

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECANICA

ESTUDO DE UM ELEMENTO FINITO PARA ANÁLISE DO
COMPORTAMENTO DINAMICO DE ROTORES

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA MECANICA

ADELMO TABOSA CAMPOS

FLORIANÓPOLIS, FEVEREIRO DE 1989

ESTUDO DE UM ELEMENTO FINITO PARA ANÁLISE DO
COMPORTAMENTO DINÂMICO DE ROTORES


ADELMO TABOSA CAMPOS

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

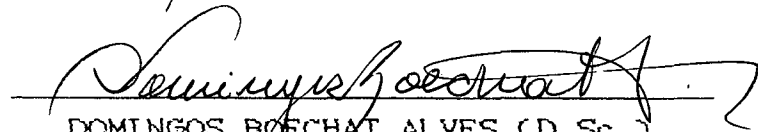
MESTRE EM ENGENHARIA

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA, ÁREA DE CONCENTRAÇÃO
PROJETO, APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CURSO DE PÓS-
GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

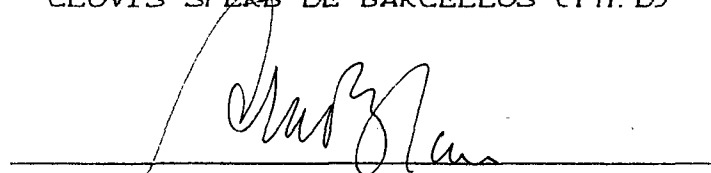

DOMINGOS BOECHAT ALVES (D. Sc.)
Orientador


ARNO BLASS (Ph. D.)
Coordenador do Curso

BANCA EXAMINADORA:


DOMINGOS BOECHAT ALVES (D. Sc.)
Presidente


CLÓVIS SPEER DE BARCELLOS (Ph. D.)


ARNO BLASS (Ph. D.)

A minha família

AGRADECIMENTOS

- Ao Professor Domingos Boechat Alves pela orientação desta dissertação, destacando-se a sua efetiva participação e constante boa vontade em orientar.
- A CHESF pelo patrocínio do Curso de Pós-Graduação, ressaltando-se os engenheiros Felício Limeira, Adelmo Lapa, Humberto Cavalcante e Paulo Guimarães.
- Ao amigo José Maria Bezerra Silva, pela grande ajuda e apoio na fase de créditos do curso.
- Aos Professores do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica especialmente Domingos Boechat Alves, Arno Blass, Philippl, Nelson Back, Paulo de Tarso e Clóvis Barcellos.
- Ao Professor Clovis Barcellos, por ceder e orientar na montagem dos módulos (sub-rotinas) AVISE e QR.
- Ao Analista de Sistemas Vilson Wronski Ricardo pela ajuda na montagem dos módulos (sub-rotinas) AVISE e QR.
- Ao amigo Felix Christian pela sua contribuição no desenvolvimento deste trabalho.
- A Vera e Ceci pela ajuda nas pesquisas bibliográficas.
- Aos amigos Antonio Brasileiro, Kleber Nóbrega, Heber Castro, David Ferraz, Cleonice Cecilia, Marcia Carneiro, Nicodemos

Neto, Vitor de Negri, Roseli Peralta, Goretti Possebon, Carlos Antoniazzi, pela amizade e apoio; e demais colegas que, de uma forma ou outra, contribuíram para a realização deste trabalho.

- A Conceição Castro e a Walter pela dedicação nos trabalhos de datilografia.
- A Antonio Lira pelo esmero na elaboração dos desenhos.
- A Sandra Lucena Lira pela revisão deste trabalho.

INDICE

SIMBOLOGIA	x
RESUMO	xv
ABSTRACT	xvi
INTRODUÇÃO	01
REVISÃO DA LITERATURA	04
CAPITULOS	
1 - SISTEMAS DE REFERENCIA	12
2 - EQUAÇÕES ENERGÉTICAS	17
2.1 - GENERALIDADES	17
2.2 - ENERGIA CINÉTICA DO ELEMENTO FINITO ROTOR	18
2.3 - ENERGIA CINÉTICA DO DISCO RÍGIDO DISCRETO	24
2.4 - ENERGIA DE DEFORMAÇÃO DO ELEMENTO FINITO ROTOR	25
2.4.1 - Considerações sobre a deformação	25
2.4.2 - Energia de deformação do elemento finito rotor devida à flexão	27
2.4.3 - Energia de deformação do elemento finito rotor devida à força axial	29
2.4.4 - Energia de deformação devida ao cisalhamento	31

2.4.5 - Energia de deformação total U	34
3 - FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO	37
3.1 - INTRODUÇÃO	37
3.2 - FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO	39
3.3 - ESTUDO DAS FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO N_1 a N_4 REFERENTES AOS DESLOCAMENTOS NO PLANO 12	42
3.3.1 - Função de Interpolação N_1	42
3.3.2 - Função de Interpolação N_2	49
3.3.3 - Função de Interpolação N_3	56
3.3.4 - Função de Interpolação N_4	61
3.4 - ESTUDO DAS FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO M_1 a M_4 REFERENTES AOS DESLOCAMENTOS NO PLANO 13	67
3.5 - MONTAGEM EM FORMA MATRICIAL DOS DESLOCAMENTOS NOS PLANOS 12 E 13	70
4 - EQUAÇÕES DE MOVIMENTO DO ELEMENTO	73
4.1 - EQUAÇÃO DO MOVIMENTO DEVIDA A ENERGIA CINÉTICA DO DISCO RÍGIDO	74
4.2 - EQUAÇÃO DO MOVIMENTO DEVIDA A ENERGIA CINÉTICA DO ELEMENTO FINITO ROTOR	78
4.3 - EQUAÇÃO DO MOVIMENTO DEVIDA A FLEXÃO DO ELEMENTO FINITO ROTOR	82
4.4 - EQUAÇÃO DO MOVIMENTO DEVIDA AO CISALHAMENTO DO ELEMENTO FINITO ROTOR	84
4.5 - SIMPLIFICAÇÃO DAS MATRIZES DE RIGIDEZ DEVIDAS A FLEXÃO E AO CISALHAMENTO.	85
4.6 - EQUAÇÃO DO MOVIMENTO DEVIDA A FORÇA AXIAL ATUANDO NO ELEMENTO FINITO ROTOR.	86

5 - OBTENÇÃO DO VETOR FORÇA	89
5.1 - DETERMINAÇÃO DO VETOR FORÇA PARA UM ELEMENTO FINITO ROTOR COM CENTRO DE MASSA EXCENTRICAMENTE DISTRIBUIDO AO LONGO DO EIXO	90
5.2 - DETERMINAÇÃO DO VETOR FORÇA DEVIDO À UMA MASSA DISCRETA DESBLANCEADA	93
6 - SISTEMA GLOBAL DE EQUAÇÕES	97
6.1 - GENERALIDADES	97
6.2 - OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES GLOBAIS NO SISTEMA ROTATIVO R	101
7 - ANÁLISE DE VIGAS	107
7.1 - FORMULAÇÃO ANALÍTICA DAS FREQUÊNCIAS PARA AS VIGAS DE BERNOULLI-EULER, RAYLEIGH E TIMOSHENKO	108
7.1.1 - Frequência natural para a viga de Bernoulli-Euler	108
7.1.2 - Frequência natural para a viga de Rayleigh	109
7.1.3 - Frequência natural para a viga de Timoshenko	110
7.1.4 - Frequências críticas para a viga de Timoshenko	111
7.2 - ANÁLISE DAS FREQUÊNCIAS FORNECIDAS ANALITICAMENTE E PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	112
7.2.1 - Frequências fornecidas pelo programa PADIR	112
7.2.2 - Análise das frequências naturais	115
7.2.3 - Análise das frequências críticas	118

8 - MODELAGEM DE HIDROGERADORES	124
8.1 - INTRODUÇÃO	124
8.2 - MODELAGEM PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	126
8.2.1 - Estudo do modelo 1 de Pavanello, R., [9]	127
8.2.2 - Estudo do modelo 2 de Pavanello, R., [9]	129
8.2.3 - Estudo do modelo 1 de Nascimento, L. de P., [11]	130
9 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES DE CONTINUIDADE	134
9.1 - CONCLUSÕES	134
9.2 - SUGESTÕES DE CONTINUIDADE	135
REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS	137
APÊNDICE A	141
APÊNDICE B	146

SIMBOLOGIA

c	Índice referente ao cisalhamento
d	Índice referente ao disco rígido discreto
e	Índice referente ao elemento finito rotor
f	Índice referente a flexão
g	Índice referente ao sistema global de equações
t	Índice referente ao tempo
$\frac{d}{dt}$	Derivada em relação ao tempo
$\frac{d}{ds}$	Derivada em relação à distância
s	Índice referente a posição sobre o eixo do elemento
A	Área da seção transversal do elemento
C_1, C_2, C_3	Constantes de integração
E	Módulo de elasticidade longitudinal
F	Força cortante
F_a	Força axial
G	Módulo de elasticidade transversal
$[G]$	Matriz giroscópica ou de coriolis global
$[G]_d$	Matriz giroscópica do disco
$[G]_e$	Matriz giroscópica do elemento
I	Momento de inércia diametral da área da seção transversal

I_p	Momento de inércia polar da área da seção transversal
I_m	Momento de inércia diametral da massa da seção transversal por unidade de comprimento
I_{pm}	Momento de inércia polar da massa da seção transversal por unidade de comprimento
I_d	Momento de inércia diametral da massa do disco
I_{dp}	Momento de inércia polar da massa do disco
$[J]$	Matriz que transforma as componentes do vetor velocidade angular do sistema local L para o sistema fixo F
K	Fator de correção do cisalhamento
$[K]$	Matriz de rigidez global
$[K_f]$	Matriz de rigidez devida à flexão
$[K_c]$	Matriz de rigidez devida ao cisalhamento
$[K_{fa}]$	Matriz de rigidez devida à força axial
L	Comprimento do elemento
m	Massa por unidade de comprimento do elemento
M	Momento fletor
M_g	Ordem do sistema global de equações
M_{di}	Massa discreta do disco
$[m^{11}]$	Matriz massa translacional do elemento
$[m^{22}]$	Matriz massa rotacional do elemento
$[M]$	Matriz massa global
$[M_t]$	Matriz massa translacional global
$[M_r]$	Matriz massa rotacional global
$[M_{dt}]$	Matriz massa translacional do disco
$[M_{dr}]$	Matriz massa rotacional do disco
$[M_{et}]$	Matriz massa translacional do elemento
$[M_{er}]$	Matriz massa rotacional do elemento

[M(s)]	Matriz das funções de interpolação no plano 13
[N(s)]	Matriz das funções de interpolação no plano 12
n	Ordem da frequência
{P}	Vetor forças global no sistema rotativo R
{Q}	Vetor forças global no sistema fixo F
r	Raio da seção transversal do elemento
r_e	Índice de esbeltez
[R]	Matriz transforma do sistema rotativo R para o sistema fixo F
s	Distância a partir do início do elemento
T	Energia cinética total
T_e	Energia cinética do elemento
T_{et}	Energia cinética translacional do elemento
T_{er}	Energia cinética rotacional do elemento
T_d	Energia cinética do disco
T_{dt}	Energia cinética translacional do disco
T_{dr}	Energia cinética rotacional do disco
U	Energia de deformação total
U_{fa}	Energia de deformação do elemento devida à força axial
U_c	Energia de deformação devida ao cisalhamento
U_f	Energia de deformação devida a flexão
V	Volume
y	Relação entre a distância da origem a um ponto qualquer do elemento e seu comprimento ($y = s/L$)
W_f	Trabalho das forças
{u}	Vetor deslocamento local de um ponto do eixo do elemento em relação ao sistema fixo F

$\{u_g\}$	Vetor deslocamento global dos nós dos elementos no sistema fixo F
$\{u_e\}$	Vetor deslocamento local dos nós do elemento no sistema fixo F
$\{p\}$	Vetor deslocamento local de um ponto do eixo do elemento em relação ao sistema rotativo R
$\{p_g\}$	Vetor deslocamento global dos nós dos elementos no sistema rotativo R
$\{v\}$	Vetor deslocamento de um ponto do eixo do elemento no sistema local L
ω	Rotação orbital (Whirl Speed)
Ω	Rotação própria (Spin Speed)
ω_n	Frequência natural
ω_{na}	Frequência natural adimensional
ω_{np}	Frequência natural progressiva
ω_{nr}	Frequência natural regressiva
ω_{cp}	Frequência crítica progressiva
ω_{cr}	Frequência crítica regressiva
η_d	Excentricidade da massa do disco no plano 12
e_d	Excentricidade da massa do disco no plano 13
$\eta(s)$	Excentricidade da massa do elemento no plano 12
$e(s)$	Excentricidade da massa do elemento no plano 13
σ_f	Tensão de flexão
σ_c	Tensão de compressão
τ	Tensão de cisalhamento
λ	Relação de rotações ($\lambda = \Omega/\omega$)
ϕ	Efeito de cisalhamento transversal
ν	Coefficiente de Poisson
ϵ	Deformação longitudinal

ϵ_l	Deformação longitudinal linear
ϵ_{nl}	Deformação longitudinal não linear
γ	Deformação transversal

RESUMO

Este trabalho é direcionado para a análise dinâmica de rotores. Com esta finalidade desenvolve-se, através do método dos elementos finitos, um modelo matemático representativo do comportamento do sistema mecânico ROTOR-DISCO-SUPORTE. É desenvolvida toda a formulação energética de um elemento finito viga-eixo, incluindo-se os efeitos de inércia rotacional, momento giroscópico, carga axial, deformação cisalhante e massa desbalanceada. As equações de movimento do modelo são obtidas através da formulação Lagrangeana. A eficiência do modelo, é verificada através da análise comparativa das frequências naturais e críticas, para as vigas clássicas de Bernoulli-Euler, Rayleigh e Timoshenko. Após esta análise é apresentada a modelagem de grupos hidrogeradores de grande porte, cujos resultados são comparados com alguns trabalhos já desenvolvidos nesta área. Um sistema computacional chamado PADIR (Programa para Análise Dinâmica de Rotores) foi desenvolvido para obter-se os resultados apresentados neste trabalho.

ABSTRACT

The object of this paper is the dynamic analysis of rotors. For this purpose a mathematical model has been developed by use of the finite element method for representing the behaviour of the ROTOR-DISC-BEARING mechanical system. All energetic interactions of a beam-rotor finite element have been considered in this development, this including the effects of rotational inertia, gyroscopic momentum, axial load, shearing deformations and mass unbalance. The motion equations of the model are worked out in a Lagrangean frame. The efficiency of the model is checked by means of comparative analysis of the natural and critical frequencies for the classical Bernoulli-Euler, Rayleigh and Timoshenko beam models. After this analysis the models worked out for a group of large size hydrogenerators are presented and compared with those object of some works previously carried in this field. A computational system PADIR (Portuguese acronym for "Program for Dynamic Analysis of Rotors"), has been developed for obtaining the results presented in this paper.

INTRODUÇÃO

A representação do comportamento de um sistema mecânico, através de um modelo matemático é de grande importância na engenharia, em razão de se poder simular com facilidade as mais diversas opções de projeto e condições de operação.

Nas últimas décadas, o método dos elementos finitos tem sido largamente utilizado na solução de problemas de engenharia, isto devido a sua eficiência, facilidade de representação de modelos e ao grande desenvolvimento computacional e suas aplicações.

Mais recentemente, no princípio dos anos setenta, iniciaram-se os estudos do comportamento dinâmico de rotores utilizando o método dos elementos finitos (MEF).

O presente trabalho tem por objetivo desenvolver um modelo matemático utilizando o método dos elementos finitos, para representar o comportamento dinâmico de um sistema ROTOR-DISCO-SUPORTE.

O elemento finito desenvolvido é do tipo viga-eixo, e para sua formulação, adotam-se as hipóteses da viga de Timoshenko, onde se considera a contribuição do efeito de

cisalhamento na flexão do elemento.

Consideram-se ainda na formulação os efeitos de desbalanceamento mecânico e força axial [08].

O modelo em estudo serve também para representar o comportamento dinâmico de grupos hidrogeradores.

Define-se como grupo hidrogerador o conjunto constituído por turbina hidráulica, de eixo intermediário, mancais e gerador (figura 18) que transforma energia hidráulica da água em energia elétrica.

No Brasil é de fundamental importância o estudo destes grupos, tendo em vista o imenso potencial hidráulico existente (explorado e ainda por explorar).

O desenvolvimento da engenharia na área de usinas hidroelétricas, chegou ao ponto de ter-se a parte girante de um grupo hidrogerador pesando até três mil toneladas (Usina Binacional de Itaipu, Brasil/Paraguai).

Em razão das imensas massas girantes, os problemas devidos a vibrações são importantes, e podem prejudicar drasticamente o funcionamento destas máquinas.

A utilização de um modelo matemático para simulação do comportamento vibratório de grupos hidrogeradores faz-se necessário devido a suas grandes dimensões e dificuldades de manuseio, acesso e medições.

Esta ferramenta computacional permite aos projetistas a apresentação de projetos otimizados, evitando-se gastos desnecessários quando da correção destes problemas nos protótipos.

Por outro lado este modelo serve também para simulação de condições anormais de funcionamento em máquinas já em

operação.

Neste modelo são analisadas somente as vibrações de flexão, não se levando em consideração as vibrações torcionais e axiais. Para aplicações em hidrogeradores, as excitações predominantes são transversais, tais como desbalanceamento mecânico, excitações magnéticas e forças hidráulicas [09].

É desenvolvido um sistema computacional denominado PADIR (Programa para Análise Dinâmica de Rotores), para obtenção das frequências naturais e críticas do sistema dinâmico ROTOR-DISCO-SUPORTE.

No final deste trabalho aplica-se o método desenvolvido para a análise do comportamento dinâmico, nos modelos das vigas de Bernoulli-Euler, Rayleigh e Timoshenko, comparando-se os resultados obtidos pelo programa PADIR com os resultados fornecidos por [04, 05, 06].

Para efeito de comprovação do desempenho do método desenvolvido na aplicação em grupos hidrogeradores, consideram-se os exemplos apresentados nas referências [09, 11], cujos resultados são comparados com os fornecidos pelo programa PADIR.

REVISÃO DA LITERATURA

Nos últimos anos tem-se adotado cada vez mais o método dos elementos finitos para aplicação em problemas de engenharia.

No início da década de setenta foram iniciados estudos e pesquisas na área de análise dinâmica de rotores, usando o método dos elementos finitos.

Serão apresentadas resumidamente aqui, as contribuições de alguns pesquisadores, e dentre vários trabalhos consultados foram selecionados quatro, levando em consideração sua importância para o modelo ROTOR-DISCO-SUPORTE que se pretende estudar.

a) Contribuição de John S. Archer [13]

O trabalho apresentado por Archer, "Matriz Massa Consistente para Sistemas com Massa Distribuída" (Consistent Mass Matrix for Distributed Mass Systems), é desenvolvido com a intenção de melhorar a representação da matriz massa da estrutura.

Esta matriz pode ser representada pelos parâmetros de

massa física concentrada da estrutura, nos pontos onde os coeficientes de influência são definidos, tendo como resultado uma matriz massa diagonal, cujos modos de frequência e forma diferem consideravelmente da solução exata do problema.

Com a intenção de melhorar a precisão da análise dinâmica, uma matriz massa consistente é estudada, levando em conta a distribuição real da massa através da estrutura.

É mostrado que as frequências naturais, obtidas pelo uso da matriz massa consistente, estão bem mais próximas da solução exata.

Confirma-se que o procedimento é aplicável à análise geral da resposta dinâmica, e é significativamente superior ao procedimento usando massa física concentrada, quando da análise de frequências de vigas prismáticas com massa e rigidez distribuídas ao longo da viga.

A necessidade de subdividir a estrutura, para obter uma melhor precisão, é muito reduzida quando usado o procedimento da matriz consistente.

b) Contribuição de R. L. Ruhl and J. F. Booker [14]

A pesquisa de Ruhl and Booker, "Um Modelo de Elementos Finitos para um Sistema Turborrotor com Parâmetros Distribuídos" (A Finite Element Model for Distributed Parameter Turborotor Systems), apresenta um procedimento numérico específico para estudo de um modelo dinâmico rotor-mancal, no qual a distribuição de massa e inércia ao longo do rotor são consistentemente representadas.

O modelo estudado é constituído de elementos rotores, com propriedades de inércia e massa distribuídas, discos rígidos discretos e rolamentos com dezesseis coeficientes lineares para rigidez e amortecimento.

O modelo apresentado para o elemento finito está baseado nas matrizes consistentes apresentadas por Archer [13], incluindo, na obtenção destas matrizes, somente os efeitos de inércia translacional e rigidez de flexão.

Para um elemento representando um rotor, com propriedades de inércia e rigidez uniformes ao longo do comprimento, é necessário considerar as coordenadas nos dois planos de flexão. Desta maneira para representar o movimento do rotor em duas dimensões são necessárias duas matrizes (uma para cada plano).

Na montagem do sistema geral de equações consideram-se ainda, a rigidez e o amortecimento devidos ao mancal e a massa e o efeito giroscópico devidos ao disco rígido.

Com a escolha dos elementos constituintes, concatenados na direção axial, a mudança do sistema de coordenadas local para o global é trivial, não envolvendo transformações geométricas, observando-se que quando dois elementos são concatenados, os deslocamentos contíguos devem ser iguais, e as forças somadas.

O resultado é um sistema de equações diferenciais lineares a coeficientes constantes da forma

$$\ddot{\underline{M}}\underline{u} + \dot{\underline{C}}\underline{u} + \underline{K}\underline{u} = \underline{Q}$$

A matriz massa deste sistema é mais populosa do que a do sistema

de massas discretas, que é diagonal.

Usa-se o mesmo método de solução para o sistema de massa distribuída e discreta. Transforma-se a equação para a forma padrão de problemas de autovalores. O método numérico de solução para este modelo de problema é o procedimento iterativo QR [18].

Algumas conclusões são fornecidas sobre o comportamento do elemento finito rotor, quando se analisa uma viga uniforme simplesmente apoiada, com idênticos rolamentos nos terminos, e considerando um desbalanceamento unitário na superfície média.

O método das matrizes de transferência é comparado com o método dos elementos finitos, para duas velocidades específicas 4000 rpm e 28000 rpm. Observa-se que o método dos elementos finitos, converge mais rapidamente para ambas as frequências. Ambos os métodos requerem poucos graus de liberdade para convergência do modelo, em baixas velocidades de rotação.

Considerando o método das massas discretas, observa-se a necessidade de um número grande de graus de liberdade, para as altas frequências, enquanto que no método dos elementos finitos a convergência é praticamente independente do número de elementos.

Quanto à estabilidade, mostra-se que para dois elementos a resposta é praticamente exata. Resultados idênticos são obtidos para a resposta forçada.

Uma possível vantagem do método das matrizes de transferência, é que requer menos memória de armazenamento no computador do que o método dos elementos finitos. Esta vantagem é fictícia devido à grande capacidade de memória dos

computadores atuais.

Uma grande vantagem do método dos elementos finitos é no uso em sistemas de topologia complexa. Citando como exemplo, a inclusão de fundações dinâmicas em modelos rotor-mancal.

c) Contribuição de H. D. Nelson e J. M. McVaugh [07]

Outro trabalho de relevante importância no estudo do comportamento do modelo dinâmico ROTOR-DISCO-SUPORTE é apresentado por Nelson and McVaugh, "Sistema Dinâmico Rotor-Mancal Usando Elementos Finitos" (The Dynamics of Rotor-Bearing Systems Using Finite Elements).

Este estudo é uma complementação dos dois trabalhos citados anteriormente, sendo acrescentados ao modelo de Ruhl [06] os efeitos de inércia rotatória, carga axial e momento giroscópico, usando a matriz massa consistente apresentada por Archer [13].

O modelo analisado é composto de discos rígidos discretos, elementos finitos do tipo rotor, com massa e elasticidade distribuídas ao longo do elemento, e mancais discretos.

Uma breve revisão da formulação apresentada é necessária, pois serve de base para o modelo desenvolvido nesta dissertação.

A formulação do modelo é apresentada em dois sistemas de coordenadas, sistema global fixo F e sistema global rotativo R.

Os dois sistemas tem os eixos R_1 e F_1 colineares e

coincidentes com a linha de centro do elemento rotor na posição indeformada.

O sistema rotativo R é definido em relação ao sistema fixo F através de uma simples rotação ω denominada de velocidade orbital (Whirl Speed). Esta velocidade é definida como a velocidade de rotação do plano formado pela curvatura do eixo flexionado e a reta que passa pelos centros dos mancais.

Uma seção transversal típica do rotor na sua posição deformada, é dada pelas translações u_2 e u_3 , e rotações u_5 e u_6 nas direções dos eixos 2 e 3 respectivamente.

Com as relações entre os componentes

$$u_5 = -\frac{du_3}{ds} \quad \text{e} \quad u_6 = \frac{du_2}{ds}$$

a posição de um ponto interno do elemento é dada, através dos deslocamentos dos nós, por

$$\{u(s, t)\} = \begin{Bmatrix} u_2(s, t) \\ u_3(s, t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N(s) \\ M(s) \end{bmatrix} \{ue(t)\}$$

onde $\begin{bmatrix} N(s) \\ M(s) \end{bmatrix}$ são as funções de interpolação dos deslocamentos do elemento; e

$\{ue(t)\}$ é o vetor dos deslocamentos nodais

Um outro sistema de coordenadas, denominado sistema local (L), é definido no centro da seção transversal, com o eixo 1 normal à seção, e os outros dois eixos pertencentes à seção transversal, segundo duas direções principais. O eixo gira com

uma velocidade própria Ω (Spin Speed).

Determinam-se então as equações energéticas de cada componente do modelo. Para se obter as equações do movimento usa-se a formulação Lagrangeana, montando-se o sistema matricial de equações diferenciais

$$\underline{\underline{M}}\ddot{\underline{u}} - \Omega \underline{\underline{G}}\dot{\underline{u}} + \underline{\underline{K}}\underline{u} = \underline{Q}$$

que pode ser resolvido no sistema fixo ou rotativo. Considerando o sistema fixo (F) de coordenadas, com rolamentos ortotrópicos ($K_{29} = K_{32} = 0$) e amortecimento zero, transforma-se o sistema de equações para a forma padrão

$$\underline{\underline{M}}^* \ddot{\underline{h}} + \underline{\underline{G}}^* \dot{\underline{h}} = \underline{Q}^*$$

e supondo a solução da forma

$$\langle \underline{h} \rangle = \langle \underline{h}_0 \rangle e^{\alpha t}$$

os autovalores serão pares de conjugados imaginários puros com magnitude igual à frequência natural orbital.

Considerando o sistema rotativo (R) de coordenadas, a equação de movimento é modificada e os autovalores são reais e positivos.

É apresentado um exemplo numérico com solução nos dois sistemas de coordenadas. Conclui-se que o modelo pode ser facilmente utilizado para sistemas ROTOR-DISCO-SUPORTE, com a finalidade de determinar frequências naturais, frequências críticas, estabilidade e resposta desbalanceada.

d) Contribuição de H. D. Nelson [08]

Este outro trabalho apresentado por H. D. Nelson, com o título "Um Elemento Finito Eixo Rotativo Usando a Teoria da Viga de Timoshenko" (A Finite Rotating Shaft Element Using Timoshenko Beam Theory), serve de base para o modelo dinâmico ROTOR-DISCO-SUPORTE desenvolvido nesta dissertação.

No estudo anterior apresentado por Nelson and McVaugh [07] foram considerados para a determinação das equações do movimento, os efeitos de inércia translacional e rotacional, a rigidez de flexão e o momento giroscópico. Neste novo trabalho o autor inclui, além destes, o efeito de cisalhamento transversal, tendo-se então a representação da viga de Timoshenko.

O trabalho apresenta resultados numéricos com a finalidade de determinar a precisão do modelo. Os resultados são comparados com soluções de problemas clássicos de vigas contínuas, dados por Dym and Shames [06] e por Eshleman and Eubanks [05].

São usados os sistemas fixo F e o rotativo R de referência, e as equações do movimento são determinadas através da formulação Lagrangeana.

A formulação e solução do sistema de equações representativo deste modelo dinâmico ROTOR-DISCO-SUPORTE, apresentado por H. D. Nelson [08], é detalhada nesta dissertação nos capítulos subsequentes, ficando repetitivo apresentá-los nesta revisão bibliográfica.

CAPITULO I

SISTEMAS DE REFERENCIA

O modelo dinâmico ROTOR-DISCO-SUPORTE aqui considerado é uma montagem de segmentos flexíveis de eixo de seção circular, de discos rígidos e de suportes flexíveis discretamente localizados ao longo da elástica do sistema.

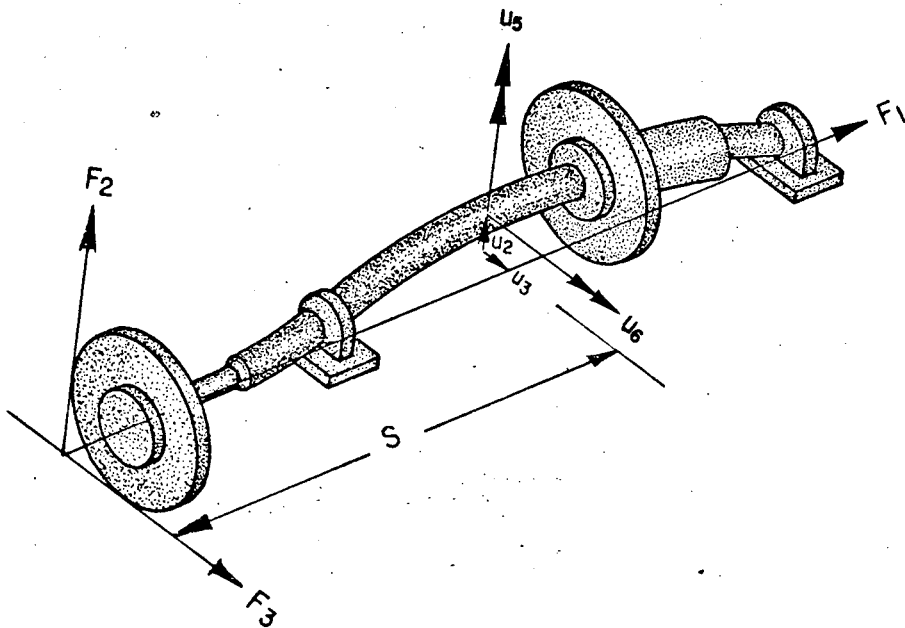


Figura 1 - Modelo dinâmico ROTOR-DISCO-SUPORTE.

