matrix} e_1^1 \cdot e_1^g \\ e_2^1 \cdot e_1^g \\ e_3^1 \cdot e_1^g \end{matrix} \right) & \left(\begin{matrix} e_1^1 \cdot e_2^g \\ e_2^1 \cdot e_2^g \\ e_3^1 \cdot e_2^g \end{matrix} \right) & \left(\begin{matrix} e_1^1 \cdot e_3^g \\ e_2^1 \cdot e_3^g \\ e_3^1 \cdot e_3^g \end{matrix} \right) \end{bmatrix} \quad (\text{G.9})$$

onde $\mathbf{e}_1^g, \mathbf{e}_2^g, \mathbf{e}_3^g$ são os vetores de base ortonormais associados ao sistema global; $\mathbf{e}_1^l, \mathbf{e}_2^l, \mathbf{e}_3^l$ são os vetores de base ortonormais associados ao sistema local.

A transformação dada pela equação (G.1) é realizada apenas no plano (ξ, η) , de forma que ela pode ser expressa da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_{xx}^{1l} & \bar{\varepsilon}_{xy}^{1l} & \bar{\varepsilon}_{xz}^{1l} \\ \bar{\varepsilon}_{yx}^{1l} & \bar{\varepsilon}_{yy}^{1l} & \bar{\varepsilon}_{yz}^{1l} \\ \bar{\varepsilon}_{zx}^{1l} & \bar{\varepsilon}_{zy}^{1l} & \bar{\varepsilon}_{zz}^{1l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{21} & 0 \\ \phi_{12} & \phi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_{\xi\xi} & \bar{\varepsilon}_{\xi\eta} & \bar{\varepsilon}_{\xi\zeta} \\ \bar{\varepsilon}_{\eta\xi} & \bar{\varepsilon}_{\eta\eta} & \bar{\varepsilon}_{\eta\zeta} \\ \bar{\varepsilon}_{\zeta\xi} & \bar{\varepsilon}_{\zeta\eta} & \bar{\varepsilon}_{\zeta\zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & 0 \\ \phi_{21} & \phi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (G.10)$$

Expandindo-se o lado direito da equação (G.10) e realizando-se alguns agrupamentos pode-se chegar a:

$$\bar{\varepsilon}_m^{-1} = \mathbf{T}_m \bar{\varepsilon}_m^{-n} \quad (G.11a)$$

$$\zeta \bar{\varepsilon}_b^{-1} = \zeta \mathbf{T}_m \bar{\varepsilon}_b^{-n} \quad (G.11b)$$

$$\bar{\gamma}_s^{-1} = \mathbf{T}_s \bar{\gamma}_s^{-n} \quad (G.11c)$$

onde $\bar{\varepsilon}_m^{-1}, \zeta \bar{\varepsilon}_b^{-1}, \bar{\gamma}_s^{-1}$ são as parcelas de deformações de membrana, flexão e cisalhamento, respectivamente, referenciadas ao sistema local. $\bar{\varepsilon}_m^{-n}, \zeta \bar{\varepsilon}_b^{-n}, \bar{\gamma}_s^{-n}$ são as parcelas de deformações de membrana, flexão e cisalhamento, respectivamente, referenciadas ao sistema natural (ξ, η, ζ) . Estas deformações são dadas pelas equações (71), ou seja:

$$\bar{\varepsilon}_m^{-n} = \mathbf{P}_m^n \beta_m \quad (G.12a)$$

$$\zeta \bar{\varepsilon}_b^{-n} = \zeta \mathbf{P}_m^n \beta_b \quad (G.12b)$$

$$\bar{\gamma}_s^{-n} = \mathbf{P}_s^n \beta_s \quad (G.12c)$$

onde \mathbf{P}_m^n e \mathbf{P}_s^n são dados por:

$$\mathbf{P}_m^n = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi\eta & \eta^2 & \xi\eta^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi^2 & 0 & 1 & \xi & \eta & \xi\eta & \xi^2\eta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \eta & \xi\eta \end{bmatrix} \quad (G.13)$$

$$\mathbf{P}_s^n = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi\eta & \xi^2\eta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi\eta^2 & 1 & \xi & \eta & \xi\eta \end{bmatrix} \quad (G.14)$$

Com relação às equações (G.12), β_m , β_b e β_s são os vetores dos parâmetros de deformações de membrana, flexão e cisalhamento, respectivamente.

