

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

COMPORTAMENTO DA CARGA CRÍTICA DE FLAMBAGEM
EM PLACAS LAMINADAS RETANGULARES SIMÉTRICAS
E ANTISSIMÉTRICAS SUBMETIDAS A UM ESTADO
DE TENSÕES DE MEMBRANA COMBINADAS

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA A UNIVER
SIDADE FEDERAL DE SANTA CATA
RINA PARA A OBTENÇÃO DO GRAU
DE MESTRE EM ENGENHARIA.

BENEDITO SANTANA DE OLIVEIRA

FLORIANÓPOLIS - FEVEREIRO DE 1986

COMPORTAMENTO DA CARGA CRÍTICA DE FLAMBAGEM
EM PLACAS LAMINADAS RETANGULARES SIMÉTRICAS
E ANTISSIMÉTRICAS SUBMETIDAS A UM ESTADO
DE TENSÕES DE MEMBRANA COMBINADAS

BENEDITO SANTANA DE OLIVEIRA

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA
PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

MESTRE EM ENGENHARIA

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA E APRO-
VADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA
DE PÓS-GRADUAÇÃO


PROF. DOMINGOS BOECHAT ALVES - PhD (ORIENTADOR)


PROF. CLOVIS RAIMUNDO MALISKA - DR. (COORDENADOR)

BANCA EXAMINADORA


DOMINGOS BOECHAT ALVES - PhD - PRESIDENTE


CLÓVIS SPERB DE BARCELLOS - PhD


PAULO DE TARSO R. DE MENDONCA - MSc

ÍNDICE

SIMBOLOGIA

RESUMO

ABSTRACT

CAPITULO I

ESTABILIDADE ELÁSTICA DE PLACAS LAMINADAS RETANGULARES SUBMETIDAS A UM ESTADO COMBINADO DE TENSÕES DE MEMBRANA DE PRÉ-FLAMBAGEM	1
1.1 - Introdução	1
1.2 - Equações diferenciais de equilíbrio que governam o comportamento de placas laminadas retangulares na flexão	2
1.3 - Equações diferenciais de equilíbrio para uma placa retangular laminada submetida a um estado combinado de tensões de membrana de pré-flambagem	10

CAPITULO II

PROBLEMA DE AUTO-VALOR NA FLAMBAGEM DE PLACAS LAMINADAS RETANGULARES, SIMPLEMENTE APOIADA, SUBMETIDAS A UM ESTADO COMBINADO DE TENSÕES DE MEMBRANA DE PRÉ-FLAMBAGEM	17
2.1 - Introdução	17
2.2 - Formulação do problema de auto-valor	17
2.3 - Flambagem de placas laminadas simétricas...	26
2.4 - Flambagem de placas laminadas antissimétricas	28

CAPITULO III

ESTUDO DE CASOS DE FLAMBAGEM EM PLACAS LAMINADAS	31
3.1 - Introdução	31
3.2 - Placas laminadas antissimétricas Angle-Ply	31
3.3 - Placas laminadas antissimétricas Cross-Ply	36
3.4 - Placas laminadas simétricas Angle-Ply	40
3.5 - Placas laminadas simétricas Cross-Ply	44

CAPITULO IV

CONCLUSÕES E SUGESTÕES	48
4.1 - Conclusões	48
4.2 - Sugestões	49
BIBLIOGRAFIA	51
APÊNDICES	
A - Tensões e Deformações com Imperfeição Inicial	53
A-1) - Introdução	53
A-2) - Relação deformação-deslocamento em pla cas com imperfeição inicial	53
A-3) - Relação tensão resultante - deformação em placa anisotrópica submetida a um estado plano de tensão	61
B - Programa Computacional	71
Introdução	71
Programa Principal	71
Fluxograma do Programa Principal	74

S I M B O L O G I A

- a → Comprimento da placa na direção X
- $A = [A_{ij}]$ → Matriz de rigidez de membrana
- b → Comprimento da placa na direção Y
- $B = [B_{ij}]$ → Matriz de rigidez de acoplamento
- $[C]$ → Matriz global de carga
- $D = [D_{ij}]$ → Matriz de rigidez de flexão
- $e_{xx}; e_{yy}$ → Deformações normais na superfície média de referência da placa
- e_{xy} → Deformação angular na superfície média de referência
- $E_L; E_y$ → Módulos de YOUNG nas direções longitudinal e transversal
- $[G]$ → Matriz global de rigidez
- G_{LT} → Módulo de rigidez ao cisalhamento
- h → Espessura da placa medida na direção Z
- $[I]$ → Matriz identidade
- $k_{xx}; k_{yy}; k_{xy}$ → Curvaturas da placa
- $M_x; M_y; M_{xy}$ → Tensões resultantes de flexão
- $N_x; N_y; N_{xy}$ → Tensões resultantes de membrana
- N → Número de lâminas no laminado
- $[Q_{ij}] = Q_{ij}$ → Matriz de rigidez equivalente, da placa, no sistema de coordenadas X.Y
- $R = a/b$ → Aspecto de placa
- u → Deslocamento da placa na direção X

- U → Energia de deformação elástica
 v → Deslocamento da placa na direção Y
 V → Vetor deslocamento
 w → Deflexão da placa na direção Z
 $()_{,i}$ → Derivada de uma função com relação a variável i
 $\overline{()}$ ou $()^*$ → Designa estado de pré-flambagem
 $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}$ → Deformações normais em um ponto da placa nas direções X e Y respectivamente
 γ_{xy} → Deformação angular em um ponto da placa no plano XY
 π → Energia potencial total
 Ω → Trabalho realizado pelas forças externas
 $\delta()$ → Primeira variação de uma função
 ν_{LT} → Coeficiente de POISSON

AGRADECIMENTOS

- A Universidade Federal de Santa Catarina e a Universidade Federal da Paraíba, por viabilizarem a obtenção deste título.

- Ao Professor Domingos Boechat Alves, por ter me incentivado na realização deste trabalho.

- A todos que direta ou indiretamente prestaram a sua colaboração.

- Especialmente a minha esposa e aos meus filhos por terem suportado a minha ausência por muitos anos.

R E S U M O

A utilização dos materiais compostos nas diversas construções de estruturas tem aumentado nos últimos anos juntamente com o avanço da tecnologia. Particularmente, este trabalho tem por objetivo verificar o comportamento da carga crítica de flambagem em placas laminadas retangulares, simplesmente apoiadas, pertencentes a uma classe híbrida de materiais compostos envolvendo duas outras classes: compostos fibrados e compostos laminados. Segundo pesquisas já realizadas, a estabilidade elástica desses tipos de placas depende de suas constantes de rigidez, da forma como a mesma se vincula com outras estruturas, da geometria da placa e dos esforços que as mesmas podem estar submetidas.

O problema de auto-valor na flambagem de placas foi neste trabalho formulado, considerando-se uma placa laminada retangular, simplesmente apoiada, submetida a um estado de tensões de membrana combinadas e posteriormente solucionado através do algoritmo QR. Os resultados obtidos demonstram que o número de lâminas no laminado é um fator importante na estabilidade elástica das placas laminadas. Verificou-se que a presença dos termos B_{ij} da matriz de rigidez de acoplamento, tendem a diminuir a resistência à flambagem das placas laminadas antissimétricas. Este fato foi confirmado tendo em vista que a resistência à flambagem crescia

sempre que o número de lâminas aumentava no laminado.

Nas placas laminadas simétricas Angle-Ply observou-se que a presença dos termos D_{13} e D_{23} , da matriz de rigidez de flexão, também exercem um papel importante na flambagem das mesmas principalmente quando a tensão cisalhante \bar{N}_{xy} está presente no estado combinado de tensões. Os resultados demonstraram que quanto maior o número de lâminas menor a influência da tensão cisalhante.

Em todos os casos analisados observou-se que a carga crítica de flambagem tende a crescer sempre que no estado combinado de tensões existe uma tensão normal trativa, porém, se existir somente tensões normais compressivas o valor desta carga sempre tende a decrescer.

ABSTRACT

Composite materials have been used as structural building materials more and more as technological advance increase.

Particular, this work intend to verify the behavior of critical buckling load of simply supported rectangular laminate plate belonging to two hybrid composite material classes: fiber-reinforced materials and laminated materials. According to research results, the elastic stability of this plate classe depend upon its stiffness constants, geometrical shape, load and boundary union with other structures.

The buckling eigen-value plate problem is formulated in this work for a simply supported rectangular laminated plate under a combined membrane stress state, and later, solved through a QR algoritm. The results show that the number of lamina of a laminated is an important factor in the laminated plates elastic stability. It has been verified that the presence of B_{ij} terms in the coupling stiffness matrix tendes to decrease buckling strenght of antissimetric laminated plates. This fact was confirmed because it was seen that increasing the number of laminae, increase strenght.

It was seen that, in angle-ply symetric laminated plates, that the presence of D_{13} and D_{23} terms of flexional

stiffness matrix also have an important performance on buckling, principally when shear stress \bar{N}_{xy} is present in the combined stress state. Results showed that increasing the number of laminae, decrease the influence of shear stress.

In all analysed cases it was seen that the critical buckling load tends to increase when exists tractive normal stresses. The critical buckling load tends to decrease when exists compressive normal stresses.

CAPITULO I

ESTABILIDADE ELÁSTICA DE PLACAS LAMINADAS RETANGULARES SUBMETIDAS A UM ESTADO COMBINADO DE TENSÕES DE MEMBRANA DE PRÉ-FLAMBAGEM

1.1 - Introdução

A teoria da estabilidade elástica prevê que um elemento estrutural flamba quando o mesmo muda sua configuração de equilíbrio estável para uma outra configuração de equilíbrio também estável. A menor carga equivalente responsável por esta mudança de estado de equilíbrio é denominada de carga crítica de flambagem. Estudos realizados em diversas estruturas têm comprovado que o valor desta carga depende das propriedades mecânicas do material que as constitui, de suas configurações geométricas e da forma como as mesmas são vinculadas com outras estruturas [4].

Nos últimos anos, com o avanço da tecnologia espacial, naval e em diversos setores da engenharia, o uso de materiais compostos na construção de estruturas tem sido bastante evidenciado. As vantagens da utilização desses materiais se justifica pelo fato que usualmente eles apresentam melhores qualidades que os elementos que os constituem e muitas vezes qualidades que nenhum desses constituintes possuem [2].

Diversas pesquisas têm sido realizadas analisando a estabilidade elástica de placas, cascas e muitas outras es-

truturas de materiais compostos. Este capítulo tem por objetivo formular um resumo da Teoria da Estabilidade Elástica em Placas Retangulares submetidas a um Estado Combinado de Tensões de Membrana de Pré-Flambagem, sendo as mesmas constituídas de um tipo de material composto conhecido como laminado fibrado, pertencente a uma classe híbrida de material composto envolvendo duas outras classes: compostos fibrados e compostos laminados [2]. Mais conhecido como laminado de fibra reforçada, este material é obtido pela justa posição de lâminas de fibras reforçadas sendo que, com relação ao eixo do laminado, os eixos de principais propriedades de cada lâmina são orientados em várias direções, obtendo-se, muitas vezes, laminados com propriedades anisotrópicas.

1.2 - Equações Diferenciais de Equilíbrio que Governam o Comportamento de Placas Laminadas Retangulares na Flexão

O método da energia potencial mínima, na determinação das equações de equilíbrio que governam o comportamento de placas na flexão, é um dos métodos mais adequados na análise de tensões e deformações em corpos elásticos, principalmente quando estes possuem seções variáveis, são submetidos a carregamentos não uniformes e, ou o material que os constitui apresentam anisotropia [6].

Considerando-se uma placa retangular de espessura "h", comprimento "a" e largura "b" medidos nas direções Z, X e Y respectivamente, com "h" muito pequeno com relação as demais dimensões, o método da energia potencial mínima pode ser utilizado com as seguintes hipóteses:

- a) Retas inicialmente perpendiculares a superfície média de referência localizada no plano X,Y permanecem retas, inextensíveis e perpendiculares a esta superfície após a placa sofrer pequena deflexão quando comparada com a espessura da placa. Desta forma, as deformações específicas, γ_{xz} , γ_{yz} e γ_{zz} podem ser desprezadas.
- b) A tensão normal σ_z é pequena quando comparada com as demais componentes de tensão podendo ser então desprezada. Esta hipótese não será válida nas proximidades de regiões que atuam altas cargas concentradas.
- c) As deflexões são consideradas pequenas quando comparadas com a espessura da placa, porém, os termos que são potência de dois das derivadas da deflexão "w", w_x , w_y e os termos que são produtos das

mesmas, serão mantidos nas relações de deformações deslocamentos.

As hipóteses a , b e c são conhecidas na teoria clássica de flexão em placas como hipóteses de VON KARMAN-KIRCHHOF [3]. Em muitos problemas de engenharia essas hipóteses se justificam e, particularmente, um problema tridimensional de placas pode ser reduzido a um problema bidimensional. Neste caso, as equações de equilíbrio que governam o comportamento da placa na flexão podem ser determinadas numa forma concisa e linear [6].

Em adição a essas hipóteses, desprezando-se as imperfeições iniciais nas Eq's (A-2-12; A-2-13), as deformações em um ponto qualquer da placa localizado a uma distância z da superfície média de referência são:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{xy} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_{xx} \\ k_{yy} \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{Eq. (1.1-a)}$$

Na Eq. (1.1-a), as deformações e_{xx} , e_{yy} , e_{xy} são as deformações específicas na superfície média de referência, enquanto que k_{xx} , k_{yy} e k_{xy} são as curvaturas da mesma. Em termos dos deslocamentos, as deformações definidas na Eq. (1.1-a), são:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u',_x + \frac{1}{2} w'^2_{,x} \\ v',_y + \frac{1}{2} w'^2_{,y} \\ u',_y + v',_x + w',_x \cdot w',_y \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} -w',_{xx} \\ -w',_{yy} \\ -2w',_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{Eq. (1.1-b)}$$

onde, na Eq. (1.1-b), u, v e w representam os deslocamentos da superfície média de referência nas direções X, Y e Z.

Para uma placa retangular submetida a uma carga transversal $p_z(x,y)$, a energia potencial total, $d\pi$, de um elemento de placa é igual a soma da energia de deformação elástica interna, dU , com a energia potencial $d\Omega$ devida à ação da carga $p_z(x,y)$, ou seja:

$$d\pi = dU + d\Omega \quad \text{Eq. (1.2)}$$

onde:

$$dU = \frac{1}{2} \sigma^t \cdot \epsilon \cdot dx \, dy \, dz \quad \text{Eq. (1.3)}$$

$$d\Omega = - p_z w \, dx \, dy \quad \text{Eq. (1.4)}$$

A energia potencial total da placa será:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma^t \cdot \epsilon \, dx \, dy \, dz - \int_0^a \int_0^b p_z w \, dx \, dy \quad \text{Eq. (1.5)}$$

Considerando-se um laminado de fibra reforçada com N lâminas, fig. (1.1), a energia potencial total pode ser escrita na seguinte forma:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ \sum_{I=1}^N \int_{z_{I-1}}^{z_I} \bar{\mathcal{Q}}_I^t \bar{\epsilon} dz - p_z \cdot w \right\} dx dy \quad \text{Eq. (1.6)}$$

onde na Eq. (1.6), $\bar{\mathcal{Q}}_I$ representa a matriz de rigidez equivalente da placa nas direções X, Y e é calculada conforme as Eq's (A.3.11).

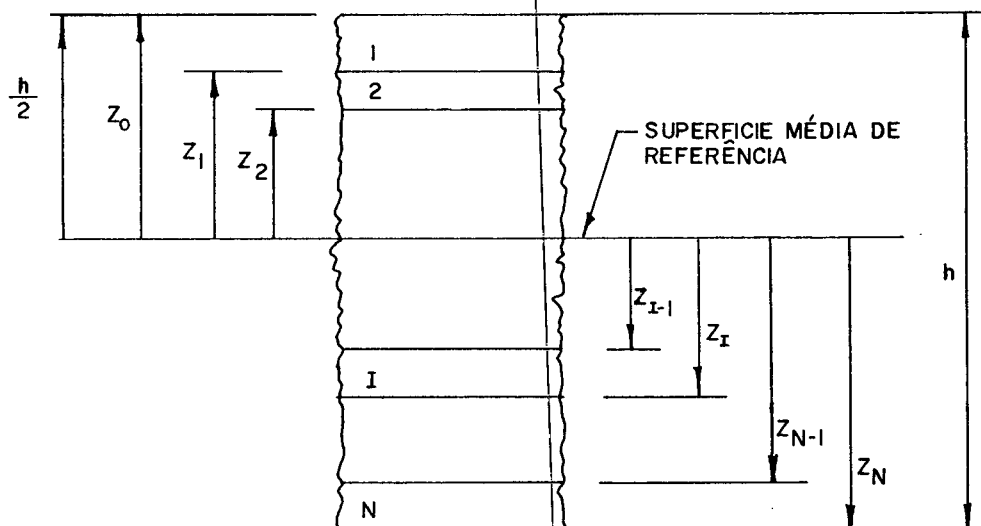


FIG. (1-1). GEOMETRIA DE UM LAMINADO COM N LÂMINAS

Resolvendo-se a expressão entre colchetes na Eq.(1.6) e considerando-se a Eq. (1.1-a), a energia potencial total pode ser escrita na forma:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b (\underline{e}^t \cdot \underline{A} \cdot \underline{e} + \underline{e}^t \cdot \underline{B} \cdot \underline{K} + \underline{K}^t \cdot \underline{B} \cdot \underline{e} + \underline{K}^t \cdot \underline{D} \cdot \underline{K} - p_z w) dx dy \quad \text{Eq. (1.7)}$$

onde:

$$\underline{e}^t = [e_{xx}, e_{yy}, e_{xy}] \quad \text{Eq. (1.8)}$$

$$\underline{K}^t = [k_{xx}, k_{yy}, k_{xy}] \quad \text{Eq. (1.9)}$$

As matrizes \underline{A} , \underline{B} e \underline{D} são as matrizes de rigidez de membrana, de acoplamento e de flexão, respectivamente [2]. As mesmas são obtidas das Eq's (A-3-16).

