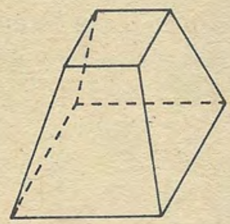
16 Um tronco de pirâmide quadrangular regular tem os perímetros das bases medindo $20\sqrt{2}$m e $44\sqrt{2}$m. As arestas laterais do tronco são iguais às diagonais da base menor. Calcule o volume do tronco (EPUC, Rio – 1959).



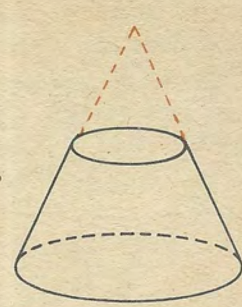
Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

17 Um cone circular de altura a e raio r é cortado por um plano paralelo à base. Calcular a altura do cone parcial assim determinado de modo que a sua superfície lateral seja igual à superfície lateral do tronco (ENE – 1941).



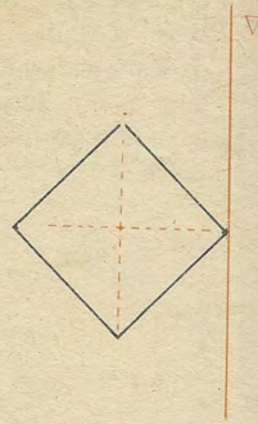
Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

18 Um quadrado de lado a gira em torno de um eixo que passa por um dos seus vértices e é paralelo à diagonal do quadrado que não passa por esse vértice. Calcule o volume gerado (F.N.F. – 1946).



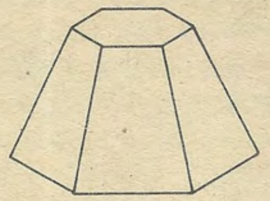
Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

19 Calcular a área total e o volume de um tronco de pirâmide hexagonal regular, cujos lados das bases medem respectivamente 4cm, 2cm e a aresta lateral vale 5cm.



Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

20 Uma pirâmide hexagonal regular foi seccionada por dois planos paralelos à base, ficando a altura da pirâmide dividida em três partes iguais. Pede-se para determinar o volume do tronco da pirâmide cujas bases são as duas seções obtidas, sabendo que o perímetro da base da pirâmide é igual a 48dm e a sua aresta lateral mede 12dm (ENE – 1951).

Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

VERIFIQUE O QUE APRENDEU RESOLVENDO O TESTE

1. Um retângulo ABCD de lados $AB = 3\sqrt{2}$m e $BC = \sqrt{6}$m gira em torno de um eixo, coplanar e externo ao retângulo, que passa por A e faz um ângulo de 30° com o lado AB. Calcule a superfície total do sólido gerado pela rotação do retângulo (IME – 1971).

   a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ m²

   b) $(\sqrt{2} - 1)$ m²

   c) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} - 1)$ m²

2. Um prisma reto de base triangular regular de aresta da base 12cm é seccionado por um plano que intercepta suas arestas laterais a 5cm, 6cm e 7cm da base. Os lados do triângulo-seção são: (U.G.F. – 1971)

   a) iguais medindo cada um $\sqrt{145}$ cm

   b) iguais medindo cada um $\sqrt{143}$ cm

   c) dois lados medindo cada um $\sqrt{145}$ cm e o terceiro $2\sqrt{37}$ cm

   d) dois lados medindo cada um $\sqrt{137}$ cm e o terceiro $2\sqrt{37}$ cm

   e) desiguais

3. Um tronco de cilindro apresenta para seção meridiana um trapézio retângulo de bases 18m e 12m e altura 8m. A base elíptica desse tronco tem área: (Vestibulares – 1970)

   a) 25π m²
   b) 20π m²
   c) 16π m²
   d) 10π m²
   e) NRA

4 A seção reta de um tronco de prisma triangular de $615{,}6dm^3$ de volume tem $14{,}4dm^2$, duas arestas laterais medem 24,5dm e 31,3dm. Calcular a outra aresta.

a) 29,7 dm
b) 72,4 dm
c) 128,2 dm
d) 55,8 dm
e) NRA

5 O apótema de um tronco piramidal regular tem 5cm; as bases são quadrados de 10cm e 4cm. Calcular o volume:

a) $24\sqrt{3}\ cm^3$
b) $150\sqrt{3}\ cm^3$
c) $208\ cm^3$
d) $156\ cm^3$
e) NRA

6 Um tronco de prisma tem por base um triângulo de $10dm^2$ de área. Os vértices do tronco distam respectivamente 5dm, 4dm e 3dm do plano da base. O volume do tronco é igual a:

a) $12\ dm^3$
b) $24\ dm^3$
c) $200\ dm^3$
d) $40\ dm^3$
e) NRA

7 A área total de um tronco de pirâmide triangular regular cujo apótema é $8\sqrt{3}$ m e cujas arestas das bases são respectivamente 2m e 4m é igual a:

a) $44\sqrt{3}\ m^3$
b) $53\sqrt{3}\ m^3$
c) $66\sqrt{3}\ m^3$
d) $77\sqrt{3}\ m^3$
e) NRA

8 Consideremos um cone reto de altura H. Queremos cortá-lo por um plano paralelo à base à distância **h** do vértice e tal que o cone obtido e o tronco do cone tenham o mesmo volume (USP – 1970).

Então: $\dfrac{h}{H}$ vale

a) $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

e) $\dfrac{1}{3\sqrt{2}}$

9 A relação entre as áreas das bases b e B de um tronco de pirâmide de bases paralelas é 1/4. Qual a relação entre seu volume e altura? (F.F.C.L., USP – 1969)

a) 3/2 de b
b) 5/3 de b
c) 7/2 de b
d) 7/3 de b
e) 7b

10 A que distância do vértice se deve fazer passar um plano paralelo à base de uma pirâmide de altura H para que ela fique dividida em dois sólidos de igual volume? Assinale a resposta certa (CICE – 1968)

a) $\dfrac{H}{3\sqrt{2}}$

b) $\dfrac{H}{2}$

c) $\dfrac{\sqrt{3}\,H}{4}$

d) $\dfrac{H}{2+H}$

e) $\dfrac{H^2+1}{\sqrt{2}}$

RESPOSTAS DA UNIDADE 6

PROBLEMAS PROPOSTOS

11. $187{,}3\,\pi\ cm^3$

12. $244{,}060 cm^3$

13. $6\sqrt{6}\ cm$

14. $AE = a\sqrt{3}$

$$AF = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$$EF = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$$V = \frac{a^3\sqrt{6}}{8}$$

15. 5m

16. $1\,072 m^3$

17. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

18. $\pi a^3\sqrt{2}$

19. $(30\sqrt{3} + 36\sqrt{6})\ cm^2$

$84\sqrt{2}\ cm^3$

20. $\dfrac{896\sqrt{15}}{27}$

RESPOSTAS DO TESTE

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a										■
b			■	■						
c	■	■			■					
d						■	■		■	
e								■		

unidade 7

esfera

O QUE VOCÊ PRECISA SABER

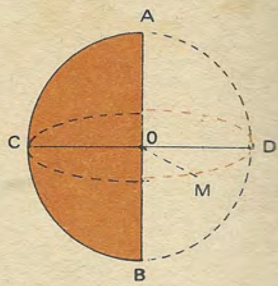
a) Definições

Por **esfera**, entendemos o sólido gerado pela rotação de um semicírculo em torno do diâmetro. A superfície gerada pela semicircunferência desse semicírculo é denominada **superfície esférica.**

Numa esfera notamos:

— **círculo máximo**

É qualquer círculo que contém um diâmetro (AB).



— **centro**

É o ponto médio de qualquer diâmetro de um círculo máximo.

— **raio**

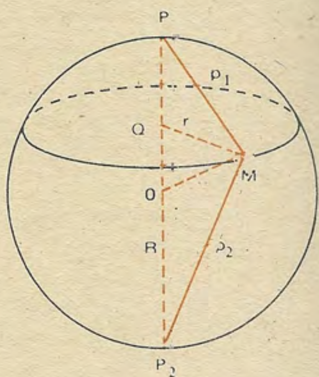
É a distância do centro a qualquer ponto da esfera (OM).

— **seção plana**

É a seção feita na esfera (desde que não seja vazia nem tangente) por um plano perpendicular a um diâmetro. Esta seção é um círculo.

— **pólos e distância polar**

Seja por exemplo um círculo máximo e uma seção plana perpendicular que contém o ponto M.



(1) No triângulo OQM temos

$r = \sqrt{R^2 - d^2}$ onde $r = \overline{MQ}$

$d = \overline{OQ}$

Chamando P_1 e P_2 de pólos da esfera, e $MP_1 = P_1$, $MP_2 = P_2$ respectivamente de distâncias polares, tiramos:

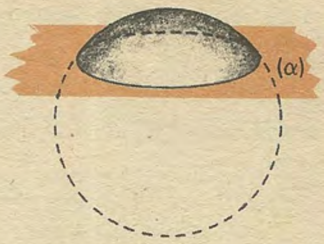
(2) $p_1^2 + p_2^2 = 4 \cdot R^2$

(3) $p_1 \cdot p_2 = 2\,R_r$, relações métricas nos triângulos retângulos.

O sistema formado por (1), (2) e (3), nos dá p, distância polar em relação ao pólo mais próximo do círculo ou seja

$p = \sqrt{2\,R\,(R - d)}$

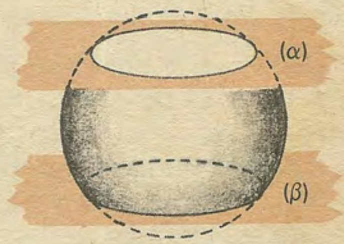
b) Porções da superfície esférica e da esfera



Na superfície esférica, a seção feita pelo plano (α) é uma **calota esférica.**

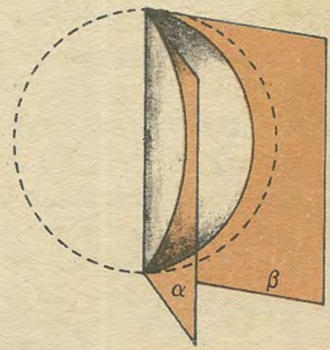
A porção da esfera limitada pelo plano (α) é um **segmento esférico de uma base** (fig. 1).

A seção feita na esfera por dois planos paralelos determina um **segmento esférico de duas bases.**



Na superfície esférica fica determinada uma porção denominada **zona esférica** (fig. 2).

Se dois planos se interceptam segundo um diâmetro qualquer, obtemos na superfície esférica um **fuso esférico,** enquanto que na esfera fica determinada uma **cunha esférica** (fig. 3).

