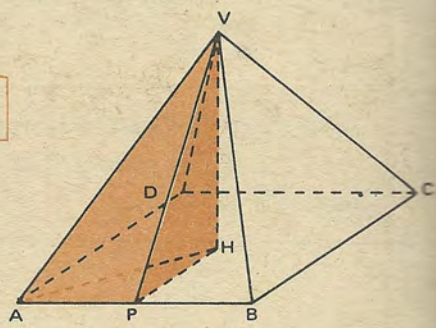
e) As faces laterais de uma pirâmide são triangulares.

f) Uma pirâmide cuja base é um polígono regular e cujo vértice eqüidista de todos os vértices da base é chamada de pirâmide regular.
A altura de uma pirâmide regular coincide com o centro da base (centro do círculo inscrito e circunscrito à mesma).

Vejamos então os elementos de uma pirâmide regular e suas relações métricas:



$\triangle$ **AHV é retângulo em H**

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\overline{VA}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{VH}^2}$$

$\overline{VA}$, aresta lateral
$\overline{AH}$, raio do círculo circunscrito
$\overline{VH}$, altura da pirâmide

$\triangle$ **VPH é retângulo em H**

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\overline{VP}^2 = \overline{PH}^2 + \overline{VH}^2}$$

$\overline{VP}$, apótema da pirâmide
$\overline{PH}$, apótema da base

Área lateral

$$A_L = n \cdot \frac{\overline{AB} \times \overline{VP}}{2} = \frac{n \cdot \overline{AB}}{2} \times \overline{VP} = \frac{2p}{2} \times \overline{VP} = p \cdot \overline{VP}$$

> A área lateral de uma pirâmide regular é o produto do semiperímetro da base pelo apótema da pirâmide.

Área total

$$A_T = A_L + A_B$$

A_L, área lateral

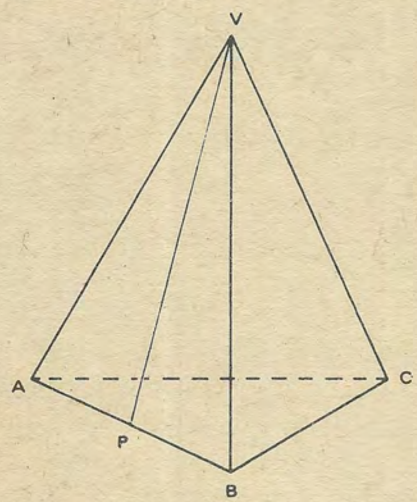
A_B, área da base

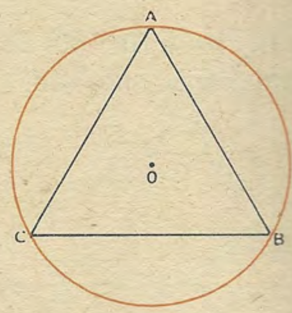
Observações:

1) A demonstração para uma pirâmide qualquer é feita pelo Princípio de Cavalieri, bastando comparar uma pirâmide triangular com uma pirâmide qualquer de mesma área da base e mesma altura.
2) Os problemas sobre tetraedros regulares serão dados na unidade relativa a poliedros regulares.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1 Achar a área lateral de uma pirâmide regular triangular sabendo que o seu apótema é o triplo da aresta da base. A circunferência circunscrita à mesma mede $24\,\pi$ m.





Dados: $\overline{VP} = 3\,\overline{AB}$

$C(O) = 24\,\pi$ m

Pede-se: $A_L = ?$

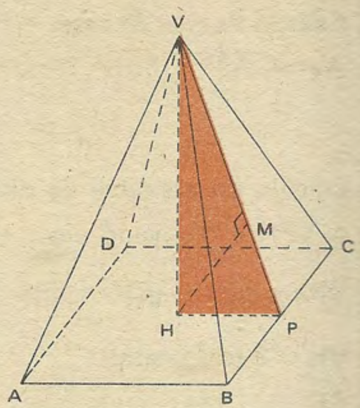
Solução:

Sabemos que $A_L = p \cdot \overline{VP}$

Temos que:

$24\,\pi = 2\,\pi\, R$ (dado) $\therefore$ $R = 12$

4 Uma pirâmide quadrangular regular tem de volume $64m^3$ e o lado da base é igual a 8m. Calcule a distância do centro da base a uma das faces laterais (EPUC – 1961).



Dados: $V = 64m^3$

$AB = 8m$

Pede-se: $\overline{MH} = ?$

Solução:

O volume como sabemos é dado por:

$$V = \frac{A_B \times h}{3} \quad \therefore \quad 64 = \frac{8^2 \times h}{3} \quad \Longrightarrow \quad h = 3m$$

A distância do centro à face VBC ocupa a posição de altura relativa à hipotenusa do Δ VPH, daí tiramos:

$$\overline{VP}^2 = \overline{PH}^2 + \overline{VH}^2 \quad \therefore \quad PH = \frac{AB}{2} = 4m \text{ (apótema da base)}$$

$$\overline{VH} = h = 3m \quad \therefore \quad \overline{VP}^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \quad \Longrightarrow \quad VP = 5m$$

Por meio da relação métrica, produto dos catetos igual ao produto da hipotenusa por sua altura relativa, tiramos:

$$\overline{VH} \times \overline{PH} = \overline{MH} \times \overline{VP} \quad \text{ou} \quad 3 \times 4 = \overline{MH} \times 5$$

e finalmente

$$MH = \frac{12}{5} = 2{,}4m$$

Resposta: $\boxed{2{,}4m}$

Solução:

Sabemos da parte inicial que:

$$\frac{A}{A_1} = \frac{h^2}{h_1^2}$$

porém $V = \frac{S \cdot h}{3}$ logo $V_1 = \frac{S_1 \cdot h_1}{3}$

Daí $\frac{V}{V_1} = \frac{S \cdot h}{S \cdot h_1} = \frac{S}{S_1} \cdot \frac{h}{h_1} = \frac{h^2}{h_1^2} \cdot \frac{h}{h_1} = \frac{h^3}{h_1^3}$

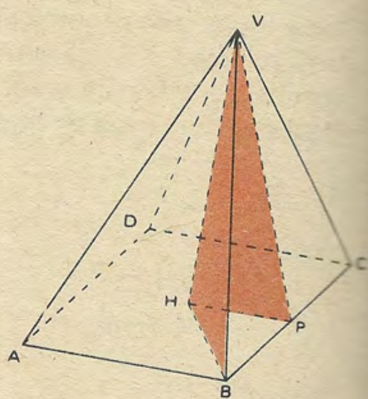
Podemos então aplicar os dados:

$$\frac{V}{V_1} = \frac{h^3}{h_1^3} \therefore \frac{54}{2} = \frac{h^3}{1} \text{ ou } h^3 = \frac{54}{2}$$

$$\therefore h = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$$

Resposta: $\boxed{h = 3}$

9 A área total de uma pirâmide regular de base quadrada é $16m^2$. A soma do apótema da pirâmide com a aresta da base é 5m. Calcular o volume da pirâmide.

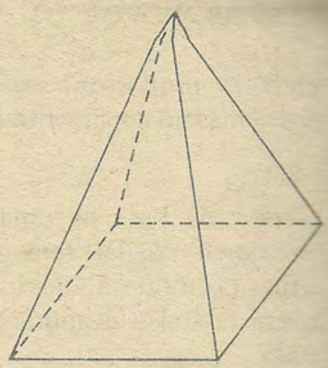


Dados: $A_T = 16m^2$

$VP + AB = 5m$

Pede-se: $V = ?$

12 *Calcular o volume de uma pirâmide* regular cuja base é um quadrado de 6m de lado e cuja aresta lateral tem 12m.



Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

$A_B = p \cdot \overline{PH}$ (da geometria plana), semiperímetro pelo apótema (da base). Teremos então:

$$A_T = p \cdot \overline{VP} + p \cdot \overline{PH} = p\,(\overline{VP} + PH)$$

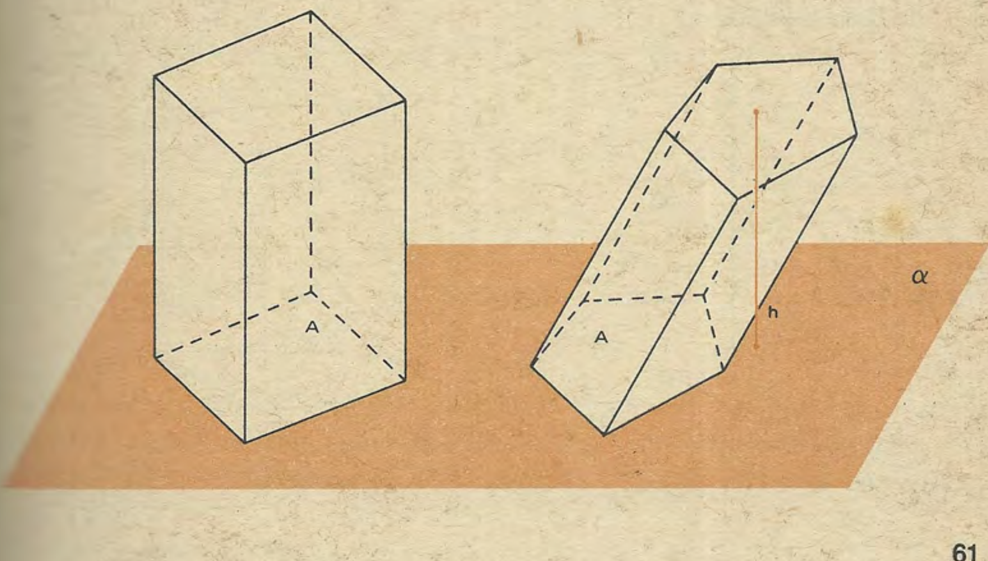
A área total é o produto do semiperímetro da base pela soma do apótema da pirâmide mais o apótema da base.

g) **Postulado**

O volume de um paralelepípedo retângulo é o produto da área da base pela altura.

h) **Postulado (o Princípio de Cavalieri)**

Sejam dois sólidos apoiados sobre um plano. Todo plano paralelo ao plano dado que interceptar um dos sólidos interceptará o outro. Se as seções nos dois sólidos tiver a mesma área, então podemos dizer que os sólidos possuem o mesmo volume.



