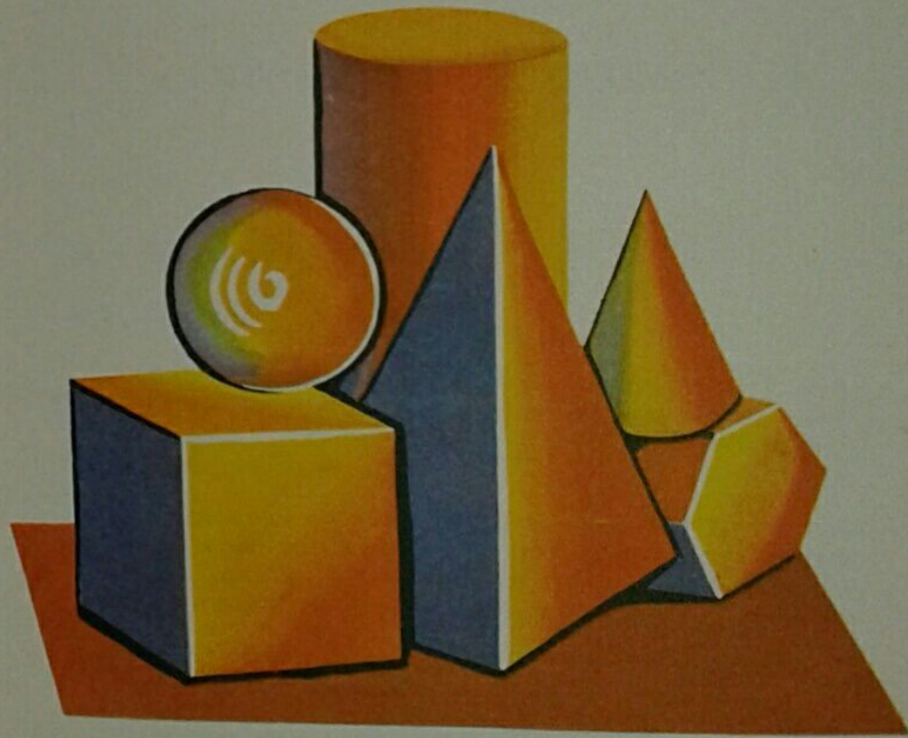
UNIDADE — II

GEOMETRIA

Capitulos

GEOMETRIA



UNIDADE II

GEOMETRIA

V - INTRODUÇÃO À GEOMETRIA

LEITURA

30 — Introdução à Geometria

30.1 *Geometria*

Intuitivamente podemos dizer que a Geometria é uma ciência que estuda entes matemáticos denominados "*figuras*". Etmològicamente a palavra Geometria significa *medida de terra*.

Documentos históricos, encontrados nos últimos cem anos na região da Mesopotâmia, revelam que os babilônios (por volta de 1700 a.C) tinham um considerável acúmulo de conhecimentos sôbre entes geométricos.

Algumas tábuas babilônicas, contém instruções para o cálculo de áreas de terrenos de formas triangulares e trapezoidais, outras para o cálculo do volume de alguns prismas, de corpos redondos, etc.

Tábuas e papiros egípcios, mostram-nos, que por essa época os seus conhecimentos geométricos se equivaliam ao dos babilônios.

Apesar de todo conhecimento acumulado pelos babilônios e egípcios, só podemos encarar a geometria como ciência no sentido hodierno da palavra a partir dos séculos *VI* e *V* a.C., na Grécia.

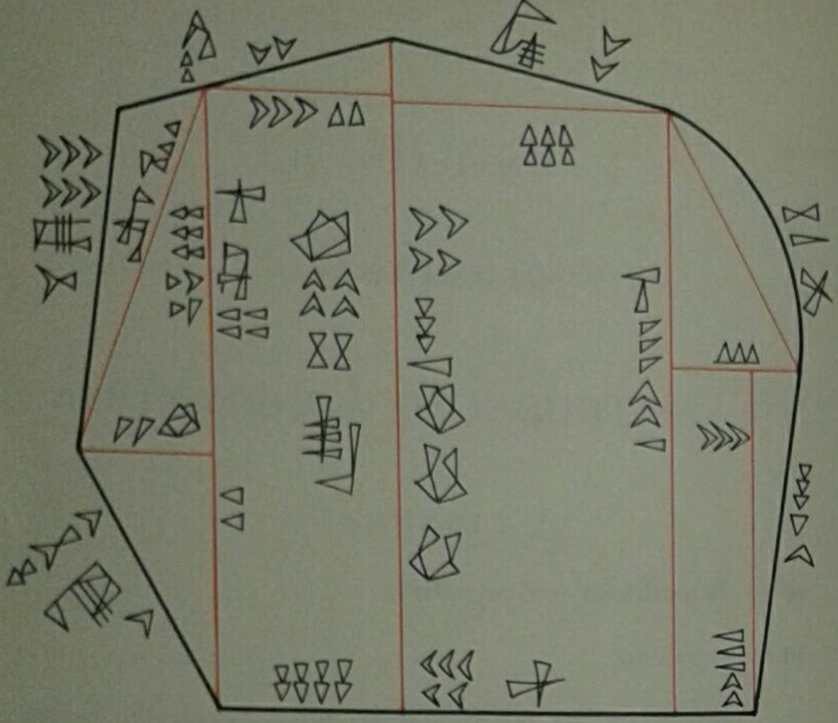


FIG. 19

Cópia de uma tábua babilônica mostrando o cálculo da área de um terreno.

30.2 *A Geometria Grega*

A Geometria grega se distingue da babilônica e egípcia pela maneira de encará-la.

Os gregos fizeram-na uma ciência pròpriamente dita sem a preocupação de suas aplicações práticas.

As diversas tentativas feitas pelos mesmos para resolver problemas relacionados com a geometria, fizeram com que aparecesse o método axiomático dedutivo.

Êsse método consiste em admitir como verdadeiras certas proposições e a partir delas, dedutivamente, chegar a proposições mais gerais.

Das obras dos matemáticos gregos que fundaram a geometria, tais como Tales (686 a.C.), Pitágoras (550 a.C.) e Euclides (410 a.C.) poucas chegaram até os nossos dias.

Entre elas podemos destacar a de Euclides, intitulada "Os Elementos".

"Os Elementos" de Euclides é um conjunto de 13 livros dedicados ao fundamento e desenvolvimento lógico e sistemático da geometria.

O primeiro livro trata das questões que são fundamentais para a geometria, e o seu estilo, sua ordenação, serviram de normas diretoras, para tôdas as outras obras posteriores de matemática.

30.3 *A Geometria de Descartes*

Um matemático francês do século *XII* chamado René Descartes descobriu uma maneira simples, porém fecunda, de estudar a geometria euclidiana.

Descartes notou que a posição de um ponto do plano, terá a sua posição perfeitamente determinada por meio de um par de *números reais*: um número como medida de uma distância num eixo "horizontal", e o outro como medida de uma distância num eixo "vertical".

Tal sistema não é nôvo a quem já esteja acostumado a localizar uma cidade num mapa.

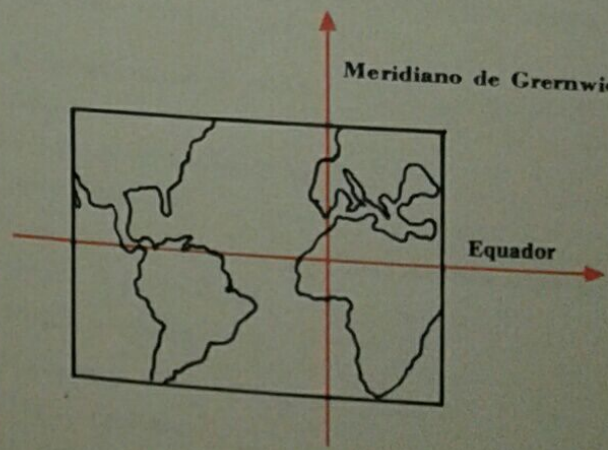


FIG. 20

O eixo vertical é o Meridiano que passa por Greenwich, e o "horizontal" é o Equador; o par de números, neste caso, é constituído pela latitude e longitude do lugar.

Ao leitor

Faremos aqui um estudo da geometria utilizando a idéia de Descartes.

Você já trabalhou com conjunto de pontos no primeiro volume desta série de livros.

Recordaremos a seguir certas noções importantes como a de plano, retas concorrentes, retas paralelas, etc.

VI - O PLANO CARTESIANO

31 — O Plano

Na figura abaixo desenhamos um plano (modêlo de Plano) *P*

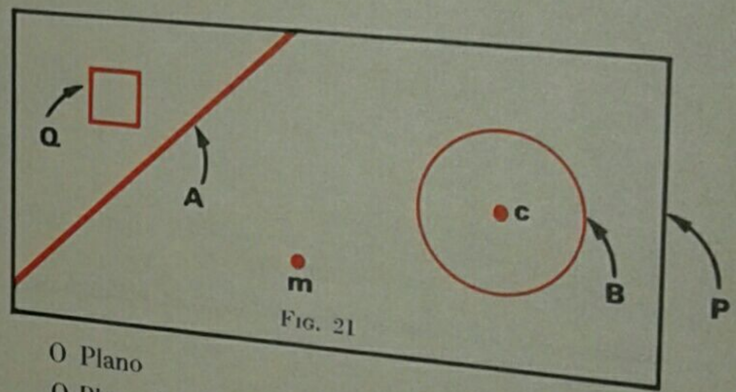


FIG. 21

O Plano

O Plano *P* é um conjunto infinito de pontos. Êle contém todos os outros conjuntos de pontos que iremos estudar, tais como retas, circunferências, . . . etc.

31.1 A circunferência *B* está .... no plano *P*.
Resp.: contida

31.2 A reta *A* está contida no ....
Resp.: plano *P*

31.3 Representamos o plano por meio de uma letra maiúscula porque o plano é um ....
Resp.: conjunto

31.4 O ponto *m* .... ao plano *P*.
Resp.: pertence

31.5 O conjunto $\{m\}$ está .... no plano *P*.
Resp.: contido

31.6 Complete as reticências abaixo usando convenientemente cada um dos sinais: $\in$ e $\subset$.

(1) A .... P

(2) B .... P

(3) c .... P

(4) $\{c\}$ .... P

(5) $\{m\}$ .... P

(6) m .... P

Resp.: (1) $\subset$ (4) $\subset$

(2) $\subset$ (5) $\subset$

(3) $\in$ (6) $\in$

32 — Sumário

32.1 Acabamos de adotar o plano como um conjunto infinito de pontos que contém os demais.

Assim, retas, circunferências, quadrados, retângulos ... etc., que são conjuntos de pontos, achar-se-ão contidos no plano.

32.2 Representamos um conjunto de pontos (ou qualquer conjunto) sempre por uma letra maiúscula.

32.3 O ponto é um elemento do plano.

32.4 A reta é um subconjunto do plano.

32.5 O ponto é um elemento da reta, da circunferência, etc.

33 — Intersecção de Conjuntos

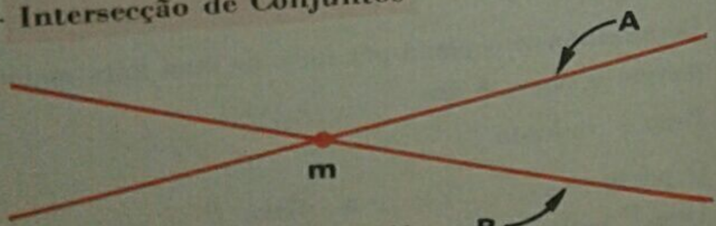


Fig. 22

A figura acima nos mostra duas retas que se cortam num ponto m.

O ponto m é comum às duas retas, e o conjunto $\{m\}$ recebe o nome de *intersecção* de A com B.

$$A \cap B = \{m\}$$

onde o símbolo $\cap$ significa *intersecção*.

33.1 Se $\{m\} = A \cap B$ então m é o ponto .... às retas A e B.

Resp.: comum

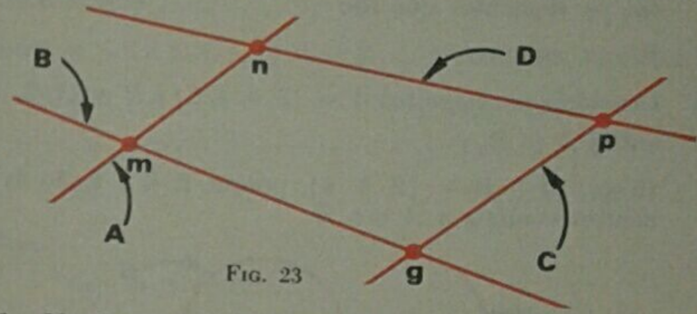


Fig. 23

33.2 Na figura acima temos que

(a) $A \cap B =$ ....

(b) $B \cap C =$ ....

(c) $C \cap D =$ ....

(d) $A \cap D =$ ....

Resp.: (a) $\{m\}$ (c) $\{p\}$

(b) $\{g\}$ (d) $\{n\}$

No caso de dois conjuntos quaisquer A e B a intersecção $A \cap B$ é o conjunto dos elementos que pertencem a A e percentem a B.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

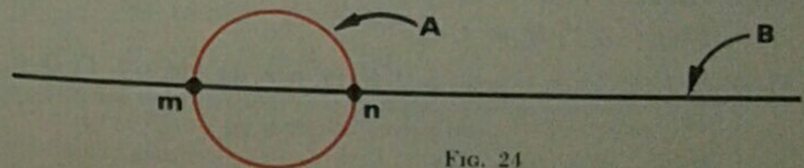


Fig. 24

33.3 Os pontos que pertencem a reta A e a circunferência B da figura acima são ...... e ......

Resp.: m, n

33.4 Sendo A e B a reta e circunferência da figura acima teremos que $A \cap B =$ ....

Resp.: $A \cap B = \{m, n\}$

33.5 O conjunto $\{m, n\}$ é a intersecção com A e B pois m e n são os elementos que são .... a A e B.

Resp.: comuns

33.6 Considere os conjuntos $A = \{2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$ então $A \cap B =$ ....

Resp.: $A \geq B = \{2, 3, 4\}$, porque 2, 3 e 4 são os elementos comuns a A e a B

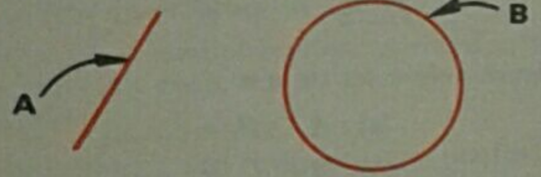


Fig. 25

33.7 A reta A e circunferência B da figura acima não possuem pontos ....

Resp.: comuns

33.8 A intersecção de A com B (na figura acima) é portanto um conjunto ....

Resp.: vazio

33.9 Então $A \cap B =$ ....

Resp.: $A \cap B = \{ \quad \}$

33.10 Se $C = \{a, e, i, o, u\}$ e $D = \{a, b, c, d\}$, então $C \cap D =$ = ...

Resp.: $C \geq D = \{a\}$

33.11 Se $C = \{a, e, i, o, u\}$ e $E = \{a, e, i\}$ então $C \cap E =$ ......

Resp.: $\{a, e, i\} = E$

33.12 Se $C = \{a, e, i, o, u\}$ e $F = \{ \quad \}$ então $C \cap F =$ ......

Resp.: $\{ \quad \}$

33.13 De maneira geral $A \cap \{ \quad \} =$ ......

Resp.: $\{ \quad \}$

34 — Exercícios

34.1 Sendo $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $B = \{1, 2, 3\}$ e $C = \{4, 5\}$, calcular:

(a) $A \cap B$
(b) $A \cap C$
(c) $B \cap C$
(d) $A \cap (B \cap C)$
(e) $(A \cap B) \cap C$
(f) $(A \cap C) \cap B$

Resp.:

(a) $A \cap B = B$
(c) $A \cap C = C$
(c) $B \cap C = \{ \quad \}$
(d) $A \cap (B \cap C) = \{ \quad \}$
(e) $(A \cap B) \cap C = \{ \quad \}$
(f) $(A \cap C) \cap B = \{ \quad \}$

34.2 Repita o exercício 34.1 para $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $B = \{4, 6, 7\}$ $C = \{0, 2, 6, 7\}$

Resp.:

(a) $A \cap B = \{4, 5, 6\}$
(b) $A \cap B = \{1, 2, 6\}$
(c) $B \cap C = \{6, 7\}$
(d) $A \cap (B \cap C) = \{6\}$
(e) $(A \cap B) \cap C = \{6\}$
(f) $(A \cap C) \cap B = \{6\}$

34.3 Dos dois exercícios anteriores você pode concluir que $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (propriedade associativa)

Resp.: sim.

34.4 Se $P = \{a, b, c, d\}$ $Q = \{b, c, d, e, f\}$ e $R = \{a, c, f\}$, escreva os seguintes conjuntos:

(a) $P \cap Q$

(b) $Q \cap P$

(c) $P \cap R$

(d) $Q \cap R$

(e) $P \cap (Q \cap R)$

(f) $(P \cap Q) \cap R$

Resp.:

(a) $\{b, c, d\}$

(b) $\{b, c, d\}$

(c) $\{a, c\}$

(d) $\{c, f\}$

(e) $\{c\}$

(f) $\{c\}$

34.5 Em cada um dos casos da figura abaixo calcule $A \cap B$.

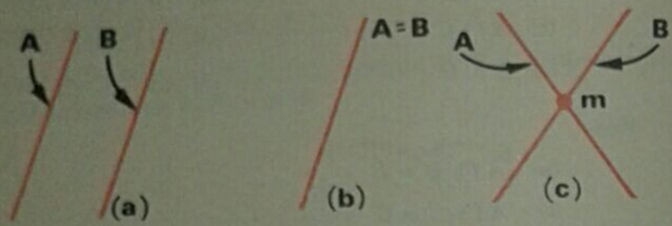


Fig. 26

Resp.:

(a) $A \cap B = \{\ \ \}$

(b) $A \cap B = B$

(c) $A \cap B = \{m\}$

Observação: nos casos (a) e (b) as retas A e B se dizem *paralelas*, no caso (c) A e B se dizem concorrentes.

34.6 Achuriar a parte do diagrama abaixo correspondente a $(A \cap B) \cap C$.

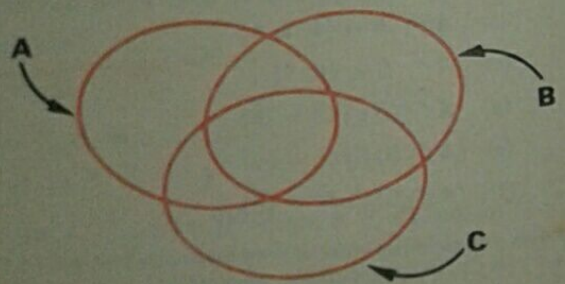


Fig. 27

34.7 Complete

(a) $A \cap A =$ ....

(b) $\{\ \ \} \cap \{\ \ \} =$ ....

(c) $B \cap \{\ \ \} =$ ....

(d) $(A \cap A) \cap A =$ ....

Resp.:

(a) $A \cap A = A$

(b) $\{\ \ \} \cap \{\ \ \} = \{\ \ \}$

(c) $B \cap \{\ \ \} = \{\ \ \}$

(d) $(A \cap A) \cap A = A$

34.8 Sendo P um plano, e A uma reta dêsse plano, calcule $P \cap A$.
Resp.: $P \cap A = A$ pois $A \cap P$.

34.9 Sendo a e b dois pontos da reta A calcule $\{a, b\} \cap A =$ ....
Resp.: $\{a, b\} \cap A = \{a, b\}$.

35 — A Noção de Direção

35.1 Desenhe uma reta paralela à reta A do plano P dado abaixo

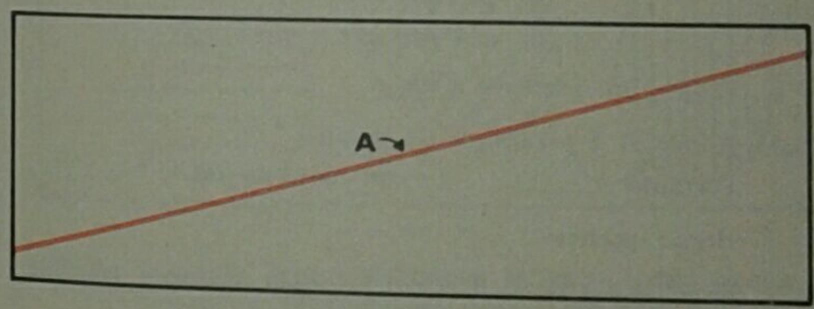


Fig. 28

Você pode desenhar outras retas paralelas a A?
Em caso afirmativo desenhe-as.
Resp.: Sim, eis algumas retas paralelas a A:

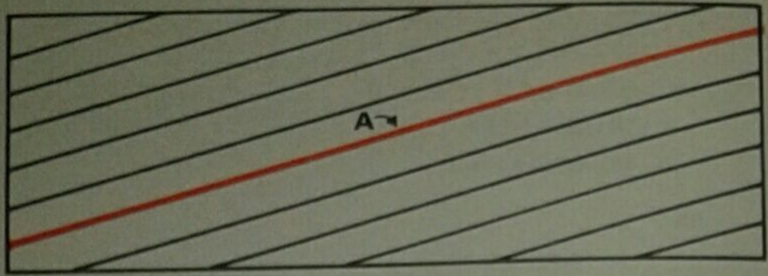


Fig. 29

Você já sabe (intuitivamente) que as retas paralelas à reta A têm a mesma *direção* que A. Usaremos tal fato para definir *direção*:

Chamaremos de *direção de uma reta* A ao conjunto de retas paralelas a essa reta.
Simbologia $dir(A)$ = direção da reta A.

35.2 $Dir(A)$ significa direção da reta A.
Então $dir(A)$ é o conjunto das .... à reta A.

Resp.: paralelas

35.3 Se B é paralela à reta A então B

(*a*) pertence à $dir(A)$

(*b*) não pertence a $dir(A)$

Resp.: (*a*) pertence a dir A

25.4 A reta A é paralela a ela mesma.
Portanto A .... ao conjunto $dir(A)$

Resp.: pertence

35.5 Se $C \in dir(A)$ e $B \in dir(A)$ então podemos concluir que C e B são paralelas a reta ......

Resp.: A

35.6 $C \parallel A$ significa que C é paralela a A.
$B \parallel A$ significa que .... a ......

Resp.: B paralela a A

35.7 A relação de paralelelismos entre retas possui as seguintes propriedades:

1.º) $A \parallel A$ (reflexiva)

2.º) $A \parallel B \Longrightarrow B \parallel A$ (simétrica)

3.º) $A \parallel B$ e $B \parallel C \Longrightarrow A \parallel C$ (............)

Resp.: transitiva

35.8 Como a relação de paralelelismo possui as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva, podemos concluir que a mesma é uma relação

(*a*) de Ordem

(*b*) de Equivalência

Resp.: de Equivalência

35.9 Sendo *dir A* um conjunto de retas paralelas a A e $\parallel$ uma relação de equivalência, podemos concluir que *dir A*:

(*a*) é uma classe de equivalência

(*b*) não é uma classe de equivalência

Resp.: é uma classe de equivalência

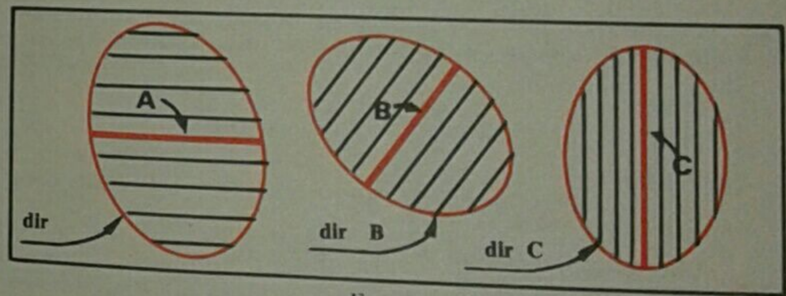


Fig. 30

35.10 Na figura acima mostramos algumas dessas classes de equivalência determinadas pelas retas A, B e C. Sendo *dir A*, *dir B* é *dir C* classes de equivalência poderemos escrever que:

$dir\ A \cap dir\ B = \varnothing$

$dir\ A \cap dir\ C = $ ......

$dir\ C \cap dir\ B = $ ......

Resp.: $\varnothing$, $\varnothing$

Pelo que acabamos de ver tôda *direção* é uma *parte* do plano.

36 — Exercícios

36.1 Quais das afirmações abaixo são verdadeiras e quais são falsas?

(*a*) Se $A \mid\mid B$ então $B \notin dir\ A$

(*b*) Se $A \mid\mid B$ então $B \in dir\ A$

(*c*) Se A não é paralela a B então $B \notin dir\ A$

(*d*) Se A não é paralela a B então $B \in dir\ A$

(*e*) Se $A \mid\mid B$ então $dir\ A = dir\ B$

(*f*) Se $A \mid\mid B$ então $dir\ A \neq dir\ B$

Resp.: (*a*), (*d*) e (*f*) são falsas e (*b*), (*c*) e (*e*) são verdadeiras.

36.2 Se $dir\ B \subset dir\ A$ o que você pode concluir a respeito das retas A e B?

Resp.: São paralelas.

36.3 Se A e B são concorrentes então $dir\ A$ é diferente de $dir\ B$?

Resp.: Sim.

36.4 Tôda reta pertence a uma só direção?

Resp.: Sim, pois se $A \in dir\ B$ e $A \in dir\ C$ então $dir\ B = dir\ C$

36.5 Se A e B são duas retas do plano P, que podemos afirmar a respeito de $dir\ A \cap dir\ B$?

Solução:

Duas retas de P, ou são paralelas ou são concorrentes.

No caso de $A \mid\mid B$ então $dir\ A \cap dir\ B = dir\ A = dir\ B$.

No caso de A e B serem concorrentes então $dir\ A$ e $dir\ B$ não admitem nenhum elemento comum.

Portanto, nesse caso $dir\ A \cap dir\ B = \emptyset$

36.6 Tome uma fôlha de papel P e dobre em duas partes segundo uma reta A como mostra a figura abaixo:

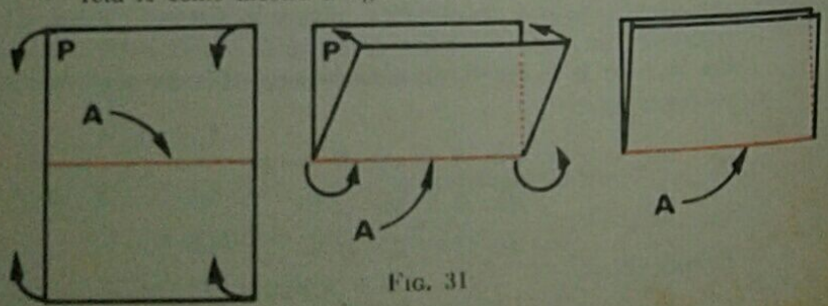


FIG. 31

Fazendo isto você estabeleceu uma transformação $\mathfrak{t}$ de pontos de P em pontos P. Responda agora as seguintes perguntas: (*a*) Os pontos da reta A se transformaram em pontos de uma outra reta ou em pontos dela mesma?

(*a*) Retas de *dir A* se transformaram em retas de *dir A*?

(*c*) O que significa a simbologia

$$\mathfrak{t} : P \longrightarrow P\,?$$

(*d*) O que significa $\mathfrak{t}(A) = A$?

Resp.:

(*a*) Os pontos de A se transformam em pontos de A (Diremos que a reta A é *invariante* na transformação $\mathfrak{t}$)

(*d*) Sim, pois retas paralelas a A se transformarão em retas paralelas a A.

(*c*) A simbologia $\mathfrak{t} : P \longrightarrow P$ significa que $\mathfrak{t}$ é uma aplicação que leva pontos de P a pontos de P. De maneira geral uma transformação num conjunto P qualquer, é uma aplicação que faz a cada elemento de P corresponder um outro elemento do mesmo conjunto (veja o 2.º volume desta série de livros)

(*d*) A simbologia $\mathfrak{t}(A) = A$ significa que $\mathfrak{t}$ transforma a reta A nela mesmo.

36.7 Continue a dobrar a fôlha P do exercício anterior, de modo que a reta A se transforme na reta A como indica a figura abaixo:

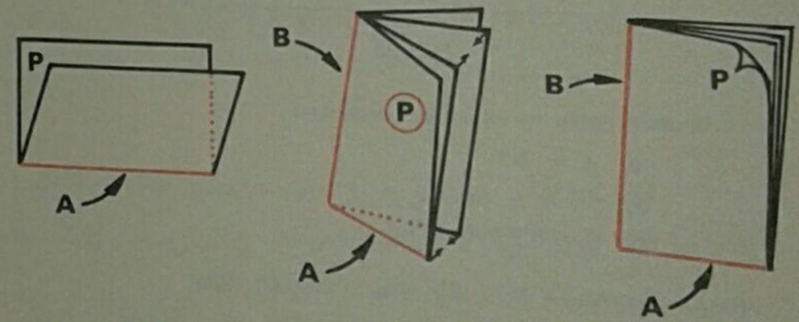


FIG. 32

A nova dobragem se dá por uma outra reta B distinta de A, e estabelece uma outra transformação h de pontos de P em pontos de P. Responda agora as seguintes perguntas:

(*a*) Além da reta A qual é a outra reta invariante nessa transformação?

(*b*) Podemos escrever que $h(B) = B$?

(*c*) A reta B é paralela à reta A?

Resp.:

(*a*) É a reta B segundo a qual fizemos a nova dobragem, pois os pontos de B se transformam nêles mesmos.

(*b*) Podemos, pois $h(B) = B$ significa que os pontos B se transformaram em pontos de B.

(*c*) Não, pois são retas concorrentes.

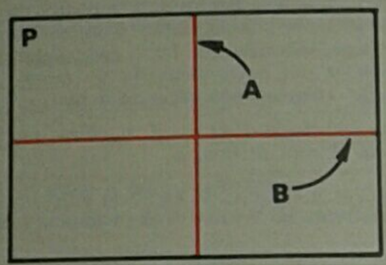
As retas A e B do exercício anterior se dizem perpendiculares.

Simbologia — $A \perp B$ significa A é perpendicular a B.

Observação: Veremos mais tarde uma definição de retas perpendiculares.

36.8 Abra a fôlha P do exercício anterior.

Você obterá um desenho como o da figura abaixo



A⊥B

Fig. 33

Responda agora as seguintes perguntas:

(*a*) $A = B$?

(*b*) dir A = dir B?

(*c*) $A \perp B \Longrightarrow B \perp A$?

Resp.: (*a*) Não (*b*) Não (*c*) Sim.

37 — Retas Perpendiculares

Nos últimos exercícios, você tomou contacto com a *noção de retas perpendiculares*, através de uma experiência geométrica. Note que não definimos ainda o que são retas perpendiculares, isto faremos em momento oportuno.

Aqui, iremos supor que tal experiência foi suficiente para você ter uma noção de retas perpendiculares.

37.1 Eis duas retas perpendiculares A e B.

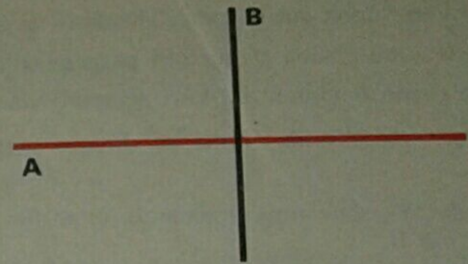


Fig. 34

Desenhe um certo número de retas que pertençam à *dir A*, e umas outras tantas que pertençam à *dir B*.

Resp.:

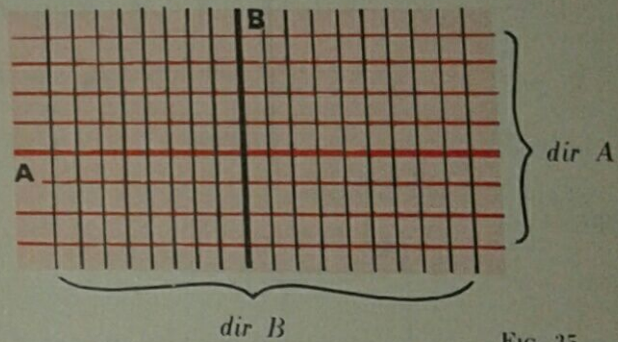


Fig. 35

37.2 Tôda reta de *dir A* é:

(*a*) perpendicular a tôda reta de *dir B*

(*b*) paralela a tôda reta de *dir B*.

Resp.: (*a*) perpendicular a tôda reta de *dir B*.

37.3 A direção de B se diz perpendicular à direção de A, e simbòlicamente, escrevemos que:

(*a*) *dir B* $\perp$ *dir A*

(*b*) *dir B* $\perp$ *dir A*

(*c*) *dir B* $\parallel$ *dir A*

Resp.: (*a*) *dir B* $\perp$ *dir A*

37.4 Podemos dizer que a uma direção dada

(*a*) existem várias outras perpendiculares a ela

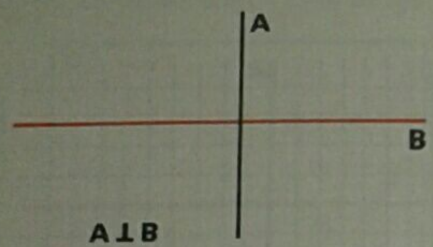
(*b*) existe uma e uma só direção perpendicular a ela

(*c*) não existe nenhuma direção perpendicular a ela

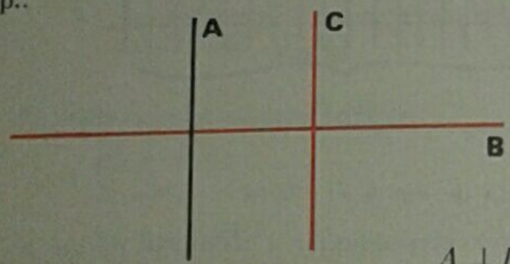
Resp.: (*b*) existe uma e uma só direção perpendicular a ela.

A tôda *dir* A existe uma e sòmente uma *dir* B tal que *dir* $A \perp$ *dir* B.

37.5 Dadas duas retas perpendiculares A e B (veja figura abaixo) desenhe uma terceira reta C perpendicular a B



Resp.:



$A \perp B$ e $C \perp B$

Fig. 36

37.6 A reta C da figura acima pertence a:

(*a*) *dir* B

(*b*) *dir* A

(*c*) Nenhuma das direções *dir* A e *dir* B

Resp.: (*b*) *dir* A

37.7 Tôda reta pertencente a *dir* A é paralela a A. A reta $C \in$ *dir* A logo C é .... a A

Resp.: paralela

37.8 Portanto se $A \perp B$ e $C \perp B$ então C ..... A

Resp.: $\parallel$

Duas retas A e C perpendiculares a uma terceira são paralelas entre si.

37.9 Os símbolos $A \perp B$ e $C \perp B$ podem ser reunidos num só $A \perp B \perp C$. Assim $A \perp B \perp C$ significa que A é perpendicular a B e B é .... a C

Resp.: perpendicular

37.10 Se $A \perp B \perp C$ então

(*a*) A é perpendicular a C

(*b*) A é paralela a C

(*c*) A é paralela a B

Resp.: (*b*) A é paralela a C

$$A \perp B \perp C \Longrightarrow A \parallel C$$

37.11 Com o têrmo $A \perp B \parallel C$ queremos significar que

(*a*) $A \perp B$ e $B \perp C$

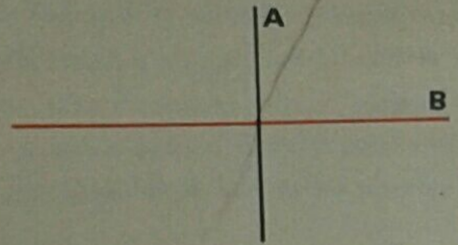
(*b*) $A \perp B$ e $A \parallel C$

(*c*) $A \perp B$ e $B \parallel C$

(*d*) $A \parallel B$ e $B \perp C$

Resp.: (*c*) $A \perp B$ e $B \parallel C$

37.12 Na figura abaixo você tem $A \perp B$ desenhe C tal que $A \perp B \parallel C$



Resp.:

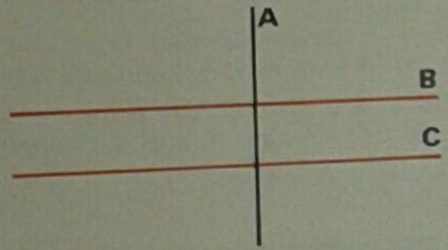


Fig. 37

38 — Sumário

38.1 *Direção de uma reta A*

Direção de uma reta A é o conjunto de tôdas as retas paralelas a A.