As matrizes T_m e T_s que aparecem nas equações (G.11), provenientes da equação (G.10), são dadas por:

$$T_m = \begin{bmatrix} (\phi_{11} & \phi_{11}) & (\phi_{21} & \phi_{21}) & (\phi_{11} & \phi_{21}) \\ (\phi_{12} & \phi_{12}) & (\phi_{22} & \phi_{22}) & (\phi_{12} & \phi_{22}) \\ (2\phi_{11} & \phi_{12} & 2\phi_{21} & \phi_{22}) & (\phi_{11} & \phi_{22} + \phi_{12} & \phi_{21}) \end{bmatrix} \quad (G.15)$$

$$T_s = \begin{bmatrix} \phi_{22} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{11} \end{bmatrix} \quad (G.16)$$

Substituindo-se as equações (G.12) em (G.11) obtém-se:

$$\varepsilon_m^{-1} = T_m P_m^n \beta_m \quad (G.17a)$$

$$\zeta \varepsilon_b^{-1} = \zeta T_m P_m^n \beta_b \quad (G.17b)$$

$$\gamma_s^{-1} = T_s P_s^n \beta_s \quad (G.17c)$$

Denominando-se:

$$P_m = T_m P_m^n \quad (G.18a)$$

$$P_s = T_s P_s^n \quad (G.18b)$$

as equações (G.17) podem ser reescritas na seguinte forma:

$$\varepsilon_m^{-1} = P_m \beta_m \quad (G.19a)$$

$$\zeta \varepsilon_b^{-1} = \zeta P_m \beta_b \quad (G.19b)$$

$$\gamma_s^{-1} = P_s \beta_s \quad (G.19c)$$

APÊNDICE H

DETERMINAÇÃO DOS ESFORÇOS NOS ELEMENTOS 9-FULL, 9-URI E SHELM-9

Considera-se os elementos mostrados na figura (H.1), referentes ao sistema global, juntamente com seus esforços por unidade de comprimento N_{xx} , N_{yy} , N_{xy} , M_{xx} , M_{yy} , M_{xy} , Q_{yz} e Q_{xz} .

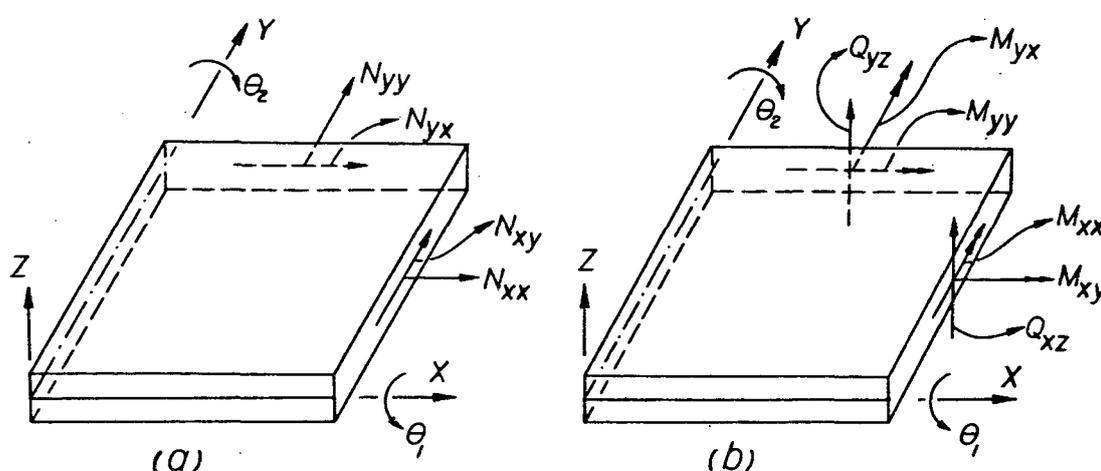


Figura H.1 - Esforços em um elemento de casca.