De acordo com o princípio do cálculo variacional, a placa estará em equilíbrio se a primeira variação da energia potencial total for igual a zero [3]. Com base neste princípio, através da Eq.(1.7) obtêm-se:

$$\delta \pi = \int_0^a \int_0^b (\underline{e}^t \cdot \underline{A} \cdot \delta \underline{e} + \underline{e}^t \cdot \underline{B} \cdot \delta \underline{K} + \underline{K}^t \cdot \underline{B} \cdot \delta \underline{e} + \underline{K}^t \cdot \underline{D} \cdot \delta \underline{K} - p_z \cdot \delta w) dx dy = 0 \quad \text{Eq. (1.10)}$$

Integrando-se por partes a Eq.(1.10) obtêm-se a seguinte equação:

$$\begin{aligned}
& \int_0^b N_x \delta u dy + \int_0^b \left[N_x \cdot W',_x + N_{xy} \cdot W',_y + (M_x)',_x + (M_{xy})',_y \right] \delta w dy + \\
& + \int_0^b N_{xy} \delta v dy + \int_0^b M_x \delta(w)',_x dy + \int_0^b M_{xy} \delta(w)',_y dy + \int_0^a N_y \delta v dx + \\
& + \int_0^a N_{xy} \delta u dx + \int_0^a \left[N_y \cdot W',_y + N_{xy} \cdot W',_x + (M_y)',_y + (M_{xy})',_x \right] \delta w dx + \\
& + \int_0^a M_y \delta(w)',_y dx + \int_0^a M_{xy} \delta(w)',_x dx - \int_0^a \int_0^b \left[(N_x)',_x + \right. \\
& \left. + (N_{xy})',_y \right] \delta u dx dy - \int_0^a \int_0^b \left[(N_y)',_y + (N_{xy})',_x \right] \delta v dx dy - \\
& - \int_0^a \int_0^b \left\{ + \left[N_x \cdot W',_x + N_{xy} \cdot W',_y \right]',_x + \left[N_y \cdot W',_y + N_{xy} \cdot W',_x \right]',_y + \right. \\
& \left. + (M_x)',_{xx} + 2 (M_{xy})',_{xy} + (M_y)',_{yy} \right\} \delta w dx dy = 0 \quad \text{Eq. (1.11)}
\end{aligned}$$

Na Eq.(1.11) os termos N_x , N_y , N_{xy} representam as tensões resultantes de membrana. M_x , M_y e M_{xy} representam as

tensões resultantes de flexão. Nesta equação, as integrais de contornos representam a primeira variação do trabalho realizado pelas forças e momentos atuantes nos contornos da placa e dão origem a todas as condições de contorno que possam existir numa placa qualquer. Estas condições de contorno dependem da forma como a placa se encontra vinculada com outras estruturas e do tipo de carregamento que a mesma é submetida. Considerando-se \mathbf{n} a direção normal a um certo lado da placa e \mathbf{t} a direção tangente a esse mesmo lado, as seguintes condições de contorno poderão existir [5].

$$u_n = \bar{u}_n \quad \text{ou} \quad N_n = \bar{N}_n \quad \text{Eq. (1.12-a)}$$

$$u_t = \bar{u}_t \quad \text{ou} \quad N_{nt} = \bar{N}_{nt} \quad \text{Eq. (1.12-b)}$$

$$w_{,n} = \bar{w}_{,n} \quad \text{ou} \quad M_n = \bar{M}_n \quad \text{Eq. (1.12-c)}$$

$$w = \bar{w} \quad \text{ou} \quad R_n = v_n + Q_n = \bar{R}_n \quad \text{Eq. (1.12-d)}$$

Na Eq. (1.12-d), v_n representa a resultante das componentes de tensões N_n e N_{nt} na direção normal ao plano (n, t) . Q_n é uma força cisalhante também normal ao mesmo plano. Estas forças são obtidas através das seguintes equações:

$$v_n = N_n \cdot w_{,n} + N_{nt} \cdot w_{,t} \quad \text{Eq. (1.13-a)}$$

$$Q_n = (M_n)_{,n} + (M_{nt})_{,t} \quad \text{Eq. (1.13-b)}$$

A força resultante R_n na Eq.(1.12-d) é conhecida na teoria clássica de placa como força de KIRCHHOF [2].

As equações de equilíbrio que governam o comportamento de uma placa retangular na flexão são obtidas das integrais de superfícies na Eq.(1.11) e são escritas na seguinte forma:

$$(N_x)_{,x} + (N_{xy})_{,y} = 0 \quad \text{Eq.(1.14-a)}$$

$$(N_y)_{,y} + (N_{xy})_{,x} = 0 \quad \text{Eq.(1.14-b)}$$

$$(M_x)_{,xx} + (M_y)_{,yy} + 2(M_{xy})_{,xy} + N_x \cdot w_{,xx} + N_y \cdot w_{,yy} + 2N_{xy} \cdot w_{,xy} - p_z = 0 \quad \text{Eq.(1.14-c)}$$

Demonstra-se que quando as tensões de membrana são desacopladas das tensões de flexão, ou seja, quando a matriz de acoplamento \tilde{B} possui todos os termos nulos, a solução do problema de flexão em placas pode ser obtida através da Eq. (1.14-c) independentemente das Eqs.(1.14-a e 1.14-b).

1.3 - Equações Diferenciais de Equilíbrio para uma Placa Retangular Laminada submetida a um estado combinado de tensões de membrana de pré-flambagem

O valor da carga crítica de flambagem pode ser obtida supondo-se que a placa tem uma curvatura inicial ou algu

ma carga lateral. Uma outra maneira de resolver o problema de estabilidade é supor que a placa flamba devido a uma pequena variação na flexão devida a ação de forças de membrana [4]. Neste caso, as equações diferenciais que governam o comportamento da placa na flexão são obtidas das Eqs.(1.14) supondo-se que não existe a carga lateral, isto é, $p_z = 0$.

Considerando-se uma placa retangular submetida a um estado combinado de tensões de membrana \bar{N}_x , \bar{N}_y e \bar{N}_{xy} , e que neste estado a configuração da placa é definida pelos deslocamentos $\bar{u} \neq 0$; $\bar{v} \neq 0$ e $\bar{w} = 0$, as relações deformações - deslocamentos são da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \bar{\epsilon}_{xx} \\ \bar{\epsilon}_{yy} \\ \bar{\gamma}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{u},_x \\ \bar{v},_y \\ \bar{u},_y + \bar{v},_x \end{Bmatrix} \quad \text{Eq. (1.15)}$$

As relações tensões resultantes-deformações, para o estado de pré-flambagem, são:

$$\{\bar{N}\} = [A_{ij}] \cdot \{\bar{e}\} + [B_{ij}] \{0\} \quad \text{Eq. (1.16-a)}$$

$$\{\bar{M}\} = [B_{ij}] \cdot \{\bar{e}\} + [D_{ij}] \{0\} \quad \text{Eq. (1.16-b)}$$

onde

$$\{\bar{N}\}^t = \{\bar{N}_x \quad \bar{N}_y \quad \bar{N}_{xy}\} \quad \text{Eq. (1.17-a)}$$

$$\{\bar{M}\}^t = \{\bar{M}_x \quad \bar{M}_y \quad \bar{M}_{xy}\} \quad \text{Eq. (1.17-b)}$$

Observando-se que no estado de pr e-flambagem $w = 0$, as equa es de equilíbrio são da seguinte forma:

$$(\bar{N}_x)',_x + (\bar{N}_{xy})',_y = 0 \quad \text{Eq. (1.18-a)}$$

$$(\bar{N}_y)',_y + (\bar{N}_{xy})',_x = 0 \quad \text{Eq. (1.18-b)}$$

$$(\bar{M}_x)',_{xx} + (\bar{M}_y)',_{yy} + 2(\bar{M}_{xy})',_{xy} = 0 \quad \text{Eq. (1.18-c)}$$

Considerando-se que a placa muda de configura o atr v s de uma pequena varia o δw e que o estado de tensão de membrana permaneça constante durante esta deflexão, devido a presença desta deflexão, a superfície média de referência sofre deslocamentos δu e δv nas dire es X e Y respectivamente. A configura o da placa neste novo estado de equilíbrio   definida por:

$$u = \bar{u} + \delta u \quad \text{Eq. (1.19-a)}$$

$$v = \bar{v} + \delta v \quad \text{Eq. (1.19-b)}$$

$$w = \delta w \quad \text{Eq. (1.19-c)}$$

Considerando-se pequena deflexão, os termos $\delta w_{,x}^2$, $\delta w_{,y}^2$ e $\delta w_{,x} \cdot \delta w_{,y}$ nas Eqs. (1.1-b) podem ser desprezados e as rela es deforma es - deslocamentos em um ponto localizado a uma distância z da superfície média de referência podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_{,x} + \delta u_{,x} \\ \bar{v}_{,y} + \delta v_{,y} \\ \bar{u}_{,y} + \bar{v}_{,x} + \delta u_{,y} + \delta v_{,x} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} -\delta w_{,xx} \\ -\delta w_{,yy} \\ -\delta w_{,xy} \end{Bmatrix}$$

Eq. (1.20)

De forma compacta, as Eqs. (1.20) podem ser escrita na forma:

$$\{\epsilon\} = \{\bar{\epsilon}\} + \{\delta e\} + z \{\delta k\} \quad \text{Eq. (1.21)}$$

onde

$$\{\delta e\}^t = \{\delta u_{,x} \quad \delta v_{,y} \quad \delta u_{,y} + \delta v_{,x}\} \quad \text{Eq. (1.22)}$$

Para a nova configuração de equilíbrio, denominada de pós-flambagem, as relações tensões resultantes - deformações são:

$$\{N\} = [A_{ij}] \{\bar{\epsilon}\} + [A_{ij}] \{\delta e\} + [B_{ij}] \{\delta k\} \quad \text{Eq. (1.23-a)}$$

$$\{M\} = [B_{ij}] \{\bar{\epsilon}\} + [B_{ij}] \{\delta e\} + [D_{ij}] \{\delta k\} \quad \text{Eq. (1.23-b)}$$

Das Eqs. (1.16 e 1.23) conclui-se que

$$\{N\} = \{\bar{N}\} + \{\delta N\} \quad \text{Eq. (1.24-a)}$$

$$\{M\} = \{\bar{M}\} + \{\delta M\} \quad \text{Eq. (1.24-b)}$$

onde $\{\delta N\}$ e $\{\delta M\}$ representam pequenas variações de tensões resultantes devidas a ocorrência da pequena deflexão $w = \delta w$ a partir do estado de tensões de membrana de pré-flambagem. As equações de equilíbrio para o estado de pós-flambagem são:

$$[(\bar{N}_x)',_x + (\bar{N}_{xy})',_y] + [(\delta N_x)',_x + (\delta N_{xy})',_y] = 0$$

Eq. (1.25-a)

$$[(\bar{N}_y)',_y + (\bar{N}_{xy})',_x] + [(\delta N_y)',_y + (\delta N_{xy})',_x] = 0$$

Eq. (1.25-b)

$$\begin{aligned} & [(\bar{M}_x)',_{xx} + 2(\bar{M}_{xy})',_{xy} + (\bar{M}_y)',_{yy} + \bar{N}_x \cdot \delta w',_{xx} + \bar{N}_y \cdot \delta w',_{yy} + \\ & + 2\bar{N}_{xy} \cdot \delta w',_{xy}] + [(\delta M_x)',_{xx} + 2(\delta M_{xy})',_{xy} + (\delta M_y)',_{yy} + \\ & + \delta N_x \cdot \delta w',_{xx} + \delta N_y \cdot \delta w',_{yy} + 2\delta N_{xy} \cdot \delta w',_{xy}] = 0 \end{aligned} \quad \text{Eq. (1.25-c)}$$

Das Eqs. (1.18) e considerando-se que os incrementos nas deformações ocorridos durante o processo de flambagem são pequenos quando comparados com os do estado de pré-flambagem, isto é, $\{\delta e\} \ll \{\bar{e}\}$, conclui-se que o trabalho realizado durante a flexão devido a $\{\delta N\}$ pode ser desprezado quando comparado com o trabalho realizado por $\{\bar{N}\}$. Com base nesta hipótese, as equações diferenciais que governam o comportamento da placa no estado combinado de pré-flambagem são:

$$(\delta N_x)',_x + (\delta N_{xy})',_y = 0 \quad \text{Eq. (1.26-a)}$$

$$(\delta N_{xy})',_x + (\delta N_y)',_y = 0 \quad \text{Eq. (1.26-b)}$$

$$\begin{aligned} & (\delta M_x)',_{xx} + 2(\delta M_{xy})',_{xy} + (\delta M_y)',_{yy} + \bar{N}_x \cdot \delta w',_{xx} + \bar{N}_y \cdot \delta w',_{yy} + \\ & + 2\bar{N}_{xy} \cdot \delta w',_{xy} = 0 \end{aligned} \quad \text{Eq. (1.26-c)}$$

Na Eq. (1.26-c) valores positivos de \bar{N}_x , \bar{N}_y indicam que essas tensões são compressivas. Uma das formas de investigar o problema de estabilidade é considerar que as tensões \bar{N}_x , \bar{N}_y e \bar{N}_{xy} são constantes [4]. Supondo-se que estas tensões se relacionam na forma, como por exemplo, $\bar{N}_y = H \cdot \bar{N}_x$; $\bar{N}_{xy} = Q \bar{N}_x$, atribuindo-se certos valores a H e Q e resolvendo-se as Eqs. (1.26) pode-se determinar o valor crítico \bar{N}_x para o qual a placa flamba.

Considerando-se uma placa laminada, usando as eqs. (A-2.12, A-2.13, A-3.14 e 1.1a), as eqs. (1.26) podem ser resumidas na seguinte equação:

$$\underset{\sim}{L}(\underset{\sim}{V}) = 0 \quad \text{Eq. (1.27)}$$

onde $(\underset{\sim}{V})$ representa o vetor deslocamento dado pela expressão:

$$\underset{\sim}{V}^t = \{u \ v \ w\} \quad \text{Eq. (1.28)}$$

$\underset{\sim}{L}$ é um operador linear na forma matricial, simétrico, de ordem 3 x 3, cujos termos são:

$$l_{11} = A_{11}(\)_{,xx} + 2A_{13}(\)_{,xy} + A_{33}(\)_{,yy} \quad \text{Eq. (1.29-a)}$$

$$l_{12} = A_{13}(\)_{,xx} + (A_{12} + A_{33})(\)_{,xy} + A_{23}(\)_{,yy} \quad \text{Eq. (1.29-b)}$$

$$l_{13} = -B_{11}(\)_{,xxx} - 3B_{13}(\)_{,xxy} - (B_{12} + 2B_{33})(\)_{,xyy} - B_{23}(\)_{,yyy} \quad \text{Eq. (1.29-c)}$$

$$\ell_{22} = A_{33} ()_{,xx} + 2 A_{23} ()_{,xy} + A_{22} ()_{,yy}$$

Eq. (1.29-d)

$$\begin{aligned} \ell_{23} = & -B_{13} ()_{,xxx} - (B_{12} + 2B_{33}) ()_{,xxy} - \\ & - 3B_{23} ()_{,xyy} - B_{22} ()_{,yyy} \end{aligned}$$

Eq. (1.29-e)

$$\begin{aligned} \ell_{33} = & D_{11} ()_{,xxxx} + 2(D_{12} + 2D_{33}) ()_{,xxyy} + \\ & + D_{22} ()_{,yyyy} + 4D_{13} ()_{,xxxxy} + 4D_{23} ()_{,xyyy} + \\ & + \left[\bar{N}_x ()_{,xx} + \bar{N}_y ()_{,yy} + 2\bar{N}_{xy} ()_{,xy} \right] \end{aligned}$$

Eq. (1.29-f)

Quando a placa laminada é simétrica, as tensões de membrana se desacoplam das tensões de flexão porque todos os termos da matriz de rigidez B_{ij} são nulos [2]. Consequentemente, os termos ℓ_{13} e ℓ_{23} do operador $\underline{\underline{L}}$ também são nulos. Neste caso, o problema de auto-valor na flambagem é resolvido através da seguinte equação:

$$\ell_{33} (w) = 0 \quad \text{Eq. (1.30)}$$

Dependendo do tipo de placa laminada submetidas a certo estado combinado de tensões de membrana e certas condições de contorno, muitas simplificações podem ocorrer na análise da estabilidade elástica.

CAPITULO II

PROBLEMA DE AUTO-VALOR NA FLAMBAGEM DE PLACAS LAMINADAS RETANGULARES, SIMPLEMENTE APOIADA, SUBMETIDAS A UM ESTADO COMBINADO DE TENSÕES DE MEMBRANA DE PRÉ-FLAMBAGEM

2.1 - Introdução

O comportamento de placas laminadas retangulares simplesmente apoiadas tem sido estudado por diversos pesquisadores. Neste capítulo, o problema de auto-valor na flambagem de placas laminadas simplesmente apoiadas é determinado de forma que o mesmo possibilite a verificação do comportamento da carga crítica de flambagem em vários tipos de placas, com diversos aspectos de geometria, condições de carregamento e orientações dos eixos principais de propriedades do material de cada lâmina com relação aos eixos do laminado.

2.2 - Formulação do Problema de Auto-valor

A fig.(2.1) representa uma placa retangular simplesmente apoiada, submetida a um estado combinado de tensões de membrana de pré-flambagem, sujeita as seguintes condições de contorno:

$$a) \text{ Para } x = 0 \text{ ou } x = a \rightarrow w = M_x = 0 \text{ e } v = 0$$

$$b) \text{ Para } y = 0 \text{ ou } y = b \rightarrow w = M_y = 0 \text{ e } u = 0$$

As variáveis u , v e w representam as componentes do vetor deslocamento \underline{v} nas direções X, Y e Z respectivamente.