Em símbolos

$$dir\ A = \{\text{retas } X \mid X \parallel A\}$$

38.2 *Relação de paralelismo*

A relação $\parallel$ é uma relação em classes de equivalências.

A relação $\parallel$ é uma relação de equivalência e portanto parte o plano P em classes de equivalências.

Cada uma dessas classes de equivalência é uma *direção*.

38.3 *Conseqüências*

(a) $A \parallel B \Longleftrightarrow dir\ A = dir\ B$

(b) $dir\ A \neq dir\ B \Longleftrightarrow A$ e B não são paralelas

(c) $A \parallel B \Longrightarrow B \parallel C$

(d) $A \parallel B$ e $B \parallel C \Longrightarrow A \parallel C$

(e) $A \parallel A$

(f) $A \parallel B \Longrightarrow A \in dir\ B$

38.4 Relação de *perpendicularismo*

Dado $dir\ A$ existe uma e sòmente uma $dir\ B$ tal que $dir\ A \perp dir\ B$

38.5 *Conseqüências*

(a) Se $dir\ A \perp dir\ B \Longleftrightarrow A \perp B$

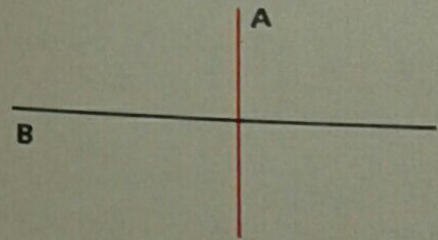
(b) $A \perp B \perp B \Longrightarrow A \parallel C$

39 — Exercícios

39.1 O que significa o têrmo $A \perp B \mid\mid C \perp D$?

Resp.: significa que $A \perp B$, $B \mid\mid C$ e $C \perp D$

39.2 Na figura abaixo complete $A \perp B \mid\mid C \perp D$



Resp.:

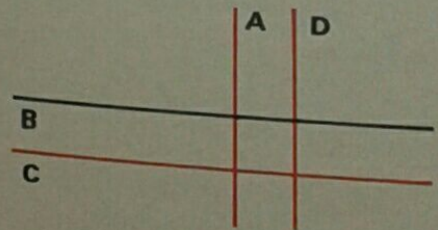


Fig. 38

39.3 De $A \perp B \mid\mid C \perp D$ podemos concluir que $A \mid\mid C$ e $B \mid\mid D$? e $B \mid\mid C$?

Resp.: Não, Sim.

39.4 O que significa que $A \perp B$ e $B || C$

Resp.: Significa que $A \perp B$ e $B || C$.

39.5 De $A \perp B || C$ podemos concluir que $A \perp C$?

Resp.: Sim.

39.6 Complete as implicações abaixo

(a) $A || B || C \Longrightarrow A || C$

(b) $A || B \perp C \perp D \Longrightarrow A$ .... D

(c) $A \perp B || B' \Longrightarrow A$ .... B'

(d) $A' || A \perp B \Longrightarrow A'$ .... B

(e) $A \perp C || B \Longrightarrow A$ .... B

Resp.:

(b) $||$

(c) $\perp$

(d) $\perp$

(e) $\perp$

39.7 Complete $A \perp B \perp C \Longrightarrow A$ C

Resp.: $||$

39.8 Sendo $A \perp B \perp C \perp D$ o quê podemos afirmar com respeito às retas A e D?

Solução:

$$A \perp B \perp C \Longrightarrow A || C$$

Portanto

$$A \perp B \perp C \perp D \Longrightarrow A || C \perp D = A \perp D$$

A e D são, portanto, perpendiculares.

39.9 Faça um desenho de $A \perp B \perp C \perp D$

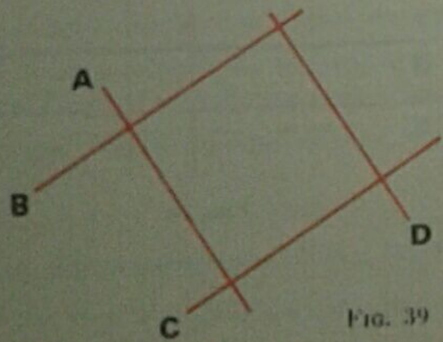


Fig. 39

39.10 Complete a tabela abaixo, sabendo que $A \perp B$

	A	B
A		$\perp$
B		

Resp.:

	A	B
A	$||$	$\perp$
B	$\perp$	$||$

Fig. 40

pois $A || A$, $A \perp B$, $B \perp A$ e $B || B$

39.11 Complete a tabela abaixo sabendo que $A || B$.

	A	B
A		$||$
B		

Resp:

	A	B
A	$||$	$||$
B	$||$	$||$

Fig. 41

39.12 Complete a tabela abaixo sabendo que $A \perp B \perp C$

	A	B	C
A		$\perp$	
B			$\perp$
C			

Resp.:

	A	B	C
A	$\parallel$	$\perp$	$\parallel$
B	$\perp$	$\parallel$	$\perp$
C	$\parallel$	$\perp$	$\parallel$

FIG. 42

39.13 O que se pode dizer das retas A, B, C, D, da tabela abaixo

	A	B	C	D
A	$\parallel$	$\perp$	$\parallel$	$\perp$
B	$\perp$	$\parallel$	$\perp$	$\parallel$
C	$\parallel$	$\perp$	$\parallel$	$\perp$
D	$\perp$	$\parallel$	$\perp$	$\parallel$

FIG. 43

Resp.: $A \perp B \perp C \perp D$.

39.14 Complete a tabela abaixo sabendo que $A \perp B \parallel C$.

	A	B	C
A		$\perp$	
B			$\parallel$
C			

Resp.:

	A	B	C
A	$\parallel$	$\perp$	$\perp$
B	$\perp$	$\parallel$	$\parallel$
C	$\perp$	$\parallel$	$\parallel$

FIG. 44

39.15 Seja A uma reta do plano P e m um ponto de P não pertencente a A.

Pergunta-se:

(*a*) Quantas retas paralelas a A existem passando por m?

(*b*) Quantas retas perpendiculares a A existem passando por m?

Resp.:

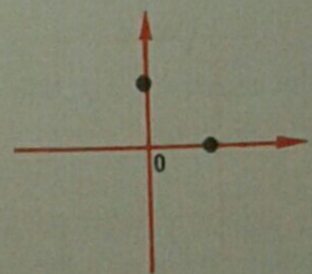
(*a*) uma e uma só

(*b*) uma e uma só

40 — Sistema coordenado bidimensional ou de coordenadas cartesianas

A fim de construir um sistema coordenado bidimensional (ou sistema de coordenadas cartesianas), devemos desenhar duas retas orientadas, perpendiculares entre si em qualquer lugar do plano. Essas retas orientadas devem estar, cada uma, munidas de um sistema coordenado unidimensional.

40.1 Dadas as retas perpendiculares abaixo, desenhe em cada uma delas um sistema coordenado unidimensional.



Resp.:

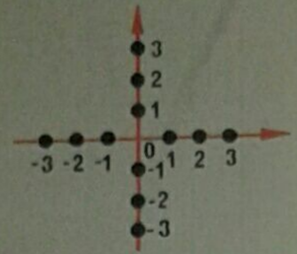
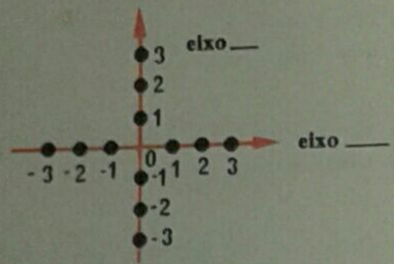


Fig. 45

40.2 O eixo vertical recebeu o nome de *eixo y* e o horizontal de *eixo x*.

Marque no sistema de coordenadas cartesianas dado abaixo o *eixo x* e o *eixo y*.



Resp.:

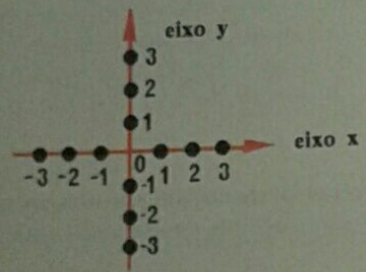


Fig. 46

40.3 A origem comum ao eixo x e y está representado pela letra .....

Resp.: O

40.4 Você escolheu a mesma unidade de comprimento tanto para o eixo x como para o eixo y?

Circule entre as possibilidades dadas abaixo, aquilo que você pensa ser mais conveniente.

(*a*) A unidade de comprimento no eixo x é diferente da unidade de comprimento no eixo y.

(*b*) Tanto em x como em y as unidades de comprimento são iguais.

Resp.: (*b*) é mais conveniente, mas não é necessário que a unidade de x seja igual a unidade de y.

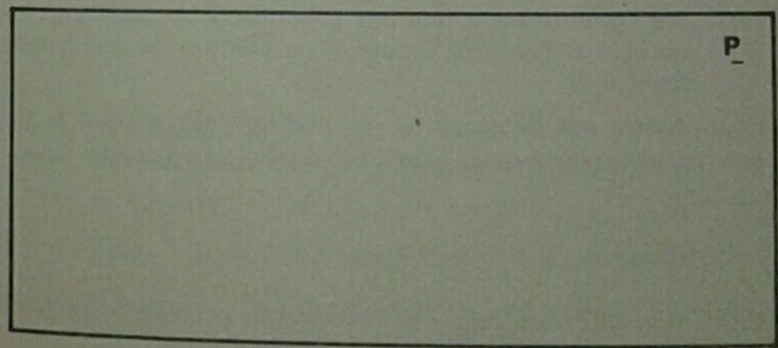
40.5 Na construção do sistema de coordenadas cartesianas, você notou que escolhemos o sentido da esquerda para a direita, como positivo no eixo x. Para o sentido positivo no eixo y, foi escolhido aquêle que vai de .... para ....

Resp.: baixo, cima

40.6 Para estabelecer um sistema de coordenadas cartesianas no plano, nós construimos um par de eixos perpendiculares denominados de eixo x e eixo .... Tais eixos se cortam num ponto 0 que é denominado .... do sistema.

Resp.: y, origem

40.7 Construa um sistema de coordenadas cartesianas no plano P abaixo. Indique no mesmo desenho o eixo x, o eixo y, a origem O, o sentido positivo do eixo x, o sentido positivo do eixo y.



Resp.:

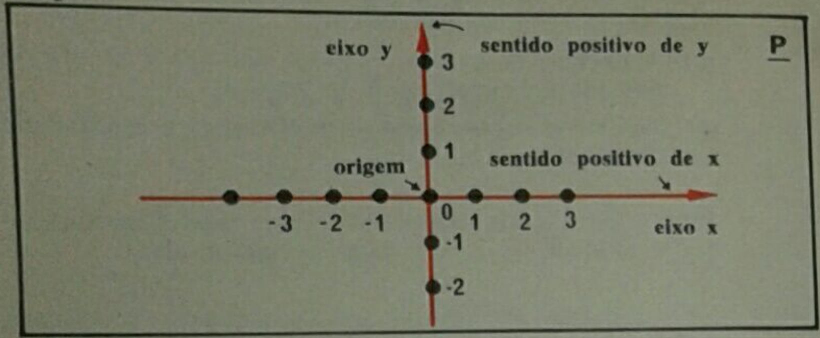


Fig. 47

40.8 Os números reais que correspondem a pontos nos eixos x e y receberam o nome de *coordenadas* (indistintamente).

Olhe atentamente para a figura abaixo (estude-a com cuidado) e depois disso passe para 40.9.

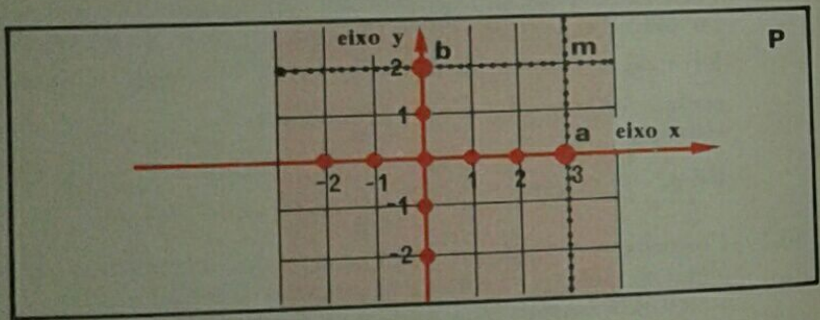


Fig. 48

40.9 Na figura acima a reta que passa por m é perpendicular ao eixo x, encontra o mesmo no ponto a de coordenada igual a 3.

A reta que passa por m e é perpendicular ao eixo y, encontra o mesmo no ponto ...... cuja coordenada é o número ......

Resp.: b, 2

40.10 O ponto b da figura acima recebeu o nome de projeção do ponto m no eixo y.

Em outras palavras, a projeção do ponto m no eixo y, é o ponto onde a reta que passa por ...... e é perpendicular ao eixo ...... corta êsse eixo.

Resp.: m, y

b = projeção de m em y

40.11 Do mesmo modo o ponto a se diz projeção de m no eixo ......

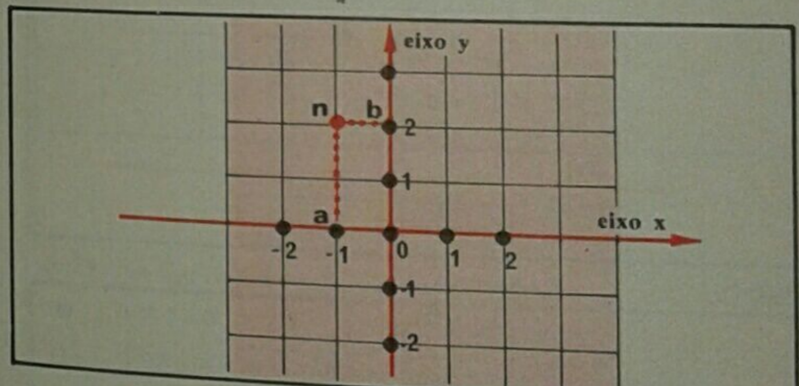
Resp.: x

a = projeção de m em x

40.12 Olhe a figura abaixo e diga:

a projeção do ponto m no eixo x é o ponto ......

a projeção do ponto n no eixo y é o ponto ......



Resp.: a, b

Fig. 49

40.13 As coordenadas de n são os números reais que correspondem a a e b. Na figura acima as coordenadas de n são os números ...... e ......

Resp.: −1, 2(−1 corresponde a a, e 2 corresponde a b)

40.14 O número −1 é a coordenada no eixo x do ponto n, também denominado de **abscissa de n**.

O número -2 é a coordenada no eixo y do ponto n, também denominado de ordenada de n.

Então:

(*a*) a abscissa de n é o número ......

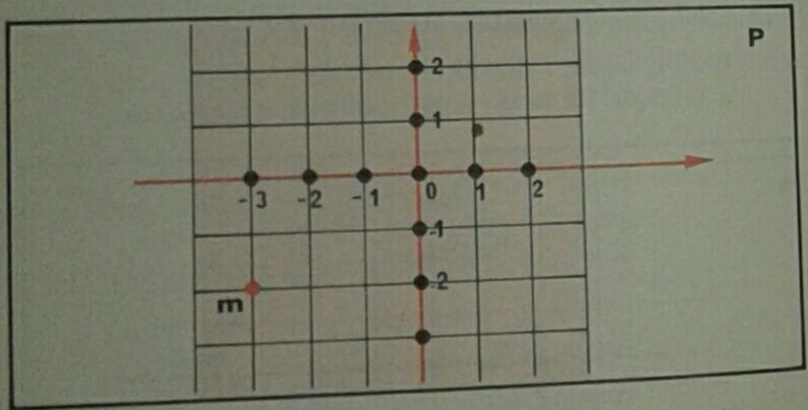
(*b*) a ordenada de n é o número ......

Resp.: (*a*) -1

(*b*) 2

40.15 Na figura abaixo localize a projeção do ponto m no eixo x e chame-a de a.

Localize também a projeção do ponto m no eixo y e chame-a de b.



Resp.:

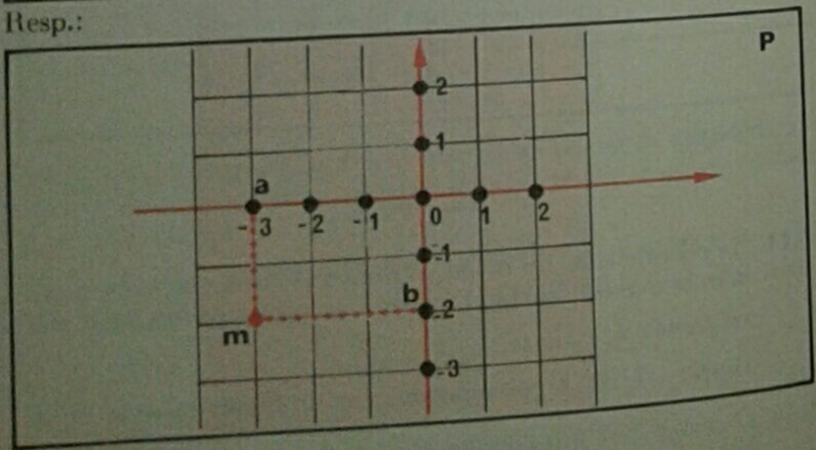


Fig. 50

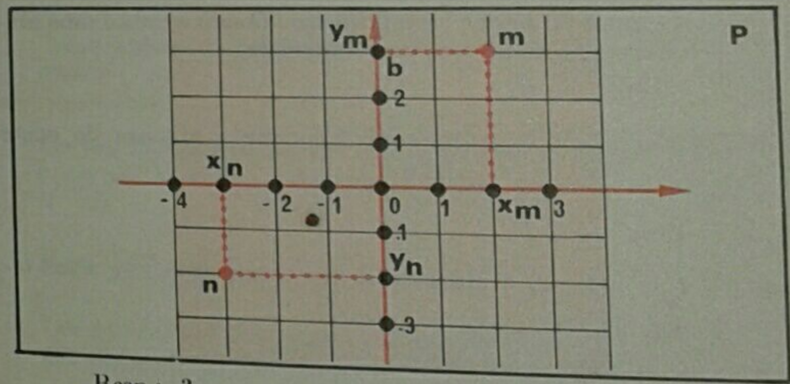
40.16 As coordenadas de m são os números ...... e ......

Resp.: -3 e -2

40.17 O número -3 é a abscissa do ponto m enquanto que -2 é a .... do ponto m.

Resp.: ordenada

40.18 No plano P abaixo x_m representa a abscissa de m e y_m a ordenada de m. Pela figura concluímos que $x_m = 2$ e $y_m =$ ......



Resp.: 3.

Fig. 51

40.19 Na figura acima x_n representa a .... do ponto n e y_n a .... do ponto n.

Resp.: abscissa, ordenada.

40.20 Pela mesma figura podemos concluir que $x_n =$ ...... e $y_n =$ ......

Resp.: -3, -2

40.21 Seja m um ponto do plano P com uma abscissa igual a x_m e ordenada igual a y_m. Então nós podemos associar o par ordenado de números (x_m, y_m) ao ponto m. O primeiro número do par (x_m, y_m) é a .... do ponto m e o segundo número é a ordenada de m.

Resp.: abscissa.

A cada ponto m do plano P podemos associar um par de números reais (x_m, y_m) e vice-versa. Em outras palavras a correspondência $m \longleftrightarrow (x_m, y_m)$ é biunívoca.

Expressamos isto com a simbologia

$$m(x_m, y_m)$$

que significa: ponto m de abscissa x_m e ordenada y_m.

40.22 Ao escrevermos $n(x_n, y_n)$ estamos dizendo que a abscissa do ponto n é o número real ...... e a ordenada de n é o número real ....

Sempre no par (x, y) o primeiro número x indica uma abscissa e o número y uma ordenada.

Resp.: x_n, y_n

40.23 Em $n(-2, 1)$ estamos dizendo que a abscissa do ponto n é ...... e a ordenada de n é ....

Resp.: -2, 1

40.24 Em $m(1, -2)$ a abscissa de m é o número ...... e a sua ordenada é ....

Resp.: 1, -2

40.25 Olhe a figura abaixo.

Nela achamos localizados dois pontos distintos $m(1, -2)$ e $n(-2, 1)$.

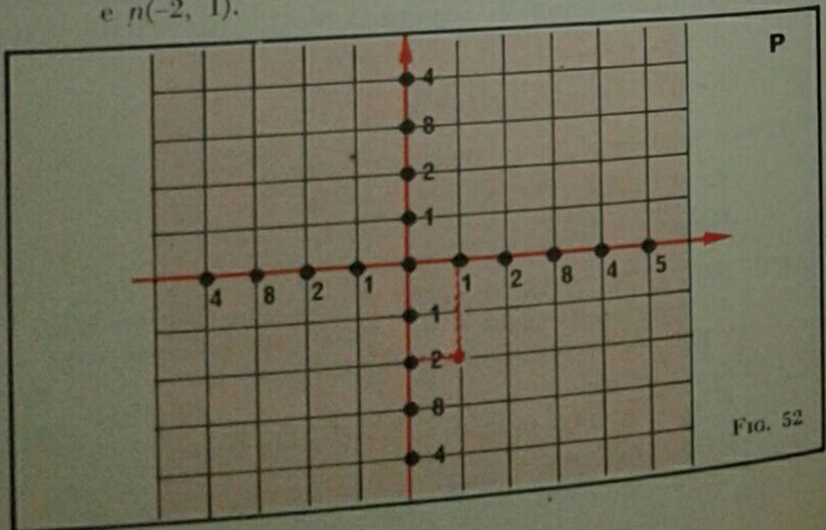


Fig. 52

Observe que os pares $(-2, 1)$ e $(1, -2)$ estão associados a pontos diferentes do plano P.

Assim $(-2, 1)$ e $(1, -2)$ representam pontos ...... do plano P.

Resp.: diferentes

40.26 Escreveremos que $(-2, 1) \neq (1, -2)$.

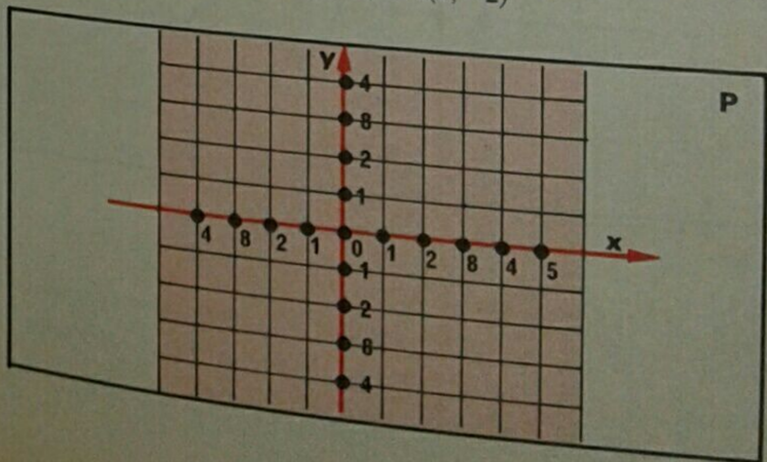
Como vemos, trocando a *ordem* dos números no par, mudamos o par.

Por isso chamamos tais pares de ordenados. Assim $(-2, 1)$ é um par ordenado porque $(-2, 1)$ é ...... de $(1, -2)$.

Resp.: diferente

Um par de números reais a e b (com $a \neq b$) representado por (a, b) é um par ordenado se $(a, b) \neq (b, a)$.

40.27 O par ordenado $(4, 3)$ não representa o mesmo ponto que o par ordenado $(3, 4)$. No plano P dado abaixo localize os pontos: $m(4, 3)$, $n(3, 4)$, $p(-4, 3)$, $q(4, -3)$, $r(-3, 4)$, $s(-3, -4)$, $t(1, 3)$ e $u(2, -2)$



Resp.:

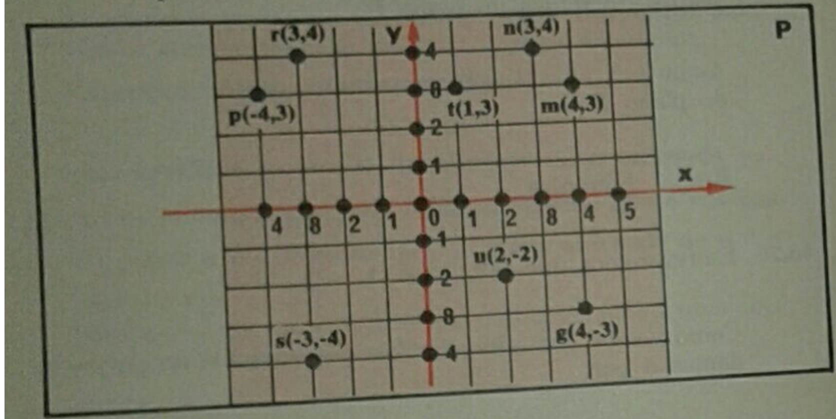


Fig. 53

41 — Sumário

Sistema coordenado bidimensional ou sistema de coordenadas cartesianas

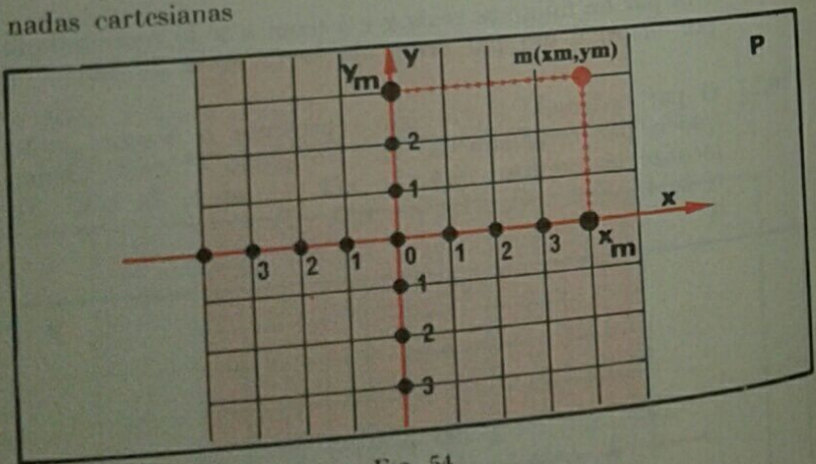


Fig. 54

m = ponto do plano P.

O = origem do sistema da coordenadas cartesianas

x, y = eixos do sistema de coordenadas cartesianas

x = eixo horizontal

y = eixo vertical

x_m, y_m = coordenadas do ponto m

x_m = coordenada no eixo x ou abscissa de m

y_m = coordenada no eixo y ou ordenada de m

a = projeção no eixo x do ponto m

b = projeção no eixo y do ponto m

(x_m, y_m) = par ordenado de números reais associados ao ponto m

$n(x_n, y_n)$ = ponto n de abscissa x_n e ordenada y_n.

A cada par ordenado de números reais (x_n, y_n) corresponde um e sòmente um ponto n do plano P e vice-versa.

42 — Exercícios

42.1 Localize num sistema de coordenadas cartesianas os seguintes pontos:

$a(2, 2)$	$f(2, 3)$	$l(4, 0)$
$b(3, 2)$	$g(-2, -3)$	$m(-5, 0)$
$c(-3, 2)$	$h(2, -3)$	$n(-3, 5)$
$d(-3, -2)$	$i(-2, 3)$	$o(0, 0)$
$e(3, -2)$	$j(0, 5)$	$p(5, 0)$
$s(0, -4)$	$r(4, 5)$	$t(-5, 4)$

Resp.:

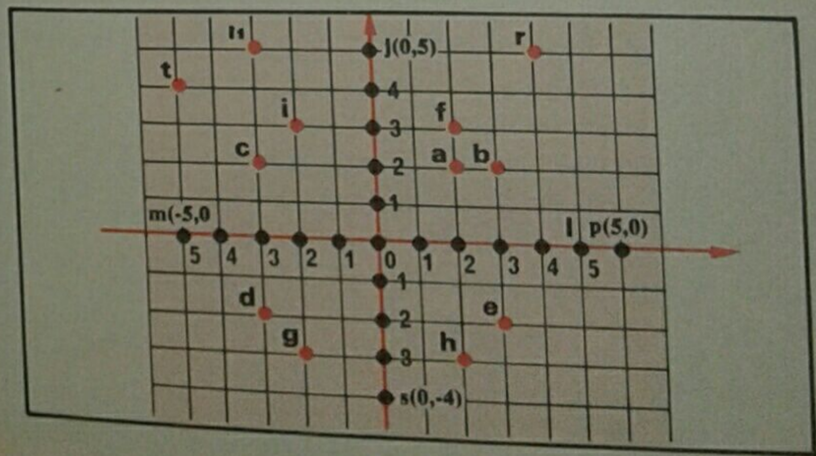


Fig. 55

42.2 Os pontos que possuem ordenadas iguais a zero pertencem ao eixo x ou ao eixo y?

Resp.: pertencem ao eixo x.

42.3 O conjunto $\{(x, y) \mid (x, y) \in P \text{ e } y = 0\}$ é um subconjunto de P? Qual?

Resp.: É um subconjunto de P, pois é constituido dos pontos de P que possuem ordenadas nulas.

Tal subconjunto nada mais é do que o eixo x.

42.4 Os pontos que possuem abscissa nula pertencem a que eixo?

Resp.: pertencem ao eixo x.

42.5 Diga quais das afirmações dadas abaixo são falsas e quais são verdadeiras.

(a) $(2, 0) \in$ *eixo* x

(b) $(3, 0 \notin$ *eixo* x

(c) $(-3, 0) \in$ *eixo* y

(d) $(3, 0) \in$ *eixo* y

(e) $(0, -2) \in$ *eixo* y

(f) $\{(2, 0), (3, 0)\} \subset$ *eixo* x

(g) $\{(2, 2), (3, 3), (4, 4)\} \subset P$

(h) $\{(0, 2), (0, 3)\} \subset$ *eixo* x

Resp.:

(a) V	(c) F	(e) V	(g) V
(b) F	(d) F	(f) V	(h) V

42.6 Complete

(a) Se $m(1, 3)$ então $x_m =$ ...., $y_m =$ ....

(b) Se $n(2, 5)$ então $x_n =$ ...., $y_n =$ ....

(c) Se $o(0, 0)$ então $x_o =$ ...., $y_o =$ ....

(d) Se $p(5, 0)$ então $x_p =$ ...., $y_p =$ ....

(e) Se $q(2, 2)$ então $x_q =$ ...., $y_q =$ ....

(f) Se $r(^3/_4, -1)$ então $x_r =$ ...., $y_r =$ ....

(g) Se $s(-1, -0{,}75$ então $x_s =$ ...., $y_s =$ ....

(h) Se $t(-1, -2)$ então $xt =$ ...., $yt =$ ....

Resp.:

(a) 1, 3	(e) 2, 2
(b) 2, 5	(f) $^3/_4$, -1
(c) 0, 0	(g) -1, $-0{,}75$
(d) 5, 0	(h) -1, -2

42.7 Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$

Calcule:

(a) O produto cartesiano $A \times B$

(b) Cada elemento de $A \times B$ é um par ordenado?

(c) Cada elemento de $A \times B$ corresponde a um ponto do plano P?

(d) Em caso afirmativo, localize êsses pontos.

Solução:

(a) Para calcular o produto $A \times B$ usaremos a disposição na forma de uma matriz 3×3 (veja o 1.º volume desta série de livros).

$$
\begin{array}{r|ccc}
\text{elementos de } A \longrightarrow 1 & (1, 3) & (1, 4) & (1, 5) \\
2 & (2, 3) & (2, 4) & (2, 5) \\
3 & (3, 3) & (3, 4) & (3, 5) \\
\hline
 & 3 & 4 & 5
\end{array}
$$

elementos de B

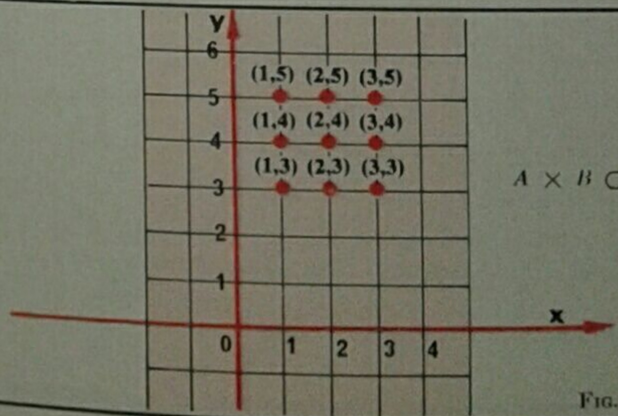
Portanto $A \times B$ é constituido de 9 pares de números reais.

$A \times B = \{(1, 3), (2, 3), (3, 3), (1, 4), (2, 4), (3, 4), (1, 5), (2, 5), (3, 5)\}$

(b) Sim, cada elemento de $A \times B$ é um par ordenado do tipo (x, y) onde $x \in A$ e $y \in B$.

(c) Cada elemento (x, y) de $A \times B$ corresponderá a um ponto do plano P.

(d) Localização dos pontos correspondentes a elementos de $A \times B$:

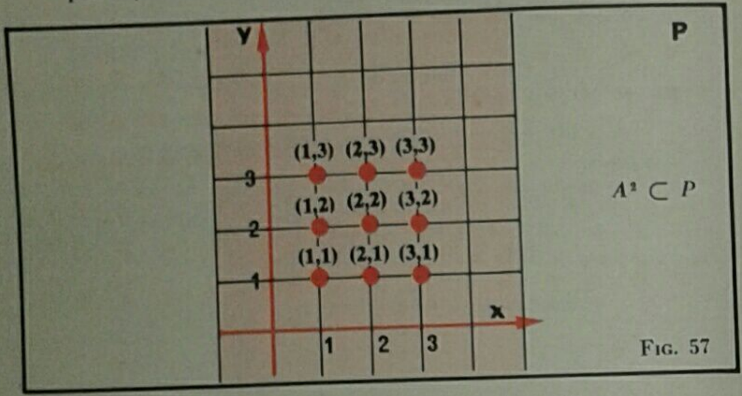


$A \times B \subset P$

FIG. 56

representação cartesiana de $A \times B$

42.8 No exercício anterior fizemos a representação cartesiana de $A \times B$. Faça agora a representação cartesiana de $A \times A$ (também indicado por A^2) sendo $A = \{1, 2, 3\}$.



$A^2 \subset P$

FIG. 57

representação cartesiana de $A \times A$ ou A^2

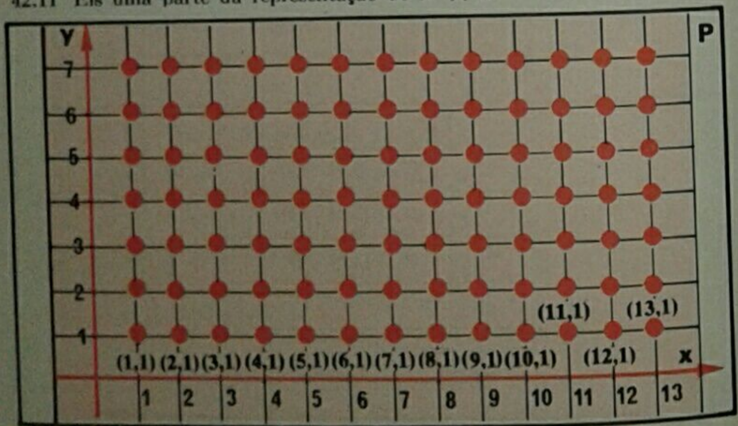
42.9 Sendo $N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ um conjunto infinito, o produto $N \times N$ também o será. Você pode, gràficamente, representar todos os pares de $N \times N$?

Resp.: Não.

42.10 $N \times N$ é um subconjunto de P?

Resp.: Sim, pois $N \times N$ é constituido de pares ordenados.