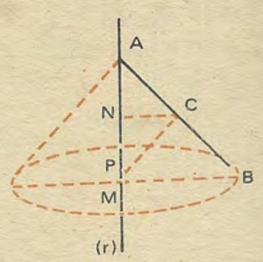


c) Área da superfície esférica

1 Para chegarmos à área da superfície esférica, e das porções da esfera mostradas anteriormente, vamos supor três casos:

1.º) **Um segmento AB** gira em torno da reta (r) tendo um ponto sobre ela. Como vemos, a superfície gerada é a de um cone de revolução cuja área sabemos ser dada por

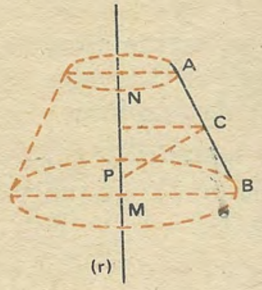
$A_{AB} = \pi \cdot \overline{BM} \cdot \overline{AB} = \pi \cdot CP \cdot AM$



2.º) **AB é oblíquo à reta (r)**

Neste caso a superfície gerada por AB é a de um tronco de cone de revolução, que, como vimos na unidade anterior, é dada por:

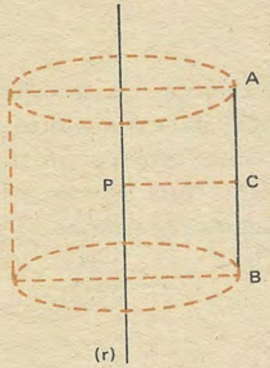
$A_{AB} = \pi \cdot AB\ (BM + AN) =$
$= 2\ \pi \cdot CP \cdot MN$



3.º) **AB é paralelo à reta (r)**

A **superfície** gerada é a de um cilindro de revolução, cuja expressão é, como vimos, dada por:

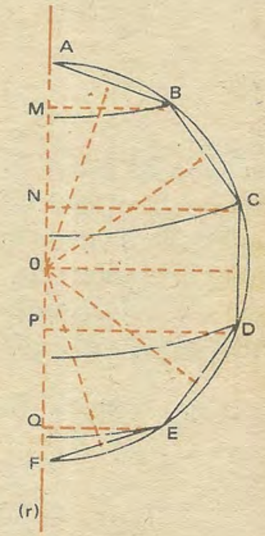
$A_{AB} = 2\ \pi \cdot CP \cdot AB$



TEOREMA

> A área gerada por qualquer segmento de reta em torno de uma reta (r), desde que esse segmento não a atravesse, é igual ao produto da circunferência cujo raio é o segmento de mediatriz compreendido entre o segmento dado e a reta (r) pela projeção do segmento sobre a reta.

2 A **área** gerada pela poligonal regular ABCDE. . . é uma composição das áreas geradas nos três casos anteriores, ou seja:



$$A_{AB} = 2\pi \cdot a \cdot AM$$
$$A_{BC} = 2\pi \cdot a \cdot MN$$
$$A_{CD} = 2\pi \cdot a \cdot NP$$
$$\vdots$$
$$A_{ABCD\ldots} = 2\pi a\,(AM + MN + NP + \ldots)$$

onde **a** é o apótema da poligonal regular e AM + MN + . . . a projeção da poligonal sobre (r).

3 Fazendo agora a poligonal ABCD. . . tender para um número infinito de lados, teríamos no limite a semicircunferência, então o apótema **a** tende para **R**, raio da semicircunferência e a projeção desta sobre (r) tende para o diâmetro **2R**.
Substituindo, na última expressão, as considerações anteriores, teríamos a área da superfície esférica, ou seja,

$$A = 2\pi \cdot R \cdot 2R \implies \boxed{A = 4\pi R^2}$$

Observações:

Para a resolução de problemas, usaremos ainda algumas fórmulas:

Área da zona (ou calota)

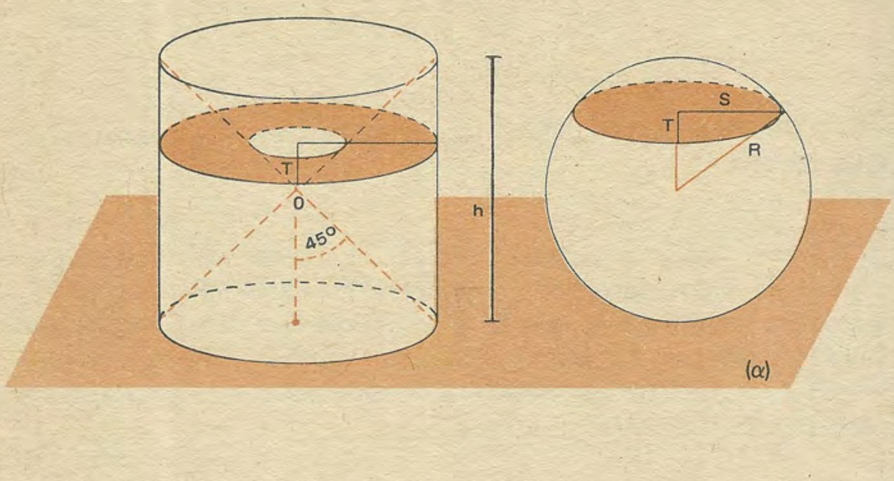
$A = 2\pi Rh$ onde **h** é altura da zona (ou calota) e **R** o raio da esfera (fig. 7).

Área do fuso

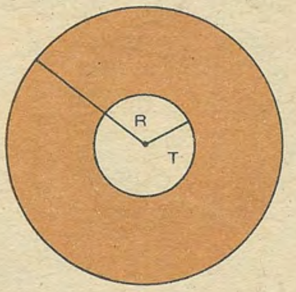
$$A = \frac{\pi R^2 n}{90^\circ}$$ onde **n** é o valor em graus do ângulo diedro (fig. 3).

d) O volume da esfera poderia ser obtido pelo processo anterior, porém preferimos aplicar aqui o Princípio de Cavalieri, adotado na unidade referente ao estudo da pirâmide.

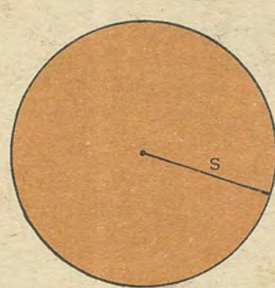
Seja então uma esfera de raio **R**, tangente a um plano (α). Apoiado sobre o mesmo plano (α), tomemos um cilindro reto de raio **R** e de altura 2R, no mesmo semi-espaço em que se situa a esfera.



A seção paralela a (α) feita nos dois sólidos tem as características abaixo.



A



A_1

As áreas obtidas pela seção no cilindro e na esfera são respectivamente

$A = \pi R^2 - \pi T^2 = \pi (R^2 - T^2)$ $\qquad$ $A_1 = \pi S^2 = \pi (R^2 - T^2)$

Como vemos, $A = A_1$

Vimos que o volume do cilindro equilátero pode ser dado por

$$V = 2 \pi R^3$$

O volume dos cones assinalados na figura é dado por

$$V = \frac{2 \pi R^3}{3}$$

Então o volume obtido pelas seções feitas por planos paralelos a (α) (Princípio de Cavalieri) no cilindro equilátero será dado pela diferença entre os volumes do cilindro e dos cones indicados, logo

$$V = 2 \pi R^3 - \frac{2 \pi R^3}{3} \Longrightarrow \boxed{V = \frac{4}{3} \pi R^3}$$

que é o volume da esfera.

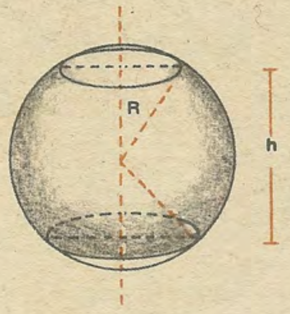
Observações:

1) Vejamos dois sólidos obtidos na esfera pela rotação em torno de um eixo.

1.1) **Setor esférico**

É o sólido obtido pela rotação de um setor circular em torno de um eixo (diâmetro).

$$V = \frac{2}{3} \pi R^2 h$$

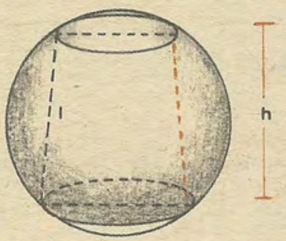


R, raio do setor (e da esfera)
h, altura do setor (projeção do arco sobre o eixo)

1.2) **Anel esférico**

É o sólido obtido pela rotação de um segmento circular que gira em torno de um eixo.

$$V = \frac{\pi h}{6} \ell^2$$



h, altura do anel (projeção do arco sobre o eixo)

ℓ, medida da corda (base do segmento circular)

2) Do segmento esférico citaremos apenas as fórmulas de seus **volumes**:

2.1) **Segmento esférico de uma base**

$$V = \frac{\pi h}{6} (3 r^2 + h^2)$$

r, raio da seção
h, altura

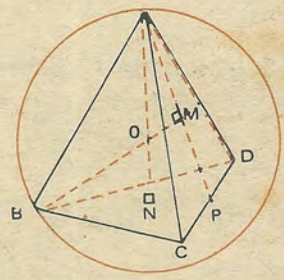
2.2) **Segmento esférico de duas bases**

$$\boxed{V = \frac{\pi h}{6} \left[3\,(r_1^2 + r_2^2) + h^2\right]}$$

r_1 e r_2, raios da base
h, altura (distância entre os planos)

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1 Dar a expressão do volume do tetraedro regular de aresta **a** inscrito numa esfera de raio R.



Seja (O) o centro da esfera do raio R circunscrita ao tetraedro regular de aresta **a**.

Tese: Volume do tetraedro regular em função do raio R da esfera circunscrita.

O plano APB relaciona as **alturas** das faces do tetraedro que, como sabemos, são triângulos equiláteros, logo

$$\overline{PB} = \overline{AP} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Traçando as alturas BM e AN do tetraedro correspondentes às faces consideradas, podemos também, por um teorema da geometria plana, concluir que os pontos M e N são os centros das faces e estão situados a 2/3 das alturas das faces consideradas, logo:

$$\overline{AM} = \overline{BN} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Os triângulos retângulos AMO e ANP possuem lados perpendiculares, logo são semelhantes, daí

$$\Delta\ AMO \sim \Delta\ ANP, \text{ logo } \quad \frac{\overline{AO}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AN}} \qquad (1)$$

$\overline{AO} = R$ (raio da esfera)

Cálculo de AN:

Seja o triângulo retângulo ANB

$$AN^2 = AB^2 - BN^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{2a^2}{3}$$

$$\therefore\ AN = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Substituindo na expressão (1), teremos:

$$\frac{R}{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\dfrac{a\sqrt{3}}{3}}{\dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} \qquad \therefore\ a = \frac{2R\sqrt{6}}{3}$$

O volume do tetraedro regular é, como sabemos,

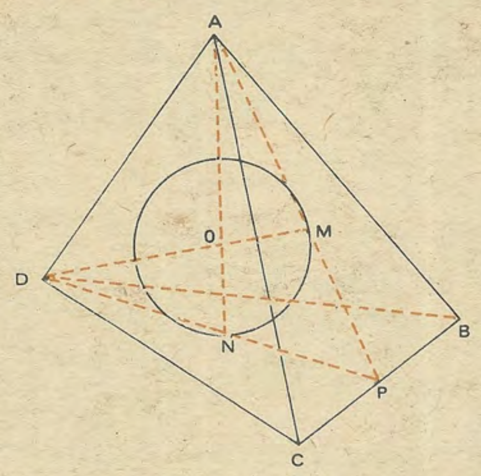
$$V = \frac{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

Para obtermos o volume em função do raio R da esfera, teremos:

$$V = \frac{\left(\dfrac{2R\sqrt{6}}{3}\right)^3 \cdot \sqrt{2}}{12} = \frac{8R^3 6\sqrt{6}\ \sqrt{2}}{27 \cdot 12} = \frac{8R^3\sqrt{3}}{27}$$

c.q.d.

2 Dar a expressão do volume do tetraedro regular de aresta a circunscrito a uma esfera de raio r.



Seja (O) o centro de uma esfera de raio r inscrita num tetraedro regular de aresta a.

Tese: Volume do tetraedro regular circunscrito a uma esfera de raio r.

$\overline{AN}$ e $\overline{DM}$ são alturas do tetraedro regular, que, como sabemos, em função da aresta a, é dado por:

$$\overline{AN} = \overline{DM} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Já calculamos $\overline{OD}$ = R (raio da esfera circunscrita) e sabemos da geometria plana que DN = 2/3·DP, também já calculado. Temos então:

$$\overline{OD} = \frac{a\sqrt{6}}{4} \qquad \overline{DN} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Daí no triângulo retângulo DNO, tiramos:

$$ON^2 = OD^2 - DN^2 = \left(\frac{a\sqrt{6}}{4}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{a^2}{24}$$

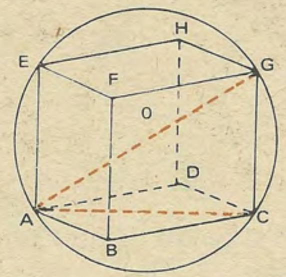
$$\therefore \ ON = r = \frac{a\sqrt{6}}{12} \quad \text{ou ainda} \quad a = 2r\sqrt{6}$$

Finalmente, substituindo na fórmula do volume do tetraedro regular a aresta em função do raio da esfera inscrita, teremos:

$$V = \frac{(2r\sqrt{6})^3\sqrt{2}}{12} = \frac{8r^3\,6\sqrt{6}\sqrt{2}}{12} = 8r^3\sqrt{3}$$

c.q.d.

