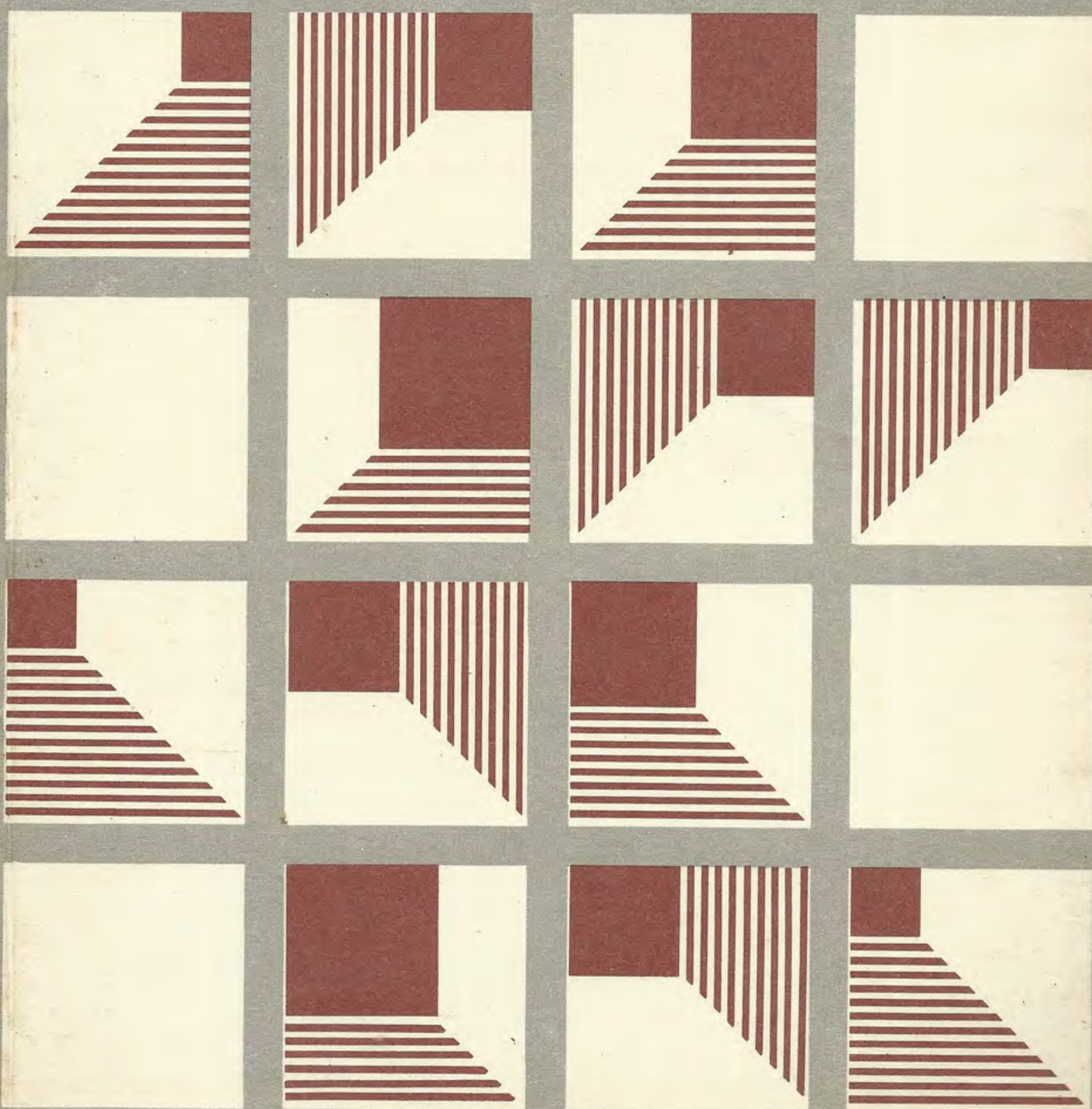
área ciências

Cadernos MEC

Geometria 2



Sady Carvalho

Cadernos MEC

Geometria 2

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CULTURA
FENAME - FUNDAÇÃO NACIONAL DE MATERIAL ESCOLAR
1977

1ª edição/1ª tiragem — 1976
Impresso no Brasil

Sady Carvalho

– Licenciado em Matemática pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade do Estado da Guanabara
– Professor de Matemática do Colégio Nova Friburgo da Fundação Getúlio Vargas

Carvalho, Sady, 1935 -

C331g Geometria 2. Rio de Janeiro, FENAME, 1977.
226 p. ilust. 23 cm (Cadernos MEC. Sér. Ciências)

Bibliografia.

1. Geometria no espaço (2º grau) — Problemas, exercícios etc. I. Brasil. Fundação Nacional de Material Escolar, ed. II. Título. III. Série.

77-007 MEC/FENAME/RJ CDD — 513.2

Esta edição foi publicada pela
FENAME – Fundação Nacional de Material Escolar, sendo
Presidente da República Federativa do Brasil
Ernesto Geisel

Ministro de Estado da Educação e Cultura
Ney Braga

Secretário-Geral do MEC
Euro Brandão

Secretário de Apoio Administrativo do MEC
Hélio Pontes

Diretor Executivo da FENAME
Augusto Luiz Duarte Lopes Sampaio

sumário

apresentação

Aos Colegas

Adotamos para o Caderno MEC — Geometria 2 uma distribuição didática em unidades, de tal sorte que cada uma contém:

1.º) *O QUE VOCÊ PRECISA SABER:* com pequenas definições e algumas demonstrações e um formulário para a resolução de problemas.

2.º) *EXERCÍCIOS RESOLVIDOS:* onde são apresentadas soluções para alguns exercícios.

3.º) *PROBLEMAS PROPOSTOS:* cujas soluções devem obedecer ao roteiro apresentado nos exercícios resolvidos.

4.º) *VERIFIQUE O QUE APRENDEU:* sob a forma de teste múltipla escolha envolvendo sempre que possível questões dadas em vestibulares.

Com essa distribuição, acreditamos possam os professores desenvolver seus programas de geometria no espaço, nos cursos de 2.º grau.

Aos Estudantes de Matemática

Todos os exercícios do caderno apresentam resposta.

Os exercícios resolvidos são modelos de soluções para que você possa seguir a nossa idéia.

Os exercícios propostos são acompanhados das figuras, que em muitos casos facilitarão a resolução.

Para que você possa se adestrar na resolução de testes, eles são apresentados no final de cada unidade acompanhados de um gabarito com as respostas.

Sady Carvalho

unidade 1

prismas

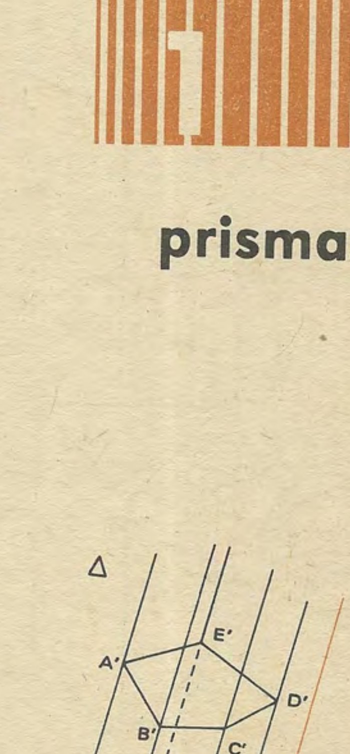
O QUE VOCÊ PRECISA SABER

a) Por **superfície prismática** imaginamos uma superfície gerada pelo movimento de uma região poligonal que se desloca paralela a si mesma de uma posição para outra.
O sólido limitado na superfície prismática por duas das regiões poligonais (desde que não seja vazia) é denominado **prisma**.

b) $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, . . . , $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$ . . . são **arestas das bases**; $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, . . . são as **arestas laterais**.

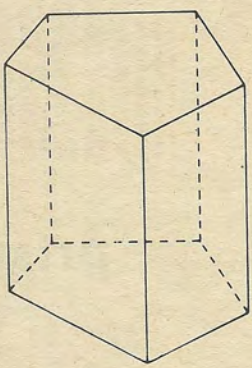
c) A região poligonal ABCDE chama-se **base inferior** e A′ B′ C′ D′ E′, **base superior**.

d) Chamamos **seção transversal de um prisma** a interseção deste com um plano paralelo à sua base desde que a interseção não seja vazia.

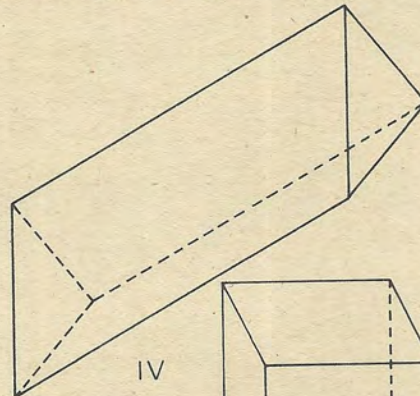


e) Por **superfície lateral de um prisma** entendemos a reunião dos paralelogramos que constituem as suas faces laterais. Conseqüentemente, a **superfície total** será a reunião da superfície lateral e suas bases.

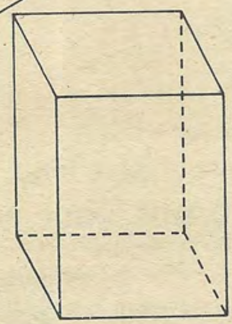
f) Como uma figura bem construída é fundamental à resolução de um problema de geometria, mostraremos alguns modelos de figuras de prismas:



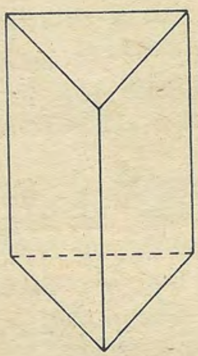
I



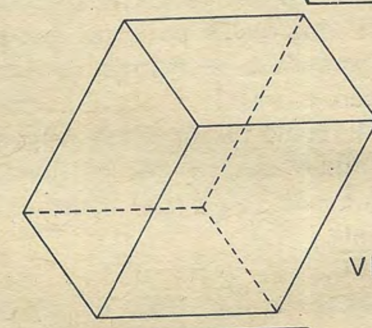
IV



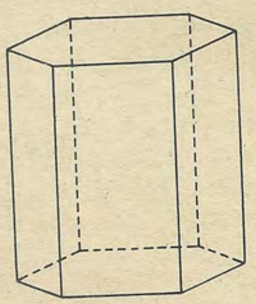
V



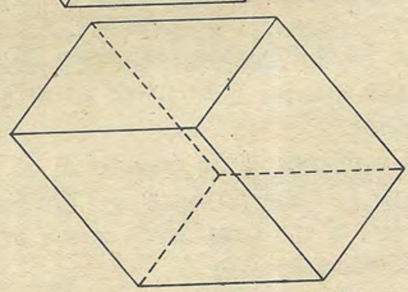
II



VI



III



VII

Os **prismas** (I), (II), (III) e (V) são **retos.** Os **prismas** (IV), (VI) e (VII) são **oblíquos.**

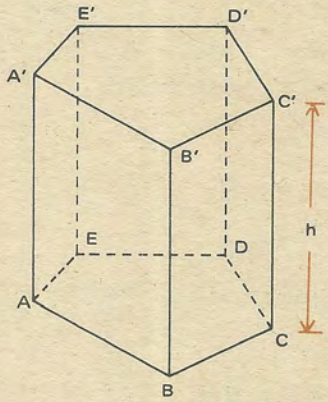
Os prismas (V), (VI) e (VII) são chamados **paralelepípedos**, pois as bases são paralelogramos. Por suas inúmeras aplicações, os paralelepípedos serão estudados na unidade seguinte.

g) Um **prisma** é dito **regular** quando é reto e suas bases são polígonos regulares.

h) Vamos dar um pequeno formulário que será utilizado na resolução dos problemas.

Área lateral

É o perímetro da base multiplicado pela altura.



$$\boxed{A_L = 2p \cdot h}$$

$2p$ = perímetro
h = altura

Área total

É a área lateral mais o dobro da área da base.

$$\boxed{A_T = A_L + 2 \cdot A_B}$$

A_B = área da base.

Volume

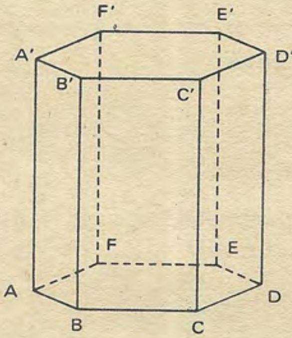
É o produto da área da base pela altura.

$$\boxed{V = A_B \times h}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Para o cálculo das áreas dos polígonos regulares em função do raio do círculo inscrito e circunscrito ao polígono, o estudante deve consultar: Cadernos MEC — Geometria 1.

1 Calcular a área total de um prisma hexagonal regular em que uma aresta lateral mede $4\sqrt{3}$m e uma aresta da base mede 2m.



Dados: $AA' = 4\sqrt{3}m$
$AB = 2m$

Pede-se: $A_T = ?$

Solução:

1. $A_T = 2ph + 2A_B$ — Fórmula para o cálculo da área total.

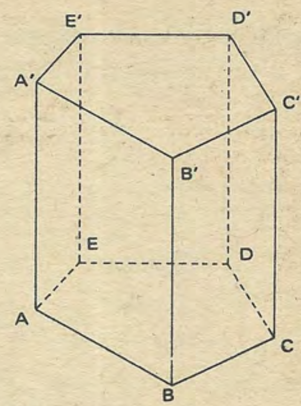
2. $A_B = p \cdot a = 3 \cdot 2 \cdot \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ — Fórmula para o cálculo da área de um polígono regular.

3. $A_L = 2p \cdot h = 6 \cdot 2 \cdot 4\sqrt{3} = 48\sqrt{3}$ — Área lateral.

4. $A_T = 48\sqrt{3} + 12\sqrt{3} = 60\sqrt{3}\ m^2$

Resposta: $\boxed{60\sqrt{3}\ m^2}$

2 Um prisma pentagonal regular tem 1,8m de altura e a aresta da base 0,6m de comprimento. Calcular a área desse prisma.



Dados: $AB = 0{,}6m$
$AA' = 1{,}8m$

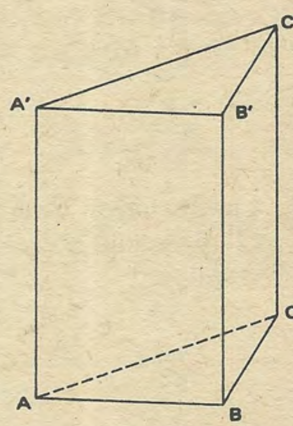
Pede-se: $A_L = ?$

Solução:

$A_L = 2p \cdot h = 5 \cdot 0{,}6 \cdot 1{,}8 = 3{,}0 \cdot 1{,}8 = 5{,}4m^2$

Resposta: $5{,}4m^2$

3 A aresta lateral de um prisma é 1,2m e a sua base é um triângulo cujos lados medem 2,6m, 3,2m e 3,8m. Calcular a área lateral do sólido.



Dados: $AA' = 1{,}2m$
$AB = 3{,}8m$
$BC = 3{,}2m$
$AC = 2{,}6m$

Pede-se: $A_L = ?$

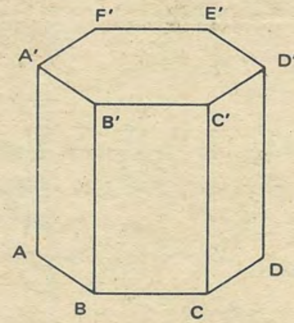
Solução:

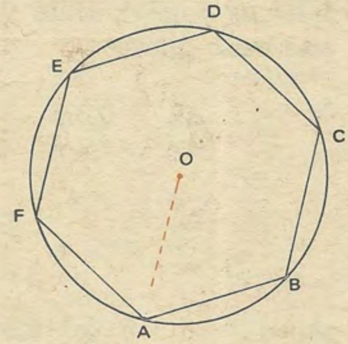
Área da face ABA'B' = 3,8 x 1,2 = 4,56
Área da face BCB'C' = 3,2 x 1,2 = 3,84
Área da face ACA'C' = 2,6 x 1,2 = 3,12

Área lateral 11,52

Resposta: 11,52m

4 Calcular a área lateral de um prisma reto de 6m de altura e cuja base é um hexágono regular de 0,24m de raio.





Dados: $AA' = 6m$
$OA = R = 0,24m$

Pede-se: $A_L = ?$

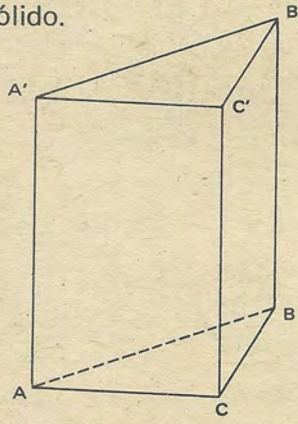
Solução:

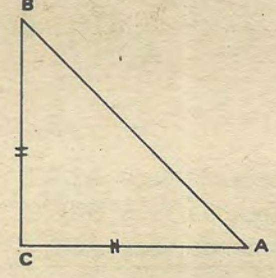
Como $AB = OA = R = 0,24m$, teremos então

$A_L = 6 \times AB \times AA' = 6 \times 0,24 \times 6 = 8,64m^2$

Resposta: $\boxed{8,64m^2}$

5 A aresta lateral de um prisma tem 6cm e a seção transversal é um triângulo retângulo isósceles cuja hipotenusa tem 5cm. Calcular a área lateral do sólido.





Dados: $AC = BC$
$AB = 5cm$
$AA' = 6cm$

Pede-se: $A_L = ?$

Solução:

1. Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$$

$$2AC^2 = 5^2$$

$$AC = \sqrt{\frac{25}{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

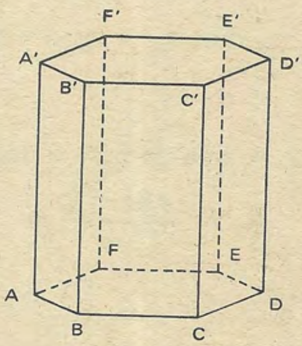
2. A área lateral será:

$$A_L = 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AA'} + \overline{AB} \cdot \overline{AA'} = 2 \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2} \cdot 6 + 5 \cdot 6 =$$

$$= 30\sqrt{2} + 30 = 30(\sqrt{2} + 1) = 72{,}42cm^2$$

Resposta: $\boxed{72{,}42cm^2}$

6 Calcular a área total de um prisma hexagonal regular de 2m de altura e 1,5m de aresta da base.



Dados: $AA' = 2m$
$AB = 1{,}5m$

Pede-se: $A_T = ?$

Solução:

1. A área lateral, será:

$$A_L = 2p \cdot h = 6 \times 1{,}5 \times 2 = 18m^2$$

2. A área da base:

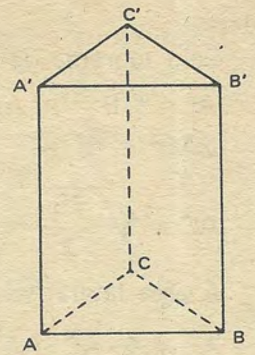
$$A_B = p \cdot a = 3 \cdot \overline{AB} \cdot \frac{\overline{AB}\sqrt{3}}{2} = \frac{3 \cdot (1{,}5)^2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{6{,}75\sqrt{3}}{2}$$

3. A área total será:

$$A_T = 18 + 2 \cdot \frac{6{,}75\sqrt{3}}{2} = (18 + 6{,}75\sqrt{3})m^2 = 29{,}69m^2$$

Resposta: $\boxed{29{,}69m^2}$

7 Um prisma triangular regular tem a aresta da base igual à altura. Calcular a aresta lateral desse prisma sabendo-se que a sua área total é igual a 386,60cm².



Dados: $\overline{AB} = \overline{AA'} = h$

$A_T = 386{,}60\text{cm}^2$

Pede-se: $\overline{AA'} = ?$

Solução:

1. Como sabemos:

$$A_T = A_L + 2A_B$$

porém $A_L = 2p \cdot h = 3\overline{AB} \cdot \overline{AB} = 3\overline{AB}^2$

2. A área da base é dada por:

$$A_B = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4}$$

3. Teremos então:

$$A_T = 3\,\overline{AB}^2 + 2 \cdot \frac{\overline{AB}^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6\,\overline{AB}^2 + \overline{AB}^2\sqrt{3}}{2} = \overline{AB}^2 \left(\frac{6+\sqrt{3}}{2}\right)$$

4. Igualando (3) ao dado do problema, teremos:

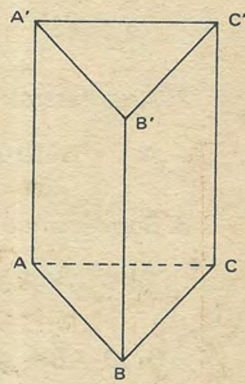
$$386{,}60 = AB^2\left(\frac{6+\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\therefore AB = \sqrt{\frac{2 \times 386{,}60}{6+\sqrt{3}}}$$ fazendo $\sqrt{3} = 1{,}732$

$$\text{virá } AB = \sqrt{\frac{773{,}20}{7{,}732}} \quad \therefore \quad AB = \sqrt{100} = 10$$

Resposta: $\boxed{AB = 10\text{cm}}$

8 Em um prisma triangular regular, todas as arestas são iguais e a área lateral é 8dm^2. Calcular o volume.



Dados: $\overline{AB} = \overline{AA'} = \ldots$

$A_L = 8\text{dm}^2$

Pede-se: $V = ?$

Solução:

Como sabemos:

$A_L = 3 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AA'} = 3 \cdot \overline{AB}^2$

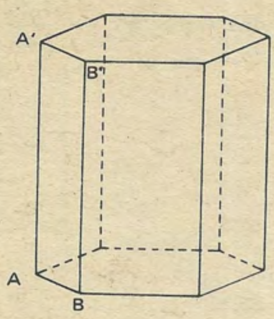
mas $8 = 3 \cdot \overline{AB}^2 \quad \therefore \quad AB^2 = 8/3 \quad \therefore \quad AB = \sqrt{8/3}$

O volume é então:

$$V = \frac{\overline{AB}^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \overline{AB} = \frac{8/3\sqrt{3}}{\sqrt{4}} \cdot \frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{3} = 1{,}885\text{dm}^3$$

Resposta: $\boxed{V = 1{,}885\text{dm}^3}$

9 Em um prisma hexagonal regular a altura tem 10cm e a área lateral é o quádruplo da área da base. Calcular o volume.



Dados: $AA' = 10cm$
$A_L = 4 \cdot A_B$

Pede-se: $V = ?$

Solução:

1. Área da base:

$$A_B = p \cdot a = 3 \cdot AB \cdot \frac{\overline{AB}\sqrt{3}}{2}$$

2. Área lateral:

$$A_L = 6 \cdot 10 \cdot \overline{AB}$$

3. Substituindo nos dados do problema, teremos

$$A_L = 4 \cdot A_B$$

$$6 \cdot 10 \cdot \overline{AB} = 4 \cdot \frac{3 \cdot \overline{AB}^2 \sqrt{3}}{2} \quad \therefore \quad 10 = \overline{AB}\sqrt{3} \quad \therefore$$

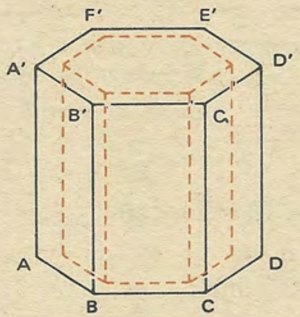
$$AB = \frac{10}{\sqrt{3}} \quad \therefore \quad AB = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

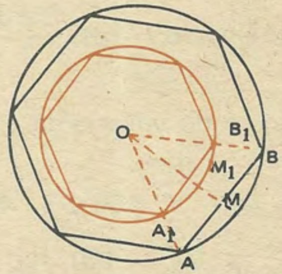
4. O volume será:

$$V = \frac{3 \cdot \overline{AB}^2 \sqrt{3}}{2} \cdot \overline{AA'} = 3 \cdot \left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10 = \frac{1732}{2} = 866$$

Resposta: $\boxed{V = 866cm^3}$

10 Uma torre hexagonal regular de alvenaria tem 40m de altura. A espessura da parede é de 1m e o lado da base mede exteriormente 8m. Calcular o volume da alvenaria.





Dados: $AB = 8m$
$MM_1 = 1m$

Pede-se: Volume da alvenaria

Solução:

1. Cálculo do lado da base interna ($\overline{A_1B_1}$):

Sabemos que AB = 8 (dado) e também a diferença entre os apótemas $\overline{MM_1} = \overline{OM} - \overline{OM_1} = 1$ (dado).

Porém,

$$OM = \frac{8\sqrt{3}}{2} \quad \text{(apótema do lado externo).}$$

Então,

$$\frac{8\sqrt{3}}{2} - OM_1 = 1 \quad \therefore \quad OM_1 = \frac{8\sqrt{3} - 2}{2} = 4\sqrt{3} - 1$$

(apótema do lado interno).

A semelhança entre as bases nos fornece:

$$\frac{OM_1}{OM} = \frac{A_1B_1}{AB} \text{ ou } \frac{4\sqrt{3} - 1}{\frac{8\sqrt{3}}{2}} = \frac{A_1B_1}{8} \therefore A_1B_1 = \frac{8\sqrt{3} - 2}{\sqrt{3}}$$

2. Cálculo da área da base:

$$\text{área interna} = 3 \cdot \left(\frac{8\sqrt{3} - 2}{\sqrt{3}} \right) \cdot (4\sqrt{3} - 1) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} (98 - 16\sqrt{3})$$

$$\text{área externa} = 3 \cdot 8 \cdot \frac{8\sqrt{3}}{2} = 96\sqrt{3}$$

3. Cálculo do volume da alvenaria:

$$V = V_e - V_i = 96\sqrt{3} \cdot 40 - \frac{3}{\sqrt{3}} (98 - 16\sqrt{3}) \cdot 40 =$$

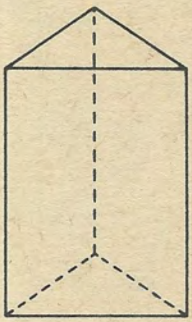
$$= 3840\sqrt{3} - \frac{120}{\sqrt{3}} (98 - 16\sqrt{3}) = 1745{,}9\text{m}^3$$

Resposta: $\boxed{V = 1745{,}9\text{m}^3}$

PROBLEMAS PROPOSTOS:

Nos problemas a seguir, procure resolvê-los da mesma maneira como encaminhamos a série anterior.

11 O volume de um prisma, de 6dm de altura e que tem por base um triângulo equilátero, é $500m^3$. Calcular a aresta da base.



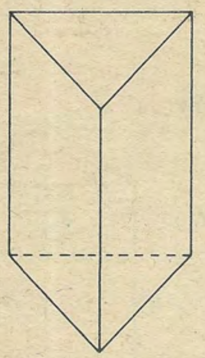
Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

12 Achar o volume de um prisma triangular regular cuja altura mede $12\sqrt{3}$ e cuja base está inscrita em um círculo de $2\,\pi$ m de perímetro.



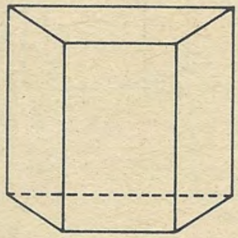
Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

13 A seção transversal de um prisma é um trapézio isósceles cujas bases medem 20cm e 12cm e cuja altura mede 3cm. Sabendo que a área lateral desse prisma mede 840cm^2, calcule o seu volume (ENE – 1961).



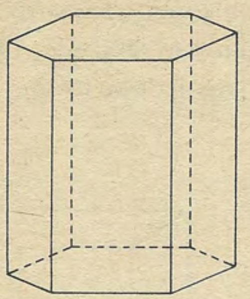
Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

14 Dá-se um prisma hexagonal regular. Sabemos que a altura do sólido é igual a 2/3 do lado da base e que a soma de todas as arestas vale 96cm. Achar o volume do sólido.



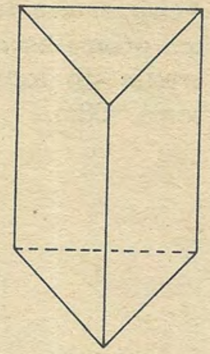
Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

15 O volume de um prisma triangular regular é $V = 129,900 m^3$ e a altura os 4/5 do perímetro da base. Achar a área lateral do prisma.



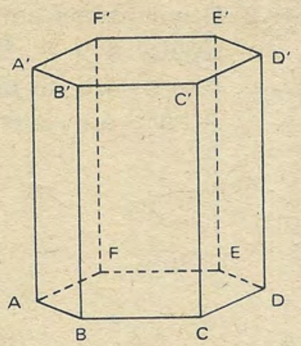
Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

16 Achar a área total e o volume de um prisma hexagonal regular cujas arestas são todas iguais e têm por soma 108m.



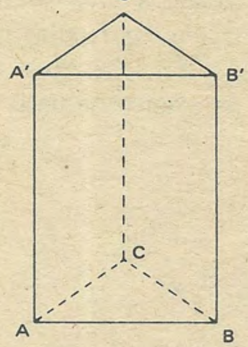
Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

17 Um prisma triangular regular tem a aresta da base igual à altura e a área lateral tem $40cm^2$. Qual o volume?



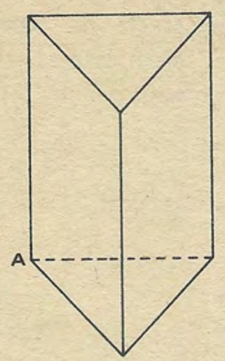
Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

18 Achar a área total de um prisma triangular regular cujo volume vale $4\sqrt{3}\,m^3$, sendo a altura os 2/3 do perímetro da base.



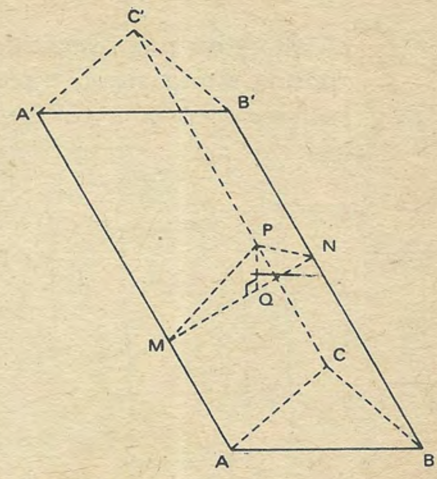
Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

19 Demonstrar que o volume de um prisma triangular é igual ao semi-produto da área de uma face lateral pela sua distância à aresta oposta.

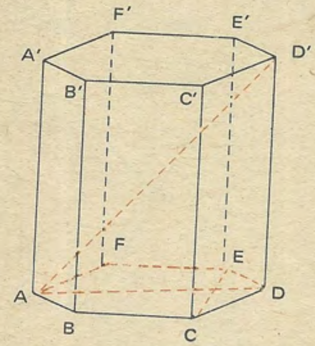


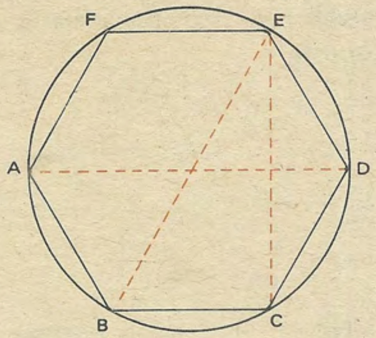
Sugestão:

MNP → seção normal
PQ → distância da aresta CC' à face ABA'B'
MN → altura da face ABA'B'

Demonstração:

20 A altura de um prisma hexagonal regular é **h**. As diagonais maiores do prisma são iguais ao triplo das diagonais menores da base. Calcule o volume do prisma (EFE – 1960).





Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

VERIFIQUE O QUE APRENDEU, RESOLVENDO O TESTE

1. O volume de um prisma hexagonal de 3dm de altura, cuja área lateral é igual à área da base, mede:

a) $36\sqrt{3}\ dm^3$
b) $72\sqrt{3}\ dm^3$
c) $216\sqrt{3}\ dm^3$
d) $144\sqrt{3}\ dm^3$
e) nenhuma das respostas anteriores

2. Num prisma triangular regular, a área lateral é o quádruplo da área da base, cujo raio do círculo circunscrito tem 2dm. O volume desse prisma será:

a) $10{,}392\ dm^3$
b) $10\sqrt{3}\ dm^3$
c) $5{,}252\ dm^3$
d) $10{,}504\ dm^3$
e) nenhuma das respostas anteriores

3. A área total de um prisma reto de 10cm de altura e cuja base é um triângulo retângulo isósceles de perímetro igual a 100cm é igual a: (EFE – 1957)

a) $900\sqrt{3}\ dm^2$
b) $900\ cm^2$
c) $1000\ cm^2$
d) $1900\ cm^2$
e) NRA

4 O volume de um prisma triangular regular em que uma aresta da base mede 4m e que a altura do polígono da base é a metade da altura do prisma é igual a:

a) $48\ m^3$
b) $16\ m^3$
c) $64\ m^3$
d) $24\ m^3$
e) NRA

5 Um prisma oblíquo de 20cm de altura e $60m^2$ de área da base tem 30cm de aresta lateral. A área de uma seção normal será igual a:

a) $30\ cm^2$
b) $40\ cm^2$
c) $15\ cm^2$
d) $10\ cm^2$
e) NRA

6 Em um prisma hexagonal regular a altura mede $10\sqrt{3}$ e a área lateral é o quádruplo da área da base. O volume do prisma será igual a:

a) $900\ m^3$
b) $5400\ m^3$
c) $100\ m^3$
d) $4500\ m^3$
e) NRA

7 Em um prisma triangular regular sabemos que a diagonal de uma face lateral mede 10dm e, ainda, que a razão do lado da base para a altura é dada pelo número 4/3. O volume do prisma é dado por:

a) $321\ dm^3$
b) $96\sqrt{3}\ dm^3$
c) $9\sqrt{63}\ dm^3$
d) $963\ dm^3$
e) NRA

8 O volume de um prisma triangular regular, cuja altura é igual ao perímetro da base, sendo o apótema desta igual a 2dm, mede:

a) 216 dm^3
b) 64 dm^3
c) 432 dm^3
d) 32 dm^3
e) NRA

9 O volume de um prisma hexagonal regular cuja diagonal da face lateral mede 13cm, sendo o apótema da base igual a $6\sqrt{3}$cm, é igual a:

a) $108\sqrt{3}$ cm^3
b) $10{,}8\sqrt{3}$ cm^3
c) $1080\sqrt{3}$ cm^3
d) $10\sqrt{83}$ cm^3
e) NRA

10 O lado da base de um prisma hexagonal regular cuja altura é igual ao apótema da base e que a área total mede $96\sqrt{3}$$dm^2$ é igual a:

a) 4 dm
b) 32 dm
c) 48 dm
d) 16 dm
e) NRA

RESPOSTAS DA UNIDADE 1

PROBLEMAS PROPOSTOS

11 13,8dm

12 $27m^3$

13 $960cm^3$

14 $216\sqrt{3}\,cm^3$

15 $180m^2$

16 $A_T = (216 + 108\sqrt{3})m^2$ e $V = 324\sqrt{3}\,m^3$

17 $\frac{20\sqrt{10}}{3} = cm^3$

18 $(2\sqrt{3} + 24)m^2$

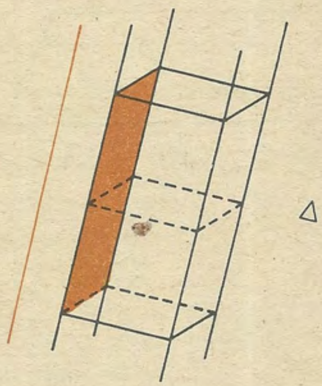
20 $\frac{3h^2\sqrt{3}}{46}$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a										
b										
c										
d										
e										

unidade 2

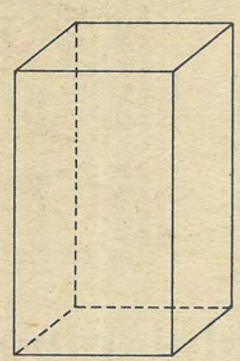
paralelepípedos



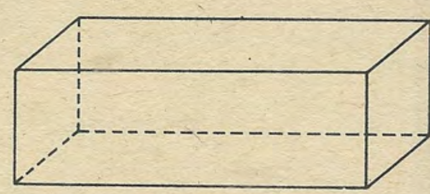
O QUE VOCÊ PRECISA SABER

a) **Os paralelepípedos** são prismas cujas bases são paralelogramos.

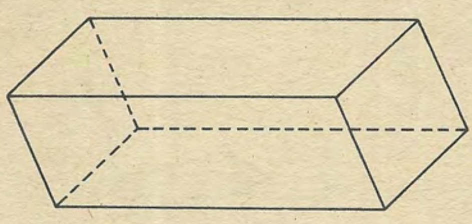
b) A seguir damos algumas figuras de paralelepípedos:



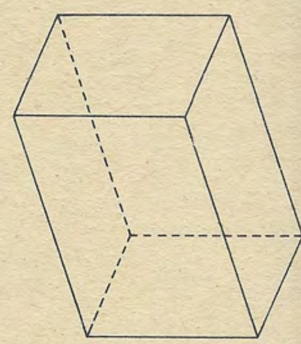
I



II



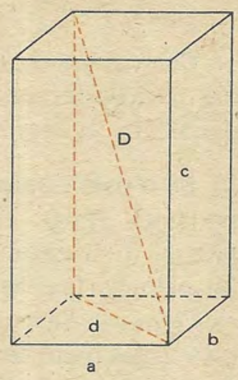
III



IV

Os paralelepípedos podem ser: **retos** (I) e (II) ou **oblíquos** (III) e (IV).

c) **Paralelepípedo retângulo.**
É um paralelepípedo reto, cujas faces são retângulos.



Dimensões: a, b e c
d, diagonal da base
D, diagonal do sólido

Cálculo da diagonal do sólido em função de a, b e c

$$d^2 = a^2 + b^2$$

$$D^2 = c^2 + d^2 \quad \text{ou} \quad D^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Área lateral (A_L)

Como as faces laterais são paralelas e congruentes duas a duas, teremos:

$$A_L = 2ac + 2bc = 2(ac + bc)$$

Área total (A_T)

Incluindo na expressão da área lateral as áreas das bases que são paralelas e congruentes, virá:

$$A_T = 2ac + 2ab + 2bc = 2(ac + ab + bc)$$

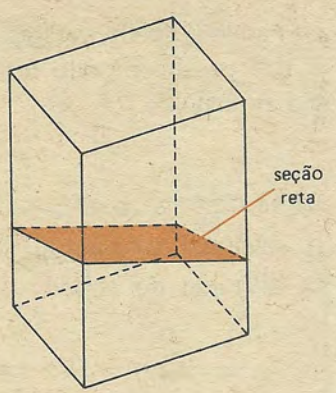
Volume (V)

Como postulado, vamos admitir que o volume do paralelepípedo retângulo é o produto de suas três dimensões:

$$V = a \cdot b \cdot c$$

Observações:

1) Chamamos seção reta num prisma à seção feita por um plano perpendicular às arestas laterais.



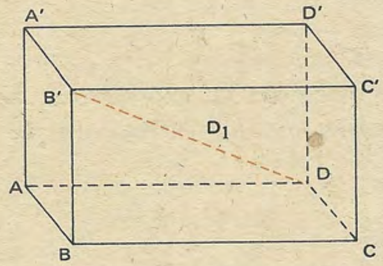
2) Se o paralelepípedo for oblíquo, podemos obter ainda a sua área lateral, multiplicando a aresta lateral pelo perímetro da seção reta, o que equivaleria a um paralelepípedo reto, cujas bases seriam equivalentes à seção reta. Experimente formar esta nova figura.

3) O volume neste caso seria a área da seção reta multiplicada pela aresta.

4) Os hexaedros regulares (cubos) serão estudados na unidade 4.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1 Calcular a diagonal de um paralelepípedo cujas dimensões são 6m, 3m e 2m, respectivamente.



Dados: $a = 6m$; $b = 3m$; $c = 2m$

Pede-se: $D_1 = ?$

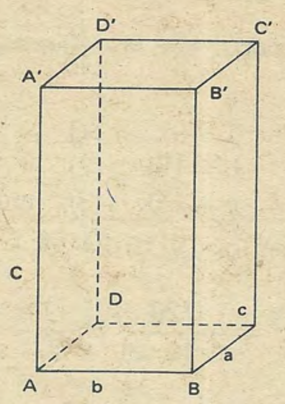
Solução:

Pela fórmula da diagonal, teremos:

$D_1^2 = 6^2 + 3^2 + 2^2 = 49 \therefore D_1 = 7m$

Resposta: $\boxed{7m}$

2 Qual o volume de um paralelepípedo retângulo cuja soma de todas as arestas é 48m, sabendo-se que suas dimensões são números consecutivos?



Dados: $4a + 4b + 4c = 48$

$a = b - 1$

$c = b + 1$

Pede-se: $V = ?$

Solução:

De acordo com os dados, temos:

$4(b-1) + 4b + 4(b+1) = 48$

$4b + 4b + 4b = 48 \therefore b = 4$

logo $a = 4 - 1 = 3$

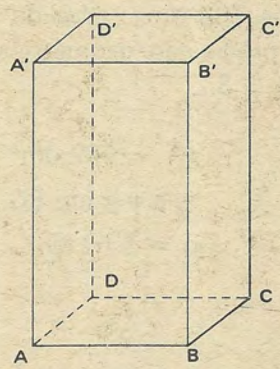
$c = 4 + 1 = 5$

Daí

$$V = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60m^3$$

Resposta: $\boxed{60m^3}$

3 Determinar as dimensões de um paralelepípedo retângulo sabendo-se que são proporcionais a 9cm, 15cm e 24cm, sabendo-se ainda que o seu volume é de 120cm³.



Dados: $\dfrac{a}{9} = \dfrac{b}{15} = \dfrac{c}{24}$

$V = 120cm^3$

Pede-se: $a = ?$

$b = ?$

$c = ?$

Solução:

Fazendo $\frac{a}{9} = \frac{b}{15} = \frac{c}{24} = k$ teremos:

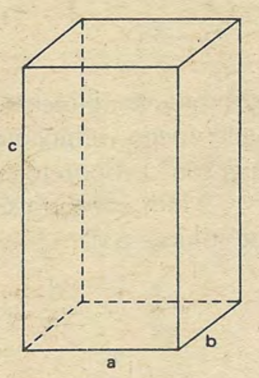
$$\begin{array}{ll} a = 9k & (1) \\ b = 15k & (2) \\ c = 24k & (3) \\ \hline a \cdot b \cdot c = 9 \cdot 15 \cdot 24 \cdot k^3 & \end{array}$$ multiplicando membro a membro, virá:

$$\therefore \; k^3 = \frac{120}{9 \cdot 15 \cdot 24} = \frac{1}{27} \quad \therefore \quad k = \frac{1}{3}$$

Substituindo o valor de k em (1), (2) e (3), respectivamente, teremos:

$$\begin{aligned} a &= 3cm \\ b &= 5cm \\ c &= 8cm \end{aligned}$$

4 Achar as dimensões de um paralelepípedo retângulo cuja área total mede 702 dm^2, sabendo que estão em progressão geométrica de razão igual a 3.



Dados: $A_T = 702\ dm^2$

a, b e c em PG

q = 3 (razão)

Pede-se: a = ?

b = ?

c = ?

Solução:

Fazendo então as dimensões em PG, teremos, por exemplo: $\frac{b}{q}$, b, bq

onde **q** é a razão, e como $q = 3$, virá: $\frac{b}{3}$, b, 3b

A área total é dada pela expressão:

$$A_T = 2ab + 2ac + 2bc$$

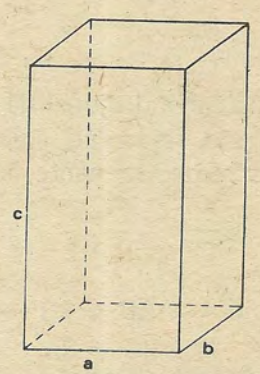
Substituindo, os dados e as considerações anteriores na expressão da área total, teremos:

$$702 = 2\cdot\frac{b}{3}\cdot b + 2\cdot\frac{b}{3}\cdot 3b + 2\cdot b\cdot 3b = \frac{26b^2}{3} \therefore b^2 = 81 \text{ e } b = 9$$

Substituindo **b** nas considerações acima, virá finalmente:

$a = 3dm$
$b = 9dm$
$c = 27dm$

5 A soma das três dimensões de um paralelepípedo retângulo é 15m e a área total $200m^2$. Calcule a diagonal desse paralelepípedo.



Dados: $a + b + c = 15m$
$A_T = 200m^2$

Pede-se: $D = ?$

Solução:

Sabemos que: $A_T = 200m^2 = 2ab + 2ac + 2bc$

Tomando $a + b + c = 15$, passando **c** para o segundo membro e elevando ambos os membros ao quadrado, teremos:

$$a + b = 15 - c \qquad \text{e} \qquad (a + b)^2 = (15 - c)^2$$

teremos:

$$a^2 + 2ab + b^2 = 225 - 30c + c^2 \quad (1)$$

Expressões idênticas, teríamos, ao passar **b** e **a** para o segundo membro, desta forma:

$$b^2 + 2bc + c^2 = 225 - 30a + a^2 \quad (2)$$

$$a^2 + 2ac + c^2 = 225 - 30b + b^2 \quad (3)$$

Somando (1), (2) e (3) membro a membro e reduzindo os termos semelhantes, teremos:

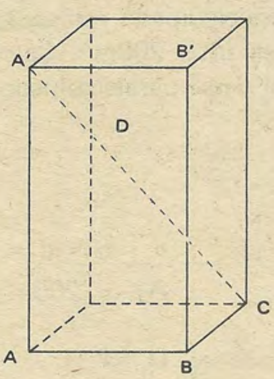
$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac = 675 - 30(a + b + c)$$

Substituindo os dados e observando que $D^2 = a^2 + b^2 + c^2$, virá:

$D^2 + 200 = 675 - 450 \therefore D^2 = 25$ e finalmente $D = 5m$.

Resposta: $\boxed{5m}$

6 Calcular a diagonal de um paralelepípedo retângulo cujas dimensões são respectivamente 6m, 6m e 3m.



Dados: $AB = BB' = 6m$
$BC = 3m$

Pede-se: $A'C = ?$

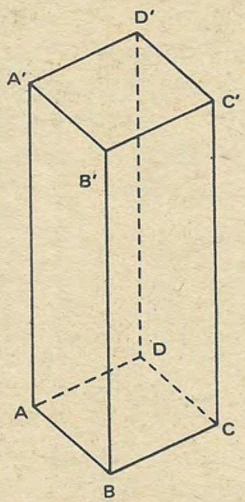
Solução:

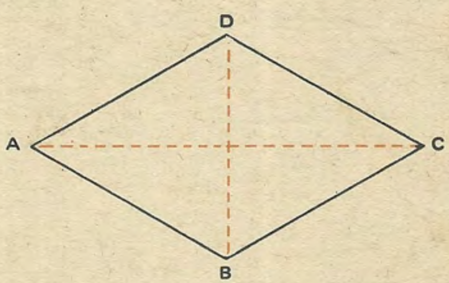
$$D^2 = AB^2 + BC^2 + BB'^2$$

$$D^2 = 6^2 + 6^2 + 3^2 = 36 + 36 + 9 = 81 \quad \therefore \quad D = 9$$

Resposta: $\boxed{9m}$

7 Calcular o volume de um paralelepípedo de 3m de altura, sabendo-se que a base é um losango cujas diagonais medem 3,5m e 5m.





Dados: $A'A = 3m$
$AC = 5m$
$BD = 3,5m$

Pede-se: $V = ?$

Solução:

Como sabemos da Geometria Plana, a área de um losango é o semiproduto das diagonais.

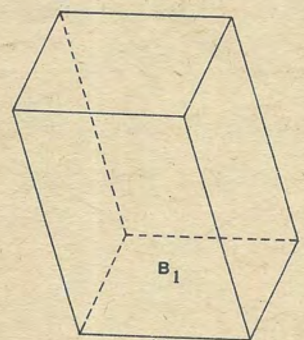
Daí $$A_B = \frac{5 \times 3,5}{2} = \frac{17,5}{2}$$

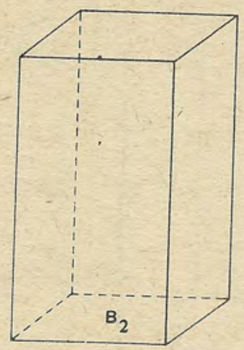
O volume será então:

$$V = A_B \times h = \frac{17,5}{2} \times 3 = 26,25m^3$$

Resposta: $\boxed{26,25m^3}$

8 Os volumes de dois paralelepípedos de bases equivalentes medem $62,520m^3$ e $35,560m^3$. A altura do primeiro mede 4m. Calcular a altura do segundo e as bases desses sólidos.





Dados: $V_1 = 62,520m^3$
$V_2 = 35,560m^3$
$h_1 = 4m$

Calcular: $h_2 = ?$
$B_1 = ?$
$B_2 = ?$

Solução:

Como $B_1 = B_2$ (bases equivalentes = mesma área) teremos então:

$V_1 = B_1 h_1$ ou ainda $62,520 = B_1 \cdot 4$

$$\therefore \ B_1 = \frac{62,520}{4} = 15,630m^2$$

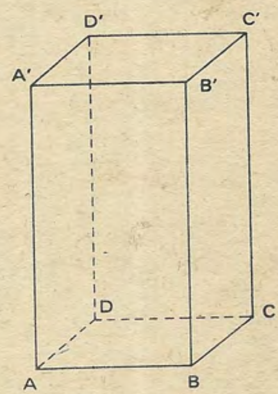
Da mesma forma

$V_2 = B_2 \cdot h_2$ ou $V_2 = B_1 h_2$ ou ainda $35,560 = 15,630 \cdot h_2$

$$\therefore \ h_2 \doteq \frac{35,560}{15,630} = 2,2\text{m}$$

Respostas: $\boxed{\begin{array}{l} B_1 = B_2 = 15,630 \text{ m}^2 \\ h_2 = 2,2 \text{ m} \end{array}}$

9 Uma das dimensões de um paralelepípedo retângulo é 10cm e a segunda dimensão é dupla da terceira. Sabendo que a área total do sólido é 216cm^2. Calcular o volume.



Dados:
$AA' = 10\text{cm}$
$\overline{AB} = 2 \cdot \overline{BC}$
$A_T = 216\text{cm}^2$

Pede-se: $V = ?$

Solução:

Fazendo $\overline{AA'} = a$, $\overline{AB} = b$ e $\overline{BC} = c$, teremos:

$A_T = 2ab + 2bc + 2ac = 216$

Como $a = 10$ e $b = 2c$, teremos:

$2 \cdot 10 \cdot 2c + 2 \cdot 2c \cdot c + 2 \cdot 10 \cdot c = 216$

$40c + 4c^2 + 20c - 216 = 0$

$4c^2 + 60c - 216 = 0$

ou $c^2 + 15c - 54 = 0$

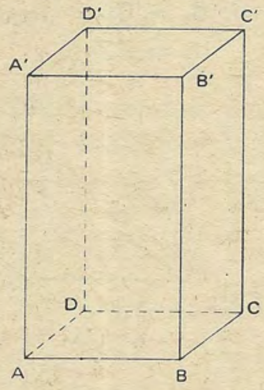
Resolvendo a equação, encontramos

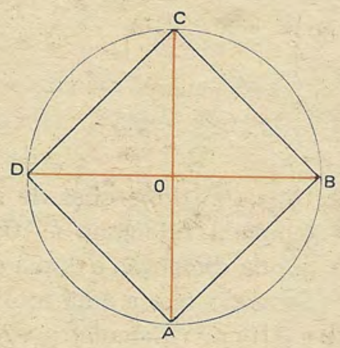
$c = 3m$ logo $b = 2 \cdot 3 = 6m$

Daí $V = a \cdot b \cdot c = 10 \times 3 \times 6 = 180cm^3$

Resposta: $\boxed{180cm^3}$

10 A base de um paralelepípedo retângulo é um quadrado inscrito num círculo de 10cm de raio e a altura tem 12cm. Calcular o volume.





Dados: $OB = 10cm$
$AA' = 12cm$

Pede-se: $V = ?$

Solução:

No $\triangle$ OCB (retângulo isósceles), tiramos:

$$CB^2 = OC^2 + OB^2 = 2\,OB^2$$
$$CB^2 = 2 \cdot 10^2 = 2 \cdot 100 = 200$$

Como a área da base é a área de um quadrado cujo quadrado do lado conhecemos, teremos, finalmente:

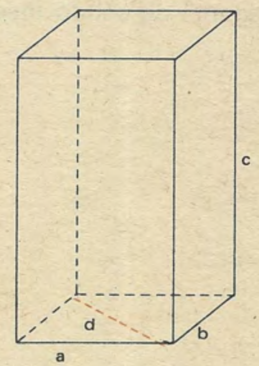
$$V = 200 \cdot 12 = 2\,400cm^3$$

Resposta: $\boxed{2\,400cm^3}$

PROBLEMAS PROPOSTOS

Nos problemas que se seguem, você deverá procurar resolvê-los seguindo a orientação anterior:

11 A soma de todas as arestas de um paralelepípedo retângulo é 48m, a área de sua base vale $12m^2$ e a diagonal correspondente mede 5m. Encontrar o volume do sólido.



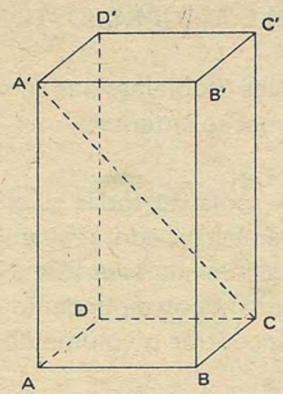
Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

12 Um paralelepípedo retângulo tem por base um quadrado. Calcular a área lateral desse paralelepípedo, sabendo-se que a soma de todas as arestas é igual a 120cm e que a diagonal do sólido mede 18cm.



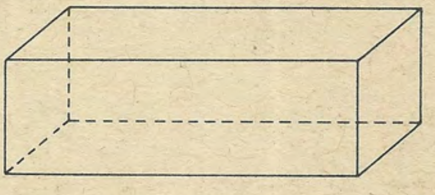
Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

13 A área total de um paralelepípedo retângulo é $52m^2$ e a soma de todas as suas arestas 36m. Qual o volume, se as suas dimensões estão em progressão aritmética?



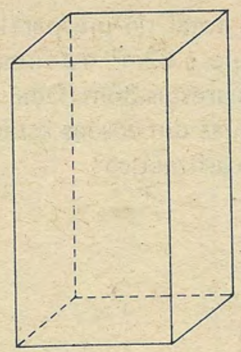
Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

14 Calcular o volume de um paralelepípedo retângulo cuja diagonal mede 7m e duas de suas dimensões medem respectivamente 2m e 6m.



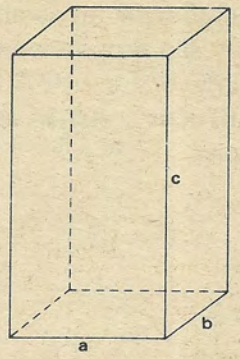
Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

Calcule a área total de um paralelepípedo retângulo cuja diagonal mede $\sqrt{38}$cm, sabendo que a soma de todas as arestas mede 40cm (ENE – 1961).



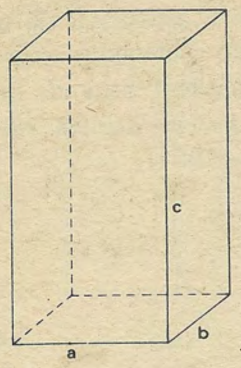
Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

16 As dimensões de um paralelepípedo retângulo são proporcionais aos números 2/3, 5/6 e 14/27. O volume vale 5 670cm^3. Achar as suas dimensões.



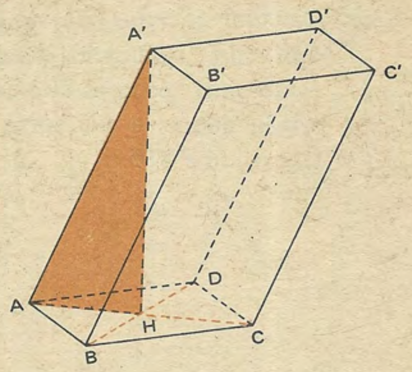
Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

17 Achar o volume de um paralelepípedo oblíquo, cuja base é um retângulo de 8cm por 6cm. A aresta lateral tem 10cm e o pé da perpendicular baixada de um dos vértices da base superior cai na interseção das diagonais da base inferior.



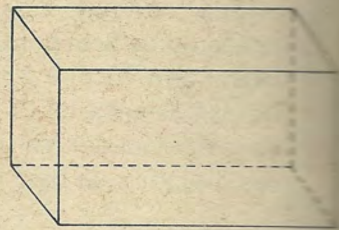
Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

18 Calcular as dimensões de um paralelepípedo retângulo sabendo que estão em progressão geométrica, sendo dados a sua soma 21m e o seu volume 216m³.



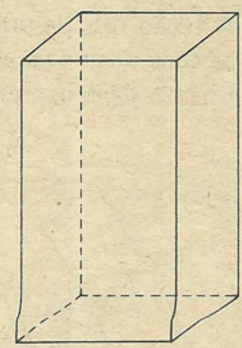
Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

19 Um paralelepípedo retângulo tem 750cm^3 de volume. Uma das suas diagonais é o dobro da diagonal de uma das faces de menor área; esta diagonal é, por sua vez, o dobro da menor dimensão do paralelepípedo. Calcule a área total do sólido (EPUC – 1961).



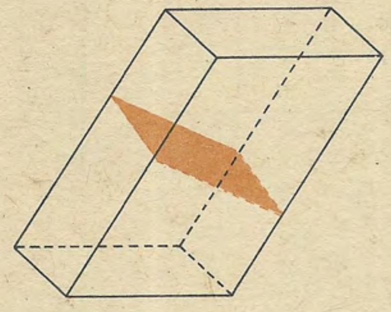
Dados:

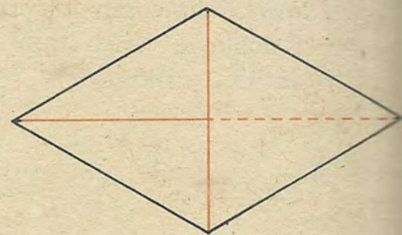
Pede-se:

Solução:

Resposta:

20 A seção reta de um prisma oblíquo é um losango de área igual a $24m^2$ e as suas diagonais estão na razão de 4 para 3. Calcule a área lateral desse prisma sabendo que uma das arestas laterais mede 6cm (EFE – 1960).





Dados:

Pede-se:

Solução:

Resposta:

VERIFIQUE O QUE APRENDEU, RESOLVENDO O TESTE

1. A soma dos quadrados das diagonais de um paralelepípedo é igual a:
(CICE – 1968)

a) a soma dos produtos das arestas tomadas duas a duas
b) área lateral do paralelepípedo
c) área total do paralelepípedo
d) soma das áreas das seções diagonais
e) soma dos quadrados das arestas

2. Um paralelepípedo retângulo tem $142 cm^2$ de superfície total e a soma dos comprimentos de suas arestas vale 60cm. Sabendo que os seus lados estão em progressão aritmética, eles valem (em cm):
(MACKENZIE – 1971)

a) 2, 5, 8
b) 1, 5, 9
c) 12, 20, 28
d) 4, 6, 8
e) 3, 5, 7

3. A soma das dimensões a, b, c de um paralelepípedo retângulo é **m** e a diagonal é **d**. Tem-se para área total S:
(EPUC – SP – 1968)

a) $S^2 = m^2 - d^2$
b) $S = m^2 - d^2$
c) $S = m^2 + d^2$
d) $S = md$
e) nenhuma das respostas anteriores

4. As dimensões do paralelepípedo retângulo, em que duas arestas medem 25cm, o volume $900cm^3$ e a área total $600cm^2$, são (em cm):

a) 5, 10, 15
b) 5, 12, 15, 16
c) 6, 10, 15
d) 6, 12, 15
e) nenhuma resposta é correta

5. As três dimensões de um paralelepípedo retângulo estão em progressão geométrica. Sabendo que sua soma é 21m e que o volume do sólido vale $216m^3$, então valerão (em m):

a) 4, 8, 16
b) 3, 9, 27
c) 3, 15, 45
d) 3, 6, 12
e) nenhuma das respostas

6. O volume de um paralelepípedo retângulo é $81m^3$ e as suas dimensões são proporcionais a 1/3, 3/4 e 3/2. Suas dimensões são (em m):

a) 2, 4,5, 9
b) 5, 4,5, 8
c) 3, 4,5, 7
d) 2, 4,5, 7
e) nenhuma das respostas

7. A área total de um paralelepípedo retângulo tem $720m^2$, a diagonal de uma face mede 20m e a soma das três dimensões é 34. As dimensões são (em m):

a) 5, 10, 19
b) 8, 9, 17
c) 15, 15, 4
d) 12, 10, 12
e) nenhuma resposta é correta

As faces de um paralelepípedo são losangos de lado igual a $\sqrt{2}$ m, sendo a diagonal menor igual ao lado. O volume desse paralelepípedo é igual a: (IME – 1971)

a) $\sqrt{3/2}$
b) 3
c) $2\sqrt{2}$
d) 2
e) $2\sqrt{3}$

A diagonal de um paralelepípedo mede $\sqrt{14}$ m. Sabendo-se que as 3 dimensões (arestas) são 3 números inteiros e consecutivos então o volume é igual a:

a) $8m^3$
b) $14m^3$
c) $12m^3$
d) $6m^3$
e) nenhuma das respostas anteriores.

A base de um ortoedro (paralelepípedo retângulo) tem para perímetro 24cm. Uma das diagonais do poliedro forma com a base um ângulo de 30°. O volume do sólido é igual a:

a) $216cm^3$
b) $\sqrt{216}cm^3$
c) $216\sqrt{3}cm^3$
d) $2\sqrt{216}cm^3$
e) nenhuma das respostas anteriores

RESPOSTAS DA UNIDADE 2

PROBLEMAS PROPOSTOS

11 $60m^3$

12 $288cm^2$ ou $448cm^2$

13 $24m^3$

14 $36m^3$

15 $62cm^2$

16 18cm, 14cm e 22,5cm

17 $240\sqrt{3}\,cm^2$

18 3m, 6m e 12m

19 $559,80cm^3$

20 $120cm^2$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

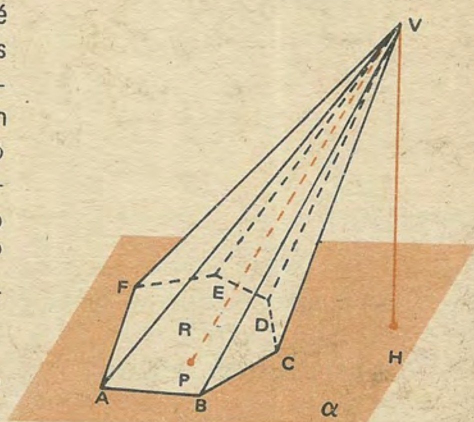
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a										
b										
c										
d										
e										

unidade 3

pirâmides

O QUE VOCÊ PRECISA SABER

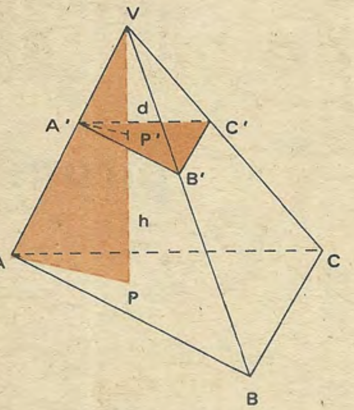
a) Por **pirâmide** entendemos a reunião de todos os segmentos $\overline{VP}$, onde P é um ponto qualquer da base. Podemos dizer também que, dada a região poligonal ABCD ... pertencente a um plano (α) e um ponto $V \cap (\alpha) = \phi$ [logo, V não pertence a (α)], a pirâmide de base R e vértice V é a reunião de todos os segmentos $\overline{VP}$, onde P pertence a R. A altura $\overline{VH}$ é a distância de V a (α).

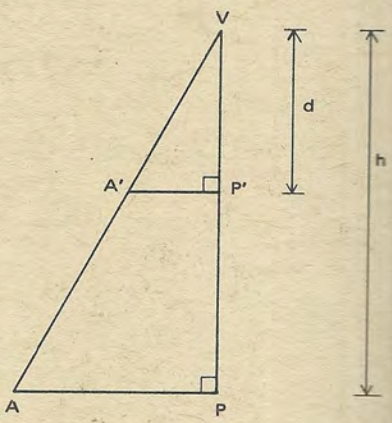


b) **Seções transversais** são definidas do mesmo modo que para os prismas.

c) **Teoremas**

1 (Das seções transversais de uma pirâmide triangular.) Se **h** é a altura e **d** a distância do vértice à seção transversal, então a área da seção transversal é d^2/h^2 vezes a área da base.





Hipótese

Tese

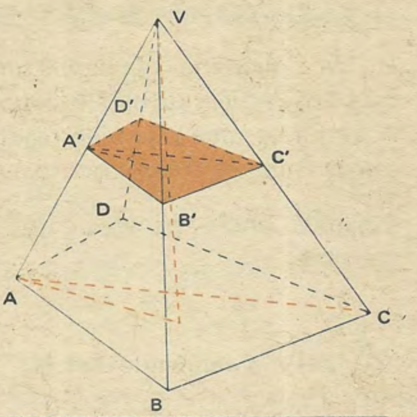
$$\left\{\begin{array}{l}\text{plano } A'B'C' \parallel \text{plano } ABC \\ \angle\ VP'A' = 90^0 \\ \angle\ VPA = 90^0\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\frac{A(A'B'C')}{A(ABC)} = \frac{d^2}{h^2}\right\}$$

2 (Das seções transversais, para uma pirâmide qualquer.) Em uma pirâmide qualquer, a razão da área da seção transversal para a área da base é d^2/h^2, onde **d** é a distância do vértice ao plano da seção e **h** a altura da pirâmide.

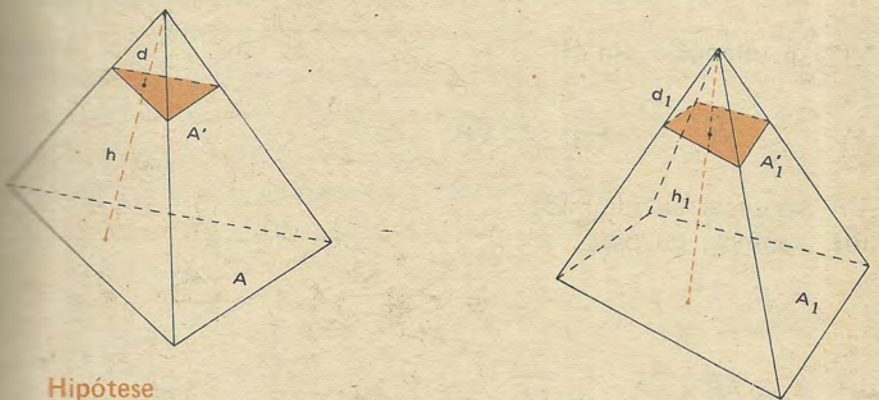
Observações:

Basta dividir a base em regiões triangulares, recaindo cada uma no teorema (1). Somando-se as regiões obtidas, chegamos à tese do teorema.

A demonstração deste teorema permite então chegar ao seguinte:



3 Se duas pirâmides têm a mesma área da base e a mesma altura, então as seções transversais, eqüidistantes dos vértices, possuem a mesma área.



Hipótese

$$\left\{\begin{array}{l} A = A_1 \\ d = d_1 \\ h = h_1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \{ A' = A'_1 \}$$

d) Assim como nos prismas, as pirâmides são designadas pelo polígono da base.

Ex.: Pirâmide triangular (base triangular), também chamada tetraedro — por quê? Pirâmide quadrangular (base quadrilátero) etc.