42.11 Eis uma parte da representação de $N \times N$



$N \times N \subset P$ FIG. 58

Faça agora uma parte da representação de $Z \times Z$ onde $Z = \{\ldots$ $-4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots\}$

Resp.:

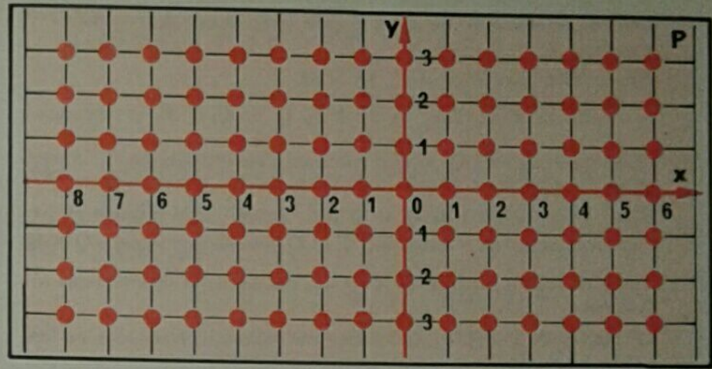


FIG. 59

42.12 Dizemos que os pontos de $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ formam uma rede. O conjunto $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ é uma parte dessa rede? (em outras palavras, $\mathbf{N} \times \mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$?)

Resp.: Sim, pois todo ponto (ou par ordenado) de $N \times N$ é um ponto de $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.

42.13 Considere o conjunto $A = \{\ldots -3; -2{,}5; -2; -1{,}5; -1; -0{,}5; 0; +0{,}5; +1; +1{,}5; +2; +2{,}5; +3 \ldots\}$ obtido de Z pela intercalação de números racionais. Faça a rede $A \times A$ e responda as seguintes perguntas:

(*a*) $\mathbf{Z} \subset A$?

(*b*) $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \subset A \times A$?

Resp.: (*a*) Sim

(*b*) Sim

Observação: O que acabamos de fazer foi uma subdivisão da rede $Z \times Z$ obtendo *malhas* "mais finas".

Nesse caso dizemos que $A \times A$ é um *refinamento* de $Z \times Z$, ou que $Z \times Z$ é uma *sub-rede* de $A \times A$.

42.14 Acabamos de ver que a intercalação de racionais entre dois inteiros provoca um refinamento da rede $Z \times Z$.

Como entre dois inteiros existem uma infinidade de racionais, perguntamos se o processo de refinamento de $Z \times Z$ pode ser repetido indefinidamente.

Resp.: Pode, pois a cada intercalação de racionais obtemos uma rede com malhas mais finas do que a anterior. Como existem infinitos racionais entre dois inteiros, êsse processo pode ser prolongado indefinidamente.

42.15 Feitas tôdas as intercalações de racionais possíveis em Z obteremos o conjunto Q dos racionais. Então $Q \times Q$ representa o resultado final do refinamento de $Z \times Z$ pela intercalação de racionais? A seqüência $Z \times Z \subset A \times A \subset Q \times Q \subset P$ é verdadeira?

Resp.: Sim, pois $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$.

A seqüência $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \subset \mathbf{A} \times \mathbf{A} \subset \mathbf{Q} \times \mathbf{Q} \subset \mathbf{P}$ é verdadeira.

42.16 Todo ponto da rede $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ é ponto do plano cartesiano P. A recíproca é verdadeira? (isto é, todo ponto de $\mathbf{P}$ é ponto de $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$?).

Resp.: Não, pois a rede $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ não "cobre" todo o plano P, isto é, existem pontos de P como $m(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ que não pertencem a $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$.

42.17 Todos os pontos da rede $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ são pontos cujas coordenadas são racionais.

Os pontos de $\mathbf{P}$ cujas coordenadas são números irracionais pertencem a $Q \times Q$?

Resp.: Não.

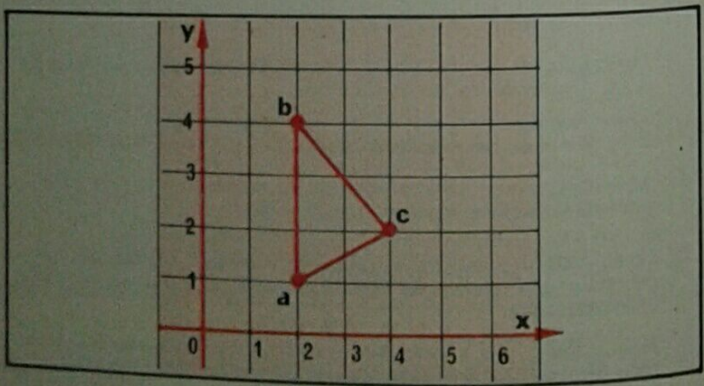
42.18 Considere o conjunto $\mathbf{R}$ dos números reais. O conjunto $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ "cobre" todo plano cartesiano? Isto é, todo ponto de $\mathbf{P}$ corresponde a um par de números reais e vice-versa?)

Resp.: Sim.

Daqui em diante identificaremos o plano cartesiano P como o conjunto produto $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ (ou R^2), isto é tomaremos:

$$\mathbf{P} = \mathbf{R}^2$$

42.19 Localize os pontos $a(2, 1)$, $b(2, 4)$ e $c(4, 2)$ em $\mathbf{R}^2$. O conjunto $\{a, b, c\}$ recebe o nome de *triângulo abc*. Os pontos a, b e c recebem o nome de *vértices* do triângulo e os segmentos fechados ab, bc, e ca são os seus *lados*.



43 — Relação de Ordem parcial em $\mathbf{R}^2$

Igualdade de pares ordenados

$$(a, b) = (x, y) \Longleftrightarrow a = x, b = y$$

43.1 Assim se $(2, 3) = (x, y)$ então $x = q$ e $y = \ldots\ldots$

Resp.: 3

43.2 Complete

(a) $(2, 3) = (x, y) \Longleftrightarrow x = \ldots\ldots, y = \ldots\ldots$

(b) $(x, y) = (-1, 2) \Longleftrightarrow x = \ldots\ldots, y = \ldots\ldots$

(c) $(x, y) = (-1, 0) \Longleftrightarrow x = \ldots\ldots, y = \ldots\ldots$

(d) $(x, y) = (^1/_2, 3) \Longleftrightarrow x = \ldots\ldots, y = \ldots\ldots$

(e) $(x, y) = (c, d) \Longleftrightarrow x = \ldots\ldots, \ldots\ldots = d$

(f) $(x, y) = (0, 0) \Longleftrightarrow x = \ldots\ldots, \ldots\ldots = 0$

(g) $(x, y) = (1, -5) \Longleftrightarrow \ldots\ldots = -5, \ldots\ldots = 1$

Resp.: (a) 2, 3 (e) c, y

(b) −1, 2 (f) 0, y

(c) −1, 0 (g) x, y

(d) $^1/_2$, 3

43.3 O par (2, 3) é igual ao par (4, 6)?

(a) Sim

(b) Não

Resp.: Não, pois $2 \neq 4$ e $3 \neq 6$

43.4 A igualdade $(a, b) = (b, a)$ só é possível quando

(a) $a \neq b$

(b) $a = 0$ e $b \neq 0$

(c) $a = b$

Resp.: (c) $a = b$

A seguir introduziremos uma relação de ordem em $\mathbf{R}^2$ da seguinte maneira:

$$(x, y) \geq (a, b) \Longleftrightarrow x \geq a \text{ e } y \geq b$$
$$(x, y) > (a, b) \Longleftrightarrow x > a \text{ e } y > b$$

43.5 Assim $(3, 2) > (1, 0)$ pois $3 > 1$ e $2 > 0$.
Do mesmo modo $(4, 6) > (3, 2)$ pois $4 >$ ...... e $6 > 0$.

Resp.: 1

43.6 Também $(3, 2) \geq (1, 2)$ pois 3 ...... 1 e $2 = 2$.

Resp.: $>$

43.7 $(-3, -2) > (-4, -3)$ pois $-3 >$ ...... e -2 ...... -3.

Resp.: -4, $>$

43.8 Ordenando os pares (3, 2) (5, 3) e (2, 2) do maior para o menor obteremos um dos seguintes arranjos dados abaixo.
Assinale o que se acha ordenado.

(*a*) (3, 2) (2, 2) (5, 3)
(*b*) (2, 2) (5, 3) (3, 2)
(*c*) (5, 3) (3, 2) (2, 2)

Resp.: (*x*) pois $(5, 3) > (3, 2) > (2, 2)$

43.9 Complete

(*a*) $(x, y) > (2, 3) \Longleftrightarrow x > 2$ e $y >$ ......
(*b*) $(x, y) \geq (1, 4) \Longleftrightarrow x \geq$ ...... e $y \geq$ ......
(*c*) $(x, y) \geq (-2, 3) \Longleftrightarrow x \geq$ ...... e $y \geq$ ......

Resp.: (*a*) 3 (*b*) 1, 4 (*c* -2, 3.

43.10 Nem todos os pontos podem ser comparados. Exemplo disso se acha nos pares (2, 4) e (5, 3).
Não podemos dizer que $(2, 4) > (5, 3)$ pois 2 não é maior que 5, e nem que $(5, 3) > (2, 4)$ pois 3 não é maior que ......

Os pares (5, 3) e (2, 4) são não comparáveis.

Resp.: 4

43.11 Os pares (8, 5) e (6, 6)

(*a*) são comparáveis
(*b*) são não comparáveis

Resp.: (*b*) são não comparáveis

Como vemos nem todos os pares de $\mathbf{R}^2$ podem ser relacionados por $\geq$, isto é, existem pares não comparáveis. Por isso dizemos que $\mathbf{R}^2$ está *parcialmente* ordenado, ou que $\geq$ é uma relação de ordem parcial.

44 — Adição em $\mathbf{R}^2$

Definição

$$(x, y) + (a, b) = (x + a, y + b)$$

Exemplos:

1.º) $(2, 3) + (5, 1) = (2 + 5, 3 + 1) = (7, 4)$
2.º) $(2, 3) + (5, -1) = (2 + 5, 3 - 1) = (7, 2)$

44.1 $(2, 3) + (3, 7) = (2 + 3, 3 + 7) = ($......, ...$)$

Resp.: 5, 10

44.2 $(-1, 3) + (2, -2) = ($......, ...$) = (1, 1)$

Resp.: $-1 + 2$, $3 - 2$

44.3 Efetue as seguintes adições

(*a*) $(3, 2) + (5, 4) =$ ......
(*b*) $(-1, -2) + (5, 4) =$ ......
(*c*) $(3, 2) + (0, 0) =$ ......
(*d*) $(-2, 3) + (0, 2) =$ ......
(*e*) $(0, 5) + (2, 0) =$ ......
(*f*) $(-3, 2) + (3, -2) =$ ......
(*g*) $(-5, -1) + (5, 1) =$ ......
(*h*) $(0, 0) + (x, y) =$ ......

Resp.: (*a*) (8, 6) (*e*) (2, 5)
(*b*) (4, 2) (*f*) (0, 0)

(*c*) (3, 2) (*g*) (0, 0)

(*d*) (−2, 5) (*h*) (x, y)

44.4 De $(x, y) + (0, 0) = (x, y)$ podemos concluir que:

(*a*) (0, 0) é o elemento neutro da adição de pares ordenados.

(*b*) (0, 0) é o inverso aditivo de (x, y).

Resp.: (*a*) é o elemento neutro da adição de pares ordenados.

44.5 De $(x, y) + (-x, -y) = (0, 0)$ podemos concluir que:

(*a*) $(-x, -y)$ é o elemento neutro da adição de pares ordenados.

(*b*) $(-x, -y)$ é o inverso aditivo de (x, y).

Resp.: (*b*) $(-x, -y)$ é o inverso aditivo de (x, y).

44.6 O inverso aditivo de (2, 3) é (−2, −3) pois $(2, 3) + (-2, -3) =$ ....

Resp.: (0, 0)

44.7 O inverso aditivo de (−2, 3) é (2, −3) pois $(-2, 3) + (2, -3) =$ ....

Resp.: (0, 0)

44.8 $(x, y) + (a, b) =$ ....

Resp.: $(x + a, y + b)$

44.9 $(x + a, y + b) = (a + x, b + y)$ pois

$$x + a = a + x \text{ e } y + b = \text{........}$$

Resp.: $b + y$

44.10 $(a, b) + (x, y) =$ ....

Resp.: $(a + x, b + y)$

44.11 $(x, y) + (a, b) = (x + a, y + b) = (a + x, b + y) =$
$= (a, b) +$ ....

Resp.: (x, y)

44.12 De $(a, b) + (x, y) = (x, y) + (a, b)$ podemos concluir que a adição de pares de R^2 tem a propriedade:

(*a*) associativa

(*b*) do elemento neutro

(*c*) comutativa

Resp.: (*c*) comutativa

44.13 Ao escrevermos que $(2, 3) + (4, 5) = (4, 5) + (2, 3)$ estamos aplicando a propriedade ....

Resp.: comutativa

44.14 Ao escrevermos que $(2, 3) + (0, 0) = (2, 3)$ estamos aplicando a propriedade do ....

Resp.: elemento neutro

45 — Exercícios

45.1 Efetuar as seguintes adições

(*a*) $(2, 0) + (0, -1) =$ ....

(*b*) $(5, 2) + (2, 2) =$ ....

(*c*) $(-5, 2) + (2, -2) =$ ....

(*d*) $(0, 0) + (2, 2) =$ ....

(*e*) $(8, 3) + (-8, -3) =$ ....

(*f*) $(1, 2) + (-1, -2) =$ ....

(*g*) $(-5, 3) + (5, -3) =$ ....

(*h*) $(1, 0) + (0, 1) =$ ....

Resp.:

(*a*) (2, −1)

(*b*) (7, 4) (*e*) (0, 0)

(*c*) (−3, 0) (*f*) (0, 0)

(*d*) (2, 2) (*g*) (0, 0)

(*h*) (1, 1)

45.2 Prove que a adição em $\mathbf{R}^2$ é associativa, isto é:

$$[(x, y) + (a, b)] + (c, d) = (x, y) = [(a, b) + (c, d)]$$

45.3 Quais são as propriedades da adição em R^2?

Resp.: comutativa, associativa, elemento neutro, elemento inverso

45.4 Calcule o elemento inverso de cada um dos seguintes pares:

(*a*) $(2, -3)$
(*b*) $(1, 0)$
(*c*) $(2, 3)$
(*d*) $(-2, 3)$
(*e*) (a, b)
(*f*) $(0, 0)$
(*g*) $(3, 3)$
(*h*) $(0, 4)$

Resp.:

(*a*) $(-2, 3)$	(*e*) $(-a, -b)$
(*b*) $(-1, 0)$	(*f*) $(0, 0)$
(*c*) $(-2, -3)$	(*g*) $(-3, -3)$
(*d*) $(2, -3)$	(*h*) $(0, -4)$

45.5 Efetue a adição $(2, 3) + (1, 1)$ e represente no plano cartesiano os pontos $(2, 3)$, $(1, 1)$ e $(2, 3) + (1, 1)$

Resp.: $(2, 3) + (1, 1) = (3, 4)$

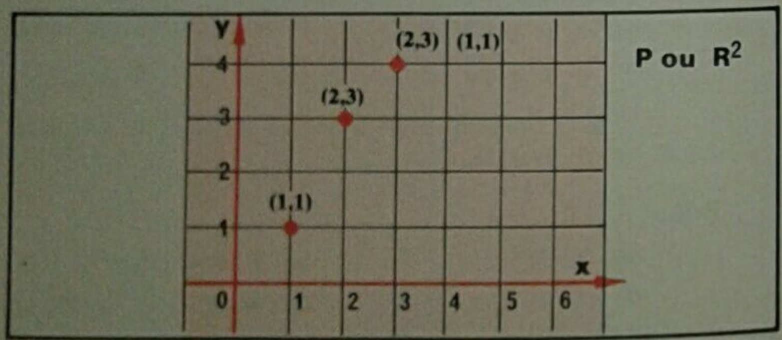


Fig. 61

45.6 Chamemos $(x, y) + (x, y)$ de $2 \cdot (x, y)$

Mostre que $2 \cdot (x, y) = (2x, 2y)$

Solução:

$$\begin{aligned} 2 \cdot (x, y) &= (x, y) + (x, y) \\ &= (x + x, y + y) \\ &= (2x, 2y) \end{aligned}$$

45.7 Chamemos $(x, y) + (x, y) + (x, y)$ de $3(x, y)$

Mostre que $3 \cdot (x, y) = (3x, 3y)$

45.8 Chamemos $(x, y) + (x, y) + (x, y) + (x, y)$ de $4(x, y)$.

Mostre que $4 \cdot (x, y) = (4x, 4y)$

45.9 Chamemos $\underbrace{(x, y) + (x, y) + \ldots\ldots + (x, y)}_{n \text{ parcelas}}$ de $n \cdot (x, y)$.

Mostre que $n \cdot (x, y) = (nx, ny)$

46 — Multiplicação de um par por um número real

Definição:

$$r \cdot (x, y) = (r \cdot x, r \cdot y)$$

onde $r \in R$ e $(x, y) \in R^2$

46.1 Assim $2 \cdot (4, -1) = (8, -2)$ e $2 \cdot (3, 4) = \ldots\ldots$

Resp.: $(6, 8)$

46.2 $3 \cdot (x, y) = \ldots\ldots$

Resp.: $(3x, 3y)$

46.3 $\frac{1}{2} \cdot (8, 6) = \left(\frac{1}{2} \cdot 8, \frac{1}{2} \cdot 6\right) = \ldots\ldots$

Resp.: $(4, 3)$

46.4 $-\frac{1}{2} \cdot (8, 6) = \left(-\frac{1}{2} \cdot 8, -\frac{1}{2} \cdot 6\right) = \ldots\ldots$

Resp.: $(-4, -3)$

46.5 Efetue

(a) $3 \cdot (0, 0) =$ ....

(b) $4 \cdot (1, -1) =$ ....

(c) $1 \cdot (x, y) =$ ....

(d) $0{,}5 \cdot (-2, 6) =$ ....

(e) $-7 \cdot (1, 0) =$ ....

(f) $0 \cdot (x, y) =$ ....

Resp.: (a) $(0, 0)$ (d) $(-1, 3)$

(b) $(4, -4)$ (e) $(-7, 0)$

(c) (x, y) (f) $(0, 0)$

46.6 $\sqrt[3]{2} \cdot (1, \sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2} \cdot 1, \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2}) =$ ....

Resp.: $(\sqrt[3]{2}, 2)$

46.7 $(2, 3) + \frac{1}{2} \cdot (10, 8) = (2, 3) + (5, 4) =$ ....

Resp.: $(7, 7)$

46.8 $a \cdot (1, 0) + b(0, 1) =$ .... + ... $= (a, b)$

Resp.: $(a, 0), (0, b)$

46.9 $2 \cdot (1, 0) + 3 \cdot (1, 0) = ($....., ...$)$

Resp.: 5, 0

46.10 $2 \cdot (1, 0) + 3 \cdot (0, 1) =$ ....

Resp.: $(2, 3)$

47 — Exercícios

47.1 Calcule os seguintes produtos

(a) $3 \cdot (0, 0) =$ ....

(b) $3 \cdot (1, 1) =$ ....

(c) $3 \cdot (0, 1) =$ ....

(d) $3 \cdot (1, 0) =$ ....

(e) $-3 \cdot (1, 0) =$ ....

(f) $-5 \cdot (2, 3) =$ ....

(g) $-6 \cdot (-1, -2) =$ ....

(h) $0 \cdot (2, 4) =$ ....

(i) $0{,}75 \cdot (12{,}8) =$ ....

(j) $\sqrt{3} \cdot (1, 0) =$ ....

Resp.:

(a) $(0, 0)$ (f) $(-10, -15)$

(b) $(3, 3)$ (g) $(6, 12)$

(c) $(0, 3)$ (h) $(0, 0)$

(d) $(3, 0)$ (i) $(9, 6)$

(e) $(-3, 0)$ (j) $(\sqrt{3}, 0)$

47.2 Efetue as operações indicadas

(a) $3 \cdot (2, -1) + 4 \cdot (1, 2) =$ ....

(b) $-1 \cdot (3, 2) + 2 \cdot (3, 2) =$ ....

(c) $1 \cdot (x, y) + (x, y) =$ ....

(d) $0 \cdot (\sqrt{2}, \sqrt{3}) + (0, 0) =$ ....

(e) $2 \cdot (a, b) + 3 \cdot (a, b) =$ ....

(f) $-2 \cdot (a' b) + (a, b) =$ ....

Resp.:

(a) $(10, 5)$ (d) $(0, 0)$

(b) $(3, 2)$ (e) $(5a, 5b)$

(c) $(0, 0)$ (f) $(-a, -b)$

47.3 Mostre que todo par (x, y) pode ser escrito como $x \cdot (1, 0) + y(0, 1)$.

Solução:

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y)$$
$$= x \cdot (1, 0) + y \cdot (0, 1)$$

Recìprocamente

$$x \cdot (1, 0) + y \cdot (0, 1) = (x, 0) + (0, y) = (x, y)$$

47.4 Escreva o par $(2, 3)$ na forma $x, (1, 0) + y \cdot (0, 1)$

Resp.: $2 \cdot (1, 0) + 3(0, 1)$.

47.5 Multiplique o par $(2, 3)$ sucessivamente pelos números -2; $-1{,}5$; -1; $-0{,}5$ 0; 0,5; 1; 1,5 e 2.

Em seguida localize êsses pontos em R^2.

Solução:

$$-2 \cdot (2, 3) = (-4, -6)$$
$$-1{,}5 \cdot (2, 3) = (-3, -4{,}5)$$
$$-1 \cdot (2, 3) = (-2, -3)$$
$$-0{,}5 \cdot (2, 3) = (-1, -1{,}5)$$
$$0 \cdot (2, 3) = (0, 0)$$
$$0{,}5 \cdot (2, 3) = (1, 1{,}5)$$
$$1 \cdot (2, 3) = (2, 3)$$
$$1{,}5 \cdot (2, 3) = (3, 4{,}5)$$
$$2 \cdot (2, 3) = (4, 6)$$

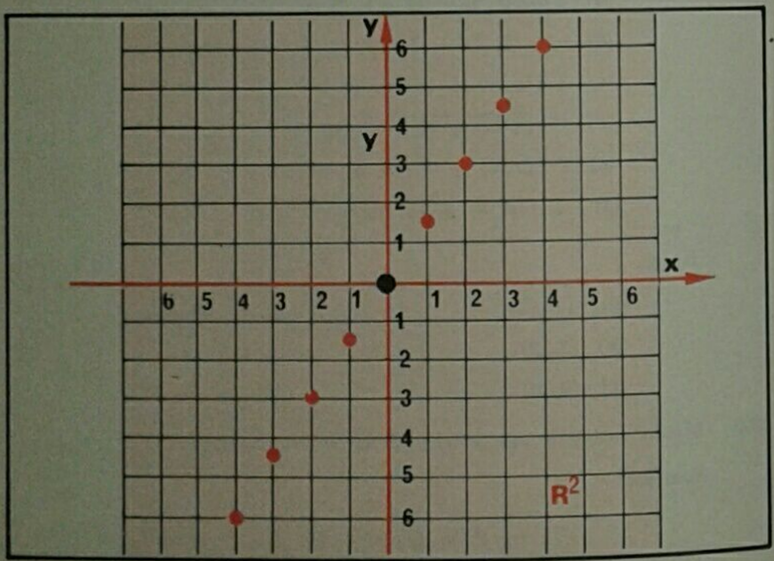


Fig. 62

Diremos que o conjunto de pontos $L = \{(-6, -4), (-3, -4{,}5), (-2, -3), (-1, -1{,}5), (0, 0), (1, 1{,}5), (2, 3), (3, 4{,}5), (6, 4)\}$ foi *gerado* pelo ponto $(2, 3)$, ou que $(2, 3)$ é o *elemento gerador de* L.

47.6 Os pontos de L gerado por $(2, 3)$ se acham alinhados? (isto é, sôbre uma reta?)

Resp.: Sim

47.7 Multiplique os pares $(2, 4)$ e $(-1, 1)$ sucessivamente pelos números $-2, -1{,}5, -1, -0{,}5, 0, 0{,}5, 1, 1{,}5, 2$. Em outras palavras ache dois conjuntos de pontos A e B, sendo A o gerado por $(2, 4)$ e B o gerado por $(-1, 1)$. Localize os pontos de A e B em R .

Resp.:

$$A = \{(-4, -8), (-3, -6), (-2, -4), (-1, -2), (0, 0), (1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8)\}$$

$$B = \{(2, -2), (1, -1{,}5), (1, -1), (0{,}5, -0{,}5), (0, 0), (-0{,}5, 0{,}5), (-1, 1), (-1{,}5, 1{,}5), (-2, 2)\}$$

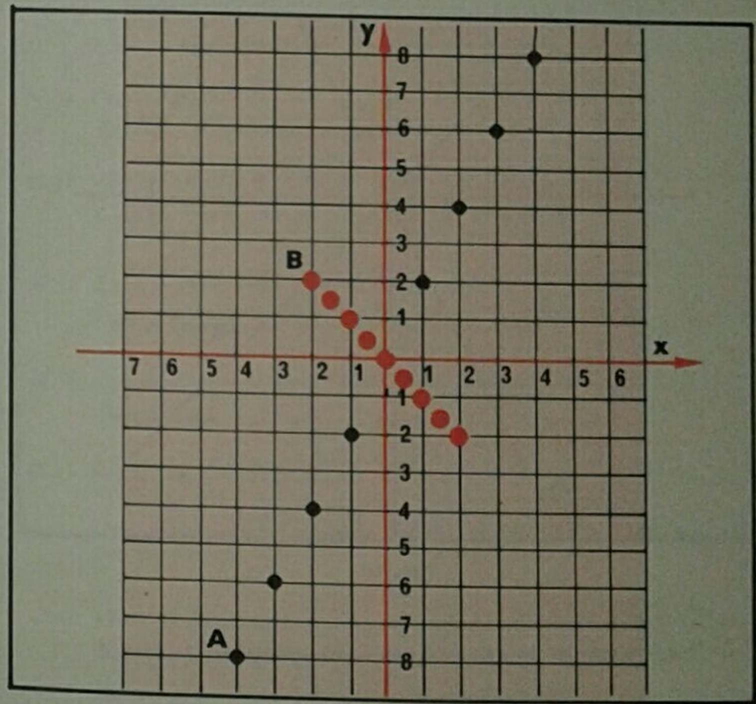


Fig. 63

47.8 Os conjuntos A e B do exercício podem ser escritos sob a forma

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2) \cdot (x, y) = r \cdot (2, 4) \text{ com } r \in \mathbf{R}\}$$
$$B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \cdot (x, y) = r \cdot (-1, 1) \text{ com } r \in \mathbf{R}\}$$

Calcule $A \cap B$

Resp.: $A \cap B = \{(0, 0)\}$.

47.9 Fazendo r tomar todos os valôres reais possíveis, os conjuntos A e B do exercício 49.7 se tornarão em duas retas que se cortam em (0, 0).

Faça um gráfico dessas retas.

Resp.:

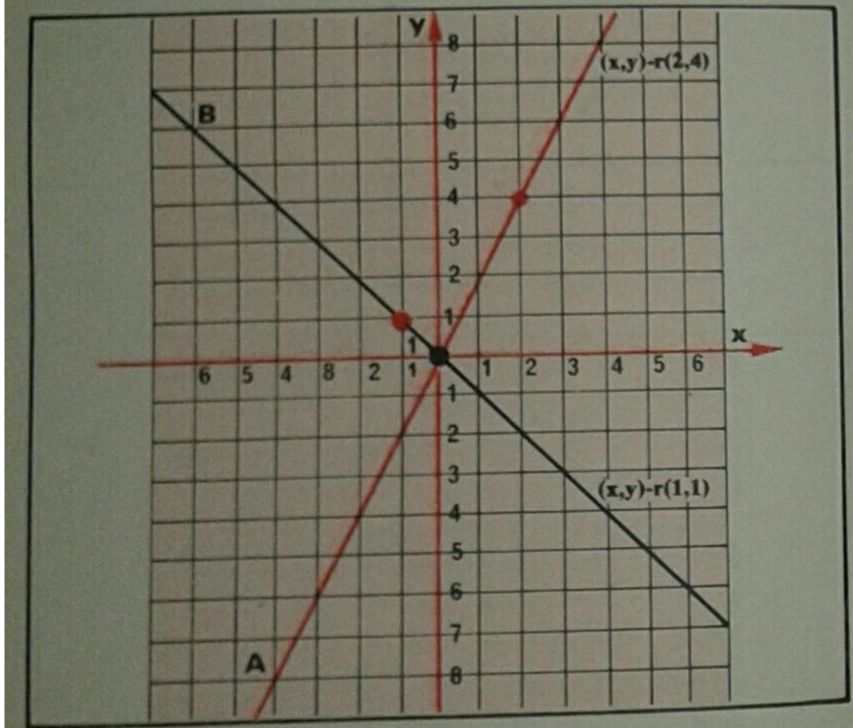


Fig. 64

47.10 Faça o gráfico da reta A gerada pelo ponto (1, 1), isto é:

$$A = \{(x, y) \; (x, y) = r(1, 1) \text{ com } r \in R\}$$

Sugestão: A é a reta que passa pelos pontos (1, 1) e (0, 0).

47.11 Faça o gráfico da reta B gerada pelo ponto (2, 2). Compare com a reta A do exercício anterior. O que você pode concluir a respeito de A e B?

Resp.: São iguais, isto é $A = B$ (coincidem)

47.12 Justifique porque as retas A e B dos dois exercícios anteriores são iguais.

Solução:

Os pontos (x, y) de A são dados por $(x, y) = r \cdot (1 \cdot 1)$.

Os pontos de B são dados por

$$(x, y) = s \cdot (2, 2) \text{ onde } s \in R$$

como $(2, 2) = 2 \cdot (1, 1)$ teremos:

$$(x, y) = s \cdot (2, 2) = s \cdot 2 \cdot (1, 1) = r(1, 1)$$

onde $r = 2 \cdot s$

Como vemos, todo ponto de B é um ponto de A e vice-versa.

47.13 Faça o gráfico da reta L gerada pelo ponto (4, 5)

Sugestão: L passa pelos pontos (4, 5) e (0, 0)

47.14 Faça o gráfico da reta M gerada pelo ponto (–3, 3)

Sugestão: M passa pelos pontos (–3, 3) e (0, 0)

47.15 Faça o gráfico da reta X gerada pelo ponto (1, 0)

Resp.: A reta X, coincide com o eixo X.

47.16 A reta Y gerada pelo ponto (0, 1) coincide com o eixo y?

Resp.: Sim.

47.17 Interprete geomètricamente o conjunto $S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x, y) = r\ (3, -4)\}$

Resp.: S é uma reta gerada por (3, –4), isto é, S é a reta que passa por (0, 0) e (3, –4)

47.18 47.18 O conjunto C é uma reta que passa por (0, 0) e por (–2, 5).

Escreva tal conjunto como um subconjunto de pares de R^2.

Resp.: $C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x, y) = r \cdot (-2, 5)\}$

47.19 Complete a descrição dos conjuntos A, B, C e D, dados abaixo, sabendo que os mesmos são retas respectivamente geradas por (1, 1), (–1, 1), (3, 1) e (3, –1)

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x, y) = r \cdot \ldots\ldots\}$$
$$B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x, y) = r \cdot \ldots\ldots\}$$
$$C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \ldots\ldots = r \cdot \ldots\ldots\}$$
$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \ldots\ldots = r \cdot \ldots\ldots\}$$

47.20 Faça o gráfico das retas A, B, C e D do exercício anterior.

Resp.:

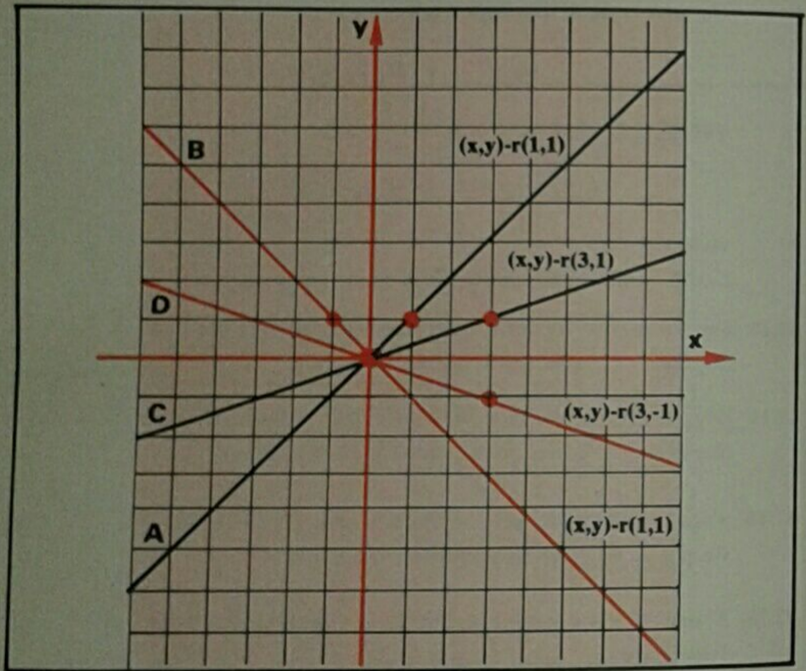


Fig. 65

47.21 Qual a intersecção das retas A, B, C e D do exercício anterior?

Resp.: $\{(0, 0)\}$

47.22 Os pontos $(1, 1)$ e $(2, 2)$ pertencem à reta A da figura acima?

Solução: O conjunto A tem seus pontos descritos por $(x, y) = r\,(1, 1)$

Fazendo r tomar os valôres 1 e 2 obteremos:

$$(x, y) = 1 \cdot (1, 1) = (1, 1)$$

$$(x, y) = 2 \cdot (1, 1) = (2, 2)$$

Portanto os pontos $(1, 1)$ e $(2, 2)$ pertencem a A

47.23 Adicione $(1, 1)$ com $(2, 2)$. Você obterá um outro ponto de A? Qual é êle?

Resp.: Sim, o ponto é $(3, 3)$

47.24 Desenhe o triângulo $T = \{(1, 1), (2, 3), (4, 0)\}$, e em seguida faça o gráfico de $2 \cdot T$ (multiplique cada vértice de T por 2).

Solução:

Sendo $T = \{(1, 1), (2, 3), (4, 0)\}$ e $2 \cdot T = \{(2, 2), (4, 6), (8, 0)\}$ obteremos o seguinte gráfico:

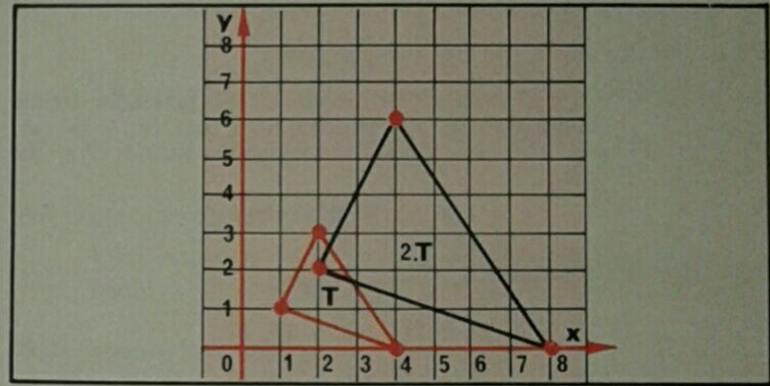


Fig. 66

47.25 Verifique se os lados de T e $2 \cdot T$ são paralelos dois a dois.

Resp.: Sim, são paralelos.

47.26 Definindo $(x, y) - (a, b)$ como sendo o par $(x - a, y - b)$ calcule as seguintes diferenças:

(a) $(4, 5) - (2, 3) =$ ....

(b) $(2, 3) - (0, 0) =$ ....

(c) $(1, 2) - (2, 3) =$ ....

Resp.:

(a) $(2, 2)$

(b) $(2, 3)$

(c) $(-1, -1)$

48 — Sumário

48.1 *Adição de pares ordenados*

(a) Definição $(x, y) + (a, b) = (x + a, y + b)$

(b) *Propriedades*

1) É comutativa

2) É associativa
3) Tem um elemento neutro: $(0, 0)$
4) Cada par (x, y) admite um inverso que é $(-x, -y)$.