3 Dar a expressão do volume do hexaedro regular inscrito numa esfera de raio R.



Dados: $AE = a$
$OG = R$

Pede-se: $V = ?$

Solução:

Como vemos

$AG = 2R$ diâmetro da esfera

Porém AG é também a diagonal do cubo, que, como sabemos, em função da aresta, é dada por:

$AG = a\sqrt{3}$

Então

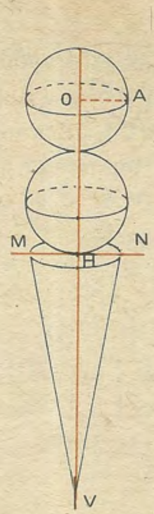
$$a\sqrt{3} = 2R \implies a = \frac{2R}{\sqrt{3}} = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$$

O volume do cubo em função do raio da esfera circunscrita é então:

$$V = a^3 = \left(\frac{2R\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{8R^3 \cdot 3\sqrt{3}}{3} = 8\sqrt{3}\,R^3$$

Resposta: $\boxed{8\sqrt{3}\,R^3}$

4 Um copinho de sorvete é um cone de 10cm de profundidade e 4cm de diâmetro no topo e tem aí colocadas duas colheradas esféricas de sorvete também de 4cm de diâmetro. Se o sorvete derreter no cone, transbordará?



Dados: VH = 10cm
MN = 4cm
OA = 2cm

Pede-se: $2V_E \geqslant V_C$?

Solução:

1. O volume do cone VMN é, como sabemos, dado por:

$$V = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 10}{3} = \frac{40\,\pi}{3}$$

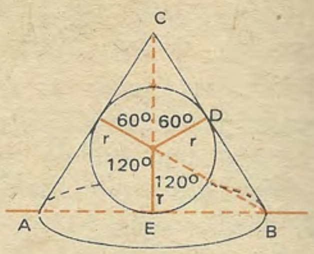
2. As esferas de sorvete, quando derretidas, ocuparão no interior do cone o volume

$$V = 2 \cdot \frac{4}{3}\,\pi\, R^3 = \frac{8}{3}\,\pi \cdot 2^3 = \frac{64\,\pi}{3}$$

Logo, o sorvete ocupará maior volume.

Resposta: **Sim**

5 Na figura, a esfera de raio r está inscrita no cone. A medida dos ângulos entre a altura e os raios nos pontos de tangência são indicados na figura. Ache o volume do cone em função de r.



Dados: $OD = OE = r$
$m(\angle COD) = 60°$
$m(\angle DOE) = 120°$

Pede-se: $V_C = ?$

Solução:

1. No $\triangle$ COD (retângulo em D), temos $\overline{VC} = 2\,\overline{OD} \Longrightarrow \overline{VC} = 2r$ (propriedade da geometria plana relativa aos triângulos retângulos com ângulos agudos de 30°, 60°)

2. Os triângulos OBE e OBD (retângulos) são congruentes ($\overline{OD} \cong \overline{OE} = r$; $\overline{OB}$ lado comum e $m(\angle D) = m(\angle E) = 90°$, então

$\triangle$ OBE possui ângulos agudos de 30° e 60° (concluído).

Logo

$\overline{OB} = 2r \quad \therefore \quad CE = 3r$, e ainda

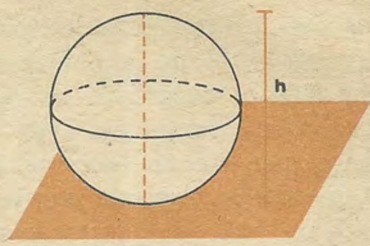
$BE^2 = OB^2 - OE^2 = 4r^2 - r^2 = 3r^2$

3. O volume do cone será então:

$$V = \frac{\pi \cdot BE^2 \cdot CH}{3} = \frac{\pi \cdot 3r^2 \cdot 3\,r}{3} = 3\pi r^3$$

Resposta: $\boxed{3\pi r^3}$

6 Um engenheiro municipal de 1,80m de altura subiu para inspecionar um novo tanque esférico para água. Quando havia subido a uma altura de 5,40m do ponto, onde jazia o tanque no chão, bate com sua cabeça no tanque. Sabendo que a cidade usa 30 000 litros de água por hora, ele imediatamente calculou quantas horas duraria o tanque cheio. Como ele conseguiu este resultado e como fez para consegui-lo?



Dados: $h = 1,8 + 5,4 = 7,2m$

vazão: 30 000 l/h

Pede-se: $T = ?$

Solução:

1. a capacidade do tanque pode ser calculada por:

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot (3,6)^3 = 194,492\ m^3$$

Sabemos que o litro é igual ao decímetro cúbico, logo

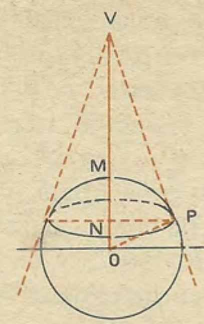
$$194,492m^3 = 194\ 492dm^3 = 194\ 492\ l$$

2. Sabendo a capacidade do tanque e o consumo por hora, então, o tanque seria consumido em:

$$194\ 492 : 30\ 000 = 6h\ 28min\ 59seg$$

Resposta: 6h 28min 59seg

7 Admitindo a Terra como esférica, determinar a altura e a área da calota esférica observada por um astronauta que sobrevoa a Terra no instante que ele se encontra na altitude de 9 vezes o raio terrestre. Adotar o raio da Terra como unidade de medida (Eng. MAUÁ – 1964).



Dados: $\overline{OP} = R$ (raio)
$\overline{VM} = 9R$

Pede-se: $h = ?$
$A = ?$

Solução:

1. No $\triangle$ VOP (retângulo em P) tiramos:

$$VP^2 = VO^2 - OP = (10\ R)^2 - R^2 = 100\ R^2 - R^2 = 99\ R^2$$

$$\therefore VP = R\sqrt{99}$$

Conseqüentemente, PN será obtido por $VP \cdot OP = PN \cdot VO$ ou, substituindo, teremos:

$$R\sqrt{99} \cdot R = PN \cdot 10\ R \Longrightarrow PN = \frac{R\sqrt{99}}{10}$$

(Relações métricas nos triângulos retângulos)

2. Vejamos a altura (h) da calota:

$$(R - h)^2 + \left(\frac{R\sqrt{99}}{10}\right)^2 = R^2$$

que nos dá uma equação do 2.° grau, em que tomamos logicamente

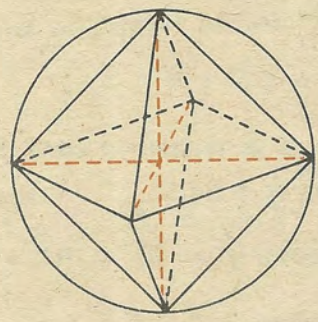
$$h = \frac{9}{10} R$$

3. A área da calota será finalmente

$$A = 2\pi \cdot R \cdot \frac{9}{10} R = \frac{9}{5} \pi R^2$$

Resposta: $\boxed{\frac{9}{10} R \text{ e } \frac{9}{5} \pi R^2}$

8 Calcule a área do octaedro regular inscrito numa esfera cuja seção meridiana tem $16\ \pi\ m^2$ de área (ENE – 1958).



Dados: $R^2 = 16\pi$

Pede-se: $A = ?$

Solução:

1. Se $2\pi R = 16\pi \implies R = 4$ (dado)

2. No △ retângulo isósceles assinalado, temos:

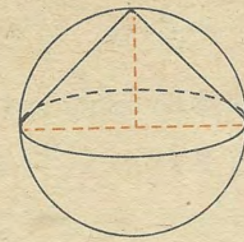
$$2 \cdot R^2 = a^2 \implies 32 = a^2$$

3. A área do octaedro regular é dada por:

$$A = 8 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 8 \cdot \frac{32\sqrt{3}}{4} = 64\sqrt{3}\ m^2$$

Resposta: $\boxed{64\sqrt{3}\ m^2}$

9 Calcule a razão entre a área de um hemisfério e a área lateral do cone de revolução que tenha por base o círculo máximo do hemisfério e por vértice o pólo deste círculo (Eng., UEG – 1965).



Dados: R

Pede-se: $\dfrac{A_H}{A_C}$

Solução:

1. A área do hemisfério será:

$$A_H = 2\pi R^2$$

2. A área lateral do cone de revolução é, como vimos,

$$A_L = \pi Rg$$

porém $g^2 = R^2 + R^2 = 2R^2 \Longrightarrow g = R\sqrt{2}.$

Então

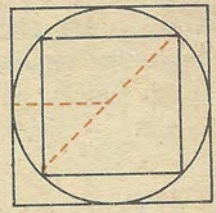
$$A_L = \pi \cdot R \cdot R\sqrt{2} = \pi R^2 \sqrt{2}$$

3. A razão será:

$$\frac{A_H}{A_L} = \frac{2\pi R^2}{\pi R^2 \sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

Resposta: $\boxed{\sqrt{2}}$

10 Calcule o volume do cilindro equilátero circunscrito a uma esfera sabendo que o cilindro equilátero inscrito nessa esfera tem $100m^3$ de volume (ENE – 1961).



Dados: $V_I = 100m^3$

Pede-se: $V_C = ?$

Solução:

1. A seção meridiana do cilindro equilátero inscrito na esfera é um quadrado cuja diagonal é o diâmetro do cilindro circunscrito, daí

$$V = \pi r^2 h$$

$$h = 2r$$

e então $(2r)^2 + (2r)^2 = (2R)^2$

Então: $8r^2 = 4R^2 \Longrightarrow r = \sqrt{\frac{4R^2}{8}} \Longrightarrow h = 2\sqrt{\frac{4R^2}{8}}$

Logo:

$$100 = \pi \cdot \frac{4R^2}{8} \cdot 2\sqrt{\frac{4R^2}{8}} \Longrightarrow R^3 = \frac{100\sqrt{2}}{\pi}$$

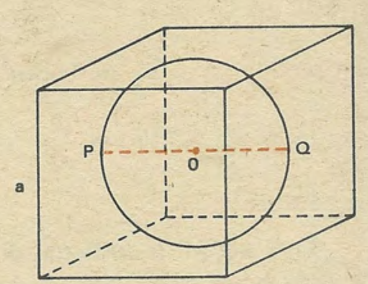
2. O volume do cilindro equilátero circunscrito será então:

$$V = 2\pi R^3 = 2\pi \cdot \frac{100\sqrt{2}}{\pi} = 200\sqrt{2}$$

Resposta: $\boxed{200\sqrt{2}\,m^3}$

PROBLEMAS PROPOSTOS

11 Dar a expressão do volume do hexaedro regular (cubo) de aresta a em função do raio da esfera inscrita.



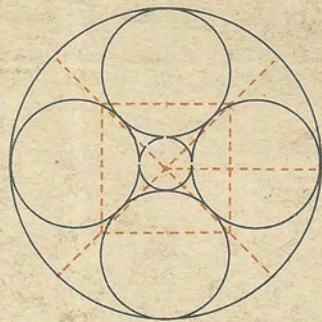
Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

12 Seis esferas de mesmo raio 4cm têm centros nos centros das faces de um cubo e são tangentes exteriormente cinco a cinco. Calcule o raio da esfera tangente exteriormente a essas seis esferas (ENE – 1963).