Para a localização do vetor de estado em um ponto genérico da elástica, considerada, no estado deformado, como uma curva espacial, são utilizados os seguintes sistemas de referência:

a) Sistema global inercial F - é um sistema cartesiano com eixos determinados pelos vetores unitários $\hat{f}_1, \hat{f}_2, \hat{f}_3$, e coordenadas denotadas por $u_i, i = 1, \dots, 6$, sendo o eixo \hat{f}_1 coincidente com o eixo indeformado do sistema ROTOR-DISCO-SUPORTE quando em repouso, desprezadas as ações gravitacionais.

b) Sistema global rotativo R - é um sistema cartesiano cujo centro é coincidente com o centro do sistema de referência F , e cujos eixos são determinados pelos vetores unitários $\hat{r}_1, \hat{r}_2, \hat{r}_3$, sendo \hat{r}_1 coincidente com \hat{f}_1 e \hat{r}_2, \hat{r}_3 determinados pela rotação

$$\theta = \int_0^t \omega dt,$$

onde ω é a rotação orbital (whirl speed) em torno de \hat{r}_1 , relativamente ao sistema de referência inercial F . Denotam-se as coordenadas de um ponto genérico neste sistema por $p_i, i = 1, \dots, 6$.

c) Sistema local de referência L - seja o ponto P , centro de um segmento ds do rotor localizado sobre o eixo \hat{f}_1 com o sistema em repouso. O vetor posição do ponto P é

$$\underline{P} = (s, 0, 0)$$

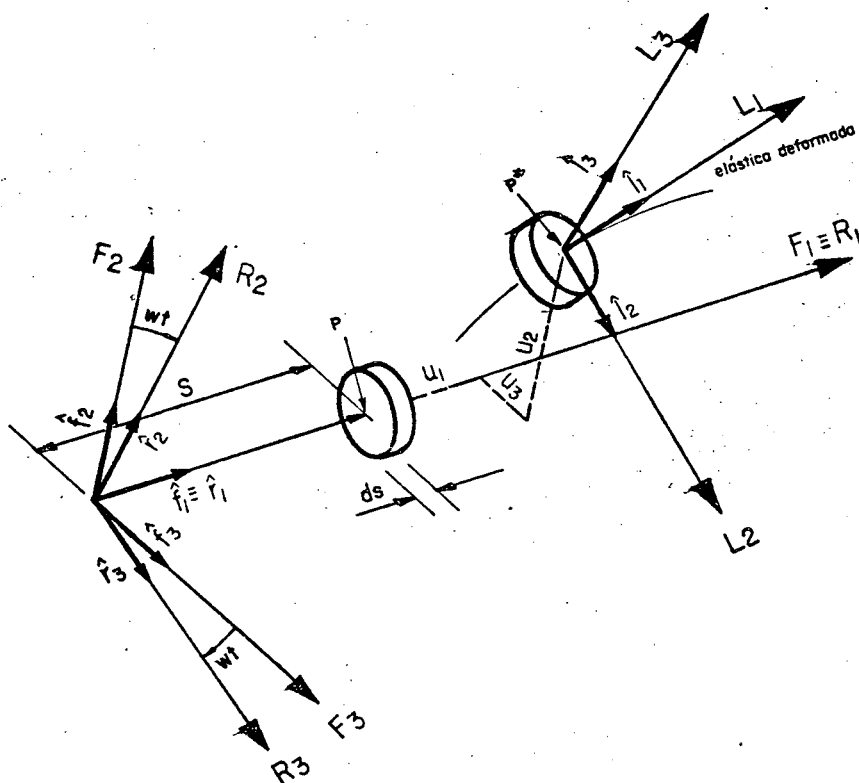


Figura 2 - Sistemas de referência:

Sistema global inercial fixo F

Sistema global rotativo R

Sistema local L

Com o sistema em movimento, o ponto irá ocupar a posição P^* , após sofrer deslocamentos lineares u_1 , u_2 , u_3 e deslocamentos angulares u_4 , u_5 , u_6 , relativos ao sistema F.

O sistema local de referência tem para triedro em P^* , as direções \hat{l}_1 , \hat{l}_2 , \hat{l}_3 , definidas a seguir:

- \hat{l}_1 é um vetor unitário tangente à elástica no ponto P^* , definindo assim o plano normal à elástica neste ponto.

Se a equação da elástica referida ao sistema de referência F for

$$E(s, t) = u_1(s, t)\hat{f}_1 + u_2(s, t)\hat{f}_2 + u_3(s, t)\hat{f}_3$$

então o vetor \hat{l}_1 , em direção e sentido, é dado por:

$$\frac{dE(s,t)}{ds} = \hat{l}_1 = \left\{ u_{1,s} \quad u_{2,s} \quad u_{3,s} \right\}$$

onde

$$u_{1,s} = \frac{du_1(s,t)}{ds} \quad u_{2,s} = \frac{du_2(s,t)}{ds} \quad u_{3,s} = \frac{du_3(s,t)}{ds}$$

- \hat{l}_2 é um vetor unitário com origem em P^* e dirigido para o centro de curvatura da elástica em P^* .

Assim \hat{l}_1 e \hat{l}_2 determinam o plano osculador da elástica no ponto P^* , com \hat{l}_2 na interseção deste com o plano normal. A direção e sentido de \hat{l}_2 são determinados por:

$$\hat{l}_2 = \frac{1}{k} \frac{df_1}{ds}$$

onde k é a curvatura da elástica no ponto P^* dado pela relação

$$k = \left(u_{1,ss}^2 + u_{2,ss}^2 + u_{3,ss}^2 \right)^{1/2}$$

Finalmente:

- \hat{l}_3 é um vetor unitário perpendicular ao plano osculador tendo direção e sentido definidos por:

$$\hat{l}_3 = \hat{l}_1 \times \hat{l}_2$$

O triedro destrógiro $\hat{l}_1, \hat{l}_2, \hat{l}_3$ é extremamente útil, uma vez que ele caracteriza instantaneamente a posição da seção transversal do rotor no espaço.

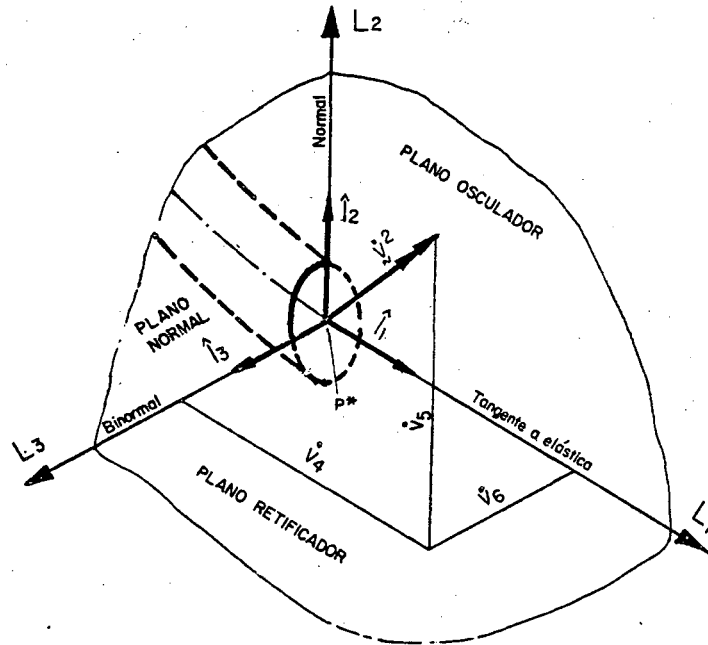


Figura 3 - Representação espacial do sistema cartesiano local L.

O vetor de estado (deslocamento e rotação) do ponto P^* em relação ao sistema de referência L é:

$$\{v\}^t = \{v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4 \ v_5 \ v_6\}$$

onde v_1, v_2, v_3 são componentes do vetor deslocamento PP^* nas direções \hat{l}_1, \hat{l}_2 e \hat{l}_3 , e v_4, v_5, v_6 são rotações do ponto P^* nestas respectivas direções.

CAPITULO II

EQUAÇÕES ENERGETICAS

2.1 - GENERALIDADES

Neste capítulo serão desenvolvidas as equações energéticas do sistema dinâmico ROTOR-DISCO-SUPORTE, levando em consideração os efeitos de forças axiais, cisalhamento, e momento giroscópico.

Considera-se o rotor como um sistema contínuo unidimensional, do domínio fechado, $0 \leq s \leq L$, onde s , a cada instante t , é a distância a um ponto qualquer do eixo que contém o elemento, a partir da seção inicial esquerda.

Seja $\{u\} = \{u(s,t)\}$ o vetor deslocamento de um ponto genérico P da elástica, definido pela coordenada s no instante t .

Portanto

$$\{u(s,t)\}^t = \{u_1(s,t) \ u_2(s,t) \ u_3(s,t) \ u_4(s,t) \ u_5(s,t) \ u_6(s,t)\}$$

onde u_i , $i = 1, 2, 3$, são os deslocamentos lineares,

e u_i , $i = 4, 5, 6$, são os deslocamentos angulares, nas direções $i = 1, 2, 3$, respectivamente, dos eixos do sistema fixo F.

2.2 - ENERGIA CINÉTICA DO ELEMENTO FINITO ROTOR T_e

O sistema dinâmico em consideração, tem a energia cinética expressa por

$$T_e(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \dot{u}(s,t) \right\}^t [m(s)] \left\{ \dot{u}(s,t) \right\} ds, \quad 2.1$$

onde $m(s)$ é a massa-inércia em uma seção transversal localizada pela coordenada s e $\left\{ \dot{u}(s,t) \right\}$ é a derivada em relação ao tempo do vetor deslocamento em um ponto s no instante t .

A fim de simplificar o trabalho de identificação e de introdução de hipóteses simplificativas, particiona-se o vetor deslocamento e suas derivadas da seguinte maneira:

$$\left\{ u \right\} = \begin{Bmatrix} u^1 \\ u^2 \end{Bmatrix} \quad \text{onde} \quad \left\{ u^1 \right\}^t = \begin{Bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{Bmatrix} \quad 2.2$$

$$\left\{ u^2 \right\}^t = \begin{Bmatrix} u_4 & u_5 & u_6 \end{Bmatrix} \quad 2.3$$

sendo evidentemente $\left\{ u^1 \right\}$ o vetor deslocamento linear e $\left\{ u^2 \right\}$ o vetor deslocamento angular.

Isto acarreta um particionamento conformável, unívoco das diversas matrizes utilizadas na expressão 2.1, ou seja:

$$[m(s)] = \begin{bmatrix} m^{11} & m^{12} \\ m^{21} & m^{22} \end{bmatrix}$$

Com os vetores e matriz redefinidos pelo particionamento conformável indicado, a relação 2.1 pode ser escrita da seguinte forma:

$$T_e(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \begin{Bmatrix} \dot{u}^1 \\ \dot{u}^2 \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} m^{11} & m^{12} \\ m^{21} & m^{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}^1 \\ \dot{u}^2 \end{Bmatrix} ds \quad 2.4$$

esta expressão é geral, e válida para um eixo qualquer prismático de seção variável, e material anisotrópico, isotrópico ou ortotrópico.

Para um eixo de material isotrópico, prismático de seção dual simétrica, selecionam-se os sistemas de referência principais. Neste caso, a matriz massa-inércia é desacoplada, sendo nulas as submatrizes $[m^{12}]$ e $[m^{21}]$.

Com estas simplificações, a equação 2.4 pode ser escrita da seguinte maneira:

$$T_e(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \int_0^L \begin{Bmatrix} \dot{u}^i \end{Bmatrix}^t [m^{ii}] \begin{Bmatrix} \dot{u}^i \end{Bmatrix} ds = T_{et}(t) + T_{er}(t) \quad 2.5$$

onde T_{et} e T_{er} são as energias cinéticas devidas à translação e rotação do elemento, respectivamente.

No caso especial de eixos circulares, a matriz $[m^{11}]$ reduz à forma diagonal, ao passo que a parte rotacional $[m^{22}]$ da matriz se torna complicada, devido à não colinearidade com o

sistema local de uma seção arbitrária.

Por outro lado, sendo a energia um invariante, pode-se determinar $T(t)$ em qualquer sistema de coordenadas, escolhendo-se aquele ou aqueles, em que a expressão desses invariantes é imediata.

Se $\{v\}$ é o vetor deslocamento no sistema local L, então a expressão da parcela rotacional da energia é simples e completamente desacoplada, ou seja:

$$T_{or}(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \{\dot{v}^2\}^1 [I] \{\dot{v}^2\} ds \quad 2.8$$

onde $[I]$ é uma matriz diagonal cujos elementos são:

$I_{11} = I_{pm}$ - momento polar de inércia da massa do elemento por unidade de comprimento;

$I_{22} = I_{ed2m}$ - momento diametral de inércia da massa do elemento por unidade de comprimento em relação ao eixo 2;

$I_{33} = I_{ed3m}$ - momento diametral de inércia da massa do elemento por unidade de comprimento em relação ao eixo 3.

Como a seção é circular $I_{ed2m} = I_{ed3m} = I_m$, a matriz $[I]$ pode ser escrita:

$$[I] = \begin{bmatrix} I_{pm} & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix}$$

É evidente que existe uma matriz que transforma componentes do vetor velocidade angular $\{\dot{v}^2\}$ do sistema local L, para o vetor

velocidade angular $\{\dot{u}^2\}$ no sistema fixo F.

Seja $[J]$ esta matriz

$$\{\dot{v}^2\} = [J] \{\dot{u}^2\} \quad 2.7$$

a obtenção desta matriz pode ser vista na [02] parágrafo 7.8 através das relações entre os ângulos de Euler e a velocidade angular ou através de rotações sucessivas conforme [07]. Em ambas a matriz $[J]$ é dada por:

$$[J] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\text{senu}_5 \\ 0 & \text{cosu}_4 & \text{senu}_4 \text{cosu}_5 \\ 0 & -\text{senu}_4 & \text{senu}_4 \text{senu}_5 \end{bmatrix} \quad 2.8$$

Voltando à expressão 2.5, substitui-se a relação $\{\dot{v}^2\} = [J] \{\dot{u}^2\}$, obtendo-se a energia cinética rotacional em função dos deslocamentos $\{u\}$ do sistema fixo F.

$$T_{er}(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \{\dot{u}^2\}^t [J]^t [I] [J] \{\dot{u}^2\} ds$$

denotando por $[L] = [J]^t [I] [J]$

a energia cinética rotacional toma a seguinte forma simplificada:

$$T_{er}(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \{\dot{u}^2\}^t [L] \{\dot{u}^2\} ds \quad 2.9$$

recorrendo à expressão 2.5, onde se substitui o obtido para a

energia cinética rotacional. Tem-se então, para a energia cinética total do elemento, a seguinte expressão:

$$T_e(t) = T_{et}(t) + T_{er}(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \{\dot{u}^1\}^t [m^{11}] \{\dot{u}^1\} ds + \\ + \frac{1}{2} \int_0^L \{\dot{u}^2\}^t [L] \{\dot{u}^2\} ds$$

Tendo em vista que o presente trabalho será específico para sistemas dinâmicos, compostos de elementos finitos rotor (eixo), com seção transversal circular, permite-se adotar as seguintes hipóteses simplificativas, a serem observadas no decorrer deste trabalho:

- 1 - O ângulo u_4 para sistema com velocidade constante, e negligenciando-se a deformação torcional, será denotado por Ωt , onde Ω representa a velocidade de giro da seção (Spin Speed);
- 2 - Para pequenas deformações, os ângulos (rotações) u_5 e u_6 são aproximadamente colineares com os eixos 2 e 3 do sistema fixo;
- 3 - O deslocamento u_1 , medido na direção axial 1, é pequeno e será desprezado em comparação aos deslocamentos u_2 e u_3 ; ou seja $u_1 = 0$.

Em decorrência das hipóteses 1, 2 e 3 pode-se considerar

$$\begin{aligned}
 u_1 &= 0 \\
 \dot{u}_4 &= \Omega \text{ (rotação própria)} \\
 \cos u_5 &= 1 \\
 \cos u_6 &= 1 \\
 \text{sen} u_5 &= u_5 \\
 \text{sen} u_6 &= u_6
 \end{aligned}$$

Depois de feitas as devidas simplificações na matriz $[L]$, com as hipóteses simplificativas descritas, e considerando que $u_1 = 0$, tem-se, finalmente, para a energia cinética total do elemento finito rotor, a expressão:

$$\begin{aligned}
 T_e(t) = T_{el}(t) + T_{er}(t) &= \frac{1}{2} \int_0^L \begin{Bmatrix} \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} m & \\ & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{Bmatrix} ds + \\
 &+ \frac{1}{2} \int_0^L \begin{Bmatrix} \dot{u}_4 \\ \dot{u}_5 \\ \dot{u}_6 \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} I_{pm} & 0 & -I_{pm} u_5 \\ 0 & I_m & 0 \\ -I_{pm} u_5 & 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_4 \\ \dot{u}_5 \\ \dot{u}_6 \end{Bmatrix} ds \quad 2.11
 \end{aligned}$$

onde m é a massa por unidade de comprimento do elemento.

Considerando que $\dot{u}_4 = \Omega$, e para um melhor manuseio desta equação, deve-se escrever:

$$\begin{aligned}
 T_e(t) &= \frac{1}{2} \int_0^L \begin{Bmatrix} \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} m & \\ & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{Bmatrix} ds + \\
 &+ \frac{1}{2} \int_0^L \begin{Bmatrix} \dot{u}_5 \\ \dot{u}_6 \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} 1_m & \\ & 1_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_5 \\ \dot{u}_6 \end{Bmatrix} ds + \\
 &+ \frac{1}{2} \Omega^2 \int_0^L I_{pm} ds - \Omega \int_0^L I_{pm} \dot{u}_6 u_5 ds \quad 2.12
 \end{aligned}$$

2.3 - ENERGIA CINÉTICA DE UM DISCO RÍGIDO DISCRETO T_d

Um disco rígido é um componente do sistema ROTOR-DISCO-SUPORTE caracterizado por:

- M_{di} - massa discreta localizada em um ponto s do intervalo $0 \leq s \leq L$ da elástica;
- I_{dp} - momento de inércia polar da massa do disco M_{di} ;
- I_d - momento de inércia diametral da massa do disco M_{di} nas direções 2 e 3.

A formulação da energia cinética do disco rígido discretamente localizado num ponto s da elástica, será determinada em função do demonstrado no item 2.2 para o elemento finito rotor, porém considerando as características massa-inércia não mais distribuídas ao longo do elemento, e, sim, concentradas no ponto s já referido.

$$T_d(t) = T_{dt}(t) + T_{dr}(t)$$

$$T_d(t) = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} M_{di} & \\ & M_{di} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \dot{u}_5 \\ \dot{u}_6 \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} I_d & \\ & I_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_5 \\ \dot{u}_6 \end{Bmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{2} \Omega^2 I_{dp} - \Omega I_{dp} \dot{u}_6 u_5 \quad 2.13$$

2.4 - ENERGIA DE DEFORMAÇÃO DO ELEMENTO FINITO ROTOR

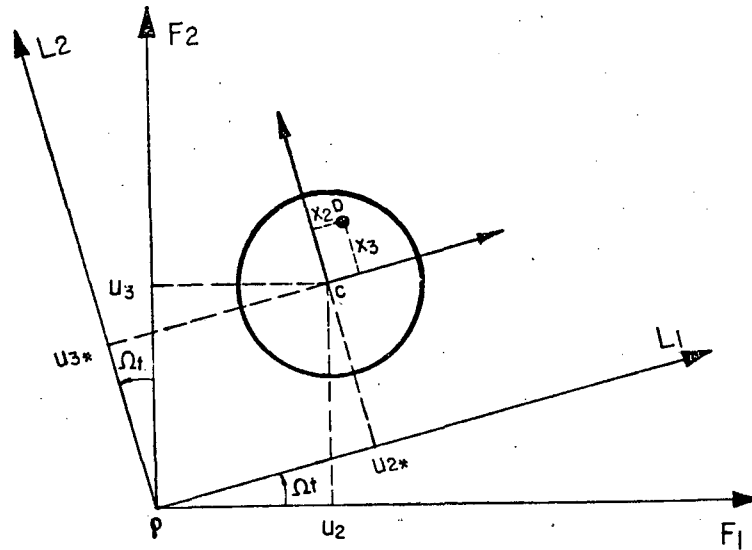


Figura 4 - Deslocamento da seção transversal do elemento.

2.4.1 - Considerações sobre a deformação.

Na figura 4, tem-se representada a seção transversal de um elemento rotor, deslocado de sua posição indeformada P .

Seja D um ponto da seção transversal de coordenadas x_2 e x_3 em relação ao sistema local, que gira a uma velocidade angular própria Ω .

Os deslocamentos do centro geométrico P da seção transversal em relação ao sistema fixo são denotados por:

$$\{u\}^t = \{u_1 \ u_2 \ u_3\}$$

Estes mesmos deslocamentos em relação ao sistema local são:

$$\{u_*\}^t = \{u_{1*} \ u_{2*} \ u_{3*}\}$$

Incluindo-se os termos de segunda ordem, a deformação longitudinal do ponto D, é dada na [03] pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \frac{du_{1*}}{ds} + \frac{1}{2} \left(\frac{du_{1*}}{ds} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{du_{2*}}{ds} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{du_{3*}}{ds} \right)^2 - \\ & x_2 \frac{d^2 u_{2*}}{ds^2} - x_3 \frac{d^2 u_{3*}}{ds^2} \end{aligned}$$

Conforme descrito nas hipóteses simplificativas, o deslocamento u_{1*} na direção axial é desprezado em comparação com u_{2*} e u_{3*} ; isto é, $u_{1*} \cong 0$. Logo, a expressão anterior torna-se:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{du_{2*}}{ds} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{du_{3*}}{ds} \right)^2 - x_2 \frac{d^2 u_{2*}}{ds^2} - x_3 \frac{d^2 u_{3*}}{ds^2} \quad 2.14$$

Para facilitar o manuseio desta equação, divide-se a mesma em duas partes, sendo uma linear ε_l e outra não linear ε_{nl} , ou seja:

$$\varepsilon = \varepsilon_l + \varepsilon_{nl} \quad 2.15$$

que representa a deformação longitudinal do ponto D da seção transversal.

2.4.2 - Energia de deformação do elemento finito rotor devida à flexão U_f

A energia de deformação U_f é dada por:

$$U_f = \int_V \varepsilon^t \sigma_f dv \quad 2.16$$

sendo a tensão $\sigma_f = E \varepsilon$

$$U_f = \int_V \varepsilon^t E \varepsilon dv$$

Substituindo-se a expressão obtida em 2.15 referente à deformação, tem-se:

$$U_f = \frac{1}{2} E \int_V (\varepsilon l + \varepsilon \eta l)^2 dv$$

$$U_f = \frac{1}{2} E \int_V (\varepsilon l^2 + 2 \varepsilon l \varepsilon \eta l + \varepsilon \eta l^2) dv \quad 2.17$$

Devido a simetria da seção transversal do elemento rotor em relação aos eixos 2 e 3 resulta que,

$$\int_V 2 \varepsilon l \varepsilon \eta l dv = 0$$

O 3.º termo da equação 2.17 é de segunda ordem e será desprezado, ou seja:

$$\int_V \varepsilon \eta l^2 dv = 0$$

Em decorrência destas simplificações, a energia de deformação do elemento rotor devida à flexão é:

$$U_f = \frac{1}{2} E \int_V \left[-x_3 \frac{d^2 u_{3f*}}{ds^2} - x_2 \frac{d^2 u_{2f*}}{ds^2} \right]^2 dv \quad 2.18$$

O índice f indica que o deslocamento é de flexão

$$U_f = \frac{1}{2} E \int_V \left[x_3^2 \left(\frac{d^2 u_{3f*}}{ds^2} \right)^2 + x_2^2 \left(\frac{d^2 u_{2f*}}{ds^2} \right)^2 + 2x_2 x_3 \frac{d^2 u_{3f*}}{ds^2} \frac{d^2 u_{2f*}}{ds^2} \right] dv$$

Integrando esta expressão em relação aos eixos 2 e 3 tem-se

$$U_f = \frac{1}{2} E \int_0^L \int_A x_3^2 \left(\frac{d^2 u_{3f*}}{ds^2} \right)^2 ds dx_2 dx_3 + \\ + \int_0^L \int_A x_2^2 \left(\frac{d^2 u_{2f*}}{ds^2} \right)^2 ds dx_2 dx_3 + \\ + \int_0^L \int_A 2x_2 x_3 \frac{d^2 u_{3f*}}{ds^2} \frac{d^2 u_{2f*}}{ds^2} ds dx_2 dx_3 \quad 2.19$$

sendo: $I_{edz} = \int_A x_3^2 dx_2 dx_3$

$$I_{eds} = \int_A x_2^2 dx_2 dx_3$$

$$I_{e29} = \int_A x_2 x_9 dx_2 dx_9$$

que são os momentos de inércia e o produto de inércia da seção, respectivamente.

Devido à simetria da seção transversal do elemento,

$$I_{ed2} = I_{ed9} = I$$

$$I_{e29} = 0$$

Substituindo-se na equação 2.19, obtém-se a equação representativa da energia de deformação de um elemento finito rotor, devida à flexão no sistema local L.

$$U_f = \frac{1}{2} EI \int_0^L \left(\frac{d^2 u_{9f*}}{ds^2} \right)^2 ds + \frac{1}{2} EI \int_0^L \left(\frac{d^2 u_{2f*}}{ds^2} \right)^2 ds$$

ou em forma matricial:

$$U_f = \frac{1}{2} EI \int_0^L \begin{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} u_{2f*}'' \\ u_{9f*}'' \end{matrix} \right\}^T \\ \left\{ \begin{matrix} u_{2f*}'' \\ u_{9f*}'' \end{matrix} \right\} \end{bmatrix} ds \quad 2.20$$

2.4.3 - Energia de deformação do elemento rotor devida à força axial U_{fa}

Caso o elemento rotor esteja sujeito a uma força axial F_a , existe uma contribuição para a energia de deformação deste elemento, dada pela expressão:

$$U_{fa} = \int_V \varepsilon \sigma_c dv$$

Como a força axial provoca uma tensão igual a

$$\sigma_c = \frac{F_a}{A}$$

a expressão 2.14 representa a deformação longitudinal ε ; logo, substituindo-se na expressão geral da energia de deformação resulta:

$$U_{fa} = \int_V \frac{F_a}{A} (\varepsilon l + \varepsilon \eta l) dv$$

$$U_{fa} = \int_V \frac{F_a}{A} \left[-x_3 \frac{d^2 u_{3*}}{ds^2} - x_2 \frac{d^2 u_{2*}}{ds^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{du_{3*}}{ds} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{du_{2*}}{ds} \right)^2 \right] ds dx_2 dx_3$$

Integrando-se esta expressão, em relação aos eixos 2 e 3 e considerando a simetria da seção transversal do elemento tem-se:

$$U_{fa} = \frac{1}{2} F_a \int_0^L \left[\left(\frac{du_{3*}}{ds} \right)^2 + \left(\frac{du_{2*}}{ds} \right)^2 \right] ds$$

ou em forma matricial

$$U_{fa} = \frac{1}{2} F_a \int_0^L \begin{Bmatrix} u_{2*} \\ u_{3*} \end{Bmatrix}^t \begin{Bmatrix} u_{2*} \\ u_{3*} \end{Bmatrix} ds$$

que representa a energia de deformação em um elemento finito rotor, devida à existência de uma força F_a atuando axialmente sobre o elemento.

2.4.4 - Energia de deformação devida ao cisalhamento

A inexistência de cargas transversais, aplicadas entre os extremos do elemento viga, nos permite considerar a distribuição de momento ao longo deste elemento com variação linear.

Portanto, o esforço cisalhante é constante ao longo da viga, produzindo uma deformação sob a forma de deslocamentos mútuos de seções transversais adjacentes ao longo do eixo.

Por outro lado, a tensão cisalhante ao longo do diâmetro normal na direção do vetor momento é variável, apresentando o máximo no centro do eixo e se anulando nos contornos.

Para contornar esta dificuldade, utiliza-se o fator K denominado fator de correção de cisalhamento, que é determinado usando a condição de que a tensão de cisalhamento é constante, quando agindo numa área A_s , deve fornecer a mesma energia de deformação cisalhante, devida à tensão de cisalhamento real atuando na área real A , conforme [18].

$$K = \frac{A_s}{A}$$

Este fator de correção de cisalhamento é dado pelas equações (32) e (33) de Cowper [15].

$$K = \frac{6(1+\nu)}{7+6\nu} \quad \text{para eixo cheio (32)}$$

$$K = \frac{6(\nu+1)(1+m^2)^2}{(7+6\nu)(1+m^2)^2 + (20+12\nu)m^2} \quad \text{para eixo vazado (33)}$$

onde m é a relação entre os diâmetros interno e externo

ν é o coeficiente de Poisson

Considera-se a viga no plano 12, com seu eixo coincidente com o eixo 1; os deslocamentos na direção 2, no sistema local L, devidos ao cisalhamento, são denotados por

u_{2c^*}

Para qualquer seção, distante s do início da viga, a expressão do deslocamento angular é:

$$\frac{du_{2c^*}}{ds} = \frac{\tau_{12}}{KG} = \frac{F}{KAG} \quad 2.22$$

onde u_{2c^*} - corresponde ao deslocamento do centro da seção transversal devido ao cisalhamento, na direção do eixo 2 do sistema local L.

τ_{12} - é a tensão de cisalhamento média da seção = $\frac{F}{A}$

G - é o módulo de elasticidade transversal.

K - é um coeficiente numérico que deve ser multiplicado pela tensão de cisalhamento média, a fim de se obter a tensão de cisalhamento equivalente na seção transversal.