Logo

$\ell_3 = \overline{AB} = R\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$

Como $\overline{VP} = 3 \cdot \overline{AB}$ (dado), então

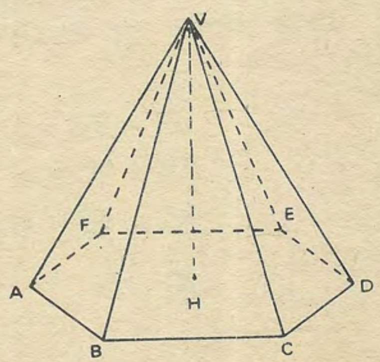
$\overline{VP} = 3 \cdot 12 \cdot \sqrt{3} = 36\sqrt{3}$

Finalmente,

$$A_L = \frac{3 \cdot 12\sqrt{3}}{2} \cdot 36\sqrt{3} = 18 \times 36 \times 3 = 1944$$

Resposta: $\boxed{A_L = 1\,944\,m^2}$

2 O perímetro da base de uma pirâmide hexagonal regular é 12m e sua altura 10m. Calcular o volume dessa pirâmide.



Dados: $2p = 12m$
$h = \overline{VH} = 10m$

Pede-se: $V = ?$

Solução:

Como a base é um hexágono regular, então é inscritível num círculo de raio R.

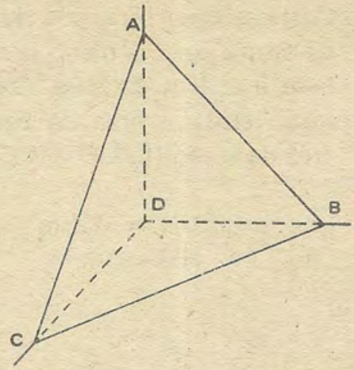
Sabemos que $\overline{AB} = \ell_6 = R$

Como $2p = 12 \implies \overline{AB} = \frac{2p}{6} = 2m$

Sendo $\overline{AB} = R = 2m$, então a área do hexágono será

$$A = p \cdot ap = \frac{6 \times 2}{2} \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} = 6 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

5 Um triedro trirretângulo é cortado por um plano que intercepta as três arestas formando um triângulo de lados 8cm, 10cm e 12cm, respectivamente. Calcule o volume do sólido formado (EPUC – 1961).



Dados: AB = 8cm
BC = 10cm
AC = 12cm

Pede-se: V = ?

Solução:

Chamando $AD = x$, $BD = y$, $CD = z$ e considerando os triângulos retângulos ABD, BCD e ACD, teremos:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 64 \\ x^2 + z^2 &= 144 \\ y^2 + z^2 &= 100 \end{aligned}$$

Por exemplo: $x^2 = 144 - z^2$

Substituindo nas duas outras, teremos:

$$\begin{cases} 144 - z^2 + y^2 = 64 \\ y^2 + z^2 = 100 \end{cases}$$

Somando membro a membro, teremos:

$$y^2 = 10 \implies y = \sqrt{10}$$

Analogamente, teremos $x = 3\sqrt{6}$ e $z = 3\sqrt{10}$

O volume como sabemos será:

$$V = \frac{\frac{x \cdot y \cdot z}{2}}{3} = \frac{x \cdot y \cdot z}{6} = \frac{\sqrt{10} \cdot 3\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{10}}{6} = 15\sqrt{6}\text{cm}^3$$

Resposta $\boxed{15\sqrt{6}\text{ cm}^3}$

Solução:

Sabemos da parte: "o que você precisa saber" que

$$A_T = p \cdot (VP + PH)$$

Vamos colocar esta fórmula em função de $\overline{AB}$, o que nos dará:

$$A_T = \frac{4 \cdot AB}{2} \left(VP + \frac{AB}{2}\right), \text{ porém } \quad VP = 5 - AB \text{ (dado)}$$

Daí

$$16 = 2\,AB \left(5 - AB + \frac{AB}{2}\right) = 2\,AB \left(\frac{10 - AB}{2}\right) = AB\,(10 - AB),$$

que fornece a equação: $AB^2 - 10AB + 16 = 0$

cujas raízes são: $\quad AB = 8 \;$ e $\; AB = 2$

Substituindo em VP, teremos: $VP = -3 \quad$ e $\quad VP = 3$

e $PH = \frac{AB}{2} = \frac{2}{2} = 1$, onde tomamos o valor $AB = 2$ e conseqüentemente $VP = 3$.

Os valores acima nos permitem calcular a altura da pirâmide.

$$VH^2 = VP^2 - PH^2 = 3^2 - 1^2 = 8 \;\therefore\; VH = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

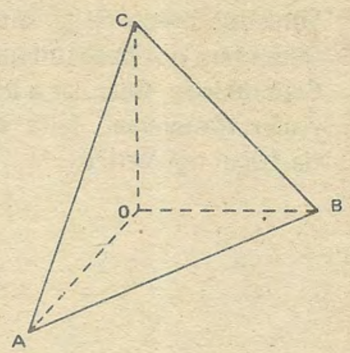
A área da base será então AB^2, ou seja, $A_B = 2^2 = 4$.

Finalmente, o volume será:

$$V = \frac{A_B \times h}{3} = \frac{4 \cdot 2\sqrt{2}}{3} = \frac{8\sqrt{2}}{3}\ m^3$$

Resposta: $\boxed{V = \frac{8\sqrt{2}}{3}\ m^3}$

13 Numa pirâmide OABC de base triangular (ABC), a reta OC é perpendicular ao plano OAB, sendo $OC = a$. Os três ângulos das faces do triedro de vértice C medem 60°. Calcular a área total e o seu volume (E.E. MAUÁ – 1968).



Dados:

Pede-se:

Solução:

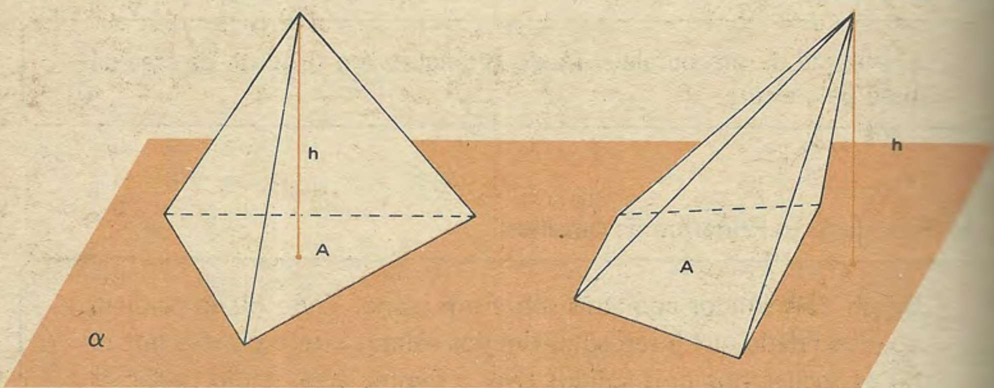
Resposta:

i) **Teorema**

O volume de qualquer prisma é o produto da área da base pela altura.

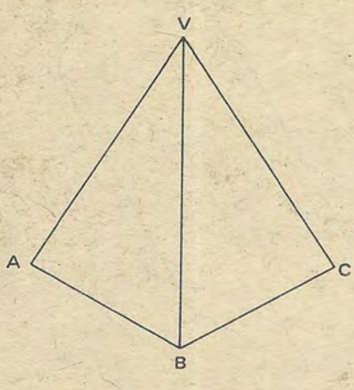
j) **Teorema**

Se duas pirâmides possuem a mesma altura e a mesma área da base, estando apoiadas sobre um mesmo plano, então elas têm o mesmo volume.



l) **Teorema**

O volume de uma pirâmide triangular é um terço do produto da área da base pela altura.