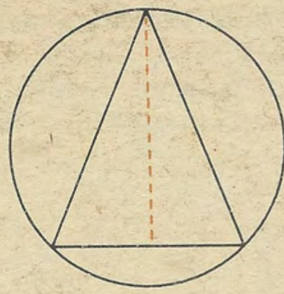
Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

13 Calcule o volume da esfera circunscrita á um cone de revolução de raio 6cm e altura 12cm (Eng., UEG – 1964).



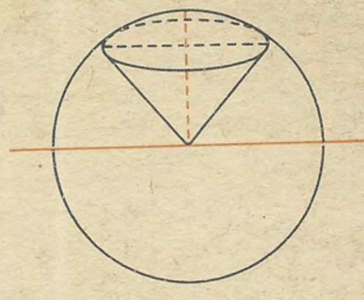
Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

14 Determinar o raio da esfera na qual seja possível destacar uma calota de altura 2m e cuja área seja igual ao triplo da superfície lateral do cone, tendo para vértice o centro da esfera e por base a base da calota (ENE – 1963).



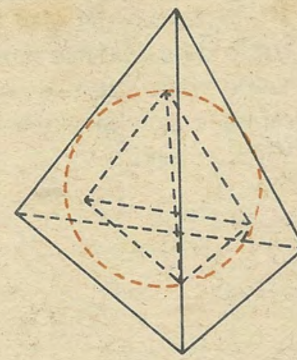
Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

15 Num tetraedro regular de aresta a inscreve-se uma esfera. Nessa esfera inscreve-se um outro tetraedro regular. Determinar a relação entre os volumes dos dois tetraedros (ENE – 1948).



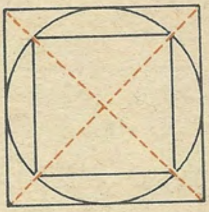
Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

16 Calcule a razão do volume do cilindro equilátero inscrito em uma esfera de raio R para o volume do cilindro equilátero circunscrito à mesma esfera (ENE — 1958).



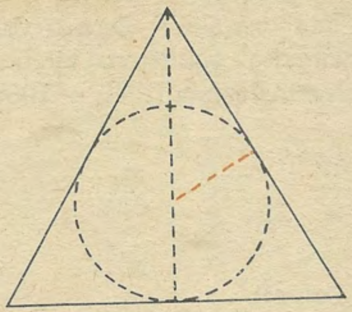
Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

17 Deduzir a fórmula do volume de um cone equilátero circunscrito a uma esfera, em função do raio da esfera (ITA — 1961).



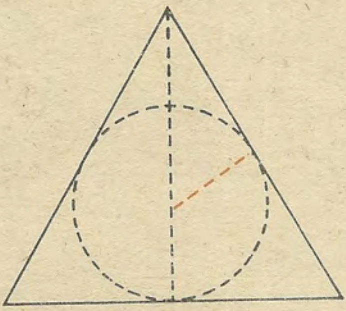
Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

18 Sabendo-se que o volume de um cone equilátero circunscrito a uma esfera é $3\pi R^3$ (onde R é o raio da esfera), procurar uma relação entre esse volume, o da esfera e o do cilindro (reto) circunscrito à esfera (ITA — 1961).



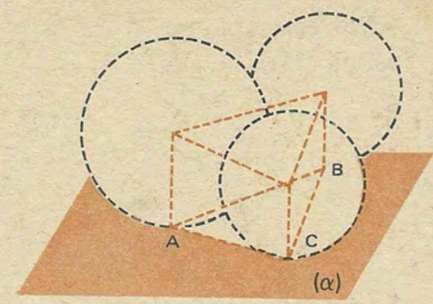
Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

19 Três esferas de raios 1, 1 e 4 são tangentes exteriormente duas a duas e tangentes ao plano (α) nos pontos A, B e C, respectivamente. Determinar os lados do triângulo ABC (CESCEM – 1971).



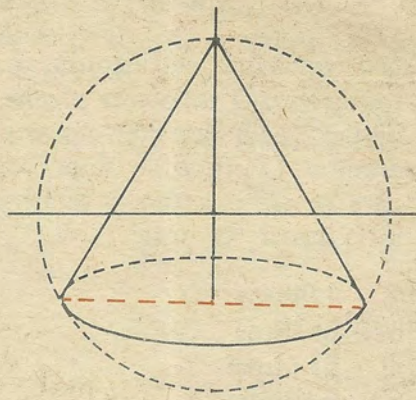
Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

20 Calcular o volume da esfera circunscrita ao cone equilátero cujo raio da base é igual a $2\sqrt{3}$ cm (Arq., USP — 1969).



Dados:

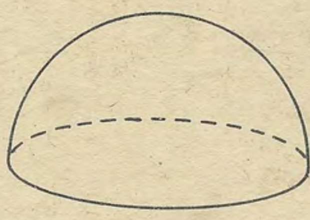
Pede-se:

Solução:

Resposta:

VERIFIQUE O QUE APRENDEU RESOLVENDO O TESTE

1 Um recipiente tem a forma de um hemisfério. O recipiente precisa ser pintado. Se a base do recipiente necessitou 17 litros de tinta, então, para pintar o exterior, será necessário gastar de tinta:



a) 17 litros
b) 34 litros
c) 51 litros
d) 8,5 litros
e) NRA

2 Uma lata cilíndrica de raio 12 e altura 20 está cheia de água. Se uma esfera de raio 10 é jogada dentro da lata e imediatamente for removida, qual o volume de água que permanecerá na lata?

a) o volume não se altera
b) o volume fica diminuído de $\dfrac{400\pi}{3}$
c) o volume fica diminuído de $\dfrac{4000\pi}{3}$
d) a lata fica vazia
e) as respostas b) e c) são corretas

3 O valor da razão entre o volume de uma esfera de raio R e o de um cubo nela inscrito é dado por: (EPUC – 1953)

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi$
b) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi$
c) $\sqrt{3}\,\pi$
d) $\sqrt{2}\,\pi$
e) NRA

4 Um cone de vértice no centro de uma esfera de raio R intercepta a superfície esférica segundo uma região de área S. A interseção do cone com a esfera tem volume igual a: (EPUSP — 1967)

a) $\frac{1}{2} \pi SR$

b) $\frac{1}{3} \pi SR$

c) $\frac{1}{2} SR$

d) $\frac{1}{3} SR$

e) NRA

5 Uma esfera de raio 1cm repousa sobre a abertura em madeira em forma de um triângulo equilátero, de lado 2cm; a altura da calota acima do plano de madeira é: (E.F.C.L.USP — 1967)

a) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ cm

b) $(1 + \sqrt{\frac{2}{3}})$ cm

c) 1,5cm

d) 1cm

e) nenhuma das afirmações é verdadeira

6 É dada uma semi-esfera de raio r, e um plano paralelo ao do círculo base, que corta a semi-esfera em duas partes de igual área. Qual a distância deste plano ao da base da semi-esfera? (E. Eng. São Carlos, USP – 1968)

a) $\frac{r}{\sqrt{2}}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\, r$

c) $\frac{r}{2}$

d) $\frac{2}{3}\, r$

e) nenhuma das precedentes respostas é exata

7 O diâmetro de uma esfera mede 4m; uma corda paralela a esse diâmetro mede 2m. A área da superfície que se obtém girando a corda ao redor do diâmetro vale:

a) $\frac{\pi}{2}\sqrt{3}$

b) $\pi\sqrt{3}$

c) $2\pi\sqrt{3}$

d) $4\pi\sqrt{3}$

e) $5\pi\sqrt{3}$

8 Uma esfera é colocada no interior de um vaso cônico com $\sqrt{55}$ cm de geratriz e $\sqrt{30}$ cm de altura. Sabendo-se que os pontos de tangência estão a 3cm do vértice, o raio da esfera vale: (ITA — 1968)

a) $2\sqrt{30}$ cm

b) $\dfrac{\sqrt{35}}{2}$ cm

c) $\dfrac{\sqrt{30}}{2}$ cm

d) 3cm

e) NRA

9 A razão entre a área de uma superfície esférica e a do cubo circunscrito é: (Eng., MACK.— 1969)

a) $\dfrac{\pi}{6}$

b) $\dfrac{\pi}{3}$

c) $\dfrac{\pi}{4}$

d) $\dfrac{\pi}{8}$

e) NRA

10 Seja S a área total de um cilindro equilátero circunscrito a uma esfera de área T e seja U a área total do cone equilátero inscrito na mesma esfera. Entre S, T, U existe uma das seguintes relações: (CICE – 1968)

a) $S + U = T$

b) $T^2 = U \cdot S$

c) $S^2 = U \cdot T$

d) $U^2 = S \cdot T$

e) $S = \frac{1}{2} (U^2 + T^2)$

RESPOSTAS DA UNIDADE 7

PROBLEMAS PROPOSTOS

11 $8 R^3$

12 $4 (\sqrt{2} \pm 1)$

13 $\frac{1125}{2} \pi \text{ cm}^3$

14 $\frac{13}{9}$ m

15 $\frac{1}{27}$

16 $\frac{\sqrt{2}}{4}$

17 $3 \pi R^3$

18 $\frac{9}{4}$ e $\frac{3}{2}$

19 4, 4, 2

20 $\frac{256}{3} \pi \text{ cm}^3$

RESPOSTAS DO TESTE

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a									■	
b	■		■							
c		■				■		■		■
d				■			■			
e					■					

bibliografia

1 — CASTRUCCI, Benedito. *Lições de geometria elementar, para concursos de habilitação às escolas superiores.* São Paulo, Nobel, 1962. 256 p., il.

2 — GUELLI, Cid Augusto et alii. *Geometria métrica.* São Paulo, Moderna [1971] 266 p., il. Inclui bibliografia.

3 — MOISE, Edwin Evariste & DOWNS JR., Floyd L. *Geometria moderna.* [São Paulo] Blücher [1971] 2 v., il.

4 — ROCHA, Luiz Mauro. *Geometria no espaço.* 4. ed. São Paulo, Nobel, 1964. 2 v., il.

5 — SERRÃO, Alberto Nunes. *Exercícios e problemas de geometria no espaço, para o curso científico e exames vestibulares às escolas superiores* [2. ed.] Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico, 1962. 203 p., il.

6 — SCHOOL MATHEMATICS STUDY GROUP. *Matemática* [Mathematics for high school] *curso colegial ...* [Trad. por Lafayette de Moraes, Lydia Condé Lamparelli e colab. ...] Ed. preliminar. Brasília, Ed. da Univ. de Brasília, São Paulo [Rev. dos Tribunais] 1964. 254 p., il.

Produção editorial

Antonio José de Britto
Flávia Cavalcanti de Arruda
Geni Rodrigues da Costa Hirata
Ivens Nideck Tiengo
Maria Regina Fernandes de Souza
Norma de Magalhães Carvalho Vasconcellos
Ruth Soares de Mendonça
Sérgio Bellinello Soares

Capa e Diagramação: Aimojara Xavier
Ilustrações: Aloisio Vieira Vilanova

Esta obra foi impressa pela
AGGS Indústrias Gráficas S.A.
Rua Luís Câmara, 535 — Olaria — Rio de Janeiro — RJ
para a
FENAME — Fundação Nacional de Material Escolar
Rua Miguel Ângelo, 96 — Maria da Graça — Rio de Janeiro — RJ
República Federativa do Brasil.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CULTURA
FENAME - FUNDAÇÃO NACIONAL DE MATERIAL ESCOLAR

Preço único em todo o Brasil: Cr$ 22,00

2. A área total do cone é igual à área lateral do cilindro, logo:

$$\pi\, rg + \pi\, r^2 = 2\,\pi\, Rh \implies 2Rh = r\,(g + r)$$

porém $g = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{h^2 + 3r^2}$, daí

$$2Rh = R\sqrt{3}\;\left(\sqrt{h^2 + 3R^2} + R\sqrt{3}\right) \implies 2h = \sqrt{3h^2 + 9R^2} + 3R$$

ou seja, $2h - 3R = \sqrt{3h^2 + 9R^2}$

Elevando ambos os membros ao quadrado, teremos:

$$4h^2 - 12Rh + 9R^2 = 3h^2 + 9R^2$$

Simplificando virá:

$$h^2 - 12Rh = 0$$

Resolvendo esta equação, teremos:

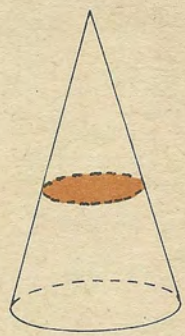
$h\,(h - 12R) = 0$ que nos dá $h = 12R$

3. O volume em função de R será: $V = \pi\, R^2\, h = \pi\, R^2 \cdot 12R$
e finalmente:

Resposta: $\boxed{V = 12\pi\, R^3}$

PROBLEMAS PROPOSTOS

16 Um cone tem 5m de altura. A que distância do vértice se deve cortá-lo por um plano paralelo à base para obter uma seção cuja área seja 1/3 da área da base.