48.2 *Multiplicação por um número real*

(a) *Definição*: Sendo r um número real, podemos definir o produto $r \cdot (x, y)$ como sendo o par $(r \cdot x, r \cdot y)$, isto é

$$r \cdot (x, y) = (r \cdot x, r \cdot y)$$

(b) *Propriedades*

1) $0 \cdot (x, y) = (0, 0)$

2) $1 \cdot (x, y) = (x, y)$

48.3 *Linha reta*

Vimos que o conjunto de pontos (x, y) de R^2 que podem ser escritos sob a forma $r \cdot (a, b)$ é uma linha reta que passa por (a, b) e $(0, 0)$. Assim

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x, y) = r \cdot (a, b),\ r \in \mathbf{R}\}$$

é uma linha reta que passa por (a, b) e $(0, 0)$.

VII - VETÔRES E ISOMETRIAS

49 — O Espaço Vetorial $<\mathbf{R}^2, +, >$.

49.1 Estrutura Matemática

Uma estrutura é um ente matemático constituido de um conjunto de operações e relações definidas nesse conjunto.

49.2 Espaço Vetorial

Ao introduzirmos as operações de *adição* de pares ordenados, e de multiplicação por um número real, $\mathbf{R}^2$ deixou de ser um simples conjunto de pontos do plano cartesiano para ser uma das mais importantes estruturas da matemática: o *Espaço Vetorial*.

Assim um *Espaço Vetorial* é uma estrutura matemática constituída por:

(a) Um conjunto (nesse nosso caso $\mathbf{R}^2$)

(b) Duas operações definidas nesse conjunto: uma chamada *adição* e a outra de *multiplicação* por um número real, tendo as propriedades enumeradas no sumário anterior (veja parágrafo 48).

49.3 Notação: Indicaremos o espaço vetorial construido sôbre $\mathbf{R}^2$ pela

$$<\mathbf{R}^2, +, \cdot>$$

onde $< \;\; >$ indica uma estrutura matemática.
$\mathbf{R}^2$ o conjunto dessa estrutura.
e $+, \cdot$ as operações estrutura.

50 — Vetores

Consideremos os pontos $a(x_a, y_a)$ e $b(x_b, y_b)$ de $\mathbf{R}^2$

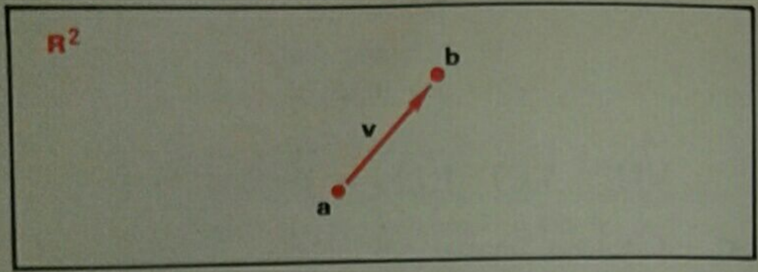


Fig. 67

Definição:

Chamamos de vetor v de origem a e extremidade final b, a diferença $b - a$, isto é:

$$\mathbf{v} = b - a = (x_b - x_a,\ y_b - y_a)$$

Representamos $\mathbf{v}$ por uma flecha que começa em a e termina em b.

50.1 Assim se $b(4, 5)$ e $a(2, 1)$ o vetor $\mathbf{v}$ de origem a e extremidade final b será dado por $\mathbf{v} = (4, 5) - (2, 1) = (4 - 2, 5 - 1) =$ ....

Resp.: (2, 4)

50.2 O vetor $\mathbf{a}$ de origem em $O(0, 0)$ e extremidade final em $a(2, 1)$ será dado por $\mathbf{a} = (2, 1) - (0, 0) =$ ....

Resp.: (2, 1)

O vetor $\mathbf{a}$ de origem em O e extremidade final a é dado por $\mathbf{a} = a - O =$ ...... pois $a - 0 = a$.

Resp.: a

50.3 Com isso acabamos de identificar o vetor $\mathbf{a}$ com o ponto a. Em outras palavras a cada ponto a de $\mathbf{R}^2$ podemos associar um *vetor* $\mathbf{a}$ que começa em 0 e termina em a.

A correspondência

$$\mathbf{a} \longleftrightarrow a$$

é biunívoca

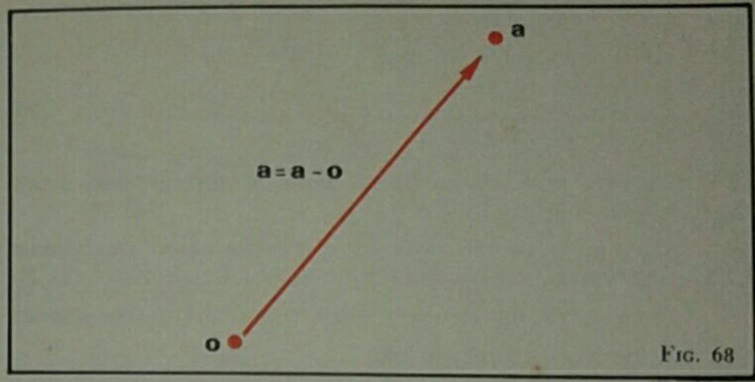


Fig. 68

identificando pares
ordenados com vetores

50.4 Olhe a figura abaixo

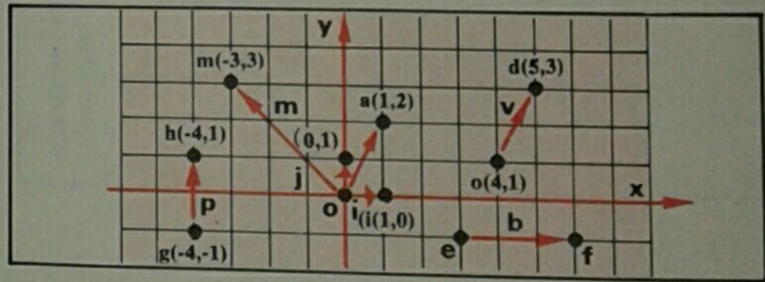


Fig. 69

e agora complete

(a) $v = d - c =$ .... $-$ .... $= (1.\ 2)$

(b) $a = a - 0 = (1,\ 2) - (0,\ 0) =$ ....

(c) $m = m - 0 =$ .... $-$ .... $=$ ....

(d) $i = i - 0 = (1,\ 0) - (0,\ 0) =$ ....

(e) $j = j - 0 =$ .... $-$ .... $=$ ....

(f) $b = b - e = (6, -1) - (3, -1) =$ ....

(g) $p =$ ...... $-$ ...... $= (-4,\ 1) - (-4, -1) = (0,\ 2)$

Resp.: (a) (5, 3), (4, 1)

(b) (1, 2)

(c) (−3, 3) − (0, 0), (−3, 3)

(*d*) (1, 0)

(*e*) (0, 1) – (0, 0), (0, 1)

(*f*) (3, 0)

(*g*) *h*, *g*

50.5 Os vetores **a** e **v** da figura anterior correspondem a um mesmo par (1, 2).

Por isso escreveremos **a** = **v** e diremos que os mesmos representam um mesmo *vetor livre* dado pelo par (1, 2).

Os vetores da figura abaixo representam um mesmo vetor livre dado pelo par ....

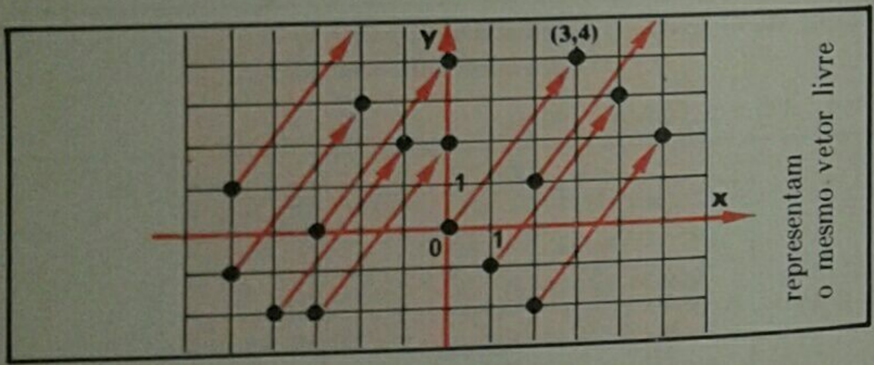


FIG. 70

Resp.: livre, (–1, 3)

50.6 Os vetores da figura abaixo representam um mesmo vetor ...., que é dado pelo par ....

representam um mesmo vetor livre

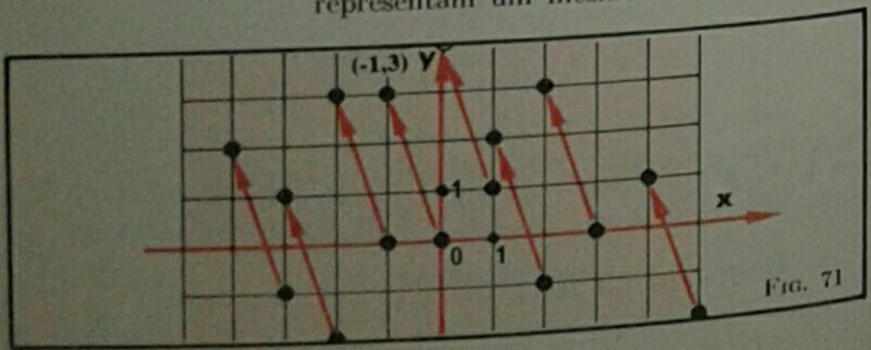


FIG. 71

Resp.: livre (–1, 3)

Os elementos do espaço vetorial $<\mathbf{R}^2, +, \cdot>$ são os *vetores livres*, que também são pares ordenados.

50.7 Um *vetor livre* é um par ....

Pelas figuras anteriores podemos também notar que um vetor livre é um conjunto de vetores associados a pontos de $\mathbf{R}^2$.

Resp.: ordenado

50.8 Um vetor livre é um .... de vetores associados a pontos de $\mathbf{R}^2$.

Resp.: conjunto

50.9 Você já notou que os vetores que representam um vetor livre são todos paralelos. Portanto um conjunto de vetores que não sejam paralelos:

(*a*) pode representar um vetor livre

(*b*) não pode representar um vetor livre

Resp.: (*b*) não pode representar um vetor livre

50.10 Um vetor livre é dado pelo par (–2, –3)

(*a*) Desenhe (na figura abaixo) representantes do mesmo que tenham origens em:

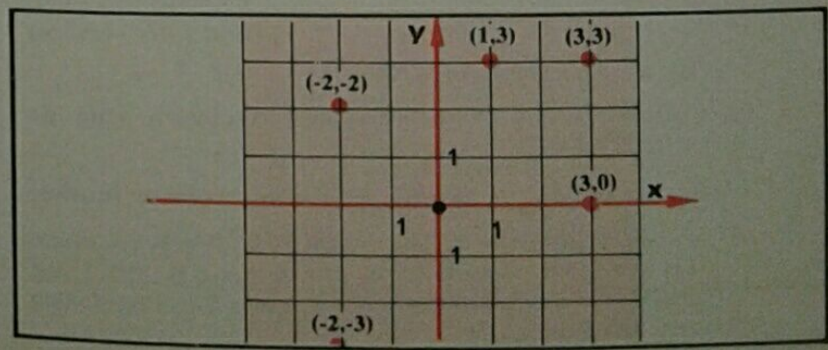
(*a*) (0, 0)

(*b*) (–2, 2)

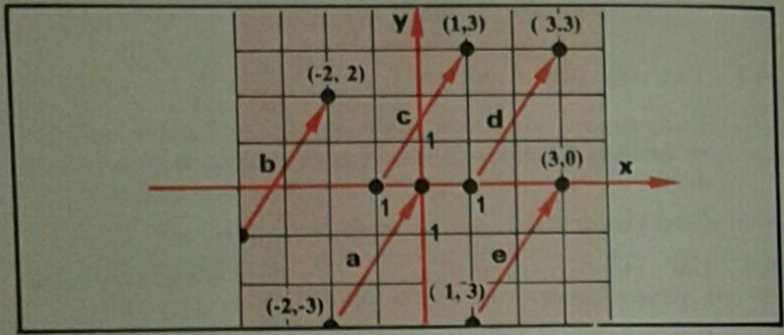
(*c*) (1, 3)

(*d*) (3, 3)

(*e*) (3, 0)



Resp.:



representantes do vetor livre (-2, -3)

FIG. 72

50.11 O vetor **a** da figura acima é dado pela diferença (-2, -3) - (0, 0) = (-2, -3), o vetor **b**, pela diferença (-4, -1) - (-2, -3) o vetor **c**, pela diferença (-1, 0) - (1, 3) = (-2, -3) o vetor **d** pela diferença (1, 0) - (3, 3) = (-2, -3) e o vetor **e** pela diferença (3, 0) - (1, 3) = ...

Resp.: (-2, -3)

51 — Sumário

51.1 *Espaço Vetorial*

O conjunto $\mathbf{R}^2$ de pares ordenados de números reais munido das operações + e · com as seguintes propriedades

1.ª) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ (comutativa)

2.ª) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ (associativa

3.ª) $\mathbf{a} + \mathbf{o} = \mathbf{a}$ (elemento neutro)

4.ª) $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{o}$ (elemento inverso

5.ª) Se $\mathbf{a} = (x_a, y_a)$ e $r \in \mathbf{R}$

onde **a**, **b** e **c** são pares ordenados, recebeu o nome de *espaço vetorial*.

51.2 *Vetores associados a pontos de R^2* (ou vetores ligados)

(*a*) A diferença $b - a = (x_b - x_a, y_b - y_a)$ recebeu o nome de vetor de origem *a* e extremidade *b* (ou vetor associado aos pontos *a* e *b*, ou ainda de vetor *ligado* aos pontos *a* e *b*)

(*b*) *Notação*:

Representaremos vetores por letras em *negrilo*. Assim **a**, **b**, **c**, **d** etc. representam vetores.

51.3 *Vetores livres*:

Os elementos do espaço vetorial $<\mathbf{R}^2, +, \cdot>$ recebem o nome de *vetores livres*. Um vetor livre é um conjunto de vetores ligados. Mais adiante veremos que o vetor livre é uma *classe de equivalência*.

52 — Exercícios

52.1 Consideremos os pontos $a(2, 2)$, $b(-1, 1)$, $c(0, 4)$, $d(3, 4)$, $e(-1, -1)$, $f(4, 0)$, $g(-4, 0)$ e $h(-3, 1)$.

Escreva como uma diferença de pares ordenados os seguintes vetores ligados que tenham:

1) origem em $o(0, 0)$ e final em $a(2, 2)$
2) origem em $o(0, 0)$ e final em $b(-1, 1)$
3) origem em $o(0, 0)$ e final em $c(0, 4)$
4) origem em $a(2, 2)$ e final em $b(-1, 1)$
5) origem em $c(0, 4)$ e final em $d(3, 4)$
6) origem em $e(-1, -1)$ e final em $a(2, 2)$
7) origem em $g(-4, 0)$ e final em $h(-3, -1)$
8) origem em $o(0, 0)$ e final em $h(-3, -1)$
9) origem em $f(4, 0)$ e final em $d(3, 4)$
10) origem em $e(-1, -1)$ e final em $b(-1, 1)$

Resp.:

1) $\mathbf{a} = (2, 2) - (0, 0) = (2, 2)$
2) $\mathbf{b} = (-1, 1) - (0, 0) = (-1, 1)$
3) $\mathbf{c} = (0, 4) - (0, 0) = (0, 4)$
4) $b - a = (-1, 1) - (2, 2) = (-3, -1)$
5) $d - \quad = (3, 4) - (0, 4) = (3, 0)$
6) $a - e = (2, 2) - (-1, -1) = (3, 3)$
7) $h - g = (-3, 1) - (-4, 0) = (1, -1)$
8) $h = (-3, -1) - (0, 0) = (-3, -1)$

9) $d - f = (3, 4) - (4, 0) = (-1, 4)$

10) $b - c = (-1, 1) - (-1, -1) = (0, 1)$

52.2 Um vetor de origem em a e final em b é igual a um outro de origem em c e final em d quando e sòmente quando $b - a = d - c$

Indique os vetores do exercício anterior que são iguais.

Solução:

Os vetores $b - a$, e $h - 0$ são iguais pois

$$b - a = (-1, 1) - (2, 2) = (-3, -1)$$

$$h - 0 = (-3, 1) - (0, 0) = (-3, -1)$$

ou seja $b - a = h - 0$

52.3 Faça um gráfico dos vetores $a - 0$, $b - 0$, $d - c$, $b - a$, $h - 0$, $h - g$, $d - f$. do exercício anterior.

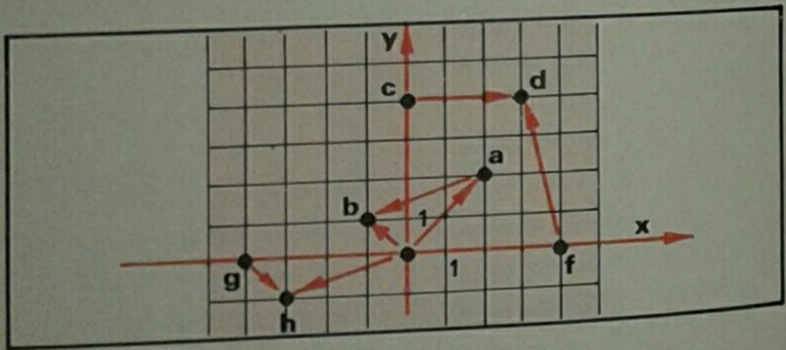


FIG. 73

52.4 Faça o gráfico dos vetores

(*a*) $(2, 2) - (0, 0)$

(*b*) $(4, 1) - (2, -1)$

(*c*) $(7, 1) - (5, -1)$

(*d*) $(11, 1) - (9, -1)$

(*e*) $(10, 4) - (8, 2)$

(*f*) $(7, 3) - (5, 1)$

(*g*) $(6, 4) - (4, 2)$

(*h*) $(1, 4) - (-1, 2)$

(*i*) $(5, 5) - (3, 3)$

(*j*) $(4, 6) - (2, 4)$

(*k*) $(10, 6) - (8, 4)$

(*l*) $(2, 9) - (0, 7)$

(*m*) $(5, 8) - (3, 6)$

(*n*) $(8, 9) - (6, 7)$

(*p*) $(9, 6) - (7, 4)$

(*q*) $(7, 7) - (5, 5)$

Resp.:

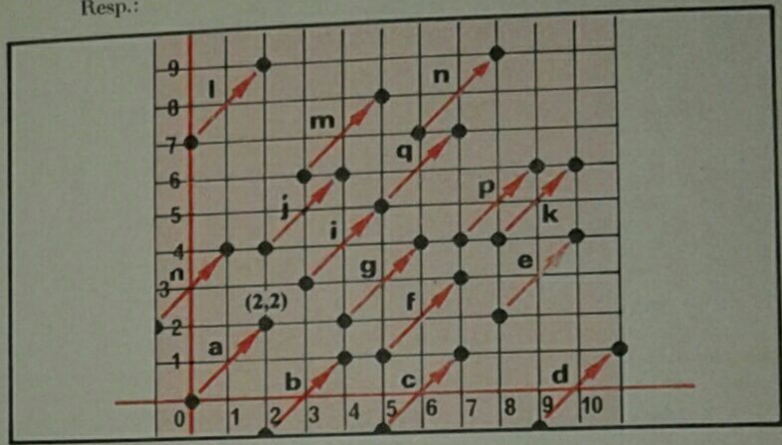


FIG. 74

52.5 Os vetores $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l$ m, n e p da figura anterior são iguais?

Resp.: Sim, são iguais

52.6 A relação de igualdade de vetores é uma relação de equivalência?

Resp.: Sim, pois possue as seguintes propriedades: reflexiva, simétrica e transitiva.

52.7 Os vetores da figura anterior representam um mesmo *vetor livre*? Qual é êle?

Resp.: Sim, representam um mesmo vetor livre dado pelo par (2, 2)

52.8 Um vetor livre é um conjunto de vetores ligados iguais?

Resp.: Sim

52.9 Sendo a igualdade de vetores ligados uma relação de equivalência e sendo o vetor livre o conjunto dêsses vetores iguais, podemos concluir que um vetor livre é uma classe de equivalência?

Resp.: Sim, e os elementos dessa classe são os vetores ligados iguais.

52.10 Escreva o conjunto de vetores iguais do exercício 52.4. Chame de C_a essa classe.

Resp.: $C_a = \{\mathbf{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, p}\}$

52.11 C_a é um vetor livre dado pelo par (2, 2)?

Resp.: Sim.

52.12 Considere os vetores $i = (1, 0)$ e $j = (0, 1)$.

Mostre que todo vetor dado pelo par (x, y) pode ser escrito sob a forma $x \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j}$

Solução: Sabemos

$$x \cdot (1, 0) = (x \cdot 1, x \cdot 0) = (x, 0)$$
$$y \cdot (0, 1) = (y \cdot 0, y \cdot 1) = (0, y)$$

Portanto

$$\begin{aligned} x \cdot (1, 0) + y \cdot (0, 1) &= (x, 0) + (0, y) \\ &= (x + 0, y + 0) \\ &= (x, y) \end{aligned}$$

ou seja

$$x \cdot (1, 0) + y(0, 1) = (x, y)$$

Como

$$\mathbf{i} = (1, 0) \quad \text{e} \quad \mathbf{j} = (0, 1)$$

poderemos escrever que

$$(x, y) = x \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j}$$

52.13 Escreva o vetor (2, 3) na forma $x \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j}$

Resp.: $(2, 3) = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

52.14 Escreva os vetores (2, –1), (3, 4) e (0, –3) na forma $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$.

Resp.:

$$(2, -1) = 2\mathbf{i} + (-1)\mathbf{j} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$$
$$(3, 4) = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$$
$$(0, -3) = 0\mathbf{i} + (-3)\mathbf{j} = -3\mathbf{j}$$

52.15 Sejam $a(2, 3)$, $b(4, 4)$, $d(3, 3)$ e $(5, 4)$.

(*a*) calcule o vetor $b - a$

(*b*) calcule o vetor $c - d$

(*c*) calcule o vetor $d - a$

(*d*) calcule o vetor $c - b$

(*e*) mostre que $d - a = c - b$

(*f*) mostre que $b - a = c - d$

(*g*) Qual é o inverso de $b - a$?

(*h*) Qual é o inverso de $d - c$?

Resp.:

(*a*) $b - a = (4, 4) - (2, 3) = (2, 1)$

(*b*) $c - d = (5, 4) - (3, 3) = (2, 1)$

(*c*) $d - a = (3, 3) - (2, 3) = (1, 0)$

(*d*) $c - b = (5, 4) - (4, 4) = (1, 0)$

(*e*) Realmente $c - a = d - b$ pois

$$d - a = (1, 0) \quad \text{e} \quad - b = (1, 0)$$

(*f*) Do mesmo modo $b - a = c - d = (2, 1)$

(*g*) O inverso de $b - a$ é $-(b - a) = -b + a = a - b = (-2, -1)$

(*h*) O inverso de $d - c$ é $-(d - c) = -d + c = c - d = (1, 0)$

52.16 Faça um gráfico dos vetores $b - a$, $c - d$, $d - a$, e $c - b$

Resp.:

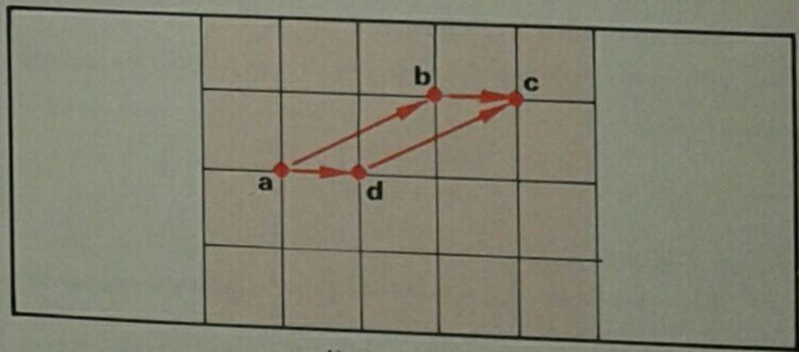


Fig. 75

Quadrilátero

O conjunto $\{a, b, c, d\}$ de quatro pontos distintos do plano $\mathbf{R}^2$ recebe o nome de quadrilátero.

Os pontos a, b, c, d são os seus vértices e os segmentos fechados ab, bc, e cd e da são os seus lados.

Paralelogramo

O quadrilátero $\{a, b, c, d\}$ que satisfaz uma das seguintes condições:

$$1) \; b - a = c - d$$
$$2) \; d - a = c - b$$

recebe o nome de *paralelogramo*

52.17 Verificar se o quadrilátero

$\{a(1, 1), b(1, 4), c(3, 4), d(3, 1)\}$ é um paralelogramo

Solução: basta verificarmos se $b - a = c - d$

$$b - a = (1, 4) - (1, 1) = (0, 3)$$
$$c - d = (3, 4) - (3, 1) = (0, 3)$$

Portanto

$$b - a = c - d$$

isto é $\{a, b, c, d\}$ é um quadrilátero.

52.18 Mostre que se um quadrilátero é um paralelogramo então os seus lados são paralelos dois a dois.

Sugestão: vetores iguais são paralelos.

Segmentos congruentes e paralelos

Dois segmentos de reta ab e cd são *congruentes* e *paralelos* se e sòmente se uma das seguintes condições fôr preenchida.

1) ou $b - a = c - d$

2) ou $b - a = d - c$

uma situação excluindo a outra

52.19 Mostre que os lados opostos de um paralelogramo são congruentes e paralelos.

52.20 Verifique se o segmento de reta ab é congruente e paralelo com o segmento de reta cd. Sendo $a(2, 3)$, $b(5, 1)$, $c(2, 5)$, $d(5, 3)$

Solução:

Já sabemos que um segmento de reta ab (conjunto de pontos da reta que se acham entre a e b, inclusive a e b) é congruente e paralelo ao segmento cd, se $b - a = c - d$ ou $b - a = d -$ (uma situação excluindo a outra).

Calculemos portanto $b - a$, $d - c$, e $c - d$

$$b - a = (5, 1) - (2, 3) = (3, -2)$$
$$c - d = (2, 5) - (5, 3) = (-3, 2)$$
$$d - c = (5, 3) - (2, 5) = (3, -2)$$

Portanto $b - a = d - c$, ou seja ab e d são segmentos congruentes e paralelos.

52.21 Verificar se o segmento de reta ab é congruente e paralelo ao segmento de reta cd sendo $a(0, 0)$, $b(3, 4)$, $c(2, 3)$, $d(1, 2)$

Resp.: ab não é congruente e paralelo a cd pois $b - a = (3, 4)$, $c - d = (1, 1)$ e $d - c = (-1, -1)$, portanto $b - a \neq c - d$ e $b - a = d - c$.

52.22 Verificar se os segmentos ab e cd são congruentes e paralelos sendo $a(0, 0)$, $b(3, 4)$, $c(2, 3)$ e $d(5, 7)$

Resp.: São congruentes e paralelos pois $b - a = (3, 4) = d - c$.

52.23 Mostre que o quadrilátero $\{0, a, b, c\}$ onde $c = a + b$, é um paralelogramo.

Solução:

Devemos verificar se $a - 0$ é igual a $c - b$.

$a - 0 = a$ (pois 0 é o elemento neutro da adição)

$c - b = a + b - b = a$ (pois $c = a + b$)

Portanto

$$a - 0 = c - b$$

ou seja $\{0, a, b, c\}$ é um paralelogramo.

Observação: O exercício que acabamos de resolver permite-nos achar uma maneira gráfica de adicionar pares ordenados e portanto vetores livres. Essa maneira é conhecida como regra do paralelogramo.

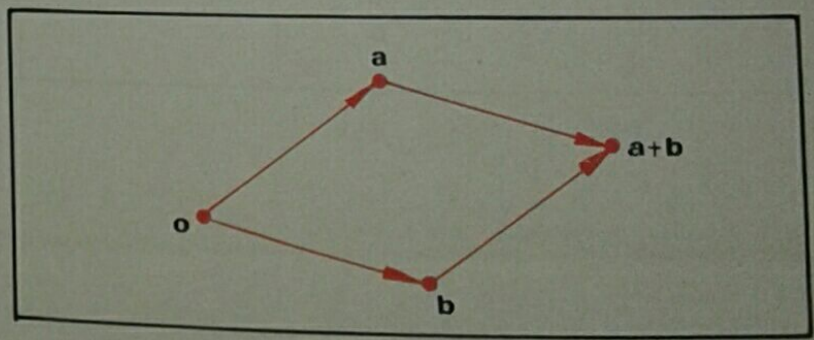


FIG. 76

O quadrilátero

$\{o, a, b, a + b\}$

é um paralelogramo

52.24 Calcule $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ sendo $\mathbf{a} = a - 0$ e $\mathbf{b} = b - 0$

Solução:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a - 0) + (b - 0)$$

aplicando a propriedade associativa da adição

$$\begin{aligned}\mathbf{a} + \mathbf{b} &= (a + b) - 0 - 0\\ &= (a + b) - (0 + 0)\\ &= (a + b) - 0\end{aligned}$$

Portanto o vetor $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ é um vetor que começa no ponto O e termina no ponto $a + b$

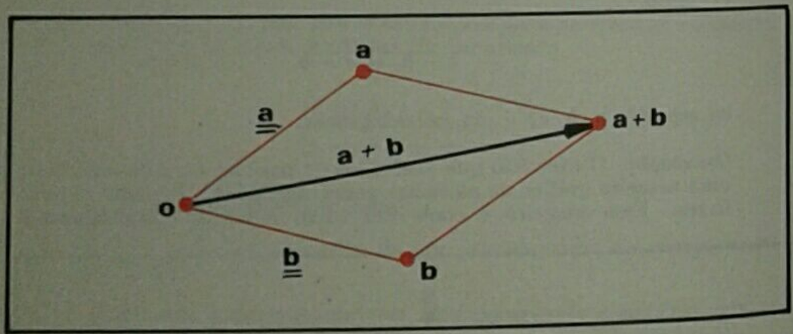


Fig. 77

52.25 Adicionar os vetores $b - a$ e $c - b$.

Solução:

$$\begin{aligned}(b - a) + (c - b) &= b - a + c - b\\ &= (b - b) + (c - a)\\ &= 0 + c - a\\ &= c - a\end{aligned}$$

Portanto, o vetor soma dos vetores $b - a$ e $c - b$ é o vetor que tem origem em a e extremidade final em c.

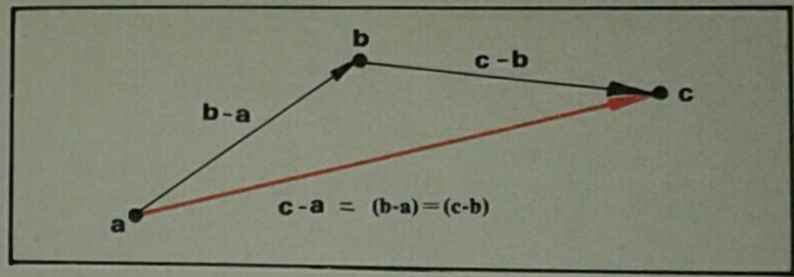


Fig. 78

52.26 Dados $a(2, 3)$, $b(4, 5)$ e $c(3, 7)$

Calcular:

(a) $2 \cdot a$

(b) $3 \cdot b$

(c) $-1 \cdot c$

(d) $\frac{1}{2} \cdot a$

(e) $a + b$

(f) $b + c$

(g) $a + c$

(h) $3 \cdot (b - a)$

(i) $2 \cdot (a + c)$

(j) $2 \cdot a + c$

(k) $-a + b + c$

(l) $3a - 2b$

(m) $-2c - a$

(n) $b - c$

Soluções:

(a) $2 \cdot a = 2 \cdot (2, 3) = (4, 6)$

(b) $3 \cdot b = 3 \cdot (4, 5) = (12, 15)$

(c) $-1 \cdot c = -1 \cdot (3, 7) = (-3, -7)$

(d) $\frac{1}{2} \cdot a = \ldots\ldots \cdot (2, 3) = (1, 3/2)$

(e) $a + b = (2, 3) + (4, 5) = (2 + 4, 3 + 5) = (6, 8)$

(f) $b + c = (4, 5) + (3, 7) = (4 + 3, 5 + 7) = (7, 12)$

(g) $a + c = (2, 3) + (3, 7) = (2 + 3, 3 + 7) = (5, 10)$

(h) $3 \cdot (b - a) = 3 \cdot [(4, 5) - (2 \cdot 3)] = 3 \cdot [(2, 2)] = (6, 6)$

(i) $2 \cdot (a + b) = 2 \cdot [(2, 3) + (3, 7)] = 2 \cdot [(7, 12)] = (14, 24)$

(j) $2a + c = 2 \cdot (2, 3) + (3, 7) = (4, 6) + (3, 7) = (7, 13)$

(k) $-a + b + c = (2, 3) + (4, 5) + (3, 7) = (-2 + 4, -3 +$
$+ 3, 7)$

(*l*) $3a - cb = 3(2, 3) - 2(4, 5) = (6, 9) - (8, 10) =$
$= (6 - 8, 9 - 10) = (-1, -1)$

(*m*) $-2c - a = -2(3, 7) - (2, 3) = (-6, -14) - (2, 3)$
$= (-6 - 2, -14 - 3) = (-8, -17)$

(*n*) $b - c = (4, 5) - (3, 7) = (1, -2)$

52.27 Dados os pontos $o(0, 0)$, $a(1, 3)$, $b(4, 4)$, $c(3, 1)$, $d(6, 1)$, $e(0, 1)$, $f(3, 6, 5)$, $g(6, 7, 5)$, $h(9, 6)$, $j(12, 4)$ e $i(9, 3, 5)$. Calcular:

(*a*) $\mathbf{f} = f - 0$
(*b*) $\mathbf{g} = g - 0$
(*c*) $\mathbf{h} = h - 0$
(*d*) $\mathbf{d} = d - 0$
(*e*) $g - b$
(*f*) $h - b$
(*g*) $j - i$
(*h*) $g - i$
(*i*) $b - i$
(*j*) $c - b$
(*k*) $a - b$
(*l*) $d - g$

Resp.:

(*a*) $(3, 6, 5)$
(*b*) $(6, 7, 5)$
(*c*) $(9, 6)$
(*d*) $(6, 1)$
(*e*) $(2, 3, 5)$
(*f*) $(5, 2)$
(*g*) $(3, 0, 5)$
(*h*) $(-3, 4)$
(*i*) $\left(-5, \frac{1}{2}\right)$
(*j*) $(-1, -3)$
(*k*) $(-3, -1)$
(*l*) $(0, 6, 5)$

52.28 Considere os mesmos pontos do exercício anterior, e ache

(*a*) vetores iguais a $c = c - O$
(*b*) ,, ,, ,, $a = a - O$
(*c*) ,, ,, ,, $f - a$
(*d*) paralelos ao vetor $j - b$
(*e*) paralelos ao vetor $c - g$

Resp.:

(*a*) $b - a$ e $g - b$
(*b*) $b - c$
(*c*) $g - b$
(*d*) $c - e$, $d - c$ e $d - e$
(*e*) $i - h$, $c - f$ e $o - e$

52.29 Considere os mesmos pontos do exercício 52.27.

Calcule as seguintes somas:

(*a*) $(a - 0) + (f - a)$
(*b*) $(g - f) + (h - g)$

(*c*) $(d - c) + (h - d)$
(*d*) $(g - b) + (h - g) + (j - h)$
(*e*) $(i - b) + (h - i) + (f - h)$
(*f*) $(a - 0) + (f - a) + (h - f) + (i - h) + (j - i) +$
$+ (d - j) + (b - d)$
(*g*) $(b - 0) - (b - c)$
(*h*) $(h - 0) - (h - c)$
(*i*) $(c - b) - (c - i)$
(*j*) $(c - i) - (c - b)$
(*l*) $(d - c) + (e - c)$
(*m*) $(j - g) - (j - c)$
(*n*) $(h - 0) + (i - h) - (i - g) - (g - b)$
(*o*) $(c - 0) + (f - c) - (f - i) - (i - d) + (e - d)$
(*p*) $(f - a) + (b - f) + (a - b)$
(*q*) $(i - j) + (j - i)$
(*r*) $(a - 0) + (f - a) + (g - f) + (h - g) + (j - h) +$
$+ (d - j) + (c - d) + (0 - c)$

Resp.:

(*a*) $f - 0 = (3, 6{,}5$
(*b*) $h - f = (6, -0{,}5)$
(*c*) $h - c = (6, 5)$
(*d*) $j - b = (8, 0)$
(*e*) $f - b = (-1, 2{,}5)$
(*f*) $b - 0 = (4, 4)$
(*g*) $c - 0 = (3, 1)$
(*h*) $c - 0 = (3, 1)$
(*i*) $i - b = (5, -0{,}5)$
(*j*) $b - i(-5, 0{,}5)$
(*l*) $0 = (0, 0)$
(*m*) $c - g = (-3, -6{,}5)$
(*n*) $b - 0 = (4, 4)$
(*o*) $e - 0 = (0, 1)$
(*p*) (*q*) e (*r*) $0 = (0, 0)$

52.30 Sendo a, b, c, d, e, f, g, h, i, e j os pontos do exercício 52.27, calcular:

(a) $\frac{1}{2}[a + c]$ (d) $\frac{1}{13}[6(g - b) + 7(d - b)]$

(b) $\frac{1}{2}[2(h - b) + 3(i - b)]$ (e) $\frac{1}{2}[(b - c) - (c - d)]$

(c) $\frac{1}{11}[10(f - b) + (c - b)]$ (f) $(a - 0) - 2(f - a) + 3(g - f)$

Resp.:

(a) $(2, 2)$ (d) $(2, 0)$

(b) $(5, 0{,}5)$ (e) $(2, 1{,}5)$

(c) $(-1, 2)$ (f) $(6, -1)$

52.31 $Q = [o, a, b, c]$ é um quadrado.

Sendo $o = (a, 0)$, e $a(a, 0)$, achar:

(a) $\mathbf{a} = a - O$

(b) $\mathbf{b} = b - O$

(c) $\mathbf{c} = c - O$

Sugestão: $\mathbf{a} + \mathbf{c} = \mathbf{b}$, faça um gráfico.

Resp.:

(a) $\mathbf{a} = (0, 1)$

(b) $\mathbf{b} = (1, 1)$

(c) $\mathbf{c} = (1, 0)$

52.32 Calcule $\mathbf{b} - \mathbf{c}$, sendo $\mathbf{a}$ e $\mathbf{c}$ do exercício anterior.

Resp.: $\mathbf{a} - \mathbf{c} = (0, 1) - (1, 0) = (-1, 1)$.

52.33 A figura abaixo é denominada de hexágono regular (tem 6 vértices).

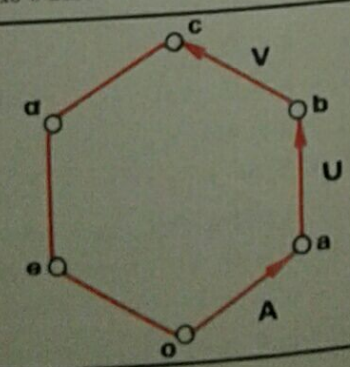


Fig. 79

Sendo $\mathbf{a} = a - 0$, $\mathbf{u} = b - a$, e $\mathbf{v} = c - b$ e sabendo que $\mathbf{a} + \mathbf{v} = \mathbf{u}$, calcule em têrmos de $\mathbf{a}$, $\mathbf{u}$, e $\mathbf{v}$ os seguintes vetores

(a) $e - d$ (c) $d - o$ (e) $b - o$ (g) $d - c$

(b) $c - a$ (d) $c - o$ (f) $e - o$ (h) $(c - d) + (d - e)$

Resp.:

(a) $-\mathbf{u}$ (e) $\mathbf{a} + \mathbf{u}$

(b) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ (f) $-\mathbf{v}$

(c) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ (g) $-\mathbf{a}$

(d) $\mathbf{a} + \mathbf{u} + \mathbf{v} = 2\mathbf{u}$ (h) $\mathbf{a} + \mathbf{u}$

53 — Translação em $\mathbf{R}^2$

Você já sabe que uma transformação é uma aplicação de um conjunto em si mesmo. Iremos estudar transformações em $\mathbf{R}^2$, também conhecidas pelo nome de transformações geométricas.

Um primeiro tipo de transformação geométrica é a *translação*.

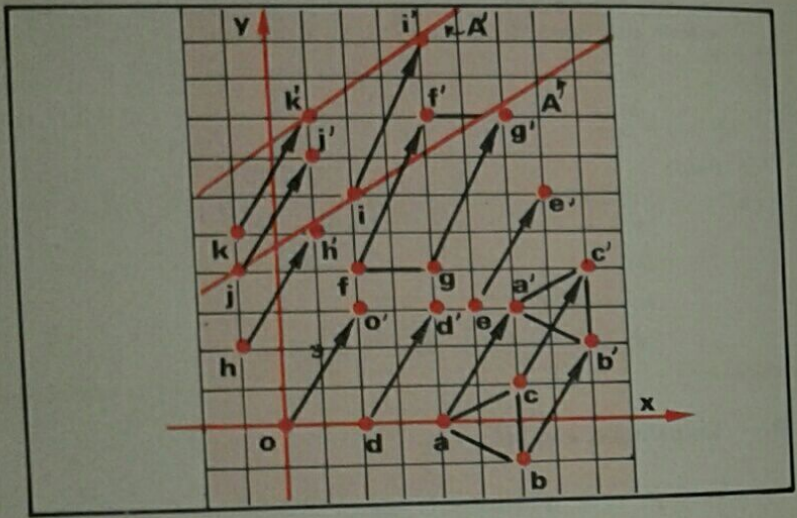
Translação

Seja $\mathbf{t}$ um determinado vetor livre de $\mathbf{R}^2$.

A transformação $(x, y) \xrightarrow{\mathbf{t}} (x', y')$ que transforma cada ponto (x, y) em um outro ponto (x', y') de $\mathbf{R}^2$ dada por $(x, y) + \mathbf{t} = (x', y')$, recebe o nome de *translação de vetor* $\mathbf{t}$ ou simplesmente de translação $\mathbf{t}$. O par (x', y') é a imagem de (x, y).

Exemplo: Os pontos da figura abaixo:

$a(4, 0)$, $b(6, -1)$, $c(6, 1)$, $d(2, 0)$, $e(5, 3)$, $f(2, 4)$, $g(4, 4)$, $h(-1, 2)$, $i(2, 6)$, $j(-1, 4)$, e $k(-1, 5)$, são transformados pela translação $t = (2, 3)$ nos pontos $a'(6, 3)$, $b'(8, 2)$, $c'(8, 4)$, $d'(4, 3)$, $e'(7, 6)$, $f'(4, 7)$, $g'(6, 7)$, $h'(1, 5)$, $i'(4, 9)$, $j'(1, 7)$, e $k'(1, 8)$, respectivamente.



translação t = (2, 3)

FIG. 80

53.1 Em $a + t = a'$, dizemos que a' é a imagem de ......

Resp.: a

53.2 Em $b + t = b'$, dizemos que b' é a .... de b.

Resp.: imagem

53.3 A imagem b' de b foi obtida por meio de uma .... t.

Resp.: translação

53.4 O triângulo $T = \{a, b, c\}$ se transformou no triângulo $T' = \{\ldots, \ldots, \ldots\}$ após uma translação $t = (2, 3)$.

Resp.: a', b', c'

53.5 O segmento $f'g'$ é a .... do segmento fg na translação t.

Resp.: imagem

53.6 O quadrilátero $\{f, f', g', g\}$ é um paralelogramo pois $f' - f = g - \ldots = t$.

Resp.: g'

53.7 A imagem $f'g'$ é congruente e .... ao segmento fg.

Resp.: paralela

53.8 A reta A que passa por i e j se transforma na reta ....

Resp.: A'

53.9 A reta A': (a) é paralela à reta A

(b) não é paralela à reta A

Resp.: (a) é paralela à reta A

A translação transforma:

1 — Uma reta em outra que lhe é paralela.

2 — Um segmento em outro que lhe é paralelo e congruente.

53.10 A reta A' é paralela à reta A porque o quadrilátero $\{j, j', i', i\}$:

(a) é um paralelogramo

(b) não é um paralelogramo

Resp.: (a) é um paralelogramo

53.11 Se i' e j' são imagens, numa translação t, dos pontos i e j respectivamente, então o quadrilátero $\{j, j', i', i\}$ é um ....

Resp.: *paralelogramo*

$$\left.\begin{array}{l} i + t = i' \\ j + t = j' \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \{j, j', i', i\} \text{ é um paralelogramo}$$

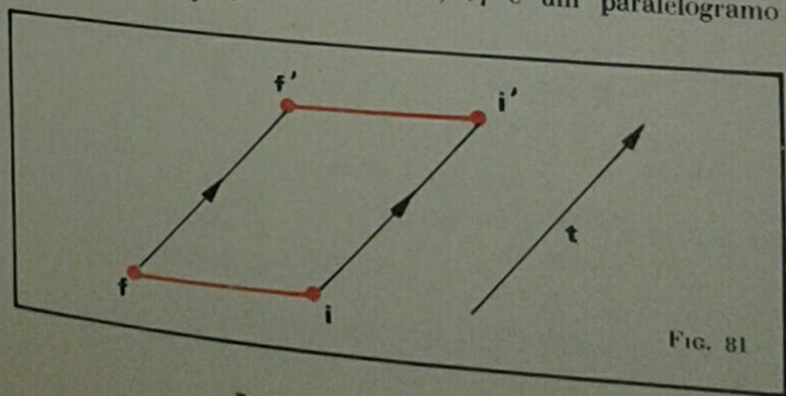


FIG. 81

54 — Sumário

54.1 *Translação*

A transformação $(x, y) \xrightarrow{\mathbf{t}} (x', y')$ dada por $(x, y) + \mathbf{t} =$
$= (x', y')$ recebe o nome de translação $\mathbf{t}$.

O ponto (x', y') se diz imagem de (x, y)

54.2 *Segmentos de reta*

A imagem de um segmento ab, é um outro segmento $a'b'$ que lhe é paralelo e congruente.

Em outras palavras o quadrilátero $\{a, a', b', b\}$ é um paralelogramo.

54.3 *Retas*

A imagem de uma reta A, é uma outra A', que lhe é paralela.

55 — Exercício

55.1 Dado o vetor $\mathbf{t} = (2, 2)$, calcular as imagens dos seguintes pontos, na translação $\mathbf{t}$.

1) $a(1, 3)$	6) $f(2, 2)$
2) $b(-2, -2)$	7) $g(1, -1)$
3) $c(-1, 3)$	8) $h(-3, 0)$
4) $d(-2, -3)$	9) $i(-4, 1)$
5) $e(-3, 0)$	10) $j(-3, 4)$

Resp.:

1) $a'(3, 5)$	6) $f'(4, 4)$
2) $b'(0, 0)$	7) $g'(3, 1)$
3) $c'(1, 5)$	8) $h'(-1, 2)$
4) $d'(0, -1)$	9) $i'(-2, 3)$
5) $e'(1, 2)$	10) $j'(-1, 6)$

55.2 Faça um gráfico do exercício anterior

Resp.:

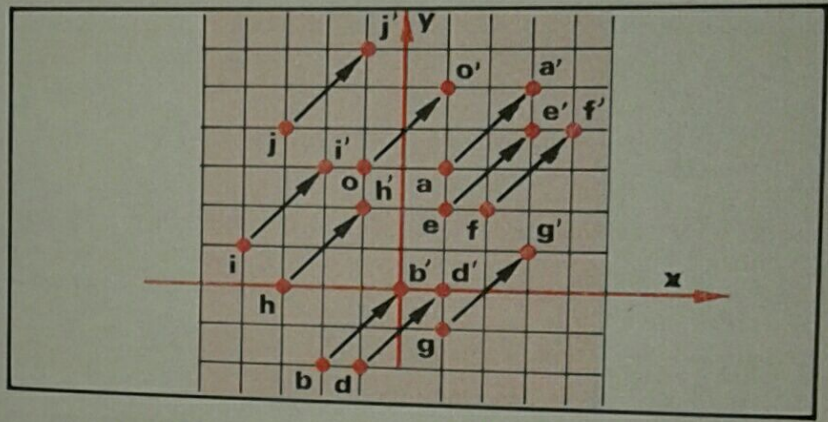


FIG. 82

55.3 A imagem do ponto $(3, 2)$ numa translação $\mathbf{t}$ é o ponto $(-1, -1)$. Calcular o vetor $\mathbf{t}$.

Resp.: $\mathbf{t} = (-1, -1) - (3, 2) = (-4, -3)$

55.4 Uma reta R passa pelos pontos $(2, 3)$ e $(3, 1)$. Seja R' a imagem de R na translação $\mathbf{t} = (2, 2)$.

Determinar dois pontos de R'.

Solução: A reta R' passa pelas imagens dos pontos $(2, 3)$ e $(3, 1)$. Portanto as imagens dêsses pontos são dois pontos de R'.

A imagem de $(2, 3)$ será:

$$(2, 3) + \mathbf{t} = (2, 3) + (2, 2) = (4, 5)$$

A imagem de $(3, 1)$ será:

$$(3, 1) + \mathbf{t} = (3, 1) + (2, 2) = (5, 3)$$

Portanto $(4, 5)$ e $(5, 3)$ são dois pontos de R'.

55.5 A reta A' é a imagem da reta A gerada pelo ponto $(1, 1)$ na translação $\mathbf{t} = (3, 2)$.

Ache o conjunto que define A'.

Solução: A reta A é gerada pelo ponto $(1, 1)$ portanto, $A = \{(x, y) \mid (x, y) = r \cdot (1, 1)\}$.

Os pontos de (x', y') de A' são obtidos dos de A por translação $\mathbf{t} = (3, 2)$, isto é:

$$(x', y') = (x, y) + (2, 3)$$
$$= r(1, 1) + (2, 3)$$

pois $(x, y) = r \cdot (1, 1)$

Portanto

$$A' = \{(x', y') \mid ('x, y') = r(1, 1) + (2, 3)\}$$

55.6 A reta A' é a imagem da reta A gerada pelo ponto $(-2, 3)$, na translação $\mathbf{t} = (3, 2)$

Resp.: $A' = \{(x', y') \mid (x', y') = r(-2, 3) + (3, 2)\}$.

55.7 Ache as imagens das figuras abaixo:

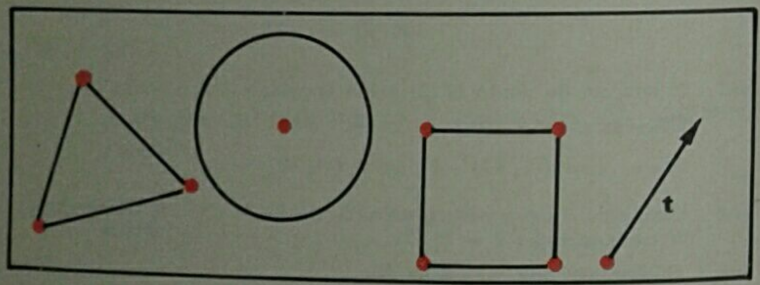


FIG. 83

55.8 Mostre que se $(x, y) + \mathbf{t} = (x', y')$ onde $\mathbf{t} = (x_1, y_1)$, então $x + x_1 = x'$ e $y + y_1 = y'$.

Solução: $(x, y) + \mathbf{t} = (x', y')$

Como $\mathbf{t} = (x_1, y_1)$ teremos

$$(x, y) + (x_1, y_1) = (x', y')$$
$$(x + x_1, y + y_1) = (x', y')$$

Por definição de par ordenado, teremos:

$$x + x_1 = x' \quad \text{e} \quad y + y_1 = y'$$

55.9 Uma circunferência C tem o seu centro no ponto $c(1, 1)$ e raio $r = 2$. Seja C' a circunferência obtida de C por uma translação $\mathbf{t} = (2, 3)$.

Pergunta-se:

(*a*) qual o centro de C')?

(*b*) qual é o seu raio?

Resp.:

(*a*) $C'(3, 4)$

(*b*) $r' = r = 2$.

55.10 Aplique uma translação $\mathbf{t} = (2, 3)$ no ponto $(1, 1)$. Em seguida aplique uma outra translação $\mathbf{s} = (3, -2)$ na imagem de $(1, 1)$ (obtida por $\mathbf{t}$).

(*a*) Qual é a imagem resultante dessa dupla aplicação de translações (composição de translações)?

(*b*) Existe alguma translação $\mathbf{h}$ que faça o papel das duas translações $\mathbf{t}$ e $\mathbf{s}$ juntas? Em outras palavras: qual é a translação que transforma $(1, 1)$ diretamente na imagem final?

Solução:

(*a*) Aplicando $\mathbf{t}$ ao par $(1, 1)$ teremos:

$$(1, 1) + \mathbf{t} = (1, 1) + (2, 3) = (3, 4)$$

Apliquemos agora $\mathbf{s}$ na imagem obtida $(3, 4)$:

$$(3, 4) + \mathbf{s} = (3, 4) + (3, -2) = (6, 2)$$

Portanto a imagem resultante da aplicação sucessiva das translações $\mathbf{t}$ e $\mathbf{s}$ no ponto $(1, 1)$ é o ponto $(6, 2)$.

(*b*) Se existe uma translação $\mathbf{h}$ que leva $(1, 1)$ diretamente a $(6, 2)$, ela deve ser dada por:

$$(1, 1) + \mathbf{h} = (6, 2)$$

Portanto

$$\mathbf{h} = (6, 2) - (7, 1) = (5, 1)$$

Observemos que $\mathbf{s} + \mathbf{t} = (3, -2) + (2, 3) = (5, 1)$

ou seja:

$$\mathbf{h} = \mathbf{s} + \mathbf{t}$$

55.11 A translação $\mathbf{h}$ se diz *composta* de $\mathbf{t}$ e $\mathbf{s}$.

Faça um gráfico do exercício anterior.

Resp.:

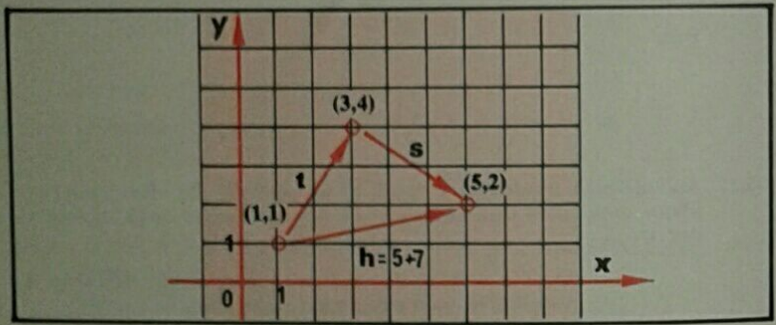


Fig. 84

55.12 Aplique uma translação $\mathbf{t} = (3, 0)$ no ponto $(1, 2)$. Em seguida aplique a translação $\mathbf{s}$ $(0, -2)$ na imagem obtida por $\mathbf{t}$.

(*a*) Qual é a imagem final?

(*b*) Qual a translação $\mathbf{h}$ composta de $\mathbf{t}$ e $\mathbf{s}$?

(*c*) Faça um gráfico dessas translações.

Resp.:

(*a*) Aplicando $\mathbf{t}$ em $(1, 2)$ obtemos o ponto $(4, 2)$

Em seguida aplicando $\mathbf{s}$ em $(4, 2)$ obteremos o ponto $(4, 0)$ que é imagem final.

(*b*) $\mathbf{h} = \mathbf{s} + \mathbf{t} = (3, -2)$

(*c*) As translações $\mathbf{t}$, $\mathbf{s}$ e $\mathbf{h}$ são os lados do triângulo

$$\{(1, 2), (4, 2), (4, 0)\}$$

55.13 A composição de translações é comutativa?

Em outras palavras $\mathbf{s} + \mathbf{t} = \mathbf{t} + \mathbf{s}$?

Resp.: Sim

55.14 A translação nula $\mathbf{0}$ é definida por $\mathbf{0} = (0, 0)$.

Mostre que $\mathbf{t} + \mathbf{0} = \mathbf{t}$.

Sugestão: Use a definição de adição de pares ordenados.

55.15 Qual é o elemento neutro da composição de translações?

Resp.: É a translação nula $\mathbf{0} = (0, 0)$.

55.16 Sendo $\mathbf{t} = (3, 2)$, ache uma outra translação $\mathbf{s}$ tal que $\mathbf{t} + \mathbf{s} = 0$.

Solução:

Pela condição imposta pelo problema devemos ter:

$$\mathbf{t} + \mathbf{s} = 0$$

ou seja

$$(3, 2) + \mathbf{s} = (0, 0)$$

portanto

$$\mathbf{s} = (0, 0) - (3, 2) = (0 - 3, 0 - 2)$$

então $\quad \mathbf{s} = (-2, -2) = -(3, 2) = -\mathbf{6}$

A translação $\mathbf{s}$ tal que $\mathbf{t} + \mathbf{s} = 0$, é igual a $-\mathbf{6}$.

55.17 Qual é o elemento inverso de $\mathbf{t}$.

Resp.: $-\mathbf{t}$.

55.18 A translação $\mathbf{t}$ é também conhecida pelo nome de translação inversa de $\mathbf{t}$.

Sendo $\mathbf{t} = (-3, 2)$, qual é a translação inversa?

Resp.: $-\mathbf{t} = (3, -2)$.

55.19 Um triângulo T é transformado num triângulo T' pela translação $\mathbf{t} = (5, 1)$.

Qual a translação que transforma T' em T?

Resp.: É a translação inversa de $\mathbf{t}$, ou seja

$$-\mathbf{t} = (-5, -1)$$

55.20 Considere a rede $Z \times Z$.

Qual é a translação $\mathbf{t}$ que transforma essa rede nela mesmo (isto é $(Z \times Z) + \mathbf{t} = (Z \times Z)$)?

Resp.: Tôda translação $\mathbf{t} = (a, b)$ em que a e b são inteiros transformada a rede $Z \times Z$ nela mesmo

55.21 Qual a reta que é invariante na translação $\mathbf{t} = (1, 1)$? Em outras palavras: qual a reta que se transforma nela mesmo na translação $\mathbf{t} = (1, 1)$?

Resp.: É a reta gerada por $(1, 1)$, isto é $A = \{(x, y) \mid (x, y) = r \cdot (1, 1)\}$ (a reta A passa por $(1, 1)$ e $(0, 0)$).

55.22 Qual a reta que é invariante na translação $\mathbf{t}(2, 3)$?

Resp.: $A = \{(x, y) \mid (x, y) = r(2, 3)\}$.

55.23 Qual a reta que é invariante na translação nula $0 = (0, 0)$?
Resp.: Tôdas as retas de R^2 são invariantes na translação 0.

56 — Simetria Central s_o

Chamamos de *simetria central*, tôda transformação do par (x, y) no par $(-x, -y)$ e escreveremos que:

$$s_o[(x, y)] = (-x, -y)$$

Observação: O ponto $(-x, -y)$ é o *simétrico* de (x, y) em relação ao ponto $0(0, 0)$.

56.1 Assim s_o transforma o par $(2, 3)$ no par $(-2, -3)$, isto é

$$s_o[(2, 3)] = \_\_\_\_\_\_$$

Resp.: $(-2, -3)$

56.2 Complete:

(*a*) $s_o[(1, 1)] =$ ______
(*b*) $s_o[(3, 5)] =$ ______
(*c*) $s_o[(-3, 5)] =$ ______
(*d*) $s_o[(-3, -5)] =$ ______
(*e*) $s_o[(-1, -2)] =$ ______
(*f*) $s_o[(1, -2)] =$ ______
(*g*) $s_o[(0, 3)] =$ ______
(*h*) $s_o[(0, 0)] =$ ______

Resp.: (*a*) $(-1, -1)$ (*e*) $(1, 2)$
(*b*) $(-3, -5)$ (*f*) $(-1, 2)$
(*c*) $(3, -5)$ (*g*) $(0, -3)$
(*d*) $(3, 5)$ (*h*) $(0, 0)$

56.3 Se T é o triângulo
$T = \{(1, 1), (2, 3), (5, 0)\}$ então $s_o[T]$ será o triângulo
{ ______, ______, ______ }.
Resp.: $(-1, -1), (-2, -3), (-5, 0)$

56.4 Sendo $a = (2, 3)$ então $s_o[a] =$ ______ $= -a$
Resp.: $(-2, -3)$

A simetria central s_o, transforma o vetor **a** no vetor **-a**.

56.5 Estude a figura abaixo

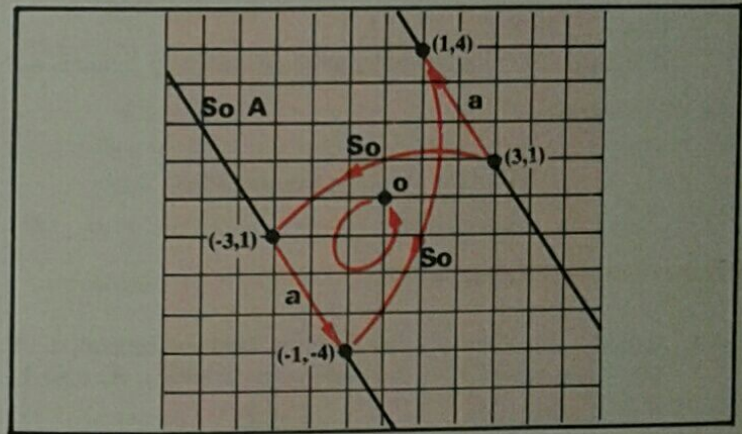


Fig. 85

e agora complete

(*a*) $s_o[(1, 4)] =$ ______
(*b*) $s_o[(3, 1)] =$ ______
(*c*) $s_o[a] =$ ______
(*d*) $s_o[O] =$ ______
(*e*) $s_o[A] =$ ______

Resp.: (*a*) $(-1, -4)$
(*b*) $(-3, -1)$
(*a*) $-a$
(*d*) O
(*e*) A'.

56.6 A reta A' imagem de A:
(*a*) é paralela a A

(b) não é paralela a A

Resp.: (a) é paralela a A

56.7 O ponto O se transforma nêle mesmo.

Em outras palavras O é um invariante na simetria .... s_o

Resp.: central

Observação: O ponto O é chamado de centro da simetria s_o.

56.8 Resumindo:

$s_o[A]$ e A são retas paralelas

$s_o(O) = O$

$s_o(a) = -a$

56.9 Sejam t uma translação, s_o uma simetria central, e A uma reta, então, $A + t$ é uma reta paralela a A, e $s_o[A]$ é uma outra reta .... a A.

Resp.: paralela

57 — Exercícios

57.1 Achar as imagens dos pontos (2, 2) e (–5, 0) na simetria central s_0.

Resp.: $s_0(2, 2) = (-2, -2)$

$s_0(-5, 0) = (5, 0)$

57.2 Faça um gráfico do exercício anterior

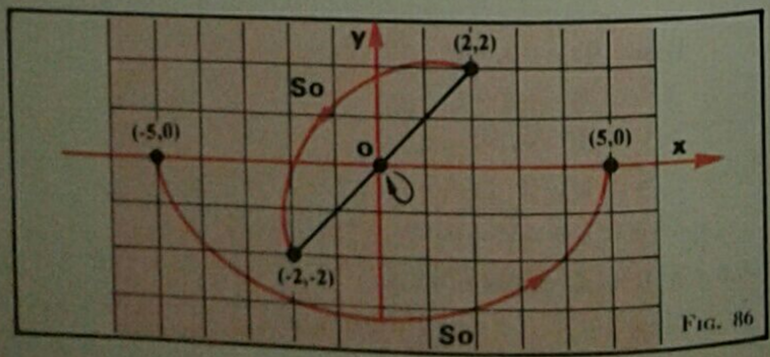


FIG. 86

57.3 Seja $a = (2, 2) - (5, 0)$. Calcule $s_0(a)$

Resp.: $s_0(a) = (-2, -2) - (-5, 0)$

57.4 Faça um gráfico dos vetores a e $s_0(a)$ do exercício anterior.

Sugestão: a é um vetor de origem em (5, 0) e final em (2, 2) e $s_0(a) = -a$ é um vetor de origem em (–5, 0) e final em (–2, –2).

57.5 Qual é o ponto invariante na transformação s_0?

Resp.: 0(0, 0)

57.6 Ache a imagem do quadrado $Q = \{(0, 2), (2, 4), (4, 2), (2, 0)\}$ na simetria s_0.

Resp.: $s_0(Q) = \{(0, -2), (-2, -4), (-4, -2), (-2, 0)\}$

57.7 Faça um gráfico do exercício anterior. $s_0(Q)$ é um outro quadrado?

Resp.: Sim $s_0(Q)$ é um outro quadrado

57.8 Dado o ponto $a(2, 3)$ calcule $s_0[a]$ e $s_0[s_0[a]]$.

Solução:

$$s_0[a] = s_0[(2, 3)] = (-2, -3)$$

$$s_0[s_0[a]] = s_0[(-2, -3)] = (2, 3) = a$$

Portanto $s_0[s_0[a]] = a$

Se escrevermos $s_0 s_0$ como s_0^2 então teremos

$$s_0^2[a] = a$$

Em outras palavras a aplicação sucessiva de duas simetrias s_0 num ponto a produz o próprio ponto a.

57.9 Dado o ponto $b(-1, 1)$, calcule $s_0[b]$ $s_0^2[b]$ e $s_0^3[b]$ (entendendo por s_0^3 a aplicação sucessiva de s_0 três vêzes)

Resp.: $s_0[b] = (1, -1)$, $s_0^2(b) = b$ e $s_0^3[b] = s_0^3[b]$

57.11 Mostre que se n é par então $s_0^n[b] = b$ e se n é impar então $s_0^n[b] = s_0[b]$

Sugestão:

Aplique as conclusões dos exercícios anteriores.

57.12 Sejam (x, y) e $s_0[(x, y)] = (-x, -y)$ dois pontos de $\mathbf{R}^2$. Qual a translação que transforma (x, y) em $(-x, -y)$

Solução:

Seja t a translação que transforma (x, y) em $(-x, -y)$. Então devemos ter

$$(x, y) + t = (-x, -y)$$

ou seja

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= (-x, -7) - (x, y) \\ &= (-x, -y) + (-x, -y) \\ &= (-x, -x, -y, -y) \\ &= (-2x, -2y) \\ &= 2(-x, -y) \end{aligned}$$

Portanto a translação **t** que faz o mesmo papel da simetria central é $\mathbf{s}_0$ dado pelo par $2(-x, -y)$

57.13 Seja $a = (-x, -y)$. Escreva a translação **t** do exercício anterior em função de a.

Resp.: $\mathbf{t} = 2a$

57.14 Faça uma figura que ilustre o exercício 57.12.

Resp.: (x, y)

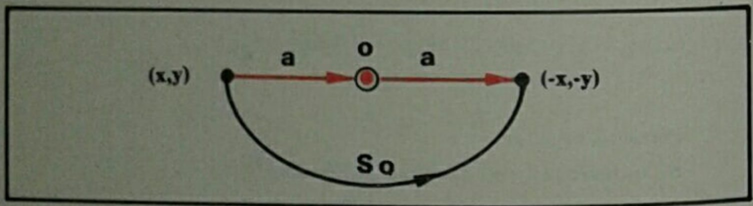


Fig. 87

Conclusões:

Dos exercícios anteriores podemos tirar as seguintes conclusões:

a) *A* simetria central $\mathbf{s}_0$ é eqüivalente a uma translação $2a$ onde $\mathbf{a} = (0, 0) - (x, y)$. Portanto

$$\mathbf{s}_0[(x, y)] = (x, y) + 2a$$

b) Se $d = \mathbf{s}_0(c)$ então O (centro de simetria) é o ponto médio do segmento cd.

57.15 Dados os pontos $m(2, 3)$ e $p(1, 1)$ ache o simétrico de m em relação a **p**, isto é; calcule $\mathbf{s}_p[m]$.

Solução: $\mathbf{s}_p$ é equivalente a uma translação $2\mathbf{a}$ onde $\mathbf{a}$ é dado por p-m.

Então:

$$\mathbf{a} = p - m = (1, 1) - (2, 3) = (-1, -2)$$

e $$\begin{aligned} \mathbf{s}_p[m] &= m + 2\mathbf{a} = (2, 3) + 2 \cdot (-1, -2) \\ &= (2, 3) + (-2, -4) = (0, -1) \end{aligned}$$

57.16 Faça um gráfico do exercício anterior.

Resp.: Você obterá um segmento de reta de extremidades nos pontos m e $\mathbf{s}_p[m]$, sendo p o ponto médio do mesmo.

57.17 Sendo $m(-1)$, (-3) e $p(0, 1)$, ache $\mathbf{s}_p[m]$.

Resp.: $\mathbf{s}_p = (1, 5)$

57.18 Mostre que $\mathbf{s}_p[m] = 2p - m$.

Solução:

$$\mathbf{s}_p[m] = m + 2\mathbf{a}$$

como $\mathbf{a} = m - p$ teremos

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_p[m] &= m - 2(m - p) \\ &= m - 2m + 2p \\ &= 2p - m \end{aligned}$$

57.19 Mostre que $\mathbf{s}_t[p] = p$.

Solução:

$$\mathbf{s}_p[m] = 2p - m$$

Fazendo-se $m = p$, teremos

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_p[p] &= 2a - p = p \\ \mathbf{s}_p[p] &= p \end{aligned}$$

ou seja p é invariante na simetria $\mathbf{s}_p$.

57.20 Sendo $p(2, 3)$ e $m(1, 2)$ calcule $\mathbf{s}_p[m]$ e $\mathbf{s}_m[p]$

Resp.: $\mathbf{s}_p[m] = (2, 4)$, $\mathbf{s}_m[p] = (0, 1)$

57.21 $\mathbf{s}_p[m] = \mathbf{s}_m[p]$?

Resp.: não

57.22 Sejam $m(0, 5)$, $a(2, 3)$ e $b(-1, 2)$

Calcule $\mathbf{s}_a(m)$ e $\mathbf{s}_b(m)$

Mostre que $\mathbf{s}_a(m) - \mathbf{s}_b(m) = 2(a - b)$

Resp.:

$$\begin{aligned} &\mathbf{s}_a(m) = (4, 1),\ \mathbf{s}_b(m) = (-2, -1) \\ &\mathbf{s}_a(m) - \mathbf{s}_b(m) = (6, 2) = 2 \cdot (3, 1) = 2(a - b) \end{aligned}$$

57.23 Faça um gráfico do exercício anterior.

Resp.:

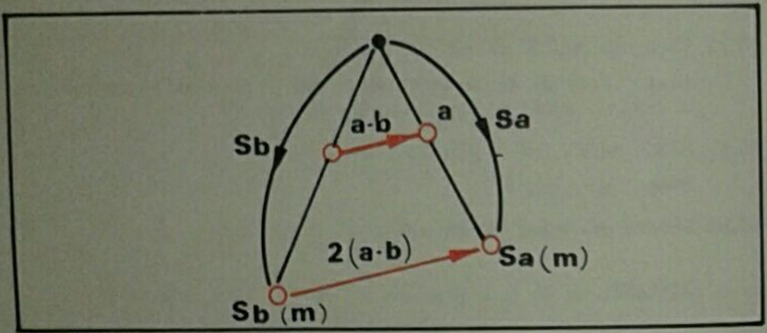


FIG. 88

57.24 Sendo $m(2, 4)$, $a(1, 1)$ e $b(3, 0)$

Calcule

(a) $\mathbf{s}_a[m]$

(b) $\mathbf{s}_b[\mathbf{s}_a[m]]$

(c) Faça um gráfico que ilustre os ítens (a) e (b).

Resp.:

(a) $\mathbf{s}_a[m] = (0, -2)$

(b) $\mathbf{s}_b[\mathbf{s}_a[m]] = \mathbf{s}_b[(0, -2)] = (6, 2)$

(c)

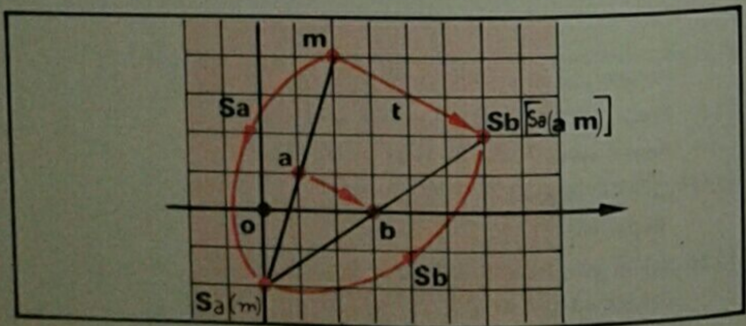


FIG. 89

57.25 A translação $\mathbf{t}$ da figura anterior é equivalente à aplicação sucessiva (composição) das simetrias $\mathbf{s}_a$ e $\mathbf{s}_b$.