Para satisfazer às condições de contorno especificadas, as componentes do vetor deslocamento podem ser representadas pelas seguintes séries de FOURIER:

$$\underline{v} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} E_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ F_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \\ G_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \end{Bmatrix} \quad \text{Eq. (2.1)}$$

Substituindo-se a Eq. (2.1) na Eq. (1.27), as equações de equilíbrio que governam o comportamento de placas laminares retangulares simplesmente apoiadas, submetidas a um estado combinado de tensões de membrana e condições de contorno anteriormente especificadas, são:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} + \zeta_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \\ \beta_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} + \theta_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ \phi_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} + \psi_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \end{array} \right\} = 0 \quad \text{Eq. (2.2)}$$

onde:

$$\alpha_{mn} = \left[\frac{A_{11} m^2}{R^2} + A_{33} n^2 \right] E_{mn} + \left[\frac{(A_{12} + A_{33}) mn}{R} \right] F_{mn} -$$

$$- \left[\frac{B_{11} m^3}{R^3} + \frac{(B_{12} + 2B_{33}) mn^2}{R} \right] \bar{G}_{mn} \quad \text{Eq. (2.3-a)}$$

$$\zeta_{mn} = \left[\frac{2A_{13} mn}{R} \right] E_{mn} + \left[\frac{A_{13} m^2}{R} + A_{23} n^2 \right] F_{mn} -$$

$$- \left[\frac{3B_{13} mn^2}{R^2} + B_{23} n^3 \right] \bar{G}_{mn} \quad \text{Eq. (2.3-b)}$$

$$\beta_{mn} = \left[\frac{(A_{12} + A_{33}) mn}{R} \right] E_{mn} + \left[\frac{A_{33} m^2}{R^2} + A_{22} n^2 \right] F_{mn} -$$

$$- \left[B_{22} n^3 + \frac{(B_{12} + 2B_{33}) mn^2}{R^2} \right] \bar{G}_{mn} \quad \text{Eq. (2.3-c)}$$

$$\theta_{mn} = \left[\frac{A_{13} m^2}{R^2} + A_{23} n^2 \right] E_{mn} + \left[\frac{2A_{23} mn}{R} \right] F_{mn} -$$

$$- \left[\frac{B_{13} m^3}{R} + 3B_{23} mn^2 \right] \bar{G}_{mn} \quad \text{Eq. (2.3-d)}$$

$$\begin{aligned}
\phi_{mn} = & - \left[\frac{B_{11} m^3}{R^3} + \frac{(B_{12} + 2B_{33}) mn^2}{R} \right] E_{mn} - \\
& - \left[B_{22} n^3 + \frac{(B_{12} + 2B_{33}) m^2 n}{R^2} \right] F_{mn} - \\
& \left[\frac{D_{11} m^4}{R^4} + \frac{2(D_{12} + 2D_{33}) m^2 n^2}{R^2} + D_{22} n^4 - \right. \\
& \left. - \frac{b^2}{\pi^2} \left(\frac{\bar{N}_x m^2}{R^2} + \bar{N}_y n^2 \right) \right] \bar{G}_{mn} \quad \text{Eq. (2.3-e)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_{mn} = & \left[\frac{3B_{13} m^2 n}{R^2} + B_{23} n^3 \right] E_{mn} + \left[\frac{B_{13} m^3}{R^3} + \frac{3B_{23} mn^2}{R} \right] F_{mn} - \\
& - \left[\frac{4D_{13} m^3 n}{R^3} + \frac{4D_{23} mn^3}{R} + \frac{b^2}{\pi^2} \left(\frac{2\bar{N}_{xy} mn}{R} \right) \right] \bar{G}_{mn} \quad \text{Eq. (2.3-f)}
\end{aligned}$$

O aspecto de placa R , nas Eqs.(2.3), representa a razão entre o comprimento e a largura da placa. O mesmo é definido pela seguinte equação:

$$R = a/b \quad \text{Eq. (2.4)}$$

\bar{G}_{mn} depende da largura b da placa e do coeficiente G_{mn} da série que determina a deflexão w . O mesmo é obtido através da relação:

$$\bar{G}_{mn} = \pi G_{mn}/b \quad \text{Eq. (2.5)}$$

Devido as derivadas cruzadas do tipo $W_{,xy}$; $W_{,xyy}$; $u_{,xy}$; etc, as condições de contorno de momentos e as Eqs. (2.2) não são satisfeitas por serem dependentes das variáveis x e y . Uma solução aproximada pode ser obtida através do método de GALERKIN[2]. Neste caso, considera-se que o trabalho realizado pelo resíduo Ω da Eq. (2.2) devido a um deslocamento virtual $\delta(\underline{v})$ é nulo em toda região da placa em cada modo de flambagem. A solução aproximada é obtida da seguinte equação:

$$\int_0^a \int_0^b \Omega^t \delta(\underline{v}) \, dx \, dy = 0 \quad \text{Eq. (2.6)}$$

onde $\Omega = \underline{L}(\underline{v})$ Eq. (2.7)

Na Eq. (2.6) o deslocamento virtual $\delta(\underline{v})$ é definido por

$$\delta(\underline{v}) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \left[\begin{array}{l} \delta E_{pq} \cos \frac{p\pi x}{a} \sin \frac{q\pi y}{b} \\ \delta F_{pq} \sin \frac{p\pi x}{a} \cos \frac{q\pi y}{b} \\ \delta \bar{G}_{pq} \sin \frac{p\pi x}{a} \sin \frac{q\pi y}{b} \end{array} \right] \quad \text{Eq. (2.8)}$$

Considerando-se δE_{pq} ; δF_{pq} e $\delta \bar{G}_{pq}$ arbitrários e independentes, das Eqs. (2.6, 2.7 e 2.8), obtém-se:

$$\sum_{m;n;p;q=1}^{\infty} \int_0^a \int_0^b (\alpha_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{p\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \operatorname{sen} \frac{q\pi y}{b} +$$

$$+ \zeta_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{p\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \operatorname{sen} \frac{q\pi y}{b}) dx dy = 0$$

Eq. (2.9-a)

$$\sum_{m,n,p,q=1}^{\infty} \int_0^a \int_0^b (\beta_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{p\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{q\pi y}{b} +$$

$$+ \theta_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{p\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{q\pi y}{b}) dx dy = 0$$

Eq. (2.9-b)

$$\sum_{m;n;p;q=1}^{\infty} \int_0^a \int_0^b (\phi_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{p\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \operatorname{sen} \frac{q\pi y}{b} +$$

$$+ \psi_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{p\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \operatorname{sen} \frac{q\pi y}{b}) dx dy = 0$$

Eq. (2.9-c)

Observando-se que as integrais da forma:

$$\int_0^a \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{p\pi x}{a} dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m = p \text{ ou } p \pm m \text{ for par} \\ \frac{2 a m}{\pi(m^2 - p^2)} & \text{se } p \pm m \text{ for impar} \end{cases}$$

$$\int_0^a \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{p\pi x}{a} dx = \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{p\pi x}{a} dx = \begin{cases} a/2 & \text{se } m = p \\ 0 & \text{se } m \neq p \end{cases}$$

As eqs. (2.9) podem ser resumidas na seguinte equação:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} - \lambda f_1 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} E_{mn} \\ F_{mn} \\ \bar{G}_{mn} \end{Bmatrix} \delta_{mp} \delta_{nq} + \\ & + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - \lambda f_2 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} E_{pq} \\ F_{pq} \\ \bar{G}_{pq} \end{Bmatrix} \delta^{mp} \delta^{nq} = 0 \end{aligned} \quad \text{Eq. (2.10)}$$

onde:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad \delta^{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i+j \text{ for par} \\ 1 & \text{se } i+j \text{ for impar} \end{cases}$$

Os termos k_{ij} , $i, j = 1, 3$ são determinados pelas seguintes equações:

$$k_{11} = (A_{11} m^2/R^2 + A_{33} n^2) / 4 \quad \text{Eq. (2.11-a)}$$

$$k_{12} = \left[(A_{12} + A_{33}) mn \right] / 4 \quad \text{Eq. (2.11-b)}$$

$$k_{13} = - B_{11} m^3 / R^3 + \left[(B_{12} + 2B_{33}) mn^2 \right] / R \quad / 4 \quad \text{Eq. (2.11-c)}$$

$$k_{22} = (A_{33} m^2 / R^2 + A_{22} n^2) / 4 \quad \text{Eq. (2.11-d)}$$

$$k_{23} = - B_{22} n^3 + \left[(B_{12} + 2B_{33}) m^2 n \right] / R^2 \quad / 4 \quad \text{Eq. (2.11-e)}$$

$$k_{33} = D_{11} m^4 / R^4 + 2(D_{12} + 2D_{33}) m^2 n^2 / R + D_{22} n^4 \quad / 4 \quad \text{Eq. (2.11-f)}$$

Para simplificar a determinação dos termos T_{ij} , $i, j = 1, 3$, as seguintes relações são utilizadas:

$$J_1 = \pi^2 (p^2 - m^2) (q^2 - n^2) \quad \text{Eq. (2.12)}$$

$$J_2 = 4 mq / J_1 \quad \text{Eq. (2.13)}$$

$$J_3 = 4 np / J_1 \quad \text{Eq. (2.14)}$$

$$J_4 = 4 pq / J_1 \quad \text{Eq. (2.15)}$$

Desta forma, obtêm-se:

$$T_{11} = - (2A_{13} mn / R) J_2 \quad \text{Eq. (2.16-a)}$$

$$T_{12} = - (A_{13} m^2 / R^2 + A_{23} n^2) J_2 \quad \text{Eq. (2.16-b)}$$

$$T_{13} = (3B_{13} m^2 n / R^3 + B_{23} n^3) J_2 \quad \text{Eq. (2.16-c)}$$

$$T_{21} = T_{12} \cdot J_3 / J_2 \quad \text{Eq. (2.16-d)}$$

$$T_{22} = - (2A_{23} mn / R) J_3 \quad \text{Eq. (2.16-e)}$$

$$T_{23} = (B_{13} m^3 / R^3 + 3B_{23} mn^2 / R) J_3 \quad \text{Eq. (2.16-f)}$$

$$T_{31} = T_{13} \cdot J_4 / J_2 \quad \text{Eq. (2.16-g)}$$

$$T_{32} = T_{23} \cdot J_4 / J_3 \quad \text{Eq. (2.16-h)}$$

$$T_{33} = - \left[4 D_{13} m^3 n / R^3 + D_{23} mn^3 / R \right] J_4 \quad \text{Eq. (2.16-i)}$$

As funções λ , f_1 e f_2 são definidas para $\bar{N}_y = H \bar{N}_x$,
 $\bar{N}_{xy} = Q \bar{N}_x$ das seguintes formas:

$$\lambda = b^2 \bar{N}_x / \pi^2 \quad \text{Eq. (2.17)}$$

$$f_1 = (m^2 / R + Hn^2) / 4 \quad \text{Eq. (2.18)}$$

$$f_2 = (2Qmn / R) / J_4 \quad \text{Eq. (2.19)}$$

Nestas relações, quando H é negativo isto implica que a tensão \bar{N}_y é trativa.

Para uma determinada placa laminada e valores constantes de R , H e Q , considerando-se um certo número de termos da série que determina o vetor deslocamento \underline{v} , a Eq. (2.10) resulta num sistema de equações no qual é possível determinar-se o menor valor de λ , correspondente a carga crítica de flambagem $(\bar{N}_x)_{cr}$. Este valor mínimo pode ser obtido através de um problema de auto-valor na forma:

$$[G] - \lambda [C] = 0 \quad \text{Eq. (2.20)}$$

onde $[G]$ é uma matriz que depende da rigidez, da geometria e dos modos de flambagem da placa. A matriz $[C]$ é uma matriz que depende das razões de carga H e Q , da geometria e dos modos de flambagem da placa.

De acordo com a formulação do problema de auto-valores na flambagem de placas laminadas simplesmente apoiada definido pela Eq. (2.20), é possível verificar-se o comportamento da carga crítica, $(\bar{N}_x)_{cr}$, com relação a diversas situações de geometria; condições de carregamento de tensão; orientação dos eixos de principais propriedades materiais em relação ao eixo do laminado, ou combinação das mesmas em cada tipo de placa laminada.

2.3 - Flambagem de Placas Laminadas Simétricas

As placas laminadas simétricas são obtidas de laminados construídos de um número ímpar de lâminas de fibra reforçada de tal forma que as mesmas apresentem simetria geo-

métrica e de propriedades materiais [2]. A principal característica desses tipos de placas é que todos os termos da matriz de rigidez de acoplamento são nulos. Neste caso, os termos T_{i3} e K_{i3} , $i = 1, 2$ são todos iguais a zero na Eq. (2.10). A solução do problema de auto-valor é obtida através da seguinte equação:

$$\{[k_{33}] \delta_{mp} \delta_{nq} + [T_{33}] \delta^{mp} \delta^{nq}\} - \lambda \{f_1 \delta_{mp} \delta_{nq} + f_2 \delta^{mp} \delta^{nq}\} = 0 \quad (2.21)$$

Observa-se que cada termo da diagonal principal da matriz $[G]$ são obtidos dos valores de k_{33} através da Eq. (2.11-f). De forma similar, cada termo da diagonal principal da matriz $[C]$ são obtidos dos valores de f_1 através da Eq. (2.18).

Um dos tipos de placas simétricas é a Cross-Ply. Nesta placa, as lâminas do laminado equidistantes a superfície média de referência são ortotrópicas e possuem a mesma espessura. Os eixos de propriedades material de cada lâmina, são orientados com relação aos eixos do laminado, em ângulos alternados de 0° e 90° [1]. Este tipo de placa possui os termos D_{13} e D_{23} , da matriz de rigidez de flexão, nulos. Isto implica que os termos T_{33} na Eq. (2.21) também são nulos. Neste caso, a matriz $[G]$ é uma matriz diagonal. Quando a placa é simétrica Angle-Ply, ou seja, possui os ângulos dos eixos principais de maiores propriedades material de cada lâmina, orientados com relação ao eixo do laminado, como por exemplo, $+\alpha/ -\alpha/ +\alpha$, os termos T_{33} não são nulos porque os D_{13} e

D_{23} da matriz de rigidez $[D]$ são diferentes de zero. Neste caso a solução do problema é obtida através da Eq. (2.21). Observa-se para este tipo de placa que os termos da diagonal principal são obtidos dos valores de k_{33} e que os termos G_{ij} , $i \neq j$, são obtidos dos valores de T_{33} . Da Eq. (2.16-i), conclui-se que a matriz $[G]$ para este tipo de placa não é simétrica, pois $G_{ij} \neq G_{ji}$.

2.4 - Flambagem de Placas Laminadas Antissimétricas

As placas laminadas antissimétricas, têm a principal característica de apresentarem acoplamento entre as tensões de membrana e as tensões de flexão porque nem todos os termos da matriz de acoplamento $[B]$ são nulos. Estas placas são obtidas de laminados que possuem simetria de geometria e de propriedades materiais, sendo que os mesmos são construídos de um número par de lâminas cujos eixos principais de maiores propriedades material de cada lâmina estão orientados em relação ao eixo do laminado, em ângulos que se alternam, como por exemplo, $+ \alpha / - \alpha / + \alpha / - \alpha$.

Um tipo especial de placa laminada antissimétrica é a Cross-Ply. O laminado que constitui este tipo de placa é obtido de um número par de lâminas ortotrópicas, de mesmas espessuras, cujos eixos maiores propriedades material principais, estão orientados, em relação ao eixo dos laminados, em ângulos que se alternam entre 0° e 90° , como um arranjo

do tipo: $0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$. As placas laminadas antissimétrica Cross-Ply apresentam os termos de rigidez, $A_{i3} = D_{i3} = 0$, para $i = 1, 2$. A matriz de acoplamento $[B]$ possui apenas dois termos; $B_{22} = -B_{11}$, os demais são todos nulos. Para este caso, a solução do problema pode ser obtida através da Eq. (2.10). Como os termos T_{ij} , $i, j = 1, 3$ são todos nulos, através da redução do sistema de equações, o problema de autovalor pode ser formulado como segue:

$$[G] \bar{G}_{mn} \delta_{mp} \delta_{nq} - \lambda [f_1 \bar{G}_{mn} \delta_{mp} \delta_{nq} + f_2 \bar{G}_{pq} \delta^{mp} \delta^{nq}] = 0$$

Eq. (2.22)

onde $[G]$ é uma matriz diagonal cujos termos dependem de k_{ij} , $i, j = 1, 3$. A equação entre colchetes, função de f_1 e f_2 , para um certo número de termos da série, determina a matriz $[C]$ da Eq. (2.20). Observa-se que esta matriz é diagonal quando no estado combinado de tensões de membrana a tensão cisalhante é nula, ou seja, $f_2 = 0$.

Um outro tipo de placa laminada antissimétrica é a Angle-Ply. Esta placa difere da Cross-Ply apenas na orientação dos eixos de maiores propriedades principais de cada lâmina com relação ao eixo do laminado. Um arranjo do tipo $+\alpha/-\alpha/+\alpha/-\alpha$ é um exemplo típico de um laminado antissimétrico Angle-Ply com quatro lâminas ortotrópicas. Observa-se que laminados desse tipo apresentam acoplamento entre as tensões de flexão e as de membranas porque os termos B_{13} e B_{13} , da matriz de rigidez $[B]$, são diferentes de zero. Uma

outra característica é que: os termos A_{i3} e D_{i3} , $i = 1, 2$, são todos nulos nas matrizes de rigidez $[A]$ e $[D]$ respectivamente. De forma similar as placas antissimétricas Cross-Ply, o problema de auto-valor na flambagem de placas laminadas antissimétricas Angle-Ply pode ser formulado como na Eq. (2.22).

Resumindo, a análise da estabilidade elástica de placas laminadas retangulares simplesmente apoiadas, pode ser feita através de um problema padrão de auto-valor na forma:

$$[P] = \lambda [I] \quad \text{Eq. (2.23)}$$

onde a matriz P é obtida da Eq. (2.20) através da relação

$$[P] = [G] \cdot [C]^{-1} \quad \text{Eq. (2.24)}$$

A ordem desta matriz depende do número de termos da série de FOURIER utilizados para representar a deflexão w .

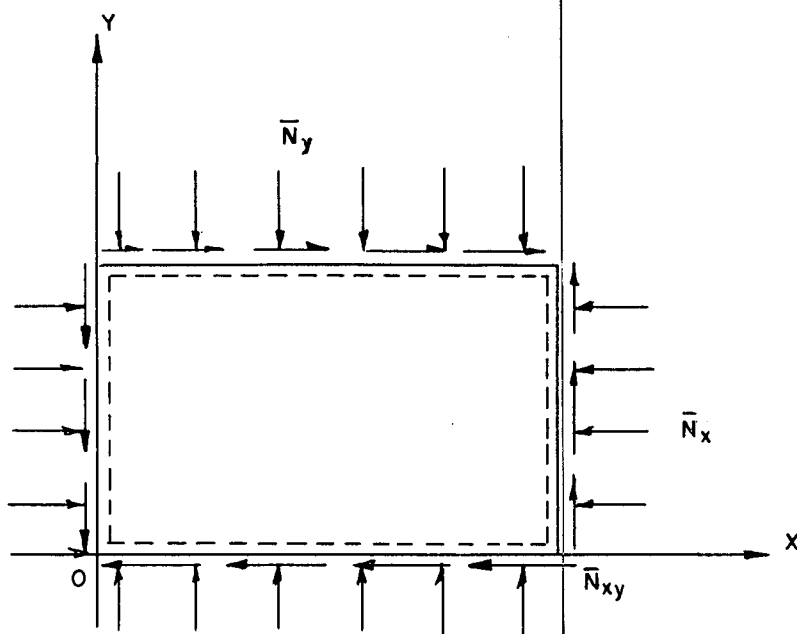


FIG. 2.1—PLACA SIMPLEMENTE APOIADA SUBMETIDA A UM CARREGAMENTO DE PRÉ-FLAMBAGEM \bar{N}_x , \bar{N}_y , \bar{N}_{xy}

CAPITULO III

ESTUDOS DE CASOS DE FLAMBAGEM EM PLACAS LAMINADAS

3.1 - Introdução

Os resultados apresentados neste capítulo foram obtidos através de um programa em linguagem FORTRAN, implantado no computador IBM 4341, elaborado para observar o comportamento da carga crítica de flambagem em placas laminadas retangulares simplesmente apoiada. O material utilizado foi o composto Grafite-Epoxi cujas propriedades materiais são: $E_L/E_T = 40,0$; $G_{LT}/E_T = 0,5$; $\nu_{LT} = 0,25$, onde E_L e E_T são os respectivos módulos de Young longitudinal e tangencial; G_{LT} é o módulo de rigidez transversal e ν_{LT} o coeficiente de Poisson. Dois tipos especiais de placas laminadas entre as simétricas e as antissimétricas foram escolhidas para serem analisadas: as Cross-Ply e as Angle-Ply.

3.2 - Placas Laminadas Antissimétricas Angle-Ply

Um laminado antissimétrico Angle-Ply possui acoplamento entre as tensões de membrana e as de flexão através das rigidez B_{13} e B_{23} . Uma outra característica é que as rigidez A_{13} , A_{23} ; D_{13} e D_{23} são todas nulas. As rigidez B_{13} e B_{23} podem ser determinadas através das seguintes equações [2]:

$$(B_{13}, B_{23}) = -\frac{h^2}{2N} (Q_{13}, Q_{23}) \quad \text{Eq. (3.1)}$$

onde h é a espessura do laminado e N é o número de lâminas ortotrópicas no laminado. Q_{13} e Q_{23} são determinadas através das Eqs. (A-3.11).

$$(A_{11}, A_{12}, A_{22}, A_{33}) = h (Q_{11}, Q_{12}, Q_{22}, Q_{33}) \quad \text{Eq. (3.2)}$$

$$(D_{11}, D_{12}, D_{22}, D_{33}) = \frac{h^3}{12} (Q_{11}, Q_{12}, Q_{22}, Q_{33}) \quad \text{Eq. (3.3)}$$

Da Eq. (3.1), observa-se que as rigidez B_{13} e B_{23} tendem a diminuir a proporção que se aumenta o número de lâminas no laminado.