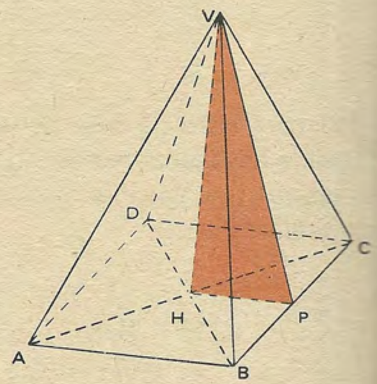
O prisma à direita possui a mesma base e a mesma altura da pirâmide à

O volume da pirâmide será então:

$$V = \frac{6\sqrt{3} \times 10}{3} = 20\sqrt{3} = 34{,}64m^3$$

Resposta: $\boxed{V = 34{,}64m^3}$

3 Uma pirâmide regular tem todas as arestas iguais. Sendo sua base um quadrado de 4cm de diagonal, pede-se calcular sua área total e seu volume.



Dados: $\overline{VA} = \overline{VB} = \ldots$

$\overline{AB} = \overline{BC} = \ldots$

$\overline{AC} = \overline{BD} = 4cm$

Pede-se: $A_T = ?$

$V = ?$

Solução:

1. Cálculo da aresta:

ABC é retângulo em $\angle$ B, logo

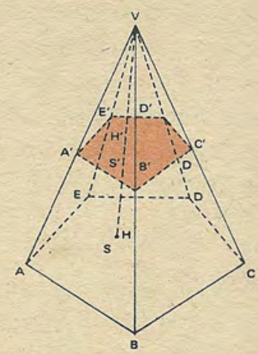
$$2\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 \therefore \overline{AB}^2 = \frac{\overline{AC}^2}{2} = \frac{16}{2} = 8 \implies AB = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

2. Cálculo da altura:

$\triangle$ VHB é retângulo em $\angle$ H, logo

$$\overline{VB}^2 = \overline{BH}^2 + \overline{VH}^2 \therefore \overline{VH}^2 = 8 - 4 = 4 \implies VH = 2cm$$

6 Corta-se uma pirâmide de 12cm de altura por um plano paralelo à base e a 4cm da base. Calcule a razão entre a área da base e a área da seção (EPUC – 1958).



Dados: VH = 12cm
HH' = 4cm

Pede-se: $\dfrac{S}{S'}$

Solução:

Sabemos da parte teórica que o teorema c) 2. resolve o problema. Logo:

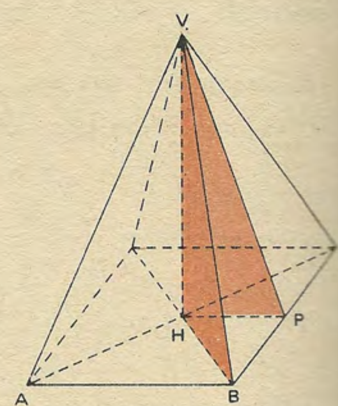
$$\frac{S}{S'} = \frac{VH^2}{VH'^2} \qquad VH' = VH - HH' = 12 - 4 = 8\text{cm}$$

Logo:

$$\frac{S}{S'} = \frac{12^2}{8^2} = \frac{144}{64} = \frac{9}{4}$$

Resposta: $\boxed{\dfrac{9}{4}}$

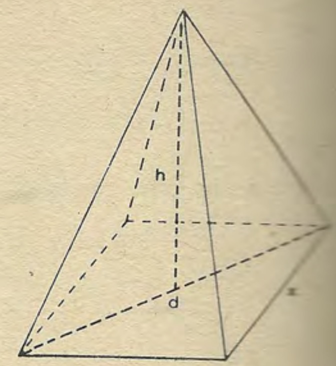
7 Determine o volume de uma pirâmide regular quadrangular cuja altura é 12cm e cuja base tem uma aresta de 12cm. Determine, também, a área da superfície lateral.



Dados: VH = 12cm
AB = 12cm

Pede-se: A_L = ?
V = ?

10 Uma pirâmide de base quadrada tem de volume $360 dm^3$. Pede-se a altura, sabendo que é igual a 5/4 da diagonal da base (E.F.E. – 1953).



Dados: $V = 360 dm^3$

$$h = \frac{5}{4} d$$

Pede-se: $h = ?$

Solução:

Da geometria plana, sabemos que:

$d = x\sqrt{2}$, porém $h = \frac{5}{4}$ d (dado), logo $h = \frac{5}{4} \cdot x\sqrt{2}$

O volume, como vimos na 1.ª parte, é expresso por

$V = \frac{A_B \cdot h}{3}$, onde $A_B = x^2$ (área da base)

$V = 360$ (dado)

Colocando a expressão acima em função de **h**, que desejamos calcular, teremos:

$$V = \frac{x^2 \cdot h}{3} = \frac{\left(\frac{2\sqrt{2}h}{5}\right)^2 \cdot h}{3} = \frac{8h^3}{25 \times 3} \quad \therefore$$

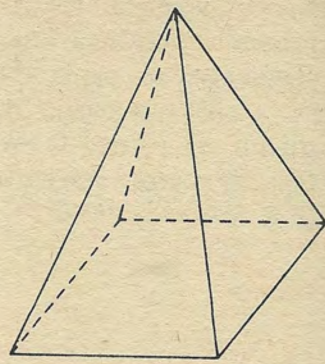
$$360 = \frac{8h^3}{25 \times 3} \quad \Longrightarrow \quad h^3 = \frac{360 \times 25 \times 3}{8}$$

ou $h^3 = 45 \times 25 \times 3 = 3^2 \times 5^2 \times 3 \times 5 = 3^3 \times 5^3$

onde finalmente $h = 5 \times 3 = 15$

Resposta: 15dm

14 Uma pirâmide cuja altura mede 30cm tem por base um quadrado de 6cm de lado. Calcular a área de uma seção transversal, feita à distância de 10cm do vértice.



Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta: S =

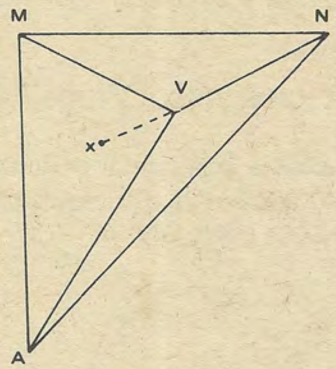
esquerda. A demonstração deste teorema é facílima, bastando que você separe o prisma em três pirâmides equivalentes (mesma área da base e mesma altura). Abaixo estamos indicando esta separação, porém, tente fazê-la em material transparente, pois a visão tridimensional das três pirâmides será mais evidente, tornando fácil a demonstração.

As pirâmides (I) e (II) possuem mesma altura (VX) e mesma base (MNA ≅ ACN).

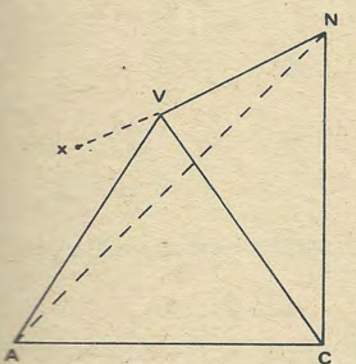
As pirâmides (I) e (III) possuem mesma altura ($\overline{VB} \cong \overline{AM}$) e mesma base (ABC ≅ MNV).

Logo (I), (II) e (III) são equivalentes, onde concluímos que:

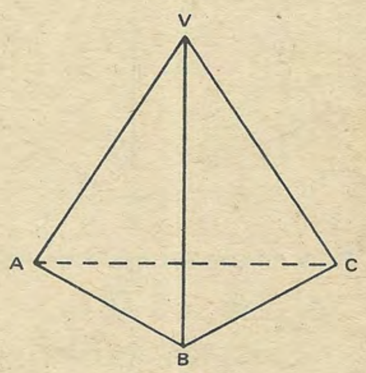
$$V = \frac{A \cdot h}{3}$$



(I)



(II)



(III)

O volume de uma pirâmide é igual a um terço do produto da área da base pela altura.