Expressão $\mathbf{t}$ em função de $b - a$

Resp.: $\mathbf{t} = 2(b - a)$ (veja exercício 57.23)

Conclusão: Se indicarmos por $\mathbf{s}_b \cdot \mathbf{s}_a$ a composição de duas simetrias então:

$$\mathbf{s}_b \cdot \mathbf{s}_a = 2(b - a)$$

Em outras palavras:

$$\mathbf{s}_b[\mathbf{s}_a[m]] = \mathbf{s}_b \cdot \mathbf{s}_a[m] = 2(b - a) + m$$

57.26 Sendo $a\,(-1, 3)$ $b(2, 1)$ e $m(-2, 4)$,

Calcule $\mathbf{s}_a[m]$ e $\mathbf{s}_b \cdot \mathbf{s}_a[m]$

Resp.: $\mathbf{s}_a[m] = (0, 2)$

$$\mathbf{s}_b[\cdot\,\mathbf{s}_a[m] = \mathbf{s}_b[(0, 2)] = (4, 0)$$

ou $\quad \mathbf{s}_b \cdot \mathbf{s}_a[m] = 2(b - a) + m = (6, -4) - (-2, 4) = (4, 0)$

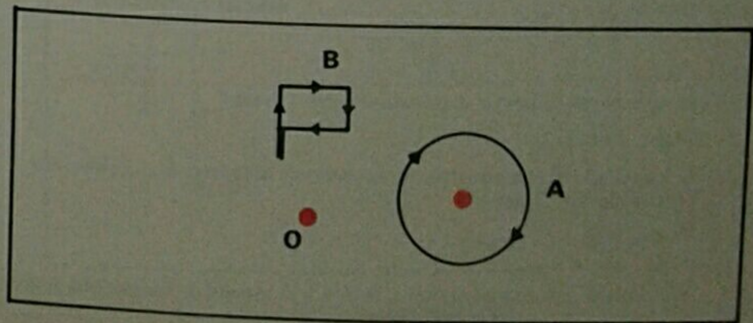
57.27 Demonstre que $\mathbf{s}_c \cdot \mathbf{s}_b \cdot \mathbf{s}_a[m] = 2(a - b + c) - m$

57.28 Demonstre que $\mathbf{s}_d \cdot \mathbf{s}_c \cdot \mathbf{s}_b \cdot \mathbf{s}_a[m] = 2(b - a + d - c) + m$

57.29 Demonstre que se $[a, b, c, d]$ é um paralelogramo então $\mathbf{s}_d \cdot \mathbf{s}_c \cdot \mathbf{s}_b \cdot \mathbf{s}_a[m] = m$.

Sugestão: Use o resultado do exercício 57.28 fazendo $c - d = b - a$ (lados de um paralelogramo).

57.30 Ache as figuras simétricas das figuras A, e B em relação ao ponto O da figura abaixo, isto é $\mathbf{s}_0(A)$ e $\mathbf{s}_0(B)$.



Resp.:

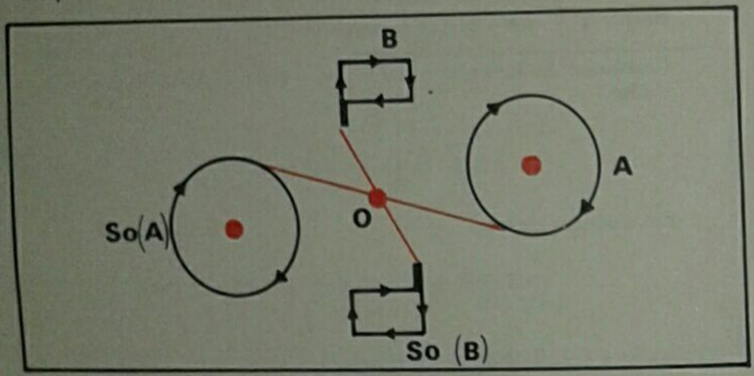


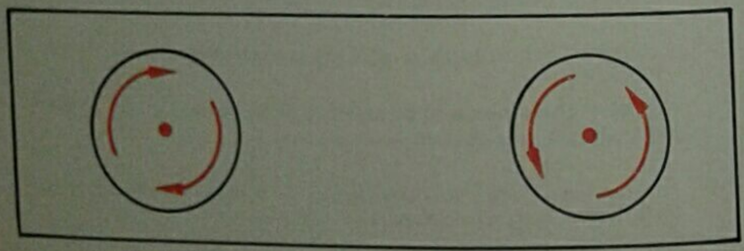
Fig. 90

57.31 A transformação s_0 conserva a forma e o tamanho das figuras?

Resp.: Sim (veja a figura anterior)

57.32 *Orientação no Plano.*

No plano temos dois sentidos de orientação. Um denominado "*sentido horário*" que é aquêle em que giram os ponteiros do relógio. O outro denominado sentido *anti-horário*, por ser oposto ao sentido horário.



sentido horário sentido anti-horário

Fig. 91

57.33 A translação conserva a orientação das figuras?

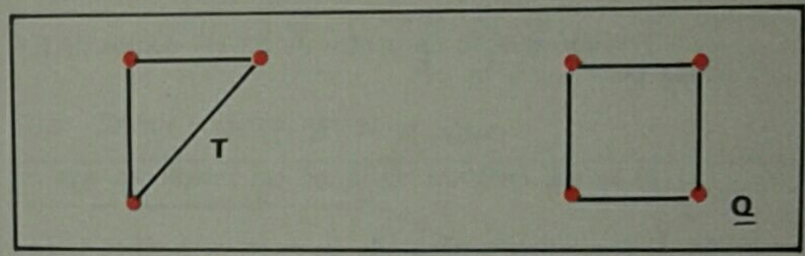
Resp.: Sim

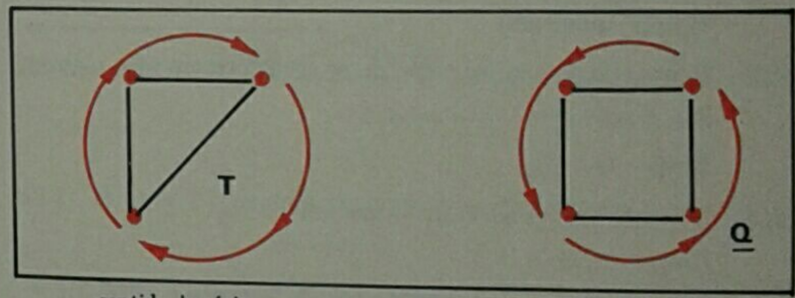
57.34 A translação t e a simetria s_0 conservam a forma, o tamanho e a orientação das figuras?

Resp.: Sim

Concluindo t e s_0 conservam a forma e o tamanho das figuras, e a orientação das mesmas.

57.35 Oriente o triângulo T no sentido horário e o quadrado Q no sentido anti-horário.





sentido horário sentido anti-horário

Fig. 92

58 — Simetria Axial

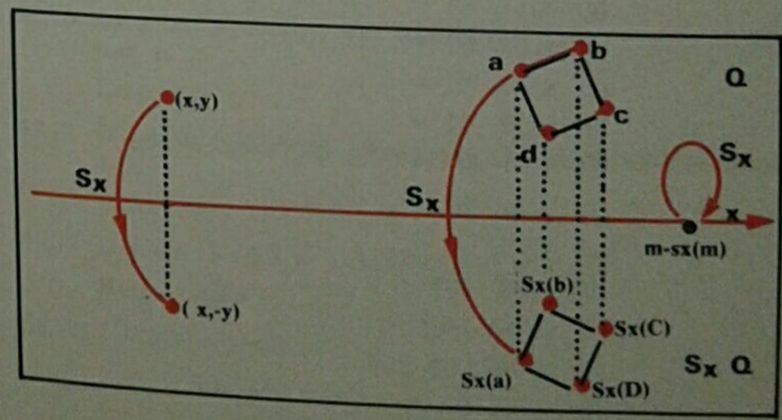


Fig. 93

A figura acima nos mostra uma simetria no eixo x (indicada por s_x)

s_x é a transformação de pontos de R^2 em pontos de R^2 dada por

$$s_x[(x, y)] = (x, -y)$$

$(x, -y)$ se diz *simétrica* de (x, y) em relação ao eixo x.

58.1 Na figura acima o quadrado $Q = \{a, b, c, d\}$ se transforma no .... $s_x(Q_x) = \{t_x(a), s_x(b), s_x(c), s_x(d)\}$.

Resp.: quadrado

58.2 Pontos do eixo x, tal como m, se transformam nêle mesmo, isto é $s_x(m) =$ ....

Resp.: $(x, -y)$

58.3 O ponto (x, y) se transforma em ....

Resp.: $(x, -y)$

58.4 O ponto $(2, 3)$ se transforma em $(2, -3)$, isto é $s_x[(2, 3)] =$ $=$ ....

Resp.: $(2, -3)$

58.5 Complete

(*a*) $s_x[(1, 1)] =$ ....
(*b*) $s_x[(3, 4)] =$ ....
(*c*) $s_x[(0, 0)] =$ ....
(*d*) $s_x[(0, 1)] =$ ....
(*e*) $s_x[(1, 0)] =$ ....
(*f*) $s_x[(x, 0)] =$ ....
(*g*) $s_x[(0, y)] =$ ....
(*h*) $s_x[(2, -3)] =$ ....
(*i*) $s_x[(-5, -2)] =$ ....
(*j*) $s_x[(-7, 3)] =$ ....
(*l*) $s_x[(3, 0)] =$ ....
(*m*) $s_x[(0, -5)] =$ ....

Resp.: (*a*)	$(1, 1)$	(*e*)	$(1, 0)$	(*i*)	$(-5, 2)$
(*b*)	$(3, -4)$	(*f*)	$(x, 0)$	(*j*)	$(-7, -3)$
(*c*)	$(0, 0)$	(*g*)	$(0, -y)$	(*l*)	$(3, 0)$
(*d*)	$(0, -1)$	(*h*)	$(2, 3)$	(*m*)	$(0, 5)$

58.6 Estude a figura abaixo

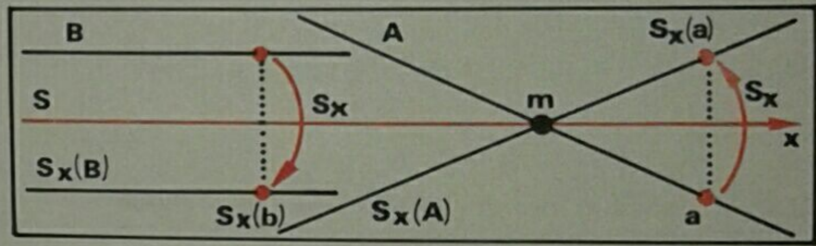


Fig. 94

58.7 A reta B paralela ao eixo x, se transforma numa outra .... ao eixo x.

Resp.: paralela

58.8 A imagem de B é a reta ....

Resp.: $s_x[B]$

58.9 A imagem de A é a reta ....

Resp.: $s_x[A]$

58.10 As retas A e $s_x[A]$ são concorrentes no ponto .... do eixo x.

Resp.: m

58.11 O ponto $a \in A$ se transforma no ponto $s_x(a)$ .... $s_x[A]$

Resp.: $\in$

58.12 O ponto $b \in B$ se transforma no ponto ....

Resp.: $s_x(b)$

58.13 Complete, sendo $a(2, 3)$.

(*a*) $s_x[(a)] =$ ....
(*b*) $s_x^2[(a)] =$ ....

(c) $\mathbf{s}_x^3[(a)] = \mathbf{s}_x[(a)] =$ ....

(d) $\mathbf{s}_x^4[(a)] = \mathbf{s}_x[(a)] =$ ....

Resp.: (a) (2, −3) (c) (2, −3)

(b) (2, 3) (d) (2, 3)

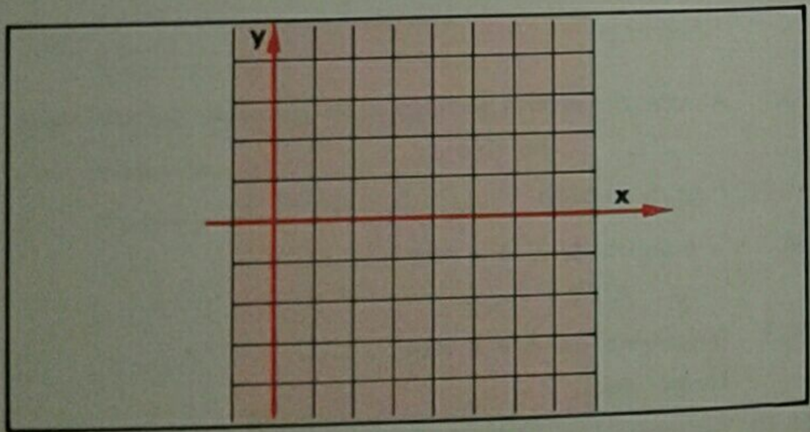
58.14 Se $b = (2, 1)$ então $\mathbf{s}_x[b] =$ ....

Resp.: (2, −1)

58.15 Sendo $T = \{(2, 2), (4, 4), (6, 1)\}$ então $\mathbf{s}_x[T] = \{$ ...., ..., ...$\}$

Resp.: (2, −2), (4, −4), (6, −1)

58.16 Faça um gráfico de T e $\mathbf{s}_x[T]$ na figura abaixo



Resp.:

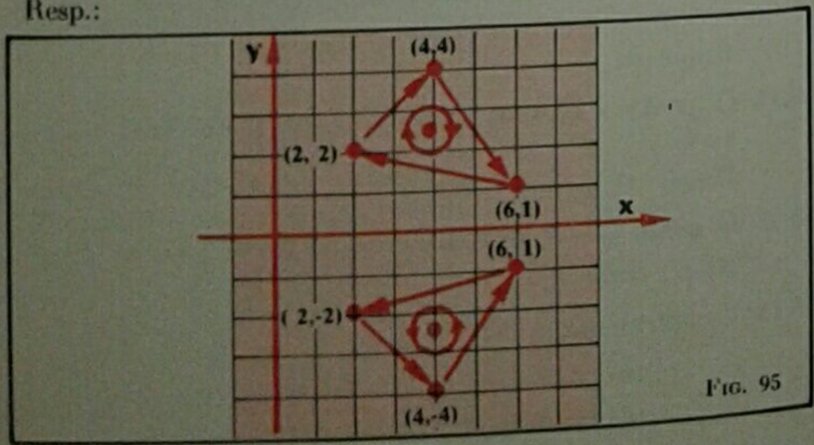


FIG. 95

58.17 Oriente o triângulo T no sentido horário.

A orientação de $\mathbf{s}_x[T]$ é:

(a) no sentido horário

(b) no sentido anti-horário

Resp.: (b) no sentido anti-horário

58.18 A simetria axial $\mathbf{s}_x$ conserva a forma e o tamanho das figuras, mas não conserva a ....

Resp.: orientação

59 — Sumário

59.1 *Transformação geométrica*

Tôda aplicação de $\mathbf{R}^2$ em $\mathbf{R}^2$ recebe o nome de transformação geométrica (plana)

59.2 *Translação.*

(a) *Definição* — A transformação $(x, y) \xrightarrow{\mathbf{t}} (x', y')$ dada por: $(x, y) + \mathbf{t} = (x', y')$ recebe o nome de translação $\mathbf{t}$.

(b) *Propriedades* — 1) Uma translação conserva a forma, o tamanho e a orientação de uma figura.

2) Transforma o vetor a num vetor a.

3) Transforma uma reta A numa outra que lhe é paralela.

59.3 *Simetria central*

(a) *Definição* — Simetria de centro O é a transformação $\mathbf{s}_o$ dada por:

$$\mathbf{s}_o[(x, y)] = (-x, -y)$$

(*b*) *Propriedades* — 1) $s_p[m] = 2p + m$

2) $s_a \cdot s_b[m] = 2(b - a) + m$

3) s_o conserva o tamanho, a forma e a orientação das figuras.

4) s_o transforma um vetor a no vetor $-a$

5) A e $s_o(A)$ são retas paralelas

59.4 *Simetria Axial*

(*a*) *Definição* — A transformação s_x dada por

$$s_x[(x, y)] = (x, -y)$$

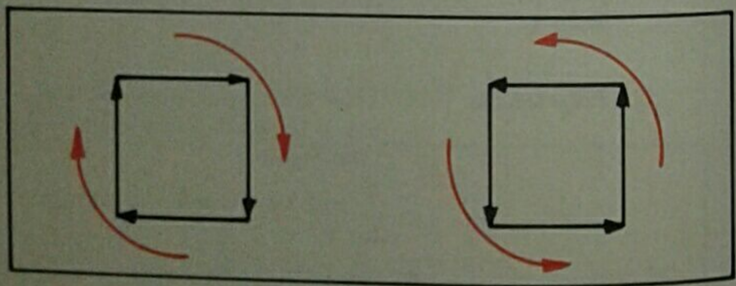
é denominada de simetria no eixo x

(*b*) *Propriedades* — 1) $s_x^2[a] = a$

2) $s_x^3[a] = s_x[a]$

59.5 — Orientação no Plano

Podemos orientar as figuras de $\mathbf{R}^2$ em dois sentidos. A figura abaixo esclarece isso.



sentido horário — Fig. (*a*)

Fig. 97

sentido anti-horário — Fig. (*b*)

O quadrado da figura (*a*) gira no mesmo sentido que os ponteiros de um relógio (sentido horário).

O quadrado da figura (*b*) gira no sentido contrário ao dos ponteiros de um relógio (sentido anti-horário).

60 — Exercícios

60.1 Dados os pontos:

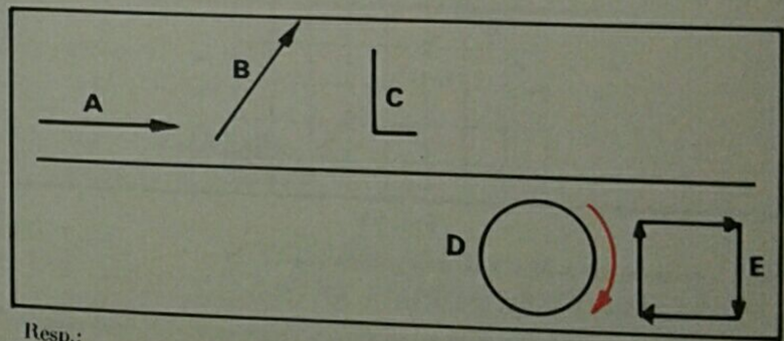
(*a*) (3, −3)	(*f*) (−1, −2)	(*l*) (8, 0)
(*b*) (1, −3)	(*g*) (−3, −4)	(*m*) (3, 0)
(*c*) (0, 0)	(*h*) (−5, 6)	(*n*) (−3, 0)
(*d*) (0, 2)	(*i*) (−1, 1)	(*o*) (2, −4)
(*e*) (2, 0)	(*j*) (7, −2)	(*p*) (0, 1)

Calcular os respectivos simétricos em relação ao eixo x.

Resp.:

(*a*) (3, 3)	(*f*) (−1, 2)	(*l*) (8, 0)
(*b*) (1, 3)	(*g*) (−3, 4)	(*m*) (3, 0)
(*c*) (0, 0)	(*h*) (−5, −6)	(*n*) (−3, 0)
(*d*) (0, −2)	(*i*) (−1, −1)	(*o*) (2, 4)
(*e*) (2, 0)	(*j*) (7, 2)	(*p*) (0, −1)

60.2 Desenhe as figuras simétricas, em relação ao eixo x, das figuras A, B, C, D e E dadas abaixo



Resp.:

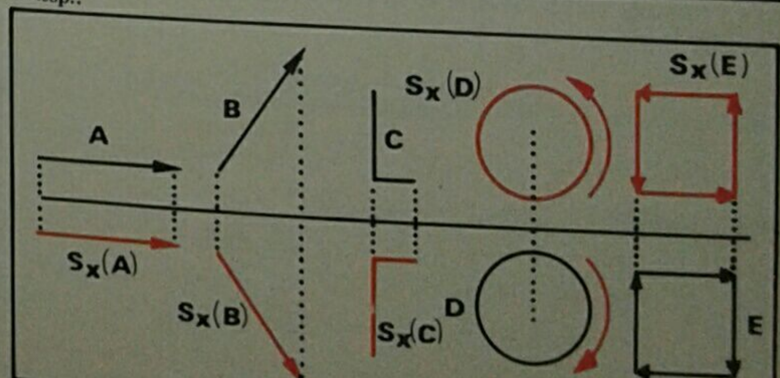


Fig. 96

60.3 Achar $s_x[A]$, sendo A a reta gerada por $(1, 1)$

Solução: Como A passa por $(0, 0)$ e $(1, 1)$ então $s_x[A]$ deve passar por $s_x[(0, 0)] = (0, 0)$ e $s_x[(1, 1)] = (1, -1)$ ou seja $s_x[A]$ é a reta gerada por $(1, -1)$.

Portanto

$$s_x[A] = \{(x, y) \mid (x, y) = r \cdot (1, -1)\}$$

60.4 Faça um gráfico do exercício anterior, mostrando A e $s_x(A)$

Resp.:

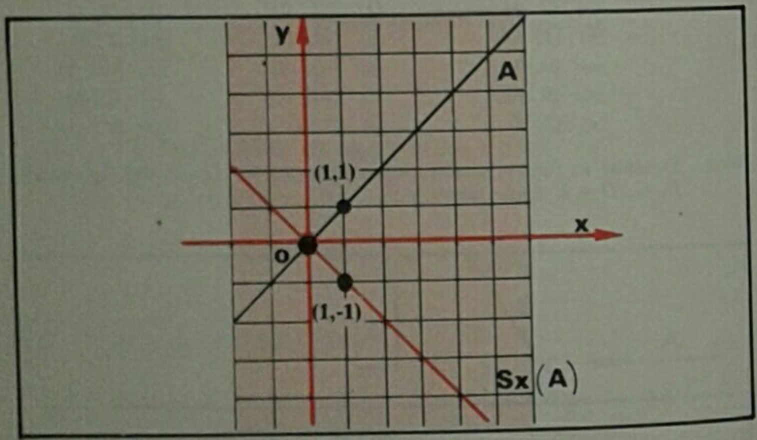


FIG. 98

60.5 Achar $s_x[A]$ sendo A a reta gerada por $(1, 2)$

Resp.: $s_x[A] = \{(x, y) \mid (x, y) = r(1, -2)\}$

60.6 Podemos definir simetria s_y no eixo y como sendo a transformação dada por:

$$s_y[(x, y)] = (-x, y)$$

Calcule $s_y(3, 2)$

Resp.: $(-3, 2)$.

60.7 Complete

(a) $s_y[(2, 4)] =$	(f) $s_y[(3, 4)] =$ ....
(b) $s_y[(1, -1)] =$	(g) $[(0, 5)] =$ ....
(c) $s_y[(0, 2)] =$	(h) $s_y[(1, 6)] =$ ....
(d) $s_y[(-3, 1)] =$	(i) $s_y[(-2, 7)] =$ ....
(e) $s_y[(1, 4)] =$	(j) $s_y[(-1, -2)] =$ ....

Resp.:

(a) $(-2, 4)$	(f) $(-3, 4)$
(b) $(-1, -1)$	(g) $(0, 5)$
(c) $(0, 2)$	(h) $(-1, 6)$
(d) $(3, 11)$	(i) $(2, 7)$
(e) $(-1, 4)$	(j) $(1, 2)$

60.8 Calcule $s_y \cdot s_x[(3, 2)]$

Solução:

$$s_y \cdot s_x[(3, 2)] = s_y[(3, -2)] = (-3, -2)$$

Observemos que $s_y \cdot s_x$ transforma (x, y) em $(-x, -y)$, isto é, faz o mesmo papel que s_0, portanto:

$$s_y \cdot s_x = s_0$$

60.9 Calcule $s_y \cdot s_x[(1, 3)]$

Resp.: $(-1, -3)$

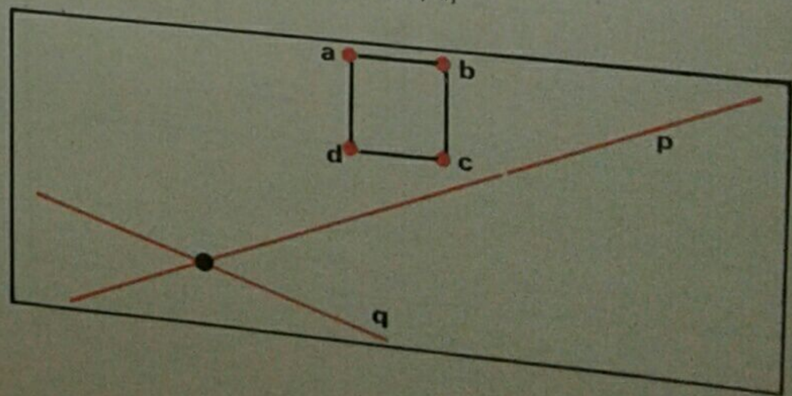
60.10 Calcule $s_x[(x, y)] + (a, b)$

Resp.: $(x + a, -y + b)$

60.11 Sejam p e q dois eixos quaisquer dados abaixo.

Desenhe a figura resultante da aplicação sucessiva das reflexões s_p e s_q no quadrado

$$Q = [a, b, c, d]$$



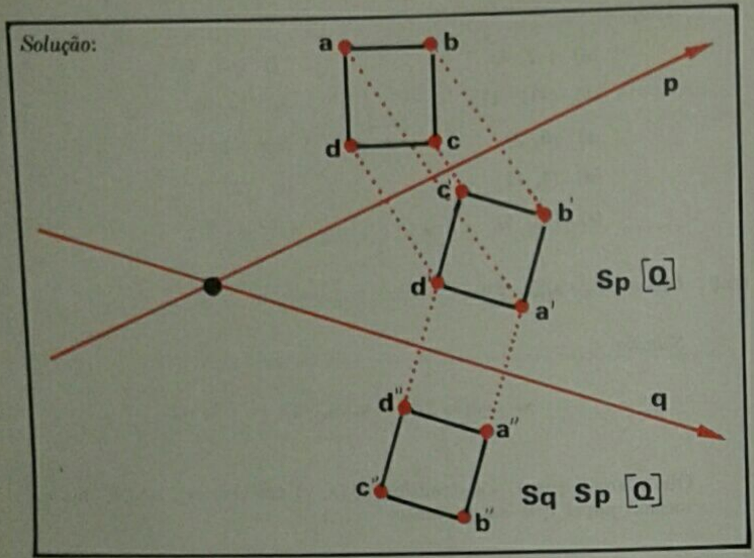


FIG. 99

60.12 Quais as orientações dos quadrados

$$Q, \ s_p[Q], \quad s_q \cdot s_p[Q]$$

Resp.: Q e $s_q \cdot s_p[Q]$ têm o mesmo sentido que é o horário.
$s_p[Q]$ tem o sentido contrário, isto é o anti-horário.

60.13 Desenhar as retas simétricas das retas A, B e C dadas abaixo, em relação ao eixo x.

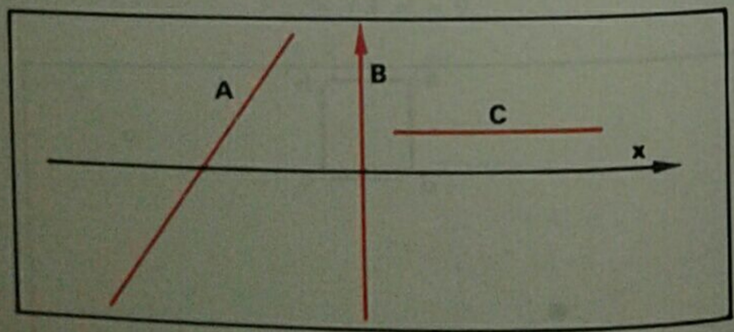


FIG. 100

60.14 Entre as retas A, B e C do exercício anterior qual a que é igual a sua simétrica?

Resp.: É a reta B, pois $s_x[B] = B$

Retas Perpendiculares

A reta $B \neq x$ tal que $s_x[B] = B$ é denominada de reta perpendicular a x isto é $B \perp x$.

Observemos que essa é a mesma definição dada em 36.7, só que lá não dispúnhamos de uma linguagem rigorosa para descrevê-la. Resulta dessa definição que $s_B[x] = x$ isto é, $B \perp x \Longrightarrow x \in B$.

60.15 Mostre que $s_x[(2, 3) + (1, -1)] = s_x[(2, 3)] + s_x[(1, -1)]$

Solução:

Como

$$s_x[(2, 3)] = (2, -3)$$
$$s_x[(1, -1)] = (1, 1)$$

Então $s_x[(2, 3)] + s_x[(1, -1)] = (2, -3) + (1, 1) = (3, -2)$.

Por sua vez

$$s_x = [(2, 3) + (1, -1)] = s_x[(2 + 1, 3 - 1)] = s_x[(3, 2)] = (3, -2)$$

Portanto

$$s_x[(2, 3) + (1, -1)] = s_x[(2, 3)] + s_x[(1, -1)]$$

60.16 Mostre que $s_x[(x, y) + (a, b)] = s_x[(x, y)] + s_x[(a, b)]$.

60.17 Mostre que $s_x[r \cdot (x, y)] = r \cdot s_x[(x, y)]$

Solução:

$$s_x[r \cdot (x, y)] = s_x[(rx, ry)] = (rx, -ry) = r \cdot (x, -y) = r \cdot s_x[(x, y)]$$

60.18 Uma transformação f de $\mathbf{R}^2$ em $\mathbf{R}^2$ é *linear* se

$$f[p(x, y) + q(a, b)] = s \cdot f[(x, y)] + q \cdot f[(a, b)] \text{ (onde } p \text{ e } q \in \mathbf{R}).$$

Mostre que s_x é uma transformação linear.

61 — Isometrias

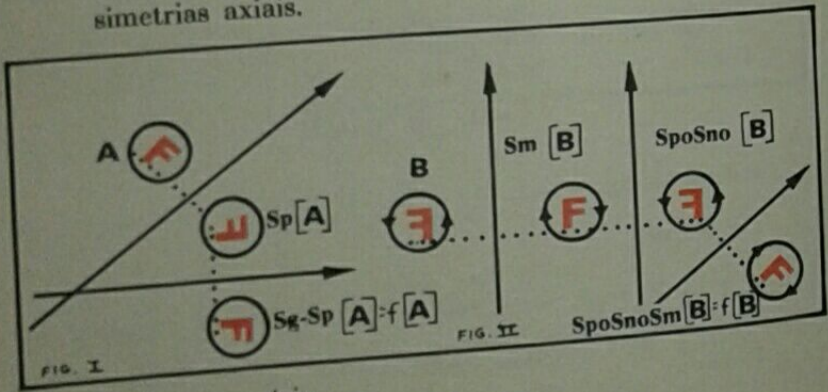
Definição:

Uma transformação f é a transformação composta de n simetrias axiais, isto é;

$$f = s_1 \cdot s_2 \cdot s_3 \cdot \ldots\ldots \cdot s_n$$

onde $\cdot$ indica a composição de simetrias

61.2 Assim a transformação $f = s_p \cdot s_q$ da figura (I) dada abaixo é uma .... pois é composta de duas simetrias axiais.



Resp.: *isometria*

Fig. 101

61.3 Anàlogamente a transformação $f =$ ...... $\cdot$ ...... $\cdot$ ...... da figura (II) dada acima é uma isometria pois é composta de simetrias axiais.

Resp.: s_p, s_n, s_m

61.4 A figura A se acha orientada no sentido horário enquanto que a figura $s_p[A]$ está no sentido ....

Resp.: anti-horário

61.5 A figura $s_q \cdot s_p[A]$ está orientada no sentido ....

Resp.: horário

61.7 A transformação f da figura (I) transforma uma figura

A que está orientada no sentido horário em outra figura $s_q \cdot s_p[A]$ que também está orientada no sentido ....

Resp.: *horário*

61.8 Como vemos a transformação $f = s_q \cdot s_p$ conserva a .... das figuras.

Resp.: orientação

61.9 $f = s_q \cdot s_p$, que é uma composição de duas (número par) simetrias axiais conserva a .... das figuras.

Resp.: orientação

Concluindo

Se uma isometria f é composta de um *número par* de simetria axiais então ela conserva a orientação das figuras.

61.10 Assim se f é composta de um *número par* de simetrias axiais as figuras A e $f[A]$ têm a mesma orientação. Em outras palavras:

Se A está orientada no sentido anti-horário, $f[A]$ estará orientada no sentido ....

Resp.: anti-horário

61.11 Olhe agora a figura II.

A figura B está orientada no sentido ....

Resp.: anti-horário

61.12 A figura $s_p \cdot s_m \cdot s_n[B]$ resultante da aplicação sucessiva de três simetrias (número ímpar) está orientada no sentido ....

Resp.: horário

61.13 As figuras B e $s_p \cdot s_n \cdot s_m[B]$ se acham orientadas:

(*a*) no mesmo sentido

(*b*) em sentidos opostos.

Resp.: (*b*) em sentidos opostos

61.14 As figuras B e $s_p \cdot s_n \cdot s_m[B]$ estão orientadas em sentidos opostos. Isto significa que a isometria.

$$f = s_p \cdot s_n \cdot s_m:$$

(*a*) não conserva a orientação
(*b*) conserva a orientação

Resp.: (*a*) não conserva a orientação

61.15 A isometria f que é composta de três simetrias axiais (número ímpar) .... a orientação.

Resp.: não conserva

Concluindo

Se uma isometria f é composta de um *número ímpar* de simetrias axiais então ela não conserva a orientação das figuras.

61.16 Portanto existem dois tipos de isometrias, uma que conserva a orientação das figuras e outra que .... a orientação das figuras.

Resp.: não conserva

61.17 Seja f uma isometria dada por

$$f = s_1 \cdot s_2 \cdot s_3 \cdot \ldots\ldots \cdot s_n$$

então se n é par, f:

(*a*) conserva a orientação das figuras.
(*b*) não conserva a orientação das figuras.

Resp.: (*a*) conserva a orientação das figuras.

61.18 Se n é ímpar, então f .... a orientação das figuras.

Resp.: não conserva

61.19 Se n é par f recebe o nome de *isometria direta*. Se n é ímpar f recebe o nome de *isometria indireta*.

Então a isometria que não conserva a orientação das figuras é a isometria ....

Resp.: indireta

Concluindo

Seja $f = s_1 \cdot s_2 \cdot s_3 \cdot \ldots\ldots \cdot s_n$ então

(*a*) Se n é par, f é dita direta e conserva a orientação das figuras.

(*b*) Se n é ímpar f, é dita indireta e não conserva a orientação das figuras.

61.20 Uma translação f conserva a orientação de uma figura, então ela é:

(*a*) uma isometria direta
(*b*) uma isometria indireta

Resp.: (*a*) uma isometria direta

61.21 Sendo a translação t uma isometria direta ela é composta de um número:

(*a*) ímpar de simetrias axiais
(*b*) par de simetrias axiais

Resp.: (*b*) par de simetrias

61.22 Uma simetria axial s_x é um número ímpar de simetrias axiais (um é ímpar), então s_x é uma isometria ....

Resp.: indireta

61.23 Uma simetria central $s_o = s_y \cdot s_x$ é um número par de simetrias axiais, então, s_o é uma isometria ....

Resp.: indireta

61.24 $s_x^2 = s_x \cdot s_x$ é uma isometria ....

Resp.: direta

61.25 $s_{xo} = s_x \cdot s_x \cdot s_x$ é uma isometria ....

Resp.: indireta

61.26 $s_1^4 = s_1 \cdot s_1 \cdot s_1 \cdot s_1$ é uma isometria ....

Resp.: direta

Figuras congruentes

Duas figuras planas F e F' são *congruentes* se uma é a imagem da outra por meio de uma *isometria* f. Usaremos o sinal $\simeq$ para indicar a relação de congruência.

$$F \simeq F' \Longleftrightarrow F' = \mathfrak{f}[F] \text{ onde } \mathfrak{f} \text{ é uma isometria}$$

61.27 Assim os símbolos $A \simeq B$ significam que a figura A é .... com a figura B.

Resp.: congruente

61.28 Se $A \simeq B$ então existe uma isometria f que transforma A em ....

Resp.: B

61.29 Se $B = f[A]$ e se f é uma isometria então podemos dizer que A é .... com B.

Resp.: congruente

61.30 A translação nula O é uma isometria.

A translação nula O transforma uma figura A nela mesmo pois $A + O =$ ....