Estudos realizados neste tipo de placa têm comprovado que a carga crítica de flambagem aumenta a proporção que se aumenta o número de lâminas no laminado [8]. Usando-se nove termos da série definida na Eq. (2.10), este fenômeno foi confirmado tanto para uma placa submetida a um estado de tensão uniaxial compressivo, Fig. (3.1), quanto para uma placa submetida a um estado de tensão biaxial também compressivo, Fig. (3.2). Quanto a orientação dos eixos de maiores propriedades principais das lâminas em relação ao eixo do laminado, observa-se que a maior resistência a flambagem ocorre para uma orientação de 45° [8].

O tipo de carregamento que define o estado plano de tensões de membrana, que uma placa retangular antissimétrica Angle-Ply, simplesmente apoiada, é submetida, é um fator importante na estabilidade elástica da mesma. As Figs. (3.3

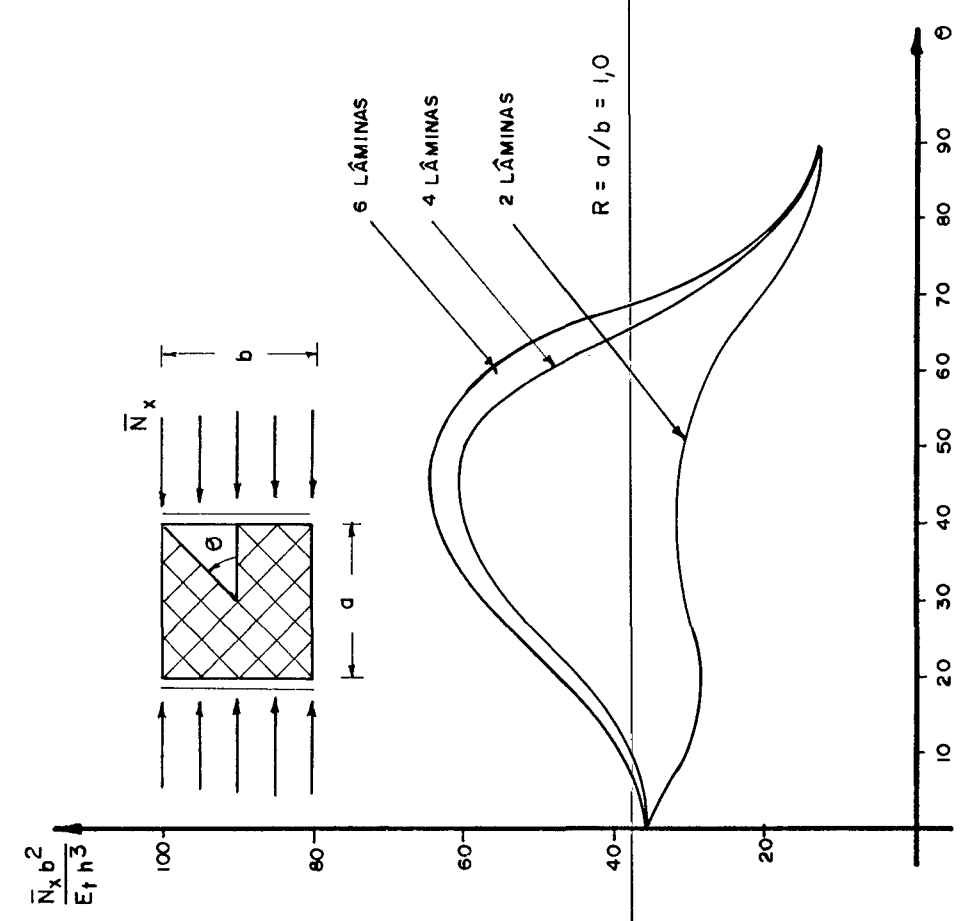


FIG. 3.1 - CARGA CRÍTICA DE FLAMBAGEM EM FUNÇÃO DO ÂNGULO DE ORIENTAÇÃO PARA UMA PLACA QUADRADA ANTISSIMÉTRICA ANGLE - PLY SUBMETIDA A UM CARREGAMENTO UNIFORME UNIAXIAL COMPRESSIVO.

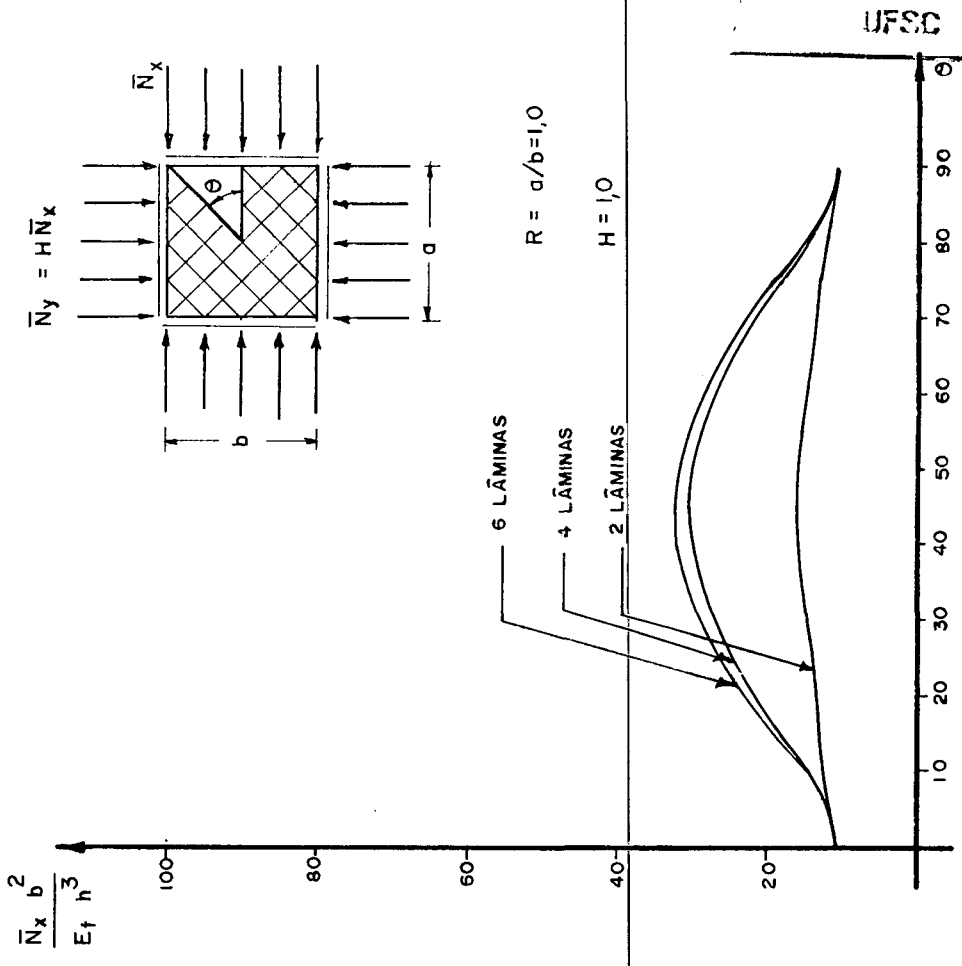
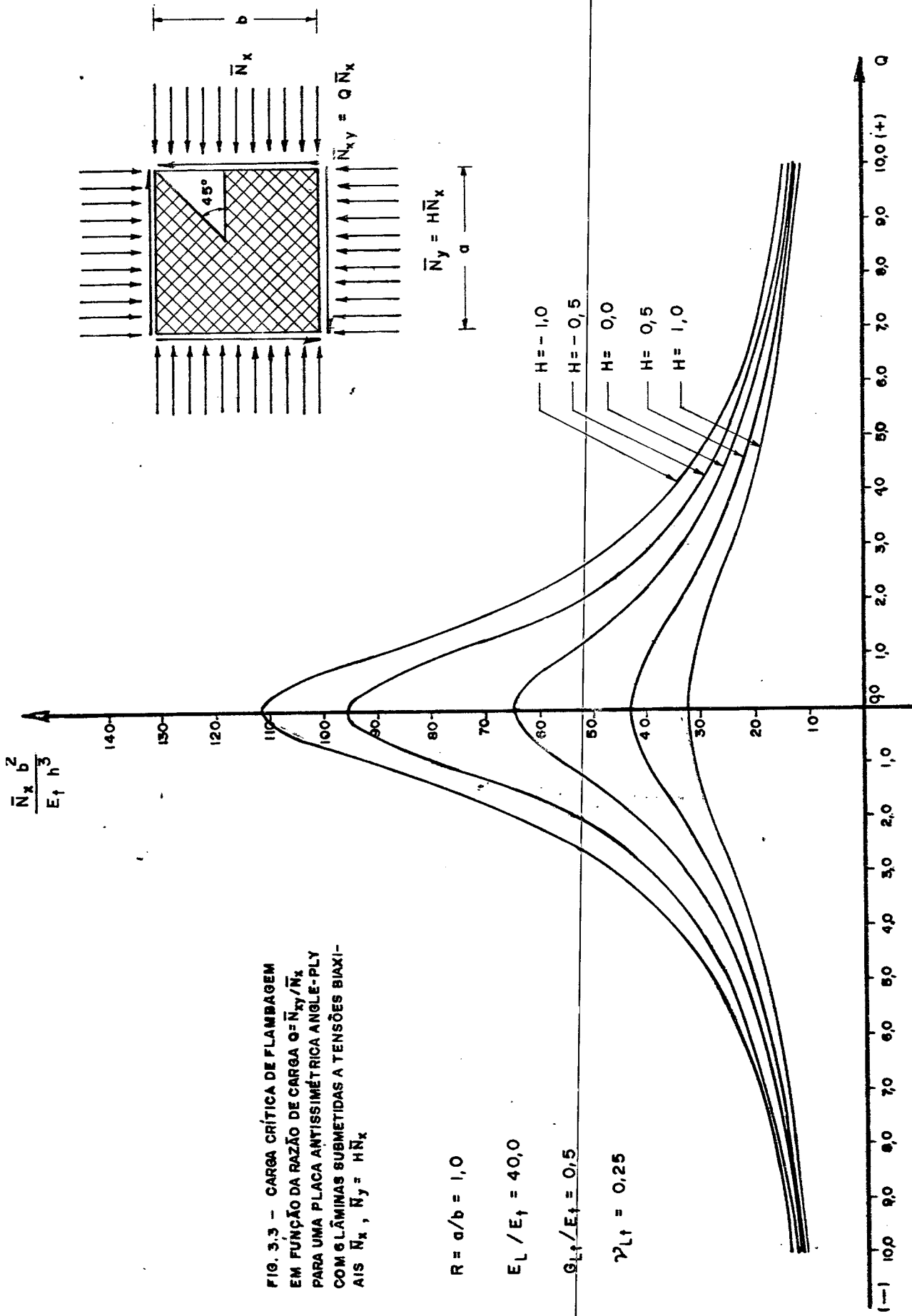


FIG. 3.2 - CARGA CRÍTICA DE FLAMBAGEM EM FUNÇÃO DO ÂNGULO DE ORIENTAÇÃO PARA UMA PLACA QUADRADA ANTISSIMÉTRICA ANGLE-PLY SUBMETIDA A UM CARREGAMENTO UNIFORME BIAIXIAL COMPRESSIVO.



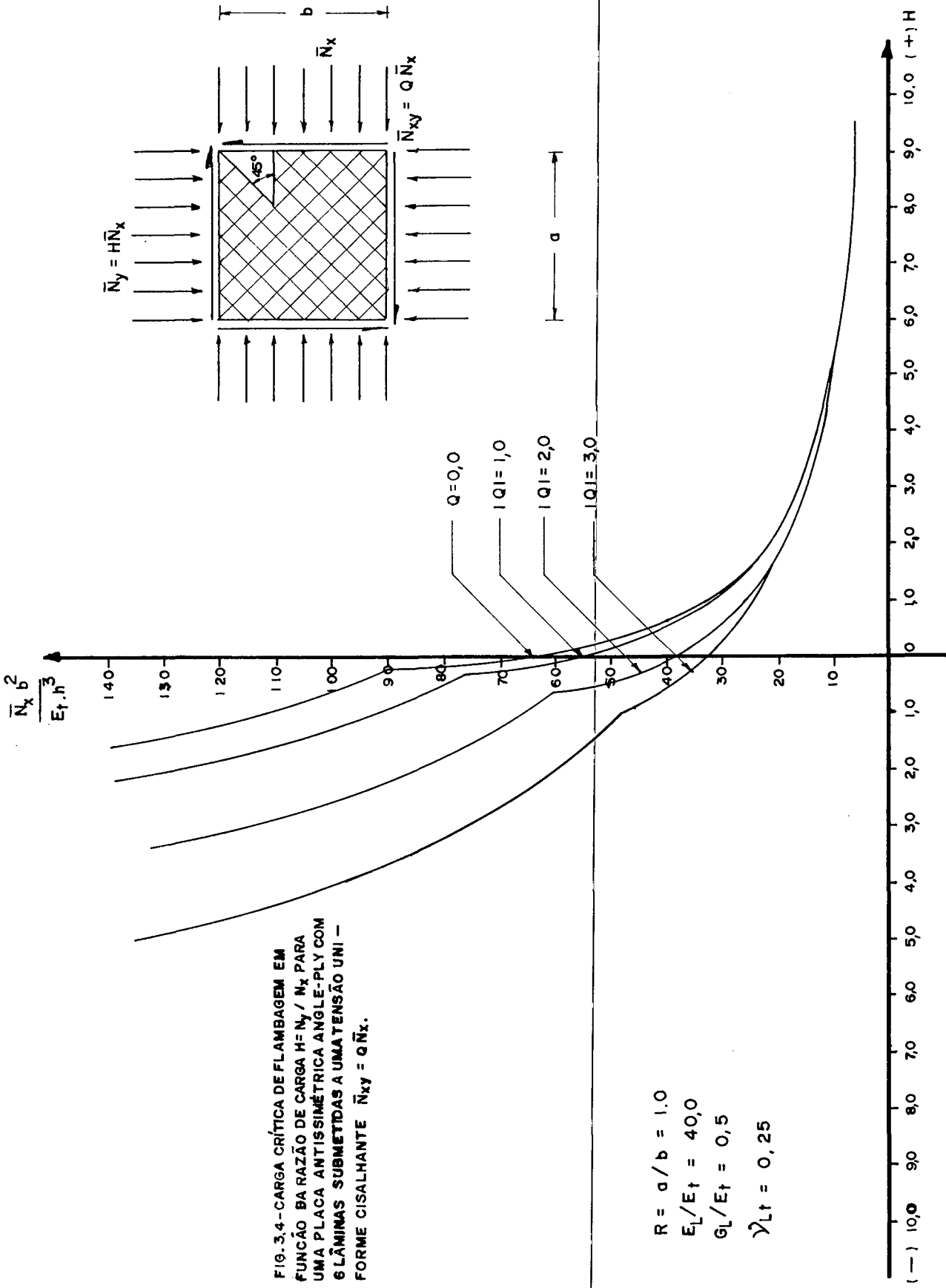


FIG. 3.4-CARGA CRÍTICA DE FLAMBAGEM EM FUNÇÃO DA RAZÃO DE CARGA $H = \bar{N}_y / \bar{N}_x$ PARA UMA PLACA ANTISIMÉTRICA ANGLE-PLY COM 6 LÂMINAS SUBMETIDAS A UMA TENSÃO UNI-FORME CISCALHANTE $\bar{N}_{xy} = Q\bar{N}_x$.

$R = a/b = 1,0$
 $E_L/E_t = 40,0$
 $G_L/E_t = 0,5$
 $\gamma_{Lt} = 0,25$

(-) 10,0 9,0 8,0 7,0 6,0 5,0 4,0 3,0 2,0 1,0 0 1,0 2,0 3,0 4,0 5,0 6,0 7,0 8,0 9,0 10,0 (+)H

e 3.4) mostram o comportamento da carga crítica de flambagem em função de diversos estados planos de tensões combinadas. Observa-se que a carga crítica de flambagem aumenta a medida que a tensão \bar{N}_y passa do estado de compressão para o estado de tração. Quanto ao cisalhamento, o valor da carga crítica de flambagem independe do sentido do mesmo, porém, aumenta a proporção que a intensidade da tensão cisalhante diminui. Este fenômeno é mais evidente quando a tensão \bar{N}_y é trativa como mostra a Fig. (3.4).

3.3 - Placas Laminadas Antissimétricas Cross-Ply

As placas laminadas antissimétricas Cross-Ply apresentam acoplamento entre as tensões de membrana e as de flexão. Os termos D_{13} e D_{23} da matriz de rigidez de flexão, e os termos A_{13} e A_{23} da matriz de rigidez de membrana, são todos nulos. Na matriz de rigidez de acoplamentos apenas os termos B_{11} e B_{22} são diferentes de zero. Verifica-se para este tipo de laminado que $B_{11} = -B_{22}$ e que diminuem quando o número de lâminas aumenta no laminado. Neste caso, conforme a Fig. (3.5), observa-se que para um mesmo aspecto de placa R, quanto maior o número de lâminas no laminado maior será a carga crítica de flambagem. As Figs. (3.6 e 3.7) mostram o comportamento da carga crítica de flambagem em função do tipo do estado combinado de tensões de membrana, uniformemente distribuídas, que uma placa simplesmente apoiada antissi

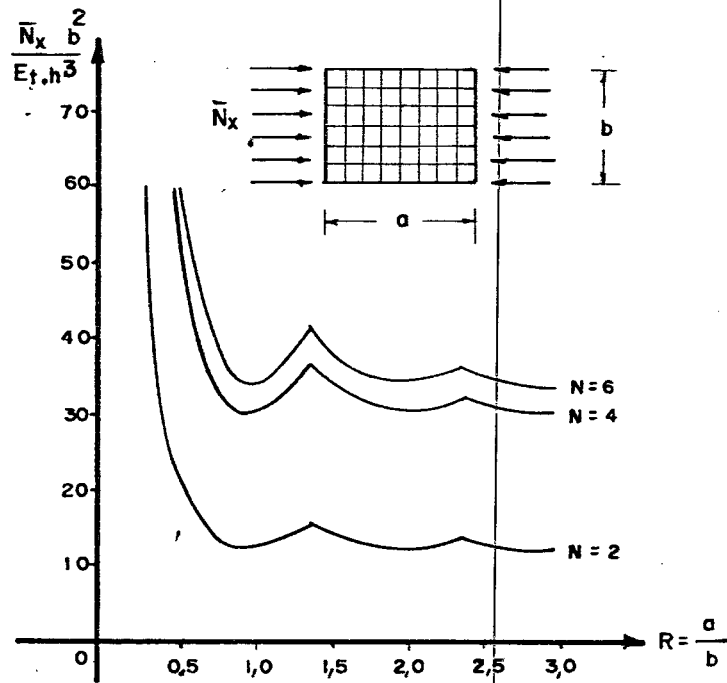


FIG. 3.5 - CARGA CRÍTICA DE FLAMBAGEM EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE LÂMINAS NO LAMIMADO E DO ASPECTO DE PLACA R; PARA UMA PLACA LAMINADA ANTISSIMÉTRICA CROSS-PLY.

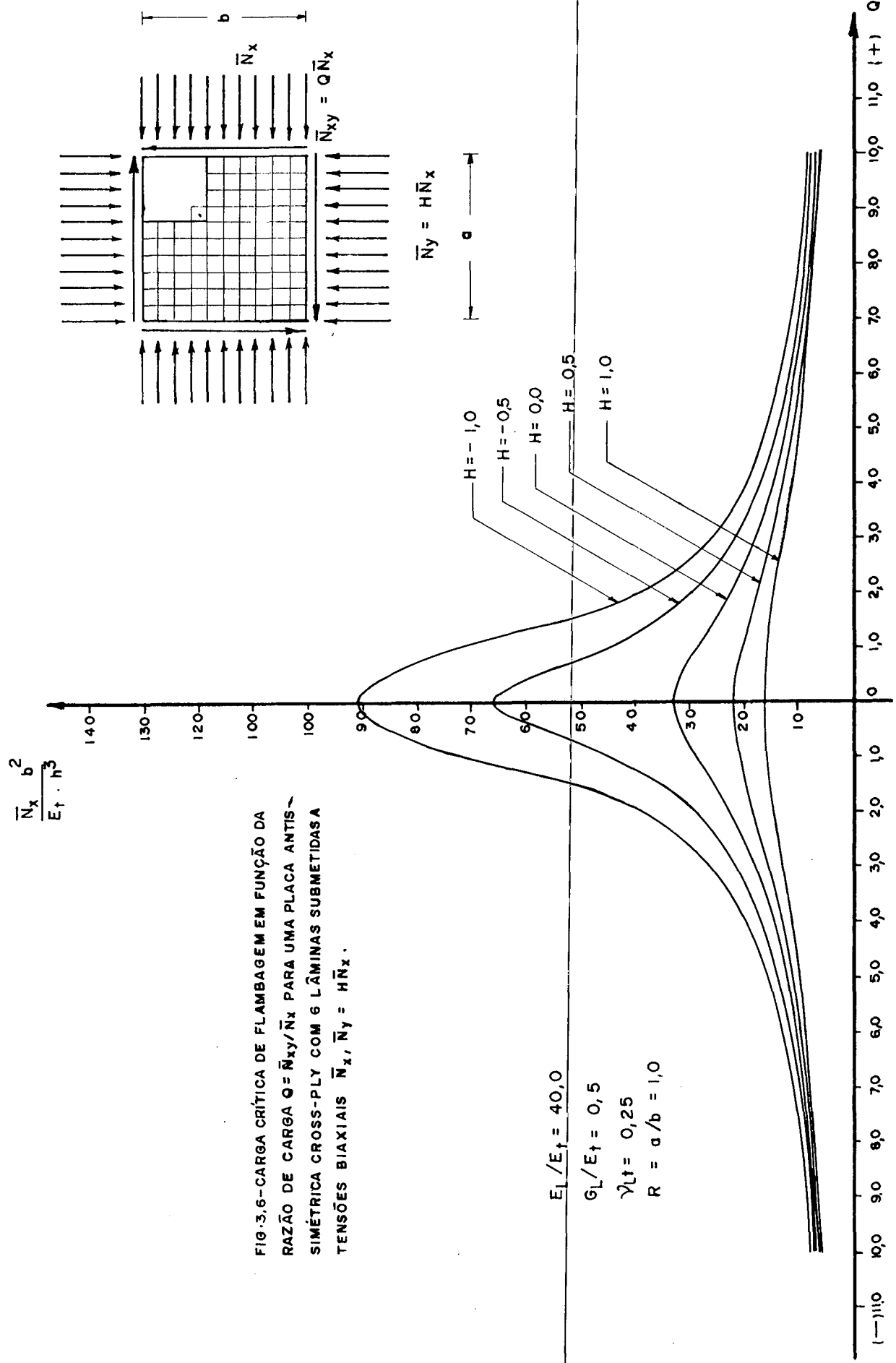


FIG. 3.6-CARGA CRÍTICA DE FLAMBAGEM EM FUNÇÃO DA RAZÃO DE CARGA $Q = \bar{N}_{xy} / \bar{N}_x$ PARA UMA PLACA ANTISIMÉTRICA CROSS-PLY COM 6 LÂMINAS SUBMETIDAS A TENSÕES BIAXIAIS $\bar{N}_x, \bar{N}_y = H \bar{N}_x$.

métrica Cross-Ply é submetida. De acordo com estas figuras, a carga crítica de flambagem aumenta a medida que a carga \bar{N}_y passa do estado compressivo para o estado trativo. Com relação a tensão cisalhante \bar{N}_{xy} , a carga crítica aumenta a proporção que a intensidade da mesma diminui, independentemente do seu sentido.

3.4 - Placas Laminadas Simétricas Angle-Ply

Os laminados simétricos Angle-Ply não apresentam acoplamento entre as tensões de membrana e as de flexão por possuírem todos os termos B_{ij} , da matriz de rigidez de acoplamento, iguais a zero. Os termos A_{ij} e D_{ij} das matrizes de rigidez de membrana e de flexão são todos diferentes de zero. Para este tipo de laminado, as rigidez A_{13} , A_{23} , D_{13} e D_{23} são todas dependentes do número de lâminas no laminado e podem ser calculadas através das seguintes equações [2]:

$$(A_{13}, A_{23}) = \frac{h}{N} (Q_{13}, Q_{23}) \quad \text{Eq. (3.4)}$$

$$(D_{13}, D_{23}) = \frac{h^3}{N} (Q_{13}, Q_{23}) \quad \text{Eq. (3.5)}$$

onde h representa a espessura do laminado e, Q_{13} e Q_{23} de terminadas pelas Eqs. (A-3-11).

A fig. (3.8) mostra o comportamento da carga crítica de flambagem em função do número de lâminas no laminado e da razão de carga $Q = \bar{N}_{xy} / \bar{N}_x$, com \bar{N}_y igual a zero, para

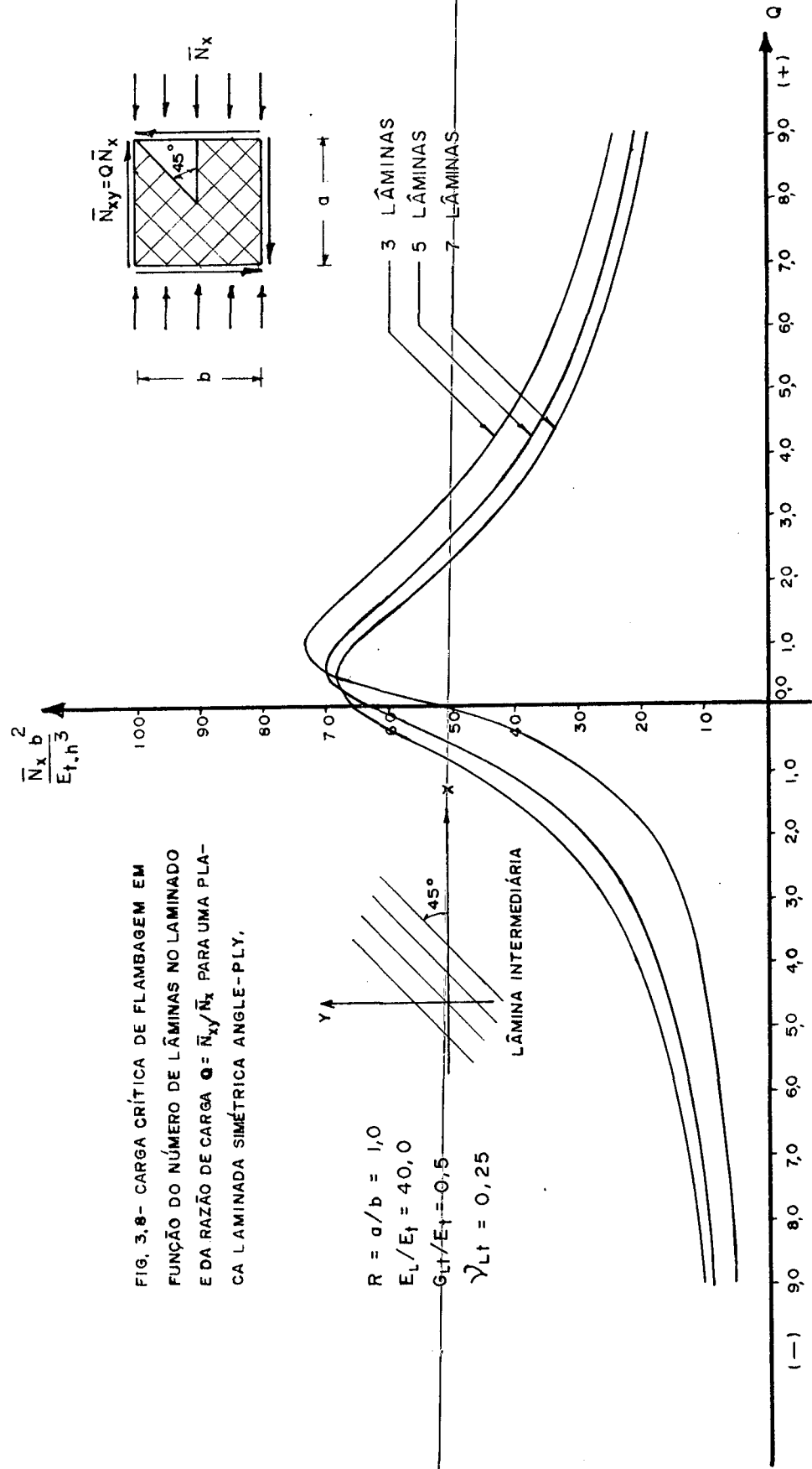


FIG. 3.8- CARGA CRÍTICA DE FLAMBAGEM EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE LÂMINAS NO LAMINADO E DA RAZÃO DE CARGA $Q = \bar{N}_{xy}/\bar{N}_x$ PARA UMA PLACA LAMINADA SIMÉTRICA ANGLE-PLY.

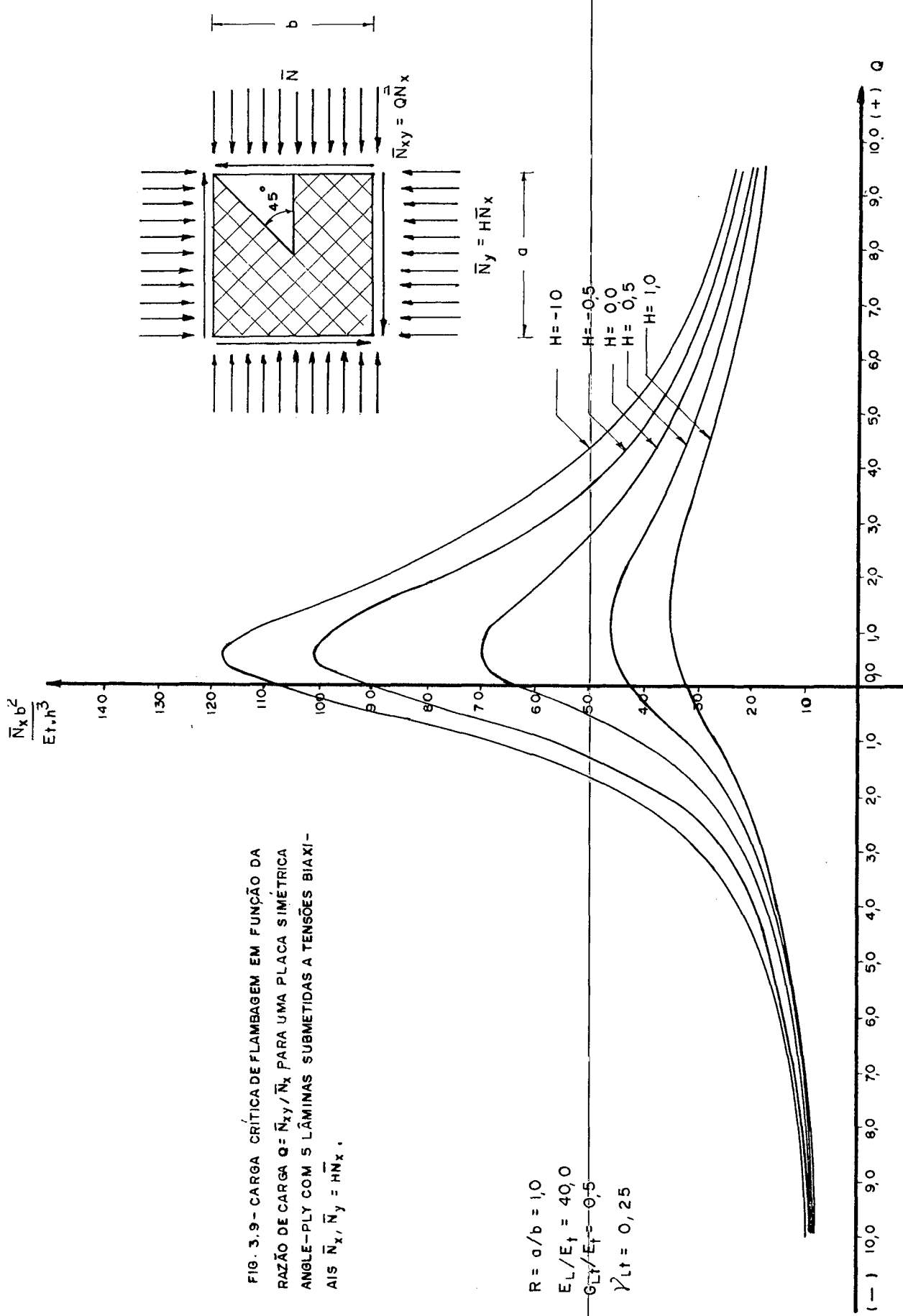


FIG. 3.9 - CARGA CRÍTICA DE FLAMBAGEM EM FUNÇÃO DA RAZÃO DE CARGA $Q = \bar{N}_{xy} / \bar{N}_x$ PARA UMA PLACA SIMÉTRICA ANGLE-PLY COM 5 LÂMINAS SUBMETIDAS A TENSÕES BIAXIAIS $\bar{N}_x, \bar{N}_y = H\bar{N}_x$.

$R = a/b = 1,0$
 $E_L/E_t = 40,0$
 $G_L/E_t = 0,5$
 $\nu_{Lt} = 0,25$

(-) 10,0 9,0 8,0 7,0 6,0 5,0 4,0 3,0 2,0 1,0 0,0 1,0 2,0 3,0 4,0 5,0 6,0 7,0 8,0 9,0 10,0 (+) Q

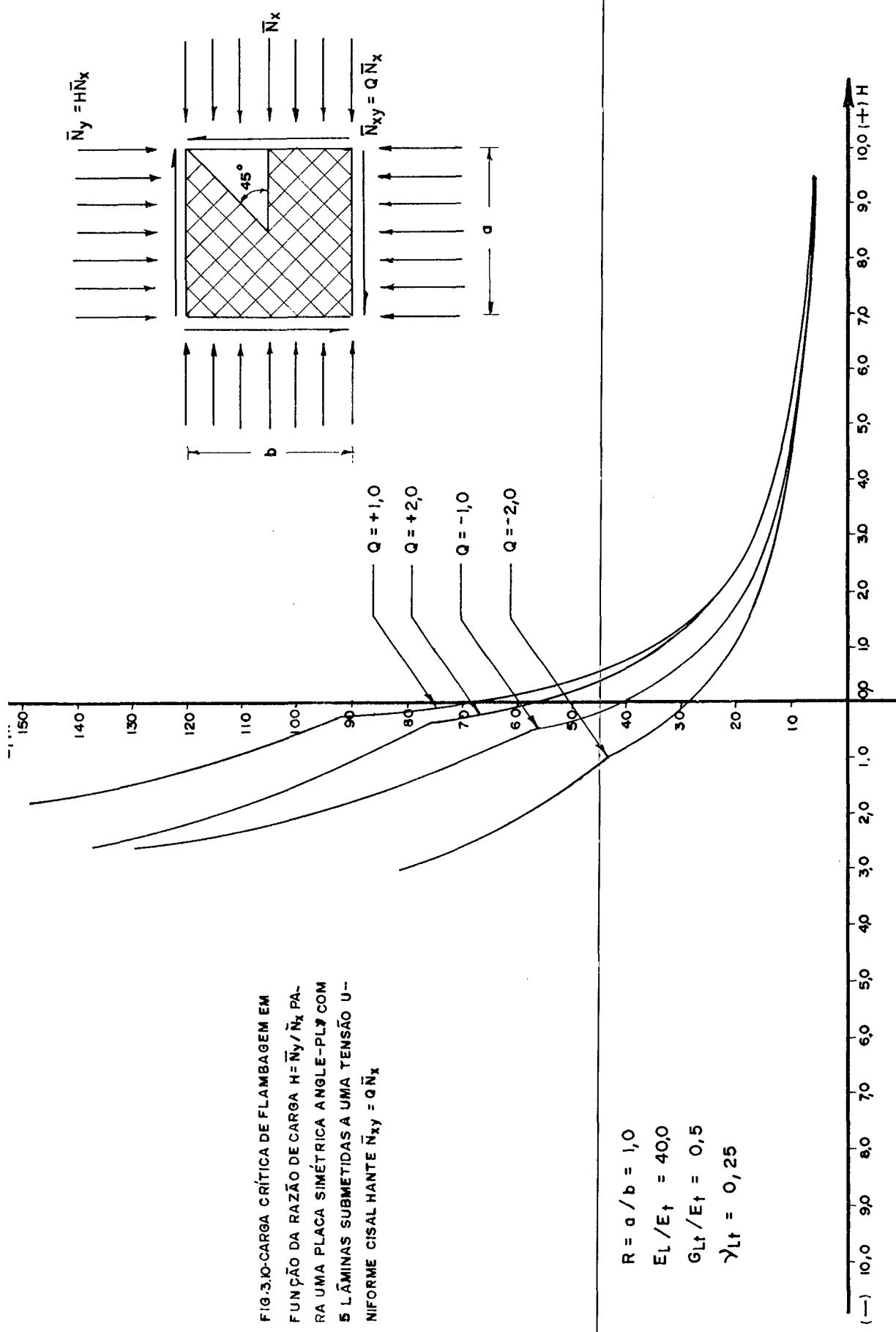


FIG.3.10-CARGA CRÍTICA DE FLAMBAGEM EM FUNÇÃO DA RAZÃO DE CARGA $H = \bar{N}_y / \bar{N}_x$ PARA UMA PLACA SIMÉTRICA ANGLE-PLY COM 5 LÂMINAS SUBMETIDAS A UMA TENSÃO UNIFORME CÍSLHANTE $\bar{N}_{xy} = Q \bar{N}_x$

$R = a/b = 1,0$
 $E_l/E_t = 40,0$
 $G_{lt}/E_t = 0,5$
 $\gamma_{lt} = 0,25$

(—) 10,0 9,0 8,0 7,0 6,0 5,0 4,0 3,0 2,0 1,0 0,0 10,0 9,0 8,0 7,0 6,0 5,0 4,0 3,0 2,0 1,0 0,0

uma placa retangular, simplesmente apoiada, simétrica Angle-Ply. Nesta figura observa-se que o valor da carga crítica de flambagem aumenta com o número de lâminas no laminado sempre que a razão de carga Q é menor que zero. Para determinados valores de Q positivos, tal como o indicado na Fig. (3.8), verifica-se que a carga crítica de flambagem de cresce a medida que o número de lâminas cresce no laminado. Neste caso, observa-se que quanto maior o número de lâminas no laminado, maior a tendência da carga crítica de flambagem tornar-se independente do sentido da tensão cisalhante $\bar{N}_{xy} = Q \bar{N}_x$.

As figs. (3.9 e 3.10) mostram o comportamento da carga crítica de flambagem em função do estado plano de tensões combinadas de membrana. Observa-se que a mesma aumenta a medida que a tensão \bar{N}_y passa do estado de compressão para o estado de tração. Nestas mesmas figuras verifica-se que quanto maior a intensidade da tensão cisalhante, menor será a carga crítica de flambagem.

3.5 - Placas Laminadas Simétricas Cross-Ply

Os laminados simétricos Cross-Ply também não apresentam acoplamento entre as tensões de membrana e as de flexão. Nas matrizes de rigidez de membrana e de flexão apenas os termos A_{13} , A_{23} , D_{13} e D_{23} são nulos. O comportamento da carga crítica de flambagem em função do estado plano de ten

sões combinadas de membrana, para uma placa retangular simplesmente apoiada, constituída de um laminado Cross-Ply, com $D_{11}/D_{22} = 4.0$; é mostrado nas Figs. (3.11 e 3.12). Verifica-se que a carga crítica de flambagem independe do sentido da tensão cisalhante $\bar{N}_{xy} = Q\bar{N}_x$, porém, a mesma aumenta a proporção que a intensidade da tensão cisalhante diminui. Quanto a tensão normal $\bar{N}_y = H\bar{N}_x$, observa-se que a carga crítica aumenta quando esta tensão normal passa do estado compressivo para o estado trativo.

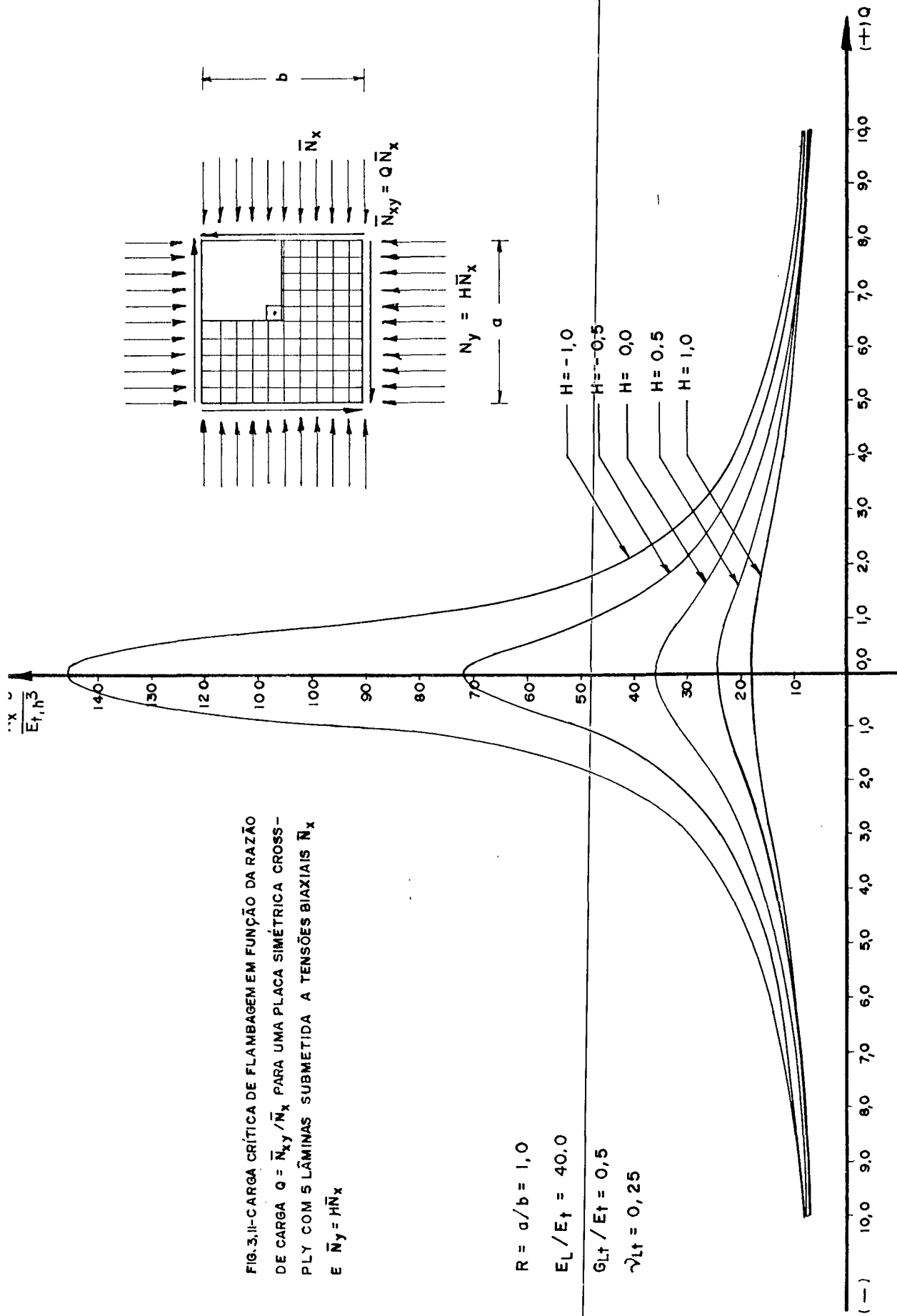


FIG. 3.11-CARGA CRÍTICA DE FLAMBAGEM EM FUNÇÃO DA RAZÃO DE CARGA $g = \bar{N}_{xy} / \bar{N}_x$ PARA UMA PLACA SIMÉTRICA CROSS-PLY COM 5 LÂMINAS SUBMETIDA A TENSÕES BIAXIAIS \bar{N}_x E $\bar{N}_y = H\bar{N}_x$

$R = a/b = 1,0$

$E_L / E_t = 40,0$

$G_{Lt} / E_t = 0,5$

$\nu_{Lt} = 0,25$

(-) 10,0 9,0 8,0 7,0 6,0 5,0 4,0 3,0 2,0 1,0 0,0 1,0 2,0 3,0 4,0 5,0 6,0 7,0 8,0 9,0 10,0 (+)Q

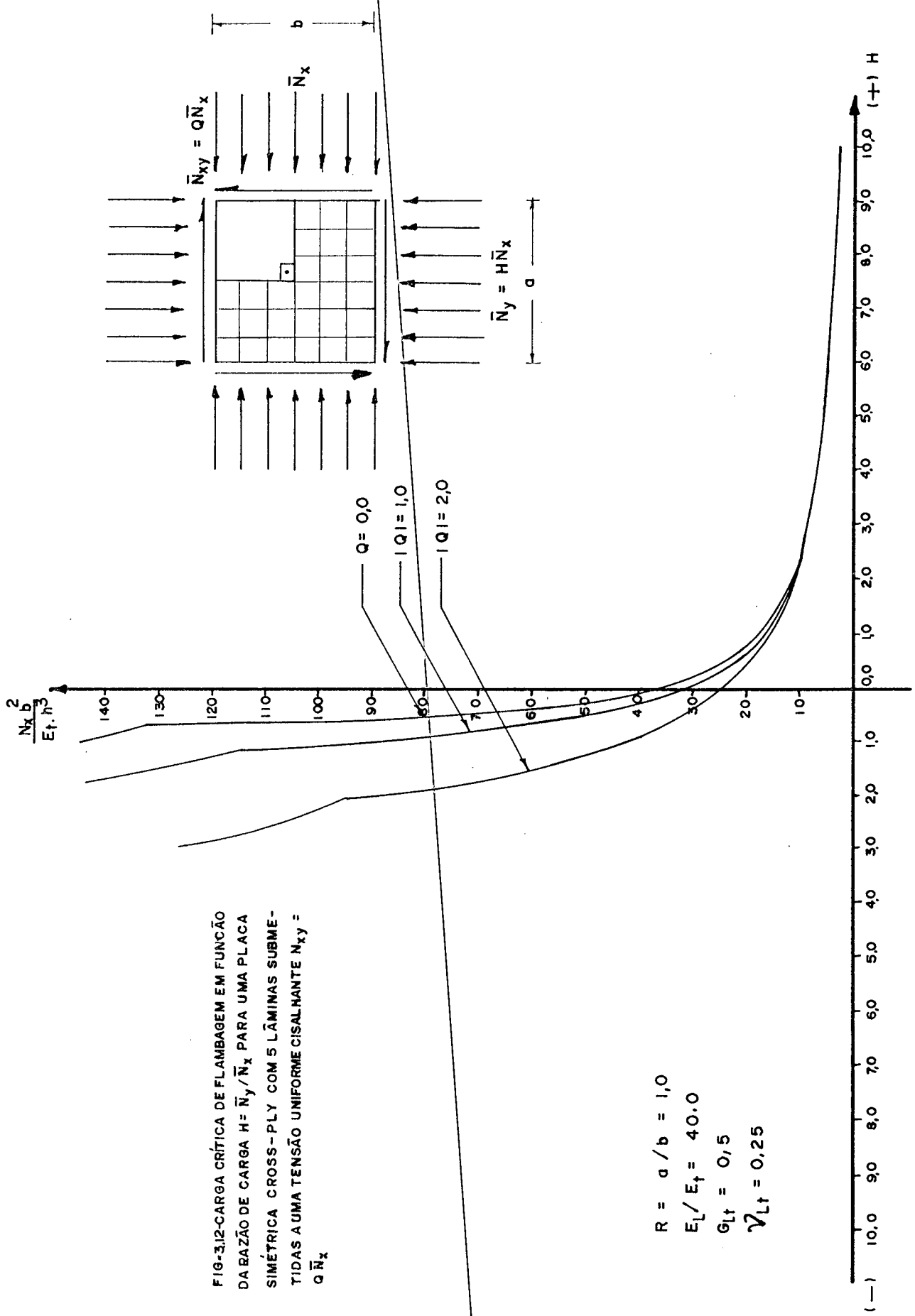


FIG-3.12-CARGA CRÍTICA DE FLAMBAGEM EM FUNÇÃO DA BAZÃO DE CARGA $H = \bar{N}_y / \bar{N}_x$ PARA UMA PLACA SIMÉTRICA CROSS-PLY COM 5 LÂMINAS SUBMETIDAS A UMA TENSÃO UNIFORME CISCALNANTE $N_{xy} = Q \bar{N}_x$

$R = a/b = 1,0$
 $E_L/E_t = 40,0$
 $G_{Lt} = 0,5$
 $\nu_{Lt} = 0,25$

(-) 10,0 9,0 8,0 7,0 6,0 5,0 4,0 3,0 2,0 1,0 0,0 1,0 2,0 3,0 4,0 5,0 6,0 7,0 8,0 9,0 10,0 (+) H

CAPITULO IV

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

4.1 - Conclusões

A teoria da estabilidade elástica aplicada às placas retangulares anisotrópicas, com base nas hipóteses de KIRCHHOFF-VON KARMAN, comprova que os termos B_{ij} , $i, j = 1, 3$ da matriz de rigidez de acoplamento entre as tensões de flexão e as de membrana, reduzem a resistência à flambagem das placas laminadas. Portanto, uma placa laminada simétrica Cross-Ply apresenta maior resistência à flambagem que uma placa laminada antissimétrica Angle-Ply ou Cross-Ply de mesma espessura e mesmo aspecto de placa R.

Uma placa laminada simétrica Angle-Ply apresenta maior resistência à flambagem que uma placa antissimétrica Cross-Ply. A mesma pode apresentar maior resistência que uma antissimétrica Angle-Ply em alguns casos onde a tensão cisalhante é positiva. Este fato se justifica porque os termos D_{13} e D_{23} , da matriz de rigidez de flexão também reduzem a resistência à flambagem nas placas laminadas que os contém. A presença desses termos tende a se tornar benéfico na estabilidade da placa, quando uma tensão cisalhante positiva compõe o estado plano de tensões de membranas combinadas, caso contrário, a mesma compromete a resistência da placa na flambagem.

Dependendo do estado plano de tensões de membrana, as placas laminadas podem apresentar maior ou menor resistência à flambagem. As placas laminadas submetidas a estados combinados de tensões contendo tensões normais trativas apresentam maior resistência à flambagem que as placas laminadas submetidas a estados de tensões combinadas contendo tensões normais compressivas. Com relação a tensão de membrana cisalhante, independente do seu sentido, quanto maior a sua intensidade menor será a resistência da placa à flexão por flambagem.

Em resumo, quanto maior o número de lâminas num laminado antissimétrico ou simétrico Angle-Ply, maior será a resistência à flambagem das placas constituídas por esses laminados, porque tanto os termos B_{ij} quanto os termos D_{13} e D_{23} tendem a diminuir, tornando as placas laminadas mais resistentes à flexão por flambagem. Além do mais, a diminuição dos termos D_{13} e D_{23} torna a carga crítica de flambagem mais independente do sentido da tensão de membrana cisalhante.

4.2 - Sugestões

- 1) Verificar a estabilidade de placas laminadas quando:
 - 1.a) os efeitos cisalhantes transversais são relevantes no comportamento das mesmas;

- 1.b) a placa laminada possui outro tipo de vínculo como por exemplo, simplesmente engastado, bi-encastado, etc;
- 1.c) a placa apresenta formas geométricas diferente de uma placa retangular;
- 2) Verificar a estabilidade de placas laminadas submetidas a solicitações dinâmicas;
- 3) Verificar a estabilidade elástica de cascas constituídas de compostos laminados;
- 4) Verificar experimentalmente os resultados obtidos neste trabalho.

B I B L I O G R A F I A

- 1 - HAZIM A.AL-QURESHI, Composite Materials, S. J. Campos, Brasil, CTA, 1983.
- 2 - ROBERT M. JONES, Mechanics of Composite Materials, New York, McGraw-Hill, 1975.
- 3 - HENRY L.LANGHAAR, Energy Methods in Applied Mechanics, New York, John Wiley And. Sons, INC, 1952.
- 4 - STEPHEN P. TIMOSHENKO, Theory of Elastic Stability, New York, McGraw-Hill Book Company, INC, 1961.
- 5 - STEPHEN P. TIMOSHENKO, Theory of Plates and Shells, New York, McGraw-Hill Book Company, INC, 1959.
- 6 - A.C. UGURAL, Stress in Plates and Shells, New York, McGraw-Hill Book Company, 1981.
- 7 - J.H. WILKINSON, The Algebraic Engenvalue Problem, Oxford University Press, 1965.
- 8 - J.M. WHITNEY, Analisis of Heterogeneous Anisotropic Plates, Journal of Applied Mechanics, June 1969/261-266.
- 9 - SHAN S.KUO, Numerical Methods and Computers.
- 10 - D.BOECHAT ALVES, Teoria das Cascas, Curso de Pós-Graduação em Enga. Mecânica, UFSC, SC, Brasil.

- 11 - VIRGILIO M.COSTA E SILVA, Análise Dinâmica de um Volante Supercrítico para Armazenamento de Energia, Tese de Mestrado, UNICAMP - SP.
- 12 - P.K.SINHA, Transverse Bending of Cross-Ply Laminated Circular Cylindrical Plates, Journal Mechanical Engineering Science, IMECHE 1976, vol.18 nº 21976.
- 13 - M.K. PRABHAKARA, Nonlinear Behaviour of Unsymmetric, Angle-Ply, Rectangular Plates Under In-Plane Edge Shear, Journal Mechanical Engineering Science IMECHE 1979, vol. 21.
- 14 - R.M. OGORKIEWICZ, Orthotropic Characteristic of Glass-Fibre - Epoxy Laminates Under Plane Stress, Journal Mechanical Engineering Science, 1973, vol.15 nº 21973.
- 15 - ROBERT M.JONES, Plastic Buckling of Eccentrically Stiffened Multilayered Circular Cylindrical Shells, AIAA Journal, 1970, vol. 8 nº 2.
- 16 - C.Y.CHIA, Nonlinear Analysis of Orthotropic Plates, Journal Mechanical Engineering Science, 1975, vol. 17 nº 1975.
- 17 - PAULO DE TARSO R.DE MENDONÇA, Uma Formulação de Elemento Finito para Cascas Delgadas Multilaminadas, Tese de Mestrado, UFSC - SC.

APÊNDICE A

TENSÕES E DEFORMAÇÕES EM PLACAS COM IMPERFEIÇÃO INICIAL

A-1) Introdução

REISSNER & STAVSKY, analisando o comportamento de Placas Anisotrópicas com base na Teoria de Pequenas Deflexões Elástica observaram que existia o fenômeno de acoplamento entre as tensões de membrana e as de flexão, fato não encontrado na Teoria Linear de Placas Homogêneas [8]. Em muitos casos, de Placas Anisotrópicas, este fenômeno não ocorre e as mesmas são consideradas simétricas. Um resumo da Teoria das Tensões e Deformações, em Placas Anisotrópicas, será apresentado, com o objetivo de possibilitar a análise do comportamento das mesmas quando submetidas a determinados tipos de carregamento.

A-2) Relação Deformação-Deslocamento em Placas com Imperfeição Inicial

Considere uma placa delgada, cuja superfície média de referência possui uma configuração inicial definida pela função $w_0 = w_0(x, y)$ no sistema de eixos x, y e z . A Fig. (A-2.1) representa um elemento de placa limitado pela superfície média de referência e por uma superfície arbitrária (a_1, b_1, c_1, d_1) . O vetor posição inicial do elemento, com relação ao sis

tema de referência, no estado indeformado da placa \bar{e} :

$$\vec{r}_0 = x\hat{i} + y\hat{j} + (w_0 + z)\hat{k} \quad (\text{A-2.1})$$

se a placa \bar{e} é solicitada, o elemento se deforma e o vetor posição \vec{r}_0 passa para a posição

$$\vec{r} = (x + u + z\alpha)\hat{i} + (y + v + z\beta)\hat{j} + (w_0 + w + z)\hat{k} \quad (\text{A-2.2})$$

onde α e β são os ângulos que as projeções do segmento $\overline{a_1}$, no estado deformado $\overline{a_1^*}$, formam com o eixo z nos planos zx e zy . As componentes do vetor deslocamento nas direções x , y e z são denotadas por u , v e w respectivamente, conforme mostra as Fig's (A-2.2).

De acordo com a Teoria da Elasticidade, a deformação no ponto a_1 é determinada pela seguinte equação:

$$\epsilon = \frac{||\vec{dr}|| - ||\vec{dr}_0||}{||\vec{dr}_0||} \quad (\text{A-2.3})$$

ou pela equação

$$2\epsilon + \epsilon^2 = \frac{\vec{dr} \cdot \vec{dr} - \vec{dr}_0 \cdot \vec{dr}_0}{\vec{dr}_0 \cdot \vec{dr}_0} \quad (\text{A-2.4})$$

Das Eq's (A-2.1 e A-2.2) conclui-se que o numerador da Eq (A-2.4) é da seguinte forma:

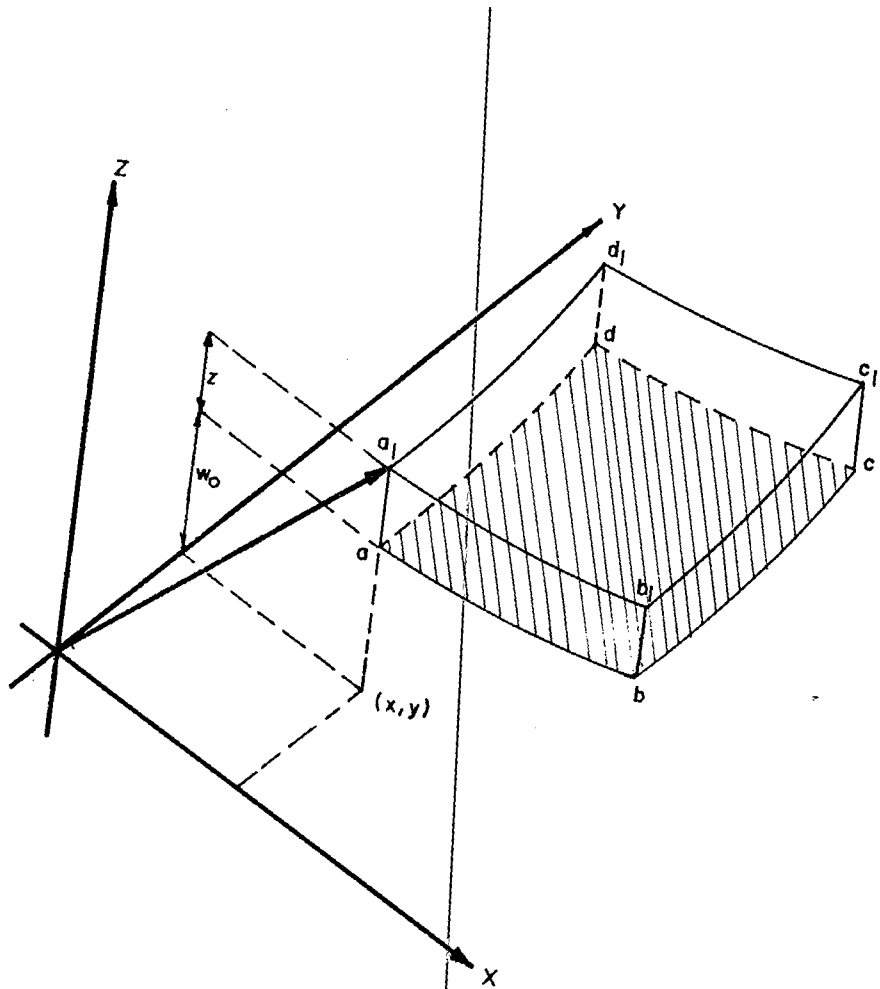


FIG.(A-2.1) -ELEMENTO DE PLACA LIMITADO PELA SUPERFICIE DE REFERÊNCIA a,b,c,d E UMA SUPERFICIE a₁ b₁ c₁ d₁.

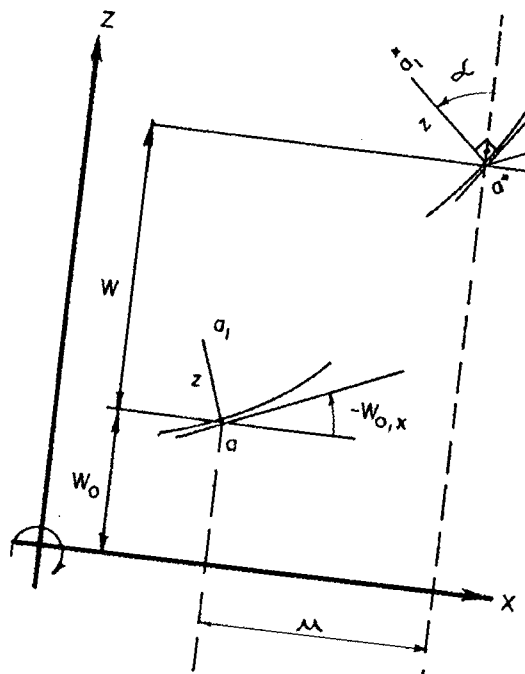


FIG. (A-2.2)

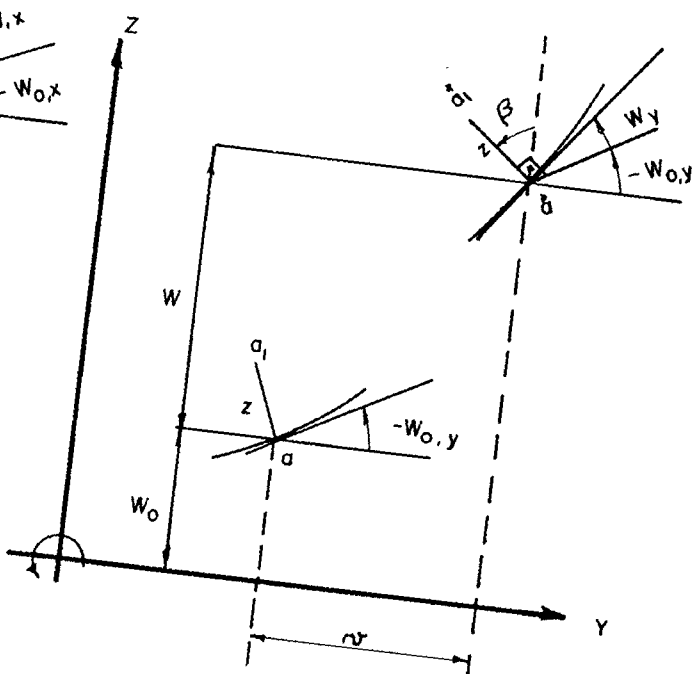


FIG. (A-2.3)

$$\begin{aligned} \vec{dr} \cdot \vec{dr} - \vec{dr}_O \cdot \vec{dr}_O &= M_{11} dx^2 + M_{22} dy^2 + M_{33} dz^2 + \\ &+ 2(M_{12} dx dy + M_{13} dx dz + M_{23} dy dz) \end{aligned} \quad (A-2.5)$$

onde:

$$\begin{aligned} M_{11} &= 2u'_{,x} + u'^2_{,x} + v'^2_{,x} + w'^2_{,x} + 2w_{O,x} \cdot w'_{,x} + \\ &+ z [2\alpha'_{,x} + z(\alpha'^2_{,x} + \beta'^2_{,x}) + 2(\alpha'_{,x} \cdot u'_{,x} + \beta'_{,x} \cdot v'_{,x})] \end{aligned} \quad (A-2.6-a)$$

$$\begin{aligned} M_{22} &= 2v'_{,y} + v'^2_{,y} + u'^2_{,y} + w'^2_{,y} + 2w_{O,y} w'_{,y} + \\ &+ z [2\beta'_{,y} + z(\alpha'^2_{,y} + \beta'^2_{,x}) + 2(\alpha'_{,y} \cdot u'_{,y} + \beta'_{,y} \cdot v'_{,y})] \end{aligned} \quad (A-2.6-b)$$

$$M_{33} = \alpha^2 + \beta^2 = [-(w_{O,x} + w'_{,x})]^2 + [-(w_{O,y} + w'_{,y})]^2 \quad (A-2.6-c)$$

$$\begin{aligned} M_{12} &= u'_{,y} + v'_{,x} + u'_{,x} \cdot u'_{,y} + v'_{,x} \cdot v'_{,y} + w_{O,x} \cdot w'_{,y} + \\ &+ w_{O,y} \cdot w'_{,x} + w'_{,x} \cdot w'_{,y} + z[(\alpha'_{,y} + \beta'_{,x}) + \\ &+ (\alpha'_{,x} \cdot u'_{,y} + \alpha'_{,y} \cdot u'_{,x} + \beta'_{,y} \cdot v'_{,x} + \\ &+ \beta'_{,x} \cdot v'_{,y} + z(\alpha'_{,x} \cdot \alpha'_{,y} + \beta'_{,x} \cdot \beta'_{,y})] \end{aligned} \quad (A-2.6-d)$$

$$M_{13} = \alpha(1+u_{,x} + z\alpha_{,x}) + \beta(v_{,x} + z\beta_{,x}) + w_{,x} \quad (\text{A-2.6-e})$$

$$M_{23} = \beta(1+v_{,y} + z\beta_{,y}) + \alpha(u_{,y} + z\alpha_{,y}) + w_{,y} \quad (\text{A-2.6-f})$$

$$\begin{aligned} \vec{dr}_O \cdot \vec{dr}_O &= (1 + w_{O,x}^2) dx^2 + (1 + w_{O,y}^2) dy^2 + dz^2 + \\ &+ 2(w_{O,x} \cdot w_{O,y} \cdot dx dy + w_{O,x} dx dz + \\ &+ w_{O,y} dy dz) \end{aligned} \quad (\text{A-2.7})$$

Se na placa ocorre pequenas deformações e a mesma possui uma pequena imperfeição inicial, pode-se considerar que ϵ_1^2 é desprezível com relação a 2ϵ e que $w_{O,i}^2 \lll 1$, $i = x, y$. Com base nessas hipóteses e através das Eqs. (A-2.4; A-2.6 e A-2.7), obtêm-se:

$$\epsilon_{xx} = \epsilon \left. \begin{array}{l} dy=0 \\ dz=0 \end{array} \right\} = u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 + w_{O,x} \cdot w_{,x} + z \alpha_{,x} \quad (\text{A-2.8-a})$$

$$\epsilon_{yy} = \epsilon \left. \begin{array}{l} dx=0 \\ dz=0 \end{array} \right\} = v_{,y} + \frac{1}{2} w_{,y}^2 + w_{O,y} \cdot w_{,y} + z \beta_{,y} \quad (\text{A-2.8-b})$$

$$\epsilon_{zz} = \epsilon \left. \begin{array}{l} dx=0 \\ dy=0 \end{array} \right\} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \quad (\text{A-2.8-c})$$

As eqs. (A-2.8) definem as deformações em ponto com relação a superfície média de referência.

Considere o ângulo, $(\frac{\pi}{2} - \bar{\gamma}_0)_{ij}$, formado pelos vetores $\vec{dr}_o \left| \begin{array}{l} di = 0 \\ dk = 0 \end{array} \right.$ e $\vec{dr}_o \left| \begin{array}{l} dj = 0 \\ dk = 0 \end{array} \right.$ no estado indeformado e o ângulo, $(\frac{\pi}{2} - \bar{\gamma})$, formado pelos vetores $\vec{dr} \left| \begin{array}{l} di = 0 \\ dk = 0 \end{array} \right.$ e $\vec{dr} \left| \begin{array}{l} dj = 0 \\ dk = 0 \end{array} \right.$ no estado deformado, para $i \neq j \neq k = x, y, z$.

Por definição de produto interno, conclui-se que:

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \bar{\gamma}_0 \right)_{ij} = \sin \left(\bar{\gamma}_0 \right)_{ij} = \frac{\vec{dr}_o \left| \begin{array}{l} di=0 \\ dk=0 \end{array} \right. \cdot \vec{dr}_o \left| \begin{array}{l} dj=0 \\ dk=0 \end{array} \right.}{\left\| \vec{dr}_o \left| \begin{array}{l} di=0 \\ dk=0 \end{array} \right. \right\| \cdot \left\| \vec{dr}_o \left| \begin{array}{l} dj=0 \\ dk=0 \end{array} \right. \right\|} \quad (\text{A-2.9})$$

De acordo com a eq. (A-2.9) obtém-se

$$\sin \left(\bar{\gamma}_0 \right)_{xy} = \frac{w_{o,x} \cdot w_{o,y}}{\sqrt{(1+w_{o,x}^2)(1+w_{o,y}^2)}} \quad (\text{A-2.10-a})$$

$$\sin \left(\bar{\gamma} \right)_{xy} = \frac{M_{12} + w_{o,x} w_{o,y}}{\sqrt{(1+M_{11} + w_{o,x}^2)(M_{22} + w_{o,y}^2)}} \quad (\text{A-2.10-b})$$

$$\sin \left(\bar{\gamma}_0 \right)_{yz} = \frac{w_{o,y}}{\sqrt{1 + w_{o,y}^2}} \quad (\text{A-2.10-c})$$

$$\text{sen } (\bar{\gamma})_{yz} = \frac{M_{23} + w_{0,y}}{\sqrt{(1+M_{23}) (1+M_{22} + w_{0,y}^2)}} \quad (\text{A-2.10-d})$$

$$\text{sen } (\bar{\gamma}_0)_{xz} = \frac{w_{0,x}}{\sqrt{1 + w_{0,y}^2}} \quad (\text{A-2.10-e})$$

$$\text{sen } (\bar{\gamma})_{xz} = \frac{M_{31} + w_{0,x}}{\sqrt{(1+M_{33}) (1+M_{11} + w_{0,x}^2)}} \quad (\text{A-2.10-f})$$

Considerando-se pequenas deformações e pequena imperfeição inicial na placa, os termos, $w_{0,x}^2$; $w_{0,y}^2$ e M_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$ são desprezíveis com relação a unidade. Desta forma, as deformações angulares em um ponto qualquer da placa serão:

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} = \bar{\gamma}_{xy} - \bar{\gamma}_{oxy} = u',_y + v',_x + w',_x w',_y + w_{0,x} w',_y + \\ + w_{0,y} w',_x + z (\alpha',_y + \beta',_x) \end{aligned} \quad (\text{A-2.11-a})$$

$$\gamma_{yz} = \bar{\gamma}_{yz} - \bar{\gamma}_{oyz} = w',_y - \beta \quad (\text{A-2.11-b})$$

$$\gamma_{xz} = \bar{\gamma}_{xz} - \bar{\gamma}_{o,xz} = w',_x - \alpha \quad (\text{A-2.11-c})$$

As Eqs (A-2.8 e A-2.11) determinam as componentes do tensor deformação em termos dos deslocamentos, para um ponto localizado numa superfície arbitrária distante de uma cota z

da superfície média de referência, considerando-se pequenas deformações e pequena imperfeição inicial. Estas componentes reunidas podem ser escritas da seguinte forma:

$$\epsilon_{xx} = e_{xx} + z k_{xx} \quad (\text{A-2.12-a})$$

$$\epsilon_{yy} = e_{yy} + z k_{yy} \quad (\text{A-2.12-b})$$

$$\epsilon_{zz} = e_{zz} \quad (\text{A-2.12-c})$$

$$\gamma_{xy} = e_{xy} + 2z k_{xy} \quad (\text{A-2.12-d})$$

$$\gamma_{xz} = e_{xz} \quad (\text{A-2.12-e})$$

$$\gamma_{yz} = e_{yz} \quad (\text{A-2.12-f})$$

Nas eqs (A-2.12) os termos e_{ij} representam as deformações que ocorrem na superfície média de referência e são definidas pelas seguintes equações:

$$e_{xx} = u_{,x} + \frac{1}{2} w'_{,x}{}^2 + w_{0,x} \cdot w'_{,x} \quad (\text{A-2.13-a})$$

$$e_{yy} = v_{,y} + \frac{1}{2} w'_{,y}{}^2 + w_{0,y} \cdot w'_{,y} \quad (\text{A-2.13-b})$$

$$e_{zz} = (\alpha^2 + \beta^2) / 2 \quad (\text{A-2.13-c})$$

$$e_{xy} = u_{,y} + v_{,x} + w'_{,x} w'_{,y} + w_{0,x} w'_{,y} + w_{0,y} w'_{,x} \quad (\text{A-2.13-d})$$

$$e_{xz} = w_{,y} - \beta \quad (\text{A-2.13-e})$$

$$e_{xz} = w_{,x} - \alpha \quad (\text{A-2.13-f})$$

Nas mesmas equações, os termos k_{ij} , $i, j = x, y$ determinam as curvaturas da superfície média de referência nas formas:

$$k_{xx} = \alpha_{,x} \quad (\text{A-2.14-a})$$

$$k_{yy} = \alpha_{,y} \quad (\text{A-2.14-b})$$

$$k_{xy} = \alpha_{,y} + \beta_{,x} \quad (\text{A-2.14-c})$$

A-3) Relação Tensão Resultante - Deformação em uma Placa Anisotrópica submetida a um estado plano de tensão

Considere um elemento de placa submetido a um estado plano de tensão, definido pelas tensões σ_x , σ_y e τ_{xy} , conforme mostra a Fig. (A-3.1). Essas tensões surgem devido as forças e os momentos que atuam na placa. Esses momentos e as forças, ambas por unidade de comprimento, são denominadas de tensões resultantes de flexão e tensões resultantes de membrana. De acordo com a Fig. (A-3.1) essas tensões são determinadas através das seguintes equações:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z \, dz \quad (\text{A-3.1-a})$$

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (\text{A-3.1-b})$$

onde M_x , M_y e M_{xy} são as tensões resultantes de flexão e N_x , N_y e N_{xy} tensões resultantes de membrana.

Considere uma placa constituída de N lâminas ortotrôpicas, com seus eixos de ortotropia 1 e 2 mutuamente perpendiculares. Seja θ_I o ângulo formado entre os eixos 1 da lâmina I , de espessura t_I , e o eixo de simetria x da placa. Nas direções 1 e 2 a lâmina possui módulos de Young E_1 e E_2 respectivamente. ν_{12} e ν_{21} são os coeficientes de Poisson E , G_{12} o módulo de rigidez ao cisalhamento. A Fig. (A-3.2) mostra a disposição da lâmina I com relação aos eixos de simetria x e y , da placa.

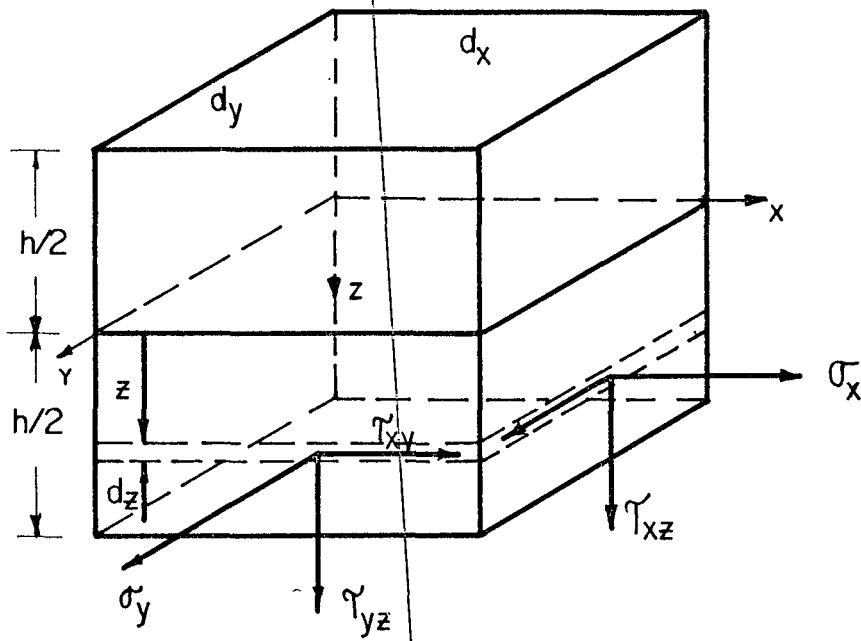


FIG. (A-3.1) Estado triaxial de tensões em um elemento de placa de altura h .