3. Cálculo da área da base:

$A_B = \overline{AB}^2 = 8cm^2$

4. Cálculo do apótema da pirâmide:

Δ VPH é retângulo em $\angle$ H, e teremos:

$\overline{VP}^2 = \overline{PH}^2 + \overline{VH}^2 \therefore \overline{PH} \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ (apótema da base)

$VH = 2$ (calculado)

$\overline{VP}^2 = (\sqrt{2})^2 + 2^2 = 6 \therefore VP = \sqrt{6}$

5. Cálculo da área lateral:

$A_L = p \cdot \overline{VP} = \frac{4 \cdot 2\sqrt{2}}{2} \cdot 6 = 4\sqrt{12}$

6. Cálculo da área total:

$A_T = A_L + A_B = 4\sqrt{12} + 8 = 21,85cm^2$

7. Cálculo do volume:

$V = \frac{8 \times 2}{3} = \frac{16}{3} = 5,33cm^3$

Resposta: $\boxed{\begin{array}{l} A_T = 21,85cm^2 \\ V = 5,33cm^3 \end{array}}$

Solução:

1. O volume é, como sabemos, dado pela expressão:

$$V = \frac{A_B \cdot h}{3}, \text{ onde } A_B = 12^2 = 144 \text{ (calculado)}$$

$$h = 12 \text{ (dado)}$$

Logo

$$V = \frac{144 \times 12}{3} = 576\text{cm}^3$$

2. A área lateral, como vimos na parte do que você precisa saber, é dada por:

$$A_L = p \cdot VP, \quad \text{onde} \quad p = \frac{4 \times 12}{2} = 24 \text{ (calculado)}$$

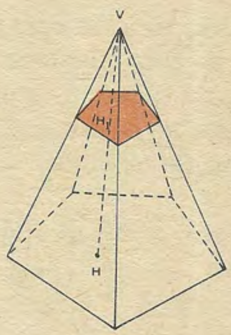
$$VP = \sqrt{144 + 36} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5} \text{ (calculado)}$$

Logo

$$A_L = 24 \cdot 6\sqrt{5} = 144\sqrt{5}\text{cm}$$

Resposta: $\boxed{\begin{array}{l} V = 576\text{cm}^3 \\ A_L = 144\sqrt{5}\text{cm} \end{array}}$

8 Uma seção transversal de uma pirâmide forma uma pequena pirâmide, cujo volume é 2 e cuja altura é 1. O volume da pirâmide grande é 54. Qual é a altura dessa pirâmide?



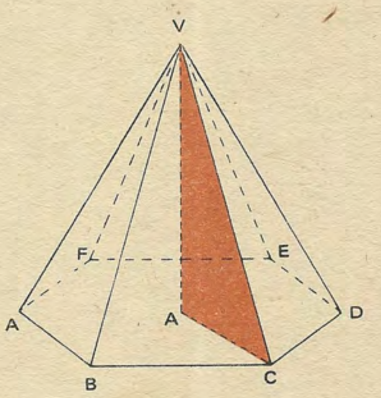
Dados: $V_1 = 2$
$VH_1 = 1$
$V = 54$

Pede-se: $VH = ?$

PROBLEMAS PROPOSTOS

Os exercícios propostos a seguir devem ser resolvidos seguindo-se sempre que possível o mesmo andamento dado aos exercícios resolvidos.

11 O raio da base de uma pirâmide hexagonal regular tem 12cm e a altura do sólido é 16cm. Calcular a aresta lateral e o apótema da pirâmide.



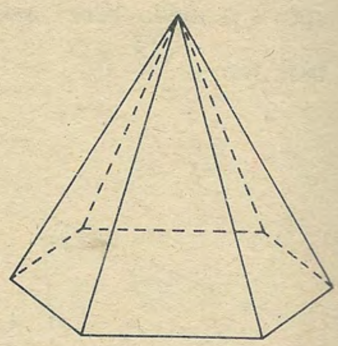
Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

16 Calcular o apótema de uma pirâmide hexagonal regular, conhecendo a área lateral, $210dm^2$, e o lado da base, 14dm.



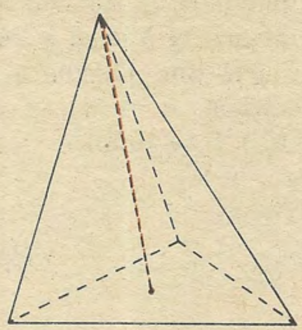
Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

17 Calcular o volume e área total de uma pirâmide triangular regular cujas arestas da base e lateral medem, respectivamente, 3cm e 5cm.



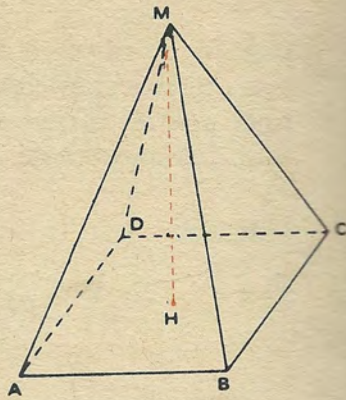
Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

18 O perímetro da base ABCD de uma pirâmide quadrangular regular de vértice M é igual a 24m e a altura mede 4m. Calcule a distância do vértice B à face oposta ADM (E.F.E. – 1960).



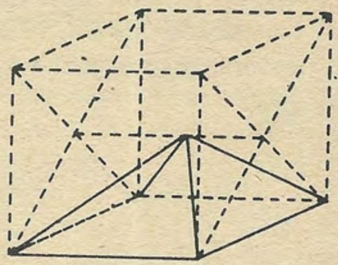
Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

19 Calcular o volume de uma pirâmide que tem por base uma das faces de um cubo de 5cm de aresta e por vértice um ponto do segmento de reta que liga os centros de duas faces opostas e perpendiculares a essa base (UEG — Engenharia, 1961).



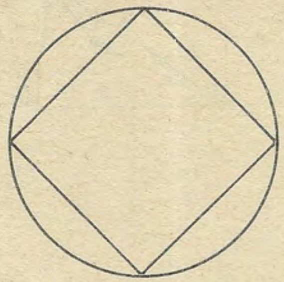
Dados:

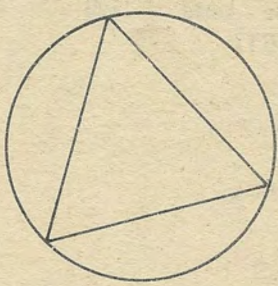
Pede-se:

Solução:

Resposta:

20 Duas pirâmides regulares, uma quadrangular e outra triangular, de mesmo volume, têm as bases inscritas em um círculo de raio R dm. Calcule a altura da pirâmide triangular sabendo que a altura da pirâmide quadrangular é igual a $4\sqrt{3}$ dm (U.F.F. – 1963).





Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

VERIFIQUE O QUE APRENDEU RESOLVENDO O TESTE

1. Corta-se uma pirâmide de 12cm de altura por um plano paralelo à base e a 4cm da base. Calcule a razão entre a área da base e a área da seção (EPUC – Rio, 1958).

a) $\frac{12}{7}$

b) $\frac{7}{4}$

c) $\frac{9}{4}$

d) $\frac{7}{9}$

e) NRA

2. Consideremos um tetraedro regular de aresta **a**. Podemos calcular o volume V deste sólido, em função da aresta. Qual das afirmações abaixo é verdadeira: (ITA – 1969)

a) $12\sqrt{2}\ V = 2a^3$

b) $2\sqrt{2}\ V = 2a^3\sqrt{3}$

c) $12\ V - \sqrt{2} = a^3\sqrt{2}$

d) $5\ V - \sqrt{3} = 2\sqrt{3a^3}$

e) as afirmações **a, b, c** e **d** são falsas

3. A base de uma pirâmide quadrangular regular tem $225cm^2$ de área. Uma seção paralela à base, feita a 4cm do vértice, tem $25cm^2$ de área. A altura da pirâmide é igual a:

a) 16cm

b) 5cm

c) 12cm

d) 9cm

e) NRA

4 O apótema da base de uma pirâmide triangular regular mede 1cm. A altura da pirâmide é igual ao semiperímetro da base, logo seu volume é igual a:

a) $48cm^3$

b) $384cm^3$

c) $1500cm^3$

d) $1684cm^3$

e) NRA

5 Num tetraedro que tem um triedro, 0, trirretângulo, as áreas das faces que cortam em 0 são A, B e C. Então, a área D da face oposta a 0 é tal que: (CICE – 1970)

a) $D^2 = A^2 + B^2 + C^2 + AB + BC + CA$
b) $D^3 = A^3 + B^3 + C^3$
c) $D^2 = A^2 + B^2 + C^2$
d) $D = A + B + C$
e) nada disso acontece

6 Uma pirâmide e um prisma apresentam a mesma base e a altura da pirâmide vale o sêxtuplo da altura do prisma. Então: (IME – 1971)

a) seus volumes são equivalentes
b) o volume da pirâmide vale 1/3 do volume do prisma
c) o volume da pirâmide vale o dobro do volume do prisma
d) o volume da pirâmide vale o triplo do volume do prisma
e) nenhuma resposta é correta

7 Uma pirâmide de base B é seccionada por um plano paralelo à base que divide sua altura ao meio e provoca uma seção de área S. Então: (IME – 1971)

a) $B = 2S$

b) $B = 3S$

c) $B = 4S$

d) $B = 5S$

e) nenhuma das respostas é correta

8 Sendo a a aresta da base de uma pirâmide triangular regular, cuja altura é igual à altura do triângulo da base, pede-se, em suas expressões mais simples, a área lateral e o volume da pirâmide em função de **a** (F.N.C.E. — 1960).

a) $A_L = \frac{a\sqrt{30}}{6}$; $V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

b) $A_L = \frac{a^2}{8}$; $V = \frac{a^3\sqrt{30}}{4}$

c) $A_L = \frac{a^2\sqrt{30}}{4}$; $V = \frac{a^3}{8}$

d) $A_L = \frac{a^2\sqrt{30}}{6}$; $V = \frac{a^3\sqrt{30}}{4}$

e) NRA

9 A base de uma pirâmide tem $225cm^2$. A 2/3 do vértice corta-se a pirâmide por um plano paralelo à base. Determinar a área da seção (ITA — 1956).