Dados os deslocamentos (u^g, v^g, w^g) em relação ao sistema global:

$$u^g = u + z \beta_x \quad (H.1a)$$

$$v^g = v + z \beta_y \quad (H.1b)$$

$$w^g = w + z \beta_z \quad (H.1c)$$

com:

$$\beta_x = \begin{bmatrix} -\theta_1 e_{2_x}^f + \theta_2 e_{1_x}^f \end{bmatrix} \quad (H.2a)$$

$$\beta_y = \begin{bmatrix} -\theta_1 e_{2_y}^f + \theta_2 e_{1_y}^f \end{bmatrix} \quad (H.2b)$$

$$\beta_z \approx 0 \quad (H.2c)$$

onde θ_1, θ_2 são as rotações mostradas pela figura H.1 e e_1^f, e_2^f sendo dados pelas equações (16) e (17). Além disso $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ e $w = w(x,y)$.

Sabendo-se que:

$$\varepsilon_{xx}^g = u_{,x}^g = \varepsilon_{xx} + z k_{xx} \quad (H.3a)$$

$$\varepsilon_{yy}^g = v_{,y}^g = \varepsilon_{yy} + z k_{yy} \quad (H.3b)$$

$$\varepsilon_{zz}^g = w_{,z}^g = 0 \quad (H.3c)$$

$$\gamma_{xy}^g = u_{,y}^g + v_{,x}^g = \gamma_{xy} + z k_{xy} \quad (H.3d)$$

$$\gamma_{yz}^g = v_{,z}^g + w_{,y}^g = \beta_y + w_{,y} \quad (H.3e)$$

$$\gamma_{xz}^g = u_{,z}^g + w_{,x}^g = \beta_x + w_{,x} \quad (H.3f)$$

onde k_{xx}, k_{yy} e k_{xy} são as mudanças de curvaturas dadas por:

$$k_{xx} = \beta_{x,x} \quad (H.4a)$$

$$k_{yy} = \beta_{y,y} \quad (H.4b)$$

$$k_{xy} = \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \quad (H.4c)$$

Impondo-se um estado plano de tensões, no qual:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left(\varepsilon_{xx}^g + \nu \varepsilon_{yy}^g \right) \quad (H.5a)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left(\nu \varepsilon_{xx}^g + \varepsilon_{yy}^g \right) \quad (H.5b)$$

$$\sigma_{xy} = G \gamma_{xy}^g \quad (H.5c)$$

$$\sigma_{yz} = \kappa G \gamma_{yz}^g \quad (H.5d)$$

$$\sigma_{xz} = \kappa G \gamma_{xz}^g \quad (H.5e)$$

onde E, G e ν são o módulo de elasticidade longitudinal, módulo de elasticidade transversal e coeficiente de Poisson do material, respectivamente. O fator " κ " é usado para corrigir a distribuição de tensões cisalhantes σ_{yz}, σ_{xz} ao longo da espessura.

O módulo de elasticidade transversal é dado por:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{H.6})$$

Os esforços por unidade de comprimento são dados por:

$$N_{xx} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{xx} dz = \frac{E h}{(1-\nu^2)} \left(\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy} \right) \quad (\text{H.7a})$$

$$N_{yy} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{yy} dz = \frac{E h}{(1-\nu^2)} \left(\nu \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} \right) \quad (\text{H.7b})$$

$$N_{xy} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{xy} dz = Gh \gamma_{xy} \quad (\text{H.7c})$$

$$M_{xx} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{xx} z dz = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \left(k_{xx} + \nu k_{yy} \right) \quad (\text{H.7d})$$

$$M_{yy} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{yy} z dz = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \left(\nu k_{xx} + k_{yy} \right) \quad (\text{H.7e})$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{xy} z dz = \frac{G h^3}{12} k_{xy} \quad (\text{H.7f})$$

$$Q_{yz} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{yz} z dz = \kappa Gh \gamma_{yz} \quad (\text{H.7g})$$

$$Q_{xz} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{xz} z dz = \kappa Gh \gamma_{xz} \quad (\text{H.7h})$$

Matricialmente as equações (H.7) podem ser escritas:

$$N = K_1 \varepsilon_m \quad (\text{H.8a})$$

$$M = K_2 \varepsilon_b \quad (\text{H.8b})$$

$$Q = K_3 \gamma_s \quad (\text{H.8c})$$

Com:

$$K_1 = \frac{E h}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{H.9a})$$

$$K_2 = \frac{E h^3}{12 (1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{H.9b})$$

$$K_3 = \kappa Gh \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{H.9c})$$

$$N = \left\{ N_{xx} \quad N_{yy} \quad N_{xy} \right\}^t \quad (\text{H.10a})$$

$$M = \left\{ M_{xx} \quad M_{yy} \quad M_{xy} \right\}^t \quad (\text{H.10b})$$

$$Q = \left\{ Q_{yz} \quad Q_{xz} \right\}^t \quad (\text{H.10c})$$

$$\varepsilon_m = \left\{ \varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \gamma_{xy} \right\}^t \quad (\text{H.11a})$$

$$\varepsilon_b = \left\{ k_{xx} \quad k_{yy} \quad k_{xy} \right\}^t \quad (\text{H.11b})$$

$$\gamma_s = \left\{ \gamma_{yz} \quad \gamma_{xz} \right\}^t \quad (\text{H.11c})$$

Estes esforços também podem ser determinados com relação a um sistema local. Neste caso tem-se:

$$N^l = K_1 \varepsilon_m^l \quad (\text{H.12a})$$

$$M^l = \frac{2}{h} K_2 \varepsilon_b^l \quad (\text{H.12b})$$

$$Q^l = K_3 \gamma_s^l \quad (\text{H.12c})$$

Comentários:

- 1) Até agora não foi feita nenhuma referência a respeito de quais são os vetores de deformação que aparecem nas equações (H.12). No caso de se estar determinando os esforços do elemento SHELM-9, os vetores de deformações ε_m^l , ε_b^l e γ_s^l , a serem utilizados nas equações (H.12), são dados pelas equações (74). No caso dos elementos 9-FULL e 9-URI, os vetores de deformação a serem utilizados nas equações

(H.12) são dados pelas equações (37), (38) e (39).

- 2) A razão do aparecimento da constante $2/h$ na equação (H.12b) se deve ao fato de que as integrais dadas pelas equações (H.7) foram realizadas com o uso da variável de integração "z". No entanto, o vetor de deformação ϵ_b da equação (H.11b) é dado em função da variável "z" em um sistema local. É necessário então uma mudança de variável na integral de forma que:

$$\zeta = \frac{2}{h} z \quad (\text{H.13})$$

onde h é a espessura da casca, ζ é uma coordenada natural que varia de -1 a $+1$ e "z" a variável de integração que varia de $-\frac{h}{2}$ a $+\frac{h}{2}$.

APÊNDICE I

DETERMINAÇÃO DAS TENSÕES DO ELEMENTO SHELM-9

Determinadas as variáveis nodais \mathbf{q} , através da solução da equação (83), as tensões do elemento SHELM-9 podem ser encontradas.

As tensões do elemento SHELM-9 em relação ao sistema de coordenadas local são dadas por:

$$\sigma_p^1 = \mathbf{D}_1 \varepsilon_p^1 \quad (I.1a)$$

$$\sigma_s^1 = \mathbf{D}_2 \gamma_s^1 \quad (I.1b)$$

onde os vetores σ_p^1 e σ_s^1 são:

$$\sigma_p^1 = \left\{ \sigma_{xx}^1 \quad \sigma_{yy}^1 \quad \sigma_{xy}^1 \right\} \quad (I.2a)$$

$$\sigma_s^1 = \left\{ \sigma_{yz}^1 \quad \sigma_{xz}^1 \right\} \quad (I.2b)$$

As matrizes \mathbf{D}_1 e \mathbf{D}_2 são dadas por:

$$\mathbf{D}_1 = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (I.3a)$$

$$\mathbf{D}_2 = \kappa G \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (I.3b)$$

onde E , ν e G são o módulo de elasticidade longitudinal, coeficiente de Poisson e módulo de elasticidade transversal do material, respectivamente. O fator κ é usado para corrigir as tensões cisalhantes σ_{yz} , σ_{xz} e G é dado por:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (I.4)$$

Os vetores $\bar{\varepsilon}_p^{-1}$ e $\bar{\gamma}_s^{-1}$ são as deformações longitudinais e cisalhantes que atuam no plano x^1, y^1 , respectivamente. Além disso, $\bar{\varepsilon}_p^{-1}$ pode ser separado em duas parcelas de forma que:

$$\bar{\varepsilon}_p^{-1} = \bar{\varepsilon}_m^{-1} + \zeta \bar{\varepsilon}_b^{-1} \quad ; \quad (I.5)$$

Os vetores $\bar{\varepsilon}_m^{-1}$, $\zeta \bar{\varepsilon}_b^{-1}$ e $\bar{\gamma}_s^{-1}$ são dados pelas equações (74.a), (74.b) e (74.c), ou seja:

$$\bar{\varepsilon}_m^{-1} = P_m \beta_m \quad (I.6a)$$

$$\zeta \bar{\varepsilon}_b^{-1} = \zeta P_m \beta_b \quad (I.6b)$$

$$\bar{\gamma}_s^{-1} = P_s \beta_s \quad (I.6c)$$

Os vetores β_m , β_b e β_s são dados pelas equações (F.15) tal que:

$$\beta_m = H_m^{-1} G_m q \quad (I.7a)$$

$$\beta_b = H_b^{-1} G_b q \quad (I.7b)$$

$$\beta_s = H_s^{-1} G_s q \quad (I.7c)$$

sendo que as matrizes G_m , G_b , G_s , H_m , H_b , H_s , são dadas pelas equações (81) e (82), respectivamente. As matrizes P_m , P_s são dadas pelas equações (75) e (76).

Substituindo-se as equações (I.7) e (I.6) em (I.1), as tensões σ_p^1 , σ_s^1 são obtidas através de:

$$\sigma_p^1 = D_1 P_m H_m^{-1} G_m q + \zeta D_1 P_m H_b^{-1} G_b q \quad (I.8a)$$

$$\sigma_s^1 = D_2 P_s H_s^{-1} G_s q \quad (I.8b)$$

Convém ressaltar que estas tensões estão definidas em relação ao sistema de coordenadas local. Posterior transformação para o sistema global pode ser realizado com o uso da seguinte transformação:

$$\sigma^g = \theta \sigma^l \theta^t \quad (I.9)$$

onde θ é definido conforme a equação (C.4), σ^l é o tensor tensão expresso em relação ao sistema de coordenadas local e σ^g é o tensor tensão expresso em relação ao sistema de coordenadas global. No entanto, esta transformação raramente é necessária.

APÊNDICE J

DETERMINAÇÃO DAS TENSÕES NOS ELEMENTOS 9-FULL E 9-URI

Determinadas as variáveis nodais q através da solução da equação (55), as tensões dos elementos 9-FULL e 9-URI são calculadas de maneira similar.