γ_{12} - é a deformação transversal no plano 12

A deformação transversal γ_{12} é dada por:

$$\gamma_{12} = \frac{du_{2c^*}}{ds} \quad 2.23$$

A energia de deformação devida ao cisalhamento do elemento rotor no plano 12 será dada por:

$$U_{c12} = \frac{1}{2} \int_v \tau_{12} \gamma_{12} dv$$

$$U_{c12} = \frac{1}{2} \int_v KG \gamma_{12} \gamma_{12} dv$$

$$U_{c12} = \frac{1}{2} \int_0^L KAG \gamma_{12} \gamma_{12} ds$$

Substituindo-se o valor de γ_{12} dado na equação 2.23 resulta

$$U_{c12} = \frac{1}{2} \int_0^L KAG \left(u_{2c^*}' \right) \left(u_{2c^*}' \right) ds \quad 2.24$$

De maneira análoga determina-se a energia de deformação no plano 13:

$$U_{c13} = \frac{1}{2} \int_0^L KAG \left(u_{3c^*}' \right) \left(u_{3c^*}' \right) ds \quad 2.25$$

Logo, somando as duas expressões para a energia de deformação devida ao cisalhamento nos planos 12 e 13, resulta

$$U_c = \frac{1}{2} \int_0^L KAG \begin{Bmatrix} u_{2c*}' \\ u_{9c*}' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{2c*}' \\ u_{9c*}' \end{Bmatrix} ds + \\ + \frac{1}{2} \int_0^L KAG \begin{Bmatrix} u_{9c*}' \\ u_{9c*}' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{9c*}' \\ u_{9c*}' \end{Bmatrix} ds$$

ou em forma matricial

$$U_c = \frac{1}{2} \int_0^L KAG \begin{Bmatrix} u_{2c*}' \\ u_{9c*}' \end{Bmatrix}^t \begin{Bmatrix} u_{2c*}' \\ u_{9c*}' \end{Bmatrix} ds \quad 2.26$$

2.4.5 - Energia de deformação total U

A energia de deformação total U é uma combinação das equações:

2.20 - devida a flexão U_f

2.21 - devida a atuação de uma força axial F_a , U_{fa}

2.26 - devida a efeito cisalhante U_c

$$U = U_f + U_{fa} + U_c$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left[\frac{d^2 u_{2f*}}{ds^2} \right]^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^L EI \left[\frac{d^2 u_{9f*}}{ds^2} \right]^2 ds + \\ + \frac{1}{2} F_a \int_0^L \left[\frac{du_{2*}}{ds} \right]^2 ds + \frac{1}{2} F_a \int_0^L \left[\frac{du_{9*}}{ds} \right]^2 ds + \\ + \frac{1}{2} \int_0^L KAG \left[\frac{du_{2c*}}{ds} \right]^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^L KAG \left[\frac{du_{9c*}}{ds} \right]^2 ds \quad 2.27$$

Para determinação da energia de deformação no Sistema inercial fixo F, obtém-se na figura 4, as seguintes relações entre os deslocamentos no Sistema fixo F e no Sistema local L

$$\begin{Bmatrix} u_{2*} \\ u_{3*} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Omega t & \text{sen } \Omega t \\ -\text{sen } \Omega t & \cos \Omega t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad 2.28$$

Substituindo-se na equação 2.27 obtém-se:

$$\begin{aligned} U = & \frac{1}{2} \int_0^L I \left[\left(\frac{d^2 u_{3f}}{ds^2} \cos \Omega t - \frac{d^2 u_{2f}}{ds^2} \text{sen } \Omega t \right)^2 + \right. \\ & \left. + I \left(\frac{d^2 u_{3f}}{ds^2} \text{sen } \Omega t + \frac{d^2 u_{2f}}{ds^2} \cos \Omega t \right)^2 \right] ds + \\ & + \frac{1}{2} F_a \int_0^L \left[\left(\frac{du_3}{ds} \cos \Omega t - \frac{du_2}{ds} \text{sen } \Omega t \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{du_3}{ds} \text{sen } \Omega t + \frac{du_2}{ds} \cos \Omega t \right)^2 \right] ds + \\ & + \frac{1}{2} KAG \int_0^L \left[\left(\frac{du_{3c}}{ds} \cos \Omega t - \frac{du_{2c}}{ds} \text{sen } \Omega t \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{du_{3c}}{ds} \text{sen } \Omega t + \frac{du_{2c}}{ds} \cos \Omega t \right)^2 \right] ds \end{aligned}$$

Efetuada as devidas simplificações, obtém-se as seguintes expressões para a energia de deformação do elemento:

$$\begin{aligned}
U = & \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{d^2 u_{3f}}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 u_{2f}}{ds^2} \right)^2 \right] ds + \\
& + \frac{F_a}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{du_3}{ds} \right)^2 + \left(\frac{du_2}{ds} \right)^2 \right] ds + \\
& + \frac{KAG}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{du_{3c}}{ds} \right)^2 + \left(\frac{du_{2c}}{ds} \right)^2 \right] ds
\end{aligned} \tag{2.29}$$

ou, em forma matricial,

$$\begin{aligned}
U = & \frac{EI}{2} \int_0^L \begin{Bmatrix} u_{2f}'' \\ u_{3f}'' \end{Bmatrix}^t \begin{Bmatrix} u_{2f}'' \\ u_{3f}'' \end{Bmatrix} ds + \frac{F_a}{2} \int_0^L \begin{Bmatrix} u_2' \\ u_3' \end{Bmatrix}^t \begin{Bmatrix} u_2' \\ u_3' \end{Bmatrix} ds + \\
& + \frac{KAG}{2} \int_0^L \begin{Bmatrix} u_{2c}' \\ u_{3c}' \end{Bmatrix}^t \begin{Bmatrix} u_{2c}' \\ u_{3c}' \end{Bmatrix} ds
\end{aligned} \tag{2.30}$$

onde, o primeiro termo representa a energia de deformação do elemento finito rotor devida à flexão; o segundo representa a energia de deformação devida à atuação de uma força axial no elemento; e o terceiro termo representa a energia de deformação devida ao cisalhamento em função dos deslocamentos causados pelas respectivas ações.

$$U = U_f + U_{fa} + U_c$$

CAPITULO III

FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO

3.1 - INTRODUÇÃO

Modelagem usando Elementos Finitos

No caso de estudo do comportamento de modelos estruturais, onde existem a complexidade da geometria e condições de contorno não usuais, a análise pelos métodos exatos torna-se bastante complicada, requerendo-se neste caso, o uso de um método numérico para determinar o comportamento estático ou dinâmico do modelo.

Para estes casos o método dos elementos finitos é largamente usado e alguns aspectos serão apresentados a seguir.

Obtenção das Equações

O método dos elementos finitos pode ser apresentado simplesmente em termos dos seguintes passos:

a) a estrutura é dividida em elementos de tamanho finito chamados elementos finitos, que são conectados em certos pontos, denominados pontos nodais ou nós, situados nos contornos dos elementos.

b) depois de fazer as hipóteses dos deslocamentos do elemento i , a energia cinética T_i , a energia de deformação U_i , e o trabalho das forças externas W_{fi} , são calculados para este elemento em função dos deslocamentos nodais.

c) determinam-se então as energias e o trabalho total do modelo, como sendo o somatório do obtido para cada elemento. Sendo NE o número total de elementos, tem-se:

$$T = \sum_{i=1}^{NE} T_i$$

$$U = \sum_{i=1}^{NE} U_i$$

$$W_f = \sum_{i=1}^{NE} W_{fi}$$

d) as equações diferenciais do movimento de toda a estrutura são obtidas através da aplicação, sobre as equações das energias e do trabalho das forças externas, da equação de Lagrange [12].

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{dT}{d\dot{u}_e} \right] - \frac{dT}{du_e} + \frac{dU}{du_e} = \frac{dW_f}{du_e} \quad 3.1$$

obtendo-se então as equações Lagrangeanas do movimento

$$[M] \{\ddot{u}_e\} + [G] \{\dot{u}_e\} + [K] \{u_e\} = \{Q\}$$

onde $\{ue\}$ é o vetor dos deslocamentos nodais do elemento

$[M]$, $[G]$, $[K]$ são, respectivamente, as matrizes massa, giroscópica e rigidez,

$\{Q\}$ é o vetor das forças generalizadas.

3.2 - FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO

O elemento considerado é uma viga reta, flexível de seção transversal constante, referida a um sistema intrínseco principal, com o eixo F_1 coincidente com o eixo de torção (eixo neutro) do elemento, e os eixos F_2 e F_3 seguindo as direções principais de inércia das seções transversais.

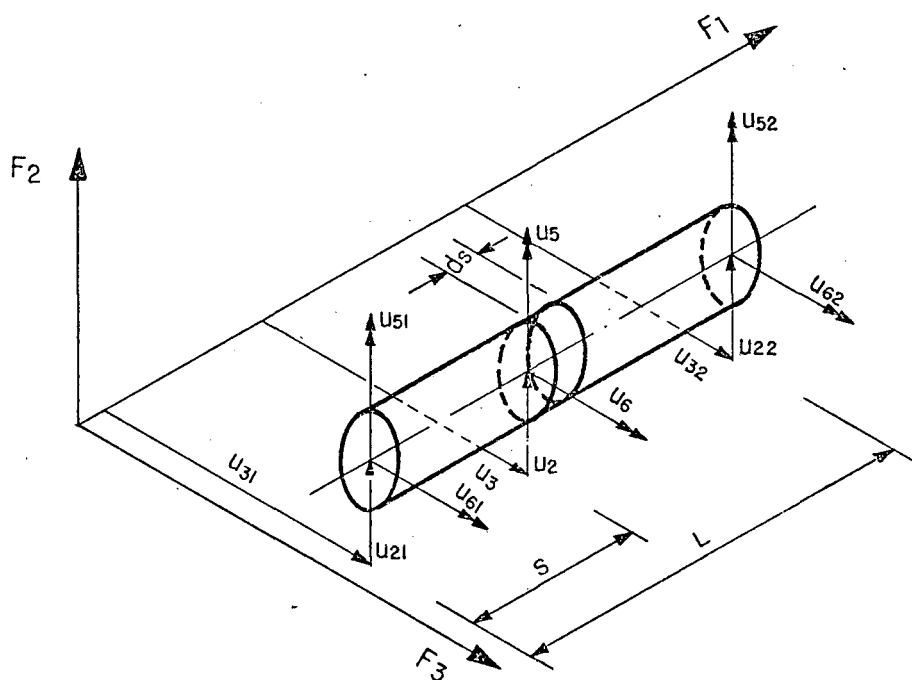


Figura 5 - Representação típica do elemento finito rotor.

O vetor deslocamento $\{u(s,t)\}$ em uma seção determinada pela coordenada s relativa à origem da viga é

$$\{u(s,t)\}^t = \{u_2(s,t) \ u_3(s,t) \ u_5(s,t) \ u_6(s,t)\} \quad 3.2$$

onde u_2 e u_3 são deslocamentos nas direções dos eixos 2 e 3 e u_5 e u_6 são as rotações em relação aos eixos 2 e 3 respectivamente.

Estas rotações u_5 e u_6 , que são as rotações da seção transversal, são obtidas das translações u_2 e u_3 através das seguintes relações:

$$u_5(s,t) = - \frac{du_{3f}}{ds} \quad 3.3$$

$$u_6(s,t) = \frac{du_{2f}}{ds} \quad 3.4$$

O índice f indica que o deslocamento é devido à flexão.

Então todas as coordenadas para descrever os deslocamentos dos pontos nodais de um elemento rotor são

$$\{ue\}^t = \{u_{21} \ u_{31} \ u_{51} \ u_{61} \ u_{22} \ u_{32} \ u_{52} \ u_{62}\} \quad 3.5$$

onde os índices finais indicam o respectivo nó do elemento, ou seja:

u_{21} é o deslocamento na direção do eixo 2 do nó 1 do elemento.

A translação de cada disco diferencial interno do

elemento deve ser repassada para os deslocamentos dos pontos nodais, por meio das seguintes equações matriciais:

$$\begin{Bmatrix} u_2(s,t) \\ u_3(s,t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N(s) \\ M(s) \end{bmatrix} \{ue(t)\} \quad 3.8$$

onde $N(s)$ e $M(s)$ são as funções de interpolação. Estas funções de interpolação, em número de quatro para cada deslocamento u_2 e u_3 , respectivamente, serão obtidas através do Método dos Deslocamentos Virtuais Unitários e considerando a Teoria da Viga de Timoshenko.

As seguintes hipóteses são consideradas:

1. Seções planas e perpendiculares ao eixo neutro permanecerão planas, mas não necessariamente perpendiculares ao eixo neutro deformado.
2. O material é tal que o princípio da superposição é válido.
3. A deflexão transversal total $u_2(s,t)$, e $u_3(s,t)$ em qualquer um dos planos principais é

$$u_2 = u_{2f} + u_{2c}$$

$$u_3 = u_{3f} + u_{3c}$$

onde o índice f é devido ao momento fletor e c é devido à força cisalhante.

4. Não existe carga de qualquer espécie no vão da viga, sendo o carregamento aplicado exclusivamente em seus terminais.
5. O deslocamento cisalhante é constante ao longo da viga.
6. As seções são circulares.

3.3 - ESTUDO DAS FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO N_1 a N_4 REFERENTES AOS DESLOCAMENTOS NO PLANO 12

As equações diferenciais que regem o problema são:

$$EI u_{2f}'' = - M(s) \quad 3.7a$$

$$KA G u_{2c}' = F(s) \quad 3.7b$$

onde $M(s)$ é o momento resultante da flexão e $F(s)$ é a força de cisalhamento resultante, em uma seção transversal distante de s da origem do elemento, atuando em um dos planos principais, e proveniente de esforços resistentes que atuam nos terminais do membro. KA representa a área efetiva de cisalhamento da seção transversal.

A seguir serão determinadas as funções de interpolação provenientes de flexões estáticas de um elemento viga, conforme referência [08].

Para determinação destas funções considere-se a viga sujeita aos esforços terminais, provocados por um deslocamento virtual unitário, aplicado no término do membro, com restrição dos outros deslocamentos, a menos dos devido ao cisalhamento, que é tomado constante ao longo da viga.

3.3.1 - Função de Interpolação N_1

Para determinação desta primeira função de interpolação, considere-se a viga sujeita aos esforços

terminais, provocados por um deslocamento virtual unitário $u_2(0) = 1$, aplicado no início do membro com restrição dos outros deslocamentos, a menos dos devidos ao cisalhamento, que é tomado constante ao longo da viga.

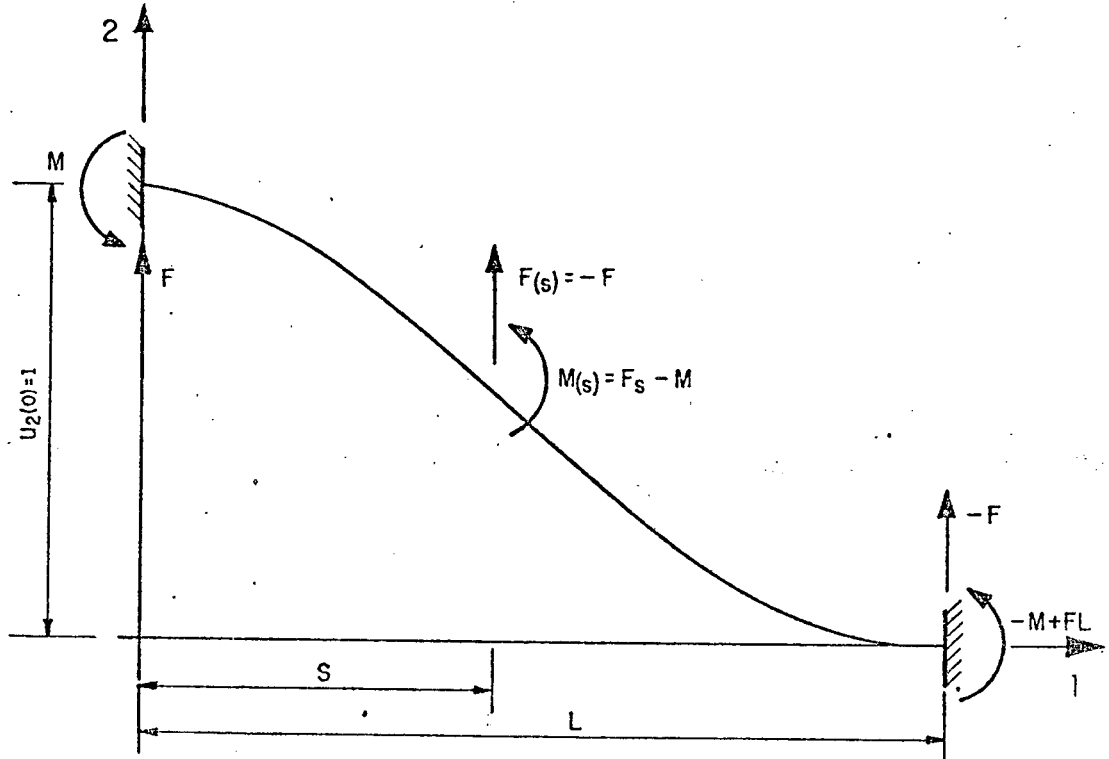


Figura 6 - Representação dos esforços decorrentes do deslocamento virtual unitário $u_2(0) = 1$.

Estando a viga em equilíbrio, os esforços decorrentes deste deslocamento unitário são mostrados na figura 6, onde M é o momento atuante no plano 3 na seção origem e F é o esforço cisalhante na direção 2 da mesma seção.

Os esforços na seção transversal determinada por s são:

$$M(s) = -Fs + M \quad 3.8a$$

$$F(s) = -F \quad 3.8b$$

então substituindo as equações 3.8 nas equações 3.7 obtém-se

$$EIu_{2f}''(s) = Fs - M \quad 3.9a$$

$$KAGu_{2c}'(s) = -F \quad 3.9b$$

integrando estas relações 3.9, ao longo de s resulta

$$EIu_{2f}'(s) = \frac{Fs^2}{2} - Ms + C_1 \quad 3.10a$$

$$EIu_{2f}(s) = \frac{Fs^3}{6} - \frac{Ms^2}{2} + sC_1 + C_2 \quad 3.10b$$

$$KAGu_{2c}(s) = -Fs + C_3 \quad 3.10c$$

Pelo princípio da superposição (hipóteses 2 e 3), a configuração do deslocamento total é:

$$u_2(s) = u_{2f}(s) + u_{2c}(s)$$

Substituindo as equações 3.10 a e c obtém-se:

$$EIu_2(s) = \frac{Fs^3}{6} - \frac{Ms^2}{2} + \left[C_1 - \frac{FEI}{KAG} \right] s + C_2 + \frac{EIC_3}{KAG} \quad 3.11a$$

$$EIu_2'(s) = \frac{Fs^2}{2} - Ms + C_1 - \frac{FEI}{KAG} \quad 3.11b$$

ou seja, a configuração de deflexão total pode ser considerada como a soma da configuração de deflexão devida à flexão, mais a

configuração de flexão devida à deformação cisalhante, como indicado na figura 7.

A inclinação na origem da configuração de deslocamento transversal devida à flexão pura é nula; entretanto, a inclinação total na origem devida à flexão e ao cisalhamento (deslocamento transversal total) é dada por:

$$u_2'(0) = u_{2f}'(0) + u_{2c}'(0)$$

como $u_{2f}'(0) = 0$ e $u_{2c}'(s) = -\frac{F}{KAG}$ (constante)

$$u_2'(0) = u_{2c}'(0) = -\frac{F}{KAG}$$

Estando o término da viga engastado, todas as componentes do vetor deslocamento são nulas, exceto a inclinação da configuração de deslocamento devida ao cisalhamento, que sendo constante permanecerá com o valor

$$u_{2c}'(0) = -\frac{F}{KAG}$$

Com base nas considerações anteriores pode-se deduzir as seguintes condições de contorno:

Em $s = 0$

$$u_2(0) = 1 \quad 3.12a$$

$$u_2'(0) = u_{2c}'(0) = -\frac{F}{KAG} \quad 3.12b$$

$$\text{Em } s = L \quad u_2(L) = u_{2f}(L) = u_{2c}(L) = 0 \quad 3.12c$$

$$u_2'(L) = u_{2c}'(L) = -\frac{F}{KAG} \quad 3.12d$$

As condições de contorno, equações 3.12, serão aplicadas nas equações 3.10 e 3.11 para determinar todas as configurações de deslocamento ao longo da viga, em função da distância s medida a partir da origem do elemento.

Para determinação do valor de C_3 , aplica-se a condição de contorno 3.12c na equação 3.10c obtendo-se:

$$s = L \quad u_{2c}(L) = 0$$

$$0 = -\frac{FL}{KAG} + \frac{C_3}{KAG} \quad \text{o que implica} \quad C_3 = FL$$

Aplicando a condição de contorno 3.12b na equação 3.11b obtém-se a constante C_1 :

$$s = 0 \quad u_2'(0) = u_{2c}'(0) = -\frac{F}{KAG}$$

$$-\frac{FEI}{KAG} = -C_1 - \frac{FEI}{KAG} \quad \text{o que implica em } C_1 = 0$$

Aplicando a condição de contorno 3.12d na equação 3.11b obtém-se a seguinte relação entre F e M :

$$s = L \quad u_2'(0) = u_{2c}'(L) = -\frac{F}{KAG}$$

$$-\frac{FEI}{KAG} = \frac{FL^2}{2} - ML - \frac{FEI}{KAG} \quad \therefore \quad M = \frac{FL}{2}$$

Aplicando a condição de contorno 3.12c na equação 3.11a obtém-se a constante C_2 :

$$s = L \quad u_2(L) = 0$$

$$0 = \frac{FL^3}{6} - \frac{ML^2}{2} + C_2 \quad \therefore \quad C_2 = -\frac{FL^3}{6} + \frac{ML^2}{2}$$

Substituindo-se os valores obtidos para C_1 , C_2 , C_3 e M na equação 3.12a, tem-se para o deslocamento transversal total a seguinte equação:

$$u_2(s) = \left[\frac{Fs^3}{6} - \frac{FLs^2}{4} + \frac{FL^3}{12} + \frac{EI}{KAG} (-Fs + FL) \right] \frac{1}{EI} \quad 3.13$$

Para determinar-se o valor de F , nesta equação usa-se a condição 3.12a, referente ao deslocamento virtual unitário:

$$s = 0 \quad u_2(0) = 1$$

$$1 = \frac{FL^3}{12 EI} + \frac{FL}{KAG} \quad \text{ou} \quad 1 = \frac{FL^3}{12 EI} \left(1 + \frac{12 EI}{L^2 KAG} \right)$$

o valor de $\frac{12 EI}{L^2 KAG}$ que aparece nesta fórmula é o efeito de

cisalhamento transversal e é denotado por ϕ $\left[\phi = \frac{12 EI}{L^2 KAG} \right]$, logo:

$$F = \frac{12 EI}{L^3(1+\phi)} \quad 3.14$$

Depois de obtidas as constantes de integração e os valores de F e M através do método dos deslocamentos virtuais unitários, substituem-se os valores nas equações dos deslocamentos, representando finalmente os deslocamentos $u_2(s)$, $u_{2f}(s)$, $u_{2c}(s)$ em função da distância s do início do elemento; considerando $y = \frac{s}{L}$ tem-se:

$$u_{2c}(s) = \frac{\phi}{(1+\phi)} (-y+1) \quad 3.15a$$

$$u_{2c}'(s) = \frac{\phi}{(1+\phi)} \left(-\frac{1}{L}\right) \quad 3.15b$$

$$u_{2f}(s) = \frac{1}{(1+\phi)} (2y^3 - 3y^2 + 1) \quad 3.15c$$

$$u_{2f}'(s) = \frac{1}{(1+\phi)L} (6y^2 - 6y) \quad 3.15d$$

$$u_2(s) = \frac{1}{(1+\phi)} \left[2y^3 - 3y^2 + 1 + \phi (-y + 1) \right] \quad 3.15e$$

$$u_2'(s) = \frac{1}{(1+\phi)L} (6y^2 - 6y - \phi) \quad 3.15f$$

Todas estas equações satisfazem as condições de contorno indicadas.

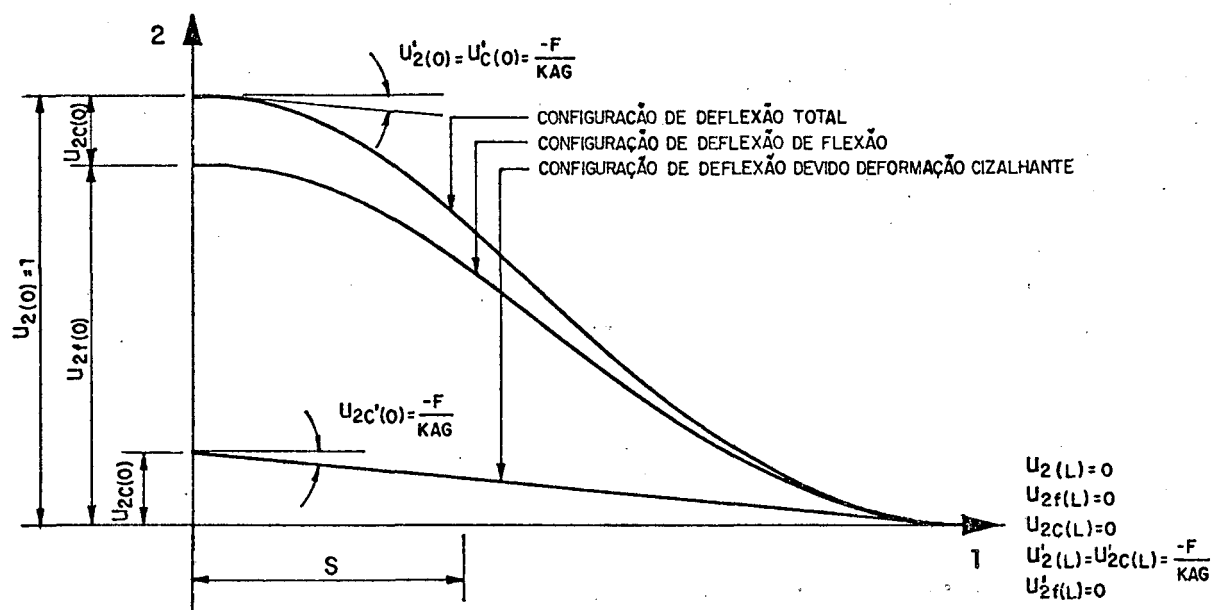


Figura 7 - Gráfico das curvas $u_2(s)$, $u_{2f}(s)$ e $u_{2c}(s)$ para um deslocamento virtual unitário $u_2(0) = 1$.

3.3.2 - Função de Interpolação N_2

Para a determinação desta segunda função de interpolação, serão feitas considerações semelhantes às efetuadas para a função de interpolação N_1 , ou seja, os esforços terminais são agora provocados por um deslocamento virtual unitário de rotação da seção transversal $u_{2f}'(0) = 1$, aplicado no início do membro com restrição dos outros deslocamentos, a menos dos devidos ao cisalhamento, que é tomado constante ao longo da viga.

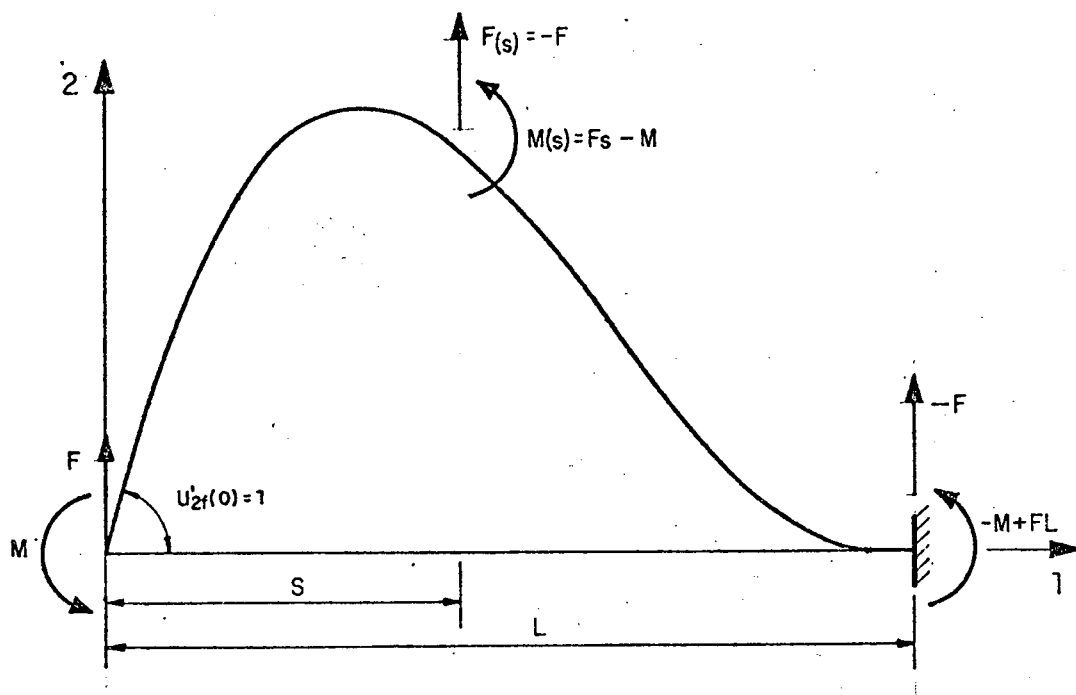


Figura 8 - Representação dos esforços decorrentes do deslocamento virtual unitário de rotação $u_{2f}'(0) = 1$.

Com a viga em equilíbrio, os esforços decorrentes deste deslocamento unitário estão mostrados na figura 8, onde M é o momento atuante no plano 3 na seção origem e F é o esforço cisalhante na direção 2 da mesma seção.

Os esforços em uma seção determinada por s são:

$$M(s) = -Fs + M \quad 3.16a$$

$$F(s) = -F \quad 3.16b$$

Substituindo-se as equações 3.16 nas equações 3.7 obtém-se:

$$EIu_{2f}''(s) = Fs - M \quad 3.17a$$

$$KAGu_{2c}'(s) = -F \quad 3.17b$$

A integração destas equações ao longo de s resulta em:

$$EIu_{2f}'(s) = \frac{Fs^2}{2} - Ms + C_1 \quad 3.18a$$

$$EIu_{2f}(s) = \frac{Fs^3}{6} - \frac{Ms^2}{2} + sC_1 + C_2 \quad 3.18b$$

$$KAGu_{2c}(s) = -Fs + C_3 \quad 3.18c$$

Conforme descrito para a função N_1 , aplica-se a hipótese do princípio da superposição dos efeitos. Determinando-se a configuração de deflexão total, como a soma da configuração de deflexão devida à flexão, com a configuração de deflexão devida ao cisalhamento. Conforme pode-se observar na figura 8, tem-se:

$$u_2(s) = u_{2f}(s) + u_{2c}(s)$$

$$EIu_2(s) = \frac{Fs^3}{6} - \frac{Ms^2}{2} + \left[C_1 - \frac{FEI}{KAG} \right] s + C_2 + \frac{EIC_3}{KAG} \quad 3.19a$$

$$EIu_2'(s) = \frac{Fs^2}{2} - Ms + C_1 - \frac{FEI}{KAG} \quad 3.19b$$

Na origem a configuração de deslocamento total, a soma da configuração de flexão com cisalhamento é nula:

$$u_2(0) = 0 \quad \text{e} \quad u_{2f}(0) = -u_{2c}(0)$$

e a inclinação total será a soma da inclinação devida à configuração de flexão, dada pelo deslocamento virtual unitário de rotação $u_{2f}'(0) = 1$, acrescida da inclinação devida ao cisalhamento, que é constante e dado por:

$$u_{2c}'(0) = u_{2c}'(s) = -\frac{F}{KAG} \quad \text{logo}$$

$$u_2'(0) = u_{2f}'(0) + u_{2c}'(0) = 1 - \frac{F}{KAG}$$

Com o término da viga engastado, todas as componentes do vetor deslocamento são nulas, exceto a configuração de deslocamento devida ao cisalhamento, que é constante ao longo da viga.

Tendo em vista as considerações anteriores deduzem-se as seguintes condições de contorno:

Em $s = 0$

$$u_2(0) = 0 \quad 3.20a$$

$$u_{2f}'(0) = 1 \quad 3.20b$$

$$u_{2c}'(0) = -\frac{F}{KAG} \quad 3.20c$$

Em $s = L$

$$u_2(L) = u_{2f}(L) = u_{2c}(L) = 0 \quad 3.20d$$

$$u_2'(L) = u_{2c}'(L) = -\frac{F}{KAG} \quad 3.20e$$

Estas condições de contorno serão aplicadas nas equações 3.18 e 3.19, determinando todas as configurações de deslocamento ao longo da viga, em função da distância s medida a partir da origem.

Considerando a condição de contorno 3.20d na equação 3.18c obtém-se a constante C_3 :

$$s = L \quad u_{2c}(L) = 0$$

$$0 = -\frac{FL}{KAG} + \frac{C_3}{KAG} \quad \text{o que implica} \quad C_3 = FL$$

Considerando a condição de contorno 3.20a na equação 3.19a obtém-se a constante C_2 :

$$s = 0 \quad u_2(0) = 0$$

$$C_2 = -\frac{FL EI}{KAG}$$

Considerando a condição de contorno 3.20e na equação 3.19b obtém-se a constante C_1 :

$$s = L \quad u_2'(L) = u_{2c}'(L) = -\frac{F}{KAG}$$

$$C_1 = -\frac{FL^2}{2} + ML$$

Considerando a condição de contorno 3.20d na equação 3.19a obtém-se uma relação entre F e M :

$$s = L \quad u_2(L) = 0$$

$$M = \frac{1}{6} FL(4 + \phi)$$

Substituindo os valores de C_1 , C_2 , C_3 e F na equação 3.19b tem-se, para a configuração de inclinação de flexão, a seguinte expressão:

$$EI u_{2f}'(s) = \frac{FL^2}{6} \left[(3y^2 - 4y + 1) + \phi (-y + 1) \right] \quad 3.21$$

Para determinar o valor de F , usa-se a condição do deslocamento virtual unitário no início do membro, que corresponde à condição de contorno 3.20b:

$$S = 0 \quad u_{2f}'(0) = 1$$

$$F = \frac{6 EI}{L^2(1+\phi)} \quad 3.22$$

Então, após obtidos os valores das constantes de integração, e também os valores de F e M referidos ao deslocamento virtual unitário de rotação $u_{2f}'(0) = 1$ no início do membro, conforme pode-se ver na figura 8, substituem-se estes valores nas equações 3.18 e 3.19 obtendo desta maneira as equações dos deslocamentos em função da distância s do início do elemento:

$$u_{2c}(s) = \frac{\phi}{(1+\phi)} L \left[\frac{-y}{2} + \frac{1}{2} \right] \quad 3.23a$$

$$u_{2c}'(s) = \frac{\phi}{(1+\phi)} \left[-\frac{1}{2} \right] \quad 3.23b$$

$$u_{2f}(s) = \frac{L}{(1+\phi)} \left[\left[y^3 - 2y^2 + y \right] + \phi \left[\frac{y^2}{2} + y - \frac{1}{2} \right] \right] \quad 3.23c$$

$$u_{2f}'(s) = \frac{1}{(1+\phi)} \left[\left[3y^2 - 4y + 1 \right] + \phi \left[-y + 1 \right] \right] \quad 3.23d$$

$$u_2(s) = \frac{L}{(1+\phi)} \left[\left[y^3 - 2y^2 + y \right] + \phi \left[-\frac{y^2}{2} + \frac{y}{2} \right] \right] \quad 3.23e$$

$$u_2'(s) = \frac{1}{(1+\phi)} \left[\left[3y^2 - 4y + 1 \right] + \phi \left[-y + \frac{1}{2} \right] \right] \quad 3.23f$$

Todas estas equações satisfazem as condições de contorno indicadas.

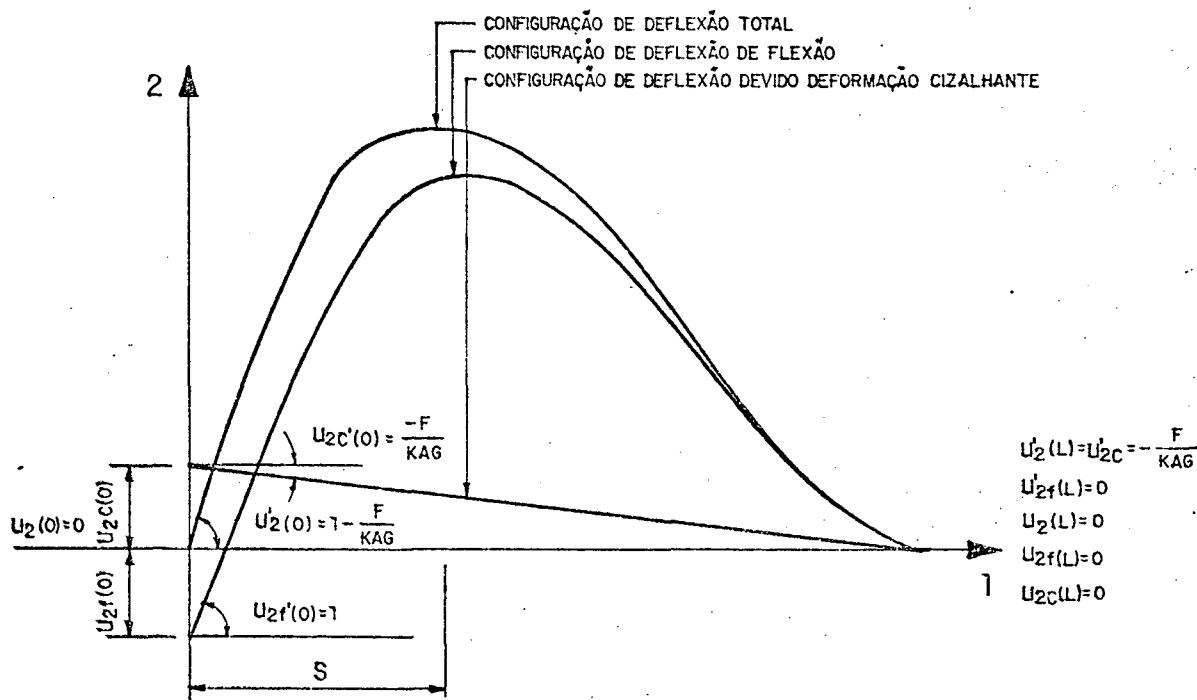


Figura 9 - Gráfico das curvas $u_2(s)$, $u_{2f}(s)$ e $u_{2c}(s)$ para um deslocamento unitário de $u_{2f}'(0) = 1$.

3.3.3 - Função de Interpolação N_3

Para determinação desta terceira função de interpolação, serão feitas considerações idênticas às efetuadas para as funções de interpolação N_1 , entretanto, nesta função será dado um deslocamento virtual unitário no término do membro $u_2(L) = 1$, com restrição dos outros deslocamentos, a menos dos devidos ao cisalhamento, que é tomado constante ao longo da viga.

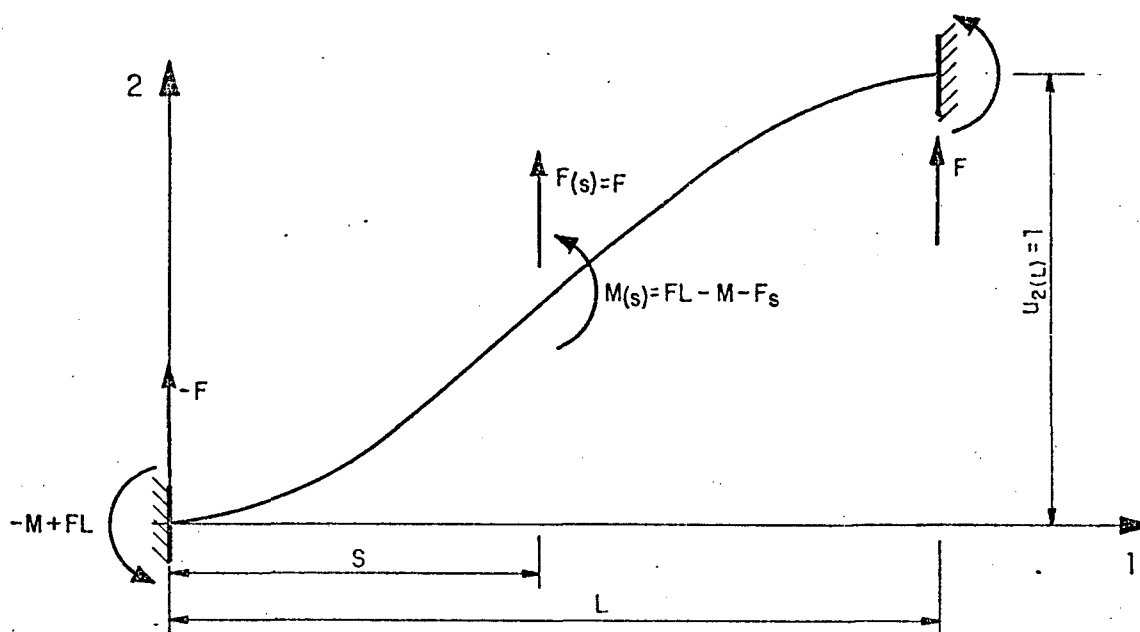


Figura 10 - Representação dos esforços decorrentes do deslocamento virtual unitário $u_2(L) = 1$.

Com a viga em equilíbrio, os esforços decorrentes deste deslocamento unitário estão mostrados na figura 10, os esforços M e F são os mesmos já descritos para as funções de interpolação N_1 e N_2 .

Em uma seção transversal determinada por s os esforços são:

$$M(s) = -FL + Fs + M \quad 3.24a$$

$$F(s) = F \quad 3.24b$$

Substituindo as funções 3.24 nas equações 3.7 tem-se:

$$EIu_{2f}''(s) = FL - Fs - M \quad 3.25a$$

$$KAGu_{2c}'(s) = F \quad 3.25b$$

A integração das equações 3.25 ao longo de s resulta:

$$EIu_{2f}'(s) = (FL - Ms - \frac{Fs^2}{2}) + C_1 \quad 3.26a$$

$$EIu_{2f}(s) = (FL - M) \frac{s^2}{2} - \frac{Fs^3}{6} + sC_1 + C_2 \quad 3.26b$$

$$KAGu_{2c}(s) = Fs + C_3 \quad 3.26c$$

Tendo em vista as observações feitas na determinação de N_1 sobre o princípio da superposição pode-se escrever:

$$u_2(s) = u_{2f}(s) + u_{2c}(s)$$

$$EIu_2(s) = (FL - M) \frac{s^2}{2} - \frac{Fs^3}{6} + \left[C_1 + \frac{FEI}{KAG} \right] s + C_2 + \frac{EIC_3}{KAG} \quad 3.27a$$

$$EIu_2''(s) = (FL - Ms - \frac{Fs^2}{2} + C_1 + \frac{FEI}{KAG} \quad 3.27b$$

As condições de contorno decorrentes da configuração de deslocamento imposta $u_2(L) = 1$, com restrição dos outros deslocamentos, a menos dos devidos ao cisalhamento, que é constante ao longo da viga, são:

em $s = 0$ (engastamento)

$$u_2(0) = u_{2f}(0) = u_{2c}(0) = 0 \quad 3.28a$$

$$u_2'(0) = u_{2c}' = \frac{F}{KAG} \quad 3.28b$$

em $s = L$ (deslocamento virtual)

$$u_2(L) = 1 \quad 3.28c$$

$$u_{2c}'(L) = \frac{F}{KAG} \quad 3.28d$$

Aplicando a condição de contorno 3.28a na equação 3.26c, determina-se C_9 :

$$s = 0 \quad u_{2c}(0) = 0 \quad \therefore C_9 = 0$$

Aplicando a condição de contorno 3.28b na equação 3.27b obtém-se C_1 :

$$s = 0 \quad u_2'(0) = u_{2c}'(0) = \frac{F}{KAG}$$

$$\frac{FEI}{KAG} = 0 + C_1 + \frac{FEI}{KAG} \quad \therefore \quad C_1 = 0$$

Aplicando a condição de contorno 3.28a na equação 3.27a obtém-se C_2 :

$$s = 0 \quad u_2(0) = 0 \quad \therefore \quad C_2 = 0$$

Aplicando a condição de contorno 3.28d na equação 3.27b determina-se a relação entre F e M:

$$s = L \quad u_2'(L) = u_{2c}'(L) = \frac{F}{KAG}$$

$$EI \frac{F}{KAG} = CFL - MDL - \frac{FL^2}{2} + \frac{FL^2}{KAG} + \frac{FEI}{KAG} \quad \therefore \quad M = \frac{FL}{2}$$

Considerando-se os valores obtidos para C_1 , C_2 , C_3 e a relação entre F e M, substituem-se na equação 3.27a obtendo assim a configuração do deslocamento total, ou seja:

$$EIu_2(s) = \frac{FL^3}{12} \left[3y^2 - 2y^3 + \phi y \right] \quad 3.29$$

Aplicando então, a condição de contorno do deslocamento virtual imposta no término do membro, $u_2(L) = 1$, determina-se o valor de F na equação 3.29:

$$s = L \quad u_2(L) = 1$$

$$F = \frac{12 EI}{L^3(1+\phi)} \quad 3.30$$

De posse destes valores e das equações 3.26 e 3.27, obtém-se as equações dos deslocamentos ao longo da viga, em função da distância s medida a partir do início do elemento:

$$u_{2c}(s) = \frac{\phi}{(1+\phi)} [y] \quad 3.31a$$

$$u_{2c}'(s) = \frac{\phi}{(1+\phi)} \left[\frac{1}{L} \right] \quad 3.31b$$

$$u_{2f}(s) = \frac{1}{(1+\phi)} [3y^2 - 2y^3] \quad 3.31c$$

$$u_{2f}'(s) = \frac{1}{(1+\phi)} \frac{1}{L} [6y - 6y^2] \quad 3.31d$$

$$u_2(s) = \frac{1}{(1+\phi)} \left[[3y^2 - 2y^3] + \phi y \right] \quad 3.31e$$

$$u_2'(s) = \frac{1}{(1+\phi)} \frac{1}{L} \left[[6y - 6y^2] + \phi \right] \quad 3.31f$$

Todas as equações 3.31 satisfazem as condições de contorno indicadas em 3.28.

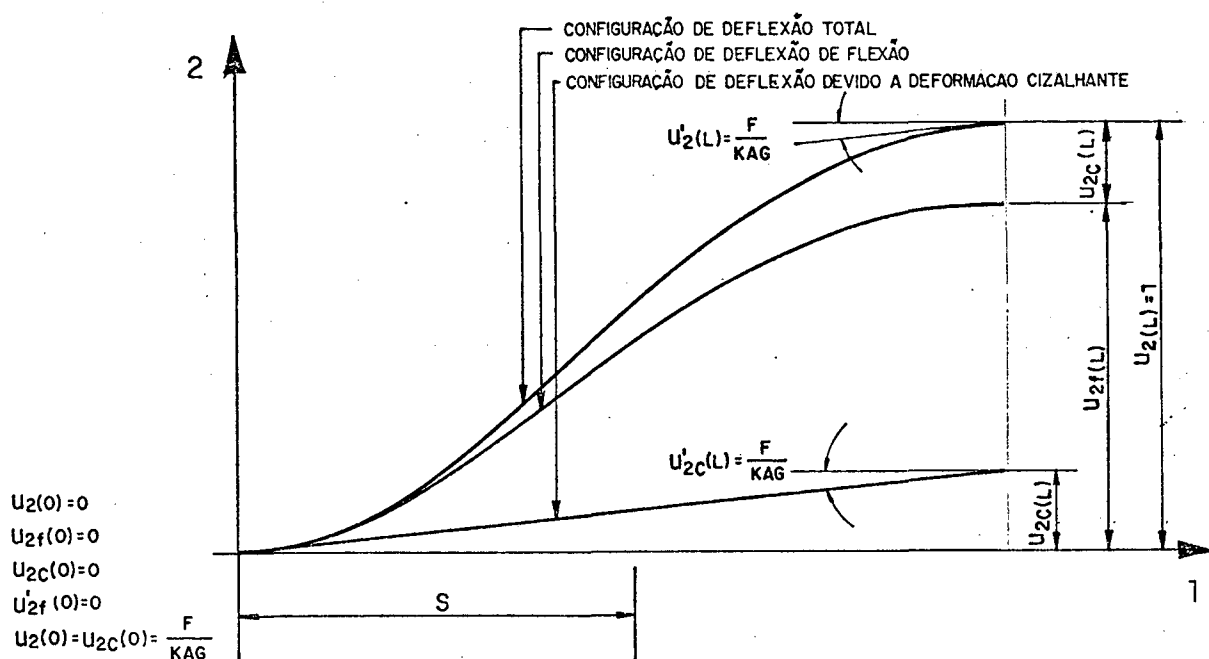


Figura 11 - Gráfico das curvas $u_2(s)$, $u_{2f}(s)$ e $u_{2c}(s)$ para um deslocamento virtual unitário $u_2(L) = 1$.

3.3.4. - Função de Interpolação N_4

Na obtenção desta quarta função de interpolação as considerações adotadas serão as mesmas da função N_2 , entretanto nesta função, será dado um deslocamento virtual unitário de rotação no término do membro $u_{2f}'(L) = 1$, com restrição dos outros deslocamentos, a menos dos devido ao cisalhamento, que é tomado constante ao longo da viga.

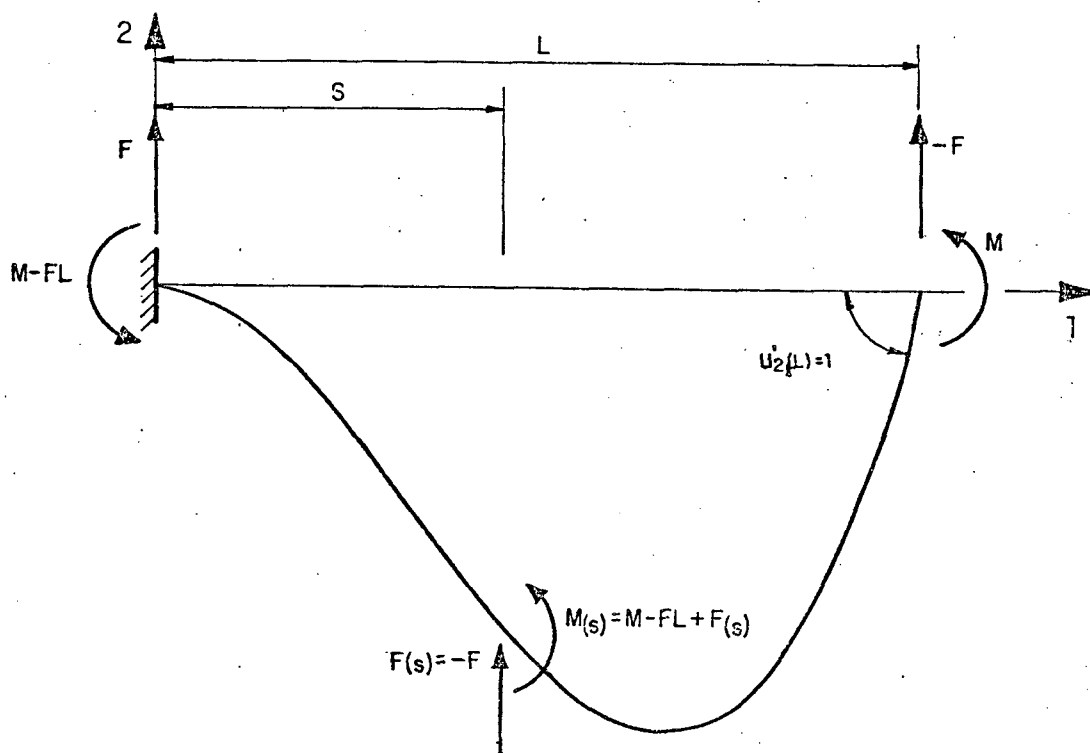


Figura 12 - Representação dos esforços decorrentes do deslocamento virtual unitário de rotação $u_{2f}'(L) = 1$.

Estando a viga em equilíbrio, os esforços decorrentes deste deslocamento unitário estão mostrados na figura 12, onde os esforços M e F são os já descritos na obtenção das funções de interpolação anteriores.

Considerando-se uma seção transversal distante s da origem, os esforços são:

$$M(s) = -Fs - M + FL \quad 3.32a$$

$$F(s) = -F \quad 3.32b$$

Substituindo-se as funções 3.32 nas equações 3.7

tem-se:

$$EIu_{2f}''(s) = Fs - FL + M \quad 3.33a$$

$$KAGu_{2c}'(s) = -F \quad 3.33b$$

A integração destas equações ao longo de s nos mostra:

$$EIu_{2f}'(s) = \frac{Fs^2}{2} + (-FL + MDs + C_1) \quad 3.34a$$

$$EIu_{2f}(s) = \frac{Fs^3}{6} + (-FL + MD) \frac{s^2}{2} + sC_1 + C_2 \quad 3.34b$$

$$KAGu_{2c}(s) = -Fs + C_3 \quad 3.34c$$

Considerando as mesmas observações feitas na determinação da função de interpolação N_1 sobre o princípio da superposição pode-se escrever:

$$u_2(s) = u_{2f}(s) + u_{2c}(s), \quad \text{portanto}$$

$$EIu_2(s) = \frac{Fs^3}{6} + (-FL + MD) \frac{s^2}{2} + \left[C_1 - \frac{FEI}{KAG} \right] s + C_2 + \frac{EIC_3}{KAG} \quad 3.35a$$

$$EIu_2'(s) = \frac{Fs^2}{2} + (-FL + MDs + C_1) - \frac{FEI}{KAG} \quad 3.35b$$

As condições de contorno, decorrentes da configuração de deslocamento imposta, $u_{2f}'(L) = 1$, e considerando os outros deslocamentos restringidos, a menos do devido ao cisalhamento, tomado constante ao longo da viga, são:

em $s = 0$ (engastamento)

$$u_2(0) = u_{2c}(0) = u_{2f}(0) \quad 3.36a$$

$$u_2'(0) = u_{2c}'(0) = -\frac{F}{KAG} \quad 3.36b$$

em $s = L$ (deslocamento virtual)

$$u_2(L) = 0 \quad 3.36c$$

$$u_2'(L) = 1 - \frac{F}{KAG} \quad 3.36d$$

$$u_{2f}'(L) = 1 \quad 3.36e$$

$$u_{2c}'(L) = -\frac{F}{KAG} \quad 3.36f$$

Determinadas estas condições de contorno, substituem-se nas equações dos deslocamentos para obter as constantes C_1 , C_2 , C_3 e os valores de F e M .

Aplicando-se a condição de contorno 3.36a na equação 3.34c, obtém-se C_3 :

$$s = 0 \quad u_{2c}(0) = 0$$

$$C_3 = 0$$

Aplicando-se a condição de contorno 3.36a na equação 3.35a, obtém-se C_2 :

$$s = 0 \quad u_2(0) = 0$$

$$C_2 = 0$$

Aplicando-se a condição de contorno 3.36c na equação 3.35a, obtém-se a constante C_1 :

$$s = 0 \quad u_2(L) = 0$$

$$C_1 = \frac{1}{3} FL^2 - \frac{ML}{2} + \frac{FEI}{KAG}$$

Aplicando a condição de contorno 3.36b na equação 3.35b obtém-se a relação entre F e M:

$$s = 0 \quad u_2'(0) = u_{2c}'(s) = -\frac{F}{KAG}$$

$$M = \frac{1}{6} FL(4 + \phi)$$

Considerando os valores obtidos para C_1 , C_2 , C_3 , F e M, e a equação 3.34a, tem-se então a representação da inclinação de flexão através da seguinte equação:

$$EIu_{2f}'(s) = \frac{FL^2}{6} \left[3y^2 - 2y + y\phi \right] \quad 3.37$$

Para determinação do valor de F usar-se-á a condição de contorno 3.36e, correspondente ao deslocamento virtual unitário no final do membro, na equação 3.35b:

$$s = L \quad u_{2f}'(L) = 1$$

$$F = \frac{6 EI}{L^2(1+\phi)} \quad 3.38$$

Então, depois de determinadas as constantes de integração e os valores de F e M , todos referidos ao deslocamento virtual unitário de rotação $u_{2f}'(L) = 1$, no final do membro, conforme pode-se ver na figura 13, substituem-se estes valores nas equações 3.34 e 3.35, obtendo-se desta maneira as equações dos deslocamentos em função da distância s do início do elemento:

$$u_{2c}(s) = \frac{\phi}{(1+\phi)} \left[-\frac{1}{2} y L \right] \quad 3.39a$$

$$u_{2c}'(s) = \frac{\phi}{(1+\phi)} \left[-\frac{1}{2} \right] \quad 3.39b$$

$$u_{2f}(s) = \frac{L}{(1+\phi)} \left[y^3 - y^2 + \frac{1}{2} \phi y^2 \right] \quad 3.39c$$

$$u_{2f}'(s) = \frac{1}{(1+\phi)} \left[3y^2 - 2y + \phi y \right] \quad 3.39d$$

$$u_2(s) = \frac{L}{(1+\phi)} \left[y^3 - y^2 + \frac{\phi}{2} \left[y^2 - y \right] \right] \quad 3.39e$$

$$u_2'(s) = \frac{1}{(1+\phi)} \left[3y^2 - 2y + \phi \left[y - \frac{1}{2} \right] \right] \quad 3.39f$$

Todas as equações 3.39 satisfazem as condições de contorno 3.36.

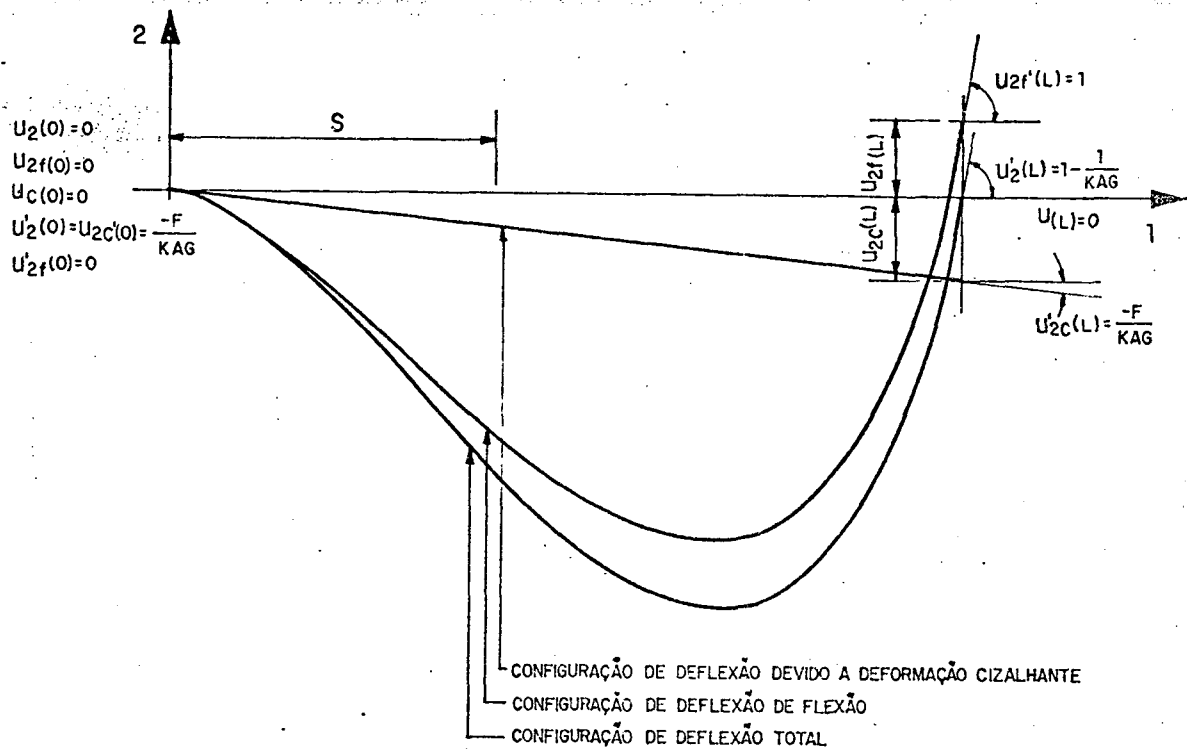


Figura 13 - Gráfico das curvas $u_2(s)$, $u_{2f}(s)$ e $u_{2c}(s)$
 para um deslocamento virtual unitário
 $u_{2f}'(L) = 1$.

3.4 - ESTUDO DAS FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO MCM_1 a M_6 REFERENTES AOS DESLOCAMENTOS NO PLANO 13

Como as hipóteses são as mesmas adotadas na determinação das funções de interpolação N , e tem-se somente uma mudança de sinal para o ângulo de rotação da seção transversal, ou seja,

$$u_s = - \frac{du_{sf}}{ds}$$

seguem-se os mesmos passos adotados na determinação das funções N, deduzindo-se as seguintes equações representativas dos deslocamentos no plano 13.

Funções de interpolação M_1 devidas a um deslocamento virtual unitário $u_s(0) = 1$ aplicado no início do membro:

$$u_{sc}(s) = \frac{\phi}{(1+\phi)} (1 - y) \quad 3.40a$$

$$u_{sc}'(s) = \frac{\phi}{(1+\phi)} \left[- \frac{1}{L} \right] \quad 3.40b$$

$$u_{sf}(s) = \frac{1}{(1+\phi)} (2y^3 - 3y^2 + 1) \quad 3.40c$$

$$u_{sf}'(s) = \frac{1}{(1+\phi)} \frac{1}{L} (6y^2 - 6y) \quad 3.40d$$

$$u_s(s) = \frac{1}{(1+\phi)} \left[2y^3 - 3y^2 + 1 + \phi (1 - y) \right] \quad 3.40e$$

$$u_s'(s) = \frac{1}{(1+\phi)} \frac{1}{L} (6y^2 - 6y - \phi) \quad 3.40f$$

Funções de interpolação M_2 devidas a um deslocamento virtual unitário de rotação transversal $u_{sf}'(0) = 1$ aplicado no início do membro:

$$u_{sc}(s) = \frac{\phi}{(1+\phi)} \frac{L}{2} (1 - y) \quad 3.41a$$

$$u_{9c}'(s) = \frac{\phi}{(1+\phi)} \left[-\frac{1}{2} \right] \quad 3.41b$$

$$u_{9f}(s) = \frac{1}{(1+\phi)} \left[y^3 - 2y^2 + y + \phi \left[-\frac{y^2}{2} + y - \frac{1}{2} \right] \right] \quad 3.41c$$

$$u_{9f}'(s) = \frac{1}{(1+\phi)} \left[3y^2 - 4y + 1 + \phi [1 - y] \right] \quad 3.41d$$

$$u_9(s) = \frac{1}{(1+\phi)} \left[y^3 - 2y^2 + y + \frac{\phi}{2} [y - y^2] \right] \quad 3.41e$$

$$u_9'(s) = \frac{1}{(1+\phi)} \left[3y^2 - 4y + 1 + \phi \left[-y + \frac{1}{2} \right] \right] \quad 3.41f$$

Funções de interpolação M_9 devidas a um deslocamento virtual unitário no término do membro $u_9(L) = 1$:

$$u_{9c}(s) = \frac{\phi}{(1+\phi)} [y] \quad 3.42a$$

$$u_{9c}'(s) = \frac{\phi}{(1+\phi)} \left[\frac{1}{L} \right] \quad 3.42b$$

$$u_{9f}(s) = \frac{1}{(1+\phi)} [3y^2 - 2y^3] \quad 3.42c$$

$$u_{9f}'(s) = \frac{1}{(1+\phi)} \frac{1}{L} [6y - 6y^2] \quad 3.42d$$

$$u_9(s) = \frac{1}{(1+\phi)} [3y^2 - 2y^3 + \phi y] \quad 3.42e$$

$$u_9'(s) = \frac{1}{(1+\phi)} \frac{1}{L} [6y - 6y^2 + \phi] \quad 3.42f$$

Funções de interpolação M_4 obtidas a partir de um deslocamento virtual unitário de rotação no término do membro $u_{9f}'(s) = 1$:

$$u_{9c}(s) = \frac{\phi}{(1+\phi)} \left[-L \frac{y}{2} \right] \quad 3.43a$$

$$u_{9c}'(s) = \frac{\phi}{(1+\phi)} \left[-\frac{1}{2} \right] \quad 3.43b$$

$$u_{9f}(s) = \frac{1}{(1+\phi)} L \left[y^3 - y^2 + \frac{1}{2} \phi y^2 \right] \quad 3.43c$$

$$u_{9f}'(s) = \frac{1}{(1+\phi)} \left[3y^2 - 2y + \phi y \right] \quad 3.43d$$

$$u_9(s) = \frac{1}{(1+\phi)} L \left[y^3 - y^2 + \frac{\phi}{2} \left[y^2 - y \right] \right] \quad 3.43e$$

$$u_9'(s) = \frac{1}{(1+\phi)} \left[3y^2 - 2y + \phi \left[y - \frac{1}{2} \right] \right] \quad 3.43f$$

3.5 - MONTAGEM EM FORMA MATRICIAL DOS DESLOCAMENTOS NOS PLANOS

12 E 13.

Após obtidas as expressões para os deslocamentos $u_2(s)$ e $u_3(s)$ nas direções 2 e 3, respectivamente, ao longo do elemento faz-se a montagem em forma matricial, de acordo com as equações 3.5 e 3.6.

$$\left\{ ue(t) \right\}^t = \left\{ u_{21} \quad u_{31} \quad u_{51} \quad u_{61} \quad u_{22} \quad u_{32} \quad u_{52} \quad u_{62} \right\}$$

$$\begin{Bmatrix} u_2(s, t) \\ u_9(s, t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N(s) \\ M(s) \end{bmatrix} \{ue(t)\}$$

obtendo-se para os deslocamentos as seguintes expressões:

- Deslocamentos devidos ao cisalhamento

$$\begin{Bmatrix} u_{2c}(s, t) \\ u_{9c}(s, t) \end{Bmatrix} = \frac{\phi}{(1+\phi)} \begin{bmatrix} 1 - y, 0, 0, \frac{L}{2}(1-y), y, 0, 0, -\frac{L}{2}y \\ 0, 1 - y, -\frac{L}{2}(1-y), 0, 0, y, \frac{L}{2}y, 0 \end{bmatrix} \{ue(t)\} \quad 3.44$$

- Deslocamentos devidos à flexão

$$\begin{Bmatrix} u_{2f}(s, t) \\ u_{9f}(s, t) \end{Bmatrix} = \frac{1}{(1+\phi)} \begin{bmatrix} 2y^3 - 3y^2 + 1, 0, 0, L[y^3 - 2y^2 + y + \\ 0, 2y^2 - 3y^2 + 1, -L[y^3 - 2y^2 + y - \\ \phi\left[-\frac{y^2}{2} + y - \frac{1}{2}\right]], [3y^2 - 2y^3], 0, \\ \phi\left[-\frac{y^2}{2} + y - \frac{1}{2}\right]], 0, 0, 3y^2 - 2y^3, \\ 0, L\left[y^3 - y^2 + \frac{1}{2}\phi y^2\right] \\ -L\left[y^3 - y^2 + \frac{1}{2}\phi y^2\right], 0 \end{bmatrix} \{ue(t)\} \quad 3.45$$

- Deslocamentos totais, somatório dos deslocamentos devidos à flexão e deslocamento devido ao cisalhamento.

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} u_2(s,t) \\ u_3(s,t) \end{bmatrix} &= \frac{1}{(1+\phi)} \begin{bmatrix} 2y^3 - 3y^2 + 1 + \phi(-y + 1), 0, 0, L[y^3 - 2y^2 + y + \\ 0, 2y^3 - 3y^2 + 1 + \phi(-y + 1), -L[y^3 - 2y^2 + y - \\ \frac{\phi}{2}(-y^2 + y)], 3y^2 - 2y^3 + \phi y, 0, 0, L[y^3 - y^2 + \\ \frac{\phi}{2}(-y^2 + y)], 0, 0, 3y^2 - 2y^3 + \phi y, -L[y^3 - y^2 + \\ \frac{\phi}{2}(y^2 - y)] \\ \frac{\phi}{2}(y^2 - y)], 0 \end{bmatrix} \{ue(t)\}
 \end{aligned}$$

3.46

CAPITULO IV

EQUAÇÕES DE MOVIMENTO DO ELEMENTO

Neste capítulo determinar-se-á o sistema geral de equações do movimento para um elemento finito rotor, cuja representação matricial é:

$$[M]\{\ddot{u}_e\} + [G]\{\dot{u}_e\} + [K]\{u_e\} = \{Q\} \quad 4.1$$

onde

- $[M]$ matriz massa
- $[G]$ matriz giroscópica
- $[K]$ matriz rigidez
- $\{Q\}$ vetor força
- $\{u_e\}$ vetor deslocamento dos nós

Para determinação destas matrizes, consideram-se as equações energéticas obtidas no capítulo II, e se introduzem os

deslocamentos obtidos no capítulo III, deslocamentos estes expressos relativamente em termos das funções de interpolação e deslocamentos nodais.

Após estas substituições fazem-se as integrações indicadas ao longo do elemento de comprimento L.

Finalmente aplica-se a fórmula de Lagrange, equação 3.1.

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{dT}{d\dot{u}_e} \right] - \frac{dT}{d\dot{u}_e} + \frac{dU}{d\dot{u}_e} = \frac{dW_f}{d\dot{u}_e}$$

obtendo-se então os elementos das matrizes $\underline{\underline{M}}$, $\underline{\underline{G}}$, $\underline{\underline{K}}$, $\underline{\underline{Q}}$, que são introduzidas na equação 4.1.

4.1 - EQUAÇÃO DO MOVIMENTO DEVIDA A ENERGIA CINÉTICA DO DISCO RÍGIDO.

A energia cinética devida ao disco rígido é dada pela equação 2.13, onde, retendo somente os termos de segunda ordem e considerando a velocidade $u_4 = \Omega$ (constante), tem-se, para esta energia:

$$T_d = \frac{1}{2} M_{di} \left(\dot{u}_2^2 + \dot{u}_3^2 \right) - I_{dp} \cdot \Omega \dot{u}_6 u_5 + \frac{1}{2} I_d \left(\dot{u}_5^2 + \dot{u}_6^2 \right) \quad 4.2$$

Substituindo a expressão 3.6, representativa dos deslocamentos ao longo do elemento, dados em termos das funções de

interpolação e deslocamentos nodais, tem-se:

$$\begin{aligned}
 T_d = & \frac{1}{2} M_{di} \left\{ \dot{u}_e(t) \right\}^t \left[N(s) \right]^t \left[N(s) \right] \left\{ \dot{u}_e(t) \right\} + \\
 & + \frac{1}{2} M_{di} \left\{ \dot{u}_e(t) \right\}^t \left[M(s) \right]^t \left[M(s) \right] \left\{ \dot{u}_e(t) \right\} + \\
 & + \frac{1}{2} I_d \left\{ \dot{u}_e(t) \right\}^t \left[-\frac{dM_f(s)}{ds} \right]^t \left[-\frac{dM_f(s)}{ds} \right] \left\{ \dot{u}_e(t) \right\} + \\
 & + \frac{1}{2} I_d \left\{ \dot{u}_e(t) \right\}^t \left[\frac{dN_f(s)}{ds} \right]^t \left[\frac{dN_f(s)}{ds} \right] \left\{ \dot{u}_e(t) \right\} + \\
 & - \Omega I_d \left\{ \dot{u}_e(t) \right\}^t \left[\frac{dN_f(s)}{ds} \right]^t \left[-\frac{dM_f(s)}{ds} \right] \left\{ u_e(t) \right\} \quad 4.3
 \end{aligned}$$

Como este disco discreto estará localizado sobre o nó 1 ou 2 do elemento finito rotor, pode-se automaticamente determinar a energia cinética considerando dois casos distintos: disco no nó 1 e disco no nó 2.

- Caso 1 $s = 0$ (disco sobre nó 1); substituindo nas funções de interpolação obtém-se os seguintes valores:

$$\left[N(0) \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[M(0) \right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[-\frac{dM(0)}{ds} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\frac{dN(0)}{ds} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[-\frac{dMCLD}{ds} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\frac{dNCLD}{ds} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Considerando estes valores na expressão 4.3, e aplicando a fórmula de Lagrange, tem-se a seguinte equação de movimento para o disco rígido localizado sobre o nó 2 do elemento finito rotor:

$$= M_{di} \ddot{u}_{22} + M_{di} \ddot{u}_{92} + I_d \ddot{u}_{52} + I_d \ddot{u}_{\sigma 2} - \Omega I_{dp} \dot{u}_{52} + \Omega I_{dp} \dot{u}_{\sigma 2}$$

4.5

Colocando esta expressão em forma matricial tem-se:

$$\left(\left[M_{dtz} \right] + \left[M_{drz} \right] \right) \{ \dot{u}_e \} - \Omega \left[G_{dz} \right] \{ \dot{u}_e \}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & \\ & 0 & & & & & & & \\ & & 0 & & & & & & \\ & & & 0 & & & & & \\ & & & & 0 & & & & \\ & & & & & M_{di} & & & \\ & & & & & & M_{di} & & \\ & & & & & & & I_d & \\ & & & & & & & & I_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_{21} \\ \dot{u}_{91} \\ \dot{u}_{51} \\ \dot{u}_{\sigma 1} \\ \dot{u}_{22} \\ \dot{u}_{92} \\ \dot{u}_{52} \\ \dot{u}_{\sigma 2} \end{Bmatrix} - \Omega \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & \\ & 0 & & & & & & & \\ & & 0 & & & & & & \\ & & & 0 & & & & & \\ & & & & 0 & & & & \\ & & & & & 0 & & & \\ & & & & & & 0 & -I_{dp} & \\ & & & & & & I_{dp} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_{21} \\ \dot{u}_{91} \\ \dot{u}_{51} \\ \dot{u}_{\sigma 1} \\ \dot{u}_{22} \\ \dot{u}_{92} \\ \dot{u}_{52} \\ \dot{u}_{\sigma 2} \end{Bmatrix}$$

4.2 - EQUAÇÃO DO MOVIMENTO DEVIDO A ENERGIA CINÉTICA DO ELEMENTO FINITO ROTOR

A energia cinética do elemento finito rotor é dada pela equação 2.12:

$$T_e(t) = \frac{1}{2} \left[m \int_0^L \left(\dot{u}_2^2 + \dot{u}_3^2 \right) ds + I_m \int_0^L \left(\dot{u}_5^2 + \dot{u}_6^2 \right) ds + \right. \\ \left. + I_{pm} L \Omega^2 - 2 I_{pm} \Omega \int_0^L \dot{u}_6 u_5 ds \right]$$

Substitui-se nesta expressão a equação 3.6, que representa os deslocamentos ao longo do elemento, dados em termos dos deslocamentos nodais e funções de interpolação, obtendo-se a seguinte expressão:

$$T_e = \frac{1}{2} m \int_0^L \left\{ \dot{u}_e(t) \right\}^t \left[N(s) \right]^t \left[N(s) \right] \left\{ u_e(t) \right\} ds \\ + \frac{1}{2} m \int_0^L \left\{ \dot{u}_e(t) \right\}^t \left[M(s) \right]^t \left[M(s) \right] \left\{ u_e(t) \right\} ds \\ + \frac{1}{2} I \int_0^L \left\{ \dot{u}_e(t) \right\}^t \left[-\frac{dM_f(s)}{ds} \right]^t \left[-\frac{dM_f(s)}{ds} \right] \left\{ u_e(t) \right\} ds \\ + \frac{1}{2} I \int_0^L \left\{ \dot{u}_e(t) \right\}^t \left[\frac{dN_f(s)}{ds} \right]^t \left[\frac{dN_f(s)}{ds} \right] \left\{ u_e(t) \right\} ds \\ + \frac{1}{2} I_p L \Omega^2$$

$$- I_p \Omega \int_0^L \left\{ \dot{u}_e(t) \right\}^t \left[\frac{dN_f(s)}{ds} \right]^t \left[- \frac{dM_f(s)}{ds} \right] \left\{ u_e(t) \right\} ds$$

4.6

Denotando por:

$$\left[M_{et1} \right] = m \int_0^L \left[N(s) \right]^t \left[N(s) \right] ds$$

$$\left[M_{et2} \right] = m \int_0^L \left[M(s) \right]^t \left[M(s) \right] ds$$

$$\left[M_{er1} \right] = I \int_0^L \left[- \frac{dM_f(s)}{ds} \right]^t \left[- \frac{dM_f(s)}{ds} \right] ds$$

4.7

$$\left[M_{er2} \right] = I \int_0^L \left[\frac{dN_f(s)}{ds} \right]^t \left[\frac{dN_f(s)}{ds} \right] ds$$

$$\left[G_{e1} \right] = I_p \int_0^L \left[\frac{dN_f(s)}{ds} \right]^t \left[- \frac{dM_f(s)}{ds} \right] ds$$

onde

$\left[M_{et1} \right]$ e $\left[M_{et2} \right]$ correspondem às matrizes massa do elemento finito rotor, devidas às translações nos planos 12 e 13 respectivamente;

$\left[M_{er1} \right]$ e $\left[M_{er2} \right]$ correspondem às matrizes massa devidas às rotações nos planos 12 e 13 respectivamente; e,

$\left[G_{e1} \right]$ é a matriz giroscópica,

e substituindo na equação 4.6, obtém-se para a energia cinética do elemento finito rotor a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
T_e = & \frac{1}{2} \left\{ \dot{u}_e(t) \right\}^t \left[M_{el1} \right] \left\{ \dot{u}_e(t) \right\} + \\
& \frac{1}{2} \left\{ \dot{u}_e(t) \right\}^t \left[M_{el2} \right] \left\{ \dot{u}_e(t) \right\} + \\
& \frac{1}{2} \left\{ \dot{u}_e(t) \right\}^t \left[M_{er1} \right] \left\{ \dot{u}_e(t) \right\} + \\
& \frac{1}{2} \left\{ \dot{u}_e(t) \right\}^t \left[M_{er2} \right] \left\{ \dot{u}_e(t) \right\} - \\
& \Omega \left\{ \dot{u}_e(t) \right\}^t \left[G_{e1} \right] \left\{ u_e(t) \right\} + \frac{1}{2} \Omega^2 I_{pm} L
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Aplicando Lagrange (equação 3.1), na expressão da energia cinética obtida, tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{dT_e}{d\dot{u}_e} \right) - \frac{dT_e}{du_e} = & \\
= & \left[M_{el1} \right] \left\{ \ddot{u}_e(t) \right\} + \left[M_{el2} \right] \left\{ \ddot{u}_e(t) \right\} + \\
& \left[M_{er1} \right] \left\{ \ddot{u}_e(t) \right\} + \left[M_{er2} \right] \left\{ \ddot{u}_e(t) \right\} - \\
& \Omega \left[G_{e1} \right] \left\{ \dot{u}_e(t) \right\} + \Omega \left[G_{e1} \right]^t \left\{ \dot{u}_e(t) \right\} \\
= & \left[\left[M_{el1} \right] + \left[M_{el2} \right] \right] \left\{ \ddot{u}_e(t) \right\} + \left[\left[M_{er1} \right] + \left[M_{er2} \right] \right] \left\{ \ddot{u}_e(t) \right\} \\
& - \Omega \left[\left[G_{e1} \right]^t - \left[G_{e1} \right] \right] \left\{ \dot{u}_e(t) \right\} \\
= & \left[M_{el} \right] \left\{ \ddot{u}_e(t) \right\} + \left[M_{er} \right] \left\{ \ddot{u}_e(t) \right\} - \Omega \left[G_e \right] \left\{ \dot{u}_e(t) \right\}
\end{aligned} \tag{4.9}$$

onde

$$\begin{bmatrix} M_{el} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{el1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{el2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_{er} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{er1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{er2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} G_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{e1} \end{bmatrix}^t - \begin{bmatrix} G_{e1} \end{bmatrix}$$

que é a equação Lagrangeana do movimento, devida à energia cinética, para o elemento finito rotor.

Após integração das equações 4.9, obtém-se as seguintes matrizes para o elemento finito rotor, que estão listadas no apêndice B.

1) Matrizes massa devidas à translação

$$\begin{bmatrix} M_{el} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{el} \end{bmatrix}_0 + \phi \begin{bmatrix} M_{el} \end{bmatrix}_1 + \phi^2 \begin{bmatrix} M_{el} \end{bmatrix}_2 \quad 4.10$$

2) Matrizes massa devidas à rotação

$$\begin{bmatrix} M_{er} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{er} \end{bmatrix}_0 + \phi \begin{bmatrix} M_{er} \end{bmatrix}_1 + \phi^2 \begin{bmatrix} M_{er} \end{bmatrix}_2 \quad 4.11$$

3) Matrizes giroscópica ou de Coriolis devidas ao efeito giroscópico

$$\begin{bmatrix} G_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_e \end{bmatrix}_0 + \phi \begin{bmatrix} G_e \end{bmatrix}_1 + \phi^2 \begin{bmatrix} G_e \end{bmatrix}_2 \quad 4.12$$

4.3 - EQUAÇÃO DO MOVIMENTO DEVIDA À FLEXÃO DO ELEMENTO FINITO ROTOR

A energia de deformação devida à flexão do elemento finito rotor, é dada na equação 2.29 por

$$U_f = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{d^2 u_{2f}}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 u_{3f}}{ds^2} \right)^2 \right] ds$$

Considerando a equação 3.6 e a hipótese terceira listada no capítulo III pode-se escrever:

$$\begin{Bmatrix} u_{2f}(s,t) \\ u_{3f}(s,t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_f(s) \\ M_f(s) \end{bmatrix} \{ue(t)\}$$

onde $u_{2f}(s)$ e $u_{3f}(s)$ correspondem aos deslocamentos devidos à flexão nos planos 12 e 13 respectivamente, e $\begin{bmatrix} N_f(s) \\ M_f(s) \end{bmatrix}$ são as matrizes das funções de interpolação devidas à flexão nestes planos, apresentadas no capítulo III.

Substituindo na equação da energia da deformação U_f tem-se:

$$U_f = \frac{EI}{2} \int_0^L \{ue(t)\}^t \begin{bmatrix} \frac{d^2 N_f(s)}{ds^2} \\ \frac{d^2 M_f(s)}{ds^2} \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} \frac{d^2 N_f(s)}{ds^2} \\ \frac{d^2 M_f(s)}{ds^2} \end{bmatrix} \{ue(t)\} ds +$$

$$+ \frac{EI}{2} \int_0^L \{ue(t)\}^t \begin{bmatrix} \frac{d^2 M_f(s)}{ds^2} \\ \frac{d^2 N_f(s)}{ds^2} \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} \frac{d^2 M_f(s)}{ds^2} \\ \frac{d^2 N_f(s)}{ds^2} \end{bmatrix} \{ue(t)\} ds$$

Denotando por

$$\left[K_{f1} \right] = EI \int_0^L \left[\frac{d^2 N_f(s)}{ds^2} \right]^t \left[\frac{d^2 N_f(s)}{ds^2} \right] ds \quad 4.14a$$

$$\left[K_{f2} \right] = EI \int_0^L \left[\frac{d^2 M_f(s)}{ds^2} \right]^t \left[\frac{d^2 M_f(s)}{ds^2} \right] ds \quad 4.14b$$

e substituindo na equação 4.13, obtém-se para a energia de deformação do elemento finito rotor (devida à flexão), a seguinte expressão:

$$U_f = \frac{1}{2} \left\{ ue(t) \right\}^t \left[K_{f1} \right] \left\{ ue(t) \right\} + \frac{1}{2} \left\{ ue(t) \right\}^t \left[K_{f2} \right] \left\{ ue(t) \right\} \quad 4.15$$

Aplicando Lagrange nesta expressão, tem-se a equação Lagrangeana do movimento:

$$\begin{aligned} \frac{dU_f}{d\{ue\}} &= \left[K_{f1} \right] \left\{ ue(t) \right\} + \left[K_{f2} \right] \left\{ ue(t) \right\} = \\ &= \left(\left[K_{f1} \right] + \left[K_{f2} \right] \right) \left\{ ue(t) \right\} = \left[K_f \right] \left\{ ue(t) \right\} \end{aligned} \quad 4.16$$

Após integração das equações 4.16 obtém-se as matrizes indicadas na equação 4.17 que estão listadas no apêndice B.

Matrizes de rigidez devida à flexão do elemento finito rotor.

$$\left[K_f \right] = \left[K_f \right]_0 + \phi \left[K_f \right]_1 + \phi^2 \left[K_f \right]_2 \quad 4.17$$

4.4 - EQUAÇÃO DO MOVIMENTO DEVIDA AO CISALHAMENTO DO ELEMENTO FINITO ROTOR

A energia de deformação, devida ao cisalhamento no elemento finito rotor, é representada no terceiro termo da equação 2.29 por:

$$U_c = \frac{1}{2} KAG \int_0^L \left[\left(\frac{du_{3c}}{ds} \right)^2 + \left(\frac{du_{2c}}{ds} \right)^2 \right] ds$$

Considerando a equação 3.6 e a hipótese terceira formulada no capítulo III pode-se escrever:

$$\begin{Bmatrix} u_{2c}(s,t) \\ u_{3c}(s,t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_c(s) \\ M_c(s) \end{bmatrix} \{ue(t)\}$$

onde $u_{2c}(s,t)$ e $u_{3c}(s,t)$ correspondem aos deslocamentos devidos ao cisalhamento nos planos 12 e 13 respectivamente.

$\begin{bmatrix} N_c(s) \\ M_c(s) \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} M_c(s) \\ N_c(s) \end{bmatrix}$ são as matrizes das funções de interpolação, devidas ao cisalhamento nos planos 12 e 13 respectivamente, e apresentadas no capítulo II.

Substituindo-se estas expressões na equação da energia de deformação tem-se:

$$U_c = \frac{1}{2} KAG \int_0^L \{ue(t)\}^t \begin{bmatrix} dN_c(s) \\ ds \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} dN_c(s) \\ ds \end{bmatrix} \{ue(t)\} ds + \\ + \frac{1}{2} KAG \int_0^L \{ue(t)\}^t \begin{bmatrix} dM_c(s) \\ ds \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} dM_c(s) \\ ds \end{bmatrix} \{ue(t)\} ds \quad 4.18$$

Denotando por

$$\left[K_{c1} \right] = KAG \int_0^L \left[\frac{dN_c(s)}{ds} \right]^t \left[\frac{dN_c(s)}{ds} \right] ds \quad 4.19a$$

$$\left[K_{c2} \right] = KAG \int_0^L \left[\frac{dM_c(s)}{ds} \right]^t \left[\frac{dM_c(s)}{ds} \right] ds \quad 2.19b$$

então a equação ficará da seguinte forma:

$$U_c = \frac{1}{2} \left\{ ue(t) \right\}^t \left[K_{c1} \right] \left\{ ue(t) \right\} + \frac{1}{2} \left\{ ue(t) \right\}^t \left[K_{c2} \right] \left\{ ue(t) \right\} \quad 4.20$$

Aplicando Lagrange a esta equação tem-se a equação Lagrangeana do movimento devida ao cisalhamento no elemento finito rotor:

$$\frac{dU_c}{d\{ue\}} = \left(\left[K_{c1} \right] + \left[K_{c2} \right] \right) \left\{ ue(t) \right\} = \left[K_c \right] \left\{ ue(t) \right\} \quad 4.21$$

Após integração é obtida a matriz de rigidez $\left[K_c \right]$ devida ao cisalhamento do elemento finito rotor e está indicada no apêndice B.

4.5 - SIMPLIFICAÇÃO NAS MATRIZES DE RIGIDEZ DEVIDAS A FLEXÃO E AO CISALHAMENTO

Com a finalidade de simplificar os cálculos dos elementos da matriz de rigidez do elemento finito rotor, pode-se somar as matrizes geradas pelas equações 4.17 e 4.21 obtendo-se:

$$\begin{bmatrix} K_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_c \end{bmatrix} \quad 4.22$$

Na equação 4.17 tem-se 3 matrizes, e na equação 4.21 tem-se uma matriz; efetuando-se a soma matricial, tem-se como resultado duas matrizes de mais simples manuseio, conforme é apresentado a seguir

$$\begin{bmatrix} K_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_d \end{bmatrix}_0 + \phi \begin{bmatrix} K_d \end{bmatrix}_1 \quad 4.23$$

As quais estão indicadas no apêndice B.

4.6 - EQUAÇÃO DO MOVIMENTO DEVIDA A FORÇA AXIAL ATUANDO NO ELEMENTO FINITO ROTOR

A energia de deformação devida a uma força axial atuando no elemento finito rotor, é dada pelo segundo membro da equação 2.29 .

$$U_{fa} = \frac{F_a}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{du_2}{ds} \right)^2 + \left(\frac{du_3}{ds} \right)^2 \right] ds$$

Tem-se da equação 3.6 que

$$\begin{Bmatrix} u_2(s, t) \\ u_3(s, t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N(s) \\ M(s) \end{bmatrix} \{ue(t)\}$$

Substituindo-se na equação da energia de deformação acima, obtém-se:

$$U_{fa} = \frac{F_a}{2} \int_0^L \left\{ ue(t) \right\}^t \left[\frac{dN(s)}{ds} \right]^t \left[\frac{dN(s)}{ds} \right] \left\{ ue(t) \right\} ds + \\ + \frac{F_a}{2} \int_0^L \left\{ ue(t) \right\}^t \left[\frac{dM(s)}{ds} \right]^t \left[\frac{dM(s)}{ds} \right] \left\{ ue(t) \right\} ds \quad 4.24$$

Denotando por:

$$\left[K_{fa1} \right] = \int_0^L \left[\frac{dN(s)}{ds} \right]^t \left[\frac{dN(s)}{ds} \right] ds \quad 4.25$$

$$\left[K_{fa2} \right] = \int_0^L \left[\frac{dM(s)}{ds} \right]^t \left[\frac{dM(s)}{ds} \right] ds \quad 4.26$$

e substituindo na equação 4.24, obtém-se para a energia de deformação do elemento finito rotor (devida à força axial F_a) a seguinte expressão:

$$U_{fa} = \frac{1}{2} \left\{ ue(t) \right\}^t \left[K_{fa1} \right] \left\{ ue(t) \right\} + \frac{1}{2} \left\{ ue(t) \right\}^t \left[K_{fa2} \right] \left\{ ue(t) \right\} \quad 4.27$$

aplicando Lagrange nesta expressão tem-se a equação Lagrangeana do movimento:

$$\frac{dU_{fa}}{d\{ue\}} = \left[\left[K_{fa1} \right] + \left[K_{fa2} \right] \right] \left\{ ue(t) \right\} = \left[K_{fa} \right] \left\{ ue(t) \right\} \quad 4.28$$

Após integração das equações 4.28, obtém-se as seguintes matrizes

$$\begin{bmatrix} K_{fa} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{fa} \end{bmatrix}_0 + \phi \begin{bmatrix} K_{fa} \end{bmatrix}_1 + \phi^2 \begin{bmatrix} K_{fa} \end{bmatrix}_2 \quad 4.29$$

que estão listadas no apêndice B.

CAPITULO V

OBTENÇÃO DO VETOR FORÇA

Neste capítulo são determinadas as equações que geram o vetor força devido à ação das forças não conservativas atuantes no modelo.

O vetor $\{Q\}$ das forças generalizadas será obtido aplicando-se a formulação Lagrangeana sobre a expressão do trabalho W_f :

$$\{Q\} = \frac{dw_f}{d\underset{e}{u}} \quad 5.1$$

As forças a serem incluídas neste estudo serão as devidas à uma massa excentricamente localizada ao longo do eixo do elemento, assim como aquelas devidas à uma massa concentrada e excêntrica na seção transversal de um elemento ou disco rígido.

5.1 - DETERMINAÇÃO DO VETOR FORÇA PARA UM ELEMENTO FINITO ROTOR COM CENTRO DE MASSA EXCENTRICAMENTE DISTRIBUIDO AO LONGO DO EIXO.

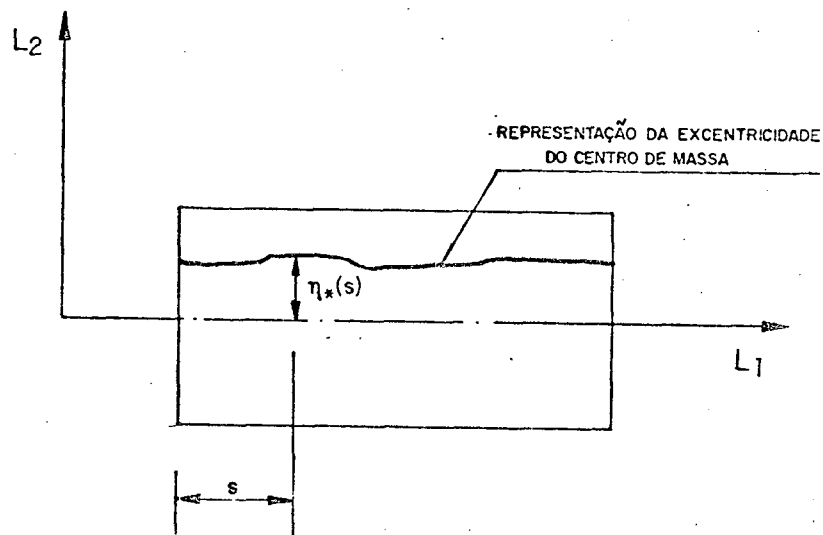


Figura 14 - Elemento finito rotor com massa excentrica ao longo do eixo.

Considere-se a figura 14 como representativa de uma massa desbalanceada, ao longo do eixo do elemento.

Denote-se por $\eta_*(s)$ e $\varepsilon_*(s)$ as curvas representativas da excentricidade do centro de massa do elemento, em função da distância s , sendo s a variável do comprimento do elemento $0 \leq s \leq L$, em relação a um sistema que gira solidário ao elemento, a uma velocidade angular própria Ω (Spin Speed).

A localização destas curvas em relação ao sistema fixo, serão denotadas por $\varepsilon(s)$ e $\eta(s)$ com a seguinte relação de transformação entre os dois sistemas de coordenadas:

$$\begin{Bmatrix} \eta(s) \\ \varepsilon(s) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Omega t & -\text{sen } \Omega t \\ \text{sen } \Omega t & \cos \Omega t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_*(s) \\ \varepsilon_*(s) \end{Bmatrix} \quad 5.2$$

O trabalho em condieração é devido à força centrífuga e é dado por

$$W_f = \int_0^L m \Omega^2 \begin{Bmatrix} \eta(s) \\ \varepsilon(s) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} ds ; \quad 5.3$$

considerando a equação 3.6, que fornece as relações entre o deslocamento qualquer e os deslocamentos dos nós, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} u_2(s,t) \\ u_3(s,t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N(s) \\ M(s) \end{bmatrix} \{ue(t)\}$$

Substituindo na equação 5.3 resulta

$$W_f = \int_0^L m \Omega^2 \begin{Bmatrix} \eta(s) \\ \varepsilon(s) \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} N(s) \\ M(s) \end{bmatrix} \{ue(t)\} ds \quad 5.4$$

Derivando esta expressão em relação aos deslocamentos generalizados $\{ue\}$, obtém-se

$$\{Q\} = \frac{dw_f}{d\{ue\}} = \int_0^L m \Omega^2 \begin{bmatrix} N(s) \\ M(s) \end{bmatrix}^t \begin{Bmatrix} \eta(s) \\ \varepsilon(s) \end{Bmatrix} ds, \quad 5.5$$

que é o vetor das forças generalizadas, decorrentes das forças centrífugas devidas à excentricidade da massa do elemento.

Recorrendo à expressão 5.2 determina-se este vetor

$\{Q\}$ no sistema fixo F, em função da excentricidade conhecida $\eta_*(s)$ e $\varepsilon_*(s)$ do sistema local.

$$\{Q\} = \int_0^L m \Omega^2 \begin{bmatrix} N(s) \\ M(s) \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} \cos \Omega t & -\sin \Omega t \\ \sin \Omega t & \cos \Omega t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_*(s) \\ \varepsilon_*(s) \end{Bmatrix} ds \quad 5.6$$

Considere-se o caso de uma distribuição linear da massa desbalanceada sobre o elemento, obedecendo a seguinte lei de variação para $\eta_*(s)$ e $\varepsilon_*(s)$,

$$\eta_*(s) = \eta_i \left(1 - \frac{s}{L}\right) + \eta_f \left(\frac{s}{L}\right) \quad 5.7$$

$$\varepsilon_*(s) = \varepsilon_i \left(1 - \frac{s}{L}\right) + \varepsilon_f \left(\frac{s}{L}\right)$$

onde i - indica o início do elemento, ou seja $s = 0$
 f - o final do elemento, ou seja $s = L$

Substituindo as equações 5.7 na equação 5.6 obtém-se o vetor força devido à excentricidade do elemento finito rotor, dado pela expressão matricial

$$\{Q\} = m \Omega^2 \left[\begin{Bmatrix} Q_1 \end{Bmatrix} \cos \Omega t + \begin{Bmatrix} Q_2 \end{Bmatrix} \sin \Omega t + \phi \left[\begin{Bmatrix} Q_3 \end{Bmatrix} \cos \Omega t + \begin{Bmatrix} Q_4 \end{Bmatrix} \sin \Omega t \right] \right] \quad 5.8$$

Os vetores $\{Q_1\}$, $\{Q_2\}$, $\{Q_3\}$ e $\{Q_4\}$ estão listados no apêndice B.

5.2 - DETERMINAÇÃO DO VETOR FORÇA DEVIDA A UMA MASSA DISCRETA DESBALANCEADA.

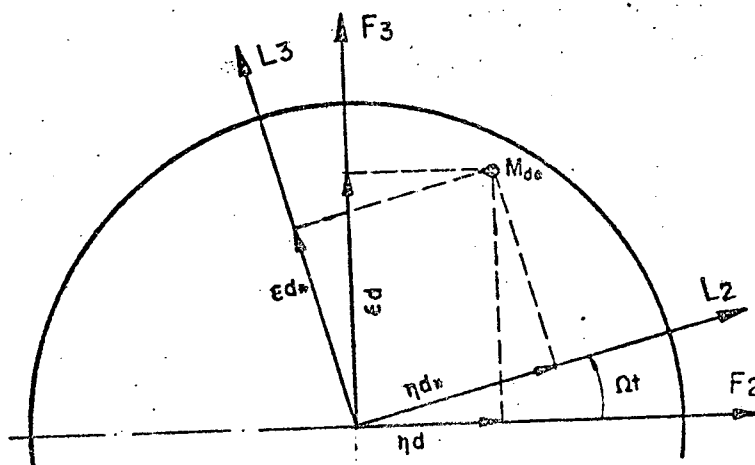


Figura 15 - Representação de uma massa desbalanceada M_{de} sobre disco rígido ou em um dos nós do elemento.

Considere a figura 15, representativa de uma massa desbalanceada M_{de} , localizada sobre um disco rígido discreto com o centro de massa deslocado da origem e na posição $\begin{Bmatrix} \eta_{d*} \\ \epsilon_{d*} \end{Bmatrix}$ em relação ao sistema solidário ao disco rígido. As coordenadas em relação ao sistema fixo são dadas, conforme equação 5.2, por

$$\begin{Bmatrix} \eta_d \\ \epsilon_d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Omega t & -\text{sen } \Omega t \\ \text{sen } \Omega t & \cos \Omega t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_{d*} \\ \epsilon_{d*} \end{Bmatrix} \quad 5.9$$

O trabalho devido a esta massa desbalanceada é dado da pela força centrífuga, através da relação

$$W_f = M_{de} \Omega^2 \begin{Bmatrix} \eta_d \\ \epsilon_d \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad 5.10$$

das relações fornecidas para os deslocamentos na equação 3.6. Substituindo na expressão 5.10 tem-se a expressão para o trabalho em função dos deslocamentos nodais e funções de interpolação.

$$W_f = M_{de} \Omega^2 \begin{Bmatrix} \eta_d \\ \varepsilon_d \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} N(s) \\ M(s) \end{bmatrix} \{ue(t)\}$$

As forças generalizadas são obtidas desta expressão considerando sua derivada em relação aos deslocamentos generalizados, dada na expressão 5.1;

$$\{Q\} = \frac{dW_f}{d\{u\}}$$

$$\{Q\} = M_{de} \Omega^2 \begin{bmatrix} N(s) \\ M(s) \end{bmatrix}^t \begin{Bmatrix} \eta_d \\ \varepsilon_d \end{Bmatrix}$$

A determinação deste vetor em relação aos deslocamentos $\{\eta_{d^*}, \varepsilon_{d^*}\}$, dados no sistema local, é obtida considerando a transformação de coordenadas dada na equação 5.9.

$$\{Q\} = M_{de} \Omega^2 \begin{bmatrix} N(s) \\ M(s) \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} \cos \Omega t & -\sin \Omega t \\ \sin \Omega t & \cos \Omega t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_{d^*} \\ \varepsilon_{d^*} \end{Bmatrix} \quad 5.11$$

Como o modelo proposto só possui força nos nós, deve-se considerar um nó na posição em que exista a massa desbalanceada M_{de} .

Esta massa pode ser localizada no nó 1 ou nó 2 do elemento.

Determina-se a seguir, o vetor força para dois casos distintos: 1) massa discreta desbalanceada localizada no nó 1 do elemento; 2) mesma massa, porém localizada no nó 2 do elemento.

Caso 1 - Massa desbalanceada localizada no nó 1 do elemento.

Sendo s a variável representativa do comprimento do elemento $0 \leq s \leq L$ no nó 1 tem-se $s = 0$. Substituindo na equação 3.45 resulta, para as funções de interpolação calculadas, no nó 1,

$$\begin{bmatrix} NCO \\ MCO \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 5.12$$

Levando à equação 5.11, obtém-se a seguinte expressão para as forças generalizadas devidas à massa localizada no nó 1:

$$\begin{Bmatrix} Q \end{Bmatrix} = M_{de} \Omega^2 \begin{Bmatrix} \cos \Omega t & -\text{sen } \Omega t \\ \text{sen } \Omega t & \cos \Omega t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_{d*} \\ \varepsilon_{d*} \end{Bmatrix} \quad 5.13$$

Caso 2 - Massa desbalanceada localizada no nó 2 do elemento

O vetor força resultante será obtido através do mesmo procedimento usado para massa localizada no nó 1, considerando

agora $s = L$, resultando para o vetor força a seguinte expressão:

$$\{Q\} = M_{de} \Omega^2 \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \cos \Omega t & -\text{sen } \Omega t \\ \text{sen } \Omega t & \cos \Omega t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_{d*} \\ \varepsilon_{d*} \end{Bmatrix} \quad 5.14$$

CAPITULO VI

SISTEMA GLOBAL DE EQUAÇÕES

6.1 GENERALIDADES

Após determinadas para cada elemento, as matrizes massa, giroscópica e rigidez e o vetor das forças não conservativas do modelo dinâmico ROTOR-DISCO-SUPORTE, faz-se a montagem seqüencial de cada uma dessas matrizes na sua correspondente matriz global, isto referente ao sistema inercial fixo F.

O conjunto global completo de equações dinâmicas completo para o sistema em estudo é da forma:

$$\left(\left[M_{tg} \right] + \left[M_{rg} \right] \right) \left\{ \dot{u}_g \right\} - \Omega \left[G_g \right] \left\{ \dot{u}_g \right\} + \left[K_g \right] \left\{ u_g \right\} = \left\{ Q_g \right\} \quad 6.1$$

onde o índice g referencia o sistema global de equações.

Todas as matrizes são simétricas, exceto $\left[G_g \right]$, que é antissimétrica, sendo $\left\{ u_g \right\}$ o vetor dos deslocamentos globais dos nós

dos elementos concatenados, no sistema fixo F. Todas as matrizes e o vetor força foram definidos e determinados nos capítulos IV e V. Resumidamente, para cada elemento, foram considerados os seguintes efeitos na determinação de cada uma das matrizes descritas a seguir:

- $[M_t]$ - matriz massa translacional devida aos seguintes efeitos:
- massa distribuída ao longo de cada elemento;
 - massa discreta de disco rígido localizada nos elementos em que ocorra a existência do disco;
 - massa discreta desbalanceada localizada nos elementos em que ocorra a existência desta massa.

- $[M_r]$ - matriz massa rotacional, devida aos seguintes efeitos:
- inércia diametral distribuída ao longo de cada elemento;
 - inércia diametral de disco rígido localizada nos elementos onde ocorra a existência do disco rígido.

- $[G]$ - matriz giroscópica ou matriz de Coriolis, determinada em função dos seguintes efeitos:
- inércia polar distribuída ao longo de cada elemento;
 - inércia polar de disco rígido discreto localizado nos elementos nos quais ocorra a existência do disco.

- $[K]$ - matriz de rigidez, determinada em função dos seguintes efeitos:
- rigidez à flexão para cada elemento;
 - rigidez ao cisalhamento para cada elemento;
 - rigidez devida à atuação de uma força axial nos elementos nos quais o efeito desta força é considerado;

- rigidez de mancal, devida à presença de mancais discretamente localizados nos elementos nos quais ocorra existência dos mancais.
- $\{Q\}$ - vetor força obtido em função das forças não conservativas devidas à:
- elemento com massa com desbalanceamento variando ao longo do comprimento;
 - massa desbalanceada discretamente localizada na superfície de um disco rígido, ou na seção transversal de um elemento, sobre um dos nós.

Após a montagem do sistema global de equações dinâmicas (6.1) representativo do modelo ROTOR-DISCO-SUPORTE, tem-se condições de fazer vários tipos de análise, dependendo da inclusão, ou não, dos efeitos contribuintes a cada uma das matrizes.

No primeiro tipo de análise não se consideram os efeitos de massa rotatória e deformação cisalhante, tendo-se, a representação da viga de Bernoulli-Euler.

Outro tipo de análise pode ser considerada, neste caso, levando-se em consideração o efeito de massa rotatória, onde se tem representado o modelo da viga de Rayleigh.

Quando se considera a inércia rotatória combinada com o efeito cisalhante, tem-se, finalmente, o modelo de viga de Timoshenko, que é o alvo principal desta dissertação.

Dependendo também do tipo de resposta que se queira obter do modelo, pode-se promover modificações no sistema global

de equações 6.1, no intuito de simplificar operações matriciais, e/ou adequar o sistema a ser submetido às sub-rotinas de solução.

Como primeira possibilidade de resposta, serão determinadas as frequências naturais de uma viga simplesmente apoiada não rotativa.

Um segundo tipo de resposta possível é a determinação das primeiras velocidades críticas, tanto progressivas ($\lambda = +1$), como regressivas ($\lambda = -1$), para um eixo rotativo simplesmente apoiado.

A terceira resposta possível do modelo é a obtenção, para um eixo simplesmente apoiado, das frequências naturais com uma rotação própria (Spin Speed $\Omega = \dot{\psi}$), especificada.

Estes tipos de resposta são obtidos para os modelos das vigas citadas anteriormente.

Se o sistema ROTOR-DISCO-SUPORTE tem os seus mancais do tipo isotrópico, com a rigidez dada por

$$\begin{aligned} K_{11} &= K_{22} \\ K_{12} &= K_{21} = 0 \end{aligned}$$

e pretende-se estudar seu comportamento dinâmico no que diz respeito às frequências naturais e velocidades críticas orbitais (de Whirl) progressivas e regressivas, é conveniente trabalhar no sistema de coordenadas rotativo R, o qual permite grandes simplificações no sistema de equações matriciais, conforme descrição a seguir.

6.2 - OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES GLOBAIS NO SISTEMA ROTATIVO R

Pretende-se agora, através de uma mudança ortogonal de coordenadas, passar os deslocamentos do sistema fixo F para o rotativo R, obtendo-se o sistema global de equações referido ao sistema de coordenadas rotativo R.

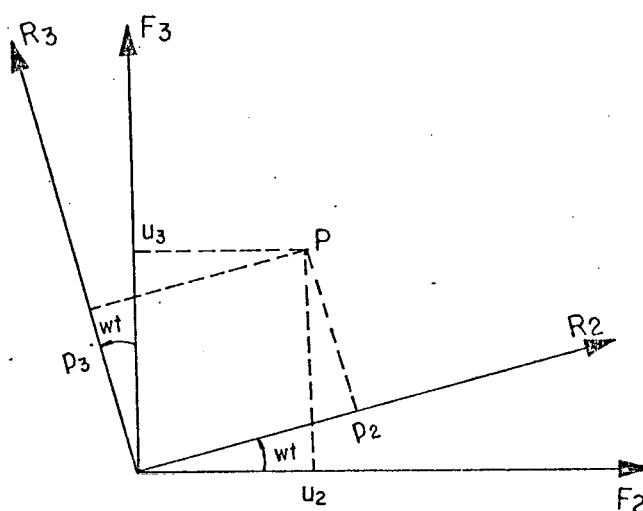


Figura 16 - Representação de um vetor nos sistemas fixo F e rotativo R.

Considere-se o sistema de coordenadas rotativo R girando em torno de seu eixo 1, coincidente com o eixo 1 do sistema fixo. A velocidade angular de giro ω , é denominada de velocidade orbital (Whirl Speed).

O vetor deslocamento de um ponto da elástica do modelo ROTOR-DISCO-SUPORTE no sistema fixo F é

$$\{u\}^t = \{u_2 \ u_3 \ u_5 \ u_6\}$$

e este mesmo deslocamento no sistema rotativo R é denotado por

$$\{p\}^t = \{p_2 \ p_3 \ p_5 \ p_6\}$$

Os deslocamentos $\{u\}$ de qualquer ponto da elástica são repassados para os seus correspondentes $\{p\}$ através da transformação ortogonal

$$\{u\}^t = [R] \{p\} \quad 6.2$$

onde $[R]$ é uma matriz ortogonal dada por:

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t & & & & \\ \sin \omega t & \cos \omega t & & & & \\ & & \cos \omega t & -\sin \omega t & & \\ & & \sin \omega t & \cos \omega t & & \end{bmatrix} \quad 6.3$$

Derivando a equação 6.2 em relação ao tempo, obtém-se a relação entre os vetores velocidades nos dois sistemas F e R:

$$\{\dot{u}\} = [R] \{\dot{p}\} + \omega [S] \{p\} \quad 6.4$$

Derivando novamente, obtém-se a relação entre as acelerações nos dois sistemas

$$\{\ddot{u}\} = [R] \{\ddot{p}\} + 2\omega [S] \{\dot{p}\} - \omega^2 [R] \{p\} \quad 6.5$$

onde a matriz $[S]$ é dada por

$$[S] = \frac{1}{\omega} [\dot{R}] = \begin{bmatrix} -\text{sen } \omega t & -\text{cos } \omega t & & \\ \text{cos } \omega t & -\text{sen } \omega t & & \\ & & -\text{sen } \omega t & -\text{cos } \omega t \\ & & \text{cos } \omega t & -\text{sen } \omega t \end{bmatrix}$$

Substituindo as relações obtidas para as transformações de coordenadas entre o sistema fixo F e o sistema rotativo R na equação global 6.1, obtém-se o conjunto completo global de equações dinâmicas no sistema rotativo R.

$$\left([M_{lg}] + [M_{rg}] \right) \left([R_g] \left\{ \ddot{p}_g \right\} + 2 \omega [S_g] \left\{ \dot{p}_g \right\} - \omega^2 \left\{ p_g \right\} \right) - \Omega [E_g] \left([R_g] \left\{ \dot{p}_g \right\} + \omega [S_g] \left\{ p_g \right\} \right) + [E_g] [R_g] \left\{ p_g \right\} = \left\{ Q_g \right\} \quad 6.7$$

onde $\left\{ p_g \right\}$ é o vetor dos deslocamentos globais dos nós no sistema rotativo R.

Esta equação será bastante simplificada tendo em vista as seguintes observações:

- 1 - denota-se por λ a relação entre a velocidade própria do rotor $\dot{\varphi}_4 = \Omega$ (Spin Speed) e a rotação orbital de referência ω (Whirl Speed).

$$\lambda = \Omega / \omega$$

- 2 - pré-multiplica-se todos os membros da equação 6.7 por $[R]^t$
- 3 - consideram-se as seguintes propriedades características das operações matriciais envolvidas na transformação da equação global no sistema de referência fixo para o sistema de referência rotativo:

$$\left[R_g \right]^T \left(\left[M_{tg} \right] + \left[M_{rg} \right] \right) \left[R_g \right] = \left[M_{tg} \right] + \left[M_{rg} \right] \quad 6.9$$

$$\left[R_g \right]^T \left[M_{tg} \right] \left[S_g \right] = \left[\hat{M}_{tg} \right] \quad 6.10$$

$$\left[R_g \right]^T \left[M_{tg} \right] \left[S_g \right] = \frac{1}{2} \left[G_g \right] \quad 6.11$$

$$\left[R_g \right]^T \left[G_g \right] \left[R_g \right] = \left[G_g \right] \quad 6.12$$

$$\left[R_g \right]^T \left[G_g \right] \left[S_g \right] = 2 \left[M_{rg} \right] \quad 6.13$$

$$\left[R_g \right]^T \left\{ Q_g \right\} = \left\{ P_g \right\} \quad 6.14$$

Logo, substituindo estas relações na equação 6.7, obtém-se a equação global simplificada de movimento no sistema rotativo R:

$$\begin{aligned} & \left(\left[M_{tg} \right] + \left[M_{rg} \right] \right) \left\{ \ddot{P}_g \right\} + \omega \left(2 \left[\hat{M}_{tg} \right] + (1-2\lambda) \left[G_g \right] \right) \left\{ \dot{P}_g \right\} + \\ & \left(\left[K_g \right] - \omega^2 \left(\left[M_{tg} \right] + (1-2\lambda) \left[M_{rg} \right] \right) \right) \left\{ P_g \right\} = \left\{ P_g \right\} \end{aligned} \quad 6.15$$

Considerando esta equação e as considerações anteriores, referentes aos mancais que devem ser isotrópicos e sem amortecimento, vê-se que a solução não trivial para uma relação λ especificada e com $\left\{ P_g \right\}$ igual a constante, será obtida através do terceiro termo

$$\left(\left[K_g \right] - \omega^2 \left(\left[M_{tg} \right] + (1-2\lambda) \left[M_{rg} \right] \right) \right) \left\{ P_g \right\} = 0 \quad 6.16$$

ou seja, resolvendo o problema de autovalores,

$$\begin{bmatrix} K_g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_g \end{Bmatrix} = \omega^2 \left(\begin{bmatrix} M_{tg} \end{bmatrix} + (1-2\lambda) \begin{bmatrix} M_{rg} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} p_g \end{Bmatrix} \quad 8.17$$

onde todas as matrizes são simétricas, para uma determinada relação entre a rotação própria do sistema Ω e a velocidade orbital ω

$$\lambda = \Omega/\omega$$

A solução desse sistema fornece os autovalores ω_n , $n = 1, 2, \dots$, que são as frequências naturais orbitais e os autovetores associados, que são os modos naturais orbitais para $\lambda = 0$.

Caso se adotem para λ os valores de ± 1 , então as saídas serão as velocidades críticas progressivas e regressivas (forward and backward critical speeds), conforme [08].

No gráfico da figura 17 tem-se a representação do comportamento das frequências na presença do efeito giroscópico, conforme [11]. Com o sistema parado ($\Omega = 0$), as frequências naturais serão ω_{n1} e ω_{n2} , onde os índices indicam primeiro e segundo modos, com valores constantes devidos à ausência do momento giroscópico. Para uma determinada rotação própria Ω , o sistema apresenta teoricamente duas frequências para cada modo, isto devido à presença do momento giroscópico: uma denominada de frequência natural progressiva ω_{np} , e a outra denominada frequência natural regressiva, ω_{nr} .

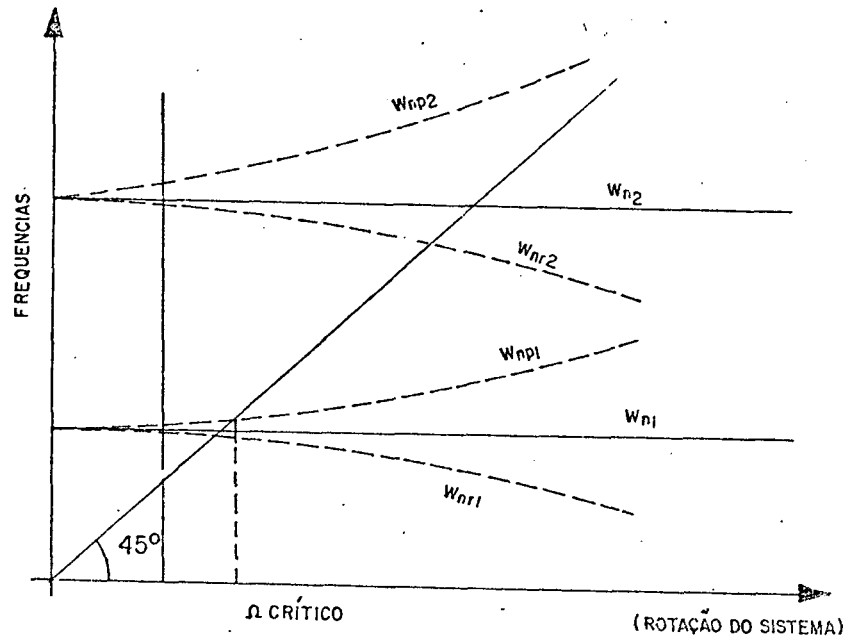


Figura 17 - Comportamento das freqüências com a presença do efeito giroscópico, conforme referência [11].

CAPITULO VII

ANÁLISE DE VIGAS

Considere-se o problema clássico de uma viga simplesmente apoiada, com massa e rigidez constantes ao longo de seu comprimento L . A seção transversal é circular com raio r , e o índice de esbeltez é definido pela relação

$$r_e = \frac{r}{2L}$$

7.1

Estudos analíticos do comportamento desta viga, no que diz respeito às frequências naturais e frequências críticas foram feitas por ESHLEMAN and EUBANKS [04,05] e DYM and SHAMES [06].

Foram considerados nos estudos as influências dos efeitos de inércia rotatória, cisalhamento e momento giroscópico.

A formulação fornecida por estes estudos servirão de base para comparação com os resultados obtidos através da formulação do ELEMENTO FINITO ROTOR desenvolvida nesta

dissertação e conseqüentemente permitirão comprovar a eficiência do programa PADIR, elaborado para este fim.

7.1 - FORMULAÇÃO ANALÍTICA DAS FREQUÊNCIAS PARA AS VIGAS DE BERNOULLI-EULER, RAYLEIGH E TIMOSHENKO

A seguir serão apresentadas resumidamente as expressões fornecidas para as frequências naturais e críticas das vigas em análise.

7.1.1 - Frequência natural para a viga de Bernoulli-Euler

As equações de movimento da viga de Bernoulli-Euler, consideram somente os efeitos de inércia translacional e rigidez de flexão.

As suas frequências naturais ou os autovalores da viga são dados pela equação 7.69 da referência [06].

$$\omega_n = \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \left(\frac{EI}{\rho A} \right)^{1/2} \quad \text{para } n = 1, 2, \dots \quad 7.2$$

onde n é a ordem da frequência.

Nota-se que a frequência natural desta viga não varia com índice de esbeltez r_e .

Para uma melhor visualização dos gráficos e tabelas apresentadas a seguir, as frequências serão adimensionalizadas através da expressão

$$\omega_{na}^4 = \frac{\rho A L^4 \omega_n^2}{EI} \quad 7.3$$

Substituindo na equação 7.2 resulta, para a viga de Bernoulli-Euler, a seguinte expressão:

$$\omega_{na} = n\pi \quad 7.4$$

onde ω_{na} é a frequência natural adimensional.

7.1.2 - Frequência natural para a viga de Rayleigh

Nos estudos da viga de Rayleigh considera-se, além dos efeitos presentes na viga Bernoulli-Euler, a inclusão da inércia rotatória nas equações de movimento.

As frequências naturais são fornecidas pelas expressões 7.66a e 7.70, referência [06], e estão relacionadas com o índice de esbeltez.

Considerando as duas expressões obtém-se

$$\omega_n^2 = \frac{EA}{\rho I} \frac{(n\pi r_e)^4}{1+(n\pi r_e)^2} \quad 7.5$$

Recorrendo à fórmula 7.3 determina-se, para a viga de Rayleigh, a seguinte frequência adimensional:

$$\omega_{na}^4 = \frac{(n\pi)^4}{1+(n\pi r_e)^2} \quad 7.6$$

Observa-se que o efeito de inércia rotatória diminui a frequência natural da viga.

7.1.3 - Frequência natural para a viga de Timoshenko

A viga de Timoshenko é caracterizada pela influência dos efeitos combinados de cisalhamento e inércia rotatória nas equações de movimento, além dos efeitos já incluídos na viga de Bernoulli-Euler.

As frequências naturais previstas para este caso são obtidas através da substituição da equação 7.66 na 7.74 de [06], resultando

$$\omega_n^2 = \frac{EA}{\rho I} (n\pi r_e)^4 \left[\frac{1 - \frac{E}{KG} (n\pi r_e)^4}{1 + \left[1 + \frac{E}{KG}\right] (n\pi r_e)^2 - 2 \frac{E}{KG} (n\pi r_e)^4} \right] \quad 7.7$$

Considerando-se a fórmula 7.3 obtém-se a seguinte expressão para a frequência natural adimensional da viga de Timoshenko

$$\omega_{na}^4 = (n\pi)^4 \left[\frac{1 - \frac{E}{KG} (n\pi r_e)^4}{1 + \left[1 + \frac{E}{KG}\right] (n\pi r_e)^2 - 2 \frac{E}{KG} (n\pi r_e)^4} \right] \quad 7.8$$

Observa-se que o efeito da combinação de cisalhamento e inércia rotatória baixa mais a frequência natural em relação à viga de Rayleigh.

7.1.4 - Freqüências críticas para a viga de Timoshenko

As freqüências críticas para a viga de Timoshenko são determinadas levando-se em consideração, nas equações de movimento, os efeitos já descritos de massa rotatória e deformação cisalhante, acrescidos da influência do momento giroscópico.

Investigações analíticas deste comportamento foram realizadas por Eshleman and Eubanks [04,05].

O efeito do momento giroscópico no comportamento da viga reflete-se na alteração de sua velocidade crítica, provocando alternativamente aumento e diminuição da freqüência natural, conforme se vê na figura 17.

Duas velocidades críticas são determinadas:

- a primeira, denominada de velocidade crítica progressiva (forward whirl), é dada na sua forma adimensional pela expressão 41 de [05]:

$$\omega_{cpa}^2 = \frac{(n\pi)^2}{\left[1 + \left(\frac{E}{KG} - 1 \right) (n\pi r_e)^2 \right]^{1/2}} \quad 7.9$$

- a segunda, denominada de velocidade crítica regressiva (backward whirl), em sua forma adimensional é dada em [05], pela equação 42:

$$\omega_{\text{cr}}^2 = \frac{(n\pi)^2}{\left[1 + \left(\frac{E}{K_G} + 3 \right) (n\pi r_o)^2 \right]^{1/2}} \quad 7.10$$

7.2 - ANÁLISE DAS FREQUÊNCIAS FORNECIDAS ANALITICAMENTE E PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O programa desenvolvido permite em princípio analisar-se uma viga onde os efeitos considerados são a inércia translacional e rigidez (viga de Bernoulli-Euler); introduzindo-se o efeito da rigidez rotatória, passa-se a analisar a viga de Rayleigh; fazendo-se a combinação com os efeitos provocados por cisalhamento e momento giroscópico, tem-se a viga de Timoshenko.

O estudo foi conduzido para diversos números de elementos e, como era esperado, a precisão do modelo aumentou com o aumento do número de elementos.

7.2.1 - Frequências fornecidas pelo programa PADIR

As tabelas 1 e 2, apresentam as frequências naturais e críticas, geradas pelo programa de elementos finitos PADIR representativo do modelo dinâmico ROTOR-DISCO-SUPORTE, para as vigas de Bernoulli-Euler, Rayleigh e Timoshenko, com o índice de esbeltez (r_o) variando de 0,02 a 0,1 e o eixo dividido em 5, 7 e 9 elementos finitos.

Tabela 1 - Frequências naturais

Viga não rotativa simplesmente apoiada; E/GK = 2,4

MODOS	re	Viga de Rayleigh efeito: inércia rotatória			Viga de Timoshenko efeitos: cisalhamento, inércia rotatória		
		Número de elementos			Número de elementos		
		5	7	9	5	7	9
PRIMEIRO MODO	0,02	3,1387	3,1385	3,1385	3,1316	3,1313	3,1312
	0,04	3,1295	3,1293	3,1293	3,1023	3,1017	3,1015
	0,06	3,1145	3,1143	3,1143	3,0571	3,0561	3,0556
	0,08	3,0940	3,0939	3,0939	3,0005	2,9989	2,9983
	0,10	3,0687	3,0685	3,0685	2,9364	2,9343	2,9334
SEGUNDO MODO	0,02	6,2638	6,2599	6,2599	6,2143	6,2074	6,2051
	0,04	6,1928	6,1890	6,1890	6,0222	6,0079	6,0024
	0,06	6,0829	6,0792	6,0792	5,7705	5,7482	5,7393
	0,08	5,9440	5,9403	5,9403	5,5043	5,4752	5,4633
	0,10	5,7864	5,7829	5,7829	5,2470	5,2126	5,1984

Tabela 2 - Frequências críticas
Viga de Timoshenko rotativa simplesmente apoiada; E/GK = 2,4.

MODOS	re	Progressiva $\lambda = 1$			Regressiva $\lambda = -1$		
		Número de elementos			Número de elementos		
		5	7	9	5	7	9
PRIMEIRO MODO	0,02	3,1376	3,1374	3,1373	3,1256	3,1253	3,1252
	0,04	3,1251	3,1246	3,1238	3,0802	3,0796	3,0780
	0,06	3,1038	3,1027	3,1022	3,0135	3,0125	3,0121
	0,08	3,0734	3,0715	3,0707	2,9342	2,9328	2,9321
	0,10	3,0338	3,0311		2,8493	2,8475	2,8467
SEGUNDO MODO	0,02	6,2604	6,2532	6,2508	6,1699	6,1631	6,1609
	0,04	6,1717	6,1551	6,1464	5,8878	5,8748	5,8647
	0,06	6,0171	5,9873	5,9750	5,5575	5,5380	5,5301
	0,08	5,8052	5,7623	5,7445	5,2396	5,2146	5,2042
	0,10	5,5596	5,5069		4,9530	4,9328	4,9116

7.2.2 - Análise das frequências naturais

Analisa-se neste item, o comportamento das frequências naturais nos modelos das vigas de Bernoulli-Euler, Rayleigh e Timoshenko.

A tabela 3 e os gráficos 1 e 2, a seguir, apresentam as frequências naturais fornecidas pelo programa PADIR, para uma viga dividida em nove elementos. Comparam-se as mesmas com as respostas dos estudos analíticos apresentados no item 7.1.

A tabela indica, ainda, o percentual de desvio entre os valores do programa e a resposta analítica.

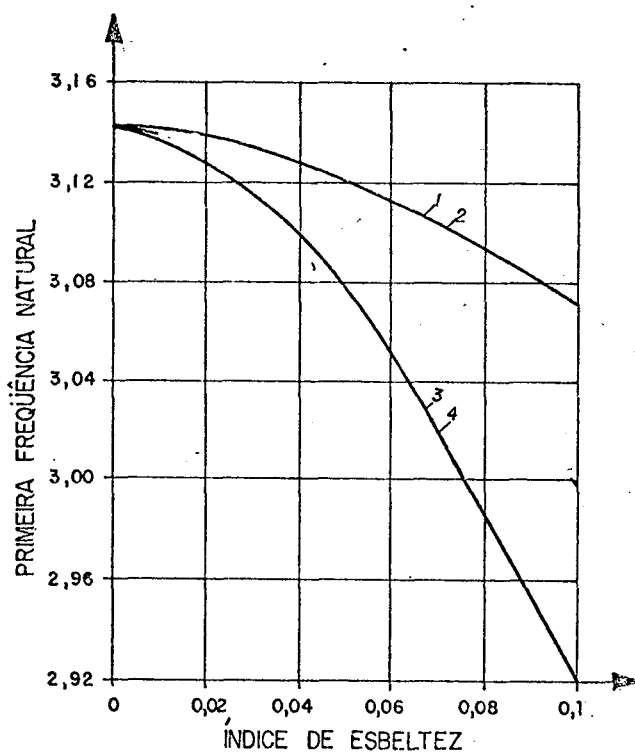


GRÁFICO 1 - FREQUÊNCIAS NATURAIS

VIGA DE RAYLEIGH - 1 MEF
2 FORMULA
VIGA DE TIMOSHENKO - 3 MEF
4 FORMULA 7.8

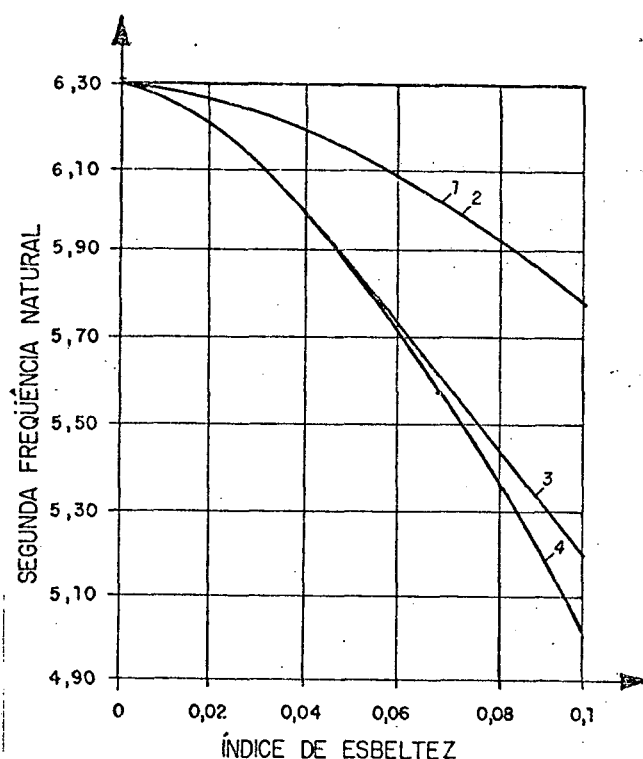


GRAFICO 2 - FREQUÊNCIAS NATURAIS

VIGA DE RAYLEIGH - 1 MEF
2 FORMULA 7.6
VIGA DE TIMOSHENKO - 3 MEF
4 FORMULA 7.8

Tabela 3 - Comparação das frequências naturais

Viga de Rayleigh

Viga de Timoshenko; E/GK = 2,4.

MODOS	Viga de Rayleigh				Viga de Timoshenko			
	re	MEF	Fórmula 7.6	desvio %	MEF	Fórmula 7.8	desvio %	
PRIMEIRO MODO	0,02	3,1385	3,1385	0,0000	3,1312	3,1312	0,0000	
	0,04	3,1293	3,1293	0,0000	3,1015	3,1012	0,0096	
	0,06	3,1143	3,1143	0,0000	3,0556	3,0551	0,0164	
	0,08	3,0939	3,0939	0,0000	2,9983	2,9971	0,0400	
	0,10	3,0685	3,0685	0,0000	2,9334	2,9311	0,0785	
SEGUNDO MODO	0,02	6,2599	6,2586	0,0208	6,2051	6,2024	0,0435	
	0,04	6,1890	6,1877	0,0210	6,0024	5,9943	0,1351	
	0,06	6,0792	6,0779	0,0214	5,7393	5,7190	0,3550	
	0,08	5,9403	5,9391	0,0202	5,4633	5,3995	1,1816	
	0,10	5,7829	5,7817	0,0208	5,1984	4,9737	4,5178	

Conclusões sobre as frequências naturais

Na viga de Bernoulli-Euler as frequências naturais independem do índice de esbeltez, e são dadas pela fórmula 7.4,

$$\omega_{na} = n\pi$$

cujos valores do programa PADIR convergiram para uma viga subdividida em nove elementos.

Para as vigas de Rayleigh, a primeira frequência natural, calculada pelo programa, não apresenta desvio percentual considerável, coincidindo praticamente todos os valores para os diversos índices de esbeltez considerados. A segunda frequência natural, para a viga de Rayleigh é também bastante precisa, e o desvio é da ordem de 0,02%.

Para a viga de Timoshenko, os valores das frequências naturais (primeira e segunda) fornecidos pelo programa PADIR apresentam uma diferença máxima em relação à fórmula 7.8, de 1%, para o índice de esbeltez variando de 0,02 a 0,08. Considerando o índice de esbeltez de 0,1 esta diferença é de 0,07% para a primeira frequência natural e 4,5% para a segunda.

Do exposto, observa-se o excelente comportamento do sistema ROTOR-DISCO-SUPORTE, na determinação das frequências naturais para os modelos das vigas de Bernoulli-Euler, Rayleigh e Timoshenko, fazendo-se a ressalva quanto ao uso de índices de esbeltez elevados. Adotando-se índices de até 0,08 os desvios não ultrapassam o valor de 1,2%.

Observa-se também que o efeito de cisalhamento diminui a rigidez da viga, diminuindo a sua frequência natural.

7.2.3 - Análise das frequências críticas

Considera-se neste item a análise do comportamento das frequências críticas na viga de Timoshenko.

A presença do efeito giroscópico provoca alternadamente aumento e diminuição das frequências, resultando na frequência crítica progressiva (forward whirl) e na frequência crítica regressiva (backward whirl).

Os resultados fornecidos pelo programa PADIR serão comparados com os calculados através das fórmulas 7.9 e 7.10, que são aproximações das velocidades críticas, não incluindo os efeitos de interação entre a deformação transversal e inércia rotatória, e também entre a deformação transversal e momento giroscópico.

As velocidades críticas exatas são dadas pela equação (15) de [05].

Esta equação, foi resolvida para determinação das velocidades críticas de um rotor, com índice de esbeltez compreendido entre 0,0005 e 0,1, considerando todos os efeitos, inclusive o torque.

Para índices de esbeltez acima de 0,05 o efeito de torque não é significativo, permitindo, para efeito de comparação, a utilização das curvas referentes à equação (15), apresentadas nas figuras 2 e 3 de [05].

A tabela 4 mostra os valores determinados pelo programa PADIR das frequências críticas para a viga de Timoshenko dividida em nove elementos, que são comparados com os valores determinados pelas fórmulas 7.9 e 7.10, para índices de esbeltez variando de 0,02 a 0,1.

Indica-se também o desvio percentual entre a formulação e o programa PADIR.

Nos gráficos 3 e 4 tem-se, além dos valores tabelados descritos anteriormente, as curvas referentes às respostas exatas extraídas da tabelas 2 e 3 de [05].

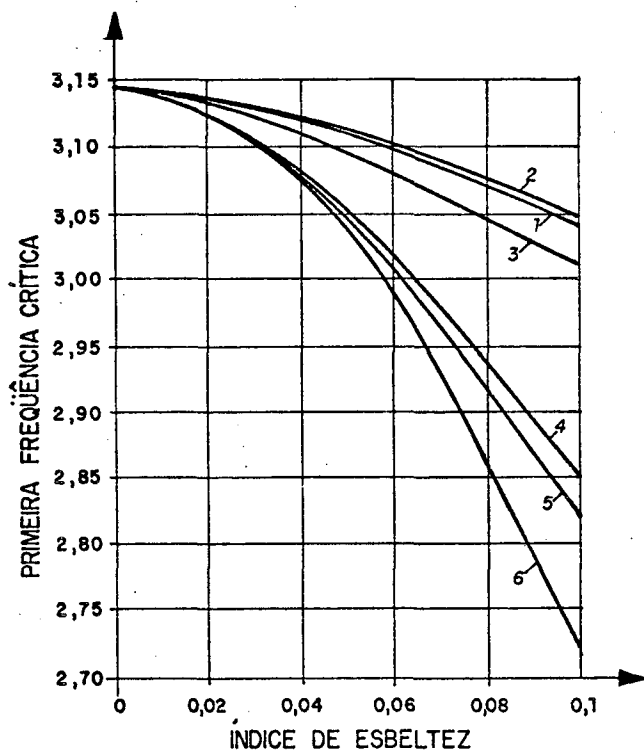


GRÁFICO 3 - FREQUENCIAS CRÍTICAS

- PROGRESSIVA 1 MEF
- 2 FORMULA 7.9
- 3 RESPOSTA EXATA
- REGRÉSSIVA 4 MEF
- 5 FORMULA 7.10
- 6 RESPOSTA EXATA

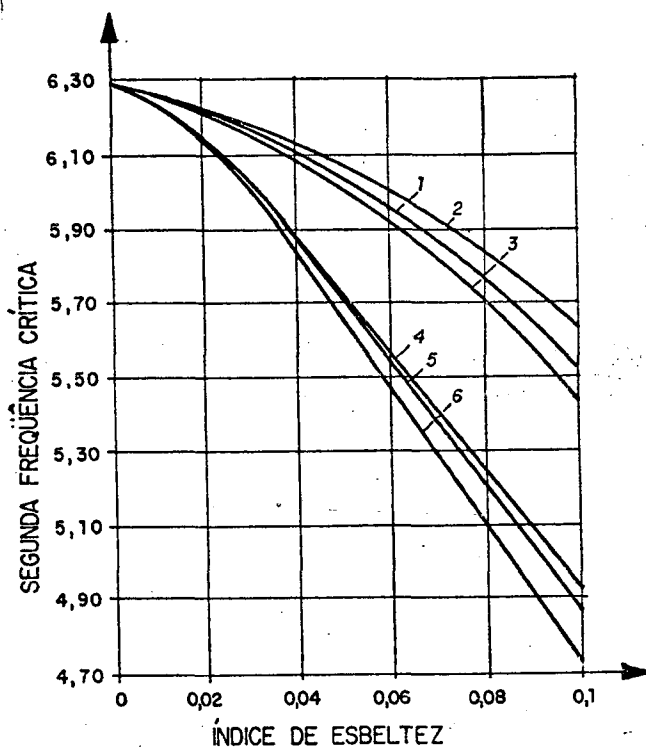


GRÁFICO 4 - FREQUENCIAS CRÍTICAS

- PROGRESSIVA 1 MEF
- 2 FORMULA 7.9
- 3 RESPOSTA EXATA
- REGRÉSSIVA 4 MEF
- 5 FORMULA 7.10
- 6 RESPOSTA EXATA

Tabela 4 - Comparação das frequências críticas

Viga de Timoshenko

MODOS	Frequências críticas						
	Progressivas $\lambda = 1$			Regressivas $\lambda = -1$			
	re	MEF	Fórmula 7.9	desvio %	MEF	Fórmula 7.10	desvio %
PRIMEIRO MODO	0,02	3,1373	3,1373	0,0000	3,1252	3,1251	0,0032
	0,04	3,1238	3,1245	0,0224	3,0780	3,0780	0,0000
	0,06	3,1022	3,1037	0,0484	3,0121	3,0067	0,1796
	0,08	3,0787	3,0757	0,0975	2,9321	2,9193	0,4385
	0,10		3,0416		2,8467	2,8234	0,8252
SEGUNDO MODO	0,02	6,2508	6,2489	0,0304 ³⁰⁴	6,1609	6,1560	0,0796
	0,04	6,1464	6,1515	0,0830 ³⁰	5,8647	5,8387	0,4453
	0,06	5,9750	6,0045	0,4937	5,5301	5,4493	1,4828
	0,08	5,7445	5,8250	1,4013	5,2042	5,0670	2,7077
	0,10		5,6287		4,9116	4,7231	3,9910

Conclusões sobre frequências críticas

Comparam-se inicialmente, os valores fornecidos pelo método dos elementos finitos, para a viga de Timoshenko, sem o efeito do momento giroscópico dados no item anterior, com os valores listados na tabela 4 para as frequências críticas onde se inclui este efeito.

Desta comparação verifica-se a influência do efeito giroscópico. Ou seja, a frequência é maior ou menor do que a calculada para a viga não rotativa, conforme se observa nos gráficos 5 e 6.

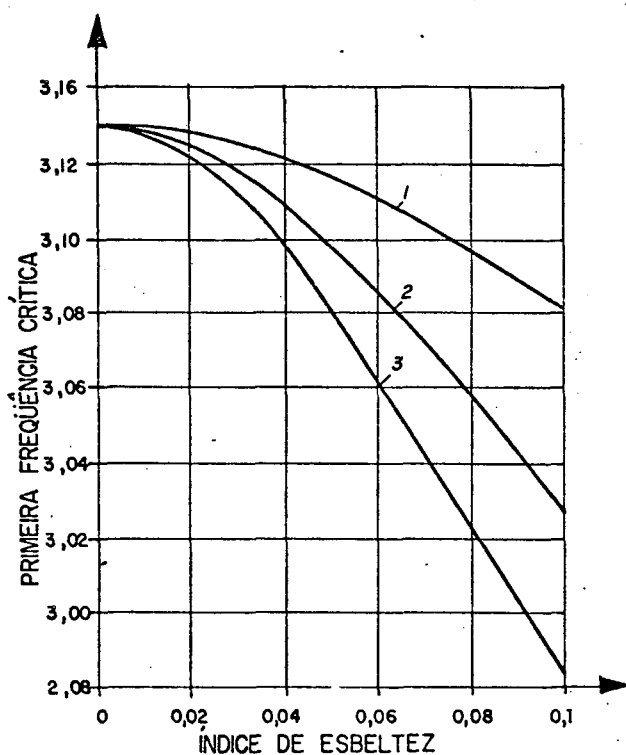


GRAFICO 5 - FREQUENCIAS CRÍTICAS

- 1 PROGRESSIVA
- 2 SEM EFEITO GIROSCÓPICO
- 3 REGRESSIVA

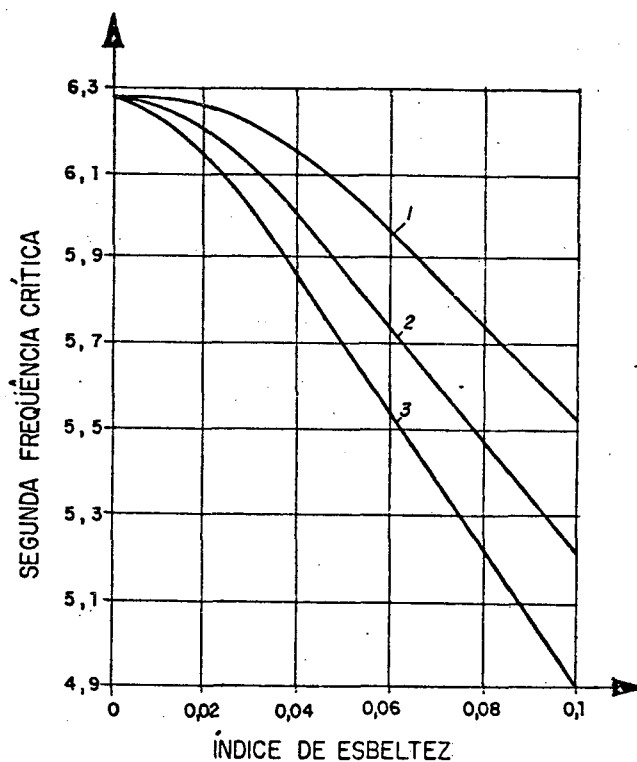


GRÁFICO 6 - FREQUENCIAS CRÍTICAS

- 1 PROGRESSIVA
- 2 SEM EFEITO GIROSCÓPICO
- 3 REGRESSIVA

Comparam-se agora os valores fornecidos pelo método dos elementos finitos (MEF), com os valores calculados pelas equações 7.9 e 7.10. Conclusões também são tiradas dos gráficos 3 e 4 e descritas a seguir:

- a primeira frequência crítica progressiva, fornecida pelo MEF praticamente coincide com os resultados da fórmula 7.9, e também com a solução exata do problema apresentada nos gráficos 3 e 4.
- a segunda frequência crítica progressiva, fornecida pelo MEF apresenta também um bom resultado, estando os desvios na faixa de 0% a 0,5% para índices de esbeltez até 0,08, e de 1,4% para o índice de esbeltez de 0,08 quando comparados com a fórmula 7.9. Considerando a curva da resposta exata no gráfico 4, observa-se que os desvios são menores, estando em torno de 1% para um índice de esbeltez de 0,1, decrescendo rapidamente até o valor zero para os índices de esbeltez menores.
- a primeira frequência crítica regressiva resultante do MEF apresenta um comportamento excelente, quando comparada com a fórmula 7.10, os desvios percentuais são menos de 0,9%. Este comportamento é também observado no gráfico 4.

Comparando-se, no gráfico 3, a curva da solução exata com os valores fornecidos pelo MEF, detecta-se um desvio percentual um pouco maior, na ordem de 4% para o índice de esbeltez de 0,1 e 2,5% para o índice de 0,08. Para os índices mais baixos este percentual de desvio decresce rapidamente para zero.

- a segunda frequência crítica regressiva obtida pelo MEF, quando comparada com os valores fornecidos pela fórmula 7.10, apresenta desvios percentuais crescentes com o índice de esbeltez. Observa-se que o desvio para índices de esbeltez de 0,02 a 0,08 é pequeno, e varia de 0% a 2,7%.

Desvios encontrados nos gráficos 3 e 4 entre o MEF e a resposta exata são devidos à falta de iteração do cisalhamento com o efeito giroscópico e com a inércia rotatória.

Das conclusões tiradas da tabela 4 e dos gráficos 3 e 4, comprova-se o bom comportamento do modelo de elementos finitos ROTOR-DISCO-SUPORTE, na determinação das frequências críticas para a viga de Timoshenko. Recomendando-se adotar índices de esbeltez até 0,08 quando desvios são pequenos.

CAPITULO VIII

MODELAGEM DE HIDROGERADORES

B.1 - INTRODUÇÃO

No Brasil, devido ao seu potencial hidráulico são de grande utilização os grupos hidrogeradores de grande porte.

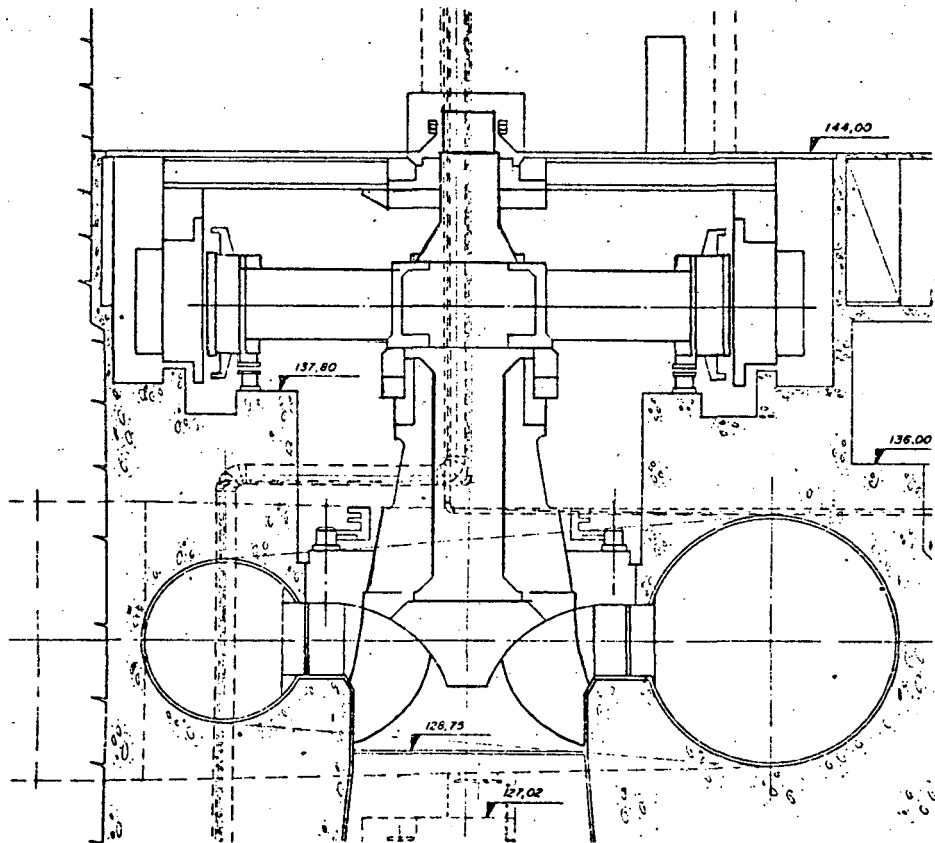


Figura 18 - Representação típica de um grupo hidrogerador.

A figura 18 representa um grupo hidrogerador, composto basicamente de uma turbina hidráulica do tipo Francis, eixo intermediário, gerador e mancais.

O comportamento dinâmico destes conjuntos é de relevante importância, por serem grandes as massas girantes, na ordem de 1000 t. a 3000 t.

Estes conjuntos apresentam severos problemas de operação, devidos a vibrações, que podem prejudicar consideravelmente seu funcionamento.

Nos últimos anos, muitas investigações tem sido promovidas no sentido de quantificar experimentalmente estas vibrações, determinar suas causas e, conseqüentemente, melhorar os projetos.

Mais recentemente tem sido dado um enfoque ao estudo de modelos matemáticos que representem o comportamento dinâmico de grupos hidrogeradores, por duas razões principais:

- 1 - a difícil otimização do protótipo, em razão das grandes dimensões do mesmo, e altos custos que isto acarreta;
- 2 - análise do comportamento de grupos já em operação, simulando-se as mais diversas situações.

Os hidrogeradores tem sido modelados por vários métodos matemáticos. Como exemplo cita-se o método das matrizes de transferência [09], método dos elementos finitos [11], método das matrizes de transferência combinado com elementos finitos [09] e o método de Myklestad [17].

Dentre estes métodos, o que tem sido mais estudado ultimamente é o dos elementos finitos, em razão do grande desenvolvimento tecnológico dos computadores e suas aplicações, facilidade de modelagem, eficiência etc..

8.2 - MODELAGEM PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O modelo dinâmico ROTOR-DISCO-SUPORTE, desenvolvido nesta dissertação será utilizado neste capítulo para representar o comportamento dinâmico de um grupo hidrogerador.

A turbina e o rotor do gerador são modelados como DISCOS rígidos discretos, possuindo massa e inércia localizadas. O eixo é subdividido em elementos finitos do tipo ROTOR, com todas as características correspondentes. Finalmente os SUPORTES são representados pelos mancais de escora e de guia com a rigidez de mola indicada.

Para efeito de comprovação dos resultados gerados pelo programa PADIR, correspondente à formulação do elemento finito rotor desenvolvido nesta dissertação, serão feitas comparações com os valores fornecidos por [09] e [11] para grupos hidrogeradores da hidroelétrica de Ilha Solteira da CESP.

8.2.1 - Estudo do modelo 1 de Pavanello, R., [09], Usina Hidroelétrica de Ilha Solteira.

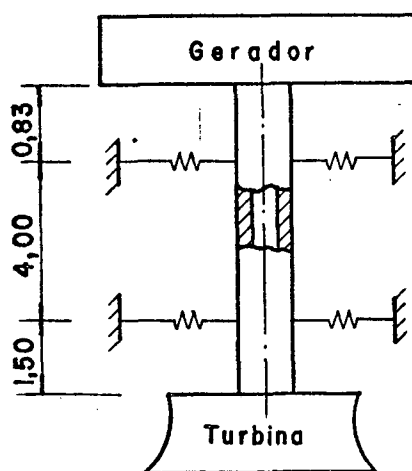


Figura 19 - Representação do modelo 1, de [09].

Este modelo representa os grupos hidrogeradores da Usina de Ilha Solteira, cujas turbinas são do tipo Francis. O sistema foi modelado para o estudo de vibrações livres, sem considerar o efeito de amortecimento nos mancais. As características destes grupos hidrogeradores são listadas a seguir:

- Peso do conjunto (t)	715
- Momentos de inércia diametral (kg.m^2)	
Gerador	4,8E6
Turbina	5,0E4
Mancal guia do gerador	1,37E4
Mancal guia da turbina	0,5E3

- Massas (kg)	
Gerador	4,95E5
Turbina	1,45E5
Mancal guia do gerador	2,1E4
Mancal guia da turbina	2,87E3
- Rigidez (N/m)	
Mancal guia gerador	1,5E11
Mancal guia de turbina	1,5E11
- Diâmetro do eixo (m)	
Externo	1,3
Interno	0,4
Massa específica (kg/m ³)	7,8E3
Módulo de elasticidade (N/m ²)	2,07E11
Módulo de cisalhamento (N/m ²)	9,73E10
Coefficiente de Cisalhamento	0,886

A tabela 5, indica os valores das frequências naturais fornecidas pela referência [09] para o modelo 1 de Pavanello, bem como os valores determinados pelo programa PADIR e os respectivos desvios.

Tabela 5 - Frequências naturais (Hz)

MODO	[09]	PADIR	DESVIO %
1	8,08	7,96	1,51
2	31,25	29,68	5,29

8.2.2 - Estudo do modelo 2 de Pavanello, [09], Usina Hidroelétrica de Ilha Solteira.

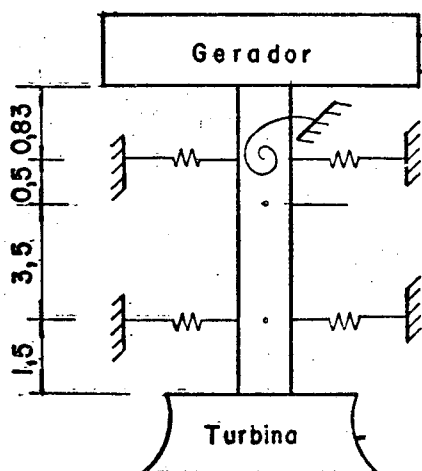


Figura 20 - Representação do modelo 2, de [09].

Neste modelo 2, proposto por Pavanello, considera-se o mancal do gerador combinado (escora-guia). Este comportamento é representado por uma mola de torção, conforme figura 20, simulando as restrições elásticas à torção.

Considera-se, ainda, que os mancais guias são hidrodinâmicos e segmentados, levando-se em conta os efeitos de amortecimento e rigidez do filme de óleo, bem como a rigidez da estrutura de sustentação destes mancais.

O modelo submetido ao programa PADIR não considerou o efeito de amortecimento do mancal.

As características restantes são conforme item 8.2.1, acrescentando-se a rigidez torcional do mancal do gerador, indicada com o valor de $4.0E11$ N/m.

Na tabela 6 são apresentados os valores das frequências naturais fornecidas pela referência [09] para o

modelo 2 de Pavanello, e também os valores calculados pelo programa PADIR, com os respectivos desvios.

Tabela 6 - Freqüências naturais (Hz)

MODO	[09]	PADIR	DESVIO %
1	12,9	12,85	0,39
2	30,4	30,09	1,03

B.2.3 - Estudo do modelo 1 de Nascimento L. de P.; [11], Usina de Ilha Solteira

Este modelo representa também um grupo hidrogerador da Usina Hidrelétrica de Ilha Solteira.

As freqüências naturais reais foram conhecidas, com razoável precisão, através de análise espectral dos sinais de vibrações obtidos das medições de campo.

A rigidez do filme óleo e das estruturas suporte dos mancais foram determinadas experimentalmente e ajustadas no modelo [11].

Para este modelo é feita uma correção no momento de inércia diametral de turbina hidráulica, tendo em vista sua forma alongada, com maior concentração de massa nos extremos. Estima-se que o momento de inércia diametral é 75% do momento de inércia polar.

Algumas correções foram efetuadas em outros parâmetros devido a uma melhor precisão no método de obtenção dos mesmos.

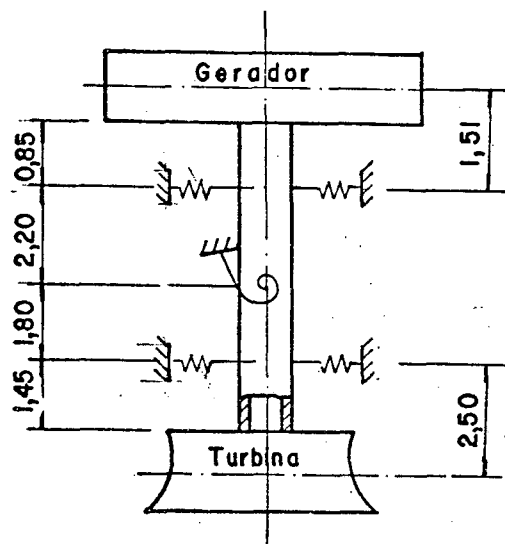


Figura 21 - Representação do modelo da referência [11].

Características do modelo:

- Momento de inércia diametral (kg.m^2)

Gerador	0,7E7
Turbina	6,75E5

- Massa (kg)

Gerador	4,95E5
Turbina	1,45E5

- Rigidez (N/m)

Mancal guia do gerador	5E9
Mancal guia da turbina	2E9
Mancal escora do gerador	1E8

Na tabela 7 são mostrados, para efeito de comparação, as seguintes frequências naturais para o modelo de um grupo hidrogerador de Ilha Solteira:

- a - Medições efetuadas no campo
- b - Resultados fornecidos pelo MEF da referência [11]
- c - Resultados fornecidos pelo programa PADIR

Tabela 7 - Frequências naturais (Hz)

MODOS	MEDIÇÕES NO CAMPO	[11]	PADIR
1	5	4,82	4,91
2	8,7	9,87	9,82
3	22	17,24	17,81

Do exposto nos itens anteriores conclui-se que o sistema dinâmico ROTOR-DISCO-SUPORTE desenvolvido nesta dissertação, tem um bom desempenho para modelagem de grupos hidrogeradores.

Segundo [09, 11], os principais problemas encontrados no modelamento destas máquinas são as poucas informações a respeito dos parâmetros envolvidos no modelo, tais como rigidez e amortecimento do filme de óleo dos mancais, efeito de amortecimento do selo mecânico, distribuição de massa da turbina e rigidez negativa no gerador. O procedimento iterativo utilizado na elaboração do modelo consiste da observação dos problemas reais do grupo hidrogerador, formulação do modelo matemático, análise dos resultados e, quando necessárias, modificações do modelo e reanálise dos resultados.

Estas análises são feitas com base nos desvios dos resultados teóricos obtidos em relação aos resultados experimentais medidos.

Logo, devido à falta de informações a respeito de algumas características destas máquinas, é necessário um procedimento interativo entre o modelo matemático e o protótipo para determinação e ajustagem destas características, o que foge ao escopo deste trabalho.

CAPITULO IX

CONCLUSÕES E SUGESTÕES DE CONTINUIDADE

9.1 - CONCLUSÕES

Neste item apresentam-se as conclusões deste trabalho baseado nos objetivos predeterminados no início do mesmo.

Para a verificação da eficiência do modelo proposto ROTOR-DISCO-SUPORTE foram analisados vários exemplos de vigas, com solução teórica exata, variando o número de elementos (subdivisões) e o índice de esbeltez (relação entre diâmetro e comprimento). As respostas fornecidas pelo sistema computacional PADIR mostram um excelente desempenho na representação estrutural destes sistemas, quando usados índices de esbeltez até 0,08.

Estes modelos matemáticos, comprovados para sistemas contínuos, foram usados na representação de grupos hidrogeradores. As características físicas e estruturais dos grupos apresentados neste trabalho são fornecidas por [9, 11], as quais foram obtidas de forma aproximada, a partir de

resultados experimentais e teóricos.

A obtenção destes parâmetros inclui uma parte teórica e uma parte experimental na área de identificação, pois os mesmos são de difícil determinação, o que não está no escopo deste trabalho.

A representação dos grupos hidrogeradores através do modelo proposto, ROTOR-DISCO-SUPORTE, apresenta-se bastante eficiente, requerendo-se um número reduzido de elementos para representar o modelo.

Os modelos mostraram-se sensíveis aos efeitos giroscópico e de cisalhamento, concluindo-se que estes efeitos não devem ser desprezados na modelagem destes grupos hidrogeradores e rotores de uma maneira geral.

9.2 - SUGESTÕES DE CONTINUIDADE

Dentro das perspectivas atuais da engenharia na área da análise dinâmica de máquinas rotativas, serão apresentadas a seguir, sugestões para trabalhos e pesquisas que venham a ampliar o espectro deste estudo e complementar o campo de conhecimento neste assunto:

1) Realizar uma abordagem experimental mais ampla dos problemas de hidrogeradores, determinando-se com maior precisão e confiabilidade os parâmetros estruturais dos modelos físicos em estudo, para isto implementando-se métodos de identificação de parâmetros no domínio do tempo e no domínio da frequência.

Dentre estes parâmetros tem-se:

- rigidez efetiva do filme de óleo nos mancais, com a máquina em operação, e das estruturas suportes dos mancais;
- momento de inércia das massas dos rotores;
- influência do volume de água contida na turbina hidráulica;
- efeito de selagem nos anéis de desgaste (mancal de água);
- rigidez devida às forças eletromagnéticas no rotor do gerador.

2) Utilizar o sistema desenvolvido neste trabalho para elaboração de critérios de manutenção preventiva para centrais hidrelétricas a partir da medida de vibração.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [01] ALVES, D.B.; "Elementos de Geometria Diferencial Aplicáveis às Cascas". Apostila do Curso de Mestrado em Engenharia Mecânica, UFSC, 1984;
- [02] LANGHAAR, H.L; "Energy Methods in Applied Mechanics", John Wiley and Sons, Inc 1962;
- [03] ALVES, D.B.; "Placas e Cascas". Apostila do Curso de Mestrado em Engenharia Mecânica, UFSC, 1984;
- [04] ESHLEMAN, R.L. and EUBANKS, R.A., "On the Critical Speeds of a Continuous Shaft-Disk System", Transaction of the ASME, Journal of Engineering for Industry, Nov. 1967, pp. 645-652;
- [05] ESHLEMAN, R.L. and EUBANKS, R.A., "On the Critical Speeds of a Continuous Rotor", Transactions of the ASME, Journal of Engineering for Industry, Nov. 1969, pp. 1180-1188;

- [06] DYM, C.L and SHAMES, I.H., "SOLID MECHANICS - A VARIATIONAL APPROACH", McGraw-Hill, 1973;
- [07] NELSON, H.D. and McVAUGH, "The Dynamics of Rotor-Bearing Systems Using Finite Elements", Transactions of the ASME, Journal of Engineering for Industry, May, 1976, pp. 593-600;
- [08] NELSON, H.D., "A Finite Rotating Shaft Element Using Timoshenko Beam Theory", Transaction of the ASME, Journal of Mechanical Design, Oct. 1980, pp. 793-802;
- [09] PAVANELLO, R., "Estudo do Comportamento Dinâmico de Hidrogeradores", Dissertação de Mestrado, UNICAMP, SP. 1985;
- [10] LOVE, A.E.H., "Mathematical Theory of Elasticity", Fourth Edition;
- [11] Nascimento, L. de P., "Estudo das Forças Excitadoras e da Modelagem Matemática de Máquinas Hidroelétricas", Dissertação de Mestrado, UNICAMP, SP. 1987;
- [12] MEIROVITCH, L., "Elements of Vibration Analysis", McGraw-Hill, Inc, 1975;
- [13] ARCHER, J.S., "Consistent Mass Matrix for Distributed Mass Systems", Proceedings of the ASCE, Journal of the Structural Division, Aug. 1963, pp. 161-179;

- [14] RUHL, R.L. and BOOKER, J.F., "A Finite Element Model for Distributed Parameter Turborotor Systems", Transactions of the ASME, Journal of Engineering for Industry, Feb. 1972, pp. 126-132;
- [15] COWPER, G.R., "The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory", Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics, June 1966, pp. 335-340;
- [16] GREEN, R.B., "Gyroscopic Effects on the Critical Speeds of Flexible Rotors", Journal of Applied Mechanics, Dec. 1948, pp. 369-376;
- [17] FINKELSTEIN, A.R., "Myklestad's Method for Predicting Whirl Velocity as a Function of Rotational Velocity for Flexible Multimass Rotor Systems", Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics, Sept. 1965, pp. 589-591;
- [18] BATHE, K.J., "Finite Element Procedures in Engineering Analysis", Prentice-Hall, Inc. N.J., 1982;
- [19] LALANNE, M., "Mechanical Vibrations for Engineers", John Wiley and Sons, 1983;
- [20] BARCELLOS, C.S. e GOES, T.C., "Modulo AVISE", Convênio FEESC e CNEN, Processo n^o 102.375/83;
- [21] HARWELL, SUBROUTINE LIBRARY SPECIFICATION - 1978

- [22] MEIROVITCH, L., "Response of Slightly Damped Gyroscopic Systems", Journal of Sound and Vibration, 1979, pp. 1-19.

APENDICE A

SISTEMA COMPUTACIONAL PADIR

O sistema computacional PADIR, determina as frequências naturais e críticas do modelo ROTOR-DISCO-SUPORTE desenvolvido nesta dissertação.

Uma explanação genérica do sistema será feita a seguir, incluindo descrição de cada módulo componente, relação com descrição dos dados de entrada e fluxograma.

Módulo 1 - PADIR - Gerencia o programa, endereçando, preparando e armazenando os dados para entrada nas sub-rotinas.

Módulo 2 - ROTOR - Calcula as matrizes massa, giroscópica e rigidez, colocando as mesmas na forma SKYLINE e também gera o vetor do perfil SKYLINE destas matrizes.

Módulo 3 - AVISE - Resolve o sistema $\underline{M}\ddot{u} + \underline{K}u = 0$, determinando os autovalores (frequências naturais e frequências críticas progressivas e regressivas), conforme referência [20].

Módulo 4 - QR - Resolve o sistema $\underline{\underline{M}}\underline{\underline{U}} - \underline{\underline{\Omega}}\underline{\underline{G}}\underline{\underline{U}} + \underline{\underline{K}}\underline{\underline{U}} = 0$, determinando os seus autovalores (frequências progressivas e regressivas), e autovetores, conforme referência [21].

RELAÇÃO E DESCRIÇÃO DOS DADOS DE ENTRADA

```

READ (5,*) IFREQ,NE
READ (5,12) TITULO
READ (5,*) IEMIL,IEMG,IEAG,IERG,IESKY
READ (5,*) EYOUNG,GCIZ,POISS,DENSID,COCIZ
READ (5,*) ICIZ,ROTAC
READ (5,*) (DIECID,DIICID),COELCID,LDICID,MDICID,INEDICID,
          INEDIPCID,
*LFACID,FACID,LMCCID,RMCYCID,RMCZCID,RTCYCID,RTCZCID, I = 1, NED
12 FORMAT (20A4)

```

Descrição dos Dados

IFREQ	Indica as frequências a calcular
IFREQ = 1	Frequências Naturais
IFREQ = 2	Frequências Críticas Progressivas
IFREQ = 3	Frequências Críticas Regressivas
NE	Número de elementos
TITULO	Título do trabalho
IEML	Comanda a inscrição matrizes locais (1 - escreve e 0 - não escreve)

IEMG	Comanda a inscrição matriz massa global (1 - escreve e 0 - não escreve)
IEAG	Comanda a inscrição matriz giroscópica global (1 - escreve e 0 - não escreve)
IERG	Comanda a inscrição matriz rigidez global (1 - escreve e 0 - não escreve)
IESKY	Comanda a inscrição matrizes e perfil SKYLINE (1 - escreve e 0 não escreve)
EYOUNG	Módulo de elasticidade
GC1Z	Módulo de cisalhamento
POISS	Coefficiente de Poisson
DENSID	Densidade
COC1Z	Coefficiente de cisalhamento (se = 0 recalcula pelo programa)
IC1Z	Indica a presença de cisalhamento (1 considera, 0 não considera)
ROTAC	Rotação própria do eixo (O)

OBSERVAÇÃO: O conjunto de dados a seguir é para cada elemento e deve ser repetido NE vezes.

DIE	Diâmetro externo do elemento
DII	Diâmetro interno do elemento
COEL	Comprimento do elemento
LDI	Localização do disco (0 - não existe disco, 1 - disco sobre nó 1, 2 - disco sobre nó 2)
MDI	Massa do disco
INEDI	Momento de inércia diametral do disco
INEDIP	Momento de inércia polar do disco

LFA Localização da força axial (0 - não existe força, 1
 - força sobre nó 1, 2 - força sobre nó 2)

FA Força axial

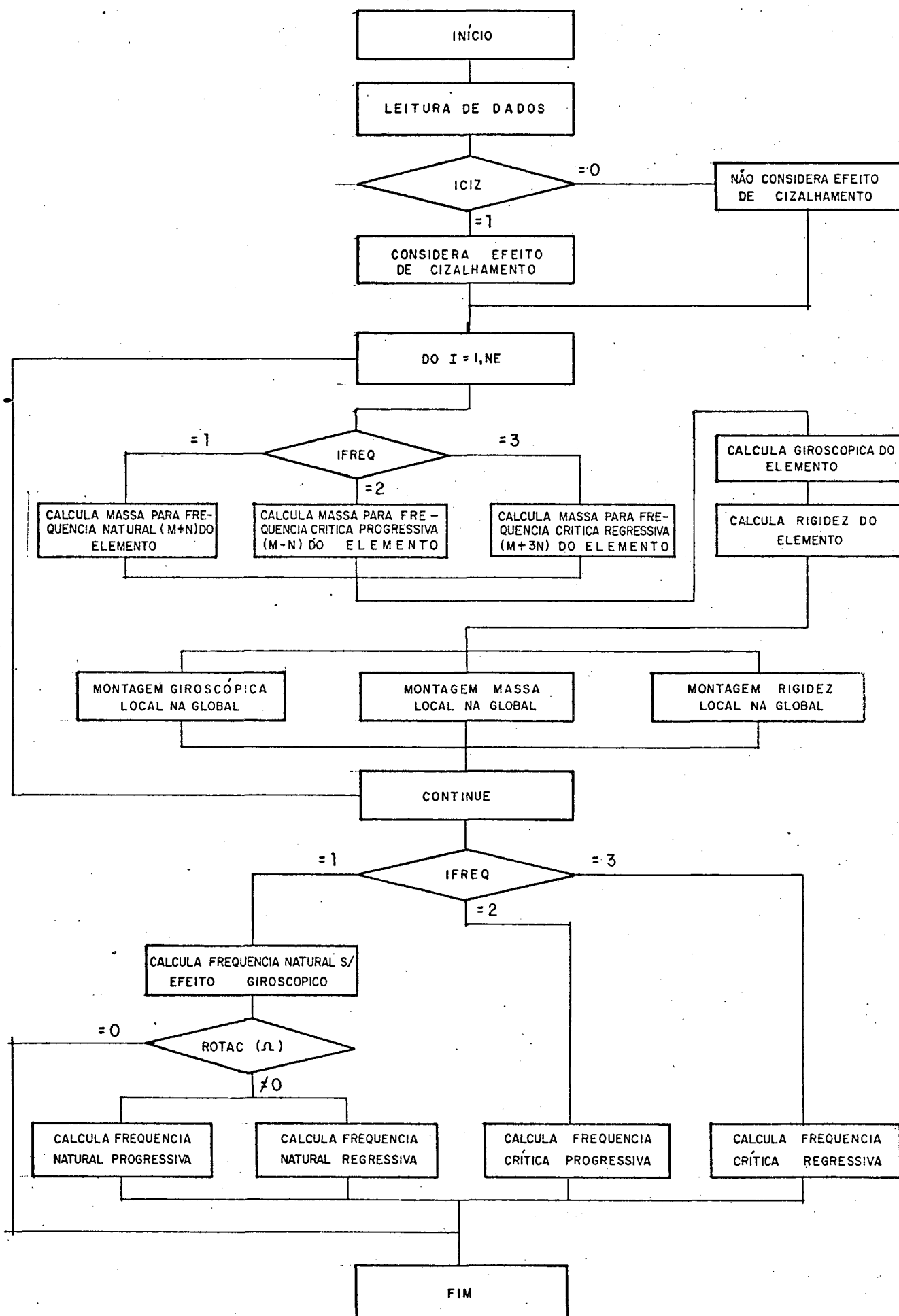
LMC Localização do mancal (0 - não existe mancal, 1 -
 mancal sobre nó 1, 2 - mancal sobre nó 2)

RMCY Rigidez do mancal na direção y

RMCZ Rigidez do mancal na direção z

RTCY Rigidez torcional do mancal na direção y

RTCZ Rigidez torcional do mancal na direção z



APENCIDE B

RELAÇÃO DAS MATRIZES DETERMINADAS NOS CAPITULOS 4 E 5, PARA O
ELEMENTO FINITO ROTOR

1) Matrizes massa translacional $[M_{et}]$ conforme equação 4.10.

$$[M_{et}] = [M_{et}]_0 + \phi [M_{et}]_1 + \phi^2 [M_{et}]_2$$

$$[M_{et}]_0 = \frac{m L}{420 (1+\phi)^2}$$

$$\begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & 22L & 54 & 0 & 0 & -13L \\ 0 & 156 & -22L & 0 & 0 & 54 & 13L & 0 \\ 0 & -22L & 4L^2 & 0 & 0 & -13L & -3L^2 & 0 \\ 22L & 0 & 0 & 4L^2 & 13L & 0 & 0 & -3L \\ 54 & 0 & 0 & 13L & 156 & 0 & 0 & -22L \\ 0 & 54 & -13L & 0 & 0 & 156 & 22L & 0 \\ 0 & 13L & -3L^2 & 0 & 0 & 22L & 4L^2 & 0 \\ -13L & 0 & 0 & -3L & -22L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix}$$

$$[M_{er 1}] = \frac{m L}{420 (1+\phi)^2}$$

$$\begin{bmatrix} 294 & 0 & 0 & 38,5 & 126 & 0 & 0 & -31,5L \\ 0 & 294 & -38,5L & 0 & 0 & 126 & 31,5L & 0 \\ 0 & -38,5L & 7L^2 & 0 & 0 & -31,5L & -7L^2 & 0 \\ 38,5L & 0 & 0 & 7L^2 & 31,5L & 0 & 0 & -7L^2 \\ 126 & 0 & 0 & 31,5L & 294 & 0 & 0 & -38,5L \\ 0 & 126 & -31,5L & 0 & 0 & 294 & 38,5L & 0 \\ 0 & 31,5L & -7L^2 & 0 & 0 & 38,5L & 7L^2 & 0 \\ -31,5L & 0 & 0 & -7L^2 & -38,5L & 0 & 0 & 7L^2 \end{bmatrix}$$

$$[M_{er 2}] = \frac{m L}{420 (1+\phi)^2}$$

$$\begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 17,5L & 70 & 0 & 0 & -17,5L \\ 0 & 140 & -17,5L & 0 & 0 & 70 & 17,5L & 0 \\ 0 & -17,5L & 3,5L^2 & 0 & 0 & -17,5L & 3,5L^2 & 0 \\ 17,5L & 0 & 0 & 3,5L^2 & 17,5L & 0 & 0 & 3,5L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 17,5L & 140 & 0 & 0 & -17,5L \\ 0 & 70 & -17,5L & 0 & 0 & 140 & 17,5L & 0 \\ 0 & 17,5L & -3,5L^2 & 0 & 0 & 17,5L & 3,5L^2 & 0 \\ -17,5L & 0 & 0 & -3,5L^2 & -17,5L & 0 & 0 & 3,5L^2 \end{bmatrix}$$

2) Matrizes massa rotacional $[M_{er}]$ conforme equação 4.11

$$[M_{er}] = [M_{er 0}] + \phi [M_{er 1}] + \phi^2 [M_{er 2}]$$

$$[M]_{er 0} = \frac{m r^2}{120 L (1+\phi)^2}$$

$$\begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & 3L & -36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & 36 & -3L & 0 & 0 & -36 & -3L & 0 \\ 0 & -3L & 4L^2 & 0 & 0 & 3L & -L^2 & 0 \\ 3L & 0 & 0 & 4L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\ -36 & 0 & 0 & -3L & 36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & -36 & 3L & 0 & 0 & 36 & 3L & 0 \\ 0 & -3L & -L^2 & 0 & 0 & 3L & 4L^2 & 0 \\ 3L & 0 & 0 & L^2 & -3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix}$$

$$[M]_{er 1} = \frac{m r^2}{120 L (1+\phi)^2}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -15L & 0 & 0 & 0 & -15L \\ 0 & 0 & 15L & 0 & 0 & 0 & 15L & 0 \\ 0 & 15L & 5L^2 & 0 & 0 & -15L & -5L^2 & 0 \\ -15L & 0 & 0 & 5L^2 & 15L & 0 & 0 & -5L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 15L & 0 & 0 & 5L^2 & 15L \\ 0 & 0 & -15L & 0 & 0 & 0 & -15L & 0 \\ 0 & 15L & -5L^2 & 0 & 5L^2 & -15L & 5L^2 & 0 \\ -15L & 0 & 0 & -5L^2 & 15L & 0 & 0 & 5L^2 \end{bmatrix}$$

$$[M]_{er 2} = \frac{m r^2}{120 L (1+\phi)^2}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10L^2 & 0 & 0 & 0 & 5L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10L^2 & 0 & 0 & 0 & 5L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5L^2 & 0 & 0 & 0 & 10L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5L^2 & 0 & 0 & 0 & 10L^2 \end{bmatrix}$$

3) Matrizes giroscópicas ou de Coriolis $[G_e]$ conforme equação

4.12

$$[G_e] = [G_e]_0 + \phi [G_e]_1 + \phi^2 [G_e]_2$$

$$[G_e]_0 = \frac{2 m r^2}{120 L}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -36 & 3L & 0 & 0 & 36 & 3L & 0 \\ 36 & 0 & 0 & 3L & -36 & 0 & 0 & 3L \\ -3L & 0 & 0 & -4L^2 & 3L & 0 & 0 & L^2 \\ 0 & -3L & 4L^2 & 0 & 0 & 3L & -L^2 & 0 \\ 0 & 36 & -3L & 0 & 0 & -36 & -3L & 0 \\ -36 & 0 & 0 & -3L & 36 & 0 & 0 & -3L \\ -3L & 0 & 0 & L^2 & 3L & 0 & 0 & -4L^2 \\ 0 & -3L & -L^2 & 0 & 0 & 3L & 4L^2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[G]_1 = \frac{2 m r^2}{120 L}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -15L & 0 & 0 & 0 & -15L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -15L & 0 & 0 & 0 & -15L \\ 15L & 0 & 0 & -5L^2 & -15L & 0 & 0 & 5L^2 \\ 0 & 15L & 5L^2 & 0 & 0 & -15L & -5L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 15L & 0 & 0 & 0 & 15L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15L & 0 & 0 & 0 & 15L \\ 15L & 0 & 0 & 5L^2 & -15L & 0 & 0 & -5L^2 \\ 0 & 15L & -5L^2 & 0 & 0 & -15L & 5L^2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[G]_2 = \frac{2 m r^2}{120 L}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10L^2 & 0 & 0 & 0 & -5L^2 \\ 0 & 0 & 10L^2 & 0 & 0 & 0 & 5L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5L^2 & 0 & 0 & 0 & -10L^2 \\ 0 & 0 & 5L^2 & 0 & 0 & 0 & 10L^2 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Matrizes de rigidez $[K_f]$ de acordo com a equação 4.17

$$[K_f] = [K_f]_0 = \phi [K_f]_1 + \phi^2 [K_f]_2$$

$$[K_f]_0 = \frac{EI}{L^3(1+\phi)^2}$$

$$\begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 6L & -12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & 12 & -6L & 0 & 0 & -12 & -6L & 0 \\ 0 & -6L & 4L^2 & 0 & 0 & 6L & 2L^2 & 0 \\ 6L & 0 & 0 & 4L^2 & -6L & 0 & 0 & 2L^2 \\ -12 & 0 & 0 & -6L & 12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & -12 & 6L & 0 & 0 & 12 & 6L & 0 \\ 0 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 & 6L & 4L^2 & 0 \\ 6L & 0 & 0 & 2L^2 & -6L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix}$$

$$[K_f]_1 = \frac{EI}{L^3(1+\phi)^2}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2L^2 & 0 & 0 & 0 & -2L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2L^2 & 0 & 0 & 0 & -2L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2L^2 & 0 & 0 & 0 & 2L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2L^2 & 0 & 0 & 0 & 2L^2 \end{bmatrix}$$

$$[K]_{f_2} = \frac{EI}{L^3(1+\phi)^2}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L^2 & 0 & 0 & 0 & -L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L^2 & 0 & 0 & 0 & -L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L^2 & 0 & 0 & 0 & L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -L^2 & 0 & 0 & 0 & L^2 \end{bmatrix}$$

5) Matriz de rigidez $[K_c]$ conforme equação 4.21

$$[K_c] = \frac{EI \phi}{L^3(1+\phi)^2}$$

$$\begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 6L & -12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & 12 & -6L & 0 & 0 & -12 & -6L & 0 \\ 0 & -6L & 3L^2 & 0 & 0 & 6L & 3L^2 & 0 \\ 6L & 0 & 0 & 3L^2 & -6L & 0 & 0 & 3L^2 \\ -12 & 0 & 0 & -6L & 12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & -12 & 6L & 0 & 0 & 12 & 6L & 0 \\ 0 & -6L & 3L^2 & 0 & 0 & 6L & 3L^2 & 0 \\ 6L & 0 & 0 & 3L^2 & -6L & 0 & 0 & 3L^2 \end{bmatrix}$$

6) Matrizes de rigidez $[K_d]$ conforme equação 4.23

$$[K_d] = [K_d]_0 + \phi [K_d]_1$$

$$[K_d]_0 = \frac{EI}{L^3(1+\phi)}$$

$$\begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 6L & -12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & 12 & -6L & 0 & 0 & -12 & -6L & 0 \\ 0 & -6L & 4L^2 & 0 & 0 & 6L & 2L^2 & 0 \\ 6L & 0 & 0 & 4L^2 & -6L & 0 & 0 & 2L^2 \\ -12 & 0 & 0 & -6L & 12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & -12 & 6L & 0 & 0 & 12 & 6L & 0 \\ 0 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 & 6L & 4L^2 & 0 \\ 6L & 0 & 0 & 2L^2 & -6L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix}$$

$$[K_d]_1 = \frac{EI}{L^3(1+\phi)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L^2 & 0 & 0 & 0 & -L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L^2 & 0 & 0 & 0 & -L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L^2 & 0 & 0 & 0 & L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -L^2 & 0 & 0 & 0 & L^2 \end{bmatrix}$$

7) Matrizes de rigidez $[K_{fa}]$ conforme equação 4.29

$$[K_{fa}] = [K_{fa}]_0 + \phi [K_{fa}]_1 + \phi^2 [K_{fa}]_2$$

$$[K_{fa}]_0 = \frac{F_a}{30 L (1+\phi)^2}$$

$$\begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & 3L & -36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & 36 & -3L & 0 & 0 & -36 & -3L & 0 \\ 0 & -3L & 4L^2 & 0 & 0 & 3L & -L^2 & 0 \\ 3L & 0 & 0 & 4L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\ -36 & 0 & 0 & -3L & 36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & -36 & 3L & 0 & 0 & 36 & 3L & 0 \\ 0 & -3L & -L^2 & 0 & 0 & 3L & 4L^2 & 0 \\ 3L & 0 & 0 & L^2 & -3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix}$$

$$[K_{fa}]_1 = \frac{F_a}{30 L (1+\phi)^2}$$

$$\begin{bmatrix} 60 & 0 & 0 & 0 & -60 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & 0 & 0 & 0 & -60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5L^2 & 0 & 0 & 0 & -5L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5L^2 & 0 & 0 & 0 & -5L^2 \\ -60 & 0 & 0 & 0 & 60 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -60 & 0 & 0 & 0 & 60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5L^2 & 0 & 0 & 0 & 5L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5L^2 & 0 & 0 & 0 & 5L^2 \end{bmatrix}$$

$$[K_{fa}]_2 = \frac{F_a}{30 L (1+\phi)^2}$$

$$\begin{bmatrix} 30 & 0 & 0 & 0 & -30 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 0 & 0 & -30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2,5L^2 & 0 & 0 & 0 & -2,5L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,5L^2 & 0 & 0 & 0 & -2,5L^2 \\ -30 & 0 & 0 & 0 & 30 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -30 & 0 & 0 & 0 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2,5L^2 & 0 & 0 & 0 & 2,5L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2,5L^2 & 0 & 0 & 0 & 2,5L^2 \end{bmatrix}$$

8) Vetores força $\{Q_1\}$, $\{Q_2\}$, $\{Q_3\}$ e $\{Q_4\}$ conforme equação 5.8

$$\{Q_1\} = \begin{Bmatrix} \frac{7}{20} \eta_i L + \frac{3}{20} \eta_f L \\ \frac{7}{20} \varepsilon_i L + \frac{3}{20} \varepsilon_f L \\ -\frac{1}{20} \varepsilon_i L^2 - \frac{1}{30} \varepsilon_f L^2 \\ \frac{1}{20} \eta_i L^2 + \frac{1}{30} \eta_f L^2 \\ \frac{3}{20} \eta_i L + \frac{7}{20} \eta_f L \\ \frac{3}{20} \varepsilon_i L + \frac{7}{20} \varepsilon_f L \\ \frac{1}{30} \varepsilon_i L^2 + \frac{1}{20} \varepsilon_f L^2 \\ -\frac{1}{30} \eta_i L^2 - \frac{1}{20} \eta_f L^2 \end{Bmatrix} \quad \{Q_2\} = \begin{Bmatrix} -\frac{7}{20} \varepsilon_i L - \frac{3}{20} \varepsilon_f L \\ \frac{7}{20} \eta_i L + \frac{3}{20} \eta_f L \\ -\frac{1}{20} \eta_i L^2 - \frac{1}{30} \eta_f L^2 \\ -\frac{1}{20} \varepsilon_i L^2 - \frac{1}{30} \varepsilon_f L^2 \\ -\frac{3}{20} \varepsilon_i L - \frac{7}{20} \varepsilon_f L \\ \frac{3}{20} \eta_i L + \frac{7}{20} \eta_f L \\ \frac{1}{30} \eta_i L^2 + \frac{1}{20} \eta_f L^2 \\ \frac{1}{30} \varepsilon_i L^2 + \frac{1}{20} \varepsilon_f L^2 \end{Bmatrix}$$

$$\{Q_3\} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{3} \eta_i L + \frac{1}{6} \eta_f L \\ \frac{1}{3} \varepsilon_i L + \frac{1}{6} \varepsilon_f L \\ \frac{1}{24} \varepsilon_i L^2 - \frac{1}{24} \varepsilon_f L^2 \\ -\frac{1}{24} \eta_i L^2 + \frac{1}{24} \eta_f L^2 \\ \frac{1}{6} \eta_i L + \frac{1}{3} \eta_f L \\ \frac{1}{6} \varepsilon_i L + \frac{1}{3} \varepsilon_f L \\ -\frac{1}{24} \varepsilon_i L^2 + \frac{1}{24} \varepsilon_f L^2 \\ \frac{1}{24} \eta_i L^2 - \frac{1}{24} \eta_f L^2 \end{Bmatrix} \quad \{Q_4\} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{3} \varepsilon_i L + \frac{1}{6} \varepsilon_f L \\ \frac{1}{3} \eta_i L + \frac{1}{6} \eta_f L \\ \frac{1}{24} \eta_i L^2 - \frac{1}{24} \eta_f L^2 \\ \frac{1}{24} \varepsilon_i L^2 - \frac{1}{24} \varepsilon_f L^2 \\ -\frac{1}{6} \varepsilon_i L + \frac{1}{3} \varepsilon_f L \\ \frac{1}{6} \eta_i L + \frac{1}{3} \eta_f L \\ -\frac{1}{24} \eta_i L^2 + \frac{1}{24} \eta_f L^2 \\ -\frac{1}{24} \varepsilon_i L^2 + \frac{1}{24} \varepsilon_f L^2 \end{Bmatrix}$$