a) $9cm^2$
b) $25cm^2$
c) $4cm^2$
d) $125cm^2$
e) NRA

10 Cortando-se um prisma triangular por um plano contendo duas diagonais de faces laterais, obtêm-se duas pirâmides: (EPUSP — 1967)

a) iguais
b) com volumes iguais
c) com volumes na relação de 1 para 2
d) com volumes na relação de 1 para 3
e) nenhuma das respostas anteriores

RESPOSTAS DA UNIDADE 3

PROBLEMAS PROPOSTOS

11. $a_L = 20cm$ $\qquad$ $a_p = 19{,}07cm$

12. $V = 12\sqrt{126}\ m^3$

13. $A_T = (2\sqrt{3} + \sqrt{2})\,a^2$ $\qquad$ $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$

14. $A = 4cm^2$

15. $A_L = 105m^2$ $\qquad$ $A_T = \dfrac{420 + 40\sqrt{3}}{4}\ m^2$

16. $a_p = 5dm$

17. $V = \dfrac{3\sqrt{66}}{4}\ cm^3$ $\qquad$ $A_T = \dfrac{9}{4}(\sqrt{3} + \sqrt{91})cm^2$

18. 4,8m

19. $V = 20{,}833cm^3$

20. $h = \dfrac{32}{3}\ dm$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a										
b										
c										
d										
e										

unidade 4

poliedros regulares

O QUE VOCÊ PRECISA SABER

a) Entendemos por **superfície poliédrica** a figura formada por polígonos planos consecutivos (possuem um lado comum) não coplanares, de modo que cada lado seja comum a apenas dois polígonos.

b) Um poliedro é **convexo** quando, unindo-se dois de seus pontos internos, o segmento não intercepta a superfície.

c) Um poliedro é **regular** quando todas as suas faces são polígonos regulares iguais e todos os seus ângulos diedros são iguais.

d) **Teorema de Euler**

Em todo poliedro convexo, o número de faces mais o número de vértices é igual ao número de arestas mais dois.

$$\boxed{F + V = A + 2}$$

e) **Teorema** (Poliedros regulares)

> Só existem cinco poliedros regulares: o tetraedro, o hexaedro, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro.

Demonstração:

Seja **n** o número de arestas de cada face; **m** o número de arestas que concorrem num vértice (ângulo sólido). São perfeitamente aceitas as relações:

$$n \geqslant 3 \quad (1) \qquad e \qquad m \geqslant 3 \quad (2)$$

Chamando de (α) o ângulo de duas arestas consecutivas, então a soma dos ângulos de um ângulo sólido (teorema relativo à soma das faces de um ângulo sólido) valem $\alpha < 360$ (3). Porém, pela relação (2) acima, tiramos:

$$(3)\ \alpha < 360^\circ \quad \Longrightarrow \quad \alpha < 120^\circ$$

Então os polígonos que podem ser faces de um poliedro regular são: $\alpha = 60^\circ$ (triângulo equilátero); $\alpha = 90^\circ$ (quadrado) e $\alpha = 108^\circ$ (pentágono regular).

Teremos então:

1) Se $\alpha = 60^\circ$, teremos em (3)
   $m \cdot 60^\circ < 360^\circ \quad \Longrightarrow \quad m < 6$ logo
   $m = 3 \quad n = 3$ (tetraedro regular)
   $m = 4 \quad n = 3$ (octaedro regular)
   $m = 5 \quad n = 3$ (icosaedro regular)

2) Se $\alpha = 90^\circ$, teremos em (3)
   $m \cdot 90^\circ < 360^\circ \quad \Longrightarrow \quad m < 4$ logo
   $m = 3 \quad n = 4$ (hexaedro regular)

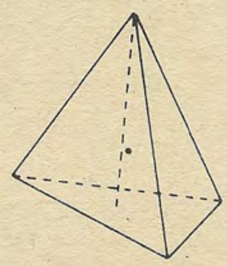
3) Se $\alpha = 108^\circ$, então $m \cdot 108 < 360^\circ \quad \Longrightarrow \quad m < 3 + \frac{1}{3}$

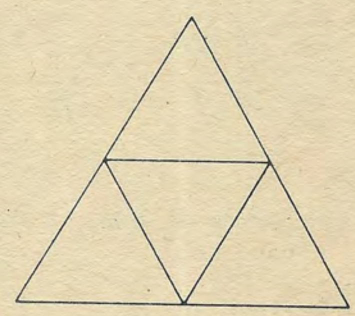
   Daí $m = 3 \quad n = 5$ (dodecaedro regular)

f) Vejamos adiante os poliedros regulares e mais algumas considerações particulares.

1) **Tetraedro Regular**

1.1) Podemos considerar também o tetraedro regular como uma pirâmide regular, com todas as suas faces iguais. Abaixo apresentamos um aspecto tridimensional do tetraedro regular e a sua planificação.





1.2) Vejamos algumas fórmulas que nos permitem tratar o tetraedro regular como uma pirâmide em função da aresta:

Apótema do sólido: $a_p = h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Altura: $H = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

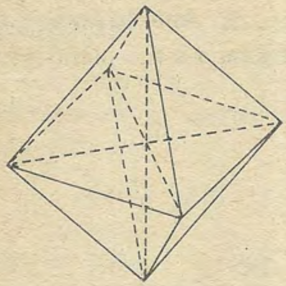
Área lateral: $\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{4}$

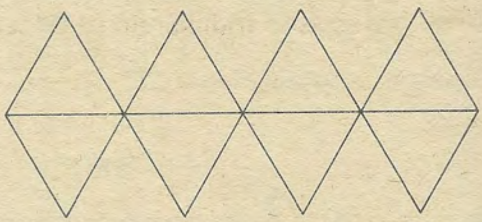
Área total: $a^2\sqrt{4}$

Volume: $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$

2) Octaedro Regular

2.1) O octaedro regular pode ser tratado como uma dupla pirâmide apoiada pela base. Suas alturas são todas congruentes e iguais à diagonal da base que é um quadrado.
Abaixo estamos indicando um octaedro regular e a sua planificação.





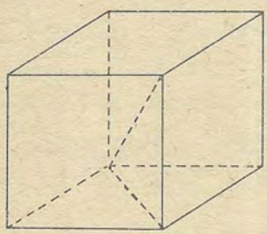
2.2) Em função da aresta, temos:

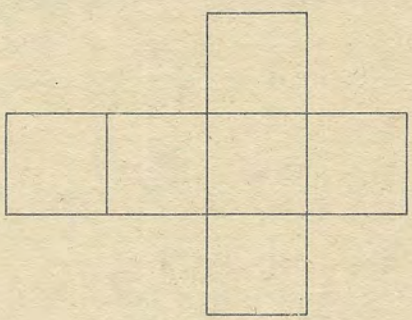
Área total: $A_T = 2a^2\sqrt{3}$

Volume: $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$

3) Hexaedro Regular (cubo)

3.1) O hexaedro regular pode ser tratado como um paralelepípedo retângulo que possui todas as arestas iguais.
A seguir estamos indicando um aspecto tridimensional de um hexaedro regular e a respectiva planificação.



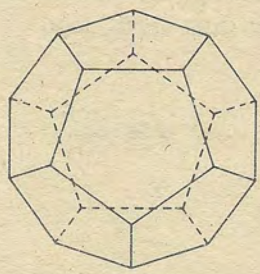


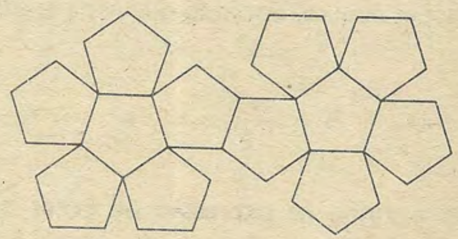
3.2) Vejamos um formulário adaptado ao hexaedro regular (em função da aresta) para a resolução de problemas.

Área lateral:	$4a^2$	**Volume:**	a^3
Área total:	$6a^2$	**Diagonal:**	$a\sqrt{3}$

4) Dodecaedro Regular

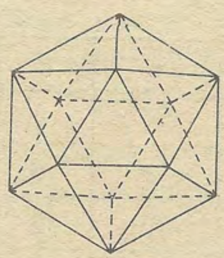
Suas faces são pentágonos regulares. Não apresenta muito interesse para a resolução de problemas, contudo apresentamos abaixo seu aspecto tridimensional e a sua planificação.