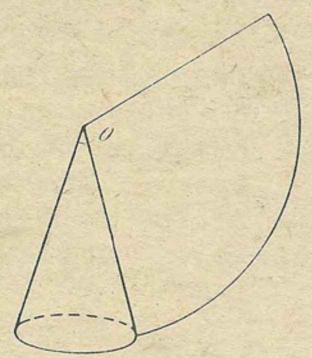
Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

17 Planificando-se a superfície lateral de um cone, obtém-se um setor circular de 135° e 6cm de raio. Calcular a área lateral.



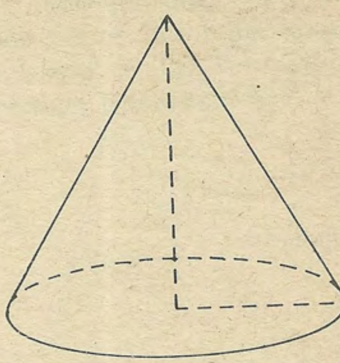
Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

18 Calcular a área lateral de um cone equilátero, cuja geratriz tem 5,4cm.



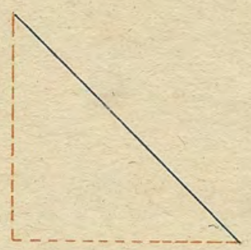
Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

19 Um triângulo retângulo isósceles a girar em torno de um dos catetos gera um sólido cujo volume é $\pi/3\ m^3$. Calcular a hipotenusa.



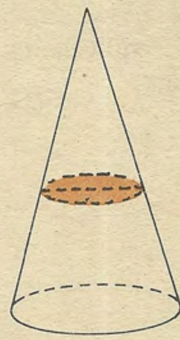
Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

20 Sobre a geratriz de um cone, a qual tem 1m, marca-se um ponto a 65cm do vértice e por ele se faz uma seção paralela à base. Calcular a razão: a) do cone assim destacado para o primeiro; b) dos dois volumes determinados pela seção.



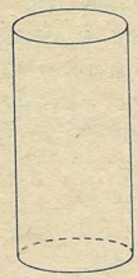
Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

21 Calcular a área lateral de um cilindro de revolução de 4cm de raio da base, sabendo-se que sua base é equivalente à sua seção meridiana.



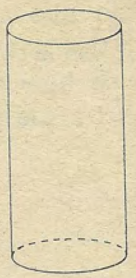
Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

22 A geratriz de um cilindro de revolução mede 20cm. Calcular o seu raio da base, sabendo-se que, aumentando-se esse raio de 5cm, a área lateral do novo cilindro é igual à área total do primeiro.



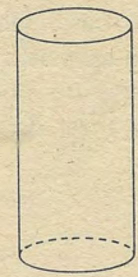
Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

23 Determinar a relação a que devem satisfazer a geratriz g e o raio da base r de um cilindro de revolução de modo que a área da base do cilindro seja igual à área lateral mais a área da base de um cilindro de raio igual à sua geratriz.



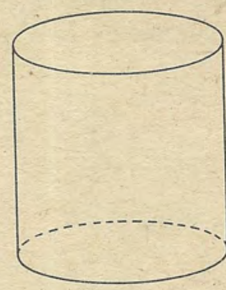
Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

24 Sendo S a área total de um cilindro equilátero, determinar o volume desse cilindro em função de S.



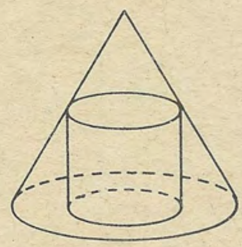
Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

25 Um cone equilátero é circunscrito a um cilindro, cuja altura é 2/3 vezes o raio r da base. Calcular a razão da área lateral do cilindro para a área lateral do cone.



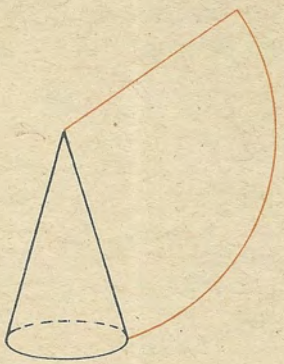
Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

26 A altura e o raio de um cone têm respectivamente 6cm e 2cm. Calcular o ângulo do setor resultante da planificação do cone.



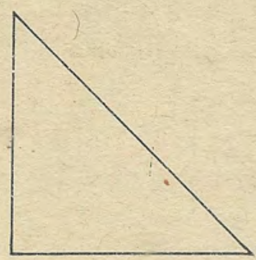
Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

27 Qual o volume do cone circular reto em que a altura é igual ao raio da base? (ITA – 1964)



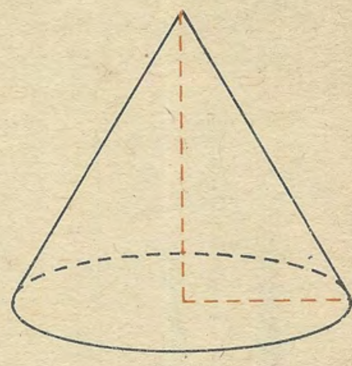
Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta.

28 Calcule a área total e o volume de um cone equilátero sabendo que a área lateral é igual a $24\pi\ cm^2$ (Arq. USP — 1968).



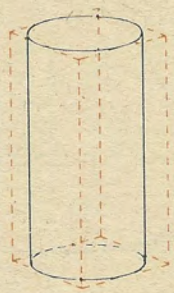
Dados:

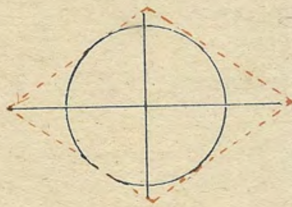
Pede-se:

Solução:

Resposta:

29 Calcule o volume do cilindro inscrito num prisma reto, de altura 12,5cm, cuja base é um losango de diagonais 8cm e 6cm (Arq. USP – 1968).





Dados:

Pede-se:

Solução:

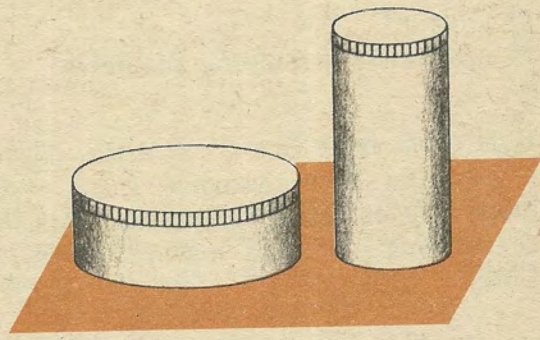
Resposta:

30 Duas latas de geléia de morango, de mesma marca, estão em uma prateleira de um supermercado. A lata mais alta possui o dobro da altura da outra, mas seu diâmetro é metade do diâmetro da lata mais baixa. A lata mais alta custa Cr$ 2,30 e a outra Cr$ 4,30. Qual lata proporciona mais economia?

Dados:

Pede-se:

Solução:



Resposta:

VERIFIQUE O QUE APRENDEU, RESOLVENDO O TESTE

1 Um cilindro tem altura igual a 2m. A área de sua base é equivalente à sua área lateral. Seu volume mede:

a) $23\pi\ m^3$
b) $32\pi\ m^3$
c) $\frac{32}{3}\pi\ m^3$
d) $16\pi\ m^3$
e) nenhuma das respostas anteriores

2 Dois cones retos C e C′, que têm ângulos do vértice iguais a 120° e geratrizes respectivamente iguais a 4 e 2m, interceptam-se de modo que os vértices coincidam e uma geratriz de C′ é a altura de C. Determine a corda máxima na base de C′ contida no cone C (IME – 1971).

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}\ m^2$
b) $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\ m^2$
c) $12\pi(\sqrt{3}+3)m^2$
d) $\frac{\pi}{6}\ m^2$
e) nenhuma das respostas anteriores

3 Um triângulo retângulo ABC ($\angle A = 90°$) gira em torno de sua hipotenusa, gerando um sólido de volume:

a) πa^2
b) $\frac{\pi a^2}{3}$
c) $\frac{\pi b^2 c^2}{3a}$
d) $\frac{\pi a^2}{3bc}$
e) nenhuma das respostas anteriores

4 A seção meridiana de um cone equilátero tem área $25\sqrt{3}$cm. Seu volume mede:

a) $\frac{125\pi\sqrt{2}}{3}$ cm^3

b) $125\,\pi\sqrt{3}$ cm^3

c) $250\,\pi\sqrt{3}$ cm^3

d) $25\,\pi\sqrt{3}$ cm^3

e) nenhuma das respostas anteriores

5 Um retângulo ABCD de lados $AB = 3\sqrt{2}$m e $BC = \sqrt{6}$m gira em torno de um eixo, coplanar e externo ao retângulo, que passa por A e faz um ângulo de 30° com o lado AB. Calcule a superfície total do sólido gerado pela rotação do retângulo (IME – 1971).

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}\,a$

b) $(\sqrt{2} - 1)\,a$

c) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} - 1)\,a$

d) $(1 - \sqrt{3})\,a$

e) $\frac{(\sqrt{3} - 1)}{2}\,a$

6 Na fórmula $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$, se **r** for reduzido à metade e **h** ao dobro, então V: (U. MACK – 1969)

a) se reduz à metade
b) permanece o mesmo
c) se reduz à quarta parte
d) dobra o valor
e) quadruplica de valor

7 Um triângulo retângulo possui catetos de comprimentos **a** e **b**. Seja V_a o volume do cone obtido pela rotação do triângulo em torno do cateto de comprimento **a**; analogamente, seja V_b o volume do cone gerado pela rotação do triângulo em torno do outro cateto. O quociente $\frac{V_a}{V_b}$ vale:

a) $\frac{ab}{a^2 + b^2}$

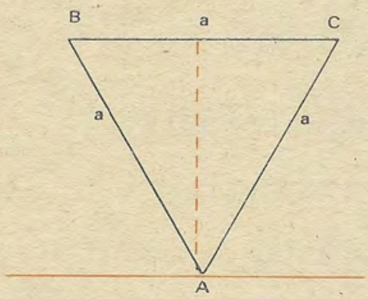
b) $\frac{a}{a + b}$

c) $\frac{b}{a}$

d) $\frac{a + 1}{b + 1}$

e) $\frac{a^2 + b^2}{\pi a \cdot b}$

8 A medida dos lados de um triângulo equilátero ABC é a. O triângulo ABC gira em torno de uma reta r do plano do triângulo, paralela ao lado BC e passando pelo vértice A. O volume gerado por esse triângulo mede: (PUC – 1971)



a) $\frac{\pi a^3}{3}$

b) $\frac{\pi a^3}{2}$

c) πa^3

d) $\frac{3 \pi a^3}{2}$

e) $\frac{\pi a^3}{5}$

9 Na base de um cone, cujo volume é igual a $144\pi\ m^3$, está inscrito um hexágono regular de área $54\sqrt{3}\ m^2$. Calcule a área total desse cone (ENE — 1964).

a) $(\sqrt{5}+1)\pi\ m^3$
b) $36\sqrt{5}\pi\ m^3$
c) $36\pi(\sqrt{5}+1)\ m^3$
d) $36\pi(\sqrt{5}-1)\ m^3$
e) $36\pi(1-\sqrt{5})\ m^3$

10 Dois cones de mesma base têm alturas iguais a 18cm e 6cm, respectivamente. A razão de seus volumes é: (EE-São Carlos — 1967)

a) 4
b) 2
c) 6
d) 9
e) 3

RESPOSTAS DA UNIDADE 5

PROBLEMAS PROPOSTOS

16 2,88m

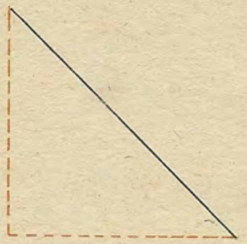
17 $52{,}28\ cm^2$

18 $45{,}78\ cm^2$

19 $\sqrt{2}\ m$

20 a) $\frac{2\,197}{8\,000}$ b) $\frac{2\,197}{5\,803}$

19 Um triângulo retângulo isósceles a girar em torno de um dos catetos gera um sólido cujo volume é $\pi/3\ m^3$. Calcular a hipotenusa.