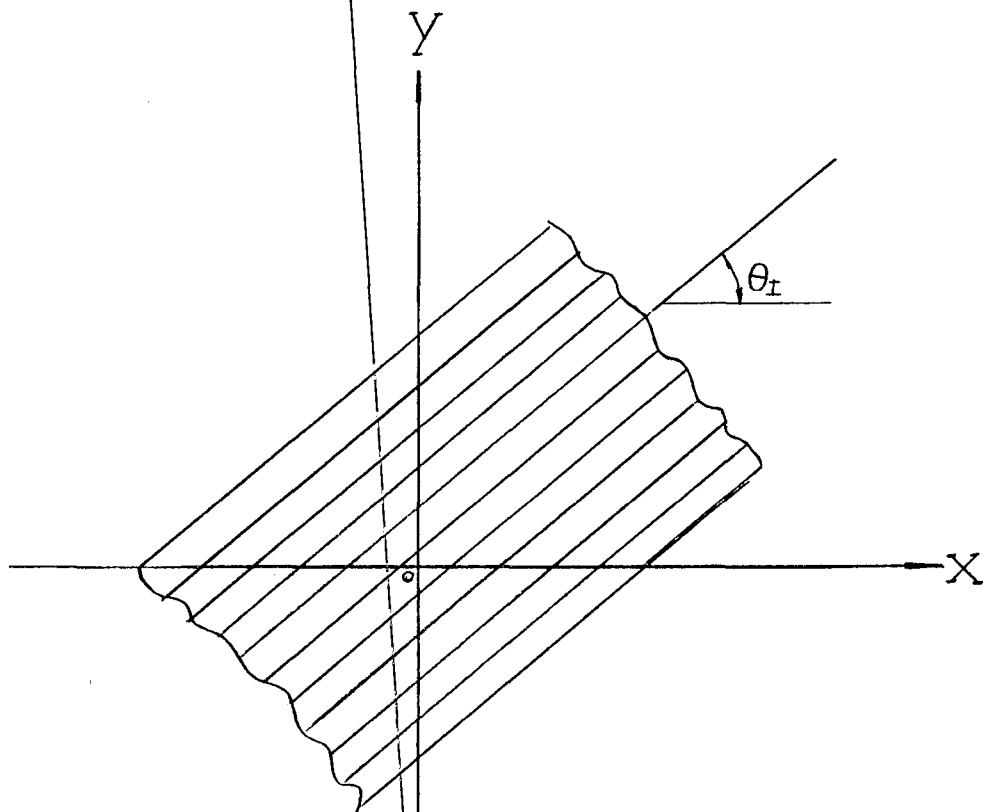


Fig. (A-3.2) - Orientação dos eixos maiores propriedades da lâmina I com relação aos eixos de simetria X e Y da placa.

Desprezando-se o efeito de temperatura, as relações tensões deformações da lâmina I nas direções 1 e 2 são:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{vmatrix}_I \cdot \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}_I \quad (\text{A-3.2})$$

onde

$$C_{11} = E_1 / (1 - \nu_{12} \nu_{21}) \quad (\text{A-3.3-a})$$

$$C_{22} = E_2 / (1 - \nu_{12} \nu_{21}) \quad (\text{A-3.3-b})$$

$$C_{33} = G_{12} \quad (\text{A-3.3-c})$$

$$C_{12} = \nu_{21} E_1 / (1 - \nu_{12} \nu_{21}) \quad (\text{A-3.3-d})$$

$$C_{21} = \nu_{12} E_2 / (1 - \nu_{12} \nu_{21}) \quad (\text{A-3.3-e})$$

Da Eq (A-3.2) determina-se

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}_I = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{33} \end{vmatrix}_I \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}_I \quad (\text{A-3.4})$$

onde

$$\begin{aligned} S_{11} &= 1/E_1 & S_{22} &= 1/E_2 \\ S_{12} &= -\nu_{21}/E_2 & S_{21} &= -\nu_{12}/E_1 \\ S_{33} &= 1/G_{12} \end{aligned} \quad (\text{A-3.5})$$

As tensões no sistema de eixo X,Y em função das tensões no sistema 1,2 podem ser obtidas através da seguinte transformação:

$$\{ \sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy} \}^t = \underset{\sim}{T}^{-1} \{ \sigma_1 \ \sigma_2 \ \tau_{12} \}^t \quad (\text{A-3.6})$$

onde $\underset{\sim}{T}^{-1}$ é a matriz de transição do sistema de coordenadas 1, 2 para o sistema X,Y, definida pela seguinte equação:

$$\tilde{T} = \begin{vmatrix} \cos^2 \theta_I & \sin^2 \theta_I & -2 \sin \theta_I \cos \theta_I \\ \sin^2 \theta_I & \cos^2 \theta_I & 2 \sin \theta_I \cos \theta_I \\ \sin \theta_I \cos \theta_I & -\sin \theta_I \cos \theta_I & \cos^2 \theta_I - \sin^2 \theta_I \end{vmatrix} \quad (\text{A-3.7})$$

De forma similar, as deformações no sistema de coordenadas x, y , em função das deformações no sistema 1,2, são:

$$\{\epsilon_{xx} \ \epsilon_{yy} \ \gamma_{xy}\}_I^t = \underset{\sim}{R} \cdot \underset{\sim}{T}^{-1} \underset{\sim}{R}^{-1} \{\epsilon_{11} \ \epsilon_{22} \ \gamma_{12}\}_I^t \quad (\text{A-3.8})$$

onde $\underset{\sim}{R}$ é uma matriz na forma:

$$\underset{\sim}{R} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad (\text{A-3.9})$$

Das eqs. (A-3.2; A-3.7 e A-3.8) conclui-se que:

$$\{\sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy}\}_I^t = \underset{\sim}{T}^{-1} \cdot [C_{ij}] \cdot \underset{\sim}{R} \underset{\sim}{T}^{-1} \underset{\sim}{R}^{-1} \{\epsilon_{xx} \ \epsilon_{yy} \ \gamma_{xy}\} \quad (\text{A-3.10})$$

Na eq. (A-3.10) o produto $\underset{\sim}{T}^{-1} \cdot [C_{ij}] \cdot \underset{\sim}{R} \underset{\sim}{T}^{-1} \underset{\sim}{R}^{-1}$ resulta numa matriz $[Q_{ij}]_I$, $i, j = 1, 3$, denominada de Matriz de Rigidez Equivalente, da lâmina I, no sistema de eixos x, y . Os termos dessa matriz são determinados pelas seguintes equações:

$$Q_{11} = C_{11} m^4 + 2(C_{12} + 2 C_{33}) n^2 m^2 + C_{22} n^4 \quad (\text{A-3.11-a})$$

$$Q_{12} = (C_{11} + C_{22} - 4 C_{33}) n^2 m^2 + C_{12} (m^4 + n^4) \quad (\text{A-3.11-b})$$

$$Q_{22} = C_{11} n^4 + 2(C_{12} + 2 C_{33}) n^2 m^2 + C_{22} m^4 \quad (\text{A-3.11-c})$$

$$Q_{13} = (C_{11} - C_{12} - 2 C_{33}) n m^3 + (C_{12} - C_{22} + 2 C_{33}) m^3 n \quad (\text{A-3.11-d})$$

$$Q_{23} = (C_{11} - C_{12} - 2 C_{33}) n^3 m + (C_{12} - C_{22} + 2 C_{33}) n m^3 \quad (\text{A-3.11-e})$$

$$Q_{33} = (C_{11} + C_{22} - 2 C_{12} - 2 C_{33}) m^2 n^2 + C_{33} (m^4 + n^4) \quad (\text{A-3.11-f})$$

onde $m = \cos \theta_I$; $n = \sin \theta_I$. Note que apesar da ortotropia da lâmina I no sistema de coordenadas 1,2, a Matriz de Rigidez equivalente no sistema de coordenadas X Y pode ter todos os termos não nulos.

O estado de tensões da placa no sistema de coordenadas X Y é determinado pelo somatório dos estados de todas as lâminas no mesmo sistema, ou seja:

$$\{ N_x \ N_y \ N_{xy} \}^t = \sum_{I=1}^N \int_{z_{I-1}}^{z_I} \{ \sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy} \}_I^t dz \quad (\text{A-3.12})$$

e

$$\{ M_x \ M_y \ M_{xy} \}^t = \sum_{I=1}^N \int_{z_{I-1}}^{z_I} \{ \sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_{xy} \}_I^t z dz \quad (\text{A-3.13})$$

As eqs (A-3.12 e A-3.13), conforme as eqs (A-3.10), podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{I=1}^N \int_{z_{I-1}}^{z_I} \left\{ \begin{array}{c} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ & Q_{22} & Q_{23} \\ \text{SIM} & & Q_{33} \end{array} \right\}_I \cdot \begin{Bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{xy} \end{Bmatrix} + \left\{ \begin{array}{c} z k_{xx} \\ z k_{yy} \\ z k_{xy} \end{array} \right\}_I dz \quad (\text{A-3.14-a})$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{I=1}^N \int_{z_{I-1}}^{z_I} \left\{ \begin{array}{c} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ & Q_{22} & Q_{23} \\ \text{SIM} & & Q_{33} \end{array} \right\}_I \cdot \begin{Bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{xy} \end{Bmatrix} + \left\{ \begin{array}{c} z k_{xx} \\ z k_{yy} \\ z k_{xy} \end{array} \right\}_I z dz \quad (\text{A-3.14-b})$$

Como os termos e_{ij} e k_{ij} , $i, j = x, y$ são funções independentes da variável z , após a integração e efetuado o somatório obtêm-se:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ & A_{22} & A_{23} \\ \text{SIM} & & A_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ & B_{22} & B_{23} \\ \text{SIM} & & B_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} k_{xx} \\ k_{yy} \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{A-3.15-a})$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ & B_{22} & B_{23} \\ \text{SIM} & & B_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ & D_{22} & D_{23} \\ \text{SIM} & & D_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} k_{xx} \\ k_{yy} \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{A-3.15-b})$$

onde os termos A_{ij} , B_{ij} e D_{ij} , $i, j = 1, 3$, são os respectivos termos das matrizes de rigidez de membrana, de acoplamento e de flexão, determinados pelas seguintes equações:

$$A_{ij} = \sum_{I=1}^N (Q_{ij})_I (z_I - z_{I-1}) \quad (\text{A-3.16-a})$$

$$B_{ij} = \sum_{I=1}^N (Q_{ij})_I (z_I^2 - z_{I-1}^2) / 2 \quad (\text{A-3.16-b})$$

$$D_{ij} = \sum_{I=1}^N (Q_{ij})_I (z_I^3 - z_{I-1}^3) / 3 \quad (\text{A-3.16-c})$$

Em alguns tipos de placas, dependendo da posição da superfície média de referência e do número de lâminas no laminado, as constantes B_{ij} podem ser todas ou quase todas nulas. Quando todas forem nulas a placa é denominada de simétrica.

A Fig.(A-3.3) mostra um corte ao longo da espessura de um laminado de N lâminas ortotrópicas, com suas respectivas cotas z_I em relação ao plano x - y onde se encontra a superfície média de referência.

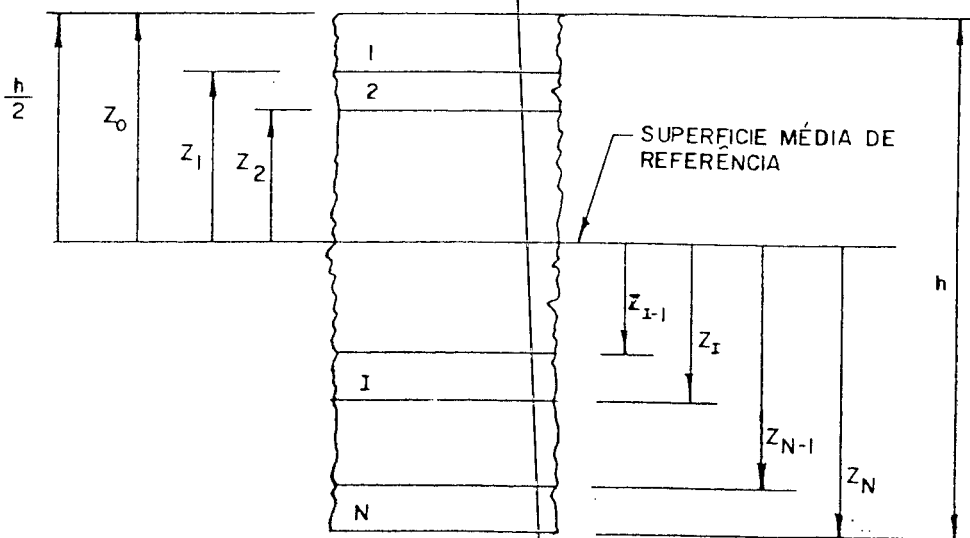


Fig. (A-3.3) - Laminado com N lâminas de espessura h .

APÊNDICE B

PROGRAMA COMPUTACIONAL

INTRODUÇÃO

O programa computacional apresentado neste Apêndice foi elaborado em linguagem FORTRAN com o objetivo de solucionar o problema de auto-valor, $G - \lambda M = 0$, na flambagem de placas laminadas retangulares. Onze subrotinas foram utilizadas na montagem do programa, todas em dupla precisão. A Fig. B-1 mostra o fluxograma do programa principal.

Programa Principal

No Programa Principal deve-se informar inicialmente os seguintes dados:

- a) NLAM - número de lâminas no laminado
- b) ICAR - número de dados a serem armazenados na subrotina dados
- c) ITPL - tipo da placa; se for simétrica fazer ITPL = 1; se antissimétrica ITPL = 2
- d) L — numero de termos da série de FOURRIER a serem utilizados.

Após a entrada dos referidos dados, o programa principal chama a subrotina " CELAST " responsável pelo armazenamento das propriedades materiais de cada lâmina:

E_1 , E_2 , ν_{12} e G_{12} . Além desses dados são ainda armazenados: "Teta" (orientação das fibras de cada lâmina com relação ao eixo do laminado); "T" (espessura da lâmina) e a distância da superfície média de cada lâmina com relação a superfície média de referência do laminado.

O aspecto de placa "R", as razões de carga "Q" e "H" são todas armazenadas na subrotina DADOS.

Com as informações contidas na subrotina CELAST, as constantes de rigidez do laminado, A, B e D, são determinadas através das subrotinas Q ORTO, Q ANISO e C PROP. A subrotina Q ORTO é responsável pela determinação das rigidez, de cada lâmina ortotrópica, C_{11} ; C_{12} ; C_{22} e C_{33} , definidas no Apêndice A. A subrotina Q ANISO determina as rigidez equivalente, Q_{ij} , $i, j = 1, 3$, também definidas no Apêndice A. As rigidez de membrana, de acoplamento e de flexão são todas calculadas a partir dos Q_{ij} , através da subrotina C PROP [17].

No desenvolvimento deste trabalho, verificou-se que tanto a matriz $\underset{\sim}{G}$ quanto a matriz $\underset{\sim}{M}$ dependem do tipo da placa a ser analisada. Se a placa for simétrica o programa principal chama a subrotina "SIME". Esta subrotina é responsável pela montagem da matriz global de rigidez $\underset{\sim}{PK} = \underset{\sim}{G}$ e pela determinação da matriz global de carga $\underset{\sim}{pw} = \underset{\sim}{M}$. Se a placa é antissimétrica, o programa chama a subrotina ANTI. Se a placa é antissimétrica Cross-Ply esta subrotina determina as matrizes $\underset{\sim}{PK} = \underset{\sim}{G}$ e $\underset{\sim}{pw} = \underset{\sim}{M}$; se for antissimétrica Angle-Ply a

mesma determina $\underset{\sim}{Q}K = \underset{\sim}{G}$ e $\underset{\sim}{Q}W = \underset{\sim}{M}$.

Determinadas $\underset{\sim}{G}$ e $\underset{\sim}{M}$, o problema de auto valor pode ser escrito na forma padrão $\underset{\sim}{P} - \lambda \underset{\sim}{I} = 0$, onde $\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{G} \cdot \underset{\sim}{M}^{-1}$.

A inversão da matriz $\underset{\sim}{M}$ é feita através da subrotina BINV, implementada neste programa com algumas modificações da subrotina CHAP 8 [9].

Todos os auto-valores são determinados por intermédio das subrotinas "SELM" e "SHQR2". A matriz SELM transforma a matriz $\underset{\sim}{P}$ na forma superior de Hessemberg, onde $P_{ij} = 0$ sempre que $i > j + 2$ [7]. Transformada a matriz $\underset{\sim}{P}$, os auto-valores " λ " são determinados na subrotina SHQR2. Esta subrotina utiliza o algoritmo QR [11], e foi adaptada de sua forma original em Linguagem BASIC para a Linguagem FORTRAN.

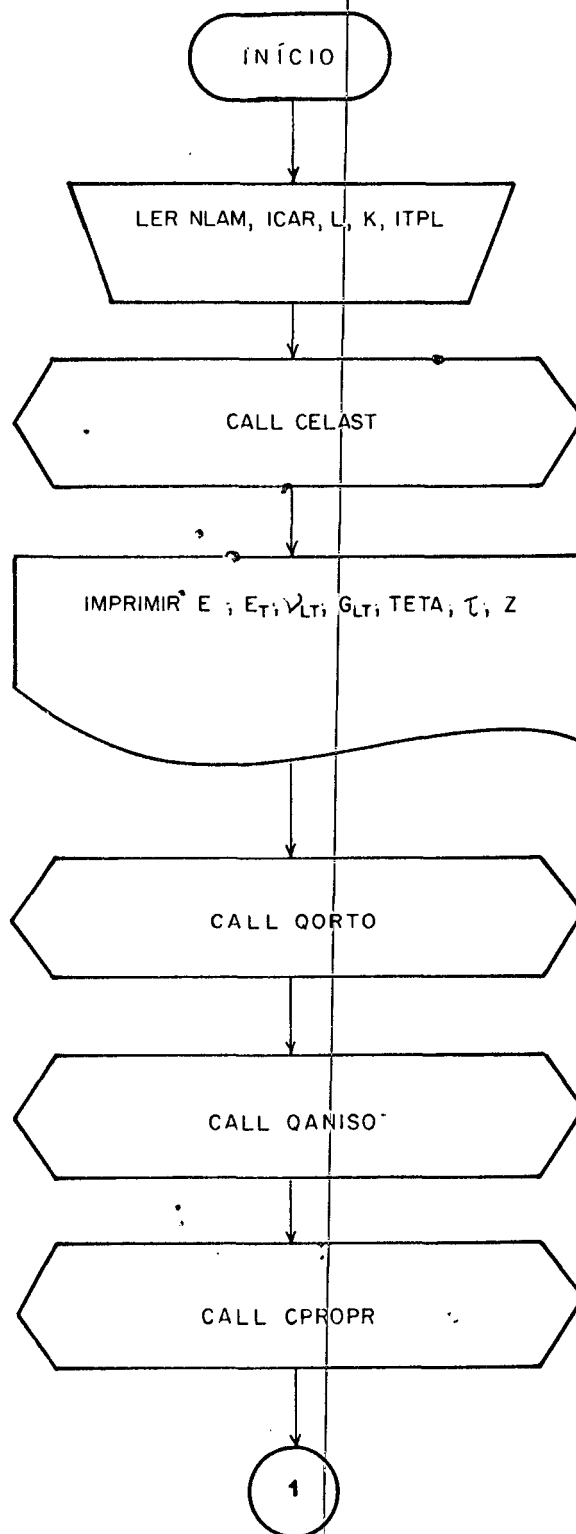


Fig. (B-1) - Fluxograma do Programa Principal