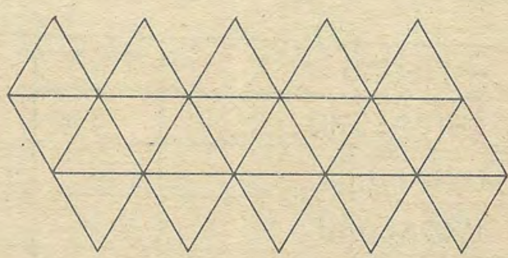




5) Icosaedro Regular

Outro poliedro regular, com raríssimas aplicações, é o icosaedro regular. Abaixo apresentamos um aspecto tridimensional e o seu desenvolvimento.





g) **Teorema** (poliedros platônicos)

Como vimos, só são possíveis poliedros platônicos (tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro, porém com a face não necessariamente regular) com 4, 6, 8, 12 e 20 faces respectivamente. As faces podem ser triangulares, quadrangulares e pentagonais.

Sendo F a face, V o n.º de vértices, n o número de lados em cada face e m o número de arestas que concorrem num ângulo sólido, podemos estabelecer as relações abaixo, notando que cada aresta é contada duas vezes, logo:

$$\boxed{A = \frac{nF}{2}} \quad \text{e} \quad \boxed{A = \frac{mV}{2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V = \frac{nF}{m}}$$

Substituindo na expressão de Euler, teremos

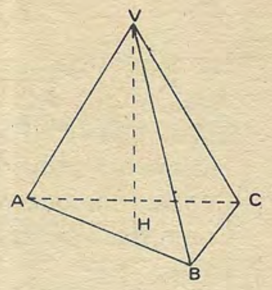
$$\boxed{F = \frac{4m}{2n - mn + 2m}}$$

As considerações feitas anteriormente para os cinco poliedros regulares são aplicadas também aos poliedros platônicos e nos conduzem finalmente ao quadro:

POLIEDRO	n	m	F	V	A
TETRAEDRO	3	3	4	4	6
OCTAEDRO	3	4	8	6	12
ICOSAEDRO	3	5	20	12	30
HEXAEDRO	4	3	6	8	12
DODECAEDRO	5	3	12	20	30

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1 Calcular o volume de um tetraedro regular cuja altura vale $10\sqrt{6}$cm.



Dados: $VH = 10\sqrt{6}$

Pede-se: $V = ?$

Solução:

Sabemos da parte teórica que

$$VH = \frac{a\sqrt{6}}{3} \quad \therefore \quad 10\sqrt{6} = \frac{a\sqrt{6}}{3} \quad \Longrightarrow \quad a = 30$$

A área da base será então:

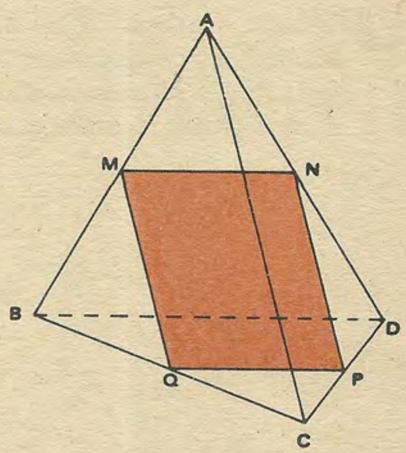
$$A_B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{30^2\sqrt{3}}{4} = 225\sqrt{3}$$

Finalmente o volume será:

$$V = \frac{225\sqrt{3} \times 10\sqrt{6}}{3} = 2250\sqrt{2}$$

Resposta: $\boxed{V = 2250\sqrt{2}\text{cm}^3}$

2 Corta-se um tetraedro regular por um plano paralelo a duas arestas opostas. Demonstrar que a seção é um retângulo. Calcular a área dessa seção quando é eqüidistante de duas arestas opostas, sendo a aresta igual a 10cm.



Dados: $MNPQ \parallel \begin{cases} AC \\ BD \end{cases}$

$AC = 10\text{cm}$

Pede-se: 1. MNPQ é um retângulo
2. Área de MNPQ

Solução:

1. Na face ACD temos $\overline{NP} \parallel \overline{AC}$ (dado). Da mesma forma na face ABC, $\overline{MQ} \parallel \overline{AC}$.
   Logo: $\overline{MQ} \parallel \overline{NP}$.
   Igualmente provamos que $\overline{MN} \parallel \overline{PQ}$.
   Concluímos que MNPQ é um paralelogramo.
   Como duas arestas opostas em um tetraedro regular são ortogonais, então:

   $\Longrightarrow$ MNPQ é também um retângulo c.q.d.

2. Se a seção é eqüidistante das duas arestas que são ortogonais, então a seção é um quadrado.
   Por um teorema da geometria plana, temos:

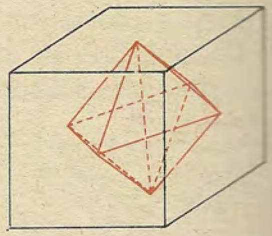
$$MQ = \frac{\overline{AC}}{2} \Longrightarrow MQ = \frac{10}{2} \therefore MQ = 5cm$$

Logo: a área da seção será

$$A_{MNPQ} = MQ^2 = 5^2 = 25cm^2$$

Resposta: $\boxed{A = 25cm^2}$

3 Calcular a relação entre o volume de um cubo e o volume do octaedro regular cujos vértices coincidem com os centros das faces do cubo.



Dados: V_c e V_o

Pede-se: $\frac{V_c}{V_o}$

Solução:

Sabemos da parte inicial que o volume do octaedro em função da aresta é

$$V_o = \frac{a^3\sqrt{2}}{3} \qquad (1)$$

Para que esta expressão fique em função da aresta do cubo (que coincide com a altura do octaedro), teremos

$\ell^2 = 2a^2$ $\qquad \ell \longrightarrow$ aresta do cubo

$\Longrightarrow a = \dfrac{\ell}{\sqrt{2}}$ $\qquad a \longrightarrow$ aresta do octaedro regular aplicando na expressão (1), teremos:

$$V_o = \frac{\left(\frac{\ell}{\sqrt{2}}\right)^3\sqrt{2}}{3} = \frac{\ell^3}{6} \qquad (2)$$

o volume do cubo em função da aresta é

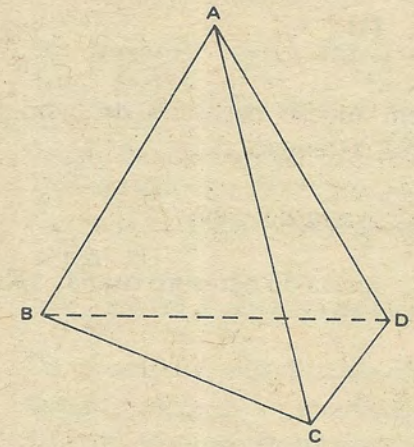
$$V_c = \ell^3 \qquad (3)$$

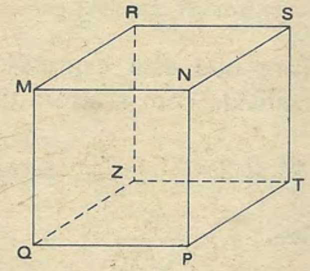
a razão procurada será:

$$\frac{V_c}{V_o} = \frac{\ell^3}{\frac{\ell^3}{6}} = 6$$

Resposta: $\boxed{\dfrac{V_c}{V_o} = 6}$

4 Encontrar a relação entre os volumes do tetraedro e do hexaedro regulares, tendo arestas iguais.





Dados: $\overline{AB} = a$

$\overline{MN} = a$

Pede-se: $\dfrac{V_T}{V_H} = ?$

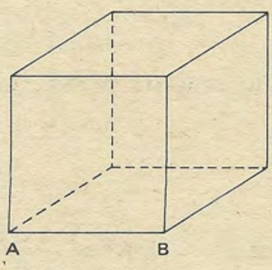
Solução:

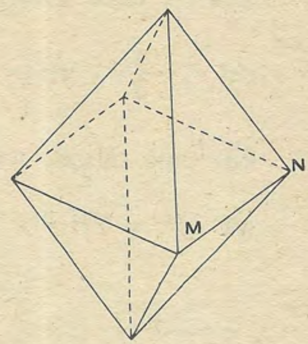
Sabemos da parte inicial que $V_T = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$ e que $V_H = a^3$

Logo: $$\frac{V_T}{V_H} = \frac{\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}}{a^3} = \frac{\sqrt{2}}{12}$$

Resposta: $\boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{12}}$

5 Determinar a relação das arestas de um hexaedro e de um octaedro regulares tendo áreas iguais.





Dados: $A_H = A_D$

Pede-se: $\dfrac{AB}{MN}$

Solução:

Sabemos que: $A_H = 6\,AB^2$ e que $A_O = 8\,\dfrac{MN^2\sqrt{3}}{4} = 2\,MN^2\sqrt{3}$

Então $6\,AB^2 = 2\,MN^2\sqrt{3}$

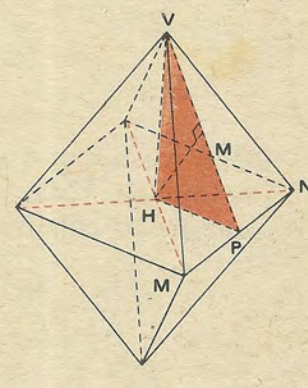
$$\frac{AB^2}{MN^2} = \frac{2\sqrt{3}}{6} \Rightarrow \frac{AB}{MN} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

Resposta: $\boxed{\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}}{3}}}$

6 Calcular a distância do centro de um octaedro regular às faces, em função da aresta a do poliedro.

Dados: $MN = a$

Pede-se: MH



Solução:

A distância MH ocupa a posição de altura relativa à hipotenusa do Δ VPH, onde conhecemos:

$$PH = \frac{a}{2}, \quad VH = \frac{a\sqrt{2}}{2} \quad e \quad VP = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Por uma relação métrica no Δ retângulo (geometria plana), teremos

$$MH \cdot VP = VH \cdot PH \quad \therefore \quad MH = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

Resposta: $\boxed{MH = \frac{a\sqrt{6}}{6}}$

7 Calcular o número de vértices de um poliedro que tem três faces triangulares, uma quadrangular, uma pentagonal e duas hexagonais.