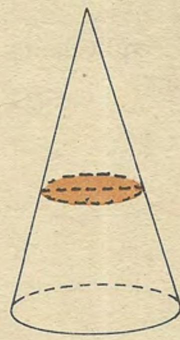
Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

20 Sobre a geratriz de um cone, a qual tem 1m, marca-se um ponto a 65cm do vértice e por ele se faz uma seção paralela à base. Calcular a razão: a) do cone assim destacado para o primeiro; b) dos dois volumes determinados pela seção.



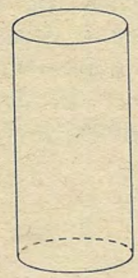
Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

21 Calcular a área lateral de um cilindro de revolução de 4cm de raio da base, sabendo-se que sua base é equivalente à sua seção meridiana.



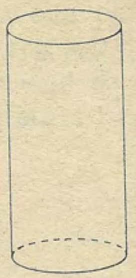
Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

22 A geratriz de um cilindro de revolução mede 20cm. Calcular o seu raio da base, sabendo-se que, aumentando-se esse raio de 5cm, a área lateral do novo cilindro é igual à área total do primeiro.



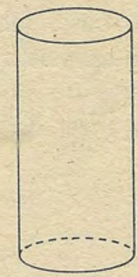
Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

23 Determinar a relação a que devem satisfazer a geratriz g e o raio da base r de um cilindro de revolução de modo que a área da base do cilindro seja igual à área lateral mais a área da base de um cilindro de raio igual à sua geratriz.



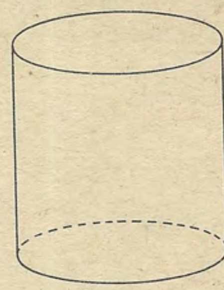
Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

24 Sendo S a área total de um cilindro equilátero, determinar o volume desse cilindro em função de S.



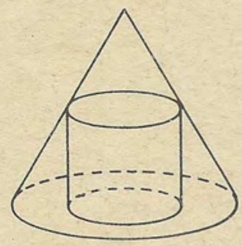
Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

25 Um cone equilátero é circunscrito a um cilindro, cuja altura é 2/3 vezes o raio r da base. Calcular a razão da área lateral do cilindro para a área lateral do cone.



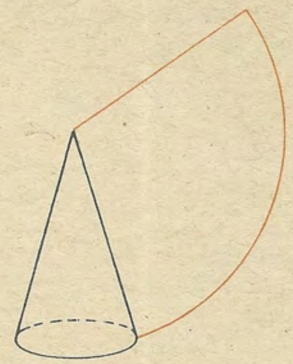
Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

26 A altura e o raio de um cone têm respectivamente 6cm e 2cm. Calcular o ângulo do setor resultante da planificação do cone.



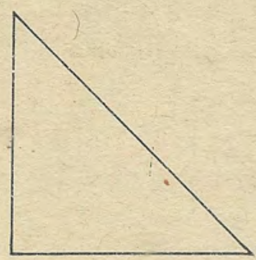
Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

27 Qual o volume do cone circular reto em que a altura é igual ao raio da base? (ITA – 1964)



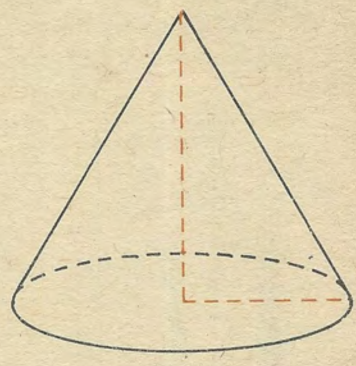
Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta.

28 Calcule a área total e o volume de um cone equilátero sabendo que a área lateral é igual a $24\pi\ cm^2$ (Arq. USP — 1968).



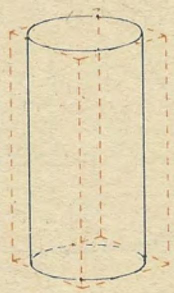
Dados:

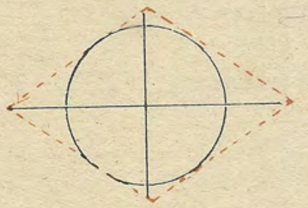
Pede-se:

Solução:

Resposta:

29 Calcule o volume do cilindro inscrito num prisma reto, de altura 12,5cm, cuja base é um losango de diagonais 8cm e 6cm (Arq. USP – 1968).





Dados:

Pede-se:

Solução:

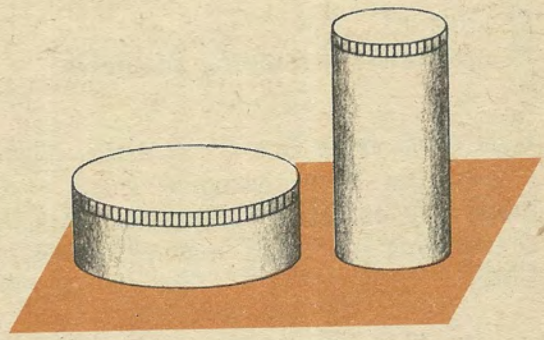
Resposta:

30 Duas latas de geléia de morango, de mesma marca, estão em uma prateleira de um supermercado. A lata mais alta possui o dobro da altura da outra, mas seu diâmetro é metade do diâmetro da lata mais baixa. A lata mais alta custa Cr$ 2,30 e a outra Cr$ 4,30. Qual lata proporciona mais economia?

Dados:

Pede-se:

Solução:



Resposta:

VERIFIQUE O QUE APRENDEU, RESOLVENDO O TESTE

1. Um cilindro tem altura igual a 2m. A área de sua base é equivalente à sua área lateral. Seu volume mede:

a) $23\pi\ m^3$
b) $32\pi\ m^3$
c) $\frac{32}{3}\pi\ m^3$
d) $16\pi\ m^3$
e) nenhuma das respostas anteriores

2. Dois cones retos C e C′, que têm ângulos do vértice iguais a 120° e geratrizes respectivamente iguais a 4 e 2m, interceptam-se de modo que os vértices coincidam e uma geratriz de C′ é a altura de C. Determine a corda máxima na base de C′ contida no cone C (IME – 1971).

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}\ m^2$
b) $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\ m^2$
c) $12\pi(\sqrt{3}+3)m^2$
d) $\frac{\pi}{6}\ m^2$
e) nenhuma das respostas anteriores

3. Um triângulo retângulo ABC ($\angle A = 90°$) gira em torno de sua hipotenusa, gerando um sólido de volume:

a) πa^2
b) $\frac{\pi a^2}{3}$
c) $\frac{\pi b^2 c^2}{3a}$
d) $\frac{\pi a^2}{3bc}$
e) nenhuma das respostas anteriores

4 A seção meridiana de um cone equilátero tem área $25\sqrt{3}$cm. Seu volume mede:

a) $\dfrac{125\pi\sqrt{2}}{3}$ cm^3

b) $125\pi\sqrt{3}$ cm^3

c) $250\pi\sqrt{3}$ cm^3

d) $25\pi\sqrt{3}$ cm^3

e) nenhuma das respostas anteriores

5 Um retângulo ABCD de lados $AB = 3\sqrt{2}$m e $BC = \sqrt{6}$m gira em torno de um eixo, coplanar e externo ao retângulo, que passa por A e faz um ângulo de 30° com o lado AB. Calcule a superfície total do sólido gerado pela rotação do retângulo (IME – 1971).

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ a

b) $(\sqrt{2}-1)$ a

c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-1)$ a

d) $(1-\sqrt{3})$ a

e) $\dfrac{(\sqrt{3}-1)}{2}$ a

6 Na fórmula $V = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$, se **r** for reduzido à metade e **h** ao dobro, então V: (U. MACK – 1969)

a) se reduz à metade
b) permanece o mesmo
c) se reduz à quarta parte
d) dobra o valor
e) quadruplica de valor

7 Um triângulo retângulo possui catetos de comprimentos **a** e **b**. Seja V_a o volume do cone obtido pela rotação do triângulo em torno do cateto de comprimento **a**; analogamente, seja V_b o volume do cone gerado pela rotação do triângulo em torno do outro cateto. O quociente $\dfrac{V_a}{V_b}$ vale:

a) $\dfrac{ab}{a^2 + b^2}$

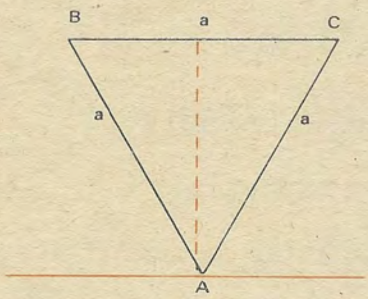
b) $\dfrac{a}{a + b}$

c) $\dfrac{b}{a}$

d) $\dfrac{a + 1}{b + 1}$

e) $\dfrac{a^2 + b^2}{\pi\, a \cdot b}$

8 A medida dos lados de um triângulo equilátero ABC é a. O triângulo ABC gira em torno de uma reta r do plano do triângulo, paralela ao lado BC e passando pelo vértice A. O volume gerado por esse triângulo mede: (PUC — 1971)



a) $\dfrac{\pi a^3}{3}$

b) $\dfrac{\pi a^3}{2}$

c) πa^3

d) $\dfrac{3 \pi a^3}{2}$

e) $\dfrac{\pi a^3}{5}$

9 Na base de um cone, cujo volume é igual a $144\,\pi\ m^3$, está inscrito um hexágono regular de área $54\sqrt{3}\ m^2$. Calcule a área total desse cone (ENE — 1964).

a) $(\sqrt{5}+1)\,\pi\ m^3$
b) $36\sqrt{5}\,\pi\ m^3$
c) $36\,\pi\,(\sqrt{5}+1)\ m^3$
d) $36\,\pi\,(\sqrt{5}-1)\ m^3$
e) $36\,\pi\,(1-\sqrt{5})\ m^3$

10 Dois cones de mesma base têm alturas iguais a 18cm e 6cm, respectivamente. A razão de seus volumes é: (EE-São Carlos — 1967)

a) 4
b) 2
c) 6
d) 9
e) 3

RESPOSTAS DA UNIDADE 5

PROBLEMAS PROPOSTOS

16 2,88m

17 $52{,}28\ cm^2$

18 $45{,}78\ cm^2$

19 $\sqrt{2}\ m$

20 a) $\dfrac{2\,197}{8\,000}$ b) $\dfrac{2\,197}{5\,803}$

21 $157{,}75 cm^2$

22 10cm

23 $g = r(\sqrt{2} - 1)$

24 $\frac{S}{3} \quad \sqrt{S/6\pi}$

25 $\frac{2\sqrt{3}}{9}$

26 114º

27 $\frac{1}{3} \pi r^3$

28 $A_T = 36\pi \, cm^2 \qquad V = 24\pi \, cm^3$

29 $72\pi \, cm^3$

30 A lata mais baixa

RESPOSTAS DO TESTE

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a						■				
b	■	■						■		
c			■		■		■		■	
d										
e				■						■

unidade 6

seções planas nos poliedros

O QUE VOCÊ PRECISA SABER

a) A interseção de um plano com um poliedro é um polígono que recebe o nome de polígono de seção.

b) Seccionado o sólido pelo plano, obtemos um novo sólido, chamado sólido truncado ou apenas tronco.

c) Estudados o prisma e o cilindro, a pirâmide e o cone, vejamos então os troncos que se podem obter desses sólidos.