Resp.: A

61.31 Existe uma isometria que transforma A em A.

Esta isometria é a translação ....

Resp.: A

61.32 Como existe uma isometria entre A e A, podemos dizer que A é congruente com A, e simbòlicamente escreveremos $A =$ .... (propriedade reflexiva)

Resp.: A

61.33 Como $A \simeq A$ diremos que a relação de congruência tem a propriedade:

(a) simétrica

(b) reflexiva

(c) transitiva

Resp.: reflexiva

61.34 Se uma figura A é congruente com outra B então B é congruente com A. Essa propriedade é conhecida pelo nome de:

(a) simétrica

(b) reflexiva

(c) transitiva

61.35 Em símbolos a propriedade simétrica da relação de congruência pode ser escrita como:

(a) $A \simeq A$

(b) $A \simeq B \Longrightarrow B \simeq C$

(c) $A \simeq B \Longrightarrow B \simeq A$

Resp.: *c)* $A \simeq B \Longrightarrow B \simeq A$

61.36 A propriedade $A \simeq B$ e $B \simeq C \Longrightarrow A \simeq C$ é a propriedade

(a) reflexiva

(b) simétrica

(c) transitiva

Resp.: transitiva

61.37 A relação de congruência é uma relação de equivalência pois a mesma tem as propriedades: reflexiva, ... e transitiva.

Resp.: simétrica

62 — Sumário

62.1 *Isometrias*

Uma transformação composta de n simetrias axiais recebe o nome de isometria.

62.2 *Classificação:*

Seja $\mathfrak{f} = s_1 \cdot s_2 \cdot s_3 \cdot$ .... $\cdot s_n$ uma isometria

$$\text{Isometria}\begin{cases}\mathbf{f} \text{ é } \textit{direta} \text{ quando } n \text{ é par}\\ \mathbf{f} \text{ é } \textit{indireta} \text{ quando } n \text{ é ímpar}\end{cases}$$

62.3 *Propriedades*

(*a*) Se **f** é direta então ela conserva a forma, o tamanho, e a orientação das figuras.

(*b*) Se **f** é indireta, então ela conserva a forma e o tamanho das figuras, e inverte a orientação das mesmas.

62.4 *Figuras Congruentes*

Duas figuras A e B são congruentes se uma é a imagem da outra por meio de uma isometria **f**.

A relação $\simeq$ é uma relação de *equivalência.*

Se duas figuras pertencem a uma dessas classes de equivalência diremos que elas têm a mesma "*forma*" e o mesmo "*tamanho*".

63 — Exercícios

63.1 Considere os triângulos congruentes $T = \{(0, 0), (3, -1), (3, 3)\}$ e $T' = \{(4, 0), (7, -1), (7, 3)\}$.

Ache uma translação **t** que transforme T em T'.

Resp.: $\mathbf{t} = (4, 0)$, pois $(0, 0) + \mathbf{t} = (4, 0)$, $(3, -1) + \mathbf{t} = (7, -1)$ e $(3, 3) + \mathbf{t} = (7, 3)$

63.2 Oriente no sentido horário o triângulo T.
Qual será a orientação de T'?

Resp.: Como **t** é uma isometria direta, a orientação de T' será a mesma de T, isto é, T' será orientado no sentido horário.

63.3 Faça um gráfico de T e T'

Resp.:

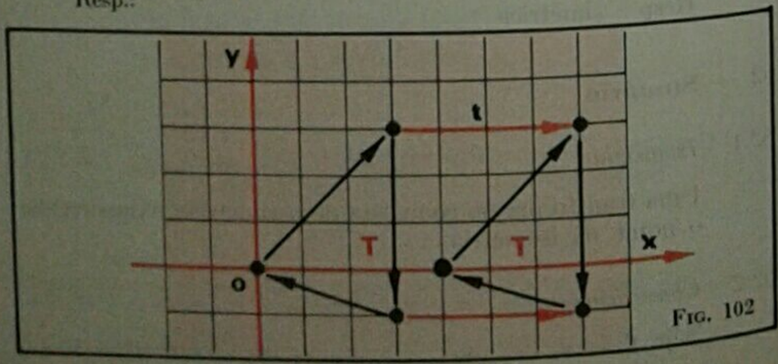


Fig. 102

63.4 Ache uma translação **t** que transforme o segmento **s** de extremos $a(1, 1)$ e $b(3, 3)$ no segmento **s**′ de extremos $a'(4, 2)$ e $b'(6, 4)$, sendo $\mathbf{s} \simeq \mathbf{s}'$.

Resp.: $\mathbf{t} = a' - a = b' - b = (3, 1)$

63.5 Ao orientarmos um triângulo $\{a, b, c\}$ estaremos introduzindo uma relação de ordem no conjunto $\{a, b, c\}$, que passa a ser encarado como um trio ordenado (a, b, c) de pontos.

Quantos trios ordenados distintos podemos formar com os elementos do conjunto $\{a, b, c\}$.

Solução: Para achar os trios ordenados distintos que podemos formar com as letras a, b e c, diremos mudar as posições das mesmas de tôdas as maneiras.

Feito isso obteremos 6 trios ordenados que são:

$$(a, b, c),\ (b, a, c),\ (c, a, b)$$
$$(a, c, b),\ (b, c, a) \text{ e } (a, b, a)$$

Portanto de $\{a, b, c\}$ podemos tirar seis trios ordenados.

63.6 Chamamos de triângulo ordenado ao trio de pontos ordenados (a_1, a_2, a_3) de 3 pontos não alinhados. Dos seis triângulos ordenados acima quais os que têm a mesma orientação?

Solução:

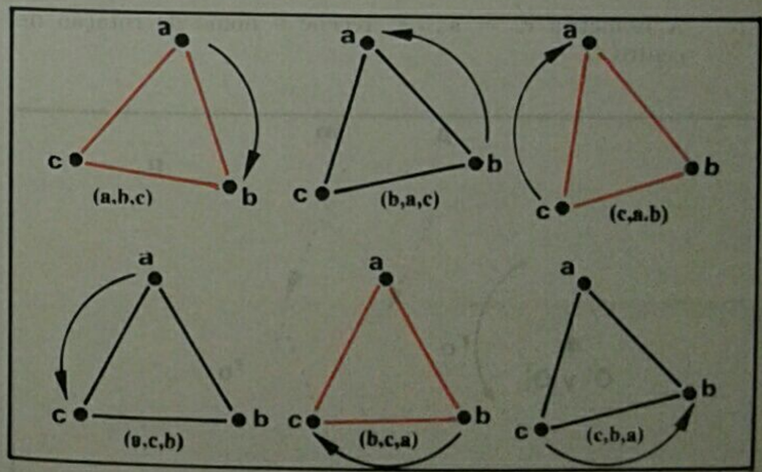


Fig. 103

Os triângulos ordenados (a, b, c), (c, a, b) e (b, c, a) possuem a mesma orientação (sentido horário).

Os triângulos ordenados (b, a, c), (a, c, b) e (c, b, a) possuem a mesma orientação (sentido anti-horário).

Portanto o conjunto dos triângulos ordenados congruentes com um triângulo dado $\{a, b, c\}$ se acha dividido e duas classes. Cada uma dessas classes define uma orientação em $\{a, b, c\}$.

63.7 Dois triângulos ordenados (a_1, a_2, a_3) e (b_1, b_2, b_3) são diretamente congruentes se a isometria $\mathbf{f}$ definida por $a_1 \xrightarrow{f} b_1$, $a_2 \xrightarrow{f} b_2$, $a_3 \xrightarrow{f} b_3$ é uma isometria direta. Caso contrário os triângulos (a_1, a_2, a_3) e (b_1, b_2, b_3) são ditos inversamente congruentes.

Verificar se (a, b, c) e (c, b, a) são diretamente congruentes ou inversamente congruentes.

Resp.: São inversamente congruentes pois (a, b, c) está orientado no sentido anti-horário. Portanto a isometria $\mathbf{f}$ é inversa.

63.8 De um quadrado $\{a, b, c, d\}$ quantos quadrados ordenados podemos extrair?

Resp.: 24 quadrados ordenados

64 — Rotação

Consideremos um par de eixos p e q que possuem a mesma origem O.

Definição:

A isometria $\mathbf{r}_o = \mathbf{s}_p \cdot \mathbf{s}_p$ recebe o nome de rotação de centro O.

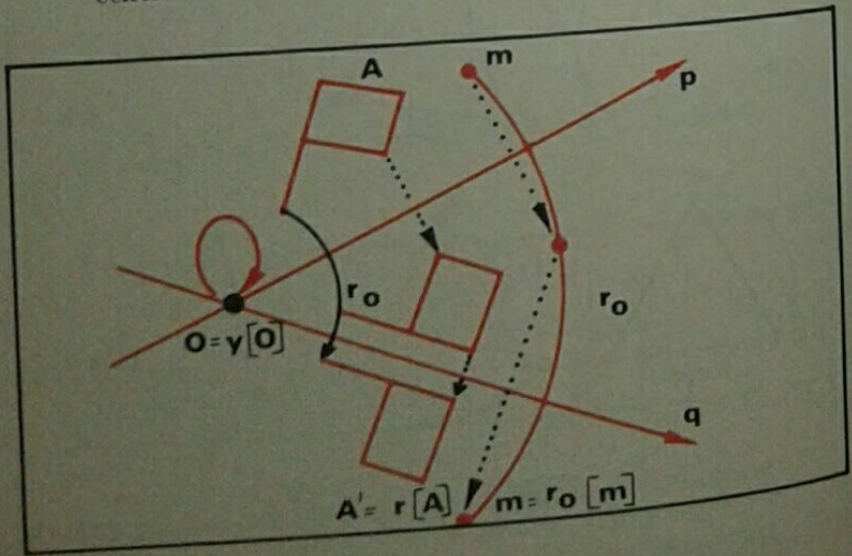


Fig. 104

64.1 O ponto $m' = \mathbf{r}_o[m]$ é a imagem de m na rotação $\mathbf{r}_o$. A figura $A' = \mathbf{r}[A]$ é a imagem de A na rotação ......

Resp.: $\mathbf{r}_o$

64.2 O ponto o é o centro da rotação $\mathbf{r}_o$.
Êle é invariante nessa rotação, isto, é, $\mathbf{r}_o[0] =$ ......

Resp.: o

64.3 A rotação $\mathbf{r}_o$ é composta de um número par de isometrias, portanto $\mathbf{r}_o$ é uma

Resp.: (*a*) isometria direta

(*b*) isometria indireta.

Resp.: isometria direta

64.4 Sendo r uma isometria direta, então $\mathbf{r}$:

(*a*) conserva a orientação das figuras

(*b*) não conserva a orientação das figuras

Resp.: conserva a orientação das figuras

64.5 Olhe a figura abaixo:

Nela você verá duas rotações $= \mathbf{r}_a$ e $\mathbf{r}_b$.

A rotação $\mathbf{r}_b$ é obtida por meio de uma translação $\mathbf{t}$ da rotação $\mathbf{r}_a$

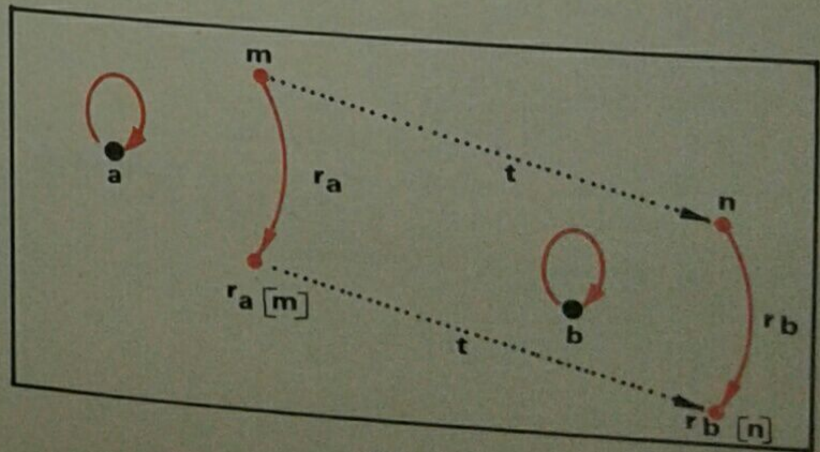


Fig. 105

$\mathbf{r}_a[m]$ é a imagem do ponto m na rotação $\mathbf{r}_a$

$\mathbf{r}_b[n]$ é a imagem do ponto n na rotação ......

Resp.: $\mathbf{r}_b$

64.6 O par $(n, \mathbf{r}_b[n])$ é obtido do par $(m, \mathbf{r}_b[n])$ por meio de uma translação $\mathbf{t}$. Diremos então que $\mathbf{r}_b$ é resultante da composição de $\mathbf{r}_a$ com $\mathbf{t}$ e escreveremos $\mathbf{r}_b = \mathbf{t} \cdot \mathbf{r}_a$.

Definição:

Duas rotações $\mathbf{r}_a$ e $\mathbf{r}_b$ se dizem *equivalentes* se uma pode ser obtida da outra por meio de uma translação $\mathbf{t}$. Escreveremos que

$$\mathbf{r}_a \sim \mathbf{r}_b$$

64.7 $\mathbf{r}_a \sim \mathbf{r}_b \Longleftrightarrow \mathbf{r}_b = \mathbf{t} \cdot \mathbf{r}_a$ pode ser lido $\mathbf{r}_a$ é equivalente a $\mathbf{r}_b$ se e sòmente se $\mathbf{r}_b$ é obtido de $\mathbf{r}_a$ por meio de uma translação ......

Resp.: $\mathbf{t}$

64.8 A relação $\sim$ é uma relação de equivalência no conjunto das rotações $\mathbf{r}$. Portanto $\sim$ tem as seguintes propriedades:

reflexiva, simétrica e ....

Resp.: transitiva

64.9 Complete.

(*a*) $\mathbf{r}_a \sim \mathbf{r}_a$ propriedade ....

(*b*) $\mathbf{r}_a \sim \mathbf{r}_b \Longrightarrow \mathbf{r}_b \sim \mathbf{r}_a$ propriedade ....

(*c*) Se $\mathbf{r}_a \sim \mathbf{r}_b$ e $\mathbf{r}_b \sim \mathbf{r}_c$ então $\mathbf{r}_a \sim \mathbf{r}_c$ (propriedade transitiva).

Resp.: (*a*) reflexiva, (*b*) simétrica

VIII - ÂNGULOS E HOMETETIA

65 — Raios e Ângulos

Um ponto m de uma reta R a divide em dois conjuntos R_1 e R_2.

Cada um dêsses conjuntos recebe o nome de raio, e o ponto m de origem dêsses raios.

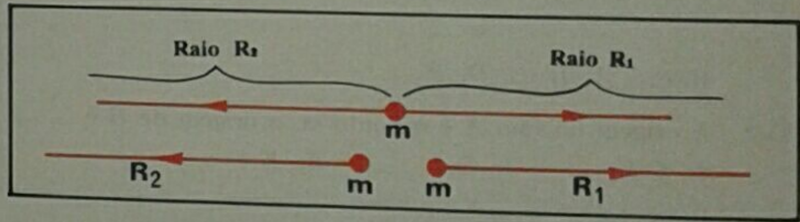


Fig. 106

65.1 Então um ponto $m \in R$ associa a ela

(*a*) um raio

(*b*) dois raios

(*c*) três raios

Resp.: dois raios

65.2 O ponto m origem dos dois raios R_1 e R_2 de R pertence

(*a*) só a um dos raios

(*b*) aos dois raios

Resp.: aos dois raios

65.3 Olhe a figura abaixo

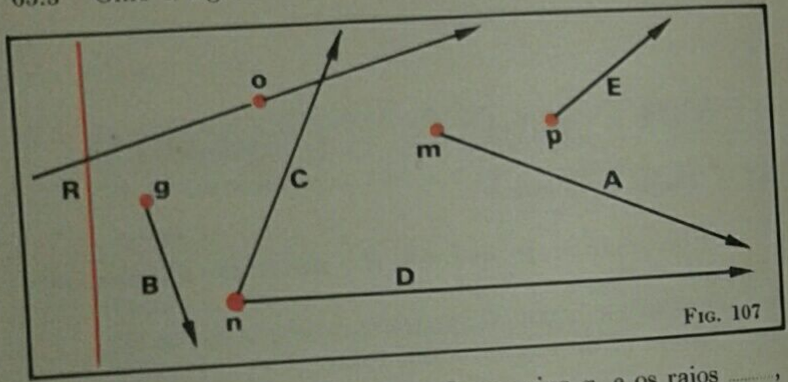


FIG. 107

Nela você nota: uma reta R, um eixo x, e os raios ......,
......, ..., ... e ......

Resp.: A, B, C, D, E

65.4 A origem do raio A é o ponto m, a origem de B é ......,
de C é ......, de D é ...... e de E é ......

Resp.: q, n, n, p

65.6 Os raios C e D têm a mesma origem que é o ponto ......

Resp.: n

Definição:

Dois raios C e D de mesma origem n recebe o nome de ângulo. Tal ângulo é representado por $\widehat{CD}$. Os raios C e D se dizem lados do ângulo e n recebe o nome de vértice do ângulo.

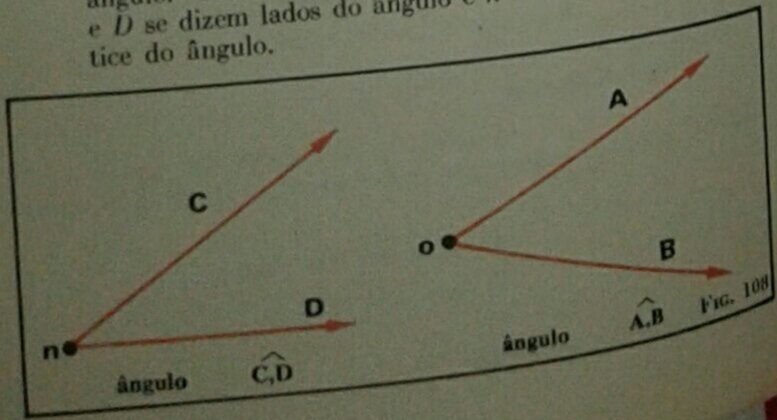


FIG. 108

65.7 Na figura acima os lados do ângulo $\widehat{AB}$ são os raios ...... e ...... e o vértice é o ponto ....

Resp.: A, B, o

66 — Exercícios

66.1 Dado o triângulo $T = \{a, b, c\}$, ache a imagem $\mathbf{r}_o[T]$ do mesmo na rotação $\mathbf{r}_o = \mathbf{s}_q$ e $\mathbf{s}_p$

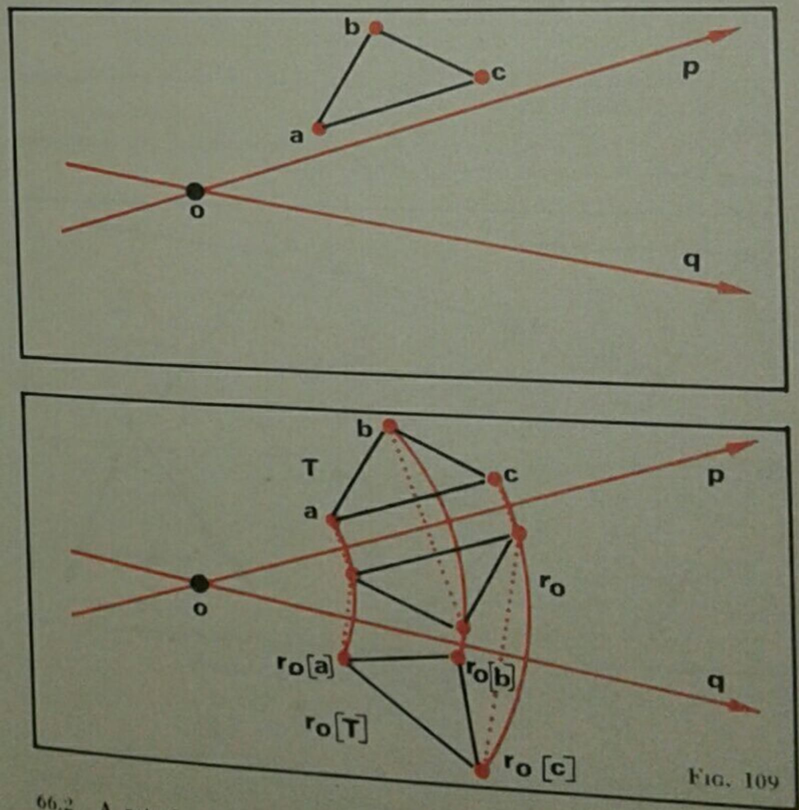


FIG. 109

66.2 A rotação conserva a orientação da figura?
Resp.: Sim

66.3 Que são rotações equivalentes?

66.4 A relação $\sim$ é uma relação de equivalência no conjunto das rotações?
Resp.: Sim, pois é reflexiva, simétrica e transitiva.

66.5 O conjunto de rotações eqüivalentes é uma classe de equivalência?

Resp.: Sim

66.6 Seja A uma reta. $\mathbf{r}_o[A]$ é uma outra reta?

Resp.: Sim

66.7 Seja A um raio de origem o, $\mathbf{r}_o[A]$ é um outro raio de origem o também? Por quê?

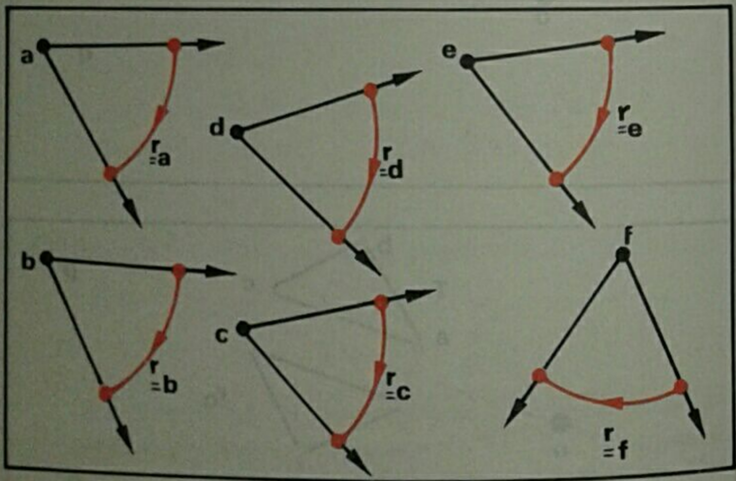
Resp.: Sim, por que o é um ponto invariante na rotação $\mathbf{r}_o$

66.8 Chamamos de ângulo da rotação $\mathbf{r}_o$, ao ângulo A, $\mathbf{r}_o[A]$ dos raios A e $\mathbf{r}_o[A]$ que têm origem em o.

Duas rotações $\mathbf{r}_a$ e $\mathbf{r}_b$ equivalentes têm ângulos iguais?

Observação: Um ângulo $\widehat{AB}$ é igual a $\widehat{CD}$ se existe uma isometria $\mathbf{f}$ que transforma $\widehat{AB}$ em $\widehat{CD}$.

Resp.: Sim, e escreveremos $\hat{\mathbf{r}}_a = \hat{\mathbf{r}}_b$ para significar que as rotações têm o mesmo ângulo (veja figura abaixo).



Rotações equivalentes têm ângulos iguais.

FIG. 110

66.9 As rotações da figura anterior são equivalentes? Por quê?

Resp.: São, pois uma pode ser deduzida da outra por meio de uma translação.

66.10 O conjunto $R = \{\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b, \mathbf{r}_c, \mathbf{r}_d, \mathbf{r}_e\}$ é uma classe de equivalência?

Resp.: Sim

Observação: Outra maneira de definir ângulo é encará-lo como a característica comum entre duas rotações equivalentes.

66.11 Demonstrar na figura abaixo que $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ sendo A, B, C e D raios de mesma origem o, A e C pertencem a uma mesma reta, o mesmo acontecendo com B e D).

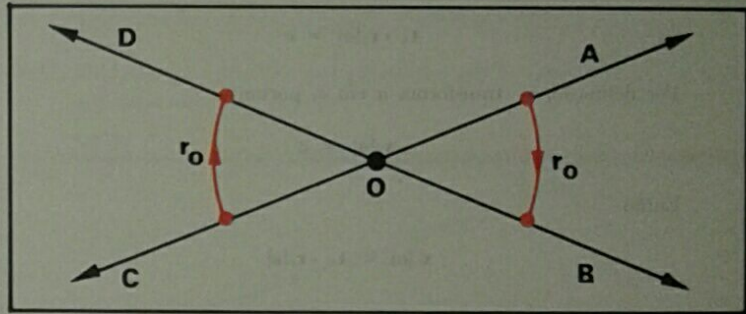


FIG. 111

Solução:

$$\widehat{A,B} = \widehat{A, \mathbf{r}_o[A]} = \hat{\mathbf{r}}_o$$
$$\widehat{C,D} = \widehat{C, \mathbf{r}_o[C]} = \hat{\mathbf{r}}_o$$

Portanto

$$\widehat{A,B} = \widehat{C,D}$$

66.12 Na figura abaixo o ponto a é transformado no ponto b por meio de $\mathbf{r}_o$. Em seguida ampliamos em b uma outra rotação $\mathbf{t}_o$ transformando-o no ponto c.

Qual a rotação $\mathbf{x}_o$ de centro em o que transforma diretamente a em c?

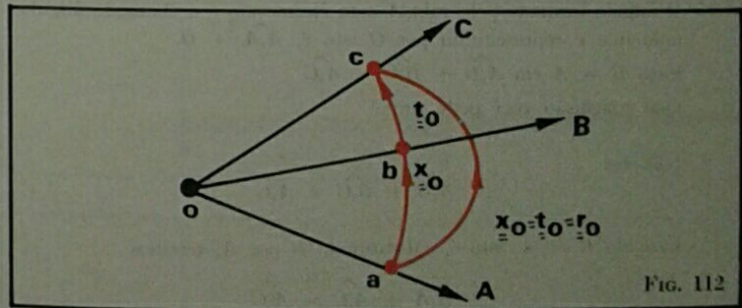


FIG. 112

Solução:

$$\mathbf{r}_o[a] = b \qquad (1)$$
$$\mathbf{t}_o[b] = c \qquad (2)$$

Substituindo os valôres de b de (1) em (2) teremos

$$\mathbf{t}_0[\mathbf{r}_0[a]] = c$$

ou

$$\mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{r}_0[a] = c$$

Por definição, $\mathbf{x}_0$ transforma a em c, portanto:

$$\mathbf{x}_0[a] = c$$

Então

$$\mathbf{x}_0[a] = \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{r}_0[\mathbf{s}]$$

ou seja

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{r}_0$$

A rotação $\mathbf{x}_0$ se diz composta de $\mathbf{r}_0$ e $\mathbf{t}_0$.

66.13 Na figura anterior diremos que o ângulo $\hat{\mathbf{x}}_0$ é igual a *soma* dos ângulos $\hat{\mathbf{t}}_0$ e $\hat{\mathbf{r}}_0$, isto é:

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{r}_0 \Longleftrightarrow \hat{\mathbf{x}}_0 = \hat{\mathbf{t}}_0 + \hat{\mathbf{r}}_0$$

Mostre que $\widehat{\mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{r}_0} = \hat{\mathbf{t}}_0 + \hat{\mathbf{r}}_0$

66.14 Verifique (na figura anterior) se a afirmação:

$$\widehat{A,B} + \widehat{B,C} = \widehat{A,C} \quad \text{é verdadeira.}$$

Resp.: é verdadeira.

66.15 O ângulo formado pelo raio A com êle mesmo é o chamado ângulo nulo que é representado por O isto é, $\widehat{A,A} = O$.

Faça $B = A$ em $\widehat{A,B} + \widehat{B,C} = \widehat{A,C}$

Que conclusão você pode tirar?

Solução:

$$\widehat{A,B} + \widehat{B,C} = \widehat{A,C}$$

Fazendo $B = A$, isto é, substituindo B por A, teremos

$$\widehat{A,A} + \widehat{A,C} = \widehat{A,C}$$

Por definição $\widehat{A,A} = O$, então,

$$O + \widehat{A,C} = \widehat{A,C}$$

Ou seja, o ângulo *nulo* é o elemento neutro da adição de ângulos.

66.16 Faça agora $C = A$ na soma $\widehat{A,B} + \widehat{B,A} = \widehat{A,C} = O$.

Que conclusão você pode tirar?

Resp.: Fazendo $C = A$ obteremos $\widehat{A,B} + \widehat{B,A} = \widehat{A,A} = O$ ou seja $\widehat{B,A} = \widehat{A,B}$. Em outras palavras $\widehat{B,A}$ é o inverso aditivo de $\widehat{A,B}$.

66.17 Desenhe as rotações correspondentes aos ângulos $\widehat{A,B}$ e $\widehat{B,A}$ (que representaremos por rot $\widehat{A,B}$ e rota $\widehat{B,A}$).

Resp.:

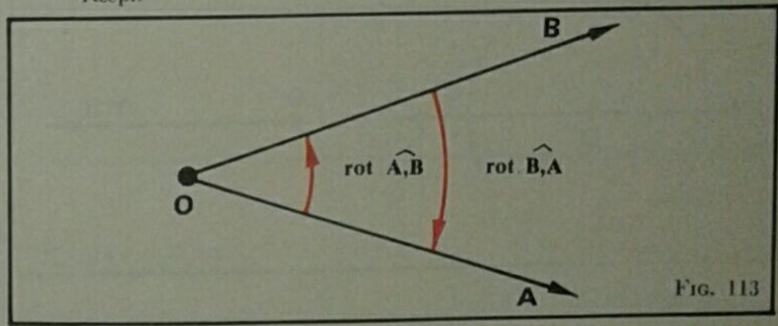
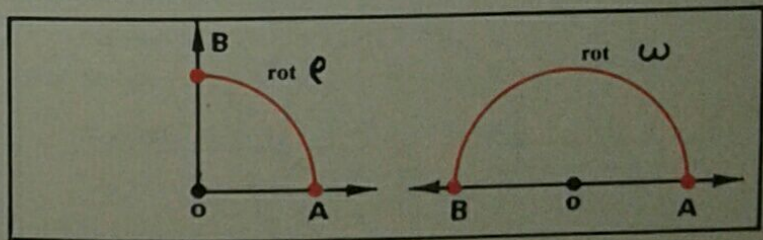


FIG. 113

66.18 Se os raios A e B são perpendiculares entre si o ângulo $\widehat{A,B}$ recebe o nome de ângulo reto. Se os raios A e B estão sôbre uma mesma linha reta e são opostos, o ângulo $\widehat{A,B}$ recebe o nome de ângulo de meia volta (ou também ângulo raso).

Representado o ângulo reto pela letra grega ρ (que se lê rô) e o ângulo raso pela letra grega ω (que se lê ômega), faça duas figuras mostrando rot ρ e rot ω.

O que você poderá concluir a respeito de $\rho + \rho$?



Resp.:

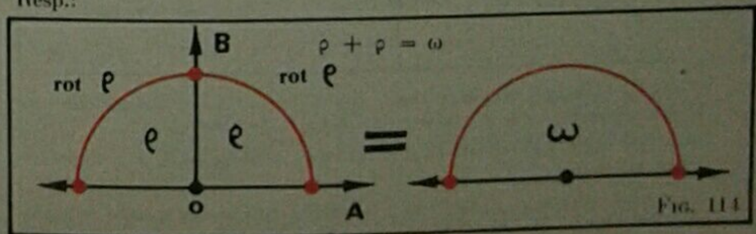


FIG. 114

Observação: $\rho + \rho = \omega$ ou $2\rho = \omega$ significa que o ângulo raso ω é o dôbro do ângulo reto ρ ou que ρ é a metade do ângulo raso.

66.19 No ângulo nulo O os raios A e B coincidem ($A = B$). Mostre num desenho que $\omega + \omega = 0$.

Resp.:

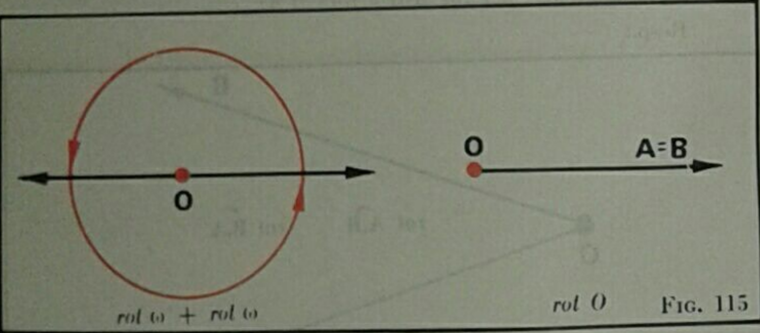


Fig. 115

Então:

$$\omega + \omega = O$$

66.20 Mostre que

$$\omega + \rho = -\rho$$

Solução.

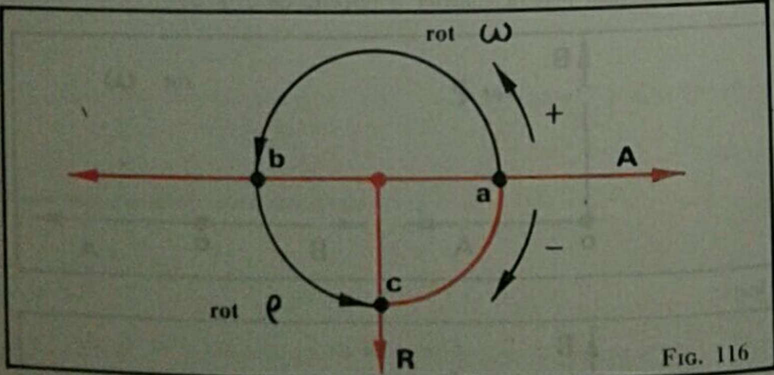


Fig. 116

Pela figura acima podemos notar que o ponto a é transformado em b pela rotação *rot* ω e em seguida b em c por *rot* ρ.

Então a aplicação composta das rotações de ângulos ω e ρ transformam a em c.

Um modo direto de transformar a em c é aplicar em a uma rotação de um ângulo $-\rho$. Portanto $\omega + \rho = -\rho$.

66.21 Complete a tabela da adição de ângulos dada abaixo

+	0	ρ	ω
0	0		
ρ		ω	
ω			0

Resp.:

+	0	ρ	ω
0	0	ρ	ω
ρ	ρ	ω	-ρ
ω	ω	-ρ	0

Fig. 117

66.22 Complete a tabela

+	0	ρ	-ρ	ω
0	0			
ρ		ω		
-ρ			ω	
ω				0

Fig. 118

Observação: $\omega = -\omega$ e $\rho - \rho = 0$.

66.23 Mostre que $\omega + \omega + \omega = \omega$, ou seja $3\omega = \omega$.

Solução: $\omega + \omega -- \omega = (\omega + \omega) + \omega$

$= 0 + \omega$ (pois $\omega + \omega = 0$)

$= \omega$ (pois $0 + \omega = 0$)

Portanto $3\omega = \omega$.

66.24 Mostre que $\omega + \omega + \omega + \omega = 0$ ou seja $4\omega = 0$.

Solução:

$$4\omega = \omega + \omega + \omega + \omega = (\omega + \omega) + (\omega + \omega)$$
$$= 0 + 0$$
$$= 0$$

66.25 Mostre que $5\omega = \omega + \omega + \omega + \omega + \omega = \omega$

Sugestão $5\omega = 4\omega + \omega$

66.26 Mostre que $6 \cdot \omega = 0$

Sugestão $6\omega + 4\omega + 2\omega$

66.27 Complete

(*a*) $2\omega =$ ....

(*b*) $3\omega =$ ....

(*c*) $4\omega =$ ....

(*d*) $6\omega =$ ....

(*e*) $7\omega =$ ....

(*f*) $8\omega =$ ....

(*g*) $9\omega =$ ....

(*h*) $10\omega =$ ....

Resp.:

(*a*) 0	(*e*) ω
(*b*) ω	(*f*) 0
(*c*) 0	(*g*) ω
(*d*) 0	(*h*) 0

66.28 Seja n um número inteiro então $2 \cdot n$ é par.

Mostre que $(2 \cdot n)\omega = 0$

Solução:

$$(2 \cdot n) \cdot \omega = (n \cdot 2) \cdot \omega = n \cdot (2\omega)$$

como $2\omega = 0$ teremos

$$(2 \cdot n)\omega = n \cdot (2\omega) = n0 = 0$$

66.29 Mostre que $(2n + 1)\omega = \omega$

Sugestão:

$$(2n + 1) \cdot \omega = 2n \cdot \omega + \omega$$

Conclusão:

$$n.^{\circ} \text{ par } \cdot \omega = 0$$

$$n.^{\circ} \text{ ímpar } \cdot \omega = \omega$$

66.30 Dois ângulos $\widehat{A,B}$ e $\widehat{B,C}$ são suplementares se $\widehat{A,B} + \widehat{B,C} = \omega$

Mostre que se $\widehat{A,B}$ e $\widehat{B,C}$ são suplementares então $\widehat{A,C} = \omega$

Sugestão:

$$\widehat{A,B} + \widehat{B,C} = \widehat{A,C}$$

66.31 Sendo $\alpha = \widehat{A,C}$, $-\alpha$ será ....

Resp.: $\widehat{C,A}$ que é $-\widehat{A,C}$.

Observação: α lê-se *alfa* e é a primeira letra do alfabeto grego.

66.32 Mostre que $\widehat{A,C} + \widehat{C,A} = 0$.

66.33 Faça um desenho que ilustre $\widehat{A,C} + \widehat{C,A} = 0$

Resp.:

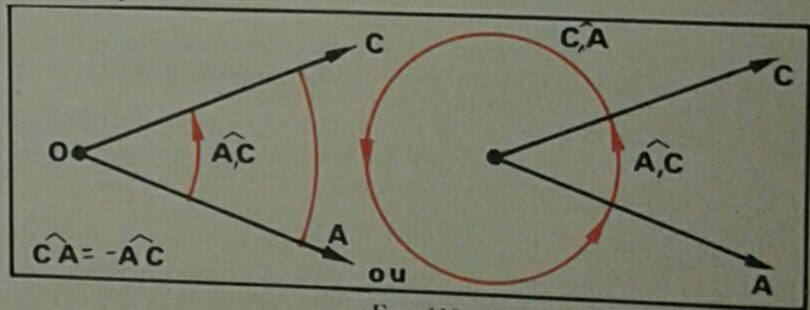


Fig. 119

Observação:

Existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto das rotações e o conjunto de ângulos, isto é, a cada ângulo corresponde uma rotação e vice-versa. Devido a êsse fato, poderemos pensar num ângulo como sendo uma rotação.

66.34 Dois ângulos i e e se dizem suplementares se $i + e = \omega$.

Mostre que os ângulos i e e da figura abaixo são suplementares.

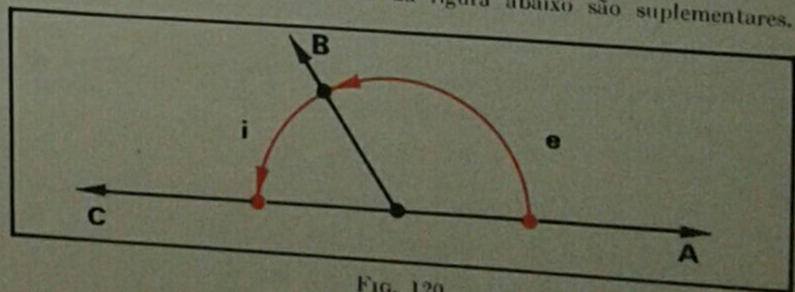


Fig. 120

Sugestão: $\widehat{A,B} + \widehat{B,C} = \widehat{A,C}$ e $\widehat{A,C} = \omega$.

67 — Ângulos de um triângulo ordenado

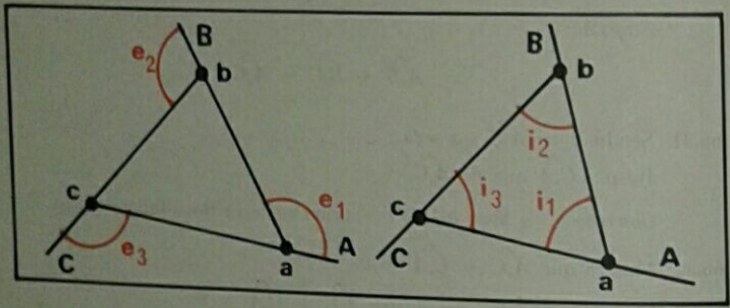


FIG. 121

e_1, e_2, e_3 = ângulos externos do triângulo $T = \langle a, b, c \rangle$

i_1, i_2, i_3 = ângulos internos do triângulo $T = \langle a, b, c \rangle$

67.1 Os ângulos e_1, e_2, e_3 são os ângulos externos do triângulo ordenado T. Pela figura acima notamos que $e_1 = \widehat{A,B}$, $e_2 = \widehat{B,C}$ e $e_3 =$ ....

Resp.: $\widehat{C,A}$

67.2 O ângulo externo e_1 é o par de raios, $\widehat{A,B}$ o ângulo externo e_2 é o par de raios ...., o ângulo externo e_3 é dado pelo par de raios ....

Resp.: $\widehat{B,C}$, $\widehat{C,A}$

Definição:

Os pares $\widehat{A,B}$, $\widehat{B,C}$ e $\widehat{C,A}$ recebem o nome de ângulos externos do triângulo T.

Os suplementos desses ângulos, recebem o nome de ângulos internos e são representados por i_1, i_2, i_3, respectivamente.

67.3 O ângulo i_1 é o suplemento de e_1, isto é $i_1 + e_1 = \omega$. O ângulo i_2 é o suplemento de e_2 isto é $i_2 + e_2 =$ $=$ .... O ângulo i_3 é o .... de e_3, isto é $i_3 +$ $+ e_3 = \omega$.

Resp.: ω, suplemento

67.4 Complete

$$i_1 + e_1 = \text{......}$$
$$i_2 + \text{......} = \omega$$
$$i_3 + e_3 = \text{......}$$

Resp.: ω, e_3, ω

67.5 Recordemos que $\widehat{A,B} + \widehat{B,C} + \widehat{C,A} = 0$.
Como $e_1 = \widehat{A,B}$, $e_2 = \widehat{B,C}$ e $e_3 = \widehat{C,A}$ então

$$e_1 + e_2 + e_3 = \text{......}$$

Resp.: 0

Conclusão:

A soma dos ângulos externos de um triângulo ordenado é 0, isto é:

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

67.6 Adicionemos agora $i_1 + e_1$, $i_2 + e_2$, $i_3 + e_3$, isto é:

$$i_1 + e_1 + i_2 + e_2 + i_3 + e_3 = \omega + \omega + \omega = 3\omega = \text{......}$$

....

Resp.: ω, pois $3\omega = \omega$

67.7 $i_1 + e_1 + i_2 + e_2 + i_3 + e_3 =$
ou $i_1 + i_2 + i_3 + e_1 + e_2 + e_3 =$
como $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ teremos.

$$i_1 + i_2 + i_3 = \text{......}$$

Resp.: ω, pois $\omega = i_1 + i_2 + i_3 + e_1 + e_2 + e_3 = i_1 +$ $+ i_2 + i_3 + 0 = i_1 + i_2 + i_1$

Conclusão:

A soma dos ângulos internos de um triângulo T é igual a ω, isto é:

$$i_1 + i_2 + i_3 = \omega$$

67.8 $i_1 + i_2 + i_3 = \omega$ e $e_1 + e_2 + e_3 =$ ....

Resp.: 0

68 — Exercícios

68.1 Demonstrar que $e_3 = i_1 + i_2$.

Solução:

Por definição $e_3 + i_3 = \omega$

mas $\omega = i_1 + i_2 + i_3$, então:

$$e_3 + i_3 = i_1 + i_2 + i_3$$

ou seja:

$$e_3 + i_3 - i_3 = i_1 + i_2 + i_3 - i_3$$

Portanto:

$$e_3 = i_1 + i_2$$

68.2 Demonstre que $e_2 = i_3 + i_1$

68.3 Demonstre que $e_1 = i_2 + i_1$

68.4 Um triângulo é *eqüilátero* se os seus ângulos internos são congruentes, isto é $i_1 = i_2 = i_3$.
Chamemos de i o ângulo interno do triângulo eqüilátero. Mostre que $3i = \omega$.

68.5 Mostre que o ângulo externo e de um triângulo eqüilátero é o dôbro do seu ângulo interno i.

Solução: Por definição $e + i = \omega$
como $3i = \omega$ então

$$e + i = 3i$$
$$e = 3i - i$$
$$e = 2i$$

68.6 Os ângulos externos e internos de um quadrilátero estão definidos na figura abaixo:

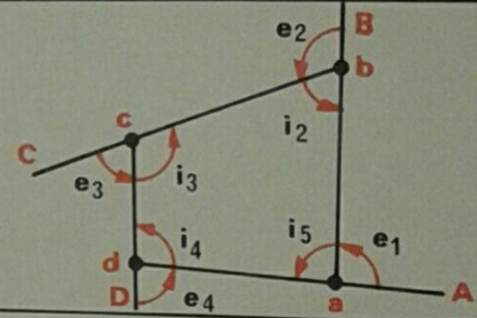


FIG. 122

Mostre que $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = 0$

e $i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 0$

Sugestão: $4\omega = 0$.

68.7 Mostre que num paralelogramo ordenado $i_1 = i_3$ e $i_2 = i_4$.

68.8 Mostre que num paralelogramo ordenado $i_1 + i_2 = \omega$ e $i_3 + i_4 = \omega$.

68.9 Seja i o ângulo interno de um triângulo eqüilátero.
Complete a tabela abaixo:

+	i	2i	3i	4i	5i	0
i	2i	3i	4i	5i	0	
2i				0		
3i			0			
4i		0				
5i	0					
0						

Resp.:

+	i	2i	3i	4i	5i	0
i	2i	3i	4i	5i	0	i
2i	3i	4i	5i	0	i	2i
3i	4i	5i	0	i	2i	3i
4i	5i	0	i	2i	3i	4i
5i	0	i	2i	3i	4i	5i
0	i	2i	3i	4i	5i	0

FIG. 123

68.10 Sendo i o ângulo interno de um triângulo eqüilátero, mostre que $4i = 2i$.

Solução:

Pela tabela acima, temos que $6i = 0$.

Como $6i = 4i + 2i$ teremos

$$4i + 2i = 0$$

ou seja $4i = -2i$.

68.11 Idem para $5i = -i$

Sugestão:

$$6i = 5i + i = 0$$

68.12 Mostre que a soma dos ângulos internos de um polígono ordenado $P = \{a_1, a_2, a_3, a_2, a_4\}$ é igual a ω.

Sugestões:

$$e_1 + e_2 + e_3 + e_1 + e_5 = 0 \quad \text{e} \quad 5\omega = \omega$$

68.13 Generalize o exercício anterior, mostrando que a soma dos ângulos internos de um polígono ordenado $P = \{a_1, a_2, a_3 \ldots a_n\}$ é igual a $n\omega$.

(*Observação*: se n fôr ímpar $n\omega = \omega$, se n fôr par $n\omega = 0$).

68.14 Mostre que $a = b$ e $c = d$ na figura abaixo (sendo $A \,||\, B$).

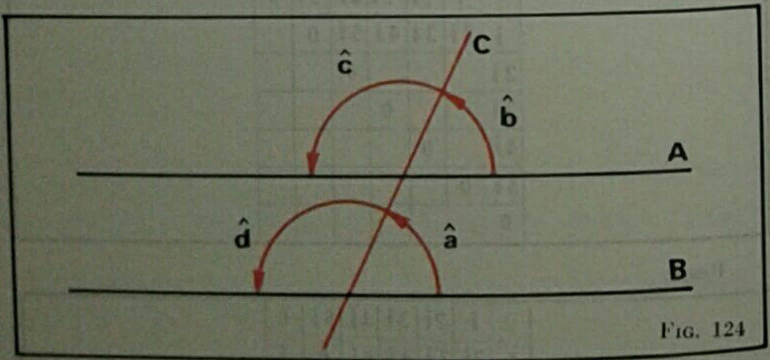


Fig. 124

69 — Sumário

69.1 *Rotação*:

(*a*) *Definição* — Consideremos um par de eixos p e q de mesma origem O.

A isometria $\mathbf{r}_o = \mathbf{s}_p \cdot \mathbf{s}_q$ recebe o nome de rotação de centro O.

(*b*) *Propriedade* — A rotação é uma isometria direta, portanto conserva o tamanho, a forma e a orientação das figuras.

69.2 *Rotações Equivalentes*

(*a*) *Definição* — Duas rotações $\mathbf{r}_a$ e $\mathbf{r}_b$ são equivalentes, se uma pode ser obtida da outra por meio de uma rotação. Escreveremos que $\mathbf{r}_a \sim \mathbf{r}_b$ e leremos $\mathbf{r}_a$ é equivalente a $\mathbf{r}_b$.

(*b*) *Propriedades* — A relação $\sim$ é uma relação de equivalência.

69.3 *Ângulo de uma rotação*

(*a*) *Definição* — Colocando-se tôdas as rotações equivalentes a uma dada rotação $\mathbf{r}_o$ num só conjunto obtemos uma classe de equivalência.

Chamamos de ângulos da rotação $\mathbf{r}_o$, e indicamos por $\hat{\mathbf{r}}_o$, a essa *classe de equivalência.* Assim duas rotações equivalentes terão um mesmo ângulo, isto é

$$\mathbf{r}_a \sim \mathbf{r}_b \Longleftrightarrow \hat{\mathbf{r}}_a = \hat{\mathbf{r}}_b$$

69.4 *A correspondência ângulo → rotação*

A cada rotação $\mathbf{r}_o$ corresponde um ângulo $\hat{\mathbf{r}}_o$ e vice-versa, isto é, dado uma rotação $\mathbf{r}_o$ podemos determinar a classe $\hat{\mathbf{r}}_o$ das rotações que lhes são equivalentes.

Assim podemos associar à operação de *composição* de rotações uma operação entre ângulos, denominada *adição.*

$$\mathbf{r}_a \leftrightarrow \hat{r}_a$$

$$\mathbf{r}_b \leftrightarrow \hat{r}_b$$

$$\mathbf{r}_a \cdot \mathbf{r}_b \leftrightarrow \hat{r}_a + \hat{r}_b = \widehat{r_a \cdot r_b}$$

Podemos portanto "*confundir*" o ângulo $\hat{r}_a$ com a sua rotação.

69.5 *Raios e Ângulos*

Podemos também encarar um ângulo como sendo um par ordenado de raios A e B de mesma origem 0.

Indicamos tal ângulo por $\widehat{A,B}$

69.6 *Propriedades algébricas*

(a) $\widehat{A,B} = -\widehat{B,A}$

(b) $\widehat{A,B} + \widehat{B,C} + \widehat{C,A} = 0$

(c) $\widehat{A,A} = 0$

(d) $n\omega = 0$ se n é par

$n\omega = \omega$ se n é ímpar

$e + e = \omega$

onde ω é o ângulo raso e e é o ângulo reto.

69.7 *Ângulos internos e externos de um polígono*

(a) Soma dos ângulos externos

A soma dos ângulos externos $e_1, e_2, e_3 \ldots e_n$, de um polígono $P = \{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ é igual a 0, isto é,

$$e_1 + e_2 + e_3 + \ldots + e_n = 0$$

(b) Soma dos ângulos internos.

A soma dos ângulos internos é dada por

$$i_1 + i_2 + i_3 + \ldots + i_n = n\omega$$

se n fôr par $n\omega = 0$

Se n fôr ímpar $n\omega = \omega$

70 — Homotetia

Definição:

Chamamos de Homotetia de centro o e razão r a transformação h_o dada por:

$$h_o[(x, y)] = (rx, ry)$$

O ponto (rx, ry) se diz imagem ou homólogo de (x, y)

Obs.: Consideremos aqui a razão r maior ou igual a zero.

70.1 Seja $r = 2$ então $\mathbf{h}_o[(x, y)] = (2x, 2y)$

Assim nesse caso $\mathbf{h}_o[(2, 3)] =$ ....

Resp.: (4, 6)

70.2 Seja $r = 2$ então $\mathbf{h}_o[(1, 0{,}5)] =$ ....

Resp.: (2, 1)

70.3 Seja ainda $r = 2$ então $\mathbf{h}_o[(2, -1)] =$ ....

Resp.: (4, -2)

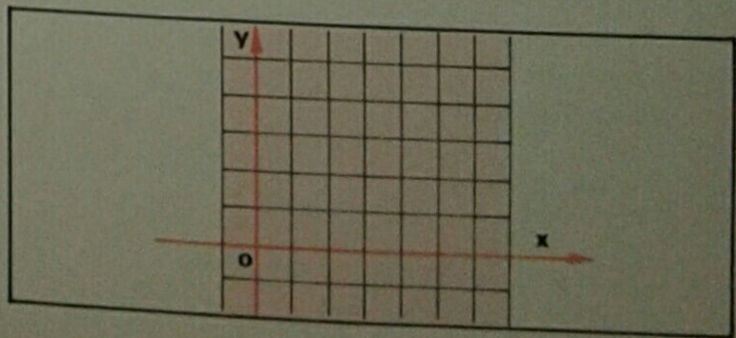
70.4 Os homólogos de (2, 3), (1, 0.5) e (2, -1) numa homotetia h_o de razão 2 são respectivamente os pontos (4, 6), ... e ....

Resp.: (2, 1), (4, 2)

70.5 O triângulo $T = \{(2, 3), (1, 0.5), (2, -1)\}$ na homotetia h_o de razão 2 se transforma no triângulo $T' = \{$.........., ..., ...$\}$

Resp.: (4, 6), (2, 1), (4, 2)

70.6 Faça na figura abaixo um gráfico dos triângulos T e T'.



Resp.:

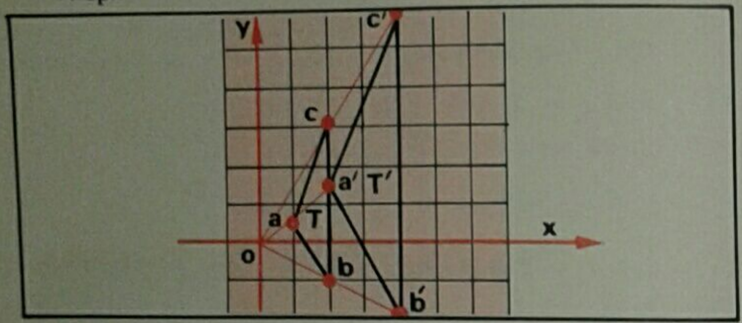


FIG. 125

70.7 Pela figura acima notamos que h_o "ampliou o triângulo T transformando-o em T'(T' se diz homólogo de T). O homólogo do vértice a é o vértice a', o de b é b' e o de c é ......

Resp.: c'

70.8 O lado ac se transformou no seu homólogo $a'c'$
O lado cb se transformou no seu ...... $c'b'$.
O lado ba se transformou no seu homólogo ......

Resp.: homólogo, $b'a'$

70.9 O lado ac é paralelo ao seu homólogo $a'c'$
O lado cb é ...... ao seu homólogo $c'b'$
O lado ba é ...... ao seu homólogo ......

Resp.: paralelo, paralelo, $b'a'$

70.10 Os lados do triângulo T são paralelos aos lados ...... do triângulo T'.

Resp.: homólogos

Em dois triângulos T e $T' = h_o[T]$ os lados homólogos são paralelos.

70.11 O lado $a'c'$ é o dôbro do lado ac
O lado $c'b'$ é o dôbro do lado cb

O lado $b'a'$ é o ...... do lado ......

Resp.: dôbro, ba

70.12 Portanto $a'c' = 2ac$
$c'b' =$ ......
$b'a' =$ ......

Resp.: $2cb$, $2ba$

70.13 De $a'c' = 2ac$ podemos concluir que $\dfrac{a'c'}{ac} = 2$.

Do mesmo modo $\dfrac{c'b'}{cb} =$ ...... , e $\dfrac{b'a'}{ba} =$ ......

Resp.: 2, 2

70.14 $\dfrac{a'c'}{a_o}$ é a razão entre o lado $a'c'$ e o seu homólogo que é ......

Resp.: ac

70.15 A razão entre o lado $a'c'$ e o seu homólogo ac é igual a:

(a) 1
(b) 2
(c) 3

Resp.: 2

70.16 As razões $a'c'$, $c'b'$, $b'a'$ são tôdas iguais a ......

Resp.: 2

70.17 Isto significa que $\dfrac{a'c'}{ac} = \dfrac{c'b'}{cb} = \dfrac{b'a'}{ba} =$ ......, ou seja

$\dfrac{a'c'}{ac}$, $\dfrac{c'b'}{cb}$, $\dfrac{b'a'}{ba}$ constituem-se numa proporção de razão 2.

Resp.: 2

Conclusão:

Se $T' = h_{\circ}[T]$ então os lados homólogos são paralelos e proporcionais.

A razão de proporcionalidade é igual à razão r de homotetia ($r \geq 0$).

70.18 Sendo $h_{\circ}$ uma homotetia de centro o e razão $r = \frac{1}{2}$,

calcule:

(*a*) $h_{\circ}[(10, 6)] =$ ....

(*b*) $h_{\circ}[(7, 4)] =$ ....

(*c*) $h_{\circ}[(9, 1)] =$ ....

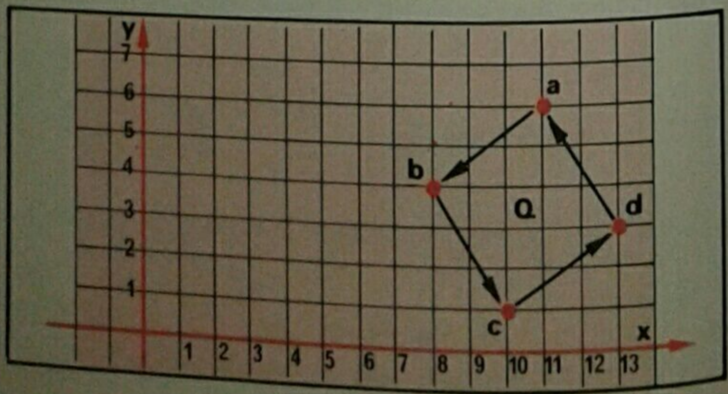
(*d*) $h_{\circ}[(12, 3)] =$ ....

Resp.: (*a*) (5, 3), (*b*) (3, 5, 2), (*c*) (4, 5, 0, 5), (*d*) (6, 15)

70.19 Na figura abaixo está dado o quadrado

$$Q = [(10, 6), (7, 4), (9, 1), (12, 3)]$$

Na mesma figura desenhe o quadrado $Q' = h_{\circ}(Q)$ onde $h_{\circ}$ é a homotetia de centro o e razão $r = \frac{1}{2}$



Resp.:

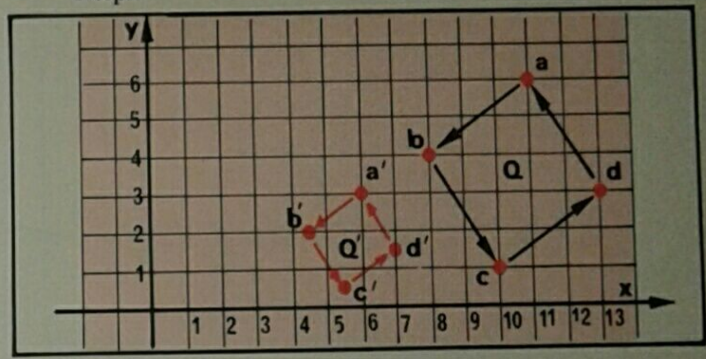


FIG. 126

70.20 O lado $a'b'$ é paralelo ao lado ab.

O lado $b'c'$ é paralelo ao lado ....

O lado $c'd'$ é paralelo ao lado ....

O lado $d'a'$ é paralelo ao lado ....

Resp.: *bc*, *cd*, *da*

70.21 $\frac{a'b'}{ab} = \frac{1}{2}$

$\frac{b'c'}{b_{\circ}} =$ ....

$\frac{c'd'}{cd} =$ ....

$\frac{d'a'}{da} =$ ....

Resp.: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$

Conclusão:

Os lados homólogos dos quadrados Q e $Q' = h_{\circ}[Q]$ são paralelos e proporcionais, sendo que a razão de proporcionalidade é igual a razão de homotetia.

De maneira geral se P e P' são dois polígonos tais que $P' = h_o[P']$ então os seus lados homólogos são paralelos e proporcionais e a razão de proporcionalidade é igual à razão de homotetia.

$$(r \geq o)$$

70.22 Se $P = \{a, b, c, d, e\}$ e $P' = h_o[P] = \{a', b', c', d', e'\}$ então $a' = ra$, $b' =$ ......, $c' =$ ......, $d' =$ ......, $e' =$ ....

Resp.: $r \cdot b$, $r \cdot c$, $r \cdot d$, $r \cdot e$.

70.23 De $a' = r \cdot a$ e $b' = r \cdot b$ concluimos que $b' - a' = rb - ra = r($ .... $)$

Resp.: $b - a$

70.24 De $b' - a' = r(b - a)$ concluimos que o vetor $b' - a'$ é paralelo ao vetor $b - a$.

Anàlogamente o vetor $c' - b' = r(c - b)$ é paralelo ao vetor ....

Resp.: $c - b$

70.25 A homotetia h_o transforma um segmento em um outro que lhe é paralelo, transforma um vetor em um outro que lhe é ....

Resp.: paralelo

70.26 Se $A \parallel B$ então $A' = h_o[A]$ e $B' = h_o[B]$ também são paralelas. Portanto a homotetia $\mathbf{h}_o$ conserva a relação de .... entre retas.

Resp.: paralelismo

70.27 Na figura abaixo damos as retas A e a sua homóloga $A' = h_o[A]$

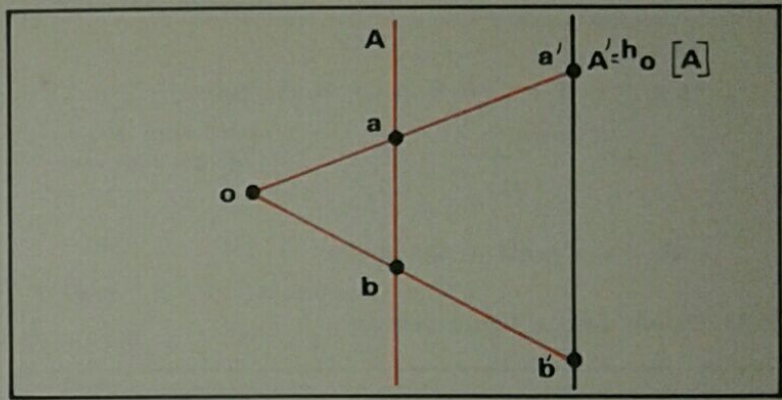


FIG. 127

O homólogo de a é ...... e o de b é ......

Resp.: a', b'

70.28 O segmento Oa se transforma por $\mathbf{h}_o$ no segmento Oa' pois O se transforma em O e a se transforma em ......

Resp.: a'

70.29 De $Oa' = h_o[Oa]$ concluimos que $Oa' = r \cdot Oa$

De $Ob' = h_o[Ob]$ concluimos que $Ob' = r \cdot$ ......

Resp.: Ob

70.30 $\dfrac{Oa'}{Oa} = \dfrac{Ob'}{Ob} =$ ......

Resp.: r

70.31 De $a'b' = h_o[ab]$ concluimos que $a'b' = r \; ab$ ou que $\dfrac{a'b'}{ab} =$ ......

Resp.: r

70.32 Então $\dfrac{Oa'}{Oa} = \dfrac{Ob'}{Ob} = \dfrac{a'b'}{ab} =$

Resp.: r

Conclusão:

Se $a, b \in A$ e $a', b' \in A' = \mathbf{h}_o[A]$ então

$$\frac{Oa'}{Oa} = \frac{Ob'}{Ob} = \frac{a'b'}{ab} = r$$

onde r é a razão de homotetia

70.33 Estude bem a figura abaixo:

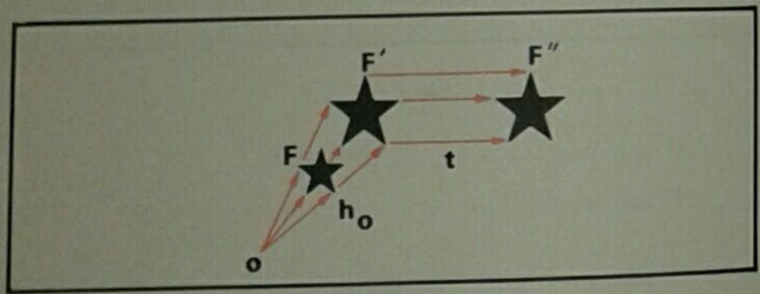


Fig. 128

Nela aparecem as figuras F, $F' = h_o[F]$ e $f'' = \mathbf{t}[F'] = F' + \mathbf{t} \cdot F''$ é a figura resultante da composição de uma homotetia h_o com uma translação **t** sôbre a figura F, isto é

$$F'' = \mathbf{t} \cdot h_o[F] \text{ onde } \cdot \text{ indica } \textit{composição}$$

70.34 A transformação $\mathbf{t} \cdot \mathbf{h}_o$ se diz uma transformação *composta* de ...... e ......

Resp.: **t** e $\mathbf{h}_o$

Se $F'' = \mathbf{t} \cdot h_o[F]$ então F'' e F se dizem *semelhantes* e simbòlicamente escrevemos que

$$F'' \sim F'$$

70.35 $F'' \sim F$ significa que a figura F'' é semelhante à figura ......

Resp.: F

70.36 Se $F'' \sim F$ então $F \sim$ ...... (simétrica)

Resp.: F

70.37 A figura F' é obtida da figura F por uma homotetia $\mathbf{h}_o$ e por uma translação $t = O$ (translação nula). Então podemos concluir que

(*a*) F não é semelhante a F'

(*b*) F é semelhante a F'

Resp.: (*b*) F é semelhante a F'

70.38 As figuras F, F', e F'' são ....

Resp.: semelhantes

Obs.: duas figuras congruentes são semelhantes.

70.39 A reta $\sim$ de semelhança é uma relação de equivalência, pois tem as seguintes propriedades (*a*) reflexiva, (*b*) simétrica, e (*c*) ......

Resp.: transitiva

70.40 Colocamos na figura abaixo, as figuras que são semelhantes numa mesma classe.

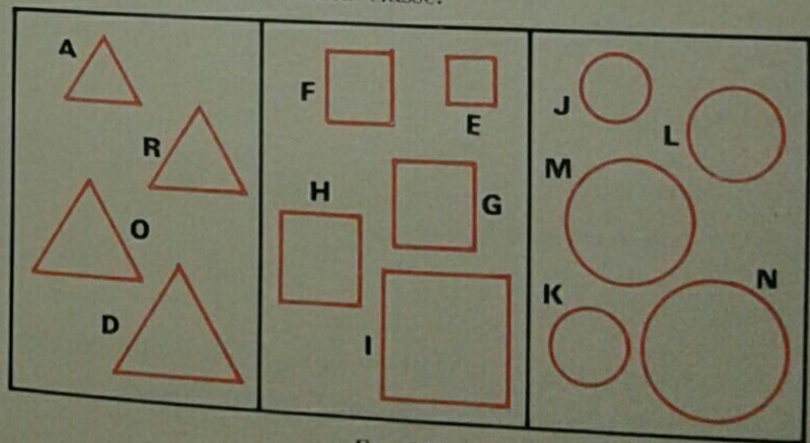


Fig. 129

Tais classes são classes de equivalência?

(*a*) sim

(*b*) não

Resp.: (*a*) sim

70.41 Na figura acima $A \sim B \sim \ldots \sim \ldots$

Resp.: C, D

70.42 A e H são semelhantes?

(*a*) sim

(*b*) não

Resp.: não

70.43 H e L são semelhantes?

(*a*) sim

(*b*) não

Resp.: não

70.44 $F \sim G \sim H \sim \ldots \sim \ldots$

Resp.: I, J

70.45 $K \sim L \sim \ldots \sim \ldots \sim \ldots$

Resp.: M, N, P

De maneira intuitiva, dizemos que as figuras semelhantes possuem a mesma "*forma*" e não necessàriamente o mesmo "*tamanho*".

71 — Sumário

71.1 *Homotetia*

A transformação h_o dada por

$$\mathbf{h}_o[(x, y)] = r(x, y)$$

é denominada de homotetia de centro O e razão r.

Os pares (x, y) e $h_o[(x, y)]$ se dizem homólogos.

71.2 *Propriedades*

(*a*) Se $P' = h_o[P]$, onde $\mathbf{h}_o$ é uma homotetia de razão $r \geq 0$, então os lados homólogos são paralelos e proporcionais.

(*b*) Se A é uma reta, $\mathbf{h}_o[A]$ é uma outra reta que lhe é paralela.

71.3 *Figuras semelhantes*

Se $F'' = \mathbf{t} \cdot \mathbf{h}_o[F]$ então F e F'' se dizem semelhantes.

A relação de semelhança é uma relação de equivalência.

72 — Exercícios

72.1 Sendo h_o uma homotetia de centro $o(0, 0)$ e razão $r = 3$, complete:

(*a*) $h_o[(1, 1)] = \ldots$

(*b*) $h_o[(2, -1)] = \ldots$

(*c*) $h_o[(-1, 5)] = \ldots$

(*d*) $h_o[(-2, -1)] = \ldots$

(*e*) $h_o[(0, 2)] = \ldots$

(*f*) $h_o[(0, 0)] = \ldots$

Resp.:

(*a*) (3, 3) (*d*) (−6, −3)

(*b*) (6, −3) (*e*) (0, 6)

(*c*) (−3, 15) (*f*) (0, 0)

72.2 Qual é o ponto a tal que $\mathbf{h}_o(a) = a$?

Resp.: $a(0, 0)$

72.3 Mostre que uma homotetia de centro em $a \neq o(0, 0)$ e razão r é dada por:

$$\mathbf{h}_a[(x, y)] = r \cdot (x, y) - (r - 1)a$$

72.4 Sendo $\mathbf{h}_a$ a homotetia de razão $r = 2$ e centro em $a(3, 3)$ calcular $\mathbf{h}_a(T)$.

Sendo $T = \{(3, 1), (5, 0), (5, 3)\}$

Resp.: $\mathbf{h}_a[T] = \{(3, -1), (7, -3), (7, 3)\}$

72.5 Faça um gráfico mostrando o ponto a e os triângulos T e $\mathbf{h}_a[T]$ do exercício anterior.

Resp.:

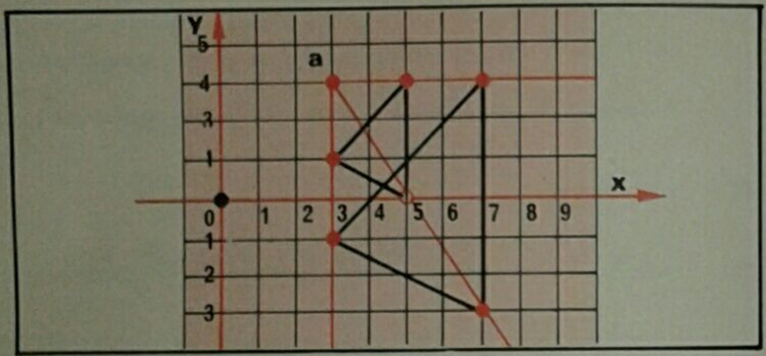


Fig. 130

72.6 Qual é a razão entre os lados homólogos dos triângulos acima?

Resp.: É igual a 2 que é a razão de **h**.

72.7 Os triângulos acima são semelhantes?

Resp.: Sim

72.8 Os ângulos homólogos dos triângulos $\mathbf{h}_o[T]$ e T são iguais?

Resp.: Sim

72.9 A homotetia conserva os ângulos?

Resp.: Sim

72.10 O triângulo $T = [a, b, c]$ se transforma no triângulo $T' = \mathbf{h}_o[T] = [a', b', c']$ numa homotetia h_o de razão 3.

Mostre que:

(a) $a'b' = 3ab$

(b) $a'a = 2Oa$

(c) $\dfrac{a'a}{b'b} = \dfrac{Oa}{Ob}$

(d) $\dfrac{a'a}{Oa} = \dfrac{a'b}{Ob} = \dfrac{c'c}{Oc} = 2$

Composto e Impresso por:
ARTEGRÁFICA, Rua Ana Neri, 466
São Paulo — 1969