Dados: F e A da relação de Euler

Pede-se: V

Solução:

O número de faces do poliedro é $F = 3 + 1 + 1 + 2 = 7$.
Como sabemos da parte inicial

$$A = \frac{nF}{2} = \frac{1}{2}(3 \cdot 3 + 4 + 5 = 2 \cdot 6) = 15$$

Substituindo na relação de Euler, teremos:

$$F + V = A + 2 \quad \Longrightarrow \quad V = 10$$

Resposta: $\boxed{V = 10}$

8 O tetraexaedro é um sólido limitado por 4 faces triangulares e 6 hexagonais, todas regulares. Calcular o número de arestas e o de vértices do poliedro.

Dados: $F = 10$

Pede-se: $A = ?$
$V = ?$

Solução:

Sabemos da parte inicial que o volume do octaedro em função da aresta é

$$V_o = \frac{a^3\sqrt{2}}{3} \qquad (1)$$

Para que esta expressão fique em função da aresta do cubo (que coincide com a altura do octaedro), teremos

$\ell^2 = 2a^2$ $\qquad \ell \longrightarrow$ aresta do cubo

$\Longrightarrow a = \dfrac{\ell}{\sqrt{2}}$ $\qquad a \longrightarrow$ aresta do octaedro regular aplicando na expressão (1), teremos:

$$V_o = \frac{\left(\dfrac{\ell}{\sqrt{2}}\right)^3 \sqrt{2}}{3} = \frac{\ell^3}{6} \qquad (2)$$

o volume do cubo em função da aresta é

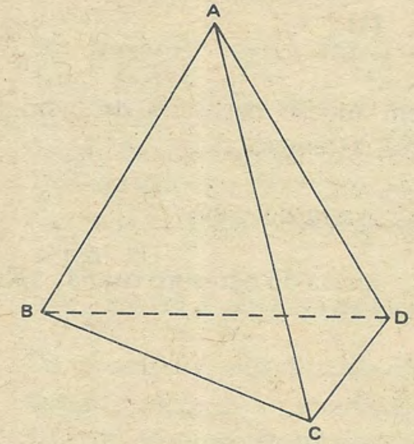
$$V_c = \ell^3 \qquad (3)$$

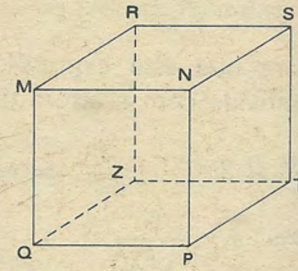
a razão procurada será:

$$\frac{V_c}{V_o} = \frac{\ell^3}{\dfrac{\ell^3}{6}} = 6$$

Resposta: $\boxed{\dfrac{V_c}{V_o} = 6}$

4 Encontrar a relação entre os volumes do tetraedro e do hexaedro regulares, tendo arestas iguais.





Dados: $\overline{AB} = a$

$\overline{MN} = a$

Pede-se: $\dfrac{V_T}{V_H} = ?$

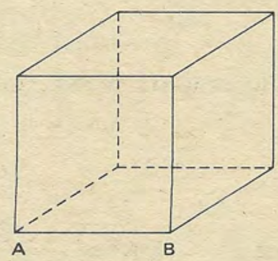
Solução:

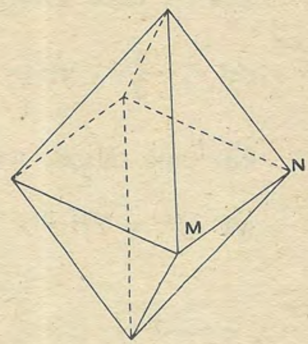
Sabemos da parte inicial que $V_T = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$ e que $V_H = a^3$

Logo: $$\frac{V_T}{V_H} = \frac{\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}}{a^3} = \frac{\sqrt{2}}{12}$$

Resposta: $\boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{12}}$

5 Determinar a relação das arestas de um hexaedro e de um octaedro regulares tendo áreas iguais.





Dados: $A_H = A_D$

Pede-se: $\dfrac{AB}{MN}$

Solução:

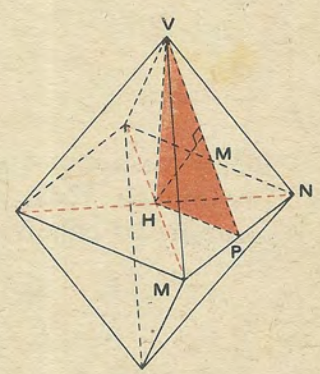
Sabemos que: $A_H = 6\,AB^2$ e que $A_O = 8\,\dfrac{MN^2\sqrt{3}}{4} = 2\,MN^2\sqrt{3}$

Então $6\,AB^2 = 2\,MN^2\sqrt{3}$

$$\frac{AB^2}{MN^2} = \frac{2\sqrt{3}}{6} \implies \frac{AB}{MN} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

Resposta: $\boxed{\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}}{3}}}$

6 Calcular a distância do centro de um octaedro regular às faces, em função da aresta a do poliedro.



Dados: $MN = a$

Pede-se: MH

Solução:

A distância MH ocupa a posição de altura relativa à hipotenusa do Δ VPH, onde conhecemos:

$$PH = \frac{a}{2}, \quad VH = \frac{a\sqrt{2}}{2} \text{ e } VP = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Por uma relação métrica no Δ retângulo (geometria plana), teremos

$$MH \cdot VP = VH \cdot PH \quad \therefore \quad MH = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

Resposta: $\boxed{MH = \frac{a\sqrt{6}}{6}}$

7 Calcular o número de vértices de um poliedro que tem três faces triangulares, uma quadrangular, uma pentagonal e duas hexagonais.

Dados: F e A da relação de Euler

Pede-se: V

Solução:

O número de faces do poliedro é $F = 3 + 1 + 1 + 2 = 7$.
Como sabemos da parte inicial

$$A = \frac{nF}{2} = \frac{1}{2}(3 \cdot 3 + 4 + 5 = 2 \cdot 6) = 15$$

Substituindo na relação de Euler, teremos:

$$F + V = A + 2 \quad \Longrightarrow \quad V = 10$$

Resposta: $\boxed{V = 10}$

8 O tetraexaedro é um sólido limitado por 4 faces triangulares e 6 hexagonais, todas regulares. Calcular o número de arestas e o de vértices do poliedro.

Dados: $F = 10$

Pede-se: $A = ?$
$V = ?$

Solução:

Da parte inicial, concluímos que:

$$A = \frac{nF}{2} = \frac{4 \times 3 + 6 \times 6}{2} = 24$$

Pela relação de Euler, temos:

$$F + V = A + 2 \implies 10 + V = 24 + 2 \therefore V = 16$$

Resposta: $\boxed{\begin{array}{l} A = 24 \\ V = 16 \end{array}}$

9 Um poliedro convexo de 6 vértices apresenta faces triangulares e faces quadrangulares, sabendo-se que o número de faces triangulares excede de 2 o número de faces quadrangulares. Pede-se o número de faces e o de arestas do referido poliedro (E.E.U.P. – 1962).

Dados: $V = 6$
$F = x + y$
$x = y + 2$

Pede-se: $A = ?$
$F = ?$

Solução:

Sabemos da parte inicial que:

$$A = \frac{nF}{2} = \frac{3x + 4y}{2}$$

Pela relação de Euler, tiramos:

$$V + F = A + 2 \quad \text{ou seja} \quad 6 + x + y = \frac{4y + 3x}{2} + 2$$

$$\therefore \; 2y + x = 8 \qquad (1)$$

porém $x = y + 2$ (dado), substituindo em (1)

$$\therefore \; y = 2 \implies x = 4$$

Finalmente:

$$F = 2 + 4 = 6$$

$$A = \frac{4 \times 2 + 3 \times 4}{2} = 10$$

Resposta: $\boxed{\begin{array}{l} F = 6 \\ A = 10 \end{array}}$

10 Um poliedro convexo tem 16 faces. De um dos seus vértices partem 5 arestas, de 5 outros vértices partem 4 arestas e, finalmente, de cada um dos vértices restantes partem 3 arestas. Calcule o número de arestas desse poliedro (EPUC, Rio – 1961).

Dados: $F = 16$
$V = 6 + x$

Pede-se: $A = ?$

Solução:

Sabemos do formulário que:

$$A = \frac{m \cdot V}{2} = \frac{5 + 5 \times 4 + 3x}{2} = \frac{25 + 3x}{2}$$

e que: $V = 1 + 5 + x = 6 + x$ (dado).

Substituindo na relação de Euler, teremos:

$$F + V = A + 2, \quad \text{ou seja,} \quad 16 + 6 + x = \frac{25 + 3x}{2} + 2$$

$$\Longrightarrow x = 15$$

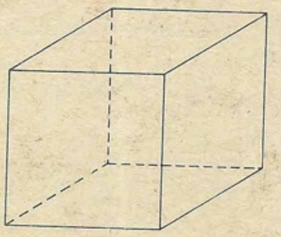
Substituindo na expressão da aresta, teremos:

$$A = \frac{25 + 3 \times 15}{2} = 35$$

Resposta: $\boxed{A = 35}$

PROBLEMAS PROPOSTOS

11 Um hexaedro regular tem $96m^2$ *de área total. De quanto se deve* aumentar sua aresta para que seu volume se torne igual a $216m^3$.



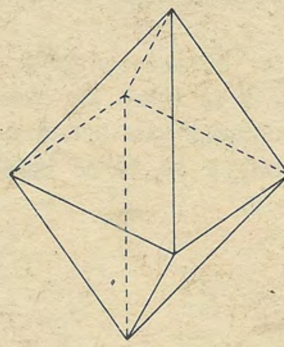
Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

12 Calcular a área e o volume de um octaedro regular, em função da sua diagonal d.



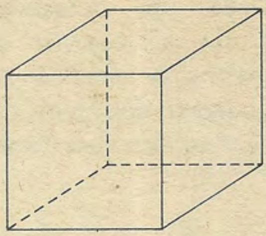
Dados:

Pede-se

Solução:

Resposta:

13 Em um hexaedro regular a aresta mede a. Calcular em função da mesma a área lateral, total e o volume da pirâmide que tem o vértice no centro do hexaedro regular e como base qualquer das suas faces.



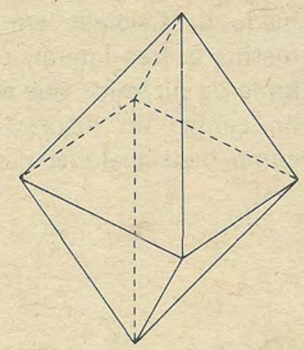
Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

14 Dado um octaedro regular de aresta a, calcular por meio da mesma a área e o volume do poliedro que tem os vértices nos centros das suas faces.



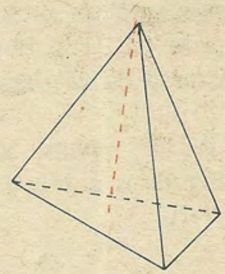
Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

15 Um tetraedro regular tem arestas iguais a 6cm. Dê a distância do centro da base às arestas laterais (Eng. UEG — 1967).



Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

16 Com cada uma das bases de um prisma faz-se coincidir a base congruente de uma pirâmide. No sólido obtido, o número de faces excede de 17 o número de vértices. Calcular o número de faces, de arestas e de vértices do sólido.

Sugestão: Num sólido assim constituído o número de faces quadrangulares é 1/3 do total.

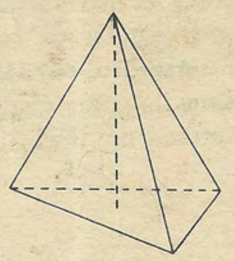
Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

17 Calcule a altura do tetraedro regular de volume igual a $\sqrt{3}\,cm^3$ (Eng. UEG – 1966).



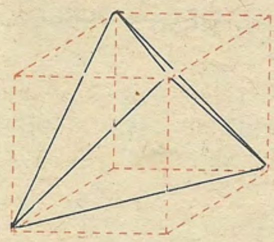
Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

18 Escolha 4 dos vértices de um hexaedro regular de modo a formar um tetraedro regular. Sendo V o volume do cubo, qual o volume desse tetraedro? (EPUSP – 1965).



Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

20 Num poliedro convexo há 7 faces quadrangulares e as demais são triangulares. O número de arestas é o quíntuplo do número de faces triangulares. Quantas faces tem o poliedro?

Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

VERIFIQUE O QUE APRENDEU, RESOLVENDO O TESTE

1. O número de arestas e de vértices de um poliedro que possui quatro faces triangulares e uma quadrangular é:

   a) $A = 5 \quad V = 8$
   b) $A = 10 \quad V = 15$
   c) $A = 15 \quad V = 10$
   d) $A = 12 \quad V = 18$
   e) $A = 8 \quad V = 5$

2. O cubo-octaedro é o sólido limitado por 6 quadrados e 8 triângulos equiláteros, sendo cada lado de um quadrado também lado de triângulo equilátero. Este poliedro possui (A = arestas e V = vértices):

   a) $A = 14 \quad V = 24$
   b) $A = 12 \quad V = 24$
   c) $A = 24 \quad V = 14$
   d) $A = 24 \quad V = 12$
   e) nenhuma das respostas é correta

3. Dos poliedros convexos e regulares, o que possui o maior número de vértices é o:

   a) tetraedro
   b) hexaedro
   c) octaedro
   d) dodecaedro
   e) icosaedro

4. Dado um octaedro regular, considere quatro tetraedros regulares construídos sobre quatro faces alternadas do octaedro e a ele exteriores. Sendo V o volume de cada tetraedro, pode-se afirmar que o volume V' do poliedro assim obtido é igual a:

   a) $V' = 4V$
   b) $V' = 3V$
   c) $V' = 8V$
   d) $V' = 6V$
   e) nenhuma das respostas anteriores

5 Dado um hexaedro regular, os centros de suas faces são os vértices de um octaedro regular. Sendo a área total do hexaedro regular igual a $216 cm^2$, então o volume do octaedro é igual a:

a) $36\sqrt{2} cm^3$
b) $36 cm^3$
c) $72 cm^3$
d) $54 cm^3$
e) nenhuma das respostas é correta

6 Um poliedro tem 8 faces e o. número de vértices é um número compreendido entre 6 e 14. O número de arestas pode variar entre os valores:

a) $12 < V < 20$
b) $6 < V < 14$
c) $13 < V < 19$
d) $7 < V < 13$
e) nenhuma das respostas

7 A razão entre as áreas totais de um hexaedro regular e de um octaedro regular de arestas iguais: (EPUC, Rio – 1962)

a) $3/4$
b) $\sqrt{3/2}$
c) $\sqrt{3}$
d) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
e) $\sqrt{2/3}$

8 Um cubo tem de área total $150 m^2$. Calcule o volume de uma pirâmide quadrangular regular que tem como vértice o centro de uma das faces desse cubo e como base a face oposta a esse vértice: (EFE – 1962)

a) $25 cm^3$
b) $125 cm^3$
c) $\dfrac{125}{3} cm^3$
d) $75 cm^3$
e) nenhuma das respostas

9 Certo poliedro regular apresenta as seguintes características:

- suas faces não admitem diagonais
- apresenta 30 arestas
- sua área total vale $2a^2\sqrt{3}$

Esse poliedro:

a) é o octaedro
b) é o icosaedro
c) é o dodecaedro
d) é o tetraedro
e) não existe

10 Um cubo de aresta **a** é seccionado por um plano que contém a diagonal de uma das faces e passa pelo ponto médio de uma aresta da face oposta. Calcule o volume do menor dos sólidos resultantes: (IME – 1971)

a) $2(a^3 - 1)$

b) $\dfrac{1}{3}a^3$

c) $\dfrac{1}{3}(a^3 - 1)$

d) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}(1 - a^3)$

e) nenhuma das respostas é correta

RESPOSTAS DA UNIDADE 4

PROBLEMAS PROPOSTOS

11 2m

12 $A = \sqrt{3}d^2 \qquad V = \dfrac{d^3}{6}$

13 $A_L = \sqrt{2}a^2 \qquad A_T = (1 + \sqrt{2})a^2 \qquad V = \dfrac{a^3}{6}$

14 O poliedro é um cubo.

$$A = \frac{4}{3}a^2 \qquad V = \frac{2\sqrt{2}}{27}a^3$$

15 $2\sqrt{2}$cm

16 $F = 57 \qquad A = 95 \qquad V = 40$

17 2cm

18 $\dfrac{V}{3}$

19 $F = 27$

20 $F = 11$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a						■				
b					■					
c				■			■	■		
d		■	■							
e	■								■	■

unidade 5

cone e cilindro

O QUE VOCÊ PRECISA SABER

a) Os sólidos que estudaremos nessa unidade, o **cilindro** e o **cone**, serão obtidos respectivamente de um prisma regular e de uma pirâmide regular, cuja base tendeu para um número infinito de lados, tendo como limite um círculo. Surge de imediato um formulário derivado do prisma e da pirâmide apropriados aos sólidos em apreço.