1) Tronco de Prisma

1.1) Entendemos por tronco de prisma a um qualquer dos dois sólidos determinados por uma seção plana não paralela às bases do poliedro.

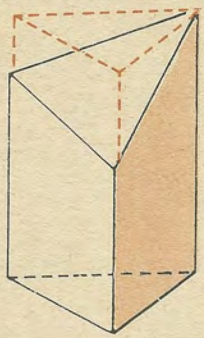
1.2) O volume de um tronco de prisma triangular é equivalente à soma de três pirâmides, cuja base comum é uma das bases do tronco e cujos vértices são os vértices da outra base.

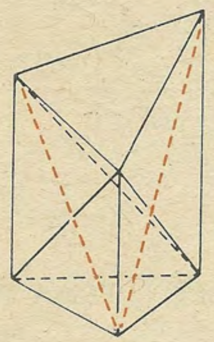
1.3) A expressão do **volume do tronco de prisma triangular é**

$$V = A_B \frac{a + b + c}{3}$$

isto é, o volume é o produto da área de uma das bases pela média aritmética das arestas que são perpendiculares a essa base.

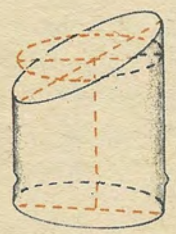
1.4) O **volume de um tronco de prisma qualquer** é obtido decompondo-se o tronco em troncos de prismas triangulares.

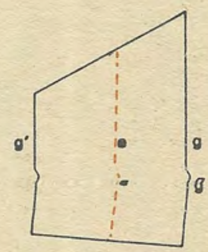




2) Tronco de Cilindro

2.1) Um tronco de cilindro é como vemos na figura, equivalente a um cilindro cujas bases são iguais respectivamente à base circular do tronco e cuja altura é o eixo do tronco.





2.2) O volume do tronco será então dado por:

$V = \pi r^2 e$ (onde $h = e$ — eixo do cilindro)

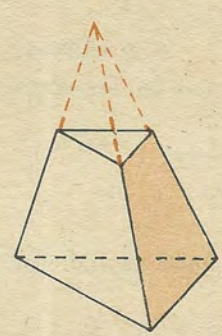
2.3) A área lateral será $2\pi r e$, porém, $e = \frac{g + g'}{2}$ (base média do trapézio visto na figura).

Então,

$$A_L = \pi r (g + g')$$

3.1) Entendemos por tronco de pirâmide ao sólido obtido de uma pirâmide por uma seção plana que corte todas as suas arestas laterais.

Só estudaremos os troncos de pirâmide de bases paralelas. Se a base for regular, então o tronco é dito regular, obtido logicamente de uma pirâmide regular.

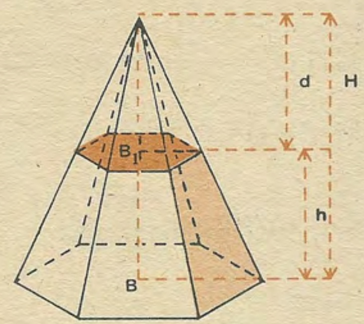


3.2) O **volume** do tronco de pirâmide pode ser obtido pela diferença entre o volume da pirâmide primitiva e o da pirâmide destacada, ou seja:

$$V = \frac{h}{3}\,(B + B_1 + \sqrt{BB_1})$$

3.3) **Área lateral:**

Soma das áreas de trapézios isósceles cujas alturas são os apótemas do tronco, ou seja:

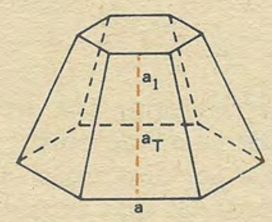


$$A_L = h\left(\frac{a + a_1}{2}\right) a_t$$

porém

$$\frac{na + na_1}{2} = \frac{2p + 2p_1}{2} = p + p_1$$

Substituindo, teremos:



$$A_L = (p + p_1)\, a_t$$

onde a_t é o apótema do tronco e p e p_1 os semiperímetros das bases.

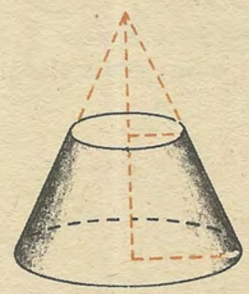
3.4) **Área total:**

Será a soma da área lateral mais a área das bases B e B_1, ou seja:

$$A_T = (p + p_1)\, a_t + B + B_1$$

4) Tronco de Cone

4.1) Consideremos para o nosso estudo somente os troncos de cones de bases paralelas. O tronco de cone pode ser obtido do tronco de pirâmide regular, quando a base tende para um número infinito de lados. Surge então de imediato um formulário, ou seja:



a) **Volume:**

$$V = \frac{h}{3}\left(\pi R^2 + \pi r^2 + \sqrt{\pi^2 R^2 r^2}\right)$$

ou melhor

$$V = \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + r^2 + Rr\right)$$

b) **Área lateral:**

$$A_L = (\pi R + \pi r)$$

ou melhor

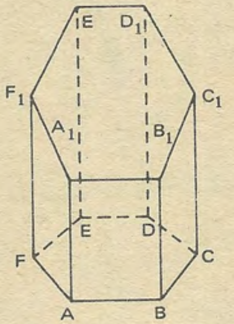
$$A_L = \pi g\,(R + r)$$

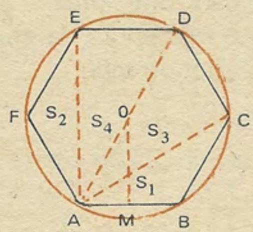
c) **Área total:**

$$A_T = \pi g\,(R + r) + \pi R^2 + \pi r^2$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1 Calcular o volume de um tronco de prisma cuja seção reta é um hexágono regular de 2m de apótema e cujas arestas laterais medem 4m, 3m e 5m, respectivamente.





Dados:

$$AA_1 = BB_1 = 3m$$
$$FF_1 = CC_1 = 4m$$
$$EE_1 = DD_1 = 5m$$
$$OM = 2m$$

Pede-se: $V = ?$

Solução:

1. Calculando o lado da base, encontramos:

$$a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2} \implies 2 = \frac{R\sqrt{3}}{2} \quad \therefore \quad R = l_6 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

2. A área da base é

$$A_B = p \cdot a_6 = 8\sqrt{3}$$

3. Dividindo o tronco em troncos triangulares, encontramos:

$$S_1 = S_2 = \frac{AB \times OM}{2} = \frac{4\sqrt{3/2} \times 2}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$S_3 = S_4 = \frac{A_B - 2S_1}{2} = \frac{8\sqrt{3} - 2 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{16\sqrt{3}}{6} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

4. Os volumes dos quatro prismas em que fica dividido o tronco serão:

$$V_1 = \frac{4\sqrt{3}}{3}\left(\frac{3+.3+4}{3}\right) = \frac{40\sqrt{3}}{9}$$

$$V_2 = \frac{4\sqrt{3}}{3}\left(\frac{3+4+3}{3}\right) = \frac{16\sqrt{3}}{3}$$

$$V_3 = \frac{8\sqrt{3}}{3}\left(\frac{3+4+5}{3}\right) = \frac{32\sqrt{3}}{3}$$

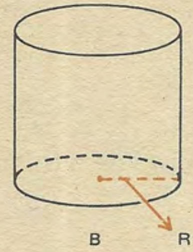
$$V_4 = \frac{8\sqrt{3}}{3}\left(\frac{3+5+5}{3}\right) = \frac{114\sqrt{3}}{9}$$

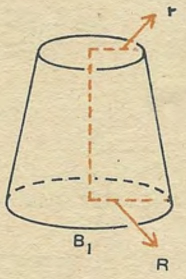
5. Onde finalmente o volume do tronco será:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = \frac{298\sqrt{3}}{9} = 55{,}424\text{m}^3$$

Resposta: $\boxed{55{,}424\text{m}^3}$

2 Um cilindro e um tronco de cone (circulares retos) têm uma base comum e mesma altura. O volume do tronco é a metade do volume do cilindro.
Determinar a razão entre o raio da base maior e o raio da base menor do tronco (Arq., USP – 1970).





Dados: $B = B_1$

$$V_t = \frac{V_c}{2}$$

Pede-se: $\frac{R}{r}$

Solução:

Sabemos que:

$$V_c = \pi R^2 h \qquad (1)$$

$$V_t = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr) \qquad (2)$$

Porém

$$V_t = \frac{V_c}{2} \Rightarrow \frac{R^2 + r^2 + Rr}{3} = \frac{R^2}{2}$$

ou ainda

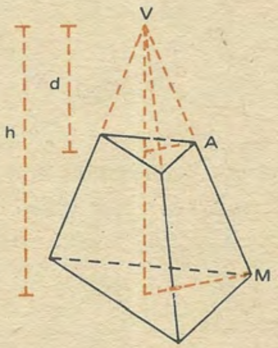
$$2R^2 + 2r^2 + 2Rr = 3R^2 \Rightarrow 2r^2 + 2Rr - R^2 = 0$$

Resolvendo esta equação, encontramos:

$$r = \frac{R(\sqrt{3}-1)}{2} \implies \frac{R}{r} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3}+1$$

Resposta: $\boxed{\sqrt{3}+1}$

3 Uma pirâmide tem o volume $V = 15dm^3$ e uma de suas arestas laterais mede 32dm. Pelo ponto (A) dessa aresta lateral, à distância de 4dm do vértice da pirâmide, conduz-se um plano paralelo à base (da pirâmide). Calcular o volume de cada um dos sólidos obtidos por esse plano (ITA — 1962).



Dados:

$$V = 15dm^3$$
$$VM = 32cm$$
$$VA = 4cm$$

Pede-se:

$$V_1 = ?$$
$$V_2 = ?$$

Solução:

Sabemos que:

$$\frac{d}{h} = \frac{VA}{VM} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

Porém

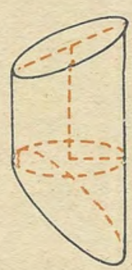
$$\frac{V_1}{V} = \left(\frac{d}{h}\right)^3 \therefore V_1 = \left(\frac{1}{8}\right)^3 \cdot 15 = \frac{15}{512}$$

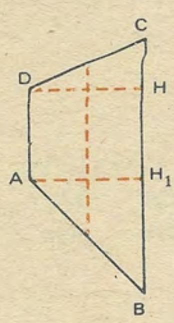
podemos obter V_2 por $V - V_1$, daí:

$$V_2 = V - V_1 = 15 - \frac{15}{512} = 15\left(1 - \frac{1}{512}\right) = \frac{7\,665}{512}$$

Respostas: $\boxed{\dfrac{15}{512}\ dm^3 \quad e \quad \dfrac{7\,665}{512}\ dm^3}$

4 Uma das seções planas que passam pelo eixo de um tronco de cilindro é um trapézio cujas bases medem 1m e 56cm e os outros lados, 17cm e 39cm. Calcular a área lateral.





Dados: AD = 56cm
BC = 100cm
CD = 17cm
AB = 39cm

Pede-se: A_L = ?