As tensões σ_p^1 que atuam no plano (x^1, y^1) e as tensões σ_s^1 que atuam nos planos transversais $(x^1 z^1)$ e $(y^1 z^1)$, são dadas por:

$$\sigma_p^1 = \mathbf{D}_1 \hat{\varepsilon}_p^1 \quad (\text{J.1a})$$

$$\sigma_s^1 = \mathbf{D}_2 \hat{\gamma}_s^1 \quad (\text{J.1b})$$

onde as matrizes de relações constitutivas \mathbf{D}_1 e \mathbf{D}_2 são dadas por:

$$\mathbf{D}_1 = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{J.2a})$$

$$\mathbf{D}_2 = \kappa G \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{J.2b})$$

de forma que E , ν e G são respectivamente os módulos de elasticidade longitudinal, coeficiente de Poisson e módulo de elasticidade transversal. O fator κ incluído na matriz \mathbf{D}_2 é introduzido para corrigir a distribuição de tensões cisalhantes na direção da espessura. Ainda com relação às equações (J.1), $\hat{\varepsilon}_p^1$ é o vetor de deformação, proveniente dos deslocamentos, que atua no plano (x^1, y^1) , enquanto que $\hat{\gamma}_s^1$ é o vetor de deformações que atua na direção da espessura. Além disso $\hat{\varepsilon}_p^1$ pode ser dividido em duas parcelas. Uma relacionada às deformações de membrana $\hat{\varepsilon}_m^1$ e outra relacionada às deformações devido à flexão $\zeta \hat{\varepsilon}_b^1$. Portanto, o vetor $\hat{\varepsilon}_p^1$ pode ser escrito na forma:

$$\hat{\varepsilon}_p^1 = \hat{\varepsilon}_m^1 + \zeta \hat{\varepsilon}_b^1 \quad (\text{J.3})$$

As parcelas $\hat{\varepsilon}_m^1$ e $\zeta \hat{\varepsilon}_b^1$ são dadas pelas equações (37) e (39), respectiva-

mente, de forma que:

$$\hat{\varepsilon}_m^1 = \mathbf{B}_m^1 \mathbf{q} \quad (\text{J.4a})$$

$$\zeta \hat{\varepsilon}_b^1 = \zeta \mathbf{B}_b^1 \mathbf{q} \quad (\text{J.4b})$$

O vetor $\hat{\gamma}_s^1$ é dado pela equação (38), tal que:

$$\hat{\gamma}_s^1 = \mathbf{B}_s^1 \mathbf{q} \quad (\text{J.4c})$$

Substituindo-se as equações (J.4) em (J.3) e depois em (J.1), tem-se:

$$\sigma_p^1 = \left\{ \sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{xy} \right\}^t = \mathbf{D}_1 \mathbf{B}_m^1 \mathbf{q} + \zeta \mathbf{D}_2 \mathbf{B}_b^1 \mathbf{q} \quad (\text{J.5a})$$

$$\sigma_s^1 = \left\{ \sigma_{yz} \quad \sigma_{xz} \right\} = \mathbf{D}_2 \mathbf{B}_s^1 \mathbf{q} \quad (\text{J.5b})$$

onde as matrizes \mathbf{B}_m^1 , \mathbf{B}_b^1 e \mathbf{B}_s^1 são definidas pelas equações (37), (38) e (39), respectivamente.

É importante ressaltar que as tensões dadas pelas equações (J.5) são determinadas em relação ao sistema de coordenadas local. Posterior transformação destas tensões para o sistema de coordenadas global pode ser realizada, o que raramente é desejado, com a utilização da seguinte transformação:

$$\sigma^g = \theta \sigma^1 \theta^t \quad (\text{J.6})$$

onde θ é definido conforme a equação (C.4), σ^1 é o tensor expresso em relação ao sistema de coordenadas local e σ^g é o tensor tensão expresso em relação ao sistema de coordenadas global. A equação (J.5) permite o cálculo das tensões em qualquer ponto do elemento.