Solução:

Precisamos calcular o raio da seção reta, logo, façamos:

$$\left.\begin{aligned} CH &= x \\ BH_1 &= y \end{aligned}\right\} \Longrightarrow x + y + 56 = 100 \quad \text{ou} \quad x + y = 44 \qquad (1)$$

Dos triângulos retângulos DCH e ABH_1, teremos:

$DH = AH_1 = h$, então:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + h^2 &= 17^2 \\ y^2 + h^2 &= 39^2 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow y^2 - x^2 = 1\,232 \qquad (2)$$

Substituindo x ou y dados em (1) na expressão (2), virá:

$$y^2 - (44 - y)^2 = 1\,232 \Longrightarrow y = 36 \quad \text{e} \quad x = 8$$

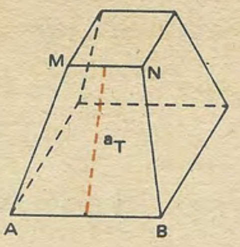
o que nos dá para **h** o valor:

$$h^2 = 289 - 64 = 225 \Longrightarrow h = 15 \qquad \text{logo } R = \frac{15}{2}$$

A área lateral será: $A_L = \pi R(g + g') = \pi \dfrac{15}{2} \cdot 156 = 1\,170\pi$

Resposta: $\boxed{1\,170\,\pi \text{ cm}^2}$

5 A área lateral de um tronco de pirâmide quadrangular regular é S, o lado da base maior é o dobro do da base menor e o apótema a semi-soma dos dois lados das bases. Determinar os lados das bases, o apótema, a altura e o volume do tronco (Aplicação: $S = 576 cm^2$).



Dados: $S = A_L = 576$

$AB = 2MN$

$$a_t = \frac{AB + MN}{2}$$

Pede-se: $MN = ?$
$AB = ?$
$a_t = ?$
$h = ?$
$V = ?$

Solução:

Sabemos que:

$$A_L = (p + p_1)\, a_t$$

porém $p = 2MN$ e $p_1 = 2AB$ e $a_t = \dfrac{MN + AB}{2}$

Daí $A_L = (2MN + 2AB)\dfrac{MN + AB}{2} = (2MN + 4MN)\dfrac{MN + 2MN}{2}$

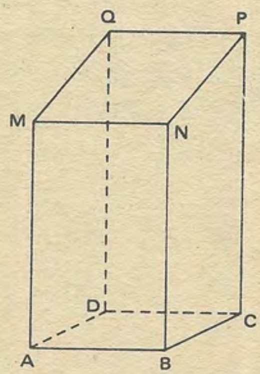
ou $576 = 6MN \cdot \dfrac{3MN}{2}$ $\quad 9MN^2 = 576 \implies MN = \sqrt{64} = 8cm$

$AB = 2 \times 8 = 16cm$ e $a_t = \dfrac{8 + 16}{2} = 12cm.$

A altura será: $h^2 = 144 - 16 \quad \therefore \quad h = 8\sqrt{2}\,cm$

O volume será: $V = \dfrac{8\sqrt{2}}{3}(64 + 256 + 128) = \dfrac{3\,584\sqrt{2}}{3}$

Num paralelepípedo truncado, a área da seção reta é $6m^2$ e duas arestas laterais opostas medem, respectivamente, 3m e 5m. Calcular o volume do tronco.



Dados:

$A_B = 6cm^2$
$BN = AM = 3m$
$PC = DQ = 5m$

Pede-se: $V = ?$

Solução:

Separando o tronco de base quadrangular em dois de bases triangulares, teremos:

$S_1 = S_2 = 3m$

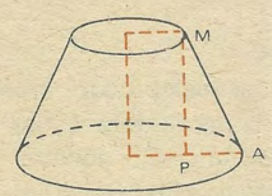
Então: $V_1 = 3\left(\frac{3+3+5}{3}\right) = 3 \times \frac{11}{3} = 11m^3$

$$V_2 = 3\left(\frac{3+5+5}{3}\right) = 3 \times \frac{13}{3} = 13m^3$$

Logo: $V = V_1 + V_2 = 11 + 13 = 24m^3$

Resposta: $\boxed{24m^3}$

7 Um tronco de cone reto tem bases circulares de raio R e r. Qual a altura do tronco para que a superfície lateral seja igual à soma das superfícies das bases (ITA – 1958).



Dados: R e r

$A_L = B + B_1$

Pede-se: $h = ?$

Solução:

Sabemos que: $A_L = \pi g(R + r)$

$$B = \pi R^2 \quad \text{e} \quad B_1 = \pi r^2$$

Então: $\pi(R + r) = \pi R^2 + \pi r^2 \implies g = \frac{R^2 + r^2}{R + r}$

No triângulo MPA, temos:

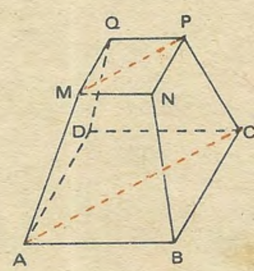
$PA = R - r$
$MA = g$
$MP = h$ logo $h^2 = g^2 - (R - r)^2 = \left(\frac{R^2 + r^2}{R + r}\right) - (R - r)^2$

$$h^2 = \left[\frac{R^2 + r^2}{R + r} + (R - r)\right]\left[\frac{R^2 + r^2}{R + r} - (R - r)\right] = \frac{4R^2r^2}{(R + r)^2}$$

logo $h = \dfrac{2Rr}{R + r}$

Resposta: $\boxed{\dfrac{2Rr}{R + r}}$

8 A aresta lateral de um tronco de pirâmide regular tem 1m: as bases são quadrados cujas diagonais medem 1,6m e 2,8m. Calcular o volume.



Dados: $AM = 1m$
$MP = 1{,}6m$
$AC = 2{,}8m$

Pede-se: $V = ?$

Solução:

Sabemos da geometria plana que:

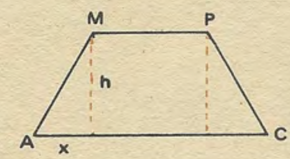
$$MP = MN\sqrt{2} \implies MN = \frac{MP}{\sqrt{2}}$$

$$AC = AB\sqrt{2} \implies AB = \frac{AC}{\sqrt{2}}$$

Porém as áreas das bases são:

$$B = \left(\frac{MP}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{MP^2}{2} \quad \text{e} \quad B_1 = \left(\frac{AC}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{AC^2}{2}$$

Vejamos o trapézio ACPM:



$$h^2 = AM^2 - x^2 \quad \therefore \quad x = \frac{2{,}8 - 1{,}6}{2} = 0{,}6$$

logo $\quad h^2 = 1 - 0{,}36 = 0{,}64 \implies h = 0{,}8$

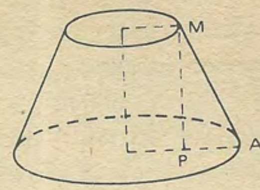
O volume será:

$$V = \frac{0{,}8}{3}\left(\frac{MP^2}{2} + \frac{AC^2}{2} + \sqrt{\frac{MP^2 \cdot AC^2}{4}}\right) =$$

$$= \frac{0{,}8}{3}\left[\left(\frac{1{,}6^2}{2} + \frac{2{,}8^2}{2} + \frac{1{,}6 \times 2{,}8}{2}\right)\right]$$

Resposta: $\boxed{1{,}984 m^3}$

9 Um tronco de cone tem os raios das bases medindo 10cm e 4cm. A geratriz mede 10cm. Calcule o volume do tronco (EFE — 1958).



Dados: $R = 10$
$r = 4$
$g = 10$

Pede-se: $V = ?$

Solução:

O triângulo AMP nos dá:

$MP^2 = AM^2 - AP^2$ porém $AM = g = 10$

$AP = R - r = 6$

logo $MP^2 = h^2 = 10^2 - 6^2 = 64 \quad \therefore \quad h = 8$

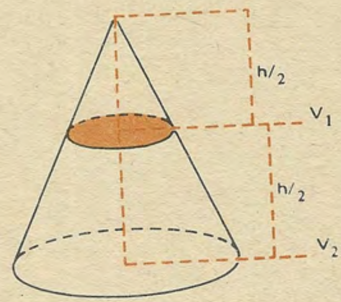
O volume será: $V = \frac{\pi 8}{3}(10^2 + 4^2 + 10 \times 4) = 416\,\pi\ cm^3$

Resposta: $\boxed{416\,\pi\ cm^3}$

10 Seccionа-se um cone de geratriz **g** e altura **h** por um plano paralelo à base e passando pelo ponto médio da altura. Calcule a razão entre o volume do cone dado e o tronco assim obtido (ENE – 1960).

Dados: g
h

Pede-se: $\dfrac{V_c}{V_t}$



Solução:

Sabemos que:

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{h/2}{h}\right)^3 = \frac{1}{8} \quad \therefore \quad V_2 = 8 \cdot V_1 \qquad (1)$$

Sendo V_1 o volume do cone seccionado e V_2 o volume do cone dado o volume do tronco será:

$$V_3 = V_2 - V_1 = 8V_1 - V_1 = 7V_1 \qquad \text{(tirado de 1)}$$

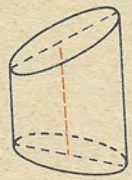
Então a razão procurada será:

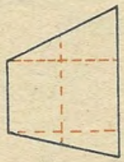
$$\frac{V_2}{V_3} = \frac{8V_1}{7V_1} \quad \therefore \quad \frac{V_c}{V_t} = \frac{8}{7}$$

Resposta: $\boxed{\dfrac{8}{7}}$

PROBLEMAS PROPOSTOS

11 Uma das seções que passam pelo eixo de um tronco de cilindro é um trapézio cujas bases medem 14cm e 21cm e os outros lados 6,5cm e 7,5cm. Calcular o volume.





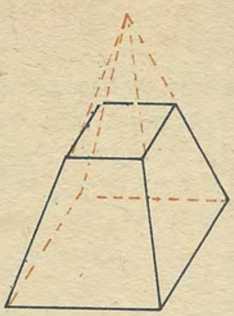
Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

12 O perímetro da base e a altura de uma pirâmide quadrangular regular medem, respectivamente, $32\sqrt{2}$cm e 6cm. Do centro da base traça-se a perpendicular a uma das arestas e do pé dessa perpendicular traça-se um plano paralelo à base da pirâmide. Calcule o volume do tronco de pirâmide assim determinado (EFE — 1959).



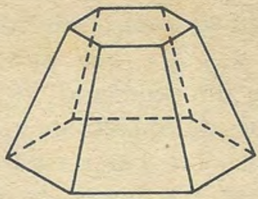
Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

13 Um tronco de pirâmide hexagonal regular tem o apótema medindo 18cm e o perímetro da base maior igual ao triplo do perímetro da base menor. Calcule a altura do tronco sabendo que a base menor tem $54\sqrt{3}\,cm^2$ de área (EFE – 1959).



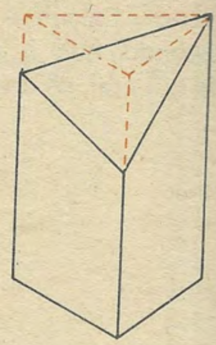
Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

14 Um prisma reto tem por base um triângulo equilátero ABC de lado **a**. Sobre a aresta que parte de B, toma-se um segmento BE, igual à diagonal do quadrado cujo lado seria **a** e sobre a aresta, partindo de C, leva-se, no mesmo sentido, um segmento CF = BE/2. Traça-se o plano AEF.



Pede-se:

1.°) calcular os comprimentos AE, AF, EF. Mostrar que o triângulo AEF é retângulo e isósceles;

2.°) calcular o volume do tronco de prisma assim determinado

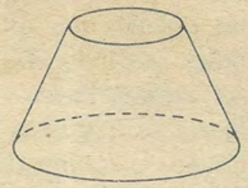
Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

15 Num tronco de cone de revolução a geratriz é igual ao raio da base maior e a duas vezes e méia o raio da base menor. Calcular o comprimento dessa geratriz sabendo ainda que a área lateral do tronco é igual a $35\pi\ m^2$ (ENE – 1958).



Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta: